

Iterációs eljárások nem-lineáris egyenletek megoldására

doktori (PhD) értekezés

Várterész Magda

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Debrecen, 1998

Ezen értekezést a KLTE matematika doktori program informatika alprogramja keretében készítettem 1997-1998 között, és ezúton benyújtom a KLTE doktori Ph.D. fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 1998. július 15.

Várterész Magda
jelölt

Tanúsítom, hogy Várterész Magda doktorjelölt 1997-1998 között a fent megnevezett doktori alprogram keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglaltak a jelölt önálló munkáján alapulnak, az eredményekhez önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 1998. július 15.

Dr. Arató Mátyás
témavezető

Tartalomjegyzék

1. Az érintő-konvexfüggvények módszere	1
1.1. Alapfogalmak, előzmények	1
1.2. Az iterációs alapfüggvény	6
1.3. Hibabecslések, konvergenciarend	12
1.4. Konkrét iterációs alapfüggvények	15
1.5. Néhány alkalmazás	17
1.6. Összehasonlító, értékelő megjegyzések	23
2. Kombinált módszerek	26
2.1. A valós zárt intervallumok IR halmaza	26
2.2. Előzmények	28
2.3. Az ÉKF-NR kombinált eljárások	30
2.4. Az ÉKF-ÉKF kombinált eljárások	33
2.5. Az MKI-MKI kombinált eljárások	35
2.6. Néhány numerikus példa	37
3. Intervallum-iterációk	40
3.1. Intervallumaritmetikai alapfogalmak	40
3.2. A Newton-iteráció intervallumaritmetikai variánsai	43
3.3. A konvergencia gyorsítása	45
Irodalomjegyzék	50
A Summary	52
B Összefoglalás	57

1. Az érintő-konvexfüggvények módszere

1.1. Alapfogalmak, előzmények

Jelölje R a valós számok halmazát, és legyen $f : D \subseteq R \mapsto R$ nem-lineáris, elegendően sokszor differenciálható függvény. Célunk az f függvény zérushelyeinek, azaz az $f(x) = 0$ nem-lineáris egyenlet megoldásainak közelítése. Tegyük fel, hogy ismerjük néhány közelítését f valamely α zérushelyének. Legyenek ezek rendre x_0, x_1, \dots, x_n ($n \geq 0$). Legyen ebből a k ($1 \leq k \leq n+1$) utolsó $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}$. Jelöljük F_n -nel azt a függvényt, mellyel α következő x_{n+1} közelítését képezzük ezekből a közelítésekből és az f függvénynek és deriváltjainak itt számított értékeiből, azaz

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} = F_n(& x_n, f(x_n), f'(x_n), \dots, f^{(l_0)}(x_n), \\ & x_{n-1}, f(x_{n-1}), f'(x_{n-1}), \dots, f^{(l_1)}(x_{n-1}), \\ & \vdots \\ & x_{n-k+1}, f(x_{n-k+1}), f'(x_{n-k+1}), \dots, f^{(l_{k-1})}(x_{n-k+1}), \\ & l_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Az F_n függvényeket **iterációs alapfüggvények**nek, azokat a módszereket, melyek f gyökeit (1) alapján közelítik, k **alappontra támaszkodó iterációs eljárások**nak nevezzük. Ha az iteráció során az alapfüggvények nem változnak, azaz $F_n = F$ minden $n \geq 0$ -ra, **stacionér eljárásról** beszélünk.

A továbbiakban csak az

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} = F(x_n, f(x_n), f'(x_n), \dots, f^{(l)}(x_n)), \\ l \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

alakú, egy pontra támaszkodó, stacionér iterációs eljárásokkal foglalkozunk. A (2) képlet segítségével valamely $x_0 \in D$ kezdőpontból kiindulva képezzük az $\{x_n\}$ **iterációs pontsorozatot**. Ha e sorozat konvergens, akkor x_0 -t a (2) iteráció **konvergenciapontjának**, ellenkező esetben (2) **divergenciapontjának** nevezzük. Ha egy folytonos F iterációs alapfüggvény segítségével

generált $\{x_n\}$ iterációs pontsorozat konvergens, akkor határértéke F -nek fixpontja, azaz ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha,$$

akkor $F(\alpha) = \alpha$. Az F iterációs függvénytől rendszerint megköveteljük, hogy folytonos legyen, és fixpontjai elégítsék ki az $f(x) = 0$ egyenletet.

Az iterációs eljárások gyorsaságának jellemzésére bevezethetjük a **konvergenciarend** fogalmát. Tegyük fel, hogy az iterációs eljárás segítségével előállított $\{x_n\}$ iterációs pontsorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha.$$

Ha van olyan $p \geq 1$ valós szám, melyre létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C > 0$$

határérték általános f függvény mellett, akkor azt mondjuk, hogy az **eljárás p -edrendű**. Az itt szereplő C határértéket **aszimptotikus hibakonstans**-nak nevezzük.

Különböző stacionér iterációs eljárásokat az **információs hatékonyság** fogalmának segítségével hasonlíthatunk össze. Egy stacionér iteráció információs hatékonysága

$$Eff = \frac{p}{h},$$

ahol p az iteráció konvergenciarendje, h pedig az egy iterációs lépésben kiszámításra kerülő új $f^{(j)}(x_i)$ függvényértékek száma, amit az **információfelhasználás mértékének** vagy a **Horner-egységek számának** is szoktak nevezni.

Nagy jelentőségű az egy pontra támaszkodó stacionér iterációk elméletében a J.F. Traub [16] által megfogalmazott következő

1.1. Tétel.

- 1° *tetszőleges (2) alakú iteráció információs hatékonysága legfeljebb 1;*
- 2° *tetszőleges p természetes számhoz található olyan (2) alakú iteráció, melynek konvergenciarendje p , és információs hatékonysága 1;*
- 3° *minden p -edrendű (2) alakú iteráció F alapfüggvénye explicit módon tartalmazza az $f, f', \dots, f^{(p-1)}$ függvények mindegyikét.*

Ezek után azt mondhatjuk, hogy a (2) iteráció **optimális**, ha az információ hatékonysága maximális, azaz $Eff = 1$.

Az egyik legjelentősebb és legtöbbet vizsgált közelítő eljárás az

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterációs alapfüggvénnyel rendelkező Newton-Raphson-módszer. Az eljárás egyszeres zérushely esetén másodrendű és optimális, azonban nem mindig konvergens. Például az x_0 iterációs kezdőpont divergenciapont, ha valamely $n \geq 0$ -ra $f'(x_n) = 0$, és $f(x_n) \neq 0$. A szintén közismert módosított Newton-módszer esetében azonban már nincs ilyen probléma: ha van olyan $M_1 > 0$ valós szám, melyre

$$|f'(x)| \leq M_1, \text{ ha } x \in I = [a, b] \subseteq D,$$

akkor az $f(x_0) \neq 0$ feltételnek eleget tevő, egyébként tetszőleges $x_0 \in I$ kezdőpontból kiinduló, s az

$$F(x) = x - \frac{|f(x)|}{M_1}$$

iterációs alapfüggvénnyel képzett $\{x_n\}$ iterációs pontsorozat monoton csökkenő, és konvergál f -nek az x_0 -tól balra fekvő legközelebbi $\alpha \in I$ zérushelyéhez, ha van f -nek zérushelye az $[a, x_0]$ szakaszban, egyébként pedig $\{x_n\}$ kilép az I intervallumból. (Az

$$F(x) = x + \frac{|f(x)|}{M_1}$$

iterációs alapfüggvény esetében hasonló állítás igaz, csak az iterációs pontsorozat monoton növekedő, és $[x_0, b]$ -beli zérushelyhez konvergál, ha van ilyen.) Ez a módszer tehát az I intervallumban az iterációs kezdőpont választásától függetlenül mindig konvergens. Sajnos azonban, míg a Newton-Raphson-iteráció másodrendű, a módosított Newton-módszer csak elsőrendben konvergál.

A nagymúltú debreceni numerikus matematika kutatócsoportban (Barna B., Szabó Z., Vertse T., Lénárd M. és tanítványaik) Barna B. professzor javaslatára Szabó Z. kezdett el foglalkozni a módosított Newton-módszer konvergenciájának természetéhez hasonló tulajdonságú iterációk vizsgálatával

[12, 13, 14] dolgozataiban. Ezen iterációk számára bevezette a következő definíciót.

1.1. Definíció. Az $F(x; r)$ iterációs alapfüggvény és az általa generált iterációs eljárás az f függvényre vonatkozóan az $I = [a, b]$ intervallumban **mindig konvergens**, ha az $f(x_0) \neq 0$ tulajdonságú, egyébként tetszőleges $x_0 \in I$ kezdőpontból kiinduló, s az $F(x; r)$ alapfüggvénnyel képzett $\{x_n\}$ iterációs pontsorozat

1° *monoton;*

2° *konvergál az f függvénynek az x_0 ponttól jobbra, illetve balra legközelebb lévő $\alpha \in I$ zérushelyéhez - ha ilyen tulajdonságú α egyáltalán létezik - aszerint, hogy az r "irányparaméter" értékét az iteráció során következetesen 1-nek, illetve (-1)-nek választjuk;*

3° *amennyiben ilyen tulajdonságú $\alpha \in I$ zérushely nem létezik, $\{x_n\}$ kilép az I intervallumból.*

Ezek után a módosított Newton-módszerről a következőt mondhatjuk: ha létezik olyan $M_1 > 0$ valós szám, melyre

$$|f'(x)| \leq M_1, \quad \text{ha } x \in I,$$

akkor az

$$F(x; r) = x + r \cdot \frac{|f(x)|}{M_1}$$

iterációs alapfüggvény és az általa generált módosított Newton-módszer f -re vonatkozóan I -ben mindig konvergens.

Szabó Z.-nak [12, 13]-ban sikerült ennél az iterációnál gyorsabb, másodrendű, mindig konvergens iterációs eljárásokat megadnia, melyeket f -et érintő kúpszeletek segítségével generált. Eljárásainak lényege szemléletesen a következő: Módosította a Newton-Raphson-módszert oly módon, hogy az érintés fogalmát megtartva, egyenes helyett az ordinátatengellyel párhuzamos tengelyű alkalmasan választott parabolát, hiperbolát vagy ellipszist illesztett az f függvényhez, annak $(x_0, f(x_0))$ pontjában. Ezen kúpszeletek nagyobbik, illetve kisebbik x_1 zérushelyét választotta az $f(x) = 0$ egyenlet α gyöke új közelítő értékének. Ezt az iterációs lépést megismételte oly módon, hogy az említett görbét párhuzamos eltolással elsőrendben illesztette az f -hez most ennek $(x_1, f(x_1))$ pontjában, és következetesen a kapott kúpszeletnek megint

vagy a nagyobbik, vagy a kisebbik x_2 zérushelyét választotta még újabb közelítésnek, majd hasonlóan folytatta tovább. Így kapott egy iterációs pontsorozatot. Képlet segítségével megadva az érintő-kúpszeletek módszerét, iterációs alapfüggvényként az

$$F(x; r) = x + u(x)v(x) + r \cdot \sqrt{t(x)}$$

függvényt kapta, ahol

$$u(x) = \text{sign}(f(x_0)) \frac{f'(x)}{c},$$

továbbá érintőhiperbola esetén

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f'(x)}{c}\right)^2}}, \quad t(x) = \left(\left|\frac{f(x)}{c}\right| + v(x)\right)^2 - 1,$$

érintőparabola esetén

$$v(x) = \frac{1}{2}, \quad t(x) = \left|\frac{f(x)}{c}\right| + \left(\frac{f'(x)}{2c}\right)^2,$$

érintőellipszis esetében pedig

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f'(x)}{c}\right)^2}}, \quad t(x) = 1 - \left(\left|\frac{f(x)}{c}\right| - v(x)\right)^2,$$

és c alkalmasan választott valós konstans. Szabó Z. [12, 13]-ban az érintő-kúpszeletek módszereinek származtatásán túl konvergenciájuk elégséges feltételeit is megadta, és e módszerek konvergenciarendjeit és információs hatékonyságait is vizsgálta, amit tömören a következő tétel fejez ki.

1.2. Tétel. *Legyen az $f : [a, b] = I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény*

$$\left. \begin{array}{l} \text{kétszer folytonosan differenciálható,} \\ \text{és teljesüljenek } x \in I \text{ esetén az} \\ |f(x)| \leq M \neq 0, \\ |f'(x)| \leq M_1 \neq 0, \\ |f''(x)| \leq M_2 \neq 0 \text{ egyenlőtlenségek.} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Ekkor alkalmasan választott c esetén az érintő-kúpszeletek módszerei az f függvényre vonatkozóan az I intervallumban mindig konvergenssek, másodrendűek és optimálisak.

Szabó Z. [13, 14]-ben ezen eljárások közül az érintőparabolák módszerének általánosításaként megadott még egy olyan iterációs függvénycsaládot is, melynek tagjait bizonyos érintő-konvexfüggvények segítségével állította elő, és szintén mindig konvergens módszereket generálnak.

Jelen értekezés 1. fejezetének célja egy olyan iterációs függvénycsalád kidolgozása, mely nemcsak az érintőparabolák módszere általánosításának tekinthető, hanem az érintő-kúpszeletek általánosításának is, és így ennek a függvénycsaládnak a tagjai között megtalálhatók az érintőparabolák módszere, ennek a [13, 14] dolgozatokban megadott általánosításai, továbbá az érintőhiperbolák és érintőellipszisek módszerei is. Ezen módszercsalád származtatásán túl a konvergencia elégséges feltételeit is meghatározzuk, hibakorlátokra vonatkozó becsléseket adunk, a konvergenciarendet, az információs hatékonyságot és az aszimptotikus hibakonstans értékeit is vizsgáljuk. Néhány konkrét iterációs alapfüggvényt meghatározunk, és egyszerű alkalmazásokon szemléltetjük módszereinket. Végül összefoglaljuk a generálható iterációk előnyös tulajdonságait.

1.2. Az iterációs alapfüggvény

Feladatunk tehát az $f : [a, b] = I \subset R \mapsto R$ függvény valamely $\alpha \in I$ zérushelyének meghatározása. Legyen először is $g : (-h, h) = H \subseteq R \mapsto R$ egy

$$\left. \begin{array}{l} \text{kétszer folytonosan differenciálható függvény, melyre} \\ g(0) = g'(0) = 0, \text{ és} \\ g''(x) > 0, \text{ ha } x \in H. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Megjegyezzük, hogy Szabó Z. a [12, 13, 14] dolgozataiban olyan konvex függvényekkel dolgozott, melyek kielégítik a szigorúbb

$$g''(x) \geq q_2 > 0, \text{ ha } x \in R,$$

feltételt is.

