

HATVÁNYÖSSZEGEK ELMÉLETE

III. GYŰJTEMÉNYES TANULMÁNY

HATVÁNYÖSSZEGEK ELMÉLETÉNEK KÖVETKEZMÉNYEI ÉS ALKALMAZÁSAI

Szerző: Forrai György

Ez a tanulmány a szerző tulajdona.

A tanulmányban foglaltak a szerzői jog védelme alatt állnak.

Csak a tulajdonossal történt megállapodás alapján hasznosítható, és publikálható.

Budapest 2005. szept.

TARTALOM

- 1 Bevezetés**
- 2 A hatványösszeg algoritmus további átalakításai**
 - 2.1 Változó kombinációk ($a; b; c$ és $(a+b); (c+a); (c+b)$) közötti összefüggések.
- 3 HATVÁNYÖSSZEG egyenletrendszerek**
 - 3.1 Hatványösszeg egyenletrendszer meghatározása
 - 3.2 A hatványösszeg egyenletrendszer megoldása
 - 3.3 Hatványösszeg egyenletrendszer változóinak meghatározása
 - 3.4 Következtetések
- 4 DIOFANTIKUS egyenletek vizsgálata**
 - 4.1 Az $a^3 + b^3 - c^3 = 0$ ($p=3$) diofantikus egyenlet vizsgálata a $p=3$ kitevő oszthatósága alapján
- 5 Hibajegyzék, javítások, kiegészítések [I-III tanulmányok]**

1 BEVEZETÉS

Ez a kötet a HATVÁNYÖSSZEGEK ELMÉLETE I-II. tanulmányok egyes következményeit, és alkalmazásait mutatja be a jövőben is fokozatosan bővíthető, gyűjteményes formában.

A hatványösszegek elméletét főképpen az algebrai egyenletekhez, számelmülethez kapcsolódónak gondolom.

Meglepett, és lebilincsel az a változatosság, amely előttem feltárulkozott, és amelyről úgy véltem, hogy legalább is részben, még feltáratlan volt.

Ezért tovább próbálkozok, bízik benne, szépnek tartom - a téma sem ereszt!

Szükségessé vált azonban az előző kötetek hibáinak javítása is (lásd „Hibajegyzék, javítások”). Mert hibázni már csak a sok képlet miatt is könnyű, viszont észrevenni nehezebb, a szerzőnek talán csak a sokadik olvasatra, míg a tárgyilagossabb, külső szemlélőnek erre több esélye van.

Mindez megnehezítheti a Tisztelt Olvasó megértését, a tartalommal való kommunikációját.

Másfelől azonban jelzem, hogy mert ebben a tanulmányban minden az I. Kötetben bizonyított algoritmusra épül, annak ismeretére is mindenképpen szükség lesz!

Az algoritmusnak, mint alapgondolatnak, és a belőle induló következtetések legnagyobb részének helyességében tökéletesen bizonyos lehetek - évtizedek próbálkozásai alatt volt alkalmam arról megbizonyosodni!

Ezért kérem, hogy hiányosságai ellenére mégis fogadják ezt a tanulmányt is megértő, jó indulattal, segítsenek a javításában.

2 A HATVÁNYÖSSZEG ALGORITMUS TOVÁBBI ÁTALAKÍTÁSAI

Ez a témakör az I. tanulmány 4 fejezete (Az alap algoritmusok és a megoldó képletek átalakítása) kiegészítésének tekinthető.

2.1 Változó kombinációk (a;b;c és (a+b);(c+a);(c+b)) közötti összefüggések.

Az I. tanulmány 4.1 fejezetében az alap algoritmusok átalakítását vizsgáltuk egy módosított paraméter ($F = \dots F_3$) bevezetésével.

Az újabb, alsó indexszel már előrevetítettük azt, hogy az F_3 módosított paraméter is tulajdonképpen valamely más változóból képzett, új paraméter.

Mégpedig az a;b;c változókból képezhető három új, módosított változónak $C=(a+b)$; $B=(c+a)$; $A=(c+b)$ a harmadfokú paramétere. Ezért a q_3 jelölés helyett, mint módosítottat, megkülönböztetésként az F_3 -at használjuk majd.

