HATVÁNYÖSSZEGEK ELMÉLETE

II. TANULMÁNY

ALKALMAZÁSOK:
NEWTON BINOM, MINT HATVÁNYÖSSZEG

Szerző: Forrai György

Budapest 2004

TARTALOM

1 Előzmények

A jelen publikáció a hatványkitevős egyenletekből képzett hatványösszegek elméleti kérdéseivel foglalkozó tanulmánysorozat részét képezi, annak egy alkalmazási lehetőségét - a NEWTON binommal való kapcsolatát mutatva be.

A témakör a korábbi, „**HATVÁNYÖSSZEGEK ELMÉLETE, I. KÖTET" [4]** tárgyú tanulmányban került felvetésre, amelyben bizonyítást nyertek a gyökváltozókból álló, paraméteres alakú hatványösszegek képzésére szolgáló alap és módosított algoritmusok.

Az alábbi rövid emlékeztető a hivatkozott tanulmány alaptéziseit idézi:

I. **Az egy (x) ismeretlenes, i-ed fokú egyenletek gyökei egy i =n változószámú hatványösszeg változóival azonosak (továbbiakban: *gyökváltozók*), s így az egyenletek és a hatványösszegek egymásból kifejezhetők.**

II. **A hatványösszeg *változói (n) (gyökei)* számának és a hatványösszeg fokszámának (p) bármely értéke esetén léteznek olyan, a hatványkitevők növekvő és csökkenő tartományára érvényes alap és azokból képezhető egyéb algoritmusok, amelyekkel az adott fokszámú hatványösszeg n számú, egységnyi fokszám-különbségű ismert hatványösszegből meghatározható.**

A hatványkitevő növekvő tartományára érvényes alap algoritmus:

$$Q_n^p = q_1 Q_n^{p-1} - q_2 Q_n^{p-2} \; .... \pm q_n Q_n^{p-n} \qquad \textbf{1./}$$

a hatványkitevő csökkenő tartományára érvényes alap algoritmus:

$$Q_n^p = (Q_n^{p+n} - q_1 Q_n^{p+n-1} + q_2 Q_n^{p+n-2} \; .... \pm q_{n-1} Q_n^{p+1})/q_n \qquad \textbf{2./}$$

ahol

$Q_n^\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + ... + e^\beta$ β-ik fokszámú hatványösszeg, az a,b,c..e gyökváltozókból képezve, ($-\infty < \beta < \infty$)

$q_{1...n}$ n-ik (egész) fokszámú **paraméterek** az a;b;c....n gyökváltozókból előállítva (lásd 2.1 fejezet)

A [4]-ben már jeleztük, hogy a hatványösszegek elméletében szereplő **paraméterek** olyan, a gyökváltozókkal szoros funkcionális kapcsolatban álló tényezők, amelyek egyes alkalmazásokban **maguk is változók** lehetnek. Indexálásuk (alsó indexük) nem a megszokott módon, a paraméter mellett álló ismeretlen (x) hatványa alapján, hanem a paraméter saját fokszáma szerint történik

A jelen publikáció a **hatványösszegeknek a NEWTON binom helyett történő alkalmazása lehetőségeit vizsgálja.**

Bár ez az alkalmazási terület már a bevezető tanulmányban is [4] felmerült, annak általánosabb jellege miatt akkor nem volt lehetőség a problémakör részletesebb ismertetésére, egyebek között a hatványösszegek egy lépésben történő felírásához, binomiális együtthatóinak kiszámításához szükséges összefüggések meghatározására.

A NEWTON binom vizsgálata a mai matematikának, és a számítástechnikának nem súlyponti kérdése. Történeti, és oktatási szempontból azonban ma is fontos, és minden másnál jobb lehetőséget nyújt a hatványösszegek elmélete lehetőségeinek bemutatására.

Feltételezhető, hogy érdeklődésre tarthat számot egy olyan elmélet, amely az adott témakört teljesen új megvilágításból, szélesebb körben képes vizsgálni.

Bár a jelen tanulmányban nem kívánunk ismétlődésbe bocsátkozni, a bevezető tanulmány néhány fontosabb összefüggésére és megállapítására emlékeztetni fogunk.

A szemléletesség céljából az új összefüggések alkalmazását a szokásosnál több példával illusztráljuk.

Megjegyezhető, hogy valójában ez a tanulmány készült el a legkorábban [3], és szolgált alapul a [4]-ben ismertetett elvek kidolgozásához.

Visszatekintve, és az újabb eredményekhez igazítva a téma kifejtésében most olyan szerkesztési nehézségek elé kerültem, amelyeket lehetséges, hogy nem sikerült jól megoldanom, amiért kérem szíves megértésüket.

2 A NEWTON binom felírása

A NEWTON binom szokásos felírása az alábbi azonossággal történik:

$c^p=(a+b)^p$ **3./**

ahol a;b;c bármely értékű változók, amelyek összege 0-val egyenlő (a+b+c=0):.

A kijelölt műveletet elvégezve nyerhető a NEWTON binom, vagyis az a és b változók különféle variációból, és N együtthatókból álló összefüggés.

$c^p= N_p^0\, a^p + N_p^1\, a^{p-1}\, b + ... + N_p^{p-1}\, ab^{\,p-1} + N_p^p\, b^p$ **4./**

A képletben szereplő összeadandó tagok a változók hatványkitevői szerint rendezhetők.