Vezessük be még a

$$Q_1^* \doteq \min \left\{ \left| \inf_{x \in H} g'(x) \right|, \sup_{x \in H} g'(x) \right\}$$

és a

$$c_1^* \doteq \begin{cases} 0, & \text{ha } Q_1^* = \infty, \\ M_1/Q_1^*, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

jelöléseket, ahol $M_1 \geq |f'(x)|$, ha $x \in I$. Válasszunk tetszőlegesen egy valós c -t úgy, hogy legyen $c > c_1^*$.

Induljunk ki most tetszőleges $x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$ kezdőpontból, és jelölje $s \doteq \text{sign}(f(x_0))$. Illesszük elsőrendben az

$$y = -s \cdot c \cdot g(x)$$

függvényt párhuzamos eltolással az f függvényhez, ennek $(x_0, f(x_0))$ pontjában. A kapott

$$G(x) = -s \cdot c \cdot g(x - \mu) + \lambda$$

függvény μ, λ paramétereinek értékeit a

$$-s \cdot c \cdot g(x_0 - \mu) + \lambda = f(x_0),$$

$$-s \cdot c \cdot g'(x_0 - \mu) = f'(x_0)$$

egyenletrendszerből határozhatjuk meg. A (4) feltételek miatt g' invertálható a számunkra szükséges helyen, ezért

$$\mu = x_0 - g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_0) \right),$$

és

$$\lambda = f(x_0) + s \cdot c \cdot g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right).$$

Tehát az f függvényt az $(x_0, f(x_0))$ pontban elsőrendben érintő

$$G : (-h + \mu, h + \mu) = H' \subseteq R \mapsto R$$

konvex függvény alakja a következő:

$$G(x) = -s \cdot c \cdot g \left(x - x_0 + g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right) + f(x_0) + s \cdot c \cdot g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right).$$

1.1. Lemma. *Teljesüljenek f -re a (3) és g -re a (4) feltételek. Létezzen továbbá*

$$\left. \begin{array}{l} q_2 > 0 \text{ úgy, hogy} \\ q_2 \leq g''(x), \text{ ha } x \in \left[a - b + g'^{-1} \left(-\frac{M_1}{c} \right), b - a + g'^{-1} \left(\frac{M_1}{c} \right) \right] \cap H, \end{array} \right\} \quad (5)$$

és legyen $c_2^* \doteq M_2/q_2$. Ha $c > c_1^*$, és $c \geq c_2^*$, akkor

$$s \cdot G(x) \leq s \cdot f(x) \quad \text{minden } x \in H' \cap I\text{-re.}$$

Bizonyítás. Legyen először $s = 1$. A $H' \cap I$ intervallumban a feltételek alapján felírhatjuk a Taylor-polinomot mind f -re, mind G -re:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

$$G(x) = G(x_0) + G'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}G''(\eta)(x - x_0)^2,$$

ahol $\xi = x_0 + \vartheta_1(x - x_0)$, $\eta = x_0 + \vartheta_2(x - x_0)$, és $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1)$. Lássuk be tehát, hogy a

$$\begin{aligned} D(x) &\doteq f(x) - G(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}G''(\eta)(x - x_0)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[f''(\xi) + c \cdot g'' \left(\eta - x_0 + g'^{-1} \left(-\frac{f'(x_0)}{c} \right) \right) \right] (x - x_0)^2 \end{aligned}$$

különbségfüggvény nemnegatív a $H' \cap I$ intervallumban. Ehhez elegendő bizonyítani a

$$-f''(\xi) \leq c \cdot g'' \left(\eta - x_0 + g'^{-1} \left(-\frac{f'(x_0)}{c} \right) \right)$$

egyenlőtlenség teljesülését. Jelölje

$$\eta' \doteq \eta - x_0 + g'^{-1} \left(-\frac{f'(x_0)}{c} \right) = \vartheta_2(x - x_0) + g'^{-1} \left(-\frac{f'(x_0)}{c} \right).$$

Ekkor

$$\eta' \in \left[a - b + g'^{-1} \left(-\frac{M_1}{c} \right), b - a + g'^{-1} \left(\frac{M_1}{c} \right) \right] \cap H.$$

Így a lemmában szereplő (5) feltételek teljesülése és c választása miatt az

$$|f''(\xi)| \leq M_2 \leq M_2 \cdot \frac{g''(\eta')}{q_2} \leq c \cdot g''(\eta')$$

egyenlőtlenség teljesül, amit bizonyítani akartunk. $s = -1$ esetén $D(x)$ nem-pozitív voltát lehet hasonlóan bizonyítani $H' \cap I$ -ben. \square

Határozzuk meg most a G függvény x_1 és x'_1 zérushelyeit. Ehhez bontsuk fel a g konvex függvényt két szigorúan monoton függvényágra:

$$g(x) \doteq \begin{cases} g_{-1}(x), & \text{ha } x \leq 0, \\ g_1(x), & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Legyen továbbá

$$Q \doteq \sup_{x \in H} g(x),$$

és

$$c^* \doteq \begin{cases} 0, & \text{ha } Q = \infty, \\ M / \left(Q - g \left(g'^{-1} \left(-\frac{M_1}{c} \right) \right) \right), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

1.2. Lemma. *Teljesüljenek f -re a (3) és g -re a (4) feltételek. Ha $c > \max \{c^*, c_1^*\}$, akkor a G függvény zérushelyei:*

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x'_1 \end{matrix} \right\} = x_0 - g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_0) \right) + g_{\pm 1}^{-1} \left(\frac{|f(x_0)|}{c} + g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right) \right).$$

Bizonyítás. Legyen először megint $s = 1$. A bizonyítás első lépéseként lássuk be, hogy a G függvény görbéje metszi az abszcisszatengelyt. $Q = \infty$ esetén ez az állítás triviális. Legyen most g H -n korlátos. c választása miatt ekkor

$$M + c \cdot g \left(g'^{-1} \left(-\frac{M_1}{c} \right) \right) < c \cdot Q$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a g függvényt annyira megnyújtjuk a transzformáció során, hogy "tengelye" ($c \cdot Q$) nagyobb lesz, mint amilyen messze az ordinátatengely irányában fel kell tolni. A függvénygörbét legmesszebbre pedig akkor kell eltolni, amikor elsőrendben az f egy olyan pontjához illesztjük, melyen keresztül f maximális (M_1) meredekséggel halad át, és mely legnagyobb (M) távolságra van az abszcisszatengelytől. Bevezetve a

$$K \doteq \frac{M}{c} + g \left(g'^{-1} \left(-\frac{M_1}{c} \right) \right) \tag{6}$$

jelölést, a

$$-c \cdot g(x_0 - \mu) + \lambda^* = M,$$

$$-c \cdot g'(x_0 - \mu) = M_1$$

egyenletrendszerből meg tudjuk határozni a lehetséges legnagyobb mértékű λ^* eltolást:

$$\lambda^* = M + c \cdot g \left(g'^{-1} \left(-\frac{M_1}{c} \right) \right) = K \cdot c.$$

Ebből viszont az következik, hogy a G függvény görbéjének mindkét ága metszeni fogja az abszcisszatengelyt, azaz G -nek két zérushelye van, melyek a lemmában megadott alakúak lesznek. Az $s = -1$ esetben a bizonyítás hasonló. \square

Válasszuk meg végül is c -t úgy, hogy

$$c > \max \{c^*, c_1^*\} \text{ és } c \geq c_2^* \quad (7)$$

egyszerre teljesüljön. Legyen az iterációs eljárásunk a következő:

Az f függvényt az $(x_0, f(x_0))$ pontban érintő G konvex függvény $x_1 (> x'_1)$ zérushelyének meghatározása után most az x_0 helyett az x_1 pontból kiindulva ismételjük meg módszerünket, azaz határozzuk meg az f függvényt az $(x_1, f(x_1))$ pontban érintő G konvex függvény nagyobb x_2 zérushelyét, és így tovább. E zérushelyeket az 1.2. lemmából ismert

$$x_{n+1} = x_n - g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_n) \right) + g_1^{-1} \left(\frac{|f(x_n)|}{c} + g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_n) \right) \right) \right),$$

$n = 0, 1, \dots$, képlet segítségével tudjuk kiszámolni. Így előállíthatunk egy $\{x_n\}$ iterációs pontsorozatot. Ha pedig az eljárásunk során G -nek következetesen mindig a kisebb x'_n , $n = 1, 2, \dots$, zérushelyét választjuk, akkor egy másik x_0, x'_1, x'_2, \dots iterációs pontsorozathoz jutunk. Ezen iterációs eljárást **érintő-konvexfüggvények módszerének** nevezzük, tulajdonságait pedig a következő tétel foglalja össze.

1.3. Tétel. *Ha teljesülnek f -re a (3), g -re a (4) és az (5) feltételek, és c -t a (7) feltételek szerint választottuk, akkor az*

$$F(x; r) = x - g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x) \right) + g_r^{-1} \left(\frac{|f(x)|}{c} + g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x) \right) \right) \right)$$

iterációs alapfüggvény és az általa generált érintő-konvexfüggvények módszere f -re vonatkozóan I -ben mindig konvergens.

Megjegyezzük, hogy Szabó Z. [13, 14]-ben ugyanilyen alakú iterációs alapfüggvényt állított elő bizonyos érintő-konvexfüggvények segítségével.

Bizonyítás. Legyen először megint $s = 1$. Legyenek az f -et az $(x_0, f(x_0))$ pontban érintő konvex függvény zérushelyei az 1.2. lemmából ismert x_1 és x'_1 , és legyen $x'_1 < x_1$. Ekkor természetesen $x'_1 < x_0 < x_1$. Az 1.1. lemma miatt

$$0 \leq G(x) \leq f(x), \quad \text{ha } x \in [x'_1, x_1] \cap I.$$

Így ha $x_1, x'_1 \in I$, akkor nyilván

$$0 = G(x'_1) \leq f(x'_1) \quad \text{és} \quad 0 = G(x_1) \leq f(x_1)$$

teljesül. Azaz ha eljárásunkat az x_0 helyett akár az x_1 , akár az x'_1 ponttal folytatjuk, $f(x_1)$ és $f(x'_1)$ sem negatív, és az új érintő-konvexfüggvények megfelelő zérushelyeire igaz, hogy

$$x_0 < x_1 \leq x_2, \quad \text{és} \quad f(x_2) \geq 0,$$

$$x'_2 \leq x'_1 < x_0, \quad \text{és} \quad f(x'_2) \geq 0.$$

Ebből következik, hogy a módszerünkkel előállított x_0, x_1, x_2, \dots iterációs pontsorozat monoton növekvő, x_0, x'_1, x'_2, \dots pedig monoton csökkenő, és

$$f(x_n) \geq 0, \quad \text{illetve} \quad f(x'_n) \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vizsgáljuk most az $\{x_n\}$ sorozatot. Három eset fordulhat elő:

1. $f(x_n) \neq 0$, és $x_n \in I$, $n = 0, 1, \dots$. Ekkor a pontsorozat szigorúan monoton nő és korlátos, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \in I.$$

Mivel pedig $F(x; 1)$ folytonos, α F fixpontja, azaz $f(\alpha) = 0$.

2. Van olyan $i > 0$, hogy $f(x_i) = 0$, és $x_i \in I$. Ekkor $x_{i+1} = F(x_i; 1) = x_i$, tehát $x_{i+k} = x_i$, $k = 1, 2, \dots$. Így most is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \in I, \quad \text{és} \quad f(\alpha) = 0.$$

3. $f(x_n) \neq 0$, és $x_n \in I$, ha $n = 0, 1, \dots, i-1$, de $x_i \notin I$. Ekkor az 1.1. lemma alapján f -nek nincs zérushelye az $[x_0, b]$ intervallumban.

Hasonlóan vizsgálható az x_0, x'_1, x'_2, \dots monoton csökkenő pontsorozat, csak a vizsgálat helye az $[a, x_0]$ intervallum. $s = -1$ esetén a bizonyítás hasonló.

□

1.3. Hibabecslések, konvergenciarend

A következő tételben az érintő-konvexfüggvények módszerének abszolút hibakorlátjaira adunk becsléseket. Jelölje e_n az $\alpha - x_n$ és d_n az $x_{n+1} - x_n$ különbségeket, legyenek

$$T \doteq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1}, \quad L_i \doteq \frac{M_i}{m_1}, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

és K legyen a (6) képlettel definiálva.

1.4. Tétel. *Teljesüljenek f -re a (3) és a*

$$0 < m_1 \leq |f'(x)|, \quad \text{ha } x \in [\min \{x_0, \alpha\}, \max \{x_0, \alpha\}],$$

feltételek, g -re a (4), az (5) és a

$$g''(x) \leq Q_2, \quad \text{ha } x \in [g_1^{-1}(K), g_1^{-1}(K)], \quad (9)$$

feltételek, és c -t válasszuk a (7) feltételeknek megfelelően. Ha valamely $x_0 \in I$ pontból kiinduló, az érintő-konvexfüggvények módszere segítségével előállított $\{x_n\}$ iterációs pontsorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha,$$

ahol $\alpha \in I$ f egyszeres zérushelye, akkor a következő hibabecslések érvényesek:

$$1^\circ \quad |e_{n+1}| \leq (T + L_2)|e_n|^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad |e_{n+1}| \leq TL_2|d_n|^3 + (T + L_1L_2)|d_n|^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Bizonyítás. Legyen először ismét $s = 1$, és legyen $x_0 < \alpha$. Mivel α egyszeres zérushely, $f'(x) < 0$, ha $x \in [x_0, \alpha]$. Ha most $f(x_n) = 0$ valamely $n \geq 1$ -re, akkor $x_{n+1} = x_n = \alpha$, s az állítás triviálisan teljesül. Tegyük fel tehát, hogy $f(x_n) \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Rögzítsünk most tetszőlegesen egy $n \geq 0$ -t. Az f -et az $(x_n, f(x_n))$ pontban érintő G függvényre a Taylor-formula alapján adódik, hogy

$$G(x) = G(x_n) + G'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}G''(\eta)(x - x_n)^2,$$

ahol $\eta \in (x_n, x)$. Az elsőrendben való érintkezés miatt ebből

$$G(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}G''(\eta)(x - x_n)^2$$

következik. A G függvény $[x_n, \alpha]$ -ba eső zérushelyét x_{n+1} -gyel jelölve kapjuk, hogy

$$f(x_n) = -\frac{1}{2}G''(\eta)d_n^2 - f'(x_n)d_n,$$

ahol $\eta \in (x_n, x_{n+1})$. De $G''(\eta) = -c \cdot g''(\eta - \mu)$, és bevezetve az $\eta' \doteq \eta - \mu$ jelölést, $\eta' \in [0, g_1^{-1}(\frac{\lambda}{c})]$. Tehát

$$f(x_n) = \frac{c}{2}g''(\eta')d_n^2 - f'(x_n)d_n,$$

ahol $\eta' \in [0, g_1^{-1}(\frac{\lambda}{c})]$. Az 1.2. lemma bizonyításában tett megfontolásokhoz hasonlóan viszont

$$\lambda \leq \lambda^* = M + c \cdot g\left(g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right)\right) = K \cdot c,$$

amiből g_1 monotonitása miatt

$$\eta' \in \left[0, g_1^{-1}\left(\frac{\lambda}{c}\right)\right] \subseteq \left[0, g_1^{-1}\left(\frac{\lambda^*}{c}\right)\right].$$

