EGYETEMI TANKÖNYV

DR. PATTANTYÚS Á. GÉZA

GYAKORLATI ÁRAMLÁSTAN

HARMADIK, LÉNYEGESEN ÁTDOLGOZOTT KIADÁS
241 ÁBRÁVAL
ÉS 130 KIDOLGOZOTT SZÁMPÉLDÁVAL

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1959

BÍRÁLÓK:

SVÁB JÁNOS
TANSZÉKVEZETŐ EGYETEMI DOCENS

MÁTTYUS SÁNDOR
OKL. GÉPÉSZMÉRNÖK

A SZERZŐ HALÁLA UTÁN SZERKESZTETTE
ÉS SAJTÓ ALÁ RENDEZTE:

PATTANTYÚS Á. DÉNES
OKL. GÉPÉSZMÉRNÖK

KIADÁSÁT
A MŰVELŐDÉSI MINISZTER
RENDELTE EL

ELŐSZÓ AZ ELSŐ KIADÁSHOZ

«*Fejezetek a korszerű áramlástan köréből*» volt a címe a Mérnöki Továbbképző Intézet 1942. évi tanfolyamán tartott előadásaimnak, amelyek e könyvemnek gerincét alkotják. A fejezetek száma a szöveg kiegészítésével hatvanhatra bővült, így tehát indokoltnak látszott a cím megváltoztatása, még akkor is, ha nem is öleli fel az áramlástan teljes tárgykörét.

A gépészmérnöki továbbképzés igényeinek feláldozása nélkül a *tankönyv* követelményeit is igyekeztem kielégíteni azáltal, hogy a könyv három részét szervesen összefüggő egységgé kerekítettem, és az áramlástani alaptörvények összefoglalásával is kiegészítettem.

A tárgyalás módjainak és eszközeinek megválasztásában elsősorban a gyakorlat igényeihez igazodtam, és ezért mindenütt mellőztem a hosszú analitikai levezetéseket, ahol a szabatosság követelményei szemléletes okfejtéssel is ki voltak elégíthetők. Ugyanezért lemondtam a hidrodinamikai jelenségek tárgyalását megkönnyítő vektoranalízis alkalmazásáról is. Tapasztalásom szerint ugyanis a természeti törvények okszerűségeinek felismerését megkönnyíti, és amellett a lényeg megértésével nagyobb elmélyedést biztosít az egyszerű és szemléletes magyarázat, mint az elvont analitikai tárgyalás, amely elsősorban a *továbbkutatásnak* válik nélkülözhetetlen eszközévé.

Különösen a sebességi tér erőtani értelmezésének elmélyítése bizonyult meglepően eredményesnek, mert a lapátterhelésnek egyszerű és szemléletes meghatározására vezetett. A vízerőgépben végbemenő folyamatok erőtani megvilágítása az elméleti és kísérleti kutatás számára is újabb eredményt ígérő utat jelöl ki, amely azonban az áramlástan keretein kívül esik.

A *tökéletes folyadék* áramlástanát felölelő *első* részt szervesen egészíti ki a könyv *második* része, amely a *valóságos folyadék* áramlástanával foglalkozik. Hét terjedelmes fejezetet szenteltem az áramlási veszteségek részletes és oknyomozó ismertetésének, mert véleményem szerint a gépészmérnök a korszerű vízerőgép gazdaságosságának követelményeit csak a veszteségek tervszerű apasztásával tudja kielégíteni. Az anyag összeválogatása és a számpéldák kidolgozása is elsősorban a gépészmérnöki gyakorlat igényeihez igazodik. Ez a célkitűzés a vízépítő mérnök szemszögéből talán egyoldalúnak minősíthető, mert a természetes vízfolyások, a talajvízmozgás és szivárgás jelenségei, továbbá a *természet áramlástanának* fontos fejezetei e könyvem keretébe nem voltak illeszthetők.

Könyvem *harmadik* részében foglaltam össze a *gyorsuló folyadék* áramlástanának három fontos fejezetét, amelyek anyaga és tárgyalási módja szintén elsősorban a gyakorlati alkalmazhatóság feltételeit igyekszik kielégíteni. A cseppfolyós

folyadék lengéstanát felölelő fejezet megállapításai számot tarthatnak az üzemmérnök érdeklődésére is, a *vízlökéssel* kapcsolatos jelenségek szemléletes összefoglalása viszont méretezési alapot szolgáltat újszerű berendezések tervezéséhez is.

Budapest, 1942.

ELŐSZÓ AZ ÁTDOLGOZOTT MÁSODIK KIADÁSHOZ

Ez a könyv kilenc évvel ezelőtt *Áramlástan* címmel jelent meg a Mérnöki Továbbképző Intézet kiadásában a gyakorlatban dolgozó szerkesztőmérnökök és üzemmérnökök számára. Bár e könyv első kiadásának az anyaga e célkitűzésnél fogva nem illeszkedett szorosan a Műegyetem tanulmányi rendjébe, mégis azt tapasztaltam, hogy a műegyetemi hallgatók is szívesen használják tanulmányaik megalapozására, és e könyv anyagát tanulják meg a vizsgára is. Ez a tapasztalás vezetett arra a gondolatra, hogy a műszaki gyakorlat igényeinek feláldozása nélkül e könyv második kiadásának tankönyvjellegét még jobban kidomborítsam és annak anyagát a műszaki egyetemek tantervébe illeszkedő új fejezetekkel is kiegészítsem.

A magyar tervgazdaság ma a vízgépészet terén is fokozott eredményeket vár műszaki felsőoktatásunktól. Az országos vízgazdálkodás, vízellátás, öntözés és vízerőhasznosítás korszerű feladatai mellett itt emelem ki a hidraulikus és pneumatikus anyagszállítás problémáit is. Ötéves tervünk megvalósításán dolgozó gépészmérnökeinknek a korszerű áramlástan elméleti és gyakorlati eredményeinek ismeretére is szükségük van, hogy feladatukat sikeresen és gazdaságosan elvégezhessék.

Szükségesnek láttam tehát könyvem első részének a *nyugvó folyadék mechanikája* című fejezettel való kibővítését, amely a gyorsuló erőterekben végbemenő folyamatok (centrifugálás stb.) korszerű tárgyalására is kiterjeszkedik. Ki kellett továbbá egészítenem a könyvet egy teljesen új negyedik résszel is. Ez a *keverékek áramlástana* címmel foglalja össze a kétfolyadékos energiaátalakítók (vízsugárszivattyúk, vízemelő kos, légnyomásos vízemelő) elméletét és üzemtanát, valamint a folyadékáramban szállított szemes anyag áramlástani alaptörvényeit is.

A műszaki gyakorlat korszerű követelményeihez igazodó tárgycsoportosításra és tárgyalási módjára kíván utalni a könyv megváltozott címe is. A *Gyakorlati Áramlástan* 114 fejezetre osztott anyagát a gyakorlatból vett és részletesen kidolgozott 104 számpélda egészíti ki.

Budapest, 1951.

ELŐSZÓ A LÉNYEGESEN ÁTDOLGOZOTT, HARMADIK KIADÁSHOZ

A második — teljesen kifogyott — kiadás megjelenése óta öt év telt el. Ezalatt az öt év alatt a vízgépkutatás lendületes fejlődésnek indult hazánkban is. Számos új kutatási eredmény született meg a Magyar Tudományos Akadémia céltámogatásával kifejlesztett vízgépészeti laboratóriumunkban. Munkatársaim tudományos kísérleti kutatómunkájának nyomán sikerült például *Gasterstädt*

elméletének kiegészítésére a vízsugár-légszivattyú méretezésének biztosabb alapokra helyezése, új méretezési elvek ellenőrzése saját kísérletsorozataink feldolgozásával és általában a vízgépek méretezési alapjainak megszilárdítása.

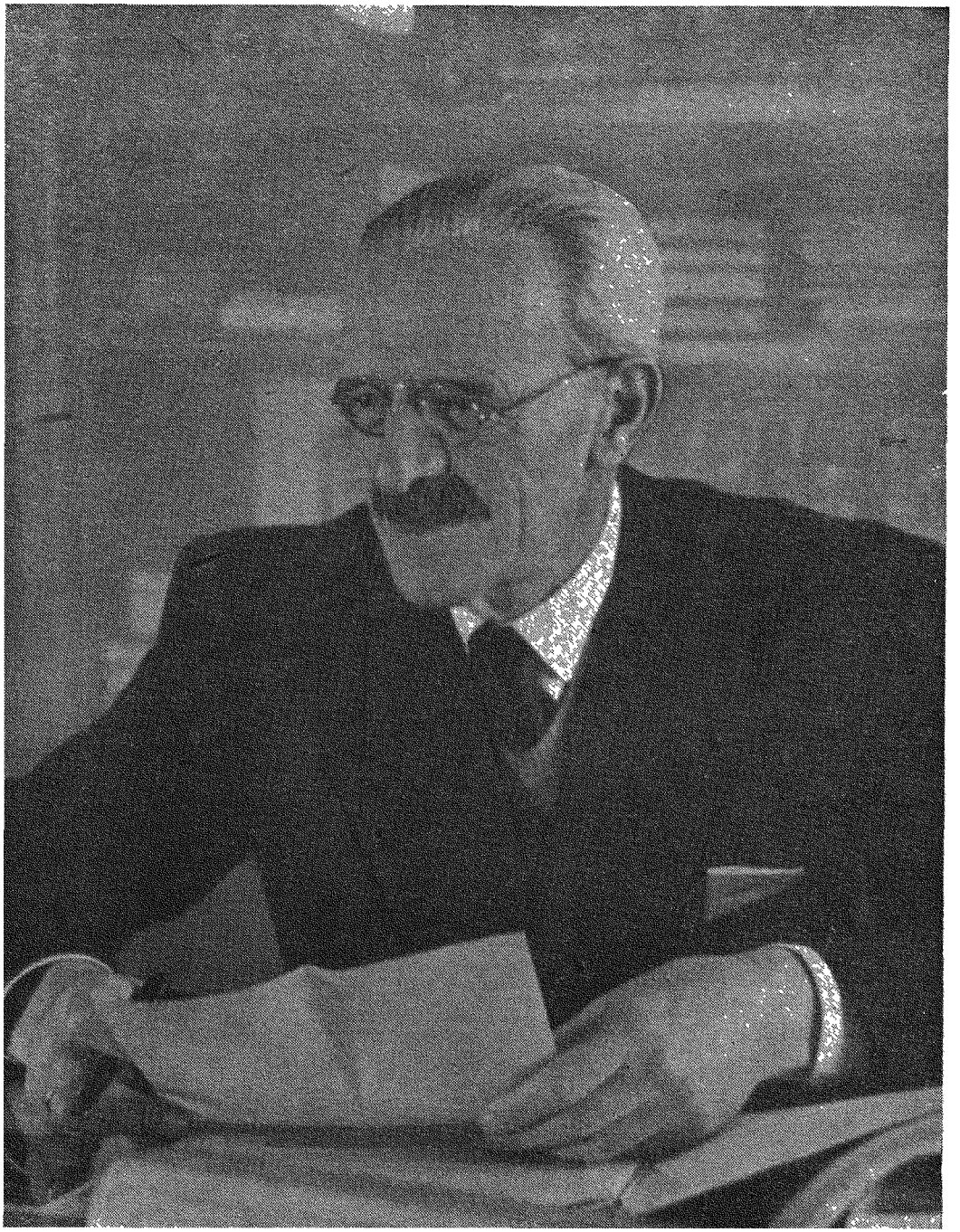
Különösen a *Keverékek áramlása* című rész szorult lényeges átdolgozásra és kiegészítésre. Eredményes közreműködésükért itt mondok köszönetet munkatársaimnak: *Pápai Lászlónak*, *Fáy Csabának*, *Német Árpádnak*, *Rákóczy Tibornak* és *Hajdú Sándornak*, akiknek önálló tanulmányai adták meg néhány új fejezet gerincét.

Köszönet illeti főmunkatársamat: *Kisbocskói Lászlót*, akinek fáradhatatlan munkásságával izmosodott vízgéplaboratóriumunk korszerű tudományos kutatóintézetté. Ebben a ma már jól felszerelt és prototípusok szabatos vizsgálatára is berendezett géplaboratóriumban születhettek meg a könyvemet kiegészítő tudományos eredmények is.

Végül még számos, itt fel nem sorolt munkatársam közül ki kell emelnem *Szabó Ákost*, akinek megköszönöm segítségét a sajtó alá rendezés kényes munkájában.

Budapest, 1956 szeptember

DR. PATTANTYÚS Á. GÉZA



Amikor 1942-ben először jelent meg dr. Pattantyús Á. Géza műegyetemi professzornak *Áramlástan* c. könyve, korszerű, laboratóriumi technikát igénylő áramlástani kutatásról Magyarországon még alig beszélhettünk. A Műegyetemen a III. Gépszerkezettani Tanszéknek vízgép-laboratóriuma olyan kevés dotációt kapott, hogy alig volt elégséges a berendezés karbantartására; egyetlen gyári vízgép laboratóriumunk, a Ganz-gyár laboratóriumának korszerűtlen felszerelése pedig csak az elkészült gépek részleges kimérésére volt alkalmas.

A könyv a gépészmérnökök széles tömegéhez szólt, és célja az volt, hogy az áramlástan alaptételeinek egyszerű és világos tárgyalásával a gyakorlatban dolgozó szakembereknek adjon segítséget az egyre jobban kibontakozó vízgazdálkodási feladatok megoldásában. A víztükör-lengésekkel foglalkozó fejezet energetikai tárgyalásmódja tudományos szempontból is komoly értéket képvisel.

1947 után az áramlástechnikai kutatás rohamos fejlődésnek indult. A Tudományos Tanács, majd a Magyar Tudományos Akadémia és nem utolsósorban az ipar támogatásával a Műszaki Egyetem Vízgépek tanszéke egyre-másra oldja meg a népgazdaság legkülönfélébb területeinek áramlástechnikai problémáit. Pattantyús professzor vezetésével kialakult egy fiatal és lelkes kutató gárda, és néhány év alatt — különösen a keverékek áramlástana területén — jelentős tudományos eredményeket értek el.

Pattantyús professzor kötelességének tartotta, hogy ezeket az eredményeket minél hamarabb közkinccsé tegye, és ezért már 1951-ben kiadta az Áramlástan bővített és részletesen átdolgozott kiadását. Az eredetileg 160 oldalas mű a keverékek áramlástanával és a hidrosztatika kiterjesztésével 280 oldalra bővült, de változatlanul megtartotta eredeti célkitűzését, a gyakorlatban dolgozó mérnökök és gépészmérnök hallgatók továbbképzését. Erre utal a kiadás új címe, a *Gyakorlati áramlástan* is.

A könyv megjelenése után Pattantyús professzor alig három év alatt tíz hosszabb-rövidebb tudományos értekezést írt, amelyek nagyrészt a Magyar Tudományos Akadémia Közleményeiben jelentek meg. Ekkor írta meg a 264 oldalas Gépészeti lengéstant is, amelynek legértékesebb fejezetei a víztükör-lengésekkel foglalkoznak.

A tanszéken folyó tudományos kutatás, amely 1951-ben még a rohamos fejlődés lázas időszakában élt, Pattantyús professzor bölcs irányításával és munkatársainak áldozatos munkájával egyre több elméletileg teljesen alátámasztott és kísérletileg igazolt tudományos eredményt hozott. Ezek közül nem egy a keverékek áramlástanának, évtizedek óta világszerte elfogadott elméletét módosítja, illetve kiegészíti.

A pécsújhegyi erőmű dunai csővezetékének tervezésével kapcsolatos problémák a nyomáslengésekre terelik Pattantyús professzor figyelmét. A feladat megoldásához a tőle megszokott alapossággal fog hozzá. Széleskörű tanulmányokat folytat. A gyakran csak formális matematikai megoldások között szenvedélyesen keresi a lényeget, a számítástechnikailag használható és a valóságot jól megközelítő eljárást.

E munkája közben érlelődik meg benne a gondolat, hogy az elmúlt tíz év alatt elért tudományos eredmények felhasználásával teljesen átdolgozza a Gyakorlati áramlástant, és azt — eredeti célkitűzéseinek fenntartása mellett — komoly tudományos értéket képviselő könyvvé fejlessze.

Munkatársaival folytatott hosszú megbeszéléseken lassan kialakul az új könyv anyaga, kidolgozzák az egyes részletkérdéseket, kiválogatják a legmegfelelőbb példákat, elkészül a szövegezés jelentős része is, megírja az előszót, amikor 1956. szept. 29-én elragadja közülünk a halál. A most megjelent könyv tehát az Ő munkája, és ugyanígy joggal viseli címlapján a nevét a megjelenő Gépészeti Kézikönyv is.

Dr. Pattantyús Á. Géza professzor meghalt. Az a szellemi örökség azonban, amit könyveiben, cikkeiben, kéziratiban és nem utolsó sorban munkatársainak nevelésével maga után hagyott, még sokáig gazdagítja műszaki tudományunkat.

Budapest, 1958 január

Sváb János

BEVEZETÉS

A mérnöki feladatok nagy részét első közelítésben az (önmagukban véve rendszerint egyszerű) alaptörvények felismerését megnehezítő kísérőjelenségek figyelmen kívül hagyásával, tehát tudatos elhanyagolásokkal szokás megoldani. A géptanban meghonosodott *ideális* (veszteségmentes) gépben feltételezett ideális folyamatok elképzelése az alapösszefüggések kristálytiszta felismerését és szabatos analitikai módszerek alkalmazását teszik lehetővé.

Az így leszűrt klasszikus elméleti eredmények gyakorlati alkalmazhatósága azonban sok esetben komolyan vitatható. Még ma is gyakran hangoztatott panasz, hogy az «elméletet megcáfolja a gyakorlat», és csak a tapasztalati úton szerzett adatok szolgáltatnak biztos méretezési alapot.

Kétségtelen, hogy az analitikai vizsgálat rendszerint csak oly elhanyagolások árán vezet zárt alakban kifejezhető eredményre, amelyek következtében a jelenség lefolyásáról csak torzképet kaphatunk, de ez még korántsem adhat okot az elmélet *elvetésére*, hanem csak annyit jelent, hogy az elmélet *kiegészítésre* szorul. Ez a korszerű felfogás jelöli ki a műszaki tudományos kutatás mai irányát, amelynek eszközei: a jól *felszerelt géplaboratóriumok*. E laboratóriumok kutatómunkája ma tervszerűen arra irányul, hogy azoknak a tényezőknek a mennyiségi befolyását is tisztázza, amely bonyolultságánál fogva elméleti úton fel nem deríthető. A szabatos mérések eredményei eszerint az «ideális» állapotra már felismert alaptörvények általánosítására vezetnek.

Az ideális állapotra vonatkoztatott klasszikus eredmények e korszerű megvilágításban a gyakorlat számára többé nem jelentenek elvetésre ítélt torzképeket, hanem ellenkezőleg : ma már szilárdan felépített gerincét alkotják annak a kísérleti kutatómunkának, amelyet éppen az tesz értékessé, hogy teljes összhangot teremt az «elmélet» és a «gyakorlat» között.

A műszaki gyakorlatnak talán egyetlen ágában sem domborodik ki ennek a tudományos alapra felépített kísérleti kutatómunkának eredményessége, mint éppen az áramlástanban, amely az egyik vonalon: a *repülés* terén hozott bámulatra méltó eredményeket, a másik vonalon pedig : a *vízgépek* szerkezettanának adta meg a fejlődés korszerű alapfeltételeit.

A következőkben tehát a folyadékok mechanikájának tárgyalásánál is először az ideális állapot vizsgálatára szorítkozom, amely egy valóságostól eltérő tulajdonságú, ún. *tökéletes (ideális) folyadék* elképzelését feltételezi. A fejezetek kiválasztása elsősorban a gépészmérnöki feladatok igényeihez igazodott, a tárgyalás módját pedig az a célkitűzés jelölte ki, hogy a jelenségek szemléltető ábrázolásával és számbeli példákkal a gyakorlat számára is megkönnyítsem a matematikai fogalmazásban sokszor túlságosan elvont elméleti összefüggések megértését és alkalmazását.

A KÖNYV BEOSZTÁSA

I. A TÖKÉLETES (IDEÁLIS) FOLYADÉK ÁRAMLÁSA

A) A nyugvó folyadék egyensúlya. (Hidrosztatika)
B) Állandósult (egyenletes) áramlás
C) Változó sebességű áramlás álló térben
D) Áramlás mozgó csatornában
E) Szárnylapátos vízgépek járókereke

II. A VALÓSÁGOS FOLYADÉK ÁRAMLÁSA

A) Állandósult (egyenletes) áramlás
B) Áramlás zárt csőben
C) Veszteségek a vízgépekben
D) Áramlás nyitott csatornában

III. A VÁLTOZÓ SEBESSÉGŰ FOLYADÉK ÁRAMLÁSA

A) A vízoszlop szabad gyorsulása
B) A vízoszlop szabad lengései
C) A csővezeték hirtelen zárása. A vízlökés
D) Nyomásingadozások mennyiségi vizsgálata

IV. KEVERÉKEK ÁRAMLÁSA

A) Kétfolyadékos energiaátalakítók
B) Szemcsés anyag szállítása folyadékáramban
C) Folyadékszállítás gázadagolással

(Részletes tartalomjegyzék a könyv végén.)

I. A TÖKÉLETES (IDEÁLIS) FOLYADÉK ÁRAMLÁSA

1. A tökéletes folyadék

Folyadékáramlások analitikai vizsgálata — különösen a vektoranalízis módszereinek alkalmazhatósága — az ún. *tökéletes folyadék* feltételezését kívánja meg, amely a molekuláris felépítésű valóságos folyadéktól eltérően: a *folytonosság* feltételét is kielégíti, tehát tökéletesen összefüggő, a teret egyenletesen kitöltő anyagszerkezetet mutat (homogén kontinuum).

A tökéletes folyadékot alább felsorolt négy tulajdonsággal ruházzuk fel:

a) a teret egyenletesen kitöltő, összefüggő anyag,

b) tökéletesen összenyomhatatlan (illetve, ha gázalakú folyadék, akkor tökéletesen összenyomható),

c) elemeinek elmozdulását belső súrlódás nem fékezi, vagyis belsejében csúsztató feszültségek nem ébredhetnek,

és végül:

d) a folyadékrészeket egymáshoz belső vonzóerő (kohézió) nem kapcsolja, vagy más szóval: a tökéletes folyadékban húzófeszültségek nem keletkezhetnek, hanem csak nyomófeszültségek, amelyeket röviden *nyomás*-nak nevezünk.

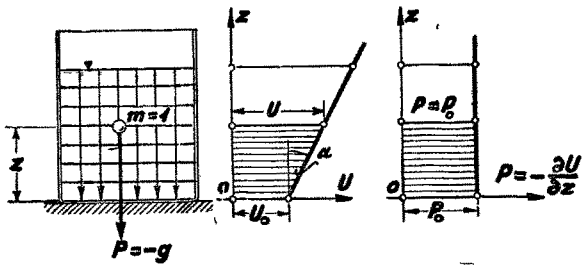
A tökéletes folyadék klasszikus áramlástanának alaptörvényei bizonyos esetekben minden kiegészítés nélkül alkalmazhatók a valóságos folyadékokra. Így például a nyugvó folyadékok mechanikája: a *hidrosztatika* teljes szabatossággal erre az alapra építhető. Más esetekben viszont a tökéletes folyadékra talált összefüggések a valóságos folyadékra érvényüket vesztik és a jelenség leírására önmagukban nem alkalmasak. Ilyenkor csak a kísérleti vizsgálatok eredményei adhatnak felvilágosítást a folyadék első közelítésben elhanyagolt jellemzőinek mennyiségi befolyásáról. Ezek figyelembevételével épült ki a tökéletes folyadék áramlástanából a valóságos folyadék korszerű áramlástana, amelynek kialakulásában még további fejlődés várható.

2. Az erőtér, a térerő és a potenciál

A háromméretű teret kitöltő folyadék minden egységtömegű eleme az ún. **térerő** (P) hatása alatt áll. A térerők közül gyakorlati jelentőségüknél fogva a következő négy jellegzetes változatot ismertetem:

a) A **nehézségi erő** vagy röviden: **súlyerő** hatásvonala „függőlegesen" lefelé mutat. A nehézségi erőtér eszerint függőleges — tehát egymással párhuzamos —

erővonalakkal ábrázolható. Az erővonalakra merőleges ún. **szintfelületek** a nehézségi erőtérben a «vízszintes» síkok *(1. ábra)*. Ezek mentén a térerőnek nincsen összetevője, és ezért egy-egy szintfelület valamennyi pontjában a *potenciál* (U) ugyanakkora.

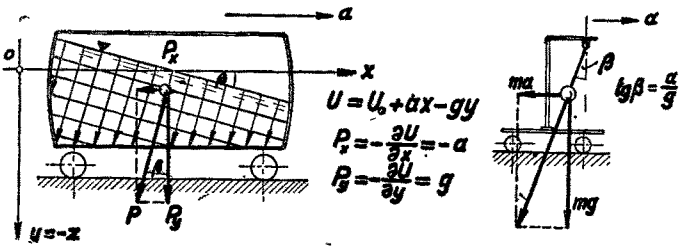


1. ábra. Nehézségi erőtér

A potenciál, vagyis a térerő hatása alatt álló egységtömeg munkaképessége annál nagyobb, mennél magasabb szintfelületbe emeljük. Nehézségi erőtérben a választott ($z = 0$) alapszintről z magasságra emelt egységtömeg helyzeti energiája, vagyis a z-szint potenciálja: $U = U_0 + gz$, a térerő pedig a potenciálnak negatív gradiense,

$$\text{azaz: } P = -\frac{\partial U}{\partial z} = -$$

b) **Gyorsuló rendszerhez** kötött tömeg minden elemében a súlyerőn kívül a gyorsulással arányos és azzal ellentétes értelemben ható **tehetetlenségi erő** is ébred. A gyorsuló rendszer erőterében tehát az erővonalak irányát e két erő eredője határozza meg. Az erővonalak a *2. ábrán* bemutatott vízszintes irányban *egyenletesen* gyorsulva haladó rendszerben — pl. állandó a gyorsulással indított tartálykocsiban — a függőlegestől β szöggel térnek el. Ugyanekkora szöget zárnak be a szintfelületek is a vízszintes alapsíkkal.



2. ábra. Egyenletesen gyorsuló rendszer erőtere

A *2. ábrában* a koordináta-rendszer függőleges tengelyének pozitív ágát az *1. ábrától* eltérően *lefelé* jelöltem ki ($y = -z$).

Ebben a rendszerben tehát a térerő függőleges vetülete (a súlyerő): $P_y = g$, vízszintes vetülete pedig (a tehetetlenségi erő): $P_x = -a$.

A potenciál analitikai kifejezése helyett a legtöbb esetben a gyakorlat igényeit kielégíti, ha az erőtér szintfelületeinek alakját ismerjük. Ezt pedig — éppúgy, mint a nehézségi erőtérben — a mérőinga vagy más néven: *függőón* mutatja meg. A fentebb ismertetett gyorsuló rendszerhez kötött *mérőinga* kitérése: $\beta = \text{arc tg } (a/g)$. Ugyanezt a szöget zárják be a vízszintessel a szintfelületek is, amelyek ebben a párhuzamos erővonalú (homogén) erőtérben sík alakjukat megtartják *(2. ábra)*.

1. példa. Egy $l = 4$ m hosszú, $h = 2$ m magas (állandó szélességű) nyitott tartálykocsi *(3. ábra)* $\alpha = 10°$-os ($\sin\alpha = 0{,}174$, $\cos\alpha = 0{,}985$) lejtős pályán a (állandó) szabad gyorsulással gördül lefelé. A pályaellenállás tényezője: $\mu_z = 0{,}05$; ($\mu_z \cos\alpha = 0{,}049$).

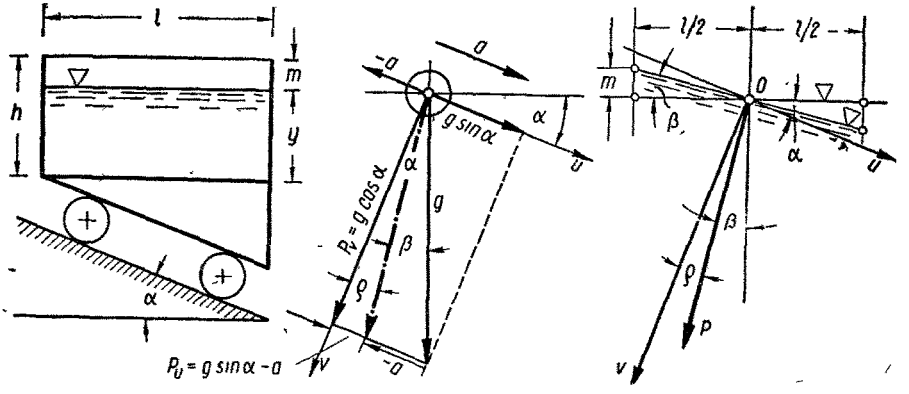
Mekkora y magasságig szabad a tartályt megtölteni, hogy a folyadék ki ne loccsanjon?

A lejtőn lefutó kocsi állandó gyorsulása a pálya irányában:

$$a = (\sin\alpha - \mu_z \cos\alpha)\, g = (0{,}174 - 0{,}049) \cdot 9{,}81 = 1{,}226 \text{ m/mp}^2.$$

A térerő irányát itt célszerűen a *pályanormálissal* bezárt ϱ szöggel jelöljük ki, amelynek tangensét a *3. ábrába* berajzolt erőjáték alapján így számítjuk:

A P térerő mint a g súlyerőnek és az a tehetetlenségi erőnek eredője az (u, v) koordináta-rendszerben a súlyerőnek *két összetevőjéből* is kiszámítható. Az ábra



3. ábra. Szabadon gyorsuló tartálykocsi

jelöléseivel a térerőnek a pálya irányába eső összetevője: $P_u = g \sin\alpha - a$, a pályára merőleges összetevője pedig: $P_v = g \cos\alpha$.

A pályanormálissal bezárt ϱ szög tangense tehát:

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{P_u}{P_v} = \frac{g\sin\alpha - (\sin\alpha - \mu_z \cos\alpha)\, g}{g\cos\alpha} = \mu_z.$$

A térerő tehát a pályanormálissal az ún. súrlódási szöget zárja be, amelynek nagysága (a példa adataival): $\varrho \cong \mu_z = 0{,}05$; azaz: 2°52′.

A víztükör a térerőre merőleges szintfelületet alkot, tehát a vízszintes síkkal a lejtő hajlásánál valamivel kisebb $\beta = \alpha - \varrho = 10° - 2°52' = 7°08'$ nagyságú szöget zár be. ($\operatorname{tg}\beta \cong 0{,}125$).

A pályaellenállás figyelmen kívül hagyásával (ha $\varrho \cong 0$), a víztükör a pálya síkjával **párhuzamosnak** vehető, azaz: $\beta \cong \alpha$.

A víztükör ferde beállása következtében a folyadéktérfogat akkor marad változatlan, ha az ábra szerint az elfordulás tengelye ($l/2$ távolságban) a középre esik.

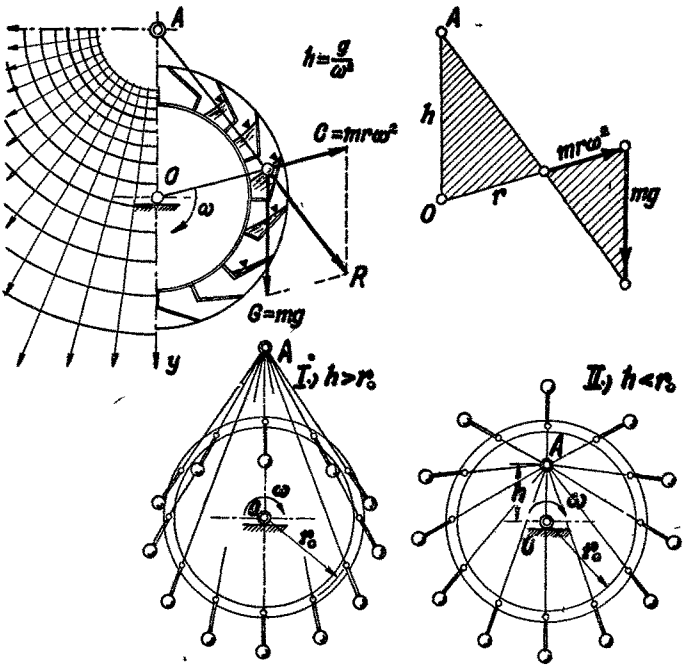
Erre az esetre írható:

$$\mathbf{m} = \frac{l}{2} \operatorname{tg}\beta = \frac{4}{2} \cdot 0{,}125 = \mathbf{0{,}25\ m},$$

azaz:

$$y = h - m = 2{,}0 - 0{,}25 = \mathbf{1{,}75\ méter.}$$

c) **Vízszintes tengely körül** egyenletes ω szögsebességgel **forgó rendszerben** *(4. ábra)* a tömeg minden elemében a súlyerőn kívül (a centripetális gyorsulás hatására) szintén tehetetlenségi erő ébred, az ún. *centrifugális erő*, amely a forgó rendszerhez kötött mérőingát a függőlegesből annál erősebben kitéríti, mennél távolabb van a tengelytől.



4. ábra. Vízszintes tengely körül forgó rendszer erőtere

A *4. ábra* jelöléseivel az erőtér alakjáról a következő egyszerű meggondolással alkothatunk képet. Hosszabbítsuk meg a tetszőleges r sugáron kijelölt m tömegre ható $G = mg$ súlyerő és $C = mr\omega^2$ centrifugális erő eredőjének hatásvonalát a forgástengelyen átmenő (függőleges) ordinátatengelyig. Az így kimetszett A pont magassága az O tengely fölött: $h = g/\omega^2$, ami a hasonló háromszögek oldalarányainak egyenlőségéből könnyen igazolható.

Ez a h magasság az r sugártól független; tehát az A pont az erőtér *valamennyi* erővonalának a sorozója, ami azt jelenti, hogy az erővonalak A pontból kiinduló *sugársort* alkotnak. Az ezekre merőleges *szintvonalak* tehát központos (koncentrikus) körök, vagy ha a kétméretű térben talált eredményt a háromméretű térre is kiterjesztjük, akkor a sugársor egyenesei *síkokat* ábrázolnak, a kör alakú szintvonalak pedig közös tengelyű *körhenger alakú szintfelületek* vetületei (a forgástengelyre merőleges síkokra).

A vízszintes tengely körül forgó rendszer erőterének alakját eszerint az A pont tengely fölötti h magassága egyértelműen meghatározza.

Gyakorlati jelentősége — r_0 sugarú forgógyűrű (táresa vagy dob) erőterének vizsgálatánál — annak a kérdésnek lehet, vajon az erővonalak sorozója a gyűrű területén kívül van-e, vagy azon belül helyezkedik-e el, azaz: $h \leqq r_0$.

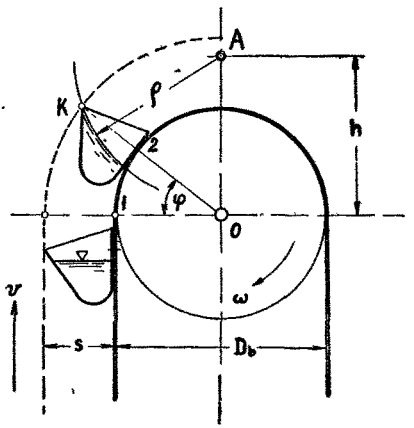
A *4. ábra* két alsó képe világosan szemlélteti a $h = r_0$ határesetnek a jelentőségét. A gyűrű kerületére aggatott mérőingák tömegei ugyanis egészen másként helyezkednek el, ha az A sorozó a körön belül esik (a felső ingák teljesen átlendülnek). Ezt az állapotot az ω szögsebesség növelésével mindig elérhetjük, ha a tengelyt a $h = r_0$ határfeltételből kifejezhető

$$\omega_0 = \sqrt{g/r_0} \tag{1}$$

kritikus szögsebességnél gyorsabban forgatjuk.

Ez a kritikus ω_0 szögsebesség ugyanakkora, mint a gyűrű sugarával azonos r_0 hosszúságú matematikai inga lengési szögsebessége.

Itt jegyzem meg, hogy a vedres szállítógép (elevátor) üzemtanában ezzel az ω_0 szögsebességgel meghatározott $v_0 = r_0\omega_0$ határsebesség mértékadó annak eldöntésére, hogy lassú- vagy gyorsjáratú berendezésről van-e szó ($v \leqq v_0$).



5. ábra. Serleges (vedres) emelő

2. példa. Egy serleges felvonó felső dobjának átmérője: $D_b = 420$ mm, a szállítás sebessége: $v = 1{,}1$ m/mp.

A (tökéletes) folyadék tükre az *5. ábra* szerint mindaddig vízszintes, amíg a heveder a vedret (függőleges) egyenes pályán emeli. Mihelyt azonban a heveder felfut a dobra, a veder töltése oly erőtérbe jut, amelynek szintfelületei: *körhengerek*.

A dob szögsebessége:

$$\omega = \frac{2v}{D_b} = \frac{2 \cdot 1{,}1}{0{,}42} = 5{,}24\ \text{mp}^{-1};\ (\omega^2 = 27{,}5\ \text{mp}^{-2}),$$

a hengeres felületek közös A tengelyének magassága az O dobtengely fölött:

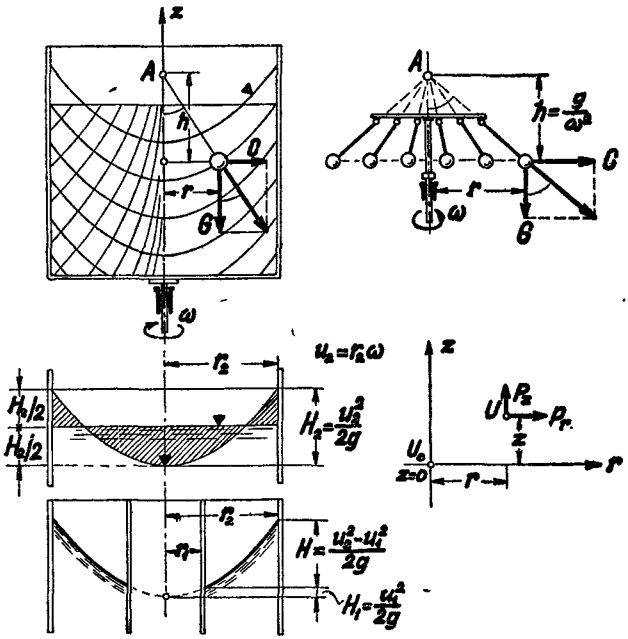
$$h = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9{,}81}{27{,}5} = 0{,}357\ \text{m};\ \text{azaz: } \mathbf{357\ mm.}$$

Az ábrából külön magyarázat nélkül követhető a szerkesztés menete, amely itt a veder külső (K) élének $\varphi \cong 45°$-os elfordulására vonatkozik.

Meg kell jegyeznem, hogy a veder külső éle ($s = 160$ mm esetében) $D_k = D_b + 2s = 740$ mm átmérőjű körpályát fut be $v_1 = vD_k/D_b = 1{,}1 \cdot 740 : 420 = 1{,}94$ m/mp kerületi sebességgel, a kritikus ω_0 szögsebességet tehát ebben az esetben az (1) egyenletből $r_0 = D_k/2 = 0{,}37$ m helyettesítéssel kell kiszámítani:

$$\omega_0 = \sqrt{g/r_0} = \sqrt{9{,}81 : 0{,}37} = 5{,}15\ \text{mp}^{-1}.$$

Minthogy a dob szögsebessége az adott esetben nagyobb a kritikusnál ($\omega > \omega_0$), tehát a vedres emelő gyorsjárású, ami egyébként az ábrából — az A tengely $h < r_k$ magasságának felrakásával — közvetlenül is megállapítható.



6. ábra. Függőleges tengely körül forgó rendszer erőtere

d) **A függőleges tengely körül forgó rendszer** erőterét szintén *kétméretű* térben vizsgálhatjuk, mert a *szintfelület* alakját a meridiánvonal teljesen meghatározza. A forgó tengely körül (egyenletes) ω szög sebességgel keringő m tömeg súlypontját támadó C centrifugális erő most *vízszintes* irányú, és a G súlyerővel oly R eredőt ad, amely a *6. ábra* szerint a tengelyt $h = g/\omega^2$ magasságban metszi a keringés síkja fölött.

Ebben az esetben tehát *az erőtér minden vízszintes síkjához más-más A pont tartozik, és csak egy-egy ilyen sík pontjaihoz tartozó térerők alkotnak sugársort.* Ezt az esetet is mérőingával szemléltetem a *6. ábrában.*

Az erőtér erővonalai az A pont vándorlása miatt *meggörbülnek,* és így az ezekre merőleges szintfelületek sem maradhatnak síkok, hanem forgásfelületekké torzulnak.

A *6. ábra* jelöléseivel e szintfelületek meridiánvonalának alakját abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy minden ponthoz tartozó térerő e pont felett ugyanabban a h magasságban metszi a z-tengelyt. Ez a metszék ugyanis a görbe *szubnormálisa,* amely minden pontra *ugyanakkora,* vagyis a meridiánvonal: *parabola,* a szintfelület pedig: **forgási paraboloid.**

Az r sugarú forgási paraboloid magasságát az $u = r\omega$ kerületi sebesség bevezetésével a következő egyenlet adja:

$$H = \frac{r^2\omega^2}{2g} = \frac{u^2}{2g}. \tag{2}$$

A H magasságú paraboloid térfogata pedig:

$$K = r^2\pi \frac{H}{2},$$

vagyis **pontosan félakkora,** mint a paraboloidot körülzáró hengeré.

A szintfelület alakját analitikai úton a következőképpen határozhatjuk meg. Legyen a forgástengely $z = 0$ pontjában a potenciál U_0, akkor a $(r = 0, z = 0)$ kezdőponton átmenő *szintfelület* bármelyik (r, z) pontjában is változatlanul $U = U_0$

a potenciál. Ebben a pontban a térerő két összetevője: $P_r = r\omega^2$ és $P_z = -g$; ezek munkájával megváltozott potenciál tehát:

$$U = U_0 - \int_0^r P_r \, dr - \int_0^z P_z \, dz,$$

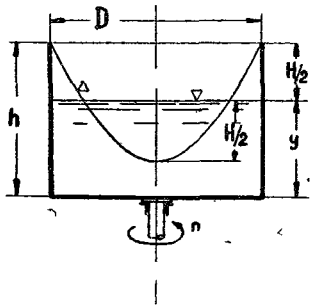
azaz:

$$U - U_0 = -\frac{r^2 \omega^2}{2} + g z = 0.$$

Ebből:

$$z = \frac{r^2\omega^2}{2g} = H$$

a paraboloid magassága és $r^2 = 2 \frac{g}{\omega^2} z = 2 h z$ a meridiánvonal egyenlete. Ebben $h = g/\omega^2$ a parabola paramétere.



7. *ábra.* Paraboloid alakú folyadéktükör

3. példa. Egy $D = 500$ mm átmérőjű, függőleges tengelye körül forgatható dob magassága: $h = 400$ mm. A folyadéktöltés magassága a 7. *ábra* szerint: $y = 250$ mm.

Azt az n fordulatszámot, amelynél a folyadéktükör éppen a dob pereméig emelkedik, a (2) egyenletből számíthatjuk, — annak figyelembevételével, hogy a forgási paraboloid magassága kétszer akkora, mint a vele azonos térfogatú hengeré. Az adott esetben, — (feltéve, hogy a dob belsejében elhelyezett lapátozással vagy rekeszekkel biztosítani lehetett a folyadéktöltés szögsebességének állandóságát is) — a forgási paraboloid magassága, az ábra szerint:

$$\mathbf{H} = 2\,(h - y) = 2.(0{,}4 - 0{,}25) = \mathbf{0{,}3\ m};$$

és ezzel, (2) szerint, a dob kerületi sebessége:

$$\mathbf{u} = \sqrt{2gH} = \sqrt{19{,}62.0{,}3} = \mathbf{2{,}42\ m/mp.}$$

A megengedhető fordulatszám tehát: $\mathbf{n} = \frac{60\ u}{D\pi} = \frac{60.2{,}42}{0{,}5.3{,}14} = \mathbf{92{,}5/perc.}$

3. A nyomás

Az ideális folyadékban sem belső súrlódás, sem kohézió nincsen, így tehát abban csak normális nyomófeszültségek ébredhetnek. Ezeket röviden: **nyomásnak** nevezzük és a műszaki mértékrendszerben **kg/m²** — vagy **kg/cm²=at** mértékegységgel fejezzük ki.

A műszaki légkör vagy technikai atmoszféra:

$$\mathbf{1\ at = 1\ kg/cm^2 = 10\,000\ kg/m^2.}$$

Ezzel szemben a fizikai légkör:

$$\mathbf{1\ atm = 1{,}033\ kg/cm^2.}$$

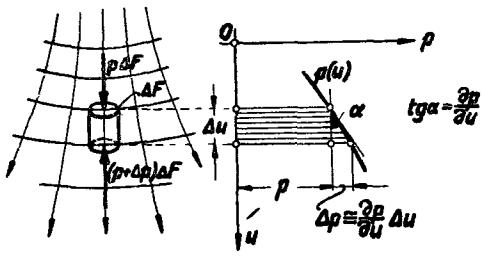
A térerők hatása alatt álló folyadék nyomását az erőtérből kihasított térelemen vizsgáljuk, és e térelembe zárt folyadéktömeg egyensúlyfeltételeiből ha-

tározzuk meg. Ha a folyadék nyugalomban van, akkor a folyadékelemre ható (belső) térerőket a felszínre gyakorolt külső erők egyensúlyban tartják.

Legyen ez a tér-elem a *8. ábra* szerint egy ΔF alapterületű, Δu magasságú henger, amelynek tengelyét az erőtér valamelyik *erővonalára* illesztjük. Ebben az esetben a fedőlapok *szintfelületek.*

A térerő: $P = -\dfrac{\partial U}{\partial u}$, a ϱ sűrűségű folyadékelem tömege: $\Delta m = \varrho \Delta F \Delta u$.

A belső erő tehát: $P\Delta m$, az ezt egyensúlyban tartó külső (felszíni) erők eredője pedig a *8. ábra* jelöléseivel: $\Delta p \Delta F$. A henger fedőlapjaira gyakorolt két erő különbsége ugyanis a nyomásnak erővonalmenti megnövekedéséből számítható, amelynek (véges Δu-ra közelítő) értéke: $\Delta p = \dfrac{\partial p}{\partial u}\Delta u$.



8. ábra. Nyugvó folyadékelem egyensúlya

Az egyensúlyt kifejező egyenlet tehát ($\Delta F \Delta u$ rövidítése után) így írható:

$$\frac{\partial p}{\partial u} + \varrho \frac{\partial U}{\partial u} = 0. \qquad (3)$$

Erre az összefüggésre — amely mint egyensúlyfeltétel a tér *bármelyik irányára felírható* — a 6. fejezetben még visszatérek.

4. A nyomás nehézségi erőtérben. A nyomásmagasság. A nyomás mérése

Nehézségi (gravitációs) erőtérben az erővonalak függőlegesek. Ha a derékszögű koordináta-rendszer tengelye *lefelé* pozitív ($y = -z$), akkor a potenciál: $U = U_0 - g\,y$, a térerő pedig: $P = g$.

A folyadék fajsúlyának: $\gamma = \varrho \cdot g$ (kg/m³) bevezetésével a (3) egyenlet a következő egyszerű alakba megy át:

$$\mathrm{d}\,p = \gamma\,\mathrm{d}\,y. \qquad (4)$$

A gyakorlatban a fajsúly befolyása tekintetében alábbi négy eset különböztethető meg:

a) a fajsúly befolyása elhanyagolható,
b) a fajsúly állandó (a folyadék összenyomhatatlan),
c) a fajsúly a mélység függvénye, és végül
d) a fajsúly a nyomás függvénye.

a) **Gázok és gőzök** fajsúlya oly kicsiny, hogy a nyomás számításakor $\gamma \cong 0$ értékkel számolhatunk. A (4) egyenlet tehát $dp \cong 0$ alakba megy át.

Ez azt jelenti, hogy zárt térben a légnemű folyadékok nyomása a mélységtől függetlenül **állandónak** vehető. Ugyanez a közelítés engedhető meg a nagy fajsúlyú *cseppfolyós* folyadékoknál is, ha azok *igen nagy nyomás* alatt állnak (pl. a víznyomásos emelőgépek és sajtók hengerében).

b) A tökéletesen **összenyomhatatlan folyadék** fajsúlya: $\gamma = állandó$. Ebben az esetben a (4) differenciálegyenlet szerint **a nyomás emelkedése a mélységgel arányos. Az arányossági tényező**: a *fajsúly*, amely: $\gamma = \operatorname{tg} \alpha$ helyettesítéssel a nyomás függvényábrájának α irányszögét is meghatározza. (Vö. a *9.* és *10. ábrával*, amelyben a $p = p(y)$ vonal a függőlegessel α szöget zár be.)

A (4) egyenletet az (y_0, p_0) kezdőértékpár alapulvételével integrálva, tetszőleges y mélységben uralkodó p nyomásra a következő kifejezést kapjuk:

$$p = p_0 + \gamma(y - y_0). \tag{5}$$

Ha pedig **különböző fajsúlyú** folyadékok egymás fölé rétegeződnek, akkor a nyomást a mélység függvényében *törtvonal* ábrázolja, amelynek kifejezéséhez, ill. felrajzolásához szintén egyetlenegy kezdőértékpár ismeretére van szükség.

Ilyenkor a mélység y koordinátái helyett célszerűen a különböző fajsúlyú folyadékok határszintjei között mérhető *oszlopmagasságokkal* számolunk.

Ha tehát a γ_a fajsúlyú folyadék oszlopmagassága: $H_0 = y_1 - y_0$, a következő rétegé: γ_b és $H_b = y_2 - y_1$, akkor az i-edik folyadékréteg utolsó szintjében a teljes (abszolút) nyomásra az (5) egyenlet ismételt alkalmazásával — lépésről-lépésre haladva — a következő összefüggést kapjuk:

$$p = p_0 + \Sigma \gamma_i H_i \quad (\mathrm{kg/m^2}). \tag{6}$$

Meg kell jegyezni, hogy a H_i oszlopmagasság előjele negatív is lehet (pl. egy U alakú cső másik ágában); ilyenkor a $\Delta p_i = \gamma_i H_i$ nyomáskülönbség nem növeli, hanem *apasztja* a kezdőnyomást, vagyis *túlnyomás* helyett *szívás* (depresszió) az eredmény.

A H folyadékoszlop-magasság a vele arányos Δp nyomáskülönbség mérésére is felhasználható, ha az erre a célra szerkesztett ún. folyadék-manométerbe töltött *mérőfolyadék* fajsúlyát ismerjük.

A $\Delta p = p_2 - p_1 = \gamma H$ nyomáskülonbség ($h_1 = p_1/\gamma$ és $h_2 = p_2/\gamma$ jelöléssel) a folyadékoszlop magasságával is jellemezhető. Írható:

$$H = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = h_2 - h_1 \ (m), \tag{7}$$

ahol a nyomás és fajsúly hányadosából kiszámított h_1 és h_2 oszlopmagasságot *nyomásmagasságnak** szokás nevezni.

A számítást célszerűen a **technikai** mértékegységek (**m, kg/m²** és **kg/m³**) alapulvételével végezzük el. Annak menetét alábbi példák kapcsán mutatom be, amelyek a nyomás méréséről is tájékoztatnak.

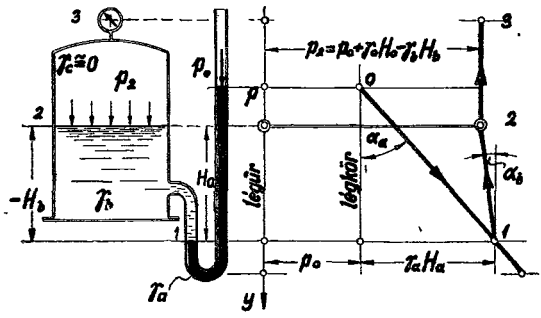
4. példa. A légköri nyomást az ún. **légnyomásmérő** (barométer) higanyoszlopmagassága határozza meg, amelynek légtelenített és beforrasztott felső csővégében a nyomás gyakorlatilag zérus, így tehát a nyomáskülönbség egyúttal a *teljes (abszolút) nyomást* is jelenti. A higany fajsúlya: $\gamma_h = 13\,600$ kg/m³, a $b = 760$ *mm*-es barométerállás tehát:

$$p_0 = \gamma_h b = 13\,600 \cdot 0{,}76 = 10\,330 \text{ kg/m}^2; \text{ vagyis: } 1{,}033 \text{ kg/cm}^2$$

légköri nyomást jellemez. Ez az ún. fizikai légkör, azaz: 1 atm.

* A gyakorlatban (sőt néha tankönyvekben is) a *nyomásmagasságot* hibásan szintén nyomásnak nevezik, amikor pl. 760 mm-es légkori «nyomásról» vagy 10 méteres «vízoszlopnyomás»-ról beszélnek a szabatos barométerállás vagy vízoszlopmagasság helyett.

5. példa. A *9. ábra* szerinti légüstben uralkodó *teljes* (abszolút) nyomás méréséhez három oszlopmagasságot kell leolvasni: a b barométerállást, amely a környezet (légkör) p_0 nyomását határozza meg, az U csőben felemelkedő higanyoszlop H_a magasságát (a 0—1 szintek között) és végül a $\gamma_b = 1000$ kg/m³ fajsúlyú víznek H_b oszlopmagasságát (az 1—2 szintek között). A szintek sorrendjében haladva: H_b negatív és ezzel:



9. ábra. Nyomás mérése folyadékmanométerrel

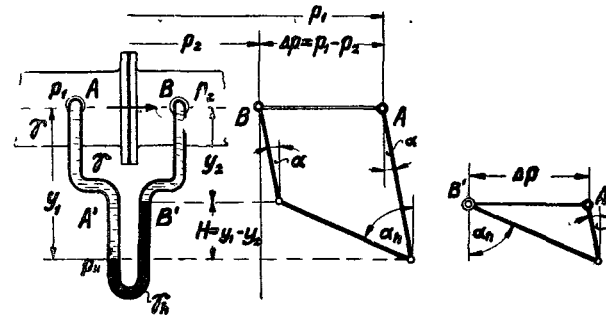
$$p_2 = p_0 + \gamma_a H_a - \gamma_b H_b.$$

Ha $b = 740$ mm, $H_a = 1600$ mm és $H_b = 1200$ mm, akkor:

$$\mathbf{p} = 13\,600 \cdot (0{,}74 + 1{,}6) - 1000 \cdot 1{,}2 = \mathbf{30\,700\ kg/m^2} = \mathbf{3{,}07\ ata.}$$

A teljes nyomás helyett rendszerint megelégszünk a környezet (légkör) *felett* mérhető ún. **túlnyomás** meghatározásával ($p_t = p - p_0$). Ezt a $p = p(y)$ függvényábrába berajzolt **légkörvonal** ($p_0 =$ *állandó*) közvetlenül is leolvashatóvá teszi.

6. példa. Nyomáskülönbségek mérésére az ún. differenciál-manométer *(10. ábra)* használatos, amelynek két ágát az ábra szerint a vízszintes csővezeték A és B pontjához kapcsoljuk a $\Delta p = p_1 - p_2$ nyomásesés meghatározására. A mérőfolyadék itt is rendszerint: *higany*. Minthogy az U cső mindkét ágát (a higany fölött) azonos γ fajsúlyú folyadék tölti ki, tehát azt tetszőleges magasságba helyezhetjük (A' és B' között is ugyanazt a nyomáskülönbséget találjuk). A nyomások törtvonal alakú függvényábráját csak a viszonyok szemléltetésére rajzoltam fel, mert a nyomásesés a higanyoszlop felemelkedéséből (H) számítható:



10. ábra. Differenciál-manométer

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\gamma_h - \gamma)\, H.$$

c) **A fajsúly a mélység függvénye,** azaz $\gamma = \gamma(y)$. Ez az eset a gyakorlatban az ún. gravitációs vízfűtés felhajtóerejének kiszámítására vezet. Az állandósult (stacionárius) állapot beálltával ugyanis a kazánt a fűtőtestekkel összekötő — zárt csőrendszert alkotó — körvezeték minden szintjében más-más hőmérsékletet találunk, ez pedig a víz fajsúlyát is egyértelműen meghatározza a mélység függvényében.

A (4) egyenlet tehát integrálható. Írható az y_1 és y_2 határok között:

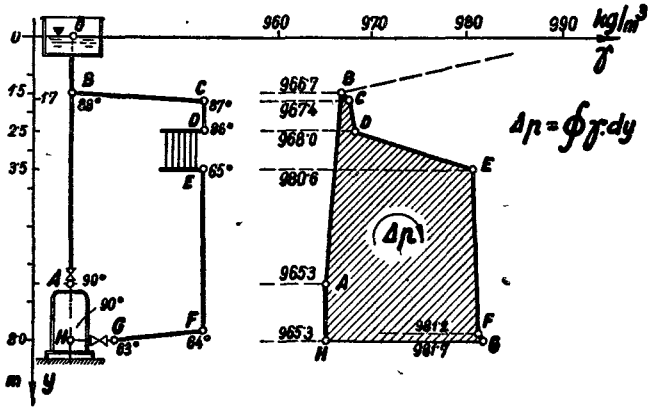
$$p_2 - p_1 = \int_{y_1}^{y_2} \gamma(y)\, dy \qquad (8)$$

Az integrálás a *11. ábra* szerint célszerűen szerkesztéssel is elvégezhető, a függvényábra területe a nyomáskülönbséget közvetlenül meghatározza.

A *11. ábra* jelöléseivel: az (*ABCDEFGH*) jelű zárt körvezetéket a vizsgálat pillanatában az (*A H*) helyen (a szelep zárásával) felbontva képzeljük. Ezáltal az egész Δp nyomáskülönbség a $H - A$ szelvényre összpontosul, és így a függvényábra is a (*H A*) oldallal záródó idomot ad, amelynek területe:

$$\Delta p = \oint \gamma(y)\, \mathrm{d}y.$$

Ez az ún. felhajtóerő tartja áramlásban a melegvizet, azáltal, hogy fedezi a csővezetékben keringő folyadék áramlási veszteségeit.



11. ábra. Felhajtóerő melegvízfűtő-rendszerben

7. példa. A *11. ábrán* vázolt (egyszerű) fűtőberendezés a $\tau_2 = 63$ C°-ra lehűlt melegvizet a kazánban $\tau_1 = 90$ C°-ra hevíti, s ezzel annak fajsúlyát $\gamma_2 = 981{,}7$ kg/m³-ről $\gamma_1 = 965{,}3$ kg/m³-re apasztja. A felszállócső magassága (a kiegyenlítőmedence vezetéke nélkül): $y_H - y_B = 6{,}5$ m.

A γ fajsúlynak a mélység függvényében felrajzolt görbéje zárt idom, amelynek területéből az adott esetben a felhajtóerőt szolgáltató nyomáskülönbség:

$$\Delta p = 76 \text{ kg/m}^2 = 0{,}0076 \text{ kg/cm}^2.$$

A nyomásmagasság-különbség *hideg* ($\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú) vízoszlopmagasságban kifejezve: **h = 76 mm v.o.**

d) **A fajsúly a nyomás függvénye** azaz $\gamma = \gamma(p)$. Ennek az esetnek a *gázosvíz* esetében van gyakorlati jelentősége.

Ilyenkor a (4) egyenletnek a mélység szerint megoldott (inverz) alakja integrálható, vagyis az előírt p_0 és p_1 nyomáshatárokhoz tartozó oszlopmagasságokat számítjuk. Írható:

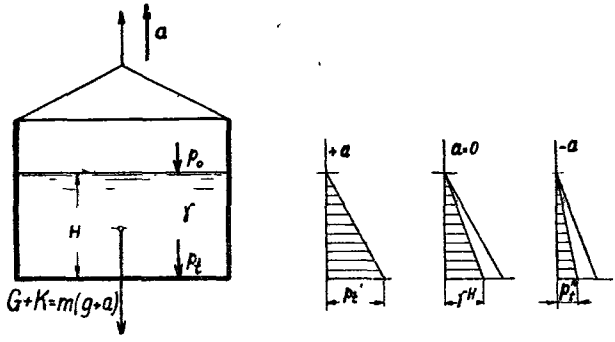
$$y_1 - y_0 = \int_{p_0}^{p_1} \frac{\mathrm{d}\,p}{\gamma(p)}. \tag{9}$$

A számítás menetét a *12. ábra* kapcsán egy mélykútra szerelt légnyomásos vízemelő (mammutszivattyú) gázosvízzel töltött felszállócsövére vonatkoztatom

A nyomás eloszlása a folyadék belsejében és a határoló felületeken eszerint *ugyanúgy számítható, mint a gravitációs* erőtérben, ha a (4/b) szerint számítható γ^* arányossági tényezőt mint a **fajsúly látszólagos értékét** vezetjük be a számításba.

Ennek a fogalmazásnak előnye különösen a *bemerített testek* falnyomásának és felhajtóerejének számításánál domborodik ki, mert a gravitációs térre talált összefüggések a látszólagos fajsúly bevezetésével a gyorsuló erőtérre is kiterjeszthetők.

Így például a *13. ábra* szerint az edény oldalfalára nehezedő nyomás eloszlása ugyanolyan, mint hogyha az edényt (földünk gravitációs erőterében) egy $(g + a)/g$ arányban megnagyobbodott fajsúlyú folyadék töltené ki.



13. ábra. A falnyomás gyorsítva emelt edényben

A feladat $g^* = g + a$ gyorsulás bevezetésével úgy is fogalmazható, hogy a jelenség lefolyása olyan, mintha azt egy g^* gravitációs erőterű bolygón vizsgálnók.

Függőleges pályán **lassítva emelkedő** vagy **gyorsulva süllyedő** edényben a fajsúly látszólagos értéke $(g - a)/g$ arányban kisebbedik. $a_l = g$ esetben — amikor a rendszer lassulása eléri a nehézségi gyorsulás értékét — a fenéknyomás és a falnyomás megszűnik, éppen úgy, mintha a folyadék súlytalan volna.

b) **Vízszintes pályán** gyorsított rendszer (*2. ábra*) esetében a P térerő g és $(-a)$ összetevője *egymásra* merőleges. Az eredő *nagysága* (vektoriális összegezéssel): $P = \sqrt{g^2 + a^2}$, *iránya* pedig: $\operatorname{tg} \beta = a/g$.

Az ilyen gyorsuló rendszer erőtere szintén *homogén*, szintfelületei tehát síkok, amelyek a gravitációs erőtérhez képest (az erővonalakkal együtt) β szöggel elfordultak.

Az elfordulás szögéből a térerő megnagyobbodása és az erővonalak megrövidülése is kiszámítható.

$\cos \beta = g/P = g/\sqrt{g^2 + a^2}$ és $du = \cos \beta \, dy$ helyettesítéssel a nyomásnak erővonalmenti eloszlását kifejező (3) egyenlet a **gravitációs erőtérre** levezetett (4) egyenletnek alakjára hozható, mert: $\varrho \, dU/du = -\varrho P = \varrho g/\cos \beta = -\gamma/\cos \beta$ és

$$dp = \varrho P \, du = \gamma \, dy.$$

Ebben az esetben rendszerint nincs előnye a látszólagos fajsúly (γ^*) bevezetésének, mert a nyomáseloszlás az eredő erőtér ferde u tengelye helyett kényelmesebben vizsgálható a függőleges y tengely mentén.

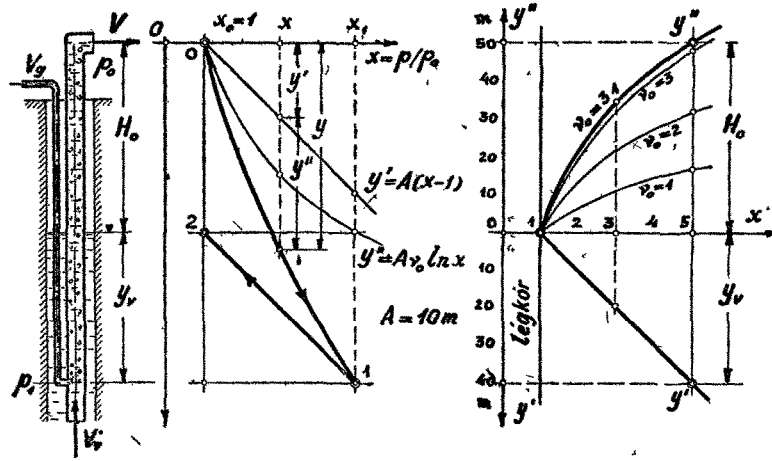
A nyomás az y mélység függvényében ugyanúgy növekszik, mintha nem volna **vízszintes** gyorsulás (mert annak nincsen függőleges irányú összetevője). A nyomás helyi megnövekedését a folyadéktükör emelkedésének mértéke szabja meg. Így pél-

A cső y_v mélységben merül a γ_v fajsúlyú tisztavíz tükre alá, ahol a vízoszlopba (p_1-nyomásra sűrített) levegőt adagolunk. A légbuborékok a folyadékoszlop fajsúlyát a keverési aránytól függően oly γ értékre apasztják, hogy a keverékoszlop H_0 magassággal a kút tükre fölé, a felszállócső kifolyónyílásáig emelkedik.

A keverék fajsúlyát a változatlannak képzelt $v_0 = V_{g0}/V_v$ térfogatarány alapulvételével abból a feltételből határozzuk meg, hogy a p_0 (légköri) nyomásnál $V_{g0} = v_0 V_v$ térfogatú levegő $p = x p_0$ nyomás alatt **izotermikus** állapotváltozást szenved, azaz $V_g = V_{g0}/x$ térfogatra sűrűsödik. A p nyomású *keverék* fajtérfogata (a víz súlyához képest elhanyagolhatóan kis buboréksúly figyelmen kívül hagyásával) így írható:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{V_v + V_g}{V_v \gamma_v} = \frac{1}{\gamma_v}\left(1 + \frac{v_0}{x}\right),$$

ahol: $v_0 = V_{g0}/V_v$ a keverési arány és $x = p/p_0$ a nyomásarány.



12. ábra. Felhajtóerő a légnyomásos vízemelőben

A fenti összefüggések figyelembevételével, $y_0 = 0$ felvétellel és a légköri nyomásmagasság: $A = p_0/\gamma_v$ bevezetésével, a (9) egyenlet a következő alakra hozható:

$$y = A \int_{x_0 = 1}^{x} \mathrm{d}x + A\, v_0 \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{ahol } \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}p}{p_0},$$

Az eredmény: $y = y' + y''$, ahol $y' = A\,(x - 1)$ és $y'' = A\, v_0 \ln x$.

Eszerint a $p = x\, p_0$ nyomást a felszállócső szájnyílásától ($y_0 = 0$) számított oly y mélységben találjuk meg, amely (a *12. ábra* szerint) két ordináta összegéből minden x nyomásarányhoz könnyen meghatározható.

Az egyensúlyállapotot biztosító v_0 légadagolásnál a $p_1 = \gamma_v y_v$ nyomásnak a keverékoszlopot éppen a szájnyílásig kell emelnie, azaz: $y_1 = y_v + H_0$.

A *12. ábra* ezt az egyensúlyállapotot szemlélteti és azt is megmutatja, hogy az $y = y\,(x)$ függvényábra az y' és y'' metszékek összegéből szerkeszthető, ahol: y' a tiszta vízre vonatkoztatott nyomásmagasság, y'' pedig az a **szállítómagasság** amellyel a keverékoszlop a kút tükre fölé emelkedik, ha a levegőt y' mélységben adagoljuk.

8. példa. A *12. ábra* egy olyan vízemelőre vonatkozik, amely $y_v = 40$ m mélységben, tehát ($A = 10$ m-es légköri nyomásmagasságnál):

$x = (y_v + A)/A = 5$-szörös nyomásaránnyal adagolt levegőt kap.

$v_{00} = 1$ keverési arány esetére a teljes szállítómagasság — ($\ln 5 = 1{,}6094$ értékkel):

$$H_{00} = A\, v_{00} \ln x = 10 \cdot 1 \cdot 1{,}609 = \mathbf{16{,}09\ m.}$$

Ha a felszállócső: $H_0 = 50$ m-re emelkedik a víz tükre fölé, akkor a megnövekedett szállítómagasság arányában tobb levegőt kell adagolni. Az ehhez szükséges (elméleti) keverési arány:

$$v_0 = \frac{H_0}{H_{00}} \cdot v_{00} = \frac{50}{16{,}09} \cdot 1 = 3{,}1.$$

Meg kell jegyezni, hogy a légnyomásos vízemelő működése a valóságban jóval bonyolultabb, mert a légbuborékok **előresietése** a keverési arányt is megváltoztatja.

5. A nyomás gyorsuló rendszer erőterében

A 2. pontban egyszerű eljárást ismertunk meg a gyorsuló rendszerek erőterének jellemzésére.

Egyenletesen gyorsuló (haladó) rendszer esetében (*2. ábra*) az erővonalak párhuzamosak, a szintfelületek pedig *síkok*, az erőtér tehát **homogén.** Az egyensúlyt kifejező (3) egyenlet tehát most is a gravitációs erőtérre érvényes (4) egyenlet mintájára írható fel, azzal a különbséggel, hogy a g gravitációs térerő nagyságát és irányát a $(-a)$ tehetetlenségi térerő módosítja. A következőkben a gyakorlatban előforduló eseteket tárgyalom.

a) A gravitációs erőtérben egyenletes (a = állandó) gyorsulással **emelkedő** rendszer erővonalai függőlegesek maradnak, mert a térerő összege: $P = g + a$. (A rendszer a gyorsulását az *emelés* irányában számítjuk pozitív előjellel.)

Ilyen erőteret találunk például a *13. ábra* szerint egy gyorsítva emelt edény γ fajsúlyú folyadéktoltésében.

Egyenletes (felfelé pozitív) gyorsulás esetében a (lefelé pozitív) y tengely mentén a potenciál: $U = U_0 - (g + a)\, y$; a térerő tehát (mint fentebb): $P = g + a$, a (3) egyenlet pedig $\varrho = \gamma/g$ helyettesítéssel alábbi alakba megy át:

$$\mathrm{d}p = \gamma \left(1 + \frac{a}{g}\right) \mathrm{d}y. \qquad (4/a)$$

$$\gamma^* = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \gamma \frac{g + a}{g} = \gamma \left(1 + \frac{a}{g}\right) \qquad (4/b)$$

jelöléssel a nyomás:

$$p = p_0 + \gamma^* y; \quad \text{azaz: } p - p_0 = p_t = \gamma^* y = \gamma \left(1 + \frac{a}{g}\right) y. \qquad (5/a)$$

Állandó fajsúlyú folyadékban és állandó gyorsulás esetében tehát a nyomás a felfelé gyorsuló erőtérben is **a mélységgel arányosan emelkedik,** csakhogy most az arányossági tényező (a nyomás gradiense) a térerő megnagyobbodásának arányában megnövekedett.

dául a *2. ábrában* vázolt tartálykocsiban a fenéknyomás nagyságát és eloszlását a folyadéktükör magassága és elferdült alakja egyértelműen meghatározza és szemléletesen mutatja. (A ferde vízvonal berajzolásával a fenéknyomás eloszlását is megszerkesztettük.)

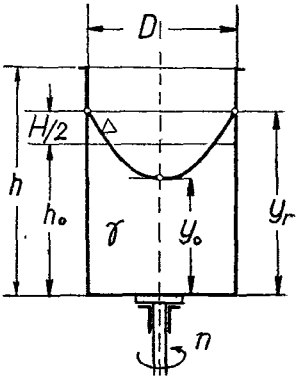
c) **Függőleges tengely körül forgó** rendszer erőterének alakját a *6. ábrából* már megismertük. A szintfelületek: forgási paraboloidok; ugyanilyen alakú a *folyadéktükör* is, amelynek parabola alakú meridiánvonala a $2/d$) pont szerint szerkeszthető.

A térerő két összetevője — a függőleges $P_y = g$ és $P_r = r\omega^2$ — egymásra merőleges, tehát azok eredőjének a nagysága és iránya így számítható:

$$P = \sqrt{g^2 + (r\omega^2)^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{r\omega^2}{g}. \qquad (10)$$

A folyadéktükör alakja szemléletesen meghatározza a nyomáseloszlás törvényét a *vízszintes* síkokban, mert a túlnyomás ebben az esetben is a tükör **alatti függőleges** y mélységgel arányos (vö. a *b*) ponttal).

Az erőtér a vízszintes térerőnek az r sugárral arányos megnövekedése miatt **nem homogén,** az erővonalak tehát nem párhuzamosak, hanem — a forgástengelytől eltávolodva — a függőlegesből mindjobban a vízszintes felé hajlanak el és megrövidülnek. (Vö.: a *6. ábra* felső képével).



14. ábra. Függőleges tengely körül forgó folyadéktest

9. példa. A *14. ábrában* vázolt hengeres edény teljes magassága: $h = 600$ mm, átmérője: $D = 400$ mm ($r = 0{,}2$ m). A (függőleges) tengely fordulatszáma: $n = 91/p$. ($\omega = 9{,}55\ \text{mp}^{-1}$, $\omega^2 = 91{,}2\ \text{mp}^{-2}$).

A $\gamma = 1000\ \text{kg/m}^3$ fajsúlyú víz paraboloid alakú tükrének sugárirányú emelkedése az edény faláig

$u = r\omega = 0{,}2 \cdot 9{,}55 = 1{,}91$ m/mp kerületi sebességnél (2) szerint:

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{1{,}91^2}{19{,}62} = 0{,}186 \text{ m, azaz: } 186 \text{ mm.}$$

Ha az edény víztöltése álló helyzetben: $h_0 = 400$ mm magasságig emelkedett, akkor forgás közben a víztükör lesüllyedése a középen: $H/2 = 93$ mm, emelkedése pedig az edény falai mentén ugyanekkora.

A fenéknyomás tehát a **középen,** $y_0 = h_0 - H/2 = 400 - 93 = 307$ mm mélységben:

$$(\mathbf{p - p_0})_0 = \gamma y_0 = 1000 \cdot 0{,}307 = \mathbf{307\ kg/m^2};$$

az edény **kerületén** pedig, $y_r = h_0 + H/2 = 493$ mm mélységben:

$$(\mathbf{p - p_0})_r = \gamma y_r = 1000 \cdot 0{,}493 = \mathbf{493\ kg/m^2}.$$

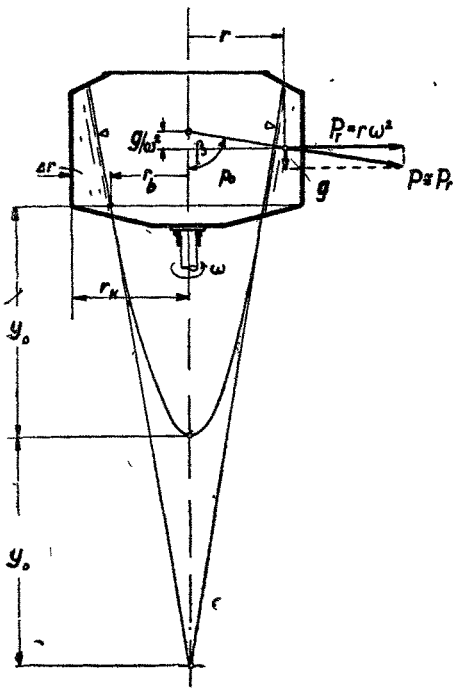
A nyomásnak **erővonalmenti** változása a térerő nagyságát és irányát meghatározó (10) egyenletből fejezhető ki.

Gyakorlati jelentősége ennek a vizsgálatnak a *centrifugák* és a *szeparátorok* üzemében domborodik ki, amelyek jellemzője: a nagy fordulatszám és a viszonylagosan kis mélység (ill. folyadékrétegvastagság).

A függőleges tengely fordulatszáma itt akkora, hogy a térerő vízszintes összetevője (a centripetális gyorsulás nagy értéke miatt) **sokszorosa** a függőleges összetevőnek. A centrifugális erő nagysága mellett ilyenkor a súlyerő figyelmen kívül hagyható, amint az a *15. ábrából* is kitűnik, amely azt mutatja, hogy a paraboloid alakú folyadéktükör már hatszoros vízszintes térerő ($r\omega^2 = 6\,g$; $\operatorname{tg}\beta = 6$) esetében is egy kisnyílású kúp palástjával helyettesíthető.

Még nagyobb ω forgási sebesség esetében e szintfelületek közös tengelyű, *függőleges* alkotójú hengerpalástokká fajulnak ($\beta \cong 90°$); az erővonalak tehát a meridiánsíkban egymással párhuzamos, csaknem vízszintes egyenesek.

A súlyerő elhanyagolása az ábrában vázolt esetben alig 1,5%-os hibát okoz, mert $\operatorname{tg}\beta = 6$ értékkel: $\sin\beta = \operatorname{tg}\beta/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = 6 : \sqrt{1 + 36} = 0{,}985$, vagyis a vízszintes P_r térerő mindössze 1,5%-kal kisebb a P eredőnél, a szintfelületek sugárirányú Δr távolsága viszont 1,5%-kal nagyobb az erővonalmenti rétegvastagságnál.



15. ábra. A nyomás eloszlása a szeparátor vagy a centrifuga folyadéktöltésében

A nyomásnak sugárirányú megnövekedése, $P_r = r\omega^2$ helyettesítéssel:

$$\mathrm{d}p = \varrho\, r\omega^2\, \mathrm{d}r \doteq \gamma^*\, \mathrm{d}r, \qquad (11)$$

ahol: $\gamma^* = \varrho\, r\omega^2$ a folyadék fajsúlyának látszólagos értéke az ω szögsebességgel forgó rendszernek r sugarú (hengeres) szintfelületén. Ebben az erőtérben tehát a γ^* látszólagos fajsúly **nem állandó,** hanem az r sugárral arányos érték!

Kis Δr rétegvastagság esetében a Δp nyomásemelkedést jó közelítéssel a P_r térerő közepes értékéből számíthatjuk, vagyis a (11) egyenletet véges alakban így írjuk:

$$\Delta p = \varrho r\omega^2 \Delta r = \gamma^* \Delta r, \qquad (11/\Delta)$$

ahol (az ábra jelöléseivel): $r = (r_k + r_b)/2$ és $\Delta r = r_k - r_b$.

A γ^* látszólagos fajsúly értékét itt az r sugár Δr környezetére vonatkoztatott középértékével kell helyettesíteni. Bevezetése tehát csak *kis rétegvastagság esetében* indokolt, ilyenkor azonban rendkívül szemléletessé teszi az ülepítés és a centrifugálás folyamatának vizsgálatát.

A folyadékba merített test erőtanának a gravitációs erőtérre levezetett alaptörvényei ugyanis γ^* helyettesítéssel a fentebb érintett korlátok között a centrifugális erőtérre is kiterjeszthetők.

Még jobban érzékeltethető ez a folyamat, ha $-g^* = r\omega^2$ jelöléssel — **a (gravitációs) gyorsulás látszólagos értékével** számolunk, vagyis sugárirányban (az r sugár környezetében) $x = g^*/g$-szeres gyorsulást helyettesítünk. Ezzel a szemlélettel a fajsúly látszólagos értéke is értelmezést nyer, mert: $\gamma^* = \varrho g^* = x\gamma$.

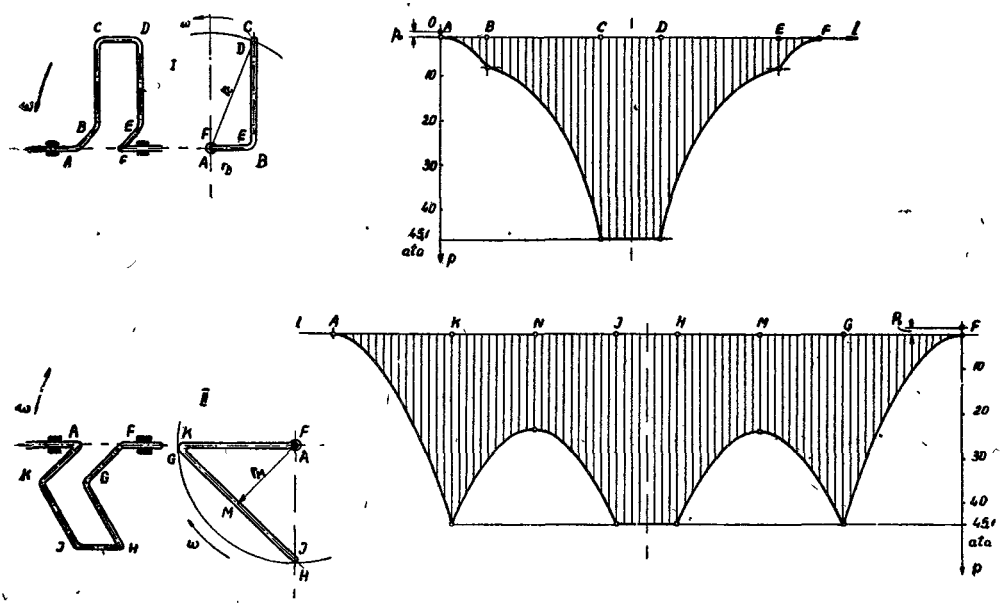
10. példa. Egy $D = 900$ mm átmérőjű centrifuga fordulatszáma: $n = 1000$/perc ($\omega = 104{,}5\ \mathrm{mp}^{-1}$, $\omega^2 = 10\,900\ \mathrm{mp}^{-2}$). A $\gamma = 1060\ \mathrm{kg/m}^3$ fajsúlyú folyadék palást-

nyomása, $\Delta r = r_k - r_b = 50$ mm rétegvastagság esetében ($r_k = 450$ mm és $r_b = 400$ mm; $r = 425$ mm), (11/Δ) szerint, $g^* = r\omega^2 = 0{,}425 \cdot 10\,900 = 4632$ m/mp² és $x = g^*/g = 4632 : 9{,}81 = 471$ értékkel:

$$\Delta p = x\,\gamma\,\Delta r = 471 \cdot 1060 \cdot 0{,}05 = 25\,000 \text{ kg/m}^2\text{; azaz: } \mathbf{2{,}5 \text{ att.}}$$

A fajsúly látszólagos értéke: $\gamma^* = x\,\gamma = 471 \cdot 1060 = 500\,000$ kg/m³, azaz: **500 kg/l.**

A példa adataival is igazolható, hogy a súlyerő figyelmen kívül hagyása itt hibát nem okoz. A kiszámított eredményből arra is következtethetünk, hogy



16. ábra. Nyomáseloszlás gyorsforgású hűtőcső-rendszerben

a gravitációs erőtérben igen lassan végbemenő (kiválasztási és ülepedési) folyamatok időtartama centrifugálással rendkívül nagy mértékben megrövidíthető.

Befejezésül még a gyorsjárású villamos gépek (turbogenerátorok) forgórészének vékony hűtőcsőrendszerében keletkező nyomás nagyságrendjének és eloszlásának érzékeltetésére dolgoztam ki az alábbi számpéldát, amelynek eredményeit kétféle elrendezésre függvényábrákban is szemléltetem (*16. ábra*).

11. példa. Egy villamosgép forgórészének hűtéséhez (a *16. ábra* szerint kétféle változatban elrendezett) $d = 10$ mm átmérőjű hűtőcsövek használatosak, amelyek a tengely központos furatán keresztül csatlakoznak a táplálóvezetékhez, ill. a kifolyócsőhöz.

A forgórész átmérője: $D = 600$ mm, fordulatszáma: $n = 3000$/perc. A kerületi sebesség tehát: $u = D\pi n/60 = 0{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 3000 : 60 = 94{,}2$ m/mp.

A $\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú folyadékkal megtöltött csőben a nyomásemelkedés (a tengelytől a kerületig), a (11) egyenlet szerint, $\varrho = \gamma/g$ helyettesítéssel:

$$p - p_0 = \frac{\gamma}{g}\omega^2 \int_0^r r\,\mathrm{d}\,r = \gamma \frac{r^2\omega^2}{2g},$$

$r\,\omega = u$ helyettesítéssel:

$$p - p_0 = \gamma \frac{u^2}{2g} = 1000 \cdot \frac{94{,}2^2}{19{,}62} = 452\,000 \text{ kg/m}^2\text{; azaz: } \mathbf{45{,}2 \text{ att.}}$$

Ebben a gyorsan forgó rendszerben a nyomás emelkedése oly nagymértékű, hogy a nehézségi erő befolyása még vízszintes tengely esetében is figyelmen kívül hagyható.

A nyomás a cső mentén igen nagymértékben változik. Nagyságát a cső bármelyik szelvényében a tengelytől mért (sugárirányú) távolság négyzete határozza meg. Az ábrában a nyomás változását az egyenesbe lefejtett csőhosszúság függvényében mindkét változatra felrajzoltam. (A függvényábra parabolaívekből szerkeszthető, ha a csővezeték szakaszai egyenesek).

Figyelemre méltó a 2. változatra szerkesztett nyomáseloszlási diagram alakja, amely a $\overline{GH}$ húr mentén vezetett csőszakasz közepén (M pontban) a fordított U csőhöz hasonló **buborékzsákot** alkot. Ez mindkét végén a legnagyobb nyomású szelvényekhez csatlakozik.

Geometriai szemlélettel igazolható, hogy az adott esetben — amikor a $\overline{GH}$ húr végpontjainak szögtávolsága éppen 90°-os — a túlnyomás az M pontban éppen félakkora, mint a két végpontban, a nyomáskülönbség tehát: 22,6 kg/cm². A buborékzsák mélysége eszerint: $\Delta p/\gamma = 226$ méter.

A nyomások nagyságának érzékeltetésére az ábrában, $p_0 = 1$ ata felvétellel, a légűr (vákuum) vonalát is berajzoltam.

6. A térbeli áramlás sebessége. Az áramvonal. A sebességi potenciál

Az ideális folyadék áramlását a háromméretű térben az *elemek* mozgástörvényei határozzák meg. Ha *egy* folyadékelemet ragadunk ki, és annak pályáját (az áramlás vonalát) követve *haladunk* az erőtéren keresztül, akkor rendkívül bonyolult és kevéssé áttekinthető eredményekhez jutunk *(Lagrange)*; ezért *Euler* szemléletével inkább az erőtér rögzített pontjain áthaladó folyadékrészek sebességét vizsgáljuk.

Ha az áramló folyadékkal kitöltött tér pontjaihoz tartozó sebességi vektorokat egyidejűleg rögzítjük, ezek burkoló görbéit: az ún. **áramvonalakat** is megrajzolhatjuk, amelyek általában pillanatról pillanatra változó képet mutatnak.

Az áramvonalak érintői: a sebesség vektorai a folyadék mozgástörvényét egyértelműen meghatározzák, és az erőtér mintájára **sebességi térről** is beszélhetünk, amelyben az erővonalak szerepét az áramvonalak veszik át.

Ha az áramlás «örvénymentes» (vagyis a folyadékelemek tengelyük körül el nem fordulnak, hanem csak haladómozgást végeznek), akkor a sebességi tér az ún. **sebességi potenciállal** jellemezhető, amely függvényalakban fejezi ki az ún. **potenciálos áramlás** törvényeit, hasonlóan, mint a térerőt meghatározó potenciál (2. pont).

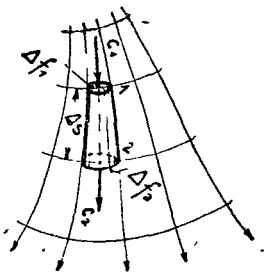
A *sebességi potenciált* mint $\varphi(x, y, z)$ függvényt úgy szokás értelmezni, hogy annak *gradiense pozitív* előjellel adja a tér bármelyik pontjához tartozó sebességi vektort, azaz:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,.$$

A tér azonos sebességi potenciálú pontjai az áramvonalakra merőleges **szintfelületeket** alkotnak, az áramvonalak pedig az ún. **áramcsövek** alkotói. A sebességi-

tér ábrázolására eszerint egészen hasonló trajektória-hálózat *(17. ábra)* használható, mint az erőtér jellemzésére. Egy áramcső és két szintfelület az összefüggő (háromméretű) térből olyan térelemeket hasít ki, amelyeken belül az áramlás törvényei szemléletesen vizsgálhatók. (Vö. a 7. és 8. ponttal.)

