

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
ÁRAMLÁSTAN TANSZÉK

LAJOS TAMÁS

A Z Á R A M L Á S T A N A L A P J A I

ELŐADÁSI JEGYZET

BUDAPEST

1992

BEVEZETÉS

Ez a jegyzet egy kétes kimenetelű kísérletnek is tekinthető: sikerül-e mintegy kétszáz oldalon úgy összefoglalni az emberi tudás egy nagy szegmensének, az áramlástanak a lényeges részeit, hogy az olvasó elegendő segítséget kapjon annak megértésében, elsajátításában és ami a legfontosabb, megszeretésében és a mérnöki alkotómunkában való eredményes felhasználásában.

Mint minden ismeretközlés, a jegyzetírás is az „elhallgatás művészete”: azt nehéz ugyanis meghatározni, hogy mi az, amit nem szükséges leírni, megtanítani és megtanulni. Az érdekes és fontos ismeretek nagy mennyisége és a terjedelmi korlátok közötti ellentmondást nehéz feloldani, nehezen kerülhető el a vázlatosság. Figyelembe véve azonban, hogy a jegyzet az előadásokkal, a tantermi és laboratóriumi gyakorlatokkal együtt segíti a felkészülést, és bízva az olvasó önálló munkájában a szerző vállalta a kevésbé részletes kifejtés kockázatát.

Az áramlástan olyan ismeretekkel foglalkozik, amelyek nemcsak a műszaki alkotások, a mérnöki feladatok nagy részében játszanak döntő szerepet, de hozzásegítenek ahhoz is, hogy megértsük az élő és élettelen természet számos jelenségét. A repülésben, a hajózásban, az energetikában, a közúti közlekedésben, a szállításban, a vízipítésben, a környezetvédelemben, a vegyiparban, az épületgépészetben és az emberi tevékenység számos más területén fontos szerepe van a közegek áramlásával kapcsolatos ismereteknek. Ugyanakkor a meteorológia, az orvostudomány, a biológia, a hidrológia, az oceanográfia művelése sem képzelhető el az áramlástan alkalmazása nélkül. Igen sok természeti jelenség, amely ősidők óta megragadja az ember képzeletét: a lángok lobogása, a folyók vizének áramlása, a tenger hullámzása, a felhők játéka, a szél susogása mind-mind a közegek áramlásával vannak kapcsolatban, mutatva a lehetséges változatok végtelen számát, az áramlási jelenségek bonyolultságát.

Az áramlástant sokan azért is tartják figyelemreméltó tantárgynak, mert igen szépen és érdemben kapcsolja össze a fizikai jelenségek leírását a matematikai ismeretek alkalmazásával és a gyakorlati mérnöki feladatok megoldásával. Ily módon ez a tantárgy hozzájárulhat egy olyan mérnöki habitus kialakulásához, amely a gyakorlati műszaki feladatok igényes elméleti apparátus birtokában történő megoldását részesíti előnyben, ahol az elmélet és a gyakorlat szerves kapcsolata valósul meg.

Megköszönve Kristóf Gergely doktorandusz kolléga lelkes munkáját az ábrák elkészítésében és az anyag szerkesztésében a szerző kitartást és türelmet kérve, eredményt és örömet kívánva az olvasó jóindulatába ajánlja a jegyzetet.

Budapest, 1994 tavasz

Lajos Tamás

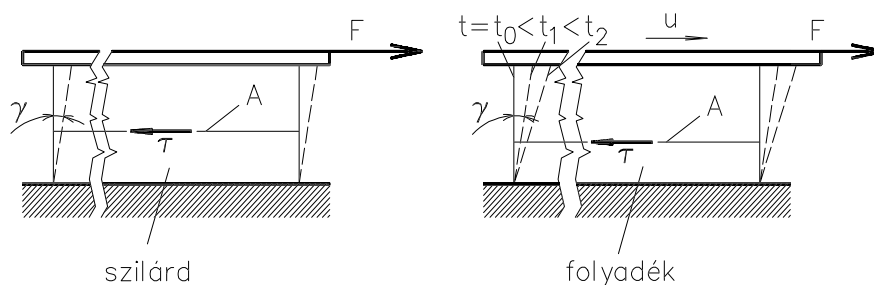
1. Az áramlástan tárgya, a folyadékok sajátosságai

1.1. A folyadékok és a szilárd anyagok összehasonlítása

Az áramlástan nyugvó és mozgó folyadékok egyes sajátosságaival ill. e sajátosságok gyakorlati, műszaki alkalmazásával foglalkozik. Nyugvó folyadékterekben általában a nyomásmegoszlás meghatározása a feladat, míg áramló közegekben a nyomásmegoszlás mellett legtöbbször a folyadék sebességének eloszlására vagyunk kíváncsiak.

A „folyadékok” e tantárgyban egyaránt jelentik a cseppfolyós és a légnemű halmazállapotú közegeket, így legtöbbször a levegővel és a vízzel, mint a műszaki gyakorlatban leggyakrabban előforduló folyadékokkal foglalkozunk.

Mi különbözteti meg a folyadékokat a szilárd testektől? Végezzünk el egy gondolati kísérletet. Az 1.1. ábrán bal oldalon két síklap közé helyezett, lapos **szilárd testet**



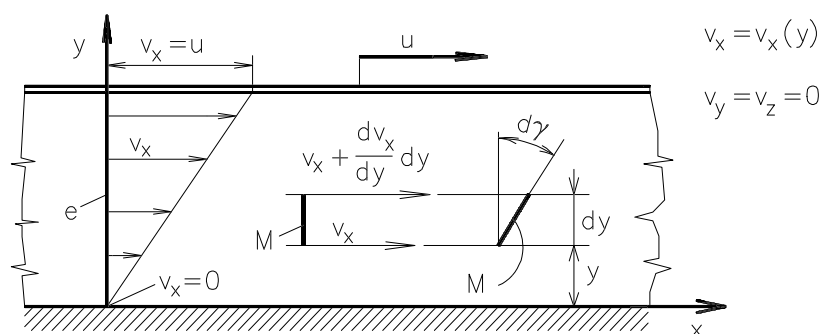
1.1. ábra

látunk, amelyet alul és felül a lapokhoz ragasztunk. Jobb oldalon a két párhuzamos lap között folyadékréteg (pl. olaj) van. A szilárd test és a folyadékréteg lappal párhuzamos keresztmetszete **A**. Az alsó lap rögzített, a felső önmagával párhuzamosan elmozdítható. Hassunk **F** erővel a felső lapra. Azt tapasztaljuk, hogy a szilárd anyagban keletkező $\tau = F/A$ csúsztatófeszültség hatására a szilárd anyag deformálódik. A deformációra jellemző γ szög egy határig arányos a τ csúsztatófeszültséggel (Hooke-törvény). Jelentős deformáció általában csak az anyag szerkezetének tönkremenetelével valósítható meg.

A **folyadékréteget** közrefogó lapok közül a felsőre **F** erővel hatva a felső lap **u** sebességű mozgásba jön, a **folyadék időben folyamatosan deformálódik**. Ha különböző nagyságú **F** erőt fejtünk ki vagy különböző **A** keresztmetszetű szilárd testekkel vagy folyadékrétegekkel kísérletezünk, azt tapasztaljuk, hogy amíg a **szilárd testnél a γ deformáció, a folyadéknál a deformáció sebessége, a dy/dt arányos egyenesen a τ csúsztatófeszültséggel**.

A kísérlet során azt tapasztalnánk, hogy a szilárd fallal érintkező folyadék sebessége közvetlenül a falnál megegyezik a fal sebességével. Ezt az általánosan alkalmazott tapasztalatot a **tapadás törvényének** szoktuk nevezni.

Rajzoljuk fel (1.2. ábra) a két párhuzamos síkot összekötő, azokra merőleges e egyenes mentén a **sebességmegoszlást, azaz azon sebességvektorok végpontjait összekötő görbét, amelyek talppontjai az e egyenesen vannak!** A tapadás törvénye következtében az álló laphoz legközelebb lévő folyadékrészek sebessége $v_x = 0$, míg a felső lap közvetlen közelében a sebesség egyenlő a lap u sebességével. Milyen a sebességmegoszlás a két lap között?



1.2. ábra

E kérdés megválaszolásához először határozzuk meg a γ és a v_x közötti kapcsolatot!

Megjegyzés: A differenciálhányados szokásos matematikai értelmezése egy differenciálható $y=y(x)$ függvény egy rögzített pontjában, ha Δy a Δx növekményhez tartozó függvényérték megváltozás:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg} \alpha,$$

ha α a rögzített pontban az érintő hajlásszöge a pozitív x tengelytől mérve. A $\frac{dy}{dx}$ itt egy **szimbolikus jelölése** a határértéknek és nem a számláló és nevező hányadosa.

Elsősorban a műszaki tudományok területén szokásos a $\frac{dy}{dx}$ kifejezés egy másik értelmezése:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

ami a látszattal ellentétben elvileg különbözik az előző felírástól. Eszerint a határérték által rögzített érintőiránytangens két kicsiny, de **összetartozó** dx és dy érték **hányadosával** is kifejezhető. A kicsiny jelző azt jelenti, hogy ezen értékek a görbe olyan kicsi szakaszának vetületei, amely elegendően jól közelíti az $y=y(x)$ függvényt a rögzített pont környezetében.

Így értelmeztük a dy és dx differenciálokat, melyeknek hányadosa, szorzata stb. is értelmezett.

A jelen jegyzetben ez utóbbi értelemben kezeljük a differenciálokat, illetve differenciálhányadosokat.

Az 1.2. ábrán az y helyen látható egy dy vastagságú folyadékréteg. A csak az y -től függő v_x sebességkomponens y irányú változását a dv_x/dy differenciálhányados jellemzi. Gondolatban fessük meg az áramlásban az M jelű, dy hosszúságú szakaszt, és vizsgáljuk meg, hogy dt idő alatt milyen $d\gamma$ szöggel fordul el! Az M szakasz felső része $v_x + (dv_x/dy)dy$, alsó része v_x sebességgel mozog. A szakasz felső része dt időtartam alatt $(dv_x/dy)dy \cdot dt$ -vel távolabbra jut, mint az alsó rész (ld. 1.2. ábra). A dt időtartamra jutó elfordulást, $d\gamma$ -t a fenti szorzat dy -nal való osztásával kapjuk meg. **Az egységnyi időre jutó szögelfordulás, azaz a deformációsebesség** a dt -vel való osztás után adódik:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dv_x}{dy}. \quad (1.1)$$

Amint azt az előző gondolat kísérletben megállapítottuk, a $d\gamma/dt$ deformációsebesség és a τ csúsztatófeszültség között egyenes arányosság van. Ezért az (1.1)-et figyelembe véve felírható **Newton viszkozitási törvénye**:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{d\gamma}{dt}. \quad (1.2)$$

(A τ indexei közül az első a τ -t tartalmazó sík normálisának irányát, a második a τ irányát jelenti. τ_{yx} tehát az y normálisú síkon ébredő x irányú feszültséget jelöli. A súrlódásos közegek tárgyalásánál látni fogjuk, hogy általános esetben a τ_{xy} kifejezésében más sebességkomponens hely szerinti deriváltja is szerepel. Megjegyezzük továbbá, hogy a súrlódásos közegek deformációjánál a csúsztatófeszültségek mellett húzófeszültségek is keletkezhetnek, amelyekkel a 9. fejezetben foglalkozunk.)

Az (1.2)-ben μ egy, a **folyadék tulajdonságaitól** függő értékű arányossági tényező, a **dinamikai viszkozitás**, amelynek mértékegységét a μ (1.2) egyenletből történő kifejezése után az alábbi módon határozzuk meg:

$$[\mu] = [\tau] \left[\frac{dy}{dv_x} \right] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{ m}^2} \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}}. \quad (1.3)$$

Definiáljuk a **kinematikai viszkozitást**, mint a **dinamikai viszkozitás és a ρ [kg/m³] sűrűség hányadosát**:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\text{m}^2 / \text{s} \right] \quad (1.4)$$

Az (1.2) ismeretében már megválaszolhatjuk a sebességmegoszlás alakjára vonatkozó kérdést. Esetünkben a τ csúsztatófeszültség az e egyenes mentén, azaz a két lap között állandó, így (1.2)-ből adódóan dv_x/dy is állandó, azaz a sebességmegoszlás lineáris.

Ha megvizsgáljuk az (1.2) kifejezést, további következtetéseket vonhatunk le: ha a deformációsebesség zérushoz tart, akkor a csúsztatófeszültség is eltűnik. Ezt úgy szoktuk mondani, hogy – a szilárd anyagokkal ellentétben – a folyadékok nyugvásbeli súrlódása zérus. (Ezért lehet – persze csak igen lassan – eltolni kézzel a parttól egy több tonnás hajót.)

Másrészt, ha a τ csúsztatófeszültség zérustól különbözik, az (1.2) összefüggésből $dv_x/dy \neq 0$ következik, azaz **nyugvó folyadékban nem tartható fenn tartósan nyírófeszültség: a nyírófeszültség hatására a folyadék időben folyamatosan deformálódik.** Ez az egyik fontos sajátosság, amely a folyadékokat a szilárd anyagoktól megkülönbözteti. További különbség, hogy szemben a szilárd anyagokkal **a folyadékok tetszőleges mértékben deformálhatók belső szerkezetük megváltozása nélkül.**

Itt jegyezzük meg, hogy a folyadékok és a szilárd anyagok közötti éles különbségtétel sok anyag esetén nem könnyű feladat. Vannak olyan közegek ugyanis, amelyek egyaránt rendelkeznek a folyadékok és a szilárd anyagok jellemzőivel. Vannak továbbá olyan folyadékok is, amelyeknél a csúsztatófeszültség és a deformációsebesség között az (1.2)-től eltérő kapcsolat áll fenn. Ezeket **nem-newtoni közegeknek** nevezzük, és sajátosságaikat később, a 9. fejezetben tárgyaljuk.

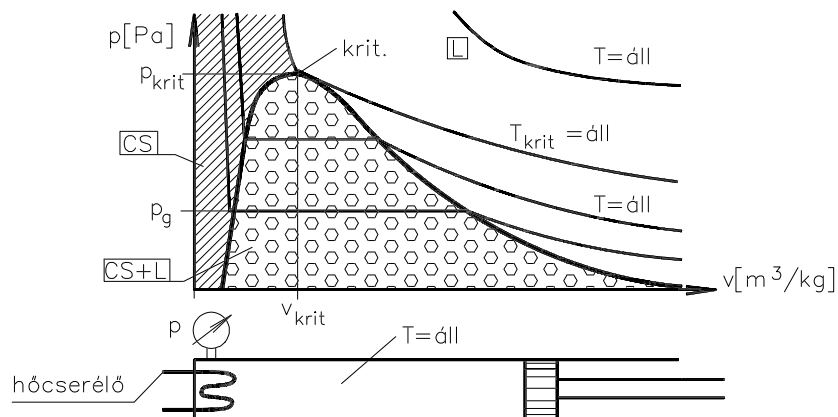
1.2 A folyadékok néhány tulajdonsága

Az 1.3. ábrán látható dugattyúval lezárt hengerben gőz van, amelynek $V \text{ [m}^3\text{]}$ térfogatát és $m \text{ [kg]}$ tömegét ismerjük, így ezek hányadosaként számolható a $v \text{ [m}^3\text{/kg]}$ fajtérfogat, ebből pedig a $\rho = 1/v \text{ [kg/m}^3\text{]}$ sűrűség. A dugattyú mozgásával a gőz térfogatát változtatjuk, miközben mérjük $p \text{ [Pa]}$ nyomását. A $T \text{ [K]}$ hőmérsékletet egy hőcserélő segítségével, hő bevezetéssel vagy elvonással állandó értéken tartjuk.

Különböző $T = \text{áll.}$ mellett mozgassuk a dugattyút balfelé és mérjük a v fajtérfogat függvényében a p nyomást, majd a mérési eredményeket ábrázoljuk az 1.3. ábrán látható diagramban.

Adott, állandó hőmérséklet mellett csökkentve a gőz térfogatát a nyomás kezdetben növekszik, majd állandóvá válik. Ekkor a hengerben folyadékcseppek jelennek meg, azaz a gőz összenyomás mértékétől függő része kondenzálódik. Tovább csökkentve a térfogatot az

összes gőz kondenzálódik és csak cseppfolyós fázis lesz a hengerben, amely kis térfogatcsökkenésre nagy nyomás növekedéssel reagál, azaz a görbék igen meredek lesznek.



1.3. ábra

A különböző $T=\text{állandó}$ mellett kapott görbék két helyen törnek. E töréspontok összekötésével a diagram bal és jobb oldalán egy-egy határológörbét kapunk, amelyek a diagram felső részén egy u.n. kritikus pontban találkoznak. A görbék között a közeg mind cseppfolyós mind pedig légnemű, azoktól balra csak cseppfolyós, jobbra pedig csak légnemű halmazállapotban van.

Van egy olyan T_{krit} gázhőmérséklet, amelynél a légnemű-cseppfolyós átalakulás rejtett hő felszabadulása nélkül megy végbe a p_{krit} nyomáson és v_{krit} fajtérfogaton, és amelynél magasabb hőmérsékleten nem lehet az adott gázt cseppfolyósítani. (Vízre: $T_{\text{kr}} = 647 \text{ K}$, $p_{\text{kr}} = 2.25 \cdot 10^7 \text{ Pa}$.)

Az 1.3. ábra jobb oldalán elhelyezkedő határológörbén és a CS+L jelű területen a **gőz telített**, azaz a gőz a térfogat változására halmazállapot változással reagál. A jobb oldali határológörbétől jobbra, annak közelében lévő pontokkal jellemzett állapotoknál **túlhevített gőzről**, míg a határológörbétől távol, pl. $T \gg T_{\text{krit}}$ esetén **gázzal** beszélünk.

A levegőt alkotó O_2 és N_2 esetén a T_{krit} rendre 154 [K] és 126 [K] , tehát a műszaki alkalmazásoknál szokásos hőmérsékleteknél $T \gg T_{\text{krit}}$. Így a levegő gáznak tekinthető, amelyre jó közelítéssel érvényes az **ideális gázra vonatkozó gáztörvény**:

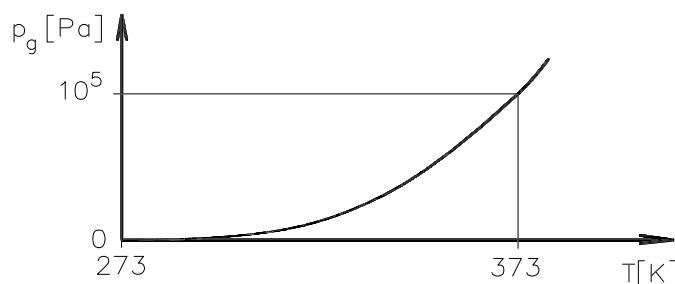
$$pv = \frac{p}{\rho} = RT, \quad (1.5)$$

ahol

$$R = R_u / M \quad (1.6)$$

az adott gáz gázállandója, ami az univerzális gázállandó ($R_u = 8314.3 \text{ J/kg/K}$) és a móltömeg ($M \text{ kg/kmol}$) hányadosa. Levegőre $M=29 \text{ [kg/kmol]}$, tehát $R = 287 \text{ J/kg/K}$. Az

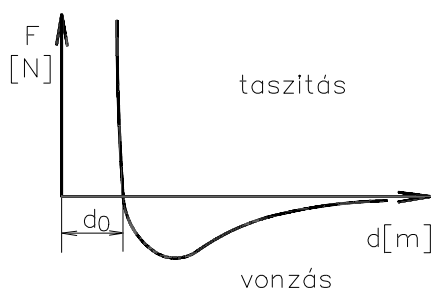
1.3. ábrán látható, hogy a CS+L-lel jelölt területen (ahol a gáz telített állapotban van) a $T = \text{áll.}$ görbék vízszintesek, azaz egy adott T hőmérséklethez adott telített gőznyomás p_g tartozik. Rajzoljuk fel a a vízre vonatkozó $T - p_g$ u.n. tenziógörbét: 1.4. ábra!



1.4. ábra

A diagramból látható, hogy kis hőmérsékleten is létrejöhet gőzfázis (azaz a folyadék forrásba jöhet), ha elegendően kicsiny a nyomás. A nyomás csökkenését okozhatja pl. az áramlási sebesség megnövekedése. Előfordulhat tehát, hogy az áramló folyadékban a nyomás a telített gőznyomásig csökken, ezért gőzbuborékok keletkeznek. Amikor e buborékok nagyobb nyomású helyre kerülnek a gőz kondenzálódik, a buborékok összeroppannak és a közelükben lévő szilárd anyag felületén (pl. szivattyú lapátján) jelentős roncsolást okoznak. A gőzbuborékok képződését és összeroppanását **kavitációnak**, a roncsolást **kavitációs erózióknak** nevezzük.

A cseppfolyós és légnemű halmazállapotú közegek közötti legfontosabb különbségek bemutatása érdekében rajzoljuk föl a molekulák között ható erőt a közöttük lévő d távolság függvényében: 1.5. ábra.



1.5. ábra.

A diagramból látható, hogy a molekulák között a d távolságtól függően vonzás és taszítás egyaránt felléphet. A d_0 „semleges” távolság, amikor az erő zérus, egyszerű molekuláknál általában $3 - 5 \cdot 10^{-10} [\text{m}]$, ami kb. a molekulák átmérőjével egyenlő. **A cseppfolyós halmazállapotú közegek molekulái egymáshoz viszonylag közel vannak:** $d \approx d_0$. A távolság csökkenése

esetén meredeken növekedő taszítás magyarázza, hogy miért növekszik olyan rohamosan a nyomás, ha csökkentjük a cseppfolyós halmazállapotú közegek térfogatát. (vö.: 1.3. ábra)

A molekulák távolításakor keletkező vonzóerő nagyobb távolság esetén rohamosan, d^{-7} -nel arányosan csökken. Miután a gázok sűrűsége kb. 3 nagyságrenddel kisebb, mint a folyadékoké, a molekulák közötti átlagos távolság gázoknál a cseppfolyós közegeknél ér-

vényes $\equiv d_0$ távolságnak kb. tízszerese. Ezért – szemben a cseppfolyós halmazállapotú közegekkel – **a gázoknál a molekulák közötti vonzó- vagy taszító erő az ütközésektől eltekintve elhanyagolható.**

A légnemű és cseppfolyós közegek viszkozitásának eredetét vizsgálva jelentős különbséget tapasztalunk. Tudjuk, hogy a közegek belső energiája (amit a hőmérséklettel jellemezünk) a közeget alkotó molekulák rendezetlen mozgásával függ össze. **A légnemű közeg molekulái** az ütközésektől eltekintve egymástól függetlenül mozoghatnak, a d_0 -hoz képest jelentős távolságot (szabad úthosszat) megtéve két ütközés között. Az áramló gázok tehát viszonylag nagy sebességgel, rendezetlenül mozgó molekulákból álló halmazok, amelyek a rendezetlen molekula-sebességhez képest általában egy-két nagyságrenddel lassabban mozognak az áramlás irányában. Amit mi a gáz sebességének tekintünk (pl. v_x a (1.2) összefüggésben), az a gyorsan mozgó molekulák sebességének vektoriális átlaga.

Tételezzük fel, hogy a v_x változik az y mentén, azaz az egymás mellett haladó gázrétegek sebessége különböző. A rendezetlen (hő)mozgás következtében a nagyobb sebességű rétegből a kisebb sebességűbe átjutó molekulák gyorsítják az e rétegben haladó molekulákat, míg a kisebb sebességűek a nagyobb sebességű rétegbe jutva lassítják azt. **A különböző sebességű rétegek között a gázmolekulák rendezetlen mozgása következtében létrejövő molekuláris impulzuscsere a gázok viszkozitásának forrása.**

Ha nő a gáz hőmérséklete, azaz nő a molekulák rendezetlen mozgásának sebessége, nő a különböző rétegek között átlépő molekulák száma, ezért **nő a viszkozitás**. Ha adott hőmérséklet mellett a **nyomás növekszik, nem várható a viszkozitás változása**, ami a következőképpen magyarázható. A nyomás az egységnyi felületen irányt változtató molekulák által a felületen kifejtett erő, ami adott hőmérséklet, azaz a gázmolekulák adott rendezetlen sebessége esetén a térfogategységben lévő molekulák számától azaz a sűrűségtől függ. Nagyobb nyomás esetén a gáz nagyobb sűrűsége következtében arányosan több molekula lép át ugyan az eltérő sebességű rétegbe, de a nagyobb molekula-sűrűség miatt rövidebb az ütközések között megtett út (a szabad úthossz), ezért kisebb mélységben hatolnak be az eltérő sebességű rétegbe, azaz kisebb a molekulák közötti impulzuscsere.

A cseppfolyós halmazállapotú közegek molekulái ugyancsak végeznek hőmozgást, amelynek úthossza a molekulák közötti lényegesen kisebb távolság következtében sokkal csekélyebb, mint a gázoknál. A molekulák közötti kisebb távolság következtében **a molekulák közötti erőnek jelentős szerepe van a viszkozitás kialakulásában**. Ezt indokolja az a körülmény, hogy – ellentétben a gázokkal – **a hőmérséklet növekedtével a cseppfolyós közegek viszkozitása csökken**. Növekvő hőmérséklet ugyanis intenzívebb hőmozgást, a molekulák közötti távolság növekedését és a közöttük ható vonzóerő csökke-

nését eredményezi. Cseppfolyós közegek – mint láttuk – igen kevésbé összenyomhatók, tehát a nyomásnak ezeknél sincs gyakorlati befolyása a viszkozításra.

Foglaljuk össze a cseppfolyós és légnemű halmazállapotú közegekkel kapcsolatos megállapításokat!

	cseppfolyós	légnemű
Molekulák közötti távolság	kicsi $\approx d_0$	nagy $\approx 10d_0$
Molekulák közötti erő szerepe	nagy \Rightarrow szabad felszín képez	kicsi \Rightarrow kitölti a rendelkezésre álló teret
Nyomás növekedés hatása a térfogatra	kicsi \Rightarrow 1000 bar 5% térf. csökkenést okoz	nagy \Rightarrow T=áll. esetén v az 1/p-vel arányos (1.5)
A viszkozitás forrása	molekulák közötti vonzóerő	molekulák hőmozgása miatti impulzuscsere
A viszkozitás		
a hőmérséklet növekedtével	csökken	nő
a nyomástól	nem függ	nem függ

1.3. Az ideális folyadék

A fenti gondolatmenetből látható, hogy jelentős különbség van a cseppfolyós és légnemű közegek felépítése, szerkezete között. Mégis, ha az áramlástan feladatának megoldása szempontjából tekintjük e közegeket, igen sok egyezést tapasztalunk. Így például az (1.2) összefüggéssel leírt Newton viszkozitási törvény a leggyakrabban előforduló cseppfolyós és légnemű halmazállapotú közegekre egyaránt érvényes.

Ezért volt lehetőség a folyadék gyűjtőfogalom bevezetésére, valamint a különböző halmazállapotú folyadékokra egyaránt érvényes áramlástan összefüggései meghatározására.

A valóságos (cseppfolyós és légnemű halmazállapotú) folyadékok modellezésére bevezetjük az **ideális folyadék** fogalmát, amelynek legfontosabb sajátosságait a valóságos folyadékokkal összehasonlítva adtuk meg.

Valóságos folyadék

molekuláris szerkezetű

súrlódásos ($\mu \neq 0$)összenyomható ($\rho \neq \text{áll.}$)**Ideális folyadék**

homogén (kontinuum)

súrlódásmentes ($\mu = 0$)összenyomhatatlan ($\rho = \text{áll.}$)

A következő fejezetekben több, az ideális folyadékokra érvényes összefüggést fogunk meghatározni, amelyek meghatározott esetekben jól használhatók valóságos folyadékok áramlásának leírására, műszaki feladatok megoldására. Ahhoz kell szilárd tudás és intuíció, hogy az egyszerűsítő feltevések alkalmazásának lehetőségét helyesen határozzuk meg és az elhanyagolások, közelítések hatását jól meg tudjuk becsülni. Becsléseink, feltevéseink helyességét a kísérletek, a gyakorlati tapasztalatok mutatják meg. Később a súrlódásmentesség és az összenyomhatatlanság feltételeit már nem kötjük ki és ezáltal egyre bonyolultabb, de a valóságos közeg áramlását egyre tökéletesebben leíró megoldásokra jutunk.

Felmerül a kérdés, hogy miért van szükség ilyen „többlépcsős” megoldásra, elhanyagolásokra és ezek hatásának becslésére. Azért, mert jelenlegi áramlástani ismereteink, a rendelkezésre álló matematikai eszköztár és számítási kapacitás általában nem elegendő, hogy a természetben vagy a műszaki gyakorlatban elforduló áramlástani problémákat számítással „pontosan” megoldjuk. Így pl. még mindig távol vagyunk attól a lehetőségtől, hogy egy személyautóra ható áramlási eredetű erőt számítással a műszaki gyakorlat szempontjából szükséges – mondjuk $\pm 2\%$ -os relatív hibahatáron belül – kiszámoljuk.

2. Fizikai mennyiségek és leírásuk

2.1. Skalárterekkel leírható mennyiségek

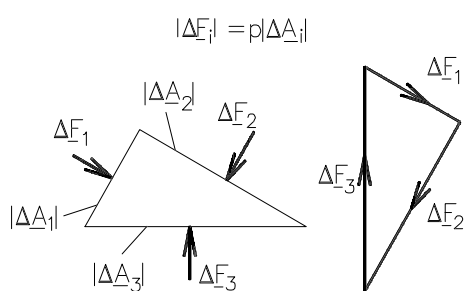
Sűrűség

A valóságos közeg sűrűsége: $\rho_v = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta V} \left[\text{kg/m}^3 \right]$, ahol Δm a ΔV térfogatban lévő közeg tömege, ϵ pedig egy, a vizsgált folyadéktér méreteihez képest kicsi, de a folyadék-molekulák közötti távolsághoz képest nagy méret. (Ha ϵ a molekula-távolság nagyságrendjébe eső méret lenne, akkor a sűrűség jelentősen ingadozna attól függően, hogy éppen hány molekula tartózkodik a ΔV térfogatban.)

Az ideális folyadékot homogénnek tekintjük és ρ sűrűségét a modellezett valóságos közeg ρ_v sűrűségével vesszük egyenlőnek, ami általában az \underline{r} helyvektor és a t idő függvénye. **A sűrűséget általánosan a $\rho = \rho(\underline{r}, t)$ skalártér, azaz a $\rho = \rho(x, y, z, t)$ négyváltozós függvény írja le.**

Nyomás

Vegyünk fel nyugvó folyadékban egy felületelemet ill. az azt jellemző $\Delta \underline{A}$ **felületelem vektort** (amely merőleges a felületelemre, abszolút értéke arányos a felületelem nagyságával és zárt felület esetén kifelé mutat). A $\Delta \underline{A}$ felületelemre $\Delta \underline{F}$ erő hat.



2.1. ábra

Nyugvó valóságos (súrlódásos) folyadékban az (1.2) összefüggés értelmében nem tartható fenn csúsztatófeszültség, ezért $\Delta \underline{F}$ -nek merőlegesnek kell lennie a felületre. (Ugyanez érvényes ideális közegben is, függetlenül attól, hogy nyugszik-e vagy áramlik.)

Az egységnyi felületre ható, arra merőleges erőt nyomásnak ($[\text{N/m}^2]$ ill. $[\text{Pa}]$) nevezzük, ami akkor pozitív, ha az erő a felületbe befelé

mutat. (Súrlódásos közegek áramlása esetén a folyadék deformáció következtében is keletkezik felületre merőleges erő. Ilyenkor a nyomás a folyadéktérben keletkező főfeszültségek átlagának ellentettje, ld. 9. fejezet.)

Valóságos közegeknél a nyomás a hőmozgást végző molekulák és a felület közötti kölcsönhatás következményeként jön létre.

Az 2.1. ábrán látható, a nyugvó folyadékban gondolatban elhatárolt, háromszög alakú kis hasáb felületén ható erők egyensúlyban vannak, amikor a hasábot egy pontra zsugorítjuk. (A hasábra ható térerősség, /pl. a súlyerő/, ugyanis a felületi erőkhöz képest eltűnik, miután az a jellemző méret köbével, míg a felületi erő annak négyzetével arányosan csökken.) Ezt az egyensúlyt egy záródó vektorháromszög fejezi ki, amelynek oldalai merőlegesek a hasáb oldalaira, következésképp hasonló a hasáb háromszög alakú keresztmetszetéhez. Ebből következik, hogy $[\Delta F_i]$ rendre arányos ΔA_i -vel, azaz **a nyomás értéke egy pontban a felület irányításától független, skaláris mennyiség.**

A nyomás általában a hely és az idő függvénye, tehát a $p=p(\underline{r},t)$ skalártérrel azaz a $p=p(x,y,z,t)$ négyváltozós függvénnyel írható le.

Hasonlóan skalártérrel írható le a $T=T(\underline{r},t)$ hőmérséklet megoszlás is.

A **skalártereket** szintfelületekkel (szintvonalakkal) jellemezzük, amelyek a tér (ill. sík) azon pontjait kötik össze, amelyekben a fizikai változó értéke azonos. (Pl. az izobárok az állandó nyomású pontokat.)

A **skalárterek hely szerinti változásának jellemzésére** egy vektormennyiséget használunk, amelynek x, y és z komponensei a leírt fizikai mennyiség x, y és z irányú változásának rohamosságával arányosak:

$$\text{grad } p = \underline{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = \frac{\partial p}{\partial \underline{r}},$$

$$\text{ahol} \quad \underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}.$$

A gradiens vektor

- a skalártér legrohamosabb változásának irányával párhuzamos,
- a skalártér növekedésének irányába mutat,
- hossza arányos a változás rohamosságával,
- merőleges a szintfelületre (szintvonalra).

Ha a tér két közel lévő A és B pontját a $\Delta \underline{s}$ vektor köti össze, amelynek talppontja az A pontban van, a p skalártér Δp változását a B és A pont között lineáris közelítésben a

$$\Delta p = p_B - p_A \cong \text{grad } p \Delta \underline{s} = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z \quad (2.1)$$

skalárszorzat adja meg.

2.2. Vektorterekkel leírható mennyiségek

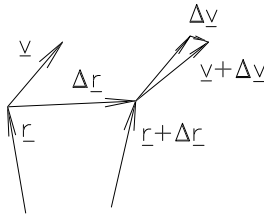
Sebességtér

A sebesség vektor \underline{v} általában a hely és az idő függvénye, ezért egy vektor-vektor függvény (vektortérrel) írható le:

$$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k} = \underline{v}(\underline{r}, t).$$

A vektortér meghatározható a v_x , v_y és v_z vektorkomponens leírásával, azaz három skalártérrel is:

$$v_x = v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t).$$



2.2. ábra

Tekintsük a 2.2. ábrát, ahol az \underline{r} vektorhoz tartozó \underline{v} vektort ábráztuk. Hogyan változik a sebesség, ha $\Delta \underline{r}$ -rel elmozdulunk? Határozzuk meg tehát a sebességvektortér $\Delta \underline{r}$ -hez tartozó $\Delta \underline{v}$ megváltozását!

A feladat megoldására felhasználhatjuk a skalártér jellemzésére tanult módszert, azaz képezhetjük az egyes vektorkomponensek, mint skalárterek gradiensét, és ezek segítségével számolhatjuk a \underline{v} sebességvektor komponenseinek változását a $\Delta \underline{r}$ elmozdulásvektor mentén:

$$\Delta v_x \cong \text{grad } v_x \cdot \Delta \underline{r} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z. \quad (2.2)$$

Hasonlóképpen felírva a v_y és v_z megváltozását, látjuk, hogy a $\Delta \underline{v}$ sebesség változás vektor az alábbi módon írható fel:

$$\Delta \underline{v} \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\Delta \underline{v} \cong \underline{\underline{D}} \Delta \underline{r}.$$

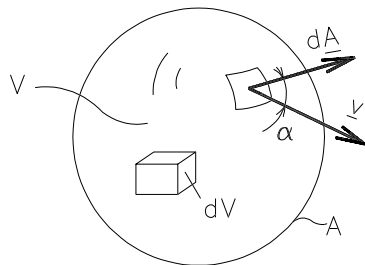
A sebességtér hely szerinti változását tehát a $\underline{\underline{D}}$ deriválttenzorral jellemezhetjük, amely – mivel három sebességkomponens változhat három koordináta irányban – kilenc mennyiséget tartalmaz.

A sebességet két további mennyiséggel is jellemezhetjük. (Ezeket a **deriválttenzor invariánsainak** is szokták nevezni, hiszen koordináta-transzformáció esetén a $\underline{\underline{D}}$ valamennyi tagjának értéke változhat, de ezek egyes kombinációinak értéke nem.)

Az egyik ilyen **(skalár) invariáns a vektortér divergenciája**, $\text{div} \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$, amelynek a következő fizikai interpretációt lehet adni: a $\text{div} \underline{v}$ egy skalár mennyiség, amelynek értéke az áramlási tér adott pontjában megmutatja, hogy **egységnyi idő alatt, egységnyi térfogathól mennyivel több folyadéktérfogat lép ki, mint be.**

Mértékegysége: $[\text{div} \underline{v}] = \text{m}^3 / \text{s} / \text{m}^3 = 1 / \text{s}$.

Tekintsük a 2.3. ábrán látható térben rögzített, zárt felületet, amelyen közeg áramlik át. Vizsgáljuk meg, hogy másodpercenként mennyivel több közeg áramlik ki a felületből, mint be. A $d\underline{A}$ felületelem vektorral jellemzett felületen másodpercenként



2.3 ábra

$$dq = \underline{v} \cdot d\underline{A} = |\underline{v}| |d\underline{A}| \cos \alpha \quad [\text{m}^3 / \text{s}]$$

térfogatáram áramlik át. Ha \underline{v} és $d\underline{A}$ közötti szög $\alpha < 90^\circ$, akkor $dq > 0$, azaz a két vektor skaláris szorzata **kiáramlás esetén ad pozitív értéket**. Ha kiszámoljuk a $\int_A \underline{v} \cdot d\underline{A}$ integrált a teljes zárt felületre, akkor a kapott q [m^3/s] mennyiség megmutatja, hogy **másodpercenként mennyivel több folyadéktérfogat lépett ki az A felületből, mint be.**

Tekintsünk most egy dV térfogatelemet az A felület által határolt V térfogatban. A $\text{div} \underline{v}$ fizikai interpretációjából adódóan $dq = \text{div} \underline{v} \, dV$ az elemi térfogathoz időegységben történő többletkiáramlás értékét adja meg. Képezve az egész térfogatra vonatkozó $\int_V \text{div} \underline{v} \, dV$ integrált, ismét a másodpercenkénti többletkiáramlás adódik. Ha az azonos mennyiségeket kifejező integrálokat egymással egyenlővé tesszük:

$$\boxed{\int_A \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_V \text{div} \underline{v} \, dV} \quad (2.4)$$

a \underline{v} sebességtérre alkalmazott **Gauss-Osztrogradskij tételt** kapjuk.

A derivált tenzor másik **(vektor) invariánsa a rotáció vektor**, amelyet az alábbi determináns formális kifejtésével képezhetjük:

$$\text{rot } \underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A $\text{rot } \underline{v}$ vektor szoros kapcsolatban van az áramlási tér fontos sajátosságával, **a folyadékrészek forgási szögsebességével, $\underline{\Omega}$ -val:**

$$\boxed{\text{rot } \underline{v} = 2\underline{\Omega}}. \quad (2.6)$$

Vegyünk fel egy egyszeresen összefüggő A felületet, amelyet a G zárt görbe vesz körül. (G irányítása pozitív az A felület felől nézve.) A $\text{rot } \underline{v}$ vektortér A felület mentén vett integrálja és a \underline{v} sebességtér A felületet körülvevő G görbe menti integrálja, a Γ **cirkuláció** közötti kapcsolatot a

$$\boxed{\Gamma = \oint_G \underline{v} \, d\underline{s} = \int_A \text{rot } \underline{v} \, d\underline{A}} \quad (2.7)$$

Stokes-tétel teremti meg.

A vektorterek, így a sebességtér leírásához – mint láttuk – általában **három** négyváltozós függvényre van szükség. Lényeges egyszerűsítést jelentene, ha a vektortér leírásához **egy** négyváltozós függvény (skalártér) is elég lenne. A gradiens művelet segítségével bármely ϕ differenciálható skalártérből előállítható a $\underline{v} = \text{grad } \phi$ vektortér. Létezik-e valamennyi vektortér esetén **olyan ϕ skalártér (amit potenciálnak nevezünk), amelyből az adott vektortér a $\text{grad } \underline{v}$ művelettel leírható?** Sajnos nem. Tudjuk, hogy csak a vektorterek egy része, a **potenciális vektorterek** rendelkeznek ezzel a sajátossággal.

Matematikai tanulmányaink során megismertük, hogy egyszeresen összefüggő tartományban megadott vektortérre – esetünkben \underline{v} sebességtérre – az alábbi három állítás ekvivalens:

- létezik potenciálfüggvény
- a cirkuláció bármely zárt G görbére $\Gamma = \oint_G \underline{v} \, d\underline{s} = 0$
- a vektortér örvénymentes azaz $\text{rot } \underline{v} = 0$ (ld. (2.7) Stokes-tétel).

Előzőekből adódóan potenciális sebességtér esetén a folyadékrészek nem forognak.

Erőterek

Hasonlóképpen, vektorterek írják le a \underline{g} **erőtereket, amelyek vektorai, a térerősségvektorok az egységnyi tömegre ható erő nagyságát, irányát és irányítását mutatják. A**

tézerősség mértékegysége a fentiek alapján $[\underline{g}] = \text{N/kg} = \text{m/s}^2$. Kérdés hogy a Föld nehézségi erőtere, amelynek abszolút értéke szélességi körünkön kb. 9.81 N/kg (azaz 1 kg tömegre 9.81 N súlyerő hat), potenciális-e? Határozzuk meg a $\oint_G \underline{g} d\underline{s}$ vonalintegrált tetszőleges zárt G görbe mentén. Az integrál egy zárt görbe mentén mozgó egységnyi tömegre a nehézségi erőter által kifejtett munka nagyságát határozza meg, ami nyilvánvalóan zérus. Tehát a Föld nehézségi erőtere, mint több más erőter, potenciális.

Jelöljük U [m/s]-val az erőter potenciálját, és állapodjunk meg, hogy abban az irányban növekedjék, amelyik irányban az erőter ellenében munkát kell végezni, ha egy tömeget elmozdítunk (pl. a Földön fölfelé). E megállapodásból a tézerősség-vektor \underline{g} és az U potenciál között a

$$\underline{g} = -\text{grad}U \quad (2.8)$$

kapcsolat következik.

A Föld nehézségi erőtere felfelé mutató z koordináta mellett $\underline{g} = -g_g \underline{k}$ alakban írható, ahol $g_g = 9.81 \text{ N/kg}$. **A nehézségi erőter U_g potenciálja** (ami egységnyi tömegű test helyzeti energiájával egyenlő) ebben az esetben

$$U_g = g_g z + \text{konst.} \quad (2.9)$$

alakban írható. (Ha a z függőleges koordináta lefelé mutat, a kifejezés jobb oldalán az előjel megváltozik.)

A további két, gyakran előforduló potenciális erőterrel, **a tehetetlenségi és centrifugális erőterrel csak akkor kell számolni, ha egyenes mentén gyorsuló vagy forgó koordinátarendszerből vizsgáljuk a jelenséget.** (Nem az számít tehát, hogy a vizsgált folyadék gyorsul vagy forog-e, hanem a koordinátarendszer állapota, amelyből a jelenséget vizsgáljuk.)

Az x koordináta irányban $\underline{a} = a \underline{i}$ gyorsulással mozgó koordinátarendszerben hat egy **avval ellentétes irányú és azonos nagyságú $\underline{g}_t = -a \underline{i}$ tehetetlenségi erőter.** Ennek a potenciálját a következő összefüggéssel számíthatjuk:

$$U_t = a x + \text{konst.} \quad (2.10)$$

Egy ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben a centrifugális erőtér térerősség vektora sugár irányú vektor: $\underline{g}_c = \underline{r} \omega^2$. E vektortér potenciálját az

$$\boxed{U_c = -\frac{r^2 \omega^2}{2} + \text{const.}} \quad (2.11)$$

összefüggés írja le.

3. Kinematika és a folytonosság tétele

3.1. A folyadék mozgás leírása

A kinematika a folyadékok mozgásával foglalkozik figyelmen kívül hagyva a folyadékra ható erőket.

A **szilárd testek mozgását** úgy írjuk le, hogy a test egy vagy több pontjának helyét adjuk meg az idő függvényében. A **folyadékoknál** analóg módon járhatunk el. **Az egyes folyadékrészeket a $t=0$ pillanathoz tartozó helyzetükkel „jelöljük meg” (amelyet az \underline{s}_0 helyvektor határoz meg), és a t idő függvényében megadjuk a folyadékrészek helyét:**

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{s}_0, t). \quad (3.1)$$

A folyadékrész sebességét és gyorsulását az \underline{r} idő szerinti első és második differenciálhányadosa adja meg rögzített \underline{s}_0 mellett:

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial t}, \quad \underline{a} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2}.$$

Ezt a módszert **Lagrange leírási módnak** nevezzük. E módszer nehézkesnek mutatkozott, ezért ritkán használják.

A továbbiakban a legelterjedtebb Euler-féle leírási módot alkalmazzuk, amely a folyadékrészek sebességét adja meg a hely (\underline{r}) és az idő (t) függvényében:

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}, t). \quad (3.2)$$

Az áramlások jelentős részénél – mint látni fogjuk – a sebességvektortér nem függ az időtől (stacionárius áramlások). Egyebek mellett tehát azért is egyszerűbb ez a leírási mód mint az előző, mert stacionárius áramlásoknál, ellentétben a Lagrange leírási móddal, a független változók száma a t eltűnésével eggyel csökken.

3.2. Néhány meghatározás

A következőkben néhány gyakran alkalmazott áramlástani fogalmat határozzunk meg.

A folyadékrész pályája egy kiszemelt pontszerű folyadékrész egymást követő pillanatokban elfoglalt helyeit összekötő görbe.

Az áramvonal olyan görbe, amelyet egy adott pillanatban a sebességvektor minden pontjában érint: $\underline{v} \times d\underline{s} = 0$, ahol $d\underline{s}$ az áramvonal elemi hosszúságú darabját jellemző vektor. (Az áramvonal egy adott pillanatban a sebességvektorok burkológörbéje.)

A nyomvonal a tér egy pontján egymás után áthaladó folyadékrészeket egy adott pillanatban összekötő görbe. (Ilyen nyomvonal pl. a járművek szélcsatorna kísérleteinél létrehozott füstcsík, vagy egy kéményből kilépő füstszásló, ha pontszerűnek tekintjük a kémény kiömlőnyílását.)

Az áramfelületet egy kijelölt vonalra illeszkedő áramvonalak alkotják, amelyeket a sebességvektorok érintik. Ezért az áramfelületen nincsen átáramlás. Bármely áramlásba helyezett felület, amelyen nincs átáramlás (pl. egy szilárd testé), áramfelület. **Az áramcső speciális áramfelület, amelynél az áramvonalak egy zárt görbére illeszkednek.** (ld. 3.7. ábra)

3.3. Stacionárius és instacionárius áramlások

Az áramlások igen fontos sajátossága időfüggésük, azaz, hogy jellemzőik (sebesség, nyomás, sűrűség) függenek-e az időtől.

Stacionárius (időálló) áramlásban a jellemzők ($\underline{v}, p, \rho, T$) nem függenek az időtől, így a sebességteret a

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$$

alakú vektortér írja le, azaz **a sebességvektorok az áramlási tér egyes pontjaiban adott koordináta-rendszerből nézve időben nem változnak.**

Instacionárius áramlásoknál a sebességtér az időtől is függ:

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}, t)$$

Egyes áramlások attól függően lehetnek stacionáriusak vagy instacionáriusak, hogy milyen koordináta-rendszerből vizsgáljuk azokat. Így pl. egy taven egyenletes sebességgel haladó csónak körüli áramlás az abszolút rendszerből (pl. a partról) nézve instacionárius, hiszen a korábban nyugvó folyadékrészek a csónak közeledtére mozgásba jönnek. Ha viszont az áramlást a csónakhoz rögzített koordináta-rendszerből vizsgáljuk, akkor e mozgó koordináta-rendszer egyes pontjaiban a (csónakhoz képesti) relatív sebesség időben nem változik, azaz az áramlás stacionárius. **Az instacionárius áramlás egyes esetekben stacionáriussá tehető a koordináta-rendszer helyes megválasztásával.**

3.1. ábra

A 3.1. ábra egy glicerinnel töltött csőben süllyedő gömb körüli áramlást mutat be, amelyet a folyadékban lebegő, egy keskeny fénysávval oldalról megvilágított magnézium reszelék tesz láthatóvá. A bal oldali képen a hosszabb expozíciós idővel működő fényképezőgép együtt mozog a gömbbel, a jobb oldali képen áll. (Az áramlásra jellemző, később tárgyalt Reynolds-szám kicsi, azaz a közeg mozgását főként a súrlódásból származó erők befolyásolják. A gömbtől jobbra látható fekete sáv a gömb árnyéka.)

Az expozíció alatt elmozduló szemcsék alkotta vonalak iránya és hossza az áramlási sebesség irányát és nagyságát mutatja. Látható, hogy a koordináta-rendszer megválasztásától – azaz attól, hogy a fényképezőgép áll-e vagy mozog – jelentősen függ az áramkép és az áramlás jellege is. Együttmozgó koordináta-rendszer esetén (bal oldali kép) az áramlás stacionárius, hiszen egy későbbi időpontban készült kép ugyanilyen lenne. Az álló koordináta-rendszerből nézve az áramlás instacionárius: a később készült képen a gömb és a körülötte lévő áramkép lejjebb látszódná.

Vannak olyan áramlások, amelyeknél a tér különböző pontjaiban az áramlási sebesség egy időben állandó középérték körül ingadozik. Ezeket **kvázistacionárius** áramlásoknak nevezzük.

Belátható, hogy **stacionárius áramlás esetén az áramvonal, a pálya és a nyomvonal egybeesik**. Ez az egybeesés ad lehetőséget arra, hogy stacionárius esetben **az áramlás láthatóvá tételével** végzett vizsgálatoknál az áramlásba bevezetett füstcsíkkal – ami egy

nyomvonal – vagy az áramló víz felszínén úszó parafadarabról hosszú expozíciós idővel készített képpel – ami a **pályát** mutatja – a bennünket leginkább érdeklő **áramvonalakról** kapjunk felvilágosítást.

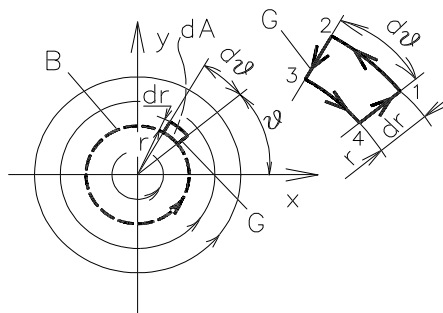
3.2. ábra

A 3.2. ábrán egy vízáramlásba helyezett szárnyprofil körüli áramlást tesznek láthatóvá a szárny előtti pontokban az áramlásba vezetett festékcsíkok, amelyek az előzőek alapján nyomvonalak. Tekintettel azonban arra, hogy az áramlás stacionárius, a nyomvonalak egybeesnek az áramvonalakkal és a pályával is.

Lehetnek olyan instacionárius áramlások, ahol **az áramvonal, a pálya és a nyomvonal** egybeesik (ha a sebességvektorok iránya időben nem változik pl. egyenes csőben gyorsuló áramlás esetén), de e vonalak **instacionárius áramlásban általában különböznek**.

3.4. A potenciális örvény

Eddigiekben megszerzett tudásunkat alkalmazzuk egy speciális áramlási formára, amelynek jellemzői: állandó sűrűségű (összenyomhatatlan) közeg, stacionárius síkáramlás, koncentrikus kör alakú áramvonalak (3.3. ábra).



3.3. ábra

Síkáramlásnak nevezzük azokat az áramlásokat, amelyeknél van olyan sík, amelyre merőleges sebességkomponens értéke zérus, és amely síkkal párhuzamos valamennyi síkban az áramkép azonos. Legyen ez a sík az (x, y) sík. Ez esetben akkor beszélhetünk síkáramlásról, ha

$$v_z = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \quad (3.3)$$

Mivel koncentrikus körök az áramvonalak (ill. koncentrikus hengerek az azok által alkotott áramfelületek), azaz a közöttük lévő áramlási keresztmetszet a kerület mentén állandó és $\rho = \text{áll.}$, a folytonosság később tárgyalt (3.29) összefüggéséből adódik, hogy adott r sugarú körön az áramlási sebesség abszolút értéke $|\underline{v}| = v = \text{állandó}$. Tehát a sebesség abszolút értéke csak a sugár (r) függvénye és nem függ a ϑ kerületi szögtől: $v = v(r)$.

Vegyünk föl egy r sugaron lévő, elemi dr vastagsággal és $d\vartheta$ (3.3. ábra) középponti szög-gel jellemzett dA elemi felületet, amelyre írjuk fel a Stokes-tételt (2.7)! A cirkuláció számításánál a felületelemet körülvevő G görbét úgy járjuk körül, hogy a terület a bal kezünk felé essen (pozitív körüljárási irány):

$$\oint_G \underline{v} d\underline{s} = \int_1^2 \underline{v} d\underline{s} + \int_2^3 \underline{v} d\underline{s} + \int_3^4 \underline{v} d\underline{s} + \int_4^1 \underline{v} d\underline{s} \quad (3.4)$$

$\underline{\hspace{1.5cm}}=0$ $\underline{\hspace{1.5cm}}=0$

A bal oldal második és negyedik integrálja zérus értékű, hiszen $\underline{v} \perp d\underline{s}$. Az első integrál esetén \underline{v} és $d\underline{s}$ vektor $\alpha=0^\circ$ -t zár be, a harmadik integrálnál pedig 180° -ot. Ezért az alábbi írható:

$$\oint_G \underline{v} d\underline{s} = (r + dr) d\vartheta \, v(r + dr) - r d\vartheta \, v(r).$$

Figyelembe véve, hogy $v(r + dr) = v(r) + \frac{dv}{dr} dr$, behelyettesítés és a műveletek elvégzése után a

$$\oint_G \underline{v} d\underline{s} = r d\vartheta \frac{dv}{dr} dr + dr d\vartheta \, v(r) + \underbrace{dr d\vartheta \frac{dv}{dr} dr}_{=0} \quad (3.5)$$

összefüggést kapjuk, amelynek jobb oldali harmadik tagja harmadrendűen kicsiny, ezért a másik kettő tag mellett elhanyagolható.

A Stokes-tétel (2.7) jobb oldalán szereplő integrál esetünkben így írható:

$$\int_{dA} \text{rot } \underline{v} d\underline{A} = (\text{rot } \underline{v})_z \, r d\vartheta dr. \quad (3.6)$$

Itt jegyezzük meg, hogy ha a (2.5) determinánst a síkáramlásra tett (3.3) kikötések mellett fejtjük ki, az adódik, hogy **síkáramlásban a rot_y vektornak csak az áramlás síkjára merőleges (z irányú) komponense különbözhet zérustól:**

$$(\text{rot } \underline{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} . \quad (3.7)$$

(Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha meggondoljuk, hogy egy síkáramlásban milyen tengely körül foroghatnak a folyadékrészek.)

A (3.5) és (3.6) összefüggéseket egyenlővé téve és $r \cdot d\vartheta \cdot dr$ -rel elosztva minkét oldalt adódik:

$$\boxed{(\text{rot } \underline{v})_z = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}} . \quad (3.8)$$

A (3.8) összefüggés természetesen csak a levezetés elején felsorolt feltételek fennállása esetén érvényes.

A (3.8) összefüggés alapján már meghatározható, hogy milyen $v = v(r)$ sebességmegoszlás esetén **örvénymentes** ($\text{rot } \underline{v} = 0$) az áramlás. Ez esetben ugyanis létezik sebességi potenciál. **Ezt az áramlást potenciális örvénynek nevezzük.**

Tegyük egyenlővé a (3.8) összefüggés jobb oldalát zérussal, és oldjuk meg a differenciálegyenletet!

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow \ln v = -\ln r + \ln \text{Konst.} \Rightarrow \boxed{v = \frac{K}{r}} . \quad (3.9)$$

A fenti keretezett összefüggésnek megfelelő sebességmegoszlások esetén az áramlás örvényessége a tengely kivételével mindenütt zérus, ami a (2.6) összefüggés miatt azt is jelenti, hogy a folyadékrészek a potenciális örvény tengelyének kivételével nem forognak. (Ha kiengedjük a vizet a kádból, a később tárgyalandó Coriolis-erőtér következtében a lefolyó körül egy örvény alakul ki. Ha egy kis darab papírt az örvény „tengelyétől” távolabb az áramló víz felszínére dobunk, láthatjuk, hogy miközben a lefolyót megkerüli a papírdarab, nem, vagy csak kissé fordul el tengelye körül. Ez az áramlás tehát hasonló az imént meghatározott potenciális örvényhez.)

Vegyünk fel a középpont körül egy r sugarú kört és számítsuk ki rajta a (2.7) összefüggésben definiált Γ cirkulációt, azaz a sebesség vonalintegrálját! Mivel a B kör (ld. 3.3. ábra) áramvonal, rajta $\underline{v} \parallel d\underline{s}$:

$$\Gamma = \oint_B \underline{v} \cdot d\underline{s} = 2\pi r v = 2\pi r \pi \frac{K}{r} = 2\pi K \neq 0. \quad (3.10)$$

Ha a zárt görbe tartalmazza a középpontot, akkor $\Gamma = 2\pi K$, egyébként $\Gamma = 0$.

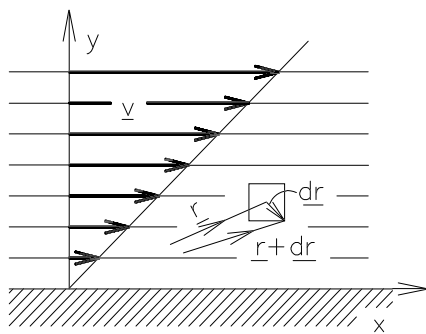
Milyen lehet a potenciális örvény φ [m^2/s] sebességi potenciálja? Miután $\underline{v} = \text{grad } \varphi$, a $\varphi = \text{áll.}$ szintfelületeknek (amelyre a koncentrikus kör alakú áramvonalakat érintő sebességvektorok merőlegesek) sugár irányú, az x, y síkra merőleges síkoknak kell lenniük. Legyen $\varphi = K\vartheta$. Számítsuk ki a sebességi potenciál gradiensét!

$$\underline{v} = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \underline{e}_z + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} \underline{e}_\vartheta = \frac{K}{r} \underline{e}_\vartheta, \quad (3.11)$$

tehát visszakaptuk a potenciális örvény sebességmegoszlását.

Merev test-szerűen forgó folyadék esetén az áramvonalak ugyancsak koncentrikus körök, a sebességmegoszlást pedig a $\underline{v} = \omega \cdot \underline{r}$ összefüggés írja le. A (3.8) összefüggést alkalmazva $(\text{rot } \underline{v})_z = 2\omega$ adódik, ami (ld. (2.6) összefüggés) várakozásainknak megfelelően szolgáltatja a folyadékrészek forgási szögsebességét: $\Omega = \omega$.