De mindjárt felmerülhet a kérdés, hogyha a $q_3 \dots F_3$ paraméterek között létezik összefüggés,

$$F_3 = q_1 q_2 - q_3 = A \cdot B \cdot C \quad \text{amiből} \quad q_3 = q_1 q_2 - F_3 \quad 1./$$

vajon lehetséges-e a többire is ilyeneket találni?

Az elsőfokú módosított paraméterre (F_1) a válasz viszonylag könnyen adódik:

$$F_1 = 2q_1 = A + B + C \quad \text{amiből} \quad q_1 = F_1/2 \quad 2./$$

A másodfokú módosított paraméterre (F_2) a válasz szintén algebrai átalakításokkal adódik:

$$F_2 = q_1^2 + q_2 = A \cdot B + C \cdot B + C \cdot A \quad \text{amiből} \quad q_2 = F_2 - F_1^2/4 \quad 3./$$

Sejthető, hogy nagyobb fokszerű paraméterekre is találhatók hasonló átszámítási formulák.

Vagyis a két változó csoport paraméterei között (a;b;c és $A=(a+b)$; $B=(c+a)$; $C=(c+b)$) valóban létezik „átjáró”.

Vajon milyen következményei lehetnek ennek?

Elsőként megemlíthető, hogy ilyen esetben bármelyik változócsoporthoz bármely fokszerű hatványösszeget részben, vagy egészében kifejezhető a másik változócsoporthoz érvényes paraméterekkel.

Például fejezzük ki az a;b;c változócsoporthoz ötödfokú hatványösszeget az (a+b);(c+a);(c+b) változócsoporthoz paramétereivel?

Az I. tanulmány p=5 fokszerű esetére érvényes már részben (F_3) módosított I/102 képletét alkalmazva (csak egyszerűsítésként, mivel hogy egy változócsere - a harmadfokúé - abban már megtörtént):

$$Q_3^5 = q_1^5 - 5q_1^2 F_3 + 5q_2 F_3 = 1/32 \cdot (F_1^5 - 80 F_1^2 F_3 + 160 F_2 F_3) \quad 4./$$

Ugyanígy bármely fokszámú hatványösszeg kifejezhető a másik változócsoporthoz tartozó paramétereivel.

Ennek lehet jelentősége akkor, ha a másik paramétercsoport kedvezőbb rátekintést nyújthat a vizsgált problémára.

3 HATVÁNYÖSSZEG EGYENLETRENDSZEREK

Ez a témakör az I. tanulmány 5.7 fejezete (Hatványösszegekből képzett egyenlet-rendszerek) kiegészítésének tekinthető.

Úgy vélem, hogy ilyen kategória nemigen létezhetett korábban, hiszen teljességgel a levezetett új algoritmushoz kapcsolódik. Persze kellő rátekintés nélkül tévedhetek.

De mint új kategória, adós maradtam a vonatkozó szabályok, feltételek megadásával.

Mindenesetre példát is szeretnék bemutatni, hogy kitűnhessen, mire gondolok?

De azután is - belátom, sok mindennel adós maradok majd...ezt sem sorolhatom a befejezett, sőt abban sem vagyok biztos, hogy az ígéretes témák közé! De ez is út, vagy ösvény?

3.1 Hatványösszeg egyenletrendszer meghatározása

A (p -ed rendű) **hatványösszeg egyenletrendszer** olyan információhordozó, amely legalább a **rendszerének megfelelő számú** ($n=p$), **különböző fokszámú hatványösszegekből áll, és amelynek jelentését n határozott, vagy annál nagyobb számú határozatlan megoldása képezi.**

Maguknak a vizsgálható hatványösszegeknek a fokszáma a pozitív és a negatív egészek tartományát átfogja, és így végtelen számú hatványösszeg lehetséges.

A **hatványösszeg egyenletrendszer rendszáma** azonban nem a vizsgálható hatványösszegek számával, hanem az a feltételezett alapváltozóinak ($a;b;c, A;B;C\dots$), illetve paramétereinek ($q_1 - q_n\dots F_1-F_n\dots$) számával azonos.