Meg kell jegyezni, hogy az áramvonalak általában nem esnek össze a folyadékelemek pályájával: az áramlási vonalakkal. Összevágó vonalrendszert csak akkor kaphatunk, ha az áramlás **állandósult** (stacionárius), vagyis, ha az áramló folyadék sebessége *időbeli változásnak* nincsen alávetve.



17. ábra. Az áramlás folytonossága az áramcsőben

7. Az anyag megmaradásának törvénye

Az áramlás *folytonosságának* feltételét egy ún. *áramcső* szelvényén átfolyó (másodpercenkénti) mennyiség felírásával lehet kifejezni. Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor a *17. ábra* szerint a csőbe a Δf_1 szelvényen belépő folyadéktérfogatnak a Δf_2 szelvényen ki is kell lépnie. Az áramvonalakból alkotott csőpaláston keresztül ugyanis folyadék nem folyik át (a sebesség vektora az áramvonalat *érinti*), az áramcső belsejében pedig folyadék sem nem keletkezik, sem abból el nem tűnik. (Az áramcső *forrásmentes* és *nyelőmentes*.)

Ha az áramcső Δf szelvényét oly kicsinyre választjuk, hogy a sebesség keresztmetszetmenti változása figyelmen kívül hagyható, akkor a cső szelvényén egy másodperc alatt átáramló folyadékmennyiség (ΔV) a Δf keresztmetszet és a c sebesség szorzatából számítható.

A *17. ábra* jelöléseivel tehát $\gamma = állandó$ korlátozással írható:

$$\Delta V = c_1 \Delta f_1 = c_2 \Delta f_2,$$

a sebességek arányát tehát ilyenkor egyértelműen meghatározza a keresztmetszetek aránya.

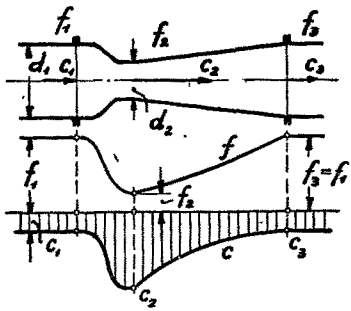
Változó fajsúlyú folyadékoknál az anyag megmaradásának elvét úgy kell fogalmazni, hogy a folyadék mennyiségét annak a **súlyával** kell kifejezni és ezenfelül azt is figyelembe kell venni, hogy ugyanabban a térfogatban sűrítéssel több, ritkítással kevesebb folyadék fér el. Ennek a sűrűségváltozásnak tehát összhangban kell lennie a csőbe belépő és az abból kilépő mennyiség *különbségével*. Ennek az összefüggésnek analitikai fogalmazása: a **Gauss-tétel.**

A gyakorlati feladatok nagy része a **csővezetékekben** és kisebb szelvényű **csatornákban** áramló folyadékokra vonatkozik. A csatornaszelvény mentén a sebességeloszlás ugyan rendszerint nem egyenletes, de ehelyett — rendszerint jó közelítéssel — a sebességek ama c *középértékével* számolhatunk, amelyet a szelvényen átfolyó V vízhozamnak és az f keresztmetszetnek hányadosából lehet kiszámítani ($c = V/f$).

A háromméretű térből tehát most is egy *egyméretű* áramcsövet hasítottunk ki, amelynek középvonala mentén az ún. **egyméretű áramlás** törvényei érvényesek. A *18. ábra* jelöléseivel az anyag megmaradásának törvénye ($\gamma = állandó$ feltétellel) így írható:

$$f_1 c_1 = f_2 c_2 = f_3 c_3 = V \quad (m^3/mp). \qquad (12)$$

Ha tehát a sebességet a csővezeték valamelyik szelvényében ismerjük (vagy a V vízáramból kiszámítottuk), akkor a sebességek áramvonalmenti változását a keresztmetszetek egyértelműen meghatározzák.



18. ábra. Sebességeloszlás a *Venturi*-csőben

A *18. ábra* egy **Venturi-mérő** szelvényeiben mérhető sebességek változását szemlélteti. A függvényábra megszerkesztéséhez a (12) egyenlet a következő alakra is hozható:

$$c_1 : c_2 : c_3 = \frac{1}{f_1} : \frac{1}{f_2} : \frac{1}{f_3},$$

vagyis a sebességek arányosak a keresztmetszetek reciprok értékeivel.

Az adott esetben a Venturi-cső átmérőaránya: $d_2/d_1 = 0{,}5$, a keresztmetszetszűkítés aránya tehát: $f_2/f_1 = 0{,}25$, a közbenső c_2 sebesség tehát az eredeti (c_1) érték négyszerese.

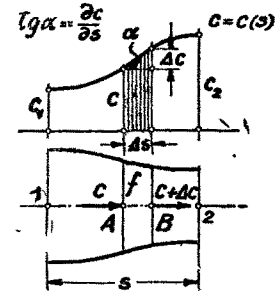
8. Az áramló folyadék egyensúlya. Az Euler-féle egyenletek

Az áramló folyadék elemeinek mozgástörvényei a **Newton-féle törvényből** származtathatók le, amely szerint a gyorsulást az ún. **gyorsítóerő** idézi elő, amely a tömeg és a gyorsulás sorozatából számítható. Más fogalmazásban: a gyorsulni kényszerülő tömeg a sebességváltozásnak ellenszegül az ún. **tehetetlenségi erővel**, amelynek legyőzéséhez ugyanakkora gyorsító erőre van szükség.

A tehetetlenségi erő kiszámításához mindenekelőtt a folyadékelem *gyorsulását* kell ismerni, amely (a *19. ábra* jelöléseivel) *az áramvonal mentén* a következő *két* részből tevődik össze:

a) A tér kijelölt A pontjában, *nem* egyenletes áramlás esetén, a c sebesség **időbeli** változásából származó *(lokális)* gyorsulás.

b) A folyadékelem c sebessége — mint a *19. ábraból* is kitűnik — még egyenletes áramlásnál sem maradhat állandó, ha az áramcső szelvénye a pályaelem mentén megváltozik. Ha a folyadékelem (a *19. ábra* jelöléseivel) az áramvonal mentén Δt idő alatt $\Delta s = c\Delta t$ utat fut be, akkor a sebességi tér oly pontjára érkezik, ahol a sebesség Δc értékkel megváltozott. A sebesség **helyi** változásából származó (ún. *konvektív*) gyorsulás tehát:

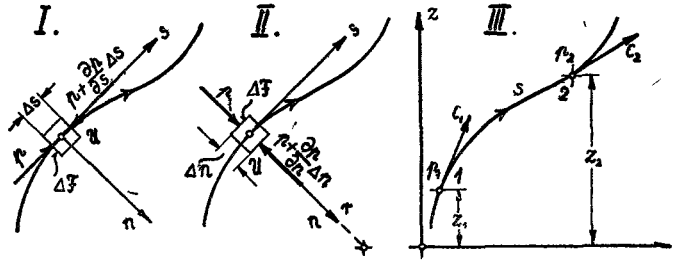


19. ábra. Áramló folyadékelem gyorsulása

$$a_s = \frac{\Delta c}{\Delta t} \simeq \frac{\partial c}{\partial s_i} \Delta s/\Delta t = c \frac{\partial c}{\partial s}.$$

A teljes gyorsulás eszerint az időbeli és a helyi sebességváltozás összege, azaz: $a = a_t + a_s$.

Ezzel a $\varrho \Delta F \Delta s$ tömegű folyadékelemre ható erők dinamikai egyensúlyát kifejező egyenlet is felírható, mert a *20. ábra* szerint az (s) **érintő** irányában pozitív gyorsulást a nyomásból származó felszíni erő: $\left(\frac{\partial p}{\partial s} \Delta s \Delta F\right)$ és a potenciálból számítható térerő áramvonalmenti összetevője $\left(\text{a tömeg egységére: } P_s = -\frac{\partial U}{\partial s}\right)$ idézi elő.



20. ábra. Áramló folyadékelem egyensúlya

A *3. pont* (3) egyenletének figyelembevételével írható:

$$\varrho \Delta F \Delta s\, a = -\frac{\partial p}{\partial s} \Delta s \Delta F - \frac{\partial U}{\partial s} \varrho \Delta F \Delta s.$$

Helyettesítés, rövidítés és rendezés után az **I. Euler-féle egyenlethez** jutunk, amely az ideális folyadéknak pályamenti mozgástörvényét adja:

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + c\frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0.} \qquad \text{(I)}$$

Egészen hasonló okfejtéssel írható fel a folyadékelemre ható erők egyensúlyfeltétele az áramvonal (n) **főnormálisának** irányában is, ha az r görbületi sugárral kiszámított: $a_n = c^2/r$ centripetális gyorsulásból indulunk ki. A *20. ábra* II. képének jelöléseivel írható:

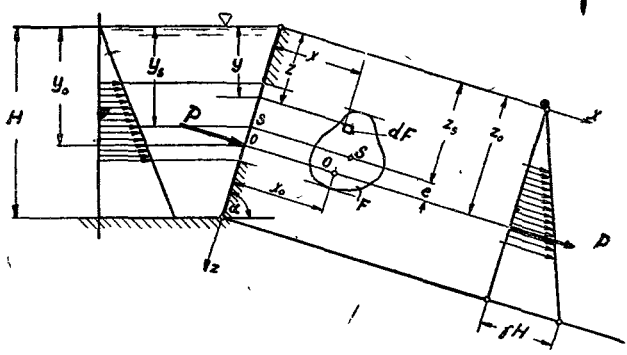
$$\boxed{\frac{c^2}{r} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n} = 0.} \qquad \text{(II)}$$

Ez a **II. Euler-féle egyenlet,** amely — az elsővel együtt — az *ideális* folyadék térbeli áramlásának jellemzésére elegendő (mert a simulósíkra merőleges ún. **binormális** irányában gyorsulás nincsen).

A) A NYUGVÓ FOLYADÉK EGYENSÚLYA
(HIDROSZTATIKA)

9. A folyadék nyomása (szilárd) határoló felületekre. A falnyomás

Gravitációs erőtérben a határoló falakat terhelő nyomás nagysága az (5) és (6) egyenlet szerint a víztükörtől számított y mélységgel arányos, iránya pedig a határoló felület minden elemére merőleges. A határoló falak (véges) F felületét terhelő P nyomóerőnek mint a felületelemeket támadó: $dP = (p_1 - p_2)\,dF$ elemi falnyomások **eredőjének** szabatos meghatározására mint megbízható méretezési alapra elsősorban a vízépítés területén van szükség. A következőkben tehát az idevágó gyakorlati példákat $\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú **vízre** vonatkoztatom és feltételezem, hogy elhatárolt víztérfogat tükrére ugyanaz a (légköri) nyomás nehezedik, mint a határolófal külső felületére.



21. ábra. A ferde síklapra nehezedő víznyomások eredője

Ebben az esetben a víztükör alatt y mélységben a nyomás: $p_1 = p_0 + \gamma y$, az ellennyomás pedig a lap hátsó oldalán: $p_2 = p_0$. A falra nehezedő erő tehát ilyenkor: $dP = \gamma y dF$.

a) **Ferde síklapra** nehezedő víznyomás eredője a *21. ábra* szerint a dF felületelemre nehezedő dP erők integráljából számítható.

A síklapon választott derékszögű koordináta-rendszer x tengelyét vízszintes irányban jelöljük ki. A z koordináták az y mélységgel arányosak. Ha a síklap a vízszintessel α szöget zár be, akkor írható: $y = z \sin \alpha$, azaz: $z = y/\sin \alpha$.

A ferde lapot terhelő P erő, $dP = \gamma z \sin \alpha\, dF$ helyettesítéssel így számítható:

$$P = \int_F dP = \gamma \sin \alpha \int_F z\, dF = \gamma M_x \sin \alpha \text{ (kg)}. \tag{13}$$

Itt $\int_F z\, dF = M_x$ az F felületnek az x tengelyre felírt **sztatikai nyomatéka,** amely a súlyponttétel alkalmazásával az S súlypontnak z_s koordinátájával is kifejezhető. Írható: $M_x = z_s F$.

A súlypont $y_s = z_s \sin \alpha$ mélységének bevezetésével a (13) egyenlet alábbi egyszerű alakba megy át:

$$\boxed{P = \gamma y_s F} \text{ (kg)}. \tag{14}$$

A (14) egyenlet szerint az F felületű lapot terhelő P erőnek nagyságát az S súlypontnak a víztükör alatti y_s mélysége egyértelműen meghatározza. Ezt az erőt éppen úgy számítjuk, mintha a súlypontot terhelő $p_s = \gamma y_s$ víznyomás az egész F felületen **egyenletesen** volna elosztva.

A P erő iránya természetesen **merőleges** az F felületre; $0\,(x_0; z_0)$ **támadási pontja** azonban az egyenlőtlen nyomáseloszlás miatt nem esik bele a súlypontba, hanem $y_0 > y_s$ mélységben van a víztükör alatt.

Ezt az $y_0 = z_0 \sin \alpha$ mélységet a P eredőnek az x tengelyre felírt nyomatékából számítjuk. A nyomatékok egyensúlyát kifejező egyenlet:

$$P z_0 = z_0 \gamma M_x \sin \alpha = \int_F z \, dP = \gamma \sin \alpha \int_F z^2 dF = \gamma J_x \sin \alpha,$$

ahol: $\int_F z^2 dF = J_x$ az F felületnek az x koordinátatengelyre kifejtett **másodrendű nyomatéka.**

Ebből:

$$z_0 = \frac{J_x}{M_x} = \frac{\int_F z^2 dF}{\int_F z dF} \quad \text{(m)}, \tag{15}$$

vagyis az eredő P erő támadási pontjának z_0 koordinátáját (15) szerint az F felület **másodrendű (inercia) nyomatékának és elsőrendű (sztatikai) nyomatékának hányadosa** adja.

Hasonló módon számítható az x_s és x_0 koordináta nagysága is. A gyakorlatban előforduló idomok szimmetriája azonban ezt a számítást feleslegessé teszi, mert az S és az 0 pont a z tengellyel párhuzamos szimmetriatengelybe esik.

A P erő 0 támadási pontjának súlypont **alatti** $e = z_0 - z_s$ távolsága az x_s súlyponti tengelyre vonatkoztatott J_s másodrendű nyomaték helyettesítésével számítható:

$J_x = J_s + F z_s^2$ és $M_x = z_s F$ helyettesítéssel a (15) egyenlet a következő alakba megy át:

$$z_0 = \frac{J_s}{z_s F} + z_s; \text{ azaz} \qquad \boxed{e = z_0 - z_s = \frac{J_s}{z_s F} = \frac{J_s}{M_x}.} \tag{16}$$

A gyakorlatban előforduló szabályos idomokra a súlyponttengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomaték is könnyen kiszámítható.

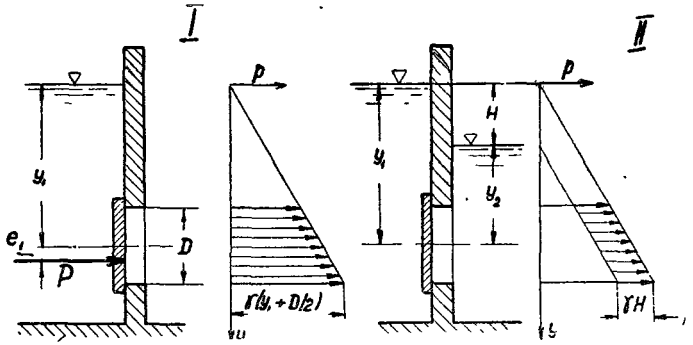
Figyelemre méltó, hogy a P erő támadási pontja *feljebb* vándorol, ha a víztükör *emelkedik* ($e_1 < e_2$, ha $y_{01} > y_{02}$). Ezt a törvényszerűséget **önműködő csappantyú** szerkesztésére lehet felhasználni oly módon, hogy a billenőlap vízszintes tengelyét akkora e_1 távolságra helyezzük a súlypont alá, amekkorát a megengedett y_1 víztükörmagasság szab meg.

A csappantyú akkor nyílik meg, ha a víztükör ezt a magasságot már elérte. (Vö. a *22. ábrával* és a 12. példával.)

12. példa. I. Egy kettős vízmedence függőleges falában a *22. ábra* jelöléseivel $y_1 = 2{,}0$ m mélységben a víztükör alatt $D = 400$ mm átmérőjű zárólapra nehezedő erő (14) szerint, $\alpha = 90°$, $\gamma = 1000$ kg/m³ és $F = 0{,}16 \cdot 3{,}14 : 4 = 0{,}126$ m² helyettesítéssel:

$$\mathbf{P}_1 = \gamma y_1 F = 1000 \cdot 2 \cdot 0{,}126 = \mathbf{252}\ \mathbf{kg},$$

ha a medence jobb oldali rekesze üres.



22. ábra. Víznyomás kerek zárólapon

Az eredő támadási pontjának mélysége a súlypont alatt, (16) szerint, $z_s = y_1$ helyettesítéssel:

$$e = \frac{J_s}{y_1 F}\ ;\quad \text{ahol körlapra: } J_s = \frac{D^4\pi}{64} \text{ és } F = \frac{D^2\pi}{4}\ .$$

Körlapra tehát:

$$e = \frac{D^2}{16\, y_1} = \frac{0{,}4^2}{16 \cdot 2} = 0{,}005 \text{ m; azaz: } \mathbf{5\ mm}.$$

Derékszögű négyszögalakú zárólap $b = 315$ mm szélesség és $a = 400$ mm magasság esetében kb. ugyanakkora keresztmetszetet ad, azaz: $F' = 0{,}126$ m². A másodrendű nyomaték: $J_s' = a^3 b/12$ és ezzel:

$$e' = \frac{a^2}{12\, y_1} = \frac{0{,}4^2}{12 \cdot 2} \cong 0{,}0067 \text{ m; azaz: } \mathbf{6{,}7\ mm}.$$

II. Ha a jobb oldali medencét szintén megtöltjük $y_2 = 1{,}2$ m magasságig, akkor a *22/II. ábra* szerint a zárólapot már csak az $y_1 - y_2 = H$ vízszintkülönbséggel arányos $p = \gamma H$ nyomáskülönbség terheli.

A zárólapot terhelő erő most: $H = 2{,}0 - 1{,}2 = 0{,}8$ m helyettesítéssel:

$$\mathbf{P} = \gamma H F = 1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}126 \cong \mathbf{101\ kg}.$$

b) **Görbe felületre** nehezedő nyomást a *23/I. ábra* szerint szintén a $\mathrm{d}F$ felületelemeket támadó $\mathrm{d}P = \gamma z\, \mathrm{d}F$ erők eredője (integrálja) adja, csakhogy ebben az esetben a felületelemek normálisába eső elemi erők nem párhuzamosak, hanem a térbeli (derékszögű) koordináta-rendszer x, y, z tengelyeivel α_x, α_y, α_z szöget zárnak be.

A dP erőnek x irányú összetevője: $dP_x = \cos\alpha_x \, dP = \gamma z \cos\alpha_x \, dF$, ahol: $\cos\alpha_x dF = dF_x$ a felületelemnek x irányú vetülete az y, z síkra, dF_x integrálja pedig az egész F felület F_x vetületét adja ugyanerre a síkra.

A P erő x irányú összetevője tehát a z_s súlypontmélység bevezetésével:

$$P_x = \int_F dP_x = \gamma \int_F z \, dF_x = \gamma z_s F_x. \tag{17}$$

A másik két összetevő ugyanezzel a gondolatmenettel:

$$P_y = \gamma z_s F_y \quad \text{és} \quad P_z = \gamma z_s F_z.$$

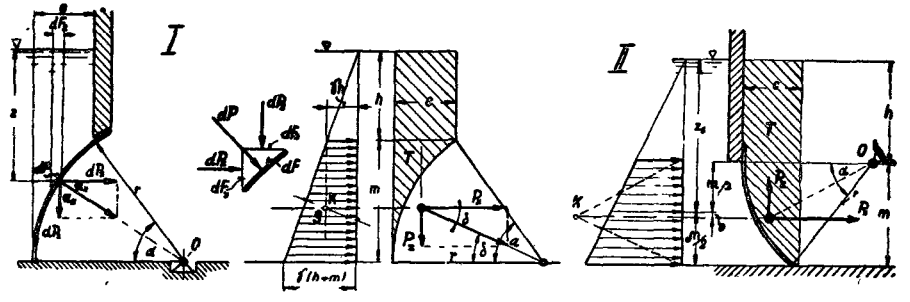
A gyakorlatban rendszerint elegendő az egyik vízszintes összetevő meghatározása, ha a felület hengeres (szegmensgát), mert ilyen esetben az erőjáték az x, z síkban vizsgálható, ha az a hengeralkotókra merőleges vetítősík (vö. a *23. ábrával).*

A (17) egyenlet a P erő **vízszintes** összetevőjét adja. Kiszámítása hasonló, mint a függőleges síklap esetében (vö. az *a)* ponttal és a 12. példával). A P_x vízszintes összetevő támadási pontjának $z_0 = z_s + e$ mélységét ebben az esetben is a (15) egyenlet határozza meg.

A P erő **függőleges** összetevője $z_s \, F_z = \int_F z \, dF_z = K_z$ jelöléssel a következő alakban számítható:

$$\boxed{P_z = \gamma K_z} \quad \text{(kg)}, \tag{18}$$

ahol: K_z az F felület fölött a víztükörig függőlegesen emelkedő hengeres vagy hasáb alakú folyadékoszlop *térfogata.* Az F felületet terhelő erő függőleges (P_z) összetevőjét (18) szerint a fölötte levő folyadékoszlop **súlyából** számítjuk. Ez az erő **pozitív** előjelű, ha az F felületre **felülről** nehezedik, tehát a súlyerő irányába esik. (Vö. a *23/I. ábrával.)*



23. ábra. Víznyomás görbe felületen

A (18) egyenlet arra az esetre is alkalmazható, amikor a folyadék a nyomott felületet **alulról** nedvesíti. Ilyenkor a folyadéknyomás függőleges összetevője alulról felfelé irányul, vagyis **negatív** előjelű és a *23/II. ábra* szerint az F felület fölött **elképzelt** és a tükör magasságáig meghosszabbított folyadékoszlop súlyából számítható. A számítás menetét az alábbi példákban mutatom be.

13. példa. a) A *23/I. ábra egy* $b = 8$ m széles ún. **szegmensgát** vázlatos elrendezését mutatja. A henger sugara: $r = 5$ m, a teljes nyílás: $m = 4$ m, a víztükör magassága a nyílás felső éle fölött: $h = 2$ m.

Zárt helyzetben a zsilip hengerpalástjára nehezedő erő *vízszintes* összetevője, $z_s = h + m/2 = 4$ m és $F_x = m\,b = 4 \cdot 8 = 32$ m² helyettesítéssel, (17)-ből:

$$\mathbf{P}_x = \gamma\, z_s\, F_x = 1000 \cdot 4 \cdot 32 = \mathbf{128\,000\ kg.}$$

A P_x erő támadási pontjának mélysége az F_x szelvény súlypontja alatt, (16) szerint, $J_s = b\,m^3/12$ és $F_x = b\,m$ helyettesítéssel:

$$e = \frac{m^2}{12\,z_s} = \frac{4^2}{12 \cdot 4} = \mathbf{0{,}33\ m.}$$

A P_x erő nagysága és támadási pontja az ábra szerint szerkesztéssel is meghatározható oly módon, hogy a nyomáseloszlást a mélység függvényében felrajzoljuk, és (b = *állandó* szélesség esetében) az így kapott trapézidom súlyvonalának magasságát is (a K pont közismert szerkesztésével) kijelöljük.

Az erő függőleges P_z összetevőjét a szegmensre nehezedő víztest súlyából számítjuk, amely (b = *állandó* esetre) az ábrában ferdén vonalkázott területtel arányos.

E terület **közelítő értéke,** ha $c = 2$ méter, és ha a körívet **parabolaívvel** helyettesítjük:

$$T \cong c\left(h + \frac{m}{3}\right) = 2 \cdot (2 + 1{,}33) = 6{,}67\ \text{m}^2,$$

és ezzel a függőlegesen lefelé mutató összetevő (18) szerint:

$$\mathbf{P}_z = \gamma\, T\, b = 1000 \cdot 6{,}67 \cdot 8 = \mathbf{53\,400\ kg.}$$

A két összetevő meghatározza a P eredő irányát és nagyságát is:

$$\mathbf{P} = 1000 \cdot \sqrt{128^2 + 53{,}4^2} = \mathbf{138\,500\ kg} \quad \text{és} \quad \mathbf{tg}\ \delta = 53{,}4 : 128 = \mathbf{0{,}417.}$$

Körhenger palástjára nehezedő víznyomás mindig *sugárirányú*, tehát az elemi erők P eredője is átmegy a henger 0 tengelyén.

Ha tehát kitűztük a P eredő irányát, akkor nincs is szükség a P_z erő hatásvonalának kijelölésére, mert annak helyét a P_x összetevő és a P eredő metszéspontja is egyértelműen meghatározza.

b) A fentebb leírt számítási módot a *23/II. ábra* szerint elrendezett szegmensgát esetére is alkalmazhatjuk, azzal az eltéréssel, hogy most a P_z erő **felfelé** mutat, nagyságát pedig a hengerpalást nedvesített felületével határolt és a víztükör magasságáig felfelé függőlegesen meghosszabbított hasábos víztest súlyából számítjuk.

E példában csupán a függőleges erő kiszámítására szorítkozom, de a hengeres test térfogatát itt a **szabatos** területszámítással határozom meg.

Az ábra jelöléseivel most: $r = 5$ m, $\alpha = 45°$, ($\sin\alpha = \cos\alpha = 0{,}707$, $\sin 2\alpha = 1$). $b = 8$ m és $h + m = 6$ m.

A ferdén vonalkázott terület, $c = r(1 - \cos\alpha)$ és $m = r \sin\alpha$ helyettesítéssel:

$$T = c\,h + \frac{r^2\alpha - m(r - c)}{2} = r\,h(1 - \cos\alpha) + \frac{r^2}{2}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right).$$

$m = 0{,}707 \cdot 5 = 3{,}535$ m; $h = 2{,}465$ m; $c = 0{,}293 \cdot 5 = 1{,}465$ m és $\alpha = \pi/4 = 0{,}785$ helyettesítéssel írható:

$$T = 5 \cdot 2{,}465 \cdot 0{,}293 + \frac{5^2}{2}(0{,}785 - 0{,}5) = 3{,}61 + 3{,}57 = 7{,}18\ \text{m}^2.$$

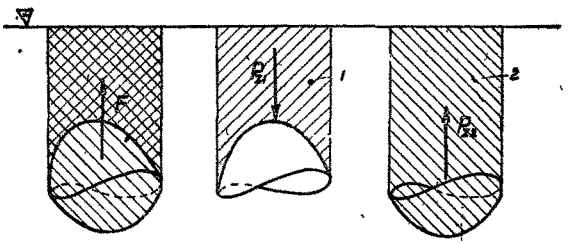
és ezzel: $\mathbf{P}_z = 1000 \cdot 7{,}18 \cdot 8 = \mathbf{57\,400\ kg.}$

A körívet parabolával helyettesítő eljárás a valóságosnál valamivel kisebb területet ad. A közelítés jóságának megítélése érdekében a T területnek alsó (görbe oldalú háromszög alakú) részét ezzel az eljárással is kiszámítottam. Az eredmény:

$$T_2' = \frac{2}{3} m c = 0{,}67 \cdot 3{,}535 \cdot 1{,}465 = \mathbf{3{,}47\ m^2}.$$

Ez a fentebb kiszámított $T_2 = 3{,}57$ m²-nél csak mintegy 3%-kal kisebb, vagyis jó közelítésnek minősíthető, annál is inkább, mert az *egész* területre vonatkoztatva a hiba az adott esetben a másfél százalékot sem éri el.

10. Folyadékba merített test egyensúlya. A (sztatikus) felhajtóerő



24. ábra. Sztatikus felhajtóerő folyadékba merülő testre

Teljes alámerülés esetében a szilárd test felszíne a *24. ábra* szerint függőleges érintősíkokkal, ill. hengerfelületekkel (vetítőhengerekkel) két — azonos F_z vetületű — felületrészre osztható, amelyek egyikére a fölötte levő függőleges folyadékoszlop súlya nehezedik. Ez a P_{z1} erő függőlegesen *lefelé* mutat és a (18) egyenlet szerint az *1* folyadéktest K_1 térfogatából számítható.

Az alsó felületrészt a P_{z2} erő alulról támadja. Nagyságát a fölötte levő folyadéktest K_2 térfogata határozza meg, amely pontosan a bemerített test K köbtartalmával nagyobb K_1-nél. ($K_2 = K_1 + K$.)

A két erő eredője függőlegesen *felfelé* mutató, ún. **felhajtóerő** alakjában jelentkezik. Nagysága:

$$\boxed{F = P_{z2} - P_{z1} = \gamma (K_2 - K_1) = \gamma K} \quad \text{kg.} \tag{19}$$

Az alámerített test felhajtóereje tehát az általa kiszorított folyadék súlyából számítható (*Archimédész* tétele).

14. példa. Egy $G = 3{,}75$ kg súlyú lábszelep anyaga: $\gamma_b = 8{,}9$ kg/l fajsúlyú bronz. Ha azt $\gamma = 1$ kg/l fajsúlyú vízbe merítjük, akkor a szelepnek ún. **vízben mért súlya** a kiszorított $K = G/\gamma_b$ víztérfogatnak $K\gamma$ súlyával kisebbedett, azaz

$$G_v = G - \frac{G}{\gamma_b}\gamma = \frac{\gamma_b - \gamma}{\gamma_b} G = \frac{8{,}9 - 1}{8{,}9} \cdot 3{,}75 = \mathbf{3{,}33\ kg}.$$

15. példa. Egy $d = 2$ mm átmérőjű gázbuborék felhajtóereje a $\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú vízben:

$$F = \frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \pi \gamma = \frac{4}{3} \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}14 \cdot 10^3 = 4{,}19 \cdot 10^{-6}\ \text{kg}.$$

A gázbuborék fajsúlya: $\gamma_g = 1{,}25$ kg/m³. A felhajtóerő mellett tehát a buborék-súly bátran elhanyagolható, azaz **nyugalmi helyzetben:**

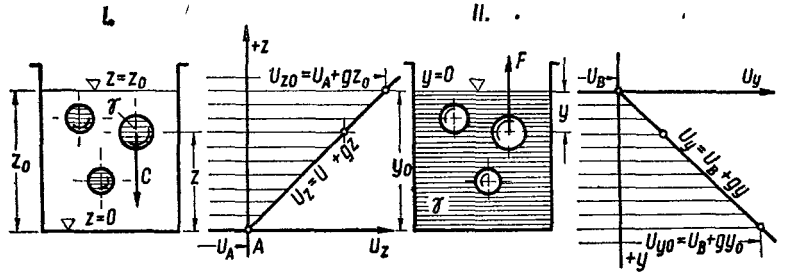
$$P = F - G_g = F = K\gamma \qquad \text{(kg)}$$

erő gyorsítja a buborékot függőlegesen felfelé.

A gyorsulva emelkedő buborék a_0 kezdő gyorsulását a buborékot körüláramló víz redukált tömegének figyelembevételével kell kiszámítani (vö. a 16. példával). A kiszámított a_0 kezdőgyorsulás azonban csak az indulás pillanatára vonatkozik, mert a valóságos folyadéknak a mozgást fékező közegellenállása az emelkedés sebességével rohamosan megnagyobbodik.

11. Nyugvó folyadék munkaképessége gravitációs erőtérben [83]

A sztatikus felhajtóerő munkájának szemléletes energetikai megvilágítására azért van szükség, mert a *nyomásenergia* hibás értelmezése már eddig is sok félreértést okozott, az ún. *nyomásmagasság* pedig ma is minduntalan megújuló viták forrása.



25. ábra. I. Folyadékrészek a gravitációs erőtérben
II. A gravitációs erőtérben felhajtóerőt termelő kontinuum

A vizsgálatot a *25. ábra* kapcsán az összenyomhatatlan (γ = *állandó* fajsúlyú) nyugvó folyadékra (ún. **kontinuumra**) vonatkoztatom, amelyet gravitációs erőtérben „vízszintes" folyadéktükör határol.

a) A gravitációs erőtér a *25. ábra* jelöléseivel a $z = 0$ alapsíktól *felfelé* mért z magassággal arányos

$$U_z = U_A + g z \tag{20}$$

potenciállal jellemezhető, amelynek negatív gradiense az $m = 1$ egységtömeget függőlegesen felfelé gyorsító *térerő*.

Írható:

$$Z = -\frac{\partial U_z}{\partial z} = -g. \tag{21}$$

A *25/I. ábra* egymástól független, a kontinuumból kiemelt folyadékrészek helyzeti energiáját szemlélteti. Egy-egy K térfogatú és γ fajsúlyú folyadéktest kiemelt helyzetében csupán a G súlyerő hatása alatt van. Ez a súlyerő — mint tudjuk — $m = K\,\gamma/g$-szerese a (21) szerint kifejezett térerőnek, tehát az $m\,U_z$ potenciálfüggvénynek negatív gradiense.

Írható tehát:

$$m\,U_z = m\,U_A + m\,g\,z \tag{22}$$

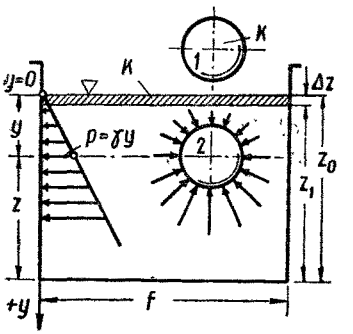
és

$$m\,Z = -\,m\frac{\partial\,U_z}{\partial\,z} = -\,m\,g = -\,K\,\gamma. \tag{23}$$

Már itt kiemelem, hogy a (22) és a (23) egyenlet érvényessége természetesen nem függ sem a K térfogatú testnek halmazállapotától, sem annak fajsúlyától, és ennélfogva kiterjeszthető a γ_a fajsúlyú $m_a = K\,\gamma_a/g$ tömegű szilárd testre is.

b) Gravitációs erőtér a kontinuum belsejében. A gravitációs erőtérben a γ fajsúlyú kontinuum is munkaképessé válik. Az egymásra támaszkodó folyadékrészek mindegyikének helyzeti energiája a z magassággal arányos *(25. ábra)*.

Minthogy azonban ezek a folyadékrészek a kontinuumban egymást *kölcsönösen alátámasztják*, és az edény falaihoz is támaszkodnak, tehát a kontinuum belsejében az erők *egyensúlyban* vannak. Ez csak úgy lehetséges, ha a folyadék belsejében a gravitációs erők hatására oly feszültségi állapot jön létre, amely a súlyerőket mindenütt pontosan kiegyensúlyozza. A súlyos folyadékba merített test K térfogatával arányos F felhajtóerő nagyságát már *Archimédész* óta ismerjük, az y mélységgel arányos p folyadéknyomás eloszlása pedig a kontinuum belsejében szintén annyira közismert, hogy e két alaptörvény energetikai kapcsolatának megvilágítására rendszerint már nem kerül sor.



26. ábra. **A felhajtóerő mint felületi erő**

E kapcsolat tisztázása végett vizsgáljuk a *25/I. ábrában* kiemelt folyadékrészek kiemelésével *üregessé vált* kontinuumnak erőtani és energetikai jellemzőit. A fénykép pozitívjára és negatívjára emlékeztető *25. ábra* I. és II. képének egymásra helyezésével a kontinuum folytonossága ismét helyreáll.

A *25/II. ábra* elkülönített szemlélete mindenekelőtt arról győz meg, hogy az F felhajtóerő, amely a folyadékrészt eltávolítása előtt alátámasztotta, nem egyszerű passzív reakcióerő, hanem **a kontinuumba merülő test súlyától független aktív erő,** amelynek forrása: a γ fajsúlyú kontinuum munkaképessége.

Ezt a felhajtóerőt — mint tudjuk — a *26. ábra* szerint az üreg teljes határfelületét terhelő nyomások hozzák létre. E felületi erők *fölfelé* mutató eredőjének **nagysága** egyenlő a felülettel körülzárt és a kontinuumból kiemelt K térfogatú és γ fajsúlyú *folyadékrész súlyával,* **iránya** azonban e súlyerővel mindig ellentétes.

Ismételten rámutatok arra is, hogy a felhajtóerő nagysága változatlan marad akkor is, ha a kontinuumból kiemelt folyadékrészt *azonos térfogatú* idegen testtel helyettesítjük, vagy az üreg összeroppanását más módon akadályozzuk meg.

A felhajtóerőt fentiek szerint a gravitációs térben munkaképessé vált kontinuum szolgáltatja. Ez a felhajtóerő mindig egyensúlyban van a kiszorított folyadék súlyával, vagyis egy gravitációs *térerővel,* amely az *a)* pont szerint negatív gradiense az $m\,U_z$ potenciálfüggvénynek. Léteznie kell tehát egy olyan $m\,U_y$ potenciálfüggvénynek is, amelynek negatív gradiense a felhajtóerőt adja.

E potenciálfüggvény értéke a *25/II. ábra* jelöléseivel, a kontinuumból kiemelt $m = K\,\gamma/g$ folyadéktömeg helyén:

$$m\,U_y = m\,U_B + m\,g y, \tag{24}$$

ahol: $y = z_0 - z$ a **mélység** a folyadéktükör alatt.

A negatív gradiens:

$$-m\frac{\partial U_y}{\partial y} = -mg = -K\gamma. \tag{25}$$

A (23) és (25) egybevetésével *Archimédész* törvényéhez jutunk, tehát ezzel az U_y potenciálfüggvény létezését is igazoltuk.

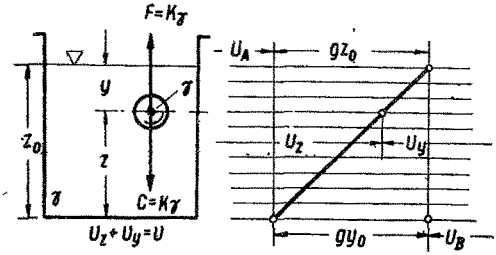
Ennek a tömeg egységére vonatkoztatott alakja:

$$U_y = U_B + g\,y; \tag{26}$$

negatív gradiense pedig mint térerő:

$$Y = -\frac{\partial U_y}{\partial y}. \tag{27}$$

c) Az energetikai szemléletnek fenti eredményéből az alábbiakban néhány olyan következtetés vonható le, amelyek szembetűnően megvilágítják és jól érzékeltetik a kontinuumban végbemenő jelenségeket.



27. ábra. A kontinuumban alátámasztott $\frac{K}{2}$ folyadékrész

Az első következtetés *a kontinuumban alátámasztott folyadékrész munkaképességére* vonatkozik. A folyadékrész kiemelésével kapott pozitív és negatív kép *(25. ábra)* egymásra helyezésével ismét folytonossá vált kontinuum bármelyik eleme a *27. ábra* szerint **egyensúlyban** van.

A folyadékelem munkaképességének egyik forrása: az U_z potenciálú gravitációs erőtér; ettől függ a folyadékelem **saját** helyzeti energiája és $G = mg$ súlya.

A folyadékelem munkaképességének másik forrása: a gravitációs erőtérben munkaképessé vált U_y potenciálú (üreges) kontinuum, amely tehát a folyadékelem *környezetének* a jellemzője, vagy más szóval: a *környező* folyadéknak a test bemerülése következtében megnövekedett potenciális energiája.

A környezet potenciális energiájának ezt a megnövekedését szemlélteti a *26. ábra* is, amely szerint az f alapterületű és z_1 magasságig γ fajsúlyú folyadékkal megtöltött hengeres edényben a K köbtartalmú test bemerülése a folyadéktükröt $\Delta z = K/f = z_0 - z_1$ magassággal emeli. (Vö. a test *1* és *2* helyzetével.)

A kontinuumban alátámasztott bármelyik folyadékrész *teljes munkaképessége* a *27. ábra* szerint a két potenciál (algebrai) összegével jellemezhető, azaz

$$U = U_z + U_y \tag{28}$$

A *27. ábra* jelöléseivel írható:

$$\mathbf{z} + \mathbf{y} = \mathbf{z}_0 = \textit{állandó}, \tag{29}$$

a (20) és (26) egyenlettel kifejezett U_z és U_y potenciál összege tehát szintén állandó, azaz:

$$U = U_A + g\,z_0 + U_B = \textit{állandó}. \tag{30}$$

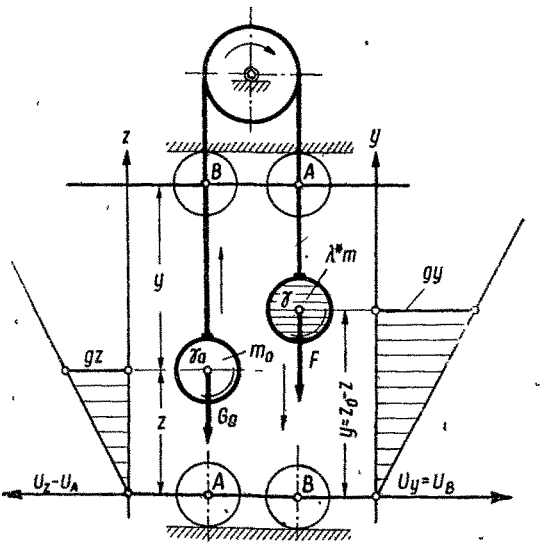
A folyadék belsejében (a nyugvó kontinuumban) tehát bármelyik folyadékelem teljes munkaképessége egy $U = állandó$ potenciálfüggvénnyel jellemezhető. (Vö. a *27. ábrában* egymásra illesztett két — egymást kiegészítő — potenciálfüggvényábrával.)

E potenciálfüggvénynek bármely irányban vett gradiense *zérus*, vagyis a *25. ábrában* szemléltetett két erőtér térerői (a súlyerő és a felhajtóerő) az egymásrahelyezéssel egymást mindenütt kiegyensúlyozzák.

A munkaképesség állandóságát kifejező *Bernoulli*-egyenletnek (l. 14. pont) 1 kg súlyú *nyugvó* folyadékra érvényes alakja az $y = p/\gamma$ nyomásmagasság helyettesítésével a (29) egyenletből közvetlenül is felírható:

$$z + p/\gamma = állandó. \qquad (29/a)$$

d) Idegen test a nyugvó kontinuumban. Eddigi meggondolásaink arra az esetre vonatkoztak, amikor a γ fajsúlyú folyadékból kiemelt — tehát ezzel azonos fajsúlyú — folyadéktestről volt szó. A vizsgálat eredményein természetesen az sem változtat, ha a folyadékba oly szilárd testet merítünk, amelynek fajsúlya a folyadékéval azonos ($\gamma_a = \gamma$).



28. ábra. A felhajtóerőt helyettesítő gravitációs térerő

Mihelyt azonban az alámerített test fajsúlya a folyadékénál kisebb vagy nagyobb, azaz: $\gamma_a \lessgtr \gamma$, akkor már nem számolhatunk az erők egyensúlyával, mert: $F \gtrless G_a$, vagyis az idegen test a kontinuumban vagy felemelkedik, vagy fenékig lesüllyed.

A *28. ábra* kapcsán azzal az erőtani vonatkozásaiban közismert esettel kívánok részletesebben foglalkozni, amikor a teljesen alámerített test fajsúlya kisebb a folyadékénál ($\gamma_a < \gamma$) vagyis a K köbtartalmú testet

$$P_d = F - G_a = K(\gamma - \gamma_a) \qquad \text{(kg)} \qquad (31)$$

erő *felfelé* gyorsítja.

Az erőtani viszonyokat szemléletesen világítja meg a *28. ábra*, amelyben a felhajtóerőt termelő üreges kontinuumot maga a kiszorított és a kontinuumból kiemelt folyadéktest helyettesíti. E kiemelt és szilárd testként a *28. ábra* szerint súlytalan kötélre függesztett folyadéktestet a gravitációs erőtérben $F = K\gamma$ nagyságú *lefelé* irányúló súlyerő terheli, *felfelé* irányuló felhajtóerővé pedig az ábra szerint súlytalan korongon (állócsigán) átvetett kötél tereli át.

Ezzel az elképzelt kötélvezetéssel szemléletessé válik az üreges kontinuumnak felhajtóerőt termelő (gravitációs) erőtere és potenciálja is, mert a *25. ábra* szerint

ugyanannak az erőtérnek „*pozitív*" és „*negatív*" képe között a különbséget az erők 180°-os átirányításában találjuk.

A *28. ábrába* berajzoltam a két kötélágra függesztett két test potenciáljának függvényábráját is, egy-egy test súlypontmagasságának függvényében. Ez az ábra is világosan megmutatja, hogy a rendszer (együttes) potenciálja változatlan marad, ha két fajsúly azonos ($\gamma_a = \gamma$).

A helyettesítő rendszer erőjátékának vizsgálata részletesebb magyarázat nélkül is hozzájárul a (sztatikus) felhajtóerő keletkezésének és jelentőségének tisztázásához.

e) Befejezésül még arra mutatok rá, hogy a *28. ábrában* vázolt helyettesítő rendszer szemlélete az alámerített test mozgástörvényeinek vizsgálatát is megkönnyíti.

Így például a *28. ábra* jelöléseivel a mechanikai analógia alapján közvetlenül kiszámítható a γ fajsúlyú folyadékba merített test (pl. γ_g fajsúlyú gázbuborékok) a_0 kezdőgyorsulása.

$\gamma_a = \gamma_g < \gamma$ esetére írható:

$$a_0 = \frac{F - G_a}{m_a + m_r} = \frac{\gamma - \gamma_g}{\gamma_g + \lambda^* \gamma} \cdot g \qquad (\mathrm{m/mp^2}), \tag{32}$$

ahol: $\dot{m}_a = K\,\gamma_g/g = G_a/g$ az alámerített test tömege,

$m_r = \lambda^* m = \lambda^* K\,\gamma/g$ a kiszorított és a testet *gyorsulva* körüláramló folyadék tömegének redukált értéke, és

$\lambda^* = m_r/m$ a test alakjától és az edény méreteitől függő redukciós tényező.

A nyugvó (ideális) folyadék esetére érvényes mechanikai analógia szerint ugyanis csak a testet *gyorsulva* körüláramló folyadéknak a súlypontba redukált m_r tömegét kell számításba venni, mert ideális folyadékban az állandó sebességű (egyenletes) mozgás veszteségmentes.

A λ^* redukciós tényező oldalfalakkal nem határolt tökéletes folyadékban gyorsulva emelkedő vagy süllyedő *gömb* esetére a legkisebb. Erre az esetre:

$$\lambda^* = 0{,}5,$$

ami azt jelenti, hogy a gömböt gyorsulva körüláramló folyadék redukált tömege pontosan *félakkora*, mint a kiszorított folyadék tömege.

Meg kell jegyezni, hogy *valóságos* folyadék esetére ez a mechanikai analógia az áramlási veszteségek miatt csak torzképet adhat a mozgástani jelenségek lefolyásáról, ezért tehát csak a kezdő gyorsulás meghatározására szorítkoztam.

16. példa. A 15. példában kiszámítottuk a $\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú vízben felszálló $d = 2$ mm átmérőjű gázbuborékot felfelé gyorsító felhajtóerőt.

A $\gamma_g = 1{,}25$ kg/m³ fajsúlyú buborék G_g súlyának elhanyagolásával a gyorsítóerő:

$$P_d \cong F = 4{,}19 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

A buboréksúly elhanyagolása nélkül a $K = 4{,}19 \cdot 10^{-9}$ m³ térfogatú buborékot gyorsító erő *szabatos* értéke:

$$P_d = F - G_g = K\,(\gamma - \gamma_g) = 4{,}19 \cdot 10^{-9}\ (1000 - 1{,}25) = 4{,}18 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

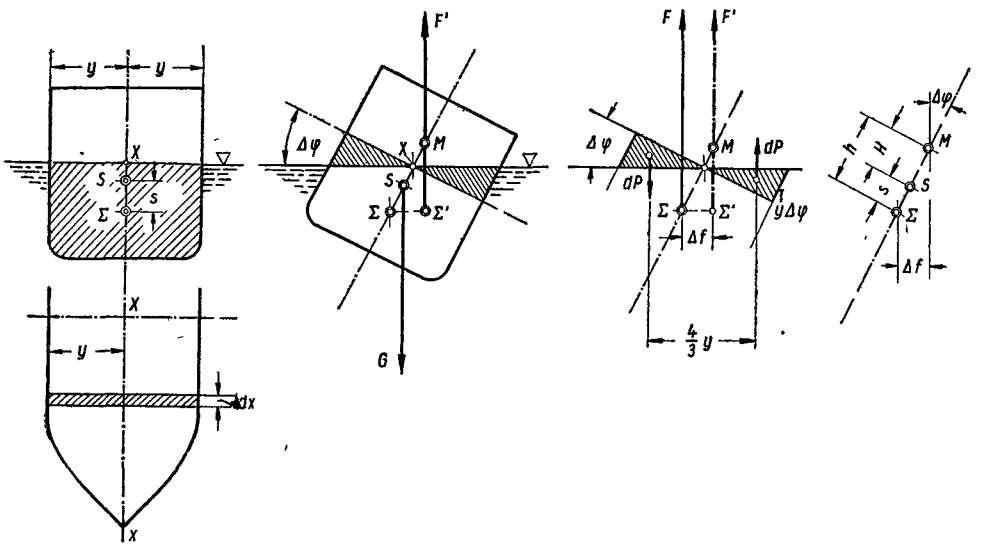
Az elhanyagolással elkövetett hiba mindössze $1{,}25\,^0/_{00}$.

A *kezdőgyorsulás* a (32) egyenletből *gömb alakú* buborékra $\lambda^* = 0{,}5$ tényezővel elhanyagolás nélkül számítható:

$$a_0 = \frac{\gamma - \gamma_g}{\gamma_g + \lambda^* \gamma} g = \frac{1000 - 1{,}25}{1{,}25 + 0{,}5 \cdot 1000} \cdot 9{,}81 = \frac{998{,}75}{501{,}25} \cdot 9{,}81 \cong \mathbf{19{,}5\ m/mp^2}.$$

12. Úszó testek stabilitása. A metacentrum.

Ha a folyadékba merülő test G súlya kisebb, mint a teljes térfogatával kiszorított $K\gamma$ folyadéksúly, akkor az a felhajtóerő hatására oly mértékben emelkedik a folyadék tükre fölé, hogy a bemerülő rész D térfogata, vagyis az ún. **vízkiszorítás** *(deplacement)* a test súlyával egyenlő ($G = F = D\,\gamma$ nagyságú) felhajtóerőt hozhasson létre.



29. ábra. Úszó test stabilitása

A G súlyerő és az F felhajtóerő egyenlősége azonban szabadon úszó testen csak abban az esetben biztosítja az erők egyensúlyát, ha azok hatásvonalai egybeesnek, vagyis ha a test S súlypontja és a kiszorított folyadéktest Σ súlypontja egy függőlegesben egymás alatt fekszik. Ezt az egyensúlyhelyzetet akkor nevezzük **stabilisnak,** ha abból kitérítve, oly visszatérítő erők, ill. nyomatékok keletkeznek, amelyek az úszó testet eredeti helyzetébe hozzák vissza. Ennek a kérdésnek különösen a hajó esetében van jelentősége.

Egy úszó test (gerenda vagy hajó) a *29. ábra* szerint az $x\,z$ szimmetriasíknak a víztükör síkjába eső X tengelye körül billen ki egyensúlyhelyzetéből, amelynek egyik feltétele a test súlyát kiegyensúlyozó $F = G$ felhajtóerő, másik feltétele pedig e két erő függőleges hatásvonalainak egybeesése. A G súlyerő a testet S súlypontjá-

ban támadja, az F felhajtóerő hatásvonala viszont a kiszorított (az ábrában ferdén vonalkázott) víztest Σ súlypontján megy keresztül.

Ha az úszó test anyaga **nem homogén,** akkor előfordulhat az az eset is, hogy az S súlypont a felhajtóerő Σ támadási pontja **alá** esik. Ilyenkor az úszás *stabilitása* külön vizsgálat nélkül is megállapítható, mert a szimmetriasík billentésével a G súlyerő az F felhajtóerővel **visszatérítő erőpárt** alkot.

Rendszerint azonban a test (hajó) súlypontja a mindig homogén víztest Σ súlypontja **fölé** esik. ($\overline{S\Sigma} = s$). Ebben az esetben a stabilitás feltételét az ábra szerint a $\Delta\varphi$ szöggel kibillentett testen vizsgáljuk.

A test súlyvonala ebben a helyzetben is az S súlyponton megy keresztül, az F felhajtóerő hatásvonala azonban a víztest alakváltozása miatt Δf nagyságú eltolódást szenved.

A felhajtóerő hatásvonalának eltolódása a megbillentett $S\Sigma$ szimmetriatengelyen kijelölt M metszéspontnak $\overline{M\Sigma} = h$ magasságával is jellemezhető, mert a $\Delta\varphi$ szög kis értékével.

$$\Delta f = h\,\Delta\varphi.$$

Az M pont az úszó test **metacentruma** mert a felhajtóerő hatásvonala kibillenés után is ezen a ponton megy át. A felhajtóerő hatásvonala csak a test *függőleges* helyzetében megy át a kiszorított (szimmetrikus) víztest Σ súlypontján, kibillentett helyzetben a Σ pont fölött h magasságban kijelölt M metacentrum e hatásvonalak sorozója.

A felhajtóerő hatásvonalának helyét a nyomatéktétel alkalmazásával jelöljük ki.

A kibillenés következtében a kiszorított víztest D térfogata változatlan marad ugyan, alakja azonban az ún. vízvonalfelülettel kimetszett két ék alakú testrésszel módosult, oly módon, hogy az egyik oldalon a térfogat a másik oldal térfogatának rovására megnagyobbodott. E testrészek egyike a felhajtóerőt a háromszög súlypontjában támadó járulékos értékkel megnöveli, másika pedig a másik oldalon ugyanennyivel csökkenti. A feladat úgy is fogalmazható, hogy a felhajtóerő hatásvonala e járulékos erőpár M^* nyomatékának hatására tolódik el.

Ezt az x tengely körül forgató nyomatékot az ábrában vonalkázott két ék alakú víztestnek dx vastagságú elemére számítjuk ki. A háromszög területe kicsiny $\Delta\varphi$ esetében az ábra jelöléseivel: $y^2\Delta\varphi/2$, a járulékos erőpár karja pedig: a két háromszög súlyponttávolsága.

Írható:

$$dM^* = \frac{4}{3}\,y\,dP = \frac{4}{3}\,y\,\gamma\,\frac{y^2\,\Delta\varphi}{2}\,dx = \gamma\,\Delta\varphi\,\frac{2}{3}\,y^3\,dx,$$

az egész nyomaték pedig:

$$M^* = \gamma\,\Delta\varphi\int\frac{2}{3}\,y^3\,dx = \gamma\,J_x\Delta\varphi; \qquad \text{mert: } J_x = \frac{2}{3}\int y^3\,dx$$

az úszó test vízvonalfelületének másodrendű nyomatéka az X tengelyre.

Ez a nyomaték szabja meg az $F = \gamma D$ felhajtóerő Δf eltólódásának a mértékét, azaz:

$$\Delta f = \frac{M^*}{F} = \frac{J_x}{D} \Delta\varphi,$$

amiből a $h = \overline{MS}$ magasság ($\Delta f = h\,\Delta\varphi$ helyettesítéssel):

$$\boxed{h = \frac{J_x}{D}} \quad \text{(m)} \tag{33}$$

Ezt a h magasságot (33) szerint az úszó test vízvonalfelületének J_x másodrendű nyomatéka és D vízkiszorítása (J_x/D hányados alakjában) egyértelműen meghatározza és ezzel a metacentrum helye is kijelölhető.

Egyszerű szemlélettel igazolható, hogy az úszás stabilitásáról csak akkor lehet szó, ha a metacentrum az úszó test súlypontja **fölé** esik, vagyis, ha az ábra jelöléseivel:

$$h > s. \tag{34}$$

A metacentrum súlypont feletti $H = h - s$ magasságának, az ún. **metacentrikus magasságnak** bevezetésével a stabilitás feltétele úgy is fogalmazható, hogy az úszó test egyensúlya csak akkor lehet stabilis, ha a metacentrikus magasság **pozitív** ($H > 0$.).

A metacentrikus magasság előírásának a jelentősége a hajóépítési gyakorlatban domborodik ki. Így például óceánjáró hajó metacentrikus magassága: $H = 0{,}3 - 0{,}7$ m; hadihajóé: $H = 0{,}8 - 1{,}2$ m; vitorlásé pedig: $H = 1{,}0 - 1{,}4$ m.

17. példa. Egy 56 m vízvonalhosszúságú, 2000 t súlyú, 11,20 m legnagyobb szélességű áruszállító hajó úszásvonala által kimetszett „vízvonalfelület" fele a *30/a ábrán* látható.

A metacentrum súlypont feletti magasságának meghatározása érdekében első lépésként határozzuk meg a vízvonalfelület másodrendű nyomatékát a hajó hosszirányú $x - x$ szimmetriatengelyére. A vízvonalfelületet határoló görbének matematikai felírása általában nehézkes lenne, így közelítő integrálási módszert alkalmazunk. A közismert Simpson-féle eljárás szerint

$$\int y\,\mathrm{d}x \cong \frac{2}{3}\,\Delta x \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, y_i,$$

így

$$I_x = \frac{2}{3}\int y^3\,\mathrm{d}x \cong \frac{4}{9}\,\Delta x \sum_{i=0}^{10} \alpha_i\, y_i^3.$$

A vízvonalhosszat páros számú ($n = 10$) egyenlő részre osztjuk fel, azaz $\Delta x = 5{,}6$ m. Az osztásoknál lemért vízvonal-félszélességeket, a köbreemelést és a szorzásokat az alábbi táblázat tartalmazza:

i		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	m	0,0	3,05	5,27	5,60	5,60	5,60	5,60	5,45	4,57	2,58	0,0
y_i^3	m³	0	28,37	146,4	175,6	175,6	175,6	175,6	161,9	95,44	17,17	0
α_i		½	2	1	2	1	2	1	2	1	2	½
$\alpha_i\, y_i^3$	m³	0	56,74	146,4	351,2	175,6	351,2	175,6	323,8	95,44	34,34	0

$$\sum_{i=0}^{10} \alpha_i = y_i^3 = 1710{,}32, \quad \text{és így:}$$

$$I_x = \frac{4}{9} \cdot 5{,}6 \cdot 1710{,}32 = 4250\ \mathrm{m}^4.$$

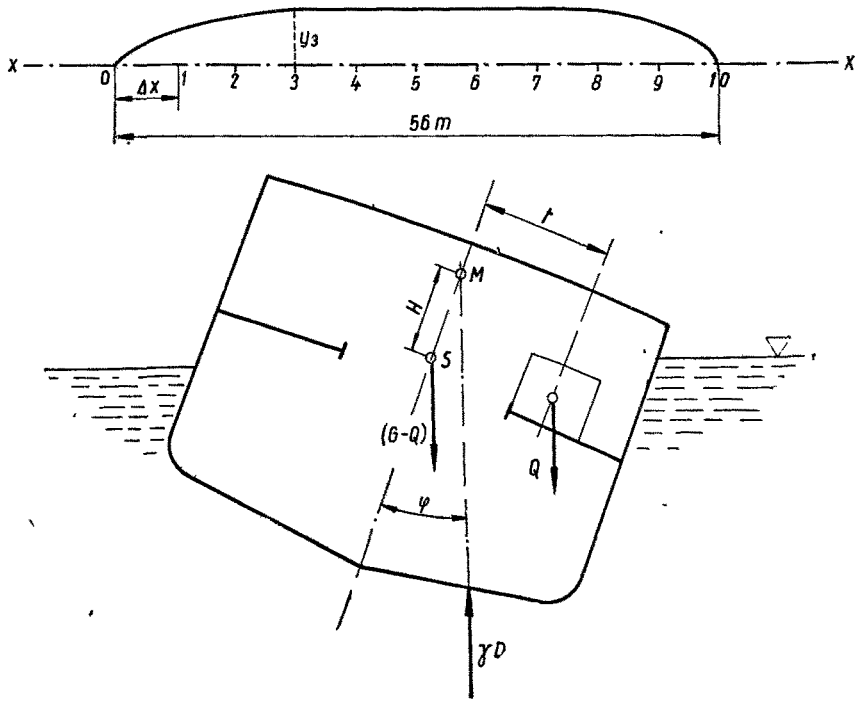
A hajó vízkiszorítása a tengervízben ($\gamma = 1{,}025$ t/m³)

$$D = \frac{2000}{1{,}025} = 1950 \text{ m}^3.$$

Így a (33) szerint

$$h = \frac{I_x}{D} = \frac{4250}{1950} = 2{,}18 \text{ m}.$$

A hajó súlypontja a vízkiszorítás súlypontja felett $s = 1{,}60$ m-re van.



30. ábra. Hajó stabilitása

Ezzel a súlypont és a metacentrum közötti magasságkülönbség (metacentrikus magasság)

$$H = h - s = 2{,}18 - 1{,}60 = 0{,}58 \text{ m}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a hajó berakodása közben milyen dőlést eredményez, ha egy $Q = 20$ t súlyú árut a középvonaltól oldalirányban $t = 3{,}5$ m-re helyezünk el (30/b ábra).

A billentőnyomaték

$$M_b = Q\,t\,\cos\varphi \quad \text{(mt)}.$$

Az egyensúlyozó (stabilizáló) nyomaték pedig

$$M_s = \gamma\,D\,H\sin\varphi.$$

Így

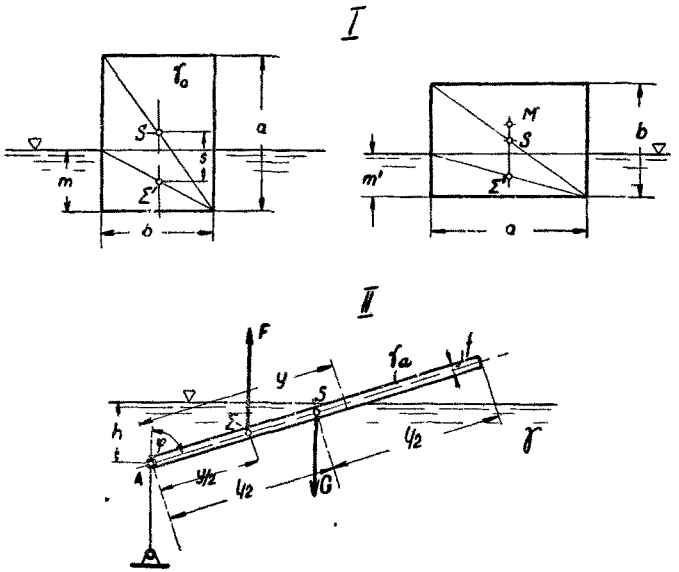
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q\,t}{\gamma\,D\,H} = \frac{20 \cdot 3{,}5}{1{,}025 \cdot 1950 \cdot 0{,}58} = 0{,}0604.$$

Tehát az áru berakása után (ha ezzel a hajó összsúlya 2000 tonnát ért el) a hajó $\varphi = 3°27'$-cel billen ki vízszintes helyzetéből.

18. példa. a) Vizsgáljuk meg egy a *31/I.* ábra szerint keskenyebb oldalával vízbe merülő gerenda stabilitásának a feltételét. A gerenda méretei: $a = 20$ cm, $b = 16$ cm, fajsúlya: $\gamma_a = 400$ kg/m³, a vízé: $\gamma = 1000$ kg/m³. (A vizsgálat $l = 1$ m hosszúságra vonatkoztatható.)

A bemerülés mélysége, az erők egyensúlyából:

$$m\,b\,\gamma = a\,b\,\gamma_a; \quad \text{amiből } \mathbf{m} = a\frac{\gamma_a}{\gamma} = 20 \cdot \frac{400}{1000} = \mathbf{8\ cm}.$$



31. ábra. I. Szabadon úszó gerenda
II. Lehorgonyzott gerenda részleges bemerülése

A súlypontmagasság, az ábra szerint:

$$s = \frac{a - m}{2} = \frac{20 - 8}{2} = 6\ \text{cm}.$$

A metacentrum magassága, (33) szerint, $J_x = l\,b^3/12$ és $D = l\,b\,m$ helyettesítéssel:

$$\mathbf{h} = \frac{J_x}{D} = \frac{b^2}{12\,m} = \frac{16^2}{12 \cdot 8} = 2{,}67\ \text{cm} < s.$$

Minthogy $h < s$, tehát a gerenda *lapjára* fordul.

b) Ebben az új helyzetben a bemerülés: $\mathbf{m'} = b\frac{\gamma_a}{\gamma} = 16 \cdot 0{,}4 = 6{,}4$ cm;

a súlypontmagasság: $s' = \frac{b - m'}{2} = \frac{16 - 6{,}4}{2} = 4{,}8$ cm,

a metacentrum magassága pedig: $h' = \frac{J_x}{D} = \frac{a^2}{12\,m'} = \frac{20^2}{12 \cdot 6{,}4} = 5{,}2$ cm.

A lapjára fordított gerenda úszása tehát **stabilis**, mert a metacentrum a súlypont *fölé* esik ($h' > s'$).

c) Számítsuk ki, hogy adott γ_a/γ fajsúlyarány mellett milyen b/a gerendaméretarány biztosíthatja a keskenyebb oldalával merülő gerenda egyensúlyának stabilitását *(31/I. ábra)*.

A súlypontmagasság, $m = a\,\gamma_a/\gamma$ helyettesítéssel:

$$s = \frac{a - m}{2} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\gamma_a}{\gamma}\right).$$

A metacentrum magassága pedig:

$$h = \frac{b^2}{12\,m} = \frac{b^2}{12\,a}\,\frac{\gamma}{\gamma_a}.$$

A stabilitás határfeltétele: $h \geqq s$; azaz:

$$\frac{b^2}{12\,a}\,\frac{\gamma}{\gamma_a} \geqq \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\gamma_a}{\gamma}\right).$$

Ebből:

$$\frac{b}{a} \geqq \sqrt{6\,\frac{\gamma_a}{\gamma}\left(1 - \frac{\gamma_a}{\gamma}\right)}.$$

$\gamma_a/\gamma = 0{,}4$ értékkel:

$$\frac{b}{a} \geqq \sqrt{6 \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}4)} = 1{,}2.$$

Ennél a fajsúlyaránynál az úszás stabilitása tehát csak akkor biztosítható, ha a gerenda b szélességű vízszintes lapja nem keskenyebb, hanem legalább 20%-kal szélesebb a szelvény magasságánál.

d) Ha viszont az előírt $b/a = 0{,}8$ méretaránnyal kell az úszás stabilitását biztosítani, akkor a γ_a/γ fajsúlyarányt kell megváltoztatni.

A határfeltételt kifejező egyenlet, $\gamma_a/\gamma = x$ helyettesítéssel a következő alakra hozható:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \geqq x - x^2, \quad \text{vagy:} \quad \frac{1}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^2 = c \text{ helyettesítéssel:}$$

A két megoldás:

$$x_1 \geqq \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad \text{és} \quad x_2 \leqq \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Az adott esetben: $(b/a)^2 = 0{,}64$ és ezzel: $c = 0{,}64 : 6 = 0{,}1067$ és $4\,c = 0{,}4267$.

Helyettesítve:

$$x_1 \geqq \frac{1 + \sqrt{0{,}573}}{2} = \frac{1{,}76}{2} = \mathbf{0{,}88} \quad \text{és} \quad x_2 \leqq \frac{0{,}24}{2} = \mathbf{0{,}12}.$$

Az adott méretarányú gerenda úszásának stabilitása tehát **kétféle módon** biztosítható. Az úszás akkor stabilis, ha a gerenda fajsúlya a folyadék fajsúlyának 88%-át meghaladja ($\gamma_a \geqq 0{,}88\,\gamma$), de stabilis akkor is, ha a bemerülés a magasság 12%-ánál kisebb marad ($\gamma_a \leqq 0{,}12\,\gamma$).

19. példa. A *31/II. ábra* szerint a $\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú vízbe merített, *(f = állandó* szelvényű) gerenda fajsúlya: $\gamma_a = 600$ kg/m³, hossza: $l = 6$ m. A gerenda A végpontja $h = 2$ m mélységben van kihorgonyozva.

Az egyensúlyt az adott esetben a G súlyerő és az F felhajtóerő nyomatékainak egyenlősége biztosítja. Az ábra jelöléseivel írható:

$$G\frac{l}{2}\sin\varphi = F\frac{y}{2}\sin\varphi;\quad \text{ahol: } G=\gamma_a f l,\quad F=\gamma f y \quad \text{és} \quad y=\frac{h}{\cos\varphi}.$$

Ha $\varphi \neq 0 \pm k\pi$, azaz: $\sin\varphi \neq 0$, akkor helyettesítés és rendezés után írható:

$$\gamma_a l^2 = \gamma y^2 = \gamma\frac{h^2}{\cos^2\varphi} \quad \text{és ebből:} \quad \cos\varphi = \frac{h}{l}\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_a}} < 1.$$

Az egyenlet érvényességének feltétele így is fogalmazható:

$$\frac{h}{l} < \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma}}.$$

Az adott esetben: $\frac{h}{l} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma}} = \sqrt{\frac{600}{1000}} = 0{,}775$ és $\cos\varphi = \frac{0{,}333}{0{,}775} = 0{,}43$.

A gerenda **bemerült** hossza tehát:

$$y = h/\cos\varphi = 2 : 0{,}43 = 4{,}65\ \text{m}.$$

13. Folyadékba merített test egyensúlya gyorsuló erőtérben.

A klasszikus hidrosztatika a 9., 10. és 11. pontban ismertetett összefüggéseket és képleteket a **gravitációs erőtérre** vonatkoztatja. A levezetett eredmények azonban nemcsak a nyugalomban levő **vízre,** hanem más cseppfolyós folyadékra is érvényesek. Az 5. pont szerint értelmezett **látszólagos fajsúly** fogalmának bevezetésével e képletek érvényessége értelemszerűen kiterjeszthető a **gyorsuló erőterekre** is.

Különösen a forgó (centrifugális) erőterek esetében válik egyszerűvé és áttekinthetővé a bemerített testek sztatikus felhajtóerejének kiszámítása, ha a klasszikus hidrosztatika közismert képleteibe a (gravitációs) gyorsulás látszólagos (g helyett: g^*) értékét és a látszólagos fajsúly $\gamma^* = \gamma g^*/g$ értékét helyettesítjük.

A számítás menetét az alábbi példában mutatom be.

20. példa. A *32. ábra* szerint az 5/c. pontban és a 10. példában tárgyalt centrifuga folyadéktöltése nem homogén, hanem abban γ_g fajsúlyú légbuborékokat és γ_a fajsúlyú (δ_a szemnagyságú) hordalékanyagot is találunk.

Ha a függőleges tengely körül forgó rendszer fordulatszáma $n = 1000$/perc és az idegen test (buborék, szemcse) körpályájának sugara $r = 425$ mm, akkor a 10. példa adataival a gyorsulás:

$$g^* = r\omega^2 = 4632\ \text{m/mp}^2, \text{ azaz } x = g^*/g = 471.$$

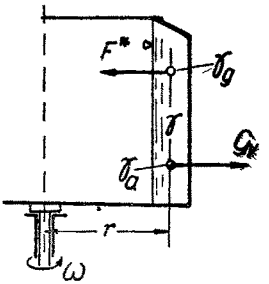
a) A $d_g = 1$ mm átmérőjű **légbuborék** az F^* felhajtóerő hatására (centripetális irányban) a folyadéktükör felé szökik.

A buboréksúly elhanyagolásával írható:

$F^* = F x$, ahol (19) szerint $F = \gamma K$; azaz $F^* = \gamma^* K$.

A buboréktérfogat:

$$K = \frac{\pi}{6} d_g^3 = 0{,}524 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^3.$$



32. ábra. Folyadékba merített test felhajtóereje forgó (centrifugális) erőtérben

A fajsúly lászólagos értéke, $\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú víztöltés esetében:

$$\gamma^* = x\,\gamma = 471\,000 = 0{,}471 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^3,$$

a felhajtóerő tehát:

$$F^* = 0{,}471 \cdot 0{,}524 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = \mathbf{0{,}246 \text{ gramm.}}$$

A buborékot gyorsító erő az adott esetben a centrifugális erőtérben csaknem ötszázszor akkora, mint a gravitációs erőtérben, ennélfogva a víz légtelenítéséhez szükséges időtartam centrifugálással nagymértékben megrövidíthető.

Az a_0 kezdő gyorsulás kiszámításához figyelembe kell venni, hogy az $F^* = K\,x\,\gamma$ felhajtóerőnek, vagy szabatosabban: a $P_d = F^* - G_g^* = K\,x\,(\gamma - \gamma_g)$ gyorsító erőnek nemcsak a légbuborék tömegét kell gyorsítania, hanem a gyorsulva „emelkedő" (gömb alakú) buborékot körüláramló γ fajsúlyú folyadéknak $m_r = \lambda\,K\,\gamma/g$ *redukált tömegét is.* (Vö. a 11/e. ponttal és a gyorsuló erőtérre értelemszerűen átírt (32) egyenlettel.)

A légbuborék tömegét annak γ_g fajsúlyából számíthatjuk, ez pedig a nyomási és a hőmérséklet függvénye.

Ha feltételezzük, hogy (a 10. példa adataival) a $\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú vízréteg belső palástjának sugara $r_b = 400$ mm és arra $b_o = 750$ mm hg. o. barométerállás esetében $p_o = b_o\,\gamma_h = 0{,}75 \cdot 13\,600 = 10\,200$ kg/m² légköri nyomás nehezedik, akkor $r = 425$ mm-es távolságban a nyomás, a (11) egyenlet integrálása után így írható:

$$\mathbf{p} = p_o + \gamma\,\frac{(r^2 - r_b^2)\,w^2}{2g} = 10\,200 + 1000 \cdot \frac{(0{,}425^2 - 0{,}4^2) \cdot 10\,900}{19{,}62} =$$

$$= \mathbf{21\,700 \text{ kg/m}^2}.$$

$t = 20$ C°-os hőmérséklet esetén a buborék fajsúlya a normálállapotú levegőre vonatkoztatott $\gamma_{lo} = 1{,}293$ kg/m³ értékkel:

$$\gamma_g = \frac{273}{293} \cdot \frac{21\,700}{10\,330} \cdot 1{,}293 = \mathbf{2{,}53 \text{ kg/m}^3}.$$

Az a_0 kezdő gyorsulás a gyorsuló erőtérre átírt (32) egyenletből a gömbre kiszámított $\lambda^* = 0{,}5$ redukciós tényezővel:

$$\mathbf{a}_o = \frac{F^* - G_g^*}{m_g + m_r} = \frac{x\,(\gamma - \gamma_g)}{\gamma_g + \lambda^*\,\gamma}\,g = \frac{471}{502{,}53} \cdot \frac{997{,}47}{} \cdot 9{,}81 \cong \mathbf{9200 \text{ m/mp}^2}.$$

b) A $\gamma_a = 2200$ kg/m³ fajsúlyú és $d_a = 3$ mm szemnagyságú **kaviesot** ugyanebben az erőtérben a felhajtóerővel kisebbített súlyerő (a vízben mért súly) centrifugális irányban gyorsítja.

A vízben mért súly látszólagos értéke $x = 471$ tényezővel, a 14. példa szerint:

$$G_v^* = \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a}\,G^*; \text{ ahol: } G^* = x\,G = x\,K\,\gamma_a.$$

A kavics köbtartalma:

$$K = \frac{\pi}{6}\,d_a^3 = 0{,}524 \cdot 27 \cdot 10^{-9} = 14{,}15 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3,$$

súlya pedig: $G = 14{,}15 \cdot 10^{-9} \cdot 2200 = 31{,}2 \cdot 10^{-6}$ kg $= 0{,}0312$ gramm.

Ezzel $G_v^* = 471 \cdot 0{,}0312 \cdot (2{,}2 - 1) : 2{,}2 = \mathbf{8{,}0 \text{ gramm.}}$

A folyadékban alámerülő ($\gamma_a > \gamma$ fajsúlyú) testek a_0 kezdő gyorsulása a (32) egyenletből a süllyedő mozgáshoz igazodó előjelcserével így számítható:

A *gravitációs erőtérben* süllyedő, pl. tóba ejtett kavics kezdő gyorsulása – a gömb alaktól kissé eltérő kavicsot körüláramló víztömeg redukciós tényezőjét $\lambda^* \cong 0{,}6$ értékre becsülve –

$$a_0 = \frac{G_a - F}{m_a + \lambda^* m} = \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a + \lambda^* \cdot \gamma} g = \frac{2{,}2 - 1{,}0}{2{,}2 + 0{,}6 \cdot 1{,}0} \cdot 9{,}81 =$$

$$= \mathbf{4{,}21\ m/mp^2}.$$

A centrifugába helyezett kavics vízben mért súlya x-szeres, tehát centrifugális irányú kezdő gyorsulása is $x = 471$-szer akkora, azaz:

$$a_0^* = x\, a_0 = 471 \cdot 4{,}21 \cong \mathbf{1985\ m/mp^2}.$$

c) Hasonló elven számítható a $\gamma_0 = 910$ kg/m³ fajsúlyú olajcseppeknek kezdő gyorsulása is, azzal a különbséggel, hogy $\gamma_0 < \gamma$ esetére a felhajtóerő nagyobb a csepp súlyánál, és ennélfogva a cseppek centripetális irányban (befelé) gyorsulnak, és a hengeres folyadéktükör szintjéig „emelkednek". (Vö. a tejszeparátorban végbemenő folyamattal.)

B) ÁLLANDÓSULT (EGYENLETES) ÁRAMLÁS

14. A munkaképesség megmaradásának tétele. A Bernoulli-egyenlet

Az I. *Euler*-féle egyenlet a (*felfelé* pozitívnak vett) z tengely mentén: $U = U_0 + gz$ alakban felírható potenciálú **nehézségi erőtérben** könnyen integrálható alakot vesz fel.

Általánosságban ugyanis az áramvonal két pontja (a *20/III.* ábrán: *1* és *2*) között kijelölt pályán a gyorsító erők munkája egyenlő a tehetetlenségi erők munkájával, azaz *Euler* I. egyenletének integrálásával írható:

$$\int_1^2 \frac{\partial c}{\partial t}\, ds + \int_1^2 c \frac{\partial c}{\partial s}\, ds = -\int_1^2 \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s}\, ds - \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial s}\, ds \qquad (35)$$

Állandósult (stacionárius) áramlás esetén a c sebesség a pálya egy-egy pontjában **időbeli** változást nem szenved, azaz: $\partial c/\partial t = 0$.

A (35) egyenlet első tagja tehát kiesik, az integrál pedig a következő alakban írható.:

$$\left[\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + U\right]_1^2 = 0. \qquad (36)$$

A nehézségi erőtér potenciáljának és a fajsúlyának ($\gamma = \varrho\, g$) helyettesítése után a (36) egyenlet így rendezhető:

$$\boxed{\left[\frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z\right]_1^2 = 0} \qquad (37)$$

Ez a **Bernoulli-egyenlet,** amelynek *érvényességét a fentiek szerint a nehézségi erőtérben áramló ideális folyadék állandósult (stacionárius) állapotára korlátoztuk!*

A Bernoulli-egyenletet rendszerint a folyadék energiaegyenletének nevezik, és ebben az alakban írják:

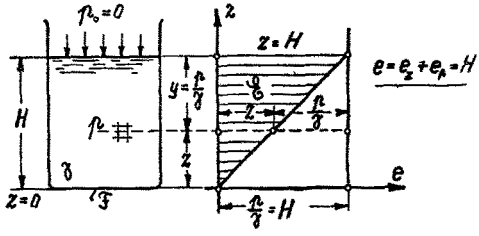
$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = \text{állandó.} \qquad (37/a)$$

Ha ugyanis a folyadék egy alapszinttől z (m) magasságra emelt (1 kg-os) súlyegységének **helyzeti** energiáját mkg-os mértékegységben fejezzük ki, akkor írható: $e_z = z$ (mkg/kg). A z (sztatikai) »*magasság*« energetikai értelemben tehát: a súlyegység energiatartalmának tekinthető. Egészen hasonlóan jutunk a súlyegység *lendületének* kifejezéséhez is, mely az ún. **„sebességmagasság"**-nak energetikai értelmezése:

$$e_c = c^2/2g \quad \text{mkg/kg.}$$

A Bernoulli-egyenlet harmadik tagja a 3. pontban tárgyalt **nyomásmagasság,** amely energetikai értelmezésben szintén potenciális energia ($e_p = p/\gamma$ mk/kg), és éppúgy a súlyegységre vonatkozik, mint a helyzeti vagy súlyenergia.

Ez a megtévesztő hasonlóság azonban könnyen félreértésekre vezet, ha nem vesszük figyelembe azt a *lényegbeli eltérést* is, amely a nyomásmagasságot a folyadékelem helyzeti és mozgási energiájától megkülönbözteti. Még a nagynevű *Bánki* professzor [5] sem a fogalom *hibás értelmezésében* kereste ama jelenségek magyarázatát, amelyek szerinte homlokegyenest *ellenkeznek* a Bernoulli-tételből levonható következtetésekkel. Indokoltnak látom tehát, hogy a *nyomásmagasság* helyes értelmezése érdekében a folyadékelem (belső) *energiatartalmá* és (kívülről szerzett) *munkaképessége* között fennálló lényeges különbségre nyomatékkal rámutassak, s ezt az eltérést a *33. ábra* kapcsán részletesebben is indokoljam.



33. ábra. A munkaképesség állandósága nyugvó folyadékoszlopban

Kétségtelen, hogy a p túlnyomás alatt álló folyadék minden kilogrammjának *munkaképessége:* $p/\gamma = y$ mk g/kg, tehát ugyanakkora, mint az y »nyomásmagasságra« felemelt súlyegység helyzeti (potenciális) energiája. Teljesen elhibázott volna azonban ezt a munkaképességet az összenyomhatatlan folyadék *belső* energiatartalmához sorozni, mert ezt a munkaképességet minden folyadékelem a *környezettől* veszi át. A nyomás ugyan térerők hatására jön létre (vö. a 3. ponttal), de a folyadékelem felszínén mint **külső erő** jelentkezik, amely a tömeg belsejére ható térerőt egyensúlyozza. Az y mélységben vizsgált folyadékelem a felette levő ($y = p/\gamma$ magasságú) folyadékoszlopot **alátámasztja,** tehát munkaképességének a forrása ugyanaz, mint a közlőműé. Munkavégzés közben nem a saját energiatartalmát fogyasztja el, hanem a fölötte y magasságban levő folyadékelem helyzeti energiáját (külső munka).

A Bernoulli-tételt eszerint félreérthetetlen fogalmazásban úgy mondhatjuk ki, hogy az egyenletesen áramló ideális folyadék *munkaképessége* állandó marad, tehát

minden folyadékelem áramlás közben is változatlanul megtartja munkaképességét. A Bernoulli-féle energiaegyenlet tehát (az energia megmaradásának elve helyett) itt szabatosan a **munkaképesség állandóságát** mondja ki. (Vö. még a 11. ponttal.)

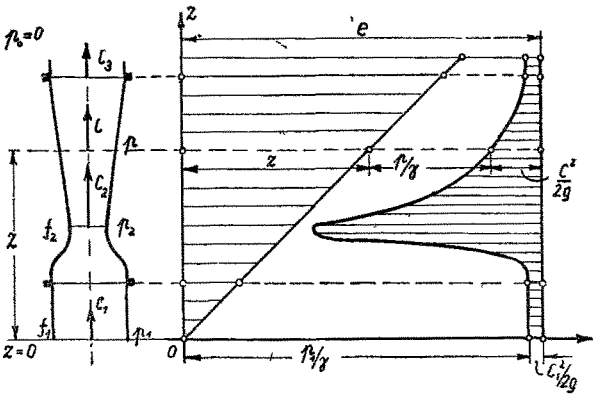
A helyzeti energia és a környezettől átvett munkaképesség közötti különbséget szemléletesen megvilágítja a *33. ábra*, amely egy H magasságig γ fajsúlyú folyadékkal megtöltött edény egységsúlyú elemeinek energiatartalmát és munkaképességét mutatja. Annak ellenére, hogy a súlyegység *munkaképessége* minden rétegben ugyanakkora ($e = z + y = H$), a $G = F H \gamma$ súlyú folyadékmennyiség energiatartalma mégis csak *félakkora*, mint amennyi a nyomásmagasság hibás értelmezésével kiadódnék!

15. Egyméretű áramlás vizsgálata. A nyomás eloszlása

A Bernoulli-tétel rendkívül szemléletessé teszi az egyméretű áramlás vizsgálatát, mert az áramvonal menti nyomáseloszlás egyértelmű meghatározására vezet, ha a folyadék munkaképességét egyetlenegy pontban ismerjük.

A szerkesztés menetét a *34. ábra* kapcsán egy függőleges Venturi-cső energiaábráján mutatom be, amelynek sebességeloszlását a *18. ábrából* már ismerjük.

Ha az energiavonalat a függőleges cső tengelyére rajzoljuk, akkor a z magasságok függvényábrája egy *45°*-os egyenes, a sebességmagasságoké pedig egy, a keresztmetszetváltozásból pontról pontra szerkeszthető görbe, amelyet célszerűen az energiavonalra illesztünk.



34. ábra. Nyomáseloszlás a *Venturi*-csőben

Az egész munkaképességből e két »magasság« levonása után fennmaradó rész ($e - z - c^2/2g$) adja a nyomásmagasságot, amely a nyomásnak áramvonalmenti eloszlását szemlélteti. A *34. ábrában* a vonalkázott függvényábrák közé eső metszékek adják a nyomásmagasságokat, amelyek az adott esetben *nem* a teljes nyomásnak, hanem csak a környezet felett mérhető *túlnyomásnak* változását szemléltetik. (A környezet *túl*nyomása ilyenkor: $p_0 = 0$).

16. A szabad áramlás törvénye. A perdület állandóságának tétele

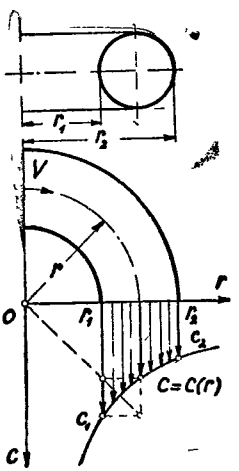
A síkbeli szabad áramlás alaptörvényét könnyen felismerjük, ha az Euler-féle II. egyenletet a **nehézségi** erőtér egy (vízszintes) szintfelületére vonatkoztatjuk, amelyben az r görbületi sugarú áramvonalmenti áramlás **állandósult** (stacionárius).

Vízszintes síkra — ($dz = 0$) — a potenciál állandó ($dU = 0$). Állandósult áramlásra a *Bernoulli*-egyenlet ad összefüggést a c sebesség és a p nyomás között,

amely differenciálalakban (vízszintes áramvonalra) így írható.:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{c\,dc}{g} = 0. \tag{38}$$

A II. Euler-egyenletben a sűrűséget a fajsúllyal ($\varrho = \gamma/g$) kifejezve és a koordinátatengely kezdőpontját a görbületi középpontba helyezve, a görbületi sugár mentén **kifelé pozitív** $dr = -dn$ jelöléssel írható:



35. ábra. Sebességeloszlás ívcsőben

$$\frac{c^2}{r} - \frac{g}{\gamma}\frac{dp}{dr} = 0. \tag{39}$$

A (38) és a (39) egyenlet összevonása és rendezése után a szabad áramlás differenciálegyenlete a következő alakba megy át:

$$c\,dr + r\,dc = 0. \tag{40}$$

Minthogy azonban a (40) egyenlet bal oldala a $c\,r$ szorzat teljes differenciálja: $d(cr) = 0$, tehát ez csak akkor zérus, ha a szorzat állandó, azaz:

$$\boxed{cr = \Pi = \text{állandó}}\ . \quad (m^2/mp). \tag{41}$$

A cr szorzat az ún. **perdület,** vagyis az egységtömeg impulzus-nyomatéka a görbületi középpont körül (vö. a 27. ponttal).

