

# KÍSÉRLETI ÉS NUMERIKUS FESZÜLTSEGANALÍZIS

**A PEREMELEM MÓDSZER INTEGRÁLEGYENLETEI**

**SZEIDL GYÖRGY**

Miskolci Egyetem

**Készült: a TEMPUS S\_JEP\_11271 projekt támogatásával**

Miskolc  
- 1999 -

Kiadja a Miskolci Egyetem

A kiadásért felelős: *Dr. Tóth László*

Műszaki szerkesztő: *Dr. Tóth László*

Példányszám: 40

Készült Colitó fóliáról az MSZ 5601-59 és 5602-55 szabványok szerint

Miskolci Egyetem Sokszorosító Üzeme

A sokszorosításért felelős: *Kovács Tiborné*

TB. - '99- - ME

A levonat sokszorosításba leadva: 1999. augusztus 10.

## ELŐSZÓ

Minden történelmi korszak fejlődésének megvan a maga hajtóereje. Míg a XIX. században a tudomány előrehaladását egyértelműen a vasúti közlekedés robbanásszerű elterjedése hatotta át (évente átlagosan 10.000 km hosszágban építettek új vasútvonalakat), addig jelen korunkban a mikroelektronika adta lehetőségek szőtték át a mindennapjainkat, így a műszaki életünket is, szolgáltatva annak fejlődéséhez szükséges hajtóerőt. E két periódus fejlődésének sajátosságai természetesen megmutatkoztak a társadalmi struktúra formálódásában is. Az elmúlt században kialakult a nagyüzemi munkásság, megvalósult a tőke koncentrációja és létrejött a reál - dominánsan a műszaki - tudomány művelőinek népes tábora. Ez utóbbiak kivívták maguknak a széles társadalmi elismertséget, hisz tevékenységük közvetlenül hozzájárult a társadalom látható fejlődéséhez. Napjaink sajátossága az *információs társadalom* kialakulása, amelyben a mikroelektronikai elemek fejlődése átszövi a mindennapi életünk, tevékenységünk lehetőségeit. A műszaki életben ez többek között a számítástechnika robbanásszerű elterjedését, a diagnosztikai vizsgálatok eszközparkjának átalakulását, az anyagok viselkedésének, tulajdonságainak mélyebb megismerését szolgáló anyagvizsgálati módszerek, eszközök létrejöttét eredményezték. A fejlődés ütemét jól tükrözi az, hogy mindez az utóbbi 20 évben következett be (pl. a számítógépek mikroprocesszorainak műveleti sebessége 1978-1998 periódusban 3 nagyságrendet változott!).

A nagy értékű műszaki létesítményeket, szerkezeteket (hidakat, erőműveket, gáz-olajfeldolgozó rendszereket, vegyipari üzemeket, tranzit energiaszállító vezetékeket, repülőgépeket, hajókat, stb.) 15-50 éves üzemeltetésre tervezik az adott periódusban érvényben levő szabványok, műszaki irányelvek figyelembevételével. Ezekben pedig az azt megelőző néhány év ismeretszintje, technológiai színvonala testesedik meg. A mikroelektronika által diktált fejlődési ütem lehetővé teszi azt, hogy a nagy értékű szerkezetek, létesítmények üzemeltethetőségi feltételeit, maradék élettartamát egyre nagyobb megbízhatósággal becsüljük, azaz integritását egyre kisebb kockázattal ítéljük meg.

Az előzőkből adódóan kialakult egy új, diszciplína, a „*szerkezetek integritása*”, vagy „*szerkezetintegritás*” fogalma és létrejött intézményrendszere szerte a világon. A döntően mérnöki ismereteket integráló tudományterület feladata annak eldöntése, hogy egy adott szerkezet, létesítmény milyen feltételek mellett üzemeltethető a továbbiakban, ill. mennyi a maradék élettartama és ez milyen módon menedzselhető. Ahhoz, hogy a szerkezet állapotát a lehető legnagyobb biztonsággal felmérhessük - ebből adódóan a további üzemeltethetőség feltételeit a legkisebb kockázattal megbecsüljük - elengedhetetlen az, hogy

- *diagnosztikai vizsgálatokkal felmérjük a szerkezet állapotát,*
- *tisztázzuk a valóságos üzemi körülményekre jellemző mechanikai állapotot,*
- *megítéljük a beépített anyagok károsodásának folyamatát és mértékét az adott üzemeltetési feltételek mellett.*

Nyilvánvaló egyrészt az, hogy az előzőekben említett három fő terület (méréstechnika - mechanika - anyag) egyforma jelentőséggel bír a szerkezet integritásának megítélésében és bármelyik terület elhanyagolása, súlyának csökkentése hibás döntéshez, esetleg katasztrófához vezethet. Nyilvánvaló másrészt az, hogy minden műszaki döntésben, így az üzemeltethetőség feltételeinek megítélésében is, bizonyos kockázat rejlik, hisz a tudomány adott szintjét hasznosítjuk és a rendelkezésre álló eszközpark maga is az adott kor színvonalát képviseli. Ebből

adódóan mérlegelni kell az esetleges hibás döntés műszaki, jogi, közgazdasági és környezetvédelmi következményeit. Ezek együttes figyelembevételével viszont már kialakíthatók az ésszerű kockázatvállalás feltételei.

A szerkezetintegritás tehát egy igen komplex terület. Akik ezt művelik azoknak képesnek kell lenniük arra, hogy az üzemeltesíthetőséggel kapcsolatos problémákat teljes körűen átlássák, kiemeljék a meghatározó paramétereket, kérdéscsoportokat és alkalmasak legyenek arra, hogy az érintett tudományterületek szakembereivel érdemben szakmailag konzultálni tudjanak.

A szerkezetek integritásának, reális állapotának, maradék élettartamának megítélése mind az üzemeltetők, mind pedig a biztosítótársaságok alapvető érdeke. Az üzemeltető szempontjából a tudatos tervezés, fejlesztés megkerülhetetlen sarokpontja az üzemben levő készülékek műszaki állapota, biztonsága; a szükséges biztosítás tekintetében pedig az ésszerű kockázatvállalás, biztosítási összeg alapeleme a reális állapot ismerete. Ezek jelentőségét mérlegelve támogatta az Európai Unió a TEMPUS program keretében a „*Teaching and Education in Structural Integrity in Hungary*” címmel összeállított pályázatot, amelynek fő célkitűzése ezen új diszciplína meghonosításán kívül egyrészt a szerkezetintegritás oktatási anyagainak kidolgozása, másrészt a **Szerkezetintegritás - Biztosítási Mérnök Szakmérnöki Szak** beindítása. A négy hazai intézmény - Miskolci Egyetem, Budapesti Műszaki Egyetem, Kossuth Lajos Tudományegyetem Műszaki Kara és a Széchenyi István Műszaki Főiskola szakembereinek bevonásával elérendő célok megvalósítását nagyban segítették a következő külföldi partnereink:

- Prof. T. Varga, Bécsi Műszaki Egyetem
- Prof. H. P. Rossmann, Bécsi Műszaki Egyetem
- Dr. J. Blauel, Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik
- Prof. S. Reale, Università Degli Studi di Firenze
- Prof. G. Pluvinau, University of Metz,
- Dr. S. Crutzen, Joint Research Centre, European Commission

Miskolc, 1999. augusztus 10.

**Tóth László**

egyetemi tanár  
a projekt koordinátora

A jelen füzet a peremelem módszer integrálegyenleteit tekinti át. A tárgyalásmódot illetően az volt a törekvés, hogy mérnökkarokon oktatott matematikai és mechanikai ismeretek birtokában megérthető legyen a füzet tartalma. Az első fejezet rudelméleti feladaton keresztül mutatja be az ugynevezett direkt és indirekt módszer jellegzetességeit. A második fejezet potenciáleméleti feladatokra fordítja figyelmét. Mivel a peremelem módszer alapvető jellegzetességei itt érthetők meg a legjobban a gondolatmenet kifejtése igen részletes. A harmadik fejezet a rugalmasságtan térbeli feladatai esetén mutatja be a direkt és indirekt módszer integrálegyenleteinek előállítását. Az anyaghoz több függelék is tartozik. Ezek részint matematikai ismereteket nyújtanak, részint pedig egyes gyakorlatok megoldásait ismertetik.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy az anyag nem teljes, hiszen nem öleli fel a síkrugalmasságtan feladatkörét, a dinamikai feladatokat és a numerikus implementációval kapcsolatos ismeretek is hiányoznak. Mégis hiánypótlónak tekintjük, mivel magyar nyelven nem áll rendelkezésre a témakörrel foglalkozó és a mérnökkarokon oktatott ismeretekre támaszkodó könyv. A szerző dolgozik az itt bemutatott anyag kibővítésén, és rövidesen elkészül egy a jelenleginél lényegesen több ismeretet kínáló kézirat.

Első olvasásra a bemutatott anyag elméleti ismeretek összegezése, hiszen nem tűnik ki a leírtakból, hogy a peremelem módszer mint a végelem módszerrel egyenragú numerikus technika számos területen, pl. repedések körül kialakuló feszültségállapot numerikus meghatározása stb. kínál numerikus megoldást a feszültségek meghatározására.

Mint minden új kezdeményezésnek, e füzetnek is nyilvánvalóan meglesznek a maga hiányosságai és a jövőben számos területen kiegészítésre szorulnak. Ezt nagyban segítené az, ha a Tisztelt Olvasók észrevételeiket, javaslataikat a szerzőknek vagy a projekt vezetőjének eljuttatnák. A TEMPUS program nyújtotta támogatás lehető legjobb kihasználása érdekében az elkészült tananyagokat INTERNET-en is közreadjuk (<http://www.bzlogi.hu/tempus.html>) annak érdekében, hogy a szerkezetintegritás diszciplínája hazánkban minél gyorsabban és minél szélesebb körben elfogadásra és elterjedésre találjon.

*Miskolc, 1998. augusztus 10.*

*Szeidl György<sup>1</sup>*

## TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ .....	i
TARTALOMJEGYZÉK .....	iv
1. FEJEZET	
A PEREMELEM-MÓDSZER ALAPJAINAK SZEMLÉLTETÉSE RÚDFELADATOKON .....	1
1.1. Az egydimenziós feladat választásának előnyei .....	1
1.2. Rugalmasan ágyazott rúd mechanikai egyenletei .....	1
1.3. Alapmegoldás rugalmasan ágyazott rúdra .....	5
1.4. Az indirekt módszer egyenletei .....	11
1.5. A direkt módszer egyenletei .....	13
1.6. Gyakorlatok .....	17
Hivatkozások az 1. Fejezethez .....	18
2. FEJEZET	
A LAPLACE ÉS POISSON EGYENLET .....	19
2.1. Előzmények .....	19
2.2. Térbeli feladatok .....	20
2.3. Az alapmegoldás .....	22
2.4. A GREEN féle azonosság és képletek belső tartományra .....	24
2.5. Egyenletek külső tartományon .....	37
2.6. A direkt módszer integrálegyenletei .....	33
2.7. Az indirekt módszer integrálegyenletei .....	35
2.8. Síkbeli feladatok, alapmegoldás .....	40
2.9. GREEN féle azonosság és képletek síkfeladatokra .....	43
2.10. Egyenletek külső síktartományon .....	48
2.11. A direkt módszer egyenletei síkfeladatokra .....	51
2.12. Az indirekt módszer egyenletei síkfeladatokra .....	53
2.13. Gyakorlatok .....	57
Hivatkozások a 2. Fejezethez .....	58
3. FEJEZET	
A RUGALMASSÁGTAN STATIKAI FELADATAI .....	61
3.1. Történeti háttér .....	61
3.2. Az elasztostatika egyenletei .....	62
3.3. Alapmegoldás a rugalmasságtan térbeli feladataira .....	65
3.4. A Somigliana féle azonosság és képletek belső tartományra .....	71
3.5. Somigliana féle képletek külső tartományra .....	79
3.6. A direkt módszer egyenletei a rugalmasságtan térbeli feladataira .....	83
3.7. Indirekt módszerek a rugalmasságtan térbeli feladataira .....	84
3.8. Gyakorlatok .....	91
Hivatkozások a 3. Fejezethez .....	92

## A. FÜGGELÉK

TENZORSZÁMÍTÁS KARTÉZIUSZI KOORDINÁTARENDSZERBEN ..... F1

A.1. Bevezetés ..... F1

A.2. Az összegezési konvenció ..... F2

A.3. A Kronecker féle függvény és a permutációs szimbólum ..... F2

A.4. A determináns ..... F4

A.5. Kartéziuszi koordinátarendszer ..... F6

A.6. Koordináta-transzformációk ..... F8

A.7. Skalár, vektor és tenzor ..... F10

A.8. Gyakorlatok ..... F13

## B. FÜGGELÉK

A DIRAC FÜGGVÉNY ..... F15

B.1. A szimbólikus Dirac függvény és egyes tulajdonságai ..... F15

## C. FÜGGELÉK

HOSSZABB MATEMATIKAI ÁTALAKÍTÁSOK ..... F17

C.1. Feszültségek számítása az elmozdulásmezőre vonatkozó alapmegoldásból ..... F17

C.3. Az  $u_l(Q) = {}_i T_{Kl}(M_o, Q)$  elmozdulásmezőhöz tartozó feszültségek számítása ..... F17

C.3. Az  $u_l(Q) = {}_i T_{Kl}(M_o, Q)$  elmozdulásmezőhöz tartozó feszültségek számítása ..... F18

## D. FÜGGELÉK

EGYES GYAKORLATOK MEGOLDÁSAI ..... F19

## A peremelem-módszer alapjainak szemléltetése rúdfeladatokon

### 1.1. Az egydimenziós feladat választásának előnyei

**1.1.1.** Jelen fejezet a peremelem-módszer vagy röviden PEM egydimenziós feladatokon történő alkalmazására fordítja figyelmét. Az egydimenziós feladatok választásának okai közül az alábbiak érdemelnek kiemelés:

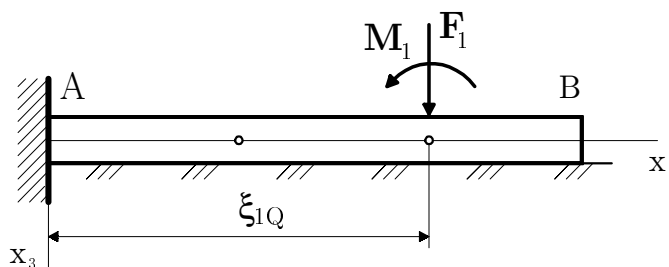
1. A PEM mérnöki alkalmazásokban játszott szerepének növekedésével egyidejűleg annak igénye is felmerül, hogy a módszer lényegét — különös tekintettel a mérnökjelölt hallgatóság, illetve a végzett mérnökök matematikai és mechanikai előismereteire — olyan feladatokon keresztül szemléltessük, melyek megoldása csak a szigorúan vett műszaki egyetemi alapismereteket tételezi fel.
2. Annak ellenére, hogy a PEM igazi ereje a két-, és háromdimenziós feladatokban mutatkozik meg a módszer egydimenziós feladatokon keresztül történő bemutatása előnyöket kínál
  - a nemlineáris feladatok megoldási módszerének tárgyalásakor
  - és
  - az inhomogén feladatok tárgyalása során

A PEM egydimenziós feladatokban történő alkalmazásának kérdésével R. BUTTERFIELD [1] továbbá P. K. BANERJEE és R. BUTTERFIELD [2] munkái foglalkoztak először. A jelen fejezet nagymértékben támaszkodik ezekre a munkákra.

### 1.2. Rugalmasan ágyazott rúd mechanikai egyenletei

**1.2.1.** A rugalmasan ágyazott egyenes rúd mechanikai feladata a fentiekben túlmenően a későbbiekben értelmezett direkt és indirekt PEM alapvető jellegzetességeinek áttekintésére is jó lehetőséget biztosít.

A vizsgált rudat az 1.1 ábra szemlélteti.



1.1 ábra

*Egyik végén befogott, rugalmasan ágyazott rúd.*

A számításokat az  $(x_1, x_2, x_3)$  kartéziuszi koordináta-rendszerben végezzük; a vonatkozó egységvektorokat  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  és  $\mathbf{i}_3$  jelöli.

A vizsgálni kívánt rúdfeladattal kapcsolatosan a szokásos feltevéseket alkalmazzuk:

- (a) A rúd állandó keresztmetszetű.
- (b) A rúd anyaga homogén, izotróp és lineárisan rugalmas.
- (c) A rúd hőmérséklete állandó; a hőhatások figyelmen kívül hagyhatók.

Néhány további feltevést az alábbiak részleteznek:

- (d) A rúd súlyponti tengelye egybeesik az  $x_1$  tengellyel.

- (e) Az  $x_1, x_3$  sík a rúd tehetetlenségi fősíkja.
- (f) A rúdra ható koncentrált erők (terhelések és támasztóerők) illetve megoszló terhelések az  $x_1, x_3$  síkban működnek.
- (g) A rúdra ható koncentrált erőpárok nyomatékvektora (terhelőnyomatékok, támasztőnyomatékok) illetve a megoszló erőpárrendszer nyomatéki sűrűségvektora merőleges az  $x_1, x_3$  síkra.

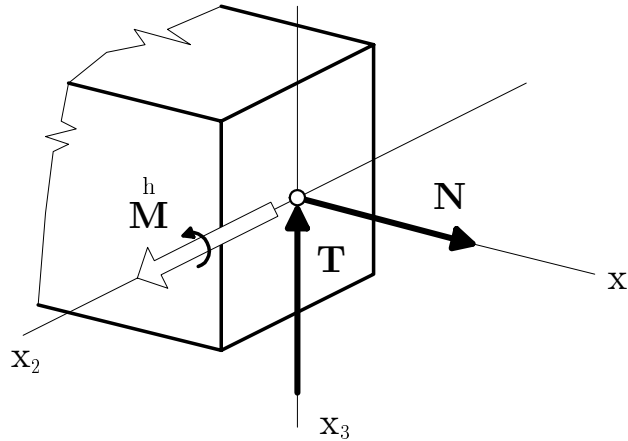
Ha a rudat, gondolatban, a középvonalára merőleges síkkal átvágjuk, akkor az  $\mathbf{i}_1$  normálisú keresztmetszetet pozitív keresztmetszetnek nevezzük. A rúd egy pozitív keresztmetszetén ébredő belső erőrendszer — tekintettel a terhelésre vonatkozó (f) és (g) alatti feltevésekre — a keresztmetszet súlypontjában az

$$\mathbf{F}_S = F_{S1}\mathbf{i}_1 + F_{S3}\mathbf{i}_3 = N(x_1)\mathbf{i}_1 - T(x_1)\mathbf{i}_3 \quad (1.2.1)$$

erővel és az

$$\mathbf{M}_S = M_{S2}\mathbf{i}_2 = \overset{h}{M}(x_1)\mathbf{i}_3 \quad (1.2.2)$$

Nyomatékkal helyettesíthető. Az (1.2.1) és (1.2.2) képletek jobboldalán álló  $N, T$  és  $\overset{h}{M}$  a pozitív rúderő, nyíróerő és hajlítónyomaték. Az 1.2 ábra a rúd pozitív  $A$  keresztmetszetén szemlélteti a belső erőket.



1.2 ábra

Belső erők a rúd pozitív  $A$  keresztmetszetén

**1.2.2.** Továbbiakban feltételezzük, hogy nincs a rúd hossz tengelyével párhuzamos terhelés. Ez esetben — tekintettel a terhelésekkel kapcsolatos feltevésekre is — a rúd középvonala mentén megoszló terhelő erő-, és erőpárrendszer sűrűségvektorai az

$$\mathbf{f} = f_3(x_1)\mathbf{i}_3 \quad \mathbf{m} = \mu_2(x_1)\mathbf{i}_2 \quad (1.2.3)$$

módon írhatók és amint az némi számolással könnyen ellenőrizhető az egyensúly

$$\frac{d}{dx_1}\mathbf{F}_S + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

$$\frac{d}{dx_1}\mathbf{M}_S + \mathbf{i}_1 \times \mathbf{F}_S + \mathbf{m} = \mathbf{0}$$

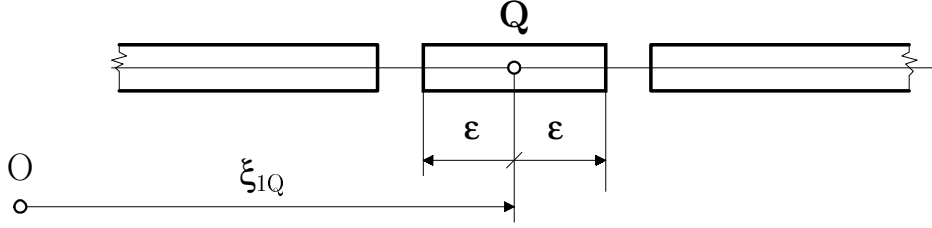
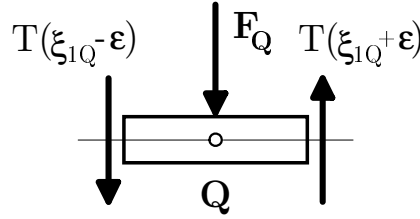
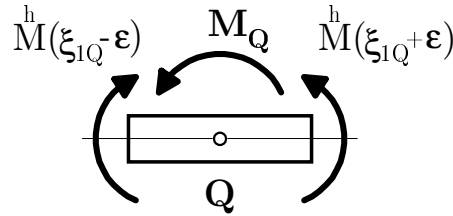
alakú általános feltételéből [3, 85 o.] a

$$\frac{d}{dx_1}T = f_3 \quad \text{és} \quad \frac{d}{dx_1}\overset{h}{M} = -T - \mu_2 \quad (1.2.4)$$

Legyen  $u_3 = w$  a függőleges elmozdulás. A rúd középvonalának  $\kappa$  görbülete lineáris közelítésben

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{d^2w}{dx_1^2} = -w^{(2)} \quad (1.2.5)$$

értékű, ahol  $\rho$  a görbületi sugar.

(a) Egyenes rúd  $Q$  pontjának  $\epsilon$ -nyi környezete(b) Koncentrált erő a  $Q$  pontban(c) Koncentrált nyomaték a  $Q$  pontban

1.3 ábra

Legyen  $I$  a rúd keresztmetszetének másodrendű nyomatéka a keresztmetszet súlypontján áthaladó  $x_2$ -vel párhuzamos tengelyre. Ismeretes az elemi szilárdságtanból, hogy a HOOKE törvényt az

$$\overset{h}{M} = IE\kappa \quad (1.2.6)$$

egyenlet fejezi ki, ahol  $E$  a rugalmassági modulus.

**1.2.3.** Négy ismeretlen függvény — a  $T$ ,  $\overset{h}{M}$ ,  $\kappa$  és  $w$  — szerepel az (1.2.4)<sub>1,2</sub>, (1.2.5) és (1.2.6), összesen tehát négy egyenletben. Következésképp a rúdfeladat határozott.

**1.2.4.** Az 1.3 ábra a rúd  $Q$  pontjának  $\epsilon$ -nyi környezetét, az 1.3 (b) és (c) ábra pedig azokat a terhelési eseteket szemlélteti, amikor a  $Q$  pontban

—  $F_Q$  nagyságú koncentrált erő

illetve

—  $M_Q$  nagyságú koncentrált nyomaték

működik.

Összhangban a (b) és (c) ábrákon vázolt viszonyokkal feltételezzük, hogy zérus a megoszló terhelés a  $Q$  pont környezetében.

Felidézve a nyíróerő ábra rajzolásának szabályait — ha a rúd egy pontjában a rúd tengelyére merőleges koncentrált erő hat, akkor a nyíróerőábrán erőirányú szakadás van, a szakadás nagysága pedig az erő abszolút értéke — az a következtetés adódik, hogy a

$$T(x_1) = \begin{cases} T(\xi_{1Q} - \epsilon) & x_1 \in (\xi_{1Q} - \epsilon, \xi_{1Q}) \\ T(\xi_{1Q} - \epsilon) + F_Q & x_1 \in (\xi_{1Q}, \xi_{1Q} + \epsilon] \end{cases} \quad (1.2.7)$$

módon számítható a nyíróerő a  $Q$  pont környezetében. Figyeljük meg, hogy összhangban a matematika jelölésbeli megállapodásaival egy intervallum nyitott vagy zárt végpontját a végpontot azonosító betű melletti kerek illetve szögletes zárójel azonosítja.

Az (1.2.7) egyenletből az  $\epsilon \rightarrow 0$  esetben természetesen visszkapjuk az alkalmazott szabály matematikai alakját:

$$T(\xi_{1Q} + 0) = T(\xi_{1Q} - 0) + F_Q \quad (1.2.8)$$

Ez az egyenlet az  $F_Q$  koncentrált erővel kapcsolatos illesztési feltétel.

Vegyük észre, hogy közvetlenül is megkapható az (1.2.8) illesztési feltétel az  $x_3$  irányú egyensúlyi egyenletből, ha az  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**1.2.5.** A (c) esetben koncentrált nyomaték a  $Q$  pont terhelése. Felidézve ismét az igénybevételi ábrák szerkesztési szabályait – ha a rúd egy pontjában a rúd síkjára azaz az  $x_1$ ,  $x_3$  síkra merőleges erőpár hat, akkor szakadás jelenik meg a nyomatéki ábrán, a szakadás nagysága az erőpár abszolút értéke, előjele pedig ellentétes az erőpár előjelével – és alkalmasan választott határok között integrálva az (1.2.4)<sub>2</sub> egyensúlyi egyenletet azt kapjuk, hogy

$$M(x_1) = \begin{cases} M(\xi_{1Q} - \epsilon) - \int_{\xi_{1Q} - \epsilon}^{x_1} T(\tau) d\tau & x_1 \in (\xi_{1Q} - \epsilon, \xi_{1Q}) \\ M(\xi_{1Q} - \epsilon) - M_Q - \int_{\xi_{1Q} - \epsilon}^{x_1} T(\tau) d\tau & x_1 \in (\xi_{1Q}, \xi_{1Q} + \epsilon] \end{cases} \quad (1.2.9)$$

a hajlítói igénybevétel a  $Q$  pont környezetében. Az  $\epsilon \rightarrow 0$  határátmenet ismét visszadja, ugyanolyan módon mint azt a nyíróerő esetén láttuk, az alkalmazott szabály matematikai alakját.

$$\overset{h}{M}(\xi_{1Q} + 0) = \overset{h}{M}(\xi_{1Q} - 0) - M_Q. \quad (1.2.10)$$

Az (1.2.10) egyenlet az  $M_Q$  koncentrált nyomatékkal kapcsolatos illesztési feltétel.

Vegyük ismét észre, hogy megkapható az (1.2.10) illesztési feltétel a  $Q$  pontra felírt nyomatéki egyenletből feltéve, hogy a kapott kifejezés határértékét vesszük, ha  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Változatlan marad az (1.2.8) és (1.2.10) illesztési feltételek alakja akkor is, ha zérustól különböző a megoszló terhelés intenzitása a  $Q$  pont környezetében. Ez az állítás könnyen ellenőrizhető, ha az egyensúlyi egyenletek felírása során figyelembe vesszük a megoszló terhelés meglétét is.

**1.2.6.** Az (1.2.4)<sub>2</sub> egyenlet  $x_1$  szerinti deriválása majd (1.2.4)<sub>1</sub>, (1.2.6) és (1.2.5) helyettesítése után a függőleges  $w$  elmozdulásra az

$$IEw^{(4)} = f_3 + \frac{d\mu_2}{dx_1} \quad (1.2.11)$$

közönséges differenciálegyenletet kapjuk. Az 1.1 ábrán látható rugalmas ágyazású rúd esetén az  $f_3$  terhelésintenzitást az

$$f_3 = f - kw \quad (1.2.12)$$

alakban célszerű felírni, ahol  $k$  az ún. ágyazási tényező, míg  $f$  a tényleges terhelésintenzitás. Az (1.2.12) összefüggés helyettesítésével (1.2.11)-ből a

$$w^{(4)} + 4\beta^4 w = \frac{1}{IE} \left( f + \frac{d\mu_2}{dx_1} \right) \quad (1.2.13)$$

közönséges differenciálegyenlet adódik, ha bevezetjük a

$$4\beta^4 = k/IE \quad (1.2.14)$$

jelölést.

**1.2.7.** Az (1.2.13) differenciálegyenlet általános megoldása

$$w(x_1) = A_1 w_1(x_1) + A_2 w_2(x_1) + A_3 w_3(x_1) + A_4 w_4(x_1) + w_p(x_1) \quad (1.2.15)$$

alakú, ahol

$$\begin{aligned} w_1(x_1) &= e^{-\beta x_1} \cos(\beta x_1) & w_2(x_1) &= e^{-\beta x_1} \sin(\beta x_1) \\ w_3(x_1) &= e^{\beta x_1} \cos(\beta x_1) & w_4(x_1) &= e^{\beta x_1} \sin(\beta x_1) \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

a homogén egyenlet partikuláris megoldásai ahol

- $A_1, \dots, A_4$  az integrációs konstansokat míg
- $w_p$  az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását jelöli.

A  $w$  megoldás ismeretében az (1.2.6), (1.2.5), (1.2.4)<sub>2</sub> és (1.2.14) képletek felhasználásával

$$\varphi = -w^{(1)} \quad (1.2.17a)$$

a merevtestszerű forgás

$$M = -IE w^{(2)} = -\frac{k}{4\beta^4} w^{(2)} \quad (1.2.17b)$$

a hajlítónyomaték és

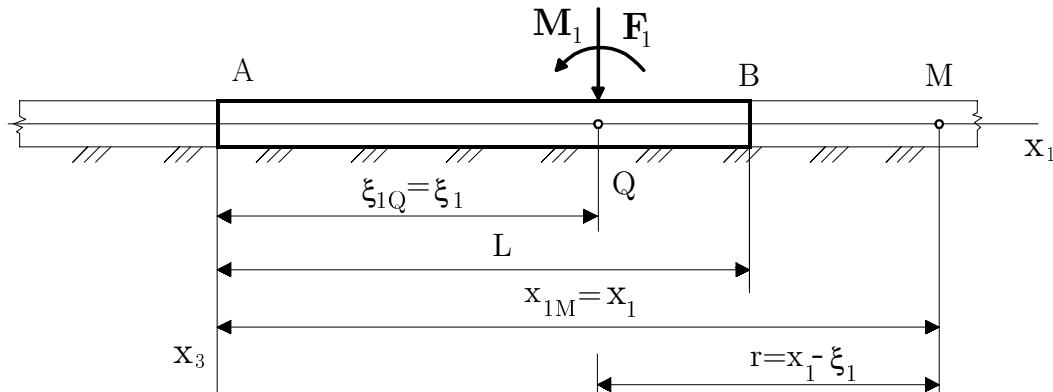
$$T = IE w^{(3)} - \mu_2 = \frac{k}{4\beta^4} w^{(3)} - \mu_2 \quad (1.2.17c)$$

a nyíróerő értéke. Ha zérus értékű az  $x_1$  tengely mentén megoszló erőpárrendszer  $\mu_2$  intenzitása, akkor az utóbbi képlet egyszerűsödik:

$$T = IE w^{(3)} = \frac{k}{4\beta^4} w^{(3)}. \quad (1.2.18)$$

### 1.3. Alapmegoldás rugalmasan ágyazott rúdra

**1.3.1.** Amennyiben ismeretes az 1.1 ábrán vázolt feladathoz tartozó hatásfüggvény – ez megadja a rúd egy tetszőleges  $M$  pontjának függőleges elmozdulását, ha a rúd tetszőleges  $Q$  pontjában egységnyi függőleges terhelés vagy egységnyi koncentrált nyomaték hat – akkor a meg-



1.4 ábra

Végtelenbe nyúló, rugalmasan ágyazott rúd

oldás a szuperpozíció elv segítségével, vagyis az egyes terhelésekhez tartozó hatások lineáris összegezésével előállítható. Valójában a hatásfüggvény a feladat peremfeltételeinek is függvénye, következésképp

- megtámasztásonként más és más, továbbá
- a meghatározásához szükséges számítások volumene, munkaigénye többnyire egyenértékű magának az eredeti feladatnak a megoldásával.

**1.3.2.** Továbbiak egyelőre a mindkét irányban végtelenbe nyúló rugalmasan ágyazott rúdra fordítják a figyelmet. Az

$$U^f(M, Q) \quad \text{illetve az} \quad U^m(M, Q)$$

függvény a rúd egy tetszőleges  $M$  pontjának függőleges elmozdulása, ha a rúd egy tetszőleges  $Q$  pontjában egységnyi értékű

függőleges erő                      illetve                      koncentrált nyomaték

működik. Az

$$U^f(M, Q) \quad \text{és} \quad U^m(M, Q)$$

függvényeket alapmegoldásnak szokás nevezni.

**1.3.3.** Az alapmegoldások rendkívül fontos szerepet játszanak a további gondolatmenet során és ezért a meghatározásukkal érdemes egy kissé részletesebben is foglalkozni [4].

Az alapmegoldás fentiekben ismertetett értelmezéséből következik, hogy

- (a) az alapmegoldások mint az  $M$  pont függvényei kielégítik a

$$w^{(4)} + 4\beta^4 w = 0 \quad (1.3.1)$$

homogén differenciálegyenletet, feltéve hogy  $M \neq Q$ ;

- (b) a rugalmas ágyazás hatása miatt a végtelenbeli elmozdulás minden véges terhelésre zérus, és így az alapmegoldások teljesítik a

$$\lim_{|M| \rightarrow \infty} \overset{f}{U}(M, Q) = 0 \quad \lim_{|M| \rightarrow \infty} \overset{m}{U}(M, Q) = 0 \quad (1.3.2)$$

feltételeket.

Legyen az 1.4 ábra alapján

$$r = x_1 - \xi_{1Q} \quad (1.3.3a)$$

és

$$R = |r|. \quad (1.3.3b)$$

Az

$$M \in (-\infty, Q) \rightarrow Q, \quad R \rightarrow 0 \quad r \leq 0, \quad M = Q - 0 \quad (1.3.3c)$$

illetve az

$$M \in (Q, +\infty) \rightarrow Q, \quad R \rightarrow 0 \quad r \geq 0, \quad M = Q + 0 \quad (1.3.3d)$$

írásmódok ekvivalensek.

A

$$\frac{d^n}{dx_1^n}(\dots) = \frac{d^n}{dr^n}(\dots) = (\text{Sgn } r)^n \frac{d^n}{dR^n}(\dots) = (\dots)^{(n)} \quad (1.3.3e)$$

deriváltak argumentumának feltüntetése esetén, megállapodás szerint, a lokalizálás mindig a deriválást követi, bár ez a felírásból nem következik. Így például

$$\frac{dU(Q-0, Q)}{dr} = \lim_{M \in (-\infty, Q) \rightarrow Q} \frac{dU(M, Q)}{dr}.$$

Az (a) és (b) alatti tulajdonságokból, tekintettel (1.2.15)-re is, következik, hogy az alapmegoldás mindkét terhelésre megadható a

$$\begin{aligned} U(M, Q) &= A_1 e^{-\beta r} \cos \beta r + A_2 e^{-\beta r} \sin \beta r \quad r > 0 \\ U(M, Q) &= \hat{A}_1 e^{\beta r} \cos \beta r + \hat{A}_2 e^{\beta r} \sin \beta r \quad r < 0 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

alakban, ahol az egységes írásmód kedvéért elhagytuk az  $U$  felett álló (f) és (m)-t. A képletekben szereplő  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\hat{A}_1$  és  $\hat{A}_2$  integrációs állandók az  $M = Q$  helyen előírt illesztési feltételekből határozhatók meg.

**1.3.4.** Koncentált erő esetén az alapmegoldásnak a következő illesztési feltételeket kell teljesítenie a  $Q$  pontban:

A függőleges elmozdulás folytonos a  $Q$  pontban, azaz

$$\overset{f}{U}(Q-0, Q) = \overset{f}{U}(Q+0, Q). \quad (1.3.5a)$$

A szögelfordulás értéke zérus a  $Q$  pontban. Ez a feltétel abból következik, hogy a rúd deformált alakja szimmetrikus az erő hatásvonalára. Matematikailag

$$\frac{d}{dr} \overset{f}{U}(Q-0, Q) = \frac{d}{dr} \overset{f}{U}(Q+0, Q) = 0. \quad (1.3.5b)$$

Vegyük észre, hogy (1.3.5b) két skaláregyenlettel ekvivalens.

Mivel a  $Q$  pont terhelése egységnyi abszolút értékű függőleges erő a hajlítógénybevételnek mint  $M$  függvényének ugyanitt folytonosnak kell lennie. A folytonossági feltételt adó

$$\overset{h}{M}(Q-0) = \overset{h}{M}(Q+0)$$

egyenletből (1.2.17b) kihasználásával a későbbi számítások szemszögéből kedvezőbb

$$\frac{d^2}{dr^2} \overset{f}{U}(Q-0, Q) = \frac{d^2}{dr^2} \overset{f}{U}(Q+0, Q) \quad (1.3.5c)$$

alak adódik.

A  $Q$  pontban támadó egységnyi erő a nyíróerő ábrán szakadást okoz. A vonatkozó illesztési feltétel (1.2.8)-ból az  $F_Q = 1$  helyettesítéssel kapható meg:

$$T(Q+0) = T(Q-0) + 1.$$

Az egyenlet egy a konstansok számításához kedvezőbb alakja adódik a nyíróerő (1.2.18) képletből történő helyettesítésével:

$$\frac{k}{4\beta^4} \frac{d^3}{dr^3} \overset{f}{U}(Q+0, Q) = \frac{k}{4\beta^4} \frac{d^3}{dr^3} \overset{f}{U}(Q-0, Q) + 1. \quad (1.3.5d)$$

Vegyük észre, hogy az (1.3.5a,...,d) feltételek látszólag öt skaláris egyenletet adnak a négy integrációs állandó számítására. Később ki fog derülni, hogy a fenti feltételi egyenletek valójában nem függetlenek egymástól.

**1.3.5.** A merevtestszerű forgás  $Q$  pontbani eltűnését kifejező (1.3.5b) egyenletből, tekintettel az (1.3.4)-ből következő és a deriváltakat adó

$$\frac{dU}{dr} = -A_1 \beta e^{-\beta r} (\cos \beta r + \sin \beta r) + A_2 \beta e^{-\beta r} (-\sin \beta r + \cos \beta r) \quad r \geq 0 \quad (1.3.6)$$

$$\frac{dU}{dr} = \hat{A}_1 \beta e^{\beta r} (\cos \beta r - \sin \beta r) + \hat{A}_2 \beta e^{\beta r} (\sin \beta r + \cos \beta r) \quad r \leq 0$$

képletekre, az

$$A_1 = A_2 = A \quad (1.3.7a)$$

és

$$\hat{A}_1 = -\hat{A}_2 = \hat{A} \quad (1.3.7b)$$

eredmény következik.

Ha most még az (1.3.5a) folytonossági feltételt is kihasználjuk akkor

$$A = \hat{A}. \quad (1.3.7c)$$

Az (1.3.7a,b,c) alatti konstansok (1.3.4)-be történő visszahelyettesítése után

$$\begin{aligned} \overset{f}{U}(M, Q) &= A e^{-\beta r} (\cos \beta r + \sin \beta r) & r \geq 0 \\ \overset{f}{U}(M, Q) &= A e^{\beta r} (\cos \beta r - \sin \beta r) & r \leq 0 \end{aligned}$$

az alapmegoldás, ami egyesített formában is felírható:

$$\overset{f}{U}(M, Q) = \hat{w}_F(x_1, \xi_1) = A e^{-\beta R} (\cos \beta R + \sin \beta R). \quad (1.3.8)$$

A  $\hat{w}_F$  függvényt az (1.3.8) egyenlet maga értelmezi és  $\xi_1 = \xi_{1Q}$ .

A  $\xi_1$  indexében álló  $Q$  elhagyása azt kívánja érzékeltetni az írásban is, hogy a

$$\overset{f}{U}(M, Q) = \hat{w}_F(x_1, \xi_1)$$

függvények valójában kétpontfüggvények.

Érdemes azt is észrevenni, hogy a függvény szimmetrikus az  $M$ ,  $Q$  vagy ami ugyanaz az  $x_1$ ,  $\xi_1$  változóiban:

$$\overset{f}{U}(M, Q) = \overset{f}{U}(Q, M) = \hat{w}_F(x_1, \xi_1) = \hat{w}_F(\xi_1, x_1)$$

A  $\hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1)$  merevtestszerű forgás az (1.2.17a), (1.3.3e) és (1.3.8) egybevetése alapján

$$\hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) = -\frac{d\hat{w}_F}{dx_1} = 2\beta A \operatorname{Sgn} r e^{-\beta R} \sin \beta R \quad (1.3.9)$$

értékű.

Az

$$\overset{h}{M} = \hat{m}_F(x_1, \xi_1)$$

hajlítónyomaték értéke ugyanilyen módon, az (1.2.17b), (1.3.3e) és (1.3.9) felhasználásával adódik:

$$\begin{aligned} \hat{m}_F(x_1, \xi_1) &= -\frac{k}{4\beta^4} \frac{d^2 \hat{w}_F}{dx_1^2} = -\frac{k}{4\beta^4} \frac{d^2 \overset{f}{U}(M, Q)}{dx_1^2} \\ &= \frac{k}{2\beta^2} A e^{-\beta R} (\cos \beta R - \sin \beta R) \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\hat{m}_F(\xi_1 - 0, \xi_1) = \hat{m}_F(\xi_1 + 0, \xi_1) = \hat{m}_F(\xi_1, \xi_1)$$

Utóbbi egyenlet azt fejezi ki, hogy a hajlítógénybevitel folytonos a  $Q$  pontban. Másként fogalmazva ez azt jelenti, hogy a (1.3.5c) folytonossági feltétel automatikusan teljesül, következésképp nem független. Erre a körülményre az 1.3.5. pont utolsó bekezdésében már történt utalás.

Az  $A$  integrációs állandó meghatározására a nyíróerő  $Q$  pontbeli szakadását kifejező (1.3.5d) egyenlet nyújt módot. A

$$\frac{d^3 \overset{f}{U}(M, Q)}{dr^3} = \frac{d^3 \hat{w}_F(x_1, \xi_1)}{dx_1^3} = 4A\beta^3 \operatorname{Sgn} r e^{-\beta R} \cos \beta R \quad (1.3.11)$$

derivált helyettesítésével (1.3.5d)-ből az

$$A \frac{k}{\beta} = -A \frac{k}{\beta} + 1$$

egyenlet, A-ra nézve pedig az

$$A = \frac{\beta}{2k} \quad (1.3.12)$$

eredmény adódik. A  $T = \hat{t}_F(x_1, \xi_1)$  nyíróerő értéke az (1.3.11), és (1.2.18) képletek alapján írható fel:

$$\hat{t}_F(x_1, \xi_1) = \frac{k}{4\beta^4} \frac{d^3 \hat{w}_F}{dx_1^3} = A \frac{k}{\beta} \operatorname{Sgn} r e^{-\beta R} \cos \beta R. \quad (1.3.13)$$

Az  $A$  állandó (1.3.12) alatti értékének (1.3.8), (1.3.9), (1.3.10) és (1.3.13)-ba történő helyettesítésével kaphatjuk meg az

$$\overset{f}{U}(M, Q) = \hat{w}_F(x_1, \xi_1) = \frac{\beta}{2k} e^{-\beta R} (\cos \beta R + \sin \beta R) \quad (1.3.14a)$$

alapmegoldást, a

$$\hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) = -\frac{d\hat{w}_F}{dx_1} = \frac{\beta^2}{k} \operatorname{Sgn} r e^{-\beta R} \sin \beta R \quad (1.3.14b)$$

merevtestszerű forgást, az

$$\hat{m}_F(x_1, \xi_1) = -\frac{k}{4\beta^4} \frac{d^2 \hat{w}_F}{dx_1^2} = \frac{1}{4\beta} e^{-\beta R} (\cos \beta R - \sin \beta R) \quad (1.3.14c)$$

hajlítónyomatékot és a

$$\hat{t}_F(x_1, \xi_1) = \frac{k}{4\beta^4} \frac{d^3 \hat{w}_F}{dx_1^3} = \frac{1}{2} \text{Sgn } r e^{-\beta R} \cos \beta R \quad (1.3.14d)$$

nyíróerőt.

**1.3.6.** Megmutatjuk továbbiakban, hogy a  $\hat{w}_F(x_1, \xi_1)$  alapmegoldás a formálisan felírható

$$EI \frac{d^4 \hat{w}_F}{dx_1^4} + k \hat{w}_F = \delta(x_1 - \xi_1) \quad (1.3.15)$$

differentiálegyenlet megoldása, ahol  $\delta(x_1 - \xi_1)$  a *Dirac* féle függvény. Mivel az alapmegoldás a homogén egyenlet megoldása  $x_1 \neq \xi_1$ -re ezért az  $x_1 = \xi_1$  pontbeli viselkedést kell vizsgálni. Tegyük fel, hogy  $\xi_1$  belső pont véges távolságra van az  $[x_1(A), x_1(B)]$ ;  $x_1(B) > x_1(A)$  intervallum végpontjaitól. Integráljuk a fenti egyenletet az  $x_1(A)$  és  $x_1(B)$  határok között figyelembe véve, hogy

$$\int_{x_1(A)}^{x_1(B)} \dots dx_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{x_1(A)}^{\xi_1 - \epsilon} \dots dx_1 + \int_{\xi_1 - \epsilon}^{\xi_1 + \epsilon} \dots dx_1 + \int_{\xi_1 + \epsilon}^{x_1(B)} \dots dx_1 \right].$$

A jobboldalon álló első és utolsó integrál zérus értékű minden zérustól különböző  $\epsilon$ -ra függetlenül attól, hogy az (1.3.15) egyenlet jobboldala vagy baloldala az integrandusz. Következésképp zérus a vonatkozó határérték is. A középső integrált tekintve vegyük figyelembe, hogy

$$\hat{t}_F(x_1, \xi_1) = IE \frac{d^3 \hat{w}_F}{dx_1^3}$$

továbbá, hogy  $\hat{w}_F$  folytonos az  $x_1 = \xi_1$  helyen. Elvégezve az integrálást – kihasználva eközben a DIRAC függvény integráljával kapcsolatos (B.1) képletet – és képezve a vonatkozó határértéket a

$$\hat{t}_F(Q + 0, Q) - \hat{t}_F(Q - 0, Q) = 1$$

reláció adódik, amit azonban teljesít  $\hat{t}_F$  hiszen az utóbbi feltétel megegyezik formálisan (1.3.5d) feltétel kiindulási alakjával.

**1.3.7.** A koncentrált nyomatékkal terhelt rúd esetén a következő illesztési feltételeket kell teljesítenie az alapmegoldásnak:

- (1) A terhelés jellege miatt a függőleges elmozdulás egyrészt zérus, másrészt pedig folytonos az  $M = Q$  pontban:

$$\overset{m}{U}(Q - 0, Q) = \overset{m}{U}(Q + 0, Q) = 0. \quad (1.3.16a)$$

Vegyük észre, hogy a fenti feltételből – ugyanúgy, mint az (1.3.5b) illesztési feltételnél láttuk – két skaláris egyenlet következik.

- (2) A szögelfordulás értéke folytonos a  $Q$  pontban azaz:

$$\frac{d}{dr} \overset{m}{U}(Q - 0, Q) = \frac{d}{dr} \overset{m}{U}(Q + 0, Q). \quad (1.3.16b)$$

- (3) A  $Q$  pontban működő egységnyi nyomaték szakadást idéz elő a nyomatéki ábrán. A vonatkozó illesztési feltétel az  $M_Q = 1$  helyettesítéssel kapható meg az (1.2.10) egyenletből:

$$\overset{h}{M}(Q + 0) = \overset{h}{M}(Q - 0) - 1. \quad (1.3.16c)$$

Az (1.2.17b) egyenlet felhasználásával adódik innen az illesztési feltétel  $\overset{m}{U}$ -t tartalmazó

$$\frac{k}{4\beta^4} \frac{d^2}{dr^2} \overset{m}{U}(Q + 0, Q) = \frac{k}{4\beta^4} \frac{d^2}{dr^2} \overset{m}{U}(Q - 0, Q) + 1$$

alakja.

(4) A nyíróerőnek folytonosnak kell lennie a  $Q$  pontban, hiszen a  $Q$  pont erőmentes:

$$T(Q+0) = T(Q-0).$$

Az (1.2.18) képlet felhasználásával innen a

$$\frac{k}{4\beta^4} \frac{d^3}{dr^3} \overset{m}{U}(Q-0, Q) = \frac{k}{4\beta^4} \frac{d^3}{dr^3} \overset{m}{U}(Q+0, Q) \quad (1.3.16d)$$

feltétel következik.

Vegyük ismét észre, hogy az (1.3.16a,...,d) feltételek látszólag öt skaláris egyenletet adnak a négy integrációs állandó meghatározására. A későbbiekből azonban ki fog derülni, hogy az utolsó feltétel valójában nem független és így az egyenletek és ismeretlenek száma azonos.

**1.3.8.** Az (1.3.4) alatti megoldás és az (1.3.16a) illesztési feltétel egybevetéséből azonnal adódik, hogy

$$A_1 = \hat{A}_1 = 0.$$

Az utóbbi két érték (1.3.6)-ba történő helyettesítésével majd az eredmény felhasználásával az (1.3.16b) illesztési feltételből

$$A_2 = \hat{A}_2 = A,$$

következik, ahol az  $A$  a közös értéket jelöli. Ezzel

$$\begin{aligned} \overset{m}{U}(M, Q) &= A e^{-\beta r} \sin \beta r & r \geq 0 \\ \overset{m}{U}(M, Q) &= A e^{\beta r} \sin \beta r & r \leq 0 \end{aligned}$$

az alapmegoldás, ami az

$$\overset{m}{U}(M, Q) = \hat{w}_M(x_1, \xi_1) = A \operatorname{Sgn} r e^{-\beta R} \sin \beta R \quad (1.3.17)$$

egyesített alakban is megadható. Figyeljük meg, hogy ez a függvény aszimmetrikus az  $M, Q$  vagy ami ugyanaz az  $x_1, \xi_1$  változóknak:

$$\overset{m}{U}(M, Q) = -\overset{m}{U}(Q, M) = \hat{w}_M(x_1, \xi_1) = -\hat{w}_M(\xi_1, x_1).$$

A  $\hat{\varphi}_M(x_1, \xi_1)$  merevtestszerű forgás és az  $\hat{m}_M(x_1, \xi_1)$  hajlítógénybevétel rendre az

$$(1.2.17a), (1.3.3e), (1.3.17) \quad \text{valamint az} \quad (1.2.17b), (1.3.3e), (1.3.17)$$

egybevetése alapján számítható:

$$\hat{\varphi}_M(x_1, \xi_1) = -\beta A e^{-\beta R} (\cos \beta R - \sin \beta R), \quad (1.3.18)$$

$$\hat{m}_M(x_1, \xi_1) = \frac{k}{2\beta^2} A \operatorname{Sgn} r e^{-\beta R} \cos \beta R. \quad (1.3.19)$$

A  $\hat{t}_M(x_1, \xi_1)$  nyíróerőt az (1.2.17b), (1.2.18) és (1.3.3e) felhasználásával adódó

$$T = -\frac{d\overset{h}{M}}{dR} \operatorname{Sgn} r$$

képletből kapjuk meg, ha  $\overset{h}{M}$  helyére  $\hat{m}_M(x_1, \xi_1)$ -t  $T$  helyére  $\hat{t}_M(x_1, \xi_1)$ -t írunk és az (1.3.19)-re is tekintettel vagyunk:

$$\hat{t}_M(x_1, \xi_1) = \frac{k}{2\beta} A e^{-\beta R} (\cos \beta R + \sin \beta R). \quad (1.3.20)$$

Az  $\hat{m}_M(x_1, \xi_1)$  hajlítónyomatékot helyettesítve  $\overset{h}{M}$  helyére az (1.3.16c)-ban és kihasználva az (1.3.3c) és (1.3.3d) képleteket

$$A = -\frac{\beta^2}{k}$$

az  $A$  integrációs állandó értéke. Az integrációs állandó (1.3.17), (1.3.18), (1.3.19) és (1.3.20)-ba történő helyettesítésével illetve az (1.3.14a,...,d) kihasználásával adódik egyrészt a koncentrált nyomatókkal kapcsolatos alapmegoldás, másrészt pedig a két alapmegoldás közötti összefüggés:

$${}^m U(M, Q) = \hat{w}_M(x_1, \xi_1) = -\frac{\beta^2}{k} \text{Sgn } r e^{-\beta R} \sin \beta R = -\hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) \quad (1.3.21a)$$

$$\hat{\varphi}_M(x_1, \xi_1) = \frac{\beta^3}{k} e^{-\beta R} (\cos \beta R - \sin \beta R) = \frac{4\beta^4}{k} \hat{m}_F(x_1, \xi_1) \quad (1.3.21b)$$

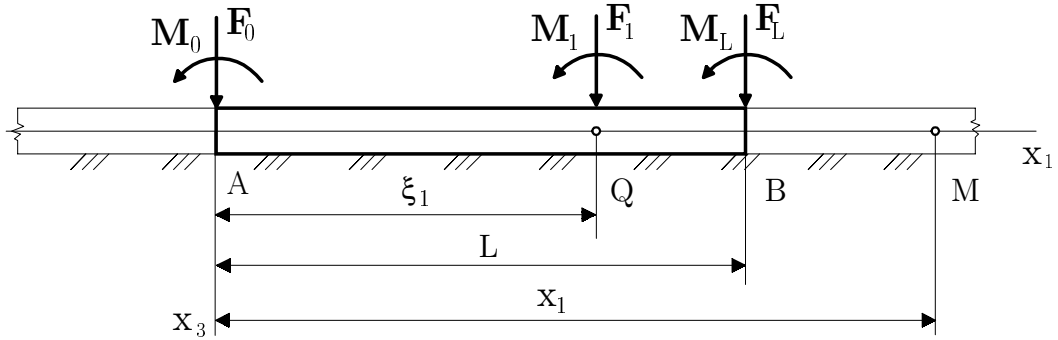
$$\hat{m}_M(x_1, \xi_1) = -\frac{1}{2} \text{Sgn } r e^{-\beta R} \cos \beta R = -\hat{t}_F(x_1, \xi_1) \quad (1.3.21c)$$

$$\hat{t}_M(x_1, \xi_1) = -\frac{\beta}{2} e^{-\beta R} (\cos \beta R + \sin \beta R) = -k \hat{w}_M(x_1, \xi_1) \quad (1.3.21d)$$

Vegyük észre, hogy  $\hat{t}_M(x_1, \xi_1)$  függvény folytonos a rögzítettnek tekintett  $Q$  ponton történő áthaladás során. Ez azt jelenti, hogy az (1.3.16d) illesztési feltétel automatikusan teljesül és így nem lehet független.

#### 1.4. Az indirekt módszer egyenletei

**1.4.1.** Tételezzük fel, hogy az 1.4 ábrán vázolt végtelenbe nyúló rudat a  $Q$  pontban támadó  $F_1$  erő illetve az  $M_1$  erőpár, az  $A$  pontban támadó  $F_0$  erő illetve az  $M_0$  erőpár, továbbá a  $B$  pontban támadó  $F_L$  erő és  $M_L$  erőpár terheli. Ezt a terhelési esetet az 1.5 ábra szemlélteti.



1.5 ábra

*Koncentrált erőkkel terhelt, végtelenbe nyúló, rugalmasan ágyazott rúd*

A terhelés hatására kialakuló elmozdulás, merevtestszerű forgás, hajlítói igénybevétel és nyíróerő – azaz a rúd mechanikai állapota – az (1.3.14a,...,d) és (1.3.21a,...,d) alapmegoldások birtokában a szuperpozíció elv segítségével határozható meg. A vonatkozó egyenletek felírása során célszerű fejben tartani, hogy az alapmegoldásokban álló  $Q$ -nak rendre az a pont felel meg ahol a terhelést alkalmazzuk, míg a hatás – elmozdulás, merevtestszerű forgás, hajlítónyomatók és nyíróerő – az  $M$  pontban jelenik meg. Mondottak alapján az  $x_1$  koordinátájú pont mechanikai állapotát megadó  $w(x_1)$ ,  $\varphi(x_1)$ ,  $\hat{M}(x_1)$  és  $T(x_1)$  függvények a

$$\begin{bmatrix} w(x_1) \\ \varphi(x_1) \\ \hat{M}(x_1) \\ T(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, 0) & \hat{w}_F(x_1, L) & \hat{w}_M(x_1, 0) & \hat{w}_M(x_1, L) \\ \hat{\varphi}_F(x_1, 0) & \hat{\varphi}_F(x_1, L) & \hat{\varphi}_M(x_1, 0) & \hat{\varphi}_M(x_1, L) \\ \hat{m}_F(x_1, 0) & \hat{m}_F(x_1, L) & \hat{m}_M(x_1, 0) & \hat{m}_M(x_1, L) \\ \hat{t}_F(x_1, 0) & \hat{t}_F(x_1, L) & \hat{t}_M(x_1, 0) & \hat{t}_M(x_1, L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_L \\ M_0 \\ M_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, \xi_1) & \hat{w}_M(x_1, \xi_1) \\ \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) & \hat{\varphi}_M(x_1, \xi_1) \\ \hat{m}_F(x_1, \xi_1) & \hat{\varphi}_M(x_1, \xi_1) \\ \hat{t}_F(x_1, \xi_1) & \hat{\varphi}_M(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (1.4.22)$$

mátrixegyenletből számíthatók. Amennyiben a végtelenbe nyúló rúd terhelése a felsorolt pontszerű terhelések mellett megoszló terhelést is magába foglal, akkor az (1.4.1) egyenlet jobboldalát

ki kell egészíteni. Az

$$f_3(x_1) = f(x_1) \quad x_1 \in [0, L]$$

alakú megoszló terhelés esetén például  $-f(x_1)$  ismert terhelés – a kiegészítő tag a

$$\int_{\xi=0}^L \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, \xi_1) & \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) & \hat{m}_F(x_1, \xi_1) & \hat{t}_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix}^T [f(\xi)] d\xi$$

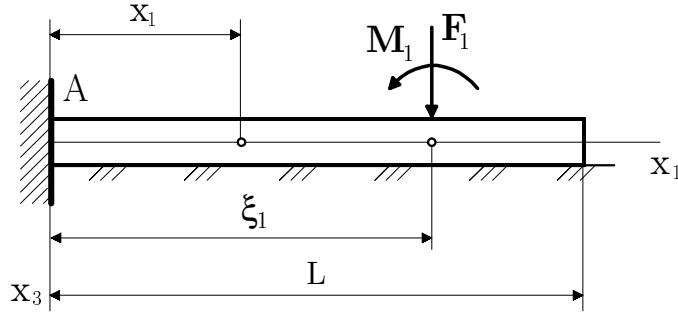
módon írható fel. A továbbiak az 1.5 ábrán vázolt terhelési esetet veszik alapul.

**1.4.2.** Ha az  $F_1$ ,  $M_1$  terhelés rögzítettnek tekintett akkor az (1.4.22) egyenlettel leírt mechanikai állapot az  $F_0$ ,  $M_0$ ,  $F_L$  és  $M_L$  terhelések, azaz összesen négy paraméter függvénye. Ezeket a paramétereket általában meg lehet úgy választani, hogy a megoldás, azaz a függőleges elmozdulás, merevtestszerű forgás, hajlítói igénybevétel és nyíróerő négy előírt feltételnek tegyen eleget.

**1.4.3.** A jelen szakaszban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett lehet az (1.4.22) képlet által adott megoldás, vagyis egy a végtelenbe nyúló rugalmasan ágyazott rúdra vonatkozó megoldás, egyben egy véges hosszúságú rugalmasan ágyazott rúddal kapcsolatos mechanikai feladat megoldása. Pontosabban fogalmazva mikor viselkedik az 1.5 ábrán vázolt végtelenbe nyúló rugalmasan ágyazott rúd  $L$  hosszúságú  $AB$  szakasza pontosan ugyanúgy mint egy a végein valamilyen módon megtámasztott véges hosszúságú – ez legyen ismét  $L$  – rugalmasan ágyazott rúd, melynek végpontjait a későbbi szóhasználat egyszerűsége kedvéért jelölje rendre  $A$  és  $B$ .

Nyilvánvalónak látszik, hogy a végtelen hosszúságú rúd  $AB$  szakaszának ugyanaz kell legyen a terhelése mint a véges hosszúságú rúdé, emellett az  $A$  és  $B$  pontokban a megoldás eleget kell, hogy tegyen a véges hosszúságú rúd  $A$  és  $B$  pontjaiban, azaz a végpontokban előírt peremfeltételeknek.

