

A centrális határeloszlás-tétel problémaköre Lie-csoportokon

PAP GYULA

Doktori értekezés tézisei
Debrecen
1997

1 Az értekezés tárgya, előzmények

Dolgozatomban Lie-csoportbeli valószínűségi változókra vonatkozó centrális határeloszlás-tételekkel kapcsolatos problémákkal foglalkozok.

A témakör fejlődésében az első fontos mérföldkő G.A. Hunt [39] 1956-os cikke, melyben Lie-csoportokon értelmezett valószínűségi mértékekből álló konvolúciós félcsoportokat vizsgált. (Egy ilyen konvolúciós félcsoport úgy is tekinthető, mint egy Lie-csoportbeli értékeket felvevő független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat egy-dimenziós eloszlás-serege.) Sikertült karakterizálnia az infinitézimális generátorukat a klasszikus Lévy–Hincsin-formula analógiájával. Erre támaszkodva D. Wehn [63], [64] 1959-ben adott elégséges feltételeket a centrális határeloszlás-tételre kommutatív háromszögrendszer esetén (azaz amikor az egy sorban álló mértékek a konvolúciószorzásra nézve felcserélhetőek). Egy korai áttekintés található U. Grenander [30] 1963-as könyvében. Az eredményeket H. Heyer [35], [36], [37], W. Hazod [31] és E. Siebert [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56] általánosította különböző topológikus csoportokra, és a vizsgálatokat kiterjesztették egyéb valószínűségszámítási kérdésekre is. Az 1976-ig elért eredményeket tárgyalja H. Heyer [38] 1977-es monográfiája. A kutatásokban tevékenyen részt vettek magyar matematikusok is; lásd például Prékopa, Rényi és Urbanik [44], Csiszár [21], [22], [23], [24], Major és Shlosman [41] cikkeit, de érdemes megemlíteni Haar Alfréd nevét is, ugyanis a Haar-mérték igen fontos szerepet játszik ezeken a csoportokon. A legújabb kutatások kiterjednek félcsoportokra is; ezekről szól Ruzsa és Székely [47] könyve.

Egy másik fontos mérföldkő D.W. Stroock és S.R.S. Varadhan [60] 1973-as munkája, melyben funkcionális centrális határeloszlás-tételt bizonyítottak Lie-csoportokon. Náluk a határfolyamat egy független növekményű Gauss-folyamat volt, melyet a martingál-problémával karakterizáltak. Ph. Feinsilver [25] 1978-ban karakterizálta az összes független növekményű folyamatot a martingál-problémával, és funkcionális centrális határeloszlás-tételt is bizonyított ilyen határfolyamatokkal.

Új lendületet adott a kutatásoknak W. Hazod [32] 1984-es cikke, melyben általánosította a stabilis eloszlások fogalmát topológikus csoportokra. Később W. Hazod és E. Siebert [33], [59] 1986-ban megmutatták, hogy a centrális határeloszlás-tétel topológikus csoportokon történő vizsgálatában kiemelt szerepet játszanak a *nilpotens Lie-csoportok*, ugyanis ha tekintjük lokálisan kompakt topológikus csoportbeli független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozatát, akkor az (automorfizmusokkal) alkalmasan normalizált részlatszorzatok lehetséges határeloszlásai olyan részcsoportra koncentrálódnak, mely izomorf egy egyszerűen összefüggő nilpotens Lie-csoporttal. Érdemes megemlíteni D. Neuenschwander [42] 1996-os könyvét, melyben a legegyszerűbb nem kommutatív nilpotens Lie-csoporttal, a Heisenberg-csoporttal kapcsolatos eredményeket foglalja össze.

Nilpotens Lie-csoportokon már V.N. Tutubalin [61] 1964-ben és A.D. Virtser [62] 1974-ben, valamint P. Crépel és A. Raugi [19] 1978-ban bizonyítottak centrális határeloszlás-tételeket konvolúcióhatványokra vonatkozóan (azaz független, azonos eloszlású valószínűségi változókra), de ezekben a munkákban magas momentumok végességét tételezték fel. Végül A. Raugi [45] adott 1978-ban egy bonyolult, hosszú bizonyítást csak a második homogén

momentum végeességét feltételezve. A konvergenciasebesség vizsgálatával kapcsolatos első lépést P. Crépel és B. Roynette [20] tette meg 1977-ben, de nekik a Heisenberg-csoport esetén $O(n^{-1/3})$ -nál lassabb konvergenciát sikerült bizonyítaniuk az optimális $O(n^{-1/2})$ helyett.

Az is kiderült, hogy a stabilis eloszlások vonzási tartományának meghatározásánál igen fontos szerepet játszik a következő beágyazási probléma: vajon ha egy valószínűségi mérték beágyazható egy konvolúciós félcsoportba, akkor ez a konvolúciós félcsoport egyértelműen meghatározott? (Lásd W. Hazod [32], S. Nobel [43] és H.P. Scheffler [48].) P. Baldi [15] 1985-ben megmutatta, hogy 2-lépéses nilpotens Lie-csoportok esetén a Gauss-mértékek egyértelműen ágyazhatók be Gauss-félcsoportba.

Kutatásaimra nagy hatással volt E. Siebert [58] 1982-es cikke is, melyben Lie-csoportokon értelmezett valószínűségi mértékekből álló konvolúciós hemicsoportokat vizsgált, melyek úgy is tekinthetők, mint egy független növekményű folyamat növekményei eloszlásainak két-paraméteres serege. A kiinduló ötlet az volt, hogy ezeket próbáljuk meg infinitézimális generátoroknak egy időparamétertől függő seregével karakterizálni, mely a megfelelő konvolúciós operátor-sereg deriváltja. E. Siebert megmutatta, hogy ennek a kapcsolatnak az integrál-alakja, az úgynevezett evolúciós integrál-egyenletek valóban alkalmasak gyengén Lipschitz-folytonos konvolúciós hemicsoportok karakterizálására. Később Born [17] 1990-ben karakterizálta az erősen korlátos változású konvolúciós hemicsoportokat tetszőleges lokálisan kompakt csoport esetén. Ez a munka J.U. Herod és R.W. McKelvey [34] 1980-as cikkére támaszkodott, melyben a Hille-Yosida elméletet általánosították olyan evolúciós operátor-családokra, melyek Banach-terek egymásba ágyazott láncolatán vannak értelmezve, kontraktív operátorokból állnak, és korlátos változásúak a láncra nézve.

2 Az értekezés felépítése és főbb eredményei

Az értekezés nyolc fejezetből áll, ezek közül az **első** a bevezetés, a **másodikban** pedig a gyakrabban használatos fogalmak és jelölések találhatók.

A **harmadik** fejezetben, mely a [2] és [3] cikkek eredményein alapul, kommutatív háromszögrendszerrel foglalkozunk. Először Raugi [45] centrális határeloszlás-tételére adunk egy egyszerű, rövid bizonyítást lépcsős Lie-csoport esetén.

3.1.1 Tétel. *Legyen G egy lépcsős Lie-csoport. Jelölje $(\delta_t)_{t>0}$ a G természetes dilatacióiból álló egy-paraméteres automorfizmus-csoportot. Legyen μ egy centrált valószínűségi mérték G -n véges második homogén momentummal. Ekkor*

$$\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n) \rightarrow \nu,$$

ahol $\nu = \text{Gauss}(\mu)$.

($\text{Gauss}(\mu)$ azt az egyértelműen meghatározott Gauss-mértéket jelöli, melynek első- és másodfokú homogén momentumai ugyanazok, mint a μ mértéknek.)

A következő cél Lindeberg-Feller típusú centrális határeloszlás-tétel bizonyítása, azaz szükséges és elégséges feltétel keresése háromszögrendszerek konvergenciájára. Ehhez először

a korlátlanul osztható eloszlások konvergenciájáról szóló klasszikus tétel (lásd Gnedenko és Kolmogorov [28, §19, Theorem 1, Theorem 2]) analógiát kell megtalálni (lásd 3.2.2 Tétel), mely konvolúciós félcsoporthoz ad szükséges és elegendő feltételt (ami a Lévy–Hincsin formulában szereplő mennyiségek megfelelő értelemben vett konvergenciája).

Ennek segítségével a kísérő Poisson-sorozatokat használva és Fourier-transzformáltakat alkalmazva sikerült szükséges és elégséges feltételt kapni szimmetrikus mértékek esetén. Legyen G egy Lie-csoport $\mathfrak{L}(G)$ Lie-algebrával. Jelölje $\mathfrak{M}^1(G)$ a valószínűségi mértékek halmazát. Jelölje $\mathfrak{U}(e)$ az e egységelem mérhető környezetének rendszerét. Egy $X \in \mathfrak{L}(G)$ elem tekinthető például bal-invariáns differenciáloperátornak is a G csoporton:

$$\tilde{X}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x \exp(tX)) - f(x)).$$

Legyen $\{X_1, \dots, X_d\}$ egy bázis $\mathfrak{L}(G)$ -ben. Legyen $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{D}(G)$ egy olyan elsőfajú kanonikus koordináta-rendszer G -ben, mely adaptált az $\{X_1, \dots, X_d\}$ bázishoz és érvényes az egységelem valamely U_0 kompakt környezetben, azaz $y = \exp(\sum_{i=1}^d x_i(y)X_i)$ ha $y \in U_0$, továbbá legyen $\varphi : G \rightarrow [0, 1]$ egy Hunt-függvény a G csoporton, azaz $1 - \varphi \in \mathfrak{D}(G)$, és $\varphi(y) = \sum_{i=1}^d x_i(y)^2$ ha $y \in U_0$. Jelölje \mathbb{M}_d^+ a $d \times d$ valós, szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok halmazát.

3.3.5 Tétel. Legyen $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy szimmetrikus mértékekből álló kommutatív háromszögrendszer G -n. Legyen $(b_{ij})_{i,j=1, \dots, d} \in \mathbb{M}_d^+$.

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(G \setminus U) = 0$ ha $U \in \mathfrak{U}(e)$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int x_i(y)x_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij}$ ha $i, j = 1, \dots, d$.
- (ii) (a) \mathcal{I} infinitézimális,
- (b) $\sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int \varphi(y) \mu_{n\ell}(dy) < \infty$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} = \nu$ ahol $\nu = \nu_1$, $(\nu_t)_{t \geq 0}$ az a Gauss-félcsoporthoz, melynek infinitézimális generátora $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j$.

A szimmetrizáció módszerével ezt sikerült általánosítani normális háromszögrendszerekre is (3.3.6 Tétel).

Lépcsős Lie-csoportokon a Lindeberg–Feller tétel szokásos alakját kapjuk (3.4.4 Tétel). Ezután levezetünk egy Lindeberg-tételt abban az esetben, amikor a határeloszlás olyan Gauss-mérték, mely stabilis a $(\delta_{\sqrt{t}})_{t>0}$ természetes dilatációra nézve (3.4.12 Tétel). Ebből egyrészt könnyen származtatható a 3.1.1 Tétel, másrészt egy Lindeberg-tétel a H Heisenberg-csoporton adott valószínűségi mértékek $\mu_1 * \dots * \mu_n$ n -szeres konvolúciós szorzatának alkalmas automorfizmusokkal standardizált sorozatának Gauss-mértékhez való konvergenciájáról (3.4.14 Tétel).

A **negyedik** fejezetben, mely az [1], [9] és [10] cikkek eredményein alapul, Gauss-mértékekkel való közelítés pontosságával foglalkozunk lépcsős nilpotens Lie-csoportokon, mégpedig a 3.1.1 centrális határeloszlás-tételbeli konvergencia sebességével. Először a standard esetben homogén gömbökön, azaz $B(a, r) := \{x \in G : |a^{-1}x| < r\}$, $a \in G$, $r > 0$ alakú halmazokon bizonyítunk $O(n^{-1/2})$ konvergencia-sebességet bizonyos analitikus feltételeket kielégítő $|\cdot|$ homogén normák esetén (4.1.34 Tétel): egy s -lépcsős nilpotens Lie-csoport esetén

$$|\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq C(G)\kappa(a, r)(\beta_3(\mu, \nu) + \beta_{3s}(\mu, \nu))n^{-1/2},$$

ahol $\kappa(a, r) := (1 + |a|)^{s-1}(1 + (1 + |a|)/r)^{3(s-1)}$ és $\beta_k(\mu, \nu) := \int |x|^k |\mu - \nu|(dx)$, ahol $|\mu - \nu|$ a $\mu - \nu$ előjeles mérték totális variációját jelöli.

Ezután sima függvények integráljaira vonatkozó Berry-Esseen egyenlőtlenséget bizonyítunk, amelyben csak a szokásos momentumfeltétel szerepel, és az alakja is optimális (4.2.7 Tétel). A legfontosabb következmény az, hogy ha $m_3(\mu) < \infty$, akkor

$$\left| \int f(x) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^n(dx) - \int f(x) \nu(dx) \right| \leq C(G) |f|_{3s, \text{hom}} (1 + m_{3(s-1)}(\nu)) m_3(\mu) n^{-1/2},$$

ahol egy γ mérték esetén $m_k(\gamma) := \int |x|^k \gamma(dx)$.

Valószínűségi mértékek konvolúció-hatványainak Gauss-mértékekkel történő közelítésének pontosságáról ad még több információt az Edgeworth-sorfejtés. A 4.3.1 Tétel a rövid alakot írja le, azaz amikor a sorfejtés csak egy tagot tartalmaz a Gauss-mérték után. Egy $I \in \mathbb{Z}_+^d$ multiindex esetén használni fogjuk az

$$S^I := \frac{1}{|I|!} \sum_{[j_1] + \dots + [j_{|I|}] = I} X_{j_1} \dots X_{j_{|I|}}$$

jobb-invariáns differenciáloperátort, mely tekinthető X^I szimmetrizáltjának. (Itt $[j]$ azt a multiindexet jelöli, melynek a j -edik koordinátája 1, és a többi 0.) Az Edgeworth-sorfejtés legegyszerűbb alakja $m_4(\mu) < \infty$ esetén

$$\int f(x) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^n(dx) = \int f(x) \nu(dx) + \alpha n^{-1/2} + O(n^{-1}),$$

ahol

$$\alpha := \sum_{d(I)=3} \int_0^1 \int \int S^I g_{x,z}(e) \nu_t(dx) \nu_{1-t}(dz) dt \int y^I (\mu - \nu)(dy),$$

$(\nu_t)_{t \geq 0}$ az a Gauss-félcsoport, melyre $\nu_1 = \nu$, és $g_{x,z} : G \rightarrow \mathbb{R}$, $g_{x,z}(y) := f(xyz)$, $y \in G$. Érdemes megemlíteni azt is, hogy

$$S^I g_{x,z}(e) = \sum_{d(J) \geq d(I), |J| \leq |I|} P_J^I(x, z) \partial^J f(xz),$$

ahol P_J^I olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(J) - d(I)$.

A 4.4.5 Tételben megadjuk a tetszőleges hosszúságú Edgeworth-sorfejtést, melynek bizonyítása az Euler-Maclaurin-féle összegzési formulának bizonyos többdimenziós szimplexekre

történő általánosítását használja (lásd 4.4.2 Tétel), mely önmagában is érdeklődésre tarthat számot.

Az **ötödik** fejezet, mely a [4], [5] és [11] cikkek eredményein alapul, az előzményekben megfogalmazott beágyazási problémával kapcsolatos. Egy lehetőség a beágyazási probléma megközelítésére a konvolúciós félcsoporthoz struktúrájának felderítése. Ezzel függ össze az a kérdés, melyet Ph. Feinsilver és R. Schott [26], [27] vetettek fel: hogy néz ki egy független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat, mely értékeit egy Lie-csoportban veszi fel? Az 5.1.2 Tétel válasza az, hogy egy d -dimenziós exponenciális Lie-csoport esetén (azaz amikor az exponenciális leképezés egy analitikus diffeomorfizmus) ha veszünk egy független, stacionárius növekményű folyamatot, és úgy tekintjük, mint egy \mathbb{R}^d -beli értékű folyamatot, akkor az egy *idő-homogén diffúzió ugrásokkal* J. Jacod és A.N. Shiryaev [40, p. 142] értelmében, azaz egy olyan (általánosított) sztochasztikus differenciál-egyenlet egyértelmű, erős megoldása, melyet egy Wiener-folyamat és egy véletlen stacionárius Poisson-mérték hajt meg; az egyenletet a folyamat infinitézimális generátorával explicit módon megadjuk. Ennek segítségével az 5.1.6 Tételben explicit konstrukciót adunk tetszőleges nilpotens Lie-csoportbeli értékeket felvevő független, stacionárius növekményű folyamatra, mellyel általánosítjuk B. Roynette [46] rekurzív formuláját, mely a Brown-mozgás esetére érvényes.

P. Baldi [15] tételét sikerült 2-lépéses nilpotens Lie-csoportról tetszőleges nilpotens Lie-csoportra általánosítani:

5.2.3 Tétel. *Legyenek $(\mu_t)_{t \geq 0}$ és $(\nu_t)_{t \geq 0}$ olyan Gauss-félcsoporthoz egy egyszeresen összefüggő, nilpotens Lie-csoporton, hogy $\mu_1 = \nu_1$. Ekkor $\mu_t = \nu_t$ minden $t \geq 0$ esetén.*

Megpróbáltam a beágyazási problémát úgy is megközelíteni, hogy *karakterizációs tulajdonságokat* kerestem Gauss-mértékekre. Carnal [18] bizonyított illet kompakt Lie-csoportokon. Ennek az eredménynek adjuk meg az analógját tetszőleges Lie-csoporton az 5.3.1 Tételben, de ez Gauss-félcsoporthoz karakterizál.

A disszertáció utolsó három fejezete a funkcionális centrális határeloszlás-tétel problémakörével foglalkozik, mely egy G topológikus csoporton a következő módon fogalmazható meg. Legyenek $\{\xi_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ G -beli értéket felvevő, soronként független valószínűségi változók, és legyenek $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan növekvő, jobbról folytonos $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ függvények, hogy $k_n(0) = 0$, és minden $t \in \mathbb{R}_+$ és minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén teljesül a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(t)} P(\xi_{n\ell} \notin U) = 0$$

infinitézimalitási feltétel. Képezzük a

$$\xi_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} \xi_{n\ell} := \xi_{n1} \xi_{n2} \cdots \xi_{n, k_n(t)}$$

szorzatokat, és tekintsük a $\xi_n = (\xi_n(t))_{t \geq 0}$, $n = 1, 2, \dots$ sztochasztikus folyamatokat, melyeknek a trajektóriái nyilván a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-térbe esnek. Feltételeket keresünk a háromszögrendszerre ahhoz, hogy teljesüljön a véges-dimenziós eloszlások $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}_f} \xi$ konvergenciája, vagy a Szkorohod-térben indukált eloszlások $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$ konvergenciája, ahol $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értéket felvevő folyamat, melynek trajektóriái (majd-

nem biztosan) a Szkorohod-térbe esnek. Szükségképpen a $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ folyamat független bal-növekményű, azaz $\xi(0) = e$ és tetszőleges $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ időpontokra a $\xi(t_1), \xi(t_1)^{-1}\xi(t_2), \dots, \xi(t_{n-1})^{-1}\xi(t_n)$ bal-növekmények függetlenek. Csak olyan limesz-folyamatok érdekelnek bennünket, melyek sztochasztikusan folytonosak (ami most azzal ekvivalens, hogy nincsenek rögzített idejű szakadási pontjai).

A feladatok pontosabban megfogalmazva a következők:

- parametrizáljuk a G -beli értékű, független bal-növekményű, sztochasztikusan folytonos folyamatok által a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-téren indukált valószínűségi mértékek $\text{PII}_c(G)$ halmazát, azaz adjunk meg egy bijekciót $\text{PII}_c(G)$ és valamely alkalmas $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paramétertér között;
- feleltessünk meg alkalmas K_n mennyiségeket a $\{\xi_{n\ell} : 1 \leq \ell \leq k_n(t)\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, sorokhoz úgy, hogy

$$\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi \iff K_n \xrightarrow{?} K,$$

ahol $K \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ az a paraméter, ami a ξ limesz-folyamathoz tartozik, és a $K_n \rightarrow K$ konvergencia megfelelően van értelmezve.

A **hatodik** fejezetben, mely a [12] cikken alapul, először megfogalmazzuk a fenti kérdésekre a $G = (\mathbb{R}^d, +)$ csoport esetén a jól ismert válaszokat. Ekkor ugyanis a karakterisztikus függvények segítségével belátható, hogy a $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ paramétertér választható a következő módon: azon (a, B, η) hármasok halmaza, ahol $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos és $a(0) = 0$, $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ monoton növekvő, folytonos és $B(0) = 0$, valamint $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (ahol $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ olyan $\eta \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ mértékek halmaza, melyekre $\eta(\{0\} \times \mathbb{R}_+) = 0$ és a $t \mapsto \int (|y|^2 \wedge 1) \eta(dy \times [0, t])$ leképezés folytonos). Egy $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ hármashoz az a mérték tartozik a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ Szkorohod-téren, mely szerint az $x(t) - x(s)$ növekmény eloszlása egy olyan korlátlanul osztható eloszlás \mathbb{R}^d -n, melynek a Lévy–Hincsin reprezentációjában az $(a(t) - a(s), B(t) - B(s), \eta(\cdot \times]s, t])$ mennyiségek szerepelnek.

A második kérdésre pedig az a válasz $G = (\mathbb{R}^d, +)$ esetén, hogy a

$$\sum_{\ell=1}^{k_n(\cdot)} \xi_{n\ell} \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$$

konvergencia ekvivalens azzal, hogy

- $\sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \mathbb{E} h(\xi_{n\ell}) \rightarrow a(t)$ egyenletesen $t \in [0, T]$ -ben minden $T > 0$ esetén,
- $\sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \text{Cov}(h(\xi_{n\ell})) \rightarrow \widehat{B}(t)$ ha $t \in D$,
- $\sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \mathbb{E} f(\xi_{n\ell}) \rightarrow \int f(y) \eta(dy \times [0, t])$ ha $t \in D$, $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^d)$,

ahol egy G topológikus csoport esetén $\mathcal{C}_e(G)$ a $\mathcal{C}^b(G)$ térnek azt az alterét jelöli, mely az egységelem valamely környezetében eltűnő függvényekből áll, $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy nyírófüggvény, azaz folytonos, kompakt tartójú és $h(x) = x$ teljesül a $0 \in \mathbb{R}^d$ valamely környezetében, továbbá $\widehat{B}(t) = (\widehat{b}(i, j)(t))_{i, j=1, \dots, d}$,

$$\widehat{b}(i, j)(t) := b(i, j)(t) + \int h_i(y)h_j(y) \eta(dy \times [0, t]).$$

Az a célunk, hogy megkeressük ezen tételek általánosítását Lie-csoportokra. A $\text{PII}_c(G)$ halmaz parametrizálása reménytelennek tűnik Fourier-transzformáltak segítségével, ezért inkább a konvolúciós operátorokat fogjuk használni. Egy μ mérték *konvolúciós operátora* az a T_μ operátor, mely a G -n értelmezett valós, korlátos, folytonos, végtelenben eltűnő függvények szuprémum-normával ellátott $\mathcal{C}^0(G)$ Banach-térén van értelmezve a következő módon:

$$T_\mu f(x) := \int f(xy) \mu(dy) \quad \text{ha } x \in G.$$

Először is rávilágítunk a *konvolúciós hemicsoportokkal* való kapcsolatra. Vezessük be az $\mathbb{S} := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t\}$ jelölést. Valószínűségi mértékeknek egy $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ családját (folytonos) konvolúciós hemicsoportnak nevezünk, ha $\mu(s, r) * \mu(r, t) = \mu(s, t)$ teljesül minden $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$ esetén, $\mu(t, t) = \varepsilon_e$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, és az $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$ leképezés folytonos. Ha $(\xi(t))_{t \geq 0}$ egy G -beli értékeket felvevő független bal-növekményű sztochasztikusan folytonos folyamat, akkor a $(\xi(s))^{-1}\xi(t)$, $(s, t) \in \mathbb{S}$ bal-növekmények eloszlásai egy konvolúciós hemicsoportot alkotnak. Fordítva: ha $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy konvolúciós hemicsoport, akkor létezik olyan $(\xi(t))_{t \geq 0}$ G -beli értékeket felvevő független bal-növekményű, sztochasztikusan folytonos, $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ -beli trajektóriájú folyamat, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén a $(\xi(s))^{-1}\xi(t)$ bal-növekmény eloszlása $\mu(s, t)$.

A konvolúciós operátorokkal létesített $\mu \sim T_\mu$ reláció pedig létrehoz egy bijekciót a $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ konvolúciós hemicsoportok és azon $(T(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ *evolúciós operátor-családok* között, melyek a $\mathcal{C}^0(G)$ Banach-térén értelmezett pozitív, balinvariáns, 1 normájú korlátos, lineáris operátorokból állnak. (Egy E Banach-tér korlátos, lineáris operátoraiból álló $(T(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ halmazt evolúciós operátor-családnak nevezzük, ha $T(s, r)T(r, t) = T(s, t)$ teljesül minden $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$ esetén, $T(t, t) = I$ minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén, és az $(s, t) \mapsto T(s, t)$ leképezés erősen folytonos.)

A Hille–Yosida elmélet alapján tudjuk, hogy kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van egy E Banach-térén értelmezett $(T(t))_{t \geq 0}$ erősen folytonos egy-paraméteres operátor-félcsoport és annak $(N, \text{Dom}(N))$ infinitézimális generátora között, ahol

$$Nf := \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)f - f}{h}, \quad f \in \text{Dom}(N).$$

Ez alapján azt várnánk, hogy egy $(T(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ evolúciós operátor-család leírható infinitézimális generátoroknak valamely $(\tilde{N}(t))_{t \geq 0}$ seregével, ahol $\tilde{N}(t)$ az evolúciós család „deriváltja t -ben”. Többféle kapcsolat lehetséges egy $(T(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ evolúciós operátor-család és infinitézimális generátorok valamely $(\tilde{N}(t))_{t \geq 0}$ serege között (lásd Heyer [38], Born [17]). A hatodik fejezetben az derül ki, hogy a *gyengén korlátos változású* konvolúciós

hemicsoportok paraméterezésére az a kapcsolat alkalmas, melyet a *gyenge evolúciós integrálegyenletek* létesítenek. (Ezek azért „gyengék”, mert csak „pontonként” kell teljesülniük.)

Jelölje $\mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ azon (a, B, η) hármasok halmazát, ahol $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos, korlátos változású és $a(0) = 0$, $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ monoton növekvő, folytonos és $B(0) = 0$, valamint $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$, ahol $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ azon $\eta \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}_+ \times G)$ mértékek halmazát jelöli, melyekre $\eta(\{e\} \times \mathbb{R}_+) = 0$ és a $t \mapsto \int \varphi(y) \eta(dy \times [0, t])$ leképezés folytonos.

Jelölje $\mathbb{A}(G)$ az összes $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporth generáló funkcionáljából álló halmazt. Egy $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezés akkor és csak akkor monoton növekvő, folytonos és korlátos változású, ha létezik olyan $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas, hogy $(a(t), B(t), \eta(t))$ az $A(t)$ generáló funkcionál kanonikus dekompozíciójában szereplő mennyiségek, ahol $\eta(t)(dy) := \eta(dy \times [0, t])$. Ekkor $g_\tau \in \mathcal{C}_2(G)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \int_{]s,t]} A(d\tau)(g) &:= \sum_{i=1}^d \int_{]s,t]} X_i g_\tau(e) a(i)(d\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{]s,t]} X_i X_j g_\tau(e) b(i, j)(d\tau) \\ &+ \iint_{G \times]s,t]} \left(g_\tau(y) - g_\tau(e) - \sum_{i=1}^d X_i g_\tau(e) x_i(y) \right) \eta(dy \times d\tau), \end{aligned}$$

amennyiben a jobboldalon álló integrálok léteznek. Azt mondjuk, hogy egy $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport és egy $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas *kapcsolatosak egymással a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint*, ha minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(T_{\mu(s,t)} - I)f(e) = \int_{]s,t]} A(d\tau)(T_{\mu(\tau,t)}f),$$

ahol $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ az a monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(a(t), B(t), \eta(t))_{t \geq 0}$.

A 6.7.1 és 6.7.4 Tételek szerint a $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ folytonosan gyengén korlátos változású konvolúciós hemicsoportok és az $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterek között bijekciót hoz létre a gyenge backward evolúciós egyenlet. A $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport a hozzá tartozó A leképezést a következő explicit módon határozza meg: minden $f \in \mathfrak{X}_2(G)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$A(t)(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int (f - f(e)) d\mu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right).$$

Az az érdekesség, hogy először a 6.6.1 konvergencia-tételt bizonyítjuk be, melyben elegendő feltételeket adunk G -beli háromszögrendszerből konstruált véletlen lépcsőfüggvények növekményeinek valamely gyengén korlátos változású konvolúciós hemicsoporthoz való konvergenciájára. Azt is érdemes megemlíteni, hogy a gyenge forward evolúciós egyenlet is teljesül (ugyanis a 6.6.1 Tételt ugyanúgy lehet bizonyítani ebben az esetben is), de a gyenge backward evolúciós egyenletnek meg van az az előnye, ami a 6.5.2 unicitási tételből derül ki: közvetlenül, azaz a konvergencia-tétel felhasználása nélkül belátható, hogy egy adott paraméterhez a gyenge backward evolúciós egyenlettel legfeljebb egy konvolúciós hemicsoportot lehet megfeleltetni.

A **hetedik** fejezetben, mely a [13] cikk eredményeit tartalmazza, egy kis kitérőt teszünk: megmutatjuk, hogy a hatodik fejezet eredményei átvihetők Lie–projektív csoportokra is. Ez azért jelentős, mert így többek között az összes (nem feltétlenül kommutatív) kompakt topológikus csoport le van fedve.

Végül a **nyolcadik** fejezetben, mely a [14] kéziraton alapul, a hatodik fejezet eredményeire támaszkodva választ adunk a fent megfogalmazott két kérdésre tetszőleges G Lie–csoport esetén. A 8.4.2 és 8.4.8 Tételekben parametrizáljuk az összes G –beli értékű, független bal–növekményű, sztochasztikusan folytonos folyamatot, azaz az összes konvolúciós hemicsoporthoz a $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterhalmazzal, mely olyan (m, B, η) hármassokból áll, ahol $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ folytonos és $m(0) = e$, $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ monoton növekvő, folytonos és $B(0) = 0$, valamint $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$. A bijekciót az *eltolt* gyenge backward evolúciós egyenlet teremti meg: minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(T_{\tilde{\mu}(s,t)} - I)f(e) = \int_{]s,t]} \tilde{A}(d\tau)(g_{\tau,t}),$$

ahol

$$\tilde{\mu}(s, t) := \varepsilon_{m(s)} * \mu(s, t) * \varepsilon_{m(t)^{-1}}, \quad g_{\tau,t}(y) := T_{\tilde{\mu}(\tau,t)}f(m(\tau)ym(\tau)^{-1}),$$

és $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ az a monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(0, B(t), \eta(t))_{t \geq 0}$. Ennek az eltolásnak az a szerepe, hogy „ki kell operálni” azt a részt, amely nem feltétlenül korlátos változású.

Ugyanúgy, ahogy a hatodik és hetedik fejezetben, most is először egy konvergenciatételt bizonyítunk: elegendő feltételeket adunk tetszőleges hemicsoporthoz való konvergenciára. Az alapötlet az, hogy a $\mu_{n\ell}$ mértékeket a *lokális várhatóértékükkel* toljuk el. Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértéknek az $m \in U_0$ pont lokális várhatóértéke, amennyiben

$$x_i(m) = \int x_i(y) \mu(dy) \quad \text{ha } i \in \{1, \dots, d\}.$$

Ha a $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértéknek létezik m lokális várhatóértéke, akkor definiálhatjuk a *lokális kovariancia–mátrixát* is a következő módon: $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$,

$$b_{ij} := \int (x_i(y) - x_i(m))(x_j(y) - x_j(m)) \mu(dy).$$

8.3.2 Tétel. *Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek egy G Lie–csoporton. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy olyan monoton növekvő, balról folytonos függvény, melyre $k_n(0) = 0$ és $k_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{Z}_+$. Jelölje $m_{n\ell}$ és $B_{n\ell}$ a $\mu_{n\ell}$ mérték lokális várhatóértékét, illetve lokális kovarianciamátrixát. Vezessük be az $m_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ és $B_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$, $B_n(t) = (b_n(i, j)(t))_{i,j=1,\dots,d}$ függvényeket:*

$$m_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} m_{n\ell}, \quad B_n(t) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} B_{n\ell}.$$

Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ –ban. Tegyük fel, hogy

(i) létezik olyan $\eta_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ mérték, hogy minden $t \in D$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_G f(y) \mu_{n\ell}(dy) = \int_G f(y) \eta_0(dy \times [0, t]),$$

(ii) létezik olyan $B_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d$, $B_0(t) = (b_0(i, j)(t))_{i,j=1,\dots,d}$, folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ és $i, j \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(i, j)(t) = b_0(i, j)(t) + \int_G x_i(y) x_j(y) \eta_0(dy \times [0, t]).$$

Ekkor $(0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ és

$$\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left(\mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1}} \right) \rightarrow \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ahol $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely a $(0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméternek felel meg a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Továbbá a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport megfelel az $(e, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméternek az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Ha még azt is feltesszük, hogy

(iii) létezik olyan $m_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(t) = m_0(t),$$

(iv) minden $T > 0$ és $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} |x_i(m_n(s)^{-1} m_n(t))| = 0,$$

akkor

$$\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} \rightarrow \mu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S}$$

ahol $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan hemicsoport, mely az $(m_0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméternek felel meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

(Megjegyezzük, hogy az (i) feltétel teljesülése esetén minden $T > 0$, minden elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ és minden $\ell \in \{1, \dots, k_n(T)\}$ esetén a $\mu_{n\ell}$ mértéknek létezik lokális várhatóértéke.)

A 8.6 paragrafusban azt is belátjuk, hogy a gyenge backward evolúciós egyenlettel létesített reláció ekvivalens azzal, hogy a folyamat által a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-téren indukált mérték az illető paraméterhez tartozó eltolt martingálprobléma megoldása (lásd D.W. Stroock és S.R.S. Varadhan [60], valamint Ph. Feinsilver [25]): azt modjuk, hogy egy $(\xi(t))_{t \geq 0}$ folyamat által a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-téren indukált mérték az $(m, B, \eta) \in$

$\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármashoz tartozó eltolt martingálprobléma megoldása, ha minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvény esetén az

$$f(\xi(t)m(t)^{-1}) - \int_{[0,t]} \tilde{A}(d\tau)(L_{\xi(\tau)}R_{m(\tau)^{-1}}f)$$

folyamat martingál (a természetes filtrációval), ahol $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ az a monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(0, B(t), \eta(t))_{t \geq 0}$. (Ha $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ és $y \in G$, akkor $L_y f$ és $R_y f$ a következő függvényeket jelöli: $L_y f(x) := f(yx)$, $R_y f(x) := f(xy)$, $x \in G$.)

A 8.7 paragrafusban kiderül, hogy a 8.3.2 Tételben megadott feltételek szükségesek is. Először tekintsük a „globális centrálást”. Legyenek $\{\xi_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ soronként független valószínűségi változók. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ olyan monoton növekvő, balról folytonos függvény, hogy $k_n(0) = 0$, $k_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{Z}_+$, és teljesüljön a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(t)} P(\xi_{n\ell} \notin U) = 0$$

infinitézimalitási feltétel minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. Tekintsük $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\xi_n = (\xi_n(t))_{t \geq 0}$,

$$\xi_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} \xi_{n\ell}$$

sztochasztikus folyamatot. Jelölje $\mu_{n\ell}$ a $\xi_{n\ell}$ eloszlását. Definiáljuk az $m_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ és $B_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ függvényeket úgy, mint a 8.3.2 Tételben. Egy $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas esetén legyen $\hat{B} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$, $\hat{B}(t) = (\hat{b}(i, j)(t))_{i,j=1,\dots,d}$,

$$\hat{b}(i, j)(t) := b(i, j)(t) + \int x_i(y)x_j(y)\eta(dy \times [0, t]).$$

8.7.1 Tétel. *Legyen $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értékű, sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű folyamat, mely az $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármassal kapcsolatos az eltolt gyenge evolúciós egyenlet szerint. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ban. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (i) (a) $m_n(t) \rightarrow m(t)$ egyenletesen $t \in [0, T]$ -ben minden $T > 0$ esetén,
- (b) $B_n(t) \rightarrow \hat{B}(t)$ ha $t \in D$,
- (c) $\sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_G f(y) \mu_{n\ell}(dy) \rightarrow \int f(y) \eta(dy \times [0, t])$ ha $t \in D$, $f \in \mathfrak{C}_e(G)$.

- (ii) $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$.

Hasonló határeloszlás-tétel érvényes „lokális centrálással”. Definiáljuk $n \in \mathbb{N}$ esetén a következő $\tilde{\xi}_n = (\tilde{\xi}_n(t))_{t \geq 0}$ sztochasztikus folyamatokat:

$$\tilde{\xi}_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} (\xi_{n\ell} m_{n\ell}^{-1}).$$

8.7.3 Tétel. Legyen $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}(t))_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értékű, sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű folyamat, mely a $(0, B, \eta) \in \mathbb{P}_{bv}(\mathbb{R}_+, G)$ hármassal kapcsolatos a gyenge evolúciós egyenlet szerint. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ben. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) (a) $B_n(t) \rightarrow \hat{B}(t)$ ha $t \in D$,
- (b) $\sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_G f(y) \mu_{n\ell}(dy) \rightarrow \int f(y) \eta(dy \times [0, t])$ ha $t \in D$, $f \in \mathfrak{C}_e(G)$.
- (ii) $\tilde{\xi}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \tilde{\xi}$.

A 8.7.4 Tétel szükséges és elégséges feltételt ad független növekményű folyamatok sorozatának konvergenciájára. A 8.7.5 Tételben $\{\xi_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ soronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és a limesz folyamat független, stacionárius növekményű. Végül a 8.7.6 Tétel szükséges és elégséges feltételt ad független, stacionárius növekményű folyamatok sorozatának konvergenciájára.

Irodalomjegyzék

Az értekezés eredményeit a szerző alábbi cikkei tartalamazzák:

- [1] PAP, G. (1991). Rate of convergence in CLT on stratified groups. *J. Multivariate Anal.* **38**, 333–365.
- [2] PAP, G. (1991). A new proof of the central limit theorem on stratified Lie groups. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups X. Proceedings, Oberwolfach 1990*, pp. 329–336. Plenum Press, New York.
- [3] PAP, G. (1993). Central limit theorems on nilpotent Lie groups. *Probab. Math. Stat.* **14**, 287–312.
- [4] PAP, G. (1993). Characterization of Gaussian semigroups on a Lie group. *Publ. Math.* **42**, 295–301.
- [5] PAP, G. (1994). Uniqueness of embedding into a Gaussian semigroup on a nilpotent Lie group. *Arch. Math.* **62**, 282–288.
- [6] PAP, G. (1994). Central limit theorems on some topological groups. A survey. In: *New Trends in Probability Theory and Mathematical Statistics II. Proceedings of the Second Ukrainian-Hungarian Conference, Munkachevo, 1992*, pp. 214–224.
- [7] PAP, G. (1994). Central limit theorems on stratified Lie groups. In: *VI International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings, Vilnius, 1993*

- [8] PAP, G. (1994). Processes with stationary independent increments on nilpotent Lie groups. In: Balakrishnan, A.V. (ed.) 4th International Conference on Advances in Communication & Control. Proceedings, Rhodes, 1993, pp. 787–792. University of Nevada, Las Vegas.
- [9] PAP, G. (1995). Edgeworth expansions in nilpotent Lie groups. In: Heyer, H.(eds.) Probability Theory on Vector Spaces XI. Proceedings, Oberwolfach 1995, pp. 274–291. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- [10] BENTKUS, V. and PAP, G. (1996). The accuracy of Gaussian approximations in nilpotent Lie groups. *J. Theor. Probab.* **9**, 995–1017.
- [11] PAP, G. (1997). Construction of processes with stationary independent increments on nilpotent Lie groups. *Arch. Math.* **69**, 146–155.
- [12] HEYER, H. and PAP, G. (1997). Convergence of noncommutative triangular arrays of probability measures on a Lie group. *J. Theor. Probab.* **10**, 1003–1052.
- [13] HEYER, H. and PAP, G. (to appear in 1997). Convolution hemigroups of bounded variation on a Lie projective group. *J. London Math. Soc.*
- [14] PAP, G. (1997). Functional central limit theorems and hemigroups of probability measures on a Lie group. Preprint.

A tézisekben még az alábbi munkákra történik hivatkozás:

- [15] BALDI, P. (1985). Unicité du plongement d’une mesure de probabilité dans un semi-groupe de convolution gaussien. Cas non-abélien. *Math. Z.* **188**, 411–417.
- [16] BORN, E. (1989). An explicit Lévy–Hinčin formula for convolution semigroups on locally compact groups. *J. Theor. Probab.* **2**, 325–342.
- [17] BORN, E. (1990). Hemigroups of probability measures on a locally compact group. *Math. Ann.* **287**, 653–673.
- [18] CARNAL, H. (1964). Unendlich oft teilbare Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf kompakten Gruppen. *Math. Ann.* **153**, 351–383.
- [19] CRÉPEL, P. and RAUGI, A. (1978). Théorème central limite sur les groupes nilpotents. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **14**, 145–164.
- [20] CRÉPEL, P. and ROYNETTE, B. (1977). Une loi du logarithme itéré pour le groupe d’Heisenberg. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **39**, 217–229.
- [21] CSISZÁR, I. (1964). A note on limiting distributions on topological groups. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **9**, 595–598.

- [22] CSISZÁR, I. (1966). On infinite products of random elements and infinite convolutions of probability distributions on locally compact groups. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **5**, 279–295.
- [23] CSISZÁR, I. (1970). Some problems concerning measures on topological spaces and convolutions of measures on topological groups. In: *Les Probabilités sur les Structures Algébriques*, pp. 75–96, Paris.
- [24] CSISZÁR, I. (1971). On the weak* continuity of convolution in a convolution algebra over an arbitrary topological group. *Stud. Sci. Math. Hung.* **6**, 27–40.
- [25] FEINSILVER, Ph. (1978). Processes with independent increments on a Lie group. *Trans. Am. Math. Soc.* **242**, 73–121.
- [26] FEINSILVER, Ph. and SCHOTT, R. (1989). Operators, stochastic processes, and Lie groups. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups IX. Proceedings, Oberwolfach, 1988.* (Lect. Notes Math., vol. 1379, pp. 75–85) Springer, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.
- [27] FEINSILVER, Ph. and SCHOTT, R. (1989). An operator approach to processes on Lie groups. In: *Probability Theory on Vector Spaces IV. Proceedings, Łancut, 1987.* (Lect. Notes Math., vol. 1391, pp. 59–65) Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- [28] GNEDENKO, B.V. and KOLMOGOROV, A.N. (1949). *Limit distributions for sums of independent random variables.* Gostekhizdat. (English translation Addison–Wesley, Cambridge, 1954)
- [29] GÖTZE, F. (1981). On Edgeworth expansions in Banach spaces. *Ann. Probab.* **9**, 852–859.
- [30] GRENANDER, U. (1968). *Probabilities on algebraic structures.* Almquist & Wilksells, Stockholm.
- [31] HAZOD, W. (1977). *Stetige Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und erzeugende Distributionen.* Lect. Notes Math. Vol. 595, Springer, Berlin Göttingen Heidelberg New York.
- [32] HAZOD, W. (1984). Stable and semistable probabilities on groups and on vector spaces. In: Szynal, D., Weron, A. (eds.) *Probability Theory on Vector Spaces III. Proceedings, Lublin 1983.* (Lect. Notes Math., vol. 1080, pp. 69–89) Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- [33] HAZOD, W. and SIEBERT, E. (1986). Continuous automorphism groups on a locally compact group contracting modulo a compact subgroup and applications to stable convolution semigroups. *Semigroup Forum* **33**, 111–143.
- [34] HEROD, J.U. and MCKELVEY, R.W. (1980). A Hille–Yosida theory for evolutions, *Isr. J. Math.* **36**, 13–40.

- [35] HEYER, H. (1968). Fourier transforms and probabilities on locally compact groups. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **70**, 109–147.
- [36] HEYER, H. (1968). L’analyse de Fourier non-commutative et applications à la théorie des probabilités. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. B.* **4**, 143–164.
- [37] HEYER, H. (1970). *Dualität lokalkompakter Gruppen*. Lect. Notes Math. vol. 150, Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [38] HEYER, H. (1977). *Probability Measures on Locally Compact Groups*. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [39] HUNT, G.A. (1956). Semi-groups of measures on Lie groups. *Trans. Am. Math. Soc.* **81**, 264–293.
- [40] JACOD, J. and SHIRYAEV, A.N. (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.
- [41] MAJOR, P. and SHLOSMAN, S.B. (1979). A local limit theorem for the convolution of probability measures on a compact connected group. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **50**, 137–148.
- [42] NEUENSCHWANDER, D. (1996). *Probabilities on the Heisenberg Group*. Lect. Notes Math. Vol. 1630, Springer, Berlin Heidelberg.
- [43] NOBEL, S. (1991). Limit theorems for probability measures on simply connected nilpotent Lie groups, *J. Theor. Probab.* **4**, 261–284.
- [44] PRÉKOPA, A., RÉNYI, A. and URBANIK, K. (1956). On the limit distribution of sums of independent random variables in commutative compact topological groups. *Acta Math. Hung.* **7**, 11–16.
- [45] RAUGI, A. (1978). Théorème de la limite centrale sur les groupes nilpotents. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **43**, 149–172.
- [46] ROYNETTE, B. (1975). Croissance et mouvements browniens d’un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **32**, 133–138.
- [47] RUZSA, I.Z. and SZÉKELY, G.J. (1988). *Algebraic Probability Theory*, Wiley, New York.
- [48] SCHEFFLER, H.P. (1994). \mathcal{D} -Domains of attraction of stable measures on stratified Lie groups, *J. Theor. Probab.* **7**, 767–792.
- [49] SIEBERT, E. (1972). Wahrscheinlichkeitsmaße auf lokalkompakten maximal fastperiodischen Gruppen. Dissertation, Universität Tübingen.
- [50] SIEBERT, E. (1973). Stetige Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf lokalkompakten maximal fastperiodischen Gruppen. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **25**, 269–300.

- [51] SIEBERT, E. (1973). Über die Erzeugung von Faltungshalbgruppen auf beliebigen lokal-kompakten Gruppen. *Math. Z.* **131**, 313–333.
- [52] SIEBERT, E. (1974). Einige Bemerkungen zu den Gauß-Verteilungen auf lokalkompakten Gruppen. *Manuscr. Math.* **14**, 41–55.
- [53] SIEBERT, E. (1974). Absolut-Stetigkeit und Träger von Gauß-Verteilungen auf lokal-kompakten Gruppen. *Math. Ann.* **210**, 129–147.
- [54] SIEBERT, E. (1976). Convergence and convolutions of probability measures on a topological group. *Ann. Probab.* **4**, 433–443.
- [55] SIEBERT, E. (1977). On the generation of convolution semigroups on arbitrary locally compact groups II. *Arch. Math.* **28** 139–148.
- [56] SIEBERT, E. (1977). On the Lévy-Chintschin formula on locally compact maximally almost periodic groups. *Math. Scand.* **41** 331–346.
- [57] SIEBERT, E. (1981). Fourier analysis and limit theorems for convolution semigroups on a locally compact group. *Adv. Math.* **39**, 111–154.
- [58] SIEBERT, E. (1982). Continuous hemigroups of probability measures on a Lie group. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups. Proceedings, Oberwolfach 1981.* (Lect. Notes Math. vol. 1080, pp. 362–402.) Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [59] SIEBERT, E. (1986). Contractive automorphisms on locally compact groups. *Math. Z.* **191**, 73–90.
- [60] STROOCK, D.W. and VARADHAN, S.R.S. (1973). Limit theorems for random walks on Lie groups. *Sankhyā Ser. A* **35**, 277–294.
- [61] TUTUBALIN, V.N. (1964). Compositions of measures on the simplest nilpotent group. *Theory Probab. Appl.* **9**, 479–487.
- [62] VIRTSER, A.D. (1974). Limit theorems for compositions of distribution on certain nilpotent Lie groups. *Theory Probab. Appl.* **19**, 86–105.
- [63] WEHN, D. (1959). Limit distributions on Lie groups. Thesis, Yale.
- [64] WEHN, D. (1962). Probabilities on Lie groups. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **48**, 791–795.

A centrális határeloszlás-tétel problémaköre Lie-csoportokon

PAP GYULA

Doktori értekezés

Debrecen

1997

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
2. Jelölések, alapfogalmak	13
2.1 Lie-csoportok	16
2.2 Konvolúciós félcsoporthok	17
2.3 Nilpotens Lie-csoportok	19
2.4 Lépcsős Lie-csoportok	20
2.5 Fourier-transzformáció	27
2.6 Háromszögrendszerek	28
3. Kommutatív háromszögrendszerek	29
3.1 Konvolúcióhatványok	29
3.2 Konvolúciós félcsoporthok konvergenciája	33
3.3 Lindeberg–Feller-tétel Lie-csoportokon	38
3.4 Lindeberg–Feller-tétel lépcsős Lie-csoportokon	43
4. Konvergencia–sebesség	53
4.1 Konvergencia–sebesség homogén gömbökön	53
4.2 Berry–Esseen-egyenlőtlenség	74
4.3 Rövid Edgeworth-sorfejtés	79
4.4 Teljes Edgeworth-sorfejtés	85
5. Konvolúciós félcsoporthok	97
5.1 Konvolúciós félcsoporthok előállítása	97
5.2 Beágyazási probléma	103

5.3	Gauss-félcsoportok	106
6.	Korlátos változású konvolúciós hemicsoportok	111
6.1	Funkcionális centrális határeloszlás-tétel	111
6.2	Korlátos változású intervallum-függvények	115
6.3	Gyenge backward evolúciós egyenlet	118
6.4	Háromszögrendszer relatív kompaktsága	119
6.5	Hemicsoportok generálása	128
6.6	Háromszögrendszerek konvergenciája	133
6.7	Hemicsoportok paraméterezése	148
7.	Hemicsoportok Lie-projektív csoportokon	155
7.1	Lie-projektív csoportok	155
7.2	Konvolúciós félcsoportok és hemicsoportok	157
7.3	Háromszögrendszerek konvergenciája	159
7.4	Hemicsoportok paraméterezése	165
7.5	Példák	168
8.	Funkcionális centrális határeloszlás-tételek	171
8.1	Differenciálható függvények terei	173
8.2	Háromszögrendszer lokális centráltja	178
8.3	Háromszögrendszer konvergenciája	185
8.4	Konvolúciós hemicsoportok paraméterezése	203
8.5	Forward evolúciós egyenlet	215
8.6	Martingál-probléma	217
8.7	Funkcionális centrális határeloszlás-tételek	220

1. fejezet

Bevezetés

A valószínűesszámításban központi szerepet játszik a *centrális határeloszlás-tétel*, melynek legegyszerűbb alakja azt mondja ki, hogy ha ξ_k , $k = 1, 2, \dots$ olyan független, véletlen mennyiségek, melyek csak a 0 vagy 1 értékeket vehetik fel

$$\mathbb{P}\{\xi_k = 1\} = p, \quad \mathbb{P}\{\xi_k = 0\} = 1 - p$$

valószínűséggel, akkor

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad n \rightarrow \infty,$$

azaz a részletösszegek alkalmasan normált sorozata a standard normális eloszláshoz tart. Ez a tétel $p = \frac{1}{2}$ esetén már megtalálható A. de Moivre 1730-ban megjelent munkájában; az általános esetben P.S. Laplace bizonyította 1812-ben.

A tétel heurisztikusan azt fejezi ki, hogy sok kis független, véletlen hatás összegződése közel normális eloszlású, és így magyarázatot ad arra, hogy miért találkozunk gyakran olyan véletlen mennyiségekkel, melyek jól közelíthetők normális eloszlással. Tipikus példa erre a mérési hiba. A fent említett eredmény igen nagy hatással volt a valószínűesszámítás, a matematikai statisztika és a sztochasztikus folyamatok elméletének kialakulására és fejlődésére, beleértve a gyakorlati alkalmazhatóságot is. Egy fontos mérföldkő volt B.V. Gnedenko és A.N. Kolmogorov [33] 1949-ben megjelent monográfiája, melyben szisztematikusan vizsgálják és megoldják a következő alapvető kérdéseket:

- Ha ξ_k , $k = 1, 2, \dots$ független (esetleg azonos eloszlású) véletlen valós mennyiségek, akkor az $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$ részletösszegeket alkalmasan normálva: $T_n = \frac{1}{b_n} S_n - a_n$, milyen határeloszlásai lehetnek a $(T_n)_{n \geq 1}$ sorozatnak? Milyen feltételek mellett konvergál a $(T_n)_{n \geq 1}$ sorozat egy adott (lehetséges) határeloszláshoz?
- Általánosabban: ha $\{\xi_{n,k} : k = 1, \dots, n\}$, $n = 1, 2, \dots$ szériánként független véletlen valós mennyiségek, melyek egyenletesen kicsik, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}\{|\xi_{n,k}| > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

akkor a $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_{n,k}$, $n = 1, 2, \dots$ sorozatnak milyen határeloszlásai lehetnek, és milyen feltételek mellett konvergál egy adott eloszláshoz?

Valószínűségeloszlások vizsgálata valós számok halmazától különböző struktúrákon igen régre nyúlik vissza: már D. Bernoulli foglalkozott 1734-ben eloszlásokkal gömbfelületen (ami egy kompakt topológikus csoport) annak a kérdésnek a kapcsán, hogy hogyan oszlanak el az akkoriban ismert csillagok az égbolton, és azt állította, hogy ez közel egyenletes eloszlás. A témakör intenzív vizsgálata e század elején kezdődött R. von Mises [63] 1918-as és J.B. Perrin [79] 1928-as munkáival, melyekhez kapcsolódott R.A. Fisher is; ezek a fizikában, földtudományban, meteorológiában és biológiában felmerült speciális problémákra irányultak. Azóta sikerült a valós számok halmazán elért eredmények jelentős részét általánosítani különböző topológikus csoportokra. Ebben tevékenyen részt vettek magyar matematikusok is; lásd például Prékopa András, Rényi Alfréd és K. Urbanik [81], Csizsár Imre [22], [23], [24], [25], Major Péter és S.B. Shlosman [62] cikkeit, de érdemes megemlíteni Haar Alfréd nevét is, ugyanis a Haar-mérték igen fontos szerepet játszik ezeken a csoportokon. A legújabb kutatások kiterjednek félcsoportokra is; ezekről szól Ruzsa Imre és Székely Gábor [85] könyve. Az 1976-ig elért eredmények összefoglalását adja H. Heyer [48] monográfiája, melynek egyik kiindulópontja G.A. Hunt [56] cikke volt, melyben megadta a Lévy–Hincsin formula analógját Lie-csoportokon értelmezett valószínűségi mértékekből álló konvolúciós félcsoport esetére. (Heyer professzor irányításával Humboldt-ösztöndíjasként végzett kutatásaim alapozták meg az e témakörben elért eredményeimet.) Ebben a monográfiában széria-sorozatokra vonatkozó centrális határeloszlás-tételek találhatók (lásd a fenti második problémakört). Az első problémakör vizsgálatának új lendületet adott W. Hazod [41] 1984-es cikke, melyben általánosította a stabilis eloszlások fogalmát topológikus csoportokra. Később W. Hazod és E. Siebert [43], [93] 1986-ban megmutatták, hogy a centrális határeloszlás-tétel topológikus csoportokon történő vizsgálatában kiemelt szerepet játszanak a *nilpotens Lie-csoportok*, ugyanis ha tekintjük lokálisan kompakt topológikus csoportbeli független, azonos eloszlású véletlen elemek sorozatát, akkor az alkalmasan normalizált részletsorozatok lehetséges határeloszlásai olyan részcsoporthoz koncentrálnak, mely izomorf egy egyszerűen összefüggő nilpotens Lie-csoporttal.

Fontos szerepet játszanak a *lépcsős* (angolul: stratified) nilpotens Lie-csoportok, mert ezek osztálya elég gazdag, és ezek technikailag könnyebben kezelhetőek (lásd G.B. Folland és E.M. Stein [32]). A lépcsős nilpotens Lie-csoportok osztálya tartalmazza az $(\mathbb{R}^d, +)$ csoportokat, de ezeken kívül az összes többi nem kommutatív, ráadásul nem kompakt, és vannak végtelen dimenziós irreducibilis unitér reprezentációi is; ezek prototípusa a *H Heisenberg-csoport*, melynek fontos szerepe van kvantummechanikai modellekben is, és realizálható, mint \mathbb{R}^3 ellátva a következő szorzással:

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Megjegyezzük, hogy ez a csoport izomorf azzal a mátrix-csoporttal, mely a következő mát-

rixokból áll:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

és minden lépcsős nilpotens Lie-csoport realizálható mint egy mátrix-csoport, mely olyan felsőháromszög-mátrixokból áll, melyek főátlójában minden elem 1. Ezek a csoportok azért alkalmasak az első problémakör vizsgálatára, mert vannak rajtuk olyan egy-paraméteres automorfizmus-csoportok (a legegyszerűbb: a természetes dilatació), melyek a skalárral való szorzás szerepét átvehetik, így a normalizálás ezek segítségével történhet. Az eredményeket mértékelméleti nyelven fogalmazom meg, azaz valószínűségi mértékek konvolúcióhatványait, illetve konvolúciószorzatait vizsgálom.

A disszertáció felépítése a következő. A 2. fejezetben a gyakrabban használatos jelölések és alapfogalmak találhatók. A 3. fejezetben, mely a Pap [68] és Pap [69] cikkek eredményein alapul, kommutatív háromszögrendszerekkel foglalkozunk, azaz amikor az egy sorban álló mértékek a konvolúciószorzásra nézve felcserélhetőek. (A Lindeberg–Feller típusú tételek a Pap [69] cikkben csak a Heisenberg-csoport esetére volt bizonyítva, míg a disszertációban tetszőleges Lie-csoportra, vagy tetszőleges lépcsős Lie-csoportra sikerült bizonyítani.) Először valószínűségi mértékek konvolúcióhatványaira vonatkozó centrális határeloszlás-tétellel foglalkozunk. Ezt V.N. Tutubalin [98] vizsgálta Heisenberg-csoporton, majd A.D. Virtser [99] nilpotens mátrix-csoportokon, P. Crépel és A. Raugi [20] tetszőleges nilpotens Lie-csoportokon, de ezekben a munkákban felesleges momentumfeltételek szerepelnek. Végül A. Raugi [82] adott egy bonyolult, hosszú bizonyítást csak a második homogén momentum végességét feltételezve. Lépcsős Lie-csoportokon sikerült egy egyszerű, rövid bizonyítást találni (lásd 3.1.1 Tétel). A következő cél Lindeberg–Feller típusú centrális határeloszlás-tétel bizonyítása, azaz szükséges és elégséges feltételek keresése. Kiderült, hogy ehhez először a korlátlanul osztható eloszlások konvergenciájáról szóló tételt kell általánosítani. Ezt a 3.2.2 Tételben tetszőleges Lie-csoporton sikerült bizonyítani. Ennek segítségével a kísérő Poisson-félcsoportokat használva és Fourier-transzformáltakat alkalmazva sikerült szükséges és elégséges feltételeket kapni a centrális határeloszlás-tétel teljesüléséhez Lie-csoporton szimmetrikus mértékekből álló kommutatív háromszögrendszer esetén (lásd 3.3.5 Tétel). A szimmetrizáció módszerével ezt általánosítani lehet kommutatív normális háromszögrendszerre, azaz amikor a mértékek felcserélhetőek a velük egy sorban álló mértékek konjugáltjaival is (lásd 3.3.6 Tétel). Lépcsős Lie-csoportokon ez a két tétel még közelebb áll a valós esethez (lásd 3.4.1 és 3.4.2 Tételeket). A 3.4.4 Tételben a Lindeberg–Feller tétel szokásos alakját kapjuk. Ezután levezetünk egy Lindeberg-tételt abban az esetben, amikor a sorokhoz tartozó másodrendű homogén momentumok korlátosak, és a határeloszlás olyan Gauss-mérték, mely stabilis a $(\delta_{\sqrt{t}})_{t>0}$ természetes dilatacióra nézve (lásd 3.4.12 Tétel), amiből egyrészt könnyen származtatható a 3.1.1 Tétel (azaz a független, azonos eloszlású eset), másrészt például Heisenberg-csoporton adott valószínűségi mértékek $\mu_1 * \dots * \mu_n$ n -szeres konvolúciószorzatainak alkalmas automorfizmusokkal standardizált sorozatának a standard Gauss-mértékhez való konvergenciájáról szóló Lindeberg-tétel (lásd 3.4.14 Tétel).

A 4. fejezetben, mely a Pap [67], Bentkus, Pap [8] és a Pap [75] cikkek eredményein alapul, Gauss-mértékekkel való közelítés pontosságával foglalkozunk lépcsős nilpotens Lie-csoportokon. Megjegyzem, hogy egy kompakt topológikus csoportbeli független, azonos eloszlású véletlen elemek részletszorzatai normálás nélkül a Haar-mértékhez konvergálnak, ami az egyenletes eloszlás megfelelője, és a konvergencia-sebesség exponenciális; lásd Major Péter és S.B. Shlosman [62] eredményét. Engem az érdekelt, hogy a klasszikus esethez hasonlóan, mi történik az alkalmasan normált részletszorzatokkal, melyeknek a határeloszlása már *Gauss-eloszlás* lesz, ami a normális eloszlás megfelelője. Az első lépést P. Crépel és B. Roynette [21] tették meg Heisenberg-csoporton, de csak $O(n^{-1/3})$ -nál lassabb konvergenciát sikerült bizonyítaniuk az optimális $O(n^{-1/2})$ helyett, és nem ismert, hogy a becslésekben szereplő konstansok hogyan függenek az illető valószínűségi mértéktől. A 4.1.34 Tételben sikerül optimális, $O(n^{-1/2})$ konvergencia-sebességet kimutatni homogén gömbökön tetszőleges lépcsős nilpotens Lie-csoport esetében. A becslésben pseudomomentumok szerepelnek. Hátránya, hogy a feltételekben magasabb rendű momentumok végessége is szerepel, és a becslés nem egyenletes a gömbökön. (Bár a tétel az $(\mathbb{R}^d, +)$ speciális esetben visszaadja a klasszikus eredményt.) A 4.2.6 Tételben sima függvények integráljaira vonatkozó Berry-Esseen egyenlőtlenségeket kapunk, amelyekben csak a szokásos momentumfeltétel szerepel, és az alakja is optimális. Érdekes megjegyezni, hogy ebből az eredményből is le lehet vezetni a 3.1.1 Tételt, azaz a centrális határeloszlás-tételt. Valószínűségi mértékek konvolúció-hatványainak Gauss-mértékekkel történő közelítésének pontosságáról ad még több információt az Edgeworth-sorfejtés. A 4.3.1 Tétel a rövid alakot írja le, azaz amikor a sorfejtés csak egy tagot tartalmaz a Gauss-mérték után. A Gauss-mérték után következő tagnak az az érdekessége, hogy az illető Gauss-mértékhez tartozó teljes $(W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ Wiener-folyamat bizonyos funkcionáljának várhatóértéke fellép, míg a klasszikus esetben csak a normális eloszlás bizonyos függvényének várhatóértéke szerepel (lásd 4.3.5 Megjegyzés). A 4.4.6 Tételben megadjuk a tetszőleges hosszúságú Edgeworth-sorfejtést, melynek bizonyítása az Euler-Maclaurin-féle összegzési formulának bizonyos többdimenziós szimplexekre történő általánosítását használja (lásd 4.4.2 Tétel), mely önmagában is érdeklődésre tarthat számot.

Az 5. fejezet, mely a Pap [76], Pap [71] és Pap [70] cikkek eredményein alapul, a *beágyazási problémával* kapcsolatos, mely a centrális határeloszlás-tételek vizsgálatánál igen fontos szerepet játszik (lásd például a 3.3.6 Tételt, valamint a stabilis eloszlások vonzási tartományának problémakörét W. Hazod [41], S. Nobel [66] és H.P. Scheffler [87] cikkeiben): vajon ha egy valószínűségi mérték beágyazható egy konvolúciós félcsoportha, akkor ez a konvolúciós félcsoportha egyértelműen meghatározott? A válasz a klasszikus $G = (\mathbb{R}^d, +)$ esetben pozitív: éppen a korlátlanul osztható eloszlások ágyazhatók be konvolúciós félcsoportha, és a Fourier-transzformáltakra vonatkozó Lévy-Hincsin formulából következik, hogy az illető konvolúciós félcsoportha egyértelmű. P. Baldi [3] bebizonyította, hogy 2-lépéses nilpotens Lie-csoport esetén a Gauss-mértékek egyértelműen ágyazhatók be Gauss-félcsoportha. Ezt sikerült az 5.2.3 Tételben tetszőleges nilpotens Lie-csoportra általánosítani.

A beágyazási problémát megpróbáltam megközelíteni a konvolúciós félcsoporthok struk-

túrájának felderítésével is. Ezzel függ össze az a kérdés, melyet Ph. Feinsilver és R. Schott [30], [31] vetettek fel: hogy néz ki egy független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat, mely értékeit egy Lie-csoportban veszi fel? Az 5.1.2 Tétel válasza az, hogy egy d -dimenziós exponenciális Lie-csoport esetén (azaz amikor az exponenciális leképezés egy analitikus diffeomorfizmus) ha veszünk egy független, stacionárius növekményű folyamatot, és úgy tekintjük, mint egy \mathbb{R}^d -beli értékű folyamatot (vagyis vesszük a logaritmusát), akkor az egy *idő-homogén diffúzió ugrásokkal* J. Jacod és A.N. Shiryaev [59, p. 142] értelmében, azaz egy olyan (általánosított) sztochasztikus differenciál-egyenlet egyértelmű, erős megoldása, melyet egy Wiener-folyamat és egy véletlen stacionárius Poisson-mérték hajt meg; az egyenletet a folyamat infinitézimális generátorával explicit módon megadjuk. Ennek segítségével az 5.1.6 Tételben explicit konstrukciót adunk tetszőleges nilpotens Lie-csoportbeli értékeket felvevő független, stacionárius növekményű folyamatra, mellyel általánosítjuk B. Roynette [84] rekurzív formuláját, mely a Brown-mozgás esetére érvényes.

Egy másik lehetőség a beágyazási probléma megközelítésére az, hogy *karakterizációs tulajdonságokat* keresünk a Gauss-mértékre. H. Carnal [19] bizonyított illet kompakt Lie-csoportokon. Ennek az eredménynek az általánosítását adja meg az 5.3.1 Tétel tetszőleges Lie-csoport esetén, de ez egész Gauss-félcsoportokat karakterizál.

A disszertáció utolsó három fejezete a funkcionális centrális határeloszlás-tétel problémakörével foglalkozik, mely egy G topológikus csoporton a következő módon fogalmazható meg. Legyenek $\{\xi_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ G -beli értéket felvevő, soronként független valószínűségi változók, és legyenek $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan növekvő, jobbról folytonos $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ függvények, hogy $k_n(0) = 0$, és minden $t \in \mathbb{R}_+$ és az $e \in G$ egységelem minden U környezete esetén teljesül a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(t)} P(\xi_{n\ell} \notin U) = 0$$

infinitézimalitási feltétel. Képezzük a

$$\xi_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} \xi_{n\ell} := \xi_{n1} \xi_{n2} \cdots \xi_{n, k_n(t)}$$

szorzatokat, és tekintsük a $\xi_n = (\xi_n(t))_{t \geq 0}$, $n = 1, 2, \dots$ sztochasztikus folyamatokat, melyeknek a trajektóriái nyilván a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-térbe esnek. Feltételeket keresünk a háromszögrendszerre ahhoz, hogy teljesüljön a véges-dimenziós eloszlások

$$\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}_f} \xi$$

konvergenciája, vagy a Szkorohod-térben indukált eloszlások

$$\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$$

konvergenciája, ahol $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értéket felvevő folyamat, melynek trajektóriái (majdnem biztosan) a Szkorohod-térbe esnek. Szükségképpen a $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ folyamat független bal-növekményű, azaz $\xi(0) = e$ és tetszőleges $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$

időpontokra a $\xi(t_1)$, $\xi(t_1)^{-1}\xi(t_2)$, \dots , $\xi(t_{n-1})^{-1}\xi(t_n)$ bal-növekmények függetlenek. Csak olyan limesz-folyamatok érdekelnek bennünket, melyek sztochasztikusan folytonosak (ami most azzal ekvivalens, hogy nincsenek rögzített idejű szakadási pontjai).

A feladatok pontosabban megfogalmazva a következők:

- parametrizáljuk a G -beli értékű, független bal-növekményű, sztochasztikusan folytonos folyamatok által a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-téren indukált valószínűségi mértékek $\text{PII}_c(G)$ halmazát, azaz adjunk meg egy bijekciót $\text{PII}_c(G)$ és valamely alkalmas $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paramétertér között;
- feleltessünk meg alkalmas K_n mennyiségeket a $\{\xi_{n\ell} : 1 \leq \ell \leq k_n(t)\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, sorokhoz úgy, hogy

$$\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi \iff K_n \xrightarrow{?} K,$$

ahol $K \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ az a paraméter, ami a ξ limesz-folyamathoz tartozik, és a $K_n \rightarrow K$ konvergencia megfelelően van értelmezve.

A 6. fejezetben, mely a Heyer, Pap [51] cikken alapul, először megfogalmazzuk a fenti kérdésekre a $G = (\mathbb{R}^d, +)$ csoport esetén a jól ismert válaszokat. Ezután rávilágítunk az első kérdésnek a Hille–Yosida elmélettel való kapcsolatára, mely elvezet annak felismeréséhez, hogy a független növekményű folyamatokat (vagy a mértékelmélet nyelvén: a konvolúciós hemicsoportokat) konvolúciós félcsoportokat generáló funkcionálok valamely seregével természetes leírni, ahol a kapcsolatot egy evolúciós integrálegyenlet teremti meg. A fejezet egyik fő eredménye a 6.7.1 és 6.7.4 Tételekben szerepel: egy tetszőleges Lie-csoport esetén parametrizáljuk a folytonosan gyengén korlátos változású konvolúciós hemicsoportokat a gyenge backward evolúciós egyenlet segítségével. Az az érdekesség, hogy először a 6.6.1 konvergencia-tételt bizonyítjuk be, melyben elegendő feltételeket adunk G -beli háromszögszisztemből konstruált véletlen lépcsősfüggvények növekményeinek valamely gyengén korlátos változású konvolúciós hemicsoporthoz való konvergenciájára. Azt is érdemes megemlíteni, hogy a gyenge forward evolúciós egyenlet is teljesül (ugyanis a 6.6.1 Tételt ugyanúgy lehet bizonyítani ebben az esetben is), de a gyenge backward evolúciós egyenletnek meg van az az előnye, ami a 6.5.2 unicitási tételből derül ki: közvetlenül, azaz a konvergencia-tétel felhasználása nélkül belátható, hogy egy adott paraméterhez a gyenge backward evolúciós egyenlettel legfeljebb egy konvolúciós hemicsoportot lehet megfeleltetni.

A 7. fejezetben, mely a Heyer, Pap [52] cikk eredményeit tartalmazza, egy kis kitérőt teszünk: megmutatjuk, hogy a 6. fejezet eredményei átvihetők Lie-projektív csoportokra is. Ez azért jelentős, mert így többek között az összes (nem feltétlenül kommutatív) kompakt topológikus csoport le van fedve.

Végül a 8. fejezetben, mely a Pap [77] kéziratán alapul, a 6. fejezet eredményeire támaszkodva választ adunk a fent megfogalmazott két kérdésre tetszőleges G Lie-csoport esetén. A 8.4.2 és 8.4.8 Tételekben parametrizáljuk az összes G -beli értékű, független bal-növekményű, sztochasztikusan folytonos folyamatot, azaz az összes konvolúciós hemicsoportot. A bijekciót az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet teremti meg. A 8.6

paragrafusban azt is belátjuk, hogy ez a reláció ekvivalens azzal, hogy a folyamat által a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Skorohod-téren indukált mérték az illető paraméterhez tartozó eltolt martingálprobléma megoldása (lásd D.W. Stroock és S.R.S. Varadhan [95], valamint Ph. Feinsilver [29]). Ennek az eltolásnak az a szerepe, hogy „ki kell operálni” azt a részt, amely nem feltétlenül korlátos változású. Ugyanúgy, ahogy a 6. fejezetben, most is először egy konvergenciatételt bizonyítunk: a 8.3.2 Tételben elegendő feltételeket adunk tetszőleges hemicsoporthoz való konvergenciára. A 8.7 paragrafusban kiderül, hogy ezek a feltételek egyúttal szükségesek is.

2. fejezet

Jelölések, alapfogalmak

A c , C betűket indexelve vagy index nélkül pozitív konstansok jelölésére használjuk; ugyanaz a szimbólum jelölhet különböző konstansokat. Hasonlóan a $c(\cdot)$, $C(\cdot)$ kifejezések olyan pozitív mennyiségeket jelölnek, melyek csak a zárójelben álló objektumoktól függenek.

Ha V egy rendezett vektortér, akkor jelölje $V_+ := \{x \in V : x \geq 0\}$. Vezessük be az $\mathbb{S} := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t\}$ jelölést, és legyen $T \in \mathbb{R}_+$ esetén $\mathbb{S}_T := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq T\}$. Legyen $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ esetén $s \wedge t := \min\{s, t\}$, $s \vee t := \max\{s, t\}$. Egy nemüres I halmaz esetén jelölje δ_{ij} , $i, j \in I$ a Kronecker-deltát. Ha H részhalmaza I -nek, akkor $\mathbb{C}H$ jelölje H komplementerét I -ben, és 1_H jelölje H indikátor-függvényét. Jelölje \mathbb{M}_I az $I \times I$ valós mátrixok halmazát. Egy $A \in \mathbb{M}_I$ mátrix transzponáltját jelölje A^\top . Egy $B \in \mathbb{M}_I$, $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ mátrixot pozitív szemidefinitnek nevezünk, ha I minden J véges részhalmaza esetén a $(b_{ij})_{i,j \in J}$ almátrix pozitív szemidefinit. Jelölje \mathbb{M}_I^+ az \mathbb{M}_I -beli szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok halmazát. Egy $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_I$ függvényt *monoton növekvőnek* nevezünk, ha $B(t) - B(s) \in \mathbb{M}_I^+$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Hasonlóan vezetjük be a $d \times d$ valós mátrixokból álló \mathbb{M}_d és \mathbb{M}_d^+ halmazokat is, melyekben $\|\cdot\|$, illetve $\|\cdot\|_1$ a szuprémum-normát, illetve a nukleáris normát jelöli (ez utóbbi definíciója $\|A\|_1 := \text{Tr}(AA^\top)^{1/2}$). Ezen normák ekvivalenciájából következik, hogy valamely $c_d > 0$ konstanssal teljesül $\|A\| \leq c_d \|A\|_1$ minden $A \in \mathbb{M}_d$ esetén.

Legyen E egy lokálisan kompakt tér. Jelölje $\mathcal{C}^b(E)$ az E -n értelmezett valós, korlátos, folytonos függvények terét, ellátva a $\|\cdot\|$ szuprémum-normával. Jelölje $\mathcal{C}^0(E)$, illetve $\mathcal{K}(E)$ azokat az altereket, melyek a végtelenben eltűnő, illetve a kompakt tartójú függvényekből állnak. Jelölje $\mathfrak{M}_+(E)$ a pozitív Radon-mértékek terét E -n. Legyen $\mathfrak{M}_+^b(E)$ a korlátos pozitív mértékek részhalmaza, ellátva a \mathcal{T}_w gyenge topológiával, és jelölje $\mathfrak{M}^1(E)$ a valószínűségi mértékek részhalmazát. Ha $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ egy net $\mathfrak{M}_+^b(E)$ -ben, akkor $\lim_\alpha \mu_\alpha = \mu$ illetve $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ a gyenge topológia szerinti konvergenciát jelöli. Ha E' egy lokálisan kompakt altere E -nek és $\mu \in \mathfrak{M}_+(E)$, akkor $\mu|_{E'}$ jelöli a μ megszorítását E' -re. Nyilván $\mu|_{E'} \in \mathfrak{M}_+(E')$. Az $x \in E$ pontba koncentrálódó Dirac-mértéket jelölje ε_x . Jelölje továbbá $\mathcal{B}(E)$ az E -beli Borel-halmazok σ -algebráját (azaz az E nyílt halmazai által generált σ -algebrát).

Legyen G egy lokálisan kompakt topológikus csoport, melynek egységelemét e jelöli. Jelölje $\mathfrak{U}(e)$ az e egységelem mérhető környezetének rendszerét. Jelölje $\mathfrak{C}_e(G)$ a $\mathfrak{C}^b(G)$ térnek azt az alterét, mely az egységelem valamely környezetében eltűnő függvényekből áll. Legyen $G^\times := G \setminus \{e\}$. Jelölje $\mathfrak{D}(G)$ a G -n értelmezett valós értékű, kompakt tartójú, korlátlanul differenciálható függvények terét (lásd például Heyer [48, 4.4.2]). A reguláris függvények $\mathfrak{E}(G)$ tere:

$$\mathfrak{E}(G) := \{f \in \mathfrak{C}^b(G) : f \cdot g \in \mathfrak{D}(G) \text{ ha } g \in \mathfrak{D}(G)\}.$$

Jelölje $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ és $y \in G$ esetén $L_y f$, $R_y f$ és f^* a következő függvényeket: $L_y f(x) := f(yx)$, $R_y f(x) := f(xy)$, $f^*(x) := f(x^{-1})$, $x \in G$. Ha H és M zárt normálosztók G -ben és $M \subseteq H$, akkor p_H^M jelöli az $xM \rightarrow xH$ kanonikus leképezést. Speciálisan, $p_H := p_H^{\{e\}}$.

Egy $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mérték *adjungáltja* az a μ^* mérték, melyre teljesül $\int f d\mu^* = \int f^* d\mu$ minden $f \in \mathfrak{K}(G)$ esetén. Egy $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértéket *normálisnak* nevezünk, ha $\mu * \mu^* = \mu^* * \mu$.

Egy $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mérték *konvolúciós operátora* az a T_μ operátor, mely a $\mathfrak{C}^0(G)$ téren van értelmezve a következő módon:

$$T_\mu f(x) := \int f(xy) \mu(dy) \quad \text{ha } x \in G.$$

A következő tulajdonságok érvényesek:

- T_μ egy korlátos, lineáris operátor a $\mathfrak{C}^0(G)$ téren úgy, hogy $\|T_\mu f\| \leq \|f\|$ minden $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ esetén, ezért $\|T_\mu\| = 1$.
- T_μ balinvariáns: $T_\mu(L_z f) = L_z(T_\mu f)$ minden $z \in G$ esetén.
- T_μ pozitív: $T_\mu f \geq 0$ minden $f \in \mathfrak{C}^0(G)_+$ esetén.
- Bármely $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^1(G)$ esetén $T_{\mu * \nu} = T_\mu T_\nu$.
- Tetszőleges $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli net és tetszőleges $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ esetén a következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\lim_\alpha \mu_\alpha = \mu$
- (ii) $\lim_\alpha \|T_{\mu_\alpha} f - T_\mu f\| = 0$ ha $f \in \mathfrak{C}^0(G)$.
- (iii) $\lim_\alpha T_{\mu_\alpha} f(e) = T_\mu f(e)$ ha $f \in \mathfrak{C}^0(G)$.

(Lásd Heyer [48, 1.5.5] és Siebert [88, p.440].)

Egy $(\mu_t)_{t \geq 0}$ családot $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben *folytonos konvolúciós félcsoportnak* (röviden konvolúciós félcsoportnak) nevezünk, ha $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ teljesül minden $s, t \in \mathbb{R}_+$ esetén, $\mu_0 = \varepsilon_e$, és $\lim_{t \downarrow 0} \mu_t = \mu_0$.

Egy $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthat *generáló funkcionálja* $(A, \text{Dom}(A))$, ahol

$$\text{Dom}(A) := \left\{ f \in \mathfrak{C}^b(G) : A(f) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int (f(y) - f(e)) \mu_t(dy) \text{ létezik} \right\}.$$

Ismert, hogy $\mathfrak{D}(G) \subseteq \text{Dom}(A)$. Az A generáló funkcionál (vagy a $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthat) *Lévy-mértéke* az az egyértelműen meghatározott $\eta \in \mathfrak{M}_+(G)$ mérték, melyre $\eta(\{e\}) = 0$ és $\int f d\eta = A(f)$ teljesül minden $f \in \mathfrak{D}(G) \cap \mathfrak{C}_e(G)$ esetén. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy sok helyen a Lévy-mértéket csak a G^\times halmazon tekintik értelmezve.) Jelölje $\mathbb{A}(G)$ illetve $\mathbb{L}(G)$ az összes $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthat generáló funkcionáljából, illetve Lévy-mértékéből álló halmazokat.

Ha $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy konvolúciós félcsoporthat, akkor a konvolúciós operátorokból álló $(T_{\mu_t})_{t \geq 0}$ család egy erősen folytonos egy-paraméteres operátor-félcsoporthat alkot, mely a $\mathfrak{C}^0(G)$ Banach-téren értelmezett pozitív, balinvariáns, 1 normájú korlátos lineáris operátorokból áll. Egy $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthat $(\tilde{N}, \text{Dom}(\tilde{N}))$ *infinitézimális generátorának* a $(T_{\mu_t})_{t \geq 0}$ operátor-félcsoporthat infinitézimális generátorát nevezzük. Így tehát

$$(\tilde{N}f)(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int (f(xy) - f(x)) \mu_t(dy) = A(L_x f).$$

Egy nemdegenerált mértékekből álló $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthat *Gauss-félcsoporthatnak* nevezünk, ha $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mu_t(\mathbb{C}U) = 0$ teljesül minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ környezetre. Egy $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértéket *Gauss-mértéknek* nevezünk, ha létezik olyan $(\mu_t)_{t \geq 0}$ Gauss-félcsoporthat, hogy $\mu = \mu_1$.

A $\gamma \in \mathfrak{M}_+^b(G)$ exponensű *Poisson-mérték* az az $\exp(\gamma - \gamma(G)\varepsilon_e) \in \mathfrak{M}^1(G)$ valószínűségi mérték, melynek definíciója

$$\exp(\gamma - \gamma(G)\varepsilon_e) := e^{-\gamma(G)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{k!},$$

ahol γ^k a γ mérték k -szoros konvolúcióhatványa, és $\gamma^0 := \varepsilon_e$. Nyilván $t \geq 0$ esetén $\mu_t := \exp(t(\gamma - \gamma(G)\varepsilon_e))$ a $t\gamma$ exponensű Poisson-mérték, és $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy konvolúciós félcsoporthat, melynek generáló funkcionálja $(\gamma - \gamma(G)\varepsilon_e, \mathfrak{C}^b(G))$; ezt *Poisson-félcsoporthatnak* nevezzük.

Egy $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthat *normálisnak* nevezünk, ha minden μ_t , $t \geq 0$ mérték normális.

Egy $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ családot $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben *folytonos konvolúciós hemicsoporthatnak* (röviden konvolúciós hemicsoporthatnak) nevezünk, ha $\mu(s, r) * \mu(r, t) = \mu(s, t)$ teljesül minden $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$ esetén, $\mu(t, t) = \varepsilon_e$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, és az $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezés \mathfrak{T}_w -folytonos. Nyilván ha $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy folytonos konvolúciós félcsoporthat, akkor a $(\mu_{t-s})_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ család egy folytonos konvolúciós hemicsoporthat. Másrészt, ha $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy eltolás-invariáns hemicsoporthat (azaz $\mu(s+h, t+h) = \mu(s, t)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $h \in \mathbb{R}_+$ esetén), akkor $(\mu(0, t))_{t \geq 0}$ egy folytonos konvolúciós félcsoporthat.

Egy $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoportot *diffúziós hemicsoportnak* nevezünk, ha minden $T > 0$ és $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$\lim_{\substack{t-s \rightarrow 0 \\ 0 \leq s < t \leq T}} \frac{1}{t-s} \mu(s, t)(\mathbb{C}U) = 0.$$

2.1 Lie-csoportok

Legyen G egy d -dimenziós Lie-csoport $\mathfrak{L}(G)$ Lie-algebrával. Jelölje $\exp_G : \mathfrak{L}(G) \rightarrow G$ az exponenciális leképezést. Legyen $\mathfrak{X}_2(G)$ a $\mathfrak{C}^0(G)$ azon függvényeiből álló altér, melyek valamely $U \in \mathfrak{U}(e)$ környezetben kétszer folytonosan differenciálhatóak. Továbbá jelölje $\mathfrak{C}^\infty(G)$, illetve $\mathfrak{C}^k(G)$ a G -n korlátlanul, illetve k -szor folytonosan differenciálható függvények terét.

Ha az $f \in \mathfrak{C}^b(G)$ függvény folytonosan differenciálható az $x \in G$ pont valamely környezetében, akkor bármely $X \in \mathfrak{L}(G)$ esetén létezik az f függvény baloldali és jobboldali deriváltja az x pontban az X szerint:

$$Xf(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\exp(tX)x) - f(x)),$$

$$\tilde{X}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x \exp(tX)) - f(x)).$$

Megjegyezzük, hogy a baloldali deriválás jobbváriáns, a jobboldali pedig balinvariáns:

$$X(R_y f) = R_y(Xf), \quad \tilde{X}(L_y f) = L_y(\tilde{X}f).$$

Legyen $\{X_1, \dots, X_d\}$ egy bázis az $\mathfrak{L}(G)$ Lie-algebrában. A differenciálható függvényekből álló $\mathfrak{C}_2(G)$ és $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ Banach-tereket az

$$|f|_2 := \|f\| + \sum_{i=1}^d \|X_i f\| + \sum_{i,j=1}^d \|X_i X_j f\|,$$

$$|f|_{\tilde{2}} := \|f\| + \sum_{i=1}^d \|\tilde{X}_i f\| + \sum_{i,j=1}^d \|\tilde{X}_i \tilde{X}_j f\|$$

normák segítségével úgy definiáljuk, mint Heyer [48, 4.1.6], azzal a különbséggel, hogy csak a végtelenben eltűnő függvényekre szorítkozunk. Tekintsük még a

$$\mathfrak{C}_{2,2}(G) := \{f \in \mathfrak{C}_2(G) \cap \tilde{\mathfrak{C}}_2(G) : Xf, XYf \in \tilde{\mathfrak{C}}_2(G) \text{ ha } X, Y \in \mathfrak{L}(G)\}$$

Banach-teret a következő normával:

$$|f|_{2,2} := |f|_{\tilde{2}} + \sum_{i=1}^d |X_i f|_{\tilde{2}} + \sum_{i,j=1}^d |X_i X_j f|_{\tilde{2}}.$$

Nyilván

$$\mathfrak{D}(G) \subset \mathfrak{C}_{2,2}(G) \subset \mathfrak{C}_2(G) \cap \tilde{\mathfrak{C}}_2(G) \subset \mathfrak{C}_2(G) \cup \tilde{\mathfrak{C}}_2(G) \subset \mathfrak{X}_2(G) \subset \mathfrak{C}^0(G),$$

ahol $\mathfrak{D}(G)$ sűrű $\mathfrak{C}^0(G)$ -ben.

Legyen $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{D}(G)$ egy olyan elsőfajú kanonikus koordináta-rendszer, mely adaptált az $\{X_1, \dots, X_d\}$ bázishoz, valamely kompakt $U_0 \in \mathfrak{U}(e)$ környezetben érvényes, és ferdén szimmetrikus, azaz

$$y = \exp\left(\sum_{i=1}^d x_i(y) X_i\right) \quad \text{ha } y \in U_0,$$

és $x_i(y^{-1}) = -x_i(y)$ minden $i = 1, \dots, d$ esetén. Legyen $\varphi : G \rightarrow [0, 1]$ egy *Hunt-függvény* a G csoporton, azaz $1 - \varphi \in \mathfrak{D}(G)$ és

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^d x_i(y)^2 \quad \text{ha } y \in U_0.$$

Lie-csoporton értelmezett valószínűségi mértékek konvolúciós operátora rendelkezik a következő fontos tulajdonsággal: minden $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ és $X \in \mathfrak{L}(G)$ esetén $X(T_\mu f) = T_\mu(Xf)$, így $T_\mu(\mathfrak{C}_2(G)) \subseteq \mathfrak{C}_2(G)$, valamint $|T_\mu f|_2 \leq |f|_2$. (lásd Siebert [91].)

Rendeljük hozzá egy $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértékhez a következő fontos mennyiséget:

$$q(\mu) := \sum_{i=1}^d \left| \int x_i d\mu \right| + \int \varphi d\mu.$$

2.1.1 Lemma. *Létezik olyan $b > 0$ konstans, hogy bármely $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ esetén:*

- (i) $|(T_\mu - I)f(e)| \leq b|f|_2 q(\mu)$ ha $f \in \mathfrak{C}_2(G)$,
- (ii) $\|(T_\mu - I)f\| \leq b|f|_2 \tilde{q}(\mu)$ ha $f \in \tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$,
- (iii) $|(T_\mu - I)f|_2 \leq b|f|_{2,2} q(\mu)$ ha $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$.

(Lásd Siebert [91, Lemma 1.6].)

2.2 Konvolúciós félcsoportok Lie-csoportokon

Ismert, hogy egy G Lie-csoport esetén az összes $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoport generáló funkcionáljaiból álló $\mathbb{A}(G)$ halmaz elemi éppen a $\mathfrak{D}(G)$ -n értelmezett majdnem pozitív és normált lineáris funkcionálok (lásd Heyer [48, 4.4.16 és 4.4.18]). Mivel $\mathbb{A}(G)$ egy konvex kúp a $\mathfrak{D}(G)$ algebrai duálisában, ezért definiál egy félig-rendezést ezen a téren.