Az N_p^i =f(p;i) „*binomiális együtthatók*" $0 \le i \le p$ oszlopszámmal és p sorszámmal jellemezhetők. Az alsó index (p) a binom fokszámát, felső index (i) a rendezett sor szerinti sorszámukat jelöli.[1]

A hatványösszegek elméletének analógiájaként észrevehető, hogy a 4./ képlet szintén egyfajta algoritmust képez, amelynek segítségével a c változó valamely ismert fokszámú hatványa esetén magasabb fokszámú megoldó-képlete levezethető.

Az együtthatók meghatározására szolgáló PASCAL háromszög is erre az egyszerű algoritmusra épül, amennyiben a nagyobb fokszámú binom rendezett sorszámú együtthatója az eggyel kisebb fokszámú rendezett sorszámú két együttható összegeként számítható.

$N_p^i = N_{p-1}^{i-1} + N_{p-1}^i$ **5./**

Ez a módszer szemléletesen mutatható be a PASCAL háromszög alábbi, táblázatos felírásával:

p/i	0	1	2	3	4	5	6	
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	+10	+5	1		
6	1	6	15	20	=15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
képlet	1	p!/ (p-1)	p!/2! (p-2)!	p!/3! (p-3)!	p!/4! (p-4)!	p!/5! (p-5)!	p!/6! (p-6)!	p!/7! (p-7)!

[1] A jelölés részben a megfelelő szimbólum (..) hiánya, részben egyéb, a téma későbbi kifejtését megkönnyítő szempontok miatt tér el a szokásostól.

Bár a fenti felírási mód formailag eltér a szokásos, „háromszög alakba" rendezettől, azonban lényegét tekintve azzal azonos, és ebben a formában a további változatok algoritmusával jobban összevethető.

A NEWTON binom egy lépésben történő felírására alábbi kifejezés szolgálhat

$$c^p = \sum_{i=0}^{i=p} (+/-1)^i N_p^i \, a^{p-i} b^i \qquad \textbf{6./}$$

és a binomiális együttható:

$$N_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} \qquad \textbf{7./}$$

A NEWTON binommal kapcsolatosan az alábbi tulajdonságok emelhetők ki.

- Az összeadandó tagok száma p+1

- A tagok mindegyikében a két változó hatványkitevőjének összege p-vel egyenlő.

- $N_p^0 = N_p^p = 1$

- Az i és a p-i helyeken álló együtthatók azonos értékűek.

- p prímszám esetén valamennyi együttható p-vel osztható.

- a változók előjelétől függően a tagok előjele pozitív, vagy tagonként előjelváltó.

A további összehasonlító vizsgálatokhoz célszerű a NEWTON binomot hatványösszeg alakra átírni, ami az i=0 sorszámú (a^p) és az i=p sorszámú (b^p) tagoknak az egyenlet bal oldalára történő áthelyezése útján történhet.

$$Q_3^p = c^p - a^p - b^p = N_p^1 a^{p-1} b + ... + N_p^{p-1} a b^{p-1} \qquad \textbf{8./}$$

Ekkor tehát az $N_p^0 = N_p^p = 1$ együtthatók is az egyenlet jobb oldalára kerülnek át.
Példaképpen a p= 5 fokszámú binom megoldóképlete:

$$Q_3^5 = c^5 - a^5 - b^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 = 5ab\,[(a^3+b^3) + 2(ab)(a+b)] \qquad \textbf{9./}$$

A hatványösszeg alakú felírás tehát már a NEWTON binom átrendezése útján is lehetséges. Valójában hatványösszeg alakra nemcsak az előbbi egyenlet rendezhető, hanem azzal teljesen azonosan további két egyenlet, valamennyi változó-pár kombinációra (a…b; c…b; c…a) felírható.

$$Q_3^p = N_p^1 c^{p-1} b + ... + N_p^{p-1} c b^{p-1} = N_p^1 c^{p-1} a + ... + N_p^{p-1} c a^{p-1} \qquad \textbf{10./}$$

Az ismertetett egyenletek tehát ugyan már hatványösszegek, azonban még nem paraméteres alakúak. A q.. paraméterek ezekből az egyenletekből csak bonyolult átrendezések útján lennének kifejezhetők.

A hatványösszegek elméletét alkalmazva, annak algoritmusai segítségével ez sokkal hatékonyabban elvégezhető.

3 A NEWTON binom felírása paraméteres hatványösszeg alakban

1;2./ alap algoritmusok segítségével - amennyiben az összes változót tartalmazzák (teljes változószámúak) - a **hatványösszegek** mindig felírhatók paraméteres alakban is.

Ez azt jelenti, hogy bármely fok és változószámú hatványösszeg csupán q_n paraméterek és K_p^i binomiális együtthatók[2] variációiból álló összeggel kifejezhető.

Az alap algoritmusokkal képzett hatványösszegeken kívül létezhetnek még módosított algoritmusokkal és paraméterekkel képzett hatványösszegek is.

A NEWTON binom kiindulási feltétele (a+b+c=0) a hatványösszegek előállítása szempontjából két alaphelyzetnek felel meg.

1. Változat
Az alap algoritmusokkal képezhetők olyan*, kétváltozós, teljes paraméterszámú hatványösszegek*, amelyek a 9;10 képletekkel analóg módon, háromféle változó pár kombinációban is felírhatók (q_1=a+b=-c; c+b=-a;c+a=-b; q_2= ab;ac;bc).

