

BME Informatikai Központ
Axelero Internet Rt.

Az információábrázolás matematikai módszerei

Verziószám: 1.02

Kardkovács Zsolt Tivadar

készítette

A szavak hálójában

(NKFP-2/0019/2002)

projekt keretében

Az SQL domesztikáció elméleti előkészítése

témában

2003. április 8.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
2. A matematikai fogalmakról	2
3. Az extenzionális logika	4
3.1. Az állításlogika	4
3.2. Az elsőrendű logika	4
3.3. A magasabb rendű logikákról	7
3.4. A többértékű logika	7
4. A leíró logika	8
5. Az intenzionális logika	9
5.1. Modális logika	9
6. Helyzetképzelmélet	10
7. Logikai modellek az információ-visszakeresésben	11
8. Összefoglaló	12

Az információábrázolás matematikai módszerei

Kardkovács Zsolt Tivadar

BME Informatikai Központ
Axelero Internet Rt.

1. Bevezető

Ha általában logikáról beszélünk, akkor egyfelől érthetünk alatta logikus gondolkodást, amelyben érvek mentén állításokat fogalmazunk meg; érthetünk filozófiát, amely a világ valamely leírását, modellezését próbálja megragadni; de érthetünk éppúgy (természetes) nyelvi következtetéseket – gondoljunk csak a szillogizmusokra –, mint matematikai keretrendszert, amelyre lényegében a ma használatos matematikai eszköztárunkat felépítettük. Az információ-visszakeresésben a filozófia, a nyelvtudomány és a matematikai eszközök azonos súllyal kapnak szerepet. A nyelvtudomány segítségével egy-egy természetes nyelvi mondat vagy információ feldolgozását, jelentésének helyes értelmezését, a nyelv szabályszerűségeinek meghatározását kölcsönözzük. A filozófia gondoskodik számunkra arról, hogy az emberi látásmódnak leginkább megfelelő, vagy ahhoz közelálló, a gondolkodásunkban hasonló gépi rendszereket, modelleket szerkesszünk és valósítsunk meg. A matematika pedig felderíti számunkra, hogy milyen hatékonysággal és milyen korlátok között vagyunk képesek automatizálni természetes nyelvi mondatok gépi „megértését” és megfelelő elhelyezését.

Az információ-visszakeresés logikai felépítése tehát szükségszerűen a természetes nyelvekből indul ki, ehhez egy megfelelő filozófiai világmodellt próbálunk meg társítani – ami rendszerint tématerület vagy szakmafüggő – és végül megpróbáljuk megtalálni hozzá azt a matematikai logikai modellt, amely a lehető legtöbb információt képes megragadni és a lehető legtöbbet képes visszakeresni megfelelő válaszidőn belül. Egy információt visszakereső rendszer jósága a matematikai logikai modelljén keresztül összemérhető az említett három tulajdonság alapján. A lényeges kérdések tehát:

- Mely természetes nyelvi formák ábrázolhatók vagy fogalmazhatók meg az adott matematikai logikai modellben? Mekkora lehet az egyértelműség és az átfedés?
- Mely információk kereshetőek vissza és melyek nem, azaz milyen kérdésekre kaphatunk helyes választ az adott matematikai logikai modellben?

A kutatási jelentés az Axelero Internet Rt. és a BME Informatikai Központ tulajdona. A kutatást a Magyar Köztársaság támogatta az NKFP-2/0019/2002 pályázati projekt keretében.

Kutatási jelentés, 1. fázis, 2003. január 31.

- Milyen hatékonysággal, számításidővel kereshetőek vissza a (helyesen) visszakereshető információk az adott matematikai logikai modellben?

A továbbiakban az információ-visszakeresésben ma használatos matematikai logikai modelleket fogjuk bemutatni, a három kérdésre adandó választ vizsgálva. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban elhagyjuk a „matematikai” jelzőt a logikai modellekre vonatkozóan, amennyiben ez nem félreérthető.

A logikai modellek szemléletükben jelentős különbségeket mutatnak és ez alapján csoportosítani is lehet őket. A logikák egy része kizárja a bizonytalan tényezők megjelenését, minden logikai elem az adott elméletben pontosan annyit jelent, amennyit az adott szimbólum ábrázolni képes - függetlenül attól, hogy milyen környezetben fordul elő. Az ilyen logikákat extenzionális logikának nevezzük. Vannak azonban olyan logikák is, amelyekben bizonyos logikai elemek jelentésmódosulást eredményeznek valamely logikai elem(ek)re vonatkozóan – az ilyen tulajdonságú logikákat összefoglalóan intenzionális logikáknak nevezzük.

A fejezet további részében mindenekeelőtt összefoglaljuk a lényegesebb matematikai fogalmakat, amelyekkel dolgozni fogunk. A fogalmainkból kiindulva bemutatjuk az extenzionális logika legismertebb tagját, az elsőrendű matematikai logikát – elemezzük képességeit és hiányosságait egyaránt, továbbá megmutatjuk, milyen bővítésekkel élhetünk még az extenzionális logika keretein belül, milyen kiterjesztései lehetnek még az elsőrendű logikának. Az extenzionális logika fogalmi hiányosságainak, többértelműségének feloldására alkották meg az ún. leíró logikát, amely tulajdonképpen átmenetet képez az extenzionális és az intenzionális világ között. A leíró logikák után az intenzionális logikák adottságait vizsgáljuk meg, ezen belül is hangsúlyt fektetve a különböző modális logikák alkalmazhatóságára. A logikai rendszerek megismerése után számos információ-visszakeresési elméletet és modellt mutatunk be, mintegy illusztrálandó, hogy miképpen lehet (vagy hogyan szokás) a tárgyalt matematikai eszköztárakat közvetlenül felhasználni az adott környezetben.

2. A matematikai fogalmakról

Ahogy a bevezetőben is említettük, a matematikai logika felépítését a természetes nyelvek felől érdemes – az információ-visszakeresés világában pedig szükséges – megközelíteni. Mindenekeelőtt rögzítsük le, hogy állítások, állító mondatok logikájával fogunk ebben a környezetben foglalkozni, bár a tudományban ismeretes a kérdéslogika elemzése is. Mondat alatt tehát a továbbiakban egy kijelentő (vagy állító) mondatot értünk. A mondat a legnagyobb logikai egység. A logikában feltesszük, egy állításhoz rendelhetünk valamilyen ítéletet – amely vagy igaz, vagy hamis.