3.5. Kis folyadékrész mozgása



3.4. ábra

A 3.4. ábrán láthatók a példaképpen felvett $\underline{v} = 4y\underline{i}$ vektortérrel leírható áramlás áramvonalai és a sebességmegoszlás. Hogyan mozog a folyadékban gondolatban elhatárolt elemi méretű folyadékhasáb? Ehhez nyilvánvalóan tudnunk kell, hogy a hasáb csúcsai hogyan mozdulnak el a középponthoz képest, azaz ha ismerjük $\underline{v}(\underline{r})$ -et, hogyan határozzuk meg $\underline{v}(\underline{r} + d\underline{r})$ értékét. Erre a 2.2. fejezetben látható módon a \underline{D} derivált tenzor használható (ld. 2.2. ábra és (2.3) összefüggés):

$$\underline{v}(\underline{r} + d\underline{r}) \cong \underline{v}(\underline{r}) + \underline{D} d\underline{r}. \quad (3.12)$$

Írjuk fel $\underline{\underline{D}}$ derivált tenzor mátrixát az x,y,z koordináta -rendszerben:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Végezzük el az alábbi átalakítást!

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^*) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^*), \quad (3.14)$$

ahol $\underline{\underline{D}}^*$ a transzponált (mátrixában főátlóra tükrözött) derivált tenzor.

Írjuk fel a jobb oldal első (szimmetrikus) tagját, és jelöljük $\underline{\underline{A}}_s$ -sel:

$$\underline{\underline{A}}_s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^*) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

A (3.14) összefüggés jobb oldalának második tagját jelöljük $\underline{\underline{A}}_\Omega$ -val.

$$\underline{\underline{A}}_\Omega = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^*) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Látható, hogy a (3.16) tenzor mátrixának elemei a $\underline{\text{rot}} \underline{v}$ vektor komponensei (ld. (2.5) összefüggés):

$$\underline{\underline{A}}_\Omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\underline{\text{rot}} \underline{v})_z & (\underline{\text{rot}} \underline{v})_y \\ (\underline{\text{rot}} \underline{v})_z & 0 & -(\underline{\text{rot}} \underline{v})_x \\ -(\underline{\text{rot}} \underline{v})_y & (\underline{\text{rot}} \underline{v})_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha elvégezzük az $\underline{\underline{A}}_{\Omega} d\mathbf{r}$ műveletet,

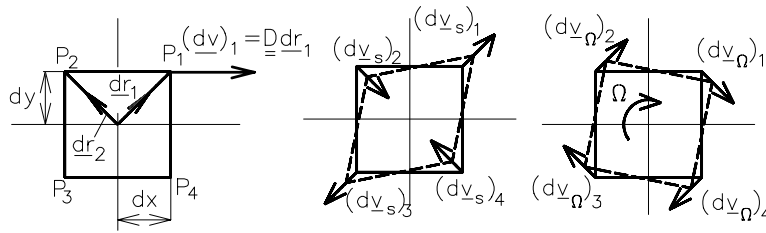
$$\underline{\underline{A}}_{\Omega} d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \times d\mathbf{r} \quad (3.17)$$

vektorszorzat adódik. Tekintettel arra, hogy a sebességtér örvényessége és a folyadékrészek forgási szögsebessége $\underline{\Omega}$ között szoros kapcsolat van (ld. (2.6) összefüggés), a (3.17) összefüggés az alábbi módon írható fel:

$$\underline{\underline{A}}_{\Omega} d\mathbf{r} = \underline{\Omega} \times d\mathbf{r}. \quad (3.18)$$

Alkalmazzuk a (3.15), (3.16) tenzorokat a 3.4. ábrán látható áramlásra (ami síkáramlás, így a (3.3) feltételek következtében a derivált tenzornak csak négy zérustól különböző eleme lehet):

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}_s = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{\underline{A}}_{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$



3.5. ábra

Alkalmazzuk az $\underline{\underline{A}}_s$ és az $\underline{\underline{A}}_{\Omega}$ tenzorokat a négyzet keresztmetszetű folyadékhasáb tengelyét a P_1, P_2, P_3 és P_4 élekkel összekötő elemi $(d\mathbf{r})_1 = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$, $(d\mathbf{r})_2 = -dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ stb. vektorokra (ld. 3.5. ábra). Eredményül a $(d\mathbf{v}_s)_{1,2,3,4}$, $(d\mathbf{v}_{\Omega})_{1,2,3,4}$ elemi sebesség megváltozás vektorokat kapjuk, amelyek megmutatják, hogy a hasáb éleinek sebessége mennyire tér el a tengelyének sebességétől. Pl. a P_1 jelű él és a hasáb középpontjának sebessége között az $\underline{\underline{A}}_s$ és $\underline{\underline{A}}_{\Omega}$ tenzorok alkalmazásával az alábbi különbségek adódnak:

$$(d\mathbf{v}_s)_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 dy \\ 2 dx \end{bmatrix}$$

$$(d\mathbf{v}_{\Omega})_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 dy \\ -2 dx \end{bmatrix}.$$

A sebesség megváltozás vektorokat ábrázolva látjuk (3.5. ábra), hogy a $(d\underline{v}_s)$ vektorok hatására a hasáb alakja megváltozik, eltorzul, ugyanakkor a $(d\underline{v}_\Omega)$ vektorok a hasábot forgatják.

Az előzőekben meghatározott összefüggéseket felhasználva írható:

$$\underline{v}(\underline{r} + d\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r}) + \underline{A}_S d\underline{r} + \underline{A}_\Omega d\underline{r}. \quad (3.19)$$

A (3.19) összefüggés a 3.5. ábra alapján az következőképp interpretálható:

az áramlási térben a folyadékrész

- középpontjának pillanatnyi sebességvektorával párhuzamosan elmozdul (transzláció): $\underline{v}(\underline{r})$
- alakját és méretét változtatja (szögdeformáció és tágulás): $\underline{A}_S d\underline{r}$
- merev test-szerűen elfordul (rotáció): $\underline{A}_\Omega d\underline{r}$

A folyadékrész mozgásában játszott szerepe miatt \underline{A}_S tenzort **alakváltozási sebesség tenzornak**, \underline{A}_Ω -t pedig **örvénytenzornak** nevezzük.

Ha a \underline{D} derivált tenzor szimmetrikus, akkor $\underline{A}_\Omega = \frac{1}{2}(\underline{D} - \underline{D}^*) = \underline{0}$, azaz $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ (a folyadékrészek nem forognak). Ebben az esetben létezik a \underline{v} sebességtér φ potenciálja (ld. 2.2. fejezet), amellyel $\underline{v} = \text{grad } \varphi$. Ha az áramló közeg sűrűsége ρ =állandó, a későbbiekben tárgyalt folytonosság tételének (3.25) összefüggése értelmében $\text{div } \underline{v} = 0$ (azaz a derivált tenzor főátlójában lévő elemek összege zérus). Ez esetben:

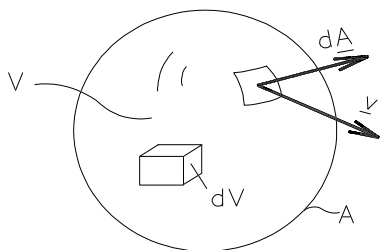
$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = 0, \text{ azaz}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.20)$$

Laplace differenciálegyenlet írja le a sebességi potenciált. A számos jelenség (hővezetés, szivárgás stb.) leírására használt egyenletet a peremfeltételek ismeretében megoldva meghatározható a φ sebességi potenciál, abból pedig a sebességtér.

3.6. A folytonosság (kontinuitás) tétele

Lehet-e tetszőleges a folyadékreszek mozgása? Megvalósítható-e a természetben bármilyen $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}, t)$ sebességtér? Nyilvánvalóan nem: a folyadékreszek mozgásának eleget kell tennie az anyagmegmaradás törvényének, amelyet az áramlástanban a **folytonosság vagy kontinuitás tételének** nevezünk. E tétel azt a fontos tapasztalatot fejezi ki, hogy **tömeg nem keletkezhet és nem tűnhet el**.



3.6. ábra

Tekintsük a 3.6. ábrán látható, az áramló közegben lévő, a térben rögzített zárt A felületet, amelyen a közeg átáramlik. Írjuk fel, hogy másodpercenként mennyivel több tömeg áramlik ki a felületen, mint be (ld. 2.2. fejezet divergenciával foglalkozó része):

$$q_m = \int_A \rho \underline{v} d\mathbf{A} \quad [\text{kg/s}]. \quad (3.21)$$

Nyilvánvaló, hogy a tömeg többletkiáramlás csak a térfogatban lévő tömeg rovasára, azaz a sűrűség csökkenése mellett mehet végbe. Az A felület által határolt V térfogatban lévő tömeg másodpercenkénti változását a

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad [\text{kg/s}] \quad (3.22)$$

integrál adja meg.

Miután a $d\mathbf{A}$ felületi normális kifelé mutat, a (3.21) integrál pozitív értéke esetén – fogy a tömeg a V térfogatban – a (3.22) integrálnak negatívnak kell lenni, tehát a (3.21) és (3.22) integrál összege zérus. A (3.21) integrált a Gauss-Osztrogradszkij-tétel (2.4) alkalmazásával alakítsuk át térfogati integrállá és a fentiek figyelembevételével tegyük egyenlővé a (3.22) integrál ellentettjével:

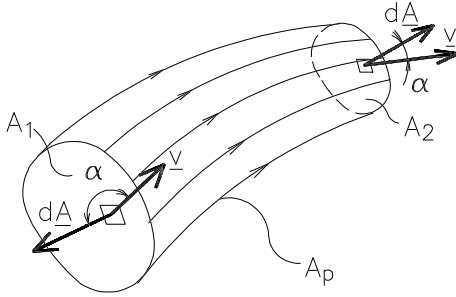
$$\boxed{-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_A \rho \underline{v} d\mathbf{A} = \int_V \text{div}(\rho \underline{v}) dV.} \quad (3.23)$$

A (3.23) egyenlet keretezett része a **folytonossági tétel integrál alakja**. A bal oldalra hozva a jobb oldali második integrált és figyelembe véve, hogy ugyanarra a V térfogatra végezzük el az integrálást, írható:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) \right] dV = 0. \quad (3.24)$$

A fenti integrál csak akkor lehet zérus tetszőleges V integrálási tartomány esetén, ha az integrandusz zérus. Ily módon megkaptuk a **folytonosság tételét differenciális alakban**:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0}. \quad (3.25)$$



3.7. ábra

Alkalmazzuk a folytonosság tételét a 3.7. ábrán látható áramcsőre. Legyen az áramlás stacionárius. Célszerűen a folytonosság tétel (3.23) összefüggésben megadott integrál alakját használjuk. Miután feltevésünk szerint $\partial \rho / \partial t = 0$, a (3.23) összefüggés bal oldala zérus, ezért:

$$\int_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0, \quad (3.26)$$

ahol az A az áramcső palástjából (A_p) valamint A_1 és A_2 be- és kilépő keresztmetszetből áll. Miután az áramcső palástja áramfelület, amelyen nincs átáramlás ($\underline{v} \perp d\underline{A}$), ezért a (3.26) összefüggés az alábbi módon írható:

$$\int_{A_1} \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} + \int_{A_2} \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0. \quad (3.27)$$

Tekintettel arra, hogy $\underline{v} \cdot d\underline{A} = |\underline{v}| |d\underline{A}| \cos \alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög, (3.27) összefüggéssel adódik:

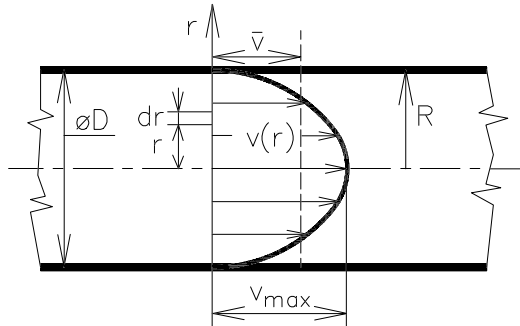
$$\int_{A_1} \rho |\underline{v}| |d\underline{A}| \cos \alpha + \int_{A_2} \rho |\underline{v}| |d\underline{A}| \cos \alpha = 0 \quad (3.28)$$

Tételezzük fel, hogy a be- és kilépő keresztmetszetben a sebesség merőleges az A_1 és A_2 felületre, azaz $\cos \alpha$ a belépésnél -1 , a kilépésnél 1 , továbbá azt, hogy az A_1 keresztmetszetben a sűrűség állandó: ρ_1 , ugyanígy az A_2 keresztmetszetben ρ_2 . Ilyen feltételek mellett a (3.28) összefüggés a

$$\boxed{\rho_1 \bar{v}_1 A_1 = \rho_2 \bar{v}_2 A_2} \quad (3.29)$$

alakra hozható, ahol \bar{v}_1 és \bar{v}_2 az átlagsebesség az A_1 és A_2 keresztmetszetben. A (3.29) összefüggés azt fejezi ki, hogy stacionárius áramlás esetén a $q_m [\text{kg/s}]$ tömegáram az áramcső bármely keresztmetszetében azonos. Látható, hogy e gyakran használt összefüggés használatához milyen sok feltételnek kell teljesülnie.

Áramcsövet alkotnak a műszaki gyakorlatban alkalmazott csövek, hiszen belső felületükön nincsen folyadék átlépés. Ha egy kör keresztmetszetű cső 1 keresztmetszetében az átlagsebesség \bar{v}_1 , és a cső átmérője D_1 -ről D_2 -re változik, a (3.29) összefüggésből adódóan a \bar{v}_2 átlagsebesség a



3.8. ábra

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 \frac{\rho_1 D_1^2}{\rho_2 D_2^2} \quad (3.30)$$

összefüggéssel számolható ki.

Ha a sebesség a keresztmetszetben változik, akkor a térfogatáramot (és abból a \bar{v} átlagsebességet) a sebességmegoszlás keresztmetszeten történő integrálásával lehet meghatározni. Tekintsük a 3.8. ábrát,

ahol egy D átmérőjű, kör keresztmetszetű cső látható, amelyben a sebességmegoszlást egy n -ed fokú forgási paraboloid írja le (a v_{\max} és a $v(r)$ különbsége az r sugár n -edik hatványával arányos):

$$v(r) = v_{\max} \left[1 - (r/R)^n \right]. \quad (3.31)$$

Hogyan lehetne kiszámítani a \bar{v} átlagsebességet? Írható:

$$\bar{v} = \frac{4 q_v}{D^2 \pi} \quad [\text{m/s}], \quad (3.32)$$

ahol $q_v [\text{m}^3/\text{s}]$ a térfogatáram (a csőkeresztmetszeten egységnyi idő alatt átáramló folyadéktérfogat). A térfogatáramot a 3.8. ábrán látható kör keresztmetszetű cső esetén az alábbi módon írhatjuk fel:

$$q_v = \int_0^R 2\pi r v_{\max} \left[1 - (r/R)^n \right] dr. \quad (3.33)$$

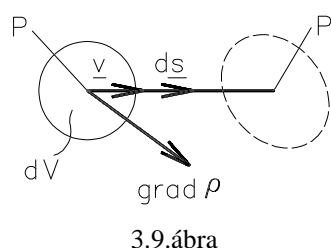
Az integrálást elvégezve $q_v = R^2 \pi v_{\max} \frac{n}{n+2}$ adódik, azaz a $\bar{v} = \frac{n}{n+2} v_{\max}$. (3.34)

Másodfokú paraboloid ($n = 2$) esetén az átlagsebesség a maximális sebesség fele.

3.7. Jellemzők lokális és konvektív megváltozása

A folytonosság kifejezésének második tagja a szorzat deriválási szabályai szerint felbontható:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (3.35)$$



Értelmezzük a (3.35) összefüggés első két tagját! Tekintsük a 3.9. ábrát, ahol egy dV térfogatú elemi folyadék rész látható. A folyadék rész \underline{v} áramlási sebességgel mozog. Jellemezze a P pontban az áramlási sebességet a \underline{v} vektor, a sűrűség hely szerinti változását pedig a 2.1. fejezetnek megfelelően a $\operatorname{grad} \rho$ vektor.

Legyen instacionárius az áramlás, tehát $\partial \rho / \partial t \neq 0$. Vizsgáljuk meg, hogy dt idő elteltével mennyit változik az elúszó elemi folyadék rész sűrűsége.

A $d\rho$ sűrűségváltozás két okra vezethető vissza:

a/ mivel a sűrűség az időtől függ ($\partial \rho / \partial t \neq 0$), a sűrűség a P pontban dt idő alatt

$$d\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \text{ értékkel változik;}$$

b/ az elemi folyadék rész az áramló közeggel együtt dt idő alatt $d\underline{s} = \underline{v} dt$ utat tesz meg és egy olyan P' helyre jut, ahol a sűrűség $d\rho_k = \operatorname{grad} \rho d\underline{s} = \operatorname{grad} \rho \underline{v} dt$ értékkel tér el a P pontban lévő től (ld. 2.1. fejezet).

Az a/ alatti sűrűségváltozásra akkor is sor kerülne, ha a közeg nem áramlana, azaz a dV térfogat a helyén maradna. Ezért a $d\rho_1$ -et a sűrűség **lokális megváltozásának** nevezzük, amelynek csak akkor van szerepe, ha a sűrűség időben változik (azaz, ha az áramlás instacionárius).

A b/ alatti sűrűségváltozás oka az elemi térfogat elmozdulása, eláramlása egy olyan helyre, ahol a sűrűség eltérő, ezért a $d\rho_k$ -t a sűrűség **konvektív megváltozásának** nevezzük.

A folyadék rész sűrűségének dt időtartam alatti teljes megváltozása tehát:

$$d\rho = d\rho_1 + d\rho_k = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \underline{v} \operatorname{grad} \rho dt, \quad (3.36)$$

amiből:

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{v} \operatorname{grad} p.} \quad (3.37)$$

A 3.35 egyenlet bal oldalának első két tagja tehát a dp/dt -t, a folyadékrész sűrűségének idő szerinti teljes megváltozását fejezi ki.

A fizikai jellemzők lokális és konvektív megváltozása az áramlástan fontos gondolata, ami többször elő fog kerülni a továbbiakban.

4. Euler-egyenlet, Bernoulli-egyenlet, örvénýtételek

4.1. A folyadékrészek gyorsulása

A folyadékrészek mozgását az azokra ható erőkkel összefüggésben a kinetika tárgyalja. Miután Newton II. axiómája szerint a folyadékrészekre ható erőkkel gyorsulásuk van kapcsolatban, e fejezetben a folyadékrészek gyorsulásának leírásával foglalkozunk.

A folyadékrész gyorsulását kifejező összefüggést felírhatjuk a 3.7. fejezetben tanult felbontás felhasználásával (ld. (3.37) összefüggés). Egy skalártérrel leírható jellemző (ott a sűrűség, itt az áramlási sebesség v_x, v_y vagy v_z komponense) egységnyi időre vonatkozó megváltozását a lokális és a konvektív megváltozás összegeként az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \underline{v} \text{ grad } v_x. \quad (4.1)$$

A (4.1) összefüggés a folyadékrész x irányú sebességkomponensének egységnyi időre jutó megváltozását, azaz x irányú gyorsulását fejezi ki. Az összefüggés jobb oldalának első tagja a **lokális gyorsulás**, a második a **konvektív gyorsulás**.

Hasonló összefüggés írható fel v_y és v_z sebességkomponensekre is. Elvégezve a (4.1) összefüggés jobb oldalán a két vektor skalár szorzását, a folyadékrészek gyorsulásának x,y és z komponensét az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Felismerjük, hogy a gyorsulásvektor (4.2) összefüggésben megadott alakja a

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{D}\underline{v}} \quad (4.3)$$

kifejezéssel ekvivalens.

Határozzuk meg a $d\mathbf{v}/dt$ folyadékrész gyorsulást egy más megfontolással is. A \mathbf{v} sebességvektortér az \mathbf{r} hely és t idő függvénye, teljes differenciálját tehát a $d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r}$ összefüggés adja meg. Vonatkoztassuk a folyadékrész sebességének megváltozását egységnyi időre, azaz osszuk el a kifejezést dt -vel:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} . \quad (4.4)$$

A (4.4) kifejezés jobb oldalának második tagja fejezi ki a folyadékrész sebességének konvektív (eláramlás miatti) megváltozását. Az e tagban szereplő $d\mathbf{r}/dt$ tényező \mathbf{v} sebességgel egyenlő, mert azt az utat kell, hogy megadja, amelyet a folyadékrész egységnyi idő alatt tesz meg (mivel a $d\mathbf{v}/dt$ is az elúszó folyadékrész sebességének idő szerinti megváltozását fejezi ki). Miután $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r} = \underline{\underline{D}}$, e megfontolás is a (4.3) összefüggésre vezetett.

A folyadékrész gyorsulása tehát két részből áll, a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ lokális gyorsulásból és a $\underline{\underline{D}}\mathbf{v}$ konvektív gyorsulásból.

A lokális gyorsulás akkor különbözhet zérustól, ha a sebességtér a t időtől is függ, azaz az áramlás instacionárius. A konvektív gyorsulás nincs kapcsolatban az áramlás időfüggésével, értéke stacionárius és instacionárius áramlás esetén egyaránt lehet zérustól eltérő. **Konvektív gyorsulás akkor létezik, ha a folyadéktér sebességének nagysága és/vagy iránya a folyadékrész mozgásának irányában (azaz az áramlás irányában) változik.**

Hogyan lehetne a konvektív gyorsulást másként kifejezni? Bontsuk fel a $\underline{\underline{D}}$ deriválttenzort az alábbi módon:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^* + (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^*),$$

tehát a konvektív gyorsulás:

$$\mathbf{a}_{\text{konv}} = \underline{\underline{D}}\mathbf{v} = \underline{\underline{D}}^*\mathbf{v} + (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^*)\mathbf{v} . \quad (4.5)$$

Tekintsük a (4.5) kifejezés jobb oldalának első tagját!

$$\underline{\underline{D}}^*\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \quad (4.6)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) \end{bmatrix} = \text{grad} \frac{v^2}{2} .$$

A $(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^*) d\underline{r}$ kifejezésről korábban megállapítottuk (ld. (3.16) és (3.17) összefüggéseket), hogy az $\text{rot } \underline{v} \times d\underline{r}$ -rel egyenlő. Hasonlóan:

$$(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^*) \underline{v} = \text{rot } \underline{v} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \text{rot } \underline{v} \quad (4.7)$$

(A 4.7 összefüggés jobb oldalán a félreértések elkerülése végett cseréltük meg a vektorok sorrendjét megváltoztatva a szorzat előjelét.)

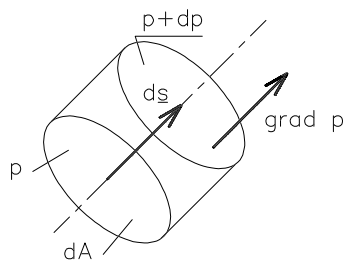
Végül eredményként azt kapjuk, hogy a folyadékrész gyorsulása:

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot } \underline{v}} . \quad (4.8)$$

4.2. Az Euler-egyenlet

Amint azt az előző fejezetben megállapítottuk, a folyadékrészek mozgásának leírásánál Newton II. axiómája alkalmazható, **amely a folyadékrészekre ható erő és mozgásmennyiségük idő szerinti megváltozása között teremt kapcsolatot. Hanyagoljuk el a közeg súrlódásának hatásait, tekintsük a közeget súrlódásmentesnek!**

A folyadékrészekre általában kétfajta erő hat: a tömegre ható térerő (pl. a súlyerő) és a folyadékrész felületén ható felületi erő. Ha a közeg súrlódásmentes, a felületi erőnek nincsen felülettel párhuzamos komponense (a csúsztatófeszültség zérus), csak a felületre merőleges, nyomásból származó erő hat.



4.1. ábra

Tekintsük a 4.1. ábrát! Az ábrán a $\text{grad } p$ nyomásgradiens vektort tüntettük fel és egy dA alapterületű, $|ds|$ magasságú hengert, amelynek tengelye párhuzamos a $\text{grad } p$ vektorral. Vizsgáljuk meg, hogy milyen nagyságú, nyomásból származó erő hat a hengerre. Miután a henger fedőlapján a nyomás $p+dp$, az alaplapon p , a hengerre ható, nyomásból

származó $d\underline{F}_p$ erőt a

$$d\underline{F}_p = -dA \, dp \frac{d\underline{s}}{|d\underline{s}|} \quad (4.9)$$

vektor fejezi ki, amely ellentétes irányítású a $d\underline{s}$ vektorral.

Tekintve, hogy $dp = \text{grad} p \, d\underline{s}$ valamint $\text{grad} p$ és $d\underline{s}$ megegyező irányú és irányítású, tehát $dp = |\text{grad} p| |d\underline{s}|$, a (4.9) összefüggés a ρ sűrűséggel való szorzás és osztás után az alábbi módon írható:

$$d\underline{F}_p = -\frac{1}{\rho} |\text{grad} p| \rho |d\underline{s}| \, dA \frac{d\underline{s}}{|d\underline{s}|}. \quad (4.10)$$

Miután $\rho |d\underline{s}| dA = dm$, az elemi folyadékrész tömege és esetünkben a $|\text{grad} p| \frac{d\underline{s}}{|d\underline{s}|} = \text{grad} p$, a (4.10) összefüggés mindkét oldalának dm -mel történő osztása után az **egységnyi tömegre ható, nyomásból származó erőt** kapjuk:

$$\frac{d\underline{F}_p}{dm} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (4.11)$$

A folyadékrész egységnyi tömegére ható erőt az erőtér \underline{g} térerősség vektorával fejezhetjük ki:

$$\frac{d\underline{F}_g}{dm} = \underline{g}. \quad (4.12)$$

Newton II. axiómája értelmében adott (esetünkben egységnyi) tömegre ható erőkkel egyezik meg a tömeg és a $d\underline{v}/dt$ gyorsulás szorzata:

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p}. \quad (4.13)$$

A (4.13) összefüggést **Euler-egyenletnek** nevezzük, amely a valóságos közegben általában fellépő **súrlódás elhanyagolása esetén érvényes**.

Az Euler-egyenlet tehát egy mozgásegyenlet, amely a súrlódás elhanyagolása esetén összefüggést teremt a folyadékrész gyorsulása és a folyadékrészre ható erők között.

A (4.8) összefüggés figyelembevételével kifejtve a (4.13) összefüggés bal oldalát az Euler-egyenlet gyakran alkalmazott vektoriális alakját kapjuk:

$$\boxed{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p} \quad (4.14)$$

Ha a sűrűség a nyomás függvénye: $\rho = \rho(p)$, a (4.14) egyenlet jobb oldalának utolsó tagja az alábbi módon írható:

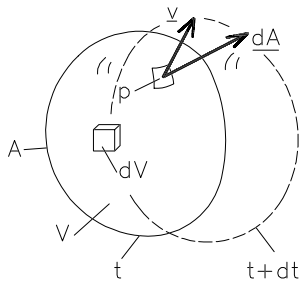
$$-\frac{1}{\rho(p)} \text{grad} p = -\text{grad} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} \quad (4.15)$$

(A láncszabály szerint eljárva ugyanis a változó felső határú integrált kell először a felső határ szerint differenciálni – ami az $1/\rho$ primitív függvényt eredményezi. Ezt kell szorozni a változó felső határ hely szerinti differenciálhányadosával, $\text{grad} p$ -vel.)

A (4.2) összefüggés figyelembevételével felírható az Euler egyenlet x, y és z irányú komponens egyenlet formájában:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.16)$$

A (4.16) összefüggésből jól látható az adott koordináta irányú sebességkomponens idő szerinti megváltozása (az adott irányú gyorsulás) és az adott koordináta irányú erők közötti kapcsolat.



4.2. ábra

Határozzuk meg az Euler-egyenletet más módon! Tekintsük a 4.2. ábrát, ahol egy gondolatban elhatárolt (mondjuk kékre festett), a folyadékkal együtt úszó V térfogatú folyadékrész látható. A folyadékrész A felülete u.n. folyékony felület, hiszen a folyadékkal együtt mozog, rajta nincs átáramlás. A V térfogat alakját és nagyságát is változtathatja (hiszen a közeg sűrűsége odébbúszás közben változhat), de a térfogatban lévő M tömeg nem változik. Írjuk fel a térfogatban lévő **tömeg**

mozgásmennyiségének egységnyi időre jutó megváltozását, ami egyenlő a folyadékrészre ható erők összegével.

Ezek az erők:

- a tömegre ható, erőteréből származó erő,
- a felületen ható erő, amely a súrlódásmentesség miatt a felületre merőleges, nyomásból származó erőre korlátozódik.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A p d\underline{A}}. \quad (4.17)$$

A jobb oldal első tagja a térerőből származó, tömegre ható erőt, a második tag a felületen ható, nyomásból származó erőt fejezi ki. (Ez utóbbi előjele azért negatív, mert a $d\underline{A}$ felület-elem vektor kifelé mutat, így negatív előjel esetén adódik a folyadékra ható erő.)

Alakítsuk át a (4.17) összefüggés bal oldalán lévő tagot. Vegyük figyelembe, hogy az integrálás és differenciálás sorrendje felcserélhető. Ez itt azt jelenti, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk, ha az egész folyadék rész mozgásmennyiségének időbeni változását vizsgáljuk, mint abban az esetben, ha az egyes elemi folyadék részecskék mozgásmennyiségének megváltozását összegezzük. Figyelembe kell továbbá venni azt is, hogy amíg a V integrálási tartomány ill. a dV elemi térfogat a sűrűség változása miatt időben változhat, addig az M folyadéktömeg ill. annak $dm = \rho dV$ tömegeleme időben nem változik. Fentiek figyelembe vételével az alábbi átalakítások végezhetők el:

$$\frac{d}{dt} \int_V \underline{v} \rho dV = \int_V \frac{d}{dt} [\underline{v} (\rho dV)] = \int_V \frac{d\underline{v}}{dt} (\rho dV) + \underbrace{\int_V \underline{v} \frac{d}{dt} (\rho dV)}_{=0}. \quad (4.18)$$

A fenti átalakítás azt jelenti, hogy az időben változó térfogatban lévő tömeg mozgásmennyiségének változását időben változatlan elemi tömegek és gyorsulásuk szorzataként határozzuk meg, azaz a jobb oldal első integráljában lévő $d\underline{v}/dt$ a **folyadék rész gyorsulása**, amelyet az előző fejezetben tárgyaltunk (ld. (4.3) és (4.4) összefüggések).

Térjünk vissza a (4.17) összefüggéshez, amely jobb oldalának második tagját szeretnénk térfogati integrállá alakítani. Vegyünk fel egy tetszőleges \underline{b} =konstans vektorteret és szorozzuk meg e vektortérrel a p nyomást. Ezzel az integrandusz vektortérre válik, amelyre alkalmazható a Gauss-Osztrogradszkij-tétel:

$$\int_A \underline{b} p d\underline{A} = \int_V \text{div}(\underline{b} p) dV = \int_V (p \text{div} \underline{b} + \underline{b} \text{grad} p) dV. \quad (4.19)$$

Tekintettel arra, hogy \underline{b} = áll., $\text{div} \underline{b} = 0$ és \underline{b} az integráljel elé kivehető:

$$\underline{b} \int_A p d\underline{A} = \underline{b} \int_V \text{grad} p dV. \quad (4.20)$$

Tekintettel arra, hogy \underline{b} tetszőleges irányú vektor, a két integrál egyenlő egymással.

Fentiek figyelembevételével írható:

$$(4.21)$$

$$\int_V \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho dV = \int_V \underline{\mathbf{g}} \rho dV - \int_V \text{grad} p dV.$$

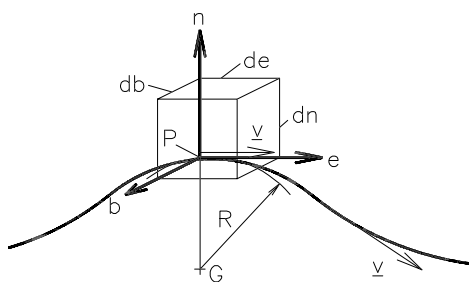
Valamennyi tagot bal oldalra hozva és figyelembe véve, hogy az integrálási tartomány megegyezik, ezért közös integráljel alá vihetők:

$$\int_V \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \underline{\mathbf{g}} + \text{grad} p \right) dV = 0. \quad (4.22)$$

Az integrál értéke tetszőleges V-nél zérus, ami csak akkor lehet, ha az integrandusz zérus. Átrendezés és az egyenlet ρ -val való osztása után a (4.13) összefüggés adódik:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underline{\mathbf{g}} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

4.3. Euler-egyenlet természetes koordinátarendszerben



4.3. ábra

Legyen az áramlás stacionárius, a sűrűdást **hanyagoljuk el** és vegyünk fel egy áramvonalhoz rögzített, „természetes” koordinátarendszert (ld. 4.3. ábra). E derékszögű koordinátarendszer az áramvonal P pontjára illeszkedik, és az **e** érintő irányú koordinátatengelye érinti az áramvonalat. Az **n** normális irányú koordinátatengely a P pontot az áramvonal G görbületi középpontjával összekötő egyenesbe esik. A **b** binormális koordináta az **e** és **n** koordinátákkal jobbsodrású rendszert alkot. Vegyük fel a 4.3. ábrán látható, db, dn és de élhosszakkal jellemzett elemi folyadékhasábot és írjuk fel az arra ható **e** irányú erők egyensúlyát! Miután a sűrűdást elhanyagoltuk, a hasábra az erőter és a nyomásból származó erő hat:

$$dF_e = p db dn - \left[p + \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right) de \right] db dn + p db dn de g_e, \quad (4.23)$$

ahol g_e a térerősség **e** irányú vetülete.

Ez az erő a $dm = \rho db dn de$ tömegű folyadékreszt gyorsítja. Tekintettel arra, hogy kikötésünk szerint az áramlás stacionárius, csak konvektív gyorsulás létezik. A (4.2) összefüggés első sor 2., 3. és 4. tagjának összege adja az **x** irányú konvektív gyorsulást. Esetünkben az **e** koordinátatengely irányú gyorsulást keressük, figyelembe véve, hogy $v_n = v_b = 0$. Ez esetben:

$$a_{\text{konv}} = v \frac{\partial v}{\partial e}.$$

A fentiek alapján a (4.23) figyelembe vételével írható:

$$\rho \, db \, dn \, de \, v \frac{\partial v}{\partial e} = - \frac{\partial p}{\partial e} \, de \, db \, dn + \rho \, db \, dn \, de \, g_e. \quad (4.24)$$

Az elemi tömeggel való egyszerűsítés után adódik a **természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenlet érintő irányú komponens egyenlete:**

$$\boxed{v \frac{\partial v}{\partial e} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} + g_e} \quad (4.25)$$

Tekintsük most a **normális irányú egyensúlyt!** Ahhoz, hogy a dm tömeg v sebességgel mozogjon az R görbületi sugarú áramvonalon, a görbületi középpont felé mutató $dm \frac{v^2}{R}$ nagyságú (centripetális) erőnek kell a tömegre hatnia. Ez az erő ismét a nyomásból származó, a folyadékrész felületén ható erő és a tömegre ható térerősség összegével egyenlő:

$$-\rho \, de \, db \, dn \, \frac{v^2}{R} = p \, db \, de - \left[p + \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) dn \right] db \, de + \rho \, de \, db \, dn \, g_n \quad (4.26)$$

Az egyes tagok előjelét az n koordináta és az erők irányításának figyelembe vételével határoztuk meg. Egyszerűsítés után adódik a **természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenlet normális irányú komponens egyenlete:**

$$\boxed{- \frac{v^2}{R} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g_n} \quad (4.27)$$

A **binormális irányú komponens egyenlet** – mivel ebben az irányban nincsen gyorsulás – a nyomásból és a térerősségből származó erők egyensúlyát fejezi ki:

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} + g_b \quad (4.28)$$

Az Euler-egyenlet különböző kifejezéseit vizsgálva egy nagyon egyszerű fizikai interpretáció adódik. Sűrűdásmentesség feltételezése mellett a folyadékrészekre a nyomásból és a térerősségből származó erő hat. Ha e kétfajta erő kiegyenlíti egymást, a közeg nem gyorsul (vagy áll, vagy egyenesvonalú egyenletes sebességű mozgást végez). Fordítva is igaz: ha a közeg áll, a nyomásból származó erő egyensúlyban van az erőtérből származó erővel.

Ha a két erő nem egyenlíti ki egymást, akkor a közeg gyorsul. Az erőtér a térerősség vektorral megegyező irányú és irányítású gyorsulást eredményez. A nyomás változása esetén a

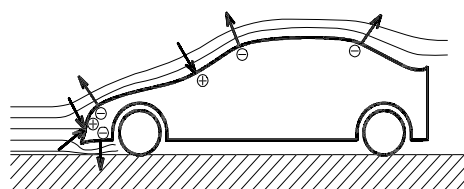
folyadékrészek a csökkenő nyomás irányában (a nyomásgradienssel párhuzamosan, de el-
 lentétes irányítással) gyorsulnak.

A térerősség hatása sok esetben figyelmen kívül hagyható ill. elhanyagolható. Ilyen esetben
 az áramképről a nyomásmegoszlásra ill. a nyomásmegoszlásról az áramképre következtet-
 hetünk. Így pl. a folyadékrészek csökkenő nyomás irányában gyorsulnak (pl. ha különböző
 nyomású tereket összenyitunk, a nagyobb nyomású térből a kisebb nyomású térbe áramlik a
 közeg). Egy áramlás irányában szűkülő csőben (konfúzorban), amelyben a folytonosság
 miatt gyorsul a közeg, az áramlás irányában csökken a nyomás. Áramlás irányában bővülő
 csőnél (diffúzorban) lassul az áramlás, és ennek megfelelően növekedő nyomás tapasztalha-
 tó. (A mozgó folyadéknak le kell lassulnia és a lassító erőt – súrlódás és térerő hiányában –
 csak a nyomás áramlás irányú növekedése okozhatja.)

Az eddigi példákban a közeg sebességének nagysága változott a nyomásmegoszlás hatásá-
 ra. Vannak esetek, amikor a nyomás változása nem a sebesség nagyságát, hanem irányát
 változtatja meg. Igen jól használható összefüggés **a természetes koordináta-rendszerben
 felírt Euler-egyenlet normális irányú komponens egyenlete** (ld. (4.27) összefüggés).
 Szorozzuk meg a (4.27) egyenlet mindkét oldalát (-1) -el és tekintsünk el a térerősség hatá-
 sától. Ez esetben az következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$$

az alábbi következtetéseket vonhatjuk le az összefüggésből:



4.4. ábra

a/ ha az áramvonalak párhuzamos egye-
 nesek ($R=\infty$), akkor azokra merőlegesen
 nem változik a nyomás;

b/ ha az áramvonalak görbültek, akkor
 azokra merőlegesen a nyomás változik: a
 görbületi középponttól kifelé haladva nő. (A

nyomásból származó centripetális erő kényszeríti körpályára a folyadékrészeket.)

A 4.4. ábrán látható személyautó karosszériáján kialakuló nyomásmegoszlás jellegét a fenti
 megfontolásokkal meg lehet határozni: az áramvonalak görbületi középpontjából kifelé
 mutató nyilak a nyomás növekedését mutatják. A + és – jelek a zavartalan áramláshoz tar-
 tozó nyomáshoz képesti túlnyomást ill. depressziót (külsőhöz képest kisebb nyomást) jelöl-
 lik. Látható, hogy a homlokfal alatti spoiler csökkenti a nyomást, ezáltal csökken a felhaj-
 tóerő. A motorháztető és a szélvédő találkozásánál az áramvonalak görbületéből láthatóan
 túlnyomás van, ezért itt vezetik be a szellőző levegőt.

4.4. A Bernoulli-egyenlet

Az Euler-egyenlet (ld. (4.13), (4.14), (4.16) összefüggéseket) egy differenciálegyenlet, amely kapcsolatot teremt a folyadékgyorsulás és a folyadékra ható erők között – a folyadék sűrűlódásának elhanyagolásával. A műszaki feladatok megoldásánál állandó sűrűség feltételezése mellett általában a v_x , v_y , v_z és p a meghatározandó ismeretlenek. E négy ismeretlen meghatározásához szükséges 4 egyenletet az Euler-egyenlet három komponens egyenlete (ld.(4.16) összefüggés) és a folytonosság tétele (3.25) szolgáltatja. Műszaki feladatok megoldhatók a fenti differenciálegyenletek megoldásával adott peremfeltételek mellett.

Az Euler-egyenlet megoldásának egy igen hatékony módja a (4.14) alakban felírt egyenlet tagjainak az áramlási tér két (pl. 1-gyel és 2-vel jelölt) pontját összekötő vonal menti (hely szerinti) integrálása:

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} d\underline{s} - \int_1^2 \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} d\underline{s} = \int_1^2 \underline{g} d\underline{s} - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \text{grad} p d\underline{s}} \quad (4.29)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a legáltalánosabb alakban felírt Bernoulli-egyenlet milyen feltételek teljesülése esetén hozható egyszerűbb alakra!

a/ Miután (ld. (2.1) összefüggés)

$$\int_1^2 \text{grad} f d\underline{s} = f_2 - f_1, \quad (4.30)$$

a II jelű integrál minden további feltétel nélkül a $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$ alakra hozható.

b/ Ez a vonzó átalakítás a IV jelű integrálon is elvégezhető, ha a \underline{g} **erőtér potenciális** (ld. 2.2. fejezet, 2.8 összefüggés). A $\underline{g} = -\text{grad} U$ helyettesítéssel és az integrálás elvégzésével a (4.29) Bernoulli-egyenlet IV jelű tagja $-(U_2 - U_1)$ alakú lesz.

c/ Az egyenlet I jelű tagja zérus, ha $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{0}$, azaz ha az **áramlás stacionárius**.

d/ A III jelű tag számítása általában nehézséget okozna, ezért törekszünk zérussá tételére.

E tag zérus értékű, ha

- a \underline{v} sebesség zérus,
- a $\text{rot} \underline{v} = \underline{0}$, azaz az **áramlás potenciális**,
- a $d\underline{s}$ a \underline{v} és $\text{rot} \underline{v}$ vektor által kifeszített síkba esik
- a $d\underline{s} \parallel \underline{v}$, azaz **áramvonalon integrálunk**,
- a $d\underline{s} \parallel \text{rot} \underline{v}$, azaz **örvényvonalon** (ld.4.5.fejezet) integrálunk,

– $\underline{v} \parallel \text{rot} \underline{v}$, u.n. Beltrami áramlás.

e/ Az V tagban $\rho = \text{áll.}$ esetén a p/ρ gradiensét kell vonal mentén integrálni, ami a

$-\frac{p_2 - p_1}{\rho}$ eredményre vezet. Ha $\rho = \rho(p)$, akkor a (4.15) összefüggés felhasználásá-

val az V integrál a $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)}$ alakra hozható.

Ha a Bernoulli-egyenletet használjuk, a következő kérdéseket célszerű feltenni és a válaszok alapján a lehetséges egyszerűsítéseket végrehajtani:

- Stacionárius-e az áramlás? Ha nem, van-e olyan (pl. együtt mozgó) koordináta-rendszer, amelyből stacionáriussá tehető?
- Potenciálos-e az áramlás? Ha nem, lehet-e áramvonalon integrálni?
- Potenciálos-e az erőter?
- Állandó-e a sűrűség? Ha nem, csak a nyomástól függ-e?

A műszaki gyakorlatban leggyakrabban előforduló esetekben **az áramlás stacionárius, lehet áramvonalon integrálni, az erőter a Föld nehézségi erőtere, ami potenciálos, a sűrűség pedig állandó.** Ilyen esetben a Bernoulli-egyenlet az alábbi, jól ismert alakban írható fel:

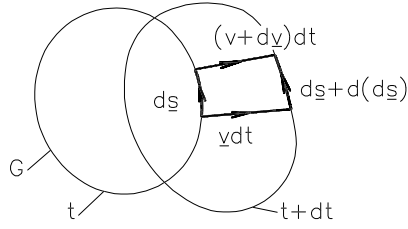
$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2} \quad (4.31)$$

ahol U a Föld nehézségi erőterének potenciálja, ami felfelé mutató z koordináta esetén az $U = g_z z$ összefüggéssel írható le.

A (4.31) összefüggés azt fejezi ki, hogy a fenti feltételek fennállása esetén a $\left(v^2/2 + p/\rho + U\right)$ **Bernoulli-összeg** egy áramvonal mentén állandó. (Potenciálos áramlás esetén a Bernoulli-összeg az egész áramlási térben – és nemcsak áramvonal mentén – állandó.)

4.5. Örvénytételek

Ebben a fejezetben talán túl elméletinek tűnő összefüggéseket fogunk meghatározni, amelyeknek azonban elméleti jelentőségük mellett fontos gyakorlati szerepük is van. Az alábbiakban tárgyalt **örvénytételek a súrlódásmentesség feltételezésével vezethetők le.**



4.5. ábra

Tekintsük a 4.5. ábrát, ahol egy G jelű zárt folyékony vonalat tüntettünk fel. (A folyékony vonal a közeggel együtt úszik el.) Kérdés, hogyan változik a $\Gamma = \oint_G \underline{v} d\underline{s}$ cirkuláció értéke az idő függvényében,

azaz

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_G \underline{v} d\underline{s} = ?$$

(Ha nem írjuk az ellenkezőjét, a körüljárási irány mindig pozitív.) Vizsgáljuk meg $\underline{v} d\underline{s}$ idő szerinti megváltozását! A szorzat deriválási szabályait alkalmazva:

$$\frac{d}{dt}(\underline{v} d\underline{s}) = \frac{d\underline{v}}{dt} d\underline{s} + \underline{v} \frac{d}{dt}(d\underline{s}). \quad (4.32)$$

A (4.32) összefüggés azt fejezi ki, hogy a $\underline{v} d\underline{s}$ szorzat idő szerinti megváltozása a sebességtér és a folyékony vonal elem idő szerinti megváltozására vezethető vissza.

A 4.5. ábra alapján írható:

$$\frac{d}{dt}(d\underline{s}) = \frac{1}{dt} [(\underline{v} + d\underline{v}) dt - \underline{v} dt] = d\underline{v} = \underline{\underline{D}} d\underline{s}.$$

A $d\underline{s}$ folyékony vonal elem megváltozását végpontjainak különböző sebessége okozza. Ezt a sebességkülönbséget a (2.3) összefüggés alapján a derivált tenzor segítségével határozzuk meg. Hogyan lehetne a behelyettesítés után a (4.32) jobb oldalán megjelenő $\underline{v} \underline{\underline{D}} d\underline{s}$ szorzatot másként kifejezni? Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk síkáramlásra.

$$\begin{aligned} \underline{v} \underline{\underline{D}} d\underline{s} &= \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \end{bmatrix} = \\ &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \text{grad} \frac{v^2}{2} d\underline{s}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Mivel a sűrűdásmentesség feltételezésével élünk, a $d\mathbf{v}/dt$ folyadék gyorsulást az Euler-egyenlet alapján fejezhetjük ki. A (4.32) összefüggésbe helyettesítve a (4.13) és (4.33) összefüggéseket, írható:

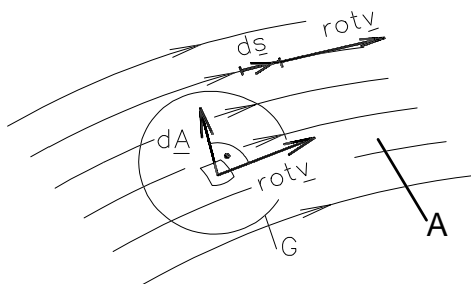
$$\frac{d}{dt} \oint_G \mathbf{v} d\mathbf{s} = \oint_G \left[\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \text{grad} \frac{v^2}{2} \right] d\mathbf{s}. \quad (4.34)$$

Ha a \mathbf{g} erőter potenciális és ha a sűrűség állandó, akkor a p/ρ , a $v^2/2$ és a $-U$ gradienseit kell zárt G görbe mentén integrálni. Figyelembe véve a (4.30) összefüggést, valamint azt, hogy zárt görbe esetén az integrálási tartomány felső és alsó határa egybeesik, a (4.34) összefüggés jobb oldalára zérus érték adódik. (Ha a sűrűség csak a nyomás függvénye, a (4.15) alapján ugyanez az eredmény adódik.).

A Thomson (Lord Kelvin) tétel értelmében – ha az erőter potenciális és a sűrűdásmentes közeg sűrűsége állandó, vagy csak a nyomás függvénye – a sebességtér zárt folyékony vonal menti vonalintegrálja, a cirkuláció az idő függvényében nem változik:

$$\frac{d}{dt} \oint_G \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0 \quad (4.35)$$

Tekintettel arra, hogy a cirkuláció és a sebességtér örvényessége között a Stokes-tétel (2.7) értelmében szoros kapcsolat van, a Thomson-tétel alapján megállapítható, hogy sűrűdásmentes közegben a fenti feltételek fennállása esetén örvényesség nem keletkezhet. Másként megfogalmazva: sűrűdásmentes közeg nyugvó térből (vagy potenciális áramlásból) eredő áramlása potenciális. Valóságos közeg esetén a folyadéksűrűdés következtében pl. szilárd fal mellett keletkezik örvényesség. Örvényességet hozhat létre az is, ha az erőter nem potenciális, például a Coriolis-erőtérnek szerepe van tornádók, ciklonok kialakulásában.



4.6. ábra

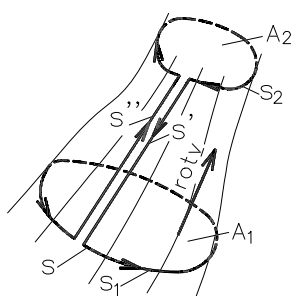
Definiáljuk az **örvényvonalat** az alábbi módon: az örvényvonalat minden pontjában érinti a $\text{rot} \mathbf{v}$ vektor, azaz ha $d\mathbf{s}$ az örvényvonal eleme, akkor $\text{rot} \mathbf{v} \times d\mathbf{s} = 0$. Definiáljuk továbbá az **örvényfelületet**, amely örvényvonalakból áll, és amelyet a $\text{rot} \mathbf{v}$ vektorok érintenek: $\text{rot} \mathbf{v} d\mathbf{A} = 0$, ld. 4.6. ábra. Ve-

gyünk fel egy, az áramló folyadékkal együtt mozgó A folyékony örvényfelületet (4.6. ábra) és azon jelöljük ki egy G folyékony vonalat. Tekintettel arra, hogy az örvényvektorok érintik a felületet, azoknak a G által határolt felületre vett felületi integrálja zérus. Ekkor viszont a (2.7) összefüggéssel megadott Stokes-tétel értelmében a folyékony felületen felvett G zárt folyékony vonalon a sebesség vonalintegrálja, a cirkuláció zérus. **Ha fennállnak a Thomson-tétel levezetésénél tett kikötések (sűrűdásmentes, állandó sűrűségű közeg,**

potenciális erőter), akkor a Thomson-tétel (4.35) értelmében a cirkuláció a G görbe mentén zérus értékű is marad. Következésképpen **egy folyékony örvényfelület mindig megtartja örvényfelület jellegét.**

Belátható, hogy két folyékony örvényfelület örvényvonal mentén metszi egymást, amely az előzőek szerint megtartja örvényvonal jellegét. A metszésvonalon lévő folyadékreszek mindkét folyékony felület részei, ezért mindig a metszésvonal részei maradnak. A metszésvonal tehát mindig ugyanazokból a folyadékreszekből áll.

A Helmholtz I tétele szerint egy örvényvonal, amely két örvényfelület metszésvonala, mindig ugyanazokból a folyadékreszekből áll.



4.7. ábra

Tekintsük a 4.7. ábrát, ahol egy **folyékony örvénycső** (csövet alkotó örvényfelület) látható. Az örvénycső palástján vegyük fel az S zárt folyékony vonalat, amely S_1, S_2, S' és S'' részekből áll. Miután a zárt vonal az örvényfelületen van, a sebesség vonalintegrálja e vonal mentén a Stokes-tétel értelmében zérus. Írjuk fel a cirkulációt az S mentén, figyelembe véve, hogy a sebesség vonalintegrálja S'' -n és S''' -n éppen kiejti egymást:

$$\oint_S \underline{v} \cdot d\underline{s} = \oint_{S_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \oint_{S_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0. \quad (4.36)$$

A körüljárási irányokat az A_1 és A_2 keresztmetszetekhez képest adtuk meg (azaz a (4.36) jobb oldalán a második integrál körüljárási iránya negatív). Azonos (pozitív) körüljárási irány esetén az S_2 görbére vonatkozó integrált pozitív előjellel a másik oldalra vihetjük át:

$$\oint_{S_1} \underline{v} d\underline{s} = \oint_{S_2} \underline{v} d\underline{s},$$

azaz a Stokes-tétel értelmében:

$$\int_{A_1} \text{rot } \underline{v} d\underline{A} = \int_{A_2} \text{rot } \underline{v} d\underline{A}. \quad (4.37)$$

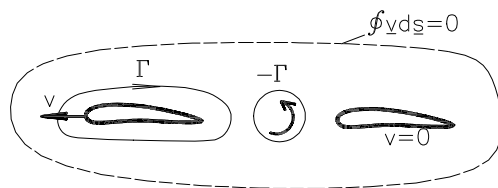
Fentiek alapján megfogalmazható **Helmholtz II tétele: Az örvénycső hossza mentén bármely metszetében $\int_A \text{rot } \underline{v} d\underline{A}$ értéke állandó, és időben sem változik.**

4.8. ábra

Következmény: **az örvénycső nem fejeződhet be az áramló közegben. Vagy zárt gyűrűt alkot, vagy az áramlási tér határáig ér.** (Különben $A \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{rot } \underline{v} \Rightarrow \infty$ következne a tételből.) Helmholtz II. törvénye értelmében zárt gyűrű a füstkarika, amely Helmholtz I. törvénye értelmében „egörzi” a benne lévő füstöt (azaz időben ugyanazokból a folyadékrészekből áll, ld. 4.8. ábra).

Az örvénytételeknél alkalmaztuk az Euler-egyenletet, tehát e tételek valóságos közegeknél addig és olyan mértékben érvényesek, ameddig és amilyen mértékben az Euler-egyenlet. Látni fogjuk a súrlódásos áramlások tárgyalásánál, hogy valóságos közeg áramlása esetén számos esetben jó közelítés a súrlódás hatásának elhanyagolása. Ezért az örvénytételek sok

esetben jó közelítésként, más esetekben a tendenciák meghatározására eredményesen használhatók.



4.9. ábra

A repülőgép szárnyakra felhajtóerő hat, ami annak a következménye, hogy a szárny alatt a nyomás nagyobb, mint felette. Ez a nyomáskülönbség akkor jöhet létre, ha a szárny fölött az áramlási sebesség nagyobb mint alatta, azaz a szárny körül fel-

vett zárt görbén a sebesség vonalintegrálja, a Γ cirkuláció zérustól eltérő. A 8.3 fejezetben mutatjuk be, hogy egy szárnyra ható felhajtóerő egyenesen arányos a szárny körüli cirkulációval. A szárny (pl. egy repülőgép szárny) tehát olyan áramképet hoz létre maga körül, mintha egy örvény lenne. Vegyük körül a nyugvó szárnyat a 4.9. ábrán látható módon egy zárt görbével, amin a cirkuláció nyugvó levegő és álló szárny esetén zérus, és a Thomson-tétel (4.35 összefüggés) értelmében zérusnak kell maradnia, hiszen a szárnytól távol felvett G görbe környezetében az áramlási sebességek kicsinyek, így a Thomson-tétel érvényességét „,lrontó””súrlódás hatása elhanyagolható. Ha mozgásba jön a szárny (elindul a repülőgép), körülötte Γ cirkuláció alakul ki, ami csak akkor lehetséges, ha egy azonos nagyságú, de ellentétes irányban forgó u.n. indulási örvény keletkezik a szárny mögött (ld. 4.9. ábra). Hasonlóan belátható, hogy a szárny megállításkor is egy örvény, a megállási örvény válik le a szárnyról.

A Helmholtz II tétel értelmében viszont ezek nem fejeződhet be az áramlási térben. Milyen mechanizmus eredményeként adódik a zárt örvény hurok?

4.10. ábra

Tekintsük a 4.10. ábrát, ahol egy áramlási térbe helyezett szárny látható felülnézetben. Látható, hogy a szárny mindkét végén folyamatosan úszik le egy-egy ellentétesen forgó örvény, amelyek körüli cirkuláció, megegyezik a szárny körüli cirkulációval. Ezek az örvé-

nyek kötik össze a szárnyat, ill. annak megállása után a megállási örvényt) az indulási örvénnyel, a Helmholtz II törvény értelmében zárt örvényhurkot alkotva. A szárnyvégi örvények keletkezését mutatja a 4.11. ábra is amely $Ma=1.1$ Mach-számmal (ld. később) jellemzett áramlásba helyezett repülőgépmodell körül kialakuló áramlást látunk. A szárnyvégeken keletkező örvényeket, amelyekben a nyomás (és így a sűrűség is) kisebb a környezetinél, a szárnyvéghez csatlakozó, a repülőgép hossz tengelyével párhuzamos sötétebb vonalak mutatják. (A kép többi részét a gázdinamika fejezet tárgyalásánál értelmezzük.)

4.11. ábra

A szárnyvégről leúszó örvények keletkezését elemi áramlástani megfontolás alapján is megérthetjük: a szárnyon úgy keletkezik felhajtóerő, hogy alul a nyomás nagyobb, mint felül. E nyomáskülönbség hatására a szárny végeit megkerülő áramlás alakul ki, amely a szárny körüli áramlással összeadódva két örvényt alkot.

5. Alkalmazások: hidrosztatika, úszás

5.1. Hidrosztatika

E fejezetben azokat az eseteket vizsgáljuk, amelyeknél létezik olyan koordináta-rendszer, amelyből nézve a folyadék nem gyorsul, azaz a (4.13) értelmében a térerősségből és a nyomásból származó erő kiegyenlíti egymást. Nem gyorsul a közeg, ha az adott koordináta-rendszerben áll, vagy egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez. Ez utóbbi esetben viszont egy együttmozgó koordináta-rendszerrel „megállíthatjuk” a közeget. Ezért azon feladatokat, amelyeknél a folyadék gyorsulása $d\mathbf{v}/dt = 0$ **hidrosztatikai feladatoknak** nevezzük.

Tekintsük az Euler-egyenlet (4.13) összefüggésben megadott alakját:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (5.1)$$

Miután a folyadékrészek sebessége zérus, **hidrosztatikai feladatoknál az Euler-egyenlet valóságos (súrlódásos) közegben is elhanyagolás nélkül alkalmazható.** Nyugalomban lévő (newtoni) közegben ugyanis nem lépnek fel csúsztatófeszültségek (ld. 1.11 fejezet (1.2) összefüggés):

Az (5.1) egyenlet bal oldalára zérust írva, átrendezve és ρ -val átszorozva megkapjuk a **hidrosztatika alapegyenletét**:

$$\boxed{\text{grad} p = \rho \mathbf{g}} \quad (5.2)$$

A hidrosztatika alapegyenlete alapján megállapítható, hogy

- a nyomás leggyorsabb változásának (növekedésének) iránya és irányítása megegyezik az erőter térerősség vektorának irányával és irányításával,
- a nyomás változásának mértéke a térerősség abszolút értékével és a közeg sűrűségével arányos.