A hatványösszeg egyenletrendszer megoldása **első lépéseként** a feltételezett n -számú **paramétert** kell meghatározni, amelyekből az ugyancsak n -számú **alapváltozó** a **második lépésként** található meg.

A vizsgálat első lépéséhez legalább n számú, **ismert fokszámú, és számértékű** hatványösszeget kell felhasználni (pld: $Q_3^4=40$)

Attól függően, hogy hány hatványösszeg áll rendelkezésre, és hogy milyen a sorrendjük, eltérő vizsgálati módszerek kínálkoznak, és az eredmények határozottsága, és egyértelműsége is eltérő lehet. Sőt, hatványösszegek, és paraméterek vegyesen is állhatnak rendelkezésre.

Ezért előzetes elemzések szükségesek arra is, hogy a vizsgálati módszert kiválaszthassuk, és hogy az eredményeket értékelhessük.

Mindennek teljes kidolgozása igen nagy munkát igényelne, amelyet elvégezni nem tudok, és valódi alkalmazás hiányában talán nem is lenne célszerű. Így csupán néhány példát mutatnék be, a téma bővítését arra hagyva, akinek netán abban szüksége jelentkezik.

3.1.1 Egyes szabályok, feltételek

1. A hatványösszeg egyenletrendszer (közbenső) változói az $a,b,c \dots (A,B,C)$ változókból képzett $q\dots (F)$ paraméterek, amelyek száma a változók számával (n) egyenlő!
2. A hatványösszeg egyenletrendszer rendszámát (p) a vizsgálat kezdetén kell meghatározni. A hatványösszeg egyenletrendszer rendszáma a feltételezés szerint benne szereplő változók, illetve paraméterek számával (n) egyenlő, amivel az ismert hatványösszegek száma vagy egyenlő, vagy azoknál több kell, hogy legyen. ($n=p$), függetlenül a benne

szereplő hatványösszegek foksámától, ami viszont lehet nagyobb, sőt kisebb is az egyenletrendszer rendszámánál.

3. A vizsgálatban szereplő hatványösszeget jelölésével és értékével adjuk meg.
4. A jelölésnek a változók (a;b;c...) feltételezett számát, és a hatványösszeg foksámát is tartalmaznia kell, hogy annak megoldóképlete pontosan azonosítható legyen! (pld: $Q_3^5 = 10$, itt 5: foksám, n=3 változós szám, 10 pedig a hatványösszeg értéke). A változók száma (n) minden hatványösszegnél azonos, a foksám pedig különböző kell, hogy legyen.
5. A $Q_n^0 = n$ nulla foksámú hatványösszeg csakis pozitív egész szám lehet. Értéke a változók számával, vagyis az egyenletrendszer rendszámával azonos. A megoldások vonatkozásában azonban nem hordoz információt.
6. A megoldáshoz megadható bármely Q_n^0 -tól eltérő pozitív és negatív egész foksámú hatványösszeg, bármely sorrendben.
7. A $Q_n^1 = q_1$ esetén a hatványösszeg magával a q_1 paraméterrel egyenlő.
8. A hatványösszeg értéke bármely szám, nulla, racionális, irracionális komplex stb. lehet. Amennyiben bizonyos értékkombinációk kizárhatók, azokra előzetes vizsgálati módszereket célszerű kidolgozni (sajnos, még nincsenek)
9. A különböző foksámú hatványösszegek száma az egyenletrendszer megoldásához legalább annak a feltételezett rendszámával kell, hogy azonos legyen ($n \geq p$).
10. Ha az egyenletrendszer foksámánál több hatványösszeg is ismert, a vizsgálat szempontjából a legkedvezőbb (legkisebb, vagy egyszerűsíthető, vagy egymás utáni sorrendű) foksámúakat kell kiválasztani.
11. A különböző foksámú hatványösszeg egyenletrendszerek esetén adódhatnak olyan feltételek és számérték kombinációk, amelyek elvileg sem oldhatók meg, vagy nem lehetségesek. Azok kiválasztására előzetes vizsgálati módszereket kell még kidolgozni.
12. A hatványösszeg egyenletrendszer megoldása első lépéseként a q_n paramétereket kell meghatározni. Általában a q_1 paraméter oldható meg elsőként. A többi paraméter q_1 -ből sorban levezethető.
13. A hatványösszeg egyenletrendszer megoldásainak száma q_1 vonatkozásában egy, vagy adott esetben egynél több is lehet.
14. A hatványösszeg egyenletrendszer a rendelkezésre álló hatványösszeg értékkészlet száma és sorrendje függvényében többféleképpen és eredménnyel oldható meg:
 - Triviálisan
 - n-ismeretlenes egyenletrendszerrel
 - Általánosan.
15. A hatványösszeg egyenletrendszer a rendelkezésre álló, több megoldási utat lehetővé tevő hatványösszeg-értékkészlet száma és sorrendje függvényében, bármely módon történő megoldása esetén is legalábbis részben azonos eredményeket kell, hogy biztosítson. Az azonos eredményt biztosító megoldások elfogadhatók. Ha ilyenek nincsenek, a felvett értékkészlet nem a feltételezés szerinti hatványösszeg rendszert elégíti ki, vagy nem megoldható a felírás. (nem bizonyított)