Természetesen előfordulhat, hogy az „állítás” valójában egy tagadó mondat, valaminek a létezését cáfolja – és magában az állítás. Mondataink sok esetben kisebb egységekből, tagmondatokból állnak össze. A tagmondatok is lehetnek sok esetben önálló mondatok – más környezetben, gondoljunk csak a mondatok mellérendelő viszonyára. A tagmondatokat kötőszavakkal illesztjük össze, amilyen például az „és” a „vagy”, de ide sorolható a „ha ..., akkor ...” szerkezet is. A tagadások megfelelő szavainak, továbbá a mondatokat összekötő szavaknak a logikai megfelelőit logikai operátoroknak vagy másképpen mondatfunktoroknak nevezzük.

Mondataink a világ egyedeiről fogalmaznak meg valamilyen állítást. A világ egyedeinek tekintünk mindent, amelynek valamely konkrét előfordulását önálló névvel azonosítani tudunk. Ezeket hívjuk individuumoknak vagy konstansoknak – tipikusan ilyenek a főnevek és a számnevek. Az individuumok

egy halmazát is jelölhetjük valamilyen önálló névvel – ezeket változóknak nevezzük. A változó értékén pedig az individuum halmaz valamely elemét értjük. A konstansokat és változókat összefoglalóan (logikai) neveknek nevezzük. A nevek a logika atomi egységei.

Előfordulhat, hogy ugyanannak az individuumnak többféle megnevezése is létezik, de olyan is, hogy csak egy, amely más nevekből képezhető. Ilyenre példa lehet a „Miklós anyja” kifejezés – bárki legyen is az a konkrét személy, de ilyen az aritmetikában például az összeadás is: a 4 mint szám felírható $3 + 1$, $2 + 2$ alakokban is. A nevekből nevet előállító „műveleteket” névfunktoroknak hívjuk, de legtöbbször csak funktorként emlegetjük. A példánkban az „anyja” és „+” kifejezés egy-egy funktor. Egy-egy funktor argumentumszáma tetszőlegesen nagy lehet, de az argumentumok sorrendje mindig rögzített – gondoljunk csak az osztás műveletére.

A nevek között értelmezhetünk valamilyen kapcsolatot, relációt – valamilyen elemi állítást. A logikai relációra lehet példa a „Miklós anyja Mária” állítás, vagy az aritmetikát illetően például az „ $3 < 4$ ” is – a hagyományos értelmezéssel. A logikai relációkat predikátumoknak nevezzük, amelyek tehát a legegyszerűbb, atomi mondatok. A predikátumok tetszőlegesen sok argumentummal rendelkező mondatismák. A függvényekhez hasonlóan az argumentumok sorrendje rögzített, sorrendtől függ a jelentése, azaz sorrendhelyesen értelmezendő – hiszen világos különbség van, és kell legyen a között, hogy „Miklós anyja Mária” vagy „Mária anyja Miklós”.

Predikátumok nevek közötti viszonyt jeleznek meghatározásunk szerint, ugyanakkor a nevekbe beletartoznak a változók is, ilyen módon individuumok halmazáról is tehetünk állításokat. Önálló jelentéssel azonban a változó nem bír, csak valamely értéke – így célszerűnek látszik meghatározni, hogy konkrétan milyen értékre értelmezzük az állítást. Az értékészletre vonatkozó megszorító állításokat kvantoroknak nevezzük. Ilyenek a természetes nyelvben a „minden”, a „van olyan”, de még az „az, aki” típusú szerkezetek is. Ha egy mondatban minden változó legalább egy kvantor korlátozó hatálya alá esik, akkor zárt mondatról, ellenkező esetben nyílt mondatról beszélünk. Nyílt mondatokról az információ-visszakeresés témakörében, vagy a természetes nyelvi leírások kapcsán a továbbiakban nem esik szó, nem tartjuk lényegesnek részletes tárgyalását.

Összefoglalóan:

<i>bemenet/kimenet</i>	név	mondat	értékkorlátozás
<i>nevekből</i>	funktorok	predikátumok	kvantorok ¹
<i>mondatokból</i>	kvantorok	mondatfunktorok	

A logikai leírásunk célja az, hogy a természetes nyelvet univerzálisan, gépi megértésre alkalmasan formalizálja. A formalizálás egy nyelvtan vagy grammatika megteremtése, amelyben adott szavak vannak és benne mondatképzési szabályokat definiálunk. A formalizált alak nyelvfüggetlen kell legyen, de nem lesz értelmes, „beszédese” – tehát csak az eredetileg leképezendő mondat ismeretében tudjuk pontosan megmondani, mit jelent az adott logikai kifejezés. Viselkedése, igazságtartalma azonban az eredetivel azonos kell legyen – erről nyelvtanhoz tartozó (ki)értékelési szabályrendszer (módszer), azaz egy interpretáció vagy struktúra gondoskodik. Következésképpen a gépi következtetés és „megértés” szükségszerűen nem „felfogás” vagy érzékelés, hanem hasonló tulajdonságokból levont kizárólag nyelvi

¹Elsősorban neveken értelmezzük, de a magasabb rendű logikák esetében változószimbólum jelölhet predikátumot is – így értelmezhetők rá a kvantorok.

következtetés, azonos helyzetekben, azonos értékelési formákkal. Ennek megfelelően a bármely információt visszakereső rendszer helyes matematikai modellje logikus, törvényszerű eredményeket fog szolgáltatni, de nem várható el tőle az ésszerűség.²

A jelöléseket illetően az individuumok jelölésére használt ún. konstansszimbólumokat kisbetűvel írjuk, míg a változószimbólumokat nagybetűvel. A predikátumokat és funktorokat jelölő predikátumszimbólumokat és függvényszimbólumokat szintén kisbetűvel írjuk, argumentumait vesszővel választjuk el és zárójelek közé írjuk. A függvény- és predikátumszimbólumokat a logikai szerkezetben meghatározott helyük egyértelműen azonosítja, nem összekeverhetők.