Ismeretes, hogy a véges hosszúságú rúd végpontjaiban előírható peremfeltételek száma négy. Következésképp az (1.4.22) által adott megoldásban álló  $F_0$ ,  $M_0$ ,  $F_L$  és  $M_L$  terhelések – ezek száma ugyancsak négy – mindig megválaszthatók úgy, hogy a végtelenbe nyúló rúd  $A$  és  $B$  pont-



1.6 ábra

*Koncentrált erővel terhelt, véges hosszúságú, rugalmasan ágyazott rúd*

jaiban teljesüljenek a véges hosszúságú  $AB$  rúd végpontjaiban előírt peremfeltételek. Ha például az 1.6 ábrán vázolt egyik végén befogott másik végén szabad rúd a vizsgálatunk tárgya – vegyük észre, hogy az  $AB$  szakaszon belül mind a véges hosszúságú, mind pedig a végtelenbe nyúló rúdon azonos a terhelés – akkor a

$$w(0) = 0 \quad \varphi(0) = 0 \quad \overset{h}{M}(L) = 0 \quad T(L) = 0$$

peremfeltételek felhasználásával az (1.4.22) képletből a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \hat{w}_F(0 + \epsilon, 0) & \hat{w}_F(0 + \epsilon, L) & \hat{w}_M(0 + \epsilon, 0) & \hat{w}_M(0 + \epsilon, L) \\ \hat{\varphi}_F(0 + \epsilon, 0) & \hat{\varphi}_F(0 + \epsilon, L) & \hat{\varphi}_M(0 + \epsilon, 0) & \hat{\varphi}_M(0 + \epsilon, L) \\ \hat{m}_F(L - \epsilon, 0) & \hat{m}_F(L - \epsilon, L) & \hat{m}_M(L - \epsilon, 0) & \hat{m}_M(L - \epsilon, L) \\ \hat{t}_F(L - \epsilon, 0) & \hat{t}_F(L - \epsilon, L) & \hat{t}_M(L - \epsilon, 0) & \hat{t}_M(L - \epsilon, L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_L \\ M_0 \\ M_L \end{bmatrix}$$

$$+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \hat{w}_F(0 + \epsilon, \xi_1) & \hat{w}_M(0 + \epsilon, \xi_1) \\ \hat{\varphi}_F(0 + \epsilon, \xi_1) & \hat{\varphi}_M(0 + \epsilon, \xi_1) \\ \hat{m}_F(L - \epsilon, \xi_1) & \hat{m}_M(L - \epsilon, \xi_1) \\ \hat{t}_F(L - \epsilon, \xi_1) & \hat{t}_M(L - \epsilon, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (1.4.23)$$

lineáris egyenletrendszer adódik az  $F_0$ ,  $F_L$ ,  $M_0$  és  $M_L$  terhelések számítására. Az  $F_0$ ,  $F_L$ ,  $M_0$  és  $M_L$  terhelések ismeretében a tényleges megoldás az (1.4.22) képletből számítható. Legyen

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\partial L)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \hat{w}_F(0 + \epsilon, 0) & \hat{w}_F(0 + \epsilon, L) & \hat{w}_M(0 + \epsilon, 0) & \hat{w}_M(0 + \epsilon, L) \\ \hat{\varphi}_F(0 + \epsilon, 0) & \hat{\varphi}_F(0 + \epsilon, L) & \hat{\varphi}_M(0 + \epsilon, 0) & \hat{\varphi}_M(0 + \epsilon, L) \\ \hat{m}_F(L - \epsilon, 0) & \hat{m}_F(L - \epsilon, L) & \hat{m}_M(L - \epsilon, 0) & \hat{m}_M(L - \epsilon, L) \\ \hat{t}_F(L - \epsilon, 0) & \hat{t}_F(L - \epsilon, L) & \hat{t}_M(L - \epsilon, 0) & \hat{t}_M(L - \epsilon, L) \end{bmatrix} \quad (1.4.24a)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(L)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \hat{w}_F(0 + \epsilon, \xi_1) & \hat{w}_M(0 + \epsilon, \xi_1) \\ \hat{\varphi}_F(0 + \epsilon, \xi_1) & \hat{\varphi}_M(0 + \epsilon, \xi_1) \\ \hat{m}_F(L - \epsilon, \xi_1) & \hat{m}_M(L - \epsilon, \xi_1) \\ \hat{t}_F(L - \epsilon, \xi_1) & \hat{t}_M(L - \epsilon, \xi_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_L \\ M_0 \\ M_L \end{bmatrix} \quad (1.4.24b)$$

és

$$\mathbf{b}^T = [ F_1 \quad M_1 ] \quad (1.4.24c)$$

Legyen továbbá

$$\mathbf{B}^T = [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] . \quad (1.4.24d)$$

Amint arra a jelölés is utal az  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\partial L)}$  mátrix a rúd végpontjaiban vagy másként fogalmazva a test peremén tekintett mennyiségekből épül fel. Az  $\tilde{\mathbf{U}}^{(L)}$  mátrix elemei pedig az  $A$  és  $B$  pontok között, azaz a test belsejében tekintett egyes alapmegoldások. Az is nyilvánvaló, hogy  $\mathbf{b}$  a tartományi teher az  $\mathbf{x}$  oszlopvektor pedig az ismeretlenek vektora. Bár a  $\mathbf{B}$  oszlopvektor most zérusvektor a későbbiek során azonban ki fog derülni, hogy általános esetben a test peremén vett értékeket tartalmaz.

Az (1.4.24a,...,d) jelölések alkalmazásával az indirekt módszer (1.4.23) alatti egyenlete az

$$\boxed{\tilde{\mathbf{U}}^{(\partial L)} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{U}}^{(L)} \mathbf{b} = \mathbf{B}} \quad (1.4.25)$$

alakban írható fel.

Az  $F_0$ ,  $F_L$ ,  $M_0$  és  $M_L$  terhelés nem tényleges terhelése a véges hosszúságú  $AB$  rúdnak. Az indirekt szó erre a körülményre utal. Szokás ezt a terhet fiktív tehernek is nevezni. Az (1.2.8) és (1.2.10) képletek felhasználásával írhatjuk, hogy

$$F_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(0 + \epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(0 - \epsilon) \quad F_L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(L + \epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(L - \epsilon) \quad (1.4.26a)$$

$$M_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0}^h \hat{M}(0 - \epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0}^h \hat{M}(0 + \epsilon) \quad M_L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0}^h \hat{M}(L - \epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0}^h \hat{M}(L + \epsilon) \quad (1.4.26b)$$

ami azt mutatja, hogy az ismeretlennek tekintett fiktív teher a vonatkozó belső erők szakadása a végtelen hosszúságú rúdban.

## 1.5. A direkt módszer egyenletei

**1.5.1.** A direkt módszer egyenleteinek származtatásánál a feladat differenciálegyenlete szolgálhat kiinduló pontként. Ha az 1.6 ábrán vázolt rugalmasan ágyazott rúd a vizsgálatunk tárgya, melyet most az ábrától eltérően az

$$f(x_1) = b(x_1) \quad x_1 \in [0, L]$$

megoszló erőrendszer terhel, akkor  $\mu_2 = 0$  és az (1.2.11) illetve (1.2.12) egybevetéséből azonnal adódik, hogy az

$$EI \frac{d^4 w(x_1)}{dx_1^4} = b(x_1) - kw(x_1) \quad (1.5.27)$$

egyenlet a feladat differenciálegyenlete. Nyilvánvaló, hogy az (1.5.27) egyenletet a feladat peremfeltételeivel is ki kell egészíteni. A peremfeltételek kérdésére azonban csak a direkt módszer egyenleteinek leszámaztatása után térünk vissza.

**1.5.2.** A direkt módszerrel kapcsolatos egyenletek levezetésének feladattípustól független közös módszere az, hogy a feladat differenciálegyenleteit végigsorozzuk a megfelelő alapmegoldással majd integráljuk a szorzatot a vonatkozó tartományon. A formális eredmény egy olyan hibaintegrál lesz melyben a  $\hat{w}_F(x_1, \xi_1)$  alapmegoldás felel meg a súlyfüggvénynek. Ezt az integrált alkalmas parciális integrálások végrehajtásával addig alakítjuk, amíg a keresett megoldás tartományon vett deriváltjai eltűnnek a tartományi integrálból. Mondottak alapján kétszer parciálisan integrálva az

$$\int_{x_1=0}^L \left[ IE w^{(4)}(x_1) - b(x_1) + kw(x_1) \right] \hat{w}_F(x_1, \xi_1) dx_1 = 0 \quad (1.5.28)$$

hibaintegrál első tagját és felhasználva eközben az (1.2.18), (1.3.14b) és (1.2.17b) összefüggéseket kapjuk, hogy:

$$\int_{x_1=0}^L \frac{d^2 \hat{w}_F}{dx_1^2} IE \frac{d^2 w}{dx_1^2} dx_1 - \int_{x_1=0}^L (b - kw) \hat{w}_F dx_1 + \left[ \hat{w}_F IE \frac{d^3 w}{dx_1^3} - \frac{d\hat{w}_F}{dx_1} IE \frac{d^2 w}{dx_1^2} \right] \Big|_{x_1=0}^L = 0 \quad (1.5.29a)$$

vagy ami ugyanaz, hogy

$$\begin{aligned} \int_{x_1=0}^L \frac{\hat{M} \hat{m}_F(x_1, \xi_1)}{IE} dx_1 - \int_{x_1=0}^L [b(x_1) - kw(x_1)] \hat{w}_F(x_1, \xi_1) dx_1 \\ + \left[ T(x_1) \hat{w}_F(x_1, \xi_1) - \hat{M}(x_1) \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) \right] \Big|_{x_1=0}^L = 0 \end{aligned} \quad (1.5.29b)$$

**1.5.3.** Az utóbbi egyenlet megegyezik formailag a virtuális munka elvvel, illetve a teljes potenciális energia első variációjának eltűnését kifejező egyenlettel mivel az első tartományi integrál formailag a belső erőrendszer virtuális munkája, a második tartományi integrál a tartományi teher virtuális munkájának az ellentettje, míg a fennmaradó tagok a peremterhelés – jelen esetben a végpontokon működő erők – munkájának az ellentettjét adják. Ez a megjegyzés arra kíván rávilágítani, hogy a direkt módszer egyenletei a virtuális munka elvből illetve variációs elvből is származtathatók.

**1.5.4.** Az (1.5.29a) egyenletben álló első tartományi integrál kétszeri parciális integrálása után eltűnnek a  $w$  megoldás deriváltjai az integrálból:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{w}_F IE \frac{d^3 w}{dx_1^3} - \frac{d\hat{w}_F}{dx_1} IE \frac{d^2 w}{dx_1^2} + \frac{d^2 \hat{w}_F}{dx_1^2} IE \frac{dw}{dx_1} - \frac{d^3 \hat{w}_F}{dx_1^3} IE w \right] \Big|_{x_1=0}^L \\ + \int_0^L \frac{d^4 \hat{w}_F}{dx_1^4} IE w dx_1 = \int_{x_1=0}^L (b - kw) \hat{w}_F dx_1 \end{aligned}$$

Ez az egyenlet tovább alakítható az (1.2.18), (1.2.17b), (1.3.14b) és az (1.3.14c,d) képletek segítségével továbbá annak a körülménynek a kihasználásával, hogy a  $\hat{w}_F$  alapmegoldás kielégíti

az (1.3.15) differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned} & - \left[ \hat{w}_F(x_1, \xi_1) T(x_1) - \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) \overset{h}{M}(x_1) \right] \Big|_0^L + \int_0^L \hat{w}_F(x_1, \xi_1) b(x_1) dx_1 = \\ & - \left[ w(x_1) \hat{t}_F(x_1, \xi_1) - \varphi(x_1) \hat{m}_F(x_1, \xi_1) \right] \Big|_0^L + \int_0^L w(x_1) \delta(x_1 - \xi_1) dx_1. \end{aligned} \quad (1.5.30)$$

**1.5.5.** Az eredmény megegyezik formailag az idegen munkák egyenlőségét kifejező BETTI tétellel vagy másként fogalmazva a GREEN féle azonosság jelen feladatra érvényes alakjával. Az észrevételt általánosítva azt is mondhatjuk, hogy ha a vizsgált feladathoz tartozik GREEN típusú azonosság, akkor várható, hogy a direkt módszer egyenletei levezethetők a feladathoz tartozó GREEN féle azonosságból.

A B. Függelék DIRAC függvényekkel kapcsolatos (B.1) képletét alkalmazva azonnal adódik, hogy

$$\int_0^L w(x_1) \delta(x_1 - \xi_1) dx_1 = w(\xi_1). \quad (1.5.31)$$

Utóbbi egyenlet (1.5.30)-be történő visszahelyettesítése után a

$$\begin{aligned} w(\xi_1) = & \left\{ \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, \xi_1) & \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T(x_1) \\ \overset{h}{M}(x_1) \end{bmatrix} \right. \\ & \left. - \begin{bmatrix} -\hat{t}_F(x_1, \xi_1) & \hat{m}_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x_1) \\ \varphi(x_1) \end{bmatrix} \right\} \Big|_{x_1=0}^L + \int_0^L \hat{w}_F(x_1, \xi_1) b(x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (1.5.32)$$

eredmény következik. A kapott egyenlet szerint bármely  $\xi_1 \in (0, L)$  pontban kiszámítható a  $b(x_1)$  megoszló terhelés hatására létrejövő elmozdulás

- ha ismeretes a  $\hat{w}_F(x_1, \xi_1)$  alapmegoldás és az alapmegoldáshoz tartozó merevtestszerű forgás és belső erők – azaz a  $\hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1)$ ,  $\hat{m}_F(x_1, \xi_1)$  és  $\hat{t}_F(x_1, \xi_1)$  függvények – az  $x_1 = 0$  és  $L$  pontokban

továbbá

- ha ugyancsak ismeretesek a keresett megoldások a rúd végpontjaiban, vagyis ha ismerjük a

$$\begin{array}{cc} w(0) & w(L) \\ \varphi(0) & \varphi(L) \\ \overset{h}{M}(0) & \overset{h}{M}(L) \\ T(0) & T(L) \end{array}$$

értékeket.

Mivel a rúd  $A$  és  $B$  végpontjaiban négy peremfeltétel írható elő a felsorolt nyolc érték közül általában csak négy ismeretes. Ha a rúd baloldali vége rögzített és a jobboldali vége szabad, akkor például

$$w(0) = \varphi(0) = \overset{h}{M}(L) = T(L) = 0$$

míg a fennmaradó négy

$$w(L) \quad \varphi(L) \quad \overset{h}{M}(0) \quad T(0)$$

peremérték továbbra is ismeretlen.

**1.5.6.** A mondottak fényében felmerül a kérdés, hogy felhasználható-e valamilyen módon az (1.5.6) egyenlet a hiányzó négy peremérték meghatározására. Az **1.5.8.** és **1.5.9.** szakaszok erre a kérdésre keresik a választ.

**1.5.7.** Vegyük észre, hogy az (1.5.32) által adott megoldás differenciálható a  $\xi_1$  szerint. Jelölje ' a  $\xi_1$  szerinti deriváltakat. Az (1.5.32) egyenlet  $\xi_1$  szerinti deriváltjának ellentettje a merevtestszerű forgást adja:

$$\varphi(\xi_1) = \left\{ \begin{bmatrix} -\hat{w}'_F(x_1, \xi_1) & -\hat{\varphi}'_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T(x_1) \\ h \\ M(x_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{t}'_F(x_1, \xi_1) & -\hat{m}'_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x_1) \\ \varphi(x_1) \end{bmatrix} \right\} \Big|_{x_1=0}^L - \int_0^L \hat{w}'_F(x_1, \xi_1) b(x_1) dx_1 \quad (1.5.33)$$

A rúd mentén ható  $\mu_2 = m(x_1)$  megoszló erőpárrendszer által okozott elmozdulást az (1.3.21a) figyelembevételével írható

$$- \int_0^L \hat{\varphi}_F(\xi_1, x_1) m(x_1) dx_1$$

integrál adja mivel most az  $x_1$  pont a nyomaték alkalmazásának pontja, míg a hatás a  $\xi_1$  pontban jelenik meg. Továbbiakban használjuk ki, hogy  $-\hat{\varphi}_F(\xi_1, x_1) = \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1)$ . – v.ö.: (1.3.21a)-et és az (1.3.17)-et követő első egyenletet – majd bővítsük ki az (1.5.32) és (1.5.33) egyenleteket a megoszló erőpárrendszer hatására kialakuló elmozdulással és forgással. Egyesítve az eredményül kapott képleteket írható, hogy

$$\begin{bmatrix} w(\xi_1) \\ \varphi(\xi_1) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, \xi_1) & \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) \\ -\hat{w}'_F(x_1, \xi_1) & -\hat{\varphi}'_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T(x_1) \\ h \\ M(x_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\hat{t}_F(x_1, \xi_1) & \hat{m}_F(x_1, \xi_1) \\ \hat{t}'_F(x_1, \xi_1) & -\hat{m}'_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x_1) \\ \varphi(x_1) \end{bmatrix} \right\} \Big|_{x_1=0}^L + \int_0^L \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, \xi_1) & \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) \\ -\hat{w}'_F(x_1, \xi_1) & -\hat{\varphi}'_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(x_1) \\ m(x_1) \end{bmatrix} dx_1. \quad (1.5.34)$$

Mindaz amit mondtunk az (1.5.32) egyenlettel kapcsolatosan, változatlanul érvényben marad az (1.5.34) egyenlet esetén is. Röviden megismételve: a  $\hat{w}_F$ ,  $\hat{\varphi}_F$  alapmegoldások és a nyolc peremérték birtokában – ezek közül négy még ismeretlen – az (1.5.34) segítségével a rúd bármely pontjában számítható a  $w(\xi_1)$  elmozdulás és a  $\varphi(\xi_1)$  merevtestszerű forgás.

**1.5.8.** Az (1.5.34) egyenlet módot nyújt a hiányzó peremértékek meghatározására. Tekintsük ui. az (1.5.34)-ből a  $\xi_1 \rightarrow 0$ , illetve  $\xi_1 \rightarrow L$  határátmenettel adódó lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} w(L - \epsilon) \\ \varphi(L - \epsilon) \\ w(0 + \epsilon) \\ \varphi(0 + \epsilon) \end{bmatrix} = \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \hat{w}_F(L, L - \epsilon) & \hat{\varphi}_F(L, L - \epsilon) & \hat{w}_F(0, L - \epsilon) & \hat{\varphi}_F(0, L - \epsilon) \\ -\hat{w}'_F(L, L - \epsilon) & -\hat{\varphi}'_F(L, L - \epsilon) & -\hat{w}'_F(0, L - \epsilon) & -\hat{\varphi}'_F(0, L - \epsilon) \\ \hat{w}_F(L, 0 + \epsilon) & \hat{\varphi}_F(L, 0 + \epsilon) & \hat{w}_F(0, 0 + \epsilon) & \hat{\varphi}_F(0, 0 + \epsilon) \\ -\hat{w}'_F(L, 0 + \epsilon) & -\hat{\varphi}'_F(L, 0 + \epsilon) & -\hat{w}'_F(0, 0 + \epsilon) & -\hat{\varphi}'_F(0, 0 + \epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T(L) \\ h \\ M(L) \\ -T(0) \\ h \\ M(0) \end{bmatrix} \\ & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -\hat{t}_F(L, L - \epsilon) & \hat{m}_F(L, L - \epsilon) & \hat{t}_F(0, L - \epsilon) & -\hat{m}_F(0, L - \epsilon) \\ \hat{t}'_F(L, L - \epsilon) & -\hat{m}'_F(L, L - \epsilon) & -\hat{t}'_F(0, L - \epsilon) & \hat{m}'_F(0, L - \epsilon) \\ -\hat{t}_F(L, 0 + \epsilon) & \hat{m}_F(L, 0 + \epsilon) & \hat{t}_F(0, 0 + \epsilon) & -\hat{m}_F(0, 0 + \epsilon) \\ \hat{t}'_F(L, 0 + \epsilon) & -\hat{m}'_F(L, 0 + \epsilon) & -\hat{t}'_F(0, 0 + \epsilon) & \hat{m}'_F(0, 0 + \epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(L) \\ \varphi(L) \\ w(0) \\ \varphi(0) \end{bmatrix} \\ & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^L \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, L - \epsilon) & \hat{\varphi}_F(x_1, L - \epsilon) \\ -\hat{w}'_F(x_1, L - \epsilon) & -\hat{\varphi}'_F(x_1, L - \epsilon) \\ \hat{w}_F(x_1, 0 + \epsilon) & \hat{\varphi}_F(x_1, 0 + \epsilon) \\ -\hat{w}'_F(x_1, 0 + \epsilon) & -\hat{\varphi}'_F(x_1, 0 + \epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(x_1) \\ m(x_1) \end{bmatrix} dx_1. \quad (1.5.35) \end{aligned}$$

A négy egyenletből álló lineáris egyenletrendszerben az ismert peremértékek helyettesítése után négy ismeretlen marad; ezek pedig épp az ismeretlen peremértékek. Numerikus megoldást tételezve fel az integrál valamilyen kvadratúraformulával számítható és olyan algoritmus is szerkeszthető amely a peremelőírások függvényében összeállítja a megoldandó lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve az egyenletrendszer jobboldalát.

Arra is ügyelni kell, hogy a  $\hat{t}_F$  alapmegoldás – v.ö.: (1.3.14d) – nem folytonos a  $Q = M$  pontban, következésképp körültekintésre van szükség a vonatkozó határértékek megállapításánál.

Legyen

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x_1, \xi_1) &= [U_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, \xi_1) & \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) \\ -\hat{w}'_F(x_1, \xi_1) & -\hat{\varphi}'_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}(x_1, \xi_1) &= [T_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -\hat{t}_F(x_1, \xi_1) & \hat{m}_F(x_1, \xi_1) \\ \hat{t}'_F(x_1, \xi_1) & -\hat{m}'_F(x_1, \xi_1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}(x_1) &= [u_\beta(x_1)] = \begin{bmatrix} w(x_1) \\ \varphi(x_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}(x_1) = [t_\beta(x_1)] = \begin{bmatrix} -T(L) \\ h \\ M(L) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

és

$$\mathbf{b}(x_1) = [b_\beta(x_1)] = \begin{bmatrix} b(x_1) \\ m(x_1) \end{bmatrix}.$$

Legyen továbbá  $ds$  az ívelem a rúd középvonala mentén. A bevezetett jelölésekkel (1.5.34)-ből, visszaidézve azt is, hogy a  $\xi_1$  pontot  $Q$ -val, az  $x_1$  pontot pedig  $M$ -el jelöltük, az

$$\boxed{u_\alpha(Q) = [U_{\alpha\beta}(M, Q)t_\beta(M) - T_{\alpha\beta}(M, Q)u_\beta(M)]|_{M=0}^L + \int_0^L U_{\alpha\beta}(M, Q)b_\beta(M) ds_M} \quad (1.5.36)$$

egyenlet adódik. Ez az egyenlet formailag megegyezik a direkt módszer rugalmasságtani feladatokra érvényes és az elmozdulásmezőre vonatkozó megoldást adó (4.4.23)<sub>1</sub> egyenletével.

## 1.6. Gyakorlatok

**1.1** Igazolja, hogy végtelenbe nyúló, hajlított-nyírt, nem rugalmasan ágyazott rúd esetén a koncentrált erőhöz tartozó alapmegoldások

$$\hat{w}_F(x_1, \xi_1) = \frac{1}{12IE}(2L^3 - 3R^2L + R^3) \quad (1.6.1a)$$

$$\hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) = \frac{1}{4IE}LR(2 - \frac{R}{L}) \text{Sgn } r \quad (1.6.1b)$$

$$\hat{m}_F(x_1, \xi_1) = \frac{1}{2}(L - R), \quad \hat{t}_F(x_1, \xi_1) = \frac{1}{2}\text{Sgn } r \quad (1.6.1c)$$

alakúak.

(Az alapmegoldás az  $IEW^{(4)}(x_1) = \delta(x_1 - \xi_1)$  differenciálegyenlet megoldása. A homogén egyenlet

$$\overset{f}{U} = A_0 + A_1r + A_2r^2 + A_3r^3 \quad r > 0 \quad (1.6.2a)$$

$$\overset{f}{U} = \hat{A}_0 + \hat{A}_1r + \hat{A}_2r^2 + \hat{A}_3r^3 \quad r < 0 \quad (1.6.2b)$$

megoldásából érdemes kiindulni. Az **1.3.5.** szakaszban részletezett illesztési feltételek mellett a feladat határozottá tételéhez ezen túlmenően a

$$\hat{w}_F(x_1, \xi_1)|_{|r|=L} = 0 \quad \text{illetve} \quad \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1)|_{|r|=2L} = 0 \quad (1.6.3)$$

feltételeket is elő kell írni.)

**1.2** Igazolja, hogy végtelenbe nyúló, hajlított-nyírt, nem rugalmasan ágyazott rúd esetén a koncentrált nyomatékhoz tartozó alapmegoldások

$$\hat{w}_M(x_1, \xi_1) = -\frac{1}{12IE} \left[ 2\frac{R}{L} - \left( 3\frac{R}{L} \right)^2 + \left( \frac{R}{L} \right)^3 \right] L^2 \operatorname{Sgn} r \quad (1.6.4a)$$

$$\hat{\varphi}_M(x_1, \xi_1) = \frac{1}{12IE} \left[ 2 - 6\frac{R}{L} + 3\left( \frac{R}{L} \right)^2 \right] L \quad (1.6.4b)$$

$$\hat{m}_M(x_1, \xi_1) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{L}\right) \operatorname{Sgn} r, \quad \hat{t}_M(x_1, \xi_1) = -\frac{1}{2L} \quad (1.6.4c)$$

alakúak, ha a szokásos illesztési feltételek mellett még a

$$\hat{w}_M(x_1, \xi_1)|_{|r|=L} = 0 \quad (1.6.5a)$$

illetve a

$$\hat{\varphi}_M(x_1, \xi_1)|_{r=L} + \frac{L}{12IE} = 0 \quad (1.6.5b)$$

kiegészítő feltételeket is előírjuk.

**1.3** Írja fel a direkt módszer egyenleteit rugalmasan ágyazott rúdra, ha a rúd mindkét vége befogott továbbá ha egységnyi függőleges erő terheli az  $\xi_1 = 0.5L$  koordinátájú  $Q$  pontot (a rúd középpontját).

#### HIVATKOZÁSOK AZ 1. FEJEZETHEZ

1. Butterfield, R.: *New concepts illustrated by old problems* in Developments in boundary element methods-1 edited by P.K.Banarjee and R.Butterfield, Applied Science Publishers LTD, London, 1979.
2. Banarjee, P.K.-Butterfield, R.: *Boundary element methods in engineering science*, McGraw Hill, London, 1979.
3. Béda, Gy.-Kozák, I.: *Rugalmas testek mechanikája*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
4. Hetényi, M.: *Beams on elastic foundation*, University of Michigan Press, 1976

## A Laplace és Poisson egyenlet

### 2.1. Előzmények

**2.1.1.** A peremelem-módszer előzményei a 60-as évek elejére nyúlnak vissza amikor HESS és SMITH [1,2] másodfajú FREDHOLM típusú integrálegyenletekre vezette vissza az egyszerű forráseloszlás forgásfelületen történő meghatározásának feladatát. Az egyenlet numerikus megoldása révén lehetővé vált az egyenletesen áramló közegbe helyezett felület áramlási képre gyakorolt hatásának számítása. Ez az úttörő jellegű munka azonban még mindig inkább tekinthető egy speciális feladat számszerű megoldásának, mint egy új numerikus módszer felé utat nyitó eredménynek.

Az első olyan tanulmány amely tudatosan kihasználta a peremgörbén tekintett GREEN féle képletet, hangsúlyozva egyúttal, hogy ez az egyenlet egy harmonikus függvény és normálirányú deriváltjai között fennálló összefüggés, JASWON és PONTER tollából ered [3, 1963]. Az idézett dolgozat a csavarási feladat deplanációs függvényének meghatározására vezetett le másodfajú integrálegyenletet, numerikus uton számítva a deplanáció értékét a peremgörbén, majd ennek birtokában a nyírófeszültségeket illetve a csavarási merevséget is meghatározta.

Ugyanebben az évben két további tanulmány jelent meg – JASWON [4] és SYMM [5] – melyek az elektromos töltésseloszlás meghatározására szolgáló elsőfajú FREDHOLM típusú integrálegyenlet levezetését [4] és a numerikus megoldást [5] mutatják be. A perem kis elemekre volt felbontva, a forrassűrűséget pedig állandó értékűnek tekintették az elemeken. A [3], [4] és [5] alatti tanulmányok valójában már tartalmazták az ún. direkt módszer teljes megalapozását. Ennek ellenére nem keltettek akkorá figyelmet mint amekkorát valójában érdemeltek volna. Ebben minden valószínűség szerint az is közrejátszott, hogy a 60-as évek során robbanásszerűen elterjedt a végelem módszer.

A peremintegrál-egyenlet módszer elnevezést CRUSE és RIZZO használta először [7] és feltehetően ennek alapján alakult ki a BREBBIA és DOMINGUEZ által bevezetett [8,9,6] valamivel egyszerűbb de ma már általánosan elfogadott peremelem-módszer kifejezés. A módszerrel kapcsolatos első összefoglaló jellegű munka, az előbb már idézett [6] alatti könyv, 1978-ban jelent meg.

A 80-as évtized a módszerrel kapcsolatos kutatások volumene gyors növekedésének ideje. A kutatási céllal megírt programokat fokozatosan felváltják a felhasználóbarát mérnöki 'software'-k [10]. A kutatások hangsúlya pedig fokozatosan átkerül a nemlineáris, időtől függő és alakoptimalizálási feladatokra [11]. Az eredmények zömét a BREBBIA által ujonan alapított *Engineering Analysis with Boundary Elements* című folyóiratban publikálják.

**2.1.2.** A jelen fejezet a POISSON egyenlettel, illetve a potenciálegyenlettel kapcsolatos feladatokon keresztül mutatja be a módszert. Az alapmegoldás tulajdonságainak tárgyalása után először a direkt módszer integrálegyenleteit tekintjük át. Kiindulási pontként a GREEN féle képletek, illetve a vonatkozó differenciálegyenletekkel kapcsolatos hibaintegrál szolgál. Az indirekt módszer integrálegyenleteinek ismertetése ugyancsak a *Green* féle képleteken alapul. A gondolatmenet kifejtése során elsőként a háromdimenziós esetet vesszük. A kétméretű feladatokkal kapcsolatos eredményeket elkülönítetten, részint analógiákra támaszkodva tárgyaljuk. A fejezethez csatlakozó E. Függelék a síkbeli LAPLACE egyenlet numerikus megoldására alkalmas program Fortran kódjának részletes magyarázatokkal ellátott listája. Az algoritmus a direkt módszeren alapul. A peremelemek menti approximáció kvadrátikus, a program használhatóságát numerikus példák illusztrálják.

## 2.2. Térbeli feladatok

**2.2.1.** Legyen  $V_i$  végesben fekvő egyetlen zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő tartomány. Jelölje  $S$  a  $V_i$  tartomány síma felületrészekből felépített határolófelületét. Az  $S$  felület általában két részre bontott:

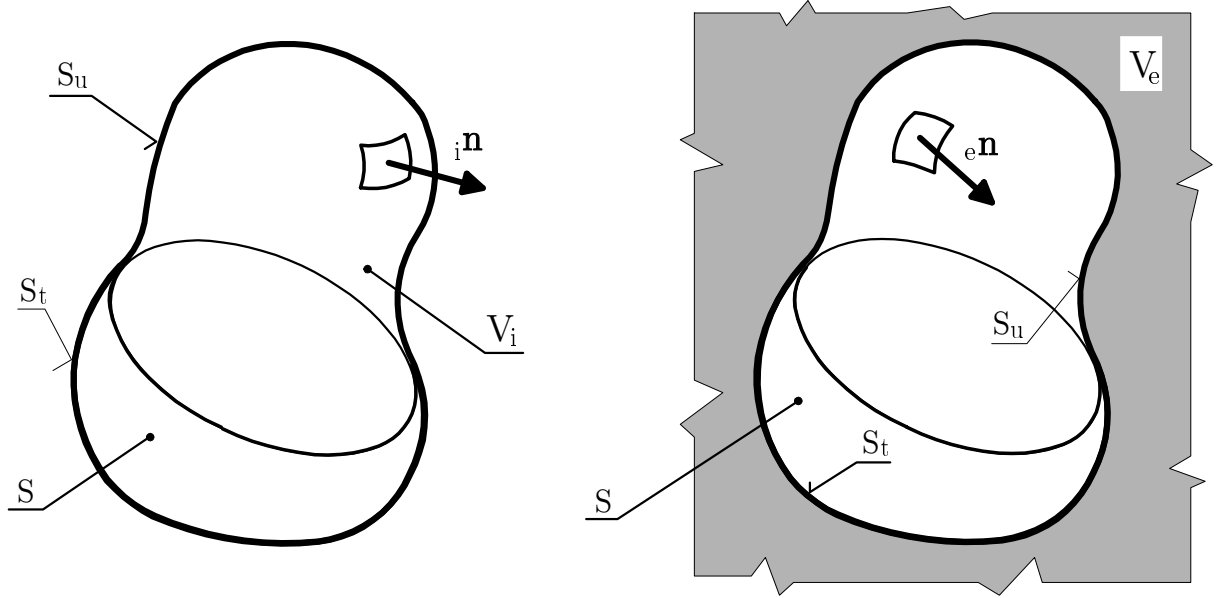
$$S = S_u \cup S_t \quad (2.2.1)$$

ahol  $S_u$  vagy  $S_t$  zérus kiterjedésű is lehet.

Legyen  $V_e$  a háromdimenziós tér azon része amely a  $V_i$  tartomány teljes térből történő eltávolításával kapható meg. Nyilvánvaló, hogy az  $S$  felület a  $V_e$  tartomány határolófelülete is. Jelölje rendre  ${}_i\mathbf{n}$  és  ${}_e\mathbf{n}$  a  $V_i$  és  $V_e$  tartományok  $S$  határolófelületének külső normális egységvektorát. A tartományok fenti értelmezéséből azonnal következik, hogy

$${}_i\mathbf{n} = -{}_e\mathbf{n} \quad (2.2.2)$$

A  $V_i$  és  $V_e$  tartományokat a 2.1 ábra szemlélteti.



2.1 ábra

Egyetlen zárt felülettel határolt belső (a) és külső (b) tartomány

A továbbiakban részletezett jelölések teljes összhangban vannak az 1. Fejezetben bevezetett jelölésekkel.

Legyen  $M$  az  $x_1, x_2, x_3$  koordinátájú futópont. A  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  koordinátájú  $Q$  pontot általában paraméternek tekintjük és ebben a minőségében természetesen rögzített is lehet. Amennyiben az  $M$  vagy  $Q$  pontok az  $S$  felületre esnek akkor a megkülönböztetést az alsóindexként kiírt kis karika segíti vagyis  $M_o$  illetve  $Q_o$  a vonatkozó jelölés.

Az  $M \in V_i$  vagy  $M \in V_e$  pontban  $dV_M$  a térfogatelem. Ugyanilyen módon  $dA_{M_o}$  az  $S$  felület  $M_o$  pontjában tekintett skaláris felületelem. A Nabla, illetve Hamilton féle differenciáloperátor mind az  $M$  mind a  $Q$  pontra vonatkoztatható:

$$\nabla_M = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{i}_k = \overset{M}{\nabla}_k \mathbf{i}_k \quad \nabla_Q = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{i}_k = \overset{Q}{\nabla}_k \mathbf{i}_k \quad (2.2.3)$$

és

$$\Delta_M = \nabla_M \cdot \nabla_M = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \overset{M}{\nabla}_k \overset{M}{\nabla}_k \quad (2.2.4a)$$

illetve

$$\Delta_Q = \nabla_Q \cdot \nabla_Q = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} = \overset{Q}{\nabla}_k \overset{Q}{\nabla}_k \quad (2.2.4b)$$

ahol pont jelöli, összhangban az A.Függelékben mondottakkal, a skaláris szorzást.

**2.2.2.** Legyen  $u(M)$  a  $V_i$ -n [vagy a  $V_e$ -n] tekintett legalább kétszer folytonosan deriválható és egyelőre ismeretlen skalárfüggvény. A

$$\Delta_M u(M) = 0 \quad M \in V_i \quad (2.2.5)$$

homogén differenciálegyenlet az un. LAPLACE vagy potenciálegyenlet. Az egyenlet megoldásait harmonikus függvényeknek nevezik. A vonatkozó peremérték-feladatokat pedig a peremfeltételek jellege szerint osztályozzák [12].

Az  $u(M)$   $M \in V_i$  függvény normálirányú deriváltja az  $S$  felületen az

$${}_i n_k \left( \nabla_k^M u \right) \Big|_{M_o} = {}_i n_k \left( \nabla_k^M u(M_o) \right) = \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = {}_i t(M_o) \quad (2.2.6)$$

módon írható fel, ahol a középső két tagban a deriválás természetesen – és az eddigiekkel összhangban – megelőzi a lokalizálást. A képlet jobboldala jelölésbeli megállapodás. Szavakban: az  $u(M)$  skalármező külső normális mentén vett deriváltját  $t$  jelöli. Az  $n$  betű előtt álló  $i$  vagy  $e$  index a vonatkozó  $V_i$  illetve  $V_e$  tartományra utal.

Belső [Dirichlet] {NEUMANN} féle peremérték-feladatról beszélünk, ha a peremfeltételek

$$[u(M_o) = {}_i \hat{u}(M_o) \quad M_o \in S] \quad (2.2.7)$$

$$\left\{ \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = {}_i \hat{t}(M_o) \quad M_o \in S \right\} \quad (2.2.8)$$

alakúak. Itt és a továbbiakban  ${}_i \hat{u}(M_o)$  és  ${}_i \hat{t}(M_o)$  előre megadott elegendően síma függvények az  $S$  felületen, vagy annak egy részén.

Vegyes peremérték-feladatok esetén az  $S$  határolófelület egyik részén az ismeretlen függvény, másik részén pedig a függvény normálirányú deriváltja az előírt:

$$u(M_o) = {}_i \hat{u}(M_o) \quad M_o \in S_u \quad (2.2.9a)$$

$$\frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = {}_i \hat{t}(M_o) . \quad M_o \in S_t \quad (2.2.9b)$$

Külső DIRICHLET, NEUMANN és vegyes peremérték-feladatok esetén a

$$\Delta_M u(M) = 0 \quad M \in V_e \quad (2.2.10)$$

differenciálegyenletet rendre az

$$u(M_o) = {}_e \hat{u}(M_o) \quad M_o \in S \quad (2.2.11)$$

(DIRICHLET feladat), illetve a

$$\frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = {}_e \hat{t}(M_o) . \quad M_o \in S \quad (2.2.12)$$

(NEUMANN feladat), vagy az

$$u(M_o) = {}_e \hat{u}(M_o) \quad M_o \in S_u \quad (2.2.13a)$$

$$\frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = {}_e \hat{t}(M_o) . \quad M_o \in S_t \quad (2.2.13b)$$

(vegyes peremérték-feladat) peremfeltételekkel kell kiegészíteni, ahol  ${}_e \hat{u}(M_o)$  és  ${}_e \hat{t}(M_o)$  előre megadott függvények. Vegyük észre, hogy a (2.2.12) és (2.2.13b) egyenletben nem tértünk el a (2.2.6)-tól a normálirányú derivált írásmódját tekintve, ezért jegyezzük meg, hogy ez az írásmód mindig a kifelé mutató normális mentén számított deriváltat jelöli. A (2.2.6) jobboldalának felhasználásával azonban mód nyílik arra is, hogy ezt a körülményt a jelölésben is érzékeltessük.

Legyenek  $\alpha(M_o)$ ,  $\beta(M_o)$  és  $\hat{f}(M_o)$  ismert függvények az  $S$  határolófelületen. Az

$$\alpha(M_o)u(M_o) + \beta(M_o)\frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = \hat{f}(M_o) \quad M_o \in S \quad (2.2.14)$$

peremfeltétel a hővezetési típusú peremérték-feladat peremfeltétele.

**2.2.3.** Eltűnő [  $S_t$ -re  $S_u = S$  ] {  $S_u$ -ra  $S_t = S$  } és ekkor mind a belső mind a külső vegyes peremérték-feladat [ DIRICHLET ] { NEUMANN } típusú feladattá válik. Erre tekintettel a direkt és indirekt módszer bemutatása során a vegyes peremérték-feladatok tárgyalására helyezzük a hangsúlyt.

**2.2.4.** Az [  $\alpha(M_o) = 1; \beta(M_o) = 0$  ] {  $\alpha(M_o) = 0; \beta(M_o) = 1$  } esetén a hővezetési típusú peremérték-feladat valójában [ DIRICHLET ] { NEUMANN } típusú feladat.

**2.2.5.** Legyen  $b(M)$   $M \in V_i$  ismert függvény. A

$$\Delta_M u(M) + b(M) = 0 \quad M \in V_i \quad (2.2.15)$$

inhomogén differenciálegyenlet az un. POISSON egyenlet. A fenti egyenlethez a **2.2.2.** szakaszban ismertetett peremfeltételek bármelyike társulhat.

**2.2.6.** Ismeretes [13], hogy stacioner hőáramlás esetén – homogén, izotróp testet tételezve fel – a  $v(M)$  hőmérsékletmező a

$$\Delta_M v(M) + \frac{q(M)}{k} = 0 \quad M \in V_i \quad (2.2.16)$$

differenciálegyenletnek tesz eleget, ahol  $k$  a hővezetési tényező, a  $q(M)$  pedig az egységnyi térfogatelemben időegység alatt keletkező hőmennyiség. Ha a  $q(M)$  pozitív, akkor hő termelődik, ha negatív, akkor hőelvonás megy végbe az adott pontban. Szokás a  $q(M)$ -t hőforrassűrűségnek is nevezni.

A (2.2.16) egyenletet ki kell egészíteni a vizsgált feladat peremfeltételeivel.

A (2.2.15) és (2.2.16) egyenletek egybevetése alapján azt is mondhatjuk, hogy a (2.2.15) egyenlet megegyezik formailag a hővezetési egyenlettel, ha a  $k$  hővezetési tényező egységnyi értékű.

Ha nincs hőforrás, akkor  $q(M) \equiv 0$  és a (2.2.16) egyenlet megegyezik a LAPLACE egyenlettel.

A  $k \nabla_M v(M)|_{M_o}$  hőáramvektor ismeretében a

$$k_{i n_l} \left( \frac{M}{\nabla_l v(M)} \right) \Big|_{M_o} = k \frac{\partial v(M_o)}{\partial n_{M_o}} \quad M_o \in S \quad (2.2.17)$$

módon számítható a  $V_i$  tartomány  $S$  határolófelületének  $M_o$  pontján átáramló hőmennyiség. Ha a derivált pozitív, akkor a  $V_i$  tartománnyal hőközlés, ha negatív, akkor a  $V_i$  tartományból hőelvonás történik.

## 2.3. Az alapmegoldás

**2.3.1.** Legyen  $\mathbf{r}_{QM} = \mathbf{r} = r_k \mathbf{i}_k = (x_k - \xi_k) \mathbf{i}_k$  az  $M$  pont  $Q$  pontra vonatkoztatott helyvektora és jelölje  $R = R(M, Q) = |\mathbf{r}_{QM}|$  a két pont távolságát. Az

$$U(M, Q) = \frac{1}{4\pi R(M, Q)} \quad (2.3.1)$$

kétpontfüggvény a LAPLACE egyenlettel kapcsolatos alapmegoldás. Vegyük észre, hogy az alapmegoldás az  $M$  és  $Q$  pontok szimmetrikus függvénye:

$$U(M, Q) = U(Q, M). \quad (2.3.2)$$

Az  $R(M, Q) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$  és a (2.2.3) képletek felhasználásával ellenőrizhető, hogy

$$\frac{M}{\nabla_k} R(M, Q) = \frac{r_k}{R} \quad \frac{Q}{\nabla_k} R(M, Q) = -\frac{r_k}{R} \quad (2.3.3)$$

továbbá, hogy

$$\frac{M}{\nabla_k} \frac{1}{R(M, Q)} = -\frac{r_k}{R^3}, \quad \frac{Q}{\nabla_k} \frac{1}{R(M, Q)} = \frac{r_k}{R^3} \quad (2.3.4)$$

és

$$\frac{M}{\nabla_k} \frac{M}{\nabla_l} \frac{1}{R} = -\frac{M}{R^3} \frac{\nabla_k r_l}{R} + 3 \frac{r_k r_l}{R^5} = -\frac{\delta_{kl}}{R^3} + 3 \frac{r_k r_l}{R^5} \quad (2.3.5a)$$

illetve

$$\frac{Q}{\nabla_k} \frac{Q}{\nabla_l} \frac{1}{R} = \frac{M}{\nabla_k} \frac{M}{\nabla_l} \frac{1}{R} \quad (2.3.5b)$$

ahol, összhangban az A. Függelék jelöléseivel,  $\delta_{kl}$  a *Kronecker* szimbólum. A (2.3.5a,b) tenzorok skalárinvariánsát véve, tekintettel a (2.2.4a,b) képletekre és az alapmegoldás (2.3.1) alatti értelmezésére, azonnal adódik, hogy

$$\Delta_M U(M, Q) = \Delta_Q U(M, Q) = 0. \quad Q \neq M \in V_i \cup S \cup V_e \quad (2.3.6)$$

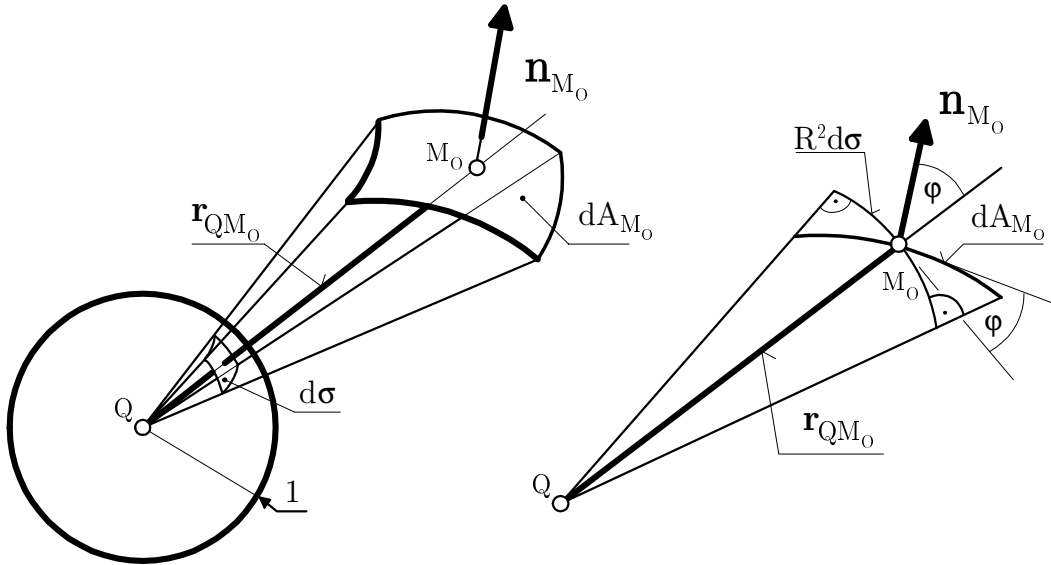
Szavakban: Egymástól különböző  $Q$ - és  $M$ -re az alapmegoldás mindkét változójában kielégíti a térbeli LAPLACE differenciálegyenletet, azaz harmonikus függvény.

**2.3.2.** Alábbiakban az alapmegoldás és a LAPLACE egyenlet kapcsolatát próbáljuk meg tisztázni.

Tekintsük az  $S$  felülettel határolt  $V_i$  tartományt és tételezzük fel egyelőre, hogy  $Q \in V_i$ . A (2.3.1) és (2.3.4)<sub>1</sub> képletek felhasználásával

$$\frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} = \left. i n_k \left( \frac{M}{\nabla} U(M, Q) \right) \right|_{M_o} = -\frac{i n_k r_k}{4\pi R^3} \Big|_{M_o} \quad (2.3.7)$$

az alapmegoldás normálirányú deriváltja.



2.2 ábra  
A  $dA_{M_o}$  felületelem

A **2.2.6.** szakasz illetve a (2.2.17) képlet alapján azt is mondhatjuk, hogy az

$$I = \int_S \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o}$$

integrál a  $V_i$  tartománnyal közölt, illetve a tartományból elvont hőmennyiség, ha  $k = 1$ , hiszen az alapmegoldás normálirányú deriváltja az integrandusz. Az integrál átalakításához helyettesítsük a (2.3.7) képletet, használjuk ki a skaláris szorzás értelmezését –  $\varphi$  az  $\mathbf{r}_{QM_o}$  és az  $i\mathbf{n}_{M_o}$  által bezárt szög, vagyis  $i n_k r_k = R \cos \varphi$  – és vegyük figyelembe, hogy a  $dA_{M_o}$ -hoz tartozó  $d\sigma$  térszög

ismeretében  $dA_{M_o} = R^2 d\sigma / \cos \varphi$ . A geometriai viszonyokat a 2.2 ábra szemlélteti. Mondottak alapján

$$I = - \int_S \frac{i n_k r_k}{4\pi R^3} dA_{M_o} = - \int_S \frac{\cos \varphi}{4\pi R^2} dA_{M_o} = - \frac{1}{4\pi} \int_S d\sigma.$$

Az eredmény geometriai tartalma nyilvánvaló hiszen az utolsó tagban álló integrál a  $V_i$  tartomány térszöge. Ennek értéke a  $Q$  pont  $V_i$  hez viszonyított helyzetétől függ, azaz ha a  $Q$  pont belső pont, akkor a térszög  $4\pi$ , ha  $Q = Q_o$  és a felület ugyanitt síma, akkor  $2\pi$ , ha a  $Q$  pont külső pont akkor pedig zérus. Következésképp

$$I = \int_S \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} = \begin{cases} -1 & Q \in V_i \\ -1/2 & Q = Q_o \in S \\ 0 & Q \in V_e \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Ismét a hővezetési feladatot véve alapul, a (2.3.8)<sub>1</sub> egyenlet azt fejezi ki, hogy a  $V_i$  tartományból egységnyi mennyiségű hő távozik, holott a (2.3.6) képlet szerint – lásd még a (2.2.15)-öt – a hőforrassűrűség azonosan zérus, ha  $Q \neq M$ . Mivel a hőegyensúlynak fenn kell állnia pontszerű hőforrás működik a  $Q$  pontban, a kibocsátott hőmennyiség pedig egységnyi. Visszaidézve a DIRAC függvényvel kapcsolatos (B.6) képletet valamint a  $\Delta_M U(M, Q) = \Delta_Q U(M, Q)$  egyenlőséget adódik a következtetés, hogy az  $U(M, Q)$  alapmegoldás a

$$\begin{aligned} \Delta_M U(M, Q) + \delta(M - Q) &= 0 \\ \Delta_Q U(M, Q) + \delta(M - Q) &= 0 \end{aligned} \quad M, Q \in V_i \cup S \cup V_e \quad (2.3.9)$$

differenciálegyenletek megoldása. A (2.3.8)<sub>1,3</sub>-al egyenértékű

$$\int_S \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} + \int_{V_i} \delta(M - Q) dV_M = 0 \quad Q \neq Q_o \in S \quad (2.3.10)$$

egyenlet pedig a  $V_i$  tartomány hőegyensúlyát fejezi ki, ha – amint azt már korábban feltételeztük –  $k = 1$  és egységnyi intenzitású pontszerű hőforrás működik a  $Q$  pontban.

## 2.4. A Green féle azonosság és képletek belső tartományra

**2.4.1.** Legyen  $g(M)$  és  $u(M)$  a  $V_i$ -n értelmezett legalább kétszer folytonosan differenciálható függvény. A GAUSS tétel és a parciális integrálás szabályának alkalmazásával írható

$$\begin{aligned} \int_{V_i} u(M) \Delta_M g(M) dV_M &= \int_{V_i} \overset{M}{\nabla}_k \left( u(M) \overset{M}{\nabla}_k g(M) \right) dV_M - \int_{V_i} \left( \overset{M}{\nabla}_k u(M) \right) \left( \overset{M}{\nabla}_k g(M) \right) dV_M \\ &= \int_S u(M_o) i n_k \left( \overset{M}{\nabla}_k g(M_o) \right) dA_{M_o} - \int_{V_i} \left( \overset{M}{\nabla}_k u(M) \right) \left( \overset{M}{\nabla}_k g(M) \right) dV_M \end{aligned}$$

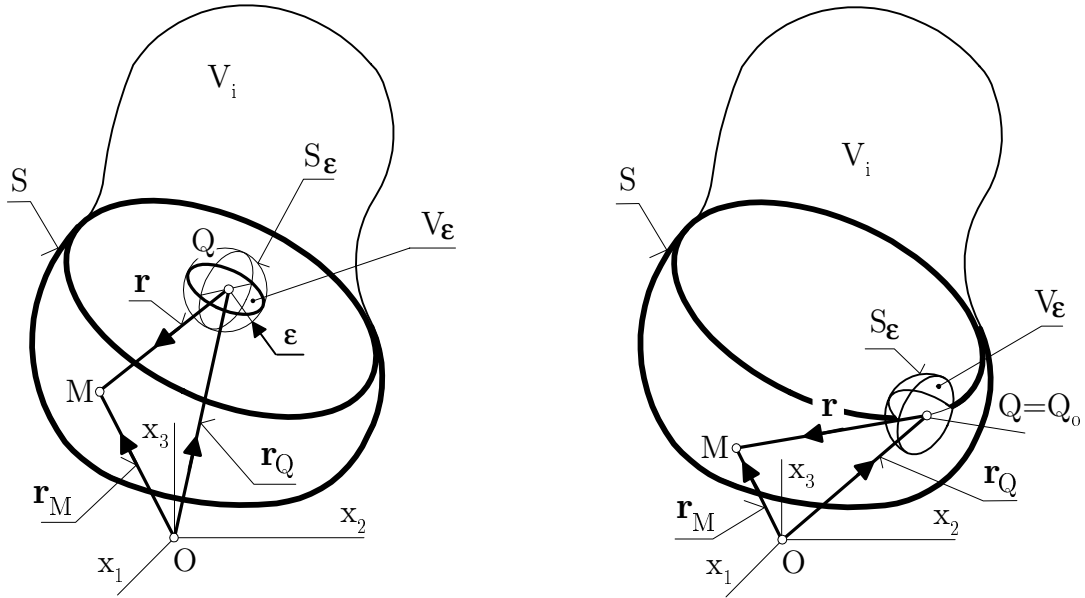
és

$$\int_{V_i} g(M) \Delta_M u(M) dV_M = \int_S g(M_o) i n_k \left( \overset{M}{\nabla}_k u(M_o) \right) dA_{M_o} - \int_{V_i} \left( \overset{M}{\nabla}_k g(M) \right) \left( \overset{M}{\nabla}_k u(M) \right) dV_M$$

integrálok különbségét véve – a második integrál az  $u$  és  $g$  betűk felcserélésével adódik az elsőből – az ún. GREEN féle azonosságot kapjuk:

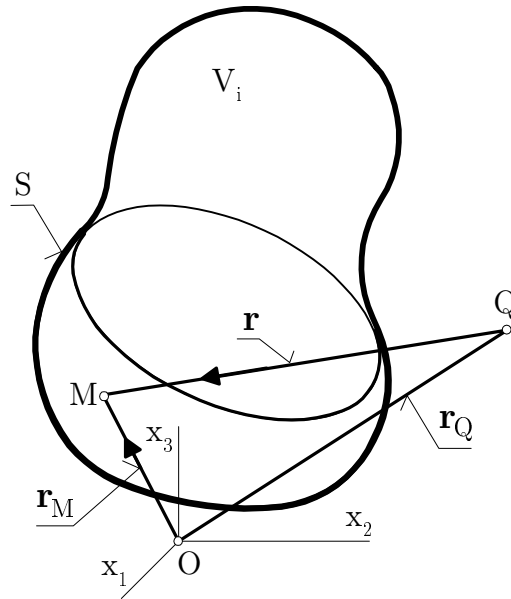
$$\begin{aligned} \int_{V_i} (u(M) \Delta_M g(M) - g(M) \Delta_M u(M)) dV_M &= \\ = \int_S \left( u(M_o) \frac{\partial g(M_o)}{\partial n_{M_o}} - g(M_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) dA_{M_o} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

A (2.4.1) egyenlet akkor is igaz, ha a  $V_i$  tartományt több zárt felület határolja. Az is nyilvánvaló, hogy ez esetben az egyes zárt felületeken vett integrálok összege adja a képlet jobboldalát. Másként fogalmazva  $S$  az egyes zárt felületek uniója.



2.3 (a) és (b) ábra

A belső  $V_i - V_\epsilon$  tartomány. (a) A  $Q$  forráspont a  $V_i$  tartományon belül található. (b) A  $Q = Q_0$  forráspont az  $S$  határfelület pontja.



2.3 (c) ábra

A belső  $V_i$  tartomány. A  $Q$  forráspont a  $V_e$  tartományban van.

## 1. MEGJEGYZÉS: A

$$b[g(M)] = -\Delta_M g(M) \quad \text{és} \quad b[u(M)] = -\Delta_M u(M)$$

jelölések bevezetésével, tekintettel a (2.2.6) egyenletre is, következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{V_i} u(M) b[g(M)] dV_M + \int_S u(M_o)_i t[g(M_o)] dA_{M_o} = \\ = \int_{V_i} g(M) b[u(M)] dV_M + \int_S g(M_o)_i t[u(M_o)] dA_{M_o}. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Amennyiben mind az  $u(M)$  mind a  $g(M)$  harmonikus akkor a GREEN féle reciprocitási tételt kapjuk a (2.4.1)-ből:

$$\int_S (u(M_o)_i t[g(M_o)] - g(M_o)_i t[u(M_o)]) dA_{M_o} = 0. \quad (2.4.3)$$

**2.4.2.** Tegyük fel, hogy  $g(M) = U(M, Q)$  ahol a  $Q$  pont rögzített. Ami a  $Q$  pont  $V_i$  tartományhoz viszonyított helyzetét illeti az alábbi három eset különböztethető meg:

- (a) a  $Q$  pont a  $V_i$  tartomány belső pontja;
- (b)  $Q = Q_o$  azaz a  $Q$  pont a  $V_i$  tartomány  $S$  határolófelületére esik;
- (c) a  $Q$  pont a külső  $V_e$  tartomány belső pontja.

Mivel az  $U(M, Q)$  alapmegoldás szinguláris az  $M = Q$  pontban az (a) és (b) esetekben a GREEN azonosság nem használható fel az eredeti alakjában. A probléma azonban megkerülhető. A vonatkozó lépéseket az (a) esetre részletezzük, míg a (b) esetben csak az eltérésekre térünk ki.

**2.4.3.** Jelölje  $V_\epsilon$  a  $Q$  pont  $\epsilon$  sugarú környezetét és legyen  $S_\epsilon$  a  $Q$  középpontú  $\epsilon$  sugarú gömb határfelülete. A  $V_i - V_\epsilon$  tartományt a 2.3 (a) ábra szemlélteti. Vegyük észre, hogy a jobb láthatóság kedvéért a  $V_i$  tartomány felső része vékony vonallal van rajzolva.

Mivel az  $U(M, Q)$  alapmegoldás korlátos a  $V_i - V_\epsilon$  tartományban a  $g(M) = U(M, Q)$  helyettesítéssel és annak a körülménynek a figyelembevételével, hogy a  $V_i - V_\epsilon$  tartományt két felület határolja a (2.4.1)-ből

$$\begin{aligned} \int_{V_i - V_\epsilon} (u(M) \Delta_M U(M, Q) - U(M, Q) \Delta_M u(M)) dV_M = \\ = \int_S \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) dA_{M_o} \\ + \int_{S_\epsilon} \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) dA_{M_o} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

következik. A további átalakítások célja a fenti egyenlet határértékének meghatározása, ha  $\epsilon \rightarrow 0$ . Az átalakítások során az alábbiakra kell tekintettel lenni:

1. Az  $S$  felületen vett integrál értékét nem befolyásolja az  $\epsilon \rightarrow 0$  határátmenet.
2. Az  $U(M, Q)$  alapmegoldás mint az  $M$  függvénye teljesíti a (2.3.6)<sub>1</sub> egyenletet – azaz harmonikus függvény ha  $Q \neq M \in V_i - V_\epsilon$  – következésképp a (2.4.4) baloldalán álló első térfogati integrál eltűnik.
3. Az  $u(M)$  függvény kétszer folytonosan differenciálható a  $V_i$ -n. Ebből adódóan

$$u(M_o) \quad \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \quad M_o \in S_\epsilon$$

valamint

$$\Delta_M u(M) \quad M \in V_i$$

korlátos.

4. A (2.3.7) képlet az  $S_\epsilon$  felületre lokalizálható, ha figyelembe vesszük, hogy a külső normális most a  $Q$  felé mutat az  $r_k$  pedig ezzel ellentétes irányú:

$$\frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} = \frac{1}{4\pi\epsilon^2}. \quad (2.4.5)$$

(Ugyanez az eredmény a  $\frac{\partial}{\partial n_{M_o}} = -\frac{\partial}{\partial R}$  képlet felhasználásával is megkapható.)

5. A (2.4.4) baloldalán álló térfogati integrál második tagjának határértéke a (2.3.1)-re is tekintettel a

$$- \int_{V_i} U(M, Q) \Delta_M u(M) dV_M + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} \frac{1}{4\pi R} \Delta_M u(M) dV_M$$

módon írható fel. A  $V_\epsilon$  gömbön vett térfogati integrálnak nyilvánvalóan zérus a határértéke hiszen a térfogatelem

$$dV_M = R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi$$

alakú – a  $Q$  pontot tekintve origónak  $\theta \in [0, \pi]$  a sugár  $x_3$  tengellyel bezárt szöge,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  a sugár  $x_1, x_2$  síkra eső vetületének  $x_1$  tengellyel bezárt szöge – és így  $R$ -ben másodrendűen kicsiny a  $\Delta_M u(M)$  pedig a differenciálhatósággal kapcsolatos megkötés miatt korlátos. Következésképp

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_i - V_\epsilon} U(M, Q) \Delta_M u(M) dV_M = - \int_{V_i} U(M, Q) \Delta_M u(M) dV_M. \quad (2.4.6)$$

6. Az  $S_\epsilon$ -on vett integrál első tagja az integrálszámítás középértéktételét, (2.4.6)-öt és az  $\epsilon$  sugarú gömb felszínét adó  $4\pi\epsilon^2$  képletet kihasználva az

$$\int_{S_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} = u(M'_o)$$

módon becsülhető, ahol  $M'_o$  az  $\epsilon$  sugarú gömb alkalmas pontja. Nyilvánvaló, hogy a fenti integrálnak

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} = u(Q) \quad (2.4.7)$$

a határértéke.

