

HATVÁNYÖSSZEGEK ELMÉLETE

I. TANULMÁNY

HATVÁNYÖSSZEGEK MEGHATÁROZÁSA ÉS KAPCSOLATUK A HATVÁNYKITEVŐS EGYENLETEKKEL

Szerző: Forrai György

**Ez a tanulmány a szerző tulajdona.
A tanulmányban foglaltak a szerzői jog védelme alatt állnak.
Csak a tulajdonossal történt megállapodás alapján hasznosítható.**

Budapest 2004

TARTALOM

1 Bevezetés

2 Meghatározások, bizonyítások és elemzések

- 2.1 „i”-ed fokú egyenletek felírása
- 2.2 A hatványösszeg-képző algoritmus levezetése
- 2.3 Egész fokszerű, teljes változó számú hatványösszeg képző egyenletek tulajdonságai
- 2.4 Az alap-algoritmusok alkalmazása az egész fokszerű hatványösszegek megoldóképleteinek paraméteres alakban történő felírásához

3 Hatványösszegek képzése

- 3.1 Egy gyökváltozós teljes hatványösszegek képzése
- 3.2 Két gyökváltozós teljes hatványösszegek képzése
- 3.3 Három gyökváltozós hatványösszeg képzése
- 3.4 Négy és öt gyökváltozós hatványösszegek képzése
- 3.5 Negatív fokszerű hatványösszegek képzése

4 Az alap algoritmusok és a megoldó képletek átalakítása

- 4.1 Az alap algoritmusok átalakítása módosított paraméter (F) bevezetésével
- 4.2 Az alap algoritmus módosítása $q_1 = 0$ paraméterű hatványösszeg esetén.
- 4.3 Többparaméteres hatványösszegek egyéb átalakításai.
- 4.4 Átalakítások egyes paraméter-csoportok megadott értéke esetén.
- 4.5 Átalakítások és függvénykapcsolatok különböző fokszerű hatványösszegek között
- 4.6 Különböző gyökváltozó számú paraméterek átszámítása.
- 4.7 A hatványösszegek általános megoldó képletének egy lépésben történő felírása
- 4.8 A paraméterek és a fokszám csökkentése és bővítése, transzformációk

5 Alkalmazási lehetőségek

- 5.1 Az általános megoldóképletek tagjainak csökkentése, egyszerűsítése
- 5.2 A NEWTON polinom helyettesítése
- 5.3 Hatványsorozat összegek megoldása
- 5.4 Sorozat-paraméterek kiszámítása
- 5.5 Oszthatósági vizsgálatok, DIOFANTIKUS egyenletek
- 5.6 Függvény-sorok helyettesítése
- 5.7 Hatványösszegekből képzett egyenlet-rendszerek
- 5.8 „i-ed fokú (algebrai) egyenletek gyökeinek közelítő meghatározása
- 5.9 Egyéb alkalmazási lehetőségek

6 Összefoglalás

7 Irodalomjegyzék:

1 Bevezetés

E tanulmány a **hatványösszegek** elméletét vizsgálja. Megmutatja, és bizonyítja a hatványösszegek, és a gyöktényezős, vagy kanonikus polinom alakban megadott hatványkitevős algebrai egyenletek közötti összefüggéseket és azok következményeit.

*A **hatványösszegek**-azonos hatványú számok (változók) előjeles összegeként képezhetők:*

$$Q_n^i = a^i + b^i + c^i + \dots + n^i \quad \text{„n” számú } a, b, c, \dots, n \text{ változókból képzett}$$

„i” fokszámú **hatványösszeg**,

itt

Q_n^i -ban „i” a hatványösszeg fokszámának jelölése

A legismertebb hatványösszeg a megfelelően átrendezett NEWTON binom, amely két változó (a+b) összegének „i”-ik egész hatványa megoldóképletével írható le.

$$Q_2^i = a^i + b^i$$

A NEWTON binom jól ismert megoldóképletében a változók különböző hatványú kombinációi, és együtthatók szerepelnek.

Az együtthatók egyebek között a **PASCAL háromszöggel**, mint algoritmussal számíthatók.

A PASCAL háromszög lehetővé teszi az alacsonyabb fokszámúból a magasabb fokszámú megoldóképletek együtthatóinak megadott műveleti szabályokkal történő meghatározását.

A kettőnél nagyobb számú változó összegének p-ik hatványát leíró függvények esetében azonban a változó-szorzatok melletti együtthatókra általános megoldóképletek kevésbé ismertek.

A jelen tanulmány egyebek között azt hivatott bizonyítani, hogy a NEWTON binom felírásánál alkalmazott algoritmushoz hasonlóak kettőnél nagyobb számú változóra is léteznek, sőt a már ismert esetre is a tanulmány szerint új, szélesebb körben (negatív, nem egész stb. hatványokra) értelmezhető, és formailag egyszerűbb összefüggések adhatók meg.

A tanulmány alaptézisei a következők:

- I. Az egy (x) ismeretlenes, i-ed fokú egyenletek gyökei egy i=n változószámú hatványösszeg változóival azonosak (továbbiakban: *gyökváltozók*), s így az egyenletek és a hatványösszegek egymásból kifejezhetők.
- II. A hatványösszeg *változói (n) (gyökei)* számának és a hatványösszeg fokszámának (p) bármely értéke esetén léteznek olyan, a hatványkitevők növekvő és csökkenő tartományára érvényes alap és azokból képezhető egyéb algoritmusok, amelyekkel az adott fokszámú hatványösszeg n számú, egységnyi fokszám-különbségű ismert hatványösszegekből meghatározható.

A hatványkitevő növekvő tartományára érvényes alap algoritmus:

$$Q_n^p = q_1 Q_n^{p-1} - q_2 Q_n^{p-2} \dots \pm q_n Q_n^{p-n} \quad 1./$$

a hatványkitevő csökkenő tartományára érvényes alap algoritmus:

$$Q_n^p = (Q_n^{p+n} - q_1 Q_n^{p+n-1} + q_2 Q_n^{p+n-2} \dots \pm q_{n-1} Q_n^{p+1}) / q_n \quad 2./$$

ahol

$q_{1\dots n}$ n-ik (egész) fokszámú **paraméterek** az a;b;c.....n
gyökváltozókból előállítva (lásd 2.1 fejezet)

Hangsúlyozandó, hogy a hatványösszegek elméletében szereplő **paraméterek** olyan, a gyökváltozókkal szoros funkcionális kapcsolatban álló tényezők-, amelyek egyes alkalmazásokban **maguk is változók** lehetnek. Indexálásuk (alsó indexük) nem a megszokott módon, a paraméter mellett álló ismeretlen (x) hatványa alapján, hanem a paraméter saját fokszáma szerint történik

A tanulmány fokozatosan bővült ki a tárgy bemutatása szempontjából utóbb elkerülhetetlenül fontosnak tartott következtetésekkel, ami a dolgozat felépítésében, a tárgykörök arányaiban és súlyozásában, esetleg nem tükröződik ideálisan.

Előfordulhat, hogy a tanulmányban ismertetett meghatározások és jelölések eltérnek a megszokottól (pl. gyökváltozó^{*})

Bizonyos témaköröket a tanulmányban csak felvetünk, ezeket később még szeretnénk részletesen publikálni.

Mindezért Szerző kéri a Tisztelt Olvasó szíves megértését.

^{*} Megkülönböztetendő: **gyök** ha $x-a(b..)=0$; illetve általánosabb jelentéssel **gyökváltozó**, ha $x-a(b..)=0$, vagy, valamely más szám, illetve polinom

2 Meghatározások, bizonyítások és elemzések

2.1 „i”-ed fokú egyenletek felírása

Az „i”-ed fokú egyenletek felírása **gyöktényezős és kanonikus polinom** alakban történhet. Megjegyzendő, hogy a tanulmány 5.8 fejezetében bemutatásra kerül egy újabb egyenértékű ábrázolási mód is: a **hatványösszeg egyenletrendszer**.

A gyöktényezős alakban:

$$(x-a)(x-b)\dots(x-m)(x-n)=0 \quad 3./$$

Elvégezve a 3./ képletben kijelölt szorzásokat, az algebrai egyenlet felírható kanonikus polinom alakban is,

$$q_0 x^n - q_1 x^{n-1} + \dots + q_2 x^1 + q_n x^0 = 0 \quad 4./$$

Az egyenletben szereplő q_i paraméterek a szakirodalomból ismert összefüggésekkel a gyökváltozók különféle fokszámú, nem ismétlődő variációjaként határozhatók meg.

$$q_0 = 1$$

$$q_1 = a+b+\dots+m+n$$

....

$$q_n = ab\dots mn \quad 5./$$

Az ismertett átalakítások során a kanonikus polinom fokszáma (p) és a változók száma (n) megegyeznek ($p=n$)

2.2 A hatványösszeg-képző algoritmus levezetése

A 4./ képlettel felírt egyenletet megszorozva az ismeretlen változó tetszőleges értékű δ hatványával (x^δ), eredményeként egy olyan egyenlet adódik, amelynek fokszáma nagyobb a változók számánál ($p=n+\delta$), illetve hogy δ számú olyan fiktív gyökváltozója van, amely 0-val egyenlő (lásd még 4.8 fejezet, „fokszám bővítés”):

$$q_0 x^p - q_1 x^{p-1} + q_2 x^{p-2} + \dots + q_n x^{p-n} = 0 \quad 6./$$

Mint hogy a fiktív gyökváltozók 0 értékűek, a $q_0 \div q_n$ paraméterek változatlanok maradnak, és minden n -nél nagyobb fokszámú paramétere 0 értékű

A továbbiak során, a levezetés részeként a 6/ képletbe most már külön-külön, sorban be lehet helyettesíteni az ismeretlen x „ $i=n$ ” számú megoldását, vagyis a gyökváltozókat:

$$x = (a;b...m;n) \quad 7./$$

Összegezve (+ előjellel) az így nyert, n számú egyenletet, adódik az alábbi, különböző, p -nél kisebb fokszámú hatványösszegek és paraméterek szorzatából álló képlet (**hatványösszeg képző algoritmus**):

$$q_0(a^p + b^p + \dots + m^p + n^p) - q_1(a^{p-1} + b^{p-1} + \dots + m^{p-1} + n^{p-1}) + \dots \\ +/- q_n(a^{p-n} + b^{p-n} + \dots + m^{p-n} + n^{p-n}) = 0 \quad 8./$$

vagyis

$$\sum_{i=0}^{i=n} q_i^{n-i} Q_p^{p-i} = 0 \quad 9./$$

ahol:

$$Q_p^{p-i} = a^{p-i} + b^{p-i} + \dots + m^{p-i} + n^{p-i} \quad 10. /$$

Megjegyzendő, hogy a gyökváltozókkal behelyettesített, összeadandó egyenletek ismétlődési száma és előjele a képletben elvileg tetszőleges lehetne.

A további vizsgálatok azonban főképpen a pozitív előjellel összegzett, ún. **teljes változószámú hatványösszeg képző egyenletekre** irányulnak majd.

Teljes változószámúnak a 8./ képlet akkor tekinthető, ha minden gyökváltozója ismétlődésének megfelelő számmal szerepel benne, ellenkező esetben a hatványösszeg képző egyenlet **hiányos, vagy megnövelt változó számú**.

A q_{0+n} **paraméterek** 0-tól eltérő értéke esetén a hatványösszeg képző egyenlet **teljes**, ha viszont bármelyikük 0-val egyenlő, **hiányos paraméter számúnak** tekinthető.

Mivel a bizonyítás felépítésekor semminemű korlátozás és feltétel a gyökváltozók és a p fokszám vonatkozásában nem lett megadva, az eredmények valamennyi valós és komplex gyökváltozóra és hatványra kiterjeszthetők.

Egyetlen (triviális) feltétel, hogy gyökváltozók száma pozitív egész szám ($n > 0$) legyen.