3. Az extenzionális logika

Az extenzionális logikában minden szimbólum pontosan ugyanazt jelenti bármely előfordulásában, tehát semmiféle bizonytalansági tényezőt nem kell erre vonatkozóan figyelembe vennünk. Ez egyben azt is jelenti, hogy kizárólag olyan állításokkal dolgozunk, amelyek tények, bizonyosan eldönthetőek ismereteinkből.

3.1. Az állításlogika

A legegyszerűbb extenzionális logika az állításlogika. Az állításlogikában a nevek csak konstansszimbólumokból állnak, tehát nincsenek benne változók - ennek megfelelően a kvantorok sem értelmezettek. Az állításlogikában értelmezzük a mondatfunktorok közül a tagadást és az "és" kapcsolatot - az összes többi lényegesebb mondatfunktor kifejezhető e kettő segítségével. A függvények és a predikátumok száma tetszőleges lehet - egy-egy állításlogikai nyelvet csak ezek alapján tudunk megkülönböztetni. Az állításlogika nagyon jól alkalmazható az adattárolás területén, de egyszerű logikai következtetések ellenőrzésére is. A legtöbb adatbázis-kezelő adatdefiníciós nyelve állításlogikán alapszik. Az állításlogika azonban önmagában nem alkalmas visszakeresésre, ehhez szükségünk lenne már az individuumok halmazának ábrázolására - a változókra és a kvantorokra is.

3.2. Az elsőrendű logika

Az elsőrendű logika névterében az individuumokat jelölő konstansszimbólumok valamilyen, nem feltétlenül véges és a változószimbólumok végtelen halmaza található. Az elsőrendű logika nyelvtanában névfunktorok is vannak. A konstansszimbólumok és a változók mindegyikét termnek nevezzük, továbbá ha f egy n -változós névfunktor megvalósulása - azaz f egy függvényszimbólum -, és $t_1, t_2, \dots, t_n$ termek, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is egy term. Legyen a nyelvünkben értelmezve az „és” kötőszónak megfelelő „ $\wedge$ ”, a tagadásnak - azaz a „nem” szónak - megfelelő „ $\neg$ ”, a „vagy” kötőszónak megfelelő „ $\vee$ ”, a „ha ... , akkor ...” nyelvtani szerkezetnek megfelelő „ $\Rightarrow$ ” szimbólum; továbbá a kvantorok közül a „minden” kifejezésnek megfelelő „ $\forall$ ”, a „létezik olyan” kifejezésnek megfelelő „ $\exists$ ” szimbólum, és végül a predikátumszimbólumok valamely véges halmaza. A mondatképzési szabályaink pedig legyenek a következők:

1. Ha p egy predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \dots, t_n$ termek, akkor $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ egy formula (mondat).

²Isaac Asimov nyomán.

2. Ha φ egy formula, akkor $\neg\varphi$ is egy formula.
3. Ha φ_1 és φ_2 egy-egy formula, akkor $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ is egy-egy formula.
4. Ha φ egy formula és X egy változó, akkor $\forall X\varphi$ és $\exists X\varphi$ egyaránt formulák.

Hasonlóan a termék definíciójához a formulák – azaz a mondatok – meghatározása is rekurzív. A nyelvtan segítségével most már tetszőleges elsőrendű logikai mondatot elő tudunk állítani. A mondataink igazságtartalmát azonban még nem tudjuk ábrázolni. Hasonlóan a valósághoz, bizonyos állítások, amelyek egyetemlegesen igazak és vannak bizonyos állítások, amelyek csak egy-egy helyzetben vagy nézőpontban igazak. Ezeket a bizonyos nézőpontokat nevezzük interpretációnak vagy struktúrának; az olyan állításokat, amelyen minden struktúrán igazak, azokat pedig logikai igazságoknak.

Hogyan lehet matematikailag megragadni a struktúrát? A struktúra alatt értsük az individuumok egy U halmazának és egy olyan ϕ függvény párosát, amely valamilyen értékeket rendel a nyelv termjeihez és predikátumaihoz, az alábbiak szerint:

- Ha c egy konstansszimbólum, akkor $\phi(c) \in U$.
- Ha p egy 0-argumentumú predikátum, akkor $\phi(p)$ a 0, 1 (hamis, igaz) igazságértékek egyike.
- Ha p egy n -argumentumú predikátum, ahol $n \geq 1$, akkor $\phi(p)$ az U elemeiből képzett rendezett n -esek egy halmaza.

Vezessünk be a nyelvtani elemek „értékelésére” egy ν -függvényt. Ahogy korábban említettük, formuláink zártak, azaz minden változószimbólum valamely kvantor hatáskörében áll. A mondatok egy ν értékeléséről tehát a következőt mondhatjuk el:

1. Ha c egy konstansszimbólum, akkor $\nu(c) = \phi(c)$.
2. Ha p egy 0-argumentumú predikátum, akkor $\nu(p) = \phi(p)$.
3. Ha p egy n -argumentumú predikátum, ahol $n \geq 1$, $t_1, t_2, \dots, t_n$ termék, akkor $\nu(p(t_1, t_2, \dots, t_n))$ akkor igaz – azaz egyenlő 1-gyel –, ha $\langle \nu(t_1), \nu(t_2), \dots, \nu(t_n) \rangle \in \phi(p)$, ahol $\langle \nu(t_1), \nu(t_2), \dots, \nu(t_n) \rangle$ egy rendezett n -es.
4. Ha φ egy formula, akkor $\nu(\varphi) = 1 - \nu(\neg\varphi)$
5. Ha φ_1 és φ_2 egy-egy formula, akkor $\nu(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 1$, ha $\nu(\varphi_1) = \nu(\varphi_2) = 1$, 0 máskülönben.
6. Ha φ_1 és φ_2 egy-egy formula, akkor $\nu(\varphi_1 \vee \varphi_2) = 0$, ha $\nu(\varphi_1) = \nu(\varphi_2) = 0$, 1 máskülönben.
7. Ha φ_1 és φ_2 egy-egy formula, akkor $\nu(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = 0$, ha $\nu(\varphi_1) = 1$ és $\nu(\varphi_2) = 0$, 1 máskülönben.
8. Ha φ egy formula és X egy változó, akkor $\nu(\forall X\varphi) = 0$, ha van olyan $u \in U$, amelyre $\nu(\varphi(X = u)) = 0$, ahol $\varphi(X = u)$ azt jelenti, hogy X minden φ -beli előfordulásának helyébe u -t írunk.
9. Ha φ egy formula és X egy változó, akkor $\nu(\exists X\varphi) = 1$, ha van olyan $u \in U$, amelyre $\nu(\varphi(X = u)) = 1$, ahol $\varphi(X = u)$ azt jelenti, hogy X minden φ -beli előfordulásának helyébe u -t írunk.

