

# **KÍSÉRLETI ÉS NUMERIKUS FESZÜLTSEGANALÍZIS**

**A TÖRÉSMECHANIKA ALAPELVEI**

**(Paul C. Paris VIDEO-sorozat kézikönyve)**

**TÓTH LÁSZLÓ**

Miskolci Egyetem, Bay Zoltán Intézet

**Készült: a TEMPUS S\_JEP\_11271 projekt támogatásával**

Miskolc  
- 1999 -

Kiadja a Miskolci Egyetem

A kiadásért felelős: *Dr. Tóth László*

Műszaki szerkesztő: *Dr. Tóth László*

Példányszám: 40

Készült Colitó fóliáról az MSZ 5601-59 és 5602-55 szabványok szerint

Miskolci Egyetem Sokszorosító Üzeme

A sokszorosításért felelős: *Kovács Tiborné*

TB. - '99- - ME

A levonat sokszorosításba leadva: 1999. augusztus 22.

## ELŐSZÓ

Minden történelmi korszak fejlődésének megvan a maga hajtóereje. Míg a XIX. században a tudomány előrehaladását egyértelműen a vasúti közlekedés robbanásszerű elterjedése hatotta át (évente átlagosan 10.000 km hosszágban építettek új vasútvonalakat), addig jelen korunkban a mikroelektronika adta lehetőségek szőtték át a mindennapjainkat, így a műszaki életünket is, szolgáltatva annak fejlődéséhez szükséges hajtóerőt. E két periódus fejlődésének sajátosságai természetesen megmutatkoztak a társadalmi struktúra formálódásában is. Az elmúlt században kialakult a nagyüzemi munkásság, megvalósult a tőke koncentrációja és létrejött a reál - dominánsan a műszaki - tudomány művelőinek népes tábora. Ez utóbbiak kivívták maguknak a széles társadalmi elismertséget, hisz tevékenységük közvetlenül hozzájárult a társadalom látható fejlődéséhez. Napjaink sajátossága az *információs társadalom* kialakulása, amelyben a mikroelektronikai elemek fejlődése átszövi a mindennapi életünk, tevékenységünk lehetőségeit. A műszaki életben ez többek között a számítástechnika robbanásszerű elterjedését, a diagnosztikai vizsgálatok eszközparkjának átalakulását, az anyagok viselkedésének, tulajdonságainak mélyebb megismerését szolgáló anyagvizsgálati módszerek, eszközök létrejöttét eredményezték. A fejlődés ütemét jól tükrözi az, hogy mindez az utóbbi 20 évben következett be (pl. a számítógépek mikroprocesszorainak műveleti sebessége 1978-1998 periódusban 3 nagyságrendet változott!).

A nagy értékű műszaki létesítményeket, szerkezeteket (hidakat, erőműveket, gáz-olajfeldolgozó rendszereket, vegyipari üzemeket, tranzit energiaszállító vezetékeket, repülőgépeket, hajókat, stb.) 15-50 éves üzemeltetésre tervezik az adott periódusban érvényben levő szabványok, műszaki irányelvek figyelembevételével. Ezekben pedig az azt megelőző néhány év ismeretszintje, technológiai színvonala testesedik meg. A mikroelektronika által diktált fejlődési ütem lehetővé teszi azt, hogy a nagy értékű szerkezetek, létesítmények üzemeltethetőségi feltételeit, maradék élettartamát egyre nagyobb megbízhatósággal becsüljük, azaz integritását egyre kisebb kockázattal ítéljük meg.

Az előzőkből adódóan kialakult egy új, diszciplína, a „*szerkezetek integritása*”, vagy „*szerkezetintegritás*” fogalma és létrejött intézményrendszere szerte a világon. A döntően mérnöki ismereteket integráló tudományterület feladata annak eldöntése, hogy egy adott szerkezet, létesítmény milyen feltételek mellett üzemeltethető a továbbiakban, ill. mennyi a maradék élettartama és ez milyen módon menedzselhető. Ahhoz, hogy a szerkezet állapotát a lehető legnagyobb biztonsággal felmérhessük - ebből adódóan a további üzemeltethetőség feltételeit a legkisebb kockázattal megbecsüljük - elengedhetetlen az, hogy

- *diagnosztikai vizsgálatokkal felmérjük a szerkezet állapotát,*
- *tisztázzuk a valóságos üzemi körülményekre jellemző mechanikai állapotot,*
- *megítéljük a beépített anyagok károsodásának folyamatát és mértékét az adott üzemeltetési feltételek mellett.*

Nyilvánvaló egyrészt az, hogy az előzőekben említett három fő terület (méréstechnika - mechanika - anyag) egyforma jelentőséggel bír a szerkezet integritásának megítélésében és bármelyik terület elhanyagolása, súlyának csökkentése hibás döntéshez, esetleg katasztrófához vezethet. Nyilvánvaló másrészt az, hogy minden műszaki döntésben, így az üzemeltethetőség feltételeinek megítélésében is, bizonyos kockázat rejlik, hisz a tudomány adott szintjét hasznosítjuk és a rendelkezésre álló eszközpark maga is az adott kor színvonalát képviseli. Ebből

adódóan mérlegelni kell az esetleges hibás döntés műszaki, jogi, közgazdasági és környezetvédelmi következményeit. Ezek együttes figyelembevételével viszont már kialakíthatók az ésszerű kockázatvállalás feltételei.

A szerkezetintegritás tehát egy igen komplex terület. Akik ezt művelik azoknak képesnek kell lenniük arra, hogy az üzemeltesíthetőséggel kapcsolatos problémákat teljes körűen átlássák, kiemeljék a meghatározó paramétereket, kérdéscsoportokat és alkalmasak legyenek arra, hogy az érintett tudományterületek szakembereivel érdemben szakmailag konzultálni tudjanak.

A szerkezetek integritásának, reális állapotának, maradék élettartamának megítélése mind az üzemeltetők, mind pedig a biztosítótársaságok alapvető érdeke. Az üzemeltető szempontjából a tudatos tervezés, fejlesztés megkerülhetetlen sarokpontja az üzemben levő készülékek műszaki állapota, biztonsága; a szükséges biztosítás tekintetében pedig az ésszerű kockázatvállalás, biztosítási összeg alapeleme a reális állapot ismerete. Ezek jelentőségét mérlegelve támogatta az Európai Unió a TEMPUS program keretében a „*Teaching and Education in Structural Integrity in Hungary*” címmel összeállított pályázatot, amelynek fő célkitűzése ezen új diszciplína meghonosításán kívül egyrészt a szerkezetintegritás oktatási anyagainak kidolgozása, másrészt a **Szerkezetintegritás - Biztosítási Mérnök Szakmérnöki Szak** beindítása. A négy hazai intézmény - Miskolci Egyetem, Budapesti Műszaki Egyetem, Kossuth Lajos Tudományegyetem Műszaki Kara és a Széchenyi István Műszaki Főiskola szakembereinek bevonásával elérendő célok megvalósítását nagyban segítették a következő külföldi partnereink:

- Prof. T. Varga, Bécsi Műszaki Egyetem
- Prof. H. P. Rossmann, Bécsi Műszaki Egyetem
- Dr. J. Blauel, Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik
- Prof. S. Reale, Università Degli Studi di Firenze
- Prof. G. Pluinage, University of Metz,
- Dr. S. Crutzen, Joint Research Centre, European Commission

Miskolc, 1999. augusztus 10.

**Tóth László**

egyetemi tanár  
a projekt koordinátora

## A Szerkesztő Előszava

A törésmechanika viszonylag új, de dinamikusán fejlődő nagy gyakorlati jelentőségű olyan tudományterület, amely az anyagokban levő folytonossági, repedésszerű hibák környezetében kialakuló viszonyokat elemzi a legkülönbözőbb terhelési feltételek esetén. Habár az első közleményt még a századforduló idején 1907-ben publikálta K. Weighard<sup>1</sup> az igazi, robbanásszerű fejlődés az 50-es évek végén, a 60-as évek elején indult meg. Ennek - mint minden másnak - a hajtóereje a gyakorlati élet maga. Az úrkutatás beindulásával és felgyorsulásával együtt járt a nagyszilárdságú acélok alkalmazásának elterjedése. Az ilyen szerkezetekben levő, alapvetően szerelési technológiák (hegesztés) okozta hibák és a terhelhetőség kapcsolatának megismerése döntő jelentőségűvé vált. Ez vezetett oda, hogy 1970-ben megjelent az első szabvány az egyik törésmechanikai anyagi jellemző, a törési szívósság meghatározására (ASTM E-399-70), amelyet időben alig előzött meg az a vizsgálat kivitelezésére alkalmas első számítógép-vezérlésű és adatgyűjtésű szervohidraulikus anyagvizsgáló rendszer piaci megjelenése (1967, MTS rendszer).

A törésmechanika fejlődésének súlypontja 70-es években fokozatosan áttolódott az ismétlődő terhelés hatására terjedő repedés környezetében kialakuló viszonyok megismerésére. A jelentős erőfeszítések ellenére is az első szabvány csak 1983-ban jelent meg az anyagok fáradásos repedésterjedéssel szembeni ellenállásának meghatározására (ASTM E 647-83). A két vizsgálati szabvány megjelenése között eltelt hosszú idő alapvetően abból adódott, hogy a szakemberek nem tudtak egységes álláspontot kialakítani abban a tekintetben, hogy ismétlődő terhelés esetén a repedéscsúcs környezetének viselkedése milyen invariáns mennyiséggel írható le. Noha **P.C. Paris** e célra már 1961-ben javasolta a feszültségintenzitási tényező tartományát ( $\Delta K$ ), a vita az elképzelés általános elfogadásig mégis elhúzódott. Ennek oka az, hogy a fáradásos repedés terjedése egy tipikusan rugalmas-képlékeny alakváltozási, azaz irreverzibilis folyamat eredménye, míg a  $\Delta K$  koncepció alapja a rugalmasságtan érvényességének, azaz reverzibilis folyamatnak a feltételezése.

Napjainkban a törésmechanika gyakorlati alkalmazása a mindennapi feladatok irányába tendál. Ezen igény egyik következménye a mikroelektronika robbanásszerű fejlődésének, hisz a szerkezetek gyártása, felülvizsgálata során alkalmazott roncsolásmentes vizsgálatokkal egyre kisebb és kisebb méretű hibát egyre nagyobb megbízhatósággal mutathatunk ki. A regisztrált hibáknak az üzemeltethetőség feltételeire gyakorolt hatását pedig mérlegelni, arról felelősségteljesen nyilatkozni kell

Az alkalmazástechnikai fejlődés ellenére az alapelvek változatlanok. Ezek megismerése nélkül nem lehet sem felelősségteljes sem pedig alkotó alkalmazásról beszélni. Az alapelvek megismeréséhez sok segítséget adhat **Prof. Paul C. Paris** VIDEO szalagon rögzített mintegy 10 órás előadássorozata. „**A Törésmechanika Alapelvei**” címmel összeállított nagyszerű sorozat számos érték hordozója. Egyrészt természetes szakmai értéke, hisz olyan professzor előadásait tartalmazza aki egyrészt hivatásszerűen hosszú időt töltött katedrán, másrészt pedig aktív művelője továbbfejlesztője tudományterületének. A szakmai érték mellett tudománytörténeti jelentőségű is e sorozat, hisz láthatjuk **J.W. Hutchinson**, **Rice J.R.** és **Irwin G.R.** Professzorok speciális előadásait is, azaz a szakma négy kiemelkedő egyéniségével köthetünk „személyes ismeretséget”. Ezekkel együtt az előadások időtartama 11 óra 9 perc hosszúságúra bővül. Számunkra, magyarok számára nem elhanyagolható azon érték sem, hogy a sorozat megtekintésével, megértésével nyelvtudásunk is bővíthet. A megértést kívánja segíteni ez a jegyzet, amelynek alapja a Paris

<sup>1</sup> Stress distribution at the vicinity of sharp notches.

professzor egykori diákjának, Gary GRAY-nek jegyzete. A *Course notes for: Concepts in Fracture Mechanics* címmel összeállított kézírásos anyag a VIDEO sorozat kiegészítő anyaga. A magyar nyelvű jegyzet összeállításánál igyekeztünk ezt követni, de a sorozat többszöri megnézése arra ösztökélt, hogy azt kiegészítsük segítve ezzel a jobb megértést. Erre szükség van azért is mert a törésmechanikával foglalkozó magyar nyelvű szakirodalom nagyon szegényes.

Köszönettel tartozom **Prof. Paul C. Paris** professzornak mind a magam, mind pedig a leendő nézők/olvasók nevében azért, mert a sorozatot ingyen bocsátotta a magyar érdeklődők számára.

Szeretném megköszönni fiamnak, Vincének és doktorandus hallgatóimnak, Mura Andreának és Lévay Istvánnak az anyag előkészítésében nyújtott segítségét.

Miskolc, 1997. július 20

**Tóth László**  
egyetemi tanár

## Prof. P. PARIS Előszava

E jegyzet a képzéshez használt videofilm alapján készült. Készítője Gary Gray, a Washingtoni Egyetem rendkívül tehetséges diákja, aki egyben a Harvard végzőse is. A vázlatírás elsődleges célja az volt, hogy megfelelő és érdembeni segítséget nyújtson a videofilm jövőbeni használóinak. A jegyzet tartalmaz minden olyan anyagot, amely a táblán előadás közben látható (diagrammokat, diákat, egyenleteket). A fő fogalmak, definíciók illetve az eredeti forrásokra történő utalások szintén megtalálhatóak a vázlatfüzetben.

A füzetet két formátumban nyomtatták ki, az egyikben a szöveg a szabványos méretű lap (Letter forma, 8,5 x 11 inch) egészét elfoglalja, a másikban csak a lap felét, annak érdekében, hogy Gary Gray magyarázatait mindenki kényelmesen kiegészíthesse saját gondolataival, megjegyzéseivel.

Végezetül, a jegyzeteket itt-ott az e területen dolgozók fotóival, diagrammokkal stb. színesítettük, remélve, hogy az olvasó hasznosnak találja azokat. Mindannyitoknak sok sikert kívánunk.

**Paul C. Paris**  
1985. június

**A TÖRÉSMECHANIKA ALAPELVEI**  
**(CONCEPTS IN FRACTURE MECHANICS)**  
Összefoglaló anyag videó szalagon

**Előadó:** Paul C. Paris  
Mechanika Professzora  
Washingtoni Egyetem  
St. Louis, Missouri

**Rendezte:** Anthony J. Paris

**Készült:** a Washingtoni Egyetem és a  
Fracture Proof Design Corporation közreműködésével.

*A művel kapcsolatos minden jogot fenntart a Paris Productions, Inc., Copyright 1985*

## 1. Az előadások témavázlatai

### I. rész - Lineáris rugalmas törésmechanika

#### Első előadás (58 perc)

Történeti áttekintés; Griffith - tétel; energia felszabadulás elemzése; a repedés csúcsa körül kialakuló feszültségmező;  $G - K$  kapcsolat; a feszültségintenzitási tényező számítására szolgáló összefüggések; a repedés csúcs környezetében végbemenő képlékeny alakváltozás; vastagság hatásai.

#### Második előadás (62 perc)

A mérethatás szerepének tárgyalása; szívós átmenet és hőmérsékleti hatás; törési szívósság ( $K_{IC}$ ) vizsgálata sík alakváltozási állapotban (SA); síkbeli feszültségállapot (SF)  $R$  - görbén; méretbeli követelmények; nagy sebességű repedésterjedés; szubkritikus repedés növekedés; (környezeti hatás, fáradás és ezek kombinációja).

#### Harmadik előadás (58 perc)

Szubkritikus repedés növekedési adatok; fáradásos repedésterjedési küszöb és ennek alkalmazása az F 111-es repülőgépeknél; a feszültséggyűjtő helyeken ébredő feszültségek számítására használt összefüggések; feszültségintenzitási tényező számítása feszültséggyűjtő helyeken ( $K - K_T$  összefüggések); a törést megelőző lukadás elemzése; képlékeny zóna instabilitása és a A.S.M.E. nyomástartó edény előírás elemzése.

#### Negyedik előadás (31 perc)

Az I. II. és III. módú repedések gyakorlati jelentősége; a repedésterjedés energetikai módszerei; súlyfüggvények; a lineáris rugalmas törésmechanika korlátai és jövőbeli tendenciái.

### II. rész - Rugalmas képlékeny törésmechanika

#### Ötödik előadás (52 perc)

$RICE J$  integrálja (definíció és alkalmazási terület); út függetlenség; energia felszabadulási móddal való interpretálás (nem lineáris rugalmas); merevségi interpretálás; a repedés közvetlen csúcsa körül kialakuló képlékeny zóna és a behajlás elemzése a  $RICE$  -féle sima hajlításnál.

#### Hatodik előadás (60 perc)

A  $J$  alkalmazása a párhuzamos repedésekre, képlékeny ék modellekhez, kapcsolata a C.O.S. - hez, kohéziós erő elméletéhez és ennek kapcsolata a  $GRIFFITH$  - elmélettel;  $J_{IC}$



repedés keletkezés sík alakváltozási állapotban;  $J_{IC}$  és  $R$  görbe vizsgálata, méretbeli követelmények;  $J$  - által szabályozott repedés növekedési kritériumok.

**Hetedik előadás** (52 perc)

A hőmérséklet hatása a  $J$  -  $R$  görbe viselkedésére és szívósságra teljes hőmérsékleti tartományban; a tépődési (tearing) instabilitási elmélet és formális potenciális energia interpretációja;  $J$  -  $T$  stabilitási diagramok; anyagi tulajdonságot kifejező görbék és  $J$  -  $T$  terhelési vonalak; RICE sima hajlítási elemzés repedés növekedés esetén.

**Nyolcadik előadás** (78 perc)

A  $J$  becslése tökéletesen képlékeny, nem keményedő anyagmodell figyelembevételével; HUTCHINSON féle felkeményedés elemzése és végeselemes számítások eredménye; tépődési instabilitás alkalmazása statikusan túlhatározott tartóknál; csövek és keretek; a  $J$  módszer és  $J$  -  $T$  diagramok alkalmazása növelt hőmérsékleten üzemelő nyomástartó edények esetén (az anyag szívós állapotának hőmérsékleti tartományában);  $J$  alkalmazása fáradáshoz és kúszási körülmények között végbemenő repedés növekedéshez.

**Kilencedik előadás** (42 perc)

A  $J$  integrálon alapuló elemzés modern alkalmazási lehetőségei az erő elmozdulás diagramokra; Turner-féle  $\eta$ -faktor értelmezése és alkalmazása a  $J$ -  $R$  görbe meghatározásához; repedéshossz korrekciója más tökéletes képlékeny alakváltozással végbemenő elemzéshez; rugalmas képlékeny tartomány elemzése tépési instabilitás figyelembevételével; képlékeny zóna instabilitásának hatása.

**Tizedik előadás** (34 perc)

A  $J$  integrál vizsgálata szuper érzékeny műszerekkel; ERNEST-féle  $J$  -integrál paramétereinek elemzése és ennek elméleti, kísérleti bizonyítása, alkalmaz-hatósága és haszna alapján.

**Prof. Hutchinson speciális előadása** (31 perc)

*A nyolcadik és a kilencedik előadáshoz kapcsolódóan:*

Az előadásban szó esik különféle eljárásokról melyek alkalmazhatóak a  $J$  becsléséhez parabolikusan keményedő anyagnál két terhelő erő esetén. A vizsgált példa: kismértékű épp keresztmetszet, tengely irányú terhelés valamint hajlító igénybevétel esetén, pl. kompakt próbatest konfigurációja.

**Prof. Irwin speciális előadása** (48 perc)

*A második előadás folytatásaként.*

Az előadás folyamán kifejtésre kerül egy elgondolás a kétdimenziós rugalmas testben a nagysebességű repedés leírására. Repedéscsúcs kialakulással kapcsolatos egyenletek és azok meghatározó paraméterei. A  $K$  és  $G$  között fennálló dinamikus egyensúly definiálása. A nagysebességű repedések fizikai hátterének elemzése.

**Prof. Rice speciális előadása** (63 perc)

*Az első rész a nyolcadik előadáshoz kapcsolódik, a második rész pedig a tizedik előadásban elmondottakhoz.*

A **J** integrál sebessége; és **C\*** és **J\*** kifejezés értelmezése és alkalmazása a nem lineáris viszkózus hatvány kitevős keményedésű anyagokban a kúszásos repedés terjedési sebességének leírására. A repedéscsúcs környezetében kialakuló mezők tárgyalása és ezek alkalmazása a rugalmas nem lineáris viszkózus anyagoknak a terhelésre adott reakciójában. Az előadás második fele a repedéscsúcs környezetének elemzésével foglalkozik, elemzi a statikus terhelés során kialakuló stabil repedésterjedés hatását. A repedéscsúcs alakváltozásának logaritmikus szingularitása, amely megfigyelhető tökéletesen képlékeny anyagoknál és ezek alkalmazása a repedésnövekedés fizikájában. Az elemzés mind javasolja, mind pedig alátámasztja azon meghatározó paramétereket, amelyeket pl. az Ernst által kidolgozott módosított **J- integrál** gyakorlati alkalmazását teszik lehetővé.

## TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	1
A Szerkesztő Előszava	3
Prof. P. Paris Előszava	4
1. Az előadások témavázlatai	6
2. Első előadás	10
2.1 Griffith modell	10
2.2. Griffith-Orowan modell	12
2.3. Irwin-Williams modell	13
2.4. A lemezvastagság hatása a törési jellemzőkre	15
3. Második előadás	18
3.1 A $K_{Ic}$ mint referencia érték használata	18
3.2. A $K_{Ic}$ ASTM szabvány szerinti vizsgálata	21
3.3. Stabil-istabil repedésterjedés, környezeti hatások	24
4. Harmadik előadás	27
4.1 Fáradásos repedésterjedés	27
4.2 Környezeti hatás	27
4.3. Repedésterjedés feszültséggyűjtő helyek környezetében	29
4.4. Nyomástartó edényekre vonatkozó alkalmazási példák	31
5. Negyedik előadás	36
5.1 A törések más módozatai	36
5.2 Energiamódszerek az elmozdulások jellemzésére	37
5.3 Súlyfüggvények módszere	38
5.4 A lineárisan rugalmas törésmechanika korlátai	38
6. Ötödik előadás	40
6.1 Rugalmas - képlékeny törésmechanika	40
7. Hatodik előadás	46
7.1 Periodikus repedések	46
7.2. Képlékeny ék modell	47
7.3. Más törési modellek	48
7.4. Vizsgálati módszerek, követelmények	49
7.5. A J által kontrollált repedésnövekedés	52
8. Hetedik előadás	54
8.1 Anyagi tulajdonságok, anyagok viselkedése	54
9. Nyolcadik előadás	54
9.1. A J becslése	60
9.2. Alkalmazási példák nyomástartó edényekre	66
10. Kilencedik előadás	77
11. Tizedik előadás	83
11.1. A $J_M$ értéke hajlításnál	86
12. Hutchinson-féle speciális előadás	90
13. Irwin-féle speciális előadás	94
14. Rice-féle speciális előadás	102
14.1. Repedések kúszó szilárd testekben	102
14.2. Rugalmas, nemlineárisan viszkózus anyag	103
15. Irodalomjegyzék	111

## 2. Első előadás

Dr. Paul Paris előadása. A törésmechanika rövid ismertetése.

### A TÖRÉS TÖRTÉNETE<sup>1</sup>

#### KEZDETEK

- *Arisztotelész* írt a molekulákon található horgokról - ezek letörése a TÖRÉS.
- *Leonardo da Vinci* és *Galileo* foglalkoztak a töréssel.

#### KOMOLY FEJLŐDÉS

- 1920: *Griffith* elmélete, többnyire rideg testekre.
- 1940-es és 1950-es években *Orowan*, *Williams*, *Irwin* szintén fejlesztette e szakterületet.

### 2.1. GRIFFITH modell

Tekintsünk egy végtelen kiterjedésű egységnyi vastagságú,  $\sigma$  feszültséggel terhelt húzott lemezt, amely  $2a$  hosszúságú repedést tartalmaz. A repedés terjedési feltételeit Griffith határozta meg 1920-ban.

Energia analízist készített

$$G = \frac{\Pi \sigma^2 a}{E} = 2\gamma = R$$

Ahol két  $\gamma$  nagyságú energia nyelődik el repedés felszín minden egységén.

$\gamma$  = az **anyag** felületi energiája.

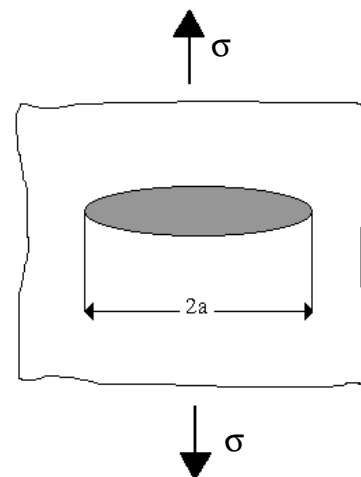
$$G = \frac{\Pi \sigma^2 a}{E} \text{ a repedés növekedése miatt}$$

felszabaduló rugalmas energia  
(repedés terület egységein)

$G$  - a repedést terjesztő energia,

$G = R$  egyensúlyi feltétel

$R$  - töréssel szembeni ellenállás.



1. ábra. Griffith modell

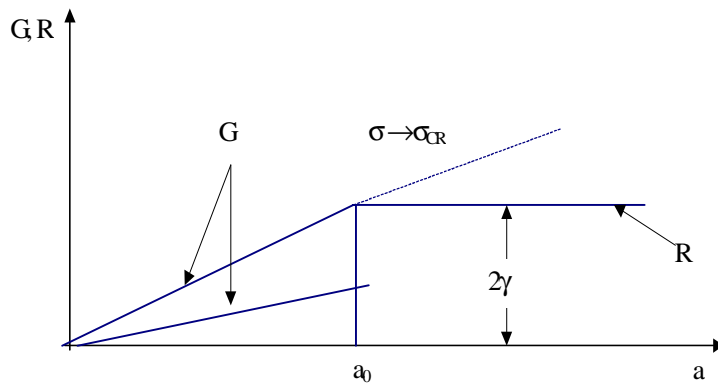
<sup>1</sup> Részletesebben lásd: pl. Tóth L., P. Rossmanith: A törésmechanika és az anyagvizsgálat története (TEMPUS kiadvány) vagy Tóth L.: A törésmechanikai rövid története, Gép. 1995/8. p.22-28.

GRIFFITH szerint  $G$  az összes potenciális energia első deriváltja

A stabilitás vizsgálatához vegyük a második deriváltat, azaz a  $G$ -nek  $\sigma$  szerinti deriváltját. Ezt szemlélteti a 2. ábra.

Ha  $G > R$ , akkor a repedés instabil.

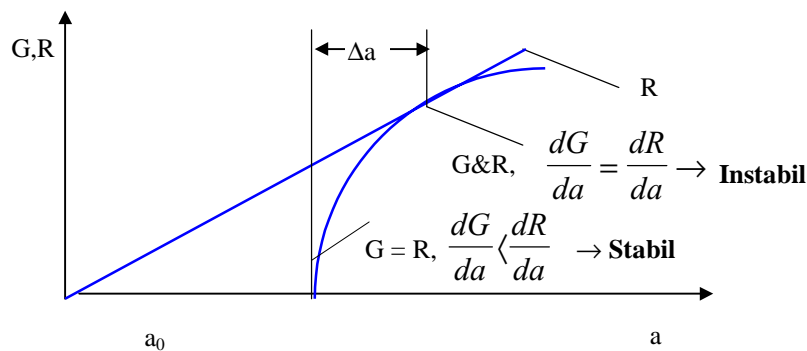
Ha a  $\sigma$  eléri a  $\sigma_{cr}$  értéket, a repedés instabil módon terjed.



**2. ábra.** Az R-görbe és a stabilitás feltétele rideg anyagoknál

GRIFFITH üvegen végzett kísérletekkel bizonyította elvének helyességét. Ideálisan rideg anyagok esetén, az  $R$  - görbe *háromszög alakú*, de fém ötvözeteknél ez nem így van (lásd pl. KRAFFT és SRAWLEY munkáit, 1961).

A viszonyokat ekkor a 3. ábra szemlélteti.



**3. ábra.** Az R-görbe és a stabilitás feltétele nem ideálisan rideg anyagoknál

Az instabilitás feltétele  $\rightarrow \frac{dG}{da} \equiv \frac{dR}{da}$

Azt állítjuk, hogy a fent megvizsgált  $R$  - görbén  $R > 2\gamma$ , és ez az, amit IRWIN és OROWAN az 1940-es években részletesen elemzett.

## 2.2. IRWIN - OROWAN modell

(Lásd IRWIN, 1948 és OROWAN 1948, 1952)

**Feltételezték**, hogy

- $R = 2\gamma + P$   
ahol  $P = a$  repedés terjedéshez szükséges képlékeny alakváltozás munkája
- és  $P = P(\Delta a)$ .

**Megjegyzés:** ez a fajta  $R$  - görbe fogalom használatos a lineáris rugalmas törés mechanikában.  
(Linear Elastic Fracture Mechanics- LEFM).

IRWIN kijelentette, hogy a  $G$  értéke az instabil repedésterjedés megindulásánál az anyag meghatározó tulajdonsága, a repedésterjedéssel szembeni ellenállás.

A  $G = G_{cr}$  összefüggés egy egyszerűsített stabilitási kritérium és legjobban akkor használható, ha az anyag  **$R$  - görbéjén** egy derékszögű törés .látható (lásd a2. ábrát).

Visszatérve a  $G$ -hez: (lásd IRWIN 1952 és IRWIN 1954 )

$$G = \frac{Pd\Delta}{dA} - \frac{dV}{dA} = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial a} = + \frac{\partial V(P,a)}{\partial A} \Big|_{P=\text{áll}} = - \frac{\partial V(\Delta,a)}{\partial A}$$

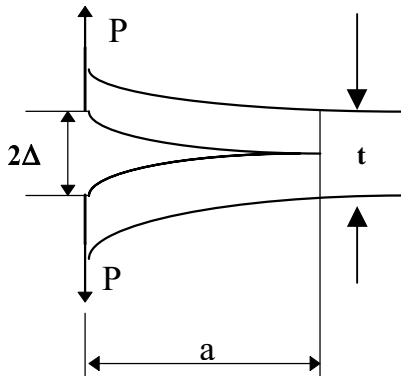
Irwin a  $G$ -t "REPEDÉSTERJESZTŐ ERŐNEK" nevezte,  
ahol

- $P = a$  repedés terjedéshez szükséges képlékeny alakváltozás munkája,
- $V =$  alakváltozási energia,
- $C =$  merevség  $= 1/K$  ( rugóállandó ).

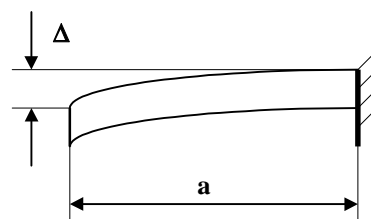
Ez volt a  $G$  számítási módja.

### **PÉLDA**

Tekintsük a 4. ábrán látható  $a$  hosszúságú bemetszést tartalmazó  $2t$  vastagságú hajlított tartót, amelynek szembelevő felületeit  $2\Delta$  távolságra távolítja el a  $P$  erő. Feltételezve, hogy a rugalmasságtan összefüggései érvényesek elegendő csupán az 5. ábrán látható egyszerűsített modellt vizsgálni.



**4. ábra.** Bevágást tartalmazó hajlított tartó



**5. ábra.** Egyszerűsített modell

A  $G$  a merevségből (compliance) is kiszámítható, amely a következőképpen írható:

$$C = \left( \frac{a^3}{3EI} \right)^2$$

A fentiekhez hasonlóan:  $G = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{Pa}{EI}$

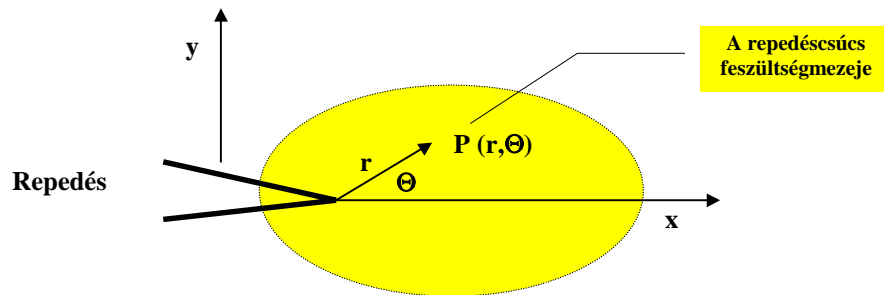
Ennek a módszernek is vannak természetesen hibái.

**IRWIN** és **WILLIAMS** az 1950-es évek végén bevezették a feszültséganalízis alkalmazását törésmechanika területén is.

### 2.3. IRWIN - WILLIAMS modell

( lásd IRWIN 1957 és WILLIAMS 1957 )

Tekintsük a repedéscsúcs környezetében kialakuló viszonyokat a 6. ábrának megfelelően. Feltételezve, hogy a **rugalmasságtan** összefüggései érvényesek egészen a repedés csúcsának közvetlen környezetében is egy adott tetszőleges  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \Theta)$  pontban a ébredő feszültségek a következő összefüggésekkel számíthatók:



**6. ábra** A repedéscsúcs közvetlen környezetének feszültségmezeje lineárisan rugalmas anyagmodell esetén

- $\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\Theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{3\Theta}{2} \right]$
- $\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\Theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{3\Theta}{2} \right]$
- $\tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{3\Theta}{2}$
- $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
- $\sigma_z = 0 \leftarrow$  síkfeszültség esetén (pl. vékony lemez)
- $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \leftarrow$  síkalakváltozás esetén (pl. vastag lemez)

IRWIN és WILLIAMS bebizonyították, hogy a repedés terhelésétől függetlenül ugyanazt a feszültségmezőket kaphatjuk repedéscsúcs közvetlen környezetében.

Minden repedés ugyanazzal a feszültségi mezővel rendelkezik és csak a  $K$  intenzitási tényezőben különböznek egymástól.

$K = \text{feszültségintenzitási tényező a repedés csúcsában.}$

**Mértékegységét tekintve.**  $F/L^{3/2}$ , ahol  $F$  az erő és  $L$  hosszmenyiség

**Megjegyzés:** a  $K$  és a  $P$  egymással összefüggő mennyiségek, azaz  $K \propto P$

Ha a  $K$  eléri az anyagra adott vizsgálati feltételek között jellemző kritikus értéket a repedés instabillá válik, azaz ha  $K \rightarrow K_{cr}$  egy elmélet alkotható a repedés terjedés feltételeinek leírására.

IRWIN rájött, hogy a  $G$  és  $K$  között egy láncszemnek kell lennie. Ezen láncszem a  $G = \frac{K^2}{E'}$  összefüggés

ahol  $E' = E$  síkfeszültség esetén

$$E' = \frac{E}{1 - \mu^2} \quad \text{síkalakváltozás esetén}$$

Ami a törési feltételeket illeti a  $G \rightarrow G_{cr}$  ekvivalens a  $K \rightarrow K_{cr}$  kritériumokkal.

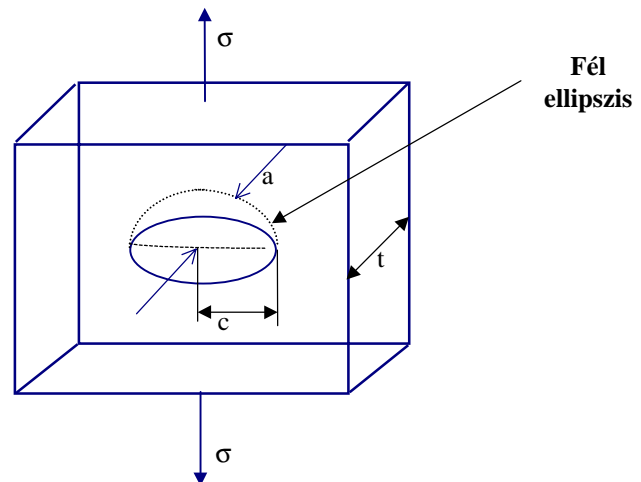
Kézikönyvekben több száz összefüggés áll rendelkezésre<sup>2</sup> a  $G$  (vagy  $K$ ) számítására, amelyek közös jellemzője az, hogy előállításuk kapcsán a rugalmasságtan egyenleteinek érvényességét tételezték fel.

## PÉLDA

(lásd PARIS 1965)

Tekintsük a 7. ábrán látható félelliptikus felületi repedést tartalmazó véges vastagságú lemezt, amelyet  $\sigma$  húzófeszültség terhel.

Kérdés, hogyan határozható meg a feszültségintenzitási tényező ebben az esetben?



**7. ábra** Felületi repedést tartalmazó véges vastagságú húzott lemez

<sup>2</sup> Tada H, Paris P.C. and Irwin G.R. (1973) *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del Research Corp., Hellertown, Pa., U.S.A.

Sih, G.C. (1973) *Handbook of Stress-Intensity Factors for Researchers and Engineers*. Leigh University, Bethlehem Pa.

Rooke, D.P., Cartwright D.J. (1976) *Compendium of Stress Intensity Factors*. Her Majesty's Stationery Office, London.

*Stress Intensity Factors Handbook* (1987) Edited by Y. Murakami, Pergamon Press

Savruk M.P. (1988) *Stress Intensity Factors of Bodies Having Cracks* (in Russian). In *Fracture Mechanics and Strength of Materials Vol.2*. Edited by V.V. Panasyuk, Naukova Dumka, Kiev.



A feszültségintenzitási tényező számítható a

$$K = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\phi_0} \left[ 1 + \left( \frac{c-a}{c} \right) \cdot 0,12 \right] \sqrt{\frac{2t}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2t}}$$

amelyben

$$\phi_0 = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \Theta \right]^{1/2} d\Theta$$

és

$$\frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\phi_0} \rightarrow \text{az ellipszis alakra utaló rész,}$$

$$\left[ 1 + \left( \frac{c-a}{c} \right) \cdot 0,12 \right] \rightarrow \text{frontfelületre vonatkozó korrekció,}$$

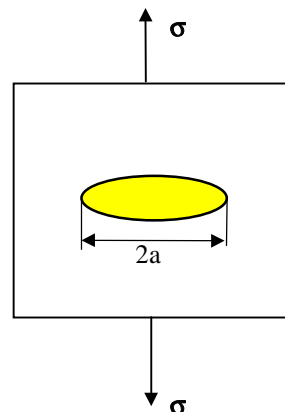
**(Megjegyzés: a videóanyagban itt előjelhiba található!)**

$$\sqrt{\frac{2t}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2t}} \rightarrow \text{hátfelületre vonatkozó korrekció.}$$

Emellett a másik, korábban tárgyalt esetben (8. ábra) a feszültségintenzitási tényezőt a

$$K = \sigma \sqrt{\pi a}$$

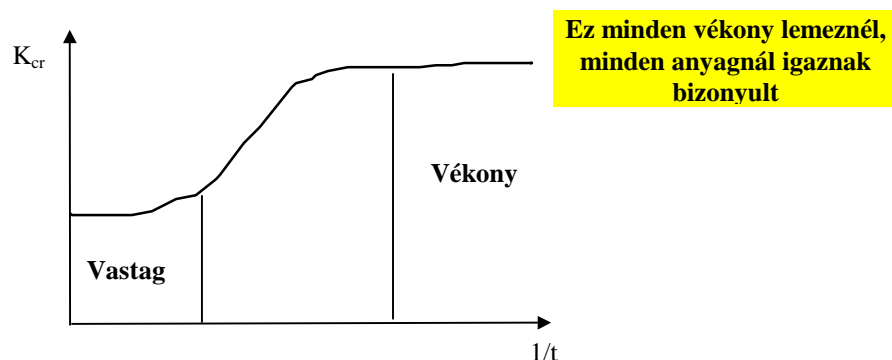
összefüggéssel számíhattuk.