2. Változat
Az alap algoritmusokkal képezhető olyan, *háromváltozós (a;b;c), hiányos paraméterszámú* (q_1=0, q_2=ab+bc+ac; q3=abc) hatványösszeg, amely csak egyféle alakban írható fel.

3... Változatok
Az alap algoritmusokkal képezhetők módosított alakú (paraméterű) hatványösszegek is.

A továbbiakban ezeket a változatokat ismertetjük.

3.1 A NEWTON binom felírása kétváltozós, teljes paraméterszámú hatványösszegként

Két változó (pl. a,b) esetén a q_1, q_2 paraméterek léteznek csak.

A c változó tulajdonképpen a q_1 paraméterrel azonos.

q_1=a +b=-c **11./**
q_2=ab **12./**

és az alap algoritmus növekvő fokszám esetén

$$Q_2^p = a^p + b^p = q_1 Q_2^{p-1} - q_2 Q_2^{p-2} \qquad \textbf{13./}$$

csökkenő fokszám esetén

$$Q_2^p = a^{-p} + b^{-p} = (Q_2^{p+2} - q_1 Q_2^{p+1})/q_2 \qquad \textbf{14./}$$

---

[2] K_p^i Ezt a jelölést a hatványösszeg-binomiális együtthatóknak a PASCAL binomiális együtthatóktól való eltérése kihangsúlyozása céljából vezettük be.

Az alap algoritmusokból adódik a következő, negatív hatványon indítható paraméteres hatványösszeg sor:

....

$$Q_2^{-5} = (q_1^5 \text{-} 5 q_1^3 q_2 + 5\ q_1\ q_2^2) / q_2^5 \qquad \textbf{15./}$$

$$Q_2^{-4} = (q_1^4 \text{-} 4 q_1^2 q_2\ + 2\ q_2^2) / q_2^4 \qquad \textbf{16./}$$

$$Q_2^{-3} = (q_1^3 \text{-}\ 3 q_1\ q_2) / q_2^3 \qquad \textbf{17./}$$

$$Q_2^{-2} = (q_1^2 \text{-} 2\ q_2) /\ q_2^2 \qquad \textbf{18./}$$

$$Q_2^{-1} =\ q_1 / q_2 \qquad \textbf{19./}$$

$$Q_2^{0} =\ 2 \qquad \textbf{20./}$$

$$Q_2^{1} = q_1 \qquad \textbf{21./}$$

$$Q_2^{2} = q_1^2 \text{-} 2 q_2 \qquad \textbf{22./}$$

$$Q_2^{3} = q_1^3 \text{-}\ 3\ q_1 q_2 \qquad \textbf{23./}$$

$$Q_2^{4} = q_1^4 \text{-} 4\ q_1^2\ q_2 + 2 q_2^2 \qquad \textbf{24./}$$

$$Q_2^{5} = q_1^5 \text{-} 5\ q_1^3 q_2 + 5\ q_1\ q_2^2 \qquad \textbf{25./}$$

....

A kétváltozós hatványösszegek egy lépésben történő felírására szolgálhat az alábbi általános összefüggés:

$$Q_2^{p} = \sum_{i=0}^{i=m} (\text{-}1)^{\mathrm{i}} K_p^i\ q_1^{\alpha}\ q_2^{p-\alpha} \qquad \textbf{26./}$$

ahol

K_p^i =f(p;i) - az 0 $\leq$i $\leq$ m oszlopszámmal és p sorszámmal jellemezhető, a PASCAL háromszögétől eltérő binomiális együtthatók.

p páratlan esetén

m = (p-1)/2

α $\leq$p páratlan szám

p páros esetén

m = p/2

α $\leq$p/2 páros szám

A fenti összefüggésben szereplő paraméterek fokszáma különböző (1; 2).

Következésképpen a 25./ képletben szereplő, szorzótényezőként ki nem emelhető paraméterek kombinációiból olyan, a fokszámuk szerinti legkisebb közös többszörös értékének (1;2=2) megfelelő elemek különíthetők el, amelyek bármely fokszámú megoldóképletben ismétlődően előfordulhatnak.

A paraméterek fokszáma szerinti legkisebb közös többszörös értékének megfelelő paraméter-variációkat célszerű külön jelöléssel ellátni, mint pl. az adott esetben:

A $= q_1^2$; B$= q_2$

A hatványösszegek felírása ezáltal áttekinthetőbbé válik.

$$Q_2^p = q_1^r \, q_2^k \sum_{i=0}^{i=m} (-1)^i \, K_p^i \, A^{m-i}B^i \qquad \textbf{27./}$$

A fenti képletben szereplő tényezők értékei az alábbi táblázat szerint vehetők fel:

p=	pozitív	pozitív	negatív	negatív
	páros	páratlan	páros	páratlan
	p= +2n	p= 2n+1	p= -2n	p= -2n-1
r	0	1	0	1
m	p/2	(p-1)/2	-p/2	(-p-1)/2
k	0	0	-p	-p

A K_p^i binomiális együtthatók meghatározása ebben az esetben 1 és 2 fokszámmal kisebb, sorba rendezett együtthatók összegeként számítható:

A növekvő fokszám tartományában:

$$K_p^i = K_{p-2}^{i-1} - K_{p-1}^i \qquad \textbf{28./}$$

A csökkenő fokszám tartományában:

$$K_p^i = K_{p+2}^{i-1} - K_{p+1}^i \qquad \textbf{29./}$$

Ez a módszer is bemutatható a PASCAL háromszöghöz hasonló, táblázatos formában, amelynek képzése és értékkészlete az első pozitív és negatív p hatványok vonatkozásában a továbbiakban látható.