Ideális folyadéknak ún. *szabad-áramlását* a görbületekben olyan sebességeloszlás jellemzi az áramvonalakra merőleges szintvonalak mentén, amely a perdület állandóságát biztosítja.

A perdülettétel az ívcsőben áramló ideális folyadék sugármenti sebességeloszlását egyértelműen meghatározza, ha akár a perdületet, akár a sebességekegyikét ismerjük. A *35. ábra* szerint az r_1 sugárhoz tartozó c_1 sebességből a $\Pi = c_1 r_1$ állandó perdület kiszámítható, és ezzel a tetszőleges r sugárhoz tartozó c sebesség:

$$c = \frac{\Pi}{r} = \frac{r_1}{r} c_1. \tag{42}$$

A sebességeloszlás tehát **hiperbolikus.** A hiperbola pontjai a (42) egyenlet szerint (hasonló háromszögekkel) könnyen szerkeszthetők.

21. példa. A sebességeloszlás egy csővezetékbe iktatott ívcső vagy 90°-os könyök középső szelvényében annyira stabilis, hogy a *Bernoulli*-egyenlet alkalmazásával a csőfal külső és belső falának megcsapolási pontjai között mért $\Delta p = p_2 - p_1$ nyomáskülönbségből meghatározható az átáramló folyadék $V = F\,c$ mennyisége is **(mennyiségmérés könyökben).**

A *36. ábra* jelöléseivel — a könyök jelentéktelen magasságkülönbségeinek figyelmen kívül hagyásával — írható:

$$\Delta p = \gamma\,(c_1^2 - c_2^2)/(2g).$$

Munkatársamnak, *Rákóczy Tibornak* gondolatmenetét követve bevezetjük a körszelvényű könyök vagy ívcső

$$\varepsilon = R/D$$

geometriai jellemzőjét és a perdülettétel ($r_1 c_1 = r_2 c_2 = R c_R$) alkalmazásával számítjuk ki a szelvény középpontjában mérhető c_R sebességet.

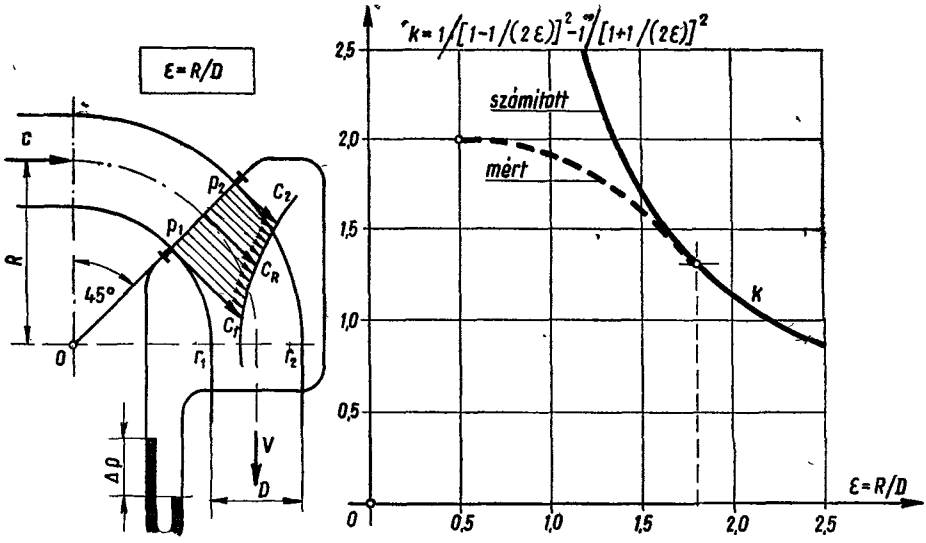
$r_1 = R - D/2$ és $r_2 = R + D/2$ helyettesítéssel, átrendezés után írható:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = h = \frac{c_R^2}{2g}\left\{\frac{1}{[1 - 1/(2\varepsilon)]^2} - \frac{1}{[1 + 1/(2\varepsilon)]^2}\right\} = k\frac{c_R^2}{2g},$$

ahol:

$$k = \frac{1}{[1 - 1/(2\varepsilon)]^2} - \frac{1}{[1 + 1/(2\varepsilon)]^2}$$

a mérőberendezés **könyöktényezője.**



36. ábra. Folyadékmennyiség mérése könyökben vagy ívcsőben

A k könyöktényező ismeretével a szelvény középpontjában a sebesség:

$$c_R = \sqrt{2g\,h/k}.$$

a) Ha $\varepsilon \geqq 1{,}8$, vagyis **nagy görbületi sugarú ívben** a c_R középsebesség alig tér el a $c = V/F$ átlagsebességtől, a k könyöktényezőnek *számítással* és *méréssel* meghatározott értéke is összevág (vö. a *36. ábrával).* Ilyenkor tehát az átfolyó mennyiség $c/c_R = \xi \cong 1$, azaz $c = c_R$ felvétellel számítható.

Így például a *36. ábra* szerinti $D = 100$ mm átmérőjű ($F = 0{,}00785$ m² keresztmetszetű) könyök jellemzője, $R = 200$ mm görbületi sugárral: $\varepsilon = 2$, könyöktényezője pedig:

$$\mathbf{k = \frac{1}{[1 - 1/(2\varepsilon)]^2} - \frac{1}{[1 + 1/(2\varepsilon)]^2} = 1{,}14.}$$

Az átfolyó ($\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú) víz sebessége, a differenciálmanométeren leolvasott $\Delta p = 315$ kg/m² ($h = \Delta p/\gamma = 0{,}315$ m) esetében:

$$\mathbf{c = c_R = \sqrt{2g\,h/k} = \sqrt{19{,}62 \cdot 0{,}315 : 1{,}14} = 2{,}33\ m/mp,}$$

az átfolyó mennyiség pedig:

$$V = F\,c = 0{,}00785 \cdot 2{,}33 = \mathbf{0{,}0183\ m^3/mp},\ \text{azaz:}\ \mathbf{18{,}3\ l/mp.}$$

b) Ha $\varepsilon < 1{,}8$, akkor a k tényezőt *méréssel* kell meghatározni és a $c/c_R = \xi(\varepsilon) > 1$ arányszámot is figyelembe kell venni. (Vö. a *36. ábrával).*

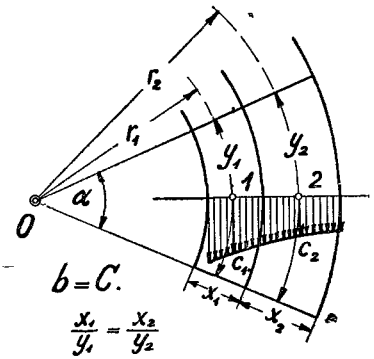
17. Kétméretű (szabad) áramlás a síkban. Eljárás az áramvonalhálózat szerkesztésére

A vizsgálatot az áttekinthetőség érdekében most is *vízszintes* síkban végbemenő jelenségekre korlátozzuk, de meg kell jegyezni, hogy az így megismert összefüggések (tehát a perdület állandóságának tétele is) ferde síkokra is érvényesek, ha a folyadékelemek potenciális munkaképességét $(z + p/\gamma)$ mindig *együttesen* vesszük számításba, de emellett arra is ügyelünk, hogy a nyomás mindig *pozitív* maradjon. (Vö. a 22. ponttal.)

Ha a térbeli áramlás (pl. párhuzamos síklapokkal határolt térben) olyan, hogy az egymás fölötti rétegek áramvonalai egybevágók, akkor a vizsgálat a **kétméretű** (síkbeli) áramlás lefolyására korlátozható.

A szabatos matematikai tárgyalás rendszerint annyira bonyolult, hogy a gyakorlat igényeit kielégíti egy olyan közelítő eljárás is, amely az *áramvonalak* és *szintvonalak* valószínű alakjának gyors szerkesztésére vezet.*

Meg kell jegyezni, hogy e szerkesztési módszerek némelyike *(Lorenz, Bauersfeld)* a sebességi tér szabatosabb jellemzésére egészen **sűrű** hálózatot szolgáltat. E fárasztó és hosszadalmas eljárással mindenesetre pontosabban lehet az *ideális* folyadék áramlástani jelenségeit rögzíteni. Ez a nagyobb pontosság azonban csak **látszólagos.** A *valóságos* folyadék sebességi tere ugyanis az ideálishoz képest annyira **eltorzul,** hogy a módszer időtrabló finomításának gyakorlati jelentősége nincsen; sőt — a pontosság látszatát keltve — a kezdőt könnyen félrevezetheti.



37. ábra. A perdülettétel alkalmazása síkbeli áramlásra

Maga a módszer az áramvonalakkal és szintvonalakkal kimetszett *derékszögű négyszögidomok hasonlóságán* alapul. Ez a hasonlóság a **párhuzamos lapok közt,** koncentrikus körívekkel határolt görbületekben végbemenő síkbeli áramlásra a *37. ábra* kapcsán könnyen beigazolható, ha a csatornát i számú oly áramcsőre bontjuk, amelyek az egyenletesen átáramló V folyadékáramból *egyenlő* V/i részeket szállítanak.

A *37. ábra* jelöléseivel a két szomszédos (*1* és *2*) idom legyen oly kicsiny, hogy az x_1, ill. x_2 szélesség mentén a c_1 ill. c_2 sebesség változása elhanyagolható. Az átáramló mennyiségek egyen-

* Kísérleti úton az áramvonalak láthatóvá tétele (pl. festéssel) és lefényképezése mellett számos más módszer használatos a sebességi tér vizsgálatára. Bizonyos esetekben a mérőinga szerepét (2. pont) az áramlás *irányát* mutató zászlócskák v. úszó testecskék vehetik át. Sikeresen alkalmazzák a villamos áramlás analógiáját kiaknázó kismintát is az azonos potenciálú szintvonalak alakjának megállapítására s í. t.

lőségét kifejező egyenlet:

$$\frac{V}{i} = x_1 b c_1 = x_2 b c_2, \tag{43}$$

ahol: b a síklapokkal határolt csatorna vastagsági mérete (b = állandó !).

A perdülettétel — a sugárirányú szintvonalakkal bezárt α szögnek és a két idom közepes hosszúságának ($y_1 = r_1 \alpha$ és $y_2 = r_2 \alpha$) bevezetésével — a következő alakban írható:

$$c_1 \frac{y_1}{\alpha} = c_2 \frac{y_2}{\alpha}. \tag{44}$$

A (43) és (44) egyenlet összevonásával, rövidítés után az eredmény:

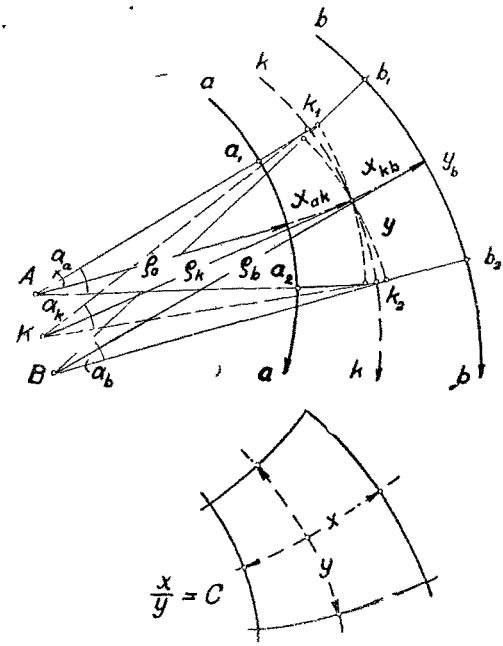
$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}, \quad \text{azaz:} \quad \boxed{\frac{x}{y} = \text{állandó.}} \tag{45}$$

A parányi derékszögű négyszögek hasonlósága a legegyszerűbben úgy ellenőrizhető, hogy a szintvonalak (y) közepes távolsága az áramvonalak közepes (x) távolságával összevágjon ($x = y$). Ebben az esetben a sebességi teret a hálózat **parányi négyzetekre** osztja, amelyek felrajzolásának a helyessége d átmérőjű **beírt körökkel** jól ellenőrizhető. Ilyenkor tehát az idomok hasonlóságának feltétele (egy-egy idomra):

$$\boxed{x = y = d}. \tag{46}$$

A *parányi négyzetek módszere* véges méretű — arányra *nagy* idomokra is kielégítő pontossággal alkalmazható, mint az a *38. ábrából* kitűnik. Az idomot határoló két áramvonal (a és b) görbületi középpontja (A és B) ugyan nem esik egybe, de az áramcső tengelyébe eső közepes áramvonal helyett *azonos y hosszúságú* köríveket rajzolhatunk, amelyek egyike az y_a-val, másika pedig az y_b-vel koncentrikus és azokkal külön-külön párosítható. Az idomok hasonlóságát kifejező (45) egyenlet tehát ezzel a közelítéssel az általánosabb esetre is lényegesen megkönnyíti a szintvonalak távolságának a (46) egyenlet szerinti választását és beírt körökkel való ellenőrzését.

A hálózat megszerkesztése eszerint abból áll, hogy a görbe falakkal határolt

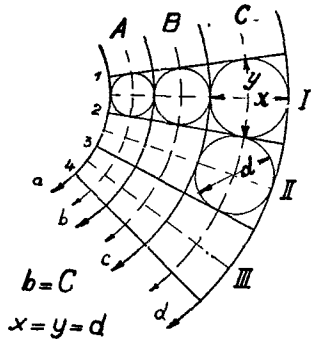


38. ábra. Az áramvonalhálózat elemei

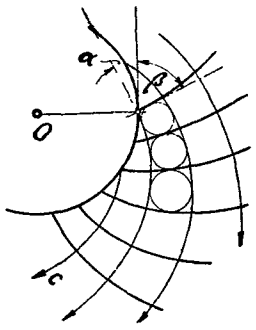
csatornát közbenső áramvonalak berajzolásával *i* számú részcsatornára bontjuk és a szintvonalakat a merőleges metszés feltételének betartásával (szabadkézzel) berajzoljuk. A szerkesztés helyességét az ugyancsak szabadkézzel beírt körökkel ellenőrizzük. A hálózatot célszerűen átlátszó papiron, ceruzával készítjük el, mert annak felrajzolása csak többszöri igazítás után sikerül. Némi gyakorlattal bonyolultabb alakú csatorna *(41. ábra)* hálózatának felrajzolása sem okoz nagyobb fáradságot.

Sok esetben az ellenőrzést beírt körök helyett a **négyzetátlók** hálózatának berajzolásával lehet elvégezni. (Az így kapott trajektóriahálózat elemei 45°-os szöget zárnak be az áramvonalakkal.)

A kétméretű sebességi teret jellemző áramvonalak és szintvonalak szerepe felcserélhető. Így pl. a *39. ábra* körgyűrű alakú csatornát ábrázol sugárirányú szintvonalakkal. Ugyanezzel a hálózattal jellemezhető azonban az ún. centrifugális vagy centripetális (radiális) áramlás is, ha a szintvonalak szerepét az áramvonalak veszik át — és megfordítva.



39. ábra. Az áramvonalhálózat ellenőrzése beírt körökkel

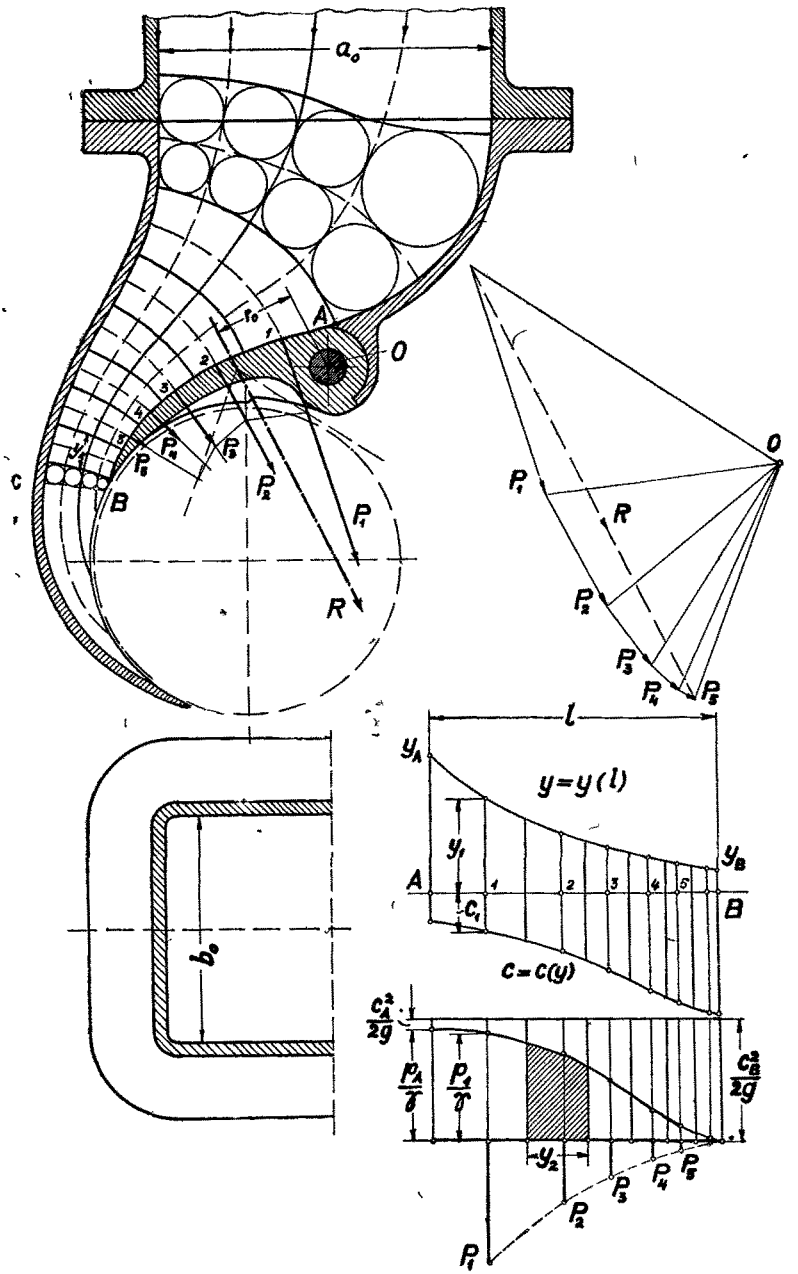


40. ábra. Síkbeli áramlás az örvényszivattyú forgásterében

A turbinák párhuzamos lapokkal határolt forgásterében fontos szerepe van a *40. ábra* szerint egy körhenger palástján **nem** sugárirányban átlépő folyadékmennyiség (perdületes) sebességi terének, amelynek áramvonalai és szintvonalai egymásra merőleges **logaritmikus csigavonalak** [37].

18. A nyomás eloszlása a kétméretű sebességi térben. A csatornafalak terhelése

Az álló csatornában egyenletesen áramló folyadék munkaképessége a Bernoulli-tétel (14. pont) szerint a tér minden pontjában ugyanakkora, így tehát az áramvonalmenti sebességeloszlásból a nyomás eloszlása is minden áramcsőre a 15. pont *(34. ábra)* szerint könnyen meghatározható. Ugyenez az elv vezet a szintvonalmenti nyomáseloszlásnak vagy a csatornafal alakjával összevágó szélső áramvonalmenti nyomáseloszlásnak közelítő szerkesztésére is. Utóbbinak különösen a turbinák állítható **vezetőcsatornáinak** méretezésével kapcsolatban van gyakorlati jelentősége, mert az elállítóerő a falra nehezedő nyomás nagyságától és annak eloszlásától függ. E kérdés részletesebb tárgyalása helyett az eljárás menetét egy Bánki-turbina vezetőcsatornáján mutatom be *(41. ábra)*, amelynek elállítható fala (sarkantyú alakú nyelve) belső túlnyomás hatása alatt áll.



41. abra Síkbeli áramlás a *Bánki*-turbina vezetőcsatornájában

Korszerű energiagazdálkodásunk az egészen kis teljesítményű vízerőink kiépítésére is kiterjeszkedik. Az ilyen ún. *törpetelepek* vízerőgépe: a Bánki-turbina tehát tervgazdaságunk keretében is figyelmet érdemel.

A *41. ábra* szerint az áramvonal- és szintvonalhálózat szerkesztéséhez a csatornát mindössze két részre ($i = 2$) kellett felbontani. (A pontosságot mindenesetre fokozza, ha az ellenőrzést — a beírt körökkel — úgy végezzük, hogy egy-egy áramcső közepes áramvonalát és a közepes szintvonalakat is a hálózathoz számítjuk, vagyis ellenőrzéskor kettő helyett négy áramcsővel számolunk.)

Az elállítható sarkantyú AB falára nehezedő nyomást a falmenti sebességeloszlásból szerkesztés adja, amelyet célszerűen a méretarány figyelmen kívül hagyásával úgy végzünk el, hogy pl. az első idomhoz tartozó y_1 áramvonalhosszúság **reciprok** értékét rakjuk fel a vele arányos c_1 sebesség jellemzésére. A $c = c\,(l)$ görbe metszékeinek méretarányát a V vízmennyiségből is kiszámítható középsebességnek az x-menti rajzbeli középértékével való egybevetése határozza meg.

Az adott esetben a c_1 sebesség méretarányát az $x_1 = y_1$ összefüggés felhasználásával a V/i vízmennyiségből kiszámított $c_1 = V/(i\,x_1\,b)$ valóságos érték is meghatározza.

A Bernoulli-egyenlet alkalmazásával megrajzolt nyomáseloszlás — mint elosztott terhelés — szakaszonként koncentrált erőkkel ($P_1 = p_1\,y_1\,b$) helyettesíthető, s ezek eredője a közismert erő- és kötélpoligon-szerkesztéssel meghatározható.

22. példa. A *41. ábra* kapcsán leírt $b = 150$ mm széles vezetőcsatorna $V = 75$ l/mp vízmennyiséget szállít. A logaritmikus csigavonallal határolt szájnyílás (CB) szelvénye $a = 40$ mm-re szűkül a beömlőnyílás $a_0 = 220$ mm-es méretéhez képest. Az utolsó szintvonal mentén a kilépősebesség középértéke tehát: $c = V/(a\,b) = 12{,}5$ m/mp.

A méretarány figyelmen kívül hagyásával szerkeszthető (de az ábrába be nem rajzolt) sebességi ábra azt mutatja, hogy a kilépőszelvény (CB) szintvonala mentén a sebesség legnagyobb c_n értékét a sarkantyú csúcsában (B pontban) találjuk, ahol már túlnyomás nincsen ($p_n = 0$).

Ezen a helyen (a parányi négyzetek hálózatában lemérhető) áramvonaldarab a szintvonalmenti középértékhez képest $y_n/y = 17/20$ arányban megrövidült, a legnagyobb sebesség *valódi értéke* tehát $c_n = c \cdot y/y_n = 14{,}7$ m/mp, a sebességmagasságé pedig $c_n^2/2g = 11{,}0$ m.

A *41. ábrában* a parányi idomokkal szerkesztett sebességi ábra és energiaábra méretarányát eszerint a számított és szerkesztett értékek egybevetésével kapjuk. Az energiavonal magassága, $p_n/\gamma = 0$ figyelembevételével: $e = 11$ m. A nyomások méretarányának ismeretével a sarkantyúmenti nyomáseloszlás az elosztott terhelést is meghatározza, amelynek eredője az adott esetben — az *1—6* szakaszokra kiszámított $P = (p - p_n)\,y\,b$ összetevőkből, a közismert kötélsokszög-szerkesztéssel — a rajzból lemért adatokkal: $\mathbf{R} = \mathbf{198}$ **kg.**

A szerkesztés az eredő hatásvonalának a helyét is adja. A rajzból lemért kar $r_0 = 53$ mm. A 0-pont körül forgató nyomaték tehát $\mathbf{M} = 198 \cdot 5{,}3 = \mathbf{1050}$ **kgcm.**

19. Tengelyszimmetriás szabad áramlás forgásfelületekkel határolt térben

A turbina forgásterében egyenletesen átáramló folyadék áramvonalai forgásfelületek alkotói, amelyek az ún. **meridiánsíkban** vizsgálhatók *(42. ábra)*. A térbeli áramlásnak ez a tengelyszimmetriás alakja is visszavezethető **kétméretű** áramlásra; csakhogy most az áramvonalakat és szintvonalakat a forgástér meridiánmetszetébe rajzoljuk. A vonalhálózattal kimetszett derékszögű négyszögek x/y oldalarányának ellenőrzése a hasonlóság tétele helyett a következő összefüggést használjuk:

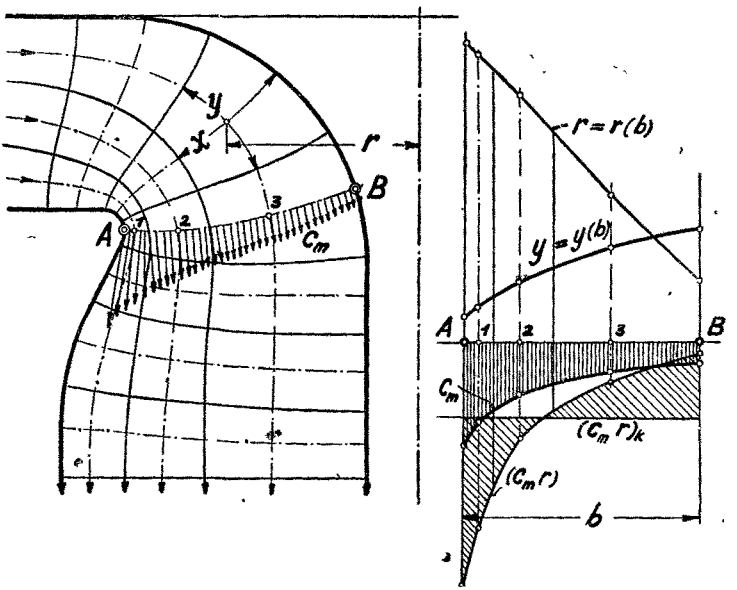
$$\boxed{\frac{xr}{y} = \text{állandó}} \qquad (47)$$

ahol r (a *42. ábra* jelölésével) az $x\,y$ területű (parányi) derékszögű négyszögidom középpontjának tengelytávolsága.

Ez az egyszerű összefüggés ismét a 20. pontban alkalmazott módszerrel indokolható, amely szerint a sebességi teret i számú (*a 42. ábrában* $i = 3$), *azonos* V/i mennyiségeket szállító részcsatornára vagy áramcsőre bontjuk. Ezek átfolyószelvényei azonban a forgástérben különböző r sugarú — $2\pi r x$ felületű — *palástok*.

A c_m meridiánsebességet tehát most egyfelől az átfolyó mennyiséget kifejező egyenlet ($V/i = 2\pi r x c_m$ m³/mp) határozza meg, másfelől pedig az áramvonal ϱ görbületi sugarától függő ($\Pi = c_m \varrho$) perdület állandósága. Ha a perdület megmaradását a 17. pontban — a (44) egyenlettel — kifejezett közelítéssel a négyszögidom áramvonalmenti y-hosszával: $c_m y = \Pi \alpha$ alakban írjuk, és a két egyenletet összevonjuk, akkor a (47) egyenletet kapjuk.

A szabadkézzel — átlátszó papírra — rajzolt hálózat helyességének ellenőrzése most valamivel hosszadalmasabb, mint a párhuzamos síkok között végbemenő áramlás esetében (17. pont), mert a beírt körök módszere itt nem használható. (A szakirodalomban találunk ugyan körökkel ellenőrzött szerkesztéseket is, ezek azonban *hibásak!)* Az ellenőrzést most az $r\,x/y$ hányadosnak minden idomra kiszámított értékére alapítjuk. Magát a számítást célszerűen táblázatos alakban végezzük el, és a hálózat elemeinek igazítása után addig ismételjük, amíg a hányadosok értékei a kívánt, pl. 5%-os pontosság határain belül össze nem vágnak.



42. ábra. Tengelyszimmetriás áramlás a *Francis*-turbina forgásterében

A hálózat a **sebességeloszlás** és a **nyomáseloszlás** meghatározására éppúgy felhasználható, mint a síkbeli áramlás esetében. A sebességek függvényábráit most célszerűen (a méretarány figyelmen kívül hagyásával) az y-hosszak reciprok értékeivel rajzoljuk fel. *(42. ábra.)*

A helyes *méretarányt* valamelyik b hosszúságú szintvonallal jellemzett gyűrűszelvényen átfolyó V vízmennyiség határozza meg, amelynek egyenletéből célszerűen az $(r\,c_m)$ szorzatok *középértékét* számítjuk:

E szorzatok **számított** középértéke:

$$(rc_m)_k = \frac{V}{2\pi b} \quad (\mathrm{m^2/mp}), \tag{48}$$

szerkesztett középértéke pedig a b hosszúságú szintvonal fölé rajzolt $(r\,c_m)$ függvényábrából területkiegyenlítéssel kapható. A két érték egybevetése a *szorzat* méretarányát adja, amelyből a c_m méretaránya is kiszámítható.

20. A térbeli (háromméretű) áramlás vizsgálata. Az egymásrahelyezhetőség

A térbeli áramlásnak a gyakorlat számára ott van jelentősége, ahol a síkbeli áramlást meghatározó c_m sebességen kívül egy síkra merőleges oly c_u sebességgel is számolni kell, amelynek nagysága a síkbeli áramlástól *független*. Ilyenkor a síkbeli nyomáseloszlást először a síkra merőleges sebességi összetevő figyelmen kívül hagyásával (a munkaképesség megmaradásának feltételéből) határozzuk meg. A c_u sebesség utólagos bevezetésével azután külön számítjuk ki a nyomásmagasság rovására megnövekedett lendületet.

Minthogy a c_m és a c_u összetevő **egymásra merőleges,** tehát azok négyzetösszege az eredő c sebesség négyzetét adja. Minthogy ez a folyadékelem teljes lendületével is arányos, tehát írható:

$$\frac{c_m^2}{2g} + \frac{c_u^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} \tag{49}$$

Ennek az egyenletnek energetikai jelentőségét külön is ki kell emelni, mert az **egymásrahelyezhetőség** (szuperpozíció) feltételét fejezi ki. Szavakba foglalva kimondhatjuk, hogy a folyadékelem lendülete skalárisan összegeződik az egymásra merőleges áramlások lendületéből (éppúgy mint a Bernoulli-egyenlet másik két tagja: a sztatikai magasság és a nyomásmagasság is).

Ha tehát pl. a *42. ábra* szerinti forgástérben a V vízárammal egyértelműen meghatározott ún. **meridiánáramlás** állandó munkaképességét kifejező

$$e = z + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{c_m^2}{2g}$$

egyenletből a p_m nyomás-eloszlás képét már megkaptuk, akkor — *változatlan* (e) *munkaképesség* esetére — a teljes c sebességhez tartozó p (teljes) nyomást a (49) egyenlet figyelembevételével a következőképpen számíthatjuk:

$$\frac{p}{\gamma} = e - z - \frac{c^2}{2g} = \frac{p_m}{\gamma} - \frac{c_u^2}{2g} \tag{50}$$

A c_u sebesség eloszlását a forgástérben a tengely körüli $\Pi = c_u\, r$ perdület állandósága egyértelműen meghatározza. Az áramlásnak ezt az alakját **forgatag**-nak nevezzük (21. pont.)

A forgatagnak különösen a turbina forgásterében van gyakorlati jelentősége. A vezetőlapátok alkalmas elállításával ugyanis a forgásteret kitöltő folyadékoszlop perdületét annyira megnövelhetjük, hogy munkaképességének legnagyobb része a c_u keringési sebességhez kötött lendületté alakul. Ezt azután a járókerék ismét lefékezi. Más szóval: a járókerék csatornáiban **a forgatag lendülete alakul át mechanikai munkává,** a c_m sebességű meridiánáramlás megzavarása nélkül! A meridiánáramlás szerepe tehát a korszerű turbinában csupán a V vízmennyiség **szállítására** szorítkozik, a c_m meridiánsebességhez kötött lendületnek a munkavégzés szempontjából jelentősége nincsen.

21. A forgatag

Jelentőségénél fogva vizsgáljuk meg tüzetesebben a $\Pi = c_u\, r$ perdület állandóságával jellemezhető síkbeli áramlásnak ezt a különleges alakját, a forgatagot.

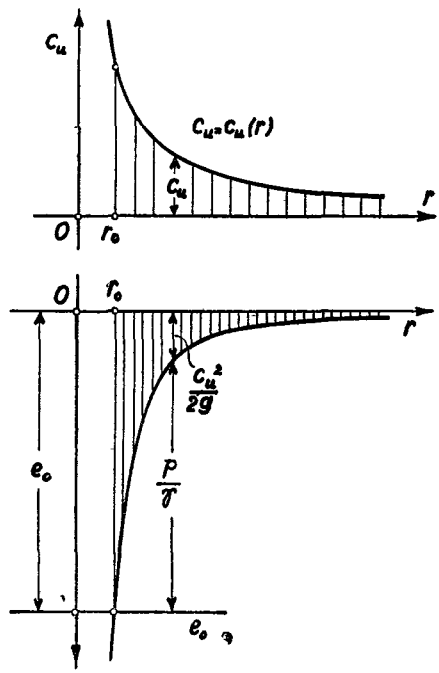
A sebességeloszlás törvényét a *35. ábrából* már megismertük: a sebességi tér áramvonalai a *39. ábra* szerint önmagukba visszatérő koncentrikus körök, szintvonalai tehát a kör középpontjában összefutó sugarak. Az áramkép korlátozás nélkül az egész síkra kiterjeszthető. *(43. ábra.)*

A forgatag *lendülete* a *43. ábra* tanúsága szerint — a hiperbolikus sebességeloszlásnak megfelelően — a tengely közelében akkora lehet, hogy a folyadékelemek *egész* munkaképessége (e_0) lendületté alakul át.

Az ezt a határfeltételt jellemző r_0 sugár — a $c_{u0} = \Pi/r_0$ határsebesség helyettesítésével — az e_0 energia állandóságát kifejező egyenletből határozható meg. Írható.:

$$r_0 = \frac{\Pi}{\sqrt{2g e_0}}. \qquad (51)$$

A forgatag belsejébe — az r_0 sugarú körön belül — folyadékelemek csak akkor juthatnának, ha munkaképességük nagyobb volna a környezetéénél. Ha ez átmenetileg elő is fordulhat, az önmagába visszatérő pályán keringő elemek munaképessége csakhamar kiegyenlítődik, és ennek következtében a *forgatag* belsejében **üres tölcsér** keletkezik, amely a természetben is jól megfigyelhető a köznyelven «örvény»-nek nevezett áramlási jelenségen.

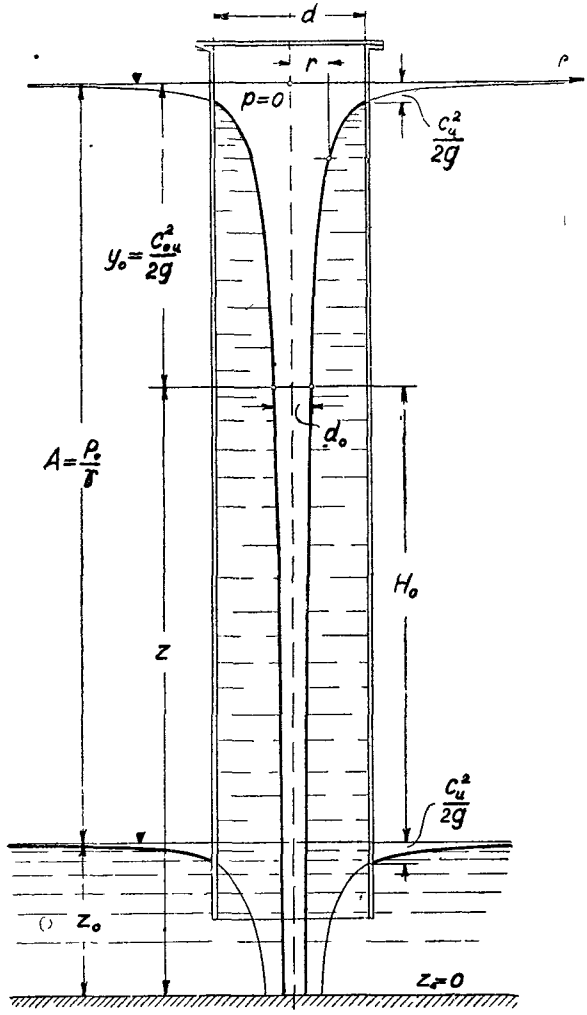


43. ábra. Sebességeloszlás a forgatagban. Energiaábra

A forgatag belsejében keletkező tölcsér alakja a *43. ábra* szerint szerkesztett energiavonallal ábrázolható, mint az a következő pontban tárgyalt *44. ábrából* is kitűnik.

22. A nyomás alsó határa. A kavitáció.

Az áramlás folytonosságának feltételét csak olyan térben tudjuk kielégíteni, amelyben a teljes (abszolút) nyomás a zérusnál nagyobb (mert az ideális folyadék elemei kohéziómenetesek). Ahol ugyanis a nyomás zérusra csökken, ott **folyadékmentes űr** keletkezik, amely az áramlás képét gyökeresen megváltoztatja.



44. ábra. A forgatag

Itt jegyzem meg, hogy az ideális folyadékban elképzelt teljes légűr ($p = 0$) a **valóságos** folyadék párolgása miatt nem jöhet létre, mert a keletkező űrt a folyadék hőmérsékletén **telített gőz** tölti ki, amelynek p_g nyomása a zérusnál mindig nagyobb.

Az űrképződést nem mindig lehet elhárítani, sőt vannak esetek, amikor arra — pl. a barométer felszállócsövében — szükség van, vagy amikor az legalább is rendellenességet nem okoz.

Az űrképződés feltételeit azonban mindenkor pontosan kell ismernünk, ezt pedig egyedül csak a nyomás térbeli eloszlásának vizsgálata teszi lehetővé. A teljes (abszolút) nyomásnak a tér minden pontjában pozitív előjelűnek kell maradnia, mert ellenkező esetben az ideális folyadékban is űr képződik.

Egyméretű áramlásnál a **folyadékoszlop elszakadásáról** beszélünk, ha a cső belsejében űr képződik, vagyis egy második (belső) víztükör keletkezik. Ezt a rendellenességet minden esetben kellő biztossággal kerülni kell.

Síkbeli és térbeli áramlásnál a *forgatag* belsejében keletkező tölcsér a *perdület* következménye. A turbina körszelvényű szívócsövében ilyen ún. kavitációs tölcsér csak akkor nem jelentkezik, ha az áramlás *teljesen* perdületmentes, amire a járókerékből kilépő vízoszlopnál csak ritkán lehet számítani.

E tölcsér alakját a 21. pont szerint pontosan meghatározza a folyadékoszlop perdülete és energiatartalma, mint az a *44. ábrából* is kitűnik, amely egy turbina szívócsövét meghosszabbított és felső végén lezárt alakjában ábrázolja.

A folyadékoszlop munkaképességét a csatornafenék ($z = 0$) szintjére vonatkoztatva, írható:

$$e_0 = z_0 + A, \text{ ahol: } A = \frac{p_0}{\gamma}.$$

A *perdületmentes* vízoszlop eszerint a csőben a csatorna víztükre fölé $A = 10$ m magasságig emelkedik, vagyis víz-barométert alkot. Ha a vízoszlopnak Π perdülete van, amely az ideális folyadék minden elemében — tehát az alsó csatornában is — állandó marad, akkor **forgatagot** kapunk, amely a cső belsejében $p = 0$ nyomású kavitációs tölcsért alkot, de egyidejűleg az alsó víztükör tölcsérszerű lesüllyedését is eredményezi.

23. példa. A *44. ábra* egy felül zárt, $l = 11{,}5$ m hosszú, $d = 900$ mm átmérőjű csövet felére torzított magassági méretarányban ábrázol. A légköri nyomásmagasság $A = 10$ m. Az alsó víztükör magassága az alapszint fölött $z_0 \doteq 2$ m; az energiavonal magassága tehát $e = z_0 + A = 12$ m.

$\Pi = 1$ m³/mp-es perdületből a cső kerületén — $r = d/2 = 0{,}45$ m sugárral — a keringési sebesség: $c_u = \Pi/r = 1 : 0{,}45 = \mathbf{2{,}2}$ **m/mp**; a lendület tehát: $y = c_u^2/2g = 0{,}248$ mkg/kg.

A csőfalakon eszerint a felső- és az alsó víztükör $y = 248$ mm-es tölcsérszerű süllyedést mutat.

$H_0 = 6$ m-es szívómagasságnál: $y_0 = A - H_0 = 4$ m. Ezt a tükörsüllyedést előidéző keringési sebesség:

$$c_{u0} = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{19{,}6 \cdot 4} = \mathbf{8{,}86\ m/mp.}$$

Ebben a magasságban a tölcsér $d_0 = 2r_0$ átmérője az állandó perdületből kiszámítható. Az eredmény:

$$d_0 = \frac{2\Pi}{c_{u0}} = \frac{2 \cdot 1}{8{,}86} = 0{,}226 \text{ m} = \mathbf{226\ mm.}$$

A kavitációs tölcsér káros hatása abban jelentkezik, hogy a meridiánáramlás körszelvényét gyűrű alakúvá szűkíti, de egyebekben a gép belsejében zavart nem okoz. Bizonyos esetekben a tölcsérképződést úgy akadályozzuk meg, hogy a forgástér *(pl. Kaplan-turbina)* körszelvényét a tölcsérnél nagyobb átmérőjű belső maggal kitöltjük, vagyis a szelvénynek gyűrű alakot adunk.

Az űrképződés jelenségei között külön kell kiemelnem az ún. **kavitációt,** amely a szilárd szerkezeti anyagok felszínén (pl. a turbina lapátjain vagy a hajócsavaron) jelentkezik. Ez a kavitáció rendszerint ütemesen változó lefolyású, s ilyenkor romboló hatása akkora lehet, hogy a gép üzembentartása is lehetetlenné válik. A kavitáció veszélye ellen is első sorban az alkalmasan választott lapátszelvény nyomáseloszlásának szabatos meghatározásával kell védekezni. E jelenségek elméleti és kísérleti vizsgálatát csak az ún. **kavitációs laboratóriumok** kutatómunkája teszi eredményessé.

C) VÁLTOZÓ SEBESSÉGŰ ÁRAMLÁS ÁLLÓ TÉRBEN

23. Gyorsuló áramlás egyenes csőben. A gyorsító nyomásmagasság és a tehetetlenségi nyomásmagasság

A sebességi tér kialakulásának eddigi vizsgálatánál feltételeztük, hogy az áramlás állandósult, vagyis a sebesség a tér bármelyik pontjában **időbeli változást nem szenved** ($\partial c/\partial t = 0$).

A sebességi tér kialakulásának és megszűnésének időtartama alatt az egyenletes áramlásra talált összefüggések érvényüket vesztik és a nyomáseloszlás megállapítása érdekében az *Euler-féle egyensúlyegyenletekhez* kell visszatérnünk (8. pont).

A vizsgálatot a *45. ábrában* vázolt egyszerű esetre vonatkoztatom, amikor a nehézségi erőtérben egyenletes f keresztmetszetű egyenes vízoszlop egyméretű áramlásáról van szó. Az l hosszúságú cső legyen *vízszintes.*

(Nem vízszintes áramlás esetére a nyomáseloszlás a 17. pont szerint a $z+p/\gamma$ együttes értékéből mindig kiadódik.)

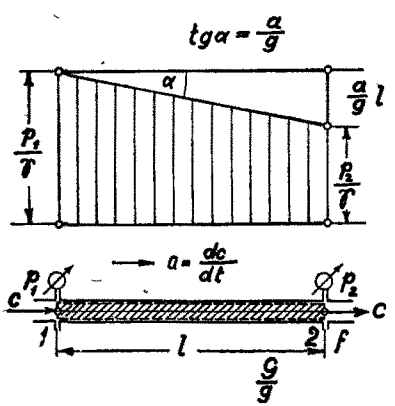
Euler I. egyenletében erre az esetre a sebességnek áramvonalmenti változása zérus ($f_1 = f_2$; $\partial c/\partial s = 0$), a potenciál pedig állandó. ($\partial U/\partial s = 0$) helyettesítéssel írható tehát:

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = 0, \qquad (52)$$

ahol $\mathrm{d}c/\mathrm{d}t = a$ a folyadékoszlop gyorsulása. Az áramvonal mentén integrálva, az l hosszúságú cső végpontjai között létrejövő nyomásesés az ún. **gyorsító nyomásmagasság** alakjában így írható:

$$\boxed{\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{l}{g}a} \quad \text{(m)}. \qquad (53)$$

A gyorsuló folyadékoszlop végpontjai között eszerint nyomásesés jön létre, amely az oszlop hosszúságával és a gyorsulással arányos.



45. ábra. Nyomáseloszlás gyorsuló vízoszlopban

A tehetetlenségi erő fogalmának mintájára (8. pont) ezt a tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a gyorsulásra kényszerített folyadékoszlop a sebességváltozásnak az ún. **tehetetlenségi nyomásmagassággal** ellenszegül. (Ezt a tehetetlenségi nyomásmagasságot kell a gyorsító nyomásmagassággal kiegyensúlyozni.)

Állandó szelvényű cső mentén a nyomásapadás függvényábrája lineáris *(45. ábra)*, a *(lefelé* pozitív előjellel vett) α hajlásszög tangense a hosszegységre eső nyomásapadás mértéke [37].

A nyomásapadás különösen a dugattyús szivattyú szívócsövében akkora lehet, hogy a vízoszlop elszakadását idézheti elő. A víz-

oszlop elszakadását okozó **határgyorsulást** (ideális folyadékra) az (53) egyenletből $p_2 = 0$ helyettesítéssel lehet kiszámítani.

Negatív gyorsulás (lassítás) esetén **nyomásemelkedéssel** kell számolni, amely a cső hirtelen zárásakor akkora lehet, hogy a csőfalat megrepesztheti.

24. példa. Egy $l = 20$ m hosszú cső két vízmedencét köt össze, amelyek tükrei között $H = 8$ m-es szintkülönbség mutatkozik, vagyis a csővégek nyomásmagasságkülönbsége $(p_1 - p_2)/\gamma = H$. A vízoszlop *gyorsulása* az (53) egyenlet szerint:

$$a = \frac{H}{l} g = \frac{8}{20} \cdot 9{,}81 = \mathbf{3{,}94\ m/mp^2}.$$

25. példa. Egy $l = 150$ m hosszú nyomócső folyamatos zárásával a vízoszlop $a_l = 4{,}9$ m/mp² lassulást szenved. A kezdőnyomás: $p_1 = 5$ kg/cm² ($p_1/\gamma = 50$ m). A lassuló vízoszlop utolsó szelvényében a nyomásmagasság:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{l}{g} a_l = 50 + \frac{150}{9{,}81} \cdot 4{,}9 \simeq \mathbf{125\ m}.$$

A lassítás következtében a nyomás tehát a nyugalmi érték 2,5-szeresére emelkedett.

24. Az impulzustétel és alkalmazásai

A tömeg és a sebesség szorzatából számítható **mozgásmennyiségnek** vagy **impulzusnak** időbeli változása **szilárd testnél** csak úgy lehetséges, hogy a változatlan tömeg szorzója, a *sebesség* változik. Az impulzusnak az időegységre eső változását tehát a tömeg és a **gyorsulás** szorzata adja, amely *Newton* törvénye szerint a gyorsító erővel egyenlő, ez pedig a gyorsulás irányával ellentétes tehetetlenségi erővel tart egyensúlyt. Ez az erő a test impulzusváltozásából származik, tehát azt más fogalmazásban **impulzuserőnek** is nevezhetjük. **Folyadékoknál** az impulzusváltozásnak ezt az esetét a 23. pontban tárgyaltuk.

Az (53) egyenlettel kifejezett eredményt a Newton-törvény alkalmazásával is megkapjuk, ha a csőbe zárt lf térfogatú folyadéktömeget szilárd testként vizsgáljuk, és annak gyorsulását a véglapokra ható $f(p_1 - p_2)$ nagyságú „dugattyú-erő" és a tömeg hányadosából felírjuk.

A *folyadék* impulzusváltozását azonban a mozgásmennyiség másik szorzójának, a **tömegnek időbeli változása állandósult áramlásnál** is létrehozza.

A sebességi tér egy zárt felülettel körülhatárolt részének impulzusát ugyanis az állandó c sebességgel **érkező** folyadéksugár **megnöveli,** mert az ún. ellenőrzőfelülettel elhatárolt M tömeg az ebbe a térbe másodpercenkint **belépő** V folyadékáram $m = V\gamma/g$ tömegével **megnagyobbodik.** Az elhatárolt térből **elfolyó** folyadékáram tömegével viszont az impulzus **kisebbedik.**

Az érkező folyadéksugár tehát **impulzusnyereséget** hoz létre, a kilépő folyadéksugár pedig **impulzusveszteséget** okoz. Mindkét esetben **impulzuserő** jön létre, amely **a másodpercenkint érkező, ill. távozó folyadék tömegének és sebességének szorzatából számítható.**

A műszaki gyakorlatban a vízsugár hajtóerejét keressük, tehát *az impulzuserőt a vízsugárból kiinduló erőhatásként értelmezzük.* Ebben az esetben az impulzuserő az **érkező** vízsugár sebességének irányába esik, tehát **pozitív** előjelű, a **távozó**

vízsugár irányával pedig ellentétes, vagyis **negatív** előjelű. Az ellenőrző felülettel kihasított **folyadéktestet** az így értelmezett **impulzuserők mindig kívülről befelé támadják.** Egy ilyen *ellenőrző felülettel* elhatárolt térben c sebességgel másodpercenkint **belépő** V folyadékáramnak $m = V\gamma/g$ nagyságú tömege a rendszer impulzusát tehát egy másodperc alatt mc értékkel növeli, az erre az esetre **pozitív** impulzuserő tehát:

$$J = mc = \frac{V\gamma}{g} c \quad \text{(kg)}. \tag{54}$$

Ha a V folyadékáram c sebessége az f belépőszelvény mentén egyenletes eloszlású, akkor $V = fc$ helyettesítéssel az impulzuserő így is számítható:

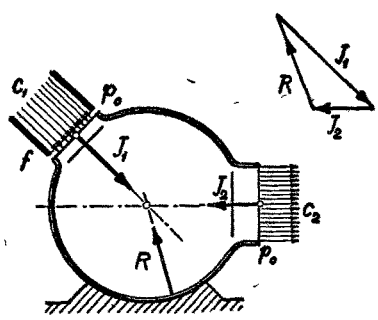
$$J = \frac{\gamma}{g} fc^2 \quad \text{(kg)}. \tag{55}$$

A körülzárt teret **elhagyó** folyadéktömeg impulzusváltozása viszont a sebesség vektorával ellentétes irányú **negatív** impulzuserővel vehető számításba. **Az így értelmezett impulzuserők az ellenőrzőfelülettel körülhatárolt rendszerre ható egyéb erőkkel egyensúlyt tartanak.**

Meg kell jegyezni, hogy az impulzustételnek ez a fogalmazása a *tehetetlenségi* erők analógiájára értelmezi az impulzuserőket. A *gyorsító* erők analógiája természetesen ellenkező előjelű impulzuserők értelmezésére vezet. (Vö. a 8. ponttal.)

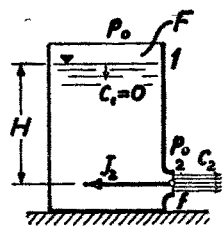
Folytonos sebességi tér egyensúlyfeltételeinek vizsgálatánál az impulzustétel alkalmazására szükség nincsen, mert az erők egyensúlyának tételét az Euler-egyenletek is kifejezik. Az I. Euler-egyenlet második tagja ugyanis lényegében nem más, mint az egyenletes áramlás helyi (konvektív) gyorsulásából származó tehetetlenségi erő, amelyet az impulzustételben impulzuserőként értelmeztünk.

Az *impulzustétel* alkalmazása különösen olyan esetekben vezet könnyen áttekinthető eredményre, amikor nem összefüggő sebességi tér vizsgálatáról van szó, hanem szilárd falak között végbemenő áramlás egyensúlyfeltételét keressük, vagy egy vízsugárnak szilárd lapokra gyakorolt hatását vizsgáljuk. Az alkalmazás módját alábbi ábrák kapcsán néhány példában mutatom be:



46. ábra. Impulzuserők egyensúlya

a) **A többnyílású edényre** ható erők eredőjét a *46. ábra* szerint a belépő és kilépő vízsugár impulzuserői (J_1 és J_2) egyértelműen meghatározzák, ha az edény a környezet p_0 nyomása alatt áll, és a súlyerőket figyelmen kívül hagyjuk (vagy utólag külön hozzászámítjuk az erőrendszerhez).



47. ábra. A kilépő vízsugár reakcióereje

Az impulzuserők az (55) egyenletből számíthatók.

b) **Szabad kifolyás legömbölyített oldalnyíláson** *(47. ábra).* Az f szelvényű kifolyónyílás fölött H magasságig megtöltött edényből kifolyó víz c_2 sebessége az

energiaegyenletből számítható. (Ha az edény F keresztmetszete elég nagy a kifolyónyíláséhoz képest, akkor a víztükör süllyedési sebessége elhanyagolható.) Írható:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g}, \quad \text{amiből} \quad c_2^2 = 2gH,$$

a kilépő sugár ún. **reakcióereje** pedig:

$$J_2 = \frac{\gamma}{g} f c_2^2 = 2\gamma H f \quad \text{(kg)}. \tag{56}$$

26. példa. A *47. ábra* jelöléseivel: $H = 1200$ mm; $f = 314$ mm², ($d = 20$ mm). A kifolyóvíz sebessége (ideális, veszteségmentes kifolyásra):

$$c = \sqrt{2gH} = \sqrt{19{,}6 \cdot 1{,}2} = \mathbf{4{,}85\ m/mp.}$$

a kifolyó vízáram:

$$V = f\,c = 0{,}000314 \cdot 4{,}85 = 0{,}00152\ \text{m}^3/\text{mp} = 1{,}52\ \text{l/mp}.$$

Az impulzuserő pedig:

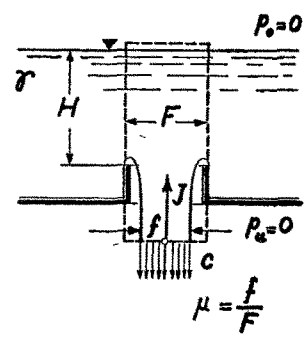
$$J_2 = 2\,\gamma H f = 2 \cdot 1000 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}000314 = \mathbf{0{,}75\ kg}.$$

vagy az (54) egyenletből:

$$J_2 = \frac{V\gamma}{g}\,c = \frac{1{,}52 \cdot 1}{9{,}81} \cdot 4{,}85 = \mathbf{0{,}75\ kg}.$$

c) **A vízsugár összehúzódása az ún. Borda-féle kifolyónyílásban.** Az élesfalú nyíláson átfolyó vízsugár keresztmetszete mindig kisebb a nyílás szelvényénél, mert a kifolyónyílás falához simuló áramvonalak csak *véges* görbületi sugárral — törés nélkül — változtathatják irányukat. A kifolyósugár tehát ilyenkor **összehúzódik.** Az összehúzódás **(kontrakció)** mértékét a keresztmetszetek arányával fejezzük ki. A *48. ábra* jelöléseivel az összehúzódás (zsugorodás) tényezője — $\mu = f/F$ — annál kisebb, mennél nagyobb az áramvonal eltérítési szöge.

Az ún. *Borda*-féle kifolyónyílásban az eltérítés 180°-os. Erre az esetre az összehúzódás tényezőjét az impulzustétel alkalmazásával ki is lehet számítani.



48. ábra. A vízsugár teljes összehúzódása

27. példa. A *48. ábra* szerint a Borda-féle F szelvényű kifolyónyílásra H magasságú folyadékoszlop nehezedik, amely a kifolyás sebességét ($c^2 = 2gH$) meghatározza.

Az ellenőrző felülettel kihasított test egyensúlyfeltételét a kifolyónyílásra nehezedő folyadéktest súlyának ($G = FH\gamma$) az impulzus-erővel való egyenlősége fejezi ki, azaz: $F\gamma H = J$.

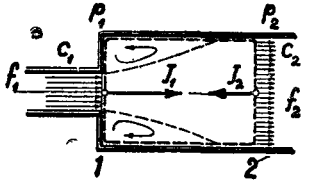
Az impulzus-erőt az (56) egyenletből kifejezve: $J = 2\gamma H f$ és $f = \mu F$ helyettesítéssel az eredmény:

$$\mu = 0{,}5$$

A *valóságos* folyadékra kísérleti úton meghatározott $\mu = 0{,}55$ értékkel az összevágás igen jó, ami az impulzustétel használhatóságát bizonyítja.

d) **Hirtelen keresztmetszetváltozás** a csővezetékben az áramlásban örvénylést okoz. Az impulzustétel alkalmazásával (*49. ábra* kapcsán) a sebességeloszlás vizsgálata nélkül is beigazolható, hogy ez az áramlás nem lehet veszteségmentes. A veszteségek nagyságrendje is kiszámítható.

A *49. ábra* rajzolt, ellenőrzőfelülettel körülhatárolt hengeres víztest egyensúlyát kifejező egyenletből a véglapokra nehezedő nyomások különbségét lehet kiszámítani, ha *feltételezzük*, hogy az *1* jelű szelvénynek f_1-ről f_2-re bővült egész felületén a p_1 nyomás eloszlása **egyenletes.** Ezzel a korlátozással írható:



49. ábra. Impulzuserők a *Borda*-féle csőben

$$f_1 \frac{\gamma}{g} c_1^2 + f_2 p_1 = f_2 \frac{\gamma}{g} c_2^2 + f_2 p_2,$$

ahol:

$$f_1 c_1 = f_2 c_2.$$

Helyettesítés és rendezés után az **erők egyensúlyát biztosító** nyomásmagasságkülönbség

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{c_2 (c_1 - c_2)}{g}. \tag{57}$$

Ha ezt a nyomásemelkedést összehasonlítjuk a **munkaképesség megmaradását** kifejező energiaegyenletből kiszámítható értékkel, akkor azt találjuk, hogy az energiaátalakulás ebben az esetben **tökéletlen,** mert a potenciális energia megnövekedése nem érheti el a lendület apadás mértékét.

Ilyen esetben a folyadék súlyegységének *energiamérlegét* az ún. **veszteségmagasság** bevezetésével állítjuk helyre, amely az energiaátalakulás folyamán veszendőbe ment energiának 1 kg folyadékra eső értéke.

Ha a folyadék munkaképessége belépéskor $e_1 = z_1 + p_1/\gamma + c^2_1/2g$ és kilépéskor $e_2 = z_2 + p_2/\gamma + c_2^2/2g$, akkor vízszintes csőre ($z_1 = z_2$) a veszteségmagasság:

$$h'_B = e_1 - e_2 = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}. \tag{58}$$

Az (57) és (58) egyenlet összevonásával, rendezés után írható:

$$h'_B = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \qquad \text{(mkg/kg)}. \tag{59}$$

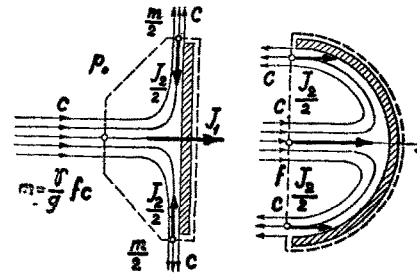
Ez az ún. **Borda-féle veszteség,** amely eszerint a **sebességkülönbség négyzetével arányos.** Valóságos folyadékokkal végzett kísérletek a veszteségmagasságnak ezt a jellegzetességét teljes mértékben igazolják, csupán az arányossági tényező szorul bizonyos esetben némi igazításra. (L. még az 50. pontot).

25. Elterelt szabadsugár erőhatásai. Az elosztott lapátterhelés

a) **Síklappal elterelt vízsugár erőhatása** az *50. ábra* kapcsán szintén az impulzustételből számítható. Ha a vízsugár a síklapra **merőleges** és a lap átmérője a sugár átmérőjének többszöröse ($D/d = 4 \div 6$), akkor a tengelyszimmetriás (tányér alakú) víztest kilépősebességéből származó impulzuserők egymással tartanak egyensúlyt. A lapra ható egyetlen erő tehát: $P = J_1$.

Ha síklap helyett félgömböt vagy az ún. **Pelton-kanalat** állítjuk a vízsugár útjába, amely azt 180°-kal visszatereli, akkor az impulzuserők összegeződnek, és ideális esetben ($J_2 = J_1$) a lapra gyakorolt erő az (55) egyenlet szerint:

$$P = 2\,J_1 = 2\,\frac{\gamma}{g}\,f c^2.$$



50. ábra. Vízsugár impulzusa álló lapon és lapáton

28. példa. Egy $H = 100$ m esésre szerkesztett Pelton-turbina $d = 40$ mm átmérőjű kifolyónyílásának $f = d^2\,\pi/4 = 1256$ mm²-es keresztmetszetén a víz sebessége:

$$c = \sqrt{2\,g\,H} = \sqrt{1962} = \mathbf{44{,}3\ m/mp.}$$

A kiáramló vízmennyiség:

$$V = f\,c = 10^{-4} \cdot 12{,}56 \cdot 44{,}3 = \mathbf{0{,}056\ m^3/mp} = \mathbf{56\ l/mp.}$$

A Pelton-kanálra gyakorolt erőhatás ideális értéke:

$$\mathbf{P} = 2\,\frac{\gamma}{g}\,f\,c^2 = 2 \cdot \frac{1000}{9{,}81} \cdot 10^{-4} \cdot 12{,}56 \cdot 1962 = \mathbf{503\ kg.}$$

Végül a $H = 100$ m-es eséssel dolgozó $V = 56$ l/mp víznyelésű turbina teljesítményére is következtethetünk a kilogrammonként H mkg munkaképességű vízáram nyers teljesítőképességéből, amelynek értéke:

$$\mathbf{N_0} = \frac{V\,\gamma\,H}{75} = \frac{56 \cdot 1 \cdot 100}{75} = \mathbf{74{,}7\ LE.}$$

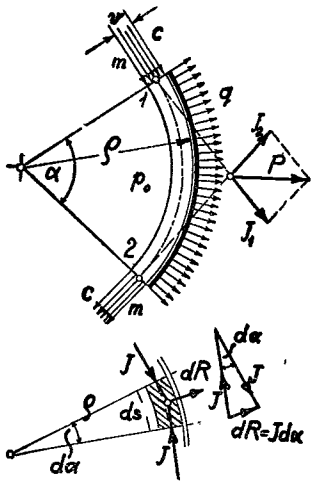
b) A görbe lapáttal elterelt szabadsugár. A lapátnyomás és az elosztott (lineáris) lapátterhelés

A folyadéksugár eltereléséből származó erőhatások *eredőjét* az *50. ábra* kapcsán az impulzustétel alkalmazásával akkor is meghatározhatjuk, ha csak a belépés és a kilépés vizsgálatára szorítkozunk. Az impulzuserők dinamikai hatásából származó erőjáték szabatos megismeréséhez azonban a kezdő- és végállapot ismerete nem elegendő, hanem a nyomásoknak lapátmenti eloszlását vagy a lapátvonalra elosztott (lineáris) terhelést is meg kell határozni.

Vizsgálatunkat az *51. ábra* szerinti ϱ (állandó) görbületi sugarú ún. **körlapátra** vonatkoztatjuk, amely a c sebességgel érkező, (állandó) b szélességű és v vastagságú vízsugarat α középponti szöggel téríti el.

Ha ebből a vízsugárból egy $d\alpha$ szöggel elterelt ds hosszúságú elemet kihasítunk és az impulzustételt erre az elemi víztestre alkalmazzuk, akkor (az *51. ábra* jelöléseivel) a belépő és kilépő szelvényre eső két impulzuserő eredője: $dR = J\,d\alpha$.

Ha a sugár v vastagsága nem nagy, akkor a víztest ds hosszúsága (közelítéssel) a lapát görbületi sugarából $ds \cong \varrho\,d\alpha$ alakban kifejezett lapátvonalhosszúsággal helyettesíthető, amelyet a dR erő terhel.



51. ábra. Körívben elterelt vízsugár impulzusa

Az elosztott (lineáris) lapátterhelés tehát:

$$q \cong \frac{dR}{ds} = \frac{J}{\varrho} \quad \text{(kg/m)}; \qquad (60)$$

ahol az impulzuserő: $J = \frac{\gamma}{g}\, v\, bc^2$ (kg),

a lapátnyomás pedig:

$$\Delta p = \frac{q}{b} = \frac{\gamma}{g}\, v\, \frac{c^2}{\varrho} \quad \text{(kg/m}^2\text{)}. \qquad (61)$$

A lapátnyomásra használt Δp jelöléssel azt juttatjuk kifejezésre, hogy itt nyomásnövekedésről van szó, amelyet az elterelt sugár a görbe lap **homorú** oldalára gyakorol.

Meg kell jegyezni, hogy a lapátnyomásnak a (61) egyenlettel kifejezett értéke az Euler-féle II. egyenletből is levezethető.

26. A lapáterő. Az eltérítési háromszög

A folyadéksugár elterelésből származó ún. lapáterőnek a gyakorlatban rendszerint csak a keringés (l. 20. pont) irányába eső *összetevőjére* van szükség. Erre való tekintettel már az impulzuserőt meghatározó *sebességet* bontjuk két (egymásra merőleges) összetevőre, és e sebességi összetevők változását kísérjük figyelemmel. **A sebességek** ugyanis a dinamikai vizsgálatoknál az (54) egyenlet szerint úgy értelmezhetők, mint az **egységtömegű vízmennyiségnek** ($m = 1$; azaz: $V/m = g/\gamma$) **impulzuserői.**

A turbina vezető- és járókerekére ható lapáterőnek két összetevője közül a meridiánáramlás (m) irányába eső összetevőnek csak erőtani és szilárdságtani szempontból lehet jelentősége, de üzemtani szerepe csak a haladás vagy keringés (u) irányába eső összetevőnek van. Az *52. ábra* egy ilyen lapátsor vagy lapátrács egy lapátját ábrázolja. Ilyen esetben az elosztott lapátterhelésnek csak a meridiánirányra merőleges q_u összetevőjét kell meghatározni, amelynek az l_m hosszúságú meridiánvonal menti eloszlását az ábra szerint szemléletesen egy (elképzelt) meridiánlapátra lehet felrajzolni.

Az *52. ábrában* a sebességeket w jelöléssel a vektorháromszögekbe is berajzoltam, oly módon, hogy azok w összetevője a háromszög alapját alkossa. Ha a meridiánáramlás sebessége állandó (amit a kerék csatornaszelvényeinek alkalmas alakításával egy-egy meridiánvonal mentén még a *42. ábra* szerinti fogástérben is

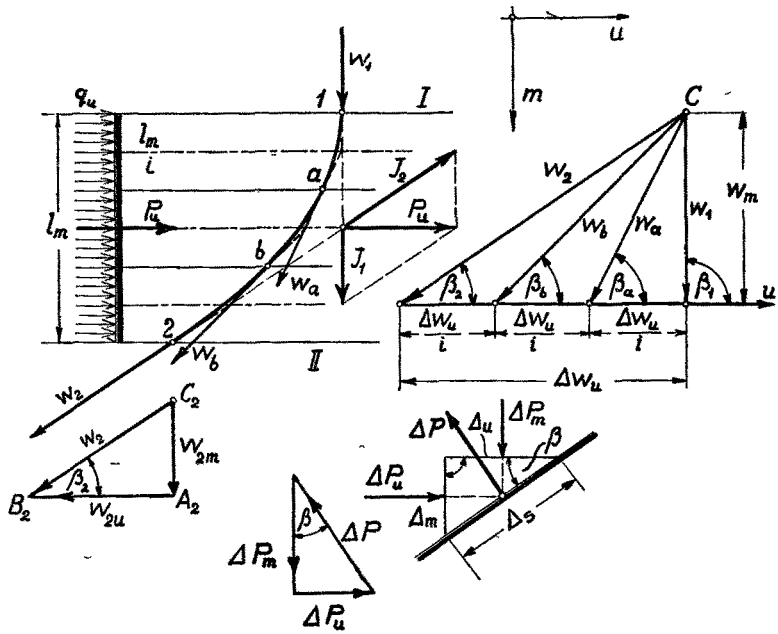
elérhetünk), akkor a belépő- és kilépősebességek vektorháromszögét közös C csúccsal egymásra helyezve, az ún. **eltérítési háromszöget** kapjuk, amelynek alapja: $\Delta w_u = w_{1u} - w_{2u}$.

Az eltérítési háromszög két oldala eszerint a w_1 belépő- és a w_2 kilépősebesség, alapja pedig ezek vektoriális különbsége: Δw_u. Az impulzustétel szerint tehát a lapáterő keresett összetevője:

$$P_1 = m_1 \Delta w_u \qquad \text{(kg)}, \tag{62}$$

ahol $m_1 = m/z$ a z lapátú kerék *(55. ábra)* **egy** csatornáján átfolyó vízmennyiség tömege. (A z lapátszám akkora legyen, hogy az elterelt sugár ne legyen vastag).

Az *52. ábrában* az eltérítési háromszöget a (62) egyenlettel kifejezett összefüggés felhasználásával oly lapátgörbe szerkesztésére is felhasználtam, amely a q lapátterhelésnek *teljesen egyenletes* eloszlását biztosítja.



52. ábra. Álló lapát terhelése

A P_{1u} lapáterő ugyanis — mint láttuk — csupán a belépés és a kilépés sebességétől függ, de a **lapátgörbe alakjától független.** A görbe alakjától függ azonban a lapátterhelés (és a lapátnyomás) eloszlása, amely egyenletessé tehető, ha a lapát meridiánhosszúságának l_m/i nagyságú szakaszán az eltérítés is $\Delta w_u/i$. Ha tehát a meridiánvonalat i egyenlő szakaszra osztjuk (a rajzban: $i = 3$) és ugyanannyi egyenlő részre osztjuk az eltérítő háromszög alapját is, akkor a közismert kötélpoligonszerkesztéssel a lapátvonal köré írt sokszöget kapjuk, amelynek csúcsai egy-egy meridiánvonal-szakasz középvonalába esnek.

Az egyenletes lapátterhelés nagysága : $q_u = P_{1u}/l_m$ (kg/m).

Könnyen belátható, hogy az adott esetben — amikor $\Delta w_m = 0$, — a görbe lapát lineáris terhelése megegyezik a fentebb kiszámított q_u értékkel, azaz: $q = q_u$.

Ezt igazolja az *52. ábra* alsó képe, amely a Δs hosszúságú, β hajlású lapátelemre rajzolt derékszögű háromszögidom oldalait terhelő erők egyensúlyfeltételét szemlélteti. A három oldal közül csak a meridiánirányba eső Δm befogót terheli $\Delta P_u = q_u \Delta m$ nagyságú impulzuserő.

A Δu és Δs oldalra nehezedő ΔP_m és ΔP erővel az idom belsejében működő nyomás tart egyensúlyt.

A három erő egyensúlyát kifejező egyenlet (az erőháromszögből):

$$\Delta P = \frac{\Delta P_u}{\sin \beta} = \frac{\Delta P_m}{\cos \beta} \text{ ; ahol: } \Delta P = q \Delta s \text{ és } \Delta P_m = q_m \Delta u.$$

Minthogy azonban a derékszögű háromszögidomra:

$$\Delta s = \frac{\Delta m}{\sin \beta} = \frac{\Delta u}{\cos \beta},$$

ennélfogva, helyettesítés után: $q = q_m = q_u$.

29. példa. Az *52. ábrában* a vezetőkeréken átfolyó vízáram, $V = 50$ l/mp, a lapátok száma $z = 10$. A belépősebesség, $w_1 = 5$ m/mp; az eltérítési háromszög alapja (rajzból lemérve), $\Delta w_u = 7{,}5$ m/mp.

A lapáterők összege:

$$\mathbf{P}_u = m \Delta w_u = \frac{50 \cdot 1}{9{,}81} \cdot 7{,}5 = \mathbf{38\ kg.}$$

Az elosztott lineáris lapátterhelés pedig, $l_m = 6$ cm-es meridiánhosszúsággal:

$$\mathbf{q} = \frac{P_u}{z\, l_m} = \frac{38}{10 \cdot 0{,}06} = \mathbf{64\ kg/m.}$$

27. Az impulzusnyomaték (perdület). A forgatónyomaték

Tengelyszimmetriás áramlás vizsgálatánál az impulzuserő tengelyre kifejtett forgatónyomatékának, az ún. **impulzusnyomatéknak** vagy **perdületnek** bevezetésével állítjuk helyre a dinamikai egyensúlyt.

Itt is kiemelem, hogy a 16. pontban a (41) egyenlettel értelmezett **sebességnyomaték** ($\Pi = c\, r$) nem más, mint **a másodpercenkint átfolyó egységtömegnek** ($m = 1$; $V/m = g/\gamma$) **impulzusnyomatéka, azaz perdülete.**

A súlyegység (1 kg) perdülete eszerint: Π/g, a $V\gamma$ súlyú (másodpercenkinti) folyadékáram *teljes* perdülete pedig: $\Pi\, V\gamma/g$.

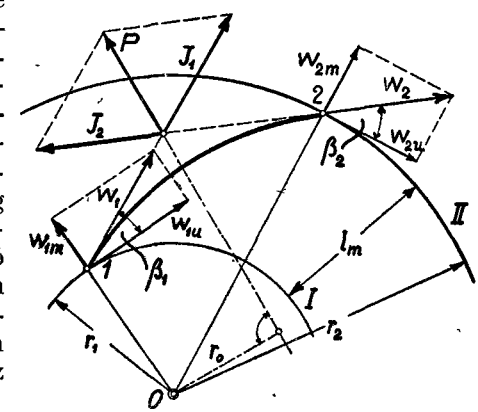
A *perdületnek* az áramlástanban szokásos értelmezése tehát összhangban van annak dinamikai jelentésével, bár kétségtelen, hogy félreértésekre vezethet, ha ugyanazt a kifejezést *kétféle* — bár rokon — fogalomnak megjelölésére használják. A súly és fajsúly vagy térfogat és fajtérfogat mintájára a sebességnyomaték megjelölésére talán a *fajlagos perdület* elnevezést lehetne meghonosítani a kettős értelmezés elkerülésére. Arról is szó lehet, hogy a hidraulikai sugár mintájára az egységtömeg perdü-

letét a jövőben **hidraulikus perdület**-nek nevezzük. E kérdésben ez alkalommal nem foglalok állást, hanem a következőkben — ott, ahol arra szükség van — a két fogalom megkülönböztetésére a forgatónyomatékot **teljes perdületnek** nevezem.

A **perdület** dinamikai jelentése eszerint **forgatónyomaték,** amelyet természetesen nemcsak az áramvonal görbületi középpontjára, hanem a sebességi tér bármelyik más pontjára lehet vonatkoztatni.

A szabad áramlás törvényét kifejező ún. **perdülettétel** (16. pont) dinamikai megvilágításban rendkívül világossá válik, mert csak annyit mond, hogy a *sebességi térben görbe áramvonal mentén állandósult áramlás csak úgy jöhet létre, ha bármelyik áramcső-elemre ható impulzuserők a görbületi középpont körül forgatónyomatékot nem fejtenek ki, vagyis ha azok eredője a görbületi középponton megy keresztül.*

A perdületnek dinamikai értelmezése rendkívül szemléletessé teszi a sugárirányú (centripetális és centrifugális) átömlésű vízgépek tengelyét forgató nyomaték vizsgálatát is. Az *53. ábra* egy **turbina-szivattyú** járókerekének egy lapátját ábrázolja, amely az r_1 sugarú belsőpalástón (az egész kerületen a β_1 lapátszög irányában) belépő w_1 sebességű vízáramot a kilépő palásttal β_2 szöget bezáró w_2 sebesség irányába tereli. Ugyanilyen eltérítést szenved a vízáram a centripetális átömlésű **turbina** járókerekében is (habár lapátgörbéi alakra eltérnek az *53. ábrától).*



53. ábra. Az impulzuserők nyomatéka álló lapáton

A tengelyszimmetriás sebességi tér áramvonalai ún. **lapátcsillagot** alkotó lapátgörbék, ha a z lapátszámot oly nagyra választjuk — vagy más szóval, ha a lapátokkal határolt csatornák vastagsága oly kicsiny —, hogy a vízsugár pontosan fel tudja venni a lapát alakját.

Az ideális turbina elméletében a vastagsági méret nélkül elképzelt lapátok számát végtelen nagyra ($z = \infty$) szokás felvenni, ami csak annyit jelent, hogy a kerékhez rögzített áramvonalak terelik a vízáramot a lapátvonallal előírt pályán. A véges lapátosztású (sűrű lapátozású) kerékre ezek az eredmények csak közelítő pontossággal érvényesek és igazításra szorulnak. Ritka lapátozású (ún. szárnylapátos) kerék szerkesztéséhez az áramvonalas elmélet már alkalmatlan; helyette az aerodinamikai szárnyelmélet eredményeit kell felhasználni [24].

Ha a z lapátú járókeréken V vízmennyiség áramlik keresztül, akkor egy-egy lapáttal elterelt mennyiség tömege $m_1 = m/z$, ahol $m = V\,\gamma/g$. A belépő impulzuserő tehát: $J_1 = m_1 w_1$, a kilépő (negatív) impulzuserő $J_2 = m_1 w_2$, a két erő eredője (P) pedig az *53. ábra* jelöléseivel: $M_1 = P\,r_0$ forgatónyomatékot fejt ki a tengely körül (az ábra szerint az óramutató járásával ellenkező értelemben). Az egész forgatónyomaték ($M = z\,M_1$) a helyes méretarányú rajzból szerkesztéssel adódik.

Sokkal kényelmesebbé teszi a számítást, ha az impulzuserőkkel arányos sebességeket most is sugárirányú (w_m) és az érintő irányába eső (w_u) összetevőkre bontjuk, vagyis, ha itt is a vízszállítással arányos meridiánsebességről és a víz-

szállítástól független keringésről beszélünk. A meridiánsebesség a forgatónyomaték szempontjából hatástalan, tehát a forgatónyomatékot a kerületi impulzuserők közvetlenül maghatározzák. Az *egész* vízáram impulzusnyomatékainak eredője, vagyis a **turbina** tengelyét forgató nyomaték így számítható:

$$M = \frac{V\gamma}{g}(w_{1u}r_1 - w_{2u}r_2) \quad \text{(kgm)}, \tag{63}$$

ahol: $w_{1u}r_1 = \Pi_{1w}$ és $w_{2u}r_2 = \Pi_{2w}$ a belépő-, ill. kilépőpalástón átfolyó egységtömeg perdülete.

A forgatónyomaték eszerint az egységtömeg perdülésváltozásával arányos. Írható:

$$\boxed{M = m\,(\Pi_{1w} - \Pi_{2w})} \quad \text{(kgm)}. \tag{64}$$

28. A körperdület (cirkuláció). A lapátperdület

Az áramlástan a sebességi tér jellemzésére egy tetszőlegesen kijelölt zárt vonal mentén a sebességek érintőleges vetületeinek ún. vonalintegrálját **cirkuláció** (Γ) elnevezéssel veszi számításba. A sebesség dinamikai értelmezésével a **körperdületnek** nevezhető cirkuláció **energetikai** jelentése is érzékelhetővé válik. Eszerint a **körperdület a sebességi térben kijelölt zárt pálya mentén végigvezetett egységtömeg impulzuserőinek a munkája,** azaz általában $\Gamma = \oint c_s ds$, ahol c_s a sebesség érintőirányú vetülete.

A körperdület bevezetésével a **turbina** tengelyén kifejtett forgatónyomaték még a következőképpen is kiszámítható:

A belépősebesség körperdülete: $\Gamma_{1w} = w_{1u}\ 2\pi r_1 = 2\pi\,\Pi_{1w}$,

a kilépősebesség körperdülete: $\Gamma_{2w} = w_{2u}\,2\pi r_2 = 2\pi\,\Pi_{2w}$,

és ezek figyelembevételével a (64) egyenlettel kifejezett forgatónyomaték:

$$\boxed{M = \frac{m}{2\pi}(\Gamma_{1w} - \Gamma_{2w})} \quad \text{(kgm)}. \tag{65}$$

(Az adott esetben ugyanis a vonalintegrál a belépő- és a kilépőpalástón *egyenletes* sebességeloszlás miatt rendkívül egyszerűen számítható.)

A z lapátú kerék egy-egy csatornáján átáramló mennyiség tömege: $m_1 = m/z$. Ennek perdületváltozásából a tengelyre átvitt forgatónyomaték: $M_1 = M/z$. A forgatónyomatékot az ún. **lapátperdület** (Γ_z) fogalmának a bevezetésével a (65) egyenlet mintájára a következő egyszerű számítás adja:

$$\boxed{M = \frac{m}{2\pi} z\,\Gamma_z} \quad \text{(kgm)}, \tag{66}$$

ahol: $\Gamma_z = (\Gamma_{1w} - \Gamma_{2w})/z$ a *lapátperdület*, vagyis az *egy lapát* körül kijelölt *zárt vonalra kiszámított körperdület.*

A lapátperdület kiszámítása rendszerint igen egyszerű, ha a zárt vonalat az *54. ábra* szerint alkalmasan választjuk meg.

Az adott esetben az (*ABCDA*) zárt vonalat pl. két szomszédos csatorna középvonalán át vezetjük, amelyekben a w_k sebesség ugyanakkora. A vonalintegrál számításából eszerint az egymást kiegyensúlyozó *BC* és *DA* szakaszok kiesnek, az *AB* és *CD* körívek viszont a *z* részre osztott belső, illetőleg külső palástkerületnek *osztás*ai, amelyek mentén a sebességeloszlás egyenletes. A lapátperdület mint vonalintegrál tehát könnyen kiszámítható, s a *z* lapátszámmal szorozva az egész kerék körperdületét adja, amely a (66) egyenlet szerint a forgatónyomaték nagyságát is meghatározza.

29. Az elosztott (lineáris) lapátterhelés

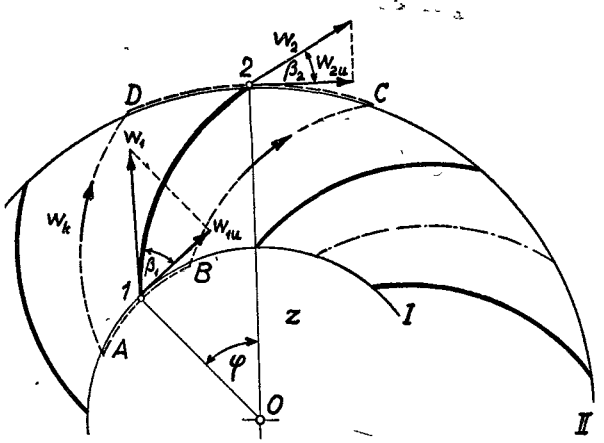
A 25. és 26. pontban (az *51. ábra* szerint) a párhuzamos áramlásra korlátozott dinamikai vizsgálat során az elosztott lapátterhelés (q) jelentőségét már felismertük.

Ennek az elosztot lapátterhelésnek (q_k) közepes értékét az *53. és 54. ábra* kapcsán tárgyalt radiális átömlésű kerékre átvitt M forgatónyomatékból lehet kiszámítani. Ez viszont a (66) egyenlet szerint a Γ_z lapátperdülettel arányos.

Az l_m meridiánhosszúságú lapátra nehezedő $P_{1u} = q_k l_m$ erő karja ugyanis (közelítően): $r_k = (r_1 + r_2)/2$; az egész nyomaték tehát (z lapátra): $M = zP_{1u}r_k$.

Helyettesítés és rendezés után a lapátterhelés közepes értékét kifejező egyenlet:

$$q_k = m\frac{\Gamma_z}{2\pi r_k l_m} = \frac{m\Gamma_z}{F} \text{ (kgm)}. \qquad (67)$$



54. ábra. Radiális átömlésű járókerék (lapátcsillag) lapátperdülete

A (67) egyenlet nevezője: $F = 2\pi r_k l_m$ nem más, mint a tengelyszimmetriás kétméretű sebességi térnek a kerék belépő- és kilépőkörrel határolt felülete. Az ábrában vázolt egyszerű esetben az átáramlás sugárirányú, a síkbeli áramlás sebességi tere tehát: $l_m = r_2 - r_1$ szélességű körgyűrű.

30. A hatásos lapáterő. Kutta—Zsukovszkij tétele

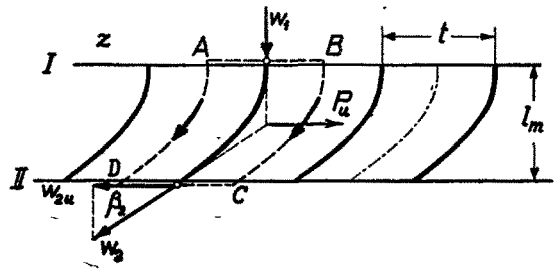
A 26. pontban a *párhuzamos* áramlás esetére a lapáterőnek a meridiánsebességre merőleges összetevőjét — az ún. **hatásos lapáterőt** már meghatároztuk. Tengelyszimmetriás áramlásra a (67) egyenlet adja a megoldást ($P_{1u} = q_k l_m$). Az átfolyó másodpercenkénti vízáram az r_k sugarú, b_k szélességű palást felületével

és a c_{m1} meridiánsebességgel a következő alakban helyettesíthető: $m\,g/\gamma = V = 2\,\pi\,r_k b_k c_{m1}$ és ezzel, rendezés után írható:

$$P_{1u} = \frac{\gamma}{g}\, c_{mk}\, \Gamma_z\, b_k \quad \text{(kg)}. \tag{68}$$

A hatásos lapáterő eszerint **a folyadék sűrűségével, meridiánsebességével és a lapátperdülettel arányos.**

Ez az itt csak kerülő úton levezetett tétel szabatos fogalmazásban **Kutta—Zsukovszkij** nevéhez fűződik, aki ezzel a hengeres testek hosszegységére ható **felhajtóerő** számításának vetette meg az alapját.



55. ábra. Axiális átömlésű járókerék (lapátrács) lapátperdülete

A Kutta—Zsukovszkij-tétel az *53.* és *54. ábra* kapcsán a tengellyel párhuzamos (axiális) átömlésű járókerék lapátterhelésének meghatározására különösen alkalmas, mert ebben az esetben állandó b szélességgel és állandó c_m meridiánsebességgel számolhatunk, a lapátperdület kiszámítása pedig az *55. ábra* szerint szintén egyszerű.

Az ($ABCDA$) zárt vonalat ugyanis a t lapátosztással eltolt áramvonalakkal határoljuk és ez esetben a lapátperdület:

$$\Gamma_z = (w_{1u} - w_{2u})\, t \quad \text{(m²/mp)}. \tag{69}$$

Az ábrán vázolt esetben $w_1 = 0$.

A (63) egyenlet $V = z\,t\,b\,c_m$ helyettesítéssel szintén a Kutta—Zsukovszkij-féle alakra hozható.

31. A tehermentes lapát. A lapátterhelés eloszlása

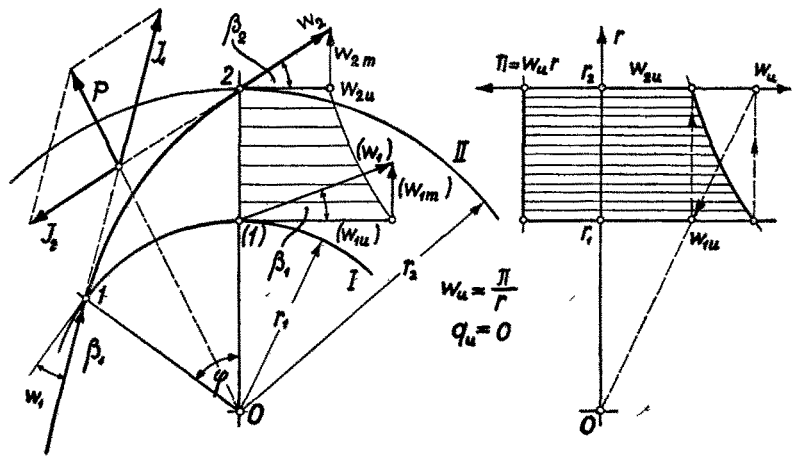
A 27. pont és (64) szerint a járókerék forgatónyomatéka az átfolyó folyadék perdületváltozásával arányos. Minthogy pedig a forgatónyomaték (a 29. pont szerint) a q lapátterhelés nagyságát is meghatározza, tehát a tétel megfordításával azt is kimondhatjuk, hogy a lapát csak akkor lehet tehermentes ($q = 0$), ha az a keréken átáramló folyadék perdületét nem változtatja meg (Π = állandó).