7. Az  $S_\epsilon$ -on vett integrál második tagja a (2.3.1) felhasználásával és a 6. alatt mondottak alapján becsülhető:

$$- \int_{S_\epsilon} U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} = -\epsilon \frac{\partial u(M'_o)}{\partial n_{M_o}}$$

Ennek az integrálnak tehát zérus a határértéke:

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} = 0. \quad (2.4.8)$$

8. Tegyük fel, hogy az  $u(M)$  függvény a (2.2.15) Poisson egyenlettel kapcsolatos, egyelőre nem meghatározott peremértékfeladat megoldása. Ez esetben (2.4.6)-ból a

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_i - V_\epsilon} U(M, Q) \Delta_M u(M) dV_M = \int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M \quad (2.4.9)$$

eredmény következik. Ez a lépés döntő jelentőségű, mivel a (2.4.1) egyenletben álló  $u(M)$  függvényre a deriválhatósággal kapcsolatos megszorításon kívül ezideig semmiféle megszorítást nem tettünk.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért – és figyelembe véve a (2.3.1), (2.3.4)<sub>1</sub>-et is – bevezetjük

az

$${}_i T(M_o, Q) = {}_i n_k \left( \nabla_k^M U(M, Q) \right) \Big|_{M_o} = \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial {}_i n_{M_o}} = -\frac{{}_i n_k(M_o) r_k}{4\pi R^3} \quad M_o \neq Q \quad (2.4.10a)$$

és

$${}_eT(M_o, Q) = {}_en_k \left( \nabla_k U(M, Q) \right) \Big|_{M_o} = \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial {}_en_{M_o}} = -\frac{{}_en_k(M_o)r_k}{4\pi R^3} \quad M_o \neq Q \quad (2.4.10b)$$

jelöléseket, ahol a különbségtétel kedvéért most mindenütt kitettük az  $n$  elé az  $i$  és  $e$  indexet. Az  ${}_en_k = -{}_in_k$  relációra tekintettel nyilvánvaló, hogy

$${}_iT(M_o, Q_o) + {}_eT(M_o, Q_o) = 0. \quad M_o, Q_o \in S \quad M_o \neq Q_o \quad (2.4.11)$$

Az 1. és 2. alatt mondottakat illetve a térfogati és felületi integrálok határértékeivel kapcsolatos (2.4.9), (2.4.7) és (2.4.8) képleteket kihasználva, alkalmazva egyuttal a (2.2.6) és (2.4.10a) alatti jelölésbeli megállapodást, a (2.4.4) egyenlet  $\epsilon \rightarrow 0$  határértékére – némi rendezés után – a (2.4.14)<sub>1</sub> képlet adódik. Az előrehivatkozást az indokolja, hogy az (a), (b) és (c) esetekkel kapcsolatos eredmények egy helyütt, egymást követve szerepeljenek a szövegben.

**2.4.4.** A (b) esetben  $Q = Q_o \in S$ . Jelölje  $V_\epsilon$  a  $Q = Q_o$  pont  $\epsilon$  sugarú környezetének  $V_i$ -n belül fekvő részét. Legyen továbbá  $S_\epsilon$  a  $Q_o$  középpontú  $\epsilon$  sugarú gömb felületének  $V_i$ -n belül fekvő része. A  $V_i - V_\epsilon$  tartományt az  $\epsilon$  sugarú gömb által kimetszett felületrész  $S$ -ből történő eltávolításával kapott  $S'$  és az  $S_\epsilon$  felületek határolják.

Legyen az  $S$  felület síma a  $Q_o$  pont környezetében. Ezt a feltevést később – lásd a **2.4.6.** szakasz 1. MEGJEGYZÉSÉT – enyhítjük és töréspont létezését is meg fogjuk engedni. Vegyük azt is észre, hogy ha az  $S$  síma, akkor az  $\epsilon \rightarrow 0$  esetben  $V_\epsilon$  egyre inkább  $\epsilon$  sugarú félgömbbé válik.

A  $V_i - V_\epsilon$  tartományra alkalmazva a (2.4.1) GREEN féle azonosságot, a (2.4.4) egyenlettel azonos formailag az eredmény:

$$\begin{aligned} \int_{V_i - V_\epsilon} (u(M) \Delta_M U(M, Q_o) - U(M, Q_o) \Delta_M u(M)) dV_M \\ = \int_{S'} \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) dA_{M_o} \\ + \int_{S_\epsilon} \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) dA_{M_o}. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

A további átalakítások célja, amint azt a (2.4.4) egyenlettel kapcsolatosan már láttuk, ismét az  $\epsilon \rightarrow 0$  határátmenet vizsgálata. Az eltérésekre helyezve a hangsúlyt a következők figyelhetők meg:

1. Amint az (2.4.12)-ből is látszik a  $Q$  betű helyére minden esetben  $Q_o$  kerül.
2. A térfogati integrálokkal kapcsolatos gondolatmenet változatlan. Következésképp a (2.4.6) és (2.4.9) képletek csak annyiban módosulnak, hogy az 1. alattiakkal összhangban  $Q$  helyett  $Q_o$ -t kell írni.
3. Az  $S'$  felületből az  $\epsilon \rightarrow 0$  határátmenettel az  $S$  felületet kapjuk. A vonatkozó integrál az un. CAUCHY féle főértékben vett integrál. Ez a fogalom rendkívül fontos, mert a határátmenet során a szingularitást okozó  $Q_o$  pontot valójában végig kizárjuk az integrálási tartományból. Magát a határértéket a szokványos módon, azaz az integrálási tartomány kiírásával jelöljük anélkül, hogy külön is felhívnanánk arra a figyelmet hogy az integrált főértékben tekintjük. Az ilyen típusú szinguláris integrálok – noha közönséges értelemben nem léteznek – CAUCHY féle főértékben még végesek lehetnek.
4. A (2.4.7)-re vezető lépések szószerint megismételhetők, ha a félgömb felszínét vesszük az  $S_\epsilon$  felületének számításakor:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} = c(Q_o) u(Q_o) \quad c(Q_o) = \frac{1}{2} \quad (2.4.13)$$

A vonatkozó geometriai viszonyokat jól szemlélteti a 2.3 (b) ábra.

5. Az  $S_\epsilon$  felületen tekintett integrál második részének határértéke a (2.4.8)-ra vezető lépésekkel adódik és most is zérus.

Az  $1., \dots, 5.$  alatt mondottak alapján (2.4.12)-ből a (2.4.14)<sub>2</sub> egyenlet következik.

**2.4.5.** A (c) esetben – v.ö.: 2.3 (c) ábra – a  $Q$  pont a  $V_i$ -n kívül fekszik. Ennélfogva közvetlenül alkalmazható a (2.4.1) GREEN féle azonosság és nincs szükség határértékek vizsgálatára. A (2.4.14)<sub>3</sub> alatti eredmény felírásakor, összhangban az eddigiekkel, kihasználtuk (2.3.6)<sub>1</sub>-t és azt a feltevést, hogy  $u(M)$  a (2.2.15) POISSON egyenlet megoldása. Következésképp a (2.4.9) jobboldala írható a megmaradó térfogati integrál helyére.

**2.4.6.** Jól látszik, hogy a GREEN identitás alkalmas átalakításával kapott

$$\begin{aligned}
 u(Q) &= \int_S [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} \\
 &\quad + \int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M \quad Q \in V_i \\
 c(Q_o) u(Q_o) &= \int_S [U(M_o, Q_o) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q_o) u(M_o)] dA_{M_o} \\
 &\quad + \int_{V_i} U(M, Q_o) b(M) dV_M \quad Q = Q_o \in S \\
 0 &= \int_S [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} \\
 &\quad + \int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M \quad Q \in V_e
 \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

három egyenlet, az un. GREEN féle képletek vagy formulák, szerkezete csaknem azonos.

Ha a  $b(M) = 0$ , akkor a (2.4.14) képletek a

$$\begin{aligned}
 u(Q) &= \int_S [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} \quad Q \in V_i \\
 c(Q_o) u(Q_o) &= \int_S [U(M_o, Q_o) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q_o) u(M_o)] dA_{M_o} \quad Q = Q_o \in S \\
 0 &= \int_S [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} \quad Q \in V_e
 \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

alakra egyszerűsödnek.

1. MEGJEGYZÉS: Ha a  $Q_o$  pontban nem síma az  $S$  felület, akkor a (2.4.14)<sub>2</sub> és vele együtt a (2.4.15)<sub>2</sub> baloldala, pontosabban fogalmazva a  $c(Q_o)$  állandó értéke, módosul. Alábbiak geometriai szemüvegen keresztül kísérlik megvilágítani a kérdést. A feladat – lásd a (2.4.13) egyenletre vezető gondolatmenetet – a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o}$$

határérték vizsgálata, ahol  $S_\epsilon$  a  $Q_o$  középpontú  $\epsilon$  sugarú gömb  $V_i$ -n belül fekvő része. Mivel most a felületnek nincs érintősfkja a  $Q_o$  pontban – él illetve sarokpont esetével állunk szemben – az  $S_\epsilon$   $\epsilon \rightarrow 0$  határérték nem ponttá zsugorodó félgömb. A határérték vizsgálatához alakítsuk át a fenti integrált majd alkalmazzuk a középértéktételt az első egyenlőségjel után álló második integrálra. Vegyük emellett figyelembe, hogy  $S_\epsilon$   $Q_o$ -ra vonatkozó térszögét  $\sigma$ -val jelölve  $S_\epsilon = \epsilon^2 \sigma$  a gömbfelület  $V_i$ -n belül fekvő része. Az eredményül adódó

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} &= u(Q_o) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} \\
 &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} (u(M_o) - u(Q_o)) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} \\
 &= u(Q_o) \int_{S_\epsilon} \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} + (u(M'_o) - u(Q_o)) \frac{\sigma}{4\pi}
 \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

egyenletben a jobboldal második tagjának zérus a határértéke, hiszen az  $u(M)$  folytonos és  $M'_o \rightarrow Q_o$  ha  $\epsilon \rightarrow 0$ . A jobboldalon álló első integrál értéke a (2.3.8)-ra vezető gondolatmenet ismétlésével ellenőrizhetően  $\sigma/4\pi$  ha figyelembe vesszük, hogy most  ${}_i n_k$  a gömbbe befelé – de  $V_i - V_e$ -ből kifelé – mutat. Legyen

$$c(Q_o) = \frac{\sigma}{4\pi} . \quad (2.4.17)$$

Ezzel a jelöléssel mind a (2.4.13)<sub>1</sub> mind pedig a (2.4.14)<sub>2</sub> és (2.4.15)<sub>2</sub> megtartja formailag az eredeti alakját.

2. MEGJEGYZÉS: A (2.4.14)<sub>1</sub> és (2.4.15)<sub>1</sub> egyenletekben álló

$$\int_S U(M_o, Q) {}_i t(M_o) dA_{M_o} \quad \text{és} \quad \int_S {}_i T(M_o, Q) u(M_o) dA_{M_o} \quad Q \notin S$$

függvények harmonikusak a  $Q$  változóban. Ez abból következik, hogy az  $U(M, Q)$  alapmegoldás harmonikus függvény mindkét változójában és így a  $Q$  változóban is. Az is könnyen kimutatható – a formális igazolást a 2.2 Gyakorlatra hagyjuk –, hogy az

$$\int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M$$

függvény a (2.2.15) POISSON egyenlet partikuláris megoldása. Fentiek következménye, hogy a (2.4.14)<sub>1</sub> összefüggés alapján írható

$$\begin{aligned} \tilde{u}(Q) &= u(Q) - \int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M = \\ &= \int_S [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} \quad Q \in V_i \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

egyenlettel értelmezett  $\tilde{u}(Q)$  harmonikus függvény a  $V_i$ -n.

3. MEGJEGYZÉS: Ha a  $b(M) = 0$   $M \in V_i$  és  $u(M) = u(M_o) = u_0 = \text{const.}$ , vagy ami ugyanaz ha nincs tartományi hőforráseloszlás és állandó a hőmérséklet, akkor a (2.4.18) visszaadja ezt az állandó hőmérsékletet a  $V_i$  belsejében. Ha állandó az  $u(M)$  akkor  ${}_i t(M_o) = 0$  hiszen nincs hőáramlás és így zérus a hőmérsékleti gradiens. Következésképp

$$\tilde{u}(Q) = u(Q) = - \int_S {}_i T(M_o, Q) u(M_o) dA_{M_o} = -u_0 \int_S {}_i T(M_o, Q) dA_{M_o} .$$

A (2.4.10a) és a (2.3.8) helyettesítése után valóban a kívánt

$$u(Q) = \begin{cases} u_0 & Q \in V_i \\ \frac{1}{2} u_0 & Q = Q_o \in S \\ 0 & Q \in V_e \end{cases} . \quad (2.4.19)$$

eredményt kapjuk, hiszen  $u(Q) = u_0$ , ha  $Q \in V_i$ .

## 2.5. Egyenletek külső tartományon

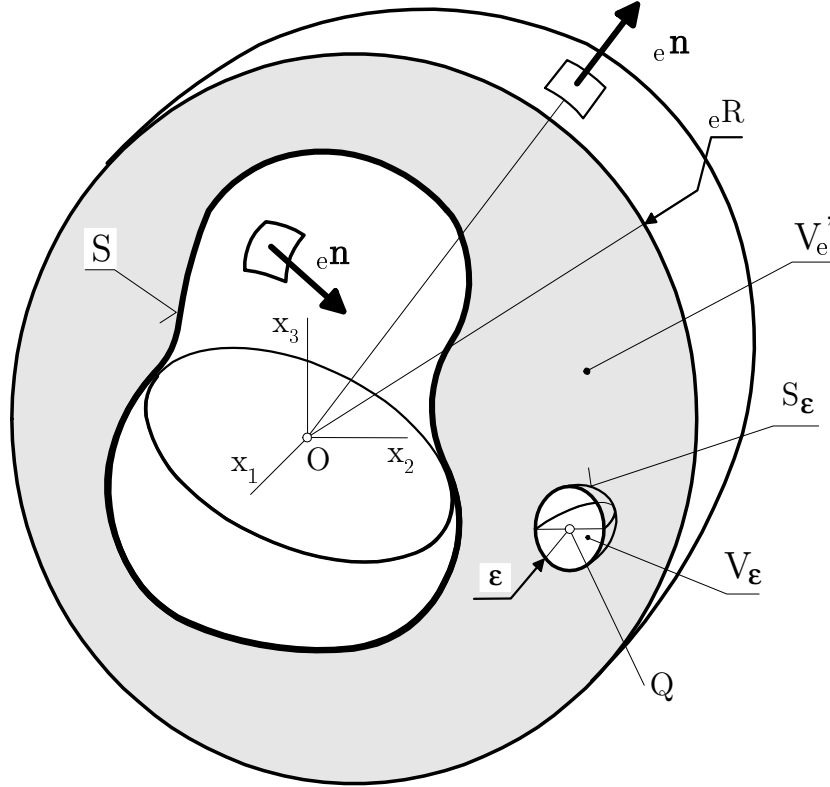
**2.5.1.** A 2.4 ábrán vázolt  $V'_e$  tartományt az  $S$  felület és az  $S$  felületet teljes egészében tartalmazó  $O$  középpontú  ${}_e R$  sugarú  $S_R$  gömb határolja. A koordinátarendszer  $O$  kezdőpontjának helye a gondolatmenetben nem játszik szerepet ezért a jobb áttekinthetőség kedvéért feltételezzük, hogy az a  $V_i$  tartomány belső pontja. Nyilvánvaló, hogy  $V'_e \rightarrow V_e$  ha  ${}_e R \rightarrow \infty$ .

A külső tartományra vonatkozó egyenletek előállítására ismét a (2.4.1) GREEN féle azonosság felhasználását igényli. A követendő gondolatmenet megegyezik a **2.4.2., ..., 2.4.6.** szakaszok gondolatmenetével, ezért a továbbiak csak az eltéréseket hangsúlyozzák.

**2.5.2.** A (2.4.1) GREEN féle azonosság felhasználása során a  $g(M) = U(M, Q)$  választás mellett azt is feltételezzük, hogy reguláris az  $u(M)$ . Ez azt jelenti, hogy az  $u(M)$  a külső tartományra vonatkozó POISSON egyenlet megoldása és hogy fennállnak az  $u(M)$  aszimptotikus viselkedésével kapcsolatos

$$\lim_{eR \rightarrow \infty} u(M_o) = \frac{A}{eR} \quad \text{és} \quad \lim_{eR \rightarrow \infty} \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = -\frac{A}{eR^2} \quad M_o \in S_R \quad (2.5.1)$$

képletek is, ahol az  $A$  állandó. Megjegyezzük, hogy a fenti feltevés háttérére a későbbiekben még visszatérünk.



2.5 ábra

A külső  $V'_e$  tartomány. A  $Q$  pont a  $V'_e$  tartományon belül található.

Az is könnyen ellenőrizhető az alapmegoldás (2.3.1) alatti értelmezésének felhasználásával, hogy

$$\lim_{eR \rightarrow \infty} U(M_o, Q) = \frac{1}{4\pi eR} + O\left(\frac{1}{eR^2}\right) \quad M_o \in S_R \quad (2.5.2a)$$

$$\lim_{eR \rightarrow \infty} \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} = -\frac{1}{4\pi eR^2} + O\left(\frac{1}{eR^3}\right) \quad M_o \in S_R \quad (2.5.2b)$$

Visszaidézve a 2.4.2. szakaszban mondottakat most is az

- (a) a  $Q$  pont a  $V'_e$  tartomány belső pontja,
- (b)  $Q = Q_o \in S$  és
- (c) a  $Q$  pont a belső  $V_i$  tartomány pontja

eseteket kell egymástól megkülönböztetni. A 2.4 ábra az (a) esetnek megfelelő viszonyokat tünteti fel. A másik két eset ábrázolásától eltekintettünk, mivel a 2.3 (a) és (b) ábrák ezek tekintetében is elegendő támpontot biztosítanak a geometriai viszonyok áttekintéséhez.

Az (a) és (b) esetekben a  $V'_e - V_\epsilon$ , a (c) esetben pedig a  $V'_e$  tartományra alkalmazzuk a (2.4.4) GREEN féle azonosságot.

A  $V'_e - V_\epsilon$  tartományt (a) esetben az  $S$ ,  $S_\epsilon$  és  $S_R$  felületek, a (b) esetben pedig – figyelemmel arra, hogy  $S'$ -t és  $S_\epsilon$ -t ugyanolyan módon értelmezzük mint azt a  $V_i$  tartomány esetén tettük – az  $S'$ ,  $S_\epsilon$  (ezek most egy zárt felületet alkotnak) és  $S_R$  felületek határolják.

A (c) esetben  $V'_e$  a vizsgált tartomány és így  $S$  és  $S_R$  a vonatkozó határfelületek.

A kívánt eredmény eléréséhez a GREEN féle azonosság alkalmazásával kapott egyenletek határértékét kell venni, ha

(a)  $\epsilon \rightarrow 0$  és  ${}_eR \rightarrow \infty$ ,

(b)  $\epsilon \rightarrow 0$  és  ${}_eR \rightarrow \infty$

illetve ha

(c)  ${}_eR \rightarrow \infty$ .

**2.5.3.** Nyilvánvaló a mondottak alapján, hogy a belső  $V_i$  tartománnyal kapcsolatos gondolatmenethez képest csak annyi az eltérés, hogy a GREEN féle azonosság alkalmazása során a vonatkozó egyenletek jobboldalán egy további, az  $S_R$  felületen vett, integrál is megjelenik:

$$I_{S_R} = \int_{S_R} \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) dA_{M_o} . \quad Q \notin S_R$$

A (2.5.1) és (2.5.2a,b) képletek felhasználásával az  $I_{S_R}$  integrál határértékére a

$$\lim_{{}_eR \rightarrow \infty} I_{S_R} = 0 \quad (2.5.3)$$

eredmény adódik, ha figyelembe vesszük, hogy elegendően nagy  ${}_eR$ -re

$$\lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \left| \int_{S_R} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} \right| \leq \lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \frac{A}{{}_eR} = 0$$

és

$$\lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \left| \int_{S_R} U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} \right| \leq \lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \frac{A}{{}_eR} = 0 .$$

**2.5.4.** Legyen  $u(M)$  a

$$\Delta_M u(M) + b(M) = 0 \quad M \in V_e \quad (2.5.4)$$

differenciálegyenlet egy, egyelőre nem meghatározott peremérték-feladatának a megoldása, ahol a folytonos  $b(M)$  függvény csak a  $V_e$  tartomány egy a végesben fekvő  $V_b$  résztartományán különbözik zérustól. Kimutatható – a részleteket illetően a 2.4 Gyakorlatra utalunk –, hogy ez esetben indokolt a (2.5.1) regularitási feltételek alkalmazása.

A **2.5.1.**, ..., **2.5.4.** szakaszok alapján alkalmazva a GREEN féle azonosságot a külső tartománnyal kapcsolatos (a), (b) és (c) esetekre a

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_S [U(M_o, Q) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} \\ &\quad + \int_{V_e} U(M, Q) b(M) dV_M \quad Q \in V_e \\ c(Q_o) u(Q_o) &= \int_S [U(M_o, Q_o) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q_o) u(M_o)] dA_{M_o} \\ &\quad + \int_{V_e} U(M, Q_o) b(M) dV_M \quad Q = Q_o \in S \\ 0 &= \int_S [U(M_o, Q) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} \\ &\quad + \int_{V_e} U(M, Q) b(M) dV_M \quad Q \in V_i \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

egyenleteket, azaz a (2.4.14)<sub>1,2,3</sub> GREEN féle képletek külső tartományra vonatkozó analogonjait kapjuk.

Ha a  $b(M) = 0$ , akkor a fenti képletekből az

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_S [U(M_o, Q) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} & Q \in V_e \\ c(Q_o)u(Q_o) &= \int_S [U(M_o, Q_o) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q_o) u(M_o)] dA_{M_o} & Q = Q_o \in S \\ 0 &= \int_S [U(M_o, Q) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} & Q \in V_i \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

egyenletek következnek. Ezek az egyenletek a (2.4.15) egyenletek külső tartományra vonatkozó analógjai.

1. MEGJEGYZÉS: A (2.4.18) egyenlet párja átrendezéssel adódik a (2.5.5)<sub>1</sub> képletből:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(Q) &= u(Q) - \int_{V_e} U(M, Q) b(M) dV_M = \\ &= \int_S [U(M_o, Q) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} & Q \in V_e \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Nem nehéz belátni a **2.4.6** szakasz 2. MEGJEGYZÉSÉNEK visszaidézésével, hogy az  $\tilde{u}(Q)$  harmonikus függvény reguláris a  $V_e$  tartományon.

2. MEGJEGYZÉS: Ha  $b(M) = 0$   $M \in V_e$  és  $u(M) = u_0 = \text{const.}$ , akkor, a hőmérsékleti analógia szóhasználatával élve, nincs hőforráseloszlás és állandó a hőmérséklet a  $V_e$  belsejében. Következésképp  ${}_e t(M_o) = 0$ . Ennek ellenére nem várható, hogy a (2.5.7), vagy ami ugyanaz a (2.5.5)<sub>1</sub>, visszaadja az állandó hőmérsékletet, mivel ez a függvény nem reguláris. Visszaidézve azonban, hogy a (2.5.5)<sub>1</sub> az

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_S [{}_e t(M_o) U(M_o, Q) - u(M_o) {}_e T(M_o, Q)] dA_{M_o} + \\ &+ \lim_{{}_e R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{S_R} [{}_e t(M_o) U(M_o, Q) - u(M_o) {}_e T(M_o, Q)] dA_{M_o} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{V'_e} b(M) U(M, Q) dV_M \right\} & Q \in V'_e \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

kifejezés határértéke azt várjuk, hogy ez az egyenlet visszaadja az állandó hőmérsékleteloszlást. A  $b(M) = 0$  és  ${}_e t(M_o) = 0$  értékek helyettesítése után

$$u(Q) = -u_0 \left[ \int_S {}_e T(M_o, Q) dA_{M_o} + \lim_{{}_e R \rightarrow \infty} \int_{S_R} {}_e T(M_o, Q) dA_{M_o} \right]. \quad Q \in V'_e \quad (2.5.9)$$

Figyelembe véve, hogy  ${}_e T(M_o, Q) = -{}_i T(M_o, Q)$  ha  $M_o \in S$  és  ${}_e T(M_o, Q) = {}_i T(M_o, Q)$  ha  $M_o \in S_R$  továbbá, hogy a  $Q$  pont az  $S_R$  felületen belül fekszik, majd kihasználva a (2.4.1)<sub>1</sub> valamint a (2.3.8) összefüggéseket az

$$u(Q) = \begin{cases} u_0 & Q \in V_e \\ \frac{1}{2} u_0 & Q = Q_o \in S \\ 0 & Q \in V_i \end{cases} \quad (2.5.10)$$

eredményt kapjuk. A (2.4.1)<sub>1</sub> egyenlet valóban azt mutatja, hogy állandó az  $u(Q)$  a  $V_e$  tartományban.

## 2.6. A direkt módszer integrálegyenletei

**2.6.1.** Először a belső  $V_i$  tartománnyal kapcsolatos egyenleteket tekintjük át.

A (2.4.14)<sub>1</sub> egyenlet szerint kvadratúrák segítségével számítható a (2.2.15) POISSON egyenlet  $u(Q)$  megoldása – most a  $Q$  pont a futópont – ha a test  $S$  határfelületének minden egyes

pontjában ismeretes a meghatározandó függvény és normálirányú deriváltja, azaz ha ismeretesek az

$${}_i u(M_o) \quad \text{és} \quad {}_i t(M_o) \quad M_o \in S$$

függvények, ahol – hangsúlyozni kívánva, hogy belső peremérték-feladatról van szó – az  $u$  betű elé is kitettük az  $i$  indexet.

Ez az állítás a (2.4.14)<sub>1</sub> egyenlet  $b(M) = 0$  esetre vonatkozó párjával a (2.4.15)<sub>1</sub> egyenlettel kapcsolatosan úgy fogalmazható meg, hogy az  $u(Q)$  harmonikus függvény a fenti peremértékek birtokában kvadraturák segítségével állítható elő.

Mivel az  ${}_i u(M_o)$  és az  ${}_i t(M_o)$  függvények egyidejűleg nem írhatók elő – a vizsgált peremfeltételek körét a **2.2.2.** szakasz tekinti át – a (2.4.14)<sub>1</sub> és (2.4.15)<sub>1</sub> egyenletek első pillantásra csak elvi jelentőségűnek tűnnek.

Az ismeretlen peremértékek azonban meghatározhatók, ha a (2.4.14)<sub>2</sub> illetve a (2.4.15)<sub>2</sub> egyenletet mint integrálegyenletet, alkalmasan választott numerikus módszer segítségével megoldjuk.

**2.6.2.** A megoldás birtokában mind  $u(M_o)$  mind pedig  ${}_i t(M_o)$  ismertnek tekinthető és így az  $u(Q)$  skalármező valóban számítható a (2.4.14)<sub>1</sub> vagy a (2.4.15)<sub>1</sub> egyenlet felhasználásával, azaz kvadraturák segítségével. Az  $u(Q)$  gradiensek számítására a (2.4.14)<sub>1</sub> deriválásával adódó

$$\boxed{\begin{aligned} u(Q) \overset{Q}{\nabla}_l &= \int_S \left[ \left( U(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_l \right) {}_i t(M_o) - \left( {}_i T(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_l \right) u(M_o) \right] dA_{M_o} \\ &+ \int_{V_i} \left( U(M, Q) \overset{Q}{\nabla}_l \right) b(M) dV_M \end{aligned}} \quad Q \in V_i \quad (2.6.1)$$

képlet nyújt módot, ahol a (2.3.1), (2.4.10a) és (2.3.3)<sub>2</sub> összefüggésekre is tekintettel

$$U(M, Q) \overset{Q}{\nabla}_l = \frac{r_l}{4\pi R^3} \quad \text{és} \quad {}_i T(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_l = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{{}_i n_l}{R^3} - 3 \frac{{}_i n_k r_k r_l}{R^5} \right). \quad (2.6.2)$$

**2.6.3.** A külső  $V_e$  tartomány esetén az

$${}_e u(M_o) \quad \text{és} \quad {}_e t(M_o) \quad M_o \in S$$

peremértékek ismeretében a (2.5.5)<sub>1</sub> illetve (2.5.6)<sub>1</sub> egyenletekből – vegyük észre, hogy az utóbbi esetben  $b(M) = 0$   $M \in V_e$  – határozható meg a (2.5.4) differenciálegyenlet megoldása. Az ismeretlen peremértékek meghatározásához pedig a (2.5.5)<sub>2</sub> illetve (2.5.6)<sub>2</sub> integrálegyenletek szolgálnak. A (2.6.1) és (2.6.2) képletek analogonjai oly módon kaphatók meg, hogy az említett képletek mindegyikében  $e$  betűt írunk az  $i$  index helyére. A vonatkozó egyenletek részletes kírásától eltekintünk.

**2.6.4.** A belső, illetve külső tartománnyal kapcsolatos ismeretlen peremértékek meghatározása, amint fentebb már rámutattunk, a (2.4.14)<sub>2</sub> és (2.5.5)<sub>2</sub> peremintegrálegyenletek megoldását igényli. Felmerül a kérdés, vajon az így meghatározott peremértékek kötelesek-e valamiféle további feltételnek eleget tenni. Alábbiak, felhasználva a stacionér hővezetési feladat terminológiáját, ezt a kérdést kísérik meg tisztázni.

A belső  $V_i$  tartomány hőegyensúlyban kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy a  $V_i$  tartomány térfogatán és  $S$  határfelületén közölt hőmennyiség összege zérus. Matematikailag – feltételezve, hogy a  $k$  hővezetési tényező egységnyi – az

$$\int_S {}_i t(M_o) dA_{M_o} + \int_{V_i} b(M) dV_M = 0 \quad (2.6.3)$$

egyensúlyi egyenletnek kell teljesülnie. Ez egyben azt is jelenti, hogy nem lehet tetszőleges az  ${}_i t(M_o)$  hőáram. Mivel a direkt módszer egyenleteinek levezetése során a differenciálhatóság mellett azt is feltételeztük, hogy a pontbeli hőegyensúlyt kifejező POISSON egyenlet megoldása az  $u(M)$  az várható, hogy

1. DIRICHLET és vegyes peremértékfeladatok esetén, amikor is ismeretlen az  ${}_it(M_o)$  az  $S$ -en illetve az  $S_u$ -n, az  ${}_it(M_o)$   $M_o \in S$  eleve teljesíti a (2.6.3) egyensúlyi egyenletet. Az  $u(M)$  pedig, a vonatkozó peremfeltételek miatt, egyértelműen meghatározott.
2. NEUMANN feladat esetén előre megadott függvény az  ${}_it(M_o)$ , hiszen fenn kell állnia az  ${}_it(M_o) = {}_i\hat{t}(M_o)$   $M_o \in S$  peremfeltételnek. Ez azt jelenti, hogy előre kell teljesíteni a (2.6.3) feltételt. Ugyanakkor zérus az  $u(M) =$  állandó függvény gradiense, amely így nem okoz hőáramot. Más szavakkal a megoldás csak egy tetszőleges állandó erejéig meghatározott.

Külső peremértékfeladat esetén, visszaidézve a (2.5.5) egyenletek levezetésében fontos szerepet játszó  $I_{S_R}$  integrál szerepét, az

$$\underbrace{\int_S {}_et(M_o) dA_{M_o} + \int_{V_b} b(M) dV_M}_{\text{egyenlet fejezi ki a hőegyensúlyt.}} + \lim_{\epsilon R \rightarrow \infty} \int_{S_R} {}_et(M_o) dA_{M_o} = 0 \quad (2.6.4)$$

egyenlet fejezi ki a hőegyensúlyt. Mivel az utolsó integrál nem szükségképpen zérus –  $u(M)$  regularitása miatt  ${}_et(M) \sim O(1/\epsilon R^2)$  és  $dA_{M_o} = \epsilon R^2 d\sigma$ , ahol  $d\sigma$  a  $dA_{M_o}$  látószöge – a kapcsos zárójellel megjelölt tagok összege sem szükségképp zérus. A mondottak alapján várható, hogy

1. Mind DIRICHLET, mind NEUMANN, mind pedig vegyes peremértékfeladatok esetén, teljesül a (2.6.4). Más szavakkal NEUMANN feladat esetén sem köteles előzetes feltételeknek eleget tenni az  ${}_e\hat{t}(M)$ .
2. A regularitás miatt az  $u(M)$  a NEUMANN feladat esetén is egyértelműen meghatározott. Mindíg célszerű a fentieket szem előtt tartani a numerikus megoldás során.

## 2.7. Az indirekt módszer integrálegyenletei

**2.7.1.** Először ismét a belső  $V_i$  tartományra fordítjuk a figyelmet.

Legyen

$$\phi(M_o) = {}_it(M_o) - {}_et(M_o) \quad M_o \in S \quad (2.7.1a)$$

és

$$\psi(M_o) = {}_iu(M_o) + {}_eu(M_o). \quad M_o \in S \quad (2.7.1b)$$

A (2.4.18) és (2.5.6)<sub>3</sub> egyenletek különbségét véve és felhasználva a (2.7.1a,b) alatti jelöléseket az

$$\begin{aligned} \tilde{u}(Q) &= u(Q) - \int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M = \\ &= \int_S U(M_o, Q) \phi(M_o) dA_{M_o} - \int_S {}_iT(M_o, Q) \psi(M_o) dA_{M_o}. \quad Q \in V_i \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

összefüggést kapjuk.

1. MEGJEGYZÉS: A (2.7.2) képletben álló

$$\mathcal{V}(Q) = \int_S U(M_o, Q) \phi(M_o) dA_{M_o} \quad \text{illetve} \quad \mathcal{W}(Q) = \int_S {}_iT(M_o, Q) \psi(M_o) dA_{M_o} \quad (2.7.3)$$

integrálok rendre az egyszerű réteg, illetve a kettős réteg potenciálját értelmezik. Az elnevezés háttérét illetően a következők érdemelnek említést:

- (a) Legyen  $\phi(M_o)$  az  $S$  felület  $M_o$  pontjában az egységnyi felületelemre vonatkoztatott tömeg. Ez esetben a (2.7.3)<sub>1</sub> integrál az  $S$  felületen tekintett  $\phi(M_o)$  sűrűségű tömegeloszlás gravitációs potenciálja. A  $\phi(M_o)$  függvényt a vizsgált fizikai feladat jellegétől függően fiktív forrassűrűségnek, fiktív hőforrassűrűségnek stb. szokás nevezni. Az egyszerűség kedvéért itt és a továbbiakban a sűrűségfüggvény elnevezést részesítjük előnyben.
- (b) Legyenek az  $S$  felülettől  $\pm\epsilon$  távolságra — a távolságot a felület normálisa mentén mérjük —  $\pm m$  nagyságú {tömegek} [elektromos töltések] elhelyezve. Tételezzük fel, hogy a

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} 2m\epsilon$$

határérték véges. Ha ez a {tömegeloszlás} [töltéseloszlás] felületegységre is vonatkozatható, akkor jelölje  $\psi(M_o)$  a megfelelő sűrűségfüggvényt. Kimutatható, lásd pl. [12, 66-68 old.], hogy a kettős réteg potenciálja a fenti {tömegeloszláshoz} [töltéseloszláshoz] tartozó {gravitációs potenciál} [elektromos térerősség].

A 2.4.6. szakasz 2. MEGJEGYZÉSE alapján azonnal adódik, hogy mind az egyszerű mind pedig a kettős réteg potenciálja harmonikus, ha  $Q \neq M_o$ .

2. MEGJEGYZÉS: Az egyszerű és kettős réteg potenciálját értelmező (2.7.3) képletekben az  $S$  integrálási tartomány nyitott felület is lehet.

3. MEGJEGYZÉS: Tekintettel a (2.3.1) és (2.4.10a) képletekre kézenfekvő a következtetés, hogy mind az egyszerű, mind a kettős réteg potenciálja tetszés szerinti rendben differenciálható, ha  $Q \in V_i$  vagy  $Q \in V_e$ .

4. MEGJEGYZÉS: Legyen  $R_Q = |\mathbf{r}_Q|$ . A (2.3.1) és (2.7.3) értelmező egyenletek egybevetéséből  $R_Q \rightarrow \infty$  esetén az egyszerű és kettős réteg potenciáljának végtelenbeli viselkedésével kapcsolatos

$$\mathcal{V}(Q) = \frac{1}{R_Q} \int_S \phi(M_o) dA_{M_o} + O\left(\frac{1}{R_Q^2}\right) \quad (2.7.4a)$$

és

$$\mathcal{W}(Q) = O\left(\frac{1}{R_Q^2}\right) \quad (2.7.4b)$$

képletek következnek.

5. MEGJEGYZÉS: Legyen

$${}_i\mathcal{V}(Q_o) = \lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_o} \mathcal{V}(Q) \quad \text{és} \quad {}_e\mathcal{V}(Q_o) = \lim_{Q \in V_e \rightarrow Q_o} \mathcal{V}(Q) \quad (2.7.5)$$

az egyszerű réteg potenciáljának belülről, illetve kívülről vett határértéke az  $S$  felületen. Könnyen belátható a (2.3.1) és (2.7.3)<sub>1</sub> segítségével, hogy az egyszerű réteg potenciálja folytonos az  $S$  felületen történő áthaladás során. Következésképp

$${}_i\mathcal{V}(Q_o) = \mathcal{V}(Q_o) = {}_e\mathcal{V}(Q_o). \quad (2.7.6)$$

A folytonosság formális igazolását a 2.7 Gyakorlatra hagyjuk.

6. MEGJEGYZÉS: A jelen megjegyzés azt a kérdést vizsgálja hogyan viselkedik az egyszerű réteg potenciáljának normálirányú deriváltja az  $S$  felületen történő áthaladás során. Legyen  $Q$  a  $Q_o$  pont normálisán és a  $V_i$  belsejében fekvő pont. Az  $\mathbf{n}_Q = {}_i\mathbf{n}_{Q_o}$  vektort a  $Q$  ponthoz kötjük. A (2.4.10a) és a (2.3.8)<sub>1</sub> összefüggések felhasználásával – lépésenként végezve az átalakításokat, annak érdekében, hogy a (2.3.8)<sub>1</sub> integrál közvetlenül helyettesíthető a határérték képzés pedig lokalizálással felcserélhető legyen – írható, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_i n_{Q_o}} &= \lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_o} \int_S \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_Q} \phi(M_o) dA_{M_o} \\ &= \lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_o} \left\{ \int_S \left[ \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_Q} + {}_i T(M_o, Q) \right] \phi(M_o) dA_{M_o} \right. \\ &\quad \left. - \int_S {}_i T(M_o, Q) [\phi(M_o) - \phi(Q_o)] dA_{M_o} - \int_S {}_i T(M_o, Q) dA_{M_o} \phi(Q_o) \right\} \\ &= \phi(Q_o) + \lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_o} \left\{ \int_S \frac{r_k}{4\pi R^3(M_o, Q)} [{}_i n_k(Q) - {}_i n_k(M_o)] \phi(M_o) dA_{M_o} \right. \\ &\quad \left. + \int_S \frac{r_k}{4\pi R^3(M_o, Q)} {}_i n_k(M_o) [\phi(M_o) - \phi(Q_o)] dA_{M_o} \right\} \quad (2.7.7) \end{aligned}$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy a kapcsos zárójelben álló felületi integrálok határértéke és a  $Q = Q_o$  helyen vett helyettesítési értéke megegyezik. A középső két integrál összege természetesen akkor is zérus, ha a helyettesítési értékeket tekintjük. A (2.4.10a) és (2.3.8)<sub>2</sub> képletek

egybevetéséből pedig az is látszik, hogy az összevonás utáni utolsó integrálnak  $-\frac{1}{2}$  az értéke. Legyen

$${}_i\check{T}(M, Q_\circ) = {}_i n_k \left( \nabla_k U(M, Q) \right) \Big|_{Q_\circ} = \frac{\partial U(M, Q_\circ)}{\partial {}_i n_{Q_\circ}} = \frac{{}_i n_k(Q_\circ) r_k}{4\pi R^3} \quad M \neq Q_\circ \quad (2.7.8a)$$

és

$${}_e\check{T}(M, Q_\circ) = {}_e n_k \left( \nabla_k U(M, Q) \right) \Big|_{Q_\circ} = \frac{\partial U(M, Q_\circ)}{\partial {}_e n_{Q_\circ}} = \frac{{}_e n_k(Q_\circ) r_k}{4\pi R^3}. \quad M \neq Q_\circ \quad (2.7.8b)$$

Nyilvánvaló, hogy

$${}_i\check{T}(M_\circ, Q_\circ) + {}_e\check{T}(M_\circ, Q_\circ) = 0. \quad M_\circ, Q_\circ \in S \quad M_\circ \neq Q_\circ \quad (2.7.9)$$

A lehetséges összevonások elvégzése után a (2.7.7) egyenletből a

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_i n_{Q_\circ}} = \frac{1}{2} \phi(Q_\circ) + \int_S {}_i\check{T}(M_\circ, Q_\circ) \phi(M_\circ) dA_{M_\circ} \quad (2.7.10a)$$

összefüggést kapjuk. A fenti képletben az  ${}_i\check{T}(M_\circ, Q_\circ)$  derivált szingularitása miatt, ez a szingularitás a  $M_\circ = Q_\circ$  pontban jelentkezik, főértékben kell venni a felületi integrált. Vegyük észre, hogy az  $\mathbf{n}_Q = {}_i\mathbf{n}_{Q_\circ}$  feltétel helyett a gyengébb

$$\lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_\circ} \mathbf{n}_Q = {}_i\mathbf{n}_{Q_\circ}$$

feltétel is elegendő és a  $Q$ -nak sem szükséges az  ${}_i\mathbf{n}_{Q_\circ}$  tartóegyenésén feküdnie.

Ugyanígy módon igazolható, hogy

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_e n_{Q_\circ}} = \frac{1}{2} \phi(Q_\circ) + \int_S {}_e\check{T}(M_\circ, Q_\circ) \phi(M_\circ) dA_{M_\circ}. \quad (2.7.10b)$$

A (2.7.10a) és (2.7.10b) egyenletek összegét véve és a (2.7.9)-et is kihasználva

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_i n_{Q_\circ}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_e n_{Q_\circ}} = \phi(Q_\circ) \quad Q_\circ \in S \quad (2.7.11)$$

az eredmény. Ez a képlet világosan mutatja, hogy az egyszerű réteg potenciáljának normálirányú deriváltja nem folytonos a  $Q_\circ \in S$  pontban.

7. MEGJEGYZÉS: Legyen

$${}_i\mathcal{W}(Q_\circ) = \lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_\circ} \mathcal{W}(Q) \quad \text{és} \quad {}_e\mathcal{W}(Q_\circ) = \lim_{Q \in V_e \rightarrow Q_\circ} \mathcal{W}(Q) \quad (2.7.12)$$

ahol  $Q_\circ$  az  $S$  felület egy tetszőleges, de rögzített pontja. Tegyük fel hogy  $\psi(Q_\circ) = 0$ . Könnyű meggyőződni arról, felhasználva a (2.7.3)<sub>2</sub> értelmező egyenletet és a (2.4.10a) képletet, hogy ez esetben

$${}_i\mathcal{W}(Q_\circ) = \mathcal{W}(Q_\circ) = {}_e\mathcal{W}(Q_\circ). \quad Q_\circ \in S \quad (2.7.13)$$

Szavakban:  $\psi(Q_\circ) = 0$ -ra folytonos a kettős réteg potenciálja az  $S$  felületen történő áthaladás során.

8. MEGJEGYZÉS: A kettősréteg potenciáljának viselkedésére vonatkozó utolsó megjegyzésünk azt a kérdést vizsgálja hogyan viselkedik  $\mathcal{W}$  az  $S$  felületen történő áthaladáskor ha  $\psi(Q_\circ) \neq 0$ . A (2.7.3)<sub>2</sub> egyenlet alkalmas bővítésével írható, hogy

$$\mathcal{W}(Q) = \int_S {}_i T(M_\circ, Q) [\psi(M_\circ) - \psi(Q_\circ)] dA_{M_\circ} + \int_S {}_i T(M_\circ, Q) dA_{M_\circ} \psi(Q_\circ). \quad (2.7.14)$$

Az utóbbi egyenlet jobboldalán a

$$\psi_*(M_\circ) = \psi(M_\circ) - \psi(Q_\circ)$$

különbség a sűrűségfüggvény az első integrálban, és ez eltűnik az  $M_\circ = Q_\circ$  pontban. Az előző azaz a 7. MEGJEGYZÉS fényében ez egyuttal azt is jelenti, hogy a (2.7.14) egyenlet jobboldalán

álló első integrál folytonos az  $S$  felületen történő áthaladás során. A jobboldalon álló második integrál pedig a (2.4.10a) helyettesítése után a (2.3.8) integrált adja. Mondottak figyelembevételével és annak a körülménynek a kihasználásával, hogy a jobboldalon álló első integrálban a  $Q_o$ -ra történő lokalizálás után megjelenik a  $(2.3.8)_2$ , a (2.7.14) egyenletből a

$$\begin{aligned} {}_i\mathcal{W}(Q_o) &= \mathcal{W}(Q_o) - \frac{1}{2}\psi(Q_o) \\ {}_e\mathcal{W}(Q_o) &= \mathcal{W}(Q_o) + \frac{1}{2}\psi(Q_o) \end{aligned} \quad Q_o \in S \quad (2.7.15)$$

összefüggések következnek.

**2.7.2.** Ismeretes, hogy a LAPLACE egyenlettel kapcsolatos külső DIRICHLET feladatnak bármilyen  ${}_e u(M_o)$  esetén van megoldása. Ez egyben azt is jelenti, hogy az

$${}_e u(M_o) = {}_i u(M_o)$$

választás ugyancsak lehetséges. Ez esetben azonban egyszerűsödik a (2.7.2) egyenlet:

$$u(Q) = \int_S U(M_o, Q) \phi(M_o) dA_{M_o} + \int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M. \quad Q \in V_i \quad (2.7.16)$$

A (2.7.16) egyenletnek szemléletes jelentés tulajdonítható ha a  $\phi(M_o)$ -át az  $S$  felületen megoszló fiktív hőforrassűrűségnek, a  $b(M_o)$ -át pedig ismert térfogati hőforrassűrűségnek tekintjük, továbbá ha a hővezetési tényező  $k = 1$ . Ez esetben ugyanis, amint az könnyen kiolvasható a (2.3.9) egyenletből, az  $U(M, Q)$  alapgazdóság az  $M$  pont hőmérséklete ha a  $Q$  pontban egységnyi intenzitású hőforrás működik. Az  $U(M, Q)$  alapgazdóság **2.3.1.** szakaszban részletezett szimmetriatulajdonságait kihasználva úgy is fogalmazhatunk, hogy  $U(M, Q)$  a  $Q$  pont hőmérséklete, ha az egységnyi intenzitású hőforrás az  $M$  pontban működik. Az utóbbi értelmezés alapján a (2.7.16) egyenlet, összhangban a szuperpozíció elvével, a  $Q$  pont  $u(Q)$  hőmérsékletét adja és ez a hőmérséklet a test határfelületén és térfogatán működő  $\phi(M_o)$  és  $b(M)$  hőforráseloszlás hatására alakul ki.

Mivel a (2.7.16) egyenlet differenciálható a  $Q$  változó szerint az  $u(Q)$  mező gradiensek számítására a

$$\begin{aligned} u(Q) \nabla_l^Q &= \int_S \left( U(M_o, Q) \nabla_l^Q \right) \phi(M_o) dA_{M_o} \\ &\quad + \int_{V_i} \left( U(M, Q) \nabla_l^Q \right) b(M) dV_M \quad Q \in V_i \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

összefüggés írható fel.

1. MEGJEGYZÉS: A (2.7.16) egyenlet a  $(2.4.14)_1$  a (2.7.17) egyenlet pedig a (2.6.1) egyenlet párja. A felsorolt egyenletekben álló ismeretlen mezők tekintetében azonban különbség van, hiszen a  $(2.4.14)_1$ , illetve a (2.6.1) egyenletekben

$$u(M_o) \quad M_o \in S_i \quad \text{és} \quad {}_i t(M_o) \quad M_o \in S_u$$

a (2.7.16) és (2.7.17) egyenletekben pedig

$$\phi(M_o) \quad M_o \in S$$

az ismeretlen. Kitűnik fentiekből, hogy az első esetben a vonatkozó peremértékfeladat változóinak peremen vett értékei — az  $u(M)$  mező és annak normálirányú deriváltja —, a második esetben viszont a peremértékfeladathoz tartozó fiktív  $\phi(M_o)$  sűrűségfüggvény az ismeretlen. A (2.7.1a) értelmező egyenletet visszaidézve adódik azonban, hogy a  $\phi(M_o)$  mező nem független az előzőektől, hiszen a  ${}_i t(M_o)$  és  ${}_e t(M_o)$  deriváltak különbségeként számítható.

2. MEGJEGYZÉS: A (2.7.16) és (2.7.17) egyenletek felhasználásával — feltéve, hogy ismeretes az adott peremértékfeladathoz tartozó  $\phi(M_o)$  sűrűségfüggvény — tetszőleges  $Q \in V_i$  pontban kvadraturák segítségével számítható az ismeretlen  $u(Q)$  mező és gradiense.

**2.7.3.** Az ismeretlen  $\phi(M_o)$  sűrűségfüggvény számítására úgy kaphatunk egyenleteket, hogy a (2.7.16) és (2.7.17) egyenletek határértékeit vesszük, ha  $Q \rightarrow Q_o$ . Figyelembe véve, hogy a **2.7.1.** szakasz 5. MEGJEGYZÉSE szerint az egyszerű réteg potenciálja folytonos az  $S$  felületen történő áthaladás során a (2.7.3)<sub>1</sub>, (2.7.6) és (2.7.16) felhasználásával, tekintettel a (2.2.7) peremfeltételre is, azt kapjuk, hogy az  $S_u$  jelű peremrészén fenn kell állnia a (2.7.18)<sub>1</sub> egyenletnek. Ez az egyenlet csak a  $\phi(M_o)$ -t tartalmazza ismeretlenként.

További egyenlethez jutunk, ha az  $u(Q)$  gradiensét adó (2.7.17) összefüggést megszorozzuk skalárisan  $\mathbf{n}_Q = {}_i\mathbf{n}_{Q_o}$ -val és a kapott kifejezés határértékét vesszük, ha  $Q \rightarrow Q_o \in S_t$ . Az eredmény baloldala, az  $u(Q)$  normálirányú deriváltja, amint az a (2.2.8) peremfeltételből kitűnik, előírt. A jobboldalon álló első integrál határértékét a **2.7.2.** szakasz 6. MEGJEGYZÉSE alapján a (2.7.10a) képlet adja. A jobboldalon álló második integrál határértéke pedig megegyezik, nyilvánvalóan, a helyettesítési értékével és írásbeli egyszerűsödés is elérhető, ha alkalmazzuk a (2.7.8a) jelölést. Az így adódó (2.7.18)<sub>2</sub> egyenlet ismét csak a  $\phi(M_o)$  sűrűségfüggvényt tartalmazza ismeretlenként.

Fentiek fényében a megoldás első lépésben az

$$\begin{aligned} {}_i\hat{u}(Q_o) &= \int_S U(M_o, Q_o) \phi(M_o) dA_{M_o} \\ &\quad + \int_{V_i} U(M, Q_o) b(M) dV_M \quad Q_o \in S_u \\ {}_i\hat{t}(Q_o) &= \frac{1}{2} \phi(Q_o) + \int_S {}_i\check{T}(M_o, Q_o) \phi(M_o) dA_{M_o} \\ &\quad + \int_{V_i} {}_i\check{T}(M, Q_o) b(M) dV_M \quad Q_o \in S_t \end{aligned} \quad (2.7.18)$$

integrálegyenleteket, ezek az indirekt módszer integrálegyenletei, kell  $\phi(M_o)$ -ra numerikusan megoldani. A  $\phi(M_o)$  sűrűségfüggvény ismeretében a (2.7.18)<sub>1</sub> egyenlet jobboldala az ismeretlen  $u(Q)$ -t adja ha  $Q_o \in S_t$ . Hasonló módon, az ismeretlen függvény normálirányú deriváltja a (2.7.18)<sub>2</sub> egyenlet jobboldalának segítségével számítható, ha a  $Q_o \in S_u$ .

Ez az indirekt módszer fő hátránya a direkt módszerrel szemben, hiszen ott ezek a mezők a vonatkozó (2.4.14)<sub>2</sub> integrálegyenlet megoldásai és így meghatározásuk nem igényli további kvadraturák végrehajtását.

A belső pontokban tekintett értékek számítása, amint azt a vonatkozó egyenletek kapcsán már említettük a **2.7.2.** szakasz 2. MEGJEGYZÉSÉBEN, a (2.7.16) és (2.7.17) felhasználásával történhet.

1. MEGJEGYZÉS: DIRICHLET feladat esetén  $S_t = 0$ . Ezen körülmény kihasználásával és a (2.4.18) egyenlettel összhangban álló

$${}_i\tilde{u}(Q_o) = {}_i\hat{u}(Q_o) - \int_{V_i} U(M, Q_o) b(M) dV_M \quad Q_o \in S \quad (2.7.19)$$

jelölés bevezetésével az

$$\int_S U(M_o, Q_o) \phi(M_o) dA_{M_o} = {}_i\tilde{u}(Q_o) \quad Q_o \in S \quad (2.7.20)$$

elsőfajú integrálegyenlet következik a megmaradó (2.7.18)<sub>1</sub> egyenletből [14].

2. MEGJEGYZÉS: NEUMAN feladat esetén az  $S_u = 0$  és így (2.7.18)<sub>2</sub>-ből, bevezetve az

$${}_i\tilde{t}(Q_o) = {}_i\hat{t}(Q_o) - \int_{V_i} {}_i\check{T}(M, Q_o) b(M) dV_M \quad Q_o \in S \quad (2.7.21)$$

jelölést, az

$$\frac{1}{2} \phi(Q_o) + \int_S {}_i\check{T}(M_o, Q_o) \phi(M_o) dA_{M_o} = {}_i\tilde{t}(Q_o) \quad Q_o \in S \quad (2.7.22)$$

másodfajú integrálegyenlet adódik a (2.7.18)<sub>2</sub>-ből. Bár az  ${}_i\check{T}(M_o, Q_o)$  magfüggvény gyengén szinguláris és így kiesik a klasszikus FREDHOLM elmélet érvényességi köréből POGORZELSKI [15]

és MIKHLIN [16] igazolta, hogy a FREDHOLM elmélet létezésével kapcsolatos eredményei és tételei gyengén szinguláris magokra is érvényesek.

**2.7.4.** A külső  $V_e$  tartománnyal kapcsolatos peremérték-feladatok esetén csak annyiban változnak a direkt módszer (2.7.18)<sub>1,2</sub> egyenletei, hogy a tartomány jellegére és egyúttal a külső normálisra utaló  $i$  index helyére  $e$  kerül. Ez okból eltekintünk az egyenletek részletes kiírásától.

## 2.8. Síkbeli feladatok, alapmegoldás

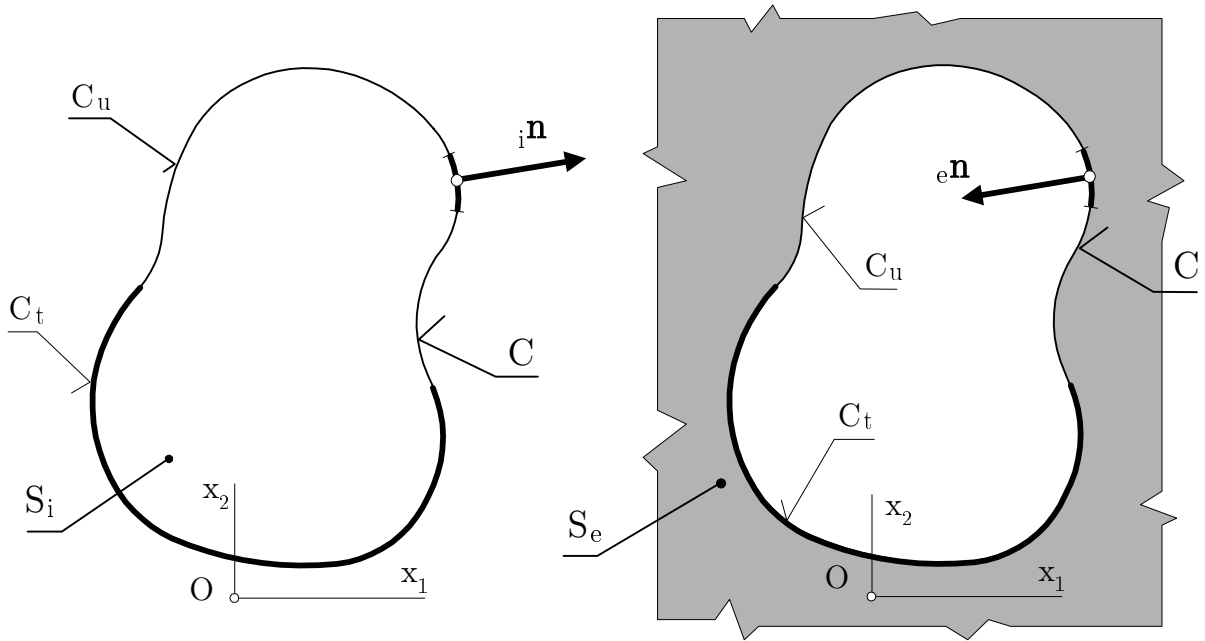
**2.8.1.** Az alábbiakban részletezett jelölések és jelölésbeli megállapodások teljes összhangban vannak a korábbiakkal, külön is kiemelve ezek közül a **2.2.** szakaszban lerögzítetteket.

**2.8.2.** Legyen  $S_i$  az  $x_1, x_2$  koordinátasík végesben fekvő, szakaszonként síma ívekkel határolt és egyszeresen összefüggő tartománya. Az  $S_i$  tartomány konturgörbét  $C$  jelöli. A  $C$  konturgörbe a  $C_u$  és  $C_t$  jelű részekre — ezek mindegyike egy nyitott ív, vagy nyitott ívek uniója — bontott:

$$C = C_u \cup C_t \quad (2.8.1)$$

ahol vagy  $C_u$  vagy  $C_t$  speciális esetben zérus hosszúságú is lehet.

Az  $S_e$  tartomány az  $S_i$  tartomány  $x_1, x_2$  síkból történő kivágásával kapható meg és a végesben fekvő  $C$  görbe belső konturgörbéje. Az  $S_i$  és az  $S_e$  tartományok külső normálisait, összhangban a korábbiakkal,  $i\mathbf{n} = -e\mathbf{n}$  jelöli.



2.5 ábra

Egyetlen zárt görbével határolt belső (a) és külső (b) tartomány az  $x_1, x_2$  koordinátasíkon

Az  $M$  és  $Q$  pontok koordinátáit  $x_1, x_2$  és  $\xi_1, \xi_2$  jelöli, az  $M_o$  illetve  $Q_o$  pontok a  $C$  görbére esnek,  $dA_M$  a skaláris felületelem és  $ds_{M_o}$  a  $C$  görbén tekintett vonalelem.

A NABLA, illetve HAMILTON féle differenciáloperátorok — síkfeladatokról van szó — a

$$\nabla_M = \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \mathbf{i}_\kappa = \overset{M}{\nabla}_\kappa \mathbf{i}_\kappa \quad \nabla_Q = \frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} \mathbf{i}_\kappa = \overset{Q}{\nabla}_\kappa \mathbf{i}_\kappa \quad (2.8.2)$$

illetve a

$$\Delta_M = \nabla_M \cdot \nabla_M = \overset{M}{\nabla}_\kappa \overset{M}{\nabla}_\kappa \quad \Delta_Q = \nabla_Q \cdot \nabla_Q = \overset{Q}{\nabla}_\kappa \overset{Q}{\nabla}_\kappa \quad (2.8.3)$$

alakban írhatók fel.

**2.8.3.** Legyen  $u(M)$  az  $S_i$ -n [vagy az  $S_e$ -n] tekintett legalább kétszer folytonosan deriválható ismeretlen függvény. Az  $u(M)$  függvényre, mint ismeretlenre vonatkozó

$$\Delta_M u(M) = 0 \quad M \in S_i \quad [M \in S_e] \quad (2.8.4)$$

homogén differenciálegyenlet a síkbeli LAPLACE-, illetve potenciálegyenlet. Az egyenlet megoldásait síkbeli harmonikus függvényeknek szokás nevezni.

Az  $u(M)$   $M \in S_i$  függvény külső normálirányú deriváltja, összhangban a (2.2.6)-al, az

$${}_i n_\kappa \left( \nabla_\kappa^M u \right) \Big|_{M_o} = {}_i n_\kappa \left( \nabla_\kappa^M u(M_o) \right) = \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = {}_i t(M_o) \quad (2.8.5)$$

módon számítható. Az is nyilvánvaló, hogy ez az egyenlet,  $e$ -t írva az  $i$  helyére, megadja az  $S_e$ -n tekintett  $u(M)$  függvény normálirányú deriváltját is.

**2.8.4.** A síkbeli potenciálegyenlettel kapcsolatos peremérték-feladatokat is a **2.2.2.** szakaszban részletezett módon szokás osztályozni. A belső vegyes peremérték-feladatot tekintve példaként a

$$\Delta_M u(M) = 0 \quad M \in S_i \quad (2.8.6)$$

síkbeli LAPLACE egyenlet az

$$u(M_o) = {}_i \hat{u}(M_o) \quad M \in C_u \quad (2.8.7a)$$

$$\frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = {}_i \hat{t}(M_o) \quad M \in C_t \quad (2.8.7b)$$

peremfeltételekkel egészül ki, ahol az előírt értékeket most is a betű felett álló  $\hat{\phantom{x}}$  jelöli.

DIRICHLET feladat esetén  $C_u = C$ , NEUMANN feladat esetén  $C_t = C$ , ami pedig a külső peremérték-feladatok egyenleteit illeti, azok az  $i$  index  $e$ -re történő cseréjével adódnak a (2.8.6) és (2.8.7a,b) egyenletekből.

Az ismert  $\alpha(M_o)$ ,  $\beta(M_o)$  és  $\hat{f}(M_o)$   $M_o \in C$  függvényekkel írva fel megőrzi (2.2.14) alatti alakját a hővezetési típusú peremfeltétel.

**2.8.5.** Az előre megadott  $b(M)$   $M \in S_i$  függvényt tekintve inhomogenitást okozó tagnak a

$$\Delta_M u(M) + b(M) = 0 \quad M \in S_i \quad (2.8.8)$$

differenciálegyenlet a síkbeli POISSON egyenlet. Ez egyben a síkbeli stacionér hőáramlás differenciálegyenlete is — v.ö. **2.2.6.** szakasz — ha  $u(M)$  helyére a  $v(M)$  hőmérsékletmezőt,  $b(M)$  helyére pedig a  $q(M)/k$  hányadost írjuk:

$$\Delta_M v(M) + \frac{q(M)}{k} = 0. \quad M \in S_i \quad (2.8.9)$$

Ezt az analógiát, az eddigiekhez hasonlóan, továbbra is alkalmazzuk egyes kiválasztott egyenletek fizikai értelmezésére.