Minden $A \in \mathbb{A}(G)$ kiterjeszthető egy \overline{A} majdnem pozitív lineáris funkcionállá az $\overline{\mathfrak{X}}_2(G) := \{f + c \cdot 1_G : f \in \mathfrak{X}_2(G), c \in \mathbb{R}\}$ térre úgy, hogy $\overline{A}(1_G) = 0$ teljesüljön. Siebert [91, Lemma 1.8] alapján ez a kiterjesztés egyértelmű, ezért az egyszerűség kedvéért ezt is A fogja jelölni. Továbbá $(\tilde{N}_A f)(x) := A(L_x f)$ segítségével értelmezzünk egy lineáris operátort $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ -ből $\mathfrak{C}^0(G)$ -be. Ekkor \tilde{N}_A nem más, mint a $\mathfrak{C}^0(G)$ téren értelmezett $(T_{\mu_t})_{t \geq 0}$ konvolúciós operátorokból álló erősen folytonos félcsoport infinitézimális generátorának megszorítása a $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ térre.

Minden $A \in \mathbb{A}(G)$ generáló funkcionál rendelkezik az $\overline{\mathfrak{X}}_2(G)$ téren egy egyértelmű *kanonikus dekompozícióval* (Lévy–Hincsin formula):

$$\begin{aligned} A(f) = & \sum_{i=1}^d a_i X_i f(e) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} X_i X_j f(e) \\ & + \int \left(f(y) - f(e) - \sum_{i=1}^d X_i f(e) x_i(y) \right) \eta(dy), \end{aligned}$$

ahol $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathbb{M}_d^+$ és η az A Lévy-mértéke. Továbbá ismert, hogy $\eta \in \mathbb{L}(G)$ akkor és csak akkor, ha $\eta \in \mathfrak{M}_+(G)$, $\eta(\{e\}) = 0$ és $\int \varphi d\eta < \infty$. Fordítva: ha $a \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathbb{M}_d^+$ és $\eta \in \mathbb{L}(G)$, akkor a fenti formula valamely konvolúciós félcsoport A generáló funkcionálját definiálja. (Lásd Hunt [56] valamint Heyer [48, p.268]). Ekkor azt mondjuk, hogy az A generáló funkcionál kanonikus felbontása (a, B, η) . Tekintsük a

$$\mathbb{P}(G) := \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}_d^+ \times \mathbb{L}(G)$$

paraméterhalmazzt. Ekkor a konvolúciós félcsoportokat, illetve a generáló funkcionálokat paraméterezhetjük a $\mathbb{P}(G)$ paraméterhalmazzal.

Egy nemdegenerált mértékekből álló $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoport, melynek kanonikus felbontása (a, B, η) , akkor és csak akkor Gauss-félcsoport, ha $\eta = 0$, azaz infinitézimális generátora

$$\sum_{i=1}^d a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j$$

alakú, ahol $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ és $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathbb{M}_d^+$.

Ha $\gamma \in \mathfrak{M}_+^b(G)$, akkor a $\mu_t := \exp(t(\gamma - \gamma(G)\varepsilon_e))$, $t \geq 0$ Poisson-félcsoport kanonikus felbontása $(a, 0, \gamma|_{G^\times})$, ahol $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_i := \int_G x_i(y) \gamma(dy)$, $i = 1, \dots, d$.

Egy $(\nu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoportot *normálisnak* nevezünk, ha minden $t \geq 0$ esetén a ν_t mérték normális.

A Lévy–Hincsin formulából az is következik, hogy a $\mathfrak{C}_2(G)$ és $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ Banach-tereken az A lineáris funkcionál folytonos. Jelölje $|A|_2$, illetve $|\tilde{A}|_2$ a megfelelő normákat. Nyilván az \tilde{N}_A lineáris operátor, mely $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ -ből $\mathfrak{C}^0(G)$ -be visz, szintén folytonos, és a normája éppen $|\tilde{A}|_2$.

Legyen $A \in \mathbb{A}(G)$ esetén

$$\|A\| := \sum_{i=1}^d |A(x_i)| + A(\varphi).$$

Megjegyezzük, hogy léteznek olyan c_1 és c_2 pozitív konstansok, hogy

$$c_1|A|_2 \leq \|A\| \leq c_2|A|_2, \quad c_1|A|_2^{\sim} \leq \|A\| \leq c_2|A|_2^{\sim}$$

(Lásd Siebert [91, Lemma 2.5]). Továbbá

$$\|A\| = \sum_{i=1}^d |a_i| + \sum_{i=1}^d b_{ii} + \int \varphi d\eta,$$

mivel $X_i x_k(e) = \delta_{ik}$, $X_i X_j x_k(e) + X_j X_i x_k(e) = 0$, $X_i \varphi(e) = 0$ és $X_i X_j \varphi(e) + X_j X_i \varphi(e) = 4\delta_{ij}$. Speciálisan

$$(2.2.1) \quad a_i = A(x_i).$$

Megjegyezzük, hogy az A generáló funkcionál kanonikus dekompozíciójában szereplő többi mennyiség is közvetlenül kifejezhető A segítségével. Minden $f \in \mathfrak{C}_e(G) \cap \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(2.2.2) \quad \int f d\eta = A(f).$$

Legyen $(\psi_m)_{m \geq 1}$ egy olyan sorozat $\mathfrak{C}_e(G) \cap \mathfrak{D}(G)$ -ben, hogy $0 \leq \psi_m \leq 1$ és $\psi_m \rightarrow 1_{G^\times}$. Ekkor

$$(2.2.3) \quad b_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} A(x_i x_j (1 - \psi_m)).$$

Valóban, az $|x_i(y) x_j(y)| \leq \varphi(y)$, $y \in U_0$ egyenlőtlenség és Lebesgue Dominált Konvergenca-tétele alapján

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int x_i x_j (1 - \psi_m) d\eta = 0,$$

tehát

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} A(x_i x_j (1 - \psi_m)) &= A(x_i x_j) - \lim_{m \rightarrow \infty} A(x_i x_j \psi_m) \\ &= b_{ij} - \int x_i x_j d\eta - \lim_{m \rightarrow \infty} \int x_i x_j \psi_m d\eta = b_{ij}. \end{aligned}$$

2.3 Nilpotens Lie-csoportok

Legyen \mathfrak{g} egy d -dimenziós s -lépéses nilpotens Lie-algebra. A \mathfrak{g} leszálló lánc

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k)}], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}^{(s+1)} = \{0\}.$$

Jelölje $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ esetén V_k a $\mathfrak{G}^{(k+1)}$ vektortér komplementerét $\mathfrak{G}^{(k)}$ -ban. Ekkor egy

$$\mathfrak{G} = \bigoplus_{k=1}^s V_k$$

vektortér-dekompozíciót kapunk. Legyen $\{X_1, \dots, X_d\}$ egy olyan bázis \mathfrak{G} -ben, mely adaptált a fenti dekompozícióhoz, azaz valamely $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_s = d$ indexekre

$$\{X_{i_{k-1}+1}, \dots, X_{i_k}\}$$

bázis V_k -ban minden $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ esetén. Vezessük be $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ esetén a $d_j = k$ jelölést, ha $X_j \in V_k$. (Tehát a d_j szám azt mondja meg, hogy az X_j bázisvektor hányadik vektortérbe tartozik.)

Legyen G egy egyszerűen összefüggő nilpotens Lie-csoport. Ekkor a hozzá tartozó $\mathfrak{L}(G)$ Lie-algebra is nilpotens, és az $\exp : \mathfrak{L}(G) \rightarrow G$ exponenciális leképezés egy analitikus diffeomorfizmus. Ismert, hogy ha $\overset{\circ}{\lambda}$ jelöli a Lebesgue-mértéket az $\mathfrak{L}(G)$ Lie-algebrán, akkor $\lambda := \overset{\circ}{\lambda} \circ \exp^{-1}$ egy invariáns Haar-mérték a G Lie-csoporton. Legyenek $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$ az *elsőfajú globális kanonikus koordináták* G -ben, azaz

$$y = \exp \left(\sum_{i=1}^d \zeta_i(y) X_i \right) \quad \text{ha } y \in G.$$

A G csoport művelete rekonstruálható a Campbell–Hausdorff-sor alapján:

$$(2.3.1) \quad (\exp Y)(\exp Z) = \exp \left(Y + Z + \frac{1}{2}[Y, Z] + \frac{1}{12}[Y, [Y, Z]] - \frac{1}{12}[Z, [Y, Z]] + \dots \right),$$

ahol a sor csak véges sok 0-tól különböző tagot tartalmaz, és egy $\mathfrak{L}(G) \times \mathfrak{L}(G) \rightarrow \mathfrak{L}(G)$ polinomiális leképezést definiál.

Ha $(\mu_t)_{t \geq 0}$ és $(\nu_t)_{t \geq 0}$ olyan Gauss-félcsoportok egy nilpotens Lie-csoporton, hogy $\mu_1 = \nu_1$, akkor $\mu_t = \nu_t$ minden $t \geq 0$ esetén (lásd az 5.2.3 Tételt), ezért lehet beszélni egy Gauss-mérték infinitézimális generátoráról, mely annak az egyértelműen létező Gauss-félcsoportnak a generátora, melybe beágyazható.

2.4 Lépcsős Lie-csoportok

Azt mondjuk, hogy egy \mathfrak{G} Lie-algebrának van *s-lépcsős felbontása*, ha létezik olyan $\mathfrak{G} = \bigoplus_{k=1}^s V_k$ vektortér-felbontás, hogy $[V_k, V_\ell] \subset V_{k+\ell}$ ha $k+\ell \leq s$, $[V_k, V_\ell] = \{0\}$ ha $k+\ell > s$, és V_1 generálja \mathfrak{G} -t mint algebrát.

Azt mondjuk, hogy G egy *s-lépcsős Lie-csoport*, ha egyszerűen összefüggő, és a Lie-algebrájának van *s-lépcsős felbontása*. Nyilván egy *s-lépcsős Lie-csoport* egyúttal *s-lépcsős nilpotens Lie-csoport* is.

A következő multiindexes jelöléseket fogjuk használni. Egy $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ multiindex esetén $\zeta^I(x) := \zeta_1^{i_1}(x) \dots \zeta_d^{i_d}(x)$, $x \in G$, valamint $X^I = X_1^{i_1} \dots X_d^{i_d}$. Továbbá $|I| := \sum_{k=1}^d i_k$, $d(I) := \sum_{k=1}^d d_k i_k$ és $I! := \prod_{k=1}^d (i_k!)$. Ha $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ és $J = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, akkor $I + J := (i_1 + j_1, \dots, i_d + j_d)$. A $[j]$ jelölést fogjuk használni arra a multiindexre, melynek 1 a j -edik koordinátája, és a többi 0.

Legyen G egy s -lépcsős Lie-csoport. Legyen $\{X_1, \dots, X_d\}$ egy adaptált bázis az $\mathfrak{L}(G)$ Lie-algebrában. Legyenek $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$ az elsőfajú globális kanonikus koordináták G -ben. Most a Campbell–Hausdorff-sor alapján

$$(2.4.1) \quad \zeta_k(xy) = \zeta_k(x) + \zeta_k(y) + \sum_{I, J \neq 0, d(I)+d(J)=d_k} c_{IJ}^k \zeta^I(x) \zeta^J(y), \quad x, y \in G,$$

ahol $c_{IJ}^k \in \mathbb{R}$. Speciálisan

$$\begin{aligned} \zeta_k(xy) &= \zeta_k(x) + \zeta_k(y) & \text{ha } d_k = 1, \\ \zeta_k(xy) &= \zeta_k(x) + \zeta_k(y) + \sum_{d_i=d_j=1} c_{[i][j]}^k \zeta_i(x) \zeta_j(y) & \text{ha } d_k = 2. \end{aligned}$$

Ellátjuk $\mathfrak{L}(G)$ -t és G -t a *természetes dilatációkkal* úgy, hogy lineárisan kiterjesztjük a

$$\overset{\circ}{\delta}_t(X_i) := t^{d_i} X_i, \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, d$$

leképezést $\mathfrak{L}(G)$ -re, majd átvisszük G -re:

$$\delta_t := \exp \circ \overset{\circ}{\delta}_t \circ \exp^{-1} \quad \text{ha } t > 0.$$

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $f : G \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ egy α fokú homogén függvény, ha $f(\delta_r x) = r^\alpha f(x)$ minden $x \in G \setminus \{e\}$, $r > 0$ esetén. Hasonlóan, egy $f : G \times G \setminus \{(e, e)\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt α fokú homogénnek nevezünk, ha $f(\delta_r x, \delta_r y) = r^\alpha f(x, y)$ minden $x, y \in G \setminus \{e\}$, $r > 0$ esetén. Azt mondjuk, hogy egy D differenciáloperátor G -n α fokú homogén, ha $D(f \circ \delta_r) = r^\alpha (Df) \circ \delta_r$ minden $f \in \mathcal{C}^1(G)$ és $r > 0$ esetén. Például az $X_k \in \mathfrak{L}(G)$ differenciáloperátor d_k fokú homogén. Tehát így egy $I \in \mathbb{Z}_+^d$ multiindex esetén $|I|$ az X^I differenciáloperátor rendje, míg $d(I)$ a homogenitásának foka. Nyilván ha D egy α_1 fokú homogén differenciáloperátor és f egy α_2 fokú homogén függvény, akkor Df egy $\alpha_2 - \alpha_1$ fokú homogén függvény.

Legyen $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathcal{C}_k^{\text{hom}}(G) := \{f \in \mathcal{C}^b(G) : X^I f \in \mathcal{C}^b(G) \text{ ha } I \in \mathbb{Z}_+^d, d(I) \leq k\}.$$

Legyen $f \in \mathcal{C}_k^{\text{hom}}(G)$ esetén

$$|f|_{k, \text{hom}} := \sum_{d(I) \leq k} \|X^I f\|.$$

Azt mondjuk, hogy egy $y \mapsto |y|$ valós, nemnegatív, folytonos függvény G -n *homogén norma*, ha $|\delta_t y| = t|y|$ minden $t > 0$ és $y \in G$ esetén, valamint $|y| = 0$ akkor és csak

akkor, ha $y = e$. Homogén norma mindig létezik, például

$$\varrho(y) := \sum_{i=1}^d |\zeta_i(y)|^{1/d_i}.$$

Nyilván minden homogén norma 1 fokú homogén függvény. Továbbá fennáll a gyenge háromszög-egyenlőtlenség: $|xy| \leq c(G)(|x| + |y|)$, $x, y \in G$.

2.4.2 Lemma. *Legyen $|\cdot|$ egy homogén norma G -n és legyen $f : G \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ egy folytonos, α fokú homogén függvény. Ekkor létezik olyan $c_1 > 0$ konstans, hogy*

$$|f(x)| \leq c_1 |x|^\alpha \quad \text{ha } x \in G \setminus \{0\}.$$

Ha még azt is tudjuk, hogy $f(x) \neq 0$ ha $x \in G \setminus \{0\}$, akkor létezik olyan $c_2 > 0$ konstans, hogy

$$|f(x)| \geq c_2 |x|^\alpha \quad \text{ha } x \in G \setminus \{0\}.$$

Bizonyítás. A bizonyítandó egyenlőtlenségek mindkét oldalán α fokú homogén függvény áll, ezért elegendő az $|x| = 1$ esettel foglalkozni. Folland, Stein [32, Lemma 1.4] szerint az $\{x \in G : |x| = 1\}$ gömbfelület kompakt, és nem tartalmazza az $e \in G$ egységelemet. \square

A ϱ függvény kielégíti a 2.4.2 Lemma feltételeit, ezért tetszőleges $|\cdot|$ homogén norma esetén léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, hogy

$$(2.4.3) \quad c_1 \varrho(x) \leq |x| \leq c_2 \varrho(x).$$

Ezért a homogén normák ekvivalensek mint normák, és tetszőleges $|\cdot|$ homogén norma esetén teljesül

$$|\zeta_i(y)| \leq c |y|^{d_i} \quad \text{ha } y \in G, \quad i = 1, \dots, d$$

alkalmas $c > 0$ konstanssal, mely csak a $|\cdot|$ homogén normától függ.

Egy $P : G \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt polinomnak nevezünk, ha $P(\exp X)$, $X \in \mathfrak{L}(G)$ polinom $\mathfrak{L}(G)$ -n. Minden polinom G -n egyértelműen felírható

$$P(x) = \sum_{I \in \mathbb{Z}_+^d} a_I \zeta^I(x), \quad x \in G$$

alakban, ahol csak véges sok a_I együttható különbözik 0-tól. A P polinom *homogén foka* $\max\{d(I) : a_I \neq 0\}$. A P polinomot *homogénnek* nevezzük, ha homogén, mint függvény. Ha P egy olyan homogén polinom, mely mint függvény m homogén fokú, akkor egyértelműen felírható

$$P(x) = \sum_{d(I)=m} a_I \zeta^I(x), \quad x \in G$$

alakban, így P homogén foka is m , és (2.4.3) alapján létezik olyan $c_P > 0$ konstans, hogy

$$|P(x)| \leq c_P |x|^m \quad \text{ha } x \in G.$$

Hasonlóan, egy $P : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt polinomnak nevezünk, ha $P(\exp X, \exp Y)$, $X, Y \in \mathfrak{L}(G)$ polinom $\mathfrak{L}(G)$ -n. Ez egyértelműen felírható

$$P(x, y) = \sum_{I, J \in \mathbb{Z}_+^d} a_{IJ} \zeta^I(x) \zeta^J(y), \quad x, y \in G$$

alakban, ahol csak véges sok a_{IJ} együtttható különbözik 0-tól. A homogén foka $\max\{d(I) + d(J) : a_{IJ} \neq 0\}$. Ha egyúttal egy m fokú homogén függvény is, akkor egyértelműen felírható

$$P(x, y) = \sum_{d(I)+d(J)=m} a_{IJ} \zeta^I(x) \zeta^J(y), \quad x, y \in G$$

alakban, és létezik olyan $c_P > 0$ konstans, hogy

$$|P(x, y)| \leq c_P(1 + |x|^m + |y|^m) \quad \text{ha } x, y \in G.$$

Most (2.4.1) alapján

$$(2.4.4) \quad X_j f(x) = \left(\partial_j + \sum_{d_k \geq d_j+1, d(I)=d_k-d_j} c_{[j]I}^k \zeta^I(x) \partial_k \right) f(x),$$

lásd Folland, Stein [32, Proposition 1.26]. Ezért

$$(2.4.5) \quad X_j f(x) = \left(\partial_j + \sum_{d_k \geq d_j+1} P_{jk}(x) \partial_k \right) f(x),$$

ahol P_{jk} olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d_k - d_j$. Hasonlóan,

$$(2.4.6) \quad \zeta^K(xy) = \zeta^K(x) + \zeta^K(y) + \sum_{I, J \neq 0, d(I)+d(J)=d(K)} c_{IJ}^K \zeta^I(x) \zeta^J(y)$$

és

$$(2.4.7) \quad X^J f(x) = \sum_{d(K) \geq d(J), |K| \leq |J|} P_{JK}(x) \partial^K f(x),$$

ahol P_{JK} olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(K) - d(J)$. Hasonló formulák érvényesek a bal-invariáns differenciáloperátorokra is. Ezeket a formulákat kombinálva kapjuk, hogy

$$(2.4.8) \quad \tilde{X}^J f(x) = \sum_{d(K) \geq d(J), |K| \leq |J|} Q_{JK}(x) X^K f(x),$$

ahol Q_{JK} olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(K) - d(J)$ (lásd Folland, Stein [32, Proposition 1.29].)

Egy $I \in \mathbb{Z}_+^d$ multiindex esetén használni fogjuk az

$$S^I := \frac{1}{|I|!} \sum_{[j_1] + \dots + [j_{|I|}] = I} X_{j_1} \dots X_{j_{|I|}}$$

jobb-invariáns differenciáloperátort. Ez tekinthető X^I szimmetrizáltjának. Az \tilde{S}^I bal-invariáns differenciáloperátort hasonlóan értelmezzük. Megjegyezzük, hogy a Poincaré–Birkhoff–Witt tétel (lásd például Bourbaki [17, I.2.7]) alapján az X^I operátorok bázist alkotnak a jobb-invariáns differenciáloperátorok algebrájában. Speciálisan:

$$(2.4.9) \quad S^I = \sum_{d(J)=d(I), |J| \leq |I|} C_J^I X^J$$

és

$$(2.4.10) \quad X^I X^J = \sum_{d(K)=d(I)+d(J), |K| \leq |I|+|J|} C_K^{IJ} X^K.$$

Kombinálva a (2.4.8) és (2.4.10) formulákat, kapjuk, hogy

$$(2.4.11) \quad \tilde{X}^J X^I f(x) = \sum_{d(K) \geq d(I)+d(J), |K| \leq |I|+|J|} P_K^{IJ}(x) X^K f(x),$$

ahol P_K^{IJ} olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(K) - d(I) - d(J)$.

Legyen $k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in \mathfrak{C}^k(G)$ és $x \in G$. Az f függvény x pontbeli homogén k fokú jobboldali Taylor–polinomja az a $P_x^{(k)}$ egyértelműen létező polinom, melynek homogén foka legfeljebb k , és $X^I P_x^{(k)}(e) = X^I f(x)$ teljesül ha $I \in \mathbb{Z}_+^d$ és $d(I) \leq k$ (lásd Folland, Stein [32]). Ismert (lásd Dieudonné [26, 19.5.8, 19.9.5]), hogy

$$P_x^{(k)}(y) = \sum_{d(I) \leq k} S^I f(x) \zeta^I(y).$$

Használni fogjuk a következő jobboldali lépcsős Taylor–kifejtést (lásd Folland, Stein [32, 1.44 Corollary]):

$$(2.4.12) \quad f(yx) = P_x^{(k)}(y) + R_{k+1}^f(x, y),$$

ahol

$$|R_{k+1}^f(x, y)| \leq c_k |y|^{k+1} \sup \{ |X^I f(zx)| : d(I) = k+1, |z| \leq b^{k+1} |y| \},$$

és $c_k > 0$, $b \geq 1$ olyan konstansok, melyek csak a G csoporttól függenek. Nyilván $f \in \mathfrak{C}_{k+1}^{\text{hom}}(G)$ esetén

$$(2.4.13) \quad |R_{k+1}^f(x, y)| \leq c_k |y|^{k+1} |f|_{k+1, \text{hom}}.$$

Hasonlóan értelmezzük a homogén baloldali Taylor–polinomokat, és érvényes a baloldali lépcsős Taylor–kifejtés is.

Egy lépcsős Lie-csoport esetén választhatunk olyan $\{x_1, \dots, x_d\}$ elsőfajú lokális kanonikus koordinátákat $\mathcal{D}(G)$ -ben, hogy azok érvényesek legyenek az $U_0 := \{y \in G : |y| < 1/2\}$ környezetben, és teljesüljön

$$|x_i(y)| \leq |\zeta_i(y)| \quad \text{ha } y \in G, \quad i = 1, \dots, d.$$

(Nyilván $x_i(y) = \zeta_i(y)$ ha $y \in U_0$, $i = 1, \dots, d$.) Ezután választhatunk egy $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ Hunt-függvényt. Ekkor (2.4.3) alapján $y \in U_0$ esetén teljesül

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^d x_i(y)^2 = \sum_{i=1}^d \zeta_i(y)^2 \leq c^2 \sum_{i=1}^d |y|^{2d_i} \leq c^2 \sum_{i=1}^d |y|^2 \leq c^2 d |y|^2.$$

Ha pedig $y \in \mathbb{C}U_0$, akkor alkalmazhatjuk egyszerűen a $\varphi(y) \leq 1$ egyenlőtlenséget, így

$$\varphi(y) \leq c'(|y|^2 \wedge 1) \quad \text{ha } y \in G$$

egy alkalmas $c' > 0$ konstanssal, mely csak a $|\cdot|$ homogén normától függ.

Azt mondjuk, hogy egy μ valószínűségi mérték egy G lépcsős Lie-csoporton *centrált*, ha

$$\int \zeta_i d\mu = 0 \quad \text{amennyiben } d_i = 1.$$

Egy $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthoz akkor nevezünk centráltnak, ha μ_t centrált minden $t \geq 0$ esetén. Megjegyezzük, hogy egy μ Gauss-mérték akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\int \zeta_i d\mu = 0$ minden $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén, tehát egy centrált Gauss-mérték nem feltétlenül szimmetrikus. Egy $(\nu_t)_{t \geq 0}$ Gauss-félcsoporthoz akkor és csak akkor centrált és stabilis a $(\delta_{\sqrt{t}})_{t > 0}$ egyparaméteres automorfizmus-csoportra nézve Hazod-féle értelemben (azaz $\nu_t = \delta_{\sqrt{t}} \nu_1$ ha $t > 0$), ha az infinitézimális generátora

$$(2.4.14) \quad \sum_{d_i=2} a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} a_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j$$

alakú. Speciálisan, ha egy $(\nu_t)_{t \geq 0}$ Gauss-félcsoporthoz infinitézimális generátora (2.4.14) alakú, akkor $\nu_1 = \delta_{1/\sqrt{n}} \nu_1^n$ ha $n \in \mathbb{N}$. Továbbá ismert, hogy $\int \exp\{\gamma|x|^2\} \nu_1(dx) < \infty$ ha $\gamma \leq C(G, \nu_1)$, ahol $C(G, \nu_1) > 0$ (lásd Hebisch [44]). Tehát egy centrált és stabilis Gauss-mérték összes momentuma véges. Vezessük be a következő momentumokat:

$$m_\beta(\mu) = \int |x|^\beta \mu(dx), \quad \beta \geq 0,$$

$$m^I(\mu) = \int \zeta^I(x) \mu(dx), \quad I \in \mathbb{Z}_+^d.$$

2.4.15 Lemma. *Legyen ν az a Gauss-mérték, melynek infinitézimális generátora (2.4.14). Ekkor*

$$m^I(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{ha } d(I) \text{ páratlan,} \\ a_I & \text{ha } d(I) = 2, \end{cases}$$

ahol

$$a_I := \begin{cases} a_i & \text{ha } I = [i], \\ a_{ij} & \text{ha } I = [i] + [j]. \end{cases}$$

Továbbá ha $d(I)$ páros és $d(I) \geq 4$, akkor a következő rekurzív formula érvényes:

$$m^I(\nu) = (2^{-d(I)/2} - 2)^{-1} \sum_{J, K \neq 0, d(J)+d(K)=d(I)} c_{JK}^I m^J(\nu) m^K(\nu),$$

azaz az $m^I(\nu)$ páros homogén momentumok kifejezhetők, mint az $\{m^J(\nu) = a_J : d(J) = 2\}$ homogén másodrendű momentumok homogén polinomja.

Bizonyítás. Alkalmazva a (2.4.6) összefüggést és a stabilitásból adódó $\nu = \delta_{1/\sqrt{2}}\nu^2 = (\delta_{1/\sqrt{2}}\nu)^2$ azonosságot:

$$\begin{aligned} m^I(\nu) &= \iint \zeta^I(xy) \delta_{1/\sqrt{2}}\nu(dx) \delta_{1/\sqrt{2}}\nu(dy) = 2^{-d(I)/2} \iint \zeta^I(xy) \nu(dx) \nu(dy) \\ &= 2^{-d(I)/2} \left(2 \int \zeta^I(x) \nu(dx) + \sum_{J, K \neq 0, d(J)+d(K)=d(I)} c_{JK}^I \int \zeta^J(x) \nu(dx) \int \zeta^K(y) \nu(dy) \right), \end{aligned}$$

amiből következik a rekurzív formula.

Ha $d(I) = 1$, akkor a fenti összefüggésből

$$\int \zeta^I(x) \nu(dx) = 2^{1/2} \int \zeta^I(x) \nu(dx),$$

ezért $m^I(\nu) = 0$. Ha $d(I)$ páratlan és $d(J) + d(K) = d(I)$ valamely $J, K \neq 0$ esetén, akkor $d(J)$ vagy $d(K)$ páratlan és kisebb mint $d(I)$, így teljes indukcióval $m^I(\nu) = 0$.

A $d(I) = 2$ eset tisztázásához kiszámoljuk a ν -höz tartozó $(\nu_t)_{t \geq 0}$ Gauss-félcsoport \tilde{N} infinitézimális generátorát. Felhasználva a stabilitást:

$$\int (f(xy) - f(x)) \nu_t(dy) = \int (f(xy) - f(x)) \delta_{\sqrt{t}}\nu(dy) = \int (f(x\delta_{\sqrt{t}}(y)) - f(x)) \nu(dy)$$

ha $f \in \mathfrak{D}(G)$. Az f függvény $x \in G$ pontbeli baloldali másodrendű Taylor-kifejtését alkalmazva

$$f(x\delta_{\sqrt{t}}(y)) = \sum_{d(I) \leq 2} \tilde{S}^I f(x) t^{d(I)/2} \zeta^I(y) + R^f(x, y, t),$$

ahol

$$|R^f(x, y, t)| \leq ct^{3/2} |y|^3 |f|_{3, \text{hom}}.$$

Figyelembe véve, hogy $m^I(\nu) = 0$ ha $d(I) = 0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\tilde{N}f)(x) &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int (f(xy) - f(x)) \nu_t(dy) = \sum_{d(I)=2} \tilde{S}^I f(x) \int \zeta^I(y) \nu(dy) \\ &= \sum_{d_i=2} \tilde{X}_i f(x) \int \zeta_i(y) \nu(dy) + \frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} \tilde{X}_i \tilde{X}_j f(x) \int \zeta_i(y) \zeta_j(y) \nu(dy). \end{aligned}$$

Ezt összevetve a (2.4.14) formulával azt kapjuk, hogy $m^I(\nu) = a_I$ ha $d(I) = 2$. \square

Legyen μ egy centrált valószínűségi mérték G -n. Ha $m_2(\mu) < \infty$, akkor a 2.4.15 Lemma alapján egyértelműen létezik olyan ν Gauss-mérték, melynek az első- és másodrendű homogén momentumai ugyanazok, mint a μ mértéknek (azaz $\int \zeta^I(x)\mu(dx) = \int \zeta^I(x)\nu(dx)$ ha $d(I) = 1, 2$), és a megfelelő Gauss-félcsoport infinitézimális generátora

$$(2.4.16) \quad \sum_{d_i=2} a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j,$$

ahol $a_i = \int \zeta_i(x)\nu(dx)$ és $b_{ij} = \int \zeta_i(x)\zeta_j(x)\nu(dx)$. Ekkor azt fogjuk mondani, hogy ν a μ mértékhez hozzárendelt Gauss-mérték, melyet $\nu = \text{Gauss}(\mu)$ fog jelölni.

A legegyszerűbb nem kommutatív lépcsős Lie-csoport a *Heisenberg-csoport*. Ellátva \mathbb{R}^3 -at a természetes topológiájával és az

$$xy = \left(\zeta_1(x) + \zeta_1(y), \zeta_2(x) + \zeta_2(y), \zeta_3(x) + \zeta_3(y) + \frac{1}{2}(\zeta_1(x)\zeta_2(y) - \zeta_2(x)\zeta_1(y)) \right)$$

szorzással (ahol $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ az \mathbb{R}^3 természetes koordinátái), megkapjuk a H 3-dimenziós Heisenberg-csoportnak egy realizációját (\mathbb{R} fölött). A H Lie-csoport $\mathfrak{L}(H)$ Lie-algebrája realizálható mint \mathbb{R}^3 ellátva az

$$[x, y] = (0, 0, \zeta_1(x)\zeta_2(y) - \zeta_2(x)\zeta_1(y))$$

szorzással. Nyilván $\mathfrak{L}(H) = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$ egy lépcsős vektortér-felbontás, és az $\{X_1, X_2, X_3\}$ természetes bázis $\mathfrak{L}(H)$ -ban adaptált ehhez a felbontáshoz. Tehát $d_1 = d_2 = 1$ és $d_3 = 2$, és a H Heisenberg-csoport egy 2-lépcsős Lie-csoport. A természetes dilatációk:

$$\delta_t(x) = (t\zeta_1(x), t\zeta_2(x), t^2\zeta_3(x)), \quad t > 0, x \in H.$$

2.5 Unitér reprezentációk és Fourier–transzformáció

Egy G lokálisan kompakt csoport (*folytonos*) *unitér reprezentációja* alatt olyan D homomorfizmust értünk, mely a G csoportot egy \mathcal{H} komplex Hilbert-tér unitér operátorainak csoportjába viszi úgy, hogy az $x \rightarrow D(x)u$ leképezések G -ből \mathcal{H} -ba folytonosak minden $u \in \mathcal{H}$ esetén. A \mathcal{H} teret a D reprezentációs *terének* nevezzük, és $\mathcal{H}(D)$ -vel jelöljük. A belső szorzást és a normát $\mathcal{H}(D)$ -ben $\langle \cdot, \cdot \rangle$ illetve $\|\cdot\|$ jelöli. A G unitér reprezentációinak osztályát $\text{Rep}(G)$ jelöli, az $\text{Rep}(G)$ -beli irreducibilis reprezentációik osztályát pedig $\text{Irr}(G)$.

Legyen most G egy Lie-csoport és $D \in \text{Rep}(G)$. Az $u \in \mathcal{H}(D)$ vektort D -re nézve *differenciálhatónak* nevezzük, ha az $x \mapsto \langle D(x)u, v \rangle$ *együttható-függvények* $\mathfrak{L}(G)$ -ben vannak minden $v \in \mathcal{H}(D)$ esetén. Jelölje $\mathcal{H}_0(D)$ a $\mathcal{H}(D)$ -beli, D -re nézve differenciálható vektorok terét $\mathcal{H}(D)$ -ben.

Jelölje $X \in \mathfrak{L}(G)$ és $D \in \text{Rep}(G)$ esetén $X(D)$ azt a lineáris operátort a $\mathcal{H}_0(D)$ téren, melyre

$$X(D)u := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (D(\exp tX) - D(e))u$$

(lásd Siebert [89]).

Egy $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mérték $\hat{\mu}$ Fourier-transzformáltja a $\text{Rep}(G)$ halmazon van értelmezve, és értéke a $D \in \text{Rep}(G)$ pontban az a $\hat{\mu}(D)$ korlátos, lineáris operátor a $\mathcal{H}(D)$ téren, melyre teljesül

$$\langle \hat{\mu}(D)u, v \rangle = \int \langle D(x)u, v \rangle \mu(dx)$$

minden $u, v \in \mathcal{H}(D)$ esetén. (lásd Heyer [48], Siebert [89].)

2.6 Valószínűségi mértékekből álló háromszögrendszerek

Egy G lokálisan kompakt csoporton értelmezett valószínűségi mértékekből álló $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ háromszögrendszert *infinitézimálisnak* nevezünk, amennyiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U) = 0 \quad \text{ha } U \in \mathfrak{U}(e).$$

\mathcal{I} -t *kommutatívnak* nevezzük, amennyiben

$$\mu_{ni} * \mu_{nj} = \mu_{nj} * \mu_{ni} \quad \text{ha } 1 \leq i, j \leq k_n, \quad n \geq 1.$$

\mathcal{I} -t *normálisnak* nevezzük, amennyiben

$$\mu_{ni} * \mu_{nj}^* = \mu_{nj}^* * \mu_{ni} \quad \text{ha } 1 \leq i, j \leq k_n, \quad n \geq 1.$$

Azt mondjuk, hogy \mathcal{I} *konvergens és határértéke* μ , ha

$$\mu \in \mathfrak{M}^1(G) \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} = \mu.$$

3. fejezet

Centrális határeloszlás–tételek kommutatív háromszögrendszerekre

3.1 Centrális határeloszlás–tétel konvolúcióhatványokra lépcsős Lie–csoportokon

Először bizonyítást adunk lépcsős Lie–csoportokon a centrális határeloszlás–tétel következő standard alakjára (lásd Wehn [101], Crépel, Raugi [20], Raugi [82], Pap [68]).

3.1.1 Tétel. *Legyen μ egy centrált valószínűségi mérték egy G lépcsős Lie–csoporton. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma G -n. Tegyük fel, hogy $\int |y|^2 \mu(dy) < \infty$. Ekkor*

$$\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n) \rightarrow \nu,$$

ahol $\nu = \text{Gauss}(\mu)$.

Bizonyítás. Nobel [66] bizonyította a következő eredményt: ha $(\mu_n)_{n \geq 1}$ valószínűségi mértékeknek egy sorozata egy G lépcsős Lie–csoporton, akkor a konvolúcióhatványok $(\mu_n^n)_{n \geq 1}$ sorozata pontosan akkor konvergens, amikor a kísérő Poisson–mértékek $(\exp(n(\mu_n - \varepsilon_e)))_{n \geq 1}$ sorozata konvergens, és konvergencia esetén a határértékek egybeesnek. Tehát esetünkben $\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^n \rightarrow \nu$ akkor és csak akkor, ha $\exp(n(\delta_{1/\sqrt{n}}\mu - \varepsilon_e)) \rightarrow \nu$.

Legyen $\mu_t^{(n)} := \exp(tn(\delta_{1/\sqrt{n}}\mu - \varepsilon_e))$ ha $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$. Nyilván $S_n := (\mu_t^{(n)})_{t \geq 0}$ egy Poisson–félcsoport, melynek generáló funkcionálja $A_n := n(\delta_{1/\sqrt{n}}\mu - \varepsilon_e)$. Ahhoz, hogy a tételt bizonyítsuk, elegendő megmutatni, hogy $S_n \rightarrow S$, ahol $S := (\nu_t)_{t \geq 0}$ az a Gauss–félcsoport, melynek generáló funkcionálja

$$Af := \sum_{d_i=2} a_i X_i f(e) + \frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} b_{ij} X_i X_j f(e).$$

Hazod [40, p. 36.] alapján ehhez elegendő azt belátni, hogy

(i) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen feszes $\mathfrak{E}(G)$ -n, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K \subseteq G$ kompakt halmaz, hogy $|A_n(f)| \leq \varepsilon$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ és minden olyan $f \in \mathfrak{E}(G)$ függvény esetén, melyre $0 \leq f \leq 1$ és $\text{supp}(f) \subseteq G \setminus K$,

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f) = A(f)$ ha $f \in \mathfrak{D}(G)$.

Először bebizonyítjuk, hogy az $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat egyenletesen feszes $\mathfrak{E}(G)$ -n. Meg fogjuk mutatni, hogy a $K = \{y \in G : |y| \leq c\}$ kompakt halmaz kielégíti az (i) feltételt, ha c elég nagy. Legyen $f \in \mathfrak{E}(G)$ olyan, hogy $0 \leq f \leq 1$, és $f(y) = 0$ ha $|y| \leq c$. Ekkor

$$0 \leq A_n(f) = n \int_{|y| > c} f(y) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu(dy) \leq n \int_{|y| > c} \frac{|y|^2}{c^2} \delta_{1/\sqrt{n}} \mu(dy) \leq \frac{1}{c^2} \int |y|^2 \mu(dy) \leq \varepsilon$$

ha $c^2 \geq \varepsilon^{-1} \int |y|^2 \mu(dy)$.

A (ii) feltétel bizonyításához felhasználjuk az $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvény e pontbeli első és másoderendű homogén Taylor polinomját:

$$\begin{aligned} f(y) - f(e) &= \sum_{d_i=1} \zeta_i(y) X_i f(e) + (f(y) - P_e^{(1)}(y)), \\ f(y) - f(e) &= \sum_{d_i=1,2} \zeta_i(y) X_i f(e) + \frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} \zeta_i(y) \zeta_j(y) X_i X_j f(e) + (f(y) - P_e^{(2)}(y)). \end{aligned}$$

Legyen $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ egy pozitív számokból álló sorozat (melyet később specifikálunk). Az $\{x \in G : |x| > \lambda_n\}$ és $\{x \in G : |x| \leq \lambda_n\}$ halmazokon használjuk az f függvény e -beli homogén első-, illetve másodfokú jobboldali Taylor-polinomját. Ekkor

$$A_n(f) - A(f) = B_1 + B_2 + B_3 + B_4,$$

ahol

$$\begin{aligned} B_1 &= -n \sum_{d_i=2} X_i f(e) \int_{|y| > \lambda_n} \zeta_i(y) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu(dy), \\ B_2 &= -\frac{n}{2} \sum_{d_i=d_j=1} X_i X_j f(e) \int_{|y| > \lambda_n} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu(dy), \\ B_3 &= n \int_{|x| > \lambda_n} (f(y) - P_e^{(1)}(y)) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu(dy), \\ B_4 &= n \int_{|y| \leq \lambda_n} (f(y) - P_e^{(2)}(y)) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu(dy). \end{aligned}$$

B_1 és B_2 becsléséhez felhasználjuk az $|\zeta_i(y)| \leq c|y|^{d_i}$, $i = 1, \dots, d$ egyenlőtlenségeket. B_3 és B_4 becsléséhez felhasználjuk a (2.4.13) lépcsős Taylor–egyenlőtlenséget. Így

$$\begin{aligned} |B_1| &\leq c \sum_{d_i=2} |X_i f(e)| \int_{|y| > \lambda_n \sqrt{n}} |y|^2 \mu(dy), \\ |B_2| &\leq \frac{c^2}{2} \sum_{d_i=d_j=1} |X_i X_j f(e)| \int_{|y| > \lambda_n \sqrt{n}} |y|^2 \mu(dy), \\ |B_3| &\leq c_2 |f|_{2,\text{hom}} \int_{|y| > \lambda_n \sqrt{n}} |y|^2 \mu(dy), \\ |B_4| &\leq c_3 |f|_{3,\text{hom}} n^{-1/2} \int_{|y| \leq \lambda_n \sqrt{n}} |y|^3 \mu(dy) \leq c_3 |f|_{3,\text{hom}} \lambda_n \int |y|^2 \mu(dy). \end{aligned}$$

Válasszunk egy olyan $\lambda_n \downarrow 0$ sorozatot, melyre $\lambda_n \sqrt{n} \rightarrow \infty$ (például $\lambda_n = n^{-1/4}$, $n \in \mathbb{N}$). Mivel μ második homogén momentuma véges, így $B_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, amennyiben $n \rightarrow \infty$. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n(f) - A(f)| \rightarrow 0$ tetszőleges $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén. \square

Ha nem tesszük fel a centráltságot, akkor eltolással a következő centrális határeloszlás-tétel nyerhető.

3.1.2 Tétel. Legyen μ egy valószínűségi mérték egy G lépcsős Lie-csoporton. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma G -n. Tegyük fel, hogy $\int |y|^2 \mu(dy) < \infty$. Legyen $a_i := \int \zeta_i(y) \mu(dy)$ ha $d_i = 1, 2$ és $b_{ij} := \int \zeta_i(x) \zeta_j(x) \mu(dx)$ ha $d_i = d_j = 1$. Legyen $\tilde{a} \in G$ az az elem, melyre

$$\zeta_i(\tilde{a}) = \begin{cases} a_i & \text{ha } d_i = 1, \\ 0 & \text{ha } d_i \geq 2. \end{cases}$$

Ekkor

$$\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu * \varepsilon_{-\tilde{a}})^n \rightarrow \nu,$$

ahol ν az a Gauss-mérték, melynek infinitézimális generátora

$$\sum_{d_i=2} a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} (b_{ij} - a_i a_j) \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$$

Bizonyítás. Legyen $\tilde{\mu} = \mu * \varepsilon_{-\tilde{a}}$. Megmutatjuk, hogy a $\tilde{\mu}$ valószínűségi mérték kielégíti a 3.1.1 Tétel feltételeit.

Mivel $-\tilde{a} = \tilde{a}^{-1}$, így $\int \zeta_i(y) \tilde{\mu}(dy) = \int \zeta_i(y \tilde{a}^{-1}) \mu(dy)$. A (2.4.1) Campbell-Hausdorff formula szerint $d_i = 1$ esetén $\zeta_i(y \tilde{a}^{-1}) = \zeta_i(y) + \zeta_i(\tilde{a}^{-1}) = \zeta_i(y) - \zeta_i(\tilde{a})$, tehát

$$\int \zeta_i(y) \tilde{\mu}(dy) = \int (\zeta_i(y) - \zeta_i(\tilde{a})) \mu(dy) = \int \zeta_i(y) \mu(dy) - a_i = 0.$$

Ha $d_i = 2$, akkor (2.4.1) szerint

$$(3.1.3) \quad \zeta_i(xy) = \zeta_i(x) + \zeta_i(y) + \sum_{d_j=d_k=1} c_{[j][k]}^i \zeta_j(x) \zeta_k(y),$$

ezért

$$\begin{aligned} \int \zeta_i(y) \tilde{\mu}(dy) &= \int \zeta_i(y) \mu(dy) - \zeta_i(\tilde{a}) - \sum_{d_j=d_k=1} c_{[j][k]}^i a_k \int \zeta_j(y) \mu(dy) \\ &= a_i - \sum_{d_j=d_k=1} c_{[j][k]}^i a_j a_k. \end{aligned}$$

Behelyettesítve az $x = \tilde{a}$, $y = \tilde{a}^{-1}$ elemeket a (3.1.3) formulába, azt kapjuk, hogy

$$0 = \zeta_i(e) = \zeta_i(\tilde{a}\tilde{a}^{-1}) = - \sum_{d_j=d_k=1} c_i^{[j][k]} a_j a_k.$$

Ezért $\int \zeta_i(y) \tilde{\mu}(dy) = a_i$ ha $d_i = 2$. A $\tilde{\mu}$ valószínűségi mértéknek véges a második homogén momentuma, hiszen

$$\int |x|^2 \tilde{\mu}(dx) = \int |x\tilde{a}^{-1}|^2 \mu(dx) \leq c \int (|x| + |\tilde{a}|)^2 \mu(dx) < \infty.$$

Továbbá $d_i = d_j = 1$ esetén

$$\begin{aligned} \int \zeta_i(x) \zeta_j(x) \tilde{\mu}(dx) &= \int \zeta_i(x\tilde{a}^{-1}) \zeta_j(x\tilde{a}^{-1}) \mu(dx) \\ &= \int (\zeta_i(x) - a_i)(\zeta_j(x) - a_j) \mu(dx) \\ &= b_{ij} - a_i a_j. \end{aligned}$$

Tehát kész a bizonyítás. □

Hasonlóan nyerhetünk centrális határeloszlás-tételt egy másik centrálással is:

3.1.4 Tétel. *Legyen μ egy valószínűségi mérték egy G lépcsős Lie-csoporton. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma G -n. Tegyük fel, hogy $\int |y|^2 \mu(dy) < \infty$. Legyen $a_i := \int \zeta_i(y) \mu(dy)$ ha $d_i = 1, 2$ és $b_{ij} := \int \zeta_i(x) \zeta_j(x) \mu(dx)$ ha $d_i = d_j = 1$. Legyen $\bar{a} \in G$ az az elem, melyre*

$$\zeta_i(\bar{a}) = \begin{cases} a_i & \text{ha } d_i \leq 2, \\ 0 & \text{ha } d_i \geq 3. \end{cases}$$

Ekkor

$$\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu * \varepsilon_{-\bar{a}})^n \rightarrow \nu,$$

ahol ν az a Gauss-mérték, melynek infinitézimális generátora

$$\frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} (b_{ij} - a_i a_j) \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$$

Megjegyezzük, hogy a $(\mu^n * \varepsilon_{-n\bar{a}})_{n \geq 1}$ sorozat viselkedése jóval komplikáltabb (lásd Crépel, Raugi [20], Raugi [82], Virtser [99]).

3.2 Konvolúciós félcsoporthat konvergenciája Lie-csoportokon

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen adva egy $S_n = (\mu_t^{(n)})_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthat $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben és legyen $S = (\mu_t)_{t \geq 0}$ egy további konvolúciós félcsoporthat $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Azt mondjuk, hogy az $(S_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergál S -hez (jelölése $S_n \rightarrow S$), ha $\mu_t^{(n)} \rightarrow \mu_t$ teljesül $t \in [0, T]$ -ben egyenletesen minden $T > 0$ esetén.

Hazod [40, p. 36.] bebizonyította, hogy ha a megfelelő generáló funkcionálokat véve $A_n(f) \rightarrow A(f)$ teljesül minden $f \in \mathfrak{E}(G)$ függvényre, akkor $S_n \rightarrow S$. (Valójában, ahogy Hazod, Scheffler [42] emliti, elegendő feltétel az is, hogy $A_n(f) \rightarrow A(f)$ teljesül minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvényre, és hogy az A_n -hez tartozó η_n Lévy-mértékek egyenletesen fessenek az e egységelem valamely környezetén kívül.)

A fordított irányú állítás bizonyításához Siebert [89, Proposition 6.3, 6.4] következő eredményét fogjuk használni:

3.2.1 Állítás. *Legyen G egy Lie-csoport, $(S_n)_{n \geq 1}$ $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli konvolúciós félcsoporthatból álló sorozat, és legyen S egy további konvolúciós félcsoporthat $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Legyenek A_n és A a megfelelő generáló funkcionálok, $(a^{(n)}, B^{(n)}, \eta_n)$ és (a, B, η) pedig a megfelelő kanonikus felbontások. Ha $S_n \rightarrow S$, akkor*

$$\eta_n|_{\mathbb{C}U} \rightarrow \eta|_{\mathbb{C}U} \quad \text{ha } U \in \mathfrak{U}(e) \text{ és } \eta(\partial U) = 0,$$

valamint

$$\sup_{n \geq 1} \left(\sum_{i=1}^d |a_i^{(n)}| + \sum_{i,j=1}^d |b_{ij}^{(n)}| + \int_G \varphi d\eta_n \right) < \infty.$$

Most megadjuk a korlátlanul osztható eloszlások sorozatára vonatkozó szükséges és elegendő feltételek analógiáját Lie-csoportokra (lásd \mathbb{R} esetén Gnedenko, Kolmogorov [33, §19, Theorem 1, Theorem 2], és \mathbb{R}^d esetén Takano [96]), de itt konvolúciós félcsoporthat konvergenciájáról lesz szó.

3.2.2 Tétel. *Legyen G egy Lie-csoport, $(S_n)_{n \geq 1}$ $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli konvolúciós félcsoporthatból álló sorozat, és legyen S egy további konvolúciós félcsoporthat $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Legyenek A_n és A a megfelelő generáló funkcionálok, $(a^{(n)}, B^{(n)}, \eta_n)$ és (a, B, η) pedig a megfelelő kanonikus felbontások. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (i) $S_n \rightarrow S$.
- (ii) $A_n(f) \rightarrow A(f)$ ha $f \in \mathfrak{E}(G)$.
- (iii) (a) $\eta_n|_{\mathbb{C}U} \rightarrow \eta|_{\mathbb{C}U}$ ha $U \in \mathfrak{U}(e)$ és $\eta(\partial U) = 0$,

$$(b) \quad b_{ij}^{(n)} + \int_G x_i(y)x_j(y)\eta_n(dy) \rightarrow b_{ij} + \int_G x_i(y)x_j(y)\eta(dy) \quad \text{ha } 1 \leq i, j \leq d,$$

$$(c) \quad a_i^{(n)} \rightarrow a_i \quad \text{ha } 1 \leq i \leq d.$$

$$(iv) \quad (a) \quad \eta_n|_{\mathbb{C}U} \rightarrow \eta|_{\mathbb{C}U} \quad \text{ha } U \in \mathfrak{U}(e) \quad \text{és} \quad \eta(\partial U) = 0,$$

$$\begin{aligned} (b) \quad & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi(y) \leq \varepsilon} x_i(y)x_j(y)\eta_n(dy) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi(y) \leq \varepsilon} x_i(y)x_j(y)\eta_n(dy) \right) \\ &= b_{ij} \quad \text{ha } 1 \leq i, j \leq d, \end{aligned}$$

$$(c) \quad a_i^{(n)} \rightarrow a_i \quad \text{ha } 1 \leq i \leq d.$$

Bizonyítás. A (ii) \implies (i) irányt Hazod [40, p. 36] bizonyította.

(iii) \implies (iv). Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor választhatunk olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ számokat, hogy $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ és

$$\eta(\{x \in G : \varphi(x) = \varepsilon_i\}) = 0 \quad \text{ha } i = 1, 2$$

(lásd Siebert [89, p. 140]). Nyilván létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy $|x_i(y)x_j(y)| \leq c\varphi(y)$ teljesül minden $y \in G$ esetén. Így

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi > \varepsilon} x_i x_j d\eta_n - \int_{\varphi > \varepsilon_2} x_i x_j d\eta_n \right| &= \left| \int_{\varepsilon < \varphi \leq \varepsilon_2} x_i x_j d\eta_n \right| \\ &\leq c \int_{\varepsilon < \varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta_n \leq c \int_{\varepsilon_1 < \varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta_n. \end{aligned}$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\varphi > \varepsilon_2} x_i x_j d\eta_n - c \int_{\varepsilon_1 < \varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta_n &\leq \int_{\varphi > \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \\ &\leq \int_{\varphi > \varepsilon_2} x_i x_j d\eta_n + c \int_{\varepsilon_1 < \varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta_n. \end{aligned}$$

Ebből (iii)(a) alapján $n \rightarrow \infty$ esetén az következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\varphi > \varepsilon_2} x_i x_j d\eta - c \int_{\varepsilon_1 < \varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi > \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi > \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \leq \int_{\varphi > \varepsilon_2} x_i x_j d\eta + c \int_{\varepsilon_1 < \varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta. \end{aligned}$$

Következésképpen (iii)(b) alapján

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \right) \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_G x_i x_j d\eta_n \right) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi > \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \\
& \leq b_{ij} + \int_G x_i x_j d\eta - \int_{\varphi > \varepsilon_2} x_i x_j d\eta + c \int_{\varepsilon_1 < \varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta \\
& = b_{ij} + \int_{\varphi \leq \varepsilon_2} x_i x_j d\eta + c \int_{\varepsilon_1 < \varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta \\
& \leq b_{ij} + 2c \int_{\varphi \leq \varepsilon_2} \varphi d\eta.
\end{aligned}$$

Véve az $\varepsilon \downarrow 0$ és $\varepsilon_2 \downarrow 0$ határátmeneteket:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi(y) \leq \varepsilon} x_i(y) x_j(y) \eta_n(dy) \right) \leq b_{ij}.$$

Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi(y) \leq \varepsilon} x_i(y) x_j(y) \eta_n(dy) \right) \geq b_{ij}.$$

Tehát (iii) \implies (iv) kész.

(iv) \implies (iii). Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $\eta(\{x \in G : \varphi(x) = \varepsilon\}) = 0$. Ekkor (iv)(a) alapján

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_G x_i x_j d\eta_n \right) \\
& \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \right) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi > \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \\
& = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \right) + \int_{\varphi > \varepsilon} x_i x_j d\eta.
\end{aligned}$$

Így (iv)(b) alapján véve az $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenetet:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_G x_i x_j d\eta_n \right) \leq b_{ij} + \int_G x_i x_j d\eta.$$

Hasonlóan

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_G x_i x_j d\eta_n \right) \geq b_{ij} + \int_G x_i x_j d\eta.$$

Tehát (iv) \implies (iii) kész.

(iii) \implies (ii). Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $\eta(\{x \in G : \varphi(x) = \varepsilon\}) = 0$ és $\{x \in G : \varphi(x) \leq \varepsilon\} \subset U_0$. Ekkor a (iii)–beli (a) és (b) feltételek alapján

$$b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \rightarrow b_{ij} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} x_i x_j d\eta$$

minden $1 \leq i, j \leq d$ esetén. Ezért

$$\sum_{i=1}^d b_{ii}^{(n)} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} \varphi d\eta_n \rightarrow \sum_{i=1}^d b_{ii} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} \varphi d\eta.$$

Megint a (iii)(a) feltételt használva azt kapjuk, hogy ha $B \in \mathcal{B}(G^\times)$ és $\eta(\partial B) = 0$, akkor

$$\sum_{i=1}^d b_{ii}^{(n)} + \int_B \varphi d\eta_n \rightarrow \sum_{i=1}^d b_{ii} + \int_B \varphi d\eta.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük azt a $\nu_n \in \mathfrak{M}_+^b(G)$ mértéket, melyre

$$\nu_n(\{e\}) := \sum_{i=1}^d b_{ii}^{(n)}, \quad \nu_n(B) := \int_B \varphi d\eta_n \quad \text{ha } B \in \mathcal{B}(G^\times).$$

Hasonlóan, legyen $\nu \in \mathfrak{M}_+^b(G)$ az a mérték, melyre

$$\nu(\{e\}) := \sum_{i=1}^d b_{ii}, \quad \nu(B) := \int_B \varphi d\eta \quad \text{ha } B \in \mathcal{B}(G^\times).$$

Ekkor teljesül $\nu_n \rightarrow \nu$. Tehát azt kapjuk, hogy ha $g \in \mathfrak{E}(G)$ és $h := g/\varphi \in \mathfrak{C}^b(G^\times)$, valamint a h függvény $h(e) = 0$ -val folytonosan kiterjeszthető G -re, akkor $\int_G g d\eta_n \rightarrow \int_G g d\eta$, amiből (iii)(a) alapján $\int_{\varphi \leq \varepsilon} g d\eta_n \rightarrow \int_{\varphi \leq \varepsilon} g d\eta$.

Most a Grenander [35, p. 196] által használt ötletet alkalmazzuk (lásd még Hunt [56]). Minden $f \in \mathfrak{E}(G)$ esetén tekintsük a következő dekompozíciót:

$$\begin{aligned} A_n(f) &= \sum_{i=1}^d a_i^{(n)}(X_i f)(e) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} x_i x_j d\eta_n \right) (X_i X_j f)(e) \\ &\quad + \int_{\varphi > \varepsilon} \left[f(y) - f(e) - \sum_{i=1}^d x_i(y)(X_i f)(e) \right] \eta_n(dy) + \int_{\varphi \leq \varepsilon} g(y) \eta_n(dy), \end{aligned}$$

ahol

$$g(y) := f(y) - f(e) - \sum_{i=1}^d x_i(y)(X_i f)(e) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d x_i(y)x_j(y)(X_i X_j f)(e).$$

Ekkor $g \in \mathfrak{E}(G)$, és az $e \in G$ egységelem valamely környezetében tekintett Taylor-kifejtés alapján $h := g/\varphi \in \mathfrak{C}^b(G^\times)$, valamint a h függvény folytonosan kiterjeszthető G -re $h(e) = 0$ -val, hiszen

$$|g(y)| \leq \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^d |x_i(y)x_j(y)x_k(y)(X_i X_j X_k f)(\theta(y))|$$

minden y -ra egy alkalmas $U \subset U_0$ környezetben, ahol $\theta(y) \in U$, ezért

$$|g(y)| \leq c(f, d) \sum_{i=1}^d |x_i(y)|^3 \leq c'(f, d) \varphi(y)^{3/2}$$

valamely $c(f, d)$ és $c'(f, d)$ konstansokkal, melyek az $f \in \mathfrak{E}(G)$ függvénytől és a d dimenziótól függenek. Figyelembe véve A_n fenti dekompozícióját, kapjuk, hogy (iii) \implies (ii).

(i) \implies (iii). Alkalmazva a 3.2.1 Állítást megkapjuk (iii)(a)–t. Most Siebert [89] ötletét használjuk (melyet a stabilis eloszlások speciális esetében Khokhlov [60] is alkalmazott). Tekintsük (n) egy tetszőleges (n') részsorozatát. Ekkor a 3.2.1 Állítás alapján létezik egy olyan (n'') részsorozata (n') -nek, hogy léteznek a következő határértékek:

$$a_i'' := \lim_{n''} a_i^{(n'')}, \quad b_{ij}'' := \lim_{n''} \left(b_{ij}^{(n'')} + \int_G x_i x_j d\eta_{n''} \right) - \int_G x_i x_j d\eta.$$

Nyilván $(b_{ij}'')_{1 \leq i, j \leq d}$ egy valós, szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, hiszen előáll ilyenek határértékeként:

$$b_{ij}'' = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n''} \left(b_{ij}^{(n'')} + \int_{\varphi \leq \varepsilon} x_i x_j d\eta_{n''} \right).$$

(Ez ugyanazzal a módszerrel bizonyítható, mint (iv) \implies (iii).) Legyen minden $f \in \mathfrak{E}(G)$ esetén

$$\begin{aligned} A''(f) &:= \sum_{i=1}^d a_i''(X_i f)(e) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}''(X_i X_j f)(e) \\ &\quad + \int_G \left[f(y) - f(e) - \sum_{i=1}^d x_i(y)(X_i f)(e) \right] \eta(dy). \end{aligned}$$

Ekkor A'' generáló funkcionálja valamely S'' konvolúciós félcsoporthoz. Az $S_{n''}$ részsorozatra teljesülnek a (iii)–beli feltételek, így a már bizonyított (iii) \implies (ii) alapján most is teljesül

$$\lim_{n''} A_{n''}(f) = A''(f) \quad \text{ha } f \in \mathfrak{E}(G),$$

és a már bizonyított (ii) \implies (i) alapján

$$\lim_{n''} S_{n''} = S''.$$

Ezért $S_n \rightarrow S$ miatt $S'' = S$, tehát $A'' = A$. Így (n) minden (n') részsorozata tartalmaz olyan (n'') részsorozatot, melyre teljesülnek a (iii)–beli feltételek. Ezzel kész a bizonyítás. \square

3.2.3 Megjegyzés. Egy lépcsős G Lie-csoport esetén a (iii) (b) feltétel helyettesíthető a következővel:

$$b_{ij}^{(n)} + \int_{|y| \leq \varepsilon} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \eta_n(dy) \rightarrow b_{ij} + \int_{|y| \leq \varepsilon} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \eta(dy)$$

minden $1 \leq i, j \leq d$ és minden olyan $\varepsilon > 0$ esetén, melyre $\eta\{y \in G : |y| = \varepsilon\} = 0$. (Nyilván (iii) (a) miatt elegendő megkövetelni a fenti konvergenciát egyetlen olyan $\varepsilon > 0$ esetén, melyre $\eta\{y \in G : |y| = \varepsilon\} = 0$.)

Hasonlóan, (iv) (b) helyettesíthető a következővel:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{|y| \leq \varepsilon} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \eta_n(dy) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(b_{ij}^{(n)} + \int_{|y| \leq \varepsilon} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \eta_n(dy) \right) \\ &= b_{ij} \end{aligned}$$

minden $1 \leq i, j \leq d$ esetén.

3.3 Lindeberg–Feller–tétel Lie–csoportokon

Egy $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ háromszögrendszer kíséző Poisson–rendszere $\mathcal{I}_a = (\nu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$, ahol

$$\nu_{n\ell} := \exp(\mu_{n\ell} - \varepsilon_e), \quad \ell = 1, \dots, k_n, \quad n \geq 1.$$

Ha \mathcal{I} kommutatív, akkor \mathcal{I}_a is kommutatív, és \mathcal{I}_a sorszorzatai az

$$\exp \left(\sum_{\ell=1}^{k_n} (\mu_{n\ell} - \varepsilon_e) \right), \quad n \geq 1$$

Poisson–mértékek. Az \mathcal{I} kíséző Poisson–félcsoporthai $S_n := (\nu_t^{(n)})_{t \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, ahol

$$\nu_t^{(n)} := \exp \left(t \sum_{\ell=1}^{k_n} (\mu_{n\ell} - \varepsilon_e) \right), \quad n \geq 1, \quad t \geq 0.$$

Alkalmazva a 3.2.2 Tételt, könnyen kapunk szükséges és elégséges feltételt egy kommutatív háromszögrendszer kíséző Poisson–félcsoporthainak egy Gauss–félcsoporthoz való konvergenciájára:

3.3.1 Állítás. Legyen $(\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy kommutatív háromszögrendszer egy G Lie–csoporton. Jelölje $(S_n)_{n \geq 1}$ a kíséző Poisson–félcsoporthokból álló sorozatot. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) $S_n \rightarrow S$, ahol S az a Gauss–félcsoport, melynek infinitézimális generátora

$$\sum_{i=1}^d a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$$

(ii) (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}B) = 0$ ha $U \in \mathfrak{U}(e)$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_G x_i(y) x_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij}$ ha $1 \leq i, j \leq d$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_G x_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = a_i$ ha $1 \leq i \leq d$.

Bizonyítás. Az S_n Poisson–félcsoport kanonikus dekompozíciója $(a^{(n)}, 0, \eta_n|_{G^\times})$, ahol $a^{(n)} = (a_i^{(n)})_{1 \leq i \leq d}$,

$$a_i^{(n)} = \sum_{\ell=1}^{k_n} \int x_i(y) \mu_{n\ell}(dy), \quad \eta_n = \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}.$$

Az S Gauss–félcsoport kanonikus dekompozíciója $(a, B, 0)$, ahol $a = (a_i)_{1 \leq i \leq d}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$. A 3.2.2 Tételből következik az állítás. \square

3.3.2 Megjegyzés. Egy lépcsős G Lie–csoport esetén a (ii)–beli feltételek helyettesíthetők a következőkkel:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}\{y \in G : |y| > \varepsilon\} = 0$ ha $\varepsilon > 0$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \zeta_j(y) d\mu_{n\ell}(dy) = b_{ij}$ ha $1 \leq i, j \leq d$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = a_i$ ha $1 \leq i \leq d$.

Ahhoz, hogy egy háromszögrendszernek egy Gauss–mértékhez való konvergenciájára szükséges és elégséges feltételt tudjunk adni, biztosítanunk kell, hogy a háromszögrendszer konvergenciája maga után vonja a kísérő Poisson–félcsoportok sorozatának konvergenciáját. Erre Siebert [89, Proposition 8.1] adott egy elegendő feltételt.

Legyen $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy háromszögrendszer $\mathfrak{M}^1(G)$ –ben, és tekintsük a következő feltételt:

$$(B) \quad \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \|\widehat{\mu}_{n\ell}(D)u - u\| < \infty \quad \text{ha } D \in \text{Irr}(G), \quad u \in \mathcal{H}_0(D).$$

3.3.3 Állítás. Legyen $(\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy kommutatív és infinitézimális háromszögrendszer egy G Lie–csoporton, mely kielégíti a (B) feltételt. Ekkor \mathcal{I} konvergenciája ekvivalens az \mathcal{I}_a kísérő Poisson–rendszer konvergenciájával, és konvergencia esetén a határértékeik megegyeznek.

Ismert, hogy ha μ egy centrált valószínűségi mérték \mathbb{R} –en, akkor a karakterisztikus függvénye becsülhető a következő módon:

$$|\widehat{\mu}(t) - 1| = \left| \int (e^{itx} - 1 - itx) \mu(dx) \right| \leq \frac{t^2}{2} \int x^2 \mu(dx), \quad \text{ha } t \in \mathbb{R}.$$

Hasonló egyenlőtlenséget bizonyítunk tetszőleges Lie–csoport esetén; ez lesz a kulcs ahhoz, hogy egy kommutatív háromszögrendszer esetén a kísérő Poisson–rendszert tudjuk alkalmazni.

3.3.4 Lemma. *Ha G egy Lie-csoport, akkor minden $D \in \text{Rep}(G)$ reprezentációhoz és $u \in \mathcal{H}_0(D)$ differenciálható vektorhoz található olyan $c(D, u) > 0$ szám, hogy tetszőleges $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ valószínűségi mérték esetén*

$$\|\widehat{\mu}(D)u - u\| \leq c(D, u)q(\mu).$$

Bizonyítás. Siebert [89, Lemma 5.1] alapján a következő Taylor-formula érvényes: tetszőleges $D \in \text{Rep}(G)$, $u \in \mathcal{H}_0(D)$ és $y \in U_0$ esetén

$$D(y)u = u + \sum_{i=1}^d x_i(y)X_i(D)u + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d x_i(y)x_j(y)T(D)(y)X_i(D)X_j(D)u,$$

ahol $T(D)(y)$ egy korlátos lineáris operátor a $\mathcal{H}(D)$ Hilbert-téren és $\|T(D)(y)\| \leq 1$. Ezért

$$\begin{aligned} \left\| \int (D(y)u - u) \mu(dy) \right\| &\leq 2\|u\|\mu(\mathbb{C}U_0) + \sum_{i=1}^d \|X_i(D)u\| \cdot \left| \int_{U_0} x_i(y) \mu(dy) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \|X_i(D)X_j(D)u\| \cdot \int_{U_0} |x_i(y)x_j(y)| \mu(dy). \end{aligned}$$

Nyilván

$$\left| \int_{U_0} x_i(y) \mu(dy) \right| \leq \left| \int_G x_i(y) \mu(dy) \right| + \|x_i\| \cdot \mu(\mathbb{C}U_0).$$

Továbbá $|x_i(y)x_j(y)| \leq \varphi(y)$ ha $y \in U_0$, $i, j = 1, \dots, d$, ezért

$$\int_{U_0} |x_i(y)x_j(y)| \mu(dy) \leq \int \varphi(y) \mu(dy).$$

Mivel létezik olyan $c > 0$ konstans, melyre $1_{\mathbb{C}U_0} \leq c \cdot \varphi$, így

$$\mu(\mathbb{C}U_0) \leq c \int \varphi(y) \mu(dy),$$

ezzel kész a bizonyítás. □

Először szimmetrikus mértékekből álló háromszögrendszerekre bizonyítunk konvergenciatételt.

3.3.5 Tétel. *Legyen $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy szimmetrikus mértékekből álló kommutatív háromszögrendszer egy G Lie-csoporton. Legyen $B = (b_{ij})_{i,j=1, \dots, d} \in \mathbb{M}_d^+$.*

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U) = 0$ ha $U \in \mathfrak{A}(e)$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int x_i(y)x_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij}$ ha $i, j = 1, \dots, d$.

(ii) (a) \mathcal{I} infinitézimális,

$$(b) \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int \varphi(y) \mu_{n\ell}(dy) < \infty,$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n1} * \cdots * \mu_{nk_n} = \nu$ ahol $\nu = \nu_1$, $(\nu_t)_{t \geq 0}$ az a Gauss-félcsoport, melynek

$$\text{infinitézimális generátora } \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$$

Bizonyítás. (i) \implies (ii). Nyilván (i)(a) miatt a rendszer infinitézimális. A $\mu_{n\ell}$ mértékek szimmetriája miatt $\int x_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0$ ha $i = 1, \dots, d$, így nyilván

$$q(\mu_{n\ell}) = \int \varphi(y) \mu_{n\ell}(dy) \leq \sum_{i=1}^d \int x_i(y)^2 \mu_{n\ell}(dy) + \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U_0).$$

Ezért teljesül (ii)(b), valamint az (i)–beli (a) és (b) feltételek a 3.3.4 Lemmával együtt azt eredményezik, hogy a háromszögrendszer kielégíti a (B) feltételt. A 3.3.1 Állítás segítségével azt kapjuk, hogy $S_n \rightarrow S$, ahol $(S_n)_{n \geq 1}$ a kísérő Poisson-félcsoportokból álló sorozat és $S = (\nu_t)_{t \geq 0}$. Ezért a 3.3.3 Állításból következik, hogy teljesül (ii)(c) is.

(ii) \implies (i). A (ii)(b) feltétel és a 3.3.4 Lemma alapján a $(\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ rendszer kielégíti a (B) feltételt. A 3.3.3 Állítást használva azt kapjuk, hogy

$$\exp \left(\sum_{\ell=1}^{k_n} (\mu_{n\ell} - \varepsilon_e) \right) \rightarrow \nu.$$

Mivel a $\nu_t^{(n)} = \exp \left(t \sum_{\ell=1}^{k_n} (\mu_{n\ell} - \varepsilon_e) \right)$ Poisson-mérték is szimmetrikus minden $n \geq 1$ és $t \geq 0$ esetén, így a hozzá tartozó $T_t^{(n)} := T_{\nu_t^{(n)}}$ konvolúciós operátor egy önadjungált, pozitív szemidefinit kontrakció az $L^2(G)$ komplex Hilbert-téren. Mivel $S_n := (\nu_t^{(n)})_{t \geq 0}$ egy konvolúciós félcsoport, így $(T_t^{(n)})_{t \geq 0}$ egy (erősen folytonos) operátor-félcsoport az $L^2(G)$ téren. Riesz, Szőkefalvi-Nagy [83, Section 141] alapján léteznek olyan $(E_\varrho^{(n)})_{\varrho \in [0,1]}$ spektrálseregek, hogy

$$T_t^{(n)} = \int_0^1 \varrho^t dE_\varrho^{(n)} \quad \text{ha } t \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Hasonlóan, az $S := (\nu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoportához tartozó $(T_t)_{t \geq 0}$ operátor-félcsoportnak is létezik spektrális dekompozíciója:

$$T_t = \int_0^1 \varrho^t dE_\varrho \quad \text{ha } t \geq 0.$$

Most az (i)(c) feltétel alapján $T_1^{(n)} \rightarrow T_1$ az erős operátor-topológiában (lásd Heyer [48, Theorem 1.5.5]). Ezért Heyer [48, Lemma 6.2.21] szerint $T_t^{(n)} \rightarrow T_t$ és $\nu_t^{(n)} \rightarrow \nu_t$ ha $t \geq 0$. Siebert [89, Proposition 6.1] alapján azt kapjuk, hogy $S_n \rightarrow S$, ezután már alkalmazhatjuk a 3.3.1 Állítást. \square

A szimmetrizáció módszerével ezt általánosíthatjuk normális háromszögrendszerekre is.

3.3.6 Tétel. Legyen $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1,\dots,k_n;n \geq 1}$ egy kommutatív háromszögrendszer egy G Lie-csoporton. Legyen $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ és legyen $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,d} \in \mathbb{M}_d^+$.

Tekintsük a következő állításokat:

- (i) (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U) = 0$ ha $U \in \mathfrak{U}(e)$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int x_i(y) x_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij}$ ha $i, j = 1, \dots, d$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int x_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = a_i$ ha $i = 1, \dots, d$,
- (d) $\sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \left| \int x_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| < \infty$ ha $i = 1, \dots, d$.
- (ii) (a) \mathcal{I} infinitézimális,
- (b) $\sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} q(\mu_{n\ell}) < \infty$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} = \nu$, ahol $\nu = \nu_1$, $(\nu_t)_{t \geq 0}$ az a Gauss-félcsoport, melynek infinitézimális generátora $\sum_{i=1}^d a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j$.

Ekkor (i)–ből következik (ii).

Ha még azt is feltesszük, hogy az \mathcal{I} háromszögrendszer normális, és $(\nu_t)_{t \geq 0}$ egy olyan normális Gauss-félcsoport, melyet egyértelműen meghatároz a ν_1 mérték, akkor (i) és (ii) ekvivalensek.

3.3.7 Megjegyzés. Az (i) \implies (ii) irány éppen Wehn [101] centrális határeloszlás-tétele (lásd még Grenander [35] és Siebert [89]).

A 3.3.6 Tétel bizonyítása. (i) \implies (ii). Az (i)–beli (a), (b) és (d) feltételek a 3.3.4 Lemmával együtt azt eredményezik, hogy a rendszer kielégíti a (B) feltételt, így a 3.3.3 Állítás alapján alkalmazható a 3.3.1 Állítás.

(ii) \implies (i). Tekintsük az $S_n = (\nu_t^{(n)})_{t \geq 0}$, $n \geq 1$ kísérő Poisson-félcsoportokat. Mivel $(\mu_{n\ell})_{\ell=1,\dots,k_n;n \geq 1}$ kommutatív és normális, így

$$\nu_t^{(n)} * \left(\nu_t^{(n)} \right)^* = \left(\nu_t^{(n)} \right)^* * \nu_t^{(n)} \quad \text{ha } n \geq 1, \quad t \geq 0.$$

Ezért $\pi_t^{(n)} := \nu_t^{(n)} * \left(\nu_t^{(n)} \right)^*$, $t \geq 0$ egy szimmetrikus Poisson-félcsoport minden $n \geq 1$ esetén (lásd Hazod [40]).

Mivel $S = (\nu_t)_{t \geq 0}$ normális Gauss-félcsoport, így $\pi_t := \nu_t * \nu_t^*$, $t \geq 0$ egy szimmetrikus Gauss-félcsoport.

Újra a (ii)(b) feltétel és a 3.3.4 Lemma alapján a rendszer kielégíti a (B) feltételt, tehát alkalmazható a 3.3.3 Állítás, így $\nu_1^{(n)} \rightarrow \nu_1$, amiből $\pi_1^{(n)} \rightarrow \pi_1$. Ahogy a 3.3.5 Tétel bizonyításában, felhasználva $\pi_t^{(n)}$ és π_t szimmetriáját, azt kapjuk, hogy $(\pi_t^{(n)})_{t \geq 0} \rightarrow (\pi_t)_{t \geq 0}$ ha $n \rightarrow \infty$. Nyilván a $(\pi_t^{(n)})_{t \geq 0}$ Poisson-félcsoport Lévy-mértéke $\sum_{\ell=1}^{k_n} (\mu_{n\ell} + \mu_{n\ell}^*)$, tehát a 3.3.1 Tétel segítségével

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} (\mu_{n\ell}(\mathbb{C}U) + \mu_{n\ell}^*(\mathbb{C}U)) = 0 \quad \text{ha } U \in \mathfrak{U}(e).$$

Nyilván ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U) = 0 \quad \text{ha } U \in \mathfrak{U}(e),$$

amiből Siebert [89, Proposition 9.2] szerint az következik, hogy az $S_n = (\nu_t^{(n)})_{t \geq 0}$ kísérő Poisson-félcsoportokból álló sorozat összes torlódási pontja vagy Gauss-félcsoport, vagy pedig degenerált. Nobel [66] szerint a $\nu_1^{(n)} \rightarrow \nu_1$ konvergenciából következik, hogy (n) minden (n') részsorozata esetén létezik olyan (n'') részsorozata (n') -nek és létezik olyan $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoport, hogy $\mu_1 = \nu_1$ és $\nu_t^{(n'')} \rightarrow \mu_t$ minden $t \geq 0$ esetén. Azt már tudjuk, hogy $(\mu_t)_{t \geq 0}$ csak Gauss-félcsoport lehet. Mivel a ν_1 mérték egyértelműen meghatározza a $(\nu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoportot, így azt kapjuk, hogy $\mu_t = \nu_t$ minden $t \geq 0$ esetén. Tehát minden rögzített $t \geq 0$ esetén a $(\nu_t^{(n)})$ sorozat tetszőleges $(\nu_t^{(n')})$ részsorozata tartalmaz konvergens $(\nu_t^{(n'')})$ részsorozatot, és a határérték mindig ν_t . Ezért $S_n \rightarrow S$, így alkalmazható a 3.3.1 Állítás. \square

3.4 Lindeberg–Feller–tétel lépcsős Lie–csoportokon

Lépcsős Lie–csoportokon az előző két tétel még közelebb áll a valós esetben érvényes Lindeberg–Feller tételhez.

Tekintsünk egy lépcsős Lie–csoportot ellátva $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$ elsőfajú globális kanonikus koordinátákkal, egy $|\cdot|$ homogén normával, és $\{x_1, \dots, x_d\}$ elsőfajú lokális kanonikus koordinátákkal, melyek érvényesek az $U_0 := \{y \in G : |y| < 1\}$ környezetben. Ahogy a 2.4 paragrafusban láttuk:

$$\varphi(y) \leq c \cdot (|y|^2 \wedge 1) \quad \text{ha } y \in G$$

egy alkalmas $c > 0$ konstanssal, mely csak a $|\cdot|$ homogén normától függ. Így a következő tétel egyszerű következménye a 3.3.5 Tételnek.

3.4.1 Tétel. *Legyen $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy szimmetrikus mértékekből álló kommutatív rendszer egy G lépcsős Lie–csoporton. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma G -n. Legyen $B = (b_{ij})_{i,j=1, \dots, d} \in \mathbb{M}_d^+$.*

Tekintsük a következő állításokat:

- (i) (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| > \varepsilon\}) = 0 \quad \text{ha } \varepsilon > 0,$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij} \quad \text{for all } i, j = 1, \dots, d.$
- (ii) (a) \mathcal{I} infinitézimális,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} = \nu$ ahol ν az a Gauss-mérték, melynek infinitézimális generátora $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$

Ekkor (i)-ből következik (ii).

Ha még azt is feltesszük, hogy

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int (|y|^2 \wedge 1) \mu_{n\ell}(dy) < \infty,$$

akkor (i) és (ii) ekvivalensek.

Egy lépcsős Lie-csoport esetén minden $i = 1, \dots, d$ esetén

$$\left| \int x_i(y) \mu(dy) \right| \leq \|x_i\| \cdot \mu(\mathbb{C}U_0) + \int_{U_0} |\zeta_i(y)| \mu(dy) \leq \|x_i\| \cdot \mu(\mathbb{C}U_0) + c \int_{U_0} |y| \mu(dy),$$

így azt kapjuk, hogy

$$q(\mu) \leq c' \int (|y| \wedge 1) \mu(dy)$$

egy alkalmas $c' > 0$ konstanssal, mely csak a $|\cdot|$ homogén normától, és az x_1, \dots, x_d lokális koordinátáktól függ. Így a 3.3.6 Tétel segítségével a következő határeloszlás-tételt kapjuk normális háromszögrendszerekre:

3.4.2 Tétel. Legyen $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy kommutatív rendszer egy G lépcsős Lie-csoporton. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma G -n. Legyen $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $B = (b_{ij})_{i,j=1, \dots, d} \in \mathbb{M}_d^+.$

Tekintsük a következő állításokat:

- (i) (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| > \varepsilon\}) = 0 \quad \text{ha } \varepsilon > 0,$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij} \quad \text{ha } i, j = 1, \dots, d,$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = a_i \quad \text{ha } i = 1, \dots, d,$

$$(d) \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \left| \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| < \infty \quad \text{ha } i = 1, \dots, d.$$

(ii) (a) \mathcal{I} infinitézimális,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} = \nu$ ahol ν az a Gauss-mérték, melynek

$$\text{infinitézimális generátora } \sum_{i=1}^d a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$$

Ekkor (i)–ből következik (ii).

Ha még azt is feltesszük, hogy az \mathcal{I} háromszögrendszer és a ν -höz tartozó $(\nu_t)_{t \geq 0}$ Gauss-félcsoport normális, és

$$(3.4.3) \quad \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int (|y| \wedge 1) \mu_{n\ell}(dy) < \infty,$$

akkor (i) és (ii) ekvivalensek.

Ha feltesszük, hogy a sorokhoz tartozó kovariancia-mátrixok konvergálnak az első koordináta-blokkban (azaz olyan ζ_i koordinátákra, melyeknél $d_i = 1$), a Lindeberg-feltétel pedig teljesül azokban a koordinátákban, melyeknél $d_i \geq 2$, akkor a Lindeberg–Feller tétel szokásos alakját kapjuk:

3.4.4 Tétel. Legyen $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy centrált mértékekből álló kommutatív és normális rendszer egy G lépcsős Lie-csoporton. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma G -n. Legyen $B = (b_{ij})_{i,j=1, \dots, d} \in \mathbb{M}_d^+$. Legyen $(\nu_t)_{t \geq 0}$ az a Gauss-félcsoport, melynek infinitézimális generátora

$$\frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j$$

normális. Továbbá tegyük fel, hogy \mathcal{I} kielégíti a következő feltételeket:

$$(3.4.5) \quad \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} |\zeta_i(y)|^{2/d_i} \mu_{n\ell}(dy) < \infty \quad \text{ha } d_i \geq 2,$$

$$(3.4.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq 1} |\zeta_i(y)|^{2/d_i} \mu_{n\ell}(dy) = 0 \quad \text{ha } d_i \geq 2,$$

$$(3.4.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0 \quad \text{ha } d_i \geq 2,$$

$$(3.4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij} \quad \text{ha } d_i = d_j = 1.$$

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) = 0,$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n1} * \cdots * \mu_{nk_n} = \nu_1.$
- (ii) (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| > \varepsilon\}) = 0 \quad \text{ha } \varepsilon > 0,$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij} \quad \text{ha } d_i = d_j = 1.$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) = 0 \quad \text{ha } \varepsilon > 0.$

Bizonyítás. (i) \implies (ii). Az (i)(a) feltételből következik, hogy a $(\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ rendszer infinitézimális, hiszen

$$(3.4.9) \quad \mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon^{-2} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy)$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén. A (3.4.8) és (3.4.5) feltételekből következik (3.4.3). Alkalmazva a 3.4.2 Tételt kapjuk, hogy (i) \implies (ii).

(ii) \implies (iii). A (ii)(b) és (3.4.8) alapján $d_i = 1$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq 1} \zeta_i^2(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0.$$

Ez és (3.4.6) azt eredményezi, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq 1} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) = 0.$$

Most (ii)(a) alapján

$$(3.4.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{\varepsilon_1 \leq |y| \leq \varepsilon_2} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) = 0$$

tetszőleges $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ esetén, tehát (iii) teljesül.

(iii) \implies (i). Minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) \leq \varepsilon^2 + \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) \leq \varepsilon^2 + \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy),$$

így megkapjuk (i)(a)-t. Az (i)(b) bizonyításához belátjuk, hogy a 3.4.2 Tétel (i) feltételei teljesülnek. A

$$\mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon^{-2} \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy)$$

becslés alapján a 3.4.2 Tétel (i)(a) feltétele teljesül. Ezért fennáll (3.4.10) is. Nyilván (iii) alapján $d_i = 1$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq \varepsilon} \zeta_i^2(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0,$$

tehát $d_i = d_j = 1$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq \varepsilon} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0.$$

Ebből a (3.4.8) feltétel felhasználásával következik a 3.4.2 Tétel (i)(b) feltétele $d_i = d_j = 1$ esetén. Nyilván $0 < \varepsilon < 1$ és $d_i \geq 2$ esetén

$$\int_{|y| < \varepsilon} \zeta_i^2(y) \mu_{n\ell}(dy) \leq c \int_{|y| < \varepsilon} |y|^4 \mu_{n\ell}(dy) \leq c\varepsilon^2 \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy),$$

valamint

$$\int_{\varepsilon \leq |y| < 1} \zeta_i^2(y) \mu_{n\ell}(dy) \leq c \mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| \geq \varepsilon\}),$$

így a 3.4.2 Tétel már bizonyított (i)(a) pontja alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i^2(y) \mu_{n\ell}(dy) \leq c\varepsilon^2 \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy),$$

ahol a jobboldal végeségét a (3.4.5) és (3.4.6) feltételek garantálják. Mivel $\varepsilon \in (0, 1)$ tetszőlegesen kicsire választható, így megkapjuk a 3.4.2 Tétel (i)(b) feltételét $b_{ij} = 0$ -val minden $d_i \geq 2$ és $d_j \geq 2$ esetén. Hasonlóan megkapjuk a 3.4.2 Tétel (i)(b) feltételét $b_{ij} = 0$ -val minden $d_i = 1$ és $d_j \geq 2$ esetén is. Nyilván (2.4.3) és (iii) alapján $d_i \leq 2$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq 1} |\zeta_i(y)| \mu_{n\ell}(dy) = 0,$$

amiből a rendszer centráltsága és a (3.4.7) feltétel miatt következik a 3.4.2 Tétel (i)(d) feltétele, valamint (i)(c) feltétele $a_i = 0$ -val. \square

3.4.11 Megjegyzés. Az (i)(a) és (iii) feltételek a klasszikus Feller– illetve Lindeberg–feltételek. A (3.4.5) feltétel azért kell, hogy a sorokhoz tartozó másodrendű homogén momentumok korlátosak maradjanak. A (3.4.6) feltétel azt biztosítja, hogy a második koordináta-csoporttól kezdve teljesül a Lindeberg–feltétel.

Most levezetünk egy Lindeberg–tételt abban az esetben, amikor a sorokhoz tartozó másodrendű homogén momentumok korlátosak, és a határeloszlás olyan Gauss–mérték, mely stabilis a $(\delta_{\sqrt{t}})_{t>0}$ természetes dilatációra nézve. Az egyszerűség kedvéért csak centrált mértékekkel foglalkozunk.

3.4.12 Tétel. Legyen $\mathcal{I} = (\mu_{n\ell})_{\ell=1, \dots, k_n; n \geq 1}$ egy kommutatív rendszer egy G lépcsős Lie-csoporton. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma G -n.

Tegyük fel, hogy

$$(i) \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) < \infty,$$

$$(ii) \int \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0 \quad \text{ha} \quad d_i = 1,$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = a_i \quad \text{ha} \quad d_i = 2,$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij} \quad \text{ha} \quad d_i = d_j = 1,$$

$$(v) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) = 0 \quad \text{ha} \quad \varepsilon > 0.$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} = \nu$, ahol ν az a Gauss-mérték, melynek infinitézimális generátora

$$\sum_{d_i=2} a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$$

Bizonyítás. Meg fogjuk mutatni, hogy teljesülnek a 3.4.2 Tétel (i)–beli feltételei. Nyilván

$$\int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) \geq \varepsilon^2 \mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| \geq \varepsilon\}),$$

tehát az (v) feltételből következik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| \geq \varepsilon\}) = 0$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén.