A kétméretű tengelyszimmetriás **szabad áramlást** — mint láttuk — a tengely körüli perdület állandósága ($w_u r$ = állandó) jellemzi, így tehát a tehermentes lapátok alakját a szabad áramlással kialakuló áramvonalak szabják meg. Az áramvonal *értelmezéséből* közvetlenül is következik, hogy az áramlás képe nem változik meg, ha az áramvonal helyébe ideális (vastagság nélküli és surlódásmentes) lapátot helyezünk.

E tétel felismerése a tehermentes lapát egyszerű megszerkesztésére vezet *(56. ábra)*. A lapátgörbe szerkesztését az *56. ábra* szerint a perdület állandóságára kell alapítani, ami azt jelenti, hogy a keringési sebesség sugármenti változása hiperbolikus ($w_u = \Pi/r$.).

Az ezt a feltételt kielégítő lapátgörbére hatásos lapáterő nem nehezedik, amiről úgy is meggyőződhetünk, hogy a belépő és kilépő impulzuserő eredőjét vizsgáljuk.

Egyszerű geometriai szemlélettel (hasonló háromszögek oldalarányainak egyenlőségéből) igazolható, hogy szabad áramlás esetében az impulzuserők P eredője mindig a tengelyen megy át, vagyis nyomatékot nem fejt ki.



56. ábra. Tehermentes lapát

Általános esetben a perdület sugármenti változásából a **lapátterhelés eloszlására** is következtethetünk, vagy megfordítva, a lapátgörbe alakját *állandó lapátterhelés* előírásával is megszerkeszthetjük.

A (64) egyenlet *egy* lapát dr meridiánhosszúságú elemére

$$dM_1 = m_1 \, d\Pi_w$$

alakra hozható, ahol $dM_1 = r \; q \; dr$ és a $d\Pi_w = d(w_u r)$ helyettesítéssel írható:

$$q \, r \; dr = m_1 \; (w_u \; dr + r \; dw_u).$$

Ebből rendezés után a lapátterhelés:

$$q = m_1 \left(\frac{w_u}{r} + \frac{dw_u}{dr} \right) \quad (\mathrm{kg/m}), \tag{70}$$

ahol: $m_1 = m/z$ és $m = V\gamma/g$.

Az állandó perdület feltételét kielégítő ($w_u = \Pi_w/r$) helyettesítéssel a (70) egyenlet valóban $q = 0$ eredményt ad, vagyis e lapát tehermentességét bizonyítja.

Az állandó lapátterhelést biztosító perdületváltozás kifejezésére a (64) egyenlet differenciálalakban egy lapát dr hosszúságú elemére így írható:

$$d\Pi_w = \frac{q}{m_1} r \, dr; \tag{64/a}$$

amiből $q = állandó$ feltétele: $\Pi_w = \Pi_{0w} + \frac{q}{2 m_1} r^2$.

A perdületnek eszerint a sugár négyzetével kell növekednie. A keringési sebesség változásának feltétele pedig:

$$w_u = \frac{\Pi_w}{r} = \frac{\Pi_{0w}}{r} + \frac{q}{2 m_1} r.$$

D) ÁRAMLÁS MOZGÓ CSATORNÁKBAN

Ebben a fejezetben az ún. **sűrű lapátozású** (turbinák és örvényszivattyúk) járókerekében végbemenő energiaátalakulások elméleti alapjait ismertetem. A klasszikus turbinaelmélet oly sűrű lapátozást ír elő, hogy az ún. *lapátrács* vagy *lapátcsillag* **csatornákat** alkosson, amelyekben az átáramló folyadék a lapát görbületével előírt eltérítést szenvedi.

Az ideális eset, amikor az áramvonal alakja pontosan összevág a lapátgörbével: a végtelen sok lapátú járókerék ($z = \infty$) csak annyit jelent, hogy ebben a gyakorlatilag meg nem valósítható esetben a lapátszögek pontosan megszabják a járókerékbe belépő és abból kilépő folyadék sebességének *irányát* és ezzel alapot adnak a **sebességi háromszögek** szabatos megszerkesztéséhez.

Véges z lapátszám esetében is mindaddig, amíg a lapátfelületek meridiánirányban túlfedésben vannak, vagy más szóval; amíg a járókerék lapátozásán nem lehet keresztüllátni, sűrű lapátozásról beszélünk, mert a csatorna biztos kézzel szerkeszthető áramvonal-hálózattal részcsatornákra bontható. A sebességi háromszögek szerkesztésének tehát ebben az esetben sincsen elvi akadálya, legfeljebb arról lehet szó, hogy a szélesebb csatornában egyméretű áramlás feltételezésével (az átlagos sebességgel) szerkesztett sebességi háromszögek igazításra szorulnak. (Az ún. perdületveszteség figyelembevételével vagy a lapátvégek felgörbítésének módszerével itt nem foglalkozom.)

32. Állandó sebességgel haladó csatorna. A sebességi háromszög

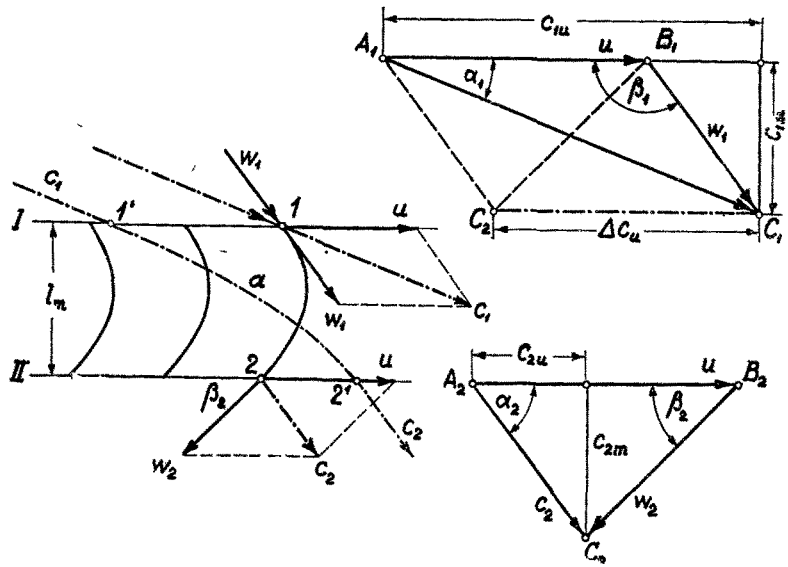
Az *52.* és *55. ábra* kapcsán az álló térhez rögzített párhuzamos átömlésű járókereket vizsgáltunk.

A hatásos *lapáterő* (P_u) munka végzésére is kényszeríthető, ha a lapátsor elmozdulását megengedjük *(turbina)*. Ellenkező irányú elmozdulás viszont csak a lapáterő legyőzéséhez szükséges munka árán létesíthető *(szivattyú)*.

Ha a lapátsor vagy lapátrács (járókerék) a lapáterő hatására egyenletes u sebességgel halad, akkor a szolgáltatott (elméleti) teljesítmény lóerőben:

$$N = \frac{P_u u}{75} \quad \text{(LE)}.$$

Minthogy a lapátsor u sebességgel halad, ennélfogva a csatornában áramló folyadék lapátmenti elmozdulása csak **viszonylagos** mert az álló térben e w viszonylagos (relatív) sebességén felül a lapát u sebességével is előre kell haladnia.



57. ábra. A haladó lapátrács sebességi háromszögei

A sebességi viszonyokat az *57. ábra* mutatja, amely az u sebességgel előrehaladó lapátsort szemlélteti. A $\bar{w}_1$ viszonylagos sebességgel belépő vízmennyiség **teljes** (abszolút) sebessége a w_1 és u sebességi összetevők vektoriális összege; azaz **eredője** ($\bar{c}_1 = \bar{w}_1 + \bar{u}$). Ez az eredő a közismert paralelogramszerkesztés helyett az ún. vektorháromszögből ($A_1B_1C_1$) is kiadódik, amelyet **sebességi háromszögnek** nevezünk, és rendszerint az u sebességre mint alapra rajzolunk.

A **belépő**sebességi háromszög egyik belső szöge, α_1 a **teljes sebesség** vektorszöge. Ez turbina esetében az a hegyes szög, amellyel a víz az álló térből (a vezetőkerékből) a járókerékbe **irántörés nélkül** léphet be. A háromszög másik belső szöge, a β_1 lapátszög, a w_1 viszonylagos sebesség vektorszögét 180°-ra kiegészíti.

A kerékből w_2 viszonylagos sebességgel (β_2 szög alatt) kilépő vízsugár **teljes sebessége** a **kilépő**sebességi háromszögből ugyancsak az u sebességnek vektoriális hozzáadásával adódik ($\bar{c}_2 = \bar{w}_2 + \bar{u}$).

A c_2 kilépősebesség vektorszöge, α_2, turbina esetében közelítse meg a derékszöget ($\alpha_2 = 90°$ legyen), mert a járókereket elhagyó víz áramlása csak ebben az esetben **perdületmentes.**

Az *57. ábrában* a *teljes* (abszolút) sebességnek a haladás irányába eső (c_u keringési) és az erre merőleges (c_m meridián-) összetevőjét is megszerkesztettem, és ezenfelül az *52. ábrában* az impulzuserők meghatározására vezető ún. **eltérítési háromszöget** is berajzoltam.

Minthogy (a lapátvastagság figyelmen kívül hagyásával) **állandó meridiánsebességgel** számolhatunk ($c_{1m} = c_{2m}$), tehát a kilépősebességi háromszög A_2B_2 alapja az A_1B_1 alapra helyezhető, és akkor a C_1 és C_2 csúcsok (vízszintes) távolsága a $\Delta c_u = c_{1u} - c_{2u}$ (teljes) sebességváltozást adja. Ez — haladómozgás esetén — a hatásos lapáterőt meghatározó *viszonylagos sebességváltozás számértékével megegyezik*, azaz: $\Delta w_u = w_{1u} - w_{2u} = \Delta c_u$.

A **keringési összetevők** ugyanis (az u sebesség hozzáadásával): $c_{1u} = w_{1u} + u$ és $c_{2u} = w_{2u} + u$.

Különbségük tehát:

$$\Delta c_u = c_{1u} - c_{2u} = w_{1u} - w_{2u} = \Delta w_u \quad \text{(m/mp)}. \tag{71}$$

Az *57. ábrába* a teljesség kedvéért a **haladó lapátsoron** átáramló vízrészeknek az *állótérből megfigyelt* pályáját, az **abszolut vízutat** is berajzoltam (*1′ — 2′* eredményvonal), amely a 26. pont szerint a lapátgörbe felrajzolásához használt poligonszerkesztéssel a *teljes sebesség eltérítéséből* adódik.

33. A járókerék teljesítménye. Az esés és a szállítómagasság. Az Euler-féle turbinaegyenlet

Az u sebességgel **haladó** z **lapátú lapátrács** (axiális átömlésű járókerék) minden csatornáján $V_1 = V/z$ vízáram folyik át.

A hatásos lapáterő a (62) egyenlet szerint, $\Delta w_u = \Delta c_u$ helyettesítéssel:

$$P_{1u} = m_1 \Delta c_u = \frac{V\gamma}{zg}(c_{1u} - c_{2u}) \quad \text{(kg)}. \tag{72}$$

Az axiális átömlésű turbina járókerekének teljesítménye:

$$N = z P_{1u} u = V\gamma \frac{(c_{1u} - c_{2u})u}{g} \quad \text{(mkg/mp)}. \tag{73}$$

Ezt a teljesítményt $V\gamma$ (kg/mp) súlyú vízáram szolgáltatja. A folyadék minden kilogrammjának munkaképessége tehát $N/(V\gamma)$ (mkg/kg) apadást vagy **esés**-t szenved, ha az ideális gépben veszteségmentes energiaátalakulást tételezünk fel.

A (73) egyenlet szerint tehát az **esés** (elméleti értéke):

$$H_e = (c_{1u} - c_{2u})\, u/g \quad \text{(m)}.$$

A következő pontban igazolni fogjuk, hogy a turbina elméleti esését kifejező ún. **Euler-féle turbinaegyenletnek** radiális átömlés ($u_1 \neq u_2$) esetére is érvényes általánosabb alakja:

$$H_e = \frac{c_{1u} u_1 - c_{2u} u_2}{g} \quad \text{(mkg/kg)}. \tag{74}$$

Az Euler-féle alapegyenlet szivattyúra **negatív** esést eredményez; ennek pozitív előjellel vett értékét **szállítómagasságnak** nevezzük. A szállítómagasság eszerint a súlyegység munkaképességének **megnövekedése** — mechanikai munkafogyasztás árán.

Örvényszivattyú (pozitív előjelű) elméleti szállítómagasságát igen sűrű (elméletileg: $z = \infty$) lapátozás esetére, (74) mintájára (a tagok felcserélésével):

$$H_{e\infty} = \frac{c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1}{g} \quad \text{(mkg/kg)} \qquad (74/s)$$

alakban szokás felírni. Véges lapátozás esetén a perdületveszteség miatt: $H_e < H_{s\infty}$.

Ez az Euler-egyenlet a legegyszerűbben a belépő- és kilépőmennyiség munkaképességének egybevetésével (az energiamérlegnek felállításával) származtatható le [37].

A sebesség **dinamikai** értelmezése szerint (26. pont) a (74) egyenlet számlálója az egységtömeg impulzuserőinek munkateljesítményét adja, amelyet a súlyegység tömegével ($1/g$) szorozva, a súlyegységre vonatkoztatunk.

34. A radiális átömlésű járókerék forgatónyomatéka és teljesítménye.

A lapátterhelés nagysága és eloszlása az egyenletes sebességgel **haladó lapátrácsban** a haladás sebességétől független (32. pont), mert az álló térből szemlélt teljes sebesség ($\bar{c} = \bar{w} + \bar{u}$) a viszonylagos sebességtől csak egy **állandóban** különbözik, amely tehát impulzuserőt nem eredményez.

Egészen mások azonban a viszonyok az ún. **lapátcsillag** esetében, amelynek lapátterhelését **álló** helyzetben a 31. pont szerint a (70) egyenlet fejezi ki.

Az egyenletes ω szögsebességgel **forgó** lapátcsillagban az $u = r\omega$ kerületi sebesség a lapát minden pontjában más. A keréken átáramló folyadéktömeg ennélfogva a forgásból eredő impulzusváltozást szenved, amelynek következtében a forgatónyomaték és a lapátterhelés is megváltozik.

A 31. pontban ismertetett gondolatmenettel abból indulhatunk ki, hogy a lapátterhelés a perdületváltozással arányos.

Minthogy pedig a perdületet a sebességeknek csak a keringési összetevője adja, ennélfogva — a $c_m = w_m$ meridiánsebesség figyelmen kívül hagyásával — a vizsgálatot *két lépésben* végezhetjük el, mert a *forgó* lapátcsillagon átáramló folyadéktömeg teljes (abszolút) keringési sebességét az *álló* rendszer keringési sebességéből a *vele azonos irányú* kerületi sebesség egyszerű hozzáadásával kapjuk ($c_u = w_u + u$), a sebességgel arányos mennyiségek egymásrahelyezhetőségének elve tehát alkalmazható.

Ha tehát az **álló** lapátcsillag tetszőleges alakú lapátgörbéjének elosztott terhelése az r sugár függvényében a (70) egyenlet szerint:

$$q_w = m_1 \left(\frac{w_u}{r} + \frac{\mathrm{d}w_u}{\mathrm{d}r} \right) \qquad \text{(kg/m)},$$

ahol $m_1 = V\gamma/(zg)$ az egy csatornán átfolyó mennyiség tömege és $w_u r = \Pi_w$ a *viszonylagos perdület*, akkor ehhez a lapátterheléshez a **kerék forgásából** származó $\Pi_u = u\,r$ *kerékperdület* változásával arányos q_u lapátterhelés egyszerűen hozzáadódik.

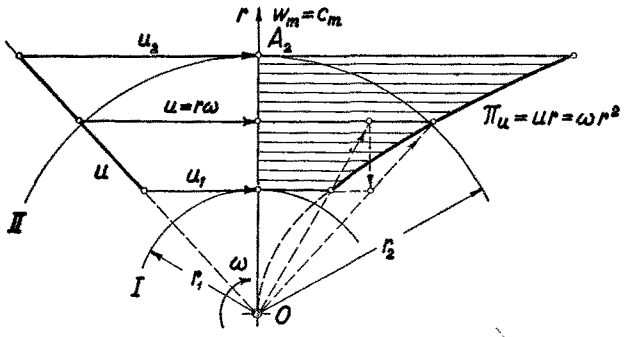
A két lapátterhelés algebrai összege természetesen a teljes (c_u) sebesség perdületváltozásából közvetlenül is kiszámítható.

A kerékperdület változását az *58. ábra* szemlélteti. A kerületi sebesség, $u = r\omega$, annak perdülete tehát a sugár négyzetével arányos, azaz:

$$\Pi_u = \omega r^2 \qquad (\mathrm{m^2/mp}), \tag{75}$$

ahol ω = *állandó*.

Sugárirányú (perdületmentes) átömlés esetén ($w_u = 0$) az **álló** lapátcsillag lapátjai tehermentesek ($q_u = 0$). **Forgás** esetén tehát a kerékperdületből szár-



58. ábra. A kerületi sebesség perdülete

mazó lapátterhelés adja az egész terhelést, amelynek nagysága, a (70) egyenlet mintájára:

$$q_u = m_1 \left(\frac{u}{r} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \right) = 2 m_1 \omega \qquad (\mathrm{kg/m}). \tag{76}$$

A zárójeles összeg első és második tagja ugyanis külön-külön a szögsebességet adja, mert $u = \omega r$ és $\mathrm{d}u = \omega\, \mathrm{d}r$.

Meg kell jegyezni, hogy a kerék forgásából származó lapátterhelés nem más, mint az átáramló folyadéktömeg **Coriolis**-féle gyorsulásából ébredő tehetetlenségi erő, amely a forgás irányába esik, vagy a forgással ellentétes, aszerint, amint az átömlés centripetális vagy centrifugális.

A kerékperdületből származó **Coriolis-lapátterhelés** a (76) egyenlet szerint a szögsebességgel arányos. Könnyen igazolható az is, hogy e lapátterhelés a lapát alakjától és hajlásszögétől függetlenül állandó, és **lapátmenti eloszlása mindenkor egyenletes.** [37].

Az üzemi lapátterhelés az egymásrahelyezhetőség elvének alkalmazásával:

$$q = q_w + q_u = m_1 \left(\frac{w_u}{r} + \frac{\mathrm{d}\, w_u}{\mathrm{d}r} + 2\omega \right). \tag{77}$$

Vagy a teljes sebesség ($c = w_u + u$) keringési összetevőjének helyettesítésével

$$\boxed{q = \frac{V\gamma}{zg} \left(\frac{c_u}{r} + \frac{\mathrm{d}c_u}{\mathrm{d}r} \right)} \qquad (\mathrm{kg/m}). \tag{78}$$

A sűrű lapátozású járókerék lapátterhelését kifejező (77) és (78) egyenletek megalkotásával azt a feladatot igyekeztem megoldani, hogy lapátterhelés egyenletes eloszlásának feltételét a lapátgörbe kialakításával lehessen előírni. Ez a kérdés szorosan összefügg a kavitáció veszélyének kizárásával is, mert a (lineáris) lapátterhelés a Δp lapátnyomást is meghatározza. ($q = \Delta p\, b$, ahol b a csatorna szélessége.)

Ezek az összefüggések arra a következtetésre vezetnek, hogy az **álló helyzetben tehermentes lapát** ($q_w = 0$) **terheléseloszlása minden fordulatszámnál egyenletes.** Ilyen esetben a lapátterhelés a fordulatszámmal arányos és a (76) egyenletből számítható.

A radiális járókerék forgónyomatékát és teljesítményét a **teljes** (abszolút) **perdület** változásából a (63) és (64) egyenlet adja.

$$\text{A forgatónyomaték, } M = \frac{V\gamma}{g}\,(c_{1u}\,r_1 - c_{2u}\,r_2) \quad \text{(kgm)}. \tag{79}$$

$$\text{A teljesítmény, } N = M\,\omega = \frac{V\gamma}{g}\,(c_{1u}\,u_1 - c_{2u}\,u_2) \quad \text{(mkg/mp)}. \tag{80}$$

A járókerékben mechanikai munkává átalakított *esés* elméleti értéke tehát ebben az esetben is az *Euler*-féle (74) turbinaegyenletből számítható.

Ezek az összefüggések a turbina és az örvényszivattyú járókerekének méretezésével és a lapátgörbe szerkesztésénél találnak gyakorlati alkalmazást. A méretezésnél azonban a **valóságos** folyadéknak a tökéletes folyadéktól *eltérő* tulajdonságait is számításba kell venni. Erre való tekintettel a tökéletes folyadékra talált eredményeket utólagos **igazítással** hozzuk összhangba a valósággal.

30. példa. Egy **Francis-turbina** járókerekének külső átmérője: $D_1 = 800$ mm, fordulatszáma: $n = 750$/perc. A belépőpalást szélessége: $b_1 = 160$ mm.

A kerületi sebesség, $\omega = n/9{,}55 = 750 : 9{,}55 = 78{,}5$ mp^{-1} értékkel:

$$u_1 = r_1\,\omega = 0{,}4 \cdot 78{,}5 = 31{,}4\ \text{m/mp}.$$

A belépősebesség meridiánösszetevője: $c_{1m} = 6{,}0$ m/mp, keringési összetevője: $c_{1u} = 28$ m/mp. A kilépés perdületmentes ($\Pi_2 = 0$, $c_{2u} = 0$).

A turbina **víznyelése,** vagyis a járókeréken átfolyó vízáram:

$$V = D_1\,\pi\,b_1\,c_{1m} = 0{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}16 \cdot 6{,}0 = 2{,}4\ \text{m}^3\text{/mp},$$

ennek tömege:

$$\mathbf{m} = \frac{V\gamma}{g} = \frac{2{,}4 \cdot 1000}{9{,}81} = \mathbf{244\ kg\ mp\ m^{-1}}.$$

A kerékre átvitt forgatónyomaték, ((79) szerint):

$$\mathbf{M} = m\,c_{1u}\,r_1 = 244 \cdot 28 \cdot 0{,}4 = \mathbf{2720\ kg\ m},$$

a teljesítmény pedig:

$$\mathbf{N} = \frac{M\,\omega}{75} = \frac{2720 \cdot 78{,}5}{75} = \mathbf{2850\ LE}.$$

A kerékbe vezetett (elméleti) esés (74) szerint, $c_{2u} = 0$ értékkel:

$$\mathbf{H}_e = \frac{c_{1u}\,u_1}{g} = \frac{28 \cdot 31{,}4}{9{,}81} = \mathbf{89{,}4\ m}.$$

31. példa. Egy centrifugális átömlésű **örvényszivattyú** járókerekének belépőpalástátmérője: $D_1 = 260$ mm, külső palástátmérője: $D_2 = 500$ mm. A lapátszám, $z = 8$.

A járókerék fordulatszáma: $n = 960$/perc.

A kerületi sebesség:

$$u_2 = \frac{D_2 \pi n}{60} = \frac{0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 960}{60} = \mathbf{25{,}2\ m/mp.}$$

A kilépősebesség keringési összetevője: $c_{2u} = 18{,}0$ m/mp, a kerék elméleti szállítómagassága tehát (74) szerint (ellenkező előjellel), perdületmentes belépés esetére ($c_{1u} = 0$):

$$H_e = \frac{c_{2u} u_2 - c_{1u} u}{g} = \frac{18 \cdot 25{,}2}{9{,}81} = \mathbf{46{,}1\ m.}$$

A szivattyú előírt vízszállítása: $V = 100$ l/mp $= 0{,}1$ m³/mp. A vízemelés elméleti teljesítménye:

$$N_e = \frac{V \gamma H_e}{75} = \frac{0{,}1 \cdot 1000 \cdot 46{,}1}{75} = \mathbf{61{,}5\ LE.}$$

A **lineáris lapátterhelést** oly (hátragörbített) lapátalakra számítjuk ki, amely a $\Pi_c = c_u r$ perdületet sugárirányban **lineárisan** növeli a $\Pi_1 = c_{1u} r_1 = 0$ kezdőértékről a $\Pi_2 = c_{2u} r_2$ kilépőperdület nagyságára.

A $c_u(r)$ függvény egyenlete erre az esetre, $\Pi_1 = 0$ helyettesítéssel:

$$c_u = \frac{\Pi_c}{r} = \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{r_2 - r_1} \frac{r - r_1}{r} = \frac{\Pi_2}{r_2 - r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right).$$

Ezzel, a (78) egyenlet szerint:

$$\frac{c_u}{r} = \frac{\Pi_2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{r_1}{r^2}\right) \quad \text{és} \quad \frac{\mathrm{d}\, c_u}{\mathrm{d}\, r} = \frac{\Pi_2}{r_2 - r_1} \frac{r_1}{r^2}.$$

A **lineáris lapátterhelés,** helyettesítés és rendezés után:

$$q = \frac{V \gamma}{z g} \frac{\Pi_2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{r_1}{r^2} + \frac{r_1}{r^2}\right) = \frac{V \gamma}{z g} \frac{\Pi_2}{r_2 - r_1} \frac{1}{r}.$$

A lineáris lapátterhelés **legnagyobb értéke** az r_1 sugarú belépőélen, $\Pi_2 = 18 \cdot 0{,}25 = 4{,}5$ m²/mp és $r_2 - r_1 = 0{,}25 - 0{,}13 = 0{,}12$ m helyettesítéssel:

$$q_1 = \frac{0{,}1 \cdot 1000}{8 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{4{,}5}{0{,}12} \cdot \frac{1}{0{,}13} = \mathbf{368\ kg/m.}$$

A lapátnyomás a csatorna b szélességétől függ. Ezt $c_m = 2{,}5$ m/mp $=$ *állandó* meridiánsebességre a $V = 2 \pi r b c_m$ egyenletből határozzuk meg. Írható:

$$b = \frac{V}{2 \pi c_m r} \quad \text{és} \quad \Delta p = \frac{q}{b} = \frac{V \gamma}{z g} \frac{\Pi_2}{r_2 - r_1} \frac{1}{r} \frac{2 \pi \gamma c_m}{V} r = \frac{2 \pi \gamma}{z g} \frac{c_m c_{2u} r_2}{r_2 - r_1}.$$

A legnagyobb kerékszélesség:

$$b_1 = \frac{0{,}1}{6{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}13} = 0{,}049\ \mathrm{m};\ \text{(azaz kereken 50 mm).}$$

A lapátnyomás pedig:

$$\Delta p = \frac{6{,}28 \cdot 1000}{8 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{2{,}5 \cdot 18 \cdot 0{,}25}{0{,}12} = 7500 \text{ kg/m}^2\text{; azaz: } \mathbf{0{,}75 \text{ kg/cm}^2}.$$

A választott lapátgörbe állandó c_m meridiánsebesség esetében az egész lapát mentén **egyenletes nyomáseloszlást** biztosít.

Az adott esetben a lapátnyomás a légköri nyomásnak kereken háromnegyed része, ami a **kavitációveszély** miatt egészen kis szívómagasság választását indokolja

E) SZÁRNYLAPÁTOS VÍZGÉPEK JÁRÓKEREKE

A kisesésű vízerőművek nagy víznyelésű turbinái, valamint a nagy vízhozamú átemelő- és öntözőszivattyúk esetében a **szárnylapátos járókerék** (propeller) alkalmazásával jutunk oly korszerű vízgéphez, amely egyszerű szerkezeténél fogva, kis méreteivel és jó hatásfokával a korszerű üzemek felfokozott igényeit is ki tudja elégíteni.

A szárnylapátos járókerék lapátozása annyira ritka, hogy abban nem is találunk klasszikus értelemben vett csatornákat, ennélfogva ez alapon áramvonalak és ezekre illeszkedő sebességi háromszögek szerkesztése is bizonytalanná, sőt lehetetlenné válik.

A sebességi háromszögek szabatos szerkesztéséhez és a szárnylapátos gépek szerkezettanának és üzemtanának megalkotásához az **aerodinamikai** elméleti és kísérleti kutatások eredményei adnak lehetőséget. Ezek *szárnyszelvény-táblázatok* alakjában váltak közkinccsé, amelyekre itt csak röviden utalok [24]. A szárnyszelvény jellemzői közül is csak annyit ismertetek, amennyi az itt alkalmazott *dinamikai* szerkesztési elv megértéséhez feltétlenül szükséges.

35. A szárnyszelvény fontosabb jellemzői

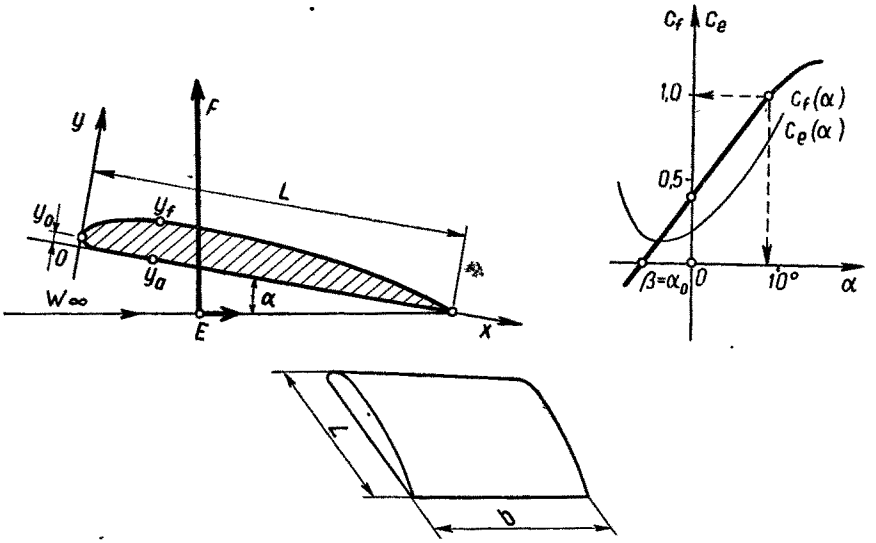
A szárnyszelvény-táblázatok nagyszámú és változatos alakú szelvények méreteit és dinamikai jellemzőit táblázatokba foglalva és függvényábrák alakjában adják az aerodinamikai intézetek *(Göttingen, NACA)* szélcsatornáiban végzett mérések eredményeképpen (vö. az *59. ábrával*).

A szelvény körvonalait rendszerint a szelvény homorú oldalához illesztett derékszögű koordináta-rendszer x és y koordinátáival a szelvény L hosszúságának százalékában szokás előírni. A kezdőpontot az *59. ábra* szerint a szelvény *orrához* helyezzük ($x = 0$, $y = y_0$). Az x abszcisszákhoz tartozó y_f ordináták a szelvény felső domború oldalának pontjait adják, az alsó pontok y_a ordinátái más alapvonal választása esetén negatív előjelűek is lehetnek. Az orr környezetében a pontok sűrített felvétele indokolt.

Így például az *59. ábrán* vázolt *Göttingeni 436. számú szelvény* viszonylagos méretei a következők:

x	0,0	1,25	2,5	5,0	7,5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	95	100
y_f	2,5	4,7	5,7	7,0	8,1	8,9	10,05	10,75	11,0	10,45	9,55	8,2	6,6	4,6	2,45	1,25	0
y_a	2,5	1,0	0,5	0,1	0,05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A szelvény α **állásszögével** a „megfúvás" irányát jelöljük ki, vagyis azt a szöget, amelyet — jóval a szelvény előtt **párhuzamos** és **egyenletes** áramlást tételezve fel — a w_∞ sebességi vektor a szelvény alapvonalával bezár. A szelvény orrának emelésével az α állásszög növekszik és ezzel együtt (bizonyos határig) csaknem arányosan megnagyobbodik a megfúvás irányára merőleges F (dinamikus) **felhajtóerő** is (vö. az *59. ábrával*).



59. ábra. A szárnyszelvény fontosabb jellemzői

A szelvénytáblázatok az F felhajtóerőt a w_∞ megfúvási sebességből számítható ún. torlónyomáshoz ($\varrho\, w_\infty^2/2$) viszonyított értékével, a *felhajtóerő* $\mathbf{c}_f$ *tényezőjével* adják meg, azaz:

$$F = \frac{\varrho}{2} w_\infty^2 \, Lb \, \mathbf{c}_f, \tag{81}$$

ahol: $\varrho = \gamma/g$ a folyadék sűrűsége, $L\,b$ pedig a b terjedtségü szárny felülete.

Itt említem meg, hogy a szelvénytáblázatok a $\mathbf{c}_f$ felhajtóerő-tényezővel együtt a w_∞ megfúvási sebesség irányába eső E **ellenállást** meghatározó $\mathbf{c}_e$ ellenállástényezőt is megadják. Ennek a tényezőnek szerepe a járókerék veszteségeinek szabatos számítását teszi lehetővé.

Írható:

$$E = \frac{\varrho}{2} w_\infty^2 \, Lb \, \mathbf{c}_e. \tag{82}$$

Minthogy azonban tökéletes folyadékban $E = 0$, tehát az ellenállás kérdésével itt tovább nem foglalkozom.

Ki kell azonban emelni, azt, hogy a szélcsatornakísérletek fentebb ismertetett eredményei **véges** b **terjedtségű** szárnyakra vonatkoznak. Európában $L/b = 1/5$ oldalviszony előírása vált szabványossá (Göttingen), Amerikában az 1/6 oldal-

viszony a szokásos (NACA). Mindkét esetben kisebb felhajtóerőtényezőt és nagyobb ellenállás-tényezőt kapunk, mint akkor, ha a szárny kiterjedését *végtelen nagyra* nyújtjuk ($b = \infty$; $L/b = 0$), vagy hogyha — párhuzamos lapok között létrehozott folyadékáramban — a határoló falak a szárnyvégeken a nyomás kiegyenlítődését megakadályozzák.

A szárnylapátos gép járókerekét a tengelyirányú (axiális) átömlésű forgástér zárja körül (vö. a *60.* és a *61. ábrával).* A szárnylapátokat mindkét végükön falak határolják, mégpedig belül a D_b átmérőjű kerékagy, kívül pedig (a rés befolyásának figyelmen kívül hagyásával) a D_k átmérőjű hengerpalást. A lapát szárnyszelvényeinek véges oldalviszonyra megadott jellemzőit tehát *át kell számítani* a végtelen terjedtségű szárnyra.

A szelvények fentebbiek szerint választott, ill. átszámított jellemzői magában álló lapátra vonatkoznak. A szelvényekből alkotott lapátsor, vagyis az ún. **szárnyrács** jellemzői az ún. **rácshatás** következtében általában annál inkább módosulnak, mennél sűrűbb a rács, vagyis mennél kisebb a z lapátszámtól függő t rácsosztásnak t/L viszonylagos értéke.

Ha a gép lapátozása igen ritka ($t/L \gg 1$), akkor a rácshatás figyelmen kívül hagyható, ellenkező esetben a felhajtóerő-tényezőt alkalmasan választott rácshelyesbítési tényezővel kell igazítani. Ilyenkor a $\mathbf{e}_f$ tényező megengedhető legnagyobb értékét is óvatosabban kell megválasztani, mert a felhajtóerő rácselrendezésben az állásszög növelésével nem változik abban a mértékben, mint az egyedül álló szelvényen.

Ezeknek az átszámításoknak szükségességére itt csak utalok, és azt is csak megemlítem, hogy a járókerék radiális lapátjainak kiválasztott szárnyszelvényét csak az r_b sugarú agynál (a lapát tövében) szokás eredeti vastagságban megvalósítani. A kerület felé haladva, rendszerint *ugyanennek a szelvénynek* mindjobban **megvékonyított** alakját alkalmazzuk például oly módon, hogy a külső kerületen a szelvény viszonylagos vastagságát az eredeti érték 40%-ára kisebbítjük. Ezzel az alapvonalra történő vékonyításnál a szelvény íveltsége és ezzel együtt a felhajtóerő tényezője is kisebbedik. A szükséghez képest ezenfelül még — az új méretarányok megtartásával — a szelvény L hosszúsága és α állásszöge is megváltoztatható.

Végül még itt kell megemlítenem azt is, hogy a szárnyszelvény-táblázatokban található szelvények — főleg nyomáseloszlás tekintetében — nem mindig elégítik ki a vízerőgépek üzemi követelményeit. Ilyenkor a **kavitációveszély** biztos elhárítása érdekében a szelvénymenti nyomáseloszlást írjuk elő, és ennek alapulvételével számítjuk ki a szárnyszelvény jellemző méreteit. A szárnyszelvények előretervezésére vonatkozó kiterjedt szakirodalomra itt csak utalok [21, 65, 67].

36. A szárnylapátos vízgépek fontosabb jellemzői

Az axiális átömlésű vízgépek járókerekének radiális lapátozását fentiek szerint az jellemzi, hogy *minden r sugarú hengerpalásthoz más szelvényt kell választani.* Ezek vizsgálata tehát csak egy-egy dr vastagságú járókerék-elemre korlátozható. Az r sugarú szelvényelem $b = \mathrm{d}r$ kiterjedésének megfelelő *felhajtóerő* eszerint (81) alapján:

$$\mathrm{d}F = \frac{\varrho}{2} w_\infty^2 \, L \, \mathbf{e}_f \, \mathrm{d}r. \qquad (81/d)$$

A $2\pi r\,\mathrm{d}r$ felületű gyűrűelemen *állandó* c_m meridiánsebességgel átáramló *folyadékmennyiség*:

$$\mathrm{d}V = 2\pi r c_m\,\mathrm{d}r\,. \tag{83/d}$$

A $D_k = 2r_k$ külső átmérőjű és $D_b = 2r_b$ agyméretű járókeréken átfolyó teljes folyadékáram pedig:

$$V = (r_k^2 - r_b^2)\,\pi\,c_m = (1 - \mu^2)\,r_k^2\,\pi\,c_m, \tag{83}$$

ahol $\mu = r_b/r_k = D_b/D_k$ a kerékagy viszonylagos vastagsága.

Az ω szögsebességgel forgó járókeréknek egy-egy r sugarú, $u = r\omega$ kerületi sebességgel haladó eleme $t = 2\pi r/z$ osztású szárnyrácsot alkot, amely síkba fejthető (vö. a *60.* és a *62. ábrával*).

A lapátsor oly ritka, hogy két szomszédos szárnyszelvény nem is alkot belépő- illetve kilépőszöggel jellemezhető csatornát, és ennélfogva **sebességi háromszögek** (illetve az ezek egymásra helyezésével kapott eltérítési háromszög) szerkesztésére közvetlenül nem ad lehetőséget.

Alább ismertetett **erőtani** számítással azonban a szárnyszelvény dinámikai jellemzőinek felhasználásával a szárnyrácson átáramló folyadék **eltérítési háromszöge** a lapátszögek ismerete nélkül is meghatározható. Ez a számítás tehát a *klasszikus turbinaelmélet eredményeit összhangba hozza az aerodinamikai szárnyelmélettel.* Szabatosan határozható meg ugyanis a szárnyrácson keresztüláramló folyadék w_0 (viszonylagos) belépési sebessége és annak β_0 belépési szöge (bizonyos távolságban a rács belépősíkja előtt), valamint a ráccsal eltérített áramlás w_3 sebessége és β_3 kilépési szöggel megszabott iránya is.

A **tökéletes gépre** ($\mathrm{d}E = 0$) érvényes számítás menete a *60.* és a *62. ábrában* bemutatott eltérítési háromszögek jelölésével a következő:

A $\mathrm{d}F$ felhajtóerő a járókerék síkjával β_∞ szöget bezáró w_∞ megfúvási sebesség irányára merőleges. Két összetevője tehát: a $\mathrm{d}T_e = \mathrm{d}F \sin\beta_\infty$ kerületi erő és a $\mathrm{d}S_e = \mathrm{d}F \cos\beta_\infty$ axiális erő.

A kerületi erőnek $\mathrm{d}T_e$ elméleti értéke a z lapátú kerék egy csatornáján átfolyó $\mathrm{d}V_1 = \mathrm{d}V/z$ mennyiség $m_1 = \varrho\, c_m\, t\,\mathrm{d}r$ tömegének impulzuserejével tart egyensúlyt, azaz:

$$\mathrm{d}T_e = \Delta c_u\, m_1 = \varrho\, \Delta c_u\, c_m\, t\,\mathrm{d}r, \tag{84}$$

ahol $\Delta c_u = c_{3u} - c_{0u} = w_{0u} - w_{3u}$ szivattyú esetén a forgás irányában sebességnövekedést, turbina esetén pedig sebességapadást jelent.

Ennek a $\mathrm{d}T_e$ erőnek a teljesítménye az u kerületi sebességgel futó lapátelem kerületén: $u\,\mathrm{d}T_e$.

A **szivattyúlapát** ezt a teljesítményt viszi át a másodpercenként átáramló $G_1 = m_1 g$ (kg) súlyú folyadékra.

A járókeréken átáramló folyadék munkaképességének megnövekedése a súlyegységre vonatkoztatott H_e (elméleti) **szállítómagassággal** is kifejezhető (vö. a 33. ponttal), azaz írható:

$$u\,\mathrm{d}T_e = u\,\Delta c_u\, m_1 = H_e\, m_1\, g,$$

amiből:

$$\boxed{H_e = \frac{\Delta c_u u}{g}}\,. \tag{85}$$

Az impulzustétel alkalmazásával tehát ismét a közismert *Euler*-féle turbinaegyenlethez jutottunk, amely **turbinalapát** esetében az átáramló folyadék energiaapadását, vagyis az (elméleti) **esést** fejezi ki.

A dS_e elméleti axiális erő szivattyú esetén a (veszteségmentes) járókerékelem $t\,dr$ felületére nehezedő Δp_e elméleti nyomásemelkedés $\Delta p_e/\gamma$ nyomásmagasságával (az ún. potenciális szállítómagassággal) is kifejezhető, amely a csatornán w_0 sebességgel belépő és w_3 sebességgel kilépő folyadék lendülete apadásából számítható. Írható:

$$\frac{\Delta p_e}{\gamma} = \frac{w_0^2 - w_3^2}{2g}, \quad \text{azaz:} \quad \Delta p_e = \frac{\varrho}{2}(w_0^2 - w_3^2). \tag{86}$$

A $t\,dr$ felületen létrehozott Δp_e nyomásból tehát írható:

$$dS_e = \Delta p_e\, t\, dr = \frac{\varrho}{2}(w_0^2 - w_3^2)\, t\, dr.$$

Az eltérítési háromszögből egyszerű szemlélettel igazolható, hogy $w_m = c_m$ állandó meridiánsebesség esetére:

$$w_0^2 - w_3^2 = w_{0u}^2 - w_{3u}^2 = (w_{0u} + w_{3u})(w_{0u} - w_{3u}),$$

ahol: $w_{0u} - w_{3u} = \Delta c_u$.

Írható tehát:

$$dS_e = \varrho \frac{w_{0u} + w_{3u}}{2} \Delta c_u\, t\, dr. \tag{87}$$

A két erő hányadosa, mint eredőjük iránytangense a (84) és (87) egyenletből:

$$tg\,\varepsilon = \frac{dT_e}{dS_e} = \frac{c_m}{\frac{1}{2}(w_{0u} + w_{3u})} = \frac{c_m}{w_{0u} - \frac{1}{2}(\Delta c_u)} = \frac{c_m}{w_{3u} + \frac{1}{2}(\Delta c_u)}. \tag{88}$$

A két erő eredője azonban másfelől nem más, mint a tengellyel, β_∞ szöget bezáró dF felhajtóerő.

Így tehát

$$\varepsilon \equiv \beta_\infty \quad \text{és} \quad tg\,\varepsilon \equiv tg\,\beta_\infty$$

A (88) egyenlet utasítást ad a „megfúvás" β_∞ irányszögének szabatos szerkesztésére. (Vö. a *60* és *62. ábrában* szemléltetett eltérítési háromszöggel).

Az ABC_0 és ABC_3 sebességi háromszögekből alkotott eltérítési háromszög $C_0C_3 = \Delta c_u$ alapját a w_∞ vektor C_∞ végpontja pontosan **felezi** ($\overline{C_0C_\infty} = \overline{C_\infty C_3} = \Delta c_u/2$).

Egyszerű szemlélet igazolja, hogy a $C_\infty BA = \beta_\infty$ szög egy olyan derékszögű háromszög belső szöge, amelynek egyik befogója c_m, vagyis a (88) egyenlet *számlálója*, másik befogója pedig a w_0 és w_3 sebességi vektorok keringési összetevőinek számtani közepárányosa, vagyis a (88) egyenlet *nevezője*.

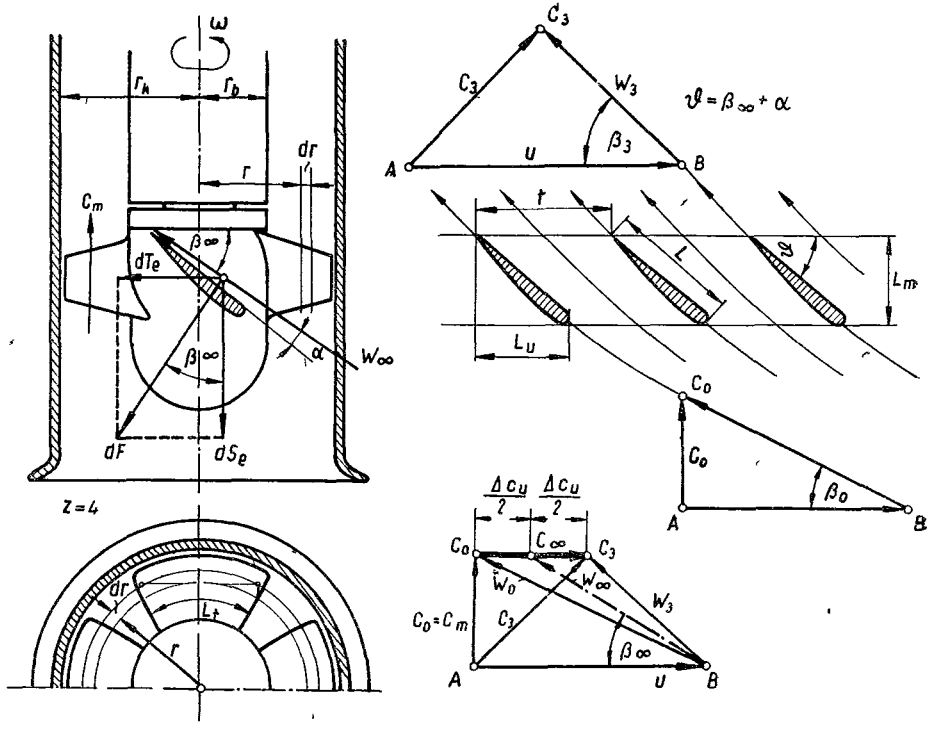
A lapátelem erőjátékának vizsgálatával igazoltuk, hogy a w_∞ megfúvási sebesség vektorának végpontját az eltérítési háromszögben a Δc_u alap **felezőpontja** jelöli ki. Ez az összefüggés a szárnylapátos gép rendeltetésétől független, tehát *turbina* esetére is érvényes.

37. A szárnylapátos szivattyú járókereke

A függőleges tengelyű szárnylapátos szivattyú járókerekének szokásos elrendezését a *60. ábra* mutatja.

Az r sugarú (síkba fejtett) hengerpaláston szerkesztett $\mathrm{d}r$ vastagságú szárnyrács osztása z lapát esetén: $t = 2\pi r/z$.

A kiválasztott szárnyszelvényt a *60. ábra* szerint $\vartheta = \beta_\infty + \alpha$ **beállítási szöggel** illesztjük a tengelyre merőleges síkhoz. Itt β_∞ a megfúvás irányszöge.



60. ábra. Szárnylapátos szivattyú járókerék-eleme. (Síkbafejtett lapátrács)

amely az eltérítési háromszögben a 36. pont szerint (Δc_u felezőpontjának kijelölésével) szerkeszthető, α pedig a szelvénynek $\mathbf{c}_f$ felhajtóerő-tényezőt adó állásszöge.

Ebben az esetben az egy szelvényt terhelő kerületi erő (81/d) alapján, (84) figyelembevételével:

$$\mathrm{d}T_e = \mathrm{d}F \sin\beta_\infty = \frac{\varrho}{2} w_\infty^2 L \mathbf{c}_f \sin\beta_\infty \,\mathrm{d}r = \varrho \,\Delta c_u c_m t \,\mathrm{d}r, \tag{89}$$

ahol Δc_u értéke a (85) egyenletből:

$$\Delta c_u = g H_e/u. \tag{85/a}$$

A (89) és (85/a) összevonásával, rendezés után írható:

$$H_e = \frac{w_\infty^2}{2g} \frac{u}{c_m} \frac{L}{t} \mathbf{e}_f \sin \beta_\infty. \tag{90}$$

Egy-egy járókerék-elem lapátozásának a (90) egyenletből kifejezett jellemzői:

$$\boxed{\frac{L}{t} \mathbf{e}_f = \frac{2gH_e c_m}{w_\infty^2 u \sin \beta_\infty}}. \tag{91}$$

A számítás (91) szerint a járókerék *minden elemére* táblázatos alakban végezhető. Az L/t és a $\mathbf{e}_f$ jellemzők egyike (rendszerint a felhajtóerő-tényező) előre felvehető.

A (91) összefüggésből néhány gyakorlati következtetés vonható le. A t csökkentésével, azaz a lapátszám növelésével a szállítómagasság (H_e) nő. Mivel L/t és $\mathbf{e}_f$ nem növelhető tetszés szerint, azért a H_e csak úgy növelhető tovább, ha az u kerületi sebességet is nagyobbítjuk. A β_∞ szög növelésével — perdületmentes belépés feltételezésével — a c_m meridiánsebesség és ezzel a vízmennyiség is nő. (L. a *60. ábrát.*)

A fenti számításokat a gyakorlatban dr helyett *véges* $\Delta r = b/i = (r_k - r_b)/i$ kiterjedésű szárnyszelvényekre vonatkoztatjuk. A járókerék körgyűrű-alakú átfolyószelvényét ilyenkor központos körökkel i számú Δr vastagságú járókerékre osztjuk és a sebességi (eltérítési) háromszögeket az elemeket határoló (síkba fejtett) hengerpalástokon szerkesztjük. (V. ö. : a *61. ábrával).*

Az így kapott ($i + 1$ számú) szelvények az ún. *felfűzési terv* szerint egymásra helyezve alkotják a járókerék lapátjait.

Megjegyzem, hogy a járókerék adatainak számítása a veszteségek miatt a valóságban némileg módosul.

32. példa. Egy $H_e = 6{,}5$ m (elméleti) emelőmagasságra szerkesztett szárnylapátos szivattyú előírt vízhozama: $V = 500$ l/mp.

A választott fordulatszám: $n = 960$/perc (közvetlen hajtás hatpólusú villamos motorral).

A járókerék külső átmérője: $D_k = 400$ mm, belső átmérője: $D_b = 220$ mm. $\mu = D_b/D_k = 0{,}55$; $\mu^2 = 0{,}302$ és $(1 - \mu^2) D_k^2 \pi/4 = 0{,}0875$ m² értékekkel a **meridiánsebesség:**

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{c}_0 = 0{,}5 : 0{,}0875 = \mathbf{5{,}7\ m/mp.}$$

A járókerék-**kerületi sebessége:**

$$\mathbf{u}_k = D_k \pi n/60 = 0{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 960 : 60 = \mathbf{20{,}1\ m/mp.}$$

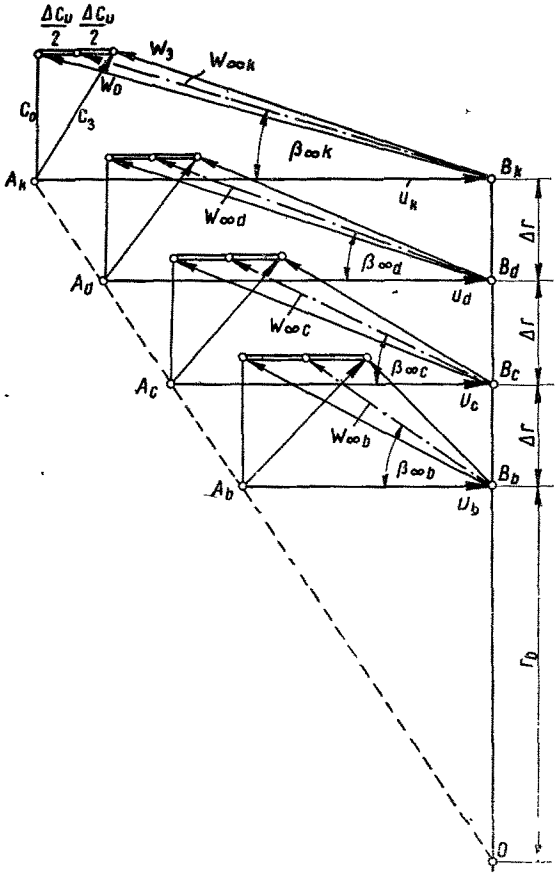
A gyűrű alakú szelvényt a *61. ábra* szerint központos körökkel $i = 3$ számú $\Delta r = (200 - 110) : 3 = 30$ mm széles járókerék-elemre osztjuk.

A sebességi (eltérítési) háromszögeket perdületmentes belépés ($\alpha_0 = 90°$; $c_0 = c_m$) előírásával az elemeket határoló r_b, r_c, r_d és r_k sugarú (síkbafejtett) hengerpalástokon szerkesztjük. Az eltérítési háromszögek szerkesztéséhez szükséges Δc_u értékeket a (85) egyenletből számítjuk. A külső kerületen:

$$\Delta c_{uk} = \frac{gH_e}{u_k} = \frac{9{,}81 \cdot 6{,}5}{0} = 3{,}18\ \text{m/mp.}$$

A járókerék-elemeket határoló hengerpalástokon az így kiszámított jellemzők:

$D_b = 220$ mm;	$u_b = 11{,}05$ m/mp;	$\Delta c_{ub} = 5{,}78$ m/mp;
$D_c = 280$ mm;	$u_c = 14{,}07$ m/mp;	$\Delta c_{uc} = 4{,}55$ m/mp;
$D_d = 340$ mm;	$u_d = 17{,}10$ m/mp;	$\Delta c_{ud} = 3{,}74$ m/mp;
$D_k = 400$ mm;	$u_k = 20{,}10$ m/mp;	$\Delta c_{uk} = 3{,}18$ m/mp.



61. ábra. Szárnylapátos szivattyú járókerekének eltérítési háromszögei

A fenti jellemzőkkel szerkesztett eltérítési háromszögeket a *61. ábra* mutatja.

Példaképpen számítsuk ki a (91) egyenletből az agy tövében kialakított $u_b = 11{,}05$ m/mp kerületi sebességű járókerékelem jellemzőit. (A kis kerületi sebesség miatt itt kapjuk a legkedvezőtlenebb jellemzőket.)

A belépősebességi háromszögből: $w_0 = \sqrt{c_0^2 + u_b^2} = \sqrt{5{,}7^2 + 11{,}05^2} = 12{,}5$ m/mp és $\operatorname{tg} \beta_0 = c_0/u_b = 5{,}7 : 11{,}05 = 0{,}515$; ($\beta_0 = 27°15'$).

A megfúvási sebesség (88)-ból, perdületmentes belépésre $w_{0u} = u$ helyettesítéssel:

$$w_{\infty b}^2 = c_0^2 + (u_b - \Delta c_{ub}/2)^2 = 5{,}7^2 + 8{,}16^2 = \mathbf{99{,}3\ m^2/mp^2},$$

azaz: $w_{\infty b} = 9{,}96$ m/mp és $\sin \beta_{\infty b} = c_0/w_{\infty b} = 5{,}7 : 9{,}96 = \mathbf{0{,}573}$; ($\beta_{\infty b} = 35°$).

A (91) egyenlet perdületmentes belépésre, $\sin \beta_\infty = c_0/w$ helyettesítéssel az alábbi egyszerűbb alakba hozható:

$$\frac{L}{t}\,\mathbf{c}_f = \frac{2gH_e}{w_{\infty b}\,u_b} = \frac{19{,}62 \cdot 6{,}5}{9{,}96 \cdot 11{,}05} = 1{,}16.$$

$\mathbf{c}_f = 0{,}9$ felhajtóerő-tényező választásával ($\alpha \cong 10°$-os állásszöggel):

$L/t = 1{,}16 : 0{,}9 = 1{,}29$, ahol:
$t = 0{,}22 \cdot 3{,}14 : 4 = 0{,}172$ m.

Ezzel a szárnyszelvény hossza:

$$L = t\,(L/t) = 0{,}172 \cdot 1{,}29 = 0{,}223 \text{ m},$$

a szelvény beállítási szöge pedig:

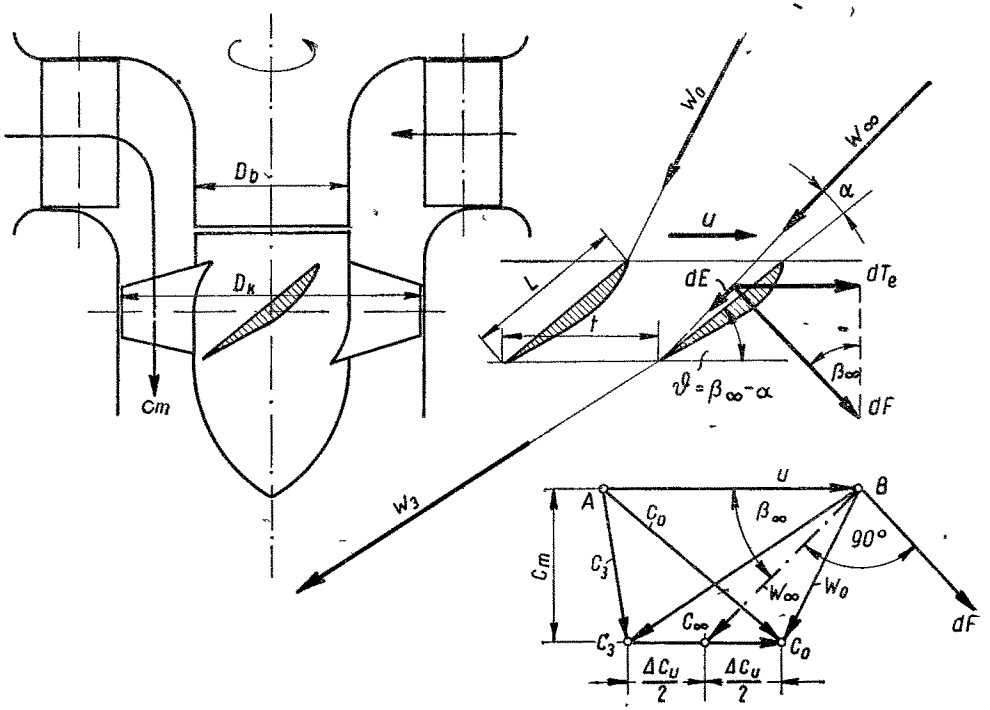
$$\vartheta = \beta_{\infty b} + \alpha = 35° + 10° = 45°.$$

A szelvények még nincsenek átfedésben, mert $\cos \vartheta = 0{,}707$ értékkel:

$$L_u = L \cos \vartheta = 0{,}223 \cdot 0{,}707 = 0{,}158 \text{ m} < t = 0{,}172 \text{ m}.$$

38. A szárnylapátos turbina járókereke

Az ún. propellerturbina vázlatos felépítését a *62. ábra* mutatja. A turbina járókerekének lapátozása — energetikai rendeltetéséhez igazodóan — oly szárnyrácsot alkot, amelynek szelvényei a forgás irányába eső dT_e felhajtóerő-összetevőt szolgáltatnak.



62. ábra. Propellerturbina járókerék-elemének eltérítési háromszöge

A járókerék-elemek kialakítása és az eltérítési háromszögek szerkesztése elvben ugyanaz, mint a szivattyú esetén (vö. a 37. ponttal).

A szárnyrács alakját a *62. ábra* szerint turbina esetében a szárnyszelvények fordított elhelyezése jellemzi: a szelvények beállítási szöge itt kisebb a w_∞ megfúvási sebesség irányszögénél, azaz:

$$\vartheta = \beta_\infty - \alpha. \tag{92}$$

Az eltérítési háromszög szerkesztéséhez itt is a (88) egyenlet utasításai a mértékadók, azaz itt is felezni kell a (85/a) egyenletből kiszámított Δc_u sebességkülönbség vektorát; a felezőponttal kijelöltük a w_∞ megfúvási sebesség irányát és nagyságát.

Minthogy a turbina eltérítési háromszögében a c_0 belépősebesség nagyságát és α_0 irányszögét (a vezetőkerék lapátállásával) rögzítettük, tehát a járókerék-

elemből *kilépő folyadék* áramlása *általában nem lesz perdületmentes.* Minthogy pedig a járókereket c_3 kilépési sebességgel vagyis hasznosítatlan $c_3^2/2g$ lendülettel elhagyó folyadék munkaképességének ez a része az ún. *kilépési veszteség*, tehát a perdületes kilépés — amikor $c_3 > c_m$ — erősen rontja a járókerék hatásfokát.

A *propellerturbinák* jellegzetessége, hogy csak az előírt V_1 víznyelés környezetében dolgoznak jó hatásfokkal, erősen változó terhelés esetén tehát üzemük nem gazdaságos.

Kaplan brünni professzor javaslatára az ún. *Kaplan-turbina* járókereke — a merev lapátozású propellerturbináétól eltérően — *állítható lapátozású* oly értelemben, hogy a járókerék-lapátok beállítási szögének a mindenkori teljesítményhez igazodó változtatásával a kilépés gyakorlatilag perdületmentessé tehető (kettős szabályozás).

A kis esésű vízerőművek e korszerű és változó terhelésű üzemben is jó hatásfokú turbinájának kiterjedt szakirodalmára itt külön is felhívom a figyelmet [24,50].

II. A VALÓSÁGOS FOLYADÉK ÁRAMLÁSA

39. Áttekintés. A gyakorlati áramlástan fejlődéstörténete

A tökéletes folyadék áramlástana mint elvont elméleti tudomány kétszáz éves múltra tekint vissza. *Bernoulli* Dániel (1700—1782) 1738-ban megjelent hidrodinamikája az első, amely tudományos alapra építi az áramlási jelenségek vizsgálatát. Bernoulli elméleti számításainak eredményeire kísérleti igazolást is keres és hidraulikus gépek szerkesztésével is foglalkozik. Ebben az irányban fejlesztette tovább az áramlástant az első turbina feltalálója: *Segner János András* (1704—1777) is, aki mint pozsonyi születésű hazánkfia először Pozsonyban és Debrecenben mint orvos működött, majd Jénában, Göttingában és Halléban mint a fizika és matematika tanára fejtett ki úttörő tudományos működést. A Segner-kerék néven közismert turbinája a Göttinga melleti Nörtenben malom hajtására kivitelre is került. (Leírása 1750-ben közzétett tanulmányában található.)

A matematika lendületes fejlődésének századában az áramlástan alaptörvényeinek felkutatása terén is csakhamar az elvont **analitikai** tárgyalási mód honosodik meg. *Euler Leonhard* (1707—1783) és *Lagrange J. L.* (1736—1813) nevéhez fűződik az elvont matematikai alapon felépített **klasszikus hidrodinamika** megalapozása és kifejlesztése.

A jelenségeknek matematikai tárgyalása — mint már a bevezetésben is említettem — szükségessé tette egy «tökéletes» (ideális) folyadék elképzelését, vagyis a valóságos folyadék néhány jellegzetes tulajdonságának figyelmen kívül hagyását. Ezek az elhanyagolások tették lehetővé, hogy a hidrodinamika a matematika vonalán mélyen megalapozott és bámulatraméltó szabatossággal felépített tudományággá fejlődhetett. Ugyanakkor azonban — éppen a valóságtól való elvonatkoztatás következtében — a hidrodinamika művelése tudományos öncéllá vált, amely a gyakorlati alkalmazás vonalán nem is keresett kapcsolatot a valósággal.

A műszaki gyakorlat számára hozzáférhetetlen klasszikus hidrodinamika mellett tehát — azzal párhuzamosan — egy másik tudományágnak kellett kifejlődnie, amely az áramlástannak mindama törvényeit igyekezett tisztázni, amelyek a *tökéletes* folyadék elméletével ki nem deríthetők. Ilyen pl. elsősorban az esés és az áramlási veszteségek között megfigyelhető összefüggések felkutatása, amely nélkül a csőben, csatornában, de még a természetes mederben áramló víz mozgástörvényei sem tárgyalhatók.

Gyakorlati áramlástan vagy **hidraulika** néven ismerjük ezt a tudományágat, amely merőben más alapokon épült fel, mint az elvont eszközökkel dolgozó hidrodinamika, mert elsősorban a megfigyelések, mérések és kísérletek eredményeire támaszkodik. A hidraulika a jelenségek valóságos lefolyását szabályozó törvényszerűségeket **tapasztalati** alapon igyekszik felkutatni, és ezeket egészen *önkényesen*

felépített matematikai képletekkel fejezi ki. A törvényszerűségek felismerését megkönnyíti az áramlás legegyszerűbb eseteinek vizsgálata — ezért a hidraulika az ún. **egyméretű áramlás** törvényeinek alkalmazási területét nem lépte át, és főképpen a csövekben és a nyitott csatornákban végbemenő áramlási jelenségek vizsgálatára szorítkozott.

Az első eredmények *Couplet* (1732), *Bossut* (1772) és *Dubuat* (1779) nevéhez fűződnek, akiknek a csősurlódás megállapítására irányuló kísérleteit *Prony* (1802) foglalta képletbe. Nyitott csatornában áramló víz középsebességének kifejezésére viszont *Chézy* (1775) adott egy képletet, amely előzetes számításokhoz ma is használatos.

A következő évszázadban a kutatók egész sora igyekezett a képletek alkalmazási területét újabb kísérletekből kiszámított állandókkal vagy egyre bonyolultabb felépítésű új képletek megalkotásával kiterjeszteni. Ezek közül *Weisbach* (1845), *Darcy* (1857), *Bazin* (1864), *Dupuit* (1865), *Ganguillet* és *Kutter* (1869) és végül *Hagen* érdemel említést. Utóbbinak a nevéhez fűződik a csősúrlódás képletének ma is használt alakja.

A tudományos kutatás vonalán *Poiseuille* (1844) kísérleteit kell kiemelnem, amelyek a folyadék belső súrlódására *Newton* feltevését igazolták.

A hidraulika fejlődésének vonala ezt követően két ágra szakadt. Egyfelől a **vízépítéstan** egyre nagyobb szabású feladatkörének vetette meg az alapját, másfelől pedig a **vízgépek szerkezettanának** kifejlődésére vezetett. (A következőkben csak az utóbbi nyomot követem.)

A hidraulikának az **egyméretű** áramlásra korlátozott törvényeire támaszkodik a vízgépnek ún. **áramvonalas elmélete** is, amely a turbina és az örvényszivattyú sűrűn lapátozott járókerekének szerkesztésénél ma is alkalmazást talál. A fentebb említett *Segner*-kerék (1750) után háromnegyed évszázad telik el a *Poncelet*-kerék (1829) felbukkanásáig. Ezt követően a fejlődés üteme meggyorsul. Rövid idő múlva megjelenik a turbina mai korszerű alakjának őse, az első *Francis*-turbina (1849) és két évvel később az első örvényszivattyú is (1851). Utóbbi azonban még egy fél évszázadig nem tudott versenyre kelni a dugattyús szivattyúval.

A vízgépek fejlődéstörténetében szembetűnő ez a visszamaradás, amely a örvényszivattyú szerkezetében mutatkozik, ha azt a század elején már a tökéletesség magas fokára emelkedett (80%-nál jobb hatásfokkal dolgozó) turbinával hasonlítjuk össze. A turbina mint a hatalmas vízerőművek erőforrása egy emberöltővel ezelőtt szerkesztett alakjában is általában kielégíti a korszerűség követelményeit, ezzel szemben az ugyanabban az időben épült örvényszivattyú hatásfoka a 40%-ot sem éri el.

E két számadat egybevetése azért tanulságos, mert élesen megvilágítja a **hidraulika** alkalmazhatóságának korlátjait. Az *egyméretű* áramlás törvényei ugyanis csak oly csatornarendszer kialakítására szolgálhatnak megbízható méretezési alapot, amelyben a folyadék potenciális energiája lendületté alakul át.

Ebben az esetben a többméretű áramlás törvényeinek figyelmen kívül hagyása rendszerint nem okoz nagyobb veszteséget, hacsak egészen durva hibát nem követünk el a turbina szerkesztésében. Egészen másként áll az eset az örvényszivattyúnál, amelynek csatornáiban a folyadék lendületét kell potenciális energiává alakítani. Ilyenkor a csatorna kialakításában elkövetett minden legkisebb hiba igen nagy energiaveszteségek forrása, melyek megszüntetése vagy apasztása az áramlás törvényeinek szabatos ismerete és tudatos alkalmazása nélkül nem sikerülhet.

Ebben az irányban észlelhető (alig egy-két évtized óta) szinte ugrásszerű fejlődés, amelynek látható eredménye: a korszerű örvényszivattyú, ma már 80%-os (sőt bizonyos esetekben a 90%-ot is meghaladó) hatásfokával.

E fejlődés az áramlástan tudományosabb megalapozásában és a tudományos kutatás eszközeinek tökéletesítésében talál magyarázatot, a fejlődés meglepően gyors iramа pedig arra vezethető vissza, hogy itt nem új tudományág kialakulásáról van szó, hanem egyszerűen csak arról, hogy a klasszikus hidrodinamikának két évszázad óta úgyszólván csak elméleti síkon kifejlesztett eredményei végre gyakorlati alkalmazást találtak a gépszerkesztés terén is. Azt lehet mondani, hogy egymásra talált két egymástól függetlenül fejlődő tudományág, amelynek a század elejéig úgyszólván alig volt közös gondolata.

Az első lépések a repülőgépépítés terén elért sikereknek köszönhetők. Itt ugyanis eredmény csakis a klasszikus elmélet *elvont* törvényeire támaszkodó, szigorúan tudományos alapra épített **kísérleti kutatástól** volt remélhető. Hasonló szabatossággal kellett az áramlástan tapasztalati alapon kialakított kutatási módszereit is összhangba hozni a klasszikus elmélettel, ami a **kisminta-törvény** messzemenő kiaknázásával sikerült is.

A két tudományágat, vagy más szóval: az addig jórészt külön utakon járó *elméletet* és *gyakorlatot* közös nevezőre hozta az utolsó évtizedek tervszerű kutatómunkája. Itt kell kiemelnem *Prandtl* határrétegelméletét is, amely a *tökéletes* folyadékra talált klasszikus törvények érvényességét a valóságos folyadékra is kiterjesztette, és ezzel rámutatott a hidrodinamika elvont eredményeinek gyakorlati alkalmazhatóságára. *Prandtl* elmélete ugyanis arra a megállapításra vezetett, hogy a csőben vagy csatornában áramló folyadék veszteségei csaknem teljes egészükben a rendszerint igen vékony, a falhoz tapadó ún. **határrétegben** keletkeznek, a *rétegen kívül áramló folyadék tehát úgyszólván veszteségmentes.* Ez másszóval azt is jelenti, hogy a cső vagy a csatorna belsejében a *valóságos* folyadék is a *tökéletes* folyadék tulajdonságait mutatja, vagyis a klasszikus hidrodinamika szabatos törvényei szerint vizsgálható.

Ez a felismerés egyfelől lehetővé tette az áramlástan ezideig *egyméretű* közelítésekre korlátozott jelenségeinek szabatosabb vizsgálatát, ami különösen a széles csatornák és forgásterek «áramvonalas» kialakítására vezetett, és a veszteséget vagy kavitációt okozó szerkesztési hibák (holt terek, éles sarkok, hirtelen átmenetek, nagy súrlódó felületek stb.) kiküszöbölését tette lehetővé.

Másfelől a klasszikus elmélet szabatosan fogalmazott törvényei a laboratóriumi és az üzemi kísérletezés kutatási területeit is kibővítették és azt a legmagasabb tudományos színvonalra emelték.

E kísérleti kutatás a *természeti törvény* meggyőző erejével indokolható egyszerű fizikai összefüggések felismerésére vezetett és ezzel lehetővé tette a szabatosan különválasztható tényezők és állandók mennyiségi befolyásának vizsgálatát is.

Ez a tervszerű kutatómunka máris meglepő eredményekre vezetett, és ennek a tudományágnak lendületes továbbfejlődését biztosította. Itt emelem ki a Szovjetuniónak világviszonylatban is messze kimagasló vízépítési és vízgépészeti teljesítményeit, amelyek nemcsak a vízerőhasznosítás terén egyedülállók, hanem az országos vízgazdálkodás szolgálatába állított hatalmas öntözőcsatornahálózatokkal elsivatagosodott országrészeket alakítanak át a lakosságnak jólétet biztosító termékeny területekké.

40. A valóságos folyadék

Az 1. pontban felsoroltuk ama tulajdonságokat, amelyekkel a tökéletes folyadékot fel kellett ruháznunk, hogy az áramlás törvényeit analitikai számításra alkalmas alakban fejezhessük ki. A valóságos folyadék jellemzői ezektől az elképzelt tulajdonságoktól kisebb-nagyobb eltéréseket mutatnak, amelyek torzító hatása sok esetben el nem hanyagolható.

A lényegesebb eltérések — amelyeket a valóságos folyadék áramlástanában figyelemre kell méltatni — a következők:

a) A valóságos folyadék **nem homogén.**

1. A **hőmérséklettel** a folyadék sűrűsége is megváltozik, így tehát különböző hőmérsékletű rétegek fajsúlybeli eltéréseket is mutatnak.

A 4/c. pontban tárgyalt gravitációs melegvízfűtés példája (7. példa) is megvilágítja ennek a jellemző tulajdonságnak áramlástani jelentőségét.

2. A valóságos folyadék **halmazállapota** is megváltozhatik a hőmérséklet (vagy a nyomás) behatására.

A **jégkéregnek** különösen a természetes vízfolyások áramlástanában van jelentősége, a **párolgásra** és **gőzfejlődésre** viszont elsősorban az űrképződés feltételeinek vizsgálatánál kell tekintettel lenni. A folyadék hőfokán telített gőz nyomásánál kisebb nyomás a folyadék belsejében létre nem hozható, így tehát a 22. pontban tárgyalt **kavitációs** jelenségek is a valóságos folyadékban magasabb alsó nyomáshatáron fognak bekövetkezni. (Pl. forróvizet szállító kazántápszivattyúk üzemében fontos e kérdés vizsgálata.)

3. A folyadékot a valóságban idegen anyagok is szennyezik. Nyitott csatornák (különösen pedig a természetes vízfolyások) ún. **hordaléka** (iszap, homok, kavics) az áramlás vizsgálatánál figyelmen kívül nem hagyható. Csővezetékekben és zárt csatornákban viszont a folyadék **gáztartalma** módosíthatja az áramlás törvényeit. Különösen az elnyelt állapotból a vízgép szívóterében szabaddá vált levegő káros befolyása érdemel itt említést, amely a teljesítő képesség erős visszaesését, sőt elapadását is eredményezheti.

b) A valóságos folyadék **nem összenyomhatatlan.** A gázos víz összenyomhatóságával kapcsolatos jelenségekkel már a 4/d. pontban is foglalkoztunk. Vannak azonban jelenségek, amelyek vizsgálatánál a tiszta víz összenyomhatósága sem hagyható figyelmen kívül, sőt a csőfal rugalmasságának a befolyása is érvényesül (vízlökés).

c) A valóságos folyadék áramlása *nem veszteségmentes.* Az egymással érintkező folyadékelemek között csúsztató (nyíró) feszültségek is keletkeznek, amelyek a viszonylagos elmozdulással növekednek. Ezt a belső súrlódást a folyadék *nyúlósága* (a viszkozitás) okozza, amely a hőmérséklettől is függ. Csúsztatófeszültségek fékezik a folyadék áramlását a csatornafalak mentén is. A fal súrlódása annak *érdessége* szerint igen különböző nagyságú lehet. (Sima-, hullámos- vagy érdes fal.)

A valóságos folyadék munkaképessége e súrlódások következtében áramlás közben kisebbedik, *veszteségeket* szenved. E veszteségek természetéről és nagyságrendjéről a következő fejezetekben részletesebben lesz szó.

d) A valóságos folyadék elemei között a *belső vonzóerő (kohézió) hatása is érvényesülhet.* E vonzóerő a folyadék *belsejében* levő elemek mozgástörvényeit nem

befolyásolja, de a folyadék határfelületein a külső elemekre ható erők aszimmetriája következtében az ún. *felszíni* feszültséget hozza létre. E felszíni *(kapilláris)* erők hatására a folyadékot határoló réteg úgy viselkedik, mint egy kifeszített rugalmas hártya. A valóságos folyadék vizsgálatát számos olyan jelenségre is ki kell terjeszteni, amelyek erőjátéka csak a felszíni feszültségek figyelembevételével tárgyalható (felszíni hullámok, cseppképződés, hajszálcsövesség stb.).

41. A víz jellemzői

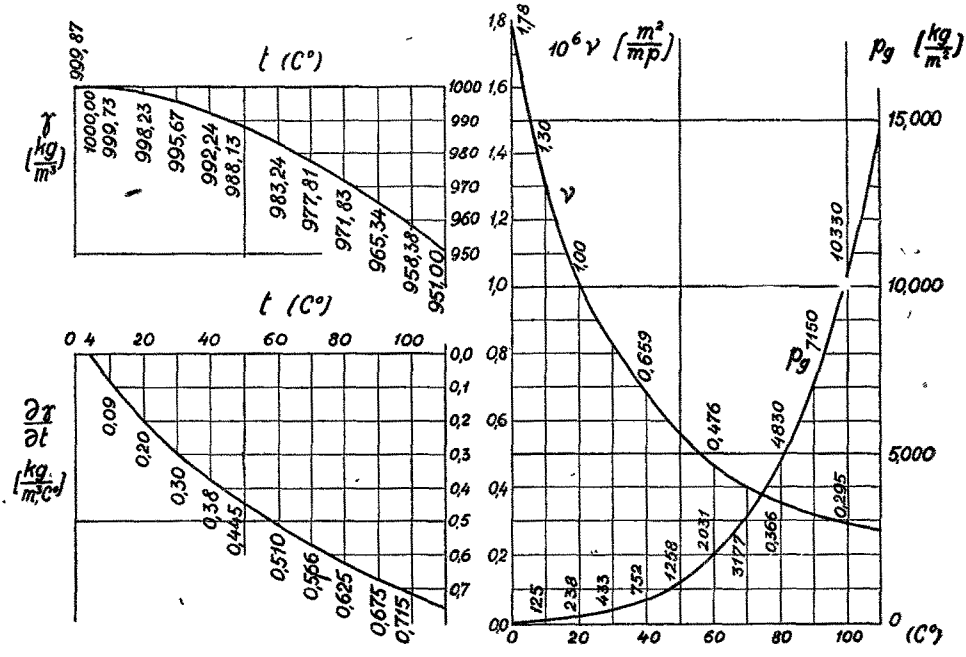
A valóságos folyadékok közül számunkra a legfontosabb a víz.

a) **Fajsúlya** 4 C°-nál: $\gamma = 1000$ kg/m³. A műszaki gyakorlatban a **tiszta víz** fajsúlyát 30 C°-ig változatlanul ezzel az értékkel vesszük számításba.

A szennyeződések a víz fajsúlyát is megváltoztatják. Így pl. a **tengervíz** fajsúlya a sótartalom szerint $\gamma = 1020 - 1030$ kg/m³.

A mélyfúráshoz használt öblítővíz fajsúlyát agyagos iszap hozzákeverésével mesterségesen szokás megnövelni. Az ún. **sűrű öblítéshez** $\gamma = 1080$ kg/m³, a **nehéz öblítéshez** $\gamma = 1150-1200$ kg/m³ fajsúlyú (sőt ennél is sűrűbb) keveréket is használnak a fúrólyukat kitöltő folyadékoszlop hidrosztatikai nyomásának növelése érdekében.

A tiszta víz fajsúlyának a **hőmérséklet** szerinti változását a *63. ábra* felső görbéje szemlélteti.



63. ábra. A víz jellemzői

Az interpoláció megkönnyítése érdekében a bal alsó függvényábrából a $\partial\gamma/\partial t$ (kg/m³/C°) közvetlenül is leolvasható.

A **jég** fajsúlya 0 C°-on $\gamma = 916{,}7$ kg/m³, a frissen esett **hó** $\gamma = 70-100$ kg/m³ (A szeles időben esett hó fajsúlya kétszer ekkora is lehet.)

A *100 C°*-on **telített vízgőz** fajsúlya: $\gamma = 0{,}597$ kg/m³.

A telített gőz nyomása és a telítés hőfoka közötti összefüggést a *63. ábra* jobb oldalán $p_g = p_g(t)$ alakú görbék szemléltetik.

b) A víz **összenyomhatósága** a nyomás és a hőmérséklet függvénye [32]. p (kg/m²) nyomáson a fajsúly: $\gamma = \gamma_0 (1 + \beta p)$, ahol 50 at-ig, hideg vízre: $\beta = 5 \cdot 10^{-9}$ (m²/kg) átlagos összenyomódási együtthatóval számolhatunk. (*200 at* nyomásnál ez a tényező már kb. 10%-kal kisebb, és a hőmérséklet emelkedésével is kisebbedik.)

A műszaki gyakorlatban rendszerint e tényező reciprok értékével, a **rugalmassági tényezővel** ($E = 1/\beta$) számolunk.

Hideg vízre: $E \cong 2 \cdot 10^8$ kg/m².

Szembeállítva az acél $E_a \cong 2 \cdot 10^{10}$ kg/m² nagyságrendű rugalmassági tényezőjével, megállapítható, hogy $E \cong E_a/100$, ázaz a víz rugalmassági tényezője az acélénak mintegy századrésze.

Az összenyomhatóságot rendkívüli mértékben megnövelheti a víznek **szabad gáztartalma,** amely rendszerint a vízgép szívóterében válik szabaddá.

A hidegvíz térfogatra számított **elnyelési együtthatója** (ε^*) ugyanis a következő táblázat szerint változik a hőfok függvényében (az elnyelt levegő térfogata 0 C°-ra és légköri nyomásra van átszámítva):

t (C°)	0	10	20	30	50	70	100
ε^*	0,029	0,023	0,019	0,016	0,013	0,012	0,011

Az *elnyelt térfogat* változó nyomásnál is ugyanakkora marad, izometrikus kiterjedéskor tehát a térfogatnövekedésből származó felesleg buborékok alakjában kiválik.

c) A víz **belső súrlódását** a *mozgástani nyúlósággal* szokás jellemezni.

A mozgástani nyúlósság **(kinematikai viszkozitás)** tényezője 20 C°-os tiszta vízre:

$$\nu \cong 10^{-6} \text{ m}^2/\text{mp}.$$

A hőmérséklet emelkedésével a víznek (és általában a cseppfolyós folyadékoknak) belső súrlódása kisebbedik. A mozgástani nyúlósság változását a hőmérséklet függvényében (tiszta vízre) a *63. ábra* jobb oldali görbéje szemlélteti.

d) A **felszíni feszültség** a víztükör szabad felszínét feszítő vonalterhelés (folyóméterterhelés) alakjában jellemezhető.

A *víz* és *levegő* határfelületén a felszíni feszültség:

$$k = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}.$$

Ha a felszín alakja nem sík, akkor a felszíni feszültségek a görbülettel arányos nyomáskülönbséget eredményeznek. Ez az ún. **kapilláris nyomás** kívülről (felülről) domború felszín esetén a folyadék belseje felé mutat, vagyis a görbületet kisebbíteni törekszik. Nagysága:

$$\Delta p = k\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (\mathrm{kg/m^2}), \qquad (93)$$

ahol R_1 és R_2 a felület két (egymásra merőleges) főmetszetének méterben mért görbületi sugara. (A görbületi sugár *pozitív* előjelű, ha a folyadék belseje felé mutat.)

Áramlástani vonatkozásban a felszíni feszültség hatásai közül a víztükör felületét fodrozó ún. **felszíni hullámok** keletkezésének feltételeit emelem ki. E rövid, apró hullámok terjedési sebessége (*Lord Kelvin* szerint) [31]:

$$w_h = 0{,}232 \ \mathrm{m/mp}.$$

A tó tükre eszerint mindaddig *sima* marad, amíg a szél (szellő) sebessége kisebb a fenti határsebességnél, de azonnal apró hullámokkal fodrozódik, mihelyt a szellő csak kissé erősödik is.

A kísérleti kutatás szempontjából e határsebesség jelentősége abban áll, hogy az ezt meg nem haladó felszíni sebességgel áramló vízbe mártott test (bot, pillér stb.) felszíni hullámokat nem gerjeszt.

A felületi feszültség hatását végül még a nyomásmérő műszer leolvasásánál is figyelembe kell venni, mert a hajszálcsövesség következtében az üvegcső falához tapadó folyadék felszíne gömbfelületet alkot, és ennélfogva a kapilláris nyomásnak megfelelő értékkel magasabbra emelkedik. Ez a felemelkedés a (93) egyenletből, vízre (levegő alatt): $h = 30/d$ mm, ha d az üvegcső belső átmérője mm-ben.

42. Folyadékok és gázok jellemzői

a) Fajsúly

Néhány **folyadék fajsúlyát** az alábbi táblázatba foglaltam össze:

Folyadék	γ kg/m³
Alkohol	790
Benzin	680–740
Benzol	900
Bor	990
Glicerin	1260
Sör	1020–1040
Tej	1030

Folyadék	γ kg/m³
Ásványi kenőolaj	900–930
Lenolaj	940
Ricinusolaj	970
Petróleum	790–820

Mérőfolyadék	γ kg/m³
Higany	13 596
Acetilén tetrabromid	3 000
Széntetraklorid	1 600

A levegő fajsúlya a nyomás és a hőmérséklet függvénye. Kis nyomáshatárok között a levegő is a gyakorlatilag állandó fajsúlyú ($\gamma \cong$ állandó) cseppfolyós folyadék tulajdonságaival ruházható fel.

A légköri nyomáson végbemenő áramlási folyamatok (pl. szélmotor, szellőző) esetében — ha a nyomás ingadozása nem lépi túl a $\pm$ 5%-ot és a hőmérséklet sem változik tág határok között — a gyakorlat igényeit kielégítő pontossággal a levegő fajsúlyát a környezeti nyomás és a hőmérséklet középértékeire vonatkoztatott **állandó** értékkel vehetjük számításba.

Előzetes számításokhoz a levegő fajsúlyát

$$\boxed{\gamma_1 = 1{,}25 \text{ kg/m}^3}$$

állandó értékkel szokás megadni.

Pontosabb számításokhoz a levegő (fizikai) normálállapotára ($p_0 = 1$ atm $=$ $= 10\,332$ kg/m² légköri nyomás, $b_0 = 760$ mm barométerállás, $t_0 = 0$ C°, azaz: $T_0 = 273$ C°) vonatkoztatott:

$$\gamma_{l0} = 1{,}293 \text{ kg/m}^3$$

értékből indulunk ki, és a p, t (ill. b, T) értékpárhoz tartozó fajsúly értékét alábbi közismert összefüggésből számítjuk:

$$\gamma_l = \frac{p}{p_0}\,\frac{273}{t+273} \cdot 1{,}293 = \frac{b}{b_0}\,\frac{273}{T} \cdot 1{,}293 \quad (\text{kg/m}^3). \tag{94}$$

Hasonló eredményhez jutunk a gázok állapotegyenletének felhasználásával, ha abba a v fajtérfogat helyébe a fajsúly reciprok értékét írjuk, és a levegő gázállandóját $R = 29{,}27$ értékkel helyettesítjük. Írható: $p\,v = R\,T = p/\gamma$ és ebből levegőre:

$$\gamma_l = \frac{p}{29{,}27\,T} \quad (\text{kg/m}^3). \tag{94/a}$$

Más gázok fajsúlyát és gázállandóját az alábbi táblázat adja. A fajsúlyok a fizikai normálállapotra vonatkoznak ($p_0 = 1$ atm, $T_0 = 273$ C°).