p/i	0	1	2	3	4	5	6	7
+/-	+	-	+	-	+	-	+	
-7	1	7	14	7	0			
-6	1	6	=9	2	0			
-5	1	5	+5	0				
-4	1	+4	2	0				
-3	1	3	0					
-2	1	2	0					
-1	1	0						
0	2	0						
1	1	0	0					
2	1	2	0					
3	1	3	0	0				
4	+1	4	2	0				
5	1	+5	5	0				
6	1	=6	9	+2	0			
7	1	7	14	+7	0			
8	1	8	20	+16	2	0		
9	1	9	27	+30	9	0		
10	1	10	35	+50	25	2	0	
11	1	11	44	77	55	11	0	
12	1	12	54	112	=105	36	2	0
13	1	13	65	156	182	91	13	0
14	1	14	77	210	294	196	49	2
képlet	1	p	(p-1)	(p-2)	(p-3)	(p-4)	(p-5)	(p-6)
		1!	(p-2)	(p-3)	(p-4)	(p-5)	(p-6)	(p-7)
			/2!	(p-4)	(p-5)	(p-6)	(p-7)	(p-8)
			-	/3!	(p-6)	(p-7)	(p-8)	(p-9)
			1	-	/4!	(p-8)	(p-9)	(p-10)
				(p-4)	-	/5!	(p-10)	(p-11)
				/1!	(p-5)	-	/6!	(p-12)
					(p-6)	(p-6)	-	/7!
					/2!	(p-7)	(p-7)	-
						(p-8)	(p-8)	(p-8)
						/3!	(p-9)	(p-9)
							(p-10)	(p-10)
							/4!	(p-11)
								(p-12)
								/5!

Az együtthatók egy lépésben történő felírásához a 28./ képlet átrendezett formában használható:

$$K_p^i = \sum_{j=0}^{j=p-2} K_j^{i-1} \qquad \textbf{30./}$$

vagyis, hogy bármely együttható az eggyel kisebb oszlopszámú, és kettővel kisebb fokszámú összes együttható összegével egyenlő.

Ebből a feltételből adódnak az alábbi, általános összefüggések:

Ha i $\geq$ 0, akkor

K_p^i=p.(p-i-1)!/(p-2i)i! **31./**

pl. p= 13 ; i=5 esetén:

K_p^i= 13(13-5-1)!/(13-10)!5!=91

Ha i < 0, akkor $K_p^{i<0}$=0

Fenti összefüggésekben $i \leq = 0$ esetére figyelembe vettük a faktoriált általánosító Γ (x) funkciót, amelynek értékei Γ (0)=1; és Γ (-x) =+/- ∞

A NEWTON binomból képzett hatványösszeget helyettesítő, háromváltozós hatványösszeg a fenti, kétváltozósból úgy állítható elő, ha annak mindkét oldalához hozzáadjuk a $c^p = (-q)_1^p$ tagot:

$$Q_3^p = Q_2^p + (-q)_1^p \qquad \textbf{32./}$$

A kiegészítés következtében a hatványösszegek jobb oldalán, a 0 helyen álló K_p^0 együtthatók az alábbiak szerint módosulnak:

p páros fokszám esetén : K_p^0=2

p páratlan fokszám esetén : K_p^0=0

A többi együttható értéke változatlan marad.

Az együtthatók ismeretében a hatványösszegek felírhatók, és további egyszerűsítések végezhetők, pl. a p=13 fokszámú hatványösszeg

$$Q_3^p = q_1B\,(-13A^5+65A^4B-156A^3B^2+182A^2B^3-91AB^4+13B^5) \qquad \textbf{33./}$$

amelynek paramétereit a c = a+b azonosság figyelembevételével változóra átírva kapjuk :

$$Q_3^p = abc\,[-13c^{10}+65c^8ab-156c^6(ab)^2+182c^4(ab)^3-91c^2(ab)^4+13(ab)^5] \qquad \textbf{34./}$$

Azonos összefüggések vezethetők le a paraméter-párok másik két kombinációja vonatkozásában is.

Bár a nyert összefüggés a NEWTON binommal azonos elemekre vezethető vissza (ab; a+b) formailag azonban attól teljesen eltérő.

A NEWTON binomból képzett hatványösszeget helyettesítő kétváltozós, paraméteres hatványösszeggel kapcsolatosan az alábbi strukturális tulajdonságok emelhetők ki.

- A binom pozitív és negatív egész fokszámokra is érvényes.
- Az összeadandó tagok száma közelítőleg a fele (m=p/2; illetve (p-1)/2)
- A paraméterekből képzett új A;B paraméterek polinom fokszáma szintén kisebb, mint p/2-1
- K_p^i együtthatók táblázatos és kombinatorikai módszerekkel képezhetők.

$K_p^0=1$; $K_p^p = p$, ha a kitevő páratlan; $K_p^p = 2$, ha a kitevő 0, vagy páros szám

- A táblázat a pozitív és a negatív hatványösszegek tekintetében tükörszimmetrikus, vagyis

$$K_p^m = K_{-p}^m \qquad \textbf{35./}$$

amiből következik

$$Q_2^p \,/\, Q_2^{-p} = q_2^p \qquad \textbf{36./}$$

- p prímszám esetén valamennyi együttható p-vel osztható.