Ha vesszük a nyelv formuláinak valamely Σ halmazát, akkor a Σ halmazt kielégíthetőnek nevezzük, és azt mondjuk, hogy van modellje, amennyiben van olyan struktúra és értékelés, azaz egy modell, amelyben a Σ halmaz minden eleme igazzá tehető, azaz 1-gyel egyenlő. Egy formulahalmaz szemantikus következményének nevezzük a φ formulát, amennyiben az adott $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ halmaz nem kielégíthető. Ha Σ formulahalmaz üres, akkor logikai igazságokról beszélünk. A szemantikai következmények megállapításához tehát mindenképpen szükségünk van a modell teljes körű – így valamennyi, az egyes predikátumokat és formulákat kielégítő értékek – ismeretére is. A megközelítés ezért nevezik modellelméleti felépítésnek.

Az elsőrendű logika felépítését azonban más megközelítésben is elképzelhetjük. Az elképzelés alapelve szerint a nyelvtani szabályokból képezhetők olyan sémák, amelyeket akármilyen formulával töltenénk is ki, minden esetben igaz állítást eredményeznének. Ezeknek egy minimális halmazát nevezzük alapsémáknak vagy axiómarendszernek. Az alapsémákba, vagy azok egymásba ágyazásával nyert sémákba behelyettesített formulák (illetve azok „ $\forall$ ” kvantorral vett lezártjaik) az alapformulák. Természetesen minden alapformula logikai igazság – a definíció szerint. Ha Σ egy formulahalmaz, és φ pedig egy tetszőleges formula, akkor a Σ formulahalmaz szintaktikus következmények mondjuk a φ formulát, amennyiben:

1. alapformula, vagy
2. $\varphi \in \Sigma$, vagy
3. ha $\varphi' \Rightarrow \varphi$ és φ' egyaránt szintaktikus következményei Σ formulahalmaznak.

A 3. pontban leírt szabály a modus ponens. A szintaktikus következmény mint fogalom csak a nyelvtani szerkezettel foglalkozik, bizonyos ismeretek fennállásából kiindulva. Lényegében tehát igaz állításokból állít elő (újabb, esetleg még nem ismert) igaz állításokat az alapsémák és a modus ponens alapján; azaz bizonyítást végez. A megközelítést ezért nevezik bizonyításelméleti felépítésnek.

Ismert tény, hogy a bizonyításelméleti és a modellelméleti megközelítés megfeleltethető egymásnak, tehát szemantikai következmény, szemantikai igazság előállítható algoritmussal, a szintaktikai sajátosságok felhasználásával. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy azt mondjuk, az elsőrendű logika teljes. A teljesség a gépi feldolgozásnál fontos, bár nem elengedhetetlen követelmény. Fontos, mert a bevitt adatoknál, információknál sok esetben többet szeretnénk előállítani – és arra törekszünk, hogy valamennyi (nem ismert) igaz állítás előállítható legyen. Ugyanakkor nem elengedhetetlen, mivel a minőség és a hatékonyság sokszor fontosabb tulajdonság a „mindenhatóságnál” – általában pedig kölcsönösen kizárják egymást.

Az elsőrendű logikai rendszerek teljességére vonatkozóan két negatív tézist is ismerünk. Az egyik az ún. Gödel-féle inkomplettségi tétel, amely szerint kellően nagy kifejezőerejű, ellentmondásmentes és zárt rendszerek esetében nem adható meg véges axiómarendszer. A másik ennek egyfajta következménye, amit Church tézisének nevezünk; ha véges axiómarendszer meg is adható egy kellően nagy kifejezőerejű, ellentmondásmentes és zárt rendszerhez, akkor sem eldönthető egy ilyen modell, azaz nincs semmilyen garancia arra, hogy egy számítógép, pontosabban egy ún. Turing-gép mindenképpen befejezi a futását bizonyos problémák megoldásának keresésekor. Mivel az ellentmondás-mentesség nélkülözhetetlen tulajdonság, a véges axiómarendszer legtöbbször a hatékonyság záloga, a zártság elhagyása pedig komoly ábrázolási nehézségeket vetne fel, így a kifejezőerőből célszerű ésszerű keretek között engedni. Ennek megfelelően a legtöbb esetben az elsőrendű logikai modellek valamilyen részhalmazára, korlátozására szorítkozunk.

3.3. A magasabb rendű logikákról

Az elsőrendű logika kifejezőereje bár meglepően sok esetben kielégítőnek bizonyult, azonban számos alkalommal szükség van valamilyen kiterjesztésére is – leggyakrabban a rekurzív, vagy öröklődő tulajdonságok logikai megfogalmazásakor. Vizsgáljuk meg például, hogy hogyan definiálnánk az emberek közötti „őse” kapcsolatot matematikai formulával! Világos, hogy X személy akkor őse Y személynek, „ha X közvetlen szülője, vagy Y valamely szülőjének szülője, vagy Y valamely szülőjének szülőinek a szülője, ...” A megfogalmazás korlátlan hosszú logikai „vagy” kapcsolatot igényelne. Hogy véges hosszú alakban felírassuk próbáljuk meg a résztulajdonságokat, az öröklődő tulajdonságokat megragadni.

Az olyan tulajdonságokat, amelyek szülőről gyermekre öröklődnek foglalkozunk az „öröklődő” (*inherited*) predikátumszimbólumba, majd ennek segítségével írjuk fel a az „őse” (*ancestor*) kapcsolatot:

$$\begin{aligned} inherited(p) &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X \forall Y \quad p(X) \wedge parent(X, Y) \Rightarrow p(Y) \\ ancestor(X, Y) &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p \quad inherited(p) \Rightarrow (p(X) \Rightarrow p(Y)) \end{aligned}$$

Behelyettesítve a „öröklődő” (*inherited*) predikátumot a meghatározásával, zárt formulát kapunk. Azonban a formulában olyan változót helyeztünk kvantor hatáskörébe, amely valójában nem individuumok egy halmazát, hanem predikátumok egy halmazát jelöli.