Tehát a tételünk feltételei alapján $g''(\eta') \leq Q_2$ teljesül. Másrészt

$$0 \neq -f(x_n) = f(\alpha) - f(x_n) = f'(\xi)(\alpha - x_n) = f'(\xi) \cdot e_n,$$

ahol $\xi \in (x_n, \alpha)$. Ebből viszont

$$e_{n+1} = e_n - d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} - d_n$$

adódik. Innen

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &= \left| -\frac{c}{2} \cdot \frac{g''(\eta')}{f'(\xi)} d_n^2 + \frac{f'(x_n)}{f'(\xi)} d_n - d_n \right| \leq \\ &\leq \frac{c}{2} \cdot \frac{g''(\eta')}{|f'(\xi)|} |d_n|^2 + \frac{|f'(x_n) - f'(\xi)|}{|f'(\xi)|} |d_n| = \\ &= \frac{c}{2} \cdot \frac{g''(\eta')}{|f'(\xi)|} |d_n|^2 + \frac{|f''(\tau)| |(\xi - x_n)|}{|f'(\xi)|} |d_n|, \end{aligned}$$

ahol $\tau \in (x_n, \xi)$. De a tétel feltételei miatt $\xi \in (x_n, \alpha)$ -ra $0 < m_1 \leq |f'(\xi)|$, a (3) feltevések miatt pedig $|f''(\tau)| \leq M_2$, ha $\tau \in (x_n, \xi)$. Így

$$|e_{n+1}| \leq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |d_n|^2 + \frac{M_2}{m_1} |\xi - x_n| |d_n|.$$

Figyelembe véve még a $|d_n| \leq |e_n|$ és $|\xi - x_n| < |e_n|$ relációkat az

$$|e_{n+1}| \leq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |e_n|^2 + \frac{M_2}{m_1} |e_n|^2 = (T + L_2) |e_n|^2$$

hibabecslés adódik. Ha pedig az

$$\begin{aligned} |\xi - x_n| &< |e_n| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{|f'(\xi)|} \left(\frac{c}{2} \cdot g''(\eta') |d_n|^2 + |f'(x_n)| |d_n| \right) \leq \\ &\leq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |d_n|^2 + \frac{M_1}{m_1} |d_n| \end{aligned}$$

relációt használjuk fel, akkor az

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |d_n|^2 + \frac{M_2}{m_1} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |d_n|^2 |d_n| + \frac{M_2}{m_1} \cdot \frac{M_1}{m_1} |d_n| |d_n| = \\ &= TL_2 |d_n|^3 + (T + L_1 L_2) |d_n|^2 \end{aligned}$$

becslést kapjuk. Az $\alpha - x_0$ és $f(x_0)$ értékek előjeleivel kapcsolatos további esetekben a bizonyítás hasonló. \square

Megjegyezzük, hogy $c = M_2/q_2$ esetén a hibabecslés megegyezik Szabó Z. [14] cikkében adottal.

1.5. Tétel. *Az érintő-konvexfüggvények módszere egyszeres zérushely esetén másodrendű és optimális.*

Bizonyítás. Tekintettel arra, hogy egyszeres zérushelyek esetén az iterációs eljárásunk hibabecslése

$$|e_{n+1}| \leq C \cdot |e_n|^2, \quad 0 < C < \infty,$$

alakú, konvergenciarendje legalább 2. Másrészt J. F. Traubnak az információs hatékonyságra vonatkozó 1.1. alaptétele szerint a konvergenciarend nem lehet nagyobb, mint az egy lépésben kiszámításra kerülő új $f^{(j)}(x_i)$ függvényértékek száma, ami itt szintén 2. Következésképpen a konvergenciarend 2, és az információs hatékonyság 1, azaz a módszer optimális. \square

1.4. Konkrét iterációs alapfüggvények

Válasszunk ki néhány, a (4) feltételeknek eleget tevő konvex függvényt, és nézzük meg, milyen iterációt generálnak.

1. Vizsgáljuk meg először a $g(x) = x^2$, $x \in R$, függvényt. Ekkor $Q = \infty$, $Q_1^* = \infty$, és $q_2 = 2$. Így ha $c \geq M_2/2$, akkor teljesülnek a (4), (5) és (7) feltételek. Figyelembe véve, hogy

$$g_r^{-1}(y) = r\sqrt{y}, \text{ és } g'^{-1}(y) = \frac{1}{2}y,$$

a $c = M_2/2$ választással azt kapjuk, hogy

$$F_P(x; r) = x + s \frac{f'(x)}{M_2} + r \sqrt{2 \frac{|f(x)|}{M_2} + \frac{f''(x)}{M_2^2}},$$

mely éppen a Szabó Z. által [12, 13]-ban vizsgált érintőparabola-módszer iterációs alapfüggvénye.

2. Induljunk ki másodjára a $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$, $x \in R$, konvex függvényből. Ez a függvény a Szabó Z. által [13, 14]-ben megadott feltételeket nem teljesíti, és így új érintőkonvexfüggvény-módszert generálhatunk. Most $Q = \infty$ és $Q_1^* = 1$ lesznek. Amennyiben $c > M_1$, a

$$g''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

függvény alsó korlátja a (5) feltételben megkövetelt $[-d - D, d + D]$ intervallumban

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{(1+(d+D)^2)^3}},$$

ahol

$$d \doteq b - a, \text{ és } D \doteq \frac{M_1}{\sqrt{c^2 - M_1^2}}.$$

Ha most c -t úgy választjuk, hogy

$$c \geq \max \left\{ \sqrt{2}M_1, \sqrt{(d^2 + 2d + 2)^3}M_2 \right\},$$

akkor teljesülnek a (4), (5) és (7) feltételek. Mivel

$$g_r^{-1} = r\sqrt{y(y+2)}, \text{ és } g'^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

kapjuk az

$$F_H(x; r) = x + s \frac{f'(x)}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}} + r \sqrt{\left(\frac{|f(x)|}{c} + \frac{c}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}} \right)^2 - 1}$$

iterációs alapfüggvényt, mely hasonló, mint a Szabó Z. által [12, 13]-ban előállított érintőhiperbola-módszer iterációs alapfüggvénye.

3. Tekintsük most a $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$, konvex függvényt. Most $Q_1^* = \infty$, $q_2 = 1$, és $Q = 1$, amiből egyrészt $c \geq M_2$, másrészt

$$c > \sqrt{\frac{M^2 + \sqrt{M^4 + 4M^2M_1^2}}{2}}$$

együttes fennállása esetén teljesülnek a (4), (5) és (7) feltételek. Tehát a

$$c = \max \left\{ M_2, \sqrt{\frac{M^2 + \sqrt{M^4 + 4M^2M_1^2} + 1}{2}} \right\}$$

választással, felhasználva, hogy

$$g_r^{-1} = r\sqrt{1 - (1 - y)^2}, \text{ és } g'^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}},$$

kapjuk az

$$F_E(x; r) = x + s \frac{f'(x)}{\sqrt{c^2 + f'^2(x)}} + r \sqrt{1 - \left(\frac{|f(x)|}{c} - \frac{c}{\sqrt{c^2 + f'^2(x)}} \right)^2}$$

iterációs alapfüggvényt, mely megegyezik a Szabó Z. által [12, 13]-ban generált érintőellipszis-módszer iterációs alapfüggvényével.

4. Vegyük végül a $g(x) = \operatorname{ch}(x) - 1$, $x \in R$, függvényt. Ekkor $Q = \infty$, $Q_1^* = \infty$, és $q_2 = 1$. Ha most $c \geq M_2$, akkor teljesülnek a (4), (5) és (7) feltételek. Figyelembe véve, hogy

$$g_r^{-1}(y) = \operatorname{arch}(1 + y), \text{ és } g'^{-1}(y) = \operatorname{arsh}(y),$$

a $c = M_2$ választással az

$$F_{Ch}(x; r) = x + \operatorname{arsh}\left(s \frac{f'(x)}{M_2}\right) + \operatorname{arch}\left(\frac{|f(x)|}{M_2} + \operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(-s \frac{f'(x)}{M_2}\right)\right)\right)$$

iterációs alapfüggvényt kapjuk. Ha most még bevezetjük a

$$G \doteq \sqrt{M_2^2 + f'^2(x)} \text{ és a } H \doteq |f(x)| + G$$

jelöléseket, akkor ez az iterációs alapfüggvény az

$$F_{Ch}(x; r) = x + \ln \frac{H + r\sqrt{H^2 - M_2^2}}{G - sf'(x)}$$

egyszerűbb formában is felírható, amelyet Szabó Z. a [12, 13, 14] dolgozataiban vizsgált.

1.5. Néhány alkalmazás

Az érintő-konvexfüggvények módszere igen jól alkalmazható a műszaki- és természettudományos problémák matematikai modelljeiben fellépő nemlineáris egyenletek megoldására. Ezen egyenletek megoldásai közül ugyanis sokszor csak a valós, pozitív, a probléma jellege által meghatározott felső korlátnál kisebb gyökök feleltethető meg reális tartalom. Vizsgáljunk most meg néhány konkrét alkalmazási lehetőséget. A feladatokat Bálint E. [2] könyvéből válogattuk, és a szükséges számításokat Maple-ben írt programok segítségével végeztük el.

1.1. Feladat. *Egy gömb alakú víztartály belső sugara $r = 4.75$ m. Milyen magas benne a vízállás, ha éppen 400 m³ vizet tartalmaz?*

Megoldás. Jelöljük a vízállás magasságát x -szel. Ekkor

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi(2r - x)^2(3r - (2r - x)) = \frac{\pi}{3}x^2(3r - x)$$

a vízzel töltött térfogat, tehát a

$$\frac{\pi}{3}x^2(3 \cdot 4.75 - x) = 400$$

egyenletet kell megoldani az $I = [0; 9.5]$ intervallumban. Azaz meg kell keresni az

$$f(x) = x^3 - 14.25x^2 + \frac{1200}{\pi}$$

függvény I -beli gyökét. Mivel

$$f'(x) = 3x^2 - 28.5x \text{ és } f''(x) = 6x - 28.5,$$

így $M_1 = 67.6875$, és $M_2 = 28.5$. Kindulva az $x_0 = 9.5$ kezdőpontból, alkalmazva az $x_{n+1} = F_H(x_n; -1)$ iterációt az 1. ábrán szemléltetett módon közelítjük a gyököt,

1. ábra

és a következő iterációs sorozatot kapjuk:

	$F_H(x; -1)$
x_0	9.5
x_1	8.53555919051175
x_2	7.90243649410439
x_3	7.61988609683528
x_4	7.55499166141427
x_5	7.55126067377093
x_6	7.55124812394635
x_7	7.55124812380420

1.2. Feladat. Nagyfeszültségű vezetékeknek falakon való átvezetéséhez cső alakú szigetelőtesteket használnak. A cső belsejét az áramvezető fémrúd tölti ki, külső palástját fémhenger borítja, mely a tartószerkezethez van erősítve. A szigetelőtestben keletkező térerősség a belső hengerpalástnál a legnagyobb (E_0). A külső és belső hengerpalást közti feszültség

$$U = E_0 \cdot r \ln \frac{R}{r},$$

ahol R a külső, r pedig a belső hengerpalást sugara ($0 < r < R$). Adott U feszültség és E_0 maximális térerősség mellett számítsuk ki azt az $x = R/r$ hányadost, melynél a szigetelőtest $K = \pi(R^2 - r^2)$ keresztmetszete a legkisebb!

Megoldás. A $K = K(x) = \pi r^2(x^2 - 1)$ egyenlőségből küszöböljük ki r -et az U -ra adott összefüggés felhasználásával:

$$K(x) = \frac{U^2 \pi}{E_0^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{(\ln x)^2}.$$

A keresztmetszetnek azon x értékre lehet minimuma, melyre $K'(x) = 0$, azaz

$$\frac{x}{(\ln x)^2} - \frac{x^2 - 1}{x(\ln x)^3} = 0.$$

Meg kell tehát keresni az

$$f(x) = x^2 \ln x - x^2 + 1$$

függvény 1-nél nagyobb valós zérushelyeit. Ebből a célból képezzük az

$$f'(x) = 2x \ln x - x \text{ és } f''(x) = 2 \ln x + 1$$

deriváltakat. Mivel

$$f(\sqrt{e}) = 1 - \frac{e}{2} < 0, \text{ és } f(e) = 1,$$

továbbá

$$f'(x) \geq 0, \text{ és } f''(x) > 0, \text{ ha } x \geq \sqrt{e},$$

az f függvénynek egyetlen (1-nél nagyobb) zérushelye az $I = [\sqrt{e}, e]$ intervallumba esik, továbbá $M_2 = f''(e) = 3$. Az $x_0 = \sqrt{e}$ kezdőértékből indulva az $x_{n+1} = F_P(x_n; 1)$ iterációval dolgozva a 2. ábra szemlélteti a közelítés módját,

2. ábra

és az alábbi iterációs sorozatot kapjuk:

	$F_P(x; 1)$
x_0	1.64872127070013
x_1	<u>2.13803433628597</u>
x_2	<u>2.21736736725410</u>
x_3	<u>2.21845730633078</u>
x_4	<u>2.21845748991670</u>

1.3. Feladat. Egy körtárcsa AB húrja 12 cm. Az AB körív felezőpontja legyen C . Az AC ív C -től kezdve az a_1, a_2, \dots, a_{100} egyenlő részívekre van osztva. Ezek merőleges vetülete az AB húron az $a'_1, a'_2, \dots, a'_{100}$ szakaszok. Mekkora a körtárcsa sugara, ha $a'_{100} = 0.9 \cdot a'_1$?