A gáz γ fajsúlya p nyomáson és T (abszolút) hőfokon, illetve R gázállandóval:

$$\gamma = \frac{p}{p_0}\,\frac{273}{T}\,\gamma_0 = \frac{p}{RT} \quad (\text{kg/m}^3). \tag{94/g}$$

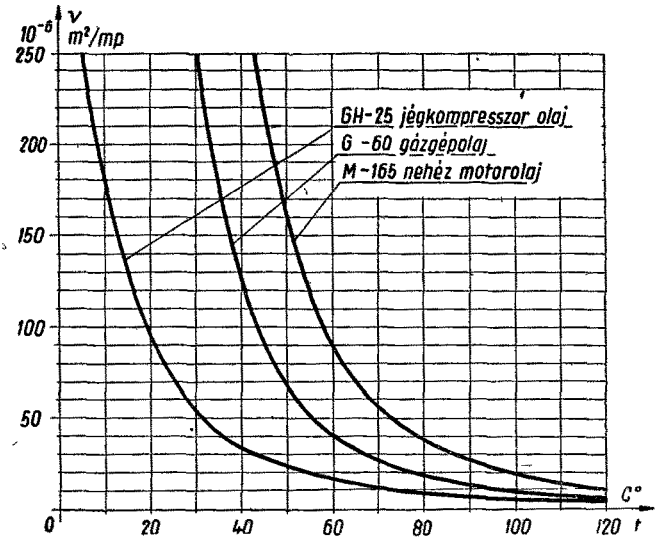
Gáz	γ_0 (kg/m³)	R(m/C°)	Gáz	γ_0 (kg/m³)	R(m/C°)
Levegő	1,293	29,27	Acetilén	1,171	32,59
Oxigén	1,429	26,50	Etilén.....	1,261	30,25
Nitrogén	1,251	30,26	Metán	0,717	52,90
Hidrogén	0,0898	420,60	Világítógáz	0,515	73,50
Szénoxid	1,250	30,29	Ammóniák	0,771	49,79
Széndioxid	1,977	19,27	Vízgőz	0,804	47,06

b) **Mozgástani nyúlósság** *(kinematikai viszkozitás)*

A cseppfolyós **folyadékok** kinematikai viszkozitása a hőmérséklet függvényében kisebbedik (vö. a *63.* és *64. ábrával).*

A *64. ábra* háromfajta szabványos ásványolajtermék mozgástani nyúlósságának tényezőjét a hőmérséklet függvényében szemlélteti.

Figyelemre méltó a tényező nagymértékű kisebbedése a felmelegedés következtében, ami bizonyos mértékig igen előnyös, mert a súrlódási munka csökkenését és a gép mechanikai hatásfokának javítását eredményezi. A kenőolaj minőségének



64. ábra. Kenőanyagok kinematikai viszkozitása

a gép üzemi jellemzőihez igazodó megválasztása — különösen a hőerőgépek esetében — kényes feladat, mert a kenőolaj viszkozitásának az üzemi hőmérsékleten egy megengedett alsó határérték fölött kell maradnia.

A kenőolajok viszkozitását az *Engler-féle viszkoziméterben* szokták meghatározni, és egészen önkényesen választott ún. *Engler-fokokban* (E°) kifejezni. A kinematikai viszkozitás műszaki mértékegysége: m²/mp, és

$$1\ \text{m}^2/\text{mp} = 10^4\ \text{Stok (St)} = 10^5\ \text{centistok (cSt)}.$$

Az Engler-fok átszámítását műszaki mértékegységre az MSZ. 3255. sz. országos szabvány szabályozza. Eszerint

$$\text{ha } \nu_E > 10\ \text{E°, akkor } \nu = 7{,}58\,\nu_E\ \text{(cSt)}, \tag{95}$$

és ha $\nu_E \leqq 10$ E°, akkor az átszámítást az alábbi táblázat adja:

ν_E (E°)	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5
ν (cSt)	1,00	2,80	5,00	7,45	9,60	11,8	16,6	21,1	25,4

ν_E (E°)	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
ν (cSt)	29,3	33,3	37,3	45,1	52,9	60,6	68,2	75,8

Másfajta olajok kinematikai viszkozitását (két hőmérsékleten) szabványok tartalmazzák egyéb tulajdonságaikkal együtt, [97]. Általában az alábbi összefüggéssel fejezhető ki a viszkozitás változása a hőmérséklet függvényében:

$$\text{loglog}\ (\nu + 0{,}8) = A - B \log T, \tag{96}$$

ahol ν (cSt) a kinematikai viszkozitás, T (K°) az abszolút hőmérséklet, A és B pedig minden egyes olajfajtára kiszámítható *állandó*. Ha tehát a viszkozitás két hőfokon adva van, akkor az állandók meghatározhatók. A számítás megkönnyítésére az MSZ 3258. szabvány hálózati nomogramot ad, amelynek abszcisszája log T értékeit, ordinátája pedig loglog ν értékeit tartalmazza a gyakorlati határok között. Ebben az ordinátarendszerben a (96) összefüggés *egyenes*, amelyet két pontja egyértelműen meghatároz. Egy-egy olajfajtára meghúzott egyenes mentén bármilyen hőfokon közvetlenül leolvasható a kinematikai viszkozitás.

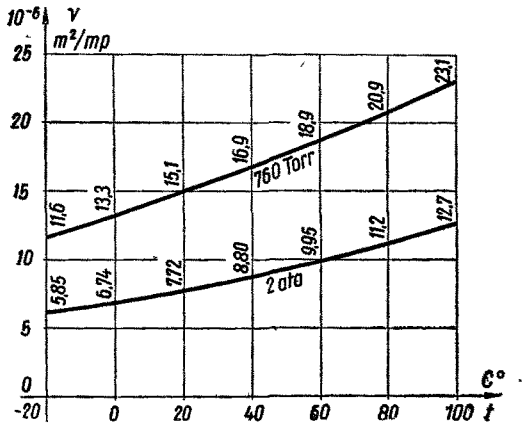
34. példa. Egy kenőolaj viszkozitása $t = 50$ C°-on: $\nu_E = 6{,}5$ Engler-fok. A kinematikai viszkozitás a táblázat szerint interpolálva:

$$\nu_{50} = 49\ \text{cSt} = \mathbf{49 \cdot 10^{-6}\ m^2/mp.}$$

Egyéb folyadékok mozgástani nyúlósságának tényezője $t = 15$ C°-on:

Higany: $\nu =$	$10^{-6} \cdot 0{,}118$ m²/mp	Alkohol: $\nu =$	$10^{-6} \cdot 1{,}67$ m²/mp
Éter:	$10^{-6} \cdot 0{,}268$ m²/mp	Benzol:	$10^{-6} \cdot 7{,}9$ m²/mp.

Ezek a tényezők *gyakorlatilag függetlenek a nyomástól.*



65. ábra. A levegő viszkozitása a hőmérséklet függvényében

Gázok kinematikai nyúlóssága a *hőmérséklet* és a *nyomás* függvénye. **A levegő** viszkozitásának változását a hőmérséklet függvényében a *65. ábra* mutatja.

A *dinamikai viszkozitás* μ tényezőjének értékei a *nyomástól gyakorlatilag csaknem függetlenek.*

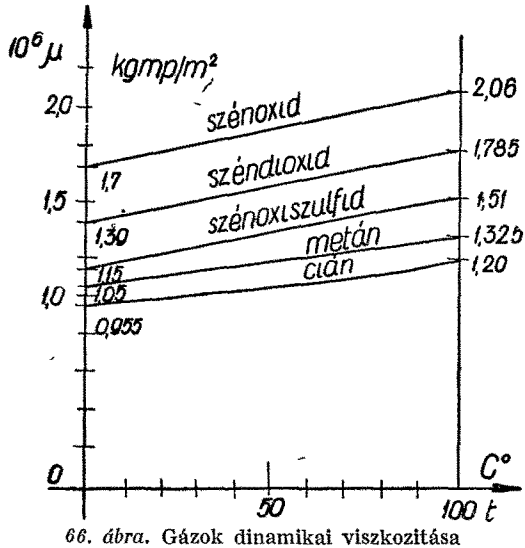
A *kinematikai viszkozitást* a dinamikai viszkozitás tényezőjének és a sűrűségnek hányadosa adja, utóbbi pedig a felmelegedéssel fordított arányban kisebbedik. A nevező kisebbítésével tehát ν értéke megnagyobbodik. A **nyomás** növelésével viszont a gáz sűrűsége **arányosan** megnagyobbodik, és ennélfogva kinematikai viszkozitása csökken.

Levegőre vonatkozó tájékoztató adatokat a következő táblázat tartalmaz (nyomás 760 Torr = 10 332 kg/m²):

t (C°)		−20	0	20	40	60	80	100	200	500
γ	(kg/m³)	1,40	1,29	1,20	1,12	1,06	1,00	0,95	0,746	0,393
ϱ	(kg mp²/m⁴)	0,142	0,132	0,123	0,115	0,108	0,102	0,096	0,076	0,040
$10^5\,\mu$	(kg mp/m²)	1,65	1,75	1,85	1,95	2,04	2,13	2,22	2,66	3,868
$10^6\,\nu$	(m²/mp)	11,6	13,3	15,1	16,9	18,9	20,9	23,1	35,0	96,7

Mivel a levegő fajsúlya (γ_l) a (94/a) szerint számítható, és a dinamikai viszkozitás értéke (μ) a *nyomástól* gyakorlatilag függetlennek tekinthető — amennyiben 70 ata-ig a μ értéke alig 5%-kal változik —, a kinematikai viszkozitás (ν) értékét a műszaki gyakorlatban gyakrabban előforduló nyomáshatárok között megfelelő pontossággal meg lehet határozni.

A nyomás fokozásának jelentősége különösen az ún. **kismintakísérleteknél** domborodik ki, mert a nagynyomású levegővel végzett kísérletek eredményeiből biztos következtetések vonhatók le a nagyméretű vízgép vagy csővezeték üzemére. (Vö. a 44. ponttal.)



66. ábra. Gázok dinamikai viszkozitása

A levegő és a víz kinematikai viszkozitásának összehasonlítása még arra a jellegzetes eredményre is vezet, hogy a levegő tényezője **jóval nagyobb** a vízénél. Az eltérés a hőmérséklet emelkedésével még megnagyobbodik. Így például $b_0 = 760$ mm barométerállásnál

és $t = 0$ C°-nál: $\nu_l/\nu_v = 13 : 1{,}78 = 7{,}3$

ezzel szemben: $t = 100$ C°-nál: $\nu_l/\nu_v = 24{,}5 : 0{,}295 = 83.$

A *66. ábrában* végül még néhány gáz *dinamikai viszkozitásának* (kgmp/m²) tényezőjét közlöm a hőmérséklet függvényében [53].

A tényezők a hőfok függvényében csaknem pontosan lineáris változást mutatnak, és 0 és 100 C°-os határok között a nyomástól gyakorlatilag függetlenek.

A) ÁLLANDÓSULT (EGYENLETES) ÁRAMLÁS

43. A folyadék súrlódása

A valóságos folyadék egyensúlyfeltételét az egymáson súrlódó folyadékelemek felszínén keletkező csúsztató- (nyíró-) feszültségek figyelembevételével kell vizsgálni. E csúsztatófeszültségekről *Newton* adott szemléletes képet, aki abból indult ki, hogy a fal mentén párhuzamos rétegekben áramló folyadék rétegei között annál

nagyobb csúsztatófeszültség ébred, mennél nagyobb viszonylagos sebességgel tolódnak el azok egymás felett. A *67. ábra* jelöléseivel tehát a csúsztatófeszültség:

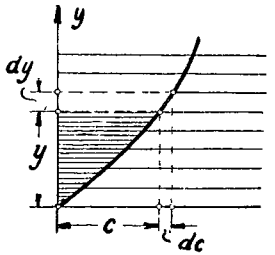
$$\tau = \mu \frac{\partial c}{\partial y} \quad (\mathrm{kg/m^2}) \tag{97}$$

ahol μ (kg mp/m²) a **dinamikai viszkozitás** tényezője (a folyadékok erőtani *nyúlósága).*

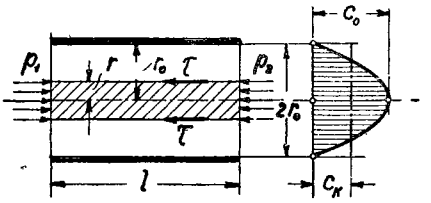
A súrlódóerő eszerint — a szilárd testek súrlódásától *eltérően* — független a súrlódó felületekre nehezedő nyomástól. Nagysága: $S = \tau F$ (kg), ahol F (m²) az egymáson elcsúszó rétegek (közös) felszíne.

Az áramlásnak fentebb leírt alakját **réteges** (lamináris) áramlásnak nevezzük.

A *67. ábrából* kitűnik, hogy az áramlás nem lehet veszteségmentes, mert a falhoz tapadó szélső rétegnek a sebessége zérus, így tehát a véges sebességű rétegek között mindig van sebességkülönbség, amely súrlódási veszteség okozója.



67. ábra. Lamináris (réteges) áramlás



68. ábra. Sebességeloszlás a *Poiseuille*-csőben (réteges áramlás)

Az áramlástanban az erőtani nyúlósság helyett annak a sűrűség egységére vonatkoztatott értékét: a *mozgástani nyúlósság* vagy **kinematikai viszkozitás** tényezőjét szokás használni. Írható:

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho} \quad (\mathrm{m^2/mp}), \tag{98}$$

ahol $\varrho = \gamma/g$ az áramló folyadék sűrűsége.

Réteges áramlás sebességeloszlása $d = 2\,r_0$ átmérőjű hengeres (ún. *Poiseuille*-féle) csőben a (97) egyenlet alapján a *68. ábra* szerinti paraboloid, amelynek a legnagyobb sebességet jellemző tengelymagassága a közepes sebességnek kétszerese, azaz $c_0 = 2\,c_k$.

A paraboloid alakú ún. **víztest** ugyanis a cső keresztmetszetén egy másodperc alatt átlépő folyadék mennyiségét ábrázolja. Az egyenletesen eloszló középsebesség esetén ugyanez a mennyiség: c_k magasságú, azonos térfogatú hengerrel ábrázolható, amelynek köbtartalma a paraboloidéval akkor egyenlő, ha a magassága **félakkora.**

A sebesség sugármenti *parabolikus* eloszlását a *68. ábra* jelöléseivel a következő meggondolás igazolja.

Az l hosszúságú (vízszintes) cső két szélső szelvénye között $\Delta p = p_1 - p_2$ nagyságú nyomásesést okoz a belső súrlódás. A tetszőlegesen kijelölt r sugarú körhenger

palástján ébredő $2\,\pi\,r\,l\,\tau$ nagyságú csúsztató ellenállás legyőzéséhez tehát $r^2\,\pi\,\Delta p$ erő áll rendelkezésre. Az egyensúlyt kifejező egyenlet az előjelek figyelembevételével és τ értékének (97) szerinti kifejezésével, rendezés után így írható:

$$\frac{dc}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\,l\mu}\,r.$$

Az $(r = 0, c = c_0)$ és $(r = r_0,\ c = 0)$ értékpárokkal megadott határok között integrálva:

$$c = \frac{\Delta p}{4\,\mu l}\,(r_0^2 - r^2) \text{ és } c_0 = \frac{\Delta p}{4\,\mu l}\,r_0^2 = 2\,c_k.$$

A sebesség sugármenti változását tehát *forgási paraboloid* ábrázolja. A csövön átfolyó mennyiség: $V = r_0^2\,\pi\,c_k$ eszerint a Δp nyomáseséssel arányos.

Az ún. *kapilláris* csövön átfolyó mennyiség és a nyomásesés között kimutatott arányosságot *Poiseuille* kísérleti úton is igazolta. Ezzel a kísérlettel szokás a különböző folyadékok (kenőolajok) mozgástani nyúlósságát is meghatározni. A V mennyiség helyettesítésével, rendezés után írható:

$$\mu = \frac{r_0^4\,\pi}{8\,l}\,\frac{\Delta p}{V} \qquad \left(\frac{\text{kgmp}}{\text{m}^2}\right). \tag{99}$$

A meghatározott nyomásnál kifolyó mennyiség mérésére szerkesztett ún. viszkoziméterek között számos olyan készülék van használatban, amely egészen önkényesen választott egységekben (pl. *Engler*-fok) adja a nyúlósság számértékét. Ezek az egységek a nyúlósság tényezőjével nem arányosak (vö. a 34. példával) és rendszerint egy előírt folyadékmennyiségnek kifolyási idejére vonatkoznak.

Az **áramlási veszteségnek** az 1 kg-os súlyegységre vonatkoztatott értékét a nyomásesésből számított nyomásmagasságkülönbség $(h' = \Delta p/\gamma)$ határozza meg. Ezt **veszteségmagasságnak** szokás nevezni.

Réteges vagy **lamináris áramlásra** ezt a veszteségmagasságot a (99) egyenletből $\nu = \mu/\varrho$, $\varrho = \gamma/g$, $d = 2\,r_0$ és $c_k = c$ helyettesítéssel a következő alakban írhatjuk:

$$h' = \frac{32\,\nu}{g}\,\frac{l}{d^2}\,c \qquad \text{(m)}. \tag{100}$$

A veszteségnek a sebesség középértékével arányos változását *egészen kis sebességekre* a kísérlet is igazolja.

Nagyobb sebességeknél az áramló folyadék réteges elrendeződése megszűnik, és az áramlás képe a különböző sebességű rétegek **összekeveredése** következtében gyökeresen megváltozik.

Ennek az ún. **turbulens (keveredő vagy gomolygó) áramlás** veszteségeinek a jellege a *sebesség négyzetével arányos* tömegerőkre vezethető vissza, s ezért a veszteségmagasság kifejezésére a *Hagen—Poiseuille*-féle alábbi képlet használata honosodott meg:

$$\boxed{h' = \lambda\,\frac{l}{d}\,\frac{c^2}{2g}} \qquad \text{(m)}. \tag{101}$$

Ezt a képletet a *réteges* áramlásra is alkalmazhatjuk, ha a λ ellenállástényezőt a (100) és a (101) egyenlet egybevetésével kapott alábbi értékkel helyettesítjük.

Réteges áramlásra: $$\lambda = \frac{64\nu}{cd}, \qquad (102)$$

vagyis az ellenállástényező itt nem állandó érték, hanem a csőátmérővel és a sebességgel fordítva arányos.

Keveredő áramlásra előzetes számításokhoz *Dupuit* szerint $\lambda = 0{,}03$ állandó érték választható, amely általában használható közelítő eredményt szolgáltat.

A λ ellenállástényező a valóságban keveredő áramlásnál sem állandó, hanem a csőfal érdességétől függ és a csőátmérőtől, valamint a sebességtől sem független. Kiszámítása elméleti úton nem lehetséges, meghatározása tehát csak laboratóriumi kísérletsorozatokra támaszkodhatik (48. pont).

E laboratóriumi kutatómunka eredményeinek elemzésében — sőt magának már a kísérleti kutatásnak célkitűzéseiben is — viszont egyre fontosabb szerep vár az elméletre, mert csak ez adhatja meg a kísérletezésnek szigorúan tudományos alapját.

Itt jegyzem meg, hogy a nyitott és zárt csatornákban, — főleg a vízgépek csatornáiban — áramló folyadék veszteségeinek nagy része nem a fentebb tárgyalt ún. csősúrlódásból ered, hanem egészen más jelenségekre vezethető vissza. E veszteségek ismerete nélkül csak bizonytalan becsléssel tudunk következtetni a vízgép várható teljesítő képességére és hatásfokára. Korszerű vízgazdálkodásunk gépészeti feladatai (öntözés, belvízátemelés, vízerőhasznosítás stb.) nagyteljesítményű és jó hatásfokú vízgépek szerkesztésére és üzembeállítására irányulnak. E feladatok tervszerű végrehajtása során az *anyagtakarékosság* elve csak úgy érvényesülhet, ha a veszteségek becslésének bizonytalansága a tervezésből kirekeszthető.

Kísérleti adatokkal alá nem támasztott elméleti számítási eredmények felhasználása az áramlástani jelenségek bonyolultságánál fogva mindig kockázattal jár, mert könnyen előfordulhat, hogy a szigorított előírások szerint szerkesztett vízgép teljesítő képesség és hatásfok tekintetében üzembehelyezéskor nem felel meg teljes mértékben az előírt követelményeknek.

Ezt a kockázatot új gép tervezésénél még az *üzemi kísérlet* sem kisebbítheti, mert ez csak a gép megépítése és üzembehelyezése **után** végezhető el. E kockázat megszüntetésére hivatott az ún. **kismintakísérlet,** amely a tervezett berendezés elemeinek aránylag olcsón elkészíthető **kisméretű mintáján** laboratóriumi kísérlet alakjában **előzetesen** végezhető. Fontos azonban, hogy a kismintakísérlet eredményeiből a nagyméretű kivitel üzemi jellemzőinek várható értékére biztos következtetéseket tudjunk levonni.

A kivitel és a kisminta áramlástani kapcsolatára vet világosságot az ún. **kismintatörvény.**

44. A kismintatörvény

A kisminta rendeltetése, hogy a nagyméretű berendezés (a következőkben röviden: *kivitel)* üzemi jellemzőit **kisebbített** méretarányban készült mintán végzett laboratóriumi kísérletek eredményeiből lehessen meghatározni.

A kismintakísérlet eredményeinek használhatósága azonban azon fordul meg, hogy a vizsgálatra váró áramlástani jelenségek lefolyásának **hasonlóságát** mekkora szabatossággal tudjuk biztosítani.

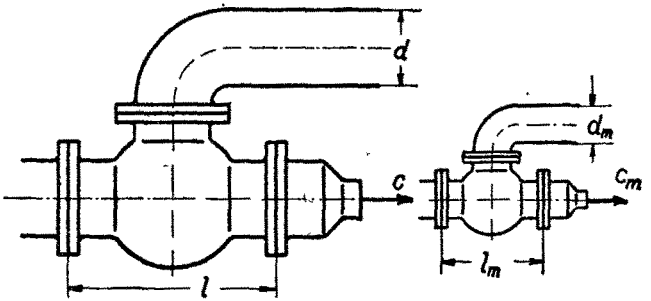
E hasonlóság feltételei a következők:

1. A **mértani** (*geometriai*) hasonlóság előírása egyszerűen azt jelenti, hogy a kisminta kisebbített méretarányú hű mása legyen a kivitelnek.

A *69. ábra* jelöléseivel tehát legyenek a **hosszúsági méretek** a kismintán (d_m, l_m) a kivitel összetartozó (d, l) méreteivel arányosak, azaz:

$$\frac{d}{d_m} = \frac{l}{l_m} = L.$$

2. A **mozgástani** (kinematikai) hasonlóság a **sebességek** arányosságát jelenti. Áramlástani jelenségek vizsgálatának szükséges, de korántsem elegendő feltétele, hogy a kismintán megfigyelt c_m sebesség — C arányossági tényezővel — a kivitel $c = C\,c_m$ sebességét is meghatározza.



69. ábra. A kisminta

3. Az **erőtani** (dinamikai) hasonlóság az **erők** arányosságát írja elő. Ha ezt az arányosságot a kisminta és a kivitel áramlását befolyásoló erők között létre tudjuk hozni, akkor az 1. és 2. feltétellel együtt a **munkaképességek** hasonlóságát is biztosítottuk, mert a kismintán mért energiák, teljesítmények és veszteségek is arányosak lesznek a kivitelnél várható értékekkel.

Az áramlás kialakulása szempontjából **négyféle** erővel számolhatunk, amelyek a hosszúsági és a sebességi méretekkel alábbi kapcsolatba hozhatók:

a) A **tömegerő** (tehetetlenségi erő, impulzuserő) a legegyszerűbben a másodpercenkint érkező tömegnek mozgásmennyiségét kifejező (55) egyenlettel adható meg. $\varrho = \gamma/g$ és $l^2 = f$ helyettesítéssel írható:

$$J = \varrho\, l^2\, c^2.$$

b) A **súlyerő** $G = \varrho\, l^3 g$ alakban fejezhető ki.

c) A **súrlódó erőt** (folyadéksúrlódást) az l^2 felületen ébredő csúsztatófeszültség határozza meg. A lineáris sebességeloszlásra érvényes $\pi = \mu c/l$ értékkel írható:

$$S = \mu\, l\, c.$$

d) A **kapilláris erő** nagysága: $K = k\, l$.

E négyféle erő a hosszúságnak és a sebességnek más-más hatvány szerint változó függvénye, ami azt is jelenti, hogy mértani és mozgástani hasonlóság mellett

e négyféle erő arányosságát egyszerre biztosítani nem lehet. Tökéletes erőtani hasonlóságot adó kismintatörvényt tehát hiába keresünk, és ennélfogva meg kell elégednünk olyan kísérleti alappal, amely a négy erő közül kettőnek arányosságát biztosítani tudja. *(Tökéletlen erőtani hasonlóság.)*

Áramlástani vonatkozásban az alábbi **háromféle** kismintatörvényhez juthatunk, aszerint, amint a tömegerőt a súlyerővel, a súrlódó erővel vagy a kapilláris erővel hozzuk kapcsolatba (és a másik két erő hatását mindig figyelmen kívül hagyjuk.)

I. Gyakorlati jelentőségénél fogva elsősorban a **súrlódás** vizsgálatára kell vetni a súlyt. Teljesen alámerített testeken, folyadékkal megtöltött csövekben és csatornákban a súlyerő hatása közvetlenül nem érvényesül (mert a folyadékelemek munkaképessége a mélységtől független), kapilláris erőkkel pedig itt nem kell számolni. Így tehát ez a törvény teljesen szabatos képet ad az idevágó jelenségek lefolyásáról.

A hasonlóság feltétele:

$$\frac{J}{S} = \frac{J_m}{S_m}, \quad \text{azaz helyettesítés és rövidítés után:} \quad \frac{l\,c}{\nu} = \frac{l_m\,c_m}{\nu_m}.$$

A hasonlóságot kifejező egyenlet *Reynolds*-féle törvénynek is nevezhető. Az egyenlet egy-egy oldala a jellemző hosszúsági méretből, a sebességből és a folyadék mozgástani nyúlósságából kiszámítható (méretnélküli) ún. **Reynolds-féle szám:** a kivitelre: $Re = l\,c\,/\,\nu$, a mintára pedig: $Re_m = l_m\,c_m\,/\nu_m$.

A kismintatörvény eszerint egyszerűen fogalmazható. A mintában oly áramlást kell létrehozni, hogy a *Reynolds-szám* ugyanakkora legyen, mint a kivitelnél. $(Re_m = Re)$

Csővezetékben áramló folyadék vizsgálatához jellemző méretül a cső (belső) átmérőjét szokás választani. Ebben az esetben a *Reynolds*-szám:

$$\boxed{Re = \frac{d\,c}{\nu}}, \tag{103}$$

ahol $c = V/f$ a folyadék (közepes) sebessége.

35. példa. Egy $d = 500$ mm átmérőjű csőben $c = 2$ m/mp sebességgel áramló $t = 10\ C^\circ$-os ($\nu = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ m²/mp) vízre a Reynolds-szám:

$$\mathbf{Re} = \frac{0{,}5 \cdot 2}{1{,}3} \cdot 10^6 = \mathbf{770\,000.}$$

Ha az áramlást $d_m = 100$ mm átmérőjű kismintán, $t_m = 20$ C°-os vízzel ($\nu_m = 10^{-6}$ m²/mp) laboratóriumban vizsgáljuk, akkor:

$$c_m = \frac{\nu_m Re}{d_m} = \frac{10^{-6} \cdot 0{,}77 \cdot 10^6}{0{,}1} = \mathbf{7{,}7}\ \text{m/mp}$$

sebességgel kell dolgozni.

A kismintakísérlet elvégzését sok esetben megkönnyíti, ha azt nem vízzel, hanem **levegővel** végezzük el. A levegő nagyobb kinematikai viszkozitása miatt a

kisminta Re_m Reynolds-számát még a légsebesség jelentős megnövelésével sem lehet a nagyméretű kivitel Re Reynolds-számáig növelni. Ez milliós nagyságrendű Re_m esetében gyakorlati hátrányt nem jelent, mert ilyen nagy Reynolds-számok környezetében a veszteségtényezők kismértékű változása a biztonság érdekében rendszerint már figyelmen kívül hagyható.

Kényes esetekben az erre a célra szerkesztett nagyteljesítményű szélcsatornában **sűrített levegővel** végezhető kismintakísérletek teljesen szabatos eredményt szolgáltatnak, mert a nyomás fokozásával a levegő kinematikai viszkozitása az előírt mértékre kisebbíthető. (Vö. a *65. ábrával.*)

36. példa. Egy vízerőmű turbinájának kerékátmérője: $D = 4{,}5$ m, a víz (perdületmentes) kilépési sebessége: $c = 5{,}1$ m/mp. A víz kinematikai viszkozitása ($t = 15$ C°-nál): $\nu = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ m²/mp.

A kivitel Reynolds-száma: $\mathbf{Re} = \frac{D\,c}{\nu} = \frac{4{,}5 \cdot 5{,}1}{1{,}1} \cdot 10^6 = \mathbf{20\,800\,000.}$

a) Ha az 1 : 10 méretarányú kismintán a kísérletet légköri nyomású **levegővel** végezzük, és azt $c_m = 71$ m/mp sebességgel vezetjük keresztül, akkor $b_m = 755$ mm barométerállás és $t_m = 21$ C° hőmérséklet esetén a levegő **sűrűsége**

$$\varrho_m = \frac{\gamma_m}{g} = \frac{755 \cdot 273 \cdot 1{,}293}{760 \cdot 294 \cdot 9{,}81} = 0{,}1218 \text{ kg mp}^2/\text{m}^4;$$

kinematikai viszkozitása pedig, $\mu_m = 1{,}85 \cdot 10^{-6}$ kg mp/m² értékkel:

$$\nu_m = \frac{1{,}85}{0{,}1218} \cdot 10^{-6} = 15{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{mp}.$$

A kisminta **Reynolds-száma** (légköri nyomáson):

$$\mathbf{Re}_m = \frac{D_m\,c_m}{\nu_m} = \frac{0{,}45 \cdot 71}{15{,}2} \cdot 10^6 \cong \mathbf{2\,100\,000.}$$

A tapasztalat szerint a kismintakísérlet a fenti esetben általában már eléggé megbízható eredményt szolgáltat a nagyméretű kivitel tervezéséhez.

b) Ha a kismintakísérlet zárt szélcsatornában **túlnyomás alatt** végezhető, akkor $Re_m = Re$ feltétel kielégítéséhez szükséges (abszolút) nyomás (azonos hőmérséklet feltételezésével), $p_0 = b_m\,\gamma_h = 0{,}755 \cdot 13\,600 = 10\,550$ kg/m² értékkel:

$$p'_m = p_0\,Re/Re_m = 10\,550 \cdot 20{,}8 : 2{,}1 = 104\,500 \text{ kg/m}^2; \text{ azaz: } \mathbf{10{,}45 \text{ ata.}}$$

A méretarányok megváltoztatásával és a sebesség fokozásával a kísérleti berendezés jellemzői úgy módosíthatók, hogy a kismintakísérlet 5—6 atm nyomáson hajtható végre.

Meg kell jegyezni, hogy az effajta berendezés létesítése és üzembentartása igen költséges, de ennek ellenére is sok esetben indokolt.

II. Hajózási feladatoknál az erőjátékban lényeges szerep jut a súlyerőknek (felhajtóerő alakjában). Ilyen esetben a **Froude-féle szám** fejezi ki a tömegerők és a súlyerők arányosságát. A kismintatörvény eszerint:

$$\frac{J}{G} = \frac{J_m}{G_m} \qquad \text{azaz: } \frac{c^2}{l\,g} = \frac{c^2_m}{l_m\,g_m} = F. \tag{104}$$

A sebességből, a hosszúságból és a nehézségi gyorsulásból (104) szerint alkotott méretnélküli ún. **Froude-féle szám** ($F = F_m$) azonossága fejezi ki a részben alámerített testek erőtani hasonlóságát.

Meg kell jegyezni, hogy a Froude-féle számot a szakirodalom gyakran $c/\sqrt{lg}$ alakban használja, ami elvileg ugyanazt a törvényt fejezi ki.

A *Froude*-féle törvény alapján elvégzett kismintakísérlet szabatossága gyakran nem kielégítő, különösen akkor, ha a súrlódóerők befolyása el nem hanyagolható. Ilyenkor a súrlódás mennyiségi befolyását egy **második** kismintán kell vizsgálni, amely viszont a *Reynolds*-törvény feltételeit elégíti ki.

III. Végül a teljesség kedvéért a *kapilláris erők* döntő befolyását kifejező **Weber-féle számot** is megemlíthetem, amelynek alapján a tömegerők és a felszíni feszültség kölcsönhatása vizsgálható.

Itt tehát a súlyerőt és a súrlódást hanyagoljuk el, ami különleges esetekben megengedhető. A kismintatörvény most így írható:

$$\frac{J}{K} = \frac{J_m}{K_m}, \qquad \text{azaz:} \quad \frac{\varrho\, l\, c^2}{k} = \frac{\varrho_m\, l_m\, c_m^2}{k_m} = W. \tag{105}$$

A kivitel, ill. a kisminta (hosszúsági) méretének eszerint a folyadék sűrűségével, kapilláris feszültségével és sebességével a *Weber*-féle számmal előírt vonatkozásban kell állnia, hogy e hasonlóság feltételét kielégíthessük.

45. A kismintakísérlet korlátjai. A határsebességek

A kismintatörvény — amint a fentebbiekből is kitűnik — az **erőtani hasonlóság tökéletlensége** miatt mindig csak olyan előre kijelölt korlátok között alkalmazható, amelyek a kísérlet célkitűzéséhez igazodnak. Ezeken felül vannak azonban más feltételek is, amelyek a kisminta méretarányának szabad választását korlátozzák, és a kísérlet szabatos elvégzésének lehetőségét szűkebb határok közé szorítják.

E határfeltételek nagy része inkább vízépítéstani vonatkozású, mert nyitott csatornák és természetes vízfolyások vizsgálatával kapcsolatos. Teljes áttekintést azonban a feladat elé tornyosuló nehézségekről csak akkor kapunk, ha vizsgálatunkat ezekre is kiterjesztjük [36].

A következőkben *Krey*, *Eisner* és *Lindquist* megállapításaira támaszkodom, de a határfeltételek csoportosításában más utat követek. Különválasztom ugyanis a kisminta szabatos elkészítését megnehezítő **szerkezeti** feltételeket, amelyekre itt csak röviden térek ki.

A kisminta méretarányának kisebbítésével a *mértani* hasonlóság feltétele csakhamar teljesíthetetlenné válik, a csatornafalak *érdességét*, a hordalék *szemnagyságát* — vagy gázos víznél a *buborékméreteket* — szintén az előírt méretarányban kellene kisebbíteni, ami a gyakorlatban meg nem valósítható. Az idevágó kismintakísérleteknél tehát a **mértani hasonlóság is tökéletlen,** és ennélfogva az eredmény is csak **torzított** lehet. Ennek ellenére is használható eredményekre vezet a kismintakísérlet, ha a minta e tökéletlenségéből származó hibát mesterséges fogásokkal -pl. a *magassági méretarány* alkalmas *torzításával* — kiegyenlítjük. (Az esés megnövelésének mértékét különleges kismintatörvény írja elő, amelyre itt csak rámutatok.)

A kismintakísérlet **üzemi** feltételeinek előírását általánosságban **ötféle határállapot** korlátozza. E határok átlépésével az áramlás képe gyökeresen megváltozik. Okvetlenül meg kell tehát követelni, hogy a kismintakísérlettel vizsgált áramlás

jellege ugyanaz legyen, mint a kivitelé. Mindkét jelenség jellemzőinek (egybevágó módon) vagy e határon *innen*, vagy azon *túl* kell maradniok, mert az áramlás hasonlóságának feltétele csak így elégíthető ki.

E határállapotok minden esetben ún. **határsebességekkel** is jellemezhetők, amelyek a kisminta használhatóságának korlátjait is kijelölik.

Az ötféle határ a következő:

1. Az ürképződés határa. A jelenség lényegét a 22. pontban már ismertettem. Itt voltaképpen alsó **nyomáshatárról** van szó, amelyet a valóságos folyadék hőmérsékletén telített gőz nyomása jelöl ki. Felső sebességi határ természetesen ebben az esetben szintén kijelölhető, e határsebesség azonban a berendezés méreteitől és üzemi jellemzőitől függően esetről esetre más.

2. A felszíni (kapilláris) hullámsebesség. A felszíni hullámok keletkezésének e határfeltételéről a 41/d. pontban már volt szó. A kismintakísérletnél a $w_k = 23$ cm/mp-es alsó határsebességnek figyelmen kívül hagyása az eredmény használhatóságát befolyásolhatja, ha víztükör kialakulásával kapcsolatos vizsgálatról van szó.

3. A réteges és a keveredő áramlás határfeltétele a Reynolds-féle törvénnyel írható körül. A (103) egyenlettel kifejezett Reynolds-számnak egy meghatározott értékénél (zárt csövekben: $Re_0 = 2320$-nál) az addig réteges áramlás stabilitása megbomlik s a különböző sebességű folyadékelemek összekeveredtek. A sebesség megnövelésével ugyanis az impulzuserők is megnagyobbodnak, és a súrlódó erőkkel biztosított egyensúlyállapotot megbontják. A jelenség lefolyásának szabatos elméleti magyarázata még ismeretlen. Egyelőre a kísérleti kutatások alapján annyit tudunk, hogy a sebesség óvatos fokozásával sikerült a réteges áramlást a Reynolds-szám (kritikus) határértéke fölött is fenntartani, de a legkisebb rázkódtatás elég volt az áramlás képének megváltoztatásához.

A keveredő áramlással kapcsolatos jelenségekre a következő fejezetekben még visszatérünk.

4. A hullámsebesség. Nyitott csatornában a folyadék azonos munkaképességgel általában kétféle mozgástörvényt követhet. Nagy mélység és kis sebesség az **áramlás** jellemzője, ezzel szemben a **rohanás**-t nagy sebesség és kis mélység jellemzi. Az áramlás e kétféle alakját egymástól elválasztó határállapot akkor áll be, ha a folyadék sebessége a hullámok terjedési sebességével megegyezik. A hullámsebesség tehát **határsebesség** az áramlás és rohanás között, ami a víztükör szemmelláthatóan eltérő kialakulásán is észlelhető. A rohanó hegyipatak felszíne ugyanis tükörsíma, mert sebessége nagyobb, mint a hullámoké, amelyek ennélfogva visszafelé nem terjedhetnek. A felszín megzavarása tehát ebben az esetben a víztükör simaságát nem töri meg, mert a nyomokat a rohanó víz magával viszi (a hullámokat elmossa).

Zárt csőben a hullámsebesség a folyadékban terjedő hang sebességével azonos. E határsebességnél gyorsabb áramlás törvényeit az ún. **gázdinamika** tárgyalja, amely az *összenyomható* folyadék áramlástanának jelentős tudományágává fejlődött.

Cseppfolyós folyadékban a hullámsebességnek az ún. *vízlökés*-sel kapcsolatosan van gyakorlati jelentősége. Ezzel a III. *G*) fejezetben még részletesebben foglalkozunk.

5. A hordalékmozgás határsebessége. Természetes vízfolyásban a meder fenekén lerakódott ún. **hordalék** a szemnagyságtól függő határsebesség alatt nyugalomban marad. Mihelyt a víz ezt a határsebességet elérte, a hordalékmozgás meg-

indul, és ennélfogva az áramlás képe is gyökeresen megváltozik. E kérdéssel szorosan összefügg a meder kimosásának és az iszap lerakodásának a kérdése is, amelyre a következőkben még visszatérünk (132. pont).

Végül az anyagszállítás vízáramban és légáramban is csak ilyen határsebesség fölött indulhat meg (Vö. a IV. B) fejezettel.)

Az elmondottakból kitűnik, hogy a kisminta méretarányának helyes megválasztása és a kísérlet üzemi feltételeinek előírása rendkívül nagy körültekintést igényel, és többnyire csak a feladatkör megszűkítése árán sikerül. Rendszerint meg kell elégednünk egy-egy jelenség elkülönített vizsgálatával, amelynek várható lefolyásáról a kismintakísérlet mennyiségileg is helyes eredményt szolgáltat. A természet megfigyelését és a valóságos (teljes nagyságú) kivitel üzemi vizsgálatát azonban a kismintakísérlet *sohasem fogja teljesen pótolni* vagy feleslegessé tenni.

46. A hidraulikai sugár

Az áramlási veszteségek kiszámítására alkalmas *Hagen—Poiseuille*-féle képletet a 43. pontban d átmérőjű hengeres csővezetékre vonatkoztattuk. Ilyen hengeres cső ún. **jellemző mérete:** a (belső) csőátmérő. A kismintatörvényt és az erőtani hasonlóságot mutató Reynolds-féle számot is ezzel a jellemző hosszúsági mérettel fejeztük ki.

Nem körkeresztmetszetű csövek és csatornák, továbbá a nyitott szelvényű vízfolyások áramlástani vizsgálata a probléma általánosabb fogalmazását teszi szükségessé, ami az ún. **áramlástani** vagy **hidraulikai sugár** fogalmának megalkotására vezetett.

Hidraulikai sugárnak nevezzük az átfolyószelvény keresztmetszetének és nedvesített kerületének a hányadosát. Írható:

$$\boxed{r' = \frac{F}{K}} \quad \text{(m)} \tag{106}$$

ahol F (m²) a folyadékáram keresztmetszete és K (m) a »nedvesített« kerület.

A hidraulikai sugár értelmezése a 47. pontból válik világossá. Ugyanott mutatok rá a kétféle számítási alap között fennálló kapcsolatra is, amely a számítás menetében is kifejezésre jut.

47. A keveredő (turbulens) áramlás veszteségei zárt csőben és nyitott csatornában

A keveredő áramlás jellegzetessége: az ún. **turbulencia** az elméleti és a kísérleti kutatásnak le nem zárt fejezete, amelynek lényeges kérdései mindmáig tisztázatlanok.

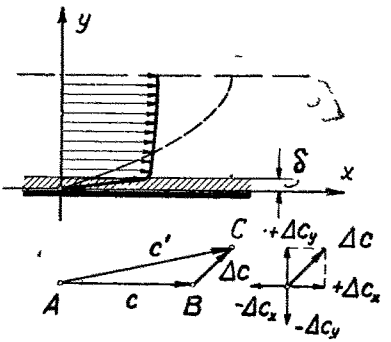
A gyakorlat szempontjából itt annyit emelek ki, hogy a kritikus *Reynolds*-számon felül a folyadékelemek sebessége egészen szabálytalanul lüktető változást szenved. Az áramvonalmenti (c sebességű) főmozgás egy minden irányban egészen szeszélyes kilengéseket eredményező (ingadozó Δc sebességű) mellékmozgással

párosul *(70. ábra)*, amelynek következtében a szomszédos áramcsövek különböző sebességű elemei egymásba hatolnak és keverednek. A keveredés következtében a **sebességeloszlás** képe gyökeres változást szenved: a szomszédos rétegek *lendülete* az impulzuscsere következtében nagymértékben *kiegyenlítődik*.

A keveredő áramlásra jellegzetes sebességeloszlást a *70. ábra* mutatja. A sebesség a falhoz tapadó — rendszerint igen vékony — határrétegen belül rendkívül meredeken emelkedik, s a csatorna belsejében (a határrétegen túl) már alig növekszik. *Réteges* áramlásnál a sebesség legnagyobb értéke a középértéknek kétszeresére emelkedett ($c_o = 2\,c_k$); *keveredő* áramlásnál viszont a legnagyobb sebesség és a középsebesség között jóval kisebb különbséget találunk, amennyiben *Nikuradze* vizsgálatai szerint

$$\frac{c_k}{c_o} = 1 - \frac{3{,}75}{8{,}48 + 5{,}75 \lg (r/k)}. \qquad (107)$$

ahol r (mm) a cső sugara és k (mm) az érdességet jellemző kiszögelések mérete (tájékoztató értékeit l. a 48/b. pontban). A gyakorlatban előforduló r/k értékeknél $c_k/c_o =$ $= 0{,}75 \div 0{,}85$ között van.



70. ábra. Keveredő (turbulens) áramlás

A **veszteségek** szempontjából a sebességeloszlásnak ez a jellegzetessége arra a gyakorlati értékű megállapításra vezet, hogy a (97) egyenlettel kifejezett csúsztatófeszültségek túlnyomórészt **magában a határrétegben** keletkeznek. A csatorna belsejében az áramlás tehát már gyakorlatilag veszteségmentesnek tekinthető, vagyis a határrétegen túl az áramlás a *tökéletes* folyadékra érvényes törvények alapján vizsgálható.

Meg kell jegyezni, hogy a keveredő áramlásra jellegzetes impulzuscsere hatása a veszteségek természetében és nagyságrendjében is kifejezésre jut. A veszteség szükségszerűen megnagyobbodik a tiszta folyadéksúrlódásból számítható értékhez képest, és azonfelül a sebesség **négyzetével** arányos lendületnek függvénye.

Az a felismerés, hogy a veszteségek a falhoz tapadó határrétegen *belül* keletkeznek, arra az eredményre is vezet, hogy az áramlást fékező erő a csatorna **nedvesített felületével** arányos súrlódó erő alakjában vehető számításba. Ennek mentén a folyadék lendületével arányos csúsztatófeszültség keletkezik. E τ csúsztatófeszültség a következő alakban írható:

$$\tau = \lambda' \gamma \frac{c^2}{2g} \qquad (\mathrm{kg/m^2}). \qquad (108)$$

Az l hosszúságú, K nedvesített kerületű csatorna falán keletkező súrlódás tehát:

$$S = l\,K\,\tau \qquad (\mathrm{kg}). \qquad (109)$$

E súrlódó erőből kiszámítható veszteségmagasság *zárt csőben* áramló folyadékra azonos a *Hagen—Poiseuille*-féle (101) képlettel, *nyitott csatornára* pedig a *Chézy*-féle képlet leszármaztatására vezet.

A *zárt cső* és a *nyitott csatorna* áramlástani jelenségei között annyi hasonlóságot találunk, hogy ez indokolja azok együttes vizsgálatát.

Zárt csőben a h' veszteségmagasság a cső két vége között mérhető $\Delta p = h' \gamma$ nagyságú nyomásesés alakjában jelentkezik, amely az F csőkeresztmetszetében $P = F \Delta p$ nagyságú erőt szolgáltat a súrlódás legyőzésére.

Az *egyenletes* áramlást biztosító egyensúlyfeltételt $P = S$ egyenlet fejezi ki, amely $r' = F/K$ helyettesítéssel, rendezés után a következő alakra hozható:

$$\boxed{h' = \lambda' \frac{l}{r'} \frac{c^2}{2g}} \quad \text{(m)}. \tag{110}$$

Itt r' az áramlástani (hidraulikai) sugár, amely a 46. pont szerint az átfolyószelvény keresztmetszetének és nedvesített kerületének a hányadosa.

A d átmérőjű cső hidraulikai sugara, $F = d^2\pi/4$ és $K = d\pi$ helyettesítéssel: $r' = d/4$. A (110) egyenlet ezzel az értékkel a *Hagen*-féle alakba megy át, azaz

$$h' = \lambda \frac{l}{d} \frac{c^2}{2g} \quad \text{és} \quad \lambda = 4\lambda'. \tag{111}$$

Meg kell jegyezni, hogy a veszteségmagasságnak a *hidraulikai sugárral* kifejezett (110) egyenlete **tetszőleges** keresztmetszetű **zárt** és **nyitott** csatornára egyaránt alkalmazható. A veszteségtényező a csőátmérőre vonatkoztatott értékeknek **egynegyedrésze,** ($\lambda' = \lambda/4$). Így pl. a tájékoztató eredményt adó Dupuit-féle ($\lambda = 0{,}03$) érték alapján első közelítéssel: $\lambda' = \mathbf{0{,}0075}$ tényezővel számolhatunk.

A *Reynolds-szám* is negyedakkora, ha azt a csőátmérő helyett a hidraulikai sugárra vonatkoztatjuk. Írható:

$$Re' = \frac{c\, r'}{\nu} = \frac{Re}{4} \tag{112}$$

Ez természetesen a *Reynolds*-szám kritikus értékére is vonatkozik. A keveredő áramlás alsó határát jellemző érték is tehát a körszelvényre elfogadott $\mathbf{Re}_0 = 2320$ határérték egynegyed része, azaz:

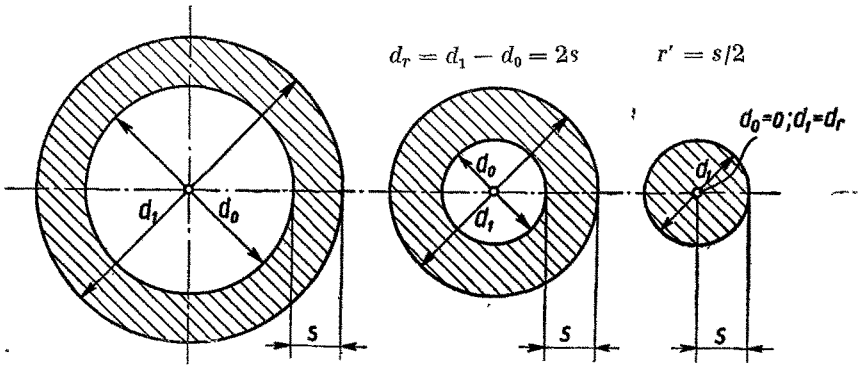
$$\boxed{Re'_0 = 580.} \tag{113}$$

Az áramlási veszteségmagasság számítását sok esetben egyszerűsíti a $d_r = 4r'$ redukált csőátmérő bevezetése, mert ezzel az ellenállás a hengeres csőre érvényes λ tényezőjével (és Re Reynolds-számmal) határozható meg.

Különösen szemléletes ez a módszer körgyűrűszelvény esetén (vö. a *71. ábrával*), mert annak hidraulikai sugara, $F = (d_1^2 - d_0^2)\,\pi/4$ és $K = (d_1 + d_0)\pi$ értékkel és $d_r = d_1 - d_0$ helyettesítéssel:

$$r' = \frac{d_1 - d_0}{4} = \frac{d_r}{4}.$$

Az eredmény tehát úgy is fogalmazható, hogy a gyűrűszelvény ellenállása ugyanakkora, mint egy olyan körszelvényű csőé, amelynek átmérője a gyűrűátmérők különbsége.



71. ábra. Körgyűrű-szelvény hidraulikai sugara és redukált átmérője

37. példa. Egy $d_1 = 10$ cm külső és $d_0 = 8$ cm belső átmérőjű gyűrűszelvény hidraulikai sugara, $d_r = 10 - 8 = 2$ cm $= 0{,}02$ m redukált átmérővel:

$$r' = 2 : 4 = 0{,}5 \text{ cm} = 0{,}005 \text{ m}.$$

Ha a cső $l = 100$ m hosszú, akkor a veszteségmagasság, $\lambda = 0{,}03$, $c = 2$ m/mp, ($c^2/2g = 0{,}204$ m) értékekkel:

$$h' = \lambda \frac{l}{d_r} \frac{c^2}{2g} = 0{,}03 \cdot \frac{100}{0{,}02} \cdot 0{,}204 = \mathbf{30{,}6\ m}.$$

Ennek a veszteségmagasságnak *feltűnően nagy* értéke még szembetűnőbb, ha azt a d_1 átmérőjű körszelvényével hasonlítjuk össze. Azonos λ,l és c értékekkel írható:

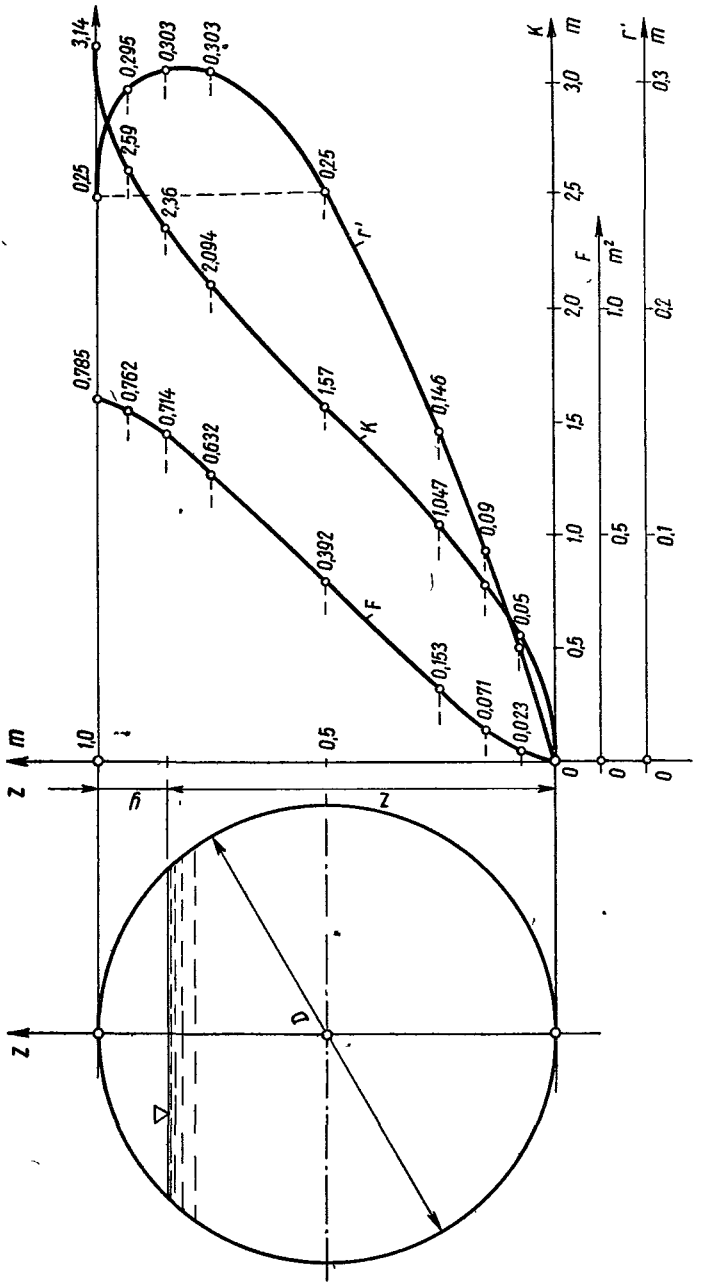
$$h' = 0{,}03 \cdot \frac{100}{0{,}1} \cdot 0{,}204 = \mathbf{6{,}12\ m}.$$

Ez a példa is arra int, hogy a mélyfúrású kutaknál használatos körgyűrűszelvény esetén a csőközben áramló folyadék veszteségmagasságának feltűnő megnagyobbodásával kell számolni.

38. példa Egy $d = 1000$ mm átmérőjű vízszintes csővezetéknek $F = 0{,}785$ m²-es szelvényét a víz *nem tölti ki*, hanem abban z magasságban a *72. ábra* szerint szabad víztükör keletkezik.

A hidraulikai sugár (106) szerint minden víztükörmagassághoz szabatosan számítható. A számítás eredményei a *72. ábrában* találhatók. Ebben az F átömlőkeresztmetszet, a K nedvesített kerület és ezek hányadosa: az r' hidraulikai sugár függvényábráin olvashatók le a körszelvény jellemzőinek a tükörmagassághoz tartozó értékei.

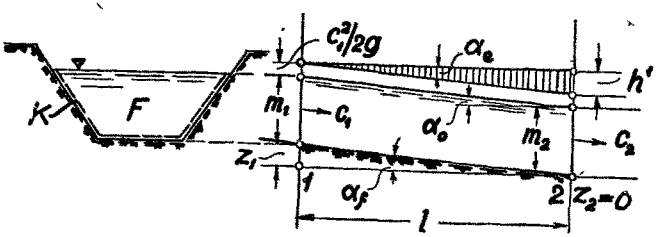
A kör alakú — és általában a ki nem töltött — csatornaszelvények jellegzetessége, hogy a telt szelvény hidraulikai sugara jóval kisebb, mint a nem teljesen kitöltött szelvényé. Az adott esetben — és általában a szimmetrikus szelvények esetében — a félig telt cső hidraulikus sugara már ugyanakkora, mint a telt csőé és azontúl a víztükör emelkedésével eleinte jelentékenyen megnagyobbodik, majd egy legnagyobb érték elérése után ismét lecsökken a telt cső értékére.



72. ábra. Korszelvényű (ki nem toltott) vízszintes csővezeték hidraulikai sugara a víztukormagasság függvényében

Minthogy pedig (115) szerint a hidraulikai sugár megnagyobbodásával az átfolyás sebessége is megnövekszik, tehát az átfolyó mennyiség is nagyobb, ha a szelvény nincsen egészen kitöltve. (Vö. a 40. példával.)

Nyitott csatornában az egyenletes áramlás fenntartásához a medernek akkora **esést** kell adni, amely a veszteségmagasságot éppen fedezni tudja. A viszonyokat a *73. ábra* szerint a medermenti *e* **energiavonal** felrajzolása szemlélteti. Az *l* hosszúságú csatornában a folyadék munkaképessége a belépés helyén: $e_1 = z_1 + m_1 + c_1^2/2g$, a kilépés helyén pedig: $e_2 = z_2 + m_2 + c_2^2/2g$.



73. ábra. Egyenletes áramlás nyitott csatornában

Az energiavonal **esése** a h' veszteségmagasság, amelyet a meder hosszegységére vonatkoztatunk. A (108) egyenlet alapján írható:

$$\operatorname{tg}\alpha_e = i_e = \frac{h'}{l} = \frac{\lambda'}{r'}\frac{c^2}{2g}. \qquad (114)$$

Ha a meder F szelvénye végig egyenletes, és a mederfenék esése is akkora, hogy a veszteségmagasságot éppen fedezni tudja, azaz: $z_1 - z_2 = h'$, vagy $\operatorname{tg}\alpha_f = i_f = i_e = i$, akkor az áramlás közepes sebessége és a medermélység is változatlan marad, vagyis $c_1 = c_2 = c$ és a víztükör is a mederfenékkel párhuzamosan helyezkedik el, azaz $\alpha_0 = \alpha_f$ és $i_0 = i_f$.

Az egyenletes áramlásnak erre a legegyszerűbb esetére a c sebesség a (114) egyenletből számítható $i_e = i$ helyettesítéssel írható:

$$c = C\sqrt{ir'}; \qquad \text{ahol:} \quad C = \sqrt{2g/\lambda'}. \qquad (115)$$

Ez a **Chézy-féle képlet,** amely a nyitott csatornában áramló vízsebességet az esés és a hidraulikai sugár függvényében fejezi ki. A Chézy-féle állandó értéke, $\lambda' = 0{,}0075$ helyettesítéssel:

$$\mathbf{C = \sqrt{19{,}62 : 0{,}0075} = \sqrt{2610} \cong 51.}$$

A Chézy-féle képlet előzetes számításokhoz használható eredményt szolgáltat, ha a C állandót a mederfalak minőségéhez igazodó értékkel helyettesítjük. (Nagyon érdes medernél a C állandó a fenti érték felére is csökkenhet, sima falú csatornára viszont annak kétszerese is előfordulhat.)

Itt jegyzem meg, hogy az eredményt elsősorban a szelvénymenti sebességeloszlás egyenlőtlensége teszi megbízhatatlanná, így tehát a természetes vízfolyások szabálytalan mederszelvényeire a Chézy-képlet csak *durva közelítéssel* használható.

39. példa. Egy $b = 10$ m széles, $m = 1{,}0$ m mély műcsatorna esése: $i = 0{,}001$, azaz $1\,^0/_{00}$.

A hidraulikai sugár: $F = b\,m = 10$ m² és $K = b + 2\,m = 12$ m értékkel:

$$r' = \frac{F}{K} = \frac{10}{12} = 0{,}83 \text{ m}.$$

A közepes sebesség ($C = 51$ állandóval):

$$c = C\sqrt{ir'} = 51\sqrt{0{,}001 \cdot 0{,}83} = \mathbf{1{,}47\ m/mp}.$$

Az átfolyó vízmennyiség: $\mathbf{V} = F\,c = 10 \cdot 1{,}47 = \mathbf{14{,}7\ m^3/mp}$.

Abban az esetben, ha pl. ezen a csatornán $V_1 = 4$ m³/mp vízmennyiség folyik át, a medermélység hozzávetőleges kiszámításához a hidraulikai sugár ama közelítő értékét helyettesítjük, amely $m_1 \ll b$ esetén a nedvesített kerületnek csak a fenekére eső részét veszi figyelembe. $K_1 \cong b$ helyettesítéssel: $r_1' \cong m_1$ (vagyis kis mélységű széles csatorna hidraulikai sugara helyett a medermélységgel számolhatunk).

Az átfolyó vízmennyiség tehát helyettesítés után így írható:

$$V_1 \cong b\,m_1 C\sqrt{i m_1} = bC\sqrt{i}\,m_1^{\frac{3}{2}}.$$

A keresett medermélység tehát:

$$\mathbf{m_1} \cong \sqrt[3]{\frac{V_1^2}{b^2 C^2 i}} = \sqrt[3]{\frac{16}{100 \cdot 2610 \cdot 0{,}001}} = \mathbf{0{,}395\ m}.$$

Az elhanyagolás az adott esetben kb. 4%-os, mert ebből a medermélységből számított középsebesség: $c_1' = V_1/F_1 = 1{,}01$ m/mp, ezzel szemben a hidraulikai sugár szabatosabb értékével számított eredmény: $c' = 0{,}97$ m/mp.

Meg kell jegyezni, hogy a C állandó választásának bizonytalansága ennél sokkal nagyobb hibát okozhat.

A nyitott csatornára érvényes összefüggések értelemszerű alkalmazást találnak arra az esetre is, amikor a **zárt csőben** vezetett folyadékáram **nem tölti ki** a csőkeresztmetszetet, és a kerületnek csak egy részét nedvesíti.

40. példa. Egy nagyteljesítményű gőzerőmű $l = 400$ m hosszú gravitációs hűtővízcsatornája iker elrendezésű négyszögletes szelvényekkel vasbetonból készült [85]. A $b = 1800$ mm széles és $h = 2000$ mm magas, a *74. ábra* szerint 300 mm-es háromszögekkel lesarkított két szelvény mindegyike $V = 5$ m³/mp vizet szállít a derítőmedencéből a szivattyúaknába. Egy (telt) szelvény keresztmetszete: $F_1 = 3{,}42$ m², nedvesített kerülete: $K_1 = 6{,}9$ m, hidraulikai sugara tehát:

$$\mathbf{r_1'} = 3{,}42 : 6{,}9 = \mathbf{0{,}495\ m}, \text{ azaz: } d_1 = 4\,r' = 1{,}98 \text{ m}.$$

Az áramlás sebessége:

$$\mathbf{c_1} = V/F_1 = 5{,}0 : 3{,}42 = \mathbf{1{,}46\ m/mp}, \text{ azaz: } c^2/2g = 0{,}109 \text{ m}.$$

A *Reynolds*-szám tehát (10 C°-os víz $\nu = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ m²/mp kinematikai viszkozitásával)

$$Re_1 = \frac{c_1 d_r}{\nu} = \frac{1{,}46 \cdot 1{,}98}{1{,}3 \cdot 10^{-6}} = 2\,220\,000.$$

A simított falú betoncsatornára (sima cső) a 48. pont (42. példa) szerint: $\lambda = 0{,}0102$ választható, és ezzel a veszteségmagasság (101) szerint:

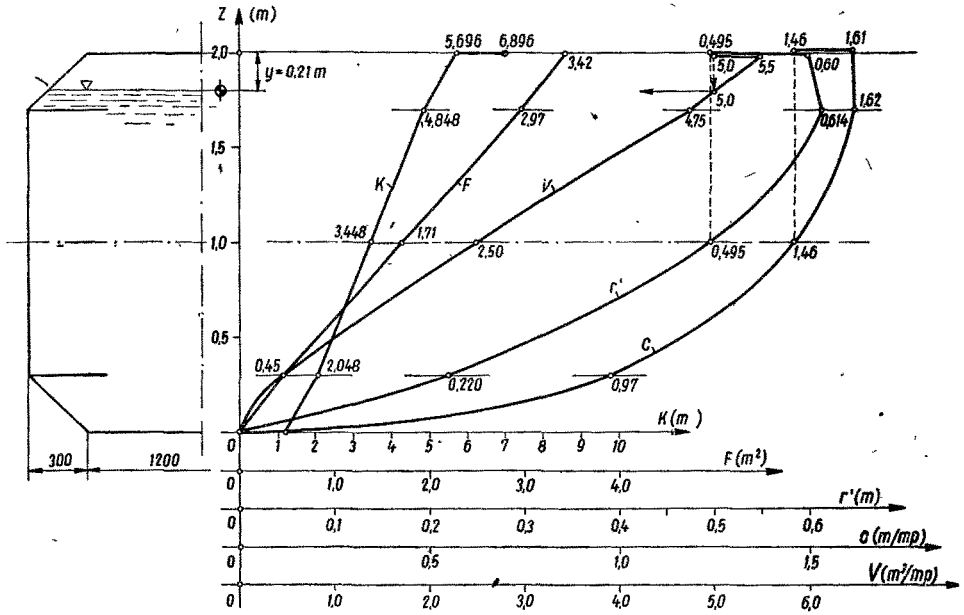
$$h' = 0{,}0102 \cdot \frac{400}{1{,}98} \cdot 0{,}109 = 0{,}224 \text{ m}.$$

Az energiavonal esése tehát:

$$i = h'/l = 0{,}224 : 400 = 0{,}00056;\ \text{azaz:}\ 0{,}56‰.$$

Ha a víz nem tölti ki a csatorna szelvényét, akkor a z víztükörmagasságtól függően a hidraulikai sugár és az áramlási sebesség is megváltozik.

A lefolyási viszonyok változását a vízállás függvényében a *74. ábra* mennyiségileg is szemlélteti. Mihelyt a víztükör a csatorna mennyezetét eléri, a nedvesített kerület ugrásszerűen nagyobbodik meg, a hidraulikai sugár pedig hirtelen lecsökken és vele együtt a c sebesség is.



74. ábra. Szögletes csatornaszelvény áramlási jellemzői a víztükörmagasság függvényében

Így például akkor, amikor a víztükör éppen már nem nedvesíti a mennyezetet, a kerület 1,2 méterrel: $K = 5{,}7$ méterre kisebbedik és ezáltal a hidraulikai sugár: $r' = 3{,}42 : 5{,}7 = 0{,}6$ méterre növekedett és — azonos h' veszteség, ill. i esés feltételezésével — (115) szerint a c sebesség is négyzetgyökös arányban megnagyobbodott. Írható:

$$c = \sqrt{r'/r_1'}\, c_1 = \sqrt{6{,}0 : 4{,}95} \cdot 1{,}46 = \mathbf{1{,}61\ m/mp.}$$

A sebességek arányában megnövekedett a vízáram is, mert gyakorlatilag ugyanakkora keresztmetszeten átáramló mennyiség most:

$$V = 3{,}42 \cdot 1{,}61 = \mathbf{5{,}5\ m^3/mp.}$$

A *74. ábrából* kitűnik, hogy az adott esetben ez a legnagyobb V vízáram, amelyet a csatorna az előírt eséssel még levezet. A víztükör süllyesztésével a hidraulikai sugár ugyan még kissé megnagyobbodik, de ugyanakkor a szelvény keresztmetszeti területe erősebben kisebbedik.

B) ÁRAMLÁS ZÁRT CSŐBEN

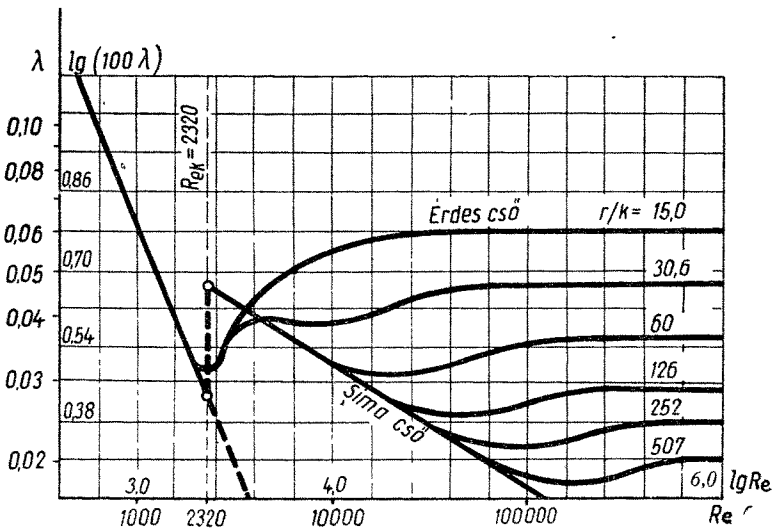
48. A csősúrlódás tényezőjének értékei

Egyenes csőben az áramlási veszteségmagasságot a (101) egyenlettel szokás kifejezni, azaz:

$$h' = \lambda \frac{l}{d} \frac{c^2}{2g}.$$

Már a 43. pontban rámutattam arra is, hogy a λ ellenállástényező szabatos értékét csak gondosan előkészített laboratóriumi kísérletsorozatokkal lehet meghatározni.

Az idevágó kísérleti kutatás az újabb időben számos figyelemre méltó eredményt szolgáltatott, de még mindig sok kérdés tisztázatlan. A következőkben az újabb kutatások eredményeit a *Reynolds*-szám függvényében felrajzolt *75. ábra* kapcsán foglalom össze.



75. ábra. A csősúrlódás tényezője a *Reynolds*-szám függvényében

A $\lambda = \lambda(Re)$ görbét célszerűen logaritmuspapiroson rajzoljuk, vagy pedig közönséges milliméterpapirosra a változók logaritmusait rakjuk fel.

A csőátmérőre vonatkoztatott *Reynolds*-szám ($Re = d\,c/\nu$) kritikus értéke ($Re_k = 2320$) kijelöli a *keveredő* áramlás *alsó határát*, amelyen alul áramlás csak *réteges* lehet.

Réteges áramlásra a (102) egyenlettel kifejezett ellenállástényező a Reynolds-szám helyettesítésével a következő alakba megy át:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

A *75. függvényábrában* ezt az összefüggést ($\lg \lambda = \lg 64 - \lg Re$ alakban) ferde egyenes ábrázolja.

Meg kell jegyezni, hogy a gyakorlatban előforduló feladatok túlnyomó része a **keveredő áramlás** tartományába esik. Réteges áramlást főleg csak az egészen vékony olajvezetékekben és a gravitációs melegvízfűtés csővezetékeiben találunk.

41. példa. Egy $t = 80$ C°-os ($\nu = 0{,}36 \cdot 10^{-6}$) melegvizet szállító $d = 15$ mm átmérőjű csővezetékben az áramlás csak addig lehet réteges, amíg a sebesség kisebb marad a következő határértéknél:

$$c_0 = \frac{\nu Re_k}{d} = \frac{0{,}36 \cdot 10^{-6} \cdot 2320}{0{,}015} = \mathbf{0{,}055\ m/mp.}$$

Ha tehát a sebesség csak 5 cm/mp, akkor az áramlás réteges, a Reynolds-szám: $Re \cong 2100$, az ellenállástényező tehát:

$$\lambda \cong \frac{64}{2100} = 0{,}0305.$$

A keveredő áramlás veszteségtényezőjére vonatkozó kutatások eddig eredményei arra vezettek, hogy a csőfal minősége szerint különbséget kell tenni a **sima cső** és az **érdes cső** között.

a) **Sima csőben** a kritikus Reynolds-szám *éles határt* von a réteges és a keveredő áramlás között. A hirtelen átmenetet a *75. függvényábrában* a λ tényező értékének ugrásszerű emelkedése is mutatja.

A veszteségtényező egyedül csak a Reynolds-szám függvénye. Az újabb lipcsei mérések szerint *(Schiller, Hermann)* sima csőre:

$$\lambda = 0{,}0054 + 0{,}4\,(Re)^{-0{,}3} \tag{116}$$

A sima cső veszteségtényezője eszerint igen nagy Reynolds-számoknál jelentékenyen kisebbedik.

$Re \leqq 80\,000$ esetben sima csőre megbízható eredményt szolgáltat *Blasius* jól kezelhető alábbi képlete:

$$\boxed{\lambda = 0{,}3164\,(Re)^{-1/4}} \tag{117}$$

Nagy Reynolds-számok tartományában *Nikuradse* képletei használhatók, amelyeket $Re \leqq 3\,240\,000$ felső határig mérésekkel is igazolt. Szerinte:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 0{,}8. \tag{118}$$

A műszaki gyakorlat számára csak függvényábrában kezelhető fenti képlet helyett annak alábbi közelítő alakja is használatos:

$$\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221 (Re)^{-0{,}237} + 32\ (Re)^{-1} \tag{119}$$

Még kényelmesebben kezelhető *Nikuradse* eredményeiből levezetett *Filonyenko*-féle képlet, amely szerint:

$$\boxed{\lambda = \left[\frac{0{,}55}{\lg (Re/8)}\right]^2.} \tag{120}$$

42. példa. A 40. példában vizsgált simított falú betoncsatorna redukált átmérője: $d_r = 1{,}98$ m, a Reynolds-szám: $Re = 2\,220\,000$.
lg (2 220 000 : 8) = 5,4432 értékkel, *Filonyenko* szerint:

$$\lambda = \left(\frac{0{,}55}{5{,}4432}\right)^2 = 0{,}0102.$$

Ugyanezt az értéket kapjuk, ha *Nikuradse* képletével számolunk.
A *Blasius*-féle formula ilyen nagy Reynolds-számok esetén már nem használható, mert a λ tényezőre a valóságosnál kisebb értékeket ad.

b) **Érdes csőben** végbemenő jelenségekre *Nikuradse* 1933-ben közzétett kísérleti eredményei derítenek fényt, amelyeket a *75. függvényábra* görbesorozata szemléltet.

Mindenekelőtt az állapítható meg, hogy nagy érdességű csőben az átmenet a rétegesből a keveredő áramlásba úgyszólván folytonos. Kis érdességnél, amíg a felület legnagyobb kiszögellései nem állanak ki a lamináris határrétegből, a csövet **hidraulikailag simának** tekintjük. Az ellenállástényező változása ugyanis egy hosszú szakaszon a sima csővel azonos törvényt követ, vagyis egy *átmeneti szakaszon az érdes cső is a sima cső módjára viselkedik.* Elég nagy Reynolds-számnál azonban az érdesség befolyása abban jut kifejezésre, hogy a *Reynolds-számtól függetlenül állandó* veszteségtényezővel számolhatunk.

Mennél nagyobb az érdesség, annál kisebb Reynolds-számtól kezdődően veszi fel a veszteségtényező az érdességtől függő *állandó* értékét.

Ez más szóval annyit is jelent, hogy az érdesség következtében a sebesség fokozásával mindjobban közeledünk a **sebesség négyzetével** arányos veszteségek tartományához, amelyen belül az ellenállástényező *állandó marad.*

A legnagyobb nehézség itt az **érdesség** fokának szabatos körülírásában mutatkozik, mert egyfelől a csőfal apró egyenlőtlenségeinek és kiszögelléseinek pontos mérése alig lehetséges, s itt inkább csak becslésről lehet szó, másfelől az érdesség nemcsak a kiszögellések méretétől, hanem azok **alakjától** és **eloszlásától** is függ. Így pl. a csőfal kátránybevonata méretben nagy egyenlőtlenséget mutat és ennek ellenére áramlástani érdessége kicsiny.

Ilyen felület jellemzésére divatba jött az *érdesség* mellett a *hullámosság* fogalmának bevezetése is. A nehézségek áthidalására a gyakorlatban *érdességi paraméterek* használata honosodott meg, amelyek irányértékei a különböző anyagokra táblázatos összefoglalásban találhatók.

A *75. ábrán* látható görbeseregnek a nagy Reynolds-számokra érvényes vízszintes ágai mentén a csősúrlódás tényezője csupán a *relatív érdességtől* függ. Az összefüggés a következő egyszerű alakban írható fel:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{1{,}74 + 2\lg(r/k)}, \qquad (121)$$

ahol r a körszelvény sugara és k a kiszögellések átlagos mérete.

Nikuradse kísérleteiből — bár azok eredményei csupán *homokkal érdesített* csövekre érvényesek — a gyakorlat számára igen értékes és tanulságos következtetéseket lehet levonni. Kétségtelenül megállapítható ugyanis az, hogy nagy Reynolds-számok esetében a csősúrlódás tényezője az érdesség csökkentésével jelentősen kisebbíthető.

Minden k/r relatív érdességhez tartozik egy Re_{kr} kritikus Reynolds-szám, amelyen alul (ha $Re < Re_{kr}$) a cső *hidraulikailag sima*, vagyis ellenállástényezője a sima csőével megegyezik.

E kritikus Reynolds-szám tájékoztató értéke:

$$Re_r \cong 200\, r/k. \tag{122}$$

A diagram alakjából az is kiolvasható, hogy a csőfal simaságát milyen határig érdemes fokozni.

A kísérleti eredmények a vízgépek (nem körszelvényű) csatornáira is alkalmazhatók. A tapasztalás is igazolja, hogy *a vízgépek lapátozásának és csatornafalainak gondos megmunkálásával és simításával a hatásfok jelentékenyen javítható.*

Nikuradse kísérleteit — mint már említettem — „homokérdességű" csövekkel végezte. Ezért eredményei a gyakorlatban nem mindig használhatók. Újabban *Colebroock* a képleteket átalakította és általánosította minden fajta hidraulikus érdességre. Eredményeit a *75. ábrához* hasonló függvényábrába foglalta. Ez a függvényábra nagy érdességű cső esetében számos relatív érdességre megadja a csősúrlódás tényezőjét, amelynek összefüggése a Reynolds-számmal a következő alakú:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{1{,}14 - 2 \lg (k/D)}, \tag{123}$$

ahol k/D a *csőátmérőre* vonatkoztatott *relatív érdesség*. Az érdességet jellemző kiszögellések (k) méretére vonatkozóan tájékoztatásul szolgál az alábbi táblázat:

Acélcső (szegecselt)	0,9 ÷ 9,0
Acélcső (húzott)	0,03 ÷ 0,05
Acélcső (rozsdás)	0,1 ÷ 1,0
Acél- vagy öntöttvas-cső (bitumenezve)	0,006 ÷ 0,06
Hengerelt lemez (durva)	0,08 ÷ 0,15
Hengerelt lemez (rozsdás)	0,2 ÷ 0,4
Hengerelt lemez (finom)	0,01
Öntöttvas (új)	0,5 ÷ 1,0
Öntöttvas (rozsdás)	1,0 ÷ 1,5
Öntöttvas (korrodált)	1,0 ÷ 3,0
Beton (simítva)	0,3 ÷ 0,8
Beton (durván)	1,0 ÷ 3,0

Végezetül még egyszer kiemelem, hogy az érdes falú csövek és csatornák súrlódási veszteségeinek teljesen szabatos és megbízható számítása ma még sem a képletek, sem a táblázatok alapján nem lehetséges, mert ezek csak mindig tájékoztató irányértékeket szolgáltatnak. Kényesebb esetekben tehát az üzemi kísérlet eredményei nem nélkülözhetők.

49. Csőidomok. A kúpos szűkítőidom vagy konfúzor

A csővezetékbe iktatott idomdarabok áramlási veszteségmagassága (100) és (108) szerint az áramló folyadék lendületével (sebességmagasságával arányos. Az arányossági tényezőt ζ (görög *dzéta*) betűvel jelöljük és **veszteségtényezőnek** nevezzük.

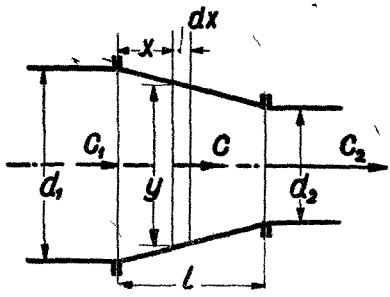
Egy l hosszúságú és d átmérőjű (egyenletes keresztmetszetű) egyenes csőszakasz veszteségtényezője (101) szerint:

$$\boxed{\zeta = \lambda \frac{l}{d}}, \tag{124}$$

veszteségmagassága pedig:

$$\boxed{h' = \zeta \frac{c^2}{2g}}. \tag{125}$$

Egyenletes szelvényű egyenes csőszakasz esetére a ζ veszteségtényezőnek bevezetése nem fejez ki új gondolatot. A (124) egyenletből csak az tűnik ki, hogy a ζ tényező nagysága a λ csősúrlódási tényezővel arányos és ennélfogva a csőfal minőségétől és a Reynolds-számtól is függ.



76. ábra. A kúpos szűkítőidom vagy konfúzor

Ennek a jelolési módnak az előnyei oly csőidom esetében domborodnak ki, amelynek keresztmetszete nem állandó. Ilyen idomdarabok kozul a legegyszerűbb az ún. **konfúzor,** amely egy nagyobb $d = d_1$ átmérőjű csőszakasz f_1 keresztmetszetét kupos átmenettel d_2 átmérőre (ill. f_2 keresztmetszetre) szűkíti *(76. ábra).*

A szűkítés mértékét rendszerint az átmérők arányával — éspedig valódi tort alakjában — szokás kifejezni, azaz:

$$\boxed{n = d_2/d_1}. \tag{126}$$

A szűkítőidom **áttételét** — vagyis azt, hogy a c_2 kilépősebesség hányszorosa a c_1 belépősebességnek — viszont áltort alakjában írjuk fel, vagyis:

$$a = \frac{f_1}{f_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{1}{n^2}. \tag{127}$$

A szűkítőidom belsejében a folyadék sebességével együtt annak *lendülete* is megnovekszik. (Vö. a 15. ponttal és a *34. ábrával.)*

A lendületnövekedés a sebesség négyzetével arányos, tehát az átmérőviszony negyedik hatványával fejezhető ki: Írható:

$$\frac{c_2^2}{2g} = a^2 \frac{c_1^2}{2g} = \frac{1}{n^4} \frac{c_1^2}{2g}. \tag{128}$$

A konfúzor belsejében eszerint a potenciális energia rovására energiaátalakulás megy végbe, amelynek nagyságát (ideális esetben) a szűkítés mértéke egyértelműen megszabja.

A **konfúzor áramlási veszteségmagasságát** a (125) egyenlet mintájára egy ζ_k veszteségtényező bevezetésével fejezzük ki, amelyet a csőidom **legszűkebb** keresztmetszetében talált **legnagyobb** (c_2) **sebességre** vonatkoztatunk. Írható tehát:

$$h_k' = \zeta_k \frac{c_2^2}{2g} \quad \text{(m)}. \qquad (125/k)$$

A csőidom veszteségtényezőjének ez az értelmezése *elméleti* szempontból önkényesnek minősíthető, mert azt éppen úgy lehetett volna a legnagyobb keresztmetszeten belépő folyadékáram c_1 sebességére vonatkoztatni. *Gyakorlati* előnyeit a legszűkebb keresztmetszet kijelölésének abban találjuk, hogy a veszteség nagysága mindig **a lendület legnagyobb értékétől függ,** és a belépőszelvény megnövelésével rendszerint alig észrevehető csökkenést mutat. A veszteségtényező helyes becslését tehát így tudjuk a legjobban biztosítani.

A veszteségtényező a λ csősúrlódási tényező ismeretével az alábbi analitikai számítással határozható meg:

A *76. ábra* jelöléseivel az l hosszúságú szűkítőidomnak egy $\mathrm{d}x$ hosszúságú elemére a veszteségmagasság, (101) szerint:

$$\mathrm{d}h_k' = \frac{\lambda}{y} \frac{c^2}{2g} \mathrm{d}x.$$

A csőidom **kúposságát** kifejező k hosszúság bevezetésével az y átmérőjű szelvény x távolsága a d_1 átmérőjű belépőszelvénytől így fejezhető ki:

$$x = k(d_1 - y); \quad \text{azaz:} \quad \mathrm{d}x = -k\,\mathrm{d}y,$$

ahol a kúpos idom viszonylagos hosszúsága:

$$k = \frac{l}{d_1 - d_2}. \qquad (129)$$

Az idom kúposság a kúp δ szögével vagy **nyílásával** is jellemezhető. A kúp félnyílásának tangense, az ábra jelöléseivel így írható:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{d_1 - d_2}{2l} = \frac{1}{2k}; \quad \text{amiből:} \quad k = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \delta/2}.$$

A c sebességet a d_2/y átmérőviszony figyelembevételével a c_2 (legnagyobb) sebességgel kifejezve, a veszteségmagasság differenciálegyenlete a következő alakra hozható:

$$\mathrm{d}h_k' = -\lambda k d_2^4 \frac{c_2^2}{2g} \frac{\mathrm{d}y}{y^5}.$$

d_1 és d_2 határok között integrálva, az eredmény, (126) figyelembevételével:

$$h_k' = \frac{\lambda k}{4}(1 - n^4)\frac{c_2^2}{2g}.$$

A (125/k) egyenlettel egybevetve, a konfúzor veszteségtényezője:

$$\zeta_k = \frac{\lambda k}{4}(1 - n^4). \tag{130}$$

Ha a szűkítés mértéke nagy ($n < 0{,}5$), akkor n^4 az egység mellett elhanyagolható. Ebben az esetben a veszteségtényező közelítő értéke:

$$\zeta_k \cong \frac{\lambda k}{4} = \frac{\lambda l}{4(d_1 - d_2)}. \tag{130/k}$$

Ezekből az összefüggésekből arra következtethetünk, hogy előírt átmérőarány esetében a konfúzor veszteségei az idom megrövidítésével (az l hosszúság kisebbítésével) arányosan csökkenthetők. **Nagy kúposságú, rövid csőtoldat** jobb hatásfokú a kis kúposságú hosszú konfúzornál.

43. példa. Egy Venturi-mérő konfúzorának méretei: $d_1 = 200$ mm, $d_2 = 100$ mm és $l = 200$ mm. A csősúrlódás tényezője: $\lambda = 0{,}028$.

A szűkítés mértéke: $n = d_2/d_1 = 0{,}5$, azaz: $n^4 = 0{,}0625$ és $1 - n^4 = 0{,}9375$. A (130/k) kozelítő egyenlet használata ebben az esetben mintegy 6%-kal nagyobb veszteségtényezőt eredményez, ami a gyakorlat igényeit jól kielégíti. (A λ tényező becslésében úgyis ennél nagyobb hibát követhetünk el.)

A csőidom viszonylagos hosszúsága:

$$k = \frac{l}{d_1 - d_2} = \frac{200}{200 - 100} = 2$$

és ezzel a konfúzor veszteségtényezője, (130/k) szerint:

$$\zeta_k = \frac{\lambda k}{4} = \frac{0{,}028 \cdot 2}{4} = 0{,}014.$$

A veszteségtényezőnek a példában kiszámított rendkívül kedvező értéke az érkező vízáram rendezetlensége miatt a gyakorlatban ritkán fordul elő. A biztonság érdekében rendszerint

$$\boxed{\zeta_k = 0{,}02 \div 0{,}05}$$

értékkel számolunk.

A **konfúzor hatásfokát** e veszteségtényező nagysága és az áttétel egyértelműen meghatározza, ha ezt a szűkítőidomot energiaátalakítóként vizsgáljuk, amely a bevezetett $(p_1 - p_2)/\gamma$ potenciális energiát (a h_k' vesztességmagasság levonásával) $(c_2^2 - c_1^2)/2g$ lendületnövekedés alakjában hasznosítja. A hatásfok tehát:

$$\eta_k = \frac{(c_2^2 - c_1^2)/2g}{(p_1 - p_2)/\gamma} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2^2 - c_1^2 + 2gh_k'}.$$

$c_1^2 = n^4 c_2^2$ és $2gh_k' = \zeta_k c_2^2$ helyettesítéssel, rendezés után írható:

$$\eta_k = \frac{1 - n^4}{1 - n^4 + \zeta_k}, \quad \text{vagy} \tag{131}$$

a (130) figyelembevételével:

$$\eta_k = \frac{1}{1 + \frac{\lambda k}{4}}. \tag{132}$$

A **szabadsugár-turbina** konfúzoros **vezetőcsatornájának** hatásfokát a turbinába bevezetett H esésből szokás kiszámítani, amely a H_0 statikai esésből a nyomócső h_n' veszteségmagasságának lévonásával kiadódik. ($H = H_0 - h_n'$).