Ha az erőter potenciális, azaz $\mathbf{g} = -\text{grad} U$, az (5.2) egyenlet átalakítható:

$$\text{grad} p = -\rho \text{grad} U, \quad (5.3)$$

azaz az azonos nyomással jellemezhető $p = \text{áll.}$ felületek (izobárok) és az $U = \text{áll.}$ ekvipotenciális felületek egybeesnek.

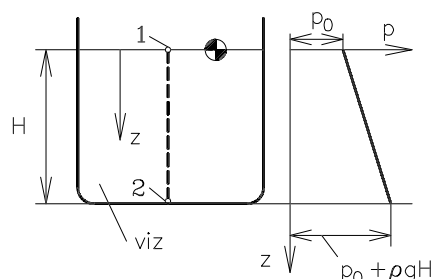
A hidrosztatikai feladatok megoldásánál az (5.2) vagy (5.3) differenciálegyenletet kell integrálni. Ezt már az előző, 4.4. fejezetben megtettük, amikor az Euler-egyenlet vonal menti

integrálásával megkaptuk a Bernoulli-egyenletet. A hidrosztatikai feladatok megoldásánál tehát a Bernoulli-egyenlet tárgyalásánál meghatározott egyenleteket célszerű használni az azal az egyszerűsítéssel, hogy a sebességet (ill. gyorsulást) tartalmazó tagok zérus értékűek.

Így pl. ha az erőter potenciális (hidrosztatikában csak ilyenekkel fogunk találkozni) és a közeg sűrűsége állandó, akkor a Bernoulli-egyenlet (4.29) összefüggésben megadott legáltalánosabb alakjából a (4.31) alakot kapjuk, természetesen a sebesség tagok nélkül:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + U_2 \quad (5.4)$$

Tekintsük az 5.1. ábrát, ahol a Föld nehézségi erőterében lévő tartály látható, amelyben $\rho = 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ sűrűségű víz van. Határozzuk meg a nyomás változását a tartályban!



5.1. ábra

Egyik megoldási lehetőségként induljunk ki a hidrosztatika (5.2) alapegyenletéből. Legyen z lefelé mutató koordináta. Ebben a koordináta-rendszerben $\underline{g} = g \underline{k}$, ahol $g = 9.81 \text{ N/kg}$. Az (5.2) egyenletet kifejtve:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = \rho g \underline{k} \quad (5.5)$$

adódik.

Az összefüggésből látjuk, hogy a nyomás a várakozásnak megfelelően csak a függőleges koordináta mentén változik. Ezért írható: $dp/dz = \rho g$. A differenciálegyenlet megoldása után a

$$p = \rho g z + \text{Konst.} \quad (5.6)$$

összefüggést kapjuk, azaz **a nyomás lefelé lineárisan nő**. A Konst. integrálási állandót úgy határozzuk meg, hogy a folyadéktér egy olyan pontjára írjuk fel az (5.6) összefüggést, ahol ismert a nyomás. Ilyen pont a felszín, ahol írható: ha $z = 0$, akkor $p = p_0$. Behelyettesítve $\text{Konst.} = p_0$ adódik, tehát

$$p = p_0 + \rho g z \quad (5.7)$$

Ha a tartály alján keressük a nyomást, $z = H$ -t kell az (5.7) egyenletbe helyettesíteni.

Másik megoldásként alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlet (5.4) alakját. (esetünkben az erőter potenciális, a közeg sűrűsége állandó). A Bernoulli-egyenlet alkalmazásánál igen fontos

és esetenként találékonyt igénylő feladat a két pont felvétele, amely közötti vonalon az egyenlet az Euler-egyenletet „integrálja”. Általában jól használható az a módszer, amely szerint **az egyik pontot ott vegyük fel, ahol mindent ismerünk, a másikat pedig ott, ahol keresünk valamit és a legtöbb jellemzőt ismerjük.**

Legyen tehát az egyik pont (ahol mindent ismerünk) a felszínen felvett 1 pont, a másik a tartály alján $z=H$ helyen lévő 2 pont (ahol a nyomást keressük). Lefelé mutató z koordináta esetén a Föld nehézségi erőter potenciálja (ld. 2.2. fejezet) $U = -gz$ alakú. Az (5.4) egyenlet egyes tényezőit számbavéve:

$$p_1 = p_0, \quad z_1 = 0, \quad p_2 = ?, \quad z_2 = H.$$

Behelyettesítés és átrendezés után: $p_2 - p_0 = \rho g H$ adódik.

Ha a 2 pontot nem a tartály alján, hanem valamely z változó mélységben vesszük föl, az (5.7) összefüggésre jutunk.

Hogyan kell eljárunk, **ha a tartály felfelé gyorsul a gyorsulással?** Abszolút (a Földhöz rögzített) rendszerből vizsgálva a jelenséget, az semmiképpen nem tartozik a hidrosztatika körébe: a folyadék mozog, sőt gyorsulva mozog, tehát az áramlás instacionárius. Szerencsére találunk egy olyan koordináta-rendszert, amelyből nézve a közeg áll: ez a tartállyal felfelé együtt gyorsuló koordináta-rendszer. **Ha a koordináta-rendszer gyorsul, akkor abban további erőter jelenik meg** (ld. 2.2. fejezet). Esetünkben ez az erőter a tehetetlenségi erőter, amelynek potenciálja a (2.10) összefüggés alapján $U_t = -a z$, hiszen felfelé gyorsuló koordináta-rendszerben felfelé kell munkát végezni, ha elmozdítunk egy tömeget, azaz felfelé (csökkenő z -k irányában) kell növekednie az U_t -nak.

A tartály alján lévő nyomást ugyanúgy kell számolni mint az előbb, de $U = U_g + U_t = -(g+a)z$ összefüggést kell használni az erőter potenciáljára. Eredményül a $p_2 - p_0 = \rho(g+a)H$ kifejezést kapjuk, tehát a tartály felfelé gyorsulása a folyadékra ható súlyerőt mintegy megnövelte.

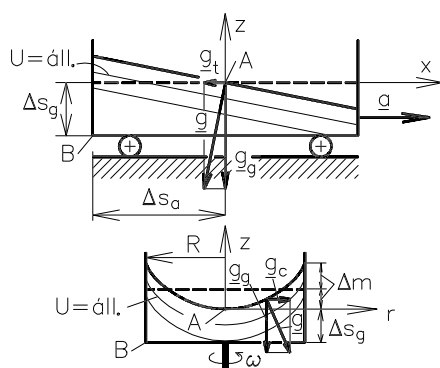
A felfelé gyorsuló tartály felszínéről azt tételeztük fel, hogy nem változik a gyorsulás hatására. Úgy érezzük azonban, hogy pl. gyorsuló teherautón lévő tartályban lévő cseppfolyós közeg felszíne nem marad „vízszintes”. **Milyen kapcsolat van a térerősség és a felszín között?**

Vegyük a hidrosztatika (5.2) alapegyenletének rotációját. Miután $\text{rot}(\underline{g}) = \underline{0}$, a bal oldal zérus lesz. Ezért írható – figyelembe véve a szorzat deriválási szabályait:

$$\text{rot}(\rho \underline{g}) = \rho \text{rot} \underline{g} + \text{grad} \rho \times \underline{g} = \underline{0}.$$

Miután a hidrosztatikai példáinkban előforduló erőkerek potenciálisak, $\text{rot} \underline{g} = \underline{0}$. Ebből következik, hogy $\text{grad} \rho \times \underline{g} = \underline{0}$, azaz a sűrűség legrohamosabb változásának iránya párhuzamos a térerősség vektorral. A közeg sűrűsége a felszínre merőlegesen változik a legrohamosabban, **tehát két különböző sűrűségű közeg elválasztó határolófelület (felszín) minden pontjában merőleges az erőtér (eredő) térerősség vektorára. Ez azt is jelenti, hogy a felszín egybeesik valamely ekvipotenciális felülettel.** (Ez utóbbi megállapítás közvetlenül belátható, ha meggondoljuk, hogy az $U = \text{áll.}$ felületek is merőlegesek \underline{g} -re.)

Megállapítottuk, hogy változó sűrűség esetén a sűrűség leggyorsabb változásának iránya párhuzamos a térerősség vektorral. Kérdés, hogy e vektor irányában elmozdulva csökken vagy nő a sűrűség. Bizonyítható, hogy mindkét eset lehetséges, de **csak a térerősség irányában növekvő sűrűség esetén stabil a rétegződés.**



5.2. ábra

Térjünk vissza a felszín helyzetéhez. Az 5.2. ábrán egy jobbra gyorsuló kocsit és egy hengeres edénnyel együtt merev test szerűen forgó folyadékot látunk. Milyen alakú a felszín és hol helyezkedik el? Ha ugyanis e kérdésekre választ tudunk adni, fel tudjuk írni a Bernoulli-egyenletet a felszín egy pontja és a folyadéktér egy másik, a keresett jellemzőt tartalmazó pontja között. **Gyorsuló kocsi** esetén együtt gyorsuló

koordináta-rendszert veszünk fel, ezért a tehetetlenségi erőtérrel ($\underline{g}_t = -a \underline{j}$) is kell számolni a Föld nehézségi erőtérrel ($\underline{g}_g = -g \underline{k}$) mellett. (Az alkalmazott előjelek az 5.2. ábrán felvett koordináta-rendszerhez igazodnak.)

Az eredő erőtér potenciálja a két erőtér potenciáljának összege. A folyadék felszíne valamely ekvipotenciális felülettel esik egybe. E felületek egyenletét az $U = gz + ax + \text{áll.}$ összefüggésből kaphatjuk:

$$z = -\frac{a}{g}x + K. \quad (5.8)$$

A gyorsuló kocsiban lévő folyadék felszíne tehát sík, amely a $-a/g$ iránytényezőből következően merőleges a \underline{g} eredő erőtérvektorra. Azt, hogy az ekvipotenciális felületsereg melyik elemével esik egybe a felszín, a **folyadékmennyiség állandósága dönti el.** Köny-

nyen belátható, hogy állandó szélességű kocsi esetén a hossz felében lévő "tengely" körül "billen el" a felszín, ha nem vág be a kocsi aljába. (Ezért érdemes a koordináta-rendszer origóját itt felvenni.)

A **forgó edényben** lévő, merev test szerűen forgó folyadékot az együttforgó rendszerből célszerű vizsgálni, amikor a Föld nehézségi erőteréhez a centrifugális erőter járul. A 2.2.fejezetben foglaltak alapján felírható az ekvipotenciális felületek egyenlete:

$$U = gz - \frac{r^2 \omega^2}{2} = \text{áll.}, \text{ azaz } z = -\frac{r^2 \omega^2}{2g} + K. \quad (5.9)$$

Látható, hogy az ekvipotenciális felületek (és az egyikkel egybeeső felszín is) másodfokú forgási paraboloidok.

Ebben az esetben is a folyadék térfogatának állandósága szabja meg, hogy az ekvipotenciális felületsereg melyik eleme a felszín, azaz, hogy egy adott koordináta-rendszerben mennyi a K értéke. A 3.6. fejezetben meghatároztuk egy n -ed fokú forgási paraboloid alatt lévő térfogatot. Ha $n=2$, ez a térfogat a befoglaló henger térfogatának a fele (ld. 5.2. ábra). Ebből következik, hogy a forgó edényben a felszín eredeti, forgás előtti felszínhez képesti legnagyobb lesüllyedése és felemelkedése egymással megegyezik:

$$\Delta m = R^2 \omega^2 / (4g).$$

Ha elegendő tapasztalatot szerzünk hidrosztatikai feladatok megoldásában, a nyomásokat egy egyszerű megfontolással is számolhatjuk. Tudjuk, hogy az erőter ekvipotenciális felületei egybeesnek az állandó nyomású felületekkel (ld. (5.3)). Ha az eredő erőter több erőter összegeként adódik, az egyes erőterek "s,ját" ekvipotenciális felületükön nem okoznak nyomásnövekedést. Ha tehát az egyik erőter-összetevő ekvipotenciális felületén mozdulunk el, a másik erőter összetevő okozhat nyomásnövekedést.

Az ekvipotenciális felületek megtalálása általában nem okoz nehézséget: a Föld nehézségi erőtere esetén vízintes, a tehetetlenségi erőter esetén a térerősség vektorra merőleges síkok, centrifugális erőter esetén a forgástengellyel megegyező tengelyű hengerek. Ha a Föld nehézségi erőterével vagy a tehetetlenségi erőter térerősségvektorával megegyező irányban és irányítással Δs_g ill. Δs_a távolságot mozdulunk el állandó ρ sűrűségű közegben

$$\Delta p_g = \rho g \Delta s_g \quad \text{ill.} \quad \Delta p_a = \rho a \Delta s_a$$

nyomásnövekedés adódik (ellentétes irányban nyomáscsökkenés). Ha ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben, ρ sűrűségű közegben r_1 sugárról egy nagyobb r_2 sugárra megyünk át, a nyomás $\Delta p_c = \rho (r_2^2 - r_1^2) \omega^2 / 2$ értékkel nő a centrifugális erőter hatására.

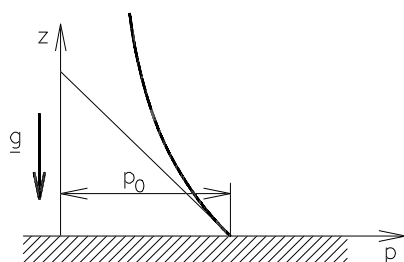
Felhasználva a fentiek az 5.2. ábrán lévő esetekben határozzuk meg a B és A pontban lévő nyomás különbségét:

- a gyorsuló kocsinál: $p_B - p_A = \rho g \Delta s_g + \rho a \Delta s_a$
- a forgó edénynél: $p_B - p_A = \rho g \Delta s_g + \rho R^2 \omega^2 / 2$.

Az eddigiekben vizsgált esetekben a $\rho = \text{áll.}$ feltételezéssel éltünk, ami cseppfolyós halmazállapotú közegeknél a valóságnak igen jól megfelel. A gázok sűrűsége azonban a nyomás nagyobb változása esetén jelentősen változhat. (Az (1.5) gáztörvény értelmében a ρ sűrűség $T = \text{áll.}$ esetben a nyomással arányos.) Mi a teendő akkor, ha a sűrűség nyomás változása miatti változása nem hanyagolható el pl. meghaladja a 10%-ot?

Ha a sűrűség a nyomás függvénye, akkor használható a Bernoulli-egyenlet általános alakja (4.29) a bal oldal zérus értéke mellett figyelembe véve a (4.15) átalakítást. Potenciális erőter feltételezésével:

$$(U_2 - U_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)} = 0. \quad (5.10)$$



5.3. ábra

Általánosságban (pl. ha a ρ nem a p -től függ, hanem pl. még a hőmérséklettől és a nedves-ségtartalomtól is), a hidrosztatika (5.2) alapegyenletéhez (azaz az Euler-egyenlethez) célszerű visszanyúlni. Legyen a feladat az atmoszférában lévő nyomásmegoszlás meghatározása állandó levegő-hőmérséklet ($T = \text{áll.}$) mellett. Vegyünk fel egy fel-

felé mutató z koordinátát (ld. 5.3. ábra). E koordináta-rendszerben a Föld nehézségi erőtere $\underline{g} = -g \underline{k}$ vektortérrel írható le.

Alkalmazzuk a hidrosztatika (5.2) alapegyenletét:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = \rho (-g \underline{k}).$$

Ismét látjuk, hogy a nyomás csak a z koordináta függvénye, ezért írható:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(p) g,$$

ahol az (1.5) gáztörvény értelmében $\rho(p) = \frac{p}{RT}$.

Behelyettesítés és a differenciálegyenlet szétválasztása után az alábbi integrálás elvégzésével határozhatjuk meg a keresett $p = p(z)$ függvénykapcsolatot:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{g dz}{R T} \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = - \frac{g z}{R T} \Rightarrow \boxed{p = p_0 e^{-\frac{g}{R T} z}} \quad (5.11)$$

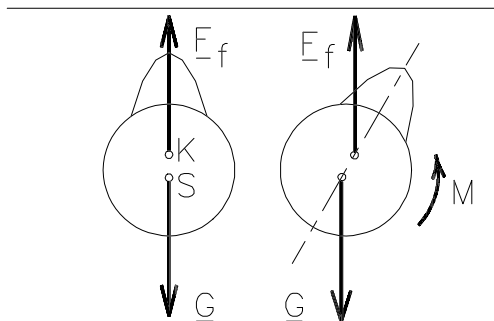
Az 5.3. ábrába felvittük az (5.11) nyomásváltozást, amelynek a kezdeti ($z = 0$ -hoz tartozó) érintője megegyezik az állandó sűrűség feltételezésével adódó nyomásváltozás egyenesével.

Megjegyezzük, hogy a valóságban a hőmérséklet felfelé haladva általában csökken.

5.2. Testek úszása

Az Euler-egyenlet levezetésénél láttuk (ld. 4.2. fejezet), hogy ha egy ΔV térfogatú testet egy $\text{grad } p$ nyomásgradienssel jellemzett térbe helyezünk, akkor arra $\Delta \underline{F} \equiv -\text{grad } p \Delta V$ erő hat. A hidrosztatika (5.2) alaptörvényét behelyettesítve $\Delta \underline{F} = -\rho g \Delta V$ adódik, azaz a ρ sűrűségű közegbe merített ΔV térfogatú testre ható erő irányítása ellentétes az erőtérvекtor irányításával, nagysága pedig megegyezik a ΔV térfogatú folyadékra ható, erőtérből származó erővel. (A Föld nehézségi erőterében „felhajtóerőről” beszélhetünk, amely nagysága megegyezik a „kiszorított folyadék súlyával”. Ugyanilyen „felhajtóerő” mozgatja gyorsuló autóbuszon a hidrogénnel töltött léggömböt előre, a vezetőfülke felé.)

Ha egy V térfogatú testet a Föld nehézségi erőterében ρ sűrűségű (cseppfolyós vagy lég-nemű) folyadékba merítünk, arra $F_f = \rho g V$ felhajtóerő hat (amit támasztóerőnek is neveznek). A támasztóerő átmegy a köbtartalom középponton, ami a homogén tömegeloszlás esetén megegyezik a súlyponttal.

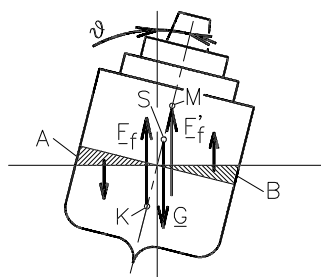


5.4. ábra

Egy test akkor úszik, ha átlagos sűrűsége megegyezik a cseppfolyós közeg ρ sűrűségével, vagy kisebb annál. Utóbbi esetben csak addig merül a vízbe a test, amíg a bemerülő rész által kiszorított folyadék súlya megegyezik a test súlyával. A súlyerő és a felhajtóerő egyensúlya mellett az úszó test **stabilitásának** van jelentősége, amit az úszó test az elfordulással szemben mutat.

Nyilvánvaló a test stabilitása, ha **S** súlypontja a közegbe merülő rész **K** térfogatközéppontja alatt van (ld. 5.4. ábra). Ekkor elfordulás esetén egy, az elfordulást csökkentő **M** nyomaték keletkezik.

A test alakjától függő elfordulási szögig stabilis lehet annak a testnek, pl. hajónak az egyensúlya is, amelynél az **S** súlypont a kiszorított térfogat **K** középpontja felett van. (Ezt kezdeti stabilitásnak nevezzük, mert a viszonyoktól függő értéknél nagyobb kitérés esetén a hajó felborul.) Tekintsük az 5.5. ábrát!



5.5. ábra

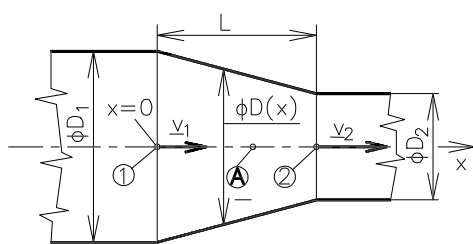
Az ábrán látható hajótest szimmetria-síkja a függőlegeshez képest szöggel tért ki. Az ábrán láthatók az **S** súlyponton és a **K** térfogati középponton átmenő **G** súlyerő és F_f felhajtóerő a hajó kitérése előtti helyzetre vonatkoztatva. A kitérés hatására a súlypont és a súlyerő, valamint a felhajtóerő nagysága nem változott meg, de a felhajtóerő támadásvonala eltolódott. A kitérés hatására ugyanis a hajótest **A** jelű, ék alakú része kikerült a vízből, a **B** jelű viszont belemerült.

Az eredeti, kitérés előtti helyzethez képest tehát egy erőpár keletkezett. Ez eltolta a felhajtóerőt, amelynek támadásvonala az **M** metacentrumban metszi a szimmetriasíkot. **Ha az S súlypont az M metacentrum alatt van, akkor a hajó egyensúlyi helyzete stabil**, hiszen kitérés esetén egy azzal ellentétes (visszatérítő) nyomaték keletkezik.

6. Alkalmazások: súrlódásmentes áramlások elemzése, számítása

Ebben a fejezetben példaként néhány feladatot oldunk meg, felhasználva az eddig tanultakat. Az áramló közeg súrlódásmentes és összenyomhatatlan.

6.1. Áramlás konfúzorban



6.1. ábra

Tekintsük a 6.1. ábrát, ahol egy konfúzor látható, amelyben víz áramlik. Mekkora a nyomásgradiens a tengely **A** pontjában, $t = t_1$ pillanatban ha a belépő sebesség $|\underline{v}_1| = v_0(1+t^2)$ függvény szerint változik?

Miért változik a nyomás a konfúzorban? Az áramló folyadékrészek gyorsulnak, ami csak erő hatására mehet végbe. Tekintettel arra, hogy a súrlódás nem játszik szerepet és a súlyerő az áramlásra merőleges, tehát csak a nyomás hely szerinti változása gyorsíthatja a közegrészeket.

A gyorsulás és a nyomásgradiens között az Euler-egyenlet teremt kapcsolatot (4.13), amelyből kifejezve a nyomásgradienst

$$\text{grad} p = -\rho \frac{d\underline{v}}{dt} \quad (6.1)$$

összefüggés adódik. (A térerősségnek nincsen vízszintes irányú komponense, ezért nem befolyásolja a nyomás változását.) A $d\underline{v}/dt$ folyadékrész gyorsulása a (4.3) összefüggés szerint lokális és konvektív részből áll:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{D} \underline{v}.$$

A fenti összefüggés kifejtése komponensegyenletekben a (4.2) kifejezésben látható. Miután a konfúzor tengelyében $v_y = v_z = 0$ és $\partial v_y / \partial x = \partial v_z / \partial x = 0$, a (4.2) kifejezésből megállapítható, hogy

$$\left. \frac{d\underline{v}}{dt} \right|_A = \left(\left. \frac{\partial v_x}{\partial t} \right|_A + v_{xA} \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_A \right) \underline{i}. \quad (6.2)$$

A v_x sebességkomponens hely és idő szerinti változásának számításánál felhasználjuk a folytonosság tételének (3.29) alakját, ami a ρ sűrűség állandósága miatt (ami víz esetén igen jó közelítés) a

$$\bar{v}_1 D_1^2 = \bar{v}(x) D^2(x) \quad (6.3)$$

összefüggésbe megy át.

A tengelyben lévő v_x sebességet egyenlőnek vesszük a \bar{v} átlagsebességgel. Ezért valamely x koordináthoz tartozó v_x sebesség a

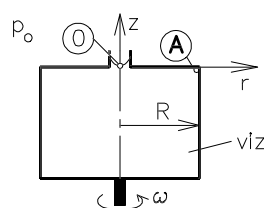
$$D(x) = D_1 - \frac{D_1 - D_2}{L} x \quad (6.4)$$

összefüggéssel kifejezhető konfúzorátmérő ismeretében a (6.3) és (6.4) alapján felírható:

$$v_x = \frac{v_0 (1 + t^2) D_1^2}{\left(D_1 - \frac{D_1 - D_2}{L} x \right)^2} \quad (6.5)$$

A (6.5) kifejezést először t másodszor x szerint differenciálva, x helyébe mindkét kifejezésnél $x_A - t$, t helyébe $t_1 - t$ helyettesítve majd az így kapott értékeket a (6.2) összefüggésbe beírva megkapjuk a keresett gyorsulást. Ebből a nyomásgradiens a (6.1) összefüggésbe való helyettesítéssel adódik.

6.2. Nyomás változás forgó edényben



6.2. ábra

Tekintsük a 6.2. ábrát, ahol egy henger alakú, vízzel töltött, $\omega [1/s]$ szögsebességgel forgó edény látható. Az edény felső lapján a forgástengelyben lévő nyílás köti össze a merev testként forgó folyadékot a környezettel. Határozzuk meg az **A** pontban lévő nyomás és a külső p_0 nyomás különbségét.

Három különböző módszert alkalmazunk a feladat megoldására:

- együttforgó koordináta-rendszerrel „megállítjuk” a folyadékot, majd alkalmazzuk a **hidrosztatika** módszereit;
- az álló koordináta-rendszerben áramló közegre felírjuk a **Bernoulli-egyenletet**;
- az álló koordináta-rendszerben áramló közegre alkalmazzuk a **természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenletet**.

a/ A folyadék együttforgó koordináta-rendszerből vizsgálva áll, ugyanakkor – mivel a koordináta-rendszer forog – figyelembe kell venni a centrifugális erőteret. A **O** pontból az **A** pontba a Föld nehézségi erőterének ekvipotenciális felületén haladhatunk, ezért az nem okoz nyomásnövekedést. Alkalmazva a **O** és **A** pont között az (5.4) összefüggést és figyelembe véve, a centrifugális erőter potenciáljának (2.10) kifejezését a nyomáskülönbségre a

$$p_A - p_0 = -\rho(U_A - U_0) = -\rho\left(-\frac{R^2\omega^2}{2} - 0\right) = \rho\frac{R^2\omega^2}{2}$$

összefüggés adódik, ahol ρ a víz sűrűsége.

b/ Írjuk fel az abszolút rendszerben a Bernoulli-egyenlet (4.29) összefüggéssel megadott legáltalánosabb alakját!

$$\underbrace{\int_0^A \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s}}_I + \underbrace{\int_0^A \text{grad} \frac{v^2}{2} d\underline{s}}_{II} - \underbrace{\int_0^A \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} d\underline{s}}_{III} = \underbrace{\int_0^A \underline{g} d\underline{s}}_{IV} - \underbrace{\int_0^A \frac{1}{\rho} \text{grad} p d\underline{s}}_V. \quad (6.7)$$

Esetünkben az abszolút sebességtér stacionárius, ezért az I integrál zérus értékű. A II integrál $(v_A^2 - v_0^2)/2$ alakra hozható. (ld. 4.4 fejezet) A III integrált nem tehetjük egyenlővé zérussal (4.4. fejezet), hiszen az áramlásban a $\text{rot} \underline{v}$ nem zérus, és – mivel az áramvonalak koncentrikus körök – nem lehet **O**-ból áramvonalon **A**-ba jutni. A IV tagnál figyelembe kell venni, hogy – mivel az álló rendszerből vizsgáljuk a jelenséget – csak a Föld nehézségi erőtere játszhat szerepet, \underline{g} azonban merőleges $d\underline{s}$ -re, ezért a IV integrál esetünkben zérus értékű. Tekintettel arra, hogy a közeg összenyomhatatlan, az V integrál $-(p_A - p_0)/\rho$ alakra hozható.

Ezek figyelembevételével:

$$p_A - p_0 = \rho \int_0^A \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} d\underline{s} - \rho \frac{v_A^2 - v_0^2}{2}. \quad (6.8)$$

Abszolút rendszerben az áramlás koncentrikus kör alakú áramvonalakkal jellemzett sík-áramlás, ahol a sebesség csak a sugár függvénye: $v = \omega r$. Ebben az esetben a $\text{rot} \underline{v}$ -nek csak forgástengellyel \parallel komponense van, amelyet a (3.8) összefüggéssel lehet meghatározni: $(\text{rot} \underline{v})_z = dv/dr + v/r$. Ebből esetünkben $(\text{rot} \underline{v})_z = 2\omega$ adódik. Keressük az egymásra merőleges \underline{v} , $\text{rot} \underline{v}$ és $d\underline{s}$ vektorok vegyes szorzatát. Tekintettel arra, hogy e három vektor jobbsodrású rendszert alkot és $|d\underline{s}| = dr$, a (6.8) kifejezésben szereplő integrál egyszerűen átalakítható. Figyelembe véve továbbá, hogy $v_A = R\omega$ és $v_0 = 0$, a (6.8) összefüggés a (6.6)-tal megegyező alakra hozható:

$$p_A - p_0 = \rho \int_0^R (r \omega)^2 dr - \rho \frac{R^2 \omega^2}{2} = \rho R^2 \omega^2 - \rho \frac{R^2 \omega^2}{2} = \rho \frac{R^2 \omega^2}{2}. \quad (6.9)$$

c/ Lényegesen egyszerűbb megoldás is van az abszolút rendszerben. Írjuk fel az Euler-egyenlet normális irányú komponens egyenletét természetes koordináta-rendszerben (ld. 4.3. fejezet, (4.27) összefüggés)

$$\frac{v^2}{R_g} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - g_n. \quad (6.10)$$

Az R_g áramvonal görbületi sugara esetünkben egyenlő a kör alakú áramvonal r sugarával, a dn normális irányú elemi elmozdulás esetünkben dr -rel egyenlő (mert az áramvonalak koncentrikus körök). A g_n esetünkben zérus értékű. Fenti megfontolásokkal átírva, szétválasztva, majd integrálva a differenciálegyenletet, a következő adódik:

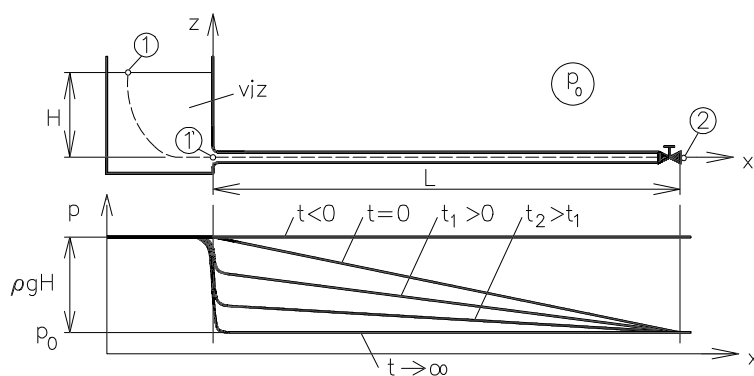
$$\int_{p_0}^{p_A} dp = \int_0^R \rho \frac{v^2}{r} dr = \int_0^R \rho r \omega^2 dr \Rightarrow p_A - p_0 = \rho \frac{R^2 \omega^2}{2}. \quad (6.11)$$

6.3. Kiömlés tartályból

Tekintsük a 6.3. ábrát, ahol egy tartály látható, amelyben víz van. (A vízfelszínt tekintsük végtelen nagynak, azaz hanyagoljuk el a süllyedését.) A tartály hengeres falának alsó részéből egy L hosszúságú, állandó keresztmetszetű cső nyúlik ki, amelynek végén egy csap van, amelyet „hirtelen” (rövid – elvileg zérus – időtartam alatt) ki lehet nyitni. Nyilvánvaló, hogy a folyadék nem a nyitás pillanatában éri el a stacionárius kiáramlási sebességet, hanem csak bizonyos idő múlva. Hogyan lehetne a jelenséget leírni?

Írjuk fel a Bernoulli-egyenlet (4.29) összefüggésben megadott legáltalánosabb alakját:

$$\underbrace{\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s}}_I + \underbrace{\int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} d\underline{s}}_{II} - \underbrace{\int_1^2 \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} d\underline{s}}_{III} = \underbrace{\int_1^2 \underline{g} d\underline{s}}_{IV} - \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{\rho} \text{grad} p d\underline{s}}_V. \quad (6.12)$$



6.3 ábra

Vizsgáljuk meg a 4.4.fejezetben leírtak alapján, hogy hogyan lehetne a (6.12) összefüggést egyszerűsíteni.

Az **I integrál** nyilvánvalóan nem zérus, hisz éppen a folyadék gyorsulását kívánjuk meghatározni, és nincs is olyan koordináta-rendszer, amelyből nézve az áramlás stacionáriussá tehető.

A **II integrálon** hajtsuk végre a szokásos átalakítást, amelynek eredményeként $(v_2^2 - v_1^2)/2$ adódik.

A **III integrál** vizsgálata előtt döntsük el, hogy hogyan vesszük fel az 1 és 2 pontokat, amelyek között az integrálást végrehajtjuk. Az egyik pont lehetőség szerint ott legyen, ahol mindent tudunk: legcélszerűbb a felszínen. A másik pontot ott vesszük fel, ahol az ismeretlen fizikai mennyiséget keressük és lehetőleg minél több változó értékét ismerjük: ez a pont célszerűen a cső vége, a kiömlés helye, ahol a hely és a nyomás ismert, és a sebességet és gyorsulást keressük. Az 1 és 2 pont felvehető úgy, hogy egy áramvonalon legyen, ezért a **III integrál** zérus értékű. (Valóságban az 1' és 2 pontok között áramvonalon integrálunk 1' és 1 között pedig – amint azt később látjuk - $\underline{v} \cong 0$

Figyelembe véve, hogy az abszolút (Földhöz rögzített) koordináta-rendszerből vizsgáljuk a jelenséget, így csak a Föld nehézségi erőterével kell számolnunk, ami potenciális. Ezért a **IV integrál** a $-(U_2 - U_1)$ alakra hozható.

Tekintettel arra, hogy az áramló közeg víz, amelynek sűrűsége állandó, az **V integrál** a $-(p_2 - p_1)/\rho$ összefüggésbe alakítható át.

A fentiek figyelembe vételével (6.12) az alábbi alakra hozható:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right]_1^2 = 0 \quad (6.13)$$

A (6.13) összefüggést szándékosan írtuk fel ebben a szokatlan alakban, mert így világosan látszik, hogy az „instacionárius tagot” az integrál felső határához tartozó Bernoulli-összeghez kell hozzáadni. Esetünkben $U = gz$, mert a z koordináta felfelé mutat és tudjuk, hogy a potenciálnak abban az irányban kell növekednie, amerre munkát végzünk, ha egy testet elmozdítunk.

Határozzuk meg az egyes tagok értékét a cső végén lévő csap kinyitása után. **Az 1-es pontban és a tartályban a sebesség zérusnak tekinthető a kiömlés környezetétől eltekintve**, mert a tartály felszíne (keresztmetszete) olyan nagy a cső keresztmetszetéhez képest, hogy a folyadékfelszín süllyedési sebessége elhanyagolható. Ugyanitt $p_1 = p_0$, $z = H$, ha a $z = 0$ szintet a 2-es pont magasságában vesszük fel (ld. 6.3. ábra). **A 2-es pontban** $z = 0$ és a keresett sebesség $v_2 = v(t)$. Mekkora a nyomás a kiömlő (2) keresztmetszet tengelyében? Erre a kérdésre a természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenlet ismeretében adhatunk választ. Miután egy csőből kiömlő folyadéksugárban felülről nézve az áramvonalak párhuzamos egyenesek, a (4.27) egyenlet bal oldalának nevezőjében szereplő R áramvonal görbületi sugara ∞ , ezért a nyomás vízszintesen, az áramvonalakra merőlegesen nem változik. Így a **kiömlő keresztmetszetben a nyomás a külső nyomással egyenlő**: $p_2 = p_0$. (Oldalról nézve a sugár a súlyerő és nem a nyomáskülönbség hatására hajlik le.)

A gyorsulás vonalintegrálját az alábbi megfontolások alapján fejezzük ki. Ha a tartály elegendően nagy, akkor benne a sebesség elhanyagolható, de akkor a gyorsulás is jó közelítéssel zérus. Ezért az integrálási útvonalat két részre osztjuk: 1-1' és 1'-2 szakaszra:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} = \int_1^{1'} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \int_{1'}^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} \quad (6.14)$$

A jobb oldal első tagja 0, mert a végtelen nagynak tekintett tartályban a közeg gyorsulását elhanyagolhatjuk. A jobb oldal második tagjának meghatározásához tegyünk néhány megállapítást. A $\partial \underline{v} / \partial t$ gyorsulásvektor, amelynek abszolút értékét a -val jelöljük, párhuzamos a $d\underline{s}$ vektorral a cső tengelyében lévő integrálási útvonalon. (Ha a gyorsulásnak lenne cső-tengelyre merőleges komponense, akkor cső-tengelyre merőleges sebességkomponens „keletkezne”, ami szimmetria okokból nem lehetséges.) Tételezzük fel, hogy előre nem ismerjük a folyadékgyorsulás irányítását. Ilyen esetben felveszünk egy pozitívnak feltételezett irányítást, és az eredmény előjele mutatja meg a gyorsulás tényleges irányítását. Vegyük fel pozitívnak a cső 2 kiömlő keresztmetszete irányába mutató gyorsulást. Tekintve, hogy a

$\partial \underline{v} / \partial t$ és a $d\underline{s}$ vektor iránya és irányítása megegyezik, az integrandusz az $(a \, ds)$ alakban írható, ahol $ds = |d\underline{s}|$.

Hogyan változik a cső hossza mentén a gyorsulás? Ha $\rho = \text{áll.}$, a kontinuitásból következően a cső bármely keresztmetszetében egy adott pillanatban azonosnak kell lennie a térfogat-áramnak: $v_1 A_1 = v_2 A_2$. Ebből következik, hogy

$$a_1 A_1 = a_2 A_2, \quad (6.15)$$

ugyanis belátható, hogy a keresztmetszet-viszonnyal fordítottan arányos sebességviszony csak hasonlóan fordítottan arányos lokális gyorsulás-viszony esetén jöhet létre. Ebből következik, hogy állandó sűrűségű közeg lokális gyorsulása állandó keresztmetszetű csőben nem változik a csőhossz mentén. Ezért a (6.14) összefüggés az alábbiak szerint alakítható át:

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} d\underline{s} = \int_1^2 a \, ds = a L. \quad (6.16)$$

Helyettesítsük (6.16) összefüggést (6.13)-ba, figyelembe véve, hogy v csak t függvénye:

$$\frac{dv}{dt} L + \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + g H. \quad (6.17)$$

Stacionárius esetben ($\frac{dv}{dt} = 0$) felírva a Bernoulli-egyenletet 1 és 2 pont között egyszerűsítés után adódik:

$$\frac{v_{st}^2}{2} = g H, \quad (6.18)$$

ahol v_{st} a stacionárius áramláshoz tartozó sebesség a csőben.

A (6.18) összefüggést (6.17)-be helyettesítve és a differenciál-egyenletet szétválasztva kapjuk:

$$\frac{dv}{v_{st}^2 - v^2} = \frac{dt}{2 L}.$$

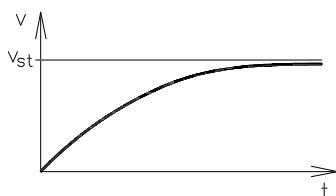
Átalakítás után integrálhatunk:

$$\int_0^{\frac{v}{v_{st}}} \frac{d \frac{v}{v_{st}}}{1 - \left(\frac{v}{v_{st}} \right)^2} = \frac{v_{st}}{2L} \int_0^t dt . \quad (6.19)$$

Integrálás után az arth $\frac{v}{v_{st}} = \frac{t v_{st}}{2L}$ összefüggés adódik. Bevezetve a $\tau = \frac{2L}{v_{st}}$ jelölést, ahol τ az az időtartam, ami alatt a csőhossz kétszerese v_{st} sebességgel megtehető.

Fenti jelöléssel:

$$\frac{v}{v_{st}} = \tanh \frac{t}{\tau} . \quad (6.20)$$



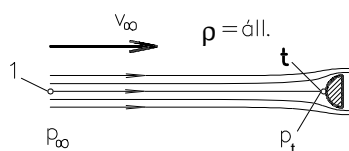
6.4. ábra

A (6.20) függvénykapcsolatot a 6.4. ábra mutatja be. Látható, hogy a kiáramlás sebessége a stacionárius sebességet aszimptotikusan közelíti.

A 6.3. ábrán feltüntettük a cső tengelyében és a tartályban a nyomás megoszlását a csap kinyitása előtti és utáni pillanatokban. A csap nyitása előtt ($t < 0$) a nyomás mindenütt $p_0 + \rho g H$. A csap nyitásának pillanatában ($t = 0$) a teljes $\rho g H$ nyomáskülönbség a csőben lévő folyadékoszlop gyorsítására „fordítódik”. Ahogy telik az idő ($t > 0$), a $\rho g H$ nyomáskülönbség egyre nagyobb része szükséges a tartályban lévő folyadék v sebességre történő felgyorsításához és egyre kevesebb jut a folyadékoszlop gyorsítására. Elvileg végtelen idő elteltével a kiömlési sebesség eléri a $v_{st} = \sqrt{2gH}$ értéket.

Természetesen a valóságban a csőben fellépő súrlódás következtében a nyomás stacionárius állapotban sem lesz állandó a cső hossza mentén.

6.4. A statikus-, a dinamikus, és az össznyomás



6.5. ábra

Ha ρ állandó sűrűségű, p_∞ nyomású közeg v_∞ sebességgel áramlik és az áramló közegbe egy szilárd testet helyezünk el (6.5. ábra), a testen találunk egy olyan pontot – a **torlópontot** – ahol az áramlási sebesség zérus, azaz a torlópontba tartó áramvonalon a folyadékrészek teljesen

lefekésződnek. Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet az **1** és a **t** (torló)pont közé. (Az **1** pontban a zavartalan v_∞ sebesség uralkodik, ami a test zavaró hatása következtében a test előtt elvi-

leg csak végtelen távolságban igaz. Gyakorlatilag elegendő a test előtt a test áramlásra mérőleges méretének kb. öt-tízszerese távolságba elhelyezni az **1** pontot ahhoz, hogy a test előrehatása elhanyagolható legyen.)

Az áramlás stacionárius, áramvonalon integrálunk, a Föld nehézségi erőterében vagyunk, de \underline{g} merőleges az integrálási útvonalra, $\rho = \text{áll.}$, ezért a (4.31) alakú Bernoulli-egyenletet alkalmazzuk ρ -val való átszorzás után, azaz nyomás mértékegységben:

$$p_{\infty} + \frac{\rho}{2} v_{\infty}^2 = p_t = p_{\delta} \quad (6.21)$$

Látható, hogy a torlópontban lévő p nyomás nagyobb, mint a zavartalan áramlásban uralkodó p_{∞} **statikus nyomás**. A **torlóponti nyomást össznyomásnak** nevezzük és p_{δ} -vel jelöljük. Az össznyomás és a statikus nyomás különbsége:

$$p_d = \frac{\rho}{2} v_{\infty}^2, \quad (6.22)$$

amit **dinamikus nyomásnak** nevezzük.

Össznyomásnak (p_{δ}) megállított közeg nyomását nevezzük. Látható, hogy az össznyomás a potenciált tartalmazó taggal (pU) különbözik a (4.31) összefüggés kapcsán definiált Bernoulli-összeg ρ -szorosától. **Ha tehát a közeg súrlódásmentes, az áramlás stacionárius, az erőter hatásától eltekintünk és a sűrűség állandó akkor a Bernoulli-egyenlet azt fejezi ki, hogy**

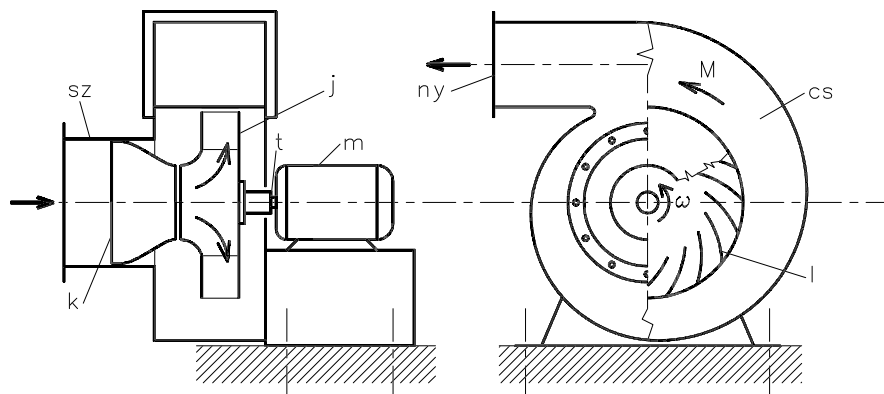
- **potenciális áramlásban az össznyomás állandó, vagy**
- **örvényes áramlásban az össznyomás egy áramvonal mentén állandó.** (Az össznyomás örvényes áramlásban áramvonalról áramvonalra változik. Példaként tekintsük az 1.2. ábrán látható áramlást, ahol a párhuzamos egyenes áramvonalakra mérőlegesen a természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenlet értelmében nem változik a nyomás (ld. (4.27) összefüggés). Miután azonban a sebesség minden áramvonalon más, a (6.21) összefüggéssel definiált össznyomás változik az áramvonalakra mérőleges irányban.

A közeg megállításakor megfigyelhető nyomásnövekedés reális (molekuláris szerkezetű) közegekben az alábbi módon magyarázható. A molekulák, mint az első fejezetben említettük, rendezetlen hőmozgást és erre szuperponálódó, általában sokkal lassabb, rendezett mozgást végeznek, amit a közeg sebességének nevezzük. Ha feltesszük, hogy a közeg és a környezete között nincsen hőcsere, akkor a lassuló áramlásban lévő molekulák rendezett sebességük csökkenése révén növelik rendezetlen sebességüket, azaz nő a közeg hőmér-

séklete és az egységnyi felületre ható, a molekulák ütközéséből származó erő, azaz a nyomás.

6.5. Radiális ventilátor, Euler-turbinaegyenlet

Tekintsük a 6.6. ábrát, ahol egy radiális ventilátor vázlata látható.



6.6. ábra

A súrlódásmentesnek tekintett közeg az (sz) jelű szívócsonton jut be a gépbe, egy álló konfúzor (k) vezeti a forgó járókerékhez (j), amely az (m) motor (t) tengelyére van rögzítve. A közeg radiális irányba fordul és áthalad a járókerék (I) lapátjai között. A motor M [Nm] nyomatékot fejt ki az ω [1/s] szögsebességgel forgó járókerékre. E nyomaték hatására a járókeréken áthaladó közeg forgás irányában eltérül. Bejut a (cs) jelű csigaházba, majd a (ny) nyomócsonton keresztül hagyja el a gépet.

A ventilátorok feladata a **szállított közeg össznyomásának növelése**. Az előzőek szerint az **össznyomásnövekedés** a

$$\Delta p_{\delta} = p_{ny\delta} - p_{sz\delta} = \left(p + \frac{\rho}{2} v^2 \right)_{ny} - \left(p + \frac{\rho}{2} v^2 \right)_{sz} \quad (6.23)$$

összefüggésből számolható.

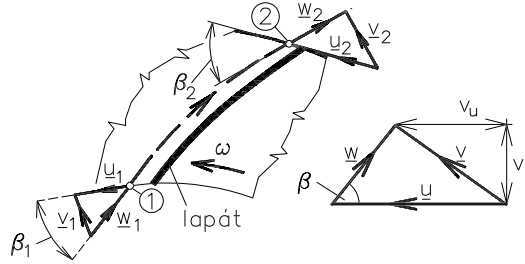
A ventilátor **hasznos teljesítményét** (ami súrlódásmentes esetben a bevezetett teljesítménnyel egyenlő) a

$$P = q_v \Delta p_{\delta} \quad (6.24)$$

összefüggés fejezi ki, ahol q_v [m³/s] a ventilátor által szállított térfogatáram.

A fogalmak meghatározása után vizsgáljuk meg, hogy hogyan lehetne az össznyomásnövekedést a Bernoulli-egyenlet alkalmazásával kiszámolni! Írjuk fel az egyenletet a lapátrács

előtti **1** és az utáni **2** pont között. Abszolút rendszerben a lapátok mozgása következtében az áramlás instacionárius, ezért a relatív (együttforgó) rendszerben – ahol az áramlás stacionárius – alkalmazzuk a Bernoulli-egyenletet.



6.7. ábra

Tekintsük a 6.7. ábrát, ahol a lapátok előtti (1) és mögötti (2) pontban felrajzoltuk a \underline{v} abszolút, \underline{w} relatív és \underline{u} szállító (kerületi) sebesség vektorokat. Írjuk fel a relatív rendszerben a (4.29) összefüggésben megadott Bernoulli-egyenletet:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} d\underline{s} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} - \int_1^2 \underline{w} \times \text{rot } \underline{w} d\underline{s} = \int_1^2 \underline{g} d\underline{s} - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \text{grad } p d\underline{s}. \quad (6.25)$$

I II III IV V

Az I integrál zérus, miután a \underline{w} relatív sebességtér stacionárius. A III integrál is zérus, mert **1** és **2** pontok lehetnek azonos relatív áramvonalon. Hamarosan látni fogjuk, hogy ha nem áramvonalon integrálunk, de a ventilátor nyugvó közegből szív, a III tag kiesik. Az V integrált $p=\text{áll.}$ következtében $-(p_2 - p_1)/\rho$ alakra hozhatjuk.

A IV integrál kifejtése némi megfontolást igényel. Miután a koordináta-rendszerünk forog, a centrifugális erőterrel kell számolnunk. Ez lényegesen meghaladja a Föld nehézségi erőterét, ezért ez utóbbit elhanyagoljuk. Tudjuk továbbá, hogy ha forgó rendszerben egy tömeg elmozdul, arra a Coriolis-erőtér hat, amely a

$$\underline{g}_{\text{Cor}} = 2 \underline{w} \times \underline{\omega} \quad (6.26)$$

összefüggéssel írható fel. Figyelembe véve, hogy a centrifugális erőter potenciális

$\underline{g}_c = -\text{grad } U_c$ továbbá $U_c = -\frac{r^2 \omega^2}{2}$, a IV integrál az alábbi alakra hozható:

$$\int_1^2 \underline{g} d\underline{s} = \left(\frac{r_1^2 \omega^2}{2} - \frac{r_2^2 \omega^2}{2} \right) + \int_1^2 2 \underline{w} \times \underline{\omega} d\underline{s}, \quad (6.27)$$

ahol ω a koordináta-rendszer forgási szögsebessége, ami megegyezik a járókerék szögsebességével. A (6.27) összefüggésből látható, hogy a Coriolis-erőtér vonal menti integrálja zérus, ha áramvonalon integrálunk: $\underline{w} \parallel d\underline{s}$.

Tételezzük föl, hogy nem áramvonalon integrálunk. Ebben az esetben a (6.26) összefüggés III integrálja nem zérus értékű. Tételezzük föl továbbá, hogy az abszolút sebességtér örvénymentes áramlásból (pl. nyugvó térből) ered, tehát a Thomson-tétel (4.35) értelmében az abszolút sebességtér örvénymentes is marad. Miután az abszolút, relatív és szállító sebességekre fennáll: $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$, $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ esetén írható: $\text{rot } \underline{w} = -\text{rot } \underline{u}$. Az \underline{u} szállítósebesség a sugárra merőleges és abszolút értéke $|\underline{u}| = r \omega$ alakban írható fel, ezért $\text{rot } \underline{u}$ a (3.8) összefüggés alapján $2 \underline{\omega}$ -val egyenlő.

Mindezt beírva a III integrálba

$$-\int_1^2 \underline{w} \times \text{rot } \underline{w} \, d\mathbf{s} = -\int_1^2 \underline{w} \times (-2 \underline{\omega}) \, d\mathbf{s} = \int_1^2 2 \underline{w} \times \underline{\omega} \, d\mathbf{s}$$

adódik, azaz a Coriolis-erőtér vonalmenti integráljával megegyező alakra jutunk, ami kiejti azt.

A fentieket összefoglalva:

- ha a relatív sebesség forgó koordináta-rendszerben nem zérus, akkor a centrifugális erőtér mellett a Coriolis-erőtér is figyelembe veendő,
- ha áramvonalon integrálunk akkor a Coriolis-erőtér vonalintegrálja zérus,
- ha nem tudunk áramvonalon integrálni, de az abszolút áramlás örvénymentes áramlási térből ered, akkor a Coriolis-erőteret tartalmazó tag a Bernoulli-egyenlet III integráljával együtt kiesik.

Most térjünk vissza az eredeti feladathoz, és írjuk fel a Bernoulli-egyenletet az **1** és **2** pont között!

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \frac{r_1^2 \omega^2}{2} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \frac{r_2^2 \omega^2}{2} \quad (6.28)$$

$$\text{Miután } \underline{w} = \underline{v} - \underline{u} \Rightarrow w^2 = v^2 + u^2 - 2 \underline{u} \cdot \underline{v}$$

Fenti átalakítást figyelembe véve (6.28) összefüggés felírható mint:

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} - \underline{v}_2 \cdot \underline{u}_2 - \frac{r_2^2 \omega^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + \underline{v}_1 \cdot \underline{u}_1 + \frac{r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0. \quad (6.29)$$

Mivel $u_1 = r_1 \omega$, a fenti egyenlet egyszerűsíthető, majd az össznyomás növekedés az alábbi módon fejezhető ki:

$$\begin{aligned}\Delta p_{\delta} = p_{2\delta} - p_{1\delta} &= \left(p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \right) - \left(p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \right) = \\ &= \rho (\underline{v}_2 \underline{u}_2 - \underline{v}_1 \underline{u}_1).\end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy $\underline{v}_2 \underline{u}_2 = v_{2u} u_2$, ahol v_{2u} a \underline{v}_2 vektor kerületi sebesség irányú vetülete. Ezzel az **Euler-turbinaegyenlet** ventilátorokra, szivattyúkra is érvényes alakja:

$$\boxed{\Delta p_{\delta id} = \rho (v_{2u} u_2 - v_{1u} u_1)} \quad (6.30)$$

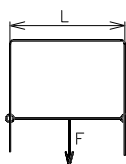
Az Euler-turbinaegyenlet nemcsak radiális, de axiális átömlésű áramlástechnikai gépekre is érvényes.

Tekintettel arra, hogy a sűrűdésmentességet feltételeztük, a létesített össznyomás-növekedést – hogy megkülönböztessük a sűrűdésos esettől – ideális össznyomás-növekedésnek szoktuk nevezni és $\Delta p_{\delta id}$ -sal jelöljük.

Ha a ventilátor nyugvó térből szív, a Thomson-tétel értelmében $v_{1u} = 0$, tehát írható: $\Delta p_{\delta id} = \rho v_{2u} u_2$. Látható, hogy az áramlástan gépek a közeg perdületének (a kerület irányú sebességösszetevő és a sugár szorzata) megváltoztatásával (ventilátor, szivattyú esetén növelésével, turbina esetén csökkentésével) adnak át energiát az áramló közegnek, vagy nyernek energiát abból.

7. A felületi feszültség

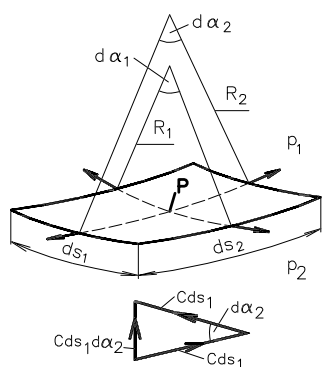
Az 1. fejezetben megismertük a folyadékmolekulák között, a köztük lévő távolság függvényében fellépő taszító- vagy vonzóerőt. Cseppfolyós halmazállapotú közegeknél a molekulák közel vannak egymáshoz, ezért a vonzóerő itt (a gázokkal ellentétben) szerepet játszik. Amíg a folyadék belsejében lévő molekulákra minden oldalról hatnak a szomszédos molekulák, addig a határolófelületen lévő molekuláknál a szomszéd molekulák hatása kiegyensúlyozatlan. Ezért a cseppfolyós halmazállapotú közegek felülete rugalmas hártyaként viselkedik: a kiegyensúlyozatlan molekuláris erők a lehető legkisebbre „akarják” összehúzni a felületet. Ezért tartja meg a víz felszíne pl. a bezsírozott tűt, ezért szaladgálhatnak rovarok a víz felszínén.



7.1. ábra

Tekintsük a 7.1. ábrát ahol egy huzalból készült keretet látunk, amelynek egyik oldala elmozdítható. Mártsuk pl. szappanos vízbe a keretet! A kialakuló hártya két oldalán keletkező felületi feszültség csökkenteni akarja a hártya nagyságát. Az elmozduló L hosszúságú hártyát oldalt F erő tartja egyensúlyban, azaz írható: $F = 2 L C$, ahol C [N/m] az **egységnyi hossza jutó, felületi**

feszültségből származó erő, amit a felületi feszültség állandójának nevezünk. Ez az állandó a folyadék és a határfelületen azzal érintkező szilárd test vagy közeg tulajdonságaitól függ. Levegővel érintkező víz esetén $C = 0.025$ [N / m].



7.2. ábra

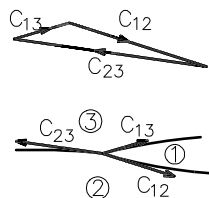
Tekintsük egy folyadékfelszín 7.2. ábrán látható elemét. A felszín P pontjában a görbületet két, egymásra merőleges metszetben megadott R_1 és R_2 görbületi sugarakkal határozhatjuk meg. A felszínelem $ds_1 = R_1 d\alpha_1$ és $ds_2 = R_2 d\alpha_2$ hosszúságú oldalain felületi feszültség ébred, amelyből származó erőknek (ld. 7.2. ábra) van az elemi méretű felszínre merőleges komponense. Miután a felszín egyensúlyban van, ezt az erőt a hártya két oldalán lévő nyomás különbségéből származó erő egyensúlyozza ki:

$$(p_1 - p_2) ds_1 ds_2 = C ds_1 d\alpha_2 + C ds_2 d\alpha_1 . \quad (7.1)$$

Az elemi szögeket a megfelelő ds és R értékekkel kifejezve, behelyettesítés és egyszerűsítés után adódik:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = C \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (7.2)$$

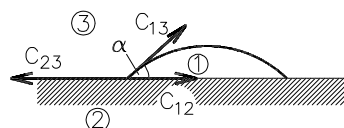
Ha a felület hártya, akkor a (7.2) összefüggés jobb oldalán egy kettes szorzó jelenik meg, hiszen két felületen lép fel a felületi feszültség. Ha a felület gömb alakú $R_1 = R_2 = R$. Ezért gömb alakú folyadékcsepp belsejében a nyomás $\Delta p = 2C/R$ ill. buborékban $\Delta p = 4C/R$ összefüggéssel számolható.



7.3. ábra

Háromféle folyadék (pl. leves, zsírcsepp és levegő) érintkezését mutatja a 7.3. ábra. A különböző folyadékokat elválasztó felületeken felületi feszültségek ébrednek, amelynek állandói az érintkező folyadékok sajátosságaitól függenek. Vegyünk fel a három folyadék találkozási vonalában egy, az ábrára merőleges és hosszúságú ds vonalelemet, amely nyugalomban van, tehát a rá ható erők egyensúlyban

vannak (a vektorháromszög záródik). Ha pl. $|C_{23}| > |C_{12}| + |C_{13}|$, akkor nem állhat fenn egyensúly, az 1 folyadék a 2 és 3 folyadék határolófelületén szétterjed (mint pl. az ásványolaj a víz felszínén).