A másodrendű logika voltaképpen az elsőrendű logikai olyan kiterjesztése, amelyben a változók jelölhetnek predikátumok vagy névfunktorok egy-egy csoportját. Minden mást tekintve azonos az elsőrendű logikával. A másodrendű logikában azonban már elvi értelemben sem lehet olyan bizonyításelméleti megközelítést adni, amely a modellelméleti társának kifejezőerejét megközelítené, emiatt igen nehéz következtetés útján bármiféle új, az információs rendszerbe előzetesen be nem vitt megismerésre szert tenni a másodrendű logika segítségével. Természetesen, a másodrendű logika kiterjeszthető magasabb rendű logikává, egyre összetettebb fogalmak leírására alkalmassá téve azt. Ilyen fogalom lehet például a „valamely diák”, „minden orvos”, „a felvételizők többsége”, „négy muskétás” stb. A magasabb rendű logikákra vonatkozóan szintén nem adható olyan bizonyításelméleti eszköz, amely a modellelméleti megközelítéssel azonos kifejezőerejű lenne, hiszen már a másodrendű logikában sem lehetséges ez, amely részhalmazát képezi a magasabb rendű logikáknak.

3.4. A többértékű logika

Az elsőrendű logikában kétféle igazságértéket különböztettünk meg; az igaz és a hamis értékeket, amelyeket rendre 1 és 0 számjegyek szimbolizáltak. Nyilvánvalóan, ami nem volt igaz, azt szükségszerűen hamisnak tekintettük. A beszélt nyelvben azonban a tagadás sokszor nem jelenik meg ilyen élesen. Gondoljunk csak a híres mondásra, miszerint „aki nem velünk van, az ellenünk”. Az állítás sarkított, mondjuk azt, hogy nem igaz, hiszen szó sincs arról, hogy csak ez a két lehetőség állna fenn – az, hogy valaki nem velünk tart, még nem szükségszerűen van ellenünk, lehet közömbös résztvevője is az eseményeknek. De hasonlóan jól ismert, hogy ha a barát és ellenség fentiekben élesen megállapított modelljét vennénk, akkor a barát barátja és az ellenség ellensége sem biztos, hogy barát vagy éppen ellenség.

Megfigyelhető, hogy az igazságértékek azért nem egymás ellentétei a fenti példákban, mert egy adott állítást közvetve, állítással tagadtunk, nem pedig a már jól ismert „nem” tagadószóval. A többértékű logikák eredményei javarészt az ún. modális logikában jelentek meg teljes formájukban – részletes további tárgyalását ehelyütt nem folytatjuk.

4. A leíró logika

Az extenzionális logikák esetében felmerülhet valamiféle hiányosság bizonyos individuumok megnevezésekor. Milyen hiányosságokról lehet szó? Vegyünk egy állítást, amely szerint „Az ügynök, aki Amálkát alkalmazta, csak képzett titkárnőket alkalmazott”. Logikus lenne arra következtetni, hogy Amálka képzett titkárnő. De hogyan lehetne ezt bizonyítani? Bármilyen formális felírást is tennénk az ügynök személyének meghatározásában, bizonytalanságot tapasztalhatunk, hiszen nem tudjuk, hogy pontosan kiről van szó, csak azt, hogy egyértelműen meghatározott a személye. Talán a legötletesebb a mondat ábrázolására az alábbi implikáció felírása:

$$\forall X(c = \text{ügynök, aki Amálkát alkalmazta}) \wedge \text{alkalmazta}(c, X) \Rightarrow \text{képzett titkárnő}(X)$$

Ez az „az, aki” vagy „az, ami” egy logikai operátor – amely tehát (nyitott) mondatokból képez nevekre. Ilyen tulajdonságú logikai elemünk az extenzionális logikában nem volt – szükségszerűen nem lehet névfunktor, sem konstansszimbólum, se predikátum. Jobb híján kvantornak tekintjük és leírónak vagy deskriptornak nevezzük, és **I**-vel jelöljük. A fenti példában a *c* meghatározása a következőképpen nézhet ki:

$$\mathbf{I}Y \quad \text{ügynök}(Y) \wedge \text{alkalmazta}(Y, \text{Amálka})$$

Szemantikai értelemben a leírónak csak abban az esetben van értelme, ha az egyetlen individuumot jelöl. Mindent összevetve a leíró logika voltaképpen extenzionális logika, ugyanakkor valamilyen bizonytalanság már megjelent a formális megfogalmazásban, nem feltétlenül vagyunk teljes mértékben tisztában azzal, hogy kiről állítunk valamit mondatainkban. Ilyen értelemben a leíró logikát az extenzionális és az intenzionális logika közötti valamiféle átmenetnek tekintjük.

Felvetődik a kérdés, hogy mi történik a leírónkkal abban az esetben, ha a „leírás” egyetlen egyet sem, vagy egynél több individuumot jelöl. A nyelvtanilag jól képzett mondatainkban ilyenkor értékrés keletkezhet. Például az a név, amelyet a „Bálint testvére” kifejezés jelöl voltaképpen lehet nem létező személy is bizonyos struktúrákban, de lehet egynél több személy meghatározása is. Nincs garancia, hogy egyetlen személyről beszélünk – ezért hallgatólagosan ezt mindenképpen feltesszük.

A helyzet kicsit bonyolódik, amennyiben az ilyen formulákat értékelünk. Vegyük például a „jelenlegi francia király kopasz” állítást. Egyfelől jelenleg Franciaországnak nincs királya, következésképpen az állítás lehetne hamis, ha logikai „és” kapcsolatot tennénk fel a kopaszságra vonatkozó állítás és a „jelenlegi francia király” meghatározás között. Ha a „ha ..., akkor ...” szerkezetben gondolkodunk, akkor az állítást tekinthetjük igaznak. De ebben az esetben az állítás tagadása, miszerint nem kopasz ill. nem a jelenlegi francia király kopasz igaz ill. hamis kellene legyen – holott ez sem (feltétlenül) van így. Az ilyen jellegű problémák feloldására fogalmak, leírások összevonását eszközölték. Ez annyit tesz, hogy az azonos individuumok leíró ábrázolását egyetlen fogalomba tömörítik, amely a továbbiakban már valóban egyetlen tényleges értékkel, ábrázolással bír, függetlenül attól, hogy a fogalom ténylegesen hány lehetséges leírást foglal magába.