Észrevehető, hogy a 8./ képlet lényegében egy sajátos algoritmust képez, amelynek segítségével meghatározható bármely „ n ” gyökváltozó számú, „ p ” fokszámú hatványösszeg értéke, ha ismert a hozzá legközelebb álló „ n ” számú, egységnyi fokszám különbségű hatványösszeg, valamint a $q_1..q_n$ paraméterek.

Az algoritmus a hatványkitevő növekvő, vagy csökkenő irányába is folytatható, vagyis negatív fokszámú hatványösszegek is képezhetők:

A hatványkitevő növekvő tartományára érvényes alap algoritmus

$$Q_n^p = q_1 Q_n^{p-1} - q_2 Q_n^{p-2} \dots + /- q_n Q_n^{p-n} \quad 11./$$

a hatványkitevő csökkenő tartományára érvényes alap algoritmus

$$Q_n^p = (Q_n^{p+n} - q_1 Q_n^{p+n-1} + q_2 Q_n^{p+n-2} \dots + /- q_{n-1} Q_n^{p+1}) / q_n \quad 12./$$

A 11,12/ képletekkel az I;II alaptételek, és képletek (1; 2./) bizonyítást nyertek.

2.3 Egész fokszámú, teljes változó számú hatványösszeg képző egyenletek tulajdonságai

Az 1; 2./ képletekhez hasonló hatványösszeg képző egyenletek (továbbiakban: **algoritmusok**) különféle, több gyökváltozós algebrai egyenletekre tetszőleges fokszám, teljes és hiányos paraméter esetére előállíthatók.

A jelen tanulmányban azonban főképpen az **egész fokszámú, teljes változó számú** hatványösszeg képző egyenletek alap algoritmusához kapcsolódó strukturális tulajdonságokat és szerkesztési elveket vizsgáljuk.

Az ilyen egész fokszámú, teljes változó számú hatványösszegekre ugyanis definíciószerűen érvényesül a $Q_n^1 = q_1$ azonosság.

Mivel a levezetett algoritmusokban ezt követően csak a $q_1 \dots q_n$ paraméterek játszanak szerepet, (bármely p -nél kisebb Q_n^p hatványösszeg is belőlük adódik) az algoritmus minden soronkövetkező lépésében is csupán a q paraméterek között végzendő műveletek jelentkeznek. Ebből következik, hogy bármely egész fokszámú, teljes gyökváltozó számú hatványösszeg kizárólagosan a q paraméterek és valamely K együtthatók segítségével egyértelműen leírható, illetve ilyenekre felbontható-vagyis hogy az ilyen hatványösszegeknek **paraméteres (alakú) megoldóképletük van.**

A hatványösszegek általános megoldóképlete így a $q_1 \dots q_n$ paraméterek szorzatainak különböző, összességében $P(n, p)$ számú szorzat-variációiból áll.

Ezek a szorzat-variációk azzal jellemezhetők, hogy alkotóelemeik ($q_1 \dots q_n$) egész fokszámúak, és adott alkotóelem egyszeres vagy ismétlődő előfordulása ($\alpha_1 \dots \alpha_n$ hatványkitevőjű) is lehet.

$$Q_n^p = \sum_{i=1}^{i=P(n)} K_i q_1^{\alpha_{1,i}} \dots q_\beta^{\alpha_{\beta,i}} \dots q_n^{\alpha_{n,i}} \quad 13./$$

Nyilvánvaló azonban, hogy csak olyan szorzat-variációk lehetségesek, amelyekben szereplő q paraméterek fokszáma ($1 \leq i \leq n$) és azok ismétlődési száma (α_i) szorzataiból képzett összeg a hatványösszeg fokszámára jellemző Π számmal egyenlő.

$$\Pi = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i i \quad 14./$$

Pozitív kitevőjű hatványösszegek esetén $\Pi = p$, negatív kitevőjű hatványösszegek esetén, a tört alakú algoritmus számlálójában $\Pi_{sz} = (n-1) \cdot p$, a nevezőjében $\Pi_{sz} = n \cdot p$ azonosság áll fenn ($\Pi = \Pi_{sz} \cdot \Pi_n = p$)

Következésképpen, ha ekkor a q paraméterek fokszáma végigfut a $0...n$ számsoron, a paraméter-szorzat variációk száma ($P(n,p)$) meg kell, hogy egyezzen a „ Π „ számot n -nél kisebb pozitív egész számokból előállító „szorzat variációk” számával.

Számszerűen az ilyen feladatok az additív számelmélet körében oldhatók meg.

Adott esetben a „ $P(n,p)$ „ számnak a sorrendtől függetlenül előálló, ismétlődés nélküli ún. „**lényegesen különböző** „szorzat variációi” érdekesek csak, példaképpen:

$$P(1;1)=(1)=1$$

$$P(2;2)=(2*1; 2)=2$$

$$P(3;3)=(3*1; 1+2; 3)=3$$

$$P(4;4)=(4*1; 1+3; 2+2; 2*1+2; 4)=5$$

$$P(5;5)=(5*1; 1+4; 2*1+3; 3*1+2; 2+3; 1+2*2; 5)=7$$

$$P(6;6)=(...)=10$$

15./

.....

A paraméter szorzatok száma a fenti szabályok szerint akkor adódik, ha a változók száma (n) a hatványösszeg fokszámaival (p) azonos, vagy azt meghaladja ($n \geq p$).

Az olyan hatványösszegek ugyanis, amelyekben a változók száma a hatványösszeg fokszámaát meghaladja ($n > p$), minthogy magasabb fokú paramétert nem tartalmazhatnak - formailag meg kell, hogy egyezzenek a $p = n$ azonos számú változóra vonatkozó összefüggésekkel.:

$$Q_{n>p}^p = Q_p^p$$

16./

Abban az esetben, ha a „ p ”-nél kisebb fokszerű q paraméterek közül bármely oknál fogva egy vagy több nem vehető figyelembe (hiányos paraméter számú egyenlet), $P(n)$ tovább csökken. Példaképpen, ha $P(5)$ meghatározásakor a 2-nél nagyobb fokszerű q paramétereket kizárjuk, vagy azok 0 értékűek, akkor

$$P_{(3;4;5);5} = (5*1; 3*1+2; 1+2*2)=3$$

17./

számú szorzat variációt kapunk.

Ennyire adódik a paraméter szorzatok száma akkor is, ha pusztán a q_0, q_1, q_2 változók ismeretében $p=5$ hatványösszeget kívánunk előállítani.

A paraméter szorzatok így meghatározott száma a lehetséges maximális értéket mutatja, adott megoldóképletben egyes szorzatok elmaradhatnak.

2.4 Az alap-algoritmusok alkalmazása az egész fokszámú hatványösszegek megoldóképleteinek paraméteres alakban történő felírásához

Az előző fejezet alapján bebizonyosodott, hogy amennyiben az alap algoritmusokat az egész fokszámú, teljes hatványösszegek vonatkozásában alkalmazzák, a hatványösszegek **paraméteres alakú megoldóképleteinek** sora kizárólag a q paraméterek és K együtthatók segítségével felírható.

A Q_n^0 hatványösszeg értéke minden esetben a gyökváltozók számával egyezik meg

$$Q_n^0 = a^0 + b^0 + c^0 + \dots + n^0 = q_0 \cdot n = n \quad 18./$$

Adott „ n ” számú gyökváltozó egész fokszámú hatványösszegének algoritmus 0-tól, vagy bármely más olyan pozitív vagy negatív fokszámú hatványösszegtől kezdhető, amelynek közvetlen környezetében legalább „ n ” számú hatványösszeg megoldó képlete már ismert.

Az algoritmus legcélszerűbben a $p = 0$ hatványérték környezetében indítható, mivel az első hatványösszegek triviálisan, viszonylag egyszerű algebrai átalakításokkal számíthatók, pl.:

$$Q_n^{-1} = (a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + \dots + n^{-1}) = q_{n-1} / q_n \quad 19./$$

$$Q_n^0 = n \quad 20./$$

$$Q_n^1 = a + b + c + \dots + n = q_1 \quad 21./$$

$$Q_n^2 = a^2 + \dots + n^2 = (a + b + \dots + n)^2 - 2(a \cdot b + a \cdot c + \dots + b \cdot n + c \cdot n) = q_1^2 - 2q_2 \quad 22./$$

A 2-nél nagyobb számú gyökváltozóval bíró kiinduló hatványösszegek célszerűen a $1/2$ -es algoritmusokkal képezhetők.

A $p = n$ esetre vonatkozó hatványösszeg ugyanis bármely nagyobb számú gyökváltozó esetén is azonos alakú marad, így a számítási algoritmusok képzésének egyfajta **bázisát** képezi.

Ezért a $Q_{n=p}^p$ alakú (ahol „ p ” a 0 , a pozitív és a negatív egész számok halmaza) hatványösszegek összessége „**bázis hatványösszeg megoldóképlet**”-sornak nevezhető.

A bázis hatványösszeg megoldóképlet sor elemét képezi például a $p=3$ fokszámú, $n = 3$ gyökváltozószámú hatványösszeg is, ami viszont a már ismert, $p=0; 1; 2$ bázis hatványösszegekből, az 1./ algoritmussal számítható.

$$Q_n^3 = Q_3^3 = q_1 Q_3^2 - q_2 Q_3^1 + q_3 Q_3^0 = q_1^3 - 3 q_1 q_2 + 3 q_3 \quad 23./$$

Hasonlóképpen valamennyi nagyobb (vagy kisebb) fokszámú bázis hatványösszeg előállítható.

Amennyiben a szükséges számú, sorban egymás után következő fokszámú bázis hatványösszeg már ismert, a továbbiak meghatározására is az 1;2./ algoritmusok alkalmazhatók.

A hatványösszegek képzésének másik módja, hogy amennyiben a megfelelő fokszámú, azonban nagyobb számú gyökváltozót tartalmazó hatványösszeg megoldóképlete már ismert, a kevesebb gyökváltozót tartalmazó, azonos fokszámú hatványösszeg (kivéve a Q_n^0 hatványösszeget) a keresetnél nagyobb fokszámú paraméterek elhagyása útján képezhető.

A hatványösszegek akkor is felírhatók paraméteres alakban, ha azért hiányos paraméter számúak, mert egyes paramétereik nullaértékűek. Ekkor a $q_i=0$ paraméterekkel szorzott tagok értelemszerűen elhagyhatók.

A **nem egész fokszámú**, és a **hiányos vagy ismétlődő gyökváltozó számú** hatványösszegek azonban, annak ellenére, hogy léteznek (létezhetnek) rájuk is érvényes algoritmusok, a már ismertek miatt ($Q_1 \neq q_1$) paraméteres alakban, általános esetben nem írhatók fel.

Bár egyes feladatok megoldásához az ilyen hatványösszegek is szükségesek lehetnek, jelen tanulmányban ezekkel kapcsolatosan csak eseti vizsgálatokat végzünk.

Végül is megemlítenéd, hogy a teljes gyökváltozószámú hatványösszegek n számú gyökváltozót tartalmaznak, látens, a paraméterekben kifejeződő formában. Ezért n db különböző fokszámú hatványösszegeből alkotott, egyenletrendszer a q_1 - q_n paraméterek, illetőleg a gyökváltozók vonatkozásában elvileg egyértelműen megoldható. *Így az n hatványösszegeből álló egyenletrendszer rendelkezik minden olyan tulajdonsággal, amellyel a gyöktényező, vagy kanonikus polinom formában felírt algebrai egyenletek e tekintetben rendelkeznek.*

A hatványösszeg-egyenletrendszer a magasabb fokú algebrai egyenletek egyértelmű felírásának harmadik, egyenértékű módja.

3 Hatványösszegek képzése

Paraméteres alakban a 1;2./ alap algoritmusok segítségével csak a teljes gyökváltozós számú hatványösszegek (továbbiakban rövidítve „**hatványösszegek**”) állíthatók elő.

A következő példákkal a 0-hoz közeli gyökváltozó és fokszámú, pozitív és negatív kitevőjű paraméteres hatványösszeg-megoldó képleteknek az alap algoritmusok segítségével történő levezetése mutatható be.