7.4. ábra

Ha a szilárd fal és két folyadék esetét vizsgáljuk, akkor a 7.4. ábrán látható viszonyokat tapasztaljuk. Ekkor vízszintes irányban az egyensúly feltétele:

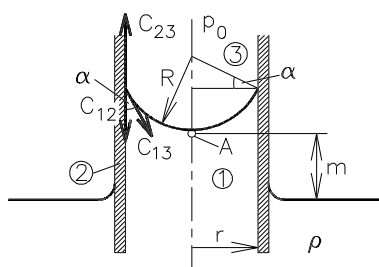
$$C_{23} ds = C_{12} ds + C_{13} \cos \alpha ds. \quad (7.3)$$

A C_{13} függőleges komponensét a szilárd fal és a folyadék között fellépő függőleges erő egyensúlyozza ki.

Ha a 3 folyadék levegő (azaz egy szilárd felületen lévő csepp esetét vizsgáljuk) a C_{23} helyébe a folyadék és a szilárd anyag között fellépő, a felületi feszültséghez hasonlóan ható adhézió lép.

Fejezzük ki $\cos \alpha$ -t a (7.3) egyenletből: $\cos \alpha = (C_{23} - C_{12}) / C_{13}$.

Ha $C_{23} > C_{12} \Rightarrow \alpha < 90^\circ$, azaz a csepp alakja hasonló lesz a 7.4. ábrán láthatóhoz (pl. vízcsepp egy fa lapon). Ellenkező esetben $\alpha > 90^\circ$ (pl. a higanycsepp a padlón). Ha $|C_{23}| > |C_{12}| + |C_{13}|$, a folyadék szétterjed a felületen: pl. a petróleum „kimászik” az üvegből, ha nem zárjuk be gondosan).



7.5. ábra

Vékony csövekben (kapillárisokban) a felületi feszültség a folyadékoszlop felemelkedését vagy lesüllyedését okozhatja. Tekintsük a 7.5. ábrát! Az 1 jelű folyadékba mártott 2 jelű, r sugarú csőben lévő folyadék felszínét tekintsük egy R sugarú gömbcsüvegnek. A p_0 külső nyomás és az A pontban lévő nyomás a (7.2) összefüggés értelmében:

$$p_0 - p_A = 2 C_{13} / R = 2 C_{13} \cos \alpha / r.$$

Az A pontban akkor lehet a külső nyomásnál kisebb nyomás, ha a folyadékoszlop $p_0 - p_A = \rho g m$ összefüggésből számolható m magasságra felemelkedik. A **kapilláris felemelkedés** a

$$m = \frac{2 C_{13}}{\rho g r} \cos \alpha \quad (7.4)$$

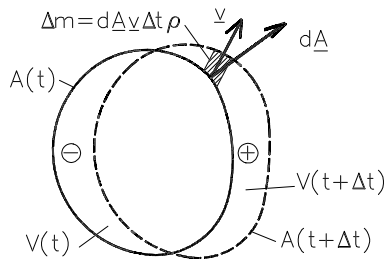
összefüggésből számolható. Üveg, víz, levegő kombináció esetén $\alpha < 90^\circ$ ezért felemelkedést ($m > 0$) tapasztalunk, üveg, higany levegő esetén $\alpha > 90^\circ$, ezért a higanyszál a felületi feszültség hatására lesüllyed ($m < 0$). Ez a felemelkedés ill. lesüllyedés pl. a folyadékoszlop kitérésén alapuló nyomásmérésnél okozhat hibát. Itt is megjegyezzük, hogy a C_{23} a felületi feszültséghez hasonló sajátosságokkal bíró adhéziós erő.

8. Az impulzustétel és alkalmazása

8.1. Az impulzustétel

Ebben a fejezetben a 4. fejezethez hasonlóan a folyadékmozgás és a folyadékra ható erők közötti kapcsolatot vizsgáljuk, **kikötve a sűrűdásmentességet**. Ellentétben a 4. fejezettel, ahol differenciálegyenlet adódott, itt a mozgásegyenlet integrál alakját határozzuk meg. Ismét Newton II axiómájából indulunk ki, amely szerint **a tömeg mozgásmennyiségének idő szerinti változása egyenlő a tömegre ható erőkkel**. Egy folyadékrészre kétfajta erő hathat: **a tömegre ható térerősség és a felületen ható erő**. Ez utóbbinak sűrűdásmentes esetben csak felületre merőleges komponense van, a nyomásból származó erő. Írjuk fel ismét a mozgásmennyiség időbeni változás és a folyadékrészre ható erők kapcsolatát kifejező egyenletet:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{V(t)} \rho \underline{g} dV - \int_{A(t)} p d\underline{A}, \quad (8.1)$$



8.1. ábra

ahol $V(t)$ a folyadék gondolatban elkülönített, az $A(t)$ felülettel határolt részének térfogata (ld. 8.1. ábra). (Ugyanebből az egyenletből indultunk ki az Euler-egyenlet levezetésénél, ld. (4.17) összefüggés.) A folyadékrész Δt idő alatt odébbúszik, és az $A(t+\Delta t)$ felülettel jellemzett helyre kerül, miközben mozgásmennyisége egyrészt a sebességtér időfüggése miatt

változhat meg (instacionárius áramlás esetén, ld. 4.1. fejezet), másrészt azért, mert a folyadékrész odébbúszva olyan helyre kerül, ahol a sebesség eltérő. Fejezzük ki a (8.1) összefüggés bal oldalát a 8.1. ábra figyelembevételével!

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{v} dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_{t+\Delta t} dV - \int_{V(t)} (\rho \underline{v})_t dV \right] \quad (8.2)$$

A jobb oldali zárójel az elmozdult folyadékrész és a kiinduló helyzetben lévő folyadékrész mozgásmennyiségének különbségét tartalmazza. Vonjuk le és adjuk hozzá a zárójelben lévő tagokhoz azt a mozgásmennyiséget, amellyel az $A(t+\Delta t)$ felülettel határolt térrészben lévő folyadéktömeg t pillanatban rendelkezik!

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{v} dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_{t+\Delta t} dV - \int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t dV + \int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t dV - \int_{V(t)} (\rho \underline{v})_t dV \right] \quad (8.3)$$

A jobb oldali kifejezés első két integráljának integrálási tartománya megegyezik, ezért írható:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_{t+\Delta t} dV - \int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t dV \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t dV \Delta t.$$

Δt -vel való egyszerűsítés után, képezve a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_{t+\Delta t} dV - \int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t dV \right] = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV \quad (8.4)$$

összefüggést kapjuk, amely megengedi, hogy a $\rho \underline{v}$ vektortérnek szakadása legyen a V térfogaton belül.

A (8.3) összefüggés jobb oldalán lévő harmadik és negyedik integrál különbségének számítása meggondolást igényel, hiszen az integrálási tartomány különböző. Szerencsés körülmény, hogy ugyanahhoz a t időponthoz tartozó mennyiségeket tartalmaznak az integrálok. A két integrál különbsége úgy adódik, hogy a 8.1. ábrán + jellel jelölt térrészben lévő mozgásmennyiségből le kell vonni a – jellel jelöltben lévő, hiszen a közös rész kiejti egymást.

Vegyünk fel a $d\underline{A}$ felületelem vektorral jellemzett felületelemet, amely Δt idő alatt a \underline{v} sebesség irányában $|\underline{v} \Delta t|$ távolságot mozdul el (és az $A(t+\Delta t)$ felület részévé válik). Az elmozduló elemi felület a 8.1. ábrán vonalkázott $\underline{v} \Delta t d\underline{A}$ térfogatelemet határoz meg, amelyben lévő elemi tömeg mozgásmennyisége: $\underline{v} \rho \underline{v} \Delta t d\underline{A}$. Ha \underline{v} és $d\underline{A}$ tompaszöget zárnak be (– jellel jelölt térrészben), akkor a mozgásmennyiség a skalárszorzat sajátosságai következtében negatív lesz. Ezt az igen kedvező körülményt kihasználva írható:

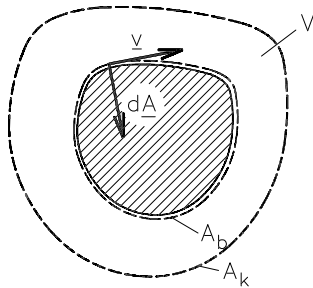
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t dV - \int_{V(t)} (\rho \underline{v})_t dV \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_A \underline{v} \rho \underline{v} \Delta t d\underline{A} = \int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) \quad (8.5)$$

A jobb oldal utolsó integráljában egy zárójel jelent meg, amellyel egyértelművé tettük, hogy a mozgásmennyiség-megváltozás vektor a sebesség vektorral párhuzamos.

A (8.1), (8.3), (8.4) és (8.5) összefüggéseket figyelembe véve felírható az **impulzustétel**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A}) = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A p d\mathbf{A} . \quad (8.6)$$

Az impulzustétel egy mozgásegyenlet, amely a folyadékra ható erők és a folyadék mozgásállapota között teremt kapcsolatot. Amíg az Euler-egyenlet differenciálegyenlet az impulzustétel integrálokat tartalmaz, amelyek kiszámítása után erővektorok adódnak. Az impulzustétel alkalmazásánál egy, a koordinátarendszerünkhöz képest rögzített, zárt A felületet, **az ellenőrző felületet** kell felvenni (amely a V térfogatot körülveszi), és ki kell számolni az integrálokat. Az impulzustétel igen nagy előnye, hogy jobbra felületi integrálokat tartalmaz. A két térfogati integrál közül a bal oldali – amelynek számítása általában meglehetősen bonyolult – zérus értékű, ha az áramlás stacionárius. Ezért az impulzustételt általában stacionárius vagy kvázistacionárius (időben állandó időbeli átlag körül ingadozó) áramlásra fogjuk alkalmazni. A jobb oldali térfogati integrál az ellenőrző felületben lévő folyadékra ható térerőt (pl. súlyerőt) fejezi ki, amelynek számítása általában viszonylag egyszerű.



8.2. ábra

Helyezzünk egy szilárd testet áramló közegbe (ld. 8.2. ábra)! Vegyük fel az ellenőrző felületet úgy, hogy az A_b „belső” felülettel rekszük ki a szilárd testet a V térfogatból, ami így az A_k és A_b közötti térfogat. Legyen az áramlás stacionárius. Írjuk fel az impulzustételt!

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_{A_k} \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A}) + \int_{A_b} \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A}) = \\ = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_{A_k} p d\mathbf{A} - \int_{A_b} p d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Az első integrál zérus, mert az áramlás megállapodásunk szerint stacionárius. A harmadik integrál ugyancsak zérus, hiszen a szilárd test felületén és így az ellenőrző felületen keresztül nincsen átáramlás ($\underline{v} \perp d\mathbf{A}$). A jobb oldali utolsó integrál a belső felületen a folyadékra ható, nyomásból származó erőt összegzi. Belátható, hogy az integrálás eredményeként adódó erő megegyező nagyságú és irányú, de ellentétes irányítású, mint a folyadékról a szilárd testre ható erő, amit \underline{R} vektorral jelölünk. Ha tehát stacionárius áramlás esetén a felvett ellenőrző felületben szilárd test van, akkor a (8.6) összefüggés az alábbi alakban írható fel:

$$\int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A}) = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A p d\mathbf{A} - \underline{R} . \quad (8.8)$$

Azért szerepel az \underline{R} az impulzustétel fenti alakjában, mert a mérnöki gyakorlatban legtöbbször a szilárd testekre ható erőkre vagyunk kíváncsiak. Az \underline{R} vektor előtti negatív előjelre

azért van szükség, mert az impulzustételben a szilárd testről a folyadékra ható erőt kell szerepeltetni. (Az \underline{R} alkalmazására természetesen csak akkor kerül sor, ha a szilárd test az ellenőrző felületen belül van és nem rekesztjük ki az ellenőrző felület egy elemével.) Ha valószínűs, sűrűlódásos közegekre alkalmazzuk az impulzustételt, és az ellenőrző felületen a folyadékra ható, sűrűlódásból származó erőket meg tudjuk határozni, akkor ezek eredőjét – \underline{S} vektort – az impulzustétel (8.6) vagy (8.8) összefüggéssel megadott kifejezésének jobb oldalához kell adnunk.

Végül felírható az **impulzustétel legáltalánosabb alakja, amelynek jobb oldalán az ellenőrző felületben lévő folyadékra ható erőket összegezzük és egyenlővé tesszük ugyanezen folyadék mozgásmennyiségének az egyenlet bal oldalán kifejezett egységnyi időre eső megváltozásával:**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A}) = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A p d\mathbf{A} - \underline{R} + \underline{S} \quad (8.9)$$

8.2. Az impulzusnyomatéki tétel

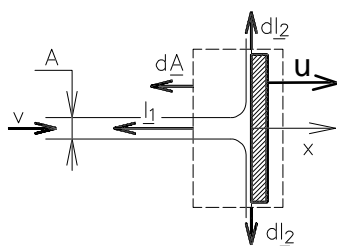
A 8.1.fejezetben egy zárt A felületben lévő folyadékra írtuk fel az erők és a mozgásmennyiség-megváltozás egyensúlyát. Hasonló módon felírható ezen erők a tér adott P pontjára vonatkozó nyomatéka valamint a mozgásmennyiség-megváltozás-vektorok nyomatékának egyenlőségét kifejező **impulzusnyomatéki tétel:**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \underline{r} \times (\rho \underline{v}) dV + \int_A \underline{r} \times \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A}) = \int_V \underline{r} \times \rho \underline{g} dV - \int_A \underline{r} \times p d\mathbf{A} - \underline{M} + \underline{M}_s \quad (8.10)$$

ahol \underline{r} a tér kijelölt P pontjából a dV térfogatelemhez ill. $d\mathbf{A}$ vektor talppontjához húzott vektor, \underline{M} a folyadékról az ellenőrző felületben lévő szilárd testre átható nyomaték, \underline{M}_s pedig az ellenőrző felületen ható sűrűlódóerők nyomatéka.

8.3. Az impulzustétel néhány alkalmazása

Mozgó sík lap



8.3. ábra

Tekintsük a 8.3. ábrát, amelyen egy sík lap látható, amely áll, vagy \underline{u} sebességgel jobbra mozog. A sík lap egy víz-sugarat térít el, amelynek tengelye merőleges a lapra, zavartalan sebessége \underline{v} , keresztmetszete pedig \underline{A} . Milyen erő hat az álló és a mozgó lapra?

A feladat megoldása az impulzustétel nélkül nem lenne könnyű: ki kellene számolni az eltérülő vízsugár áramképét, majd annak ismeretében a sík lap felületén keletkező (és az áramvonalak görbülete alapján rögtön felismerhető) túlnyomást, azaz a környezetinél nagyobb nyomást. Ennek integrálja adná a keresett erőt. Az impulzustétellel az áramlás részleteinek ismerete nélkül, pusztán a fizikai mennyiségek ellenőrző felületen történő vizsgálatával megválaszolható a kérdés.

Először is vegyük fel az ellenőrző felületet. Ennél két tanácsot célszerű megfogadni:

- ha szilárd testre ható erőt keresünk, a testet vegyük bele az ellenőrző felületbe és
- ahol áramlás van, ott az ellenőrző felület legyen merőleges az áramlási sebességre vagy legyen azzal párhuzamos.

Esetünkben a fentiek szerint eljárva a 8.3. ábrán látható ellenőrző felület adódik.

Másodszor írjuk fel az impulzustételt (8.9.összefüggés) és állapítsuk meg, hogy mely tagjait kell az adott feladat megoldásánál figyelembe venni!

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV}_I + \underbrace{\int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A})}_{II} = \underbrace{\int_V \rho \underline{g} dV}_{III} - \underbrace{\int_A p d\mathbf{A}}_{IV} - \underbrace{\underline{R}}_V + \underbrace{\underline{S}}_{VI} \quad (8.11)$$

Az I integrál zérus, ha az áramlás stacionárius. Ha a lap áll, ez a feltétel fennáll, hiszen a vízsugár iránya, sebessége időben nem változik. Ha viszont mozog a lap, az áramlás az álló rendszerben instacionáriussá válik: a tér egy adott pontjában a mozgó lap helyzetétől függ a sebesség. Ha viszont a koordináta-rendszerünket (és az ellenőrző felületet) a mozgó laphoz rögzítjük, akkor az áramlás stacionáriussá válik, azaz az I integrál értéke ebben az esetben is zérussá tehető.

A II integrál nem lehet eleve zérus, hiszen folyadék lép át az ellenőrző felületen.

A III integrál értéke esetünkben zérus, mert a vízsugárról a függőleges lapra ható erőt a vízsugár súlya nem befolyásolja. A vízre ható súlyerő miatt változik a körben sugárirányban lelépő víz sebessége, ezt azonban elhanyagoljuk. Ezért írtunk alulra és fölére $d\mathbf{I}_2$ -t.

A IV integrál az ellenőrző felületen ható, nyomásból származó erőt fejezi ki. Amint ezt korábban láttuk, a nyomás a párhuzamos, egyenes áramvonalakra merőlegesen nem változik, azaz egy folyadéksugárban állandó, és megegyezik a külső nyomással. Emiatt a 8.3. ábrán látható ellenőrző felületen a nyomás mindenütt azonos, tehát a felületen ható, nyomásból származó erők eredője zérus.

Az V tag nem zérus, hiszen van szilárd test az ellenőrző felületen belül.

A VI tag zérus, hiszen a súrlódást elhanyagoltuk. (Ez esetben ez az elhanyagolás nem okoz hibát.)

Az előző megfontolásokkal a (8.11) egyenlet jelentősen egyszerűsödött:

$$\int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) = -\underline{R}. \quad (8.12)$$

Harmadszor, határozzuk meg az integrálok (esetünkben egy integrál) értékeit álló lap esetén! Az egyszerűség kedvéért a teljes, zárt A ellenőrző felületre vonatkozó integrált több felületrészen számolt integrál összegeként határozzuk meg. A (8.12) összefüggés bal oldalán lévő integrál integrandusza zérus, ahol nincs folyadék átlépés a felületen (vagy azért, mert $\underline{v} = 0$, vagy mert $\underline{v} \perp d\underline{A}$), ezért esetünkben csak azokon a felületrészekben kell integrálni, ahol közeg lép át az ellenőrző felületen: az A_1 és A_2 keresztmetszeten. E keresztmetszetekben a sebesség állandó: \underline{v}_1 ill. \underline{v}_2 és mivel az ellenőrző felületet az áramlási sebességre merőlegesen vettük fel, $\underline{v} \parallel d\underline{A}$. Először tekintsük az A_1 keresztmetszetet, ahol a közeg belép a felületbe. Miután a sebesség és a felütelelem-vektor irányítása ellentétes $\rho \underline{v}_1 d\underline{A} < 0$. Zérusnál kisebb számmal szorozva a \underline{v} vektort egy azzal megegyező irányú, de ellentétes irányítású vektort kapunk. Miután az integranduszban szereplő sűrűség és sebesség az A_1 felület mentén állandó, írható:

$$\underline{I}_1 = \int_{A_1} \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) = \rho v_1^2 A_1 \left(-\underline{v}_1 / |\underline{v}_1| \right),$$

ahol \underline{I}_1 a mozgásmennyiség-megváltozás (impulzusáram) vektor.

Határozzuk meg az \underline{I} értékét a hengerpalást alakú kilépőkeresztmetszet $d\vartheta$ középponti szöghöz tartozó dA_2 felütelemén. Az ellenőrző felületből való kilépésnél $\underline{v}_2 d\underline{A} > 0$, ezért a (8.12) bal oldalán lévő integrál integrandusza a \underline{v}_2 vektorral megegyező irányú és irányítású vektor:

$$d\underline{I}_2 = \rho v_2^2 dA_2 \frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|}$$

Arra az érdekes eredményre jutottunk, hogy az \underline{I} mozgásmennyiség-vektorok (amelyekkel a (8.11) összefüggés II integráljának egyes felület szakaszokra vonatkozó értékeit jelöltük)

- mindig párhuzamosak a sebességvektorral (tehát, ha az ellenőrző felületet a sebességre merőlegesen vettük fel, akkor az ellenőrző felületre merőlegesek);
- kifelé mutatnak a felületből és

– abszolút értékük (a keresztmetszet mentén állandó sebesség és sűrűség esetén)

$$|\underline{I}| = \rho v^2 A.$$

Az \underline{I}_1 és $d\underline{I}_2$ vektorokat ábrázoltuk a 8.3. ábrában.

Negyedszer vegyünk fel egy koordináta-rendszert és koordináta irányonként írjuk fel az erők egyensúlyát. Szimmetria okokból (meg azért is, mert a lapon csak arra merőleges, nyomásból származó erő hat), csak x tengely irányú erővel számolhatunk, ezért ebben az esetben csak az x irányú egyensúlyt írjuk fel. Figyelembe véve, hogy a vektor megegyező vagy ellentétes irányítású az x tengely pozitív irányításával, az egyes vektorok (esetünkben az \underline{I} vektorok) abszolút értékeit vagy pozitív vagy negatív előjellel kell beírni a (8.11) egyenlet megfelelő oldalára:

x irányú egyensúly:

$$-I_1 = -R_x \quad \text{azaz} \quad -\rho v_1^2 A_1 = -R_x = -R$$

azaz az álló lapra ható erő az $R = \rho v_1^2 A_1$ képletből számolható.

(Fenti összefüggésekben a vektorjel nélküli mennyiségek az abszolút értéket jelentik.)

Hogyan határozzuk meg a lapra ható erőt akkor, ha a lap \underline{u} sebességgel x irányban mozog? A mozgó laphoz rögzített koordináta-rendszer és ellenőrző felület esetén ugyanígy kell eljárni, mint álló lapnál, csak a \underline{v}_1 sebesség helyett a $\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{u}$ relatív sebességgel kell számolni:

$$R = \rho (v_1 - u)^2 A_1.$$

(Ha a lap a sugárral szemben mozogna, a relatív sebesség $v_1 + u$ lenne.)

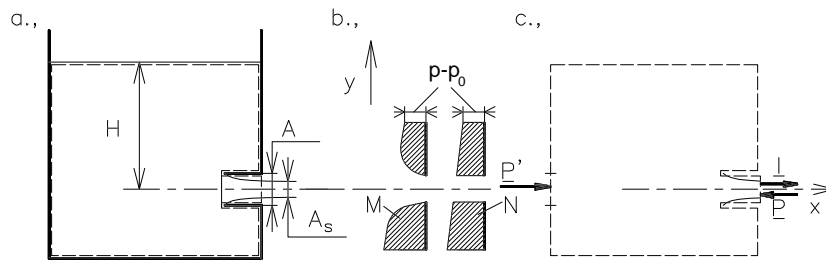
Vannak hasonló feladatok, ahol a kilépő folyadéksugárral is számolni kell. Hogyan határozható meg v_1 és A_1 ismeretében v_2 és A_2 ? Írjuk fel a Bernoulli-egyenlet állandó sűrűségű közeg stacionárius áramlására vonatkozó, áramvonalon történő integrálás esetén érvényes (4.31) alakját az 1 és 2 keresztmetszet között, elhanyagolva a folyadékra ható súlyerőt.

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

Miután a vízszögben a nyomás a külső nyomással egyenlő: fennáll $p_1 = p_2$, tehát $v_1 = v_2$. A folytonosság tételét figyelembe véve pedig $A_2 = A_1$. Ugyanez vonatkozik mozgó lapra is de itt a relatív sebességekre.

A Borda-féle kifolyónyílás

A 8.4.a. ábrán egy tartály látható, amelyben víz van. A tartályon egy speciális ú.n. Borda-féle kifolyónyílást képeztünk ki, amely a kiömlőkeresztmetszet pereméhez rögzített, a tartályba benyúló csődarab. Ha nincs ilyen cső, akkor a kiömlőnyílás közelében fokozatosan felgyorsul a közeg és a tartály falán a kiömlőnyílás közelében csökken a $p - p_0$ túlnyomás (ld. 8.4.b. ábra M jelű nyomásmegoszlás). A Borda-féle kiömlőnyílás alkalmazása esetén a kiömlőnyílás közelében a tartály falán a nyomás megegyezik az adott magasságban a tartály falának más pontjain lévő nyomással (ld. N jelű nyomásmegoszlás).



8.4. ábra

Alkalmazva a Bernoulli-egyenlet (4.31) alakját az adódik, hogy a víz a H magasságkülönbség hatására

$$v = \sqrt{2gH} \quad (8.13)$$

sebességgel áramlik ki a tartályból. A kiömlő vízszugár a tapasztalatok szerint nem tölti ki teljesen az A [m²] kiömlőkeresztmetszetet. Határozzuk meg a vízszugár összehúzódására jellemző

$$\alpha = A_s / A \quad (8.14)$$

ú.n. **kontrakciós tényező** értékét a Borda-kifolyónyílás esetén, ahol A_s a vízszugár keresztmetszete a kiömlés helyén.

Alkalmazzuk az impulzustételt! Vegyük föl a 8.4.a. ábrán látható ellenőrző felületet, amit a 8.4.c. ábrán külön kirajzoltunk. (Itt jegyezzük meg, hogy az ellenőrző felület célszerű felvétele – hasonlóan a Bernoulli-egyenlet integrálási határainak célirányos kijelöléséhez – a feladatok sikeres megoldását jelentősen befolyásoló, intuiciót és némi gyakorlatot igénylő tevékenység.) Alkalmazzuk az impulzustétel (8.9) összefüggéssel megadott alakját:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV}_{\text{I}} + \underbrace{\int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A})}_{\text{II}} = \underbrace{\int_V \rho \underline{g} dV}_{\text{III}} - \underbrace{\int_A p d\mathbf{A}}_{\text{IV}} - \underbrace{\underline{R}}_{\text{V}} + \underbrace{\underline{S}}_{\text{VI}}.$$

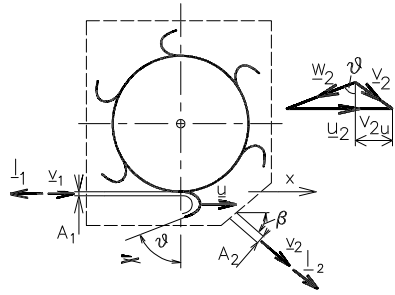
Az I integrál értéke esetünkben zérus, mert elhanyagolva a víz felszínének süllyedését az áramlás stacionárius. A III taggal nem kell foglalkozni, mert előre látható, hogy vízszintes irányban írjuk fel az egyensúlyi egyenletet, ezért a függőleges súlyerő abban nem játszik szerepet.

Eltérően az előző alkalmazástól, a IV tag nem hagyható el, mert a nyomásból származó eredő erő várhatóan nem zérus. Az ellenőrző felületen belül nincs szilárd test ill. a súrlódást elhanyagoltuk (a valóságban sem játszik jelentős szerepet), ezért az V és VI tag zérus.

A nyomásból származó erőket kifejező IV integrált hasonló módon számoljuk, mint az \underline{I} vektorokat: a teljes \mathbf{A} ellenőrző felületre ható, nyomásból származó erőt az \mathbf{A} felület egyes részein kiszámolt \underline{P} nyomásból származó erő vektorok összegeként írjuk fel. A \underline{P} vektorok – miután $-p d\mathbf{A}$ integrálása révén adódtak, és a $d\mathbf{A}$ kifeje mutat a felületből – befelé mutatnak a felületbe és a felületre mindig merőlegesek. A 8.4.c. ábrán a kiömlés helyén lévő ellenőrző felületrészre és az azzal „szemben” lévő, ugyancsak \mathbf{A} nagyságú felületrészre vonatkozó nyomás integrálokat (\underline{P} és \underline{P}' vektorokat) tüntettük csak fel, mert az ellenőrző felület többi részén lévő nyomásból származó erők kiegyenlítik egymást. Egy helyen, a kiömlésnél lép át a víz az ellenőrző felületen, ezért egy mozgásmennyiség-megváltozás-vektort (\underline{I}) vettünk fel, ami az előzőek szerint kifelé mutat az ellenőrző felületből, és párhuzamos az áramlási sebességgel.

Vegyük fel a jobbra mutató x tengelyt, majd az egyes vektorok x-hez képesti irányítását figyelembe véve írjuk fel az impulzustételt: $I = P' - P$. Az I helyébe $\rho v^2 A_s - t$, P helyébe $p_0 A - t$, P' helyébe pedig a felszín alatt H mélységben lévő nyomást figyelembe véve $(p_0 + \rho g H)A$ helyettesítve $\rho v^2 A_s = (p_0 + \rho g H)A - p_0 A$ egyenlet adódik. Egyszerűsítés és a (8.13) összefüggés behelyettesítése után $2\rho g H A_s = \rho g H A$ adódik. amiből a kontrakciós tényező: $\alpha = A_s / A = 0.5$, azaz a vízszög keresztmetszete fele a Borda-féle kifolyókeresztmetszetnek. Itt jegyezzük meg, hogy a kontrakciós tényező pl. egy éles szélű nyílás esetén $\alpha \approx 0.6$. Minél jobban lekerekítjük a kiömlőnyílást, annál jobban megközelítjük az $\alpha = 1$ értéket.

A Pelton-turbina



8.5. ábra

Tekintsük a 8.5. ábrát, ahol egy Pelton-turbina váz-lata látható. Az A_1 keresztmetszetű v_1 sebességű víz-sugár az u kerületi sebességgel forgó kanalakon vál-toztat irányt. A kanalak kilépő érintője a radiális irányhoz képest zárjon be ϑ szöget. Vizsgáljuk meg, hogy melyik koordináta-rendszerben stacionárius az áramlás. Az álló koordináta-rendszerben nem, hiszen a lapátok helyzetétől függően változik az áramlási

tér. Az együttforgó rendszerből nézve ugyancsak instacionárius (ha lehet ezt fokozni, „még instacionáriusabb”) az áramlás. Ezért térjünk vissza az abszolút (álló) koordináta-rendszerbe, ahol a lapátváltás periodikussága következtében az áramlás **kvázistacionárius**, azaz az áramlási sebességek és az erők középértékek körül ingadoznak. A kerületi erő középértéke közelítően ahhoz a helyzethez tartozik, amikor a vízugarat eltérítő lapátot a for-gástengellyel összekötő egyenes éppen merőleges a vízugarra (ld.8.5. ábra).

Határozzuk meg a turbinára ható kerületi erőt és a maximális teljesítményhez tartozó u ke-rületi sebességet!

Vegyünk föl egy ellenőrző felületet! Szilárd testre ható erőt keresünk, ezért az egész kere-keket körül vesszük a felülettel, ahol pedig víz lép át a felületen, ott a sebesség irányára merő-legesen vesszük fel az ellenőrző felületet. Tekintsük a (8.11) összefüggést! Az I integrál zé-rus, mert az áramlást stacionáriusnak tekintjük, a III ugyancsak, mert a víz súlya nem ját-szik szerepet a kerületi erőben, a IV integrál is zérus, hiszen az ellenőrző felületen (a vízsu-garakban is) a nyomás állandó, megegyezik a külső nyomással, a IV tag zérus, mert az el-lenőrző felületen a súrlódás nem játszik szerepet.

Ezek szerint csak az \underline{I} vektorokat kell felrajzolni (ld. 8.5. ábra) és keressük a turbinára ha-tó \underline{R} erő kerületi irányú komponensét. Írjuk föl az x (kerületi) irányban az impulzustételt: $-I_1 + I_{2u} = -R_u$, ahol u indexszel jelöltük a kerületi irányt. $I_1 = \rho v_1^2 A_1$, $I_{2u} = \rho v_2^2 A_2 \cos\beta$, ahol β a \underline{v}_2 és a kerületi irány által bezárt szög. Miu-tán a folytonosság tételéből $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$ írható:

$$R_u = \rho v_1 A_1 (v_1 - v_{2u}), \quad (8.15)$$

ahol $v_{2u} = v_2 \cos\beta$ a kilépő sebesség kerület irányú komponense.

A (8.15) összefüggés az alábbi következtetésre vezet: ha a nyomásból származó erő és a súlyerő zérus, akkor a szilárd testre ható erő egyenlő a közeg tömegáramának ($\rho v_1 A_1$) és a keresett erővel párhuzamos sebességkomponens megváltozásának ($v_1 - v_{2u}$) szorzatával.

A v_{2u} értékét a 8.5. ábrán látható, a kilépő vízszugárra vonatkozó sebességi háromszögből határozhatjuk meg. A w_2 relatív sebességhez, amelynek iránya párhuzamos a lapát kilépő érintőjével, hozzáadva az u kerületi (szállító) sebességet megkapjuk a v_2 kilépő abszolút sebességet. Ennek kerületi irányú komponense $v_{2u} = u - w_2 \sin \vartheta$. Felírva gondolatban az együttforgó rendszerben a lapát előtt és mögött lévő pontok közé a Bernoulli-egyenletet az instacionárius tag, a súlyerő és a centrifugális erőter elhanyagolása mellett $w_2 = w_1$ adódik, miután a nyomás mindenütt állandó. Belátható, hogy a belépő relatív sebesség $w_1 = v_1 - u$.

Mindezeket behelyettesítve a (8.15) összefüggésbe rendezés után adódik:

$$R_u = \rho v_1 A_1 (v_1 - u)(1 + \sin \vartheta) \quad (8.16)$$

A kerületi erő maximumát $\beta = 90^\circ$ -nál éri el. Vizsgáljuk meg, hogy milyen kerületi sebességnél maximális a Pelton turbina teljesítménye, amelyet az alábbi összefüggéssel fejezhetünk ki ($\vartheta = 90^\circ$ esetén):

$$P = 2 \rho v_1 A_1 (v_1 - u)u \quad (8.17)$$

Keressük a teljesítmény szélső értékét u függvényében, azaz képezzük $\partial P / \partial u$ -t és tegyük egyenlővé zérussal:

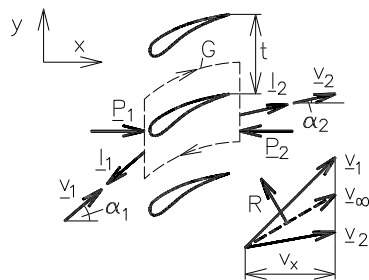
$$\frac{\partial P}{\partial u} = 2 \rho v_1 A_1 [(v_1 - u) - u] = 0, \text{ amiből } u = v_1 / 2 \text{ adódik a maximális teljesítményhez}$$

tartozó kerületi sebességre. Ezt az eredményt visszahelyettesítve (8.17) összefüggésbe

$$P_{\max} = \rho v_1 A_1 v_1^2 / 2 \quad (8.18)$$

kifejezést kapjuk, azaz ebben az optimális esetben a Pelton-turbina a víz teljes mozgási energiáját hasznosítja.

A szárnyrácsra ható erő



8.6. ábra

A 8.6. ábrán egy függőleges irányban felfelé és lefelé egymástól t osztás távolságra végtelen sokszor ismétlődő szárnyakból álló szárnyrács látható, amely a rácsra merőleges x tengellyel α_1 szöget bezáró v_1 hozzááramlási sebességet eltéríti: a v_2 sebesség α_2 szöget zár be az x tengellyel. A folytonosság tételéből következik, hogy $v_{1x} = v_{2x} = v_x$. Határozzuk meg a szárnyrács egy

elemének lapra merőlegesen 1 m hosszúságú szakaszára ható áramlási erőt. Ismételten az impulzustételt hívjuk segítségül e meglehetősen bonyolult kérdés megválaszolásához.

Vegyünk fel egy ellenőrző felületet, amely a kérdéses szárnyat körülveszi. Ellentétesen az eddigiekkel a felületet ne az áramlási sebességre merőlegesen vegyük fel, hanem az y koordinátával párhuzamosan, ill. két, egymástól t osztásnyira lévő áramvonal mentén. (A t osztás a szárnyak távolságával egyenlő.) Az ellenőrző felület lapra merőleges mérete 1 m.

Ismét a (8.11) összefüggésben megadott impulzustételt alkalmazzuk stacionárius, súrlódásmentes áramlásra és figyelembe véve, hogy a súlyerőnek nincsen szerepe, ezért az egyenlet I, III és VI tagja kiesik. Rajzoljuk fel a sebességgel párhuzamos és az ellenőrző felületből kifelé mutató \underline{I} és a felületre merőleges, abba befelé mutató \underline{P} vektorokat. Az áramvonallal egybeeső felületeket egy osztás távolságban vettük fel, ezért a rajtuk kialakuló nyomásmegoszlás teljesen megegyezik. Így az ezeken keletkező nyomásból származó erők kiejtik egymást. E felületeken nincsen folyadék átlépés, ezért ezeken $\underline{I} = 0$.

Írjuk fel x és y irányban az impulzustételt!

$$-I_{1x} + I_{2x} = P_1 - P_2 - R_x \quad \text{és} \quad -I_{1y} + I_{2y} = -R_y$$

Miután $I_1 = \rho v_x t v_1$ (tömegáram \times sebesség) és $I_2 = \rho v_x t v_2$ valamint $P_1 = p_1 t$ és $P_2 = p_2 t$, R_x -re és R_y -ra az alábbi összefüggések adódnak:

$$R_x = (p_1 - p_2) t + \rho v_x t (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) \quad (8.19)$$

$$R_y = \rho v_x t (v_{1y} - v_{2y}) \quad (8.20)$$

A (8.19) összefüggés második tagjában lévő zárójel a folytonosság tétele következtében zérus, az első tagját a Bernoulli-egyenlet felhasználásával határozzuk meg a $v_{1x} = v_{2x}$ figyelembe vételével:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} (v_{2y}^2 - v_{1y}^2).$$

Fentiek alapján a (8.19) összefüggés átalakítható:

$$R_x = \frac{\rho}{2} (v_{2y} - v_{1y}) t (v_{2y} + v_{1y}) \quad (8.21)$$

A 8.20 és 8.21 kifejezésekben szerepel a $\Gamma = (v_{1y} - v_{2y}) t$ kifejezés, ami az áramlási sebesség ellenőrző felületre illeszkedő G zárt görbe mentén vett vonalintegrálja, a cirkuláció. (Az áramvonalakra illeszkedő két vonalszakaszon a sebesség vonalintegrálja éppen kiejti

egymást.) Itt a hagyományoknak megfelelően a szokásossal ellentétesen vettük föl a pozitívnak tekintett körüljárási irányt. Írjuk fel az \underline{R} vektor két komponensét!

$$R_x = -\rho \Gamma \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}, \quad R_y = \rho \Gamma v_x,$$

$$|\underline{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho \Gamma \sqrt{v_x^2 + \left(\frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} \right)^2}. \quad (8.22)$$

Az 8.6 ábra és a (8.22) összefüggések alapján belátható, hogy a szárnyra ható \underline{R} erő merőleges a \underline{v}_∞ zavartalan áramlási sebesség vektorra (\underline{v}_∞ lenne a sebesség, ha a szárnyrács nem lenne az áramlásban). Felismerve, hogy a gyökjel alatti mennyiség a 8.6. ábrán \underline{v}_∞ -nel jelölt „átlagos” sebesség abszolút értéke, írható:

$$|\underline{R}| = \rho |\underline{v}_\infty| \Gamma \quad [\text{N/m}], \quad (8.23)$$

azaz a szárnyrács egy szárnyának lapra merőleges 1m hosszúságú szakaszára ható erő a sűrűség, az „átlagsebesség” és a szárny körüli cirkuláció szorzataként adódik.

„Hígítsuk” minden határon túl a szárnyrácsot, azaz $t \rightarrow \infty$, miközben $v_{1y} - v_{2y} \rightarrow 0$ úgy, hogy $\Gamma = t(v_{1y} - v_{2y}) = \text{áll.}$, azaz a szárnyrácsból egy egyedülálló szárny lesz, ami természetesen nem képes eltéríteni az egész áramló közeget, azaz $\underline{v}_2 \rightarrow \underline{v}_1 \rightarrow \underline{v}_\infty$. **Egyedülálló szárny esetén tehát a szárnyra ható erő merőleges a zavartalan (a szárnytól távol érvényes) áramlási sebességre. A szárny 1m hosszú szakaszára ható erőt az**

$$\boxed{|\underline{R}| = \rho |\underline{v}_\infty| \Gamma} \quad (8.24)$$

összefüggésből számolhatjuk (Kutta-Zsukovszkij-tétel).

Itt jegyezzük meg, hogy a szárny körül csak akkor alakul ki cirkuláció, ha az áramló közeg sűrűdésos. Mindazonáltal az általunk is használt tárgyalásmód, amely a sűrűdést csak a cirkuláció kialakulásáig veszi figyelembe, egyébként pedig sűrűdésmentes közeg feltételezésével vizsgálja az áramlást, a gyakorlatban is jól hasznosítható eredményekre vezetett. A szárnyrácsok vizsgálatának az áramlástechnikai gépek tervezésénél van gyakorlati jelentősége, hiszen pl. egy radiális ventilátor járókerekekében (ld. 6.6. ábra) bármely irányban is járunk körül, a lapátok végtelen sokszor ismétlődnek. Egy ilyen ún. körrácsnak a leképezésével juthatunk a 8.6. ábrán látható egyenes rácshoz.

9. A sűrűdásos közegek és mozgásegyenletük

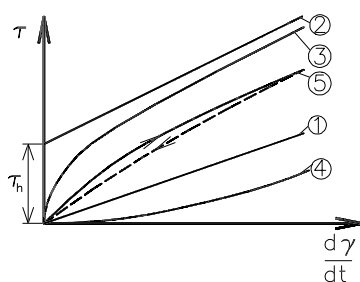
Az 1. fejezetben bevezettük az ideális közeg fogalmát. Az ideális közeg a valósággal ellentétben homogén, sűrűdásmentes és összenyomhatatlan. Ebben és néhány további fejezetben feladjuk a sűrűdásmentesség kritériumát: olyan áramlásokkal foglalkozunk, amelyekben a **sűrűdásos közeg** deformációjának hatására csúsztatófeszültségek és húzófeszültségek is ébrednek.

9.1. A nemnewtoni közegek

Az 1. fejezetben már foglalkoztunk a folyadékban keletkező csúsztatófeszültség és a folyadék deformáció kapcsolatával, és megállapítottuk, hogy **a csúsztatófeszültség a deformációsebességgel arányos**:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{d\gamma}{dt}.$$

Megállapítottuk továbbá, hogy az aláhúzott Newton-féle viszkozitási törvény a folyadékok nagy részére, az u.n. newtoni folyadékokra vonatkozik. Newtoni folyadékok a mérnöki gyakorlatban legtöbbször előforduló közegek: a víz, a levegő, a gázok. **Számos olyan folyadék van azonban, amelyeknél a csúsztatófeszültség nem egyenesen arányos a deformációsebességgel. Ezeket a folyadékokat nemnewtoni folyadékoknak nevezzük.** A nemnewtoni közegekkel a **reológia** foglalkozik.



9.1. ábra

Tekintsük a 9.1. ábrát! A diagramon a különböző közegek **reológiai görbéi** láthatóak, amelyek a folyadékban keletkező τ csúsztatófeszültség és a $d\gamma/dt$ -vel jellemzett deformációsebesség kapcsolatát mutatják meg. Az **1** jelű görbe egy newtoni közegre vonatkozik, a **2** jelű pedig egy **plasztikus folyadékra**, amelynél egy meghatározott τ_h határ-csúsztató feszültség elérése után kezd a közeg folyamatosan deformálódni:

$$\tau = \tau_h + \mu_{\infty} \frac{d\gamma}{dt},$$

ahol μ_{∞} a közeg sajátosságaitól függő állandó. A plasztikus folyadékokra általában valamilyen térhálós szerkezet a jellemző, amelynek τ_h hatására bekövetkező összeomlása után kezd áramlani a közeg. Plasztikus közeg pl. az olajfesték és a fogpép.

A **3** és **4** jelű görbék az ún. **hatványfüggvény közegekre** vonatkoznak, amelyeknél a csúsztatófeszültség és a deformációsebesség közötti kapcsolatot egy hatványfüggvény írja le:

$$\tau = k \left(dy / dt \right)^n .$$

$n < 1$ esetén a **3** jelű reológiai görbe a **plasztikus közegek**éhez hasonlít, ezért ez egy ún. **pszeudoplasztikus közegre** vonatkozik. Ezek a közegek általában hosszú láncú molekulákat tartalmaznak. E molekulák „elrendeződéséig” a deformációsebesség adott növekedéséhez nagy csúsztatófeszültség-változás tartozik, később kisebb.

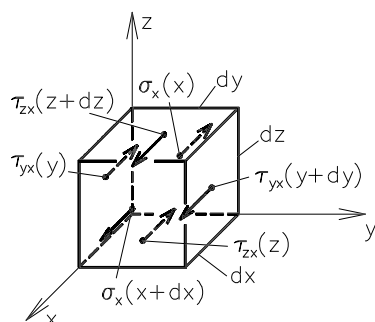
Az $n > 1$ hatványkitevővel rendelkező **4** jelű ún. **dilatáló** közegek kis sebességű deformációjához viszonylag kis csúsztatófeszültség tartozik, növekvő deformációsebesség rohamosan növekvő csúsztatófeszültséget igényel. Ilyen közeg pl. az ásványi porokat tartalmazó zagy.

Az **5** jelű görbe **tixotrop** közegekre vonatkozik. A tixotrop közegek fontos tulajdonsága, hogy reológiai görbéik alakulása függ a közeg megelőző deformációjától. Ilyen közeg pl. a nyersolaj.

9.2. A mozgásegyenlet

Az áramló közeg gondolatban elhatárolt részére kétféle erő: a **tömegre ható térerősség és a felületen ható, a szomszédos folyadékrészekről átadódó erő hat. Ezeknek az erőknek az eredője változtatja meg az áramló közeg mozgásmennyiségét, azaz gyorsítja a gondolatban elhatárolt folyadékrészt.** Írjuk fel ezt a gondolatot egységnyi tömegű folyadékrészre:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \underline{g} + \underline{F}} \quad (9.1)$$



9.2. ábra

A \underline{g} az erőtér térerősség vektora (azaz az egységnyi tömegre ható erő), az \underline{F} pedig az egységnyi tömegű folyadékrész felületén ható erők eredője. (A 4.2. fejezetben láttuk, hogy a súrlódás elhanyagolása esetén $\underline{F} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$.) A **súrlódásos közegekben a gondolatban elhatárolt folyadékrész felületén az arra me-**

rőleges, nyomásból származó erőn kívül a felületre

merőleges, a folyadék deformációjával összefüggő húzófeszültségből és a felülettel párhuzamos, csúsztatófeszültségből származó erők is ébrednek. A 9.2. ábrán egy elemi élhosszúságú kockán mutatjuk be az x irányú erők előidéző feszültségeket. A $\tau [\text{Pa}]$

csúsztatófeszültségek és a $\sigma [\text{Pa}]$ (az eddig tárgyalt nyomást is tartalmazó) húzófeszültségek a térben változnak. Ez a változás okozza a felületen ható erőkől származó, az elemi folyadékrészt gyorsító eredő erőt.

Írjuk fel a kis kockára ható, x irányú eredő erőt, majd osszuk el a kis kocka $\rho \, dx \, dy \, dz$ tömegével, hogy az egységnyi tömegre ható \underline{F} erő x komponensét kapjuk.

$$F_x = \frac{1}{\rho \, dx \, dy \, dz} \left\{ \left[\sigma_x(x+dx) - \sigma_x(x) \right] dy \, dz + \left[\tau_{yx}(y+dy) - \tau_{yx}(y) \right] dx \, dz + \left[\tau_{zx}(z+dz) - \tau_{zx}(z) \right] dx \, dy \right\} \quad (9.2)$$

(Az indexek között az első annak a síknak a normálisát jelzi, amelyen az adott feszültség ébred, a második pedig a feszültség irányát. Ha e kettő egybeesik, akkor csak egy indexet használtunk.)

Tekintettel arra, hogy pl. $\sigma_x(x+dx) = \sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, a (9.2) összefüggés átalakítás után az alábbi alakra hozható:

$$F_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right). \quad (9.3)$$

Jelöljük $\underline{\underline{\Phi}}$ -vel a **feszültségtenzort**, amelynek mátrixa:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

(9.3) és (9.4) összevetéséből látható, hogy az egységnyi tömegű folyadékra ható \underline{F} erő a feszültségtenzorból az

$$\underline{F} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\nabla} \quad (9.5)$$

összefüggéssel fejezhető ki, ahol $\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$ a szokásos nabla (vektor) differenciáloperátor.

A folyadékra ható erők és a mozgásállapot között összefüggést teremtő (9.1) mozgásegyenlet tehát így írható:

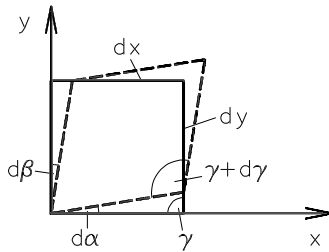
$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\nabla}} \quad (9.6)$$

Figyelembe véve a folyadék rész gyorsulás tárgyalásánál tanultakat (4.2), a mozgásegyenlet x irányú komponens egyenlete az alábbi módon írható fel:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right). \quad (9.7)$$

A (9.6) ill. (9.7) mozgásegyenleteket nem tudjuk használni mindaddig, amíg a feszültségállapotról nincs információnk. Az előzőekben már megismertük a folyadékok azon sajátosságát, hogy a csúsztatófeszültség és a deformációsebesség között kapcsolat van. Így tehát lehet vezetni a feszültségállapotot a mozgásállapotból és a (9.6) és (9.7) összefüggés jobb oldalára a σ és τ helyett a sebességkomponenseket tartalmazó kifejezéseket lehet írni. Ezáltal az egyenletekben lévő ismeretlenek száma radikálisan csökkenthető.

Szorítkozzunk newtoni közegekre, amelyeknél a csúsztatófeszültség a tapasztalatok szerint arányos a $d\gamma/dt$ deformációsebességgel. A kis folyadék rész mozgásának elemzésénél (3.5. fejezet) megismertük, hogy a folyadék rész mozgását párhuzamos eltolódásra, forgásra, tágulásra és alakváltozásra lehet felbontani. Ezek közül az utolsó, az alakváltozás van kapcsolatban a feszültségállapottal.



9.3. ábra

Tekintsük a 9.3. ábrát, ahol egy, az áramló közegben gondolatban elhatárolt elemi méretű hasáb látható. Vizsgáljuk meg, hogy a γ szög idő szerinti változása hogyan függ a hasáb deformációjának sebességétől, azaz a lap síkjába eső sebességkomponensek hely szerinti változásától. A dx hosszúságú oldal dt idő alatt $d\alpha$ szöget fordul el, mert a végpontjainak y irányú sebessége különböző. dt idő alatt a

végpontok által megtett út különbsége: $\frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt$. Az $d\alpha$ elfordulási szöget úgy kapjuk,

hogy ezt elosztjuk dx -szel. Tekintettel arra, hogy $d\gamma = d\alpha + d\beta$ írható:

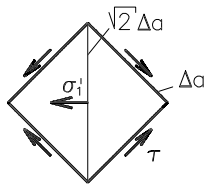
$$d\gamma = d\alpha + d\beta = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} dt. \quad (9.8)$$

Az egységnyi időre jutó szögelfordulást, azaz a deformációsebességet, a dinamikai viszkozitással megszorozva a deformációt előidéző τ_{xy} és az ezzel megegyező τ_{yx} csúsztatófeszültségeket kapjuk:

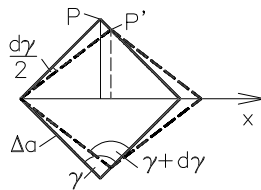
$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \tau_{yx}. \quad (9.9)$$

Hasonlóan kifejezhető a többi csúsztatófeszültség komponens is.

A felületre merőleges σ feszültségkomponensek két részből tevődnek össze: a már megismert nyomásból és az alakváltozásból adódó húzófeszültségből. A nyomást a tér P pontjában úgy tekintjük, mint egy P középpontú, r sugarú gömb felületén a felületre merőleges feszültségek átlagát $r \rightarrow 0$ esetén: $-p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$. A σ húzófeszültségek a nyomást negatív előjellel fogják tartalmazni, hiszen az akkor pozitív, ha a felületbe befelé mutató erőt eredményez. Az alakváltozás eredményeként létrejövő csúsztatófeszültségek következtében felületre merőleges σ' húzófeszültségek is keletkeznek, azaz pl. a folyadékban keletkező σ húzófeszültség x irányú komponensére írható: $\sigma_x = -p + \sigma'_x$. A deformáció következtében keletkező feszültségek meghatározása érdekében tekintsük a 9.4.a. ábrát, ahol egy hasábot láthatunk. A lapra merőlegesen



9.4.a. ábra



9.4.b. ábra

egységnyi hosszúságú, négyzet alapú hasáb $\Delta a \cdot 1$ felületű oldalain ható τ csúsztatófeszültségeket az átlóval kijelölt sík mentén ható σ'_1 húzófeszültség tartja egyensúlyban. A lapra merőlegesen egységnyi hosszúságú hasábra ható erők egyensúlyát felírva:

$$2 \Delta a \tau \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Delta a \sigma'_1, \text{ amiből } \sigma'_1 = \tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} \text{ adódik.}$$

A 9.4.b. ábrán látható a hasáb deformálódása, amely az x irányú sebességkomponens x irányú változására vezethető vissza. Az átló megnyúlása dt idő alatt: $\overline{PP'}$. Ennek fele a $d\gamma/2$ szögelfordulást meghatározó, az x tengellyel 45° -ot bezáró $\overline{PP'}$ szakasz x irányú vetülete. A $\overline{PP'}$ szakasz hossza tehát: $\frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta a dt$, amiből a $\frac{d\gamma}{2} = \frac{\partial v_x}{\partial x} dt$. Fentiek figyelembevételével írható:

$$\sigma'_{1x} = \mu \frac{d\gamma}{dt} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}. \text{ Hasonlóan } \sigma'_{1y} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \text{ és } \sigma'_{1z} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (9.10)$$

A (9.10) kifejezések összefüggést teremtenek egy adott koordinátára merőleges síkon ébredő, az alakváltozás miatt keletkező húzófeszültségek és a síkra merőleges sebességkomponensek adott koordináta irányú megváltozása között.

Ha viszont $p \neq \text{áll.}$ esetén mindhárom koordináta irányban egyformán „tágul” a közeg,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \text{ akkor a folyadékrész növekszik, de nincsen alakváltozás } \left(\frac{d\gamma}{dt} = 0\right).$$

Miután

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \underline{v} \quad (9.11)$$

valamennyi irányban azonos ütemű „tágulás” esetén pl. $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{3} \text{div } \underline{v}$. A húzófeszültségek keletkezését eredményező deformációt tehát nem a $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, hanem a $\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div } \underline{v}$ kifejezés értéke jellemzi. Ezért a deformáció miatti húzófeszültségre írható, $\sigma_x' = 2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div } \underline{v} \right)$, azaz a σ_x az alábbi módon fejezhető ki:

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v}. \quad (9.12)$$

A (9.9) és (9.12) összefüggések figyelembevételével az alábbi módon írható fel a sebességkomponensek deriváltjaival a feszültségtenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} & \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} & \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

Látható, hogy a feszültségtenzor szimmetrikus mátrixa a $\underline{\underline{D}}$ deriválttenzor (3.28) és transzponáltja segítségével az alábbi módon írható fel:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left(-p - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} \right) \underline{\underline{E}} + 2\mu \underline{\underline{A}}_s, \quad (9.14)$$

ahol $\underline{\underline{E}}$ az egységtenzor, $\underline{\underline{A}}_s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^*)$ az alakváltozási sebesség tenzor (ld. (3.15) összefüggés). A (9.14) kifejezés szépen mutatja a feszültségek és a deformációsebesség lineáris kapcsolatát, amely a newtoni folyadékok sajátossága. A (9.14) összefüggéshez hasonló szerkezetű, de bonyolultabb kifejezéseket lehet felírni a különböző nemnewtoni folyadékok esetén a deformációsebesség és a feszültségállapot között.

Most már képezhetjük a $\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{V}}$ -t és fel tudjuk írni a mozgásegyenlet (9.6) kifejezését az egyes koordináták irányában. Az x irányú komponens egyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Hasonlóképpen felírva a mozgásegyenlet legáltalánosabb alakját y és z koordináta irányban, 3 egyenletet kapunk, amelyekben hat ismeretlen: $v_x, v_y, v_z, p, \rho, \mu$ szerepel. Negyedik egyenletként felírható a folytonosság tétele a (3.25) összefüggés alakjában. A ρ és μ meghatározásához szükséges egy hetedik ismeretlen, a T hőmérséklet bevezetése. Ötödik egyenletünk a sűrűség, a nyomás és a hőmérséklet kapcsolatát fejezi ki, pl. gáz esetén az (1.5) gáztörvény, a hatodik egyenlet pedig kapcsolatot teremt a viszkozitás és a hőmérséklet között. A hiányzó hetedik egyenlet az energiaegyenlet, amely a belső energia (hőmérséklet), a mozgási energia valamint a közeg által és a közegen végzett munka között teremt kapcsolatot. Elvileg tehát rendelkezésre áll az ismeretlenek számával megegyező számú egyenletet tartalmazó legáltalánosabb egyenletrendszer, amelynek analitikus megoldása azonban csak korlátozott számú, egyszerű esetekben ismert, numerikus megoldása pedig igen sok esetben még nem lehetséges. Ezért egyszerűsítő feltevéseket teszünk.

9.3. A Navier-Stokes-féle egyenlet

Tételezzük fel, hogy $\mu = \text{áll.}$ és $\rho = \text{áll.}$ azaz az áramló közeg dinamikai viszkozitása és sűrűsége állandó. Figyelembe véve, hogy $\rho = \text{áll.}$ esetén a folytonosság (3.25) tétele értelmében $\operatorname{div} \underline{v} = 0$, e feltételezéssel a (9.15) összefüggés jobb oldalán lévő kapcsos zárójelben lévő kifejezés az alábbi alakra hozható:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\rho} \left(2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \right) = v \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\ + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Miután az egyenlet jobb oldalán álló második tag a $\operatorname{div} \underline{v}$ x szerinti deriváltja, amely $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ következtében zérus, **felírható az állandó sűrűség és viszkozitás esetén érvényes mozgásegyenlet a Navier-Stokes-féle egyenlet**, amelyet Navier 1827-ben, majd Stokes 1845-ben vezetett le:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{9.17}$$

A négy ismeretlen (v_x , v_y , v_z és p) meghatározásához szükséges negyedik egyenlet a folytonosság egyenlete, amely $\rho = \text{áll.}$ esetén a

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{9.18}$$

alakban írható fel.

Vektoriális írásmódban a Navier-Stokes-féle egyenlet:

$$\frac{d \underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v} \tag{9.19}$$

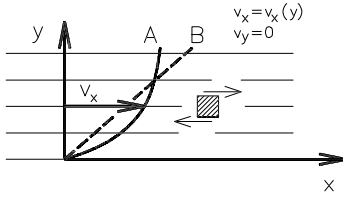
Látható, hogy a Navier-Stokes-egyenlet a jobb oldal utolsó tagjával a $\nu \Delta \underline{v}$ taggal különbözik a súrlódásmentes esetre levezetett Euler-egyenlettől (ld. (4.14) összefüggés). A súrlódás hatását kifejező tagban szereplő $\Delta \underline{v}$ felbontható: $\Delta \underline{v} = \text{grad div} \underline{v} - \text{rot rot} \underline{v}$. Miután $\text{div} \underline{v} = 0$ írható:

$$\frac{d \underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \nu \text{rot rot} \underline{v} . \tag{9.20}$$

A (9.20) egyenlet jól mutatja az áramlás örvényessége és a súrlódás közötti kapcsolatot. Potenciális áramlás ($\text{rot} \underline{v} = 0$), sőt állandó örvényességű áramlás esetén a súrlódásnak nincs szerepe, a Navier-Stokes-egyenlet az Euler-egyenletbe megy át.