**2.8.6.** Az  $M$  pont  $Q$  pontra vonatkozó helyvektora az  $\mathbf{r}_{QM} = \mathbf{r} = r_\kappa \mathbf{i}_\kappa$  módon adható meg az  $x_1, x_2$  koordinátáson. Az  $M$  és  $Q$  pontok távolságát a megszokott módon jelöljük:  $R = R(M, Q) = |\mathbf{r}_{QM}|$ . Az

$$U(M, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R(M, Q)} \quad (2.8.10)$$

kétpontfüggvény a síkbeli LAPLACE egyenlettel kapcsolatos alapmegoldás. Vegyük észre, hogy a fenti alapmegoldás is teljesíti a (2.3.2) egyenletet, azaz szimmetrikus függvénye az  $M$  és  $Q$  pontoknak. A

$$\nabla_\kappa^M R(M, Q) = \frac{r_\kappa}{R} \quad \nabla_\kappa^Q R(M, Q) = -\frac{r_\kappa}{R} \quad (2.8.11)$$

és

$$\frac{M}{\nabla_{\kappa}} \ln R(M, Q) = \frac{r_{\kappa}}{R^2}, \quad \frac{Q}{\nabla_{\kappa}} \ln R(M, Q) = -\frac{r_{\kappa}}{R^2} \quad (2.8.12)$$

deriváltak felhasználásával adódó

$$\frac{M}{\nabla_{\kappa}} \frac{M}{\nabla_{\lambda}} \ln R = \frac{\delta_{\kappa\lambda}}{R^2} - 2 \frac{r_{\kappa} r_{\lambda}}{R^4} = \frac{Q}{\nabla_{\kappa}} \frac{Q}{\nabla_{\lambda}} \ln R \quad (2.8.13)$$

képletek segítségével, tekintettel (2.8.3)<sub>1</sub>-re is, kapjuk, hogy

$$\Delta_M U(M, Q) = \Delta_Q U(M, Q) = 0. \quad Q \neq M \in S_i \cup C \cup S_e \quad (2.8.14)$$

ami azt jelenti, hogy egymástól különböző  $Q$  és  $M$ -re harmonikus függvény a síkbeli POISSON egyenlethez tartozó alapmegoldás.

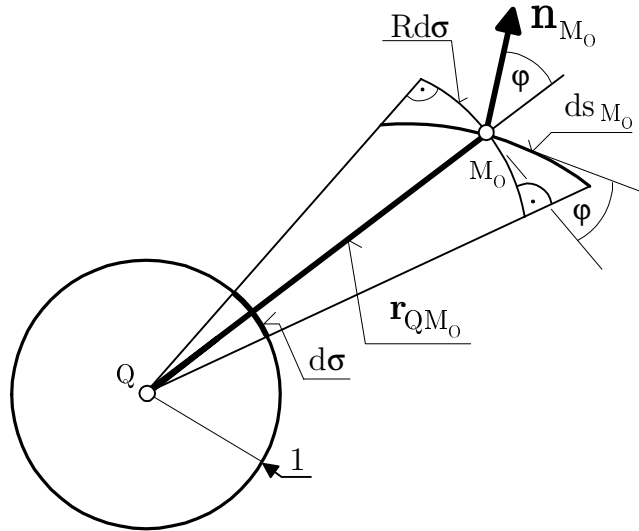
**2.8.7.** Az alapmegoldás és a LAPLACE egyenlet kapcsolata a térbeli esethez hasonlóan tisztázható. A (2.8.1) és (2.8.11)<sub>1</sub> képletek felhasználásával adódik az alapmegoldás normálirányú deriváltja:

$$\frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} = i n_{\kappa} \left( \frac{M}{\nabla_{\kappa}} U(M, Q) \right) \Big|_{M_o} = -\frac{i n_{\kappa} r_{\kappa}}{2\pi R^2}. \quad (2.8.15)$$

Visszaidézve, hogy a (2.8.8) egyenlet végeredményben a síkbeli stacionáris hőáramlás differenciálegyenlete, ha  $k = 1$ , az  $S_i$  tartománnyal közölt hőmennyiséget az

$$I = \oint_C \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o}$$

integrál adja, hiszen a hőáramvektor normál irányú összetevője az integrandusz. Az integrál átalakításához helyettesítsük a (2.8.1)-et és vegyük figyelembe — a 2.6 ábrán szemléltetett



2.6 ábra

A  $ds_{M_o}$  vonalelem

geometriai viszonyok alapulvételével —, hogy

- $\varphi$ -vel jelölve az  $\mathbf{r}_{QM_o}$  rádiuszvektor és az  $i\mathbf{n}$  normális egymással bezárt szögét  $i n_{\kappa} r_{\kappa} = R \cos \varphi$  a számlálóban álló skalárszorzat;
- a  $ds_{M_o}$  ívelem  $d\sigma$  látószöge a  $ds_{M_o} = R d\sigma / \cos \varphi$  alakba írható át.

Az egyes lépéseket az alábbiak részletezik:

$$I = - \oint_C \frac{i n_{\kappa} r_{\kappa}}{2\pi R^2} ds_{M_o} = - \oint_C \frac{\cos \varphi}{2\pi R} ds_{M_o} = -\frac{1}{2\pi} \oint_C d\sigma.$$

Az eredmény geometriai tartalma könnyen átlátható hiszen, hasonlóan a térbeli esethez, az utolsó integrál az  $S_i$  tartomány látószöge. Ennek értéke a  $Q$  pont  $S_i$  tartományhoz viszonyított helyzetétől függ:

$$I = \int_S \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} dA_{M_o} = \begin{cases} -1 & Q \in S_i \\ -1/2 & Q = Q_o \in C \\ 0 & Q \in S_e \end{cases} \quad (2.8.16)$$

A (2.8.16)<sub>1</sub> egyenlet szerint egységnyi hőmennyiség távozik az  $S_i$  tartományból bár a (2.8.14) és (2.8.9) egyenletek egybevetése szerint zérus a tartományi hőforrassűrűség ha  $M \neq Q$ . Mivel a hőegyensúlynak fenn kell állnia ez egyuttal azt is jelenti, hogy a térbeli esethez hasonlóan pontszerű hőforrás van a  $Q$  pontban a kibocsátott hőmennyiség pedig egységnyi. Visszaidézve a *Dirac* függvénnyel kapcsolatos (B.4) képletet és a (2.8.14)-et az a következtetés adódik, hogy az  $U(M, Q)$  alapmegoldás a

$$\begin{aligned} \Delta_M U(M, Q) + \delta(M - Q) &= 0 \\ \Delta_Q U(M, Q) + \delta(M - Q) &= 0 \end{aligned} \quad M, Q \in S_i \cup C \cup S_e \quad (2.8.17)$$

differenciálegyenletek megoldása. A (2.3.10)-el azonos jellegű

$$\oint_C \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} + \int_{S_i} \delta(M - Q) dV_M = 0 \quad Q \neq Q_o \in C \quad (2.8.18)$$

egyenlet pedig, összhangban a (2.8.16)<sub>1,3</sub>-al, az  $S_i$  tartomány hőegyensúlyát fejezi ki, ha  $k \equiv 1$  és egységnyi intenzitású pontszerű hőforrás van a  $Q$  pontban.

## 2.9. Green féle azonosság és képletek síkfeladatokra

**2.9.1.** Legyen  $g(M)$  és  $u(M)$  az  $S_i$ -n értelmezett legalább kétszer folytonosan differenciálható függvény. Az

$$\begin{aligned} \int_{S_i} (u(M) \Delta_M g(M) - g(M) \Delta_M u(M)) dA_M &= \\ &= \oint_C \left( u(M_o) \frac{\partial g(M_o)}{\partial n_{M_o}} - g(M_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) ds_{M_o} \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

azonosság, mint a térbeli esetre vonatkozó (2.4.1) összefüggés párja, a síkbeli *Green* féle azonosság. A fenti egyenlet akkor is igaz, ha az  $S_i$  tartomány többszörösen összefüggő. Az önmagukat és egymást nem metsző  $C_0, C_1$  konturgörbékkel határolt kétszeresen összefüggő  $S_i$  tartomány esetén például

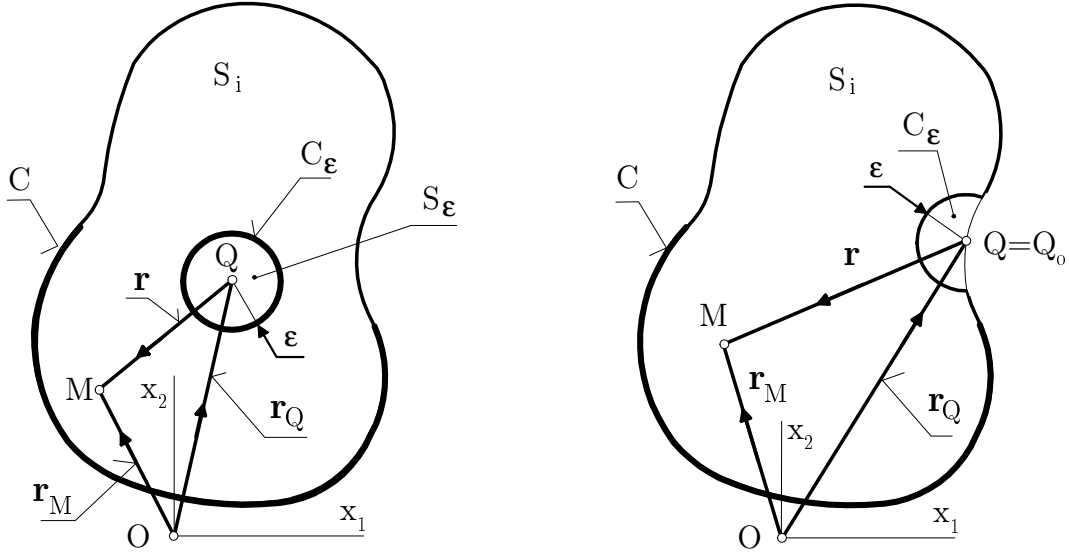
$$\begin{aligned} \int_{S_i} (u(M) \Delta_M g(M) - g(M) \Delta_M u(M)) dA_M &= \\ &= \sum_{l=0}^1 \oint_{C_l} \left( u(M_o) \frac{\partial g(M_o)}{\partial n_{M_o}} - g(M_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) ds_{M_o} \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

a síkbeli GREEN azonosság alakja.

**2.9.2. A 2.9.3.-2.9.7. szakaszok,** igazodva majdnem szó szerint a **2.4.2.-2.4.7. szakaszok** gondolatmenetéhez, a (2.4.14) egyenletek síkbeli analogonjainak előállítását tekintik feladatuknak síkbeli viszonyok között.

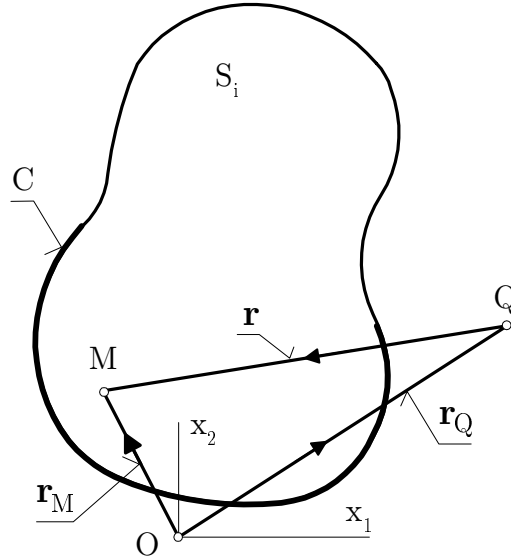
**2.9.3.** Legyen  $g(M) = U(M, Q)$  ahol a  $Q$  pont rögzített. A  $Q$  pont  $S_i$  tartományhoz viszonyított helyzetét illetően most is az alábbi három eset különböztethető meg:

- (a) a  $Q$  pont az  $S_i$  tartomány belső pontja;
- (b)  $Q = Q_o$  ami azt jelenti hogy a  $Q$  pont az  $S_i$  tartomány  $C$  kontúrgörbájén van;
- (c) a  $Q$  pont az  $S_e$  tartomány belső pontja.



2.7 (a) és (b) ábra

A belső  $S_i - V_\epsilon$  tartomány. (a) A  $Q$  forráspont a  $V_i$  tartományon belül található. (b) A  $Q = Q_0$  forráspont az  $S$  határfelület pontja.



2.7 (c) ábra

A belső  $S_i$  tartomány. A  $Q$  forráspont a  $V_e$  tartományban van.

Az  $U(M, Q)$  alapmegoldás  $M = Q$  pontban jelentkező szingularitása miatt az (a) és (b) esetekben figyelemre van szükség a GREEN azonosság alkalmazása során. A vonatkozó lépéseket az (a) esetre részletezzük; a (b) esetben csak az eltérésekre térünk ki.

**2.9.4.** Legyen  $S_\epsilon$  a  $Q$  pont  $\epsilon$  sugarú környezete. Jelölje  $C_\epsilon$  az  $S_\epsilon$  tartomány konturgörbét azaz a  $Q$  középpontú  $\epsilon$  sugarú kört. A geometriai viszonyokat a 2.7 (a) ábra szemlélteti. Az  $U(M, Q)$  alapmegoldás korlátos az  $S_i - S_\epsilon$  tartományban. Mivel ez a tartomány kétszeresen összefüggő a (2.9.1) értelemszerű alkalmazásával és a  $g(M) = U(M, Q)$  helyettesítéssel

következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{S_i - S_\epsilon} (u(M) \Delta_M U(M, Q) - U(M, Q) \Delta_M u(M)) dA_M \\ = \oint_C \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) ds_{M_o} \\ + \oint_{C_\epsilon} \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) ds_{M_o} \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

A kívánt eredmény eléréséhez a fenti kifejezés határértékét kell venni, ha  $\epsilon \rightarrow 0$ . A határérték meghatározása során a következőkre érdemes tekintettel lenni:

1. A  $C$  görbén vett vonalintegrál független  $\epsilon$ -től.
2. Az  $U(M, Q)$  alapmegoldás – v.ö.: (2.8.14)<sub>1</sub> – harmonikus függvény  $Q \neq M$ -re, következésképp zérus értékű az első felületi integrál.
3. Az  $u(M)$  függvény feltételezett differenciálhatósága miatt

$$u(M_o) \quad \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \quad M_o \in C_\epsilon \quad \text{és} \quad \Delta_M u(M) \quad M \in S_i$$

egyaránt korlátos.

4. Egyszerű helyettesítéssel adódik (2.8.15)-ből, hogy a  $C_\epsilon$  mentén

$$\frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} = \frac{1}{2\pi\epsilon}. \quad (2.9.4)$$

5. A baloldalon álló felületi integrál második tagjának határértéke, részben helyettesítve a (2.8.10) alapmegoldást, a

$$- \int_{S_i} U(M, Q) \Delta_M u(M) dA_M + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R} \Delta_M u(M) dA_M$$

alakban írható fel. Az  $S_\epsilon$  körön vett felületi integrálnak zérus a határértéke, hiszen  $dA_M = R dR d\varphi$  a felütelelem, következésképp – figyelembevéve a  $\Delta_M u(M)$  korlátosságát – az integrandusz is korlátos. Mondottak alapján

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_i - S_\epsilon} U(M, Q) \Delta_M u(M) dA_M = - \int_{S_i} U(M, Q) \Delta_M u(M) dA_M. \quad (2.9.5)$$

6. A  $C_\epsilon$  körön vett integrál első tagja az integrálszámítás középértéktételét és (2.9.4)-et kihasználva –  $M'_o$  a kör egy alkalmas pontja – a

$$\oint_{C_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} = \oint_{C_\epsilon} \frac{1}{2\pi\epsilon} u(M_o) ds_{M_o} = u(M'_o)$$

alakban írható fel. Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} = u(Q). \quad (2.9.6)$$

7. A  $C_\epsilon$ -on vett integrál második tagja esetén is ugyanígy érdemes eljárni a (2.8.10) helyettesítése után

$$- \oint_{C_\epsilon} U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} = \frac{\partial u(M'_o)}{\partial n_{M_o}} \epsilon \ln \epsilon.$$

Következésképp az integrálnak zérus a határértéke:

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} = 0. \quad (2.9.7)$$

8. Tegyük fel, hogy az  $u(M)$  függvény kielégíti a (2.9.7) POISSON egyenletet. Ez esetben (2.9.5)-ből a

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_i - S_\epsilon} U(M, Q) \Delta_M u(M) dA_M = \int_{S_i} U(M, Q) b(M) dA_M \quad (2.9.8)$$

eredmény következik.

Vezessük be ismét, kihasználva a (2.8.15)-öt, a

$${}_i T(M_o, Q) = {}_i n_\kappa \left( \nabla_\kappa U(M, Q) \right) \Big|_{M_o} = \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial {}_i n_{M_o}} = -\frac{{}_i n_\kappa(M_o) r_\kappa}{2\pi R^2} \quad M_o \neq Q \quad (2.9.9a)$$

és

$${}_e T(M_o, Q) = {}_e n_\kappa \left( \nabla_\kappa U(M, Q) \right) \Big|_{M_o} = \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial {}_e n_{M_o}} = -\frac{{}_e n_\kappa(M_o) r_\kappa}{2\pi R^2} \quad M_o \neq Q \quad (2.9.9b)$$

jelöléseket. Nyilvánvaló, hogy

$${}_i T(M_o, Q_o) + {}_e T(M_o, Q_o) = 0. \quad M_o, Q_o \in C \quad M_o \neq Q_o \quad (2.9.10)$$

Az 1. és 2. alatt mondottak kihasználásával majd a (2.9.8), (2.9.6), (2.9.7) és (2.9.9a) helyettesítésével a (2.9.3) egyenletből  $\epsilon \rightarrow 0$  esetén a (2.9.13)<sub>1</sub> egyenlet következik. Az előrehivatkozást, hasonlóan a térbeli esethez, az indokolja, hogy az (a), (b) és (c) esetekre vonatkozó egyenletek egy helyen szerepelnek a szövegben.

**2.9.5.** A (b) esetben  $Q = Q_o \in C$ . Legyen  $S_\epsilon$  a  $Q = Q_o$  pont körül rajzolt  $\epsilon$  sugarú köralakú tartomány. A kör  $S_i$ -n belül fekvő ívét  $C_\epsilon$ , a  $C$  peremgörbe  $S_\epsilon$  eltávolítása után megmaradó ívét pedig  $C'$  jelöli. Nyilvánvaló, hogy az egyszeresen összefüggő  $S_i - S_\epsilon$  síkbeli tartományt a  $C' \cup C_\epsilon$  zárt görbe határolja.

Feltételezzük, hogy a  $C$  kontúrgörbe síma a  $Q_o$  pont környezetében. A **2.9.7.** szakasz 1. MEGJEGYZÉSÉBEN azonban, enyhítve a kontúrgörbe símaságával kapcsolatos feltevést, töréspont létezését is megengedjük. Az  $S_i - S_\epsilon$  tartományra alkalmazva GREEN azonosságot

$$\begin{aligned} \int_{S_i - S_\epsilon} (u(M) \Delta_M U(M, Q_o) - U(M, Q_o) \Delta_M u(M)) dA_M \\ = \int_{C'} \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) ds_{M_o} \\ + \int_{C_\epsilon} \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) ds_{M_o} \end{aligned} \quad (2.9.11)$$

az eredmény. Alkalmas összefüggés úgy kapható innen, ha az azonosság határértékét vesszük, ha  $\epsilon \rightarrow 0$ . A (2.9.13)<sub>1</sub> egyenletre vezető gondolatmenet lépéseit visszaidézve alábbiak az eltérések:

1. A  $Q$  betű helyére mindenütt  $Q_o$  kerül.
2. A felületi integrálokkal kapcsolatos gondolatmenet szószerint megismételhető és így a (2.9.5) csak annyiban módosul, hogy összhangban az 1. alattival,  $Q$  helyett  $Q_o$ -t kell írni.
3. A  $C'$  ív  $\epsilon \rightarrow 0$ -ra a  $C$  kontúrgörbét adja eltávolítotttnak gondolva a  $Q_o$  pontot. A vonatkozó integrál határértékét pedig a  $C$  görbén vett integrál CAUCHY féle főértékének nevezik. Ismét felhívjuk a figyelmet ezen fogalom fontosságára, hiszen nem képezhető a jobboldalon álló második vonalintegrál az  ${}_i T(M_o, Q_o)$  szingularitása miatt, ha  $C' = C$  azaz ha a  $Q_o$  belső pontja az integrálási tartománynak. Az integrál CAUCHY féle főértéke ugyanakkor létezhet.
4. Szószerint megismételhető a (2.9.6)-ra vezető gondolatmenet, ha a tényleges viszonyoknak megfelelően a félkör hosszát vesszük a  $C_\epsilon$  görbe ívhosszának számításakor:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} = c(Q_o) u(Q_o) \quad c(Q_o) = \frac{1}{2}. \quad (2.9.12)$$

A geometriai viszonyokat a 2.7 (b) ábra szemlélteti.

5. A  $C_\epsilon$  köríven vett integrál második része a (2.9.7)-re vezető gondolatmenet ismétlésével adódik és most is zérus.

Kihasználva a fentieket a (2.9.13)<sub>2</sub> egyenletet kapjuk a (2.9.1) síkbeli GREEN féle azonosságból.

**2.9.6.** A  $(c)$  esetben a  $Q$  pont az  $S_i$  tartományon kívül fekszik. Közvetlenül alkalmazható tehát GREEN féle azonosság és nincs szükség határértékek vizsgálatára sem. A  $(2.9.13)_3$  alatti eredmény a  $(2.8.14)_1$  kihasználásával és annak a feltevésnek érvényesítésével adódik, hogy  $u(M)$  a  $(2.8.8)$  síkbeli POISSON egyenlet megoldása.

**2.9.7.** Az eredményül kapott GREEN féle képletek megegyeznek formailag a térbeli esettel kapcsolatos  $(2.4.14)$  egyenletekkel:

$$\begin{aligned}
 u(Q) &= \oint_C [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \\
 &\quad + \int_{S_i} U(M, Q) b(M) dA_M \quad Q \in S_i \\
 c(Q_o)u(Q_o) &= \oint_C [U(M_o, Q_o) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q_o) u(M_o)] ds_{M_o} \\
 &\quad + \int_{S_i} U(M, Q_o) b(M) dA_M \quad Q = Q_o \in C \\
 0 &= \oint_C [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \\
 &\quad + \int_{S_i} U(M, Q) b(M) dA_M \quad Q \in S_e
 \end{aligned} \tag{2.9.13}$$

Eltűnnek a tartományi integrálok a fenti összefüggésből, ha a  $b(M) = 0$ . A teljesség kedvéért kiírjuk az így adódó integrálokat is:

$$\begin{aligned}
 u(Q) &= \oint_C [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \quad Q \in S_i \\
 c(Q_o)u(Q_o) &= \oint_C [U(M_o, Q_o) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q_o) u(M_o)] ds_{M_o} \quad Q = Q_o \in C \\
 0 &= \oint_S [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \quad Q \in S_e
 \end{aligned} \tag{2.9.14}$$

1. MEGJEGYZÉS: Ha nem síma a  $C$  görbe a  $Q_o$  pontban akkor módosul a  $(2.9.13)_2$  és vele együtt a  $(2.9.14)_2$  egyenletek baloldalán álló  $c(Q_o)$  állandó értéke. A változásnak – amint az kiderül az alábbiakból – szép geometriai tartalom tulajdonítható. Célunk tehát a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o}$$

határérték meghatározása, ahol  $C_\epsilon$  a  $Q_o$  középpontú  $\epsilon$  sugarú kör  $S_i$ -n belül fekvő része. Mivel a  $C$  görbe nem síma a  $Q_o$  pontban – sarokpont esetével állunk szemben – a  $C_\epsilon$   $\epsilon \rightarrow 0$  határérték nem ponttá zsugorodó félkör. A határérték megállapításához

- kibővítjük a fenti integrált,
- ezt követően alkalmazzuk a középértéktételt az első egyenlőségjel után álló második integrálra

és mindemellett

- azt is figyelembe vesszük, hogy  $C_\epsilon = \epsilon \sigma$ , ahol  $\sigma$  a  $C_\epsilon$  körív  $Q_o$  pontra vonatkozó látószöge.

A

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} &= u(Q_o) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} \\
 &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} (u(M_o) - u(Q_o)) \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} \\
 &= u(Q_o) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u(M'_o) - u(Q_o)) \frac{\sigma}{2\pi}
 \end{aligned} \tag{2.9.15}$$

eredményben zérus a határértéke a jobboldalon álló második tagnak, hiszen

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(M'_o) = u(Q_o) .$$

A jobboldalon álló első integrál értéke pedig  $\sigma/2\pi$ -re adódik, ha megismételjük a (2.8.16) képletre vezető gondolatmenet kihasználva, hogy most  ${}_i n_\kappa$  a  $Q_o$  pont felé azaz az  $\epsilon$  sugarú kör belsejébe mutat. Legyen

$$c(Q_o) = \frac{\sigma}{2\pi} . \quad (2.9.16)$$

Ezzel a jelöléssel mind a (2.9.12)<sub>1</sub> mind pedig a (2.9.13)<sub>2</sub> és (2.9.14)<sub>2</sub> megtartja formailag az eredeti alakját, hiszen  $\sigma = \pi$ , ha a  $Q_o$  pontban síma a  $C$  konturgörbe.

2. MEGJEGYZÉS: A (2.9.13)<sub>1</sub> és (2.9.14)<sub>1</sub> egyenletekben álló

$$\oint_C U(M_o, Q) {}_i t(M_o) ds_{M_o} \quad \text{és} \quad \oint_C {}_i T(M_o, Q) u(M_o) ds_{M_o}$$

integrálok, hasonlóan a **2.4.6.** szakasz 2. MEGJEGYZÉSÉBEN lévő integrálokhoz, harmonikusak a  $Q$  változóban. Az

$$\int_{S_i} U(M, Q) b(M) dA_M$$

tartományi integrál pedig a (2.8.8) POISSON egyenlet partikuláris megoldása. Ez egyben azt is jelenti, hogy a (2.9.13)<sub>1</sub> átrendezésével értelmezett

$$\begin{aligned} \tilde{u}(Q) &= u(Q) - \int_{S_i} U(M, Q) b(M) dA_M = \\ &= \oint_C [U(M_o, Q) {}_i t(M_o) - {}_i T(M_o, Q) u(M_o)] dA_{M_o} \quad Q \in S_i \end{aligned} \quad (2.9.17)$$

függvény harmonikus.

3. MEGJEGYZÉS: Legyen  $b(M) = 0$   $M \in S_i$  és  $u(M) = u(M_o) =$  állandó. Vegyük észre, hogy ez a függvény harmonikus. Várható tehát, hogy a (2.7.19) integrálelőállítás visszaadja ezt az állandó értéket. A formális igazolás a (2.4.18)-ra vezető lépésekkel történhet, ezért eltekintünk annak részletezésétől.

## 2.10. Egyenletek külső síktartományon

**2.10.1.** A 2.8 ábrán vázolt  $S'_e$  tartományt a  $C$  görbe és az  $O$  középpontú  ${}_e R$  sugarú  $C_R$  kör határolja. Nem sérti az általánosságot ha feltételezzük, hogy az origó belső pontja az  $S_i$  tartománynak. Nyilvánvaló, hogy  $S'_e \rightarrow S_e$ , ha  ${}_e R \rightarrow \infty$ .

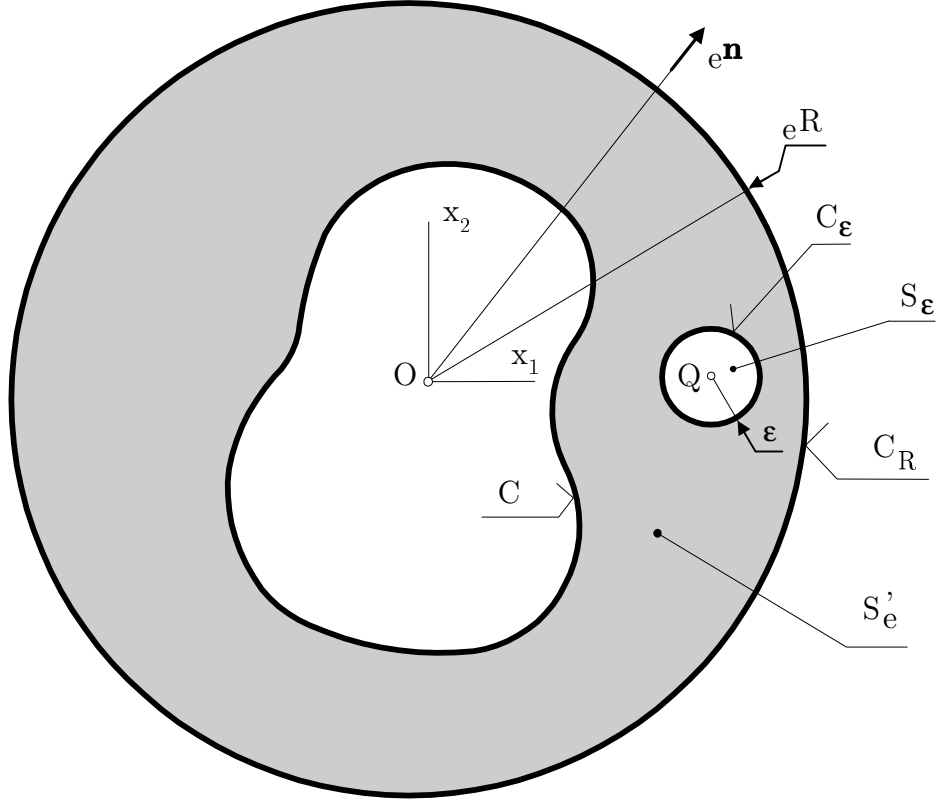
A külső tartománnyal kapcsolatos egyenletek előállítása a (2.9.1) GREEN féle azonosság alkalmazását és a **2.9.3.** – **2.9.7.** szakaszok gondolatmenetének ismétlését kívánja meg.

A gondolatmenetben jelentkező eltérés abból adódik, hogy a (2.9.1) GREEN féle azonosság csak véges tartományokra érvényes. Ez a nehézség csak úgy kerülhető meg, hogy az  $S'_e$  tartományra, melyet az (a), (b) és (c) esetek kívánalmainak megfelelően módosítunk, alkalmazzuk a GREEN féle azonosságot, majd pedig meghatározzuk a  $C_R$  körön vett integrál határétékét, ha  ${}_e R \rightarrow \infty$ . Azt is szem előtt kell tartani, hogy a határérték csak akkor képezhető, ha ismeretes hogyan viselkedik az  $u(M)$  skalárfüggvény midőn az  ${}_e R \rightarrow \infty$ .

**2.10.2.** Regulárisnak nevezzük, az  $u(M)$  függvényt, ha kielégíti a külső tartományra vonatkozó síkbeli POISSON egyenletet és korlátos a végtelenben. Pontosabban, ha fennállnak az  $u(M)$  végtelenbeli viselkedésével kapcsolatos

$$\lim_{{}_e R \rightarrow \infty} u(M_o) = c + \frac{A}{{}_e R} \quad \text{és} \quad \lim_{{}_e R \rightarrow \infty} \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} = -\frac{A}{{}_e R^2} \quad M_o \in C_R \quad (2.10.1)$$

képletek, ahol a  $c$  és  $A$  állandók. Mivel a  $g(M)$  függvény helyére az  $U(M, Q)$  alapmegoldást gondoljuk, szükség van az alapmegoldás végtelenbeli viselkedésének tisztázására is. Nem nehéz ellenőrizni az alapmegoldás (2.8.10) alatti értelmezésének felhasználásával és a 2.6 Gyakorlat



2.8 ábra

A külső  $S'_e - S_\epsilon$  tartomány. A  $Q$  pont az  $S'_e$  tartomány belső pontja.

megoldása gondolatmenetének ismétlésével – a Gyakorlattal ellentétben most a  $Q$  pont fekszik a végesben és az  $M_0$  pont tart a végtelenhez, ezért a  $Q \iff M_0$  betűcserére, valamint előjelcserére van szükség az egyszeri deriválásoknál a (G.2.15) és (G.2.16) képletekben –, hogy

$$\lim_{eR \rightarrow \infty} U(M_0, Q) \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{eR} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{r_\kappa(M_0)r_\kappa(Q)}{eR^2} - \frac{1}{2} \frac{r_\kappa(Q)r_\kappa(Q)}{eR^2} \right) \quad M_0 \in C_R \quad (2.10.2a)$$

$$\lim_{eR \rightarrow \infty} \frac{\partial U(M_0, Q)}{\partial n_{M_0}} \approx -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{eR} + O\left(\frac{1}{eR^2}\right) \quad M_0 \in C_R \quad (2.10.2b)$$

Ami a  $Q$  pont helyzetét illeti

- (a) a  $Q$  pont az  $S'_e$  tartomány belső pontja,
- (b)  $Q = Q_0 \in C$  és
- (c) a  $Q$  pont a belső  $S_i$  tartományban van

eseteket kell egymástól megkülönböztetni. A 2.8 ábra az (a) esetnek megfelelő viszonyokat szemlélteti. A (b) és (c) estek ábráit elhagytuk, mivel a 2.7 (a) és (b) ábrák ezek tekintetében is elegendő támpontot adnak.

A síkbeli GREEN azonosság alkalmazása során (a) esetben a  $C$ ,  $C_\epsilon$  és  $C_R$  zárt görbék, a (b) esetben a  $C' \cup C_\epsilon$  és a  $C_R$  zárt görbék, a (c) esetben pedig a  $C$  és a  $C_R$  zárt görbék határolják a vizsgált tartományt.

Amint arra a 2.10.1. szakasz utolsó bekezdésében már utaltunk, a kívánt eredmény úgy kapható meg, ha a síkbeli GREEN féle azonosság alkalmazása után kapott egyenletek határértékét vesszük, midőn

- (a)  $\epsilon \rightarrow 0$  és  $eR \rightarrow \infty$ ,
- (b)  $\epsilon \rightarrow 0$  és  $eR \rightarrow \infty$

továbbá ha

- (c)  $eR \rightarrow \infty$ .

Mivel az  ${}_eR \rightarrow \infty$  határátmenet jelenti az eltérést a belső  $S_i$  tartományra vonatkozó gondolatmenethez képest a továbbiak csak ezt a kérdést vizsgálják.

**2.10.3.** Az  ${}_eR \rightarrow \infty$  határátmenet az

$$I_{C_R} = \oint_{C_R} \left( u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right) ds_{M_o} . \quad Q \notin C_R$$

integrált érinti közvetlenül. A (2.10.1) és (2.10.2a,b) összefüggések helyettesítése után az

$$\lim_{{}_eR \rightarrow \infty} I_{C_R} = -c \quad (2.10.3)$$

eredményt kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy elegendően nagy  ${}_eR$ -re fennállnak a

$$\lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \oint_{C_R} u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} = \lim_{{}_eR \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{1}{{}_eR} \left( c + \frac{A}{{}_eR} \right) ds_{M_o} = -c$$

és

$$\begin{aligned} \lim_{{}_eR \rightarrow \infty} \oint_{C_R} U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} ds_{M_o} &= \\ &= \lim_{{}_eR \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{1}{{}_eR} \left( -\frac{A}{{}_eR} + \dots \right) \left( \ln \frac{1}{{}_eR} + \dots \right) ds_{M_o} = 0 \end{aligned}$$

összefüggések.

**2.10.4.** A **2.10.2.-2.10.3.** szakaszokban mondottak figyelembevételével alkalmazva a síkbeli GREEN féle azonosságot az (a), (b) és (c) esetekre a külső tartományra vonatkozó

$$\begin{aligned} u(Q) &= c + \oint_C [U(M_o, Q) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \\ &\quad + \int_{S_e} U(M, Q) b(M) dA_M \quad Q \in S_e \\ c(Q_o) u(Q_o) &= c + \oint_C [U(M_o, Q_o) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q_o) u(M_o)] ds_{M_o} \\ &\quad + \int_{S_e} U(M, Q_o) b(M) dA_M \quad Q = Q_o \in C \\ 0 &= c + \oint_C [U(M_o, Q) {}_e t(M_o) - {}_e T(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \\ &\quad + \int_{S_e} U(M, Q) b(M) dA_M \quad Q \in S_i \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

GREEN féle képleteket kapjuk.

1. MEGJEGYZÉS: Érdemes megvizsgálni, hogy teljesíti-e a (2.10.4)<sub>1</sub> integráléleállítás a regularitás követelményét. Bár eddig nem említettük, de feltételezzük, hogy  $b(M)$  az  $S_e$  tartomány egy teljes egészében végesben fekvő  $S_b$  résztartományán különbözik zérustól, egyébként pedig szakaszonként síma. Felhasználva a 2.6 Gyakorlat megoldásának (G.2.15) és (G.2.16) aszimptotikus képleteit írható, hogy  $\mathbf{r}_Q \rightarrow \infty$ -re

$$u(Q) = c + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_Q} \left[ \oint_C {}_e t(M_o) ds_{M_o} + \int_{S_e} b(M) dA_M \right] + O\left(\frac{1}{R_Q}\right). \quad (2.10.5)$$

Nyilvánvaló, hogy az  $u(Q)$  csak akkor reguláris, ha

$$\oint_C {}_e t(M_o) ds_{M_o} + \int_{S_e} b(M) dA_M = 0. \quad (2.10.6)$$

A (2.10.4)<sub>1,2</sub> egyenleteket ki kell tehát egészíteni a (2.10.6) feltétellel. A hővezetési feladat terminológiáját használva úgy is fogalmazhatunk, hogy zérus értékű kell legyen az  $S_e$  tartománnyal a végesben közölt hő, hiszen zérus a végtelen távoli pont felé áramló hőmennyiség –

${}_et(\infty) \approx -A/R_Q^2$ . Ez azt jelenti, hogy a fenti egyenlet az  $S_e$  tartomány hőegyensúlyát fejezi ki. A  $b(M) = 0$ -ra (2.10.6)-ból a reguláris harmonikus függvényekkel kapcsolatos

$$\oint_C {}_et(M_o) ds_{M_o} = 0 \quad (2.10.7)$$

GAUSS feltétel következik.

2. MEGJEGYZÉS: A (2.10.4)<sub>1</sub> átrendezésével kapott

$$\begin{aligned} \tilde{u}(Q) &= u(Q) - \int_{S_e} U(M, Q) b(M) dA_M = \\ &= c + \oint_C [U(M_o, Q) {}_et(M_o) - {}_eT(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \quad Q \in S_e \end{aligned}$$

skalárfüggvény harmonikus, de nem reguláris, mivel a (2.10.7) GAUSS feltétel általában nem teljesül.

**2.10.5.** A teljesség kedvéért, amint azt már korábban is tettük, kiírjuk a  $b(M) = 0$  esetre vonatkozó alakokat is:

$$\begin{aligned} u(Q) &= c + \oint_C [U(M_o, Q) {}_et(M_o) - {}_eT(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \quad Q \in S_e \\ c(Q_o)u(Q_o) &= c + \oint_C [U(M_o, Q_o) {}_et(M_o) - {}_eT(M_o, Q_o) u(M_o)] ds_{M_o} \quad Q = Q_o \in C \quad (2.10.8) \\ 0 &= c + \oint_C [U(M_o, Q) {}_et(M_o) - {}_eT(M_o, Q) u(M_o)] ds_{M_o} \quad Q \in S_i \end{aligned}$$

1. MEGJEGYZÉS: Tegyük fel, hogy  $b(M) = 0$   $M \in S_e$  és hogy, összhangban a regularitás követelményével,  $u(M_o) = u(M) = u(O) = c =$  állandó ahol az  $O$  origó belső pontja az  $S_e$ -nek. Ez esetben a (2.10.4)<sub>1</sub> visszaadja ezt az állandó értéket. Az átalakítások során az  ${}_et(M_o) = 0$ , az  ${}_eT(M_o, Q) = -{}_iT(M_o, Q)$   $M_o \in C$ , a (2.9.9a) és a (2.8.16) figyelembevételére van szükség:

$$u(Q) = c - \oint_C {}_eT(M_o, Q) c ds_{M_o} = c \left( 1 + \oint_C \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial {}_in_{M_o}} \right) ds_{M_o}$$

azaz

$$u(Q) = \begin{cases} u(O) & Q \in S_e \\ \frac{1}{2}u(O) & Q = Q_o \in C \\ 0 & Q \in S_i \end{cases} \quad (2.10.9)$$

A (2.10.9)<sub>1</sub> valóban a várt eredmény.

## 2.11. A direkt módszer egyenletei síkfeladatokra

**2.11.1.** Először a belső tartománnyal kapcsolatos egyenleteket tekintjük át.

A (2.9.13)<sub>1,2</sub> egyenleteknek ugyanaz a szerepük a numerikus megoldásban mint a térbeli esetre vonatkozó (2.4.14)<sub>1,2</sub> egyenleteknek. A (2.9.13)<sub>1</sub> egyenlet szerint kvadraturák segítségével számítható a (2.8.8) síkbeli POISSON egyenlet  $u(Q)$  megoldása – most a  $Q$  pont a futópont – feltéve, hogy ismeretesek az

$${}_iu(M_o) \quad \text{és} \quad {}_it(M_o) \quad M_o \in C$$

függvények ahol, hangsúlyozni kívánva, hogy belső peremérték-feladatról van szó, az  $u$  betű elé is ki van írva az  $i$  index.

A (2.9.14)<sub>1</sub> egyenletre fordítva a figyelmet  $b(M) = 0$  és a fenti állítás úgy fogalmazható át, hogy a peremértékek birtokában kvadraturák segítségével határozható meg az  $u(Q)$   $Q \in S_i$  harmonikus függvény

Bár az  ${}_iu(M_o)$  és az  ${}_it(M_o)$  függvények egyidejűleg nem írhatók elő a (2.9.13)<sub>1</sub> és (2.9.14)<sub>1</sub> egyenletek nemcsak elvi jelentőségűek. Ennek az az oka, hogy meghatározhatók az ismeretlen peremértékek, ha megoldjuk numerikusan – alkalmas módszert választva – a (2.9.13)<sub>2</sub> illetve

a (2.9.14)<sub>2</sub> integrálegyenleteket. A megoldás birtokában mind  $u(M_o)$  mind pedig  ${}_i t(M_o)$  ismertnek tekinthető. Következésképp az  $u(Q)$  skalármező valóban számítható a (2.9.13)<sub>1</sub> vagy (2.9.14)<sub>1</sub> képletekből, azaz kvadraturák segítségével. Az  $u(Q)$  mező gradiense a (2.9.13)<sub>1</sub> alapján felírható

$$\boxed{\begin{aligned} u(Q) \overset{Q}{\nabla}_\lambda &= \oint_C \left[ \left( U(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_\lambda \right) {}_i t(M_o) - \left( {}_i T(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_\lambda \right) u(M_o) \right] ds_{M_o} \\ &+ \int_{S_i} \left( U(M, Q) \overset{Q}{\nabla}_\lambda \right) b(M) dA_M \end{aligned}} \quad Q \in V_i \quad (2.11.1)$$

képletből adódik. Könnyű belátni felhasználva a (2.8.10), (2.9.9a) és (2.8.12)<sub>2</sub> összefüggéseket, hogy

$$U(M, Q) \overset{Q}{\nabla}_\kappa = \frac{r_\lambda}{2\pi R^2} \quad \text{és} \quad {}_i T(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_\kappa = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{{}_i n_\lambda}{R^2} - 2 \frac{{}_i n_\kappa r_\kappa r_\lambda}{R^4} \right) \quad (2.11.2)$$

**2.11.2.** Külső tartomány esetén az

$${}_e u(M_o) \quad \text{és} \quad {}_e t(M_o)$$

peremértékek ismerete szükséges a (2.10.4)<sub>1</sub> és (2.10.8)<sub>1</sub> integrálleállítások alkalmazhatóságához. Az ismeretlen peremértékek meghatározása pedig a (2.10.4)<sub>2</sub> illetve a (2.10.8)<sub>2</sub> integrálegyenletek megoldását igényli. A (2.11.1) és a (2.11.2) képletek  $S_e$  külső tartományra érvényes analogonjai pedig a tartomány jellegére utaló  $i$  index  $e$ -re történő cseréjével kaphatók meg. Ez okból eltekintünk a vonatkozó egyenletek részletes kiírásától.

**2.11.3.** Tételezzük fel, hogy belső DIRICHLET feladat a vizsgálatok tárgya. Legyen

$$\mathcal{U}(Q_o) = c(Q_o) \hat{u}(Q_o) + \oint_C \hat{u}(M_o) {}_i T(M_o, Q_o) ds_{M_o} - \int_{S_i} U(M, Q_o) b(M) dA_M. \quad (2.11.3)$$

A bevezetett jelölés felhasználásával (2.9.13)<sub>2</sub>-ből az

$$\mathcal{U}(Q_o) = \oint_C {}_i t(M_o) U(M_o, Q_o) ds_{M_o} \quad Q_o \in C \quad (2.11.4)$$

egyenlet következik. Az ismeretlen  ${}_i t(M_o)$  a fenti elsőfajú integrálegyenlet megoldása.

A  $C$  konturgörbe  $\Gamma$  görbe – JASWON [14, 52-54 o.], ha az

$$0 = \oint_C \phi(M_o) U(M_o, Q_o) ds_{M_o} \quad Q_o \in C \quad (2.11.5)$$

egyenletnek van triviálistól különböző megoldása a  $\phi(M_o)$ -re. Nyilvánvaló az egyenlet linearitása és homogenitása miatt, hogy ha van triviálistól különböző megoldás, akkor végtelen sok van. Tegyük fel, hogy  $\Gamma$  görbe a  $C$  kontúrgörbe. Jelölje

$$\lambda(M_o) \quad M_o \in C$$

a (2.11.5) egyenlet egy triviálistól különböző megoldását. Direkt visszahelyettesítéssel és a (2.11.5) kihasználásával könnyű meggyőződni arról, hogy ekkor

$${}_i t(M_o) \quad \text{és} \quad {}_i t(M_o) + \lambda(M_o) \quad M_o \in C$$

egyenként megoldása a (2.11.4)-nek. Az unicitás tehát csak úgy biztosítható, ha megköveteljük a

$$\oint_C {}_i t(M_o) ds_{M_o} + \int_{S_i} b(M) dA_M = 0 \quad (2.11.6)$$

feltétel teljesülését. A síkbeli hővezetési feladatban gondolkodva a fenti egyenlet az  $S_i$  tartomány hőegyensúlyát fejezi ki, ha  $k = 1$ .

**2.11.4.** A belső és külső peremérték-feladatok esetén, amint arra a **2.11.1.** és **2.11.2.** szakaszokban már rámutattunk, a  $(2.9.13)_2$  illetve  $(2.10.4)_2$  egyenletek megoldása adja az ismeretlen peremértékeket. Alábbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy van-e valamilyen további kiegészítő feltétel a peremértékek tekintetében.

Ha belső peremérték-feladatokról van szó és a  $C$  görbe nem  $\Gamma$  görbe akkor a következők állapíthatók meg:

1. DIRICHLET és vegyes peremértékfeladatok esetén

$${}_it(M_o) \quad M_o \in C$$

illetve

$${}_it(M_o) \quad M_o \in C_u \quad \text{és} \quad {}_i\hat{t}(M_o) \quad M_o \in C_t$$

egyenként teljesíti a (2.11.6) feltételt. Az  $u(M)$ -re vonatkozó megoldás pedig az egyetlen.

2. NEUMANN feladat esetén  ${}_i\hat{t}(M_o) \quad M_o \in C$  előre kell, hogy teljesítse a (2.11.6) feltételt. Az  $u(M)$ -re vonatkozó megoldás pedig egy tetszőleges állandó erejéig meghatározott.

Ha a  $C$  konturgörbe  $\Gamma$  görbe, akkor csak úgy biztosítható a megoldás unicitása a DIRICHLET feladat esetén, ha teljesítjük a (2.11.6) feltételt is.

Ha külső peremértékfeladatokról van szó, akkor a (2.10.6) feltételt mindig teljesíteni kell ellenkező esetben ui. nem reguláris az  $u(M)$ -re vonatkozó megoldás. A (2.11.6) feltétel fennállása ugyanakkor biztosítja a megoldás unicitását, akkor is, ha a  $C$  konturgörbe  $\Gamma$  görbe.

## 2.12. Az indirekt módszer egyenletei síkfeladatokra

**2.12.1.** Először ismét belső peremértékfeladatokra fordítjuk a figyelmet.

Legyen

$$\phi(M_o) = {}_it(M_o) - {}_et(M_o) \quad M_o \in C \quad (2.12.1a)$$

és

$$\psi(M_o) = {}_iu(M_o) + {}_eu(M_o). \quad M_o \in C \quad (2.12.1b)$$

A  $(2.9.13)_1$  és  $(2.10.8)_3$  egyenletek különbségéből, tekintettel a (2.9.17)-re és a fenti jelölésekre is, az

$$\begin{aligned} \tilde{u}(Q) &= u(Q) - \int_{S_i} U(M, Q) b(M) dA_M = \\ &= \tilde{c} + \oint_C U(M_o, Q) \phi(M_o) ds_{M_o} - \oint_C {}_iT(M_o, Q) \psi(M_o) ds_{M_o} \quad Q \in S \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

eredmény következik, ahol  $\tilde{c} = -c$ .

1. MEGJEGYZÉS: A (2.12.2)-ben álló

$$\mathcal{V}(Q) = \oint_C U(M_o, Q) \phi(M_o) ds_{M_o} \quad \text{illetve} \quad \mathcal{W}(Q) = \oint_C {}_iT(M_o, Q) \psi(M_o) ds_{M_o} \quad (2.12.3)$$

integrálok értelmezik, síkbeli viszonyok között, az egyszerű réteg illetve a kettős réteg potenciálját. A  $\phi(M_o)$  és  $\psi(M_o)$  függvényeket most is sűrűségfüggvényeknek fogjuk nevezni. Tekintettel a **2.9.2.** szakasz 2. MEGJEGYZÉSére, de direkt helyettesítésekkel is ellenőrizhető, hogy mind az egyszerű, mind pedig a kettős réteg potenciálja harmonikus függvény, ha  $Q \neq M_o$ .

2. MEGJEGYZÉS: Az egyszerű és kettős réteg potenciálját értelmező (2.12.3) egyenletekben nyitott ív is lehet a  $C$  görbe.

3. MEGJEGYZÉS: Megállapítható a (2.8.10) és (2.9.9a) képletek felhasználásával, hogy mind az egyszerű mind a pedig kettős réteg potenciálja tetszés szerinti rendben differenciálható, ha  $Q \neq M_o$ .

4. MEGJEGYZÉS: Legyen  $R_Q = |\mathbf{r}_Q|$ . Kimutatható a (2.8.10) és (2.12.3) értelmező egyenletek felhasználásával az egyszerű és kettős réteg potenciáljának végtelenbeli viselkedésével kapcsolatos

$$\mathcal{V}(Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_Q} \oint_C \phi(M_o) ds_{M_o} + \frac{1}{2\pi R_Q^2} \oint_C \mathbf{r}_Q \cdot \mathbf{r}_{M_o} \phi(M_o) ds_{M_o} + O\left(\frac{1}{R_Q^2}\right) \quad (2.12.4a)$$

$$\mathcal{W}(Q) = O\left(\frac{1}{R_Q}\right) \quad (2.12.4b)$$

képletek helyessége ha figyelembe vesszük, hogy ekkor  $R_Q \rightarrow \infty$ .

5. MEGJEGYZÉS: Jelölje

$${}_i\mathcal{V}(Q_o) = \lim_{Q \in S_i \rightarrow Q_o} \mathcal{V}(Q) \quad \text{és} \quad {}_e\mathcal{V}(Q_o) = \lim_{Q \in S_e \rightarrow Q_o} \mathcal{V}(Q). \quad (2.12.5)$$

az egyszerű réteg potenciáljának belülről, illetve kívülről vett határértékét a  $C$  konturgörbén. Könnyű belátni, felhasználva a (2.8.10) és (2.12.3)<sub>1</sub> értelmező egyenleteket, hogy az egyszerű réteg potenciálja folytonos az  $C$  konturgörbén történő áthaladás során, azaz

$${}_i\mathcal{V}(Q_o) = \mathcal{V}(Q_o) = {}_e\mathcal{V}(Q_o). \quad (2.12.6)$$

Ami az állítás formális igazolását illeti a 2.7 Gyakorlatra utalunk.

6. MEGJEGYZÉS: A jelen megjegyzésben az egyszerű réteg potenciálja normálirányú deriváltjának viselkedését vizsgáljuk ha a  $Q$  pont áthalad a  $C$  konturgörbén. Legyen  $Q$  a  $Q_o$  pont normálisán és a  $C$  konturgörbe belsejében lévő pont. Az  $\mathbf{n}_Q = {}_i\mathbf{n}_{Q_o}$  vektort, hasonlóan a térbeli esethez, a  $Q$  ponthoz kötjük. A (2.8.16)<sub>1</sub> és (2.2.9a)<sub>1</sub> összefüggések felhasználásával – lépésenként végezve az átalakításokat annak érdekében, hogy a határérték képzése lokalizálással legyen felcserélhető – írható, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_i n_Q} &= \lim_{Q \in S_i \rightarrow Q_o} \oint_C \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_Q} \phi(M_o) ds_{M_o} \\ &= \lim_{Q \in S_i \rightarrow Q_o} \left\{ \oint_C \left[ \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_Q} + {}_i T(M_o, Q) \right] \phi(M_o) ds_{M_o} \right. \\ &\quad \left. - \oint_C {}_i T(M_o, Q) [\phi(M_o) - \phi(Q_o)] ds_{M_o} - \oint_C {}_i T(M_o, Q) ds_{M_o} \phi(Q_o) \right\} \\ &= \phi(Q_o) + \lim_{Q \in S_i \rightarrow Q_o} \left\{ \oint_C \frac{r_\kappa}{2\pi R^2(M_o, Q)} [{}_i n_\kappa(Q) - {}_i n_\kappa(M_o)] \phi(M_o) ds_{M_o} \right. \\ &\quad \left. - \oint_C \frac{r_\kappa}{2\pi R^2(M_o, Q)} {}_i n_\kappa(M_o) [\phi(M_o) - \phi(Q_o)] ds_{M_o} \right\}. \end{aligned} \quad (2.12.7)$$

Az utolsó kapcsos zárójelben álló vonalintegrálok határértéke és  $Q = Q_o$  helyen vett helyettesítési értéke megegyezik. Tagonként véve az integrálokat, a középső két integrál értéke a lokalizálás után is zérus. A (2.8.16)<sub>1</sub> és (2.9.9)<sub>1</sub> képletek felhasználásával – feltéve, hogy síma a konturgörbe a  $Q_o$  pontban – az adódik, hogy az utolsó integrálnak  $-\frac{1}{2}$  az értéke. Vezessük be az

$${}_i\check{T}(M, Q_o) = {}_i n_\kappa \left( \left( \nabla_\kappa U(M, Q) \right) \right) \Big|_{Q_o} = \frac{\partial U(M, Q_o)}{\partial {}_i n_{Q_o}} = \frac{{}_i n_\kappa(Q_o) r_\kappa}{2\pi R^2} \quad M \neq Q_o \quad (2.12.8a)$$

és

$${}_e\check{T}(M, Q_o) = {}_e n_\kappa \left( \left( \nabla_\kappa U(M, Q) \right) \right) \Big|_{Q_o} = \frac{\partial U(M, Q_o)}{\partial {}_e n_{Q_o}} = \frac{{}_e n_\kappa(Q_o) r_\kappa}{2\pi R^2} \quad M \neq Q_o \quad (2.12.8b)$$

jelöléseket. Könnyű ellenőrizni, hogy

$${}_i\check{T}(M_o, Q_o) + {}_e\check{T}(M_o, Q_o) = 0. \quad M_o, Q_o \in C \quad M_o \neq Q_o \quad (2.12.9)$$

A lehetséges összevonások elvégzése után a

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_i n_{Q_0}} = \frac{1}{2} \phi(Q_0) + \oint_C {}_i \check{T}(M_0, Q_0) \phi(M_0) ds_{M_0} \quad (2.12.10a)$$

egyenlet következik a (2.12.7)-ből. Vegyük észre, hogy az  ${}_i \check{T}(M_0, Q_0)$  derivált szingularitása miatt, ez az  $M_0 = Q_0$  pontban jelentkezik, főértékben kell venni a  $C$  konturgörbére vonatkozó integrált. Az is nyilvánvaló, hogy az  $\mathbf{n}_Q = {}_i \mathbf{n}_{Q_0}$  feltétel helyett a gyengébb

$$\lim_{Q \in S_i \rightarrow Q_0} \mathbf{n}_Q = {}_i \mathbf{n}_{Q_0}$$

feltétel is elegendő és a  $Q$ -nak sem szükséges az  ${}_i \mathbf{n}_{Q_0}$  tartóegyenesén feküdnie, ha egyébként  $Q \rightarrow Q_0$ .

A fentiekhez hasonló módon mutatható ki, hogy

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_e n_{Q_0}} = \frac{1}{2} \phi(Q_0) + \oint_C {}_e \check{T}(M_0, Q_0) \phi(M_0) ds_{M_0} \quad (2.12.10b)$$

A (2.12.10a,b) egyenletek összegére nézve, tekintettel a (2.12.9)-re is,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_i n_{Q_0}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_e n_{Q_0}} = \phi(Q_0) \quad Q_0 \in C \quad (2.12.11)$$

az eredmény. Következésképp nem folytonos az egyszerű réteg potenciáljának normálirányú deriváltja a  $C$  konturgörbén történő áthaladás során.

7. MEGJEGYZÉS: Legyen

$${}_i \mathcal{W}(Q_0) = \lim_{Q \in S_i \rightarrow Q_0} \mathcal{W}(Q) \quad \text{és} \quad {}_e \mathcal{W}(Q_0) = \lim_{Q \in S_e \rightarrow Q_0} \mathcal{W}(Q) \quad (2.12.12)$$

Legyen továbbá  $\psi(Q_0) = 0$ . Könnyen ellenőrizhető a (2.12.3)<sub>2</sub> értelmező egyenlet és a (2.9.9a) felhasználásával, hogy ez esetben fennállnak a

$${}_i \mathcal{W}(Q_0) = \mathcal{W}(Q_0) = {}_e \mathcal{W}(Q_0) \quad Q_0 \in C \quad (2.12.13)$$

egyenletek. Szavakban:  $\psi(Q_0) = 0$ -ra folytonos a kettős réteg potenciálja az  $C$  konturgörbén történő áthaladáskor.

8. MEGJEGYZÉS: Azt a kérdést vizsgáljuk alábbiakban, hogy hogyan viselkedik  $\mathcal{W}$  a  $C$  konturgörbén történő áthaladás során ha  $\psi(Q_0) \neq 0$ . A (2.12.3)<sub>2</sub> értelmező egyenlet alkalmas bővítésével a

$$\mathcal{W}(Q) = \oint_C {}_i T(M_0, Q) [\psi(M_0) - \psi(Q_0)] ds_{M_0} + \oint_C {}_i T(M_0, Q) ds_{M_0} \psi(Q_0) \quad (2.12.14)$$

eredmény adódik. Vegyük észre, hogy az első integrálban álló

$$\psi_*(M_0) = \psi(M_0) - \psi(Q_0)$$

sűrűségfüggvény eltűnik az  $M_0 = Q_0$  pontban. Visszaidézve az előző szakasz 7. MEGJEGYZÉSÉT ez egyúttal azt is jelenti, hogy folytonos a jobboldal első integrálja a  $C$  konturgörbén történő áthaladás során. A jobboldalon álló második integrál pedig a (2.9.9a) helyettesítése után a (2.8.16) integrálra vezet. Fentiek figyelembevételével és annak a körülménynek a felhasználásával, hogy a jobboldalon álló első integrálban a  $Q_0$ -ra történő lokalizáláskor megjelenik (2.8.16)<sub>2</sub> a (2.12.14) egyenletből a

$$\begin{aligned} {}_i \mathcal{W}(Q_0) &= \mathcal{W}(Q_0) - \frac{1}{2} \psi(Q_0) \\ {}_e \mathcal{W}(Q_0) &= \mathcal{W}(Q_0) + \frac{1}{2} \psi(Q_0) \end{aligned} \quad Q_0 \in C \quad (2.12.15)$$

összefüggéseket kapjuk. Ezek az összefüggések is jól mutatják, hogy a kettős réteg potenciálja csak akkor folytonos a  $C$  konturgörbén történő áthaladáskor, ha  $\psi(Q_0) = 0$ .

**2.12.2.** A síkbeli LAPLACE egyenlettel kapcsolatos külső DIRICHLET feladatnak bármilyen  ${}_e u(M_o)$  esetén van reguláris megoldása. Ha a  $C$  konturgörbe  $\Gamma$  görbe, akkor a (2.10.7) GAUSS feltétel teljesülés biztosítja az unicitást. Ez egyben azt is jelenti, hogy az

$${}_e u(M_o) = {}_i u(M_o)$$

választással (2.12.2)-ből az

$$u(Q) = \tilde{c} + \oint_C U(M_o, Q) \phi(M_o) ds_{M_o} + \int_{S_i} U(M, Q) b(M) dA_M. \quad Q \in S_i \quad (2.12.16)$$

egyenlet következik. Vegyük észre, kihasználva a (2.12.1a)-t, a (2.10.7) GAUSS feltételt és a síkbeli stacionér hővezetési feladat szóhasználatát, hogy

$$\begin{aligned} \oint_C {}_i t(M_o) ds_{M_o} + \int_{S_i} b(M) dA_M - \oint_C {}_e t(M_o) ds_{M_o} = \\ = \oint_C \phi(M_o) ds_{M_o} + \int_{S_i} b(M) dA_M = 0, \end{aligned} \quad (2.12.17)$$

hiszen a baloldal első két tagja az  $S_i$ , az utolsó tag pedig az  $S_e$  tartomány hőegyensúlyát fejezi ki. A (2.12.16) egyenlet  $Q$  változó szerinti deriválásával az  $u(Q)$  mező gradienseinek számítására szolgáló

$$\begin{aligned} u(Q) \overset{Q}{\nabla}_\kappa = \oint_C \left( U(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_\kappa \right) \phi(M_o) ds_{M_o} \\ + \int_{S_i} \left( U(M, Q) \overset{Q}{\nabla}_\kappa \right) b(M) dA_M \quad Q \in S_i \end{aligned} \quad (2.12.18)$$

összefüggés következik.

A (2.12.16) és (2.12.18) képletek a térbeli esettel kapcsolatos (2.7.16) és (2.7.17) képletek analogonjai. A  $\tilde{c}$  konstans úgy kell megválasztani, hogy teljesüljön a (2.12.17) feltétel.