A kidolgozott példák talán túlzottan nagynak tűnő száma azzal indokolható, hogy így „rendszerbe foglalva” az algoritmuson alapuló módszer menete, hatékonysága, és logikai struktúrája („esztétikuma”?) vélhetően jobban szemléltethető.

3.1 Egy gyökváltozós teljes hatványösszegek képzése

Egy gyökváltozó (a) esetén csak a q_1 paraméter létezik.

$$q_1 = a \quad 24./$$

és az algoritmus

$$Q_1^p = q_1 Q_1^{p-1} = q_1^p \quad 25./$$

Az algoritmusból adódik:

.....

$$Q_1^0 = 1 \quad 26./$$

$$Q_1^1 = q_1 \quad (\text{bázis hatványösszeg}) \quad 27./$$

$$Q_1^2 = q_1^2 \quad 28./$$

$$Q_1^3 = q_1^3 \quad 29./$$

.....

3.2 Két gyökváltozós teljes hatványösszegek képzése

Két gyökváltozó (a, b) esetén a q_1 , q_2 paraméterek léteznek.

$$q_1 = a + b \quad 30./$$

$$q_2 = ab \quad 31./$$

és az algoritmus

$$Q_2^p = q_1 Q_2^{p-1} - q_2 Q_2^{p-2} \quad 32./$$

.....

Az algoritmusból adódik:

$$Q_2^0 = 2 \quad 33./$$

$$Q_2^1 = q_1 \quad 34./$$

$$Q_2^2 = q_1^2 - 2q_2 \quad (\text{bázis hatványösszeg}) \quad 35./$$

$$Q_2^3 = q_1^3 - 3q_1 q_2 \quad 36./$$

$$Q_2^4 = q_1^4 - 4q_1^2 q_2 + 2q_2^2 \quad 37./$$

$$Q_2^5 = q_1^5 - 5q_1^3 q_2 + 5q_1 q_2^2 \quad 38./$$

.....

3.3 Három gyökváltozós hatványösszeg képzése

Három gyökváltozó (a,b,c) esetén a q_1, q_2, q_3 paraméterek léteznek:

$$q_1 = a + b + c \quad 39./$$

$$q_2 = ab + ac + bc \quad 40./$$

$$q_3 = abc \quad 41./$$

és az algoritmus

$$Q_3^p = q_1 Q_3^{p-1} - q_2 Q_3^{p-2} + q_3 Q_3^{p-3} \quad 42./$$

.....

A három gyökváltozós hatványösszegek sorozatának első megoldóképletei a következők:

$$Q_3^0 = 3 \quad 43./$$

$$Q_3^1 = q_1 \quad 44./$$

$$Q_3^2 = q_1^2 - 2q_2 \quad 45./$$

$$Q_3^3 = q_1^3 - 3q_1q_2 + 3q_3 \quad (\text{bázis hatványösszeg}) \quad 46./$$

$$Q_3^4 = q_1^4 - 4q_1^2q_2 + 4q_1q_3 + 2q_2^2 \quad 47./$$

$$Q_3^5 = q_1^5 - 5q_1^3q_2 + 5q_1^2q_3 + 5q_1q_2^2 - 5q_2q_3 \quad 48./$$

$$Q_3^6 = q_1^6 - 6q_1^4q_2 + 6q_1^3q_3 + 9q_1^2q_2^2 - 12q_1q_2q_3 + 3q_3^2 - 2q_2^3 \quad 49./$$

$$Q_3^7 = q_1^7 - 7q_1^5q_2 + 7q_1^4q_3 + 14q_1^3q_2^2 - 21q_1^2q_2q_3 + 7q_1q_3^2 - 7q_1q_2^3 + 7q_2^2q_3 \quad 50./$$

$$Q_3^8 = q_1^8 - 8q_1^6q_2 + 8q_1^5q_3 + 20q_1^4q_2^2 - 32q_1^3q_2q_3 - 16q_1^2q_2^3 + 24q_1q_2^2q_3 + 12q_1^2q_3^2 - 8q_2q_3^2 + 2q_2^4 \quad 51./$$

.....

3.4 Négy és öt gyökváltozós hatványösszegek képzése

A következőkben azt mutatjuk be, hogyan lehet valamely nagyobb számú gyökváltozót tartalmazó megoldóképletből a magasabb fokszámú paraméterek elhagyásával egy kevesebb gyökváltozót tartalmazó megoldóképletet létrehozni.

E célból előbb az öt gyökváltozós hatványösszeget vezetjük le majd a negyedfokú hatványösszegeket abból származtatjuk.

Öt (a;b;c;d;e) esetén a q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 paraméterek léteznek:

$$q_1 = a + b + c + d + e \quad 52./$$

$$q_2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de \quad 53./$$

$$q_3 = abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde \quad 54./$$

$$q_4 = abcd + abce + acde + bcde + abce \quad 55./$$

$$q_5 = abcde \quad 56./$$

és az algoritmus

$$Q_5^n = q_1 Q_5^{n-1} - q_2 Q_5^{n-2} + q_3 Q_5^{n-3} - q_4 Q_5^{n-4} + q_5 Q_5^{n-5} \quad 57./$$

ahol

$$Q_5^0 = 5 \quad 58./$$

$$Q_5^1 = q_1 \quad 59./$$

$$Q_5^2 = q_1^2 - 2q_2 \quad 60./$$

$$Q_5^3 = q_1^3 - 3q_1 q_2 + 3q_3 \quad 61./$$

A következő lépésben (minthogy az még nem ismert), alkalmazni kell a negyedfokú bázis hatványösszeg számítási szabályát:

$$\begin{aligned} Q_5^4 &= Q_4^4 = q_1 (q_1^3 - 3q_1 q_2 + 3q_3) - q_2 (q_1^2 - 2q_2) + q_3 q_1 - 4q_4 = \\ &= q_1^4 - 4q_1^2 q_2 + 4q_1 q_3 + 2q_2^2 - 4q_4 \end{aligned} \quad 62./$$

A Q_5^5 , mint **bázis hatványösszeg**, az előző, négy ismert bázis hatványösszeg alapján az 1./ algoritmussal számítható

$$Q_5^5 = q_1(q_1^4 - 4q_1^2 q_2 + 4q_1 q_3 - 4q_4) - q_2(q_1^3 - 3q_1 q_2 + 3q_3) + q_3(q_1^2 - 2q_2) - q_4 q_1 + 5q_5 = q_1^5 - 5q_1^3 q_2 + 5q_1^2 q_3 - 5q_1 q_4 + 5q_1 q_2^2 - 5q_2 q_3 + 5q_5 \quad 63./$$

A továbbiakban is az algoritmus alkalmazható (levezetés nélkül)

$$Q_5^6 = q_1^6 - 6q_1^4 q_2 + 6q_1^3 q_3 - 6q_1^2 q_4 + 6q_1 q_5 - 12q_1 q_2 q_3 + 9q_1^2 q_2^2 + 6q_2 q_4 + 3q_3^2 - 2q_2^3 \quad 64./$$

$$Q_5^7 = q_1^7 - 7q_1^5 q_2 + 7q_1^4 q_3 - 7q_1^3 q_4 + 14q_1^3 q_2^2 - 21q_1^2 q_2 q_3 + 7q_1^2 q_5 - 7q_1 q_2^3 + 14q_1 q_2 q_4 + 7q_1 q_3^2 + 7q_2^2 q_3 - 7q_2 q_5 - 7q_4 q_3 \quad 65./$$

...

A négy gyökváltozós hatványösszegek (Q_4^0 kivételével), mint jeleztük, a q_5 paramétereket tartalmazó szorzatok elhagyásával, az öt gyökváltozós hatványösszegekből képezhetők.

$$Q_4^0 = 4 \quad 66./$$

$$Q_4^1 = q_1 \quad 67./$$

$$Q_4^2 = q_1^2 - 2q_2 \quad 68./$$

$$Q_4^3 = q_1^3 - 3q_1 q_2 + 3q_3 \quad 69./$$

$$Q_4^4 = q_1^4 - 4q_1^2 q_2 + 4q_1 q_3 - 4q_4 + 2q_2^2 \text{ (bázis hatványösszeg)} \quad 70./$$

$$O_4^5 = q_1^5 - 5q_1^3 q_2 + 5q_1^2 q_3 - 5q_1 q_4 + 5q_1 q_2^2 - 5q_2 q_3 \quad 71./$$

$$Q_4^6 = q_1^6 - 6 q_1^4 q_2 + 6 q_1^3 q_3 - 6 q_1^2 q_4 - 12 q_1 q_2 q_3 + 9 q_1^2 q_2^2 + 6 q_2 q_4 + 3 q_3^2 - 2 q_2^3 \quad 72./$$

$$Q_4^7 = q_1^7 - 7 q_1^5 q_2 + 7 q_1^4 q_3 - 7 q_1^3 q_4 - 7 q_1 q_2^3 + 14 q_1 q_2 q_4 + 7 q_1 q_3^2 - 21 q_1^2 q_2 q_3 + 7 q_2^2 q_3 - 7 q_4 q_3 + 14 q_1^3 q_2^2 \quad 73./$$

$$Q_4^8 = q_1^8 - 8 q_1^6 q_2 + 8 q_1^5 q_3 - 8 q_1^4 q_4 + 20 q_1^4 q_2^2 - 8 q_2^2 q_4 - 16 q_1 q_3 q_4 + 24 q_1^2 q_2 q_4 - 16 q_1^2 q_2^3 - 32 q_1^3 q_2 q_3 + 24 q_1 q_3 q_2^2 + 12 q_1^2 q_3^2 - 8 q_2 q_3^2 + 2 q_2^4 + 4 q_4^2 \quad 74./$$

3.5 Negatív fokszámú hatványösszegek képzése

A negatív hatványú hatványösszegek képzésére is többféle módszer alkalmazható.

Az alábbiakban elsőként az n gyökváltozós, csökkenő hatványösszeg sor első tagjainak a 2./ algoritlussal történő képzését mutatjuk be. Kiindulásként ehhez szükség van az első pozitív hatványösszegek megoldóképletének felírására is:

$$Q_n^3 = q_1^3 - 3 q_1 q_2 + 3 q_3 \quad 75./$$

$$Q_n^2 = q_1^2 - 2 q_2 \quad 76./$$

$$Q_n^1 = q_1 \quad 77./$$

$$Q_n^0 = n \quad 78./$$

A Q_n^{-1} hatványösszeg triviálisan adódik

$$Q_n^{-1} = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d + \dots + 1/n = q_{n-1} / q_n \quad 79./$$

A kisebb fokszámú hatványösszegek képzése már a 2./ algoritmus szerint történhet (levezetés nélkül)

$$Q_n^{-2} = (q_{n-1}^2 - 2 q_{n-2} q_n) / q_n^2 \quad 80./$$

$$Q_n^{-3} = (q_{n-1}^3 - 3 q_{n-2} q_{n-1} q_n + 3 q_{n-3} q_n^2) / q_n^3 \quad 81./$$

$$Q_n^{-4} = (q_{n-1}^4 + 2 q_{n-2}^2 q_n^2 - 4 q_{n-2} q_{n-1}^2 q_n + 4 q_{n-3} q_{n-1} q_n^2 - 4 q_{n-4} q_n^3) / q_n^4 \quad 82./$$

.....

Más módszerrel, a negatív hatványösszegek a pozitívból az alábbi behelyettesítésekkel képezhetők a legkönnyebben (három gyökváltozós eset):

$$Q_3^{-n} = Q_3^{n*} / q_3^n = [(ab)^n - (ca)^n - (cb)^n] / q_3^n \quad 83./$$

$$q_1^* = q_2 \quad 84./$$

$$q_2^* = q_1 q_3 \quad 85./$$

$$q_3^* = q_3^2 \quad 86./$$

Pl.

$$Q_3^{-5} = Q_3^{5*} / q_3^n = (q_2^5 - 5 q_1 q_2^3 q_3 + 5 q_2^2 q_3^2 + 5 q_1^2 q_2 q_3^2 - 5 q_1 q_3^3) / q_3^5 \quad 87./$$

Ugyanígy bármely számú gyökváltozóra képezhető negatív hatványösszeg.