9.4. Alkalmazások

Couette-áramlás



9.5. ábra

Tekintsük a 9.5. ábrán látható A jelű sebességmegoszlással jellemzett ún. Couette-áramlást, amely hasonlít a szilárd fal mellett a valóságban kialakuló áramlásra. Legyen $\rho = \text{áll.}$, és $\mu = \text{áll.}$, az áramlás pedig legyen **stacionárius síkáramlás** (ld. 3.4.fejezet). Ennél az áramlásnál

$$v_x = v_x(y), \quad v_y = 0. \quad \text{Következésképp} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0.$$

Mivel $\text{div} \underline{v} = 0$, a (9.13) feszültségtenzor az alábbi alakban írható fel:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} & -p \end{bmatrix},$$

azaz a tananyag legelején tárgyalt, Newton-féle viszkozitási törvény adódott a τ_{xy} -re.

Határozzuk meg a $\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\nabla}}$ -t!

$$\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\nabla}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (9.21)$$

Tekintsünk el a Föld nehézségi erőterétől és írjuk fel a (9.6) mozgásegyenlet x és y irányú komponens egyenletét!

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

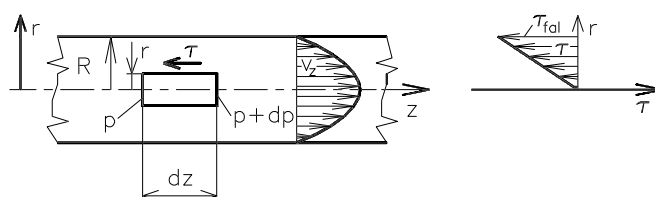
Miután a folyadékrészek gyorsulása és a sebesség x irány mentén képzett deriváltjainak értéke zérus, a második egyenletből $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ eredményre jutunk, azaz a párhuzamos egyenes áramvonalakra merőlegesen nem változik a nyomás (ld. még Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben). A felső egyenletből pedig a $\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ eredmény adódik.

Ha a sebességmegoszlás lineáris (ld. 9.5. ábra B jelű görbe), akkor az áramlásban elképzelt hasáb alakú kis folyadékrész felső és alsó lapján a Newton viszkozitási törvény (1.2) értelmében ugyanakkora, de ellentétes irányítású csúsztatófeszültség alakul ki, amely kiegyensúlyozza egymást. Ezért az áramlás fenntartásához nincs szükség nyomáskülönbségre. Ugyanez adódik az eredményül kapott mozgásegyenletből is, mivel v_x y szerinti második deriváltja lineáris sebességmegoszlás esetén zérus és a folyadékrészek nem gyorsulnak.

Ha a sebességmegoszlás az A jelű görbének felel meg, akkor a második derivált negatív, azaz x irányban csökkenő nyomás esetén tartható fenn az áramlás. Ebben az esetben ugyanis a kis hasáb felső lapján kisebb τ keletkezik, mint az alsón, ezért a csúsztatófeszültségek eredője -x irányítású erő lesz, amit a nyomáskülönbségből származó erőnek kell ellensúlyoznia.

Lamináris (réteges) áramlás csőben

Tekintsük a 9.6. ábrát, amely egy kör keresztmetszetű, egyenes csőben lévő kialakult, hengerszimmetrikus áramlást mutat be. (Azt az áramlást nevezzük kialakult áramlásnak, amelyben a sebességmegoszlás a cső hossza mentén nem változik: $v_r = 0$, $\frac{\partial(\quad)}{\partial z} = 0$.)



9.6. ábra

Vegyünk fel egy, a cső tengelyével koncentrikus r sugarú, dz hosszúságú hengert, és írjuk fel az erre ható erők egyensúlyát. Tekintettel arra, hogy a folyadékhenger nem gyorsul, a rá ható erőknek ki kell egyensúlyozniuk egymást. A hengerre az alap- és fedőlapján lévő nyomások különbségéből származó erő és a paláston keletkező, csúsztatófeszültségből származó erő hat. Vegyük fel a z koordináta tengelyt és pozitív irányításának figyelembevételével írjuk fel az erők egyensúlyát:

$$r^2 \pi p - r^2 \pi (p + dp) + 2 r \pi dz \tau = 0 \quad (9.22)$$

Behelyettesítés és egyszerűsítés után $2 \tau dz = r dp$ adódik, amiből a Newton-féle viszkozitási törvényt felhasználva:

$$\tau = \frac{1}{2} r \frac{dp}{dz} = \mu \frac{dv_z}{dr} \quad (9.23)$$

adódik. A (9.23) differenciálegyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg, figyelembe véve, hogy kialakult csőáramlásban $dp/dz = \text{áll.}$:

$$\int dv_z = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} \int r dr \Rightarrow v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + \text{áll.} \quad (9.24)$$

Ha $r=R$, azaz a csőfalon a sebesség $v_z = 0$. Ezt a peremfeltételt a (9.24) összefüggésbe behelyettesítve megkapjuk az integrálási állandót, majd v_z -t kifejezve a

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} [R^2 - r^2] \quad (9.25)$$

összefüggést kapjuk. A sebességmegoszlás tehát másodfokú forgási paraboloid alakú (ld. 9.6. ábra). Látható, hogy akkor egyezik meg az áramlás iránya a z tengely pozitív irányításával, (azaz $v_z > 0$), ha $\frac{dp}{dz} < 0$, azaz – a várakozásnak megfelelően – a nyomás növekvő z koordináták irányában csökken. (Áramlás irányában csökkenő nyomásból származó erő mozgatja a közeget a súrlódóerőkkel szemben.) Vezessük be a $\Delta p' [\text{Pa}]$ súrlódási veszteség fogalmát, ami itt a súrlódás következtében bekövetkező nyomáscsökkenés. (Később ezt a fogalmat kiterjesztjük a Bernoulli összeg csökkenésére.) A fentiek alapján írható: $\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta p'}{l}$, ahol $l [\text{m}]$ az a csőhossz, amelyen a súrlódás következtében a $\Delta p'$ nyomáscsökkenés bekövetkezett. Ezzel a (9.23)-mal megadott csúsztatófeszültség és a (9.25) sebességmegoszlás így írható:

$$\tau = -\frac{\Delta p'}{2l} r, \text{ és} \quad (9.26)$$

$$v_z = \frac{\Delta p'}{4\mu l} [R^2 - r^2]. \quad (9.27)$$

A 9.6. ábrában felrajzoltuk a τ és a sebesség sugár menti változását. Látható, hogy a τ negatív és abszolút értéke a sugár függvényében nő.

A maximális sebesség $r=0$ -nál adódik: $v_{z\max} = \frac{\Delta p' R^2}{4\mu l}$. A (3.34) összefüggés kapcsolatot teremtett a forgási paraboloid alakú sebességmegoszlás esetén a maximális sebesség és a \bar{v} átlagsebesség között. Másodfokú paraboloid ($n=2$) esetén $\bar{v} = \frac{v_{z\max}}{2}$. Így írható:

$$\bar{v} = \frac{1}{8} \frac{\Delta p'}{\mu l} R^2$$

ill. a nyomásvesztéset kifejezve:

$$\Delta p' = \frac{8 \mu \bar{v} l}{R^2} \quad (9.28)$$

A csúsztatófeszültség a (9.26) összefüggésből a falnál $\tau_{\text{fal}} = -\frac{\Delta p' R}{2l}$ értéket vesz fel.

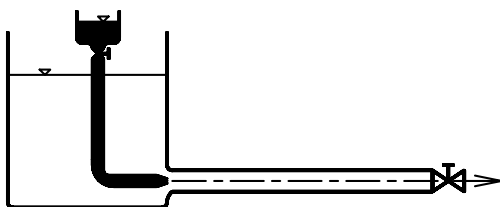
Ugyanez adódik, ha egyenlővé tesszük az áramlást akadályozó, csúsztatófeszültségből származó $2 R \pi l \tau_{\text{fal}}$ erő és az áramlást fenntartó, nyomásból származó $R^2 \pi \Delta p'$ erő összegét zérussal (mivel nem gyorsul a közeg) és kifejezzük a τ_{fal} értékét.

10. Lamináris és turbulens áramlások, határrétegek

Ebben a fejezetben a valóságos (súrlódásos) közegek sajátosságaival foglalkozunk. Az itt tanult, többnyire kvalitatív ismeretek segítségünkre lesznek abban, hogy gyakorlati áramlási jelenségeket értelmezni tudjunk, közelebb kerülve ezáltal megoldásukhoz.

10.1. A Reynolds-féle kísérlet, lamináris és turbulens áramlások

A múlt század harmadik harmadában végezte alapvető kísérleteit Reynolds. A 10.1. ábrán látható tartályból szabályozható mennyiségű víz áramlik ki. Az üvegből készült



10.1. ábra

kifolyócső tengelyébe egy másik, vékonyabb csövön keresztül megfestett folyadék (pl. kék tinta) vezethető be. Ha a folyadék sebessége kicsi, a festett folyadékszál végighúzódik a cső tengelyében, jól megkülönböztethetően az átlátszó víztől. (ld. felső kép) Ebben az esetben **lamináris (= réteges) áramlásról beszélhetünk, amelyben az egymás mellett áramló folyadékrétegek anyaga csak a molekuláris diffúzióval keveredik egymással. A sebességvektor a cső bármely pontján időben nem változik, az áramlás stacionárius, ha a kiömlő folyadékmennyiség időben nem változik.**

Növelve a folyadék sebességét a festett folyadékszál időnkénti megzavarását tapasztalhatjuk (ld. középső kép), ami a sebesség növekedésével egyre gyakoribb lesz, mígnem az áramlás teljes egészére kiterjed és állandósul ez a megzavart áramlási állapot (ld. alsó kép). Még nagyobb sebességnél a csőben áramló közeg egyenletes, világoskék színű, tehát a festék teljesen elkeveredik a csőben áramló közeggel. Ez a tapasztalat azt bizonyítja, hogy az **áramlásban időlegesen jelentős, csőtengelyre merőleges sebességkomponens is van, amely a festékszempcséket a teljes csőkeresztmetszetben elkeveri.** Ha a kiömlő folyadékmennyiség időben nem is változik, az áramlási tér pontjaiban a sebesség iránya és nagysága időben egy középérték körül ingadozik: **az áramlás kvázistacionárius.** Megvizsgálva az áramlás struktúráját megállapíthatjuk, hogy abban **kisebb nagyobb örvények keletkeznek, egymással helyet cserélnek, összeolvadnak, elkeverednek, eltűnnek.** Az áramlási tér egy adott pontjában a sebességvektor ingadozása az egymás után áthaladó, különböző méretű és

intenzitású örvényekkel magyarázható. Ezt az **örvényekre szétbomló, igen bonyolult áramlást turbulens áramlásnak** nevezzük.

Reynolds kiderítette, hogy a csőáramlás laminárisból turbulensbe való átalakulása nem csupán a v átlagsebességtől, hanem a $\frac{v d \rho}{\mu}$ dimenziótlan csoport értékétől is függ, amelyet Reynolds-számnak nevezünk, és amellyel később behatóan foglalkozunk:

$$\boxed{\text{Re} = \frac{v d \rho}{\mu}} \quad (10.1)$$

Ha a cső ill. ezáltal az áramlás rezgéseknek, zavarásnak van kitéve, akkor a **lamináris-turbulens átalakulás** $\text{Re} \cong 2300$ körül megy végbe. Ha kellően zavarmentessé tesszük az áramlást, ennél lényegesen nagyobb Reynolds-szám értékek mellett is lamináris maradhat az áramlás, de ilyen esetben már egy kis zavarásra is robbanásszerűen végbemegy az átalakulás (átcsapás).

Az időbeli átlagértékekre vonatkozóan stacionárius turbulens áramlásban a \underline{v} sebességvektor úgy írható fel, mint az **időbeli átlagsebesség**

$$\bar{\underline{v}} = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{v} dt \quad (10.2)$$

és a **sebességingadozás** \underline{v}' összege:

$$\underline{v} = \bar{\underline{v}} + \underline{v}' \quad (10.3)$$

(A $T[s]$ átlagolási időtartam haladja meg lényegesen azt az időtartamot ami alatt egy örvény a tér egy pontján áthalad.)

A sztochasztikusan változó ingadozó sebesség időbeli átlagára írható:

$$\bar{\underline{v}'} = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{v}' dt = 0$$

A turbulens áramlásban a nyomás is ingadozik: $p = \bar{p} + p'$.

A turbulencia mértékének jellemzésére a **turbulenciafokot** használjuk, amely a sebesség-ingadozások átlagos mértékét viszonyítja az időbeni átlagsebességhez:

$$Tu = \frac{\sqrt{(\underline{v}')^2}}{|\underline{\bar{v}}|} = \frac{\sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}}{|\underline{\bar{v}}|} \quad (10.4)$$

10.2. Az időbeni átlagokra vonatkozó mozgásegyenlet

Az előző fejezetben levezetett (9.15) mozgásegyenlet ill. az állandó sűrűség és viszkozitás esetén érvényes (9.17) ill. (9.19) Navier-Stokes-egyenlet helyesen írja le a newtoni közegek áramlását – függetlenül attól, hogy az áramlás lamináris vagy turbulens. A turbulens áramlások igen bonyolult struktúrája, időfüggése kérdéssé teszi, hogy találunk-e olyan módszereket, amelyekkel ezek az áramlások teljes bonyolultságukban számíthatók lennének. Ezért Reynolds levezette az időbeni átlagokra vonatkozó mozgásegyenletet.

Végezzük el mi is ugyanezt a feladatot! Legyen a sűrűség $\rho = \text{áll.}$ Írjuk fel a Navier-Stokes-egyenlet x irányú komponens egyenletét (ld. (9.17) összefüggés) úgy, hogy a bal oldalhoz adjunk hozzá $v_x \operatorname{div} \underline{v} = 0$ -t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (10.5)$$

A bal oldalon elvégezve a műveletet az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial(v_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (10.6)$$

Helyettesítsük be a (10.3) alapján felírható $v_x = \bar{v}_x + v_x'$ stb. kifejezéseket a (10.6) egyenletbe, és ezt követően képezzük a egyenlet mindkét oldalának időbeli átlagát, ami meg-egyezik az egyes tagok időbeli átlagának összegével ill. különbségével. (Az időbeli átlagot a (10.2) összefüggésnek megfelelően definiáljuk és az eddigieknek megfelelően felülvonással jelöljük.) Az egyszerűség kedvéért csak az egyes tipikus tagokra mutatjuk be az eljárást:

$$\overline{\frac{\partial v_x}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial v_x'}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t},$$

mivel a középső kifejezés második tagja zérus. Az időbeli átlagolás ugyanis idő szerinti integrálást jelent (ld. (10.2) összefüggés), az integrálás és a differenciálás sorrendje pedig felcserélhető. Ezért

$$\frac{\overline{\partial v'_x}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{v'_x}}{\partial t} = 0.$$

A $\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial t}$ értéke zérus, ha az időbeli átlagsebesség hosszabb időtartamot figyelembevéve időben állandó. Az időbeli átlagsebesség változhat pl. ha turbulens áramlás esetén a cső végén lévő csapot fokozatosan kinyitjuk. Ez esetben a fenti differenciálhányados értéke zérustól eltérő.

Írható továbbá:

$$\frac{\overline{\partial (v_x)^2}}{\partial x} = \frac{\partial (\overline{v_x^2})}{\partial x} + 2 \frac{\overline{\partial (v_x v'_x)}}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{v'^2_x})}{\partial x},$$

ahol a fentiek alapján a jobb oldal második tagja ugyancsak zérus értékű. Hasonlóan írható:

$$\frac{\overline{\partial (v_x v_y)}}{\partial y} = \frac{\partial (\overline{v_x v_y})}{\partial y} + \frac{\overline{\partial (v_x v'_y)}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial (v'_x v_y)}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial (v'_x v'_y)}}{\partial y},$$

ahol a jobb oldal második és harmadik tagja zérus, hiszen itt egy időben állandó átlagsebességkomponenssel – konstanssal – szorozva szerepelnek az ingadozó sebességkomponensek időbeli átlagai.

$$\frac{\overline{\partial p}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial p'}}{\partial x},$$

ahol a jobb oldal második tagja zérus.

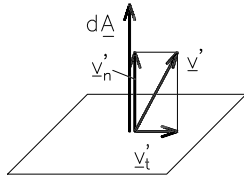
$$\frac{\overline{\partial^2 v_x}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 v'_x}}{\partial x^2},$$

ahol a jobb oldal második tagja ismét zérus.

A fentiek alapján a (10.6) összefüggés az alábbi alakban írható:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_z)}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(\overline{v'^2_x})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'_x v'_y})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{v'_x v'_z})}{\partial z}. \quad (10.7)$$

A bal oldal második, harmadik és negyedik tagjában elvégezve a deriválást, megkapjuk a $\bar{v}_x \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$ tagot, amit elhagyunk. **Ha tehát egy turbulens, kvázistacionárius áramlásra írjuk fel a Navier-Stokes-egyenletet, az időbeli sebesség- és nyomásátlagokra egy teljesen hasonló egyenletet kapunk, csak az egyenlet jobb oldalán a sebességingadozások hatását kifejező, az ingadozó sebességek négyzeteinek ill. szorzatának időbeli átlagait tartalmazó tagok jelennek meg.**



10.2. ábra

Vizsgáljuk meg az impulzustétel segítségével ezeknek a tagoknak a jelentését! Tekintsük a 10.2. ábrát, ahol egy tetszőleges A ellenőrző felület $d\mathbf{A}$ vektorral jellemzett felületeleme látható. A vektor talppontjában ebben a pillanatban a sebességingadozás \mathbf{v}' , amely normális és érintőirányú komponensekre (\mathbf{v}'_n és \mathbf{v}'_t) bontható fel.

Legyen az időbeli átlagsebesség $\bar{\mathbf{v}}$ stacionárius. Felírva az impulzustételt az előző megfontolások alapján beláthatóan az alábbi kifejezés adódik:

$$\int_A \bar{\mathbf{v}} \rho \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{A} = - \int_A \bar{p} d\mathbf{A} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_A \overline{\mathbf{v}' \rho \mathbf{v}'} d\mathbf{A}. \quad (10.8)$$

A jobb oldal utolsó tagja fejezi ki a sebességingadozás hatását. Figyelembe véve, hogy $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_n + \mathbf{v}'_t$ és a $\mathbf{v}'_t d\mathbf{A} = 0$ ill. $\mathbf{v}'_n d\mathbf{A} = |\mathbf{v}'_n| |d\mathbf{A}| = v'_n dA$, írható:

$$- \int_A \overline{\mathbf{v}' \rho \mathbf{v}'} d\mathbf{A} = - \int_A \overline{\mathbf{v}'_n \rho \mathbf{v}'_n} dA - \int_A \overline{\mathbf{v}'_t \rho \mathbf{v}'_n} dA.$$

A jobb oldali első integrál a felületre merőleges erővektort eredményez, ezért a (10.8) összefüggés az alábbiak szerint írható fel:

$$\int_A \bar{\mathbf{v}} \rho \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{A} = - \int_A \left[\bar{p} + \rho \left(\overline{v'^2_n} \right) \right] d\mathbf{A} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_A \rho \left(\overline{\mathbf{v}'_t \mathbf{v}'_n} \right) dA \quad (10.9)$$

A kvázistacionárius áramlásra felírt impulzustétel tehát átment egy időbeli átlagokra vonatkozó kifejezésbe, amelyben megjelent a sebességingadozások hatását kifejező két tag. Ezeket a tagokat, amelyeket az ellenőrző felületen kell integrálnunk, **látszólagos nyomásnövekedés és látszólagos csúsztatófeszültség tagoknak** nevezzük. A

$$p_1 = \rho \left(\overline{v_n'^2} \right) \quad (10.10)$$

a látszólagos (a sebességingadozások következtében létrejövő) nyomásnövekedés, a

$$\tau_1 = -\rho \left(\overline{v'_t v'_n} \right) \quad (10.11)$$

pedig **a látszólagos csúsztatófeszültség**. (A kifejezésekben az „'”index jelzi, hogy látszólagos feszültségekről van szó.) Az eddigiek alapján felismerjük a (10.7) egyenlet jobb oldalán a látszólagos húzófeszültség és a látszólagos csúsztatófeszültségek x komponensének hely szerinti deriváltjait:

$$-\frac{\partial \left(\overline{v_x'^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\overline{v'_x v'_y} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\overline{v'_x v'_z} \right)}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx1}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx1}}{\partial z} \right).$$

Ha hasonlóképpen átalakítjuk a másik két komponensegyenletet, akkor rájövünk, hogy a jobboldal egyenletenként három utolsó tagja egy $\underline{\underline{\Phi}}_1$ látszólagos feszültségtenzor és a $\underline{\nabla}$ szorzata, azaz a kvázistacionárius áramlásra az időbeli átlagokkal felírt mozgásegyenlet (ld. (9.6) összefüggés) így írható:

$$\frac{d\underline{\bar{v}}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\nabla} + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\nabla} \quad (10.12)$$

ahol

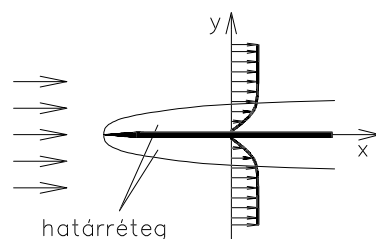
$$\underline{\underline{\Phi}}_1 = \begin{bmatrix} -\rho \left(\overline{v_x'^2} \right) & -\rho \left(\overline{v'_x v'_y} \right) & -\rho \left(\overline{v'_x v'_z} \right) \\ -\rho \left(\overline{v'_x v'_y} \right) & -\rho \left(\overline{v_y'^2} \right) & -\rho \left(\overline{v'_y v'_z} \right) \\ -\rho \left(\overline{v'_x v'_z} \right) & -\rho \left(\overline{v'_y v'_z} \right) & -\rho \left(\overline{v_z'^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1} & \tau_{yx1} & \tau_{zx1} \\ \tau_{xy1} & \sigma_{y1} & \tau_{zy1} \\ \tau_{xz1} & \tau_{yz1} & \sigma_{z1} \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

A (10.10) és (10.11) összefüggéssel megadott feszültségeket és a $\underline{\underline{\Phi}}_1$ látszólagos feszültségtenzor elemeit **Reynolds-feszültségeknek** nevezzük. A Reynolds-feszültségek bevezetése igen hasznos volt a turbulencia hatásának megértése és a turbulens áramlások közelítő számítása szempontjából egyaránt. **Az instacionárius Navier-Stokes-egyenlet ugyanis helyesen írja le a legbonyolultabb turbulens áramlásokat is.** Számításuk egyelőre azonban reménytelen teljes komplexitásukban, ezért **megelégszünk a sebesség és a nyomás időbeli átlagainak meghatározásával.** Ez úgy történik, hogy felírjuk **az időbeli átlagokra vonatkozó Navier-Stokes-egyenletet és kiegészítjük azt a sebességingadozások hatását kifejező tagokkal**, amelyek a látszólagos (az instacionárius turbulens áramlásban valóságban nem létező) nyomásnövekedés (ill. húzófeszültség-növekedés) és a látszólagos csúsztatófeszültség komponensek (a Reynolds-feszültségek) hely szerinti deriváltjai. **A turbulens in-**

gadozásokból adódó látszólagos feszültségek a folyadékrész átlagsebességgel számolt deformációjából adódó feszültségeknél általában egy-két nagyságrenddel nagyobbak, ezért fontos lenne viszonylag pontos számításuk. A Reynolds-feszültségek bevezetése a turbulens áramlások számításával kapcsolatos problémákat nem oldotta meg teljesen, mert még ma sem ismeretes olyan univerzális összefüggés, amely általánosságban leírná az egyes Reynolds-feszültségeket, azaz megoldhatóvá tenné a turbulens áramlásokat leíró egyenletrendszert. Számos modell létezik, amelyekkel közelítő számítások végezhetők. Jelenleg az áramlástani kutatások egyik legfontosabb területe ezeknek a feszültségeknek a meghatározása, leírása. Ezért is váltak igen fontossá azok a mérési módszerek (pl. a hődrót méréstechnika), amelyekkel a turbulens ingadozások meghatározhatók.

10.3. Határrétegek, keveredési úthossz, univerzális faltörvény

A mérnöki feladatok bonyolultabbá válása (pl. a repülés fejlődése) szükségessé tette olyan számítási eljárások kidolgozását, amelyekkel bonyolult turbulens áramlások jellemzői jó közelítéssel meghatározhatók. A teljes áramlási tér leírása pl. egy szárny körül megoldhatatlan nehézséget jelentett a számítógépek megjelenése előtt. Prandtl német áramlástan professzor évszázadunk első éveiben az alábbi megfontolást tette: ha egy szilárd testet teszünk az áramlásba, falán a sebesség (a tapadás törvénye értelmében) zérus, a sebesség a fal közelében, attól távolodva rohamosan növekszik. Ebben a rétegben a súrlódásnak nagy szerepe van. A szilárd testtől távol pedig a súrlódás elhanyagolható. **Tehát ha a súrlódás hatása szempontjából vizsgáljuk a teret, az két részre osztható** (ld.10.3. ábra):



10.3. ábra

- egy fal melletti viszonylag vékony rétegre, az ún. **határrétegre, ahol a sebesség a fal közvetlen közelében érvényes zérus értékről a faltól távolabb érvényes sebességre nő, és ahol a súrlódásnak döntő szerepe van,**
- **a faltól távolabbi áramlási térre, ahol a súrlódás hatása elhanyagolható** (azaz jó közelítéssel érvényes az Euler-egyenlet).

Hasonlóképpen osztanánk fel a teret két részre az áramló közegbe helyezett felmelegített sík lap körüli hőmérséklet eloszlás szempontjából is. A meleg sík lap távolabb is felmelegíti az áramló közeget, ez azonban elhanyagolható a lap közelében bekövetkező felmelegedéshez képest. Ezért az áramlási teret a lap közelében lévő, nagyobb hőmérséklettel és hőmérséklet gradienssel jellemezhető ún. hőmérsékleti határrétegre és az azon kívüli térre oszthatjuk, ahol a hőmérsékletet állandónak tekintjük. Itt jegyezzük meg, hogy **a hőmérsékleti határrétegben lejátszódó hőátadási folyamatok és az áramlási határrétegben lévő impul-**

zúscsere (a falhoz közelebb lévő, a fal hatására lelassult folyadékrészek fékezik a távolabbi gyorsabb folyadékrészeket) gyakorlatilag **ugyanannak a mechanizmusnak az eredménye: a molekuláris méretekben a molekulák ütközése, turbulens áramlások esetén ezen kívül az örvények egymásrahatása, keveredése okozza a fenti jelenségeket.**

A határréteg és azon kívüli áramlás felosztását indokolhatjuk a Navier-Stokes-egyenlet (9.20) alakban felírt változata alapján. Belátható, hogy a fal közelében az áramlás örvényessége ($\text{rot } \underline{v}$, nem összetévesztendő a turbulenciával!) nagy és a hely függvényében gyorsan változik, tehát a súrlódás hatását kifejező $\underline{v} \text{ rot rot } \underline{v}$ értéke viszonylag nagy. Ha feltesszük, hogy a test körüli áramlás nyugvó térből vagy örvénymentes áramlásból származik (pl. repülőgép-szárny esetén), akkor az áramlás bármely határrétegen kívül eső pontjában a $\underline{v} \text{ rot rot } \underline{v}$ értéke zérus.

A határréteg jellemzőit a Navier-Stokes-egyenlet segítségével számolhatjuk, ahol az alábbi feltételezésekkel szoktunk élni (ld. 10.3. ábra):

- a határrétegáramlás síkáramlás ($v_z = 0$, $\frac{\partial(\quad)}{\partial z} = 0$),
- $v_y \ll v_x$,
- $\frac{\partial(\quad)}{\partial x} \ll \frac{\partial(\quad)}{\partial y}$,
- az áramlás stacionárius,
- a térerő hatását figyelmen kívül hagyjuk.

Lamináris áramlás esetén a határréteg sajátosságai a Navier-Stokes-egyenlet (9.17) alakjából származtatott síkáramlásra vonatkozó alábbi egyenletrendszer (pl. numerikus) megoldásával határozható meg:

$$\begin{aligned}
 v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\
 &\equiv 0 \\
 v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \equiv 0 \\
 &\equiv 0 \quad \quad \quad \equiv 0 \quad \quad \quad \equiv 0 \quad \quad \quad \equiv 0
 \end{aligned}
 \tag{10.14}$$

A (10.14) összefüggés több tagjánál $\equiv 0$ -val jelöltük, hogy azokat a feltevéseinknek megfelelően a többi taghoz képest elhanyagoltuk. A második egyenletből az adódott, hogy **a határrétegen belül a nyomás az adott x metszetben a határrétegen kívüli nyomással egye-**

zik meg jó közelítéssel. A határrétegen kívül viszont a sűrűdés elhanyagolható, ezért az Euler-egyenletből adódóan írható:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = V \frac{dV}{dx}, \quad (10.15)$$

ahol V [m/s] a határrétegen kívüli áramlási sebesség.

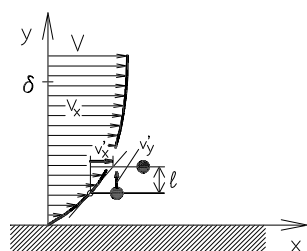
Behelyettesítve a (10.15) összefüggést a (10.14) felső egyenletébe megkapjuk az ún. **határréteg-egyenletet**, amely az állandó sűrűség esetén érvényes kontinuitás egyenlettel együtt alkotja azt a két egyenletből álló parciális differenciálegyenlet-rendszert, amely a peremfeltételek ismeretében (pl. numerikusan) megoldható:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= V \frac{dV}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Turbulens határrétegek számítására elvileg rendelkezésre áll az instacionárius tagot tartalmazó Navier-Stokes egyenlet. Ezt azonban – mint említettük – még nem tudjuk megoldani a bonyolult instacionárius áramképre. Ezért az időbeli átlagokra felírt Navier-Stokes-egyenletet alkalmazzuk az egyenlet jobb oldalán megjelenő, a sebesség-ingadozások hatását kifejező látszólagos csúsztatófeszültségek figyelembevételével. A turbulens határrétegek számítására szolgáló egyenletet a már megismert elhanyagolások (ld. 10.14) alkalmazásával kapjuk oly módon, hogy a lamináris határrétegekre kapott (10.16) egyenlet jobb oldalát a

$$+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx1}}{\partial y}$$

taggal bővítjük. (Ebben az egyenletben és a turbulens áramlások további tárgyalása során a felülvonás nélküli sebességek időbeli átlagsebességeket jelentenek.) A turbulens ingadozások hatását figyelembe vevő τ_{yx1} látszólagos csúsztatófeszültség számítására többféle modell létezik. Ezek közül az igen szemléletes, klasszikus Prandtl-féle keveredési úthossz modellt fogjuk megismerni.



10.4. ábra

Prandtl a gázok μ viszkozitását okozó molekuláris impulzuscseré analógiáját (ld. 1. fejezet) alkalmazta a turbulens határrétegekre, ahol nem molekulák, hanem kisebb-nagyobb méretű folyadékrészek, örvények mozognak a különböző sebességű folyadékrétegek között. Ezen folyadékrészek által okozott impulzuscseré a látszólagos viszkozitás okozója. Tekint-

sük a 10.4. ábrát, ahol egy turbulens határréteg $v_x(y)$ sebességmegoszlása látható. Bejelöltük a határréteg δ vastagságát is, amelynél a v_x megegyezik a határrétegen kívüli V sebességgel (ill. előírt mértékben, pl. 99%-ra megközelíti azt). Berajzoltunk egy kis „folyadékcsomagot” (pl. egy örvényt), amely a fő áramlási irányra merőlegesen 1 [m] ún. keveredési úthosszat képes megtenni v'_y ingadozási sebességgel (ld. (10.3)).

A látszólagos csúsztatófeszültségre vonatkozóan írható (ld. (10.11) és (10.13) összefüggések):

$$\tau_{yx1} = -\rho \overline{v'_x v'_y}$$

Amikor a „folyadékcsomag” 1 távolságban elmozdul egy, a sajátjától eltérő sebességű rétegbe kerül, ahol v'_x sebességingadozást okoz. Az ingadozás abszolút értéke függ a sebességprofil meredekségétől és a keveredési úthossztól:

$$|v'_x| \cong 1 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|. \quad (10.17)$$

Kontinuitási megfontolások alapján közelítően írható:

$$|v'_y| \cong |v'_x|. \quad (10.18)$$

Tekintsük a 10.4. ábrát. Megállapíthatjuk, hogy y irányban növekvő v_x sebességek esetén $v'_x v'_y < 0$, mert ha $v'_y > 0$, azaz a „folyadékcsomag” felfelé mozdul el, akkor $v'_x < 0$, miután sebessége kisebb a helyi sebességnél. Hasonlóan ha $v'_y < 0$, akkor $v'_x > 0$. Ennek alapján írható:

$$\tau = \tau_{yx1} = \rho 1^2 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu_t \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (10.19)$$

A (10.19) összefüggés akkor is helyesen fejezi ki a τ előjelét, ha nem monoton növekvő a sebességmegoszlás. A μ_t az előzőekben megismert „anyagjellemző viszkozitás” analógiájára bevezetett **„turbulens viszkozitás”, amely elsősorban nem a közeg fizikai sajátosságaitól, hanem az áramlás jellemzőitől függ:**

$$\mu_t = \rho 1^2 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|. \quad (10.20)$$

A látszólagos csúsztatófeszültség (10.19) kifejezése alkalmazható a turbulens határrétegek számításánál.

Alkalmazzuk Prandtl néhány közelítő föltevését:

- A fal közvetlen közelében a fal jelenléte miatt a keveredési úthossz zérus, távolabb a fal hatása egyre kevésbé érvényesül, ezért $l \propto y$.
- Legyen a keveredési úthossz első közelítésben lineáris függvénye az y nak: $l \propto y$.
- A fal közelében lévő rétegben a csúsztatófeszültség jelentősen nem változhat. Tételezzük fel közelítően, hogy $\tau(y) \cong \tau_0$, azaz a csúsztatófeszültség közelítően állandó és egyenlő $\tau_0 [\text{Pa}]$ -al, a falon ébredő ún. **fali csúsztatófeszültséggel**.
- A határréteg falhoz közeli részén $\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0$.

A fenti feltevésekkel (10.19) átalakítható:

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \kappa y \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Bevezetve az $u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ ún. súrlódási sebesség fogalmát és szétválasztva a fenti differenciálegyenletet írható:

$$\frac{dv_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y}, \text{ amiből integrálás után adódik: } \frac{v_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{Konst.}$$

Alakítsuk át az egyenlet jobb oldalát:

$$\frac{v_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u^*}{\nu} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u^*}{\nu} + \text{Konst.}$$

A határréteg egy adott metszetében u^* állandó, ezért a fenti egyenlet két utolsó tagja egy K konstansba fogható össze:

$$\frac{v_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u^*}{\nu} + K. \quad (10.21)$$

A (10.21) összefüggést **univerzális (logaritmikus) faltörvénynek** nevezzük, amely állandóira $\kappa = 0.4$ és $K = 5$ adódott a kísérletekből. Ez az egyszerű és nyilvánvalóan durva közelítésekkel levezetett összefüggés meglepően pontosan írja le a turbulens határrétegek falhoz közeli rétegében a sebességmegoszlást.

Turbulens határrétegeknél a fal jelenléte megakadályozza a közvetlen közelében lévő rétegben az örvények keletkezését, falra merőleges irányú mozgását. Mivel e rétegben a viszkozitás dominál, a fal közvetlen közelében lévő réteget **viszkózus** (vagy gyakran lamináris)

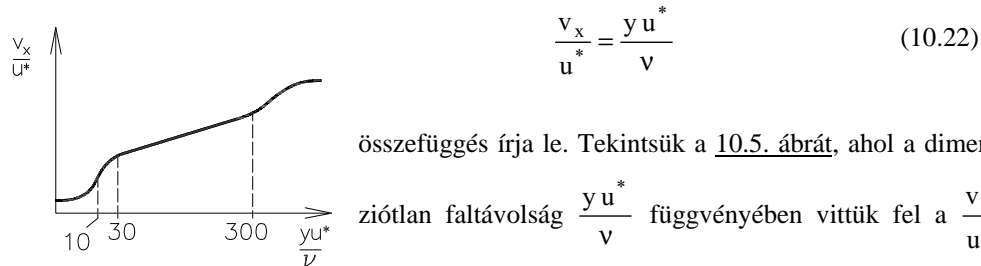
alaprétegnek nevezzük. E rétegben Newton viszkozitási törvénye (1.2) értelmében

$$\tau = \tau_0 = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}, \text{ azaz } \mu = \rho \nu \text{ figyelembe vételével: } u^{*2} = \nu \frac{\partial v_x}{\partial y} \text{ adódik. A differenciál-}$$

egyenletet szétválasztva: $\frac{dv_x}{u^*} = \frac{u^*}{\nu} dy$ összefüggést kapjuk.

Integrálás után adódik: $\frac{v_x}{u^*} = y \frac{u^*}{\nu} + C$. Ha $y = 0$ $v_x = 0$, ezért $C = 0$.

Mindezekkel a fal melletti viszkózus alaprétegben a sebességmegoszlást a



10.5. ábra

összefüggés írja le. Tekintsük a 10.5. ábrát, ahol a dimenziótlan faltávolság $\frac{y u^*}{\nu}$ függvényében vittük fel a $\frac{v_x}{u^*}$ dimenziótlan sebességet.

A fél-logaritmikus diagramban a kis faltávolságoknál érvényes, a (10.22) összefüggéssel leírt lineáris sebességmegoszlás egy görbét ad, amely $\frac{y u^*}{\nu} \cong 10$ és 30 között átmegy a (10.21) logaritmikus faltörvényt leíró egyenesbe. $\frac{y u^*}{\nu} > 300$ értékeknél a sebességmegoszlás eltér az egyenestől.

Látható tehát, hogy a viszkózus alapréteg vastagsága $\frac{y u^*}{\nu} \cong 10$ alapján számolható, az univerzális faltörvény érvényességi tartománya pedig $30 \leq \frac{y u^*}{\nu} \leq 300$. A határréteg külső részein érvényes sebességmegoszlás leírására különböző empirikus vagy félempirikus összefüggések szolgálnak.

10.6. ábra

A 10.6. ábra különböző $y^+ = \frac{y u^*}{\nu}$ értékeknél mutatja az áramlás jellemzőit. A bal oldali képen ($y^+ = 2.7$) a viszkózus alaprétegre jellemző áramkép, a középsőn ($y^+ = 101$) kialakult turbulens áramlás látható. A jobb oldali kép ($y^+ = 407$) a logaritmikus faltörvény érvényességi határán kívüli rendezett áramlást mutatja, amelyet csak helyenként zavar meg a turbulens zónából származó nagy örvény.

Annak érdekében, hogy érzékeljük a határreteg méreteit, a sebességnövekedés rohamosságát, számítsuk ki egy $D = 100 \text{ mm}$ átmérőjű hengeres csőben a fal mellett kialakuló viszkózus alapréteg vastagságát és az univerzális faltörvény érvényességi tartományát. (A számítás során fel kell használni néhány fogalmat és összefüggést, amelyet csak később tárgyal a jegyzet. Ezeket megkülönböztetésül zárójelbe tesszük.) A csőben levegő áramlik:

$\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, átlagsebessége legyen $\bar{v} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (A Reynolds-szám értéke

$\text{Re} = \frac{\bar{v} D}{\nu} = 10^5$, a λ csőszűrlődési tényező $\lambda = 0.0178$.) Egyenlővé téve egy L hosszúságú

egyenes csőben keletkező (a (13.9) összefüggéssel számolható) $\Delta p'$ nyomásveszteség és a csőkeresztmetszet szorzatát a τ_0 fali csúsztatófeszültség és az L hosszúságú csőfal felületé-

nek szorzatával kiszámítható a fali csúsztatófeszültség értéke: $\tau_0 = \frac{\rho \bar{v}^2 \lambda}{8} = 0.6 [\text{Pa}]$.

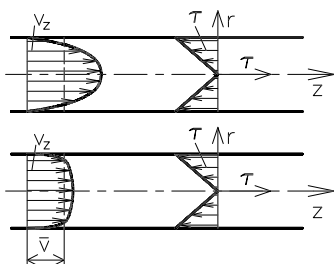
Ezekkel a súrlódási sebesség értékére $u^* = 0.71 \text{ m/s}$ adódik. A viszkózus alapréteg vas-

tagságára $\frac{y u^*}{\nu} = 10$ értékhez 0.2 mm -t kapunk. A viszkózus alapréteg határán a sebesség a

(10.22) összefüggésből számolva 7.1 m/s . Az univerzális faltörvény (10.21) összefüggése $y = 0.6 - 6.3 \text{ mm}$ intervallumban érvényes. Ezen intervallum szélén, a faltól 6.3 mm távolságban a sebesség 13.7 m/s .

A fenti számításból néhány érdekes következtetés vonható le:

- A **fali csúsztatófeszültség viszonylag kicsiny** (0,6 Pa), a csőben lévő átlagsebességgel számolt $\rho \frac{v^2}{2}$ dinamikus nyomás 0,0044 szerese
- A **viszkózus alapréteg igen vékony**, vastagsága a cső sugarának 0,4%-a, de e rétegben az áramlási sebesség igen meredeken növekszik, a vékony réteg határán eléri az átlagsebesség csaknem felét.
- Az univerzális faltörvény érvényessége a csőkeresztmetszet viszonylag kis részére (a sugár 12%-ára) terjed ki, de az érvényességi tartomány határán a sebesség csaknem megegyezik az átlagsebességgel, azaz a fal és a csőtengely közötti sebességnövekedés jelentős része a viszkózus alaprétegben és itt játszódik le.



10.7. ábra

Tekintsük a 10.7. ábrát, ahol a sugár függvényében jellemzőre helyesen vittük fel lamináris és turbulens áramlás esetén a hengeres csőben kialakuló sebességmegoszlásokat és a csúsztatófeszültség megoszlását. Lamináris esetre, amikor a sebességmegoszlás másodfokú forgás-paraboloid a 9.6. ábrában már bemutattuk ezeket a megoszlásokat. A csúsztatófeszültség sugármenti változásának jellege független attól, hogy az áramlás lamináris vagy turbulens. Tételezzük fel, hogy a τ_0 fali csúsztatófeszültség értéke az ábrázolt lamináris és turbulens csőáramlás esetén ugyanakkora. Hogyan magyarázható a sebességmegoszlások alakjának különbözősége? A tengelyirányú sebesség sugár menti változásának rohamossága és a csúsztatófeszültség közötti kapcsolatot lamináris esetben (és a viszkózus alapréteg esetén) a (9.23) összefüggés adja meg:

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial r}, \text{ turbulens áramlásra pedig a (10.19) értelmében a } \tau = \mu_t \frac{\partial v_x}{\partial r} \text{ kifejezés, ahol } \mu_t$$

a **turbulens viszkozitás** (ld.(10.20) összefüggés).

A fal mellett a lamináris áramlásban ill. a turbulens áramlás viszkózus alaprétegében nagy rohamossággal nő a sebesség a faltól távolodva, hiszen csak így jöhet létre az (1.2) összefüggés alapján viszonylag kis viszkozitás mellett nagy csúsztatófeszültség. A faltól beljebb haladva a sebességmegoszlások jellege teljesen eltérő lesz. Lamináris esetben továbbra is viszonylag rohamosan nő a sebesség a faltól távolodva („csúcsos” a sebességmegoszlás). Turbulens esetben viszont a sebességmegoszlás „ellaposodik”, azaz azonos τ csúsztatófeszültséghez a sebességprofil sokkal kisebb meredeksége tartozik. Ez azt mutatja, hogy a μ_t **turbulens viszkozitás sokkal** (ténylegesen egy-két nagyságrenddel) **nagyobb, mint az anyagra jellemző μ dinamikai viszkozitás. A turbulens áramlás faltól távolabb lévő**

részein az áramlás olyan sajátosságokat mutat, mintha egy lényegesen nagyobb (és a hely függvényében változó) viszkozitású közeg áramolna.

A határrétegek áramlás irányú változására ill. a csőáramlás kialakulására vonatkozóan néhány megjegyzést teszünk:

- Ha az áramlásba egy szilárd testet helyezünk, akkor annak áramlással szembefordított felületén torlópont alakul ki. A torlóponttól kiindulóan **lamináris határréteg keletkezik** – függetlenül attól, hogy a test körüli áramlás lamináris vagy turbulens. A torlóponttól távolodva a lamináris határréteg egy átmeneti zóna mögött általában **turbulenssé** válik. Amint láttuk, a turbulens határréteg „alján” viszkozus alapréteg van. A turbulens határréteg kialakulásának távolsága az áramlási sebességtől, a közeg viszkozitásától, a külső áramlás turbulenciafokától, a felület érdességétől stb. függ. A lamináris-turbulens átalakulást előidézhetjük az áramlás megzavarásával, pl. a felületen az áramlásra merőlegesen elhelyezett huzallal (turbulenciagenerátorral).
- **A határrétegben áramló közeg mennyisége az áramlás irányában folyamatosan nő**, hiszen egyre több közegre hat a viszkozitás révén a szilárd fal fékező hatása. **A határréteg vastagsága is nő – erősen gyorsuló áramlások kivételével – az áramlás irányában.**
- Lekerekített beömlőnyíláson keresztül egy csőbe beáramló közeg és a csőfal kölcsönhatása következtében a cső belsejében a falon határréteg alakul ki. A határréteg az előzőekben bemutatott módon vastagszik és meghatározott feltételek fennállása esetén turbulenssé válik. Miközben a határréteg széle a cső hossza növekedtével a falak irányából körben közelít a cső tengelye felé, a potenciálisnak tekinthető belső áramlás (amelyet a súrlódás hatása, azaz a határréteg még nem ért el) sebessége a cső hossza mentén állandóan nő. A beömléstől távolodva ugyanis egyre nagyobb a csőkeresztmetszet azon része, ahol az áramlási sebesség a súrlódás következtében lecsökkent, ugyanakkor a folytonosság tétele miatt az átlagsebesség nem változhat a cső hossza mentén. Tovább távolodva a beömléstől a határréteg eléri a cső tengelyét, és a csőben adott távolságon belül kialakul az a lamináris vagy turbulens áramkép, amely az egyenes és állandó keresztmetszetű cső hossza mentén tovább már nem változik. Ezt az áramképet **kialakult lamináris vagy turbulens csőáramlásnak** nevezzük és azt a csőhosszat, amelyre szükség van a kialakult csőáramlás létrejöttéhez **kezdeti csőhossznak** ($l_k [m]$) nevezzük, amelynek d csőátmérőhöz viszonyított hossza:

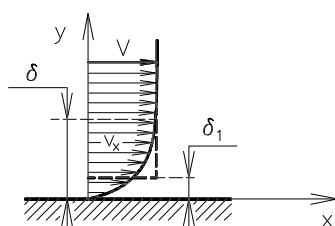
- lamináris áramlás esetén: $\frac{l_k}{d} = 0.06 \operatorname{Re}$,
- turbulens áramlás esetén: $\frac{l_k}{d} = 4.4 \operatorname{Re}^{1/6}$.

A Re (Reynolds szám) definícióját a (10.1) összefüggésben adtuk meg.

11. A határrétegek sajátosságai, hatásuk

Az előző fejezetben definiáltuk a határréteget: **a szilárd fal melletti áramlásban a súrlódás hatására létrejövő réteg, amelyben a sebesség a fal mellett érvényes zérusról a fal-tól távol érvényes (ún. határrétegen kívüli) sebességre nő. A határrétegben a súrlódásnak nagy szerepe van, azon kívül a súrlódás hatása általában elhanyagolható.** Ebben a fejezetben a határrétegek legfontosabb hatásait tárgyaljuk.

11.1. A határréteg „kiszorít”



11.1. ábra

A fal mellett kialakuló rétegben lefékeződik a közeg, ezáltal a fal közelében adott térfogatáram kisebb átlagsebességgel vastagabb sávban áramlik át. A határréteg létrejötte tehát a határrétegen kívüli áramlást mintegy „kiszorítja”, olyan hatást gyakorol rá, mintha a test „kövérebb” lenne.

A 11.1. ábrán egy határréteg sebességmegoszlása látható.

A határréteg vastagsága δ . Jelöljük δ_1 -gyel az ún. **kiszorítási vastagságot**, amelynek értéke megmutatja a zavartalan áramlás határréteg miatti „elmozdításának” mértékét. A δ_1 értékét abból a megfontolásból kiindulva határozzuk meg, hogy a fal és a határréteg széle között a határrétegben átáramló térfogatáramot egyenlővé tesszük azzal a térfogatárammal, amely a határrétegen kívüli V sebességgel a $(\delta - \delta_1)$ vastagságú rétegben áramlana át. Tehát δ_1 -gyel vékonyabb rétegben áramlana át ugyanannyi súrlódásmentes közeg.

$$(\delta - \delta_1) V = \int_0^{\delta} v_x dy \Rightarrow \delta_1 V = \int_0^{\delta} (V - v_x) dy,$$

amiből a kiszorítási vastagság

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{V} \right) dy. \quad (11.1)$$

Csak a nagyságrend érzékeltetésére: egy személygépkocsi hátsó részén a határréteg vastagsága néhányszor tíz mm, a kiszorítási vastagság pedig ennek kereken tizede, néhány mm.

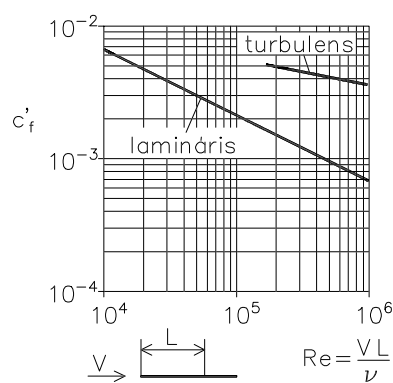
11.2. A határrétegben hő és anyagátadás játszódik le

A műszaki feladatok jelentős részénél az áramló közeggel érintkező szilárd test és a közeg között nemcsak súrlódóerő lép fel, de **a szilárd felület és a közeg között hő ill. anyag is**

átadódhat: gondoljunk a hőcserélőkre és a szárítás folyamatára. Az impulzus-, a hő- és az anyagátadás mechanizmusa igen hasonló, különösen turbulens határrétegekben a viszkózus alaprétegen kívül, ahol az időbeli átlagsebességre merőlegesen elmozduló „folyadékcsomagok”, örvények felelősek mindhárom mennyiség együtt lezajló transzportjáért. Egy „folyadékcsomag” egyik rétegből egy eltérő sebességű, hőmérsékletű és koncentrációjú rétegbe elmozdulva e rétegben impulzus-, hő- és koncentráció-változást okoz. Ezért a határréteg, a hőmérsékleti és a koncentráció-határréteg vastagsága turbulens esetben nem sokkal különbözik egymástól. Láttuk azonban, hogy a turbulens impulzustranszportra („vezetésre”) jellemző μ_t örvényviszkozitás egy-két nagyságrenddel nagyobb a μ -nél, ugyanígy a turbulens hővezetés ill. diffúzió is egy-két nagyságrenddel intenzívebb a molekuláris folyamatok által előidézett hővezetésnél és diffúzióval, amelyek a lamináris határrétegben dominálnak.

11.3. A határrétegben csúsztatófeszültségek keletkeznek

Tekintettel arra, hogy a határrétegben változik a legrohamosabban a sebesség, itt a legnagyobb a deformációsebesség, ezért itt kell a legnagyobb csúsztatófeszültségekkel számolnunk. A csúsztatófeszültségek nagyságrendjére jellemző a τ_0 fali csúsztatófeszültség, amelyet a c'_f helyi **súrlódási tényezővel** szoktunk jellemezni:



11.2. ábra

$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} V^2}, \quad (11.2)$$

azaz a helyi fali csúsztatófeszültséget a határrétegben kívüli sebességgel számított dinamikus nyomáshoz viszonyítjuk. A 11.2. ábrán egy síklap esetén látható c'_f a Reynolds-szám függvényében, amelynél az L jellemző méret a vizsgált hely és a síklap áramlással szembefordított ún. belépőjele közötti távolság. A log-log diagramon látható a lamináris és a turbulens határrétegre vonatkozó két egyenes, azaz a c'_f - Re kapcsolatot hatványfüggvények írják le. A legfontosabb tanulság, ami a diagramból levonható az, hogy a fali csúsztatófeszültségek igen kicsik, c'_f a néhány ezred, azaz a τ_0 a dinamikus nyomás néhány ezreléke. (A hengeres csőre vonatkozó számításunknál $\tau_0 = 0.6$ Pa értéket kaptunk, amelyhez $c'_f \approx 0.0044$ tartozik.) A csúsztatófeszültségek kis értékeiből arra a téves következtetésre juthatunk, hogy a súrlódás kis szerepet játszik pl. egy autóra ható erő szempontjából, hiszen az átlagos τ_0 -lal megszorozva az autó teljes felületét tényleg csak néhány N erőt kapunk. Még jobban megerősödik bennünk ez a gondo-

lat, ha a szokásos c'_f értékeket összehasonlítjuk pl. egy, az áramlásba helyezett test felületén keletkező nyomásra jellemző c_p **nyomástényező** jellemző értékeivel:

$$c_p = \frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} V^2} \quad (11.3)$$

A nyomástényező maximális értékét ($c_{p\max} = 1$) a torlópontban veszi fel, legkisebb értéke szokásos körülmények között $c_{p\min} = -3$ körüli. **A c_p értékek tehát szokásosan 2-3 nagyságrenddel haladják meg a c'_f értékeket, azaz ugyanilyen arányban nagyobbak a nyomásból származó erők a csúsztatófeszültségekből származó erőknél. Mégis a csúsztatófeszültségeknek döntő jelentőségük van, mert az ezekből származó kis erők a határ-réteg leválását okozzák (ld. következő alfejezet), és ezáltal alapvetően megváltoztatják az áramképet, a testen keletkező nyomásmegoszlást és így a testre ható erőt.** A súrlódás alapvető hatása tehát általában egy bonyolult mechanizmuson, az áramkép és ezáltal a nyomásmegoszlás megváltozásán keresztül, és nem közvetlenül érvényesül, pl. egy áramlásba helyezett testre ható erő tekintetében.

11.3. ábra

A 11.3. ábra pl. egy áramlással párhuzamos tengelyű henger mögötti leválási buborékot és nyomot mutat be. A leválási buborékban a nyomás közelítőleg állandó és közel megegyezik azzal a nyomással, amit egy, a leválási buborékot kitöltő, a hengerhez csatlakozó test felszínén mérnénk.

11.4. A határréteg leválik

A 11.4. ábrán egy klasszikus kísérlet eredményét vázoljuk. A bal oldalon egy síkáramlásban az áramlási sebességre merőlegesen elhelyezett lap hatására kialakuló ún. torlópontáramlást látunk. Ha a torlópontba vezető egyenes áramvonalak által kijelölt síkba egy vékony szilárd lapot helyezünk a falhoz, az áramkép váratlan drámai változását figyelhetjük meg: ld. jobb oldali ábra. Mi okozhatta a szilárd falon a visszaáramlás kialakulását?

11.4. ábra

A fal fölötti áramkép részletei a 11.5.a. ábrán láthatók:

11.5. ábra

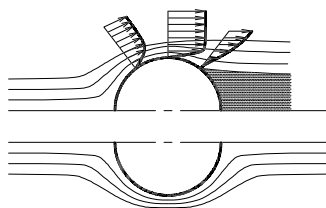
A torlópontáramlás fő jellegzetessége, hogy a közeg **nyomásnövekedéssel szemben áramlik és a nyomástér hatására lassul. A falhoz közel lévő folyadékrészeket nemcsak a**

nyomásnövekedés, hanem a falsúrlódás is lassítja. Ezért áramlás irányban rohamosan lassulnak a gyorsan vastagodó határrétegben lévő folyadékrészek. Ha az „egészséges” külső áramlás nem képes impulzuscsere révén mozgásban tartani a határrétegben áramló folyadékrészeket, akkor azok megállnak és a nyomáskülönbség hatására a fal mellett visszaáramló folyadékrészek a határrétegben áramló közeget elválasztják a faltól és az áramlási tér belsejébe terelik: a **határréteg leválik**. (ld. 11.5.a. ábra)

A határréteg leválásnak tehát két szükséges feltétele van:

- **fal közelsége,**
- **áramlás irányában növekvő nyomás.**

A 11.5.b./ és c./ábra a határrétegben láthatóvá tett áramlást mutatja be két esetben. A b./ áramkép áramlás irányában **csökkenő nyomáshoz** tartozik, azaz az áramlás gyorsul. Ebben az esetben a határréteg vékony marad (esetleg vékonyodik, és a turbulens határréteg laminárisává válhat.) A c./ esetben áramlás irányában **nő a nyomás**, amelyhez a határréteg vastagodása, majd leválása tartozik. A képen jól látható, hogy a határréteg láthatóvá tett közegrészei „leválnak” a falról, és az áramlási tér belseje felé áramlanak.



11.6. ábra

Tekintsük a 11.6. ábrát, ahol egy síkáramlásba helyezett henger körüli áramképet vázoltuk: az ábra alsó felén a súrlódásmentes áramlás esetén érvényes áramképet, felül pedig a határréteg leválás folyamatát. **Súrlódásmentes közeg esetén nem hat erő a hengerre**, a sebesség- és nyomásmegoszlás a függőleges tengelyre szimmetrikus. Az

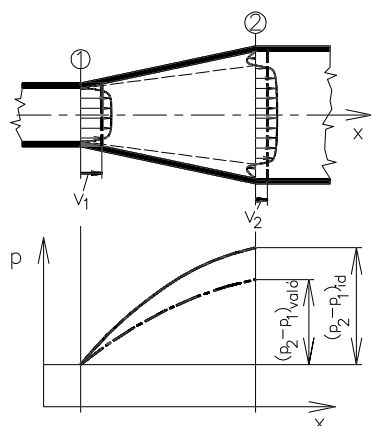
vonalak görbületeiből (ld. a természetes körmozgás körüli áramlásra vonatkozó 11.2. ábra normális irányú komponens egyenlete) is látható, hogy a közeg a henger áramlással szembenező homlokfalán csökkenő nyomás irányában gyorsulva áramlik. Itt tehát akkor sincs leválási veszély, ha az áramló közeg súrlódásos. A henger hátsó részén azonban a fal melletti közegrészek növekvő nyomás irányában áramolnak és **súrlódásos közeg esetén a 11.5.a./ábrán** is látható módon határréteg leválás következik be. A leválás miatt módosul az áramkép és könnyen beláthatóan a lassuló áramlás kezdete és így a leválás helye is az óramutató járásával ellentétesen mozdul el a henger felületén. Egyensúlyi állapot alakul ki, ahol a leválás helye kb. 20° -kal a függőleges átmérő „előtt” állandósul. (Ez az áramkép – amint azt később látni fogjuk – arra az esetre vonatkozik amikor a henger homlokfalán lévő határréteg lamináris.) A henger körüli áramképet mutatja be a 11.7. ábra bal oldali része. A képen a henger két oldalán felváltva, periodikusan leúszó örvények (Kármán-féle örvénysor) egyikének keletkezése látható. E jelenséggel a 14. fejezetben foglalkozunk részletesen. Az ábra jobb oldalán látható a henger felületén lévő nyomás változása a középponti szög

függvényében: az A görbe a súrlódásmentes esetre, a B görbe pedig az általunk tárgyalt áramképhez tartozik. (A C görbe tárgyalására később visszatérünk.)