1. MEGJEGYZÉS: A (2.12.16) egyenlet a (2.9.13)<sub>1</sub> a (2.12.18) egyenlet pedig a (2.11.1) egyenlet párja. Különbség van azonban az ismeretlen mezők tekintetében. A (2.9.13)<sub>1</sub> és a (2.11.1) egyenletekben

$$u(M_o) \quad M_o \in C_t \quad \text{és} \quad {}_i t(M_o) \quad M_o \in C_u$$

azaz a feladat fizikai változói, míg a (2.12.16) és (2.12.18) egyenletekben pedig a fiktív

$$\phi(M_o) \quad M_o \in S$$

sűrűségfüggvény az ismeretlen. A sűrűségfüggvényt értelmező (2.12.1a) egyenlet szerint azonban nem független a  $\phi(M_o)$  mező az előzőektől, hiszen az  ${}_i t(M_o)$  és  ${}_e t(M_o)$  normálirányú deriváltak különbségeként számítható.

2. MEGJEGYZÉS: A (2.12.16) és (2.12.18) képletek – feltéve, hogy ismeretes az adott peremértékfeladathoz tartozó  $\phi(M_o)$  sűrűségfüggvény és a  $\tilde{c}$  állandó – kvadraturák segítségével állítják elő az  $u(Q)$  mezőfüggvényt és gradiensét.

**2.12.3.** Az ismeretlen  $\phi(M_o)$  sűrűségfüggvény számítására úgy kaphatunk egyenleteket, hogy a (2.12.16) és (2.12.18) képletek határértékeit vesszük, ha  $Q \rightarrow Q_o$  és kihasználjuk a feladat peremfeltételeit. Figyelembe véve, hogy az egyszerű réteg potenciálja folytonos ha áthaladunk a  $C$  konturgörbén, azaz kihasználva a (2.12.3)<sub>1</sub>, a (2.12.16) összefüggéseket és a (2.8.7a) peremfeltételt, az  $C_u$  peremrészre vonatkozó (2.12.19)<sub>1</sub> egyenletet kapjuk a (2.12.16)-ból.

További egyenlethez jutunk, ha skalárisan megszorozzuk a (2.12.18) egyenletet az  $\mathbf{n}_Q = {}_i \mathbf{n}_{Q_o}$  külső normálissal és a kapott kifejezés határértékét képezzük, ha  $Q \rightarrow Q_o \in C_t$ . Az eredmény baloldala, amint az a (2.8.7b) peremfeltételből azonnal kitűnik, ismert. A jobboldalon álló első integrál határértékét a (2.12.10a) kifejezés adja. A jobboldalon álló második integrál határértéke

pedig megegyezik, nyilvánvalóan, a helyettesítési értékével és írásbeli egyszerűsödés is elérhető, ha alkalmazzuk a (2.12.8a) jelölést.

Az átalakítások után adódó (2.12.19)<sub>2</sub> egyenlet, együtt az előző lépésben kapott (2.12.19)<sub>1</sub> egyenlettel az indirekt módszer egyenletrendszere síkfeladatokra:

$$\begin{aligned} {}_i\hat{u}(Q_o) &= \tilde{c} + \oint_C U(M_o, Q_o) \phi(M_o) ds_{M_o} \\ &\quad + \int_{S_i} U(M, Q_o) b(M) dA_M, \quad Q_o \in C_u \\ {}_i\hat{t}(Q_o) &= \frac{1}{2} \phi(Q_o) + \oint_C {}_i\check{T}(M_o, Q_o) \phi(M_o) ds_{M_o} \\ &\quad + \int_{S_i} {}_i\check{T}(M, Q_o) b(M) dA_M. \quad Q_o \in C_t \end{aligned} \quad (2.12.19)$$

A  $\phi(M_o)$  sűrűségfüggvény meghatározása a (2.12.19) integrálegyenletek numerikus megoldásával történhet. Ha ismeretes a  $\phi(M_o)$ , akkor a (2.12.19)<sub>1</sub> egyenlet jobboldala  $Q_o \in C_t$ -re az ismeretlen  $u(Q)$ -t adja. Az ismeretlen  ${}_i\hat{t}(M_o)$  normálirányú derivált pedig a (2.12.19)<sub>2</sub> egyenlet jobboldalának segítségével számítható, ha a  $Q_o \in C_u$ . Ez az indirekt módszer fő hátránya a direkt módszerrel szemben, hiszen ott ezek a mezők a vonatkozó (2.9.13)<sub>2</sub> integrálegyenlet megoldásai és így meghatározásuk nem igényli további kvadratúrák végrehajtását.

A belső pontokban tekintett értékek meghatározása, amint arra már utaltunk a **2.12.2.** szakasz 2. MEGJEGYZÉSÉBEN, a (2.12.16) és (2.12.18) képletek segítségével történhet.

1. MEGJEGYZÉS: DIRICHLET feladat esetén  $C_t = 0$ . Legyen, összhangban a (2.9.17)-el,

$${}_i\tilde{u}(Q_o) = {}_i\hat{u}(Q_o) - \tilde{c} - \int_{S_i} U(M, Q_o) b(M) dA_M. \quad Q_o \in C \quad (2.12.20)$$

Ezzel a jelöléssel az

$$\oint_C U(M_o, Q_o) \phi(M_o) ds_{M_o} = {}_i\tilde{u}(Q_o) \quad Q_o \in C \quad (2.12.21)$$

elsőfajú integrálegyenlet következik a megmaradó (2.12.19)<sub>1</sub> egyenletből.

2. MEGJEGYZÉS: NEUMAN feladat esetén a  $C_u = 0$ . Legyen

$${}_i\tilde{t}(Q_o) = {}_i\hat{t}(Q_o) - \int_{S_i} {}_i\check{T}(M, Q_o) b(M) dA_M. \quad Q_o \in C \quad (2.12.22)$$

A bevezetett jelöléssel, az

$$\frac{1}{2} \phi(Q_o) + \int_{S_i} {}_i\check{T}(M_o, Q_o) \phi(M_o) dA_{M_o} = {}_i\tilde{t}(Q_o) \quad Q_o \in C \quad (2.12.23)$$

másodfajú, szinguláris magú integrálegyenlet adódik a (2.12.19)<sub>2</sub>-ből. A megoldás végtelenbeli korlátosságát biztosító (2.12.17) feltételt mind a (2.12.21), mind pedig a (2.12.23) egyenlet kapcsán teljesíteni kell.

**2.12.4.** A külső  $S_e$  tartománnyal kapcsolatos peremérték-feladatok esetén csak annyiban változnak az indirekt módszer (2.12.19)<sub>1,2</sub> egyenletei, hogy a tartomány jellegére és egyuttal a külső normálisra utaló  $i$  index helyére  $e$  kerül.

## 2.13. Gyakorlatok

**2.1** Igazolja formális számításokkal, a szükséges deriválások végrehajtásával, hogy a kettős réteg potenciálja mind a térbeli mind pedig a síkbeli feladatok esetén harmonikus függvény. Van valamilyen korlátozás a  $Q$  pont helyzetét tekintve?

**2.2** Igazolja, formális számításokkal, hogy az

$$\int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M \quad \text{valamint a} \quad \int_{A_i} U(M, Q) b(M) dA_M$$

integrálok –  $U(M, Q)$  mindkét esetben a vonatkozó alapmegoldás – a (2.2.15) térbeli valamint a (2.8.8) síkbeli POISSON egyenlet partikuláris megoldásai.

**2.3** Vizsgáljuk meg az

$$\int_{V_i} (\Delta_M u(M) + b(M)) \bar{u}(M) dV_M$$

alakú hibaintegrált ahol  $\bar{u}(M)$  a súlyfüggvény.

Legyen

$$\bar{u}(M) = U(M, Q).$$

Mutassa meg, hogy a fenti hibaintegrál 2.2 (a), 2.2 (b) és 2.2 (c) ábrán vázolt tartományokon való eltűnéséből – a hibaintegrál  $\epsilon \rightarrow 0$  határértékét véve az első két esetben – rendre következnek a (2.4.14)<sub>1,2</sub> és (2.4.14)<sub>3</sub> egyenletek.

**2.4** Mi az alapja az  $u(M)$  regularitásával kapcsolatos (2.5.1) feltevésnek?

**2.5** Igazolja térbeli feladatokra az egyszerű- és kettősréteg potenciáljának végtelenbeli viselkedésével kapcsolatos (2.7.4a,b) képletek helyességét.

**2.6** Igazolja az egyszerű- és kettősréteg potenciáljának végtelenbeli viselkedésével kapcsolatos és a síkbeli esetre vonatkozó (2.12.4a,b) képletek helyességét.

**2.7** Mutassa meg, hogy az egyszerű réteg potenciálja mind a térbeli mind pedig a síkbeli esetben folytonos a peremen történő áthaladás során.

**2.8** Mutassa meg, követve a 2.7 Gyakorlat megoldásának gondolatmenetét, hogy nem folytonos a kettős réteg potenciálja a peremen történő áthaladás során.

**2.9** Hogyan módosul az indirekt módszer (2.7.18)<sub>2</sub> és (2.12.19)<sub>2</sub> egyenleteinek jobboldalán a  $\phi(Q_0)$  együtthatója, ha nem síma az  $S$  felület (él, vagy sarokpont) illetve a  $C$  konturgörbe (töréspont) a  $Q_0$  pontban.

**2.10** Vezessen le zárt formulát a (2.12.19)<sub>1</sub> egyenletben álló  $c$  konstans számítására, feltéve hogy a LAPLACE egyenlettel kapcsolatos külső DIRICHLET feladat a vizsgálat tárgya.

#### HIVATKOZÁSOK A 2. FEJEZETHEZ

1. Hess, J.L.-Smith, R.M.O.: *Calculation of potential flow about three dimensional bodies*, Report No. E.S.40622, Douglas Aircraft Co., Long Beach, 1962.
2. Hess, J.L.-Smith, R.M.O.: *Calculation of potential flow about arbitrary bodies* in Progress in Aeronautical Sciences, Vol.8. Edited by D.Kuchemann, Pergamon Press, London 1967.
3. Jaswon, M.-Ponter, A.R.: *An integral equation solution of the torsion problem*, Proc. Roy. Soc. Ser. A., **273** (1963) 237-246.
4. Jaswon, M.: *Integral equation methods in potential theory*, I. Proc. Roy. Soc. Ser. A., **275** (1963) 23-32.
5. Symm, G.T.: *Integral equation methods in potential theory*, II. Proc. Roy. Soc. Ser. A., **275** (1963) 33-46.
6. Brebbia, C.A.: *The boundary element method for engineers*, Pentech Press, London, 1978.
7. Cruse, T.A.-Rizzo, F.J.(eds): *Boundary-integral equation method: Computational applications in applied mechanics*, AMD – Vol. 11, A.S.M.E., New-York, 1975.
8. Brebbia, C.A.-Dominguez, J.: *Boundary element methods versus finite elements*, Proc. Int. Conference on Applied Numerical Modelling, Southampton University, 1977, ed. by C.A. Brebbia, Pentech Press, London, 1978.
9. Brebbia, C.A.-Dominguez, J.: *Boundary element methods for potential problems*, Applied Mathematical Modelling, **1** (1977), 1-7.
10. Mackerle, J.-Brebbia, C.A.(eds): *The boundary element reference book*, Computational Mechanics Publications, Southampton Boston and Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York London Paris Tokyo 1988.
11. Zhao, Z.: *Shape design sensitivity analysis and optimization using the boundary element method*, Lecture Notes in Engineering, Springer-Verlag, 1989.
12. Kellogg, O.D.: *Foundations of potential theory*, Dover, New-York, 1953.
13. Carslaw, H.S.-Jaeger, J.C.: *Conduction of heat in solids*, Oxford, Clarendon Press, 1959.

14. Jaswon, M.A.-Symm, G.T.: *Integral equation methods in potential theory and elastostatics*, Academic press, London, 1977.
15. Pogorzelski, J.: *Integral equations and their applications*, Pergamon Press, London, 1977.
16. Mikhlin, S.G.: *Mathematical Physics, an Advanced Course*, North Holland, Amsterdam, 1970.

## A rugalmasságtan statikai feladatai

### 3.1. Történeti háttér

**3.1.1.** A jelen fejezet a peremelem módszer rugalmasságtani alkalmazásait mutatja be. Az első ilyen tárgyú dolgozatok 1967-ben [1,3] illetve 1968-ban [2] jelentek meg. JASWON és szerzőtársai [1,2] a síkrugalmasságtani feladatokkal kapcsolatos biharmonikus egyenlet illetve egyes lemezfeladatok megoldását, kihasználva azt a körülményt, hogy bármilyen biharmonikus függvény előállítható két harmonikus függvény segítségével [4], két csatolt integrálegyenlet megoldására vezették vissza.

A döntő lépést a módszer rugalmasságtani feladatokban történő alkalmazása felé RIZZO tette meg [3]. Az utóbbi dolgozat síkrugalmasságtani feladatok megoldására nyújt módszert integrálegyenleteket állítva elő a tartomány peremén ébredő feszültségek és a peremen tekintett elmozdulások között. A megoldás során a tartomány konturgörbéje nagy számú kis elemre – peremelemre – lett felosztva és egy-egy elemen belül az elmozdulásokat és feszültségeket állandó értékűnek tekintették. A közelítés jellege miatt a peremen vett integrálok zárt alakban is kiszámíthatók, de a kielégítő pontosságú megoldás viszonylag sok elemet igényelt.

Ugyanez a helyzet CRUSE térbeli feladatokkal kapcsolatos dolgozatát illetően [5], amelyben a test felületét síkháromszögekből álló hálóval közelítették feltételezve, hogy az ismeretlen függvény állandó értékű a háromszögeken. A következő két tanulmány szerzői RICARDELLA és CRUSE voltak [6,7], akik a módszer hatékonyságának javítására már lineáris approximációt választottak a vonalelemek illetve a síkháromszögek felett. Bár a módszer hatékonysága ezáltal javult a numerikus eredmények tanúsága szerint még mindig nem érte el a végeelem módszer pontosságát illetve hatékonyságát.

Az approximáció további javítása BOISSENOT, LACHAT és WATSON neveihez fűződik [8], akik – síkfeladatokra fordítva a figyelmet – a geometriát kvadratikus, az elmozdulásmezőt és a feszültséget pedig lineáris, kvadratikus és köbös alakfüggvényekkel közelítették az elemeken. A térbeli feladatok vizsgálata, ismét kvadratikus függvényekkel közelítve a geometriát, illetve kvadratikus és köbös alakfüggvényekkel közelítve az elmozdulásmezőt, LACHAT és WATSON érdeme [9,10]. Az utóbbi dolgozat egy javított integrálási sémát is nyújt továbbá résztartományokra osztja a teljes tartományt szalagszerkezetű együtthatómátrix elérése érdekében.

**3.1.2.** A módszert CRUSE és RIZZO alkalmazta először dinamikai feladatokra [11,12].

**3.1.3.** A képlékenységtani alkalmazások irányába tett első lépést SWEDLOW és CRUSE tette meg [13]. RICARDELLA 1973-ban a [13] tanulmány alapján számítási algoritmust fejlesztett ki a képlékenységtan síkfadataira [14]. Bár ez a kísérlet nem volt minden tekintetben sikeres mégis meggyőzően demonstrálta a módszer erejét. 1978-ban BANERJEE és MUSTOE általános formában dolgozta ki az indirekt módszert képlékeny testekre [15]. A direkt módszer egyenleteinek előállítása pedig a BANERJEE, CATHIE és DAVIS szerzőhármasság nevéhez fűződik [16].

**3.1.4.** A 70-es évek második fele és a 80-as évtized, amint arra korábban a második fejezet **2.1.1.** szakaszának utolsó bekezdésében már utaltunk, a módszer gyors fejlődésének és az alkalmazások bővülésének évtizede.

**3.1.5.** A jelen fejezet a peremelem módszer rugalmasságtani feladatokban történő alkalmazását tárgyalja. A rugalmasságtan egyenleteinek bemutatása után az alapmegoldás előállításának egy lehetőségét ismertetjük. A direkt módszer az idegen munkák egyenlőségére támaszkodva kerül bemutatásra és kitérünk az indirekt módszerre is. A gondolatmenet kifejtése

során először a háromméretű feladatokat vesszük sorra. A kétméretű feladatokat külön fejezet tekinti át. A sarokpont kezelésének problematikája valamint a tartományi integrálok peremre történő kivitelének kérdése ugyancsak bemutatásra kerül.

### 3.2. Az elasztostatika egyenletei

**3.2.1.** Alábbiak az A. Függelékben ismertetett kartéziuszi koordináta-rendszerben homogén, izotróp, lineárisan rugalmas test feltételezése mellett tekintik át az elasztostatika egyenleteit. Hőhatásoktól egyelőre ugyancsak eltekintünk.

**3.2.2.** Legyen  $u_k$  az elmozdulásvektor. Az alakváltozási és feszültségi tenzort rendre  $e_{kl}$  és  $t_{kl}$  jelöli. Legyen  $b_l$  a térfogati terhelés sűrűségvektora. Legyen továbbá  $G$  a nyírási rugalmassági modulus és jelölje  $\nu$  a POISSON számot. Az elasztostatika un. primál rendszerének mezőegyenleteit az

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + u_k \nabla_l) = u_{(k} \nabla_{l)} \quad (3.2.1)$$

kinematikai egyenletek – a kerek zárójelpárban álló indexek a tenzor szimmetrikus részét jelölik –, a

$$t_{kl} = 2G \left( e_{kl} + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{ss} \delta_{kl} \right) = 2G \frac{1}{2} \left( \delta_{kr} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{lr} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{kl} \delta_{rs} \right) e_{rs} \quad (3.2.2)$$

HOOKE törvény és a

$$t_{kl} \nabla_l + b_l = 0 \quad (3.2.3)$$

egyensúlyi egyenletek alkotják, aholis az alakváltozási tenzor — értelmezéséből adódóan — szimmetrikus, azaz  $e_{kl} = e_{lk}$ . Könnyű ellenőrizni, hogy a (3.2.2) egyenletből számított  $t_{kl}$  feszültségi tenzor ugyancsak szimmetrikus. A feszültségi tenzor szimmetriája valójában a nyomatéki egyensúly következménye és ezért fennállása az anyagtörvénytől független követelmény.

A HOOKE törvényben álló

$$C_{klrs} = 2G \frac{1}{2} \left( \delta_{kr} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{lr} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{kl} \delta_{rs} \right) \quad (3.2.4)$$

negyedrendű tenzor az anyagállandók tenzora homogén izotróp testre. Könnyű ellenőrizni, hogy a HOOKE törvény megfordítása

$$e_{kl} = \frac{1}{2G} \left( t_{kl} - \frac{\nu}{1+\nu} t_{ss} \delta_{kl} \right) = \frac{1}{2G} \frac{1}{2} \left( \delta_{kr} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{lr} - \frac{2\nu}{1+\nu} \delta_{kl} \delta_{rs} \right) t_{rs} \quad (3.2.5)$$

alakú, ahol

$$C_{klrs}^{-1} = \frac{1}{2G} \frac{1}{2} \left( \delta_{kr} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{lr} - \frac{2\nu}{1+\nu} \delta_{kl} \delta_{rs} \right) \quad (3.2.6)$$

a  $C_{klrs}$  negyedrendű tenzor inverze. Vegyük észre, hogy

$$C_{klrs} = C_{rskl} = C_{lkrs} = C_{klsr} \quad (3.2.7a)$$

és

$$C_{klrs}^{-1} = C_{rskl}^{-1} = C_{lkrs}^{-1} = C_{klsr}^{-1}. \quad (3.2.7b)$$

Az utóbbi két egyenlet azt fejezi ki, hogy az anyagállandók tenzorai mind a  $kl$  és  $rs$  indexpárok, mind pedig a  $k, l$  és  $r, s$  indexek tekintetében szimmetrikusak.

**3.2.3.** A HOOKE törvényben álló  $G$  és  $\nu$  anyagállandók helyett más anyagjellemzőket, a  $\mu$  és  $\lambda$  LAME állandókat illetve az  $E$  rugalmassági moduluszt is szokás használni:

$$\mu = G \quad \lambda = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu} \quad (3.2.8a)$$

$$E = 2(1 + \nu)\mu = 2(1 + \nu)G. \quad (3.2.8b)$$

A LAME állandók segítségével írva fel

$$t_{kl} = 2\mu e_{kl} + \lambda e_{ss} \delta_{kl} \quad (3.2.9)$$

a HOOKE törvény illetve

$$e_{kl} = \frac{1}{2\mu} \left( t_{kl} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} t_{ss} \delta_{kl} \right) \quad (3.2.10)$$

a törvény inverz alakja.

**3.2.4.** Nem izotermikus esetben a rugalmas alakváltozásokhoz hozzáadódik a  $\vartheta$  hőmérsékletváltozás okozta alakváltozás. Termikusan izotróp testre – ezt ehelyütt és a továbbiakban feltételezzük – a teljes alakváltozás az

$$e_{kl} = \frac{1}{2\mu} \left( t_{kl} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} t_{ss} \delta_{kl} \right) + \alpha \vartheta \delta_{kl} \quad (3.2.11)$$

módon számítható, ahol  $\alpha$  a hőtágulási együttható. A (3.2.11) egyenletből, tekintettel a  $k$  és  $l$  indexek kontrakciójával adódó

$$t_{ss} = (2\mu + 3\lambda)(e_{ss} - 3\alpha \vartheta)$$

összefüggésre, a

$$t_{kl} = 2\mu e_{kl} + \lambda e_{ss} \delta_{kl} - \gamma \vartheta \delta_{kl} \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha \quad (3.2.12)$$

képlet adódik a feszültségek számítására. Az

$$e_{kl}^o = \alpha \vartheta \delta_{kl} \quad \text{és} \quad t_{kl}^o = -\gamma \vartheta \delta_{kl} \quad (3.2.13)$$

alakváltozások és feszültségek a hőterhelés okozta ún. kezdeti alakváltozások illetve feszültségek.

**3.2.5.** Továbbiakban a  $\mu$  és  $\nu$  anyagállandókat alkalmazzuk az anyagtörvénnyel kapcsolatos egyenletek írása során anélkül, hogy erre külön is felhívnánk a figyelmet.

**3.2.6.** A (3.2.1) kinematikai egyenlet, a (3.2.2) HOOKE törvény és a (3.2.3) egyensúlyi egyenlet, összesen tehát tizenöt mezőegyenlet, szolgál az  $u_k$  elmozdulásmező, az  $e_{kl}$  alakváltozásmező és a  $t_{kl}$  feszültségmező, azaz a tizenöt ismeretlen skalárfüggvény meghatározására. Másként fogalmazva a feladat határozott.

**3.2.7.** A (3.2.2) HOOKE törvény majd a (3.2.1) kinematikai egyenletek (3.2.3) egyensúlyi egyenletbe történő helyettesítésével és alkalmas indexátnevezéssel a

$$\boxed{\Delta u_l + \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla_l \nabla_s u_s + \frac{b_l}{\mu} = 0} \quad (3.2.14)$$

vagy ami ugyanaz a

$$(\Delta \delta_{ls} + k \nabla_l \nabla_s) u_s + \frac{b_l}{\mu} = 0, \quad k = \frac{1}{1 - 2\nu} \quad (3.2.15)$$

differenciálegyenlet adódik. Ez az egyenlet a rugalmasságtan térbeli feladatainak elmozdulásmezőre vonatkozó alapegyenlete homogén, izotróp testre. Az

$$\mathcal{L}_{ls} = \Delta \delta_{ls} + \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla_l \nabla_s = \Delta \delta_{ls} + k \nabla_l \nabla_s \quad (3.2.16)$$

jelölés bevezetésével — vegyük észre, hogy  $\mathcal{L}_{ls}$  valójában egy differenciáloperátor — az

$$\mathcal{L}_{ls}u_s + \frac{b_s}{\mu} = 0 \quad (3.2.17)$$

tömör alakban írható fel a rugalmasságtan elmozdulásmezőre vonatkozó alapegyenlete.

Tegyük fel, hogy az  $u_k$  vektormező megoldása a (3.2.14) alapegyenletnek. Ez esetben az  $u_k$  elmozdulásmező a vizsgált tartomány egy rugalmas állapotát írja le. Térfogati terhelés nélküli rugalmas állapotról beszélünk, ha  $b_k = 0$ .

**3.2.8.** Legyen  $g_k$  kétszer folytonosan differenciálható vektormező. Legyen továbbá

$$a(u_k, g_l) = \frac{1}{2} (u_{(k} \nabla_{l)}) C_{klrs} (g_{r} \nabla_s) . \quad (3.2.18)$$

Figyeljük meg, hogy a  $C_{klrs}$  negyedrendű tenzor (3.2.7a)<sub>1</sub> képlettel adott szimmetria tulajdonságainak köszönhetően

$$a(u_k, g_l) = a(g_k, u_l) . \quad (3.2.19)$$

A  $g_l = u_l$ -re (3.2.18)-ból, tekintettel a (3.2.1)-re is, az

$$a(u_k, u_l) = \frac{1}{2} e_{kl} C_{klrs} e_{rs} \quad (3.2.20)$$

eredmény következik. Ez az összefüggés a rugalmas energia  $a = a(u_k, u_l)$  sűrűségfüggvényét értelmezi.

**3.2.9.** CAUCHY tétele szerint az  $n_k$  normálisú felületelemen ébredő  $t_l$  feszültségvektor homogén lineáris függvénye az  $n_k$  normálisnak:

$$t_k = t_{kl} n_l . \quad (3.2.21)$$

A (3.2.2) HOOKE törvény és a (3.2.1) kinematikai egyenlet felhasználásával az  $u_k$  elmozdulásvektor segítségével is kifejezhető a feszültségvektor:

$$t_k = \mu \left[ \nabla_k u_l + u_k \nabla_l + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\nabla_s u_s) \delta_{kl} \right] n_l . \quad (3.2.22)$$

**3.2.10.** Belső peremértékfeladatról beszélünk, ha a vizsgált test a  $V_i$ , külső peremértékfeladatról ha a vizsgált test a  $V_e$  tartományt tölti ki. Jelölje, összhangban az eddigiekkel,  $S$  a  $V_i$  és  $V_e$  tartományok közös határfelületét. Az  $S$  felület most is az  $S_u$  illetve  $S_t$  jelű részekre bontott.

A lehetséges peremértékfeladatok egy eléggé tág osztálya adódik, ha az  $S_u$  jelű peremrészen az elmozdulásvektort, az  $S_t$  jelű peremrészen pedig a feszültségvektort írjuk elő. Még pontosabban véve sorra az egyes lehetőségeket az alábbi feladatok megkülönböztetése szokásos [pl.: 1, 128 o.].

Belső tartományra vonatkozó első peremértékfeladatról beszélünk, ha az elmozdulásmezőre vonatkozó

$$\mathcal{L}_{ls}u_s(M) + \frac{b_s(M)}{\mu} = 0 \quad M \in V_i \quad (3.2.23)$$

alapegyenlethez az

$$u_l(M_o) = {}_i\hat{u}_l(M_o) \quad M_o \in S \quad (3.2.24)$$

peremfeltétel társul — az  $u$  betű felett álló kalap az előre megadott elmozdulásmezőt jelöli — vagyis az elmozdulásmező az előírt a test teljes  $S$  peremfelületén.

Belső tartományra vonatkozó második peremértékfeladat esetén a feszültségek az előírtak az  $S$  felületen:

$$t_{kl}(M_o) {}_i n_l = {}_i\hat{t}_k(M_o) \quad M_o \in S \quad (3.2.25)$$

A peremfeltétel jobboldalán álló  ${}_i\hat{t}_k$  az  $S$  felületen előre megadott feszültségeket jelöli.

Vegyes vagy harmadik peremértékfeladatról akkor beszélünk, ha a vonatkozó peremfeltételek

$$u_l(M_o) = {}_i\hat{u}_l(M_o) \quad M_o \in S_u \quad (3.2.26a)$$

$$t_{kl} {}_i n_l(M_o) = {}_i\hat{t}_k(M_o) \quad M_o \in S_t \quad (3.2.26b)$$

alakúak.

A külső tartományra vonatkozó első, második és vegyes peremértékfeladatokat tekintve az

$$\mathcal{L}_s u_s(M) + \frac{b_s(M)}{\mu} = 0 \quad M \in V_e \quad (3.2.27)$$

alapegyenlet rendre a

$$u_l(M_o) = {}_e\hat{u}_l(M_o) \quad M_o \in S \quad (3.2.28)$$

és

$$t_{kl}(M_o) {}_e n_l = {}_e\hat{t}_k(M_o) \quad M_o \in S \quad (3.2.29)$$

illetve

$$u_k(M_o) = {}_e\hat{u}_k(M_o) \quad M_o \in S_u \quad (3.2.30a)$$

$$t_{kl}(M_o) {}_e n_l = {}_e\hat{t}_k(M_o) \quad M_o \in S_t \quad (3.2.30b)$$

a peremfeltételekkel társul.

1. MEGJEGYZÉS: Zérus kiterjedésű  $S_t$ -re illetve  $S_u$ -ra a vegyes peremértékfeladat rendre az első illetve a második peremértékfeladatra egyszerűsödik.

2. MEGJEGYZÉS: Későbbiekben ki fog derülni, hogy mind a direkt mind pedig az indirekt peremelem módszer esetén vagylagosan előírhatók a peremfelület érintősíkjában fekvő elmozdulásvektor-összetevők, a normálirányú elmozdulás illetve az ugyanezen helyzetű csuszta-  
tó-, és normálfeszültségek.

### 3.3. Alapmegoldás a rugalmasságtan térbeli feladataira

**3.3.1.** Az alapmegoldás kérdése alapvető fontosságú a peremelem módszerrel kapcsolatos vizsgálatokban. Az alapmegoldás előállítása a legtöbb esetben nem egyszerű feladat. A kérdéskört részletesen tárgyalja FRITZ, J. könyve, amely kvadratúrát tartalmazó formulákat is közöl az alapmegoldás számítására [17, 65-76 o.]. Sok esetben célhoz vezet azonban a következőkben bemutatásra kerülő eljárás is. Tegyük fel, hogy a vizsgált feladat differenciálegyenetei csatolt, vagy más elnevezés szerint kapcsolt differenciálegyenletrendszert alkotnak, azaz legalább egy ismeretlen függvény több egyenletben is szerepel. Előfordul ilyenkor, hogy a csatolás oly módon szüntethető meg, hogy a bevezetett új ismeretlen függvények ugyanazon típusú differenciálegyenletnek kötelesek eleget tenni. Ha ismeretes az utóbbi egyenlethez tartozó alapmegoldás, vagy ha az utóbbi egyenlet olyan szerkezetű, hogy az alapmegoldása könnyebben meghatározható, akkor az eredeti feladathoz tartozó alapmegoldás is rendszerint előállítható. Ez okból adódóan LURIE [19] alatti tanulmányára, valamint a [18]-ra támaszkodva részletesebben is kitérünk a csatolás megszüntetésének lehetőségére. A megoldás azon alapul, hogy a lineáris differenciáloperátort formálisan algebrai operátorként tekintjük.

**3.3.2.** Legyen  $u_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )  $n$  változós ismeretlen függvény amely a

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{L}_{ij} u_j = f_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3.1)$$

differenciálegyenletet köteles teljesíteni, ahol  $\mathcal{L}_{ij}$  lineáris differenciáloperátor és a jobboldalon álló  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) pedig ismert inhomogenitás.

Vegyük észre, hogy  $n = 3$ -ra és  $f_s = -b_s/\mu$ -re a fenti egyenlet megfelel formálisan a rugalmasságtan elmozdulásmezőre vonatkozó (3.2.17) alapegyenletének.

Legyen  $\chi_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) új ismeretlen függvény és tegyük fel, hogy

$$u_j = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \dots & \mathcal{L}_{1,j-1} & \chi_1 & \mathcal{L}_{1,j+1} & \dots & \mathcal{L}_{1n} \\ \mathcal{L}_{21} & \dots & \mathcal{L}_{2,j-1} & \chi_2 & \mathcal{L}_{2,j+1} & \dots & \mathcal{L}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{L}_{n1} & \dots & \mathcal{L}_{n,j-1} & \chi_n & \mathcal{L}_{n,j+1} & \dots & \mathcal{L}_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.2)$$

Jelölje  $L_{rk}$  a fenti determináns  $\mathcal{L}_{kr}$ -ik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst. Nyilvánvaló, hogy  $L_{rk}$  is differenciáloperátor. Ismeretes az algebrából, hogy

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{L}_{ij} L_{jr} = \det(\mathcal{L}_{ks}) \delta_{ir} \quad (3.3.3)$$

ahol  $\delta_{ir}$  az  $n$  méretű térben tekintett KRONECKER szimbólum, azaz

$$\delta_{ir} = \begin{cases} 0 & i \neq r \\ 1 & i = r \end{cases} \quad (3.3.4)$$

A  $j$ -ik oszlopa szerint fejtvé ki a fenti determinánst az

$$u_j = L_{j1}\chi_1 + L_{j2}\chi_2 + \dots + L_{jn}\chi_n = \sum_{r=1}^n L_{jr}\chi_r \quad (3.3.5)$$

képlet adódik az  $u_j$  számítására. Az  $u_j$ -t adó utóbbi képlet (3.3.1)-be történő helyettesítése és a (3.3.3) kihasználása után a

$$\det(\mathcal{L}_{ks})\chi_r = f_r \quad r = 1, \dots, n \quad (3.3.6)$$

egyenletet kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a  $\chi_r$  függvények azonos differenciálegyenletnek kötelesek eleget tenni. Másként fogalmazva a (3.3.2) egyenlet segítségével bevezetett új  $\chi_r$  függvényekre vonatkozó differenciálegyenletek nem csatoltak. A  $\chi_r$  függvényeket – mivel a fenti gondolatmenet GALJORKIN rugalmasságtani feladatokkal kapcsolatos gondolatmenetének általánosítása – GALJORKIN féle függvényeknek szokás nevezni.

1. MEGJEGYZÉS: A fentiekben bemutatott eljárás módszer a csatolás megszüntetésére. Alkalmazhatóságának feltétele, hogy  $\mathcal{L}_{ks}$  determinánsa zérustól különböző legyen.

**3.3.3.** Az előző szakasz eredményeinek rugalmasságtani alkalmazása a rugalmasságtan elmozdulásmezőre vonatkozó alapegyenletén alapul. Visszaidezve, hogy most  $n = 3$  írható formálisan a (3.3.2) képlet felhasználásával, hogy

$$u_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ \chi_2 & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ \chi_3 & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \chi_1 & \mathcal{L}_{13} \\ \mathcal{L}_{21} & \chi_2 & \mathcal{L}_{23} \\ \mathcal{L}_{31} & \chi_3 & \mathcal{L}_{33} \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \chi_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \chi_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \chi_3 \end{vmatrix} \quad (3.3.7)$$

Az  $a_{mn}$  másodrendű tenzor  $ir$ -dik eleméhez tartozó előjeles aldetermináns az (A.4.6) alatti képlet segítségével számítható. Az idézett képlet felhasználásával fejtvé ki a (3.3.7) alatti determinánssokat adódik, hogy

$$u_1 = \frac{1}{2}e_{1pq}\chi_r e_{rst}\mathcal{L}_{ps}\mathcal{L}_{qt}, \quad u_2 = \frac{1}{2}e_{2pq}\chi_r e_{rst}\mathcal{L}_{ps}\mathcal{L}_{qt} \quad \text{és} \quad u_3 = \frac{1}{2}e_{3pq}\chi_r e_{rst}\mathcal{L}_{ps}\mathcal{L}_{qt}.$$

A kapott egyenletek egyesítésével és az  $\mathcal{L}_{is}$ -et értelmező (3.2.16) képlet helyettesítésével innen az

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1}{2}e_{ipq}e_{rst}\mathcal{L}_{ps}\mathcal{L}_{qt}\chi_r = \frac{1}{2}e_{ipq}e_{rst}(\Delta\delta_{ps} + k\nabla_p\nabla_s)(\Delta\delta_{qt} + k\nabla_q\nabla_t)\chi_r \\ &= \frac{1}{2}(e_{ipq}e_{rpq}\Delta\Delta + ke_{ipq}e_{rsq}\nabla_p\nabla_s\Delta + ke_{ipq}e_{rpt}\nabla_q\nabla_t\Delta + k^2e_{ipq}e_{rst}\nabla_p\nabla_s\nabla_q\nabla_t)\chi_r \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

eredmény következik.

Legyen  $\Delta\chi_r = \varphi_r$ . Kihasználva a (3.3.8) további átalakítása során a permutációs szimbólumok kontrakciójával kapcsolatos (A.3.8) és (A.3.9) képleteket, továbbá azt a körülményt,

hogy a permutációs szimbólumok szimmetrikus tenzorokkal vett kettős skaláris szorzata zérus, adódik – tekintettel a (3.2.15)<sub>2</sub>-re is –, hogy

$$u_i = \frac{1}{1-2\nu} [2(1-\nu)\Delta\delta_{il} - \nabla_i\nabla_l] \varphi_l . \quad (3.3.9)$$

A (3.3.9) képlet (3.2.15)<sub>1</sub>-be történő visszahelyettesítésével – nem részletezve a vonatkozó egyszerű átalakításokat – azt kapjuk, hogy a  $\varphi_l$  GALJORKIN féle függvények a

$$\Delta\Delta\varphi_l + \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)}b_l = 0 \quad (3.3.10)$$

differenciálegyenletnek kötelesek eleget tenni.

**3.3.4.** A jelen **3.3.4.** és **3.3.5.** szakaszokban a teret teljesen kitöltő rugalmas test vagy rövidebben a rugalmas tér a vizsgálatok tárgya. Tekintsük a

$$b_l = \delta(M-Q)e_l \quad |e| = 1 \quad (3.3.11)$$

alakú terhelést, ahol  $M$  a futópont a  $Q$  pont pedig végesben fekvő rögzített pont. Legyen  $V$  a rugalmas tér egy végesben fekvő tartománya. A B. Függelék térbeli DIRAC függvényekkel kapcsolatos (B.6) képletének segítségével a

$$\int_V \delta(M-Q)e_l dV_M = \begin{cases} e_l & Q \in V \\ 0 & Q \notin V \end{cases}$$

eredmény adódik a (3.3.11) alatti megoszló terhelés eredőjére. Mivel az integrál értéke független a  $V$  tartomány méretétől – az eredő csak a  $Q$   $V$ -hez viszonyított helyzetétől függ – adódik a következtetés, hogy a (3.3.11) alatti megoszló terhelés a  $Q$  ponthoz kötött  $e_l = e_l(Q)$  egységnyi erővel egyenértékű.

Az

$$\mathcal{L}_{ls}^M u_s(M) + \frac{e_l \delta(M-Q)}{\mu} = 0 \quad M \in V_i \cup S \cup V_e \quad (3.3.12)$$

differenciálegyenlet partikuláris megoldását, ez a rugalmas tér  $M$  pontjának elmozdulása a  $Q$  pontban működő  $e_l(Q)$  egységnyi erő hatására, az elmozdulásmezőre vonatkozó alapmegoldásnak szokás nevezni.

A (3.3.9) képlet GALJORKIN függvények kifejezéseiben adja meg az  $u_i$  elmozdulásmezőt. Kitűnik (3.3.10)-ből, hogy a (3.3.11) alatti terheléshez tartozó GALJORKIN függvények a

$$\Delta_M \Delta_M \varphi_l(M, Q) + \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \delta(M-Q)e_l = 0 \quad M \in V_i \cup S \cup V_e \quad (3.3.13)$$

differenciálegyenlet partikuláris megoldásai. Nyilvánvaló, hogy a

$$\Delta_M \Delta_M U(M, Q) + \delta(M-Q) = 0 \quad M \in V_i \cup S \cup V_e \quad (3.3.14)$$

biharmonikus egyenlet megoldásának ismeretében –  $U(M, Q)$  most a biharmonikus egyenlettel kapcsolatos alapmegoldást jelöli – az elmozdulásmezőre vonatkozó alapmegoldás a

$$\varphi_l(M, Q) = \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} U(M, Q) e_l(Q) \quad (3.3.15)$$

GALJORKIN függvények, azaz a (3.3.13) megoldásának segítségével számítható a (3.3.9)-ből. Mondottak fényében első lépésben a (3.3.14) egyenlet megoldását kell meghatározni.

Legyen  $f(M, Q) = \Delta_M U(M, Q)$ . Ekkor  $f(M, Q)$  a

$$\Delta_M f(M, Q) + \delta(M-Q) = 0$$

differenciálegyenletnek köteles eleget tenni. Visszaidézve a (2.3.9)<sub>1</sub>-et és a (2.3.1)-et nyilvánvaló, hogy  $f(M, Q)$  a LAPLACE egyenlettel kapcsolatos (2.3.1) alapmegoldás. Következésképp  $U(M, Q)$  meghatározása a

$$\Delta_M U(M, Q) = f(M, Q) = \frac{1}{4\pi R(M, Q)} \quad (3.3.16)$$

*Poisson* egyenlet megoldását igényli. Legyen

$$U(M, Q) = \frac{R(M, Q)}{8\pi}. \quad (3.3.17)$$

A (2.3.3)<sub>1</sub> gradiensét illetve divergenciáját véve írható, hogy

$$\overset{M}{\nabla}_k \overset{M}{\nabla}_l R(M, Q) = \frac{\delta_{kl}}{R} - \frac{r_k r_l}{R^3} \quad \text{és} \quad \Delta_M R(M, Q) = \frac{2}{R(M, Q)}. \quad (3.3.18)$$

Utóbbi képlet felhasználásával könnyen igazolható, hogy a (3.3.17) alatti  $U(M, Q)$  valóban kielégíti a (3.3.16), vagy ami ugyanaz a (3.3.14) differenciálegyenletet.

**3.3.5.** A  $\varphi_l(M, Q)$ -ra vonatkozó megoldás (3.3.9)-be történő helyettesítésével és a (3.3.18) felhasználásával némi számolás után az

$$\begin{aligned} u_i(M) &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} 2 \left[ (1-\nu)\delta_{il}\Delta_M R - \overset{M}{\nabla}_i \overset{M}{\nabla}_l R \right] e_l(Q) \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{R} \left[ (3-4\nu)\delta_{il} + \frac{r_i r_l}{R^2} \right] e_l(Q) \end{aligned}$$

eredmény következik. Ez a képlet az

$$u_i(M) = U_{il}(M, Q) e_l(Q) \quad (3.3.19)$$

alakban is írható, ahol – tovább pontosítva az **5.3.4.** szakasz második bekezdésében mondottakat – az

$$U_{il}(M, Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{R} \left[ (3-4\nu)\delta_{il} + \frac{r_i r_l}{R^2} \right] \quad (3.3.20)$$

tenzor a teljes rugalmas térre vonatkozó alapmegoldás. Következik az alapmegoldás előállításának fentiekben részletezett gondolatmenetéből, de formális számítással is ellenőrizhető – a formális igazolást az 4.1 Gyakorlatra hagyjuk –, hogy az  $U_{il}(M, Q)$  alapmegoldás eleget tesz a

$$\begin{aligned} \overset{M}{\mathcal{L}}_{ls} U_{sr}(M, Q) + \delta_{lr} \frac{\delta(M-Q)}{\mu} &= 0 \\ \overset{Q}{\mathcal{L}}_{ls} U_{sr}(M, Q) + \delta_{lr} \frac{\delta(M-Q)}{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad M, Q \in V_i \cup S \cup V_e \quad (3.3.21)$$

differenciálegyenleteknek, ahol az  $\mathcal{L}$  felett álló  $M$  illetve  $Q$  azt a változót jelöli amely szerint a deriválásokat végezzük. Ez azt jelenti, hogy az  $U_{sr}(M, Q)$  mindkét változójában kielégíti az elmozdulásmezővel kapcsolatos alapegyenletet. Érdeemes azt is észrevenni, hogy a (3.3.21) egyenletek a térbeli potenciálméleti feladatokkal kapcsolatos (2.3.9)<sub>1,2</sub> egyenletek analógjai.

1. MEGJEGYZÉS: Az  $U_{il}(M, Q)$  alapmegoldás a teljes háromdimenziós teret kitöltő rugalmas test  $M$  pontjának  $i$  irányú elmozdulása az  $M$ -től különböző  $Q$  pontban alkalmazott  $l$  irányú egységnyi erő hatására.

2. MEGJEGYZÉS: Vegyük észre, hogy

$$U_{il}(M, Q) = U_{il}(Q, M) = U_{li}(Q, M) = U_{li}(M, Q).$$

Szavakban: az  $U_{il}$  alapmegoldás mind az  $M, Q$  változópárban, mind pedig a  $il$  indexpárban szimmetrikus. Ez a MAXWELL féle felcserélhetőségi tétel a teljes teret kitöltő rugalmas testre.

3. MEGJEGYZÉS: Az  $U_{il}(M, Q)$  alapmegoldás szinguláris a  $Q = M$  helyen.

**3.3.6.** A C. Függelék C.1 szakasza ismerteti a (3.3.19) alapmegoldásból adódó alakváltozások és feszültségek számítását. Legyen  $M$  a vizsgált tartomány egy pontja. A (C.1.3) képlet szerint

$$t_{ik}(M, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ik}r_l - r_i\delta_{kl} - r_k\delta_{il}) - 3\frac{r_i r_k r_l}{R^2} \right] e_l(Q)$$

a feszültségi tenzor. Egyszerű számítással adódik innen, hogy az  $M$  ponton áthaladó  $n_k(M)$  normálisú felületelemen a

$$t_k(M) = T_{kl}(M, Q) e_l(Q) \quad (3.3.22a)$$

feszültség ébred, ahol

$$T_{kl}(M, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(n_k r_l - n_l r_k - n_s r_s \delta_{kl}) - 3\frac{n_s r_s r_k r_l}{R^2} \right] \quad (3.3.22b)$$

a feszültségekre vonatkozó alapmegoldás. Vegyük észre, hogy a (3.3.22b) egyenlet utolsó tagja, kihasználva a (2.3.5a) képletet, átalakítható:

$$3\frac{n_i r_i r_k r_l}{R^2} = n_i r_i R^3 \nabla_k^M \nabla_l^M \frac{1}{R} + n_i r_i \delta_{kl}. \quad (3.3.23)$$

Az utóbbi képlet felhasználásával (3.3.22b)-ből a

$$T_{kl}(M, Q) = T'_{kl}(M, Q) + T(M, Q) \delta_{kl} \quad (3.3.24)$$

felbontás következik, ahol

$$T'_{kl}(M, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(n_k r_l - n_l r_k) - R^3 n_s r_s \nabla_k^M \nabla_l^M \frac{1}{R} \right] \quad (3.3.25a)$$

és a (2.4.10) képletekkel összhangban

$$T(M, Q) = -\frac{n_s(M) r_s(M, Q)}{4\pi R^3(M, Q)}. \quad (3.3.25b)$$

A (3.3.24) és (3.3.25a,b) egyenletekkel értelmezett felbontás lehetőséget biztosít az egyensúlyi követelmények teljesülésének vizsgálatára.

1. MEGJEGYZÉS: Hasonlóan az elmozdulásmezővel kapcsolatos  $U_{kl}(M, Q)$  alapmegoldáshoz a  $T_{kl}(M, Q)$  feszültségek is szingulárisak az  $M = Q$  helyen. A jelen megjegyzés a szingularitást okozó részek alkalmas elkülönítésével adja meg az  $U(M, Q)$  és  $T_{kl}(M, Q)$  alapmegoldásokat.

Legyen

$$\rho_k = \frac{r_k}{R}; \quad \rho_s \rho_s = 1 \quad (3.3.26)$$

a  $Q$  pontból az  $M$  pont felé mutató egységvektor. Legyen továbbá

$$\tilde{U}_{kl}(M, Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [(3-4\nu)\delta_{kl} + \rho_k \rho_l] \quad (3.3.27)$$

és

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{kl}(M, Q) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)(n_k \rho_l - \rho_k n_l - n_i \rho_i \delta_{kl}) - 3n_i \rho_i \rho_k \rho_l] \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(n_k \rho_l - \rho_k n_l) - R^3 n_i \rho_i \nabla_k^M \nabla_l^M \frac{1}{R} \right] - \frac{n_s \rho_s}{4\pi} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

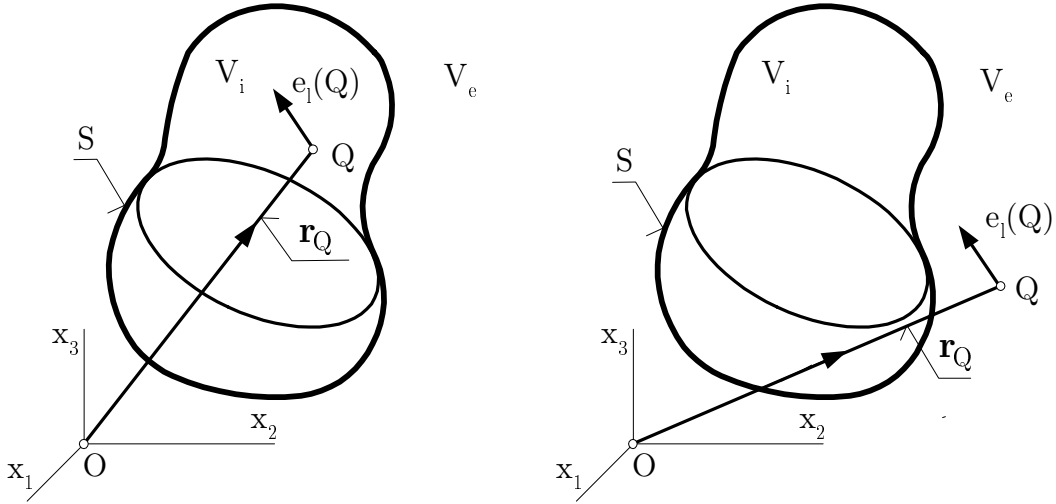
Következik a  $\rho_k$  (3.3.26) alatti értelmezéséből, hogy

$$\tilde{U}_{kl}(M, Q) \quad \text{és} \quad \tilde{T}_{kl}(M, Q)$$

korlátos, ha  $M \neq Q$  és az  $M \rightarrow Q$  esetben megegyezik a határérték a helyettesítési értékkel feltéve, hogy a  $\rho_k$  egységvektort az  $M \rightarrow Q$  megközelítés irányvektoraként tekintjük. Nyilvánvaló a (3.3.27), (3.3.28) és (3.3.20), (3.3.22b) illetve a (3.3.24), (3.3.25a,b) egybevetése alapján, hogy

$$U_{kl} = \frac{1}{R} \tilde{U}_{kl}(M, Q) \quad \text{és} \quad T_{kl} = \frac{1}{R^2} \tilde{T}_{kl}(M, Q), \quad (3.3.29)$$

ahol a fentiek értelmében  $\tilde{U}_{kl}(M, Q)$  és  $\tilde{T}_{kl}(M, Q)$  bármely  $M$ -re korlátos beleértve az  $M = Q$  esetet is.



5.1 ábra

Az  $e_l(Q)$  erő különböző helyzetekben

**3.3.7.** Az 5.1 ábra a végtelen kiterjedésű rugalmas tér  $S$  felülettel határolt  $V_i$  tartományát szemlélteti. A  $Q$  ponthoz kötött  $e_l(Q)$  egységnyi erő (a) esetben a  $V_i$  tartomány, (b) esetben pedig a  $V_e$  tartomány belső pontja. A  $V_i$  tartomány egyensúlyát az

$$\int_S {}_i t_k(M_o) dA_{M_o} + e_k(Q) = 0, \quad Q \in V \quad (3.3.30a)$$

$$\int_S {}_i t_k(M_o) dA_{M_o} = 0 \quad Q \in V_e \quad (3.3.30b)$$

vetületi egyenletek és az

$$\int_S \mathbf{r}_{QM_o} \times {}_i \mathbf{t}(M_o) dA_{M_o} = 0 \quad Q \notin S \quad (3.3.31)$$

nyomatéki egyenlet fejezi ki. A (3.3.22a,b) valamint a (3.3.24) összefüggések felhasználásával (3.3.30a,b)-ből — figyelembe véve, hogy az  $S$  felületen  ${}_i n_s$  a külső normális, kihasználva továbbá, hogy  $e_l(Q) \neq 0$  — az

$$\int_S T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = \int_S T'_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} + \delta_{kl} \int_S {}_i T(M_o, Q) dA_{M_o} = \begin{cases} -\delta_{kl} & Q \in V_i \\ 0 & Q \in V_e \end{cases} \quad (3.3.32)$$

egyenlet következik. Visszaidézve az  ${}_i T(M_o, Q)$ -t értelmező (2.4.10a) képletet valamint a (2.3.8)<sub>1,3</sub>-at — kiolvasható az utóbbiból, hogy a baloldal második integrálja is függ a  $Q$   $V_i$ -hez viszonyított helyzetétől — a fenti egyenletből végső soron az

$$\int_S T'_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = 0 \quad Q \in V_i \cup S \cup V_e \quad (3.3.33)$$

eredményt kapjuk. Szavakban: a (3.3.33) integrál eltűnik, függetlenül a  $Q$  pont  $V_i$ -hez viszonyított helyzetétől. Ezt kihasználva és ismét helyettesítve, a  $Q$  pont relatív helyzetének megfelelően,

a (2.3.8)<sub>1,2,3</sub>-at a (3.3.32) baloldalán álló integrál értékére a

$$\boxed{\int_S T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = \begin{cases} -\delta_{kl} & Q \in V_i \\ -\frac{1}{2}\delta_{kl} & Q = Q_o \in S \\ 0 & Q \in V_e \end{cases}} \quad (3.3.34)$$

összefüggés adódik.

1. MEGJEGYZÉS: Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet a térbeli LAPLACE egyenlettel kapcsolatos (2.3.8) egyenlet analogonja térbeli rugalmasságtani feladatokra. A (2.3.8) egyenlet az anyaggal kitöltött végtelen tér végesben fekvő  $V_i$  tartományának hőegyensúlyát — ez az egységnyi intenzitású hőforrás  $V_i$ -hez viszonyított helyzetétől függ —, a (3.3.34) egyenlet pedig a végtelen kiterjedésű rugalmas test végesben fekvő  $V_i$  tartományának mechanikai egyensúlyát — utóbbi az  $e_l(Q)$  egységnyi erő  $V_i$ -hez viszonyított helyzetének függvénye — fejezi ki.

### 3.4. A Somigliana féle azonosság és képletek belső tartománya

**3.4.1.** Legyen  $u_k(M)$  és  $g_k(M)$  kétszer folytonosan differenciálható egyébként tetszőleges vektormező  $V_i$ -n. A (4.2.16), a szorzat deriválás szabálya, a GAUSS tétel kihasználásával majd a  $g_i(M)$  vektormező gradiensének kiemelésével, tekintettel a (3.2.22) és (3.2.4)-re is, írható, hogy

$$\begin{aligned} \int_{V_i} u_k(M) \mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{kl} g_l(M) dV_M &= \int_{V_i} u_k(M) \mu \left[ \Delta_M g_k(M) + \frac{1}{1-2\nu} \overset{M}{\nabla}_k \left( \overset{M}{\nabla}_s g_s(M) \right) \right] dV_M = \\ &= \int_{V_i} u_k(M) \left\{ \mu \left[ \overset{M}{\nabla}_l g_k(M) + \overset{M}{\nabla}_k g_l(M) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \left( \overset{M}{\nabla}_s g_s(M) \right) \delta_{kl} \right] \overset{M}{\nabla}_l \right\} dV_M = \\ &= \int_S u_k(M_o) \mu \underbrace{\left[ \overset{M}{\nabla}_l g_k(M) + \overset{M}{\nabla}_k g_l(M) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \left( \overset{M}{\nabla}_s g_s(M) \right) \delta_{kl} \right]}_{t_{kl}[g_s(M_o)]} \Big|_{M_o} n_l(M_o) dA_M \end{aligned}$$

1. MEGJEGYZÉS: A (3.4.4) azonosság a (2.4.1) GREEN féle azonosság térbeli rugalmasságtani feladatokra érvényes párja, hiszen az

$$\begin{aligned} u &\Longleftrightarrow u_k, u_l & g &\Longleftrightarrow g_k, g_l & \Delta_M &\Longleftrightarrow \overset{M}{\mathcal{L}}_{kl} \\ \frac{\partial g}{\partial n_{M_o}} &\Longleftrightarrow t_{kl}[g_s(M_o)]_i n_l(M_o) & \frac{\partial u}{\partial n_{M_o}} &\Longleftrightarrow t_{kl}[u_s(M_o)]_i n_l(M_o) \end{aligned}$$

betűcserékkel bármelyik azonosság megkapható a másiktól.

2. MEGJEGYZÉS: Legyen

$$b_k(g_s) = -\mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{kl} g_l(M) \quad \text{és} \quad b_k(u_s) = -\mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{kl} u_l(M).$$

Ezekkel a jelölésekkel (3.4.4)-ből, tekintettel a feszültségvektor jelölésével kapcsolatos (3.2.21) megállapodásra, az

$$\begin{aligned} \int_{V_i} u_k(M) b_k[g_l(M)] dV_M + \int_S u_k(M_o)_i t_k[g_s(M_o)] dA_{M_o} = \\ = \int_{V_i} g_k(M) b_k[u_l(M)] dV_M + \int_S g_k(M_o)_i t_k[u_s(M_o)] dA_{M_o} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

egyenlet következik. Vegyük észre, hogy az egyenlet baloldala a  $b_k(g_s)$  sűrűségű térfogati terhelés és az  ${}_i t_k[g_s]$  peremterhelés munkája a  $b_k[u_s]$  térfogati terhelés és az  ${}_i t_k[u_s]$  peremterhelés okozta  $u_k(M)$  mozgás során és megfordítva, az egyenlet jobboldala a  $b_k(u_s)$  sűrűségű térfogati terhelés és az  ${}_i t_k[u_s]$  peremterhelés munkája a  $b_k[g_s]$  térfogati illetve az  ${}_i t_k[g_s]$  peremterhelés okozta  $g_k(M)$  mozgásokon. Ez az eredmény az idegen munkák egyenlőségének tétele, amely a tétel megfogalmazója után BETTI tétel néven ismert. Ha

$$\mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{kl} g_l(M) = 0 \quad \text{és} \quad \mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{kl} u_l(M) = 0,$$

akkor a (3.4.5) alatti BETTI tétel az

$$\int_S [u_k(M_o)_i t_k[g_s(M_o)] - g_k(M_o)_i t_k[u_s(M_o)]] dA_{M_o} = 0 \quad (3.4.6)$$

alakra egyszerűsödik.

**3.4.2.** Tegyük fel, hogy  $g_k(M) = U_{kl}(M, Q) e_l(Q)$  ahol rögzítettnek tekintjük a  $Q$  pontot. Ez a választás a rugalmas térben kialakuló elmozdulásmező, ha a  $Q$  pontban az  $e_l(Q)$  erő hat. Mivel az  $U_{kl}(M, Q)$  alapmegoldás szinguláris az  $M = Q$  helyen következik, hogy  $M \rightarrow Q$ -ra végtelen a  $g_k(M)$  elmozdulásmező határértéke.

Visszaidézve az **3.2.7.** szakasz utolsó bekezdésének szóhasználatát azt is mondhatjuk, hogy  $g_k(M)$  a rugalmas tér térfogati terhelés nélküli rugalmas állapota ha  $M \neq Q$  és a  $Q$  pontban egy  $e_l(Q)$  egységnyi erő hat.

Az  $e_l(Q)$  erő  $Q$  támadáspontjának helyzetét illetően, összhangban a **2.4.2.** szakasszal, az alábbi eseteket különböztetjük meg:

- (a) A  $Q$  pont belső pontja a  $V_i$  tartománynak;
- (b) A  $Q = Q_o$  ami azt jelenti, hogy az  $S$  határfelületre esik a  $Q$  pont;
- (c) A  $Q$  pont nem pontja sem a  $V_i$ -nek, sem az  $S$ -nek – azaz a  $V_e$  része.

A  $g_k(M)$  elmozdulásmező  $Q = M$  helyen jelentkező szingularitása miatt nem alkalmazható eredeti alakjában a BETTI-SOMIGLIANA féle azonosság. A probléma azonban megkerülhető, ha a kritikus (a) és (b) esetben kizárjuk a  $Q$  pont elemi környezetét a térfogati integrálból. Mielőtt azonban a részletekre térnénk át érdemes röviden megvilágítani az átalakítások célját.

A BETTI-SOMIGLIANA féle azonosság alkalmazásával két célszerűen megválasztott rugalmas állapot között, ezek közül az egyik ismeretlennek tekintett, kívánunk összefüggést teremteni megkeresve ily módon a (2.4.14) képletek analogonjait térbeli rugalmasságtani feladatokra. Az említett rugalmas állapotokkal kapcsolatosan a következők érdemelnek kiemelés:

- az ismertnek tekintett rugalmas állapot a rugalmas tér  $g_k(Q) = U_{kl}(M, Q) e_l(Q)$  állapota, amely mindig térfogati terhelés nélküli a vizsgált tartományban;

- az ismeretlenek tekintett rugalmas állapot a belső  $V_i$  tartomány olyan  $u_k(M)$  rugalmas állapota, amely a korlátos  $b_k(M)$  térfogati és az  $S$  felületen működő korlátos peremterhelések hatására alakul ki;
- az anyagjellemzők természetesen mindkét esetben azonosak.

Az átalakítások formális lépései, jellegüket tekintve, nagyon hasonlóak a **2.3.4.-2.3.5.** szakaszokban részletezett átalakítások lépéseéhez. Az átalakításokat csak az (a) esetben részletezzük, a (b) és (c) esetekben pedig az eltérésekre térünk ki.