Ha $d_i = 1$, akkor a (ii) feltétel alapján

$$\left| \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| = \left| \int_{|y| \geq 1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| \leq c \int_{|y| \geq 1} |y| \mu_{n\ell}(dy) \leq c \int_{|y| \geq 1} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy).$$

Tehát az (v) feltétel segítségével

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \left| \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| < \infty \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0.$$

Ha $d_i \geq 2$, akkor

$$\left| \int_{|y|<1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| \leq c \int_{|y|<1} |y|^{d_i} \mu_{n\ell}(dy) \leq c \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy),$$

tehát az (i) feltételből

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \left| \int_{|y|<1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| < \infty.$$

Ha $d_i = 2$, akkor az

$$\left| \int_{|y| \geq 1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| \leq c \int_{|y| \geq 1} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy)$$

becslés, valamint a (iii) és (v) feltételek alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y|<1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = a_i.$$

Ha $d_i \geq 3$, akkor $0 < \varepsilon < 1$ esetén

$$\left| \int_{|y|<\varepsilon} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| \leq c \varepsilon^{d_i-2} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy)$$

és

$$\left| \int_{\varepsilon \leq |y|<1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| \leq c \mu_{n\ell}(\{y \in G : |y| \geq \varepsilon\}),$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \left| \int_{|y|<1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| \leq c \varepsilon^{d_i-2} \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy).$$

Mivel $\varepsilon \in (0, 1)$ tetszőlegesen kicsire választható, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y|<1} \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0.$$

Hasonlóan, ha $d_i + d_j \geq 3$, akkor az

$$\left| \int_{|y|<\varepsilon} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| \leq c \varepsilon^{d_i+d_j-2} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy)$$

egyenlőtlenség segítségével

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y|<1} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = 0.$$

Ha $d_i = d_j = 1$, akkor az

$$\left| \int_{|y| \geq 1} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) \right| \leq c^2 \int_{|y| \geq 1} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy)$$

becslés, valamint a (iv) és (v) feltételek alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| < 1} \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = b_{ij}.$$

Ezzel kész a bizonyítás. \square

3.4.13 Megjegyzés. Megemlítjük, hogy a (ii)–(iv) feltételekben csak azok a ζ_i koordináták szerepelnek, melyekre $d_i = 1$ vagy $d_i = 2$. A (ii) feltétel azt jelenti, hogy a $\mu_{n\ell}$ mértékek centráltak. Alkalmas eltolással mindig el lehet érni, hogy a (ii) feltétel teljesüljön (lásd a 3.1.2 Tételt). A 3.4.12 Tétel (v) feltétele a Lindeberg-feltétel, melyből következik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) = 0$$

Feller-feltétel, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) \leq \varepsilon^2 + \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) \leq \varepsilon^2 + \sum_{\ell=1}^{k_n} \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy),$$

ezért

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) \leq \varepsilon^2.$$

A 3.4.12 Tételből könnyen levezethetjük a 3.1.1 Tételt, azaz a centrális határeloszlás-tétel standard alakját, ugyanis egyszerű számolással megmutatható, hogy a $\mu_{n\ell} := \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu)$, $1 \leq \ell \leq n$, $n \geq 1$ háromszögrendszer kielégíti a 3.4.12 Tétel feltételeit, hiszen

$$\begin{aligned} \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) &= n^{-1} \int |y|^2 \mu(dy), \\ \int \zeta_i(y) \mu_{n\ell}(dy) &= n^{-1} \int \zeta_i(y) \mu(dy) \quad \text{ha } d_i = 2, \\ \int \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) &= n^{-1} \int \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu(dy) \quad \text{ha } d_i = d_j = 1, \\ \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) &= n^{-1} \int_{|y| \geq \varepsilon \sqrt{n}} |y|^2 \mu(dy). \end{aligned}$$

Végül Lindeberg-tételt bizonyítunk a H 3-dimenziós Heisenberg-csoporton adott valószínűségi mértékek $\mu_1 * \dots * \mu_n$ n -szeres konvolúciósorozatának alkalmasan standardizált sorozatának Gauss-mértékhez való konvergenciájáról.

Legyen μ egy centrált valószínűségi mérték H -n, azaz $\int \zeta_1(y)\mu(dy) = \int \zeta_2(y)\mu(dy) = 0$. Ekkor μ standarizálható egy automorfizmus segítségével a következő módon. Egy valós 2×2 -es $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ mátrix esetén legyen

$$\delta_A(y) := (A(\zeta_1(y), \zeta_2(y))^\top, \zeta_3(y)\text{Det}(A)), \quad y \in H.$$

Ekkor δ_A egy automorfizmusa a H csoportnak. Nyilván δ_A reprezentálható a következő mátrix segítségével:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Det}(A) \end{pmatrix}.$$

Ha μ egy olyan centrált valószínűségi mérték H -n, hogy az $A := \left(\int \zeta_i(y)\zeta_j(y)\mu(dy)\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$ mátrix invertálható, akkor a $\delta_{A^{-1/2}}(\mu)$ mérték (ahol $A^{-1/2}$ az A mátrix szimmetrikus, pozitív szemidefinit négyzetgyöke) *standard* abban az értelemben, hogy centrált, és az első két koordináta $\left(\int \zeta_i(y)\zeta_j(y)\delta_{A^{-1/2}}(\mu)(dy)\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$ kovariancia-mátrixa az egységmátrix.

3.4.14 Tétel. Legyen $(\mu_k)_{k \geq 1}$ valószínűségi mértékeknek egy kommutatív sorozata a H Heisenberg-csoporton. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma H -n. Tegyük fel, hogy

$$(i) \quad \int \zeta_i(y)\mu_k(dy) = 0 \quad \text{ha} \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(ii) \quad \int |y|^2 \mu_k(dy) < \infty.$$

Jelölje $n \geq 1$ esetén $A_n := \sum_{k=1}^n \left(\int \zeta_i(y)\zeta_j(y)\mu_k(dy)\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$. Tegyük fel, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, melyre A_{n_0} invertálható, és

$$(iii) \quad \sup_{n \geq n_0} (\text{Det}(A_n))^{-1/2} \sum_{k=1}^n \int |\zeta_3(y)| \mu_k(dy) < \infty$$

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr}(A_n^{-1}) \sum_{k=1}^n \int_{|y|^2 \geq \varepsilon / \text{Tr}(A_n^{-1})} |y|^2 \mu_k(dy) = 0 \quad \text{ha} \quad \varepsilon > 0.$$

Ekkor

$$\delta_{A_n^{-1/2}}(\mu_1 * \cdots * \mu_n) \rightarrow \nu \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol ν a *standard Gauss-mérték* H -n, vagyis az a Gauss-mérték, melynek infinitézimális generátora $\frac{1}{2}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2)$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a $\mu_{n\ell} := \delta_{A_n^{-1/2}}(\mu_\ell)$, $1 \leq \ell \leq n$, $n \geq 1$ háromszögrendszer kielégíti a 3.4.12 Tétel feltételeit.

Jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és $\|\cdot\|$ a szokásos belső szorzást, illetve normát \mathbb{R}^2 -ben. Ha $A \in \mathbb{M}_2^+$, akkor

$$\|A(x_1, x_2)^\top\|^2 = \langle A(x_1, x_2)^\top, A(x_1, x_2)^\top \rangle = \langle A^2(x_1, x_2)^\top, (x_1, x_2)^\top \rangle \leq \|(x_1, x_2)\|^2 \text{Tr}(A^2)$$

és

$$\text{Det}(A) \leq \frac{1}{2} \text{Tr}(A^2).$$

Tehát az $|y|^2 \leq c(\zeta_1^2(y) + \zeta_2^2(y) + |\zeta_3(y)|)$, $y \in H$ becslés alapján

$$|\delta_A(y)|^2 \leq c \left(\|A(\zeta_1(y), \zeta_2(y))^\top\|^2 + |\zeta_3(y)| \det(A) \right) \leq c|y|^2 \text{Tr}(A^2).$$

Tehát

$$\int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) = \int_{\left| \delta_{A_n^{-1/2}}(y) \right| \geq \varepsilon} |\delta_{A_n^{-1/2}}(y)|^2 \mu_\ell(dy) \leq c \text{Tr}(A_n^{-1}) \int_{c|y|^2 \text{Tr}(A_n^{-1}) \geq \varepsilon^2} |y|^2 \mu_\ell(dy).$$

Nyilván $i, j = 1, 2$ esetén

$$\sum_{\ell=1}^n \int \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu_{n\ell}(dy) = \delta_{ij},$$

és ebből a (iii) feltétellel együtt kapjuk, hogy

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^n \int |y|^2 \mu_{n\ell}(dy) < \infty.$$

Ezzel kész a bizonyítás. □

4. fejezet

Gauss–mértékekkel való közelítés pontossága lépcsős Lie–csoportokon

4.1 Konvergencia–sebesség homogén gömbökön

Ebben a paragrafusban rögzítünk egy G lépcsős Lie–csoportot, és nem jelezzük a konstansok G -től való függését. Ennek a paragrafusnak a célja az, hogy a 3.1.1 standard centrális határeloszlás-tételben megvizsgáljuk a konvergencia–sebességet homogén gömbökön. Az egyszerűség kedvéért csak azt a speciális esetet tekintjük, amikor $a_i = 0$ ha $d_i = 2$ és $b_{ij} = \delta_{ij}$ ha $d_i = d_j = 1$, azaz a határeloszlás az a ν Gauss–mérték, melynek infinitézimális generátora $\frac{1}{2} \sum_{d_k=1} \tilde{X}_k^2$. Ekkor a

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{d_k=1} \tilde{X}_k^2$$

differenciáloperátor hipoelliptikus $(0, \infty) \times G$ -n Hörmander kritériuma alapján (lásd Hörmander [54], valamint Heyer [48, 6.3.7]), hiszen $\{X_k : d_k = 1\}$ generálja az egész $\mathfrak{L}(G)$ Lie–algebrát. Ezért a ν_t , $t \geq 0$ Gauss–mértékek abszolút folytonosak a λ Haar–mértékre, és létezik egy olyan korlátlanul differenciálható $p > 0$ függvény $(0, \infty) \times G$ -n, hogy $p_t(\cdot) = p(t, \cdot)$ λ -sűrűsége a ν_t mértéknek (lásd Siebert [90]). Az egyszerűség kedvéért a ν és p jelölést fogjuk használni ν_1 , illetve p_1 helyett. Ismert, hogy

$$(4.1.1) \quad p(r^2 t, \delta_r x) = r^{-Q} p(t, x)$$

ha $x \in G$, $t > 0$, $r > 0$, ahol $Q := \sum_{i=1}^d d_i$ a G homogén dimenziója. Figyelembe véve, hogy

$$\lambda(\delta_r(B)) = r^Q \lambda(B)$$

minden $B \in \mathcal{B}(G)$ esetén, azt kapjuk, hogy $\nu_t = \delta_{\sqrt{t}}(\nu_1)$ minden $t > 0$ esetén. Speciálisan, $\nu_1^n = \nu_n = \delta_{\sqrt{n}}(\nu_1)$. Tehát a ν mérték stabilis Baldi–értelemben is, és stabilis a $(\delta_{\sqrt{t}})_{t>0}$ egy-paraméteres automorfizmus-csoportra nézve is Hazod–értelemben (lásd Hazod [41]). Fel fogjuk használni a $p > 0$ sűrűségfüggvény következő becslését (lásd Hebisch [44]):

4.1.2 Tétel. Legyen $|\cdot|$ egy tetszőleges homogén norma G -n. Ekkor léteznek olyan $\{C_I, I \in \mathbb{Z}_+^d\}$ és C pozitív konstansok, hogy

$$|\tilde{X}^I p_t(x)| \leq C_I t^{-(d(I)+Q)/2} \exp\{-C|x|^2/t\}$$

teljesül minden $t > 0$, $x \in G$ és $I \in \mathbb{Z}_+^d$ esetén.

4.1.3 Következmény. Tetszőleges $k \in \mathbb{Z}_+$ és $I \in \mathbb{Z}_+^d$ esetén

$$\begin{aligned} \int |x|^k |\tilde{X}^I p_t(x)| \lambda(dx) &= c_{kI}^{(1)} t^{(k-d(I))/2}, \\ \int |x|^k |\partial^I p_t(x)| \lambda(dx) &= c_{kI}^{(2)} t^{(k-d(I))/2} \end{aligned}$$

valamely $c_{kI}^{(1)}$ és $c_{kI}^{(2)}$ pozitív konstansokkal. Ha $k \in \mathbb{Z}_+$ és $I \in \mathbb{Z}_+^d$ olyanok, hogy $k \leq d(I)$, akkor

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} |x|^k |\tilde{X}^I p_t(x)| \lambda(dx) &\leq c_I^{(3)}, \\ \int_{|x|>1} |x|^k |\partial^I p_t(x)| \lambda(dx) &\leq c_I^{(4)} \end{aligned}$$

ahol $c_I^{(3)}$ és $c_I^{(4)}$ pozitív konstansok.

Bizonyítás. A (4.1.1) homogenitásból azt kapjuk, hogy

$$\tilde{X}^I p_t(x) = t^{-(Q+d(I))/2} \tilde{X}^I p_1(\delta_{1/\sqrt{t}}(x)).$$

Az $x \mapsto |x|^k |\tilde{X}^I p_t(x)|$ függvénynek a λ Haar-mérték szerinti integrálhatósága könnyen adódik a 4.1.2 Tétel és Folland, Stein [32, Corollary 1.17] segítségével. Elvégezve az $x = \delta_{\sqrt{t}}(y)$ helyettesítést és felhasználva a $\lambda(\delta_{\sqrt{t}}(dy)) = t^{Q/2} \lambda(dy)$ azonosságot, kapjuk kapjuk az első összefüggést.

Ismert, hogy

$$(4.1.4) \quad \partial^I = \sum_{|J| \leq |I|, d(J) \geq d(I)} P_{IJ} \tilde{X}^J,$$

ahol P_{IJ} egy olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(J) - d(I)$ (lásd Folland, Stein [32, p.25]). Tehát a $|P_{IJ}(x)| \leq c_{IJ} |x|^{d(J)-d(I)}$ egyenlőtlenségből, a 4.1.2 Tételből és a (4.1.1) homogenitásból következik a második összefüggés.

Újra a 4.1.2 Tétel és (4.1.1) alapján

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} |x|^k |\tilde{X}^I p_t(x)| \lambda(dx) &= t^{(k-d(I))/2} \int_{|y|>1/\sqrt{t}} |y|^k |\tilde{X}^I p_1(y)| \lambda(dy) \\ &\leq \int_{|y|>1/\sqrt{t}} |y|^{d(I)} |\tilde{X}^I p_1(y)| \lambda(dy) \leq c_I^{(3)}. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség ugyanígy bizonyítható. \square

Először egy becslést adunk a ν mérték és egy tetszőleges μ mérték variációs távolságára a pszeudomomentumuk segítségével.

4.1.5 Lemma. *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $c_k > 0$ konstans, hogy tetszőleges $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ esetén*

$$|\mu - \nu|(G) \leq c_k \beta_k^{Q/(Q+k)}(\mu, \nu).$$

Bizonyítás. Sazonov [86, Lemma 1, p.12] bizonyításának ötletét használjuk. Először tegyük fel, hogy

$$0 < v = |\mu - \nu|(G) < 2.$$

Legyen $G = D^+ \cup D^-$ a G Hahn–felbontása a $\mu - \nu$ előjeles mérték szerint, azaz D^+ és D^- olyan diszjunkt Borel–halmazok, hogy $H \in \mathcal{B}(G)$ esetén $(\mu - \nu)(H) \geq 0$ ha $H \subseteq D^+$ és $(\mu - \nu)(H) \leq 0$ ha $H \subseteq D^-$. Defináljuk az $\eta \in \mathfrak{M}_+^b(G)$ mértéket $\mathcal{B}(G)$ -n a következő módon:

$$\eta(H) = \nu(H \cap D^+) + \mu(H \cap D^-).$$

Megjegyezzük, hogy $\nu - \eta \in \mathfrak{M}_+^b(G)$, továbbá

$$(4.1.6) \quad \beta_k(\mu, \nu) \geq c_k \int |x|^k |\mu - \nu|(dx) \geq c_k \int |x|^k (\nu - \eta)(dx).$$

Megjegyezzük, hogy $\eta(G) = 1 - v/2$. Tekintsük $a \in G$ és $r > 0$ esetén a $B(a, r) := \{x \in G : |a^{-1}x| < r\}$ homogén gömböket. Legyen $r > 0$ olyan, hogy $\nu(B(e, r)) = v/2$. Ekkor $\nu(\mathbb{C}B(e, r)) = 1 - v/2 = \eta(B(e, r)) + \eta(\mathbb{C}B(e, r))$, tehát $\eta(B(e, r)) = (\nu - \eta)(\mathbb{C}B(e, r))$. Következésképpen

$$\int_{B(e, r)} |x|^k \eta(dx) \leq r^k \eta(B(e, r)) = r^k (\nu - \eta)(\mathbb{C}B(e, r)) \leq \int_{\mathbb{C}B(e, r)} |x|^k (\nu - \eta)(dx),$$

és így

$$(4.1.7) \quad \int |x|^k (\nu - \eta)(dx) \geq \int_{B(e, r)} |x|^k (\nu - \eta)(dx) + \int_{B(e, r)} |x|^k \eta(dx) = \int_{B(e, r)} |x|^k \nu(dx).$$

Most (4.1.6) és (4.1.7) alapján

$$\beta_k(\mu, \nu) \geq c_k \int_{B(e, r)} |x|^k \nu(dx).$$

Legyen $h \in (0, r)$ olyan, hogy $\nu(B(e, h)) = \nu(B(e, r) \setminus B(e, h)) = v/4$. Felhasználva, hogy a ν sűrűségfüggvénye korlátos, azt kapjuk, hogy

$$\nu(B(e, h)) \leq c \lambda(B(e, h)) = c \int_{|x| < h} \lambda(dx) = ch^Q \int_{|y| < 1} \lambda(dy) \leq c'h^Q.$$

Ezért $h \geq c'' v^{1/Q}$, és

$$\begin{aligned} \beta_k(\mu, \nu) &\geq c_k \int_{B(e,r) \setminus B(e,h)} |x|^k \nu(dx) \\ &\geq c_k h^k \nu(B(e,r) \setminus B(e,h)) = c_k h^k v/4 \geq c'_k v^{(Q+k)/Q}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $v = |\mu - \nu|(G) \leq c''_k \beta_k^{Q/(Q+k)}(\mu, \nu)$.

Ha $|\mu - \nu|(G) = 0$, akkor az állítás triviális. Ha $|\mu - \nu|(G) = 2$, akkor μ és ν ortogonálisak, így

$$\left(\int |x|^k |\mu - \nu|(dx) \right)^{Q/(Q+k)} \geq \left(\int |x|^k \nu(dx) \right)^{Q/(Q+k)} = c_k = c_k |\mu - \nu|(G)/2.$$

Ezzel kész a bizonyítás. \square

A ν mérték és a $\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)$ standardizált konvolúcióhatványok közötti variációs távolság a következő módon becsülhető.

4.1.8 Lemma. *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $c_n > 0$ konstans, hogy ha $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ olyan, hogy $\int \zeta_i(x) \mu(dx) = 0$ ha $d_i = 1, 2$ és $\int \zeta_i(x) \zeta_j(x) \mu(dx) = \delta_{ij}$ ha $d_i = d_j = 1$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(4.1.9) \quad |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n) - \nu|(G) \leq (|\mu - \nu|(G))^n + c_n \sum_{j=3}^{3s} \beta_j(\mu, \nu).$$

Bizonyítás. Újra Sazonov [86, Lemma 1, p.12] módszerét használjuk. Először vegyük észre, hogy

$$(4.1.10) \quad |(\mu - \nu)^n(B)| \leq \frac{1}{2} (|\mu - \nu|(G))^n$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $B \in \mathcal{B}(G)$ esetén. Valóban, ez igaz ha $n = 1$, és $n \geq 2$ esetén teljes indukcióval

$$\begin{aligned} |(\mu - \nu)^n(B)| &= \left| \int (\mu - \nu)^{n-1}(x^{-1}B) (\mu - \nu)(dx) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} (|\mu - \nu|(G))^{n-1} \int |\mu - \nu|(dx) = \frac{1}{2} (|\mu - \nu|(G))^n. \end{aligned}$$

Most becsüljük meg a $|\nu * (\mu - \nu)(B)|$ mennyiséget $B \in \mathcal{B}(G)$ esetén:

$$\begin{aligned} \nu * (\mu - \nu)(B) &= \iint 1_B(yx) p(y) \lambda(dy) (\mu - \nu)(dx) \\ &= \iint 1_B(u) p(ux^{-1}) \lambda(du) (\mu - \nu)(dx). \end{aligned}$$

Ezután használni akarjuk a Taylor-egyenlőtlenséget az

$$f(x) := \int 1_B(u) p(ux^{-1}) \lambda(du), \quad x \in G$$

függvényre az $e \in G$ pontban. Legyen $g_u(x) := p(ux^{-1})$, $x, u \in G$. Először megmutatjuk, hogy $f \in \mathfrak{C}^\infty(G)$, és minden $x \in G$, $I \in \mathbb{Z}_+^d$ esetén

$$(4.1.11) \quad X^I f(x) = \int 1_B(u) X^I g_u(x) \lambda(du).$$

Egyrészt (2.4.7) alapján

$$X^I g_u(x) = \sum_{|J| \leq |I|, d(J) \geq d(I)} P_{IJ}(x) \partial^J g_u(x),$$

ahol P_{IJ} olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(J) - d(I)$, másrészt

$$(4.1.12) \quad \partial^J g_u(x) = \sum_{|K| \leq |J|, d(K) \geq d(J)} Q_{JK}(x, u) \partial^K p(ux^{-1})$$

ahol Q_{JK} olyan homogén polinom $G \times G$ -n, melynek homogén foka $d(K) - d(J)$. Így ha $R > 0$, $x \in G$ és $|x| \leq R$, akkor

$$(4.1.13) \quad \begin{aligned} \int |1_B(u) \partial^J g_u(x)| \lambda(du) &\leq \sum_{|K| \leq |J|, d(K) \geq d(J)} \int |Q_{JK}(x, u) \partial^K p(ux^{-1})| \lambda(du) \\ &\leq \sum_{|K| \leq |J|, d(K) \geq d(J)} \int |Q_{JK}(x, vx) \partial^K p(v)| \lambda(dv) \\ &\leq c_J \sum_{|K| \leq |J|, d(K) \geq d(J)} \int (|v| + |x|)^{d(K)-d(J)} |\partial^K p(v)| \lambda(dv) \\ &\leq c(J, R). \end{aligned}$$

Ezért tetszőleges $x \in G$ és $J \in \mathbb{Z}_+^d$ esetén

$$\partial^J f(x) = \int 1_B(u) \partial^J g_u(x) \lambda(du),$$

amiből következik (4.1.11).

Tekintsük az f függvény $e \in G$ pontbeli $P_e^{(2)}$ homogén másodfokú jobboldali Taylor-polinomját. A momentumfeltételek miatt

$$\int P_e^{(2)}(x) (\mu - \nu)(dx) = 0.$$

A lépcsős Taylor-egyenlőtlenségből

$$|f(x) - P_e^{(2)}(x)| \leq c|x|^3 \sup \{ |X^I f(z)| : d(I) = 3, |z| \leq b^3|x| \}$$

minden $x \in G$ esetén. (4.1.11), (4.1.12), valamint a 4.1.3 Következmény alapján $|z| \leq b^3|x|$ esetén

$$\begin{aligned}
|X^I f(z)| &\leq \sum_{\substack{|K| \leq |J| \leq |I| \\ d(K) \geq d(J) \geq d(I)}} |P_{IJ}(z)| \int |Q_{JK}(z, vz) \partial^K p(v)| \lambda(dv) \\
&\leq \sum_{\substack{|K| \leq |J| \leq |I| \\ d(K) \geq d(J) \geq d(I)}} c_{IJ}^{(1)} (1 + |z|^{d(J)-d(I)}) \int c_{JK}^{(2)} (1 + |z|^{d(K)-d(J)} + |vz|^{d(K)-d(J)}) |\partial^K p(v)| \lambda(dv) \\
&\leq c(I) \sum_{\substack{|K| \leq |J| \leq |I| \\ d(K) \geq d(J) \geq d(I)}} (1 + |x|^{d(J)-d(I)}) (1 + |x|^{d(K)-d(J)}) \\
&\leq c'(I) \sum_{\substack{|K| \leq |I| \\ d(K) \geq d(I)}} (1 + |x|^{d(K)-d(I)}).
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}
|\nu * (\mu - \nu)(B)| &= \left| \int f(x)(\mu - \nu)(dx) \right| = \left| \int (f(x) - P_e^{(2)}(x))(\mu - \nu)(dx) \right| \\
&\leq c \int |x|^3 \sup_{d(I)=3, |z| \leq b^3|x|} \int |X^I f(z)| |\mu - \nu|(dx) \\
&\leq c \max_{d(I)=3} \sum_{\substack{|K| \leq |I| \\ d(K) \geq 3}} \int |x|^3 (1 + |x|^{d(K)-3}) |\mu - \nu|(dx) \\
&\leq c \sum_{3 \leq j \leq 3s} \int |x|^j |\mu - \nu|(dx),
\end{aligned}$$

mivel $d(I) = 3$ és $|K| \leq |I|$ miatt $d(K) \leq s|K| \leq s|I| \leq sd(I) = 3s$. Tehát

$$(4.1.14) \quad |\nu * (\mu - \nu)(B)| \leq c \sum_{j=3}^{3s} \beta_j(\mu, \nu).$$

Hasonlóan,

$$(4.1.15) \quad |(\mu - \nu) * \nu(B)| \leq c \sum_{j=3}^{3s} \beta_j(\mu, \nu).$$

Most már hozzálátunk (4.1.9) bizonyításához. Nyilván igaz $n = 1$ esetén. Tegyük fel, hogy igaz $1, 2, \dots, n-1$ esetén. Ekkor tetszőleges $B \in \mathcal{B}(G)$ Borel-halmazra teljesül

$$(4.1.16) \quad |(\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n) - \nu)(B)| = |(\mu^n - \nu^n)(\delta_{\sqrt{n}}(B))| \leq |(\mu - \nu)^n(\delta_{\sqrt{n}}(B))| + S_1 + S_2,$$

ahol

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\mu - \nu)^k * \nu * \mu^{n-k-1}(\delta_{\sqrt{n}}(B)) \right|, \\
S_2 &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \nu^k * (\mu - \nu) * \mu^{n-k-1}(\delta_{\sqrt{n}}(B)) \right|.
\end{aligned}$$

(4.1.10), (4.1.14), (4.1.15) és (4.1.16) alapján következik (4.1.9). \square

Most becslést adunk a standard centrális határeloszlás-tételbeli konvergencia–sebességre variációs távolságra nézve.

4.1.17 Tétel. *Léteznek $C_1, C_2 > 0$ konstansok a következő tulajdonsággal: ha $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ olyan valószínűségi mérték, melyre $\int \zeta_i(x)\mu(dx) = 0$ ha $d_i = 1, 2$, $\int \zeta_i(x)\zeta_j(x)\mu(dx) = \delta_{ij}$ ha $d_i = d_j = 1$ és $\beta_{3s}(\mu, \nu) \leq C_1$, akkor tetszőleges $n \geq 4$ esetén*

$$(4.1.18) \quad \Delta_n(\mu, \nu) := \sup_{B \in \mathcal{B}(G)} |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B) - \nu(B)| \leq C_2 \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j}(\mu, \nu) n^{-(1+j)/2}.$$

4.1.19 Megjegyzés. $n = 1, 2, 3$ esetén a 4.1.5 és 4.1.8 Lemmákból becslést lehet kapni a $\Delta_n(\mu, \nu)$ mennyiségre.

A 4.1.17 Tétel bizonyítása. n szerinti indukciót és az úgynevezett kompozíciós módszert használjuk, és követjük Bentkus, Bloznelis [6, Lemma 2] bizonyításának ötleteit. A $\beta_{3s} \leq C_1$ feltétel és a 4.1.5 és 4.1.8 Lemmák alapján

$$\begin{aligned} \Delta_4(\mu, \nu) &\leq \frac{1}{2} \left| \delta_{1/\sqrt{4}}(\mu^4) - \nu \right| (G) \leq \frac{1}{2} \left((|\mu - \nu|(G))^4 + c \sum_{j=3}^{3s} \beta_j \right) \leq \\ &\leq c \left(\beta_{3s}^{4Q/(Q+3s)} + \sum_{j=3}^{3s} \beta_j \right) \leq c \left(1 + C_1^{3(Q-s)/(Q+3s)} \right) \sum_{j=3}^{3s} \beta_j, \end{aligned}$$

mivel $Q \geq d \geq s$. Ebből következik (4.1.18) $n = 4$ esetén

$$C_2 = 4^{(3s-2)/2} c (1 + C_1^{3(Q-s)/(Q+3s)})$$

választással.

Most tegyük fel, hogy ha $\beta_{3s}(\mu, \nu) \leq C_1$, akkor

$$(4.1.20) \quad \Delta_k(\mu, \nu) \leq C_2 \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j}(\mu, \nu) k^{-(1+j)/2} =: S_k$$

ha $k = 4, 5, \dots, n-1$.

Tekintsük a

$$(4.1.21) \quad \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n) - \nu = \sum_{k=1}^n (\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)$$

dekompozíciót, ahol

$$\begin{aligned} \gamma_k &= (\delta_{1/\sqrt{n}}\nu)^{k-1} * (\delta_{1/\sqrt{n}}\mu - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu) * ((\delta_{1/\sqrt{n}}\mu)^{n-k} - (\delta_{1/\sqrt{n}}\nu)^{n-k}), \\ \tilde{\gamma}_k &= (\delta_{1/\sqrt{n}}\nu)^{k-1} * (\delta_{1/\sqrt{n}}\mu - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu) * (\delta_{1/\sqrt{n}}\nu)^{n-k}. \end{aligned}$$

Először becslést adunk a $\gamma_1(B)$, $B \in \mathcal{B}(G)$ mennyiségekre:

$$\gamma_1(B) = \int (\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^{n-1} - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu^{n-1})(x^{-1}B)(\delta_{1/\sqrt{n}}\mu - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu)(dx).$$

Felhasználva a (4.1.20) indukciós feltevést $n-1$ esetén, azt kapjuk, hogy

$$|(\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^{n-1} - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu^{n-1})(x^{-1}B)| = |(\delta_{1/\sqrt{n-1}}\mu^{n-1} - \nu)(\delta_{\sqrt{n/(n-1)}}(x^{-1}B))| \leq S_{n-1},$$

ezért $S_{n-1} \leq 2^{(3s-2)/2}S_n$ és a 4.1.5 Lemma alapján

$$(4.1.22) \quad |\gamma_1(B)| \leq S_{n-1}|\delta_{1/\sqrt{n}}\mu - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu|(G) \leq cS_n|\mu - \nu|(G) \leq c'\beta_{3s}^{Q/(Q+3s)}S_n.$$

Most becslést adunk a $\gamma_k(B)$ mennyiségekre $2 \leq k < [n/2]$ esetén:

$$\gamma_k(B) = \iint (\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^{n-k} - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu^{n-k})(u^{-1}B)p_t(ux^{-1})\lambda(du)(\delta_{1/\sqrt{n}}\mu - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu)(dx),$$

ahol $t = (k-1)/n$.

Használjuk most a lépcsős Taylor-egyenlőtlenséget az $f : G \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \int (\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^{n-k} - \delta_{1/\sqrt{n}}\nu^{n-k})(u^{-1}B)p_t(ux^{-1})\lambda(du)$$

függvényre úgy, ahogy a 4.1.8 Lemma bizonyításánál. Legyen $g_{u,t}(x) := p_t(ux^{-1})$ ha $x, u \in G$ és $t > 0$, és legyen $\ell(u) := \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^{n-k} - \nu^{n-k})(u^{-1}B)$ ha $u \in G$. A (4.1.20) indukciós feltevést használva $n-k$ esetén, azt kapjuk, hogy minden $u \in G$ esetén

$$(4.1.23) \quad |\ell(u)| \leq S_{n-k} \leq cS_n.$$

Mint a 4.1.8 Lemma 5 bizonyításában, megmutathatjuk, hogy $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ és

$$X^I f(x) = \int \ell(u)X^I g_{u,t}(x)\lambda(du).$$

Jelölje $P_e^{(2)}$ az f függvény $e \in G$ pontbeli homogén másodfokú jobboldali Taylor-polinomját. A momentumfeltételek miatt megint

$$\int P_e^{(2)}(x)\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(dx) = 0.$$

A lépcsős Taylor-egyenlőtlenségből

$$(4.1.24) \quad |f(x) - P_e^{(2)}(x)| \leq c|x|^3 \sup \{|X^I f(z)| : d(I) = 3, |z| \leq b^3|x|\}$$

minden $x \in G$ esetén. Mint a 4.1.8 Lemma bizonyításában, (4.1.23) és a 4.1.3 Következmény alapján minden $|z| \leq b^3|x|$ esetén

$$\begin{aligned} |X^I f(z)| &\leq c_I S_n \sum_{\substack{|K| \leq |J| \leq |I| \\ d(K) \geq d(J) \geq d(I)}} \int (1 + |x|^{d(J)-d(I)}) (1 + |x|^{d(K)-d(J)} + |v|^{d(K)-d(J)}) |\partial^K p_t(v)| \lambda(dv) \\ &\leq c_I S_n \sum_{\substack{|K| \leq |J| \leq |I| \\ d(K) \geq d(J) \geq d(I)}} ((1 + |x|^{d(K)-d(I)})t^{-d(K)/2} + (1 + |x|^{d(J)-d(I)})t^{-d(J)/2}). \end{aligned}$$

Tehát (4.1.24) segítségével

$$\begin{aligned}
|\gamma_k(B)| &= \left| \int f(x) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(dx) \right| = \left| \int (f(x) - P_e^{(2)}(x)) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(dx) \right| \\
&\leq c S_n \sum_{j=3}^{3s} t^{-j/2} \int |x|^j |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)|(dx) \\
&\leq c S_n \sum_{j=3}^{3s} ((k-1)/n)^{-j/2} \beta_j n^{-j/2} = c S_n \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j} (k-1)^{-(3+j)/2}.
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$(4.1.25) \quad \sum_{k=2}^{[n/2]-1} |\gamma_k(B)| \leq c S_n \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j}.$$

Ha $[n/2] \leq k \leq n$, akkor (4.1.23) helyett az

$$|\ell(u)| = |(\delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k} - \delta_{1/\sqrt{n}} \nu^{n-k})(u^{-1}B)| \leq 1$$

triviális becslést használhatjuk (hiszen $\delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k}(u^{-1}B)$ és $\delta_{1/\sqrt{n}} \nu^{n-k}(u^{-1}B)$ is a $[0, 1]$ intervallumban van), és $t = (k-1)/n \geq 1/5$ alapján

$$|\gamma_k(B)| \leq c \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j} n^{-(3+j)/2}.$$

Ugyanez a becslés érvényes $\tilde{\gamma}_k$ esetén is. Ezért

$$(4.1.26) \quad \sum_{k=[n/2]}^n |\gamma_k(B)| \leq c \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j} n^{-(1+j)/2} = c C_2^{-1} S_n,$$

$$(4.1.27) \quad \sum_{k=1}^n |\tilde{\gamma}_k(B)| \leq c \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j} n^{-(1+j)/2} = c C_2^{-1} S_n.$$

A Hölder–egyenlőtlenségből $\beta_j \leq \beta_k^{j/k}$ ha $1 \leq j \leq k$. Összegyűjtve a (4.1.22) és (4.1.25)—(4.1.27) becsléseket, azt kapjuk (4.1.21) alapján, hogy

$$\begin{aligned}
|(\delta_{1/\sqrt{n}} \mu^n - \nu)(B)| &\leq c \left(\beta_{3s}^{Q/(Q+3s)} + \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j} + C_2^{-1} \right) S_n \\
&\leq c \left(C_1^{Q/(Q+3s)} + \sum_{j=0}^{3s-3} C_1^{(3+j)/3s} + C_2^{-1} \right) S_n \leq S_n,
\end{aligned}$$

C_1 -et elegendően kicsire és C_2 -t elegendően nagyra választva. □

A Hölder–egyenlőtlenség és a 4.2.4 Lemma alapján:

4.1.28 Következmény. *Léteznek olyan $C_1, C_2 > 0$ konstansok úgy, hogy ha $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ olyan valószínűségi mérték, melyre teljesülnek a 4.1.17 Tétel feltételei, akkor tetszőleges $n \geq 4$ esetén*

$$\begin{aligned}\Delta_n(\mu, \nu) &\leq C_2(\beta_3(\mu, \nu)n^{-1/2} + \beta_{3s}(\mu, \nu)n^{-(3s-2)/2}), \\ \Delta_n(\mu, \nu) &\leq C_2(m_3(\mu)n^{-1/2} + m_{3s}(\mu)n^{-(3s-2)/2}).\end{aligned}$$

Tekintsük megint egy $|\cdot|$ homogén norma esetén az $a \in G$ középpontú, $r > 0$ sugarú homogén gömböt:

$$B(a, r) = \{x \in G : |a^{-1}x| < r\}.$$

Figyeljük meg, hogy

$$\delta_t(bB(a, r)) = B(\delta_t(ba), rt)$$

minden $a, b \in G$ és $r, t > 0$ esetén. Más szóval, a homogén gömbök $\{B(a, r) : a \in G, r > 0\}$ rendszere zárt a $(\delta_t)_{t>0}$ dilatációkra és a baloldali eltolásra nézve.

Vegyük most a következő homogén normát:

$$(4.1.29) \quad |x| := \left(\sum_{i=1}^d |\zeta_i(x)|^{m/d_i} \right)^{1/m}$$

ha $x \in G$, ahol $m \in \mathbb{N}$ és m/d_i páros egész szám minden $i = 1, \dots, d$ esetén. Meg fogjuk mutatni, hogy erre a homogén normára vonatkozó homogén gömbök rendszere rendelkezik két fontos tulajdonsággal.

4.1.30 Lemma. *Legyen $|\cdot|$ a (4.1.29)-ban definiált homogén norma. Ekkor létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy*

$$\nu(B(a, r + \varepsilon) \setminus B(a, r)) \leq c\varepsilon(1 + |a|)^{s-1}$$

minden $a \in G$, $r > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén.

Bizonyítás. A jelölések egyszerűsítése kedvéért az $x \in G$ pont globális koordinátáit $x_i = \zeta_i(x)$, $i = 1, \dots, d$ fogja jelölni a bizonyítás során, ahol ez nem okozhat félreértést.

Tekintsük $r > 0$, $i = 1, \dots, d$ esetén az

$$A_i = \left\{ x \in G : \sum_{1 \leq j \leq d, j \neq i} |x_j|^{m/d_j} \leq c_0 r^m \right\}$$

halmazokat, ahol $(d-1)/d < c_0 < 1$ egy rögzített konstans. Könnyen belátható, hogy

$$r > ((c_0 d / (d-1))^{1/m} - 1)^{-1} \varepsilon =: c_1 \varepsilon$$

esetén

$$\bigcap_{i=1}^d (\mathbb{C}A_i) \subseteq \mathbb{C}B(e, r + \varepsilon),$$

ezért

$$B(e, r + \varepsilon) \setminus B(e, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^d (A_i \cap (B(e, r + \varepsilon) \setminus B(e, r))).$$

A homogén gömbök eltolás-invarianciáját használva a következő becslés adódik:

$$\begin{aligned} \nu(B(a, r + \varepsilon) \setminus B(a, r)) &= \int_{B(a, r + \varepsilon) \setminus B(a, r)} p(x) \lambda(dx) \\ &= \int_{B(e, r + \varepsilon) \setminus B(e, r)} p(ay) \lambda(dy) \leq \sum_{i=1}^d I_i, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{A_i \cap (B(e, r + \varepsilon) \setminus B(e, r))} p(ay) \lambda(dy) \\ &= \int_{\sum_{j \neq i} |y_j|^{m/d_j} \leq c_0 r^m} \int_{\{y_i : r \leq |y| < r + \varepsilon\}} p(ay) \lambda(dy). \end{aligned}$$

Rögzítsük az $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_d \in \mathbb{R}$ koordinátákat. Megjegyezzük, hogy

$$\{y_i : r \leq |y| < r + \varepsilon\} = (-v_i, -u_i] \cup [u_i, v_i),$$

ahol

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(y) = (r^m - \sum_{j \neq i} |y_j|^{m/d_j})^{d_i/m} \\ v_i &= v_i(y) = ((r + \varepsilon)^m - \sum_{j \neq i} |y_j|^{m/d_j})^{d_i/m}. \end{aligned}$$

Ha $y \in A_i \cap (B(e, r + \varepsilon) \setminus B(e, r))$, akkor ($r > c_1 \varepsilon$ figyelembevételével):

$$\begin{aligned} v_i(y) - u_i(y) &\leq \varepsilon \sup_{r \leq z \leq r + \varepsilon} d_i z^{m-1} (z^m - \sum_{j \neq i} |y_j|^{m/d_j})^{d_i/m-1} \\ &\leq \varepsilon d_i (r + \varepsilon)^{m-1} (1 - c_0)^{d_i/m-1} r^{d_i-m} \leq c \varepsilon r^{d_i-1}. \end{aligned}$$

A 4.1.2 Tétel alkalmazásával

$$\int_{u_i}^{v_i} p(ay) dy_i \leq c \varepsilon r^{d_i-1} \sup_{u_i \leq y_i \leq v_i} \exp\{-C|ay|^2\}.$$

A szuprérum becslhető a következő módon:

$$\sup_{u_i \leq y_i \leq v_i} \exp\{-C|ay|^2\} \leq \int_{y_i \geq u_i} |\partial_i \exp\{-C|ay|^2\}| dy_i,$$

ugyanis $\lim_{y_i \rightarrow \infty} \exp\{-C|ay|^2\} = 0$, hiszen a Campbell–Hausdorff-formulából $\lim_{y_i \rightarrow \infty} \zeta_i(ay) = \infty$. Szintén a Campbell–Hausdorff-formula alapján

$$\partial_i |ay| = |ay|^{1-m} \sum_{d_j \geq d_i} d_j^{-1} (\zeta_j(ay))^{m/d_j-1} \sum_{d(I)+d(J)=d_j} c_j^{IJ} \zeta^I(a) \partial_i \zeta^J(y).$$

Továbbá

$$\partial_i = \sum_{d_k \geq d_i} P_{ik} X_k,$$

ahol P_{ik} olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d_k - d_i$ (lásd Folland, Stein [32, p.25]). Mivel $X_k \zeta^J$ homogén foka $d(J) - d_k$, így

$$\begin{aligned} |\partial_i \zeta^J(y)| &\leq \sum_{d_k \geq d_i} |P_{ik}(y)| |X_k \zeta^J(y)| \\ &\leq c \sum_{d_k \geq d_i} |y|^{d_k - d_i} |y|^{d(J) - d_k} \leq c' |y|^{d(J) - d_i}. \end{aligned}$$

Ha $d(J) < d_i$, akkor nyilván $\partial_i \zeta^J(y) = 0$ minden $y \in G$ esetén. Ezért

$$|\partial_i ay| \leq c \sum_{d_j \geq d_i} |ay|^{1-d_j} \sum_{d(I)+d(J)=d_j} |a|^{d(I)} |y|^{d(J)-d_i}.$$

A fenti becsléseket összegyűjtve

$$\begin{aligned} I_i &\leq c\varepsilon r^{d_i-1} \int_{\sum_{j \neq i} |y_j|^{m/d_j} \leq c_0 r^m} \int_{|y_i| \geq a_i} |\partial_i \exp\{-C|ay|^2\}| \lambda(dy) \\ &\leq c\varepsilon \sum_{d_j \geq d_i} \sum_{d(I)+d(J)=d_j} \int |y|^{d_i-1} \exp\{-C|ay|^2\} |ay|^{2-d_j} |a|^{d(I)} |y|^{d(J)-d_i} \lambda(dy) \\ &= c\varepsilon \sum_{d_j \geq d_i} \sum_{d(I)+d(J)=d_j} \int \exp\{-C|x|^2\} |x|^{2-d_j} |a|^{d(I)} |a^{-1}x|^{d(J)-1} \lambda(dx) \\ &\leq c'\varepsilon(1 + |a|^{s-1}), \end{aligned}$$

ahol a következő integrálhatósági feltételt használtuk: ha f egy olyan mérhető függvény G -n melyre $|f(x)| = O(|x|^{\alpha-Q})$ ha $x \rightarrow e$ valamely $\alpha > 0$ esetén, akkor f integrálható az e közelében (lásd Folland, Stein [32, p.15]).

Abban az esetben, amikor $r < c_1\varepsilon$, egyszerűen használhatjuk a p sűrűségfüggvény korlátosságát:

$$\begin{aligned} \nu(B(a, r + \varepsilon) \setminus B(a, r)) &\leq c\lambda(B(a, r + \varepsilon) \setminus B(a, r)) \\ &= c'((r + \varepsilon)^Q - r^Q) \leq c'\varepsilon Q(r + \varepsilon)^{Q-1} \leq c'\varepsilon^Q \leq c'\varepsilon, \end{aligned}$$

amennyiben $\varepsilon \leq 1$. Ha $\varepsilon > 1$, akkor az állítás triviális, mert választhatjuk a $c = 1$ konstans. \square

Rögzítsünk most egy olyan korlátlanul differenciálható $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvényt, melyre $\psi(z) = 1$ ha $z \leq 0$ és $\psi(z) = 0$ ha $z \geq 1$. Legyen $r, \varepsilon > 0$, és legyen $x \in G$ esetén

$$(4.1.31) \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi\left(\frac{|x|^d - (r - \varepsilon)^d}{r^d - (r - \varepsilon)^d}\right) & \text{ha } r > \varepsilon, \\ 0 & \text{ha } r \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Könnyen belátható, hogy

$$1_{B(e, r - \varepsilon)} \leq \Psi \leq 1_{B(e, r)}.$$

4.1.32 Lemma. Legyen $|\cdot|$ a (4.1.29)–ban definiált homogén norma. Legyen $r, \varepsilon > 0$. Legyen Ψ a (4.1.31)–ben definiált függvény. Ekkor minden $I \in \mathbb{Z}_+^d$ esetén létezik olyan $c_I > 0$ konstans, hogy

$$|\partial^I \Psi(x)| \leq c_I \varepsilon^{-|I|} r^{|I|-d(I)}$$

minden $x \in G$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}_+^d$. Feltehetjük, hogy $r \geq \varepsilon$. Mivel Ψ konstans az $\{x \in G : |x| < r - \varepsilon\}$ és $\{x \in G : |x| > r\}$ halmazokon, ezért feltehetjük, hogy $r - \varepsilon \leq |x| \leq r$. Nyilván

$$|\partial^I \Psi(x)| \leq c(I) \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq d \\ i_\ell d_\ell/m \leq j_\ell \leq i_\ell}} \prod_{k=1}^d \frac{|\zeta_k(x)|^{j_k m/d_k - i_k}}{(r^m - (r - \varepsilon)^m)^{j_k}}.$$

Ha $j_k \leq i_k$, akkor $1 - (1 - \varepsilon/r)^m \geq \varepsilon/r \geq (\varepsilon/r)^{i_k/j_k}$, ezért $(r^m - (r - \varepsilon)^m)^{j_k} \geq \varepsilon^{i_k} r^{j_k m - i_k}$. Alkalmazva az $|\zeta_k(x)| \leq |x|^{d_k} \leq r^{d_k}$ egyenlőtlenséget, megkapjuk az állítást. \square

A következő „simító egyenlőtlenséget” fogjuk használni (lásd Paulauskas, Račkauskas [78, Chapter 5, Lemma 1.1]):

4.1.33 Lemma. Legyenek μ_1 és μ_2 valószínűségi mértékek egy (Ω, \mathcal{F}) mérhető téren. Legyenek $A, A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ olyanok, hogy $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, és legyenek φ_1 és φ_2 olyan mérhető függvények az (Ω, \mathcal{F}) téren, hogy $1_{A_1} \leq \varphi_1 \leq 1_A \leq \varphi_2 \leq 1_{A_2}$. Ekkor

$$|\mu_1(A) - \mu_2(A)| \leq \max_{i=1,2} \left| \int_{\Omega} \varphi_i(x) (\mu_1 - \mu_2)(dx) \right| + \min_{i=1,2} \mu_i(A_2 \setminus A_1).$$

Ezután bebizonyítjuk ennek a paragrafusnak a fő eredményét: a standard centrális határeloszlásbeli konvergencia–sebesség becslését homogén gömbökön.

4.1.34 Tétel. Legyen $|\cdot|$ olyan homogén norma G –n, mely rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(i) Létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy

$$(4.1.35) \quad \nu(B(a, r + \varepsilon) \setminus B(a, r)) \leq c\varepsilon(1 + |a|)^{s-1}$$

ha $a \in G$, $r > 0$ és $\varepsilon > 0$;

(ii) minden $r > \varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\Psi_{r,\varepsilon} : G \rightarrow [0, 1]$ függvény, melyre

$$(4.1.36) \quad 1_{B(e, r - \varepsilon)}(x) \leq \Psi_{r,\varepsilon}(x) \leq 1_{B(e, r)}(x)$$

ha $x \in G$, és

$$(4.1.37) \quad |\partial^I \Psi_{r,\varepsilon}(x)| \leq c_I \varepsilon^{-|I|} r^{|I|-d(I)}$$

ha $x \in G$ és $I \in \mathbb{Z}_+^d$ olyan, hogy $d(I) \leq 3s$.

Ekkor létezik $C > 0$ konstans a következő tulajdonsággal: ha $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ olyan valószínűségi mérték, melyre $\int \zeta_i(x) \mu(dx) = 0$ ha $d_i = 1, 2$, $\int \zeta_i(x) \zeta_j(x) \mu(dx) = \delta_{ij}$ ha $d_i = d_j = 1$ és $\int |\zeta_i(x)|^{3s/d_i} \mu(dx) < \infty$ ha $i = 1, \dots, d$, akkor tetszőleges $n \geq 4$, $a \in G$ és $r > 0$ esetén

$$(4.1.38) \quad |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq C\kappa(a, r)(\beta_3(\mu, \nu) + \beta_{3s}(\mu, \nu))n^{-1/2},$$

ahol

$$\kappa(a, r) := (1 + |a|)^{s-1}(1 + (1 + |a|)/r)^{3(s-1)}.$$

4.1.39 Megjegyzés. A 4.1.30 és 4.1.32 Lemmák alapján tetszőleges lépcsős Lie-csoport esetén létezik olyan homogén norma, mely rendelkezik az (i) és (ii) tulajdonságokkal.

A 4.1.34 Tétel bizonyítása. Újra n szerinti indukciót és az úgynevezett kompozíciós módszert használjuk, és követjük Bentkus, Bloznelis [6, Theorem 1] bizonyításának ötleteit. Ha $\beta_{3s} > 1$, akkor a 4.1.5 Lemma alapján

$$|(\mu - \nu)(B)| \leq \frac{1}{2}|\mu - \nu|(G) \leq c\beta_{3s}^{Q/(Q+3s)} \leq c\beta_{3s}$$

ha $B \in \mathcal{B}(G)$, ezért (4.1.38) teljesül $n = 1$ esetén ($C \geq c$ konstanst választva), és az indukciót az $n = 1$ számmal kezdjük.

Ha $\beta_{3s} \leq 1$, akkor, mint a 4.1.17 Tétel bizonyításában,

$$\begin{aligned} |(\delta_{1/\sqrt{4}}(\mu^4) - \nu)(B)| &\leq c(\beta_{3s}^{4Q/(Q+3s)} + \sum_{j=3}^{3s} \beta_j) \\ &\leq c' \sum_{j=3}^{3s} \beta_j \leq c''(\beta_3 + \beta_{3s}) \end{aligned}$$

tetszőleges $B \in \mathcal{B}(G)$ esetén, mivel $\beta_j \leq c_j(\beta_3 + \beta_{3s})$ ha $3 \leq j \leq 3s$. Tehát (4.1.38) teljesül $n = 4$ esetén ($C \geq 2c''$ konstanst választva), és az indukciót az $n = 4$ számmal kezdjük.

Most feltesszük, hogy minden $a \in G$, $r > 0$ és $k \leq n - 1$ esetén

$$(4.1.40) \quad \left| \delta_{1/\sqrt{k}}(\mu^k)(B(a, r)) - \nu(B(a, r)) \right| \leq C\kappa(a, r)(\beta_3(\mu, \nu) + \beta_{3s}(\mu, \nu))k^{-1/2} =: S_k.$$

Legyen $a \in G$ és $r, \varepsilon > 0$. Jelöljön $\Psi_{r, \varepsilon}$ egy olyan függvényt G -n, melyre teljesülnek a (4.1.36) és (4.1.37) tulajdonságok ha $r > \varepsilon$, és legyen $\Psi_{r, \varepsilon} = 0$ ha $r \leq \varepsilon$. Legyen $\Psi_1 = \Psi_{r, \varepsilon}$ és $\Psi_2 = \Psi_{r+\varepsilon, \varepsilon}$. Tekintsük a $\varphi_i(x) = \Psi_i(a^{-1}x)$, $x \in G$, $i = 1, 2$ függvényeket. Nyilván

$$(4.1.41) \quad 1_{B(a, r-\varepsilon)} \leq \varphi_1 \leq 1_{B(a, r)} \leq \varphi_2 \leq 1_{B(a, r+\varepsilon)}.$$

A 4.1.33 Lemma és a (4.1.35) feltétel alkalmazásával

$$(4.1.42) \quad \begin{aligned} &|\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \\ &\leq \max_{i=1,2} \left| \int \varphi_i(x) (\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^n - \nu)(dx) \right| + c\varepsilon(1 + |a|)^{s-1}. \end{aligned}$$

Mostantól kezdve φ_1 és Ψ_1 helyett a φ és Ψ jelölést fogjuk használni, amennyiben ez nem félrevezető.

Megint a (4.1.20) dekompozíciót alkalmazzuk. Először tegyük fel, hogy $\varepsilon < \min\{1, r/2\}$, és becslést adunk az $\int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx)$ mennyiségre, amikor $1 \leq k < [n/2]$. Nyilván

$$\int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx) = \iiint \varphi(yuz)\delta_{1/\sqrt{n}}\nu^{k-1}(dy)\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du)\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^{n-k}(dz).$$

Most használjuk a Taylor-egyenlőtlenséget az

$$f(u) = \iint \varphi(yuz)\delta_{1/\sqrt{n}}\nu^{k-1}(dy)\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^{n-k}(dz), \quad u \in G$$

függvényre az $e \in G$ pontban. Legyen $g_{y,z}(u) := \varphi(yuz) = \Psi(a^{-1}yuz)$ ha $y, u, z \in G$. Először megmutatjuk, hogy $f \in \mathcal{C}^3(G)$, és

$$(4.1.43) \quad X^I f(u) = \iint X^I g_{y,z}(u)\delta_{1/\sqrt{n}}\nu^{k-1}(dy)\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^{n-k}(dz)$$

ha $u \in G$, és $I \in \mathbb{Z}_+^d$ olyan, hogy $d(I) \leq 3$. Mivel az $(y, u, z) \rightarrow \zeta_k(yuz)$ leképezés egy olyan homogén polinom $G \times G \times G$ -n, melynek homogén foka d_k , így

$$\zeta_k(a^{-1}yuz) = \sum_{d(I)+d(J)+d(K)=d_k} c_{IJK}^k \zeta^I(a^{-1}y)\zeta^J(u)\zeta^K(z)$$

valamilyen c_{IJK}^k konstansokkal. Ezért

$$(4.1.44) \quad \partial^J g_{y,z}(u) = \sum_{|K| \leq |J|, d(K) \geq d(J)} P_{JK}(a^{-1}y, u, z) \partial^K \Psi(a^{-1}yuz),$$

ahol P_{JK} olyan homogén polinom $G \times G \times G$ -n, melynek homogén foka $d(K) - d(J)$. Továbbá

$$(4.1.45) \quad X^I g_{y,z}(u) = \sum_{|J| \leq |I|, d(J) \geq d(I)} Q_{IJ}(u) \partial^J g_{y,z}(u),$$

ahol Q_{IJ} olyan homogén polinom G -n, melynek homogén foka $d(J) - d(I)$.

Tekintsük most azt az esetet, amikor $g_{y,z}(u) = \varphi_2(yuz) = \Psi_2(a^{-1}yuz)$. A $g_{y,z}(u) = \varphi_1(yuz) = \Psi_1(a^{-1}yuz)$ eset hasonlóan kezelhető. A (4.1.36) feltétel szerint

$$\Psi_2(a^{-1}yuz) = 0$$

ha $|a^{-1}yuz| > r + \varepsilon$. Ha $|a^{-1}yuz| \leq r + \varepsilon$, akkor

$$(4.1.46) \quad |z| \leq c(|u^{-1}y^{-1}a| + |a^{-1}yuz|) \leq c(|u| + |a^{-1}y| + r + \varepsilon).$$

Ha $K \in \mathbb{Z}_+^d$ olyan, hogy $|K| \leq |I| \leq d(I) \leq 3$, akkor $d(K) \leq 3s$, és a (4.1.37) feltétel szerint

$$(4.1.47) \quad |\partial^K \Psi_2(a^{-1}yuz)| \leq c_K \varepsilon^{-|K|} (r + \varepsilon)^{|K| - d(K)}.$$

A (4.1.44)–(4.1.47) összefüggések és a 4.1.2 Tétel alapján tetszőleges $R > 0$ esetén ha $u \in G$, $|u| \leq R$, akkor

$$\iint |X^I g_{y,z}(u)| \delta_{1/\sqrt{n}} \nu^{k-1}(dy) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k}(dz) \leq c(I, \varepsilon, r, R),$$

amiből már könnyen levezethető (4.1.43).

Jelölje $P_e^{(2)}$ az f függvény $e \in G$ pontbeli homogén másodfokú jobboldali Taylor-polinomját. A momentumfeltételek miatt megint

$$\int P_e^{(2)}(x) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(dx) = 0.$$

Ezért

$$\int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx) = I_0 - I_1 - I_2 + I_3,$$

ahol

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{|u|>1} (f(u) - f(e)) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du) \\ I_1 &= \sum_{d_i=1,2} X_i f(e) \int_{|u|>1} \zeta_i(u) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du) \\ I_2 &= \sum_{d_i=d_j=1} X_i X_j f(e) \int_{|u|>1} \zeta_i(u) \zeta_j(u) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du) \\ I_3 &= \int_{|u|\leq 1} (f(u) - P_e^{(2)}(u)) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du). \end{aligned}$$

A $|\varphi(yuz) - \varphi(yz)| \leq 1$, $y, u, z \in G$ triviális becsléssel $|f(u) - f(e)| \leq 1$ ha $u \in G$, így

$$|I_0| \leq |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)|(\{u \in G : |u| > 1\}) \leq c\beta_3 n^{-3/2}.$$

Most az

$$X^I g_{y,z}(e) = \partial^I g_{y,z}(e)$$

menyiséget becsüljük meg. Megint elég a $g_{y,z}(u) = \varphi_2(yuz) = \Psi_2(a^{-1}yuz)$ esettel foglalkozni. Nyilván

$$\partial^K \Psi_2(a^{-1}yz) = 0$$

ha $|a^{-1}yz| \leq r$ vagy $|a^{-1}yz| \geq r + \varepsilon$, azaz, ha $z \notin B(y^{-1}a, r + \varepsilon) \setminus B(y^{-1}a, r)$. Ezért

$$\delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k}(\{z \in G : \partial^I g_{y,z}(e) \neq 0\}) \leq \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k}(B(y^{-1}a, r + \varepsilon) \setminus B(y^{-1}a, r)).$$

Felhasználva, hogy most $\varepsilon < r/2$, $k < [n/2]$, és alkalmazva a (4.1.40) indukciós feltevést $n - k$ -ra, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &|\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^{n-k} - \nu^{n-k})(B(y^{-1}a, r + \varepsilon))| \\ &= |\delta_{1/\sqrt{n-k}}(\mu^{n-k} - \nu^{n-k})(\delta_{\sqrt{n/(n-k)}}(B(y^{-1}a, r + \varepsilon)))| \\ &\leq C\kappa\left(\delta_{\sqrt{n/(n-k)}}(y^{-1}a), (r + \varepsilon)\sqrt{n/(n-k)}\right)(\beta_3 + \beta_{3s})(n-k)^{-1/2} \\ &\leq cC(1 + |a| + |y|)^{s-1}(1 + (1 + |a| + |y|)/r)^{3(s-1)}(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan ugyanilyen becslést kapunk a $|\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^{n-k} - \nu^{n-k})(B(y^{-1}a, r))|$ mennyiségre is. A (4.1.35) feltétel alapján

$$\nu \left(\delta_{\sqrt{n/(n-k)}} (B(y^{-1}a, r + \varepsilon) \setminus B(y^{-1}a, r)) \right) \leq c\varepsilon(1 + |a| + |y|)^{s-1}.$$

Ezért rögzített $a, y \in G$ esetén

$$\begin{aligned} & \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k} (\{z \in G : X^I g_{yz}(e) \neq 0\}) \\ & \leq c(1 + |a| + |y|)^{s-1} (\varepsilon + C(1 + (1 + |a| + |y|)/r)^{3(s-1)} (\beta_3 + \beta_{3s}) n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Ha $z \in B(y^{-1}a, r + \varepsilon) \setminus B(y^{-1}a, r)$, akkor $|z| \leq c(|a^{-1}y| + r + \varepsilon)$, ezért (4.1.44) és (4.1.47) alapján

$$\begin{aligned} |X^I g_{y,z}(e)| &= |\partial^I g_{y,z}(e)| \\ &\leq c(I) \sum_{|K| \leq |I|, d(K) \geq d(I)} (1 + |a^{-1}y|^{d(K)-d(I)} + (r + \varepsilon)^{d(K)-d(I)}) \varepsilon^{-|K|} (r + \varepsilon)^{|K|-d(K)}. \end{aligned}$$

Nyilván $\varepsilon^{-|K|} (r + \varepsilon)^{|K|-d(K)} \leq \varepsilon^{-d(I)} (r + \varepsilon)^{d(I)-d(K)}$, mivel $|K| - d(I) \leq |K| - |I| \leq 0$. A 4.1.3 Következmény és a fenti becslések alapján

$$\begin{aligned} |X^I f(e)| &\leq \iint |X^I g_{y,z}(e)| \delta_{1/\sqrt{n}} \nu^{k-1}(dy) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k}(dz) \\ &\leq c(I)(1 + |a|)^{s-1} (\varepsilon + C(1 + (1 + |a|)/r)^{3(s-1)} (\beta_3 + \beta_{3s}) n^{-1/2}) \varepsilon^{-d(I)} \\ &\quad \times \sum_{|K| \leq |I|, d(K) \geq d(I)} (1 + |a| + r + \varepsilon)^{d(K)-d(I)} (r + \varepsilon)^{d(I)-d(K)} \\ &\leq c(I) \varepsilon^{-d(I)} (1 + (1 + |a|)/r)^{(s-1)d(I)} (S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}), \end{aligned}$$

hiszen $|K| \leq |I|$ miatt $d(K) \leq s|K| \leq s|I| \leq sd(I)$. Ha $I \in \mathbb{Z}_+^d$ olyan, hogy $d(I) \leq 3$, akkor

$$\begin{aligned} (4.1.48) \quad & \int_{|u|>1} |\zeta^I(u)| |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)|(du) \leq \int_{|u|>1} |u|^{d(I)} |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)|(du) \\ & \leq \int |u|^3 |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)|(du) \leq c\beta_3 n^{-3/2}. \end{aligned}$$

Összegyűjtve a fenti becsléseket, azt kapjuk, hogy $I \in \mathbb{Z}_+^d$, $d(I) \leq 3$ esetén

$$\begin{aligned} & \left| X^I f(e) \int_{|u|>1} \zeta^I(u) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du) \right| \\ & \leq c(I) \varepsilon^{-d(I)} (1 + (1 + |a|)/r)^{(s-1)d(I)} (S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}) \beta_3 n^{-3/2}. \end{aligned}$$

Tehát $\varepsilon < 1$ miatt

$$|I_i| \leq c\varepsilon^{-3} (1 + (1 + |a|)/r)^{3(s-1)} (S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}) \beta_3 n^{-3/2}$$

ha $i = 1, 2$. A lépcsős Taylor-egyenlőtlenségből

$$|f(u) - P_e^{(2)}(u)| \leq c|u|^3 \sup \{|X^I f(x)| : d(I) = 3, |x| \leq b^3|u|\}$$

ha $u \in G$. Felhasználva, hogy $\varepsilon < \min\{1, r/2\}$, belátható mint az előbb, hogy ha $a, y, u \in G$ és $|u| \leq 1$, akkor

$$\begin{aligned} & \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k} (\{z \in G : X^I g_{yz}(u) \neq 0\}) \\ & \leq \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^{n-k} (B(u^{-1}y^{-1}a, r + \varepsilon) \setminus B(u^{-1}y^{-1}a, r)) \\ & \leq c(1 + |a| + |y| + |u|)^{s-1} \left(\varepsilon + C(1 + (1 + |a| + |y| + |u|)/r)^{3(s-1)} (\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2} \right) \\ & \leq c(1 + |a| + |y|)^{s-1} \left(\varepsilon + C(1 + (1 + |a| + |y|)/r)^{3(s-1)} (\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2} \right). \end{aligned}$$

Ezért (4.1.44)–(4.1.47) alapján megmutatható, hogy

$$|I_3| \leq c\varepsilon^{-3}(1 + (1 + |a|)/r)^{3(s-1)}(S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1})\beta_3 n^{-3/2}.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned} (4.1.49) \quad & \left| \int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx) \right| \leq |I_0| + |I_1| + |I_2| + |I_3| \\ & \leq c\varepsilon^{-3}(1 + (1 + |a|)/r)^{3(s-1)}(S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1})\beta_3 n^{-3/2} + c\beta_3 n^{-3/2} \end{aligned}$$

ha $\varepsilon < \min\{1, r/2\}$ és $1 \leq k \leq [n/2]$.

Most egy másik becslést adunk az $\int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx)$ mennyiségre $\varepsilon < \min\{1, r/2\}$ és $1 \leq k < [n/2]$ esetében. Először megjegyezzük, hogy

$$\int \varphi(x)\gamma_k(dx) = \iint \ell(v)p_t(vu^{-1})\lambda(dv)\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du),$$

ahol $t = (k - 1)/n$ és $\ell(v) = \int \varphi(vz)\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^{n-k} - \nu^{n-k})(dz)$, $v \in G$. Most a Taylor-egyenlőtlenséget az $f(u) := \int \ell(v)p_t(vu^{-1})\lambda(dv)$, $u \in G$ függvényre használjuk az $e \in G$ pontban. Jelölje $P_e^{(2)}$ az f függvény $e \in G$ pontbeli homogén másodfokú jobboldali Taylor-polinomját. Megint

$$\int \varphi(x)\gamma_k(dx) = I_0 - I_1 - I_2 + I_3,$$

ahol

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{|u|>1} (f(u) - f(e))\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du) \\ I_1 &= \sum_{d_i=1,2} X_i f(e) \int_{|u|>1} \zeta_i(u)\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du) \\ I_2 &= \sum_{d_i=d_j=1} X_i X_j f(e) \int_{|u|>1} \zeta_i(u)\zeta_j(u)\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du) \\ I_3 &= \int_{|u|\leq 1} (f(u) - P_e^{(2)}(u))\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du). \end{aligned}$$

Nyilván $|\varphi| \leq 1$ miatt $|\ell| \leq 1$ és $|f| \leq 1$, ezért

$$|I_0| \leq 2 \int_{|u|>1} |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)|(du) \leq c\beta_3 n^{-3/2}.$$

Legyen $g_{v,t}(u) := p_t(vu^{-1})$ ha $u, v \in G$ és $t > 0$. Ekkor

$$X^I f(u) = \int \ell(v) X^I g_{v,t}(u) \lambda(dv)$$

minden $u \in G$, $I \in \mathbb{Z}_+^d$ esetén.

Először becslést adunk az

$$X^I f(e) = \int \ell(v) \partial^I g_{v,t}(e) \lambda(dv).$$

mennyiségre. Most

$$(4.1.50) \quad \partial^I g_{v,t}(e) = \sum_{|J| \leq |I|, d(J) \geq d(I)} P_{IJ}(v) \partial^J p_t(v),$$

ahol P_{IJ} olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(J) - d(I)$. Használva az $|\ell| \leq 1$ becslést és a 4.1.3 Következmenyt,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|v|>1} \ell(v) \partial^I g_{v,t}(e) \lambda(dv) \right| \\ & \leq c_I \sum_{|J| \leq |I|, d(J) \geq d(I)} \int_{|v|>1} |v|^{d(J)-d(I)} |\partial^J p_t(v)| \lambda(dv) \\ & \leq c_I. \end{aligned}$$

Ha $|v| \leq 1$, akkor alkalmazva a (4.1.40) indukciós feltevést $n - k$ esetén és az $\varepsilon < \min\{1, r/2\}$ egyenlőtlenséget,

$$(4.1.51) \quad |\ell(v)| \leq c(S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}).$$

Ezért a 4.1.3 Következmeny és (4.1.50) alapján

$$\left| \int_{|v| \leq 1} \ell(v) \partial^I g_{v,t}(e) \lambda(dv) \right| \leq c_I (S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}) t^{-d(I)/2}.$$

Következésképpen (4.1.48) segítségével $I \in \mathbb{Z}_+^d$, $d(I) \leq 3$ esetén

$$\begin{aligned} & \left| X^I f(e) \int_{|u|>1} \zeta^I(u) \delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)(du) \right| \\ & \leq c\beta_3 n^{-3/2} + c\beta_3 (k-1)^{-3/2} (S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}). \end{aligned}$$

Tehát

$$|I_i| \leq c\beta_3 (k-1)^{-3/2} (S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}) + c\beta_3 n^{-3/2}$$

ha $i = 1, 2$. A homogén Taylor-egyenlőtlenségből

$$(4.1.52) \quad |f(u) - P_e^{(2)}(u)| \leq c|u|^3 \sup \{|X^I f(x)| : d(I) = 3, |x| \leq b^3|u|\}$$

ha $u \in G$. Megint $|\ell| \leq 1$ és a 4.1.3 Következmény alapján azt kapjuk, hogy ha $u \in G$, $|u| \leq 1$ és $x \in G$, $|x| \leq b^3|u|$, valamint a $c > 0$ konstans elég nagy, akkor

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|v|>c} \ell(v) X^I g_{v,t}(x) \lambda(dv) \right| \\ & \leq c_I \sum_{\substack{|K| \leq |J| \leq |I| \\ d(K) \geq d(J) \geq d(I)}} \int_{|v|>c} (1 + |v|^{d(K)-d(J)}) |\partial^K p_t(vx^{-1})| \lambda(dv) \\ & \leq c_I \sum_{\substack{|K| \leq |J| \leq |I| \\ d(K) \geq d(J) \geq d(I)}} \int_{|wx|>c} (1 + |w|^{d(K)-d(J)}) |\partial^K p_t(w)| \lambda(dw) \\ & \leq c_I, \end{aligned}$$

mivel $|x| \leq b^3$ miatt $|wx| \leq c_0(|w| + |x|) \leq c_0(|w| + b^3)$, így $|wx| > c$ esetén $|w| \geq c_0^{-1}|wx| - b^3 > c_0^{-1}c - b^3 \geq 1$ teljesül, ha c elég nagy. Továbbá $|v| \leq c$ esetén is érvényes a (4.1.51) becslés, ezért a 4.1.3 Következmény alapján $u \in G$, $|u| \leq 1$ és $x \in G$, $|x| \leq b^3|u|$ esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|v| \leq c} \ell(v) X^I g_{v,t}(x) \lambda(dv) \right| \\ & \leq c_I(S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}) \sum_{\substack{|K| \leq |J| \leq |I| \\ d(K) \geq d(J) \geq d(I)}} ((1 + |x|^{d(K)-d(I)})t^{-d(K)/2} + (1 + |x|^{d(J)-d(I)})t^{-d(J)/2}), \end{aligned}$$

mint a 4.1.17 Tétel bizonyításában. Ezért (4.1.48) és (4.1.52) segítségével

$$\begin{aligned} |I_3| & \leq \int_{|u| \leq 1} |f(u) - P_e^{(2)}(u)| |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)|(du) \\ & \leq c\beta_3 n^{-3/2} + c(S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1}) \sum_{j=0}^{3(s-1)} \beta_{3+j} (k-1)^{-(3+j)/2}. \end{aligned}$$

Összegyűjtve a becsléseket

$$(4.1.53) \quad \left| \int \varphi(x) \gamma_k(dx) \right| \leq c(S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1})(\beta_3 + \beta_{3s})(k-1)^{-3/2} + c\beta_3 n^{-3/2}.$$

Újra mint a 4.1.17 Tétel bizonyításában (felhasználva, hogy $|\ell| \leq 1$)

$$(4.1.54) \quad \left| \int \varphi(x) \tilde{\gamma}_k(dx) \right| \leq c \sum_{j=0}^{3s-3} \beta_{3+j} n^{-(3+j)/2} \leq c(\beta_3 + \beta_{3s}) n^{-3/2}$$

ha $1 \leq k \leq n$. Ugyanez a becslés érvényes az $\int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx)$ mennyiségre is, ha $[n/2] < k \leq n$.

Legyen most $m \in \{1, 2, \dots, [n/2]\}$, melyet később specifikálunk. Ha $k = 1, 2, \dots, m$, akkor a (4.1.49) becslést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left| \int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx) \right| \\ & \leq c(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2} + c\varepsilon^{-3} (1 + (1 + |a|)/r)^{3(s-1)} (S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1})(\beta_3 + \beta_{3s})mn^{-3/2}. \end{aligned}$$

Ha $k = m + 1, \dots, [n/2]$, akkor a (4.1.53) becslést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m+1}^{[n/2]} \left| \int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx) \right| \\ & \leq c(S_n + \varepsilon(1 + |a|)^{s-1})(\beta_3 + \beta_{3s})m^{-1/2} + c(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Ha $k = [n/2] + 1, \dots, n$, akkor (4.1.54) alapján:

$$\sum_{k=[n/2]+1}^n \left| \int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx) \right| \leq c(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2}.$$

Legyen $K > 0$ egy elegendően nagy konstans (melyet szintén később specifikálunk), és legyen

$$\varepsilon := K(1 + (1 + |a|)/r)^{s-1}(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2}.$$

Felhasználva a (4.1.42) egyenlőtlenséget és összegyűjtve a megfelelő becsléseket

$$\begin{aligned} & |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \\ & c((K^{-1} + C^{-1})(K^{-2}(\beta_3 + \beta_{3s})^{-2}m + K(\beta_3 + \beta_{3s})m^{-1/2}) + C^{-1}(K + 1)) S_n. \end{aligned}$$

A 4.1.17 Tételből következik, hogy $\beta_3 + \beta_{3s} \leq C_1$ esetén

$$(4.1.55) \quad |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq C_2(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2} \leq C_2C^{-1}S_n$$

amennyiben $n \geq 4$. Ha $C_1 \leq (\beta_3 + \beta_{3s}) < K^{-1}$, akkor választhatjuk az $m = 1$ értéket, és ekkor

$$(4.1.56) \quad |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq c((K^{-1} + C^{-1})(K^{-2}C_1^{-2} + 1) + C^{-1}(K + 1)) S_n.$$

Ha $\beta_3 + \beta_{3s} > K^{-1}[n/2]^{1/2}$, akkor választhatjuk az $m = n$ értéket, és

$$(4.1.57) \quad |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq c(K^{-1} + C^{-1}(K + 2)) S_n.$$

Ha $K^{-1} < \beta_3 + \beta_{3s} \leq K^{-1}[n/2]^{1/2}$, akkor létezik olyan $m \in \{1, 2, \dots, [n/2]\}$, melyre

$$m - 1 < K^2(\beta_3 + \beta_{3s})^2 \leq m,$$

és így

$$(4.1.58) \quad |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq c(3K^{-1} + C^{-1}(K + 4)) S_n.$$

Ha $\varepsilon = K(1 + (1 + |a|)/r)^{s-1}(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2} \geq r/2$, akkor az $\int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx)$ integrálra egy új becslés kell. Használjuk a (4.1.42) egyenlőtlenséget $\varepsilon = 1$ esetén:

$$|\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq \max_{i=1,2} \left| \int \varphi_i(x)(\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^n - \nu)(dx) \right| + c(1 + |a|)^{s-1},$$

(megjegyezve, hogy most Ψ_i definíciójában $\varepsilon = 1$). Használva megint a Taylor–egyenlőtlenséget az

$$f(u) := \iint \varphi(yuz)\delta_{1/\sqrt{n}}\nu^{k-1}(dy)\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^{n-k}(dz), \quad u \in G$$

függvényre az $e \in G$ pontban,

$$\left| \int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx) \right| \leq \int |f(u) - P_e^{(2)}(u)| |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu - \nu)|(du),$$

ahol $P_e^{(2)}$ az f függvény $e \in G$ pontbeli homogén, másodrendű jobboldali Taylor–polinomját jelöli. Ebből

$$\left| \int \varphi(x)(\gamma_k + \tilde{\gamma}_k)(dx) \right| \leq c(1 + (1 + |a|)/r)^{3(s-1)}(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-3/2}.$$

Ezért $1 < 2r^{-1}\varepsilon = 2r^{-1}K(1 + (1 + |a|)/r)^{s-1}(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2}$ miatt

$$(4.1.59) \quad |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq cC^{-1}(K + 1)S_n.$$

Ha $\varepsilon = K(1 + (1 + |a|)/r)^{s-1}(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2} \geq 1$, akkor

$$(4.1.60) \quad |\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B) - \nu(B)| \leq 1 \leq K(1 + (1 + |a|)/r)^{s-1}(\beta_3 + \beta_{3s})n^{-1/2} \leq C^{-1}KS_n.$$

Így (4.1.55)–(4.1.60) alapján $|\delta_{1/\sqrt{n}}(\mu^n)(B(a, r)) - \nu(B(a, r))| \leq S_n$ teljesül, ha először rögzítünk egy elegendően nagy $K > 0$ számot, azután pedig választunk egy megfelelően nagy $C > 0$ konstanst. Ezzel a teljes indukció készen van. \square

4.1.61 Következmény. A 4.1.34 Tétel állítása érvényes marad, ha (4.1.38)-ben a $\beta_3(\mu, \nu) + \beta_{3s}(\mu, \nu)$ mennyiséget helyettesítjük $m_3(\mu) + m_{3s}(\mu)$ -vel.

4.2 Berry–Esseen–egyenlőtlenség sima függvények integráljaira

Ebben a paragrafusban rögzítünk egy tetszőleges $|\cdot|$ homogén normát. A következő lemma egy alapvető megfigyelést tartalmaz. A $G = (\mathbb{R}, +)$ csoport esetén triviális módon $\partial_y f(x + y + z) = f'(x + y + z)$, ezért $|\partial_y f(x + y + z)| \leq \|f'\|$ minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén. Viszont ennek az analógja már nem érvényes nem kommutatív Lie–csoportokban. Mégis lehet adni az $|Yf(xyz)|$ mennyiségekre (ahol $Y \in \mathfrak{L}(G)$ az y változóra vonatkozó differenciál–operátor) olyan polinomiális becslést, mely z -ben egyenletes.

4.2.1 Lemma. Legyen $I \in \mathbb{Z}_+^d$, $f \in \mathfrak{C}_{sd(I)}^{hom}(G)$, $x, z \in G$. Tekintsük a $g_{x,z} : G \rightarrow \mathbb{R}$, $g_{x,z}(y) := f(xyz)$, $y \in G$ függvényt. Ekkor

$$\tilde{S}^I g_{x,z}(y) = \sum_{d(K) \geq d(I), |K| \leq |I|} P_K^I(xy) X^K f(xyz),$$

ahol P_K^I olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(K) - d(I)$, és

$$|\tilde{X}^I g_{x,z}(y)| \leq c(G) (1 + |x|^{(s-1)d(I)} + |y|^{(s-1)d(I)}) |f|_{sd(I), hom}.$$

Továbbá, ha $J \in \mathbb{Z}_+^d$, $f \in \mathfrak{C}_{s(d(I)+d(J))}^{hom}(G)$, $u, w \in G$, akkor a $h_{x,u,w} : G \rightarrow \mathbb{R}$, $h_{x,u,w}(y) := \tilde{S}^I g_{x,uvw}(y)$, $v \in G$ függvény esetén

$$|\tilde{X}^J h_{x,u,w}(v)| \leq c(G) (1 + |xuv|^{(s-1)(d(I)+d(J))}) |f|_{s(d(I)+d(J)), hom}.$$

Bizonyítás. Bevezetve az $F_z : G \rightarrow \mathbb{R}$, $F_z(y) := f(yz)$ függvényt, és használva az $\tilde{y} := xy$ jelölést,

$$\begin{aligned} \tilde{X}^I g_{x,z}(y) &= \tilde{X}^I F_z(\tilde{y}) = \sum_{d(K) \geq d(I), |K| \leq |I|} P_{IK}(\tilde{y}) X^K F_z(\tilde{y}) \\ &= \sum_{d(K) \geq d(I), |K| \leq |I|} P_{IK}(xy) X^K f(xyz), \end{aligned}$$

ahol P_{IK} olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(K) - d(I)$. Kombinálva ezt a (2.4.9) bal-invariáns változatával, megkapjuk az első állítást. Nyilván $|K| \leq |I|$ esetén $d(K) \leq s|K| \leq s|I| \leq sd(I)$, ezért

$$\begin{aligned} |\tilde{X}^I g_{x,z}(y)| &\leq c(G) \sum_{d(K) \geq d(I), |K| \leq |I|} |xy|^{d(K)-d(I)} |f|_{d(K), hom} \\ &\leq c(G) (1 + |xy|^{(s-1)d(I)}) |f|_{sd(I), hom} \\ &\leq c(G) (1 + |x|^{(s-1)d(I)} + |y|^{(s-1)d(I)}) |f|_{sd(I), hom}. \end{aligned}$$

Az utolsó állítás hasonlóan bizonyítható. □

Vezessük be a következő csonkított momentumokat:

$$\begin{aligned} \Lambda_\beta(\mu) &:= n^{(2-\beta)/2} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} |x|^\beta \mu(dx), \\ L_\beta(\mu) &:= n^{(2-\beta)/2} \int_{|x| < \sqrt{n}} |x|^\beta \mu(dx). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy

$$(4.2.2) \quad \int_{|x| \geq 1} |x|^\beta \delta_{1/\sqrt{n}} \mu(dx) = n^{-1} \Lambda_\beta(\mu), \quad \int_{|x| < 1} |x|^\beta \delta_{1/\sqrt{n}} \mu(dx) = n^{-1} L_\beta(\mu),$$

valamint ha $m_{k+2}(\mu) < \infty$ és $\beta \leq k+2$, akkor

$$(4.2.3) \quad \Lambda_\beta(\mu) \leq n^{-k/2} m_{k+2}(\mu), \quad L_\beta(\mu) \leq n^{-(\beta-2)/2} m_\beta(\mu).$$

Továbbá legyen

$$a(\mu) := \sum_{d_i=1} \int \zeta_i(x)^2 \mu(dx) + \sum_{d_i=2} \left| \int \zeta_i(x) \mu(dx) \right|.$$

4.2.4 Lemma. *Legyen ν az a Gauss-mérték G -n, melynek infinitézimális generátora (2.4.16). Legyen $\beta \geq 2$. Ekkor létezik olyan $C(G, \beta) > 0$ konstans, hogy*

$$m_\beta(\nu) \leq C(G, \beta) m_\beta(\mu)$$

teljesül minden olyan centrált $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértékre, melyre $m_2(\mu) < \infty$ és $\nu = \text{Gauss}(\mu)$. A $C(G, \beta)$ konstans választható úgy, hogy a $\beta \mapsto C(G, \beta)$, $[2, \infty)$ -ből $(0, \infty)$ -be képező függvény folytonos legyen.

Bizonyítás. A Hölder-egyenlőtlenséggel

$$m_\beta(\mu) = \int \left(\sum_{i=1}^d |\zeta_i(x)|^{1/d_i} \right)^\beta \mu(dx) \geq \left(\int \left(\sum_{d_i \leq 2} |\zeta_i(x)|^{1/d_i} \right)^2 \mu(dx) \right)^{\beta/2} \geq (a(\nu))^{\beta/2}.$$

Továbbá

$$m_\beta(\nu) = \int \left(\sum_{i=1}^d |\zeta_i(x)|^{1/d_i} \right)^\beta \nu(dx) \leq d^{\beta-1} \sum_{i=1}^d \int |\zeta_i(x)|^{\beta/d_i} \nu(dx).$$

Alkalmazva a 2.4.15 Lemma rekurzív formuláját, azt kapjuk, hogy ha $I \in \mathbb{Z}_+^d$ olyan, hogy $d(I)$ páros, akkor

$$\left| \int \zeta^I(x) \nu(dx) \right| \leq c_1(G, d(I)) \left(\sum_{d(J)=2} \left| \int \zeta^J(x) \nu(dx) \right| \right)^{d(I)/2} \leq c_2(G, d(I)) (a(\nu))^{d(I)/2}.$$

Legyen $i = 1, \dots, d$ esetén $k_i := [\beta/(2d_i)] + 1$. Ekkor

$$\int |\zeta_i(x)|^{\beta/d_i} \nu(dx) \leq \left(\int \zeta_i(x)^{2k_i} \nu(dx) \right)^{\beta/(2k_id_i)} \leq \left(\int \zeta^{I_i}(x) \nu(dx) \right)^{\beta/(2k_id_i)},$$

ahol I_i azt a multiindexet jelöli, melynek i -edik koordinátája $2k_i$, a többi pedig 0, így $d(I_i) = 2k_id_i$ páros, ezért

$$\int |\zeta_i(x)|^{\beta/d_i} \nu(dx) \leq \left(\tilde{c}(G, \beta) (a(\nu))^{k_id_i} \right)^{\beta/(2k_id_i)} \leq c(G, \beta) (a(\nu))^{\beta/2},$$

ahol a $\beta \mapsto C(G, \beta)$, $[2, \infty)$ -ből $(0, \infty)$ -be képező függvény folytonos. \square

4.2.5 Lemma. *Legyen ν az a Gauss-mérték G -n, melynek infinitézimális generátora (2.4.16). Legyen $\gamma \geq \beta \geq 2$. Ekkor létezik olyan $C(G, \beta, \gamma) > 0$ konstans, hogy*

$$\Lambda_\beta(\nu) + L_\gamma(\nu) \leq C(G, \beta, \gamma) (1 + (a(\nu))^{(\gamma-\beta)/2}) (\Lambda_\beta(\mu) + L_\gamma(\mu))$$

teljesül minden olyan centrált $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértékre, melyre $m_2(\mu) < \infty$ és $\nu = \text{Gauss}(\mu)$.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy $\Lambda_\beta(\nu) + L_\gamma(\nu) \leq 2m_\gamma(\nu)n^{(2-\gamma)/2}$, mivel

$$\Lambda_\beta(\nu) \leq n^{(2-\gamma)/2} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} |x|^\gamma \nu(dx) \leq m_\gamma(\nu)n^{(2-\gamma)/2},$$

és $L_\gamma(\nu) \leq m_\gamma(\nu)n^{(2-\gamma)/2}$.

Abban az esetben, amikor $\Lambda_\beta(\mu) \geq n^{(2-\beta)/2}m_\beta(\mu)/2$, azt kapjuk, hogy

$$\Lambda_\beta(\mu) + L_\gamma(\mu) \geq \Lambda_\beta(\mu) \geq \frac{1}{2}n^{(2-\beta)/2}m_\beta(\mu) \geq n^{(2-\gamma)/2} \frac{m_\beta(\nu)}{2c(G, \beta)} \geq \frac{\Lambda_\beta(\nu) + L_\gamma(\nu)}{C_1(G, \nu, \beta, \gamma)},$$

ahol $C(G, \nu, \beta, \gamma) = 4c(G, \beta)m_\gamma(\nu)/m_\beta(\nu)$.

Ha $\Lambda_\beta(\mu) \leq n^{(2-\beta)/2}m_\beta(\mu)/2$, akkor nyilván teljesül $L_\beta(\mu) \geq n^{(2-\beta)/2}m_\beta(\mu)$, ezért

$$\int_{|x| < \sqrt{n}} |x|^\beta \mu(dx) \geq \frac{m_\beta(\mu)}{2} \geq \frac{m_\beta(\nu)}{2c(G, \beta)} > 0.$$

A Hölder–egyenlőtlenséggel

$$\int_{|x| < \sqrt{n}} |x|^\beta \mu(dx) \leq \left(\int_{|x| < \sqrt{n}} |x|^\gamma \mu(dx) \right)^{\beta/\gamma},$$

ezért

$$\Lambda_\beta(\mu) + L_\gamma(\mu) \geq L_\gamma(\mu) \geq n^{(2-\gamma)/2} \left(\frac{m_\beta(\nu)}{2c(G, \beta)} \right)^{\gamma/\beta} \geq \frac{\Lambda_\beta(\nu) + L_\gamma(\nu)}{C_2(G, \nu, \beta, \gamma)},$$

ahol $C_2(G, \nu, \beta, \gamma) := 2m_\gamma(\nu)(c(G, \beta)/m_\beta(\nu))^{\gamma/\beta}$. Mint a 4.2.4 Lemma bizonyításában belátható, hogy

$$m_\beta(\nu) \geq (a(\nu))^{\beta/2}, \quad m_\gamma(\nu) \leq C(G, \gamma)(a(\nu))^{\gamma/2},$$

amivel kész a bizonyítás. \square

Legyen μ olyan centrált valószínűségi mérték G -n, melyre $m_2(\mu) < \infty$. Legyen $\nu := \text{Gauss}(\mu)$ a μ mértékhez rendelt Gauss-mérték. Jelölje

$$\Delta_n(f) := \int f(x)(\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^n - \nu)(dx).$$

4.2.6 Tétel. Ha $m_2(\mu) < \infty$ és $f \in \mathfrak{C}_{3s}^{\text{hom}}(G)$, akkor

$$|\Delta_n(f)| \leq r_1 + r_2 + r_3,$$

ahol

$$\begin{aligned} r_1 &:= \|f\| \Lambda_0(\mu + \nu), \\ r_2 &:= C(G) |f|_{2s, \text{hom}} (1 + m_{2(s-1)}(\nu)) \Lambda_2(\mu + \nu), \\ r_3 &:= C(G) |f|_{3s, \text{hom}} (1 + m_{3(s-1)}(\nu)) L_3(\mu + \nu). \end{aligned}$$

4.2.7 Következmény. Ha $m_2(\mu) < \infty$ és $f \in \mathfrak{C}_{3s}^{hom}(G)$, akkor

$$|\Delta_n(f)| \leq C(G)|f|_{3s,hom}(1 + (a(\nu))^{1/2})(1 + m_{3(s-1)}(\nu))(\Lambda_2(\mu) + L_3(\mu)).$$

Továbbá

$$|\Delta_n(f)| \leq C(G)|f|_{3s,hom}(1 + m_{3(s-1)}(\nu))m_\beta(\mu)n^{(2-\beta)/2}$$

ha $2 \leq \beta \leq 3$. Ha $m_\beta(\mu) < \infty$, akkor $\Delta_n(f) = o(n^{(2-\beta)/2})$ ha $n \rightarrow \infty$, amennyiben $2 \leq \beta < 3$. Az $m_2(\mu) < \infty$ feltételből következik a centrális határeloszlás-tétel a μ mértékre (azaz a 3.1.1 Tétel).

4.2.8 Megjegyzés. Használhatjuk az

$$m_k(\nu) \leq c_k(G) \left(\sum_{d_i=1} \int (\zeta_i(x))^2 \nu(dx) \right)^{k/2} + \sum_{d_i=2} \left| \int \zeta_i(x) \nu(dx) \right|^{k/2}$$

becslést is (lásd a 4.2.4 Lemma bizonyítását).