11.7. ábra

A nyomás terület menti változását vizsgálva néhány megállapítás tehető:

- súrlódásmentes közeg áramlása esetén a henger megfűvási irányra merőleges átmérőjének végpontjában a sebesség $2 v_{\infty}$, ezért a nyomástényező értéke (a Bernoulli-egyenletből láthatóan): -3
- **ahol az áramlás gyorsul, ott a valóságos, súrlódásos közeg áramképe általában csak kissé tér el az ideálisétól**, ami a nyomásmegoszlások nagymértékű hasonlóságából látható;
- **a határréteg leválása a súrlódásmentes áramláshoz képest alapvetően megváltoztatta az áramképet**, ami a henger hátsó részére vonatkozó nyomásmegoszlások különbségéből látszik;
- **a leválás hatására kialakuló térben, amelyet leválási buboréknak is nevezünk, a nyomás időbeli átlaga közelítőleg állandó.**
- a nyomásmegoszlás a leválás következtében nagy mértékben **aszimmetrikussá** vált, ezért a hengerre áramlási eredetű erő hat.



11.8. ábra

Jellemző példaként vizsgáljuk meg az áramlást egy **diffúzorban, amely egy, az áramlás irányában növekvő keresztmetszetű csődarab** (ld. 11.8. ábra) Legyen a közeg sűrűsége állandó. Súrlódásmentes esetben a diagramon látható folytonos vonalnak megfelelő lenne a közeg lassulásával összefüggő nyomásnövekedés. A Bernoulli-egyenlet alkalmazásával:

$$(p_2 - p_1)_{\text{ideális}} = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (11.4)$$

Valóságban a diffúzor fala közelében a nyomásnövekedéssel szemben áramló folyadék részecskék a súrlódás következtében még rohamosabban lassulnak mint a faltól távoliak, a határréteg gyorsan vastagodik, esetleg leválás következik be. Emiatt a **kiömlőkeresztmetszetben nem egyenletes a sebességmegoszlás** (amit a (11.4) összefüggés felírásánál feltettünk), a fal közelében vagy visszaáramlás (ld. 11.9. ábra), vagy jobb esetben is kiterjedt, kisebb sebességgel jellemezhető zóna van. A diffúzor középső részén pedig a diffúzor keresztmetszet viszonyából számolható v_2 átlagsebességnél nagyobb a nyomás szempontjából mértékadó sebesség, azaz a $(p_2 - p_1)_{\text{való}}$ valóságos nyomásnövekedés nem éri el a súrlódásmentes áramlás esetén számítottat. A diffúzor működését az η_{diff} diffúzor hatásfokkal szoktuk jellemezni:

$$\eta_{\text{diff}} = \frac{(p_2 - p_1)_{\text{való}}}{(p_2 - p_1)_{\text{id}}} \quad (11.5)$$

11.9. ábra

A határréteg hasonló leválása okoz jelentős áramkép változást pl. egy nagy állásszögű szárny felső részén, egy személyautó hátsó részén, egy ívelt cső-könyökben stb.

A határréteg leválása sok esetben kedvezőtlen. Hogyan lehetne a leválást megakadályozni?

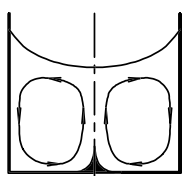
- Az egyik lehetőség – inkább csak kuriózumként – a fal mozgatása együtt az áramlással.
- Gyakorlati szempontból fontos módszer a **nyomásnövekedés rohamosságának (ezáltal a határrétegben áramló közeg lassításának) csökkentése** (pl. a diffúzor kúpszögének vagy a szárny állásszögének csökkentése, a csőív görbületi sugarának növelése, a karosszéria éleinek lekerekítése, a hátsó rész fokozatos „összehúzása” stb.)
- További lehetőség **a falhoz közel áramló közegrészek sebességének növelése:**
 - a **lelassult közegrészek eltávolításával: határréteg-elszívás,**
 - a **közegrészek gyorsításával:** nagy sebességű sík levegősugár **befúvása** a fal mellett,
 - a **határrétegen belüli impulzuscseré növelésével:** a lamináris határréteg **turbulenssé tételével** ill. a turbulencia növelésével.

Itt térünk vissza a 11.6. ábrán látható áramképhez ill. C jelű görbéhez. Ha a henger homlokfelületén lamináris határréteg alakul ki, viszonylag kis nyomásnövekedés már a határréteg leválását eredményezi. Ha a Reynolds-szám növelésével, vagy az áramlás megzavarásával turbulenssé tesszük a határréteget, az abban végbemenő, **nagyságrendekkel nagyobb turbulens impulzuscseré elegendő energiát szállít a határréteg alsó részébe ahhoz, hogy a határrétegben lévő folyadékrészek tovább lesznek képesek nyomásnövekedés ellenében áramolni.** Ez tükröződik a 11.6. ábrán: és a C jelű görbéből látható, hogy a leválás lényegesen hátrább következik be, emiatt a leválási buborék sokkal kisebb, és a henger hátsó részén a leválási buborékban lévő nyomás sokkal nagyobb, mint lamináris határréteg esetén. A határrétegben bekövetkező lamináris-turbulens átalakulás a hengerre ható erő harmadára csökkenését eredményezi.

A 11.10. ábra egy ívelt felületen kialakuló, láthatóvá tett lamináris és turbulens határréteget mutat be. Amíg a lamináris határréteg (felső kép) a legmagasabb pont után rögtön leválik, addig a turbulens határréteg jó darabig képes nyomásgradienssel szemben áramolni, és csak azután válik le.

11.10. ábra

11.5. A határréteg szekunder áramlást okoz



11.11. ábra

Ha fel akarjuk keverni a cukrot a teában, akkor a kanál mozgásával egy körkörös áramlást hozunk létre a pohárban. Mi hozza fel a tea felső rétegeihez a cukrot, ha az általunk létrehozott áramlásban körpályán mozognak a folyadékrészek? Vizsgáljuk meg a nyomás változását a sugár mentén. Alkalmazzuk a természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenlet (4.27) normális irányú komponens egyenletét, amely a térerő

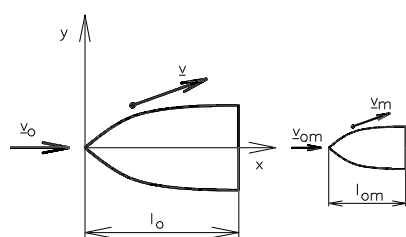
elhanyagolása esetén a $\frac{v^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$ alakban írható fel. A pohárban lévő áramlásban az

áramvonalak közelítően kör alakúak, rájuk merőlegesen, sugárirányban a nyomás a fenti összefüggésből láthatóan nő. (Ezért magasabb a folyadékfelszín a pohár szélén, mint középen.) A nyomásmegoszlást a pohárban forgó, és a pohár alja által le nem fékezett folyadék sebességmegoszlása határozza meg. A pohár alsó részéhez közel azonban egy határréteg alakul ki, amelyben a sebességek kisebbek, mint a magasabban lévő folyadékrészeké. A lassabban forgó folyadékrészek kisebb nyomáskülönbséget hoznak létre, mint ami a pohárban kialakul, azaz a pohár alján a határrétegben egy spirálshoz hasonló, befelé irányuló áramlás indul meg (ami a tealaveleket tapasztalataink szerint középre, a cukrot pedig a tea felső rétegeibe viszi, ld. 11.11. ábra). A pohár alja közelében a tengely irányában befelé áramló közeg pótlására a fal mellett lefelé áramlás, középen pedig felfelé áramlás indul meg, amely hozzáadódik a körkörös „főáramláshoz” (ld. 11.11. ábra). Ezt a domináns áramlásra szuperponáló áramlást **szekunder áramlásnak** nevezzük. A határréteg léte az ismertetett példához hasonló okokból szekunder áramlást okoz pl. csőívben, vagy folyókanyarban. Ez utóbbi esetben a homorú partról a domború felé irányuló szekunder áramlás hordja át a földet a homorú partról a szemköztire aminek következménye a folyókanyarok öblösödése.

12. Az áramlások hasonlósága

A 9. és 10. fejezetben foglalkoztunk a Navier-Stokes-egyenlettel és megállapítottuk, hogy az – különösen turbulens áramlás esetén – igen nehéz, általában lehetetlen megoldani. Ugyanakkor a műszaki feladatok megkövetelik, hogy meghatározott kérdésekre választ adjunk. A differenciálegyenletek megoldása mellett a műszaki feladatok megoldásának fontos eszköze a **kísérlet**, amelyet technikai és költségkímélési okokból is gyakran az eredeti berendezés **kismintáján** hajtunk végre. Így pl. ha meg kell határozni egy hajó motorjának előírt sebesség eléréséhez szükséges teljesítményét, vagy a korrekt szilárdsági méretezéshez ismerni kell egy szerkezetre vagy épületre ható szélert, csak kismintakísérletek jöhetnek szóba.

Egy kismintakísérletnek csak akkor van értelme, ha eredménye megfelelő biztonsággal átvihető, felhasználható a nagy kivitelnél. Ez a feltétel akkor valósul meg, ha a **kisminta és a nagy kivitel körüli áramlás hasonló**. Vizsgáljuk meg az áramlások hasonlóságának feltételeit **összenyomhatatlan közegek** esetén.



12.1. ábra

A 12.1. ábrán egy hajó és kismintája látható. Az áramlásra jellemző sebesség és méret lehet pl. a zavartalan sebesség v_0 és v_{0m} ill. a hajó és a modell hossza l_0 és l_{0m} . A jellemző méret és sebesség hányadosa egy jellemző időt eredményez:

$$t_0 = \frac{l_0}{v_0} \text{ ill. } t_{0m} = \frac{l_{0m}}{v_{0m}}. \text{ Írják le a sebesség-meg-}$$

oszlást és a nyomásmegoszlást a nagy kivitelben az alábbi függvények, amelyekben mind a független, mind a függő változók dimenziótlanok:

$$\frac{v}{v_0} = f\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, \frac{t}{t_0}\right) \text{ és } \frac{p}{\rho v_0^2} = F\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, \frac{t}{t_0}\right). \quad (12.1)$$

A kisminta körüli áramlás akkor hasonló a nagy kiviteléhez, ha megegyező függvények írják le a sebesség és nyomásmegoszlást természetesen a kismintára jellemző v_{0m} , l_{0m} , és t_{0m} – mel **dimenziótlanított formában. Mi ennek a feltétele? Mikor azonos a dimenziótlan sebességet és nyomást leíró függvény a nagy kivitelnél és a kismintánál? Nyilván akkor, ha ugyanaz a dimenziótlan differenciálegyenlet-rendszer írja le és ugyanazok a kezdeti- és peremfeltételek a dimenziótlan hely- és időkoordinátákban.**

Írjuk fel a Navier-Stokes-egyenlet x irányú komponens egyenletét a (9.17) összefüggés alapján!

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (12.2)$$

Szorozzuk be a (12.2) egyenlet mindkét oldalán lévő tagokat $\frac{l_0}{v_0^2}$ -tel, azaz dimenziótlanítjuk a Navier-Stokes-egyenlet x komponens egyenletét:

$$\frac{\partial \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{t}{l_0 / v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \frac{\partial \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{l_0} \right)} + \dots = \frac{g_x l_0}{v_0^2} - \frac{\partial \left(\frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial \left(\frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\nu}{v_0 l_0} \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{l_0} \right)^2} + \dots \right). \quad (12.3)$$

(A hasonló szerkezetű tagokból csak egyiket-egyet mutatunk be a dimenziótlanítását.) A nyomást egy p_0 állandó vonatkoztatási nyomáshoz viszonyítottuk, amellyel a hely szerinti differenciálhányados nem változott. Hasonlóképpen fel lehet írni a dimenziótlanított Navier-Stokes-egyenlet y és z komponens egyenletét, valamint a kontinuitás dimenziótlanított formáját, figyelembe véve, hogy a Navier-Stokes-egyenlet alkalmazásakor már eldöntöttük, hogy $\rho = \text{áll.}$ feltételezéssel élünk. Ez esetben a folytonosság egyenlete $\text{div} \underline{v} = 0$ alakot ölti, ami dimenziótlanítva:

$$\frac{\partial \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\partial \left(\frac{v_y}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{l_0} \right)} + \frac{\partial \left(\frac{v_z}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{z}{l_0} \right)} = 0. \quad (12.4)$$

A három Navier-Stokes komponens egyenlet és a folytonosság egyenlete egy parciális differenciálegyenlet-rendszert alkot, amelyet adott kezdeti- és peremfeltételekhez egy megoldást ad a négy ismeretlenre (a három sebességkomponens és a nyomás dimenziótlan alakjára).

Két áramlás hasonló, ha

a/ azonos dimenziótlan differenciálegyenlet írja le mindkét áramlást, ami azt jelenti, hogy a (12.3) összefüggésben (és a további két komponens egyenletben) szereplő állandónak és együtthatónak azonos értékűnek kell lennie a két áramlásra vonatkozóan. A nagy kivétel és a modell esetén ez azt jelenti, hogy

$$\frac{g_x l_0}{v_0^2} = \frac{g_{xm} l_{0m}}{v_{0m}^2}, \text{ és} \quad (12.5)$$

$$\frac{v}{v_0 l_0} = \frac{v_m}{v_{0m} l_{0m}}; \quad (12.6)$$

b/ és ha azonosak a kezdeti és peremfeltételek. Ezt a feltételt általában a modell és a nagy kivitel geometriai hasonlóságával, az áramlási tér peremén hasonló viszonyok biztosításával, és az instacionárius hatások megfelelő modellezésével (ld. később) valósíthatjuk meg.

A (12.5) és (12.6) összefüggésben szereplő kifejezések helyett a hagyományoknak megfelelően azok reciprokát ill. annak gyökét használjuk, amelyeknek nevei:

Froude-szám:
$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}} \quad (12.7)$$

Reynolds-szám:
$$Re = \frac{v_0 l_0}{\nu} \quad (12.8)$$

A két áramlást leíró dimenziótlan differenciálegyenlet rendszer tehát a Reynolds-szám és a Froude-szám azonossága esetén egyezik meg. A Froude- és Reynolds-számot más, hasonlóan dimenziótlan mennyiségekkel együtt **hasonlósági számoknak** is szoktuk nevezni.

A Froude-szám és a Reynolds-szám azonosságának egyidejű biztosítása általában nehéz, vagy lehetetlen feladat. Legyen a modellkísérlet tárgya egy autó 1:4 léptékű modellje. Mivel a szélcsatornában áramló levegő ν viszkozitása megegyezik az autót körüláramló levegő viszkozitásával, a Reynolds-szám azonossága feltételből

$$Re_m = Re \Rightarrow \frac{v_{0m}}{v_0} = \frac{l_0}{l_{0m}} \frac{v_m}{v} = \frac{l_0}{l_{0m}} \text{ adódik. A } Fr_m = Fr \text{ feltételből pedig:}$$

$$\frac{v_{0m}}{v_0} = \sqrt{\frac{l_{0m}}{l_0}}, \text{ miután } g_m = g.$$

Látható, hogy a Re azonosságát a sebesség négyszeresére növelésével, a Fr azonosságát pedig felére csökkentésével lehet megvalósítani. Vizsgáljuk meg, hogy ebben az esetben szükség van-e mindkét feltétel egyidejű betartására?

Ha az áramlási teret kitölti az áramló közeg (mint az előbbi példánknál), az alábbi megfontolások tehetők. Álló közeg esetén a Navier-Stokes-egyenletből (ld. (9.19) összefüggés)

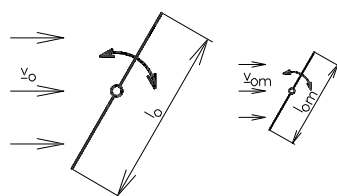
$$0 = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p_a \text{ alakú kifejezés marad. Ha ezt levonjuk az eredeti egyenletből, a Navier-Stokes-egyenlet olyan változatát kapjuk, amely nem tartalmazza a térerősséget, ugyanakkor}$$

a térerősség okozta p_a nyomásmegoszláshoz képesti különbségek szerepelnek benne:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p - p_a) + \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} . \quad (12.9)$$

A (12.9) alakú Navier-Stokes-egyenlettel végrehajtva az előzőekben bemutatott dimenziótlanítást a Froude-szám (ill. négyzetének reciproka) nem jelenik meg az egyenlet-rendszerben, tehát **ha az áramló közeg kitölti a teret, a Froude-szám azonos értéken tartása nem feltétele a hasonlóságnak.**

Hajómodellek vizsgálatánál viszont, ahol a hullámkeltés mértéke (a hullámellenállás) igen jelentős mértékben befolyásolja a hajótestre ható erőt, a Froude-szám azonos értéken tartása igen fontos követelmény. Belátható ugyanis, hogy a hullámok keletkezésénél a a súlyerőnek döntő szerepe van.



12.2. ábra

Ha a peremfeltételek instacionáriusak, akkor gondoskodni kell arról, hogy ezek saját időléptékükben azonosan változzanak. Legyen pl. a feladat egy, az áramlásba helyezett, vízszintes tengely körül periodikusan oda-vissza mozgatót lapra (ld. 12.2. ábra) ható erő meghatározása modell-kísérletekkel. Legyen a modell léptéke 1:3. Miután a teret

kitölti az áramló közeg, az áramlások hasonlóságának egyik feltétele a Reynolds-szám azonosság. Ebből az előzők alapján az adódik, hogy a modell megfúvási sebességének háromszor akkorának kell lennie, mint a nagy kivitel megfúvási sebessége. Milyen legyen a modell lap mozgatásának periódusideje, ha az eredetnél ez t_p volt? Nyilvánvalóan akkor járunk el helyesen, ha

$$\frac{t_{pm}}{t_0} = \frac{t_p}{t_0} \quad \text{azaz} \quad \frac{t_{pm} v_{0m}}{l_{0m}} = \frac{t_p v_0}{l_0} .$$

Figyelembe véve, hogy $t_p = \frac{1}{f}$, ahol $f \left[\frac{1}{s} \right]$ a frekvencia, bevezethető a

Strouhal-szám: $\boxed{\text{Str} = \frac{f l_0}{v_0}} , \quad (12.10)$

amelynek azonos értéke szükséges az azonos kezdeti- és peremfeltételek biztosításához.

Vannak esetek, amikor az áramlás peremén kell megfelelő nyomásértéket, mint peremfeltételt biztosítani. Ez esetben az

Euler-szám:
$$Eu = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \quad (12.11)$$

azonossága kap szerepet. Így pl. kis hullámok esetén a felületi feszültség jelentős szerepet játszik a hullámok alakulásában. (Ugyanez a helyzet pl. a cseppek képződésénél a porlasztásnál.) Ilyen esetben a (12.11) kifejezés számlálójába a nyomáskülönbség helyébe a (7.2)

összefüggés alapján a $\Delta p \sim \frac{C}{R} \sim \frac{C}{l_0}$ kerül, ahol $C \left[\frac{N}{m} \right]$ a felületi feszültség állandója, R a felszín görbületi sugara, amely nyilvánvalóan arányos az l_0 jellemző hosszal. Ily módon az Euler-számból egy új hasonlósági számot kapunk:

Weber-szám:
$$We = \frac{C}{\rho l_0 v_0^2} \quad (12.12)$$

A Weber-szám azonos értéke különösen fontos azon modellkísérleteknél, amelyekben a felületi feszültségnek fontos szerepe van, pl. cseppképződés vizsgálatánál.

Itt jegyezzük meg, hogy a vizsgált jelenségtől függően az Euler-szám és a Strouhal-szám kifejezése függő ill. független változóként is szerepelhet a (12.3) dimenziótlan Navier-Stokes-egyenletünkben. Így pl. az Euler-szám azonossága egy autó és modellje felületének adott helyén nem követelmény, hanem következmény, **a két áramlás hasonlóságának következménye.**

Az áramlásba helyezett hengerről (amely körüli áramlással az előző fejezetben már foglalkoztunk) periodikusan válnak le intenzív örvények, ha a homlokfalon keletkező határréteg lamináris (11.7. ábra B görbe). (Ennek az ún. **Kármán-féle örvénysornak** a leírásával nagy érdemeket szerzett Kármán Tódor, egyetemünk volt hallgatója és rövid ideig oktatója, majd díszdoktora, aki századunk egyik legismertebb áramlástan kutatója.) A kis-mintánál és a nagy kivitelnél a hasonlósági feltételek betartása esetén az örvényleválás frekvenciájával számolt Strouhal-szám azonos, ami az előzőek szerint a két áramlás hasonlóságából következik.

A hasonlósági számok meghatározhatók egységnyi tömegű folyadékra ható erők hányadosaiként is: 1 kg tömegre ható

tehetetlenségi erő:
$$F_T \sim \frac{v_0^2}{l_0}$$

(hiszen az áramkép egyes pontjaiban a sebesség a v_0 -al arányos, az áramvonal görbületi sugara pedig az l_0 -al.)

súlyerő: $F_G \sim g$

nyomásból származó erő:
$$F_P \sim \frac{(p - p_0) l_0^2}{\rho l_0^3} = \frac{(p - p_0)}{\rho l_0}$$

(felírtuk a jellemző felület szorzatát a nyomáskülönbséggel és osztottuk a jellemző mérethez tartozó tömeggel, hogy a folyadék 1 kg-jára vonatkozó erőt kapjuk)

súrlódásból származó erő:
$$F_S \sim \rho v \frac{v_0}{l_0} \frac{l_0^2}{\rho l_0^3} = v \frac{v_0}{l_0^2}$$

(a Newton-féle viszkozitási törvényt (1.2) használtuk fel a csúsztatófeszültséggel arányos mennyiség kifejezésére, amit a jellemző felülettel szoroztunk, majd a jellemző mérethez tartozó tömeggel osztottunk)

felületi feszültségből származó erő:
$$F_F \sim \frac{C}{l_0} \frac{l_0^2}{\rho l_0^3} = \frac{C}{\rho l_0^2}$$

(itt hasonlóan jártunk el, mint a nyomásból származó erő esetén, de a nyomáskülönbség helyébe a felületi feszültség okozta nyomáskülönbség kifejezésével összhangban lévő kifejezést tettünk).

Képezzük az egységnyi tömegre ható erők hányadosait:

$$Re \sim \frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{súrlódásból származó erő}} = \frac{F_T}{F_S} \sim \frac{v_0^2 / l_0}{v v_0 / l_0^2} = \frac{v_0 l_0}{v} \quad (12.13)$$

$$Fr \sim \sqrt{\frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{súlyerő}}} = \sqrt{\frac{F_T}{F_G}} = \sqrt{\frac{v_0^2 / l_0}{g}} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}} \quad (12.14)$$

$$Eu \sim \frac{\text{nyomásból származó erő}}{\text{tehetetlenségi erő}} = \frac{F_P}{F_T} \sim \frac{(p - p_0) / \rho / l_0}{v_0^2 / l_0} = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \quad (12.15)$$

$$We \sim \frac{\text{felületi fesz.-ből származó erő}}{\text{tehetetlenségi erő}} = \frac{F_F}{F_T} \sim \frac{C / l_0^2 / \rho}{v_0^2 / l_0} = \frac{C}{\rho v_0^2 l_0} \quad (12.16)$$

A hasonlósági számok erők hányadosaként történő előállítása igen szemléletesen mutatja az áramlást befolyásoló egyes hatások viszonyát. Így pl. **ha a Reynolds-szám értéke nagy**, akkor ez a (12.13) alapján azt jelenti, hogy **a súrlódóerők hatása viszonylag kicsi a tehetetlenségi erőkhez képest**. (Ez természetes, hiszen a dimenziótlan Navier-Stokes-egyenletben a súrlódást kifejező utolsó tag együtthatója a Re reciproka, ld. (12.3). Ezért minél nagyobb a Re értéke, annál kisebb számmal szorozzuk ezt a tagot.) Ezzel mindjárt

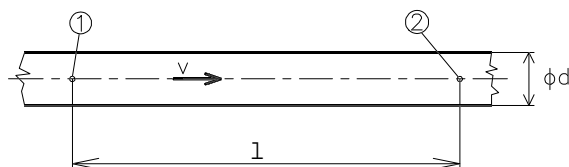
érthetővé válik az a tapasztalat, hogy a Re növekedésével turbulenssé válik az áramlás. A súrlódóerők ugyanis csillapítják a rendezetlen mozgásokat, csökkentik a rohamos térbeli sebességváltozásokat, így a súrlódás viszonylagos hatásának csökkenése a turbulencia keletkezéséhez vezet. Ha viszont kicsi a Reynolds-szám értéke (pl. egy kis porszem süllyed a levegőben, vagy nagy viszkozitású közeg áramlik egy csőben) akkor a súrlódás dominanciájával, lamináris áramlással számolhatunk.

13. Hidraulika

Ebben a fejezetben a csövekben, csatornáknban áramló közegek áramlásának jellemzőit tárgyaljuk. A mérnöki gyakorlat szempontjából talán ez a fejezet a legfontosabb része a jegyzetnek. A hidraulika az emberi tudás egyik igen régóta alkalmazott és fejlesztett területe, hiszen az öntözésnél, a folyók szabályozásánál, a vízvezetékek építésénél sok nehézséget kellett megoldani eleinknek, akik ennek folytán nagyon sok gyakorlati ismeretet halmoztak fel. Ugyanakkor az áramlástan alaptörvényeinek levezetése, az áramlástan alapvetői összefüggéseinek kutatása évszázadokon keresztül a hidraulika gyakorlatától elszigetelve folyt. Csak a XIX. évszázadban találkozott össze az elméleti áramlástan és a gyakorlatra orientált hidraulika.

13.1. A súrlódási veszteség

Tekintsük a 13.1. ábrát, ahol egy vízszintes, egyenes, állandó keresztmetszetű cső látható.



13.1. ábra

A csőben állandó sűrűségű közeg áramlik. Az áramlás legyen stacionárius (az idő függvényében nem változik a térfogatáram). Ha felírjuk a Bernoulli-egyenlet erre az esetre alkalmazható (4.31) alakját a ρ sűrűséggel végigszorozva (azaz nyomás dimenzióban), az egy áramvonalon egymástól l távolságra lévő 1 és 2 pont között, az adódik, hogy $p_2 = p_1$, azaz a nyomás a cső hossza mentén (a Bernoulli-egyenlet alkalmazásával a súrlódásmentességet feltételezve) nem változik. **Valóságos közeg áramlása esetén azonban $p_2 < p_1$, azaz az 1 és 2 pontban nem azonos a Bernoulli-összeg:**

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho U_1 > \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho U_2 . \quad (13.1)$$

(A v_1 és v_2 a cső adott keresztmetszetében érvényes átlagsebesség, ami a gyakorlat szempontjából elfogadható közelítés.) **A Bernoulli-összeg tehát a súrlódás következtében az áramlás irányában csökken.** Annak érdekében, hogy a (13.1) egyenlőtlenségből egyenlet legyen, **az áramlás irányában távolabb lévő pontra vonatkozó Bernoulli-összeget meg kell növelni a két pont közötti Bernoulli-összeg csökkenéssel, amit $\Delta p'$ -vel jelölünk és súrlódási veszteségnek nevezzük:**

$$\boxed{\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho U_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho U_2 + \Delta p'} \quad (13.2)$$

A (13.2) összefüggést **veszteséges Bernoulli-egyenletnek** nevezzük.

A következőkben a $\Delta p'$ veszteség meghatározásának módjával foglalkozunk. Ebben igen fontos szerepe volt és van a kísérletezésnek. Ezért a következő alfejezet a (nemcsak áramlástan) kísérleti munkát nagymértékben megkönnyítő dimenzióanalízist (vagy Buckingham-féle Π elméletet) ismerteti.

13.2. A dimenzióanalízis

Legyen a feladatunk a 13.1. ábrán látható csőben bekövetkező $\Delta p'$ súrlódási veszteség általános **kísérleti** vizsgálata. Először meg kell határozni azokat a fizikai jellemzőket, amelyek befolyásolhatják a $\Delta p'$ [Pa] értékét: csőhossz, l [m], viszkozitás, μ [kg / m / s], az áramló közeg sűrűsége, ρ [kg / m³], csőátmérő, d [m], átlagos áramlási sebesség, v [m / s]. Feltételezzük, hogy a cső belső fala sima, ezért az érdességgel nem foglalkozunk (ld. Később).

A feladat tehát a

$$\Delta p' = f(l, \mu, \rho, d, v) \quad (13.3)$$

függvénykapcsolat meghatározása mérésekkel. Ez pl. úgy végezhető el, hogy az öt független változó közül négynek rögzített értékénél az ötödiket változtatjuk és mérjük a változtatás hatását a veszteségre. Ezt követően a négy változó közül valamelyik értékét megváltoztatjuk és ismét végigmérjük az ötödik változásának hatását a $\Delta p'$ -re. Belátható, hogy valamennyi változó kombináció kimérése igen hosszú ideig tartana. Ezért kedvező, hogy van egy olyan módszer, a dimenzióanalízis, amivel a változók számát jelentősen csökkenthetjük.

Az általunk vizsgált feladatoknál a mértérendszerünk **három alap fizikai mennyiségét alkalmazzuk: a tömeget [kg], a hosszat [m], és az időt [s]**. Kiindulásként feltesszük, hogy valamennyi Q mechanikai mennyiség dimenzió szempontjából előállítható az alap fizikai mennyiségek hatványainak szorzataként: $[Q] = \text{kg}^\alpha \text{m}^\beta \text{s}^\gamma$. Adott $n > 3$ fizikai mennyiség: Q_1, Q_2, \dots, Q_n . (Mint pl. a mi fenti $n = 6$ fizikai mennyiségünk.) Keressük méréssel a $F(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0$ ismeretlen függvényt.

A Q fizikai mennyiségek mértékegységei a fentiek szerint előállíthatók az alábbi módon:

$$\begin{aligned} [Q_1] &= \text{kg}^{a_{11}} \text{m}^{a_{21}} \text{s}^{a_{31}} \\ [Q_2] &= \text{kg}^{a_{12}} \text{m}^{a_{22}} \text{s}^{a_{32}} \\ &\dots\dots\dots \\ [Q_n] &= \text{kg}^{a_{1n}} \text{m}^{a_{2n}} \text{s}^{a_{3n}} \end{aligned} \quad (13.4)$$

Az $a_{i,j}$ kitevőket ismerjük, hiszen ismertek a jelenségben szerepet játszó fizikai mennyiségek. Létezik-e

$$\Pi = Q_1^{k_1} Q_2^{k_2} \dots Q_n^{k_n} \quad (13.5)$$

alakú, a fizikai mennyiségek hatványainak szorzataként előállítható dimenziótlan kifejezés, és ha igen, hány egymástól független van? Írjuk fel a (13.5) összefüggés dimenzió egyenletét figyelembe véve (13.4) kifejezéseket:

$$[\Pi] = \text{kg}^0 \text{m}^0 \text{s}^0 = \left(\text{kg}^{a_{11}} \text{m}^{a_{21}} \text{s}^{a_{31}} \right)^{k_1} \left(\text{kg}^{a_{12}} \text{m}^{a_{22}} \text{s}^{a_{32}} \right)^{k_2} \dots \left(\text{kg}^{a_{1n}} \text{m}^{a_{2n}} \text{s}^{a_{3n}} \right)^{k_n}. \quad (13.6)$$

A (13.6) egyenlet alapján három egyenletből álló egyenletrendszer határozható meg:

$$\begin{aligned} a_{11} k_1 + a_{12} k_2 + \dots + a_{1n} k_n &= 0 \\ a_{21} k_1 + a_{22} k_2 + \dots + a_{2n} k_n &= 0 \\ a_{31} k_1 + a_{32} k_2 + \dots + a_{3n} k_n &= 0 \end{aligned} \quad (13.7)$$

A k_1, k_2, \dots, k_n n darab ismeretlenre egy 3 egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kaptunk. Képezzük az ismert $a_{i,j}$ kitevőkből a dimenziómátrixot.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

A dimenziómátrix rangja r , ha létezik r -ed rendű zérustól különböző aldeterminánsa, de nem létezik $r+1$ -ed rendű nem nulla értékű aldeterminánsa. (Általában r az alap fizikai mennyiségek számával egyenlő, esetünkben $r=3$.) Ha a dimenziómátrix rangja r , az egyenletrendszernek $n-r$ független megoldása van (ennyi összetartozó k_1, k_2, \dots, k_n értékekből álló csoport létezik), azaz $n-r$ dimenziótlan Π csoport képezhető. Ez azt jelenti, hogy **a kísérletileg vizsgálandó változók száma általában az alap fizikai mennyiségek számával, esetünkben hárommal csökkenthető.**

Vizsgáljuk meg a dimenzióanalízis alkalmazásának lépéseit:

- Az alap fizikai mennyiségek meghatározása,
- A jelenséget befolyásoló Q_1, Q_2, \dots mennyiségek meghatározása
- Dimenziómátrix felállítása, rangjának meghatározása,
- Egyenletrendszer megoldása, ($n-r$ megoldás meghatározása),
- A $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-r}$, dimenziótlan csoportok képezése,
- Az $F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-r}) = 0$ függvénykapcsolat kísérleti meghatározása.

Térjünk vissza a példánkhoz, alkalmazzuk a dimenzióanalízist. A Π dimenziótlan csoportokat az alábbi alakban kívánjuk képezni:

$$\Pi = \Delta p^{k_1} l^{k_2} \mu^{k_3} \rho^{k_4} d^{k_5} v^{k_6}.$$

Állítsuk fel a dimenziómátrixot:

Δp	1	μ	ρ	d	v
kg	1	0	1	1	0
m	-1	1	-1	-3	1
s	-2	0	-1	0	-1

A dimenziómátrix pl. harmadik oszlopa a dinamikai viszkozitás dimenzióját tartalmazza: $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$.

A dimenziómátrixot megvizsgálva látható, hogy $r=3$, hiszen az utolsó 3 oszlop által kijelölt aldetemináns nem zérus. Ebből következik, hogy az egyenletrendszernek három egymástól független megoldása van. Írjuk fel a fenti $a_{i,j}$ értékekkel a (13.7) egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} k_1 + k_3 + k_4 &= 0 \\ -k_1 + k_2 - k_3 - 3k_4 + k_5 + k_6 &= 0 \\ -2k_1 - k_3 - k_6 &= 0 \end{aligned}$$

Mivel a 6 ismeretlenre 3 egyenletünk van, 3 ismeretlen, pl. a k_1 , k_2 és k_3 értékeit tetszőlegesen vehetjük fel és az egyenletrendszerből kiszámíthatjuk a további három ismeretlent:

$$\begin{array}{ccc|ccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \Rightarrow \Pi_1' = \Delta p' / (\rho v^2)$$

Most vegyünk fel ismét k_1, k_2, k_3 értékeket:

$$0 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \quad -1 \quad 0 \Rightarrow \Pi'_2 = 1/d$$

A harmadik felvételre adódik:

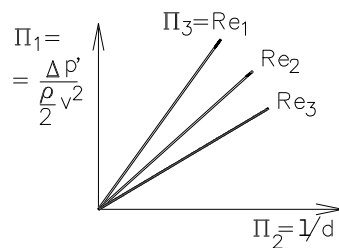
$$0 \quad 0 \quad 1 \mid -1 \quad -1 \quad -1 \Rightarrow \Pi'_3 = \mu / (\rho d v) = 1/Re$$

A dimenziótlan csoportokat kombinálhatjuk, szorozhatjuk konstanssal, vehetjük a reciprokukat stb.. Ezért célszerű a Π' -k helyett az azokból képezett alábbi csoportok bevezetése:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} v^2}, \quad \Pi_2 = 1/d \quad \text{és} \quad \Pi_3 = Re = \frac{v d}{\nu}.$$

A kísérletek során tehát nem a (13.3) függvénykapcsolatot kell meghatározni, hanem a $F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$ függvényt (azaz nem kell olyan változatokat vizsgálni, amelyek ugyanazon Π értékeket adnak).

13.3. A csőúrlódási veszteség



13.2. ábra

Végezzünk el kísérleteket a 13.1. ábrán látható csövön annak érdekében, hogy a csőben keletkező veszteség különböző tényezőktől (ld. (13.3) összefüggés) való függését, azaz a $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$ függvényt megismerhessük. A kísérletek eredménye a 13.2. ábrán látható, ahol a $\Pi_2 = \frac{1}{d}$ függvényében vittük fel különböző állandó $\Pi_3 = Re$ érté-

keknel a $\Pi_1 = \frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} v^2}$ mért értékeit. Ahogyan várható volt, a veszteség a csőhossz $1/d$ függ-

vényében lineárisan nő.

Ezért írható:

$$\frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} v^2} = \lambda(Re) \frac{1}{d},$$

ahol a λ a 13.2. ábrán látható egyenesek iránytényezője, ami a Reynolds-szám függvénye. λ – t **csőúrlódási tényezőnek** nevezzük.

A fenti tapasztalati összefüggést átalakítva adódik a

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{1}{d} \lambda(Re) \quad (13.9)$$

kifejezés az **egyenes cső veszteségére**.

A Navier-Stokes-egyenlet levezetése után kör keresztmetszetű csőben a sebességmegoszlás és a nyomáscsökkenés meghatározására alkalmaztuk a tanultakat (ld. 9.4.fejezet). A nyomás csőhossz menti csökkenésére (ami nem más, mint a $\Delta p'$ veszteség) a (9.28) összefüggést kaptuk:

$$\Delta p' = \frac{8\mu}{R^2} l v, \text{ ahol } R = \frac{d}{2}. \text{ Figyelembe véve, hogy } \mu = \rho \nu, \text{ átalakítások után adódik:}$$

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{1}{d} \frac{64 \nu}{v}, \text{ azaz mivel } \frac{\nu d}{v} = Re \text{ írható:}$$

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{1}{d} \lambda_{\text{lam}} \quad (13.10)$$

ahol a lamináris áramlásra vonatkozó λ csőszűrlődési tényező:

$$\lambda_{\text{lam}} = \frac{64}{Re} \quad (13.11)$$

Eredményül tehát azt kaptuk, hogy **lamináris (réteges) áramlás esetén a λ csőszűrlődési tényező a csőátmérővel képezett Reynolds-számmal fordítottan arányosan változik**. A 10.1.fejezetben a Reynolds-féle kísérlet kapcsán megállapítottuk, hogy a lamináris-turbulens átmenet $Re \cong 2300$ érték körül megy végbe. Ezért a (13.11) összefüggés a $Re \leq 2300$ tartományra érvényes.

Hogyan függ a λ csőszűrlődési tényező a Reynolds-számtól kör keresztmetszetű csövek és turbulens áramlás esetén? A kérdés megválaszolása előtt vezessük be a **homokérdesség** fogalmát. A csőfal előírt érdességét úgy lehet egyszerűen előállítani, hogy szitálással állandó méretű homokszemcséket különítünk el egy szemcsehalmazból és felragasztunk a csőfal belső felületére. A csőfal ún. homokérdességének jellemzésére a $\Pi_4 = \frac{k}{d}$ dimenziótlan csoport szolgál, ahol $k[m]$ a homokszemcsék átmérője.

Határozzuk meg mérésrel a λ csőszűrlődési tényezőt a Re függvényében különböző $\frac{k}{d}$ áll. értékek mellett, és a mérések eredményét ábrázoljuk kétszer logaritmusos diagramban.

Eredményül a 13.3. ábrán látható görbékot kapjuk. Látható, hogy **lamináris áramlás esetén az érdességnek nincsen hatása a csőszűrlőadási tényezőre. Turbulens áramlás ($Re > 2300$) esetén viszont az érdesség hatása jelentős:** a $\frac{k}{d} = \text{áll.}$ görbék növekvő Re esetén egy adott Re_h határ Reynolds-szám értékig azonos görbén futnak, $Re > Re_h$ esetén elvál-
nak e görbétől és vízszintesbe mennek át. Ebben a Reynolds-szám tartományban λ tehát csak a $\frac{k}{d}$ függvénye. Azt a görbét, amelyből a különböző érdességű csővekhez tartozó gör-
bék kiágaznak, az

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{turb}}}} = 2 \lg \left(Re \sqrt{\lambda_{\text{turb}}} \right) - 0.8 \quad (13.12)$$

összefűgés írja le. Egy adott, $Re < Re_h$ Reynolds-szám esetén (amikor a λ értékét a (13.12) összefűgésel leírt görbén találjuk meg) tehát hiába csökkentjük a cső falának ér-
dességét, a λ értéke változatlan marad. **Egy cső adott Reynolds-számon hidraulikailag sima, ha csökkentve az érdességet a csőszűrlőadási tényező értéke nem változik.** A hidra-
ulikailag sima csővek csőszűrlőadási tényezőjét a Reynolds-szám ismeretében a (13.12) ösz-
szefűgésből, vagy az ezt a $4000 \leq Re \leq 10^5$ tartományban jól közelítő **Blasius-képlettel**:

$$\lambda_{\text{turb}} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} \quad (13.13)$$

határozzuk meg.

13.3 ábra

A csőfal érdesség előzőekben leírt hatását az alábbi módon magyarázhatjuk meg. Láttuk, hogy a lamináris áramlásban az érdességnek nem volt befolyása a λ értékére. Korábban megállapítottuk, hogy a turbulens határrétegek alján egy viszkozus alaprég van (ld. 10.3.fejezet), amelynek y_v vastagsága fordítottan arányos az u^* fal csúsztatófeszültséggel, hiszen $\frac{y_v u^*}{\nu} = 10$ érvényes a réteg vastagságára, azaz

$$y_v = 10 \frac{\nu}{u^*} . \quad (13.14)$$

Másrészt egy l hosszúságú csőben áramló folyadékra felírható a nyomáskülönbségből származó erő és a τ_0 fali csúsztatófeszültségből származó erő egyensúlya:

$$\Delta p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{1}{d} \lambda \frac{d^2 \pi}{4} = \tau_0 d \pi l \quad (13.15)$$

amiből

$$\tau_0 = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{\lambda}{4}. \quad (13.16)$$

Figyelembe véve (13.14) összefüggést és hogy $u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, a viszkózus alapréteg vastagságára átalakítások után adódik:

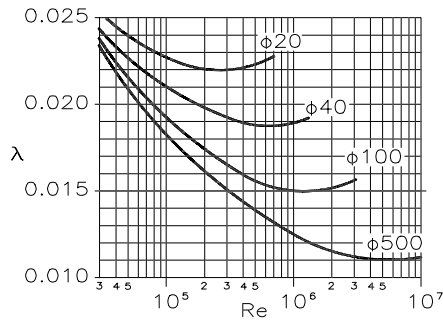
$$\frac{y_v}{d} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda} Re}. \quad (13.17)$$

λ helyébe a Blasius-képletet írva a csőátmérőhöz viszonyított viszkózus alapréteg vastagságra kapjuk:

$$\frac{y_v}{d} = \frac{\text{Konst.}}{Re^{7/8}}. \quad (13.18)$$

A viszkózus alapréteg vastagsága a Reynolds-szám növekedésével csökken, tehát egy adott határ Reynolds-szám (Re_h) fölött a csőfal érdességének mérete meghaladja az y_v -t (azaz az érdességsúcsok „kilógnak” a viszkózus alaprétegből), és ekkor a csőfal érdessége befolyásolja a λ értékét. Ha $Re < Re_h$, azaz a cső hidraulikailag sima, akkor az érdesség csökkentésének az előzőekből belátható okok miatt nincs befolyása a λ értékére.

Nem homokszemcsékkel érdesített csövek, pl. **acélcsövek** esetén az érdesség mérete változó, tehát a Reynolds-szám növekedésével fokozatosan egyre több érdességsúcs kerül ki a viszkózus alaprétegből. Ezért az érdesség a Reynolds-szám növekedésével fokozatosan növekvő mértékben befolyásolja a csőszűrlődési tényező értékét. Miután az érdesség mértéke széles határok között nem függ a csőátmérőtől, csak a csőgyártás technológiájától, a **relatív érdesség jellemzésére a csőátmérőt használhatjuk**: minél nagyobb d , adott érdességnél annál kisebb a relatív érdesség. Egy adott technológiával készült acélcsövekre vonatkozó $\lambda - Re$ görbéket kétszer logaritmikus diagramban a 13.4. ábra mutatja.



13.4. ábra

Nem kör keresztmetszetű csövek veszteségének számítására az egyenértékű átmérőt vezetjük be:

$$d_e = \frac{4A}{K} \quad (13.19)$$

ahol $A [m^2]$ a csőkeresztmetszet nagysága,

$K [m]$ az ún. **nedvesített kerület**, azaz a ke-

resztmetszet kerülete azon szakaszának hossza, ahol az áramló közeg az álló fallal érintkezik. Ha az áramlás kitölti a csőkeresztmetszetet, akkor K a teljes kerület, az árokban folyó víz esetén pedig a ténylegesen „nedvesített” kerület. A csősúrlódási veszteséget nem kör keresztmetszetű csövek esetén is a (13.9) összefüggéssel számoljuk azzal a különbséggel, hogy **a d csőátmérő helyébe a d_e egyenértékű átmérő kerül:**

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{1}{d_e} \lambda(Re), \text{ ahol } Re = \frac{v d_e}{\nu} \quad (13.20)$$

(Fenti összefüggésekben $v [m/s]$ a valóságos csőkeresztmetszettel számolt átlagsebesség.)

A Reynolds-szám ismeretében a λ csősúrlódási tényezőt a Re értékétől függően a (13.11) vagy (13.13) összefüggéssel vagy $\lambda - Re$ diagram használatával határozhatjuk meg.

Ha a cső téglalap keresztmetszetű és az oldalviszonyra fennáll: $\frac{a}{b} < 0.5$, akkor a λ számí-

tásához a Reynolds-szám értékét a $Re = \Phi \frac{v d_e}{\nu}$ összefüggéssel számolt Reynolds számmal

határozzuk meg a szokott módon, ahol $\Phi \cong \frac{2}{3} + \frac{11}{24} \frac{a}{b} \left(2 - \frac{a}{b}\right)$.

A 10.3.fejezet végén definiáltuk a kialakult csőáramlást és azt az l kezdeti csőhosszat, amely mentén a csőbe történő beömlést követően a kialakult áramlás létrejön. A kialakult csőáramlás létrejöttéhez a tapasztalat szerint nagyobb nyomásesésre van szükség, mint amennyi az adott Reynolds-számnál az adott l_k egyenes csövön kialakult áramlás esetén keletkezik. Ezt a többlet veszteséget $\Delta p'_{be}$ **beömlési veszteségnek** nevezzük és a

$$\Delta p'_{be} = \frac{\rho}{2} v^2 \zeta_{be} \quad (13.21)$$

összefüggéssel határozhatjuk meg, ahol ζ_{be} a **beömlési veszteségtényező, amelynek számértéke megmutatja, hogy az átlagsebességgel számolt dinamikus nyomás hány-szorosa a beömlési veszteség.** A lamináris csőáramlás esetén $\zeta_{be} \cong 1.2$, turbulens esetben a beömlési veszteség lényegesen kisebb ($\zeta_{be} \cong 0.05$), ezért azt általában elhanyagolják.

A ζ veszteségtényezőt igen gyakran alkalmazzuk. Ha egy adott geometriájú, érdességű csőidom veszteségének függését vizsgáljuk az azt befolyásoló tényezőktől, akkor a $\Delta p' = F(v, \rho, d, \mu)$ függvénykapcsolatot kívánjuk felderíteni. Ha a 13.2. fejezetben bemutatott dimenzióanalízist erre az esetre alkalmazzuk, ahol 5 dimenziós változó van, $5 - 3 = 2$ dimenziótlan csoportot állíthatunk elő:

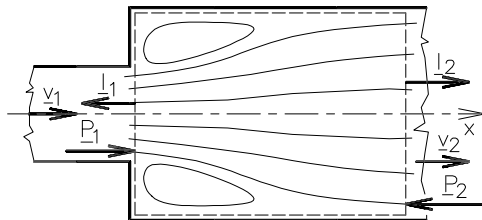
$$\Pi_1 = \frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} v^2} = \zeta \quad \text{és} \quad \Pi_2 = \frac{v d}{\nu} = Re. \quad (13.22)$$

Az adott csőidom veszteségét tehát a $\zeta = \zeta(Re)$ összefüggés megadásával lehet jellemezni, azaz adott csőidom veszteségtényezője csak a Reynolds-szám függvénye, de a szokott Re tartományban rendszerint állandónak tekinthető.

13.4. Csőidomok áramlási vesztesége

Az előző fejezetben az egyenes cső súrlódási veszteségét tekintettük át, ebben pedig a különböző csőidomokét.

Borda-Carnot átmenet



13.5. ábra

Tekintsük a 13.5. ábrát, ahol egy hirtelen keresztmetszet növekedéssel jellemzett ún.

Borda-Carnot átmenetet mutatunk be. A berajzolt áramvonalak a valóságos áramláshoz közelálló áramképet mutatják be. Alkalmazzuk az impulzustételt annak érdekében,

hogy a Borda-Carnot átmenet veszteségét, az ún. **Borda-Carnot veszteséget**: $\Delta p'_{BC}$ meghatározzuk. Legyen az áramlás stacionárius, az áramló közeg sűrűsége pedig állandó. Rajzoljuk fel az ellenőrző felületet, valamint a \underline{P} és \underline{I} vektorokat. Az ellenőrző felületen ható, súrlódásból származó erőket elhanyagoljuk. A 8.1. fejezetben tanultak alapján írható: $-I_1 + I_2 = P_1 - P_2$, azaz

$$-\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 = -p_2 A_2 + p_1 A_1.$$

(A jobb oldal utolsó tagja felírásánál azt a **kísérleti tapasztalatot** használtuk fel, hogy a tengelyre merőleges körgyűrű alakú felületen a nyomás jó közelítéssel állandó és megegyezik az A_1 keresztmetszetben uralkodó nyomással.)

Tekintettel arra, hogy a kontinuitás következtében $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$, behelyettesítés és az egyenlet mindkét oldala A_2 -vel való osztása után adódik:

$$(p_2 - p_1)_{BC} = \rho v_2 (v_1 - v_2) \quad (13.23)$$

Ha az áramlás súrlódásmentes volna, akkor a Bernoulli-egyenlet alkalmazásával számolhatnánk az „ideális” nyomáskülönbséget:

$$(p_2 - p_1)_{id} = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2).$$

Az „ideális” és a valóságoshoz közelálló, (13.23) összefüggéssel megadott nyomáskülönbség különbsége a súrlódás következtében létrejövő ún. **Borda-Carnot veszteség**:

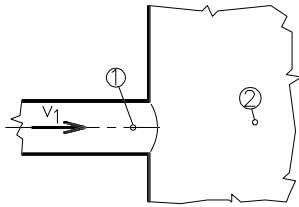
$$\Delta p'_{BC} = (p_2 - p_1)_{id} - (p_2 - p_1)_{BC} = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) - \rho v_2 (v_1 - v_2),$$

amiből egyszerűsítések és átalakítások után adódik:

$$\Delta p'_{BC} = \frac{\rho}{2} (v_1 - v_2)^2 \quad (13.24)$$

A Borda-Carnot veszteség az egyik legfontosabb veszteségforrás, amelynek hatását számos más csőidombban is fel fogjuk fedezni.

Kilépési veszteség

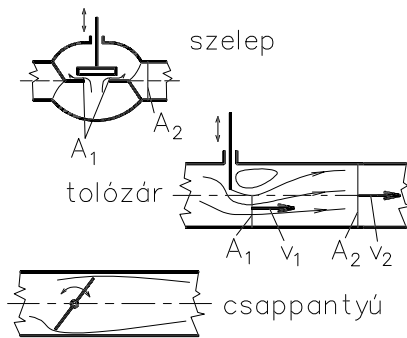


13.6. ábra

A Borda-Carnot veszteség egyik gyakran előforduló, speciális esete a kilépési veszteség, amely akkor keletkezik, ha a közeg egy csőből nagy térbe, pl. egy tartályba áramlik (ld. 13.6. ábra). Alkalmazzuk a Borda-Carnot veszteség (13.24) kifejezését, figyelembe véve, hogy $v_2 = 0$, azaz a tartályban lévő sebesség a közeg súrlódás miatti lefékezéséből zérus:

$$\Delta p'_{ki} = \frac{\rho}{2} (v_1 - 0)^2 = \frac{\rho}{2} v_1^2 \quad (13.25)$$

Szelepek, tolózárak, csappantyúk



13.7. ábra

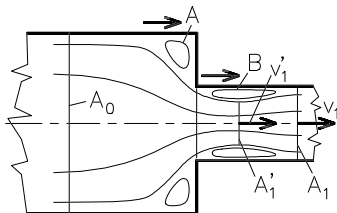
A szelepek, tolózárak, csappantyúk (ld. 13.7. ábra) vesztesége is nagyrészt a Borda-Carnot veszteségre vezethető vissza: ezek elmozduló elemei leszűkítik az áramlási keresztmetszetet, ezáltal hirtelen keresztmetszet növekedés jön létre a leszűkült keresztmetszet után. A szelepek, tolózárak áramlási veszteségét is ζ_{sz} veszteségtényezővel jellemezzük, amely a $\Delta p'_{sz}$ veszteség és valamely jellemző sebességgel számolt dinamikus nyomás hányadosa.

A 13.7. ábra jelöléseit alkalmazva emeljük ki a (13.24) összefüggésből a v_2 -t,

$$\Delta p'_{sz} \cong \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right)^2, \text{ azaz } \zeta_{sz} \cong \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2. \quad (13.26)$$

Egy szelep (pl. a vízcsap) forgatása esetén a szelep és a szeleptányér közötti rést (azaz az A_1 keresztmetszetet) változtatjuk, ezáltal változik a ζ_{sz} veszteségtényező értéke is. Pl. a csap zárása esetén A_1 egészen a zérusig csökken, miközben a veszteségtényező minden határon túl nő. Az egyre nagyobb veszteségtényező miatt a vízvezetékrendszerben lévő nyomás hatására egyre kisebb v_2 sebességgel áramlik ki a víz, azaz (teljes zárásig zérusra) csökken a térfogatáram.

Hirtelen keresztmetszet-csökkenés



13.8. ábra

Tekintsük a 13.8. ábrát, ahol egy **hirtelen keresztmetszet-csökkenés** látható. A vázolt áramvonalaknak görbülete alapján meghatározható a fal mellett a nyomás változása (az ábrán a nyílak a nyomás fal menti növekedése irányába mutatnak). A bal oldali nyíl által jellemzett nyomásnövekedés oka, hogy a közeg a „sarok” felé áramlik,

ahol torlópont alakul ki, amelyben a nyomás nagyobb, mint a torlópont előtti térben. A hirtelen keresztmetszet csökkenés helyén, a tengelyre merőleges körgyűrű alakú fal és a kisebb átmérőjű cső találkozásánál, a „sarok” körül az áramlás felgyorsul, a nyomás lecsökken. A sarok után áramlás irányában haladva a sebesség csökken, tehát a nyomás nő. A 11.4. fejezetben láttuk, hogy az áramlás irányában növekedő nyomás esetén leválhat az áramlás.

Általánosságban megállapítható, hogy az áramlást határoló szilárd felület hirtelen irányváltásainál („sarkok” közelében) fal melletti, áramlás irányú nyomásnövekedéssel és így határréteg leválás esélyével számolhatunk. Ha a sarok „homorú” (ld.

13.8. ábra A) akkor az irányváltás előtt ha „domború” (ld. 13.8. ábra B) az irányváltás után jöhetnek létre a határréteg leválás feltételei.

Az adott esetben két helyen következik be határréteg leválás: az A-val és a B-vel jelölt helyen. Az utóbbi leválás következtében a kisebb átmérőjű cső elején az „egészséges” **áramlási keresztmetszet leszűkül, majd utána Borda-Carnot átmenethez hasonló sebességkiegyenlítődés megy végbe**, ami – mint láttuk – jelentős veszteséggel jár. A keresztmetszet leszűkülése (ill. az ezt jellemző $\alpha = \frac{A'_1}{A_1}$ kontrakciós tényező értéke) a kereszt-

met-
szetviszony $\left(\frac{A_1}{A_0}\right)$ függvénye, ami a tapasztalatok szerint $\alpha \cong 0.6 + 0.4\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2$, azaz minél

nagyobb a keresztmetszetek hányadosa, annál jobban összehúzódik az áramlás. A hirtelen keresztmetszet csökkenés veszteségének túlnyomó részét a kisebb átmérőjű csőben bekövetkező Borda-Carnot veszteség teszi ki, tehát írható (ld.(13.24) összefüggés):

$$\Delta p'_{hk} = \frac{\rho}{2}(v'_1 - v_1)^2 = \frac{\rho}{2}v_1^2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2. \quad (13.27)$$

(Általánosságban megállapítható, hogy gyorsuló áramlások vesztesége általában **kicsiny**. A lassuló áramlásoknál lehet nagyobb veszteségekkel számolni. Lassuló áramlások az áramlási keresztmetszet növekedése, vagy az áramlási irány változása következtében jöhetnek létre.)

A (13.27) összefüggésből látható, hogy a hirtelen keresztmetszet csökkenés veszteségtényezője (a kisebb keresztmetszetű csőben lévő átlagsebességgel számolt dinamikus nyomásra vonatkoztatva):

$$\zeta_{hk} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Ilyen veszteség keletkezik pl. egy tartályból egy csőbe történő beáramlásnál, ha a tartály fala és cső közötti átmenet nincsen lekerekítve. A 8.3.fejezetben tárgyalt Borda-féle kifolyónyílás esetén pl. $\alpha = 0.5$, tehát e veszteséget jellemző $\zeta_{hk} = 1$. Ha a cső nem nyúlik be a

tartályba, az a fenti kifejezéséből $\frac{A_1}{A_0} \cong 0$ -hoz $\alpha \cong 0.6$ kontrakciós tényező tartozik, amivel

$$\zeta_{hk} = 0.44.$$

Diffúzor

Az áramlás irányában bővülő csőtolásokat nevezzük diffúzoroknak (szemben a konfúzorokkal, amelyek keresztmetszete az áramlás irányában csökken). A diffúzorokban áramlás irányában csökken a sebesség, nő a nyomás. A 11.4. fejezetben láttuk, hogy ilyen eset-

ben a fal mellett kialakuló határréteg rohamosan vastagszik, ill. leválhat. Tekintsük a 11.8. ábrát, ahol egy diffúzor és alatta a diffúzor tengelye menti nyomásmegoszlás látható sűrűdésmentes („ideális”) és valóságos esetben. A (11.5) összefüggéssel definiált η_d diffúzorhatásfok ismeretében valamint (11.4) összefüggés figyelembevételével a diffúzor sűrűdési vesztesége $\Delta p'_{\text{diff}}$ meghatározható. **A veszteség ugyanis az „ideális” és valóságos nyomásnövekedés különbsége:**

$$\overline{\Delta p'_{\text{diff}}} = (p_2 - p_1)_{\text{id}} - (p_2 - p_1)_{\text{val}} = (1 - \eta_d) \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (13.28)$$

Itt jegyezzük meg, hogy a diffúzor vesztesége jelentős mértékben függ a diffúzorba belépő sebességmegoszlás jellemzőitől. Ha a fal közelében lévő áramlási sebességek már a belépésnél viszonylag kicsik („csúcsos” a sebességprofil), a határréteg hamar leválik és a kilépő keresztmetszet jelentős részén lesz visszaáramlás. Ez azt jelenti, hogy a diffúzor sokkal kevésbé lassítja le az áramlást, mint az a geometriai viszonyokból adódna. Ezért a valóságos nyomásnövekedés sokkal kisebb, mint a keresztmetszetviszony alapján számolt érték, azaz η_d kicsi és a (13.28) összefüggéssel számolt diffúzor sűrűdési veszteség nagy.