Nem palástolhatom tehát, hogy ez a témakör még nem befejezett, és nem megoldott, tehát kidolgozásra vár. Mert én csak felvettem! A gyűjteményes tanulmánynak sem hangsúlyos része. Afféle - sejtés?

De hátha - pont ez - érdekel majd valakit?

3.2 A hatványösszeg egyenletrendszer megoldása

3.2.1 A hatványösszeg egyenletrendszer triviális megoldása

Ha az egyenletrendszerben szereplő hatványösszegek fokszáma $n=1 \dots n$ vagyis a legkisebb 1, a legnagyobb pedig a változók számával (n) pontosan egyenlő, akkor mindegyik paraméterre egyetlen megoldás adódhat csak.

Ekkor ugyanis a q_{1-n} paraméterek sorban kifejezhetők, csupán elemi műveletek alkalmazásával.

És minden nagyobb paraméter az előzőekből egyértelműen, határozottan adódik.

Az ilyen hatványösszeg egyenletrendszer a gyöktényezős, vagy kanonikus polinom alakban felírható algebrai egyenlettel azonos, határozott információ tartalommal bír.

3.2.2 A hatványösszeg egyenletrendszer megoldása n ismeretlenes egyenletrendszerrel

Abban az esetben, ha folytonosan vagy szakaszosan olyan, 1-nél nagyobb foksámú különböző hatványösszeg-értéksorozatok állnak rendelkezésünkre, amelyek megfelelő számban egymás után következnek, akkor az I. tanulmány 1 képlet szerinti algoritmus alkalmazásával n számú, és az ismeretlen paramétereket csupán első fokon tartalmazó n ismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerhez jutunk.

Abban az esetben, ha például az összes hatványösszeg egymás után következik, elegendő

$2n + 1$ nagyságú folytonos hatványösszeg sorozat értékeinek ismerete.

Megoldhatók így más, kevésbé rendezett hatványösszeg sorozatok is.

Természetesen, az azonosan ismétlődő egyenletek kizárandók, mivel nem segítenék elő az egyenletrendszer megoldását. (kérdéses, hogy ilyesmi egyáltalán előállhatna, és hogy milyen feltételekkel?).

Egy ilyen n -ismeretlenes egyenletrendszer a szokásos eszközökkel, az egyes paramétereket sorban kifejezve és behelyettesítve szintén könnyen, és egyértelműen megoldható.

Vagyis ez a megoldási lehetőség is egyenértékű, az algebrai egyenletek gyöktényezős, illetve kanonikus polinomként kifejtett alakjaival.

3.2.3 A hatványösszeg egyenletrendszer általános megoldása

Az általános esetre a hatványösszegek véletlenszerű sorrendje jellemző. Igaz, hogy ekkor viszont csupán n db hatványösszeg ismerete is elegendő! Ez az előny azonban elveszik, mivel az eredmény esetenként a legnagyobb foksámú egyenlet megoldásával érhető csak el.