**8. ábra** Egységnyi vastagságú végtelen kiterjedésű húzott lemez

## 2.4. A lemezvastagság hatása a törési jellemzőkre

Most térjünk vissza az a anyagok repedésterjedéssel szembeni ellenállását tükröző mennyiségekhez (IRWIN 1960). A lemezvastagságnak a töréssel szembeni ellenállásra gyakorolt hatást szemlélteti



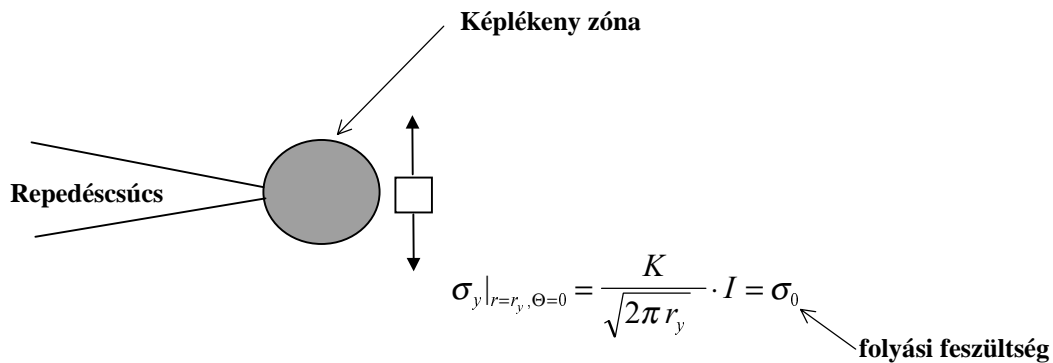
**9. ábra.** A lemezvastagság hatása az anyagok repedésterjedéssel szembeni ellenállására

A fenti jelleg repedéscsúcs képlékeny alakváltozásával magyarázható.

### 2.4.1. Repedés csúcsban kialakuló képlékeny zóna

(lásd IRWIN 1960 )

Tételezzük fel., hogy a repedéscsúcs környezetében a darab méretéhez viszonyítva kismértékű képlékeny zóna alakul ki.

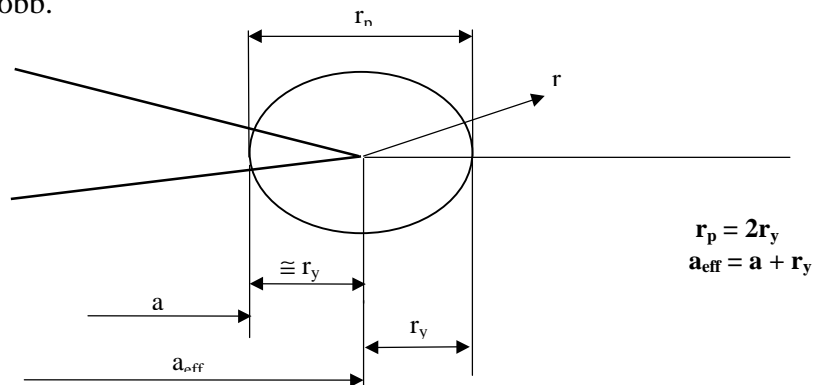


**10. ábra.** A repedéscsúcs környezetében kialakuló képlékeny zóna

$$r = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \leftarrow \text{képlékeny zóna méretének becslése síkfeszültségi állapot esetén}$$

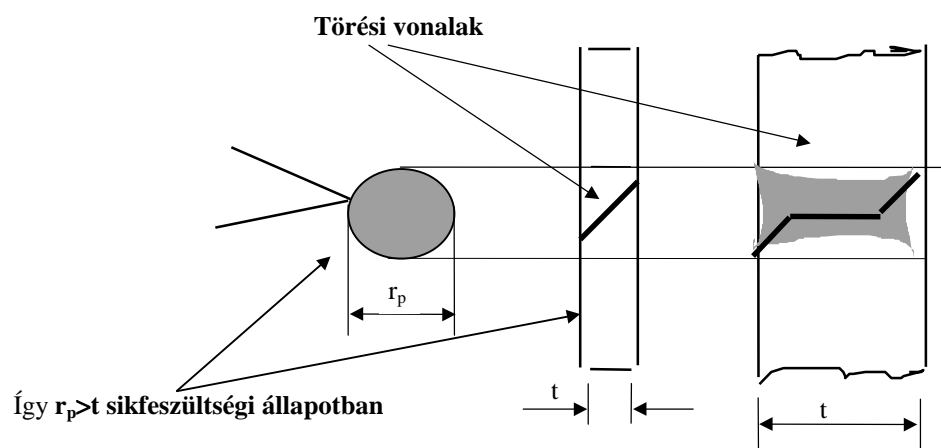
$$r = \frac{I}{6\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \leftarrow \text{képlékeny zóna méretének becslése síkalakváltozási állapot esetén}$$

Látható, hogy a képlékeny zóna, az energia elnyelő zóna mérete síkfeszültségi állapotban **háromszor** nagyobb.

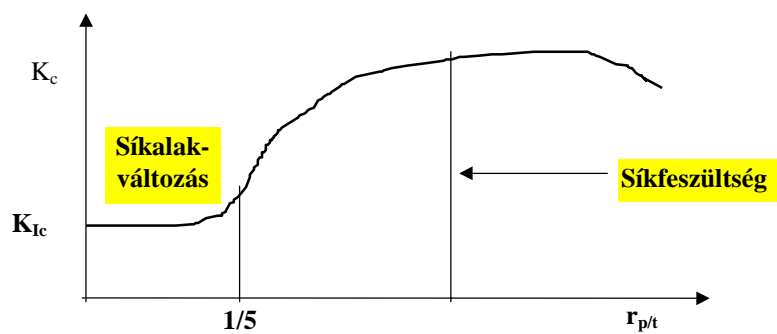


**11. ábra.** A képlékeny zóna korrekciójának figyelembevétele a feszültségintenzitási tényező,  $K$  számításánál

A feszültségintenzitási tényező számításánál az  $a$  repedéshossz helyett az  $a_{\text{eff}}$ -et kell használni. Ha figyelembe vesszük azt, hogy síkfeszültségi állapotban a képlékeny zóna sugara számottevően nagyobb, azaz ugyanahhoz az anyagi állapothoz tartozó (tehát azonos mikroszerkezethez, azonos repedésterjedési ellenálláshoz) akkor a a töréshez tartozó kritikus  $K$  érték ( $K_{\text{cr}}$ ) síkfeszültségi állapotban természetesen nagyobb, mint ahogy ez a 11. ábrán is látható.



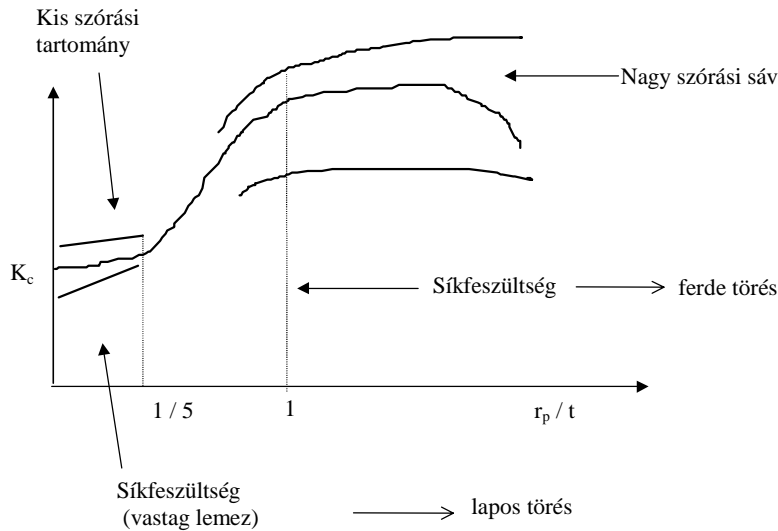
**12. ábra.** A repedéscsúcsban kialakuló képlékeny zóna mérete és a lemezvastagság kapcsolat síkfeszültségi- és síkalakváltozási állapot esetén



**13. ábra** A képlékeny zóna, a lemezvastagság és a töréssel szembeni ellenállás kapcsolata

### 3. Második előadás

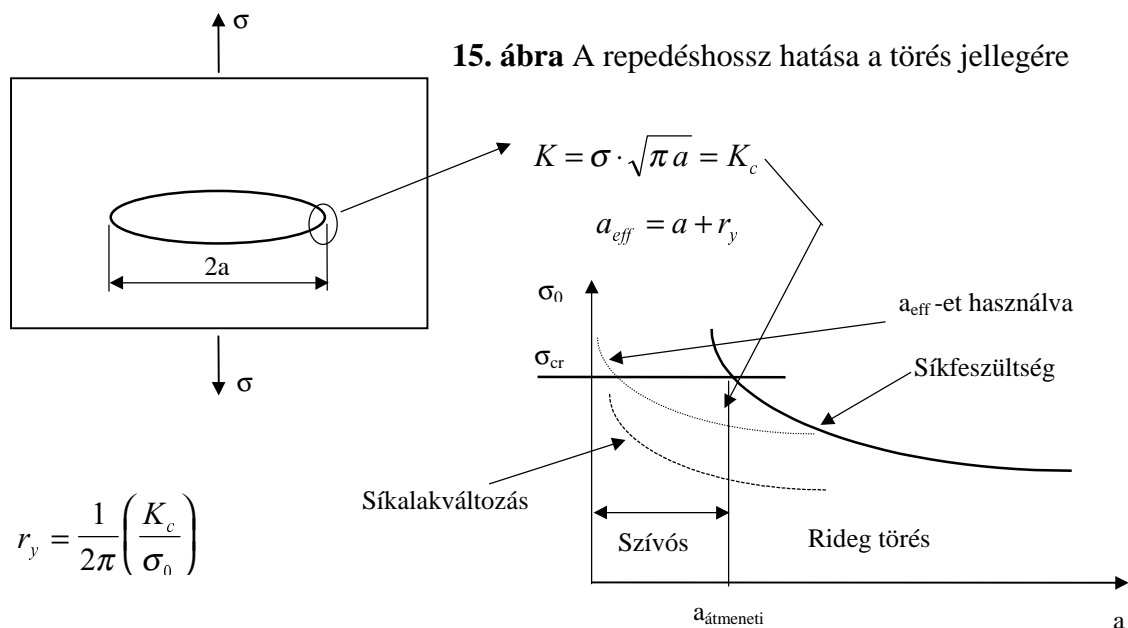
Az első fejezetben a vastagság törésre vonatkozó hatását vizsgáltuk. Ha a vizsgálati eredmények szórásától eltekintünk, akkor a 14. ábrának megfelelő jelleget kapunk.



**14. ábra.** A képlékeny zóna és a lemezvastagság arányának hatása a törési jellemzők szórására.

#### 3.1. $K_{Ic}$ mint referencia érték használata :

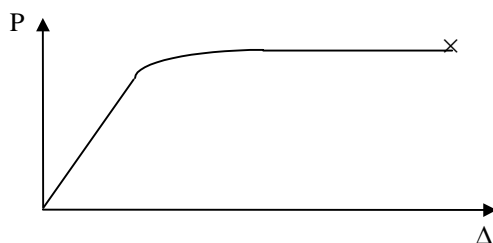
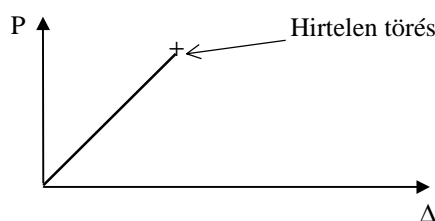
A repedéshossznak a törés jellegére gyakorolt hatásának érzékeltetésére tekintsük a repedéscsúcs közvetlen környezetének a 15. ábrán feltüntetett viselkedését. Ezen ábrán látható  $\sigma_{cr} - a$  görbe szemlélteti a repedésméret hatását a törés jellegére.



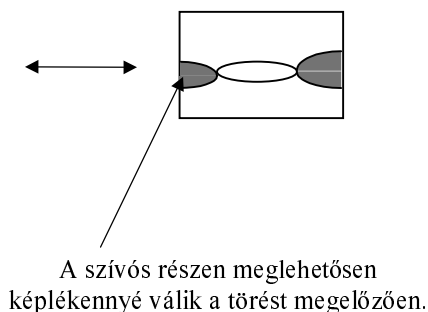
Ebben az esetben is az a repedéshossz helyett az  $a_{\text{eff}}$  értékét kell figyelembe venni. Az ábrán látható, hogy növekvő repedéshosszal a korrekciós hatás gyengül, azaz elegendően hosszú repedéshossznál a képlékeny zóna nagyságából adódó korrekció elhanyagolható. Ebből adódóan létezik egy olyan repedéshossz, amely fölött a korrekció, a képlékeny zóna hatása jelentéktelen., következésképpen létezik egy referencia anyagjellemző is. Ez a  $K_{Ic}$  értéke. A *vastagság* és a *repedéshossz*, a két méretbeli tényező együtt, egymást befolyásolva fejt ki hatását.

A rideg vagy szívós viselkedés természetesen megfigyelhető a vizsgálat során regisztrált erő-elmozdulás diagramokon is. A rideg anyagokra jellemző diagramot a 16. Ábra, szívós anyagokra pedig a 17. ábra szemléltet.

**16. ábra.** Rideg állapotú anyag jellegzetes erő-elmozdulás diagramja



**17. ábra.** Szívós állapotú anyag jellegzetes erő-elmozdulás diagramja



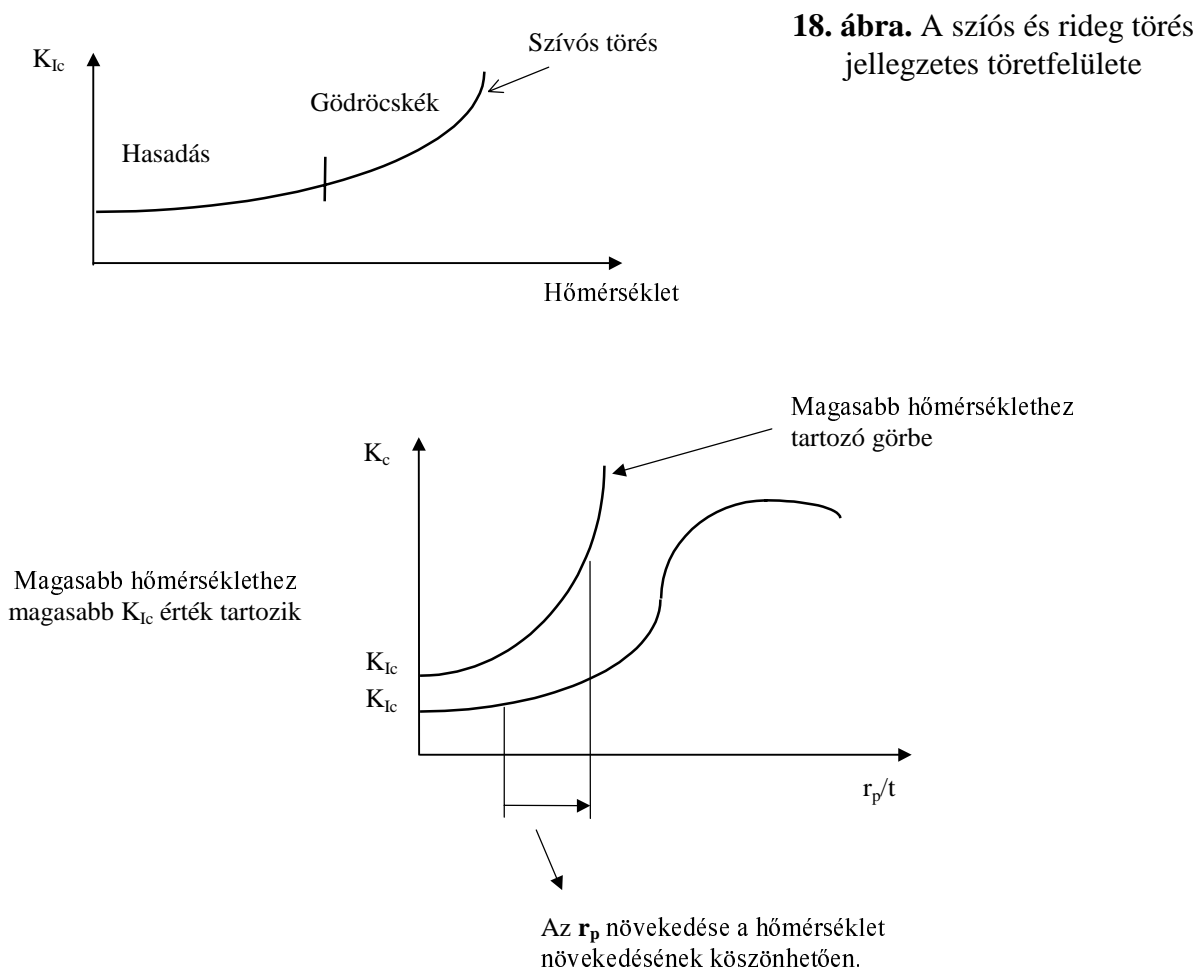
A törés jellegét tekintve a *ferde törés* – *lapos törés*, vagy mechanikailag a síkfeszültség-síkalakváltozás aránya határozza meg az anyagok **rideg** és **szívós** viselkedését.

Ha egy törétfelületet elektronmikroszkóppal megvizsgálunk, akkor rendszerint két egymástól eltérő felszínt láthatunk:

- Ha a felületen látható gödröcskék láthatók, akkor a törés szívós jellegű. Ez egy jellegzetes mikromechanizmusa a terhelés növekedése és a teljes törés során lejátszódó károsodás folyamatának.
- Lapos törés esetén a törétfelület kristályos és többnyire csillogó. Ekkor majdnem mindig ridegtöréssel állunk szemben. A törés mikromechanizmusa pedig hasadás.

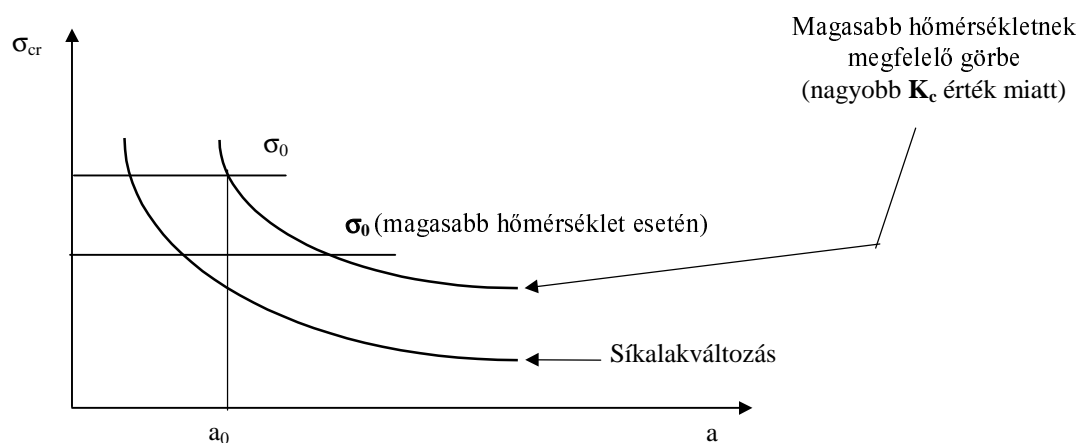
A fentieket foglalja össze a 18. ábra, amelyen látható, hogy a hőmérséklet növekedésével párhuzamosan a törési jellemző, így a törési szívósság, a  $K_{Ic}$  értéke is növekszik. A hőmérséklet növekedésével együtt a  $\sigma_0$  érték csökken, növelve ezzel az  $r_p$  (képlékeny zóna sugarának) értékét. Ebből adódóan a  $K_{Ic}-r_p/t$  diagramm jellege a 19. ábrán látható módon alakul.

Így sokszoros hőmérsékleti hatás létezik, azaz a hőmérséklet hatással van a képlékeny zóna méretére, a törési jellemzőre, a törési szívósságra, a törési feszültségre (19. ábra).



**19. ábra** A hőmérséklet hatása a törési szívósság, a  $K_{Ic}$  értékére

A 20. ábra a hőmérséklet növekedésének a  $\sigma_{cr}$  -  $a$  görbére gyakorolt hatását szemlélteti.

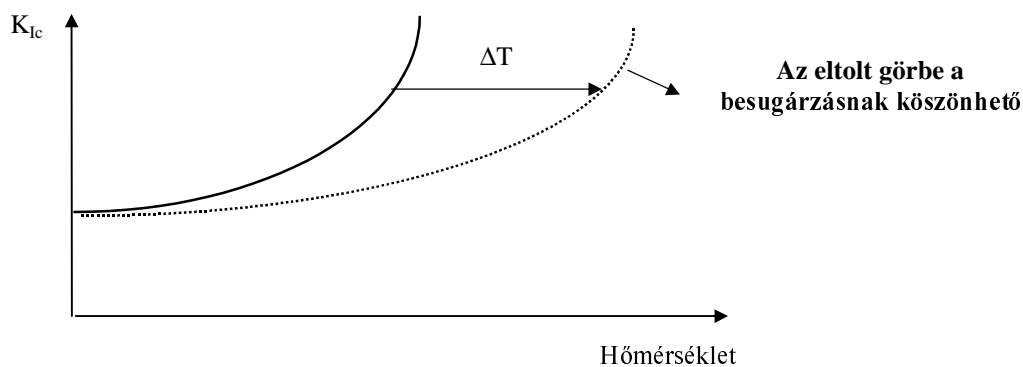


**20. ábra.** A hőmérséklet hatása a törési feszültségre

Adott repedés méretnél  $a_0$ , ha a  $\sigma_{cr} \geq \sigma_0$  akkor először a képlékeny alakváltozás megy végbe és csak nagyobb feszültségeknél következik be a végső törés, amely természetesen ekkor szívós jellegű. Abban az esetben ha  $\sigma_{cr} \leq \sigma_0$  akkor a törés rideg jellegű lesz. Vagyis most magasabb hőmérsékleten szívós viselkedést látunk – szemben a korábbi rideg viselkedéssel.

Az átmeneti hőmérséklet jelensége összetett, de a most következő diagrammok segítségével tökéletesen elemezhető. Ezen görbék mutatják, hogy milyen veszélyes a próbatestek átmeneti hőmérsékletét használni mert ezek jóval alacsonyabbak, mint a nagyobb vastagságú szerkezet. Másképpen fogalmazva e görbék azt mutatják, hogy veszélyes azokat az átmeneti hőmérsékleteket használni, amelyek a beépítésre kerülő szerkezeti elemeknél rendszerint jóval kisebb próbatestek vizsgálatából származnak.

A **besugárzás** okozta károsodásnak köszönhetően a görbe a 21. ábrán vázoltaknak megfelelően alakul:



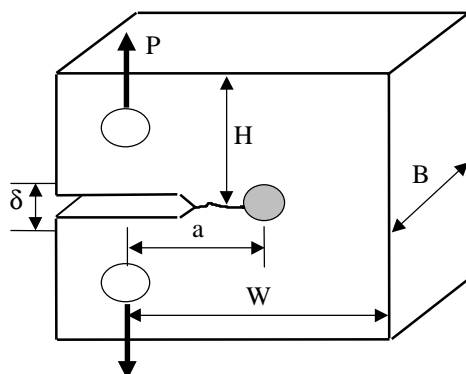
**21. ábra.** A besugárzás hatása a törési szívósság, a  $K_{Ic}$  - hőmérséklet görbére

Ezt a meglehetősen jól érthető, bevált gyakorlatot használják a nukleáris erőművek tervezésénél, felülvizsgálatánál.

### 3.2. A $K_{Ic}$ ASTM. szabvány szerinti vizsgálata

(Lásd ASTM E-399, E 561 )

A több, különböző típusú szabványosított próbatest közül a kompakt-húzó, a CT próbatestet a 22. ábra szemlélteti



**22. ábra.** A kompakt-húzó, az un. CT típusú előfárasztott próbatest

A vizsgálat során biztosnak kell lenni abban, hogy a repedéscsúcs közvetlen környezetében a képlékeny zóna mérete elég kicsi ahhoz, hogy síkbeli alakváltozási állapot alakuljon ki. Az ehhez tartozó anyagjellemző, a  $K_{Ic}$  amely a törési szívósság.

Ahhoz, hogy a fenti feltétel teljesüljön, méretbeli követelményként az alábbiaknak kell megvalósulnia:

$$B \geq 2,5 \cdot \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_0} \right)^2 \leftarrow \text{biztosítja a síkalakváltozást}$$

$$a, W - a, H \geq 2,5 \cdot \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_0} \right)^2 \leftarrow \text{biztosítja, hogy a próbatest túlnyomórészt rugalmasan viselkedjen a vizsgálatkor.}$$

A referencia erő (rideg anyagoknál a töréshez tartozó erő) ismeretében a törési anyagjellemző a **rugalmaságtani** elvek feltételezésével kapott következő összefüggéssel számítható:

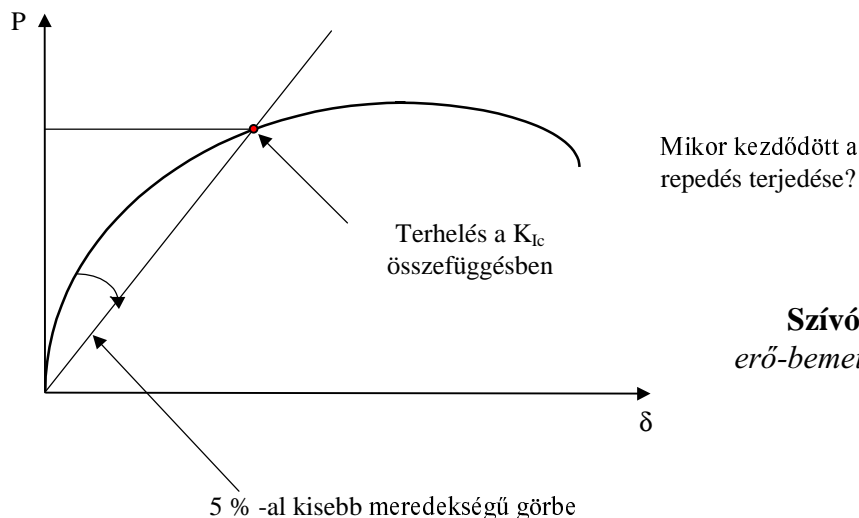
$$K = \frac{P\sqrt{a}}{BW} Y\left(\frac{a}{W}\right)$$

ahol

$$Y\left(\frac{a}{W}\right) \rightarrow \text{a próbatest-alakhoz tartozó korrekciós tag, amely dimenziómentes}$$

Ha töréskor a terhelés (**P**) és a repedés méret (**a**) ismert a  $K_{Ic}$  érték kiszámolható. Egyedüli probléma a törés pillanatának megállapítása.

Szívós anyag jellegzetes erő-szétnyílás, **P -  $\delta$**  diagramját a 23. ábra szemlélteti.



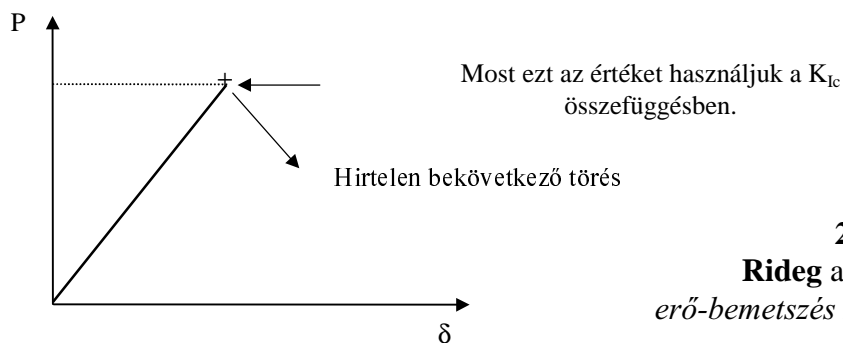
**23. ábra.**  
**Szívós anyag jellegzetes**  
**erő-bemetszés szétnyílás görbéje**

Az 5 % - os meredekség csökkenés kb. 2 % - os repedésterjedésnek felel meg. Ez biztosíték arra, hogy a repedés megindult, hiszen a 2 % -os repedésterjedést nem lehet az anyag képlékenységeivel magyarázni akkor, ha a próbatest megfelel a méretbeli kívánalmaknak.

Ez a viselkedés a  $K_{Ic} T$  görbén a magasabb hőmérsékletű részre jellemző, a szívósabb anyagoknál figyelhető meg.



A  $K_I - T$  görbe alacsonyabb hőmérsékleti, a hasadással bekövetkező törési tartományára jellemző jellegzetes erő-szétnyílás,  $P - \delta$  diagramját a 24. ábra szemlélteti.



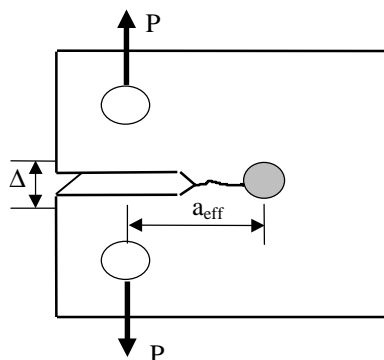
**24. ábra.**  
Rideg anyag jellegzetes  
erő-bemetszés szétnyílás görbéje

### 3.2.1. A kezdeti repedésméretek meghatározása

A *síkalakváltósi* állapotban, számottevő instabilitás nélküli (LEFM) repedésterjedés estén a kezdeti repedésméret meghatározása egyszerű.

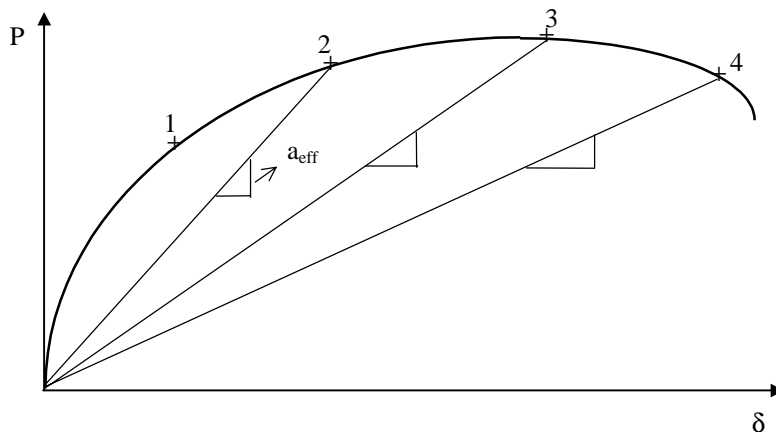
A síkfeszültségi állapotban azonban jelentős mértékű, instabilitás nélküli lassú repedésterjedés mehet végbe. A rugalmas - képlékeny törés mechanikában ennek leírására az R - görbék kerültek értelmezésre és használatra, (ezek a rugalmas törés mechanikában –síkalakváltósi állapotra- nem annyira szükségesek, mivel ebben az esetben a repedésterjedés igen kismértékű növekedése után elveszti stabilitását

Az **R-görbe** meghatározására használt CT-próbatestet szemlélteti a 25. ábra



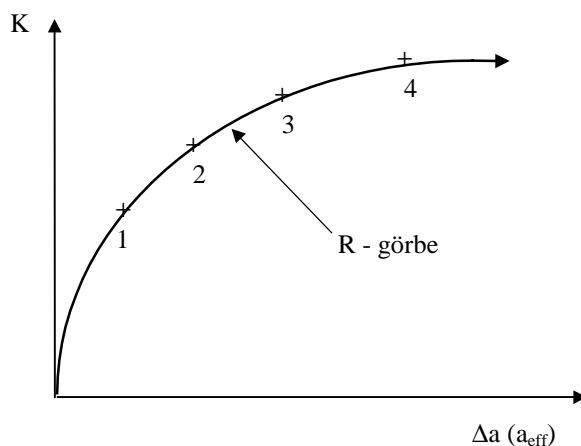
**25. ábra.**  
Az R-görbe meghatározására  
használt CT-próbatest

A vizsgálat során az erő-bemetszés szétnyílás diagramot kell regisztrálni megfelelő nagyításban (26. ábra). Ezen görbén kijelölt különböző erőket (1,2,3, n) az origóval összekötve az egyenesek meredekségének változása az effektív repedéshossz ( $a_{eff}$ ) megváltozásával van kapcsolatban. A 26. ábrán bemutatott példa kapcsán az 1-4 pontok között egy síkbeli feszültségi állapotra jellemző R-görbe alakul ki. Az  $a_{eff}$  meghatározásához az 1. és 4. közé eső pontokban vegyük a leterheléskor kapott meredekséget, majd az  $a_{eff}$  és a  $P$  segítségével meghatározható a  $K$  értéke is

**26. ábra.**

A lassú repedésnövekedés  
hosszának meghatározása

Ezután ábrázolható a  $K$ - $\Delta a$  görbe, amelyet a 27. ábra szemléltet. Ehhez az ASTM E-24 bizottsága különféle eljárásokat dolgozott ki.

**27. ábra.**

Az R-görbe meghatározására

Eddig még nem ejtettünk szót a más LEFM hatásoknak eredményeként fellépő anyagi viselkedésekről.

### 3.3. Stabíl – instabíl repedésterjedés, környezeti hatások

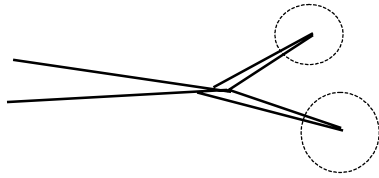
(lásd KRAFFT - IRWIN 1965 )

#### 3.3.1. Gyors repedésterjedés

KRAFFT - IRWIN és kifejlesztettek néhány elméletet a gyorsan terjedő törési viselkedéséről. (E téma bővebb ismertetése IRWIN speciális előadásában található). Ezek mind síkbeli alakváltozási állapotra érvényes elemzések.

Gyors repedésterjedésnél a repedés szétválása mehet végbe. Ezt szemlélteti a 28. ábra. A szétválás mindig nagyobb terjedési sebességeknél valósul meg, mivel ha a repedés szétválik megfelelő energia szabadul fel a repedés mozgására ugyanis a  $K$  vagy a  $G$  értéke hirtelen csökken (a

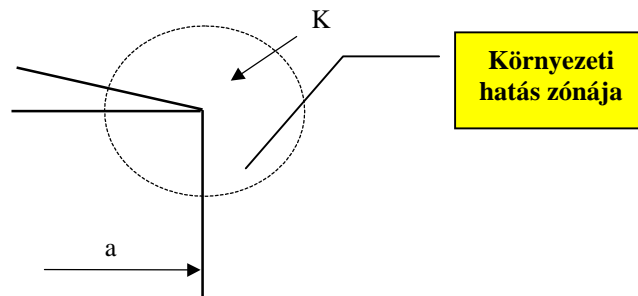
kialakuló új repedések hossza kisebb). E jelenség csupán mindig igen nagy repedésterjedési sebességeknél (1000-10000 ft/sec) valósul meg, amikor a terjedési sebessége meghaladja a transzverzális hullám terjedési sebességének felét. Ekkor a környezeti hatások nem érvényesülnek.



**28. ábra.**  
Repedés elágazás (szétválás) nagy terjedési sebességeknél

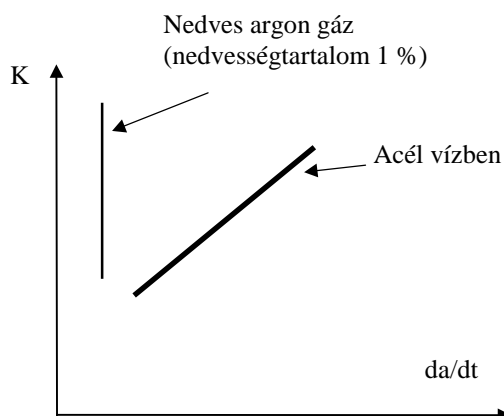
### 3.3.2. Környezeti hatás okozta repedés

Tekintsük a *kvázistatikus* terhelés esetét. Ilyenkor a terhelés hosszúidőn keresztül hat. Ekkor a repedéscsúcsban érvényesül a környezeti hatás okozta károsodás is. A repedéscsúcsban kialakuló viszonyok a feszültségintenzitási tényezővel jellemezhetők, mint ahogy ezt a 29. ábra szemlélteti.



**29. ábra.**  
A környező közeg hatása repedésterjedés feltételeire

A 30. ábra a nedves argon gáz hatását érzékelteti a repedésterjedés sebességére. Látható, hogy kvázistatikus terhelés esetén a semleges gázban levő nedvesség nagyságrendekkel megnöveli a repedésterjedés sebességét.

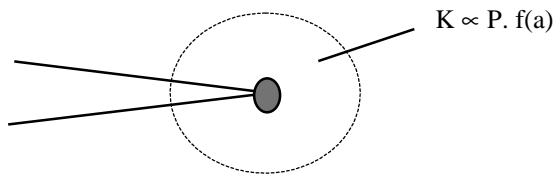


**29. ábra.sebességére**  
A fentiek hatásairól részletesebben lásd  
JOHNSON (1964) munkáit

### 3.3.2. Fáradásos repedés növekedés és környezeti hatás

(Lásd Paris 1961 és Paris 1965)

A repedéscsúcs környezetében kialakuló viszonyok a feszültségintenzitási tényezővel jellemezhetők. A közvetlen repedéscsúcsba ez arányos a repedésterjesztési energiával és a repedéshossz szorzatával, mint ahogyan ezt a 31. ábra szemlélteti.