Megoldás. Az $AC = BC$ ívekhez tartozó középponti szög legyen x , a körtárcsa sugara pedig r . Ekkor

$$a'_1 = r \cdot \sin 0.01x, \text{ és } a'_{100} = r \cdot \sin x - r \cdot \sin 0.99x.$$

A megoldandó egyenlet

$$\sin x - \sin 0.99x = 0.9 \cdot \sin 0.01x,$$

ami átalakítva

$$\sin x \tan \frac{x}{200} + \cos x - 0.9 = 0.$$

Keressük tehát az

$$f(x) = \sin x \tan \frac{x}{200} + \cos x - 0.9$$

függvény $I = [0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumba eső gyökeit. Mivel

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x \tan \frac{x}{200} + \frac{\cos x}{100 \cos^2 \frac{x}{200}} + \frac{\sin x \sin \frac{x}{200}}{20000 \cos^3 \frac{x}{200}} - \cos x = \\ &= (\cos x) \left(\frac{1}{100 \cos^2 \frac{x}{200}} - 1 \right) + \sin x \left(\tan \frac{x}{200} \right) \left(\frac{1}{20000 \cos^2 \frac{x}{200}} - 1 \right) \doteq \\ &\quad \doteq S_1 T_1 + S_2 S_3 T_2, \end{aligned}$$

és $x \in I$, így egyrészt $T_1 \in [-0.99, -0.98]$, azaz $S_1T_1 \in [-0.99, 0]$, másrészt $T_2 \in [-0.99995, -0.99994]$, és $S_2S_3 \in [0, 0.008]$, tehát $S_2S_3T_2 \in [-0.008, 0]$. Végül is $f''(x) = S_1T_1 + S_2S_3T_2 \in [-0.998, 0]$, azaz $|f''(x)| \leq 0.998 < 1 = M_2$. Az $x_0 = 0$ kezdőértékből indulva az $x_{n+1} = F_{Ch}(x_n; 1)$ iterációval a 3. ábrán látható módon közelítünk,

3. ábra

és az iterációs sorozatot az alábbi táblázat mutatja:

	$F_{Ch}(x_n; 1)$
x_0	<u>0</u> .0
x_1	<u>0.443568254385115</u>
x_2	<u>0.453277504423438</u>
x_3	<u>0.453298607982430</u>
x_4	<u>0.453298608084593</u>

A kérdéses sugár tehát $r = 13.7007138832927 \text{ cm}$.

Megjegyezzük, hogy a Newton-Raphson-iterációt az említett feladatok megoldása során az adott kezdőpontokból egyik esetben sem indíthattuk volna, mert mindhárom alkalommal $f'(x_0) = 0$ volt.

1.6. Összehasonlító, értékelő megjegyzések

Lehetőségünk van a vizsgált másodrendű iterációk gyorsaságának összehasonlítására is az aszimptotikus hibakonstans segítségével. J.F. Traub [16] alapján a másodrendű iterációs eljárásaink aszimptotikus hibakonstansának az értéke:

$$C = \frac{1}{2}|F''(\alpha)|.$$

Szabó Z. [12, 13] dolgozataiban kiszámolta az érintőparabola-, érintőhiperbola- és érintőellipszis-módszerek esetén ezeket az értékeket, melyek az iterációs alapfüggvények azonosságai miatt rendre az $F_P(x; r)$, $F_H(x; r)$ és $F_E(x; r)$ iterációink aszimptotikus hibakonstansai. Alakjuk egyszeres α zérushely esetén

$$C = \frac{\lambda + sf''(\alpha)}{2|f'(\alpha)|},$$

ahol

$$\lambda_P = 2c_P, \quad \lambda_H = \frac{\sqrt{(c_H^2 - f'^2(\alpha))^3}}{c_H^2} \quad \text{és} \quad \lambda_E = \frac{\sqrt{(c_E^2 + f'^2(\alpha))^3}}{c_E^2},$$

és c_P , c_H és c_E alkalmasan választott konstansok.

Számoljuk most ki az $F_{Ch}(x)$ iterációs alapfüggvény esetén is az aszimptotikus hibakonstans értékét. Bevezetve a

$$h(x) \doteq \frac{f(x)}{c_{Ch}}, \quad k(x) \doteq \sqrt{h'^2(x) + 1} \quad \text{és} \quad l(x) \doteq \sqrt{(s \cdot h(x) + k(x))^2 - 1}$$

jelöléseket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F''_{Ch}(x) &= s \frac{h'''(x)}{k(x)} - s \frac{h''^2(x)h'(x)}{k^3(x)} + \\ &+ \left(s \cdot h'(x) - \frac{h'^2(x)h''^2(x)}{k^3(x)} + \frac{h''^2(x)}{k(x)} + \frac{h'(x)h'''(x)}{k(x)} \right) / l(x) - \end{aligned}$$

$$- \left(s \cdot h'(x) + \frac{h'(x)h''(x)}{k(x)} \right)^2 (s \cdot h(x) + k(x))/l^3(x).$$

Mivel $l(\alpha) = \sqrt{k^2(\alpha) - 1} = |h'(\alpha)|$, és $|h'(\alpha)| = -s \cdot h'(\alpha)$, így adódik, hogy

$$\begin{aligned} F''_{Ch}(\alpha) &= s \frac{h'''(\alpha)}{k(\alpha)} - s \frac{h''^2(\alpha)h'(\alpha)}{k^3(\alpha)} + \\ &+ \left(s \cdot h'(\alpha) - \frac{h'^2(\alpha)h''^2(\alpha)}{k^3(\alpha)} + \frac{h''^2(\alpha)}{k(\alpha)} + \frac{h'(\alpha)h'''(\alpha)}{k(\alpha)} \right) / |h'(\alpha)| - \\ &- \left(s \cdot h'(\alpha) + \frac{h'(\alpha)h''(\alpha)}{k(\alpha)} \right)^2 k(\alpha) / |h'(\alpha)|^3 = \\ &= - \frac{s \cdot h''(\alpha) + \sqrt{h'^2(\alpha) + 1}}{|h'(\alpha)|}. \end{aligned}$$

Tehát ebben az esetben is

$$C_{Ch} = \frac{\lambda_{Ch} + s \cdot f''(\alpha)}{2|f'(\alpha)|},$$

ahol $\lambda_{Ch} = \sqrt{c_{Ch}^2 + f'^2(\alpha)}$.

Világos, hogy ugyanazon egyszeres zérushely esetén a c konstansok

c_P	c_H^2	c_E^2	c_{Ch}^2
$\frac{M_2}{2}$	$2M_1^2 + (d^2 + 2d + 2)^3 M_2^2$	$M_2^2 + \frac{M^2 + \sqrt{M^4 + 4M^2 M_1^2 + 1}}{2}$	M_2^2

választása mellett

$$C_P < C_H, \quad C_P < C_E, \quad \text{és} \quad C_P < C_{Ch},$$

tehát az iterációk közül az érintőparabola-módszer a leggyorsabb.

Példa. Szemléltetésül keressük meg az $f(x) = e^x - x^2 + 1$ függvény $I = [-2, 0]$ -beli gyökét 10^{-14} pontossággal az $x_0 = 0$ kezdőpontból kiindulva mind a négy iteráció segítségével. Eredményül az alábbi táblázatban látható közelítősorozatokat kapjuk, ami várakozásunknak megfelelően az érintőparabola-módszer esetén a legrövidebb.

	$F_P(x, -1)$	$F_H(x, -1)$	$F_E(x, -1)$	$F_{Ch}(x, -1)$
x_0	0.0	0.0	0.0	0.0
x_1	-1.0	-0.66185684867425	-0.42477060374456	-0.90135948401942
x_2	-1.14632066864340	-1.02796790825132	-0.75942096690348	-1.13200393779173
x_3	-1.14775750665151	-1.13764656733112	-0.98619476337571	-1.14768219253537
x_4	-1.14775763214474	-1.14767343120359	-1.10553300901231	-1.14775763039385
x_5		-1.14775762620651	-1.14357364918323	-1.14775763214474
x_6		-1.14775763214474	-1.14770850991247	
x_7			-1.14775762524564	
x_8			-1.14775763214474	

Végül foglaljuk össze az érintőkonvexfüggvény-módszerek előnyös tulajdonságait:

- az $x_0 \in I$ kezdőérték választásától függetlenül mindig konvergensek;
- másodrendűek és optimálisak;
- ha I korlátos, az f függvény összes $\alpha \in I$ zérushelye meghatározható segítségükkel;
- könnyen programozhatóak.

Hátrányuk, hogy ismerni kell a (3) feltételben szereplő korlátok értékeit.

2. Kombinált módszerek

2.1. A valós zárt intervallumok IR halmaza

Jelöljük IR -rel R zárt intervallumainak halmazát, azaz

$$IR = \{ [a, b] \mid a, b \in R, a \leq b \}.$$

IR tartalmaz minden a valós számot is speciális $[a, a]$ alakú intervallumként, amit **pontintervallumnak** hívunk. Az IR -beli $J_1 = [a_1, b_1]$ és $J_2 = [a_2, b_2]$ zárt intervallumokat **egyenlőeknek** tekintjük, ha mint halmazok egyenlőek, azaz

$$J_1 = J_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, \text{ és } b_1 = b_2.$$

Nyilvánvaló, hogy ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Hasonlóan J_1 (tartalmazási értelemben) **kisebb vagy egyenlő**, mint J_2 , ha J_1 mint halmaz részhalmaza J_2 -nek, azaz

$$J_1 \subseteq J_2 \Leftrightarrow a_2 \leq a_1, \text{ és } b_1 \leq b_2.$$

Nyilván a \subseteq reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Továbbá bármely két $J_1, J_2 \in IR$ intervallumnak van a \subseteq reláció szerinti **legkisebb felső korlátja**:

$$J_1 \cup J_2 = [\min \{a_1, a_2\}, \max \{b_1, b_2\}],$$

és ha $a_2 \leq a_1 \leq b_2$ vagy $a_1 \leq a_2 \leq b_1$, akkor van **legnagyobb alsó korlátja**:

$$J_1 \cap J_2 = [\max \{a_1, a_2\}, \min \{b_1, b_2\}].$$

Értsük a továbbiakban a J_1 és a J_2 intervallumok **távolságán** a

$$q(J_1, J_2) = \max \{ |a_1 - a_2|, |b_1 - b_2| \}$$

értéket. q metrika IR -en, hisz minden $J_1, J_2, J_3 \in IR$ intervallumra

$$q(J_1, J_2) \geq 0, \text{ és } q(J_1, J_2) = 0 \Leftrightarrow J_1 = J_2,$$

$$q(J_1, J_2) = q(J_2, J_1),$$

$$q(J_1, J_2) \leq q(J_1, J_3) + q(J_2, J_3).$$

Legyen most szokás szerint egy $J = [a, b]$ intervallum **abszolút értéke** a $[0, 0]$ intervallumtól való $q(J, [0, 0])$ távolsága, azaz

$$|J| = \max \{|a|, |b|\},$$

átmérője pedig a $d(J) = b - a$ érték. Az abszolút értékre és az átmérőre a következő tulajdonságok érvényesek:

2.1. Tétel. *Legyenek $J, J_1, J_2 \in (IR, q)$.*

$$1^\circ \quad |J| \geq 0, \quad \text{és} \quad |J| = 0 \Leftrightarrow J = [0, 0].$$

$$2^\circ \quad d(J) = 0 \Leftrightarrow J = [a, a].$$

$$3^\circ \quad \text{Ha } J_1 \subseteq J_2, \text{ akkor } |J_1| \leq |J_2|, \text{ és } d(J_1) \leq d(J_2).$$

$$4^\circ \quad \text{Ha } 0 \in J, \text{ akkor } |J| \leq d(J) \leq 2|J|.$$

$$5^\circ \quad \text{Ha } J_1 \subseteq J_2, \text{ akkor } \frac{1}{2}(d(J_2) - d(J_1)) \leq q(J_1, J_2) \leq d(J_2) - d(J_1).$$

Értelmezzük a szokásos módon egy (IR, q) -beli intervallumsorozat konvergenciáját. Könnyű belátni, hogy (IR, q) teljes metrikus tér. A továbbiakban számunkra fontos szerepet játszó intervallumsorozatokról szól a következő tétel.

2.2. Tétel. *Ha a $\{J_n\}$ intervallumsorozat olyan, hogy*

$$J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

akkor $\{J_n\}$ konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n,$$

továbbá ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(J_n) = 0,$$

akkor

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} J_n \text{ pontintervallum.}$$

A fenti tételek bizonyítása megtalálható G. Alefeld és J. Herzberger [1] könyvében.

Végül adjunk meg és bizonyítsunk egy, a konvergenciarend meghatározásához később szükséges tételt.

2.3. Tétel. *Legyen a $\{J_n\}$ intervallumsorozat olyan, hogy*

$$\cap_{n=0}^{\infty} J_n = [a, a].$$

Ha valamely $p \geq 1$ és $C^ > 0$ valós számokra fennállnak a*

$$d(J_{n+1}) \leq C^* (d(J_n))^p, \quad n = 0, 1, \dots,$$

egyenlőtlenségek, akkor valamely $C > 0$ valós számra a

$$q(J_{n+1}, [a, a]) \leq C (q(J_n, [a, a]))^p, \quad n = 0, 1, \dots,$$

egyenlőtlenségek is teljesülnek.

Bizonyítás. Mivel $\cap_{n=0}^{\infty} J_n = [a, a]$, így $[a, a] \subseteq J_n$ minden $n \geq 0$ -ra. Ezért a 2.1. tétel 2^o és 5^o pontjai alapján és a tétel feltétele miatt

$$q(J_{n+1}, [a, a]) \leq d(J_{n+1}) \leq C^* (d(J_n))^p, \quad n = 0, 1, \dots$$

Ugyanezen okok miatt viszont igaz az is, hogy

$$d(J_n) \leq 2q(J_n, [a, a]), \quad n = 0, 1, \dots$$

Így végül is azt kapjuk, hogy

$$q(J_{n+1}, [a, a]) \leq C^* (2q(J_n, [a, a]))^p \leq 2^p C^* (q(J_n, [a, a]))^p, \quad n = 0, 1, \dots,$$

tehát a $C = 2^p C^*$ jelölés bevezetésével azt, amit bizonyítani akartunk. \square

2.2. Előzmények

A dolgozat következő részében mindig konvergens iterációs alapfüggvények segítségével generálható olyan

$$J_{n+1} = F(J_n), \quad J_n = [a_n, b_n], \quad n = 0, 1, \dots,$$

iterációkat adunk meg, melyek az f függvény $\alpha \in J_0$ zérushelyét tartalmazó, tartalmazási értelemben csökkenő, tehát konvergens intervallumsorozatot

állítanak elő. Amennyiben α f -nek egyetlen J_0 -beli gyöke, az intervallumsorozat tagjainak átmérője 0-hoz tart, tehát az intervallumsorozat határértéke pontosan az $[\alpha, \alpha]$ pontintervallum, azaz röviden α lesz. Továbbá a

$$d(J_{n+1}) \leq C^* (d(J_n))^p, \quad p \geq 1, \quad C^* > 0,$$

alakú hibabecsléseinkből a 2.3. tétel alapján az iterációink konvergenciarendjéről is lesznek ismereteink.