3.2.4 Példa

Kezdetnek természetesen olyan példát szeretnék ismertetni, amely könnyebben megoldható. Így az egyszerűbb változatok közül választanék.

Példaképpen tételezzük fel, hogy egy harmadfokú hatványösszeg egyenletrendszerben három különböző fokszerű (n=2;3;4) hatványösszeget ismerünk, amelyek paraméterei azonosak, és amelyeknek egyelőre csupán a paramétereit szándékozunk meghatározni. Minthogy azonban a Q_1^3 hatványösszeg ismeretlen, és nem rendelkezik $2n+1$ egymás utáni hatványösszeggel sem, az egyenletrendszer nem triviális, vagy n ismeretlenes, hanem általános megoldású.

$$Q_3^2 = 10 = q_1^2 - 2q_2 \quad \text{amiből} \quad q_2 = (q_1^2 - 10)/2 \quad 5./$$

$$Q_3^3 = 72 = q_1^3 - 3F \quad \text{amiből} \quad F = (q_1^3 - 72)/3 \quad 6./$$

$$Q_3^4 = 40 = q_1^4 + 2q_2^2 - 4q_1 F \quad 7./$$

Behelyettesítve és rendezve a kifejezett értékeket:

$$q_1^4 - 60q_1^2 + 576q_1 + 60 = 0 \quad 8./$$

A q_1 paraméter tehát az általános esetben negyedfokú algebrai egyenlet segítségével határozható meg, amelynek négy megoldása lehet, amelyekből a többi paraméter is kiszámítható. Látható tehát, hogy az általános megoldásnál egy helyett több paraméter és változó kombináció kínálkozik...

Ha a Q_{1-n} legkisebb hatványösszegek lettek volna megadva, akkor mindegyikre csupán egyetlen, a több ismeretlenes egyenletrendszerből számított egyértelmű megoldás adódhatna. Általános esetben azonban a legnagyobb fokszerű hatványösszeghez igazodhat, vagyis egynél több megoldáscsoport adódhat, a lehetséges (és nem lehetséges) megoldások száma a legnagyobb hatványösszeg-fokszámmal hatványozottan növekedik.

A hatványösszeg egyenletrendszer paramétereinek meghatározásához tehát célszerű legkisebb ismert hatványösszegeket alkalmazni.

Az általános megoldás tehát - a kiinduló adatok rendszertelensége esetén határozatlan, nem ad egyértelmű eredményt, csak egy olyan adatkészletet, amelynek a feltételezett paramétercsoport is a részét képezheti.

Így az általános megoldás tágabb információhordozó az algebrai egyenletek gyöktényező, illetve kanonikus polinomként kifejtett alakjainál.

3.3 Hatványösszeg egyenletrendszer változóinak meghatározása

A hatványösszeg egyenletrendszer változóinak (a;b;c...A;B;C) száma az összetartozó paraméterek számával, a hatványösszeg egyenletrendszer rendszámával egyenlő!

A változók a megoldott egyenletrendszer paramétereiből (q; F) számíthatók.

Ehhez általános esetben a változók számának megfelelő fokszerű algebrai egyenletrendszert kell felírni, és megoldani.

A változók az n-fokú megoldott egyenletrendszer n számú megoldását képezik.

3.4 Következtetések

A hatványösszeg egyenletrendszer információ tartalma a benne szereplő hatványösszegektől függően tehát lehet határozott, vagy határozatlan jelentésű, zárt alakban is, vagy csak részben, vagy egyáltalán nem megoldható.

Az egyenletrendszer felállításakor eljárhatunk úgy is, hogy adott változó és fokszámú hatványösszeghez rendelünk értéket, de fordítva is, hogy az értékhez - hatványösszeget.

Felmerülhet a kérdés, hogy a hatványösszeget semmire, sehol még nem használtunk!

Ez valóban igaz, de gondolkodjunk el - vajon nem lehetnek e később olyan feladatok, ahol mégis használni lehet?

Egyszerű, és tudom, nem is túl meggyőző a példa:

- Három gömb összes térfogata mindegyikük átmérője harmadik hatványa összegével arányos!
- Ugyanakkor meg összes felületüket a második hatványú összegük jellemzi.
- Együttes hosszukat pedig az első...