A leíró logika teljes – azaz a modellelméleti és a bizonyításelméleti felépítése kölcsönösen megfeleltethetőek egymásnak. Az újabb kutatások nagy hangsúlyt fektetnek arra – főleg a tudásbázisok tervezői esetében –, hogy a leíró logika megfelelő bizonyításelméleti algoritmusai milyen hatékonysággal valósíthatók meg. Az elsőrendű logikához hasonlóan itt is elmondható, hogy egy minden helyes választ előállító, ma ismert legjobb algoritmus esetében az eldönthetőségnek elvi akadálya nincs – csak a válaszidő irreálisan nagy.

A leíró logika alkalmazása az információs rendszerek területén még mindig töretlen fejlődést mutat. Leginkább ún. ontológiák leírására alkalmazzák. Erre vonatkozóan lásd még a DAML+OIL ontológia leíró nyelvvel foglalkozó részeket a szemantikus háló témakörében.

5. Az intenzionális logika

Az intenzionális logikában megjelenik egy olyan operátor, amely valamely állítás igazságértékét módosítja, így egy-egy állítás értékelése nem lehetséges önmagában, a környezetéből részben vagy egészen kiragadva. Az operátor tehát szükségszerűen mondatfunktort a meghatározás szerint. Milyen nyelvtani szerkezetek bírnak ilyen tulajdonsággal? Például: „a brit miniszterelnök lehetne munkaspárti”, „a halak szükségszerűen kopolyúsak”, „a mohamedánok lehetnek többnejűek”, „mindig tudtam, hogy egyedül leszek”, „Béla azt hiszi, András járt Csillánál”. Az intenzionális logikák közül a legrégebbit, egyszersmind a legegyszerűbbet; az ún. modális logikával ismerkedünk meg.

5.1. Modális logika

A modális logikában mindössze néhány egyargumentumú intenzionális mondatfunktort különböztetünk meg az elsőrendű logika kiterjesztéseként. Ezek rendre a „lehetséges”, a „lehetetlen”, a „szükségszerű” és az „esetleges” szavak megfelelői. Általában két mondatfunktort is elegendő a fentiek kifejezésére. Az első ilyen egyargumentumú mondatfunktort olvassuk ki „szükségszerű, hogy” formában és jelöljük „ $\Box$ ” szimbólummal. Mivel a modális logika az elsőrendű logika kiterjesztése, így rögtön élhetünk egy törvénnyel, miszerint ha egy φ állítás logikai igazság, akkor $\Box\varphi$ is az. Továbbá az is igaz, hogy ha

$$\Box(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\Box\varphi_1 \Rightarrow \Box\varphi_2)$$

Vezessük be ezek után a logikai „nem” segítségével a „lehetséges, hogy” egyargumentumú mondatfunktort is, amelyet a „ $\Diamond$ ” szimbólum fog jelölni:

$$\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$$

azaz a φ lehetséges, amennyiben a tagadása nem szükségszerűen igaz. Világos, hogy a két mondatfunktort nem lehet extenzionális, hiszen a φ állítás valamilyen igazságértékeléséből nem következik sem a szükségszerűen, sem a lehetségesen igaz ill. hamis állítás. Bizonyos tekintetben tehát független az állítás értékelése az új mondatfunktorkok használatának bevezetésével nyert állítás értékelésétől.

Bár a definíciókban a modális logika szakértői megegyeznek – látszólag meglehetősen egyszerűek is – jelentéstartalmán azonban már közel sincsenek azonos állásponton. Gondoljuk csak végig, hogy ha azt állítanánk, hogy „Magyarország fővárosa Budapest” az szükségszerű vagy lehetséges állításnak tekintenénk-e. Általában fogalmazzuk meg úgy, hogy akkor tekintünk valamit szükségszerűen igaz állításnak, ha a világ állapota alapvetően megrendülne, ha hamis lenne. Véletlenszerűen pedig akkor igaz, ha lehetne hamis is anélkül, hogy a világ állapota lényegében megrendülne. Ennek megfelelően a „Magyarország fővárosa Budapest” állítást lehetségesen igaznak tekintjük, habár a konkrét használat még ebben az esetben is kissé homályos.

Az elképzelést finomítsuk tovább. Általában, ha egy állítást cáfolni szeretnénk, akkor azt eljárást szoktuk követni, hogy vesszük a feltételek teljes halmazát, amelyek egy adott világban teljesülnek – és

megmutatjuk, hogy a konklúzió nem állja meg a helyét ebben a világban. Sok esetben nem is kell, hogy létező világ legyen, amit leírunk, csak „lehetséges”. Ezt a módszert próbáljuk meg alkalmazni a modális logikára vonatkozóan. Tekintsük a lehetséges világok egy teljes rendszerét, és tegyük fel, hogy egy-egy lehetséges világ egy gráf valamelyik csúcspontja, megfelelő címkével ellátva. Továbbá tegyük fel, hogy egy-egy gráf pontból irányított élt húzunk egy másik felé, ha az hasonló hozzá, bizonyos értelemben alternatívája – azaz minden törvényszerűség ugyanaz benne, ha egyes állítások más értékeléseket is kaphatnak. Ilyen törvényszerűségek lehetnek például a fizikai törvényszerűségek, akárhány elképzelhető földi világban.

Irányított gráfot kaptunk, tehát az élek olyan relációt jelképeznek, amelyek nem szükségszerűen szimmetrikusak, se nem feltétlenül tranzitívek. Ezek alapján azt mondjuk, hogy egy állítás szükségszerűen igaz, ha minden hasonló világban az állítás igaz. A lehetségesen igaz állítás meghatározása a fentebbi definíciókból már előáll. Érdekességképpen megemlíttjük, hogy ez a szerkezet lehetővé teszi az intenzionális mondatfunktorok halmazát, amely önálló jelentéssel és igazságértékeléssel bírnak.