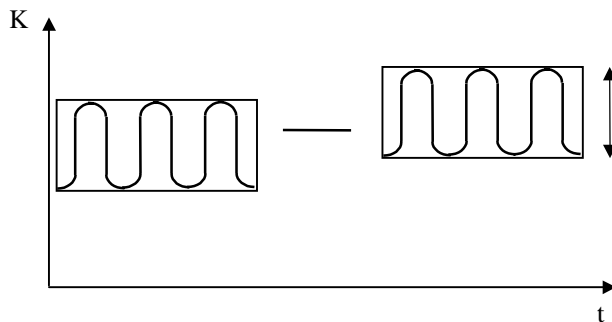
**31. ábra.**

A repedéscsúcs környezetének jellemzése ismétlődő terhelésnél

Egyetlen terhelési ciklusban a terhelés körülményeinek megváltozása a feszültségintenzitási tényező megváltozásával, annak tartományával ( $\Delta K$ ) jellemezhető, mint ahogy azt a 32. ábra mutatja. A repedés terjedési sebességgel ekkor jó közelítéssel leírható a

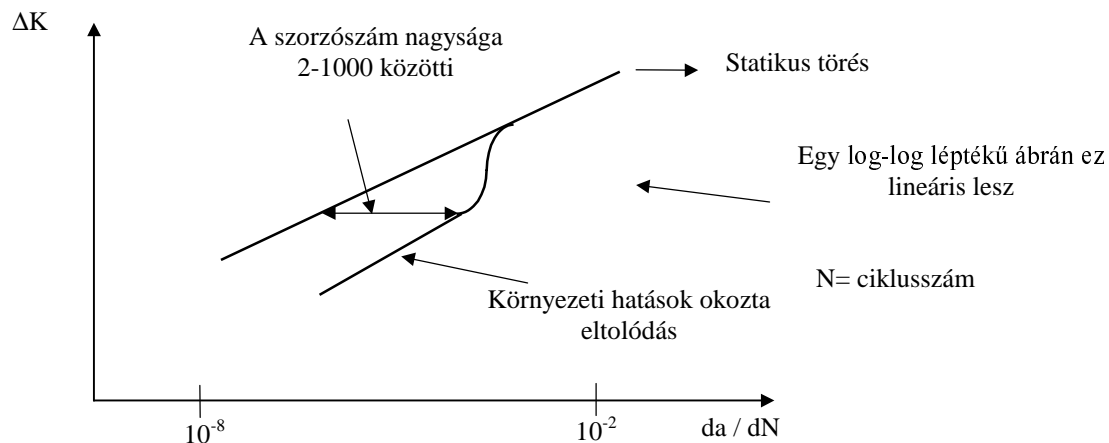
$$da/dN = C(\Delta K)^n$$

összefüggéssel, amelyben  $C$  és  $n$  az anyagra, és a vizsgálat körülményeire jellemző állandók.

**32. ábra**

A feszültségintenzitási tényező tartománya

A fáradásos repedésterjedés előbbieken említett kifejezése *log-log* rendszerben egyenes, mint ahogy az a 33. ábrán is látható (vastag vonal). Abban az esetben, ha a környező közeg hatása is érvényesül, akkor a repedésterjedés sebessége akár nagyságrendekkel is megváltozhat.

**33. ábra**

A fáradásos repedés terjedési sebessége, környezeti hatás

A környezeti hatást jelző görbe egy idő után, a nagyobb repedésterjedési sebességek tartományában találkozik az eredetivel, mert a repedés gyorsabban nő, mint ahogy a környezet befolyásolná az anyag viselkedését. Ekkor már a fáradásos hatás válik meghatározóvá.

## 4. Harmadik előadás

Az előző rész végén a repedés növekedésről ill. a környezeti közeg és a fáradás hatására végbemenő stabil repedés növekedéséről volt szó. Most egy kis adalék következik e témához.

Korábban az anyagok statikus terhelés hatására bekövetkező törésről volt szó. Vessünk egy pillantást e szakterület kutatóira (George Irwin, Herb Johnson, Paul Paris Lásd. a VIDEO anyagot)

### 4.1. Fáradásos repedésterjedés

Ismétlődő igénybevétel esetén a terhelés nagysága két paraméterrel jellemezhető: az amplitúdóval és a középértékkel. Természetesen mindkettő hatással van a repedés növekedésére. Értelmezhető a relatív átlagos terhelés:

$$\gamma = \frac{K_{\text{közepes}}}{\Delta K} = \frac{\text{középterhelés}}{\Delta(\text{terhelés})}$$

Ha az átlagos terhelés  $1/2 \Delta K$  akkor tiszta lüktető-húzó terhelés zéró.

A VIDEO-n látható ábrához kapcsolódó megjegyzések:

- Kísérleti eredmények alapján megállapítható, hogy a relatív átlagos terhelés ( $\gamma$ ) hatása lényegesen kisebb a repedésterjedési sebességre, mint a  $\Delta K$  értékének.
- Ha az adatokat egy logaritmikus léptékű  $\log \Delta K - \log d(2a/dN)$  diagramban ábrázoljuk, akkor nagyjából egy egyenes vonalat kapunk, amit a környezet nem befolyásol. A vonal alatt és felett látható apró értékbeli eltérések a vizsgáló laboratóriumban fellépő környezeti hatásoknak köszönhetőek (pl. : relatív páratartalom, stb.)
- Itt az látható, hogy mi történik a  $\Delta K$  értékek nagyon alacsonyok. A  $10^{-9}$  in/ciklus - tól kisebb repedés növekedési sebességek esetén szinte minden  $\Delta K$  érték azonos. Ha a  $\Delta K$  értéket a küszöbérték alá csökkentjük, akkor egyáltalán nem lesz repedés növekedés.

### 4.2. Környezeti hatás

A VIDEO-n látható ábrához kapcsolódó megjegyzések:

- Ez az ábra Herb Johnson adatai alapján mutatja a környezet által befolyásolt repedésnövekedést statikus terhelés közben. A mérési eredmények ismét egy egyenes vonalon fekszenek. Ezen méréseket 100 %-os relatív páratartalom mellett, vagy a próbatesteket vízbe mártva végezték.
- Ez ismét a statikusan alkalmazott  $K$  szint a repedés növekedés sebességének függvényében. Az előző ábrán megfigyelhető - 100 %-os páratartalomban mért - adatok,

itt is láthatóak. Figyeljük meg, hogy 35 %-os relatív páratartalom mellett a sebesség majdnem akkora, mint 100 %-os páratartalom mellett. 0.1 % relatív páratartalom mellett egyáltalán nincs repedés terjedés. A fenti táblázat argonban levő vízre és levegőben levő vízre vonatkozik, a levegőben levő oxigén védő filmréteget formál a felszín körül és így és a vízre vonatkozó sebesség levegőben némiképp alacsonyabb.

- Ez egy hasonló ábra - fordított koordinátákkal. Titán ötvözetéről. Ez nem egy egyenes vonal valamilyen meredekséggel, hanem van egy küszöbszint, ahol a statikusan terhelés  $K_{\text{küszöb}}$  nem okoz repedésnövekedést. A környezet szimulált tengervíz (3,5 %-os só oldat).

Az előbbi görbe függőleges része (pl: a repedésnövekedés limitált sebessége) emlékeztet a nagy sebességű repedésekre, amint azt mi is megállapítottuk, hogy nagy sebesség esetén repedés elágazás jön létre. Feszültségkorróziós repedés esetén - amely szintén mutat olyan szakaszt, ahol a sebesség állandó - ugyancsak megfigyelhetünk repedés elágazást. Más görbék lejtős részeinél vagy fáradásos repedésnövekedésnél a repedés elágazást rendszerint nem figyelhető meg.

A következő ábrák értelmezésekor ne tévesszük szem elől, hogy az előbbieknél a repedésterjedésre vonatkozó küszöbparaméter értéke a  $K_{\text{ISS}}$  kb.  $20 \text{ KSI in}^{1/2}$  volt.

- Ezen az ábrán ugyanaz az anyag látható, mint az előző ábrán - a fáradásos repedésnövekedésre vonatkozó környezet megegyezik. Itt  $\Delta K$ -t ábrázoljuk  $da/dN$  függvényében. Ha nincs környezeti behatás, akkor a jobboldalon egyenes "görbét" kapunk (üres karikák).
- Ha a környezeti tényezők befolyása érvényesül, mint látható a görbe balra eltolódik. A görbe elmozdulása különböző lehet annak függvényében, hogy milyen adathalmazzal dolgoztunk. Ettől függően a különböző görbék más helyen találkoznak az eredeti - környezeti hatásoktól mentes - görbével. A görbék különböző pontokban történő egyesülése a frekvenciabeli különbségeknek köszönhető. Az görbék alacsonyabb szinten történő találkozása nagyobb frekvencián, felső részen történő találkozása kisebb frekvencián jön létre. (Lásd BUCCI 1970)
- Vegyük figyelembe, hogy a eltolódás  $K_{\text{ISCC}}$  alatt jött létre, ami az anyag feszültség korróziós repedés szintje. Fáradási ciklus alkalmazásával a repedés csúcs a fáradásnak köszönhetően folyamatosan nő, friss töretfelületet hozva létre. Így a környezet kölcsönhatásba léphet a repedésfelülettel, amelyen egyébként oxidréteg képződik, ami feltartóztathatja a repedésnövekedést statikus terhelés esetén. Tehát a fáradásra vonatkozó környezeti hatások a feszültségkorróziós repedés szintje alatt érvényesülnek.
- Másrészt, ha fáradásos repedésterjedés küszöbszintjeit nézzük, azok az alábbi ábrán jobban láthatók:
  - Láthatjuk, hogy a fáradásos repedés terjedési küszöbszinteket a környezet nem nagyon befolyásolja. Megfigyelték, hogy az agresszív környezeti feltételek mellett az említett küszöbszint némiképp magasabb. A környezeti hatástól mentes körülmények közt - nagyobb terhelési hányados számottevő elmozdulást eredményez a görbén (balra - az üres karikák). Tehát megfigyelhetünk egy, a

környezeti hatásoknak tulajdonítható eltolódást és egy erőteljesebb, a nagyobb terhelésnek köszönhető eltolódást. ( Lásd BUCCI 1970

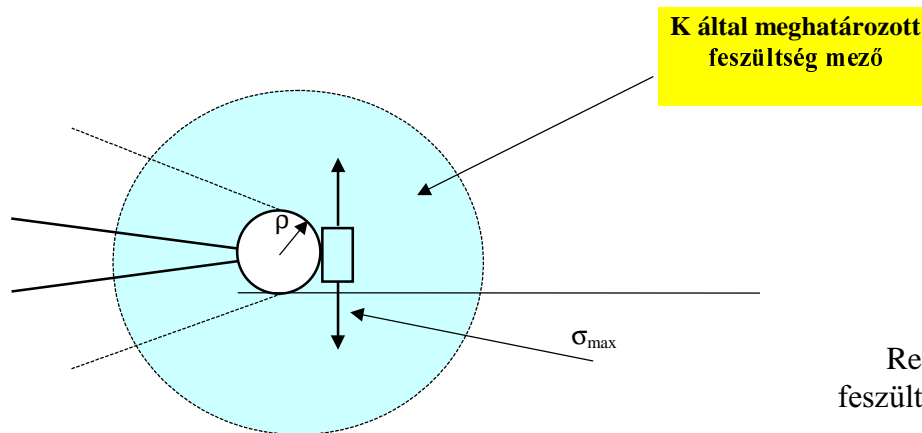
- Mindezek első drámai felhasználása az F-111-es repülőgépeknél történt. 1970-ben egy F-111-es elvesztette egyik szárnyát. Ezért az F-111-eseket eltiltották a felszállástól körülbelül 6 hónapra, miközben azt vizsgálták, hogy miért vesztette el szárnyát a gép, és milyen megoldást lehetne találni a problémára. A képen a meghibásodott szárnyrész töretfelülete látható. A repedés majdnem 1" hosszú és 0,23 " mély volt. A sötétebb rész a már korábban létrejött repedés és az e körül látható világosabb rész a fáradásos repedésnövekedés. A durvább rész a végső törés felszín. A durva törés felszín peremén látható világosabb részek a törés felszín nyíró - szegélye. Hogy eldöntsék vajon a gép újra repülhet-e az ellenőrző bizottságoknak azt kellett megvizsgálni, és eldönteni, hogy ehhez hasonló repedések léteznek-e a szárnyak felfüggesztéseinél.
- A biztonsági vizsgálatot a képen látható módon végezték, ahol egy F-111-es látható emelőkkel a szárnyai alatt. Az egész csarnokot - 40 F fokra hűtötték. Az anyag törési szívóssága gyengébb ezen a hőmérsékleten, így ha a szárnyban repedés lett volna, akkor a szárny biztosan letört volna. Így most, ha a repülőgépet a szokásos repülési körülmények közé visszahelyezzük, akkor itt egy számottevően nagyobb repedés tudna csak problémát okozni - kisebb terhelési körülmények között. Tehát a repedésnek a fáradásnak köszönhetően kellene növekednie ahhoz, hogy meghibásodást eredményezzen. Tehát ha tudjuk, hogy milyen gyors a repülőgépen levő repedés növekedési sebessége akkor megbecsülhetjük, hogy mennyi ideig képes a repülő biztonságosan repülni, és valószínűleg mikor kell legközelebb biztonsági felülvizsgálatot tartani.
- Ezek az F-111-es szárny anyagának adatai. A táblázat  $\Delta K$  és  $da/dN$  függvényében ábrázolja fáradásos repedés növekedést. A szárnyra irányuló legrosszabb környezeti hatás a sugárhajtóanyag, mivel a szárnyat üzemanyag tartálynak is használják. A repülőgép használhatóságának kiszámolásához a sugárhajtóanyag által befolyásolt környezeti adatokat használták. A repülőgép használhatóságának idejét a következő módon számolták ki:

A statikus törési szívósságból kiszámítható, hogy milyen nagyságú repedés van a szárnyon a repedés biztonsági ellenőrzés után. Ismerve a repedés nagyságát és a repülőgépre ható terhelést kiszámítható a repülőgépre vonatkozó  $\Delta K$  érték. A  $\Delta K$  adat valamint a fenti görbe segítségével megismerhetjük a repedés növekedés sebességét és megbecsülhetjük a repülőgép élettartamát.

#### 4.3. Repedésterjedés feszültséggyűjtő helyek környezetében

Az korábbiakban definiáltuk a **G** és a **K** törésmechanikai paramétereket. Most összevetjük egymással a repedés csúcs mezejének **K** feszültség-intenzitási tényezőjét a **K<sub>t</sub>** elméleti feszültséggyűjtési tényezővel. ( Lásd Paris és Sih 1965 )

A viszonyokat a 34. ábra szemlélteti.



**34. ábra.**  
Repedésterjedés  
feszültséggyűjtő helyről

A 34. ábra jól szemlélteti, hogy  $\sigma_{\max}$  jóval a  $K$  által meghatározott mezőn belül van és közöttük kapcsolat van, azaz  $\sigma_{\max} \propto K$ . De az arányosság dimenzió szempontjából nem helytálló.

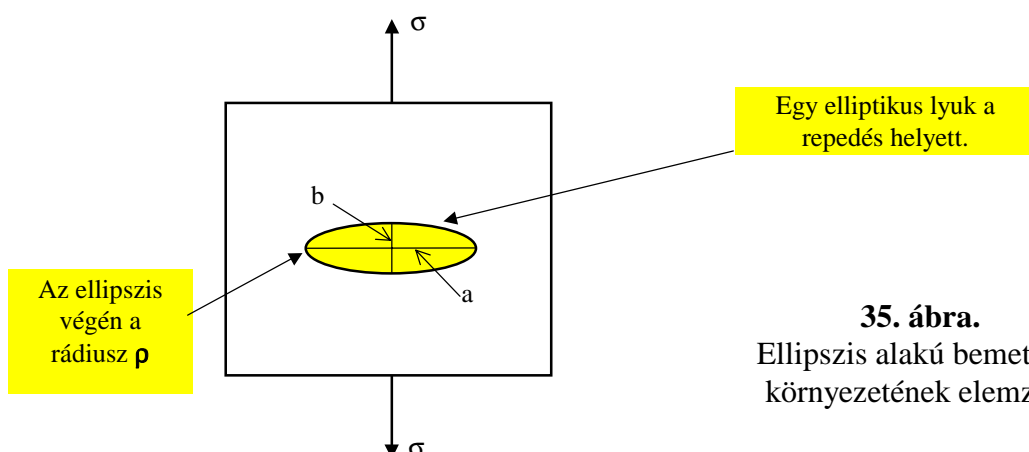
Ha figyelembe vesszük, hogy

- $\sigma_{\max} \propto K/\rho^{1/2}$
- $\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\Theta)$
- $\sigma_{\max} = K_T \sigma_{nom}$

akkor a két, a  $K_T$  és  $K$  közötti kapcsolatra érvényesnek kell lenni a

- $K = \lim_{\rho \rightarrow 0} c \sigma_{\max} \sqrt{\pi \rho}$

összefüggésnek, amelyben  $c$  értéke megegyezik minden problémánál. Nézzük hogyan határozható meg a  $c$  értéke. Ehhez tekintsük a 35. ábrát.



**35. ábra.**  
Ellipszis alakú bemetszés  
környezetének elemzése

Tudjuk, hogy végtelen kiterjedésű, egységnyi vastagságú lemezben a repedés csúcs környezetében a feszültségintenzitási tényező, a  $K$  értéke

$$K = \sigma \sqrt{\pi a}$$



összefüggéssel számítható. Azt is tudjuk, hogy a maximális feszültség, ill. a feszültséggyűjtési tényező faktor a fenti esetben a

$$\sigma_{\max} = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right) \text{ és } \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right) = K_T$$

kifejezésekkel határozható meg.

Figyelembe véve az ellipszisre vonatkozó geometriai összefüggést:  $\rho = \frac{b^2}{a}$ , a maximális feszültség számítható a

$$\sigma_{\max} = \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right)$$

kifejezéssel. Most helyettesítsünk be:

$$K = \lim_{\rho \rightarrow 0} c \sigma_{\max} \sqrt{\pi \rho}$$

Ezután megoldhatjuk  $c$  - re:

$$\sigma \sqrt{\pi a} = \lim_{\rho \rightarrow 0} c \sigma_{\max} \sqrt{\pi \rho} \cdot \sigma \cdot \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right)$$

Ha  $\rho \rightarrow 0$ , a zárójelben lévő érték elhanyagolhatóvá válik. Így a kifejezések elhagyása után  $c=1/2$ -t kapunk. Ennek figyelembevételével:

$$K = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sigma_{\max} \sqrt{\pi \rho}$$

Korábban a feszültséggyűjtési tényezőkre kapott megoldásokat használtuk ahhoz, hogy megkapjuk a feszültségintenzitási tényezőkre vonatkozó megoldásokat.

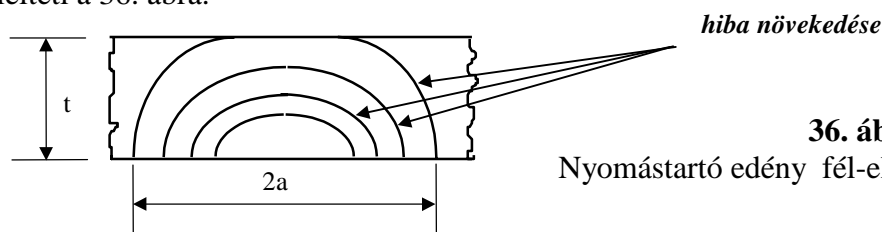
#### 4.4. Nyomástartó edényekre vonatkozó alkalmazási példák

( Lásd Irwin és Kies 1960 )

##### 4.4.1. Lyukadás törés előtt

A nyomástartó edények biztonságossági szempontból való tervezésében gyakori módszerré vált az ún. „lyukadás törés előtt” módszer (leak before break).

Tegyük fel, hogy van egy nyomástartó edényfal, amely fél-elliptikus felületi hibát tartalmaz. Ezt szemlélteti a 36. ábra.



Tételezzük fel, hogy a hiba a szubkritikus repedésnövekedés feltételeinek megfelelően növekszik. Egy adott pillanatban a méretek:  $2a = a$  hiba átmérőjének hossza (( rendszerint  $2a \leq 2t$ ). Mi olyan körülményeket szeretnénk létrehozni, hogy a minimum  $2t$  hosszúságú repedés ne váljék instabillá

és az edény szivárogjon (lyukadjon át) a repedés instabillá válása előtt. A szivárgás miatt nyilvánvalóvá válik, hogy a nyomástartó edénnyel valami probléma van és a megfelelő védelmi, biztonsági intézkedések meghozhatók. E feladatnál a feszültségintenzitási tényező első közelítésben a

$$K = \sigma \cdot \sqrt{\pi a}$$

kifejezéssel számítható. De mi a következőt szeretnénk:

$$K_c \geq \sigma \sqrt{\pi a_{eff}}$$

ahol:

$$a_{eff} = a + r_y = t + \frac{1}{\alpha \pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2$$

$\alpha=2$  síkfeszültség esetén

$\alpha=6$  síkalakváltozás esetén

Ha az  $a_{eff}$  összefüggésbe a  $K$  helyett a  $K_c$ -t írjuk be ( a tényleges terhelésből adódó  $K$  biztosan a  $K_c$  alatt van valahol), akkor így biztosan túlbecsüljük a képlékeny mező méretét. Ennek figyelembevételével tehát

$$K_c^2 \geq \sigma \pi \left[ t + \frac{1}{\alpha \pi} \left( \frac{K_c}{\sigma_0} \right)^2 \right]$$

Ha a „lyukadás törés előtt”-höz tartozó  $K_c$  - értéket akarjuk meghatározni, csak a fenti egyenletet kell megoldani  $K_c$ -re.

$$K_c^2 \geq \frac{\sigma^2 \pi t}{\left[ 1 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 \right]}$$

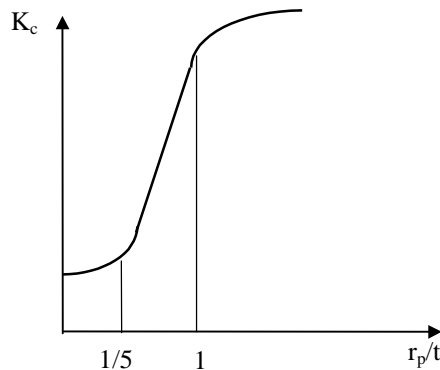
Rendezés után:

$$\frac{K_c^2}{\sigma_0^2 \pi t} \geq \frac{\left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2}{\left[ 1 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 \right]}$$

Vegyük észre, hogy  $\frac{K_c^2}{\sigma_0^2 \pi}$  a síkbeli feszültségi állapothoz tartozó képlékeny zóna mérete,  $r_p$ :

$$\frac{r_p}{t} \geq \frac{\left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2}{\left[ 1 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 \right]}$$

A lényeg az, hogy a nyomástartó edények tervezésekor és vastagság hatást figyelembe kell venni a korábban már említett *képlékeny zóna/vastagság*, azaz az  $r_p/t$  arányt, amelyet a 37. ábra szemléltet.



**37. ábra**

Az anyagok szívós-rideg viselkedése, a repedésterjedéssel szembeni ellenállása az  $r_p/t$  arány függvényében.

$r_p$  – képlékeny zóna mérete a repedéscsúcs előtt,  
 $t$  - lemezvastagság

Ha a  $\frac{\sigma}{\sigma_0}$  nő, akkor a  $r_p/t$  szintet is növelni kell, hogy a „*lyukadás törés előtt*” követelményének megfeleljen.

Ha olyan nyomástartó edényt akarunk tervezni ahol a  $\frac{\sigma}{\sigma_0}$  kicsi (pl:  $\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{4}$ ), akkor a  $r_p/t$  szint is meglehetősen alacsony lehet és így meghibásodás esetén a falvastagság elég ahhoz, hogy síkbeli alakváltozási állapotban bekövetkező törés jöjjön létre.

Ugyanakkor, ha egy olyan nyomástartó edényt akarnánk készíteni, ahol a  $\frac{\sigma}{\sigma_0}$  érték nagy (pl:

$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 0,7$ ), akkor az  $r_p/t$  szint a síkfeszültségi tartományba esik és ennek megfelelő szívósság a tervezési, anyagmegválasztási követelmény.

Mi történik, ha ezen tört nevezője nulla?

$$\frac{r_p}{t} = \frac{K_c^2}{\sigma_0^2 \pi t} \geq \frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2}{\left[1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2\right]}$$

Ekkor a  $K_c$  végtelen. Ekkor az anyag a törési tulajdonságaitól függetlenül nem lenne elég szívós. Ezt a feltételt a képlékeny mező instabilitásának nevezzük (Lásd Vasquez és Paris 1980). Nyilván meg mit is takar ez! A  $G$  értéke a

$$G = \frac{\sigma^2 W}{E} \cdot F\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{K^2}{E},$$

kifejezéssel vehető figyelembe, ahol  $W$  egy meghatározó geometriai méret.

Az  $a$  repedéshossznak  $a_{eff}$ -nek kellene lennie, azaz:

$$a_{eff} = a_0 + \delta a_0 = a_0 + r_y$$

Újrarendezve az egyenletet :

$$K^2 = \sigma^2 W \cdot F\left(\frac{a_0}{W}\right) + \sigma^2 W \cdot F'\left(\frac{a_0}{W}\right) \left(\frac{1}{W}\right) r_y = \sigma^2 W \cdot F\left(\frac{a_0}{W}\right) + \sigma^2 W \cdot F'\left(\frac{a_0}{W}\right) \frac{K}{\alpha \pi \sigma_0^2}$$

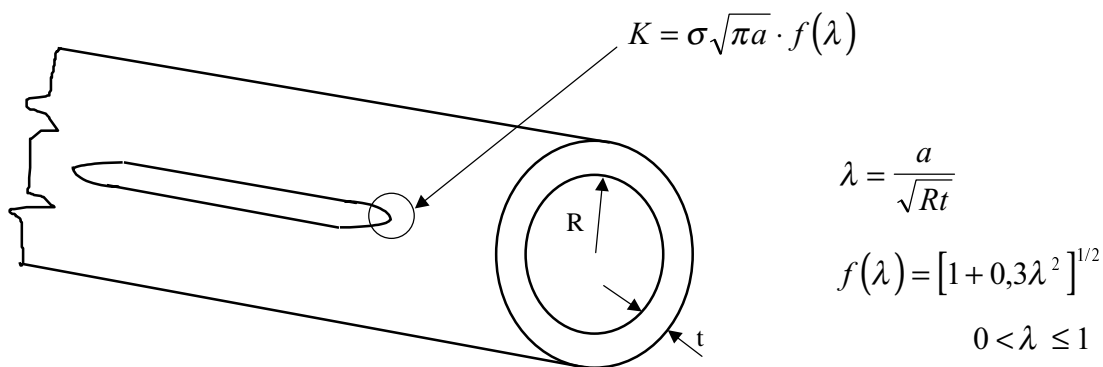
- $\sigma^2 W \cdot F\left(\frac{a_0}{W}\right) \rightarrow \mathbf{K}$  az eredeti repedésmérettel
- $\sigma^2 W \cdot F'\left(\frac{a_0}{W}\right) \frac{K}{\alpha \pi \sigma_0^2} \rightarrow$  a növekvő repedésmérettel arányos  $\mathbf{K}$ -érték.

Most már megoldhatjuk  $\mathbf{K}$ -ra a fenti kifejezést:

$$K^2 = \frac{\sigma^2 W F\left(\frac{a_0}{W}\right)}{\left[1 - \frac{1}{\alpha \pi} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 F'\left(\frac{a_0}{W}\right)\right]}$$

Ha a nevező nulla, akkor  $\mathbf{K}$  végtelen. Ekkor röviden a következő történik: Ha a nevező nullává válik, maga a képlékeny mező instabil lesz. Más szóval, még ha maga a repedés nem is növekszik, a képlékeny mező növeli a repedés méretét, ami növeli a  $\mathbf{K}$  értékét. Bármilyen ami a  $\mathbf{K}$  értékét növeli, elősegíti a képlékeny mező növekedését is. Ez egy ciklikusan divergens folyamattá válhat és egy nullával egyenlő nevező egy divergencia kifejezésre jutását jelenti. Ezt nevezte Vasquez a „képlékeny mező instabilitásának”. Mindössze ezzel kapcsolatban használunk nagy  $F'$  ( $a_0/W$ ) értéket. (Lásd Vasquez és Paris 1980).

A fent elemzett eset megtörténhet például nyomástartó edényekben keletkező hosszirányú repedéseknél. Ennek szemléltetésére tekintünk a 38. ábrát.

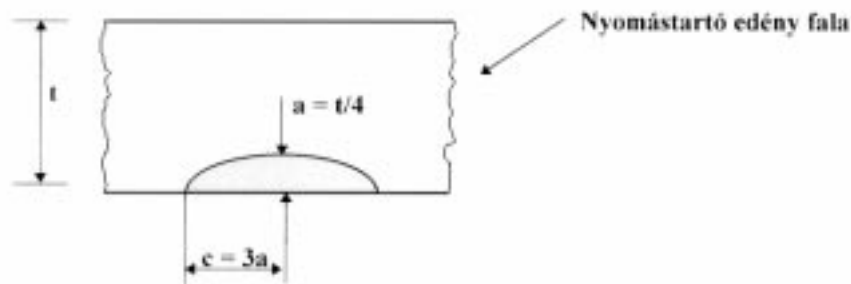


**38. ábra.** Hosszirányú repedés nyomástartó edényben, nagyátmérőjű csővezetékben

Itt a  $\mathbf{K}$  úgy viselkedik, mintha benne egy  $a^{3/2}$  tag lenne. Ez az  $a^{3/2}$  a  $\mathbf{K} = \sigma \sqrt{\pi a}$  görbét meredekebbé teszi, és a görbe meredekségének változása: az  $F'\left(\frac{a_0}{W}\right)$  a nevező nullává válását okozhatja. Az előzőkből következően tehát a képlékeny mező instabilitása olyan esetekben történik, amikor a  $\mathbf{K}$  a repedés méretével együtt gyorsan növekedik (pl.:  $a^{1/2}$  -nél nagyobb  $a$  esetén). Ez fontos lehet például gázvezetékknél, stb.

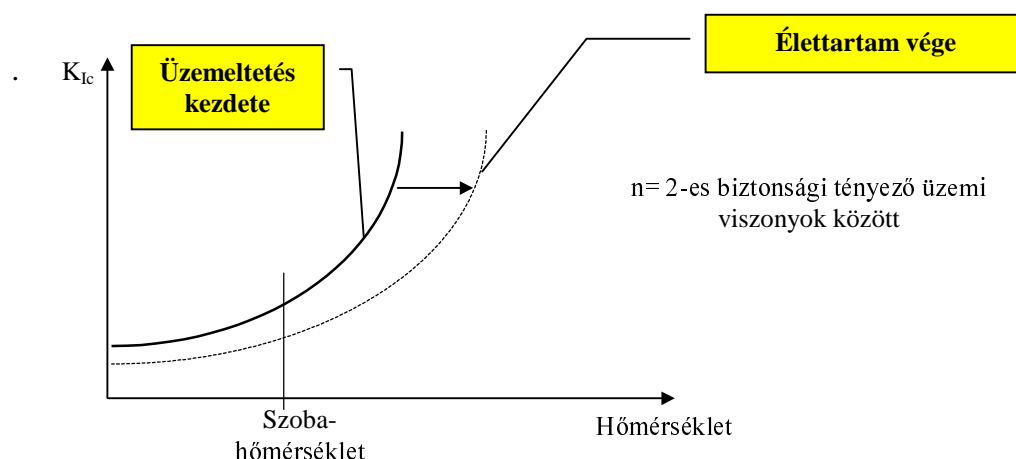
#### 4.4.1. A nukleáris nyomástartó edényekre vonatkozó előírás (ASME)

Az előírásban alkalmazott megközelítés egy kicsit eltér az előbbiektől. Ennek lényegét szemlélteti a 39. ábra. A feltételezés az, hogy a edény  $t$  vastagságú fala tartalmaz egy  $a=t/4$  mélységű és  $c=3a$  hosszúságú repedést.



**39. ábra** Az ASME előírásban szereplő feltételezett hibaméret

Itt az edény szilárdságával nincs probléma, kivéve a hegesztett varrat szilárdságát, amelyet ezért szigorúan ellenőriznek. Egy átlagos reaktor esetén, melynek falvastagsága 8", egy 2" mély és 12" hosszú repedést nehéz lenne nem észre venni az ellenőrzés során. Az atomerőművi nyomástartó edények élettartama során a szubkritikus repedés - számítások szerint - egy hüvelyknek mindössze néhány ezredrészével növekszik, ami elhanyagolható a 8" falvastagsághoz képest. Az elemzés a  $K$  számítását alapul véve mutatja a felületi hiba elemzését. A felületi repedés és a nyomástartó edény geometriai jellemzőinek, valamint az üzemi paraméterek ( az üzemi nyomásra vonatkozó  $n=2$  biztonsági tényező) figyelembevételével számított  $K$  érték kell összevetni a referencia görbén feltüntetett törési szívóssággal anyagban a  $K_{Ic}$  értékkel, amelyet 40. Ábra mutat. Figyelembe kell venni, hogy a besugárzás hatására a referencia görbe jobbra tolódik. A szaggatott görbe az élettartam végső periódusára vonatkozik.



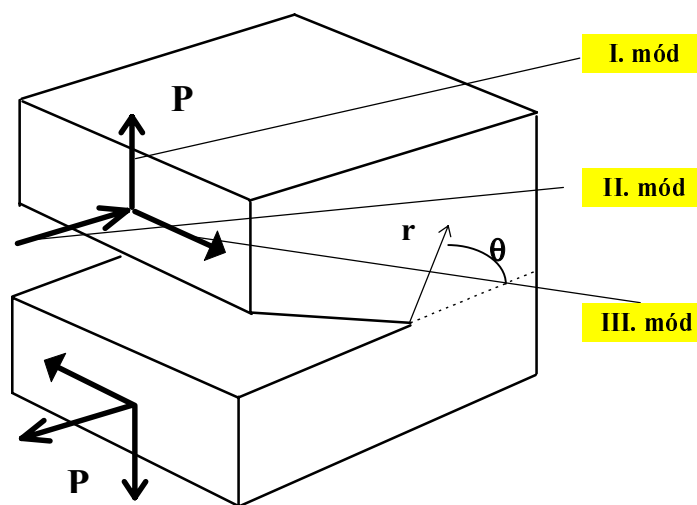
**40. ábra**

A nyomástartó edények törési szívósságának referencia görbéi

## 5. Negyedik előadás

### 5.1. A törések más módozatai

Az eddigiekben csupán azzal az esettel foglalkoztunk, amelynél a terhelés merőleges volt a repedés felületére. Kétségtelenül gyakorlatban ez a legveszélyesebb törési mód, amelyet **I. törési módnak** nevezünk. A lehetséges alapeseteket a 41. ábra szemlélteti.



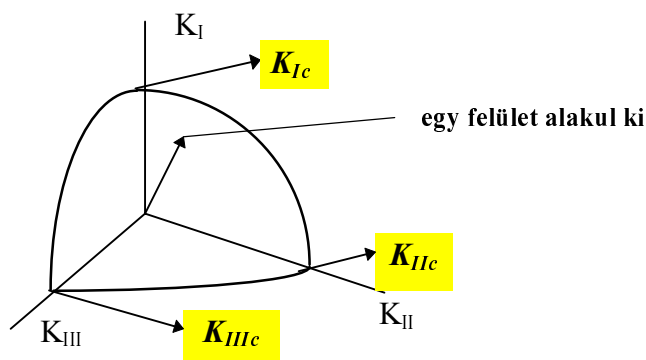
41. ábra. A törés lehetséges alapesetei

A repedéscsúcs környezetében ébredő feszültségek mindhárom esetre felírhatók abban az esetben ha a **rugalmasságtan** összefüggéseit érvényesnek tekintjük. Korábban, már felírtunk repedéscsúcs feszültségmezejének egyenletek az I. módra. A II. és III. módban is hasonló eredményeket kapunk

Az I. mód domináns szerepe abban is megmutatkozik, hogy ha a különböző módok kombinációját alkalmazzuk egyidejűleg egy repedésre, akkor a repedés úgy nő, hogy rövid időn belül I. módú repedéssé válik. A különböző terhelési módokhoz tartozó feszültségintenzitási tényezőket az indexekkel különböztetjük meg, azaz

I. Mód	→	$K_I$
II. Mód	→	$K_{II}$
III. Mód	→	$K_{III}$

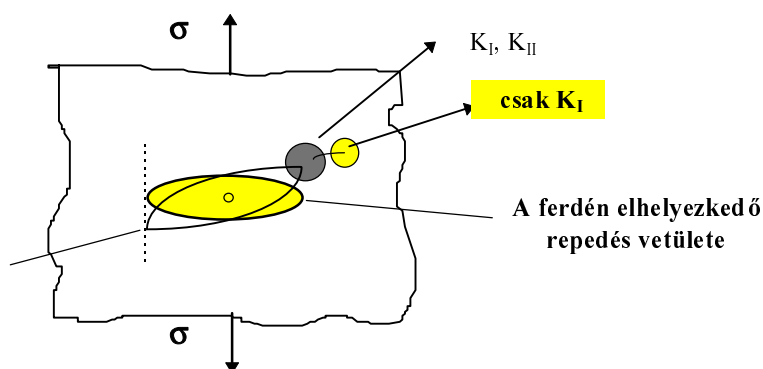
Általános terhelés esetén a  $K_I$ ,  $K_{II}$  és  $K_{III}$  ismeretében egyenértékű feszültségintenzitási tényező számítható,  $f(K_I, K_{II}, K_{III})$ . Ha ez eléri az anyagra jellemző kritikus értéket, az  $f_{cr}$  értékét, akkor bekövetkezik a törés. Ezt szemlélteti az 42. ábra.



**42. ábra.** Törési kritérium összetett terhelésnél

E felület jellemzésére vonatkozóan a szakirodalmakban számos kísérlet található. Ha a  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  értékeiből számított  $f < f_{cr}$  értékénél, akkor törés nem következik be, ha  $f = f_{cr}$ , akkor a repedés instabil módon megindul.

A ferde repedés viszonylag pontosan elemezhető úgy, hogy a repedés vetületének hosszát a I. módnak megfelelően behelyettesítjük, mint ahogy ezt az 43. ábra mutatja.



**43. ábra.** Ferde repedés helyettesítése

## 5.2. Energiamódszerek az elmozdulások jellemzésére

Az első előadásban értelmezett  $G$ , a repedésterjesztésre fordított energia

$$G = \frac{\partial V(P, a)}{\partial A}$$

összefüggéssel írható le. Castigliano tételét alkalmazva :

$$\Delta_p = \frac{\delta V}{\delta P} = \Delta_{p_{\text{nincs repedés}}} + \frac{\partial V_{\text{repedés}}}{\partial p}$$

ahol a  $V$  potenciális energia két tagból áll:  $V_{\text{összes}} = V_{\text{nincs repedés}} + V_{\text{repedésnek köszönhető}}$ , amelyben

$$\frac{\partial V_{\text{repedés}}}{\partial p} = \Delta_{\bar{p}_{\text{repedés}}}$$

A repedésfelület által képviselt potenciális energia pedig a következő:

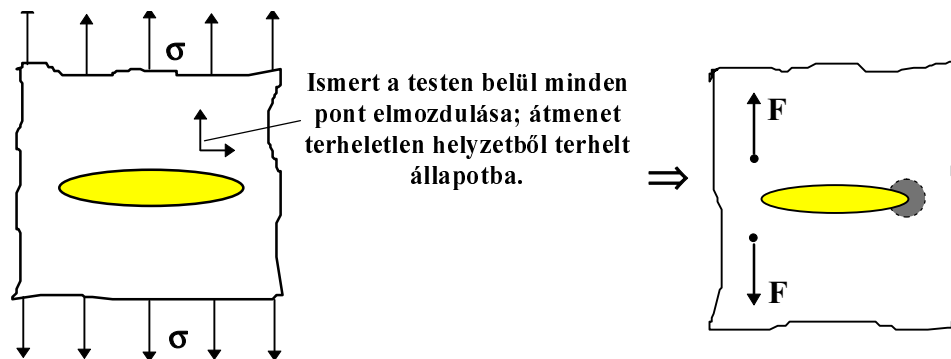
$$V_{\text{repedés}} = \int_0^A \frac{\partial V}{\partial A} dA = \int_0^A G dA = \int_0^A \frac{K^2}{E} dA$$

A fenti összefüggések felhasználásával a **K**-ra vonatkozó összefüggéseket felhasználva számítható a  $V_{\text{repedés}}$ -t és  $\Delta_{\text{repedés}}$  értéke (részletesebben lásd TADA 1973).