És mi van akkor, ha valamiért csupán a jelzett összességek ismertek - az összes felület, az összes térfogat, a hosszúság?

És kíváncsiak vagyunk az átmérőkre külön-külön is?

Ez tehát egy harmadfokú hatványösszeg egyenletrendszerrel megoldható feladat is lehetne.

Mert a jelzett összességek az adott esetben a Q_3^1 , Q_3^2 ; Q_3^3 hatványösszegekkel azonosak. Amelyeket megmérve a hatványösszeg egyenletrendszer felírható, és az átmérőkre megoldható. *Megmértünk valamiket, amelyekkel számolhatunk mást - ez az, ami kell!*

Ez igaz, de mondható, hogy erre más, ismertebb, könnyebb módszerek is léteznek.

Kifejezzük, behelyettesítjük stb. Már is meg van oldva!

Ez is igaz. Viszont nem tudhatjuk, hogy milyen feladatokat hozhat még a JÖVŐ?

Ha majd nem három, hanem sokkal több dimenziós rendszerek változóit keressük?

És hogy még talányosabb legyen, nemcsak hatványösszeg, hanem paraméter alakú mérési adataink is vannak, vegyessen?

4 DIOFANTIKUS EGYENLETEK VIZSGÁLATA

A hatványösszegek elmélete, mivel azonos feladatra sokféle függvénykombinációt kínál, különösen jól használható azokban az esetekben, amikor feltételként valamely egész számokra vonatkozó követelményt is ki kell elégíteni.

Ilyenkor hasznos lehet valamely eltérő felírási forma, alkalmasabb a könnyebben értékelhető, például oszthatósági feltételek kimutatására is.

Mert az **oszthatósági feltételek** ez esetben vizsgálati kritériumként jönnek számításba.

Az oszthatósági vizsgálatok külön kategóriát képeznek, saját szabályokkal.

Az egész számok vizsgálatakor természetesnek tűnik, hogy ilyen feltételeket állítsunk, és értékeljünk. Hogy egy adott szám, vagy számcsoporthoz vajon osztható, netán milyen ismétlődésű valamely algebrai összefüggésben, egyenletben?

A páros-páratlan reláció, a 2;3-al és más számokkal való oszthatóság bizonyos feladatoknál jól használható. Egyebek között a (kis) FERMAT tétel is [$p \nmid b^{p-1} - 1$ ha b nem osztható] egy ilyen oszthatósági feltétel.

Másfelől azonban bonyolultabb oszthatósági feltételek is elképzelhetők. Például, hogy valamely egész szám ismétlődési száma, mint osztó?

Ezért a továbbiakban igyekszünk olyan példákat bemutatni, amely az oszthatósági vizsgálatok sokrétűségét is bizonyítják.

4.1 Az $a^3+b^3-c^3=0$ ($p=3$) diofantikus egyenlet vizsgálata a $p=3$ kitevő oszthatósága alapján

Ma már talán ismét nyugodtan, „leszólás” nélkül hozzá lehet szólni a Fermat sejtéshez, hála Andrew Wiles úrnak, aki azt már bebizonyította, és amelynél egyszerűbb bizonyítást találni nem könnyű.

A bevezetésben említett új módszer bemutatásához elsőként a sejtés legkorábban, és már sokféleképpen bizonyított 3. fokú hatványösszegének új szemszögből történő vizsgálata ajánlható.

A kérdés: *teljesülhet-e 0-tól különböző relatív prímszámhármazók ($a;b;c$), és $p=3$ páratlan egész hatvány esetén a fejezetcím szerinti összefüggés?*

A hatványösszegek elmélete alapján ez a kérdés is más nézőpontból - a paraméteres alakban kifejtett, azonos változókból ($a;b;c$) képzett, azonban különböző fokszámú hatványösszegek figyelembevételével vizsgálható.

Az I. tanulmányban ismertetett algoritmus ugyanis lehetőséget nyújt arra, hogy a vizsgálat voltaképpen ne csak magára a p hatványra, hanem a teljes lehetséges hatványkitevő intervallumra kiterjeszthető legyen. Ezáltal „gerjeszthetők” olyan ellentmondások is, amelyek valamely, csak az adott hatványkitevőre korlátozott vizsgálatban egyébként nem mutatkoznak, elrejtve maradnának.