Jellegében ilyen tulajdonságú eljárás Obádovics J.Gy. [9]-ben közölt módszere, mely a húr- és az érintőmódszer alkalmazásán alapszik. Tegyük fel, hogy $f : [a, b] = I \subset R \rightarrow R$

$$\left. \begin{array}{l} \text{kétszer folytonosan differenciálható,} \\ f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ valamint} \\ f' \text{ és } f'' \text{ előjeltartó } I \text{ - n.} \end{array} \right\}$$

A feltételekből következik, hogy f vagy konvex, vagy konkáv, f és f' monoton, és f -nek I -n egyetlen egyszeres zérushelye van, legyen ez α . Az f görbájének I -beli jellegét az $f(a)$ és az $f''(x)$ előjeleinek négy lehetséges kapcsolata határozza meg. Legyen most például az

$$f(a) > 0, \text{ és } f''(x) < 0, \text{ ha } x \in I. \quad (10)$$

Ebben az esetben f görbájének I -beli jellegét a 4. ábra mutatja.

4. ábra

Obádovics J.Gy. eljárása a következő: kiindulva az $a_0 = a$ és a $b_0 = b$ pontokból két iterációs pontsorozatot képezett, az egyiket a húrmódszer segítségével, azaz

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

a másikat pedig a Newton-Raphson-iterációval, azaz

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Így két, az α gyököt balról közelítő, monoton növekedő, korlátos $\{a_n\}$, és a gyököt jobbról közelítő, monoton csökkenő, korlátos $\{b_n\}$ pontsorozatot kapott. Az azonos iterációs lépésekben kiszámolt a_n és b_n közelítőértékekkel tulajdonképpen olyan $J_n = [a_n, b_n]$ intervallumokat határozott meg, melyek tartalmazzák α -t, tartalmazási értelemben csökkennek, és átmérőjük zérushoz konvergál.

További hasonló algoritmusokat is ismerünk. Ilyen például Bálint E. [3] módszere, melyet a módosított Newton-módszer segítségével adott meg, továbbá Szabó Z. [15]-beli Newton-parabola-módszere is, amit a Newton-Raphson-iterációból és az érintőparabola-módszerből az előzőekhez hasonlóan lehet származtatni, illetve az általa [13]-ban kidolgozott kombinált eljárások közül néhány. A jelen fejezetben megadott kombinált módszerek a [15]-beli Newton-parabola-eljárás általánosításainak tekinthetők.

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] = I \subset R \rightarrow R$ függvényre

$$\left. \begin{array}{l} \text{teljesülnek a (3) feltételek,} \\ f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ valamint} \\ f'' \text{ előjeltartó } I - \text{n.} \end{array} \right\} \quad (11)$$

A (11) feltételekből következik, hogy f vagy konvex, vagy konkáv, f' monoton, és f -nek I -n egyetlen egyszeres zérushelye van, legyen ez α .

2.3. Az ÉKF-NR kombinált eljárások

Kombináljuk először eljárásunkat valamelyik érintőkonvexfüggvény-módszerből (ÉKF) és a Newton-Raphson-iterációból (NR).

Tegyük fel, hogy a (10) eset áll fenn. Ekkor az $a_0 = a$ és a $b_0 = b$ pontokból kiindulva képezzük az $\{a_n\}$, illetve a $\{b_n\}$ iterációs pontsorozatot az

$$a_{n+1} = F_g(a_n; 1), \quad n = 0, 1, \dots,$$

illetve a

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

képletekkel, ahol F_g az érintő-konvexfüggvények valamely módszerének iterációs alapfüggvénye. Így a

$$J_n = [a_n, b_n], \quad n = 0, 1, \dots,$$

intervallumok egy sorozatát nyerjük.

Megjegyezzük, hogy módszerünknel konvex f függvény esetén a pozitív, konkáv f esetén a negatív függvényértékű intervallumvégpontból kiindulva alkalmazzuk a Newton-Raphson-iterációt, a másik végpontból kiindulva pedig valamelyik érintőkonvexfüggvény-módszerrel dolgozunk.

2.4. Tétel. *Ha teljesülnek a (4) és az (5) feltételek g -re, a (11) feltételek f -re, és a (7) feltételek, akkor az ÉKF-NR kombinált eljárással előállított $\{J_n\}$ intervallumsorozat a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

$$1^\circ \quad \alpha \in J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$3^\circ \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a (10) eset áll fent. Ekkor az 1.1. lemma alapján az érintő-konvexfüggvényünk az f függvény görbéje alatt helyezkedik el, így $a_n \leq \alpha$, $n = 0, 1, \dots$. Mivel pedig f konkáv I -n, az érintőnk f felett halad, azaz $\alpha \leq b_n$, $n = 0, 1, \dots$. Tehát $\alpha \in J_n$ teljesül minden $n \geq 0$ -ra.

Továbbá, az 1.3. tétel szerint az $\{a_n\}$ pontsorozat monoton növekvő, $\{b_n\}$ pedig monoton csökkenő, így a $J_{n+1} \subseteq J_n$ reláció is igaz.

Végül, mivel a (11) feltételek teljesülése esetén az f -nek pontosan egy $\alpha \in I$ zérushelye van, és $F_g(x; 1)$ mindig konvergens iteráció, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

Másrészt az

$$f(b) < 0, \quad f''(x) < 0, \quad x \in I,$$

esetben – amit most vizsgálunk – a b pontból kiinduló Newton-Raphson-iteráció is konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha.$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(J_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

és így $\bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha$, amit bizonyítani akartunk. A többi esetben is hasonlóan bizonyítható az állítás. \square

Most a J_n intervallumok átmérője csökkenésére vonatkozóan adunk meg becslést. Legyen

$$m_1 \doteq \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\},$$

és használjuk most is a (8) jelöléseket.

2.5. Tétel. *Ha teljesülnek a (4) és az (5) feltételek g -re, a (9) és a (11) feltételek f -re, f' jeltartó I -n, továbbá teljesülnek a (7) feltételek, akkor*

$$d(J_{n+1}) \leq (T + L_2) (d(J_n))^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

azaz az ÉKF-NR kombinált eljárás legalább másodrendű.

Bizonyítás. Vizsgáljuk először újból a (10) esetet. Ekkor f' monoton csökken, és jeltartását figyelembe véve $f'(x) < 0$, ha $x \in I$, így

$$0 < m_1 \doteq |f'(a)| \leq |f'(x)|, \quad x \in I.$$

Ekkor viszont az 1.4. tétel 1^o becslése alapján

$$(\alpha - a_{n+1}) \leq (T + L_2)(\alpha - a_n)^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

teljesül. A Newton-Raphson-iteráció hibabecslésére pedig

$$(b_{n+1} - \alpha) \leq \frac{|f''(\eta)|}{2|f'(b_n)|} (b_n - \alpha)^2 \leq \frac{M_2}{2m_1} (b_n - \alpha)^2 = \frac{L_2}{2} (b_n - \alpha)^2$$

adódik, ahol $\eta \in (\alpha, b_n)$, $n = 0, 1, \dots$. Végeredményben írhatjuk azt, hogy

$$\begin{aligned} (b_{n+1} - a_{n+1}) &= (b_{n+1} - \alpha) + (\alpha - a_{n+1}) \leq \\ &\leq \frac{L_2}{2} (b_n - \alpha)^2 + (T + L_2)(\alpha - a_n)^2 \leq \\ &\leq (T + L_2) \left((b_n - \alpha)^2 + (\alpha - a_n)^2 \right) \leq \\ &\leq (T + L_2)(b_n - a_n)^2, \end{aligned}$$

azaz

$$d(J_{n+1}) \leq (T + L_2) (d(J_n))^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ami a 2.3. tétel alapján azt jelenti, hogy az iterációnk legalább másodrendű. A további három esetben a bizonyítás hasonló. \square

2.4. Az ÉKF-ÉKF kombinált eljárások

Módosítsuk most az előző fejezetben ismertetett eljárásunkat úgy, hogy a Newton-Raphson-iteráció helyett is valamelyik érintőkonvexfüggvény-módszert alkalmazzuk. Tehát legyen megint $a_0 = a$, $b_0 = b$, és az $\{a_n\}$, illetve a $\{b_n\}$ iterációs pontsorozatot képezzük az

$$a_{n+1} = F_{g_1}(a_n; 1), \quad n = 0, 1, \dots,$$

és a

$$b_{n+1} = F_{g_2}(b_n; -1), \quad n = 0, 1, \dots,$$

képletek segítségével, ahol F_{g_1} és F_{g_2} a g_1 és g_2 konvex függvényekkel generált érintőkonvexfüggvény-módszerek iterációs alapfüggvényei. Így a

$$J_n = [a_n, b_n], \quad n = 0, 1, \dots,$$

intervallumoknak most is kapjuk egy sorozatát, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

2.6. Tétel. *Ha teljesülnek a (4) és az (5) feltételek a g_1 és a g_2 függvényekre, a (11) feltételek az f -re, és c^{g_1} és c^{g_2} kielégítik a (7) feltételeket, akkor az ÉKF-ÉKF kombinált eljárással előállított $\{J_n\}$ intervallumsorozat a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

$$1^\circ \quad \alpha \in J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$3^\circ \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először újból, hogy a (10) eset áll fent. Ekkor az 1.1. lemma alapján a g_1 függvény segítségével előállított érintő-konvex-függvény görbéje mindig az f függvény görbéje alatt, a g_2 -ből transzformált

érintő-konvexfüggvény görbéje pedig f felett halad, ezért $a_n \leq \alpha$, $\alpha \leq b_n$, azaz $\alpha \in J_n$ teljesül minden $n \geq 0$ -ra. Az $f(a) < 0$ esetben hasonló megközelítéssel ugyanez adódik.

Az 1.3. tétel alapján az $\{a_n\}$ iterációs pontsorozat monoton növekvő, $\{b_n\}$ pedig monoton csökkenő, amiből következik a $J_{n+1} \subseteq J_n$ reláció teljesülése minden $n \geq 0$ -ra.

Végül tekintettel arra, hogy az F_{g_1} és az F_{g_2} mindig konvergens iterációs alapfüggvények a tételünk feltételeinek teljesülése esetén, és f -nek a (11) feltételek miatt pontosan egy $\alpha \in I$ zérushelye van, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

teljesül. Ebből viszont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(J_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

azaz $\bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha$ következik. A további három eset bizonyítása hasonló. \square

A hibabecslésünk megadásához legyenek most

$$m_1 = \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\},$$

$$c = \max\{c^{g_1}, c^{g_2}\},$$

$$Q_2 = \max\{Q_2^{g_1}, Q_2^{g_2}\},$$

és használjuk megint a (8) jelöléseket. A J_n intervallumok átmérője csökkenésére vonatkozó becslésünk most a következő lesz:

2.7. Tétel. *Ha teljesülnek a (4), (5) és a (9) feltételek a g_1 és g_2 függvényekre, a (11) feltételek az f -re, továbbá f' jeltartó I -n, és c^{g_1} és c^{g_2} kielégítik a (7) feltételeket, akkor*

$$d(J_{n+1}) \leq (T + L_2) (d(J_n))^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

teljesül, azaz az ÉKF-ÉKF kombinált eljárás legalább másodrendű.

Bizonyítás. Mivel $|f'|$ monoton I -n, így

$$0 < m_1 \leq |f'(x)|, \quad x \in I.$$

De az 1.4. tétel 1^o becslése alapján egyrészt

$$(\alpha - a_{n+1}) \leq \frac{\frac{c^{g_1}}{2} Q_2^{g_1} + M_2}{m_1} (\alpha - a_n)^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

másrészt

$$(b_{n+1} - \alpha) \leq \frac{\frac{c^{g_2}}{2} Q_2^{g_2} + M_2}{m_1} (b_n - \alpha)^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Így

$$\begin{aligned} (b_{n+1} - a_{n+1}) &= (b_{n+1} - \alpha) + (\alpha - a_{n+1}) \leq \\ &\leq \frac{\frac{c^{g_1}}{2} Q_2^{g_1} + M_2}{m_1} (\alpha - a_n)^2 + \frac{\frac{c^{g_2}}{2} Q_2^{g_2} + M_2}{m_1} (b_n - \alpha)^2 \leq \\ &\leq \frac{\frac{c}{2} Q_2 + M_2}{m_1} ((\alpha - a_n)^2 + (b_n - \alpha)^2) \leq \\ &\leq (T + L_2) (b_n - a_n)^2, \end{aligned}$$

azaz

$$d(J_{n+1}) \leq (T + L_2) (d(J_n))^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

amit bizonyítani akartunk. Az egyenlőtlenség teljesülése a 2.3. tétel alapján azt jelenti, hogy az iteráció legalább másodrendű. \square

2.5. Az MKI-MKI kombinált eljárások

Eddig az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ iterációs pontsorozatokat az érintő-konvexfüggvények módszereinek alapfüggvényei segítségével állítottuk elő. Most bővítsük ki a választható iterációs alapfüggvények körét a mindig konvergens alapfüggvényekre (MKI).

Legyenek tehát F_1 és F_2 mindig konvergens iterációs alapfüggvények f -re vonatkozóan I -ben, és legyen f -nek I -n egyetlen egyszeres zérushelye.

Képezzük az $a_0 = a$ és a $b_0 = b$ pontokból kiindulva az $\{a_n\}$, illetve a $\{b_n\}$ iterációs pontsorozatot az

$$a_{n+1} = F_1(a_n; 1), \quad n = 0, 1, \dots,$$

illetve a

$$b_{n+1} = F_2(b_n; -1), \quad n = 0, 1, \dots,$$

képletekkel. Szokásosan nyerjük a

$$J_n = [a_n, b_n], \quad n = 0, 1, \dots,$$

intervallumoknak a jól ismert tulajdonságokkal rendelkező sorozatát.