A modális logikához – a lehetséges világok elméletét figyelembe véve – szerkeszthető olyan bizonyításelméleti megközelítés, amely helyes és teljes a modelleméleti felépítésére nézve. A megoldás bonyolultság és a fejezet más irányú indíttatása miatt ennek részletes tárgyalásától eltekintünk. Megjegyezzük azonban, hogy a modális logika alkalmazása az információ-visszakeresésben főleg a fogalmi hálók és a tématerképek területén bevett gyakorlat.

6. Helyzetképelmélet

A helyzetképelmélet egy teljesen új kezdeményezés, elsősorban Fred I. Dretske új, filozófiai nézőpontjára alapozva. Első matematikai formalizálásának leírása 1983-ból való, Jon Barwise és John Perry nevéhez fűződik. Dretske szerint az érzékelés, felfogás és értelmezés – legalábbis, amit általában ennek nevezünk – egy „analóg” folyamat (kép, szöveg, hang, mimika stb.) része, miközben a konkrét elemi, formalizálható információk szükségszerűen „digitális” (diszkrét) mennyiségek.

Logikai alapegysége az infon. Az infon tetszőleges elemi állítás lehet, ami ugyanannak a valóság részletnek többféle leírásában is azonos alakot kell, hogy jelentsen. Példának okáért „Anita szép kutyával ajándékozta meg Bulcsút” (mondja Csenge), a „szép kutyát ajándékoztam Bulcsúnak” (mondja Anna) és a „szép kutyát kaptam ajándékba Anitától” (mondja Bulcsú) ugyanazon infon többféle megfogalmazása. Az infon elemei tehát állnak egyfelől individuumokból, amelyekről feltesszük, hogy minden körülmények között invariánsak és megkülönböztethetőek. Az individuumok között pedig valamilyen tulajdonság vagy kapcsolat áll fenn, amely megfeleltethető egy megfelelő argumentumú predikátumnak. Az infon formalizált alakjában végeredményben pontosan olyan predikátumhoz juthatunk, mint például az állításlogika esetében – azzal a különbséggel, hogy az állítás és a tagadás ténye szorosan kapcsolódik az infonhoz, azaz nem tekintjük a tagadást mondatfunktornak, továbbá nem vizsgáljuk, ha úgy tetszik nincs igazságértékelése az infonnak.

Egy-egy infon térben és időben is elhelyezett, rendezett. Tehát minden infonhoz mint eseményhez rendelhető egy téridő vektor. Az egyes vektorkomponensek parciális függvényeknek tekinthetők és különféle viszonyt leíró kapcsolatot definiálhatunk közöttük. Egyfelől az idő dimenzióban értelmezzük az „(időben) megelőzi” relációt, másfelől az egyes dimenziók tartományára megkülönböztetjük az átfedési és a tartalmazási relációkat. Fontos megjegyezni, hogy az infon önmagában ilyen információt nem tartalmaz,

tehát az „Anita szép kutyát ajándékozott tegnap Bulcsúnak” szintén a fenti példákkal azonos infont jelenti.

A helyzetképelmélet másik központi fogalma a helyzetkép vagy szituáció, amely a valós világ valamely részletét ragadja ki. A helyzetkép Dretske szerint „analóg” fogalom, információs rendszerek esetében azonban diszkrét mennyiségnek feltételezzük. Az infon és a helyzetkép közötti relációt tartalmazásnak nevezzük – azt mondjuk, hogy egy adott helyzetkép (nem) tartalmazza vagy magában foglalja (nem foglalja magában) az adott infont. Természetesen, ez egy igazságértékelésnek felfogható. A helyzetképek között a tartalmazáshoz hasonló rendezési reláció is definiálható, amely megmondja, hogy melyik szituáció foglalja magában a másik szituációt. A helyzetképeket koherensnek tesszük fel, azaz semelyik infonnak nem jelenik meg egyszerre állításként és tagadásként is alakja egy helyzetképben.

A infonok sokszor hasonló állítást írnak le, mint más infonok, legfeljebb egy-egy részlet – például egy-egy benne szereplő individuum (neve) változik. Ennek megfelelően az infonok osztályozhatóak aszerint, hogy milyen sémába illeszkednek bele. Például a „Budapest felett derült az ég”, a „Berlin felett derült az ég” és a „London felett derült az ég” azonos sémába illeszkednek, de különböző infonokról van szó. Ezeket a infonsémákat nevezzük típusoknak. Két típus, φ és ϕ között értelmezhetünk egy kényszert vagy viszonyt, amit $\varphi \rightarrow \phi$ -vel jelölünk; és ami azt fejezi ki, hogy egy adott s_1 helyzetkép ϕ típusa egy s_2 helyzetkép φ típusú infonjának létezését állítja. Az információ-visszakeresésben ez a reláció feleltethető meg (formálisan) a relevancia fogalmának.

A helyzetképelmélet nem egy matematikai értelemben vett logikai apparátus – ennek megfelelően nem rendelkezik konkrét bizonyításelméleti megközelítéssel. Törekvések ugyan vannak ilyenek kidolgozására. Az elmélet célja elsősorban az, hogy az információk leírása és elhelyezése megfelelő, egyszerű formalizálással előállítható – és visszakereshető – legyen, de nem törekszik igazságértékek előállítására. Összefoglalva: az alkalmazási területe főleg az információfeldolgozás és -leképezés (szemantikai) helyességének ellenőrzése, a relevancia abszolút mérhetősége lehet.

7. Logikai modellek az információ-visszakeresésben

Az információ-visszakeresési modellben egy meghatározott kérdésre vonatkozóan az arra válaszoló vagy azzal kapcsolatos dokumentumok egy halmazát szeretnénk meghatározni. Ha a kérdés logikai formula – amely az esetek túlnyomó többségében igaz –, akkor olyan dokumentumokat keresünk, amelyben a kérdés mint logikai formula igazzá tehető a dokumentumok tartalma alapján. Kínálkozik a lehetőség, hogy valamilyen következményfogalommal azonosítsuk a válaszadást. A legegyszerűbb modellben legyen D mondatok valamilyen halmaza, amely a dokumentumot, és q legyen egy logikai mondat, amely a kérdést jelöli. Ennek megfelelően az olyan D dokumentumokat keressük, amelynek szemantikai következménye a q kérdés – azaz D minden modelljén q igaz. Egy-egy visszakeresés jósága leginkább azon múlik, hogy D és q milyen formalizált alakját tudjuk összevetni egymással.