Az algoritmusból következően, a pozitív és a negatív hatványösszegek azonos struktúrájúak, csupán a paramétereik elrendezése eltérő.

4 Az alap algoritmusok és a megoldó képletek átalakítása

A hatványösszegekről szóló, 3. fejezetben ismertetett alap algoritmusok, paraméteres alakú megoldó képletek és maguk a paraméterek is különféle feltételek, korlátozások, függvénykapcsolatok figyelembevételével módosításra, átalakításra szorulhatnak.

Az ilyen átalakítások szükségessége és célszerűsége különféle elméleti és alkalmazástechnikai okokból. (pl. oszthatósági vizsgálatok, a paraméter szorzatok variációinak csökkentése, egyenlet megoldások stb.) jelentkezhet.

4.1 Az alap algoritmusok átalakítása módosított paraméter (F) bevezetésével

Az F paraméter általánosítva egy olyan módosított paraméter típust jellemezhet, amely az adott fokszámú q paraméter, és azonos fokszámú gyökváltozó-szorzatok különbségeként előállítható összes lehetséges variáció szorzataként képezhető (az F melletti kettős index a paraméter fokszámát (i), és a gyökváltozók számát (n) jelenti).

$$F_{i,n} = (q_n - ab \dots n) (q_n - ac \dots n) \dots (q_n - ab \dots c) \quad 88./$$

Magának $F_{i,n}$ módosított paraméternek a fokszáma i-vel egyenlő:

A gyakorlat szempontjából az $i=1$. fokszámú, módosított F paraméter lehet érdekes, amelynek képlete:

$$F_{1,n} = (q_1 - a) (q_1 - b) \dots (q_1 - n) \quad 89./$$

a gyökváltozók száma (n) szerint

$$F_{1,1} = 0 \quad 90./$$

$$F_{1,2} = q_2 \quad 91./$$

$$F_{1,3} = q_1 * q_2 - q_3 \quad 92./$$

$$F_{1,4} = q_1^2 * q_2 - q_1 * q_3 + q_4 \quad 93./$$

$$F_{1,5} = q_1^3 * q_2 - q_1^2 * q_3 + q_1 * q_4 - q_5 \quad 94./$$

.....

A módosított, komplex paraméterek egyfajta „diszkriminánsok” (D) amelyekkel a hatványösszeg megoldóképletek, és a rokon hatványkitevős egyenletek vizsgálhatók.

Emellett a komplex paraméterek alkalmasak a levezetett hatványösszeg-képző alapalgoritmusok (1; 2./) módosítására is.

Ennek egy lehetséges módszere a következő:

- a 1; 2./ alapalgoritmusokban a módosítandó q_n paraméter helyébe $F_{i,n}$ - paramétert kell behelyettesíteni,
- a nyert megoldóképletből ki kell vonni azokat a paraméter szorzatokat, amelyek az $F_{i,n}$ behelyettesítése következtében többletként jelentkeznek.

Példaképpen vezessük be a három gyökváltozós hatványösszeg képzésére szolgáló algoritmusba a q_3 paraméter helyett az ugyancsak harmadfokú, három gyökváltozóból kombinált új $F_{1,3}$ paramétert, és helyettesítsük be.

$$F_{1,3} = (q_1 - a)(q_1 - b)(q_1 - c) = (a+b)(c+b)(c+a) = (q_1 q_2 - q_3) \quad (F_{1,3} = F) \quad 95./$$

A háromváltozós hatványösszeg algoritmusának új paraméterei tehát az alábbiak:

q_1, q_2, F .

A módosított algoritmus, növekvő fokszám esetén:

$$Q_3^p = q_1 Q_3^{p-1} - q_2 Q_3^{p-2} + q_1 q_2 Q_3^{p-3} - F Q_3^{p-3} \quad 96./$$

A három gyökváltozós hatványösszegek sorozatának első megoldóképletei, amelyek sem q_3 -at, sem pedig F-et nem tartalmazzák, változatlanok maradnak:

$$Q_3^0 = 3 \quad 97./$$

$$Q_3^1 = q_1 \quad 98./$$

$$Q_3^2 = q_1^2 - 2q_2 \quad 99./$$

A harmadfokú (bázis) hatványösszeg képzésekor jelenik meg először az F paraméter, amely ezt követően már valamennyi további hatványösszeg alkotórészét képezi. Következésképpen, mivel bármely három egymás utáni fokszámú hatványösszeg q_3 -at nem, csak a q_1, q_2 , és a helyettesíthető F paramétert tartalmazhatja, amelyek a paraméterekkel való szorzásuk és összeadásuk után szintén ismétlődően F alakra hozhatók, az algoritmussal nyert bármely fokszámú hatványösszegnek sem kell q_3 alkotó eleme legyen.

$$Q_3^3 = q_1^3 - 3 q_1 q_2 + 3 q_3 = q_1^3 - 3F \quad 100./$$

$$Q_3^4 = q_1^4 + 2 q_2^2 - 4 q_1 F \quad 101./$$

$$Q_3^5 = q_1^5 - 5 q_1^2 F + 5 q_2 F \quad 102./$$

$$Q_3^6 = q_1^6 - 2 q_2^3 - 6 q_1^3 F + 6 q_1 q_2 F + 3 F^2 \quad 103./$$

$$Q_3^7 = q_1^7 - 7 q_1^4 F + 7 q_1^2 q_2 F - 7 q_2^2 F + 7 q_1 F^2 \quad 104./$$

$$Q_3^8 = q_1^8 - 8 q_1^5 F + 8 q_1^3 q_2 F - 8 q_1 q_2^2 F + 12 q_1^2 F^2 - 8 q_2 F^2 + 2 q_2^4 \quad 105./$$

$$Q_3^9 = q_1^9 - 9 q_1^6 F + 18 q_1^3 F^2 - 3 F^3 - 18 q_1 q_2 F^2 + 9 q_1^4 q_2 F - 9 q_1^2 q_2^2 F + 9 q_2^3 F \quad 106./$$

$$Q_3^{10} = q_1^{10} - 10 q_1^7 F + 25 q_1^4 F^2 - 10 q_1 F^3 + 15 q_2^2 F^2 - 30 q_1^2 q_2 F^2 + 10 q_1^5 q_2 F - 10 q_1^3 q_2^2 F + 10 q_1 q_2^3 F - 2 q_2^5 \quad 107./$$

$$Q_3^{11} = q_1^{11} - 11 q_1^8 F + 33 q_1^5 F^2 - 22 q_1^2 F^3 - 44 q_1^3 q_2 F + 11 q_1^2 q_2^3 F + 33 q_1 q_2^2 F^2 + 11 q_1^6 q_2 F - 11 q_1^4 q_2^2 F - 11 q_2^4 F + 11 q_2 F^3 \quad 108./$$

$$Q_3^{12} = q_1^{12} - 12 q_1^9 F + 42 q_1^6 F^2 - 40 q_1^3 F^3 + 3 F^4 + 36 q_1 q_2 F^3 - 60 q_1^4 q_2 F^2 + 72 q_1^2 q_2^2 F^2 - 24 q_2^3 F^2 + 12 q_1^7 q_2 F - 12 q_1^5 q_2^2 F - 12 q_1 q_2^4 F + 12 q_1^3 q_2^3 F + 2 q_2^6 \quad 109./$$

.....

Észrevehető, hogy a három gyökváltozós hatványösszeg első 11. fokú megoldóképlete összeadandóinak száma csak 11, vagyis kevesebb, mint a csak két gyökváltozójú NEWTON binomé, sőt, egy lehetséges paraméter-kombináció ($q_1 q_2^5$) már nincs is benne meg. Később is a tagok száma csak mérsékelten növekedik, és mint jeleztük, meghatározása az additív algebra feladatkörbe tartozik.

Megjegyzendő, hogy a megoldóképlet minden tagja - kivéve a paraméterek legnagyobb hatványértékeit (ha $p=2n+1$ páratlan: q_1^p , ha $2 \nmid p$ páros: $q_2^{p/2}$, ha $3 \nmid p$: $q_3^{p/3}$... ha $n \nmid p$: $q_n^{p/n}$...)- **F-el osztható**. Ha p prímszám, akkor azzal is. Ha p nem prímszám, akkor csak egyetlen tag azzal nem osztható.

Csökkenő fokszám esetén az algoritmus:

$$Q_3^{p-3} = (Q_3^p - q_1 Q_3^{p-1} + q_2 Q_3^{p-2}) / (q_1 q_2 - F) \quad 110./$$

Mint hogy a negatív fokszámú hatványösszegek is az első pozitív és 0 fokszámú hatványösszegekből képezhetők, amelyek a q_3 -at nem tartalmazzák, az algoritmussal nyert eredmény - a negatív hatványösszeg - sem kell q_3 -at tartalmazza.

Az ismertett metodika nagyobb számú gyökváltozó esetén is alkalmazható.

Példaképpen fejezzük ki $F_{1,4}$; $F_{1,5}$ segítségével a Q_4^4 ; Q_5^5 bázis hatványösszegeket:

$$Q_4^4 = q_1^4 - 4 F_{1,4} + 2 q_2^2 \quad 111./$$

$$Q_5^5 = q_1^5 - 5 F_{1,5} + 5 q_1 q_2^2 - 5 q_2 q_3 \quad 112./$$

Mint a fentiekből kitűnik, az $F_{1,n}$ paramétereket bevezetve már a bázis hatványösszeg megoldóképletében szereplő tagok száma is jelentősen lecsökken, például $n=5$ gyökváltozó szám és $p=5$ esetén $P(5)=7$ -ről 4-re.

A paraméterek és a gyökváltozók más, pl. 1-nél nagyobb fokszámú kombinációival sem zárhatók ki új megoldási algoritmusok.

4.2 Az alap algoritmus módosítása $q_1=0$ paraméterű hatványösszeg esetén.

A paraméterek értéke, annak módosítása a hatványösszegek elméletének egyik legfontosabb témaköre, amely a matematika különféle részterületeihez kapcsolódik, s így a jelen tanulmány is több helyen érinti.

Azonos fokszámú hatványösszegek elvileg teljes vagy hiányos paraméter-számmal, különböző számú paraméterrel írhatók fel, és ennek megfelelően a hatványösszegek megoldóképletei is **egy**, vagy **többparaméteresek** lehetnek.

A paraméterek közötti függvénykapcsolatok, korlátozások változatossága kimeríthetetlen, s így a továbbiakban csak kivonatos áttekintésük végezhető el.

Kiemelhető fontosságú a $q_1 = a + b + \dots + n = 0$ feltétel, amikor az alap algoritmus az alábbiak szerint írható fel:

$$Q_n^p = -q_2 O_n^{p-2} + \dots + /- q_n Q_n^{p-n} \quad 113./$$

A lehetséges változatok közül külön publikáció keretében célszerű foglalkozni az $n=3$ hatványösszegekkel, amelyek lényegében a NEWTON binomnak felelnek meg, és amelyek első megoldóképletei $q_1 = 0$ esetén az alábbiak szerint írhatók fel:

.....

$$Q_3^0 = 3 \quad 114./$$

$$Q_3^1 = 0 \quad 115./$$

$$Q_3^2 = q_2 \quad 116./$$

$$Q_3^3 = 3 q_3 \quad 117./$$

$$Q_3^4 = 2 q_2^2 \quad 118./$$

$$Q_3^5 = -5 q_2 q_3 \quad 119./$$

$$Q_3^6 = 3 q_3^2 - 2 q_2^3 \quad 120./$$

$$Q_3^7 = 7 q_2^2 q_3 \quad 121./$$

$$Q_3^8 = -8 q_2 q_3^2 + 2 q_2^4 \quad 122./$$

Megjegyzendő, hogy $q_1 = 0$ esetben bármely gyökváltozó ellenkező előjellel valamely q_1' paraméterként is felfogható, s így n számú különböző, az 1;2./ algoritmusok szerintivel egyenértékű, azonban virtuálisan eggyel kevesebb paramétert tartalmazó **teljes hatványösszeg** is felírható ($q_1' = a; b..n$).