- a változók előjelétől függően a tagok előjele pozitív, vagy tagonként előjelváltó.

3.2 A NEWTON binom háromváltozós, hiányos paraméterszámú hatványösszegként való felírása

Három változó (a,b,c) esetén a $q_1=0$, és csak a q_2 ,q_3 paraméterek léteznek:

$$q_2 = ab+ac+bc \qquad \textbf{37./}$$
$$q_3 = abc \qquad \textbf{38./}$$

Az alap algoritmus növekvő fokszám esetén

$$Q_3^p = a^p + b^p = -q_2 Q_3^{p-2} + q_3 Q_3^{p-3} \qquad \textbf{39./}$$

csökkenő fokszám esetén

$$Q_3^p = a^{-p} + b^{-p} == (Q_3^{p+3} + q_2 Q_3^{p+1})/q_3 \qquad \textbf{40./}$$

A három változós hatványösszegek sorozatának első megoldóképletei a következők:

......

$$Q_3^{-5} = (q_2^5 + 5 q_3^2 q_2^2)/q_3^5 \qquad \textbf{41./}$$

$$Q_3^{-4} = (q_2^4 + 4 q_3^2 q_2)/q_3^4 \qquad \textbf{42./}$$

$$Q_3^{-3} = (q_2^3 + 3 q_3^2)/q_3^3 \qquad \textbf{43./}$$

$$Q_3^{-2} = +q_2^2 / q_3^2 \qquad \textbf{44./}$$

$$Q_3^{-1} = +q_2 / q_3 \qquad \textbf{45./}$$

$$Q_3^0 = 3 \qquad \textbf{46./}$$

$$Q_3^1 = 0 \qquad \textbf{47./}$$

$$Q_3^2 = -2 q_2 \qquad \textbf{48./}$$

$$Q_3^3 = +3 q_3 \qquad \textbf{49./}$$

$$Q_3^4 = +2 q_2^2 \qquad \textbf{50./}$$

$$Q_3^5 = -5\, q_2\, q_3$$ **51./**

$$Q_3^6 = -2 q_2^3 + 3 q_3^2$$ **52./**

$$Q_3^7 = +7 q_2^2\, q_3$$ **53./**

$$Q_3^8 = +2 q_2^4 - 8 q_2\, q_3^2$$ **54./**

....

A háromváltozós hatványösszegek egy lépésben történő felírására szintén a 29./-hez hasonló képlet szolgálhat, azonban a benne szereplő paraméterek fokszáma 2 illetve 3. Következésképpen a szorzótényezőként ki nem emelhető paraméterek kombinációiból képezhető, a megoldó képletekben ismétlődően előforduló elemek fokszáma **6**-tal egyenlő.

A további vizsgálatok szempontjából ezúttal is célszerű a legkisebb közös többszörös értékének megfelelő paraméter-variációkat külön jelöléssel ellátni:

$B = q_2^3$; $C = q_3^2$; **55./**

$$Q_2^p = q_3^r\, q_2^k \sum_{i=0}^{i=m} (-1)^{\rho}\, K_p^i\, B^{m-i} C^i$$ **56./**

A fenti képletben szereplő tényezők értékei az alábbi táblázat szerint vehetők fel:

p=	pozitív	pozitív	negatív	negatív
	páros	páratlan	páros	páratlan
	p= +2n	p= +2n+1	p= -2n	p= -2n-1
r	0	1	p	p
ρ	p/2	(p+1)/2	2	2
m (a lehetséges együtthatók száma)	(p-2k)/6	(p-3-2k)/6	(-p-k)/3	(-p-k)/3

p ≡ 0 mod(3)	p = +/-3n akkor k=0
p ≡ 1 mod(3)	p = 1 +/-3n akkor k=2
p ≡ 2 mod(3)	p = 2 +/-3n akkor k=1

K_p^i =f(p;i) $0 \le i \le m$ oszlopszámmal és p sorszámmal jellemezhető binomiális együtthatók. A nagyobb fokszámú binom rendezett sorszámú együtthatója ebben az esetben 2 és 3 fokszámmal kisebb, sorba rendezett együtthatók összegeként , illetve azokból képzett más együttható-kombinációk segítségével számítható

A növekvő fokszám tartományában:

Ha "p" pozitív páros egész

$$K^{i}_{p} = K^{i}_{p-2} + K^{i-1}_{p-3} \qquad \textbf{57./}$$

illetőleg

$$K^{i}_{p} = \sum_{j=1}^{j=p-3} K^{i-1}_{j}$$

Ha "p" pozitív páratlan egész

$$K^{i}_{p} = K^{i}_{p-2} + K^{i}_{p-3} \qquad \textbf{58./}$$

illetőleg

$$K^{i}_{p} = \sum_{j=1}^{j=p-3} K^{i}_{j}$$

Ha "p" negatív egész

$$K^{i}_{p} = K^{i}_{p+1} + K^{i-1}_{p+3} \qquad \textbf{59./}$$

illetőleg

$$K^{i}_{p} = \sum_{j=-1}^{j=p+3} K^{i-1}_{j}$$

Az együtthatók képzése és értékkészlete az első pozitív és negatív p hatványok vonatkozásában a következő táblázatban látható.