A diffúzorból kilépő közeg sebességmegoszlása a fentiekből következően általában egyenlőtlen. Ha a diffúzor kilépőkeresztmetszete egy csőben folytatódik, ebben az egyenlőtlen áramlási sebesség kiegyenlítődik. Ez a sebességkiegyenlítődés hasonló a Borda-Carnot átmenetben (13.5. ábra) tapasztalható jelenséghez: a nyomás áramlás irányában nő, de kevésbé, mint az a sebességcsökkenéséből veszteségmentes esetben adódna, azaz jelentős veszteség keletkezik. Mégis ez a nyomásnövekedés növeli a diffúzor hatásfokát.

Csőívek, könyökök

A csövekben áramló közegek irányváltozásainál, a csőívekben, könyökökben jelentős sűrűdési veszteségek keletkezhetnek, amelyeket ugyancsak ζ veszteségtényezővel jellem-

zünk. A veszteségek okai között a fali csúsztatófeszültség általában alárendelt szerepet játszik. Nagyobb jelentősége van a 13.9. ábrán vázolt és a 11.5. fejezetben tárgyalt szekunder áramlás keletkezésének, hiszen a többlet mozgási energia létrehozásához többlet nyomáskülönbségre van szükség, és az így keletkező mozgási energia nem hasznosul: legnagyobb része a sűrűdés következtében hővé alakul. Nagy veszteséget okozhat a határréteg

13.9 ábra

leválás következtében létrejövő keresztmetszet szűkülés miatti Borda-Carnot veszteség. Az előző megfontolások alapján a 13.9. ábrán felrajzoltuk a fal mellé a nyomásnövekedést mutató nyilatkat, és berajzoltuk a határréteg leválása folytán létrejövő ún. **leválási buborékokat** és az azok által okozott keresztmetszet szűküléseket. Látható, hogy az irányváltás utáni leválás okozhat jelentős veszteséget. A csőívek, könyökök veszteségét kétféleképpen szokták csökkenteni: az átmenetek lekerekítésével ill. az R/d relatív görbület (ld. 13.9. ábra) növelésével, vagy terelőlapátok alkalmazásával, amelyekkel nagyobb relatív görbületű rész-íveket ill. rész-könyököket hozunk létre.

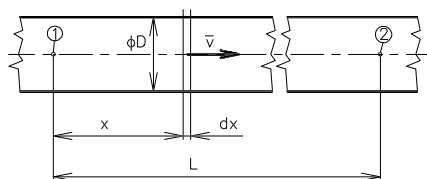
A fentiekben áttekintett fontosabb csőidomokon kívül több más, itt nem tárgyalt veszteségforrás van (pl. zsaluk, csőelágazások), amelyek veszteségtényezőit szakkönyvekből, katalógusokból, gyártmányismertetőkből lehet kivenni.

Itt jegyezzük meg, hogy a ζ veszteségtényezők és a λ csősúrlódási tényező számolt vagy katalógusból, szakirodalomból kivett értékei a valóságos alkalmazásoknál csak közelítően helyesek, hiszen a képletek ill. mért értékek nem veszik figyelembe a súrlódási veszteségforrások egymásrahatását. Belátható, hogy a (13.11) vagy (13.13) összefüggéssel számolt értéktől eltér annak a csőnek a λ csősúrlódási tényezője, amely előtt egy hirtelen keresztmetszet növekedés (Borda-Carnot átmenet) van, hiszen a λ – legalábbis a kezdeti szakaszon – függ a csőbe való beáramlás jellemzőitől. Ugyancsak nem közömbös egy csőív ζ veszteségtényezőjének értéke szempontjából, hogy előtte egyenes cső, vagy egy másik csőív van. Ez utóbbi esetben pl. az is jelentősen befolyásolhatja a második csőív ζ veszteségtényezőjének értékét, hogy a két ív U vagy S alakot ír le.

A csőidomok egymásrahatása általában előre nem számolható, ezért pl. csővezetékek méretezésénél a számítással ill. táblázatok alkalmazásával kapott eredményeket csak közelítésnek tekinthetjük. (Ezen túlmenően csak szabványos csőátmérőt választhatunk, azaz általában el kell térnünk a számított értéktől. Adott átáramló térfogat esetén pedig a áramlási veszteség a csőátmérő közel 5. hatványával arányos, tehát attól igen erősen függ.) Ezért a tervezésnél egyrészt ésszerű tartalékot (pl. a számítottnál valamivel nagyobb teljesítményű ventilátort) és beállítási, szabályozási lehetőséget kell beépítenünk a rendszerbe, hogy a számítás pontatlansága miatt szükségessé váló korrekciót a rendszer felépítése után végre tudjuk hajtani. Vigyázni kell ugyanakkor arra, hogy ez az utólagos beállítás, szabályozás ne okozzon fölösleges energiaveszteséget. Hibás megoldás például, ha egy óvatosságból nagyon túlméretezett ventilátor légszállítását egy csappantyú, (azaz egy többlet súrlódási veszteség forrás) beiktatásával csökkentjük a kívánt értékre. Ily módon ugyanis a csappantyún keletkező, a rendszer funkciója tekintetében fölösleges veszteség növeli a ventilátor hajtásához szükséges energia költségét.

13.5. Összenyomható közeg áramlása csőben

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a csővezetékben áramló közeg sűrűsége állandó. Ez cseppfolyós közegek esetén a szóbajöhető nyomások esetén és a kavitációt kizárva, gázok esetén pedig az abszolút nyomás 10%-át meg nem haladó nyomásváltozások esetén igen jó közelítés. Gázok hosszú csővekben történő áramlása esetén azonban előfordulhat, hogy a veszteség következtében a nyomás az abszolút nyomáshoz képest jelentősen csökken, ezzel együtt csökken a sűrűség, nő a sebesség. (Tipikus példái ennek az esetnek a sűrített levegő vezetékek rendszerek.) Hogyan kell ebben az esetben számolni a csősúrlódási veszteséget? Tekintsük a 13.10. ábrát, ahol egy $L[m]$ hosszúságú, $D[m]$ átmérőjű csővezeték egy



13.10. ábra

szakasza látható. Hanyagoljuk el a súrlódási veszteséghez képest a gáz felgyorsításához szükséges nyomáskülönbséget. A cső dx hosszúságú szakaszán a csősúrlódási veszteség miatti nyomásváltozás (nyomáscsökkenés):

$$-dp = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{dx}{D} \lambda. \quad (13.29)$$

(A bal oldalon a negatív előjelre azért van szükség, mert a nyomás az x tengely mentén csökken.) Fejezzük ki az átlagsebességet:

$$\bar{v} = \frac{q_m}{\rho A}, \quad (13.30)$$

ahol $q_m \left[\frac{kg}{s} \right]$ a csőben áramló gáz tömegárama, $A = \frac{D^2 \pi}{4}$ a cső keresztmetszete. A

(13.30) kifejezést (13.29)-be helyettesítve és a gáztörvény $\rho = \frac{p}{RT}$ alakját a ρ kifejezésére

felhasználva egyszerűsítés után adódik:

$$-dp = \frac{q_m^2 RT \lambda}{2 p A^2 D} dx,$$

ami szétválasztás és integrálás után a

$$(13.31)$$

$$-\int_{p_1}^{p_2} p \, dp = \int_0^L \frac{q_m^2 R T \lambda}{2 A^2 D} dx$$

alakra hozható. A jobb oldali integrandusz tényezőiről a T hőmérséklet és a λ csőszűrőadási tényező kivételével belátható, hogy a cső hossza (az x) mentén nem változik. A csőfalon keresztül történő hőátadás miatt az áramló gáz T hőmérséklete a tapasztalat szerint a csőhossz mentén jó közelítéssel állandó. A csőszűrőadási tényező λ , a csőfal relatív érdesség és a Reynolds-szám függvénye. Előbbi a csőhossz mentén állandó. A Reynolds-szám kifejezése a (13.30) felhasználásával átalakítható:

$$Re = \frac{\bar{v} D}{\nu} = \frac{q_m D}{\rho A \nu} = \frac{q_m D}{A \mu}.$$

Tekintettel arra, hogy a dinamikai viszkozitás csak a hőmérséklet függvénye (ld. 1.2.fejezet) és $T \cong \text{áll.}$ a csőhossz mentén, $Re \cong \text{áll.}$ és $\lambda \cong \text{áll.}$ eredményre jutunk. A (13.31) összefüggés az integrálás után és ρ_1^2 -tel szorozva és osztva:

A gáztörvényt valamint (13.30) összefüggést figyelembe véve írható: (13.32)

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \frac{q_m^2 R T \lambda L}{2 A^2 D} \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2}. \quad (13.33)$$

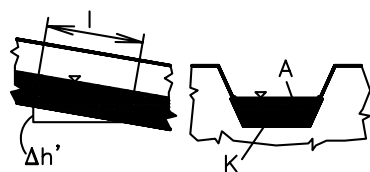
$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = p_1 \frac{\rho_1}{2} \bar{v}_1^2 \frac{L}{D} \lambda,$$

ahol a jobb oldalon felismerjük az összenyomhatatlan közeg esetére, a cső elején lévő állapotra vonatkozó $\Delta p'_{\text{ink}}$ kifejezést, amellyel írható:

$$\boxed{\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = p_1 \Delta p'_{\text{ink}}} \quad (13.34)$$

Ha ismerjük a cső elején, az 1 pontban a viszonyokat, a cső végén, a 2 pontban a nyomás a (13.33) összefüggéssel kiszámítható.

13.6. Áramlás nyílt felszínű csatornában



13.11. ábra

A 13.11. ábrán egy csatorna látható, amelyben víz folyik egyenletes sebeséggel (kialakult áramlás), azaz a csatorna esése miatt a vízre ható súlyerő csatorna irányú komponensével éppen egyensúlyt tart a folyadék áramlását fékező súrlódás. Legyen az l csatornahosszra jutó, a $\Delta p'$ áramlási veszteségnek megfelelő vízszint magasságkülönbség $\Delta h'$, ami

az előzőek szerint éppen a súrlódási veszteséget fedezi. A nem kör keresztmetszetű csövek áramlási veszteségére felírt (13.20) összefüggés mindkét oldalát ρg -vel osztva írható:

$$\Delta h' = \frac{\bar{v}^2}{2g} \frac{1}{d_e} \lambda, \quad (13.35)$$

ahol $d_e = \frac{4A}{K}$ egyenértékű átmérő (ld. (13.19) összefüggés). Esetünkben A az áramlási keresztmetszet, K pedig az áramló víz mederrel érintkező kerülete (ld. 13.11. ábra). Vezessük be az $i = \frac{\Delta h'}{l}$ esést és helyettesítsük be a (13.35) összefüggésbe, majd fejezzük ki az átlagsebességet:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2gd_e}{\lambda}} i = C \sqrt{d_e} i, \quad \text{ahol } C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}}. \quad (13.36)$$

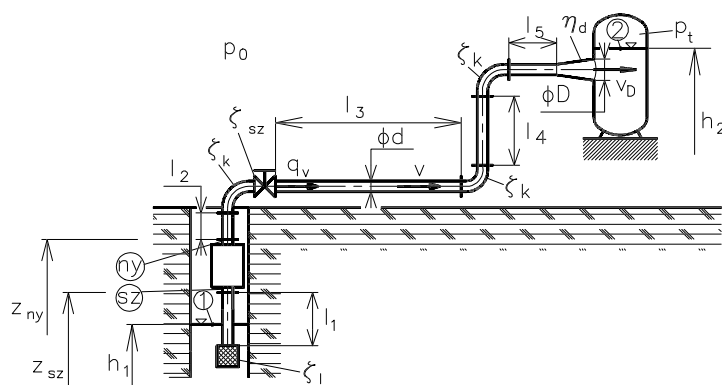
A (13.36) összefüggést Chézy-képletnek szoktuk nevezni. $\lambda = 0.02 \sim 0.03$ közötti értékkel $C \approx 25$.

13.7. Alkalmazási példák

A veszteségek számításának bemutatására két feladat megoldását vázoljuk.

Házi vízellátó rendszer szivattyújának kiválasztása

A 13.12. ábrán egy kút látható, amelybe egy szivattyúhoz csatlakozó cső nyúlik be.



13.12. ábra

A szivattyú után egy könyökökből, szelepből és egyenes csőszakaszokból álló vezeték következik, amely egy diffúzoron keresztül csatlakozik a tartályhoz. A tartályban víz van, felette pedig a p_0 külső nyomásnál nagyobb, ismert **túlnyomás**: p_t . A szivattyú előtti csőszakasz elején egy lábszelep van, amely megakadályozza, hogy a szivattyú leállása után a vezetékből a kútba visszafolyjék a víz.

Ismert a d csőátmérő, az l_1, l_2 stb. csőhosszak, a h_1, h_2 magasságkülönbségek, a diffúzor kilépő keresztmetszet D átmérője. Katalógusokból, szakirodalomból kivesszük a lábszelep, a szelepek és a könyökök $\zeta_1, \zeta_{sz}, \zeta_k$ veszteségtényezőit, a diffúzor η_d hatásfokát. Megadjuk a szállítandó $q_v \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ térfogatáramot és keressük a szivattyú H ún. szállítómagasságát, amely a 6.5. fejezetben bevezetett össznyomásnövekedésből határozható meg figyelembevéve a szivattyú nyomó és szívócsonkja közti magasságkülönbséget:

$$H = \frac{\Delta p_{\text{ö}}}{\rho g} + (z_{ny} - z_{sz}), \quad (13.37)$$

ahol ny és sz indexek a szivattyú nyomó és szívócsonkjára utalnak. **Keressük továbbá a szivattyú hajtásához szükséges hálózati teljesítmény igényt.**

A szivattyú hasznos teljesítménye a

$$P_h = q_v \rho g H \quad (13.38)$$

összefüggésből számítható.

Ahhoz, hogy a kérdésekre a választ megadhassuk, meg kell határozni az össznyomást a szivattyú nyomó és szívócsonkján, majd venni kell a különbségüket, a $\Delta p_{\text{ö}}$ össznyomásnövekedést.

A feladat megoldására a 13.1. fejezetben ismertetett megfontolásokkal meghatározott (13.2) veszteséges Bernoulli-egyenletet használjuk fel. Az alkalmazás (pl. az 1 és 2 pont kiválasztásának) elvei megegyeznek a 4.4. és a 6.3. fejezetekben leírtakkal. Így pl. esetünkben a kútban és a tartályban lévő nyugvó víz felszínén célszerű az integrálási útvonalak kezdő- vagy végpontjait felvenni, ahol mindent ismerünk. Egy Bernoulli-egyenlet nem írható fel e két vízfelszín fölött, hiszen a közben lévő szivattyú feladata éppen a Bernoulli-összeg növelése. Ezért két veszteséges Bernoulli-egyenletet írunk fel. Egyiket a kútban lévő víz felszínén lévő 1 pont és az szívócsonk sz pontja között, a másikat pedig a nyomócsonk ny pontja és a tartály felszínének 2 pontja között:

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho U_1 = \rho \frac{v_{sz}^2}{2} + p_{sz} + \rho U_{sz} + \Sigma \Delta p'_{sz}, \quad (13.39)$$

ahol $\Sigma \Delta p'_{sz}$ a szívóoldali összes áramlási veszteséget kifejező tag, amellyel az áramlás irányában távolabb lévő pontban felírt Bernoulli összeget növeltük meg. A 13.12. ábra jelöléseivel:

$$\Sigma \Delta p'_{sz} = \frac{\rho}{2} v^2 \left(\zeta_1 + \frac{1}{d} \lambda_1 \right) \quad (13.40)$$

$$\rho \frac{v_{ny}^2}{2} + p_{ny} + \rho U_{ny} = \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho U_2 + \Sigma \Delta p'_{ny} \quad (13.41)$$

ahol

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta p'_{ny} = & \frac{\rho}{2} v^2 \left(\frac{1_2}{d} \lambda_2 + \zeta_k + \zeta_{sz} + \frac{1_3}{d} \lambda_3 + \zeta_k + \frac{1_4}{d} \lambda_4 + \zeta_k + \frac{1_5}{d} \lambda_5 \right) + \\ & + (1 - \eta_d) \frac{\rho}{2} (v^2 - v_D^2) + \frac{\rho}{2} v_D^2. \end{aligned} \quad (13.42)$$

A (13.42) összefüggés jobb oldalának utolsó tagja a tartályba való beáramlásnál keletkező **kilépési veszteség**.

A (13.39) összefüggés jobb oldalán és a (13.41) összefüggés bal oldalán a szívó és a nyomóoldali össznyomást ismerjük fel. Figyelembe kell venni, hogy $v_1 = v_2 = 0$, $U_{ny} - U_{sz} = g(z_{ny} - z_{sz})$, $U_2 - U_1 = g(h_2 - h_1)$, $p_1 = p_0$, $p_2 = p_t$ és miután a Reynolds-szám valamennyi csőszakaszban megegyezik, a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda$. A (13.41) összefüggés bal oldalából vonjuk ki a (13.39) összefüggés jobb oldalát! Átrendezés után kapjuk:

$$\begin{aligned} \Delta p_{\delta} = p_{ny\delta} - p_{sz\delta} = & p_t - p_0 + \rho g(h_2 - h_1) - \rho g(z_{ny} - z_{sz}) + \\ & + \frac{\rho}{2} v^2 \left(\zeta_1 + \zeta_{sz} + 3\zeta_k + \frac{\Sigma 1_i}{d} \lambda \right) + (1 - \eta_d) \frac{\rho}{2} (v^2 - v_D^2) + \frac{\rho}{2} v_D^2. \end{aligned} \quad (13.43)$$

A **kontinuitás törvényéből** $v d^2 = v_D D^2$. A λ **csősúrlódási tényezőt** a Reynolds-szám $Re = \frac{v d}{\nu}$ kiszámítása után annak értékétől függően a (13.11) vagy a (13.13) összefüggéssel határozhatjuk meg, ha a cső hidraulikailag sima. Ha nem, akkor táblázatot vagy diagramot használunk a λ meghatározására.

A (13.38) és (13.43) összefüggésből látható, hogy **a szivattyú szállítómagassága a tartályban lévő nyomás és a külső nyomás különbségének, valamint a magasságkülönbségnek a legyőzésére fordítódik, és fedezi az összes áramlási veszteséget. A hálózati teljesítményigény**

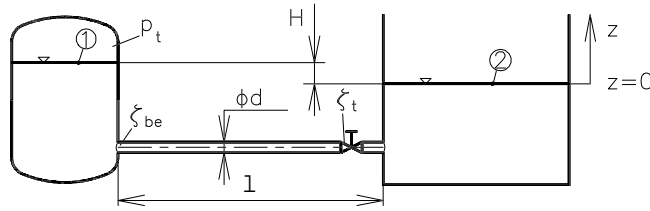
a $P_{hál} = \frac{P_h}{\eta_{sz} \eta_m}$ összefüggésből számolható, ahol az η_{sz} és η_m a szivattyú

és az azt hajtó motor hatásfoka.

Áramlás tartályokat összekötő csőben

Az előző feladatnál a cső átmérője és a csőben áramló térfogatáram adott volt, így az áramlási sebesség a csőben ismert volt. Ezzel a sebességgel számolhattuk a Reynolds-számot, aminek ismerete szükséges volt a csősúrlódási tényező meghatározásához. **Mi a teendő, ha**

az áramlási sebesség az ismeretlen? A 13.13. ábrán két tartály látható,



13.13. ábra

amelyeket egy ismert d átmérőjű és l hosszúságú cső köt össze. A csőben tolózár van, amelynek ismerjük a ζ_t veszteségtényezőjét. Mekkora az egyik tartályból a másikba

áramló $q_v \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ térfogatáram, ha elhanyagoljuk a tartályokban lévő vízfelszín süllyedését ill. emelkedését. Írjuk fel a (13.2) veszteséges Bernoulli-egyenletet a tartályok felszínén lévő 1 és 2 pont között!

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho U_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho U_2 + \Sigma \Delta p' \quad (13.44)$$

Miután $p_1 = p_t$ és $p_2 = p_0$, $U = g z$ és $z_2 = 0$, $z_1 = H$, $v_1 = v_2 = 0$ és a $\Sigma \Delta p'_{sz} = \frac{\rho}{2} v^2 \left(\zeta_{be} + \zeta_t + \frac{1}{d} \lambda + 1 \right)$, ahol ζ_{be} a belépési veszteség. Mindezeket figyelembe véve kapjuk:

$$p_t - p_0 + \rho g H = \frac{\rho}{2} v^2 \left(\zeta_{be} + \zeta_t + \frac{1}{d} \lambda + 1 \right), \text{ amiből kifejezhető a } v \text{ sebesség:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_t - p_0 + \rho g H}{(\zeta_{be} + \zeta_t + 1) + \frac{1}{d} \lambda}} \quad (13.45)$$

A (13.45) összefüggésben a λ kivételével minden ismert. A csőszűrlődási tényező számításához viszont ismernünk kell a Reynolds-számot, ahhoz pedig a sebességet. Látjuk, hogy **a feladat iterációval oldható meg**. Ennek megkönnyítése érdekében célszerű az ismert mennyiségeket behelyettesíteni, kiszámolni és a (13.45) összefüggést az alábbi alakban felírni:

$$v = \sqrt{\frac{A}{B + C \lambda}} \quad (13.46)$$

A megoldás első lépéseként vegyük fel $\lambda' = 0.02$ értéket. (A -k száma az iterációs lépések sorszámát jelzi) Tetszőlegesen felvehetünk más λ' -t is, a számítás igen gyorsan konvergál. λ' -t behelyettesítve (13.46) összefüggésbe megkapjuk v' -t, ezzel kiszámolható

$Re' = \frac{v'd}{\nu}$ értéke. Ha $Re' < 2300$, akkor a (13.11) összefüggéssel kiszámolhatjuk λ'' -t. Ha

$Re' \geq 2300$, akkor a csőfal érdességének függvényében táblázatból vagy diagramból vesszük ki a λ'' értékét, vagy hidraulikailag sima cső esetén a (13.13) összefüggésből számítjuk ki. A λ'' ismeretében előlről kezdjük a fenti számítást mindaddig, amíg két egymás utáni iterációs lépésben kapott λ érték közötti különbség nem halad meg egy általunk fel-

vett értéket. Az **iteráció eredményeként kapott v sebesség ismeretében** a $q_v = v \frac{d^2 \pi}{4}$

összefüggéssel **számoljuk ki az egyik tartályból a másikba áramló térfogatáramot.**

körül nagy (elvileg végtelen távolságban) vegyünk fel ellenőrző felületet. A test előtt a sebesség v_∞ , a nyomás p_∞ . Ugyanennyi a nyomás a test mögött nagy távolságban, ahol a test zavarása megszűnik. Ebből adódóan $|\underline{p}_2| = |\underline{p}_1|$. Miután súrlódásmentes közeg esetén a Bernoulli-egyenlet érvényes, annak (4.31) alakját alkalmazva arra az eredményre jutunk, hogy mivel $p_2 = p_1 = p_\infty$, a test mögött a sebesség v_∞ , azaz megegyezik a test előtti sebességgel. Ebből következik, hogy $|\underline{I}_2| = |\underline{I}_1|$. Az x koordináta irányban felírva az egyensúlyt

(ld. (8.8) összefüggés): $-I_1 + I_2 = P_1 - P_2 - R_x$, az előzőek alapján $R_x = 0$ adódik. Eredményként azt kaptuk, hogy **súrlódásmentes közegben elhelyezett testre nem hat erő**.

Valóságos áramlás esetén a test közelében lévő áramvonalak mentén a Bernoulli-összeg a súrlódás következtében csökken, ezért a test mögött egy **áramlási nyom keletkezik**, amelyben a sebesség (és elvileg a nyomás is) eltér a zavartalanától (ld. 14.1. ábra A jelű görbe). A **testre ható erőre** tehát nemcsak a test felületén keletkező nyomás- és csúsztatófe-szültség megoszlásból, hanem **a test mögötti nyom jellemzőiből is lehet következtetni**. Ha a nyomban jelentős a „sebességhiány”, vagy ha a test mögött a zavartalan sebességgel párhuzamos tengelyű örvények keletkeznek, amelyekben a statikus nyomás lecsökken, akkor várhatóan nagy lesz a testre ható, hozzááramlással párhuzamos erő. (Ilyen örvények vi-zes úton haladó autók mögött figyelhetők meg.) Ha a test mögött a nyomban a sebességvektorok iránya eltér a test előtti áramlási iránytól, akkor a hozzááramlási sebességre merőleges, testre ható erőkomponenssel kell számolnunk.

14.2. A hengerre ható áramlási erő

Egy l [m] hosszúságú, d [m] átmérőjű körhengerre ható, a zavartalan hozzááramlási sebes-séggel, v_∞ -nel párhuzamos F_e [N] ellenálláserő és az azt befolyásoló mennyiségek kapcso-latát az $f(F_e, v_\infty, \rho, \mu, d, l) = 0$ függvénykapcsolat határozza meg.

Alkalmazva a dimenzióanalízist (ld. 13.2.fejezet) $6-3=3$ független dimenziótlan csoport ha-tározható meg:

$$\Pi_1 = c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 l d} \quad \text{ellenállástényező,} \quad (14.1)$$

$$\Pi_2 = Re = \frac{v_\infty d}{\nu} \quad \text{Reynolds-szám,} \quad (14.2)$$

$$\Pi_3 = \frac{l}{d} \quad \text{relatív hossz.} \quad (14.3)$$

Szorítkozzunk először a körhenger körüli **síkáramlásra** ahol a henger tengelyére merőleges valamennyi síkban azonos az áramkép. (Ilyen áramkép $\Pi_3 = \frac{l}{d} = \infty$ -hez tartozik) Ezeket a szakirodalomban „**kétdimenziós**” (**2D**) **áramlásnak** nevezik, megkülönböztetve azokat a **térbeli (3D) áramlásoktól**. Ebben az esetben a $\Pi_1 = f(\Pi_2)$ azaz a $c_e = f(Re)$ függvény meghatározása a feladatunk. Ábrázoljuk e kísérlet útján meghatározott függvénykapcsolatot kétszer logaritmikus diagramban (ld. 14.2. ábra).

14.2. ábra

Ha a **Reynolds-szám értéke kicsi, azaz a viszkozus erők dominálnak** (ld. (12.13) összefüggés) az erő a sebességgel és a viszkozitással egyenesen arányos: $F_e \sim \mu v_\infty$. Ezt figyelembe véve a (14.1)-ből láthatóan az ellenállástényező fordítottan arányos a Reynolds-számmal, tehát a 14.2. ábrán látható diagramon látható görbe kis Re értékeknél egy -1 iránytényezőjű egyenessel közelíthető. **Nagyobb Reynolds-számoknál a tehetetlenségi erők dominálnak** (12.13), tehát $F_e \sim v_\infty^2$, amiből a (14.1) figyelembe vételével $c_e = \text{áll.}$ adódik. Nagyobb Reynolds-számoknál tehát egy vízszintes egyenessel közelíthetjük a $c_e - \text{Re}$ összefüggést.

Nagy Reynolds-számoknál a henger felületén keletkező **határréteg még leválás előtt turbulenssé válik, a határréteg-leválás sokkal hátrább következik be**, a nyomásmegoszlás nagymértékben megváltozik (ld. 11.7. ábra B és C jelű görbe) és a hengerre ható erő ill. az **ellenállástényező jelentősen lecsökken**. Ennek mechanizmusát a 11.4.fejezet végén tárgyaltuk.

A 14.2. ábra jobb oldalán az egyes Reynolds-szám tartományokra jellemző áramképek láthatóak.

A kis Reynolds-szám tartományokban (pl. szűrőanyagok $\sim 20[\mu\text{m}]$ átmérőjű elemi szálai körül) az $a/$ jelű áramkép figyelhető meg: az áramlást alapvetően a súrlódóerők befolyásolják.

Növelve a Reynolds-számot a tehetetlenségi erők szerepe növekszik: egy szimmetrikus örvénypár jelenik meg a henger hátsó részén (ld. b/ jelű áramkép).

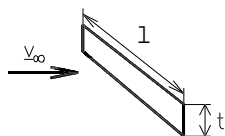
Tovább növelve a Re értékét abba a tartományba jutunk, ahol a tehetetlenségi erők dominálnak: **a hengerről periodikusan válnak le nagy és intenzív örvények (Kármán-féle örvénysor, c/ jelű áramkép)**. Ezen örvények és a hengerre ható erő közötti kapcsolatról több megállapítást tehetünk:

- Az örvények felváltva keletkeznek és úsznak le a henger két oldaláról, ezért **az áramkép szimmetriája megszűnt: a hengerre a megfúvási irányra merőleges, periodikusan változó erő hat**. Emiatt „zenélnék” a villanydrótok. A leváló örvények a szerkezetek tönkremenetelét okozhatják, ha frekvenciájuk a szerkezetek sajátfrekvenciája közelében van. A tapasztalat szerint a leváló örvények frekvenciájával, a henger átmérőjével és a megfúvási sebességgel számolt Strouhal-szám értéke (ld. (12.10) összefüggés) széles Reynolds-szám tartományban állandó: $Str \cong 0.21$.
- A henger hátsó része közelében keletkező örvényekben a sebesség viszonylag nagy, a nyomás tehát viszonylag kicsiny. A hengerre ható erő jelentős része tehát a henger hátsó részén az **örvények keletkezése miatt létrejövő depresszió következménye**. Ha a periodikus örvények keletkezését egy, a henger mögött a szimmetriasíkban elhelyezett lappal megszüntetjük, az ellenállástényező jelentősen csökken.
- A hengerre ható nagy ellenállás erő magyarázható még a leváló örvények **nagy mozgási energia tartalmával** is, ami a test mögött hővé alakul. (Viszonylag nagy munkát kell kifejtenuünk a henger álló közegben való mozgásakor, hogy az ennek következtében keletkező és a súrlódás folytán hővé alakuló nagy mozgási energiát fedezni tudjuk.)
- A henger mögötti nyomban periodikusan nagy „sebesség hiányt” ill. a környezetinél kisebb nyomást okoznak az örvények.

Ha turbulenssé válik a henger homlokfalán keletkező határréteg, a leválás a henger hátsó részére tolódik, az intenzív periodikus örvényleválás megszűnik, a henger ellenállástényezője kb. negyedére csökken.

14.3. ábra

Ezt a jelenséget gömb esetén a 14.3.a/ és b/ ábra szemlélteti. Az a/ képen víz festékekkel láthatóvá tett áramlása látható, ahol a gömb felszínén keletkező lamináris határréteg a zavartalan áramlásra merőleges „egyenlítő” előtt válik le. Ennek megfelelően a gömb mögött nagy nyom keletkezik, az ellenállási erő nagy. Ha a gömbre felhúzott drótkarika segítségével az áramlást turbulenssé tesszük, (ld. 14.3.b/ ábra) a nyom mérete (és így az áramlási ellenállás) jelentősen csökken. Ugyan ilyen hatás érhető el a Reynolds-szám növelésével.



14.4. ábra

Hasonló örvényleválás tapasztalható pl. egy áramlásra merőlegesen elhelyezett **lemezcsík** (ld. 14.4. ábra) körüli 2D áramlásban, amely $\frac{l}{t} = \infty$ esetén alakul ki. Ebben az esetben az ellenállástényező igen

nagy: $c_e = 2$. A lapra ható F_e ellenállás erő felírható a homlokfalon és a hátfalon keletkező átlagos nyomás (rendre \bar{p}_f és \bar{p}_b) különbségének és a lap felületének szorzataként: $F_e = (\bar{p}_f - \bar{p}_b)lt$. Adjunk a jobb oldalon a zárójelben lévő különbséghez

p_∞ és vonjuk le, majd helyettesítsük az ellenállás erő így kapott összefüggését a (14.1) képletbe, a jellemző felülettel (itt $1 \cdot t$ -vel) való egyszerűsítés után a

$$c_e = \frac{\bar{p}_f - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} - \frac{\bar{p}_b - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} = \bar{c}_{pf} - \bar{c}_{pb} \quad (14.4)$$

összefüggést kapjuk. A c_p nyomástényezőt korábban tárgyaltuk (ld. 11.3.fejezet, (11.3) összefüggés).

A homlokfalon legfeljebb $c_p = 1$ keletkezik a torlópotban, az átlagos nyomástényező \bar{c}_{pf} ennél kisebb, 0.7 körüli. Ebből és $c_e = 2$ -ből (14.4) alapján $\bar{c}_{pb} \cong -1.3$ adódik, azaz **a leváló örvények nagy depressziót okoznak és ez a depresszió a fő oka a nagy ellenállástényezőnek.**

Mi történik akkor, ha a **henger vagy a lemez 1 hossza véges?** Nyilvánvaló, hogy pl. a lemezcsík esetén a homlokfal előtt lévő nagyobb nyomású és a hátfal mögötti kis nyomású tér között egy, a lemezcsík végeit **megkerülő kiegyenlítő áramlás jön létre**, amely kétféleképpen is csökkenti az ellenállás erőt:

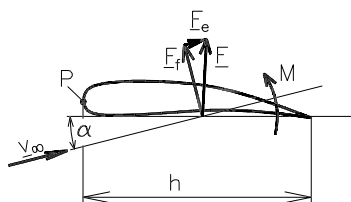
- csökkenti a lemezcsík végei közelében a homlokfalon lévő túlnyomást (ennek kisebb a jelentősége),
- a hátfal mögé áramló közeg kölcsönhatásba lép a periodikusan keletkező örvényekkel és jelentősen lecsökkenti azok intenzitását (ill. $1/d$ kisebb értékeinél teljesen meg is szünteti az intenzív periodikus örvényeket).

Mindezek hatására a hossz csökkenésével (az áramlás 2D jellegének csökkenésével) a c_e is csökken. Ha az $\frac{1}{d} - t \infty$ -ről 10-re, majd 1-re csökkentjük, a lemezcsík ellenállástényezője 2-ről 1.3, majd 1.1-re csökken. Körhenger esetén a megfelelő értékek $c_e = 1.2, 0.82$ és 0.63 .

14.3. Szárnyakra ható erő

Az eddigiek során ún. „**tompá testekről**” beszéltünk, amelyeket az különböztet meg az ún. „**áramvonalas testektől**”, hogy felületük nagy részére kiterjed a határréteg-leválás ill. a leválás következtében létrejövő leválási buborék. **(Leválási buboréknak a határréteg leválása következtében létrejövő és a leválás helye mögött elhelyezkedő áramlási térrészt nevezzük, amelyben jellegzetesen a zavartalan áramlással ellentétes visszaáramlás van, általában viszonylag kicsik a sebességek és nagy a turbulenciafok.)** Ugyanakkor, ha az áramvonalas testek körüli áramlásban van határréteg leválás, az csak a test felületének

korlátozott részén figyelhető meg és a test mögött kialakuló áramlási nyom is viszonylag kis keresztmetszetű. Tompa testek a házak, a tornyok, az autók, míg áramvonalas testek pl. a repülőgépek, és a hajók vízbe merülő részei.



14.5. ábra

Jellegzetes áramvonalas test a 14.5. ábrán látható szárny is, amelynek nagy jelentősége van a repülésben és az áramlástechnikai gépekben is. Az impulzustétel tárgyalásánál már levezettük a Kutta-Zsukovszkij tételt (ld. 8.3.fejezet, (8.24) összefüggés), amely szerint sűrűdásmentes közeg esetén a szárny egységnyi hosszúságú szakaszára ható erő az $|\underline{R}| = \rho v_\infty \Gamma \left[\frac{N}{m} \right]$ összefüggéssel számolható, ahol $v_\infty \left[\frac{m}{s} \right]$ a **szárnytól**

távoli zavartalan áramlási sebesség, $\Gamma \left[\frac{m^2}{s} \right]$ pedig a **szárny körüli cirkuláció**. A levezetésből az is adódott, hogy a szárnyra ható \underline{R} erő merőleges a \underline{v}_∞ sebesség vektorra. Valóságos (sűrűdásos) közegben a szárnyra ható erő két komponensre bontható: a **zavartalan (megfúvási) sebességre merőleges $F_e [N]$ felhajtóerőre** (ami megfelel a sűrűdásmentes esetre levezetett $\underline{R} \left[\frac{N}{m} \right]$ és az $l [m]$ szárny-hossz szorzatának) és a \underline{v}_∞ -**nel párhuzamos $F_f [N]$ ellenállás erőre**. A (14.1) összefüggéssel analóg módon bevezethető a szárnyra vonatkozó **felhajtóerő tényező és ellenállástényező**:

$$c_f = \frac{F_f}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 A} \quad (14.5)$$

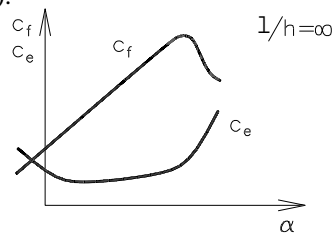
$$c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 A} \quad (14.6)$$

Amíg az eddig tárgyalt tompa testeknél az erőtényező kifejezésének nevezőjében lévő jellemző felület a test zavartalan áramlásra merőleges legnagyobb keresztmetszete volt, addig a szárnyaknál ez a jellemző felület az alapterület: a szárny $h [m]$ húrhosszának és a szárny $l [m]$ hosszának a szorzata: $A = h l$

Definiálható továbbá az áramlási erőknek a szárny egy adott (pl. a P-vel jelölt) pontjára vett nyomatéka: $M [Nm]$, valamint a c_M **nyomatéki tényező**. (P az ábrán az orrpont):

$$c_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 A h} \quad (14.7)$$

Adott geometriájú szárnyra ható áramlási eredetű erő és nyomaték vizsgálatánál a következő 6 tényező hatását kell vizsgálni az ellenállás erőre, a felhajtóerőre és a nyomatékra: v_∞ , ρ , μ , h , l , α , ahol α **állásszög a szárny húrja és a v_∞ zavartalan sebesség által bezárt szög** (ld. 14.5. ábra). 13.2. fejezetben tanult dimenzióanalízist alkalmazva 4 dimenziótlan csoport képezhető: c_f (vagy c_e vagy c_M), Re , l/h és α . Vizsgáljuk a 2D esetet, azaz legyen $l/h = \infty$. Mérjük meg különböző Reynolds számok mellett az F_f és F_e ill. c_f és c_e értékeit az α függvényében. A mérés eredményeit vigyük fel diagramban (ld. 14.6. ábra).



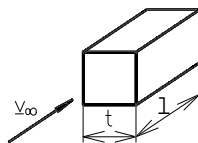
14.6. ábra

Az ábrából látható, hogy a felhajtóerőtényező közelítően lineárisan nő az állásszög függvényében, majd $c_f \cong 1.2 \sim 1.6$ maximális értéket elérve hirtelen csökken. Az ellenállástényező az állásszög növelésére kevésbé „érzékeny”: értéke széles állásszög határok között közel állandó, viszonylag kis érték ($c_e \cong 0.01 - 0.03$). Az ellenállástényező csak akkor nő meg rohamosan, amikor a c_f hirtelen lecsökken. A jelenség a már tanult határréteg leválással van összefüggésben. **A szárnyra azért hat felhajtóerő, mert a nyomás a felső részén kisebb, mint az alsón.** A határrétegen kívüli áramlásra alkalmazva a Bernoulli-egyenletet, az a következtetés adódik, hogy **az áramlási sebesség a szárny felett nagyobb, mint alatta.** (Ezzel magyarázható meg a szárnyra ható erő és a cirkuláció Kutta-Zsukovszkij tételben (8.23) bemutatott kapcsolata.)

Közvetlenül a szárny kilépőéle mögött a sebességnek alul és felül azonosnak kell lennie, hiszen a nyomás közvetlenül a kilépőél után adott érték, ami a Bernoulli-egyenlet értelmében adott sebességet határoz meg. Ebből következik, hogy a szárny feletti áramlásnak a szárny hátsó részén lassulnia kell. Annál nagyobb a lassulás, minél nagyobb a felső és alsó sebesség közötti különbség, azaz minél nagyobb a felhajtóerő. Az állásszög növelésével tehát elérünk egy olyan lassuláshoz ami a **határréteg leválásához**, leválási buborék keletkezéséhez vezet (ld. 14.6. ábra alsó része). Ennek következtében **lecsökken a felhajtóerő és megnő az ellenállás**. A méréseket nagyobb Re számnál elvégezve kissé nagyobb felhajtóerő maximumra és valamivel kisebb ellenállástényezőre számíthatunk.

A szárnyak jellemző adata a **siklószám**, amely a felhajtóerőtényező és az ellenállástényező hányadosa: $\frac{c_f}{c_e}$. (Egy vitorlázó repülőgép siklószáma megadja, hogy hány métert tesz meg a gép vízszintesen siklásban, miközben 1 métert süllyed.) A siklószám általában 10 és 50 közé esik. A szárnyakat ez a tulajdonságuk teszi igen értékesé: adott ellenállás erő „árán” annak sokszorosát kitevő felhajtóerő keletkezik rajtuk.

14.4. Hasábra ható áramlási erő



14.7. ábra

Tekintsük a 14.7. ábrát, ahol egy $t[m]$ élhosszúságú négyzet alapú, $l[m]$ hosszúságú hasáb látható, amelyet hossz tengelyével párhuzamos áramlásba helyezünk. **A hasábra ható ellenállás-erő a homlokfalon és a hátfalon keletkező nyomásmegoszlásból és az oldalfalakon keletkező csúsztatófeszültségből tevődik össze:**

$$c_e = \bar{c}_{pf} - \bar{c}_{pb} + 4 \frac{l}{t} \bar{c}'_f. \quad (14.8)$$

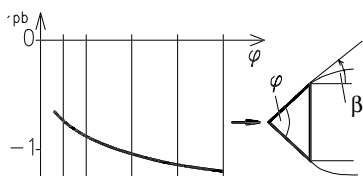
Az összefüggés jobb oldalán szereplő első két tag hasonló megfontolások alapján adódott, mint a (14.4) összefüggés, az utolsó tag pedig az oldalfalakon keletkező csúsztatófeszültségekből származó tengely irányú erőt fejezi ki (ld. (11.2) összefüggés). A hasáb körül térbeli, 3D áramlás alakul ki, amelynek egyik jellemzője a homlokfal éles kerületén (a belépőélen) keletkező határréteg leválása és az ennek következtében a belépőél mögötti oldalfalszakasz mellett kialakuló leválási buborék.

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan függ a hasáb ellenállástényezője az l hosszúságtól! A mérések szerint $l/t = 0$ (négyzet alakú síklap) és $l/t = 5$ esetén a c_e értéke rendre 1.1 és 0.8. Látjuk, hogy a hasáb hosszának növekedése esetén a c_e jelentősen csökken, pedig a (14.8) összefüggés szerint növekvő hossz esetén az oldalfali csúsztatófeszültségből származó erő egyre nagyobb. Ugyanakkor belátható, hogy a hasáb hosszának növelése nem befolyásolhatja lényegesen a \bar{c}_{pf} átlagos homlokfali túlnyomás értéket. A c_e csökkenését tehát a hátfali nyomás növekedése okozhatja.

A hasáb hátfala leválási buborékban van, amelynek két tulajdonságát emeljük ki:

- a leválási buborékban a sebességek viszonylag kicsinyek, a v_∞ 20%-át általában nem haladják meg, ezért **a nyomás a leválási buborékban nem változik jelentősen;**

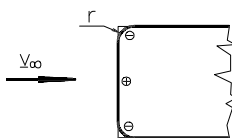
- a leválási buborékban lévő közel állandó nyomást a határréteg-leválás helyén lévő nyomás határozza meg. Jól használható tapasztalat: minél nagyobb a \underline{v}_∞ és a leválás helye közelében lévő, határrétegen kívüli áramlási sebesség-vektor között bezárt szög, ($\beta = \varphi/2$ ld. 14.8. ábra) annál kisebb a nyomás a leválási buborékban, tehát annál nagyobb az ellenállástényező.



14.8. ábra

Ezekkel az ismeretekkel megmagyarázható a c_e csökkenése. Ha a hasáb rövid, akkor hátfala abban a leválási buborékban van, ami a belépőélek mögött keletkezik. Miután itt a leválás helyéhez közeli, határrétegen kívüli sebesség jó közelítéssel 90° -os szöget zár be a \underline{v}_∞ -nel, a leválási buborékban viszonylag nagy depresszió van. Emiatt a (14.8) kifejezésben lévő \bar{c}_{pb} viszonylag nagy negatív érték, a c_e pedig nagy. Ha a hasáb hosszát elegendően megnöveljük, a belépőélnél keletkező leválási buborék az oldalfalon befejeződik (**a levált határréteg visszafekszik**), és a hátfalat körülvevő ún. kilépőélen keletkezik a hátfal mögötti leválási buborékot létrehozó határréteg-leválás. Itt azonban a határrétegen kívüli sebesség és a \underline{v}_∞ között bezárt szög az előzőnél jóval kisebb, $\beta \approx 0^\circ$, tehát a nyomás nagyobb, mint az előző esetben. Tovább növelhető a hátfali nyomás (azaz csökkenthető c_e) a β szög további csökkentésével, azaz a hasáb hátsó részének „összehúzásával”.

A hasábra ható ellenállás erő jelentős részét teszi ki a homlokfalon keletkező túlnyomásból származó erő. A nyomás a Bernoulli egyenlet értelmében az áramlási sebesség növelésével csökkenthető. Ez a **homlokfalat körülvevő élek** 14.9. ábrán látható **lekerekítésével** érhető el. A homlokfal középső részén keletkező, túlnyomásból származó ellenállás erőt teljes egészében is képes ellensúlyozni a homlokfal kerületén, a lekerekítés helyén keletkező depresszió. (Az áramlás hidrogénbuborékokkal történő láthatóvá tételével kapott áramképen az oldalfal mellett keletkező leválási buborék mutatja, hogy ebben az esetben a homlokfalra ható erő nem zérus.)



14.9. ábra

Az előzőekben tárgyalt $l/t = 5$ hosszúságú hasáb ellenállástényezőjét kb. negyedére, $c_e = 0.2$ értékre lehet csökkenteni a homlokfal belépőéleinek megfelelő mértékű lekerekítésével.

Ha megvizsgáljuk a fali csúsztatófeszültség részarányát a testekre ható erőkben megállapíthatjuk, hogy **áramvonalas testek** (pl. a szárnyak) **esetén a viszonylag kis csúsztatófeszültség** (ld. 11.2. ábra) **az áramlási eredetű erőnek (szárny esetén pl. az ellenálláserőnek) jelentős részét tehetik ki. Ugyanakkor tompa testeknél a nyomásmegoszlásból származó erők dominálnak.** A csúsztatófeszültség szerepe abban van, amint azt a 11.3. fejezetben láttuk, hogy határréteg leválást előidézve alapvetően megváltoztathatja a test körüláramlásának jellemzőit és ezen keresztül a nyomásmegoszlást.

14.5. Porszemcse süllyedési sebessége

A levegőbe vagy vízbe kerülő kis méretű szilárd szemcsék ill. a levegőben lebegő cseppek mozgásának ismerete igen fontos a mérésük, leválasztásuk szempontjából. Itt a szokásos, $d_p = 0.01-50\mu\text{m}$ átmérőjű szemcsék nyugvó közegben való süllyedésének sebességét határozzuk meg. A szemcsék a nyugvó levegőben vagy vízben a rájuk ható súlyerő hatására w_s sebességgel süllyednek. A szemcse körül kialakuló áramkép akkor stacionárius, ha azt a szemcséhez rögzített koordináta-rendszerből vizsgáljuk. A szemcse kis mérete és a w_s kis értéke miatt a gömbnek tekintett szemcse körüli relatív áramlásra felírt Reynolds-szám: $Re_p = w_s d_p / \nu$ általában igen kicsiny ($Re < 1$), tehát **az áramlásban a sűrűdőerők hatása az elsődleges.** Ilyen Reynolds-számoknál a gömbre ható ellenállás erőt jól közelíti a **Stokes-formula:**

$$F_e = 3\pi\mu d_p w, \quad (14.9)$$

ahol $w[\text{m/s}]$ az közeg zavartalan relatív sebessége a porszemcséhez képest. A (14.9) összefüggést Stokes a linearizált Navier-Stokes-egyenlet megoldásával kapta meg. Kis Reynolds-számok esetén a (9.17) egyenlet bal oldalán lévő, a tehetetlenségi erőket kifejező, nem lineáris tagok elhanyagolhatók (az egyenlet linearizálható), és adott peremfeltételek mellett az egyenlet megoldható. Az így meghatározott áramképből a felületi nyomás- és csúsztatófeszültség megoszlás kiszámítható. Ezek integrálásával adódott a gömbre ható áramlási ellenállás erő fenti kifejezése. Ha a (14.9) kifejezést behelyettesítjük a (14.1) összefüggésbe, a c_e ellenállástényezőre a

$$c_e = \frac{24}{Re_p} \quad (14.10)$$

összefüggés adódik. (Ez a kifejezés hasonló a henger ellenállástényező kifejezéséhez kis Reynolds-számok esetén. Megjegyezzük, hogy a gömbre vonatkozó $c_e - Re$ görbe, a hengerre vonatkozó 14.2. ábrán látható görbéhez jellegetre igen hasonló.)

Írjuk fel a ρ_f sűrűségű közegben süllyedő ρ_p sűrűségű porszemcsére ható erők egyensúlyát:

$$\frac{d_p^3 \pi}{6} g (\rho_p - \rho_f) = 3\pi \mu d_p w_s,$$

amiből a **süllyedési sebesség:**

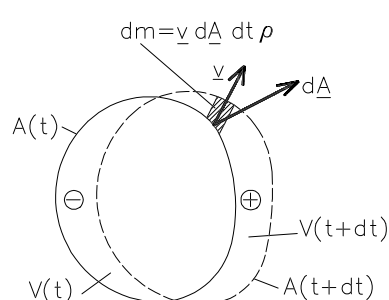
$$w_s = \frac{d_p^2 (\rho_p - \rho_f) g}{18\mu}. \quad (14.11)$$

Ha a közeg levegő, akkor ρ_f elhanyagolható ρ_p mellett. Pl. Egy $d_p = 5\mu\text{m}$ átmérőjű cement szemcse süllyedési sebessége levegőben 2 mm/s, a Re_p értéke pedig $7 \cdot 10^{-4}$.

15. Összenyomható közegek áramlása, gázdinamika

Ebben a fejezetben olyan áramlásokkal foglalkozunk, amelyeknél az **áramló közeg sűrűsége jelentősen változik**. Az 1.fejezetben leírtak értelmében a **gázok** sűrűsége képes a nyomásváltozás hatására nagy mértékben változni. Ezért nevezzük az áramlástan összenyomható közegek áramlásával foglalkozó részét gázdinamikának.

15.1. Az energiaegyenlet



15.1. ábra

A 15.1. ábrán az áramló gáz egy gondolatban elhatárolt, V térfogatú, elúszó része látható. A gázz résznek

- **belső energiája,**
- **mozgási energiája és**
- **helyzeti energiája van.**

A vizsgált gázz rész energiáját

- a **felületi erők munkája**, ezen belül
 - a **nyomásból** és
 - az **alakváltozás miatt a súrlódásból származó erők munkája,**
- a **tömegre ható térerők munkája és**
- a **hőáramlás** változtathatja meg.

A továbbiakban a helyzeti energia változással és a térerők munkájával nem foglalkozunk.

Hőszigetelt és súrlódásmentes közeg áramlását feltételezve és elhanyagolva a térerősség munkáját, csak a nyomásból származó erők munkáját kell figyelembe venni.

Szorítkozzunk **stacionárius** áramlásra.

Írjuk fel a kapcsolatot a 15.1. ábrán látható V térfogatú **gáz energiájának időegységre eső változása és a gázon végzett munka között:**

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV = - \int_A \underline{v} p d\mathbf{A} , \quad (15.1)$$

ahol $c_v \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$ **állandó térfogaton vett fajhő.**

A (15.1) kifejezés bal oldalán a gondolatban elhatárolt, V térfogatú gázrész mozgási és belső energiájának idő szerinti differenciálhányadosa (azaz egy másodpercre jutó megváltozása) van, amely egyenlő a nyomás által az A felületen másodpercenként végzett munkával. ($-p d\mathbf{A}$ az elemi felületre ható erő, ennek \mathbf{v} sebességgel való szorzata a teljesítményt adja.) A (15.1) összefüggés bal oldalára vonatkozóan írható:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} \left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV - \int_{V(t)} \left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV \right] \quad (15.2)$$

A (15.2) jobb oldalán lévő szögletes zárójelben a 15.1. ábrán + és – jellel jelölt térfogatokban lévő gáztömeg energiájának különbsége van, (hiszen – miután stacionárius áramlást tételezünk fel – a közös rész energiája kiesik), amit az impulzustétel levezetésénél (ld. 8.1.fejezet) alkalmazott módszer felhasználásával az alábbi módon írhatunk fel:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV = \int_A \left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}.$$

A (15.1) összefüggés jobb oldalán p -val szorozva és osztva:

$$\int_A \left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = - \int_A \frac{p}{\rho} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}.$$

Bal oldalra rendezve az integrálokat és kihasználva, hogy az integrálási tartomány megegyezik:

$$\int_A \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_A \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = 0. \quad (15.3)$$

A (15.3) kifejezés felírásakor figyelembe vettük, hogy

$$c_v T + \frac{p}{\rho} = h = c_p T, \quad (15.4)$$

ahol h [J/kg] az **entalpia** és c_p [J/kg/K] az **állandó nyomáson vett fajhő**.

Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradskij-tételt a (15.3) kifejezés felületi integráljára:

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \underline{v} dA &= \int_V \operatorname{div} \left[\left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \underline{v} \right] dV = \\ &= \int_V \left[\operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \underline{v} + \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) \operatorname{div}(\rho \underline{v}) \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (15.5)$$

A folytonosság (3.6) összefüggése értelmében $\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ és miután az áramlás stacionárius $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Ennek figyelembe vételével a (15.5) összefüggés:

$$\int_V \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \underline{v} dV = 0 \quad (15.6)$$

alakra hozható.

Az integrál tetszőleges V térfogat esetén akkor zérus, ha az integrandusz zérus. Az integrandusz akkor zérus, ha $\left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right)$ az egész térben állandó, vagy ha változik, a $\operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right)$ merőleges a \underline{v} sebességvektorra, azaz a $\left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right)$ egy áramvonal mentén állandó.

Az energiaegyenlet súrlódásmentes, hőszigetelt közeg stacionárius áramlása esetén azt fejezi ki, hogy a gáz kinetikai energiájának és az entalpiájának összege az áramvonal mentén állandó:

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{áll.}} \quad (15.7)$$

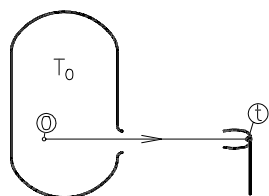
Osszuk végig a (15.7) egyenletet c_p -vel:

$$\boxed{T + \frac{v^2}{2c_p} = T_0 = \text{áll.}} \quad (15.8)$$

ahol T (vagy T_{st}) [K] a **statikus hőmérséklet**, $T_d = \frac{v^2}{2c_p}$ [K] a **dinamikus hőmérséklet**, a **kettő összege pedig a T_0 [K] összhőmérséklet**.

Az energiaegyenlet (15.8) alakja tehát úgy is megfogalmazható, hogy **súrlódásmentes, hőszigetelt közeg stacionárius áramlása esetén áramvonalon az összhőmérséklet állandó**.

Alkalmazzuk az energiaegyenletet egy **tartályból** kiáramló levegősugárba (ld. 15.2. ábra). A tartályban a hőmérséklet T_0 , a levegő sebessége zérus.



15.2. ábra

Helyezzünk el a levegősugárban egy ún. **torlóponthőmérőt**, amellyel a megállított levegő hőmérséklete, a T_t [K] **torlópont-hőmérséklet** mérhető. Írjuk fel az energiaegyenlet (15.8) alakját a tartályban lévő 0 és a torlóponthőmérőben lévő t pont között (a 0 és a t pont egy áramvonalon van):

$$T_0 + \frac{v_0^2}{2c_p} = T_t + \frac{v_t^2}{2c_p} . \quad (15.9)$$

Miután $v_0 = v_t = 0$, adódik, hogy $T_t = T_0$, azaz **a torlóponthőmérő a tartályhőmérsékletet méri**. Ha pl. a torlóponthőmérőt levegő 100 m/s sebességű áramlásába helyezzük, az az áramló levegő (statikus) hőmérsékleténél 5 K-nel nagyobb hőmérsékletet mér, hiszen a levegő $c_p = 10^3 \text{ J/kg/K}$ állandó nyomáson vett fajhőjével számolva $T_d = 100^2 / 2 / 10^3$. (Levegő esetén a dinamikus hőmérséklet $T_d = (v/45)^2$ kifejezéssel számítható.)

15.2. A Bernoulli-egyenlet összenyomható gázokra

Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet (4.29) alakját **áramvonal mentén, súrlódásmentes és hőszigetelt közeg stacionárius áramlására a térerősség hatásának elhanyagolásával**. Miután **súrlódásmentes és hőszigetelt a közeg, a benne lejátszódó folyamatok izentropikusak**. Izentropikus állapotváltozás esetén a sűrűség és nyomás kapcsolatára fennáll:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} \quad (15.10)$$

ahol $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ azaz a sűrűség csak a nyomás függvényeként is kifejezhető. Ezt is figyelembe véve (ld. 4.4.fejezet) a Bernoulli-egyenlet:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)} \quad (15.11)$$

alakban írható fel.