A továbbiakban ezt a módszert próbáljuk bemutatni.

Az I tanulmány/100./ képletét az előző fejezet figyelembevételével alkalmazva kapjuk:

$$Q_3^3 = q_1^3 - 3 q_1 q_2 + 3 q_3 = q_1^3 - 3F_3 = 0 \quad 9./$$

Vagyis, hogy:

$$F_3 = q_1^3 / 3 \quad 10./$$

Mostantól kezdve azonban bármely 3-nál nagyobb fokszámú hatványösszegbe a 2. képletet behelyettesítve többé az F_3 paraméter sem kell, hogy benne szerepeljen, (hiszen behelyettesíthető!) csupán a $q_1; q_2$ paraméterek.

Példaképpen $p=5$ fokszám esetére (I/102 képlet):

$$Q_3^5 = q_1^5 - 5q_1^2 F_3 + 5q_2 F_3 = q_1^3 * (5q_2 - 2q_1^2) / 3 \quad 11./$$

Belátható azonban, hogy nemcsak $p=5$, hanem bármely más, nagyobb, páratlan fokszámú hatványösszeg is ugyanazon formában, mint a $p=5$ hatványú, vagyis hogy csupán két paraméter felhasználásával szintén felírható, mindössze a zárójelben szereplő $q_1^2; q_2$ elemek páros fokszámú variációból kialakuló polinom fokszáma lesz bennük eltérő.

Vegyük észre azt is, hogy minden ilyen polinomban csupán egy olyan tag van, amely q_2 -vel nem, csak q_1 -el osztható.

Ugyanakkor, ha a vizsgált hatványösszeg-sor tagjainak fokszáma a végtelenig végigfut, bizonyosan található közöttük legalább egy olyan, amely bármely prímszámmal, így például q_2 valamely szükségszerűen létező osztójával is osztható.

Ez azonban csak akkor lehetne így, ha q_2 bármely osztója egyúttal q_1 osztóját is képezné. Ami egyúttal azt is jelentené, hogy minden pozitív, és negatív fokszámú hatványösszeg is q_2 -vel osztható kellene, hogy legyen.

Ez viszont nem lehetséges, mert akkor q_2 osztói $(...2i+1)$ a kis Fermat tétel értelmében valamely páros, a $2i$ hatványon $(a^{2i}-1 + b^{2i}-1 + c^{2i}-1 = a^{2i} + b^{2i} + c^{2i} - 3...)$ a 3 kivételével mégsem lennének oszthatók...

Ezért, relatív prímszámváltozók mellett $p=3$ hatvány az egyenlőség egész számok esetén nem teljesülhet!

Erre a következtetésre tehát az oszthatósági kritériumok alapján, az I. tanulmányban levezetett algoritmus azon sajátossága alapján jutottunk, amely módot adott azt bizonyítani, hogy q_2 bármely osztója egyúttal q_1 osztója kellene, hogy legyen.

Budapest 2005. szeptember 19.

Forrai György

5 HIBAJEGYZÉK, JAVÍTÁSOK, KIEGÉSZÍTÉSEK [I-III TANULMÁNYOK]

(A sorszámozás és a dátum a módosítás függvényében)

Sorszám (H...)	Hiba (javítás hely) Kötet,	Oldal, képlet, bekezdés	Dátum	Észrevételező neve
-------------------	-------------------------------	-------------------------	-------	--------------------

H1	I. kötet, 4.4 fejezet	24 oldal, Képlet: 129	2005.szept	Szerző
----	-----------------------	--------------------------	------------	--------

Példaképpen, ha $Q_3^3 = q_1^3 - 3F = 0$, akkor a Q_3^7 -ra vonatkozó (104./) képlet az alábbiak szerint (többféleképpen is) egyszerűsíthető:

$$Q_3^7 = \dots = (-5 q_1^7 + 21 q_1^5 q_2 - 21 q_1^3 q_2^2) / 9$$