p	r	k	m	$K^{i}_{p}=0$	1	2	3	4	7
-15	-15	0	5	1	15	75	140	*=75 (negatív páros)*	3
-14	-14	2	4	1	14	63	98	35	0
-13	-13	1	4	1	13	52	65	13	0
-12	-12	0	4	1	12	42	*+40*	3	0
-11	-11	2	3	1	11	*=33 (negatív páratlan)*	*+22*	0	0
-10	-10	1	3	1	10	*+25*	*+10*	0	0
- 9	- 9	0	3	1	9	18	*+3*	0	0
- 8	- 8	2	2	1	*+8*	12	*+0*	0	0
- 7	- 7	1	2	1	7	7	*+0*	0	0
- 6	- 6	0	2	1	6	3	*+0*	0	0
- 5	- 5	2	1	1	5	0	*+0*	0	0
- 4	- 4	1	1	1	4	0	*+0*	0	0
- 3	- 3	0	1	1	3	0	*+0*	0	0

- 2	- 2	2	0	1	0	0	+0	0	0
- 1	- 1	1	0	1	0	0	+0	0	0
0		0	0	3	0	0	+0	0	0
1	1	2	0	+0	0	0	0	0	0
2		1	0	2	0	0	+0	0	0
3	1	0	0	+3	0	0	0	0	0
4		2	0	2	0	0	+0	0	0
5	1	1	0	+5	0	0	0	0	0
6		0	1	2	3	0	+0	0	0
7	1	2	0	+7	0	0	0	0	0
8		1	1	2	8	0	+0	0	0
9	1	0	1	+9	3	0	0	0	0
10		2	1	2	15	0	+0	0	0
11	1	1	1	+11	11	0	0	0	0
12		0	2	2	24	3	+0	0	0
13	1	2	1	13	26	0	0	0	0
14		1	2	2	=35 (pozitív páros)	14	+0	0	0
15	1	0	2	15	50	3	0	0	0
16		2	2	2	48	40	+0	0	0
17	1	1	2	17	85	17	0	0	0
18		0	3	2	63	90	+3	0	0
19	1	2	2	+19	133	57	0	0	0
20		1	3	2	+80	175	+20	0	0
21	1	0	3	21	196	147	23	0	0
22		2	3	2	=99	308	+77	0	0
23	1	1	3	23	276	322	23	0	0
24		0	4	2	120	504	224	3	0
25	1	2	3	25	375	630	=100 (pozitív Páratlan)	0	0
26		1	4	2	143	780	546	26	0
27	1	0	4	+27	495	1134	324	3	0
28		2	4	2	+168	1155	+1176	126	0
29	1	1	4	29	638	1914	+870	29	0
30		0	5	2	=195 (pozitív Páros mód.)	1640	2310	430	3
31	1	2	4	31	806	3069	=2046 (pozitív Páratlan mód.)	155	

Az együtthatók kiszámítására általánosságban az alábbi képletek szolgálhatnak:

Ha "p" pozitív, páratlan egész

K_p^i = p[(p-3-2i)/2]!/ [(p-3-6i)/2]! (2i+1)! **60./**

ahol:
$0 \leq i \leq m = (p-3-2k)/6$ **61./**

Példaképpen a javasolt képlettel történő számításoknál p=31, i=3 esetén a binomiális együttható az alábbiak szerint határozható meg:

A lehetséges együtthatók száma: m = (31-3-2.2)/6 =4

$K_{31}^{3} = K_{p}^{i} = 31[(31-3-2.3)/2]!/ [(p-3-6.3)/2]! (2.3+1)! =2046$

Ha "p" pozitív páros egész, akkor:

$K_{p}^{i} = p[(p-2-2i)/2]! /(2i)![(p-6i)/2]!$

ahol:

$0 \leq i \leq m = (p-2k)/6$ **62./**

például p=28; i=2

$K_{28}^{2} = 28[(28-2-2.2)/2]! /(2.2)![(p-6.2)/2]!=1155$

Ha "p" negatív egész

$K_{p}^{i} = (-p-2i-1)!/i!(-p-3i-1)! +3(-p-2i-1)!/(-p-3i)!(i-1)!$ **63./**

$0 \leq i \leq m = (-p-k)/3$ **64./**

Például, ha p = -13, i = 3, akkor δ= 13 -3x3 -1 =3

$K_{-13}^{3} = (13-2.3-1)!/i!(-p-3.3-1)! +3(-p-2.3-1)!/(-p-3.3)!(3-1)!=65$

Ismerve K_{p}^{i} értékét, az 54./ képlet segítségével bármely hatványösszeg kifejezhető.

A NEWTON binomból képzett hatványösszeget helyettesítő háromváltozós, paraméteres hatványösszeggel kapcsolatosan az alábbi strukturális tulajdonságok emelhetők ki.

- A binom pozitív és negatív egész fokszámokra is érvényes.

- Az összeadandó tagok száma közelítőleg a hatodrésze (m=p-1;2;3;4,5/6)

A paraméterekből képzett új B;C paraméterekből képzett polinom fokszáma szintén kb. 6-szor kisebb, mint p

- K_{p}^{i} binomiális együtthatók táblázatos és kombinatorikai módszerekkel képezhetők.

- A táblázat a pozitív és a negatív hatványösszegek tekintetében nem tükörszimmetrikus, amiből következik

- p prímszám esetén valamennyi együttható p-vel osztható.

- a változók előjelének bármely kombinációjában q_2 ; B negatív, q_3 ; C pedig pozitív előjelűek. Ennek következtében a megoldóképletben szereplő előjelváltó tagok mindegyike a paramétereket előjelhelyesen behelyettesítve pozitív fokszám esetén pozitív előjelűvé, negatív hatvány esetén előjelváltóvá válik.