### 5.3. Súlyfüggvények módszere

(részletesebben lásd BUECKNER 1970, RICE 1972 és TADA 1973)

Az ún. *súlyfüggvények* módszerének használata igen hasznos a **K** megoldások előállítására abban az esetben, ha létezik egy egyszerűbb esetre már megoldás. A módszer lényegét az 44. ábra foglalja össze.

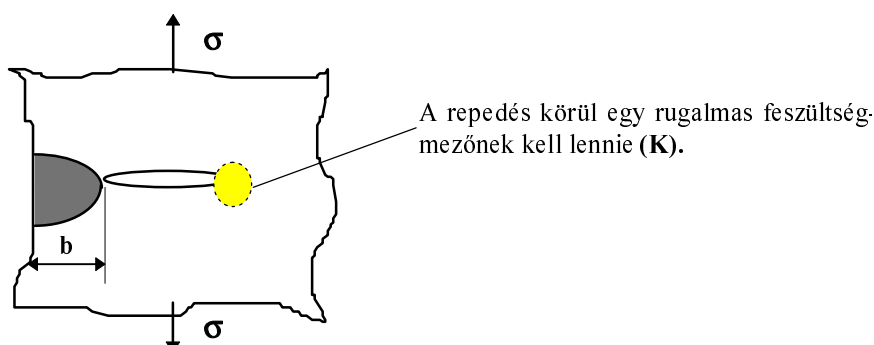


44. ábra A súlyfüggvények alkalmazásának elve

Ha a baloldalon szereplő megoldás ismert, akkor a feladat megoldását más terhelés esetén is előállíthatjuk. Általánosságban azt mondhatjuk, hogy ha már kaptunk egy teljes megoldást (ismerjük a feszültségeket és az elmozdulásokat teljes egészében) akkor előállítható a **K**-ra vonatkozó megoldás a testre ható bármilyen terhelés esetében. Ez igen hasznos például a repedéseket tartalmazó elemeknél a hegesztési, vagy a hőkezelési belső feszültségek hatásának elemzésére.

### 5.4. A lineárisan rugalmas törésmechanika korlátai

Az eddigi előadások összefoglalásaként azt mondhatjuk, hogy gyakorlati szempontból, a lineárisan rugalmas törésmechanika területe egészen jól ismert. Ezen elmélet alapja az, hogy a *rugalmasságtan* egyenletei érvényesek a repedés csúcsának környezetében is. Ezt szemlélteti az 45. ábra jobb oldala.



45. ábra A lineárisan rugalmas törésmechanika korlátai



Ha a repedés körül nagy mértékű a képlékenység (mondjuk a lemez széléig kiterjed), akkor **K** elveszti értelmét, mint ahogy azt a 45. ábra baloldala szemlélteti.

A lineárisan rugalmas törésmechanikai elvek alkalmazása tehát csak akkor lehetséges, ha a képlékeny mező mérete kicsi az összes többi dimenzióval, azaz ha a  $r_{pl} \ll b$ .

A lineárisan rugalmas törésmechanika nem foglalkozik a nagy mértékű képlékeny alakváltozással, a folyással. Ez a rugalmas - képlékeny törésmechanika témája, amiről az ötödik előadásban lesz szó.

## 6. Ötödik előadás

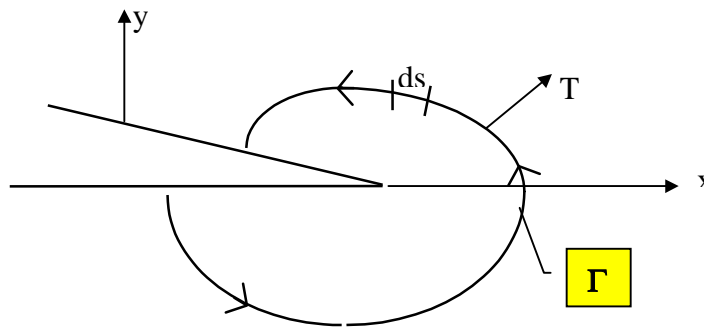
### 6.1. Rugalmas képlékeny törésmechanika

(Lásd RICE 1968 és PARIS 1977)

#### 6.1.1. Rice és a J - integrál

(Lásd RICE 1968)

Tekintsük a repedést tartalmazó, a 46. ábrán feltüntetett szilárd testet. A repedést vegye körbe egy olyan ív, amelynek egyik vége a repedésfelület egyik oldalán, a másik vége pedig az ellentétes oldalán van.



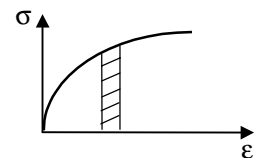
46. ábra. A J-integrál értelmezése

Tekintsük a következő integrált

$$J = \int_{\Gamma} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x},$$

amelyről bebizonyítható, hogy független az integrálási úttól, a  $\Gamma$ -tól, ahol

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad W = W(\varepsilon_{ij}) \text{ az alakváltozási munka}$$



A fenti integrál útfüggetlensége mindig igaz rugalmas feltételek mellett és kismértékű képlékeny állapotra. Azt szeretnénk, hogy  $\mathbf{W}$  csak az utolsó alakváltozási állapot függvénye legyen.

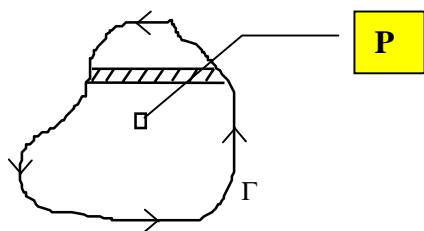
Jelölje:

- $\mathbf{T}_i$  = a feszültségvektort a kontúr mentén (alkalmazott feszültségekből adódik)
- $\mathbf{u}_i$  = elmozdulás a húzás irányában a  $\Gamma$  kontúr mentén.

Az út-függetlenség bizonyítása:

Ehhez tekintsük a test egy  $\mathbf{P}$  pontját körülvevő,  $\Gamma$  -val határolt területen (47.ábra) vett

$$\text{következő integrál értékét } J = \oint_{\Gamma} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds$$



47. ábra. A J-integrál útfüggetlensége

Feltételezések:

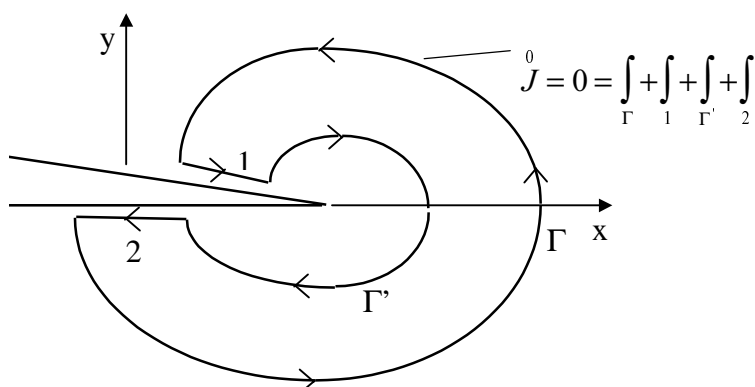
- EQUIL. - az elemek egyensúlyban vannak, feszültség alatt
- az alakváltozás-elmozdulás kapcsolatok lineárisak (kismértékű alakváltozás, kismértékű elfordulás)
- A Green - Gauss tételt alkalmazzuk
  - Magában foglalja a folyamatos elmozdulásokat, feszültségeket, stb. az  $x$  tengely irányában  $W = W(\epsilon_{ij})$

RICE rámutatott, hogy ezen feltételezések mellett:

$$J = \oint_{\Gamma} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \equiv 0$$

Ezt a megfontolást repedésre alkalmazva tekintsük a 48. ábrát.

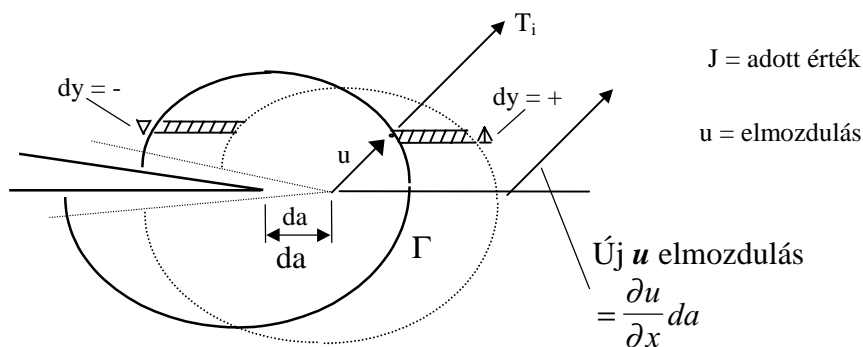
48. ábra. A J-integrál repedésre alkalmazva



Mivel az '1' és '2' mentén:  $dy = 0$ ,  $T_i = 0$ , így  $\therefore \int_1 = \int_2 = 0$ , ill.  $\int_{\Gamma} = + \int_{\Gamma'}$

Így tehát az integrál valóban út független. Ebből adódóan a J-nek kapcsolatban kell állnia  $K$ -val rugalmas körülmények között.

Most értelmezzük a  $J$ -t rugalmas körülmények között. Ehhez tekintsük a 49. ábrát.



49. ábra. A J-értelmezése rugalmas viszonyok között

Hagyjuk a repedést terjedni, és ezzel együtt az mozdulni  $\Gamma$ -t.

Bontsuk fel a  $J$ -t összetevőire:

$$\int w dy da = \text{bennfoglalt energia}$$

ahol

$$w = \frac{\text{alakváltozási energia}}{\text{térfogat}}$$

Az  $\int T_i \frac{\partial u}{\partial x} da$  = a kontúr mentén végzett további munka.

A  $\frac{J da}{da} = \int w dy da - \int T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds da = G$  nem más, mint a területegységre eső energia a repedés-csúcs területén.

Ha  $w = \frac{\text{alakváltozási energia}}{\text{térfogat}}$ , akkor  $J = G$ ,

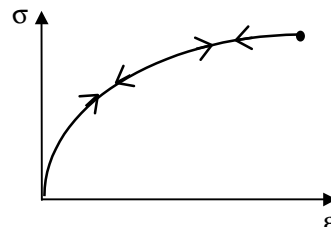
de képlékeny anyagok esetén  $w \neq \frac{\text{alakváltozási energia}}{\text{térfogat}}$ , mert az energia máshol nyelődött el.

*Alternatív lehetőségek:*

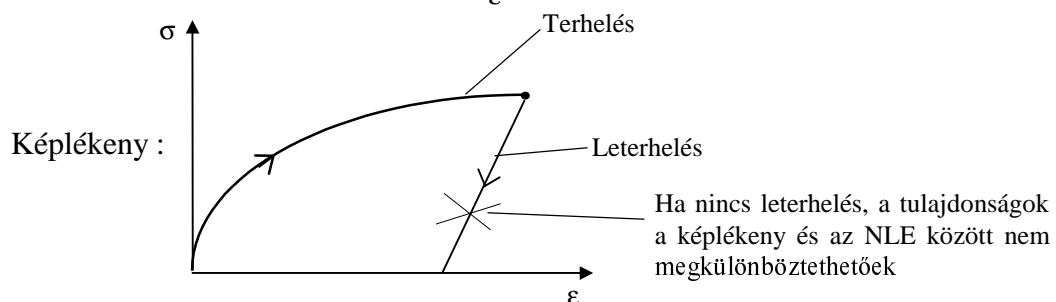
Különbség van a nem lineáris rugalmas (NLR) és a képlékeny anyagok között. Ez látható a

$\sigma$ - $\epsilon$  görbéken (50. és 51. ábrák)

NLR:



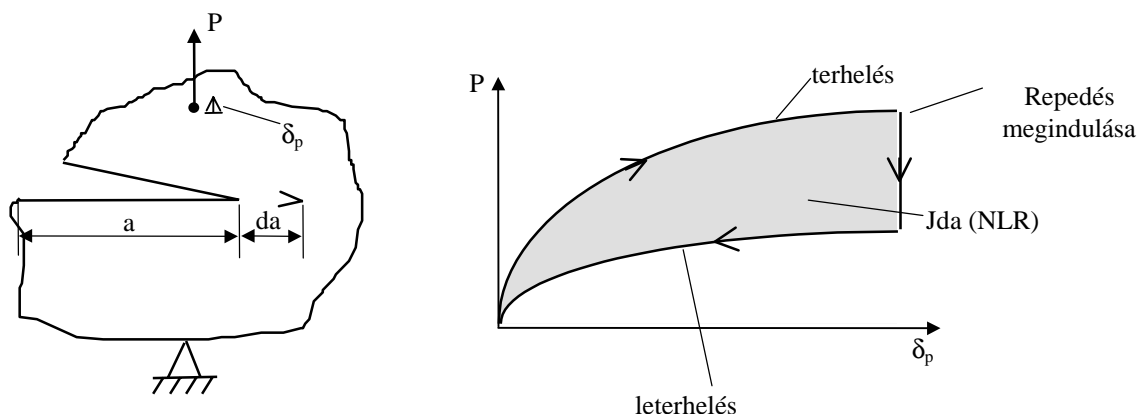
**50. ábra.** Nem lineárisan rugalmas anyag  $\sigma$ - $\epsilon$  görbéje



**51. ábra.** Képlékeny anyag  $\sigma$ - $\epsilon$  görbéje

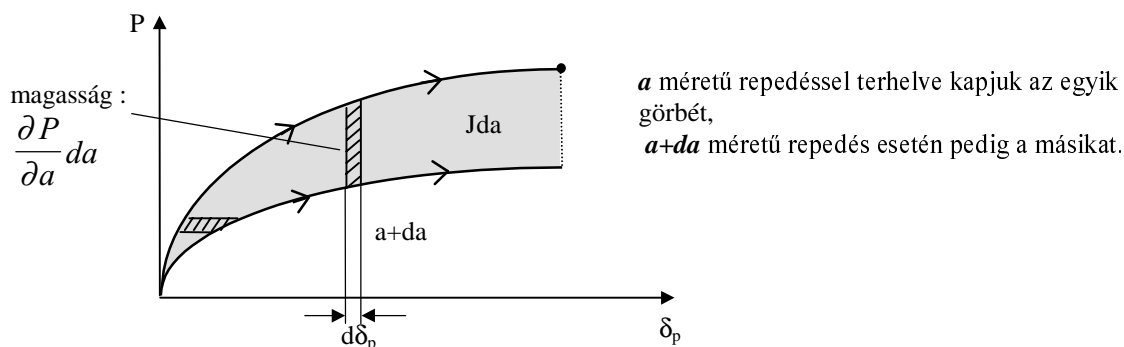
Tehát egy repedés csúcs közelében a  $\sigma$ - $\epsilon$  mező  $\sigma$  és  $\epsilon$  értékei felterheléskor ugyanakkorák lennének a két különböző típusú anyagnál, akkor integráláskor a  $J$  és a  $G$  ugyanaz lenne. Ebből adódóan tehát  $J$  egy NLR este meghatározója a képlékeny esetbeli  $J$ -nek is.

A továbbiakban vizsgáljuk egy  $a$  hosszúságú repedést tartalmazó **nem lineárisan rugalmas** testet, amelyre  $P$  erő hat. Ekkor a  $P$  erő  $\delta_P$  elmozduláson munkát végez és a repedés  $da$  értékkel megnő. A viszonyokat az 52. ábra szemlélteti.



52. ábra. A J-integrál értelmezése nem-lineáris anyag esetén

Képlékeny test esetén a viszonyokat az 53. ábra szemlélteti (nem NLR, de megegyező  $\sigma$ - $\epsilon$  görbe).



53. ábra. A J-integrál értelmezése képlékeny anyag esetén

A zárt terület még, mindig **Jda**.

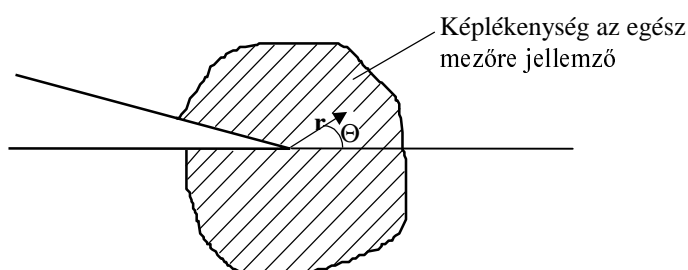
Most:

$$J = - \int_0^{\delta_p} \frac{\partial p}{\partial a} d\delta_p = \int_0^p \frac{\partial \delta_p}{\partial a} dp \quad \text{Ez a képlékenységtan alakváltozási elméletét alkalmazza.}$$

### 6.1.2. Repedéscsúcs feszültségmezeje

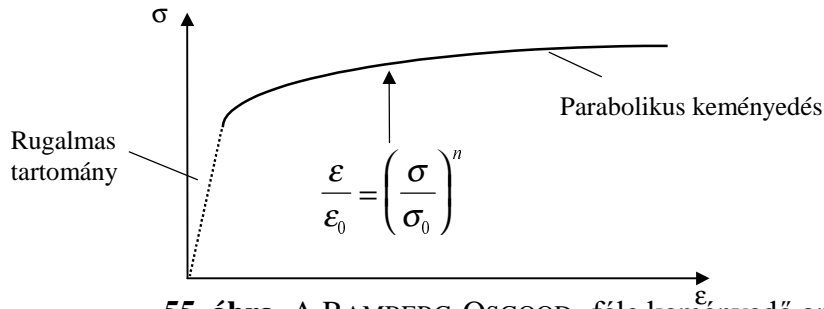
(HRR mezők), (lásd RICE, ROSENGREN, és HUTCHINSON 1968 )

Kérdés: Mire jó az előzőekben értelmezett **J**-integrál? Ehhez tekintsük az 54. ábrán látható repedéscsúcs közvetlen környezetét és elemezzük a képlékeny zónában kialakuló feszültségmezőt.



54. ábra. A repedéscsúcs képlékenyen alakváltozott környezete

Mindkettő feltételezte, hogy a  $\sigma$ - $\varepsilon$  görbe a következőképpen néz ki (55. ábra):



55. ábra. A RAMBERG-OSGOOD- féle keményedő anyag

Ugyancsak feltételezték a képlékenységtan alakváltozási elméletét. A görbe rugalmas részének nincs jelentős szerepe a felírt egyenletekben, mivel az anyagok messze voltak a görbe négyzetesen keményedő szakaszától.

A mező egyenleteket a következők írták föl:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left( \frac{J}{\sigma_0 \varepsilon_{0r}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \sum_{ij} (\theta, n)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left( \frac{J}{\sigma_0 \varepsilon_{0r}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \sum_{ij} (\theta, n)$$

Ezek a HRR (HUTCHINSON RICE, ROSENGREN) mezőegyenletek.

Rugalmas esetben  $n=1$ , a nevezőben  $K$ -t kapunk ( $J=G = K^2/E$ ) és  $r^{1/2}$ -t a számlálóban. Ez éppen az, amit korábban a rugalmas esetben kaptunk.

Ez a törési kritériumok vizsgálatához vezet minket.

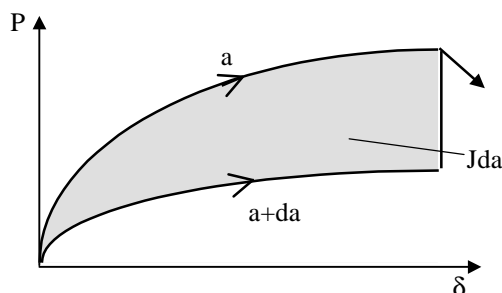
És ismét:

$$J \longrightarrow J_{Ic} \text{ a repedés terjedés kezdete.}$$

↑  
Síkalakváltozási állapot

BEGLEY és LANDES ugyanehhez az eredményhez jutottak kizárólag kísérleti úton. (lásd BEGLEY, LANDES 1972 ). Munkájuk lényege:

$J$  meghatározásához a compliance (reciprok rugóállandó) módszert használták. Ezt szemlélteti az 56. ábra.

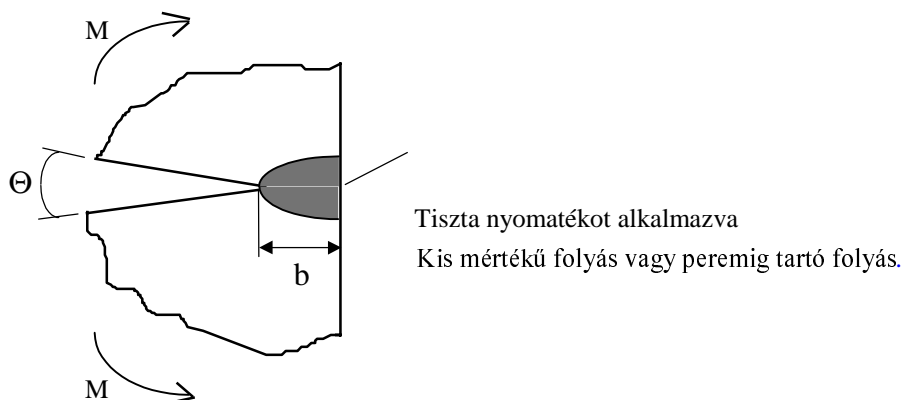


56. ábra. A J-integrál meghatározása

Azon **J** értéket határozták meg, amikor a repedésterjedés először kezdődik. Ezután a kísérletet még egyszer végrehajtották ugyanazzal az anyaggal, de más konfigurációt és más repedés méretet alkalmazva és megfigyelték, hogy a repedésterjedés ugyanannál a kritikus **J** - értéknél kezdődik.

Tehát a **J** a **K**-hoz hasonló kulcs-paraméter a törésmechanikai mező egyenletekhez.

Alkalmazzuk ezeket az 57. ábrán szemléltetett módon.



**57. ábra.** A külső erők munkája és a képlékeny alakváltozás

Ekkor a **J** értéke:

$$J = - \int_0^{\theta} \frac{\partial M}{\partial a} d\theta, \quad \text{ahol } a \text{ a bemetszés (repedés) felületeinek}$$

szögelfordulása, szétnyílása  $\theta = \theta(M, b, \text{anyagjellemzők})$ . Így:

$$\theta = \theta\left(\frac{M}{b^2}, \text{anyagjellemzők}\right), \text{ amelyből}$$

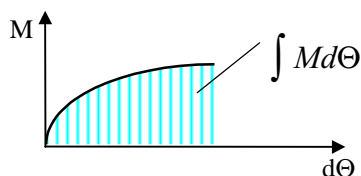
$\therefore M = b^2 f(\theta, \text{anyagjellemzők})$  Ez a nyomatéknak a függvényyszerű alakja.

Figyelembe véve, hogy a repedés megindulásának pillanatában  $da = -db$ , írhatjuk, hogy

$$\therefore J = \int_0^{\theta} \frac{\partial M}{\partial b} d\theta = \frac{2}{b} \int b^2 f(\theta, \text{anyagjellemzők}) d\theta$$

Így:

$$J = \frac{2}{b} \int_0^{\theta} M d\theta, \text{ amelyet az 58. ábra szemléltet.}$$



**58. ábra.** A terhelés során végzett munka

Azaz:  $\int_0^{\theta} M d\theta$  a terhelés alatt végzett munka, így a **J** nem más, mint:  $J = \frac{2}{b}$  (a test

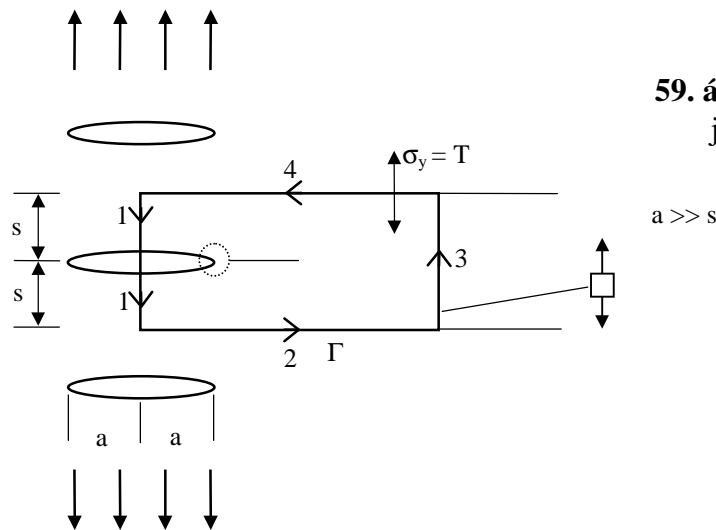
**felterheléséhez végzett munka**) az előzőekben ismertetett konfiguráció esetében.

A továbbiakban szó lesz a **J**-ről, mint egy eszközzel, és mint egy törési kritériumról.

## 7. Hatodik előadás

### 7.1. Periodikus repedések

A J-integrál koncepciójának alkalmazására tekintsük a periodikus repedések 59. ábrán bemutatott következő esetét.



59. ábra. A periodikus repedések jellemzése a J-integrállal

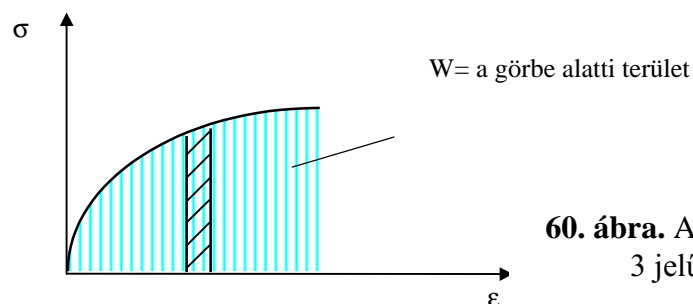
**Feladat:**

Számítsuk ki a J-t valamely repedéscsúcsra, azaz a  $J = \int_{\Gamma(1 \rightarrow 4)} w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \int_3 w dy$  értékét.

Vegyük körbe a repedést az ábrán feltüntetett négyszöggel, amelynek szakaszaira érvényesek a következő feltételek:

- 1.  $w = 0$  és  $T_i = 0$
- 2.  $dy = 0$  és  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$
- 3.  $\int_3 w dy$   $T = 0$
- 4.  $dy = 0$  és  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

Emlékezzünk vissza:  $w = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \int \sigma d\epsilon$ , ami nem más mint a 60. ábrán látható  $\sigma - \epsilon$  görbe alatti terület.



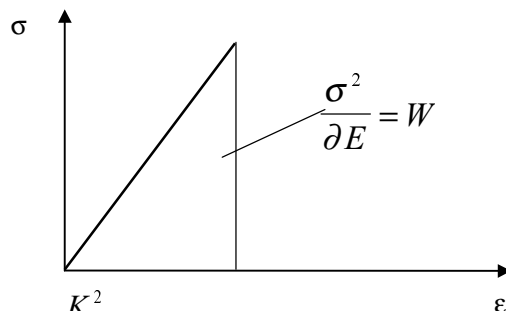
60. ábra. A J-integrál értéke a 3 jelű szakaszon.



Az előzőkből adódóan azt kapjuk, hogy

$$\therefore J = \int_3 w dy = Ws.$$

Az eredmény helyes, a feszültség-alakváltozás görbét teljes mértékben figyelmen kívül hagyva, azaz az anyag lehet képlékeny, lineárisan rugalmas, nem-lineárisan rugalmas egyaránt. Első lépésben vegyük a lineárisan rugalmas esetet. Ekkor A  $\sigma - \epsilon$  görbe lineáris (61. ábra)



**61. ábra.** A J-integrál értéke rugalmas anyagnál

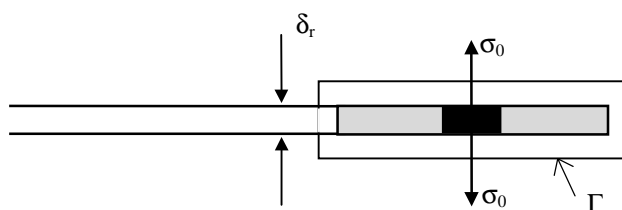
$$\text{Ekkor } \therefore J = \frac{\sigma^2}{2E} s = G = \frac{K^2}{E}$$

Lineárisan rugalmas körülmények között

$$\text{Amiből } \therefore K = \sigma \sqrt{\frac{s}{2}}$$

## 7.2. Képlékeny ék modell

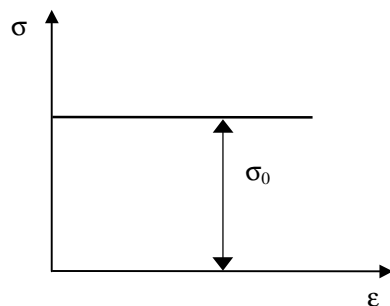
Egy újabb repedéscsúcs modell lehet az, ha a csúcs környezetében az anyag teljes mértékben megfolyik. Ennek modellezésére tekintünk a 62. ábrát.



Feltételezzük, hogy a repedés előtti képlékeny terület az anyag maradó alakváltozást szenvedett része.

**62. ábra.** A „képlékeny ék” modell

Feltételezzük, hogy a megfolyt anyagsáv merev képlékeny, azaz az anyagegyenlet a 63. Ábrának megfelelő.



**63. ábra.** A repedéscsúcs képlékeny zónájának merev-képlékeny anyagegyenlete

Számítsuk ki a  $J = \int w dy - T_i \frac{\partial U_i}{\partial x} ds$  értékét a következő peremfeltételek figyelembevételével:

mindenütt, ahol  $dy = 0$ ,  $T_i = \sigma_0$ ,  $ds = dx$ .

Ekkor marad a  $\therefore J = \sigma_0 \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = \sigma_0 \delta_T$ , ahol  $\delta_T$  = repedési szétnyílás.

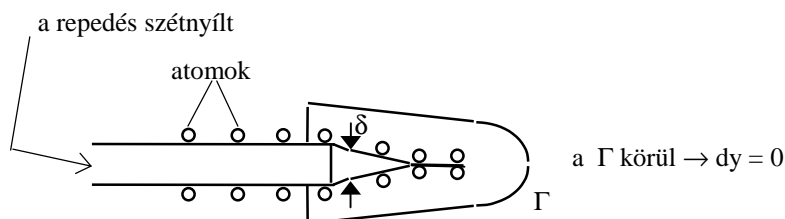
Tehát **J** kapcsolatban van a repedés szétnyílásával, azaz  $\therefore J = c\delta_T$ . Tehát a törési **J**-elméletek ekvivalensek a repedés szétnyílási elméletekkel, következésképpen a  $\delta_T \longrightarrow (\delta_T)_{CR}$  mint törési kritérium ugyanaz, mint a  $J \longrightarrow J_{CR}$ .

A repedés kinyílási elmélet nem volt széles körben elfogadott, mivel nincsenek analitikus módszerek a  $\delta_T$  meghatározására. **J** koncepció ellenben gyorsan elterjedt, mert ez meglehetősen analitikus.

### 7.3. Más törés modellek

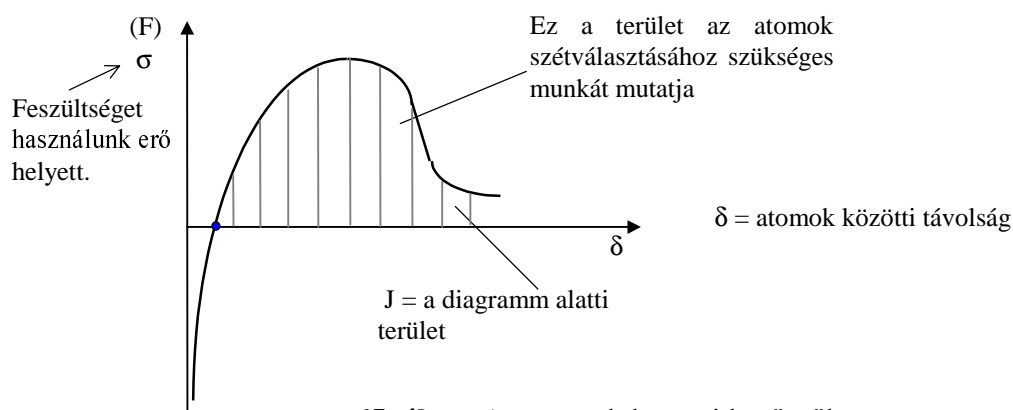
#### 7.3.1. A kohéziós erő elmélet ideálisan rideg anyagokhoz

Tekintsük a repedéscsúcs környezetének a 64. ábrán feltüntetett „atomisztikus” modelljét.



**64. ábra.** A repedéscsúcs „atomisztikus” modellje

Az atomok között működő kötőerő a köbös és a négyzetes tagok kombinációja, mint ahogy azt a 65. ábra szemlélteti.



**65. ábra.** Az atomok közötti kötőerők

Ekkor a  $\therefore J = \int \sigma \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int \sigma d\delta$  és a töréshez szükséges energia, a  $G = 2\gamma \rightarrow$  szintén egyenlő a görbe alatti területtel.

Összefoglalásként azt mondhatjuk, hogy a **J** koncepció az összes korábbi törési elméletet egyesíti magában.

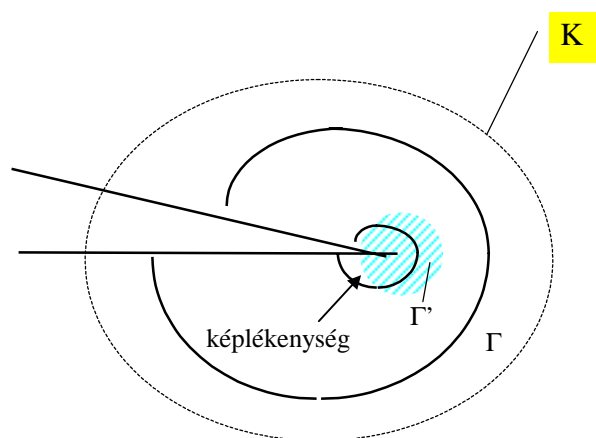
#### 7.4. Vizsgálati módszerek, követelmények

(lásd BEGLEY és LANDES 1972 )

Törési feltétel:

$$J \longrightarrow J_{IC} \text{ a repedés terjedés kezdete, azaz } J \longrightarrow J_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{E'}$$

Nézzük mi történik ekkor a repedés csúcsában (66. ábra)!

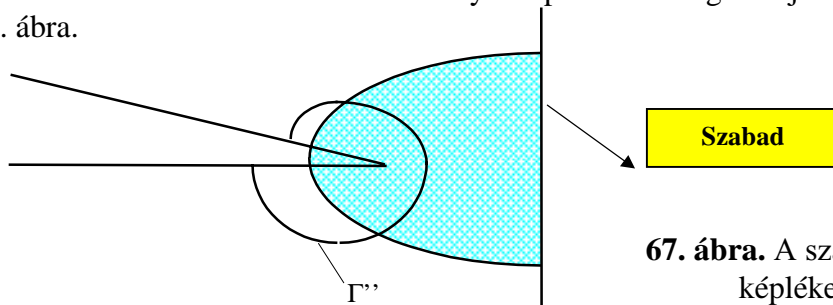


$\Gamma$  és  $\Gamma'$  ugyanazt a  $J$ -t adják

**66. ábra.** A repedés-megindulás pillanatának jellemzése a  $J$ -integrállal

$$J = \frac{K^2}{E'}$$

Ezt az eredményt összehasonlíthatjuk olyan más kísérletek eredményeivel is, ahol a perem a repedés csúcsához közel található és a folyás a perem széléig kiterjed. Szemléltesse ezen esetet a 67. ábra.



**67. ábra.** A szabad felületig kiterjedő képlékeny alakváltozás

Ha a testet terheljük és megmérjük a repedés növekedést és azt a **J** értékével jellemezzük, akkor azt tapasztaljuk, hogy mindkét esetben a **J** azonos értékeinél indul meg a repedésterjedés.

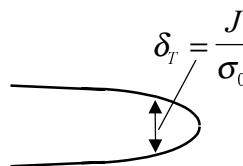
Az első eset egy  $K_{IC}$  vizsgálat, a második vizsgálat a **J** integrálon alapuló teszt lehetett (teljesen képlékeny eset). Úgy találták, hogy ugyanazt az eredményt kapták a teljesen képlékeny anyag esetében, mint a lineárisan rugalmas esetben.

Először BEGLEY és LANDES ismerték fel, hogy a HRR mezők határozzák meg a feszültségmezőt és a problémák valójában hasonlóak. Ez a felfedezés a  $K_{IC}$  vizsgálatokra vonatkozó méretbeli követelmények kisebb mértékben való korlátozását jelentette, hisz

eredetileg a próbatest vastagságára vonatkozó kritérium:  $B \geq 2,5 \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2$

Így a lineárisan rugalmas esetre irányuló vizsgálatok helyett a kisebb **J**-integrálos típusú vizsgálatok végezhetők és pénz takarítható meg.

Azt szintén felismerték, hogy a síkalakváltozási állapotban végzett  $K_{IC}$  vizsgálatoknál a méretbeli kívánalmaknak megfelelő követelménnyel a **J**-integrál típusú vizsgálatoknak is rendelkezniük kell. Ezt szemlélteti a 68. ábra.



$$\delta_r = \frac{J}{\sigma_0}$$

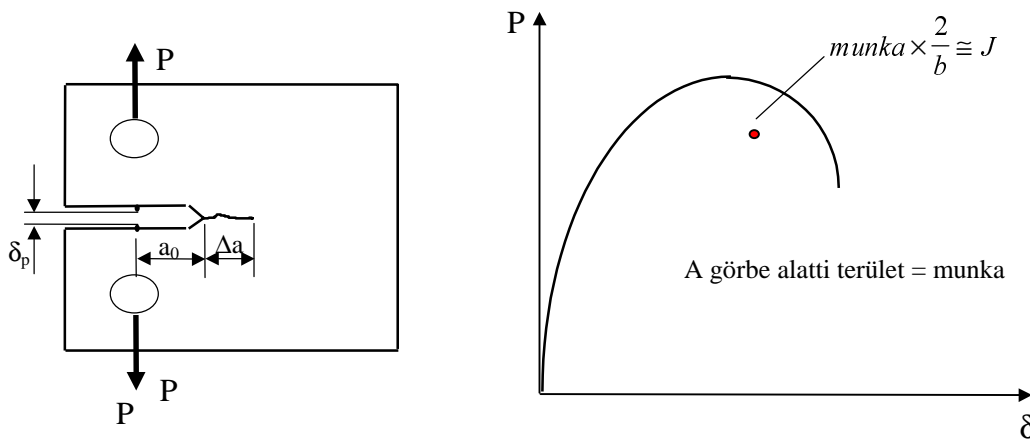
$$\therefore \frac{J}{\sigma_0} \leq \frac{B}{25}$$

**68. ábra.** A **J**-integrál mérésére vonatkozó vastagsági kritérium  
( $B$  – a próbatest vastagsága)

Vagy  $B \geq 25 \frac{K^2}{E \sigma_0}$

Így a **J**-integrál mérése esetén a méret a  $K_{IC}$  vizsgálatbeli méretnek mindössze 1/100-a is lehet ahhoz, hogy a síkbeli alakváltozási állapotot fenntartsuk.