A vezetőcsatorna hatásfoka:

$$\eta_v = \frac{H - h_k'}{H}.$$

44. példa. Egy Pelton-turbina sztatikus esése (a felső víztükörtől a kifolyó nyílásig) $H_0 = 120$ m. A nyomócsövet úgy méretezzük, hogy veszteségmagassága (teljes víznyelés esetében) ne lépje túl az esés 3%-át, azaz

$$h_n' = v_n H_0, \quad \text{ahol:} \quad v_n = 0{,}03.$$

A bevezetett esés tehát:

$$\mathbf{H = (1 - 0{,}03) \cdot 120 = 116{,}4\ m.}$$

A vezetőcsatorna hatásfoka: $\eta_v = 98\%$-ra becsülhető, veszteségmagassága tehát:

$$\mathbf{h_k' = (1 - \eta_v) H = (1 - 0{,}98) \cdot 116{,}4 = 2{,}33\ m.}$$

50. Leválási veszteségek

A nyitott csatornában, továbbá a zárt csőben és a szűkítőidomokban áramló folyadék fentebb ismertetett veszteségeit összefoglaló névvel **súrlódási veszteségeknek** nevezhetjük.

A gyakorlat számára jelentős *keveredő* (turbulens) *áramlásnál* ez a veszteség a határréteg**ben** jön létre, tehát a csatornafalhoz tapadó (rendszerint igen vékony) **határréteg létezését feltételezi.** Ez a feltétel mindaddig teljesül, amíg a csatorna egyenes és *egyenletes* keresztmetszetű, vagy *változó* keresztmetszet esetén is akkor, ha a szelvény *folytonos átmenettel kisebbedik,* azaz az áramlás sebességét *növeli* (jól legömbölyített nyílás, kúpos szűkítőidom vagy *konfúzor).*

Ilyenkor az összefüggő határréteg a csőfal nedvesített felületét mintegy *kibéleli,* a szilárd felszín apró kiszögelléseit elsimítja és ezáltal a csatorna belsejében az áramlás rendezettségét biztosítja.

Egészen lényeges változást szenved azonban az áramlás képe, ha e határréteg megvastagodik és a csatorna faláról **leválik.**

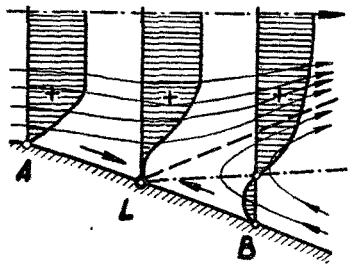
A határréteg leválását a *77. ábra* kapcsán *Prandtl* azzal magyarázza, hogy pl. **bővülő csőtoldat** (diffúzor) keresztmetszetnövekedése miatt a fal mentén lassulva áramló folyadékelemek egyre növekedő nyomással kerülnek szembe, amely azokat — a súrlódás hatásával párosulva megállásig lefékezi. A *77. ábrán* ez az L pontban következik be (amit a szelvénybe berajzolt sebességeloszlási görbének a függvényábra tengelyével összeeső kezdőérintője is szemléltet) E pontban a határréteg

leválik és a csatorna belseje felé sodródik, miáltal az előtte levő folyadékelemek falmenti áramlásának iránya is megfordul. (Vö. a *B* pontban felrajzolt sebességeloszlási görbével.)

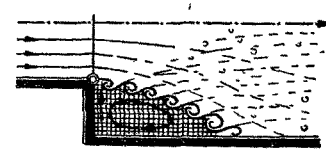
A határréteg felgöngyölődése szabályos időközökben *leváló* (a falról lemosódó) **örvények** keletkezésére vezet, amelyek lendülete a folyadék munkaképességéből vonódott el és az áramló folyadék szempontjából *idegen testként* viselkedő zárt rendszerbe ment át. (Az ilyen szabad örvények folyadékelemei ugyanis zárt pályán keringenek mindaddig, amíg perdületüket a súrlódás le nem fékezi.)

A határréteg leválásának másik következménye, hogy az áramlás a csatorna belsejében is rendezetlenné válik: a különböző sebességű folyadékelemek **összekeverednek,** s az impulzuscsere következtében lendületük egy részét elvesztik. (Ezt az ún. *keveredési veszteséget* azelőtt *ütközési veszteségnek* nevezték.)

Az áramlás rendezetlenségének és a szabályos időközökben ismétlődő örvényleválásnak még egy következményére kell itt rámutatnom, amelyre később még visszatérek. A sebesség *térbeli* és *időbeli eloszlásában* előidézett *egyenlőtlenségek* ugyanis **járulékos veszteségek** forrásai, amelyek a csővezetéknek **egy hosszú szakaszára kiterjednek** és csak ott szűnnek meg, ahol az áramlás ismét rendezetté válik. (A tapasztalat szerint ez csak az ötvenszeres átmérőt meghaladó csőhosszúságú, ún. kifutási távolságban következik be.)



77. ábra. A határréteg leválása



78. ábra. Áramlás a *Borda*-féle csőben

A határréteg leválását a csatornafal erős kiszögellései és iránytörései is előidézik. A falmenti áramvonal ilyenkor nem tudja követni a határoló fal erős görbületét, tehát leválik.

A hirtelen keresztmetszetváltozás egyik alakját: a **Borda-féle csőtoldatot** már a *49. ábrában* (24/d. pont) bemutattam, s az impulzus-tétel alkalmazásával azt is kimutattam, hogy az ellenőrzőfelülettel határolt víztest egyensúlya csak energiaveszteség árán biztosítható. Ez az ún. **Borda-féle veszteség** az (59) egyenlet szerint a keresztmetszetbővüléssel előírt sebességkülönbség négyzetével arányos.

E veszteség szintén a határréteg leválására vezethető vissza, csakhogy most a *78. ábra* szerint keletkező örvények helyhez kötöttek, és a súrlódással apasztott lendületük fenntartásához szükséges energiát a szomszédos rétegből vonják el.

A veszteségeknek ez nem az egyedüli forrása, mert ezenfelül számolni kell keveredési veszteséggel, sőt a folyadékárammal elúszó szabad örvényekkel is, így tehát a *Borda*-féle veszteség igen nagy lehet.

A kísérleti kutatások eredményei alapján az (59) egyenlet helyett írható:

$$h'_B = \xi_B \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g}, \qquad (133)$$

akol $\xi_B = 1{,}2 \div 1{,}3$ (A Borda-féle veszteség a valóságban kb. 20—30 %-kal nagyobb az egyensúlyfeltételből kiszámított elméleti értéknél.)

A **leválási veszteségek** mindig lendületveszteségre vezethetők vissza, tehát a sebesség négyzetével arányosak. Írható:

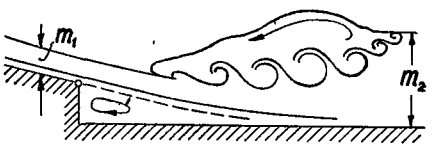
$$h_l' = \zeta_l \frac{c^2}{2g}, \tag{134}$$

ahol a c sebesség a csatorna *legszűkebb* f keresztmetszetére vonatkoztatott középérték ($c = V/f$).

A Borda-féle cső veszteségeit is a (134) egyenlet adja, ha $c_2 = c_1 f_1/f_2$, és $c_1 = c$ helyettesítéssel a ζ_l veszteségtényezőt a következő alakra hozzuk:

$$\zeta_l = \xi_B \, (1 - f_1/f_2)^2. \tag{135}$$

Nyitott csatornában a Borda-féle cső hirtelen keresztmetszetnövekedésével elvileg azonos áramlási jelenség jön létre akkor, ha a mederesés hirtelen töréssel kisebbedik. Ilyenkor a nagy sebességgel *rohanó* vízmennyiség az ún. **Bidone-féle vízküszöb** alakjában ugrásszerűen megy át az *áramlás*-nak megfelelő kis sebességre (vízugrás). A medermélység a *79. ábra* jelölésével m_1-ről küszöböt alkotva emelkedik m_2-re.



79. ábra. A vízkuszob

Az átmenet itt is csak az egyensúlyfeltételből kiszámítható energiaveszteség árán lehetséges, csakhogy ebben az esetben az energiafelesleget felemésztő örvény ún. **henger** alakjában a vízáram *fölött* helyezkedik el.

Itt jegyzem meg, hogy a vízépítési gyakorlat ilyen hengerek fékező munkáját céltudatosan hasznosítja, pl. a gáton átbukó vízáram romboló hatású munkaképességének felemésztésére, ami hatásos védelemnek bizonyult mederkimosás ellen.

Csővezetékek és csatornák kialakításánál az áramlási veszteségek *apasztására* kell törekedni. Elsősorban a leválási veszteségek okainak felkutatásával és azok kizárásával lehet eredményt elérni, mert **a leválási veszteségek a csősúrlódás nagyságrendjét sokszorosan meghaladhatják.** Különösen a vízgépek bővülő csatornarendszerének **áramvonalas** kialakítására irányuló aprólékos gondosság vezethet egészen meglepő eredményekre. A korszerű örvényszivattyú is (39. pont) elsősorban az áramlás zavartalanságát biztosító feltételek teljesítésének köszöni ma már 80—90%-os hatásfokát.

A következőkben tehát a különböző csőidomok ellenállástényezőinek a szakirodalomban szokásos felsorolása helyett néhány elriasztó példa tárgyalására szorítkozom, és inkább azt emelem ki, hogy a veszteségtényezők pontos meghatározása mellet elsősorban **e veszteségek okainak kiküszöbölésére** törekedjünk.

51. A bővülő csőtoldat vagy diffúzor

A *77. ábra* kapcsán rámutattam a **diffúzorban** végbemenő energiaátalakulással kapcsolatos **leválási veszteségek** okaira. E leválások következtében a diffúzor hatásfoka mindig sokkal rosszabb, mint a vele azonos méretű konfúzoré, amelynek belsejében súrlódási veszteségekkel kell számolni.

A leválási veszteségeket a tapasztalás szerint azzal lehet apasztani, hogy a kúposságot $\delta = 8 \div 10°$-ra korlátozzuk, vagyis **a diffúzor hosszát az átmérők különbségének legalább hatszorosára választjuk.** $(k = l/(d_2 - d_1) > 6)$.

Igen kényes esetekben, amikor a diffúzor veszteségeinek megnövekedése a berendezés üzemének nemcsak gazdaságosságát, hanem biztonságát is veszélyeztetheti — ilyen például a *vízsugárszivattyú* és a *vízsugár-légszivattyú* — a diffúzor kúposságát mintegy 5°-ra kell kisebbíteni, és a falak belső felületét tükörfényesre kell készíteni.

A bővülő csőtoldat vagy diffúzor jellemzőit egyébként teljesen hasonló módon értelmezzük, mint a konfúzor esetében. Az egyenletek felírásában azonban figyelembe kell vennünk, hogy most a belépőszelvény a kisebb átmérőjű $(d_1 < d_2)$. Az **átmérőarány** tehát ezzel a jelöléssel, (126) szerint:

$$n = d_1/d_2, \tag{126/d}$$

az **áttétel** pedig:

$$a = \frac{f_2}{f_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{1}{n^2}. \tag{127/d}$$

A **diffúzor veszteségmagasságát** a ζ_d veszteségtényező bevezetésével szintén a **legnagyobb** (c_1) **sebességre** vonatkoztatjuk. Írható:

$$h'_d = \zeta_d \frac{c_1^2}{2g} \text{ (m)}. \tag{125/d}$$

A diffúzor veszteségtényezője mindig többszöröse a konfúzor ζ_k értékének, mert a csősúrlódás veszteségeihez még az ezeknél jóval nagyobb leválási veszteségeket is hozzá kell számítani.

Ha a **leválási** veszteségek apasztása érdekében kis kúposságú diffúzort készítünk, akkor a nagy szerkezeti hosszúság miatt megnagyobbodnak a **súrlódási** veszteségek. Rövid diffúzorban viszont a (130/k) szerint kicsinyek a súrlódási veszteségek, de a δ szög nagymértékű megnövekedése miatt igen nagy leválási veszteségekkel kell számolnunk. A kétfajta veszteség együttes értéke a fentebb megadott 8—10°-os kúposság esetén a legkisebb és e minimum alá általában csak a határréteg-elméletből kifejlesztett módszerek (határréteg-leszívás stb.) alkalmazásával csökkenthető.

Egy jól kialakított diffúzor veszteségtényezője:

$$\boxed{\zeta_d = 0{,}15 \div 0{,}25}.$$

A **diffúzor hatásfokát** az energiamérleg felírásával kapjuk. Az energiaátalakulás iránya itt fordított: a diffúzorban a potenciális energia növekszik a lendületapadás arányában. A diffúzor-veszteség figyelembevételével írható:

$$\eta_d = \frac{(p_2 - p_1)/\gamma}{(c_1^2 - c_2^2)/2g} = \frac{c_1^2 - c_2^2 - 2gh'_d}{c_1^2 - c_2^2} = \frac{1 - n^4 - \zeta_d}{1 - n^4}. \tag{131/d}$$

45. példa. Egy szivattyú $d_1 = 200$ mm átmérőjű nyomócsonkja $l = 600$ mm hosszú diffúzorral csatlakozik a $d_2 = 300$ mm-es nyomócsőhöz.

A diffúzor kúposssága

$$k = \frac{l}{d_2 - d_1} = \frac{600}{300 - 200} = 6$$

értékkel, a kis szögekre megengedhető $\operatorname{tg}\delta/2 \cong \delta/2$ közelítéssel:

$$\delta \cong 2 \operatorname{tg} \delta/2 = 1/k = 0{,}167; \text{ azaz: } \delta = 9°34'.$$

Az átmérők aránya:

$$n = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}, \quad \text{azaz:} \quad n^2 = 0{,}444 \text{ és } n^4 = 0{,}197$$

A diffúzor veszteségtényezője: $\zeta_d = 0{,}15$-re becsülhető, **hatásfoka** tehát (131/d) szerint:

$$\eta_d = \frac{1 - 0{,}197 - 0{,}15}{1 - 0{,}197} = 0{,}813, \text{ azaz: } \mathbf{81{,}3\%}.$$

A turbinák járókerekéből kilépő vízáramnak mechanikai munkává át nem alakult lendületét diffúzor alakú ún. **szívócső** alakítja vissza potenciális energiává oly módon, hogy a turbinát »megszívja«, vagyis az esést megnöveli, és a turbina hatásfokát megjavítja. Az ilyen szívócsőben az energiaátalakulás akkor volna tökéletes, ha az abba *bevezetett* lendület *teljes egészében* alakulhatna át potenciális energiává, vagyis ha a vízáram a diffúzorból lendület nélkül léphetne ki. A szerkezeti méretek túlságos megnövekedését azzal szokás korlátozni, hogy a vízáramot $c_2 = 1 \div 2$ m/mp sebességgel vezetjük ki a szívócsőből. Ez annyit jelent, hogy a diffúzor h_d veszteségmagasságán felül a vízáramnak $c_2^2/2g$ nagyságú kilépőlendületét is a veszteségekhez kell számítani, vagyis a **szívócsőnek a hatásfoka mindig kisebb a diffúzor hatásfokánál.** A diffúzor hatásfokát ugyanis úgy értelmeztük, hogy bevezetett energiaként nem az **egész** lendületet, hanem csak a diffúzorban átalakítható **lendületapadást** vettük számításba.

A **szívócső hatásfoka** tehát:

$$\eta_s = \frac{(p_2 - p_1)'\gamma}{c_1^2/2g} = \frac{c_1^2 - c_2^2 - 2gh_d'}{c_1^2} = 1 - n^4 - \zeta_d. \qquad (131/s)$$

Meg kell jegyezni, hogy fenti számítás érvényességének eddig külön ki nem emelt alapfeltétele az, hogy a turbina járókerekét elhagyó vízáram **perdületmentesen** lépjen át a szívócsőbe.

Ha a folyadék **perdülettel** lép ki a járókerékből, akkor a szívócsőbe (vagy szívócsatornába) belépő c_1 sebesség két összetevőjének: a c_{1m} meridiánsebességnek és a c_{1u} keringési sebességnek a lendületét az *egymásrahelyezés elvén elkülönítve* kell vizsgálni. A szívócső keresztmetszetének bővítésével most csupán a c_{1m} meridián-összetevő lendülete alakítható át a (131/s) egyenletből számítható η_{sm} hatásfokkal potenciális energiává. A c_{1u} keringési összetevőt az egyszerű (kúpos) diffúzor a potenciális energia javára csak kismértékben csökkenti; az ebből származó lendületapadás legnagyobb része súrlódási hővé alakul át, azaz ilyenkor: $\eta_{su} \cong 0$.

Különleges kialakítású harang alakú szívócsővel a keringési sebesség egy része visszanyerhető mintegy $\eta_{su} = 30\%$-os hatásfokkal.

Perdületes átlépés esetén a turbina szívócsövének hatásfoka a szívócső **dinamikai szívómagasságának** bevezetésével eléggé szabatosan számítható. A dinamikai szívómagasság:

$$H_d = \eta_s \frac{c_1^2}{2g} = \eta_{sm} \frac{c_{1m}^2}{2g} + \eta_{su} \frac{c_{1u}^2}{2g} \quad \text{(m)}, \tag{136}$$

ahol a szívócsőbe belépő sebesség lendülete: $c_1^2/2g = (c_{1m}^2 + c_{1u}^2)/2g$.

A **szívócső hatásfoka** tehát:

$$\eta_s = \frac{2g H_d}{c_1^2} = \frac{\eta_{sm} c_{1m}^2 + \eta_{su} c_{1u}^2}{c_{1m}^2 + c_{1u}^2}. \tag{137}$$

A *turbina* veszteségtényezőit a bevezetett H esés százalékában írjuk elő, tehát a *szívócső* v_{sz} *veszteségtényezőjét* is az egész esésre vonatkoztathatjuk.

A turbina járókerekét $c_s \cong c_1$ kilépősebességgel hasznosítatlanul elhagyó lendület az esés v_s százaléka, azaz:

$$\frac{c_s^2}{2g} = v_s H, \quad \text{ahol (132)-ből:} \quad \frac{c_s^2}{2g} = \frac{H_d}{\eta_s}.$$

Ennek a lendületnek η_s-szerese térül vissza a szívócsőben, annak $(1 - \eta_s)$-szerese pedig a szívócsőben megy veszendőbe. A (126/*s*) szerint írható:

$$1 - \eta_s = \xi_d + n^4 = 1 - \frac{H_d}{c_s^2/2g} = \frac{v_s H - H_d}{v_s H}. \tag{138}$$

A szívócsőnek az egész H esésre vonatkoztatott veszteségtényezője tehát a fenti egyenletből:

$$v_{sz} = v_s (1 - \eta_s) = \frac{v_s H - H_d}{H} = \frac{(1 - \eta_s) c_s^2}{2g H}. \tag{139}$$

46. példa. Egy $H = 50$ m esésű **Francis-turbina** kúpos szívócsövének *(80/I. ábra)* átmérője: $D_s = 800$ mm, a vízáram sebessége az $F_s = 0{,}503$ m² keresztmetszetű belépőszelvényben: $c_s = c_1 = 8$ m/mp. (A turbina víznyelése: $V = F_s c_s = 0{,}503 \cdot 8 = 4{,}02$ m³/mp).

A szívócsőből kilépő vízáram sebességét $c_n = c_2 = 1{,}5$ m/mp-re korlátozzuk.

A szívócső áttétele:

$$a = \frac{c_1}{c_2} = \frac{8{,}0}{1{,}5} \cong 5{,}35; \quad \text{azaz:} \quad n^2 = \frac{1}{a} = 0{,}188. \quad (n = 0{,}434 \quad \text{és} \quad n^4 = 0{,}0354).$$

A szívócső kilépőszelvényének átmérője:

$$\mathbf{D}_n = D_s/n = 800 : 0{,}434 \cong \mathbf{1850\ mm.}$$

A szívócső hossza, $\delta = 10°$-os kúposság ($\delta = 0{,}175$) felvételével, $k \cong 1/\delta = L/(D_n - D_s)$ összefüggéséből:

$$\mathbf{L} = \frac{D_n - D_s}{\delta} = \frac{1{,}85 - 0{,}8}{0{,}175} \cong \mathbf{6{,}0\ m.}$$

A szívócső hatásfoka pedig, $\zeta_d = 0{,}25$ veszteségtényezővel, (131/s) szerint:

$$\eta_s = 1 - n^4 - \zeta_d = 1 - 0{,}035 - 0{,}25 = \mathbf{0{,}715};\ \text{azaz: } \mathbf{71{,}5\%}.$$

A járókerék kilépési veszteségtényezője, $c_s^2/2g = 8^2 : 19{,}62 = 3{,}25$ m értékkel:

$$v_s = 3{,}25 : 50 = 0{,}065;$$

a szívócsőnek az egész esésre vonatkoztatott veszteségtényezője pedig (139) szerint, $1 - \eta_s = 1 - 0{,}715 = 0{,}285$ értékkel:

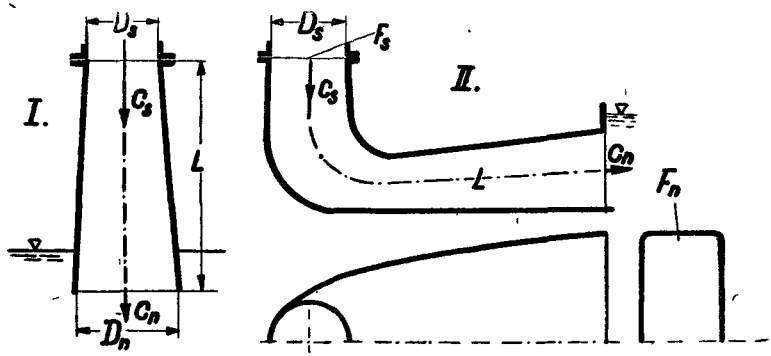
$$v_{sz} = v_s (1 - \eta_s) = 0{,}065 \cdot 0{,}285 = \mathbf{0{,}0185}.$$

Ezzel szemben ugyanez a **diffúzor** csővezetékbe iktatva, (131/d) szerint:

$$\eta_d = \frac{1 - 0{,}035 - 0{,}25}{1 - 0{,}035} = \mathbf{0{,}74};\ \text{azaz: } \mathbf{74\%\text{-os}}$$

hatásfokkal dolgozik mint energiaátalakító.

A függőleges elrendezésű kúpos szívócső alkalmazhatóságát a diffúzor hosszúsági mérete korlátozza. A kavitációveszély elhárítása érdekében ugyanis a turbina járókerekének a síkja nem emelhető a szívócső függőleges elhelyezéséhez szükséges magasságra. Különösen a nagy víznyelésű, kisesésű vízerőművek nagyméretű (20 — 30 m hosszú) szívócsövének elhelyezése okoz nehézséget.



80. ábra. A turbina szívócsöve. I. Kúpos szívócső
II. *Kaplan*-féle könyökös szívócsatorna

Kaplan tanár javaslatára ilyen esetben a *80/II. ábra* szerinti könyökös szívócső alkalmazása vált divatossá, amelynek szerkezeti magassága a diffúzor vízszintes szakaszának összelapításával (lapos négyszög alakú szelvények választásával) is kisebbíthető. A leválások csökkentése érdekében ilyenkor gondosan szerkesztett folytonos átmenetre van szükség a körszelvény és a négyszög-keresztmetszet között.

Körszelvénytől eltérő diffúzorkeresztmetszetek esetében a kúposság értelmezéséhez a *keresztmetszetek négyzetgyökével arányos* **egyenértékű átmérők** kiszámításával és felrakásával jutunk. Az azonos $F = d_0^2\,\pi/4$ keresztmetszetű (egyenértékű) körszelvény átmérője:

$$d_0 = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\sqrt{F} = 1{,}13\sqrt{F}. \qquad (140)$$

Ezekkel az átmérőkkel szerkesztett egyenes körkúp nyílását kell a diffúzor jóságának megítéléséhez, ill. a szükséges hosszúsági méret megállapításához alapul venni.

47. példa. Egy $H = 5$ m esésű **Kaplan-turbina** könyökös szívócsövének kör alakú $D_s = 4{,}0$ m átmérőjű ($F_s = 12{,}6$ m² keresztmetszetű) belépőszelvényébe a vízáram $c_s = 5{,}5$ m/mp sebességgel lép be. A megengedett kilépősebesség: $c_n = 1{,}3$ m/mp. A turbina víznyelése:

$$\mathbf{V} = F_s c_s = 12{,}6 \cdot 5{,}5 = \mathbf{69{,}3\ m^3/mp};$$

teljesítő képessége, $\eta = 82{,}5\%$ hatásfokkal, ($\eta\gamma/75 = 11$ értékkel):

$$\mathbf{N} = \frac{\eta\gamma}{75} VH = 11 \cdot VH = 11 \cdot 69{,}3 \cdot 5 = \mathbf{3820\ LE.}$$

A derékszögű négyszög alakú kilépőszelvény szükséges mérete, $a = c_s^2/c_n = 5{,}5 : 1{,}3 = 4{,}23$ áttétellel:

$$\mathbf{F_n} = aF_s = 4{,}23 \cdot 12{,}6 = \mathbf{53{,}3\ m^2};\ \text{azaz:}\ F_n = 9{,}2 \cdot 5{,}8\ \text{m}^2.$$

E keresztmetszettel egyenértékű körlap átmérője (140) szerint:

$$D_n = 1{,}13 \cdot \sqrt{53{,}3} = 8{,}25\ \text{m}.$$

A szívócső **teljes hosszúsága,** $\delta = 12°$-os kúposság felvételével, $k = 1 : 0{,}21 = 4{,}76$ értékkel:

$$\mathbf{L} = k\,(D_n - D_s) = 4{,}76 \cdot (8{,}25 - 4{,}0) \cong \mathbf{20{,}2\ m.}$$

A **szívócső hatásfoka,** $\zeta_d = 0{,}25$ felvétellel és $n^4 = 1/a^2 = 1 : 4{,}23^2 = 0{,}056$ értékkel:

$$\eta_s = 1 - 0{,}056 - 0{,}25 = \mathbf{0{,}694};\ \text{azaz:}\ \mathbf{69{,}4\%}.$$

A *járókerék* kilépési veszteségtényezője, $c_s^2/2g = 5{,}5^2 : 19{,}62 = 1{,}54$ m értékkel:

$$\nu_s = 1{,}54 : 5 = 0{,}308;$$

a *szívócső* veszteségtényezője pedig, $1 - \eta_s = 1 - 0{,}694 = 0{,}306$ értékkel:

$$\nu_{sz} = 0{,}308 \cdot 0{,}306 = \mathbf{0{,}094.}$$

Meg kell jegyezni, hogy a diffúzor meghosszabbításával (kisebb δ szög választásával) a szívócső hatásfoka megjavítható, de ezzel az üzemgazdasági előnnyel szemben állanak a hosszabb szívócső mélyépítési költségeinek beruházási többletterhei.

48. példa. A 47. példában vizsgált $H = 5$ m esésű Kaplan-turbina helyett azonos teljesítményű, *merev lapátozású propellerturbina* könyökös szívócsövében az előírt víznyelés ($V = 70$ m³/mp) esetében a perdületmentes átáramlás feltétele szintén teljesül, így tehát teljes terheléssel a szívócső hatásfoka — a Kaplan-turbináéval egyezően — itt is eléri a 47. példában kiszámított értéket.

Mihelyt azonban a propellerturbinának akár az esése, akár a víznyelése megváltozik, a járókerék kilépési veszteségei a perdületes kilépés miatt megnőnek, és a szívócső hatásfoka is rohamosan romlik.

A szívócső hatásfoka ugyanis ilyenkor (137) szerint:

$$\eta_s = \frac{\eta_{sm}\, c_{sm}^2 + \eta_{su}\, c_{su}^2}{c_{sm}^2 + c_{su}^2},$$

ahol a meridiánsebesség lendületére a 47. példa szerint most is $\eta_{sm} = 0{,}70$ választható, a keringési sebesség lendülete azonban kedvező becsléssel is legfeljebb $\eta_{su} = 0{,}1$ hatásfokkal alakulhat át potenciális energiává.

Ha *félterhelésnél* a sebességi összetevőket: $c_{sm} = 4$ m/mp és $c_{su} = 3$ m/mp értékekkel vesszük számításba, akkor a járókerék kilépési veszteségtényezője változatlan $H = 5$ m eséssel $c_\varepsilon^2 = c_{2m}^2 + c_{su}^2 = 16 + 9 = 25$ m²/mp² értékkel:

$$\nu_s = \frac{c_\varepsilon^2}{2gH} = \frac{25}{19{,}62 \cdot 5} = \mathbf{0{,}255};$$

a szívócső hatásfoka:

$$\eta_s = \frac{0{,}7 \cdot 16 + 0{,}1 \cdot 9}{25} = \mathbf{0{,}49}.$$

A fenti, csak példaképpen elvégzett hozzávetőleges számítás a valóságosnál kedvezőbb hatásfokokat eredményezett, mert mérések igazolják, hogy félterhelésnél a propellerturbina hatásfoka az 50%-ot sem éri el.

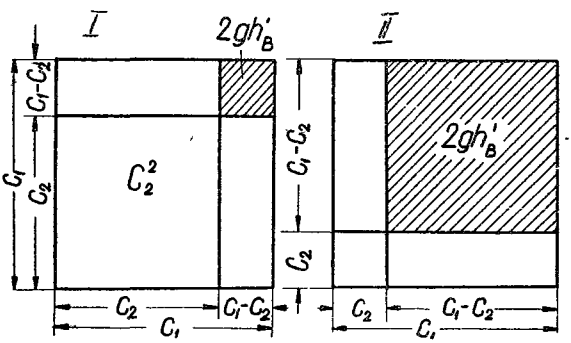
52. Hirtelen keresztmetszet-bővülés

A keresztmetszet ugrásszerű növekedéséből származó, ún. **Borda-féle veszteségeket** a (134) és (135) egyenlet fejezi ki.

E veszteségek az $n = d_1/d_2$ átmérőarány kisebbedésével, ill. az $a = f_2/f_1 = 1/n^2$ áttétel növekedésével lényegesen megnagyobbodnak.

Szemléletesen mutatja a Borda-féle veszteségnek az áttételtől függő e rohamos megnagyobbodását a *81. ábracsoport*, amely a veszteségmagasság nagyságát (kétféle átmérőarányra) vonalkázott négyzetek területével ábrázolja.

E területek szerkesztésének menete az ábrából külön magyarázat nélkül követhető. Jobb áttekinthetőség érdekében az (59) egyenlettel kifejezett elméleti értékeket ábrázoltam ($\xi_B = 1$) és a lendületeket c_1 ill. c_2 élhosszúságú négyzetek területével jelleméztem.



81. ábra. A *Borda*-féle veszteség szemléletes ábrázolása

Az ábra jól érzékelteti, hogy az első esetben, amikor a sebesség a csőtoldatban csak 25%-kal kisebbedik, a veszteségmagasság a belépőlendületnek csak egy tizenhatodrésze. A második esetben, az $n = d_1/d_2 = 0{,}5$ átmérőaránynak megfelelően, a sebesség a kezdőérték egynegyed részére csökken, a veszteségmagasság pedig az előző érték kilencszeresére emelkedik.

A Borda-féle csőtoldat $\delta = 180°$-os kúposságú (tökéletlen) diffúzornak tekinthető, amelynek hatásfoka, a (135) egyenletből kifejezhető

$$\zeta_B = \xi_B (1 - n^2)^2$$

veszteségtényező helyettesítésével a (131/d) egyenlet mintájára így írható:

$$\eta_B = \frac{1 - n^4 - \zeta_B}{1 - n^4}. \qquad (131/B)$$

49. példa. A *81. ábracsoportban* vázolt I. esetre a veszteségtényező $\xi_B = 1{,}3$ és $n^2 = 0{,}75$ értékkel:

$$\zeta_B = 1{,}3 \cdot (1 - 0{,}75)^2 = 0{,}081,$$

a hatásfok pedig, (131/B) szerint, $n^4 = 0{,}75^2 = 0{,}56$ értékkel:

$$\eta_B = \frac{1 - 0{,}56 - 0{,}081}{1 - 0{,}56} = 0{,}815; \text{ azaz: } \mathbf{81{,}5\%}.$$

A II. esetben $n^2 = 0{,}25$, ($n^4 = 0{,}063$) értékkel, a veszteségtényező:

$$\zeta_B = 1{,}3 \cdot (1 - 0{,}25)^2 = 0{,}726,$$

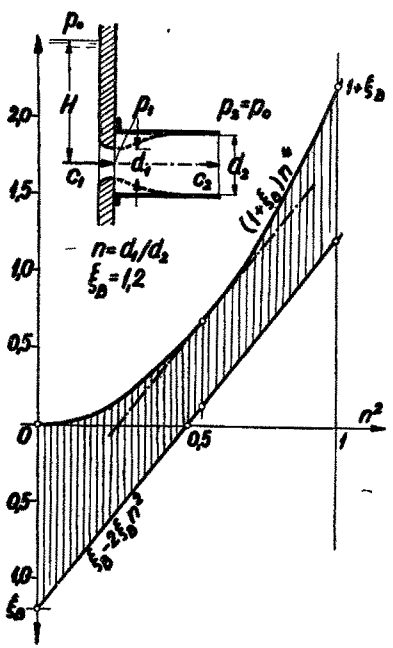
a hatásfok pedig:

$$\eta_B = \frac{1 - 0{,}063 - 0{,}726}{1 - 0{,}063} = 0{,}225; \text{ azaz: } \mathbf{22{,}5\%}.$$

Összehasonlítva egy jó diffúzorral, különösen a második esetben találunk lényeges eltérést a hatásfokban. Ugyanazzal az $n = 0{,}5$ átmérő-aránnyal szerkesztett $\delta = 10°$-os kúposságú (hosszú) diffúzor veszteségtényezője átlagosan: $\zeta_d = 0{,}2$-re becsulhető, hatásfoka tehát:

$$\eta_d = \frac{1 - 0{,}063 - 0{,}2}{1 - 0{,}063} = 0{,}786; \text{ azaz: } \mathbf{78{,}6\%}.$$

50. példa. Az öntözőcsatorna oldalfalán készített kifolyónyílás állandó H tükörmagasság esetén a nyílás f_1 keresztmetszetével arányos V vízáramot szolgáltat. Az öntözővíznek ezt az egyszerű adagolási módját már az ókorban alkalmazták a Nílus völgyében, sőt csakhamar a vízlopás lehetőségét is kitalálták egy a vízkivételt fokozó Borda-féle csőtoldat felhasználásával.



82. ábra. A vízhozamot fokozó *Borda*-féle csőtoldat

A *82. ábra* az ilyen d_2 átmérőjű, f_2 keresztmetszetű csőtoldat elrendezését mutatja, amely a d_1 átmérőjű nyíláson átfolyó vízáram c_1 sebességét «megszívással» noveli. ($\Delta p = p_0 - p_1$ depresszió magassága a H eséshez hozzáadódik.)

A vízkivétel legnagyobb (optimális) értékét szolgáltató $n = d_1/d_2$ átmérőarány a Borda-féle veszteség figyelembevételével alábbi meggondolással határozható meg. Vízszintes csőtoldatra $p_2 = p_0$ helyettesítéssel írható:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g} + h'_B;$$

ahol: $c_2^2 = n^4 c_1^2$ és $h'_B = \xi_B (1 - n^2)^2 \frac{c_1^2}{2g}$.

Helyettesítés és rendezés után ebből az egyenletből a $\Delta p/\gamma$ **depressziómagasság** így írható:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} =$$

$$= \left[1 - \xi_B + 2\,\xi_B\, n^2 - (1 + \xi_B)\, n^4\right] \frac{c_1^2}{2g}. \quad \text{I.}$$

Az átfolyás c_1 sebességét meghatározó Bernoulli-egyenlet, az egyszerűség okáért veszteségmentes kifolyónyílás alapulvételével:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g}\,; \quad \text{azaz: } H = \frac{c_1^2}{2g} - \frac{\Delta p}{\gamma}. \qquad \text{II.}$$

Az I. és II. egyenlet összevonásával írható:

$$H = \left[\xi_B - 2\,\xi_B\,n^2 + (1 + \xi_B)\,n^4\right]\frac{c_1^2}{2g} = \Phi(n)\frac{c_1^2}{2g},$$

amiből az átfolyás sebessége:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\Phi(n)}}\,; \text{ ahol: } \Phi(n) = \xi_B - 2\,\xi_B\,n^2 + (1 + \xi_B)\,n^4.$$

Nyilvánvaló, hogy a c_1 oly n_0 átmérőaránynál éri el a legnagyobb értékét, amelynél a $\Phi(n)$ függvény a legkisebb, vagyis n szerinti differenciálhányadosa zéróvá válik. Írható:

$$\frac{d\Phi(n)}{dn} = -4\,\xi_B\,n_0 + 4\,(\xi_B + 1)\,n_0^3 = 4n_0[(1 + \xi_B)\,n_0^2 - \xi_B] = 0.$$

A legkedvezőbb átmérőarány ($n = 0$ érték kizárásával):

$$n_0^2 = \frac{\xi_B}{1 + \xi_B}\,; \quad \text{azaz: } n_0 = \sqrt{\frac{\xi_B}{1 + \xi_B}}\,.$$

$\xi_B = 1{,}2$ értékkel: $n_0^2 = 1{,}2 : 2{,}2 = 0{,}546$; $n_0^4 = 0{,}298$ és $n_0 = \sqrt{0{,}546} = 0{,}738$.

Egy $d_1 = 150$ mm-es kifolyónyíláshoz eszerint $(\mathbf{d_2}) = d_1/n_0 = 150 : 0{,}738 = \mathbf{204\ mm}$ átmérőjű csőtoldat illesztésével kapjuk a legnagyobb vízáramot.

A vízáram legnagyobb értéket adó $\Phi(n_0)$ függvény értékét n_0^2 és n_0^4 helyettesítéssel kapjuk. Rendezés és rövidítés után írható:

$$\Phi(n_0) = \xi_B - 2\xi_B\frac{\xi_B}{1 + \xi_B} + (1 + \xi_B)\frac{\xi_B^2}{(1 + \xi_B)^2} = \frac{\xi_B}{1 + \xi_B} = n_0^2.$$

A **legnagyobb sebességet** ennek az értéknek helyettesítésével kapjuk:

$$(\mathbf{c}_1) = \frac{1}{n_0}\sqrt{2gH} = \frac{(d_2)}{d_1}\sqrt{2gH} = \frac{(\mathbf{d}_2)}{\mathbf{d}_1}\mathbf{c}_0; \quad \text{ahol: } c_0 = \sqrt{2gH}.$$

A vízkivétel megnagyobbodását eszerint a **határesetben** az átmérőarány *reciprok értéke* fejezi ki. Az adott esetben:

$$\frac{(\mathbf{c}_1)}{\mathbf{c}_0} = \frac{(V)}{V_0} = \frac{1}{n_0} = \frac{1}{0{,}738} \cong \mathbf{1{,}35}.$$

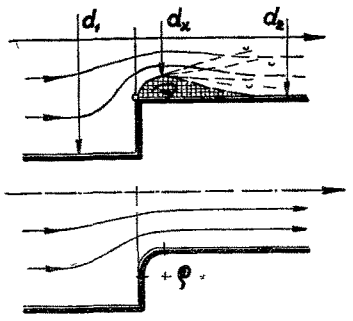
A Borda-féle csőtoldattal tehát a vízáram kereken **35%-kal növelhető** a kifolyónyílás bővítése nélkül.

Meg kell jegyezni, hogy a vízhozam növelésének tökéletesebb módja volna — a Borda-féle csőtoldat helyett — jól szerkesztett diffúzor alkalmazása. Ebben az esetben a c_1 sebesség fokozásának csak az űrképződés szab határt.

53. Hirtelen keresztmetszet-szűkítés

Valamivel kedvezőbbek a viszonyok, ha a víz a nagyobb szelvényből a kisebb szelvény felé áramlik.

Ebben az esetben a vízsugár a *83. ábrában* vázolt összehúzódást ($\mu \cong 0{,}65$) szenvedi a 90°-os iránytörés miatt, keresztmetszete tehát $f_x = \mu f_2$-re zsugorodik. A leválási veszteség itt tehát abból származik, hogy az úgyszólván veszteségmentesen $c_x = c_2/\mu$ értékre felgyorsult sebességnek hirtelen c_2-re kell csökkennie.



83. ábra. Hirtelen keresztmetszet-szűkítés

A Borda-veszteségmagasság tehát:

$$h' = \xi_B \frac{(c_x - c_2)^2}{2g} = \xi_B \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^2 \frac{c_2^2}{2g}. \quad (141)$$

$\xi_B = 1{,}2$ és $\mu = 0{,}65$ helyettesítéssel a veszteségmagasság a *(szűkebb)* f_2 csőszelvényre vonatkoztatott lendületnek kb. 35%-át teszi ki, azaz $\zeta_l \cong 0{,}35$.

Mihelyt a sugár összehúzódásának az okát az élek mérsékelt *legömbölyítésével* megszüntetjük (*83. ábra* alsó képe), leválás sincsen és a veszteségek is elmaradnak, s már csak a rendezett áramlás súrlódásával kell számolni.

Ilyen Borda-féle veszteségekkel kell számolni a csőszálak és idomdarabok minden olyan **illesztési helyén** is, ahol az átmérők nem pontosan egyenlők, vagy az illeszkedés tökéletlen.

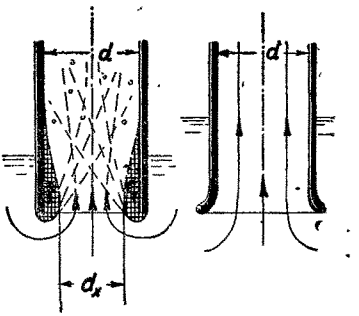
Sok esetben a *tömítés hibás elhelyezése*, vagy hegesztett csöveknél a szelvényt szűkítő *tökéletlen varrat* is rendkívül nagy leválási veszteségnek lehet okozója.

A vízgépek szívó- és nyomóterének, valamint a járó- és vezetőcsatornáknak hibás kialakítása és azok nem áramvonalas illeszkedése a súrlódási veszteségek nagyságrendjét sokszorosan túlhaladó veszteségek forrásai, amelyek elkerülése részben már elméleti meggondolásokkal is, de kismintakísérletek eredményeinek felhasználásával sikerülhet. A körültekintő szerkesztés sem szünteti meg azonban ilyen veszteségek forrását, ha a csővezeték vagy a vízgép *elkészítése* tökéletlen. (Hibás öntés, gondatlan hegesztés, szakszerűtlen szerelés, vagy egyéb technológiai hiba.)

54. Belépőnyílás. Csőszáj

A hirtelen keresztmetszetszűkítésnek egyik különleges változata: a víztükör alá merített csőnek szájnyílása, amelynek hibás és helyes kialakítását a *84. ábra* mutatja.

Legömbölyítés *nélkül* a belépőszelvény a vízsugár összehúzódása következtében $f_a = \mu f$ értékre zsugorodik, tehát itt is a (141) egyen-



84. ábra. A belépőnyílás (csőszáj) hibás és helyes kialakítása

lettel kifejezett veszteség jön létre; csakhogy most a 180°-os iránytörésnek megfelelő: $\mu = 0{,}55$ tényezőt kell helyettesíteni.

A csőszelvényre vonatkoztatott lendületnek most mintegy 80%-át teszi ki a veszteség, azaz általában $\zeta_l = 0{,}8 \div 1{,}0$ veszteségtényezővel számolhatunk, ha a csőszáj tölcsérszerű kigömbölyítését elmulasztjuk.

Itt jegyzem meg, hogy olyankor, amikor a folyadéknak *továszállítása* (emelése) a feladat és annak a **kilépőszelvényen** távozó lendületét *nem* hasznosítjuk, ezt a lendületet is veszteségnek minősítjük. Ezt már a *belépésnél — belépési veszteség* címén — vehetjük számításba. Az így értelmezett belépési veszteségmagasság:

$$h_b' = (1 + \zeta_l)\frac{c^2}{2g}.$$

A szájnyílás helyes kialakításával tehát a belépési veszteség ilyenkor mintegy a *felére csökkenthető*. (Szűrőkosár és lábszelep alkalmazása esetére ez a megállapítás nem vonatkozhatik.)

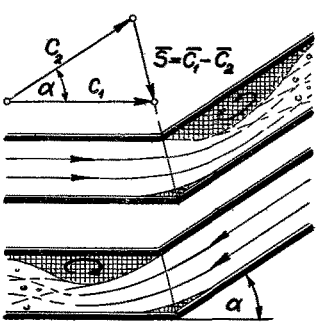
55. Iránytörés

A csatorna hirtelen iránytöréséből származó veszteség a *85. ábra* szerint szintén a határréteg leválására vezethető vissza. A Borda-féle veszteséget kifejező (133) egyenlet erre az esetre is alkalmazható, csakhogy most a sebességek *vektoriális* különbségét kell helyettesíteni. A *85. ábra* jelöléseivel: $\bar{s} = \bar{c}_1 - \bar{c}_2$ és ezzel az iránytörési veszteségmagasság:

$$h_i' = \xi_i \frac{s^2}{2g}; \quad \text{ahol: } \xi = 0{,}7 - 1{,}0. \tag{142}$$

Eszerint pl. $\alpha = 60°$-os iránytörésnél $\bar{s} = \bar{c}$; ilyenkor tehát a veszteségmagasság a csőszelvényre vonatkoztatott lendülettel egyenlő ($\zeta_i = 1$), $\alpha = 90°$-os iránytörésnél viszont a kétszeres lendület elvesztésével számolhatunk.

Az iránytörés különleges alakja a turbina és a turbinaszivattyú vezető- és járócsatornái közötti résen átlépő folyadéksugárnak szögeltérítése. Az ebből eredő ún. **átlépési veszteség** a lapátszögek helyes választásával is csak annál az üzemállapotnál kerülhető el, amelyre a gépet méreteztük. A járókeréken átáramló víz teljes (abszolút) sebességének az irányát ugyanis két üzemi jellemző (a vízmennyiség és a fordulatszám) *változtatja* meg, a vezetőcsatornákban viszont az áramlás iránya *rögzített*. A különböző üzemállapotokra felrajzolt sebességi háromszögekből az eltérítés sebességi vektora ($\bar{s}$) is kiadódik, az átlépési veszteséget pedig a (136) egyenlet adja.



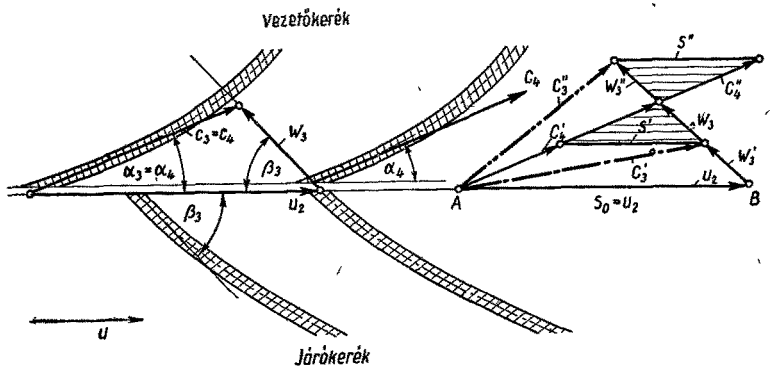
85. ábra. Iránytörés

Meg kell jegyezni, hogy az átlépési veszteség az álló- és mozgócsatornák közötti rés növelésével mindenesetre *apasztható*. Az idevágó kísérleti adatok még nagyon hézagosak, de az üzemi megfigyelésekből arra lehet következtetni, hogy nagyobb

rés esetén: $\xi_i = 0{,}3 \div 0{,}5$ értékkel számolhatunk, sőt az egész kis — mindössze néhány fokos — iránytöréseknél még ez is túlzottnak bizonyul, mert a tapasztalat szerint az ilyen *kis eltérítést a vízsugár észrevehető veszteség nélkül szenvedi el.*

51. példa. A *86. ábra* egy turbinaszivattyú járókerekének és vezetőkerekének két-két lapátját szemlélteti. A járókerék kerületi sebessége a kilépő palástón: $u_2 = 21$ m/mp. Az előírt V vízszállítással arányos w_3 viszonylagos sebességgel szerkesztett kilépősebességi háromszög oly $c_3 = u_2 + w_3$ (abszolút) kilépési sebességet jellemez, amelynek α_3 vektorszöge a vezetőlapátok α_4 szögével egyenlő. Ennél a vízáramnál tehát átlépési veszteség nincsen, mert a víz iránytörés nélkül lép át a járókerékből a vezetőkerékbe.

Az ábrába berajzoltam a félakkora (V') és másfélszerakkora (V'') vízszállításnak megfelelő c_3' és c_3'' kilépősebességi vektorokat is, amelyek (változatlan fordulatszám esetében) az u_2 kerületi sebességnek és a változatlan irányú, de a vízárammal arányos $\overline{w_3'}$, ill. $\overline{w_3''}$ viszonylagos sebességnek eredői.



86. ábra. Centrifugális átömlésű szivattyú átlépési vesztesége. (Iránytörés)

A vízsugár c_4', ill. c_4'' sebességgel lép át a vezetőkerékbe az α_4 lapátszöggel előírt (változatlan) irányban. Nagysága a vízárammal arányos.

Az iránytörési vektor az egyik esetben: $\overline{s'} = \overline{c_3'} - \overline{c_4'}$, a másik esetben: $\overline{s''} = \overline{c_3''} - \overline{c_4''}$.

Az ábrából geometriai szemlélettel kitűnik, hogy az iránytörési vektor annál nagyobb, mennél nagyobb az eltérés az előírt V vízszállításhoz képest; arányos tehát a $V - V'$, ill. $V - V''$ különbséggel.

Hasonló háromszögek oldalarányának egyenlőségével igazolható továbbá az is, hogy az iránytörési vektor a vízszállítás megszűnése esetén: $s = u_2$, az átlépési veszteségmagasság elméleti értéke tehát, $\xi_i = 1$ tényező felvételével:

$$\mathbf{h_0' = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{21^2}{19{,}62} = 22{,}5\ m.}$$

Az ábra geometriai arányaiból közvetlenül leolvasható, hogy V' fél- és V'' másfélszer akkora vízszállítás esetén:

$$|\,s'\,| = |\,s''\,| = u_2/2 = 10{,}5\ \text{m/mp},$$

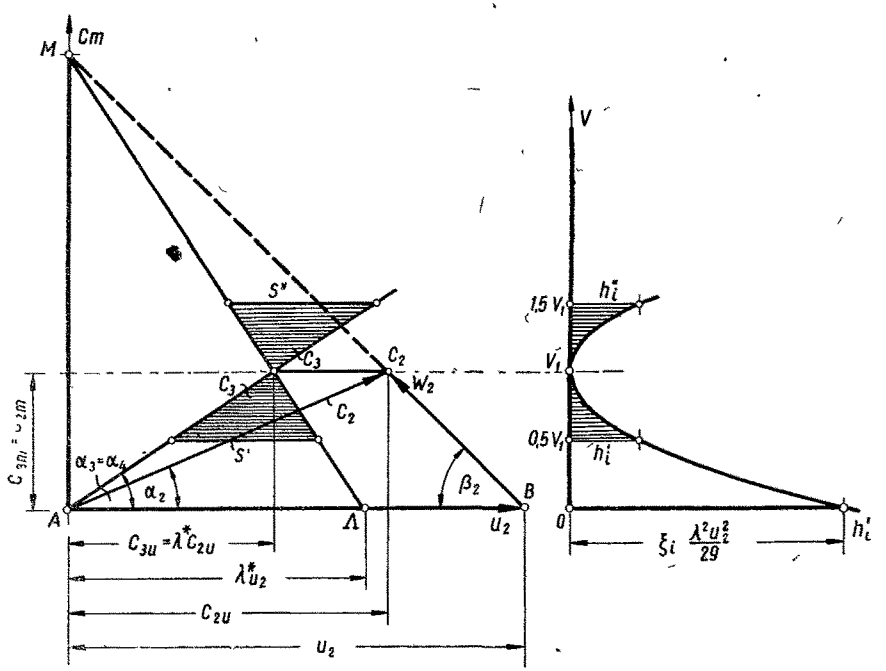
az iránytörési veszteségmagasság tehát mindkét esetben:

$$\mathbf{h_i' = \frac{10{,}5^2}{19{,}62} \cong 5{,}6\ m.}$$

A valóságban ennél jóval kisebb veszteséggel számolhatunk, különösen a véges lapátosztás okozta perdületapadás miatt, amelynek következtében a sebességi háromszögek is eltorzulnak.

52. példa. Egy örvényszivattyú kilépő sebességi háromszögét a *87. ábrában* az ABC_2 háromszög szemlélteti. A járókerék elméleti szállítómagassága perdületmentes belépés ($c_{1u} = 0$) és végtelen sok lapát feltételezésével (74/s) szerint, $u_2 = 21$ m/mp és $c_{2u} = 14{,}7$ m/mp értékekkel:

$$H_{e\infty} = c_{2u}\, u_2/g = 14{,}7 \cdot 21 : 9{,}81 = \mathbf{31{,}4\ m.}$$



87. ábra. Az örvényszivattyú átlépési veszteségének meghatározása a perdületapadás figyelembevételével

A véges lapátszám miatt jelentékeny *perdületapadással* kell számolni, aminek következtében a perdülettel együtt a kilépés (abszolút) sebessége is kisebbedik, a kilépés szöge pedig megnagyobbodik. (Vö. a *87. ábrával.*)

$\lambda^* = 0{,}65$ tényezővel írható:

$$c_{3u} = \lambda^* c_{2u} = 0{,}65 \cdot 14{,}7 = 9{,}55 \text{ m/mp és}$$

$$\mathbf{H_e = \lambda^* H_{e\infty} = 0{,}65 \cdot 31{,}4 = 20{,}4\ m.}$$

Az *ábrából* részletesebb magyarázat nélkül is kitűnik, hogy a perdületapadás következtében az előírt V_1 vízmennyiségből számítható $c_{2m} = c_{3m} = 5{,}5$ m/mp meridiánsebesség magasságában a sebességi háromszög C_2 csúcsa (vízszintesen) C_3-ba tolódott át. (Vö. az ABC_2C_3 trapézidommal.)

A perdületapadás miatt az irántörési veszteségek is kisebbednek. Irántörésmentes átlépést most a vezetőlapát $\alpha_4 = \alpha_3$ belépési szögével kell biztosítani, ahol:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = c_{3m}/c_{3u} = 5{,}5 : 9{,}55 = 0{,}577; \text{ azaz: } \alpha_3 = 30°.$$

Az iránytörési vektorok szerkesztésének menetét a *87. ábrából* olvassuk le. A *86. ábrában* bemutatott szerkesztéstől eltérően: most a w_2 sebesség végpontját kijelölő C_2 csúcs szerepét a C_3 csúcs veszi át, az s vektorokat pedig a w_2 sebességi vektorok $\overline{BC_2M}$ irányvonala helyett az ábra szerint meghúzott $\overline{AC_3M}$ irányvonal határolja, ahol: $\overline{AA} = \lambda^* u_2 = 0{,}65 \cdot 21 = 13{,}61$ m/mp.

Ebbe a diagramba is berajzoltam a $V' = 0{,}5\ V_1$ és $V'' = 1{,}5\ V_1$ vízszállításokhoz tartozó iránytörési vektorokat, amelyek nagysága (egyszerű szemlélet alapján):

$$|s'| = |s''| = \lambda^* u_2/2 = 13{,}61/2 = 6{,}8 \text{ m/mp.}$$

$\xi_1 = 0{,}9$ felvétellel az iránytörési veszteségmagasság:

$$h_i' = \xi_1 s^2/2g = 0{,}9 \cdot 6{,}8^2 : 19{,}62 = \mathbf{2{,}11\ m.}$$

Meg kell jegyezni, hogy fenti számítás megbízhatósága a λ^* tényező helyes becslésén fordul meg. Szabatossága azért is vitatható, mert a perdületapadás λ^* tényezőjének feltételezett állandósága nem talált kísérleti igazolást. Ennek az elterjedt szerkesztésnek eredményei azonban csak tájékoztató jellegű *közelítésnek* tekinthetők főleg azért, mert a belépési sebességi háromszög eltorzulása sem hagyható figyelmen kívül, hiszen változó V vízáram esetén *a belépés sem maradhat perdületmentes*!

Szabatosabb eredmény várható, ha a λ^* perdületapadási tényező értelmezését nem korlátozzuk perdületmentes belépés esetére, hanem — úgy mint a vezetőkerék esetében is —

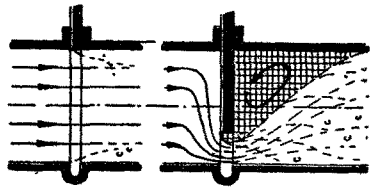
$$\lambda^* = \frac{\Pi_3 - \Pi_1}{\Pi_2 - \Pi_1} = \frac{H_e}{H_{e\infty}}$$

tényezővel számolunk.

Végül az iránytörési veszteségnek egy járulékos részére is itt hívom fel a figyelmet, amely a görbületekben meginduló keresztirányú (szekunder) áramlásra vezethető vissza. Minthogy a folyadékelemek e másodlagos keringő mozgása csak lassan fékeződik le, tehát e járulékos veszteség a csatorna **hosszú szakaszára** terjed ki.

56. Csőzárószerkezetek

Az áramlási veszteségek szempontjából a legkedvezőtlenebb zárószerkezet: a **szelep** amelynek ma is használatos alakjai rendkívül nagy veszteségek forrása *(90. ábra)*. Lényeges haladást jelentenek e téren az utolsó évtizedekben piacra került *ferde ülésű szelepek* különböző változatai, amelyeknél a szelepháznak áramvonalasabb kialakításával a veszteségek nagyságrendje már lényegesen kisebb, de az eredmény még mindig nem kielégítő.



88. ábra. Áramlási veszteség a tolózárban

Vízvezetékcsövek bevált zárószerkezete: a **tolózár.** Jól szerkesztett alakja — *teljesen nyitott állásban* — alig zavarja meg az áramlás rendezettségét. Részleges zárás esetén viszont igen nagy veszteséggel kell számolni *(88. ábra)*. Egészen hasonló áramlástani jellegzetességet mutatnak a kisebb szelvényű csővezeték elzárására használt **csapok** is, amelyek teljes nyitásával a csőszelvény szintén teljesen szabaddá tehető.

A zárószerkezetek veszteségmagasságát a csővezeték (f) szelvényére (a csatlakozócsonk keresztmetszetére) szokás megadni (ζ). A veszteségtényező becslését

viszont megkönnyíti, ha azt a zárószerkezet **legszűkebb** (f_0) keresztmetszetére vonatkoztatjuk (ζ_0). Az idevágó kísérletek anyaga még meglehetősen hézagos, s a szakirodalomban közzétett — (jórészt még *Weisbach*-tól származó) — adatok legtöbbje elavult, így tehát adott esetben üzemi kísérlet elvégzése ajánlatos.

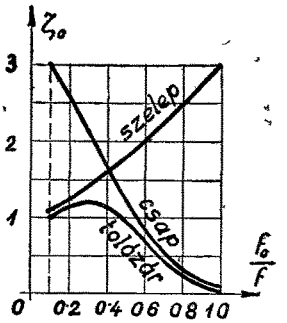
Előzetes számításokhoz a *89. ábra* görbéi használható átlagértékeket adnak a jól kialakított zárószerkezetek ellenállására. Kis szelvényű szelepek között azonban gyakran találunk olyanokat is, amelyek veszteségtényezője 5 ÷ 10-szerese a függvényábrával megadott értéknek.

Részleges (f_0/f) nyitásra a csőszelvényre vonatkoztatott lendülettel kifejezett veszteségmagasság:

$$h' = \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \zeta_0 \frac{c^2}{2g}. \qquad (143)$$

53. példa. Egy szelep veszteségtényezője teljes nyitásnál: $\zeta = \zeta_0 = 3$. Ha $f_0/f = 0{,}2$, vagyis 20%-os nyitásnál (az ábrából): $\zeta_0 = 1{,}25$. A $d = 10$ cm átmérőjű csővezetékre vonatkoztatott veszteségtényező tehát:

$$\zeta = \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \zeta_0 = 25 \cdot 1{,}25 = \mathbf{31}.$$



89. ábra. Csőzárószerkezetek veszteségtényezői

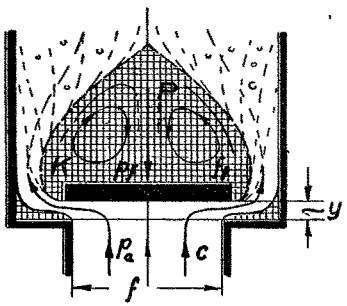
Ha a csővezetékben az áramlás sebessége: $c = 2{,}5$ m/mp, akkor a szelep veszteségmagassága:

$$\mathbf{h' = \zeta \frac{c^2}{2g} = 31 \cdot \frac{2{,}5^2}{19{,}62} = 10\ m.}$$

57. Önműködő szelep

Egészen különleges és a kényszermozgású szeleptől eltérő veszteségtörvényt követ az önműködő nyitású szelep, amely a csővezetékben **lábszelep** vagy **visszacsapószelep** alakjában használatos, dugattyús szivattyúban pedig mint **szívószelep** és **nyomószelep** zárja és nyitja a henger munkaterét.

Az önműködő szelep veszteségének a legnagyobb része ugyanis az átáramló mennyiségtől (tehát a csőben áramló víz c sebességétől is) *független*, mert a legszűkebb keresztmetszet nagysága a mindenkori mennyiséghez úgy igazodik, hogy a veszteség szempontjából mértékadó *legnagyobb sebesség változatlan* maradhasson.



90. ábra. Áramlási veszteségek a szelepházban

E legnagyobb (v_y) sebességet ugyanis a (*90. ábra* szerint) a szeleptányért terhelő $\Delta p = p_a - p_f$ nyomáskülönbség hozza létre, ez viszont a szelepre nehezedő $P = f_f \Delta p$ ún. szelepterheléssel tart egyensúlyt.

Felfelé nyíló szelepet a *vízben mért súlya* (G_v), a szivattyú szelepeit ezenfelül R rugóerő is terheli ($P = G_v + R$). E terhelésből kiszámított

nyomáskülönbségnek nyomásmagasság alakjában kifejezett értéke: a *fajlagos szelepterhelés*. Írható:

$$b = \frac{P}{f_f \gamma} \quad \text{(m)}. \tag{144}$$

a) A szelepen átvezetett vízáram állandó (lábszelep)

Ha a szeleptányér alá c sebességgel érkező V vízmennyiségnek impulzusát és lendületét elhanyagoljuk, akkor a szelep y emelkedése a K kerületű palástón $\alpha = \mu\varphi$ kifolyási tényezővel* kilépő vízmennyiségből számítható. A $\Delta p = b\,\gamma$ nyomáskülönbség ugyanis a folyadékot az $f_y = \mu\, K y$ palástszelvényen $c_y = \varphi \sqrt{2\,g\,b}$ sebességgel hajtja keresztül, írható tehát:

$$V = f_y\, c_y = \alpha\, K\, y \sqrt{2\,g\,b}$$

és ebből a szelep emelkedése:

$$y = \frac{V}{\alpha K \sqrt{2\,g\,b}} \quad \text{(m)}. \tag{145}$$

Ha az α kifolyási tényező változásától eltekintünk, és a fajlagos szelepterhelés állandó értékével számolhatunk (tiszta súlyterhelés vagy lágy rugó), akkor **a szelep emelkedése az átfolyó vízmennyiséggel arányos.**

A szelep **veszteségmagassága** általában két részből tevődik össze: a szelepház súrlódási és leválási veszteségeiből és a szelep nyitvatartásához szükséges nyomásesésből. (Utóbbi csaknem teljes egészében elvész, mert a szűk résen átáramló folyadék lendülete a hirtelen keresztmetszetbővülés miatt nem térül vissza.) A szelepház (ζ) veszteségtényezőjével írható:

$$h' = \zeta \frac{c^2}{2g} + \xi \frac{\Delta p}{\gamma},$$

ahol jól szerkesztett szelepnél az első tag kicsiny, a második tag pedig a fajlagos szelepterheléssel arányos.

Előzetes számításokhoz a szelepveszteség jó közelítéssel a fajlagos szelepterhelés számértékével vehető egyenlőnek, azaz:

$$h' \cong b. \tag{146}$$

54. példa. Egy $d = 100$ mm átmérőjű szívóvezeték lábszelepének átmérője: $d_f = 110$ mm, súlya: $G = 3{,}75$ kg, anyaga: bronz. ($\gamma_b = 8{,}9$ kg/l).

A vízben mért súly (a kiszorított $\gamma = 1$ kg/l fajsúlyú víz súlyának levonásával):

$$G_v = \frac{\gamma_b - \gamma}{\gamma_b} G = \frac{8{,}9 - 1}{8{,}9} \cdot 3{,}75 = \mathbf{3{,}33\ kg}.$$

* Az α átfolyási (kifolyási) tényező azt az arányt fejezi ki, amely a nyíláson kifolyó vagy átfolyó *valóságos mennyiség* és annak elméleti értéke között mutatkozik. A keresztmetszetet a μ összehúzódási tényező, a sebességet pedig az átlépési veszteségeket kifejező φ sebességi tényező kisebbíti. (Vö. a 64. ponttal)

A fajlagos szelepterhelés tehát ($f_f = 0{,}11^2 \cdot 3{,}14 : 4 = 0{,}0095$ m² felületre elosztott $P = G_v$ súlyterheléssel):

$$\mathbf{b} = \frac{G_v}{f_f \gamma} = \frac{3{,}33}{0{,}0095 \cdot 10^3} = \mathbf{0{,}35\ m.}$$

A szelepellenállás *közelítő* értéke tehát — a *vízmennyiségtől függetlenül* — $\mathbf{h' \cong b = 0{,}35\ m.}$ A ζ veszteségtényező tehát az önműködő szelepnél **nem** állandó érték, hanem növekedő sebességnél kisebbedik. Írható:

$$\zeta = \frac{2gh'}{c^2}.$$

Az adott esetben: $c = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$ m/mp sebességnél
a veszteségtényező: $\zeta = 6{,}9 \quad 1{,}7 \quad 0{,}77 \quad 0{,}43.$

A **pontosabb számítást** $V = 600$ l/perc $= 10$ l/mp vízmennyiségre az *érkező* víz sebességének figyelembevételével a következő meggondolás alapján végezzük el.
Az $f = d^2\pi/4 = 0{,}1^2 \cdot 3{,}14 : 4 = 0{,}00785$ m² keresztmetszetű csőben a vízsebesség:

$$\mathbf{c} = V/f = 0{,}01 : 0{,}00785 = \mathbf{1{,}27\ m/mp.}$$

A szelepet emelő impulzuserő:

$$\mathbf{J} = \frac{V\gamma}{g} c = \frac{f\gamma c^2}{g} = \frac{0{,}01 \cdot 1000}{9{,}81} \cdot 1{,}27 = \mathbf{1{,}3\ kg.}$$

A szelep nyitvatartásához szükséges Δp nyomáskülönbség tehát:

$$\Delta\mathbf{p} = \frac{G_v - J}{f_f} = \frac{3{,}33 - 1{,}3}{0{,}0095} = \mathbf{214\ kg/m^2,}$$

azaz: $\Delta p/\gamma = 0{,}214$ m.
A $K = d_f\,\pi = 0{,}11 \cdot 3{,}14 = 0{,}3454$ m kerületen kiáramló víz sebességét az érkező víz lendületének figyelembevételével most az energiaegyenletből számíthatjuk ki. $\varphi = 0{,}95$ értékkel írható:

$$\frac{c_y^2}{2g} = \varphi^2 \left(\frac{c^2}{2g} + \frac{\Delta p}{\gamma} \right),$$

azaz: $\mathbf{c_y = \varphi \sqrt{c^2 + 2\,g\,\Delta p/\gamma} = 0{,}95 \cdot \sqrt{1{,}62 + 19{,}62 \cdot 0{,}214} = 2{,}3\ m/mp.}$

Ezzel szemben a közelítő érték: $c_y = \varphi\sqrt{2gb} = 0{,}95\sqrt{19{,}62 \cdot 0{,}35} \cong 2{,}48$ m/mp.
A szelep emelkedése, $\mu = 0{,}7$ összehúzódási tényezővel:

$$\mathbf{y} = \frac{V}{\mu \cdot K \cdot c_y} = \frac{0{,}010}{0{,}7 \cdot 0{,}3454 \cdot 2{,}3} = 0{,}018\ \text{m} = \mathbf{18\ mm.}$$

(A közelítő számítással: $y = 16{,}6$ mm).
A szelepveszteség: $\zeta = 0{,}5$, $\xi = 1{,}3$ és $c^2/2g = 1{,}27^2 : 19{,}6 = 0{,}082$ m helyettesítéssel:

$$\mathbf{h'} = \zeta \frac{c^2}{2g} + \xi \frac{\Delta p}{\gamma} = 0{,}5 \cdot 0{,}082 + 1{,}3 \cdot 0{,}214 = \mathbf{0{,}32\ m.}$$

(A közelítő számítás: $h' = 0{,}35$ m veszteségmagasságot eredményezett.)
Ha ugyanezt a számítást $V = 300$ l/perc vízmennyiségre is elvégezzük, akkor az eredmények a következők: $c = 0{,}635$ m/mp, $c^2/2g = 0{,}02$ m, $J = 0{,}325$ kg, $\Delta p/\gamma = 0{,}316$ m, $c_y = 2{,}44$ m/mp, $y = 8{,}5$ mm, (közelítő számítással: $y = 8{,}3$ mm).

A szelepveszteség pedig:

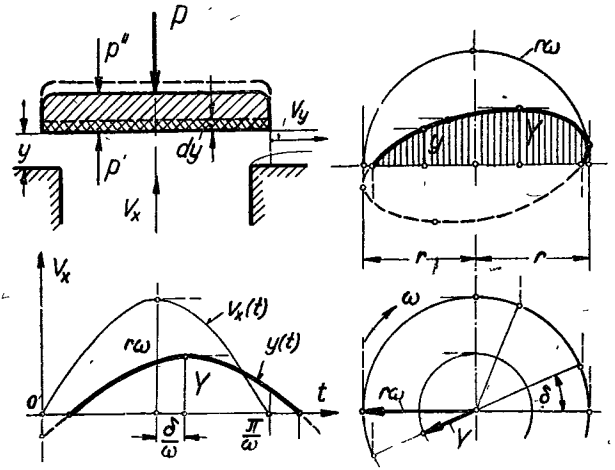
$$h' = 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 1{,}3 \cdot 0{,}316 = \mathbf{0{,}42\ m.}$$

A közelítő számítással $h' = 0{,}35\ m$ volt.

Meg kell azonban jegyezni, hogy a pontosabb számítás a tényezők becslésének bizonytalansága miatt is annyira megbízhatatlan, hogy a gyakorlat számára jelentősége nincsen.

b) **A szelepen átvezetett vízáram ütemesen változó (dugattyús szivattyú önműködő szívó- és nyomószelepe).**

A *91. ábra* a (forgattyús hajtóműves) dugattyús szivattyú **nyomószelepének** mozgástörvényeit szemlélteti.



91. ábra. Dugattyús szivattyúszelep mozgástörvényei

A szelep alá érkező V_x vízáramot az F dugattyú változó $v_x = r\omega \sin \omega t$ sebességgel szorítja ki a hengerből, azaz:

$$V_x = F r \omega \sin \omega t \quad (m^3/mp), \tag{147}$$

ahol r a forgattyú sugara és ω a tengely szögsebessége. (A számítás végtelen hajtórúdra vonatkozik.)

A dugattyúlöket első felében a vízáram növekszik, (145) szerint tehát a szelepnek emelkednie kell és ennélfogva az érkező V_x vízáramnak csak egy része ($V_y < V_x$) folyik át az f_y felületű hengerpaláston, másik része az f_f felületű szeleptányér emelkedésével keletkezett (az ábrán sűrűn vonalkázott, $d\,V = f_f\,dy$ nagyságú) teret tölti ki.

A dugattyúlöket másik felében a szelep süllyedése következtében a szeleptányér alatt tárolt víztérfogat ismét kiszorul, ilyenkor tehát: $V_y > V_x$.

A dugattyús szivattyú szelepjátékának törvényét a *Westphal*-féle elmélet tisztázta. Ez az elmélet figyelmen kívül hagyja a szelep mozgását fékező súrlódást, valamint a szelep tömegében ébredő tehetetlenségi erőket, a (144) egyenlettel kifejezett fajlagos szelepterhelést pedig $b = állandó$ értékkel veszi számításba.

A dt időben érkező $V_x dt$ víztérfogatból tárolva marad: dV, továbbfolyik: $V_y\,dt$, tehát írható:

$$V_x\,dt = V_y\,dt + f_f\,dy, \tag{148}$$

ahol, (145) szerint, az ábra jelöléseivel:

$$V_y = \alpha K y \sqrt{2gb}. \tag{145/a}$$

Helyettesítés és rendezés után a (148) egyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{\alpha K \sqrt{2gb}}{f_f} y = \frac{Fr\,\omega}{f_f} \sin \omega t. \qquad (148/a)$$

Ennek az elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletnek állandói:

$$\frac{\alpha K \sqrt{2gb}}{f_f} = \varepsilon\ (\mathrm{mp}^{-1}) \quad \text{és} \quad \frac{Fr\,\omega}{f_f} = c\ (\mathrm{m/mp}).$$

(Az ε állandó dimenziója: *szögsebesség*, a c állandóé pedig: *sebesség*.) Behelyettesítés után írható:

$$\frac{dy}{dt} + \varepsilon y = c \sin \omega t. \qquad (148/b)$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$y = Y \sin (\omega t - \delta). \qquad (149)$$

Eszerint a szelep y emelkedése a szelep alá érkező V_x vízárammal többé nem arányos, hanem a $\varphi = \omega t$ forgattyúálláshoz képest egy δ fázisszöggel elmarad. Ez azt jelenti, hogy pl. a nyomószelep a nyomólöket elején a dugattyú holtponti állásában még zárva van mindaddig, amíg a szívólöket végén még nyitva maradt szívószelep (a holtpont után) nem záródott. A nyitás és zárás a holtpontok után δ/ω idő múlva következik be.

A **fáziskésés szöge** a (148/b) egyenletből számítható, ha abba a (149) megoldást és annak differenciálhányadosát behelyettesítjük. Írható:

$$Y \omega \cos (\omega t - \delta) + \varepsilon Y \sin (\omega t - \delta) = c \sin \omega t. \qquad (148/c)$$

A holtponti helyzetre: $\omega t = 0$ helyettesítéssel, rendezés után:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{f_f \omega}{\alpha K \sqrt{2gb}}, \qquad (150)$$

azaz: $$\sin \delta = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} \quad \text{és} \quad \cos \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}.$$

A szelep legnagyobb emelkedését a (148/c) egyenletből $\omega t = \pi/2 + \delta$ helyettesítéssel kapjuk. Rendezés után írható:

$$Y = \frac{c}{\varepsilon} \cos \delta = \frac{Fr\,\omega}{\sqrt{\alpha^2 K^2 2gb + f_f^2 \omega^2}} \quad (\mathrm{m}). \qquad (151)$$

A szelepmozgás törvényét kifejező fenti egyenletek érvényességét **y pozitív** értékeire kell korlátozni, mert a szeleptányér $y = 0$ helyen a szelep üléséhez ütközve **záródik.** (Az ábrába berajzolt szelepemelkedési diagramoknak az abszcisszatengely fölé eső szakaszát vonalkázással emeltem ki.)

A szelep csattogásának elkerülésére a záródás sebessége ne legyen nagyobb: 0,1 ÷ 0,25 m/mp-nél.

A szelep sebességének egyenlete (149)-ből:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = Y\omega \cos(\omega t - \delta). \tag{152}$$

A záródás pillanatában, $y = 0$ és $t = (\pi + \delta)/\omega$ helyettesítéssel, a záródás sebessége:

$$|v_y|_0 = Y\omega = \frac{Fr\,\omega^2}{\sqrt{\alpha^2 K^2 2gb + f^2\omega^2}}. \tag{153}$$

A δ fázisszög kis értékére való tekintettel, $\sin\delta \cong \operatorname{tg}\delta$ helyettesítéssel, a szelep záródási sebességének közelítő értéke:

$$|v_y|_0 \cong \frac{Fr\,\omega^2}{\alpha K\sqrt{2gb}} \quad \text{(m/mp)}. \tag{153/k}$$

A szelep záródásának sebessége (153/k) szerint a dugattyú holtponti gyorsulásával arányos. Itt jegyzem meg, hogy *véges hajtórúd* esetében a szivattyú szelepeinek záródási sebessége nem egyenlő, hanem a dugattyú külső holtpontjában záródó szelepek a csattogásra hajlamosabbak, mert itt a dugattyú gyorsulása: $r\omega^2(1 + r/l)$.

A szelep záródási sebessége a K szelepkerület megnövelésével vagy a fajlagos szelepterhelés megnagyobbításával (a szeleprugó megfeszítésével) kisebbíthető.

55. példa. Egy dugattyús szivattyú lökete: $s = 0{,}4$ m ($r = 0{,}2$ m), fordulatszáma: $n = 80$/perc ($\omega = 8{,}4$/mp, $\omega^2 = 70{,}6$/mp^2). A dugattyú felülete: $F = 0{,}0314$ m^2, legnagyobb sebessége: $r\omega \cong 0{,}2 \cdot 8{,}4 = 1{,}68$ m/mp, holtponti gyorsulása: $r\omega^2 \cong 0{,}2 \cdot 70{,}6 = 14{,}12$ m/mp^2.

A nyomószelep felülete: $f = 0{,}01$ m^2, kerülete: $K = 2$ m, fajlagos terhelése: $b = \Delta p/\gamma = 0{,}4$ m.

A (148) differenciálegyenlet két állandója, $\alpha = 0{,}6$ értékkel:

$$c = \frac{Fr\,\omega}{f} = \frac{0{,}0314 \cdot 1{,}68}{0{,}01} = \mathbf{5{,}26\ m/mp}$$

$$\text{és } \varepsilon = \frac{\alpha K\sqrt{2gb}}{f} = \frac{0{,}6 \cdot 2\sqrt{19{,}62 \cdot 0{,}4}}{0{,}01} = \mathbf{336/mp.}$$

Ezek helyettesítésével a szelepemelkedés fáziskésési szöge (150) szerint:

$$\delta \cong \sin\delta \cong \operatorname{tg}\delta = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{8{,}4}{336} = 0{,}025;\ \text{azaz: } \delta^\circ = 1^\circ 26'.$$

A legnagyobb szelepemelkedés (151) szerint, $\cos\delta \cong 1$ közelítéssel:

$$Y \cong \frac{c}{\varepsilon} = \frac{5{,}26}{336} = 0{,}0157\ \text{m; azaz: } \mathbf{15{,}7\ mm.}$$

A szelep záródási sebessége (a hajtórúd véges hosszának figyelmen kívül hagyásával):

$$|v_y|_0 = Y\omega = 0{,}0157 \cdot 8{,}4 = \mathbf{0{,}132\ m/mp.}$$

A véges hajtórúd torzítóhatásának figyelembevételével, $l/r = 5$ esetén, $1 + r/l = 1{,}2$-szeres záródási sebességgel kell számolni, azaz: $1{,}2 \cdot 0{,}132 = \mathbf{0{,}158\ m/mp.}$

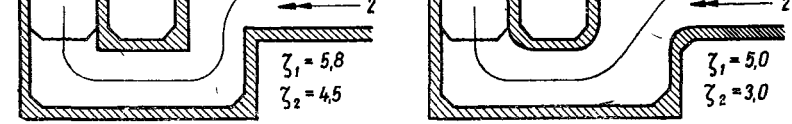
A szelep csattogásának elkerülése végett az adott esetben a kerületnek mintegy 50%-os megnövelésére van szükség.

58. Leágazás*

Az elágazó idomok helyes kialakítására szintén azok az irányelvek a mértékadók, amelyek a határréteg leválásának elkerülésére vezetnek. Elsősorban arra kell itt rámutatnom, hogy egy *változatlan szelvényű* csővezetékből egy oldal-leágazáson kivezetett vízmennyiség a főágban a sebességnek ugrásszerű kisebbedését eredményezi, tehát hatásában a hirtelen keresztmetszetbővüléshez hasonlítható. Különösen a sűrű leágazású elosztó- és gyűjtőcsöveken figyelhető meg a lendületapadással járó nyomásemelkedés is. (Vö. az 59. ponttal.)

A leágazással kapcsolatos veszteségek szabatos kiszámításához még hiányoznak az idevágó kísérletek, annyi azonban bizonyos, hogy az iránytörés és a sebesség hirtelen csökkenése itt is leválási veszteségeket okoz, és hogy az áramlás rendezetlenségéből származó járulékos veszteségek nemcsak a főágnak, hanem az elágazásnak is hosszú szakaszán még kimutathatók. Éles sarkok legömbölyítésével és a sebesség állandóságát biztosító átmeneti szelvények választásával e veszteségek is lényegesen apaszthatók.

56. példa. *a)* Egy nagyteljesítményű hőerőmű hűtővízcsatorna-rendszerének vasbetonból készült, négyszögletes szelvényű iker-csatornájából a főcsatorna tengelyére merőleges *leágazások* készültek a szivattyúaknákhoz. A Budapesti Műszaki Egyetem vízgép-laboratóriumában kismintakísérlet sorozatokkal határoztuk meg a **leágazó idomok** ellenállását.



92. ábra. Leágazó csatornaidom sarkos és legömbölyített kivitelben

A kondenzátorban felmelegedett hűtővíz visszavezetéséhez ezek a *92. ábrában* bemutatott leágazó idomok szintén ikerelrendezésben készültek, ennélfogva azok veszteségtényezőjét **mindkét áramlási irányra** kellett meghatározni.

A mérések során azt is megvizsgáltuk, hogy az erdetileg sarkosra tervezett idom éleinek legömbölyítésével milyen mértékben lehet az áramlási veszteségeket csökkenteni?

* Újabban *Favre* zürichi professzor dolgozott ki elágazás-veszteség számítási módszert, amelyet *A. Gardel*nek a lausannei műegyetem hidraulikai laboratóriumában végzett kísérletei támasztottak alá [16, 90].

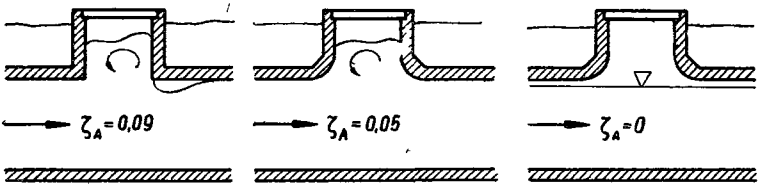
A mérések eredményeit az ábrába beírtam. Az élek legömbölyítésének kedvező hatása a fordított áramlási iránynál volt a legfeltűnőbb, mert a veszteségtényező

a sarkos kivitelre talált: $\xi_2 = 4{,}5$
értékről, legömbölyítéssel: $\xi_2 = 3{,}0$

értékre kisebbedett.

Véleményem szerint egy újabb csatornahálózat tervezésekor a leágazóidomok „áramvonalasabb" kialakításával a csatorna lefolyási viszonyai még tovább javíthatók.

b) A kismintakísérleteket kiterjesztettük az ún. **holt leágazások** vizsgálatára is. Ilyeneknek tekinthetők a főcsatornába szakaszonkint beiktatott **záró-** és **ellenőrző aknák** is, amelyek a szelvényt kitöltő áramlás esetén a csatorna ellenállását jelentékenyen megnövelhetik. (Az adott esetben a 400 méteres főcsatornába iktatott aknák száma: 16.)



93. ábra. Ellenőrző akna sarkos és legömbölyített kivitelben

A sarkos- és legömbölyített élű kivitel kismintáit *93. ábrán* mutatom be.

A mérési eredmények szerint — az aknában nagy határok között változtatott víztükörmagasságtól gyakorlatilag függetlenül — egy-egy akna veszteségtényezője:

sarkos kivitelre: $\xi_A = 0{,}09$
legömbölyítéssel: $\xi_A = 0{,}05$

(Természetesen, ha a víz nem tölti ki a főcsatorna szelvényét, akkor $\xi_A = 0$.)

59. Sűrű leágazás

Párhuzamosan kapcsolt csőrendszerek táplálóvezetéke, az ún. **elosztócső** a *94. ábra* szerint — egymást t osztás távolságában követő leágazások táplálásával — *csökkenő* vízáramot továbbít. Sűrű leágazás esetében a vízáramnak ez a csökkenése folytonosnak és *egyenletesnek* tekinthető és a folyóméterenkinti apadással (q) jellemezhető.

A párhuzamos csőrendszer vízhozamát egyesítő ún. **gyüjtőcsőben** viszont a vízáram folytonos *növekedésével* számolhatunk. Állandó f keresztmetszetű táplálócsőben tehát az áramlás sebessége is folytonos változást szenved, éspedig *vízelosztás* esetében a sebesség *kisebbedik*, *vízgyűjtés* esetében viszont *megnagyobbodik*.

Áramlástani szempontból az első esetben a bővülő csőtoldat **(diffúzor)**, a második esetben pedig a szűkülő csőtoldat **(konfúzor)** belsejében végbemenő energiaátalakulások adnak tájékoztatást a jelenségek várható lefolyásáról és a veszteségek nagyságrendjéről is.

A kérdésnek gyakorlati jelentősége van a sűrűn megcsapolt **uteai vízvezetékcsövek** nyomásviszonyainak megállapításánál, továbbá a **fűtő-** és **hűtőberendezések** legváltozatosabb csőrendszereinek, valamint a **gőzkazánok vízcsöveinek** üzemi és

áramlástani vizsgálatánál. A felületi gőzsűrítők (kondenzátorok) és a **radiátorok** mellett külön említést érdemelnek a **talajfűtéshez** és a **műjégpályák** üzeméhez felszerelt csőhálózatok, valamint a **kutak szűrőcsövei** is.

Az **elosztócső** *(94. ábra)* d átmérőjű és f területű beömlőszelvényén belépő V_1 vízáramból az l hosszúságú cső végén $V_2 = m\,V_1$ mennyiség folyik tovább, a sűrű leágazások táplálására tehát a $V_1 - V_2$ különbözet esik. Egyenletes elosztás feltételezésével a hosszegységre eső vízáram:

$$q = \frac{V_1 - V_2}{l} \quad (\mathrm{m^3/m}). \tag{154}$$

Az i számú, $t = l/i$ osztás távolságában **leágazó cső** átmérője: d_i, keresztmetszete: f_i. Egy-egy leágazócsőbe jutó folyadékáram mennyisége tehát:

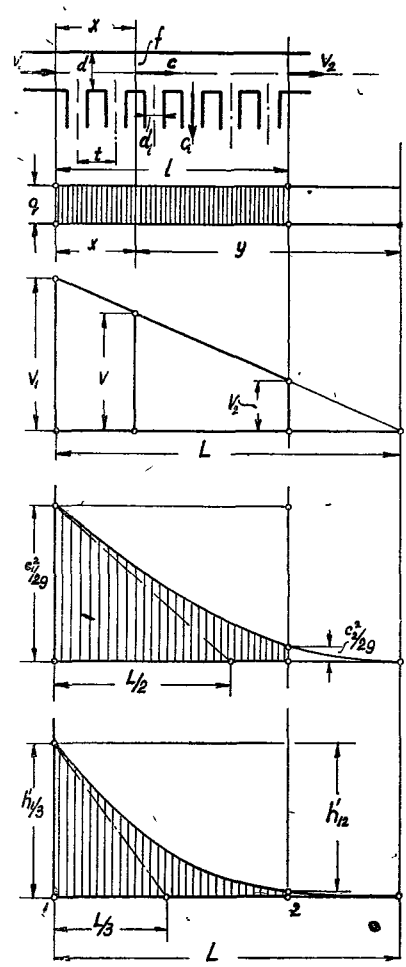
$$V_i = q\,t = f_i\,c_i, \tag{155}$$

ahol c_i a leágazócsőben áramló folyadék sebessége.