2.8. Tétel. *Ha F_1 és F_2 mindig konvergens iterációs alapfüggvények f -re vonatkozóan I -ben, és f -nek I -n egyetlen egyszeres zérushelye van, α , akkor az MKI-MKI kombinált eljárással előállított $\{J_n\}$ intervallumsorozatra igaz, hogy*

$$1^\circ \quad \alpha \in J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$3^\circ \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha.$$

Bizonyítás. Mivel F_1 és F_2 mindig konvergens alapfüggvények, az 1.1. definíció szerint ekkor

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq \alpha_1 \text{ és } b = b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq \alpha_2$$

teljesül, ahol α_1 az f függvény a -tól jobbra, α_2 pedig b -től balra eső legközelebbi zérushelye, ha van ilyen tulajdonságú zérushely I -ben. Mivel α f egyetlen I -beli zérushelye, így

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in I.$$

Tehát $\alpha \in J_n$ minden $n \geq 0$ -ra, és nyilván teljesül a

$$J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

reláció is. Továbbá, szintén az 1.1. definíció szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha,$$

így viszont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(J_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

azaz $\bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha$. \square

2.9. Tétel. *Ha F_1 és F_2 mindig konvergens iterációs alapfüggvények f -re vonatkozóan I -ben, f -nek az $\alpha \in I$ egyetlen egyszeres zérushelye, továbbá,*

az F_1 által generált iteráció p_1 -edrendű, az F_2 által generált pedig p_2 -edrendű, akkor az MKI-MKI kombinált eljárás legalább $p = \min \{p_1, p_2\}$ -edrendű.

Bizonyítás. Mivel az F_1 által generált iteráció p_1 -ed-, az F_2 által generált pedig p_2 -edrendű, így valamilyen $C_1 > 0$ -ra érvényes az

$$(\alpha - a_{n+1}) \leq C_1(\alpha - a_n)^{p_1} \quad n = 0, 1, \dots,$$

és valamilyen $C_2 > 0$ -ra pedig a

$$(b_{n+1} - \alpha) \leq C_2(b_n - \alpha)^{p_2} \quad n = 0, 1, \dots,$$

hibabecslés. Legyenek most

$$p \doteq \min \{p_1, p_2\}, \quad \text{és} \quad C \doteq \max \{C_1(\alpha - a_0)^{p_1-p}, C_2(b_0 - \alpha)^{p_2-p}\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} (b_{n+1} - a_{n+1}) &= (b_{n+1} - \alpha) + (\alpha - a_{n+1}) \leq \\ &\leq C_1(\alpha - a_n)^{p_1} + C_2(b_n - \alpha)^{p_2} = \\ &= C_1(\alpha - a_n)^{p_1-p}(\alpha - a_n)^p + C_2(b_n - \alpha)^{p_2-p}(b_n - \alpha)^p \leq \\ &\leq C_1(\alpha - a_0)^{p_1-p}(\alpha - a_n)^p + C_2(b_0 - \alpha)^{p_2-p}(b_n - \alpha)^p \leq \\ &\leq C(\alpha - a_n)^p + C(b_n - \alpha)^p \leq \\ &\leq C(b_n - a_n)^p, \end{aligned}$$

azaz

$$d(J_{n+1}) \leq C(d(J_n))^p, \quad n = 0, 1, \dots,$$

amit bizonyítani akartunk. \square

2.6. Néhány numerikus példa

A kombinált módszereink közül néhányat szemléltetésül kipróbáltunk a következő függvények adott intervallumbeli gyökeinek keresésére. A függvényeink az adott intervallumokban teljesítik a (11) feltételeket. Módszereinket Pascal nyelven implementáltuk.

1. Érintőparabola-Newton-módszer:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \quad I = [1, 3]$$

	$F_P(x; 1)$	$F_{NR}(x)$
x_0	1.0000000000	3.0000000000
x_1	1.7628288813	2.3600000000
x_2	<u>2.0660239807</u>	<u>2.1271967802</u>
x_3	<u>2.0943520443</u>	<u>2.0951360369</u>
x_4	<u>2.0945514719</u>	<u>2.0945516738</u>
x_5	<u>2.0945514815</u>	<u>2.0945514815</u>

2. Newton-cosinushiperbolikus-módszer:

$$f(x) = \sin x - 0.5, \quad I = [0.1, 1.5]$$

	$F_{NR}(x)$	$F_{Ch}(x; -1)$
x_0	<u>0.1000000000</u>	1.5000000000
x_1	<u>0.5021757871</u>	<u>0.6082602907</u>
x_2	<u>0.5234711315</u>	<u>0.5265606410</u>
x_3	<u>0.5235987709</u>	<u>0.5236029225</u>
x_4	<u>0.5235987756</u>	<u>0.5235987756</u>

3. Érintőhiperbola-cosinushiperbolikus-módszer:

$$f(x) = \ln x + x - 2, \quad I = [1, 2]$$

	$F_H(x; 1)$	$F_{Ch}(x; -1)$
x_0	<u>1.0000000000</u>	2.0000000000
x_1	<u>1.2902793008</u>	<u>1.6297451381</u>
x_2	<u>1.4610277717</u>	<u>1.5594754391</u>
x_3	<u>1.5374326796</u>	<u>1.5571480918</u>
x_4	<u>1.5559729172</u>	<u>1.5571455990</u>
x_5	<u>1.5571409338</u>	<u>1.5571455990</u>
x_6	<u>1.5571455989</u>	<u>1.5571455990</u>
x_7	<u>1.5571455990</u>	<u>1.5571455990</u>

4. Érintőellipszis-érintőellipszis-módszer:

$$f(x) = \arctg x + \sqrt{x} - 2.6, \quad I = [1, 4]$$

	$F_E(x; 1)$	$F_E(x; -1)$
x_0	1.0000000000	4.0000000000
x_1	1.3904042945	3.3259912626
x_2	1.7528874387	<u>2.7802471176</u>
x_3	<u>2.0034149840</u>	<u>2.4018520710</u>
x_4	<u>2.1198053330</u>	<u>2.2063312403</u>
x_5	<u>2.1454413431</u>	<u>2.1510982090</u>
x_6	<u>2.1466635926</u>	<u>2.1466939446</u>
x_7	<u>2.1466663381</u>	<u>2.1466663392</u>
x_8	<u>2.1466663381</u>	<u>2.1466663381</u>

5. Módosított-Newton-módosított-Newton-módszer:

$$f(x) = e^{(\ln 2)x} - 5x + 2, \quad I = [0, 1]$$

	$F_{mN}(x; 1)$	$F_{mN}(x; -1)$
x_0	<u>0.0000000000</u>	1.0000000000
x_1	<u>0.6960556845</u>	<u>0.7679814385</u>
x_2	<u>0.7284898038</u>	<u>0.7361898640</u>
x_3	<u>0.7318435711</u>	<u>0.7326681538</u>
x_4	<u>0.7322013692</u>	<u>0.7322896588</u>
x_5	<u>0.7322396638</u>	<u>0.7322491170</u>
x_6	<u>0.7322437639</u>	<u>0.7322447760</u>
x_7	<u>0.7322442029</u>	<u>0.7322443112</u>
x_8	<u>0.7322442499</u>	<u>0.7322442615</u>
x_9	<u>0.7322442549</u>	<u>0.7322442561</u>
x_{10}	<u>0.7322442554</u>	<u>0.7322442555</u>
x_{11}	<u>0.7322442555</u>	<u>0.7322442555</u>

3. Intervallum-iterációk

3.1. Intervallumaritmetikai alapfogalmak

A számítógépek és a géporientált numerikus módszerek fejlődése, valamint a hibahalmazódás automatikus regisztrálásának igénye hozta létre a 60-as években az intervallumok aritmetikájának elméletét. Először R.E. Moore [8]-ban definiált számítógéppel implementálható műveleteket a valós, zárt intervallumok halmazán, majd ezeket a műveleteket több irányban is általánosították. Jelen dolgozatban G. Alefeld és J. Herzberger [1]-ben megadott műveleteit vesszük alapul.

Legyen IR a zárt, valós intervallumok halmaza. Értelmezzünk műveleteket IR -ben a következő módon: Legyen $*$ $\in \{+, -, \cdot, : \}$ egy bináris műveleti jel R -ben. Ha $J_1, J_2 \in IR$, akkor

$$J_1 * J_2 \doteq \{ x * y \mid x \in J_1, y \in J_2 \},$$

feltéve, hogy $0 \notin J_2$, ha $*$ $=$ $:$. Mivel $f(x, y) \doteq x * y$ kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ha $*$ $\in \{+, -, \cdot, : \}$, így ezen a halmazon felveszi minimumát és maximumát, és minden értéket e két érték között. Tehát $J_1 * J_2$ szintén zárt intervallum. Azaz így négy binér műveletet értelmeztünk IR -ben. A $J_1 = [a_1, b_1]$ és a $J_2 = [a_2, b_2]$ zárt intervallumok közötti műveletek eredményét a következőképpen lehet megadni:

$$J_1 + J_2 = [a_1 + a_2, b_1 + b_2],$$

$$J_1 - J_2 = [a_1 - b_2, b_1 - a_2] = J_1 + [-1, -1] \cdot J_2,$$

$$J_1 \cdot J_2 = [\min \{a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2\}, \max \{a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2\}],$$

$$J_1 : J_2 = [a_1, b_1] \cdot [1/b_2, 1/a_2].$$

Hasonlóan, ha r folytonos, unér művelet R -ben, akkor

$$rJ_1 \doteq \{ rx \mid x \in J_1 \}$$

unér művelet lesz IR -ben, és az eredmény az

$$rJ_1 = \left[\min_{x \in J_1} rx, \max_{x \in J_1} rx \right]$$

zárt intervallum lesz. Az IR -ben definiált műveletek legfontosabb tulajdonságait a következő tétel foglalja össze.

3.1. Tétel. *Az $(IR, \{+, -, \cdot, :\})$ algebrai struktúra*

- 1° *az összeadásra és a szorzásra nézve félcsoporth,*
- 2° *additív egysége a $[0, 0]$, multiplikatív egysége pedig az $[1, 1]$,*
- 3° *nullosztómentes,*
- 4° *$[a, a]$ pontintervallumainak van
additív inverze, és ez a $[-a, -a]$ pontintervallum,
multiplikatív inverze, ha $a \neq 0$, és ez az $[1/a, 1/a]$ pontintervallum,
a nem pontintervallumoknak nincs
sem additív, sem multiplikatív inverzük,*
- 5° *az összeadásra és a szorzásra nézve szubdisztributív, azaz
 $J_1 \cdot (J_2 + J_3) \subseteq J_1 \cdot J_2 + J_1 \cdot J_3$ és
 $[a, a] \cdot (J_2 + J_3) = [a, a] \cdot J_2 + [a, a] \cdot J_3$,*
- 6° *műveletei monotonok, azaz ha $I_1 \subseteq J_1$ és $I_2 \subseteq J_2$, akkor
 $I_1 * I_2 \subseteq J_1 * J_2$, ahol $*$ $\in \{+, -, \cdot, :\}$, illetve
 $rI_1 \subseteq rJ_1$, ahol r folytonos, unér művelet.*

Definiáljuk most is két IR -beli intervallum q távolságát, illetve egy intervallum abszolút értékét és átmérőjét a 2.1. fejezetben leírtak szerint. Ekkor a következő tulajdonságok érvényesek:

3.2. Tétel. Legyenek $J, J_1, J_2 \in (IR, \{+, -, \cdot, : \}, q)$.

$$1^\circ \quad |J_1 + J_2| \leq |J_1| + |J_2|, \\ d(J_1 \pm J_2) \leq d(J_1) + d(J_2),$$

$$2^\circ \quad |J_1 \cdot J_2| = |J_1| |J_2|, \\ d(J_1 \cdot J_2) \leq d(J_1) |J_2| + |J_1| d(J_2), \\ d([a, a] \cdot J_2) = |a| d(J_2),$$

$$3^\circ \quad \text{ha } J_1 = -J_1, \text{ akkor } d(J_1 \cdot J_2) = |J_2| d(J_1),$$

$$4^0 \quad d((J - [x, x])^p) \leq (d(J))^p, \quad \text{ha } x \in J, p = 1, 2, \dots$$

Legyen most az $f : [a, b] = I \subset R \rightarrow R$ folytonos függvény R -beli $\{+, -, \cdot, : \}$ binér és/vagy valamilyen unér műveletekkel megadva. Cseréljük most ki f -ben x -et mindenütt egy $J \subseteq I$ IR -beli intervallumra, a műveleteket pedig intervallumműveletekre emlékezve arra, hogy a valós számok pontintervallumként be vannak IR -be ágyazva. Ha a kapott műveletek értelmezve vannak a kapott intervallumokon, akkor elvégezve a kijelölt intervallumműveleteket jutunk az f J feletti **intervallumérték**éhez. Az $f(J)$ intervallumérték függ az f -et megadó kifejezéstől.

Legyen ugyanis például

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{x}-1}, \quad \text{ha } x \in [1.1, 10].$$

Ekkor

$$f([2, 3]) = \frac{[2, 3]}{1 - [2, 3]} = \frac{[2, 3]}{[-2, -1]} = [2, 3] \cdot \left[-1, -\frac{1}{2}\right] = [-3, -1],$$

illetve

$$f([2, 3]) = \frac{1}{\frac{1}{[2, 3]} - 1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] - 1} = \frac{1}{\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right]} = \left[-2, -\frac{3}{2}\right],$$

azaz az $f([2, 3])$ intervallumérték függ attól, hogy melyik kifejezés szerint számoltuk.

Adhatnánk egy, az f -et leíró kifejezéstől független definíciót is:

$$R(f, J) = \{ f(x) \mid x \in J \} = \left[\min_{x \in J} f(x), \max_{x \in J} f(x) \right],$$

de megadásához f J feletti szélsőértékeinek ismerete lenne szükséges. Az $f(J)$ és az $R(f, J)$ intervallumok közötti viszonyt fejezi ki a következő tétel.

3.3. Tétel. *Legyen $f : [a, b] = I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor minden olyan $J \subseteq I$, $J \in \mathbb{IR}$ -re, melyre valamely $f(J)$ intervallumkifejezés értelmezve van,*

$$R(f, J) \subseteq f(J),$$

azaz bármelyik $f(J)$ intervallumérték tartalmazza az f J feletti értékkészletét.

A fenti tételek bizonyítása megtalálható G. Alefeld és J. Herzberger [1] könyvében.

3.2. A Newton-iteráció intervallumaritmetikai variánsai

$(\mathbb{IR}, \{+, -, \cdot, :, q\})$ -ben számos olyan

$$J_{n+1} = F(J_n), \quad J_n = [a_n, b_n], \quad n = 0, 1, \dots,$$

iterációt dolgoztak ki, melyek – általában erős feltételek mellett – mindig konvergensek. Ezek az eljárások – hasonlóan az előző fejezet kombinált módszereihez – az f függvény $\alpha \in J_0$ zérushelyét tartalmazó, tartalmazási értelemben csökkenő, tehát konvergens olyan intervallumsorozatot állítanak elő, melyek α -t elvileg tetszőleges pontossággal határolják be. Használatukhoz azonban szükséges az $f^{(j)}$ $j = 0, 1, \dots, k$ derivált függvények értékkészletét tartalmazó intervallumok ismerete.

Először R.E. Moore adott meg ilyen eljárásokat [8]-ban, többek között például a felezőmódszer, illetve a módosított Newton-módszer intervallumaritmetikai variánsait.