A modern vizsgálatoknál a tipikus kompakt próbatest még mindig használatban van. Ezt szemlélteti a 69. ábra.

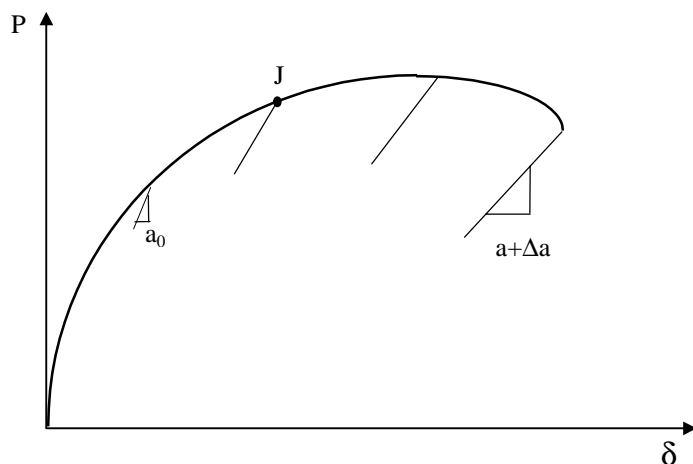


**69. ábra.** A **J**-integrál mérése CT típusú próbatesten

Az erő vonalának elmozdulását, a  $\delta_p$ -t a terhelések közötti vonal mentén mérik.

Hogy **J**-t megkapjuk, a 2 értéket a  $J \equiv munka \times \frac{2}{b}$  összefüggésben némileg módosítani kell a CT vizsgálati konfiguráció miatt.

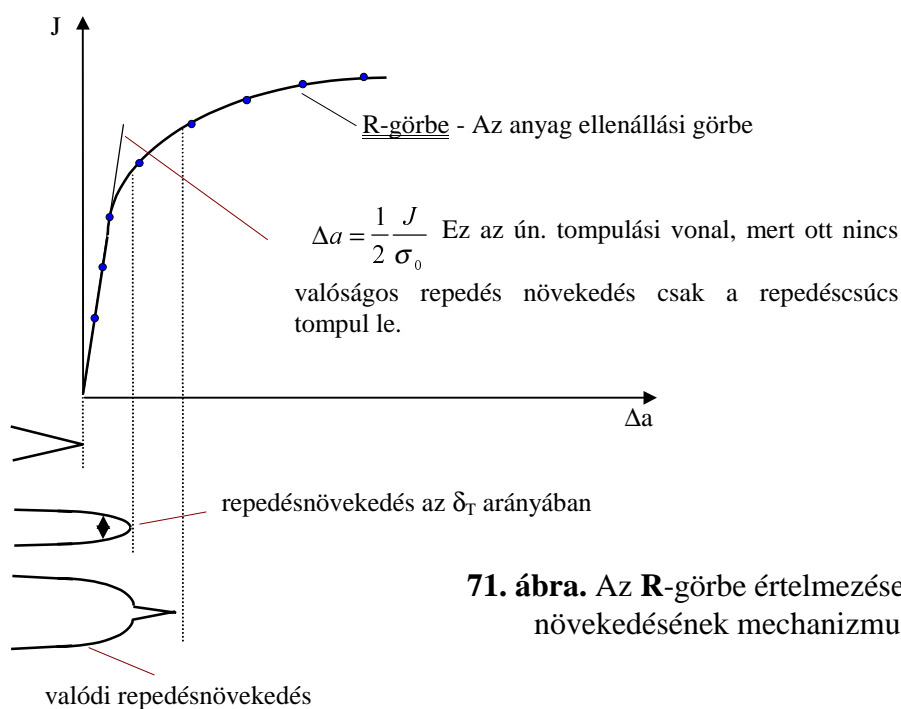
Valamilyen módon meg kell határozni a  $\Delta a$ -t. Ehhez először terheljük, majd egy kissé leterheljük a próbatestet mint ahogy azt a 70. ábra mutatja.



A terhelés megszüntetése lineárisan rugalmas, így a merevedétség arányos a repedés mérettel.

**70. ábra.** A repedés növekedés, a  $\Delta a$  mérése leterheléssel eljárásal

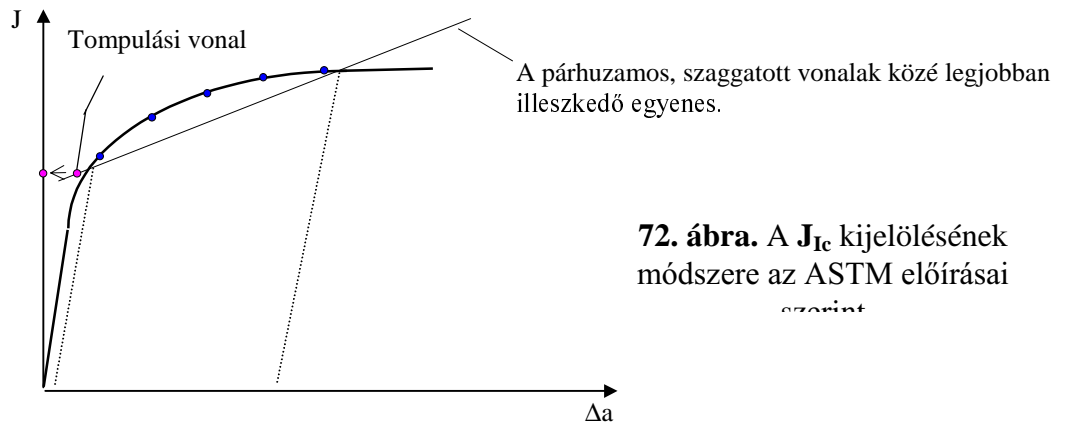
Így bármely pontban megkaphatjuk a  $J$  értékét és a repedés méret változását. Ez látható a 71. ábrán bemutatott diagrammon, az ún. **R**-görbén (**R**esistance- ellenállás).



**71. ábra.** Az **R**-görbe értelmezése a repedés növekedésének mechanizmusával

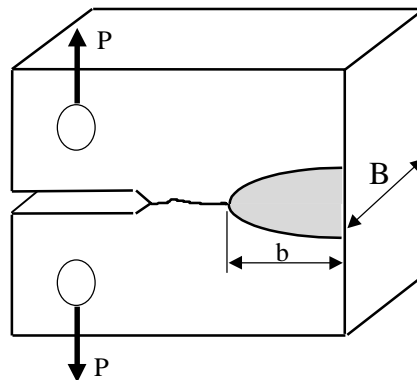
Így találunk kell valamilyen módot arra, hogy a valódi repedés növekedés keletkezését definiáljuk (lásd ASTM E 813 ). E módszert szemlélteti a 72. ábra.

A tompulási vonal és a illeszkedő egyenes metszéspontja a  $J_{IC}$ , a jelentős repedésnövekedés kezdete. Ez a pont az jelentős repedésnövekedés kezdete nem pedig a ténylegesé.



**72. ábra.** A  $J_{Ic}$  kijelölésének módszere az ASTM előírásai szerint

Egyéb a vizsgálatokkal kapcsolatos megjegyzés a képlékeny zóna mérete és szabad felület kölcsönhatásából adódhat. Ezt érzékelteti a 73. ábra.



**73. ábra.** A képlékeny zóna hatása a próbatest vastagságával szemben támasztott követelményekre.

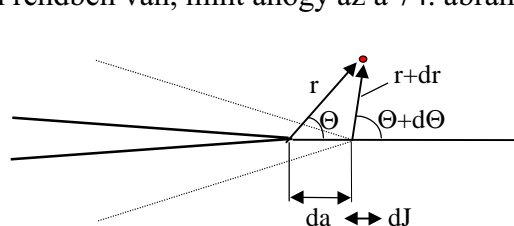
A képlékeny tartományban található csúszási mezők a  $B$  vastagság és a  $b$  méret viszonyától függenek. Kiegészítés a méretbeli követelményekhez:

$b \leq B$  ahhoz, hogy a repedéscsúcs előtt fenntartsuk a síkalakváltozási állapotbeli csúszási mezőket, amelyek nem befolyásolják a törés mechanizmusát másként, mint a síkalakváltozás.

### 7.5. $J$ által kontrollált repedés növekedés

(lásd HUTCHINSON és PARIS 1979 )

A  $J$ -vel kapcsolatban feltételeztük, hogy:  $W = W(\varepsilon_{ij}) \rightarrow$  A képlékenységi alakváltozási elmélet feltételezése szerint. Szeretnénk erről meggyőződni. Arányos (szimmetrikus) igénybevétel esetén rendben van, mint ahogy az a 74. ábrán követhető.



$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left( \frac{J}{\sigma_0 \varepsilon_0 r} \right)^{\frac{n}{n+1}} E_{ij}(\Theta, N)$$

Így  $r, \Theta, a, J$  mind változnak.

**74. ábra.** A  $J$ -kontrollált repedésnövekedés

Azt szeretnénk tudni, hogy:  $d\varepsilon_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ ? Ehhez vegyük figyelembe azt, hogy

- $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(J, r, \Theta)$
- $d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial J} dJ + \left[ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial r} \frac{dr}{da} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{da} \right] da$

Szeretnénk csökkenteni a változók számát. Ehhez tekintsük a következőket:

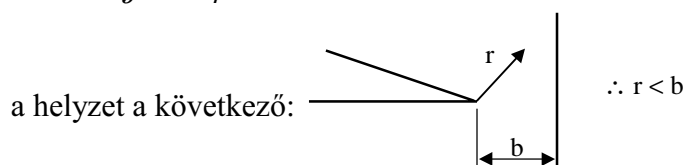
- $dr$  és  $d\Theta$  azért lépnek fel, mert  $da$  fellép
- $\therefore d\varepsilon_{ij} = \left[ \varepsilon_{ij} \left( \frac{n}{n+1} \right) \frac{dJ}{J} + \left[ r - \text{ben}, \Theta - \text{ban különböznek} \right] \frac{da}{r} \right]$   

arányos
nem arányos

Így a nem-arányos tényezőnek köszönhetően a feltételezés az, hogy:  $W = W(\varepsilon_{ij})$  nem érvényes. De, ha a nem arányos tényezők kicsik az arányosakkal összehasonlítva, akkor is rendben vannak a feltevéseink.

Minden rendben, ha:

$$\frac{dJ}{J} \gg \frac{da}{r}. \text{ Ehhez tekintsük a 75. ábrán vázolt viszonyokat.}$$

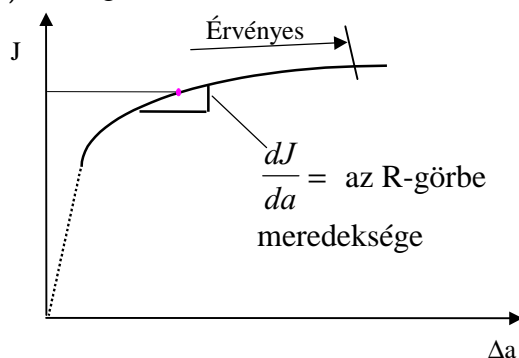


**75. ábra.** A szabad felület szerepe.

$$w = \frac{dJ}{da} \frac{b}{J} \gg l$$

Ennek igaznak kell lenni a  $J$  által meghatározott repedés-növekedéshez.

A  $W = W(\varepsilon_{ij})$ -re is igaznak kell lennie.



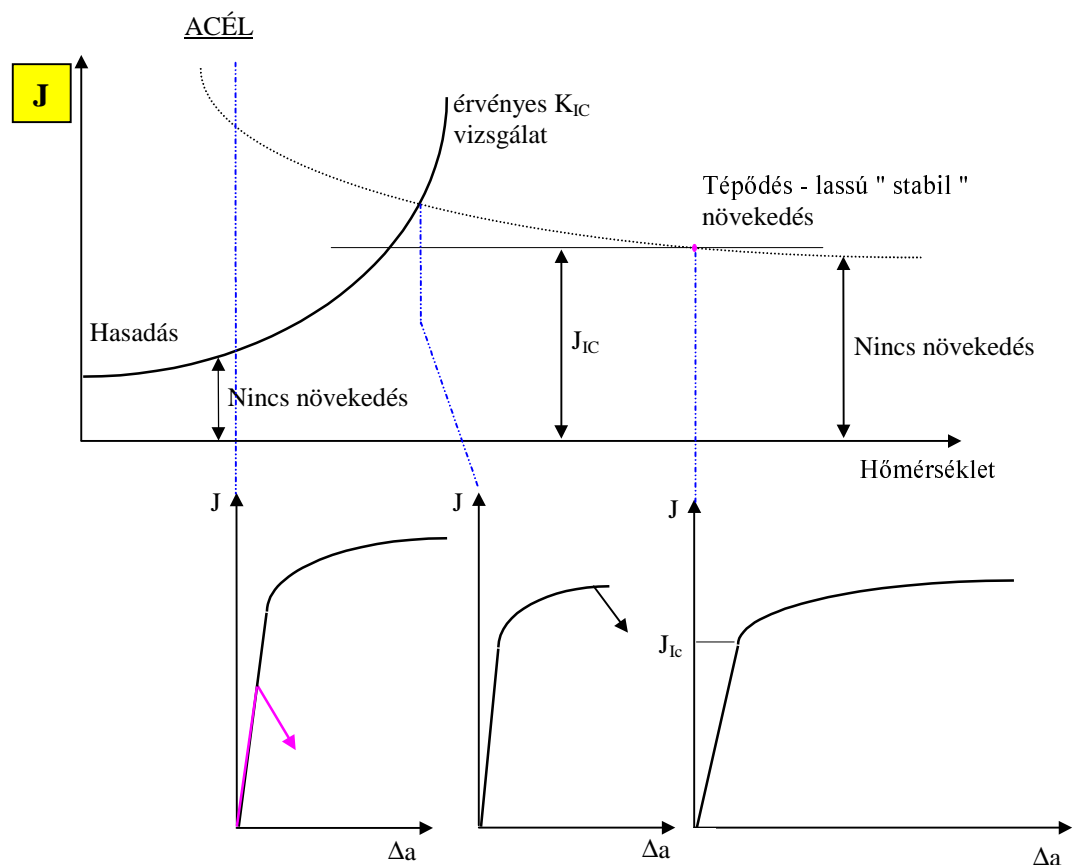
**76. ábra.** Az **R**-görbe érvényességi tartománya

Minél tovább megyünk,  $\frac{dJ}{da}$  csökken és  $J$  megnő, így a görbe egy adott pont után elveszti érvényességét (lásd a 76. ábrát). Tehát a görbe a korábbi méretbeli követelményekkel csak egy adott pontig érvényes. Másik méretbeli követelmény:  $\Delta a \leq 0.1 b$ .

## 8. Hetedik előadás

### 8.1. Anyagi tulajdonságok, anyagok viselkedése

Tekintsük a 77. ábrán látható acél viselkedését repedésnövekedés közben.



77. ábra. Az acél viselkedése repedésnövekedés során

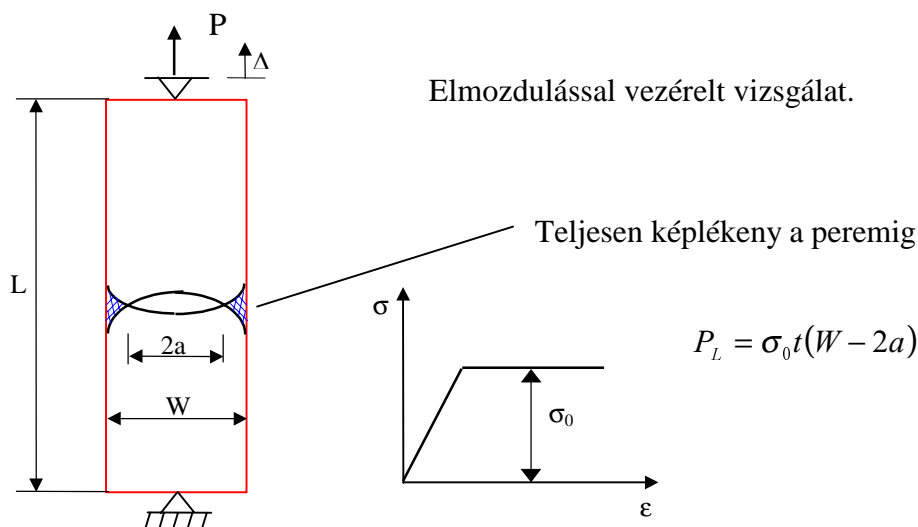
**Kérdés:** Tudunk-e a lassú stabil növekedési tartományban biztonságosan terhelni egy szerkezetet (ha  $J$  nagyobb mint a  $J_{IC}$ ) és ki tudjuk-e használni az  $R$  görbe távolabbi pontjait?

Ennek megválaszolásához a tépési (tépődési) tartomány vizsgálatára van szükségünk.

- repedések ott stabilak maradnak-e?
- az ezek meghatározására szolgáló számítások szükségese (lásd PARIS et. al. 1979 )

Vizsgáljuk meg a repedés instabilitást a repedés stabilitásának függvényében a 78. ábrán feltüntetett, elmozdulás által vezérelt vizsgálati körülmények között, ahol  $t$  = panel (elem) vastagsága.





78. ábra. Elmozdulással vezérelt vizsgálati eljárás

Instabilitás abban a pillanatban lép fel, ha  $\rightarrow da$  megjelenik, miközben a teljes elmozdulás-változás, a  $d\Delta = 0$ . Vizsgáljuk tehát a következő esetet  $da \rightarrow d\Delta = 0$

Ekkor felírhatjuk, hogy

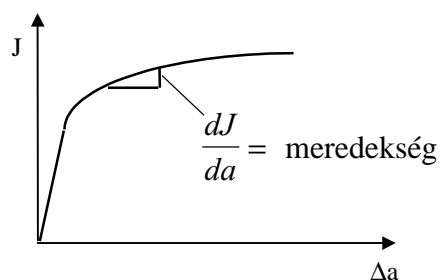
$$\Delta = \Delta_{\text{repedésnélküli}} + \Delta_{\text{repedés}} = \delta_T = \gamma \frac{J}{\sigma_0} = \frac{PL}{WtE} + \frac{\gamma J}{\sigma_0}, \text{ ahol } \gamma = 0,7-1$$

A deriváltat véve:  $d\Delta = \frac{LdP}{WtE} + \gamma \frac{dJ}{\sigma_0} = 0$  stabilitási feltétel

Amelyből:  $\therefore \frac{\sigma_0 t(-2da)L}{WtE} + \gamma \frac{dJ}{\sigma_0} = 0$

Most képezzük a  $\frac{dJ}{da}$ -t, amelyet a 79. ábra szemléltet:

79. ábra. A  $\frac{dJ}{da}$  értelmezése



$$T_{alk} = \frac{dJ}{da} \frac{E}{\sigma_0} = \frac{2L}{\gamma W} \geq \frac{dJ}{da} \bigg|_{\text{anyag}} \frac{E}{\sigma_0^2} = T_{anyag} \rightarrow \text{instabil eset}$$

$$T_{alk} = \frac{dJ}{da} \frac{E}{\sigma_0} = \frac{2L}{\gamma W} < \frac{dJ}{da} \bigg|_{\text{anyag}} \frac{E}{\sigma_0^2} = T_{anyag} \rightarrow \text{stabil eset}$$

ahol:

$\frac{dJ}{da} \frac{E}{\sigma_0} \rightarrow$  dimenzió nélküli mennyiség és a

$\frac{2L}{\gamma W} \rightarrow$  szerkezetre jellemző mennyiség. A

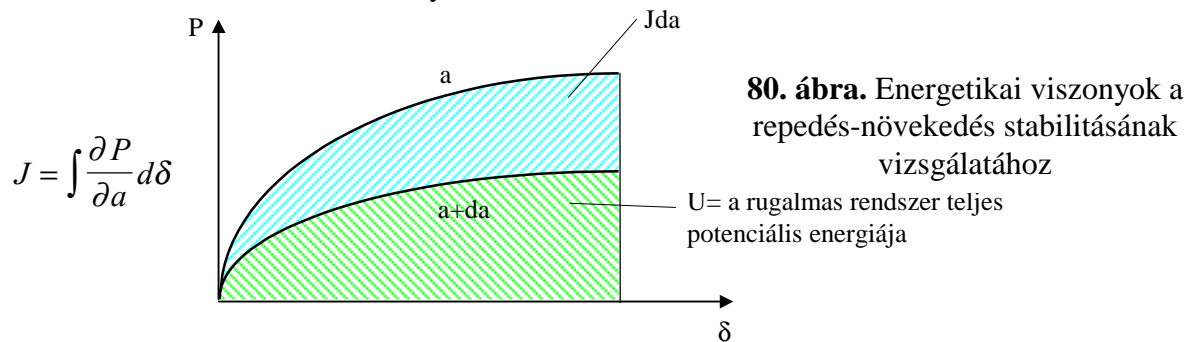
$\frac{dJ}{da} \bigg|_{\text{anyag}} \frac{E}{\sigma_0^2} = T_{anyag} \rightarrow$  kifejezés pedig az anyagra jellemző.

Mit értünk azon, hogy stabil, ill. instabil a repedésnövekedés?

**Instabil** → nem korlátozott, folyamatos repedésnövekedés, lényegében a repedés növekedés saját magát táplálja.

**Stabilis** → a repedés megállítja önmagát.

Most menjünk vissza és végezzünk egy sokkal általánosabb stabilitás elemzést! Ehhez tekintsük a 80. ábrán látható viszonyokat.



Az energia megváltozása repedésnövekedés közben:  $dU = Jda$ , azaz

$$J = \frac{dU}{da} = J(\delta, a) = J(P, a)$$

Ha  $J_{alkalmazott} = J_{anyag}$ , akkor → egyensúly

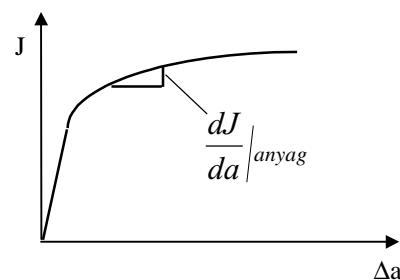
Ahhoz, hogy egy egyensúly stabilitását értelmezzük, vegyük a második deriváltat:

$$\left. \frac{dJ}{da} \right|_{alk} = \frac{d^2 U}{da^2} \geq \left. \frac{dJ}{da} \right|_{anyag} \rightarrow \text{instabil eset,}$$

$$\left. \frac{dJ}{da} \right|_{alk} = \frac{d^2 U}{da^2} < \left. \frac{dJ}{da} \right|_{anyag} \rightarrow \text{stabil eset.}$$

Az anyagra vonatkozó  $dJ/da$  érték pozitív, mint ahogy azt 81. ábra mutatja.

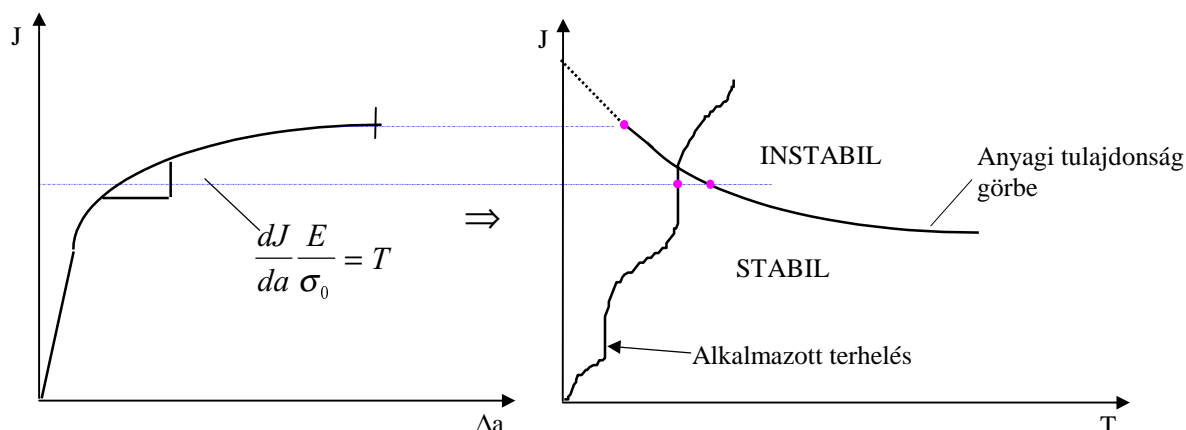
**81. ábra.** A  $dJ/da$  értelmezése



Szorozzuk végig  $\frac{E}{\sigma_0}$ -al. Ekkor kapjuk:

$$T_{alk} = \left. \frac{dJ}{da} \right|_{alk} \cdot \frac{E}{\sigma_0} \stackrel{E}{=} \left. \frac{dJ}{da} \right|_{anyag} \cdot \frac{E}{\sigma_0^2} = T_{anyag}$$

Ez részben egy formális de szigorú stabilitási kritérium a **J** – által determinált repedésnövekedésnek. Ez a fajta stabilitási ismérv könnyen ábrázolható és figyelemmel követhető a **J-T** diagrammon, amelyet a 82. ábra szemléltet.



82. ábra. J-T stabilitási diagrammok

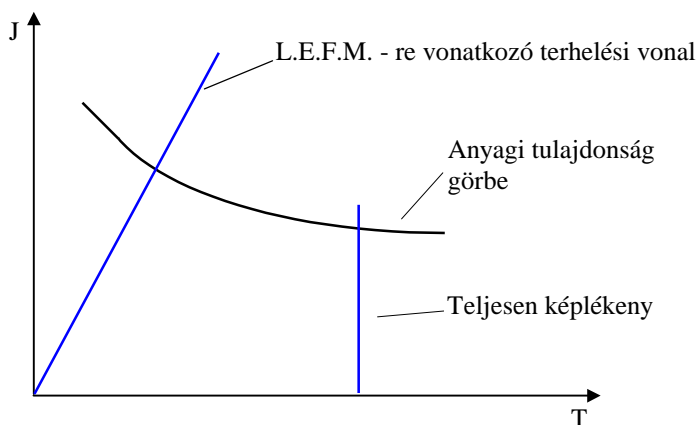
Egy adott  $J$  esetében, ha a  $T_{alkalmazott} < T_{anyag}$  stabil feltételeink vannak. Tehát az anyagi görbe felett és attól jobbra található az instabil tartomány, alatta és tőle balra a stabilis tartomány.

Most vizsgáljunk meg különféle terhelési, görbéket, történeteket, vonalakat.

Lineárisan rugalmas esetre, L.E.F.M. - re:  $G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} = J$ , ekkor

$$T = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ}{da} = \frac{\pi \sigma_0}{E} \frac{E}{\sigma_0^2} = \pi \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2$$

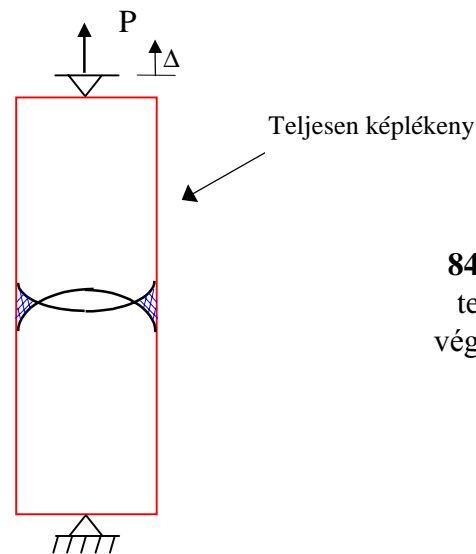
A viszonyokat a 83. ábra mutatja.



83. ábra. A stabilitási viszonyokat tükröző  $J-T$  diagram lineárisan rugalmas törési esetre

Teljesen *képlékeny* esetre a viszonyokat a 84. ábrán követhetjük. Ennek eredménye

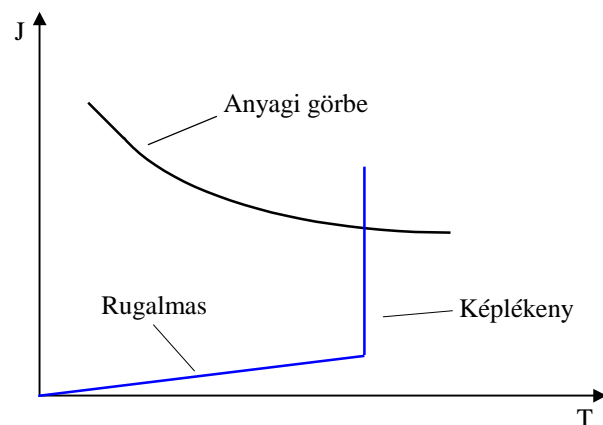
$$T_{alkalmazott} = \frac{\partial L}{\gamma W} = \text{állandó}$$



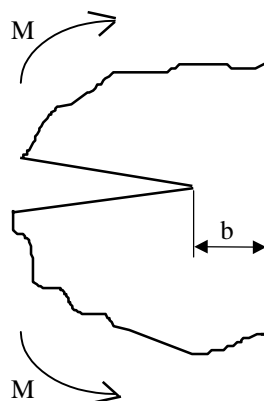
**84. ábra.** Stabilitási kritérium teljesen képlékeny anyagban végbemenő repedésnövekedésre

Rendszerint egy rugalmas és teljesen képlékeny feltételekből álló kombinációnk van, és egy a következőhöz hasonló görbét kaphatunk. Ezt mutatja a 85. ábra.

**85. ábra.** Rugalmas+képlékeny repedésnövekedés



Másik példa :



**86. ábra.** Stabilitási kritérium hajlításnál.

Vizsgáljunk meg egy olyan esetet, ahol  $\theta$  az elfordulás.

Először vizsgáljuk az instabilitást.

$$\Theta = F\left(\frac{M}{b^2}, \text{anyag tulajdonságok}\right)$$

Fordítsuk meg :

$$M = b^2 f(\Theta) \leftarrow \text{anyag tulajdonságok állandók, így kihagyhatók, } J = J(\theta, b).$$

A viszonyokat a 86. ábra szemlélteti.

$$\text{Ekkor } J = -\int \frac{\partial M}{\partial a} d\Theta = \int_0^\Theta 2bf(\Theta)d\Theta$$

Ahol:  $\frac{\partial M}{\partial a} = -\frac{\partial M}{\partial b}$ , így írható, hogy

$$dJ = \frac{\partial J}{\partial \Theta} d\Theta - \frac{\partial J}{\partial b} da = 2bf(\Theta)d\Theta - 2 \int_0^{\Theta} f(\Theta)d\Theta da, \text{ ill. } b^2 f(\Theta) = M, \text{ azaz}$$

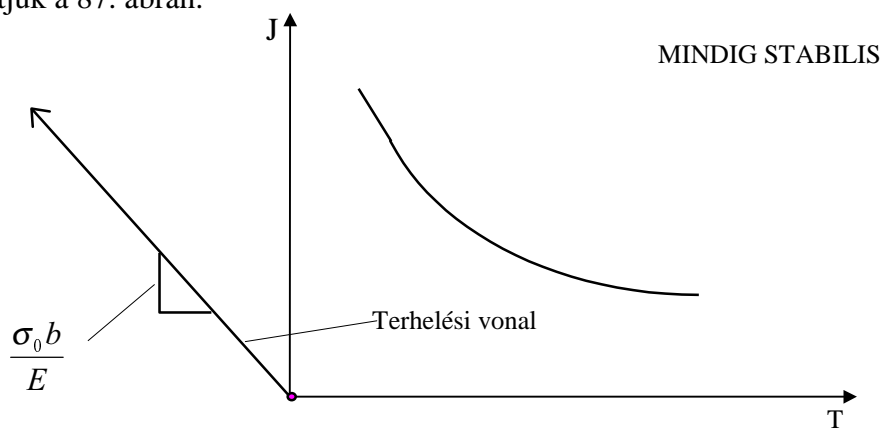
$$dJ = \frac{2}{b} d(\text{munka}) - \frac{J}{b} da.$$

$d(\text{munka}) = 0$  instabil állapotban, mivel a  $d\Theta = 0$  mikor a repedés végigszalad a lemezen.

Ekkor  $\therefore \frac{dJ}{da} = -\frac{J}{b}$

vagy:  $T_{alk.} = \frac{dJ}{da} \frac{E}{\sigma_0} = -\frac{J}{b} \frac{E}{\sigma_0} = \text{negatív}$

Ezt láthatjuk a 87. ábrán.



**87. ábra.** Stabilitási kritérium hajlításnál (pl. CT próbatest)

Fixen rögzített körülmények között  $K$  mindig csökkenni fog (az idő mindig gyorsabban telik, mint ahogy  $K$  növekszik, azaz a nyomaték gyorsabban csökken mint ahogyan  $K$  növekszik), ha a repedés rugalmas körülmények között mozdul előre.

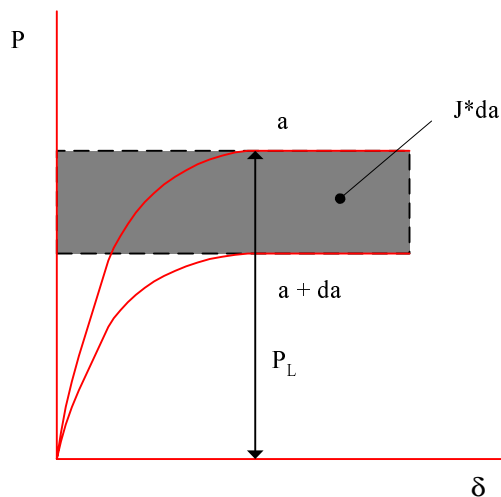
Összefoglalásként tehát azt figyeltük meg, hogy a kompakt próbatesten elmozdulás vezérléssel végzett vizsgálat mindig stabilis repedésnövekedést idéz elő.

## 9. Nyolcadik előadás

### 9.1. A $J$ becslése

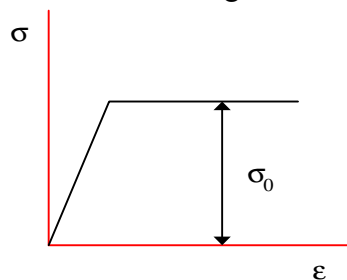
[Lásd: PARIS, BUCCI, LANDES, RICE, 1972.]

A  $J$ -integrál értékének becsléséhez regisztrálni kell a *terhelés-terhelés vonalának elmozdulása*. ( $P - \delta$ ) diagramot, mint ahogy azt a 88. ábra szemlélteti



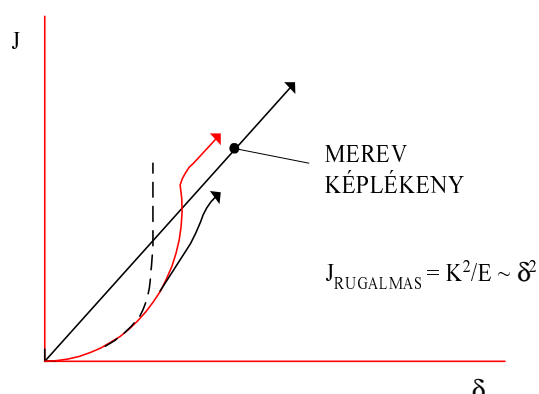
**88. ábra.** Terhelés-terhelés vonalának elmozdulása. ( $P - \delta$ ) diagram  $a$  és  $a+da$  repedéshosszaknál

Az anyag lehet nem lineárisan rugalmas, vagy ideálisan rugalmas-képlékeny. Ez utóbbira jellemző feszültség-alakváltozás ( $\sigma - \epsilon$ ) görbe a 89. ábrán látható.



**89. ábra.** Rugalmas-képlékeny anyagviselkedés

A  $J^*da$  értéke az ( $a$ ) illetve az ( $a + da$ ) terhelési görbék közötti területet jelenti a  $P - \delta$  diagramon. Ezen érték közelíthető a határterhelés kihasználásával. Ennek becsléséhez tekintsük a 90. ábrát, ahol néhány jellegzetes anyagtípus  $J - \delta$  diagramja látható.

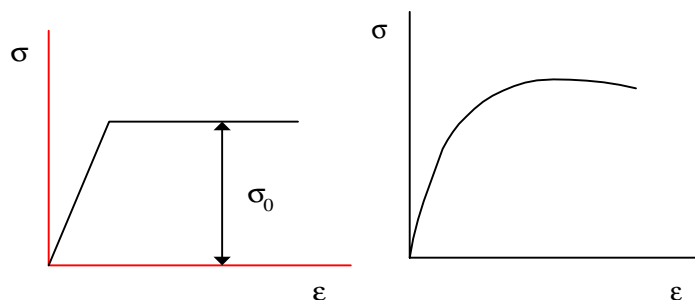


**90. ábra.** Anyag-specifikus, jellegzetes  $J - \delta$  diagramok

Rugalmas anyagegyenletnél a  $J - \delta$  parabolikus lesz.  $(P - \delta)$  diagram lineáris,  $J - \delta$  parabolikus). Definíció szerint

- $J = - \int \frac{\partial P}{\partial a} dS$
- $dJ = - \frac{\partial P_L}{\partial a} dS$

Így a lineáris  $\sigma - \epsilon$  görbe nagyon jól közelíti a merev képlékeny anyagviselkedést. Az elején (kis  $J$  és  $\delta$  értékeknél) fölülbecsli a  $J$ -integrált, majd az alakváltozás növekedésével egyre jobb és jobb becslést ad. Ezért a merev képlékeny elemzéssel jól lehet a  $J$ -integrált közelíteni azoknál az anyagoknál, amelyeknek, olyan szerkezeti tulajdonságaik vannak, amelyek egységes folyáshatárt produkálnak.



**91. ábra.** Különböző anyagtípusokra jellemző  $\sigma - \epsilon$  görbék

- a. rugalmas-ideálisan képlékeny
- b. nem lineárisan rugalmas

Kis szilárdságú szerkezeti acélok ezt nagyon jól követik. Azonban néhány anyag jelentékeny keményedéssel jellemezhető és ezáltal  $\sigma - \epsilon$  görbéjük a 91. b. ábrán látható. Ez utóbbi anyagok figyelembevételével is javasoltak eljárások a  $J$  értékének becslésére [Lásd: HUTCHINSON és GOLDMAN, 1975. ill. HUTCHINSON és SHIH, 1976.] A  $G.E$  szorzat számítására a keményedést leíró összefüggések figyelembevételével szintén kifejlesztettek módszereket elsősorban a végelemes analízist felhasználva.