Ehhez csupán a $q_{1*}^p = (-a; -b \dots -n)_1^p$ tagot kell a kevesebb változós számú egyenlet mindkét oldalához hozzáadni.

$$Q_n^p = Q_{n-1}^p + q_1^p \quad 123./$$

4.3 Többparaméteres hatványösszegek egyéb átalakításai.

4.3.1 Átalakítások nagyobb fokszámú paraméterek 0 értéke esetén.

A korábbiakban a nem teljes paraméterszámú hatványösszegek közül csak a $q_1=0$ esetet vizsgáltuk.

Elvileg azonban bármely paraméter (q_n kivételével) 0 értékű lehet (lásd 4.8 fejezet, transzformációk).

Ebben az esetben a hatványösszeg felírása értelemszerűen egyszerűsíthető.

Példaképpen vizsgáljunk egy olyan hipotetikus Q_5^7 hatványösszeget, amelynél

$$q_1 = q_2 = 0 :$$

$$Q_5^7 = -^7 q_4 q_3 \quad 124./$$

vagyis a hatványösszeg mindössze két paraméter szorzatára egyszerűsíthető.

Megjegyzendő, hogy a hasonló paraméter kombinációk csak megadott feltételek mellett létezhetnek.

4.3.2 Átalakítások egyes paraméterek közötti függvénykapcsolat esetén.

A paraméterek között elvileg a legkülönbözőbb „kívülről vezérelt” függvénykapcsolatok lehetségesek.

Példaképpen vizsgáljuk a Q_5^7 hatványösszeget, ha $q_3 = q_1 q_2$

$$Q_5^7 = q_1^7 -^7 q_1^3 q_4 +^7 q_1^2 q_5 -^7 q_2 q_5 +^7 q_1 q_2 q_4 \quad 125./$$

4.3.3 Átalakítások egyes paraméterek és gyökváltozók közötti függvénykapcsolat esetén.

Tulajdonképpen már a 4.1 pont szerinti F paraméter is ilyen jellegű függvénykapcsolatból származtatható.

Bár a paraméter-gyökváltozó függvénykapcsolatokból nem mindig alakíthatók új algoritmusok, azonban a hatványösszeg-képletek így is megkönnyíthetők a hasonló vizsgálatokat.

Példaképpen vizsgáljuk az alábbi 3 gyökváltozójú, 8 fokszámú hatványösszeget, ha a paraméterek és a gyökváltozók között az alábbi függvénykapcsolatok léteznek:

$$q_1=0; q_2=a^2; q_3=a^3$$

A hatványösszeg-megoldóképlet a következő:

$$Q_3^8 = 8 q_2 q_3^2 - 2 q_2^4 = 6a^8 \quad 126./$$

4.3.4 Átalakítások egyes paraméterek tetszőleges külső tényezőkkel, valamint egymás között fennálló függvénykapcsolata esetén.

Példaképpen szolgálhat az alábbi függvénykapcsolat,

$$q_1 = q_2 \sin y \quad 127./$$

ahol y független tényező

A behelyettesítés bármely megoldóképletbe a lehetséges egyszerűsítésekkel elvégezhető.

4.4 Átalakítások egyes paraméter-csoportok megadott értéke esetén.

Egyes paraméter-csoportok maguknak a paramétereknek értékétől függetlenül is, valamely adott számmal egyenlők lehetnek.

Külön osztályt képezhetnek azok az esetek, amikor bármely hatványösszeg egészét alkotó paraméter-csoport értéke 0.

$$Q_n^p = 0 \quad 128./$$

Ez ugyanis kihat az összes nagyobb fokszámú hatványösszeg megoldóképletére is

Példaképpen, ha $Q_3^3 = q_1^3 - 3F = 0$, akkor a Q_3^7 -ra vonatkozó (121./) képlet az alábbiak szerint (többféleképpen is) egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned} Q_3^7 &= q_1^7 - 7q_1^4 F + 7q_1^2 q_2^2 F - 7q_2^2 F + 7q_1 F^2 = F(7q_1^2 q_2^2 - 5q_1 F - 7q_2^2) \\ &= -5q_1^7 + 21q_1^5 q_2^2 - 21q_1^3 q_2^4 \end{aligned} \quad 129./$$

vagyis ebben az esetben a $p=3$ -nál nagyobb páratlan kitevőjű hatványösszeg virtuálisan eggyel kevesebb számú paraméterrel volt kifejezhető.

Fenti problémakör egész értékű relatív prím gyökváltozók esetén a „FERMAT sejtéshez” kapcsolódik.

Hasonló DIOFANTIKUS egyenletek vizsgálatára az 5. fejezetben térünk vissza.

4.5 Átalakítások és függvénykapcsolatok különböző fokszámú hatványösszegek között

Adott fokszámú hatványösszeget leíró paramétercsoportok alacsonyabb fokszámú hatványösszegekből és paraméterekből álló összefüggésekké rendezhetők. Így például a 119; 121./ képletekből, ($q_1=0$) átrendezéssel nyerhető:

$$Q_3^7 = 1,4 q_2 Q_3^5 \quad 130./$$

4.6 Különböző gyökváltozó számú paraméterek átszámítása.

A feladatok egy részénél, a gyökváltozók számának megváltozása (az egyenlet fokszámának csökkenése vagy növekedése) miatt szükség lehet egy megadott fokszámú paraméter más gyökváltozó-számúra való átszámítására.

Ha pl. egy új gyökváltozót (n) kell bevezetni, és a kisebb változószámú $q_{n'}$, $q_{(n'-1)'}$ paraméterek már ismertek:

$$q_n = q_{n'} + q_{(n'-1)'} n \quad 131./$$

Valamely gyökváltozó megszüntetésekor, ha a nagyobb gyökváltozó számú q_{1+n} paraméterek, és a megszüntetendő gyökváltozó már ismert, vagy kiszámítható:

$$q_{(n'-1)'} = q_n / n - q_{n'} \quad 132./$$

Ennél a számításnál $q_{(n'-1)'}$ meghatározását $q_{n'}$ paramétertől kezdődően lépésenként lehet végezni, utoljára a q_1 -t határozva meg.

4.7 A hatványösszegek általános megoldó képletének egy lépésben történő felírása

A NEWTON féle binom általános megoldó képletének együtthatói bármely fokszámú hatványösszegekre ismert összefüggés felhasználásával, **egy lépésben**, zárt alakban számíthatók:

$$K_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad 133./$$

A hatványösszegek paraméteres alakú megoldó képleteinek együtthatói az alap algoritmus segítségével a 3-4 fejezetekben ismertetett módon lépésenként, 0-tól növekvő sorrendben meghatározhatók.

Abban az esetben viszont, ha valamely nagyobb fokszámú hatványösszeget a NEWTON binomhoz hasonlóan, a közbenső hatványösszegek levezetése nélkül, egy lépésben szükséges meghatározni, az egyes paraméter-variációk K_i együtthatóinak meghatározásához megfelelő kombinatorikai módszereket kell találni. Ezeknek a módszereknek a kidolgozása azonban

sajátos megközelítést igényel, és a legcélszerűbben valamely konkrét alkalmazáshoz kapcsolódva végezhető el.

Így pl. a NEWTON binom bármely fokszámahoz tartozó hatványösszeg egy lépésben történő meghatározásához szükséges módszerek már rendelkezésre állnak [2].

Az 5 fejezetben végzett vizsgálatokkal igazolható, hogy a hatványösszegek javasolt megoldóképletei esetenként lényegesen egyszerűbbek, és könnyebben kezelhetők, mint a hasonló célból más eljárásokkal nyerhetők.

4.8 A paraméterek és a foksám csökkentése és bővítése, transzformációk

Ez a vizsgálat a diofantikus és az algebrai egyenletek megoldása témaköréhez kapcsolódik.

Módszert próbálunk keresni arra, hogy maguk a hatványfüggvények, és a hatványösszegek hogyan alakíthatók oly módon, hogy megkönnyíthessék azok megoldását.

A megoldásra váró egyenletek és a belőlük képzett hatványösszegek általában többféle gyökváltozót, és többféle foksámú q paramétert tartalmaznak. Megoldásukat egyszerűsíti, ha a gyökváltozók és a paraméterek száma csökkenthető, értékük 0-val egyenlővé tehető.

A paraméterek átalakításának legismertebb eszköze az eredeti ($i=1$ fokú) ismeretlen (x) változó α értékű **bővítő** (összeadó), **transzformációja**, az $y = x + \alpha$ új gyökváltozó bevezetése.

A q_1 paraméter megszüntetéséhez szükséges új ismeretlen, pl. az alábbiak szerint számítható:

$$y = x \pm \alpha = x \pm q_1/n \quad (n \text{ a gyökváltozók száma}) \quad 134./$$

A többparaméteres formában megadottak közül egyparaméteres alakúra azonban ezzel a módszerrel csak néhány egyenlet típus alakítható:

- a másodfokú egyenletek,
- az ismétlődő gyökű, 2-nél nagyobb foksámú egyenletek.

Gyökváltozó bővítő transzformációval valamely teljes paraméterszámú hatványösszeg megoldóképletében általános esetben legfeljebb egy, egynél nagyobb foksámú, tetszőlegesen kiválasztott „ i ”-ed foksámú paraméter is mindig 0-val egyenlővé tehető. Az 1-nél nagyobb foksámú paraméterek 0-ra történő transzformálásához azonos foksámú egyenletet kell megoldani, és a megoldásban valamennyi, a vizsgálatnál kisebb foksámú paramétert szerepeltetni kell. Ilyenkor azonban nemcsak egy, hanem több (legfeljebb i) számú erre alkalmas bővítő adódhat.

Így például a másodfokú q_2 paraméter megszüntetéséhez az alábbi két új gyökváltozót kell bevezetni:

$$y = x \pm 2q_1 \{-1 \pm \{1 - 4q_2/[q_1(n+1)]^2\}^{1/2}\} \quad 135./$$

Az ismertített módszer ismételt alkalmazásával sem érhető el azonban egynél nagyobb számú paraméter megszüntetése, mivel az ismétlés során a korábban hiányzó paraméterek más formában általában újból megjelennek, és ez a probléma bármely új gyökváltozó bevezetése esetén megmarad.

Az adott kérdést más aspektusból világíthatja meg egy alapvetően eltérő jellegű művelet - a **fokszám bővítés** vizsgálata.

Ezzel a művelettel ugyanis a kiindulóból viszonylag egyszerűen alakíthatók ki olyan, hiányos paraméterszámú hatványegyenletek, amelyek fokszáma a kiinduló algebrai egyenleténél (n ; E_n) lényegesen nagyobb (p ; H_p), azonban paramétereik száma legfeljebb n .

A gyökváltozók bővítése egy, vagy több fokozatban, a kiinduló algebrai egyenletnek egy újabb, m fokszámú egyenlettel és/vagy polinommal (P, E_m), tehát az ismeretlent tartalmazó függvénnel való szorzása útján történhet.

Ahhoz, hogy a bővítés során a paraméterek száma (n) ne növekedjen, a $(p-1) \div n$ fokszámú tagok melletti paraméterek a kiinduló egyenlet (E_n) megfelelő ismétlődési számú kivonásával fokozatosan megszüntethetők.

$$H_p = E_n x(P, E)_m - A E_n \quad 136./$$

„A” valamely $(p-n)$ -d fokú hatványkitevős függvény

Az ismertített, és hasonló átalakítási eljárásokkal egy tetszőleges fokszámú, olyan hiányos paraméterszámú hatványegyenlet nyerhető, amelynek ismeretlen gyökváltozója az eredetivel megegyező és valamennyi, $n-1$ -nél nagyobb fokszámú paramétere 0-val egyenlő.

$$H_p = q_0 x^p + q_{n-1} x^{p-n} + \dots + q_p \quad 137./$$

Emellett a szorzóként számításba jövő $(P; E)_m$ polinomok vagy egyenletek nagyszámú variációs lehetősége miatt a megmaradó, $n-1$ -nél kisebb fokszámú tagok melletti paraméterek halmaza és értékkészlete is gyakorlatilag végtelen lehet

Elvégezve a gyökváltozóknak az egyenletbe történő behelyettesítését, olyan, p fokszámú **hatványösszeg-megoldóképlet** állítható elő, amely csak a gyökváltozókkal azonos n számú hatványösszeget (Q^p ; $Q^{0+(n-1)}$) tartalmazhatja, mivel valamennyi, Q^{p+n} fokszámú hatványösszeg 0-val egyenlő. Ez a tulajdonsága felhasználható a jelen tanulmány 5.8 fejezetében bemutatott közelítő egyenlet megoldó eljárás alkalmazásakor.