Az *elosztócső* mentén a vízáram folytonos és egyenletes apadását a beömlőszelvénytől x távolságban a

$$V = V_1 - q\,x \tag{156}$$

lineáris egyenlet fejezi ki, amely állandó f keresztmetszet esetében más léptékben a $c = V/f$ sebesség csőmenti változásának függvényábráját is meghatározza.



94. ábra. Elosztócsőből táplált leágazó csőnyaláb

Ez az egyenlet a derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjának $x = L$ távolságra helyezésével az $y = L - x$ abszcisszák függvényében $V = q\,y$ alakra hozható, ahol L azt a csőhosszúságot jelenti, amelynek mentén a V_1 (belépő) vízáram éppen elfogyott. ($V = 0$, ha $x = L$, azaz: $y = 0$.)

$V_1 = q\,L$ és $q = (V_1 - V_2)/l$ helyettesítéssel az L alaphosszúság így számítható:

$$L = \frac{V_1}{V_1 - V_2}\,l. \tag{157}$$

Az elosztócsőbe áramló folyadék sebessége tehát:

$$c = \frac{q}{f}\,y. \tag{158}$$

A $c_1 = V_1/f = q L/f$ kezdősebesség bevezetésével írható:

$$c = c_1 \frac{y}{L}. \tag{158/a}$$

A (158/a) egyenlet alapján a folyadéknak csőmenti lendületapadása alábbi **négyzetes** (parabolikus) összefüggéssel jellemezhető:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{c_1^2}{2g}\left(\frac{y}{L}\right)^2. \tag{159}$$

A folyadék sebességmagasságának (lendületének) függvényábrája tehát oly parabola, amelynek tengelye a *94. ábra* szerint az $y = 0$ (azaz: $x = L$) ordinátatengelyre illeszkedik.

A parabola felrajzolását megkönnyíti, ha a belépő lendület ($c_1^2/2g$) felrakása után ebben a pontban a parabola érintőjét is meghúzzuk, amely $x = L/2$ távolságban metszi az abszcisszatengelyt.

Veszteségmentes áramlás esetében a folyadék lendületapadása a **nyomásemelkedést** is egyértelműen meghatározza. A nyomás tehát az **elosztócső** végén a legnagyobb. Ezt analitikai úton a Bernoulli-egyenlet felírásával számítjuk, vagy az energiavonal felrajzolásával szerkesztjük.

Gyűjtő-csőben azonos méretek esetében a sebesség-eloszlás törvénye ugyanezekkel a függvényábrákkal jellemezhető, csakhogy az áramlás irányának megfordításával az energiaátalakulás is ellentétes értelemben megy végbe, mert a lendület csak **nyomásesés** árán növekedhetik.

Az **áramlási veszteségek** az *elosztócsőben* keletkező nyomásemelkedést a h'_d veszteségmagassággal *kisebbítik*, a *gyűjtőcsőben* viszont a h'_k veszteségmagasság a nyomásesést *megnöveli*. A veszteségmagasságok közül a konfúzoros gyűjtőcsőé (h'_k) szabatosan számítható.

A *diffúzoros* elosztócsőben keletkező *leválási veszteségek* nagyságrendje azonban mérési adatok hiányában csak *becsléssel* állapítható meg. A gyakorlat igényeit kielégítő eredményhez jutunk, ha e leválási veszteségeket a csősúrlódási tényező megnövelésével vesszük figyelembe. ($\lambda_d = \xi\,\lambda_k$, ahol $\xi = 1{,}5 \div 3$.)

A táplálócsőnek $dx = -dy$ hosszúságú elemére a veszteségmagasság:

$$dh' = \frac{\lambda}{d}\,\frac{c^2}{2g}\,dy,$$

ahol elosztócsőre: $\lambda = \lambda_d$ és dy előjele *negatív*,

gyűjtőcsőre: $\lambda = \lambda_k$ és dy előjele *pozitív*.

A (158/a) egyenlet szerint a változó c sebességet a V_1 teljes vízáram c_1 sebességével fejezzük ki és a leágazás nélküli L alaphosszúságú táplálócső h'_L veszteségmagasságát helyettesítjük. Írható:

$$h'_L = \lambda\,\frac{L}{d}\,\frac{c_1^2}{2g}, \quad \text{és ezzel:} \quad dh' = \frac{\lambda}{d}\,\frac{c_1^2}{2g}\left(\frac{y}{L}\right)^2 dy = \frac{h'_L}{L^3}\,y^2\,dy.$$

Az y hosszúságú csőszakaszra eső veszteségmagasság tehát:

$$h'_y = \frac{h'_L}{L^3} \int_0^y y^3 \, dy = \frac{h'_L}{3} \left(\frac{y}{L}\right)^3. \tag{160}$$

A h veszteségmagasság függvényábrája tehát **harmadrendű parabola,** amelynek szerkesztését megkönnyíti, a *95. ábra* szerint a H_1 pontban berajzolt *érintő* is, amely az abszcisszatengelyt $L/3$ távolságban metszi. (Bármely y abszcisszához tartozó pont érintőjének az abszcisszatengelyre eső vetülete: $y/3$.)

$x = 0$, azaz: $y_1 = L$ helyettesítéssel:

$$h'_1 = \frac{h'_L}{3} = \frac{\lambda}{3} \frac{L}{d} \frac{c_1^2}{2g}$$

$x = l$, azaz: $y_2 = L - l$ helyettesítéssel:

$$h'_2 = \frac{h'_L}{3} \left(\frac{L-l}{L}\right)^3,$$

az l hosszúságú táplálócső veszteségmagassága pedig:

$$h'_{12} = h'_1 - h'_2 = \frac{h'_L}{3} \frac{L^3 - (L-l)^3}{L^3}. \tag{161}$$

A **táplálóvezetékek** rendszerint csupán a leágazócsöveket látják el folyadékárammal, azaz: $V_2 = 0$ és $V_1 - V_2 = V_1$. Ebben az esetben az L alaphosszúságot (157) szerint az l csőhosszúság adja ($L = l$, $y_1 = l$ és $y_2 = 0$), az egész áramlási veszteségmagasságot kifejező (161) egyenlet pedig az alábbi egyszerű alakra hozható:

$$h'_{12} = \frac{h'_L}{3} = \frac{\lambda}{3} \frac{l}{d} \frac{c_1^2}{2g}, \tag{161/a}$$

ahol *elosztócsőre:* $\lambda = \lambda_d$, *gyűjtőcsőre* pedig: $\lambda = \lambda_k$ csősúrlódási tényezővel számolunk.

Egyenletesen *elfogyó* folyadékáram veszteségmagassága eszerint **egyharmadrésze** a megnövelt λ-val a teljes és változatlan V_1 folyadékáramból kiszámított értéknek.

A táplálócsövekben végbemenő energiaátalakulások miatt az elosztócső és a gyűjtőcső közé iktatott párhuzamos csőnyaláb táplálása nem maradhat egyenletes.

Egy-egy leágazócső vízszállítását a Δp nyomáskülönbség szabja meg, ez pedig a táplálócsövek méreteiből és a csőrendszer elrendezésétől függően annyira egyenlőtlen is lehet, hogy az üzemi követelményeket már ki nem elégíti.

Itt említem meg a budapesti műjégpálya egyik hűtőcsőrendszerének azt a hibáját, amely a táplálócsövek túlságosan nagy hosszúsága miatt a tábla középső szakaszának tökéletlen hűtőhatásában jelentkezett. A tábla kettéosztásával a megrövidített és elkülönítve táplált elosztó- és gyűjtőcsövek már biztosítani tudták a hűtőfolyadék elosztásának oly mértékű egyenletességét, hogy azontúl a jégpályán tócsák többé nem keletkeztek.

Az ellenőrző számítás menetét az alábbi példában mutatom be.

57. példa. Egy hűtőrendszer két tápláló csövének hossza: $l = 8{,}0$ m, átmérője: $d = 150$ mm ($f = 0{,}0177$ m²). Az elosztócső $i = 40$ db $l_1 = 5$ m hosszú, $d_1 = 30$ mm átmérőjű ($f_1 = 7{,}1$ cm² keresztmetszetű) leágazócső hűtőfolyadékát szolgáltatja. A sűrű leágazás egyenletes osztása: $t = l/i = 8000 : 40 = 200$ mm.

A hűtőfolyadék átlagos sebessége a leágazócsovekben: $c_1 = 0{,}75$ m/mp, a *belépő folyadékáram* mennyisége tehát:

$$V_1 = i f_1 c_1 = 40 \cdot 7{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}75 = 0{,}0213 \text{ m}^3/\text{mp}, \text{ azaz: } 21{,}3 \text{ l/mp},$$

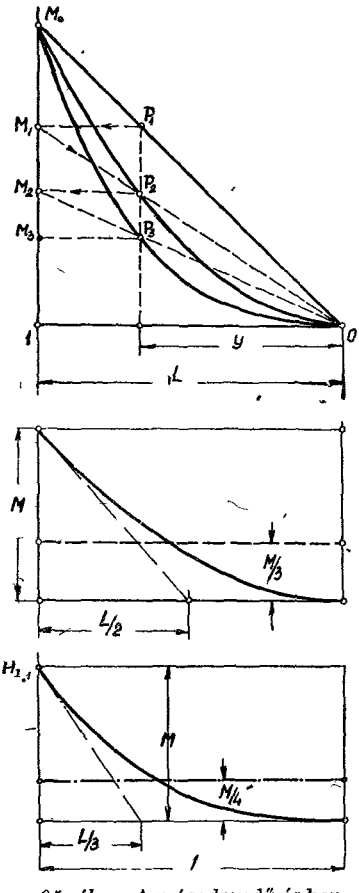
a *belépősebesség* pedig: $c_1 = V_1/f = 0{,}0213 : 0{,}0177 = 1{,}2$ m/mp.

A **belépőlendület:**

$$\frac{c_1^2}{2g} = \frac{1{,}44}{19{,}62} \cong 0{,}074 \text{ m}.$$

Az áramlási *veszteségmagasság* teljes értéke az **elosztócsőben** $\lambda_d = 0{,}05$ ($\xi = 1{,}67$) értékkel (161/a) szerint:

$$h' = \frac{\lambda_d}{3} \frac{l}{d} \frac{c_1^2}{2g} = \frac{0{,}05}{3} \frac{8}{0{,}15} \cdot 0{,}074 \cong 0{,}066 \text{ m}, \text{ azaz: } 66 \text{ mm},$$



95. ábra. A másodrendű és harmadrendű parabola szerkesztése

a **gyűjtőcsőben** pedig: $\lambda_k = 0{,}03$ értékkel:

$$h_i' = \frac{\lambda_k}{3} \frac{l}{d} \frac{c_1^2}{2g} =$$

$$= \frac{0{,}03}{3} \cdot \frac{8}{0{,}15} \cdot 0{,}074 \cong 0{,}039 \text{ m}, \text{ azaz: } 39 \text{ mm}.$$

A *leágazócsövek* táplálásához szükséges nyomásmagasságkülönbség átlagos értéke, $\lambda_1 = 0{,}03$ tényezővel:

$$\frac{\Delta p_k}{\lambda} = h = \left(1 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1}\right) \frac{c_1^2}{2g} =$$

$$= \left(1 + 0{,}03 \cdot \frac{5}{0{,}03}\right) \cdot \frac{0{,}75^2}{19{,}62} = 0{,}173 \text{ m}.$$

A sebességeloszlás meghatározásához a táplálócsövek mentén a nyomáseloszlás görbéit is fel kell rajzolni. Ezek a *95. ábra* és a *96. ábra* szerint másodrendű és harmadrendű parabolák metszékeinek algebrai összegéből pontról pontra szerkeszthetők.

A *95. ábrában* az egységparabola felrajzolásának egyszerű módját mutatom be, amelynek ismételt alkalmazásával a harmadrendű, sőt ennél is magasabbrendű parabolák pontjai is gyorsan szerkeszthetők. Az eljárás lényege: grafikus szorzás, amelyet az y abszcisszához tartozó P_1 pontnak az egységordinátára vetítésével (M_1) és az OM_1, összekötősugár y abszcisszájú P_2 pontjának kijelölésével végzünk el.

A P_2 pont a másodrendű parabolának y abszcisszához tartozó pontja, amelynek ismételt kettős átvetítésével a harmadrendű parabolának P_3 pontját kapjuk.

Az ábra alsó képén a másodrendű és harmadrendű parabola érintőinek szerkesztését és a **közepes** ordinátamagasságokat (mint területkiegyenlítéssel megha-

tározott középértékeket) is berajzoltam. A másodrendű parabola metszékeinek középértéke — mint tudjuk — a legnagyobb M magasság *egyharmadrésze* ($M/3$), a harmadrendű paraboláé pedig az egész magasság egynegyedrésze ($M/4$).

Az elosztócső és a gyűjtőcső a *96. ábra* szerint **kétféle** változatban csatlakozhatik a csővezetékhez. Az **első változat** szerint a két táplálócső csonkja a csőrendszernek **ugyanazon** az oldalán, a **második változat** szerint a csőrendszernek két **ellentétes** oldalán csatlakozik a csővezetékhez, vagyis az áramlás az első esetben a két táplálócsőben ellentétes irányú, a második esetben viszont egyirányú.

A *96. ábra* szerint az *elosztócső* mentén a nyomáseloszlás görbéje a lendületapadásból származó nyomásemelkedést szemléltető másodrendű parabolának és a nyomásesést eredményező veszteségmagasságok harmadrendű parabolájának felrajzolásával szerkeszthető. Az ábrát az 57. példában kiszámított adatokkal szerkesztettem. Az adott esetben az elosztócsőmenti nyomásemelkedést az ebből levonandó veszteségmagasság jórészt lerontja.

A *gyűjtőcső* mentén a lendületnövekedés és az áramlási veszteség is nyomásesést eredményez, a másodrendű és a harmadrendű parabola metszékei tehát itt *összegeződnek*.

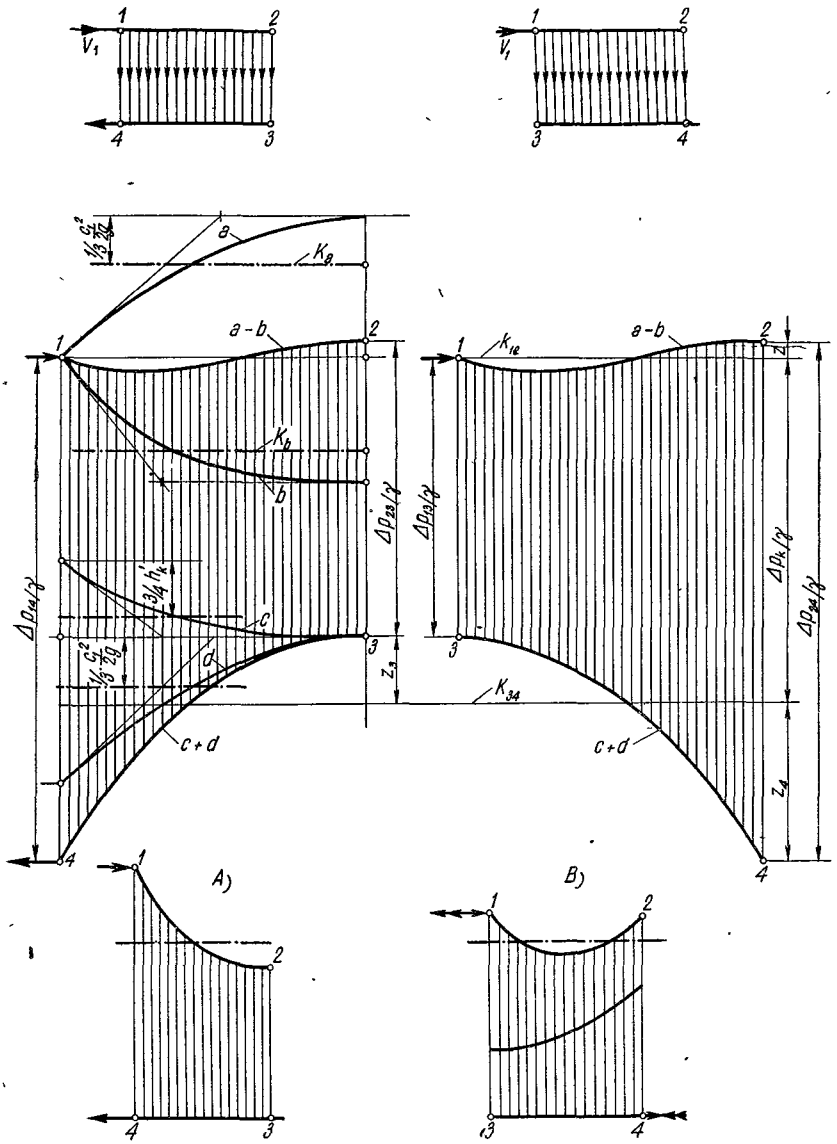
A két táplálócső közé iktatott leágazócsövek végpontjai között a nyomáskülönbség úgy szemléltethető, hogy a két nyomásábrát egymás alá rajzoljuk, oly távolságban, hogy azok *középmagasságai* közé rakjuk föl a leágazócsövek táplálásához szükséges $\Delta p_k/\gamma$ (közepes) nyomásmagasság-különbség mérőhosszúságát.

Meg kell jegyezni, hogy ez az eljárás nem adhat egészen szabatos eredményt, mert a szerkesztéshez a **nyomások** helyett a c, **sebességek** még ismeretlen eloszlásához tartozó középértékekre volna szükség. Minthogy a sebesség és nyomás között a vonatkozás nem lineáris, hanem négyzetes, tehát a kapott eredmény közelítésnek tekinthető, amely azonban a gyakorlat igényeit teljes mértékben kielégíti.

A *96. ábrában* a nyomáseloszlást fentebb leírt szerkesztéssel *mindkét változatra* meghatároztam. A nyomás egyenlőtlensége szempontjából az első változat a kedvezőbb, ezért pl. a radiátorokat ilyen elrendezésben szokás elkészíteni. A második változat viszont olyan esetben előnyös, ha az áramlás irányát *szakaszosan váltott üzemben meg lehet fordítani*, mert ezáltal a csőrendszer két oldalának nyomásbeli eltérései egy üzemszakasz tartama alatt **kiegyenlíthetők.**

A *96. ábra* jobboldali alsó képe ilyen **reverzáló** üzemű csőrendszerre vonatkozik, amelynek nyomásábráját a mennyiségi összehasonlíthatóság érdekében az időbeli középértékkel szerkesztettem. Mindegyik leágazócső nyomásesésének a két *egyenlő* időtartamú üzemszakaszra vonatkoztatott Δ'_p és Δ''_p értéket *félhosszúságú* metszékek alakjában raktam fel egymás fölé, hogy összegük a számtani középértéket adhassa.

A második változat szerinti nyomásábra szimmetrikus alakjából megállapítható, hogy reverzáló üzemmel a leágazott csőnyaláb két *szélén* a nyomásesések *középértéke* pontosan egyforma nagy, a közbenső csövekre azonban ennél jóval kisebb nyomáskülönbség jut. A nyomásokban mutatkozó egyenlőtlenség természetesen a vízelosztásban is kifejezésre jut. Ez annyit jelent, hogy az *első változat* esetében a leágazott csőnyalábnak a csatlakozó csonktól *legtávolabb* eső leágazócsöveiben áramlik a folyadék a legkisebb sebességgel, a *második változat* szerint viszont a legkisebb folyadékáramot szállító csöveket a középen, a csőnyaláb szimmetriasíkjának környezetében találjuk. Fűtő-, ill. hűtőberendezés esetében a hőkezelés, ill. hőelvonás is ezeken a helyeken lesz a legtökéletlenebb.



96. ábra. Sűrű leágazású hűtőcső-rendszerek nyomásábrája

A gyakorlat igényeit jól kielégítő nyomáseloszlást a helyes elrendezés választása mellett csakis **bőven méretezett** és viszonylagosan rövid táplálócsövekkel lehet biztosítani.

58. példa. Az 57. példában kiszámítottuk egy hűtőcsőrendszer két táplálócsövének és a közéjük iktatott leágazócsöveknek áramlástani jellemzőit. A *96. ábrában* ennek a berendezésnek kétféle változatára kiszámított nyomáseséseket helyes méretarányban ábrázoltam a fentebb leírt szerkesztési eljárások felhasználásával.

Az **elosztócső** *1—2* nyomásábrája az *a* és *b* görbe metszékeinek különbségével pontról pontra felrakható. Az *a*-görbe *(másodrendű* parabola) metszékeinek középmagassága, az 57. példa adataival:

$$z_a = \frac{2}{3}\,\frac{c_1^2}{2g} = 0{,}67 \cdot 74 = 49{,}6 \text{ mm.}$$

A *b* görbe *(harmadrendű* parabola) metszékeinek középmagassága:

$$z_b = \frac{3}{4}\,h' = 0{,}75 \cdot 66 = 49{,}5 \text{ mm.}$$

Az adott esetben a két középmagasság gyakorlatilag egyenlő ($z_a = z_b$), algebrai összegük tehát: *zérus*. Az elosztócső nyomásábrájának k_{12} középvonala ebben az esetben az *1* pont magasságába esik ($z_1 = 0$).

Az elosztócső *2* végpontjában a nyomásmagasság emelkedése e középmagasság fölött:

$$z_2 = \frac{1}{3}\,\frac{c_1^2}{2g} - \frac{1}{4}\,h_d = 0{,}33 \cdot 74 - 0{,}25 \cdot 66 = 24{,}5 - 16{,}5 = \mathbf{8 \text{ mm.}}$$

A **gyűjtőcső** nyomásábrájának k_{34} középvonalát a k_{12} középvonal alatt $h'_i = 173$ mm mélységben jelöljük ki. A *c* és *d* görbe metszékeinek összegéből szerkesztett $(c + d)$ görbének fekvését e k_{34} középmagasság felrakásával egyértelműen kitűztük, mert geometriai szemlélettel igazolható, hogy e görbe *3* kezdőpontjának magassága a középvonal fölött:

$$z_3 = 0{,}33 \cdot 74 + 0{,}25 \cdot 39 = 24{,}5 + 9{,}7 = 34{,}2 \cong \mathbf{34 \text{ mm,}}$$

a gyűjtőcső kilépő-keresztmetszetét jellemző *4* pont mélysége pedig a középvonal alatt:

$$z_4 = 74 + 39 - 34 = \mathbf{79 \text{ mm.}}$$

Fentebb kiszámított értékekkel a nyomáseloszlás egyenlőtlenségének mértéke a nyomásábra felrajzolása nélkül is meghatározható.

Az első változat szerint a leágazócsövekre jutó nyomásmagasság-különbség legnagyobb értéke, a belépés helyén, az *első* csőben:

$$\frac{\Delta p_{14}}{\gamma} = z_1 + \frac{\Delta p_k}{\gamma} + z_1 = 0 + 173 + 79 = \mathbf{252 \text{ mm v. o.}}$$

legkisebb értéke pedig az *utolsó* csőben:

$$\frac{\Delta p_{23}}{\gamma} = z_2 + \frac{\Delta p_k}{\gamma} - z_3 = 8 + 173 - 34 = \mathbf{147 \text{ mm v. o.}}$$

A legnagyobb *eltérés:*

$$z_1 + z_1 - z_2 + z_3 = 252 - 147 = \mathbf{105 \text{ mm v. o.}}$$

A nyomáseloszlás egyenlőtlenségi foka az eltérésnek az előírt $\frac{\Delta p_k}{\gamma}$ középértékre vonatkoztatott értéke. Az adott esetben:

$$\delta_p = \mathbf{0{,}609}, \text{ azaz kereken: } \mathbf{61\%}.$$

Ez az egyenlőtlenség természetesen a vízelosztásban is kifejezésre jut, bár a sebesség és a nyomás között fennáló négyzetes vonatkozás miatt sokkal kisebb mértékben.

A c_i sebesség legnagyobb és legkisebb értékének aránya a Δp_{14} és a Δp_{23} nyomások arányából az adott esetben a következő:

$$\frac{c_i'}{c_i''} = \sqrt{\frac{\Delta p_{14}}{\Delta p_{23}}} = \sqrt{\frac{252}{147}} = \sqrt{1{,}71} = 1{,}31,$$

vagyis az első leágazócsőben 31%-kal nagyobb sebességet találunk (az utolsó csőhöz viszonyítva).

Hasonló gondolatmenettel végezhető az áramlástani vizsgálat a második változat esetében is.

60. Az űrképződésből származó veszteségek

A 22. pontban már rámutattam az **űrképződés** feltételeire, amelyek ott teljesednek, ahol a nyomás a valóságos folyadék hőfokán telített gőz nyomására apad.

E jelenségek közül a járókeréklapát »szívott« felületén keletkező **kavitáció** csak annyiban tartozik idę, amennyiben az űrképződés rontja a hatásfokot. Ha oly nagy mértékű a kavitáció, hogy roncsoló hatásánál fogva a gép állagának épségben maradását is veszélyezteti, **akkor** nem minősíthető üzemállapotnak.

Ha az áramló folyadék munkaképessége nem nagy (pl. szívóvezetékben vagy vízgép szívóterében), akkor a sebesség helyi megnövekedése is akkora nyomásesést eredményezhet, hogy űrképződés jön létre. A csatorna egy erős görbülete ilyen helyen *nemcsak* a határréteg leválását okozhatja, hanem a nyomásnak oly mértékű csökkenését is, hogy űrképződés indul meg. A fal mentén keletkezett űr az áramló folyadék keresztmetszetét szűkíti.

Ilyen esetben tehát nemcsak a határréteg leválásának következményeivel kell számolni, hanem ezenfelül még a keresztmetszet kisebbedéséből eredő veszteségekkel is, amelyek az űrképződés periodikus jellege miatt még meg is sokszorozódhatnak.

A járulékos veszteségek tetemes megnövekedését okozza az ún. kavitációs tölcsér is, amely a cső belsejében keletkezik, ha a folyadék áramlása nem perdületmentes. A folyadékelemek haladómozgására merőleges keringési sebesség igen nagy lehet a *44. ábra* szerinti hiperbolikus eloszlás miatt, ami a súrlódási veszteség lényeges megnagyobbodására vezet. A tölcsérnek folyadékkal ki nem töltött szelvénye ezenfelül a cső keresztmetszetét is szűkíti, tehát az áramlás irányában is nagyobb veszteségekkel kell számolni.

Különösen a turbina bővülő szívócsövében lehet a perdületes áramlás nagy veszteségek forrása, mert a szívócsövet elhagyó folyadék hasznosíthatatlan lendületét **kilépési veszteségnek** kell minősíteni. A keringés lendülete ugyanis igen nagy lehet, és a szívócső különleges kialakításával is csak részben és csak igen rossz hatásfokkal értékesíthető. (Ellentétben a haladás lendületével, amely jól

elkészített diffúzorban mintegy 70—80%-os hatásfokkal alakulhat át potenciális energiává.)

Végül még itt említhető meg az aknában elhelyezett vízgép belépőnyílása előtt keletkező és a víztükörből mélyen a gép belsejébe behúzódó **tölcsér** is, amely szintén perdületes áramlás következménye. E tölcsért ugyan *levegő* tölti ki, tehát az űrképződés szorosan vett feltételei itt nem teljesülnek, de a veszteségek szempontjából egészen hasonló megítélés alá esik, mert ez is tetemes járulékos veszteségeknek lehet okozója.

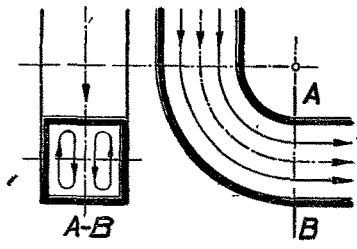
A tölcsérképződést a vízgép beömlőnyílásának mélyebb alámerítésével és a perdület keletkezésének megakadályozásával (a *szivattyú* szívócsövének meghosszabbításával, az aknás turbina elrendezésének javításával) okvetlenül meg kell szüntetni, mert a tölcsér a gép víznyelőképességét is tetemesen leszállítja, a gép belsejébe hatoló *levegő* pedig annak teljesítőképességében okoz aránytalanul nagy visszaesést.

A folyadékba buborékok alakjában keveredő levegőnek káros hatásaira itt csak rámutatok, mert e kérdés ma még tisztázásra vár, és jelentőségénél fogva a kísérleti kutatás vonalán is fokozott figyelmet érdemel.

61. Áramlás görbületekben. Ívdarab ellenállása

A hirtelen irántörésből eredő veszteségekkel a *85. ábra* kapcsán már az 55. pontban foglalkoztunk. *Nagyobb görbületi sugarú ívben* az eltérítés a határréteg leválása nélkül is megvalósítható, az **ívcsőben** tehát az áramlási veszteség mindig kisebb, mint az ún. könyökcsőben.

A görbületben áramló valóságos folyadék veszteségeinek vizsgálata arra a meglepő eredményre vezet, hogy e veszteségek nagysága az elterelés szögétől csaknem független. E jelenség abban talál magyarázatot, hogy a görbületben a keveredő áramlás impulzusváltozása a szelvény középsíkjában centrifugális irányú és a falak mentén kétoldalt visszatérített áramlást indít meg, amelyet a *97. ábra* szemléltet. E *keresztirányú (szekunder) áramlás* megindításához szükséges energia a folyadék munkaképességéből mindjárt a görbület első szakaszán vonódik el, így tehát könnyen megérthető, hogy a 90°-os és a 180°-os ívdarab ellenállásában alig találunk különbséget.



97. ábra. Keresztirányú áramlás az ívcsőben

A veszteségek nagyságrendjére azonban lényeges befolyása van a szelvény *alakjának* és a *görbületi sugárnak*, amely ne legyen kisebb a csőátmérő kétszeresénél ($r = 2 \div 4\ d$).

A keresztirányú áramlás következtében a súrlódási veszteségek is lényegesen megnagyobbodnak. E **járulékos veszteség** — a görbületen túl — **a cső egyenes szakaszára is kiterjed.** A veszteségtényező nagysága eszerint attól is függ, hogy a görbület után a csővezeték milyen alakú. Sőt a görbületbe már **rendezetlenül érkező áramlás** is lényeges befolyást gyakorolhat a veszteség kialakulására. Végül azt is figyelembe kell venni, hogy még *ugyanannál* a berendezésnél, *változatlan* üzemi jellemzőkre vonatkoztatott kísérlet eredményei is *erős szórást* mutathatnak, mert a

97. ábrában szemléltetett keresztirányú áramlás **labilissá** válik, mihelyt a *két ellentétes* perdület fenntartását biztosító erőjáték (a görbületen túl) megváltozik. A cső egyenes szakaszában rendszerint már csak *egyirányú* perdületes áramlást találunk, mert a súrlódás az egyik irányú perdületet lefékezi.

A kérdés még számos vonatkozásban mindmáig tisztázatlan. A szakirodalomban közzétett veszteségtényezők megbízhatósága is erősen vitatható.

Kedvező esetben előzetes számításokhoz $\zeta \doteq 0{,}15 \div 0{,}5$ veszteségtényező választható, de a kis átmérőjű gázcsövek ívdarabjaiban ennek az értéknek többszöröse is előfordul.

A keresztirányú áramlás kialakulását megnehezítő **lapos szelvényű ívdarabok** alkalmazása a veszteségek apasztására vezethet, de az idevágó javaslatok legtöbbje még kísérleti igazolásra szorul, és gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából figyelmet alig érdemel.

62. A kilépési veszteség

Az előző pontokban a valóságos folyadék oly áramlási veszteségeivel foglalkoztunk, amelyek a csatorna belsejében alakultak át súrlódási hővé, vagyis a folyadék munkaképességéből vonódtak el. Ezekkel ellentétben *kilépési veszteségnek* a csatornából kilépő folyadékáram *lendületét* nevezzük, amely csak azáltal és csak akkor válik veszteséggé, hogyha e munkaképesség hasznosításáról már nem lehet szó.

Ha ugyanis a vízgépet tágabb értelmezésben az *energiaátalakulás* szemszögéből vizsgáljuk, akkor pl. az örvényszivattyú hatásfoka azt a hányadot fejezi ki, amely a befektetett mechanikai munkából a *folyadék munkaképességének növelésére* fordítható. A munkaképesség e megnövekedését, a folyadék súlyegységére vonatkoztatva, a belépő- és a kilépőcsonkra felírható *Bernoulli*-egyenletből a következőképpen számíthatjuk:

$$H = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} \quad \text{(m)} \qquad (162)$$

ahol z_1, p_1, c_1 a belépőcsonkra, z_2, p_2, c_2 a kilépőcsonkra vonatkozik.

A 33. pontban már rámutattam arra is, hogy *energetikai értelemben* a súlyegység munkaképességének e megnövekedését nevezzük **manometrikus szállítómagasságnak.**

A „manometrikus" szállítómagasság elnevezése arra utal, hogy nagyságát a gyakorlatban rendszerint két nyomásmérőn (manométeren) leolvasott nyomás különbségéből határozzuk meg.

Ha a csonkok egy magasságban vannak ($z_2 = z_1$) és azonos méretűek ($c_2 = c_1$), akkor a manometrikus szállítómagasságot a ($p_2 - p_1$) nyomáskülönbség átszámítás nélkül közvetlenül adja, azaz: $H = (p_2 - p_1)/\gamma$.

A szivattyú **szívócsövének** vizsgálatánál eszerint a csővezetékből kilépő (a szívócsonkhoz érkező) c_1 sebességű vízsugár lendületét a szivattyú értékesíteni tudja; ilyenkor tehát nem lehet szó kilépési veszteségről.

Mihelyt azonban a szivattyúberendezést egyszerűen csak **emelőgépnek** minősítjük, amelynek csupán az a feladata, hogy a folyadékot egy magasabb szintre *átemelje* (pl. belvízátemelő szivattyú), a szállított folyadék lendülete hasznosít-

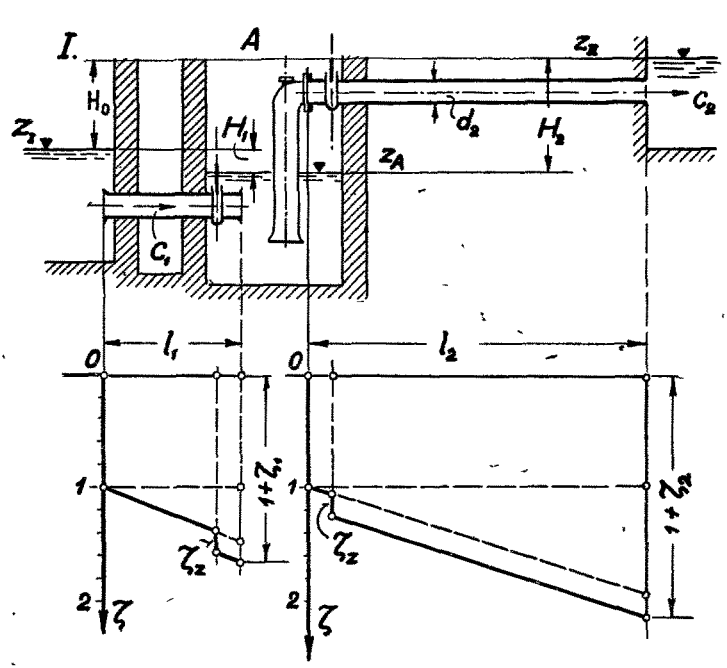
hatatlanul lép ki a nyomócsőből, azt tehát veszteségnek kell minősíteni. Ilyen esetekben a szintkülönbségből számítható ún. **sztatikus szállítómagasságra** ($H = z_2 - z_1$) vonatkoztatjuk a berendezés hatásfokát is (ún. sztatikus hatásfok).

Kilépési veszteségnek kell tekinteni a turbina szívócsövét elhagyó víz lendületét is. Ennek apasztása érdekében e szívócsövet bővülő (diffúzor) toldattal látjuk el, hogy a sebesség kisebbedésével a kilépési veszteség is csökkenjen.

Egyenletes szelvényű vízvezetékcsövek **kilépési veszteségét** — mint már az 54. pontban is említettem — már a belépés helyén *belépési veszteség* alakjában szokás számításba venni, mert a folyadék potenciális energiája már itt alakul át oly lendületté, amelyet a kilépésnél nem fogunk hasznosítani.

Ez a felfogás sem kifogásolható; mindkét eljárás célravezető, ha azok *bármelyikét* következetesen és értelemszerűen alkalmazzuk.

59. példa. A *98. ábrában* vázolt aknás elrendezésű vízátemelő-berendezés $H_0 = 5$ m-es sztatikus szállítómagasságra: $V = 2{,}0$ m³/mp vízmennyiséget emel. Maga a szivattyú mélyebbről kénytelen a vizet átemelni, mert az akna víztükre az összekötő csővezeték áramlási veszteségei miatt: $z_I - z_A = H_1$ esést mutat.



98. ábra. Belvízátemelő szivattyú csővezetéke

E csővezeték méretei: $l_1 = 12$ m, $d_1 = 800$ mm $= 0{,}8$ m (kissé szűk méreteket választottam a veszteségek szembetűnő kidomborítása érdekében). A csősúrlódás tényezője: $\lambda_1 = 0{,}025$, a beiktatott (nyitott) tolózár veszteségtényezője $\zeta_z = 0{,}2$.

Minthogy a vízáram lendülete itt veszendőbe megy, tehát a kilépési (belépési) veszteséggel megnövelt veszteségmagasság:

$$h_1' = \frac{c_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{c_1^2}{2g} + \zeta_z \frac{c_1^2}{2g} = (1 + \zeta_1) \frac{c_1^2}{2g}.$$

A *98. ábra* a veszteségtényezőt a csőhosszúság függvényében szemlélteti. Számértéke:

$$\zeta_c = \lambda_1 l_1/d_1 = 0{,}025 \cdot 12 : 0{,}8 = 0{,}375$$
$$\zeta_z = \qquad\qquad = 0{,}200$$
$$\zeta_1 = \zeta_c + \zeta_z = \qquad = \mathbf{0{,}575}$$

A sebesség: $c_1 = V/f_1 = 2 : 0{,}502 = \mathbf{3{,}98\ m/mp}$, a sebességmagasság tehát: $c_1^2/2g = 0{,}8$ m, a veszteségmagasság pedig:

$$\mathbf{h_1' = H_1} = (1 + \zeta_1)\frac{c_1^2}{2g} = 1{,}575 \cdot 0{,}8 = \mathbf{1{,}26\ m.}$$

A szivattyú *sztatikai* szállítómagassága eszerint:

$$\mathbf{H_2} = H_0 + H_1 = \mathbf{6{,}26\ m.}$$

A nyomócső veszteségmagassága $l_2 = 30$ *m*, $d_2 = 0{,}8$ *m*, $\lambda_2 = 0{,}025$ és $\zeta_z = 0{,}2$ értékkel egészen hasonlóképpen számítható:

A veszteségtényező:

$$\zeta_c = \lambda_2 l_2/d_2 = 0{,}025 \cdot 30 : 0.8 = 0{,}94$$
$$\zeta_z = \qquad\qquad = 0{,}20$$
$$\zeta_2 = \zeta_c + \zeta_t = \qquad = \mathbf{1{,}14}$$

A veszteségmagasság pedig ($c_2 = c_1$ értékkel):

$$\mathbf{h_2'} = (1 + \zeta_2)\frac{c_2^2}{2g} = 2{,}14 \cdot 0{,}8 = \mathbf{1{,}71\ m.}$$

A szivattyú **manometrikus szállítómagassága** eszerint akkora legyen, hogy e veszteséget is fedezhesse, azaz:

$$\mathbf{H} = H_2 + h_2' = 6{,}26 + 1{,}71 = 7{,}97 \cong \mathbf{8\ m.}$$

63. Járulékos veszteségek

Az előző pontokban már több ízben rámutattam arra, hogy a csősúrlódás veszteségmagassága *ugyanannál a vízszállításnál*, vagyis változatlan $c = V/f$ középsebességnél is megnövekszik, ha a sebesség eloszlása nem egyenletes, vagy akkor is, ha a folyadékelemek a szállítás irányára merőleges keringő mozgást is végeznek. (Keresztirányú vagy szekunder áramlás.)

Minthogy a veszteségmagasság a folyadék **lendületével** arányos, tehát a sebességeloszlás egyenlőtlenségére visszavezethető járulékos veszteségek nagyságrendjéről a lendület megnövekedése ad tájékoztató képet.

a) **Keresztirányú áramlás** esetében az egymásra helyezhetőség elvének alkalmazásával (20. pont) a c sebességű főáram lendületéhez az erre merőleges c_u keringési sebességből számítható lendület egyszerűen hozzáadható ((49) egyenlet).

A járulékos lendület: $c_u^2/2g$, a lendület megnagyobbodása tehát:

$$\xi_e = 1 + (c_u/c)^2, \quad \text{azaz: } e = (c_u/c)^2 . \qquad (163)$$

Ha a szekunder áramlás sebessége a főáraméval nagyságrendre megegyezik ($c_u \cong c$), akkor: $\xi_e \cong 2$, azaz a folyadékelemek lendülete **megkétszereződött.** Való-

színű tehát, hogy a súrlódási veszteségmagasság is ugyanebben az arányban nagyobbodik.

A súrlódás a keresztirányú áramlást a kifutási úthosszúság mentén **lefékezi,** ennélfogva a járulékos veszteség is ezen a csőszakaszon belül érvényesül.

Kísérleti adatok hiányában az elméleti számítás elvégzésének gyakorlati jelentősége nincsen.

b) **A sebesség térbeli eloszlásának egyenlőtlensége** a csatornakeresztmetszet mentén a legnagyobb sebességnek a középsebességhez viszonyított csúcsértékével minőségileg jellemezhető. A lendület szabatos értékének meghatározásához azonban a szelvénymenti sebességeloszlásból kell kiindulni. Ez a szelvény minden pontjában felrakott sebességből alkotott ún. **víztest**-tel ábrázolható.

A víztest köbtartalma a szelvényen átáramló vízmennyiséget adja, annak közepes magassága tehát: a c középsebesség.

Ha az F szelvény $\mathrm{d}F$ elemében c_y sebességet találunk, akkor írható:

$$V = \int_F c_y \,\mathrm{d}F = cF.$$

A $\mathrm{d}F$ felületelemen átáramló $c_y\,\mathrm{d}F$ mennyiségű és γ/g sűrűségű folyadékelem lendülete pedig:

$$\mathrm{d}E_y = \frac{\gamma}{2g} c_y^3 \,\mathrm{d}F,$$

az egész lendület tehát:

$$E_y = \frac{\gamma}{2g} \int_F c_y^3 \,\mathrm{d}F.$$

Ezzel szemben a c középsebességből számított lendület:

$$E = \frac{\gamma}{2g} c^3 F = \frac{\gamma}{2gF^2} \left[\int_F c_y \,\mathrm{d}F\right]^3. \tag{164}$$

A sebességelosztás egyenlőtlensége miatt a lendület megnagyobbodása tehát:

$$\xi_y = \frac{E_y}{E} = \frac{F^2 \int c_y^3 \,\mathrm{d}F}{(\int c_y \,\mathrm{d}F)^3} = \frac{\int c_y^3 \,\mathrm{d}F}{c^3 F}. \tag{165}$$

Ez az érték mindig nagyobb az egységnél, ha a sebességeloszlás nem egyenletes. A ξ_y tényező rendszerint csak a víztesthez hasonlóan felépített téridom köbtartalmából grafikus úton határozható meg.

60. példa. A réteges áramlásra megismert paraboloid alakú sebességeloszlást körszelvényre a *68. ábra* mutatja. Erre az esetre a csúcstényező: $c_0/c = 2$, vagyis a sebesség legnagyobb értéke a középérték kétszerese. Erre az esetre a lendület járulékos értéke analitikai úton is meghatározható.

$c_y = c_0 [1 - (y/r)^2]$ és $\mathrm{d}F = 2\pi y \,\mathrm{d}y$ helyettesítéssel írható:

$$\int_F c_y^3 \,\mathrm{d}F = 2\pi c_0^3 \int_0^r [1 - (y/r)^2]^3 \, y \,\mathrm{d}y = 2\pi c_0^3 \frac{r^2}{8} = 2\pi c^3 r^2 = 2c^2 F.$$

A lendület megnagyobbodása tehát ebben az esetben **kétszeres**, mert: $\xi = 2$. A járulékos lendület: $E_y - E = (\xi_y - 1)E = E$.

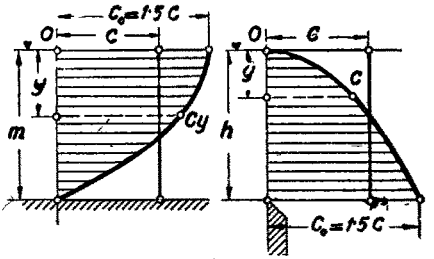
61. példa. Egy b szélességű és $F = b\,m$ keresztmetszetű csatornában $V = b\,m\,c$ vízmennyiség áramlik. A *99. ábra* szerint parabolikus sebességeloszlás esetén a legnagyobb sebesség ($y = 0$ mélységben): $c_0 = 1{,}5\,c$. y mélységben a sebesség:

$$c_y = c_0[1 - (y/m)^2] \text{ és d } F = b\,\mathrm{d}y.$$

Ezzel a lendület megnagyobbodása:

$$\xi_y = \left(\frac{c_0}{c}\right)^3 \frac{1}{m}\int_0^m [1 - (y/m)^2]^3\,\mathrm{d}y = \frac{54}{35} = \mathbf{1{,}54}.$$

62. példa. Ugyanezt a $c_0/c = 1{,}5$-szörös csúcstényezőt találjuk a gáton átbukó parabolikus sebességeloszlásnál is, amely azonban (a *99. ábra* jelöléseivel) $y = h$ mélységben adja a legnagyobb sebességet.



99. ábra. Sebességelószlás nyitott csatornában

Tetszőleges y mélységben: $c_y = c_0\sqrt{y/h}$ és $\mathrm{d}F = b\,\mathrm{d}y$. A lendület megnagyobbodása most így számítható:

$$\xi_y = \left(\frac{c_0}{c}\right)^3 \frac{1}{h^{5/2}}\int y^{3/2}\,\mathrm{d}y = \frac{54}{40} = \mathbf{1{,}35}.$$

A 61. példa adataival összehasonlítva, azt találjuk, hogy a járulékos lendület azonos csúcstényezőnél (a sebességeloszlástól függően) a középsebességből számított lendületnek az egyik esetben 54%-át, a második esetben 35%-át teszi ki.

A lendületnövekedés kétségkívül az *áramlási veszteségek* megnövekedését is előidézi, és nagy valószínűséggel feltételezhető, hogy a járulékos veszteség nagyságrendje *arányosságot mutat* a lendület járulékos értékével.

c) **A sebesség ütemes ingadozása** az ún. egyenlőtlenségi fokkal jellemezhető, amely a sebességingadozásnak ($c_0 - c_{00}$) a c középsebességre vonatkoztatott viszonylagos értéke. A *100. ábra* jelöléseivel az egyenlőtlenségi fok:

$$\delta = \frac{c_0 - c_{00}}{c}.$$

A sebesség időbeli középértékéből kiszámított lendület mindig kisebb a pillanatnyi lendületek középértékénél.

Harmonikusan *(szinusz-törvény szerint)* ingadozó sebességnél a legnagyobb sebesség: $c_0 = (1 + \delta/2)\,c$, a sebesség pillanatnyi értéke pedig:

$$c_t = c + (c_0 - c)\sin\omega t = c\left(1 + \frac{\delta}{2}\sin\omega t\right),$$

ahol ω a lengés szögsebessége, és $T = 2\pi/\omega$ egy teljes lengés ideje.

A lendület megnagyobbodása egy teljes ütem idejére vonatkoztatott középértékből számítható:

$$\xi_t = \frac{\int E_t\,\mathrm{d}t}{ET} = \frac{\int c_t^3\,\mathrm{d}t}{c^3 T}. \qquad (166)$$

Harmonikus ingadozásra c_t köbének helyettesítése után a (166) egyenlet integrálható. Az eredmény:

$$\xi_t = 1 + \frac{3}{8}\delta^2; \text{ azaz: } e_t = \frac{3}{8}\delta^2. \qquad (167)$$

A lendület eszerint az egyenlőtlenségi fok **négyzetével** arányos járulékkal nagyobbodik meg.

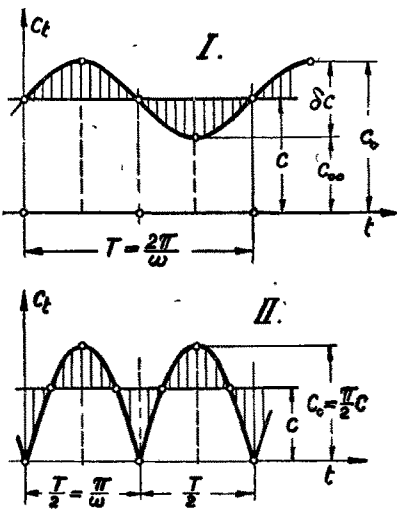
Ha pl. a sebesség legkisebb értéke zérus, ($c_{0_1} = 0$), akkor a legnagyobb sebesség a középsebesség kétszerese ($c_0 = 2\,c$) és $\delta = 2$.
A járulékos lendület tehát: $e_t = \mathbf{1{,}5}$.

Feltehető, hogy a súrlódási veszteség is a lendület arányában növekedett meg. Így tehát lüktető szállításnál az áramlási veszteségek a sebesség középértékéből számított veszteségmagasságnak **két és félszeresét** is elérik.

Az időszakosan kihagyó **egyenletes** áramlás járuléka még nagyobb. Így pl. $T_a = T/2$ ideig: $c_a = 2\,c$ és $T_b = T/2$ szünetben: $c_b = 0$ sebességekkel jellemezhető lüktetésre:

$$\delta = 2, \text{ és } e_t = \frac{3}{4}\delta^2 = 3.$$

Ebben az esetben tehát a veszteségek **négyszer akkorák,** mint egyenletes áramlás esetében.



100. ábra. A sebesség ütemes ingadozása. I. Harmonikus ingadozás. II. A dugattyús szivattyú lüktető üzeme

63. példa. Egy légüst nélkül dolgozó **kettős működésű** dugattyús szivattyú nyomócsövében a sebesség ingadozását a *100. ábra* alsó képe szemlélteti. A sebesség a szelepekkel **egyenirányított** szinuszgörbével ábrázolható. A középsebesség: $c = 2c_0/\pi$.
A pillanatnyi sebesség most:

$$c_t = c_0 \sin \omega t, \text{ ahol } \omega \text{ a } \textit{tengely} \text{ szögsebessége.}$$

A (166) egyenletbe helyettesítve és egy félfordulat idejére ($T/2$) integrálva, a lendület megnagyobbodását kifejező tényező:

$$\xi_t = \frac{\pi^2}{6} \cong \mathbf{1{,}64}; \quad \text{azaz: } \mathbf{e_t \cong 0{,}64.}$$

Egyszeres működésű szivattyú vízszállítása félakkora, mert csak minden második löket hatásos. A legnagyobb sebesség most: $c_0 = \pi\,c$, a lendület megnagyobbodása pedig az előbbeni érték négyszerese, azaz:

$$\xi_t = \frac{2\,\pi^2}{3} = \mathbf{6{,}56} \quad \text{és:} \quad \mathbf{e_t \cong 5{,}56.}$$

Nyilvánvaló, hogy a lendület ily nagymértékű megnagyobbodása a **veszteségmagasság** hasonló arányú megnövekedését okozza. Ez annyit jelent, hogy az egyszeres működésű szivattyú légüstjének elhagyásával a nyomócső áramlási veszteségei kereken hat és félszer akkorára növekedhetnek. A veszteségek apasztása érdekében is indokolt tehát a vízszállítás ingadozásainak a kiegyenlítése.

64. Kifolyás és átfolyás

A kifolyó- és átfolyónyíláson átlépő folyadék sebességét és mennyiségét a **sebességi tényező** és a **kifolyási** (átfolyási) **tényező** bevezetésével szokás kiszámítani.

A sebesség **elméleti** értékét (c_e) a nyíláson *veszteségmentesen* átlépő folyadék lendületének megnövekedéséből a Bernoulli-egyenlettel lehet kiszámítani. A nyílás két oldalán mérhető nyomásmagasságkülönbség (esés) ugyanis a tökéletes folyadékban veszteség nélkül alakul át lendületté, azaz általában:

$$c_e = c_2 = \sqrt{c_1^2 + 2g\,(p_1 - p_2)/\gamma}, \tag{168}$$

ahol $H = (p_1 - p_2)/\gamma$ a lendületnövekedést adó esés.

A nyíláshoz érkező folyadék c_1 sebessége rendszerint elhanyagolható, ha a kifolyónyílás nagyobb méretű edényből torkollik.

A **valóságos** folyadék kiömlése nem veszteségmentes. A veszteségmagasság helyett itt az ún. **sebességi tényezővel** ($\varphi = c/c_e$) számolhatunk, amelynek értéke a nyílás alakjától és megmunkálásától függ.

Gondosan megmunkált kifolyónyílások sebességi tényezője átlagosan: $\varphi = 0{,}97$ (ha a vízsugár a levegőbe lép ki); átfolyónyílásokra (vízből vízbe): $\varphi = 0{,}95$ választható.

A Pelton-turbina foszforbronzból készült, tükörfényesre csiszolt szájnyílása $\varphi \cong 0{,}99$ sebességi tényezővel számítható.

A sebességi tényezőből a kifolyónyílás ζ veszteségtényezője is kiszámítható. A veszteségmagasság ugyanis a kilépősugár lendületveszteségéből is kifejezhető, azaz írható:

$$h' = \zeta \frac{c^2}{2g} = \frac{c_e^2 - c^2}{2g}, \quad \text{amiből:}$$

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \cong 1 - \varphi^2. \tag{169}$$

A Pelton-turbina szájnyílása eszerint, $\zeta \cong 0{,}02$ veszteségtényezővel, $\eta = 1 - \zeta = 0{,}98$, azaz: 98%-os hatásfokkal alakítja át az esést lendületté.

A (169) egyenlet helyett jó közelítéssel a $\zeta \cong 2\,(1 - \varphi)$ összefüggés használható, ugyanis $1 - \varphi^2 = (1 + \varphi)\,(1 - \varphi)$, ahol $(1 + \varphi) \cong 2$ értékkel számolhatunk.

A nyíláson kifolyó mennyiség számításánál a folyadéksugár zsugorodását is figyelembe kell venni. Az **összehúzódás** (kontrakció) **tényezője**: $\mu = f_x/f$ annál kisebb, mennél nagyobb eltérítést szenved a nyíláshoz érkező folyadéksugár határrétege. Az ún. Borda-féle csőben (24/c pont *48. ábra)* az eltérítés: $\delta = 180°$-os, az összehúzódás tényezője: $\mu_{180} \cong 0{,}55$.

Az élesfalú ún. *Poncelet*-nyílásra *(101. ábra)*: $\delta = 90°$ és $\mu_{90} \cong 0{,}65$.

Jól legömbölyített nyíláson, valamint az állandó keresztmetszetű csővezeték kilépőszelvényén is a folyadéksugár zsugorodás nélkül folyik ki ($\delta = 0$, $\mu_0 = 1$).

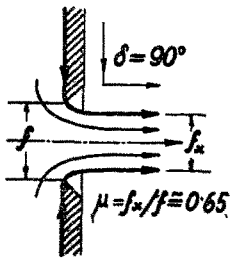
A nyíláson kilépő mennyiség tehát, ($\mu\varphi = \alpha$ helyettesítéssel):

$$V = \alpha f c_e,$$

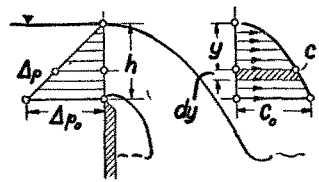
ahol $\alpha = \mu \varphi$ a **kifolyás tényezője,** amely a sebességi tényező és az összehúzódási tényező szorzatából számítható.

A *kifolyási tényező* bevezetésével eszerint a nyíláson átfolyó mennyiség igen egyszerűvé válik. Az eredmény megbízhatósága azonban elsősorban azon fordul meg, hogy a kifolyási tényező előzetes becslése mekkora közelítéssel sikerül. A fentebbiekből következik, hogy a nyílás kialakításától függően a kifolyási tényező eléggé tág határok között változhatik ($\alpha = 0{,}5 \div 0{,}99$).

Megbízható kísérleti eredmények megkönnyítik a tényező helyes választását. Így pl. a csővezetéken átfolyó mennyiség mérésére **szabványosított mérőnyílások** használatosak (legömbölyített vagy élesfalú kivitelben), amelyek átfolyási tényezői táblázatos összeállításban állnak rendelkezésre, de érvényességük csak az előírt méretarányokra korlátozott [94].



101. ábra. A vízsugár összehúzódása a *Poncelet*-nyílásban



102. ábra. Nyomáseloszlás bukógát felett

Nagy keresztmetszetű kifolyónyílásoknál az átfolyó mennyiséget a **sebességeloszlás** figyelembevételével kell meghatározni.

Ilyenkor a keresztmetszetet dy magasságú dF szelvényű vízszintes sávokra bontjuk, amelyeken a víz azonos c sebességgel ömlik ki. A mélység függvényében kifejezhető Δp nyomásesésből egy-egy sávra az elméleti sebességgel kiömlő $dV = c_e\, dF$ vízmennyiség is kiadódik. Az egész F keresztmetszetre kiterjesztett integrál a vízmennyiség elméleti értékét adja, amelyet az α kifolyási tényezővel helyesbítünk.

E feladatoknál a kifolyási tényező becslését az is megnehezíti, hogy a nyílásnak a csatornaszelvényhez viszonyított nagysága miatt rendszerint csak tökéletlen összehúzódással számolhatunk.

Nyitott csatornában az átömlésnek különleges esete a **tökéletes átbukás** *(102. ábra).* Az ún. *Poncelet-gáton* átbukó vízmennyiség, ha az állandó b szélességű, nagy mélységű csatornából érkezik — vagyis ha az érkező sebesség elhanyagolható —, a $\Delta p = \gamma y$ nyomásesésből a következőképpen számítható:

$$V = \mu b \int_0^h c_e \, dy; \quad \text{ahol} \quad c_e = \sqrt{2gy}.$$

Helyettesítés és rendezés után az átömlő vízmennyiség:

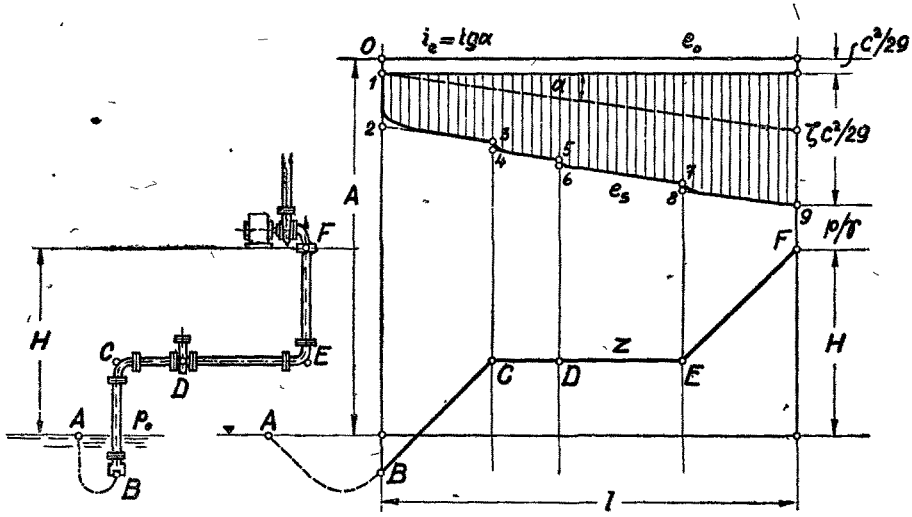
$$V = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g}\, h^{\frac{3}{2}} \quad (\mathrm{m^3/mp}). \qquad (170)$$

Az átbukási tényező előzetes számításhoz $\mu \cong 0{,}6$ értékkel választható. Ha a bukógátat a vízmennyiség **mérésére** használjuk, akkor a gátkorona feletti h magasság meghatározásánál a víztükör lehajlásával is számolni kell (h a lehajlás **előtt** mért magasság), a μ kifolyási (átbukási) tényezőt pedig a csatorna méreteihez is igazodó tapasztalati képletből kell kiszámítani.

A vízméréshez használt bukógát egyik fajtája az *oldalról szűkített bukógát.* Ennek átbukási tényezője a nyílás szélességének a csatorna szélességéhez viszonyított értékétől is függ.

65. A nyomás eloszlása a csővezetékben

A zárt csővezetéket kitöltő folyadék középsebességét (adott mennyiségnél) a keresztmetszet egyértelműen meghatározza ($c_k = c = V/f$), az áramlási veszteségek tehát itt **nyomásesés** alakjában jelentkeznek. A 15. pont szerint a nyomás eloszlása a csővezeték mentén az energiaábra felrajzolásával szemléltethető, csakhogy most a veszteségmagasságokkal csökkentett energiavonalból kell kiindulni.



103. ábra. A csővezeték energiadiagramja. A nyomás eloszlása szívócső mentén

Az e_s energiavonalat célszerűen a vízszintes tengelybe kifejtett csőhosszúság fölé rajzoljuk, oly módon, hogy a *103. ábra* szerint az elméleti $e_0 =$ *állandó* energiavonalból levonjuk a veszteségmagasságokat. A *103. ábra* egy szivattyú szívócsövét szemlélteti, amelynek veszteségeit a beiktatott idomdarabok is megnövelik. A csővezetéken átáramló folyadék lendülete ($c^2/2g$) a *szívócső* szempontjából ugyan még nem volna veszteségnek minősíthető, mert azt a szivattyú még hasznosítani tudja, de a *nyomócső* kilépőszelvényén az mégis csak hasznosítatlanul távozik. Egyszerűség okáért tehát a *103. ábrában* e kilépési veszteséget is a szívócső veszteségeihez számítottam (de e metszékeket nem vonalkáztam).

A csősúrlódásból eredő veszteségmagasság a cső hosszúságával arányos. A hosszegységre eső veszteségmagasság az energiavonal *esését* ($i_e = \operatorname{tg}\alpha$) adja, amelynek értéke:

$$i_e = \frac{\lambda}{d}\,\frac{c^2}{2g}. \tag{171}$$

Az idomdarabok veszteségmagasságait ($h_i' = \zeta_i\, c^2/2g$) rendszerint egy-egy szelvénybe zsugorítva helyezzük levonásba. (A *103. ábrában* ettől az elvtől eltérően a járulékos veszteségek szemléltetésére azt is kifejezésre juttattam, hogy az idomdarabok veszteségeinek egy része a csővezeték belsejébe tolódik át.)

Az így szerkesztett e_s energiavonal a folyadék *sztatikai* munkaképességét ábrázolja, amelyből a helyzeti energiát (z vonal) levonva: a nyomásmagasságok metszékeihez jutunk, amelyek az adott esetben a **teljes nyomás** csőmenti eloszlását szemléltetik.

A számítás menetét megvilágítja az alábbi példa.

64. példa. A *103. ábra* szerinti szívócső teljes hossza: $l = 11$ m, átmérője: $d = 0{,}1$ m, súrlódási tényezője: $\lambda = 0{,}03$, az áramlás sebessége: $c = 3$ m/mp; ($c^2/2g = 0{,}46$ m).

Az idomdarabok veszteségtényezői: (B) lábszelep: $\zeta_B = 3{,}1$, (C és E) ívdarab: $\zeta_C = \zeta_E = 0{,}5$, ($D$) tolózár (teljesen nyitva): $\zeta_D = 0{,}1$.

A szívómagasság (a szivattyú szívócsonkjáig): $H = 5$ m, a folyadék munkaképessége a belépés előtt (az alsó víztükör szintjén) $A = 10$ m légköri nyomásmagasságnál: $e_0 = A = 10$ mkg/kg.

A kilépő folyadék **sztatikai** munkaképessége:

$$\mathbf{e_s} = H + \frac{p}{\gamma} = A - (1 + \zeta)\,\frac{c^2}{2g} = \mathbf{6{,}1\ mkg/kg},$$

ahol: $\zeta = \lambda\frac{l}{d} + \zeta_B + \zeta_C + \zeta_D + \zeta_E = 3{,}3 + 3{,}1 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}5 = \mathbf{7{,}5}.$

A cső hosszegységére eső veszteségmagasság pedig:

$$\mathbf{i_e} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda}{d}\,\frac{c^2}{2g} = \frac{0{,}03}{0{,}1}\cdot 0{,}46 = \mathbf{0{,}138}.$$

A teljes (abszolút) nyomás legkisebb értéke (az F szelvényben). $\frac{p}{\gamma} = e_s - H =$ $= 1{,}1$ m nyomásmagasságból:

$$\mathbf{p} = 1100\ \mathrm{kg/m^2} = \mathbf{0{,}11\ ata}.$$

66. Az egyenértékű csőhosszúság

A csővezetékbe iktatott idomdarabok ellenállását előzetes vázlattervek elkészítésekor rendszerint csak durva becsléssel lehet megállapítani. Ilyenkor az **egyenértékű csőhosszúság** bevezetése indokolt, vagyis az idomdarabok veszteségét úgy vesszük számításba, mintha azt ugyanolyan ellenállású egyenes csődarab okozta volna.

Ha d a cső átmérője és λ a súrlódási tényezője, akkor ζ veszteségtényezőjű idomdarab egyenértékű hosszúsága (a veszteségek egyenlőségéből):

$$\zeta = \lambda\, l_e/d, \quad \text{azaz:}\ l_e = (\zeta/\lambda)\, d \tag{172}$$

65. példa. A *103. ábra* szerinti szívócső egyenértékű csőhosszúsága (a kilépési veszteségek beszámításával) a következő:

$$l_e = l + (1 + \zeta_B + \zeta_C + \zeta_D + \zeta_E)\, d/\lambda = 11 + 5{,}2 \cdot 0{,}1 : 0{,}03 = \mathbf{28{,}3\ m.}$$

Az idomdarabok ellenállása miatt az egyenértékű csőhosszúság az adott esetben a beépített csőhosszúságnak több mint kétszerese. Ebből a többletből a legnagyobb rész a lábszelepre esik, amelynek egyenértékű csőhosszúsága az átmérőnek $\zeta_B/\lambda = 3 : 0{,}03 = 100$-szorosa, azaz egymagában is: $l_B = 100 \cdot 0{,}1 = \mathbf{10\ m.}$

Csővezetékek előzetes méretezésénél az idomdarabok ellenállását egyszerűen a csőhosszúság százalékos megnövelésével szokás számításba venni. Írható: $l_e = \xi\, l$, ahol $\xi = 1{,}3 \div 1{,}5$ választható, ha a beiktatott idomdarabok száma nem nagy és ha azok között nincsenek nagy ellenállású zárószerkezetek.

E számítási mód egyszerű ugyan, de nem megbízható.

67. Az egyenértékű nyílás (keresztmetszet)

A bányaszellőzők szállítóteljesítményének meghatározásával kapcsolatosan a bányán keresztül vezetett légáram veszteségmagasságának kifejezésére az **egyenértékű keresztmetszet** bevezetése honosodott meg, **bányanyílás** (Grubenweite) elnevezéssel.

Az $(1 + \zeta)$ veszteségtényezővel jellemezhető bányában $c = V/f$ sebességgel szállított levegő veszteségmagassága:

$$h' = (1 + \zeta)\frac{c^2}{2g}.$$

E veszteségmagasság a szállított V (m³/mp) mennyiségben $\Delta p = \gamma h'$ (kg/m²) nagyságú nyomásesést eredményez, amely úgy is létrehozható, hogy ugyanezt a légmennyiséget egy α kifolyási tényezőjű A (m²) nagyságú kifolyónyíláson vezetjük keresztül, vagyis a $\Delta p/\gamma$ nyomásmagasságot *lendületté* alakítjuk át. A sebesség elméleti értéke tehát: $c_A = \sqrt{2g\,\Delta p/\gamma}$, az átfolyó légmennyiség pedig:

$$V = \alpha A \sqrt{2g\,\Delta p/\gamma}.$$

Az egyenértékű nyílás tehát:

$$A = C\,V/\sqrt{\Delta p}\ (\mathrm{m}^2), \quad \text{ahol: } C = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\gamma}{2g}}. \tag{173}$$

Blaes javaslatára veszteségmentes (legömbölyített) kifolyónyílás használható. Ekkor $\alpha = 1$ és $\gamma = 1{,}226$ kg/m³ értékkel: $C = 0{,}25$.

Murgue élesfalú nyílást hozott javaslatba, amelyre $\alpha = 0{,}66$ kifolyási tényezővel: $C = 0{,}38$.

A bányákban szokásos nyomásesés: $\Delta p = 100 \div 400$ kg/m², a bányaszellőző szállítóteljesítménye: $V = 20 \div 300$ m³/mp, az egyenértékű bányanyílás tehát: $A = 1 \div 6$ m² között változik.

66. példa. Egy bánya mentén, $V = 100$ m³/mp légszállításnál, a veszteségmagasság: $h' = 110$ m. A nyomásesés: $\Delta p = h' \gamma = 110 \cdot 1{,}226 = 135$ kg/m². A **Blaes**-féle (legömbölyített) egyenértékű bányanyílás tehát:

$$A = 0{,}25\, V/\sqrt{\Delta p} = 0{,}25 \cdot 100 : \sqrt{135} = \mathbf{2{,}15\ m^2}.$$

A *Murgue*-féle élesfalú bányanyílás keresztmetszete mintegy 50%-kal nagyobb, azaz: $A = 3{,}27$ m².

Az egyenértékű nyílás bevezetése megkönnyíti a bányaszellőzők próbatermi és üzemi vizsgálatát is.

68. A csővezeték üzemi jellemzői. A jelleg-görbe

A folyadék szállítására és elosztására méretezett csővezeték kialakítása és elrendezése az üzem rendeltetéséhez és követelményeihez igazodik. A különböző szelvényű csőszakaszok elosztóhálózattá egyesíthetők, amelynek jellegzetes tulajdonságai az elemek jellemzőiből vezethetők le. Az üzem szempontjából rendszerint annak a megállapítására van szükség, hogy az előírt vízmennyiség mekkora veszteség árán szállítható.

A veszteségmagasság és a vízmennyiség kapcsolatát az $f = d^2\pi/4$ keresztmetszetű csőszakaszra $c = V/f$ helyettesítéssel a (101) egyenlet a következő alakban fejezi ki:

$$h' = \varkappa \frac{l_e}{d^5} V^2; \quad \text{ahol:} \quad \varkappa = \frac{8\lambda}{\pi^2 g} = 0{,}083\lambda. \tag{174}$$

A csővezetékbe iktatott idomdarabok ellenállását itt az egyenértékű csőhosszúsággal (66. pont) vesszük számításba, a csősúrlódás tényezőjét pedig előzetes számításokhoz, *Dupuit* szerint: $\lambda = 0{,}03$ értékkel helyettesíthetjük. Ezzel $\varkappa = 0{,}0025$.

a) **Sorba kapcsolt csővezetékek** veszteségmagasságát (174) egyenlet szerint *szakaszonként* kiszámított veszteségmagasságok összegéből kapjuk. Írható:

$$\boxed{h' = BV^2}\ \text{(m)}, \tag{175}$$

$$\text{ahol: } B = \varkappa_1 \frac{l_1}{d_1^5} + \varkappa_2 \frac{l_2}{d_2^5} + \ldots\ (\text{mp}^2/\text{m}^5).$$

A csővezeték veszteségmagassága eszerint a vízmennyiség négyzetével arányos. Az ún. **veszteségparabola** annál meredekebb, mennél hosszabb a cső és mennél kisebb annak átmérője. (Az átmérő **ötödik hatványában** arra is magyarázatot találunk, hogy a szelvényt alig szűkítő lerakódás is az ellenállás nagy mértékű megnövekedését okozza.)

Párhuzamosan kapcsolt csővezetékek két végén azonos nyomás uralkodik, tehát az egyes csövek mentén a nyomásesés egyenlő, vagyis két cső esetében

$$h_1' = h_2'.$$

Ha ide a (174) összefüggés szerinti értékeket helyettesítjük, akkor átrendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{5/2} \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{1/2},$$

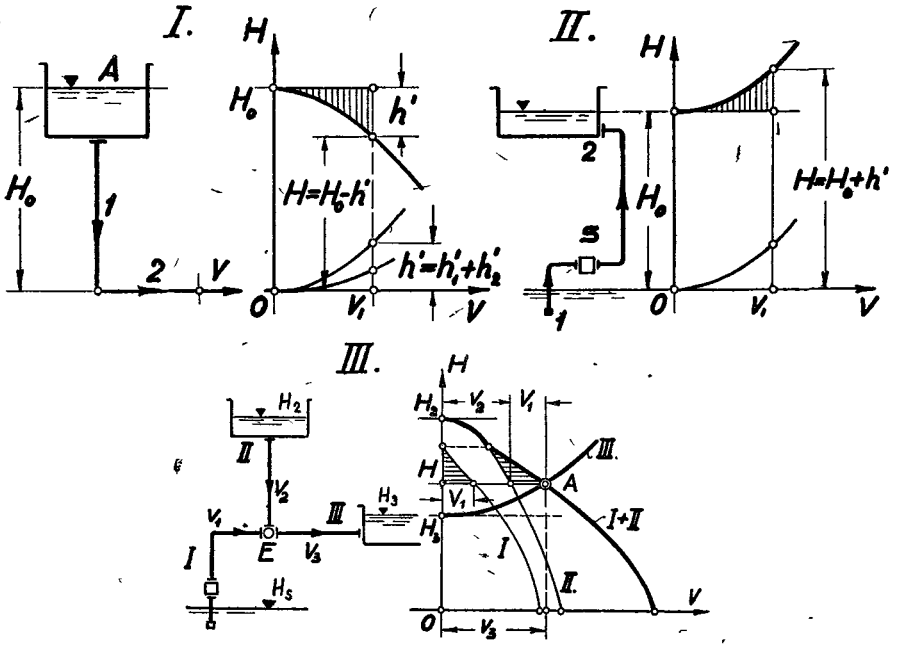
ahol az 1 és 2 index a párhuzamosan kapcsolt csőszakaszokra vonatkozik. Ha $l_1 = l_2$, akkor a vízmennyiségek aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{5/2},$$

vagyis az átfolyó mennyiségek a csövek átmérőinek $^5/_2$-ik hatványával arányosak.

b) **A csővezeték jelleggörbéje.** A csővezeték végpontjai között mérhető nyomásesés (veszteségmagasság) a folyadék *munkaképességét* apasztja. Ha tehát e munkaképességet (esés, szállítómagasság) a cső egyik végpontján ismerjük, akkor azt a veszteségparabola a másik végpontra is meghatározza.

A H munkaképesség a vízmennyiség függvényében $H = H(V)$ alakú **jelleggörbével** ábrázolható.



104. ábra. Csővezeték jelleggörbéje. I. Gravitációs áramlás (felülről lefelé). II. Vízemelés (alulról folfelé). III. Összetett csővezeték jelleggörbéi

A kétféle jellegzetes esetet a *104. ábra* mutatja. Az első esetben (*I*) a csővezeték H_0 (sztatikus) esésű vizet vezet egy alsó szintre, ahol a víz munkaképességéből csak a veszteségmagasság levonása után megmaradó $H = H_0 - h'$ esés hasznosítható. A csővezeték hatásfoka: $\eta = H/H_0$ annál kisebb, mennél nagyobb a vízmennyiség. A levezethető legnagyobb vízmennyiséget a csővezeték méretei

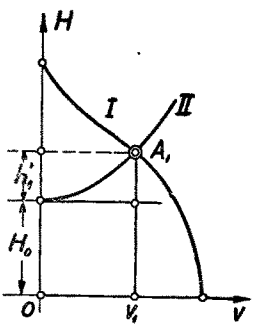
határozzák meg. Nagyságát a $H_0 - h' = 0$ egyenletből: $V_0 = \sqrt{H_0/B}$ alakban fejezhetjük ki, vagy a jelleggörbéből olvashatjuk le. (Ilyenkor a csővezeték veszteségei az egész esést felemésztik, a csővezeték hatásfoka tehát: $\eta = 0$.)

A második esetben (II) a csővezeték alulról felfelé szállít folyadékot. A csővezetékbe iktatott vízemelő berendezést ilyenkor a H_0 «szállítómagasság» sztatikai értékén felül a h' veszteségmagasság is terheli. A szivattyú szállítómagassága: $H = H_0 + h'$ eszerint annál nagyobb, mennél nagyobb a vízmennyiség. A csővezeték jelleggörbéje most emelkedő, a csővezeték hatásfoka pedig: $\eta = H_0/H$.

Itt emelem ki a csővezeték hatásfokának azt a jellegzetességét is, amely szerint az a **terheléssel kisebbedik,** terheletlenül pedig 100%-os. A csővezetéknek tehát — ellentétben a mechanikai súrlódással is terhelt gépekkel — nincsen ún. üresjárási vesztesége. E körülmény a szivattyúüzem gazdaságosságának megítélése szempontjából érdemel figyelmet, mert a motorból, szivattyúból és csővezetékből álló vízemelő berendezés leggazdaságosabb terhelésének kijelölésére vezet.

c) **Vízelosztó rendszerek jelleggörbéi.** A szivattyú üzemi tulajdonságait is $H = H\,(V)$ alakú jellemző görbével szokás megadni, amely a szállítómagasságot a vízmennyiség függvényében ábrázolja.

A szivattyú és a csővezeték jelleggörbéjének metszéspontja: az ún. **munkapont** (a *105. ábrában* az A_1 pont) azt a vízmennyiséget határozza meg, amelynél a szivattyú éppen akkora szállítómagasságot szolgáltat, mint amekkora a csővezeték terhelőmagasságának legyőzéséhez szükséges.



105. ábra. A csővezetékhez kapcsolt szivattyú munkapontja

A *105. ábrában* a szivattyú jelleggörbéje (*I*) növekedő vízmennyiségnél kisebbedő szállítómagasságot jellemez, ami feltétele az üzem stabilitásának.

Elágazások és **párhuzamos ágak** csomópontjában az anyag megmaradásának a törvénye érvényesül, vagyis a csomópontban összefutó ágakban az érkező és távozó vízmennyiségek algebrai összege zérus. Ezenfelül minden csomópontban csak egyféle nyomás lehetséges. E két alaptörvény útmutatást ad a csőszakaszok jelleggörbéinek egymásrahelyezésére is. **Sorbakapcsolás** esetén az azonos vízmennyiséghez tartozó ordinátamagasságok összegeződnek, **párhuzamos kapcsolás** esetén viszont az azonos ordinátamagassághoz tartozó vízmennyiségek összegét szerkesztjük meg az abszcisszahosszúságok összeadásával.

E szabályok ismételt alkalmazásával bonyolult csőhálózatok üzemi jellemzői is szemléletesen meghatározhatók. Az eljárás menetét a *104/III. ábra* kapcsán egy kétfelől táplált csővezetékre mutatom be.

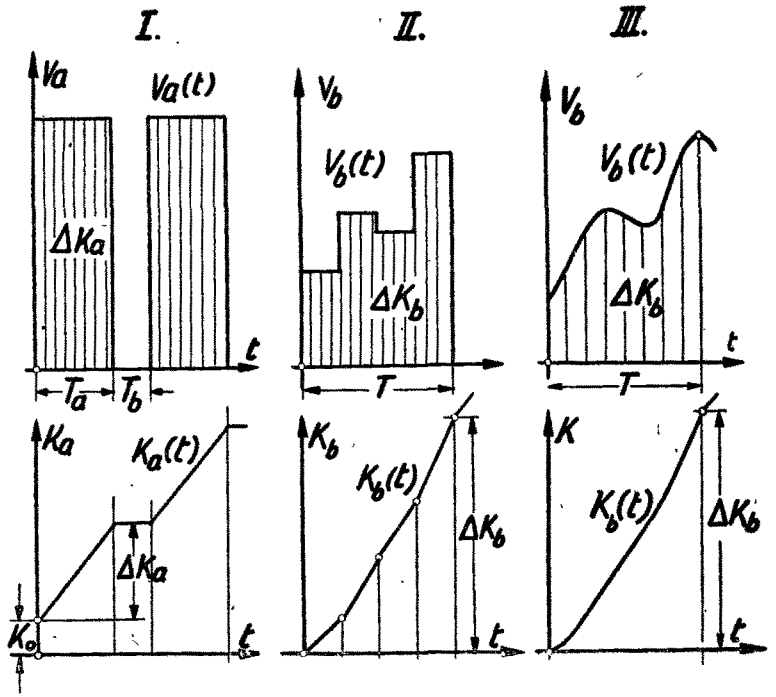
Az alapszinttől H_3 magasságú vízmedencét — a szivattyú V_1 mennyiségén felül — a H_2 magasságból érkező V_2 mennyiség is táplálja. A három csővezeték az E csomópontban fut össze, amelyre: $V_1 + V_2 = V_3$.

A szivattyú jelleggörbéjét (az elágazópontig terjedő csőszakasz h'_1 veszteségmagasságának figyelembevételével) az *I* jelű görbe ábrázolja. A *II* jelű jelleggörbe az esést érkező V_2 vízmennyiséget szállító *II* csőszakaszra vonatkozik. Az egy magasságba eső abszcisszák összeadásával szerkesztett *I* + *II* jelű jelleggörbe metszéspontja a *III* csőszakasz jelleggörbéjével azt az *A* munkapontot adja, amelynél az *E* csomóponton átfolyó $V_1 + V_2 = V_3$ mennyiség a $H_3 - h'_1 = H_2 - h'_2 = H_3 + h'_3$ magassággal összhangban áll.

69. Vízszolgáltatás tárolással. A vízgyűjtés diagramja

A városi és az ipari vízellátás folytonossága időszakos (szakaszos) üzemű szivattyúkkal akkor biztosítható, ha az időbeli eltolódást a szolgáltatás és a fogyasztás között tárolómedence egyenlíti ki.

Változó szolgáltatás és fogyasztás időbeli változását a *106. ábra* szerint a $V_a(t)$ és $V_b(t)$ függvényábrának, az ún. **vízszállítás diagramjának** felrajzolásával szemléltetjük.



106. ábra. A vízszállítás és vízgyűjtés diagramja. I. Időszakos vízszolgáltatás. II. Lépcsősen változó vízfogyasztás. III. Folytonosan változó vízfogyasztás

Ezt a gyakorlatban (folytonos görbe helyett) rendszerint *lépcsős diagram* alakjában szokás ábrázolni. A vízszállítás diagramjában az előírt idő alatt szolgáltatott vagy fogyasztott víztérfogatokat **területek** szemléltetik.

A *106. ábracsoport* részletesebb magyarázat nélkül is mutatja, hogy az I. kép egy szivattyúval T_a üzemszakasz tartalma alatt egyenletesen szolgáltatott $K_a = V_a T_a$ víztérfogatot ábrázol. A II. és a III. kép a T időtartam alatt változó ütemben fogyasztott víztérfogatot szemlélteti, lépcsősvonallal, illetve folytonos görbével határolt terület alakjában.

A tárolási folyamat időbeli lefolyása jobban szemléltethető a **vízszállítás integrálgörbéjének** felrajzolásával. Ebben a diagramban a víztérfogatokat ordinátametszékek (területmérés nélkül) közvetlenül meghatározzák. A *106. ábra-*

csoport alsó három képéből jól követhető a grafikusan is elvégezhető szerkesztés menete. Vízszolgáltatás esetében ezt az integrálgörbét a **vízgyűjtés diagramjának** nevezzük.

A vízszolgáltatás és vízfogyasztás összehangolásához szükséges tárolótérfogat nagyságát szakaszos üzem esetében úgy kell megállapítani, hogy a T_b tartamú üzemszünet alatt elfogyasztott víztérfogatot a szivattyúnak a T_a tartamú üzemidő alatt többletként kell szolgáltatnia. E ΔK többlettérfogat befogadására kell a tárolómedencét méretezni. (L. még a *107. ábrát.*) Írható

$$\Delta K = \int_{T_a} (V_a - V_b)\, dt = \int_{T_b} V_b\, dt \quad (m^3). \tag{176}$$

F alapterületű hengeres vagy hasábos medence esetében a tárolt víztérfogat a víztükör $\Delta h = h - h_0$ emelkedési magasságával arányos, azaz: $\Delta K = F\,\Delta h$.

A tárolt víztérfogat időbeli változása elvben kétféle módon ábrázolható.

a) Az egyik eljárás szerint a vízszállítás és vízfogyasztás diagramjának egymásra helyezése által ki nem egyenlített $(V_a - V_b)$ **különbségeket** jellemző ordinátametszékeket használjuk fel a $t = 0$ időben K_0 töltésű medence $K = K_0 + \Delta K$ töltésének szerkesztéséhez.

A (176) egyenlet alapján írható:

$$K = K_0 + \int_0^t (V_a - V_b)\, dt \quad (m^3). \tag{177}$$

Ez az egyenlet $V_a = 0$ helyettesítéssel az üzemszünet tartamára is érvényes, csakhogy ilyenkor a víztérfogat változása **negatív!**

Az így szerkesztett integrálgörbe más méretarányban a medence vízállásának időbeli változását is szemlélteti. $h_0 = K_0/F$ helyettesítéssel írható:

$$h = h_0 + \frac{1}{F}\int_0^t (V_a - V_b)\, dt \quad (m). \tag{178}$$

b) A másik eljárás a vízszolgáltatás és vízfogyasztás integrálgörbéjének **elkülönített** felrajzolásával az egymásra helyezett két integrálgörbe közé eső ordinátametszékekkel szemlélteti a medence töltésének időbeli változását.

E másik módszer alkalmazása olyankor indokolt, amikor a két integrálgörbe egyszerűen szerkeszthető. (Vö. a 68. példával.) A két egyenlet (177) szerint:

$$K_a = K_0 + \int_0^t V_a\, dt \quad \text{és} \quad K_b = \int_0^t V_b\, dt. \tag{179}$$

Mindkét eljárás alkalmazhatóságát számpéldán mutatom be.

67. példa. A *107/I. ábra* egy szakaszos üzemű szivattyú vízszállítási diagramját szemlélteti.

Az (állandó) vízfogyasztás: $V_b = 60$ m³/óra. A szivattyú vízszállítása: $T_a = 6$ órás üzemidő alatt: $V_a = 100$ m³/óra; az ezalatt szolgáltatott többlettérfogat:

$$\Delta K = (V_a - V_b)\, T_a = (100 - 60) \cdot 6 = \mathbf{240\ m^3}.$$

A tárolómedencébe töltött víztérfogat a fogyasztást:

$$T_b = \frac{\Delta K}{V_b} = \frac{240}{60} = \mathbf{4}\ \textbf{óra}$$

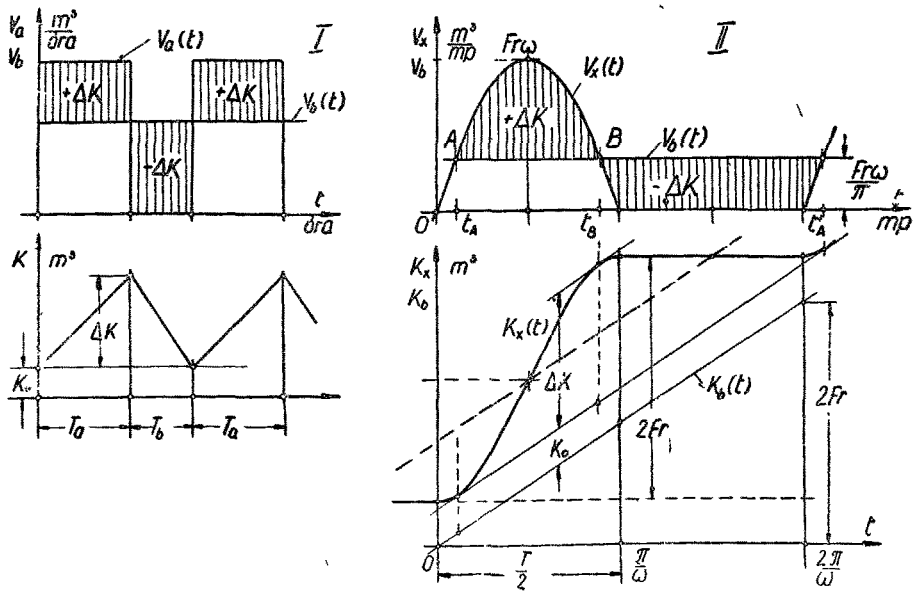
tartamú üzemszünet alatt tudja ellátni.