**3.4.3.** Az (a) esetben eltávolítjuk a  $Q$  pont  $\epsilon$  sugarú  $S_\epsilon$  felülettel határolt  $V_\epsilon$  környezetét a  $V_i$  tartományból. Ezeket a geometriai viszonyokat jól szemlélteti a 2.2.3. (a) ábra. Bár a  $Q$  ponthoz kötött  $e_l(Q)$  erő nem szerepel az ábrán itt és a továbbiakban nem szabad ezt a körülményt szem elől téveszteni. Figyelembe véve, hogy a  $g_k(M) = U_{kl}(M, Q)e_l(Q)$  nem szinguláris a  $V_i - V_\epsilon$  tartományban és hogy a  $g_k(M)$  elmozdulásmezőhöz tartozó  ${}_i t_k[g_s(M_o)]$  feszültségek a (3.3.22a,b) alapján írható  $T_{kl}(M_o, Q)e_l(Q)$  képletből számíthatók, alkalmazva továbbá az  ${}_i t_k(M_o) = {}_i t_k[u_s(M_o)]$  jelölést – elhagyva ezzel a megkülönböztető  $u_s(M_o)$ -át a feszültségvektor írása során – a (4.4.4) BETTI-SOMIGLIANA azonosságból, tekintettel arra a körülményre, hogy a  $V_i - V_\epsilon$  tartományt két zárt felület határolja és hogy, az  $S_\epsilon$  külső normálisa az azonosság szemszögéből belső normális, az

$$\begin{aligned} \int_{V_i - V_\epsilon} \left[ u_k(M) \left( \mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{ks} U_{sl}(M, Q) \right) - \left( \mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{ks} u_s(M) \right) U_{kl}(M, Q) \right] dV_M e_l(Q) = \\ = \int_S [u_k(M_o) T_{kl}(M_o, Q) - {}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} e_l(Q) \\ - \int_{S_\epsilon} [u_k(M_o) T_{kl}(M_o, Q) - {}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} e_l(Q) \quad (3.4.7) \end{aligned}$$

egyenlet következik. A fenti egyenlet  $\epsilon \rightarrow 0$  határértékének meghatározása során a következőkre kell tekintettel lenni.

1. A (3.4.7) egyenlet bármilyen  $e_l(Q)$  esetén fennáll. Az  $e_l(Q)$  tehát elhagyható.
2. Az  $S$  felületen vett integrál független az  $\epsilon$ -tól.
3. Az  $U_{kl}(M, Q)$  alapmegoldás kielégíti a (3.3.21)<sub>1</sub> alapegyenletet, ha  $M \in V_i - V_\epsilon$ . Következik innen, hogy a (3.4.7) baloldalán álló első integrál eltűnik.
4. Az  $u_k(M)$  függvény kétszer folytonosan differenciálható a  $V_i$ -n. Ez egyben azt is jelenti, hogy

$$u_k(M_o) \quad {}_i t_k(M_o) \quad M_o \in S_\epsilon$$

valamint

$$\mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{ks} u_s(M) \quad M \in V_i$$

egyenként korlátos. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a  $V_i$  tartomány egy rugalmas állapotában, az  $u_k(M)$  feltevésünk szerint ilyen, mind az elmozdulásmező, mind a feszültségmező mind pedig a  $b_k(M)$  térfogati terhelés eleve korlátos.

5. A (3.3.29)<sub>2</sub> képlet részbeni felhasználásával írható, hogy

$$u_k(M_o) T_{kl}(M_o, Q) = \frac{1}{R^2} [u_k(M_o) - u_k(Q)] \tilde{T}_{kl}(M_o, Q) + u_k(Q) T_{kl}(M_o, Q) \quad M_o \in S_\epsilon \quad (3.4.8)$$

6. A (3.4.7) baloldalán álló integrál második része a (3.3.29) felhasználásával az

$$- \int_{V_i} \left( \mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{ks} u_s(M) \right) U_{kl}(M, Q) dV_M + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} \left( \mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{ks} u_s(M) \right) \frac{1}{R} \tilde{U}_{kl}(M, Q) dV_M$$

alakban írható. A  $V_\epsilon$  gömbön vett térfogati integrálnak zérus a határértéke, mivel a gömbi térfogatelem

$$dV_M = R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi$$

képlete – a jelöléseket illetően lásd a 27 oldalt – másodrendűen kicsiny, az  $\mathcal{L}_{ks}^M u_s(M)$  és  $\tilde{U}_{kl}(M, Q)$  kifejezések pedig, első esetben a differenciálhatósággal kapcsolatos megszorítás miatt, korlátosak. Következésképp

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_i - V_\epsilon} \left( \mu \mathcal{L}_{ks}^M u_s(M) \right) U_{kl}(M, Q) dV_M = - \int_{V_i} \left( \mu \mathcal{L}_{ks}^M u_s(M) \right) U_{kl}(M, Q) dV_M. \quad (3.4.9)$$

7. Az  $S_\epsilon$ -on vett integrál első tagja a (3.4.8) és a (3.3.34)<sub>1</sub> helyettesítése – a külső normális a  $Q$  pont felé mutat, ez előjelváltást okoz az utóbbi képletben –, majd az integrálszámítás középérték tételének – itt  $M_o''$  a gömbfelület alkalmas pontja – illetve az  $\epsilon$  sugarú gömb felszínét adó  $4\pi\epsilon^2$  képletnek kihasználása után az

$$\begin{aligned} \int_{S_\epsilon} \frac{1}{R^2} [u_k(M_o) - u_k(Q)] \tilde{T}_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} + u_k(Q) \int_{S_\epsilon} T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = \\ = 4\pi [u_k(M_o'') - u_k(Q)] \tilde{T}_{kl}(M_o'', Q) + u_l(Q) \end{aligned}$$

módon írható fel, ahol  $\tilde{T}_{kl}(M_o'', Q)$  korlátos. Nyilvánvaló, hogy  $M_o' \rightarrow Q$  ha  $\epsilon \rightarrow 0$ . Következésképp

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u_k(M_o) T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = u_l(Q). \quad (3.4.10)$$

8. Az  $S_\epsilon$ -on gömbfelületen vett integrál második tagja a (3.3.29) helyettesítése után a 7. alatt mondottak figyelembevételével vagyis az integrálszámítás középérték tételének felhasználásával számítható:

$$\begin{aligned} - \int_{S_\epsilon} {}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} &= - \int_{S_\epsilon} \frac{1}{R} {}_i t_k(M_o) \tilde{U}_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \\ &= 4\pi\epsilon {}_i t_k(M_o') \tilde{U}_{kl}(M_o', Q). \end{aligned}$$

Mivel mind  ${}_i t_k(M_o')$  mind  $\tilde{U}_{kl}(M_o', Q)$  korlátos a fenti integrálnak zérus a határértéke azaz

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} {}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = 0. \quad (3.4.11)$$

9. Bár az **3.4.2.** szakasz utolsó bekezdésében már volt arról szó, hogy  $u_k(M)$  a belső  $V_i$  tartomány egy rugalmas állapota ezideig lényegében csak azt használtuk ki, hogy az  $u_k(M)$  kétszer differenciálható a  $V_i$ -n. Ha azonban rugalmas állapot az  $u_k(M)$  akkor fennáll a (3.2.17) egyenlet és ennek alapján (3.4.9)-ből

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_i - V_\epsilon} \left( \mu \mathcal{L}_{ks}^M u_s(M) \right) U_{kl}(M, Q) dV_M = \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M. \quad (3.4.12)$$

A különbségtétel kedvéért az

$${}_i T_{kl}(M_o, Q) e_l(Q) \quad \text{és} \quad {}_e T_{kl}(M_o, Q) e_l(Q) \quad (3.4.13)$$

módon írjuk a rugalmas tér  $V_i$  illetve  $V_e$  tartományainak  $S$  határolófelületén ébredő és az  $e_l(Q)$  erő által előidézett feszültségeket. Mivel a  $T_{kl}(M, Q)$ -t értelmező (3.3.22a,b) képletekben mindig a vonatkozó tartomány külső normálisa áll nyilvánvaló az  ${}_i n_s = -{}_e n_s$  reláció alapján, hogy

$${}_i T_{kl}(M_o, Q_o) + {}_e T_{kl}(M_o, Q_o) = 0. \quad M_o, Q_o \in S \quad M_o \neq Q_o$$

(3.4.14)

Ez az összefüggés az (2.4.11) képlet analogonja térbeli rugalmasságtani feladatokra.

Figyelembe véve az 1., 2. és 3. alatt mondottakat, a térfogati és felületi integrálok határértékeivel kapcsolatos (3.4.12), (3.4.10) és (3.4.11) képletek helyettesítésével és a (3.4.13)<sub>1</sub> alatti jelölés alkalmazásával a (3.4.7) egyenlet  $\epsilon \rightarrow 0$  határértékére a (3.4.23)<sub>1</sub> alatti eredményt kapjuk. Az előrehivatkozást ismét az indokolja, hogy az (a), (b) és (c) esetekkel kapcsolatos eredmények egy helyütt szerepeljenek a szövegben.

1. MEGJEGYZÉS: Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a BETTI-SOMIGLIANA identitás (3.4.5) alakját tekintjük a  $V_i - V_\epsilon$  tartományon. A gondolatmenet és a lépések változatlanok, egyedül a (3.4.5) jobboldalán álló térfogati integrál esetén van egy kis különbség az átalakításokban.

**3.4.4.** A jelen szakasz a (b) esetre fordítja a figyelmét. Mivel most  $Q = Q_\circ \in S$  a  $Q_\circ$  pont  $\epsilon$  sugarú környezetének  $V_i$ -n belüli részét — a vonatkozó tartományt  $V_\epsilon$  a gömbfelület  $V_i$ -n belüli részét  $S_\epsilon$  jelöli — gondoljuk eltávolítva a  $V_i$ -ből. Az  $S$  felület  $\epsilon$  sugarú gömb eltávolítása után megmaradó részét  $S'$  jelöli.

Ezek a jelölésbeli megállapodások azonosak a **2.2.4.** pont első bekezdésében rögzített jelölésbeli megállapodásokkal. A vonatkozó geometriai viszonyokat jól szemlélteti a 2.3. (b) ábra.

Feltételezzük, hogy az  $S$  felület síma a  $Q_\circ$  pont környezetében. Ezt a feltevést azonban enyhíteni fogjuk az **5.4.6.** szakasz 1. MEGJEGYZÉSÉBEN ahol töréspont illetve él létezését is megengedjük.

A  $V_i - V_\epsilon$  tartományra alkalmazva a (3.4.4) BETTI-SOMIGLIANA féle azonosságot és figyelembe véve, hogy most  $Q = Q_\circ$  kapjuk — elhagyva mindenütt az  $e_l(Q)$ -t —, hogy

$$\begin{aligned} \int_{V_i - V_\epsilon} \left[ u_k(M) \left( \mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{ks} U_{sl}(M, Q_\circ) \right) - \left( \mu \overset{M}{\mathcal{L}}_{ks} u_s(M) \right) U_{kl}(M, V) \right] dV_M \\ = \int_{S'} (u_k(M_\circ) T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) - i t_k(M_\circ) U_{kl}(M_\circ, Q_\circ)) dA_{M_\circ} \\ - \int_{S_\epsilon} (u_k(M_\circ) T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) - i t_k(M_\circ) U_{kl}(M_\circ, Q_\circ)) dA_{M_\circ} \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

A (3.4.15) egyenlet  $\epsilon \rightarrow 0$  határértékének meghatározása a **3.4.3.** szakasz gondolatmenetének részbeni ismétlését igényli. Ez okból adódóan alábbiak csak az eltéréseket hangsúlyozzák:

1. A  $Q$  betű helyére minden esetben  $Q_\circ$  kerül.
2. A térfogati integrálokkal kapcsolatos lépések változatlanok. Ez azt jelenti, hogy a (3.4.9) és (3.4.12) képletekben, összhangban az 1.-el, a  $Q$  betű helyére  $Q_\circ$  kerül.
3. Az  $S'$  felület és így a jobboldal első integrálja nem független  $\epsilon$ -től. Az

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S'} u_k(M_\circ) T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} = \int_S u_k(M_\circ) T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} \quad (3.4.16a)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S'} i t_k(M_\circ) U_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} = \int_S i t_k(M_\circ) U_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} \quad (3.4.16b)$$

egyenletek a vonatkozó integrálok CAUCHY féle főértékét értelmezik. A fogalom fontosságára korábban már rámutattunk. Ismét felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy a  $Q_\circ$  pont végig ki van zárva az integrálási tartományból. Ez okból, de tekintettel az  $U_{kl}(M_\circ, Q_\circ)$  és  $T_{kl}(M_\circ, Q_\circ)$  alapmegoldások szingularitására is az  $M_\circ = Q_\circ$  helyen, a fenti integrálok számítása speciális technikát igényel.

4. A (3.4.10)-re vezető lépések csak részlegesen ismételhetők meg, mivel most nyitott az  $S_\epsilon$  felület. Az

$$\begin{aligned} \int_{S_\epsilon} \frac{1}{R^2} [u_k(M_\circ) - u_k(Q_\circ)] \tilde{T}_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} + u_k(Q_\circ) \int_{S_\epsilon} T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} = \\ = 4\pi [u_k(M'_\circ) - u_k(Q_\circ)] \tilde{T}_{kl}(M'_\circ, Q_\circ) + u_k(Q_\circ) \int_{S_\epsilon} T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} \end{aligned}$$

átalakítás helyessége nyilvánvaló. Kiolvasható a fenti egyenletből, hogy  $\epsilon \rightarrow 0$  esetén zérus a határértéke a jobboldalon álló első tagnak. Következésképp az

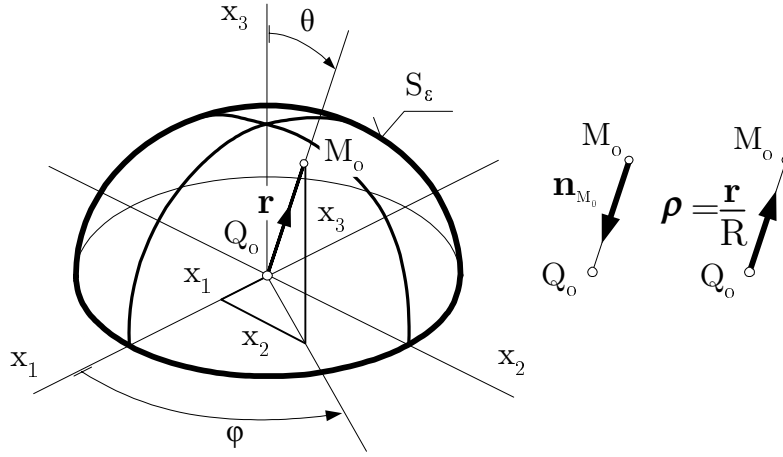
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u_k(M_\circ) T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} = u_k(Q_\circ) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} \quad (3.4.17)$$

egyenlet jobboldalán álló integrál határértékét kell majd a továbbiakban részletesebben megvizsgálni. A (3.3.29) és (3.3.28) képletek helyettesítése után, tekintettel a (2.3.5a), a

(3.3.26) és az  $n_s = -\rho_s$  összefüggésekre ez a határérték a

$$\begin{aligned} c_{kl}(Q_o) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} T_{kl}(M_o, Q_o) dA_{M_o} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \tilde{T}_{kl}(M_o, Q_o) \frac{dA_{M_o}}{R^2} = \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} [(1-2\nu)\delta_{kl} + 3\rho_k\rho_l] \frac{dA_{M_o}}{R^2} \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

módon írható fel ahol a  $c_{kl}(Q_o)$ -át a (3.4.18) egyenlet értelmezi. A 4.2. ábra a test belsejéből nézve és azzal a feltevessel mutatja erős nagyításban a  $Q_o$  pont környezetét és az  $R = \epsilon$  sugarú  $S_\epsilon$  felületet, hogy a  $Q_o$  pont egybeesik a koordináta-rendszer origójával és hogy az  $S$  peremfelület  $Q_o$  pontbeli érintősíkjá megegyezik az  $x_1, x_2$  koordinátsíkkal. Ez a feltevés nem sérti az általánosságot. Vegyük észre, hogy az ábra feltünteteti, összhangban a 27 oldalon mondottakkal a  $\varphi, R, \theta$  gömbi koordinátákat is.



5.2 ábra

A  $Q_o$  pont  $\epsilon$  sugarú környezete

Leolvasható az ábráról, hogy az  $M_o$  pont  $x_k$  koordinátái – vagy ami ugyanaz az  $r_k$  vektor –, a  $\rho_k$  irányvektor továbbá a skaláris felületelem a

$$\begin{aligned} x_1 = r_1 = R \sin \theta \cos \varphi & \quad \rho_1 = \frac{x_1}{R} = \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r_2 = R \sin \theta \sin \varphi & \quad \rho_2 = \frac{x_2}{R} = \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r_3 = R \cos \theta & \quad \rho_3 = \frac{x_3}{R} = \cos \theta \end{aligned}$$

és

$$dA_{M_o} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

módon számítható. Vegyük azt is észre, hogy az  $(1-2\nu)\delta_{kl} + 3\rho_k\rho_l$  integrandusz csak a  $\rho_k$  egységvektor függvénye — a  $\rho_k$  vektornak a  $Q_o$  pont a kezdőpontja a végpontja pedig a  $Q_o$  középpontú egységsugarú  $K_1$  gömbfelület egy résztartományán fut végig — azaz független az  $R = \epsilon$ -től továbbá, hogy

$$d\sigma = \frac{dA_{M_o}}{R^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

a  $K_1$  gömb felületeleme. Nyilvánvaló, hogy a (3.4.18) integrált a  $K_1$  gömb említett résztartományára kell kiterjeszteni. A  $Q_o$  kezdőpontú és az  $S$  felületet érintő egyeneseket félérítőknékné fogjuk nevezni. A félérítőkné serege, mivel a felület most síma, a  $Q_o$  pontbeli érintősíkot alkotja és ez a sík a  $K_1$  gömböt két félgömbre vágja szét. Jelölje  $K_S(Q_o)$  a  $K_1$  gömbfelület azon felét, amely csaknem vagy teljes egészében a  $V_i$  tartományon belül

fekszik. Az  $\epsilon \rightarrow 0$  határátmenetet tartva szem előtt adódik a következtetés, hogy  $K_S(Q_\circ)$  a keresett integrálási tartomány. Következésképp

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{1}{R^2} dA_{M_\circ} = \int_{K_S(Q_\circ)} d\sigma = 2\pi. \quad (3.4.19)$$

A fentebb mondottak és a (3.4.18) alapján írható, hogy

$$c_{kl}(Q_\circ) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{K_S(Q_\circ)} [(1-2\nu)\delta_{kl} + 3\rho_k\rho_l] d\sigma. \quad (3.4.20)$$

Megmutatjuk alábbiakban, hogy  $c_{kl}(Q_\circ) = \delta_{kl}/2$ .

A  $k \neq l$ -re a fenti eredmény annak a következménye, hogy a  $\varphi$  változóban tekintett trigonometrikus integrálok zérus értékűek mivel

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin n\varphi d\varphi = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

A  $k = l = 1$  és  $k = l = 2$  esetekben [21, Eqn. 430.30.] az

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = \left[ \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \quad (3.4.21a)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi \quad (3.4.21b)$$

integrálokat, a  $k = l = 3$  esetben pedig [21, Eqn. 450.12.] az

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \quad (3.4.21c)$$

integrált kell, többek között, kihasználni. Elvégezve fentiek segítségével a szükséges integrálásokat és kihasználva a (3.4.19)-et, valóban a  $c_{kl}(Q_\circ) = \delta_{kl}/2$  eredmény következik. Az utóbbi eredmény felhasználásával vetve össze a (3.4.18)-at és a (3.4.17)-et a (2.4.13) összfüggés analogonja adódik:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u_k(M_\circ) T_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} = u_k(Q_\circ) c_{kl}(Q_\circ); \quad c_{kl}(Q_\circ) = \frac{1}{2} \delta_{kl} \quad (3.4.22)$$

5. Az  $S_\epsilon$  felületen vett integrál második részének határértéke a (3.4.11)-re vezető lépésekkel adódik és most is zérus.

Az 1, ..., 5 alatt mondottak alapján a BETTI-SOMIGLIANA identitás (3.4.15) alakjából azonnal következik a (3.4.23)<sub>2</sub> képlet fennállása.

**3.4.5.** A (c) esetben – a vonatkozó geometriai viszonyok szemléltetését illetően ismét a 2.3. (c) ábrára utalunk – a  $V_e$  tartományban fekszik a  $Q$  pont. Mivel  $V_i$ -t, ez most a vizsgált tartomány, egyetlen zárt felület határolja közvetlenül alkalmazható a (3.4.4) BETTI-SOMIGLIANA identitás és nincs szükség határértékek vizsgálatára. Egyedül azt kell szem előtt tartani, hogy az  $u_k(M_\circ)$   $M_\circ \in V_i$  rugalmas állapot és ebből az adódik, hogy változatlanul fennáll és így közvetlenül helyettesíthető a (3.4.12) egyenlet. A végeredmény pedig a (3.4.23)<sub>3</sub> egyenlet.

**3.4.6.** Az eredményül kapott három egyenletet mind az egyenletekben szereplő mennyiségeket mind pedig az egyenletek szerkezetét tekintve a térbeli POISSON egyenlettel kapcsolatos

(2.4.14) egyenlethármas rugalmasságtani párja:

$$\begin{aligned}
 u_l(Q) &= \int_S [{}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \\
 &\quad + \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \quad Q \in V_i \\
 u_k(Q_o) c_{kl}(Q_o) &= \int_S [{}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q_o) - u_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q_o)] dA_{M_o} \\
 &\quad + \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q_o) dV_M \quad Q = Q_o \in S \\
 0 &= \int_S [{}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \\
 &\quad + \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \quad Q \in V_e
 \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Ha a  $b_k(M) = 0$ , akkor a (3.4.23) képletek a

$$\begin{aligned}
 u_l(Q) &= \int_S [{}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \quad Q \in V_i \\
 u_k(Q_o) c_{kl}(Q_o) &= \int_S [{}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q_o) - u_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q_o)] dA_{M_o} \quad Q = Q_o \in S \\
 0 &= \int_S [{}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \quad Q \in V_e
 \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

alakra egyszerűsödnek.

A (3.4.23) illetve a (3.4.24) egyenleteket SOMIGLIANA munkássága nyomán [22] SOMIGLIANA féle képleteknek, vagy formuláknak nevezi a szakirodalom — v.ö. pl. [23].

1. MEGJEGYZÉS: Tegyük fel, hogy nem síma a felület a  $Q_o$  pontban. Következik a (3.4.20)-ra vezető gondolatmenet változatlanságából, hogy a  $c_{kl}(Q_o)$  számítására vonatkozó (3.4.20) alatti képlet is változatlan marad csupán a  $K_S(Q_o)$  integrálási tartomány változik meg. Ez esetben ugyanis nem síkfelület a félérintők serege által alkotott felület. Az azonban továbbra is igaz, hogy ez a felület egy egyszeresen összefüggő szakaszonként síma görbében metszi a  $Q_o$  középpontú egységnyi sugarú  $K_1$  gömbfelületet két részfelületre osztva ezáltal a  $K_1$  gömbfelület teljes felszínét. Nyilvánvaló, hogy a zömében, vagy teljes egészében  $V_i$ -n belül fekvő felületrész lesz az a  $K_S(Q_o)$  felület amelyre a  $c_{kl}(Q_o)$ -t adó (3.4.20) integrált ki kell terjeszteni.

A  $K_S(Q_o)$  felületet az  $S$  felület  $Q_o$  pontjához tartozó karakterisztikus felületnek szokás nevezni [23]. Ha az  $S$  felület síma a  $Q_o$  pontban akkor félgömb a karakterisztikus felület, ha a  $Q_o$  pont élen helyezkedik el, akkor gömbcikket kapunk míg sarokpont esetén egy  $Q_o$  pontból induló kúpfelület metszi ki a  $K_S(Q_o)$  karakterisztikus felületet a  $K_1$  gömbfelületből.

2. MEGJEGYZÉS: A (3.4.23)<sub>1</sub> egyenlet jobboldalán álló

$$\int_S {}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \quad \text{és} \quad \int_S u_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o}$$

vektormezők kielégítik az elmozdulásmezőre vonatkozó homogén alapegyenletet. Ez annak a következménye, hogy a  ${}_i T_{kl}(M_o, Q)$  vektormező — a nagy betűvel írt index rögzítettnek tekintett — térfogati terhelés nélküli rugalmas állapot elmozdulásmezeje. Bár ez az állítás formálisan is igazolható valójában onnan adódik, hogy az  $U_{kl}(M_o, Q)$  alapmegoldás a  $Q$  változójában is kielégíti az  $M_o \neq Q$  esetén homogén (3.3.21)<sub>2</sub> alapegyenletet. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$\int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \quad Q \in V_i$$

vektormező partikuláris megoldása a (3.2.17) alapegyenletnek. Nyilvánvaló a fentiek alapján, hogy a (3.4.23)<sub>1</sub> átrendezésével kapott

$$\begin{aligned} \tilde{u}_l(Q) &= u_l(Q) - \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \\ &= \int_S [{}_i t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \quad Q \in V_i \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

vektormező térfogati terhelés nélküli rugalmas állapota a  $V_i$  tartománynak.

3. MEGJEGYZÉS: A  $V_i$  tartomány természetes, kezdeti vagy más elnevezés szerint tehermentes állapotában mind a térfogati terhelés mind pedig a peremterhelés zérus:

$$b_k(M) = 0 \quad M \in V_i \quad \text{és} \quad {}_i t_k(M_o) = 0 \quad M \in S \quad (3.4.26)$$

Ebben az állapotban a tartomány csak un. merevtestszerű mozgást végezhet ami azt jelenti, hogy

$$u_k(M) = u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(M) \quad (3.4.27)$$

alakú az elmozdulásmező, ahol  $u_k(O)$  az origó eltolódása – feltételezzük, hogy az origó a test belsejében helyezkedik el – míg  $\omega_p(O)$  a merevtestszerű forgást adja. Következésképp

$$\begin{aligned} u_k(M_o) &= u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(M_o) \\ &= u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) (r_s(Q) + r_s) \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

és amint az formálisan is könnyen ellenőrizhető

$${}_i t_k(M_o) = 0$$

hiszen a merevtestszerű mozgás nem okoz feszültséget. Megmutatjuk alábbiakban, hogy a (3.4.25)<sub>1</sub> visszadja a  $Q \in V_i$  pont merevtestszerű mozgását. A (3.4.26) és a (3.4.27) képletek helyettesítése után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_l(Q) &= - \int_S [u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) (r_s(Q) + r_s)] {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \\ &= - (u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(Q)) \int_S {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \\ &\quad - \omega_p(O) \int_S e_{psk} r_s {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} . \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

A fenti kifejezés jobboldalán álló első felületi integrál a (3.3.34) egyenlet szerint a  $Q$  pont  $V_i$ -hez viszonyított helyzetétől függ. Az utolsó felületi integrál pedig a  $Q$  pontra számított nyomaték és ezért zérus. Következésképp

$$u_l(Q) = \begin{cases} u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(Q) & Q \in V_i \\ \frac{1}{2} (u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(Q)) & Q = Q_o \in S \\ 0 & Q \in V_e \end{cases} \quad (3.4.30)$$

A (3.4.30)<sub>1</sub> fennállása állításunk igazolását jelenti. Vegyük azt is észre, hogy a merevtestszerű mozgás a konstans hőmérsékleteloszlás analogonja. A konstans hőmérsékleteloszlás nem indukál hőáramlást hiszen zérus a hőmérsékleti gradiens. A merevtestszerű mozgás pedig nem hoz létre feszültséget, hisz a hozzá tartozó alakváltozási tenzor, vagy ami ugyanaz az elmozdulásmező gradiensének szimmetrikus része, azonosan zérus.

### 3.5. Somigliana féle képletek külső tartományra

**3.5.1.** A külső tartományra vonatkozó egyenletek előállításakor ismét a 2.4 ábrán tekintett esetet vesszük alapul. Leolvasható az ábráról, hogy a  $V'_e$  tartományt két felület, az  $S$  peremfelület, valamint az  $O \in V_i$  középpontú  ${}_e R$  sugarú  $S_R$  gömb határolja. Az  $S_R$  gömb és az  $S$  felület nem metszi egymást. Ha  ${}_e R \rightarrow \infty$  akkor  $V'_e \rightarrow V_e$ .

A SOMIGLIANA féle képletek levezetése a (3.4.4) BETTI tétel felhasználását majd a **3.4.2.-3.4.4.** szakaszok gondolatmenetének megismétlését kívánja meg.

**3.5.2.** Az egyik rugalmas állapot ismét a rugalmas tér  $g_k(M) = U_{kl}e_l(Q)$  állapota; a vonatkozó feszültségek pedig az  ${}_e t_k[g_s(M_o)] = {}_e T_{kl}(M_o, Q)e_l(Q)$  képletből számíthatók.

Az ismeretlennek tekintett  $u_l(M)$  rugalmas állapot a  $V_e$  tartomány egy rugalmas állpota. Ezzel kapcsolatban feltételezzük, hogy mind az  $S_t$  felületen megoszló terhelés, mind pedig a  $V_e$  tartomány egy végés részén megoszló térfogati terhelés szakaszonként síma. Ez egyben azt is jelenti, hogy véges a térfogati és peremterhelés eredője. Megmutatható, az igazolást az 5.5 Gyakorlatra hagyjuk, hogy ez esetben  ${}_e R \rightarrow \infty$ -re fennállnak az  $S_R$  gömbön – 2.4 ábra – az

$$u_l(M_o) \approx \frac{1}{{}_e R} [(3 - 4\nu)\delta_{kl} + \rho_k(M_o)\rho_l(M_o)] a_l \quad M_o \in S_R \quad (3.5.1a)$$

$${}_e t_k(M_o) \approx -\frac{2\mu}{{}_e R^2} [(1 - 2\nu)\delta_{kl} + 3\rho_k(M_o)\rho_l(M_o)] a_l \quad M_o \in S_R \quad (3.5.1b)$$

aszimptotikus képletek, ahol

$$\rho_k(M_o) = \frac{r_k(M_o)}{{}_e R} \quad \text{és} \quad \rho_k(M_o)\rho_k(M_o) = 1$$

az  $a_l$  vektor pedig állandó.

Regulárisnak fogjuk nevezni az  $u_k(M_o)$  elmozdulásmezőt, ha a (3.5.1a,b) képletek szerint viselkedik a végtelenben.

Figyelembe véve, hogy elegendően nagy  ${}_e R$ -re

$$r_k = r_k(M_o) - r_k(Q) = {}_e R \left( \rho_k(M_o) - \frac{r_k(Q)}{{}_e R} \right) \approx {}_e R \rho_k(M_o) \quad (3.5.2a)$$

és

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{|r_k(M_o) - r_k(Q)|} = \frac{1}{{}_e R} \frac{1}{\left| \rho_k(M_o) - \frac{r_k(Q)}{{}_e R} \right|} \approx \\ &\approx \frac{1}{{}_e R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\rho_k(M_o)r_k(Q)}{{}_e R} + \frac{r_k(Q)r_k(Q)}{{}_e R^2}}} \approx \\ &\approx \frac{1}{{}_e R} \left( 1 + \frac{\rho_k(M_o)r_k(Q)}{{}_e R} - \frac{r_k(Q)r_k(Q)}{2{}_e R^2} \right) \approx \frac{1}{{}_e R} \end{aligned} \quad (3.5.2b)$$

az

$$\lim_{{}_e R \rightarrow \infty} U_{kl}(M_o, Q) = \frac{1}{{}_e R} \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [(3 - 4\nu)\delta_{kl} + \rho_k(M_o)\rho_k(M_o)] \quad M_o \in S_R \quad (3.5.3a)$$

$$\lim_{{}_e R \rightarrow \infty} {}_e T_{kl}(M_o, Q) = \frac{1}{{}_e R^2} \frac{1}{8\pi(1-\nu)} [(1 - 2\nu)\delta_{kl} + 3\rho_k(M_o)\rho_k(M_o)] \quad M_o \in S_R \quad (3.5.3b)$$

aszimptotikus képletek adódnak a (3.3.20) és (3.3.22a,b)-ből, mivel az  $\mathbf{n}_{M_o} = \boldsymbol{\rho}_{M_o}$ , ha az  $M_o \in S_R$ . Figyeljük meg, hogy mind a (3.5.1a,b) mind a (3.5.3a,b) képletekben folytonosak és korlátosak az  $1/{}_e R$  és  $1/{}_e R^2$  együtthatói.

**3.5.3.** Követve a **3.4.2.-3.4.4.** szakaszok gondolatmenetét ismét az alábbi három esetet kell megkülönböztetni a  $Q$  pont  $V'_e$ -hez viszonyított helyzetétől függően:

- (a) a  $Q$  pont a  $V'_e$  tartomány belső pontja
- (b)  $Q = Q_o \in S$
- (c) a  $Q$  pont a  $V_i$  tartomány belső pontja.

A 2.4 ábra az (a) esetnek megfelelő geometriai viszonyokat tünteti fel. Az  $e_l(Q)$  erő azonban nincs bejelölve az ábrán. Az (b) és (c) esetekhez tartozó ábrákat elhagytuk, mivel a 2.3 (a) és (b) ábrák elegendő támpontot adnak erre a két esetre is.

A továbbiakban a BETTI-SOMIGLIANA identitást alkalmazzuk.

Az (a) esetben az  $S, S_e$  és  $S_R$  azaz három zárt felület határolja a vizsgált  $V'_e - V_e$  tartományt.

A (b) esetben az  $S' \cup S_\epsilon$  és az  $S_R$  – az  $S'$ -öt valamint az  $S_\epsilon$ -t ugyanúgy értelmezzük, mint a 2.3 (b) ábra esetén – azaz két zárt felület határolja az  $V'_\epsilon - V_\epsilon$  tartományt.

A (c) esetben az  $S$  és az  $S_R$  zárt felületek határolják a vizsgált  $V'_\epsilon$  tartományt.

**3.5.4.** Visszaidézve a **3.4.2.-3.4.4.** szakaszok gondolatmenetét csak annyi az eltérés a BETTI-SOMIGLIANA azonosság alkalmazása során, hogy az egyenletek jobboldalán egy további, az  $S_R$  felületen tekintett, integrál is megjelenik:

$$I_{S_R} = \int_{S_R} [u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q) - {}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o}.$$

A (3.5.1a,b) és (3.5.3a,b) képletek felhasználásával az adódik, hogy  $\lim_{\epsilon R \rightarrow \infty} I_{S_R} = 0$ , hiszen az

$$\frac{1}{\epsilon R^3} \{ [\dots][\dots] - [\dots][\dots] \}$$

módon írható fel az integrandusz, ahol azonosan zérus a kapcsos zárójelben álló kifejezés.

1. MEGJEGYZÉS: Az  $I_{S_R}$  integrál eltűnéséhez ennél kevesebb, vagyis a kapcsos zárójelben álló kifejezés korlátossága is elegendő.

**3.5.5.** A **3.5.1.-3.5.4.** szakaszokban mondottak figyelembevételével alkalmazva a BETTI-SOMIGLIANA azonosságot az

$$\begin{aligned} u_l(Q) &= \int_S [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q)] dA \\ &\quad + \int_{V_e} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \quad Q \in V_e \\ u_k(Q_o) c_{kl}(Q_o) &= \int_S [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q_o) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q_o)] dA_{M_o} \\ &\quad + \int_{V_e} b_k(M) U_{kl}(M, Q_o) dV_M \quad Q = Q_o \in S \\ 0 &= \int_S [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \\ &\quad + \int_{V_e} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \quad Q \in V_i \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

eredményt kapjuk. A fenti képletek a (3.4.23) képletek külső tartományra vonatkozó analogonjai. A  $c_{kl}(Q_o)$ -át vagy a (3.4.20) képlet segítségével – töréspont vagy sarokpont – vagy pedig a (3.3.22a,b) képletek segítségével – síma az  $S$  a  $Q_o$  pontban – kell számítani.

A teljesség kedvéért megadjuk a zérus térfogati terhelésre vonatkozó képleteket is:

$$\begin{aligned} u_l(Q) &= \int_S [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \quad Q \in V_e \\ u_k(Q_o) c_{kl}(Q_o) &= \int_S [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q_o) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q_o)] dA_{M_o} \quad Q = Q_o \in S \\ 0 &= \int_S [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \quad Q \in V_i \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

1. MEGJEGYZÉS: A (3.5.4)<sub>1</sub> egyenlet jobboldalán álló

$$\int_S {}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \quad \text{és} \quad \int_S u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o}$$

vektormezők most is kielégítik – v.ö. **3.4.6.** szakasz 2. MEGJEGYZÉS – az elmozdulásmezővel kapcsolatos alapegyenletet. Az

$$\int_{V_e} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \quad Q \in V_e$$

vektormező pedig partikuláris megoldása a (3.4.27) alapegyenletnek. Következik innen, hogy a (3.5.4)<sub>1</sub> átrendezésével adódó

$$\begin{aligned} \tilde{u}_l(Q) &= u_l(Q) - \int_{V_e} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \\ &= \int_S [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \quad Q \in V_e \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

elmozdulásmező térfogati terhelés nélküli rugalmas állapot.

2. MEGJEGYZÉS: A  $V_e$  tartomány természetes, tehermentes állapotában zérus a térfogati és peremterhelés:

$$b_k(M) = 0 \quad M \in V_e \quad \text{és} \quad {}_e t_k(M_o) = 0 \quad M_o \in S \quad (3.5.7)$$

Bár a  $V_e$  tartomány csak merevtestszerű mozgást végezhet a (3.5.4)<sub>1</sub> nem adja vissza a merevtestszerű mozgást, mivel az nem reguláris, azaz nem a (3.5.1a) szerint viselkedik a végtelenben. Visszaidézve, hogy a (3.5.4)<sub>1</sub> az

$$\begin{aligned} u_l(Q) &= \int_S [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} + \\ &+ \lim_{eR \rightarrow \infty} \left\{ \int_{S_R} [{}_e t_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) - u_k(M_o) {}_e T_{kl}(M_o, Q)] dA_{M_o} \right. \\ &\quad \left. + \int_{V'_e} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M \right\} \quad Q \in V'_e \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

kifejezés határértéke, azt várjuk, hogy a (3.5.8) már visszaadja a merevtestszerű mozgást. A (3.5.7) valamint a merevtestszerű mozgást adó (3.4.28) képletek helyettesítése után, tekintettel arra is, hogy  ${}_e t_k(M_o) = 0$  ha  $M_o \in S_R$ , innen az

$$\begin{aligned} u_l(Q) &= - (u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(Q)) \int_S {}_e T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \\ &\quad - \omega_p(O) \int_S e_{psk} r_s {}_e T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \\ &- \lim_{eR \rightarrow \infty} \left[ (u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(Q)) \int_{S_R} {}_e T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \right. \\ &\quad \left. + \omega_p(O) \int_{S_R} e_{psk} r_s {}_e T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \right]. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

eredmény következik. Tovább alakítható a (3.5.9) ha figyelembe vesszük, hogy

- ${}_e T_{kl}(M_o, Q) = -{}_i T_{kl}(M_o, Q)$  ha  $M_o \in S$ ,
- ${}_e T_{kl}(M_o, Q) = {}_i T_{kl}(M_o, Q)$  ha  $M_o \in S_R$ ,
- a  $Q$  pont minddíg az  $S_R$  gömb belső pontja,

majd pedig felhasználjuk a (3.3.34)-öt. Ha emellett arra is tekintettel vagyunk, hogy a (3.5.9) jobboldalán álló második és negyedik integrál a  $Q$  pontra számított nyomaték, amely zérus, akkor a (3.4.29) külső tartományra vonatkozó párját kapjuk:

$$u_l(Q) = \begin{cases} u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(Q) & Q \in V_e \\ \frac{1}{2} (u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(Q)) & Q = Q_o \in S \\ 0 & Q \in V_i \end{cases}.$$

A fentiek fényében ismételten felhívjuk a figyelmet, arra a körülményre, hogy a (3.5.4) képletek jobboldalán álló integrálok, csak reguláris elmozdulásmező előállítására képesek és így nem tudják visszaadni a külső tartomány merevtestszerű mozgásait.

### 3.6. A direkt módszer egyenletei a rugalmasságtan térbeli feladataira

**3.6.1.** A **3.6.2.** és **3.6.3.** szakaszokban a belső peremértékfeladatokkal kapcsolatos egyenleteket tekintjük át. A **3.6.4.** szakasz pedig a külső peremértékfeladatokra fordítja a figyelmét.

**3.6.2.** A (3.4.23)<sub>1</sub> egyenlet szerint kvadratúrákkal állítható elő az elmozdulásmező a belső  $Q$  pontban, ha mind az elmozdulásmező, mind pedig a feszültségmező ismeretes a tartományt határoló  $S$  felületen. Mivel az  $u_k(M_o)$  és  $t_k(M_o)$  vagylagosan írható elő, az  $u$  betű elé helyezett  $i$  index, összhangban az eddigiekkel, azt hangsúlyozza, hogy belső peremértékfeladatról van szó, meg kell határozni az (4.4.23)<sub>1</sub> alkalmazása előtt az ismeretlen

$$u_k(M_o)\text{-át vagy } t_k(M_o)\text{-át.}$$

Ez a feladat a (3.4.23)<sub>2</sub> integrálegyenlet megoldását igényli. Mivel ez az egyenlet speciális peremfelételek mellett és speciális alakú tartományokon oldható meg analitikusan általános esetben csak a numerikus megoldás vezet eredményre.

**3.6.3.** A megoldás birtokában mind  ${}_i u_k(M_o)$  mind  ${}_i t_k(M_o)$  ismertnek tekinthető. Ez egyben azt is jelenti, hogy az  $u_l(Q)$  elmozdulásmező valóban számítható a (3.4.23)<sub>2</sub> vagy a (3.4.24)<sub>2</sub> felhasználásával. A (3.2.1) kinematikai egyenletek és a (3.2.2) HOOKE törvény segítségével, kihasználva a (C.2.2) és (C.3.3) részeredményeket is, a

$$t_{ls}(Q) = \int_S {}_i t_k(M_o) D_{kls}(M_o, Q) dA_{M_o} - \int_S {}_i u_k(M_o) {}_i S_{kls}(M_o, Q) dA_{M_o} + \int_{V_i} b(M) D_{kls}(M_o, Q) dV_M \quad (3.6.1)$$

összefüggés adódik a feszültségek számítására, ahol a  $D_{kls}(M_o, Q)$  és  $S_{kls}(M_o, Q)$  kétponttenzorok rendre a

$$D_{kls}(M_o, Q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(r_k \delta_{ls} - \delta_{ks} r_l - \delta_{kl} r_s) - 3 \frac{r_k r_l r_s}{R^2} \right] \quad (3.6.2)$$

továbbá az

$${}_i S_{kls}(M_o, Q) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \frac{3}{R^5} \left\{ n_i r_i [(1-2\nu)r_k \delta_{ls} + \nu(\delta_{kl} r_s + \delta_{ks} r_l)] - 5 n_i r_i \frac{r_k r_l r_s}{R^2} + \nu(n_l r_k r_s + n_s r_k r_l) + \frac{1}{3}(1-2\nu)(3n_k r_l r_s + n_l \delta_{ks} + n_s \delta_{kl} - \frac{R^2}{3}(1-4\nu)n_k \delta_{ls}) \right\} \quad (3.6.3)$$

képletekből adódnak. A (3.6.3)-ban álló  $n_i$  a  $V_i$  tartomány külső normálisa. A nagy  $S$  betű előtt álló  $i$  index erre a körülményre utal.

**3.6.4.** Külső tartomány esetén az

$${}_e u_k(M_o) \quad \text{és} \quad {}_e t_k(M_o)$$

peremértékek ismeretében alkalmazhatjuk a (3.5.4)<sub>1</sub> illetve zérus térfogati terhelés esetén a (3.5.5)<sub>1</sub> összefüggéseket az  $u_k(Q)$   $Q \in V_e$  elmozdulásmező számítására. Az ismeretlen peremértékek meghatározására pedig a (3.5.4)<sub>2</sub> és a (3.5.5)<sub>2</sub> integrálegyenletek szolgálnak.

A feszültségek számításával kapcsolatos (3.6.1)-(3.6.3) képletek csak annyiban módosulnak, hogy a tartományra utaló  $i$  index helyére az  $e$  index kerül. Az  ${}_e S_{kls}$  tenzor estén ez azt jelenti, hogy  $n_i = {}_e n_i$ . Következésképp fennáll az

$${}_i S_{kls} = -{}_e S_{kls}$$

összefüggés.

### 3.7. Indirekt módszerek a rugalmasságtan térbeli feladataira

**3.7.1.** Tegyük fel, hogy belső perfemértékfeladatról van szó és vegyük a (3.4.25) és (3.5.5)<sub>3</sub> egyenletek különbségét. Ha figyelembe vesszük a (3.4.14) összefüggést és bevezetjük a

$$\phi_k(M_o) = {}_i t_k(M_o) - {}_e t_k(M_o) \quad M_o \in C \quad (3.7.1a)$$

$$\psi_k(M_o) = -{}_i u(M_o)_k - {}_e u_k(M_o) \quad M_o \in C \quad (3.7.1b)$$

jelöléseket, akkor a különbség az

$$\begin{aligned} \tilde{u}_l(Q) &= u_l(Q) - \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M = \\ &= \int_S \phi_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} + \int_S \psi_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \quad Q \in V_i \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

alakban írható fel, ahol  $\tilde{u}_l(Q)$ -t az első képletsor értelmezi. Ha külső peremértékfeladatokról van szó, akkor a (3.5.6) és a (3.4.24)<sub>3</sub> különbségéből, ezuttal a

$$\phi_k(M_o) = {}_e t_k(M_o) - {}_i t_k(M_o) \quad M_o \in C \quad (3.7.3a)$$

$$\psi_k(M_o) = {}_i u(M_o)_k + {}_e u_k(M_o) \quad M_o \in C \quad (3.7.3b)$$

módon értelmezve  $\phi_k(M_o)$  és  $\psi_k(M_o)$ -át és ismét kihasználva a (3.4.14) összefüggést, a (3.7.2) képlettel formailag azonos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_l(Q) &= u_l(Q) - \int_{V_e} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M = \\ &= \int_S \phi_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} + \int_S \psi_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \quad Q \in V_e \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

eredmény adódik.

Az 1.-8. MEGJEGYZÉSEK LURJE könyve alapján [24] az un. rugalmasságtani potenciálok főbb tulajdonságait tekintik át.

1. MEGJEGYZÉS: A (3.7.2)-ben és a (3.7.4)-ben álló

$$\mathcal{V}_l(Q) = \int_S \phi_k(M_o) U_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \quad \text{illetve} \quad \mathcal{W}_l(Q) = \int_S \psi_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} \quad (3.7.5)$$

integrálok a rugalmasságtan térbeli feladataira értelmezik az egyszerű és kettős réteg potenciálját. A  $\phi_k(M_o)$   $M_o \in S$  és  $\psi_k(M_o)$   $M_o \in S$  vektormezőket, megőrizve a **2.7.** szakasz szóhasználatát, sűrűségfüggvényeknek fogjuk nevezni. A (3.7.1a) és (3.7.3a) képletek szerint  $\phi_k(M_o)$  egy fiktív felületi erőrendszer sűrűségvektora, míg  $\mathcal{V}_k(Q)$  a rugalmas tér  $Q$  pontjának elmozdulása a  $\phi_k(M_o)$  fiktív erőrendszer hatására. Ugyanígy következik (3.7.1b) és (3.7.3b)-ből, hogy  $\psi_k(M_o)$  egy fiktív elmozdulásmező, míg  $\mathcal{W}_k(Q)$  a rugalmas tér  $Q$  pontjának elmozdulása  $\psi_k(M_o)$  hatására. Viszszaidézve a **3.4.6.** szakasz 2. MEGJEGYZÉSÉT megállapítható, hogy mind  $\mathcal{V}_k(Q)$ , mind pedig  $\mathcal{W}_k(Q)$  térfogati terhelés nélküli rugalmas állapot, ha  $Q \neq M_o$ .

2. MEGJEGYZÉS: A (3.7.5) értelmező egyenletekben nyitott is lehet az  $S$  felület.

3. MEGJEGYZÉS: A (3.3.20), (3.3.22b) valamint a (3.7.5) értelmező egyenletek egybevetéséből  $R_Q = |\mathbf{r}_Q| \rightarrow \infty$ -re, kihasználva az

$$r_k = r_k(M) - r_k(Q) \approx -r_k(Q) \quad R_Q \approx R \quad \rho_k(Q) = \frac{r_k(Q)}{R_Q} \quad (3.7.6)$$

asszimptotikus képleteket a

$$\mathcal{V}_l(Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{R_Q} [(3-4\nu)\delta_{kl} + \rho_k(Q)\rho_l(Q)] \int_S \phi_k(M_o) dA_{M_o} \quad (3.7.7a)$$

és a

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_l(Q) = & \frac{(1-2\nu)}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{R_Q^2} \int_S \psi_k(M_o) (n_k(M_o)\rho_l(Q) - n_l(M_o)\rho_k(Q) - n_i(M_o)\rho_i(Q)\delta_{kl}) dA_{M_o} + \\ & + \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{3}{R_Q^2} \int_S \psi_k(M_o) n_i(M_o) dA_{M_o} \rho_i(Q) \rho_k(Q) \rho_l(Q) \end{aligned} \quad (3.7.7b)$$

eredményeket kapjuk.

4. MEGJEGYZÉS: Összhangban az eddigiekkel az egyszerű réteg potenciáljának belülről, illetve kívülről vett határértékét az  $S$  felület  $Q_o$  pontjában a

$${}_i\mathcal{V}_l(Q_o) = \lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_o} \mathcal{V}_l(Q) \quad \text{és} \quad {}_e\mathcal{V}_l(Q_o) = \lim_{Q \in V_e \rightarrow Q_o} \mathcal{V}_l(Q). \quad (3.7.8)$$

módon jelöljük. Belátható a (3.3.20) és (3.7.5)<sub>1</sub> értelmező egyenletek alapján, hogy az egyszerű réteg potenciálja folytonos az  $C$  konturgörbén történő áthaladás során, azaz

$${}_i\mathcal{V}_l(Q_o) = \mathcal{V}_l(Q_o) = {}_e\mathcal{V}_l(Q_o). \quad (3.7.9)$$

Ami az állítás formális igazolását illeti az 5.6 Gyakorlatra utalunk.

5. MEGJEGYZÉS: Tekintsük az

$$\tilde{u}_k(Q) = \underbrace{\int_S \phi_l(M_o) U_{lk}(M_o, Q) dA_{M_o}}_{\mathcal{V}_k(Q)} \quad (3.7.10)$$

elmozdulásmezőt, ahol az  $\tilde{u}_k(Q)$ -t belső tartományra a (3.7.2), külső tartományra pedig az (3.7.4) baloldala adja. Alábbiak a (3.7.10)-hez tartozó feszültségek számítását részletezik. Ehhez természetesen szükség van a

$$\nu_k(Q) = U_{Lk}(M, Q) = U_{kL}(M, Q)$$

elmozdulásmezőből adódó  $\check{t}_{ik}(Q)$  feszültségekre. Visszaidézve a (C.1.3) képletre vezető gondolatmenetet

$$\check{t}_{ik}(Q) = \check{t}_{ikL}(M, Q) \quad (3.7.11a)$$

az eredmény, ahol

$$\check{t}_{ikl}(M, Q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ik}r_l - r_i\delta_{kl} - r_k\delta_{il}) - 3\frac{r_i r_k r_l}{R^2} \right]. \quad (3.7.11b)$$

Az előjelváltást – v.ö.: (C.1.3) – az magyarázza, hogy most a  $Q$  pont koordinátái szerint végeztük a deriválásokat. A  $Q$  ponton átmenő  $n_i(Q)$  normálisú elemi síkfelületen ébredő  $t_k(Q, M)$  feszültségvektort, amint az a (3.7.11a,b)-ből azonnal következik, a

$$t_k(Q, M) = n_i(Q)\check{t}_{ik}(Q) = n_i(Q)\check{t}_{ikL}(M, Q) = \check{T}_{kL}(M, Q) \quad (3.7.12a)$$

$$\begin{aligned} \check{T}_{kl}(M, Q) = & -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left\{ (1-2\nu)[n_k(Q)r_l(M, Q) - n_l(Q)r_k(M, Q) - n_s(Q)r_s(M, Q)\delta_{kl}] \right. \\ & \left. - 3n_s(Q)r_s(M, Q)\frac{r_k(M, Q)r_l(M, Q)}{R^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.7.12b)$$

képletek adják. A (3.3.33)-re vezető felbontás alapján, felhasználva egyúttal a (2.7.8a) képlettel értelmezett jelölést is, írható, hogy

$$\check{T}_{kl}(M, Q) = \check{T}'_{kl}(M, Q) + \check{T}(M, Q)\delta_{kl} \quad (3.7.13)$$

ahol

$$\begin{aligned} \check{T}'_{kl}(M, Q) = & -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left\{ (1-2\nu)[n_k(Q)r_l(M, Q) - n_l(Q)r_k(M, Q)] \right. \\ & \left. - R^3 n_s(Q)r_s(M, Q)\nabla_k^Q \nabla_l^Q \frac{1}{R} \right\} \end{aligned} \quad (3.7.14a)$$

és

$$\check{T}(M, Q) = \frac{n_s(Q)r_s(M, Q)}{4\pi R^3} \quad (3.7.14b)$$

A (3.3.22a) és (3.7.12b) egybevetéséből, kihasználva a (3.3.24), (3.3.25a,b) valamint a (3.7.13), (3.7.14a,b) felbontásokat, következik, hogy

$$\begin{aligned} & \check{T}_{kl}(M, Q) + T_{kl}(M, Q) = \\ & = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left\{ (1-2\nu) [(n_k(Q) - n_k(M_o)) r_l(M, Q) - (n_l(Q) - n_k(M_o)) r_k(M, Q)] \right. \\ & \quad \left. - R^3 (n_s(Q) - n_k(M_o)) r_s(M, Q) \nabla_k^Q \nabla_l^Q \frac{1}{R} \right\} + (n_s(Q) - n_s(M_o)) \frac{r_s(M, Q)}{4\pi R^3} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

ahol  $\nabla_k^Q \nabla_l^Q = \nabla_k^M \nabla_l^M = \nabla_k \nabla_l$ . Vegyük észre, hogy  $Q \rightarrow M_o$ -ra  $1/R$  típusú gyenge szingularitása van a fenti összegnek. Visszatérve az eredetileg felvetett kérdésre, az  $\tilde{u}_k(Q)$ -ből számított feszültségvektorra nézve

$$\check{t}_k(Q) = \int_S \check{T}_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} \quad (3.7.16)$$

az eredmény. A jelen megjegyzésben foglaltakat a második peremértékfeladat integrálegyenleteinek előállításánál fogjuk hasznosítani.

6. MEGJEGYZÉS: A (3.3.22b) és (3.7.1b) képletek egybevetéséből következik, hogy

$$\check{T}_{kl}(M_o, Q_o) = T_{kl}(Q_o, M_o). \quad (3.7.17)$$

7. MEGJEGYZÉS: Legyen

$${}_i\mathcal{W}_l(Q_o) = \lim_{Q \in S_i \rightarrow Q_o} \mathcal{W}_l(Q) \quad \text{és} \quad {}_e\mathcal{W}_l(Q_o) = \lim_{Q \in S_e \rightarrow Q_o} \mathcal{W}_l(Q). \quad (3.7.18)$$

Kimutatható, a formális igazolást az 5.7 Gyakorlatra hagyjuk, hogy  $\psi_k(Q_o) = 0$  esetén folytonos a kettős réteg potenciálja, ha a  $Q$  pont áthalad a  $Q_o$  ponton, vagyis fennállnak a

$${}_i\mathcal{W}_l(Q_o) = \mathcal{W}_l(Q_o) = {}_e\mathcal{W}_l(Q_o) \quad (3.7.19)$$

összefüggések.

8. MEGJEGYZÉS: Alábbiak ismét a kettős réteg potenciáljának viselkedését vizsgálják, ha a  $Q$  pont áthalad az  $S$  felületen de  $\psi_k(Q_o) \neq 0$ . A (3.7.5)<sub>2</sub> értelmező egyenlet, valamint a (3.3.33) felhasználásával írható, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_l(Q) &= \int_S [\psi_k(M_o) - \psi_k(Q_o)] {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} + \psi_k(Q_o) \int_S {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = \\ &= \int_S [\psi_k(M_o) - \psi_k(Q_o)] {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} - \begin{cases} \psi_l(Q_o) & Q \in V_i \\ 0 & Q \in V_e \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

A jobboldalon álló integrál ugyanolyan potenciál, mint a  $\mathcal{W}_l(Q)$ -t adó (3.7.5)<sub>2</sub>, de most zérus a

$$\psi_k^*(M_o) = \psi_k(M_o) - \psi_k(Q_o)$$

sűrűségfüggvény a  $Q_o = M_o$  pontban. Következőleg a (3.7.19) tulajdonság és a tagonkénti integrálás során a (3.3.33) kihasználása az

$$\begin{aligned} {}_i\mathcal{W}_l(Q_o) &= \int_S [\psi_k(M_o) - \psi_k(Q_o)] {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} - \psi_l(Q_o) = \\ &= \mathcal{W}_l(Q_o) + \frac{1}{2} \psi_l(Q_o) - \psi_l(Q_o) \end{aligned} \quad (3.7.21a)$$

$$\begin{aligned} {}_e\mathcal{W}_l(Q_o) &= \int_S [\psi_k(M_o) - \psi_k(Q_o)] {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = \\ &= \mathcal{W}_l(Q_o) + \frac{1}{2} \psi_l(Q_o) \end{aligned} \quad (3.7.21b)$$

eredményre vezet, ahonnan

$$\begin{aligned} {}_i\mathcal{W}_l(Q_\circ) &= \mathcal{W}_l(Q_\circ) - \frac{1}{2}\psi_l(Q_\circ) \\ {}_e\mathcal{W}_l(Q_\circ) &= \mathcal{W}_l(Q_\circ) + \frac{1}{2}\psi_l(Q_\circ) \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

A fenti képletek a (2.7.15) összefüggések rugalmasságtani analogonjai.

**3.7.2.** A rugalmasságtan első térbeli peremértékfeladatai esetén, a (3.7.2) és (3.7.4) alapján, de most zérusnak választva  $\phi_k(M_\circ)$ -át, kettős réteg potenciáljaként keressük a megoldást:

$$\tilde{u}_l(Q) = \int_S \psi_k(M_\circ) {}_iT_{kl}(M_\circ, Q) dA_{M_\circ}, \text{ ahol } Q \in V_i \text{ vagy } Q \in V_e. \quad (3.7.23)$$

A fenti egyenletben ismeretlen a  $\psi_k(M_\circ)$  sűrűségfüggvény. A vonatkozó (3.2.24) illetve (3.2.28) peremfeltételek miatt ugyanakkor ismert függvény az  $\tilde{u}_l(Q_\circ)$ , következésképp, tekintettel (3.7.22)-re is, fennállnak a

$$\lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_\circ} \tilde{u}_l(Q) = \tilde{u}_l(Q_\circ) = \mathcal{W}_l(Q_\circ) - \frac{1}{2}\psi_l(Q_\circ) \quad (3.7.24)$$

$$\lim_{Q \in V_e \rightarrow Q_\circ} \tilde{u}_l(Q) = \tilde{u}_l(Q_\circ) = \mathcal{W}_l(Q_\circ) + \frac{1}{2}\psi_l(Q_\circ) \quad (3.7.25)$$

vagy ami ugyanaz

$${}_iI \quad -\hat{u}_l(Q) + \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q_\circ) dV_M = \frac{1}{2}\psi_l(Q_\circ) - \int_S \psi_k(M_\circ) {}_iT_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} \quad (3.7.26)$$

$${}_eI \quad \hat{u}_l(Q) - \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q_\circ) dV_M = \frac{1}{2}\psi_l(Q_\circ) + \int_S \psi_k(M_\circ) {}_iT_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} \quad (3.7.27)$$

integrálegyenletek, ahol  ${}_iI$  és  ${}_eI$  rendre azt jelenti, hogy belső, illetve külső peremértékfeladatról van szó.

1. MEGJEGYZÉS: A (3.7.25) integrálegyenlet, tekintettel a (3.4.14)-re, az

$${}_eI \quad \hat{u}_l(Q) - \int_{V_i} b_k(M) U_{kl}(M, Q) dV_M = \frac{1}{2}\psi_l(Q_\circ) - \int_S \psi_k(M_\circ) {}_eT_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} \quad (3.7.28)$$

alakba is átírható.

2. MEGJEGYZÉS: Tegyük fel, hogy merevtestszerű mozgás az  $S$  felületen előírt  $\tilde{u}_l(Q_\circ)$ . Ekkor  $\tilde{u}_l(Q_\circ)$  a

$$\tilde{u}_l(Q_\circ) = u_l(O) + e_{lps}\omega_p(O)r_s(Q_\circ), \quad (3.7.29)$$

módon számítható, ahol  $u_l(O)$  az origó eltolódása és  $\omega_l(O)$  a forgásvektor. Megmutatjuk, hogy a

$$\psi_k(M_\circ) = -(u_k(O) + e_{kps}\omega_p(O)r_s(M_\circ)) \quad (3.7.30)$$

sűrűségfüggvény a (3.7.26) integrálegyenlet megoldása. Állításunk a (3.7.26) összefüggésből következik, ha a megoldást behelyettesítjük a (3.7.26) integrálegyenlet jobboldalába, majd alkalmazzuk a

$$\psi_k(M_\circ) = -(u_k(O) + e_{kps}\omega_p(O)r_s(Q_\circ)) - e_{psk}\omega_p(O)r_s$$

felbontást az integrandusban. Ekkor ui. a jobboldalon álló integrál

$$\begin{aligned} - \int_S \psi_k(M_\circ) {}_iT_{kl}(M_\circ, Q) dA_{M_\circ} &= (u_k(O) + e_{kps}\omega_p(O)r_s(Q_\circ)) \int_S {}_iT_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} + \\ &+ \omega_p(O) \int_S e_{psk}r_s {}_iT_{kl}(M_\circ, Q_\circ) dA_{M_\circ} \end{aligned} \quad (3.7.31)$$

az alakot ölti, ami megegyezik formailag a (3.4.29)-el ha abban  $Q = Q_o$ -át írunk. Mostmár csak azt kell kihasználni, hogy ez esetben (3.4.30)<sub>2</sub> adja az integrál értékét, azaz

$$- \int_S \psi_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} = \frac{1}{2} (u_k(O) + e_{kps} \omega_p(O) r_s(Q_o)) \quad (3.7.32)$$

Az utóbbi eredmény felhasználásával azonnal adódik az állításunk helyessége.