A 4.2.6 Tétel bizonyítása. Az egyszerűség kedvéért a

$$\tau = n^{-1/2}, \quad \text{for } n = 1, 2, \dots$$

jelölést fogjuk használni, amikor ez nem okozhat félreértést.

Felhasználva a

$$\delta_\tau \mu^n - \nu = (\delta_\tau \mu)^n - (\delta_\tau \nu)^n = \sum_{k=1}^n (\delta_\tau \nu)^{k-1} * (\delta_\tau \mu - \delta_\tau \nu) * (\delta_\tau \mu)^{n-k}$$

dekompozíciót, kapjuk, hogy

$$(4.2.9) \quad \Delta_n(f) = \sum_{k=1}^n \iiint f(xyz) \delta_\tau \nu^{k-1}(dx) \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \delta_\tau \mu^{n-k}(dz).$$

Az integrálási tartományt két részre bontva $\Delta_n(f) = I_1 + I_2$, ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=1}^n \iiint_{|y| \geq 1} f(xyz) \delta_\tau \nu^{k-1}(dx) \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \delta_\tau \mu^{n-k}(dz), \\ I_2 &= \sum_{k=1}^n \iiint_{|y| < 1} f(xyz) \delta_\tau \nu^{k-1}(dx) \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \delta_\tau \mu^{n-k}(dz). \end{aligned}$$

Nyilván $|I_1| \leq \|f\| \Lambda_0(\mu + \nu) = r_1$. Az I_2 becsléséhez a $g_{x,z}(y) = f(xyz)$ függvény e pontbeli baloldali lépcsős Taylor-kifejtését használjuk (rögzített $x, z \in G$ esetén):

$$g_{x,z}(y) = \sum_{d(I) \leq 2} \tilde{S}^I g_{x,z}(e) y^I + R^{g_{x,z}}(y),$$

ahol

$$|R^{g_{x,z}}(y)| \leq c|y|^3 \sup \left\{ |\tilde{X}^I g_{x,z}(u)| : d(I) = 3, |u| \leq b^3|y| \right\}.$$

Mivel $d(I) \leq 2$ esetén

$$(4.2.10) \quad \int y^I \nu(dy) = \int y^I \mu(dy),$$

így

$$\begin{aligned} \left| \int_{|y|<1} y^I \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \right| &= \left| \int_{|y|\geq 1} y^I \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \right| \\ &\leq \int_{|y|\geq 1} |y|^2 \delta_\tau(\mu + \nu)(dy) = n^{-1} \Lambda_2(\mu + \nu), \end{aligned}$$

és a 4.2.1 Lemma alapján

$$|\tilde{S}^I g_{x,z}(e)| \leq c(G) (1 + |x|^{d(I)(s-1)}) |f|_{sd(I),\text{hom}} \leq c(G) (1 + |x|^{2(s-1)}) |f|_{2s,\text{hom}},$$

ezért

$$(4.2.11) \quad \left| \int_{|y|<1} \tilde{S}^I g_{x,z}(e) y^I \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \right| \leq n^{-1} c(G) |f|_{2s,\text{hom}} (1 + |x|^{2(s-1)}) \Lambda_2(\mu + \nu).$$

Újra a 4.2.1 Lemma alapján

$$|R^{g_{x,z}}(y)| \leq c|y|^3 (1 + |x|^{3(s-1)} + |y|^{3(s-1)}) |f|_{3s,\text{hom}},$$

így

$$\left| \int_{|y|<1} R^{g_{x,z}}(y) \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \right| \leq n^{-1} c(G) |f|_{3s,\text{hom}} (1 + |x|^{3(s-1)}) L_3(\mu + \nu).$$

Összegezve a becsléseket, kapjuk, hogy $|I_2| \leq r_2 + r_3$. □

4.3 Rövid Edgeworth–sorfejtés

Legyen megint μ olyan centrált valószínűségi mérték G -n, melyre $m_2(\mu) < \infty$, legyen $\nu := \text{Gauss}(\mu)$ a μ mértékhez rendelt Gauss-mérték, és legyen $(\nu_t)_{t \geq 0}$ az a Gauss-félcsoport, melyre $\nu_1 = \nu$.

4.3.1 Tétel. Ha $m_2(\mu) < \infty$ és $f \in \mathfrak{C}_{6s}^{\text{hom}}(G)$, akkor

$$(4.3.2) \quad \int f(x) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^n(dx) = \int f(x) \nu(dx) + \alpha_n n^{-1/2} + R_n,$$

ahol $\alpha_n = \alpha_n(G, f, \mu)$ és $R_n = R_n(G, f, \mu)$ csak G , f , μ és n függvénye. Továbbá

$$\alpha_n = \sum_{d(I)=3} \int_0^1 \iiint \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \nu_t(dx) \nu_{1-t}(dz) dt \int_{|y|<\sqrt{n}} y^I (\mu - \nu)(dy),$$

ahol $g_{x,z} : G \rightarrow \mathbb{R}$, $g_{x,z}(y) := f(xyz)$, $y \in G$, és $|R_n| \leq \sum_{i=1}^7 r_i$, ahol

$$\begin{aligned} r_1 &:= \|f\| \Lambda_0(\mu + \nu), \\ r_2 &:= C(G) |f|_{2s, \text{hom}}(1 + m_{2(s-1)}(\nu)) \Lambda_2(\mu + \nu), \\ r_3 &:= C(G) |f|_{3s, \text{hom}}(1 + m_{3(s-1)}(\nu)) \Lambda_0(\mu + \nu) L_3(\mu + \nu), \\ r_4 &:= C(G) |f|_{4s, \text{hom}}(1 + m_{4(s-1)}(\nu)) L_4(\mu + \nu), \\ r_5 &:= C(G) |f|_{5s, \text{hom}}(1 + m_{5(s-1)}(\nu)) \Lambda_2(\mu + \nu) L_3(\mu + \nu), \\ r_6 &:= C(G) |f|_{6s, \text{hom}}(1 + m_{6(s-1)}(\nu)) (L_3(\mu + \nu))^2, \\ r_7 &:= C(G) |f|_{5s, \text{hom}}(1 + m_{5(s-1)}(\nu)) L_3(\mu + \nu) n^{-1}. \end{aligned}$$

4.3.3 Következmény. Az α_n együtthatók (4.3.2)-ben becsülhetők a következő módon:

$$|\alpha_n| \leq C(G) |f|_{3s, \text{hom}}(1 + m_{3(s-1)}(\nu)) L_3(\mu + \nu) n^{1/2}$$

és

$$|\alpha_n - \alpha| \leq C(G) |f|_{3s, \text{hom}}(1 + m_{3(s-1)}(\nu)) \Lambda_3(\mu + \nu) n^{1/2},$$

ahol $\alpha = \alpha(G, f, \mu)$ csak G , f és μ függvénye:

$$\alpha = \sum_{d(I)=3} \int_0^1 \iiint \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \nu_t(dx) \nu_{1-t}(dz) dt \int y^I (\mu - \nu)(dy).$$

Ha $m_\beta(\mu) < \infty$ valamely $3 \leq \beta \leq 4$ esetén, akkor

$$(4.3.4) \quad \int f(x) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^n(dx) = \int f(x) \nu(dx) + \alpha n^{-1/2} + \tilde{R}_n,$$

ahol $\tilde{R}_n = \tilde{R}_n(G, f, \mu)$ csak G , f , μ és n függvénye. Továbbá

$$|\tilde{R}_n| \leq C(G) |f|_{6s, \text{hom}}(1 + m_{6(s-1)}(\nu)) (m_\beta(\mu) + n^{(\beta-4)/2} (m_3(\mu))^2 + n^{(\beta-5)/2} m_3(\mu)) n^{(2-\beta)/2}.$$

Ha $m_\beta(\mu) < \infty$ valamely $3 \leq \beta < 4$ esetén, akkor $\Delta_n(f) - \alpha n^{-1/2} = o(n^{(2-\beta)/2})$ ha $n \rightarrow \infty$.

4.3.5 Megjegyzés. Megemlítjük, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{S}^I g_{x,z}(e) &= S^I g_{x,z}(e) \\ &= \frac{1}{|I|} \sum_{[j_1] + \dots + [j_{|I|}] = I} \frac{d^{|I|}}{dt_1 \dots dt_{|I|}} f \left(x(\exp t_1 X_{j_1}) \dots (\exp t_{|I|} X_{j_{|I|}}) z \right) \Big|_{t_1=0, \dots, t_{|I|}=0}, \end{aligned}$$

tehát az α_n és α tagok a (4.3.2), illetve (4.3.4) Edgeworth-kifejtésben függetlenek a G csoporton választott konkrét kalkulustól. Alkalmazva a 4.2.1 Lemmát, és kifejezve az X^J differenciál-operátorokat ∂^J segítségével, a fenti kifejezés írható a következő alakban is:

$$\tilde{S}^I g_{x,z}(e) = \sum_{d(J) \geq d(I), |J| \leq |I|} P_J^I(x, z) \partial^J f(xz),$$

ahol P_J^I olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(J) - d(I)$.

4.3.6 Megjegyzés. Fogalmazzuk meg az eredményt a valószínűségi változók nyelvén is. Legyenek ξ, ξ_1, ξ_2, \dots független, azonos eloszlású valószínűségi változók a G csoportban közös μ eloszlással. Jelölje $(\eta_t)_{t \geq 0}$ azt a Wiener-folyamatot G -ben, melynek infinitézimális generátora (2.4.16), ahol $a_i := \mathbb{E}\zeta_i(\xi)$, $b_{ij} := \text{Cov}(\zeta_i(\xi), \zeta_j(\xi))$. Arra az esetre szorítkozunk, amikor $\mathbb{E}|\xi|^4 < \infty$. Ekkor tetszőleges $f \in \mathfrak{C}_{6s}^{\text{hom}}(G)$ esetén

$$\mathbb{E}f(\delta_{1/\sqrt{n}}(\xi_1 \cdots \xi_n)) = \mathbb{E}f(\eta_1) + \alpha n^{-1/2} + \tilde{R}_n,$$

ahol

$$\alpha = \sum_{d(I)=3} \sum_{d(J) \geq 3, |J| \leq |I|} \mathbb{E}P_J^I(\eta_U, \eta_U^{-1}\eta_1) \partial^J f(\eta_1) \mathbb{E}\xi^I,$$

U egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon, mely független az $(\eta_t)_{t \geq 0}$ Wiener-folyamattól, és

$$|\tilde{R}_n| \leq C(G)|f|_{6s, \text{hom}}(1 + a(\eta_1)^{3(s-1)}) (\mathbb{E}|\xi|^4 + (\mathbb{E}|\xi|^3)^2 + n^{-1/2}\mathbb{E}|\xi|^3) n^{-1}.$$

A 4.3.1 Tétel bizonyítása. Megint a (4.2.9) dekompozíciót és az integrálási tartomány két részre bontásából adódó $\Delta_n(f) = I_1 + I_2$ felbontást használjuk. Nyilván $|I_1| \leq \|f\| \Lambda_0(\mu + \nu) = r_1$.

Most az I_2 becsléséhez a $g_{x,z}(y) = f(xyz)$ függvény e pontbeli baloldali lépcsős Taylor-kifejtését a homogén harmadfokú tagig használjuk:

$$g_{x,z}(y) = \sum_{d(I) \leq 3} \tilde{S}^I g_{x,z}(e) y^I + R^{g_{x,z}}(y),$$

ahol

$$|R^{g_{x,z}}(y)| \leq c|y|^4 \sup \left\{ |\tilde{X}^I g_{x,z}(u)| : d(I) = 4, |u| \leq b^4|y| \right\}.$$

Ha $d(I) \leq 2$, akkor megint fennáll (4.2.11). A 4.2.1 Lemmával

$$\left| \int_{|y| < 1} R^{g_{x,z}}(y) \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \right| \leq n^{-1} c(G) |f|_{4s, \text{hom}} (1 + |x|^{4(s-1)}) L_4(\mu + \nu).$$

Ezért $I_2 = A + r$, ahol

$$A = \sum_{k=1}^n \sum_{d(I)=3} \iint \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \delta_\tau \nu^{k-1}(dx) \delta_\tau \mu^{n-k}(dz) \int_{|y| < 1} y^I \delta_\tau(\mu - \nu)(dy),$$

és

$$|r| \leq r_2 + r_4.$$

Most a

$$\delta_\tau \mu^{n-k} = \delta_\tau \nu^{n-k} + \sum_{l=1}^{n-k} \delta_\tau \nu^{l-1} * \delta_\tau(\mu - \nu) * \delta_\tau \mu^{n-k-l}$$

felbontásból

$$A = (A_1 + A_2) \int_{|y| < 1} y^I \delta_\tau(\mu - \nu)(dy),$$

ahol

$$A_1 = \sum_{d(I)=3} \sum_{k=1}^n \iint \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \delta_\tau \nu^{k-1}(dx) \delta_\tau \nu^{n-k}(dz),$$

$$A_2 = \sum_{d(I)=3} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{n-k} \iiint \tilde{S}^I g_{x,uvw}(e) \delta_\tau \nu^{k-1}(dx) \delta_\tau \nu^{\ell-1}(du) \delta_\tau(\mu - \nu)(dv) \delta_\tau \mu^{n-k-\ell}(dw).$$

Először az A_2 mennyiséget elemezzük. Az integrálási tartományt két részre bontva $A_2 = A_{2,1} + A_{2,2}$, ahol $A_{2,1}$ a $\{v \in G : |v| \geq 1\}$ halmazon, $A_{2,2}$ pedig a $\{v \in G : |v| < 1\}$ halmazon vett integrálokat tartalmazza. A 4.2.1 Lemma segítségével

$$|A_{2,1}| \leq nc(G) |f|_{3s, \text{hom}} (1 + m_{3(s-1)}(\nu)) \Lambda_0(\mu + \nu).$$

Az $A_{2,2}$ becsléséhez most a $h_{x,u,w}(v) = \tilde{S}^I g_{x,uvw}(e)$ függvény e pontbeli baloldali lépcsős Taylor-kifejtését a homogén másodfokú tagig használjuk (rögzített $x, u, w \in G$ esetén):

$$h_{x,u,w}(v) = \sum_{d(J) \leq 2} \tilde{S}^J h_{x,u,w}(e) v^J + R^{h_{x,u,w}}(v),$$

ahol

$$|R^{h_{x,u,w}}(v)| \leq c|v|^3 \sup \left\{ |\tilde{X}^J h_{x,u,w}(z)| : d(J) = 3, |z| \leq b^3|v| \right\}.$$

Ha $d(J) \leq 2$, akkor a 4.2.1 Lemmából

$$\left| \int_{|v|<1} \tilde{S}^J h_{x,u,w}(e) v^J \delta_\tau(\mu - \nu)(dv) \right| \leq n^{-1} c(G) |f|_{5s, \text{hom}} (1 + |x|^{5(s-1)}) \Lambda_2(\mu + \nu)$$

(lásd (4.2.11) bizonyítását). Újra a 4.2.1 Lemma segítségével

$$\left| \int_{|v|<1} R^{h_{x,u,w}}(v) \delta_\tau(\mu - \nu)(dv) \right| \leq n^{-1} c(G) |f|_{6s, \text{hom}} (1 + |x|^{6(s-1)}) L_3(\mu + \nu).$$

Figyelembe véve a

$$\left| \int_{|y|<1} y^I \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \right| \leq n^{-1} L_3(\mu + \nu)$$

becslést, kapjuk, hogy

$$\left| A_2 \int_{|y|<1} y^I \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) \right| \leq r_3 + r_5 + r_6.$$

Most elemezzük az A_1 mennyiséget. A $(\nu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoport stabilitását felhasználva

$$\begin{aligned} & n^{-1} \sum_{k=1}^n \iint \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \delta_\tau \nu^{k-1}(dx) \delta_\tau \nu^{n-k}(dz) \\ &= n^{-1} \sum_{k=1}^n \iint \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \nu_{(k-1)/n}(dx) \nu_{(n-k)/n}(dz) \\ &= n^{-1} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k-1}{n}, \frac{n-k}{n}\right), \end{aligned}$$

ahol

$$F(t, u) = \iint \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \nu_t(dx) \nu_u(dz).$$

Nyilván

$$\left| F\left(\frac{k-1}{n}, \frac{n-k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}, \frac{n-k+1}{n}\right) \right| \leq n^{-1} \sup_{\tau \in [0,1]} \left| \partial_2 F\left(\frac{k-1}{n}, \frac{n-k+1-\tau}{n}\right) \right|.$$

Alkalmazva az Euler-Maclaurin szummációs formulát a $G(t) = F(t, 1-t)$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| n^{-1} F\left(\frac{k-1}{n}, \frac{n-k+1}{n}\right) - \int_0^1 F(t, 1-t) dt \right| &\leq c n^{-1} \sup_{t \in [0,1]} |G'(t)| \\ &\leq c n^{-1} \max_{i=1,2} \sup_{t \in [0,1]} |\partial_i F(t, 1-t)|. \end{aligned}$$

Nyilván

$$\partial_2 F(t, u) = \iint \tilde{N}_z \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \nu_t(dx) \nu_u(dz),$$

ahol \tilde{N}_z a $(\nu_t)_t \geq 0$ konvolúciós félcsoporthoz \tilde{N} infinitézimális generátora, a z változó szerint alkalmazva (mint differenciál-operátort). A 4.2.1 Lemmával

$$\tilde{S}^I g_{x,z}(e) = \sum_{d(J) \geq 3, |J| \leq |I|} P_J^I(x) X^J f(xz),$$

ahol P_J^I olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(J) - 3$. Következésképpen (2.4.11) alapján

$$\tilde{N}_z \tilde{S}^I g_{x,z}(e) = \sum_{d(K) \geq 5, |K| \leq |I|+2} Q_K^I(x) X^K f(xz),$$

ahol Q_K^I olyan homogén polinom, melynek homogén foka $d(J) - 5$. Nyilván $|K| \leq |I| + 2$ miatt $d(K) \leq s|K| \leq s(|I| + 2) \leq 5s$, ezért

$$\begin{aligned} |\tilde{N}_z \tilde{S}^I g_{x,z}(e)| &\leq c(G) \sum_{d(K) \geq 5, |K| \leq |I|+2} |xy|^{d(K)-5} |f|_{d(K), \text{hom}} \\ &\leq c(G) (1 + |x|^{5(s-1)}) |f|_{5s, \text{hom}}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\sup_{t \in [0,1]} |\partial_2 F(t, 1-t)| \leq c(G) (1 + m_{5(s-1)}(\nu)) |f|_{5s, \text{hom}}.$$

Hasonlóan,

$$\sup_{t \in [0,1]} |\partial_1 F(t, 1-t)| \leq c(G) (1 + m_{5(s-1)}(\nu)) |f|_{5s, \text{hom}}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
\left| \partial_2 F \left(\frac{k-1}{n}, \frac{n-k+1-\tau}{n} \right) \right| &\leq c(G) \iint (1 + |x|^{5(s-1)}) \nu_{(k-1)/n}(dx) \nu_{(n-k+1-\tau)/n}(dz) |f|_{5s, \text{hom}} \\
&= c(G) \int (1 + |x|^{5(s-1)}) \nu_{(k-1)/n}(dx) |f|_{5s, \text{hom}} \\
&= c(G) \int (1 + |x|^{5(s-1)}) \delta_{\sqrt{(k-1)/n}} \nu(dx) |f|_{5s, \text{hom}} \\
&= c(G) \int \left(1 + \left(\sqrt{\frac{k-1}{n}} |x| \right)^{5(s-1)} \right) \nu(dx) |f|_{5s, \text{hom}} \\
&\leq c(G) (1 + m_{5(s-1)}(\nu)) |f|_{5s, \text{hom}}.
\end{aligned}$$

Összegezve, azt kapjuk, hogy

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n \iint \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \delta_\tau \nu^{k-1}(dx) \delta_\tau \nu^{n-k}(dz) = \iint_0^1 \tilde{S}^I g_{x,z}(e) \nu_t(dx) \nu_{1-t}(dz) + R,$$

ahol

$$|R| \leq c(G) (1 + m_{5(s-1)}(\nu)) |f|_{5s, \text{hom}} n^{-1}.$$

Összegyűjtve a megfelelő becsléseket:

$$A_1 \int_{|y|<1} y^I \delta_\tau (\mu - \nu)(dy) = \alpha_n n^{-1/2} + r,$$

ahol $|r| \leq r_7$. Ezzel kész a bizonyítás. \square

Most megfogalmazzuk az eredményeket a legegyszerűbb nem kommutatív lépcsős Lie-csoport, a H Heisenberg-csoport esetében, a valószínűségi változók nyelvén. A 5.1.6 Tétel szerint az a bal-invariáns Brown-mozgás, melynek infinitézimális generátora

$$a_3 \tilde{X}_3 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j$$

alakú, ahol $a_3 \in \mathbb{R}$ és $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathbb{M}_2^+$, reprezentálható a következőképpen:

$$(Z_1(t), Z_2(t), L(t)), \quad t \geq 0,$$

ahol $(Z_1(t), Z_2(t))_{t \geq 0}$ Brown-mozgás \mathbb{R}^2 -ben, melynek várhatóértéke 0 és kovarianciamátrixa B , és

$$L(t) := a_3 t + \frac{1}{2} \int_0^t (Z_1(s) dZ_2(s) - Z_2(s) dZ_1(s))$$

a Lévy-féle sztochasztikus terület-függvény (lásd, például, Feinsilver, Schott [31] és Roynette [84]).

Legyen $(\xi, \eta, \zeta), (\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots \in \mathbb{R}^3$ független, azonos eloszlású valószínűségi vektorváltozókból álló sorozat. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$, $\mathbb{E}\zeta = a_3$, $\mathbb{E}\xi^2 = b_{11}$, $\mathbb{E}\eta^2 = b_{22}$, $\mathbb{E}\xi\eta = b_{12}$. Tekintsük a

$$T_n := \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \eta_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i + \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i) \right)$$

statisztikát. Ekkor tetszőleges $f \in \mathfrak{C}_6^{\text{hom}}(H)$ esetén

$$|\mathbb{E}f(T_n) - \mathbb{E}f(Z_1(1), Z_2(1), L(1))| \leq c \cdot C(a_3, B) |f|_{6, \text{hom}} (\mathbb{E}|\xi|^3 + \mathbb{E}|\eta|^3 + \mathbb{E}|\zeta|^{3/2}) n^{-1/2},$$

ahol $C(a_3, B) := 1 + |a_3|^{3/2} + b_{11}^{3/2} + b_{22}^{3/2}$. Ha $\mathbb{E}|\xi|^4 < \infty$, $\mathbb{E}|\eta|^4 < \infty$ és $\mathbb{E}|\zeta|^2 < \infty$, akkor tetszőleges $f \in \mathfrak{C}_{12}^{\text{hom}}(H)$ esetén

$$\mathbb{E}f(T_n) = \mathbb{E}f(Z_1(1), Z_2(1), L(1)) + \alpha n^{-1/2} + \tilde{R}_n,$$

ahol a maradéktagra fennáll $|\tilde{R}_n| \leq c \cdot (r_1 + r_2)$,

$$r_1 := \tilde{C}(a_3, B) |f|_{12, \text{hom}} (\mathbb{E}|\xi|^4 + \mathbb{E}|\eta|^4 + \mathbb{E}|\zeta|^2 + (\mathbb{E}|\xi|^3)^2 + (\mathbb{E}|\eta|^3)^2 + (\mathbb{E}|\zeta|^{3/2})^2) n^{-1},$$

$$r_2 := \tilde{C}(a_3, B) |f|_{12, \text{hom}} (\mathbb{E}|\xi|^3 + \mathbb{E}|\eta|^3 + \mathbb{E}|\zeta|^{3/2}) n^{-3/2},$$

ahol $\tilde{C}(a_3, B) := 1 + |a_3|^3 + b_{11}^3 + b_{22}^3$. Az α együttható pedig

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \mathbb{E} D_1^k D_2^{3-k} f(Z_1(1), Z_2(1), L(1)) \mathbb{E} \xi^k \eta^{3-k} \\ &\quad + \frac{1}{3} \mathbb{E} D_1 D_3 f(Z_1(1), Z_2(1), L(1)) \mathbb{E} \xi \zeta \\ &\quad + \frac{1}{3} \mathbb{E} D_2 D_3 f(Z_1(1), Z_2(1), L(1)) \mathbb{E} \eta \zeta, \end{aligned}$$

ahol D_1 , D_2 és D_3 a következő véletlen differenciál-operátorok:

$$\begin{aligned} D_1 &:= \partial_1 + \frac{Z_2(1) - 2Z_2(U)}{2} \partial_3, \\ D_2 &:= \partial_2 + \frac{2Z_1(U) - Z_1(1)}{2} \partial_3, \\ D_3 &:= \partial_3, \end{aligned}$$

és ahol U olyan egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon, mely független az összes többi valószínűségi változótól.

4.4 Teljes Edgeworth–sorfejtés

Ebben a paragrafusban a következő speciális jelölést fogjuk használni. Egy $f : G^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)}) \in G^k$, $Y \in \mathfrak{L}(G)$, és $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén az

$$Y_{(i)} f(\mathbf{x})$$

jelölés azt jelenti, hogy az Y differenciál-operátor az $\mathbf{x}_{(i)}$ változóban hat. Megjegyezzük, hogy tetszőleges $Y, Z \in \mathfrak{L}(G)$ esetén az $Y_{(i)}$ és $Z_{(j)}$ differenciál-operátorok felcserélhetőek, ha $i \neq j$.

Egy $P : G^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt polinomnak nevezünk, ha $P(\exp Y_1, \dots, \exp Y_k)$, $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{L}(G)$ polinom $\mathfrak{L}(G)$ -n. Ez egyértelműen írható

$$P(\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)}) = \sum_{I_1, \dots, I_k} a_{I_1, \dots, I_k} \zeta^{I_1}(\mathbf{x}_{(1)}) \dots \zeta^{I_k}(\mathbf{x}_{(k)}), \quad \mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)} \in G$$

alakban, ahol csak véges sok a_{I_1, \dots, I_k} együttható különbözik 0-tól. A homogén fokú $\max\{d(I_1) + \dots + d(I_k) : a_{I_1, \dots, I_k} \neq 0\}$. Ha egyúttal egy m fokú homogén függvény is, akkor egyértelműen írható

$$P(\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)}) = \sum_{d(I_1) + \dots + d(I_k) = m} a_{I_1, \dots, I_k} \zeta^{I_1}(\mathbf{x}_{(1)}) \dots \zeta^{I_k}(\mathbf{x}_{(k)}), \quad \mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)} \in G$$

alakban, és létezik olyan $c(G, P) > 0$ konstans, hogy

$$|P(\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)})| \leq c(G, P)(1 + |\mathbf{x}_{(1)}|^m + \dots + |\mathbf{x}_{(k)}|^m), \quad \mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)} \in G.$$

A következő állítás a 4.2.1 Lemma általánosítása. Egy $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén definiáljuk az $f_{(k)} : G^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_{(k)}(\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(k)}) := f\left(\prod_{j=1}^k \mathbf{x}_{(j)}\right)$$

függvényt.

4.4.1 Lemma. Legyen $I_1, \dots, I_k \in \mathbb{Z}_+^d$, $f \in \mathfrak{C}_{sm}^{hom}(G)$, ahol $m := d(I_1) + \dots + d(I_k)$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \tilde{X}_{(2)}^{I_1} \dots \tilde{X}_{(2k)}^{I_k} f_{(2k+1)}(\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(2k+1)}) \\ &= \sum_{d(J_i) \geq d(I_i), |J_i| \leq |I_i|, i \in \{1, \dots, k\}} P_{J_1, \dots, J_k}^{I_1, \dots, I_k}(\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(2k)}) X^{J_1} \dots X^{J_k} f\left(\prod_{j=1}^{2k+1} \mathbf{x}_{(j)}\right), \end{aligned}$$

ahol $P_{J_1, \dots, J_k}^{I_1, \dots, I_k}$ olyan homogén polinom, melynek homogén foka $\sum_{i=1}^k (d(J_i) - d(I_i))$, és

$$\begin{aligned} |\tilde{X}_{(2)}^{I_1} \dots \tilde{X}_{(2k)}^{I_k} f_{(2k+1)}(\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(2k+1)})| &\leq c(G) \left(1 + \left|\prod_{i=1}^{2k} \mathbf{x}_{(i)}\right|^{(s-1)m}\right) |f|_{sm, hom} \\ &\leq c(G) \left(1 + \sum_{i=1}^{2k} |\mathbf{x}_{(i)}|^{(s-1)m}\right) |f|_{sm, hom}. \end{aligned}$$

Szükségünk lesz az Euler–Maclaurin-féle összegzési formulának egy olyan többdimenziós általánosítására, mely egy bizonyos szimplexén érvényes. Először felidézzük az egydimenziós

esetet. Legyen $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely r -szer folytonosan differenciálható, $r \geq 1$. Ekkor a $\sum_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{i}{n}\right)$ összegre a következő zárt formula adható:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{i}{n}\right) &= \int_0^1 F(t) dt + \sum_{\ell=1}^r \frac{B_\ell}{\ell! n^\ell} (F^{(\ell-1)}(1) - F^{(\ell-1)}(0)) \\ &\quad + \frac{(-1)^{r+1}}{r! n^r} \int_0^1 \tilde{B}_r(nt) F^{(r)}(t) dt, \end{aligned}$$

ahol B_ℓ , $\ell = 0, 1, \dots$ a Bernoulli-számok, melyeknek a generátor-függvénye

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} u^\ell = \frac{u}{e^u - 1},$$

és \tilde{B}_ℓ , $\ell = 0, 1, \dots$ olyan 1 periódusú függvények \mathbb{R} -en, melyek egybeesnek a Bernoulli-polinomokkal a $[0, 1)$ intervallumon:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_\ell(t)}{\ell!} u^\ell = \frac{ue^{ut}}{e^u - 1}, \quad t \in [0, 1).$$

A 4.4 kifejezés az Euler–Maclaurin-féle összegzési formulának egy verziója, amiből könnyen levezethető a következő aszimptotikus kifejtés:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^{r-1} \frac{B_\ell}{\ell! n^\ell} \int_0^1 F^{(\ell)}(t) dt + R_n^{(r)},$$

ahol

$$|R_n^{(r)}| \leq \frac{c(r)}{n^r} \sup_{t \in [0, 1]} |F^{(r)}(t)|.$$

Bhattacharya, Ranga Rao [11] általános szummációs formulát bizonyítottak többváltozós $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre:

$$h^k \sum_{\substack{v+hm \in A \\ m \in \mathbb{Z}^k}} f(v+hm) = \int_A d\Lambda_r + R^{(r)},$$

ahol $h > 0$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, Λ_r egy komplikált előjeles mérték (mely az F függvény parciális deriváltjaitól függ), és az $R^{(r)}$ maradéktag a következő módon becsülhető:

$$|R^{(r)}| \leq c(k, r, q) \sum_{r \leq |I| \leq kr} h^{|I|} \|\partial^I f\|_{\infty, q},$$

ahol $q > k/2$ tetszőlegesen választható szám, és a $\|\cdot\|_{\infty, q}$ norma definíciója

$$\|g\|_{\infty, q} := \sup \left\{ (1 + \|t\|^2)^{q/2} |g(t)| : t \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

Az a célunk, hogy aszimptotikus kifejtést nyerjünk az

$$\frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-k+1 \\ i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}_+}} F\left(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_k}{n}\right)$$

összegre. Ebben a speciális esetben a $\int_A d\Lambda_r$ tagnak egyszerűbb a struktúrája, mely leírható többindexes Bernoulli-típusú számokkal. Legyenek T_j és \tilde{T}_j , $j \in \mathbb{N}$ a következő szimplexek \mathbb{R}^j -ben:

$$\begin{aligned} T_j &= \{(t_1, \dots, t_j) : t_1 + \dots + t_j = 1, t_1, \dots, t_j \geq 0\}, \\ \tilde{T}_j &= \{(t_1, \dots, t_j) : t_1 + \dots + t_j \leq 1, t_1, \dots, t_j \geq 0\}. \end{aligned}$$

Használni fogjuk a $0_j := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^j$ jelölést.

4.4.2 Tétel. *Legyen $F : \tilde{T}_k \rightarrow \mathbb{R}$, $k \geq 2$ olyan függvény, melynek $\partial^J F$, $J \in \mathbb{Z}_+^k$, $|J| \leq (k-1)r$ parciális deriváltjai léteznek és folytonosak valamely $r \geq 1$ esetén. Ekkor*

$$\begin{aligned} (4.4.3) \quad & \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-k+1 \\ i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}_+}} F\left(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_k}{n}\right) \\ &= \sum_{j=2}^k \sum_{\substack{|J| \leq r-1-k+j \\ J \in \mathbb{Z}_+^k}} \frac{b_J^{(k,j)}}{J! n^{|J|+k-j}} \int_{T_j} \partial^J F(t, 0_{k-j}) dt + R_n^{(k,r)}, \end{aligned}$$

ahol $k \geq 2$ és $2 \leq j \leq k$ esetén a $\{b_J^{(k,j)} : J \in \mathbb{Z}_+^k\}$ számok generátorfüggvénye

$$(4.4.4) \quad G^{(k,j)}(t) = \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^k} \frac{b_J^{(k,j)}}{J!} t^J = (-1)^{k-j} \sum_{i=j}^k \frac{(t_1 - t_i) \cdots (t_{j-1} - t_i)}{\prod_{\substack{1 \leq q \leq k \\ q \neq i}} (e^{t_q} - e^{t_i})},$$

és

$$|R_n^{(k,r)}| \leq \frac{c(k,r)}{n^r} \max_{\substack{|J| \leq (k-1)r \\ J \in \mathbb{Z}_+^k}} \sup_{t \in \tilde{T}_k} |\partial^J F(t)|.$$

Bizonyítás. Használva először az

$$\begin{aligned} F\left(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_k}{n}\right) &= \sum_{\ell=0}^{r-1} \frac{(1-k)^\ell}{\ell! n^\ell} \partial_1^\ell F\left(\frac{i_1+k-1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_k}{n}\right) \\ &\quad + \frac{(-1)^r}{(r-1)! n^r} \int_0^1 (1-\tau)^{r-1} \partial_1^r F\left(\frac{i_1+k-1-\tau}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_k}{n}\right) d\tau \end{aligned}$$

Taylor-kifejtést, majd koordinátánként alkalmazva az egyváltozós Euler–Maclaurin-féle összegzési formulát, és figyelembe véve

$$(4.4.5) \quad \int_{T_2} H(x, y, 0) dx dy = \int_{T_2} H(x, 0, y) dx dy + \int_{T_3} (\partial_2 - \partial_3) H(x, y, z) dx dy dz$$

típusú azonosságokat, beláthatjuk, hogy valamilyen egyértelműen meghatározott $b_J^{(k,j)}$ számokkal létezik olyan alakú aszimptotikus kifejtés, mint amelyet a tétel állít. Abból a célból,

hogy meghatározzuk ezeknek a polinomoknak a generátorfüggvényét, behelyettesítjük a formulába az

$$F(t_1, \dots, t_k) = e^{\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_k t_k}$$

függvényeket, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ páronként különböző számok. Ezekre a speciális függvényekre

$$\frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-k+1 \\ i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}_+}} F\left(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_k}{n}\right) = (-1)^k \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{i=2}^k \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_i}}{\prod_{\substack{1 \leq q \leq k \\ q \neq i}} (e^{\lambda_q/n} - e^{\lambda_i/n})}$$

és

$$\int_{T_j} \partial^J F(t, 0_{k-j}) dt = (-1)^j \lambda^J \sum_{i=2}^j \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_i}}{\prod_{\substack{1 \leq q \leq j \\ q \neq i}} (\lambda_q - \lambda_i)},$$

amiből következik

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}_+^k} \frac{b_J^{(k,j)}}{J! n^{|J|+k-j}} \int_{T_j} \partial^J F(t, 0_{k-j}) dt = \frac{(-1)^j}{n^{k-j}} G^{(k,j)}(n^{-1}\lambda) \sum_{i=2}^j \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_i}}{\prod_{\substack{1 \leq q \leq j \\ q \neq i}} (\lambda_q - \lambda_i)}.$$

Ezeket összevetve, $t = n^{-1}\lambda$ helyettesítéssel, majd az $e^{nt_1} - e^{nt_i}$, $i = 2, \dots, k$ kifejezések együtthatóit összehasonlítva a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk a $G^{(k,j)}$ generátorfüggvényekre:

$$\sum_{j=i}^k \frac{(-1)^{k-j} G^{(k,j)}(t)}{\prod_{\substack{1 \leq q \leq j \\ q \neq i}} (t_q - t_i)} = \frac{1}{\prod_{\substack{1 \leq q \leq k \\ q \neq i}} (e^{t_q} - e^{t_i})}, \quad j = 2, \dots, k.$$

Ennek az egyenletrendszernek egyetlen megoldása létezik: ami a tétel állításában szerepel. \square

Megjegyezzük, hogy például

$$G^{(2,2)}(t_1, t_2) = \frac{t_1 - t_2}{e^{t_1} - e^{t_2}}$$

és

$$\begin{aligned} G^{(3,3)}(t_1, t_2, t_3) &= \frac{(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)}{(e^{t_1} - e^{t_3})(e^{t_2} - e^{t_3})}, \\ G^{(3,2)}(t_1, t_2, t_3) &= -\frac{t_1 - t_2}{(e^{t_1} - e^{t_2})(e^{t_3} - e^{t_2})} - \frac{t_1 - t_3}{(e^{t_1} - e^{t_3})(e^{t_2} - e^{t_3})}. \end{aligned}$$

Legyen μ egy olyan centrált valószínűségi mérték G -n, melyre $m_2(\mu) < \infty$. Legyen $(\nu_t)_{t \geq 0}$ a μ -höz tartozó Gauss-félcsoport, vagyis az a Gauss-félcsoport, melynek infinitézimális generátora

$$\tilde{N} = \sum_{d_i=2} a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i=d_j=1} b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j,$$

ahol

$$a_i = \int \zeta_i(y) \mu(dy), \quad b_{ij} = \int \zeta_i(y) \zeta_j(y) \mu(dy).$$

Ekkor $\nu = \nu_1 = \text{Gauss}(\mu)$ és érvényes a $\delta_{1/\sqrt{n}}\mu^n \rightarrow \nu$ centrális határeloszlás-tétel. Erre fogjuk most megadni a teljes Edgeworth-sorfejtést.

Az egyszerűség kedvéért a következő jelölést fogjuk bevezetni. Ha $i, q \in \mathbb{N}$, $q \leq i + 1$, $\mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(q)} \in G$, $t_1, \dots, t_q \geq 0$ és $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, akkor

$$f_{(2i+1)}(\mathbf{x}^{(q)}) := f_{(2i+1)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)}, e, \dots, e, \mathbf{x}_{(q)}, e, \dots, e),$$

$$\nu_t(d\mathbf{x}) dt := \nu_{t_1}(d\mathbf{x}_{(1)}) \dots \nu_{t_q}(d\mathbf{x}_{(q)}) dt_1 \dots dt_q.$$

4.4.6 Tétel. Ha $m_{k+2}(\mu) < \infty$ és $f \in \mathfrak{C}_{3ks}^{hom}(G)$, akkor

$$(4.4.7) \quad \int f(x) \delta_{1/\sqrt{n}} \mu^n(dx) = \int f(x) \nu(dx) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j n^{-j/2} + O(n^{-k/2}),$$

ahol $\alpha_j = \alpha_j(G, f, \mu)$ csak G , f és μ függvénye. Továbbá

$$\alpha_j = \sum^* \int_{T_\ell} \int_{G^\ell} D_{q,\ell,J}^{I_1, \dots, I_{q-1}} f_{(2i+1)}(\mathbf{x}^{(q)}) \nu_t(d\mathbf{x}) dt \prod_{p=1}^{q-1} (m^{I_p}(\mu) - m^{I_p}(\nu)),$$

ahol a \sum^* szummázás kiterjed minden $q \in \{2, \dots, j+1\}$, $\ell \in \{2, \dots, q\}$ számra és $J \in \mathbb{Z}_+^q$, $I_1, \dots, I_{q-1} \in \mathbb{Z}_+^d$ multiindexekre, melyekre teljesül $d(I_1) + \dots + d(I_{q-1}) = j - 2|J| + 2\ell - 2$ és $d(I_1), \dots, d(I_{q-1}) \geq 3$, és ahol a $D_{q,\ell,J}^{I_1, \dots, I_{q-1}}$ differenciáloperátorok definíciója

$$D_{q,\ell,J}^{I_1, \dots, I_{q-1}} = \frac{b_J^{(q,\ell)}}{J!} \tilde{N}_{(1)}^{j_1} \tilde{N}_{(3)}^{j_2} \dots \tilde{N}_{(2q-1)}^{j_q} S_{(2)}^{I_1} \dots S_{(2q-2)}^{I_{q-1}},$$

ahol $b_J^{(q,\ell)}$ a 4.4.2 Tételben szereplő Bernoulli-típusú számok.

Bizonyítás. A bizonyításban újra használjuk a

$$\tau = n^{-1/2}, \quad \text{for } n = 1, 2, \dots$$

jelölést, amennyiben nem okozhat félreértést.

A bizonyítás stratégiája követi Bentkus, Götze, Paulauskas, Račkauskas [7] által Banach-tér esetében alkalmazott ötleteket. A következő azonosság igen hasznosnak bizonyul két konvolúció összehasonlítására:

$$(4.4.8) \quad \alpha_1 * \dots * \alpha_n = \beta_1 * \dots * \beta_n + \sum_{k=1}^n \beta_1 * \dots * \beta_{k-1} * (\alpha_k - \beta_k) * \alpha_{k+1} * \dots * \alpha_n,$$

ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ tetszőleges mértékek. Először használjuk a (4.4.8) dekompozíciót az $\alpha_1 * \dots * \alpha_n = (\delta_\tau \mu)^n$ és $\beta_1 * \dots * \beta_n = (\delta_\tau \nu)^n = \nu$ konvolúciókra. Ezután alkalmazzunk Taylor-kifejtést az $\alpha_k - \beta_k$ mértékhez tartozó változó szerint. A kifejtés rendje attól függ,

hogy milyen rendű maradéktagot akarunk kapni. Az $\alpha_k - \beta_k$ faktor bizonyos $m^I(\alpha) - m^I(\beta)$ momentumokat eredményez. A többi faktor kezelésére megint a (4.4.8) azonosságot használjuk az $\alpha_{k+1} \cdots \alpha_n$ konvolúció dekompozíciójához, majd a Taylor–kifejtést alkalmazzuk az új $\alpha_\ell - \beta_\ell$ differenciákhoz tartozó változóban, és így tovább. Az új Taylor–kifejtés rendje kisebb, mint az előző lépésben volt, tehát véges soklépés után már csak olyan tagok maradnak, melyek egyrészt bizonyos momentumok $m^I(\alpha) - m^I(\beta)$ alakú differenciáit, másrészt a β_i mértékek bizonyos konvolúcióit tartalmazzák; az utóbbiak pedig kezelhetők a 4.4.2 Tételben adott többdimenziós Euler–Maclaurin–formulával. Ahhoz, hogy az Edgeworth–kifejtést az állításban szereplő optimális momentum–feltételek mellett kapjuk meg, a fent leírt eljárást kombinálni kell csonkítással is.

Először megszabadulunk a $O(n^{-k/2})$ rendű tagoktól, azután elemezzük azokat a tagokat, melyek a $\sum_{j=1}^k \alpha_j n^{-j/2}$ kifejtést eredményezik. A (4.4.8) azonosság alapján

$$\delta_\tau \mu^n = \nu + \sum_{k=1}^n \delta_\tau \nu^{k-1} \delta_\tau (\mu - \nu) \delta_\tau \mu^{n-k}.$$

Az integrálási tartomány felbontásával

$$\int f(x) \delta_\tau \mu^n = \int f(x) \nu(dx) + I_1 + I_2,$$

ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=1}^n \iiint_{|\mathbf{y}_{(1)}| \geq 1} f(\mathbf{x}_{(1)} \mathbf{y}_{(1)} \mathbf{x}_{(2)}) \delta_\tau \nu^{k-1}(d\mathbf{x}_{(1)}) \delta_\tau (\mu - \nu)(d\mathbf{y}_{(1)}) \delta_\tau \mu^{n-k}(d\mathbf{x}_{(2)}), \\ I_2 &= \sum_{k=1}^n \iiint_{|\mathbf{y}_{(1)}| < 1} f(\mathbf{x}_{(1)} \mathbf{y}_{(1)} \mathbf{x}_{(2)}) \delta_\tau \nu^{k-1}(d\mathbf{x}_{(1)}) \delta_\tau (\mu - \nu)(d\mathbf{y}_{(1)}) \delta_\tau \mu^{n-k}(d\mathbf{x}_{(2)}). \end{aligned}$$

Az $\{\mathbf{y}_{(1)} \in G : |\mathbf{y}_{(1)}| \geq 1\}$ halmazon a triviális $\|f\|$ becslést alkalmazzuk, és (4.2.3) valamint a 4.2.4 Lemma alapján azt kapjuk, hogy

$$|I_1| \leq \|f\| \Lambda_0(\mu + \nu) \leq \|f\| m_{k+2}(\mu) n^{-k/2} = O(n^{-k/2}).$$

Az $\{\mathbf{y}_{(1)} \in G : |\mathbf{y}_{(1)}| < 1\}$ halmazon alkalmazzuk a $k+1$ -edrendű baloldali lépcsős Taylor–kifejtést az $\mathbf{y}_{(1)}$ változó szerint:

$$f(\mathbf{x}_{(1)} \mathbf{y}_{(1)} \mathbf{x}_{(2)}) = f_{(3)}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) = \sum_{d(I_1) \leq k+1} \tilde{S}_{(2)}^{I_1} f_{(3)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)}) \zeta^{I_1}(\mathbf{y}_{(1)}) + R_{k+2}^{f_{(3)}}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}),$$

ahol

$$|R_{k+2}^{f_{(3)}}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)})| \leq c(G) |\mathbf{y}_{(1)}|^{k+2} \sup \left\{ |\tilde{X}^I f_{(3)}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{z}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)})| : d(I) = k+2, |\mathbf{z}_{(1)}| \leq b^{k+2} |\mathbf{y}_{(1)}| \right\}.$$

A 4.4.1 Lemma alapján

$$|R_{k+2}^{f_{(3)}}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)})| \leq c(G) |\mathbf{y}_{(1)}|^{k+2} (1 + |\mathbf{x}_{(1)} \mathbf{y}_{(1)}|^{(k+2)(s-1)}) |f|_{(k+2)s, \text{hom}},$$

ezért (4.2.2) alkalmazásával

$$\left| \int_{|\mathbf{y}_{(1)}| < 1} R_{k+2}^{f_{(3)}}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) \delta_\tau(\mu - \nu)(d\mathbf{y}_{(1)}) \right| \leq n^{-1} c(G) |f|_{(k+2)s, \text{hom}} (1 + |\mathbf{x}_{(1)}|^{(k+2)(s-1)}) L_{k+2}(\mu + \nu).$$

Felhasználva a (4.2.3) becslést, azt kapjuk, hogy a $R_{k+2}^{f_{(3)}}$ maradéktag nagyságrendje

$$c(G) |f|_{(k+2)s} (1 + m_{(k+2)(s-1)}(\nu)) L_{k+2}(\mu + \nu) = O(n^{-k/2}).$$

Azokra a tagokra, melyeknél $d(I_1) \leq 2$, nyilván $\int \zeta^{I_1}(\mathbf{y}_{(1)}) \nu(d\mathbf{y}_{(1)}) = \int \zeta^{I_1}(\mathbf{y}_{(1)}) \mu(d\mathbf{y}_{(1)})$, hiszen a μ és ν mértékek homogén momentumai másodrendig bezárólag egybeesnek. Ezért

$$\left| \int_{|\mathbf{y}_{(1)}| < 1} \zeta^{I_1}(\mathbf{y}_{(1)}) \delta_\tau(\mu - \nu)(d\mathbf{y}_{(1)}) \right| = \left| \int_{|\mathbf{y}_{(1)}| \geq 1} \zeta^{I_1}(\mathbf{y}_{(1)}) \delta_\tau(\mu - \nu)(d\mathbf{y}_{(1)}) \right| \leq n^{-1} \Lambda_2(\mu + \nu).$$

A 4.4.1 Lemma alapján

$$(4.4.9) \quad |\tilde{S}_{(2)}^{I_1} f_{(3)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)})| \leq c(G) (1 + |x_1|^{2(s-1)}) |f|_{2s, \text{hom}}.$$

Összegyűjtve a becsléseket azt kapjuk, hogy azoknak a tagoknak a nagyságrendje, melyeknél $d(I_1) \leq 2$:

$$c(G) |f|_{2s, \text{hom}} (1 + m_{2(s-1)}) \Lambda_2(\mu + \nu) = O(n^{-k/2}).$$

Tekintsük az integrálokat $3 \leq d(I_1) \leq k+1$ esetén. Megint alkalmazzuk a (4.4.8) azonosságot, de most a $\delta_\tau \mu^{n-k}$ konvolúcióhatványra. Ekkor a következő mérték szerint kell integrálnunk:

$$\sum_{k=1}^n \delta_\tau \nu^{k-1} \delta_\tau(\mu - \nu) \delta_\tau \nu^{n-k} + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{n-k} \delta_\tau \nu^{k-1} \delta_\tau(\mu - \nu) \delta_\tau \nu^{\ell-1} \delta_\tau(\mu - \nu) \delta_\tau \mu^{n-k-\ell}.$$

Tegyük félre az első szummát (mert ez alacsonyabb rendű tagokat fog eredményezni), és foglalkozzunk a második szummával. Most az integrálási tartományt az új $\delta_\tau(\mu - \nu)$ faktorhoz tartozó $\mathbf{y}_{(2)}$ változó értéke szerint bontjuk fel. Az $\{(\mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{y}_{(2)}) \in G^2 : |\mathbf{y}_{(1)}| < 1, |\mathbf{y}_{(2)}| \geq 1\}$ halmazon az integrandust a szuprémum-normájával becsüljük, és könnyen látható, hogy (4.4.9) típusú becsléseket alkalmazva ezeknek a tagoknak a nagyságrendje

$$c(G, \nu) |f|_{d(I_1)s, \text{hom}} \Lambda_0(\mu + \nu) L_{d(I_1)}(\mu + \nu) = O(n^{-k/2}).$$

Az $\{(\mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{y}_{(2)}) \in G^2 : |\mathbf{y}_{(1)}| < 1, |\mathbf{y}_{(2)}| < 1\}$ halmazon alkalmazzuk a $k+3-d(I_1)$ rendű baloldali lépcsős Taylor-kifejtést az $\mathbf{y}_{(2)}$ változó szerint:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{(2)}^{I_1} f_{(3)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)} \mathbf{y}_{(2)} \mathbf{x}_{(3)}) &= \tilde{S}_{(2)}^{I_1} f_{(5)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)}, \mathbf{y}_{(2)}, \mathbf{x}_{(3)}) \\ &= \sum_{d(I_2) \leq k+3-d(I_1)} \tilde{S}_{(2)}^{I_1} \tilde{S}_{(4)}^{I_2} f_{(5)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)}, e, \mathbf{x}_{(3)}) \zeta^{I_1}(\mathbf{y}_{(1)}) \zeta^{I_2}(\mathbf{y}_{(2)}) + R, \end{aligned}$$

ahol

$$|R| \leq c(G) |\mathbf{y}_{(2)}|^{k+4-d(I_1)} \sup \left\{ |\tilde{X}^I \tilde{S}_{(2)}^{I_1} f_{(5)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)}, \mathbf{z}_{(2)}, \mathbf{x}_{(3)})| \right\},$$

ahol a szuprémum kiterjed az összes olyan $I \in \mathbb{Z}_+^d$ multiindexre, melyre $d(I) = k+4-d(I_1)$ és minden olyan $\mathbf{z}_{(2)} \in G$ pontra, melyre $|\mathbf{z}_{(2)}| \leq b^{k+4-d(I_1)} |\mathbf{y}_{(2)}|$. Megint alkalmazva a 4.4.1 Lemmát, beláthatjuk, hogy az R maradéktag nagyságrendje

$$c(G, \nu) |f|_{(k+4-d(I_1))s, \text{hom}} L_{d(I_1)}(\mu + \nu) L_{k+4-d(I_1)}(\mu + \nu) = O(n^{-k/2}).$$

Nyilván azok a tagok, melyeknél $d(I_2) \leq 2$, ugyanúgy kezelhetők, mint az előbb. Az

$$\left| \int_{|\mathbf{y}_{(2)}| < 1} \zeta^{I_2}(\mathbf{y}_{(2)}) \delta_\tau(\mu - \nu) (d\mathbf{y}_{(2)}) \right| \leq n^{-1} \Lambda_2(\mu + \nu),$$

$$|\tilde{S}_{(2)}^{I_1} \tilde{S}_{(4)}^{I_2} f_{(5)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)}, e, \mathbf{x}_{(3)})| \leq c(G) (1 + |\mathbf{x}_{(1)} \mathbf{x}_{(2)}|^{(d(I_1)+2)(s-1)}) |f|_{sd(I_1), \text{hom}}$$

becslések alapján ezeknek a tagoknak a nagyságrendje

$$c(G, \nu) |f|_{(k+3)s, \text{hom}} \Lambda_2(\mu + \nu) L_{d(I_1)}(\mu + \nu) = O(n^{-k/2}).$$

Most azokkal a tagokkal foglalkozunk, melyekre $3 \leq d(I_1) \leq k+1$ és $3 \leq d(I_2) \leq k+3-d(I_1)$, azaz amikor $d(I_1) + d(I_2) \leq k+3$ és $d(I_1), d(I_2) \geq 3$. Nyilván az eljárás folytatható a $\delta_\tau \mu^{n-k-\ell}$ mértéknek a

$$\delta_\tau \nu^{n-k-\ell} + \sum_{i=1}^{n-k-\ell} \delta_\tau \nu^{i-1} \delta_\tau(\mu - \nu) \delta_\tau \mu^{n-k-\ell-i}$$

alakban történő kifejtésével. Félretesszük az első szummát, és felbontjuk az integrálás tartományát az új $\delta_\tau(\mu - \nu)$ faktorhoz tartozó $\mathbf{y}_{(3)}$ változó értéke szerint, és így tovább. Nyilván ezt az eljárást addig kell folytatnunk, míg a

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-k+1 \\ i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}_+}} \delta_\tau \nu^{i_1} \delta_\tau(\mu - \nu) \dots \delta_\tau(\mu - \nu) \delta_\tau \nu^{i_{k-1}} \delta_\tau(\mu - \nu) \delta_\tau \mu^{i_k}$$

felbontásig jutunk, amelynél az integrandus

$$\tilde{S}_{(2)}^{I_1} \dots \tilde{S}_{(2k-2)}^{I_{k-1}} f_{(2k-1)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \mathbf{x}_{(2)}, e, \dots, e, \mathbf{x}_{(k)}) \zeta^{I_1}(\mathbf{y}_{(1)}) \dots \zeta^{I_{k-1}}(\mathbf{y}_{(k-1)}),$$

ahol $d(I_1) + \dots + d(I_{k-1}) \leq k + 2k - 3 = 3(k-1)$ és $d(I_1), \dots, d(I_{k-1}) \geq 3$, tehát $d(I_1) = \dots = d(I_{k-1}) = 3$, és az integrálási tartomány $\{|\mathbf{y}_{(1)}| < 1, \dots, |\mathbf{y}_{(k-1)}| < 1\}$. Először használjuk a (4.4.8) dekompozíciót, majd tegyük félre a

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-k+1 \\ i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}_+}} \delta_\tau \nu^{i_1} \delta_\tau(\mu - \nu) \dots \delta_\tau(\mu - \nu) \delta_\tau \nu^{i_{k-1}} \delta_\tau(\mu - \nu) \delta_\tau \nu^{i_k}$$

mérték szerinti integrált. A többi már mind $O(n^{-k/2})$ nagyságrendű, amiről meggyőződhetünk az integrációs tartomány megfelelő felbontásával és másodrendű Taylor-kifejtés alkalmazásával.

Most a félretett tagokkal foglalkozunk:

$$\sum^* \int_{G^q} \tilde{S}_{(2)}^{I_1} \dots \tilde{S}_{(2q-2)}^{I_{q-1}} f_{(2q-1)}(x^{(q)}) \delta_\tau \nu^{i_1}(d\mathbf{x}_{(1)}) \dots \delta_\tau \nu^{i_q}(d\mathbf{x}_{(q)}) \prod_{p=1}^{q-1} \int_{|y|<1} \zeta^{I_p}(y) \delta_\tau(\mu - \nu)(dy),$$

ahol a \sum^* summázás kiterjed minden $q \in \{2, \dots, k\}$ számra, minden olyan $I_1, \dots, I_{q-1} \in \mathbb{Z}_+^d$ multiindexre, melyre $d(I_1) + \dots + d(I_{q-1}) \leq k + 2q - 3$ és $d(I_1), \dots, d(I_{q-1}) \geq 3$, és minden olyan nemnegatív egész koordinátájú (i_1, \dots, i_q) vektorra, melyre $i_1 + \dots + i_q = n - q + 1$.

Először helyettesíthetjük az $\int_{|y|<1} \zeta^{I_p}(y) \delta_\tau(\mu - \nu)(dy)$ integrálokat az

$$\int \zeta^{I_p}(y) \delta_\tau(\mu - \nu)(dy) = n^{-d(I_p)/2} (m^{I_p}(\mu) - m^{I_p}(\nu))$$

integrálokkal, hiszen az elkövetett hiba kisebb mint

$$n^{q-1} \prod_{p=1}^{q-1} (n^{-1} \Lambda_{d(I_p)}(\mu + \nu)) \leq c(G, \mu) n^{-(q-1)k/2} = O(n^{-k/2}).$$

Az \tilde{S} differenciáloperátorokat helyettesíthetjük az S -el, mivel az $e \in G$ pontban ugyanúgy hatnak.

Megjegyezzük, hogy a $(\nu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthoz stabilitása miatt $\delta_\tau \nu^i = \delta_{1/\sqrt{n}} \nu^i = \nu_{i/n}$, tehát alkalmazhatjuk a 4.4.2 Tételben adott kifejtést az

$$F(t_1, \dots, t_q) = \int_{G^q} S_{(2)}^{I_1} \dots S_{(2q-2)}^{I_{q-1}} f_{(2q-1)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \dots, e, \mathbf{x}_{(q)}) \nu_{t_1}(d\mathbf{x}_{(1)}) \dots \nu_{t_q}(d\mathbf{x}_{(q)})$$

függvényre. Megjegyezzük, hogy

$$\partial_\ell F(t_1, \dots, t_q) = \int_{G^q} \tilde{N}_{(2\ell-1)} S_{(2)}^{I_1} \dots S_{(2q-2)}^{I_{q-1}} f_{(2q-1)}(\mathbf{x}_{(1)}, e, \dots, e, \mathbf{x}_{(q)}) \nu_{t_1}(d\mathbf{x}_{(1)}) \dots \nu_{t_q}(d\mathbf{x}_{(q)}).$$

Összegyűjtve $n^{-j/2}$ együtthatóit, megkapjuk az α_j együtthatót a kifejtésben. \square

Példaként megadjuk a kifejtés első három együtthatóját:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sum_{d(I)=3} \int_{T_2} \int_{G^2} S_{(2)}^I f_{(3)}(\mathbf{x}^{(2)}) \nu_t(d\mathbf{x}) dt \cdot m^I(\mu), \\
\alpha_2 &= \sum_{d(I)=4} \int_{T_2} \int_{G^2} S_{(2)}^I f_{(3)}(\mathbf{x}^{(2)}) \nu_t(d\mathbf{x}) dt \cdot (m^I(\mu) - m^I(\nu)) \\
&\quad + \sum_{d(I)=d(J)=3} \int_{T_3} \int_{G^3} S_{(2)}^I S_{(4)}^J f_{(5)}(\mathbf{x}^{(3)}) \nu_t(d\mathbf{x}) dt \cdot m^I(\mu) m^J(\mu), \\
\alpha_3 &= -\frac{1}{2} \sum_{d(I)=3} \int_{T_2} \int_{G^2} (\tilde{N}_{(1)} + \tilde{N}_{(3)}) S_{(2)}^I f_{(3)}(\mathbf{x}^{(2)}) \nu_t(d\mathbf{x}) dt \cdot m^I(\mu) \\
&\quad + \sum_{d(I)=5} \int_{T_2} \int_{G^2} S_{(2)}^I f_{(3)}(\mathbf{x}^{(2)}) \nu_t(d\mathbf{x}) dt \cdot m^I(\mu) \\
&\quad + \sum_{\substack{d(I)=3 \\ d(J)=4}} \int_{T_3} \int_{G^3} (S_{(2)}^I S_{(4)}^J + S_{(2)}^J S_{(4)}^I) f_{(5)}(\mathbf{x}^{(3)}) \nu_t(d\mathbf{x}) dt \cdot m^I(\mu) (m^J(\mu) - m^J(\nu)) \\
&\quad + \sum_{d(I)=d(J)=d(K)=3} \int_{T_4} \int_{G^4} S_{(2)}^I S_{(4)}^J S_{(6)}^K f_{(5)}(\mathbf{x}^{(3)}) \nu_t(d\mathbf{x}) dt \cdot m^I(\mu) m^J(\mu) m^K(\mu).
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy $G = (\mathbb{R}^d, +)$ esetén

$$S^I = \frac{\partial^I}{I!},$$

ezért a 2.4.15 Lemma alapján

$$\tilde{N} = \sum_{|I|=2} \frac{m^I(\mu)}{I!} \partial^I.$$

Továbbá

$$D_{q,\ell,J}^{I_1,\dots,I_{q-1}} f_{(2q-1)}(\mathbf{x}^{(\ell)}) = \frac{b_J^{q,\ell}}{J! I_1! \dots I_{q-1}!} \tilde{N}^{|J|} \partial^{I_1+\dots+I_{q-1}} f(\prod_{p=1}^{\ell} \mathbf{x}_{(p)}).$$

A $(\nu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthoz stabilitása miatt ebben az esetben

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^\ell} D_{q,\ell,J}^{I_1,\dots,I_{q-1}} f_{(2q-1)}(\mathbf{x}^{(\ell)}) \nu_t(d\mathbf{x}) = \frac{1}{J! I_1! \dots I_{q-1}!} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{N}^{|J|} \partial^{I_1+\dots+I_{q-1}} f(\mathbf{x}) \nu(d\mathbf{x}),$$

ami nem függ t -től, ezért a $t \in T_\ell$ változó szerint kiintegrálva egyszerűen egy $((\ell-1)!)^{-1}$

faktor keletkezik. Tehát például $G = (\mathbb{R}, +)$ esetén a kifejtés első három együtthatója:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{3!} \int f^{(3)}(x) \nu(dx) \cdot m_3(\mu), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4!} \int f^{(4)}(x) \nu(dx) \cdot (m_4(\mu) - m_4(\nu)) + \frac{1}{2(3!)^2} \int f^{(6)}(x) \nu(dx) \cdot (m_3(\mu))^2, \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{2(3!)^2} \int f^{(5)}(x) \nu(dx) \cdot m_2(\mu) m_3(\mu) + \frac{1}{5!} \int f^{(5)}(x) \nu(dx) \cdot m_5(\mu) \\ &\quad + \frac{1}{3!4!} \int f^{(7)}(x) \nu(dx) \cdot m_3(\mu) (m_4(\mu) - m_4(\nu)) \\ &\quad + \frac{1}{(3!)^4} \int f^{(9)}(x) \nu(dx) \cdot (m_3(\mu))^3.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $m_4(\nu) = 3(m_2(\nu))^2 = 3(m_2(\mu))^2$, megkapjuk az α_j együtthatók Götze [34] által adott alakját.

5. fejezet

Konvolúciós félcsoporthok vizsgálata

5.1 Konvolúciós félcsoporthok előállítása

Legyen először G egy exponenciális Lie-csoport, azaz olyan Lie-csoport, melynél az $\exp : \mathfrak{L}(G) \rightarrow G$ exponenciális leképezés egy analitikus diffeomorfizmus.

Egy G -beli értékű $(\xi(t))_{t \geq 0}$ független, stacionárius növekményű folyamat infinitézimális generátora előáll

$$(5.1.1) \quad \begin{aligned} (\tilde{N}f)(x) = & \sum_{i=1}^d a_i(\tilde{X}_i f)(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(\tilde{X}_i \tilde{X}_j f)(x) \\ & + \int_G \left[f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^d \zeta_i(y) 1_{\{\|y\| < 1\}}(\tilde{X}_i f)(x) \right] \eta(dy), \end{aligned}$$

alakban, ahol $a = (a_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathbb{M}_d^+$, η egy Lévy-mérték G -n, és $\|y\|^2 := \sum_{i=1}^d \zeta_i(y)^2$. Nyilván a $(\xi(t))_{t \geq 0}$ folyamatot beazonosíthatjuk egy olyan folyamattal is, mely értékeit \mathbb{R}^d -ben veszi fel.

Legyen $\tilde{Y} := \sum_{i=1}^d a_i \tilde{X}_i$. Nyilván léteznek olyan

$$\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^d \sigma_{ij} \tilde{X}_i \in \mathfrak{L}(G), \quad j = 1, \dots, r \quad (r \leq d)$$

elemek úgy, hogy

$$\sum_{i=1}^r \tilde{e}_i^2 = \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$$

Továbbá

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^r \sigma_{ik} \sigma_{jk}$$

teljesül minden $i, j = 1, \dots, d$ esetén, azaz, mátrixos jelöléssel: $B = \Sigma \Sigma^\top$, ahol $\Sigma = (\sigma_{ij})$. Legyen $\tilde{T}_j \in \mathfrak{L}(G)$ az \tilde{e}_j^2 elsőrendű része:

$$\tilde{T}_j := \sum_{k=1}^d (\tilde{e}_j^2 \zeta_k) \partial_k.$$

Legyen $(W_1(t), \dots, W_r(t))_{t \geq 0}$ egy standard Wiener-folyamat \mathbb{R}^r -ben. Legyen továbbá $\mathcal{P}(ds \times dy)$ egy olyan stacionárius Poisson véletlen mérték $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ -n, mely független a $(W_1(t), \dots, W_r(t))_{t \geq 0}$ folyamattól, és intenzitás-mértéke $\mathbb{E}\mathcal{P}(ds \times dy) = ds \times \eta(dy)$. Legyen $\tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy)$ a kompenzátor-mértéke: $\tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy) := \mathcal{P}(ds \times dy) - ds \times \eta(dy)$. Használni fogjuk a $\xi(s-) := \lim_{u \uparrow s} \xi(u)$ jelölést. Jelölje $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ a $h(x) := x 1_{\{\|x\| < 1\}}$ nyírófüggvényt, és vezessük be a $\tilde{h} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\tilde{h}(x) := x - h(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ jelölést.

5.1.2 Tétel. *Az integrál-formában felírt*

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \int_0^t \tilde{Y}(\xi(s)) ds + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \int_0^t \tilde{T}_j(\xi(s)) ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \tilde{e}_j(\xi(s)) dW_j(s) \\ (5.1.3) \quad &+ \int_0^t \int_{\|y\| < 1} \left[\xi(s)y - \xi(s) - \sum_{k=1}^d y_k \tilde{X}_k(\xi(s)) \right] \eta(dy) ds \\ &+ \int_0^{t+} \int_{\|y\| < 1} [\xi(s-)y - \xi(s-)] \tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy) + \int_0^{t+} \int_{\|y\| \geq 1} [\xi(s-)y - \xi(s-)] \mathcal{P}(ds \times dy) \end{aligned}$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek létezik egyértelmű erős $\xi(t)$, $0 \leq t < \infty$, megoldása, mely egy időben homogén diffúzió ugrásokkal, melynek N infinitézimális generátora (5.1.1).

Bizonyítás. Erős megoldás létezése és egyértelműsége következik az egyenletben szereplő vektor-mezők lokális Lipschitz-tulajdonságából. Azt, hogy a megoldás „robbanási időpontja” végtelen, a szokásos módon lehet bizonyítani (lásd például Applebaum, Kunita [1, Theorem 2.4]).

Az egyenletben szereplő utolsó három tag összege átírható a következő standard alakban (lásd Jacod, Shiriyayev [59, p. 143]):

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int \left[h(\xi(s)y - \xi(s)) - \sum_{k=1}^d h_k(y) \tilde{X}_k(\xi(s)) \right] \eta(dy) ds \\ &+ \int_0^{t+} \int h(\xi(s-)y - \xi(s-)) \tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy) + \int_0^{t+} \int \tilde{h}(\xi(s-)y - \xi(s-)) \mathcal{P}(ds \times dy). \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy az (5.1.3) sztochasztikus differenciálegyenlet az N infinitézimális generátorhoz tartozó martingálproblémának felel meg. Az Itô-formulát alkalmazva az $f \in$

$\tilde{\mathcal{C}}^2(\mathbb{R}^d)$ függvényre (lásd például Ikeda, Watanabe [58, p. 66]):

$$\begin{aligned}
f(\xi(t)) &= f(\xi(0)) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(\xi(s)) (\tilde{Y}(\xi(s)))_i ds \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(\xi(s)) (\tilde{T}_j(\xi(s)))_i ds \\
&+ \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(\xi(s)) (\tilde{e}_j(\xi(s)))_i dW_j(s) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k,\ell=1}^d \int_0^t \partial_k \partial_\ell f(\xi(s)) (\tilde{e}_j(\xi(s)))_k (\tilde{e}_j(\xi(s)))_\ell ds \\
&+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \int \partial_i f(\xi(s)) \left[h_i(\xi(s)y - \xi(s)) - \sum_{k=1}^m h_k(y) (\tilde{X}_k(\xi(s)))_i \right] \eta(dy) ds \\
&+ \int_0^{t+} \int [f(\xi(s-) + \tilde{h}(\xi(s-)y - \xi(s-))) - f(\xi(s-))] \mathcal{P}(ds \times dy) \\
&+ \int_0^{t+} \int [f(\xi(s-) + h(\xi(s-)y - \xi(s-))) - f(\xi(s-))] \tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy) \\
&+ \int_0^t \int \left[f(\xi(s) + h(\xi(s)y - \xi(s))) - f(\xi(s)) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^d h_i(\xi(s)y - \xi(s)) \partial_i f(\xi(s)) \right] \eta(dy) ds \\
&= f(\xi(0)) + \int_0^t (\tilde{N}f)(\xi(s)) ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t (\tilde{e}_j f)(\xi(s)) dW_j(s) \\
&+ \int_0^{t+} \int [f(\xi(s-)y) - f(\xi(s-))] \tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy),
\end{aligned}$$

ezért az

$$f(\xi(t)) - f(\xi(0)) - \int_0^t (\tilde{N}f)(\xi(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

folyamat valóban martingál. Feinsilver [29] megmutatta, hogy az \tilde{N} operátorhoz tartozó martingál-problémának egyértelmű megoldása létezik, melyet ha úgy tekintünk, hogy a G csoportban veszi fel az értékeit, akkor egy független, stacionárius növekményű folyamat, melynek infinitézimális generátora \tilde{N} . \square

Az (5.1.3) egyenlet jobboldalán szereplő második és harmadik tag összege tömören írható

$$\sum_{i=1}^r \int_0^t \tilde{e}_j(\xi(s)) \circ dW_j(s)$$

alakban is, *Stratonovich-integrált* használva.

Mátrix Lie-csoport esetén Holevo [53] tartalmaz hasonló egyenletet, de az ő egyenletében tévedésből \tilde{X}_j^2 szerepel \tilde{T}_j helyett (mely annak csak az elsőrendű része), nem törődik a $\xi(s-)$ baloldali határértékkel, és a bizonyításában Emery [28] és Skorokhod eredményeire hivatkozik, holott azok *multiplikatív* sztochasztikus differenciálegyenletre vonatkoznak!

Tekintsünk most egy G egyszeresen összefüggő nilpotens Lie-csoportot, mely nyilván exponenciális Lie-csoport. Vezessük be a következő jelölést:

$$B_k := \{(I, J) \in \mathbb{Z}_+^d \times \mathbb{Z}_+^d : I, J \neq 0, d(I), d(J) \leq d_k - 1\}.$$

Ekkor az (2.4.1) rekurzív formula írható

$$\zeta_k(xy) = \zeta_k(x) + \zeta_k(y) + \sum_{(I,J) \in B_k} c_{IJ}^k \zeta^I(x) \zeta^J(y), \quad x, y \in G$$

alakban.

Tekintsük az \mathbb{R}^d -beli

$$(5.1.4) \quad Z_k(t) := a_k t + \sum_{j=1}^r \sigma_{kj} W_j(t),$$

$$(5.1.5) \quad \tilde{Z}_k(t) := Z_k(t) + \int_0^t \int_{\|y\| \geq 1} y_k \mathcal{P}(ds \times dy) + \int_0^t \int_{\|y\| < 1} y_k \tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy)$$

folyamatokat. Ekkor $(Z_1(t), \dots, Z_d(t))_{t \geq 0}$ egy olyan független, stacionárius növekményű Gauss-folyamat (azaz egy Wiener-folyamat), melynek infinitézimális generátora

$$\sum_{i=1}^d a_i \partial_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \partial_i \partial_j,$$

és $(\tilde{Z}_1(t), \dots, \tilde{Z}_d(t))_{t \geq 0}$ egy olyan független, stacionárius növekményű folyamat, melynek infinitézimális generátora $\tilde{N}(\partial_1, \dots, \partial_d)$ (azaz a $(\xi(t))_{t \geq 0}$ folyamat $\tilde{N} = \tilde{N}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_d)$ infinitézimális generátorában az \tilde{X}_i differenciáloperátor helyett ∂_i kerül), vagyis a Gauss-része $(Z_1(t), \dots, Z_d(t))_{t \geq 0}$, és a Lévy-mértéke η .

5.1.6 Tétel. *Legyen $(\xi(t))_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értékű független, stacionárius növekményű folyamat, melynek infinitézimális generátora (5.1.1), ahol a $B = (b_{ij})_{i,j=1}^d$ mátrix dekompozíciója $B = \Sigma \Sigma^\top$ valamely $\Sigma = (\sigma_{ij})$ $d \times r$ -es ($1 \leq r \leq d$) mátrix segítségével. Legyen $(W_1(t), \dots, W_r(t))_{t \geq 0}$ egy standard Wiener-folyamat \mathbb{R}^r -ben, legyen $(Z_1(t), \dots, Z_d(t))_{t \geq 0}$ az (5.1.4)-ben definiált Wiener-folyamat, és legyen $(\tilde{Z}_1(t), \dots, \tilde{Z}_d(t))_{t \geq 0}$ az (5.1.5)-ben definiált független, stacionárius növekményű folyamat \mathbb{R}^d -ben.*

Beazonosítva a $(\xi(t))_{t \geq 0}$ folyamatot egy \mathbb{R}^d -beli folyamattal, a következő reprezentáció

érvényes eloszlásban:

$$\xi_1(t) = \tilde{Z}_1(t),$$

...

$$\begin{aligned} \xi_k(t) = & \tilde{Z}_k(t) + \sum_{(I,J) \in B_k, |J| \leq 2} c_{IJ}^k \int_0^t (\xi(s))^I d(Z(s))^J \\ & + \sum_{(I,J) \in B_k, |J|=1} c_{IJ}^k \left[\int_0^{t+} \int_{\|y\| \geq 1} (\xi(s-))^I y^J \mathcal{P}(ds \times dy) + \int_0^{t+} \int_{\|y\| < 1} (\xi(s-))^I y^J \tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy) \right] \\ & + \sum_{(I,J) \in B_k, |J| \geq 2} c_{IJ}^k \int_0^{t+} \int (\xi(s-))^I y^J \mathcal{P}(ds \times dy), \\ & \dots \end{aligned}$$

ahol $|J| = 2$ esetén a $(Z(s))^J = Z_i(s)Z_j(s)$ folyamatot

$$\langle Z_i, Z_j \rangle_s = \left(\sum_{\ell=1}^r \sigma_{i\ell} \sigma_{j\ell} \right) s = b_{ij} s$$

helyettesíti.

Bizonyítás. Figyelembe véve a csoportbeli műveletet, az $\tilde{X}_i, \tilde{Y}, \tilde{e}_j, \tilde{T}_j \in \mathfrak{L}(G)$ differenciáloperátorok kifejezhetők a parciális differenciáloperátorokkal a következő módon:

$$\begin{aligned} (\tilde{X}_i f)(x) &= \sum_{k=1}^d \left(\delta_{ik} + \sum_{(J,[i]) \in B_k} c_{J[i]}^k x^J \right) \partial_k f(x), \\ (\tilde{Y} f)(x) &= \sum_{k=1}^d \left(a_k + \sum_{(I,J) \in B_k, |J|=1} c_{IJ}^k x^I a^J \right) \partial_k f(x), \\ (\tilde{e}_j f)(x) &= \sum_{k=1}^d \left(\sigma_{kj} + \sum_{(I,J) \in B_k, |J|=1} c_{IJ}^k x^I (\sigma_{\cdot j})^J \right) \partial_k f(x), \\ (\tilde{T}_j f)_i(x) &= 2 \sum_{(I,J) \in B_i, |J|=2} c_{IJ}^i x^I (\sigma_{\cdot j})^J \partial_i f(x). \end{aligned}$$

Alkalmazva ezeket az explicit kifejezéseket, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^t (\tilde{Y}(\xi(s)))_k ds &= a_k + \sum_{(I,[i]) \in B_k} c_{I[i]}^k \int_0^t (\xi(s))^I d(a_j s), \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \int_0^t (\tilde{T}_j(\xi(s)))_k ds &= \sum_{(I,[i]+[\ell]) \in B_k} c_{I,[i]+[\ell]}^k \int_0^t (\xi(s))^I d(b_{i\ell} s), \\ \sum_{j=1}^r \int_0^t (\tilde{e}_j(\xi(s)))_k dW_j(s) &= \sum_{j=1}^r \sigma_{kj} W_j(t) + \sum_{j=1}^r \sum_{(I,[\ell]) \in B_k} c_{I[\ell]}^k \int_0^t (\xi(s))^I d(\sigma_{\ell j} W_j(s)) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} (\xi(s)y)_k - \xi_k(s) - \sum_{i=1}^d \zeta_i(y)(\tilde{e}_i(\xi(s)))_k &= \sum_{(I,J) \in B_k, |J| \geq 2} c_{IJ}^k(\xi(s))^I y^J, \\ (\xi(s-)y)_k - \xi_k(s-) &= y_k + \sum_{(I,J) \in B_k} c_{IJ}^k(\xi(s-))^I y^J. \end{aligned}$$

Az 5.1.2 Tétel alkalmazásával kapjuk az állítást. \square

Példaként tekintsük a H Heisenberg-csoportot. Legyen $(\xi(t))_{t \geq 0}$ egy H -beli független, stacionárius növekményű folyamat. A folyamat \tilde{N} infinitézimális generátora a következő alakú:

$$\begin{aligned} (\tilde{N}f)(x) &= (\tilde{Y}f)(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\tilde{e}_i^2 f)(x) \\ &\quad + \int_H \left[f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^3 \zeta_i(y) 1_{\{\|y\| < 1\}} (\tilde{X}_i f)(x) \right] \eta(dy), \end{aligned}$$

ahol

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^3 a_i \tilde{e}_i \quad \text{és} \quad e_j = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} X_i.$$

Alkalmazva az 5.1.6 Tételt, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \tilde{Z}_1(t) \\ \xi_2(t) &= \tilde{Z}_2(t) \\ \xi_3(t) &= \tilde{Z}_3(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (\xi_1(s) dZ_2(s) - \xi_2(s) dZ_1(s)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t+} \int_{\|y\| \geq 1} (\xi_1(s-)y_2 - \xi_2(s-)y_1) \mathcal{P}(ds \times dy) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t+} \int_{\|y\| < 1} (\xi_1(s-)y_2 - \xi_2(s-)y_1) \tilde{\mathcal{P}}(ds \times dy) \\ &= \tilde{Z}_3(t) + \frac{1}{2} \int_0^{t+} (\xi_1(s-) d\tilde{Z}_2(s) - \xi_2(s-) d\tilde{Z}_1(s)), \end{aligned}$$

ahol

$$Z_i(t) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} W_j(t) + a_i t,$$

$(W_1(t), W_2(t), W_3(t))_{t \geq 0}$ egy standard Wiener-folyamat \mathbb{R}^3 -ban, és

$$(\tilde{Z}_1(t), \tilde{Z}_2(t), \tilde{Z}_3(t))_{t \geq 0}$$

egy olyan független, stacionárius növekményű folyamat \mathbb{R}^3 -ban, melynek Lévy-mértéke η és a Gauss-része $(Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t))_{t \geq 0}$.

5.2 Beágyazási probléma

Legyen G egy egyszeresen összefüggő nilpotens Lie-csoport. Legyen $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy Gauss-félcsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Ekkor a $(\mu_t)_{t \geq 0}$ infinitézimális generátora

$$(5.2.1) \quad \tilde{N} = \sum_{i=1}^d a_i \tilde{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j$$

alakú, ahol $a = (a_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ és $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathbb{M}_d^+$. Megint legyen $\tilde{Y} := \sum_{i=1}^d a_i \tilde{X}_i$, és

$$\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^d \sigma_{ij} \tilde{X}_i \in \mathfrak{L}(G), \quad j = 1, \dots, r \quad (r \leq d)$$

olyan elemek, hogy

$$\sum_{i=1}^r \tilde{e}_i^2 = \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \tilde{X}_i \tilde{X}_j.$$

Legyen $(W_1(t), \dots, W_r(t))_{t \geq 0}$ egy standard Wiener-folyamat \mathbb{R}^r -ben, és legyen

$$Z_i(t) := \sum_{j=1}^r \sigma_{ij} W_j(t) + a_i t.$$

Az 5.1.6 Tétel szerint a μ_t mérték előállítható, mint az $(U_1(t), \dots, U_d(t))_{t \geq 0}$ \mathbb{R}^d -beli folyamat t időpontbeli eloszlása, ahol

$$(5.2.2) \quad \begin{aligned} U_1(t) &= Z_1(t) \\ &\dots \\ U_k(t) &= Z_k(t) + \sum_{d(I), d(J) \leq d_k - 1, |J| \leq 2} c_{IJ}^k \int_0^t (U(s))^I d(Z(s))^J \\ &\dots \end{aligned}$$

ahol $|J| = 2$ esetén a $(Z(s))^J = Z_i(s)Z_j(s)$ folyamatot

$$\langle Z_i, Z_j \rangle_s = \left(\sum_{\ell=1}^r \sigma_{i\ell} \sigma_{j\ell} \right) s = b_{ij} s$$

helyettesíti (lásd még Roynette [84]).

5.2.3 Tétel. *Legyenek $(\mu_t)_{t \geq 0}$ és $(\nu_t)_{t \geq 0}$ olyan Gauss-félcsoportok egy egyszeresen összefüggő, nilpotens Lie-csoporton, hogy $\mu_1 = \nu_1$. Ekkor $\mu_t = \nu_t$ minden $t \geq 0$ esetén.*

Bizonyítás. Be fogjuk látni, hogy a $(\mu_t)_{t \geq 0}$ Gauss-félcsoport (5.2.1) infinitézimális generátorát egyértelműen meghatározza a μ_1 mérték, sőt valójában már az

$$\left\{ \int_G \zeta_i(x) \mu_1(dx), \int_G \zeta_i(x) \zeta_j(x) \mu_1(dx) : 1 \leq i, j \leq d \right\}$$

momentumok is. Vagyis azt fogjuk bizonyítani, hogy a

$$\mathbb{E}U_i(1) = \int_G \zeta_i(x) \mu_1(dx), \quad \mathbb{E}U_i(1)U_j(1) = \int_G \zeta_i(x)\zeta_j(x) \mu_1(dx), \quad 1 \leq i, j \leq d$$

momentumok egyértelműen meghatározzák az $a_i, b_{ij}, 1 \leq i, j \leq d$ paramétereket. Mivel a $(Z_1(t), \dots, Z_d(t))_{t \geq 0}$ folyamat egy olyan független, stacionárius növekményű folyamat \mathbb{R}^d -ben, melynek infinitézimális generátora

$$\sum_{i=1}^d a_i \partial_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \partial_i \partial_j,$$

így

$$a_i = \mathbb{E}Z_i(1), \quad b_{ij} = \text{Cov}(Z_i(1), Z_j(1)).$$

Tehát elég azt mutatni k szerinti teljes indukcióval, hogy a

$$\{\mathbb{E}U_i(1), \mathbb{E}U_i(1)U_j(1) : 1 \leq i, j \leq k\}$$

momentumok egyértelműen meghatározzák az

$$(U_1(t), \dots, U_k(t), Z_1(t), \dots, Z_k(t))_{t \geq 0}$$

folyamat eloszlását. Ha $k = 1$, akkor a $(Z_1(t))_{t \geq 0}$ folyamat egy független, stacionárius növekményű Gauss-folyamat \mathbb{R} -ben, ezért a $\mathbb{E}Z_1(1)$ és $\mathbb{E}Z_1^2(1)$ momentumok egyértelműen meghatározzák a $(Z_1(t))_{t \geq 0}$ folyamat eloszlását. Mivel $U_1(t) = Z_1(t)$, így a $\mathbb{E}U_1(1)$ és $\mathbb{E}U_1^2(1)$ momentumok egyértelműen meghatározzák az $(U_1(t), Z_1(t))_{t \geq 0}$ folyamat eloszlását.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k - 1$ -ig. Mivel

$$(Z_1(t), \dots, Z_k(t))_{t \geq 0}$$

egy független, stacionárius növekményű Gauss-folyamat \mathbb{R}^k -ban, ezért a

$$\{\mathbb{E}Z_i(1), \mathbb{E}Z_i(1)Z_j(1) : 1 \leq i, j \leq k\}$$

momentumok egyértelműen meghatározzák a $(Z_1(t), \dots, Z_k(t))_{t \geq 0}$ folyamat eloszlását. Mivel

$$\mathbb{E}U_k(1) = \mathbb{E}Z_k(1) + \sum_{d(I), d(J) \leq d_k - 1, |J| \leq 2} c_{IJ}^k \mathbb{E} \int_0^1 (U(s))^I d(Z(s))^J,$$

így az indukciós feltevés alapján a $\mathbb{E}U_k(1) - \mathbb{E}Z_k(1)$ mennyiségeket egyértelműen meghatározzák a

$$\{\mathbb{E}U_i(1), \mathbb{E}U_i(1)U_j(1) : d_i, d_j \leq d_k - 1\}$$

momentumok. Ha $1 \leq \ell \leq k$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U_\ell(1)U_k(1) = & \mathbb{E}Z_\ell(1)Z_k(1) + \sum_{d(I), d(J) \leq d_k-1, |J| \leq 2} c_{IJ}^k \mathbb{E}Z_\ell(1) \int_0^1 (U(s))^I d(Z(s))^J \\ & + \sum_{d(I), d(J) \leq d_\ell-1, |J| \leq 2} c_{IJ}^\ell \mathbb{E}Z_k(1) \int_0^1 (U(s))^I d(Z(s))^J \\ & + \sum_{\substack{d(I), d(J) \leq d_\ell-1, |J| \leq 2 \\ d(K), d(L) \leq d_k-1, |L| \leq 2}} c_{IJ}^\ell c_{KL}^k \mathbb{E} \int_0^1 (U(s))^I d(Z(s))^J \int_0^1 (U(s))^K d(Z(s))^L, \end{aligned}$$

tehát megint felhasználva az indukciós hipotézist beláthatjuk d_ℓ szerinti teljes indukcióval, hogy a $\mathbb{E}U_\ell(1)U_k(1) - \mathbb{E}Z_\ell(1)Z_k(1)$ mennyiségeket egyértelműen meghatározzák az

$$\begin{aligned} & \{\mathbb{E}U_\ell(1), \mathbb{E}U_k(1), \mathbb{E}U_i(1) : d_i \leq d_k - 1\}, \\ & \{\mathbb{E}U_\ell(1)U_j(1), \mathbb{E}U_i(1)U_k(1), \mathbb{E}U_i(1)U_j(1) : d_i \leq d_\ell - 1, d_j \leq d_k - 1\} \end{aligned}$$

momentumok. Következésképpen a

$$\{\mathbb{E}U_i(1), \mathbb{E}U_i(1)U_j(1) : 1 \leq i, j \leq k\}$$

momentumok egyértelműen meghatározzák a

$$\{\mathbb{E}Z_i(1), \mathbb{E}Z_i(1)Z_j(1) : 1 \leq i, j \leq k\}$$

momentumokat, tehát a $(Z_1(t), \dots, Z_k(t))_{t \geq 0}$ folyamat eloszlását is. Felhasználva újra a (5.2.2) rekurzív formulát, kapjuk hogy az indukciós állítás igaz k -ra is. \square

Példaként megint tekintsük a H Heisenberg-csoportot. Legyen $(\nu)_{t \geq 0}$ egy Gauss-félcsoport $\mathfrak{M}^1(H)$ -ban. Az infinitézimális generátora a következő alakú:

$$\tilde{N} = \tilde{Y} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i^2,$$

ahol

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^3 a_i \tilde{e}_i \quad \text{és} \quad \tilde{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} \tilde{X}_i.$$

Az (5.2.2) rekurzív formulák szerint ν_t az $(U_1(t), U_2(t), U_3(t))_{t \geq 0}$ \mathbb{R}^3 -beli folyamat t időpontbeli eloszlása, ahol

$$\begin{aligned} U_1(t) &= Z_1(t) \\ U_2(t) &= Z_2(t) \\ U_3(t) &= Z_3(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (Z_1(s) dZ_2(s) - Z_2(s) dZ_1(s)), \end{aligned}$$

ahol

$$Z_i(t) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} W_j(t) + a_i t,$$

és $(W_1(t), W_2(t), W_3(t))_{t \geq 0}$ egy standard Wiener-folyamat \mathbb{R}^3 -ban. Nyilván

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U_i(1) &= \mathbb{E}Z_i(1) \quad \text{ha } i = 1, 2, 3 \\ \mathbb{E}U_i(1)U_j(1) &= \begin{cases} \mathbb{E}Z_3^2(1) + \frac{1}{4} (\mathbb{D}^2 Z_1(1)\mathbb{D}^2 Z_2(1) - (\text{Cov}(Z_1(1), Z_2(1)))^2) & \text{ha } i = j = 3 \\ \mathbb{E}Z_i(1)Z_j(1) & \text{egyébként.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ezért a $(\nu_t)_{t \geq 0}$ Gauss-félcsoport \tilde{N} infinitézimális generátorát a μ_1 mérték a következő módon határozza meg:

$$a_i = \mathbb{E}Z_i(1) = \mathbb{E}U_i(1) \quad \text{ha } i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \text{Cov}(Z_i(1), Z_j(1)) \\ &= \begin{cases} \mathbb{D}^2 U_3(1) - \frac{1}{4} (\mathbb{D}^2 U_1(1)\mathbb{D}^2 U_2(1) - (\text{Cov}(U_1(1), U_2(1)))^2) & \text{ha } i = j = 3 \\ \text{Cov}(U_i(1), U_j(1)) & \text{egyébként,} \end{cases} \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U_i(1) &= \int_H \zeta_i(x) \mu_1(dx), \\ \text{Cov}(U_i(1), U_j(1)) &= \int_H \zeta_i(x) \zeta_j(x) \mu_1(dx) - \left(\int_H \zeta_i(x) \mu_1(dx) \right) \left(\int_H \zeta_j(x) \mu_1(dx) \right) \end{aligned}$$

minden $1 \leq i, j \leq 3$ esetén.