Ennek egyik esete a Ramberg-Osgood egyenlet figyelembevétele:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n,$$

ahol az  $n$  a keményedési kitevő, a  $\sigma/\sigma_0$  a rugalmas rész, a  $\alpha(\sigma/\sigma_0)$  a keményedést leíró rész.

Az elemzések azt mutatták, hogy olyan anyagra, amelynek  $\sigma - \epsilon$  görbéjét a fenti Ramberg-Osgood egyenlettel lehet közelíteni a  $J$  értékére:

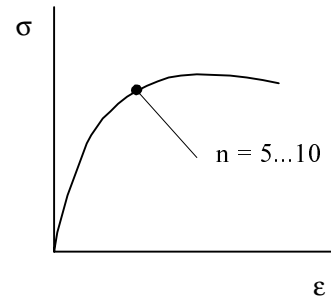
$$J = \underbrace{\sigma_0 \epsilon_0 a \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 \cdot f \left( \frac{a}{W} \right)}_{\text{Lineárisan rugalmas törésmechanikai kifejezés (A képlékeny tartomány } a=a_{\text{eff}} \text{-nél korrigált.)}} + \underbrace{\sigma_0 \epsilon_0 a \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n+1} \cdot h \left( \frac{a}{W}, \alpha, n \right)}_{\text{Ezeket a függvényeket a különböző konfigurációkra előállították.}}$$

Lineárisan rugalmas törésmechanikai kifejezés (A képlékeny tartomány  $a=a_{\text{eff}}$ -nél korrigált.

Ezeket a függvényeket a különböző konfigurációkra előállították.

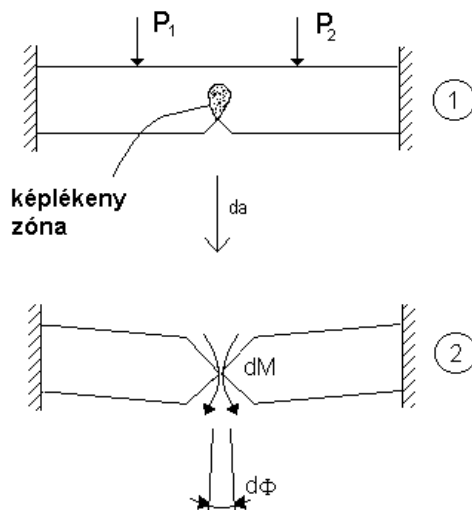
A J-integrált a fenti módon való két részre osztása nem teljesen indokolt, de gyakorlatilag nagyon jól alkalmazható a következők okok miatt:

- A keményedési kitevő általában  $n=5-10$  a használatos fémes anyagok többségére



- Egyfelől  $n$  értékei a  $\sigma_0$ -tól kisebb feszültségekre 5-től 10-ig változnak, és ekkor a második tag nagyon hamar nagyon kicsi lesz (elhanyagolhatóvá válik). Ez alapján azt lehet mondani, hogy a **J-integrálnak** ezen becslése az első tagtól függ, ami erre a tartományra nagyon jó közelítést ad. Másfelől  $\sigma_0$ -tól nagyobb feszültségekre a második tag a meghatározó. Ez szintén pontos becslést ad a keményedést leíró tagra. Így a teljes görbe mentén jó eredményeket kapunk. A téma további tárgyalása a HUTCHINSON-féle speciális előadásban található.

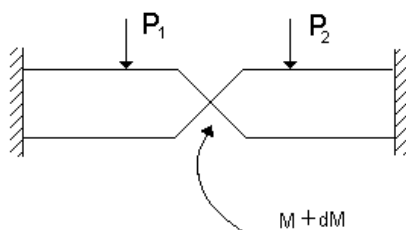
Feltételezve, hogy ez a módszer a gyakorlatban használható, nézzünk rá példát egy tartógerenda-szerű elem esetében, amely hajlításra terhelte és amely statikailag többszörösen határozatlan szerkezet [lásd: PARIS és TADA 1983.]. A viszonyokat a 92. ábra szemlélteti.



**92. ábra** Statikailag többszörösen határozatlan tartógerenda-elem, amelyre a J-integrált ki kell számolni.

Ha a repedéshossz  $da$ -val megnő, akkor a határ-nyomaték ( a terhelhetőségi határ) lecsökken; a nyomaték megváltozása miatt pedig a képlékeny zónánál levő  $\Phi$  szög változik meg  $d\Phi$ -vel.

A fenti fokozatok összeadása után egy módosult szerkezetet kapunk, amelyet a 93. ábra mutat.



**93. ábra** A törés előtti végső állapot az adott szerkezet esetében

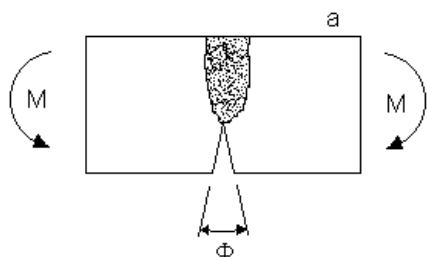


Ezután szeretnénk ismerni ennek a keresztmetszetnek a stabilitását. Amikor a repedésméret változik, akkor a nyomatékváltozás miatt a szög is megváltozik. A szög megváltozása a keresztmetszet alakváltozását megnöveli és ez még nagyobb repedésszétnyílást okozhat. Ha ez ciklikusan történik, instabilitás jelensége jelentkezik. A második lépésben:

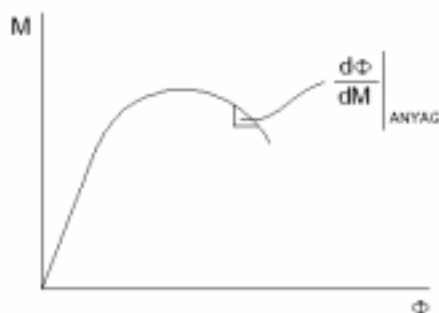
$$\left. \frac{dM}{d\Phi} \right|_{\text{SZERKEZET (rugalmas válasz)}} = \left. \frac{dM}{d\Phi} \right|_{\text{ANYAG}}$$

A szerkezet maradó merevsége. Ez a szerkezet válasza a nyomatékváltozásra.

A szerkezeten nincs terhelés a második lépésben, tehát nem kell ismernünk a terhelést a megmaradó merevség kiszámításához. Tudnunk kell a repedést tartalmazó keresztmetszet választát, amelyet sematikusán a 95. ábra mutat.



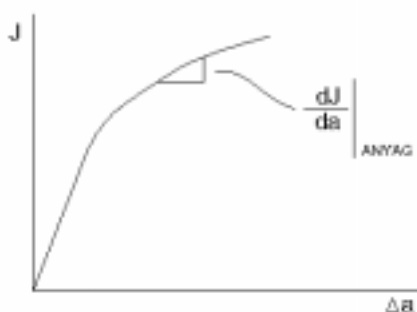
**94. ábra** A repedést tartalmazó keresztmetszet sémája



**95. ábra**  
A repedést tartalmazó keresztmetszet  
**M - Φ** (nyomaték - szögelfordulás)  
diagramja

$$\left. \frac{dM}{d\Phi} \right|_{\text{SZERKEZET}} \leq \left. \frac{dM}{d\Phi} \right|_{\text{ANYAG}}$$

Anélkül adódott ki egy stabilitási kritérium, hogy valaha is használni kellett volna a **J**-integrált; mindössze a keresztmetszettel kellett kísérletezni. Ha egy **anyagot** a J-R görbéje alapján szeretnénk értékelni (96. ábra).

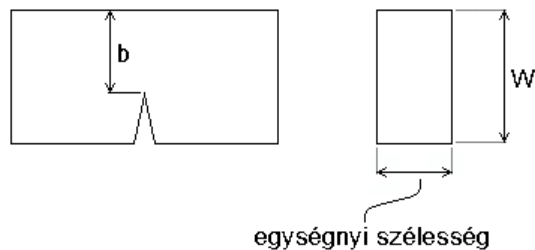


**96. ábra** . Az anyag **J-Δa**, a repedés terjedéssel szembeni ellenállásának diagramja

A  $J$  a következő alakban írható fel:

- $J = - \int \frac{\partial M}{\partial a} d\Phi = - \frac{\partial M}{\partial a} \Big|_{\Phi} \cdot \Phi$
- $\frac{dJ}{d\Phi} = \frac{dM_L}{da}$
- $\frac{dM}{d\Phi} \Big|_{\text{ANYAG}} = \frac{dM_L}{da} \cdot \frac{da}{dJ} \cdot \frac{dJ}{d\Phi} = \frac{\left( \frac{dM_L}{da} \right)^2}{\frac{dJ}{da} \Big|_{\text{ANYAG}}}$

Az előzők illusztrálására példaként vegyünk téglalap keresztmetszetet, amelynek jellemzőit a 97. ábra szemlélteti.

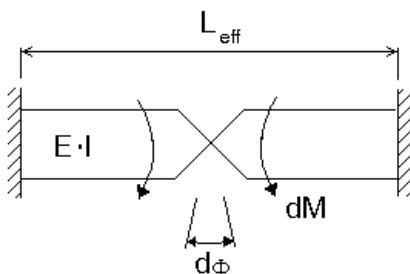


**97. ábra** Téglalap keresztmetszetű bemetszett tartó

A nyomaték  $M_L = \gamma \sigma_0 b^2$ , ahol  $I = \frac{W^3}{12}$  a keresztmetszeti tényező és a  $\gamma$  két szélső értéke  
 $\gamma = 0,25$  (síkfeszültségi állapotra)  
 $\gamma = 0,36$  (síkalakváltozási állapotra)

Ezzel  $\frac{dM_L}{da} = - \frac{dM_L}{db} = -\alpha \cdot 2 \cdot \sigma_0 \cdot b$ ,  $\frac{dM}{d\Phi} \Big|_{\text{ANYAG}} = \frac{4\alpha^2 \sigma_0^2 b^2}{\frac{dJ}{da} \Big|_{\text{ANYAG}}}$

Másik lehetőség a *szerkezet* felől való megközelítés. Ehhez tekintsük a 98. ábrát.



**98. ábra.** A határnyomaték, a stabilitási feltételek a szerkezet jellemzőinek figyelembevételével

Ha  $d\Phi$ : a rugalmas szögváltozás növekménye, akkor a keresett jellemző:  $\frac{dM}{d\Phi} \Big|_{\text{SZERKEZET}}$

Figyelembe véve, hogy  $d\Phi = \frac{dM L_{\text{eff}}}{E \cdot I}$  írhatjuk

$$\therefore \left. \frac{dM}{d\Phi} \right|_{\text{SZERKEZET}} = \frac{E \cdot I}{L_{\text{eff}}}$$

Ezzel tehát most már írhatjuk:

$$\left. \frac{dM}{d\Phi} \right|_{\text{SZERKEZET}} = \frac{E \cdot I}{L_{\text{eff}}} \geq \frac{4\alpha^2 \sigma_0^2 b^2}{\left. \frac{dJ}{da} \right|_{\text{ANYAG}}} = \left. \frac{dM}{d\Phi} \right|_{\text{ANYAG}}$$

A fenti kifejezést újraírva kapjuk:

$$48\alpha^2 \left( \frac{b^2}{W^2} \right) \frac{L_{\text{eff}}}{W} \geq \left. \frac{dJ}{da} \right|_{\text{ANYAG}} \cdot \frac{E}{\sigma_0^2} = T_{\text{ANYAG}}$$

Olyan tartók érdekelnek bennünket, amelyekben  $b \approx 1/2W$  és  $48\alpha^2 = 3-6$ , ezek körülbelül egységnyi  $L_{\text{eff}}/W$  tényezőt eredményeznek. Így:

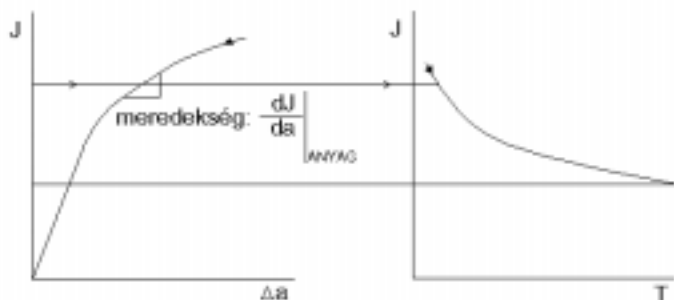
$$T_{\text{ALKALMAZÁS}} \cong \frac{L_{\text{eff}}}{W} \geq \left. \frac{dJ}{da} \right|_{\text{ANYAG}} \cdot \frac{E}{\sigma_0^2} = T_{\text{ANYAG}}$$

Ebből következően nem számít milyen összetett az eredeti szerkezet (pótlólagos képlékenység, rugalmasság, stb.) ki tudjuk számítani a megmaradó merevséget végeselemes módszerrel és megkaphatjuk az  $L_{\text{eff}}$  értékét. Így bármely szerkezetre el lehet végezni a számításokat és a stabilitást meg lehet határozni.

A következőkben levezetésre került néhány módszer, amellyel a J-integrált lehet kiszámítani és bemutatásra kerülnek ezen módszerek alkalmazása néhány szerkezetre.

Első példaként nézzünk meg a nyomástartó edények példáját és kövessük nyomon a J-integrál nukleáris nyomástartó edényekre való alkalmazásának fejlődését. [Lásd: PARIS és JOHNSON 1983.]

Emlékezőül tekintsük a következő (82.) ábrát:



99. ábra. J-T stabilitási diagramok

A **J** és **T** között kapcsolatot teremthetünk a **J** és  $\Delta a$  közötti kapcsolat segítségével:

$$T_{\text{ANYAG}} = \frac{dJ_{\text{ANYAG}}}{da} \cdot \frac{E}{\sigma_0^2}$$



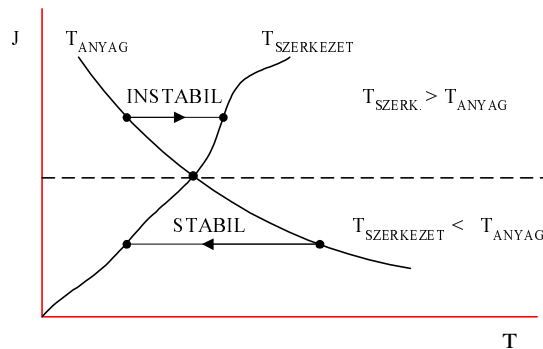
**100. ábra.** A J-T kapcsolat egy adott szerkezetre

Amikor az anyagtulajdonságokat kiszámítottuk, azok érvényességi határait kellett megállapítanunk:

$$\left. \frac{J}{T} \right|_{\text{ANYAG}} = \frac{J\sigma_0^2}{\frac{dJ}{da}E} = \frac{\sigma_0^2 b}{E\omega}$$

- $\Delta a$  határa:  $\Delta a = 0,1b \ll b$
- $\omega$  határa:  $\omega = 0,1b \ll 1$  (manapság néha 3-nak veszik)

Az anyagjellemző és a terhelési görbe viszonylatában a stabil és az instabil területeket a következő ábra szemlélteti:



**101. ábra** Stabil és instabil területek a **J – T** diagramon

## 9.2. Alkalmazási példák nyomástartó edényekre

### 9.2.1. $J_{\text{SZERKEZET}}$ és $T_{\text{SZERKEZET}}$ - Lineárisan rugalmas modell egész vastagságon áthaladó repedéssel

A nyomástartó edényekre, hengeres héjakra a  $J = \frac{K^2}{E}$  és  $K = \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \cdot Y(a)$  figyelembevételével számítható a feszültségintenzitási tényező és a J-integrál, ahol  $Y(a)$ : héj korrekciós tényező.

A szerkezetre jellemző J integrál értéke a következő módon számítható

$$J_{\text{SZERKEZET}} = \frac{\sigma_0^2 a}{E} \left\{ \frac{\pi \sigma^2}{\sigma_0^2} \right\} \cdot [Y^2].$$

ahol a  $\{ \}$  zárójelek a feszültséget, a

$[ ]$  zárójelek pedig a geometriát definiálják.

Állandó nyomásra:  $\frac{\partial \sigma}{\partial a} = 0$  vagy:

$$T_{\text{SZERKEZET}} = \frac{\omega_{\text{SZERKEZET}}}{da} \cdot \frac{E}{\sigma_0^2} = \frac{\partial J_{\text{SZERKEZET}}}{\partial a} \cdot \frac{E}{\sigma_0^2}$$

$$T_{\text{SZERKEZET}} = \left\{ \frac{\pi \sigma^2}{\sigma_0^2} \right\} \cdot [Y^2 + 2\lambda Y \cdot Y']$$

ahol a  $\lambda$  olyan tényező, ami tartalmazza a repedéshosszat. Ezek figyelembevételével

$$\frac{J_{\text{SZERKEZET}}}{T_{\text{SZERKEZET}}} = \frac{\sigma_0^2 a}{E} \cdot \left[ \frac{1}{Y^2 + \frac{2\lambda Y}{Y'}} \right]$$

Ez azt jelenti, hogy állandó repedésméretnél az erő növelésével (ha a feszültség megközelíti a folyáshatárt) a  $\mathbf{J/T}$ -re konstanst kapunk. Ez megfelel egy origón keresztülmenő egyenesnek, melynek a meredeksége  $\mathbf{J/T}$ , tehát a  $\mathbf{J-T}$  diagramon ez a terhelési vonal.

### 9.2.2. Lineárisan rugalmas törésmechanika - hengeres héj

Ismétljük meg azokat az egyenleteket, amelyek már korábban is megvoltak, azaz

$$J_{\text{SZERKEZET}} = \frac{\sigma_0^2 a}{E} \left\{ \frac{\pi \sigma^2}{\sigma_0^2} \right\} \cdot [Y^2], a$$

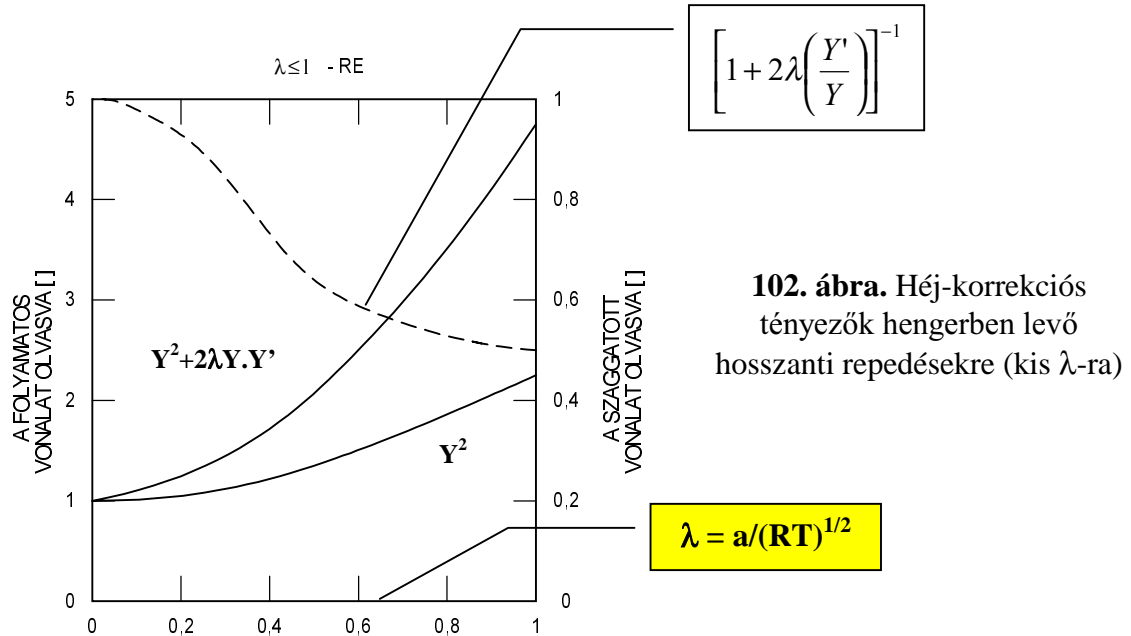
$$T_{\text{SZERKEZET}} = \left\{ \frac{\pi \sigma^2}{\sigma_0^2} \right\} \cdot [Y^2 + 2\lambda Y \cdot Y'], \text{ ill.}$$

$$\frac{J_{\text{SZERKEZET}}}{T_{\text{SZERKEZET}}} = \frac{\sigma_0^2 a}{E} \cdot \left[ \frac{1}{Y^2 + \frac{2\lambda Y}{Y'}} \right].$$

Axiális (hosszanti) repedésre a korrekciós tényezők:

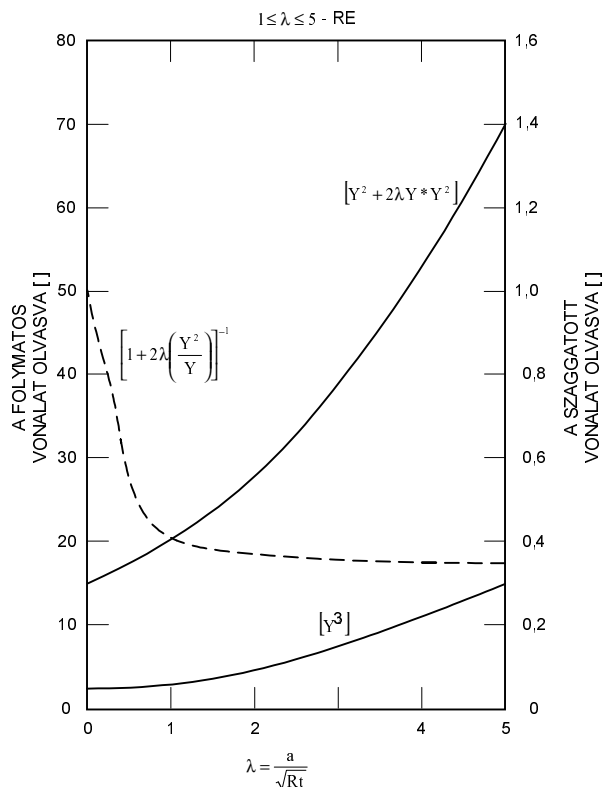
- $Y = \sqrt{1 + 1,25\lambda^2}$  ha:  $0 \leq \lambda \leq 1$
- $Y = (0,6 + 0,9\lambda)$  ha:  $1 \leq \lambda \leq 5$

ahol az előzőekhez hasonlóan  $\lambda = a/(RT)^{1/2}$ ,  $R$  = a héj rádiusza,  $T$  = a héj vastagsága. A görbék a 102. ábra szemlélteti. Figyeljük meg, hogy a szaggatott vonalú görbe esetén a szögletes zárójelű kifejezés értéke gyakorlatilag mindig **0,5** és **1** között van és a nagyságrendje egy.



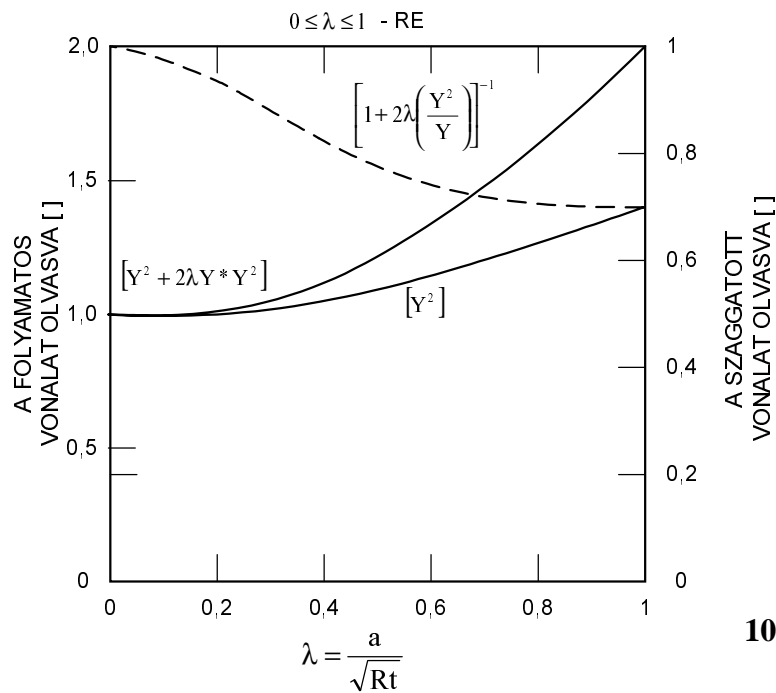
**102. ábra.** Héj-korrektíós tényezők hengerben levő hosszanti repedésekre (kis  $\lambda$ -ra)

A nyomástartó edényekben levő hibák elemzése alapján az mondható, hogy hosszirányú repedések a legveszélyesebbek, mert a tangenciális feszültségek általában kétszer akkorák, mint a axiálisak; ezért a tangenciális repedéssel nem fogunk foglalkozni. A korrektíós tényezők értékét nagyobb  $\lambda$  értékekre a 103. ábra szemlélteti.

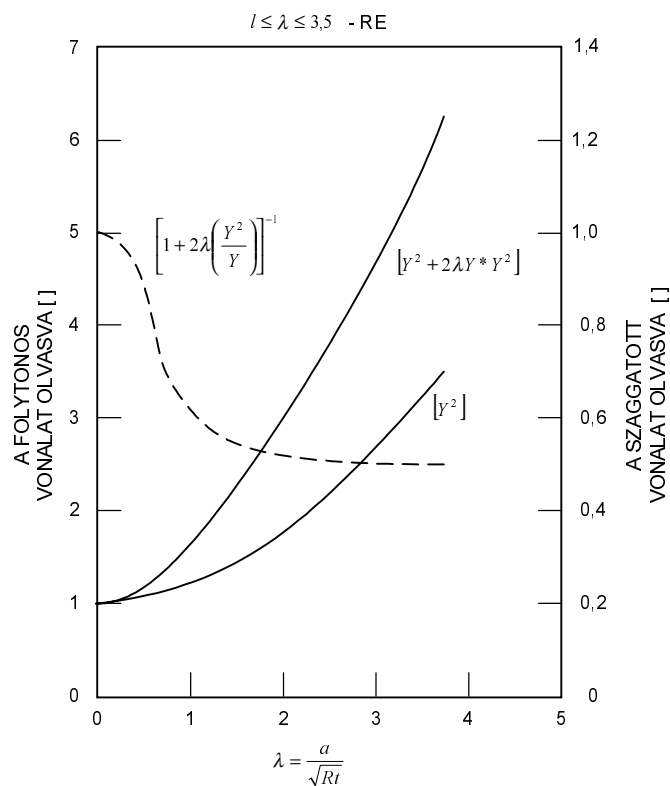


**103. ábra** Héj-korrektíós tényezők hengerben levő hosszanti axiális (nagy  $\lambda$ -ra, de  $\sigma/\sigma_0 \leq 0,67$  -re)

Bár a tangenciális (körkörös) repedéssel itt nem fogunk foglalkozni, ez a két, keresztirányú repedésekre vonatkozó korrekciós görbe referenciaként bemutatásra kerül:



105. a. ábra

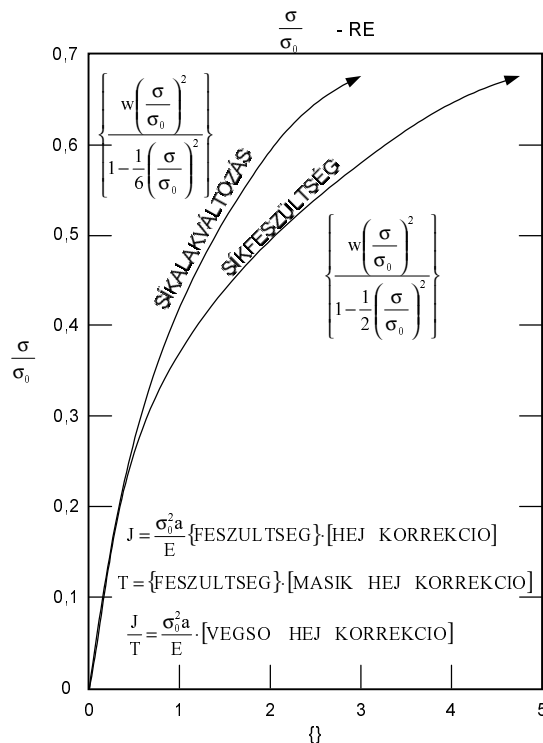


105. b. ábra

**105. ábra** Hég-korrekciós tényezők hengerben levő körkörös (tangenciális) repedésekre

a. kis  $\lambda$  értékekre

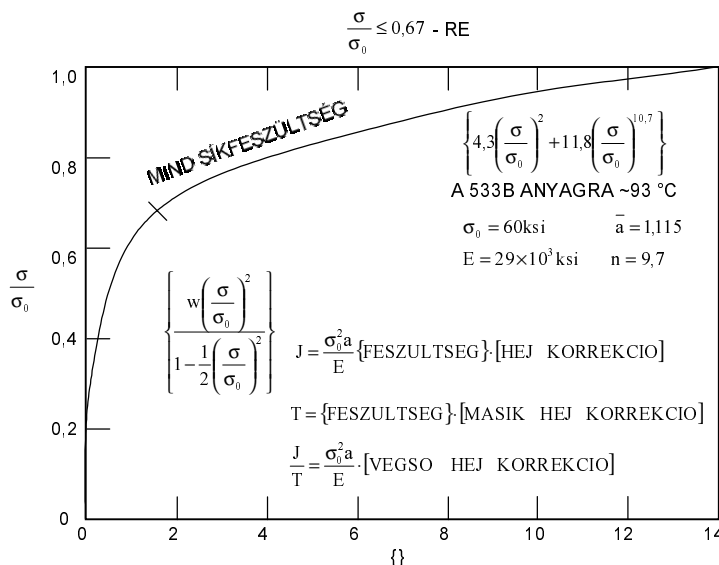
b. nagy  $\lambda$ -ra, de  $\sigma/\sigma_0 \leq 0,67$  -re)



**106. ábra** Ez a diagram mutatja lineárisan rugalmas analízis esetében a  $\sigma/\sigma_0$  tényező függvényében a { } feszültség kifejezést

Olyan tényleges nyomástartó edények érdekelnek bennünket, amelyekben a feszültségértékek a folyáshatár felétől kisebbek. A síkfeszültségi és síkalakváltozási görbékre tekintve azt lehet látni, hogy a görbék  $\sigma/\sigma_0 < 0,5$  esetében nagyon közel vannak egymáshoz és ezért nem jelent lényeges különbséget, hogy melyik görbét használjuk.

Azonban a  $\sigma/\sigma_0$  arány nagyobb értékeire is szükség van, mert az irodalomban arra is van példa, hogy kisméretű nyomástartó edények nagyon nagy feszültségeknél mennek tönkre. Ilyen esetekben néha  $\sigma/\sigma_0 > 0,7$  értékekre is szükségünk van. Ezen esetet szemlélteti a 107. ábra.



**107. ábra** Ez a diagram mutatja a feszültség { } kifejezést a  $\sigma/\sigma_0 > 0,7$  értéktől a folyáshatárig.  $\sigma/\sigma_0 > 0,67$ -ig a képlékeny tartományra korrigált lineárisan rugalmas feszültség kifejezés használatos

A  $\sigma/\sigma_0 > 0,67$  értékekre azt a HUTCHINSON-féle korrekciós tényezőt használjuk, amelyik a RAMBERG-OSGOOD feszültség-nyúlás görbén alapszik. Ezt a feszültség zárójeles kifejezést kívánság szerint még a folyáshatár fölött is lehetne használni.



Most már megvan a J-integrál, a feszültség zárójelek és a héj-korrektíós tényezők. A J-T diagram terhelési vonalával meg tudjuk találni az instabilitási pontot és ezzel a számítással azt a feszültséget, amely a tönkremenetelhez szükséges és így a ténylegesen fennálló biztonsági tényezőt is.

### 9.2.3. Felületi repedések- lineárisan rugalmas törésmechanika

A teljes vastagságon áthatoló repedés helyett most egy felületi repedés elemzésébe fogunk. Ezért úgy modellezzük, mintha átmenő repedésünk lenne, amelynél a megmaradt ép keresztmetszet csak záró a záró erőt biztosítja a repedésen.

A feszültségintenzitási tényező számítható

$$K = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\Phi_0 \left( \frac{a}{c} \right)} \cdot f \left( \frac{a}{c} \right) \cdot g \left( \frac{a}{c} \right)$$

A szerkezetre jellemző J integrál

$$J_{\text{SZERKEZET}} = \frac{K^2}{E} = \frac{\sigma_0^2 \cdot a}{E} \left\{ \pi \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \right\} \cdot F \left( \frac{a}{c} \right) \cdot G \left( \frac{a}{c} \right)$$



{ } feszültség-zárójeles  
kifejezés

Felületi repedés esetében általában a feszültségállapot síkalakváltozási, ezért a korábban bemutatott ábrákon szereplő síkalakváltozási állapotra vonatkozó feszültség-zárójeles kifejezést kell itt is használni. Innen a  $T_{\text{SZERKEZET}}$ :

$$T_{\text{SZERKEZET}} = \{ \dots \} \cdot F \left( \frac{a}{c} \right) \cdot \left[ G \left( \frac{a}{c} \right) + \frac{a}{t} G' \left( \frac{a}{c} \right) \right]$$

Ezt a  $T_{\text{SZERKEZET}}$ -et konzervatív módon lehet számolni:

$$\frac{J_{\text{SZERKEZET}}}{T_{\text{SZERKEZET}}} = \frac{\sigma_0^2 a}{E} \cdot \left[ \frac{1}{1 + \frac{a}{t} \cdot \frac{G'}{G}} \right]$$

$$\text{ahol: } G \left( \frac{a}{t} \right) = \sec \frac{\pi a}{2t}. \text{ Ebből: } [\dots] = \left[ \frac{1}{1 + \frac{\pi a}{2t} \tan \frac{\pi a}{2t}} \right]$$

A „szekáns” korrekciós függvényt szélesebb körben használják, mint a „tangens” korrekciós függvényt.

### 9.2.4. Felületi repedés képlékeny tartományú ép keresztmetszettel

Az előző elemzés lineárisan rugalmas elemzés volt. Most olyan esetet szeretnénk megvizsgálni, amelyben az ép keresztmetszet már megfolyt. Ezért ezt az esetet úgy lehet modellezni, mint egy olyan átmenő repedést, amely után van egy ép keresztmetszet, ami záró irányú erőt ad a repedésre.

Ekkor a repedés szétnyílása:

$$\delta = \gamma \frac{J}{\sigma_0} = \frac{2\sigma_{\text{EFF}}(2c)}{E} = \frac{4c}{E} \left[ \sigma - \sigma_0 \left( 1 - \frac{a}{t} \right) \right]$$

A **J**-integrál értéke a szerkezetre:

$$J_{\text{SZERKEZET}} = \frac{\sigma_0^2 a}{E} \left( \frac{4c}{\gamma a} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 + \frac{a}{t} \right) \right)$$

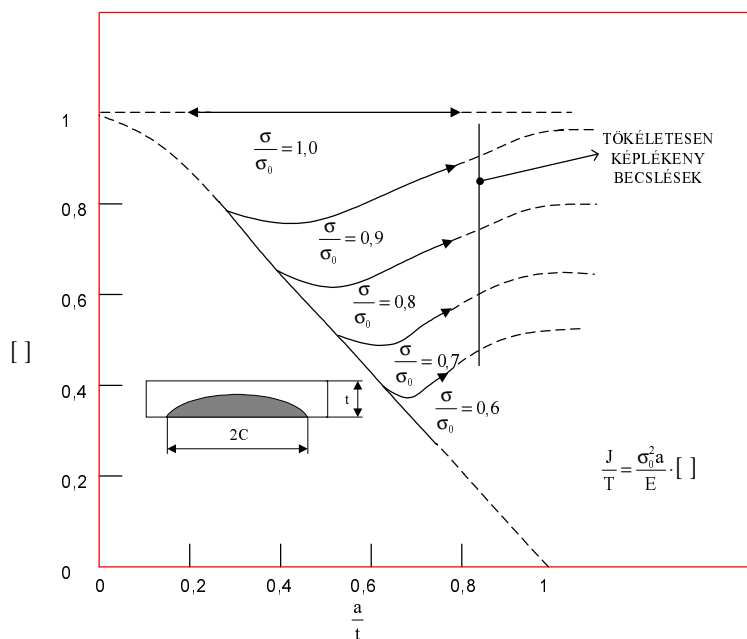
A **T** értéke a szerkezetre:

$$T_{\text{SZERKEZET}} = \frac{4c}{\gamma t}.$$

Ezek hányadosa:

$$\frac{J_{\text{SZERKEZET}}}{T_{\text{SZERKEZET}}} = \frac{\sigma_0^2 a}{E} \left( \frac{t}{a} \right) \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 + \frac{a}{t} \right)$$

A fenti összefüggést az **a/t** és  **$\sigma/\sigma_0$**  függvényében a 108. ábra szemlélteti.



**108. ábra** Ez a diagram mutatja a lineárisan rugalmas és a képlékeny analízis eredményét (az ép keresztmetszet folyását)

#### Megjegyzés a feszültség zárójelhez

A síkalakváltozás esetére új feszültség zárójeles kifejezésre van szükség, hogy a képlékeny régióba kerüljünk. A  **$\sigma/\sigma_0 \leq 0,67$**  -re a képlékeny zónával korrigált lineárisan rugalmas törésmechanikát használjuk.

Mint az előbb a  **$\sigma/\sigma_0 \geq 0,67$**  -re a Ramberg-Osgood modellt használjuk:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

Az A533B anyagra 93°C-ra érvényes adatok:

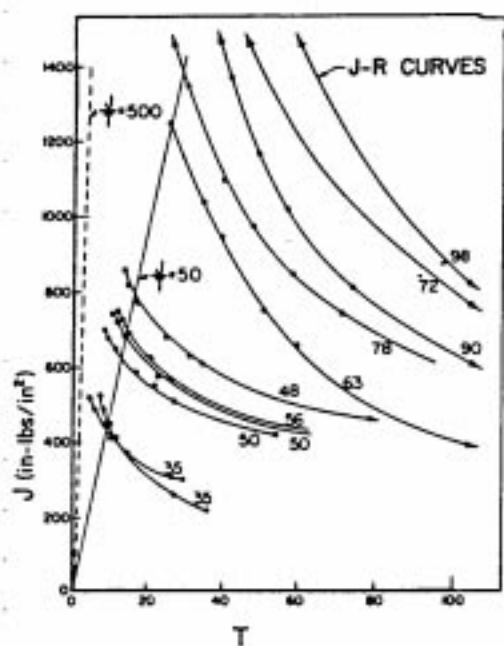
- $\sigma_0 = 60 \text{ KSI}$
- $E = 29 \times 10^3 \text{ KSI}$
- $\bar{\alpha} = 1,115$
- $n = 9,7$

Így a síkfeszültségi állapotra (átmenő repedés):

$$\{ \} = \left\{ 4,3 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 + 11,8 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{10,7} \right\}$$

vagy a síkalakváltoási állapotra (felületi repedés):

$$\{ \} = \left\{ 3,30 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 + 3,5 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{10,7} \right\}$$



**109. ábra** A rajzon különböző nyomástartó edények J-R görbéi láthatók, melyek jellegzetes eredmények. A felső tartományhoz tartozó V-bemetszésű Charpy vizsgálatok értékei a görbék mellett láthatóak.