Transzformáció azonban nem csak az ismeretlen **bővítése**, hanem más műveletekkel **szorzás, hatványozás, azok kombinációja** stb. **útján** is végezhető.

A következő, gyöktényező alakban felírt egyenlet pl. a Fermat tétel feltételeit elégíti ki, mivel a gyökváltozók mindegyike relatív prím, és a p hatványkitevőjük is azonos p prímszám.

$$(x-a^p)(x-b^p)(x+c^p)=0 \quad 138./$$

Belátható, hogy ez a felírás kanonikus polinom alakra hozva (p hatványtól függetlenül) egy olyan harmadfokú egyenletet kell, hogy alkosson, amelyben a tétel feltételeinek megfelelően a q_1 paraméter 0-val egyenlő kell, hogy legyen.

A FERMAT tétel tehát ebből a nézőpontból, a szokásos meghatározásától eltérően, így fogalmazható meg:

Felírható e három, azonos p (prímszám) hatványú természetes relatív prímszám $(a;b;c)$ harmadfokú kanonikus polinom alakban oly módon, hogy a q_1 paraméterük 0-val egyenlő legyen? Lehetséges e bármely három gyökváltozó esetén az ismeretlen olyan transzformációja, amely ezt eredményezi?

Ebben a felírásban a tétel más megközelítéssel, pl. az ismeretlen (x) „hatvány” **transzformációja** $(x=y^p)$ útján is vizsgálható:

$$(y^p-a^p)(y^p-b^p)(y^p+c^p)=0 \quad 139./$$

E képlet szorzói a gyökváltozókból képzett összegek $(y-a)$; $(y-b)$; $(y-c)$ és $(p-1)$ -ed fokú polinomok szorzatára bontható, illetve, hogy az új ismeretlen „ y ” is mindenütt csak első hatványú legyen, a polinomokat $(p-1)$ számú szorzatra kell bontani:

$$\{(y-a_1)\dots(y-a_{p-1})\} * \{(y-b_1)\dots(y-b_{p-1})\} * \{(y-c_1)\dots(y-c_{p-1})\}=0 \quad 140./$$

Ez a felbontás valamely $(p-1)$ -ed fokú egyenletek megoldásával végezhető el, amelynek $n*(n-1)$ db nem természetes, hanem képzetes szám gyöke van.

Példaképpen vizsgáljuk a $p=3$ esetet, amelyre a jelzett felbontás még zárt alakban, viszonylag könnyen elvégezhető $(a=a; a_1= a*(1-i\sqrt{3})/2; a_2= a*(1+i\sqrt{3})/2)$ és ugyanígy $b;c)$

$$[(y-a)\{(y-a(1-i\sqrt{3})/2)*(y-a(1+i\sqrt{3})/2)\}] * [b\{(y-b(1-i\sqrt{3})/2)*(y-b(1+i\sqrt{3})/2)\}] * [(y-c)\{(y-c(1-i\sqrt{3})/2)*(y-c(1+i\sqrt{3})/2)\}]=0 \quad 141./$$

A felbontással tehát egy olyan, $p=3*p=9$ -ed fokú egyenlethez jutottunk, amelynek 9 gyökváltozója közül 3 db egész szám.

A hatványösszegek és a hatványfüggvények bemutatott azonossága mindkét csoport vizsgálatát megkönnyítheti, változatosabbá teheti.

5 Alkalmazási lehetőségek

A hatványösszegek, minthogy strukturálisan egyszerűbb („szebb”) megoldást kínálnak, sok esetben hasznosak lehetnek az elméleti és a gyakorlati matematikai problémák megoldásában.

Nagy választékuk miatt ezekre csak vázlatosan, a teljesség igénye nélkül, illetőleg példákön keresztül lehetett utalni.

A szerző szándékában áll azonban ilyen eredmények későbbi publikálása is, illetőleg további alkalmazási lehetőségek feltárása.

5.1 Az általános megoldóképletek tagjainak csökkentése, egyszerűsítése

A hatványösszegek, különösen a nagyobb változó-számúak hagyományos módon történő felírásakor nagyszámú paraméter-variáció képződik, ami az elméleti és a gyakorlati vizsgálatokat bonyolultabbá teszi, növeli a számítási hibalehetőséget.

A NEWTON-képletnek például ($n=2$) változó) $p+1$ számú összeadandó tagja van.

A polinomok hagyományos módon történő hatványozása esetén az összeadandó tagok száma a változók számától (n) függően az alábbiak szerint adódik.

Hatványösszeg-fokszám	Összeadandó tagok száma $P(n)$	
$p=1$	$P(n)=0$	142./
$p=2$	$P(n)=n(n-1)/2$	143./
$p=3$	$P(n)=n(n-1)(n+4)/6$	144./
$p=4$	$P(n)=n^2(n-1)/2$	145./
....		

Fentiekből következik, hogy valamely negyedfokú, négyváltozós hatványösszeg hagyományos algebrai megoldó képlete 24 tagból kell, hogy álljon.

Az ismertett algoritmusok szerinti megoldó-képletekben szereplő összeadandó tagok számának meghatározására szolgáló összefüggések levezetése és bemutatása ugyan önmagába véve is érdekes feladat, azonban a jelenlegi vizsgálat tárgyát nem képezi.

A tanulmányban szereplő példák így is lehetőséget nyújtanak hasonló jellegű összehasonlítások végzésére.

Az előbb hivatkozott, negyedfokú, négyváltozós hatványösszeget az 1./algoritmus segítségével felírva (62./) a megoldóképlet 24 helyett már csak 5 összeadandó tagot tartalmaz.

Ugyanazt az $F_{1,4}$ paraméterrel vizsgálva a megoldóképlet mindössze 3 tagú.

Ha pedig az egyenletet $q_1 = -d$ új változó felvételével alakítjuk eggyel nagyobb változó-számúvá, a $q_1 = 0$ feltétel mellett az tovább egyszerűsíthető,

$$Q_5^4 = 2q_2^2 - 4q_4 \quad 146./$$

A változók nagyobb száma esetén a paraméter-variációk száma a hagyományoshoz képest még látványosabban csökken.

Az is fontos körülmény, hogy a paraméter-variációk száma kevesebb lehet, mint maguknak a változóknak a száma.

Példaképpen egy hagyományos módon felírt, $n=100$ változós harmadfokú hatványösszeg bal oldalán 101 db, jobb oldalán pedig $P(n)=171600$ db összeadandó állna.

Ugyanez a módosított algoritmus szerint, $F_{1,3}$ bevezetését követően mindössze két összeadandóra csökkenthető:

$$Q_{100}^3 = q_1^3 - 3F_{1,3} \quad 147./$$

Ez megkönnyítheti azoknak a számításoknak a végzését, amikor nagy számú változó kisebb fokú hatványösszegének meghatározása a cél.

Hasonló feladatok jelentkezhetnek például a fizikában, ha különböző átmérőjű részecskék térfogatát kell valamely átmérő mérési eredmények alapján kiszámítani.

Felmerülhet az ellenvetés, hogy bár a megoldóképlet összeadandóinak száma lecsökkent, azonban maguknak a q paramétereknek a kiszámítása lett sokkal bonyolultabb.

Kétségtől igaz, hogy a számítások végzésének gyakorlati oldalát tekintve az egységnél nagyobb fokú paraméterek előzetes meghatározása önmagában véve többletmunkaként jelentkezik.

Az elvégzendő műveletek számának és bonyolultságának analízise útján azonban bizonyítható, hogy az esetek jelentős részében az előny mégis a javasolt új megoldóképletek használata során jelentkezik, s így a többlet munkabefektetés nagyobb számú változó esetén megtérülhet.

5.2 A NEWTON polinom helyettesítése

A NEWTON polinommal azonos célt szolgáló általános megoldóképlet

levezetésének kiindulási feltételeire a tanulmány 4.2 pontjában már történt hivatkozás.

A paraméter-variációk és az együtthatók meghatározása, az erre szolgáló általános megoldóképletek felírása azonban eltérő megközelítést igényel, amelyet szerző külön tanulmányban publikált [2].

A következő példa az ajánlott módszer hatékonyságát hivatott bizonyítani:

A $Q_3^7 = a^7 + b^7 - c^7$ hatványösszeg leírásához ($q_1=0$) a hagyományos NEWTON binomnál 7 összeadandó tag szükséges.

Ugyanehhez az ajánlott eljárás esetén mindössze két paraméter szorzatát kell meghatározni:

$$Q_3^7 = 7 q_2^2 q_3 \quad 148./$$

5.3 Hatványsorozat összegek megoldása

A hatványsorozat összegek meghatározott módon monoton növekvő, azonos hatványú számok összegét jelentik.

Példaképpen a természetes számok sorozata választható:

$$Q_n^p = 1^p + 2^p + \dots + (n-1)^p + n^p \quad 149./$$

Az ismertetett esetben n bármely értékénél a keresett összeg a sorban megelőző összegből az alábbi képlettel számítható

$$Q_n^p = Q_{n-1}^p + n^p \quad 150./$$

A sorozat 0- hoz közeli első hatványaira vonatkozó képletek algebrai úton könnyen levezethetők:

$$Q_n^0 = n \quad 151./$$

$$Q_n^1 = n*(n+1)/2 \quad 152./$$

$$Q_n^2 = n*(n+1)*(2n+1)/6 \quad 153./$$

$$Q_n^3 = [n*(n+1)]^2 /4 \quad 154./$$

A hatványösszegek elméletének alkalmazásával képezhetők az ismertetett feladat megoldására szolgáló algoritmusok is.

E célból érdemes újabb változókat bevezetni:

$$\varphi_1 = 2n+1 \quad 155./$$

$$\varphi_2 = n*(n+1)/2 \quad (=q_1) \quad 156./$$

$$Q_n^0 = n \quad 157./$$

$$Q_n^1 = \varphi_2 \quad 158./$$

$$Q_n^2 = \varphi_1 \varphi_2 / 3 \quad 159./$$

$$Q_n^3 = \varphi_2^2 \quad 160./$$

....

$$Q_n^{14} = \varphi_1 \varphi_2 (192\varphi_2^6 - 672\varphi_2^5 + 1344\varphi_2^4 - 1760\varphi_2^3 + 1436\varphi_2^2 - 630\varphi_2 + 105) / 45 \quad 161./$$

$$Q_n^{15} = \varphi_2^2 (48\varphi_2^6 - 192\varphi_2^5 + 448\varphi_2^4 - 704\varphi_2^3 + 718\varphi_2^2 - 420\varphi_2 + 105) / 3 \quad 162./$$

.....

Példaképpen, $p = 14$, $n=10$ esetén, vagyis ha $\varphi_1 = 21$, $\varphi_2=55$ adódik:

$$Q_{10}^{14} = 17393866687363400$$

Elképzelhető, hogy az új módszer milyen mértékben könnyítheti a hasonló jellegű elméleti vizsgálatokat.

Felhasználható a módszer a negatív kitevőjű hatványsorozat összegek képzésére is.

$$Q_n^{-1} = 1/a + 1/b + \dots + 1/n = (bn \dots + an \dots + \dots + ab \dots) / n! = q_{n-1,n} / n!$$

ahol $q_{n-1,n}$ $n-1$ -ed fokú, n változós sorozat-paraméter (lásd 5.4 fejezet)

5.4 Sorozat-paraméterek kiszámítása

A **hatványösszeg-sorozatok** megoldásához szorosan kapcsolódik a **sorozat-paraméterek** meghatározásának feladata is.