5.3 Gauss-félcsoportok karakterizációja

Ha $(D, \mathcal{H}(D))$ egy unitér reprezentációja G -nek, akkor a \overline{D} konjugált reprezentáció reprezentációs tere $\overline{\mathcal{H}(D)}$, a $\mathcal{H}(D)$ \mathbb{C} -lineáris duáltja. Legyen $u \in \mathcal{H}(D)$ esetén $\overline{u} \in \overline{\mathcal{H}(D)}$ az az elem, melyre $\overline{u}(v) = \langle v, u \rangle$. Ez az $u \mapsto \overline{u}$ leképezés bijektív és konjugált lineáris. A belső szorzás $\overline{\mathcal{H}(D)}$ -ben $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle := \langle u, v \rangle$, és a \overline{D} konjugált reprezentáció definíciója $\overline{D}(x)\overline{u} := \overline{D(x)u}$. Tehát $\overline{D}(x)$ mátrix-elemei a $D(x)$ mátrix-elemeinek komplex konjugáltjai.

Legyen $(D_1, \mathcal{H}(D_1))$ és $(D_2, \mathcal{H}(D_2))$ két reprezentációja a G csoportnak. A $\mathcal{H}(D_1)$ és $\mathcal{H}(D_2)$ Hilbert-terek $\mathcal{H}(D_1) \overline{\otimes} \mathcal{H}(D_2)$ tenzorszorzata az összes $S : \overline{\mathcal{H}(D_2)} \rightarrow \mathcal{H}(D_1)$ Hilbert-Schmidt operátorból álló Hilbert-tér. A $\mathcal{H}(D_1)$ és $\mathcal{H}(D_2)$ terek, mint vektorterek $\mathcal{H}(D_1) \otimes \mathcal{H}(D_2)$ -vel jelölt algebrai tenzorszorzata egy sűrű alteret alkot $\mathcal{H}(D_1) \overline{\otimes} \mathcal{H}(D_2)$ -ben, amennyiben beazonosítjuk az $u \otimes v$ szorzatot az $(u \otimes v)(\overline{w}) := \langle v, w \rangle u$ operátorral, és $\langle u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle$. A $D_1 \otimes D_2$ tenzorszorzat-reprezentáció definíciója a

$\mathcal{H}(D_1) \otimes \mathcal{H}(D_2)$ altéren $(D_1 \otimes D_2)(x)(u \otimes v) := D_1(x)u \otimes D_2(x)v$ ha $x \in G$, $u \in \mathcal{H}(D_1)$ és $v \in \mathcal{H}(D_2)$. Ez kiterjeszthető unitér reprezentációvá $\mathcal{H}(D_1) \overline{\otimes} \mathcal{H}(D_2)$ -re $(D_1 \otimes D_2)(x)S := D_1(x) \circ S \circ (\overline{D_2(x)})^{-1}$ segítségével ha $x \in G$.

Legyen most G egy Lie-csoport, $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy konvolúciós félcsoporth $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, és $D \in \text{Rep}(G)$. Jelölje $(\mu_t)_{t \geq 0}$ generáló funkcionálját $(A, \text{Dom}(A))$. A Fourier-transzformáció szokásos tulajdonságaiból következik, hogy $(\hat{\mu}_t(D))_{t \geq 0}$ egy erősen folytonos operátor-félcsoporth, mely $\mathcal{H}(D)$ kontrakcióiból áll. Jelölje az infinitézimális generátorát $(A(D), \text{Dom}(A(D)))$. Siebert [89] alapján

$$\text{Dom}(A(D)) = \{u \in \mathcal{H}(D) : \langle Du, v \rangle \in \text{Dom}(A) \text{ ha } v \in \mathcal{H}(D)\}$$

és

$$\langle A(D)u, v \rangle = A(\langle Du, v \rangle)$$

ha $u \in \text{Dom}(A(D))$ és $v \in \mathcal{H}(D)$. Továbbá $\mathcal{H}_0(D) \subseteq \text{Dom}(A(D))$.

Jelölje $D \in \text{Rep}(G)$ és $u \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén $f_{D,u} : G \rightarrow \mathbb{R}$ a következő függvényt:

$$f_{D,u}(x) := \text{Re}[\langle u, u \rangle - \langle D(x)u, u \rangle].$$

5.3.1 Tétel. *Legyen G egy Lie-csoport. Legyen $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy nem elfajult mértékekből álló konvolúciós félcsoporth $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben A generáló funkcionállal és η Lévy-mértékkel. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (i) $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy Gauss-félcsoporth.
- (ii) $\eta = 0$.
- (iii) $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_G f(x) \mu_t(dx) = 0$ minden olyan $f \in \mathfrak{C}^b(G)$ függvényre, melyre $e \notin \text{supp}(f)$.
- (iv) $A(f_{D,u}^2) = 0$ minden $D \in \text{Irr}(G)$ és $u \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén.
- (v) Teljesül a

$$\text{Re}\langle A(D \otimes D)(u \otimes u), u \otimes u \rangle + \text{Re}\langle A(D \otimes \overline{D})(u \otimes \bar{u}), u \otimes \bar{u} \rangle = 4\|u\|^2 \text{Re}\langle A(D)u, u \rangle$$

Gauss-feltétel minden $D \in \text{Irr}(G)$ és $u \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén.

Bizonyítás. (i) \iff (ii) \iff (iii) jól ismert (lásd Heyer [48]).

(ii) \implies (iv) közvetlenül következik a Lévy-Hincsin-formulából, hiszen $D \in \text{Irr}(G)$ és $u \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén $f_{D,u}(e) = 0$ és $(X_i f_{D,u})(e) = 0$, $i = 1, \dots, d$, valamint

$$(X_i f_{D,u}^2)(e) = 0, \quad (X_i X_j f_{D,u}^2)(e) = 0$$

ha $i, j = 1, \dots, d$.

(iv) \iff (v). Tetszőleges $D \in \text{Irr}(G)$ és $u \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén érvényesek a következő azonosságok:

$$\begin{aligned}
 f_{D \otimes D, u \otimes u}(x) &= \|u\|^4 - \text{Re}[\langle D(x)u, u \rangle^2] \\
 f_{D \otimes \bar{D}, u \otimes \bar{u}}(x) &= \|u\|^4 - \text{Re}[\langle D(x)u, u \rangle \langle \bar{D}(x)\bar{u}, \bar{u} \rangle] \\
 &= \|u\|^4 - \text{Re}[\langle D(x)u, u \rangle \overline{\langle D(x)u, u \rangle}] \\
 4\|u\|^2 f_{D,u}(x) - 2f_{D,u}^2(x) &= 2f_{D,u}(x)(2\|u\|^2 - f_{D,u}(x)) \\
 &= 2\|u\|^4 - 2(\text{Re}\langle D(x)u, u \rangle)^2 \\
 &= 2\|u\|^4 - \text{Re}[\langle D(x)u, u \rangle (\langle D(x)u, u \rangle + \overline{\langle D(x)u, u \rangle})].
 \end{aligned}$$

Így

$$f_{D \otimes D, u \otimes u} + f_{D \otimes \bar{D}, u \otimes \bar{u}} = 4\|u\|^2 f_{D,u} - 2f_{D,u}^2$$

és

$$Af_{D,u} = -\text{Re}\langle A(D)u, u \rangle,$$

amiből következik az ekvivalencia.

(iv) \implies (ii). A Lévy–Hincsin-formula alapján minden $D \in \text{Irr}(G)$ és $u \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén teljesül

$$0 = A(f_{D,u}^2) = \int_G f_{D,u}^2(x) \eta(dx).$$

Mivel

$$\bigcap_{u \in \mathcal{H}_0(D)} \{x \in G : f_{D,u}^2(x) = 0\} = \ker(D)$$

tetszőleges $D \in \text{Irr}(G)$ esetén (lásd Siebert [89, Proof of Lemma 5.2] és

$$\bigcap_{D \in \text{Irr}(G)} \ker(D) = e$$

(lásd Hewitt, Ross [46, (22.12)]), azt kapjuk, hogy $\eta = 0$. □

5.3.2 Megjegyzés. Az (v) Gauss-feltétel nyilván megfogalmazható a $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoport generáló funkcionáljával is:

$$\text{Re } A(\langle (D \otimes D)(u \otimes u), u \otimes u \rangle) + \text{Re } A(\langle (D \otimes \bar{D})(u \otimes \bar{u}), u \otimes \bar{u} \rangle) = 4\|u\|^2 \text{Re } A(\langle Du, u \rangle)$$

minden $D \in \text{Irr}(G)$ és $u \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén.

5.3.3 Megjegyzés. Sajnos általában az (v) Gauss-feltételből nem következik, hogy maga a $\hat{\mu}_1$ Fourier-transzformált is kielégít valamilyen egyenletet, mint abban az esetben, amikor G -nek csak végesdimenziós irreducibilis reprezentációi vannak. Ezért ebből az eredményből nem tudjuk levezetni, hogy a Gauss-mértékek definíciója független a beágyazó félcsoporttól.

5.3.4 Megjegyzés. Ha $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy Gauss-félcsoport A generáló funkcionállal, akkor az

$$f_{D \otimes D, u \otimes v} + f_{D \otimes \bar{D}, u \otimes \bar{v}} = 2(\|u\|^2 f_{D, v} + \|v\|^2 f_{D, u} - f_{D, u} f_{D, v})$$

azonosság alapján

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle A(D \otimes D)(u \otimes v), u \otimes v \rangle + \operatorname{Re} \langle A(D \otimes \bar{D})(u \otimes \bar{v}), u \otimes \bar{v} \rangle \\ &= 2(\|u\|^2 \operatorname{Re} \langle A(D)v, v \rangle + \|v\|^2 \operatorname{Re} \langle A(D)u, u \rangle) \end{aligned}$$

érvényes minden $D \in \operatorname{Rep}(G)$ és $u, v \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén.

Bevezetve az

$$f_{D, u, v}(x) := \operatorname{Re}[\langle u, v \rangle - \langle D(x)u, v \rangle]$$

jelölést $D \in \operatorname{Rep}(G)$, $u, v \in \mathcal{H}_0(D)$ és $x \in G$ esetén, belátható az

$$\begin{aligned} & f_{D \otimes D, u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2} + f_{D \otimes \bar{D}, u_1 \otimes \bar{v}_1, u_2 \otimes \bar{v}_2} \\ &= 2(\operatorname{Re} \langle u_1, u_2 \rangle f_{D, v_1, v_2} + \operatorname{Re} \langle v_1, v_2 \rangle f_{D, u_1, u_2} - f_{D, u_1, u_2} f_{D, v_1, v_2}) \end{aligned}$$

azonosság, és megmutatható, hogy az A generáló funkcionál kielégíti a

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle A(D \otimes D)(u_1 \otimes v_1), u_2 \otimes v_2 \rangle + \operatorname{Re} \langle A(D \otimes \bar{D})(u_1 \otimes \bar{v}_1), u_2 \otimes \bar{v}_2 \rangle \\ &= 2(\operatorname{Re} \langle u_1, u_2 \rangle \operatorname{Re} \langle A(D)v_1, v_2 \rangle + \operatorname{Re} \langle v_1, v_2 \rangle \operatorname{Re} \langle A(D)u_1, u_2 \rangle) \end{aligned}$$

egyenletet minden $D \in \operatorname{Rep}(G)$ és $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{H}_0(D)$ esetén.

6. fejezet

Nem–kommutatív háromszögrendszerek konvergenciája korlátos változású hemicsoportokhoz

6.1 A funkcionális centrális határeloszlás–tétel problémaköre

A funkcionális centrális határeloszlás–tétel problémakörével kapcsolatosan a bevezetésben feltett két kérdésre a $G = (\mathbb{R}^d, +)$ csoport esetén jól ismertek a válaszok. Ezek megfogalmazásához először vezessük be a következő fogalmakat és jelöléseket.

Egy $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvényt *nyírófüggvénynek* nevezünk, ha $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, és $h(x) = x$ teljesül valamely $U \in \mathfrak{U}(0)$ környezetben.

Jelölje $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ azon $\eta \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ mértékek halmazát, melyekre $\eta(\{0\} \times \mathbb{R}_+) = 0$ és a $t \mapsto \int (|y|^2 \wedge 1) \eta(dy \times [0, t])$ leképezés folytonos.

Jelölje $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ azon (a, B, η) hármasok halmazát, ahol $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos és $a(0) = 0$, $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ monoton növekvő, folytonos és $B(0) = 0$, valamint $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$.

Az \mathbb{R}^d –beli értékű, független növekményű, sztochasztikusan folytonos folyamatok által a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ Szkorohod–téren indukált valószínűségi mértékek $\text{PII}_c(\mathbb{R}^d)$ halmazát a karakterisztikus függvények segítségével a következő módon lehet karakterizálni (lásd például Jacod, Shiryaev [59, II.5.2 Theorem]).

6.1.1 Tétel. *Tekintsük azt a*

$$\text{PII}_c(\mathbb{R}^d) \ni \mu \sim (a, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$$

relációt, mely akkor áll fenn, ha

$$\int e^{i\langle u, x(t) - x(s) \rangle} \mu(dx) = \exp \left\{ i\langle u, a(t) - a(s) \rangle - \frac{1}{2} \langle u, (B(t) - B(s))u \rangle + \int (e^{i\langle u, y \rangle} - 1 - i\langle u, h(y) \rangle) \eta(dy \times]s, t]) \right\}$$

teljesül minden $u \in \mathbb{R}^d$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Ekkor ez a reláció egy bijekció.

Mielőtt a második kérdésre a $G = (\mathbb{R}^d, +)$ csoport esetén megfogalmazzuk a választ, vezessük be a következő jelöléseket. Egy $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ hármas esetén jelölje $\widehat{B} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ azt a mátrix-értékű függvényt, melyre $\widehat{B}(t) = (\widehat{b}(i, j)(t))_{i, j=1, \dots, d}$,

$$\widehat{b}(i, j)(t) := b(i, j)(t) + \int h_i(y) h_j(y) \eta(dy \times [0, t]).$$

Ekkor nyilván $(a, \widehat{B}, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, és az $(a, B, \eta) \mapsto (a, \widehat{B}, \eta)$ leképezés injektív. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiáljuk az $a_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $\widehat{B}_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ függvényeket a következő módon:

$$a_n(t) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \mathbb{E} h(\xi_{n\ell}), \quad \widehat{B}_n(t) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \text{Cov}(h(\xi_{n\ell})),$$

valamint az $\eta_n \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ mértéket:

$$\eta_n(dy \times [0, t]) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}(dy),$$

ahol $\mu_{n\ell}$ a $\xi_{n\ell}$ eloszlását jelöli.

Háromszögrendszeréből felépített véletlen lépcsősfüggvény-sorozatnak egy független növekményű sztochasztikusan folytonos folyamathoz való konvergenciájára a következő tétel ad szükséges és elegendő feltételt (lásd például Jacod, Shiryaev [59, VII.3.4 Theorem, II.3.11 Theorem]).

6.1.2 Tétel. Legyen $\{\xi_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ \mathbb{R}^d -beli valószínűségi változók soronként független rendszere. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ olyan monoton növekvő függvény, melyre $k_n = 0$ és $k_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{Z}_+$. Tegyük fel, hogy minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén a $\{\xi_{n\ell} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq k_n(t)\}$ rendszer infinitézimális. Legyen $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ egy olyan \mathbb{R}^d -beli értékeket felvevő független növekményű, sztochasztikusan folytonos folyamat, melynek trajektóriái a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ Skorohod-térbe esnek. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ban.

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

$$(i) \quad \sum_{\ell=1}^{k_n(\cdot)} \xi_{n\ell} \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi.$$

- (ii) (a) $a_n(t) \rightarrow a(t)$ egyenletesen $t \in [0, T]$ -ben minden $T > 0$ esetén,
 (b) $\widehat{B}_n(t) \rightarrow \widehat{B}(t)$ ha $t \in D$,
 (c) $\int f(y) \eta_n(dy \times [0, t]) \rightarrow \int f(y) \eta(dy \times [0, t])$ ha $t \in D$, $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Az a célunk, hogy megkeressük a 6.1.1 és 6.1.2 Tételek általánosítását Lie-csoportokra. A $\text{PII}_c(G)$ halmaz parametrizálása reménytelennek tűnik Fourier-transzformáltak segítségével, ezért inkább a konvolúciós operátorokat fogjuk használni.

Először is rávilágítunk a konvolúciós hemicsoportokkal való kapcsolatra. Ha $(\xi(t))_{t \geq 0}$ egy G -beli értékeket felvevő független bal-növekményű sztochasztikusan folytonos folyamat, akkor a $(\xi(s))^{-1}\xi(t)$, $(s, t) \in \mathbb{S}$ bal-növekmények eloszlásai egy konvolúciós hemicsoportot alkotnak $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Ha ráadásul a $(\xi(t))_{t \geq 0}$ folyamat bal-növekményei stacionáriusak, azaz $(\xi(s))^{-1}\xi(s+t)$ eloszlása független s -től, akkor ezek egy konvolúciós félcsoportot alkotnak $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben.

Fordítva: ha $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy konvolúciós hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, akkor létezik olyan $(\xi(t))_{t \geq 0}$ G -beli értékeket felvevő független bal-növekményű sztochasztikusan folytonos, $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ -beli trajektóriájú folyamat, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén a $(\xi(s))^{-1}\xi(t)$ bal-növekmény eloszlása $\nu(s, t)$. Ha pedig $(\nu(t))_{t \geq 0}$ egy konvolúciós félcsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, akkor létezik olyan $(\xi(t))_{t \geq 0}$ G -beli értékeket felvevő független, stacionárius bal-növekményű sztochasztikusan folytonos, $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ -beli trajektóriájú folyamat, hogy minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén $\xi(t)$ eloszlása $\nu(t)$.

A konvolúciós operátorokkal létesített $\mu \sim T_\mu$ reláció pedig létrehoz egy bijekciót egyrészt

- az $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli $(\nu(t))_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoportok és azon $(T(t))_{t \geq 0}$ erősen folytonos egy-paraméteres operátor-félcsoportok között, melyek a $\mathfrak{C}^0(G)$ Banach-téren értelmezett pozitív, balinvariáns, 1 normájú korlátos, lineáris operátorokból állnak,

másrészt

- az $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ konvolúciós hemicsoportok és azon $(T(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ evolúciós operátor-családok között, melyek a $\mathfrak{C}^0(G)$ Banach-téren értelmezett pozitív, balinvariáns, 1 normájú korlátos, lineáris operátorokból állnak,

ahol evolúciós operátor-család alatt a következő fogalmat értjük:

6.1.3 Definíció. Egy E Banach-tér korlátos, lineáris operátoraiból álló $(T(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ halmazt evolúciós operátor-családnak nevezzük, ha $T(s, r)T(r, t) = T(s, t)$ teljesül minden $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$ esetén, $T(t, t) = I$ minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén, és az $(s, t) \mapsto T(s, t)$ leképezés erősen folytonos.

A Hille–Yosida elmélet alapján tudjuk, hogy kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van egy E Banach-téren értelmezett $(T(t))_{t \geq 0}$ erősen folytonos egy-paraméteres operátor-félcsoport és annak $(N, \text{Dom}(N))$ infinitézimális generátora között, ahol

$$Nf := \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)f - f}{h}, \quad f \in \text{Dom}(N).$$

Megjegyezzük, hogy ha $(\nu(t))_{t \geq 0}$ egy konvolúciós félcsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, és tekintjük a $(T_{\nu(t)})_{t \geq 0}$ operátor-félcsoportot $\mathfrak{C}^0(G)$ -n, akkor a hozzá tartozó \tilde{N} infinitézimális generátor értelmezési tartományára teljesül $\text{Dom}(\tilde{N}) \supseteq \tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ (lásd Born [15]).

Ez alapján azt váránk, hogy egy $(T(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ evolúciós operátor-család leírható infinitézimális generátoroknak valamely $(\tilde{N}(t))_{t \geq 0}$ seregével, ahol $\tilde{N}(t)$ az evolúciós család „deriváltja t -ben”. Az egyik lehetséges kapcsolat tehát egy $(T(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ evolúciós operátor-család és infinitézimális generátorok valamely $(\tilde{N}(t))_{t \geq 0}$ serege között az volna, hogy $f \in E$ elemek alkalmas halmazára és minden $r > 0$ esetén teljesül

$$\tilde{N}(r)f = \left. \frac{\partial^+}{\partial t} \right|_{t=r} T(r, t)f = - \left. \frac{\partial^-}{\partial s} \right|_{s=r} T(s, r)f,$$

amiből az következne, hogy teljesülnének a Kolmogorov-féle differenciálegyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^+}{\partial t} T(s, t)f &= T(s, t)\tilde{N}(t)f & (\text{forward}) \\ \frac{\partial^-}{\partial t} T(s, t)f &= -\tilde{N}(s)T(s, t)f & (\text{backward}) \end{aligned}$$

(lásd Heyer [48]).

A differenciálhatósági feltételt gyengíthetjük, ha a fenti egyenletek integrálásával kapott evolúciós egyenleteket tekintjük:

$$\begin{aligned} T(s, t)f - f &= \int_s^t T(s, \tau)\tilde{N}(\tau)f \, d\tau & (\text{forward}) \\ T(s, t)f - f &= \int_s^t \tilde{N}(\tau)T(\tau, t)f \, d\tau & (\text{backward}) \end{aligned}$$

ahol az integrált például Bochner-integrálként értelmezhetjük.

Tovább lehet gyengíteni a feltételeket, ha Riemann–Stieltjes-integrálra térünk át: $\widetilde{M}(d\tau) := \tilde{N}(\tau) \, d\tau$, így például

$$\begin{aligned} T(s, t) - I &= \int_s^t T(s, \tau)\widetilde{M}(d\tau) := \lim_{Z \in \mathfrak{F}(s, t)} \sum_{(\tau_{i-1}, \tau_i) \in Z} T(s, \tilde{\tau}_i)(\widetilde{M}(\tau_i) - \widetilde{M}(\tau_{i-1})), \\ T(s, t) - I &= \int_s^t \widetilde{M}(d\tau)T(\tau, t), \end{aligned}$$

ahol $\mathfrak{F}(s, t)$ az (s, t) intervallum felosztásainak halmaza (lásd 6.2 paragrafus), és $\tilde{\tau}_i \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$. (Itt persze $t \mapsto \widetilde{M}(t)$ olyan függvény, melynek értékei infinitézimális generátorok,

és növekvő abban az értelemben, hogy tetszőleges $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\widetilde{M}(t) - \widetilde{M}(s)$ is infinitézimális generátor.)

Evolúciós operátor-családra vonatkozó Hille–Yosida elmélettel kapcsolatosan meglehetősen kevés eredmény ismert. A legjobb eredményt Herod, McKelvey [45] érték el, akik Banach-terek egymásba ágyazott láncolatán vizsgáltak olyan evolúciós operátor-családokat, melyek kontraktív operátorokból állnak és korlátos változásúak a láncra nézve, és azt mutatták meg, hogy az ilyen evolúciós operátor-családok karakterizálhatóak Riemann–Stieltjes típusú evolúciós integrálegyenletekkel.

Born [16] ez alapján karakterizálta az erősen korlátos változású konvolúciós hemicsopor-tokat $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben tetszőleges lokálisan kompakt G csoport esetén: megmutatta, hogy a Riemann–Stieltjes típusú evolúciós integrálegyenletek segítségével bijekciót kapunk az erősen korlátos változású konvolúciós hemicsoportok és az $\widetilde{M} : \mathbb{R}_+ \rightarrow L(\widetilde{\mathfrak{C}}_2(G), \mathfrak{C}^0(G))$, $\widetilde{M}(0) = I$ folytonosan korlátos változású, monoton növekvő függvények között. (Itt a monoton növekedést úgy kell érteni, hogy tetszőleges $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\widetilde{M}(t) - \widetilde{M}(s)$ valamely $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli konvolúciós félcsoport infinitézimális generátorának megszorítása $\widetilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ -re.) Viszont Born módszere nem vihető tovább tetszőleges konvolúciós hemicsoportra.

A 6. fejezet célja az, hogy egy G Lie-csoport esetén

- parametrizáljuk az $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli gyengén korlátos változású konvolúciós hemicsopor-tokat; ez egy $\mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterhalmaz segítségével fog történni, és a kapcsolatot olyan evolúciós integrálegyenlet fogja leírni, mely a Riemann–Stieltjes típusúra emlékeztet, de annál gyengébb, mert csak „pontonként” kell teljesülnie;
- elegendő feltételt adjunk G -beli háromszögrendszerekből konstruált véletlen lépcsős-függvények növekményeinek valamely $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli gyengén korlátos változású konvolúciós hemicsoporthoz való konvergenciájára.

6.2 Folytonosan korlátos változású intervallum-függvények

Egy $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *additívnak* nevezünk, ha $F(s, r) + F(r, t) = F(s, t)$ minden $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Nyilván egy $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor additív, ha létezik olyan $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $F(s, t) = G(t) - G(s)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Az $(s, t) \in \mathbb{S}$ intervallum *felosztásán* \mathbb{S} -nek egy olyan $Z = \{(z_0, z_1), (z_1, z_2), \dots, (z_{n-1}, z_n)\}$ véges részhalmazát értjük, melyre $z_0 = s$ és $z_n = t$. Jelölje $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\mathfrak{F}(s, t)$ az (s, t) intervallum felosztásainak halmazát.

Egy F függvényt, mely \mathbb{S} -et egy $(E, \|\cdot\|_E)$ Banach-térbe képezi, (*folytonosan*)

korlátos változásúnak nevezünk, ha minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$V_F(s, t) := \sup_{Z \in \tilde{\mathfrak{F}}(s, t)} \sum_{(z_{\ell-1}, z_\ell) \in Z} \|F(z_{\ell-1}, z_\ell)\|_E < \infty$$

(és a $V_F : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény folytonos). Nyilván egy $F : \mathbb{S} \rightarrow E$ függvény akkor és csak akkor (folytonosan) korlátos változású, ha minden $T > 0$ esetén létezik egy olyan (folytonos) $v_T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $\|F(s, t)\|_E \leq v_T(t) - v_T(s)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén. (A $t \mapsto V_F(0, t)$ függvény tetszőleges $T > 0$ esetén megfelel.)

Egy F függvényt, mely \mathbb{S} -et egy $(E, \|\cdot\|_E)$ Banach-térbe képezi, *Lipschitz-folytonosnak* nevezünk, ha minden $T > 0$ esetén létezik olyan $c_T > 0$ konstans, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$\|F(s, t)\|_E \leq c_T(t - s).$$

Nyilván minden Lipschitz-folytonos függvény folytonosan korlátos változású. Egy $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ függvényt (folytonosan) *korlátos változásúnak*, illetve *Lipschitz-folytonosnak* nevezünk, ha az $(s, t) \mapsto G(t) - G(s)$, \mathbb{S} -ből E -be vivő leképezés rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal. Könnyen belátható, hogy egy $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ korlátos változású függvény akkor és csak akkor folytonos, ha folytonosan korlátos változású.

Egy $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$, \mathbb{S} -et $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezést *multiplikatívnak* nevezünk, ha $\mu(s, r) * \mu(r, t) = \mu(s, t)$ teljesül minden $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$ esetén, és $\mu(t, t) = \varepsilon_e$ minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Egy $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezést (folytonosan) *erősen korlátos változásúnak* nevezünk, ha az $(s, t) \mapsto (T_{\mu(s, t)} - I)$ függvény, mely \mathbb{S} -et $L(\mathfrak{C}_2(G), \mathfrak{C}^0(G))$ -be képezi, (folytonosan) korlátos változású.

Egy $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezést (folytonosan) *gyengén korlátos változásúnak*, illetve *gyengén Lipschitz-folytonosnak* nevezünk, ha minden $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ esetén az $F_f : (s, t) \mapsto (T_{\mu(s, t)} - I)f(e)$ függvény, mely \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képezi, rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal. Egy $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$ leképezés (folytonosan) gyengén korlátos változású, illetve gyengén Lipschitz-folytonos akkor és csak akkor, ha a $q_\mu : (s, t) \mapsto q(\mu(s, t))$, \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képező függvény rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal, hiszen a 2.1.1 Lemma alapján

$$|(T_{\mu(s, t)} - I)f(e)| \leq b\|f\|_2 q(\mu(s, t)) \quad \text{ha } f \in \mathfrak{C}_2(G),$$

és

$$q(\mu(s, t)) = \sum_{i=1}^d |(T_{\mu(s, t)} - I)x_i(e)| + |(T_{\mu(s, t)} - I)(1_G - \varphi)(e)|$$

(nyilván $x_1, \dots, x_d, 1_G - \varphi \in \mathfrak{C}_2(G)$). Ebben az esetben azt írjuk, hogy $V_\mu := V_{q_\mu}$.

6.2.1 Lemma. Legyen $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$ egy multiplikatív leképezés \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $T(s, t) := T_{\mu(s, t)}$. Ekkor minden $(s, t), (s', t') \in \mathbb{S}$, $[s, t] \cap [s', t'] \neq \emptyset$ és minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ esetén

$$|T(s, t)f(e) - T(s', t')f(e)| \leq b(\|f\|_2 + \|\tilde{f}\|_2) \left(q(\mu(s \wedge s', s \vee s')) + q(\mu(t \wedge t', t \vee t')) \right).$$

Ha még azt is feltesszük, hogy az $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$ leképezés folytonosan korlátos változású, akkor \mathfrak{T}_w -folytonos is.

Bizonyítás. Abban az esetben, ha $0 \leq s \leq s' \leq t' \leq t$, nyilván

$$T(s, t) - T(s', t') = T(s, s')T(s', t')(T(t', t) - I) + (T(s, s') - I)T(s', t'),$$

tehát a 2.1.1 Lemma alapján

$$\begin{aligned} |T(s, t)f(e) - T(s', t')f(e)| &\leq \|(T(t', t) - I)f\| + bq(\mu(s, s'))|T(s', t')f|_2 \\ &\leq b|f|_2 q(\mu(t', t)) + b|f|_2 q(\mu(s, s')). \end{aligned}$$

Abban az esetben, amikor $0 \leq s \leq s' \leq t \leq t'$, hasonlóan

$$T(s, t) - T(s', t') = (T(s, s') - I)T(s', t) + T(s', t)(I - T(t, t')),$$

tehát a 2.1.1 Lemma segítségével

$$\begin{aligned} |T(s, t)f(e) - T(s', t')f(e)| &\leq bq(\mu(s, s'))|T(s', t)f|_2 + \|(I - T(t, t'))f\| \\ &\leq b|f|_2 q(\mu(s, s')) + b|f|_2 q(\mu(t, t')). \end{aligned}$$

Ha az $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$ folytonosan korlátos változású, akkor minden $T > 0$ esetén létezik olyan $v_T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $q(\mu(s, t)) \leq v_T(t) - v_T(s)$ teljesül minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén, tehát

$$\lim_{\substack{(s, t) \rightarrow (r, r) \\ (s, t) \in \mathbb{S}}} q(\mu(s, t)) = 0$$

teljesül minden $r \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ezért a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{\substack{(s', t') \rightarrow (s, t) \\ (s', t') \in \mathbb{S}}} \left| \int f d\mu(s, t) - \int f d\mu(s', t') \right| = \lim_{\substack{(s', t') \rightarrow (s, t) \\ (s', t') \in \mathbb{S}}} |T(s, t)f(e) - T(s', t')f(e)| = 0$$

teljesül minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ esetén. Mivel $\mathfrak{C}_{2,2}(G)$ sűrű $\mathfrak{C}^0(G)$ -ben, így következik a $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$, \mathbb{S} -et $(\mathfrak{M}^1(G), \mathfrak{T}_w)$ -be vivő leképezés folytonossága. \square

Szükségünk lesz még diffúziós hemicsoportokkal kapcsolatban a következő eredményre:

6.2.2 Lemma. Legyen $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, és legyen $(\xi_t)_{t \geq 0}$ egy neki megfeleltetett független bal-növekményű folyamat $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ -beli trajektóriákkal. Tekintsük a következő állításokat:

- (i) $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy diffúziós hemicsoport.
- (ii) A $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak.

Ekkor (i)–ből következik (ii).

Ha létezik olyan $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ monoton növekvő leképezés, hogy bármely $f \in \mathfrak{D}(G) \cap \mathfrak{C}_e(G)$ esetén az

$$F_f : (s, t) \mapsto \sqrt{|(T_{\mu(s,t)} - I)f(e) - (A(t) - A(s))(f)|}$$

\mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képező függvény folytonosan korlátos változású, és η_t az $A(t)$ Lévy-mértékét jelöli, akkor (ii) ekvivalens a következő állítással:

(iii) $\eta_t = 0$ minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Ha az F_f függvény Lipschitz-folytonos bármely $f \in \mathfrak{D}(G) \cap \mathfrak{C}_e(G)$ esetén, akkor (i), (ii) és (iii) ekvivalensek.

(Lásd Siebert [92, Theorem 3, Corollary].)

6.3 Gyenge backward evolúciós egyenlet

Tekintsünk egy olyan $t \mapsto A(t)$ függvényt, mely \mathbb{R}_+ -t a konvolúciós félcsoportok generáló funkcionáljainak $\mathbb{A}(G)$ halmazába képezi. Ezt a függvényt *monoton növekvőnek* nevezzük, ha $A(t) - A(s) \in \mathbb{A}(G)$ teljesül minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Továbbá ezt a függvényt (*folytonosan*) *korlátos változásúnak*, illetve *Lipschitz-folytonosnak* nevezzük, ha (folytonosan) korlátos változású, illetve Lipschitz-folytonos a $\|\cdot\|_2$ norma szerint.

Egy $t \mapsto \eta(t)$ leképezést, mely \mathbb{R}_+ -t $\mathfrak{M}_+(G^\times)$ -be viszi, *monoton növekvőnek* nevezzük, ha $\eta(t) - \eta(s) \in \mathfrak{M}_+(G^\times)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Ezt a leképezést *folytonosnak* nevezzük, ha minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén a $t \mapsto \eta(t)|_{\mathbb{C}U}$, \mathbb{R}_+ -t $\mathfrak{M}_+^b(G^\times)$ -be vivő leképezés \mathfrak{T}_w -folytonos. Megjegyezzük, hogy ha $t \mapsto \eta(t)$ egy olyan monoton növekvő függvény, hogy $\int_{G^\times} \varphi(y) \eta(t)(dy) < \infty$ minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén, akkor a folytonossága azzal ekvivalens, hogy a $t \mapsto \int_{G^\times} \varphi(y) \eta(t)(dy)$ leképezés folytonos.

Egy mátrix-értékű $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d$ függvényt *monoton növekvőnek* nevezzük, ha $B(t) - B(s) \in \mathbb{M}_d^+$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Ha $t \mapsto B(t) = (b(i, j)(t))_{i,j=1,\dots,d}$, egy monoton növekvő (folytonos) függvény \mathbb{R}_+ -ból \mathbb{M}_d^+ -ba, akkor a $b(i, j) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, d$ függvények (folytonosan) korlátos változásúak, hiszen minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$|b(i, j)(t) - b(i, j)(s)| \leq \|B(t) - B(s)\| \leq c_d \|B(t) - B(s)\|_1 = c_d \text{Tr}(B(t) - B(s)).$$

Legyen $t \mapsto A(t)$ egy leképezés \mathbb{R}_+ -ból $\mathbb{A}(G)$ -be. Azt mondjuk, hogy ennek a leképezésnek a *kanonikus dekompozíciója* $(a(t), B(t), \eta(t))_{t \geq 0}$, ha $a(t) \in \mathbb{R}^d$, $B(t) \in \mathbb{M}_d^+$ és $\eta(t) \in \mathfrak{M}_+(G)$ az $A(t)$ generáló funkcionálhoz a kanonikus dekompozíció által rendelt mennyiségek. (Itt nem teszünk különbséget egy $\eta \in \mathfrak{M}_+(G^\times)$ mérték, és annak egy olyan $\tilde{\eta} \in \mathfrak{M}_+(G)$ kiterjesztése között, melyre $\tilde{\eta}(\{e\}) = 0$.) Ezen mennyiségeknek a (2.2.1), (2.2.2) és (2.2.3) előállításai alapján könnyen adódnak a következő észrevételek:

- $t \mapsto A(t)$ akkor és csak akkor monoton növekvő, ha $t \mapsto \eta(t)$ és $t \mapsto B(t)$ monoton növekvők.
- $t \mapsto A(t)$ akkor és csak akkor monoton növekvő és folytonos, ha $t \mapsto \eta(t)$ és $t \mapsto B(t)$ monoton növekvők és folytonosak, valamint $t \mapsto a(t)$ folytonos.
- $t \mapsto A(t)$ akkor és csak akkor monoton növekvő, folytonos és korlátos változású, ha $t \mapsto \eta(t)$ és $t \mapsto B(t)$ monoton növekvők és folytonosak, valamint $t \mapsto a(t)$ folytonos és korlátos változású.

Jelölje $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ azon $\eta \in \mathfrak{M}_+(G \times \mathbb{R}_+)$ mértékek halmazát, melyekre $\eta(\{e\} \times \mathbb{R}_+) = 0$ és a $t \mapsto \int \varphi(y) \eta(dy \times [0, t])$ leképezés folytonos.

Jelölje $\mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ azon (a, B, η) hármasok halmazát, ahol $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos, korlátos változású és $a(0) = 0$, $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ monoton növekvő, folytonos és $B(0) = 0$, valamint $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$. A $(0, B, \eta)$ jelölés azt fogja jelenteni, hogy $a(t) = 0$ minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Nyilván egy $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezés akkor és csak akkor monoton növekvő, folytonos és korlátos változású, ha létezik olyan $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas, hogy $(a(t), B(t), \eta(t))$ az $A(t)$ generáló funkcionál kanonikus dekompozíciójában szereplő mennyiségek, ahol $\eta(t)(dy) := \eta(dy \times [0, t])$.

Ha $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ egy korlátos változású leképezés (a, B, η) kanonikus dekompozícióval és $g_\tau \in \mathcal{C}_2(G)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, akkor legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\begin{aligned} \int_{]s, t]} A(d\tau)(g) &:= \sum_{i=1}^d \int_{]s, t]} X_i g_\tau(e) a(i)(d\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{]s, t]} X_i X_j g_\tau(e) b(i, j)(d\tau) \\ &+ \int \int_{G \times]s, t]} \left(g_\tau(y) - g_\tau(e) - \sum_{i=1}^d X_i g_\tau(e) x_i(y) \right) \eta(dy \times d\tau), \end{aligned}$$

amennyiben a jobboldalon álló integrálok léteznek. (Valójában ez az integrál értelmezhető az A függvény szerinti Riemann–Stieltjes integrálként is, ahogy Born [16] cikkében szerepel.)

Azt mondjuk, hogy egy $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport és egy $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ korlátos változású leképezés *kapcsolatosak egymással a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint*, ha minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathcal{D}(G)$ esetén

$$(T_{\mu(s, t)} - I)f(e) = \int_{]s, t]} A(d\tau)(T_{\mu(\tau, t)}f).$$

6.4 Feltétel háromszögrendszer relatív kompaktságára

A továbbiakban szükségünk lesz néhány egyszerű segédételre valós függvények egyenletes konvergenciájával kapcsolatban. Egy $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *folytonossági modulusa* a

következő $\omega_F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény:

$$\omega_F(\delta) := \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq 1}} |F(t) - F(s)|, \quad \delta \in [0, 1].$$

Nyilván ω_F egy monoton növekvő, nemnegatív függvény, és F akkor és csak akkor folytonos, ha $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_F(\delta) = 0$.

6.4.1 Lemma. Legyen D egy sűrű halmaz $[0, 1]$ -ben. Legyen $F_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ folytonos függvényeknek egy olyan sorozata, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F_0(t)$ minden $t \in D$ esetén. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \omega_{F_n}(\delta) = 0$,
- (ii) $F_n \rightarrow F_0$ egyenletesen a $[0, 1]$ intervallumon.

Bizonyítás. (i) \implies (ii). Az egyszerűség kedvéért a bizonyítást $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ esetére végezzük el. Minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$|F_n(t) - F_0(t)| \leq \left| F_n(t) - F_n\left(\frac{[mt]}{m}\right) \right| + \left| F_n\left(\frac{[mt]}{m}\right) - F_0\left(\frac{[mt]}{m}\right) \right| + \left| F_0\left(\frac{[mt]}{m}\right) - F_0(t) \right|,$$

tehát

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} |F_n(t) - F_0(t)| \leq \omega_{F_0}\left(\frac{1}{m}\right) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \omega_{F_n}\left(\frac{1}{m}\right),$$

mivel

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} \left| F_n\left(\frac{[mt]}{m}\right) - F_0\left(\frac{[mt]}{m}\right) \right| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \left| F_n\left(\frac{k}{m}\right) - F_0\left(\frac{k}{m}\right) \right| \\ &= \max_{0 \leq k \leq m} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| F_n\left(\frac{k}{m}\right) - F_0\left(\frac{k}{m}\right) \right| = 0. \end{aligned}$$

Ezért $m \rightarrow \infty$ esetén (i) és az F_0 függvény folytonosságának felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} |F_n(t) - F_0(t)| = 0,$$

tehát az $F_n \rightarrow F$ konvergencia egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon.

(ii) \implies (i). Bármely $n \in \mathbb{N}$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_1$ esetén

$$|F_n(t) - F_n(s)| \leq |F_n(t) - F_0(t)| + |F_0(t) - F_0(s)| + |F_0(s) - F_n(s)|,$$

következésképpen

$$\omega_{F_n}(\delta) \leq \omega_{F_0}(\delta) + 2 \sup_{t \in [0, 1]} |F_n(t) - F_0(t)|$$

minden $\delta \in [0, 1]$ esetén. Nyilván (ii) alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \omega_{F_n}(\delta) \leq \omega_{F_0}(\delta).$$

Tehát $\delta \rightarrow 0$ esetén az F_0 függvény folytonossága miatt fennáll (i). □

6.4.2 Lemma. Legyen D egy sűrű halmaz $[0, 1]$ -ben. Legyen $F_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}_d$ egy folytonos mátrix-értékű függvény és $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}_d$, $n \in \mathbb{N}$ folytonos, monoton növekvő mátrix-értékű függvényeknek egy olyan sorozata, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F_0(t)$ minden $t \in D$ esetén. Ekkor $F_n \rightarrow F_0$ egyenletesen a $[0, 1]$ intervallumon.

Bizonyítás. Megint csak $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ esetre végezzük el a bizonyítást. Legyen $F_n(t) = (F_n(i, j)(t))_{i,j=1,\dots,d}$. Bármely $i, j \in \{1, \dots, d\}$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_1$ esetén

$$|F_n(i, j)(t) - F_n(i, j)(s)| \leq c_d \|F_n(t) - F_n(s)\|_1 \leq c_d \text{Tr}(F_n(t) - F_n(s)).$$

Az $(s, t) \mapsto \text{Tr}(F_n(t) - F_n(s))$, \mathbb{S}_1 -et \mathbb{R} -be képező függvény nemnegatív és additív, ezért $[s, t] \subseteq [s', t'] \subseteq [0, 1]$ esetén

$$\text{Tr}(F_n(t) - F_n(s)) \leq \text{Tr}(F_n(t') - F_n(s')).$$

Így minden $i, j \in \{1, \dots, d\}$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\omega_{F_n(i,j)}\left(\frac{1}{m}\right) \leq c_d \max_{0 \leq k \leq m-2} \text{Tr}\left(F_n\left(\frac{k+2}{m}\right) - F_n\left(\frac{k}{m}\right)\right),$$

tehát

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \omega_{F_n(i,j)}\left(\frac{1}{m}\right) \leq c_d \max_{0 \leq k \leq m-2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Tr}\left(F_n\left(\frac{k+2}{m}\right) - F_n\left(\frac{k}{m}\right)\right) = 0,$$

és a 6.4.1 Lemma alapján $F_n(i, j)(t) \rightarrow F_0(i, j)(t)$ egyenletesen a $[0, 1]$ intervallumon. \square

Legyenek most $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G Lie-csoporton. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy olyan monoton növekvő függvény, melyre $k_n(0) = 0$.

Vezessük be $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \mu_n(s, t) &:= \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}, \\ \eta_n(s, t) &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}, \\ \kappa_n(s, t) &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (\mu_{n\ell} - \varepsilon_e), \\ T_n(s, t) &:= T_{\mu_n(s,t)}, \\ q_n(s, t) &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} q(\mu_{n\ell}). \end{aligned}$$

Nyilván bármely $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül

$$\begin{aligned}\mu_n(s, r) * \mu_n(r, t) &= \mu_n(s, t), \\ \eta_n(s, r) + \eta_n(r, t) &= \eta_n(s, t), \\ \kappa_n(s, r) + \kappa_n(r, t) &= \kappa_n(s, t), \\ T_n(s, r)T_n(r, t) &= T_n(s, t), \\ q_n(s, r) + q_n(r, t) &= q_n(s, t).\end{aligned}$$

6.4.3 Lemma. Bármely $(s, t) \in \mathbb{S}$, $n \in \mathbb{N}$ és $f \in \mathfrak{C}_{2,2}^0(G)$ esetén

$$|(T_{\mu_n(s,t)} - I - T_{\kappa_n(s,t)})f(e)| \leq b^2 |f|_{2,2}(q_n(s, t))^2,$$

és létezik olyan $c > 0$, hogy

$$q(\mu_n(s, t)) \leq cq_n(s, t)(1 + q_n(s, t)).$$

Bizonyítás. Hasonló Siebert [91, Lemma 3.3] bizonyításához. □

6.4.4 Tétel. Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G Lie-csoporton. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ olyan monoton növekvő függvény, melyre $k_n(0) = 0$.

Tegyük fel, hogy

(i) minden $T > 0$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} q_n(s, t) = 0,$$

(ii) bármely $T > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan K_ε kompakt halmaz G -ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{\ell=1}^{k_n(T)} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ekkor

(a) bármely $T > 0$ esetén a $\{\mu_n(s, t) : (s, t) \in \mathbb{S}_T, n \in \mathbb{N}\}$ halmaz feszes,

(b) létezik olyan $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ folytonosan gyengén korlátosan változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, hogy (n) valamely (n') részsorozatára

$$\mu_{n'}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S}.$$

6.4.5 Megjegyzés. Az (i) feltételből következik, hogy bármely $t \in \mathbb{R}_+$ esetén a $\{\mu_{n\ell} : \ell = 1, \dots, k_n(t); n \geq 1\}$ háromszögrendszer infinitézimális.

A 6.4.4 Tétel bizonyítása. (a). Siebert [91, Lemma 3.4] bizonyításához hasonló. Legyen $T > 0$, $\varepsilon > 0$, és válasszuk a K_ε kompakt halmazt G -ben a (ii) feltételnek megfelelően. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $e \in K_\varepsilon$. Ekkor létezik olyan K kompakt halmaz G -ben és egy olyan $f \in \mathcal{D}(G)$ függvény, hogy $1_{\mathcal{C}K} \leq f - f(e) \leq 1_{\mathcal{C}K_\varepsilon}$. Az (i) feltételből következik, hogy

$$(6.4.6) \quad c(T) := \sup_{n \geq 1} q_n(0, T) < \infty,$$

mivel elegendően nagy $r, n \in \mathbb{N}$ esetén $q_n(u, v) < 1$ teljesül minden olyan $(u, v) \in \mathbb{S}_T$ esetén, melyre $|v - u| \leq 1/r$, tehát

$$q_n(0, T) = \sum_{\ell=1}^r q_n\left(\frac{(\ell-1)T}{r}, \frac{\ell T}{r}\right) < r.$$

Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}_T$. Most megint az (i) feltétel miatt választhatunk olyan $r, n_0 \in \mathbb{N}$ számokat, hogy

$$q_n(u, v) < \frac{\varepsilon}{b^2 |f|_{2,2} c(T)}$$

teljesüljön minden $n > n_0$ és minden olyan $(u, v) \in \mathbb{S}_T$ esetén, melyre $|v - u| \leq 1/r$. Legyen $s_\ell := s + \ell(t - s)/r$ ha $\ell = 0, 1, \dots, r$.

Alkalmazva a 6.4.3 Lemmát, azt kapjuk, hogy

$$\int f d\mu_n(s_{\ell-1}, s_\ell) - f(e) \leq \int (f - f(e)) d\eta_n(s_{\ell-1}, s_\ell) + b^2 |f|_{2,2} (q_n(s_{\ell-1}, s_\ell))^2,$$

tehát arra jutunk, hogy minden $n > n_0$ esetén

$$\begin{aligned} \mu_n(s, t)(\mathcal{C}K^r) &\leq \sum_{\ell=1}^r \mu_n(s_{\ell-1}, s_\ell)(\mathcal{C}K) \leq \sum_{\ell=1}^r \int (f - f(e)) d\mu_n(s_{\ell-1}, s_\ell) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^r \left(\int (f - f(e)) d\eta_n(s_{\ell-1}, s_\ell) + b^2 |f|_{2,2} (q_n(s_{\ell-1}, s_\ell))^2 \right) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{k_n(T)} \mu_{n\ell}(\mathcal{C}K_\varepsilon) + b^2 |f|_{2,2} q_n(0, T) \max_{1 \leq \ell \leq r} q_n(s_{\ell-1}, s_\ell) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

A $\{\mu_n(s, t) : (s, t) \in \mathbb{S}_T, n \in \mathbb{N}, n \leq n_0\}$ halmaz véges, ezért szintén feszes.

(b). Az (a) pont alapján létezik olyan (n') részsorozat, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$, $s, t \in \mathbb{Q}$ esetén létezik olyan $\tilde{\nu}(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$, hogy

$$\mu_{n'}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \tilde{\nu}(s, t).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy a $\{\tilde{\nu}(s, t) : (s, t) \in \mathbb{S}, s, t \in \mathbb{Q}\}$ család kiterjeszthető egy olyan $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttá, mely teljesíti (b)-t az (n') részsorozattal.

Először vegyük észre, hogy a konvolúciós operátorokra vonatkozó folytonossági tétel alapján

$$(6.4.7) \quad T_{n'}(s, t)f(e) \rightarrow \tilde{T}(s, t)f(e)$$

teljesül minden $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$, $s, t \in \mathbb{Q}$ esetén, ahol $\tilde{T}(s, t) := T_{\tilde{\nu}(s, t)}$. Rögzítsünk egy $T > 0$ számot. A 6.4.3 Lemma és (6.4.6) azt eredményezi, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$(6.4.8) \quad q(\mu_n(s, t)) \leq c(1 + c(T))q_n(s, t).$$

Most megmutatjuk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén a $(\mu_{n'}(s, t))$ sorozat gyengén konvergens. Az (a) alapján a $(\mu_{n'}(s, t))$ sorozatnak van legalább egy torlódási pontja. Legyen $\nu(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$ egy torlódási pont. Ekkor létezik olyan $(n'') = (n''(s, t))$ részsorozata (n') -nek (mely függ (s, t) -től) úgy, hogy

$$\mu_{n''}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{J}_w} \nu(s, t).$$

Legyen $T(s, t) := T_{\nu(s, t)}$. A konvolúciós operátorokra vonatkozó folytonossági tétel alapján arra következtethetünk, hogy minden $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ esetén

$$T_{n''}(s, t)f(e) \rightarrow T(s, t)f(e).$$

Vegyünk olyan \mathbb{Q} -beli (s_ℓ) és (t_ℓ) sorozatokat, hogy $s_\ell \rightarrow s$, $t_\ell \rightarrow t$ és $(s_\ell, t_\ell) \in \mathbb{S}_T$ teljesüljön. A 6.2.1 Lemma valamint (6.4.7) és (6.4.8) alapján minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és minden elegendően nagy $\ell \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} |\tilde{T}(s_\ell, t_\ell)f(e) - T(s, t)f(e)| &= \left| \lim_{n'} T_{n'}(s_\ell, t_\ell)f(e) - \lim_{n''} T_{n''}(s, t)f(e) \right| \\ &\leq \lim_{n''} |T_{n''}(s_\ell, t_\ell)f(e) - T_{n''}(s, t)f(e)| \\ &\leq bc(1 + c(T))(|f|_2 + |f|_2) \limsup_{n \rightarrow \infty} (q_n(s_\ell \wedge s, s_\ell \vee s) + q_n(t_\ell \wedge t, t_\ell \vee t)). \end{aligned}$$

Az (i) feltevés alapján

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} q_n(s_\ell \wedge s, s_\ell \vee s) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} q_n(t_\ell \wedge t, t_\ell \vee t) = 0,$$

tehát minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ esetén

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} |\tilde{T}(s_\ell, t_\ell)f(e) - T(s, t)f(e)| = 0.$$

Mivel $\mathfrak{C}_{2,2}(G)$ sűrű $\mathfrak{C}^0(G)$ -ben, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{\nu}(s_\ell, t_\ell) \xrightarrow{\mathcal{J}_w} \nu(s, t).$$

Ez a konvergencia tetszőleges olyan (s_ℓ) és (t_ℓ) \mathbb{Q} -beli sorozatokra teljesül, melyekre $s_\ell \rightarrow s$, $t_\ell \rightarrow t$ és $(s_\ell, t_\ell) \in \mathbb{S}_T$, tehát azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{J}_w\text{-}\lim_{\substack{(s', t') \rightarrow (s, t) \\ s', t' \in \mathbb{Q}_+}} \tilde{\nu}(s', t') = \nu(s, t).$$

Ez az egyenlőség teljesül minden $\nu(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$ torlódási pontjára a $(\mu_{n'}(s, t))$ sorozatnak, ezért csak *egyetlen* torlódási pontja van (melyet szintén $\nu(s, t)$ -vel fogunk jelölni), és

$$\mathfrak{T}_w\text{-}\lim_{n'} \mu_{n'}(s, t) = \nu(s, t) = \mathfrak{T}_w\text{-}\lim_{\substack{(s', t') \rightarrow (s, t) \\ s', t' \in \mathbb{Q}_+}} \tilde{\nu}(s', t').$$

Nyilván $\nu(s, t) = \tilde{\nu}(s, t)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$, $s, t \in \mathbb{Q}$ esetén.

Most megmutatjuk, hogy az $(s, t) \mapsto \nu(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezés multiplikatív. Véve egy olyan (t_ℓ) sorozatot \mathbb{Q}_+ -ban melyre $t_\ell \rightarrow t$, azt kapjuk, hogy

$$\nu(t, t) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(t_\ell, t_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon_e.$$

Legyenek most $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$ és vegyünk olyan $(s_\ell), (r_\ell)$ és (t_ℓ) sorozatokat \mathbb{Q}_+ -ban, hogy $s_\ell \rightarrow s$, $r_\ell \rightarrow r$, $t_\ell \rightarrow t$, és $(s_\ell, r_\ell), (r_\ell, t_\ell) \in \mathbb{S}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \nu(s, t) &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(s_\ell, t_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(s_\ell, r_\ell) * \mu_n(r_\ell, t_\ell) \\ &= \left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(s_\ell, r_\ell) \right) * \left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(r_\ell, t_\ell) \right) = \nu(s, r) * \nu(r, t). \end{aligned}$$

Végül megmutatjuk, hogy az $(s, t) \mapsto \nu(s, t)$, \mathbb{S}_T -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezés folytonosan gyengén korlátos változású. Az (i) feltételből következik, hogy az

$$(s, t) \mapsto v_q(s, t) := \limsup_{n'} q_{n'}(s, t)$$

függvény, mely \mathbb{S}_T -t \mathbb{R} -be képezi, folytonos. Nyilván létezik olyan (n'') részsorozata (n') -nek, melyre $\lim_{n''} q_{n''}(0, t) = v_q(0, t)$ teljesül minden $t \in \mathbb{Q}_+$ esetén. Mivel a $t \mapsto q_{n''}(0, t)$ függvények monoton növekvőek, alkalmazhatjuk a 6.4.2 Lemmát ($d = 1$ választással), és azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n''} \sup_{t \in [0, T]} |q_{n''}(0, t) - v_q(t)| = 0,$$

ahol $v_q(t) := v_q(0, t)$. Ezért minden $T > 0$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$\begin{aligned} q_{n''}(s, t) &= (q_{n''}(0, t) - v_q(t)) - (q_{n''}(0, s) - v_q(s)) + v_q(t) - v_q(s) \\ &\leq v_q(t) - v_q(s) + 2 \sup_{t \in [0, T]} |q_{n''}(0, t) - v_q(t)|, \end{aligned}$$

tehát arra következtethetünk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$(6.4.9) \quad \limsup_{n''} q_{n''}(s, t) \leq v_q(t) - v_q(s),$$

tehát hogy az $(s, t) \mapsto \limsup_{n''} q_{n''}(s, t)$ \mathbb{S}_T -ből \mathbb{R} -be vivő függvény folytonosan korlátos változású. Így (6.4.8) alapján minden $T > 0$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$q(\nu(s, t)) = \lim_{n''} q(\mu_{n''}(s, t)) \leq c(1 + c(T)) \limsup_{n''} q_{n''}(s, t) \leq c(1 + c(T))(v_q(t) - v_q(s)).$$

Tehát az $(s, t) \mapsto q(\nu(s, t))$ függvény is folytonosan korlátos változású, amiből következik az állítás. \square

6.4.10 Tétel. Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G Lie-csoporton. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy olyan monoton növekvő függvény, melyre $k_n(0) = 0$.

Tegyük fel, hogy

(i) bármely $T > 0$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} q_n(s, t) = 0,$$

(ii) létezik egy olyan $(n(\alpha))_{\alpha \in J}$ univerzális résznet \mathbb{N} -ben és $\mu(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértékek úgy, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\mu(s, t) = \mathfrak{T}_w\text{-}\lim_{\alpha \in J} \mu_{n(\alpha)}(s, t).$$

Ekkor létezik olyan $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvény úgy, hogy a következő állítások érvényesek:

(a) $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$q(\mu(s, t)) \leq v(t) - v(s).$$

(b) Létezik egy olyan monoton növekvő $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ függvény, hogy minden $f \in \mathfrak{X}_2(G)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$A(t)(f) = \lim_{\alpha \in J} \int (f - f(e)) d\eta_{n(\alpha)}(0, t).$$

(c) Az A leképezés folytonosan korlátos változású, és minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$|A(t) - A(s)|_2 \leq v(t) - v(s).$$

(d) Bármely $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és bármely $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\left| \int f d\mu(s, t) - f(e) - (A(t) - A(s))(f) \right| \leq |f|_{2,2} (v(t) - v(s))^2.$$

Bizonyítás. Siebert [91, Theorem 3.6] bizonyításához hasonló. Nyilván $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$ egy multiplikatív leképezés \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be. A 2.1.1 Lemma alapján minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ esetén

$$(6.4.11) \quad \left| \int (f - f(e)) d\eta_n(s, t) \right| \leq b|f|_2 q(\eta_n(s, t)) \leq b|f|_2 q_n(s, t).$$

Megint mint a 6.4.4 Tétel bizonyításánál, az (i) feltételből következik, hogy létezik olyan $\tilde{v} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvény és olyan (n') részsorozat, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$(6.4.12) \quad \limsup_{n'} q_{n'}(s, t) \leq \tilde{v}(t) - \tilde{v}(s).$$

Alkalmazva a (6.4.11) egyenlőtlenséget az $f = x_1, \dots, x_d, 1_G - \varphi$ függvényekre, azt kapjuk, hogy

$$q(\mu(s, t)) \leq \tilde{c}(\tilde{v}(t) - \tilde{v}(s))$$

valamely $\tilde{c} > 0$ konstanssal. Tehát az $(s, t) \mapsto q(\mu(s, t))$, \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be vivő leképezés folytonosan korlátos változású, és a 6.2.1 Lemma alapján $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben.

A (6.4.11) szerint bármely $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ esetén az $\left(\int (f - f(e)) d\eta_{n(\alpha)}(s, t) \right)_{\alpha \in J}$ univerzális net konvergens. Legyen

$$(6.4.13) \quad A(s, t)(f) := \lim_{\alpha \in J} \int (f - f(e)) d\eta_{n(\alpha)}(s, t).$$

Ekkor $A(s, t)$ egy majdnem pozitív lineáris funkcionál $\mathfrak{D}(G)$ -n. A (6.4.11) és (6.4.12) alapján minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvényre

$$|A(s, t)(f)| \leq b|f|_2(\tilde{v}(t) - \tilde{v}(s)).$$

Nyilván $(s, t) \mapsto A(s, t)$ additív, azaz $A(s, r) + A(r, t) = A(s, t)$ ha $(s, r), (r, t) \in \mathbb{S}$. A 6.4.3 Lemma és (6.4.12) értelmében minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvényre

$$(6.4.14) \quad \left| \int f d\mu(s, t) - f(e) - A(s, t)(f) \right| \leq b^2 \tilde{c}^2 |f|_{2,2} (\tilde{v}(t) - \tilde{v}(s))^2.$$

Ezután megmutatjuk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén az $A(s, t)$ lineáris funkcionál normált. Legyen $(f_n)_{n \geq 1}$ egy olyan sorozat $\mathfrak{D}(G)_+$ -ban, hogy $f_n \uparrow 1_G$, minden $K \in \mathfrak{U}(e)$ kompakt környezet esetén létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ hogy $f_n(K) = 1$, és $\sup_{n \geq 1} |f_n|_{2,2} =: c' < \infty$ (Lásd Siebert [91, Lemma 1.7]). Ekkor (6.4.14) miatt bármely $(s', t') \in \mathbb{S}$ esetén

$$0 \geq A(s', t')(f_n) \geq -b^2 \tilde{c}^2 c' (\tilde{v}(t') - \tilde{v}(s'))^2 + \left(\int f_n d\mu(s', t') - 1 \right).$$

Legyen $r \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és legyen $s_\ell := s + \ell(t - s)/r$ ha $\ell = 0, 1, \dots, r$. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 \geq A(s, t)(f_n) &= \sum_{\ell=1}^r A(s_{\ell-1}, s_\ell)(f_n) \\ &\geq -b^2 \tilde{c}^2 c' \sum_{\ell=1}^r (\tilde{v}(s_\ell) - \tilde{v}(s_{\ell-1}))^2 + \sum_{\ell=1}^r \left(\int f_n d\mu(s_{\ell-1}, s_\ell) - 1 \right). \end{aligned}$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor ebből

$$0 \geq \sup_{n \geq 1} A(s, t)(f_n) \geq -b^2 \tilde{c}^2 c'(\tilde{v}(t) - \tilde{v}(s)) \max_{1 \leq \ell \leq r} (\tilde{v}(s_\ell) - \tilde{v}(s_{\ell-1})).$$

Mivel $r \in \mathbb{N}$ tetszőleges volt, így $\sup_{n \geq 1} A(s, t)(f_n) = 0$, tehát $A(s, t)$ normált.

Alkalmazva a (6.4.13) összefüggést a $\varphi - 1_G$ függvényre, azt kapjuk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\lim_{\alpha \in J} \int \varphi d\eta_{n(\alpha)}(s, t) = A(s, t)(\varphi - 1_G) = A(s, t)(\varphi).$$

Legyen $A(t) := A(0, t)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$. Ekkor Siebert [91, Lemma 1.8] alapján megkapjuk a (b), (c) és (d) állításokat. \square

6.5 Folytonosan korlátos változású hemicsoportok generálása

6.5.1 Lemma. *Legyen E egy kompakt topológikus tér, $r > 0$ és $F : [0, r] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, hogy $F(0, x) = 0$ minden $x \in E$ esetén. Tegyük fel, hogy minden olyan $(t, y) \in [0, r] \times E$ esetén, melyre teljesül az $F(t, y) = \min\{F(t, x) : x \in E\}$ összefüggés, létezik olyan $v : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos, monoton növekvő függvény és $\chi : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $\lim_{s \uparrow t} \chi(s) = \chi(t)$ és*

$$F(t, y) - F(s, y) \geq -(\chi(s) - \chi(t))(v(t) - v(s)) \quad \text{ha } s \in [0, t].$$

Ekkor

$$F(t, x) \geq 0 \quad \text{ha } (t, x) \in [0, r] \times E.$$

Bizonyítás. Siebert [91, Lemma 5.8] bizonyításához hasonló. Legyen $Q(t, x) := (1 + cv(t))F(t, x)$, ahol $c > 0$ tetszőleges. Elegendő azt megmutatni, hogy $Q \geq 0$, hiszen ekkor $c \downarrow 0$ esetén $F \geq 0$ adódik.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Ekkor $[0, r] \times E$ kompaktsága miatt létezik olyan $q < 0$ és olyan $(t, y) \in [0, r] \times E$, hogy $Q(t, y) = q$, valamint $Q(s, x) > q$ minden $(s, x) \in [0, t] \times E$ esetén. Mivel $Q(0, x) = 0$ minden $x \in E$ esetén, ezért $t > 0$. Továbbá $Q(t, y) = \min\{Q(t, x) : x \in E\}$, és így $F(t, y) = \min\{F(t, x) : x \in E\}$. Legyenek v és χ a feltétel alapján a (t, y) ponthoz létező függvények. Ekkor létezik olyan $s \in [0, t]$, hogy

$$\chi(s) - \chi(t) \leq \frac{cq}{2(1 + cv(t))^2},$$

és így

$$\begin{aligned}
Q(t, y) - Q(s, y) &= (1 + cv(t))(F(t, y) - F(s, y)) + c(v(t) - v(s))F(s, y) \\
&\geq -(1 + cv(t))(\chi(s) - \chi(t))(v(t) - v(s)) + c(v(t) - v(s))\frac{q}{1 + cv(s)} \\
&\geq \frac{1}{2}c(v(t) - v(s))\frac{q}{1 + cv(t)} \geq 0,
\end{aligned}$$

ami ellentmond (t, y) választásának. \square

6.5.2 Tétel. *Legyen $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ egy monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés. Ekkor legfeljebb egy olyan $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport létezik $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely az A leképezéssel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.*

Bizonyítás. Siebert [91, Theorem 5.7] bizonyításához hasonlóan történik. Legyen $E := G \cup \{\omega\}$ a G csoport 1-pontos kompaktifikációja. Legyen $\omega x = x\omega = \omega$ minden $x \in E$ esetén. Minden $g \in \mathfrak{C}^0(G)$ függvényt folytonosan kiterjesztünk E -re: $g(\omega) := 0$.

Tegyük fel, hogy két olyan hemicsoport van: $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ és $(\nu'(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$, melyek az A leképezéssel kapcsolatosak a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Jelölje $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ kanonikus dekompozícióját $(a_0(t), B_0(t), \eta_0(t))_{t \geq 0}$. Jelölje $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $T(s, t) := T_{\nu(s, t)}$, $T'(s, t) := T_{\nu'(s, t)}$. Rögzítsük az $r > 0$ számot és az $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvényt. Jelölje $t \in [0, r]$ és $x \in E$ esetén

$$F(t, x) := T(r - t, r)f(x) - T'(r - t, r)f(x).$$

A következő vizsgálat célja az, hogy megmutassuk, hogy az F függvény kielégíti a 6.5.1 Lemma feltételeit. Legyen $(t, y) \in [0, r] \times E$ olyan, hogy

$$F(t, y) = \min\{F(t, x) : x \in E\}.$$

Minden $s \in [0, t]$ esetén

$$F(t, y) - F(s, y) = \int_{[r-t, r-s]} A(d\tau)((T(\tau, r) - T'(r - t, r))L_y f) = I_1 + I_2 + I_3,$$

ahol

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{[r-t, r-s]} A(d\tau)((T(\tau, r) - T(r - t, r))L_y f), \\
I_2 &:= \int_{[r-t, r-s]} A(d\tau)((T(r - t, r) - T'(r - t, r))L_y f), \\
I_3 &:= \int_{[r-t, r-s]} A(d\tau)((T'(r - t, r) - T'(\tau, r))L_y f).
\end{aligned}$$

Először megmutatjuk, hogy $I_2 \geq 0$. Vezessük be a $J :=]r - t, r - s]$ jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{i=1}^d \int_J (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) X_i L_y f(e) a_0(i) (d\tau) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_J (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) X_i X_j L_y f(e) b_0(i, j) (d\tau) \\
&\quad + \iint_{G \times J} \left((T(r-t, r) - T'(r-t, r)) L_y f(z) - (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) L_y f(e) \right. \\
&\quad \quad \left. - \sum_{i=1}^d (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) L_y X_i f(e) x_i(z) \right) \eta_0(dz \times d\tau) \\
&= \sum_{i=1}^d X_i L_y (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) f(e) (a_0(i)(r-s) - a_0(i)(r-t)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d X_i X_j L_y (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) f(e) (b_0(i, j)(r-s) - b_0(i, j)(r-t)) \\
&\quad + \int_G \left(L_y (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) f(z) - L_y (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) f(e) \right. \\
&\quad \quad \left. - \sum_{i=1}^d X_i L_y (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) f(e) x_i(z) \right) \eta_0(dz \times]r-t, r-s]),
\end{aligned}$$

tehát a

$$g(z) := L_y (T(r-t, r) - T'(r-t, r)) f(z), \quad z \in E$$

függvényre azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{i=1}^d (a_0(i)(r-s) - a_0(i)(r-t)) X_i g(e) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (b_0(i, j)(r-s) - b_0(i, j)(r-t)) X_i X_j g(e) \\
&\quad + \int_G \left(g(z) - g(e) - \sum_{i=1}^d X_i g(e) x_i(z) \right) \eta_0(dz \times]r-t, r-s]) \\
&= (A(r-s) - A(r-t))(g).
\end{aligned}$$

A feltételekből következik, hogy $A(r-s) - A(r-t) \in \mathbb{A}(G)$, és a g függvényre $g \in \mathfrak{C}_2(G)$ valamint $g \geq g(e)$, mivel bármely $x \in E$ esetén

$$g(x) = F(t, yx) \geq F(t, y) = g(e)$$

a (t, y) pont választása miatt. Tehát azt kapjuk, hogy

$$I_2 = (A(r-s) - A(r-t))(g) = (A(r-s) - A(r-t))(g - g(e)) \geq 0.$$

I_1 előáll $I_1 = I_{1,1} + I_{1,2} + I_{1,3}$ alakban, ahol

$$\begin{aligned} I_{1,1} &:= \sum_{i=1}^d \int_J (T(\tau, r) - T(r-t, r)) X_i L_y f(e) a_0(i) (d\tau), \\ I_{1,2} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_J (T(\tau, r) - T(r-t, r)) X_i X_j L_y f(e) b_0(i, j) (d\tau), \\ I_{1,3} &:= \iint_{G \times J} \left((T(\tau, r) - T(r-t, r)) L_y f(z) - (T(\tau, r) - T(r-t, r)) L_y f(e) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^d (T(\tau, r) - T(r-t, r)) L_y X_i f(e) x_i(z) \right) \eta_0(dz \times d\tau). \end{aligned}$$

Mint a 6.2.1 Lemmában, minden $\tau \in J =]r-t, r-s]$ esetén

$$|(T(\tau, r) - T(r-t, r)) X_i L_y f(e)| \leq b |X_i L_y f|_2 q(\nu(r-t, \tau)),$$

tehát

$$|I_{1,1}| \leq b w(s) \sum_{i=1}^d |X_i L_y f|_2 V_{a_0(i)}(r-t, r-s),$$

ahol a $w : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény definíciója

$$w(s) := \sup\{q(\nu(r-t, \tau)) : \tau \in]r-t, r-s]\}, \quad s \in [0, t].$$

Hasonlóan

$$|I_{1,2}| \leq b w(s) \sum_{i,j=1}^d |X_i X_j L_y f|_2 V_{b_0(i,j)}(r-t, r-s).$$

Most tekintsük a következő függvényt:

$$h(z) := (T(\tau, r) - T(r-t, r)) L_y f(z), \quad z \in G.$$

Mivel $h \in \mathfrak{C}_2(G)$, így alkalmazhatjuk a Taylor-formulát:

$$h(z) = h(e) + \sum_{i=1}^d X_i h(e) x_i(z) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d X_i X_j h(\xi(z)) x_i(z) x_j(z), \quad z \in U_0,$$

ahol $\xi(z) \in U_0$. Nyilván

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d |x_i(z) x_j(z)| \leq \frac{1}{2} d \sum_{i=1}^d x_i^2(z) = \frac{1}{2} d \varphi(z) \quad \text{ha } z \in U_0,$$

következésképpen

$$\begin{aligned} & \iint_{U_0 \times J} \left| h(z) - h(e) - \sum_{i=1}^d X_i h(e) x_i(z) \right| \eta_0(dz \times d\tau) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \iint_{U_0 \times J} |X_i X_j h(\xi(z)) x_i(z) x_j(z)| \eta_0(dz \times d\tau) \\ & \leq \frac{1}{2} d |h|_2 \int_G \varphi(z) \eta_0(dz \times]r-t, r-s]). \end{aligned}$$

De nyilván létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy

$$\left(2 + \sum_{i=1}^d \|x_i\|\right) \cdot 1_{\mathbb{C}U_0} \leq c \cdot \varphi,$$

tehát

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{C}U_0 \times J} \left| h(z) - h(e) - \sum_{i=1}^d X_i h(e) x_i(z) \right| \eta_0(dz \times d\tau) \\ \leq \left(2 + \sum_{i=1}^d \|x_i\|\right) \|h\|_2 \eta_0(\mathbb{C}U_0 \times J) \\ \leq c \|h\|_2 \int_G \varphi(z) \eta_0(dz \times]r-t, r-s]). \end{aligned}$$

Összegyűjtve a három becslést, azt kapjuk, hogy

$$|I_{1,3}| \leq \tilde{c} w_1(s) \int_G \varphi(z) \eta_0(dz \times]r-t, r-s])$$

ahol $\tilde{c} := c + d/2$, és a $w_1 : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény definíciója

$$w_1(s) := \sup\{|(T(\tau, r) - T(r-t, r))L_y f|_2 : \tau \in]r-t, r-s]\}, \quad s \in [0, t].$$

Használva az analóg módon definiált w' és w'_1 függvényeket (ν , illetve T helyett ν' , illetve T' szerepel), megkapjuk a kívánt

$$F(t, y) - F(s, y) \geq -(\chi(s) - \chi(t))(v(t) - v(s))$$

egyenlőtlenséget a

$$\chi := w + w' + w_1 + w'_1$$

és

$$\begin{aligned} v(s) &:= b \sum_{i=1}^d |X_i L_y f|_2 V_{a_0(i)}(r-s, r) + b \sum_{i,j=1}^d |X_i X_j L_y f|_2 V_{b_0(i,j)}(r-s, r) \\ &\quad + \tilde{c} \int_G \varphi(z) \eta_0(dz \times]r-s, r]) \end{aligned}$$

függvényekkel. Nyilván v monoton növekvő, és a feltételek szerint folytonos. Továbbá $\chi(t) = 0$, tehát már csak azt kell megmutatni, hogy $\lim_{s \uparrow t} \chi(s) = 0$. Mivel az $(s, t) \mapsto \nu(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezés folytonos, ezért az $(s, t) \mapsto T(s, t)f$ leképezés is folytonos \mathbb{S} -ből $\mathcal{C}^0(G)$ -be minden $f \in \mathcal{C}^0(G)$ esetén, tehát az

$$(s, t) \mapsto \sum_{i=1}^d |T(s, t)x_i(e)| + T(s, t)\varphi(e) = q(\nu(s, t))$$

függvény is folytonos $[r-t, r-s]$ -ből \mathbb{R} -be. Ezért $\lim_{s \uparrow t} w(s) = \lim_{s \uparrow t} w_1(s) = 0$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\lim_{s \uparrow t} w'(s) = \lim_{s \uparrow t} w'_1(s) = 0$.

Tehát alkalmazható a 6.5.1 Lemma, így

$$F(t, x) \geq 0 \quad \text{ha } (t, x) \in [0, r] \times E,$$

speciálisan,

$$0 \leq F(t, e) = \int f(z) \nu(r-t, r)(dz) - \int f(z) \nu'(r-t, r)(dz)$$

minden $f \in \mathfrak{D}(G)$, $t \in [0, r]$ esetén. Felcserélve ν és ν' szerepét

$$0 \leq \int f(z) \nu'(r-t, r)(dz) - \int f(z) \nu(r-t, r)(dz)$$

minden $f \in \mathfrak{D}(G)$, $t \in [0, r]$ esetén. Végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\nu(s, t) = \nu'(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ami bizonyítja a hemicsoport egyértelműségét. □

6.6 Háromszögrendszerek konvergenciája folytonosan korlátos változású konvolúciós hemicsoporthoz

Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G Lie-csoporton. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy növekvő függvény. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiáljuk az $\eta_n \in \mathfrak{M}_+(G \times \mathbb{R}_+)$ mértéket a következő módon:

$$\eta_n(dy \times [0, t]) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}(dy),$$

és az $a_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, $a_n(t) = (a_n(i)(t))_{i=1, \dots, d}$, valamint a $B_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$, $B_n(t) = (b_n(i, j)(t))_{i, j=1, \dots, d}$ függvényeket a következő módon:

$$a_n(i)(t) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int x_i d\mu_{n\ell} = \int_G x_i(y) \eta_n(dy \times [0, t]),$$

$$b_n(i, j)(t) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int x_i x_j d\mu_{n\ell} = \int_G x_i(y) x_j(y) \eta_n(dy \times [0, t]).$$

6.6.1 Tétel. *Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G Lie-csoporton. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ olyan monoton növekvő, balról folytonos függvény, melyre $k_n(0) = 0$ és $k_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{Z}_+$. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ban.*

Tegyük fel, hogy

(i) létezik olyan $\eta_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ mérték, hogy minden $t \in D$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f(y) \eta_n(dy \times [0, t]) = \int_G f(y) \eta_0(dy \times [0, t]),$$

(ii) létezik olyan $B_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d$, $B_0(t) = (b_0(i, j)(t))_{i, j=1, \dots, d}$ folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ és $i, j \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(i, j)(t) = b_0(i, j)(t) + \int_G x_i(y) x_j(y) \eta_0(dy \times [0, t]),$$

(iii) létezik olyan $a_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, $a_0(t) = (a_0(i)(t))_{i=1, \dots, d}$ folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ és $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(i)(t) = a_0(i)(t),$$

(iv) minden $T > 0$ és $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int x_i d\mu_{n\ell} \right| = 0.$$

Ekkor $(a_0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ és

$$\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ahol $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ folytonosan korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely azzal az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezéssel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, melynek kanonikus dekompozíciója (a_0, B_0, η_0) . Valamint létezik olyan $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvény, hogy minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$|(T_{\nu(s, t)} - I)f(e) - (A(t) - A(s))(f)| \leq \|f\|_{2,2} (v(t) - v(s))^2.$$

Továbbá tekintsük a következő állításokat:

(α) $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy diffúziós hemicsoport.

(β) $\eta_0 = 0$.

Ekkor (α)-ból következik (β).

Ha még azt is feltesszük, hogy

(vi) $a : t \mapsto \int_G \varphi(y) \eta_0(dy \times [0, t])$, \mathbb{R}_+ -ből \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos,

(vii) minden $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén a $t \mapsto \sum_{i=1}^d b_0(i, i)(t)$, \mathbb{R}_+ -ból \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos,

(viii) létezik olyan (n') részsorozata (n) -nek, hogy minden $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén az

$$(s, t) \mapsto \limsup_{n'} \sum_{\ell=k_{n'}(s)+1}^{k_{n'}(t)} \left| \int x_i d\mu_{n'\ell} \right|,$$

\mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos,

akkor (α) és (β) ekvivalensek.

Néhány előkészületre van szükségünk a 6.6.1 Tétel bizonyításához.

6.6.2 Lemma. A 6.6.1 Tétel (i)–(iv) feltételeinek teljesülése esetén a következő állítások érvényesek:

(I) $B_0(0) = 0$ és a B_0 függvény monoton növekedő.

(II) A 6.6.1 Tétel (i), (ii) és (iii) pontjaiban a konvergencia tetszőleges $T > 0$ esetén a $[0, T]$ intervallumon egyenletes.

(III) Minden $T > 0$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} q_n(s, t) = 0.$$

(IV) Az (n) tetszőleges (n') részsorozatának van olyan (n'') részsorozata, hogy az

$$(s, t) \mapsto \limsup_{n''} q_{n''}(s, t)$$

\mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képező függvény folytonosan korlátos változású.

(V) Az $a_0(i)$, $i = 1, \dots, d$ függvények folytonosan korlátos változásúak.

(VI) Minden $T > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan K_ε kompakt halmaz G -ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\eta_n(\mathbb{C}K_\varepsilon \times [0, T]) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. (I). Legyen $(\psi_m)_{m \geq 1}$ egy olyan sorozat $\mathfrak{C}_e(G)$ -ben, hogy $0 \leq \psi_m \leq 1$ és $\psi_m \rightarrow 1_{G^\times}$. A B_0 mátrix-értékű függvény azért monoton növekvő, mert monoton növekvő mátrix-értékű függvények limeszeként áll elő:

$$b_0(i, j)(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \eta_n(dy \times [0, t]).$$

Valóban, az (i) feltétel szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G x_i(y) x_j(y) \psi_m(y) \eta_n(dy \times [0, t]) = \int_G x_i(y) x_j(y) \psi_m(y) \eta_0(dy \times [0, t]).$$

Az $|x_i(y) x_j(y)| \leq \varphi(y)$, $y \in U_0$ egyenlőtlenség, az (i) feltétel és Lebesgue Dominált Konvergencia-tételével

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_G x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \eta_0(dy \times [0, t]) = 0.$$

Ebből és a (ii) feltételből következik $b_0(i, j)$ fenti előállítására.

(II). Az (i) esetén vegyük észre, hogy ha $f \in \mathfrak{C}_e(G)_+$, akkor a

$$t \mapsto \int_G f(y) \eta_n(dy \times [0, t]), \quad n \in \mathbb{N}$$

függvények monoton növekvők, és a $t \mapsto \int_G f(x) \eta_0(dx \times [0, t])$ limesz-függvény folytonos, tehát a 6.4.2 Lemma alkalmazható.

A (ii) esetén a mátrix-értékű B_n , $n \in \mathbb{N}$ függvények monoton növekvők, és a mátrix-értékű

$$t \mapsto \left(b_0(i, j)(t) + \int_G x_i(y) x_j(y) \eta_0(dy \times [0, t]) \right)_{i, j=1, \dots, d}$$

limesz-függvény folytonos, tehát megint alkalmazható a 6.4.2 Lemma.

A (iii) esetében vegyük észre, hogy a (iv) feltétel miatt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} |a_n(i)(t) - a_n(i)(s)| = 0$$

minden $T > 0$ és $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén, tehát alkalmazható a 6.4.1 Lemma.

(III). Legyen $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ egy olyan függvény, hogy $f \geq 1_{\mathbb{C}U_0}$. Ekkor

$$\varphi \leq f + \sum_{i=1}^d x_i^2,$$

és az (i)-beli és (ii)-beli egyenletes konvergencia miatt minden $T > 0$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int \varphi d\mu_{n\ell} = 0$$

amiből a (iv) feltétel miatt következik (III).

(IV). Mint a 6.4.4 Tétel bizonyításában, (III)-ból következik (IV).

(V). Most (IV) szerint választunk olyan (n') részsorozatot, hogy a $(s, t) \mapsto \limsup_{n'} q_{n'}(s, t)$, \mathbb{S} -ből \mathbb{R} -be képező függvény folytonosan korlátos változású. Ezért

$$|a(i)(t) - a(i)(s)| = \left| \lim_{n'} \sum_{\ell=k_{n'}(s)+1}^{k_{n'}(t)} \int x_i d\mu_{n\ell} \right| \leq \limsup_{n'} q_{n'}(s, t),$$

tehát az $a(i)$, $i = 1, \dots, d$ függvények is korlátos változásúak.

(VI). Elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges $T > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan K_ε kompakt halmaz G -ben, hogy $\eta_n(\mathbb{C}K_\varepsilon \times [0, T]) < \varepsilon$ teljesül minden elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén. Először válasszunk egy olyan kompakt $V \in \mathfrak{U}(e)$ környezetet, hogy $\eta_0(\mathbb{C}V \times [0, T]) < \varepsilon/2$. Ekkor létezik olyan K kompakt halmaz G -ben és egy olyan $g \in \mathfrak{C}_e(G)$ függvény, hogy $1_{\mathbb{C}K} \leq g \leq 1_{\mathbb{C}V}$. A 6.6.1 Tétel (i) feltétele alapján választhatunk olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ számot, hogy

$$\left| \int_G g(x) \eta_n(dx \times [0, T]) - \int_G g(x) \eta_0(dx \times [0, T]) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesüljön, ha $n > n_0$. Ekkor minden $n > n_0$ esetén

$$\begin{aligned} & \eta_n(\mathbb{C}K \times [0, T]) \\ & \leq \left| \int_G g(x) \eta_n(dx \times [0, T]) - \int_G g(x) \eta_0(dx \times [0, T]) \right| + \int_G g(x) \eta_0(dx \times [0, T]) \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \eta_0(\mathbb{C}V \times [0, T]) < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Most a 6.6.2 Lemma (III) és (VI) pontja biztosítja, hogy a 6.4.4 Tétel alkalmazható a 6.6.1 Tétel (i)–(iv) feltételeinek teljesülése esetén.

6.6.3 Lemma. Jelölje $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ azt a hemicsoportot, melyhez a 6.6.1 Tétel (i)–(iv) feltételeinek teljesülése esetén a 6.4.4 Tétel értelmében valamely $(\mu_{n'}(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ részsorozat konvergál. Ekkor ez a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport kapcsolatos az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezéssel a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Bizonyítás. Először jegyezzük meg, hogy a 6.6.1 Tétel (i)–(iii) feltételei és a 6.6.2 Lemma (I) és (V) pontjai alapján A egy folytonos, korlátos változású leképezés.

Most jelölje $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $T(s, t) := T_{\nu(s, t)}$. Meg fogjuk mutatni, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(6.6.4) \quad \lim_{n'} (T_{n'}(s, t) - I)f(e) = \int_{[s, t]} A(d\tau)(T(\tau, t)f).$$

Az egyszerűség kedvéért az (n') sorozatot beazonosítjuk az (n) sorozattal.