A görbéket a bal oldali végpontjukig rajzolták meg, amelyek az érvényességi határt jelentik. Az adatokat extrapolálni lehetne a **J**-tengely felé, ha szükség lenne rá.

Ha vesszük a reaktortartály falvastagságának és az adott benne levő és ASME szabvány szerint elemzett repedésének az arányát:

- repedésmélység =  $1/4 \times \text{falvastagság}$
- repedéshossz =  $6 \times \text{repedésmélység}$

Ha ezt vesszük és kiszámítjuk a geometriai zárójeles kifejezést, amelyik a **J/T** meredekséggel arányos és vesszük a  $\sigma_0^2 a/E$  hányadost, majd behelyettesítjük a számokat, olyan egyeneseket

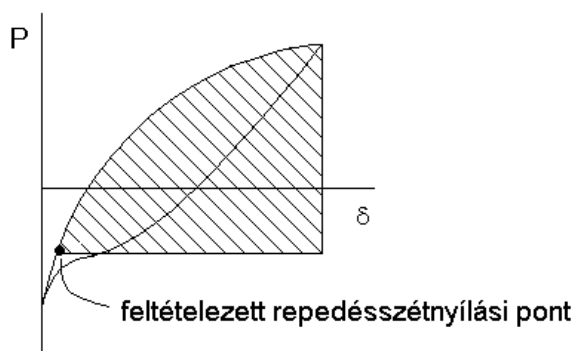
kapunk, amelyek meredeksége  $J/T = 500$  körül van egy tipikus, 8"-os reaktortartály falra. A terhelési vonalak a  $J/T = 500$  meredekségű szaggatott vonal környékén vannak. Hogy a repedés stabilitását elemezzük, a **J-R** görbét extrapolálni kellene. Másik mód (konzervatív) az, hogy azt a terhelési vonalat használjuk, amelyiket folytonos vonallal jelöltünk ( $J/T=50$ ) a **J-T** diagramon és ez mindenképpen biztonságot eredményez.

Előzőleg már hangsúlyoztuk

- a J-integrál módszerek korlátait és ezeknek a módszereknek a feltételeit, (nevezetesen a J-integrál egyedül akkor jól definiált, ha az alakváltozás-elmélet feltételeit alkalmazzuk),
- hogy milyen tágon értelmezhetőek a J-integrál feltételei és milyen helyzetekben alkalmazhatóak annak ellenére, hogy azokban a feltételezések nem teljesülnek tökéletesen.

Az alakváltozás elmélet feltevéseiben azt gondoljuk az anyagról, hogy az nemlineárisan rugalmas és valójában ugyanazzal a feszültség-alakváltozás diagrammal képlékeny anyagra is használjuk. Leterhelésnél nagyon különböző eredményeket kaphatunk a nem-lineárisan rugalmas ill. a képlékeny anyagokra. Ebből következően egymást nem helyettesíthetik. Ezért eredetileg az volt a feltevés, hogy bármely esetben, amikor leterhelés következett be, a J-integrál nem használható elemzésre.

Most majd láthatunk egy példát arra, amikor leterhelés következik be és a J-integrál helyes eszköze az analízisnek. [Lásd: DOWLING és BEGLEY 1976]. Ehhez tekintsük a 110. Ábrát.



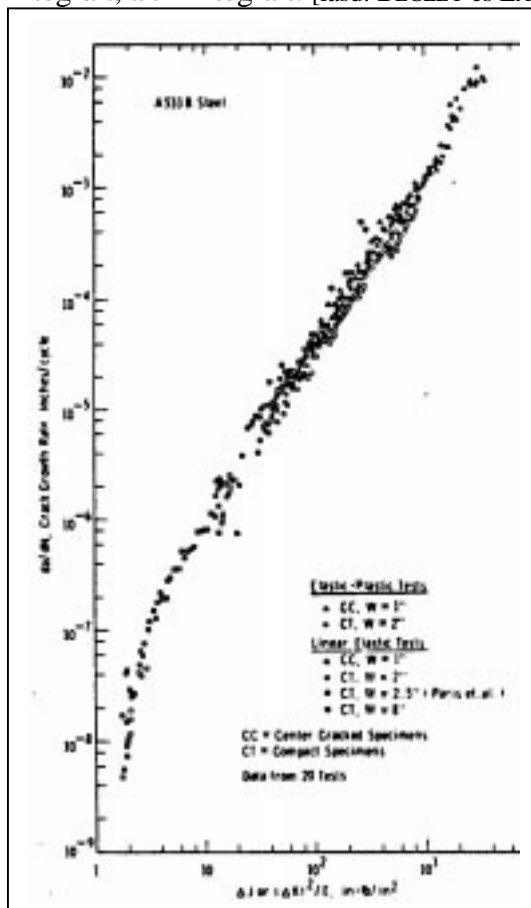
**110. ábra** Egy terhelési ciklus nemlineárisan rugalmas anyag esetén

Váltakozó terhelést alkalmazunk (fel- és leterhelés követi egymást a fárasztási ciklusban.) A leterhelésnél a görbület visszafordulása ahhoz a ponthoz tartozik, amelynél a repedés bezáródik. Ekkor a

$$\Delta J = \frac{2(\text{sraffozott terület})}{B \cdot b}$$

A fárasztókísérlet egy terhelési ciklusán belül a terület arányos a J-integrállal. Úgy látszik a terhelés változtatásával nem egyeztethető össze a J-integrál alkalmazása, de mivel itt a J-integrált minden egyes ciklusban használjuk, így az voltaképp  $\Delta J$ , amelyet megfeleltethetünk a  $\Delta K$ -nak addig, amíg a fáradásos repedésnövekedés sebességét ilyen típusú terhelés mellett észleljük.

A körök lineárisan rugalmas kísérletek eredményei. A tömött pontok a görbe felső részén (ahol könnyen ciklikus képlékeny alakváltozást érhetünk el a ciklus során), ami a  $\Delta J$  alapján számított, nagyon jól megfeleltethető a  $(\Delta K)^2/E$  paraméternek. Az ugyanarra az anyagra vonatkozó két adatcsoport egy görbére esik. Ezért a  $J$  használható ciklikus terhelési feltételek mellett a fáradásos repedésnövekedés leírására. Ezt még tovább tágítva definiálunk egy új  $J$ -integrált, a  $J^*$  integrált. [lásd: BEGLEY és LANDES 1976.]:



### 111. ábra.

A  $\Delta J$  ill.  $(\Delta K)^2/E$  a  $da/dN$  függvényében

( $da/dN$  a fáradásos repedésnövekedés sebessége).

A  $J^*$  a  $J$ -integrálal analóg módon a következőképpen definiálható:

$$J^* = \int W^* dy - T_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x} ds, \text{ ahol } W^* = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

$$\text{és } \dot{u}_i = \frac{du_i}{dt}, \text{ ill. és } \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d\epsilon_{ij}}{dt}$$

Idő szerint deriváljuk a  $J$ -t egy meghatározott módon. Vesszük az elmozdulások és nyúlások idő szerinti deriváltját, de nem vesszük a feszültségek idő szerinti deriváltját. Lineáris viszkóelasztikus vagy teljesen viszkózus feltételekre:

$$J^* = \frac{dJ}{dt}$$

Az erők és a feszültségek konstansok, ilyen feltételek mellett kellene a repedésnövekedés sebességét a  $J^*$ -gal megfeleltetnünk, ami az a sebesség, amivel a test alakváltozást szenved. Ennek az alakváltozásnak egy része a repedésnövekedés, ezért a  $J^*$ -nak kell a megfelelő

paraméternek lenni akkor, amikor az anyagban kúszást vizsgálunk. A kúszás sem viszkó-elasztikus sem teljesen viszkózus. Mindazonáltal megpróbáljuk ezt a  $J^*$  paramétert alkalmazni a repedésnövekedés időbeli változásának leírására.

Egy kettőnél valamivel kisebb tényező választja el a két kísérletet és azért, hogy a kúszás repedésnövekedésének időbeli változását nagy hőmérsékleteken megfeleltethessük ezzel a paraméterrel, a  $J^*$ -integrál kettővel egyenlő, ami nem nagy hiba a kúszás repedésnövekedési sebességével való megfeleltetésben. A téma további részletezését lásd a Rice-féle speciális előadásban (Itt:  $C^*=J^*$ ).

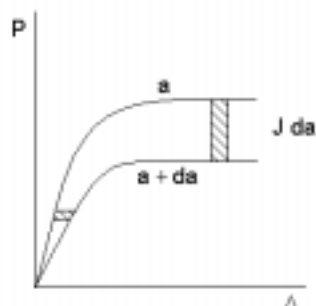
## 10. Kilencedik előadás

Ebben az előadásban olyan kifinomultabb módszerekről lesz szó, amelyek pontosabb becslést adnak a J-integrálra.

Emlékeztetőül, a J-integrál értéke a következő módon határozható meg:

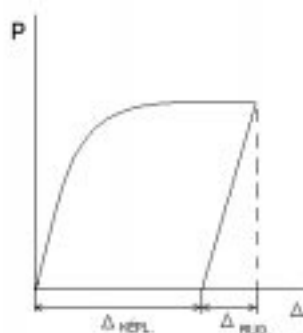
$$J = - \int_0^{\Delta} \frac{\partial P}{\partial a} d\Delta = \int_0^P \frac{\partial \Delta}{\partial a} dP$$

A fenti kifejezés mindkét formája az erő-elmozdulás diagramon alapszik:



**112. ábra.**  
Erő- erő hatásvonalának elmozdulása  
diagram

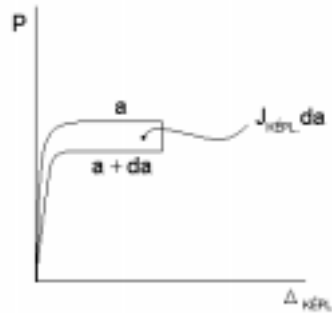
A görbe alatti terület való a J-integrál becslésére. Itt most minket elsősorban a második integrál érdekel, mert az erő-elmozdulás görbén az elmozdulást mindig ketté lehet osztani egy rugalmas és egy képlékeny részre, azaz a  $\Delta = \Delta_{\text{RUG}} + \Delta_{\text{KÉPL}}$ . Ezt szemlélteti a 113. ábra.



**113. ábra.**  
Az elmozdulás rugalmas és  
képlékeny része

Eszerint a J-integrált így lehet kiszámolni:  $J = \underbrace{\int_0^P \frac{\partial \Delta_{\text{RUG}}}{\partial a} dP}_{\text{Rugalmas rész: } D=J_{\text{RUG}}} + \underbrace{\int_0^P \frac{\partial \Delta_{\text{KÉPL}}}{\partial a} dP}_{\text{Képlékeny rész: } J_{\text{KÉPL}}}$

HUTCHINSON a J-integrált két részre osztotta, a  $J_{\text{RUG}}$  és a  $J_{\text{KÉPL}}$  tagokra, de ő a képlékeny tartománnyal korrigált lineárisan rugalmasat használt, ami nem teljesen helyénvaló. Sokkal jobb egy teljesen rugalmas és egy teljesen képlékeny részre osztani, ahogyan a fenti egyenletben is látszik.



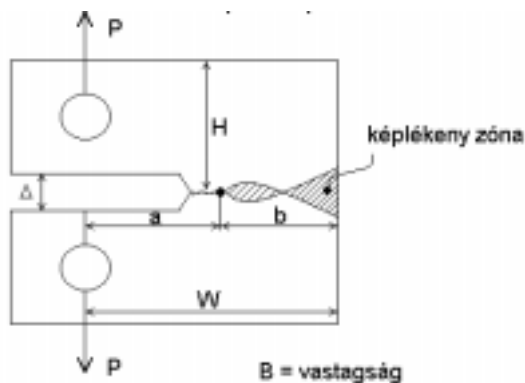
**114. ábra.**

A  $J_{\text{KÉPL}}$  értelmezése az erő – erő hatásvonalának elmozdulása diagram segítségével

Hogyha a képlékeny tagot horizontálisról vertikális integrálásúra cseréljük, ezt kapjuk:

$$J = - \int_0^{\Delta} \frac{\partial P}{\partial a} \bigg|_{\Delta_{\text{KÉPL}}} d\Delta_{\text{KÉPL}}$$

Most alkalmazzuk ezt egy próbatestre:



**115. ábra.**

Előrepszett törésmechanikai próbatest

Ha az ép keresztmetszet egy kicsit kisebb vagy egy kicsit nagyobb, ez nem sokban befolyásolja a képlékenységet. Ezért az erő-elmozdulás görbékre pusztán az elmozdulás képlékeny része miatt egymáshoz hasonló alakú görbéket kapunk.

$$\frac{\Delta_{\text{KÉPL}}}{W} = f \left( \frac{PW}{B^2}, \frac{a}{W}, \frac{H}{W}, \frac{B}{W}, \underbrace{\text{ANYGJELLEMZŐK}}_{F/L^2 \text{ vagy dimenziótlan}} \right)$$

$F/L^2$

$\swarrow$   
 $F/L^2$  vagy  
dimenziótlan

A  $\Delta$  elmozdulás a  $W$  figyelembevételével lényegében megadja a szögváltozást.



A szögváltozást lényegében a **P** erő okozza és már korábban megmutattuk, hogy ez a **PW/b<sup>2</sup>**-től függ.

$$P = \frac{b^2}{W} \cdot F\left(\frac{\Delta_{\text{KÉPL}}}{W}, \frac{a}{W}, \dots\right)$$

A többi paraméter a vizsgálat során nem változik.

Most ezt a **J<sub>KÉPL</sub>** képletébe helyettesítve kapjuk:

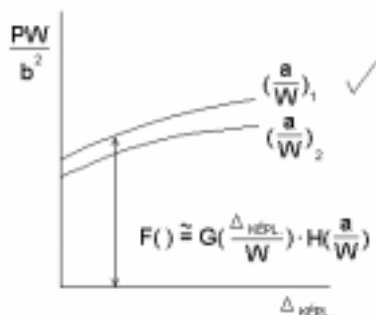
$$J_{\text{KÉPL}} = \frac{2}{b} \int_0^{\Delta_{\text{KÉPL}}} \frac{b^2}{W} \cdot F(\ ) d\Delta_{\text{KÉPL}} - \frac{b^2}{W^2} \int_0^{\Delta_{\text{KÉPL}}} \frac{\partial F(\ )}{\partial \left(\frac{a}{W}\right)} d\Delta_{\text{KÉPL}}$$

Ahol tudjuk még azt, hogy az **a** szerinti derivált egyenlő a **b** szerinti derivált ellentettjével. De mivel:  $\frac{b^2 F(\ )}{W} = P$  a következő adódik:

$$\therefore \int_0^{\Delta_{\text{KÉPL}}} \frac{b^2}{W} \cdot F(\ ) d\Delta_{\text{KÉPL}} = \text{KÉPLÉKENY MUNKA}$$

Mivel **Δ<sub>KÉPL</sub>/W** csak gyengén függ az **a/W** aránytól, az integrál kifejezés második tagját egy kis korrekciós tényezőnek kell tartani, mert **∂F( )/∂(a/W)** kicsi. Ezért a **J<sub>KÉPL</sub>** kifejezés meghatározó része a képlékeny munka részben rejlik. Ebből következően, ha a képlékeny munkát pontosan ismerjük, a **J<sub>KÉPL</sub>** kifejezést is pontosan fogjuk ismerni. Ezért elegendő csupán egy hozzávetőleges becslés a korrekciós kifejezés.

Ha csak megközelítőleg van szükség a korrekciós kifejezés meghatározásra, akkor ki lehet fejezni a képlékeny munkával.



116. ábra. A korrekciós tényező becslése

Most be lehet helyettesíteni a **G**-t és **H**-t a **J<sub>KÉPL</sub>** egyenletébe, ekkor kapjuk:

$$J_{\text{KÉPL}} = \frac{2}{b} \int_0^{\Delta_{\text{KÉPL}}} \frac{b^2}{W} \cdot G(\ ) H(\ ) d\Delta_{\text{KÉPL}} - \frac{H'}{H} \frac{b^2}{W^2} \int_0^{\Delta_{\text{KÉPL}}} G(\ ) H(\ ) d\Delta_{\text{KÉPL}},$$

mert :

$$\frac{\partial F(\ )}{\partial \left(\frac{a}{W}\right)} = G(\ ) H'(\ )$$

Most az integrandusok ugyanazok, ha a  $b^2/W$ -t kiemeljük:

$$J_{\text{KÉPL}} = \frac{1}{b} [\text{KÉPLÉKENY MUNKÁ}] \cdot \left[ 2 - \frac{b}{W} \frac{H\left(\frac{a}{W}\right)}{H\left(\frac{a}{W}\right)} \right]$$

Mivel  $b = W - a$ , ezért:

$$\frac{b}{W} \cdot \frac{H\left(\frac{a}{W}\right)}{H\left(\frac{a}{W}\right)} = \frac{W - a}{W} \cdot \frac{H\left(\frac{a}{W}\right)}{H\left(\frac{a}{W}\right)} = f\left(\frac{a}{W}\right)$$

Ebből következően az egész zárójeles kifejezés az  $a/W$  függvénye, ezért írható, hogy:

$$J_{\text{KÉPL}} = \frac{1}{b} [\text{KÉPLÉKENY MUNKÁ}] \cdot \eta_{\text{KÉPL}} \left( \frac{a}{W} \right)$$

[Lásd: SUMPTER és TURNER, 1976.]

Ez a  $J$ -integrál képlékeny része, amely biztosítja, hogy  $F(\cdot)$ -et úgy lehet elgondolni, mint a  $PW/b^2 - \Delta_{\text{KÉPL}}/W$  koordináta-rendszerben levő párhuzamos görbéket, amelyeket egymáshoz képest el lehet tolni, hogy  $F(\cdot)$ -et különálló függvényekre lehet osztani. Ez nem lenne rendben, ha nagyobb terhelési szinteken azt találnánk, hogy a folyás nem befolyásolta az ép keresztmetszetet.

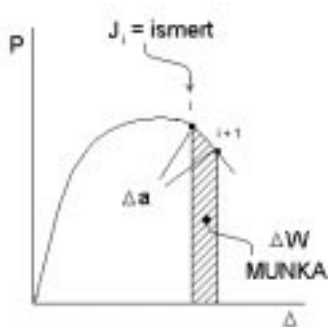
Most vissza kell térni a  $J = J_{\text{RUG}} + \Delta J_{\text{KÉPL}}$  kifejezéshez és meg kell határozni  $J$ -t vagy  $J_{\text{KÉPL}}$ -t. Ekkor a

$$J_{\text{RUG}} = G = \frac{\eta_{\text{RUG}}}{b} [\text{RUGALMAS MUNKÁ}] \text{ és a } \eta_{\text{RUG}} = \eta_{\text{RUG}} \left( \frac{a}{W} \right).$$

Általában  $\eta$  nagyban eltér a korábban felírt  $\eta_{\text{KÉPL}}$  értékétől, azonban, ha a próbatest méreteinek RÁNYA megfelelő, akkor  $\eta_{\text{RUG}} \approx \eta_{\text{KÉPL}}$ :

$$J_{\text{TELJ}} = \frac{\eta_{\text{TELJ}}}{b} [\text{TELJES MUNKÁ}]$$

Valóban a próbatestek méretei így vannak felosztva és ez nagy könnyebbség a vizsgálat során.



A CT és más próbatestekre vonatkozó esetekben olyan kifejezés írható a  $J$ -integrálra, amelyben a teljes elmozduláson alapuló erő-elmozdulás görbe szerepel, mint ahogy azt a 117. ábra mutatja.

**117. ábra.** A két leterhelési vonal közötti meredekség megváltozással meg lehet határozni a repedésméretben bekövetkezett változást

Ekkor a két leterhelési vonal közötti meredekség megváltozással meg lehet határozni a repedésméretben bekövetkezett változást, azaz

$$J_{i+1} = \left\{ J_i + \frac{\eta_i}{b_i} \cdot \frac{\Delta W}{B} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{\chi_i}{b_i} \Delta a \right\}$$

CT próbatestre:

A repedésméret megváltozása miatti korrekció.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \quad \eta &= 2 + 0,522 \left( \frac{b}{W} \right) \\ \bullet \quad \chi &= 1 + 0,76 \left( \frac{b}{W} \right) \end{aligned} \right\} \quad 0,5 < a/W < 0,8$$

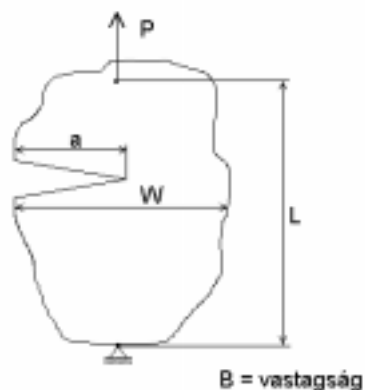
Felmerül a kérdés, hogy honnan származik a repedéshossz-korrekció ?

Tisztán hajlítás esetében:

$$dJ = \frac{2}{b} d(\text{MUNKA}) - \frac{J}{b} da$$

Ez a fenti  $J_{i+1}$  kifejezésre hasonlító formula. Az  $\eta$  tényezőkre vonatkozó további információ található HUTCHINSON speciális előadásában. Ezt HUGO ERNST dolgozta ki [lásd: ERNST 1979.]

Normális esetben a hosszkorrekciós tényezők az analízis képlékeny részében szerepelnek és most olyan alakokat nézünk meg, amelyek a próbatestek tetszőleges formájából származnak. Ezen esetet szemlélteti a 118.ábra.



118. ábra. Általános alakú próbatest

Teljesen képlékeny eset:

$$T_{\text{SZERK}} = g \left( \frac{a}{W}, \frac{B}{W}, \frac{L}{W}, \dots \right) - \underbrace{\frac{JE}{\sigma_0^2 W} \cdot r \left( \frac{a}{W}, \frac{B}{W}, \frac{L}{W}, \dots \right)}_{\text{Repedéshossz-korrekció}}$$

Rugalmas eset (képlékeny tartománnyal korrigált):

$$T_{\text{SZERK}} = \frac{g\left(\frac{a}{W}, \frac{B}{W}, \frac{L}{W}, \dots\right) \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2}{1 - \frac{1}{\chi\pi} g\left(\frac{a}{W}, \frac{B}{W}, \frac{L}{W}\right) \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2}$$

▲ Zérus a képlékeny tartomány instabilitásánál.

Ahol a  $\gamma$  értéke a következő:

- $\gamma = 2$  síkfeszültségi állapotra
- $\gamma = 6$  síkalakváltozási állapotra

## 11. Tizedik előadás

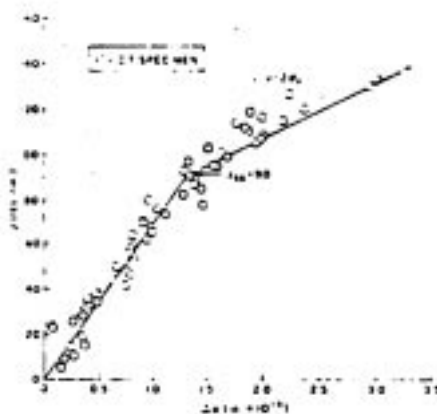
Ebben az előadásban a **J**-integrál lehetőségeiről illetve arról találhatnak információt, hogy a jövőben merre fejlődnek a törésmechanikai módszerek. Előzőleg statikus analízist tárgyaltunk, melynél néhány dolgot nem láttunk. Az előadáson bemutatandó kép a Westinghouse törési szívóssági kísérletét mutatja egy 12 " (30,48 cm) vastag reaktortartály acél próbatesten. Érdekes az, hogy az 1" vastag próbatesten mért törési szívósság ugyanannyi, mint a 12 " vastagból származó adatok.

Annak érdekében hogy a statikus törési szívósság egyéb lehetőségeit is lássuk, megnézzünk néhány diát, melyet a kísérleti eredményeiről készített egy HERMAN nevű szakember a Brown Egyetemen. Nagy körültekintéssel végezte a kísérleteit, így valószínűleg ezek voltak a valaha végrehajtott legérzékenyebb vizsgálatok.

Az előadáson bemutatandó felvételeken a következők láthatók:

- A vizsgálati berendezés, amit nagy pontosságúra állították be.
- Az itt látható nagyításon a próbatest van a felénk néző oldalról eltávolított csapokkal.

A vizsgálati elrendezés a leterheléses *compliance* módszert alkalmazta a J-R görbék meghatározására. A kapott J- $\Delta a$  diagramot a 119. ábra mutatja.

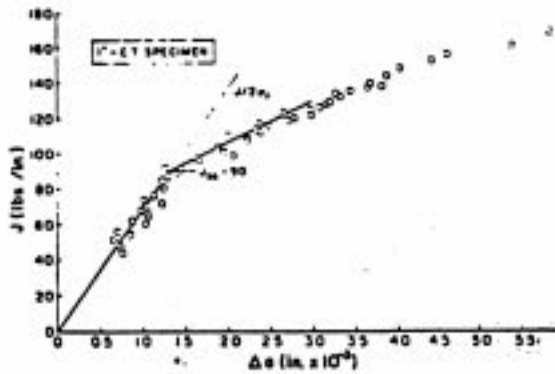


**119. ábra.**

Az 5083-as alumínium ötvözetén normál berendezéssel kapott J-R eredmények. Az adatsorra nagyon jól lehet közelítő görbét illeszteni.

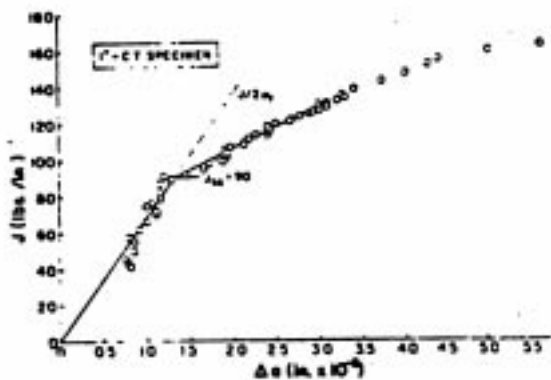
Ha a  $\Delta a$  felső tartományán egy lineáris extrapolációt illesztünk az adatsorra, akkor a  $J_{IC}$ -re körülbelül  $250 \text{ lbf}\cdot\text{in}/\text{in}^2$  (pound-force x inch / square inch) ( $=43,784 \text{ kJ}/\text{m}^2$ ) értéket kapunk. Ez az adat érzékeny 2-3 tízezred inch mértékű repedésnövekményre is ( $5,1 \times 10^{-3}$ - $7,6 \times 10^{-3}$  mm). Most ki fogjuk nagyítani ezt a grafikont a  $\Delta a < 0,01$  inch-re ( $=2,54 \text{ mm}$ ). Ez HERMAN Úr berendezésével és adatával készült. A  $\Delta a = 0,01$  inch határérték még csak nincs is feltüntetve ezen a diagramon (120. ábra). Látható, hogy a valóságos repedésnövekedés ott jelenik meg,

ahol az adatsor meredekséget vált. Ez pedig nem  $250 \text{ lbf}\cdot\text{in}/\text{in}^2$  körüli J-integrál értéknél, hanem kb.  $90 \text{ lbf}\cdot\text{in}/\text{in}^2$ -nél van) ( $=15,48 \text{ kJ}/\text{m}^2$ ). De nyomban felmerül a kérdés: mennyire reprodukálható ez ?



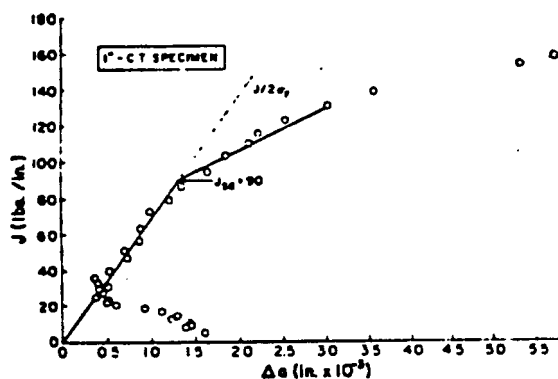
**120. ábra.**  
Kinagyított diagramrész.

Egy másik 1"-os CT próbatest eredménye van feltüntetve a 121. ábrán és ismét láthatjuk az eredmények nagyfokú reprodukálhatóságát.



**121. ábra.**  
Az 1" vastagságú próbatesteken kapott vizsgálati eredmények.

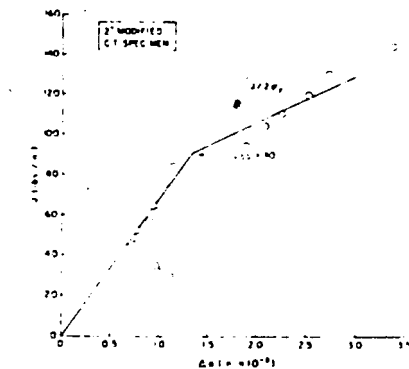
A 122. ábra egy újabb vizsgálatsorozat eredményeit mutatja.



**122. ábra** Egy újabb adatsor, melynél megint csak  $\text{lbf}\cdot\text{in}/\text{in}^2$  90-nél változik meg a vonal meredeksége.

A műszerezés beállítását kis terhelésnél kell megtenni és ezért vannak az alsó tartományban a görbétől eltérő adataink is.

A 123. ábra a 2CT vastagságú próbatesteken kapott vizsgálati eredményeket mutatja és látható, hogy ezek szintén ugyanazon a szinteken törtek.



**123. ábra.**

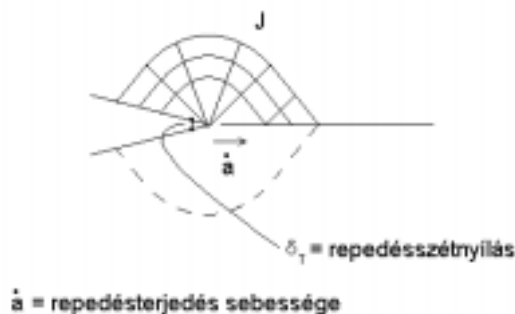
A 2" vastagságú CT próbatesten kapott vizsgálati eredmények.

Nagyon meggyőző, hogy a valóságos repedésindulás jóval az ASTM által meghatározott  $J_{IC}$  érték alatt van. A valóságos repedésindulás kezdete reprodukálható érték és az anyagtól függ.

A 70-es következtethetünk arra, hogy, milyen J-t kellene használni ott, ahol repedésterjedés történik. [Lásd: RICE, DRUGAN és SHAM 1980.].

Később ERNST később készítette és kifejlesztett és módosított J-integrált, amely az alakváltozás-elméleten alapul, de azokat a változtatásokat is tartalmazza, melyet RICE, DRUGAN és SHAM javasoltak.

Ha megnéznénk a csúszási mezőt egy repedés előtt, a 124. ábrán feltüntetett viszonyokat látnánk.



**124. ábra.**

A repedéscúcs előtt kialakuló csúszási vonalak.

A repedésszétnyílás sebessége:

$$\dot{\delta}_T = \beta \frac{\sigma_0}{E} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \dot{a} + \frac{\alpha}{\sigma_0} J$$

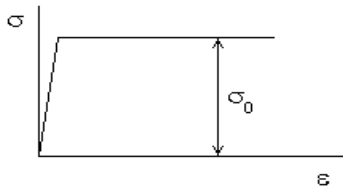
Milyen J-t tegyünk be ebbe a kifejezésbe, hogy  $\dot{\delta}$ -t megkapjuk? Első közelítésben legyen

$$J = (J_D) = \mu \dot{a} + v \dot{\delta}, \text{ ahol } J = J(a, \delta)$$

Ha a fenti elemzést rideg képlékeny anyagra alkalmazzuk, akkor:

$$\dot{\delta}_T = \left[ \beta \frac{\sigma_0}{E} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{\alpha \mu}{\sigma_0} \right] \dot{a} + v \dot{\delta}$$

Egy rideg képlékeny anyagra az  $E$  nagyon nagy a  $\sigma_0$ -hoz viszonyítva (lásd a 125. ábrát).



**125. ábra.**  
Rugalmas-ideálisan képlékeny anyag

A  $\sigma_0/E$  tag ezért tart zérushoz. Rideg - képlékeny feltételek mellett azt is láthatjuk, hogy  $\dot{\delta}$ -nak nem kellene  $\dot{a}$ -tól függni. Ezért a teljes  $\dot{a}$  tagnak zérusnak kell lennie és ebből következően:

$$\boxed{\mu = 0} \text{ rideg képlékeny feltételek mellett.}$$

Az előzők figyelembevételével írható, hogy:  $J = J_{EL} + J_{PL}$

Rideg - képlékeny elemzésnél a  $J$  változásának a repedésméret függvényében ( $dJ/da$ ) nem szabad függnie  $\dot{a}$ -tól, csak  $\dot{\delta}$ -tól. Ez az érvelés nem áll a  $J_{RUG}$ -ra, mert rugalmas esetben, ha a repedés előrehalad, akkor a  $J$ -nek növekednie kell.

ERNST így gondolkozott:

$$J_M = J_0 - \int_0^a \left. \frac{\partial(J_0 - G)}{\partial a} \right|_{\delta_{PL}} da$$

$$\frac{dJ_M}{da} = \frac{dJ_0}{da} - \left. \frac{\partial J_{PL}}{\partial a} \right|_{\delta_{PL}}$$

Ez a módosított  $J$ ;  
Repedésnövekedésre helyesebb  $J$ .

E Egy másik lehetséges definíció.

ERNST tovább ment és megalkotta a hajlításkor a  $J_0$ -ra vonatkozó korrekciós tényezőt.

### 11.1 $J_M$ érteke hajlításkor:

Ennek meghatározására tekintsük a következő kifejezést

$$\left. \frac{\partial J_{PL}}{\partial a} \right|_{\delta_{PL}} = -m \frac{J_{PL}}{b}$$

$$\text{CT próbatestre: } m = 1 + 0,76 \frac{b}{W},$$

tiszta hajlításra pedig:  $m = 1$ .

Most helyettesítsük vissza a  $J_M$  második definíciójába:

$$\boxed{\frac{dJ_M}{da} = \frac{dJ_0}{da} + m \frac{J_{PL}}{b}}$$

Húzás eseteire (keményedési kitevő:  $n$ ):

$$\left. \frac{\partial J_{PL}}{\partial a} \right|_{\delta_{PL}} = \frac{J_{PL}}{bn}$$



A legtöbb anyagra:  $7 < n < 15$

$$\frac{dJ_M}{da} = \frac{dJ_0}{da} - \frac{J_{PL}}{bn}$$

Most hasonlítsuk össze a két bekeretezett egyenletet, az eredményt a 126. ábra mutatja.

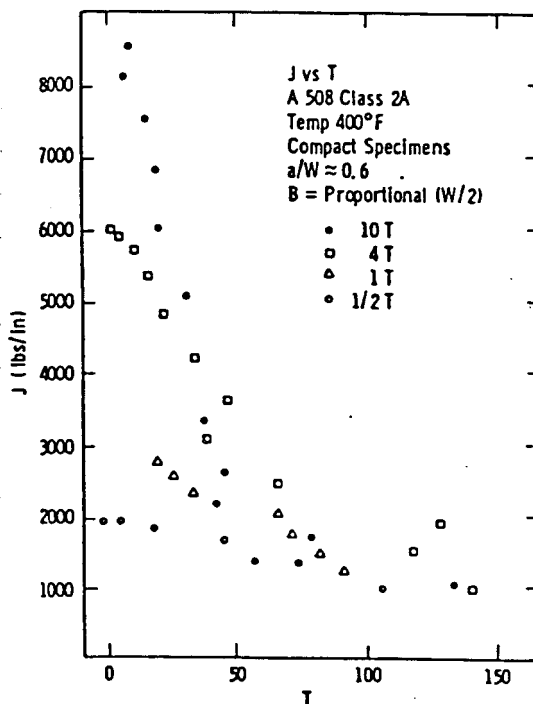


**126. ábra.** A húzásra vonatkozó  $J_0$  eredmények mindig nagyobbak, mint a hajlításra vonatkozóak.

Ezért  $J_M$  a hajlításra vonatkozó görbe növelésére törekszik és csökkenti a húzásra vonatkozó görbét, ezáltal közelebb hozza egymáshoz a kétféle eredményt. Ennek az elemzésnek másik nagy előnye, hogy megfigyeltük: a  $J$  által determinált repedésnövekedés a HUTCHINSON feltétel szerint történik, azaz:

$$\omega = \frac{dJ}{da} \frac{b}{J} \gg 1, \text{ azaz } \frac{dJ_0}{da} \gg \frac{J_0}{b} > \frac{J_{PL}}{b}$$

Ekkor a bekeretezett egyenletek korrekciós kifejezései elhanyagolhatóak és ezen feltételek mellett  $J_M$  és  $J_0$  ugyanazt jelenti, azaz  $J_M = J_0$  a  $J$  által szabályozott repedésnövekedés esetén. Ezért  $J_M$  jobb a  $J$  értékének becslésére abban az esetben, ha nem a  $J$  által szabályozott repedésnövekedés valósul meg (kis megmaradó ép keresztmetszet). Most néhány kísérleti eredményt fogunk megnézni.

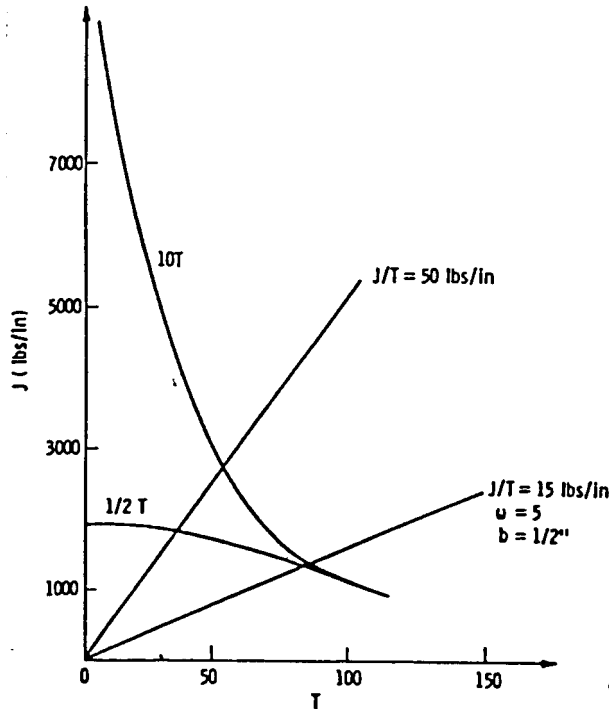


**127. ábra.** Ezek azok az adatok, amelyeket Westinghouse készített CT próbatesteken a következő paraméterekkel:

- $b = 10" \Rightarrow 10T$
- $b = 4" \Rightarrow 4T$
- $b = 1" \Rightarrow 1T$
- $b = \frac{1}{2}" \Rightarrow \frac{1}{2}T$ ,

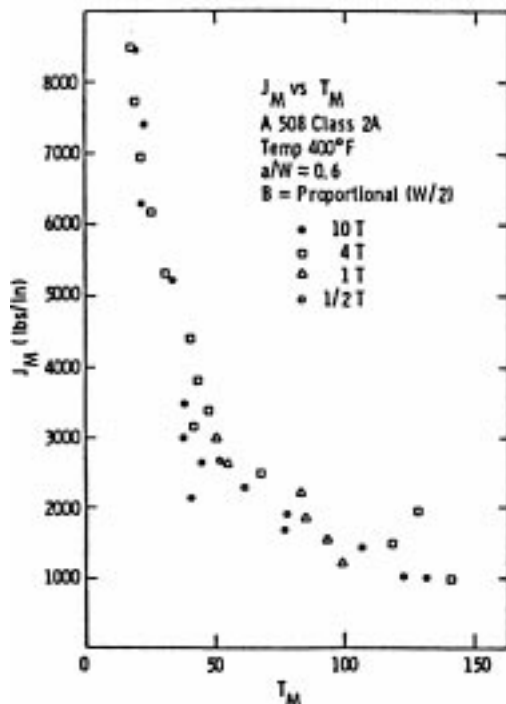
ahol  $b$  az ép keresztmetszet mérete.