3.3 A NEWTON binom háromváltozós, hiányos paraméterszámú, módosított hatványösszegként való felírása

Bevezetve q_3=abc helyett az F= q_1q_2-q_3 harmadfokú új paramétert, q_1=0 esetén csak a q_2 ,F paraméterek léteznek:

q_2=ab+ac+bc **65./**

F=(a+b)(a+c)(b+c) **66./**

A módosított algoritmus, növekvő fokszám esetén:

$$Q_3^p = -q_2 Q_3^{p-2} - F\, Q_3^{p-3}$$ **67./**

Csökkenő fokszám esetén az algoritmus:

$$Q_3^{p-3} = (Q_3^p + q_2 Q_3^{p-2}) / (-F)$$ **68./**

A három változós hatványösszegek sorozatának első megoldásképletei a következők:
......

$Q_3^1 = 0$ **69./**

$Q_3^2 = -2q_2$ **70./**

$Q_3^3 = 3\,F$ **71./**

$Q_3^4 = +2q_2^2$ **72./**

$Q_3^5 = +5\,q_2 F$ **73./**

$Q_3^6 = +3\,F^2 - 2q_2^3$ **74./**

$Q_3^7 = -7\,q_2^2 F$ **75./**

$Q_3^8 = -8q_2\,F^2 + 2q_2^4$ **76./**

Ez a hatványsor az adott esetben teljesen azonos az alap algoritmus szerint a 3.2 fejezetben vizsgálttal, mivel érvényesül az alábbi azonosság:

q3=abc=F=(a+b)(a+c)(b+c) **77./**

Így az általános megoldóképlet és a K binomiális együtthatók meghatározására szolgáló összefüggések is azonosak.

4 A hatványösszeg - mint algoritmus

Bár a témakör a számítástechnika szempontjából talán fontosabb, a tanulmánynak nem volt célja, hogy vizsgálja. Néhány gondolat azonban kínálkozott.

A PASCAL háromszög talán az első algoritmus, amit megismerünk, a „PASCAL” az első programozási leírások egyike.

A tanulmány ugyanazon feladat - a NEWTON binom-kifejtésére több, a PASCAL-háromszöggel egyenértékű, sőt annál szélesebb körben használható, egymástól teljesen eltérő formájú algoritmust ismertet.

Mindegyikük közös jellemzője, hogy a műveleti értékkészletük: binomiális együtthatóik előzetes meghatározásához két műveleti jelzőszám (kitevő és sorszám) szükséges.

A PASCAL háromszög táblázatként rendezett formája mutatja közülük a legegyszerűbb geometria struktúrát: két felső együttható összege megadja az alsó harmadikat.

Hogy ugyanazon feladatra találhatók bonyolultabb rajzolatú, más kétdimenziós (kétjelzőszámos) **síkbeli** struktúrák (a táblázatokban látható „kötésminták”) is, amelyek ráadásul összességében leegyszerűsíthetik a számítást - talán mégis csak érdekes?

Szembetűnő a bemutatott algoritmusok kötésmintáinak sakkjátékkal való formai hasonlósága is.

Egydimenziós, „**lineáris**” algoritmusra talán „példaként” szolgálhat a Taylor sor is, amely egyetlen, egy sorba rendezhető, végtelen számú adatkészlettel kifejezhető algoritmusnak tekinthető. Az a célja ugyanis, hogy egy **kiindulóhalmazból**, valamely előre megadott szabályok szerinti **műveletihalmaz** segítségével - **eredményhalmaz**t nyerjünk.

De milyenek lehetnének a nem síkbeli, hanem **többdimenziós** algoritmusok, pl. „trinomiális” együtthatókkal?

Miközben a kiindulóhalmaz értékkészlete általában szabadabban megválasztható, az eredményhalmazé a mindenkori kiinduló és a műveletihalmazok értékkészletének a függvénye. Kizárólag a műveletihalmaz értékkészlete kötődik elsősorban magához a művelethez - az algoritmushoz.

Mindeddig csak olyan egyszerűbb műveletekről volt szó, amelyek műveleti értékkészlete eléréséhez elegendő volt egy, legfeljebb két műveleti jelzőszámot megadni, vagyis legfeljebb binomiális együtthatók használatára volt szükségünk.

Ha egy olyan, összetettebb függvény vizsgálatára kerülne sor, amelyben több, műveleti értékkészlettel rendelkező függvény is szerepel, megjelenhet a „multinomiális” együtthatók alkalmazásának igénye.

Az algoritmus jellegű tevékenységeknek (pl. játékoknak) valószínűsíthetően ***többfunkciós kiindulóhalmaza*** van, s így ***eredményhalmazuk*** is ***multinomiális műveletihalmazzal*** érhető el.

Példát ilyenre most még nem tudok felhozni.

5 Összefoglalás

A jelen publikációban egy, a hatványkitevős egyenletekből képzett hatványösszegek elméleti kérdéseivel foglalkozó tanulmánysorozat részeként a NEWTON binom helyettesítésére irányuló vizsgálatokat végeztünk.

Elsőként a jelenlegi ismereteket elemezve kimutattuk, hogy a NEWTON binom lényegében szintén hatványösszeg, amely az ismert algoritmusokkal, és általános képletek segítségével írható fel.