Legyen $(\psi_m)_{m \geq 1}$ egy olyan sorozat $\mathfrak{C}_e(G)$ -ben, melyre $1_{\mathbb{C}U_0} \leq \psi_m \leq 1$ és $\psi_m \rightarrow 1_{G^\times}$. Tekintsük a következő hasznos felbontást:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(e) + \sum_{i=1}^d X_i f(e) x_i(y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d X_i X_j f(e) x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \\ &\quad + \left(f(y) - f(e) - \sum_{i=1}^d X_i f(e) x_i(y) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d X_i X_j f(e) x_i(y) x_j(y) (1 - \psi(y)) \right) \end{aligned}$$

ahol $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ és $y \in G$. Minden $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ függvényre alkalmazhatjuk a következő Taylor-formulát:

$$f(y) = f(e) + \sum_{i=1}^d X_i f(e) x_i(y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d X_i X_j f(\xi(y)) x_i(y) x_j(y), \quad y \in U_0,$$

ahol $\xi(y) \in U_0$, tehát minden $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ és $y \in G$ esetén

$$\begin{aligned} f(y) &= f(e) + \sum_{i=1}^d X_i f(e) x_i(y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d X_i X_j f(e) x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \\ &\quad + \left(f(y) - f(e) - \sum_{i=1}^d X_i f(e) x_i(y) \right) \psi_m(y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left(X_i X_j f(\xi(y)) - X_i X_j f(e) \right) x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)). \end{aligned}$$

Ezután vegyük észre a következő dekompozíciót:

$$\begin{aligned} T_n(s, t) - I &= \prod_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} T_{\mu_{n\ell}} - I = \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (T_{\mu_{n\ell}} - I) \prod_{r=\ell+1}^{k_n(t)} T_{\mu_{nr}} \\ &= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (T_{\mu_{n\ell}} - I) T_n(\tau_{n\ell}, t), \end{aligned}$$

ahol $\tau_{n\ell} := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : k_n(t) = \ell\}$. Tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (T_n(s, t) - I)f(e) &= \sum_{i=1}^d \int_{]s, t]} T_n(\tau, t) X_i f(e) a_n(i)(d\tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{]s, t]} T_n(\tau, t) X_i X_j f(e) b_{n,m}(i, j)(d\tau) \\ &\quad + \iint_{G \times]s, t]} \left(T_n(\tau, t) f(y) - T_n(\tau, t) f(e) - \sum_{i=1}^d T_n(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) \\ &\quad \times \psi_m(y) \eta_n(dy \times d\tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \iint_{G \times]s, t]} (T_n(\tau, t) X_i X_j f(\xi(y)) - T_n(\tau, t) X_i X_j f(e)) \\ &\quad \times x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \eta_n(dy \times d\tau), \end{aligned}$$

ahol

$$b_{n,m}(i, j)(t) := \int_G x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \eta_n(dy \times [0, t]).$$

Így végülis

$$(T_n(s, t) - I)f(e) - \int_{]s, t]} A(d\tau)(T_{\nu(\tau, t)}f) = I_n^{(1)} + I_{nm}^{(2)} + I_m^{(3)} + I_{nm}^{(4)} + I_{nm}^{(5)} + I_m^{(6)},$$

ahol

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &:= \sum_{i=1}^d \left(\int_{]s, t]} T_n(\tau, t) X_i f(e) a_n(i)(d\tau) - \int_{]s, t]} T(\tau, t) X_i f(e) a_0(i)(d\tau) \right), \\ I_{nm}^{(2)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left(\int_{]s, t]} T_n(\tau, t) X_i X_j f(e) b_{n,m}(i, j)(d\tau) - \int_{]s, t]} T(\tau, t) X_i X_j f(e) b_{0,m}(i, j)(d\tau) \right), \\ I_m^{(3)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \iint_{G \times]s, t]} T(\tau, t) X_i X_j f(e) x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \eta_0(dy \times d\tau), \\ I_{nm}^{(4)} &:= \iint_{G \times]s, t]} \left(T_n(\tau, t) f(y) - T_n(\tau, t) f(e) - \sum_{i=1}^d T_n(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) \psi_m(y) \eta_n(dy \times d\tau) \\ &\quad - \iint_{G \times]s, t]} \left(T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - \sum_{i=1}^d T(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) \psi_m(y) \eta_0(dy \times d\tau) \\ I_{nm}^{(5)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \iint_{G \times]s, t]} (T_n(\tau, t) X_i X_j f(\xi(y)) - T_n(\tau, t) X_i X_j f(e)) \\ &\quad \times x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \eta_n(dy \times d\tau), \\ I_m^{(6)} &:= - \iint_{G \times]s, t]} \left(T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - \sum_{i=1}^d T(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) \\ &\quad \times (1 - \psi_m(y)) \eta_0(dy \times d\tau), \end{aligned}$$

és

$$b_{0,m}(i, j)(t) := b_0(i, j)(t) + \int_G x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_m(y)) \eta_0(dy \times [0, t]).$$

Minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvény esetén belátható, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(1)} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} I_{nm}^{(\ell)} &= 0 \quad \text{ha } \ell = 2, 4, \quad m \geq 1, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} I_m^{(\ell)} &= 0 \quad \text{ha } \ell = 3, 6, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{nm}^{(5)} &= 0. \end{aligned}$$

Csak a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(1)} = 0$ konvergencia bizonyítására szorítkozunk. Elegendő megmutatni azt, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(1,1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(1,2)} = 0,$$

ahol

$$\begin{aligned} I_n^{(1,1)} &:= \int_{]s,t]} (T_n(\tau, t) - T(\tau, t))g(e)a_n(i)(d\tau), \\ I_n^{(1,2)} &:= \int_{]s,t]} T(\tau, t)g(e)(a_n(i)(d\tau) - a_0(i)(d\tau)), \end{aligned}$$

és $g \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$. Legyen $T > 0$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_T$. A 6.6.2 Lemma (III) pontja alapján

$$c(T) := \sup_{n \geq 1} q_n(0, T) < \infty.$$

Tekintsük az $F_0 : \tau \rightarrow F_0(\tau) := T(\tau, t)g(e)$ és $F_n : \tau \rightarrow F_n(\tau) := T_n(\tau, t)g(e)$, $n \in \mathbb{N}$ függvényeket, melyek a $[0, t]$ intervallumot \mathbb{R} -be képezik. A 6.2.1 és 6.4.3 Lemmák alapján minden $\tau, \tau' \in [0, t]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|F_n(\tau) - F_n(\tau')| = |T_n(\tau, t)g(e) - T_n(\tau', t)g(e)| \leq bc(1 + c(T))(|g|_2 + |g|_2^{\sim})q_n(\tau \wedge \tau', \tau \vee \tau'),$$

tehát a 6.6.2 Lemma (III) pontja szerint

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|\tau - \tau'| \leq \delta \\ 0 \leq \tau \leq \tau' \leq t}} |F_n(\tau) - F_n(\tau')| = 0.$$

Továbbá F_0 folytonos és $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\tau) = F_0(\tau)$ minden $\tau \in [0, t]$ esetén. A 6.4.1 Lemma szerint $F_n \rightarrow F_0$ egyenletesen a $[0, t]$ intervallumon, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [0, t]} |T_n(\tau, t)g(e) - T(\tau, t)g(e)| = 0.$$

Nyilván minden $(\tau, \tau') \in \mathbb{S}_T$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n(i)(\tau') - a_n(i)(\tau)| \leq \sum_{\ell=k_n(\tau)+1}^{k_n(\tau')} \left| \int x_i d\mu_{n\ell} \right| \leq q_n(\tau, \tau'),$$

ezért $V_{a_n(i)}(s, t) \leq c(T)$ ha $n \in \mathbb{N}$, és az

$$|I_n^{(1,1)}| \leq V_{a_n(i)}(s, t) \sup_{\tau \in [s, t]} |T_n(\tau, t)g(e) - T(\tau, t)g(e)|$$

becslés miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(1,1)} = 0$.

A 6.2.1 Lemma alapján minden $\tau, \tau' \in [0, t]$ esetén

$$|F_0(\tau) - F_0(\tau')| = |T(\tau, t)g(e) - T(\tau', t)g(e)| \leq b(|g|_2 + |g|_2^{\sim})q(\nu(\tau \wedge \tau', \tau \vee \tau')).$$

A 6.4.4 Tétel szerint a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport gyengén korlátos változású, tehát az F_0 függvény is korlátos változású. Parciális integrálással

$$\begin{aligned} I_n^{(1,2)} &= (a_n(i)(t) - a_0(i)(t))g(e) - T(s, t)g(e)(a_n(i)(s) - a_0(i)(s)) \\ &\quad - \int_{]s,t]} T(d\tau, t)g(e)(a_n(i)(\tau-) - a_0(i)(\tau-)), \end{aligned}$$

tehát az

$$|I_n^{(1,2)}| \leq |g|_2(2 + V_{F_0}(s, t)) \sup_{\tau \in [s, t]} |a_n(i)(\tau) - a_0(i)(\tau)|$$

becslésből és abból, hogy az $a_n(i) \rightarrow a_0(i)$ konvergencia egyenletes az $[s, t]$ intervallumon, következik $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(1,2)} = 0$.

Végeredményben

$$\lim_{n'} (T_{n'}(s, t) - I)f(e) = \int_{[s, t]} A(d\tau)(T(\tau, t)f)$$

teljesül minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathcal{D}(G)$ esetén. Másrésztől,

$$\lim_{n'} (T_{n'}(s, t) - I)f(e) = (T(s, t) - I)f(e)$$

minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathcal{C}^0(G)$ esetén. Így megkaptuk a lemma állítását, hiszen $\mathcal{D}(G)$ sűrű $\mathcal{C}^0(G)$ -ben. \square

A 6.6.1 Tétel bizonyítása. Legyen (n') egy tetszőleges részsorozat (n) -ben. Ekkor a 6.6.2 Lemma (III) és (VI) pontja alapján alkalmazható a 6.4.4 Tétel, tehát létezik olyan folytonosan korlátos változású $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}_T}$ hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, hogy az (n') valamely (n'') részsorozatára

$$\mu_{n''}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S}.$$

A 6.6.3 Lemma szerint a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport kapcsolatban van az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezéssel a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. A 6.5.2 Tétel szerint a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport egyértelmű. Ezért a $(\mu_n(s, t))_{n \geq 1}$ sorozat gyengén konvergens, és

$$\mu_n(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{for all } (s, t) \in \mathbb{S},$$

tehát az első rész bizonyítása készen van.

Mivel minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén $\eta_0(dy \times [0, t]) \in \mathfrak{M}_+(G)$ az $A(t)$ generáló funkcionál Lévy-mértéke, így

$$A(t)(f) = \int_G f(y) \eta_0(dy \times [0, t])$$

minden $t \in \mathbb{R}_+$ és $f \in \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{C}_e(G)$ esetén. Az (i) feltételből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\kappa_n(s, t)} f(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G (f(y) - f(e)) \eta_n(dy \times]s, t]) = A(t)(f) - A(s)(f)$$

minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{C}_e(G)$ esetén. A 6.6.2 Lemma (IV) pontja szerint választhatunk olyan (n') részsorozatot, hogy az $(s, t) \mapsto \limsup_{n'} q_{n'}(s, t)$, \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képező függvény folytonosan korlátos változású. Ezért a 6.4.3 Lemma alapján

$$\begin{aligned} |(T_{\nu(s, t)} - I)f(e) - (A(t)f - A(s)f)| &= \lim_{n'} |(T_{\mu_{n'}(s, t)} - I)f(e) - T_{\kappa_{n'}(s, t)} f(e)| \\ &\leq b^2 |f|_{2,2} \limsup_{n'} (q_{n'}(s, t))^2 \end{aligned}$$

minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G) \cap \mathfrak{C}_e(G)$ esetén. Tehát létezik olyan $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvény, hogy minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$|(T_{\nu(s,t)} - I)f(e) - (A(t) - A(s))(f)| \leq |f|_{2,2}(v(t) - v(s))^2.$$

A 6.2.2 Lemma alapján (α) -ból következik (β) .

Legyen most (n') egy olyan részsorozat, mely a (vii) feltétel alapján létezik. A 6.6.2 Lemma (IV) pontja szerint létezik olyan (n'') részsorozata (n') -nek, hogy a $(s, t) \mapsto \limsup_{n''} q_{n''}(s, t)$ függvény, mely \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képezi, folytonosan korlátos változású. Legyen $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ olyan függvény, hogy $f \geq 1_{\mathfrak{U}_0}$. Ekkor $\varphi \leq f + \sum_{i=1}^d x_i^2$, tehát minden $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ esetén

$$(6.6.5) \quad q(\mu) \leq \sum_{i=1}^d \left(\left| \int x_i d\mu \right| + \int x_i^2 d\mu \right) + \int f d\mu.$$

Tehát

$$q_n(s, t) \leq \sum_{i=1}^d \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int x_i d\mu_{n\ell} \right| + \sum_{i=1}^d \int_G x_i^2(y) \eta_n(dy \times]s, t]) + \int_G f(y) \eta_n(dy \times]s, t]).$$

Az (i) és (ii) feltételek alapján

$$\begin{aligned} \limsup_{n''} q_{n''}(s, t) &\leq \sum_{i=1}^d \limsup_{n'} \sum_{\ell=k_{n'}(s)+1}^{k_{n'}(t)} \left| \int x_i d\mu_{n'\ell} \right| + \int_G f(y) \eta_0(dy \times]s, t]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \left((b_0(i, i)(t) - b_0(i, i)(s)) + \int_G x_i^2(y) \eta_0(dy \times]s, t]) \right). \end{aligned}$$

Nyilván

$$f + \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq c \cdot \varphi$$

valamely $c > 0$ konstanssal, tehát az (v)–(vii) feltételek miatt az

$$(s, t) \mapsto \limsup_{n''} q_{n''}(s, t)$$

függvény, mely \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képezi, Lipschitz-folytonos. A 6.6.2 Lemma (III) pontja alapján $c(T) := \sup_{n \geq 1} q_n(0, T) < \infty$, tehát a 6.4.3 Lemma szerint

$$q(\nu(s, t)) = \lim_{n''} q(\mu_{n''}(s, t)) \leq c(1 + c(T)) \limsup_{n''} q_{n''}(s, t),$$

és így a hemicsoport Lipschitz-folytonos.

Ahogy már megállapítottuk,

$$|(T_{\nu(s,t)} - I)f(e) - (A(t)f - A(s)f)| \leq b^2 |f|_{2,2} \limsup_{n''} (q_{n''}(s, t))^2$$

minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{C}_e(G)$ esetén, tehát az

$$(s, t) \mapsto \sqrt{|(T_{\nu(s,t)} - I)f(e) - (A(t) - A(s))(f)|}$$

függvény, mely \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képezi, Lipschitz-folytonos. A 6.2.2 Lemma alapján megkapjuk (α) és (β) ekvivalenciáját. \square

6.6.6 Tétel. Legyen $\{\mu_{n\ell} : \ell = 1, \dots, n, n \geq 1\}$ egy háromszögrendszer $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $k_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}_+$ a következő függvény:

$$k_n(t) := \max \left\{ \ell \in \{0, 1, \dots, n\} : \sum_{r=1}^{\ell} q(\mu_{nr}) \leq t \sum_{r=1}^n q(\mu_{nr}) \right\}.$$

Legyen D egy sűrű halmaz $[0, 1]$ -ben.

Tegyük fel, hogy

(i) minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U) : 1 \leq \ell \leq n \} = 0,$$

(ii) létezik olyan $\eta_0 \in \mathbb{L}([0, 1], G)$ mérték, hogy minden $t \in D$ és $f \in \mathcal{C}_e(G)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f(y) \eta_n(dy \times [0, t]) = \int_{G^\times} f(y) \eta_0(dy \times [0, t]),$$

(iii) létezik olyan $B_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}_d$, $B_0(t) = (b_0(i, j)(t))_{i,j=1,\dots,d}$ folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ és $i, j \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(i, j)(t) = b_0(i, j)(t) + \int_{G^\times} x_i(y) x_j(y) \eta_0(dy \times [0, t]),$$

(iv) létezik olyan $a_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $a_0(t) = (a_0(i)(t))_{i=1,\dots,d}$ folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ és $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(i)(t) = a_0(i)(t),$$

(v) minden $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^n \left| \int x_i d\mu_{n\ell} \right| < \infty.$$

Ekkor

$$\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S}_1,$$

ahol $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}_1}$ egy olyan gyengén Lipschitz-folytonos hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ban, mely azzal az $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezéssel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, melynek kanonikus dekompozíciója (a_0, B_0, η_0) .

Továbbá $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}_1}$ akkor és csak akkor diffúziós hemicsoport, ha $\eta_0 = 0$.

6.6.7 Megjegyzés. Wehn [101, Theorem 8] bizonyított hasonló eredményt, de sokkal erősebb feltételek mellett. Megjegyezzük, hogy a 6.6.6 Tétel könnyen általánosítható olyan háromszögrendszerre is, amelyben a sorok hossza tetszőleges.

A 6.6.6 Tétel bizonyítása. Először vegyük észre, hogy

$$(6.6.8) \quad \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^n q(\mu_{n\ell}) < \infty.$$

Valóban, ha választunk egy olyan $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ függvényt, melyre $f \geq 1_{\mathbb{C}U_0}$, akkor (6.6.5) alapján

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^n q(\mu_{n\ell}) &\leq \sum_{i=1}^d \left(\sum_{\ell=1}^n \left| \int x_i d\mu_{n\ell} \right| + \int x_i^2(y) \eta_n(dy \times [0, 1]) \right) \\ &\quad + \int f(y) \eta_n(dy \times [0, 1]). \end{aligned}$$

A (ii), (iii) és (v) feltételek alapján következik (6.6.8).

Most megmutatjuk, hogy

$$(6.6.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq n} q(\mu_{n\ell}) = 0.$$

Valóban, minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $U \in \mathfrak{U}(e)$ környezet, hogy $|x_i \cdot 1_U| \leq \varepsilon$ és $|\varphi \cdot 1_U| \leq \varepsilon$, tehát bármely $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ esetén

$$q(\mu) \leq (d+1)\varepsilon + \left(\|\varphi\| + \sum_{i=1}^d \|x_i\| \right) \mu(\mathbb{C}U).$$

Ezért az (i) feltételből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq n} q(\mu_{n\ell}) \leq (d+1)\varepsilon.$$

Ez az egyenlőtlenség tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén fennáll, így megkapjuk a (6.6.9) összefüggést.

A k_n , $n \in \mathbb{N}$ függvények definíciója alapján minden $(s, t) \in \mathbb{S}_1$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(6.6.10) \quad q_n(s, t) \leq (t-s) \sum_{\ell=1}^n q(\mu_{n\ell}) + \max_{1 \leq \ell \leq n} q(\mu_{n\ell}),$$

mivel

$$\begin{aligned} q_n(s, t) &= \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} q(\mu_{n\ell}) - \sum_{\ell=1}^{k_n(s)+1} q(\mu_{n\ell}) + q(\mu_{n, k_n(s)+1}) \\ &\leq t \sum_{\ell=1}^n q(\mu_{n\ell}) - s \sum_{\ell=1}^n q(\mu_{n\ell}) + \max_{1 \leq \ell \leq n} q(\mu_{n\ell}). \end{aligned}$$

Most (6.6.9) és (6.6.10) alapján megállapíthatjuk, hogy a 6.6.1 Tétel (iv) feltétele teljesül. Nyilván a 6.6.1 Tétel (i)–(iii) feltételei is teljesülnek, így az első állítás bizonyítása készen van.

Most belátjuk, hogy a 6.6.1 Tétel (v)–(vii) feltételei is teljesülnek. A (6.6.9) és (6.6.10) összefüggések miatt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} q_n(s, t) \leq (t - s) \sup_{n \geq 1} \sum_{\ell=1}^n q(\mu_{n\ell}),$$

tehát (6.6.8) alapján az

$$(s, t) \mapsto \limsup_{n \rightarrow \infty} q_n(s, t)$$

függvény Lipschitz-folytonos. Nyilván ebből következik, hogy teljesül a 6.6.1 Tétel (vii) feltétele, hiszen minden $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ és $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$\left| \int x_i d\mu \right| \leq q(\mu).$$

Legyen $f \in \mathcal{C}_e(G)$ ismét egy olyan függvény, melyre $f \geq 1_{\mathcal{C}_{U_0}}$. Ekkor a 6.6.6 Tétel (ii) és (iii) feltételeiből következik, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}_1$ esetén

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d (b_0(i, i)(t) - b_0(i, i)(s)) + \int \varphi(y) \eta_0(dy \times]s, t]) \\ & \leq \sum_{i=1}^d (b_0(i, i)(t) - b_0(i, i)(s)) + \sum_{i=1}^d \int_G x_i^2(y) \eta_0(dy \times]s, t]) + \int_G f(y) \eta_0(dy \times]s, t]) \\ & = \sum_{i=1}^d \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G x_i^2(y) \eta_n(dy \times]s, t]) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f(y) \eta_n(dy \times]s, t]). \end{aligned}$$

Nyilván létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy $f + \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq c \cdot \varphi$, tehát

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d (b_0(i, i)(t) - b_0(i, i)(s)) + \int \varphi(y) \eta_0(dy \times]s, t]) \\ & \leq c \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi(y) \eta_n(dy \times]s, t]) \leq c \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} q_n(s, t). \end{aligned}$$

Az 6.6.2 Lemma (I) pontja alapján a $t \mapsto \text{Tr}(B(t)) = \sum_{i=1}^d b_0(i, i)(t)$ függvény monoton növekvő, tehát (6.6.10) felhasználásával azt kapjuk, hogy teljesülnek a 6.6.1 Tétel (v) és (vi) feltételei is. \square

Megmutatjuk, hogy Sobko [94] alábbi eredménye következik a 6.6.1 Tételből.

6.6.11 Tétel. *Legyen $\{\mu_{n\ell} : \ell = 1, \dots, k_n, n \geq 1\}$ egy háromszögrendszer $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 = \tau_{n0} < \tau_{n1} < \dots < \tau_{n,k_n} = 1$ egy olyan felosztása a $[0, 1]$ intervallumnak, hogy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1} : 1 \leq \ell \leq k_n\} = 0.$$

Tegyük fel, hogy

(A1) minden $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén létezik olyan $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \left| \int_{U_0} x_i d\mu_{n\ell} - (\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}) \alpha_i(\tau_{n\ell}) \right| = 0,$$

(A2) minden $i, j \in \{1, \dots, d\}$ esetén létezik olyan $\beta_{ij} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \left| \int_{U_0} x_i x_j d\mu_{n\ell} - 2(\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}) \beta_{ij}(\tau_{n\ell}) \right| = 0,$$

(B) létezik olyan $K > 0$ konstans, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és $\ell = 1, \dots, k_n$ esetén

$$\sum_{i=1}^d \left| \int_{U_0} x_i d\mu_{n\ell} \right| + \sum_{i,j=1}^d \left| \int_{U_0} x_i x_j d\mu_{n\ell} \right| \leq K(\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}),$$

(C) minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U) = 0.$$

Ekkor

$$\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S}_1,$$

ahol $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}_1}$ egy hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben és $n \in \mathbb{N}$ esetén a $k_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}_+$ függvény a következő módon van értelmezve:

$$k_n(t) = \ell - 1 \quad \text{ha } \tau_{n,\ell-1} \leq t < \tau_{n\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq k_n.$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy teljesülnek a 6.6.1 Tétel feltételei az

$$\eta_0 = 0, \quad a_0(i)(t) = \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau, \quad b_0(i, j)(t) = \int_0^t \beta_{ij}(\tau) d\tau$$

választással.

Nyilván (C)-ből következik (i).

(A1) és (C) alapján teljesül (iii) is, mivel minden $t \in [0, 1]$, $i \in \{1, \dots, d\}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
 |a_n(i)(t) - a_0(i)(t)| &\leq \left| \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_{\mathbb{C}U_0} x_i d\mu_{n\ell} \right| + \left| \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_{U_0} x_i d\mu_{n\ell} - \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} (\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}) \alpha_i(\tau_{n\ell}) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} (\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}) \alpha_i(\tau_{n\ell}) - \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau \right| \\
 &\leq \|x_i\| \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U_0) + \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \left| \int_{U_0} x_i d\mu_{n\ell} - (\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}) \alpha_i(\tau_{n\ell}) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} (\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}) \alpha_i(\tau_{n\ell}) - \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau \right|,
 \end{aligned}$$

ami 0-hoz konvergál, amennyiben $n \rightarrow \infty$.

Hasonlóan vezethető le (ii) az (A2) és (C) alapján.

Nyilván (B) miatt teljesül (iv) is, mivel bármely $(s, t) \in \mathbb{S}_1$, $i \in \{1, \dots, d\}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int_{U_0} x_i d\mu_{n\ell} \right| &\leq K \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}) \\
 &= K(\tau_{n,k_n(t)} - \tau_{n,k_n(s)}) \\
 &= K((\tau_{n,k_n(t)} - \tau_{n,k_n(s)+1}) + (\tau_{n,k_n(s)+1} - \tau_{n,k_n(s)})) \\
 &\leq K(t - s) + \max\{\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1} : 1 \leq \ell \leq k_n\},
 \end{aligned}$$

tehát

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq 1}} \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int_{U_0} x_i d\mu_{n\ell} \right| \leq K\delta + \max\{\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1} : 1 \leq \ell \leq k_n\},$$

ami szerint

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq 1}} \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int_{U_0} x_i d\mu_{n\ell} \right| \leq K\delta,$$

amiből könnyen levezethető a (iv) feltétel is. □

6.6.12 Megjegyzés. Eredetileg Sobko [94] a (C) feltétel helyett csak azt tételezte fel, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U_0) = 0,$$

de a bizonyításában a (C) feltételt használta. Sobko a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}_1}$ limesz hemicsoportot a megfelelő $(T(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}_1}$ konvolúciós operátorokkal sokkal bonyolultabb módon kapcsolta

össze. Továbbá a 6.6.11 Sobko-tételben több felesleges feltétel is szerepel. Nyilván elegendő feltételezni az α_i és β_{ij} függvények Riemann integrálhatóságát. Az (A1) és (A2) feltételekben az abszolút érték nem szükséges, vagyis például az (A1) feltétel helyett elegendő feltételezni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n} \left(\int_{U_0} x_i d\mu_{n\ell} - (\tau_{n\ell} - \tau_{n,\ell-1}) \alpha_i(\tau_{n\ell}) \right) = 0.$$

A (B) feltételben a második szummás tagra nincs szükség. Végül megemlítjük, hogy Sobko bizonyítási módszere csak akkor alkalmazható, ha a limesz hemicsoport *diffúziós*.

6.7 Folytonosan korlátos változású konvolúciós hemicsoportok paraméterezése

6.7.1 Tétel. Legyen $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ egy monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés. Ekkor pontosan egy olyan $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport létezik $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely az A leképezéssel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Továbbá a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport folytonosan gyengén korlátos változású, és létezik olyan monoton növekvő, folytonos $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$|(T_{\nu(s,t)} - I)f(e) - (A(t) - A(s))(f)| \leq |f|_{2,2}(v(t) - v(s))^2.$$

Bizonyítás. Az egyértelműséget bebizonyítottuk a 6.5.2 Tételben. A létezés bizonyítását Siebert [91, Theorem 5.1] mintájára végezzük el.

Legyen az adott A leképezés kanonikus dekompozíciója $(a_0(t), B_0(t), \eta_0(t))_{t \geq 0}$. Legyen $f \in \tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$, $t \in \mathbb{R}_+$ és $x \in G$ esetén

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t)f(x) &:= \sum_{i=1}^d a_0(i)(t) \tilde{X}_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_0(i,j)(t) \tilde{X}_i \tilde{X}_j f(x) \\ &\quad + \int_G \left(f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^d \tilde{X}_i f(x) x_i(y) \right) \eta_0(dy \times [0, t]). \end{aligned}$$

Heyer [48, Theorem 4.2.5] alapján tetszőleges $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén az $f \mapsto (\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s))(f)$ leképezés, mely $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G) \rightarrow \mathfrak{C}^0(G)$ -be viszi, egybeesik $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ -n egy egyértelműen meghatározott $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli $(\nu_r(s, t))_{r \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthoz $\tilde{N}(s, t)$ infinitezimális generátorával. Először belátjuk, hogy az $(s, t) \mapsto \tilde{N}(s, t)f$, \mathbb{S} -et $\mathfrak{C}^0(G)$ -be vivő leképezés folytonosan

korlátos változású tetszőleges $f \in \tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ esetén. Valóban,

$$\begin{aligned} & |\tilde{N}(s, t)f(x)| \\ & \leq \sum_{i=1}^d |a_0(i)(t) - a_0(i)(s)| \cdot |\tilde{X}_i f(x)| + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d |b_0(i, j)(t) - b_0(i, j)(s)| \cdot |\tilde{X}_i \tilde{X}_j f(x)| \\ & \quad + \int_G \left| f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^d \tilde{X}_i f(x) x_i(y) \right| d\eta_0(dy \times]s, t]), \end{aligned}$$

tehát használhatjuk a következő Taylor-formulát:

$$f(xy) = f(x) + \sum_{i=1}^d \tilde{X}_i f(x) x_i(y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \tilde{X}_i \tilde{X}_j f(x \xi(y)) x_i(y) x_j(y), \quad y \in U_0,$$

ahol $\xi(y) \in U_0$, és a 6.5.2 Tétel bizonyításában szereplő $I_{1,3}$ integrál becslésénél használt módszerrel belátható, hogy

$$\begin{aligned} |\tilde{N}(s, t)f(x)| & \leq |f|_2 \left(\sum_{i=1}^d |a_0(i)(t) - a_0(i)(s)| + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d |b_0(i, j)(t) - b_0(i, j)(s)| \right. \\ & \quad \left. + c \int_G \varphi(y) \eta_0(dy \times]s, t]) \right) \end{aligned}$$

valamely $c > 0$ konstanssal. Ezért a feltételek szerint létezik olyan monoton növekvő, folytonos $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy minden $f \in \tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\|\tilde{N}(s, t)f\| \leq |f|_2 (v(t) - v(s)).$$

Bármely $f \in \tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ függvényre

$$(6.7.2) \quad (T_{\nu_r(s,t)} - I)f(e) = \int_0^r \left(\int \tilde{N}(s, t)f(x) \nu_u(s, t)(dx) \right) du,$$

tehát

$$|(T_{\nu_r(s,t)} - I)f(e)| \leq r \|\tilde{N}(s, t)f\| \leq r |f|_2 (v(t) - v(s)).$$

Behelyettesítve az $f = x_1, \dots, x_d, 1_G - \varphi$ függvényeket, azt kapjuk, hogy

$$q(\nu_r(s, t)) \leq c(v(t) - v(s))$$

valamely $c > 0$ konstanssal. Következésképpen az $(s, t) \mapsto q(\nu_r(s, t))$ függvény is folytonosan korlátos változású.

Most legyen

$$\mu_{n\ell} := \nu_1 \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right)$$

ha $n, \ell \in \mathbb{N}$. Először megmutatjuk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ esetén

$$(6.7.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} \left(\int f d\mu_{n\ell} - f(e) \right) = \tilde{N}(s, t)f(e).$$

Mivel $X\tilde{N}(s, t)f = \tilde{N}(s, t)Xf$ ha $X \in \mathfrak{L}(G)$, tehát teljesül $\tilde{N}(s, t)f \in \mathfrak{C}_2(G)$ és $|\tilde{N}(s, t)f|_2 \leq |f|_{2,2}(v(t) - v(s))$. A (6.7.2) összefüggés és a 2.1.1 Lemma alapján minden $(s', t') \in \mathbb{S}$ esetén

$$\begin{aligned} & \left| \int f d\nu_1(s', t') - f(e) - \tilde{N}(s', t')f(e) \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\int \tilde{N}(s', t')f d\nu_r(s, t) \right) dr - \tilde{N}(s', t')f(e) \right| \\ &= \left| \int_0^1 (T_{\nu_r(s', t')} - I)\tilde{N}(s', t')f(e) dr \right| \leq \int_0^1 b|\tilde{N}(s', t')f|_2 q(\nu_r(s', t')) dr \\ &\leq bc|f|_{2,2}(v(t') - v(s'))^2, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} \left(\int f d\mu_{n\ell} - f(e) \right) - \tilde{N}\left(\frac{[ns]}{n}, \frac{[nt]}{n}\right)f(e) \right| \\ &= \left| \sum_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} \left(\int f d\nu_1\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right) - f(e) - \tilde{N}\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right)f(e) \right) \right| \\ &\leq bc|f|_{2,2} \sum_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} \left(v\left(\frac{\ell}{n}\right) - v\left(\frac{\ell-1}{n}\right) \right)^2 \\ &\leq bc|f|_{2,2} \left(v\left(\frac{[nt]}{n}\right) - v\left(\frac{[ns]}{n}\right) \right) \max_{[ns]+1 \leq \ell \leq [nt]} \left(v\left(\frac{\ell}{n}\right) - v\left(\frac{\ell-1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Továbbá elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{N}\left(\frac{[ns]}{n}, \frac{[nt]}{n}\right)f(e) - \tilde{N}(s, t)f(e) \right| \leq \left| \tilde{N}\left(\frac{[ns]}{n}, s\right)f(e) \right| + \left| \tilde{N}\left(\frac{[nt]}{n}, t\right)f(e) \right| \\ &\leq c|f|_{2,2} \left(v(s) - v\left(\frac{[ns]}{n}\right) + v(t) - v\left(\frac{[nt]}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Ezt a becslést és a v függvény folytonosságát használva kapjuk a (6.7.3) összefüggést.

Ezután megmutatjuk, hogy teljesülnek a 6.6.1 Tétel (i)–(iv) feltételei a $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ mértékekre és a $k_n(t) := [nt]$, $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ függvényekre. Először vegyük észre, hogy $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\sum_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} q(\mu_{n\ell}) \leq c \sum_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} \left(v\left(\frac{\ell}{n}\right) - v\left(\frac{\ell-1}{n}\right) \right) = c \left(v\left(\frac{[nt]}{n}\right) - v\left(\frac{[ns]}{n}\right) \right),$$

amiből

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \sum_{\ell=1}^{[nt]} q(\mu_{n\ell}) = 0,$$

ezért teljesül a 6.6.1 Tétel (iv) feltétele. Most (6.7.3) alapján és Siebert [91, Lemma 1.7 (iii)] pontját használva megmutatható, hogy minden $t \in \mathbb{R}_+$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int f d\mu_{n\ell} = A(t)(f) = \int_G f(y) \eta_0(dy \times [0, t]).$$

Megint (6.7.3) miatt, minden $i, j \in \{1, \dots, d\}$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int x_i x_j d\mu_{n\ell} &= A(t)(x_i x_j) = b_0(i, j)(t) + \int_G x_i(y) x_j(y) \eta_0(dy \times [0, t]), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int x_i d\mu_{n\ell} &= A(t)(x_i) = a_0(i)(t). \end{aligned}$$

Tehát alkalmazhatjuk a 6.6.1 Tételt, és azt kapjuk, hogy létezik olyan $(\tilde{\nu}(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ folytonosan korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely az adott A leképezéssel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, és létezik olyan $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvény, hogy minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$|(T_{\nu(s, t)} - I)f(e) - (A(t) - A(s))(f)| \leq |f|_{2,2} (v(t) - v(s))^2.$$

□

6.7.4 Tétel. *Legyen $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Ekkor pontosan egy olyan monoton növekvő, folytonos, korlátos változású $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezés van, melyre teljesül $A(0) = 0$ és kapcsolatos a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.*

A $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport a hozzá tartozó A leképezést a következő explicit módon határozza meg: minden $f \in \mathfrak{X}_2(G)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$(6.7.5) \quad A(t)(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int (f - f(e)) d\nu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right).$$

Bizonyítás. Először az egyértelműséget bizonyítjuk. Legyenek $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ és $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ olyan monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezések, melyekre teljesül $A(0) = 0$ és $\tilde{A}(0) = 0$, valamint kapcsolatosak a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Ekkor a 6.7.1 Tétel alapján léteznek olyan $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ és $\tilde{v} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvények, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ esetén

$$|(A(t) - A(s))(f) - (\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s))(f)| \leq |f|_{2,2} ((v(t) - v(s))^2 + (\tilde{v}(t) - \tilde{v}(s))^2).$$

Mint Siebert [91, Corollary 4.6] bizonyításában, levezethető, hogy $A(t)(f) = \tilde{A}(t)(f)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$ és $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$, tehát $A = \tilde{A}$.

A létezés bizonyításához felhasználjuk Siebert [91, Theorem 5.1] bizonyításának néhány ötletét. Legyen

$$\mu_{n\ell} := \nu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right)$$

ha $n, \ell \in \mathbb{N}$. Mivel a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport folytonosan gyengén korlátos változású, ezért az $(s, t) \mapsto q(\nu(s, t))$, \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képező függvény is folytonosan gyengén korlátos változású, tehát $q(\nu(s', t')) \leq V_\nu(0, t') - V_\nu(0, s')$ minden $(s', t') \in \mathbb{S}$ esetén, ahol $t \mapsto V_\nu(0, t)$ folytonos függvény. Másrészt bármely $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$q_n(s, t) = \sum_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} q(\mu_{n\ell}) = \sum_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} q\left(\nu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right)\right) \leq V_\nu(0, t) - V_\nu(0, s),$$

ezért minden $T > 0$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} q_n(s, t) = 0.$$

Nyilván tetszőleges $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mu_n(s, t) = \bigstar_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} \mu_{n\ell} = \nu\left(\frac{[ns]}{n}, \frac{[nt]}{n}\right).$$

Most $\lim_{n \rightarrow \infty} [nr]/n = r$, $r \in \mathbb{R}_+$ miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(s, t) = \nu(s, t)$ ha $(s, t) \in \mathbb{S}$. Válasszunk egy $(n(\alpha))_{\alpha \in J}$ univerzális résznetet \mathbb{N} -ben. Ekkor teljesülnek a 6.4.10 Tétel feltételei a $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ mértékekre és a $k_n(t) := [nt]$, $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ függvényekre. Ezért létezik olyan $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ monoton növekvő leképezés és olyan $v_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvény, hogy

$$(6.7.6) \quad A(t)(f) = \lim_{\alpha \in J} \int (f - f(e)) d\eta_{n(\alpha)}(0, t)$$

minden $f \in \mathfrak{X}_2(G)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén,

$$(6.7.7) \quad |A(t) - A(s)|_2 \leq v_1(t) - v_1(s)$$

minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén, és

$$(6.7.8) \quad \left| \int f d\nu(s, t) - f(e) - (A(t) - A(s))(f) \right| \leq |f|_{2,2} (v_1(t) - v_1(s))^2$$

minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Most belátjuk, hogy az A leképezést egyértelműen meghatározza a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport. Valóban, tegyük fel, hogy létezik egy másik $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ hemicsoport is úgy, hogy

$$\left| \int f d\nu(s, t) - f(e) - (\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s))(f) \right| \leq |f|_{2,2} (\tilde{v}(t) - \tilde{v}(s))^2$$

valamely $\tilde{v} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvénnyel. Ekkor bármely $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $(s', t') \in \mathbb{S}$ esetén

$$\left| (A(t') - A(s'))(f) - (\tilde{A}(t') - \tilde{A}(s'))(f) \right| \leq |f|_{2,2} \left((v_1(t') - v_1(s'))^2 + (\tilde{v}(t') - \tilde{v}(s'))^2 \right).$$

Rögzítsük a $t \in \mathbb{R}_+$ számot, és legyen $r \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} & |A(t)(f) - \tilde{A}(t)(f)| \\ &= \left| \sum_{\ell=1}^r \left(\left(A\left(\frac{\ell t}{r}\right)(f) - A\left(\frac{(\ell-1)t}{r}\right)(f) \right) - \left(\tilde{A}\left(\frac{\ell t}{r}\right)(f) - \tilde{A}\left(\frac{(\ell-1)t}{r}\right)(f) \right) \right) \right| \\ &\leq |f|_{2,2} \sum_{\ell=1}^r \left(\left(v_1\left(\frac{\ell t}{r}\right) - v_1\left(\frac{(\ell-1)t}{r}\right) \right)^2 + \left(\tilde{v}\left(\frac{\ell t}{r}\right) - \tilde{v}\left(\frac{(\ell-1)t}{r}\right) \right)^2 \right) \\ &\leq |f|_{2,2} (v_1(t) + \tilde{v}(t)) \max_{1 \leq \ell \leq r} \left(\left(v_1\left(\frac{\ell t}{r}\right) - v_1\left(\frac{(\ell-1)t}{r}\right) \right) + \left(\tilde{v}\left(\frac{\ell t}{r}\right) - \tilde{v}\left(\frac{(\ell-1)t}{r}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Ha $r \rightarrow \infty$, akkor ebből következik $A(t)(f) = \tilde{A}(t)(f)$ minden $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén, ezért $A(t) = \tilde{A}(t)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$. Az A egyértelműsége és (6.7.6) alapján megkapjuk a (6.7.5) előállítást.

A (6.7.7) egyenlőtlenség alapján az A leképezés folytonosan korlátos változású, és a 6.7.1 Tétel szerint létezik olyan $(\nu'(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben és olyan monoton növekvő, folytonos $v_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\left| \int f d\nu'(s, t) - f(e) - (A(t) - A(s))(f) \right| \leq |f|_{2,2} (v_2(t) - v_2(s))^2$$

ha $f \in \mathfrak{C}_{2,2}(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$. Továbbá A kapcsolatos a $(\nu'(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Ezután megmutatjuk, hogy $\nu(s, t) = \nu'(s, t)$ ha $(s, t) \in \mathbb{S}$. Legyen $E := G \cup \{\omega\}$ a G csoport 1-pontos kompaktifikációja. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $T(s, t) := T_{\nu(s, t)}$, $T'(s, t) := T_{\nu'(s, t)}$. Rögzítsük az $r > 0$ számot és az $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvényt. Legyen $t \in [0, r]$ és $x \in E$ esetén

$$F(t, x) := T(r - t, r)f(x) - T'(r - t, r)f(x).$$

A következő vizsgálat célja az, hogy megmutassuk, hogy az F függvény kielégíti a 6.5.1 Lemma feltételeit. Most legyen $(t, y) \in [0, r] \times E$ olyan, hogy

$$F(t, y) = \min\{F(t, x) : x \in E\}.$$

Minden $s \in [0, t]$ esetén

$$\begin{aligned} & F(t, y) - F(s, y) \\ &= (T(r - t, r)f(y) - T'(r - t, r)f(y)) - (T(r - s, r)f(y) - T'(r - s, r)f(y)) \\ &= T(r - t, r - s)f(y) - T'(r - t, r - s)f(y), \end{aligned}$$

ezért

$$|F(t, y) - F(s, y)| \leq |L_y f|_{2,2} \left((v_1(r-s) - v_1(r-t))^2 + (v_2(r-s) - v_2(r-t))^2 \right).$$

Következésképpen megkapjuk a kívánt

$$F(t, y) - F(s, y) \geq -(\chi(s) - \chi(t))(v(t) - v(s))$$

egyenlőtlenséget a $\chi(s) := v_1(r-s) + v_2(r-s)$ és $v(s) := -|L_y f|_{2,2} (v_1(r-s) + v_2(r-s))$, $s \in [0, r]$ függvényekkel. Alkalmazva a 6.5.1 Lemmát, azt kapjuk, hogy

$$\nu(s, t) = \nu'(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S}$$

a 6.5.2 Tétel bizonyításának végén használt gondolatmenettel. Tehát A kapcsolatban van a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. \square

Megjegyezzük, hogy (6.7.5) alapján az $A(t)$ generáló funkcionál kanonikus dekompozíciójában szereplő mennyiségek közvetlenül kifejezhetők a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport segítségével a következő módon:

$$\begin{aligned} \int_G f(y) \eta_0(dy \times [0, t]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_G f d\nu \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right), \quad f \in \mathfrak{C}_e(G), \\ b_0(i, j)(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_G x_i x_j d\nu \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right) - \int_G x_i(y) x_j(y) \eta_0(dy \times [0, t]), \\ a_0(i)(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_G x_i d\nu \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right). \end{aligned}$$

7. fejezet

Korlátos változású konvolúciós hemicsoportok Lie–projektív csoportokon

7.1 Lie–projektív csoportok

Egy lokálisan kompakt G topológikus csoportot *Lie–projektívnek* nevezünk, ha létezik G kompakt normálosztóinak olyan \mathfrak{H} rendszere, hogy minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén G/H egy Lie–csoport, és $\bigcap_{H \in \mathfrak{H}} H = \{e\}$. Ha \mathfrak{H} még ráadásul lefelé szűrő, akkor G *Lie–rendszerének* nevezzük. Feltehetjük (és mindig fel is tesszük), hogy \mathfrak{H} lefelé szűrő, mert tetszőleges G Lie–projektív csoport esetén a Lie–faktorcsoporthal rendelkező kompakt normálosztókból álló rendszer Lie–rendszer (lásd Montgomery, Zippin [64]).

Legyen \mathfrak{H} egy Lie–rendszere a G Lie–projektív csoportnak. Ekkor G előáll mint a $\lim_{\leftarrow H \in \mathfrak{H}} (G/H)$ projektív limesz, mely definíció szerint a $\prod_{H \in \mathfrak{H}} (G/H)$ szorzatcsoportnak a következő zárt részcsoportha:

$$\left\{ (x_H)_{H \in \mathfrak{H}} \in \prod_{H \in \mathfrak{H}} (G/H) : p_H^M(x_M) = x_H \text{ ha } M, H \in \mathfrak{H}, M \subseteq H \right\}$$

Ezután lehet definiálni a G csoport $\mathfrak{L}(G)$ Lie–algebráját, mint a G/H közösleges Lie–csoportokhoz tartozó Lie–algebráknak a $\lim_{\leftarrow H \in \mathfrak{H}} \mathfrak{L}(G/H)$ projektív limeszét a $p_H^M : G/M \rightarrow G/H$, $M, H \in \mathfrak{H}$, $M \subseteq H$ kanonikus leképezések differenciáljaira vonatkozóan, azaz

$$\mathfrak{L}(G) := \left\{ (X^H)_{H \in \mathfrak{H}} \in \prod_{H \in \mathfrak{H}} \mathfrak{L}(G/H) : dp_H^M(X^H) = X^M \text{ ha } M, H \in \mathfrak{H}, M \subseteq H \right\}.$$

A $dp_H : \mathfrak{L}(G) \rightarrow \mathfrak{L}(G/H)$ kanonikus leképezések olyan folytonos, nyílt epimorfizmusok, melyekre $dp_H = dp_H^M \circ dp_M$ ha $M, H \in \mathfrak{H}$, $M \subseteq H$. Továbbá $\mathfrak{L}(G)$ független a \mathfrak{H} Lie–rendszer választásától.

Born [14, Theorem 2.2] szerint mindig lehet találni egy G Lie-projektív csoportnak olyan \mathfrak{H} Lie-rendszerét, melyre nézve az $\mathfrak{L}(G)$ Lie-algebrának van projektív bázisa a következő definíció értelmében:

7.1.1 Definíció. Egy $(X_i)_{i \in I}$ családot $\mathfrak{L}(G) \setminus \{0\}$ -ben projektív bázisnak nevezünk a G csoport \mathfrak{H} Lie-rendszerére nézve, ha minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén létezik olyan $I_H \subseteq I$ véges részhalmaz, hogy $(dp_H(X_i))_{i \in I_H}$ bázist alkot az $\mathfrak{L}(G/H)$ vektortérben és $dp_H(X_i) = 0$ minden $i \notin I_H$ esetén.

A továbbiakban rögzítjük G -nek egy olyan \mathfrak{H} Lie-rendszerét, hogy $\mathfrak{L}(G)$ rendelkezzen egy $(X_i)_{i \in I}$ projektív bázissal \mathfrak{H} -ra nézve. Born [14, Proposition 2.3] szerint minden $(r_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ esetén pontosan egy olyan $X \in \mathfrak{L}(G)$ vektor van, melyre

$$\lim_{J \in \mathfrak{F}(I)} \sum_{i \in J} r_i X_i = X =: \sum_{i \in I} r_i X_i.$$

Valójában

$$\sum_{i \in I} r_i X_i = \left(\sum_{i \in I_H} r_i dp_H(X_i) \right)_{H \in \mathfrak{H}}.$$

Továbbá Born [14, Theorem 2.4] szerint az $(r_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} r_i X_i$ leképezés egy topologikus vektor-tér izomorfizmus \mathbb{R}^I -ről $\mathfrak{L}(G)$ -re, ezért I számossága csak G -től függ.

A teszt-függvények $\mathfrak{D}(G)$ terét a következő módon definiáljuk:

$$\mathfrak{D}(G) := \bigcup_{H \in \mathfrak{H}} \{f^H \circ p_H : f^H \in \mathfrak{D}(G/H)\}$$

(lásd Bruhat [18]). A k -szor balról, illetve jobbról differenciálható függvények $\mathfrak{C}_k(G)$ és $\mathfrak{C}_k(G)$ terét Born [14, 4.1] vezette be. Megjegyezzük, hogy minden $X \in \mathfrak{L}(G)$, $H \in \mathfrak{H}$ és $f^H \in \mathfrak{C}_1(G/H)$ esetén teljesül $f^H \circ p_H \in \mathfrak{C}_1(G)$ és

$$X(f^H \circ p_H) = (dp_H(X)f^H) \circ p_H.$$

Bevezetjük a *gyenge koordináta-rendszer* fogalmát G -ben, általánosítva egy Lie-csoportbeli koordináta-rendszer fogalmát a következő módon (lásd Born [15]):

7.1.2 Definíció. Egy $(x_i)_{i \in I}$ család $\mathfrak{D}(G)$ -ben *gyenge koordináta-rendszere* a G csoportnak az e pontban $(X_i)_{i \in I}$ -re nézve, ha teljesül $X_i x_j(e) = \delta_{ij}$ és $x_j^* = -x_j$ minden $i, j \in I$ esetén. Azt mondjuk, hogy $(x_i)_{i \in I}$ projektív, ha még az is teljesül, hogy minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén létezik olyan $U^H \in \mathfrak{U}(e)$ környezet és olyan $(x_i^H)_{i \in I_H}$ kanonikus koordináta-rendszere G/H -nak e -ben az $\mathfrak{L}(G/H)$ Lie-algebra $(dp_H(X_i))_{i \in I_H}$ bázisára nézve, hogy $x_i(y) = x_i^H \circ p_H(y)$ ha $y \in U_H$ és $i \in I_H$.

Mindig lehet G -nek projektív gyenge koordináta-rendszerét találni e -ben $(X_i)_{i \in I}$ -re vonatkozóan. Valóban, minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén legyen $(x_i^H)_{i \in I_H}$ egy kanonikus koordináta-rendszere G/H -nek e -ben az $\mathfrak{L}(G/H)$ Lie-algebra $(dp_H(X_i))_{i \in I_H}$ bázisára nézve. Minden

$i \in I$ esetén válasszunk egy olyan $H(i) \in \mathfrak{H}$ kompakt normálosztót, melyre $i \in I_{H(i)}$. Legyen $x_i := x_i^{H(i)} \circ p_{H(i)}$. Ekkor Born [15, Corollary 7] alapján az $(x_i)_{i \in I}$ család egy projektív gyenge koordináta-rendszere G -nek e -ben.

7.2 Konvolúciós félcsoporthok és hemicsoporthok Lie-projektív csoportokon

Vezessük be a következő paraméter-teret:

$$\mathbb{P}(G) := \mathbb{R}^I \times \mathbb{M}_I^+ \times \mathbb{L}(G).$$

Born [15, Corollary 5] megmutatta a következő reprezentációs tételt konvolúciós félcsoporthok generáló funkcionáljairól (valójában lokálisan kompakt topológikus csoportokra bizonyított).

7.2.1 Tétel. *Legyen G egy Lie-projektív csoport, $(X_i)_{i \in I}$ egy projektív bázis $\mathfrak{L}(G)$ -ben és $(x_i)_{i \in I}$ egy gyenge koordináta-rendszere G -nek e -ben $(X_i)_{i \in I}$ -re nézve.*

(A) *Ha $(\mu_t)_{t \geq 0}$ egy konvolúciós félcsoporth $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben A generáló funkcionállal, akkor $\mathfrak{D}(G) \subseteq \text{Dom}(A)$ és pontosan egy olyan $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}(G)$ hármas létezik, hogy*

$$A(f) = \sum_{i \in I} a_i X_i f(e) + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in I} b_{ij} X_i X_j f(e) + \int \left(f(y) - f(e) - \sum_{i \in I} X_i f(e) x_i(y) \right) \eta(dy)$$

minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén.

(B) *Minden $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}(G)$ hármashoz pontosan egy olyan $(\mu_t)_{t \geq 0}$ konvolúciós félcsoporth létezik $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, melynek generáló funkcionáljára $\mathfrak{D}(G)$ -n érvényes az (A) reprezentáció.*

Mértékeknek egy $(\eta_t)_{t \geq 0}$ családját $\mathfrak{M}_+(G)$ -ben Lévy-mérték családnak nevezzük G -n, ha $\eta_t - \eta_s \in \mathbb{L}(G)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén, $\eta_0 = 0$, és az $(s, t) \mapsto \int f d\eta_t$ leképezés folytonos, ha $f \in \mathfrak{D}(G)_+$ és $f(e) = 0$. Jelölje $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ azon $\eta \in \mathfrak{M}^1(G \times \mathbb{R}_+)$ mértékek halmazát, melyekre teljesül $\eta(\{e\} \times \mathbb{R}_+) = 0$, $\eta(dy \times [0, t]) \in \mathbb{L}(G)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$, és hogy a $t \mapsto \int f(y) \eta(dy \times [0, t])$ leképezés folytonos, ha $f \in \mathfrak{D}(G)_+$ és $f(e) = 0$. Ekkor létezik egy természetes bijekció az $(\eta_t)_{t \geq 0}$, $\mathfrak{M}_+(G)$ -beli Lévy-mérték családok és az $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ halmaz között: $\eta_t(dy) = \eta(dy \times [0, t])$, $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$.

Vezessük még be a $\mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméter-teret is, mely olyan (a, B, η) hármasokból áll, ahol $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^I$, $a(t) = (a_i(t))_{i \in I}$ olyan folytonos függvény, hogy $a(0) = 0$ és minden $i \in I$ esetén az $a_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ koordináta-függvény korlátos változású, $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_I^+$ monoton növekvő, folytonos és $B(0) = 0$, valamint $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$. Egy $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármasnak megfeleltetünk egy $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{P}(G)$ generáló leképezést úgy, hogy

$A(t) := (a(t), B(t), \eta_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Egy $\mathfrak{C}_2(G)$ -beli $(g_t)_{t \geq 0}$ függvény-család és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \int_{]s,t]} A(d\tau)(g_\tau) &:= \sum_{i \in I} \int_{]s,t]} X_i g_\tau(e) a_i(d\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \in I} \int_{]s,t]} X_i X_j g_\tau(e) b_{ij}(d\tau) \\ &+ \int \int_{G \times]s,t]} \left(g_\tau(y) - g_\tau(e) - \sum_{i \in I} X_i g_\tau(e) x_i(y) \right) \eta(dy \times d\tau), \end{aligned}$$

amennyiben az integrálok léteznek.

7.2.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport és egy $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas kapcsolatosak a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint az $\mathfrak{L}(G)$ -beli $(X_i)_{i \in I}$ bázisra és G -nek e -beli $(x_i)_{i \in I}$ gyenge koordináta-rendszerére nézve (röviden: kapcsolatosak), ha minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(T_{\mu(s,t)} - I)f(e) = \int_{]s,t]} A(d\tau)(T_{\mu(\tau,t)}f).$$

Most adunk egy kritériumot arra, hogy egy $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli hemicsoport kapcsolatos legyen egy hármassal, $\mathfrak{M}^1(G/H)$ -beli $(H \in \mathfrak{H})$ hemicsoportok segítségével. Legyen $(x_i)_{i \in I}$ egy projektív gyenge koordináta-rendszere G -nek e -ben $(X_i)_{i \in I}$ -re nézve. Legyen $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. Minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén definiáljuk az $a^H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{I_H}$, $a^H(t) = (a_i^H(t))_{i \in I_H}$ függvényt a következő módon:

$$a_i^H(t) := a_i(t) + \int_G (x_i^H \circ p_H(y) - x_i(y)) \eta(dy \times [0, t]).$$

(Az integrál létezik, mert $x_i^H \circ p_H - x_i \in \mathfrak{C}_e(G)$.) Továbbá definiáljuk a következő $B^H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_{I_H}^+$ függvényt:

$$B^H(t) := (b_{ij}(t))_{i,j \in I_H}.$$

Végül tekintsük a következő $\eta^H \in \mathfrak{M}_+((G/H) \times \mathbb{R}_+)$ mértéket:

$$\eta^H(dy \times [0, t]) := \eta_t^H(dy)$$

ahol $\eta_t^H := p_H(\eta_t)$, $\eta_t(dy) := \eta(dy \times [0, t])$. Nyilván $(a^H, B^H, \eta^H) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G/H)$.

7.2.3 Állítás. Legyen G egy Lie-projektív csoport, $(X_i)_{i \in I}$ egy projektív bázis $\mathfrak{L}(G)$ -ben és $(x_i)_{i \in I}$ egy projektív gyenge koordináta-rendszere G -nek e -ben az $(X_i)_{i \in I}$ -re nézve. Legyen minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén $(x_i^H)_{i \in I_H}$ egy olyan koordináta-rendszere G/H -nek e -ben az $\mathfrak{L}(G/H)$ -beli $(dp_H(X_i))_{i \in I_H}$ bázisra nézve, hogy $x_i(y) = x_i^H \circ p_H(y)$ ha $y \in U_H$ és $i \in I_H$.

Ekkor egy $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport és egy $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas pontosan akkor kapcsolatosak az $\mathfrak{L}(G)$ -beli $(X_i)_{i \in I}$ bázisra és G -nek az $(x_i)_{i \in I}$ gyenge koordináta-rendszerére nézve, ha minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén az $\mathfrak{M}^1(G/H)$ -beli $(p_H(\mu(s, t)))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport kapcsolatos a (fent definiált) $(a^H, B^H, \eta^H) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G/H)$ hármassal az $\mathfrak{L}(G/H)$ -beli $(dp_H(X_i))_{i \in I_H}$ bázisra és G/H -nek az $(x_i^H)_{i \in I_H}$ koordináta-rendszerére nézve.

Bizonyítás. Nyilván minden $(s, t) \in \mathbb{S}$, $H \in \mathfrak{H}$ és $f^H \in \mathfrak{D}(G/H)$ esetén

$$(T_{p_H(\mu(s,t))} - I)f^H(e) = (T_{\mu(s,t)} - I)(f^H \circ p_H)(e).$$

Továbbá

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I_H} \int_{]s,t]} (dp_H(X_i) T_{p_H(\mu(\tau,t))} f^H)(e) a_i^H(d\tau) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{]s,t]} X_i T_{\mu(\tau,t)}(f^H \circ p_H)(e) a_i(d\tau) \\ &+ \sum_{i \in I_H} \iint_{G \times]s,t]} X_i T_{\mu(\tau,t)}(f^H \circ p_H)(e) (x_i^H \circ p_H(y) - x_i(y)) \eta(dy \times d\tau), \\ & \sum_{i,j \in I_H} \int_{]s,t]} (dp_H(X_i) dp_H(X_j) T_{p_H(\mu(\tau,t))} f^H)(e) b_{ij}^H(d\tau) \\ &= \sum_{i,j \in I} \int_{]s,t]} X_i X_j T_{\mu(\tau,t)}(f^H \circ p_H)(e) b_{ij}(d\tau), \\ & \iint_{(G/H) \times]s,t]} \left(T_{p_H(\mu(\tau,t))} f^H(y) - T_{p_H(\mu(\tau,t))} f^H(e) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i \in I_H} \int_{]s,t]} (dp_H(X_i) T_{p_H(\mu(\tau,t))} f^H)(e) x_i^H(y) \right) \eta^H(dy \times d\tau) \\ &= \iint_{G \times]s,t]} \left(T_{\mu(\tau,t)}(f^H \circ p_H)(y) - T_{\mu(\tau,t)}(f^H \circ p_H)(e) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i \in I_H} \int_{]s,t]} X_i T_{\mu(\tau,t)}(f^H \circ p_H)(e) x_i^H \circ p_H(y) \right) \eta(dy \times d\tau). \end{aligned}$$

Következésképpen

$$\int_{]s,t]} A^H(d\tau) (T_{p_H(\mu(\tau,t))} f^H) = \int_{]s,t]} A(d\tau) (T_{\mu(\tau,t)}(f^H \circ p_H)),$$

amiből következik az állítás. \square

7.3 Háromszögrendszerek konvergenciája

Alkalmazva a Lie-csoportokon értelmezett valószínűségi mértékekből álló háromszögrendszerek konvergenciájáról szóló 6.6.1 Tételt, a következő konvergencia-tételt kapjuk:

7.3.1 Tétel. Legyen G egy Lie-projektív csoport, $(X_i)_{i \in I}$ egy projektív bázis $\mathfrak{L}(G)$ -ben és $(x_i)_{i \in I}$ egy projektív gyenge koordináta-rendszere G -nek e -ben $(X_i)_{i \in I}$ -re vonatkozóan.

Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G csoporton. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy olyan monoton növekvő, balról folytonos függvény, hogy $k_n(0) = 0$ és $k_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{Z}_+$. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ban.

Tegyük fel, hogy

(i) létezik olyan $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ mérték, hogy minden $t \in D$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int f d\mu_{n\ell} = \int_G f(y) \eta(dy \times [0, t]),$$

(ii) létezik olyan $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_I$, $B(t) = (b_{i,j}(t))_{i,j \in I}$ folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ és $i, j \in I$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int x_i x_j d\mu_{n\ell} = b_{i,j}(t) + \int_G x_i(y) x_j(y) \eta(dy \times [0, t]),$$

(iii) létezik olyan $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^I$, $a(t) = (a_i(t))_{i \in I}$ folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ és $i \in I$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int x_i d\mu_{n\ell} = a_i(t),$$

(iv) minden $T > 0$ és $i \in I$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int x_i d\mu_{n\ell} \right| = 0.$$

Ekkor $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ és

$$\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ahol $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely az (a, B, η) hármassal kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint az $\mathfrak{L}(G)$ -beli $(X_i)_{i \in I}$ bázisra és a G -beli $(x_i)_{i \in I}$ gyenge koordináta-rendszerre vonatkozóan.

Továbbá legyen $(\xi_t)_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értékeket felvevő, független bal-növekményű $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ -beli trajektóriájú folyamat, mely a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoportnak felel meg. Tekintsük a következő állításokat:

(α) $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy diffúziós hemicsoport.

(β) A $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak.

(γ) $\eta = 0$.

Ekkor (β) és (γ) ekvivalensek, valamint (α)-ból következik (β) és (γ).

Ha még azt is feltesszük, hogy

(v) minden $f \in \mathfrak{C}_e(G)_+$ esetén a $t \mapsto \int_G f(y) \eta(dy \times [0, t])$, \mathbb{R}_+ -ból \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos,

(vi) minden $i \in I$ esetén a $t \mapsto b_{i,i}(t)$, \mathbb{R}_+ -ból \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos,

(vii) létezik olyan (n') részsorozat, hogy minden $i \in I$ esetén az

$$(s, t) \mapsto \limsup_{n'} \sum_{\ell=k_{n'}(s)+1}^{k_{n'}(t)} \left| \int x_i d\mu_{n'\ell} \right|$$

\mathbb{S} -ből \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos,

akkor (α), (β) és (γ) ekvivalensek.

Bizonyítás. Minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén definiáljuk az $a^H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{I_H}$ függvényt, a $B^H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_{I_H}^+$ mátrix-értékű függvényt és az $\eta^H \in \mathfrak{M}_+((G/H) \times \mathbb{R}_+)$ mértéket úgy, mint a 7.2.3 Állítás előtt. Definiáljuk a $\mu_{n\ell}^H \in \mathfrak{M}^1(G/H)$ mértékeket a következő módon: $\mu_{n\ell}^H := p_H(\mu_{n\ell})$. Megmutatjuk, hogy a 6.6.1 Tétel (i)–(iv) feltételei teljesülnek a $\{\mu_{n\ell}^H : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ mértékekre, a $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ függvényekre és az (a^H, B^H, η^H) hármasra.

Nyilván $f^H \in \mathfrak{C}_e(G/H)$ esetén $f^H \circ p_H \in \mathfrak{C}_e(G)$, ezért az (i) feltétel miatt minden $t \in D$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_{G/H} f^H d\mu_{n\ell}^H &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_G f^H \circ p_H d\mu_{n\ell} \\ &= \int_G f^H \circ p_H(y) \eta(dy \times [0, t]) = \int_{G/H} f^H(y) \eta^H(dy \times [0, t]). \end{aligned}$$

Minden $i, j \in I_H$ esetén $(x_i^H \circ p_H)(x_j^H \circ p_H) - x_i x_j \in \mathfrak{C}_e(G)$, ezért az (i) feltétel miatt minden $t \in D$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_G ((x_i^H \circ p_H)(x_j^H \circ p_H) - x_i x_j) d\mu_{n\ell} \\ = \int_G ((x_i^H \circ p_H(y))(x_j^H \circ p_H(y)) - x_i(y)x_j(y)) \eta(dy \times [0, t]), \end{aligned}$$

amiből a (ii) feltétel felhasználásával adódik

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_{G/H} x_i^H x_j^H d\mu_{n\ell}^H &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_G (x_i^H \circ p_H)(x_j^H \circ p_H) d\mu_{n\ell} \\
&= b_{ij}(t) + \int_G (x_i^H \circ p_H(y))(x_j^H \circ p_H(y)) \eta(dy \times [0, t]) \\
&= b_{ij}^H(t) + \int_{G/H} x_i^H(y) x_j^H(y) \eta^H(dy \times [0, t]).
\end{aligned}$$

Minden $i \in I_H$ esetén $x_i^H \circ p_H - x_i \in \mathfrak{C}_e(G)$, ezért az (i) feltétel miatt minden $t \in D$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_G (x_i^H \circ p_H - x_i) d\mu_{n\ell} = \int_G (x_i^H \circ p_H(y) - x_i(y)) \eta(dy \times [0, t]),$$

amiből a (iii) feltétel felhasználásával adódik

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_{G/H} x_i^H d\mu_{n\ell}^H &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int_G x_i^H \circ p_H d\mu_{n\ell} \\
&= a_i(t) + \int_G (x_i^H \circ p_H(y) - x_i(y)) \eta(dy \times [0, t]) = a_i^H(t).
\end{aligned}$$

Az (i) feltételbeli konvergencia nyilván egyenletes a $[0, T]$ intervallumon minden $T > 0$ esetén, hiszen minden $f \in \mathfrak{C}_e(G)_+$ esetén a

$$t \mapsto \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \int f d\mu_{n\ell}, \quad n \in \mathbb{N},$$

függvények monoton növekvők és folytonosak, és a $t \mapsto \int f(y) \eta(dy \times [0, t])$ limesz-függvény folytonos. Tehát minden $T > 0$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)_+$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int f d\mu_{n\ell} = 0$$

(lásd 6.4.1 Lemma). Következésképpen az

$$\left| \int_{G/H} x_i^H d\mu_{n\ell}^H \right| \leq \left| \int_G x_i d\mu_{n\ell} \right| + \int_G |x_i^H \circ p_H - x_i| d\mu_{n\ell}$$

egyenlőtlenségből $|x_i^H \circ p_H - x_i| \in \mathfrak{C}_e(G)_+$ alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left| \int_{G/H} x_i^H d\mu_{n\ell}^H \right| = 0.$$

Tehát alkalmazhatjuk a 6.6.1 Tételt. Azt kapjuk, hogy $(a^H, B^H, \eta^H) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G/H)$ minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén, ezért $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. Továbbá

$$\mu_n^H(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}^H \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu^H(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ahol $(\nu^H(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G/H)$ -ben. Minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén a $(\nu^H(s, t))_{H \in \mathfrak{H}}$ mérték-család projektív rendszert alkot, hiszen ha $M, H \in \mathfrak{H}$, $M \subseteq H$ akkor

$$\begin{aligned} p_H^M(\nu^M(s, t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_H^M \left(\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}^M \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} p_H^M(p_M(\mu_{n\ell})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} p_H(\mu_{n\ell}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}^H = \nu^H(s, t). \end{aligned}$$

Ezért Heyer [48, Theorem 1.2.17] alapján létezik olyan $\nu(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G/H)$ mérték, hogy

$$p_H(\nu(s, t)) = \nu^H(s, t) \quad \text{ha } H \in \mathfrak{H}.$$

Jelölje $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\nu_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}.$$

Ekkor $\nu_{n\ell}^H(s, t) = p_H(\nu_{n\ell}(s, t))$, és minden $(s, t) \in \mathbb{S}$, $H \in \mathfrak{H}$ és $f^H \in \mathfrak{K}(G/H)$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f^H \circ p_H(y) \mu_n(s, t)(dy) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G/H} f^H(y) \mu_n^H(s, t)(dy) \\ &= \int_{G/H} f^H(y) \nu^H(s, t)(dy) = \int_G f^H \circ p_H(y) \nu(s, t)(dy), \end{aligned}$$

és mivel az $\{f^H \circ p_H : f^H \in \mathfrak{K}(G/H), H \in \mathfrak{H}\}$ halmaz sűrű $\mathfrak{K}(G)$ -ben, így

$$\mu_n(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S}.$$

Véve $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén olyan (s_ℓ) és (t_ℓ) sorozatokat \mathbb{R}_+ -ben, hogy $s_\ell \rightarrow s$, $t_\ell \rightarrow t$ és $(s_\ell, t_\ell) \in \mathbb{S}$, azt kapjuk, hogy minden $H \in \mathfrak{H}$ és $f^H \in \mathfrak{K}(G/H)$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_G f^H \circ p_H(y) \nu(s_\ell, t_\ell)(dy) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G/H} f^H(y) \nu^H(s_\ell, t_\ell)(dy) \\ &= \int_{G/H} f^H(y) \nu^H(s, t)(dy) = \int_G f^H \circ p_H(y) \nu(s, t)(dy), \end{aligned}$$

tehát $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben.

A 6.6.1 Tételből még az is következik, hogy minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén a $(\nu^H(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport kapcsolatos az $(a^H, B^H, \eta^H) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G/H)$ hármassal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint az $\mathfrak{L}(G/H)$ -beli $(dp_H(X_i))_{i \in I_H}$ bázisra és a G/H -beli $(x_i^H)_{i \in I_H}$ koordináta-rendszerre nézve. Ezért a 7.2.3 állítás alapján azt kapjuk, hogy a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport kapcsolatos az (a, B, η) hármassal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint az $\mathfrak{L}(G)$ -beli $(X_i)_{i \in I}$ bázis és a G -beli $(x_i)_{i \in I}$ koordináta-rendszerre nézve.

Továbbá minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén a $(\nu^H(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport folytonosan gyengén korlátos változása, tehát az

$$(s, t) \mapsto (T_{\nu^H(s, t)} - I)f^H(e) = (T_{\nu(s, t)} - I)(f^H \circ p_H)(e)$$

leképezés folytonosan korlátos változása minden $f^H \in \mathfrak{D}(G/H)$ függvény esetén. Következésképpen a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport is folytonosan gyengén korlátos változása, így az első rész bizonyítása készen van.

A 6.2.2 Lemma alapján (α) -ból következik (β) . A 6.6.1 Tétel szerint minden $H \in \mathfrak{H}$ és $f^H \in \mathfrak{D}(G/H)$ esetén az

$$F_{f^H}^H : (s, t) \mapsto \sqrt{|(T_{\nu^H(s, t)} - I)f^H(e) - (A^H(t) - A^H(s))(f^H)|}$$

függvény, mely \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képezi, folytonosan korlátos változása. Könnyen lehet ellenőrizni, hogy minden $t \in \mathbb{R}_+$ és $f^H \in \mathfrak{D}(G/H)$ esetén $A(t)(f^H \circ p_H) = A^H(t)(f^H)$. Tehát azt kapjuk, hogy minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén az

$$F_f : (s, t) \mapsto \sqrt{|(T_{\nu(s, t)} - I)f(e) - (A(t) - A(s))(f)|}$$

függvény, mely \mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képezi, folytonosan korlátos változása, tehát a 6.2.2 Lemma alapján a (β) és (γ) állítások ekvivalensek.

Az (v)–(vii) feltételekből következik, hogy minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén a $t \mapsto \int_{G/H} f^H(y) \eta^H(dy \times [0, t])$, \mathbb{R}_+ -et \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos ha $f^H \in \mathfrak{C}_e(G/H)_+$, a $t \mapsto \sum_{i \in I_H} b_{i,i}(t)$, \mathbb{R}_+ -et \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos, és létezik olyan (n') részsorozat, hogy minden $i \in I_H$ esetén az

$$(s, t) \mapsto \limsup_{n'} \sum_{\ell=k_{n'}(s)+1}^{k_{n'}(t)} \left| \int_{G/H} x_i^H d\mu_{n'\ell}^H \right|$$

\mathbb{S} -et \mathbb{R} -be képező függvény Lipschitz-folytonos. Tehát, mint a 6.6.1 Tétel bizonyításában, azt kapjuk, hogy minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén az $\eta^H = 0$ tulajdonságból következik, hogy minden $f^H \in \mathfrak{D}(G/H)$ esetén az $F_{f^H}^H$ függvény Lipschitz-folytonos, így minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén az F_f függvény Lipschitz-folytonos. Következésképpen, újra a 6.2.2 Lemma alapján, az (α) , (β) és (γ) állítások ekvivalensek. \square

7.4 Korlátos változású hemicsoportok paraméterezése

7.4.1 Tétel. Legyen G egy Lie-projektív csoport, és legyen $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. Ekkor pontosan egy olyan $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport létezik $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely kapcsolatos az (a, B, η) hármassal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Továbbá a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport folytonosan gyengén korlátos változású.

Bizonyítás. Először az egyértelműséget bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy két hemicsoport van $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben: $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ és $(\nu'(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$, melyek az (a, B, η) hármassal kapcsolatosak. Ekkor a 7.2.3 Állítás alapján minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén az $\mathfrak{M}^1(G/H)$ -beli $(p_H(\nu(s, t)))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ és $(p_H(\nu'(s, t)))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoportok kapcsolatosak az $(a^H, B^H, \eta^H) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G/H)$ hármassal. A 6.5.2 Tétel szerint $p_H(\nu(s, t)) = p_H(\nu'(s, t))$ teljesül minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $H \in \mathfrak{H}$ esetén. Heyer [48, Theorem 1.2.17] alapján azt kapjuk, hogy $\nu(s, t) = \nu'(s, t)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén.

Most a létezést fogjuk bizonyítani. Legyen $f \in \tilde{\mathcal{C}}_2(G)$, $t \in \mathbb{R}_+$ és $y \in G$ esetén

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t)f(y) &:= \sum_{i \in I} a_i(t) \tilde{X}_i f(y) + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in I} b_{i, j}(t) \tilde{X}_i \tilde{X}_j f(y) \\ &\quad + \int_G \left(f(yz) - f(y) - \sum_{i \in I} \tilde{X}_i f(y) x_i(x) \right) \eta(dy \times [0, t]). \end{aligned}$$

Born [15, Theorem 5] alapján azt kapjuk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén az $f \mapsto (\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s))(f)$, $\tilde{\mathcal{C}}_2(G)$ -t $\mathcal{C}^0(G)$ -be vivő leképezés egybeesik $\tilde{\mathcal{C}}_2(G)$ -n valamely $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli, egyértelműen létező $(\tilde{\nu}_r(s, t))_{r \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthoz $\tilde{N}(s, t)$ infinitézimális generátorával.

Legyen minden $H \in \mathfrak{H}$, $f^H \in \tilde{\mathcal{C}}_2(G/H)$, $y \in G$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén $\tilde{N}_H(t)(f^H)(p_H(y)) := \tilde{N}(t)(f \circ p_H)(y)$. Legyen $(a^H, B^H, \eta^H) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G/H)$ úgy definiálva, mint a 7.2.3 Állítás előtt. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{N}_H(t)(f^H)(y) &= \sum_{i \in I_H} a_i^H(t) \widetilde{dp_H(X_i)} f^H(y) + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in I_H} b_{i, j}^H(t) \widetilde{dp_H(X_i)} \widetilde{dp_H(X_j)} f^H(y) \\ &\quad + \int_{G/H} \left(f^H(yz) - f^H(y) - \sum_{i \in I_H} \widetilde{dp_H(X_i)} f^H(y) x_i^H(x) \right) \eta^H(dy \times [0, t]) \end{aligned}$$

minden $f^H \in \tilde{\mathcal{C}}_2(G)$, $t \in \mathbb{R}_+$ és $y \in G/H$ esetén.

Legyen minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $H \in \mathfrak{H}$ esetén $\tilde{N}_H(s, t) := \tilde{N}_H(t) - \tilde{N}_H(s)$. Ekkor valóban $\tilde{N}_H(s, t)$ az $\mathfrak{M}^1(G/H)$ -beli $(p_H(\tilde{\nu}_r(s, t)))_{r \geq 0}$ konvolúciós félcsoporthoz infinitézimális generátorának megszorítása $\tilde{\mathcal{C}}_2(G/H)$ -re. Mint a 6.7.1 Tétel bizonyításában, azt kapjuk, hogy

$$\bigstar_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} p_H \left(\tilde{\nu}_r \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right) \right) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu^H(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ahol $(\nu^H(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan $\mathfrak{M}^1(G/H)$ -beli folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport, mely az (a^H, B^H, η^H) hármassal kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén a $(\nu^H(s, t))_{H \in \mathfrak{H}}$ család egy projektív rendszer, hiszen ha $M, H \in \mathfrak{H}$, $M \subseteq H$ akkor

$$\begin{aligned} p_H^M(\nu^M(s, t)) &= p_H^M \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigstar_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} p_M \left(\tilde{\nu}_r \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bigstar_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} p_H \left(\tilde{\nu}_r \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right) \right) = \nu_H(s, t). \end{aligned}$$

Megint Heyer [48, Theorem 1.2.17] alapján azt kapjuk, hogy létezik olyan $\nu(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$ mérték, melyre $p_H(\nu(s, t)) = \nu^H(s, t)$. Mint a 7.3.1 Tétel bizonyításában, meg lehet mutatni, hogy $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely az (a, B, η) hármassal kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. \square

7.4.2 Tétel. *Legyen G egy Lie-projektív csoport, és legyen $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben. Ekkor pontosan egy olyan $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas létezik, mely kapcsolatos a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.*

Az (a, B, η) hármast a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport a következő módon határozza meg:

$$\begin{aligned} \int_G f(y) \eta(dy \times [0, t]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_G f(y) \nu \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right) (dy), \quad f \in \mathfrak{C}_e(G), \\ b_{i,j}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_G x_i(y) x_j(y) \nu \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right) (dy) - \int_G x_i(y) x_j(y) \eta(dy \times [0, t]), \\ a_i(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_G x_i(y) \nu \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right) (dy). \end{aligned}$$

Továbbá minden $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$A(t)(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int (f(y) - f(e)) d\nu \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n} \right) (dy),$$

ahol $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{P}(G)$ az (a, B, η) hármashoz rendelt leképezés.

Bizonyítás. Először az egyértelműséget bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy két hármas van: (a, B, η) és $(\tilde{a}, \tilde{B}, \tilde{\eta})$ a $\mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterhalmazban, melyek a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal kapcsolatosak a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Legyen $H \in \mathfrak{H}$ esetén az (a^H, B^H, η^H) és $(\tilde{a}^H, \tilde{B}^H, \tilde{\eta}^H)$, $\mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G/H)$ -beli hármasok úgy definiálva, mint

a 7.2.3 Állítás előtt. A 7.2.3 Állítás alapján az (a^H, B^H, η^H) és $(\tilde{a}^H, \tilde{B}^H, \tilde{\eta}^H)$ hármasok kapcsolatosak az $\mathfrak{M}^1(G/H)$ -beli $(p_H(\nu(s, t)))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoporttal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Tehát a 6.7.4 Tétel alapján $(a^H, B^H, \eta^H) = (\tilde{a}^H, \tilde{B}^H, \tilde{\eta}^H)$ minden $H \in \mathfrak{H}$ esetén. Ezért nyilván $B = \tilde{B}$. Minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén az $(\eta_t^H)_{H \in \mathfrak{H}}$ és $(\tilde{\eta}_t^H)_{H \in \mathfrak{H}}$ családok projektív rendszert alkotnak, tehát Heyer [48, Theorem 1.2.17] szerint $\eta_t = \tilde{\eta}_t$, ezért $\eta = \tilde{\eta}$, ami miatt $a = \tilde{a}$ is teljesül.

Most a létezést fogjuk bizonyítani. A feltételek szerint minden $f \in \mathfrak{C}_2(G)$ függvény esetén az $(s, t) \mapsto (T_{\nu(s, t)} - I)f(e)$ leképezés folytonosan korlátos változású. Ezért minden $H \in \mathfrak{H}$ és $f^H \in \mathfrak{C}_2(G/H)$ esetén az

$$(s, t) \mapsto (T_{\nu(s, t)} - I)(f \circ p_H)(e) = (T_{p_H(\nu(s, t))} - I)f^H(e)$$

leképezés is folytonosan korlátos változású. Tehát $(p_H(\nu(s, t)))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G/H)$ -ban. Alkalmazva a 6.7.4 Tételt, azt kapjuk, hogy létezik olyan $(a^H, B^H, \eta^H) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G/H)$ hármas, mely kapcsolatos a $(p_H(\nu(s, t)))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal, és az (a^H, B^H, η^H) hármas a $(p_H(\nu(s, t)))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport a következő módon határozza meg:

$$\begin{aligned} \int_{G/H} f^H(y) \eta^H(dy \times [0, t]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_{G/H} f^H(y) p_H\left(\nu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right)\right)(dy), \quad f^H \in \mathfrak{C}_e(G/H), \\ b_{i,j}^H(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_{G/H} x_i^H(y) x_j^H(y) p_H\left(\nu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right)\right)(dy) - \int_{G/H} x_i^H(y) x_j^H(y) \eta^H(dy \times [0, t]), \\ a_i^H(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int_{G/H} x_i^H(y) p_H\left(\nu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right)\right)(dy). \end{aligned}$$

Legyen (a, B, η) a tételben definiált hármas. Ekkor könnyen megmutatható, hogy az (a, B, η) és az $(a^H, B^H, \eta^H)_{H \in \mathfrak{H}}$ családok között ugyanolyan összefüggés áll fenn, mint amilyen a 7.2.3 Állítás előtt van leírva, ezért $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. A 7.2.3 Állítás alapján azt is kapjuk, hogy az (a, B, η) hármas kapcsolatos a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Továbbá, mint a 6.7.4 Tételben, minden $H \in \mathfrak{H}$, $f^H \in \mathfrak{C}_2(G/H)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$A_H(t)(f^H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int (f^H(y) - f^H(e)) p_H\left(d\nu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right)\right)(dy),$$

ahol $A_H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{P}(G)$ az a leképezés, mely az (a^H, B^H, η^H) hármashoz van rendelve. Könnyű ellenőrizni, hogy $A(t)(f^H \circ p_H) = A_H(t)(f^H)$, tehát megkapjuk a bizonyítandó összefüggést $A(t)$ -re. \square

7.5 Példák

7.5.1 Példaként olyan Lie-projektív csoportokra, melyekre a 7. fejezet eredményei alkalmazhatóak, megemlíjtük a Moore-csoportokat, melyek azok a lokálisan kompakt csoportok, amelyeknek az összes irreducibilis unitér reprezentációi véges-dimenziósak. Speciálisan, minden kompakt csoport Lie-projektív. A Moore-csoportok struktúrája le van írva például Heyer [48, Theorem N, p.15] tételében.

Kompakt (nem Lie-) csoportok két osztályára megadunk Lie-rendszert, projektív bázist, és leírjuk a $\mathcal{C}_k(G)$ -beli függvényeket (felhasználva Born [13], [14] eredményeit).

7.5.2 A végtelen-dimenziós tórusz. Jelölje $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ az 1-dimenziós tórusz-csoportot. Bármely I végtelen halmaz esetén a \mathbb{T}^I csoport egy összefüggő és lokálisan összefüggő kompakt, kommutatív csoport, mely akkor és csak akkor metrízálható, ha I megszámlálható. Mivel I végtelen, ezért G nem Lie-csoport. Jelölje $\mathcal{F}(I)$ az I véges részhalmazainak rendszerét. Ekkor $\mathfrak{H} := \left\{ \{1\}^J \times \mathbb{T}^{I \setminus J} : J \in \mathcal{F}(I) \right\}$ egy Lie-rendszere G -nek. Nyilván $J, K \in \mathcal{F}(I)$ esetén a dp_K^J differenciál a kanonikus leképezés \mathbb{R}^J -ből \mathbb{R}^K -ra. Tehát a G csoport $\mathfrak{L}(G)$ Lie-algebrája izomorf \mathbb{R}^I -vel (mint Lie-algebra), és az $(X_k)_{k \in I}$, $X_k := (\delta_{kj})_{j \in I}$, $k \in I$ elemek projektív bázist alkotnak $\mathfrak{L}(G)$ -ben. (Lásd Born [14].)

Most az $f \in \mathcal{C}_k(G)$ függvények rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az $\{\alpha \in I^j : \|X_\alpha f\| \neq 0 \text{ ha } j \leq k\}$ halmaz megszámlálható, tehát ezek a függvények a $G := \mathbb{T}^I$ csoportnak csak megszámlálható sok koordinátájától függenek, mégpedig k -szor differenciálható módon. Mivel G nem Lie-csoport, ezért a $\mathcal{C}_k(G)$ tér tartalmazza a véges sok koordinátától k -szor differenciálható módon függő függvényekből álló $\mathcal{C}^k(G)$ teret, de nem esik egybe vele. Bendikov [4] ezeket a differenciálható függvényeket G -beli értékeket felvevő Brown-folyamatokkal kapcsolatban vizsgálta.

7.5.3 A p -adikus szolenoid csoport a racionálisok diszkrét topológiával ellátott \mathbb{Q}_d additív csoportjának $\Sigma := \mathbb{Q}_d^\wedge = \text{Hom}(\mathbb{Q}_d, \mathbb{T})$ karakter-csoportja. Σ egy kompakt, kommutatív csoport, mely metrízálható, összefüggő, és létezik benne egy egy-paraméteres részcsoporth. Σ nem Lie-csoport, de Lie-projektív. Pontryagin dualitási tételéből következik $\mathbb{Q}_d = \Sigma^\wedge = \{\chi_q^\wedge : q \in \mathbb{Q}\}$, ahol $\chi_q^\wedge(\chi) := \chi(q)$ ha $\chi \in \Sigma$ és $q \in \mathbb{Q}$. Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük az $N_k := A\left(\Sigma, \{\chi_{1/k!}^\wedge\}\right)$ annihilátort (Σ -ban). Ekkor $\{N_k : k \in \mathbb{N}\}$ egy Lie-rendszer Σ -ra. Valóban: $N_k = A\left(\Sigma, \{\chi_{z/k!}^\wedge : z \in \mathbb{Z}\}\right)$, tehát $N_k \supset N_{k+1}$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Nyilván N_k kompakt minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, és a Gelfand–Raikov tétel alapján $\bigcap \{N_k : k \in \mathbb{N}\} = \{e\}$. Mivel $(\Sigma/N_k)^\wedge \cong A(\Sigma^\wedge, N_k) \cong \mathbb{Z}/k! \cong \mathbb{Z}$, így $\Sigma/N_k \cong \mathbb{Z}^\wedge \cong \mathbb{T}$, $\{N_k : k \in \mathbb{N}\}$ egy Lie-rendszer Σ -ra.

Megjegyezzük, hogy a $\chi_{1/k!}^\wedge$ karakterek a $p_k : \Sigma \rightarrow \Sigma/N_k$ kanonikus leképezéseknek felelnek meg, és a $p_m^n : \Sigma/N_n \rightarrow \Sigma/N_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ kanonikus leképezésekre teljesül $p_m^n(s) = s^{n!/m!}$ minden $s \in \Sigma/N_n \cong \mathbb{T}$ esetén. Következésképpen Σ és $\lim_{\longleftarrow n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}$ topoló-

gikusan izomorfak (az $(\mathbb{N}, \mathbb{T}, p_m^n)$ projektív rendszerre nézve). Másrészt $\mathfrak{L}(\Sigma) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ (az $(\mathbb{N}, \mathbb{R}, dp_m^n)$ projektív rendszerre nézve). Mivel $n \geq m$ esetén a dp_m^n differenciálok izomorfizmusok \mathbb{R} -ben, így $\mathfrak{L}(\Sigma) = \mathbb{R}$. És mivel a $dp_n : \mathfrak{L}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{L}(\Sigma/N_n)$ kanonikus leképezések is izomorfizmusok, így $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ minden eleme projektív bázist alkot $\mathfrak{L}(\Sigma)$ -ban.

Minden $\mathfrak{C}_k(\Sigma)$ -beli függvény N_k -invariáns a Σ Lie-rendszerének valamely N_k elemére. És, mint a 7.5.2-ben, $\mathfrak{C}_k(\Sigma) \supsetneq \mathfrak{C}^k(\Sigma)$. Ebből speciálisan az is következik, hogy Σ nem lokálisan összefüggő.

7.5.4 Egy atomfizikában felmerülő konvolúciós hemicsoport. (Lásd Hantsch, von Waldenfels [38], Born [13] és Heyer [50].) Legyen G egy második megszámlálható Lie-csoport, $U = (U_n : n \in \mathbb{N})$ G -beli értékeket felvevő független, azonos eloszlású véletlen elemek sorozata (valamely $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ valószínűségi mezőn), $X = (X(t) : t \in \mathbb{R}_+)$ egy G -beli értékeket felvevő, sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű folyamat az $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és $\Pi = (\Pi(t) : t \in \mathbb{R}_+)$ egy \mathbb{Z}_+ -beli értékeket felvevő Poisson-folyamat az $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ valószínűségi mezőn folytonos v intenzitással, azaz Π sztochasztikusan folytonos, független növekményű folyamat, és valamely $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvénnyel teljesül

$$P[\Pi(t) - \Pi(s) = k] = e^{-(v(t)-v(s))} \frac{(v(t) - v(s))^k}{k!}$$

ha $k \in \mathbb{Z}_+$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$. Feltesszük, hogy U , X és Π függetlenek. Továbbá, legyenek T_n , $n \in \mathbb{Z}_+$ a következő valós-értékű valószínűségi változók:

$$\begin{aligned} T_0 &:= 0, \\ T_n &:= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \Pi(t) = n\}. \end{aligned}$$

Most tekintsük a következő G -beli értékeket felvevő folyamatokat:

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \left(\prod_{j=1}^{\Pi(t)} X(T_{j-1})^{-1} X(T_j) U_j \right) X(T_{\Pi(t)})^{-1} X(t) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{\Pi(t)} X(T_j) U_j X(T_j)^{-1} \right) X(t), \end{aligned}$$

$$W(t) := \prod_{j=1}^{\Pi(t)} U_j$$

(ahol az üres szorzat definíció szerint egyenlő az e egységelemmel).

Ekkor a következők érvényesek:

- W egy olyan sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű folyamat, melyhez tartozó $(\mu(s, t) : (s, t) \in \mathbb{S})$ hemicsoport folytonosan gyengén korlátos változású, és a

hozzá tartozó $A^W : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{P}(G)$ generáló funkcionál előáll

$$A^W(t)f = v(t) \int (f - f(e)) d(U_1(P))$$

alakban minden $f \in \mathfrak{D}(G)$, $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. Valóban, a megfelelő $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{bv}(\mathbb{R}_+, G)$ hármásra teljesül $a_i(t) = v(t) \int x_i d(U_1(P))$ ha $i \in I$, $B(t) = 0$, és $\eta(dy \times [0, t]) = v(t)U_1(P)$.

- Y egy sztochasztikusan folytonos, függtelen bal-növekményű folyamat.
- Ha az X folyamat folytonosan gyengén korlátos változású és a hozzá tartozó generáló leképezést A^X jelöli, akkor az Y folyamat generáló funkcionálja $A^X + A^W$, ahol A^W a fenti alakban áll elő.
- Jelölje A valamely folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport generáló leképezését, legyen $\nu \in \mathbb{L}(G)$, és tegyük fel, hogy $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton növekvő, folytonos függvény. Legyen $f \in \mathfrak{D}(G)$, $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$A_1(t)f := A(t)f + v(t) \int (f - f(e)) d\nu.$$

Ekkor A_1 egy (egyértelműen meghatározott) folytonosan gyengén korlátos változású konvolúciós hemicsoport generáló leképezése.

8. fejezet

Funkcionális centrális határeloszlás-tételek

A 6. fejezetben beláttuk, hogy az $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ folytonosan korlátos változású konvolúciós hemicsoportok és az $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterek között bijekciót hoz létre a

$$(T_{\mu(s, t)} - I)f(e) = \int_{]s, t]} A(d\tau)(T_{\mu(\tau, t)}f), \quad (s, t) \in \mathbb{S}, \quad f \in \mathfrak{D}(G)$$

gyenge backward evolúciós egyenlet, ahol $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ az a monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melyre minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén az $A(t)$ generáló funkcionál kanonikus dekompozíciója $(a(t), B(t), \eta(t))_{t \geq 0}$, ahol $\eta(t)(dy) := \eta(dy \times [0, t])$.