Ez definíciószerűen olyan „ q_n ” paraméterek meghatározását jelenti, amelyek gyökváltozói valamely számsort, pl. a természetes számok sorát alkotják: $a=1, b=2, c=3, \dots, n$.

A paraméterek önálló funkcionális szerepe ez esetben nyilvánul meg a leginkább.

Példaképpen valamely $p=2$ fokszámú, $n=6$ elemből álló sorozat-paraméter (1;2;3;4;5;6) a tagok szorzatának ismétlődés nélküli variációjaként egy 15 tagú összegként lenne felírható:

$$q_{2;6} = 1*2 + 1*3 + 1*4 + 1*5 + 1*6 + 2*3 + 2*4 + 2*5 + 2*6 + 3*4 + 3*5 + 3*6 + 4*5 + 4*6 + 5*6 = 175$$

Ugyanerre a célra a hatványösszegek elmélete alapján az alábbi, lényegesen egyszerűbb képlet szolgálhat ($\varphi_1=13, \varphi_2=21$):

$$q_{2;6} = \varphi_2 (3\varphi_2 - \varphi_1) / 6 = 175 \quad 163./$$

Érzékeltethető, hogy milyen könnyebbséget jelentene a hagyományos módszerekhez képest, pl. $p=4$, és nagy számértékű „ n ” esetén az alábbi összefüggés alkalmazása:

$$q_{4;n} = [5*\varphi_2^2 (3\varphi_2^2 + 32\varphi_2 + 1) - 3*\varphi_1\varphi_2(10\varphi_2^2 + 12\varphi_2 - 2)] / 360 \quad 164./$$

A hagyományos megoldóképlet ugyanis már $n=100$ esetén is mintegy

$P(n) = 97*98*99*100/1*2*3*4 = 3921225$ - csaknem négymillió összetevőt tartalmazna.

5.5 Oszthatósági vizsgálatok, DIOFANTIKUS egyenletek

Az oszthatósági vizsgálatokkal számhalmazok azonossága, vagy eltérései mutathatók ki.

A vizsgálat tárgyát a természetes számok és műveleti jelek alkalmazásával felírható osztók képezik.

Ugyanazon természetes szám felbontható természetes, racionális vagy irracionális számok szorzatára is, tetszés szerint, pl.

$$6 = 2*3 = (\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1) = (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i)$$

a felbontások száma az egyes halmazokban eltérő.

Az oszthatósági feltételek a természetes számok körében viszonylag átláthatók, más halmazok viszonylatában ez nem így van, hiszen felmerülhet a kérdés, hogy a különböző halmazokba sorolható szorzótényezőknek (pl. $3; (\sqrt{7} + 1)$) az egységen kívül van-e közös osztójuk, ha pedig nincsen, hogyan képzdhet belőlük szorzás útján ugyanazon szám?

A hatványösszegek ismertett felírási módja esetén az összefüggésekben nem maguk a változók, hanem a kombinatorikai úton nyert, bonyolultabb struktúrájú paraméterek szerepelnek, amelyek sok esetben az egyébként nem természetes gyökváltozókat természetes szám formátumúra alakíthatják, s így tulajdonságaik hatványösszeg formában felírva szemléletesebben megmutatkoznak.

Ezáltal kedvezőbb lehetőség nyílhat a paraméterek, illetőleg a belőlük képzett egyes polinomok oszthatóságának, pl. a DIOFANTIKUS egyenleteknek a vizsgálatára és megoldására, különféle bizonyítások végzésére.

Vizsgáljunk példaképpen egy három gyökváltozójú hatványösszeget:

Milyen oszthatósági feltételek szükségesek természetes, relatív prímszám értékű gyökváltozók és hatványkitevő esetén ahhoz, hogy a következő azonosság teljesülhessen (FERMAT tétel)?

$$Q_3^p = a^p + b^p - c^p = 0 \quad 165./$$

Első lépésként be kell helyettesíteni az előbbi feltételt az $F_{1,3}$ paraméteres (100./) megoldó képletbe, amelyet átrendezve adódik a következő összefüggés:

$$q_1^p / (p \cdot F_{1,3}) = P \quad 166./$$

ahol:

$$F_{1,3} = (a+b)(c+b)(c+a)$$

P- polinom, a q_1 ; q_2 ; $F_{1,3}$ paraméterek szorzatvariációiból összegezve.

A **hatványösszeg-elmélet** a vizsgálatot azáltal teheti hatékonyabbá, hogy használatakor nemcsak az adott p hatványkitevőt, hanem akár a teljes hatványkitevő tartományt az elemzésekbe be lehet vonni.

Ha a gyökváltozók relatív prímszámok, a $Q_3^p = 0$ feltétel esetén (tétel) az alábbi következtetések tehetők:

1. A q_1 paraméter nullától eltérő, páros szám, amely 3-al, és a „ p ” hatványkitevővel is osztható.
2. A q_2 paraméter nullától eltérő, páratlan szám.
3. A q_3 paraméter nullától eltérő, páros szám, amelynek q_1 -el közös osztói lehetségesek, q_2 -vel nem.
4. $F_{1,3}$ mindig páros, és q_1^p -t egészében osztja.
5. A q_1 paraméternek a q_2 paraméterrel lehetnek 3, és $6n+1$ alakú közös osztói, de csak olyanok, amelyek F -el, és a gyökváltozókkal nem közösek, és p sem.
6. Bizonyítható, hogy q_2 -nek a gyöktényezőkkel, q_3 -al, és F -el közös osztója nem lehet

7. Bizonyítható, hogy $F_{1,3}$, maga is p hatványú osztók szorzatából áll, kivéve azt az esetet, ha p bármelyik gyökváltozó osztója. Ekkor - csak a p osztó hatványkitevője - $n \cdot p - 1$ alakú, amelyet $n \cdot p$ alakúvá a kiemelt p szorzótényező egészít ki. $F_{1,3}$ többi osztója p hatványú marad.
8. Bizonyítható, hogy $F_{1,3}$, minden osztója a gyökváltozók egyikének, s így a q_3 paraméternek is osztója.
9. Bizonyítható, hogy $F_{1,3}$, osztóit képezi a gyökváltozók mindegyik, nem $2np+1$ alakú osztója. Ezeken kívül $F_{1,3}$ -nak lehetnek $2np+1$; és p osztói is.
10. Bizonyítható, hogy a gyökváltozók mindegyik olyan osztója, amelyik $F_{1,3}$ -nak részét nem képezi, $2np+1$ alakú kell hogy legyen, kivéve p -t, ha a gyökváltozó p -vel osztható.

Még számos, hasonló oszthatósági szabály tehető, és igazolható, amelyek elemzésekhez, bizonyításokhoz felhasználhatók.

Tekintsük pl. a három gyöktényezőből képzett **$p=7$ fokszámú** hatványösszeget.

A feltétel, hogy $Q_3^7=0$ legyen, akkor teljesülhetne csak, ha (átrendezve):

$$q_1^7 = q_1^4 F - 7 q_1^2 q_2 F + 7 q_2^2 F - 7 q_1 F^2 = 7F(q_1^4 - q_1^2 q_2 + q_2^2 - q_1 F) \quad 167./$$

A képletből azonnal kitűnik, hogyha $p=7$ nem osztója egyik gyökváltozónak sem, az azonosság nem állhat fenn, mivel q_1 a p -vel osztható, a q_2 és az F pedig nem, s így az azonosság baloldalán p a 7-ik, jobboldalán pedig az első hatványán szerepelhetne csak.

Ugyanígy kitűnik, hogy q_2 és a q_1 -nek kell, hogy legyen 1; és F -től eltérő közös osztója, de az utolsó tag miatt maga az összeg mégis csak az első hatványon osztható. Így az azonosság bal oldala valamennyi osztó tekintetében a 7-ik hatványon nem állhatna fenn. Hasonló ellentmondások más hatványokra is bizonyíthatók.

Tehát a hatványösszegek elmélete, az oszthatósági vizsgálatokkal alkalmassá tehető olyan bonyolult DIOFANTIKUS problémakörök elemzésére is, mint a FERMAT tétel.

5.6 Függvény-sorok helyettesítése

Az analitikus függvények meghatározott terjedelmű és pontosságú, vagy végtelen hatványkitevős sorokkal helyettesíthetők (pl. TAYLOR sor).

Bizonyos függvénykombinációk számítása meggyorsítható, ha a kiinduló változók helyett azokból képzett hatványösszegeket vagy paramétereket alkalmaznak.

Példaképpen szolgálhat a $\sin a + \sin b - \sin c$ függvénykombináció, amellyel egy derékszögű háromszög ($a=\alpha=\pi/n$, $b=\beta=\pi(n-2)/2n$, $c=\gamma=\pi/2$) kerülete a szögek és az átfogó ismeretében kiszámítható, a TAYLOR sor felhasználásával az alábbiak szerint közelíthető:

$$q_1 = a + b - c = 0; \quad q_2 = \Pi^2(2n - n^2 - 4)/4n^2; \quad q_3 = -\Pi^2(2n - 2)/4n^2$$

ahol n a szögív hányad, és

$$\sin a + \sin b + \sin c = -Q_3/3! + Q_5/5! - \dots \pm Q_{2n+1}/(2n+1)! =$$

$$-q_3(1/2! - q_2/4! + q_2^2/6! - (q_2^3 + q_3^2/3)/8! - \dots) \quad 168./$$

Az adott esetben már kéttagú közelítő képlettel is 1%-os pontosság lenne elérhető, pl. ha $a = b = \Pi/4$, vagyis ha az osztószám $n=4$

$$\sin a + \sin b + \sin c = 0,4142 \approx -\Pi^3/32(1/2! - 3\Pi^2/384) = -\Pi^3/32(1/2! - 3\Pi^2/384) = 0,4096 \quad 169./$$

A kidolgozott összefüggés lehetőséget nyújt az inverz művelet (n szögív hányad) meghatározására is, ha a háromszög kerülete és átfogója ismert.

A hasonló alkalmazások, különösen a változók nagy száma esetén szemmel láthatóan egyszerűbbek és hatékonyabbak, mint az összetevők külön történő számítása, és azt követő összegzése.

5.7 Hatványösszegekből képzett egyenlet-rendszerek

Valamennyi paraméter ismeretében, teljes paraméterszám esetén az ismert algoritmusok segítségével bármely fokszámú hatványösszeg kiszámítható.

A változók számával megegyező számú, azonban különböző fokszámú hatványösszegekből olyan, határozott „ n ” ismeretlenes egyenletrendszer képezhető, amely benne szereplő gyökváltozók tekintetében egyértelműen megoldható.

Példaképpen tekintsük a következő, négyváltozós egyenletrendszert, ha négy különböző hatványösszeg értéke ismert:

$$Q_4^2 = q_1^2 - 2q_2 \quad 170./$$

$$Q_4^3 = q_1^3 - 3q_1q_2 + 3q_3 \quad 171./$$

$$Q_4^4 = q_1^4 - 4q_1^2q_2 + 4q_1q_3 - 4q_4 + 2q_2^2 \quad 172./$$

$$O_4^5 = q_1^5 - 5q_1^3q_2 + 5q_1^2q_3 - 5q_1q_4 + 5q_1q_2^2 - 5q_2q_3 \quad 173./$$

Fenti egyenletrendszer, mivel maguk a hatványösszegek ismertek, 4 db ismeretlent (q_{1-4} paraméterek) tartalmaz, s így megoldható. Általános esetben a megoldó képlet maga is a változók számával azonos fokszerű.

A hatványösszeg egyenletrendszer tehát a gyökváltozók azonosításának teljes értékű eszköze.

A **hatványösszeg-egyenletrendszer** a hatványkitevős függvények **gyökváltozós**, és **kanonikus polinom** formában megadott alakjaival egyenértékű információhordozó.

A gyökváltozók meghatározása a legnagyobb fokszerű hatványösszeggel (p) azonos fokszerű algebrai egyenlet megoldása útján történhet.