A  $J$  által szabályozott repedésnövekedés nagyobb próbatesteknél valószínűbb. A  $4T$ ,  $1T$  és az  $\frac{1}{2}T$  próbatestek mind eltérnek a  $10T$  görbétől a különböző  $J$  szinteken mint ahogy az a 127., valamint a 128. ábrákon látható.

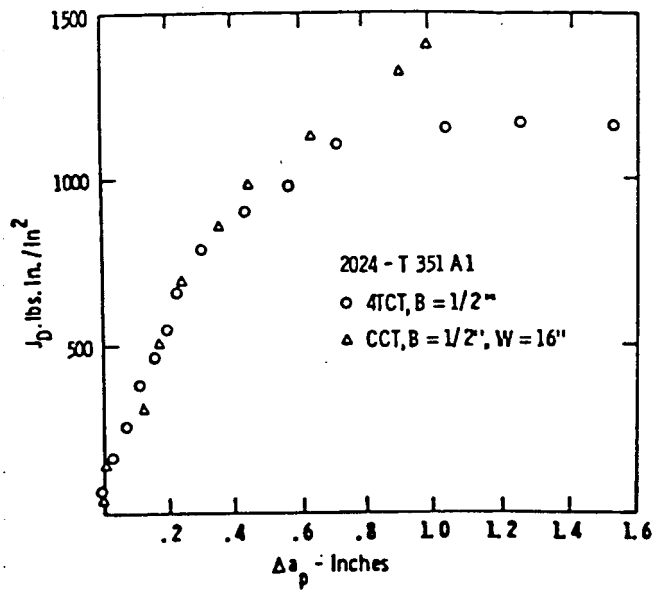


**128. ábra.** Ez a diagram az  $\frac{1}{2}T$  méretű próbatesteken mért adatok középértékét szemlélteti a  $10T$  adatok középértékéhez viszonyítva, ami egyébként az előző diagramon is látható volt.

Láthatóan az  $\frac{1}{2}T$  adatok eltérése a  $J$  által szabályozott repedésnövekedéstől az  $\omega=5$ -nél kezdődik. A  $10T$  vonalhoz olyan egyenesre van szükségünk, amelynek meredeksége 20-szor akkora, mint az  $\omega=5$  vonalnak, hogy azt a pontot megtaláljuk, ahol a  $10T$  vonal eltér a  $J$  által irányított repedésnövekedéstől.

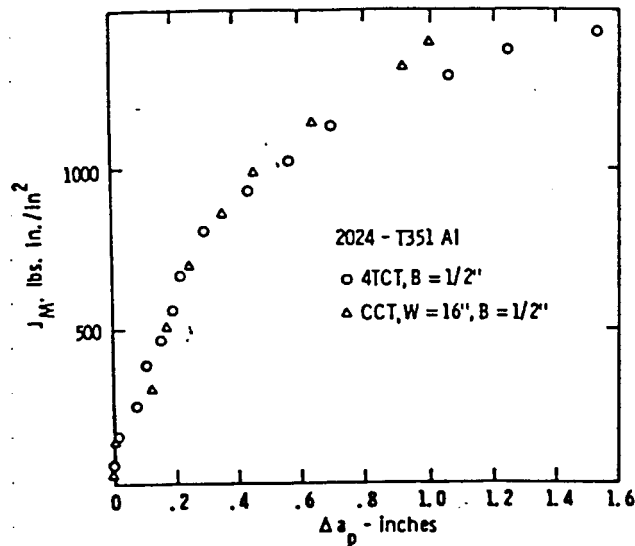


**129. ábra.** Ezeket a  $J_M$  értékeket a  $J_D$  korrekciójával és a repédéshossz képlékeny részéből való kivonással számolták ki. Nézzük meg, hogy az adatok most egyetlen görbére esnek és nincs ettől való eltérés.

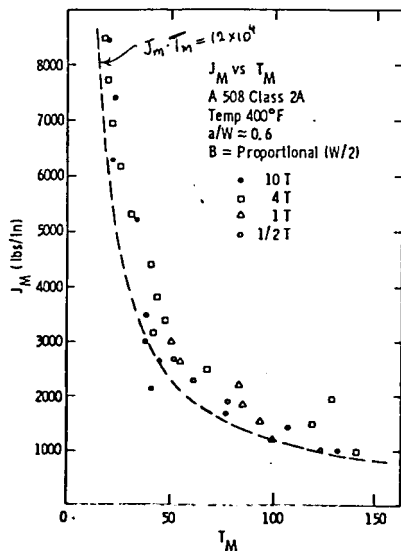


**130. ábra.** Az ábra egy próbatest hajlítási és húzási **J-R** görbéjét mutatja. A két görbe ott tér el egymástól, ahol már nincs többé **J** kontrollált növekedés.

Ha most a  $J_D$  helyett a  $J_M$  alapon ábrázoljuk, akkor a 131. ábrán feltüntetett diagramot kapjuk.



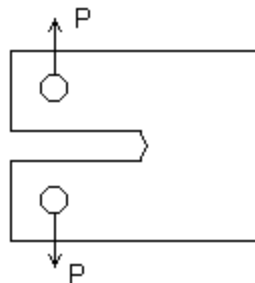
**131. ábra.** Vegyük észre, hogy a hajlításhoz tartozó eredmények megnövekedtek, míg a húzáshoz tartozóak lecsökkentek. A **J** által irányított növekedésen túl meglehetősen jól egyeznek.



**132. ábra.** Az alkalmazásokhoz ilyen adatokra illesztett parametrikus görbék kellenek. Ezek ugyanazok az adatok, amelyeket az előbb láttunk és ha egy négyzetes hiperbolát választunk (pl.: a  $J_M * T_M = \text{const}$ ), akkor könnyen lehet az összes adatra egy alsó közelítést adni.

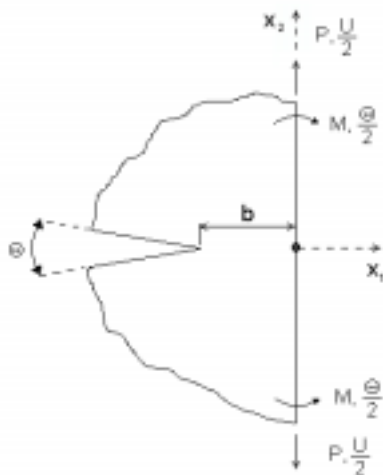
## 12. Hutchinson-féle speciális előadás

Ez az előadás PROF. PARIS mélyen bemetszett próbatestekkel foglalkozó fejtegetéseinek továbbtárgyalásával foglalkozik. Összetett hajlító- és húzó-igénybevételnek kitett próbatesteket fogunk tárgyalni. Számos oka van annak, hogy ezzel foglalkozunk, egyik legkézenfekvőbbet akkor kapjuk, ha belegondolunk, hogy például amikor a CT próbatest a képlékeny tartományban szenved alakváltozást, akkor az ép keresztmetszet elsősorban hajlított állapotban van, de feszültségállapotának egy komponense a húzás. Első közelítésként tekintsük a 133. ábrán látható CT próbatestet.



133. ábra. CT próbatest

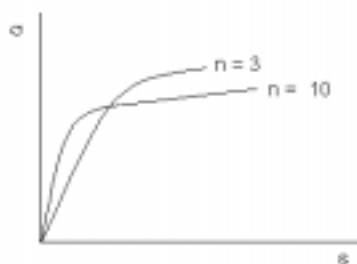
Tehát a tiszta hajlítás analízise, amit korábban tárgyaltunk, nem szigorúan CT próbatestre vonatkozik. Egy kicsit idealizáljuk a helyzetet; a CT próbatest esetében, amikor az teljes mértékben képlékeny alakváltozást szenved, az egyetlen lényeges jellemző méret az ép keresztmetszet hossza. A külső kerület méreteit elhanyagoljuk. Ezért a geometria, amivel számolunk: egy irányban végtelen próbatest, egy irányban végtelen repedéssel. Ezt a közelítést a 134. ábrán láthatjuk



134. ábra. Idealizált CT próbatest geometriája

A próbatestre ható nyomatékokat az  $x_1$ ,  $x_2$  koordináta-rendszer origójára értelmezzük. Később ezt majd eltoljuk, de most válasszuk meg így.

Figyelmünket korlátozzuk a síkalakváltozási állapotra. Szintén korlátozzuk le az anyagot a tisztán exponenciális anyagmodellre, ezek az ún. teljes mértékben képlékeny megoldások. Erre nézve láthatunk két példát a 135. ábrán ( $n=3$  és  $n=10$ ).



135. ábra. Különböző anyagegyenletek

Az feszültség-alakváltozás összefüggésünket ebben a formában írhatjuk:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n,$$

ahol  $\varepsilon_0$  valamilyen referencia-nyúlás és  $\sigma_0$  valamilyen referencia-feszültség, az  $n$  pedig a keményedési kitevő. Az ilyen anyagra és geometriára az alakváltozás csak az ép keresztmetszetre korlátozott. Ebben a geometriában a  $\Theta$  és az  $U$  az elmozdulási jellemzők. Most idézzük fel a képlekenységtan alakváltozás-elméletéből a testben tárolt általános alakváltozási energiát:  $W(U, \Theta)$ . A következővel definiáljuk a kiegészítő alakváltozási energiát:  $\Phi(P, M) \leftarrow$  a két terhelési változó függvénye.

Egy tisztán exponenciális anyagra  $W$  és  $\Phi$  a következő összefüggéssel jellemezhető:

$$W = n \cdot \Phi.$$

Kapcsoljunk most össze néhány mennyiséget a kis alakváltozások alapján a lineárisan rugalmas alakváltozás-elmélettel.

Tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \bullet \quad P &= \frac{\partial W}{\partial U}, & M &= \frac{\partial W}{\partial \Theta} \\ \bullet \quad U &= \frac{\partial \Phi}{\partial P}, & \Theta &= \frac{\partial \Phi}{\partial M} \end{aligned}$$

A megoldás dimenziótlán formája:

$$\begin{aligned} \bullet \quad W &= \sigma_0 \varepsilon_0 b^2 F\left(\frac{U}{\varepsilon_0 b}, \frac{\Theta}{\varepsilon_0}, n\right) \\ \bullet \quad \Phi &= \sigma_0 \varepsilon_0 b^2 G\left(\frac{P}{\sigma_0 b}, \frac{M}{\sigma_0 b^2}, n\right) \end{aligned}$$

Emlékezve, hogy a  $J$ -integrál az energiacnyelődés mértéke és  $U$ -t és  $\Theta$ -t lerögzítve:

$$J = -\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial b} = \sigma_0 \varepsilon_0 \left[ 2bF - U \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{U}{\varepsilon_0 b} \right)} \right] = \frac{2W}{b} - \frac{PU}{b},$$

ahol  $a$  a repedésméret.

Nézzük meg hogyan alakulnak a viszonyok akkor, ha  $P=0$  (tisztá hajlítás). Ekkor

$$J = \frac{2W}{b}$$

Általános gyakorlat lett az ún.  $\eta$ -tényező és az ezzel kifejezett munka definiálása, azaz:

$$J = \eta \frac{W}{b}$$

Ha az alkalmazott terhelések (vagyis: a két terhelési komponens) arányosan nőnek, akkor magyarázhatjuk  $W$ -t úgy, mint az a munka, amelyet az alkalmazott terhelések végeztek a próbatesten. Ennek a kísérletileg mért munkában van jelentős szerepe. Tehát  $\eta$  ezen munkát és a  $J$ -integrált összekapcsoló tényező. Így:

$$\eta\left(n, \frac{M}{Pb}\right) = 2 - \frac{PU}{W}.$$

A következőkben a probléma egzakt megfogalmazását és tetszőleges terhelések mellett numerikus módszerekkel meghatározott nagyon pontos megoldásait láthatjuk majd. Utána megtárgyalunk egy hajlítási állapotra vonatkozó viszonylag egyszerű közelítést.

A megoldás általános formáját most konkrét esetre fogalmazva:

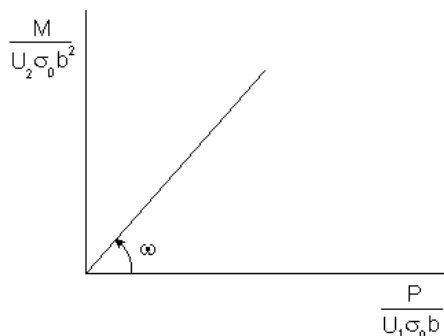
$$\Phi = \frac{\sigma_0 \varepsilon_0 b^2}{n+1} \left\{ \left( \frac{P}{\mu_1 \sigma_0 b} \right)^2 + \left( \frac{M}{\mu_2 \sigma_0 b^2} \right)^2 \right\}^{\frac{n+1}{2}} \cdot f(\omega, n)$$

↓  
kiszámításuk után  
táblázatba foglalták

ahol:  $\mu_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $\mu_2 = 0,364$

Kényelmi okokból érdemes ezeket a változókat így választani, normalizáljuk a terhelés mennyiségeit. A zárójeles kifejezés nem elég, mert a  $P$  és az  $M$  kombinációjától is függ az eredmény:  $\left( \frac{Pb}{M} \right)$

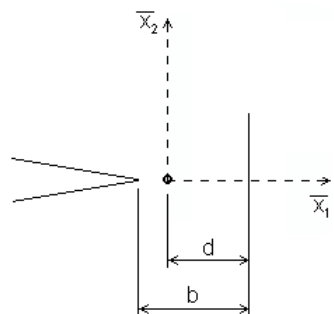
A legkényelmesebb erről gondolkodni egy olyan koordináta-rendszer segítségével, amelynek tengelyein a két normalizált mennyiség szerepel, amelyet a 136. ábra szemléltet.



**136. ábra.** A terhelés két normalizált komponensét magába foglaló koordináta-rendszer

Miután az  $f(\omega, n)$  függvény már ismert, a probléma megoldása teljesen megfogalmazódott. Ezen a ponton kell a numerikus számítást elvégezni. Az  $f(\omega, n)$  függvényt kiszámították  $\omega$  teljes tartományára (vagyis minden  $\mathbf{P}$  és  $\mathbf{M}$  kombinációra) és természetesen egy sor különböző  $n$  értékre.

Mielőtt továbbmennénk, jegyezzük meg, hogy az origónk, amire a nyomatékokat felírtuk, nem szükségszerűen a legjobban megválasztott, amellet, hogy elvileg tetszés szerint választhatunk. Kiderült, hogy van egy kedvezőbb választás is egy jó közelítés megfogalmazásához. Ezért az origót el fogjuk tolni a tiszta hajlítás tengelyére, mint ahogy azt a 137. ábra szemlélteti.

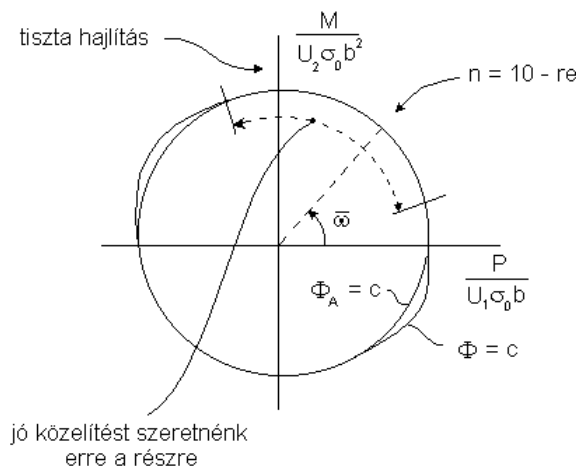


**137. ábra.** A koordináta-rendszer origójának eltolása

Ha az origó a forgatás tengelyén van tiszta hajlítás során, akkor  $\mathbf{P}=\mathbf{0}$  és a lokális elmozdulásokat le lehet írni csupán  $\Theta$  függvényével. Az origó helye ekkor kis mértékben függ az  $n$ -től. Tökéletesen képlékeny esetben:

$$n \rightarrow \infty, \frac{d}{b} \rightarrow 0,631$$

Amikor ezt elvégeztük, ábrázolhatjuk a  $\Phi = \text{const.}$  görbékét a koordináta-rendszerünkben a 138. ábrán bemutatott esetet kapjuk.



**138. ábra.** A  $\Phi = \text{const.}$  görbék ábrázolása a koordináta-rendszerben

Az origó ilyen megválasztásának egyik következménye az, hogy mivel az  $\mathbf{U}$  eltűnik, amikor  $\mathbf{P}=\mathbf{0}$  (tiszta hajlítás), a  $\Phi = \text{const.}$  görbe vízszintes tengellyel való metszéspontjai környezetében az szükségszerűen függőleges. A bennünket érdeklő rész, ahol  $\bar{M}$  pozitív és  $\mathbf{P}$  húzó ill. valamennyire nyomó is.

Amikor a  $\Phi = \text{const.}$  görbét megrajzoltuk, azt találtuk, hogy a görbe legalább a pozitív  $\mathbf{P}$  és pozitív  $\mathbf{M}$  intervallumban jól közelíthető egy ellipszissel. A főleg hajlításnak kitett anyagra a következő közelítő formulát lehet tehát írni:

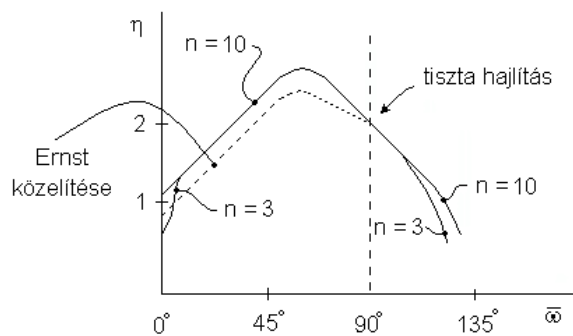
$$\Phi_A = \frac{\sigma_0 \varepsilon_0 b^2}{n+1} \left\{ C_1(n) \left( \frac{P}{\mu_1 \sigma_0 b} \right)^2 + C_2(n) \left( \frac{M}{\mu_2 \sigma_0 b^2} \right)^2 \right\}^{\frac{n+1}{2}}$$

ahol  $C_1(n)$ -et és  $C_2(n)$ -et úgy választjuk meg, hogy a közelítő ellipszis a vízszintes tengellyel (tisztá hajlítás) való metszéspontokban pontosan egybeessen a görbével, ill. a bennünket érdeklő részen a görbületük megegyezzen. Miután megvan  $C_1(n)$  és  $C_2(n)$ , táblázatba foglaljuk őket.

A bennünket érdeklő tartományt kifejezhetjük  $\bar{\omega}$  függvényében: az körülbelül  $20^\circ$  és  $125^\circ$  között helyezkedik el. Ebben a tartományban az ilyen módon való közelítés csupán 3%-os eltérést mutat a teljesen numerikus módon számított J integrál értékektől.

Most térjünk vissza a korábban már tárgyalt  $\eta$  tényezőhöz, amelynek definíciója:

$$J = \eta \frac{W}{b}$$



**139. ábra** Az  $\eta$ -tényező ábrázolása az  $\bar{\omega}$  függvényében

Az  $\eta$ -tényezőt az  $\bar{\omega}$  függvényében a 139. ábra szemlélteti. Figyeljük meg, hogy  $\bar{\omega} = 90^\circ$ -nál  $\eta = 2$ , ahogy ennek lennie kell. A bennünket érdeklő részen  $\eta$  egyáltalán nem függ erősen  $n$ -től. Az  $n = 3$  értékei gyakorlatilag ugyanazok, mint az  $n = 10$  értékei.

Míg tisztá hajlításra  $\eta=2$ , mindkét oldalon a terhelés-kombinációnak erős függvénye. Az eltérés erősebb, mint azt korábban gondolták. ERNST egy egységesített közelítő elméletet dolgozott ki áthidalva a *tisztá hajlítás* és a *tisztá húzás* közötti szakadékat és bevezetett egy olyan  $\eta$  tényezőt, amely szépen követi a tendenciát, de alulbecsülte  $\eta$ -t (a maximumnál kb. 15% -kal, ahogy a szaggatott görbéből kitűnik).



### 13. Irwin-féle speciális előadás

Ez az előadás vezeti be a dinamikus törésmechanikát, amelyről korábban röviden már esett szó. Először megmutatjuk, hogy hogyan lehet egy  $x$  irányban balról jobbra  $c$  sebességgel haladó, egy irányban végtelen repedés csúcsa előtt keletkező feszültségmezőt leírni.

Tekintsük a következő kifejezést:

$$\frac{da}{dt} = c$$

Ha most úgy toljuk el a koordináta-rendszerünket, hogy együtt mozogjon a repedéssel, akkor azt írhatjuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

Ez azért van, mert ha az egyenletes sebességgel mozgó repedés csúcs előtti mezőt nézzük és mi is így mozgunk, akkor a mező nem változik.

De vegyük figyelembe, hogy a mezőben fellépő gyorsulásokkal számolnunk kell a feszültséget megfelelő egyenleteinkben: Ezek két dimenzióra vonatkoznak síkfeszültségi állapotban a következőket írhatjuk:

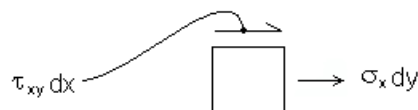
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ ill.}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Ez egyedül az  $y$  irányra vonatkozik.

ahol  $\rho$  a sűrűség.

Az elemi feszültségek definícióját a 140. ábra szemlélteti.



**140. ábra.** Elemi elmozdulások és feszültségek

A következőkben a megoldást könnyítendő átalakításokat nézünk meg. Statikus esetben olyan egyenletekké tudtuk ezeket konvertálni, amelyek a  $\Delta$  megnyúlástól és az  $\omega$  forgatástól függttek.

- $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$
- $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

Tehát ezek alapján a mostani két egyenletünket is olyan formára kellene alakítani, amelyek  $\Delta$ -t és  $\omega$ -t tartalmazzák.

Az előzők figyelembevételével a feszültség komponensei a következő módon számíthatók:

- $\sigma_x = E_I \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$
- $\sigma_y = E_I \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$
- $\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

ahol  $\mu$  a Poisson-tényező.

Ezeket behelyettesítve a következőket kapjuk:

- $E_I \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \rho c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- $G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + E_I \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \rho c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$

ahol  $E_I$  Young-modulus és  $G$  a csúsztató rugalmassági modulus.

Most már látszik, hogyan írhatjuk át az egyenleteket  $\Delta$  és  $\omega$  függvényeire:

- $E_I \frac{\partial}{\partial x} \Delta - G \frac{\partial}{\partial y} \omega = \rho c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- $G \frac{\partial}{\partial x} \omega + E_I \frac{\partial}{\partial y} \Delta = \rho c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

A Young-modulus helyett ezt lehet írni:

$$E = 2G(1 + \mu)$$

A Young-modulus határozza meg a *transzverzális hullám* terjedési sebességét.

$$\frac{2G}{1 - \mu} = E_I$$

$E_I$  határozza meg a *longitudinális hullám* terjedési sebességét.

$$E_I \mu = E_I - 2G$$

$G$  határozza meg a *nyírási hullám* terjedési sebességét.

A fenti egyenleteket használtuk fel a viszonyoknak az  $\Delta$  és az  $\omega$  függvényében való leírására. Ez utóbbiak figyelembevételével látszik, hogy könnyen megszabadulhatunk a forgatástól az első egyenlet  $x$  szerinti, a második egyenlet  $y$  szerinti parciális deriváltját véve és az eredményeket összeadva:

$$E_I \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + E_I \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} = \rho c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Delta).$$

Hogy ezt olyan formára hozzuk, amellyel könnyebb dolgozni (Laplace egyenletek) csak arra van szükség, hogy a jobb oldalt balra vigyük, ügyelve arra, hogy:

- $E_1 = \rho c_1^2$
- $G = \rho c_2^2$
- $\lambda_1^2 = 1 - \left(\frac{c}{c_1}\right)^2$
- $\lambda_2^2 = 1 - \left(\frac{c}{c_2}\right)^2$

A műveleteket elvégezve az egyenlet a nyúlás függvényében a következővé válik:

$$\lambda_1^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} = 0$$

Ez az egyenlet már nagyon közel van ahhoz, amit szeretnénk. Választanunk kell, hogy módosítjuk az  $x$  irányú változót a sebességre való tekintettel, vagy az  $y$  irányút konvertáljuk és azt módosítjuk. Szokásos az  $y$  irányú paramétert változtatni.

$$y_1 = \lambda_1 y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$$

Ezt elvégezve látszik, hogy:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \Delta = 0$$

Egyetlen változás a statikus esethez képest, hogy az  $y$ -t  $y_1$ -re cseréltük.

Hasonlóan „meg tudunk szabadulni” a nyúlástól és pusztán a forgatás segítségével is ki lehet fejezni az első egyenlet  $y$  szerinti, a második egyenlet  $x$  szerinti parciális deriváltját véve és az eredményeket kivonva:

$$G \frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} + G \frac{\partial \omega^2}{\partial y^2} = \rho c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\omega)$$

Ismét a jobb oldalt a bal oldalra lehet vinni:

$$\lambda_2^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} = 0$$

Most ezt lehet módosítani felhasználva, hogy:

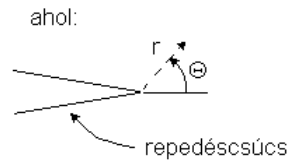
$$y_2 = \lambda_2 y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

Ekkor ez az egyenlet adódik  $\omega$ -ra:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \omega = 0.$$

Olyan helyzetet kaptunk, amely megengedi, hogy megkíséreljünk viszonylag egyszerű feladatok megoldásával a következőképpen: tetszetős harmonikus függvényeket választunk, melyek a megnyúlást ( $\Delta$ ) és a forgatást ( $\omega$ ) jelentik. A repedés csúcs feszültségállapota statikus esetben:



**141. ábra.** A repedés csúcsához rendelt koordináta-rendszer

Vegyük figyelembe, hogy  $\Delta_{\text{STATIKUS}} \propto \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}}$  és  $\omega_{\text{STATIKUS}} \propto \frac{-\sin \frac{\Theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}}$

A dinamikus feszültségmezőre ezeket használhatjuk:

$$\Delta_{\text{DINAMIKUS}} = \frac{A}{\sqrt{2\pi r_1}} \cos \frac{\Theta_1}{2}$$

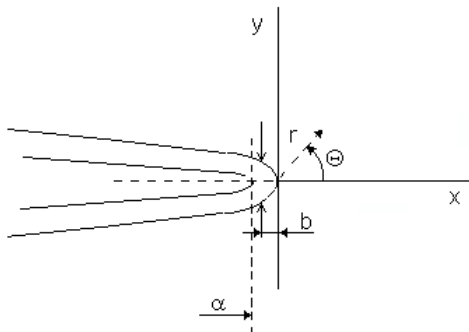
$$\omega_{\text{DINAMIKUS}} = \frac{B}{\sqrt{2\pi r_2}} \sin \frac{\Theta_2}{2}$$

ahol:

$$r_1^2 = x^2 + \lambda_1^2 y^2, \quad \tan \Theta_1 = \frac{\lambda_1 y}{x}$$

$$r_2^2 = x^2 + \lambda_2^2 y^2, \quad \tan \Theta_2 = \frac{\lambda_2 y}{x}.$$

Ismervé  $\Delta$ -t és  $\omega$ -t ki lehet integrálni az elmozdulásokat és úgy átrendezni az egyenletet, hogy nyúlást és feszültséget kapjunk, így teljes dinamikus megoldást kaptunk a repedés élére. Minden ehhez hasonló számítás nagyon időigényes, úgyhogy inkább lerövidítjük egy kicsit és csak a tulajdonságait nézzük meg a részletek helyett. Ehhez tekintsük a repedés 142. ábrán feltüntetett két helyzetét.



**142. ábra** A repedés két helyzete

$$\text{Ekkor } \sigma'_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi(\alpha - b)}} \text{ és } E v' = \frac{2K}{\pi} \sqrt{2\pi b}, \text{ a}$$

$$\text{zárási munka} = D\alpha = \int_0^\alpha \sigma'_y v' db.$$

A fenti egyenlet helytelennek néz ki, mert a zárási feszültség nullától kezd el növekedni és csak akkor éri el  $\sigma'_y$ -t, amikor a teljes záródás végbemegy. Így valójában ennek a feszültségnek az átlagát kellene venni, ami a végső érték fele. Ezt azonban kiegyenlíti az, hogy be kell zárni mindkét oldalt, azokat, amelyek a repedés fölött és alatt vannak. Elvégezve az integrálást, ezt kapjuk:

$$G = \frac{K^2}{E}$$

Ez a síkfeszültségi állapothoz tartozó egyenlet.

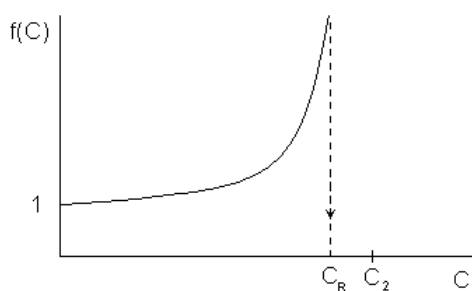
A fentiek a repedés statikus záródására vonatkoztak, nézzük most meg, mi a helyzet dinamikus esetben. Ekkor

$$K = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \text{miközben} \\ \Theta = 0}} \sigma_y \sqrt{2\pi x}$$

Ha a megoldásunkat úgy keressük, hogy a repedéstől balra szabad felületet adjon és alkalmazkodjon a fenti  $K$  definíciójához, akkor meghatározhatjuk a  $\Delta_{\text{DINAMIKUS}}$  és az  $\omega_{\text{DINAMIKUS}}$  képleteiben szereplő  $A$  és  $B$  konstansokat. Ha az  $y$  irányú elmozdulásra oldjuk meg,  $v$ -re ezt kapjuk:

$$v_{\text{DINAMIKUS}} = v_{\text{STATIKUS}} \cdot (1 + \mu) \frac{\lambda_1 (1 - \lambda_2)^2}{4\lambda_1 \lambda_2 - (1 - \lambda_2^2)^2} = v_{\text{STATIKUS}} \cdot f(c),$$

ahol  $c$  a repedésterjedés sebessége. Az  $f(c)$  kapcsolatot a 143. ábra szemlélteti.



**143. ábra.** A dinamikus és statikus megoldás között levő  $f$  függvény a repedésterjedés sebességének függvényében

A  $G$  és a  $K$  közötti kapcsolat tehát így adható vissza:

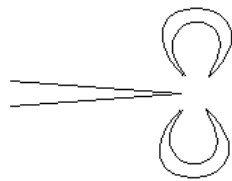
$$G = f(c) \cdot \frac{K^2}{E}$$

Miközben  $c$  a Rayleigh hullám sebességéhez tart, az  $f(c)$  nevezője a nullához. A Rayleigh hullám sebessége az a sebesség, mely lineárisan rugalmas anyagban várható egy adott szabad felületen levő elmozdulásokra.

Ha  $f(c) \rightarrow \infty$ , ahogyan  $c \rightarrow \infty$  ill. ha  $G$ -nek állandónak kell lennie, akkor  $K \rightarrow 0$ . Így a Rayleigh hullám sebessége ennek a továbbterjedésnek a határsebessége.  $C_2$  = a nyírási hullám sebessége.  $C_R \approx 0,9 \cdot C_2$ .

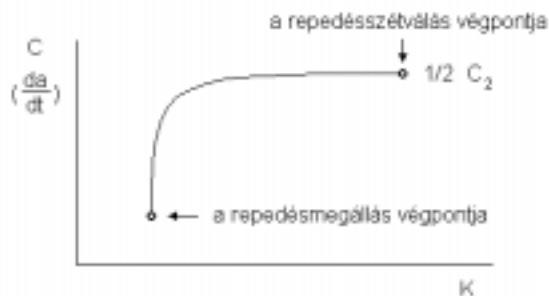
Most már megvan a  $G$  és a  $K$  közötti összefüggés a dinamikus problémára, amely gyakorlatilag független a geometriától és a repedésmérettől. Innentől kezdve jöhetnek a kísérletek. Egy természetes felmerülő kérdés az, hogy milyen messzire megy egy repedés, ha egy adott  $G$  vagy  $K$  hajtja?

El tudunk képzelni egy olyan elrendezést, amely lehetővé teszi, hogy a repedésterjedés minden pontjában kísérletileg meghatározzuk a terjedés sebességét és a  $K$ -t. Ezt nem könnyű megvalósítani. Átlátszó fotorugalmas anyagoknál elképzelhető megoldás a repedéscsúcs fényképezése. Ha ezt gyorsan egymás után megteesszük, egyszínű (izokromatikus) gyűrűket láthatunk. Egy ilyen szemléltet a 144. ábra.



**144. ábra.** Fotorugalmas anyag izokromatikus gyűrűi a repedéscsúcs előtt

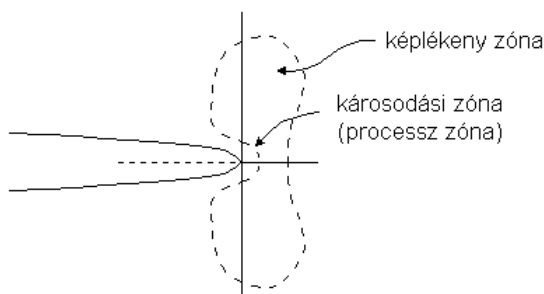
Néhány ilyen felvételtől, ha tudjuk a közöttük eltelt időket és a távolságokat, amennyit két kép között a repedés előrehaladt, úgy ki tudjuk számítani a repedés sebességét és ekkor a gyűrűk elemzésével a  $K$  értékét is meg tudjuk határozni minden egyes időpontra. Tehát megvan a  $K$  és a sebesség, így az eredményeket ábrázolni tudjuk. Erre nézve a 145. ábrán feltüntetett jelleget kapjuk.



**145. ábra.** A repedésterjedés sebessége, a  $C$  és a  $K$  közötti kapcsolat

Ezt az eljárást alkalmazni lehet egy sor nem átlátszó olyan anyag esetében is, mint az acél, méghozzá nyúlásmérő bélyegeknél a repedés útjába való helyezésével (egy kissé a repedés útjából eltolva). Ha bizonyos intervallumoként ezeket elhelyezzük és a jelüket az idő függvényében rögzítjük, akkor a nyúlás-idő diagramot könnyen elő tudjuk állítani, tehát megkaphatjuk a *repedésterjedés sebességét* és a  $K$ -t.

A repedésterjedés határsebessége voltaképp nem a Rayleigh hullám sebessége. Akkor lenne várható, hogy elérje a Rayleigh hullám sebességét, ha a törési folyamatban részt vevő minden anyag lineárisan rugalmas lenne. Ezt figyelembe kell venni, hisz a repedéscsúcs előtt mindig keletkezik képlékeny zóna (146. ábra).



**146. ábra.** A repedéscsúcs előtt kialakuló képlékeny zóna

Annak, hogy azt mondtuk, hogy a repedésterjedés sebessége közelíti a Rayleigh hullám sebességét az az oka, hogy a károsodási tartomány kicsi és ezért ezen nagyon gyorsan átlendül a repedés azon tendencia miatt, hogy a feszültségcsökkenési folyamat olyan gyorsan megy végbe, amilyen gyorsan csak tud. Azonban a károsodási tartomány nem csak lineárisan rugalmas anyagot foglal magába, az ezt körülvevő részre a képlékeny alakváltozás jellemző. Itt az alakváltozások nem lineárisak és nagyok. Mivel ezek nagyok, nagyok a tehetetlenségi hatások is ebben a tagban, amely a következőképpen írható le:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

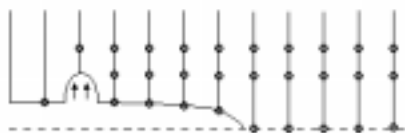
Tehát az alakváltozás növekedésével nő a tehetetlenség is. Emiatt sohasem találkozunk olyan anyaggal, amelyikben nagyobb lenne a repedésterjedés sebessége, mint  $1/2C_2$  (a nyírási hullámterjedés sebességének fele), a maximális sebesség ettől kisebb. A **C - K** diagramon a repedés-szétválás és repedésmegállás közötti szakaszon a meredekség mindig pozitív. Negatív meredekséget sohasem kaphatunk, mert a növekvő hajtóerő mindig a terjedési sebesség növekedésével jár.

Azt mondtuk, hogy a tehetetlenségi hatás az alakváltozás mértékétől függ. Ha az anyagot szívósabbá tesszük, pl.: hőkezeléssel, vagy a vizsgálati hőmérséklet növelésével, akkor nagyobb képlékeny tartományt kapunk nagyobb alakváltozással és nagyobb tehetetlenségi hatással. A maximális sebességünk ekkor lecsökken, de a repedésmegállás pontja felfelé mozog, mint ahogy azt a 147. ábra szemlélteti.



**147. ábra.** A szívósság hatása a **C - K** összefüggésre

Ha a repedésterjedés sebessége nem állandó és a lemez egy irányban nem végtelen, az egyetlen megoldás a numerikus számítási eljárás használata, amely képes a tehetetlenség számításba vételére is. Ezt különböző vége-selemes programokkal már elvégezték a 148. Ábrán látható modell felhasználásával.



**148. ábra.** A repedés szétnyílásának felbontása numerikus eljárással

Ekkor nagyobb számú repedés növekményünk van az egyik csomóponttól a következőig. Egy repedés szétnyitásához a két szomszédos csomópont közötti zárási erőt fel kell szabadítani és nullává tenni. Ezt a repedés előrehaladásának arányában lehet megtenni.

$$\delta a = \delta t \cdot \frac{da}{dt}$$

Ezt az egyenletet és a **C - K** viselkedést (mondjuk  $\delta t = 10^{-6}$  sec-nál) használva a számítógép csak végig hajtja a repedést az anyagon.