Ennek a fejezetnek a célja az, hogy az összes $\mathfrak{M}^1(G)$ -beli hemicsoportot parametrizáljuk azzal a $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterhalmazzal, mely olyan (m, B, η) hármasokból áll, ahol $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ folytonos és $m(0) = e$, $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ monoton növekvő, folytonos és $B(0) = 0$, valamint $\eta \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$. A bijekciót az eltoltt gyenge backward evolúciós egyenlet teremti meg: minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(T_{\tilde{\mu}(s, t)} - I)f(e) = \int_{]s, t]} \tilde{A}(d\tau)(g_{\tau, t}),$$

ahol

$$\tilde{\mu}(s, t) := \varepsilon_{m(s)} * \mu(s, t) * \varepsilon_{m(t)^{-1}}, \quad g_{\tau, t}(y) := T_{\tilde{\mu}(\tau, t)}f(m(\tau)ym(\tau)^{-1}),$$

és az $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ az a monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(0, B, \eta)$. Azt is be fogjuk látni, hogy ez a reláció ekvivalens azzal, hogy a $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoportnak megfelelő mérték a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-téren éppen az (m, B, η) -hoz tartozó eltoltt martingál-probléma megoldása. Ennek az eltolásnak az az értelme, hogy „ki kell operálni” az $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ függvényt, mert az lehet, hogy nem korlátos változású (lásd Stroock, Varadhan [95], Feinsilver [29]).

Ugyanúgy, ahogy a 6. fejezetben, most is először egy konvergencia-tételt bizonyítunk a

$$\mu_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}$$

konvolúciósorzatra. (A 8.7 paragrafusban ki fog derülni, hogy a 8.3 paragrafusban adott elégséges feltételek egyúttal szükségesek is!)

Az alapötlet az, hogy a $\mu_{n\ell}$ mértékeket a lokális várhatóértékükkel toljuk el. Véve egy $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{D}(G)$ elsőfajú, ferdén szimmetrikus kanonikus koordináta-rendszert, mely adaptált az $\{X_1, \dots, X_d\}$ bázishoz és valamely kompakt $U_0 \in \mathfrak{U}(e)$ környezetben érvényes, legyen $y \in U_0$ esetén

$$\|y\| := \left(\sum_{i=1}^d x_i(y)^2 \right)^{1/2}.$$

Nyilván létezik olyan $\varrho_0 > 0$, hogy

$$\{y \in G : \|y\| \leq \varrho_0\} \subset U_0.$$

Feltehetjük, hogy $\varrho_0 = 1$ (egyébként a $\|\cdot\|$ normát módosíthatjuk megfelelően). Legyen $\varrho \in [0, 1]$ esetén

$$V_\varrho := \{y \in G : \|y\| \leq \varrho\}.$$

Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértéknek az $m \in U_0$ pont *lokális várhatóértéke*, amennyiben

$$x_i(m) = \int x_i(y) \mu(dy) \quad \text{ha } i \in \{1, \dots, d\}.$$

Ha a $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértéknek létezik $m \in U_0$ lokális várhatóértéke, akkor definiálhatjuk a *lokális kovariancia-mátrixát* is a következő módon: $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$,

$$b_{ij} := \int (x_i(y) - x_i(m))(x_j(y) - x_j(m)) \mu(dy).$$

Nyilván $B \in \mathbb{M}_d^+$.

A $\{\mu_{n\ell} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq k_n(t)\}$, $t > 0$ háromszögrendszerek infinitezimalitása garantálja, hogy tetszőleges $t > 0$ és elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek az $\{m_{n\ell} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq k_n(t)\}$ lokális várhatóértékek, így a fenti konvolúciósorzatot a következő alakban írhatjuk:

$$\mu_n(s, t) := \varepsilon_{m_n(s)-1} * \left(\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left(\varepsilon_{m_{n1} \dots m_{n,\ell-1}} * \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1} \dots m_{n1}^{-1}} \right) \right) * \varepsilon_{m_n(t)},$$

ahol

$$m_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} m_{n\ell}.$$

Ha még azt is feltesszük, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(t) = m(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, ahol $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ folytonos, akkor minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik olyan K kompakt halmaz G -ben, melyre teljesül $\{m_{n\ell} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq k_n(t)\} \subseteq K$. Ezért a 8.2 paragrafusban olyan

$$\tilde{\mu}_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left(\varepsilon_{z_{n\ell}} * \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1} z_{n,\ell}^{-1}} \right)$$

konvolúciószorzatokkal foglalkozunk, ahol $z_{n\ell} \in K$, $n, \ell \in \mathbb{N}$, és K egy rögzített kompakt halmaz G -ben. Ehhez viszont először a $\mathfrak{C}_2(G)$, $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ és $\mathfrak{C}_{2,2}(G)$ Banach-terek olyan módosításait kell bevezetni, melyek bizonyos értelemben egyenletesen K -differenciálható függvényekből állnak (azaz a deriváltakat definiáló konvergenciák egyenletesen teljesülnek a $z \in K$ elemmel történő belső automorfizmusra nézve).

Szükségünk lesz még $y \in G$ esetén arra az $\text{Ad}_y : \mathfrak{L}(G) \rightarrow \mathfrak{L}(G)$ lineáris leképezésre, melyre teljesül

$$\exp(t \text{Ad}_y(X)) = y \exp(tX) y^{-1}, \quad X \in \mathfrak{L}(G), t \in \mathbb{R}.$$

Az $\{X_1, \dots, X_d\}$ bázisban az Ad_y lineáris leképezés mátrixát jelölje $(\text{Ad}_y^{ij})_{i,j=1,\dots,d}$, azaz

$$\text{Ad}_y(X_j) = \sum_{i=1}^d \text{Ad}_y^{ij} \cdot X_i.$$

Megjegyezzük, hogy az $y \rightarrow \text{Ad}_y$, G -ből \mathbb{M}_d -be vivő leképezés egy korlátlanul differenciálható homomorfizmus.

8.1 Differenciálható függvények terei

Szükségünk van a $\mathfrak{C}_2(G)$ és $\tilde{\mathfrak{C}}_2(G)$ függvényterek módosított változataira.

Ha az $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $y \in U_0$ pontban, akkor léteznek a

$$\partial_i f(y) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \left(\exp(tX_i + \sum_{\ell=1}^d x_\ell(y) X_\ell) \right)$$

parciális deriváltak $i = 1, \dots, d$ esetén. Megjegyezzük, hogy $v \in G$ esetén

$$X_i f(v) = \partial_i R_v f(e) = \partial_i|_{u=e} f(uv), \quad \tilde{X}_i f(v) = \partial_i L_v f(e) = \partial_i|_{u=e} f(vu),$$

de $y \neq e$ esetén $\partial_i f(y)$ függ a kanonikus koordináták megválasztásától.

Legyen K egy kompakt halmaz G -ben. Egy $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ függvényt *egyenletesen balról K -differenciálhatónak* nevezünk, ha

- (L1) a $\partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v)$ parciális deriváltak léteznek minden $(v, z, y, m) \in G \times K \times V_1^2$ és $i = 1, \dots, d$ esetén,

(L2) a $(v, z, y, m) \mapsto \partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v)$ függvények, melyek $G \times K \times V_1^2$ -ből \mathbb{R} -be képeznek, $\mathfrak{C}^0(G \times K \times V_1^2)$ -ben vannak minden $i = 1, \dots, d$ esetén,

(L3) minden $i = 1, \dots, d$ esetén a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f \left(z \exp(tX_i + \sum_{\ell=1}^d x_\ell(y)X_\ell) m^{-1} z^{-1} v \right) - f(zym^{-1}z^{-1}v) \right) = \partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v)$$

konvergenciák $(v, z, y, m) \in G \times K \times V_1^2$ -ben egyenletesen teljesülnek.

(Megjegyezzük, hogy az egyenletesen balról K -differenciálhatóság függ a kanonikus koordináták választásától és a V_1 környezettől is.) Hasonlóan definiáljuk a

$$\partial_i \partial_j f(y) := \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \Big|_{t=0} f \left(\exp \left(\sum_{\ell=1}^d (x_\ell(y) + t_\ell) X_\ell \right) \right)$$

parciális deriváltakat és egy $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ függvény kétszer egyenletesen balról K -differenciálhatóságát. Megjegyezzük, hogy

$$\partial_i \partial_j f(e) = \left(X_i X_j - \sum_{k=1}^d \varrho_k^{ij} X_k \right) f(e)$$

ahol $\varrho_k^{ij} := X_i X_j x_k(e)$ (lásd Feinsilver [29]), és a koordináták választása miatt $\varrho_k^{ij} = -\varrho_k^{ji}$.

Jelölje $\mathfrak{C}_{2,K}(G)$ a kétszer egyenletesen balról K -differenciálható $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ függvények halmazát. Legyen $f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G)$ esetén

$$\begin{aligned} \|f\|_{2,K} &:= \|f\| + \sum_{i=1}^d \sup_{v \in G} \sup_{z \in K} \sup_{y, m \in V_1} \left| \partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v) \right| \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d \sup_{v \in G} \sup_{z \in K} \sup_{y, m \in V_1} \left| \partial_i \partial_j|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v) \right|. \end{aligned}$$

Egy $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ függvény egyenletesen jobbról K -differenciálhatóságát analóg módon definiáljuk, azzal a különbséggel, hogy például a $\partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v)$ parciális derivált helyett a $\partial_i|_{u=y} f(vzum^{-1}z^{-1})$ parciális deriváltat használjuk. Jelölje $\tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G)$ a kétszer egyenletesen balról K -differenciálható $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ függvények halmazát. Legyen $f \in \tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G)$ esetén

$$\begin{aligned} \|f\|_{\tilde{2},K} &:= \|f\| + \sum_{i=1}^d \sup_{v \in G} \sup_{z \in K} \sup_{y, m \in V_1} \left| \partial_i|_{u=y} f(vzum^{-1}z^{-1}) \right| \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d \sup_{u \in G} \sup_{z \in K} \sup_{y, m \in V_1} \left| \partial_i \partial_j|_{u=y} f(vzum^{-1}z^{-1}) \right|. \end{aligned}$$

Differenciálható függvényeknek még egy terére szükségünk van. Jelölje $\mathfrak{C}_{2,2,K}$ azon $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ függvények halmazát, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$(LR1) \quad f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G) \cap \tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G),$$

$$(LR2) \quad \text{a} \quad \partial_i \partial_j|_{u=y} \partial_{i'} \partial_{j'}|_{\tilde{u}=\tilde{y}} f(zum^{-1}z^{-1}v\tilde{z}\tilde{u}\tilde{m}^{-1}\tilde{z}^{-1}) \quad \text{parciális deriváltak léteznek minden} \\ (v, z, \tilde{z}, y, \tilde{y}, m, \tilde{m}) \in G \times K^2 \times V_1^4 \quad \text{és} \quad i, j, i', j' = 1, \dots, d \quad \text{esetén,}$$

$$(LR3) \quad \text{a} \quad (v, z, \tilde{z}, y, \tilde{y}, m, \tilde{m}) \mapsto \partial_i \partial_j|_{u=y} \partial_{i'} \partial_{j'}|_{\tilde{u}=\tilde{y}} f(zum^{-1}z^{-1}v\tilde{z}\tilde{u}\tilde{m}^{-1}\tilde{z}^{-1}) \quad \text{függvények, me-} \\ \text{lyek} \quad G \times K^2 \times V_1^4\text{-ből} \quad \mathbb{R}\text{-be képeznek,} \quad \mathfrak{C}^0(G \times K^2 \times V_1^4)\text{-ben vannak minden} \\ i, j, i', j' = 1, \dots, d \quad \text{esetén,}$$

$$(LR4) \quad \text{minden} \quad i, j, i', j' = 1, \dots, d \quad \text{esetén a}$$

$$\partial_i \partial_j|_{u=y} \partial_{i'} \partial_{j'}|_{\tilde{u}=\tilde{y}} f(zum^{-1}z^{-1}v\tilde{z}\tilde{u}\tilde{m}^{-1}\tilde{z}^{-1})$$

konvergenciák $(v, z, \tilde{z}, y, \tilde{y}, m, \tilde{m}) \in G \times K^2 \times V_1^4$ -ben egyenletesen teljesülnek.

Legyen $f \in \mathfrak{C}_{2,2,K}(G)$ esetén

$$\|f\|_{2,2,K} := \|f\|_{2,K} + \sum_{i=1}^d \sup_{z \in K} \sup_{y, m \in V_1} \left\| \partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}\cdot) \right\|_{2,K} \\ + \sum_{i,j=1}^d \sup_{z \in K} \sup_{y, m \in V_1} \left\| \partial_i \partial_j|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}\cdot) \right\|_{2,K}.$$

Legyen $\varrho \in [0, 1]$ és $m \in V_1$ esetén

$$R_2(f, \varrho, K, m) := \sum_{i,j=1}^d \sup_{v \in G} \sup_{z \in K} \sup_{y \in V_{\varrho} \vee \|m\|} \left| \partial_i \partial_j|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v) - \partial_i \partial_j|_{u=m} f(zum^{-1}z^{-1}v) \right|$$

$$\tilde{R}_2(f, \varrho, K, m) := \sum_{i,j=1}^d \sup_{v \in G} \sup_{z \in K} \sup_{y \in V_{\varrho} \vee \|m\|} \left| \partial_i \partial_j|_{u=y} f(vzum^{-1}z^{-1}) - \partial_i \partial_j|_{u=m} f(vzum^{-1}z^{-1}) \right|$$

$$R_{2,2}(f, \varrho, K, m) := \tilde{R}_2(f, \varrho, K, m) + \sum_{i=1}^d \sup_{z \in K} \sup_{y \in V_1} \tilde{R} \left(\partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}\cdot), \varrho, K, m \right) \\ + \sum_{i,j=1}^d \sup_{z \in K} \sup_{y \in V_1} \tilde{R} \left(\partial_i \partial_j|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}\cdot), \varrho, K, m \right)$$

ahol megfelelően $f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G)$, $f \in \tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G)$ illetve $f \in \mathfrak{C}_{2,2,K}(G)$.

8.1.1 Lemma. *Legyen K egy kompakt halmaz G -ben. Ekkor a következő állítások érvényesek:*

$$(i) \quad (\mathfrak{C}_{2,K}(G), \|\cdot\|_{2,K}), \quad (\tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G), \|\cdot\|_{2,K}), \quad (\mathfrak{C}_{2,2,K}(G), \|\cdot\|_{2,2,K}) \quad \text{Banach terek és}$$

$$\mathfrak{D}(G) \subset \mathfrak{C}_{2,2,K}(G) \subset \mathfrak{C}_{2,K}(G) \cap \tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G) \subset \mathfrak{C}_{2,K}(G) \cup \tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G) \subset \mathfrak{X}_2^0(G) \subset \mathfrak{C}^0(G).$$

(ii) Minden $\varrho \in [0, 1]$ és $m \in V_1$ esetén

$$\begin{aligned} R_2(f, \varrho, K, m) &< \infty & \text{ha } f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G) \\ \tilde{R}_2(f, \varrho, K, m) &< \infty & \text{ha } f \in \tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G) \\ R_{2,2}(f, \varrho, K, m) &< \infty & \text{ha } f \in \mathfrak{C}_{2,2,K}(G). \end{aligned}$$

(iii) Minden $f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G)$ esetén létezik olyan $\omega^{f,K} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ növekvő függvény, hogy

$$\lim_{t \downarrow 0} \omega^{f,K}(t) = 0$$

és

$$R_2(f, \varrho, K, m) \leq \omega^{f,K}(\varrho + \|m\|).$$

Hasonló állítások érvényesek a \tilde{R}_2 és $R_{2,2}$ függvényekre is.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy minden $h \in \mathfrak{C}^0(G \times K \times V_1^2)$ függvény egyenletesen folytonos abban az értelemben, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $U \in \mathfrak{U}(e)$ környezet, hogy

$$|h(v, z, y, m) - h(v', z', y', m')| < \varepsilon$$

teljesül amennyiben $v^{-1}v', z^{-1}z', y^{-1}y', m^{-1}m' \in U$ (ez úgy bizonyítható, mint a Theorem 4.15 tétel a Hewitt, Ross [46] könyvben). Most legyen $(f_n)_{n \geq 1}$ egy Cauchy-sorozat a $\mathfrak{C}_{2,K}(G)$ térben. Mivel $(f_n)_{n \geq 1}$ Cauchy-sorozat a $\mathfrak{C}^0(G)$ térben is, ezért létezik olyan $f \in \mathfrak{C}^0(G)$, hogy $f_n \rightarrow f$ teljesül a $\mathfrak{C}^0(G)$ térben. Továbbá rögzített $(v, z, y, m) \in G \times K \times V_1^2$ esetén a

$$\left(\partial_i|_{u=y} f_n(zum^{-1}z^{-1}v) \right)_{n \geq 1}$$

sorozat Cauchy-sorozat \mathbb{R} -ben, így definiálhatunk egy $g : G \times K \times V_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$g(v, z, y, m) := \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_i|_{u=y} f_n(zum^{-1}z^{-1}v).$$

Az (L3)-beli egyenletes konvergenciából arra következtethetünk, hogy a $(v, z, y, m) \mapsto \partial_i|_{u=y} f_n(zum^{-1}z^{-1}v)$, $n \in \mathbb{N}$, függvények egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak. Ezért ahogy a valós analízisben, itt is beláthatjuk, hogy $g(v, y, z, m) = \partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v)$ és hogy az $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ függvényre teljesülnek az (L1), (L2), (L3) tulajdonságok (lásd a középértéktétel alkalmazását Born [14] cikkében). Hasonló érvelést használva a

$$\left(\partial_i \partial_j|_{u=y} f_n(zum^{-1}z^{-1}v) \right)_{n \geq 1}$$

sorozatra, azt kapjuk, hogy $f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G)$, így $(\mathfrak{C}_{2,K}(G), \|\cdot\|_{2,K})$ Banach-tér. Hasonlóan lehet kezelni a másik két teret is. Nyilván $\mathfrak{D}(G) \subset \mathfrak{C}_{2,K}(G)$, tehát (i) bizonyítása kész.

(ii) és (iii) következik a megfelelő parciális deriváltak korlátosságából és egyenletes folytonosságból. \square

8.1.2 Lemma. Legyen $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ egy olyan valószínűségi mérték, melynek létezik $m \in U_0$ lokális várhatóértéke és B lokális kovarianciamátrixa. Legyen K egy kompakt halmaz G -ben, $z \in K$ és legyen $\tilde{\mu} := \varepsilon_z * \mu * \varepsilon_{m^{-1}z^{-1}}$. Legyen $\varrho \in]0, 1]$. Ekkor

$$(i) \quad T_\mu(\mathfrak{D}(G)) \subseteq \mathfrak{C}_{2,2,K}(G), \quad T_\mu(\mathfrak{C}_{2,K}(G)) \subseteq \mathfrak{C}_{2,K}(G), \quad \text{és}$$

$$\|T_\mu f\|_{2,K} \leq \|f\|_{2,K}, \quad R_2(T_\mu f, \varrho, K, m) \leq R_2(f, \varrho, K, m)$$

minden $f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G)$ esetén,

$$(ii) \quad \text{minden } f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G) \text{ esetén}$$

$$|(T_{\tilde{\mu}} - I)f(e)| \leq b(\|f\|_{2,K}(\mu(\mathfrak{C}V_\varrho) + \text{Tr}B) + R_2(f, \varrho, K, m)\text{Tr}B),$$

$$(iii) \quad \text{minden } f \in \tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G) \text{ esetén}$$

$$\|(T_{\tilde{\mu}} - I)f\| \leq b(\|f\|_{2,K}(\mu(\mathfrak{C}V_\varrho) + \text{Tr}B) + \tilde{R}_2(f, \varrho, K, m)\text{Tr}B),$$

$$(iv) \quad \text{minden } f \in \mathfrak{C}_{2,2,K}(G) \text{ esetén}$$

$$\|(T_{\tilde{\mu}} - I)f\|_{2,K} \leq b(\|f\|_{2,2,K}(\mu(\mathfrak{C}V_\varrho) + \text{Tr}B) + R_{2,2}(f, \varrho, K, m)\text{Tr}B),$$

ahol $b > 0$ egy olyan konstans, mely csak a kanonikus koordinátáktól függ.

Bizonyítás. (i). Nyilván $\|T_\mu f\| \leq \|f\|$. Továbbá

$$\left| \partial_i|_{u=y} T_\mu f(zum^{-1}z^{-1}v) \right| = \left| \int \partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}vw) \mu(dw) \right| \leq \sup_{v \in G} \left| \partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v) \right|$$

és hasonló egyenlőtlenségek érvényesek a $\left| \partial_i \partial_j|_{u=y} T_{\tilde{\mu}} f(zum^{-1}z^{-1}v) \right|$ parciális deriváltakra is. A többi állítás is hasonlóan bizonyítható.

(ii). A bizonyítás hasonló mint (iii) esetében.

(iii). Az $y \in V_\varrho$ pontban alkalmazva a Taylor-formulát:

$$\begin{aligned} f(vzym^{-1}z^{-1}) &= f(v) + \sum_{i=1}^d (x_i(y) - x_i(m)) \partial_i|_{u=m} f(vzym^{-1}z^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (x_i(y) - x_i(m))(x_j(y) - x_j(m)) \partial_i \partial_j|_{u=m} f(vzym^{-1}z^{-1}) \\ &\quad + R(f, v, z, y, m), \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} &R(f, v, z, y, m) \\ &= \sum_{i,j=1}^d (x_i(y) - x_i(m))(x_j(y) - x_j(m)) \\ &\quad \times \int_0^1 (1 - \lambda) \left(\partial_i \partial_j|_{u=m(y,\lambda)} f(vzym^{-1}z^{-1}) - \partial_i \partial_j|_{u=m} f(vzym^{-1}z^{-1}) \right) d\lambda \end{aligned}$$

és

$$m(y, \lambda) := \exp \left(\sum_{i=1}^d (\lambda x_i(y) + (1 - \lambda) x_i(m)) X_i \right) \in V_{\varrho \vee \|m\|}.$$

Ezért tetszőleges $v \in G$ esetén

$$\begin{aligned} (T_{\tilde{\mu}} - I)f(v) &= \int (f(vzym^{-1}z^{-1}) - f(v)) \mu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{C}_{V_\varrho}} \left(f(vzym^{-1}z^{-1}) - f(v) - \sum_{i=1}^d (x_i(y) - x_i(m)) \partial_i|_{u=m} f(vzum^{-1}z^{-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (x_i(y) - x_i(m))(x_j(y) - x_j(m)) \partial_i \partial_j|_{u=m} f(vzum^{-1}z^{-1}) \right) \mu(dy) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij} \partial_i \partial_j|_{u=m} f(vzum^{-1}z^{-1}) + \int_{V_\varrho} R(f, v, z, y, m) \mu(dy), \end{aligned}$$

amiből már következik (iii).

(iv). Minden $(v, z, y, m) \in G \times K \times V_1^2$ esetén

$$\partial_i|_{u=y} (T_{\tilde{\mu}} - I)f(zum^{-1}z^{-1}v) = (T_{\tilde{\mu}} - I)g_i^{z,y,m}(v)$$

ahol $g_i^{z,y,m}(v) := \partial_i|_{u=y} f(zum^{-1}z^{-1}v)$, ezért alkalmazhatjuk a (iii) egyenlőtlenséget a $g_i^{z,y,m}$ függvényekre. A többi tag is hasonlóan kezelhető. \square

8.2 Feltétel háromszögrendszer lokális centráltjának relatív kompaktságára

Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G Lie-csoporton. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy növekvő függvény. Tegyük fel, hogy minden $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ és $\ell = 1, \dots, k_n(t)$ esetén a $\mu_{n\ell}$ mértéknek van $m_{n\ell}$ lokális várhatóértéke és $B_{n\ell}$ lokális kovarianciamátrixa. Ekkor definiálhatjuk a $\beta_n \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}_+)$ és $\eta_n \in \mathfrak{M}_+(G \times \mathbb{R}_+)$ mértékeket a következő módon:

$$\beta_n([0, t]) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \text{Tr} B_{n\ell}, \quad \eta_n(dy \times [0, t]) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}(dy).$$

Legyen K egy kompakt halmaz G -ben és $z_{n\ell} \in K$ minden $(n, \ell) \in \mathbb{N}^2$ esetén. Legyen

$$\tilde{\mu}_{n\ell} := \varepsilon_{z_{n\ell}} * \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1} z_{n\ell}^{-1}}, \quad \tilde{T}_{n\ell} := T_{\tilde{\mu}_{n\ell}},$$

$$\tilde{\mu}_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}, \quad \tilde{T}_n(s, t) := T_{\tilde{\mu}_n(s, t)}, \quad \tilde{\eta}_n(s, t) := \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}.$$

8.2.1 Lemma. Legyen $(s, t), (s', t') \in \mathbb{S}$ úgy, hogy $[s, t] \cap [s', t'] \neq \emptyset$, és legyen $J_1 :=]s \wedge s', s \vee s']$, $J_2 :=]t \wedge t', t \vee t']$. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbf{C}_{2,2,K}(G)$ és $\varrho \in]0, 1]$ esetén

$$\begin{aligned} & |\tilde{T}_n(s, t)f(e) - \tilde{T}_n(s', t')f(e)| \\ & \leq b(\|f\|_{2,K} + \|f\|_{\tilde{2,K}})(\eta_n(\mathbb{C}V_\varrho \times (J_1 \cup J_2)) + \beta_n(J_1 \cup J_2)) \\ & \quad + b\beta_n(J_1 \cup J_2) \max_{\substack{k_n(s \wedge s') + 1 \leq \ell \leq k_n(s \vee s') \\ \text{vagy } k_n(t \wedge t') + 1 \leq \ell \leq k_n(t \vee t')}} (R_2(f, \varrho, K, m_{n\ell}) + \tilde{R}_2(f, \varrho, K, m_{n\ell})). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Abban az esetben, amikor $0 \leq s \leq s' \leq t' \leq t$, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{T}_n(s, t) - \tilde{T}_n(s', t') = \tilde{T}_n(s, t')(\tilde{T}_n(t', t) - I) + \tilde{T}_n(s, s') - I) \tilde{T}_n(s', t').$$

A 8.1.2 Lemma (ii) és (iii) pontja alapján

$$\begin{aligned} & |\tilde{T}_n(s, t')(\tilde{T}_n(t', t) - I)f(e)| \leq \|(\tilde{T}_n(t', t) - I)f\| \\ & = \left\| \sum_{\ell=k_n(t')+1}^{k_n(t)} \tilde{T}_{n,k_n(t')+1} \cdots \tilde{T}_{n,\ell-1}(\tilde{T}_{n\ell} - I)f \right\| \leq \sum_{\ell=k_n(t')+1}^{k_n(t)} \|(\tilde{T}_{n\ell} - I)f\| \\ & \leq b \left(\|f\|_{2,K}(\eta_n(\mathbb{C}V_\varrho \times]t', t]) + \beta_n([t', t]) \right) + \beta_n([t', t]) \max_{k_n(t')+1 \leq \ell \leq k_n(t)} \tilde{R}_2(f, \varrho, K, m_{n\ell}). \end{aligned}$$

Hasonlóan a 8.1.2 Lemma (i) és (ii) pontja alapján

$$\begin{aligned} & |\tilde{T}_n(s, s') - I) \tilde{T}_n(s', t')f(e)| \leq \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(s')} \left| (\tilde{T}_{n\ell} - I) \tilde{T}_{n,\ell+1} \cdots \tilde{T}_{n,k_n(s')} \tilde{T}_n(s', t')f(e) \right| \\ & \leq b \left(\|f\|_{2,K}(\eta_n(\mathbb{C}V_\varrho \times]s, s']) + \beta_n([s, s']) \right) + \beta_n([s, s']) \max_{k_n(s)+1 \leq \ell \leq k_n(s')} \tilde{R}_2(f, \varrho, K, m_{n\ell}). \end{aligned}$$

Abban az esetben, amikor $0 \leq s \leq s' \leq t \leq t'$, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{T}_n(s, t) - \tilde{T}_n(s', t') = (\tilde{T}_n(s, s') - I) \tilde{T}_n(s', t) + \tilde{T}_n(s', t)(I - \tilde{T}_n(t, t')),$$

tehát megint lehet alkalmazni a 8.1.2 Lemmát. □

8.2.2 Lemma. Tetszőleges $(s, t) \in \mathbb{S}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbf{C}_{2,2,K}(G)$ és $\varrho \in]0, 1]$ esetén

$$\begin{aligned} & \left| \int (f - f(e)) d\tilde{\mu}_n(s, t) - \int (f - f(e)) d\tilde{\eta}_n(s, t) \right| \\ & \leq b^2 \left(\|f\|_{2,2,K} + \max_{k_n(s)+1 \leq \ell \leq k_n(t)} R_{2,2}(f, \varrho, K, m_{n\ell}) \right) (\eta_n(\mathbb{C}V_\varrho \times]s, t]) + \beta_n([s, t]))^2 \\ & \quad + 2b\beta_n([s, t]) \max_{k_n(s)+1 \leq \ell \leq k_n(t)} R_2(f, \varrho, K, m_{n\ell}). \end{aligned}$$

Bizonyítás. A 8.1.2 Lemma (ii) pontja alapján

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\prod_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{T}_{n\ell} - I \right) f(e) - \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (\tilde{T}_{n\ell} - I) f(e) \right| \\
&= \left| \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (\tilde{T}_{n\ell} - I) (\tilde{T}_{n,\ell+1} \cdots \tilde{T}_{n,k_n(t)} - I) f(e) \right| \\
&\leq b \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (\|g_{n\ell}\|_{2,K} (\mu_{n\ell}(\mathbb{C}V_{\varrho}) + \text{Tr} B_{n\ell}) + R_2(g_{n\ell}, \varrho, K, m_{n\ell}) \text{Tr} B_{n\ell}),
\end{aligned}$$

ahol

$$g_{n\ell} := (\tilde{T}_{n,\ell+1} \cdots \tilde{T}_{n,k_n(t)} - I) f.$$

A 8.1.2 Lemma (i) és (iv) pontjait használva

$$\begin{aligned}
\|g_{n\ell}\|_{2,K} &= \left\| \sum_{r=\ell+1}^{k_n(t)} \tilde{T}_{n,\ell+1} \cdots \tilde{T}_{n,r-1} (\tilde{T}_{n,r} - I) f \right\|_{2,K} \leq \sum_{r=\ell+1}^{k_n(t)} \left\| (\tilde{T}_{n,r} - I) f \right\|_{2,K} \\
&\leq b \sum_{r=\ell+1}^{k_n(t)} (\|f\|_{2,2,K} (\mu_{nr}(\mathbb{C}V_{\varrho}) + \text{Tr} B_{nr}) + R_{2,2}(f, \varrho, K, m_{nr}) \text{Tr} B_{nr})
\end{aligned}$$

és

$$R_2(g_{n\ell}, \varrho, K, m_{n\ell}) \leq 2R_2(f, \varrho, K, m_{n\ell}),$$

tehát kész a bizonyítás. □

8.2.3 Lemma. Tegyük fel, hogy tetszőleges $T > 0$ és $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} (\eta_n(\mathbb{C}U \times]s, t]) + \beta_n(]s, t])) = 0.$$

Ekkor

(I) minden $t \in \mathbb{R}_+$ és $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(t)} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}U) = 0,$$

(II) minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(t)} \|m_{n\ell}\| = 0,$$

(III) minden $T > 0$ esetén

$$\lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(T)} R_2(f, \varrho, K, m_{n\ell}) = 0 \quad \text{ha } f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G)$$

(hasonló állítás érvényes az \tilde{R}_2 és $R_{2,2}$ függvényekre is), és minden $\varrho \in]0, 1]$ esetén

$$\begin{aligned} c_2(f, \varrho, K, T) &:= \sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(T)} R_2(f, \varrho, K, m_{n\ell}) < \infty & \text{ha } f \in \mathfrak{C}_{2,K}(G), \\ \tilde{c}_2(f, \varrho, K, T) &:= \sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(T)} \tilde{R}_2(f, \varrho, K, m_{n\ell}) < \infty & \text{ha } f \in \tilde{\mathfrak{C}}_{2,K}(G), \\ c_{2,2}(f, \varrho, K, T) &:= \sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(T)} R_{2,2}(f, \varrho, K, m_{n\ell}) < \infty & \text{ha } f \in \mathfrak{C}_{2,2,K}(G), \end{aligned}$$

(IV) minden $T > 0$ és $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$c_U(T) := \sup_{n \geq 1} \eta_n(\mathfrak{C}U \times [0, T]) < \infty, \quad c(T) := \sup_{n \geq 1} \beta_n([0, T]) < \infty.$$

Bizonyítás. (I) nyilvánvalóan következik a feltevésekből.

(II). Minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén (I) alapján

$$\left| \int x_i d\mu_{n\ell} \right| \leq \sup_{y \in U} |x_i(y)| + \|x_i\| \mu_{n\ell}(\mathfrak{C}U),$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(t)} \left| \int x_i d\mu_{n\ell} \right| = 0,$$

amiből következik (II).

(III) következik a 8.1.1 Lemma (iii) pontjából és (II)-ből.

(IV) Könnyen következik a feltevésekből. □

8.2.4 Tétel. *Tegyük fel, hogy*

(i) minden $T > 0$ és $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} (\eta_n(\mathfrak{C}U \times]s, t]) + \beta_n([s, t])) = 0,$$

(ii) minden $T > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy olyan kompakt K_ε halmaz G -ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{\ell=1}^{k_n(T)} \mu_{n\ell}(\mathfrak{C}K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ekkor

(a) minden $T > 0$ esetén a $\{\tilde{\mu}_n(s, t) : (s, t) \in \mathbb{S}_T, n \in \mathbb{N}\}$ halmaz feszes,

(b) létezik egy olyan $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben úgy, hogy (n) egy alkalmas (n') részsorozatára

$$\tilde{\mu}_{n'}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{J}_w} \nu(s, t) \quad \text{minden } (s, t) \in \mathbb{S} \text{ esetén.}$$

Bizonyítás. (a). Legyen $T > 0$, $\varepsilon > 0$, és válasszunk egy K_ε kompakt halmazt G -ben a (ii) feltevésnek megfelelően. Válasszunk egy olyan \tilde{K}_ε kompakt halmazt G -ben, hogy $\tilde{K}_\varepsilon \supset \mathbb{C}(K \cdot \mathbb{C}K_\varepsilon \cdot U_0^{-1} \cdot K^{-1})$ teljesüljön. A feltételeknek megfelelően $m_{n\ell} \in U_0$ minden $\ell = 1, \dots, k_n(T)$ esetén, tehát

$$\tilde{\mu}_{n\ell}(\mathbb{C}\tilde{K}_\varepsilon) \leq \tilde{\mu}_{n\ell}(K \cdot \mathbb{C}K_\varepsilon \cdot U_0^{-1} \cdot K^{-1}) \leq \mu_{n\ell}(\mathbb{C}K_\varepsilon),$$

következésképpen

$$\sum_{\ell=1}^{k_n(T)} \tilde{\mu}_{n\ell}(\mathbb{C}\tilde{K}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $e \in \tilde{K}_\varepsilon$. Ekkor létezik olyan \tilde{K} kompakt halmaz G -ben és olyan $f \in \mathcal{D}(G)$ függvény, hogy $1_{\mathbb{C}\tilde{K}} \leq f - f(e) \leq 1_{\mathbb{C}\tilde{K}_\varepsilon}$.

Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}_T$. Most a 8.2.3 Lemma (III) és (IV) állítása alapján választhatunk olyan $\varrho \in]0, 1]$ és $r, n_0 \in \mathbb{N}$ számokat, hogy

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(T)} R_{2,2}(f, \varrho, K, m_{n\ell}) &< \frac{\varepsilon}{2bc(T)}, \\ \eta_n(\mathbb{C}V_\varrho \times]u, v]) + \beta_n([u, v]) &< \frac{\varepsilon}{b^2(\|f\|_{2,2,K} + c_{2,2}(f, \varrho, K, T))(c_{V_\varrho}(T) + c(T))} \end{aligned}$$

teljesüljön minden $n > n_0$ és minden olyan $(u, v) \in \mathbb{S}_T$ esetén, melyre $|v - u| \leq 1/r$. Legyen $s_\ell := s + \ell(t - s)/r$ ha $\ell = 0, 1, \dots, r$. Alkalmazva a 8.2.2 Lemmát, azt kapjuk, hogy minden $(u, v) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} &\int (f - f(e)) d\tilde{\mu}_n(u, v) \\ &\leq \int (f - f(e)) d\tilde{\eta}_n(u, v) + 2b\beta_n([u, v]) \max_{k_n(u)+1 \leq \ell \leq k_n(v)} R_{2,2}(f, \varrho, K, m_{n\ell}) \\ &\quad + b^2 \left(\|f\|_{2,2,K} + \max_{k_n(u)+1 \leq \ell \leq k_n(v)} R_{2,2}(f, \varrho, K, m_{n\ell}) \right) (\eta_n(\mathbb{C}V_\varrho \times]u, v]) + \beta_n([u, v]))^2 \end{aligned}$$

tehát arra következtethetünk, hogy minden $n > n_0$ esetén

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_n(s, t)(\mathbb{C}\tilde{K}^r) &\leq \sum_{\ell=1}^r \tilde{\mu}_n(s_{\ell-1}, s_\ell)(\mathbb{C}\tilde{K}) \leq \sum_{\ell=1}^r \int (f - f(e)) d\tilde{\mu}_n(s_{\ell-1}, s_\ell) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{k_n(T)} \tilde{\mu}_{n\ell}(\mathbb{C}\tilde{K}_\varepsilon) + 2b\beta_n([0, T]) \max_{1 \leq \ell \leq k_n(T)} R_{2,2}(f, \varrho, K, m_{n\ell}) \\ &\quad + b^2 (\|f\|_{2,2,K} + c_{2,2}(f, \varrho, K, T)) (c_{V_\varrho}(T) + c(T)) \max_{1 \leq \ell \leq r} (\eta_n(\mathbb{C}V_\varrho \times]s_{\ell-1}, s_\ell]) + \beta_n([s_{\ell-1}, s_\ell])) \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

A $\{\tilde{\mu}_n(s, t) : (s, t) \in \mathbb{S}_T, n \in \mathbb{N}, n \leq n_0\}$ halmaz véges, tehát szintén feszes.

(b). Az (a) alapján létezik olyan (n') részsorozat, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$, $s, t \in \mathbb{Q}$ esetén van olyan $\tilde{\nu}(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$, hogy

$$\mu_{n'}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \tilde{\nu}(s, t).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy a $\{\tilde{\nu}(s, t) : (s, t) \in \mathbb{S}, s, t \in \mathbb{Q}\}$ család kiterjeszthető olyan $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttá, mely kielégíti (b)–t az (n') részsorozattal.

Először vegyük észre, hogy a konvolúciós operátorokra vonatkozó folytonossági tétel alapján

$$(8.2.5) \quad \tilde{T}_{n'}(s, t)f(e) \rightarrow \tilde{T}(s, t)f(e)$$

teljesül minden $f \in \mathcal{C}^0(G)$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$, $s, t \in \mathbb{Q}$ esetén, ahol

$$\tilde{T}_n(s, t) := T_{\tilde{\mu}_n(s, t)}, \quad \tilde{T}(s, t) := T_{\tilde{\nu}(s, t)}.$$

Rögzítsünk egy $T > 0$ számot. Most megmutatjuk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén a $(\tilde{\mu}_{n'}(s, t))$ sorozat gyengén konvergens. Az (a) alapján a $(\tilde{\mu}_{n'}(s, t))$ sorozatnak van legalább egy torlódási pontja. Legyen $\nu(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$ egy torlódási pont. Ekkor létezik olyan $(n'') = (n''(s, t))$ részsorozata (n') -nek (mely függ (s, t) -től) úgy, hogy

$$\tilde{\mu}_{n''}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t).$$

Legyen $T(s, t) := T_{\nu(s, t)}$. A konvolúciós operátorokra vonatkozó folytonossági tétel alapján arra következtethetünk, hogy minden $f \in \mathcal{C}^0(G)$ esetén

$$\tilde{T}_{n''}(s, t)f(e) \rightarrow T(s, t)f(e).$$

Vegyük olyan \mathbb{Q} -beli (s_ℓ) és (t_ℓ) sorozatokat, hogy $s_\ell \rightarrow s$, $t_\ell \rightarrow t$ és $(s_\ell, t_\ell) \in \mathbb{S}_T$ teljesüljön. A 8.2.1 Lemma és a 8.2.3 Lemma (III) része alapján minden $f \in \mathcal{C}_{2,2,K}(G)$ és minden elegendően nagy $\ell \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} |\tilde{T}(s_\ell, t_\ell)f(e) - T(s, t)f(e)| &= \left| \lim_{n'} \tilde{T}_{n'}(s_\ell, t_\ell)f(e) - \lim_{n''} \tilde{T}_{n''}(s, t)f(e) \right| \\ &\leq \lim_{n''} |\tilde{T}_{n''}(s_\ell, t_\ell)f(e) - \tilde{T}_{n''}(s, t)f(e)| \\ &\leq b(\|f\|_{2,K} + \|f\|_{\tilde{2},K}) \limsup_{n \rightarrow \infty} (\eta_n(\mathbb{C}V_1 \times (J_{\ell 1} \cup J_{\ell 2})) + \beta_n(J_{\ell 1} \cup J_{\ell 2})) \\ &\quad + b(c_2(f, 1, K, T) + \tilde{c}_2(f, 1, K, T)) \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(J_{\ell 1} \cup J_{\ell 2}), \end{aligned}$$

ahol $J_{\ell 1} :=]s_\ell \wedge s, s_\ell \vee s]$, $J_{\ell 2} :=]t_\ell \wedge t, t_\ell \vee t]$. Az (i) feltevés alapján

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\mathbb{C}V_1 \times (J_{\ell 1} \cup J_{\ell 2})) = 0, \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(J_{\ell 1} \cup J_{\ell 2}) = 0,$$

tehát minden $f \in \mathcal{C}_{2,2,K}(G)$ estén

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} |\tilde{T}(s_\ell, t_\ell)f(e) - T(s, t)f(e)| = 0.$$

Ahogy a 6.4.4 Tétel (b) részének bizonyításánál, most is beláthatjuk, hogy

$$\mathcal{T}_w\text{-}\lim_{n'} \tilde{\mu}_{n'}(s, t) = \nu(s, t) = \mathcal{T}_w\text{-}\lim_{\substack{(s', t') \rightarrow (s, t) \\ s', t' \in \mathbb{Q}_+}} \tilde{\nu}(s', t'),$$

és hogy az $(s, t) \mapsto \nu(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezés multiplikatív.

Most megmutatjuk, hogy az $(s, t) \mapsto \nu(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezés folytonosan gyengén korlátos változású. Alkalmazva a 8.2.2 Lemmát és a 8.1.2 Lemma (ii) részét az $x_1, \dots, x_d, 1_G - \varphi \in \mathfrak{D}(G)$ függvényekre és $\varrho = 1$ -re, azt kapjuk, hogy minden $T > 0$, $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$q(\tilde{\mu}_n(s, t)) \leq c(K, T)(\eta_n(\mathbb{C}V_1 \times]s, t]) + \beta_n([s, t])),$$

ahol $c(K, T)$ egy olyan konstans, mely $T > 0$ -tól és a K kompakt halmaztól függ. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\tilde{q}_n(s, t) := \eta_n(\mathbb{C}V_1 \times]s, t]) + \beta_n([s, t]).$$

Az (i) feltevésből következik, hogy az

$$(s, t) \mapsto v(s, t) := \limsup_{n'} \tilde{q}_{n'}(s, t)$$

\mathbb{S}_T -ből \mathbb{R} -be képező függvény folytonos. Nyilván létezik olyan (n'') részsorozata (n') -nek, melyre $\lim_{n''} \tilde{q}_{n''}(0, t) = v(0, t)$ teljesül minden $t \in \mathbb{Q}_+$ esetén. Mivel a $t \mapsto \tilde{q}_{n''}(0, t)$ függvények monoton növekvőek, így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n''} \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{q}_{n''}(0, t) - v(t)| = 0,$$

ahol $v(t) := v(0, t)$. Ezért minden $T > 0$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{n''}(s, t) &= (\tilde{q}_{n''}(0, t) - v(t)) - (\tilde{q}_{n''}(0, s) - v(s)) + v(t) - v(s) \\ &\leq v(t) - v(s) + 2 \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{q}_{n''}(0, t) - v(t)|, \end{aligned}$$

tehát arra következtethetünk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$(8.2.6) \quad \limsup_{n''} \tilde{q}_{n''}(s, t) \leq v(t) - v(s),$$

tehát hogy az $(s, t) \mapsto \limsup_{n''} \tilde{q}_{n''}(s, t)$ \mathbb{S}_T -ből \mathbb{R} -be vivő függvény folytonosan korlátos változású. Ezért minden $T > 0$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$q(\nu(s, t)) = \lim_{n''} q(\tilde{\mu}_{n''}(s, t)) \leq c(K, T) \limsup_{n''} \tilde{q}_{n''}(s, t) \leq c(K, T)(v(t) - v(s)).$$

Tehát $(s, t) \mapsto q(\nu(s, t))$ folytonosan korlátos változású.

A 6.2.1 Lemma bizonyításának érveléseit használva azt kapjuk, hogy az $(s, t) \mapsto \nu(s, t)$ leképezés τ_w -folytonos. □

8.3 Háromszögrendszer konvergenciája tetszőleges konvolúciós hemicsoporthoz

Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G Lie-csoporton. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy növekvő függvény. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiáljuk a $\eta_n \in \mathfrak{M}_+(G \times \mathbb{R}_+)$ mértéket a következő módon:

$$\eta_n(dy \times [0, t]) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}(dy).$$

Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ban. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $\eta_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ mérték, hogy minden $t \in D$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ esetén

$$(8.3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f(y) \eta_n(dy \times [0, t]) = \int_G f(y) \eta_0(dy \times [0, t]).$$

Itt a konvergencia tetszőleges $T > 0$ esetén a $[0, T]$ intervallumon egyenletes, hiszen minden $f \in \mathfrak{C}_e(G)$, $f \geq 0$ függvény esetén a $t \mapsto \int f(y) \eta_n(dy \times [0, t])$, $n \in \mathbb{N}$, függvények monoton növekvők, és a $t \mapsto \int f(y) \eta_0(dy \times [0, t])$ limesz függvény folytonos. Tehát minden $T > 0$ és $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \eta_n(\mathbb{C}U \times]s, t]) = 0,$$

és a 8.2.3 Lemma (II) részének bizonyításánál használt érvelés alapján minden $T > 0$, minden elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ és minden $\ell \in \{1, \dots, k_n(T)\}$ esetén a $\mu_{n\ell}$ mértéknek létezik $m_{n\ell} \in U_0$ lokális várhatóértéke és $B_{n\ell}$ lokális kovarianciamátrixa.

Következésképpen a (8.3.1) feltétel teljesülése esetén minden $T > 0$ és minden elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén definiálhatjuk az $m_n : [0, T] \rightarrow G$ lokális várhatóérték-függvényt:

$$m_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} m_{n\ell},$$

a $B_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}_d^+$, $B_n(t) = (b_n(i, j)(t))_{i,j=1, \dots, d}$ lokális kovarianciafüggvényt:

$$B_n(t) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} B_{n\ell},$$

és a $\beta_n \in \mathfrak{M}_+([0, T])$ mértékeket:

$$\beta_n([0, t]) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} \text{Tr} B_{n\ell}.$$

Továbbá minden $\psi \in \mathfrak{C}_e(G)$, $1_{\mathbb{C}U_0} \leq \psi \leq 1$ függvény esetén vezessük be a

$$b_{n\ell}^\psi(i, j) := \int (x_i(y) - x_i(m_{n\ell}))(x_j(y) - x_j(m_{n\ell}))(1 - \psi(y)) \mu_{n\ell}(dy)$$

csonkított lokális kovarianciákat, és a

$$b_n^\psi(i, j)(t) := \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} b_{n\ell}^\psi(i, j)$$

csonkított lokális kovarianciafüggvényeket.

8.3.2 Tétel. *Legyenek $\{\mu_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ valószínűségi mértékek a G Lie-csoporton. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy olyan monoton növekvő, balról folytonos függvény, melyre $k_n(0) = 0$ és $k_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{Z}_+$. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ban.*

Tegyük fel, hogy

(i) *létezik olyan $\eta_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$ mérték, hogy minden $t \in D$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f(y) \eta_n(dy \times [0, t]) = \int_G f(y) \eta_0(dy \times [0, t]),$$

(ii) *létezik olyan $B_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d$, $B_0(t) = (b_0(i, j)(t))_{i,j=1,\dots,d}$, folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ és $i, j \in \{1, \dots, d\}$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(i, j)(t) = b_0(i, j)(t) + \int_G x_i(y) x_j(y) \eta_0(dy \times [0, t]).$$

Ekkor $(0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ és

$$\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \left(\mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_n^{-1}} \right) \xrightarrow{\mathfrak{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ahol $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely a gyenge backward evolúciós egyenlettel kapcsolódik ahhoz a $\tilde{A}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezéshez, melynek kanonikus dekompozíciója $(0, B_0, \eta_0)$. Továbbá a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport megfelel az $(e, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméternek az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Ha még azt is feltesszük, hogy

(iii) *létezik olyan $m_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ folytonos függvény, hogy minden $t \in D$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(t) = m_0(t),$$

(iv) *minden $T > 0$ és $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} |x_i(m_n(s)^{-1} m_n(t))| = 0,$$

akkor

$$\bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} \xrightarrow{\mathfrak{T}_w} \mu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S}$$

ahol $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan hemicsoport, mely az $(m_0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméternek felel meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Néhány előkészületre van szükségünk a 8.3.2 Tétel bizonyításához.

8.3.3 Lemma. A 8.3.2 Tétel (i) és (ii) feltételeinek teljesülése esetén a következő állítások érvényesek:

(I) $B_0(0) = 0$ és a B_0 függvény monoton növekedő.

(II) Minden $\psi \in \mathfrak{C}_e(G)$, $1_{\mathbb{C}U_0} \leq \psi \leq 1$ és minden $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^\psi(i, j)(t) = b_0^\psi(i, j)(t),$$

ahol

$$b_0^\psi(i, j)(t) := b_0(i, j)(t) + \int_G x_i(y)x_j(y)(1 - \psi(y)) \eta_0(dy \times [0, t]).$$

(III) A 8.3.2 Tétel (i) és (ii) pontjaiban és (II)–ben a konvergencia tetszőleges $T > 0$ esetén minden $[0, T]$ intervallumon egyenletes.

(IV) Minden $T > 0$ és $U \in \mathfrak{U}(e)$ esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \eta_n(\mathbb{C}U \times]s, t]) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \beta_n(]s, t]) = 0.$$

(V) Minden $T > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan K_ε kompakt halmaz G -ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{\ell=1}^{k_n(T)} \mu_{n\ell}(\mathbb{C}K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. (II). Az (i) feltétel alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G x_i(y)x_j(y)\psi(y) \eta_n(dy \times [0, t]) = \int_G x_i(y)x_j(y)\psi(y) \eta_0(dy \times [0, t]).$$

A (ii) feltétel szerint

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int (x_i(y) - x_i(m_{n\ell}))(x_j(y) - x_j(m_{n\ell})) \eta_n(dy \times [0, t]) \\ &= b_0(i, j)(t) + \int_G x_i(y)x_j(y)\psi(y) \eta_0(dy \times [0, t]). \end{aligned}$$

Továbbá (i)–ből levezethető

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left((x_i(y) - x_i(m_{n\ell}))(x_j(y) - x_j(m_{n\ell})) - x_i(y)x_j(y) \right) \psi(y) \eta_n(dy \times [0, t]) = 0,$$

mivel

$$|(x_i(y) - x_i(m_{n\ell}))(x_j(y) - x_j(m_{n\ell})) - x_i(y)x_j(y)| \leq 3 \max_{\substack{1 \leq \ell \leq k_n(t) \\ 1 \leq i \leq d}} |x_i(m_{n\ell})| \max_{1 \leq i \leq d} \|x_i\|.$$

(I) és (III)–(IV) ugyanúgy vezethető le (i) és (ii) segítségével, mint a 6.6.2 Lemmában. \square

Most a 8.3.3 Lemma (IV) és (V) pontja biztosítja, hogy a 8.2.4 Tétel alkalmazható.

8.3.4 Lemma. *Legyen*

$$\tilde{\mu}_{n\ell} := \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1}}, \quad \tilde{\mu}_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}.$$

Jelölje $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ azt a hemicsoportot, melyhez a 8.3.2 Tétel (i) és (ii) feltételeinek teljesülése esetén a 8.2.4 Tétel értelmében valamely $(\tilde{\mu}_{n'}(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ részsorozat konvergál. Ekkor ez a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport azzal az $\tilde{A}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezéssel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenleten keresztül, melynek a kanonikus dekompozíciója $(0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}_{bv}(\mathbb{R}_+, G)$.

Bizonyítás. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tilde{T}_n(s, t) := T_{\tilde{\mu}_n(s, t)}$ és $T(s, t) := T_{\nu(s, t)}$. Először megmutatjuk, hogy minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{n'} (\tilde{T}_{n'}(s, t) - I)f(e) &= \int_{]s, t]} \tilde{A}_0(d\tau)(T(\tau, t)f) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^d \int_{]s, t]} T(\tau, t) X_i X_j f(e) b_0(i, j)(d\tau) \\ &\quad + \iint_{G \times]s, t]} \left(T(\tau, t)f(y) - T(\tau, t)f(e) - \sum_{i=1}^d T(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) \eta_0(dy \times d\tau). \end{aligned}$$

Az egyszerűség kedvéért az (n') sorozatot beazonosítjuk az (n) sorozattal.

Most tekintsük a

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n(s, t) - I &= \prod_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{T}_{\mu_{n\ell}} - I = \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (\tilde{T}_{\mu_{n\ell}} - I) \prod_{r=\ell+1}^{k_n(t)} \tilde{T}_{\mu_{nr}} \\ &= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (\tilde{T}_{\mu_{n\ell}} - I) \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t), \end{aligned}$$

dekompozíciót, ahol $\tau_{n\ell} := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : k_n(t) = \ell\}$.

Legyen $(\psi_r)_{r \geq 1}$ egy olyan sorozat $\mathfrak{C}_e(G)$ -ben, melyre $1_{U_0} \leq \psi_r \leq 1$ és $\psi_r \rightarrow 1_{G^\times}$. Alkalmazva a Taylor-formulát az $\{y \in G : \psi_r(y) < 1\} \subset U_0$ halmazon mint a 8.1.1 Lemma bizonyításában, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & (\tilde{T}_n(s, t) - I)f(e) \\ &= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int \left(\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(ym_{n\ell}^{-1}) - \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(e) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^d (x_i(y) - x_i(m_{n\ell})) \partial_i|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(um_{n\ell}^{-1}) \right) \psi_r(y) \mu_{n\ell}(dy) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} b_{n\ell}^{\psi_r}(i, j) \partial_i \partial_j|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(um_{n\ell}^{-1}) \\ &+ \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int R(\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f, y, m_{n\ell})(1 - \psi_r(y)) \mu_{n\ell}(dy), \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} R(g, y, m) &= \sum_{i,j=1}^d (x_i(y) - x_i(m))(x_j(y) - x_j(m)) \\ &\quad \times \int_0^1 (1 - \lambda) \left(\partial_i \partial_j|_{u=m(y, \lambda)} g(um^{-1}) - \partial_i \partial_j|_{u=m} g(um^{-1}) \right) d\lambda \end{aligned}$$

és

$$m(y, \lambda) := \exp \left(\sum_{i=1}^d (\lambda x_i(y) + (1 - \lambda)x_i(m)) X_i \right).$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$(\tilde{T}_n(s, t) - I)f(e) - \int_{]s, t]} \tilde{A}_0(d\tau)(T(\tau, t)f) = I_{n,r}^{(1)} + I_r^{(2)} + I_{n,r}^{(3)} + I_{n,r}^{(4)} + I_r^{(5)},$$

ahol

$$\begin{aligned} I_{n,r}^{(1)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left(\sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} b_{n\ell}^{\psi_r}(i, j) \partial_i \partial_j|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(um_{n\ell}^{-1}) \right. \\ &\quad \left. - \int_{]s, t]} X_i X_j T(\tau, t)f(e) b_0^{\psi_r}(i, j)(d\tau) \right), \\ I_r^{(2)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \iint_{G \times]s, t]} X_i X_j T(\tau, t)f(e) x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_r(y)) \eta_0(dy \times d\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{n,r}^{(3)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int \left(\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(y m_{n\ell}^{-1}) - \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(e) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^d (x_i(y) - x_i(m_{n\ell})) \partial_i|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(u m_{n\ell}^{-1}) \right) \psi_r(y) \mu_{n\ell}(dy) \\
&\quad - \iint_{G \times]s, t]} \left(T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - \sum_{i=1}^d T(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) \psi_r(y) \eta_0(dy \times d\tau), \\
I_{n,r}^{(4)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int R(\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f, y, m_{n\ell}) \psi_r(y) \mu_{n\ell}(dy), \\
I_r^{(5)} &:= \iint_{G \times]s, t]} \left(T(\tau, t) f(y) - T(\tau, t) f(e) - \sum_{i=1}^d T(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) (\psi_r(y) - 1) \eta_0(dy \times d\tau).
\end{aligned}$$

Minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvény esetén megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(\ell)} &= 0 \quad \text{ha } \ell = 1, 3 \text{ és } r \in \mathbb{N} \text{ elegendően nagy,} \\
\lim_{r \rightarrow \infty} I_r^{(\ell)} &= 0 \quad \text{ha } \ell = 2, 5, \\
\lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(4)} &= 0.
\end{aligned}$$

(1). Ahhoz, hogy belássuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(1)} = 0$, elegendő megmutatni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(1,k)} = 0 \quad \text{ha } k = 1, 2, 3,$$

ahol

$$\begin{aligned}
I_{n,r}^{(1,1)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} b_{n\ell}^{\psi_r}(i, j) \left(\partial_i \partial_j|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(u m_{n\ell}^{-1}) - \partial_i \partial_j|_{u=e} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(u) \right), \\
I_{n,r}^{(1,2)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} b_{n\ell}^{\psi_r}(i, j) (\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) X_i X_j f(e) - T(\tau_{n\ell}, t) X_i X_j f(e)), \\
I_{n,r}^{(1,3)} &:= \int_{]s, t]} T(\tau, t) X_i X_j f(e) (b_n^{\psi_r}(i, j)(d\tau) - b_0^{\psi_r}(i, j)(d\tau)).
\end{aligned}$$

(Megjegyezzük, hogy

$$\partial_i \partial_j g(e) = \left(X_i X_j - \sum_{k=1}^d \varrho_k^{ij} X_k \right) g(e),$$

de a $\varrho_k^{ij} X_k$ tagok eltűnnek, mivel a $B_{n\ell}^{\psi_r} = (b_{n\ell}^{\psi_r}(i, j))_{i,j=1,\dots,d}$ mátrix szimmetrikus és $\varrho_k^{ij} = -\varrho_k^{ji}$.)

Legyen $T > 0$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_T$. Nyilván a 8.2.3 Lemma (II) pontja alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(T)} \left| \partial_i \partial_j|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(um_{n\ell}^{-1}) - \partial_i \partial_j|_{u=e} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(u) \right| = 0,$$

ami a 8.3.3 Lemma (II) részével együtt azt eredményezi, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(1,1)} = 0$.

Most definiáljuk a következő $F_0 : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_n : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, függvényeket:

$$F_0(\tau) := T(\tau, t)g(e), \quad F_n(\tau) := \tilde{T}_n(\tau, t)g(e),$$

ahol $g \in \mathfrak{C}_{2,2,K}(G)$ egy rögzített függvény. A 8.1.1 Lemmát $K = \{e\}$ esetén alkalmazva, és a 8.2.3 Lemma (III) pontját használva azt kapjuk, hogy minden $(\tau, \tau') \in \mathbb{S}_t$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} |F_n(\tau') - F_n(\tau)| &= |\tilde{T}_n(\tau, t)g(e) - \tilde{T}_n(\tau', t)g(e)| \\ &\leq b(\|g\|_{2,K} + \|g\|_{\tilde{2},K})(\eta_n(\mathbb{C}V_1 \times]\tau, \tau']) + \beta_n(]\tau, \tau']) \\ &\quad + b(c_2(g, 1, K, T) + \tilde{c}_2(g, 1, K, T))\beta_n(]\tau, \tau']), \end{aligned}$$

tehát a 8.3.3 Lemma (IV) pontja szerint

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\tau' - \tau \leq \delta \\ 0 \leq \tau \leq \tau' \leq t}} |F_n(\tau') - F_n(\tau)| = 0.$$

Továbbá F_0 folytonos és $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\tau) = F_0(\tau)$ ha $\tau \in [0, t]$, következésképpen $F_n \rightarrow F_0$ egyenletesen a $[0, t]$ intervallumon:

$$(8.3.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [0, t]} |\tilde{T}_n(\tau, t)g(e) - T(\tau, t)g(e)| = 0.$$

Nyilván minden $(\tau, \tau') \in \mathbb{S}_T$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(8.3.6) \quad \sum_{\ell=k_n(\tau)+1}^{k_n(\tau')} \left| b_{n\ell}^{\psi_r}(i, j) \right| \leq \sum_{\ell=k_n(\tau)+1}^{k_n(\tau')} \sum_{i=1}^d b_{n\ell}(i, i) = \beta_n(]\tau, \tau']) \leq c(T)$$

a 8.2.3 Lemma (IV) pontja szerint. Tehát azt kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(1,2)} = 0$.

Most tetszőleges $s = s_0 < s_1 < \dots < s_p = t$ beosztás esetén

$$\begin{aligned} &\left| \int_{]s, t]} F_0(\tau) \left(b_n^{\psi_r}(i, j)(d\tau) - b_0^{\psi_r}(i, j)(d\tau) \right) \right| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^p \left| \int_{]s_{\ell-1}, s_{\ell}] (F_0(\tau) - F_0(s_{\ell})) b_n^{\psi_r}(i, j)(d\tau) \right| + \sum_{\ell=1}^p \left| \int_{]s_{\ell-1}, s_{\ell}] (F_0(s_{\ell}) - F_0(\tau)) b_0^{\psi_r}(i, j)(d\tau) \right| \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^p \left| \int_{]s_{\ell-1}, s_{\ell}] F_0(s_{\ell}) \left(b_n^{\psi_r}(i, j)(d\tau) - b_0^{\psi_r}(i, j)(d\tau) \right) \right| = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

A jobboldalon levő első és a második szumma tetszőlegesen kicsivé tehető azáltal, hogy a $\max_{1 \leq \ell \leq p} (s_\ell - s_{\ell-1})$ mennyiséget elegendően kicsire választjuk, felhasználjuk a (8.3.6) egyenlőtlenséget, és az F_0 függvény folytonosságát. Az $[s, t]$ intervallum beosztását rögzítetten tartva, a harmadik szumma nullához tart ha $n \rightarrow \infty$, mivel

$$S_3 \leq \sup_{\tau \in [0, t]} |F_0(\tau)| \sum_{\ell=1}^p \left| b_n^{\psi_r}(i, j)(s_\ell) - b_n^{\psi_r}(i, j)(s_{\ell-1}) - b_0^{\psi_r}(i, j)(s_\ell) + b_0^{\psi_r}(i, j)(s_{\ell-1}) \right|$$

és használhatjuk a 8.3.3 Lemma (II) pontját. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(1,3)} = 0$.

(2). Az $|x_i(y)x_j(y)(1 - \psi(y))| \leq \varphi(y)$, $y \in U_0$ egyenlőtlenség, az (i) feltétel és a Lebesgue-féle Dominált Konvergencia-tétel segítségével kapjuk, hogy $\lim_{r \rightarrow \infty} I_r^{(2)} = 0$.

(3). Ahhoz, hogy belássuk a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(3)} = 0$ konvergenciát, elegendő megmutatni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(3,\ell)} = 0 \quad \text{ha } \ell = 1, 2, 3, 4,$$

ahol

$$\begin{aligned} I_{n,r}^{(3,1)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int (\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(y m_{n\ell}^{-1}) - \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(y)) \psi_r(y) \mu_{n\ell}(dy), \\ I_{n,r}^{(3,2)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int (\partial_i|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(u m_{n\ell}^{-1}) - \partial_i|_{u=e} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(u)) \\ &\quad \times (x_i(y) - x_i(m_{n\ell})) \psi_r(y) \mu_{n\ell}(dy), \\ I_{n,r}^{(3,3)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) X_i f(e) x_i(m_{n\ell}) \psi_r(y) \mu_{n\ell}(dy), \\ I_{n,r}^{(3,4)} &:= \iint_{G \times [s, t]} \left(\tilde{T}_n(\tau, t)f(y) - \tilde{T}_n(\tau, t)f(e) - \sum_{i=1}^d \tilde{T}_n(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) \psi_r(y) \eta_n(dy \times d\tau) \\ &\quad - \iint_{G \times [s, t]} \left(T(\tau, t)f(y) - T(\tau, t)f(e) - \sum_{i=1}^d T(\tau, t) X_i f(e) x_i(y) \right) \psi_r(y) \eta_0(dy \times d\tau). \end{aligned}$$

Nyilván a 8.2.3 Lemma (II) pontjából következik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(T)} \sup_{y \in G} |\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(y m_{n\ell}^{-1}) - \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t)f(y)| = 0,$$

ami a 8.2.3 Lemma (IV) pontjával együtt azt eredményezi, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(3,1)} = 0$.

A $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(3,\ell)} = 0$, $\ell = 2, 3$ konvergenciák hasonlóan bizonyíthatóak.

Definiáljuk most a $h_0 : G \times]s, t] \rightarrow \mathbb{R}$, $h_n : G \times]s, t] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, függvényeket a következő módon:

$$\begin{aligned} h_0(y, \tau) &:= T(\tau, t)f(y) - T(\tau, t)f(e) - \sum_{i=1}^d T(\tau, t)X_i f(e)x_i(y), \\ h_n(y, \tau) &:= \tilde{T}_n(\tau, t)f(y) - \tilde{T}_n(\tau, t)f(e) - \sum_{i=1}^d \tilde{T}_n(\tau, t)X_i f(e)x_i(y). \end{aligned}$$

Ha $\eta_0 = 0$, akkor

$$(8.3.7) \quad \sup_{n \geq 1} \sup_{y \in G} \sup_{\tau \in [0, T]} |h_n(y, \tau)| < \infty$$

és az (i) feltételből következik $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n, \psi}^{(3,4)} = 0$.

Ha $\eta_0 \neq 0$, akkor $\iint_{G \times]s, t]} \psi_r(y) \eta_0(dy \times d\tau) \neq 0$ minden elegendően nagy $r \in \mathbb{N}$ esetén,

ezért $\iint_{G \times]s, t]} \psi_r(y) \eta_n(dy \times d\tau) \neq 0$ elegendően nagy $r, n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát definiálhatjuk az $\eta'_n, \eta'_0 \in \mathfrak{M}_+(G \times]s, t])$ mértékeket a következő módon:

$$\eta'_n(dy \times d\tau) := \frac{\psi_r(y) \eta_n(dy \times d\tau)}{\iint_{G \times]s, t]} \psi_r(y) \eta_n(dy \times d\tau)}, \quad \eta'_0(dy \times d\tau) := \frac{\psi_r(y) \eta_0(dy \times d\tau)}{\iint_{G \times]s, t]} \psi_r(y) \eta_0(dy \times d\tau)}.$$

A következő vizsgálat célja az, hogy alkalmazhatjuk Billingsley [12, Theorem 5.5] tételét az

$$(8.3.8) \quad \eta'_n h_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{J}_w} \eta'_0 h_0^{-1}$$

konvergencia bizonyítására. Meg fogjuk mutatni, hogy $(y_n, \tau_n) \rightarrow (y, \tau)$ esetén $h_n(y_n, \tau_n) \rightarrow h_0(y, \tau)$. Először vegyük észre, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_0(y_n, \tau) = h_0(y, \tau).$$

Nyilván

$$\begin{aligned} h_n(y_n, \tau_n) - h_0(y_n, \tau) &= (\tilde{T}_n(\tau_n, t) - T(\tau, t))f(y_n) + (\tilde{T}_n(\tau_n, t) - T(\tau, t))f(e) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d (\tilde{T}_n(\tau_n, t) - T(\tau, t))X_i f(e)x_i(y_n). \end{aligned}$$

A második és a harmadik tag nullához tart ha $n \rightarrow \infty$, mivel

$$\begin{aligned} &|\tilde{T}_n(\tau_n, t)g(e) - T(\tau, t)g(e)| \\ &\leq \sup_{\tau \in [0, t]} |\tilde{T}_n(\tau, t)g(e) - T(\tau, t)g(e)| + |T(\tau_n, t)g(e) - T(\tau, t)g(e)| \end{aligned}$$

minden $g \in \mathfrak{C}_{2,2,K}(G)$ esetén, és használhatjuk a (8.3.5) összefüggést. A fenti egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{T}_n(\tau_n, t) - T(\tau, t))f(y) = 0$$

ha $f \in \mathfrak{D}(G)$, tehát már csak azt kell megmutatni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{T}_n(\tau_n, t)f(y_n) - \tilde{T}_n(\tau_n, t)f(y)) = 0.$$

Legyen $\varepsilon > 0$. Először választunk egy olyan $U \in \mathfrak{U}(e)$ halmazt, hogy $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ minden olyan $x, y \in G$ esetén, melyekre $x^{-1}y \in U$. Ezután választhatunk egy olyan \tilde{K} kompakt halmazt G -ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\tilde{\mu}_n(\tau_n, t)(\mathfrak{C}\tilde{K}) \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|}.$$

(Ez úgy bizonyítható, mint a 8.3.3 Lemma (V) pontja, kombinálva a 8.2.4 Tétel bizonyítása elején használt ötletekkel.) Ezután választhatunk egy olyan $\tilde{U} \in \mathfrak{U}(e)$ halmazt, hogy $\tilde{K}^{-1}\tilde{U}\tilde{K} \subset U$. Most $y_n \rightarrow y$ esetén $y_n^{-1}y \in \tilde{U}$ teljesül elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén, következésképpen $u^{-1}y_n^{-1}yu \in U$ minden $u \in \tilde{K}$ esetén, amiből következik $|f(y_n u) - f(yu)| \leq \varepsilon$ minden $u \in \tilde{K}$ és elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén. Tehát elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_n(\tau_n, t)f(y_n) - \tilde{T}_n(\tau_n, t)f(y)| &= \left| \int (f(y_n u) - f(yu))\tilde{\mu}_n(\tau_n, t)(du) \right| \\ &\leq 2\|f\|\tilde{\mu}_n(\tau_n, t)(\mathfrak{C}\tilde{K}) + \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ezért valóban alkalmazhatjuk Billingsley [12, Theorem 5.5] tételét, és megkapjuk a (8.3.8) konvergenciát. Továbbá (8.3.7) alapján azt kapjuk, hogy $\int h_n d\eta'_n \rightarrow \int h_0 d\eta'_0$, és az (i) feltétel szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{G \times]s, t]} \psi_r(y) \eta_n(dy \times d\tau) = \int \int_{G \times]s, t]} \psi_r(y) \eta_0(dy \times d\tau),$$

tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(3,4)} = 0$.

(4). A $\lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{n,r}^{(4)} = 0$ konvergencia megint a Lebesgue-tétel segítségével bizonyítható.

(5). Taylor-formulát használva az $\{u \in G : \psi_r(u) < 1\} \subset U_0$ halmazon, azt kapjuk, hogy

$$|I_r^{(5)}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int \int_{G \times]s, t]} |X_i X_j T(\tau, t) f(\xi(y)) x_i(y) x_j(y)| (1 - \psi_r(y)) \eta_0(dy \times d\tau)$$

ahol $\xi(y) \in \{u \in G : \psi_r(u) < 1\}$, tehát hasonló érveléssel arra jutunk, hogy $\lim_{r \rightarrow \infty} I_r^{(5)} = 0$.

Tehát végülis

$$\lim_{n'} (\tilde{T}_{n'}(s, t) - I)f(e) = \int_{]s, t]} \tilde{A}_0(d\tau)(T(\tau, t)f)$$

minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén. Másrésztől

$$\lim_{n'} (\tilde{T}_{n'}(s, t) - I)f(e) = (T(s, t) - I)f(e)$$

minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ esetén. \square

8.3.9 Lemma. Legyen

$$\tilde{\mu}_{n\ell} := \varepsilon_{m_{n1} \dots m_{n,\ell-1}} * \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1} \dots m_{n1}^{-1}},$$

$$\tilde{\mu}_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}, \quad \mu_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} = \varepsilon_{m_n(s)^{-1}} * \tilde{\mu}_n(s, t) * \varepsilon_{m_n(t)}.$$

Jelölje $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ azt a hemicsoportot, melyhez a 8.3.2 Tétel (i)–(iv) feltételeinek teljesülése esetén a 8.2.4 Tétel értelmében valamely $(\mu_{n'}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ részsorozat konvergál. Ekkor ez a $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport az $(m_0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterrel kapcsolatos az eltolt gyenge backward evolúciós egyenleten keresztül.

Bizonyítás. Hasonló a 8.3.4 Lemma bizonyításához. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tilde{\mu}(s, t) := \varepsilon_{m(s)} * \mu(s, t) * \varepsilon_{m(t)^{-1}}$ és $\tilde{T}(s, t) := T_{\tilde{\mu}(s,t)}$. Legyen $f \in \mathfrak{D}(G)$ és $g_{\tau,t}(y) := \tilde{T}(\tau, t)f(m(\tau)y m(\tau)^{-1})$, $y \in G$, $(\tau, t) \in \mathbb{S}$. Alkalmazva az

$$X_i g_{\tau,t}(e) = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \int f(m(\tau) \exp(hX_i) m(\tau)^{-1} z) \tilde{\mu}(\tau, t)(dz) = \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \tilde{T}(\tau, t)f(e),$$

$$X_i X_j g_{\tau,t}(e) = \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \text{Ad}_{m(\tau)}(X_j) \tilde{T}(\tau, t)f(e)$$

formulákat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{]s,t]} \tilde{A}_0(d\tau)(g_{\tau,t}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{]s,t]} \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \text{Ad}_{m(\tau)}(X_j) \tilde{T}(\tau, t)f(e) b_0(i, j)(d\tau) \\ &+ \int \int_{G \times]s,t]} \left(\tilde{T}(\tau, t)f(m(\tau)y m(\tau)^{-1}) - \tilde{T}(\tau, t)f(e) - \sum_{i=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \tilde{T}(\tau, t)f(e) x_i(y) \right) \eta_0(dy \times d\tau), \end{aligned}$$

ahol az $\tilde{A}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezés kanonikus dekompozíciója $(0, B_0, \eta_0)$.

Ezután tekintsük a

$$(\tilde{T}_n(s, t) - I)f(e) - \int_{]s,t]} \tilde{A}_0(d\tau)(g_{\tau,t}) = I_{n,r}^{(1)} + I_r^{(2)} + I_{n,r}^{(3)} + I_{n,r}^{(4)} + I_r^{(5)}$$

dekompozíciót, ahol

$$\begin{aligned}
I_{n,r}^{(1)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left(\sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} b_{n\ell}^{\psi_r}(i,j) \partial_i \partial_j|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(m_n(\tau_{n,\ell-1}) u m_n(\tau_{n\ell})^{-1}) \right. \\
&\quad \left. - \int_{]s,t]} \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \text{Ad}_{m(\tau)}(X_j) \tilde{T}(\tau, t) f(e) b_0^{\psi_r}(i,j)(d\tau) \right), \\
I_r^{(2)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{G \times]s,t]} \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \text{Ad}_{m(\tau)}(X_j) \tilde{T}(\tau, t) f(e) x_i(y) x_j(y) (1 - \psi_r(y)) \eta_0(dy \times d\tau), \\
I_{n,r}^{(3)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int \left(\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(m_n(\tau_{n,\ell-1}) u m_n(\tau_{n\ell})^{-1}) - \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(e) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^d (x_i(y) - x_i(m_{n\ell})) \partial_i|_{u=m_{n\ell}} \tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f(m_n(\tau_{n,\ell-1}) u m_n(\tau_{n\ell})^{-1}) \right) \\
&\quad \times \psi_r(y) \mu_{n\ell}(dy) \\
&\quad - \int \int_{G \times]s,t]} \left(\tilde{T}(\tau, t) f(m(\tau) y m(\tau)^{-1}) - \tilde{T}(\tau, t) f(e) - \sum_{i=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \tilde{T}(\tau, t) f(e) x_i(y) \right) \\
&\quad \times \psi_r(y) \eta_0(dy \times d\tau), \\
I_{n,r}^{(4)} &:= \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \int R(\tilde{T}_n(\tau_{n\ell}, t) f, y, m_n(\tau_{n,\ell-1}), m_{n\ell}) \psi_r(y) \mu_{n\ell}(dy), \\
I_r^{(5)} &:= - \int \int_{G \times]s,t]} \left(\tilde{T}(\tau, t) f(m(\tau) y m(\tau)^{-1}) - \tilde{T}(\tau, t) f(e) - \sum_{i=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \tilde{T}(\tau, t) f(e) x_i(y) \right) \\
&\quad \times (1 - \psi_r(y)) \eta_0(dy \times d\tau),
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
R(h, y, z, m) &= \sum_{i,j=1}^d (x_i(y) - x_i(m))(x_j(y) - x_j(m)) \\
&\quad \times \int_0^1 (1 - \lambda) \left(\partial_i \partial_j|_{u=m(y,\lambda)} h(z u m^{-1} z^{-1}) - \partial_i \partial_j|_{u=m} h(z u m^{-1} z^{-1}) \right) d\lambda.
\end{aligned}$$

Legyen $T > 0$ és $(s, t) \in \mathbb{S}_T$. A (iii) és (iv) feltételekből következik, hogy (iii)-ban a konvergencia egyenletes, tehát $K_T := \{m_n(t), m(t) : n \in \mathbb{N}, t \in [0, T]\}$ egy kompakt halmaz G -ben. Mivel a $z \mapsto \text{Ad}_z = (\text{Ad}_z^{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ G -ből \mathbb{M}_d -be képező függvény folytonos, ezért

a $z \mapsto \|\text{Ad}_z\|$ G -ből \mathbb{R} -be képező függvény is folytonos, tehát

$$c^K(T) := \sup_{z \in K_T} \|\text{Ad}_z\| < \infty.$$

Most először az $m_{n\ell}$ lokális várhatóértékkel történő „infinitezimális centrálástól” szabadulunk meg, azután alkalmazzuk az

$$\text{Ad}_z(X_i) = \sum_{k=1}^d \text{Ad}_z^{k_i} X_k, \quad \text{Ad}_z(X_i) \text{Ad}_z(X_j) = \sum_{k,\ell=1}^d \text{Ad}_z^{k_i} \text{Ad}_z^{\ell_j} X_k X_\ell,$$

formulákat, és használhatjuk ugyanazokat az ötleteket, mint az előző lemma bizonyításánál. \square

8.3.10 Lemma. (a) *Legyen*

$$\tilde{\mu}_{n\ell} := \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1}}, \quad \tilde{\mu}_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}.$$

Az a $(\tilde{\nu}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport, melyhez a 8.3.2 Tétel (i) és (ii) feltételeinek teljesülése esetén a 8.2.4 Tétel értelmében valamely $(\tilde{\mu}_{n'}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ részsorozat konvergál, egyértelmű.

(b) *Legyen*

$$\tilde{\mu}_{n\ell} := \varepsilon_{m_{n1} \dots m_{n,\ell-1}} * \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1} \dots m_{n1}^{-1}},$$

$$\tilde{\mu}_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}, \quad \mu_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} = \varepsilon_{m_n(s)-1} * \tilde{\mu}_n(s, t) * \varepsilon_{m_n(t)}.$$

Az a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport, melyhez a 8.3.2 Tétel (i)–(iv) feltételeinek teljesülése esetén a 8.2.4 Tétel értelmében valamely $(\mu_{n'}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ részsorozat konvergál, egyértelmű.

Bizonyítás. A (b) bizonyítására szorítkozunk. Siebert [91, Theorem 5.7] tételének, illetve a 6.5.2 Tétel bizonyításához hasonlóan járunk el. Legyen $E := G \cup \{\omega\}$ a G csoport 1-pontos kompaktifikációja. Legyen $\omega x = x\omega = \omega$ minden $x \in E$ esetén. Minden $g \in \mathcal{C}^0(G)$ függvényt folytonosan kiterjesztünk E -re: $g(\omega) := 0$.

Tegyük fel, hogy két limesz hemicsoport van: $(\mu'(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ és $(\mu''(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$, tehát léteznek olyan (n') és (n'') részsorozatai (n) -nek, hogy

$$\tilde{\mu}_{n'}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \mu'(s, t), \quad \tilde{\mu}_{n''}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \mu''(s, t)$$

minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. A 8.3.9 Lemma alapján ugyanannak az $(m_0, B_0, \eta_0) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméternek felelnek meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Legyen

$(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $T'(s, t) := T_{\tilde{\mu}'(s, t)}$, $T''(s, t) := T_{\tilde{\mu}''(s, t)}$. Rögzítsük az $r > 0$ számot és az $f \in \mathcal{D}(G)$ függvényt. Legyen $t \in [0, r]$ és $x \in E$ esetén

$$F(t, x) := T'(r - t, r)f(x) - T''(r - t, r)f(x).$$

A következő vizsgálat célja az, hogy megmutassuk, hogy az F függvény kielégíti a 6.5.1 Lemma feltételeit. Most legyen $(t, y) \in [0, r] \times E$ olyan, hogy

$$F(t, y) = \min\{F(t, x) : x \in E\}.$$

Minden $s \in [0, t]$ esetén

$$F(t, y) - F(s, y) = \int_{]r-t, r-s]} \tilde{A}_0(d\tau)(g'_{\tau, r, y} - g''_{\tau, r, y}),$$

ahol

$$g'_{\tau, r, y}(u) := T'(\tau, r)L_y f(m(\tau)um(\tau)^{-1}), \quad g''_{\tau, r, y}(u) := T''(\tau, r)L_y f(m(\tau)um(\tau)^{-1}).$$

Tehát $F(t, y) - F(s, y) = I_1 + I_2 + I_3$, ahol

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{]r-t, r-s]} \tilde{A}_0(d\tau)(g'_{\tau, r, y} - g'_{r-t, r, y}), \\ I_2 &:= \int_{]r-t, r-s]} \tilde{A}_0(d\tau)(g'_{r-t, r, y} - g''_{r-t, r, y}), \\ I_3 &:= \int_{]r-t, r-s]} \tilde{A}_0(d\tau)(g''_{r-t, r, y} - g''_{\tau, r, y}) \end{aligned}$$

Először megmutatjuk, hogy $I_2 \geq 0$. Vezessük be a $J :=]r - t, r - s]$ jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^d \int_J X_i X_j h_\tau(e) b_0(i, j)(d\tau) \\ &\quad + \int \int_{G \times J} \left(h_\tau(u) - h_\tau(e) - \sum_{i=1}^d X_i h_\tau(e) x_i(u) \right) \eta_0(du \times d\tau), \end{aligned}$$

ahol

$$h_\tau(u) := (T'(r - t, r) - T''(r - t, r))L_y f(m(\tau)um(\tau)^{-1}), \quad u \in E.$$

Legyen

$$\tilde{h}(u) := (T'(r - t, r) - T''(r - t, r))L_y f(u), \quad u \in E.$$

Minden $u \in E$ esetén

$$\tilde{h}(u) = F(t, yu) \geq F(t, y) = \tilde{h}(e),$$

tehát a \tilde{h} függvénynek minimuma van az e pontban, tehát a $C := (c_{ij})_{i, j=1, \dots, d}$, $c_{ij} := X_i X_j \tilde{h}(e)$ mátrix pozitív szemidefinit. Ebből következik, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_+$ esetén a

$D(\tau) := (d_{ij}(\tau))_{i,j=1,\dots,d}$, $d_{ij} := X_i X_j h_\tau(e)$ mátrix is pozitív szemidefinit, hiszen $D(\tau) = \text{Ad}_{m(\tau)} C \text{Ad}_{m(\tau)}^*$. A $B_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ függvény monoton növekvő, ezért azt kapjuk, hogy a

$$\left(\int_J X_i X_j h_\tau(e) b_0(i, j)(d\tau) \right)_{i,j=1,\dots,d}$$

mátrix is pozitív szemidefinit, amiből következik, hogy

$$\sum_{i,j=1}^d \int_J X_i X_j h_\tau(e) b_0(i, j)(d\tau) \geq 0.$$

Mivel a \tilde{h} függvénynek minimuma van az e pontban, így $X_i \tilde{h}(e) = 0$ minden $i = 1, \dots, d$ esetén, tehát

$$X_i h_\tau(e) = \sum_{\ell=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)}^{\ell i} X_\ell \tilde{h}(e) = 0.$$

Továbbá minden $u \in E$ és $\tau \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} h_\tau(u) &= (T'(r-t, r) - T''(r-t, r)) f(y m(\tau) u m(\tau)^{-1}) = F(t, y m(\tau) u m(\tau)^{-1}) \\ &\geq F(t, y) = h_\tau(e), \end{aligned}$$

tehát

$$\iint_{G \times J} \left(h_\tau(u) - h_\tau(e) - \sum_{i=1}^d X_i h_\tau(e) x_i(u) \right) \eta_0(du \times d\tau) \geq 0,$$

és végül $I_2 \geq 0$.

Az I_1 integrál előáll $I_1 = I_{1,1} + I_{1,2}$ alakban, ahol

$$\begin{aligned} I_{1,1} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_J X_i X_j h_\tau(e) b_0(i, j)(d\tau), \\ I_{1,2} &:= \iint_{G \times J} \left(h_\tau(u) - h_\tau(e) - \sum_{i=1}^d X_i h_\tau(e) x_i(u) \right) \eta_0(du \times d\tau), \end{aligned}$$

és ahol most

$$h_\tau(u) := (T'(\tau, r) - T'(r-t, r)) L_y f(m(\tau) u m(\tau)^{-1}), \quad u \in E.$$

Először az $I_{1,1}$ -beli integrandust becsüljük meg. Nyilván

$$X_i X_j h_\tau(e) = \sum_{k,\ell=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)}^{ki} \text{Ad}_{m(\tau)}^{\ell j} X_k X_\ell \tilde{h}(e),$$

ahol most

$$\tilde{h}(u) := (T'(\tau, r) - T'(r-t, r)) L_y f(u), \quad u \in E.$$

Mint a 8.1.1 Lemmában, a $K_r := \{m_n(\tau), m(\tau) : n \in \mathbb{N}, \tau \in [0, r]\}$ kompakt halmazzal azt kapjuk, hogy minden $\tau \in J$, $n \in \mathbb{N}$ és $k, \ell = 1, \dots, d$ esetén

$$\begin{aligned} & \left| (\tilde{T}'_n(\tau, r) - \tilde{T}'_n(r - t, r)) X_k X_\ell L_y f(e) \right| \\ & \leq b \|X_k X_\ell L_y f\|_{2, K_r} (\eta_n(\mathbb{C}V_1 \times]r - t, \tau]) + \beta_n(]r - t, \tau]) \\ & \quad + b \beta_n(]r - t, \tau]) c_2(X_k X_\ell L_y f, 1, K_r, r). \end{aligned}$$

Mint a 8.3.9 Lemma bizonyításában

$$c^K(r) := \sup_{z \in K_r} \|\text{Ad}_z\| < \infty,$$

ezért választva egy olyan $c_0 > 0$ konstanst, melyre teljesül $c_0 \cdot \varphi \geq 1_{\mathbb{C}V_1}$, azt kapjuk, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_+$ és $i, j = 1, \dots, d$ esetén

$$\begin{aligned} |X_i X_j h_\tau(e)| & \leq c^K(r)^2 \sum_{k, \ell=1}^d |X_k X_\ell \tilde{h}(e)| \\ & = c^K(r)^2 \sum_{k, \ell=1}^d \lim_{n'} \left| (\tilde{T}'_{n'}(\tau, r) - \tilde{T}'_{n'}(r - t, r)) X_i X_j L_y f(e) \right| \\ & \leq bc^K(r)^2 (c_0 \int_G \varphi(z) \eta_0(dz \times]r - t, r - s]) + \beta_0(]r - t, r - s])) \sum_{k, \ell=1}^d \|X_k X_\ell L_y f\|_{2, K_r} \\ & \quad + bc^K(r)^2 \beta_0(]r - t, r - s]) \sum_{k, \ell=1}^d c_2(X_k X_\ell L_y f, 1, K_r, r). \end{aligned}$$

Most becsüljük meg az $I_{1,2}$ integrált. Alkalmazzuk $u \in V_1$ esetén a Taylor-formulát:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(m(\tau)um(\tau)^{-1}) & = \tilde{h}(e) + \sum_{i=1}^d x_i(u) \partial_i|_{y=e} \tilde{h}(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d x_i(u)x_j(u) \partial_i \partial_j|_{y=e} \tilde{h}(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) + R(\tilde{h}, m(\tau), u), \end{aligned}$$

ahol

$$R(f, z, u) = \sum_{i,j=1}^d x_i(u)x_j(u) \int_0^1 (1 - \lambda) \left(\partial_i \partial_j|_{y=u(\lambda)} f(zyz^{-1}) - \partial_i \partial_j|_{y=e} f(zyz^{-1}) \right) d\lambda$$

és

$$u(\lambda) := \exp \left(\lambda \sum_{i=1}^d x_i(u) X_i \right) \in V_1.$$

Nyilván

$$\sum_{i,j=1}^d |x_i(u)x_j(u)| \leq d \sum_{i=1}^d x_i(u)^2 = d\varphi(u) \quad \text{ha } u \in V_1,$$

következésképpen

$$\begin{aligned} & \iint_{V_1 \times J} \left| h_\tau(u) - h_\tau(e) - \sum_{i=1}^d X_i h_\tau(e) x_i(u) \right| \eta_0(du \times d\tau) \\ & \leq d(\|\tilde{h}\|_{2,K_r} + R_2(\tilde{h}, 1, K_r, e)) \int_G \varphi(u) \eta_0(du \times]r-t, r-s]). \end{aligned}$$

Világos, hogy létezik olyan $c_1 \in \mathbb{R}_+$ konstans, hogy

$$c_1 \cdot \varphi \geq \left(2 + \sum_{i=1}^d \|x_i\| \right) \cdot 1_{\mathbb{C}V_1},$$

tehát

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{C}V_1 \times J} \left| h_\tau(u) - h_\tau(e) - \sum_{i=1}^d X_i h_\tau(e) x_i(u) \right| \eta_0(du \times d\tau) \\ & \leq \left(2 + \sum_{i=1}^d \|x_i\| \right) \|\tilde{h}\|_{2,K_r} \eta_0(\mathbb{C}V_1 \times J) \\ & \leq c_1 \|\tilde{h}\|_{2,K_r} \int_G \varphi(u) \eta_0(du \times]r-t, r-s]). \end{aligned}$$

Összegyűjtve a becsléseket, azt kapjuk, hogy

$$|I_{1,2}| \leq \tilde{c} \left(\|\tilde{h}\|_{2,K_r} + R_2(\tilde{h}, 1, K_r, e) \right) \int_G \varphi(u) \eta_0(du \times]r-t, r-s]),$$

ahol $\tilde{c} := c_1 + d$. Az I_3 integrál hasonlóan becsülhető.