A keresett n számú változót az első, n fokszerű hatványösszegeből képzett egyenletrendszerből célszerű meghatározni.

5.8 „ i -ed fokú (algebrai) egyenletek gyökeinek közelítő meghatározása

A **hatványösszegek** a tanulmány szerint éppen az algebrai **egyenletekből** származtathatók. A közöttük lévő kapcsolat ezért a tanulmány alapján jól követhető, és egyes esetekben felhasználható az algebrai egyenlet gyökeinek meghatározására, a lehetséges megoldások, számelméleti kérdések elemzésére.

Az algebrai egyenlet együtthatóiból a hatványösszegek meghatározásához szükséges paraméterek közvetlenül adódnak (azzal egyenlők), és hasonlóképpen, megfelelő számú és sorrendű hatványösszegeből az egyenlet paraméterei visszaszámolhatók (lásd előző fejezet).

A csak **valós gyökváltozókkal** bíró, hatványkitevős alakban felírt **algebrai** egyenletek gyökváltozóinak megadott pontosságú közelítésére és elemzésére a hatványösszegek elmélete egyszerű megoldást nyújt, amelyet kivonatossan ismertetünk.

A megoldás lényege, hogy a páros (p) kitevőjű hatványösszegekben valamennyi valós változó pozitív előjelű, s így közülük a legnagyobb (a_{\max}) két szélső érték közé szorítható:

$$Q_n^{p/n} < a_{\max}^p < Q_n^p \quad 174./$$

amiből a keresett legnagyobb gyökváltozó $(n^{1/p}-1)*100$ pontossággal határozható meg

$$(Q_n^{p/n})^{1/p} \leq a_{\max} \leq (Q_n^p)^{1/p} \quad 175./$$

Így pl. a három gyökváltozós, harmadfokú egyenlet, legnagyobb gyökváltozója egy $p = 64$ fokú hatványösszegeből $\pm 0,9\%$ -os hibával számítható.

Azonos módszerrel határozható meg a legkisebb valós gyökváltozó abszolút értéke is, azonban ekkor egy negatív páros hatványösszegeből célszerű kiindulni.

A számítás menete vázlatosan az alábbi:

1. Az egyenlet ismert algebrai módszerekkel legalább olyan, egyszerűsített alakra hozható (transzformálható), amelynél a p hatványú tag melletti együttható $q_0=1$, a $p-1$ hatvány melletti pedig $q_1=0$ értékű.
2. Az egyenlet leggyakoribb, hatványkitevős alakjából a q_{2-n} paraméterek közvetlenül leolvashatók. Az 1. pont szerinti átalakításoknak megfelelően a q_1 paraméter 0 értékű, ami a hatványösszeg meghatározására szolgáló összefüggést nagymértékben egyszerűsíti.
3. A paraméterek ismeretében a megadott pontosság eléréséhez szükséges pozitív és negatív páros fokszámú hatványösszegek kiszámíthatók.
4. A 174-175/ képletekkel, p -ik gyökvonással a keresett legkisebb és legnagyobb abszolút értékű gyökváltozók közelíthetők.
5. A gyökváltozók előjele elemző módszerekkel meghatározandó.
6. Az ismert gyökváltozók behelyettesítésével az egyenlet fokszáma kettővel csökkenthető és a paraméterek is ennek megfelelően átszámíthatók (5.6 fejezet).
7. A csökkentett fokszámú egyenlet paramétereivel a következő legnagyobb és a legkisebb abszolút értékű gyökváltozók sorban kiszámíthatók, illetve szükség esetén az eredeti változókra visszatranszformálhatók.

A soron következő gyökváltozók számításának pontosságát növeli, hogy a változók száma lépésről-lépésre csökken, ugyanakkor rontja a paraméterek átszámításakor jelentkező hiba.

Minthogy azonban a számítás két irányból (legkisebb és legnagyobb gyök) végezhető, mód nyílik összehasonlításra, és annak alapján korrekcióra, ismételt számítás végzésére.

A bemutatott módszer pontossága tehát részben a hatványösszeg fokszámának megválasztásával, részben iteráció végzésével növelhető.

A gyökváltozók tulajdonságainak vizsgálatához a hatványösszegek elmélete a korábbtól eltérő, azokat kiegészítő módszereket nyújthat, felhasználásával új kritériumok és determinánsok dolgozhatók ki.

A mindenkor vizsgált legnagyobb (legkisebb) abszolút értékű valós gyök előjele pl. csak akkor lehet negatív (pozitív), ha bármelyik páratlan fokszámú hatványösszeg előjelet vált, vagy növekvő kitevő ellenére értéke lecsökken, illetőleg növekedésének üteme kisebb, mint az elvárható.

A komplex gyökváltozók létezésére az egymást követő páros és páratlan kitevőjű hatványösszegek arányának változásából is lehet következtetni.

A módszer jellemzésére szolgálhat a következő példa:

Kiszámítandó egy harmadfokú egyenlet legnagyobb valós gyöke (felvéve $a=10$; $b=5,6$; $c=-15,6$):

$$x^3 - 187,36 x + 873,6 = 0$$

176./

ahol: $q_1=0$, $q_2=-187,36$; $q_3=-873,6$

A tanulmány alapján készült 8. fokú közelítő képlet felhasználásával a gyökváltozók abszolút értéke az alábbiak szerint adódik.

$$c_{\max} = [-8 (-187,36)(-873,6)^2 + 2 (-187,36)^4]^{1/8} = 15,655 \quad 177./$$

$$b_{\min} = [(-187,36)^8 + 8 (-187,36)^5(-873,6)^2 + 12(-187,36)^2(-873,6)^4]^{1/8}/(-873,6)$$

$$= 5,623 \quad 178./$$

$$a = q_3 / (c_{\max} b_{\min}) = -873,6 / (5,623 * 15,655) = 9,924 \quad 179./$$

Mint hogy a 0-nál nagyobb fokszámú hatványösszegek mindegyike negatív előjelű, c_{\max} csakis negatív előjelű lehet.

Hasonló megfontolás alapján b_{\min} és „a” is csak pozitív előjelűek lehetnek.

A gyökváltozók közelítő értékei tehát a következők:

$$a \approx 9,924 \text{ (0,76\%); } b \approx 5,623 \text{ (0,4\%); } c \approx -15,655 \text{ (0,35\%);}$$

A tényleges maximális hiba: 0,76%

Valamely negyedfokú egyenlet legnagyobb valós gyökének abszolút értéke

5-öd fokú hatványösszeggel, négy paraméterből alkotott, mindössze négytagú polinommal, és egy 5-ik gyökvonással +/- 15% pontossággal közelíthető-

Bár a példa szerinti pontosság inkább „becslésnek” felelhet meg, azonban a hatványösszeg fokszámának növelésével ez tetszőlegesen javítható. Igaz viszont, hogy ekkor a megoldóképlet tagjainak száma is nagyobb.

A módszer várható gyakorlati hasznosításától függetlenül, elméletileg hangsúlyozható, hogy ez egy olyan általános eljárás, amely (a p számú gyökvonástól eltekintve) úgyszólván **elementáris műveletek felhasználásával, iteráció nélkül** teszi lehetővé **bármely fokszámú egyenlet valós gyökeinek előre megadott pontossággal történő kiszámítását**. Másképpen megfogalmazva a jelen fejezetben foglaltakat, újszerű válasz adható az algebrának egy korábbi keletű kérdésére:

„A valós változójú hatvány (algebrai) egyenletek összes gyökei legfeljebb n számú gyökvonással és végtelen számú alpművelettel meghatározhatók, illetőleg véges számúval megadott pontossággal közelíthetők”.

Az ismertett lehetőség a nem valós gyökváltozók meghatározására is kiterjeszthető.

5.9 Egyéb alkalmazási lehetőségek

Az eddig felsoroltakkal a hatványösszegek elméletének matematikai alkalmazási lehetőségei korántsem merültek ki.

A természet és társadalomtudományi vizsgálatokban a hatványösszegek azon tulajdonsága is hasznosítható, hogy bár a paraméterekben szereplő változók egymással össze nem vonhatóak (különböző halmazokból) lehetnek, mégis ugyanazon függvények alá rendelhetők, formális és lényegi függvény-kapcsolatok alakíthatók ki közöttük, velük egyszerűsítések végezhetők. Paraméteres formában felírva kezelhetővé válhatnak olyan változók, amelyek egyébként önállóan nem lennének értelmezhetők, vagy más jelentésük lenne.

Példaképpen:

- valamely pont helyzetét a merőleges koordináta-rendszerben leíró x ; y ; z koordinátákból képzett hasáb lineáris, felületi és térfogati kiterjedései közvetlenül a q_1 , q_2 , q_3 , paraméterekkel egyenlők.
- A speciális relativitáselméletben a Lorentz transzformáció strukturálisan valamely négy változós q_2 paraméternek feleltethető meg.
- Az 5.1 pontban már történt utalás a hatványösszegek elméletének nagyszámú mérési adat feldolgozása esetén ajánlható alkalmazására.

Még sokféle jelenségben kimutatható a (gyök)változók **paraméteres rendezhetősége**.

Az alkalmazási lehetőségek feltárása az adott szakterület kompetenciáját képezi.

6 Összefoglalás

A jelen tanulmányban ismertettük a különböző változó (n), és fokszámú (p) hatványösszegek képzésére szolgáló alap (1;2./) és módosított algoritmusokat.

Néhány elméleti és gyakorlati jellegű alkalmazás is vázlatosan bemutatásra került.

Ismételten megmutatkozott, hogy bár ugyanazon matematikai feladatok nagyon sokféleképpen megoldhatók, **azonban a megoldás hatékonyságát** a kiinduló feltételek és módszerek nagymértékben befolyásolják.

Elméleti szempontból a tanulmány tárgya egy **algebrai módszer**, amellyel a már ismert problémakörök is új szemszögből vizsgálhatók.

Gyakorlati szempontból a hatványösszeg megoldó képletében szereplő paraméterek, és maguk a képletek is egyes számítási feladatokban alkalmazható, azokat meggyorsító számítógépes programozási módnak, **szoftvernek** is tekinthetők.

A módszer más eljárásokkal már „feltört” problémához nyújthat egyszerűbb vagy csak egyszerűen más „kulcsot”

Szerző tudja, hogy az ismertetett elvek egy része már korábban is létezett.

Úgy gondolja azonban, hogy vannak benne új megállapítások, és befejezetlen probléma felvetések, amelyek még megoldásra várnak.

Azt a kérdést azonban, hogy az ismertetett eredmények **hasznosak és szükségesek**, valójában csak az érdekelt szakterületek képviselői válaszolhatják meg.

Budapest 2004.05

Forrai György

7 Irodalomjegyzék:

N	Szerző	Megnevezés	Kiadás
1	G.H. Hardy , E.M. WRIGHT	An Introduction to THE THEORY OF NUMBERS (angol nyelvű), OXFORD, 1971 4. kiadás	1971.
2	Forrai György	Vücsiszlenyie sztyepennüx szum Számítástechnikai és Matematikai Módszerek Alkalmazása a Tudományos és Ekonomiai vizsgálatokban” Műszaki-tudományos konferencia előadás gyűjteményében jelent meg. (A konferencia rendezői voltak: az Ukrán SzSzR „ZNÁNYIE” Közgazdasági és Műszaki-Tudományos egyesülete, a Lvovi Állami, és a Kievi Politechnikai Egyetem	1991

8 UTÓSZÓ

Tisztelt Olvasó

- Köszönöm, hogy a tanulmányt figyelemébe fogadta.
- Nagyrabecsülésem, mert részben, vagy végig elolvasta.
- Megtisztel, ha kérdéseivel, problémáival ezzel kapcsolatban hozzám fordul.
- Öröömre szolgál, ha bármit tud hasznosítani belőle, vagy tovább fejleszteni szándékozik.
- Hálára kötelez, ha a benne talált hibákra felhívna a figyelmem, amelyek sajnos, lehetségesek. Erőmet meghaladó feladat volt. Legyen Ön a lektorom.

A Szerző