Kifejezve $p-t$ a (15.10) összefüggésből és behelyettesítve a (15.11) összefüggés jobb oldalába

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} &= - \int_{p_1}^{p_2} \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1} \frac{dp}{p^{1/\kappa}} = - \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1} \left[p^{1-1/\kappa} \right]_{p_1}^{p_2} = \\ &= \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}} p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]. \end{aligned} \quad (15.12)$$

A (15.12) összefüggés rendezése után eljutottunk a végeredményhez:

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]. \quad (15.13)$$

Legyen adva **egy áramvonalon az 1 és a 2 pont**. Tételezzük fel, hogy az áramlás stacionárius, sűrűlódásmentes és nincs hővezetés. Legyen ismert az 1 pontban a sebesség, a p_1 nyomás és a T_1 hőmérséklet. Hogyan határozzuk meg az áramló közeg jellemzőit a 2 pontban, ahol ismerjük a p_2 nyomást? A sűrűlódásmentesség és a hőszigeteltség feltételéből adódik, hogy az áramló gázban az 1 és 2 pont között lejátszódó állapotváltozás izentrop, azaz a nyomás és a sűrűség kapcsolatára a (15.10) összefüggés, a sebességekre a Bernoulli-egyenlet alapján kapott (15.13) összefüggés érvényes. Ezért ez utóbbi kifejezésben $\frac{p_1}{\rho_1}$ helyett a gáztörvény alapján RT_1 -et írva a 2 pontban lévő sebességre írható:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} RT_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (15.14)$$

Az 1 pontban érvényes sűrűséget a gáztörvényből számíthatjuk:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1}.$$

A gáztörvény és az izentropikus állapotváltozást leíró (15.10) kifejezés felhasználásával meghatározható a **hőmérsékletviszony**:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2^\kappa}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2^\kappa T_1^\kappa R^\kappa}{R^\kappa T_2^\kappa p_1^\kappa} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (15.15)$$

A nyomásviszonyból a **sűrűségviszony** a (15.10) kifejezés alapján kifejezhető:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (15.16)$$

A (15.15) és (15.16) kifejezésekből a **sűrűségviszony és a hőmérsékletviszony kapcsolata** határozható meg:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (15.17)$$

Helyettesítsük be a (15.13) összefüggésbe ismét az $R T_1$ kifejezést és a (15.15) összefüggést! Eredményül kapjuk:

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_1 \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right].$$

Miután $\frac{2\kappa R}{\kappa-1} = 2c_p$ a $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ felhasználásával, T_1 -gyel való beszorzás után a

$$v_2^2 = v_1^2 + 2c_p (T_1 - T_2) \quad (15.18)$$

kifejezés adódik, amiből átalakítás után az energiaegyenlet levezetésénél kapott (15.7) összefüggéssel megegyező kifejezés nyerhető:

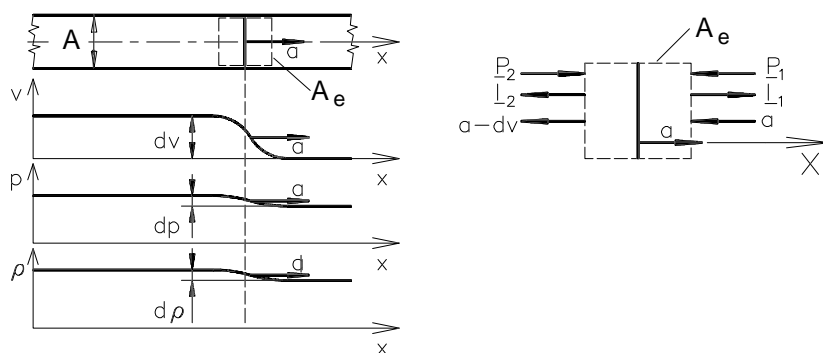
$$\boxed{c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2}} \quad (15.19)$$

Ha a **gáz tartályból áramlik ki izentrópusan**, akkor a (15.14) összefüggésből $v_1=0$ figyelembe vételével a **kiáramlási sebességre** a

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_t \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}} \quad (15.20)$$

ún. **izentrópus kiömlési képletet** kapjuk, ahol a 't' index a **tartályra** utal, az p_e pedig az u.n. **ellennyomás, a tartályból kiáramló gáz sugarban lévő nyomás**.

15.3. A hang terjedési sebessége



15.3. ábra

A 15.3. ábrán egy csövet látunk, amelynek a bal oldali végére egy gumihártyát (membránt) erősítünk. A csőben valóságos (összenyomható) gáz, pl. levegő van. Ha e hártyára ráütünk, akkor a hártya elmozdulásának első dt időtartama alatt az ahhoz legközelebb lévő levegőrészek dv sebességű mozgásba jönnek, a levegő nyomása, sűrűsége elemi mértékben megnő. Belátható, hogy a gázállapot és -sebesség nem egyszerre változik meg az egész csőben, hanem egy adott x koordinátánál lévő keresztmetszetben akkor változnak meg e jellemzők, ha a jobbra a [m/s] **terjedési sebességgel mozgó hullám** az adott keresztmetszetet eléri (ld. 15.3. ábra). A **hang eleminek tekinthető nyomáshullámok sorozata**, ezért a tárgyalt hullám terjedési sebessége a **hang terjedési sebességével** egyezik meg, amit a -val ($[a] = \text{m/s}$) jelölünk.

Határozzuk meg az impulzustétel segítségével, hogy milyen sebességgel halad a nyomáshullám. Vegyük fel az A_e ellenőrzőfelületet az ábrán látható módon. Akkor tekinthető az áramlás stacionáriusnak, ha az ellenőrzőfelület jobbra mozog a hullám a [m/s] sebességével megegyező sebességgel. Ez esetben az ellenőrző felületbe jobb oldalon a [m/s] sebességgel lép be a ρ sűrűségű közeg és bal oldalon a $\rho + d\rho$ sűrűségű gáz $a - dv$ sebességgel lép ki, hiszen a hullám dv sebességű áramlást hoz létre. A 15.3. ábrán felvitt \underline{I} és \underline{P} vektorok egyensúlyát felírva adódik: $I_1 - I_2 = P_2 - P_1$, azaz

$$\rho a^2 A - (\rho + d\rho)(a - dv)^2 A = (\rho + d\rho)A - \rho A,$$

amiből a kijelölt műveletek elvégzése és egyszerűsítések valamint a másod- és harmadrendűen kicsiny tagok elhagyása után a

$$2\rho a dv - a^2 d\rho = d\rho \quad (15.21)$$

összefüggést kapjuk. Írjuk fel a folytonosság tételét: $(a - dv)(\rho + d\rho) = a\rho$, amiből $\rho dv = a d\rho$. Ezt behelyettesítve a (15.21) kifejezés bal oldali első tagjába, az $a^2 d\rho = d\rho$ összefüggésre jutunk, amiből **a hullám terjedési sebessége, a hangsebesség:**

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (15.22)$$

A (15.22) összefüggés teljesen általánosan írja le az elemi hullám terjedési sebességét egy álló, összenyomható közegben, amire vonatkozóan eddig semmilyen kikötést nem tettünk.

Gázban az elemi hullámok terjedésekor bekövetkező állapotváltozás jó közelítéssel izentropikus. Miután ez esetben a (15.10) alapján

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rho^\kappa, \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \kappa \rho^{\kappa-1},$$

amibe behelyettesítve a (15.10) összefüggést

és a gáztörvényt,

$$\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a = \sqrt{\kappa R T} \quad (15.23)$$

kifejezés adódik **a hang terjedési sebességére.**

Figyelemre méltó, hogy a hullám terjedési sebessége egy adott gázban csak a hőmérséklettől függ. Tekintettel arra, hogy valóságos gázok rendezetlen (hő)mozgást végző molekulái „továbbítják a jelet” (ilyen jel lehet az, hogy a cső végén lévő hártya mozgása eredményeként a gázmolekulákon végzett munka révén meg kell nőnie azok „rendezett” (v) és rendezetlen sebességének (azaz hőmérsékletének és nyomásának). E megfontolás érthetővé teszi, hogy miért a csak a gáz hőmérsékletétől, azaz a gázmolekulák rendezetlen mozgásának sebességétől függ a hang terjedési sebessége.

15.4. Áramlások hasonlósága összenyomható közegek esetén

A 12. fejezetben foglalkoztunk az áramlások hasonlóságával és megállapítottuk, hogy **két áramlás hasonló, ha az azokat leíró dimenziótlan differenciálegyenletek azonosak, és a peremfeltételek is megegyeznek (a dimenziótlan hely és idő koordinátákban).** A 12. fejezetben az összenyomhatatlan közegek áramlására határoztuk meg a hasonlóság feltételeit, hiszen a Navier-Stokes-egyenlet $\rho = \text{áll.}$ esetén érvényes. Ebben a fejezetben összenyomható gázok áramlására vonatkozóan határozzuk meg a hasonlóság további feltételeit.

A (12.2) összefüggés jobb oldalának második tagját a differenciálegyenletet a 12. fejezetben leírtaktól eltérően dimenziótlanítjuk – figyelembe véve, hogy a sűrűség is változik:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{l_0}{v_0^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \left(\frac{p}{p_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{l_0} \right)} \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}. \quad (15.24)$$

A differenciálegyenlet azonosságának feltétele tehát az

$$Eu = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \quad (15.25)$$

Euler-szám azonossága a kismintánál és a nagy kivitelnél.

A (15.6) összefüggés alapján a

$$\underline{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) = 0 \quad (15.26)$$

alakban is felírható az energiaegyenlet. Ha kifejtjük a (15.26) összefüggést, a

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) = 0 \quad (15.27)$$

adódik az energiaegyenletre. Dimenziótlanjuk a (15.27) összefüggést $\frac{l_0}{v_0^3}$ -nel végigszorozva az egyenletet:

$$\frac{v_x}{v_0} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{x}{l_0} \right)} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_x}{v_0} \right)^2 + \left(\frac{v_y}{v_0} \right)^2 + \left(\frac{v_z}{v_0} \right)^2 \right] + \frac{c_p T_0}{v_0^2} \frac{T}{T_0} \right\} + \dots = 0 \quad (15.28)$$

A dimenziótlanjuk az energiaegyenlet akkor azonos a kismintánál és a nagy kivitelnél, ha a

$$\frac{c_p T_0}{v_0^2} = \text{azonos}. \quad (15.29)$$

A (15.25) kifejezés átalakítható:

$$\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} = \frac{R T_0}{v_0^2} = \frac{\kappa R T_0}{\kappa v_0^2} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{a_0}{v_0} \right)^2 = \text{azonos}. \quad (15.30)$$

Ha a (15.25) és (15.29) kifejezések értékei azonosak a nagy kivetelnél és a kismintánál, akkor hányadosuk értéke is:

$$\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \frac{v_0^2}{c_p T_0} = \frac{R T_0}{c_p T_0} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = 1 - \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \text{azonos}. \quad (15.31)$$

A (15.30) és (15.31) feltétel akkor teljesül, ha

$$\kappa = \text{azonos és a Mach szám } Ma = \frac{v_0}{a_0} = \text{azonos}. \quad (15.32)$$

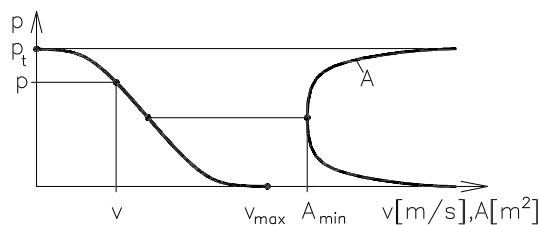
Az áramlások hasonlóságának feltételeként a 12. fejezetben felsoroltak mellett a κ és a Mach-szám azonosságát is biztosítani kell.

15.5. Gázok kiömlése tartályból, a Laval-cső

A (15.20) kifejezés stacionárius, izentrópikus áramlás esetén kapcsolatot teremt a tartályból történő kiáramlás v sebessége, a tartályban lévő gáz T_t hőmérséklete és p_t nyomása, valamint a kiáramlás helyén a gáz sugárban lévő p nyomás között:

$$v = \sqrt{\frac{2 \kappa}{\kappa - 1} R T_t \left[1 - \left(\frac{p}{p_t} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}.$$

Ábrázoljuk adott p_t tartálynyomás esetén a v kiáramlási sebesség függvényében a p ellennyomást!



15.4. ábra

A p-v görbe a 15.4. ábrán látható. A **maximális kiáramlási sebesség** (v_{\max}) $p = 0$ -hoz **tartozik**:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_t} \quad (15.33)$$

Vizsgáljuk meg a p-v görbe **érintőit**! A természetes koordináta-rendszerben az áramvonal érintője irányában felírt Euler-egyenletből (4.25) kifejezhető:

$$\frac{dp}{dv} = -\rho v. \quad (15.34)$$

A 15.4. ábrán látható görbének $v = 0$ -nál és $v = v_{\max}$ -nál van **vízszintes érintője** (utóbbi helyen $p = 0$, ezért $\rho = 0$). Közben a $\frac{dp}{dv}$ -nek minimumának kell lennie. Keressük a $-\frac{dp}{dv}$ maximumát a v függvényében! Differenciáljuk a (15.34) kifejezés jobb oldalát v szerint, és tegyük egyenlővé zérussal: $\frac{d(\rho v)}{dv} = v \frac{dp}{dv} + \rho = 0$. A láncszabály alkalmazásával:

$v \frac{dp}{dv} \frac{dv}{dp} + \rho = 0$, amiből a (15.34) behelyettesítésével és ρ kiemelése után a

$$\rho \left[1 - \frac{v^2}{dp/d\rho} \right] = \rho \left[1 - \frac{v^2}{a^2} \right] = 0$$

kifejezés adódik, miután a (15.22) kifejezés alapján felismertük, hogy a zárójel második tagjának nevezőjében az a hangsebesség négyzete szerepel. A $\frac{dp}{dv}$ -nek tehát **$v = a$, azaz $Ma = 1$ esetén van szélső értéke, azaz ahol az áramlási sebesség egyenlő az adott helyen lévő gázhőmérsékletéhez tartozó, helyi hangsebességgel.**

Vizsgáljuk meg, hogy milyen A **csatornakeresztmetszet** felel meg az adott áramlási viszonyoknak? Az áramlás stacionárius, ezért a kontinuitás összefüggése a (15.34) figyelembevételével az alábbi módon írható fel:

$$q_m = \rho v A = -\frac{dp}{dv} A = \text{áll.} \quad (15.35)$$

Ahol tehát vízszintes az érintő (a görbe $v = 0$ és $p = 0$ értékekhez tartozó helyein), a keresztmetszet $A \rightarrow \infty$. **Az A keresztmetszetnek ott van minimuma, ahol a $-\frac{dp}{dv}$ -nek maximuma van, azaz a p-v görbe inflexiós pontjánál, ahol a v sebesség a helyi hangsebességgel egyenlő.** Egy adott $q_m [\text{kg/s}]$ tömegáramhoz felrajzolható az A csatornakeresztmetszet változása a p függvényében (ld. 15.4. ábra). Az adott áramlási sebesség, nyo-

más és sűrűség változásból egy, **a csökkenő nyomások irányában először szűkülő, majd bővülő keresztmetszetű csőtelőfordulat adódik.**

Vizsgáljuk meg az áramlás jellemzőit a szűkülő-bővülő csőszakasz mentén. Ismét a természetes koordináta-rendszerben az áramvonal érintője irányában felírt Euler-egyenletből (4.25) indulunk ki:

$$v \frac{\partial v}{\partial e} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial e} = -\frac{1}{\rho} a^2 \frac{\partial \rho}{\partial e}. \quad (15.36)$$

Miután a kontinuitásból $\rho v A = \text{áll.}$, $d(\rho v A) = 0$, azaz $d\rho v A + \rho dv A + \rho v dA = 0$, amiből

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (15.37)$$

adódik.

A (15.36) összefüggésből $v dv = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}$. A $\frac{d\rho}{\rho}$ -t kifejezve (15.37) kifejezésből és behelyettesítve kapjuk

$$v dv = -a^2 \frac{d\rho}{\rho} = a^2 \left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} \right). \quad (15.38)$$

Átalakítás után a (15.38) összefüggésből kapjuk:

$$\frac{v^2}{a^2} \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A},$$

amiből

$$\left(\text{Ma}^2 - 1 \right) \frac{dv}{v} = \frac{dA}{A}. \quad (15.39)$$

A (15.39) összefüggésből az alábbi következtetések vonhatók le:

α/ Ha $\text{Ma} < 1$, akkor $dv/v > 0$ -hoz azaz gyorsuló áramláshoz $dA/A < 0$, azaz áramlás irányában csökkenő keresztmetszet (konfúzor), lassuló áramláshoz ($dv/v < 0$) pedig növekvő keresztmetszet (diffúzor, $dA/A > 0$) tartozik. Ebben az esetben a nyomás és a sebesség kapcsolatát a 15.4. ábrán látható p-v görbe inflexiós ponttól balra eső része írja le.

β/ Ha $\text{Ma} > 1$ akkor növekvő sebességhez növekvő keresztmetszet (diffúzor) tartozik. Ez az állapot jellemzi a görbe inflexiós ponttól jobbra eső szakaszát.

$\gamma/$ da/A akkor zérus, azaz a keresztmetszetnek ott van szélső értéke (minimuma), ahol $dv/v = 0$ vagy $Ma = 1$. Ha a keresztmetszet szélső értékénél az áramlási sebesség növekszik (ld. 15.4. ábra), a **hangsebességnél kisebb sebességű, gyorsuló áramlás a keresztmetszet minimumánál éri el a hangsebességet.**

$\delta/$ Ha $Ma \neq 1$, és $da/A = 0$, a sebességnek szélső értéke van.

Mielőtt megvizsgálánk az áramlás jellegzetességeit a kiömlésnél, határozzuk meg a közeg jellemzőit a legszűkebb keresztmetszetben abban az esetben, amikor a $Ma = 1$, azaz $v^* = a^*$. (A^* jel a következőkben a legszűkebb keresztmetszetre utal.) Írjuk fel az **energia-egyenletet** a tartály belsejének egy pontja (t) és a legszűkebb keresztmetszet (*) között figyelembe véve, hogy $v^* = a^*$ és felhasználva a hangsebesség (15.24) kifejezését:

$$T_t = T^* + \frac{a^{*2}}{2c_p} = T^* + \frac{\kappa R T^*}{2c_p} = T^* \left[1 + \frac{c_p/c_v (c_p - c_v)}{2c_p} \right] = \frac{\kappa + 1}{2} T^* \quad (15.40)$$

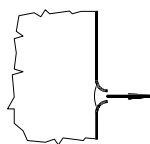
(15.40)-ből – figyelembe véve a (15.15) és (15.17) kifejezéseket – meghatározhatók a legszűkebb keresztmetszetben és a tartályban érvényes gáz állapotjelzők hányadosai:

$$\frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\kappa + 1} \quad (= 0.833) \quad (15.41)$$

$$\frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{T^*}{T_t} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (= 0.53) \quad (15.42)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{T^*}{T_t} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (= 0.63). \quad (15.43)$$

A (15.41) – (15.43) összefüggésekben zárójelben szereplő számok $\kappa = 1.4$ (azaz kétatomos gázok) esetén érvényesek.



15.5. ábra

Foglaljuk most össze, hogy milyen gyakorlati következményei vannak az eddigi megállapításainknak. Legyen adva van egy tartály, amelyben adott a gáz állapota: T_t , p_t , ρ_t . (Ez utóbbit a gáztörvénnyel számolhatjuk ki az előző kettő ismeretében.) Legyen a tartály falán egy, a 15.5. ábrán látható „egyszerű” kiömlőnyílás, amelynek legszűkebb keresztmetszete a kiömlés helyén van. Legyen a külső (ellen)nyomás $p_e < p_t$, amit változtatni tudunk.

Ha p_e/p_t közel van az 1 értékhez, pl. > 0.95 , akkor jó közelítéssel használhatjuk a Bernoulli-egyenletből levezetett, állandó sűrűségű közeg áramlására vonatkozó összefüggést a v kiömlési sebesség számítására:

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_t - p_e)} \quad (15.44)$$

Tovább csökkentve a p_e ellennyomást a gáz sűrűsége olyan mértékben változik a kiömlés során, hogy a $\rho = \text{áll.}$ feltevés már nagy hibát okoz. Ekkor a **(15.20) összefüggéssel számolható a kiömlési sebesség.** Az összefüggésből látható, hogy a p_e ellennyomás csökkentésével növelhetjük a kiáramlási sebességet. Amikor a p_e / p_t csökkenve eléri a 0.53 értéket ($\kappa = 1.4$ esetén), az előző megfontolásaink értelmében a **kiáramlási sebesség eléri a helyi hangsebességet:**

$$v^* = a^* = \sqrt{\kappa R T^*}, \quad (15.45)$$

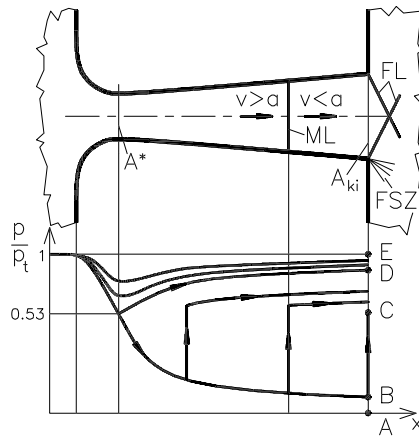
ahol a legszűkebb keresztmetszetben lévő hőmérséklet a (15.41) összefüggés értelmében $T^* = 0.833 T_t$. **Tovább csökkentve a p_e ellennyomást azt tapasztaljuk, hogy a kiömlési sebesség nem növekszik tovább, a kilépési keresztmetszetben a gázsebesség és a gáz állapotjellemzői változatlanok. A legmeglepőbb jelenség az, hogy a p^* , a legszűkebb (kilépő) keresztmetszetben lévő nyomás nem egyezik meg a p_e ellennyomással, nagyobb annál, a (15.42) összefüggés értelmében $p^* = 0.53 p_t$.** Mi lehet ennek a jelenségnek az oka? A tartályból kiáramló közeg a p_t és a p_e nyomások különbsége hatására gyorsul. Ha csökkentjük az ellennyomást, a tartályon kívülről egy hullám indul a kiömlőnyíláson keresztül a tartályba, megváltoztatva a nyomásmegoszlást a kiömlés környezetében. A megváltozott nyomásmegoszlás hatására a közeg nagyobb mértékben gyorsul, azaz a kilépő sebesség nő. Ha elérjük a helyi hangsebességgel megegyező sebességet a legszűkebb keresztmetszetben, az **ellennyomás további csökkenésével kapcsolatos „információ”, amely egy nyomáshullám alakjában éppen hangsebességgel terjed, nem képes átjutni a legszűkebb keresztmetszeten. Az ellennyomás változása tehát nem tudja módosítani a nyomásmegoszlást a tartály és a kiömlés legszűkebb keresztmetszete között.** A gáz ebben az esetben nem tud a legszűkebb keresztmetszetig „leexpandálni” a tartályban lévő nyomásról a külső (ellen)nyomásra. Azt a p_e/p_t nyomásviszonyt, amelynél a kiömlési sebesség a legszűkebb keresztmetszetben eléri a helyi hangsebességet, **kritikus nyomásviszonynak** nevezzük. Ennek értéke $\kappa = 1.4$ esetén a (15.42) értelmében $(p_e / p_t)_{kr} = 0.53$.

Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy egyszerű kiömlőnyílás esetén, ha $p_e / p_t \geq (p_e / p_t)_{krit}$, a gáz nyomása a kilépő keresztmetszetben megegyezik az ellennyomással: $p^* = p_e$, a kiömlési sebességet a (15.20) összefüggéssel számolhatjuk. Ha a nyomásviszony éppen megegyezik a kritikus nyomásviszonnyal, akkor a gáz sebessége a legszűkebb keresztmetszetben eléri a helyi hangsebességet, ezért a (15.45) összefüggés is használható a v^* meghatározására (ami természetesen ugyanazt az eredményt adja, mint a

(15.20) összefüggés). $p_e / p_t \geq (p_e / p_t)_{\text{krit}}$ esetén a kilépő keresztmetszetben lévő sűrűség és hőmérséklet a (15.15) és (15.16) összefüggések figyelembe vételével számolható:

$$\frac{T^*}{T_t} = \left(\frac{p_e}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad \frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{p_e}{p_t} \right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (15.46)$$

Ha $p_e / p_t \leq (p_e / p_t)_{\text{krit}}$, **a kiömlési (legszűkebb) keresztmetszetben az áramlási sebesség megegyezik a helyi hangsebességgel**, ami a (15.45) összefüggéssel számolható. (Természetesen továbbra is érvényes a (15.20) kiömlési képlet, de a p_e helyébe a kiömlő keresztmetszetben valóságban lévő nyomást, $\kappa = 1.4$ esetén $0.53 p_t$ -t kell helyettesíteni.) A gáz állapotjellemzői a (15.41) és (15.43) összefüggéssel számolhatók.



15.6. ábra

A műszaki alkalmazások szempontjából kedvezőtlen, hogy a gázt nem tudjuk az ellennyomásnak megfelelő és a (15.20) összefüggéssel számolható sebességre felgyorsítani. Ezért a 15.4. ábrával kapcsolatos megfontolások alapján a 15.5. ábrán látható szűkülő csőtoldatot egy bővülő csővel egészítjük ki, amivel a 15.6. ábrán látható **Laval-csővet** kapjuk. Az ábrán a Laval-cső a tartályt egy másik tartállyal köti össze, amelyben az ellennyomás a kiáramló gáz mennyiségének változtatásával változtatható. A Laval-cső alatti diagramban fel-

tüntettük a nyomás változását a cső tengelyében.

Írjuk fel az adott A^* és A_{ki} legszűkebb és kilépő keresztmetszetre a **kontinuitás törvényét!**

$$q_m = \rho^* v^* A^* = \rho_{ki} v_{ki} A_{ki} \quad (15.47)$$

A legszűkebb keresztmetszetre vonatkozó mennyiségeket a (15.42), (15.45) és (15.47) összefüggés felhasználásával fejezhetjük ki. A kilépő keresztmetszetre vonatkozó mennyiségeket pedig annak a feltételezésével, hogy a közeg a p_e ellennyomásra leexpandál a tartály és az A_{ki} keresztmetszet között. Ebben az esetben a (15.15) és a (15.20) összefüggések használhatók:

$$0.63 p_t \sqrt{\kappa R 0.83 T_t} A^* = A_{ki} p_t \left(\frac{p_e}{p_t} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2 \kappa}{\kappa - 1} R T_t \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (15.48)$$

A (15.48) összefüggés adott keresztmetszetviszonyhoz két megoldást ad a p_e / p_t nyomásviszonyra, azaz **adott p_t tartálynomáshoz két p_e ellennyomás tartozik, amelyeknél a tartály és a kiömlőkeresztmetszet között izentropikus állapotváltozáson keresztül úgy gyorsul fel a közeg, hogy sebessége a legszűkebb keresztmetszetben eléri a hangsebességet.** A 15.6. ábrán e két ellen nyomást a B és D pontok jelzik.

Vizsgáljuk meg a B pontba futó görbe esetén az áramlás lefolyását. A **gáz a Laval-cső szűkülő részén gyorsul** (α eset, ld. 181. oldal), majd a **legszűkebb keresztmetszetben sebessége eléri a hangsebességet** ($Ma = 1$, ld. γ eset). **A legszűkebb keresztmetszet után a közeg nyomása csökken, sebessége nő**, $Ma > 1$, azaz a β eset értelmében **gyorsuló áramláshoz bővülő cső tartozik.**

Tekintsük a D pontba futó görbét. A legszűkebb keresztmetszetig a közeg az előző esettel megegyező módon gyorsul, sebessége eléri a hangsebességet, majd **a gáz a növekvő nyomás miatt lassulni kezd** ($Ma < 1$ a legszűkebb keresztmetszet után). Ebben az esetben az α pont értelmében **bővülő csőtoldalban csökken a sebesség, a diffúzor a megszokott módon működik.**

Ha az ellennyomás nagyobb, mint p_D , akkor a közeg izentropikus állapotváltozáson keresztül expandál le az adott nyomásra (ld. 15.6. ábra D és E pontok közé kifutó görbék). Itt a (15.20) kiömlési képlet használható. A 181. oldal δ esetének megfelelően a sebesség helyi hangsebességnél kisebb szélső értékét (maximumát) a legszűkebb keresztmetszetben éri el.

A B és D pontokkal jelzett nyomások közötti ellennyomások esetén nincsen izentropikus megoldás, a gáz egy ún. **lökéshullámon (hirtelen nyomásugráson 15.6. ábra ML) keresztül lassul le** a $v > a$ sebességről a $v < a$ sebességre, miközben nyomása a 15.6. ábrán látható módon ugrásszerűen megnő.

A C és D pontok között a lökéshullám merőleges az áramlási sebességre, és a Laval-fúvóka bővülő részében van. A **merőleges lökéshullám mögött $Ma < 1$** , ezért az α eset értelmében növekvő keresztmetszethez csökkenő sebesség tartozik. Csökkenő ellennyomás esetén a lökéshullám megközelíti, majd ($p_e = p_C$ esetén) eléri a kilépő keresztmetszetet. A B és C pontok közötti ellennyomások esetén pedig a kilépőkeresztmetszet kerületéhez csatlakozó, a későbbiekben bemutatott **ferde lökéshullámon** (ld. 15.6. ábra FL) **keresztül lassul le a gáz.**

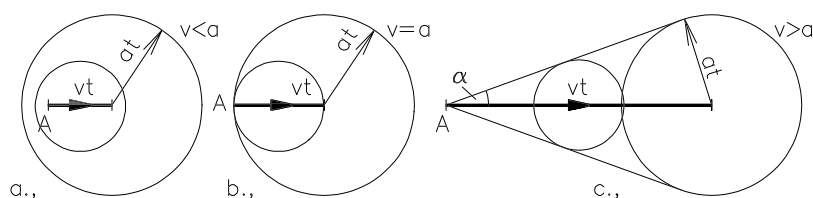
Ha $p_e < p_B$, (az A és B pontok között) a közeg a kilépőkeresztmetszet elhagyása után a később tárgyalt **ferde szíváshullámokon** (ld. 15.6. ábra FSZ) keresztül gyorsul tovább.

Fontos megjegyezni, hogy a $p_e < p_D$ esetén a Laval-cső szűkülő részén a **viszonyok nem változnak az ellennyomás változásának hatására. Így pl. a tartályból kiömlő**

gáztömegáram különböző p_e értékek esetén változatlan, azt a legszűkebb keresztmet-
 szetben kialakuló, a helyi hangsebességgel megegyező sebességű áramlás jellemzői ha-
 tározzák meg, amelyek csak a tartályban lévő hőmérséklet és nyomás (ill. sűrűség) ér-
 tékétől függenek.

15.7. A nyomáshullám terjedése

Helyezzünk egy hangszórót egy v sebességű áramlásba az A pontba. $v = 0$ esetén egy vizs-
 gált hanghullám adott t idő alatt minden irányban egyenlő sebességgel terjedve $r = at$ su-
 garú gömböt alkot. Ha $v \neq 0$, a gömb középpontja az A ponthoz képest az áramlás irányába
 $v \cdot t$ távolságra mozdul el (ld. 15.7.a. ábra), hiszen az áramló közegben továbbra is

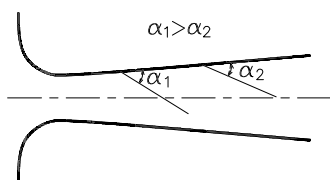


15.7. ábra

minden irányban egyenlő sebességgel terjed a nyomáshullám. $v < a$, azaz $Ma < 1$ esetén a
 hullámfront helyzetét a 15.7.a. ábra, $Ma = 1$ esetén a b., $Ma > 1$ esetén pedig a c. ábra mu-
 tatja be. Ez utóbbi esetben, **hangsebességet meghaladó sebességű áramlásban az A**
hangforrásból kibocsájtott jelek a tér egy α félkúpszöggel jellemezhető részében ész-
lelhetők. Az α , amelyet Mach-szögnek nevezünk, a

$$\sin \alpha = \frac{at}{vt} = \frac{a}{v} = \frac{1}{Ma} \quad (15.49)$$

összefüggéssel határozható meg. Hasonló a helyzet álló közegben mozgó hangforrás (pl.
 repülőgép) esetén, azonban itt a mozgó A ponthoz rögzített koordináta-rendszerben alakul-
 nak a 15.7. ábrán bemutatotthoz hasonlóan a hullámfrontok (ld. 4.11. ábra).



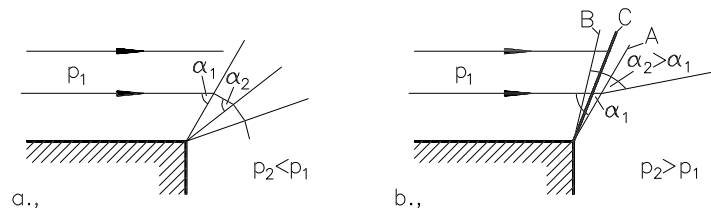
15.8. ábra

Ha a Laval-cső bővülő részének falán egy kiskiemelkedés
 van, akkor ennek jelenlétét a hangsebességnél nagyobb se-
 bességgel áramló közeg egy nyomáshullám formájában
 „észleli”, amely α_1 szöget zár be a fallal (ld. 15.8. ábra).
 Ez a szög az áramlás irányában csökken, miután a Ma nő
 (ld. (15.49) összefüggést). **Hangsebességnél kisebb se-**
bességű áramlásban az áramló közegben a zavarás ha-

tása „előrehat”, ezért a közeg mintegy „felkészül” egy falon lévő kiemelkedés megke-
rülésére vagy egy test körüláramlására stb.. $Ma > 1$ esetén a közeg áramlását befolyá-

soló „nyomásjelek” Mach-szög alatt terjednek és változásokat eredményeznek a sebesség nagyságában és irányában, valamint a gáz állapotjellemzőiben.

Tekintsük a 15.9.a. ábrát, ahol a egy szilárd fal hirtelen irányváltozása (pl. a 15.6. ábra



15.9. ábra

kiömlőkeresztmetszet körüli része) látható. Legyen a fal melletti áramlás sebessége nagyobb, mint a hangsebesség, $Ma > 1$, a nyomás itt legyen p_1 .

Az a/ esetben a sarok mögött a nyomás legyen kisebb: $p_2 < p_1$. (Ez az eset akkor áll elő Laval-cső esetén, ha a $p_A \leq p_e < p_B$, ld. 15.6. ábra) A sarokhoz közelítő folyadékrészek csak akkor „vesznek tudomást” a sarok jelenlétéről, ha az ábrán berajzolt, a fallal párhuzamos áramvonalakkal α_1 Mach-szöget bezáró ferde szíváshullámot elérik. A szíváshullámon áthaladva a hullámra merőleges nyomáscsökkenés a hatására a közeg részek a hullám síkjára merőleges irányban gyorsulnak. Mivel nő a Ma , csökken a Mach-szög, és így az α értéke ($\alpha_2 < \alpha_1$). További szíváshullámok indulnak a sarokról, amelyek hatására az áramló közeg iránya tovább változik. (A valóságban elemi szíváshullámok indulnak a sarokról, és hatásukra folyamatosan változik a sebesség iránya és nagysága. Az ábrán látható véges irányváltozást okozó hullámok elemi hullámok összegzéseként képzelhetők el.)

A b/ esetben legyen $p_2 > p_1$, azaz a sarok mögött nagyobb a nyomás, mint az áramló közeg nyomása, ami a 15.6. ábrán a $p_B < p < p_C$ esetnek felel meg. A sarok felé közelítő közegrészek egy α_1 Mach-szög alatt terjedő, a 15.9. ábrán A-val jelölt **nyomásnövekedési hullámon áramlanak keresztül, amely saját magára merőlegesen lassítja a közeget: az áramlás iránya felfelé térül el**, a Ma értéke a hullám után kisebb, az α nő. Lehet-e a sarokról induló további olyan hullámot rajzolni, amely áramvonallal bezárt szöge nagyobb, mint a hullám előtti Mach-szög, azaz $\alpha_2 > \alpha_1$? Az ábrán láthatóan ilyen hullámot csak az A jelű hullámtól balra tudunk rajzolni: B jelű hullám, ami természetesen a valóságban nem jöhet létre. A nyomásnövekedési hullámok mintegy „összesűrűsödnek”, egy **igen vékony lökeshullámot alkotnak** (ld. 15.9.b. ábra C jelű hullám), **amelyen keresztül a jellemzők (sebesség irány, nagyság, nyomás stb.) ugrásszerű változása következik be**. Ez az „összesűrűsödés” az alábbi módon is belátható. A 15.9. ábrán látható, abszolút rendszerben álló hullámok az áramló közeghez képest hangsebességgel mozognak az áramlással szemben. A hangsebesség szíváshullám esetén a növekvő sebességű áramlás irányában csökken, mivel a nyomás és a hőmérséklet is csökken. Ezért a szíváshullámok legyezőszerűen szétte-

rülnek. Nyomásnövekedési hullám esetén azonban az áramlás irányában nő a nyomás, ezzel a hőmérséklet és így a hangsebesség is, és csökken az áramlási sebesség. Ebből adódóan az áramlás irányában nő a hullám terjedési sebessége bal felé, azaz a hullámok mintegy „fel-torlódnak”: lökeshullám keletkezik.

15.10. ábra

Az 15.10. ábrán $Ma = 1.5$ esetén láthatók egy csatornában a csatorna falának egyenetlenségein keletkező nyomáshullámok, amelyek fallal bezárt szöge a (15.49) összefüggésből számolhatók. Látható továbbá egy merőleges lökeshullám, amely után az áramlás sebessége kisebb a hangsebességnél (ld. 15.6. ábra).

Hasonló lökeshullám keletkezik egy hangsebességnél nagyobb sebességgel haladó test, pl. gömb előtt (ld. 15.10. ábra), hiszen a gömbhöz rögzített koordinátarendszerben a test felé áramló közegnek le kell fékeződnie, ami a nyomás növekedésével jár együtt. Ez a lökeshullám amelyet **fejhullámnak** nevezünk, a távolabb nyomásnövekedési hullámba megy át, ami pl. alacsonyan szálló repülőgép esetén áthaladva a megfigyelő fölött hirtelen nyomásnövekedést okoz, amit robbanáshoz hasonló zajként érzékelünk. Az áramlási sebesség a lökeshullám mögött és a gömb felszínének áramlással szembe néző részén a megfűvási irány nyal bezárt kb. 45° szögig kisebb mint a helyi hangsebesség. A gömb felszíne közelében hangsebességet meghaladó sebességre gyorsuló közeg 90° -nál lassulni kezd, aminek hatására egy újabb ferde lökeshullám keletkezik a határréteg leválás helyén.

16. Akusztikai alapismeretek

Az akusztika egyik nagy fejezete a cseppfolyós és légnemű halmazállapotú közegekben keletkező, haladó és elhaló hanghullámok leírásával foglalkozik. Ez részben az áramlástan alapegyenleteinek felhasználásával lehetséges, ami mutatja az áramlástan és az akusztika közötti szoros kapcsolatot.

16.1. A hullámeqyenlet

Ebben a fejezetben a nyugvó közegben terjedő hang néhány sajátosságával foglalkozunk. **Hangnak a vivőközeg sajátosságainak elemi ingadozását nevezzük, amely hullám alakjában terjed.** A hang esetén a tér pontjaiban a részecske sebesség $v[\text{m/s}]$, a nyomás $p[\text{Pa}]$ és a sűrűség $\rho[\text{kg/m}^3]$ változik az idő függvényében. A hallásküszöbnek megfelelő effektív nyomás (definícióját ld. később) $2 \cdot 10^{-5}[\text{Pa}]$, $20[\text{Pa}]$ pedig már fájdalmat okoz, tehát a nyomásingadozások a $10^5[\text{Pa}]$ atmoszférikus nyomáshoz képest jó közelítéssel eleminek tekinthetők.

Az előző fejezetben láttuk, hogy a **hang terjedési sebességére** írható:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad (16.1)$$

amely **gázok esetén izentropikus állapotváltozást feltételezve** az

$$a = \sqrt{\kappa R T} \quad (16.2)$$

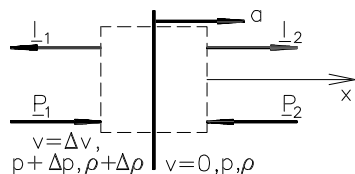
kifejezéssel határozható meg. **Szilárd testekben** a nyomás (negatív húzófeszültség) változása és a $d\ell/\ell$ relatív megnyúlás között az $E[\text{Pa}]$ rugalmassági modulusz teremt kapcsolatot. Figyelembe véve a megnyúlás és a sűrűség változása közötti kapcsolatot egydimenziós eset feltételezésével írható:

$$dp = -E \frac{d\ell}{\ell} = E \frac{d\rho}{\rho}, \quad (16.3)$$

amiből a hang terjedési sebessége a szilárd testben:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (16.4)$$

Tekintsük a 16.1. ábrát, ahol egy a hangsebességgel jobbfelé haladó elemi hullámot ábrázoltunk, amely a sebességet, a nyomást, és a sűrűséget Δv , Δp és $\Delta \rho$ értékkel változtatja meg. Írjuk fel az impulzustételt az ábrán látható ellenőrző felületre, amely a hullám sebességével halad jobbfelé. (Ebben az esetben stacionárius az áramlás.) Az x tengely pozitív irányítását figyelembe véve írható:



16.1. ábra

$$-I_1 + I_2 = +P_1 - P_2 \text{ azaz}$$

$$\rho a^2 A - (\rho + \Delta \rho)(a - \Delta v)^2 A = (p + \Delta p) A - p A.$$

A kontinuitásból a $\rho a A = (\rho + \Delta \rho)(a - \Delta v) A$ adódik, amelyet behelyettesítve kapjuk:

(16.5)

$$\Delta p = \rho a \Delta v.$$

A (16.5) összefüggés a Δp **nyomásnövekedés** (amit könnyen tudunk mérni) és a Δv **részecske sebesség** között teremt kapcsolatot.

A következőkben vizsgáljuk nyugvó levegőben egy **síkhullám terjedését**, amelynél a jellemzők csak az x koordinátától és az időtől függenek:

$$\text{nyomás: } p = p(x, t),$$

$$\text{a közeg sűrűsége: } \rho = \rho(x, t),$$

$$\text{a részecske sebesség: } \underline{v} = v_x(x, t) \underline{i}.$$

Az egyes mennyiségeket felbonthatjuk, a „0” indexszel jelzett időbeli átlag és az ingadozás (’-vel jelölve) összegeként. Így pl. $\rho = \rho_0 + \rho'$ ill. mivel $v_0 = 0$, $v_x = v'_x$ a részecske sebesség, amit a továbbiakban v -vel jelölünk. Írjuk fel a **kontinuitás törvényét** és az **Euler-egyenletet** (figyelembe véve, hogy a térerősségnek nincsen szerepe az akusztikai jelenségeknél):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0, \text{ azaz}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \text{ valamint} \quad (16.6)$$

$$\frac{d \underline{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p, \text{ azaz}$$

$$(\rho_0 + \rho') \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (16.7)$$

A (16.6) és (16.7) összefüggések bal oldalának második tagjai a többi taghoz képest elhanyagolhatóan kicsik a v részecskesebesség kis értéke miatt. A ρ' -vel szorzott tagok ugyan-csak elhanyagolhatóak a ρ_0 -val szorzottak mellett. A (16.6) összefüggésből így kapott kifejezésben a $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t}$ átalakítást elvégezve, majd a kifejezés mindkét oldalát idő szerint differenciálva kapjuk:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = 0.$$

(Az a hangsebesség idő szerinti differenciálhányadosát elhanyagoltuk.) Differenciáljuk a fenti megfontolások alapján egyszerűsített (16.7) összefüggés mindkét oldalát x szerint:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

Mindkét összefüggésből kifejezve az azonos alakú tagot és egyenlővé téve megkapjuk az **egydimenziós akusztikai hullámegyenletet**:

$$\boxed{\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \quad (16.8)$$

A hullámegyenlet általános megoldása a

$$p(x, t) = f(x - at) + g(x + at) + p_0$$

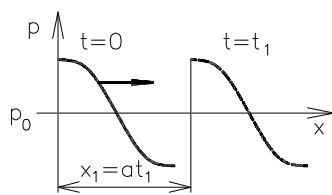
függvény, ahol p_0 az időben és térben állandó egyensúlyi statikus nyomás. A kínálkozó számos lehetőség közül válasszuk most a természetben gyakran előforduló harmonikus hullámot leíró függvényt:

$$p = \hat{p} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + p_0, \quad (16.9)$$

ahol $T[s]$ **periódusidő**, $\lambda[m]$ **hullámhossz**. Bevezetve az $f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s} \right]$ **frekvencia**,

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{1}{m} \right]$ **hullámszám**, $\omega = 2\pi f \left[\frac{1}{s} \right]$ **körfrekvencia** jelöléseket írható:

$$p = \hat{p} \cos(\omega t \pm kx) + p_0. \quad (16.10)$$



16.2. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy milyen tulajdonságai vannak ennek a függvénynek: Tekintsük az $\omega t - k x$ esetet. Ábrázolja $t = 0$ pillanatban a nyomáshullámot a 16.2. ábra. A maximális nyomás az $x = 0$ helyen van, miután $t = 0$ -hoz és $x = 0$ -hoz a cosinus függvény zérus argumentuma tartozik. Annak érdekében, hogy $t = t_1$ pillanatban ugyanazt a nyomást kapjuk, a függvény argumentumának ugyanakkorának kell lennie: $\omega t_1 - k x_1 = 0$, amiből

$$\frac{x_1}{t_1} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{2\pi f \lambda}{2\pi} = a, \quad (16.11)$$

mivel $f \lambda = a$ [m/s] **hangsebesség**. A (16.11) összefüggésből látható, hogy **a hullám a hang a terjedési sebességével** (ld. (15.23) összefüggés) **megegyező sebességgel halad jobbra** (ld. 16.2. ábra). Ugyanezzel a sebességgel balra haladó hullámot kapunk, ha az $\omega t + k x$ argumentum esetét vizsgáljuk.

16.2. Hangteljesítmény, intenzitás

Periodikus gerjesztés esetén a vivőközeg periodikus mozgásában és egymást követő kompressziók és expanziók formájában jelentkezik a hang, amely terjedése során energiát szállít. Ha p [Pa] nyomás ellenében V [m³] térfogatnyit „kiszorítunk” $p V$ [J] munkát végzünk. Ezért szabad térben terjedő síkhullám esetén a **hangteljesítményre** írható:

$$P(t) = A v(t) p(t) \quad (16.12)$$

A (16.5) összefüggést figyelembe véve írható: $p = \rho v a$, amiből

$$v = \frac{p}{\rho a} \quad (16.13)$$

(16.13) kifejezést (16.12)-be helyettesítve kapjuk:

$$P(t) = A \frac{p^2}{\rho a}, \text{ amiből az \textbf{átlagos teljesítmény}: } P = A \overline{\frac{p^2}{\rho a}}. \quad (16.14)$$

A (16.10) kifejezéssel leírt harmonikus hullám négyzetét 0-tól T-ig integrálva és T-vel elosztva képezhetjük a nyomás négyzetének időbeli átlagát: $\overline{p^2} = \frac{\hat{p}^2}{2}$. Az **effektív hangnyomás** tehát $p_{\text{eff}} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}$. Ezzel az **effektív hangteljesítmény**:

$$P = \frac{p_{\text{eff}}^2}{\rho a} A \quad (16.15)$$

A mérések során a p_{eff}^2 -et határozzuk meg.

Az 1 m^2 keresztmetszetre jutó hangteljesítményt **intenzitásnak** nevezzük:

$$I = \frac{P_{\text{eff}}}{\rho a} \quad (16.16)$$

16.3. Szintek

A hangteljesítmény igen széles skálán mozog: a csendes beszédé 10^{-9} W , egy nagy teljesítményű rakétáé pedig 10^7 W is lehet. Milyen skálát használjunk, hogy ezt az igen széles tartományt átfoghassuk? Használjuk ki az **emberi érzékelés azon sajátosságát, hogy az érzékelt változás mértéke ($\Delta \epsilon$) az inger változás (Δi) és az inger (i) hányadosával arányos**: $\Delta \epsilon \sim \Delta i / i_0$, amiből az érzékelés és az inger kapcsolatára adódik: $\epsilon \sim \ln(i / i_0)$. Az átfogott skála szélessége és az érzékelésünk sajátosságai indokolják, hogy az akusztikában alkalmazott fizikai mennyiségek jellemzésére az alábbi szinteket alkalmazunk:

Hangteljesítményszint: $L_W = 10 \lg \frac{P}{P_0} [\text{dB}], \quad (16.17)$

Intenzitásszint: $L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0} [\text{dB}], \quad (16.18)$

Hangnyomásszint: $L = 10 \lg \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 [\text{dB}], \quad (16.19)$

ahol a **dB (decibel)** a **szintek mértékegysége**. (Itt jegyezzük meg, hogy a fentiekén kívül más, teljesítményt kifejező mennyiségeknél is használjuk a dB mértékegységet.)

A p_0 vonatkozási nyomásnak a hallásküszöböt választották: $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

$(\rho a)_0 = 400 \frac{\text{kg}}{\text{s m}^2}$ és $A_0 = 1 \text{ m}^2$ vonatkozási értéket választva a (16.15) és (16.16) össze-

függés alapján $I_0 = \frac{p_0^2}{(\rho a)_0} = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ill. $P_0 = 10^{-12} \text{ W}$.

Hogyan számítjuk ki két egyenlő L_W hangteljesítményű hangforrás $L_{W_{\text{eredő}}}$ eredő hangteljesítményét?

$$L_{W_{\text{eredő}}} = 10 \lg \frac{2P}{P_0} = 10 \lg \frac{P}{P_0} + 10 \lg 2 = L_W + 3 [\text{dB}].$$

Ha két különböző $L_{W1} = 10 \lg P_1 / P_0$ és $L_{W2} = 10 \lg P_2 / P_0$ hangteljesítményű hangforrás esetén keressük az eredő L_{We} hangteljesítményt, akkor az alábbi módon járunk el:

$$L_{We} = 10 \lg \frac{P_1 + P_2}{P_0} = 10 \lg \left[10^{\frac{L_{W1}}{10}} + 10^{\frac{L_{W2}}{10}} \right] = 10 \lg \left[10^{\frac{L_{W1}}{10}} \left(1 + 10^{\frac{L_{W2} - L_{W1}}{10}} \right) \right]$$

A kijelölt műveletet elvégezve eredményül kapjuk:

$$L_{We} = L_{W1} + \Delta L_W, \text{ ahol } \Delta L_W = 10 \lg \left(1 + \frac{1}{10^{\frac{L_{W1} - L_{W2}}{10}}} \right). \quad (16.20)$$

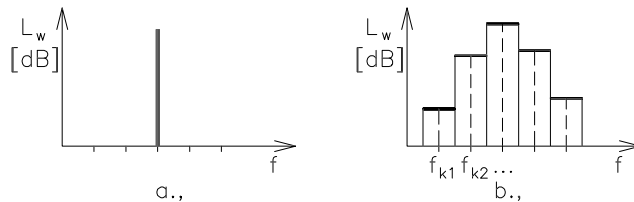
A 16.3. ábrán látható nomogram megkönnyíti a ΔL_W számítását: megmutatja, hogy a hangteljesítmény-szintek közötti különbség ($L_{W1} - L_{W2}$) függvényében mennyivel kell a nagyobbik (L_{W1}) hangteljesítmény-szintet megnövelni, hogy az eredőt megkapjuk.

Látható, hogy $L_{W1} - L_{W2} \geq 10 \text{ dB}$ különbség esetén már el lehet hanyagolni a kisebb teljesítményű hangforrás (pl. a háttérzaj) hozzájárulását az eredő hangteljesítményszinthez.

16.4. A zaj spektrális jellemzése

A hangtér adott pontjában a hangnyomás időbeli lefutásának ismeretében előállítható az igen informatív **hangszínekép (hangspektrum)**, amely megmutatja, hogy milyen frekvenciájú és amplitúdójú harmonikus összetevőkből állítható elő az eredeti nyomás-idő függvény. Így pl. a tiszta zenei hang spektruma 1 db. harmonikus összetevőt tartalmaz (ld.

16.4.a. ábra). A gyakorlatban a hang jellemzésére pl. oktávsávós spektrumot használunk. (Egy **oktáv** az $f_a [\text{Hz}]$ alsó és $f_f [\text{Hz}] = 2 f_a$ felső frekvencia közötti frekvenciákat fogja át.) A **középfrekvencia**: $f_k = \sqrt{f_a f_f} = \sqrt{2} f_a$.



16.4. ábra

A 16.4.b. ábra egy mérés eredményét mutatja, ahol az egyes oktávsávokban mért hangteljesítményszinteket az adott középfrekvenciákhoz vittük fel. Az emberi érzékelés eltérően reagál a különböző frekvenciájú hangokra: a mély hangokra (pl. 50 Hz) viszonylag érzéketlen, míg közelítőleg 3000 Hz-nél a legérzékenyebb. Az emberi érzékelés „torzítását” speciális szűrővel lehet figyelembe venni, az így adódó értékeket dB(A) -val jelöljük.

16.5. Irányítottság

Egy nagy térben elhelyezett, **P hangteljesítményű, pontszerű hangforrást feltételezve**, amely minden irányban egyformán bocsájt ki hanghullámokat, az r sugarú gömb felületén érvényes intenzitásra írható:

$$I_g = \frac{P}{4 \pi r^2} = \frac{p_g^2}{\rho a}. \quad (16.21)$$

Ha pontszerű hangforrásunkat (változatlan hangteljesítmény mellett) a határolatlan szabad térből valamilyen határolt térbe helyezük, a tér egy adott pontjában az intenzitás megváltozását a **D irányítási tényezővel** fejezhetjük ki:

$$D = \frac{I}{I_g} = \frac{\frac{p^2}{\rho a}}{\frac{p_g^2}{\rho a}} = \frac{p^2}{p_g^2} \frac{4 \pi r^2}{P}. \quad (16.22)$$

Ha egy minden irányban egyforma intenzitású hanghullámokat kibocsájtó hangforrást nagy térben helyezünk el, $D = 1$ érték adódik. Ha a hangforrást egy síkra tesszük, ami a hangot visszaveri, $D = 2$ -t kapunk. Ha két sík metszésvonalába tesszük, akkor $D = 4$, ha pedig be-tesszük a sarokba, akkor csak a tér egy-nyolcadába bocsájtja ki a hangteljesítményt, ekkor $D = 8$.

Vizsgáljuk meg, hogy adott teljesítményszintű hangforrás milyen hangnyomásszintű hangteret hoz létre, azaz mekkora lesz adott helyen a hangnyomásszint. Legyen a tér kiválasztott

pontjában az irányítási tényező ismert, D értékű. A (16.21) és (16.22) összefüggések felhasználásával írható:

$$I = D I_g = D \frac{P}{4 \pi r^2} = \frac{p^2}{\rho a} \quad (16.23)$$

A vonatkozási intenzitás az alábbi módon írható fel az előzőek alapján:

$$I_0 = \frac{p_0^2}{(\rho a)_0} = \frac{P_0}{r_0^2}, \text{ ahol } r_0 = 1 \text{ m.} \quad (16.24)$$

Fejezzük ki az I / I_0 hányadost a (16.23) és (16.24) segítségével:

$$\frac{I}{I_0} = D \frac{P}{4 \pi r^2} \frac{r_0^2}{P_0} = \frac{p^2}{\rho a} \frac{(\rho a)_0}{p_0^2} \quad (16.25)$$

(16.25)-ből fejezzük ki a hangteljesítmények viszonyát:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{p^2}{p_0^2} \frac{(\rho a)_0}{\rho a} \frac{4 \pi r^2}{r_0^2} \frac{1}{D} \quad (16.26)$$

Vegyük a (16.26) összefüggés mindkét oldalának tízszeres logaritmusát:

$$L_w = 10 \lg \frac{P}{P_0} = 10 \lg \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 + 10 \lg \frac{(\rho a)_0}{\rho a} + 10 \lg 4 \pi + 10 \lg \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 10 \lg D$$

amiből figyelembevéve, hogy $(\rho a)_0 \cong \rho a$ a kijelölt műveletek után kapjuk:

$$L_w = L + 20 \lg r - 10 \lg D + 11 \quad (16.27)$$

Ha tehát a hangforrástól r [m] távolságban L [dB] hangnyomásszintet mérünk és ismerjük a D irányítási tényező értékét, a (16.27) összefüggéssel számolható a hangforrás hangteljesítményszintje.

Ajánlott irodalom

Válogatás a magyar nyelven hozzáférhető szakirodalomból:

1. Dr. Gruber József, Dr. Blahó Miklós:
Folyadékok mechanikája; Tankönyvkiadó Budapest, 1973.
2. L.D.Landau, E.M.Lifsic:
Elméleti fizika VI. Hidrodinamika; Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
3. Fizikai kézikönyv műszakiaknak, I. kötet, 1.6.Hidromechanika;
főszerkesztő: Dr Antall János, fejezet szerzők: Dr. Czibere Tibor, Dr. Szabó János ;
Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1980.
4. Dr. Szentmártony Tibor, Dr. Kurutz Imre:
A műszaki akusztika alapjai; J4 -970 kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
5. Willi Bohl:
Műszaki áramlástan; Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1983.
6. Dr. Szentmártony Tibor:
Folyadékok mechanikája I.; J4 -920 kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.
7. Dr. Litvai Elemér:
Alkalmazott áramlástan (A vegyipari gépészek részére); J4 -730 kézirat, Tankönyvkiadó,
Budapest, 1986.
8. Dr. Litvai Elemér, Dr. Bencze Ferenc:
Áramlástan II.; J4 -906 kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
9. Dr. Bobok Elemér:
Áramlástan bányamérnököknek; Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
10. Műszaki hő- és áramlástan I-1., I-2., II. kötetek, J7 -724, J7 -724-a, J7 -725, az
Aero- és Termotechnika Tanszék Munkaközössége; kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest,
1988.

Ajánlott idegen nyelvű szakirodalom:

11. Klaus Oswatitch:
Gasdynamik; Springer -Verlag, 1952.

12. Ludwig Prandtl:
Führer durch die Strömungslehre; Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig 1965.
13. E. Truckenbrodt:
Strömungsmechanik; Springer -Verlag, 1968.
14. Dr. Jürgen Zierep:
Grundzüge der Strömungslehre; G.Braun Kalsruhe.
15. Dr. Jürgen Zierep:
Ähnlichkeitsgesetze und Modellregel der Strömungslehre; G.Braun Kalsruhe, 1972.
16. Robert W.Fox, Alan T.McDonald:
Introduction to Fluid Mechanics; John Wiley & Sons, 1978.
17. Dr. Werner Albring:
Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen; Akademie -Verlag Berlin, 1981.
18. A.P.Dowling, J.E.Ffowcs Williams:
Sound and Sources of Sound; Ellis Horwood Limited, 1983.
19. Victor L. Streeter, E.Benjamin Wylei:
Fluid Mechanics; McGraw -Hill Book Company, 1985.
20. Philip M.Gerhart, Richard J.Gross:
Fundamentals of Fluid Mechanics; Addison -Wesley Publishing Company, 1985.
21. Rolf H.Sabersky, Allan J.Acosta, Edward G.Hauptmann:
Fluid Flow; Macmillan Publishing Company, 1989.
22. M.B.Abot, D.R.Basco:
Computational Fluid Dynamics An Introduction for Engineers; Longman Scientific & Technical, 1989.
23. Werner Albring:
Angewandte Strömungslehre; Akademie -Verlag Berlin, 1990.
24. W.J.Duncan, A.S.Thom, A.D.Young:
Mechanics of Fluid; Edward Arnold, 1990.
25. Merle C.Poter, David C.Wigger:
Mechanics of Fluid; Prentice -Hall Internacional, Inc., 1991.

26. John D.Anderson, Jr.:
Fundamentals of Aerodynamics; McGraw -Hill, Inc.1991.
27. Dr. Jürgen Zierep: Theoretische Gasdynamik; G.Braun Kalsruhe, 1991.
28. Charles Hirsch:
Numerical Computation of Internal and External Flows; Volume 1, 2, John Wiley & Sons,
1991.
29. C.A.J.Fletcher:
Computational Techniques for Fluid Dynamics; Volume 1, 2, Springer -Verlag, 1991.