Példának okáért, ha D -t és q -t úgy tekintjük, mint szavak logikai „és” kapcsolatával előálló mondatok halmazát, akkor a modellünk lényegében a Boole-moddellel lesz azonos, feltéve persze, hogy különböző alakú szavak különböző individuumokat jelölnek. A Boole-moddellek, ahogy azt korábban is láthattuk számos hiányossága akad. A megállapítást a logikai modellek ismertetésével tovább általánosíthatjuk. Az elsőrendű (extenzionális) logikai modellek alkalmazásával nem vagyunk képesek megragadni:

- Független állítások szemantikai következménye nem kizárható. Azaz, ha q egy logikai igazság,

akkor bármely D dokumentum szemantikus következménye is egyben. Az ilyen, vagy ehhez hasonló triviális esetek szűrése mindenképpen célszerű és szükséges.

- A többszörösen előforduló elemek súlyozását, hiszen a $\varphi \wedge \varphi \iff \varphi$. Ugyanakkor a magasabb rendű logikákban ez már megoldható, csak hogy ott meg számíthatósági problémákkal kell megküzdünk.
- Nehéz megragadni az azonos alakú szavak közötti jelentésbeli különbségeket – ha úgy tetszik a szavak intenzióját. A pontos jelentés csak a szövegkörnyezetből derülhet ki, tehát valamilyen intenzionális operátort kell tudni bevezetni. Az ilyen jellegű problémák megoldását az eddig tárgyalt matematikai módszerek nem teszik lehetővé, ehhez az információábrázolás egy tágabb definíciójára – például ún. helyzetelemzésre, vagy ún. információfolyam modellezésre – van szükség.
- Egy-egy dokumentumban található állítás olykor csak részlegesen, vagy más dokumentumban található információk alapján értékelhető ki. Ilyen bizonytalanságot ugyan a többértékű logika képes kezelni, de az elsőrendű logika kereteibe ez nem illeszthető természetes módon bele.
- Megjelenhet további értelmezési bizonytalanság egy-egy dokumentum formalizálása esetén, amely a tartalmazási relációk természetes nyelvi elmosódásából ered. Olyan esetekre kell itt gondolni, amikor például a madarak repülési képességeiről állítunk bizonyos dolgokat – miközben köztudomásúan van néhány olyan madár, amelyik nem repül. Ha a struccokról, esetlegesen azok (valamikori) repülési képességeiről keresünk dokumentumokat, akkor a „strucc egy madár” (igaz) állítás figyelembe vétele megkérdőjelezhető (konkrét környezetekben). Ilyen bizonytalanságok kifejezésére nem alkalmas közvetlenül az elsőrendű logika, azonban a nem monoton következtetések segítségével, megfelelő algoritmussal és adatábrázolással beleilleszthető.
- Hasonlóan kellemetlen problémával állunk szemben, ha rokon értelmű, vagy más nyelven, de ugyanaz a szó szerepel különböző logikai állításokban. A rokon értelmű szavak összekapcsolására a leíró logika ad lehetőséget – amely szintén túlmutat az elsőrendű logika keretein.

8. Összefoglaló

A fejezetben arra kerestük a választ, hogy milyen nyelvi, nyelvtani szerkezetek ragadhatóak meg logikai eszközökkel, milyen hatékonysággal. A logikai rendszerek általában az elsőrendű logikát próbálták meg kiterjeszteni – sok esetben arra visszavezethető módon. Mindenképpen megállapíthatjuk, hogy bár a természetes nyelvi elemek javarészt lefedhetőek különböző logikai formalizmusok segítségével, egységes, könnyen modellezhető és számítható (vagy éppen eldönthető) matematikai rendszer jelenleg nem áll rendelkezésünkre. Ez mindenképpen arra kell, hogy ösztönözze az információ-visszakeresés területén kutató szakembereket, hogy több lépcsős, vagy párhuzamos feldolgozást lehetővé tevő rendszereket tervezzenek, illetve alakítsanak ki. A továbbiakban megmutatjuk, hogy milyen – a már ismertett matematikai rendszereket magában foglaló – megoldások, ajánlások keletkeztek eddig.

Hivatkozások

- [1] Baader, F., Nutt, W.: Basic Description Logics. Description Logic Handbook. Cambridge University Press, (2002) pp. 47-100. ISBN 0521-781760.
- [2] Berwise, J., Cooper, R.: Simple Situation Theory and its Graphical Representation. Partial and Dynamic Semantics 3. ed. J. Selignan. Dyana Delivarable, (1991), Edinburgh, UK.
- [3] Cooper, R.: A working person's guide to situation theory. Topics in Semantic Interpretation. ed. S. L. Hansen, F. Sorensen. Samfundslitteratur, (1992), Frederiksberg, Denmark.
- [4] Crestani, F., Ruthven, I., Sanderson, M., Rijsbergen, K.: The troubles with using a logical model of IR on a large collection of documents. TREC-4, (1995), Washington, USA.
- [5] Huibers, T.W.C., Lalmas, M., Rijsbergen, C.J.: Information Retrieval and Situation Theory. SIGIR Forum (30)1, (1996), pp. 11-25.
- [6] Lalmas, M.: Logical Models in Information Retrieval: Introduction and Overview. Information Processing and Management 34(1), (1998), pp. 19-33.
- [7] Pinheiro, F.A.C.: Preliminary Thoughts on Using Situation Theory for Scenario Modelling. IDEAS'2002, (2002), Valencia, Spain.
- [8] Ruzsa, I.: Bevezetés a modern logikába. Osiris kiadó, (2000), Budapest, Hungary, ISBN 963-379-97-83.
- [9] Zalta, E.N. (ed): Stanford Encyclopedia of Philosophy. The Metaphysics Research Lab, Stanford, UK, ISSN 1095-5054.
- [10] Tin, E., Akman, V.: Computational Situation Theory. SIGART Bulletin 5(4), (1994), pp. 4-17.