Végül megkapjuk a kívánt

$$F(t, y) - F(s, y) \geq -(\chi(s) - \chi(t))(v(t) - v(s))$$

egyenlőtlenséget, ahol

$$\begin{aligned} v(s) &:= bc^K(r)^2 \left(c_0 \int_G \varphi(u) \eta_0(du \times]r-s, r]) + \beta_0(]r-s, r]) \right) \sum_{i,j=1}^d \|X_i X_j L_y f\|_{2,K_r} \\ &+ bc^K(r)^2 \beta_0(]r-s, r]) \sum_{i,j=1}^d c_2(X_i X_j L_y f, 1, K_r, r) + \tilde{c} \int_G \varphi(u) \eta_0(du \times]r-s, r]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(s) &:= 2\beta_0(]r-s, r]) + \sup \{ \|T'(\tau, r) - T'(r-t, r)\| L_y f \|_{2,K_r} : \tau \in]r-t, r-s] \} \\ &+ \sup \{ R_2((T'(\tau, r) - T'(r-t, r)) L_y f, 1, K_r, e) : \tau \in]r-t, r-s] \} \\ &+ \sup \{ \|T''(\tau, r) - T''(r-t, r)\| L_y f \|_{2,K_r} : \tau \in]r-t, r-s] \} \\ &+ \sup \{ R_2((T''(\tau, r) - T''(r-t, r)) L_y f, 1, K_r, e) : \tau \in]r-t, r-s] \}. \end{aligned}$$

Nyilván v monoton növekvő, és a feltételek alapján folytonos. Továbbá $\chi(t) = 0$, tehát már csak azt kell megmutatni, hogy $\lim_{s \uparrow t} \chi(s) = 0$. Mivel az $(s, t) \mapsto \mu'(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezés folytonos, ezért az $(s, t) \mapsto T'(s, t)f$ leképezés is folytonos \mathbb{S} -ből $\mathfrak{C}^0(G)$ -be minden $f \in \mathfrak{C}^0(G)$ esetén, tehát a

$$\tau \mapsto \|T'(\tau, r) - T'(r - t, r)\|_{2, K_r} L_y f$$

és

$$\tau \mapsto R_2((T'(\tau, r) - T'(r - t, r))L_y f, 1, K_r, e)$$

függvények is folytonosak $[r - t, r - s]$ -ből \mathbb{R} -be. Hasonló állítás érvényes T'' -re is, tehát $\lim_{s \uparrow t} \chi(s) = 0$.

Tehát alkalmazható a 6.5.1 Lemma, így

$$F(t, x) \geq 0 \quad \text{ha } (t, x) \in [0, r] \times E,$$

speciálisan,

$$0 \leq F(t, e) = \int f(u) \mu'(r - t, r)(du) - \int f(u) \mu''(r - t, r)(du)$$

minden $f \in \mathfrak{D}(G)$, $t \in [0, r]$ esetén. Felcserélve μ' és μ'' szerepét

$$0 \leq \int f(u) \mu''(r - t, r)(du) - \int f(u) \mu'(r - t, r)(du)$$

minden $f \in \mathfrak{D}(G)$, $t \in [0, r]$ esetén. Végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\mu'(s, t) = \mu''(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ami bizonyítja a hemicsoport egyértelműségét. □

A 8.3.2 Tétel bizonyítása. Először legyen

$$\tilde{\mu}_{n\ell} := \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_n^{-1}}, \quad \tilde{\mu}_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}.$$

Legyen (n') egy tetszőleges részsorozat (n) -ben. Ekkor a 8.3.4 Lemma alapján az (i) és (ii) feltételek teljesülése esetén létezik olyan folytonosan korlátos változású $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}_T}$ hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, hogy az (n') sorozat valamely alkalmas (n'') részsorozatával

$$\tilde{\mu}_{n''}(s, t) \xrightarrow{\mathcal{T}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

és a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport azzal az $\tilde{A}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezéssel van kapcsolatban a gyenge backward evolúciós egyenleten keresztül, melynek a kanonikus dekompozíciója

$(0, B_0, \eta_0)$. A 8.3.10 Lemma (a) pontja szerint a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport egyértelmű. Következésképpen a $(\tilde{\mu}_n(s, t))_{n \geq 1}$ sorozat gyengén konvergens, és

$$\tilde{\mu}_n(s, t) \xrightarrow{\mathcal{J}_w} \nu(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

tehát az első rész bizonyítása készen van.

Ha

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{n\ell} &:= \varepsilon_{m_{n1} \dots m_{n, \ell-1}} * \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_{n\ell}^{-1} \dots m_{n1}^{-1}}, \\ \tilde{\mu}_n(s, t) &:= \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}, \quad \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell} = \varepsilon_{m_n(s)^{-1}} * \tilde{\mu}_n(s, t) * \varepsilon_{m_n(t)}, \end{aligned}$$

akkor a 8.3.9 Lemmát és a 8.3.10 Lemma (b) pontját használva a (i)–(iv) feltételek teljesülése esetén hasonlóan érvelhetünk. \square

8.4 Konvolúciós hemicsoportok paraméterezése

8.4.1 Lemma. *Tegyük fel, hogy $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, amely az $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármasknak felel meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\tilde{\nu}(s, t) := \varepsilon_{m(s)} * \nu(s, t) * \varepsilon_{m(t)^{-1}}$. Ekkor $(\tilde{\nu}(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan folytonosan gyengén korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben mely annak az $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezésnek felel meg a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, melynek a kanonikus dekompozíciója $(\tilde{a}, \tilde{B}, \tilde{\eta}) \in \mathbb{P}_{bv}(\mathbb{R}_+, G)$, ahol*

$$\begin{aligned} \tilde{a}(i)(d\tau) &:= \int_G \left(x_i(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) - \sum_{j=1}^d x_j(y) \text{Ad}_{m(\tau)}^{ij} \right) \eta(dy \times d\tau), \\ \tilde{B}(d\tau) &:= \text{Ad}_{m(\tau)} B(d\tau) \text{Ad}_{m(\tau)}^*, \\ \tilde{\eta}(dy \times d\tau) &:= \eta(m(\tau)^{-1} dy m(\tau) \times d\tau). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a \tilde{a} függvény folytonosan korlátos változású. Az m függvény folytonosságából következik, hogy minden $T > 0$ esetén a $K_T := \{m(t) : t \in [0, T]\}$ halmaz kompakt G -ben, ezért

$$c^K(T) := \sup_{z \in K} \|\text{Ad}_z\| < \infty.$$

Továbbá létezik olyan $V_T \in \mathfrak{U}(e)$ környezet, hogy $K_T V_T K_T^{-1} \cup V_T \subset U_0$. Nyilván minden $y \in V_T$, $\tau \in [0, T]$ és $i = 1, \dots, d$ esetén

$$x_i(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) = \sum_{j=1}^d x_j(y) \text{Ad}_{m(\tau)}^{ij}.$$

Ezért minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ és $i = 1, \dots, d$ esetén

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(i)(t) - \tilde{a}(i)(s)| &= \left| \iint_{\mathbb{G}_{V_T \times]s, t]} \left(x_i(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) - \sum_{j=1}^d x_j(y) \text{Ad}_{m(\tau)}^{ij} \right) \eta(dy \times d\tau) \right| \\ &\leq \iint_{\mathbb{G}_{V_T \times]s, t]} \left(\|x_i\| + c^K(T) \sum_{j=1}^d \|x_j\| \right) \eta(dy \times d\tau) \\ &\leq c_1^K(T) \iint_{G \times]s, t]} \varphi(y) \eta(dy \times d\tau) \end{aligned}$$

egy alkalmas $c_1^K(T) > 0$ konstanssal. Következésképpen

$$|\tilde{a}(i)(t) - \tilde{a}(i)(s)| \leq v(t) - v(s),$$

ahol a $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$v(t) := c_1^K(T) \int_G \varphi(y) \eta(dy \times [0, t])$$

függvény monoton növekedő és folytonos, tehát az \tilde{a} függvény folytonosan korlátos változású.

Nilván a \tilde{B} függvény folytonos és monoton növekvő, hiszen minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = \int_s^t \text{Ad}_{m(\tau)} B(d\tau) \text{Ad}_{m(\tau)}^* \in \mathbb{M}_d^+.$$

Legyen megint $T > 0$. Legyenek K_T és V_T a fenti halmazok. Ekkor minden $y \in V_T$ és $\tau \in [0, T]$ esetén

$$\varphi(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) = \sum_{i=1}^d x_i(m(\tau)ym(\tau)^{-1})^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j,k=1}^d x_j(y)x_k(y) \text{Ad}_{m(\tau)}^{ij} \text{Ad}_{m(\tau)}^{ik},$$

tehát

$$\varphi(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) \leq c^K(T)^2 \sum_{i=1}^d \sum_{j,k=1}^d |x_j(y)x_k(y)| \leq d^2 c^K(T)^2 \varphi(y).$$

Következésképpen létezik olyan $c_2^K(T) > 0$ konstans, hogy minden $y \in G$ és $\tau \in [0, T]$ esetén

$$\varphi(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) \leq c_2^K(T) \varphi(y),$$

tehát minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ esetén

$$\int_G \varphi(y) \tilde{\eta}(dy \times]s, t]) \leq c_2^K(T) \int_G \varphi(y) \eta(dy \times]s, t]),$$

amiből következik, hogy $\tilde{\eta} \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+, G)$.

Most a feltételek alapján

$$(T_{\tilde{\nu}(s,t)} - I)f(e) = \int_{]s,t]} A(d\tau)(g_{\tau,t}),$$

ahol

$$g_{\tau,t}(y) := T_{\tilde{\nu}(\tau,t)}f(m(\tau)ym(\tau)^{-1})$$

és az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezés kanonikus dekompozíciója $(0, B, \eta)$. Használva az

$$\begin{aligned} X_i g_{\tau,t}(e) &= T_{\tilde{\nu}(\tau,t)} \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) f(e), \\ X_i X_j g_{\tau,t}(e) &= T_{\tilde{\nu}(\tau,t)} \text{Ad}_{m(\tau)}(X_i) \text{Ad}_{m(\tau)}(X_j) f(e) \end{aligned}$$

formulákat, azt kapjuk, hogy

$$(T_{\tilde{\nu}(s,t)} - I)f(e) = \int_{]s,t]} A(d\tau)(g_{\tau,t}) = \int_{]s,t]} \tilde{A}(d\tau)(T_{\tilde{\nu}(\tau,t)}f),$$

ahol az $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezés kanonikus dekompozíciója $(\tilde{a}, \tilde{B}, \tilde{\eta})$. \square

8.4.2 Tétel. Legyen $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$. Ekkor pontosan egy olyan $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport létezik $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely az (m, B, η) hármasnak felel meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Bizonyítás. Legyen $(\tilde{a}, \tilde{B}, \tilde{\eta}) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ úgy definiálva, mint a 8.4.1 Lemmában. Ekkor a 6.7.1 Tétel alapján létezik egy olyan $(\tilde{\nu}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely annak az $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ függvénynek felel meg a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, melynek kanonikus dekompozíciója $(\tilde{a}, \tilde{B}, \tilde{\eta})$:

$$(T_{\tilde{\nu}(s,t)} - I)f(e) = \int_{]s,t]} \tilde{A}(d\tau)(T_{\tilde{\nu}(\tau,t)}f).$$

Mint a 8.4.1 Lemma bizonyításában, most is

$$\int_{]s,t]} \tilde{A}(d\tau)(T_{\tilde{\nu}(\tau,t)}f) = \int_{]s,t]} A(d\tau)(g_{\tau,t}),$$

ahol

$$g_{\tau,t}(y) := T_{\tilde{\nu}(\tau,t)}f(m(\tau)ym(\tau)^{-1}),$$

és az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezés kanonikus dekompozíciója $(0, B, \eta)$. Tehát a $\nu(s, t) := \varepsilon_{m(s)}^{-1} * \tilde{\nu}(s, t) * \varepsilon_{m(t)}$, $(s, t) \in \mathbb{S}$ hemicsoport az (m, B, η) paramétereknek felel meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Tegyük most fel, hogy $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan hemicsoport, mely az (m, B, η) paramétereknek felel meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, és legyen $\tilde{\nu}(s, t) := \varepsilon_{m(s)} * \nu(s, t) * \varepsilon_{m(t)}^{-1}$, $(s, t) \in \mathbb{S}$. Ekkor a 8.4.1 Lemma szerint $(\tilde{\nu}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport, mely az $(\tilde{a}, \tilde{B}, \tilde{\eta}) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármasnak felel meg a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. A 6.5.2 Tétel szerint a $(\tilde{\nu}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport egyértelműen meg van határozva az $(\tilde{a}, \tilde{B}, \tilde{\eta})$ hármas által, tehát az (m, B, η) hármas által is. \square

8.4.3 Lemma. Legyen $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport, mely az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ függvénnnyel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Ekkor minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $g \in \mathfrak{D}(G \times \mathbb{S})$ esetén

$$T_{\nu(s, t)}g(e, s, t) - g(e, t, t) = \int_{]s, t]} A(d\tau)(T_{\nu(\tau, t)}g(\cdot, \tau, t)) - \int_{]s, t]} T_{\nu(\tau, t)}D_2g(e, \tau, t) d\tau,$$

ahol T és A az első koordinátára hat, és D_2 a második koordináta szerinti parciális deriváltat jelöli.

Bizonyítás. Minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén fennáll a gyenge backward evolúciós egyenlet:

$$(T_{\nu(s, t)} - I)f(e) = \int_{]s, t]} A(d\tau)(T_{\nu(\tau, t)}f).$$

Következésképpen

$$\begin{aligned} T_{\nu(s, t)}g(e, s, t) - g(e, s, t) &= \int_{]s, t]} A(d\tau)(T_{\nu(\tau, t)}g(\cdot, \tau, t)) \\ &\quad - \int_{]s, t]} A(d\tau)(T_{\nu(\tau, t)}(g(\cdot, \tau, t) - g(\cdot, s, t))) . \end{aligned}$$

Minden $i = 1, \dots, d$ esetén

$$\begin{aligned} &\int_{]s, t]} X_i T_{\nu(\tau, t)}(g(e, \tau, t) - g(e, s, t)) a(i)(d\tau) \\ &= \int_{]s, t]} \int_G X_i(g(y, \tau, t) - g(y, s, t)) \nu(\tau, t)(dy) a(i)(d\tau) \\ &= \int_{]s, t]} \int_G \int_{]s, \tau]} X_i D_2g(y, \theta, t) d\theta \nu(\tau, t)(dy) a(i)(d\tau) \\ &= \int_{]s, t]} \int_{] \tau, t]} X_i T_{\nu(\theta, t)} D_2g(e, \tau, t) a(i)(d\theta) d\tau. \end{aligned}$$

Hasonló észrevételek arra vezetnek, hogy

$$\begin{aligned} \int_{]s, t]} A(d\tau)(T_{\nu(\tau, t)}(g(\cdot, \tau, t) - g(\cdot, s, t))) &= \int_{]s, t]} \int_{] \tau, t]} A(d\theta)(T_{\nu(\theta, t)}D_2g(\cdot, \tau, t)) d\tau \\ &= \int_{]s, t]} (T_{\nu(\tau, t)} - I)D_2g(e, \tau, t) d\tau \\ &= \int_{]s, t]} T_{\nu(\tau, t)}D_2g(e, \tau, t) d\tau - (g(e, t, t) - g(e, s, t)). \end{aligned}$$

Ezzel kész a bizonyítás. □

Ha $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ egy olyan folytonos, korlátos változású függvény, melyre $b(0) = e$, akkor jelölje $b_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$ azokat a korlátos változású függvényeket, melyekre $b_i(0) := 0$ és

$$f(b(t)) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \tilde{X}_i f(b(\tau)) b_i(d\tau) \quad \text{ha } f \in \mathfrak{D}(G).$$

(Lásd Feinsilver [29, Section 2.3].)

8.4.4 Lemma. Legyen $(\nu''(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport, mely azzal az $A'' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ függvénnyel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, melynek kanonikus dekompozíciója $(a'', B'', \eta'') \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. Legyen $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ egy folytonos, korlátos változású függvény. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\nu'(s, t) := \varepsilon_{m(s)^{-1}} * \nu''(s, t) * \varepsilon_{m(t)}$. Ekkor minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(T_{\nu'(s, t)} - I)f(e) = \int_{]s, t]} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} A''(d\tau)(T_{\nu'(\tau, t)} f) + \sum_{i=1}^d \int_{]s, t]} X_i T_{\nu'(\tau, t)} f(e) m_i(d\tau)$$

ahol

$$\begin{aligned} \int_{]s, t]} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} A''(d\tau)(T_{\nu'(\tau, t)} f) &:= \sum_{i=1}^d \int_{]s, t]} T_{\nu'(\tau, t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(e) a''(i)(d\tau) \\ &+ \sum_{i, j=1}^d \int_{]s, t]} T_{\nu'(\tau, t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_j) f(e) b''(i, j)(d\tau) \\ &+ \int \int_{G \times]s, t]} \left(T_{\nu'(\tau, t)} f(m(\tau)^{-1} z m(\tau)) - T_{\nu'(\tau, t)} f(e) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^d T_{\nu'(\tau, t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(e) x_i(z) \right) \eta''(dz \times d\tau). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 8.4.3 Lemmát a $g(y, s, t) := f(m(s)^{-1} y m(t))$, $y \in G$, $(s, t) \in \mathbb{S}$ függvényre. Nyilván $g(e, t, t) = f(e)$, és

$$T_{\nu''(s, t)} g(e, s, t) = \int f(m(s)^{-1} y m(t)) \nu''(s, t)(dy) = \int f(e) \nu'(s, t)(dy) = T_{\nu'(s, t)} f(e).$$

Továbbá

$$\begin{aligned} X_i g(y, \tau, t) &= \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} g(\exp(hX_i) y, \tau, t) = \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} f(m(\tau)^{-1} \exp(hX_i) y m(t)) \\ &= \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} f(\exp(h \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i)) m(\tau)^{-1} y m(t)) \\ &= \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(m(\tau)^{-1} y m(t)), \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} X_i T_{\nu''(\tau, t)} g(e, \tau, t) &= \int \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(m(\tau)^{-1} y m(t)) \nu''(\tau, t)(dy) \\ &= \int \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(z) \nu'(\tau, t)(dz) = T_{\nu'(\tau, t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(e). \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$X_i X_j T_{\nu''(\tau, t)} g(e, \tau, t) = T_{\nu'(\tau, t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_j) f(e).$$

Nyilván

$$T_{\nu''(\tau,t)}g(z, \tau, t) = \int f(m(\tau)^{-1}zym(t)) \nu''(\tau, t)(dy) = T_{\nu'(\tau,t)}f(m(\tau)^{-1}zm(\tau)),$$

speciálisan

$$T_{\nu''(\tau,t)}g(e, \tau, t) = T_{\nu'(\tau,t)}f(e).$$

Továbbá

$$D_2g(y, \tau, t) = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} g(y, \tau + h, t) = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} f(m(\tau + h)^{-1}ym(t)).$$

Az $\tilde{f}(z) := f(z^{-1}ym(t))$, $z \in G$ függvényekre teljesül

$$d\tilde{f}(m(\tau)) = \sum_{i=1}^d \tilde{X}\tilde{f}(m(\tau)) m_i(d\tau),$$

ahol

$$\tilde{X}\tilde{f}(m(\tau)) = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} f(\exp(-hX_i)m(\tau)^{-1}ym(t)) = -X_i f(m(\tau)^{-1}ym(t)).$$

Következésképpen

$$T_{\nu''(\tau,t)}D_2g(e, \tau, t) = - \sum_{i=1}^d T_{\nu'(\tau,t)}X_i f(e) m_i(d\tau).$$

Ezzel készen van a bizonyítás. □

8.4.5 Lemma. *Legyenek $(\nu'(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ és $(\nu''(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoportok. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ folytonos függvény, hogy $\nu'(s, t) := \varepsilon_{m(s)^{-1}} * \nu''(s, t) * \varepsilon_{m(t)}$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. Ekkor m korlátos változású.*

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy egy $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport akkor és csak akkor folytonosan korlátos változású, ha létezik olyan $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvény, hogy

$$\left| \int x_i(y) \nu(s, t)(dy) \right| \leq v(t) - v(s), \quad \int \varphi(y) \nu(s, t)(dy) \leq v(t) - v(s)$$

teljesül minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $i = 1, \dots, d$ esetén. Ebből nyilván következik, hogy minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ környezethez létezik olyan $c(U) > 0$ konstans, hogy

$$\nu(s, t)(\mathbb{C}U) \leq c(U)(v(t) - v(s)), \quad \left| \int_U x_i(y) \nu(s, t)(dy) \right| \leq c(U)(v(t) - v(s)).$$

Legyen most $T > 0$. Ekkor $K_T := \{m(t) : t \in [0, T]\}$ egy kompakt halmaz G -ben. Létezik olyan $V_T \in \mathfrak{U}(e)$ környezet, hogy $V_T = V_T^{-1}$ és $K_T^{-1}V_T K_T \subset U_0$. Továbbá létezik olyan $\tilde{V}_T \in \mathfrak{U}(e)$ környezete, hogy $K_T \tilde{V}_T K_T^{-1} \subset V_T$.

Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ és $k \in \{1, \dots, d\}$. Ha $y \in V_T$, akkor $m(t)^{-1}y^{-1}m(t) \in U_0$, tehát alkalmazhatjuk a Taylor-formulát:

$$\begin{aligned} x_k(m(s)^{-1}m(t)) &= x_k(m(s)^{-1}ym(t)m(t)^{-1}y^{-1}m(t)) \\ &= x_k(m(s)^{-1}ym(t)) + \sum_{i=1}^d x_i(m(t)^{-1}y^{-1}m(t))\tilde{X}_i x_k(\xi(y, s, t)), \end{aligned}$$

ahol $\xi(y, s, t) \in U_0$. Tehát

$$\begin{aligned} |x_k(m(s)^{-1}m(t))| &= \left| \int x_k(m(s)^{-1}m(t)) \nu''(s, t)(dy) \right| \\ &\leq \|x_k\| \nu''(s, t)(\mathbb{C}V_T) + \left| \int_{V_T} x_k(m(s)^{-1}ym(t)) \nu''(s, t)(dy) \right| \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \|\tilde{X}_i x_k\| \left| \int_{V_T} x_i(m(t)^{-1}y^{-1}m(t)) \nu''(s, t)(dy) \right|. \end{aligned}$$

Mivel $(\nu'(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport, ezért létezik olyan $v'_T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő folytonos függvény, hogy

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_T} x_k(m(s)^{-1}ym(t)) \nu''(s, t)(dy) \right| &= \left| \int_{m(s)^{-1}V_T m(t)} x_k(z) \nu'(s, t)(dz) \right| \\ &\leq \left| \int_{\tilde{V}_T} x_k(z) \nu''(s, t)(dz) \right| + \|x_k\| \nu'(s, t)(\mathbb{C}\tilde{V}_T) \leq v'_T(t) - v'_T(s). \end{aligned}$$

Hasonlóan, létezik olyan $v''_T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, folytonos függvény, melyre teljesül $\|x_k\| \nu''(s, t)(\mathbb{C}V) \leq v''_{V_T}(t) - v''_{V_T}(s)$ és

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_T} x_i(m(t)^{-1}y^{-1}m(t)) \nu''(s, t)(dy) \right| &= \left| \sum_{j=1}^d \text{Ad}_{m(t)^{-1}}^{ji} \int_{V_T} x_j(y) \nu''(s, t)(dy) \right| \\ &\leq c^K(T) \sum_{j=1}^d \left| \int_{V_T} x_j(y) \nu''(s, t)(dy) \right| \leq v''_T(t) - v''_T(s). \end{aligned}$$

Következésképpen minden $(s, t) \in \mathbb{S}_T$ és $k \in \{1, \dots, d\}$ esetén

$$|x_k(m(s)^{-1}m(t))| \leq v_T(t) - v_T(s),$$

ahol $v_T(t) := v'_T(t) + \tilde{c}v''_T(t)$ és $\tilde{c} := 1 + c^K(T) \sum_{j=1}^d \|\tilde{X}_j x_k\|$. Nyilván v_T monoton növekvő, ezért m korlátos változású. \square

8.4.6 Lemma. *Legyen $(\nu''(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport, mely az $(a'', B'', \eta'') \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármasknak felel meg a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Legyen $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow G$ egy olyan folytonos függvény, hogy a $\nu'(s, t) := \varepsilon_{m(s)^{-1}} * \nu''(s, t) * \varepsilon_{m(t)}$, $(s, t) \in \mathbb{S}$ hemicsoport is gyengén folytonosan korlátos változású. Ekkor a $(\nu'(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport azzal az $(a', B', \eta') \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármassal kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, melyre*

$$(i) \quad \eta'(dy \times d\tau) = \eta''(m(\tau) dy m(\tau)^{-1} \times d\tau),$$

$$(ii) \quad a'(i)(d\tau) = \sum_{j=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^{ij} a''(j)(d\tau) + m_i(d\tau) \\ + \int_G \left(x_i(y) - \sum_{j=1}^d x_j(m(\tau) y m(\tau)^{-1}) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^{ij} \right) \eta'(dy \times d\tau),$$

$$(iii) \quad B'(d\tau) = \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} B''(d\tau) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^*.$$

Bizonyítás. A 8.4.5 Lemma alapján az m függvény korlátos változású, tehát alkalmazhatjuk a 8.4.4 Lemmát. Nyilván

$$\sum_{i=1}^d \int_{]s,t]} T_{\nu'(\tau,t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(e) a''(i)(d\tau) = \sum_{i,j=1}^d \int_{]s,t]} T_{\nu'(\tau,t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^{ji} X_j f(e) a''(i)(d\tau), \\ \sum_{i,j=1}^d \int_{]s,t]} T_{\nu'(\tau,t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_j) f(e) b''(i,j)(d\tau) \\ = \sum_{k,\ell=1}^d \int_{]s,t]} T_{\nu'(\tau,t)} X_k X_\ell f(e) b'(k,\ell)(d\tau).$$

Továbbá

$$\int \int_{G \times]s,t]} \left(T_{\nu'(\tau,t)} f(m(\tau)^{-1} z m(\tau)) - T_{\nu'(\tau,t)} f(e) - \sum_{i=1}^d T_{\nu'(\tau,t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(e) x_i(z) \right) \eta''(dz \times d\tau) \\ = \int \int_{G \times]s,t]} \left(T_{\nu'(\tau,t)} f(y) - T_{\nu'(\tau,t)} f(e) - \sum_{i=1}^d T_{\nu'(\tau,t)} \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}(X_i) f(e) x_i(m(\tau) y m(\tau)^{-1}) \right) \eta'(dy \times d\tau).$$

Tehát minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathcal{D}(G)$ esetén

$$(T_{\nu'(s,t)} - I) f(e) = \int_{]s,t]} A'(d\tau) (T_{\nu'(\tau,t)} f),$$

ahol az $A' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ függvény kanonikus dekompozíciója $(a', B', \eta') \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. A 6.7.1 és 6.7.4 Tételek szerint a gyenge backward evolúciós egyenlet kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot hoz létre a gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoportok és a $\mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterhalmaz között, így kész a lemma bizonyítása. \square

8.4.7 Lemma. Legyen $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan hemicsoport, mely az $(m', B', \eta') \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ és az $(m'', B'', \eta'') \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paramétereknek is megfelel az eltoltt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Ekkor $(m', B', \eta') = (m'', B'', \eta'')$.

Bizonyítás. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}'(s, t) &:= \varepsilon_{m'(s)} * \nu'(s, t) * \varepsilon_{m'(t)^{-1}}, \\ \tilde{\nu}''(s, t) &:= \varepsilon_{m''(s)} * \nu''(s, t) * \varepsilon_{m''(t)^{-1}}.\end{aligned}$$

A 8.4.1 Lemma szerint $(\tilde{\nu}'(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy olyan gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport, mely azzal az $(\tilde{a}', B', \tilde{\eta}') \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterrel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, melyre

$$\begin{aligned}\tilde{a}'(i)(d\tau) &:= \int_G \left(x_i(m'(\tau)ym'(\tau)^{-1}) - \sum_{j=1}^d x_j(y) \text{Ad}_{m'(\tau)}^{ij} \right) \eta'(dy \times d\tau), \\ \tilde{B}(d\tau) &:= \text{Ad}_{m(\tau)} B(d\tau) \text{Ad}_{m(\tau)}^*, \\ \tilde{\eta}(dy \times d\tau) &:= \eta(m(\tau)^{-1} dy m(\tau) \times d\tau).\end{aligned}$$

Hasonló formulák érvényesek a $(\tilde{\nu}''(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoporra is.

Továbbá minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\tilde{\nu}'(s, t) = \varepsilon_{m(s)^{-1}} * \tilde{\nu}''(s, t) * \varepsilon_{m(t)},$$

ahol $m(t) := m''(t)m'(t)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, ezért alkalmazhatjuk a 8.4.6 Lemmát.

Mivel $\tilde{\eta}'(dy \times d\tau) = \tilde{\eta}''(m(\tau) dy m(\tau)^{-1} \times d\tau)$, így

$$\eta'(m'(\tau)^{-1} dy m'(\tau) \times d\tau) = \eta''(m''(\tau)^{-1} m(\tau) dy m(\tau)^{-1} m''(\tau) \times d\tau),$$

tehát $\eta' = \eta''$.

Mivel $\tilde{B}'(d\tau) = \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} \tilde{B}''(d\tau) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^*$, így

$$\text{Ad}_{m'(\tau)} B'(d\tau) \text{Ad}_{m'(\tau)}^* = \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} \text{Ad}_{m''(\tau)} B''(d\tau) \text{Ad}_{m''(\tau)}^* \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^*,$$

tehát $B' = B''$.

Abból, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{a}'(i)(d\tau) &= \sum_{j=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} \tilde{a}''(j)(d\tau) + m_i(d\tau) \\ &\quad + \int_G \left(x_i(y) - \sum_{j=1}^d x_j(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} \right) \tilde{\eta}'(dy \times d\tau),\end{aligned}$$

levezethetjük, hogy

$$\begin{aligned}&\int_G \left(x_i(m'(\tau)ym'(\tau)^{-1}) - \sum_{j=1}^d x_j(y) \text{Ad}_{m'(\tau)}^{ij} \right) \eta'(dy \times d\tau) \\ &= \sum_{j=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} \int_G \left(x_i(m''(\tau)ym''(\tau)^{-1}) - \sum_{k=1}^d x_k(y) \text{Ad}_{m''(\tau)}^{jk} \right) \eta''(dy \times d\tau) + m_i(d\tau) \\ &\quad + \int_G \left(x_i(m'(\tau)zm'(\tau)^{-1}) - \sum_{j=1}^d x_j(m(\tau)m'(\tau)zm'(\tau)^{-1}m(\tau)^{-1}) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} \right) \eta'(dz \times d\tau).\end{aligned}$$

Mivel $m'(\tau) = m(\tau)^{-1}m''(\tau)$, így $\text{Ad}_{m'(\tau)} = \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}\text{Ad}_{m''(\tau)}$, tehát

$$\text{Ad}_{m'(\tau)}^{ij} = \sum_{k=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^{ik} \text{Ad}_{m''(\tau)}^{kj},$$

ezért $m_i(d\tau) = 0$, $i = 1, \dots, d$, amiből $m(0) = e$ alapján azt kapjuk, hogy $m(t) = e$ minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ezért $m' = m''$. \square

8.4.8 Tétel. Legyen $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ban. Ekkor pontosan egy olyan $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas van, mely a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal kapcsolatos az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint.

Bizonyítás. Az egyértelműséget a 8.4.7 Lemmában bizonyítottuk.

Legyen $(n, \ell) \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mu_{n\ell} := \nu\left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right).$$

Nyilván minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mu_n(s, t) = \bigstar_{\ell=[ns]+1}^{[nt]} \mu_{n\ell} = \nu\left(\frac{[ns]}{n}, \frac{[nt]}{n}\right).$$

Most $\lim_{n \rightarrow \infty} [nr]/n = r$, $r \in \mathbb{R}_+$ azt eredményezi, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(s, t) = \nu(s, t)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén. A következő vizsgálat célja az, hogy megmutassuk, hogy a 8.3.2 Tétel alkalmazható. Az $(s, t) \mapsto \mu(s, t)$, \mathbb{S} -ből $\mathfrak{M}^1(G)$ -be vivő leképezés \mathcal{T}_w -folytonossága miatt a $\{\mu_{n\ell} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq [nt]\}$ háromszögrendszer infinitézimális minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. Következésképpen minden $T > 0$ és minden elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén definiálhatjuk az $m_n : [0, T] \rightarrow G$ lokális várhatóérték-függvényt:

$$m_n(t) := \prod_{\ell=1}^{[nt]} m_{n\ell}$$

és a $B_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}_d^+$, $B_n(t) = (b_n(i, j)(t))_{i, j=1, \dots, d}$ lokális kovarianciafüggvényt:

$$b_n(i, j)(t) := \sum_{\ell=1}^{[nt]} \int (x_i(y) - x_i(m_{n\ell}))(x_j(y) - x_j(m_{n\ell})) \mu_{n\ell}(dy).$$

Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiáljuk az $\eta_n \in \mathfrak{M}_+(G \times \mathbb{R}_+)$ mértéket:

$$\eta_n(dy \times [0, t]) := \sum_{\ell=1}^{[nt]} \mu_{n\ell}(dy).$$

Feinsilver [29] 6.1 és 6.2 lemmái alapján létezik olyan $(m, \widehat{B}, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas és olyan (n') részsorozat, hogy

- $\lim_{n'} \int_G f(y) \eta_{n'}(dy \times [0, t]) = \int_G f(y) \eta(dy \times [0, t])$ ha $t \in \mathbb{R}_+$ és $f \in \mathcal{C}_c(G)$,
- $\lim_{n'} b_{n'}(i, j)(t) = \widehat{b}(i, j)(t)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$,
- $\lim_{n'} m_{n'}(t) = m(t)$ egyenletesen $t \in [0, T]$ -ben minden $T > 0$ esetén.

Definiáljuk a $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d$, $B(t) = (b(i, j)(t))_{i,j=1,\dots,d}$ függvényt a következő módon:

$$b(i, j) := \widehat{b}(i, j)(t) - \int x_i(y) x_j(y) \eta(dy \times [0, t]).$$

Alkalmazva a 8.3.2 Tételt, azt kapjuk, hogy a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport az $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármasnak felel meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. \square

A gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoportokat a következő módon karakterizálhatjuk:

8.4.9 Állítás. Legyen $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ az a hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben, mely az $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármasnak felel meg az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. A $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport akkor és csak akkor gyengén folytonosan korlátos változású, ha az m függvény korlátos változású.

Bizonyítás. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\tilde{\nu}(s, t) := \varepsilon_{m(s)} * \nu(s, t) * \varepsilon_{m(t)}^{-1}$. A 8.4.1 Lemma alapján $(\tilde{\nu}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy folytonosan korlátos változású hemicsoport.

Ha $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ gyengén folytonosan korlátos változású, akkor a 8.4.5 Lemma szerint az m függvény korlátos változású.

Ha az m függvény korlátos változású, akkor a 8.4.4 Lemma alapján minden $T > 0$ és minden $f \in \mathcal{C}_2(G)$ esetén létezik olyan $v_T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő folytonos függvény, hogy

$$|(T_{\nu(s,t)} - I)f(e)| \leq v_T(t) - v_T(s),$$

tehát a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport gyengén folytonosan korlátos változású. \square

A következő állítás leírja a kapcsolatot a $\mathbb{P}_{bv}(\mathbb{R}_+, G)$ és a $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterhalmazokkal történő paraméterezések között.

8.4.10 Állítás. Legyen $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ az a gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport, mely az $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{bv}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméternek felel meg a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint. Legyen $(m, B', \eta') \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ az a hármas, mely a $(\nu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoportnak az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint felel meg. Ekkor $m_i = a(i)$, $i = 1, \dots, d$, $B' = B$ és $\eta' = \eta$.

Bizonyítás. Legyen $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\tilde{\nu}(s, t) := \varepsilon_{m(s)} * \nu(s, t) * \varepsilon_{m(t)}^{-1}$. A 8.4.1 Lemma alapján $(\tilde{\nu}(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ az a gyengén folytonosan korlátos változású hemicsoport, mely az

$(\tilde{a}, \tilde{B}, \tilde{\eta}) \in \mathbb{P}_{bv}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméternek felel meg, ahol

$$\begin{aligned}\tilde{a}(i)(d\tau) &:= \int_G \left(x_i(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) - \sum_{j=1}^d x_j(y) \text{Ad}_{m(\tau)}^{ij} \right) \eta'(dy \times d\tau), \\ \tilde{B}(d\tau) &:= \text{Ad}_{m(\tau)} B'(d\tau) \text{Ad}_{m(\tau)}^*, \\ \tilde{\eta}(dy \times d\tau) &:= \eta'(m(\tau)^{-1} dy m(\tau) \times d\tau).\end{aligned}$$

Továbbá $\nu(s, t) = \varepsilon_{m(s)} * \tilde{\nu}(s, t) * \varepsilon_{m(t)^{-1}}$, ezért alkalmazhatjuk a 8.4.6 Lemmát.

Mivel

$$\eta(dy \times d\tau) = \tilde{\eta}(m(\tau) dy m(\tau)^{-1} \times d\tau) = \eta'(m(\tau)^{-1} m(\tau) dy m(\tau)^{-1} m(\tau) \times d\tau),$$

így $\eta' = \eta$.

Mivel

$$B(d\tau) = \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} \tilde{B}(d\tau) \text{Ad}_{m(\tau)}^* = \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} \text{Ad}_{m(\tau)} B'(d\tau) \text{Ad}_{m(\tau)}^* \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^*,$$

így $B' = B$.

Végül abból, hogy

$$\begin{aligned}a(i)(d\tau) &= \sum_{j=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^{ij} \tilde{a}(j)(d\tau) + m_i(d\tau) \\ &\quad + \int_G \left(x_i(y) - \sum_{j=1}^d x_j(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^{ij} \right) \eta(dy \times d\tau) \\ &= \sum_{j=1}^d \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^{ij} \int_G \left(x_i(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) - \sum_{j=1}^d x_j(y) \text{Ad}_{m(\tau)}^{ij} \right) \eta(dy \times d\tau) \\ &\quad + m_i(d\tau) + \int_G \left(x_i(y) - \sum_{j=1}^d x_j(m(\tau)ym(\tau)^{-1}) \text{Ad}_{m(\tau)^{-1}}^{ij} \right) \eta(dy \times d\tau),\end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy $a(i)(d\tau) = m_i(d\tau)$, hiszen $\text{Ad}_{m(\tau)^{-1}} = (\text{Ad}_{m(\tau)})^{-1}$. Mivel $a(i)(0) = m_i(0) = 0$, így $a(i)(t) = m_i(t)$ minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. \square

A konvolúciós félcsoporthok speciális esetét a következő állítás tartalmazza:

8.4.11 Állítás. *Ha $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy eltolás-invariáns hemicsoport, azaz $\nu(s+h, t+h) = \nu(s, t)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $h \in \mathbb{R}_+$ esetén, akkor $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ gyengén folytonosan korlátos változású. Ha $A \in \mathbb{A}(G)$ jelöli a $(\nu(t))_{t \geq 0}$, $\nu(t) := \nu(0, t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ konvolúciós félcsoporth generáló funkcionálját, akkor a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport a $t \mapsto tA$, \mathbb{R}_+ -ból $\mathbb{A}(G)$ -be vivő leképezéssel kapcsolatos. Ekvivalens módon, ha az $A \in \mathbb{A}(G)$ kanonikus dekompozíciója (a_0, B_0, η_0) , akkor a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport azzal az $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{bv}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterrel kapcsolatos a gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, melyre $a(t) := ta_0$, $B(t) := tB_0$*

és $\eta(dy \times [0, t]) := t\eta_0(dy)$. Ha $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ az a hármas, mely a $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoporttal kapcsolatos az eltolt gyenge backward evolúciós egyenlet szerint, akkor az m függvény multiplikatív: $m(s + t) = m(s)m(t)$ minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén.

Fordítva, ha $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ az a hemicsoport, mely egy olyan $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármasnak felel meg, ahol m multiplikatív és B és η olyan, hogy $B(t) := tB_0$ és $\eta(dy \times [0, t]) := t\eta_0(dy)$, akkor $(\nu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ eltolás-invariáns.

8.5 Forward evolúciós egyenlet

A 8.3.2 Tételben megjelenő limesz hemicsoport forward evolúciós egyenlettel is kapcsolatba hozható. A természetes út az, hogy a $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mértékhez rendelt \tilde{T}_μ jobb-invariáns konvolúciós operátort használjuk, mely szintén a $\mathfrak{C}^0(G)$ függvénytérre van értelmezve:

$$\tilde{T}_\mu f(x) := \int f(yx) \mu(dy) \quad \text{ha } x \in G.$$

Legyen $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ egy hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben és $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ egy olyan monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. Azt mondjuk, hogy a $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport és az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezés megfelelnek egymásnak a gyenge forward evolúciós egyenlet szerint, ha minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén teljesül

$$(\tilde{T}_{\mu(s, t)} - I)f(e) = \int_{]s, t]} A(d\tau) \left(\tilde{T}_{\mu(s, \tau)} f \right).$$

A kapcsolat a forward evolúciós egyenlet szerint áll fenn, ha minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(\tilde{T}_{\mu(s, t)} - I)f = \int_{]s, t]} N_{A(d\tau)} \left(\tilde{T}_{\mu(s, \tau)} f \right),$$

ahol $A \in \mathbb{A}(G)$ esetén az $N_A : \mathfrak{C}_2(G) \rightarrow \mathfrak{C}^0(G)$ lineáris operátor definíciója: $(N_A f)(x) := A(R_x f)$. Megjegyezzük, hogy a forward evolúciós egyenlet írható a következő formában is:

$$(8.5.1) \quad (T_{\mu(s, t)} - I)f = \int_{]s, t]} T_{\mu(s, \tau)} \left(\tilde{N}_{A(d\tau)} f \right)$$

(lásd Siebert [91]), hiszen az

$$X_i \tilde{T}_\mu L_x f(e) = T_\mu \tilde{X}_i f(x)$$

egyenlet, és hasonló megfontolások alapján

$$\begin{aligned} (T_{\mu(s, t)} - I)f(x) &= (T_{\mu(s, t)} - I)L_x f(e) = (\tilde{T}_{\mu(s, t)} - I)L_x f(e) \\ &= \int_{]s, t]} A(d\tau) \left(\tilde{T}_{\mu(s, \tau)} L_x f \right) = \int_{]s, t]} T_{\mu(s, \tau)} \tilde{N}_{A(d\tau)} f(x). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy beszélhetünk még a

$$T_{\mu(s,t)} - I = \int_{]s,t]} T_{\mu(s,\tau)} \left(\tilde{N}_{A(d\tau)} \right)$$

erős forward evolúciós egyenletről is, amelyben operátor-értékű Riemann–Stieltjes integrál szerepel (lásd Born [16]).

8.5.2 Megjegyzés. Ugyanazokat a módszereket alkalmazva, mint a 6. fejezetben, belátható, hogy a 6.6.1 Tételben szereplő limesz hemicsoport gyenge forward evolúciós egyenlettel is kapcsolatos. Ha a Lie-csoport második megszámlálható, akkor a kapcsolat fennáll a (8.5.1) forward evolúciós egyenlet szerint is (lásd Siebert [91] Theorem 4.3 és Lemma 2.10 bizonyításában használt érveléseit).

Most legyen $(\mu(s,t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben és $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$. Azt mondjuk, hogy a $(\mu(s,t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ hemicsoport és az (m, B, η) hármas *megfelelnek egymásnak az eltolt gyenge forward evolúciós egyenlet szerint*, ha minden $(s,t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén teljesül

$$(\tilde{T}_{\tilde{\mu}(s,t)} - I)f(e) = \int_{]s,t]} A(d\tau)(\tilde{g}_{s,\tau}),$$

ahol

$$\tilde{\mu}(s,t) := \varepsilon_{m(s)} * \mu(s,t) * \varepsilon_{m(t)^{-1}}, \quad \tilde{g}_{s,\tau}(y) := \tilde{T}_{\tilde{\mu}(s,\tau)} f(m(\tau)ym(\tau)^{-1})$$

és az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ kanonikus dekompozíciója $(0, B, \eta)$. A kapcsolat az *eltolt forward evolúciós egyenlet szerint áll fenn*, ha minden $(s,t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$(\tilde{T}_{\tilde{\mu}(s,t)} - I)f(\cdot) = \int_{]s,t]} A(d\tau)(\tilde{g}_{s,\tau,\cdot}),$$

ahol

$$\tilde{g}_{s,\tau,y}(u) := \tilde{T}_{\tilde{\mu}(s,\tau)} f(m(\tau)um(\tau)^{-1}y).$$

Az eltolt forward evolúciós egyenlet írható

$$(8.5.3) \quad (T_{\tilde{\mu}(s,t)} - I)f(\cdot) = \int_{]s,t]} A(d\tau)(\tilde{h}_{s,\tau,\cdot}),$$

alakban is, ahol

$$\tilde{h}_{s,\tau,z}(u) := \tilde{T}_{\tilde{\mu}(s,\tau)} L_z f(m(\tau)um(\tau)^{-1}) = \int f(zym(\tau)um(\tau)^{-1}) \tilde{\mu}(s,\tau)(dy).$$

8.5.4 Megjegyzés. Mint a nem-eltolt esetben, most is belátható, hogy a 8.3.2 Tételben szereplő limesz hemicsoport eltolt gyenge forward evolúciós egyenlettel is kapcsolatos, és ha a Lie-csoport második megszámlálható, akkor a kapcsolat fennáll a (8.5.3) eltolt forward evolúciós egyenlet szerint is.

8.6 Martingál-probléma

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy a G Lie-csoport második megszámlálható. Legyen $(\xi_t)_{t \geq 0}$ egy G -beli értékeket felvevő sztochasztikus folyamat, és $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ egy olyan monoton növekvő folytonos leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. Azt mondjuk, hogy a $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat és az $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ leképezések *martingál-kapcsolatban vannak*, ha minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvény esetén az

$$\begin{aligned} f(\xi_t) - \int_{[0,t]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) \\ = f(\xi_t) - \sum_{i=1}^d \int_{[0,t]} \tilde{X}_i f(\xi_\tau) a(i)(d\tau) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{[0,t]} \tilde{X}_i \tilde{X}_j f(\xi_\tau) b(i,j)(d\tau) \\ - \int \int_{G \times [0,t]} \left(f(\xi_\tau y) - f(\xi_\tau) - \sum_{i=1}^d \tilde{X}_i f(\xi_\tau) x_i(y) \right) \eta(dy \times d\tau) \end{aligned}$$

folyamat egy martingál (a természetes filtrációval).

Feinsilver [29] bebizonyította a következő tételt független növekményű folyamatok martingál-kapcsolattal történő karakterizációjáról:

8.6.1 Tétel. *Legyen $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ egy olyan monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. Ekkor létezik olyan G -értékű $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat, melynek trajektóriái a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Skorohod-térbe esnek, martingál-kapcsolatban van az A leképezéssel. Továbbá a folyamat sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű, és eloszlását a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ térben egyértelműen meghatározza az A leképezés.*

A következő állítás leírja az összefüggést hemicsoportoknak a martingál-kapcsolattal és a forward evolúciós egyenlettel történő karakterizálása között:

8.6.2 Állítás. *Legyen $(\xi_t)_{t \geq 0}$ egy G -beli értékű sztochasztikus folyamat és $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ egy olyan monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(a, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$. Jelölje $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\mu(s, t)$ a $\xi_s^{-1} \xi_t$ eloszlását. A $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat és az A leképezés akkor és csak akkor vannak martingál-kapcsolatban, ha minden $(s, t) \in \mathbb{S}$, minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ és $\mu(0, s)$ -majdnem minden $z \in G$ esetén*

$$(T_{\mu(s,t)} - I)f(z) = \int_{[s,t]} T_{\mu(s,\tau)} \tilde{N}_{A(d\tau)} f(z).$$

(Más szavakkal, ha a forward evolúciós egyenlet fennáll majdnem mindenütt.)

Bizonyítás. A következő állítások ekvivalensek:

- (1) A $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat és az A leképezés martingál-kapcsolatban vannak egymással.

(2) Minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvény esetén az

$$f(\xi_t) - \int_{[0,t]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f)$$

folymat martingál.

(3) Minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$\mathbb{E} \left\{ f(\xi_t) - \int_{[0,t]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) \middle| \mathcal{F}_s^\xi \right\} = f(\xi_s) - \int_{[0,s]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) \quad P\text{-m.m.},$$

ahol \mathcal{F}_s^ξ a $\{\xi_\tau, \tau \in [0, s]\}$ elemek által generált σ -algebrát jelöli.

Felhasználva, hogy a $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folymat független bal-növekményű, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ f(\xi_t) - \int_{[0,t]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) \middle| \mathcal{F}_s^\xi \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ f(\xi_s \xi_s^{-1} \xi_t) - \int_{[0,s]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) - \int_{[s,t]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) \middle| \mathcal{F}_s^\xi \right\} \\ &= \mathbb{E} f(z \xi_s^{-1} \xi_t) \Big|_{z=\xi_s} - \int_{[0,s]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) - \mathbb{E} \left\{ \int_{[s,t]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) \middle| \mathcal{F}_s^\xi \right\}, \end{aligned}$$

tehát (1), (2) vagy (3) ekvivalens a következő állítással is:

(4) Minden $(s, t) \in \mathbb{S}$ és $f \in \mathfrak{D}(G)$ esetén

$$\mathbb{E}(f(z \xi_s^{-1} \xi_t) - f(z)) \Big|_{z=\xi_s} = \mathbb{E} \left\{ \int_{[s,t]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) \middle| \mathcal{F}_s^\xi \right\} \quad P\text{-m.m.}$$

Nyilván

$$\mathbb{E}(f(z \xi_s^{-1} \xi_t) - f(z)) \Big|_{z=\xi_s} = (T_{\mu(s,t)} - I)f(\xi_s) \quad P\text{-m.m..}$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \int_{[s,t]} X_i L_{\xi_\tau} f(e) a(i)(d\tau) \middle| \mathcal{F}_s^\xi \right\} &= \mathbb{E} \int_{[s,t]} \tilde{X}_i L_{z \xi_s^{-1} \xi_\tau} f(e) a(i)(d\tau) \Big|_{z=\xi_s} \\ &= \int_{[0,t]} T_{\mu(s,\tau)} \tilde{X}_i f(\xi_s) a(i)(d\tau) \quad P\text{-m.m.}, \end{aligned}$$

és hasonló megfontolások alapján

$$\mathbb{E} \left\{ \int_{[s,t]} A(d\tau)(L_{\xi_\tau} f) \middle| \mathcal{F}_s^\xi \right\} = \int_{[s,t]} T_{\mu(s,\tau)} \tilde{N}_{A(d\tau)} f(\xi_s) \quad P\text{-m.m.},$$

amivel kész a bizonyítás. □

Most legyen $(\xi_t)_{t \geq 0}$ egy G -beli értékű sztochasztikus folyamat és $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$. Azt modjuk, hogy a $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat és az $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas *eltolt martingál-kapcsolatban vannak*, ha minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ függvény esetén az

$$f(\xi_t m(t)^{-1}) - \int_{[0,t]} \tilde{A}(d\tau)(L_{\xi_\tau} R_{m(\tau)^{-1}} f)$$

folyamat martingál (a természetes filtrációval), ahol $\tilde{A} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}(G)$ az a monoton növekvő, folytonos, korlátos változású leképezés, melynek kanonikus dekompozíciója $(0, B, \eta)$. Feinsilver [29] bebizonyította a következő tételt független növekményű folyamatok eltolt martingál-kapcsolattal történő karakterizációjáról:

8.6.3 Tétel. *Tetszőleges $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ esetén létezik olyan G -beli értékű $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat, melynek trajektóriái a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-térbe esnek és eltolt martingál-kapcsolatban van az (m, B, η) hármassal. Továbbá a folyamat sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű, és eloszlását a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ térben egyértelműen meghatározza az (m, B, η) hármas.*

Fordítva, ha $(\xi_t)_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értékű folyamat, melynek trajektóriái a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-térbe esnek és független bal-növekményű, akkor pontosan egy olyan $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas létezik, mely eltolt martingál-kapcsolatban van a $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamattal.

(Más szavakkal, az eltolt martingál-kapcsolat kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot teremt a független bal-növekményű folyamatok által a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, G)$ Szkorohod-téren generált valószínűségi mértékek és a $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ paraméterhalmaz között.)

A hemicsoportoknak az eltolt martingál-kapcsolattal és az eltolt forward evolúciós egyenlettel történő karakterizálása közötti kapcsolat ugyanúgy kezelhető, mint a nem-eltolt esetben:

8.6.4 Állítás. *Legyen $(\xi_t)_{t \geq 0}$ egy G -beli értékű sztochasztikus folyamat és $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$. Jelölje $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\mu(s, t)$ a $\xi_s^{-1} \xi_t$ eloszlását. A $(\xi_t)_{t \geq 0}$ folyamat és az (m, B, η) hármas akkor és csak akkor vannak eltolt martingál-kapcsolatban, ha minden $(s, t) \in \mathbb{S}$, minden $f \in \mathfrak{D}(G)$ és $\mu(0, s)$ -majdnem minden $z \in G$ esetén*

$$(T_{\tilde{\mu}(s,t)} - I)f(z) = \int_{[s,t]} A(d\tau)(\tilde{h}_{s,\tau,z}),$$

ahol

$$\tilde{h}_{s,\tau,z}(u) := \tilde{T}_{\tilde{\mu}(s,\tau)} L_z f(m(\tau) u m(\tau)^{-1}).$$

(Más szavakkal, az eltolt forward evolúciós egyenlet fennáll majdnem mindenütt.)

Összekombinálva a 8.4.2, 8.4.8 és 8.6.3 Tételeket, a 8.6.4 Állítást és a 8.5.4 Megjegyzést, kapjuk a következő eredményt:

8.6.5 Tétel. *Legyen $(\mu(s, t))_{(s,t) \in \mathbb{S}}$ egy hemicsoport $\mathfrak{M}^1(G)$ -ben és $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (i) $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ kapcsolatban van az (m, B, η) hármassal az eltolt backward evolúciós egyenlet szerint;
- (ii) $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ kapcsolatban van az (m, B, η) hármassal az eltolt forward evolúciós egyenlet szerint;
- (iii) az eltolt forward evolúciós egyenlet fennáll $\mu(0, s)$ -majdnem mindenütt;
- (iv) $(\mu(s, t))_{(s, t) \in \mathbb{S}}$ eltolt martingál-kapcsolatban van az (m, B, η) hármassal.

8.7 Funkcionális centrális határeloszlás-tételek globális és lokális centrálással

Ebben az alfejezetben ismét feltesszük, hogy a G Lie-csoport második megszámlálható. Alkalmazva a 8.3.2 Tételt, bizonyítást adunk Feinsilver [29] határeloszlástételeire. Először tekintsük a „globális centrálást”.

Legyenek $\{\xi_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ soronként független G -beli véletlen elemek. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ olyan monoton növekvő, balról folytonos függvény, hogy $k_n(0) = 0$, $k_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{Z}_+$, és teljesüljön a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq \ell \leq k_n(t)} P(\xi_{n\ell} \in \mathbb{C}U) = 0$$

infinitézimalitási feltétel minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. Tekintsük $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\xi_n = (\xi_n(t))_{t \geq 0}$,

$$\xi_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} \xi_{n\ell}$$

sztochasztikus folyamatot. Jelölje $\mu_{n\ell}$ a $\xi_{n\ell}$ eloszlását. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\eta_n \in \mathfrak{M}_+(G \times \mathbb{R}_+)$ mértéket, valamint minden $T > 0$ és minden elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén az $m_n : [0, T] \rightarrow G$ és $B_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}_d^+$ függvényeket úgy, mint a 8.3 alfejezetben.

Egy $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas esetén legyen $\widehat{B} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d^+$, $\widehat{B}(t) = (\widehat{b}(i, j)(t))_{i, j=1, \dots, d}$,

$$\widehat{b}(i, j)(t) := b(i, j)(t) + \int x_i(y)x_j(y) \eta(dy \times [0, t]).$$

8.7.1 Tétel. *Legyen $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értékű, sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű folyamat, mely az $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármassal kapcsolatos az eltolt gyenge evolúciós egyenlet szerint. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ban. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (i) (a) $m_n(t) \rightarrow m(t)$ egyenletesen $t \in [0, T]$ -ben minden $T > 0$ esetén,

$$(b) \quad B_n(t) \rightarrow \widehat{B}(t) \quad \text{ha } t \in D,$$

$$(c) \quad \int f(y) \eta_n(dy \times [0, t]) \rightarrow \int f(y) \eta(dy \times [0, t]) \quad \text{ha } t \in D, \quad f \in \mathfrak{C}_e(G).$$

$$(ii) \quad \xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi.$$

Bizonyítás. (i) \implies (ii). Nyilván teljesülnek a 8.3.2 Tétel feltételei, így kapjuk a véges-dimenziós eloszlások $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}_f} \xi$ konvergenciáját. Gihman, Skorohod [36, Theorem VI. 5.4] alapján a $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$ konvergencia bizonyításához elegendő azt belátni, hogy minden $T > 0$ és $\vartheta > 0$ esetén teljesül

$$(8.7.2) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(T, \delta, \vartheta) = 0,$$

ahol

$$\alpha_n(T, \delta, \vartheta) := \sup_{\substack{t-s < \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \sup_{x \in G} P \left\{ \varrho(\xi_n(t), x) > \vartheta \mid \xi_n(s) = x \right\},$$

és ϱ egy olyan bal-invariáns metrika a G csoporton, hogy G egy teljes szeparábilis metrikus tér a ϱ metrikával. Mivel a $(\xi(t))_{t \geq 0}$ folyamat független bal-növekményű, így

$$\begin{aligned} P \left\{ \varrho(\xi_n(t), x) > \vartheta \mid \xi_n(s) = x \right\} &= P \left\{ \varrho(\xi_n(s)^{-1} \xi_n(t), e) > \vartheta \mid \xi_n(s) = x \right\} \\ &= P(\varrho(\xi_n(s)^{-1} \xi_n(t), e) > \vartheta) = P \left(\varrho \left(\prod_{\ell=1}^{k_n(t)} \xi_{n\ell}, e \right) > \vartheta \right) = \mu_n(s, t)(\{y \in G : \varrho(y, e) > \vartheta\}), \end{aligned}$$

ahol $\mu_n(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$, $(s, t) \in \mathbb{S}$,

$$\mu_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \mu_{n\ell}.$$

Az (a) feltételből következik, hogy $K_T := \{m_n(t) : n \in \mathbb{N}, t \in [0, T]\}$ egy kompakt halmaz G -ben. Legyen $U_\vartheta \in \mathfrak{U}(e)$ egy olyan környezet, hogy $U_\vartheta \subset \{y \in G : \varrho(y, e) \leq \vartheta\}$. Választhatunk egy olyan $\widetilde{U}_{T, \vartheta} \in \mathfrak{U}(e)$ környezetet, hogy $\widetilde{U}_{T, \vartheta} \subset \mathbb{C}(K_T \cdot \mathbb{C}U_\vartheta \cdot K_T^{-1})$. Ekkor

$$\mu_n(s, t)(\mathbb{C}U_\vartheta) = \widetilde{\mu}_n(s, t)(m_n(s) \cdot \mathbb{C}U_\vartheta \cdot m_n(t)^{-1}) \leq \widetilde{\mu}_n(s, t)(K_T \cdot \mathbb{C}U_\vartheta \cdot K_T^{-1}) \leq \widetilde{\mu}_n(s, t)(\mathbb{C}\widetilde{U}_{T, \vartheta}),$$

ahol $\widetilde{\mu}_n(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$, $(s, t) \in \mathbb{S}$,

$$\widetilde{\mu}_n(s, t) := \bigstar_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \widetilde{\mu}_{n\ell}$$

és

$$\widetilde{\mu}_{n\ell} := \mu_{n\ell} * \varepsilon_{m_n^{-1}},$$

tehát

$$\widetilde{\mu}_n(s, t) = \varepsilon_{m_n(s)} * \mu_n(s, t) * \varepsilon_{m_n(t)^{-1}}.$$

Legyen $f \in \mathfrak{C}_e(G) \cap \mathfrak{D}(G)$. A $\{\mu_{n\ell} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq k_n(T)\}$ háromszögrendszer infinitézimalitásából következik, hogy $K'_T := \{m_{n\ell} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq k_n(T)\}$ egy kompakt halmaz G -ben. Nyilván (b)-ben és (c)-ben is egyenletes a konvergencia $t \in [0, T]$ -ben, ezért minden $U \in \mathfrak{U}(e)$ környezet esetén

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} (\eta_n(\mathfrak{C}U \times]s, t]) + \beta_n([s, t])) = 0,$$

ahol a $\beta_n \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}_+)$ és $\eta_n \in \mathfrak{M}_+(G \times \mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{N}$, mértékeket úgy definiáljuk, mint a 8.2 alfejezetben. Alkalmazva a 8.2.2 és 8.2.3 Lemmákat, azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén

$$\begin{aligned} \left| \int f(y) d\tilde{\mu}_n(s, t)(dy) \right| &\leq \left| \int f(y) d\tilde{\eta}_n(s, t)(dy) \right| + 2bc_2(f, 1, K'_T, T)\beta_n([s, t]) \\ &\quad + b^2(\|f\|_{2,2,K'_T} + c_2(f, 1, K'_T, T))(\eta_n(\mathfrak{C}V_1 \times]s, t]) + \beta_n([s, t]))^2, \end{aligned}$$

ahol $\tilde{\eta}_n(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$, $(s, t) \in \mathbb{S}$,

$$\tilde{\eta}_n(s, t) := \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} \tilde{\mu}_{n\ell}.$$

A 8.1.2 Lemma felhasználásával

$$\begin{aligned} \left| \int f(y) d\tilde{\eta}_n(s, t)(dy) \right| &= \left| \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} (T_{\tilde{\mu}_{n\ell}} - I)f(e) \right| \leq \sum_{\ell=k_n(s)+1}^{k_n(t)} |(T_{\tilde{\mu}_{n\ell}} - I)f(e)| \\ &\leq b(\|f\|_{2,K'_T}(\eta_n(\mathfrak{C}V_1 \times]s, t]) + \beta_n([s, t])) + c_2(f, 1, K'_T, T)\beta_n([s, t])). \end{aligned}$$

Következésképpen azt kapjuk, hogy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t-s \leq \delta \\ 0 \leq s \leq t \leq T}} \left| \int f(y) d\tilde{\mu}_n(s, t)(dy) \right| = 0.$$

Végül egy olyan $f \in \mathfrak{C}_e(G) \cap \mathfrak{D}(G)$ függvényt választva, melyre $f \geq 1_{\mathfrak{C}\tilde{U}_{T,\vartheta}}$, azt kapjuk, hogy teljesül a (8.7.2) feltétel.

(ii) \implies (i). Legyen (n') egy tetszőleges részsorozata (n) -nek. Mint Feinsilver [29] Lemma 6.1 és Lemma 6.2 lemmáiban, létezik olyan $(m'', \widehat{B}'', \eta'') \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$ hármas és egy olyan (n'') részsorozata (n') -nek, hogy

- $\lim_{n''} \int_G f(y) \eta_{n''}(dy \times [0, t]) = \int_G f(y) \eta''(dy \times [0, t])$ ha $t \in \mathbb{R}_+$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)$,
- $\lim_{n''} b_{n''}(i, j)(t) = \widehat{b}''(i, j)(t)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$,
- $\lim_{n''} m_{n''}(t) = m''(t)$ egyenletesen $t \in [0, T]$ -ben minden $T > 0$ esetén.

Legyen $B'' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{M}_d$, $B''(t) = (b''(i, j)(t))_{i, j=1, \dots, d}$,

$$b''(i, j) := \widehat{b}''(i, j)(t) - \int x_i(y)x_j(y) \eta''(dy \times [0, t]).$$

A 8.3.3 Lemma (i) pontja alapján azt kapjuk, hogy a B'' függvény monoton növekvő, tehát $(m'', B'', \eta'') \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$. Az (i) \implies (ii) állítás felhasználásával azt kapjuk, hogy $\xi_{n''} \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi''$, ahol $\xi'' = (\xi''(t))_{t \geq 0}$ egy olyan sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű folyamat, mely az (m'', B'', η'') hármassal kapcsolatos. A 8.4.8 Tétel alapján $(m'', B'', \eta'') = (m, B, \eta)$. Mivel (n') tetszőleges részsorozata (n) -nek, így megkapjuk a (ii) állítást. \square

Hasonló módon nyerhetünk határeloszlás-tételt „lokális centrálással”. Definiáljuk $n \in \mathbb{N}$ esetén a következő $\tilde{\xi}_n = (\tilde{\xi}_n(t))_{t \geq 0}$ sztochasztikus folyamatokat:

$$\tilde{\xi}_n(t) := \prod_{\ell=1}^{k_n(t)} (\xi_{n\ell} m_{n\ell}^{-1}).$$

8.7.3 Tétel. Legyen $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}(t))_{t \geq 0}$ egy olyan G -beli értékű, sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű folyamat, mely a $(0, B, \eta) \in \mathbb{P}_{\text{bv}}(\mathbb{R}_+, G)$ hármassal kapcsolatos a gyenge evolúciós egyenlet szerint. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ben. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) (a) $B_n(t) \rightarrow \widehat{B}(t)$ ha $t \in D$,
- (b) $\int f(y) \eta_n(dy \times [0, t]) \rightarrow \int f(y) \eta(dy \times [0, t])$ ha $t \in D$, $f \in \mathcal{C}_e(G)$.
- (ii) $\tilde{\xi}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \tilde{\xi}$.

Bizonyítás. Ugyanazokat az érveléseket lehet használni, mint a 8.7.1 Tétel bizonyítása során. Megjegyezzük, hogy az (i)-ben szereplő (b) feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$\int f(y) \tilde{\eta}_n(dy \times [0, t]) \rightarrow \int f(y) \eta(dy \times [0, t]) \quad \text{ha } t \in D, f \in \mathcal{C}_e(G),$$

ahol az $\tilde{\eta}_n(s, t) \in \mathfrak{M}^1(G)$, $(s, t) \in \mathbb{S}$ mértékeket úgy definiáljuk, mint az előző bizonyításban. \square

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad független növekményű folyamatok sorozatának konvergenciájára.

8.7.4 Tétel. Legyenek $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ és $\xi_n = (\xi_n(t))_{t \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, G -beli értéket felvevő, sztochasztikusan folytonos, független bal-növekményű folyamatok, melyek az $(m, B, \eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$, illetve az $(m_n, B_n, \eta_n) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}_+, G)$, $n \in \mathbb{N}$ hármassal kapcsolatosak az eltolt gyenge evolúciós egyenlet szerint. Legyen D egy sűrű halmaz \mathbb{R}_+ -ban. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) (a) $m_n(t) \rightarrow m(t)$ egyenletesen $t \in [0, T]$ -ben minden $T > 0$ esetén,
 (b) $\widehat{B}_n(t) \rightarrow \widehat{B}(t)$ ha $t \in D$,
 (c) $\int f(y) \eta_n(dy \times [0, t]) \rightarrow \int f(y) \eta(dy \times [0, t])$ ha $t \in D$, $f \in \mathfrak{C}_e(G)$.
- (ii) $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$.

Bizonyítás. (i) \implies (ii). Jelölje $n \in \mathbb{N}$ és $(s, t) \in \mathbb{S}$ esetén $\nu_n(s, t)$ a $\xi_n(s)^{-1}\xi_n(t)$ eloszlását. Mint a 8.4.8 Tétel bizonyításában, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_n^{(k)}(s, t) = \nu_n(s, t) \quad \text{ha } (s, t) \in \mathbb{S},$$

ahol

$$\nu_n^{(k)}(s, t) := \bigstar_{\ell=[ks]+1}^{[kt]} \nu_n\left(\frac{\ell-1}{k}, \frac{\ell}{k}\right),$$

és

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_G f(y) \eta_n^{(k)}(dy \times [0, t]) = \int_G f(y) \eta_n(dy \times [0, t])$ ha $t \in \mathbb{R}_+$ és $f \in \mathfrak{C}_e(G)$,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(i, j)(t) = \widehat{B}_n(i, j)(t)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} m_n^{(k)}(t) = m(t)$ egyenletesen $t \in [0, T]$ -ben minden $T > 0$ esetén.

Figyelembe véve, hogy a $\mathfrak{C}^0(G)$ tér szeparábilis, diagonalizációs eljárással és a 8.3.2 Tétellel bizonyítható a $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$ konvergencia.

(ii) \implies (i) ugyanúgy bizonyítható, mint a 8.7.1 Tétel esetén. \square

Végül megemlítünk olyan határeloszlás-tételeket, melyekben a limesz folyamat független, stacionárius növekményű. Legyenek $\{\xi_{n\ell} : (n, \ell) \in \mathbb{N}^2\}$ soronként független, azonos eloszlású G -értékű véletlen elemek. Legyen $(k_n)_{n \geq 1}$ egy olyan sorozat \mathbb{N} -ben, melyre $k_n \rightarrow \infty$. Defináljuk $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\xi_n = (\xi_n(t))_{t \geq 0}$,

$$\xi_n(t) := \prod_{\ell=1}^{[tk_n]} \xi_{n\ell}$$

sztochasztikus folyamatokat. Legyen μ_n a $\xi_{n\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$, elemek közös eloszlása.

8.7.5 Tétel. Legyen $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ egy G -beli értéket felvevő, sztochasztikusan folytonos, független stacionárius bal-növekményű folyamat, melynek $A \in \mathbb{A}(G)$ a generáló funkcionálja. Legyen $A \in \mathbb{A}(G)$ kanonikus dekompozíciója (a_0, B_0, η_0) . Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) (a) $k_n \mathbb{E} x_i(\xi_{n1}) \rightarrow a_0(i)$ ha $i = 1, \dots, d$,
 - (b) $k_n \text{Cov}(x_i(\xi_{n1}), x_j(\xi_{n1})) \rightarrow b_0(i, j) + \int x_i(y) x_j(y) \eta_0(dy)$ ha $i, j = 1, \dots, d$,
 - (c) $k_n \mathbb{E} f(\xi_{n1}) \rightarrow \int f(y) \eta_0(dy)$ ha $f \in \mathcal{C}_e(G)$.
- (ii) $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$.
 - (iii) $\xi_n(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi(t)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$.

Bizonyítás. (i) \iff (ii) következik a 8.7.1 Tételből. (i) \implies (iii) következik Hazod [40, p. 63] általános eredményéből. (iii) \implies (i) Siebert [89] eredményei alapján bizonyítható, Nobel [66] Poisson–approximációról szóló eredményét felhasználva. (Lásd Hazod, Scheffler [42] és Scheffler [87] cikkeit.) \square

8.7.6 Tétel. Legyenek $\xi = (\xi(t))_{t \geq 0}$ és $\xi_n = (\xi_n(t))_{t \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, G -beli értéket felvevő, sztochasztikusan folytonos, független stacionárius bal-növekményű folyamatok, melyeknek a generáló funkcionáljai $A \in \mathbb{A}(G)$, illetve $A_n \in \mathbb{A}(G)$, $n \in \mathbb{N}$. Legyen $A \in \mathbb{A}(G)$ és $A_n \in \mathbb{A}(G)$, $n \in \mathbb{N}$ kanonikus dekompozíciója (a_0, B_0, η_0) , illetve (a_n, B_n, η_n) . Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) (a) $a_n \rightarrow a_0$,
 - (b) $\widehat{B}_n \rightarrow \widehat{B}_0$,
 - (c) $\int f(y) \eta_n(dy) \rightarrow \int f(y) \eta_0(dy)$ ha $f \in \mathcal{C}_e(G)$.
- (ii) $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$.
 - (iii) $\xi_n(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi(t)$ ha $t \in \mathbb{R}_+$.

Bizonyítás. (i) \iff (ii) következik a 8.7.4 Tételből. (iii) \implies (i) lényegében szerepel Siebert [89] cikkében, és (i) \implies (iii) bizonyítható Hazod [40, p. 63] általános eredménye alapján. (A részletek szerepelnek a 3 fejezetben.) \square

Megjegyezzük, hogy $G = (\mathbb{R}^d, +)$ esetén a 8.7.5 és 8.7.6 Tételekben szereplő állítások azzal is ekvivalensek, hogy $\xi_n(1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi(1)$.

Irodalomjegyzék

- [1] APPLEBAUM, D. and KUNITA, H. (1993). Lévy flows on manifolds and Lévy processes on Lie groups. *J. Math. Kyoto Univ.* **33**, 1103–1123.
- [2] ARAUJO, A. and GINÉ, E. (1980). *The central limit theorem for real and Banach valued random variables*. John Wiley & Sons, New York.
- [3] BALDI, P. (1985). Unicité du plongement d’une mesure de probabilité dans un semi-groupe de convolution gaussien. Cas non-abélien. *Math. Z.* **188**, 411–417.
- [4] BENDIKOV, A. (1995). *Potential Theory on Infinite-Dimensional Abelian Groups*. de Gruyter Studies in Mathematics 21, Walter de Gruyter, Berlin New York.
- [5] BENTKUS, V. (1986). On the dependence on the dimension of the estimate of Berry–Esseen. *Lith. Math. J.* **26**, 205–210.
- [6] BENTKUS, V. and BLOZNELIS, M. (1989). Nonuniform estimate of rate of convergence in central limit theorem with stable limit law. *Lith. Math. J.* **29**, 14–26.
- [7] BENTKUS, V., GÖTZE, F., PAULASKAS, V. and RAČKAUSKAS, A. (1990). The accuracy of Gaussian approximation in Banach spaces. Preprint No 90 – 100 Sonderforschungsbereich 343, Diskrete Strukturen in der Mathematik, Bielefeld.
- [8] BENTKUS, V. and PAP, G. (1996). The accuracy of Gaussian approximations in nilpotent Lie groups. *J. Theor. Probab.* **9**, 995–1017.
- [9] BERG, C. (1976). Potential theory on the infinite dimensional torus. *Invent. Math.* **32**, 49–100.
- [10] BERGSTRÖM, H. (1969). On the central limit theorem in \mathbb{R}^k . *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **14**, 113–126.
- [11] BHATTACHARYA, R.N. and RANGA RAO, R. (1976). *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*. John Wiley & Sons, New York.
- [12] BILLINGSLEY, P. (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, New York.

- [13] BORN, E. (1986). Differenzierbare Funktionen und Faltungshalbgruppen auf einer lokalkompakten Gruppe. Dissertation, Universität Tübingen.
- [14] BORN, E. (1989). Projective Lie algebra bases of a locally compact group and uniform differentiability, *Math. Z.* **200**, 279–292.
- [15] BORN, E. (1989). An explicit Lévy–Hinčin formula for convolution semigroups on locally compact groups. *J. Theor. Probab.* **2**, 325–342.
- [16] BORN, E. (1990). Hemigroups of probability measures on a locally compact group. *Math. Ann.* **287**, 653–673.
- [17] BOURBAKI, N. (1960, 1972). *Éléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 1,2,3., Actual. Scient. Ind. 1285, 1349.* Hermann, Paris.
- [18] BRUHAT, F. (1961). Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p -adiques. *Bull. Soc. Math. Fr.* **89**, 43–75.
- [19] CARNAL, H. (1964). Unendlich oft teilbare Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf kompakten Gruppen. *Math. Ann.* **153**, 351–383.
- [20] CRÉPEL, P. and RAUGI, A. (1978). Théorème central limite sur les groupes nilpotents. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **14**, 145–164.
- [21] CRÉPEL, P. and ROYNETTE, B. (1977). Une loi du logarithme itéré pour le groupe d'Heisenberg. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **39**, 217–229.
- [22] CSISZÁR, I. (1964). A note on limiting distributions on topological groups. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **9**, 595–598.
- [23] CSISZÁR, I. (1966). On infinite products of random elements and infinite convolutions of probability distributions on locally compact groups. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **5**, 279–295.
- [24] CSISZÁR, I. (1970). Some problems concernings measures on topological spaces and convolutions of measures on topological groups. In: *Les Probabilités sur les Structures Algébriques*, pp. 75–96, Paris.
- [25] CSISZÁR, I. (1971). On the weak* continuity of convolution in a convolution algebra over an arbitrary topological group. *Stud. Sci. Math. Hung.* **6**, 27–40.
- [26] DIEUDONNÉ, N. (1971). *Éléments d'Analyse, Tome IV, Chapitres XVIII à XX.* Gauthier–Villars Éditeur, Paris.
- [27] DRISCH, T. and GALLARDO, L. (1984). Stable laws on the Heisenberg groups. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups VII. Proceedings, Oberwolfach, 1983.* (Lect. Notes Math., vol. 1064, pp. 56–79) Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo.

- [28] EMERY, M. (1978). Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques application aux intégrales multiplicatives stochastiques. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **41**, 241–262.
- [29] FEINSILVER, Ph. (1978). Processes with independent increments on a Lie group. *Trans. Am. Math. Soc.* **242**, 73–121.
- [30] FEINSILVER, Ph. and SCHOTT, R. (1989). Operators, stochastic processes, and Lie groups. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups IX. Proceedings, Oberwolfach, 1988.* (Lect. Notes Math., vol. 1379, pp. 75–85) Springer, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.
- [31] FEINSILVER, Ph. and SCHOTT, R. (1989). An operator approach to processes on Lie groups. In: *Probability Theory on Vector Spaces IV. Proceedings, Łancut, 1987.* (Lect. Notes Math., vol. 1391, pp. 59–65) Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- [32] FOLLAND, G.B. and STEIN, E.M. (1982). *Hardy spaces on homogeneous groups.* Princeton University Press, New Jersey.
- [33] GNEDENKO, B.V. and KOLMOGOROV, A.N. (1949). *Limit distributions for sums of independent random variables.* Gostekhizdat. (English translation Addison–Wesley, Cambridge, 1954)
- [34] GÖTZE, F. (1981). On Edgeworth expansions in Banach spaces. *Ann. Probab.* **9**, 852–859.
- [35] GRENANDER, U. (1968). *Probabilities on algebraic structures.* Almquist & Wilksells, Stockholm.
- [36] GIHMAN, I.I. and SKOROHOD, A.V. (1974). *The theory of stochastic processes I.* Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [37] GUIVARC'H, Y. (1980). Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. *Astérisque* **74**, 47–98.
- [38] HANTSCH, L. and VON WALDENFELS, W. (1979). A random walk on the general linear group related to a problem in atomic physics. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups. Proceedings, Oberwolfach 1978.* (Lect. Notes Math. vol. 595, pp. 131–143.) Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [39] HAZOD, W. (1974). Symmetrische Gaussverteilungen sind diffus. *Manuscr. Math.* **14**, 283–295.
- [40] HAZOD, W. (1977). *Stetige Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und erzeugende Distributionen.* Lect. Notes Math. Vol. 595, Springer, Berlin Göttingen Heidelberg New York.

- [41] HAZOD, W. (1984). Stable and semistable probabilities on groups and on vector spaces. In: Szynal, D., Weron, A. (eds.) *Probability Theory on Vector Spaces III. Proceedings, Lublin 1983.* (Lect. Notes Math., vol. 1080, pp. 69–89) Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- [42] HAZOD, W. and SCHEFFLER, H.P. (1993). The domains of partial attraction of probabilities on groups and on vector spaces, *J. Theor. Probab.* **6**, 175–186.
- [43] HAZOD, W. and SIEBERT, E. (1986). Continuous automorphism groups on a locally compact group contracting modulo a compact subgroup and applications to stable convolution semigroups. *Semigroup Forum* **33**, 111–143.
- [44] HEBISCH, W. (1989). Sharp pointwise estimate for kernels of the semigroup generated by sums of even powers of vector fields on homogeneous groups. *Stud. Math.* **95**, 93–106.
- [45] HEROD, J.U. and MCKELVEY, R.W. (1980). A Hille–Yosida theory for evolutions, *Isr. J. Math.* **36**, 13–40.
- [46] HEWITT, E. and ROSS, K. A. (1963). *Abstract Harmonic Analysis, Vol.1.* Springer, Berlin Göttingen Heidelberg New York.
- [47] HEYER, H. (1968). L’analyse de Fourier non-commutative et applications à la théorie des probabilités. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **4**, 143–164.
- [48] HEYER, H. (1977). *Probability Measures on Locally Compact Groups.* Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [49] HEYER, H. (1979). Stetige Hemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und additive Prozesse auf einer lokalkompakter Gruppe. *Nieuw Arch. Wiskd., IV. Ser.* **27**, 287–340.
- [50] HEYER, H. (1996). Generation and representation of convolution hemigroups on a polish group. In: Heyer, H. and Hirai, T. (eds.) *Infinite Dimensional Harmonic Analysis. Transactions of a German–Japanese Symposium, Tübingen 1995*, pp. 32–85. D.+M. Gräbner, Bamberg.
- [51] HEYER, H. and PAP, G. (1997). Convergence of noncommutative triangular arrays of probability measures on a Lie group. *J. Theor. Probab.* **10**, 1003–1052.
- [52] HEYER, H. and PAP, G. (to appear in 1997). Convolution hemigroups of bounded variation on a Lie projective group. *J. London Math. Soc.*
- [53] HOLEVO, A.S. (1991). An analog of the Itô decomposition for multiplicative processes with values in a Lie group. *Sankhyā Ser. A* **53**, 158–161.
- [54] HÖRMANDER, L. (1967). Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.* **119**, 147–171.

- [55] HUCKE, I. (1985). Schwache Stabilität stochastischer Differentialgleichungen und der zentrale Grenzwertsatz auf lokalkompakten Gruppen. Dissertation, Universität Mainz.
- [56] HUNT, G.A. (1956). Semi-groups of measures on Lie groups. *Trans. Am. Math. Soc.* **81**, 264–293.
- [57] IBERO, M. (1976). Intégrales stochastiques multiplicatives et construction de diffusions sur un groupe de Lie. *Bull. Sci. Math.* **100**, 175–191.
- [58] IKEDA, N. and WATANABE, S. (1981). *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland, Amsterdam.
- [59] JACOD, J. and SHIRYAEV, A.N. (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.
- [60] KHOKHLOV, Y.S. (1991). The domain of normal attraction of a stable probability measure on a nilpotent group. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups X. Proceedings*, Oberwolfach, 1990, pp. 239–247. Plenum Press, New York.
- [61] KUELBS, J. and KURTZ, T. (1974). Berry-Esseen estimates in Hilbert space and application to the law of the iterated logarithm. *Ann. Probab.* **2**, 387–407.
- [62] MAJOR, P. and SHLOSMAN, S.B. (1979). A local limit theorem for the convolution of probability measures on a compact connected group. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **50**, 137–148.
- [63] VON MISES, R. (1918). Über die “Ganzzahligkeit” der Atomgewichte und verwandte Frage. *Physikal. Z.* **19**, 490–500.
- [64] MONTGOMERY, D. and ZIPPIN, L. (1974). *Topological Transformation Groups*. Robert E. Krieger Publ., Huntington New York.
- [65] NEUENSCHWANDER, D. (1996). *Probabilities on the Heisenberg Group*. Lect. Notes Math. Vol. 1630, Springer, Berlin Heidelberg.
- [66] NOBEL, S. (1991). Limit theorems for probability measures on simply connected nilpotent Lie groups, *J. Theor. Probab.* **4**, 261–284.
- [67] PAP, G. (1991). Rate of convergence in CLT on stratified groups. *J. Multivariate Anal.* **38**, 333–365.
- [68] PAP, G. (1991). A new proof of the central limit theorem on stratified Lie groups. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups X. Proceedings*, Oberwolfach 1990, pp. 329–336. Plenum Press, New York.
- [69] PAP, G. (1993). Central limit theorems on nilpotent Lie groups. *Probab. Math. Stat.* **14**, 287–312.

- [70] PAP, G. (1993). Characterization of Gaussian semigroups on a Lie group. *Publ. Math.* **42**, 295–301.
- [71] PAP, G. (1994). Uniqueness of embedding into a Gaussian semigroup on a nilpotent Lie group. *Arch. Math.* **62**, 282–288.
- [72] PAP, G. (1994). Central limit theorems on some topological groups. A survey. In: *New Trends in Probability Theory and Mathematical Statistics II. Proceedings of the Second Ukrainian-Hungarian Conference, Munkachevo, 1992*, pp. 214–224.
- [73] PAP, G. (1994). Central limit theorems on stratified Lie groups. In: *VI International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings, Vilnius, 1993*
- [74] PAP, G. (1994). Processes with stationary independent increments on nilpotent Lie groups. In: *Balakrishnan, A.V. (ed.) 4th International Conference on Advances in Communication & Control. Proceedings, Rhodes, 1993*, pp. 787–792. University of Nevada, Las Vegas.
- [75] PAP, G. (1995). Edgeworth expansions in nilpotent Lie groups. In: *Heyer, H.(eds.) Probability Theory on Vector Spaces XI. Proceedings, Oberwolfach 1995*, pp. 274–291. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- [76] PAP, G. (1997). Construction of processes with stationary independent increments on nilpotent Lie groups. *Arch. Math.* **69**, 146–155.
- [77] PAP, G. (1997). Functional central limit theorems and hemigroups of probability measures on a Lie group. Preprint.
- [78] PAULASKAS, V. and RAČKAUSKAS, A. (1989). *Approximation theory in the central limit theorem. Exact results in Banach spaces*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- [79] PERRIN, J.B. (1928). Etude mathématique du mouvement Brownien de rotation. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **45**, 1–51.
- [80] RACHEV, S.T. and YUKICH, J.E. (1991). Rates of convergence of α -stable random motions. *J. Theor. Probab.* **4**, 333–352.
- [81] PRÉKOPA, A., RÉNYI, A. and URBANIK, K. (1956). On the limit distribution of sums of independent random variables in commutative compact topological groups. *Acta Math. Hung.* **7**, 11–16.
- [82] RAUGI, A. (1978). Théorème de la limite centrale sur les groupes nilpotents. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **43**, 149–172.

- [83] RIESZ, F. és SZŐKEFALVI-NAGY, B. (1988). *Funkcionálanalízis*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- [84] ROYNETTE, B. (1975). Croissance et mouvements browniens d'un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **32**, 133–138.
- [85] RUZSA, I.Z. and SZÉKELY, G.J. (1988). *Algebraic Probability Theory*, Wiley, New York.
- [86] SAZONOV, V. (1981). *Normal approximation – some recent advances*. Lect. Notes Math., vol. 879, Springer, Berlin New York.
- [87] SCHEFFLER, H.P. (1994). \mathcal{D} -Domains of attraction of stable measures on stratified Lie groups, *J. Theor. Probab.* **7**, 767–792.
- [88] SIEBERT, E. (1976). Convergence and convolutions of probability measures on a topological group. *Ann. Prob.* **4**, 433–443.
- [89] SIEBERT, E. (1981). Fourier analysis and limit theorems for convolution semigroups on a locally compact group. *Adv. Math.* **39**, 111–154.
- [90] SIEBERT, E. (1982). Absolute continuity, singularity, and supports of Gauss semigroups on a Lie group. *Monatsh. Math.* **93**, 239–253.
- [91] SIEBERT, E. (1982). Continuous hemigroups of probability measures on a Lie group. In: Heyer, H. (ed.) *Probability Measures on Groups. Proceedings, Oberwolfach 1981.* (Lect. Notes Math. vol. 1080, pp. 362–402.) Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [92] SIEBERT, E. (1985). Jumps of stochastic processes with values in a topological group. *Probab. Mat. Stat.* **5**, 197–209.
- [93] SIEBERT, E. (1986). Contractive automorphisms on locally compact groups. *Math. Z.* **191**, 73–90.
- [94] SOBKO, G.M. (1972). The first diffusion problem on differential manifolds. *Theory Probab. Appl.* **17**, 521–528.
- [95] STROOCK, D.W. and VARADHAN, S.R.S. (1973). Limit theorems for random walks on Lie groups. *Sankhyā Ser. A* **35**, 277–294.
- [96] TAKANO, K. (1954). On some limit theorems of probability distributions. *Ann. Inst. Stat. Math.* Tokyo **6**
- [97] TAYLOR, M.E. (1986). *Noncommutative harmonic analysis*. (Mathematical Surveys and Monographs, no. 22) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [98] TUTUBALIN, V.N. (1964). Compositions of measures on the simplest nilpotent group. *Theory Probab. Appl.* **9**, 479–487.

- [99] VIRTSER, A.D. (1974). Limit theorems for compositions of distribution on certain nilpotent Lie groups. *Theory Probab. Appl.* **19**, 86–105.
- [100] WEHN, D. (1959). Limit distributions on Lie groups. Thesis, Yale.
- [101] WEHN, D. (1962). Probabilities on Lie groups. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **48**, 791–795.