3. MEGJEGYZÉS: Tekintsük a (3.7.27) integrálegyenlet

$${}_e I \quad 0 = \frac{1}{2} \psi_l(Q_o) + \int_S \psi_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q_o) dA_{M_o} \quad (3.7.33)$$

homogén részét. Legyenek  $\overset{o}{u}_k$  és  $\overset{o}{\omega}_p$  tetszőleges, de állandó vektorok. A

$$\overset{o}{\psi}_k(M_o) = \overset{o}{u}_k + e_{kps} \overset{o}{\omega}_p r_s(M_o) \quad (3.7.34)$$

vektormező megoldása a (3.7.33) homogén integrálegyenletnek. Valóban a (3.7.34) helyettesítése után – kihasználva, hogy a jobboldalon álló integrál tekintetében az előjeltől eltekintve fennáll a (3.7.31) és (3.7.32)-al való formai egyezés, azonnal kapjuk, hogy a (3.7.34) megoldás. Ez egyben azt is jelenti, hogy a (3.7.27) integrálegyenlet megoldása csak egy  $\overset{o}{\psi}_k(M_o)$  vektor, mint additív tag erejéig meghatározott. Mivel az  $\overset{o}{u}_k$  és  $\overset{o}{\omega}_p$  vektorok hat állandót adnak a teljes megoldás hat tetszőleges állandót foglal magába.

4. MEGJEGYZÉS: A (3.7.23) képlet jobboldalával adott elmozdulásmező a külső tartományon – tekintettel a (3.5.3b) összefüggésre –  $1/e R^2$  szerint tart végtelenhez. Ilyen elmozdulásmező csak akkor létezhet, ha zérus az  $S$  felületen megoszló feszültségek eredője. Ez egyben azt is jelenti, hogy külső peremértékfeladat esetén nem lehet tetszőlegesen felvenni a (3.7.27) baloldalán álló  $\tilde{u}_l(Q_o)$  elmozdulásmezőt.

**3.7.3.** A jelen alpontban azt a kérdést vizsgáljuk először, hogy hogyan viselkedik a  $\check{t}_k(Q)$  feszültségvektor, ha a  $Q \rightarrow Q_o$  és  $\mathbf{n}_Q \rightarrow \mathbf{n}_{Q_o}$ . A vonatkozó eredmények ui. módot nyújtanak az indirekt módszer egyenleteinek felírására a rugalmasságtan második peremértékfeladata esetén.

A  $\check{t}_k(Q)$  feszültségvektort adó (3.7.16) képlet átírható a (3.7.15) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \check{t}_k(Q) &= \int_S \check{T}_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} = \\ &= \underbrace{\int_S [\check{T}_{kl}(M_o, Q) + T_{kl}(M_o, Q)] \phi_l(M_o) dA_{M_o}}_{\check{V}_k(Q)} - \int_S T_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} \end{aligned} \quad (3.7.35)$$

A jobboldalon álló első integrálnak – lásd a (3.7.15) képlet utáni bekezdést – gyenge a szingularitása, ezért úgy viselkedik, mint az egyszerű réteg potenciálja, azaz folytonos marad, ha a  $Q$  pont áthalad az  $S$  felületen:

$${}_i \tilde{V}_k(Q_o) = \tilde{V}_k(Q_o) = {}_i \tilde{V}_k(Q_o) . \quad (3.7.36)$$

A jobboldalon álló második integrál tekintetében a **5.7.1.** szakasz 8. MEGJEGYZÉSE alapján tisztázható, hogy mi történik a  $Q$  pont  $S$  felületen való áthaladásakor. Mivel a lépések formailag azonosak az idézett megjegyzés gondolatmenetének lépéseivel, csak az eredményekre fordítunk ehelyütt figyelmet, külön tekintve azt a két esetet, amikor a  $Q \in V_i$ , illetve amikor  $Q \in V_e$  pont halad át a felületen. Az első esetben  $\mathbf{n}_Q \rightarrow {}_i \mathbf{n}_{Q_o}$ , a második esetben  $\mathbf{n}_Q \rightarrow {}_e \mathbf{n}_{Q_o}$ . Az idézett megjegyzés alapján írható, hogy

$$\lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_o} \int_S T_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} = \int_S {}_i T_{kl}(M_o, Q_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} - \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) \quad (3.7.37a)$$

és

$$\lim_{Q \in V_e \rightarrow Q_o} \int_S T_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} = \int_S {}_e T_{kl}(M_o, Q_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} - \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) . \quad (3.7.37b)$$

A (3.7.36) alatti tulajdonság kihasználásával, illetve a (3.7.37a,b) képletek helyettesítésével a (3.7.35) jobboldalán álló integrálok tekintetében az

$$\begin{aligned} \lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_o} \int_S \check{T}_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} &= \\ &= \int_S [\check{T}_{kl}(M_o, Q_o) + T_{kl}(M_o, Q_o)] \phi_l(M_o) dA_{M_o} - \int_S T_{kl}(M_o, Q_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} \\ &= \int_S \check{T}_{kl}(M_o, Q_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} - \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) \end{aligned} \quad (3.7.38a)$$

$$\lim_{Q \in V_e \rightarrow Q_o} \int_S \check{T}_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} = \int_S \check{T}_{kl}(M_o, Q_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} + \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) \quad (3.7.38b)$$

eredményre jutunk. Ismét említjük, hogy az  $\mathbf{n}_{Q_o}$  normális mindkét esetben külső. Azt is érdemes megemlíteni, hogy a  $\check{T}_{kl}(M_o, Q)$  tenzor esetén nem alkalmaztunk és továbbra sem alkalmazunk megkülönböztető jelölést, azaz mindig a vonatkozó külső normálissal számítottak tekintjük. Ha most ennek figyelembevételével helyettesítjük (3.7.38a,b)-be a (3.7.17)-et, majd a második esetben a (3.4.14)-re is tekintettel vagyunk, akkor azt találjuk, hogy

$$\check{t}_k(Q_o) = \lim_{Q \in V_i \rightarrow Q_o} \int_S \check{T}_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} = \int_S {}_i T_{kl}(Q_o, M_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} + \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) \quad (3.7.39a)$$

$$\check{t}_k(Q_o) = \lim_{Q \in V_e \rightarrow Q_o} \int_S \check{T}_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} = \int_S {}_e T_{kl}(Q_o, M_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} + \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) \quad (3.7.39b)$$

Visszaidézve, hogy  $u_k(Q)$ -t rendre a (3.7.2), illetve a (3.7.4) baloldala értelmezi és figyelembe véve, hogy a partikuláris megoldásból, azaz a  $V_i$  és  $V_e$ -n vett tartományi integrálból számított feszültség, összhangban a (3.7.10)-ből következő (3.7.16)-al, a

$${}_i^p \hat{t}_k(Q_o) = \int_{V_i} {}_i T_{kl}(Q_o, M) b_l(M) dV_M \quad (3.7.40a)$$

$${}_e^p \hat{t}_k(Q_o) = \int_{V_e} {}_e T_{kl}(Q_o, M) b_l(M) dV_M \quad (3.7.40b)$$

alakban írható fel – itt ismét kihasználtuk a (3.7.17)-et és a (3.4.14)-et – a (3.7.39a,b) baloldalai tekintetében a

$$\check{t}_k(Q_o) = \hat{t}_k(Q_o) + \int_{V_i} {}_i T_{kl}(Q_o, M) b_l(M) dV_M \quad (3.7.41a)$$

$$\check{t}_k(Q_o) = \hat{t}_k(Q_o) + \int_{V_e} {}_e T_{kl}(Q_o, M) b_l(M) dV_M \quad (3.7.41b)$$

képletek adódnak, ahol a szokott jelölésink szerint  $\hat{t}_k(Q_o)$  az  $S$ -en előírt feszültség. A második peremértékfeladat integrálegyenletei a (3.7.39a,b) és (3.7.41a,b) egybevetése alapján írhatók fel, kihasználva második esetben a (3.4.14) összefüggést is:

$${}_i II \quad \hat{t}_k(Q_o) + \int_{V_i} {}_i T_{kl}(Q_o, M) b_l(M) dV_M = \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) + \int_S {}_i T_{kl}(Q_o, M_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} \quad (3.7.42)$$

$${}_e II \quad \hat{t}_k(Q_o) - \int_{V_i} {}_i T_{kl}(Q_o, M) b_l(M) dV_M = \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) - \int_S {}_i T_{kl}(Q_o, M_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} . \quad (3.7.43)$$

1. MEGJEGYZÉS: Ha nem helyettesítjük a (3.4.14) összefüggést, akkor

$${}_e II \quad \hat{t}_k(Q_o) - \int_{V_i} {}_i T_{kl}(Q_o, M) b_l(M) dV_M = \frac{1}{2} \phi_k(Q_o) - \int_S {}_i T_{kl}(Q_o, M_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} \quad (3.7.44)$$

a külső tartományra vonatkozó egyenlet.

**3.7.4.** Belső tartományra vonatkozó vegyes peremértékfeladatok esetén a (3.7.23) és a (3.7.2) baloldalának felhasználásával írható

$$u_l(Q) = \int_S U_{lk}(M_o, Q) \phi_k(M_o) dA_{M_o} - \int_{V_i} U_{lk}(M, Q) b_k dV_M \quad Q \in V_i \quad (3.7.45)$$

alakban keressük az elmozdulásmezőt, ahol a  $\phi_k(M_o)$  sűrűségfüggvény az ismeretlen.

**3.7.5.** A (3.7.2), (3.7.4), (3.7.27) és (3.7.28), valamint a (3.7.41a,b), (3.7.42) és (3.7.43) egyenletek egybevetéséből, alkalmasan csoportosítva a későbbiek kedvéért az egyenleteket, az

$$\begin{aligned} {}_i I \quad & \frac{1}{2} \psi_l(Q_o) - \int_S \psi_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q_o) dA_{M_o} = -\tilde{u}_l(Q_o) \\ {}_e II \quad & \frac{1}{2} \phi_l(Q_o) - \int_S {}_i T_{lk}(Q_o, M_o) \phi_k(M_o) dA_{M_o} = \tilde{t}_l(Q_o) \end{aligned} \quad (3.7.46)$$

valamint az

$$\begin{aligned} {}_{ei} I \quad & \frac{1}{2} \psi_l(Q_o) - \int_S \psi_k(M_o) {}_i T_{kl}(M_o, Q_o) dA_{M_o} = \tilde{u}_l(Q_o) \\ {}_{ii} II \quad & \frac{1}{2} \phi_l(Q_o) + \int_S {}_i T_{lk}(Q_o, M_o) \phi_k(M_o) dA_{M_o} = \tilde{t}_l(Q_o) \end{aligned} \quad (3.7.47)$$

eredmény következik.

A fenti integrálegyenletekben a  $\psi_k(M_o)$ , illetve a  $\phi_k(M_o)$  sűrűségfüggvények az ismeretlenek, az  ${}_i T_{kl}(M_o, Q_o)$  magfüggvény, valamint az  $-\tilde{u}_l(Q_o)$  elmozdulásmező, és a  $\tilde{t}_l(Q_o)$  feszültségmező ismert függvények. Ha nincs tartományi teher, akkor  $\tilde{u}_l(Q_o) = \hat{u}_l(Q_o)$  az  $S$  peremfelületen előírt elmozdulásmező, és  $\tilde{t}_l(Q_o) = \hat{t}_l(Q_o)$  azaz az  $S$  peremfelületen előírt feszültségmező.

Következik a gondolatmenetből, hogy a magfüggvényt tartalmazó integrálokat főértékben kell venni, továbbá, hogy a magfüggvények szingularitása miatt a kapott integrálegyenletek is szingulárisak.

A (3.7.46)<sub>1</sub> és (3.7.47)<sub>1</sub> integrálegyenletek rendre az első peremértékfeladat integrálegyenletei belső, illetve külső tartományra. A (3.7.46)<sub>2</sub> és (3.7.47)<sub>2</sub> integrálegyenletek pedig a második peremértékfeladat integrálegyenletei ugyancsak belső, illetve külső tartományra.

Vegyes peremértékfeladatok esetén az 5.7.1. szakasz egyes eredményeinek felhasználása vezet célra. Először belső peremértékfeladatra fordítjuk a figyelmet. A  $\psi_k(M_o) \equiv 0$  választás mellett (3.7.2)-ből  $U_{kl}(M_o, Q)$  szimmetriáját is kihasználva és átnevezve későbbiek kedvéért egyes indexeket, az

$$u_k(Q) = \int_S U_{kl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} + \int_{V_i} U_{kl}(M, Q) b_l(M) dV_M \quad Q \in V_i \quad (3.7.48)$$

előállítás következik. A fenti elmozdulásmezőből, visszaidézve, hogy az  $U_{Lk}(M, Q) = U_{kL}(M, Q)$  elmozdulásmezőhöz a  $D_{Lik}(M, Q)$  feszültségi tenzor tartozik, majd ennek figyelembevételével számítva  $u_k(Q)$ -ből a feszültségeket

$$t_{ik}(Q) = \int_S \mathcal{D}_{ikl}(M_o, Q) \phi_l(M_o) dA_{M_o} + \int_{V_i} \mathcal{D}_{ikl}(M, Q) b_l(M) dV_M \quad Q \in V_i \quad (3.7.49)$$

a feszültségi tenzor, ahol

$$\mathcal{D}_{ikl}(M_o, Q) = D_{lik}(M_o, Q) \quad (3.7.50)$$

Vegyük észre, hogy a (3.7.48) összefüggés jobboldalán álló első integrál valójában egyszerű réteg potenciálja, és így folytonosan változik, ha a  $Q$  pont áthalad az  $S$  felületen. Következően az ismeretlen  $\phi_l(M_o)$  sűrűségfüggvény köteles eleget tenni az

$$\hat{u}_k(Q_o) = \int_S U_{kl}(M_o, Q_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} + \int_{V_i} U_{kl}(M, Q_o) b_l(M) dV_M \quad Q \in V_i \quad (3.7.51)$$

egyenletnek.

A  $Q$  pontbeli  $n_i(Q)$  normálisú felületelemen ébredő feszültség a (3.7.49) felhasználásával számítható. Visszaírva a képletbe a (3.7.50)-ből a  $D_{lik}(M_o, Q)$ -t, majd kihasználva a (3.7.12a,b) és a (3.7.17) összefüggéseket

$$t_k(Q) = \int_S {}_i T_{kl}(Q, M_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} + \int_{V_i} {}_i T_{kl}(Q, M) b_l(M) dV_M \quad Q \in V_i \quad (3.7.52)$$

a feszültségvektor. A továbbiak azt a kérdést vizsgálják, hogyan viselkedik a  $t_k(Q)$  feszültségvektor ha  $Q \rightarrow Q_o$  és  $n_i(Q) \rightarrow n_i(Q_o)$ . A baloldalon álló  $t_k(Q)$  feszültségvektornak nyilvánvalóan az  $S_t$ -n előírt  $\hat{t}_k(Q_o)$  a határértékre. A jobboldalon álló második, a tartományi integrál folytonosan változik, ha  $Q \rightarrow Q_o$  (miért?). Az első, a felületi integrál tekintetében pedig a (3.7.37a) képlet a válasz. Mindent összevetve az adódik, hogy az ismeretlen  $\phi_l(M_o)$  sűrűségfüggvény köteles eleget tenni a

$$\boxed{t_k(Q_o) = -\frac{1}{2}\phi_l(Q_o) + \int_S {}_i T_{kl}(Q_o, M_o) \phi_l(M_o) dA_{M_o} + \int_{V_i} {}_i T_{kl}(Q_o, M) b_l(M) dV_M \quad Q \in V_i} \quad (3.7.53)$$

egyenletnek is.

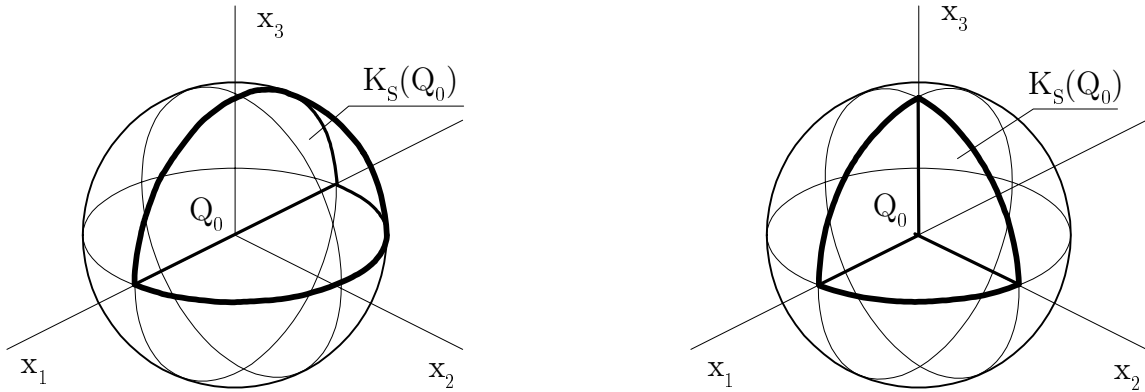
### 3.8. Gyakorlatok

**5.1** Igazolja, elvégezve a szükséges formális számításokat, hogy az az elmozdulásmezővel kapcsolatos  $U_{kl}(M, Q)$  alapmegoldás kielégíti a (3.3.21) differenciálegyenletet.

**5.2** Mutassa meg, hogy teljesül a (3.3.31) egyensúlyi egyenlet, ha

$${}_i t_k(M_o) = {}_i T_{kl}(M_o, Q) e_l(Q) .$$

**5.3** Mutassuk meg a (3.4.20) felhasználásával és a szükséges integrálások elvégzésével,



5.3 (a) és (b) ábra

*Egymásra merőleges felületek által meghatározott él illetve sarokpont.*

hogy az 5.3 (a) és (b) ábrákon vázolt esetekben

$$c_{kl}(Q_o) = \frac{1}{8\pi} \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & \frac{2}{1-\nu} \\ 0 & \frac{2}{1-\nu} & 2\pi \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad c_{kl}(Q_o) = \frac{1}{8\pi} \begin{bmatrix} 2\pi & \frac{1}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} \\ \frac{1}{1-\nu} & 2\pi & \frac{1}{1-\nu} \\ \frac{1}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 2\pi \end{bmatrix}$$

**5.4** Igazolja, elvégezve a szükségesformális számításokat, hogy a  $Q$  pont függvényeként tekintett  ${}_i T_{kl}(M, Q)$   $M \neq Q$  elmozdulásmező térfogati terhelés nélküli rugalmas állapot a rugalmas tér tetszőleges  $V_i$  tartományában feltéve, hogy  $M \notin V_i$ .

**5.5** Mi indokolja a (3.5.1a,b) egyenletek fennállásának jogosságát?

**5.6** Mutassa meg, hogy az egyszerű réteg potenciálja mind a térbeli mind pedig a síkbeli esetben folytonos a peremen történő áthaladás során.

**5.7** Mutassa meg, hogy az kettős réteg potenciálja mind a térbeli mind pedig a síkbeli esetben folytonos a peremen  $Q_0$  pontján történő áthaladás során, ha  $\psi_l(Q_0) = 0$ .

#### HIVATKOZÁSOK AZ 5. FEJEZETHEZ

1. Jaswon, M.A.-Maiti, M.-Symm, G.T.: *Numerical biharmonic analysis and some applications*, International Journal of Solids and Structures, **3** (1967) 309-332.
2. Jaswon, M.A.-Maiti, M.: *An integral equation formulation of plate bending problems*, Journal of Engineering Mathematics, **2** (1) (1968) 83-93.
3. Rizzo, F.J.: *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics*, Quarterly of Applied Mathematics, **25** (1967) 83-95.
4. Almansi, E.: *Sull' integrazione dell' equazione differenziale  $\Delta^{2n} = 0$* , Annali di matematica pura et applicata, series III, **2** (1887) 1-51.
5. Cruse A.T.: *Numerical solutions in three dimensional elastostatics*, International Journal of Solids and Structures, **5** (1969) 1259-1274.
6. Ricardella. P.C.: *An improved implementation of the boundary integral technique for two dimensional problems*, Carnegie-Mellon Institute of Technology, Pittsburgh, 1972.
7. Cruse A.T.: *An improved boundary integral equation method for three dimensional stress analysis*, Computers and Structures, **4** (1974) 741-754.
8. Boissenot, J.M.-Lachat, J.C.-Watson, J.O.: *Etude par equations integrales d'une epruvette C.T.15.*, Revue de Physique Appliquée, **9** (1974) 611-615.
9. Lachat, J.C.: *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*, Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1975.
10. Lachat, J.C.-Watson, J.O.: *Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three dimensional elastostatics*, International Journal for Numerical methods in Engineering, **10** (1976) 991-1005.
11. Cruse A.T.-Rizzo, F.J.: *A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem 1.*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **22** (1968) 244-259.
12. Cruse A.T.: *A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem 2.*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **22** (1968), 244-259.
13. Swedlow, J.L.-Cruse T.A.: *Formulation of boundary integral equations for three dimensional elasto-plastic flow*, International Journal of Solids and Structures **7** (1971) 1673-1681.
14. Ricardella. P.C.: *An implementation of the boundary integral equation technique for plane problems of elasticity and elasto-plasticity*, Ph.D. Thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1973.
15. Banerjee P.K.-Mustoe G.G.: *Boundary element methods in two dimensional problems of elasto-plasticity* Proc. Int. Conf. on Recent Developments in Boundary Element Method, Southampton University, 1978, 283-300.
16. Banerjee P.K.-Cathie D.N.-Davies T.G.: *Two-, and three dimensional problems of elasto-plasticity*, Developments in Boundary Element Methods-1, edited by Banerjee, P.K., Applied Science Publishers LTD, London, 1979, 65-95.
17. Fritz, J.: *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience Publishers, Inc., New-York London, 1955.
18. Galerkin, B.G.: *Determination of stress and strains in an elastic body by means of three functions* [orosz nyelven], Izv. Nautshno-Issl. Inst. Gidr. **5**, 1931.
19. Lurie, A.I.: *On the Theory of Linear Differential Equations with Constant Coefficients* [orosz nyelven], Transactions of the Leningrad Industrial Institute, **6.**, Section of Physics and Mathematics, (1937), 31-36.

20. Moisil, G.C.: Asupra sistemelor de ecuatii cu derivate partiale lineare si cu coeficient constanti, Bull. Sci.Acad RPR, Ser.A., **1** (1949) 1-32.
21. Dwight, H.B.: *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, The Macmillan Company, NewYork, 1961.
22. Somigliana, C.: *Sopra l' equilibrio di un corpo elastico isotropo*, Nuovo Cimento (3) **17** 140-148, 272-276; **18** 161-166; **19** 84-90, 278-282; **20** 181-185 (1885-1886).
23. Hartman, C.: *The Somigliana identity on piecewise smooth surfaces*, Journal of Elasticity, **11** (1981) 403-423.
24. Lurje, A. I.: *Theory of Elasticity*, Nauka, Moszkva, 1970 (oroszul)

## A FÜGGELÉK

### Tenzorszámítás kartéziuszi koordinátarendszerben

#### A.1. Bevezetés

**A.1.1.** A peremelem módszer egyenleteinek az irodalomban széleskörűen használatos jelölésrendszerben történő bemutatása feltételezi, hogy az olvasó ismeri az indexes vektor-, és tenzorszámítás alapjait. A jelen összefoglaló nem vállalhatja fel – már csak terjedelmi okokból sem – hogy részletesen tárgyalja az indexes vektor és tenzorszámítást. Reális célként csak azon eszközök bemutatását tekinthetjük, amelyek valóban felhasználásra kerülnek a peremelem módszer ismertetése során. Ez okból adódóan elsősorban kartéziuszi koordinátarendszerre korlátozzuk a figyelmet. A témakör iránt érdeklődők figyelmét érdemes felhívni az [1] könyvre, illetve a [2] tankönyv függelékére.

**A.1.2.** A jelen összefoglalót oly módon kíséreltük meg összeállítani, hogy segítse az olvasót az indexes jelölésrendszerben történő munkához szükséges alapismeretek mielőbbi megszerzésében. Ezt hívatott segíteni a kartéziuszi koordinátarendszerben tekintett vektorok és tenzorok elméletéről adott áttekintés amely magában foglalja a vektoralgebra és analízis mindazon elemeinek ismertetését amelyre a megelőző szövegrészekben hivatkozás történik.

#### A.2. Az összegezési konvenció

**A.2.1.** Jelölje rendre  $a_{ij}$ ,  $y_i$  és  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) egy háromismeretlenes egyenletrendszer együtthatóit, ismeretleneit és jobboldalát. Az összegezés szimbólumát alkalmazva

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} y_j = b_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.2.1})$$

az egyenletrendszer tömör alakja. A fenti képletben az ismételt, vagy más elnevezés szerint kettős indexek szerint összegezni kell. További jelölésbeli egyszerűsödés érhető el, ha elhagyjuk az összegezés szimbólumát

$$a_{ij} y_j = b_i \quad (\text{A.2.2})$$

aholis szabályként fogadtuk el, hogy a *kettős* vagy *néma* indexek előfordulása esetén egytől háromig összegezni kell. Mondottak alapján a  $j$  indexet *összegez* indexnek is szokás nevezni. Az (A.2.2) képletben megjelenő másik, önmagában álló – vagyis nem kettőzött – index azaz az  $i$  index ugyancsak az 1, 2 és 3 értékeket veheti fel. Mivel nincs párja – minden egyes tagban csak egyszer fordul elő – *szabad* index a neve.

Fentiek alapján az összegezési konvenció szabálya a következőképpen fogalmazható meg. Amikor egy latin alsó index kétszer szerepel egy kifejezésben – azaz kettős, néma vagy összegez index fordul elő – akkor a kifejezés értéke azon három tag összege amely az indexek 1, 2 és 3-al történő helyettesítésével adódik. Így például

$$e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33} \quad (\text{A.2.3a})$$

vagy

$$a_l b_l = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (\text{A.2.3b})$$

Nyilvánvaló az is, hogy az összegezési konvenció alkalmazása során az index tényleges betűjele nincs hatással az eredményre. Másként fogalmazva a néma indexek átnevezhetők:  $a_l b_l = a_k b_k = a_i b_i$ .

**A.2.2.** Sok esetben a szabad és összegező index csak az 1 és 2 értékeket veheti fel. A szabad indexek és az összegezési konvenció nyújtotta írásbeli egyszerűség megtartása érdekében megállapodunk abban, hogy a görög betűvel jelölt indexek értéke csak 1 és 2 lehet. A

$$c_\beta$$

kifejezés értéke például a  $\beta$  szabad index értékétől függően  $c_1$  vagy  $c_2$  és

$$a_\varphi b_\varphi = a_\psi b_\psi = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ami azt is tükrözi hogy a görög néma indexek is átnevezhetők.

### A.3. A Kronecker függvény és a permutációs szimbólum

**A.3.1.** A *Kronecker* féle delta függvényt a

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad i, j \in 1, \dots, 3. \quad (\text{A.3.1})$$

egyenlet értelmezi. Vegyük észre, hogy a KRONECKER függvény kilenc elemét mátrixba foglalva az egységmátrixot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ahol – a szokásos módon – az első index a sorokat, a második index pedig az oszlopokat számlálja. A definícióból az is következik, hogy a KRONECKER szimbólum szimmetrikus az indexpárja tekintetében azaz fennáll a  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  egyenlet.

A

$$\delta_{ij} b_j = \delta_{i1} b_1 + \delta_{i2} b_2 + \delta_{i3} b_3 \quad (\text{A.3.2})$$

kifejezés értéke a KRONECKER függvény (A.3.1) alatti értelmezéséből adódóan az  $i$  index értékétől függ. Jelölje  $I$  az  $i$  index aktuális értékét. Ez egyben jelölésbeli megállapodás is mivel a továbbiakban valamely latin index rögzített értékét — ez természetesen az 1,2 és 3 számok egyike — nagybetűvel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy

$$\delta_{Ij} b_j = \begin{cases} b_1 & \text{ha } I = 1 \\ b_2 & \text{ha } I = 2 \\ b_3 & \text{ha } I = 3 \end{cases}.$$

Következésképp

$$\delta_{Ij} b_j = b_I$$

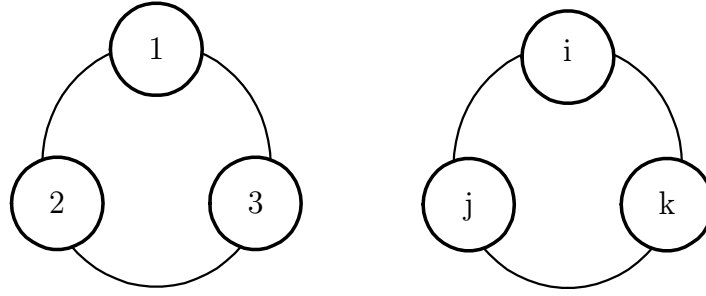
vagyispedig – mivel a  $I$  az 1,2 és 3 számok bármelyike lehet –

$$\delta_{ij} b_j = b_i. \quad (\text{A.3.3})$$

Másként fogalmazva a  $b_j$  és a  $\delta_{ij}$  szorzata az összegezés miatt egyenértékű a  $b_j$  indexének  $i$ -re történő cseréjével és a KRONECKER függvény elhagyásával. Erre a tulajdonságára tekintettel a KRONECKER függvényt *indexhelyettesítő operátornak* is szokás nevezni.

**A.3.2.** Az 1,2,3 számokból képzett számhármassokat – ezek nem feltétlenül tartalmazzák mindegyik említett számot – az alábbiak szerint csoportosítjuk:

1. A számhármass *páros permutáció*, ha a számok különbözőek és a számhármass olvasata óramutató járásával ellentétes feltéve, hogy a számhármass első számát tekintjük kezdőpontnak az A.1 ábrán vázolt baloldali körön.
2. A számhármass *páratlan permutáció*, ha a számok különbözőek és a számhármass előzőek szerinti olvasata óramutató járásával egyez.
3. A számhármass *nem permutáció*, ha a benne foglalt számok nem különböznek egymástól (pl.: 112).



A.1 ábra

A permutációs szimbólum indexeit szemléltető körök

Nyilvánvaló, hogy az  $ijk$  indexhármas vagy permutációja, vagy pedig nem permutációja az 1, 2 és 3 számoknak.

Az  $e_{ijk}$  permutációs szimbólum értelmezése a fentiek felhasználásával a következő módon adható meg:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ha } (ijk) \text{ páros permutáció, azaz } (1,2,3), (2,3,1) \text{ vagy } (3,1,2) \\ -1 & \text{ha } (ijk) \text{ páratlan permutáció, azaz } (1,3,2), (3,2,1) \text{ vagy } (2,1,3) \\ 0 & \text{ha } (ijk) \text{ nem permutáció} \end{cases} \quad (\text{A.3.4})$$

Legyen most  $ijk$  egy olyan indexhármas amelyre  $i \neq j \neq k$ . Az  $i, j$  és  $k$  indexek sorrendcseréinek hatása a permutációs szimbólum értékére most is az indexeket feltüntető kör segítségével tisztázható. Ha a sorrendcserékkel adódó új — például  $jki$  — indexhármas a kezdő  $j$  indextől óramutató járással ellentétes irányban olvasható le a körről, akkor a sorrendcsere nincs hatással a permutációs szimbólum értékére, azaz

$$e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij}. \quad (\text{A.3.5})$$

Ha a sorrendcserével kapott új indexhármas olvasata óramutató járásával egyező, akkor a permutációs szimbólum előjelet vált:

$$e_{ijk} = -e_{jik} = -e_{ikj} = -e_{kji}. \quad (\text{A.3.6})$$

Szokás a körön egymás mellett álló indexeket szomszédos indexeknek nevezni. A fenti esetben  $ij$ ,  $jk$  és  $ki$  a szomszédos indexek. Ennek a fogalomnak segítségével az (A.3.6) egyenlet tartalma úgy is megfogalmazható, hogy a szomszédos indexek cseréje a permutációs szimbólum előjelváltását eredményezi.

A körüljárási értelem indexsorrend cserék során történő megőrzése egyuttal azt jelenti, hogy az új indexsorrend [páros] {páratlan} permutáció marad ha az eredeti indexsorrend [páros] {páratlan} volt.

A körüljárási értelem indexsorrend cserék során történő megváltozása ezzel szemben azt jelenti, hogy az új indexsorrend [páros] {páratlan} permutáció ha az eredeti indexsorrend [páratlan] {páros} volt.

1. MEGJEGYZÉS: A permutációs szimbólum indexhármasában végrehajtott bármilyen indexcsere során értelemszerűen alkalmazni kell az (A.3.5) és (A.3.6) képleteket hiszen az általános alakban írt egyenletek transzformációja során nem szokás kiírni az indexek tényleges értékeit.

2. MEGJEGYZÉS: Láttuk fentebb, hogy a permutációs szimbólum szomszédos indexeinek cseréje előjelváltást eredményez. Az ilyen tulajdonságú indexes mennyiségeket *abszolút ferdeszimmetrikus* objektumoknak szokás nevezni.

**A.3.3.** Az alábbiakban megmutatjuk, hogy

$$e_{pqr} e_{str} = \delta_{ps} \delta_{qt} - \delta_{pt} \delta_{qs} = \begin{vmatrix} \delta_{ps} & \delta_{pt} \\ \delta_{qs} & \delta_{qt} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.3.7})$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet jobboldalán álló determináns kifejtése a középső részt adja. Erre való tekintettel elegendő a baloldal és a középső rész egyenlőségét igazolni.

Legyen a  $p, q, s$  és  $t$  rögzített azaz  $p = P, q = Q, s = S$  és  $t = T$  ahol az **A.3.1.** szakasz utolsó bekezdésével összhangban latin nagybetűk jelölik a rögzített indexeket. Az  $r$  szerinti összegeket kiírva kapjuk, hogy

$$e_{PQr} e_{STr} = e_{PQ1} e_{ST1} + e_{PQ2} e_{ST2} + e_{PQ3} e_{ST3}.$$

A permutációs szimbólum zérus ha az indexhármasa nem permutáció. Következésképp a fenti egyenlet jobboldalán csak egy tag marad meg, azaz

$$e_{PQr} e_{STr} = e_{PQL} e_{STL}$$

amelyben az  $L$ -nek különböznie kell a  $P, Q, S$  és  $T$  indexektől. A jobboldalon álló kifejezés értéke

- (a) 1 ha  $P = S \neq Q = T$
- (b) -1 ha  $P = T \neq Q = S$
- (c) 0 ha sem (a) sem (b) nem teljesül.

Könnyű ellenőrizni, kihasználva a KRONECKER szimbólum értelmezését, hogy a

$$\delta_{PS}\delta_{QT} - \delta_{PT}\delta_{QS}$$

különbségnek ugyanez az értékkészlete.

1. MEGJEGYZÉS: Az (A.3.7) képlet baloldala két permutációs szimbólum olyan szorzata aholis egy-egy index mindkét permutációs szimbólumban azonos. Másként fogalmazva úgy kapható meg az (A.3.7) baloldala az

$$e_{pql} e_{stm}$$

szorzatból, hogy az  $l$  és  $m$  indexeket összeejtjük. Az indexösszejtés műveletét *kontrakciónak* nevezzük.

**A.3.4.** Ismételt kontrakcióval és az (A.3.7) képlet középső részének felhasználásával kapjuk, hogy

$$e_{pqr} e_{sqr} = 2\delta_{ps} \quad (\text{A.3.8})$$

és

$$e_{pqr} e_{pqr} = 2\delta_{pp} = 3!. \quad (\text{A.3.9})$$

## A.4. A determináns

**A.4.1.** Tekintsük az

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{mn}| \quad (\text{A.4.1})$$

determinánst. Az  $e_{ijk}$  permutációs szimbólum (A.3.4) alatti értelmezésének felhasználásával és a vonatkozó összegek egyidejű kiírásával nem nehéz ellenőrizni, hogy

$$a = e_{pqr} a_{1p} a_{2q} a_{3r} = e_{pqr} a_{p1} a_{q2} a_{r3}. \quad (\text{A.4.2})$$

Az  $[a_{1p} a_{2q} a_{3r}] \{a_{p1} a_{q2} a_{r3}\}$  elemek közül kiragadott tetszőleges kettő latin indexeinek felcserélése előjelváltást eredményez, mivel ez a művelet a determináns két [sorának] {oszlopának} cseréjével egyenértékű. A permutációs szimbólum tulajdonságait felhasználva — a néma  $p$  index  $q$ -ra illetve a néma  $q$  index  $p$ -re történő egyidejű cseréjével és az (A.4.2) kihasználásával — kapjuk például, hogy

$$e_{pqr} a_{1q} a_{2p} a_{3r} = e_{pqr} a_{2p} a_{1q} a_{3r} = e_{qpr} a_{1p} a_{2q} a_{3r} = -a$$

vagy ami ugyanaz, hogy

$$-a = e_{pqr} a_{2p} a_{1q} a_{3r}.$$

Visszaidézve, hogy  $e_{213} = -1$  az utóbbi egyenlet átírható a

$$e_{213}a = e_{pqr} a_{2p} a_{1q} a_{3r}$$

alakba, ahonnan az  $i, j$  és  $k$  betűket helyettesítve a 2, 1 és 3 számok helyére az

$$e_{ijk}a = e_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr} \quad (\text{A.4.3a})$$

eredmény következik. Pontosan ugyanígy igazolható, hogy

$$e_{ijk}a = e_{pqr} a_{pi} a_{qj} a_{kr} \quad (\text{A.4.3b})$$

Szorozzunk át a (A.4.3)<sub>1</sub> egyenletet  $e_{ijk}$ -val és használjuk ki —  $ijk$ -t gondolva  $pqr$  helyére — az (A.3.9)-et:

$$a = |a_{mn}| = \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}. \quad (\text{A.4.4})$$

Ez az eredmény — amint az a következő szakaszban ki fog derülni — az adjungáltak segítségével adja meg az  $a$  determináns értékét.

**A.4.2.** Vizsgáljuk meg az

$$e_{Ijk} e_{Pqr} a_{jq} a_{kr}$$

alakú szorzatokat. A zérustól különböző tagok áttekinthetősége érdekében legyen

$$I \neq J \neq K \quad \text{és} \quad P \neq Q \neq R$$

ahol azt is feltesszük — ne feledjük, hogy a latin nagybetűk tetszőleges de rögzített indexek — mivel ez nem sérti az általánosságot, hogy az  $IJK$  és  $PQR$  indexsorrend egyaránt páros permutáció. Az indexátrendezeéssel adódó összes lehetőséget kihasználva végül is az

$$e_{Ijk} e_{Pqr} a_{jq} a_{kr} = a_{JQ} a_{KR} + a_{KR} a_{JQ} - a_{JR} a_{KQ} - a_{KQ} a_{JR} = 2(a_{JQ} a_{KR} - a_{JR} a_{KQ}) \quad (\text{A.4.5})$$

vagy ami ugyanaz az

$$A_{pi} = \frac{1}{2!} e_{ijk} e_{pqr} a_{jq} a_{kr} \quad (\text{A.4.6})$$

eredményt kapjuk, ahol  $A_{pi}$  az  $a_{ip}$  elemhez illetve a  $p$ -ik sorhoz és  $i$ -ik oszlophoz tartozó előjeles aldetermináns, más néven adjungált. Ha például  $P = 2$  és  $I = 3$  akkor  $J = 1$ ,  $K = 2$  és  $Q = 3$ ,  $R = 1$  amivel az (A.4.5)-ből

$$A_{23} = a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}$$

következik és ez a kifejezés a harmadik sor második eleméhez tartozó előjeles aldetermináns.

Az (A.4.4) és (A.4.6) egybevetéséből az

$$\begin{aligned} a = |a_{mn}| &= \frac{1}{3} a_{ip} A_{pi} = \frac{1}{3} (a_{1p} A_{p1} + a_{2p} A_{p2} + a_{3p} A_{p3}) \\ &= \frac{1}{3} (a_{i1} A_{1i} + a_{i2} A_{2i} + a_{i3} A_{3i}) \end{aligned}$$

képlet adódik, ahol az  $a_{Ip} A_{pI}$  illetve az  $a_{iP} A_{Pi}$  összegek rendre az  $a$  determináns kifejtései az  $I$ -ik sor illetve  $P$ -ik oszlop szerint.

**A.4.3.** Az (A.4.5) összefüggés segítségével alakítva az  $a_{sp} A_{pi}$  szorzatot az

$$a_{sp} A_{pi} = a_{sp} \frac{1}{2!} e_{ijk} e_{pqr} a_{jq} a_{kr} = \frac{1}{2} e_{ijk} \underbrace{e_{pqr} a_{sp} a_{jq} a_{kr}}$$

eredmény következik, ahol a megjelölt rész az (A.4.3a) egyenlet szerint  $e_{sjk} a$  és így

$$a_{sp} A_{pi} = \frac{1}{2} e_{ijk} e_{sjk} a.$$

Kihasználva az (A.3.8) összefüggést egyszerűsítés és rendezés után innen a

$$a_{sp} A_{pi} = a \delta_{si} \quad (\text{A.4.7a})$$

végző alak adódik. Ugyanígy mutatható ki — a formális igazolást az A.4 gyakorlatra hagyjuk —, hogy

$$a_{ps} A_{ip} = a \delta_{si}. \quad (\text{A.4.7b})$$

Nyilvánvaló az utóbbi két egyenlet alapján, hogy az  $a_{sp}$  számkilencs által meghatározott háromszor hármias mátrix — vagy a rövidség és további szóhasználat kedvéért az  $a_{sp}$  mátrix — inverze az

$$a_{pi}^{-1} = \frac{A_{pi}}{a} \quad (\text{A.4.8})$$

módon számítható.

**A.4.4.** Az  $a_{im}$  és  $b_{ml}$  mátrixok  $c_{il}$  szorzata a

$$c_{il} = a_{im} b_{ml} \quad (\text{A.4.9})$$

alakban írható fel. A  $c_{il}$  mátrix determinánsa az (A.4.2) képlet értelemszerű alkalmazásával adódik:

$$c = |c_{mn}| = e_{pqr} c_{p1} c_{q2} c_{r3}.$$

Az (A.4.9) képlet helyettesítésével és a néma indexek alkalmas átnevezésével következik, hogy

$$\begin{aligned} c &= e_{pqr} a_{pi} b_{i1} a_{qj} b_{j2} a_{rk} b_{k3} = \\ &= \underbrace{e_{pqr} a_{pi} a_{qj} a_{rk}}_{a} b_{i1} b_{j2} b_{k3} \end{aligned}$$

ahol a megjelölt rész az (A.4.3b)-ből helyettesíthető:

$$c = a e_{ijk} b_{i1} b_{j2} b_{k3}.$$

Az (A.4.2) képletet másodszor is felhasználva

$$c = a b \quad (\text{A.4.10})$$

a végző eredmény. Szavakban: két háromszor hármias mátrix szorzatának determinánsa a mátrixok determinánsainak szorzata. Ez az eredmény a determinánsok szorzástétele néven ismeretes.

## A.5. Kartéziuszi koordinátarendszer

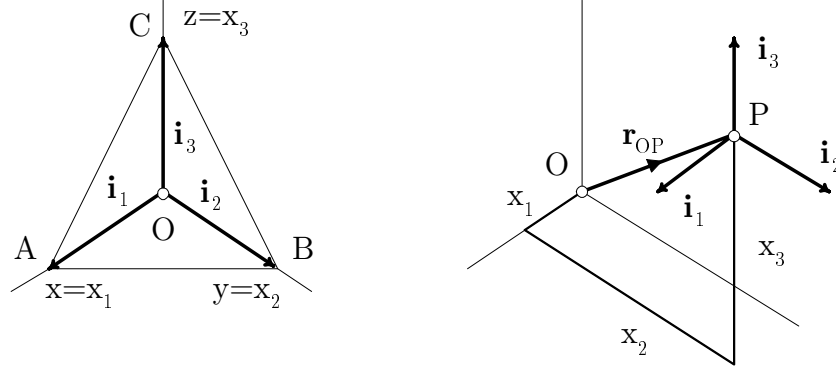
**A.5.1.** Az A.2 ábra egy egyenesvonalú derékszögű kartéziuszi koordinátarendszert szemléltet. Az A.1.-A.4 szakaszokban ismertetett indexes jelölésmód előnyeinek kihasználása érdekében a koordinátatengelyek mentén mért koordinátákat — ezek a koordinátarendszer  $O$  origójától mért előjeles távolságok — az

$$x = x_1 \quad y = x_2 \quad z = x_3 \quad (\text{A.5.1})$$

módon jelöljük. Az egyes koordinátatengelyek pozitív irányait kijelölő

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_1 \quad \mathbf{j} = \mathbf{i}_2 \quad \mathbf{k} = \mathbf{i}_3 \quad (\text{A.5.2})$$

egységvektorokat *bázisvektoroknak* nevezzük. Vegyük észre, hogy a vázolt koordinátarendszer jobbsodratú, mivel az  $O$  origóhoz kötött három bázisvektor  $A$ ,  $B$  és  $C$  végpontjai által kifeszített és a papír síkjában fekvő háromszög — az  $O$  pont a papír síkja mögött fekszik —  $A$ ,  $B$ ,  $C$  körüljárási értelme óramutató járásával ellentétes.



A.2 ábra

Jobbsodratú kartéziuszi koordinátarendszer

**A.5.2.** A háromméretű tér  $P$  pontjának az  $O$  origóra vonatkoztatott  $\mathbf{r}_{OP}$  helyvektora

$$\mathbf{r}_{OP} = x_k \mathbf{i}_k$$

alakú, azaz

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{OP}}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k.$$

Az utóbbi egyenlet eredményét úgy tekinthetjük, hogy az  $\mathbf{i}_k$  vektorok egy lokális bázist feszítenek ki a  $P$  pontban. Mivel ez a lokális bázis a kartéziuszi koordinátarendszer minden egyes pontjában azonos nincs értelme különbséget tenni az egyes lokális bázisok között.

**A.5.3.** Az  $\mathbf{i}_k$  bázisvektorok egymásra kölcsönösen merőleges, jobbsodratú, lineárisan független vektorhármast alkotnak továbbá  $|\mathbf{i}_k| = 1$ . Következésképp fennállnak az

$$\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_q = \delta_{pq} \quad (\text{A.5.3})$$

és

$$\mathbf{i}_p \times \mathbf{i}_q = e_{pq\ s} \mathbf{i}_s \quad (\text{A.5.4})$$

egyenletek, ahol a skaláris szorzást itt és továbbiakban a pont, a vektoriális szorzást pedig a szokásos kereszt jelöli. Az (A.5.4) egyenlet és az  $\mathbf{i}_r$  bázisvektor skaláris szorzatát képezve – kihasználva eközben az (A.5.3)-at és a *Kronecker* függvény indexhelyettesítő tulajdonságát – a

$$(\mathbf{i}_p \times \mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{i}_r = [\mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r] = e_{pq\ s} \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}_r = e_{pq\ s} \delta_{sr} = e_{pqr} \quad (\text{A.5.5})$$

eredményt kapjuk a bázisvektorok vegyes szorzatára.

**A.5.4.** Jelölje  $u_p$  és  $v_q$  az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok koordinátairányú összetevőit a bevezetett derékszögű kartéziuszi koordinátarendszerben (vagy röviden DKKR-ben). Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{u} = u_p \mathbf{i}_p \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = v_q \mathbf{i}_q.$$

A  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok skaláris szorzata (A.5.3) kihasználásával az

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_p v_q \mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_q = u_p v_q \delta_{pq} = u_p v_p = u_q v_q \quad (\text{A.5.6})$$

alakban írható fel. Ugyanilyen módon kapjuk az (A.5.4) felhasználásával, hogy

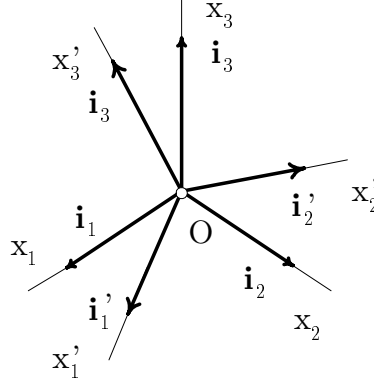
$$\mathbf{w} = \underbrace{w_s}_{\mathbf{i}_s} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_p v_q \mathbf{i}_p \times \mathbf{i}_q = \underbrace{e_{pq\ s} u_p v_q}_{\mathbf{i}_s} \quad (\text{A.5.7})$$

ahol az  $\mathbf{i}_s$  vektorok lineáris függetlensége miatt a megjelölt részek ugyancsak egyenlőek egymással:

$$w_s = e_{pq\ s} u_p v_q. \quad (\text{A.5.8})$$

Tegyük fel, hogy a közös ponthoz kötött  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}$  vektoroknak nincs közös síkja. A három vektor vegyes szorzata az (A.5.7) képlet alapján az

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (e_{pq\ s} u_p v_q \mathbf{i}_s) \cdot (w_r \mathbf{i}_r) = e_{pq\ s} u_p v_q w_r \delta_{sr} = e_{pqr} u_p v_q w_r \quad (\text{A.5.9})$$



A.3 ábra

Közös origójú elforgatott DDKR-ek

módon számítható. Visszaidézve az (A.4.2) képletet —  $u_p$   $a_{1p}$ -nek,  $v_q$   $a_{2q}$ -nak és  $w_r$   $a_{3r}$ -nek felel meg — azonnal adódik, hogy

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

azaz az  $u_p$ ,  $w_q$  és  $w_r$  összetevők által alkotott determináns értéke megegyezik az (A.5.9) alatti vegyes szorzattal.

## A.6. Koordináta-transzformációk

**A.6.1.** Az A.3 ábra két koordinátarendszert szemléltet. Az első, illetve vesszőtlen koordinátarendszer megegyezik az A.2 ábrán vázolt DKKR-el. A második vagy vesszős DKKR origója egybeesik a vesszőtlen DKKR origójával, a vonatkozó koordinátákat és bázisvektorokat pedig, amint erre a szóhasználat is utal, vesszővel jelölt betűk azonosítják:  $x_{k'}$  és  $\mathbf{i}_{k'}$  a koordináták és bázisvektorok jelölése. Ezt a jelölésbeli megállapodást később is megtartjuk, amennyiben a vesszővel jelölt mennyiségek általában a vesszős koordinátarendszerben tekintetk. Vegyük észre hogy a közös origó körüli forgatással bármelyik koordinátarendszer fedésbe hozható a másikkal. Ezt a fajta transzformációt *koordináta forgatásnak* fogjuk nevezni. Itt és továbbiakban figyelmünket egyelőre csak a koordináta forgatásra korlátozzuk.

**A.6.2.** A  $P$  pont  $\mathbf{r}_{OP}$  helyvektora mindkét koordinátarendszerben megadható:

$$\mathbf{r}_{OP} = x_k \mathbf{i}_k = x_{l'} \mathbf{i}_{l'}. \quad (\text{A.6.1})$$

Másként fogalmazva az  $\mathbf{r}_{OP}$  helyvektor

$$[x_1, x_2, x_3] \quad \text{vagy} \quad [x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}]$$

függvényének tekinthető ahol

$$x_k = x_k(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}) \quad \text{és viszont} \quad x_{l'} = x_{l'}(x_1, x_2, x_3).$$

Mivel a helyvektor differenciálható a helykoordináták szerint az (A.6.1)-ből következik, hogy

$$\mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_{OP}}{\partial x_k} \quad \mathbf{i}_{l'} = \frac{\partial \mathbf{r}_{OP}}{\partial x_{l'}} \quad (\text{A.6.2})$$

ahonnan a láncszabály alkalmazásával a

$$\mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_{OP}}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_{OP}}{\partial x_{l'}} \frac{\partial x_{l'}}{\partial x_k} \quad \mathbf{i}_{l'} = \frac{\partial \mathbf{r}_{OP}}{\partial x_{l'}} = \frac{\partial \mathbf{r}_{OP}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{l'}}$$

vagy ami ugyanaz a

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_{l'} \frac{\partial x_{l'}}{\partial x_k} \quad \mathbf{i}_{l'} = \mathbf{i}_k \frac{\partial x_k}{\partial x_{l'}}. \quad (\text{A.6.3})$$

eredményt kapjuk.

**A.6.3.** A fenti képletek a bázisvektorok transzformációs szabályai, aholis — amint arról  $[\mathbf{i}_{r'}]$   $\{\mathbf{i}_r\}$ -el történő átszorzással és a KRONECKER szimbólum indexhelyettesítő tulajdonságának kihasználásával majd az  $[r']$   $\{r\}$  szabad index  $[l'$ -re]  $\{k$ -ra} történő átnevezésével meg lehet győződni — fennáll, hogy

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_{l'} = a_{kl'} = \frac{\partial x_{l'}}{\partial x_k} = \cos(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_{l'}) \quad \text{és} \quad \mathbf{i}_{l'} \cdot \mathbf{i}_k = a_{l'k} = \frac{\partial x_k}{\partial x_{l'}} = \cos(\mathbf{i}_{l'}, \mathbf{i}_k). \quad (\text{A.6.4})$$

Az  $a_{kl'}$  illetve  $a_{l'k}$  mátrixokat a fenti egyenlet értelmezi. Nyilvánvaló, hogy

$$a_{kl'} = a_{l'k}. \quad (\text{A.6.5})$$

Az  $a_{kl'}$  és  $a_{l'k}$  segítségével a bázisvektorok (A.6.3) transzformációs szabálya az

$$\mathbf{i}_k = a_{kl'} \mathbf{i}_{l'} \quad \mathbf{i}_{l'} = a_{l'k} \mathbf{i}_k \quad (\text{A.6.6})$$

alakban írható fel. Könnyű ellenőrizni (A.6.1) felhasználásával, hogy a koordináták ugyanilyen módon transzformálódnak:

$$x_k = a_{kl'} x_{l'} \quad x_{l'} = a_{l'k} x_k. \quad (\text{A.6.7})$$

Szorozzuk végig az (A.6.6) egyenleteket  $\mathbf{i}_s$ -el és használjuk ki (A.5.3)-at:

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s = \delta_{ks} = a_{kl'} \underbrace{\mathbf{i}_{l'} \cdot \mathbf{i}_s}_{\delta_{l's}} \quad \mathbf{i}_{l'} \cdot \mathbf{i}_s = a_{l'k} \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s = a_{l'k} \delta_{ks} = \underbrace{a_{l's}}_{\delta_{l's}}$$

Az utóbbi két egyenlet egybevetéséből — a megjelölt részek ui. egyenlőek — a

$$\delta_{ks} = a_{kl'} a_{l's} \quad (\text{A.6.8})$$

összefüggés következik. Tekintettel az (A.6.5) képletre is az (A.6.8) egyenlet azt jelenti, hogy az  $a_{kl'}$  mátrix  $a_{l'k}$  transzponáltja — a képletben a  $k$  index helyett nyilvánvaló okokból  $s$  áll — egyben az  $a_{kl'}$  mátrix inverze.

Az ilyen tulajdonságú mátrixokat ortogonális mátrixoknak szokás nevezni.

Az (A.6.8) összefüggésre vezető gondolatmenet ismétlésével — ezuttal  $\mathbf{i}_{s'}$ -el szorozva át az (A.6.6) egyenletet — az

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_{s'} = a_{kl'} \mathbf{i}_{l'} \cdot \mathbf{i}_{s'} = a_{kl'} \delta_{k's'} = \underbrace{a_{ks'}}_{\delta_{k's'}} \quad \mathbf{i}_{l'} \cdot \mathbf{i}_{s'} = \delta_{l's'} = a_{l'k} \underbrace{\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_{s'}}_{\delta_{k's'}}$$

illetve a

$$\delta_{l's'} = a_{l'k} a_{ks'} \quad (\text{A.6.9})$$

eredményt kapjuk. Ez az egyenlet az (A.6.8) összefüggés párja.

**A.6.4.** Az (A.5.5) képlet alapján írható, hogy

$$(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{i}_3 = e_{123} = 1. \quad (\text{A.6.10})$$

Az (A.6.6)<sub>1</sub>, (A.5.5) és (A.4.3a,b) képletek értelemszerű felhasználásával innen

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{i}_3 &= (a_{1p'} \mathbf{i}_{p'} \times a_{2q'} \mathbf{i}_{q'}) \cdot a_{3r'} \mathbf{i}_{r'} = (\mathbf{i}_{p'} \times \mathbf{i}_{q'}) \cdot \mathbf{i}_{r'} a_{1p'} a_{1q'} a_{1r'} \\ &= e_{p'q'r'} a_{1p'} a_{1q'} a_{1r'} = a = 1 \end{aligned}$$

következik. Ez azt jelenti, hogy

$$|a_{l'k}| = |a_{kl'}| = 1, \quad (\text{A.6.11})$$

vagyis — tekintettel (A.4.8) és (A.5.8)-ra is — az  $a_{l'k}$  elemhez tartozó adjungált az

$$A_{kl'} = a_{kl'}$$

módon számítható.

### A.7. Skalár, vektor és tenzor

**A.7.1.** A  $\phi(x_1, x_2, x_3)$  függvényt abszolút skalárnak nevezzük, ha a koordinátarendszer elforgatása nincs hatással a függvény értékére, azaz

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi[x_1(x_1', x_2', x_3'), x_2(x_1', x_2', x_3'), x_3(x_1', x_2', x_3')] = \phi'(x_1', x_2', x_3').$$

Fizikai szemüvegen át nézve akkor nevezzük a  $\phi$  függvényt abszolút skalárnak, ha a tér egy adott pontjában független az értéke a koordinátarendszer választásától.

**A.7.2.** A vektor mint fizikai mennyiség a tér egy adott pontjához kötött, irányított egyenesszakasz. A vonatkozó pont a vektor támadáspontja. Az egyenesszakasz hossza, alkalmas skálán mérve, a fizikai hatás mérőszáma illetve a vektor abszolút értéke. Az egyenesszakasz iránya pedig a hatás iránya míg az irányítottság azt mutatja meg, hogy merrefelé működik a hatás az irányt adó egyenesszakasz mentén.

A vektor fenti geometriai fogalmakra támaszkodó értelmezése nyilvánvalóan független a választott koordinátarendszertől.

Ez egyben azt is jelenti, hogy az  $\mathbf{u}$  vektor – ez az írásmód egyben, és az eddigiekkel is összhangban, jelölésbeli megállapodást tükröz, mivel a vektorokat és a későbbiekben értelmezett magasabbrendű tenzorokat a koordinátarendszertől független vagy más néven szimbólikus írásmódban félkövér betűk azonosítják – mind a két koordinátarendszerben megadható:

$$\mathbf{u} = u_n \mathbf{i}_n = u_{n'} \mathbf{i}_{n'}.$$

Szorozzuk át a fenti egyenletet  $\mathbf{i}_{l'}$ -vel illetve  $\mathbf{i}_l$ -lel. Elemi számítással, az (A.6.6)<sub>1,2</sub> egyenletek kihasználásával kapjuk, hogy

$$u_{n'} \mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{i}_{l'} = u_{n'} \delta_{n'l'} = \underbrace{u_{l'}} = u_n \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_{l'} = \mathbf{i}_{l'} \cdot \mathbf{i}_n u_n = \underbrace{a_{l'n} u_n}$$

és

$$u_n \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_l = u_n \delta_{nl} = \underbrace{u_l} = u_{n'} \mathbf{i}_{n'} \cdot \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_{n'} u_{n'} = \underbrace{a_{ln'} u_{n'}}.$$

A megjelölt részek mindkét egyenletben egyenlőek azaz:

$$u_{l'} = a_{l'n} u_n \quad \text{és} \quad u_l = a_{ln'} u_{n'}. \quad (\text{A.7.1})$$

Legyen  $u_{n'}(x_1', x_2', x_3')$  és  $u_n(x_1, x_2, x_3)$  rendre a vesszős illetve a vesszőtlen DDKR-ben értelmezett függvényhármass. A fentiekben használt jelölésekkel való formai egyezés, amint az a következő értelmezésből azonnal látszik, ehelyütt nem véletlen.

Azt fogjuk mondani, hogy a két koordinátarendszerben egymástól függetlenül de formailag ugyanolyan módon értelmezett  $u_{n'}$  és  $u_n$  függvényhármassok valódi vektorok, vagy más elnevezés szerint elsőrendű tenzorok, ha kielégítik az (A.7.1) alatti transzformációs szabályokat.

1. MEGJEGYZÉS: Az  $a_{n'l}$  transzformációs mátrixok tulajdonságai miatt ahhoz, hogy az  $u_{n'}$  és  $u_n$  valódi vektor legyen elegendő vagy csak az (A.7.1)<sub>1</sub> vagy csak az (A.7.1)<sub>2</sub> teljesülése.

2. MEGJEGYZÉS: Az (A.6.7)<sub>1,2</sub> egyenletek következménye, hogy az  $x_{k'}$  és  $x_k$  helyvektorok valódi vektorok. Ez egyébként nyilvánvalóan igaz, hiszen a vesszős és vesszőtlen koordinátarendszerben a  $P$  pontnak ugyanaz a helyvektora.

3. MEGJEGYZÉS: A vektorfogalom fenti értelmezése lehetőséget ad arra, hogy a vektoregyenletek írása során elhagyjuk a bázisvektorokat.

**A.7.3.** Az **A.7.3.-7.9.** szakaszok, a szükséges előkészületek után, a másodrendű tenzor egy lehetséges értelmezését ismertetik. Ez az értelmezés, amint arra az **A.7.10** szakaszban részletebben is rá fogunk mutatni, lehetőséget nyújt a másodrendű tenzor transzformációs szabályok segítségével történő újraértelmezésére és ennek révén a kettőnél magasabbrendű tenzorok fogalmának bevezetésére.

A másodrendű tenzor értelmezése szorosan kötődik a homogén lineáris vektor-vektor függvény fogalmához. Tekintsük a

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (\text{A.7.2})$$

vektor-vektor függvényt. Legyen  $\mathbf{w}_k$  az  $\mathbf{f}$  függvény  $\mathbf{v}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) vektorváltozókhoz rendelt értéke:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{f}(\mathbf{v}_k).$$

Az  $\mathbf{f}(\mathbf{v})$  függvény homogén lineáris ha tetszőleges  $\lambda_k$ -ra fennáll az

$$\lambda_1 \mathbf{f}(\mathbf{v}_1) + \dots + \lambda_n \mathbf{f}(\mathbf{v}_n) = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{w}_n \quad (\text{A.7.3})$$

egyenlet.

Az  $\mathbf{f}(\mathbf{v})$  függvény — mivel a  $\mathbf{v}$  az euklideszi tér tetszőleges pontjának lehet a helyvektora — a teljes euklideszi teret képezi le, vagy önmagára, vagy pedig a tér egy alterére (síkra, egyenesre vagy pontra). Az első esetben  $\mathbf{w}$  végigfut a teljes téren és a függvény linearitása és kölcsönös egyértelmősége miatt pontnak pont, egyenesnek egyenes, síknak sík felel meg.

A második esetben a leképezést elfajulónak nevezzük.