A korábbi, „**HATVÁNYÖSSZEGEK ELMÉLETE” [4]** tárgyú tanulmányban bizonyított alap és módosított algoritmusok alapján többféle, a NEWTON binommal egyenértékű, illetőleg annál általánosabban alkalmazható összefüggés került levezetésre.

I. változat : a NEWTON binom kétváltozós, teljes paraméterszámú hatványösszegként, (változó-páronként három képlet),

II. változat : a NEWTON binom háromváltozós, hiányos paraméterszámú hatványösszegként való felírása, (egy képlet),

III. változat: a NEWTON binom háromváltozós, hiányos paraméterszámú, módosított hatványösszegként való felírása,

Kiemelendő, hogy ezek a képletek, éppen úgy, ahogy a Newton binom, szintén rendelkeznek a K binomiális együtthatóik meghatározására szolgáló módszerekkel.

Jelzett képletek még az alábbi eltérő sajátságokkal bírnak:

- A kiinduló változók összevonása következtében az összeget képező tagok száma kevesebb, mint a NEWTON polinomé,

- a megoldó képlet negatív p-hatványokra is érvényes.

Az eljárás a NEWTON képlettel azonos, illetve annál szélesebb területeken alkalmazható.

Gyakorlati szempontból előnye, hogy az ismétlődő elemeinek nagyobb fokszáma miatt bizonyos számítási eljárások (függvények közelítése, komplex számokkal való műveletek végzése) általa felgyorsítható.

Nyilvánvaló, hogy a vizsgálat kiterjeszthető **háromnál több gyökváltozóra** is.

A négyváltozós hatványösszeg, ha $q_1=0$, legfeljebb csak 6 db ismétlődő, 12-ed fokú közös többszörös paramétervariációból (A,B,C,D,E,F) állhat. Így valamely négyváltozós, p=24 fokú hatványösszeg a hagyományos formulához képest mindössze 21 db összeadandóval leírható.

A tárgy kapcsolódik a **DIOPHANTIKUS egyenletek**, és minden bizonnyal, az **ALGORIT-MUSOK** témaköréhez is. Az utóbbi viszont valahol már számítástechnika, s így aktuális.

Mindezek külön tanulmányokban lennének bemutathatók.

Forrai György

2004. július

6 Irodalomjegyzék:

N	Szerző	Megnevezés	Kiadás
1	G.H. Hardy , E.M. WRIGHT	**AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF NUMBERS** (angol nyelvű), OXFORD, 1971 4. kiadás	1971
2	Gyarmati Edit	**SZÁMELMÉLET** (Turán Pál előadásainak felhasználásával)	1980
3	Forrai György	**VÜCSISZLENYIE SZTYEPENNÜX SZUM** Számítástechnikai és Matematikai Módszerek Alkalmazása a Tudományos és Ekonomiai vizsgálatokban" Műszaki-tudományos konferencia előadás gyűjteményében jelent meg. (A konferencia rendezői voltak: az Ukrán SzSzR "ZNÁNYIE" Közgazdasági és Műszaki-Tudományos egyesülete, a Lvovi Állami, és a Kievi Politechnikai Egyetem	1991
4	Forrai György	**HATVÁNYÖSSZEGEK ELMÉLETE** Hatványösszegek meghatározása és kapcsolatuk a hatványkitevős egyenletekkel MEK (Magyar Elektronikus Könyvtár) www.mek.oszk.hu/01800/01849	2004

7 Utószó

A Hatványösszegek Elmélete tanulmány-sorozat egy 1981-ben indult vizsgálódás eredménye, amelynek publikálására különböző okokból mindeddig nem nyílt módom.

A tárgy szerteágazó, és eltérő időszakokban különböző témaköreiben merültem el - azok eredményei a [4]-ben lettek összefoglalva.

Érzékelem azonban, hogy annak összefoglaló jellege miatt az nem képes kellőképpen szemléltetni a tárgyban rejlő lehetőségeket.

Ezért bocsátanám közre a jelen tanulmányt, amely tulajdonképpen a legelső volt, és amelyről úgy gondolom, hogy ha nem is alkalmazásra, de érdeklődésre számot tarthat.

Még nagyon sok témaköre vonatkozásában gondolom úgy, hogy publikálásra méltó, de azok csak félig-kész állapotúak, és nem tudom, hogy módom lesz-e befejezni őket?

Mindez 23 év alatt játszódott le. Döntse el bárki, hogy ez sok, vagy kevés.

- Köszönetet kell mondjak a Magyar Elektronikus Könyvtár szponzorainak és munkatársainak, hogy a publikálási lehetőséget számomra, vagy bárki számára megteremtették.
- Köszönetet kell, hogy mondjak mindazoknak szintén, akik a számítástechnika eszközeit számomra is elérhetővé tették - anélkül nem tudtam volna gondolataimat kifejteni.
- Köszönetet kell mondjak mindazoknak, akik segítséget nyújtottak, biztattak.
- Végül Önnek, Tisztelt Olvasó, hogy a Tanulmányt a figyelmére méltatta.

Magam is érzékelem, hogy a tárgy kifejtését, rendszerbe foglalását nem úgy oldottam meg, ahogyan szerettem volna.

Azonban eleve csak az „egész kis részének” a bemutatására gondolhattam, és abban bíztam, hogy a bemutatott példák kárpótolnak majd a hiányosságokért.

Meg abban, hogy Ön Tisztelt Olvasó, észrevételeivel segíti majd a tárgy kidolgozását, illetve külön folytatja azt tovább.