Legyen az $f : [a, b] = I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{folytonosan differenciálható,} \\ f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ valamint} \\ 0 \notin R(f', I). \end{array} \right\} \quad (12)$$

A feltételekből következik, hogy f szigorúan monoton, és I -n egyetlen egy-szeres zérushelye van, legyen ez α .

Kiindulva a $J_0 = I$ intervallumból R.E. Moore az új J_n , $n = 1, 2, \dots$, intervallumokat az

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left\{ x_n - \frac{f(x_n)}{M} \right\}, \\ J_{n+1} &= I_{n+1} \cap J_n \end{aligned}$$

iteráció segítségével számolta, ahol $0 \notin M = [\underline{m}, \overline{m}] = f(I)$, és $x_n = m(J_n) \in J_n$ tetszőlegesen választott érték J_n -ből, például gyakran x_n a J_n intervallum középpontja. Ez a módszer olyan $\{J_n\}$ intervallumsorozatot generál, melynek elemei tartalmazzák f I -beli gyökét, és az elemek átmérője tart a nullához:

$$1^\circ \quad \alpha \in J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad J_{n+1} \subset J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$3^\circ \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha,$$

továbbá ha $m_1 = \min \{|\underline{m}|, |\overline{m}|\}$, és $M_1 = \max \{|\underline{m}|, |\overline{m}|\}$, akkor

$$d(J_{n+1}) \leq \left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right) d(J_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

További hasonló intervallumiterációkat adott meg G. Alefeld és J. Herzberger [1]-ben, R. Krawczyk [7]-ben, és mások. Most ezek közül az R. Krawczyk által [7]-ben megadott két iterációjával foglalkozzunk.

Tegyük fel, hogy az $f : I = [a, b] \subset R \rightarrow R$ függvény teljesíti a (12) feltételeket. Kiindulva a $J_0 = I$ kezdőintervallumból az új J_n , $n = 1, 2, \dots$, intervallumokat származtassuk vagy az

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left\{ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{f''(J_n)}{f'(x_n)} (J_n - x_n)^2 \right\}, \\ J_{n+1} &= I_{n+1} \cap J_n \end{aligned} \tag{13}$$

iterációval, feltéve, hogy f kétszer folytonosan differenciálható, és az f'' -t I minden részintervallumán ki tudjuk értékelni, vagy az

$$I_{n+1} = \left\{ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \left(1 - \frac{f'(J_n)}{f'(x_n)} (J_n - x_n) \right) \right\}, \quad (14)$$

$$J_{n+1} = I_{n+1} \cap J_n$$

iterációval, ha az f' -t ki tudjuk értékelni I minden részintervallumán. [7] cikkében R. Krawczyk a következő tételt bizonyította.

3.4. Tétel. *Teljesüljenek a (12) feltételek f -re, és legyen f zérushelye $\alpha \in I$.*

- *Ha f kétszer folytonosan differenciálható, és az f'' -t I minden részintervallumán ki tudjuk értékelni, akkor a (13),*
- *ha f' -t I minden részintervallumán ki tudjuk értékelni, akkor a (14)*

iteráció segítségével generált $\{J_n\}$ intervallumsorozat a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$1^\circ \quad \alpha \in J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$3^\circ \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha,$$

$$4^\circ \quad d(J_{n+1}) \leq C (d(J_n))^2, \quad C > 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

azaz az iterációk konvergenciarendje legalább 2.

3.3. A konvergencia gyorsítása

3.1. Definíció. *A $p(\geq 2)$ -szer folytonosan differenciálható f függvény a $D_p(\alpha)$ osztályba tartozik, ha*

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & f(\alpha) = 0, \\ 2^\circ \quad & f'(\alpha) \neq 0, \\ 3^\circ \quad & f''(\alpha) = \dots = f^{p-1}(\alpha) = 0, \\ 4^\circ \quad & f^p(\alpha) \neq 0. \end{aligned}$$

3.4. Tétel. *Teljesüljenek a (12) feltételek f -re, és legyen f zérushelye $\alpha \in I$. Ha $f \in D_p(\alpha)$, akkor a (13) eljárás segítségével generált $\{J_n\}$ intervallumsorozat átmérőjére érvényes a*

$$d(J_{n+1}) \leq C (d(J_n))^p, \quad C > 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

becslés, azaz a (13) iterációs eljárás legalább p -edrendű.

Bizonyítás. Tegyük fel tehát, hogy tetszőlegesen rögzített $n \geq 0$ -ra J_n -t a (13) módszerrel már kiszámoltuk, és legyen az $x \in J_n$ tetszőlegesen választva. Mivel $f \in D_p(\alpha)$, így a Taylor-formulát felírva f'' -re van olyan ξ α és x között, hogy

$$f''(x) = \frac{f^{(p)}(\xi)}{(p-2)!} (x - \alpha)^{p-2}$$

teljesül. Tehát

$$f''(x) \in \frac{f^{(p)}(J_n)}{(p-2)!} (J_n - \alpha)^{p-2}$$

teljesül minden $x \in J_n$ -re. Ez azt jelenti, hogy

$$f''(J_n) \subseteq \frac{f^{(p)}(J_n)}{(p-2)!} (J_n - \alpha)^{p-2}.$$

Ebből viszont a 2.1. és a 3.2. tételek felhasználásával

$$\begin{aligned} d(J_{n+1}) &\leq d(I_{n+1}) = \\ &= d\left(\left\{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{f''(J_n)}{f'(x_n)} (J_n - x_n)^2\right\}\right) = \\ &= \frac{1}{2} d\left(\frac{f''(J_n)}{f'(x_n)} (J_n - x_n)^2\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} d\left(\frac{1}{f'(x_n)} \frac{f^{(p)}(J_n)}{(p-2)!} (J_n - \alpha)^{p-2} (J_n - x_n)^2\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2(p-2)!} d\left(\frac{f^{(p)}(J_n)}{f'(x_n)} (J_n - J_n)^p\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2(p-2)!} d\left(\frac{f^{(p)}(J_n)}{f'(x_n)} [-(d(J_n))^p, (d(J_n))^p]\right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{f^{(p)}(I)}{m_1} \right| (d(J_n))^p = C (d(J_n))^p$$

kövekezik, ahol $m_1 = \min \{|\underline{m}|, |\overline{m}|\}$, amit bizonyítani akartunk. \square

3.5. Tétel. *Teljesüljenek a (12) feltételek f -re, és legyen f zérushelye $\alpha \in I$. Ha $f \in D_p(\alpha)$, akkor a (14) eljárás segítségével generált $\{J_n\}$ intervallumsorozat átmérőjére érvényes a*

$$d(J_{n+1}) \leq C (d(J_n))^p, \quad C > 0 \quad n = 0, 1, \dots,$$

becslés, azaz a (14) iterációs eljárás legalább p -edrendű.

Bizonyítás. Tegyük fel most is, hogy tetszőlegesen rögzített $n \geq 0$ -ra J_n -t az (14) módszerrel már kiszámoltuk, és legyen az $x \in J_n$ tetszőlegesen választva. Az előző bizonyításhoz hasonló módon felírva a Taylor-formulát kapjuk, hogy

$$f'(x) = f'(\alpha) + \frac{f^{(p)}(\xi)}{(p-1)!} (x - \alpha)^{p-1},$$

valamely ξ -re az α és x között. Tehát megint

$$f'(x) \in \left\{ f'(\alpha) + \frac{f^{(p)}(J_n)}{(p-1)!} (J_n - \alpha)^{p-1} \right\}$$

teljesül minden $x \in J_n$ -re, amiből viszont az következik, hogy

$$f'(J_n) \subseteq \left\{ f'(\alpha) + \frac{f^{(p)}(J_n)}{(p-1)!} (J_n - \alpha)^{p-1} \right\}.$$

Ez a reláció pedig azt jelenti felhasználva megint a 2.1. és a 3.2. tételeket, hogy

$$\begin{aligned} d(f'(J_n)) &\leq d\left(\frac{f^{(p)}(J_n)}{(p-1)!} (J_n - \alpha)^{p-1}\right) \leq \\ &\leq \frac{2}{(p-1)!} |f^{(p)}(J_n)| (d(J_n))^{p-1} \leq \\ &\leq \frac{2}{(p-1)!} |f^{(p)}(I)| (d(J_n))^{p-1}. \end{aligned}$$

Ezután alkalmazva a (14) iterációt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
d(J_{n+1}) &\leq d(I_{n+1}) = \\
&= d\left(\left\{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \left(1 - \frac{f'(J_n)}{f'(x_n)}(J_n - x_n)\right)\right\}\right) = \\
&= d\left(\frac{f'(x_n) - f'(J_n)}{f'(x_n)}(J_n - x_n)\right) \leq \\
&\leq 2d(J_n) \left| \frac{[-d(f'(J_n)), d(f'(J_n))]}{f'(x_n)} \right| \leq \\
&\leq 2d(J_n) \frac{d(f'(J_n))}{m_1},
\end{aligned}$$

ahol $m_1 = \min\{|m|, |\overline{m}|\}$. Ha az előző egyenlőtlenséget felhasználjuk, a

$$d(J_{n+1}) \leq \frac{4}{(p-1)!} \frac{|f^{(p)}(I)|}{m_1} (d(J_n))^p = C (d(J_n))^p$$

egyenlőtlenséghez jutunk, azaz a tételt bebizonyítottuk. \square

Tételeink alapján azt lehet mondani, hogy minél egyenesebb a zérushely közelében f , módszereink annál gyorsabban konvergálnak. A konvergencia gyorsítása érdekében célunk tehát az lesz, hogy f -et kiegyenesítsük zérushelye környékén úgy, hogy zérushelye ne változzon. A következő tétel ennek az elképzelésnek a megvalósítását alapozza meg.

3.6. Tétel. *Ha $f \in D_k(\alpha)$, legyen*

$$g_k(x) \doteq f(x), \quad \text{és}$$

$$g_{p+1}(x) \doteq \frac{g_p(x)}{\sqrt[p]{g_p'(x)}}, \quad \text{ha } p \geq k.$$

Ekkor $g_p \in D_p(\alpha)$ minden $p \geq k$ -ra.

A tétel bizonyítása megtalálható J. Gerlach [6] cikkében.

Módszerünk az iterációink konvergenciájának gyorsítására tehát a következő: Legyen $f \in D_k(\alpha)$. Iterációink ekkor legalább k -ad rendben konvergálnak. Ha viszont a

$$g_{k+1}(x) = \frac{f(x)}{\sqrt[k]{f'(x)}}$$

függvényre alkalmazzuk a (13), illetve a (14) iterációkat, akkor legalább $(k + 1)$ -ed rendben fognak konvergálni az f α zérushelyéhez.

Példa. Szemléltetésül számoljuk ki $\sqrt[3]{5}$ -t mint az $f(x) = x^3 - 5$ függvény zérushelyét. A tételt alkalmazva – mivel $f \in D_2(\sqrt[3]{5})$ – legyen

$$g_3(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}} = \frac{x^3 - 5}{\sqrt{3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x^2 - \frac{5}{x} \right).$$

Legyen a kezdőintervallum $[1, 2]$, és dolgozzunk a (13) módszer szerint. Az első négy közelítő intervallumot és a hibát az alábbi táblázat tartalmazza.

	$f(x)$	$g(x)$
a_1	1.518518518518518518518518518518519	1.689494680851063829787234042553191489362
b_1	1.748795184843199616976163605895831195923	1.712223728777753698436269039154934365747
hiba	0.230276666324681098457645087377312677404	0.022729047926689868649034996601742876385
a_2	1.704910099148226164095967378699812036899	1.709975673508246544510405481157887517140
b_2	1.710422706342843419215992409748848826865	1.709975947968624769532414682799963236775
hiba	0.005512607194617255120025031049036789966	$0.274460378225022009201642075719635 * 10^{-6}$
a_3	1.709974615577041002652447886822187140579	1.709975946676696989352527816625785286637
b_3	1.709976005033898800451204471282299795890	1.709975946676696989353108872789677980652
hiba	$0.1389456857797798756584460112655311 * 10^{-5}$	$0.581056163892694015 * 10^{-21}$
a_4	1.709975946676651562149195292168658862901	1.709975946676696989353108872543860109868
b_4	1.709975946676697985145760547252020578800	1.709975946676696989353108872543860109868
hiba	$0.46422996565255083361715899 * 10^{-13}$	$0.1 * 10^{-40}$

Irodalomjegyzék

- [1] Alefeld, G., Herzberger, J., *Introduction to interval computations*, Academic Press, New York, 1983.
- [2] Bálint, E., *Közelítő matematikai módszerek műszaki feladatokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966.
- [3] Bálint, E., *Numerikus és grafikus közelítő módszerek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.
- [4] Deutsch, M., Szabó, Z., Érintő ellipszisekkel generált mindig konvergens egyenletmegoldó iterációkról, *Matematikai Lapok (Budapest)*, **24** (1973) 397-408.
- [5] Ford, W.F., Pennline, J.A., Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Review*, **38** / **4**, (1996) 658-659.
- [6] Gerlach, J., Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Review*, **36** / **2**, (1994) 272-276.
- [7] Krawczyk, R., Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken, *Computing*, **4**, (1969) 187-201.
- [8] Moore, R.E., *Interval analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.
- [9] Obádovics, J.Gy., *Gyakorlati számítási eljárások*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1972.
- [10] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [11] Stoyan, G., Takó, G., *Numerikus módszerek I.*, ELTE, TypoTEX Kiadó, 1993.
- [12] Szabó, Z., Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I-II-III., *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **20** (1973) 223-233; **21** (1974) 285-293; **27** (1980) 185-200.

- [13] Szabó, Z., Mindig konvergens iterációs eljárások nem-lineáris egyenletek megoldására, Kandidátusi értekezés, Budapest-Debrecen, 1979.
- [14] Szabó, Z., Verschärfungen der Sätze über die Methode der konvexen Berührungsfunktionen ohne Divergenzpunkt, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, (1983) 243-248.
- [15] Szabó, Z., Combined iteration method for solving equations, "*Colloquia Math. Soc. J. Bolyai 50., Numerical methods*", Miskolc, (1986) 581-587.
- [16] Traub, J.F., *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1964.
- [17] Várterész, M., On always convergent methods of tangential convex functions for the solution of nonlinear equations, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **32** (1985) 255-265, (in Russian).
- [18] Várterész, M., Equation solving iterations based on tangential convex functions, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **39** (1991) 253-261
- [19] Várterész, M., Érintő-konvexfüggvényekkel generált egyenletmegoldó iterációk, *Alkalmazott Matematikai Lapok (Budapest)*, **X** (1997) 1-2, (megjelenés alatt)
- [20] Várterész, M., Accelerated convergence in Krawczyk's method, *Bulletins for Applied Mathematics (Budapest)*, **1195/96** (1996) 175-182.