A leképezés geometriai tartalma miatt azt is mondhatjuk, hogy a  $\mathbf{w}$  vektor a  $\mathbf{v}$  tárgyvektor képe.

**A.7.4.** Legyen  $[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3] = v_0 \neq 0$ . Ez esetben a  $\mathbf{v}_i$  vektorok bázist alkotnak, mivel a segítségükkel a tér bármelyik vektora előállítható. A  $\mathbf{v}_i$  vektorokhoz rendelt  $\mathbf{v}_i^*$  reciprok bázisvektorokat a

$$\mathbf{v}_1^* = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{v_0}, \quad \mathbf{v}_2^* = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{v_0} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_3^* = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{v_0} \quad (\text{A.7.4})$$

egyenletek értelmezik. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\delta_{kl} = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_l^*. \quad (\text{A.7.5})$$

Utóbbi egyenlet felhasználásával azonnal adódik, hogy a  $\mathbf{v}$  vektor

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \lambda_k \mathbf{v}_k \quad (\text{A.7.6a})$$

előállításában

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_l^* = \lambda_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_l^* = \lambda_l. \quad (\text{A.7.6b})$$

Az  $\mathbf{i}_k$  vektorok alkotta bázis esetén (A.6.1) szerint  $[\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3] = 1$  és ezzel az (A.7.4)-ből az  $\mathbf{i}_l = \mathbf{i}_l^*$  eredmény következik. Az (A.7.6a,b) képleteknek pedig a

$$\mathbf{v} = v_l \mathbf{i}_l \quad v_l = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_l^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_l \quad (\text{A.7.7})$$

összefüggések felelnek meg.

1. MEGJEGYZÉS: A fentiek alapján azt is mondhatjuk, hogy a  $\mathbf{v}_l$  vektorok egy ferdesszögű egyenesvonalú koordinátarendszer bázisát alkotják. Az (A.7.6a,b) képletekben álló  $\lambda_l$  a  $\mathbf{v}$  vektor  $\mathbf{v}_k$  irányú összetevője ebben a koordinátarendszerben.

**A.7.5.** Az (A.7.6a) egyenlet felhasználásával — tekintettel arra a körülményre, hogy az  $\mathbf{f}(\mathbf{v})$  függvény akkor homogén lineáris, ha fennáll az (A.7.3) összefüggés — írható, hogy

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{i}_1) v_1 + \mathbf{f}(\mathbf{i}_2) v_2 + \mathbf{f}(\mathbf{i}_3) v_3 = \mathbf{f}(\mathbf{i}_k) v_k. \quad (\text{A.7.8})$$

Legyen

$$\mathbf{f}(\mathbf{i}_1) = W_{k1} \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}_2) = W_{k2} \mathbf{i}_k \quad \text{és} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}_3) = W_{k3} \mathbf{i}_k.$$

Tömör alakban

$$\mathbf{f}(\mathbf{i}_l) = W_{kl} \mathbf{i}_k \quad (\text{A.7.9})$$

ahol  $W_{kl} \mathbf{i}_k$  az  $\mathbf{i}_l$  vektor képe. Az (A.7.9) helyettesítésével (A.7.8)-ból a

$$\mathbf{w} = W_{k1} \mathbf{i}_k v_1 + W_{k2} \mathbf{i}_k v_2 + W_{k3} \mathbf{i}_k v_3 = W_{kl} \mathbf{i}_k v_l \quad (\text{A.7.10})$$

eredmény következik. Az (A.7.8) és (A.7.10) egyaránt azt fejezik ki, hogy az  $\mathbf{f}(\mathbf{i}_l)$  képvektorok egyértelműen meghatározzák a leképezést, hiszen a tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektor  $\mathbf{w}$  képe az  $\mathbf{f}(\mathbf{i}_l) = W_{kl} \mathbf{i}_k$  képvektorok  $v_l$ -el súlyozott összege.

**A.7.6.** Tovább alakítható az (A.7.10) egyenlet ha kihasználjuk a KRONECKER függvény indexhelyettesítő tulajdonságát:

$$\mathbf{w} = \underline{w_k} \mathbf{i}_k = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \underline{W_{kl} v_l} \mathbf{i}_k = W_{km} \mathbf{i}_k \delta_{ml} v_l = \underbrace{W_{km} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m}_{=\mathbf{W}} \cdot \mathbf{i}_l v_l. \quad (\text{A.7.11})$$

Ez az egyenlet a diadikus szorzat fogalmának bevezetése révén nyer mélyebb értelmet.

A diadikus szorzat vagy diád két egymás mellett álló vektor ún. általános vagy jelölt szorzata. A jelölt szó arra utal, hogy a formálisan kijelölt diadikus szorzat további értelmet kap, ha a diádon műveleteket végzünk. Az  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m$  diáddal kapcsolatos szorzásokat az alábbiak értelmezik:

Skaláris szorzás jobbról:

$$(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{i}_k (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{v}). \quad (\text{A.7.12a})$$

Az eredmény egy vektor.

Skaláris szorzás balról:

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_m. \quad (\text{A.7.12b})$$

Az eredmény ismét egy vektor.

Vektoriális szorzás jobbról:

$$(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m) \times \mathbf{v} = \mathbf{i}_k (\mathbf{i}_m \times \mathbf{v}). \quad (\text{A.7.13a})$$

Az eredmény egy újabb diadikus szorzat.

Vektoriális szorzás balról:

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m) = (\mathbf{v} \times \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_m. \quad (\text{A.7.13b})$$

Az eredmény ismét egy diadikus szorzat.

**A.7.7.** Az (A.7.11) egyenlet kapcsos zárójellel megjelölt része a  $\mathbf{W}$  másodrendű tenzort értelmezi:

$$\mathbf{W} = W_{km} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m. \quad (\text{A.7.14})$$

A képletben lévő  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m$  diád a bázistenzor. Az (A.7.14) értelmezés segítségével (A.7.11)-ből a

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.7.15})$$

szimbólikus alak következik. Vegyük észre, hogy ez az egyenlet már ugyanolyan szerkezetű mint az egyváltozós  $y = Cx$  homogén lineáris függvény; az  $y$  függő változónak a  $\mathbf{w}$  képvektor, a  $C$  állandónak a  $\mathbf{W}$  másodrendű tenzor, az  $x$  független változónak pedig a  $\mathbf{v}$  tárgyvektor felel meg.

**A.7.8.** Az  $\mathbf{i}_k$  vektor elhagyásával — lásd az aláhúzott részeket az (A.7.11)-ben — írható, hogy:

$$w_k = W_{kl} v_l. \quad (\text{A.7.16})$$

Az (A.7.16) egyenlet az (A.7.15) egyenlet vesszőtlen DDKR-ben érvényes és indexes jelölésmódban írt alakja. Nyilvánvaló utóbbi egyenlet alapján, hogy a háromszor hármass  $W_{kl}$  mátrix — más elnevezés szerint a  $\mathbf{W}$  másodrendű tenzor mátrixa a vesszőtlen DDKR-ben — egyértelműen meghatározza a leképezést amely nem elfajuló, ha a  $W_{kl}$  invertálható. A vesszős DDKR-t tekintve az (A.7.16) egyenletnek a

$$w_{m'} = W_{m'n'} v_{n'} \quad (\text{A.7.17})$$

egyenlet a párja;  $W_{m'n'}$  a  $\mathbf{W}$  másodrendű tenzor mátrixa a vesszős rendszerben:

$$\mathbf{W} = W_{m'n'} \mathbf{i}_{m'} \mathbf{i}_{n'}.$$

Alábbiak a  $W_{kl}$  és  $W_{m'n'}$  mátrixok kapcsolatát kísérlik meg tisztázni. Az  $(\text{A.7.1})_2$  összefüggés értelemszerű felhasználásával (A.7.16)-ból a

$$\underbrace{a_{ks'} w_{s'}}_{w_k} = W_{kl} \underbrace{a_{ln'} v_{n'}}_{v_l}$$

eredményt kapjuk. Szorozzunk át  $a_{m'k}$ -val és használjuk ki az (A.6.9) illetve (A.6.5) összefüggéseket:

$$a_{m'k} a_{ks'} w_{s'} = \delta_{m's'} w_{s'} = \underline{w_{m'}} = a_{m'k} W_{kl} a_{ln'} v_{n'} = \underline{a_{m'k} a_{n'l} W_{kl} v_{n'}}.$$

Az utóbbi egyenlet aláhúzott részeinek (A.7.17)-tel történő egybevetéséből azonnal adódik a  $\mathbf{W}$  tenzor mátrixa a vesszős DDKR-ben:

$$W_{m'n'} = a_{m'k} a_{n'l} W_{kl}. \quad (\text{A.7.18a})$$

Az (A.7.18a)-ra vezető gondolatmenet azon alapul, hogy a  $w_k$  és  $v_n$  mint valódi vektorok követik az (A.7.1) transzformációs szabályt. A gondolatmenet megfordításával az is kimutatható, hogy az (A.7.18a) fennállása esetén az (A.7.17) segítségével számított  $w_{m'}$  követi az (A.7.1)<sub>1</sub> transzformációs szabályt azaz valódi vektor feltéve, hogy a  $v_{n'}$  is valódi. Másként fogalmazva az (A.7.16) és (A.7.17) leképezések koordinátarendszertől függetlenül ugyanarra az eredményre vezetnek. Ennek az állításnak az igazolását az A.7 Gyakorlatra hagyjuk.

Az (A.7.18a) transzformációs képlet megfordítását az  $a_{pm'} a_{qn'}$ -vel történő átszorzással és az (A.6.5) kihasználásával, illetve a jobb és baloldalak felcserélésével kaphatjuk meg:

$$W_{pq} = a_{pm'} a_{qn'} W_{m'n'} \quad (\text{A.7.18b})$$

Az (A.7.18a,b) képletek módot nyújtanak arra, hogy  $W_{kl}$  illetve  $W_{m'n'}$  ismeretében kiszámítsuk az ismeretlennek tekintett  $W_{m'n'}$ -t illetve  $W_{pq}$ -t.

## A.8. Gyakorlatok

**A.1** Mutassa meg, hogy a

$$e_{ijk} = \frac{1}{2}(j-k)(k-i)(i-j) \sum_{i,j,k} i, j, k \quad i, j, k = 1, \dots, 3$$

kifejezés a permutációs szimbólum lehetséges értelmezése.

**A.2** Mutassa meg a determinánsok kifejtési tételének felhasználásával, hogy

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix}.$$

**A.3** Igazolja, hogy

$$A_{pi} = \frac{\partial a}{\partial a_{ip}}.$$

(Az átalakítások során kívánatos a

$$\frac{\partial a_{kr}}{\partial a_{ip}} = \delta_{ki} \delta_{rp}$$

egyenlőség ismételt alkalmazása.)

**A.4** Mutassa meg — az (A.4.7a)-re vezető gondolatmenet alapján — az (A.4.7b) egyenlet helyességét.

**A.5** Tegyük fel, hogy  $a = |a_{ij}| \neq 0$ . Mutassa meg, hogy az (A.2.2) egyenletrendszer megoldása

$$y_j = \frac{1}{a} A_{jm} b_m$$

alakú.

**A.5** Igazolja, hogy

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}$$

és

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}.$$

## HIVATKOZÁSOK AZ A. FÜGGELÉKHEZ

1. Simonds, J.G.: *Tenzoranalízis dióhéjban*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
2. BÉDA, Gy.-KOZÁK, I.-VERHÁS, J.: *Kontinuumechanika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

## B FÜGGELÉK

### A Dirac függvény

#### B.1. A szimbólikus Dirac függvény és egyes tulajdonságai

**B.1.1.** Legyen az  $f(x_1)$  függvény [1] folytonos a  $\xi_{1Q} = \xi_1$  koordinátájú  $Q$  pont környezetében és legyen az  $x_1$  koordinátájú tetszőleges pont az  $M$  futópont. Legyen továbbá  $a < b$ . Az  $x_1$  változó  $\delta(x_1)$  Dirac féle delta-függvényét az

$$\int_a^b f(x_1) \delta(x_1 - \xi_{1Q}) dx_1 = \begin{cases} 0 & \text{ha } \xi_{1Q} \notin [a, b] \\ \frac{1}{2}f(\xi_{1Q}) & \text{ha } \xi_{1Q} = a \text{ vagy } \xi_{1Q} = b \\ f(\xi_{1Q}) & \text{ha } \xi_{1Q} \in (a, b) \end{cases} \quad (\text{B.1.1})$$

egyenlet értelmezi. Mivel az  $x_1$ -nek az  $M$  pont,  $\xi_{1Q}$ -nek a  $Q$  pont a  $dx$ -nak pedig az  $M$  pontban tekintett  $ds_M$  ívelem felel meg a fenti képlet átírható formálisan az

$$\int_a^b f(M) \delta(M - Q) ds_M = \begin{cases} 0 & \text{ha } Q \notin [a, b] \\ \frac{1}{2}f(Q) & \text{ha } Q \text{ egybeesik } a \text{ vagy } b\text{-vel} \\ f(Q) & \text{ha } \xi_{1Q} \in (a, b) \end{cases} \quad (\text{B.1.2})$$

alakba is. A (B.1.1) által értelmezett  $\delta(x_1 - \xi_{1Q})$  függvény nem valódi függvény és az integráljai sem léteznek abban az értelemben, ahogy ezt a klasszikus analízisben megszoktuk. A Dirac függvény valójában egy olyan általánosított függvény [2] illetve szimbólum, amely az  $f(\xi_{1Q})$  értéket formális módon integráltranszformációval állítja elő magából az  $f(x_1)$  függvényből. Ez a tulajdonsága számos alkalmazásban hasznosul.

**B.1.2.** Legyen az  $M$  és  $Q$  pont az  $x_1, x_2$  koordinátasík egy-egy nem szükségképpen különböző? pontja. A vonatkozó helyvektorokat jelölje  $\mathbf{r}_M = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2$  vagy  $x_\alpha$  és  $\mathbf{r}_Q = \xi_{1Q} \mathbf{i}_1 + \xi_{2Q} \mathbf{i}_2$  vagy  $\xi_\alpha$ . A síkbeli Dirac féle delta-függvényt a

$$\delta(M - Q) = \delta(x_\alpha - \xi_\alpha) = \delta(x_1 - \xi_{1Q}) \delta(x_2 - \xi_{2Q}) \quad (\text{B.1.3})$$

egyenlet értelmezi. Ha az  $f(x_\alpha)$  kétváltozós függvény folytonos a az  $x_1, x_2$  koordinátasík  $\xi_\alpha$  pontjában akkor a (B.1.1) felhasználásával azonnal következik, hogy

$$\int_S f(M) \delta(M - Q) dA_M = \begin{cases} 0 & \text{ha } Q \notin S \\ f(Q) & \text{ha } Q \in S \end{cases} \quad (\text{B.1.4})$$

ahol  $S$  a koordinátasík egy nem szükségképpen korlátos tartománya és  $dA_M$  az  $M$  pontban tekintett felületelem.

**B.1.3.** A háromméretű Dirac féle delta-függvény értelmezése a fentiekhez hasonlóan történhet és fennáll a (B.1.4) egyenlet párját adó

$$\int_V f(M) \delta(M - Q) dV_M = \begin{cases} 0 & \text{ha } Q \notin V \\ f(Q) & \text{ha } Q \in V \end{cases} \quad (\text{B.1.5})$$

összefüggés is, ahol az  $f(M)$  háromváltozós függvény folytonos a  $Q$  pontban és  $V$  a tér egy nem szükségképpen korlátos tartománya. Az  $f(M) \equiv 1$  esetén a (B.1.5) képletből az

$$\int_V \delta(M - Q) dV_M = \begin{cases} 0 & \text{ha } Q \notin V \\ 1 & \text{ha } Q \in V \end{cases} \quad (\text{B.1.6})$$

egyenlet fennállása következik.

## HIVATKOZÁSOK A B. FÜGGELÉKHEZ

1. Korn, A.G.-Korn, T.M.: *Matematikai kézikönyv műszakiaknak*, M|H[uslaki könyvkiadó, Budapest, 1975. pp. 774-778.
2. Gelfand, I.M.-Silov, G.E.: *Generalized functions*, Academic, New York, 1964.

## C FÜGGELÉK

### Hosszabb matematikai átalakítások

#### C.1. Feszültségek számítása az elmozdulásmezőre vonatkozó alapmegoldásból

**C.1.1.** A (2.3.3)<sub>1</sub> és (2.3.4)<sub>1</sub> képletek valamint az elmozdulásmezővel kapcsolatos (3.3.19) alapmegoldás felhasználásával – tekintettel a (3.3.20)-ra is – adódik, hogy

$$u_i \overset{M}{\nabla}_k = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ \delta_{ik} r_l + r_i \delta_{kl} - (3-4\nu) r_k \delta_{il} - 3 \frac{r_i r_k r_l}{R^2} \right] e_l(Q). \quad (\text{C.1.1})$$

Ebből a képletből, valamint a (3.2.1) kinematikai egyenletből következik, hogy

$$e_{ik}(M, Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ \delta_{ik} r_l - (1-2\nu)(r_i \delta_{kl} + r_k \delta_{il}) - 3 \frac{r_i r_k r_l}{R^2} \right] e_l(Q). \quad (\text{C.1.2a})$$

és hogy

$$e_{ss}(M, Q) = u_s \overset{M}{\nabla}_s = -\frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \frac{r_l}{R^3} e_l(Q). \quad (\text{C.1.2b})$$

A (C.1.2a,b) képletek valamint a (3.2.2) *Hooke* törvény segítségével a

$$t_{ik}(M, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ik} r_l - r_i \delta_{kl} - r_k \delta_{il}) - 3 \frac{r_i r_k r_l}{R^2} \right] e_l(Q) \quad (\text{C.1.3})$$

összefüggést kapjuk a feszültségi tenzor elemeinek számítására az  $M$  pontban. Legyen az  $f(x_1)$  függvény [1] folytonos a  $\xi_{1Q} = \xi_1$  koordinátájú  $Q$  pont környezetében és legyen az  $x_1$  koordinátájú tetszőleges pont az  $M$  futópont.

#### C.2. Az $u_l(Q) = {}_i T_{Kl}(M_o, Q)$ elmozdulásmezőhöz tartozó feszültségek számítása.

**C.2.1.** A feszültségek számítása a (C.1.3)-ra vezető gondolatmenet szószerint megismétlését igényli annak a körülménynek a szem előtt tartásával, hogy a  $Q$  pontot tekintjük változónak és ebből adódóan érdemes kihasználni a

$$\overset{Q}{\nabla}_s = -\overset{M}{\nabla}_s$$

összefüggést. Ez azt eredményezi, hogy a (C.1.2a,b) és (C.1.3) képletek csak annyiban módosulnak, hogy

- elhagyjuk az  $e_l(Q)$ -t,
- megváltoztatjuk a képletek jobboldalának előjelét

és átnevezzük (mivel most nem az  $u_i = U_{il} e_l$  hanem az  $U_{Kl} = U_{lK}$  vektormezőt deriváljuk)

- az  $i$  indexet  $l$ -nek, a  $k$  deriválási indexet  $s$ -nek és az  $l$  indexet pedig  $K$ -nak.

A fentiek alapján

$$e_{ls}(M, Q) = -\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ \delta_{ls} r_K - (1-2\nu)(r_l \delta_{sK} + r_s \delta_{lK}) - 3 \frac{r_l r_s r_K}{R^2} \right] \quad (\text{C.2.1})$$

az alakváltozási tenzor és

$$t_{ls}(M, Q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ls} r_K - r_l \delta_{sK} - r_s \delta_{lK}) - 3 \frac{r_l r_s r_K}{R^2} \right] \quad (\text{C.2.2})$$

a feszültségi tenzor értéke.

**C.3. Az  $u_l(Q) = {}_i T_{Kl}(M, Q)$  elmozdulásmezőhöz tartozó feszültségek számítása.**

**C.3.1.** A (2.3.4) deriválási szabály felhasználásával a  $T_{kl}(M, Q)$ -t adó (3.3.33)<sub>2</sub> képletből, némi rendezés után, az

$$\begin{aligned} u_l(Q) \overset{Q}{\nabla}_s = & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{3}{R^2} n_i r_i [-(1-2\nu)\delta_{Kl} r_s + \delta_{Ks} r_l + r_K \delta_{ls}] - 15 n_i r_i \frac{r_K r_l r_s}{R^4} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{R^2} [(1-2\nu)(n_K r_l r_s - n_l r_K r_s) + n_s r_K r_l] - (1-2\nu)(n_K \delta_{ls} - n_l \delta_{Ks} - n_s \delta_{Kl}) \right\} \quad (C.3.1) \end{aligned}$$

összegűgést kapjuk az elmozdulásmező gradiensére. Az  $u_l(Q) \overset{Q}{\nabla}_s$  gradiens szimmetrikus része az alakváltozási tenzort adja:

$$\begin{aligned} e_{ls}(Q) = & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{3}{R^2} n_i r_i [r_K \delta_{ls} + \nu(\delta_{Kl} r_s + \delta_{Ks} r_l)] - 15 n_i r_i \frac{r_K r_l r_s}{R^4} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{R^2} (1-2\nu) n_K r_l r_s + \frac{3}{R^2} \nu (n_l r_K r_s + n_s r_K r_l) - (1-2\nu)(n_K \delta_{ls} - n_l \delta_{Ks} - n_s \delta_{Kl}) \right\} \quad (C.3.2a) \end{aligned}$$

Az  $e_{ls}(Q)$  tenzor skalárinvariánsa az

$$e_{ss}(Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} (1-2\nu) \left\{ 2n_K - 6n_i r_i \frac{r_K}{R^2} \right\} \quad (C.3.2b)$$

alakban írható fel. A (3.2.2) *Hooke* törvény felhasználásával

$$\begin{aligned} t_{ls}(Q) = & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{3}{R^2} n_i r_i \left[ (1-2\nu) r_K \delta_{ls} + \nu(\delta_{Kl} r_s + \delta_{Ks} r_l) - 5 \frac{r_K r_l r_s}{R^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{3}{R^2} \nu (n_l r_K r_s + n_s r_K r_l) + \frac{1}{R^2} (1-2\nu) (3n_K r_l r_s + n_l \delta_{Ks} + n_s \delta_{Kl}) - (1-4\nu) n_K \delta_{ls} \right\} \quad (C.3.3) \end{aligned}$$

a feszültségi tenzor.

## D FÜGGELÉK

### Egyes Gyakorlatok megoldásai

#### 1. FEJEZET

##### 1.1 Gyakorlat

Az (1.6.2a) és (1.6.2b) megoldásokat illeszteni kell az  $r = 0$  helyen. Az illesztési feltételek megegyeznek az **1.3.5.** szakaszban részletezett illesztési feltételekkel. Ez azt jelenti, hogy az elmozdulás, a szögelfordulás és hajlítógénybevétel folytonos az  $r = 0$  helyen, továbbá a szögelfordulás szimmetriaokok miatt ugyanitt zérus értékű, a nyíróerőnek pedig egységnyi szakadása van. A feladat határozottá tételéhez a felsorolt öt illesztési feltételt az (1.6.3) geometriai feltételekkel azaz további négy előírással egészítjük ki. Az összesen kilenc feltétel közül – amint az a későbbiekből ki fog derülni – valójában csak nyolc a független.

Alábbiakban vázlatosan ismertetjük az integrációs konstansok számítását.

A  $w$  elmozdulásmező  $r = 0$  helyen folytonos. Az (1.6.2) összefüggésekre tekintettel írható tehát, hogy

$$\hat{A}_0 = A_0.$$

A szögelfordulásmező  $Q$  pontbeli eltűnését kifejező (1.3.5b) egyenletből az

$$\hat{A}_1 = A_1 = 0$$

eredmény, a hajlítónyomatékok folytonosságát adó (1.3.5c) képletből pedig a

$$\hat{A}_2 = A_2$$

összefüggés következik. A merevtestszerű eltolódással kapcsolatos (1.6.3)<sub>1</sub> feltételek kombinálásával, figyelembe véve az  $A_i$  és  $\hat{A}_i$   $i = 0, 1, 2$  állandókkal kapcsolatos előző képleteket, további összefüggést kapunk a integrációs állandók között:

$$\hat{A}_3 + A_3 = 0.$$

Tekintettel az (1.2.14)-re is a nyíróerő szakadását kifejező (1.3.5d) feltételből a

$$A_3 = 1/12IE$$

eredmény adódik. Az  $r = 2L$  helyen véve a szögelfordulásokkal kapcsolatos (1.6.3)<sub>2</sub> feltételt

$$A_2 = -3A_3L = -3L/12IE.$$

A még mindig ismeretlen  $A_0$  állandó a merevtestszerű eltolódással kapcsolatos (1.6.3)<sub>1</sub> feltételből kapható meg, ha azt az  $r = L$  helyen vesszük figyelembe:

$$A_0 = 2L^3/12IE.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti állandókkal az  $r = -L$  helyen is teljesül az (1.6.3)<sub>1</sub> feltétel.

Az állandók (1.6.2)-be történő visszahelyettesítésével továbbá az (1.3.3a,b) alatti jelölések felhasználásával azonnal adódik az elmozdulásmezőre vonatkozó (1.6.1a) alatti alapmegoldás. Az (1.6.1b), és (1.6.1c) képletek ellenőrzése pedig az (1.2.17a), (1.2.17b), (1.2.18) és (1.3.3) képletek felhasználásával végezhető el.

##### 1.2 Gyakorlat

A feladat jellegéből következik, hogy  $f_3 = 0$  és  $\mu_2 = \delta(x_1 - \xi_1)$ . Ennek alapján adódik formális helyettesítéssel az (1.2.11)-ből, hogy az alapmegoldás a

$$IEw^{(4)} = \frac{d}{dx_1}\delta(x_1 - \xi_1)$$

differenciálegyenlet megoldása.

Az 1.1 Gyakorlathoz hasonlóan – v.ö. (1.6.2) – most is az

$$\stackrel{(m)}{U} = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 \quad r < 0 \quad (\text{D.1.1a})$$

$$\stackrel{(m)}{U} = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 r + \hat{A}_2 r^2 + \hat{A}_3 r^3 \quad r > 0 \quad (\text{D.1.1b})$$

alakban keressük az alapmegoldást. A két megoldás köteles eleget tenni az (1.3.16a, ..., d) illesztési feltételeknek. A feladat határozottá tételéhez az öt illesztési feltétel mellett az (1.6.5) kiegészítő feltételeket is előírjuk. A feltételi egyenletek száma, eltérően a koncentrált erővel kapcsolatos alapmegoldás esetétől, most megegyezik az integrációs konstansok számával.

Alábbiak a megoldásokban szereplő konstansok számítását tekintik át.

Mivel a  $w$  elmozdulásmező folytonos és zérus az  $r = 0$  helyen kapjuk, hogy

$$A_0 = \hat{A}_0 = 0.$$

A szögelfordulásmezőre és a nyíróerőre vonatkozó (1.3.16b) és (1.3.16d) folytonossági feltételből

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{A}_1 \\ A_3 &= \hat{A}_3 \end{aligned}$$

adódik. A kapott eredmény visszahelyettesítése, majd az (1.6.5a,b) kiegészítő feltételek kihasználása az

$$A_2 = -\hat{A}_2$$

eredményre vezet. A hajlítónyomaték szakadását kifejező (1.3.16c) feltételből

$$A_2 = \frac{1}{IE}.$$

Az (1.3.16a) és (1.3.16c) egyenleteket kombinálva adódik, hogy

$$A_3 = -\frac{1}{12IEL}.$$

A még hiányzó  $A_1$  állandó az (1.3.16b) egyenletből számítható:

$$A_1 = -\frac{L}{6IE}.$$

Az integrációs állandók birtokában azonnal adódik az elmozdulásmezőre vonatkozó (1.6.4a) alatti alapmegoldás. Az (1.6.4b,c) alatti képletek származtatása pedig ismét az (1.2.17a), (1.2.17b), (1.2.18) és (1.3.3) egyenletek felhasználását igényli.

### 1.3 Gyakorlat

Az (1.5.8) és (1.5.9) képletek tanúsága szerint a feladat megoldásához szükség van a  $\hat{w}'_F(x_1, \xi_1)$ ,  $\hat{\varphi}'_F(x_1, \xi_1)$ ,  $\hat{m}'_F(x_1, \xi_1)$  és  $\hat{t}'_F(x_1, \xi_1)$  deriváltakra.

Az (1.3.3a) és (1.3.3e) egybevetése alapján

$$(\dots)' = \frac{d}{d\xi_1} = -\text{Sgn } r \frac{d}{dR}. \quad (\text{D.1.2})$$

Az utóbbi egyenlet és az alapmegoldást adó (1.3.14) képletek felhasználásával

$$\hat{w}'_F(x_1, \xi_1) = \hat{\varphi}_F(x_1, \xi_1) \quad (\text{D.1.3a})$$

$$\hat{\varphi}'_F(x_1, \xi_1) = -\frac{4\beta^4}{k} \hat{m}_F(x_1, \xi_1) \quad (\text{D.1.3b})$$

$$\hat{m}'_F(x_1, \xi_1) = \hat{t}_F(x_1, \xi_1) \quad (\text{D.1.3c})$$

$$\hat{t}'_F(x_1, \xi_1) = k\hat{w}_F(x_1, \xi_1). \quad (\text{D.1.3d})$$

A (D.1.3a. . . ,d) képletek segítségével az (1.5.9) alatti mátrixegyenletből

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w(L) \\ \varphi(L) \\ w(0) \\ \varphi(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{w}_F(L, L) & \hat{\varphi}_F(L, L) & -\hat{w}_F(0, L) & -\hat{\varphi}_F(0, L) \\ -\hat{\varphi}_F(L, L) & \frac{4\beta^4}{k} \hat{m}_F(L, L) & \hat{\varphi}_F(0, L) & -\frac{4\beta^4}{k} \hat{m}_F(0, L) \\ \hat{w}_F(L, 0) & \hat{\varphi}_F(L, 0) & -\hat{w}_F(0, 0) & -\hat{\varphi}_F(0, 0) \\ \hat{\varphi}_F(L, 0) & \frac{4\beta^4}{k} \hat{m}_F(L, 0) & \hat{\varphi}_F(0, 0) & -\frac{4\beta^4}{k} \hat{m}_F(0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T(L) \\ {}^h M(L) \\ -T(0) \\ {}^h M(0) \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} -\hat{t}_F(L, L-0) & \hat{m}_F(L, L) & \hat{t}_F(0, L) & -\hat{m}_F(0, L) \\ k\hat{w}_F(L, L) & -\hat{t}_F(L, L-0) & -k\hat{w}_F(0, L) & \hat{t}_F(0, L) \\ -\hat{t}_F(L, 0) & \hat{m}_F(L, 0) & \hat{t}_F(0, 0+0) & -\hat{m}_F(0, 0) \\ k\hat{w}_F(L, 0) & -\hat{t}_F(L, 0) & -k\hat{w}_F(0, 0) & \hat{t}_F(0, 0+0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(L) \\ \varphi(L) \\ w(0) \\ \varphi(0) \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^L \begin{bmatrix} \hat{w}_F(x_1, L) & \hat{\varphi}_F(x_1, L) \\ -\hat{\varphi}_F(x_1, L) & \frac{4\beta^4}{k} \hat{m}_F(x_1, L) \\ \hat{w}_F(x_1, 0) & \hat{\varphi}_F(x_1, 0) \\ -\hat{\varphi}_F(x_1, 0) & \frac{4\beta^4}{k} \hat{m}_F(x_1, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(x_1) \\ m(x_1) \end{bmatrix} dx_1 \quad . \end{aligned}$$

egyenlet következik. Az (1.3.14) összefüggések valamint a terhelést adó

$$b(x_1) = \delta(x_1 - 0.5L) \quad \text{és} \quad m(x_1) = 0$$

képletek helyettesítésével továbbá  $\frac{2k}{\beta}e^{-\beta L}$ -el történő átszorozással azonnal adódik innen az ismeretlen peremértékek meghatározására alkalmas lineáris egyenletrendszer végső alakja:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e^{\beta L} & 0 & -\cos \beta L - \sin \beta L & 2\beta \sin \beta L \\ 0 & 2\beta^2 e^{\beta L} & -2\beta \sin \beta L & 2\beta^2 (\sin \beta L - \cos \beta L) \\ \cos \beta L + \sin \beta L & 2\beta \sin \beta L & -e^{\beta L} & 0 \\ 2\beta \sin \beta L & 2\beta^2 (\cos \beta L - \sin \beta L) & 0 & -2\beta^2 e^{\beta L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T(L) \\ {}^h M(L) \\ -T(0) \\ {}^h M(0) \end{bmatrix} &= \\ &= -e^{\beta L/2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta L}{2} + \sin \frac{\beta L}{2} \\ 2\beta \sin \frac{\beta L}{2} \\ \cos \frac{\beta L}{2} + \sin \frac{\beta L}{2} \\ -2\beta \sin \frac{\beta L}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet felírása során kihasználtuk, hogy a rúd megtámasztásából adódóan  $w(L) = \varphi(L) = w(0) = \varphi(0) = 0$ .

## 2. FEJEZET

### 2.1 Gyakorlat

Térbeli esetben

$$\mathcal{W} = \int_S {}_i T(M_o, Q) \psi(M_o) dA_{M_o}$$

a kettősréteg potenciálja. A (2.6.2)<sub>2</sub> képlet gradiensét véve és kihasználva az  $r_s \overset{Q}{\nabla}_l = -\delta_{sl}$  valamint a (2.3.3)<sub>2</sub> összefüggéseket írható, hogy

$${}_i T(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_l \overset{Q}{\nabla}_s = \frac{3}{4\pi R^5} \left( {}_i n_l r_s + {}_i n_s r_l + {}_i n_k r_k \delta_{ls} - 5 \frac{{}_i n_k r_k r_l r_s}{R^2} \right) \quad (\text{D.2.1a})$$

ahonnan az  $l$  és  $s$  indexek egybejtésével azonnal következik a

$$\Delta_Q {}_i T(M_o, Q) = 0 \quad Q \neq M_o$$

egyenlet teljesülése. Mivel a kettős réteg potenciálja tetszés szerinti rendben differenciálható a  $Q$  pont koordinátái szerint ha  $Q \notin S$  – az integrálás a  $M_o$  pont koordinátáiban történik – ez egyben azt is jelenti, hogy a kettős réteg potenciálja harmonikus függvény térbeli esetben. Érdemes visszaidézni, hogy erre a körülményre már a **2.4.6.** szakasz 2. MEGJEGYZÉSE is utal.

Síkbeli esetben hasonló a gondolatmenet. Mivel a kettősréteg

$$\mathcal{W} = \oint_C {}_i T(M_o, Q) \psi(M_o) ds_{M_o}$$

potenciálja most is tetszés szerinti rendben differenciálható a  $Q$  szerint ha  $Q \notin C$  elegendő azt megmutatni, hogy  ${}_i T(M_o, Q)$  harmonikus a  $Q$ -ban, ha  $M_o \neq Q$ . A (2.11.2)<sub>2</sub> és a (2.8.11)<sub>2</sub> felhasználásával – megismételve ezzel a (G.2.1)<sub>1</sub>-re vezető gondolatmenetet – írható, hogy

$${}_i T(M_o, Q) \overset{Q}{\nabla}_\lambda \overset{Q}{\nabla}_\sigma = \frac{2}{2\pi R^4} \left( {}_i n_\lambda r_\sigma + {}_i n_\sigma r_\lambda + {}_i n_\kappa r_\kappa \delta_{\lambda\sigma} - 4 \frac{{}_i n_\kappa r_\kappa r_\lambda r_\sigma}{R^2} \right) \quad (D.2.1b)$$

A  $\lambda$  és  $\sigma$  indexek kontrakciójával azonnal adódik innen, hogy az  ${}_i T(M_o, Q)$  harmonikus.

Legyen  $d$  a tér dimenziója – térbeli feladatokra  $d = 3$ , síkbeli feladatokra  $d = 2$ . Legyen továbbá

$$S_d = \begin{cases} 2\pi & \text{ha } d = 2 \\ 4\pi & \text{ha } d = 3 \end{cases} \quad (D.2.2)$$

Figyeljük meg, hogy  $S_d$  mindkét esetben, általános értelemben használva a gömb szót, az egység-sugarú gömb felszíne. Szimbólikus írásmódra térve át és felhasználva az előzőekben bevezetett jelöléseket egységes formátumban adhatók meg az

$$(2.4.10a) \quad (2.9.9a)$$

$$(2.6.2)_2 \quad (2.11.2)_2$$

valamint a

$$(D.2.1a) \quad (D.2.1b)$$

képletek:

$${}_i T(M_o, Q) = -\frac{{}_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{S_d R^d} \quad (D.2.3)$$

$${}_i T(M_o, Q) \nabla_Q = \frac{1}{S_d} \left( \frac{{}_i \mathbf{n}}{R} - d \frac{{}_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r}}{R^{d+2}} \right) \quad (D.2.4)$$

$${}_i T(M_o, Q) \nabla_Q \nabla_Q = \frac{1}{S_d} \frac{d}{R^{d+2}} \left( {}_i \mathbf{n} \mathbf{r} + \mathbf{r} {}_i \mathbf{n} + {}_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \mathbf{I} - \frac{{}_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r} \mathbf{r}}{R^2} \right) \quad (D.2.5)$$

ahol  $\mathbf{I}$  az egységtenzor a két vagy háromdimenziós térben.

## 2.2 Gyakorlat

A vonatkozó integrálok a  $Q$  pont függvényei. A (2.3.9)<sub>2</sub> és (2.8.17)<sub>2</sub> valamint a *Dirac* függvénnyel kapcsolatos (B.1.5) és (B.1.6) képletek felhasználásával írható, hogy

$$\begin{aligned} \Delta_Q \int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M &= - \int_{V_i} \delta(M - Q) b(M) dV_M = -b(Q) \\ \Delta_Q \int_{S_i} U(M, Q) b(M) dV_M &= - \int_{S_i} \delta(M - Q) b(M) dV_M = -b(Q). \end{aligned}$$

Az utóbbi képletekből már következik a Gyakorlat állítása.

Jelölje  $\Omega_i$  és  $\Omega_e$  a vizsgált belső és külső tartományt. Legyen  $\partial\Omega = \partial\Omega_i = \partial\Omega_e$  a tartomány pereme.

Térbeli feladatokra az

$$\Omega_i \iff V_i \quad \Omega_e \iff V_e \quad \partial\Omega \iff S \quad (D.2.6)$$

síkbeli feladatokra pedig az

$$\Omega_i \iff S_i \quad \Omega_e \iff S_e \quad \partial\Omega \iff C \quad (D.2.7)$$

megfeleltetések érvényesek.

A fenti megfeleltetések segítségével

$$\int_{\Omega_i} U(M, Q) b(M) d\partial\Omega_M$$

a partikuláris megoldás. Ez a képlet mind a térbeli mind a síkbeli feladatokra is érvényes.

### 2.3 Gyakorlat

A hibaintegrál baloldalán álló és a  $b(M)$ -et tartalmazó második integrál változatlan marad. Az első integrál átalakítása a

$$\begin{aligned} (\Delta_M u(M))^* u(M) &= \left[ \frac{M}{\nabla_k} (\frac{M}{\nabla_k} u(M))^* u(M) \right] - (\frac{M}{\nabla_k} u(M)) (\frac{M}{\nabla_k} u^*(M)) = \\ &= \left[ \frac{M}{\nabla_k} (\frac{M}{\nabla_k} u(M))^* u(M) \right] - \left[ \frac{M}{\nabla_k} u(M) (\frac{M}{\nabla_k} u^*(M)) \right] \\ &\quad + u(M) (\Delta_M u^*(M)) \end{aligned} \quad (D.2.8)$$

felbontás helyettesítését és a *Gauss* tétel alkalmazását kívánja meg.

Az (a) esetre fordítva a figyelmet és kihasználva, a fentieket

$$\begin{aligned} \int_{V_i - V_\epsilon} (\Delta_M u(M) + b(M)) u^*(M) dV_M &= \int_{V_i - V_\epsilon} \left[ u^*(M) b(M) + u(M) (\Delta_M u^*(M)) \right] dV_M \\ &\quad - \int_S \left[ u(M_o) \frac{\partial u^*(M_o)}{\partial n_{M_o}} - u^*(M_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right] dA_{M_o} \\ &\quad - \int_{S_\epsilon} \left[ u(M_o) \frac{\partial u^*(M_o)}{\partial n_{M_o}} - u^*(M_o) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right] dA_{M_o} = 0 \end{aligned}$$

a hibaintegrál alakja. A továbbiakban kihasználjuk, hogy  $u^*(M) = U(M, Q)$  és rendezzük a fenti kifejezést:

$$\begin{aligned} \int_{V_i - V_\epsilon} [u(M) \Delta_M U(M, Q) + U(M, Q) b(M)] dV_M &= \\ &= \int_S \left[ u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right] dA_{M_o} + \\ &\quad + \int_{S_\epsilon} \left[ u(M_o) \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n_{M_o}} - U(M_o, Q) \frac{\partial u(M_o)}{\partial n_{M_o}} \right] dA_{M_o} \end{aligned} \quad (D.2.9)$$

A (D.2.9) csak a baloldal második integráljában tér el a (2.4.4)-től. Az is könnyen belátható a  $b(M)$   $M \in V_i$  feltételezett folytonossága miatt, hogy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_i - V_\epsilon} U(M, Q) b(M) dV_M = \int_{V_i} U(M, Q) b(M) dV_M.$$

Az utóbbi határérték kihasználásával véve a (D.2.9)  $\epsilon \rightarrow 0$  határértékét szószerint megismételhető a 2.4.4. szakasz gondolatmenete és az eredmény valóban a (2.4.14)<sub>1</sub> lesz.

A (b) esetben csak annyi az eltérés hogy az  $S$  helyére  $S'$ , a  $Q$  helyére pedig  $Q_o$  kerül a (D.2.9)-ben. Egyéb tekintetben a 2.4.5. szakasz gondolatmenetét kell megismételni. Eredményül pedig a (2.4.14)<sub>2</sub> egyenletet kapjuk.

A (c) esetben  $Q \in V_\epsilon$  az  $S_\epsilon$  üres és  $V_i$  áll a  $V_i - V_\epsilon$  helyén. Határátmenetre nincs szükség. A (2.4.14)<sub>3</sub> közvetlenül adódik a mondottak figyelembevételével tekintett (G.2.9)-ből.

Legyen  $\Omega_\epsilon$  a  $Q_o$  középpontú  $\epsilon$  sugarú gömb és jelölje  $\partial\Omega_\epsilon$  a gömb felszínét. A (G.2.9) hibaintegrál dimenziófüggetlen alakja adódik a

– a (2.2.6), (2.4.10)<sub>1</sub>

valamint

– a fentiekben bevezetett jelölések segítségével:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i - \Omega_\epsilon} [u(M) \Delta_M U(M, Q) + U(M, Q) b(M)] d\Omega_M &= \\ &= \int_{\partial\Omega} [u(M_o)_i T(M_o, Q) - U(M_o, Q)_i t(M_o)] d\partial\Omega_{M_o} + \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_\epsilon} [u(M_o)_i T(M_o, Q) - U(M_o, Q)_i t(M_o)] d\partial\Omega_{M_o} \end{aligned} \quad (D.2.10)$$

ahol  ${}_iT(M_o, Q)$  a (D.2.4)-ből,  $U(M_o, Q)$  pedig  $d$ -től függően a (2.3.1) vagy (2.8.10)-ből helyettesíthető.

#### 2.4 Gyakorlat

Vizsgáljuk meg a (2.5.5)<sub>1</sub> előállítás aszimptotikus viselkedését ha  $Q \rightarrow \infty$ . Az

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{R_Q}$$

aszimptotikus képlet felhasználásával – a képlet helyességét részletesen megvizsgálja a 2.5 Gyakorlat megoldása – (2.5.5)<sub>1</sub>-ből, tekintettel a (2.4.10b)-re is, a

$$\begin{aligned} u(Q) &\approx \frac{1}{R_Q} \int_S \frac{{}_et(M_o)}{4\pi} dA_{M_o} + \frac{1}{R_Q^2} \int_S \frac{{}_en_k(M_o)r_k(M_o, Q)t(M_o)}{4\pi} u(M_o) dA_{M_o} + \frac{1}{R_Q} \int_{V_e} \frac{b(M)}{4\pi} dV_M \\ &\approx \frac{1}{R_Q} \left\{ \int_S \frac{{}_et(M_o)}{4\pi} dA_{M_o} + \frac{1}{R_Q} \int_{V_e} \frac{b(M)}{4\pi} dV_M \right\} \end{aligned}$$

formula következik. A kapcsos zárójelben álló kifejezés megfelel a (2.5.1) képletben szereplő  $A$  állandónak. Figyeljük meg, hogy az  $A$  állandó, a hővezetési feladat terminológiáját alkalmazva, arányos a  $V_e$ -ben keletkező hő és az  $S$  felületen keresztül közölt hő összegével. Mivel a végtelen távoli pont felé is van hőáramlás ez az összeg nem feltétlenül kell hogy eltűnjön. A (2.5.1)<sub>2</sub> fennállása a (2.5.1)<sub>1</sub> közvetlen következménye és így nem igényel külön indokolást.

#### 2.5 Gyakorlat

Visszaidézve, hogy  $\mathbf{r}_{M_o}$  az  $M_o$  pont origóra vonatkozó helyvektora és hogy  $|\mathbf{r}_{M_o} - \mathbf{r}_Q| = |\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_{M_o}|$  könnyű ellenőrizni, felhasználva az

$$\boldsymbol{\rho}_Q = \frac{\mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r}_Q|} = \frac{\mathbf{r}_Q}{R_Q}; \quad \boldsymbol{\rho}_Q \cdot \boldsymbol{\rho}_Q = 1$$

jelölést, az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_{M_o}|} = \frac{1}{R_Q} \frac{1}{\left| \boldsymbol{\rho}_Q - \frac{\mathbf{r}_{M_o}}{R_Q} \right|} = \frac{1}{R_Q} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\boldsymbol{\rho}_Q \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q} + \frac{\mathbf{r}_{M_o} \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2}}} \quad (\text{D.2.11})$$

átalakítás helyességét. Az

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon}} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \quad |\epsilon| \ll 1$$

relációra is tekintettel  $Q \rightarrow \infty$ -ra az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_Q} \left( 1 + \frac{\mathbf{r}_Q \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_{M_o} \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2} \right) \quad (\text{D.2.12})$$

aszimptotikus formula következik (D.2.11)-ből. Az is nyilvánvaló a fentiek alapján, hogy az

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}_{M_o} - \mathbf{r}_Q}{R^3} &= -\frac{\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_{M_o}}{R^3} \approx -\frac{1}{R_Q^2} \left( \boldsymbol{\rho}_Q - \frac{\mathbf{r}_{M_o}}{R_Q} \right) \left( 1 + \frac{\mathbf{r}_Q \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_{M_o} \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2} \right)^3 \approx \\ &\approx -\frac{\boldsymbol{\rho}_Q}{R_Q^2} = -\frac{\mathbf{r}_Q}{R_Q^3} = -\frac{x_k(Q) \mathbf{i}_k}{R_Q^3} \end{aligned} \quad (\text{D.2.13})$$

aszimptotikus képlet ugyancsak helyes. A (D.2.11) és (D.2.13) valamint a (2.3.1) és (2.4.10a) egybevetéséből az

$$U(M_o, Q) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_Q} \left( 1 + \frac{\mathbf{r}_Q \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_{M_o} \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2} \right)$$

és

$${}_iT(M_o, Q) \approx \frac{{}_in_k(M_o)x_k(Q)}{4\pi R_Q^3}$$

eredmény következik. Az utóbbi két képlet és a (2.7.3) értelmező egyenletek összehasonlításából azonnal adódnak az egyszerű és kettős réteg végtelenbeli viselkedésével kapcsolatos (2.7.4) összefüggések.

## 2.6 Gyakorlat

Az

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \approx \ln \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \approx \frac{\epsilon}{2} \quad |\epsilon| \ll 1$$

és a (D.2.12) képletekre tekintettel írható, hogy

$$\ln \frac{1}{R} \approx \ln \frac{1}{R_Q} + \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\rho_Q \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q} + \frac{\mathbf{r}_{M_o} \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2}}} \approx \ln \frac{1}{R_Q} + \frac{\rho_Q \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_{M_o} \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2}. \quad (\text{D.2.14})$$

A (D.2.13)-ra vezető gondolatmenet síkbeli viszonyokra vonatkozó ismétlésével az

$$\frac{\mathbf{r}_{M_o} - \mathbf{r}_Q}{R^3} \approx -\frac{\rho_Q}{R_Q} = -\frac{\mathbf{r}_Q}{R_Q^2} = -\frac{x_\kappa(Q) \mathbf{i}_\kappa}{R_Q^2} \quad (\text{D.2.15})$$

aszimptotikus formula adódik. A (D.2.14) és (D.2.15) továbbá a (2.8.10) valamint a (2.9.9a) egybevetéséből

$$U(M_o, Q) \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_Q} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\mathbf{r}_Q \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_{M_o} \cdot \mathbf{r}_{M_o}}{R_Q^2} \right)$$

és

$${}_i T(M_o, Q) \approx \frac{{}_i n_\kappa(M_o) x_\kappa(Q)}{2\pi R_Q^2}.$$

következik. A fenti két képlet helyettesítésével azonnal adódnak a (2.12.3) értelmező egyenletekből a végtelenbeli viselkedést leíró (2.12.4a,b) aszimptotikus formulák.

## 2.7 Gyakorlat

A 2.2 Gyakorlat jelöléseinek segítségével egységes alakban adható meg az egyszerű réteg potenciálja min a két-, mind pedig a háromdimenziós esetre:

$$\mathcal{V}(Q) = \int_{\partial\omega} U(M_o, Q) \phi d\omega(M_o). \quad (\text{D.2.16})$$

A  $\mathcal{V}(Q)$  folytonosságát is az egységes alakra igazoljuk.

A geometriai jelölések tekintetében a G.1 ábra nyújt segítséget. Jelölje  $\omega_\epsilon$  a  $Q_o \in \partial\omega$  pont  $\epsilon$  sugarú környezetének  $\omega$ -án belül fekvő részét – ez az árnyékolt terület az ábrán. Legyen  $\partial\omega_\epsilon$  az  $\omega_\epsilon$  pereme. A  $\partial\omega_\epsilon$   $\partial\omega$ -val egybeeső részét  $\partial\omega''_\epsilon$ , a fennmaradó részt pedig  $\partial\omega'_\epsilon$ -vel jelöljük. Legyen továbbá  $\partial\omega''$  a  $\partial\omega$  perem  $\epsilon$  sugarú környezetén belüli,  $\partial\omega'$  pedig azon kívüli része. Világos a 2.3 (b), 2.7 (b) és G.1 ábrák egybevetése alapján, hogy

$$\begin{array}{lll} \omega_\epsilon & V_\epsilon & \text{és } S_\epsilon\text{-nak} \\ \partial\omega'_\epsilon & S_\epsilon & \text{és } C_\epsilon\text{-nak} \end{array}$$

valamint

$$\partial\omega' \quad S' \quad \text{és } C'\text{-nak}$$

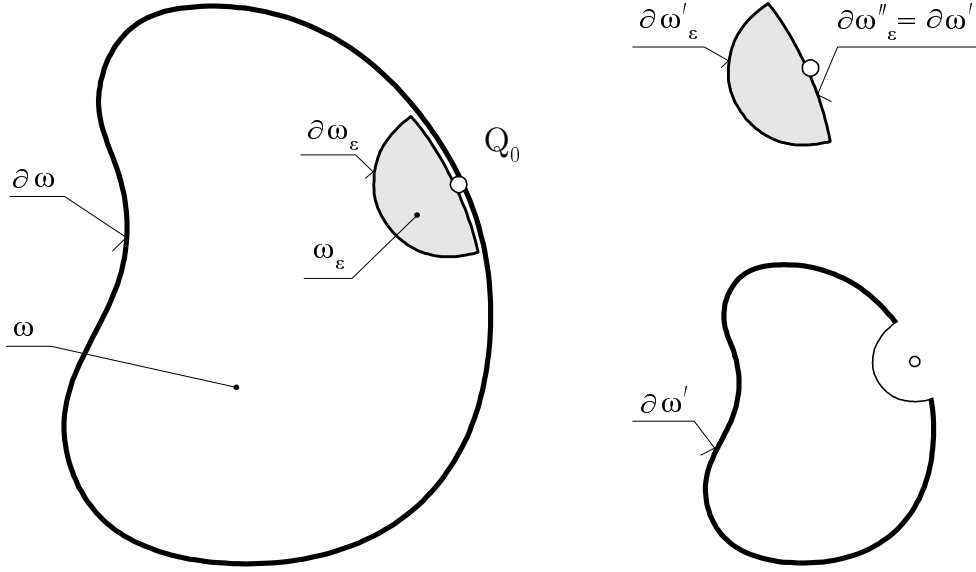
felel meg.

Az is nyilvánvaló a fentiek és a G.1 ábra alapján, hogy

$$\begin{aligned} \partial\omega &= \partial\omega' \cup \partial\omega''_\epsilon, \\ \partial\omega''_\epsilon &= \partial\omega'' \end{aligned} \quad (\text{D.2.17})$$

és

$$\partial\omega_\epsilon = \partial\omega'_\epsilon \cup \partial\omega''_\epsilon = \partial\omega'_\epsilon \cup \partial\omega''.$$



G.1 ábra

Az  $\omega$  tartomány és a  $Q_0$  pont környezete

Legyen

$$\delta(Q) = \begin{cases} 1 & \text{ha } Q \in \omega_\epsilon \\ \frac{1}{2} & \text{ha } Q = Q_0 \in \partial\omega_\epsilon \\ 0 & \text{ha } Q \notin \omega_\epsilon \cup \partial\omega_\epsilon \end{cases} \quad (\text{D.2.18})$$

Legyen továbbá  $v(M)$  kétszer folytonosan differenciálható függvény, ha  $M \in \omega_\epsilon \cup \partial\omega_\epsilon$ . Feltételezzük, hogy

$$v(M_0) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial v(M_0)}{\partial_i n_0} = \phi(M_0) \quad M_0 \in \partial\omega_\epsilon''. \quad (\text{D.2.19})$$

Egyéb tekintetben tetszőleges lehet a  $v(M)$  függvény.

A továbbiakban a srafozott  $\omega_\epsilon$  tartományra kívánjuk alkalmazni a (2.4.14) illetve (2.9.13) egyenleteket. Az átalakítások során

$$\begin{array}{lll} V_i & \text{és} & S_i\text{-nek} & \omega_\epsilon \\ S & \text{és} & C\text{-nek} & \partial\omega_\epsilon \\ u(M)\text{-nek} & & & v(M) \end{array}$$

felel meg. A (2.4.14) és (2.9.13) egyenletek levezetése során a

$$\Delta_M u(M) + b(M) = 0$$

Poisson egyenlet alapján – v.ö. pl. **2.4.3.** szakasz 8-ik lépése – az inhomogenitást okozó tagot helyettesítettük a  $\Delta_M u(M)$ -et tartalmazó tartományi integrálba. A jelen esetben a fenti lépés formális megfordítása azaz a

$$b(M) = -\Delta_M v(M)$$

helyettesítés a kívánatos. Ha a fentiek mellett kihasználjuk a  $\delta(Q)$  (D.2.18) alatti értelmezését is, akkor egyetlen egyenletet írhatunk a (2.4.14) illetve a (2.9.13) egyenlethármasok helyett:

$$\delta(Q)v(Q) = \int_{\partial\omega_\epsilon} \left[ \frac{\partial v(M_0)}{\partial n_{M_0}} U(M_0, Q) - v(M_0) {}_i T(M_0, Q) \right] d\omega_\epsilon(M_0) - \int_{\omega_\epsilon} U(M, Q) \Delta_M v(M) d\omega_\epsilon. \quad (\text{D.2.20})$$

A további átalakítások során vegyük figyelembe, hogy a (D.2.17)<sub>3</sub> szerint  $\partial\omega_\epsilon = \partial\omega_\epsilon'' \cup \partial\omega_\epsilon'$  majd helyettesítsük a (D.2.19)-et és a

$$\mathcal{V}(Q) = \int_{\partial\omega'} U(M_o, Q) \phi(M_o) d\partial\omega'(M_o) + \int_{\partial\omega''} U(M_o, Q) \phi(M_o) d\partial\omega''(M_o)$$

felbontást. Egyszerű átrendezés után a

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Q) = & \int_{\partial\omega'} U(M_o, Q) \phi(M_o) d\partial\omega(M_o) - \int_{\partial\omega_\epsilon'} \left[ \frac{\partial v(M_o)}{\partial n_{M_o}} U(M_o, Q) - v(M_o) {}_i T(M_o, Q) \right] d\partial\omega_\epsilon'(M_o) \\ & - \int_{\omega_\epsilon} U(M, Q) \Delta_M v(M) v(M) d\omega_\epsilon + \delta(Q) v(Q) \end{aligned} \quad (\text{D.2.21})$$

összefüggés adódik az egyszerű réteg potenciáljának számítására. A fenti képletben valamennyi integrál folytonosan deriválható a  $Q$  változó szerint ha a  $Q \notin \partial\omega' \cup \partial\omega_\epsilon'$ . Vegyük azt is észre, hogy a jobboldal utolsó tagja is folytonos, tekintettel a (D.2.19)<sub>1</sub>-re, ha áthalad a  $Q$  pont a  $\partial\omega$ -án a  $Q_o$  ponton keresztül. Következésképp a  $\mathcal{V}(Q)$  potenciál is folytonos a  $Q$  ponton történő áthaladás során. Ezzel bizonyítottuk a Gyakorlat állítását.

1. MEGJEGYZÉS: Jelölje  $I(Q)$  a (D.2.21) jobboldalán álló integrálokat. Világos, tekintettel a (D.2.18) és (D.2.19)<sub>2</sub>-re, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}(Q)}{\partial {}_i n_{Q_o}} &= \frac{\partial I(Q)}{\partial {}_i n_{Q_o}} + \phi(Q_o) \\ \frac{\partial \mathcal{V}(Q)}{\partial {}_\epsilon n_{Q_o}} &= \frac{\partial I(Q)}{\partial {}_\epsilon n_{Q_o}}. \end{aligned}$$

A két egyenlet összegét véve és kihasználva az  $I(Q)$  fentebb említett folytonos differenciálhatóságát az

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_i n_{Q_o}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {}_\epsilon n_{Q_o}} = \phi(Q_o) \quad Q_o \in \partial\omega$$

eredményt kapjuk. Ez az összefüggés már ismert – v.ö.: (2.7.12) és (2.12.11).

### 2.9 Gyakorlat

Ha a  $Q_o$  pont élen van illetve sarokpont (térbeli eset) vagy töréspont (síkbeli eset) akkor a

$$\delta(Q) = \begin{cases} 1 & \text{ha } Q \in \omega_\epsilon \\ c(Q_o) & \text{ha } Q = Q_o \in \partial\omega_\epsilon'' \\ 0 & \text{ha } Q \notin \omega_\epsilon \cup \partial\omega_\epsilon \end{cases}$$

módon érdemes a  $\delta(Q)$ -t értelmezni, ahol – tekintettel a (2.4.17)-re és a (2.9.16)-ra – a

$$c(Q_o) = \begin{cases} \frac{\sigma}{4\pi} & \text{ha a fekadat térbeli} \\ \frac{\sigma}{2\pi} & \text{ha a feladat síkbeli} \end{cases}$$

összefüggés adja a  $c(Q_o)$ -t.

## 3. FEJEZET

### 3.2 Gyakorlat

A (3.3.32) egyenlet nyomatéki egyenlet a  $Q$  pontra. Az  ${}_i T_{kl}(M_o, Q) e_l(Q)$  szorzat helyettesítésével

$$\begin{aligned} \int_S e_{psk} r_s {}_i T_{kl}(M_o, Q) dA_{M_o} e_l(Q) &= \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_S \frac{1}{R^3} e_{psk} r_s \left[ (1-2\nu)(n_k r_l - n_l r_k - n_i r_i \delta_{kl}) - 3 \frac{n_i r_i r_k r_l}{R^2} \right] dA_{M_o} e_l(Q) \end{aligned}$$

Egyszerűsödik a fenti kifejezés, ha figyelembe vesszük, hogy  $e_{pqk}r_qr_k = 0$ . Elhagyva a konstans szorzókat az

$$I = \int_S \frac{1}{R^3} e_{psk} r_s (n_k r_l - n_i r_i \delta_{kl}) dA_{M_0}$$

kifejezés értékét kell vizsgálni. A *Gauss* tétel alkalmazásával és a szükséges deriválások végrehajtásával, felhasználva a számítások során a

$$\frac{M}{\nabla_n} = -3 \frac{r_n}{R^5} \quad \frac{M}{\nabla_n} r_k = \delta_{nk} \quad \text{valamint a} \quad \delta_{ii} = 3$$

képleteket, kapjuk innen a bizonyítani kívánt

$$I = \int_S \left\{ -\frac{3r_k}{R^5} e_{psk} r_s r_l + \frac{1}{R^3} e_{psk} \delta_{sk} r_l + \frac{1}{R^3} e_{psk} r_s \delta_{ql} + \right. \\ \left. + \frac{3r_i}{R^5} e_{psl} r_s r_i - \frac{1}{R^3} e_{psl} \delta_{si} r_i + \frac{1}{R^3} e_{psl} r_s \delta_{ii} dV_M \right\} = 0$$

eredményt, hiszen az integrandusz, amint arról némi számolással könnyű meggyőződni, valóban zérus értékű.

#### A. FÜGGELÉK

##### A.6 Gyakorlat

Az (A.5.7) helyettesítésével, majd pedig az (A.5.5) értelemszerű felhasználásával továbbá a permutációs szimbólum indexeinek alkalmas átrendezésével kapjuk, hogy

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (e_{pqr} u_p v_q \mathbf{i}_r) \times (w_s \mathbf{i}_s) = e_{pqr} u_p v_q e_{rst} w_s \mathbf{i}_t = \underbrace{e_{pqr} e_{rst}}_{\delta_{prt}} u_p v_q w_s \mathbf{i}_t.$$

A képlet megjelölt része az (A.3.7)-ből helyettesíthető:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = [(\delta_{ps} \delta_{qt} - \delta_{pt} \delta_{qs}) u_p v_q w_s] \mathbf{i}_t = [(u_s w_s) v_t - (v_s w_s) u_t] \mathbf{i}_t = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}.$$

Utóbbi egyenlet jobboldala a bizonyítani kívánt képlet.