A Summary

1. The method of tangential convex functions

Let the real function $f : [a, b] = I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be differentiable as often as necessary. Our aim is to approximate the zeros for f in I , that is the solutions of the non-linear equation $f(x) = 0$ with the help of some iterations like the simplified Newton's method. Z. Szabó introduced a definition about the always convergent method for the iterations of this nature in [12, 13, 14] and worked out some always convergent methods generated by tangential parabolas, hyperbolas, ellipses and, generally, by special tangential convex functions. In the first part of this dissertation, a more general class of always convergent iteration functions is given, including all these iteration functions.

Suppose that the function f is

$$\left. \begin{array}{l} \text{twice continuously differentiable} \\ \text{and the inequalities} \\ |f(x)| \leq M \neq 0, \\ |f'(x)| \leq M_1 \neq 0, \\ |f''(x)| \leq M_2 \neq 0 \end{array} \right\} \text{ are fulfilled for } x \in I. \quad (3)$$

Furthermore, let $g : (-h, h) = H \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be

$$\left. \begin{array}{l} \text{a twice continuously differentiable function} \\ \text{with } g(0) = g'(0) = 0 \text{ and} \\ g''(x) > 0 \text{ for } x \in H, \end{array} \right\} \quad (4)$$

and let still exist a real constant

$$\left. \begin{array}{l} q_2 > 0 \text{ such that for suitable } c > 0, \text{ the condition} \\ q_2 \leq g''(x) \text{ is statisfied, whenever} \\ x \in \left[a - b + g'^{-1} \left(-\frac{M_1}{c} \right), b - a + g'^{-1} \left(\frac{M_1}{c} \right) \right] \cap H. \end{array} \right\} \quad (5)$$

We start from an arbitrary point $x_0 \in I$ with $f(x_0) \neq 0$ and fit the function

$$y = -s \cdot c \cdot g(x), \quad (s \doteq \text{sign}(f(x_0)))$$

to the function f in its point $(x_0, f(x_0))$ in first order. We get a convex function

$$G : (-h + \mu, h + \mu) = H' \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

in the following form:

$$G(x) = -s \cdot c \cdot g \left(x - x_0 + g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right) + f(x_0) + s \cdot c \cdot g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right).$$

Now we determine the larger zero x_1 (or the smaller zero x'_1) of the function G and repeat the method for x_1 instead of x_0 , that is determine the larger zero x_2 of the convex function G touching the function f in its point $(x_1, f(x_1))$, and so on. We can calculate these zeros according to the 1.2. lemma:

$$x_{n+1} = x_n - g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_n) \right) + g_1^{-1} \left(\frac{|f(x_n)|}{c} + g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x_n) \right) \right) \right),$$

$n = 0, 1, \dots$. This method makes an iteration sequence $\{x_n\}$. If we always choose the smaller zeros x'_n ($n = 1, 2, \dots$) of G , we get another iteration sequence x_0, x'_1, x'_2, \dots . This iteration is called **the method of tangential convex functions** and the following theorem summarizes its properties:

1.3. Theorem. *If the conditions (3), (4), (5) and (7) are satisfied, then the method of tangential convex function of the form*

$$F(x; r) = x - g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x) \right) + g_r^{-1} \left(\frac{|f(x)|}{c} + g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x) \right) \right) \right)$$

is always convergent.

The following theorems are about the error estimates, the order and the information efficiency of iteration of the tangential convex functions. Let e_n denote the difference $\alpha - x_n$ and d_n denote $x_{n+1} - x_n$, and define

$$T \doteq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} \quad L_i \doteq \frac{M_i}{m_1}, \quad i = 1, 2,$$

and

$$K \doteq \frac{M}{c} + g \left(g'^{-1} \left(-\frac{M_1}{c} \right) \right).$$

1.4. Theorem. *If the conditions (3), (4), (5) and (7) are satisfied, then the sequence $\{x_n\}$ generated by the method of tangential convex functions from an initial point $x_0 \in I$ converges to a unique zero $\alpha \in I$ of the function f , and the inequalities*

$$\begin{aligned} 0 < m_1 &\leq |f'(x)|, & \text{if } x \in [x_0, \alpha], \\ g''(x) &\leq Q_2, & \text{if } x \in [g_1^{-1}(K), g_1^{-1}(K)] \end{aligned}$$

are fulfilled; for the error estimate of the iteration of tangential convex functions we get

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad |e_{n+1}| &\leq (T + L_2)|e_n|^2, & n = 0, 1, \dots \\ 2^\circ \quad |e_{n+1}| &\leq TL_2|d_n|^3 + (T + L_1L_2)|d_n|^2, & n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

1.5. Theorem. *For simple zeros, the order of the iteration of tangential convex functions is quadratic, and this iteration is optimal.*

2. Combined methods

In the second part of the dissertation we present further always convergent combined root-finding algorithms which generate decreasing (in the sense of inclusion) interval-sequences

$$J_n = [a_n, b_n], \quad n = 0, 1, \dots$$

The intervals J_n contain the zero α of f and their diameters

$$d(J_n) = b_n - a_n$$

tend to zero quickly, as n approaches infinity.

Suppose that the function f

$$\left. \begin{aligned} &\text{obeys (3),} \\ &f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ and} \\ &f'' \text{ keeps its sign in } I. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Starting from the points $a_0 = a$ and $b_0 = b$, we calculate the iteration sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ by the help of Newton's method and/or an always convergent method. So we get the sequence of intervals

$$J_n = [a_n, b_n], \quad n = 0, 1, \dots$$

2.1-3-5. Theorem. *If (11) holds for f , then the sequence of intervals J_n has the following properties*

$$1^\circ \quad \alpha \in J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$3^\circ \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha.$$

If J_n is calculated by the help of Newton's method and/or a method of tangential convex functions, then the decreasing real sequence of the diameters $d(J_n)$ of the intervals J_n can be estimated as follows:

2.2-4. Theorem. *If the condition (11) is fulfilled, and f' keeps its sign in I , then*

$$d(J_{n+1}) \leq (T + L_2)|d(J_n)|^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

3. Interval iterations

In $(IR, \{+, -, \cdot, : \}, q)$ many always convergent iterations

$$J_{n+1} = F(J_n), \quad J_n = [a_n, b_n], \quad n = 0, 1, \dots$$

have been worked out. R. E. Moore [8] was the first to give procedures of this kind, the so-called subdivision method or the interval modification of the simplified Newton's method. Then G. Alefeld, J. Herzberger [1] developed higher order interval iterations. These iterations generate such a sequence of subintervals of I that each interval includes a zero $\alpha \in I$ of f and the widths of these intervals tend to zero. So we have that these intervals will necessarily converge to the zero of α . It is required only that there exist interval evaluations for the function f and some of its derivatives.

In the third part of the dissertation we wish to investigate two Newton-like interval iterations considered by R. Krawczyk [7]. We assume that f is

$$\left. \begin{array}{l} \text{continuously differentiable,} \\ f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ and} \\ 0 \notin R(f', I). \end{array} \right\} (12)$$

Starting from the initial interval $J_0 = I$, we first calculate new intervals J_n , $n = 1, 2, \dots$ iteratively according to our first method:

$$I_{n+1} = \left\{ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{f''(J_n)}{f'(x_n)} (J_n - x_n)^2 \right\}, (13)$$

$$J_{n+1} = I_{n+1} \cap J_n$$

Secondly, we consider the iteration below:

$$I_{n+1} = \left\{ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \left(1 - \frac{f'(J_n)}{f'(x_n)} (J_n - x_n) \right) \right\}, \quad (14)$$

$$J_{n+1} = I_{n+1} \cap J_n$$

The sequence $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ calculated according to both methods has the following properties:

$$1^\circ \quad \alpha \in J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$3^\circ \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha,$$

$$4^\circ \quad d(J_{n+1}) \leq C (d(J_n))^2, \quad C > 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

that is the order of the iterations is at least 2.

The third part is concerned with achieving higher-order convergence for these methods. In order to do this, first we take a class of functions for which these iterations behave particularly well.

3.4-5. Theorem. *In addition to the assumptions (12), assume that $f \in D_p(\alpha)$. Then the sequence $\{J_n\}$ calculated according to the iterations (13) and (14) yields*

$$d(J_{n+1}) \leq C (d(J_n))^p, \quad C > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Therefore, the order of the convergence of the iterations (13) and (14) is at least p .

One may roughly say that the more f looks like a linear function, the faster our method will converge. So our next goal is to mold a given function into a new one in such a way that the zeros remain unchanged, but it looks nearly linear in a neighbourhood of the zero, so that the convergence of the methods will be accelerated. Let $f \in D_k(\alpha)$ Now we form the function

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt[k]{f'(x)}},$$

and our method will converge to the zero α of f at an order of $(k+1)$ or better.

B Összefoglalás

Legyen $f : [a, b] = I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nem-lineáris, elegendően sokszor differenciálható valós függvény. Célunk az f függvény I -beli zérushelyeinek közeliítése a módosított Newton-módszer konvergenciájának természetéhez hasonló tulajdonságú, azaz mindig konvergens iterációk segítségével.

Értekezésünk első fejezetében egy olyan iterációs alapfüggvényekből álló függvénycsaládot konstruáltunk, melynek tagjait érintő-konvexfüggvények segítségével lehet előállítani. Az alapfüggvényekből generálható iterációs eljárásainkat **érintő-konvexfüggvények módszereinek** nevezzük, tulajdonságaikat pedig a következő tételek foglalják össze.

1.3. Tétel. *Ha teljesülnek f -re a (3), g -re a (4) és az (5) feltételek, és c -t alkalmasan választottuk, akkor az*

$$F(x; r) = x - g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x) \right) + g_r^{-1} \left(\frac{|f(x)|}{c} + g \left(g'^{-1} \left(-\frac{s}{c} f'(x) \right) \right) \right)$$

iterációs alapfüggvény és az általa generált érintő-konvexfüggvények módszere f -re vonatkozóan I -ben mindig konvergens.

1.4. Tétel. *Teljesüljenek f -re a (3) és a*

$$0 < m_1 \leq |f'(x)|, \text{ ha } x \in [\min \{x_0, \alpha\}, \max \{x_0, \alpha\}],$$

feltételek, g -re a (4), az (5) és a

$$g''(x) \leq Q_2, \text{ ha } x \in [g_1^{-1}(K), g_1^{-1}(K)],$$

feltételek, és c -t válasszuk megfelelően. Ha valamely $x_0 \in I$ pontból kiinduló, az érintő-konvexfüggvények módszere segítségével előállított $\{x_n\}$ iterációs pontsorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, ahol $\alpha \in I$ f egyszeres zérushelye, akkor a következő hibabecslések érvényesek:

$$1^\circ \quad |e_{n+1}| \leq (T + L_2)|e_n|^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad |e_{n+1}| \leq TL_2|d_n|^3 + (T + L_1L_2)|d_n|^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

1.5. Tétel. *Az érintő-konvexfüggvények módszere egyszeres zérushely esetén másodrendű és optimális.*

A módszerünk definiálása és tulajdonságainak bizonyítása után néhány konvex függvény esetén megmutatjuk, hogyan származtatható belőlük iterációs alapfüggvény, és alkalmazásukat néhány műszaki- és természettudományos probléma matematikai modelljében fellépő nemlineáris egyenlet megoldásán keresztül szemléltetjük. Végül a vizsgált másodrendű iterációk gyorsaságának összehasonlítására kerül sor az aszimptotikus hibakonstans segítségével.

Az értekezés második fejezetében olyan mindig konvergens kombinált iterációkat adunk meg, melyek tartalmazási értelemben csökkenő, az f függvény α zérushelyét tartalmazó olyan intervallumsorozatot generálnak, mely tagjainak átmérője gyorsan konvergál a zérushoz. A módszereink tehát az α zérushelyet magként tartalmazó intervallumskatulyázást eredményeznek. Eljárásunk a következő: Kiindulva az $a_0 = a$ és a $b_0 = b$ pontokból az $\{a_n\}$, illetve a $\{b_n\}$ iterációs pontsorozatokat generáljuk a Newton-Raphson iteráció és/vagy mindig konvergens módszerek segítségével. Így a $J_n = [a_n, b_n]$, $n = 0, 1, \dots$, intervallumoknak a következő tulajdonságokkal rendelkező sorozatát nyerjük.

2.4-6-8. Tétel. *Ha teljesülnek a (11) feltételek f -re, akkor*

$$1^\circ \quad \alpha \in J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$2^\circ \quad J_{n+1} \subseteq J_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$3^\circ \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \alpha.$$

2.5-7. Tétel. *Ha teljesülnek a (11) feltételek, és f' jeltartó I -n, akkor*

$$d(J_{n+1}) \leq (T + L_2)|d(J_n)|^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Az értekezés harmadik fejezetében intervallum-iterációkkal foglalkozunk. Ezek az eljárások is – hasonlóan az előző fejezet kombinált módszereihez – az f függvény α zérushelyét tartalmazó, tartalmazási értelemben csökkenő, tehát konvergens intervallumsorozatot állítanak elő. Használatukhoz azonban szükséges az $f^{(j)}$ $j = 0, 1, \dots, k$, derivált függvények értékkészletét tartalmazó intervallumok ismerete. Kiindulva a $J_0 = I$ kezdőintervallumból az J_n , $n = 1, 2, \dots$, intervallumokat származtassuk vagy a (13), vagy az (14) iterációval. [7] cikkében R. Krawczyk bebizonyította, hogy ezen iterációk

segítségével generált $\{J_n\}$ intervallumsorozatok konvergenciarendje legalább 2. Értekezésünkben a következő tételeket tudtuk belátni.

3.4-5. Tétel. *Teljesüljenek a (12) feltételek f -re, és legyen f zérushelye $\alpha \in I$. Ha $f \in D_p(\alpha)$, akkor a (13) és a (14) eljárások segítségével generált $\{J_n\}$ intervallumsorozatok átmérőjére érvényesek a*

$$d(J_{n+1}) \leq C(d(J_n))^p, \quad C > 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

becslések, azaz a (13) és a (14) iterációs eljárások legalább p -edrendűek.

Módszerünk az iterációk konvergenciájának gyorsítására pedig a következő: Legyen $f \in D_k(\alpha)$. Iterációink ekkor az f α zérushelyéhez legalább k -ad rendben konvergálnak. Ha viszont a

$$g_{k+1}(x) = \frac{f(x)}{\sqrt[k]{f'(x)}}$$

függvényre alkalmazzuk a (13), illetve a (14) iterációkat, akkor azok legalább $(k+1)$ -ed rendben fognak konvergálni.