Egy-egy üzemszakasz tartama tehát:

$$T = T_a + T_b = 6 + 4 = \mathbf{10}\ \textbf{óra.}$$

Ha a kiegyenlítő medence alapterülete: $F = 50$ m² és a tűzoltási célokra szánt víztartalék: $K_0 = 60$ m³, akkor a medence teljes magassága (a felső vízvonalig):

$$h = \frac{K_0 + \Delta K}{F} = \frac{60}{50} + \frac{240}{50} = 1{,}2 + 4{,}8 = \mathbf{6{,}0}\ \textbf{m.}$$



107. ábra. A tárolt víztérfogat időbeli változása. I. Kiegyenlítő medencében. II. Dugattyús szivattyú légüstjében

A szivattyú szakaszos üzemének eszerint a medence vízállásához kell igazodnia. A szivattyút a **vízállásmutató** alsó ($h_0 = 1{,}2$ m) állásában kell megindítani, és akkor kell megállítani, amikor a víztükör $\Delta h = 4{,}8$ m emelkedéssel a felső ($h = 6{,}0$ m) állásába érkezett, vagyis a medence megtelt. A vízállásmutatóval (vagy nyomásmérővel) vezérelt indítóberendezéssel az üzem **önműködővé** is tehető.

68. példa. Egy egyszeresen működő dugattyús szivattyú fordulatszáma: $n = 90$/perc; ($\omega \doteq 90 : 9{,}55 = 9{,}44$/mp), hengerátmérője: $D = 400$ mm. A dugattyú felülete: $F = 1260$ cm², lökete: $s = 600$ mm.

A nyomólégüstbe adagolt **vízáram** a *nyomólöket* alatt (végtelen hajtórúd esetében):

$$V_x = F\,r\,\omega \sin \omega t;\ \text{legnagyobb értéke: } (V_x) = F\,r\,\omega = 0{,}126 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}44 = 0{,}357\ \text{m}^3/\text{mp}.$$

A *szívólöket* alatt a vízszállítás szünetel. ($V_x = 0$.)

A vízszállítás diagramját az idő függvényében a *107/II. ábra* felső képe szemlélteti.

Egy löket tartama:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{3{,}14}{9{,}44} = \frac{1}{3}\ \text{mp.}$$

A légüstből gyakorlatilag egyenletesen elfolyó vízáram (egyszeres működés esetén):

$$V = \frac{1}{\pi} Fr\,\omega = \frac{0{,}357}{3{,}14} = 0{,}1135\ \text{m}^3/\text{mp.}$$

A vízszállítás egyenlőtlensége miatt a nyomólöket alatt ($t_B - t_A$) időszakban ΔK víztérfogat a többletszállítás, amelyet a légüstnek kell befogadnia, miközben a víztükör alsó állásából felső állásba emelkedett.

A szívólöket alatt viszont a légüstből egyenletesen elfolyó V vízáram ezt a ΔK víztérfogatot fogyasztja el. A ($t_A - t_B$) időtartam alatt tehát a légüst víztükre ismét leszállt az alsó állásba.

Az adott esetben a víztérfogatok időbeli változása a legegyszerűbben a vízszállítás és vízfogyasztás integrálgörbéjének **elkülönített** felrajzolásával szemléltethető, mert a vízszállítás szinuszgörbéjének integrálgörbéje (negatív előjelű) koszinuszgörbe alakjában könnyen szerkeszthető, az állandó V_b fogyasztás integrálgörbéje pedig emelkedő (ferde) egyenes. (Vö. a *107/II. ábra* alsó képével.)

A két integrálgörbe léptékét az szabja meg, hogy a dugattyú az $Fs = 2\,Fr$ lökettérfogatot a nyomólöket $T/2$ tartama alatt szorítja ki a hengerből. Ugyanerre az eredményre vezet az analitikai számítás is:

$$K_x = \int_0^{T/2} V_x\,dt = Fr\,\omega \int_0^{T/2} \sin\omega t\,dt = Fr\,\omega \frac{1}{\omega}\left[-\cos\omega t\right]_0^{\pi} = 2\,Fr\ (\text{m}^3).$$

Az adott esetben:

$$K_x = Fs = 0{,}126 \cdot 0{,}6 = 0{,}0756\ \text{m}^3;\ \text{azaz } \mathbf{75{,}6\ liter.}$$

Ez a víztérfogat a nyomólégüstből egy kettős löket alatt egyenletesen folyik el, a $K_b(t)$ diagram emelkedési szöge tehát könnyen szerkeszthető.

A két integrálgörbe ordinátametszékeinek különbsége a légüstben tárolt víztérfogatot jellemzi. Ennek nagysága a K_0 kezdőérték megadásával válik határozottá.

Az ábrába berajzolt K a légüstnek a víztükör *legalsó* állásához tartozó **víztérfogatát** adja. (Könnyen belátható azonban, hogy ehelyett a légüstbe zárt **légtérfogat** változása is ábrázolható, ha az integrálási állandó új értékét a vízgyűjtés görbéje *fölé* rakjuk fel.)

Az ábrából a víztükör középállására vonatkoztatott *kilengések* is lemérhetők, ha a vízfogyasztás integrálgörbéjét $K_0 = -\,\Delta K/2$ magasságba toljuk át. Ebben az esetben az ábra (ferdeszögű koordináta-rendszerben) a kilengések időbeli változását szemlélteti.

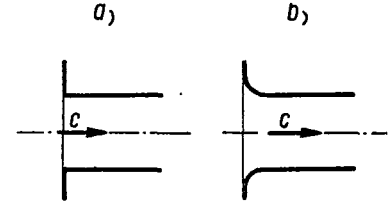
70. Csőben áramló folyadék (víz) veszteségtényezői

Az előző pontokban tárgyaltuk a folyadékok áramlási veszteségeinek okait és egyes veszteségtényezők nagyságrendjét is meghatároztuk. Az alábbiakban néhány jellegzetes áramlási esetre a szakirodalom adatai alapján közlünk tájékoztató értékeket a veszteségtényezőkre. (Megjegyzendő, hogy a veszteségtényező értékét mindenütt a *legnagyobb* áramlási sebességre vonatkoztattuk.) Az alább közölt tényezők nem egyeznek meg teljesen az előző pontokban már megadott értékekkel (pl. a *89. ábra* értékeivel), ami arra figyelmeztet, hogy az irodalomban közölt adatokat csak nagy körültekintéssel lehet felhasználni. Kényes esetekben legbiztosabb út a laboratóriumi kísérlet.

Malavasi [34] adatai alapján adjuk a következő adatokat:

a) Belépőnyílás (108/a. ábra) éles sarokkal: $\zeta = 0{,}50$;
„ tompított sarokkal $\zeta = 0{,}25$.

b) Csőszáj (108/b. ábra) jól legömbölyítve: $\zeta = 0{,}06 \div 0{,}01$



108. ábra. Belépőnyílás és csőszáj

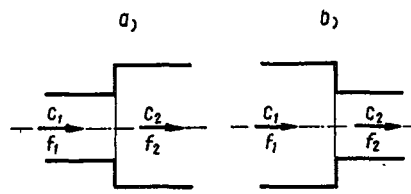
c) Hirtelen *keresztmetszetbővülés (109/a. ábra):* $h_1' = \zeta_1 \frac{c_1^2}{2g}$

f_1/f_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_1	0,81	0,64	0,49	0,36	0,25	0,16	0,09	0,04	0,01	0

d) Hirtelen *keresztmetszetszűkülés (109/b. ábra):* $h_2' = \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g}$

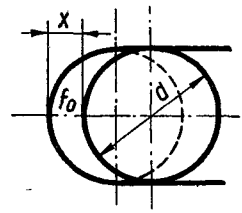
(ζ_2: *Nazzani* szerint).

f_2/f_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_2	0,48	0,44	0,38	0,31	0,26	0,24	0,18	0,13	0,06	0



109. ábra. Hirtelen keresztmetszetbővülés és -szűkülés

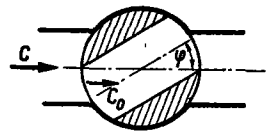
e) Körszelvényű *tolózár (110. ábra)*: $h_0' = \zeta_0 \frac{c_0^2}{2g}$.



110. ábra. Tolózár átömlő nyílása

x/d	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8
f_0/f	0,159	0,315	0,466	0,609	0,740	0,856	0,948	1,0
ζ_0	2,5	1,7	1,2	0,76	0,45	0,19	0,06	0

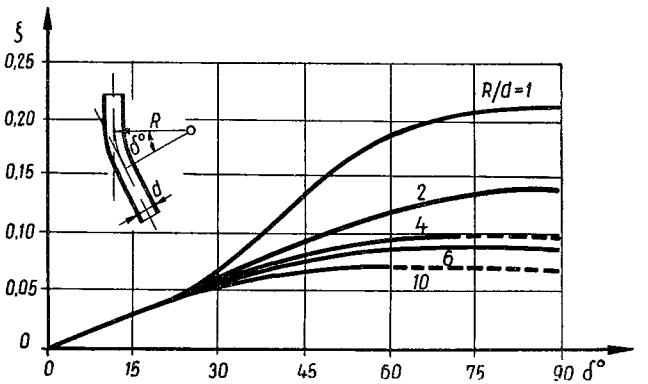
f) Csap (111. ábra): $h_0' = \zeta_0 \frac{c_0^2}{2g}$.



111. ábra. Elzárócsap átömlő nyílása

φ (°)		10	20	30	40	50	60	65
Négyszög-szelvényű nyílás	f_0/f	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	—	—
	ζ_0	0,22	0,87	1,66	2,56	3,38	—	—
Körszelvényű nyílás	f_0/f	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091
	ζ_0	0,21	0,75	1,56	2,56	3,29	3,91	4,02

g) Ívcső veszteségtényezőit foglalja össze a *112. ábra Hoffmann* és *Wasielewski* mérései szerint a hajlásszög (δ) függvényében, az átmérőhöz viszonyított görbületi sugár (R/d) különböző értékeinél.



112. ábra. Ívcső veszteségtényezője *Hoffmann* és *Wasielewski* szerint

C) VESZTESÉGEK A VÍZGÉPEKBEN

71. A veszteségek fajtái

Energiagazdálkodásunk a vízgépekkel szemben egyre szigorúbb követelményeket támaszt azok **hatásfokának** javítása érdekében. A korszerű turbina és örvényszivattyú **veszteségeinek** apasztása tehát fontos gazdasági feladat, amelynek eredményes elvégzése csak lépésről lépésre sikerülhet, és a vízgépszerkesztő mérnöktől nemcsak elmélyedő elméleti (áramlástani és technológiai) tudást, hanem tudományos kutatólaboratóriumi és próbatermi munkában megedzett gyakorlatot is igényel.

A vízgépek háromféle veszteségéhez igazodóan áramlástani vonatkozásban elsősorban a **hidraulikai veszteségek** gondos elemzése és apasztása a feladat. Itt csak gondosan előkészített és tudományos szabatossággal feldolgozott **kismintakísérletek** hozhatnak újabb eredményeket. Általános szerkesztési elv: a vízgépek teljes csatornarendszerének minden részletében kis veszteségre kell törekedni.

A **volumetrikus veszteségek** (résveszteség, tömítetlenség) csökkentése részben már összetett (szerkesztési, technológiai és üzemi) feladat, mert itt *tartósan* (évek múltán is) jó volumetrikus hatásfokkal dolgozó vízgépek szerkesztése és üzemben tartása a cél. Ma még általános a panasz, hogy az átvételi próbán kifogástalanul dolgozó új szivattyú volumetrikus veszteségei néhány hónapos üzem után az erős kopások következtében feltűnően megnagyobbodnak, különösen akkor, ha homokos vagy iszapos víz szállításáról van szó.

Végül a **mechanikai veszteségek** apasztása sem tisztán gépszerkesztési feladat, mert a vízgép jó mechanikai hatásfoka nemcsak a csapágyazás stb. korszerű megvalósításától függ, hanem a gép belsejének áramlástanilag helyes kialakításával is javítható; a mechanikai veszteséghez számított ún. **tárcsasúrlódás**

kisebbítése ugyanis áramlástani kutatást igénylő feladat. Ugyanide sorolható a **tengely** (teljes vagy részleges) **tehermentesítésével** elérhető eredmény is, amellyel a csapsúrlódás munkavesztesége a csapágyterhelés kisebbedése révén apasztható.

72. Centrifugális átömlésű szivattyú hidraulikai veszteségei

Elöljáróban itt még egyszer fel kell hívnom a figyelmet arra, hogy egy vízgép hidraulikai veszteségeinek kialakulása döntő módon a gép csatornáiban létrehozott *energiaátalakulások jellegétől* függ. A turbina **konfúzoros** csatornarendszere vagyis vezetőkerekének és járókerekének «konfúzoros» lapátozása — mint láttuk — jó hatásfokkal alakítja át a folyadék potenciális munkaképességét lendületté, ezzel szemben az örvényszivattyúban az energiaátalakulás fordított irányához igazodóan lendületapasztó **diffúzoros** csatornarendszer kialakítására van szükség, a szivattyú járókerekének és vezetőkerekének lapátozása tehát mindig «diffúzoros». A szivattyúszerkesztő feladata eszerint az áramlási veszteségek apasztása terén sokkal nehezebb és kényesebb, mint a turbinaszerkesztőé, mert a jó hatásfok érdekében diffúzoros lapátozás esetére is meg kell találnia és biztosítania kell a *leválásmentes átáramlás* feltételeit. Ebben az esetben ugyanis a járókerék és a vezetőkerék veszteségei lényegükben már csak a λ tényezőtől függő lapátsúrlódásból tevődnek össze.

A következőkben a **hidraulikai veszteségek** elemző vizsgálatát egy centrifugális átömlésű **egylépcsős szivattyúra** vonatkoztatom.

A folyadék útját a szívócsonktól a nyomócsonkig végigkísérve, a *hidraulikai veszteségek* a következők:

a) A *szívótérben*: $\zeta_s \, c_s^2/2g$, ahol a ζ_s veszteségtényezőbe a folyadék belépőlendületét nem számítjuk bele. Ha a szívótérben irányelterelés is fellép, mint a kétoldali beömlésű szivattyúknál, a leválások megakadályozása érdekében nagyon célszerű a keresztmetszet fokozatos csökkentése (konfúzoros áramlás).

b) A *járókerék* csatornáiban: $\zeta_j \, w^2/2g$. Itt a veszteségtényező a w viszonylagos sebesség legnagyobb (w_1) értékére vonatkoztatható, és a csatornák diffúzoros kialakítása miatt a tényező óvatos választása indokolt. A leválási veszteségek csökkentése (vagy elkerülése) érdekében oly z lapátszámot kell választani, hogy a diffúzort alkotó csatornák δ nyílásszöge ne legyen nagyobb 8—10 fokosnál. A lapátszám további növelésével és a lapátok meghosszabbításával viszont feleslegesen nagyobbodik meg a lapátsúrlódás.

c) Az *átlépési (iránytörési) veszteség* a járókerékből kilépő folyadékáram munkaképességében csak a normálistól eltérő vízszállítás esetében jelentkezik. (Vö. az 55. ponttal, valamint a *86.* és a *87. ábrával.)* Mint a normális üzemállapotban helyes szerkesztéssel elkerülhető veszteséget nem sorozzuk a klasszikusan vett áramlási veszteségek közé, hanem azt elkülönítve vesszük számításba.

d) A *vezetőkerék* vagy az egylépcsős szivattyúnak csigaházzá alakított *vezetőcsatornája* szintén diffúzor, amelynek veszteségmagassága $\zeta_v \, c_v^2/2g$ alakban fejezhető ki, ahol a ζ_v veszteségtényező a $c_v = c_4$ (legnagyobb) belépősebességre vonatkoztatható. A diffúzoros csigaház helyes kialakítása kényes feladat, amellyel itt nem foglalkozhatunk. Annyi azonban megállapítható, hogy a korszerű szerkesztési elvek figyelmen kívül hagyásával szerkesztett régebbi szivattyúk rossz hatásfoka jórészt a csigaházak helytelen kialakítására vezethető vissza.

e) A *nyomótér* áramlási veszteségmagassága végül $\zeta_n \, c_n^2/2g$ alakban számítható, ahol ζ_n becslésekor azt is figyelembe kell venni, hogy a helyesen szerkesztett nyomótér kialakítása szintén diffúzoros.

Itt hívom fel a figyelmet egy megtévesztő gyári fogásra, amely a szivattyú hatásfokának *látszólagos* megnövelésére irányul és abból áll, hogy a nyomótér diffúzorának elhagyásával (a nyomócsonk szelvényét kisebbítve) nagyobb «hasznos» lendület jut a nyomócsőbe. A szivattyú nyomócsonkjához csatlakozó bővülő csőtoldatot és annak veszteségeit ilyenkor a *szivattyú* tartozékának kell tekinteni!

A **többlépcsős** szivattyú csatornarendszerének jó hatásfokú kialakítását az egylépcsős kivitel fentebb felsorolt veszteségein felül egy — valamennyinél kényesebb — feladat nehezíti meg: a folyadékáram *átvezetése* a sorba kapcsolt lépcsők között.

f) Az *átvezetés* áramlási veszteségmagassága $\zeta_a \, c_a^2/2g$, ahol az átvezető csatornák korszerű kialakítása csak kismintakísérletek mérési eredményeinek egybevetése után sikerülhet. E csatornarendszernek a vezetőkerék csatornáihoz kell áramvonalasan csatlakoznia, oly módon, hogy azok *perdületapasztó* és *lassító* szerepét is iránytörések nélkül folyamatosan átvegye. Az átvezető csatornarendszer (centripetális áramlást biztosító) utolsó szakasza konfúzoros kialakítással gyorsítja fel az áramlást a következő járókerék belépősebességére, és ritka, kissé visszahajlított lapátozással biztosítja a belépés perdületmentességét.

A szivattyú veszteségei, fentiek szerint, két csoportra oszthatók. A *c)* alatt felsorolt átlépési veszteség kivételével az *a), b), d), e)* és *f)* alatt felsorolt veszteségmagasságok a szállított V *folyadékáram négyzetével* arányosak, és ennélfogva **áramlási veszteségek** (h'_A) gyűjtőnévvel összevonhatók, megkülönböztetésül az előírt V_1 szállítástól eltérő üzemállapotot jellemző $(V - V_1)$ különbség négyzetével arányos (h'_B) **átlépési veszteségektől.** Írható tehát:

$$h' = h'_A + h'_B = A \, V^2 + B \, (V - V_1)^2, \tag{180}$$

ahol az A és a B tényezők nem mindig állandók, hanem a V vízszállításnak a függvényei lehetnek.

Meg kell jegyezni, hogy a (180) egyenlet felírása a $\nu_r = V_r/V$ résveszteségek figyelmen kívül hagyása miatt nem egészen szabatos, mert pl. a járókerék a résveszteséggel megnövelt (elméleti) $V_e = V + V_r = (1 + \nu_r) \, V$ folyadékáramot vezeti át. A veszteségtényezők becslése azonban annyira bizonytalan, hogy a számítás amúgy is csak tájékoztató jellegű lehet, és a mérést nem pótolhatja.

A szivattyú *hidraulikai hatásfoka*, vagyis a H (hasznos) manometrikus szállítómagasság a $H_e = H + h'$ elméleti szállítómagasság százalékában $(H = \eta_h \, H_e)$:

$$\eta_h = \frac{H}{H + h'}, \tag{181}$$

ahol az *előírt* H_1 szállítómagasságra és V_1 vízszállításra, $h'_B = 0$, azaz: $h'_1 = A V_1^2$ és $\eta_1 = H_1/(H_1 + h'_1)$.

A (180) egyenlet A és B állandójának ismeretével a V vízszállítás függvényében a veszteségek jelleggörbéje közelítően felrajzolható és a *szivattyú jelleggörbéjének valószínű* alakja is megszerkeszthető.

73. Szárnylapátos vízgépek veszteségei

A vízgépek *szárnylapátos* változata a klasszikus turbinaelmélet alapján szerkesztett turbina és örvényszivattyú méretezési elveitől abban is eltér, hogy a veszteségek szabatosabb meghatározásához a szárnyszelvények (illetve az azokból alkotott szárnyrácsok) dinamikai jellemzői szolgáltatnak biztosabb alapot. A szárnylapátos járókerék és vezetőkerék veszteségeinek kiszámításához tehát a szárnyelméletet fogjuk felhasználni. A többi elem veszteségét viszont a 72. pontban tárgyalt módszerekhez hasonlóan fogjuk meghatározni.

A veszteségek csoportosításában a sűrű lapátozású gépekéhez képest további eltérés mutatkozik.

A *résveszteségek* megállapítására még nem áll rendelkezésre eléggé biztosan járható út. Így ezt a veszteséget a *hidraulikai veszteségekkel* együtt, azokba beleértve szokás számításba venni.

A sűrű lapátozású gépeknél a *mechanikai veszteségekhez* soroljuk a tárcsasúrlódást is. Ez itt kevésbé jelentős mértékű, és így a hidraulikai veszteségek mellett nem szoktuk számításba venni.

Így tehát a veszteségek vizsgálatánál az alkatrészek egymás közti súrlódása okozta mechanikai veszteségeken kívül csak a hidraulikai veszteségeket vesszük számításba.

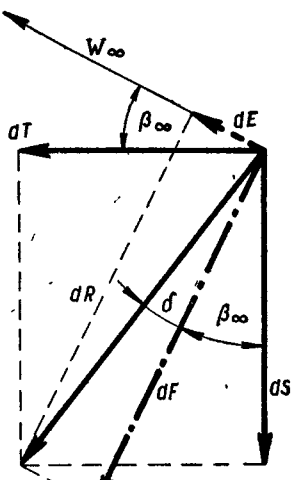
74. Hidraulikai veszteségek a szárnylapátos szivattyúban

A veszteségek részletes vizsgálatát legcélszerűbben az áramlás irányában elemről elemre haladva végezhetjük el. Ezt a vizsgálatot a következőkben a **szivattyú** esetében hajtjuk végre.

a) A *szívótérben* az áramlási veszteség $\xi_s c_s^2/2g$. Ebben a veszteségtényezőben a belépő lendületet nem vesszük figyelembe. A belépő idomban a potenciális energia kitűnő hatásfokkal alakul lendületté. Így az itt tárgyalt veszteséget sokszor egészen figyelmen kívül hagyjuk.

b) A *járókerék* veszteségeinek vizsgálatánál visszaidézem, hogy már a 35. pontban az *59. ábra* kapcsán rámutattam arra, hogy a szárnyszelvény-táblázatok nemcsak a $\mathbf{c}_f$ felhajtóerő-tényezőt adják meg, hanem ezzel együtt a w_∞ megfúvási sebesség irányába eső E ellenállás $\mathbf{c}_e$ ellenállástényezőjét is. A szárnyszelvénynek a (82) egyenlet szerint számítható ellenállása a járókerék lapát-elemének erőjátékát módosítja a veszteségmentes áramlás esetéhez képest a *113. ábrán* látható módon. (Vö. a *60. ábrával.*) Látható, hogy most a $\mathrm{d}F$ felhajtóerő és a $\mathrm{d}E$ ellenállás $\mathrm{d}R$ eredője jelenti a lapátra ható teljes erőt. Ez az eredő a felhajtóerővel δ szöget zár be, nagysága pedig — $\mathbf{c}_e$-nek $\mathbf{c}_f$-hez viszonyítva rendszerint kis értéke miatt — legtöbbször azonosnak vehető a felhajtóerőével: $|\mathrm{d}R| \simeq |\mathrm{d}F|$. Az ábra alapján írhatjuk:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}F} = \frac{\mathbf{c}_e}{\mathbf{c}_f}. \qquad (182)$$



113. ábra. Szárnylapátos szivattyú járókerék-elemére ható erők

Ezt a kifejezést a repülésben vitt szerepe nyomán *siklószámnak* nevezzük. Mivel értéke általában kicsiny, legtöbbször megengedhető a tg $\delta \cong \delta$ közelítés.

Látható, hogy a kerületi erő valóságos dT értéke is módosul a veszteségmentes esethez képest:

$$dT = dR \sin(\beta_\infty + \delta) \cong dF \sin(\beta_\infty + \delta). \tag{183}$$

Ezek után a járókerék veszteségeit számíthatjuk. A járókerék lapátelemére ható dE ellenállás a lapáthoz képest w_∞ sebességű áramlás esetén a lapáton $w_\infty\, dE$ teljesítményveszteséget okoz. Ha ezt a bevezetett $u\, dT$ teljesítményhez viszonyítjuk, akkor a *járókerék lapátelemének* ν_j' hidraulikai veszteségtényezőjéhez jutunk:

$$\nu_j' = \frac{w_\infty\, dE}{u\, dT} = \frac{w_\infty\, c_e}{u\, c_t \sin(\beta_\infty + \delta)} = \frac{w_\infty\, \delta}{u \sin(\beta_\infty + \delta)}, \tag{184}$$

ahol dE és dT kifejezéseinek helyettesítése és egyszerűsítés után a siklószám kifejezését is felhasználtuk.

Mivel a z lapátú teljes *járókerék-elem* veszteségtényezőjét úgy számíthatjuk, hogy a teljesítmény értékét ν_j'-nek mind a számlálójában, mind a nevezőjében z-szeresére vesszük, azért egyszerűsítés után annak értéke szintén ν_j'-vel azonos.

Könnyen kimutatható az is, hogy e veszteségtényező nem egyéb, mint a járókerék-elem h_j' veszteségmagasságának és a szivattyú elméleti szállítómagasságának hányadosa:

$$\nu_j' = \frac{h_j'}{H_e}. \tag{185}$$

A kerékelem hidraulikai hatásfoka ezzel:

$$\eta_j' = 1 - \nu_j'. \tag{186}$$

Az *egész járókerék* (átlagos) veszteségtényezőjének kiszámításához a következő gondolatmenet vezet:

Az időegység alatt a járókerék-elemen átáramló

$$dG = \gamma\, dV = 2\pi r\, \gamma\, c_m\, dr$$

folyadéksúly elméleti teljesítménye:

$$dN_{elm} = H_e\, \gamma\, dV = 2\pi r\, \gamma\, H_e\, c_m\, dr.$$

Ennek a ν_j' veszteségtényező által meghatározott hányada, azaz $\nu_j'\, dN_{elm}$ nyilván elvész.

Ezt a teljesítményveszteséget összegezhetjük az egész járókerékre:

$$\int_{r_b}^{r_k} \nu_j'\, dN_{elm} = 2\pi\, \gamma\, H_e\, c_m \int_{r_b}^{r_k} \nu_j'\, r\, dr = \nu_j\, \gamma\, H_e\, c_m\, (r_k^2 - r_b^2)\, \pi,$$

ahol v_j az egész járókerék átlagos veszteségtényezője. A jobb oldal nyilvánvalóan nem egyéb, mint a járókeréknek a v_j átlagos tényezővel felírt teljes teljesítményvesztesége. E tényező értékét az egyenlet rendezésével nyerjük:

$$v_j = \frac{2 \int_{r_b}^{r_k} v'_j \, r \, \mathrm{d}r}{r_k^2 - r_b^2}. \tag{187}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy az irodalomban gyakran találkozunk mind a járókerék-elem, mind a járókerék veszteségtényezőjének egyszerűbb kifejezéseivel is, amelyek főleg azt célozzák, hogy a szárnylapátos gépek méretezésénél használatos jellemző tényezők segítségével lehessen a számítást elvégezni. Mivel a veszteségtényezők számításában van bizonyos fokú bizonytalanság, ezek használata néha megengedett, azonban sokszor meg nem engedhető elhanyagolások miatt a kívánatosnál pontatlanabb eredményt is adhatnak. Ezeknek a kifejezéseknek a használatát tehát mindig alaposan mérlegelnünk kell.

A veszteségtényező ismertetett megállapításánál több körülményre tekintettel kell lennünk:

A levezetésnél feltételeztük, hogy a síkbafejtett kerék-elemben síkáramlás uralkodik.

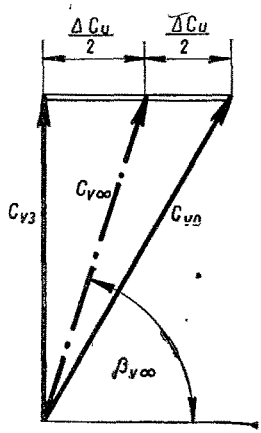
A számításnál egyedülálló szárnyszelvényt tartottunk szem előtt. A járókerékben azonban a legtöbb esetben oly sűrű a szárnyrács, hogy a rácshatás módosítja a számított veszteségtényezőt.

Tudjuk azt is, hogy a szivattyú járókereke a relatív áramlást mindig lassítja, tehát lapátozása „diffúzoros". Számításunkban azonban — a relatív sebességet nem befolyásoló — önmagában álló lapátelemet tételezvén fel, várható, hogy a valóságos veszteségtényező kedvezőtlenebb lesz a számítottnál.

Végül a veszteségtényező ismertetett meghatározásánál az áramlást teljesen egyenletesnek tekintjük. A járókerék és a vezetőkerék azonban kölcsönösen lüktetővé teszi egymás számára az áramlást.

Az elmondott körülmények befolyását számítással ma még csak bizonyos fokig tudjuk tekintetbe venni. Ezért a veszteségek megnyugtató meghatározásához még alapos kutatásra van szükség, és a számítás nem teszi nélkülözhetővé a veszteségek adott esetben mérés útján való meghatározását.

c) A *vezetőkerék* szerkezeti kialakítása elvben kétféle lehet: vagy szárnylapátos, vagy pedig sűrű csatornás megoldású.



114. ábra. A járókerék után elhelyezett vezetőkerék-elem sebességi háromszöge

α) Az első esetben a *vezetőkerék-elem* veszteségtényezője az előbbihez hasonlóan állítható elő. A kerékelem $\mathrm{d}E_v = \delta_v \, \mathrm{d}F_v$ ellenállása által okozott $\mathrm{d}N_E$ teljesítményveszteség z_v számú lapátelemen:

$$\mathrm{d}N_E = z_v \, c_{v\infty} \, \delta_v \, \mathrm{d}F_v,$$

ahol $c_{v\infty}$ a vezetőkerék-elem megfúvási sebessége a *114. ábra* szerint. Ez a járókerékelem w_∞ sebességéhez hasonló módon nyerhető. A sebességi háromszögben $c_{v0} = c_3$ és $c_{v3} = c_0$.

Ha a teljesítményveszteséget az elméleti teljesítményhez viszonyítjuk, kapjuk a vezetőkerék-elem hidraulikai veszteségtényezőjét:

$$v_v' = \frac{\mathrm{d}N_E}{\mathrm{d}N_{\mathrm{elm}}} = \frac{z_v\, c_{v\infty}\, \delta_v\, \mathrm{d}F_v}{2\pi r\, \gamma\, H_e\, c_m\, \mathrm{d}r} = \frac{z_v\, c_{v\infty}^3\, \delta_v\, L_v\, e_{fv}}{4\pi r\, \Delta c_u\, u\, c_m}.$$

Itt behelyettesítettük $\mathrm{d}F_v = \frac{\varrho}{2} c_{v\infty}^2\, L_v\, e_{fv}\, \mathrm{d}r$, valamint $H_e = \Delta c_u\, u/g$ kifejezését.

A lapátelemre ható valóságos $\mathrm{d}T_v$ kerületi erő a járókeréknél megismert módon itt is kifejezhető:

$$\mathrm{d}T_v = \mathrm{d}F_v \sin(\beta_{v\infty} + \delta_v) = \frac{\varrho}{2} c_{v\infty}^2\, L_v\, e_{fv} \sin(\beta_{v\infty} + \delta_v)\, \mathrm{d}r = \varrho\, \Delta c_u\, c_m\, t_v\, \mathrm{d}r.$$

Ebből egyszerűsítés után:

$$L_v\, e_{fv} = \frac{2\, \Delta c_u\, c_m\, t_v}{c_{v\infty}^2 \sin(\beta_{v\infty} + \delta_v)}.$$

Ennek behelyettesítése után $z_v\, t_v = 2\pi r$ is kiesik, és rövidítés után írható:

$$v_v' = \frac{c_{v\infty}\, \delta_v}{u \sin(\beta_{v\infty} + \delta_v)}. \tag{188}$$

A kifejezés, amint látjuk, megfelel a járókeréknél nyert (184) egyenletnek és könnyen igazolhatóan így is felírható:

$$v_v' = \frac{h_v'}{H_e}, \tag{189}$$

ahol h_v' a vezetőkerék-elem veszteségmagassága.

Az *egész vezetőkerék* veszteségtényezőjét a járókeréknél alkalmazott középérték-számítással kapjuk. Írható:

$$v_v = \frac{2 \int_{r_b}^{r_k} v_v'\, r\, \mathrm{d}r}{r_k^2 - r_b^2}. \tag{190}$$

A vezetőkerék akár a járókerék előtt, akár utána helyezkedik el, mind a v_v, mind a v_v' veszteségtényező azonos alakú lesz. Külön fel kell azonban hívnunk a figyelmet arra, hogy e két elrendezésben más-más feladata van a vezetőkeréknek. Ha a járókerék után áll, akkor elveszi a folyadék perdületét, amelyet a járókerék kölcsönzött neki. Erre az esetre vonatkozik a *114. ábra*. Látható, hogy itt az áramlási sebesség csökken, a vezetőkerék lapátrácsa tehát lassító. A járókerék előtti vezetőkerék viszont a lehetőleg perdületmentesen belépő folyadéknak ellenperdületet ad, amelyet azután a járókerék vesz el. Itt tehát a lapátrács gyorsító. A két áramkép oly lényegesen eltér egymástól, mint a diffúzoré és a konfúzoré, és az azoknál fennálló nehézségekre itt is tekintettel kell lennünk. Így érthető az is, hogy a gyorsító vezetőkeréknél kisebb veszteségtényezőt kapunk, mint a lassítónál.

A vezetőkeréknél végül szintén tekintetbe kell vennünk mindazt, amit a járókerék veszteségtényezőjét befolyásoló körülményekről az előző *b)* pont végén elmondottunk, azzal a különbséggel, hogy — mint tudjuk — a vezetőkerék rácsa lassító is, gyorsító is lehet.

β) A járókerék után álló *vezetőkerék* sokszor nem szárnylapátos, hanem sűrű lapátozású olyan kialakítással, amelynél a szárnyelmélet szokásos módszerei nem adnak jó támpontot. Itt a veszteséget a 72. *d)* pont alapján számíthatjuk. A ζ_v veszteségtényezőt itt is a $c_v = c_{v0}$ (legnagyobb) sebességre vonatkoztathatjuk.

d) A szárnylapátos szivattyú szerves tartozéka a diffúzor alakú *nyomócső*, amelynek veszteségeit a 72. *e)* pont szerint számíthatjuk.

e) A korszerű szárnylapátos szivattyúnál nem szokott külön vezetőkerék és külön nyomócső lenni, hanem rendszerint közvetlenül a járókerék mögött kezdődik a diffúzorszakasz, és ebben van a vezetőkerék. Bár az áramlási viszonyok minőségileg itt eléggé áttekinthetőek, azonban számítással csak eléggé pontatlanul lehet őket nyomon követnünk. A számítás azt mutatja, hogy az *összetett vezetőkerekes nyomócsőnek* nagyobb a vesztesége, mintha a két elemet külön-külön helyeznénk el.

f) Végül a szárnylapátos szivattyúnak sokszor szorosan vett alkatrészét képezi a diffúzorhoz csatlakozó *csővezeték*, amely egyenes és ívelt vagy könyökös szakaszokból, visszaáramlást gátló csappantyúból és esetleg tolózárból állhat.

Ezek ellenállásának meghatározását a *B)* fejezetben tárgyaltuk.

g) Külön kell vizsgálnunk az *átlépési vagy iránytörési* veszteségeket, amelyek csak a gép normális üzemállapotától eltérő vízhozam esetében jelentkeznek.

Sűrű lapátozásnál a Borda-féle veszteségek módjára vehetjük ezeket számításba. Szárnyszelvény esetében a szárnyelmélet szerint iránytörésről nem lehet szó, de a jelleggörbék alakjából megállapítható, hogy ily gépekben is lehetnek olyan veszteségek, amelyek nagysága csak szárnyrács-kísérlettel állapítható meg.

Végül még ebbe a csoportba kell sorolnunk a veszteségeknek ama megnövekedését is, amely akkor jelentkezik, amikor a folyadék *perdülettel* jut tovább a járókerék és a vezetőkerék elhagyása után.

A fentiek ismeretében a szárnylapátos szivattyú *hidraulikai hatásfokát* adott üzemi pontban az

$$\eta_h = \frac{H}{H + h'} \tag{191}$$

összefüggés szolgáltatja, ahol h' a szivattyú összvesztesége a vizsgált üzemi állapotban.

Megjegyezzük azonban, hogy a számításban meglevő bizonytalanságok mindenképp ráutalnak bennünket a veszteségek mérés útján történő meghatározására is.

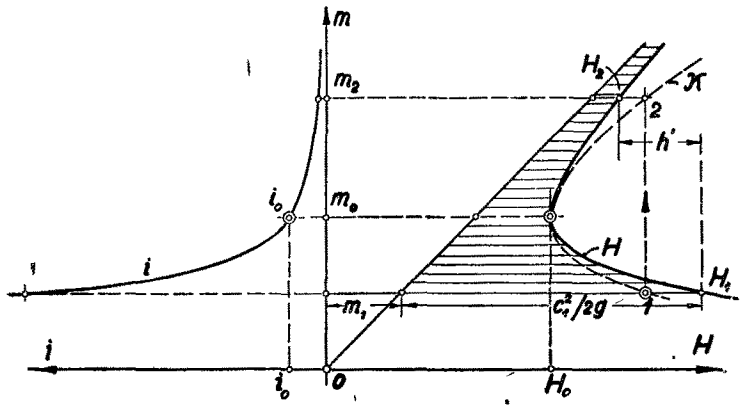
A **turbina** hidraulikai veszteségeinek számításánál az elmondottakat értelemszerűen alkalmazhatjuk.

D) ÁRAMLÁS NYITOTT CSATORNÁBAN

75. Állandósult áramlás nyitott csatornában. A Braun-féle diagram

Nyitott csatornában a folyadék áramlási veszteségei a *helyzeti* energia apadásában mutatkoznak. A 47. pontban (a *73. ábra* jelöléseivel) már rámutattam arra, hogy az l hosszúságú csatornaszakasz elején a víztükör $z_1 + m_1$ magassága mindig nagyobb, mint a csatorna végén mérhető $z_2 + m_2$ magasság.

Ha a csatorna szelvénye egyenletes, és a fenék $(z_1 - z_2)/l = i_f$ esése éppen fedezi a veszteségmagasságot, vagyis az energiavonal $i_e = h'/l$ esésével éppen össze-



115. ábra. Braun-féle diagram

vág, akkor a mélység és ezzel együtt a sebesség is változatlan marad ($m_1 = m_2$; $F_1 = F_2$ és $c_1 = c_2$), a víztükör tehát a mederfenékkel párhuzamos.

Ilyen esetben az egyenletes áramlást **tökéletes** folyadékra lehet vonatkoztatni, olyan módon, hogy a veszteségek fedezésére fordított mederesést ($z_1 - z_2 = h'$) a folyadék munkaképességéhez nem számítjuk hozzá, hanem csak **a meder felett** mérhető energiát vizsgáljuk. Ebben a fogalmazásban tehát az áramlás veszteségmentesnek tekinthető.

A meder felett mérhető munkaképesség: $H = m + c^2/2g$ a mélység függvénye.

A vizsgálatot a legegyszerűbb esetre, az állandó b szélességű csatornára vonatkoztatjuk, a vízmennyiséget pedig mindvégig állandó V értékkel vesszük számításba.

A sebesség: $c = V/b\,m$ helyettesítésével és $A = V^2/(2g\,b^2)$ állandó bevezetésével az energiaegyenlet a következő alakot veszi fel:

$$H = m + \frac{A}{m^2} \quad \text{(m)}. \tag{192}$$

Ezt az egyenletet függvényábrában szemlélteti a *Braun*-féle diagram (*115. ábra)*, amelyből kitűnik, hogy a folyadék munkaképessége egy m_0 határmélységnél a legkisebb. E legkisebb (H_0) értéknél nagyobb H munkaképesség mindig *két*

mélységnél lehetséges. A nagy mélység és kis sebesség az **áramlás,** a kis mélység és nagy sebesség pedig a **rohanás** jellemzője. (Vö. a 45/4. ponttal.)

A határmélységet $dH/dm = 0$ differenciálegyenlet adja, amelyből:

$$A = \frac{m_0^3}{2} \quad \text{és} \quad H_0 = 1{,}5\, m_0.$$

Minthogy pedig a határmélységhez tartozó sebességmagasság (az energiaegyenletből) $c_0^2/2g = H_0 - m_0 = m_0/2$, tehát a legkisebb energiát hordozó határsebesség:

$$c_0 = \sqrt{m_0 g} \qquad \text{(m/mp)}. \tag{193}$$

E határsebesség nem más, mint a hullámsebesség, amelynek jelentőségére még néhányszor visszatérünk. (Vö. a 100. ponttal.)

A *Braun*-féle diagram bal oldalán a V vízmennyiség szállításához szükséges i_t fenékeséseket is megtaláljuk az m mélység függvényében.

Az összefüggést legegyszerűbben a *Chézy*-féle képlet fejezi ki, amelyből

$$i_f = \frac{c^2}{C^2 r'}, \quad \text{és} \quad r' = \frac{b\,m}{b + 2\,m}.$$

Igen széles csatornára: $b \gg m$ és $r' \cong m$, továbbá: $c = V/(b\,m)$.
Ezek helyettesítésével írható:

$$i_f \cong \frac{B}{m^3} \quad \text{és} \quad B = \frac{V^2}{C^2 b^2}.$$

Ezzel szemben a *pontos* érték:

$$i_f = \frac{B}{m^3} + \frac{2\,B}{b\,m^2}. \tag{194}$$

A határsebességet adó fenékesés (i_{f0}) *széles csatornára* szintén a *Chézy*-féle egyenletből fejezhető ki, ha azt a (193) egyenlettel összevetjük, és a $C^2 = 2g/\lambda'$ állandót (113) szerint helyettesítjük.

Írható: $c_0^2 \cong C^2\, i_f m_0 = m_0 g$, amiből:

$$\boxed{i_{f0} \cong \lambda'/2} \tag{195}$$

$\lambda' = \lambda/4 = 0{,}0075$ értékkel: $i_{f0} \cong 0{,}00375$;

a *pontos érték* pedig $r_0' = b\,m_0/(b + 2m_0)$ érték helyettesítésével (ugyancsak a (113) és (193) egyenlet összevetésével) így írható:

$$i_{f0} = \frac{m_0}{r_0'}\,\frac{\lambda'}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{m_0}{b}\right)\lambda'. \tag{196}$$

A (195) összefüggés durva közelítéssel azt fejezi ki, hogy az áramlás és a rohanás között a határállapot a $3{,}75^0/_{00}$-es fenékeséssel is kijelölhető. E megállapítás a természetes vízfolyásokra is érvényes, csakhogy az i_{f0} határérték nagyságában kisebb-nagyobb eltolódások lehetségesek.

69. példa. Egy $V = 10$ m³/mp vízmennyiséget szállító csatorna állandó szélessége $b = 10$ m ($V/b = 1$ m²/mp és $A = V^2/(b^2\,2g) = 0{,}051$ m²). A víz mederfeletti munkaképességét a mélység függvényében a (192) egyenlet szerint a *115. ábra* szemlélteti.

A határmélység: $\mathbf{m_0 = \sqrt[3]{2A} = \sqrt[3]{0{,}102} = 0{,}468\ m;}$

a határsebesség pedig: $\mathbf{c_0 = \sqrt{m_0 g} = \sqrt{0{,}468 \cdot 9{,}81} = 2{,}13\ m/mp.}$

A fenékesés határértéke, $r' \cong m$ közelítéssel: $i_{f0} = 0{,}00375$,

pontosabb értéke: $i_{f0} = \frac{m_0}{r_0'}\,\frac{\lambda'}{2} = \frac{b + 2m_0}{b} \cdot \frac{\lambda'}{2} = \frac{10{,}936}{10} \cdot 0{,}00375 = 0{,}0041.$

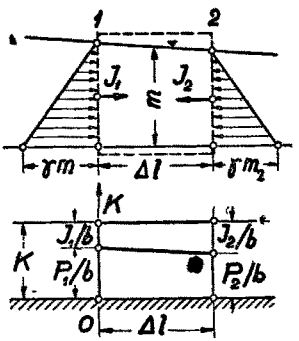
A *115. ábrába* egyszerűség okáért a fenékesések közelítő értékeit rajzoltam be. A mederfeletti munkaképesség legkisebb értéke:

$$\mathbf{H_0 = 1{,}5\, m_0 = 1{,}5 \cdot 0{,}468 = 0{,}7\ mkg/kg.}$$

A határállapot jellegzetessége, hogy ennek a munkaképességnek kétharmad része helyzeti energia és egyharmad része lendület.

76. Nyitott csatornában áramló folyadék egyensúlya. A keresztmetszetet terhelő erők vonala

A nyitott csatornában áramló folyadék munkaképességét jellemző energiavonal szemléletes képet ad a jelenségek lefolyásáról, de az erőtani viszonyok megítélésére nem alkalmas. Vannak feladatok, amelyek az erőjáték ismerete nélkül meg nem oldhatók (pl. vízküszöb). Ilyenkor a *116. ábra* szerint a csatornaszelvényeket terhelő erők egyensúlyfeltételéből kell kiindulni, amely a **medermenti erők vonalának** felrajzolásával válik szemléletessé.



116. ábra. A vízoszlop egyensúlya nyitott csatornában

Állandó szélességű csatornában a szélesség egységére eső K erők vizsgálatára szorítkozhatunk, amelyek egyensúlyát a 24. pont szerinti ellenőrző-felülettel kihasított Δl hosszúságú víztestre az *impulzustétel* fejezi ki.

A *116. ábra* jelöléseivel az *egész* $F = b\,m$ keresztmetszetet terhelő erő két részből tevődik össze. A mélységgel arányos: $p = \gamma\, m$ nyomásból: $P = \gamma\, bm^2/2$, a c sebességgel áramló folyadék impulzusából pedig: $J = \gamma\, b\, mc^2/g$.

Írható tehát:

$$K = \frac{P + J}{b} = \gamma\, m \left[\frac{m}{2} + \frac{c^2}{g}\right]. \qquad (197)$$

Az energiavonal mintájára az erők vonala is a meder fölé rajzolható. A víztest egyensúlyát a belépő és kilépő keresztmetszetet terhelő erők egyenlősége ($K_1 = K_2$) biztosítja: *az erők vonala tehát a mederfenékkel párhuzamos.*

Állandó V vízmennyiségre a (192) egyenlet $A = V^2/(2gb^2)$ együtthatójának bevezetésével az erőket is az m mélység függvényében fejezhetjük ki. Ilyenkor a

fajsúly egységére vonatkoztatott $\varkappa = K/\gamma$ erő egyenlete írható fel a következő egyszerű alakban:

$$\varkappa = \frac{K}{\gamma} = \frac{m^2}{2} + \frac{2A}{m} = \frac{m^2}{2} + \frac{m_0^2}{m}. \qquad (198)$$

Nevezetes, hogy az m_0 határmélységnél az erők vonalának is szélső értéke van, mint azt a *115. ábrába* szaggatott vonallal berajzolt $\varkappa$-görbe mutatja. E görbéből szemléletesen kitűnik az is, hogy a rohanásból az áramlásba való átmenet csak energiaveszteség árán lehetséges. Az *1* és *2* jelű keresztmetszetre működő erők egyensúlya ($K_1 = K_2$) ugyanis már beállott, mielőtt a munkaképesség kezdőértékét elérhette volna. A *115. ábrából* a $h' = H_1 - H_2$ nagyságú veszteségmagasság is lemérhető, amely — mint *Borda*-féle veszteség — a vízküszöb hengerében morzsolódik fel. *(79. ábra)*

70. példa. A 69. példában tárgyalt csatornában az $m_0 = 0{,}468$ méteres határmélységnél a mederfeletti munkaképesség legkisebb értéke: $H_0 = 0{,}7$ mkg/kg. A határmélység négyzetével ($m_0^2 = 0{,}218$ m^2) arányos értéket kapunk a fajlagos erő legkisebb értékére a (198) egyenletből, azaz: $\varkappa_0 = 1{,}5\, m_0^2 = 0{,}327$ m^2; $\gamma = 1000$ kg/m^3 és $b = 10$ m helyettesítéssel az egész keresztmetszetet terhelő erő legkisebb értéke is kiadódik.

Írható: $\mathbf{K_0 = \gamma \varkappa_0 = 1000 \cdot 0{,}327 = 327\ kg/m}$ és: $\mathbf{P_0 + J_0 = b\, K_0 = 3270\ kg,}$

ahol a (198) egyenletből kimutatható, hogy a határállapotot jellemző impulzuserő kétszer akkora, mint a sztatikai nyomásból származó erő: ($J_0 = 2\, P_0$).

A *115. ábrába* az $m_1 = m_0/2 = 0{,}234$ m mélységhez tartozó jellemzőket is berajzoltam. Ebben az esetben: $c_1 = 2\, c_0 = 4{,}25$ m/mp és $c_1^2/2g = 2\, m_0 = 0{,}936$ m, azaz a munkaképesség:

$$\mathbf{H_1 = 2{,}5\, m_0 = 1{,}17\ mkg/kg,}$$

a fajlagos erő pedig: $\varkappa_1 = 2{,}125\, m_0^2 = 2{,}125 \cdot 0{,}218 = \mathbf{0{,}464\ m^2}$.

A »rohanás« fenntartásához az ábra szerint a csatornafenéknek $i_1 = 8\, i_0 = 0{,}03$, azaz $30^0/_{00}$-es esést kellene adni.

Ha a mederfenék esése hirtelen megváltozik (vagy pl. a zsilip alatt kiömlő víz olyan csatornába lép át, amelynek nincsen esése), akkor *vízküszöb* keletkezik, amelynek jellemzői: $K_2 = K_1$ feltételből határozhatók meg.

77. A duzzasztás és a víztükör lehajlása nyitott csatornában

Nyitott csatornában állandósult áramlás akkor is lehetséges, ha a fenékesés nagyobb vagy kisebb az energiaesésnél. Ebben az esetben a mélység és a sebesség csatornamenti változását az átfolyó *vízmennyiség állandóságából* lehet meghatározni. A jelenség vizsgálatánál a legegyszerűbb (szemléletes) közelítésre szorítkozom [5].

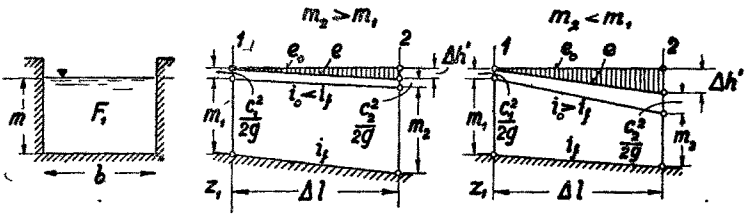
A számítás szabatos végrehajtása helyett közelítő eljárással megelégedhetünk, annál is inkább, mert a bonyolult analitikai tárgyalás is csak oly elhanyagolások árán lehetséges, amelyek az eredmény használhatóságát a nagyobb pontosság látszata ellenére is csak szűk területre korlátozzák. *(Rühlmann* és *Bresse* táblázatai.)

A *117. ábra* jelöléseivel az állandó szelvényű csatornának egy Δl hosszúságú szakaszán az energiavonal esése: $i_e = \Delta h'/\Delta l$, a mélység változása pedig: $\Delta m = m_2 - m_1$.

Ha az áramlás irányában a mélység *növekszik* (Δm pozitív), akkor a jelenséget **duzzasztásnak** nevezzük. Duzzasztást okoz a csatornába épített gát, vagy a csatorna torkolatánál levő vízmedence. A vízmélység csökkentése (negatív Δm) viszont a víztükör **lehajlását** eredményezi. Az első esetben a fenék esése *nagyobb* a víztükör esésénél ($i_f > i_0$), a második esetben: $i_0 > i_f$, vagyis a tükör lehajlása a nagyobb.

a) **Duzzasztásnál** az áramlás sebessége és ezzel együtt a lendület is kisebbedik, a víztükör esését tehát a lendületapadás is kisebbíti ($i_0 < i_e$). A víztükör *lehajlását* viszont a lendületnövekedés is fokozza ($i_0 > i_e$).

A duzzasztás és a lehajlás vonala szakaszról szakaszra a legegyszerűbben úgy rajzolható fel, ha állandó esésű és **állandó szelvényű** csatornában a Δm mélységváltozás előre felvett értékeihez tartozó Δl hosszúságokat számítjuk, mert ebben az esetben a veszteségmagasságot meghatározó közepes sebesség és a hidraulikai sugár becslésében sem követünk el nagy hibát, és ezenfelül a lendületváltozás befolyása is figyelembe vehető.



117. ábra. Áramlás nyitott csatornában. (A mélység változó)

Az áramlási veszteségek kiszámításához alábbiakban a *Chézy*-féle képletet használom, de az eljárás pontosságának fokozása érdekében bármilyen más tapasztalati képlet, táblázat vagy függvényábra is felhasználható, mert a szelvény jellemzőit az előre választott mélység egyértelműen meghatározza (akkor is, ha a *117. ábrától* eltérően, *nem* állandó szélességű, hanem tetszőlegesen választott más szelvényalakról van szó).

Rá kell azonban mutatnom egy másik hibaforrásra is, amely onnan származik, hogy egy-egy csatornaszakasz veszteségeit a mélység számtani középértékéből meghatározott közepes sebességből nem lehet pontosan kiszámítani. (Ezt a hibát azonban a szakaszok sűrítésével lehet a gyakorlat igényeit kielégítő korlátok közé szorítani.)

Az *energiaegyenlet* $z_1 - z_2 = i_f \Delta l$, $\Delta h' = i_e \Delta l$ és $m_2 - m_1 = \Delta m$ helyettesítésekkel a következő alakra hozható:

$$z_1 - z_2 + m_1 - m_2 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} - \Delta h' = (i_f - i_e)\,\Delta l - \Delta m + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} = 0.$$

Az energiavonal esése pedig: $m_1 + \Delta m/2 = m_k$ közepes mélységhez tartozó r_k' és c_k értékből, *Chézy* szerint:

$$i_e = \frac{c_k^2}{C^2 r_k'}.$$

A választott Δm mélységnövekedéshez *(duzzadáshoz)* tartozó csatornaszakasz hosszúsága tehát:

$$\Delta l = \frac{\Delta m - (c_1^2 - c_2^2)/2g}{i_f - c_k^2/(C^2 r_k)}. \tag{199}$$

A duzzasztási görbe felrajzolásánál a rendszerint kis sebességek lendületváltozása figyelmen kívül hagyható, vagyis a (199) egyenlet számlálójának második tagja elhanyagolható. A számítás menetét a 72. példában mutatom be.

b) **Lehajlás esetén:** $\Delta m_l = -\Delta m$ helyettesítéssel és a negatív előjelek eltüntetésével a (199) egyenlet a következő alakba megy át:

$$\Delta l = \frac{\Delta m_l - (c_2^2 - c_1^2)/2g}{c_k^2/(C^2 r_k) - i_f}. \tag{200}$$

A víztükör lehajlásának vizsgálatát a 71. példa kapcsán arra a különleges esetre mutatom be, amikor a csatornafenéknek esése nincsen ($i_f = 0$).

A gyakorlatban előforduló esetekben a (199), ill. (200) egyenlet ismételt alkalmazásával eléggé megbízható tájékoztatást szerezhetünk a víztükör alakjáról. (A szerkesztés a görbébe írt *sokszöget* adja.)

A görbének egyetlen helyen lehet szakadása, amikor a dm/dl differenciálhányados nevezője zéróvá válik.

Az energiaegyenlet ugyanis a következő differenciálalakban írható fel:

$$(i_e - i_f)\,dl + dm + \frac{c}{g}dc = 0$$

Állandó vízmennyiségre: $d\,V = d\,(F\,c) = F\,d\,c + c\,d\,F = 0$, állandó szélességű csatornára ezenfelül: $F = b\,m$ és $d\,F = b\,d\,m$, azaz:

$$dc = -\frac{c}{m}dm.$$

Helyettesítés és rendezés után tehát írható:

$$\frac{dm}{dl} = \frac{i_e - i_f}{\frac{c^2}{mg} - 1}. \tag{201}$$

A nevező a $c_0 = \sqrt{m\,g}$ határsebességnél, illetőleg az $m_0 = c^2/g$ határmélységnél válik zéróvá. E határállapot elérésekor a víztükör ugrásszerűen változik.

71. példa. Egy $V = 0{,}5$ m³/mp vízmennyiséget szállító szivattyú szívóaknáját egy nagyméretű medencéből $b = 1$ m állandó szélességű nyitott szívócsatorna táplálja. A csatornának fenékesése nincsen ($i_f = 0$).

A víztükör magassága a belépés helyén: $m_0 = 0{,}55$ m, a belépősebesség tehát:

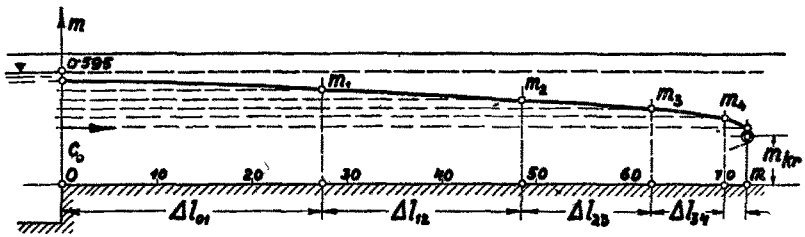
$$c_0 = V/f_0 = 0{,}5 : 0{,}55 = 0{,}91 \text{ m/mp}.$$

A medencében eszerint:

$$m_{00} = m_0 + c_0^2/2\,g = 0{,}592 \text{ méteres}$$

tükörmagasságot találunk, amely a vizsgálat folyamán **változatlan.**

A víztükör lehajlását a *118. ábra* szemlélteti. A Δl szakaszok hosszúságát Δm_l = = 0,05 m-es mélységapadások alapulvételével a (200) egyenletből számítottam ki. A *Chézy*-féle állandót: $C = 50$; ($C^2 = 2500$) értékkel helyettesítettem.



118. ábra. A víztükör lehajlása nyitott csatornában

A számítást célszerűen alábbi táblázatos alakban lehet elvégezni:
A (200) egyenlet $i_f = 0$ értékkel a következő alakban írható:

$$\Delta l = \frac{C^2 r'}{c_k^2}\left(\Delta m - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}\right).$$

Minden méret: **méter!**

Jel	m	m_k	r'_k	c	c_k^2	$\frac{C^2 r'_k}{c_k^2}$	$c^2/2g$	$\Delta\left(\frac{c^2}{2g}\right)$	$\Delta m - \Delta\left(\frac{c^2}{2g}\right)$	Δl
0	0,55			0,91			0,042			
0—1		0,525	0,256	0,95	0,905	710		0,009	0,041	29,2
1	0,50			1,00			0,051			
1—2		0,475	0,244	1,05	1,11	550		0,012	0,038	21,0
2	0,45			1,11			0,063			
2—3		0,425	0,230	1,18	1,39	413		0,017	0,033	13,6
3	0,40			1,25			0,080			
3—4		0,375	0,214	1,33	1,78	300		0,024	0,026	7,8
4	0,35			1,43			0,104			
4—5		0,325	0,197	1,54	2,38	206		0,038	0,012	2,5
5	0,30			1,67			0,142			
$m_0 - m_5 = 0{,}25$ méter lehajláshoz tartozó csatornahosszúság:										**74,1**

A számítás itt abbahagyható, mert a következő lépés már **negatív** Δl hosszúságot eredményez (a görbe visszahajlik).

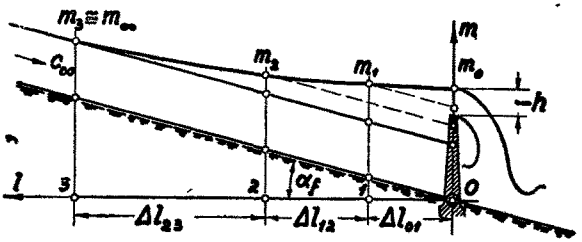
A (201) egyenlet értelmében ugyanis a hullámsebességet adó határmélység helyén a lehajlási görbének függőleges érintője van, vagyis a **vízszállítás folytonossága megszakad!**

E kritikus mélység a 69. példa alapján $V/b = 0{,}5$ m²/mp és $A = V^2/(b^2\,2g) = = 0{,}01275$ m³ értékkel:

$$m_{kr} = \sqrt[3]{2A} = \sqrt[3]{0{,}0255} = \mathbf{0{,}295\ m.}$$

Az adott esetben a lehajlás olyan mértékű, hogy a csatorna az előírt vízmennyiség szállítására csak akkor alkalmas, ha a kritikus hosszúságnál jóval rövidebb. Ha pl. a belépősebesség-magassággal együtt kereken $\Delta m = 0{,}1$ méteres lehajlást még megengedhetőnek minősítünk, akkor a csatorna legnagyobb hosszúsága $l = 30$ méter lehet, feltéve, hogy a medence tükörmagassága változatlan marad, és a medersúrlódás nem növekszik.

72. példa. Egy $b = 4$ m széles csatorna fenékesése (a *119. ábra* szerint): $i_f = 1/7500$. Az áramlás sebessége (Chézy szerint, $C \cong 50$; $m = 1{,}5$ m és $r' = 6 : 7 = 0{,}857$ m értékkel): $c_\infty = C\sqrt{i\,r'} = 0{,}535$ m/mp, a szállított vízmennyiség tehát: $V = b\,m\,c_\infty = 3{,}21$ m³/mp.



119. ábra. A duzzasztási vonal szerkesztése

Ha a víztükröt $m_\infty = 1{,}50$ méterről $m_0 = 3{,}0$ méterre duzzasztjuk, akkor (tökéletes átbukás esetén) a gát fölött szükséges h magasság, $V = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,h^{3/2}$ összefüggésből, $\mu = 0{,}6$ átfolyási tényezővel:

$$h = \sqrt[3]{\frac{9V^2}{8\mu^2 b^2 g}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10{,}3}{8 \cdot 0{,}36 \cdot 16 \cdot 9{,}81}} = \sqrt[3]{0{,}205} = 0{,}59 \text{ m}.$$

A gát magassága tehát kereken: 2,4 m lehet.

A duzzasztási görbét $\Delta m = 0{,}5$ m-es szintkülönbségek alapulvételével és a lendületváltozások elhanyagolásával szerkesztettem meg.

A számítás így gyorsabban végezhető el, és az előzetes vizsgálat igényeit rendszerint kielégíti.

A (199) egyenlet egyszerűsített alakja:

$$\Delta l = \frac{\Delta m}{i_f - c_k^2/(C^2 r_k')}.$$

A számítást a gát helyén ($m_0 = 3{,}0$ m) kezdjük meg, és a vízfolyás ellen (felfelé haladva) végezzük. A táblázatba foglalt eredmények ($i_f = 10^{-4} \cdot 1{,}333$ értékkel):

Minden méret: **méter!**

Jel	m	r_k'	c	c_k^2	$C^2 r_k'$	$c^2/(C^2 r_k')$	$i_f - c_k^2/(C^2 r_k')$	Δl
0	3,00		0,268					
0—1	2,75	1,16	0,292	0,085	2900	$10^{-4} \cdot 0{,}293$	$10^{-4} \cdot 1{,}040$	4 805
1	2,50		0,321					
1—2	2,25	1,06	0,357	0,128	2650	$10^{-4} \cdot 0{,}483$	$10^{-4} \cdot 0{,}850$	5 890
2	2,00		0,401					
2—3	1,75	0,93	0,459	0,211	2333	$10^{-4} \cdot 0{,}904$	$10^{-4} \cdot 0{,}429$	11 655
3	1,50		0,535					
							$l =$	**22 350**

Az adott esetben a duzzasztás hatása tehát csak mintegy 22 kilométerrel a gát fölött szűnik meg.

III. A VÁLTOZÓ SEBESSÉGŰ FOLYADÉK ÁRAMLÁSA

78. Az egyensúlyállapot megzavarása

Az állandósult áramlás feltételeit a folyadékelemekre ható erők egyensúlyából vezettük le. Ha az egyensúlyállapotot külső beavatkozással (pl. csőzáró-szerkezet vagy zsilip nyitásával) megzavarjuk, akkor az áramlás sebessége is megváltozik. Az áramlás mindaddig instacionárius marad, amíg a gyorsító erők hatására az egyensúlyállapot ismét helyre nem állt.

Ez az átmeneti folyamat lehet **aperiodikus**, amikor az új egyensúlyállapot egy oldalról, tehát túllendülés nélkül megközelíthető. Ellenkező esetben **lengési jelenségekkel** kell számolnunk, illetve a sebességi és a feszultségi állapot **hullámszerű** megváltozásával.

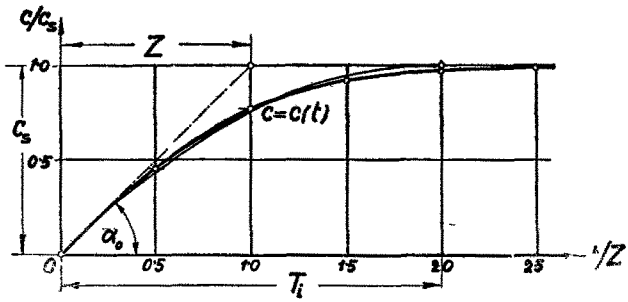
A engések szabatos vizsgálatánál a folyadéksúrlódás csillapító hatása sem hagyható figyelmen kívül. Erre való tekintettel külön fejezetben foglalkozom a sebesség négyzetével csillapodó lengésekkel is.

Meg kell jegyeznem, hogy a következőkben az **egyméretű** áramlással kapcsolatos feladatok vizsgálatára szorítkozom, a terjedelmes anyagnak rendszerbe foglalt tárgyalása helyett pedig a gyakorlat számára jelentősebb kérdéseket emelem ki.

A) A VÍZOSZLOP SZABAD GYORSULÁSA

79. Az indítás ideje

Egy zárt csővezetékben a folyadékoszlop mindaddig nyugalomban van, amíg a zárószerkezet (tolózár) nyitásával az áramlás meg nem indulhat. A *120. ábra* szerint az áramlást fenntartó állandó esés (H) hatására a folyadékoszlop egy idő múlva felgyorsul arra a c_s üzemi sebességre, amely az állandósult (stacionárius) áramlás feltételei szerint állandó marad. Ennek az egyenletes sebességi állapotnak eléréséhez szükséges időtartamot nevezzük **indítási időnek.**



120. ábra. A gyorsuló vízoszlop sebességi ábrája. (Indítás)

Szigorúan pontos elméleti vizsgálattal megállapítható; hogy az egyenletes

üzemállapot eléréséhez szükséges időtartam végtelen hosszú, vagyis az áramlás sebessége csak **aszimptotikusan** közelíti meg üzemi értékét. A gyakorlatban azonban ennek ellenére is **véges** indítási idővel számolunk, amelynek tartama aszerint hosszabb vagy rövidebb, amint a sebesség megközelítésében kisebb vagy nagyobb tűrést írunk elő. Az indítás ideje tehát csak akkor jellemezhető egyértelműen meghatározott mennyiséggel, ha ugyanakkor a közelítés százalékos értékét is megadjuk.*

Áramlástani feladatoknál célszerűnek mutatkozik a 3,6%-os tűrés előírása, ami azt jelenti, hogy az indítást akkor nyilvánítjuk befejezettnek, amikor a sebesség az egyenletes üzemállapotot jellemző állandó értékének 96,4%-át elérte.

Az indítás időbeli lefolyása a vízoszlop gyorsulásától függ, amely a 23. pont szerint az ún. gyorsító nyomásmagassággal arányos.

Ha az egyenletes szelvényű, l hosszúságú csőben a folyadék c sebességgel áramlik, akkor a H esés egy részét az áramlási veszteségmagasság (h') emészti fel, a gyorsító nyomásmagasság tehát: az (53) egyenlet szerint:

$$H - h' = \frac{l}{g} a, \tag{202}$$

ahol $a = \mathrm{d}c/\mathrm{d}t$ a folyadékoszlop gyorsulása. Az a gyorsulás értéke bármely t időpontban a cső *hossza* mentén végig azonos, azaz a folyadékot *összenyomhatatlannak*, a csövet pedig *merevnek* tekintjük.

A tehetetlenségi nyomásmagasság: $h_k = l\,a/g$ bevezetésével a (202) egyenlet úgy is fogalmazható, hogy az áramlást fenntartó esés az indítás tartama alatt egyrészt fedezi az áramlási veszteségeket, másrészt fennmaradó része a gyorsuló vízoszlop tehetetlenségi nyomásmagasságával tart egyensúlyt ($H = h' + h_k$).

Az indítás idejét (T_i) döntően befolyásolja a vízoszlop gyorsulásának kezdőértéke (a_0), amelynek nagysága a (202) egyenletből, $t = 0$ pillanatra, $c = 0$ és $h' = 0$ helyettesítéssel:

$$a_0 = \frac{gH}{l} \quad (\mathrm{m/mp^2}). \tag{203}$$

Az indítás tartamának másik jellemzője az egyenletes (üzemi) sebesség (c_s), amelynek elérésével az indítás befejeződött. Ha $t = T_i$, $a = 0$ és $h_k = 0$. Ebben az esetben tehát a H esést teljes egészében a veszteségek emésztik fel ($H = h'$), amelyekhez a 62. pont szerint a kilépési veszteséget is hozzá kell számítani.

A veszteségmagasság $h' = (1 + \zeta)\, c^2/2g$ kifejezését helyettesítve, az üzemi sebesség:

$$c_s = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta}} \quad (\mathrm{m/mp}). \tag{204}$$

A felmelegedési időállandó mintájára a gyorsuló rendszer is jellemezhető egy Z **időállandóval,** vagyis azzal az időtartammal, amely *változatlan* a_0 kezdőgyorsulás esetén volna szükséges a c_s üzemi sebesség eléréséhez. Az időállandó értelmezése alapján tehát: $c_s = a_0 Z$; a (203) és (204) egyenlet figyelembevételével pedig:

$$Z = \frac{c_s}{a_0} = \frac{l c_s}{gH} = \frac{2\,l}{(1 + \zeta)\, c_s} \quad (\mathrm{mp}). \tag{205}$$

* Lényegében hasonló aszimptotikus közelítéssel találkozunk pl. a villamos motor indítási idejének vagy egy test felmelegedési vagy lehűlési idejének értelmezésénél is.

Az indítás időbeli lefolyását a (202) egyenlet fejezi ki, amely $a = \mathrm{d}c/\mathrm{d}t$; $h' = (1 + \zeta)\, c^2/2g$ és $H = (1 + \zeta)\, c_s^2/2g$ helyettesítéssel, rendezés után a következő alakra hozható:

$$\frac{l}{g}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{1+\zeta}{2g}(c_s^2 - c^2).$$

$x = t/Z$ és $y = c/c_s$ változók bevezetésével ($\mathrm{d}t = Z\,\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}c = c_s\,\mathrm{d}y$) a (205) egyenletből Z helyettesítésével ez a differenciálegyenlet a következő integrálható alakba megy át:

$$x = \int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = \operatorname{Ar\,th}\, y; \quad \text{azaz:} \quad y = \operatorname{th} x. \tag{206}$$

A sebesség időbeli változását kifejező egyenlet tehát (x és y visszahelyettesítésével):

$$\boxed{c = c_s \operatorname{th}\frac{t}{Z}} \quad (\mathrm{m/mp}). \tag{206/a}$$

A tangens hiperbolikus idevágó értékeit alábbi táblázatba foglaltam össze, amelynek $\nu = 1 - y$ rovatából az is kitűnik, hogy a függvény mennyire közelítette meg az $y_s = 1$ határértékét.

$x =$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$y = \operatorname{th} x$	0,462	0,762	0,905	**0,964**	0,987	0,995
$\nu = 1 - y$	0,538	0,238	0,095	**0,036**	0,013	0,005

A $\nu = 3{,}6\%$-os közelítés feltétele a táblázat adatai szerint: $x = 2$, azaz $T_i = 2Z$, ami annyit jelent, hogy a gyakorlat igényeit kielégítjük, ha az indítás idejét a rendszer időállandójának kétszeresében állapítjuk meg. A (205) egyenlet alapján tehát:

$$\boxed{T_i \cong 2Z = \frac{2\,lc_s}{gH}} \quad (\mathrm{mp}). \tag{207}$$

E felvétel a $c = c(t)$ sebességi függvényábra felrajzolását is megkönnyíti, mert ebben az esetben a pontos görbe jó közelítéssel **parabolával** helyettesíthető (*120. ábra*).

73. példa. A 24. példában kiszámítottuk egy $l = 20$ m hosszú folyadékoszlop kezdőgyorsulását $H = 8$ m esésnél. A (203) egyenlet szerint:

$$\mathbf{a_0 = \frac{gH}{l} = \frac{9{,}81 \cdot 8}{20} = 3{,}94\ m/mp^2.}$$

Az üzemi-sebességet $l_e = 1{,}3\,l = 26$ m egyenértékű csőhosszúság, $d = 50$ mm $= 0{,}05$ m csőátmérő és $\lambda = 0{,}025$ tényező alapulvételével a (204) egyenletből kapjuk, amelyben:

$$1 + \zeta = \frac{\lambda l_e}{d} = \frac{0{,}025 \cdot 26}{0{,}05} = 13.$$

Írható:

$$c_s = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 8}{13}} = \mathbf{3{,}48\ m/mp.}$$

Az időállandó tehát: $Z = \frac{c_s}{a_0} = \frac{3{,}48}{3{,}94} = \mathbf{0{,}88\ mp.}$

Az indítási idő pedig:

$$T_i = 2\,Z = 2 \cdot 0{,}88 = \mathbf{1{,}76\ mp.}$$

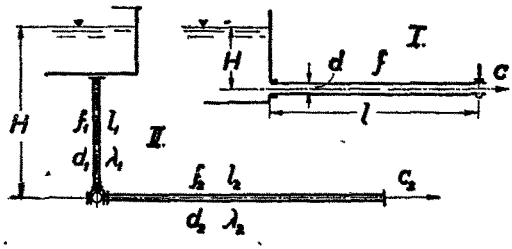
Az egyenletes üzemállapot tehát a tolózár nyitásától számított egy és háromnegyed másodperc múlva áll be.

74. példa. A *121. ábra* egy oly csővezetéket szemléltet, amelynek szakaszai különböző szelvényűek. Ilyenkor a sebességet és a gyorsulást a legkisebb keresztmetszetre vonatkoztatjuk.

A számítás menete a következő:

Az ábra jelöléseivel: $H = 10$ m, $l_1 = 8$ m; $d_1 = 0{,}2$ m, $\lambda_1 = 0{,}025$, $l_2 = 25$ m, $d_2 = 0{,}1$ m, $\lambda_2 = 0{,}03$.

Az **egyenértékű** csőhosszúság (az f_2 szelvényre):



121. ábra. Kétféle keresztmetszetű vízoszlop indítása

$$l_e = l_2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^5 l_1 + \frac{d_2}{\lambda_2} = 25 + \frac{0{,}027}{0{,}03} \cdot \frac{11}{32} \cdot 8 + \frac{0{,}1}{0{,}03} \cong \mathbf{28{,}5\ m.}$$

A tehetetlenségi nyomásmagasság kiszámítása a **redukált** csőhosszúság l_r bevezetésével egyszerűsíthető, amely $h_k = h_{k1} + h_{k2}$ és $f_1\,a_1 = f_2 a_2$ összefüggések felhasználásával a következő egyenletből fejezhető ki:

$$\frac{l_r}{g}\,a_2 = \frac{l_1}{g}\,\frac{f_2}{f_1}\,a_2 + \frac{l_2}{g}\,a_2.$$

A redukált csőhosszúság tehát:

$$l_r = l_2 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 l_1 = 25 + \frac{1}{4} \cdot 8 = \mathbf{27\ m.}$$

A kezdő gyorsulás ($a = a_2$) tehát:

$$a_0 = \frac{gH}{l_r} = \frac{98{,}1}{27} = \mathbf{3{,}64\ m/mp^2},$$

az üzemi sebesség pedig ($c = c_2$), ha

$$1 + \zeta = \lambda_2 \frac{l_e}{d_2} = 0{,}03 \cdot \frac{28{,}5}{0{,}1} = 8{,}55,$$

$$c_s = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{196{,}2}{8{,}55}} = \mathbf{4{,}8\ m/mp.}$$

Az időállandó:

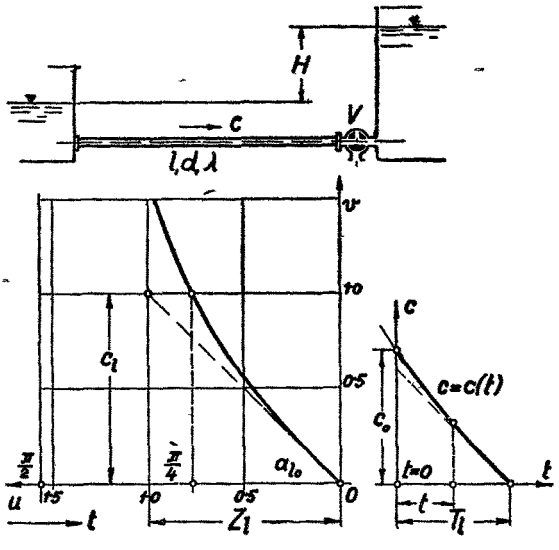
$$Z = \frac{c_s}{a_0} = \frac{4{,}8}{3{,}64} \cong 1{,}32 \text{ mp.}$$

és ezzel az indítás ideje: $T_i = 2Z = 2{,}64$ mp.

Vannak esetek, amikor a vízoszlop szabad gyorsulásának T tartama az indítási időnél rovidebb. Ilyenkor a sebesség legnagyobb értéke a (206/a) egyenletből $t = T$ helyettesítéssel számítható. A szakaszos uzemű vízemelő kos indítóutemének tartama is ezen az elven határozható meg, azzal a kulonbséggel, hogy most a legnagyobb sebességhez tartozó időt számíthatjuk [79].

80. A vízoszlop szabad kifutása

A csózáró-szerkezet átváltásakor számolni kell azzal az esettel is, amikor a mozgásban levő vízoszlop ellennyomás hatására lefékezódik. E jelenség leírását a teljesség okáért szintén ide iktatom, mert gyakorlati jelentősége a szakaszos uzemű berendezéseknél dombo-rodik ki. A vízoszlop szabad lassulásának megjelolésére a szilárd testek mechanikájában szokásos elnevezés: a **szabad kifutás** használata indokolt, ha az ellennyomás sztatikai értéke változatlan marad.



122. ábra. A vízoszlop lassulása. (Szabad kifutás)

A *122. ábra* egy l hosszúságú és $(1 + \zeta)$ veszteségtényezővel jellemezhető csővezetéket szemléltet, amelyben a V zárószerkezet átváltása előtt az áramlás sebessége: c_0. Az átváltás kovetkeztében a folyadékoszlopra állandó nagyságú (γH) sztatikai ellennyomás nehezedik, amely az áramlási veszteség fekező hatását fokozza. A lassításra bevezetett $a_l = -a$ jeloléssel írható:

$$\frac{l}{g} a_l = H + (1 + \zeta)\frac{c^2}{2g} = -\frac{l}{g}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}. \tag{208}$$

Ez a differenciálegyenlet is egyszerű alakra hozható egy Z_1 időállandó bevezetésével, amelynek ertelmezése az indításnál alkalmazott jellemzóktől eltérően a kovetkező:

Jelentse c_{l0} azt az uzemi sebességet, amelynél az áramlási veszteségmagasság éppen ugyanakkora, mint a H terhelőmagasság — $(h' = H)$ —, és legyen a_{l0} a víz-

oszlop lassulása a megállás pillanatában. Ekkor a **lassítás időállandója** azt az időtartamot adja, amely alatt a vízoszlop c_{l0} sebességét változatlan a_{l0} lassítással elvesztené.

A mértékadó üzemi sebesség: $c_{l0} = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}}$ (m/mp), (209)

a mértékadó lassítás: $a_{l0} = \frac{gH}{l}$ (m/mp²), (210)

a lassítás időállandója tehát :

$$Z_l = \frac{c_{l0}}{a_{l0}} = \frac{lc_{l0}}{gH} = \frac{2l}{(1+\zeta)c_{l0}} \quad \text{(mp)}. \tag{211}$$

A (208) egyenlet a c_{l0} sebesség bevezetésével a következő alakra hozható:

$$-\frac{l}{g}\frac{dc}{dt} = \frac{1+\zeta}{2g}(c_{l0}^2 + c^2) = \frac{(1+\zeta)c_{l0}}{2g}c_{l0}\left[1+\left(\frac{c}{c_{l0}}\right)^2\right].$$

A Z_l időállandó értékének helyettesítésével ez a differenciálegyenlet így írható:

$$-\frac{d(c/c_{l0})}{1+(c/c_{l0})^2} = \frac{dt}{Z_l}.$$

Az egyenlet megoldása a kezdőértékek ($t = 0$, $c = c_0$ és $v_0 = c_0/c_{l0}$) helyettesítésével:

$$t = Z_l\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{c_0}{c_{l0}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{c_{l0}}\right). \tag{212}$$

A szabad kifutás T_l tartamát a (212) egyenletből $c = 0$ helyettesítéssel kapjuk. Írható:

$$T_l = Z_l \operatorname{arc\,tg}\frac{c_0}{c_{l0}}. \tag{213}$$

A T_l időtartam bevezetésével a (212) egyenlet alábbi egyszerű alakba megy át:

$$\boxed{c = c_{l0}\operatorname{tg}\frac{T_l - t}{Z_l}}. \tag{214}$$

A (206) egyenlet mintájára a szabad kifutás törvénye is méretnélküli arányszámokkal fejezhető ki.

$u = (T_l - t)/Z_l$ és $v = c/c_{l0}$ helyettesítéssel írható:

$$u = \operatorname{arc\,tg} v; \quad \text{azaz: } v = \operatorname{tg} u. \tag{215}$$

75. példa. A *122. ábrában* vázolt csővezeték hossza: $l = 25$ m, átmérője: $d = 0{,}05$ m, egyenértékű csőhossza: $l_e = 28$ m és súrlódási tényezője: $\lambda = 0{,}025$.

A veszteségtényező: $1 + \zeta = \lambda l_e/d = 0{,}025 \cdot 28 : 0{,}05 = 14$.

A csőben $c_0 = 2$ m/mp kezdősebességgel áramló víz a zárószerkezet átváltása következtében $H = 6$ m sztatikai nyomásmagasság hatása alatt lassul.

A mértékadó lassítás (154) szerint:

$$a_{l0} = \frac{gH}{l} = \frac{9{,}81 \cdot 6}{25} = \mathbf{2{,}35\ m/mp^2}.$$

A mértékadó sebesség (209) szerint:

$$c_{l0} = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 6}{14}} = \mathbf{2{,}9\ m/mp};$$

a lassítás **időállandója** tehát:

$$Z_l = \frac{c_{l0}}{a_{l0}} = \frac{2{,}9}{2{,}35} = \mathbf{1{,}24\ mp}.$$

A lassítás tartama (213) szerint, $c_0/c_{l0} = 2 : 2{,}9 = 0{,}69$ értékkel:

$$T_l = Z_l \operatorname{arctg} (c_0/c_{l0}) = 1{,}24 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}69 = \mathbf{0{,}75\ mp}.$$

B) A VÍZOSZLOP SZABAD LENGÉSEI

81. Légüstök és medencék csillapítatlan lengései

Az ún. visszatérítő erőt szolgáltató rúgó a vele kapcsolt tömeggel lengőrendszert alkot, amelynek önlengésszámából következtetni lehet a jelenségek lefolyására. A folyadékoszlopot nyugalmi helyzetébe visszatérítő erők a vízmedencék és légüstök víztükrének kilendülésével arányosak, e rendszerek tehát szintén lengéseket végeznek, amelyek vizsgálatát a *123. ábrán* vázolt általános esetre vonatkoztatom, amikor az l hosszúságú, f keresztmetszetű csővezetékhez mindkét oldalon egy-egy légüst csatlakozik.

A vizsgálatot alább felsorolt feltételekkel korlátozzuk:

a) A folyadék **összenyomhatatlan.**

b) A lengőrendszer folyadékmennyisége **állandó,** vagyis sem hozzáfolyás, sem elfolyás nincsen. (Az ábrában: $V_3 = 0$.)

c) A légüstökben a hőmérséklet állandó ($\tau = 0$), vagyis a levegő állapotváltozása **izotermikus.**

d) A víztükrök kilengései a légüstökben csak akkorák, hogy a térfogatingadozás jó közelítéssel **arányos** maradjon a nyomásingadozással.

A Boyle—Mariotte-törvény differenciál-alakja ($p\,dW + W dp = 0$) ugyanis véges ΔW és Δp változásokra is jó közelítést ad, ha az elhanyagolt $\Delta p\ \Delta W$ szorzat a pW mellett igen kicsiny. (Így pl. 10%-os térfogatingadozásnál az elhanyagolás csak 1%-os, vagyis a közelítés a gyakorlat igényeit teljesen kielégíti).

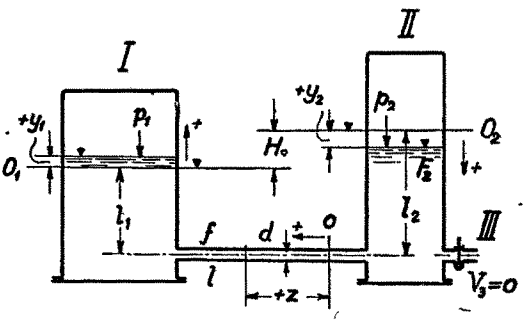
Ilyen feltételek mellett — az előjelek figyelmen kívül hagyásával — írható:

$$\left|\frac{\Delta p}{p_k}\right| = \left|\frac{\Delta W}{W_k}\right|.$$

e) A folyadéksúrlódás csillapítóhatását első közelítésben e vizsgálatnál szintén figyelmen kívül hagyjuk.

A *123. ábra* jelöléseivel az $m = l f \gamma/g$ tömegű (vízszintes) vízoszlop **nyugalmi** helyzetét a kétoldali nyomás egyenlősége ($p' = p''$) biztosítja. Ezt az egyensúlyállapotot biztosító víztükörállások (O_1, ill. O_2) a légüstökben uralkodó nyomások (abszolút) középértékét (p_{1k} és p_{2k}) is meghatározzák, amelyekre — az ábra szerint — H_0 szintkülönbség figyelembevételével írható:

$$p_{1k} = p_{2k} + \gamma H_0. \qquad (216)$$



123. ábra. A légüstök közé iktatott vízoszlop lengései

Ha a lengő-rendszer f keresztmetszetű vízoszlopát e nyugalmi állásából pl. balfelé z úttal kilendítjük, akkor a két légüst víztükre az F_1, ill. F_2 felülettől függő $y_1 = z f/F_1$ emelkedést, ill. $y_2 = z f/F_2$ süllyedést mutat, mert a kiszorított víztér fogat állandóságát: $F_1 y_1 = f z = F_2 y_2$ egyenlet fejezi ki. A következőkben a kilendüléseknek ezt az ábrán is megjelölt irányát látjuk el **pozitív előjellel.** Ezt a sebességekre és a gyorsulásokra is átvisszük. Az idő szerint differenciálva ugyanis írható:

$$F_1 \dot{y}_1 = f \dot{z} = F_2 \dot{y}_2 \quad \text{és} \quad F_1 \ddot{y}_1 = f \ddot{z} = F_2 \ddot{y}_2.$$

E kilendült állapotban a folyadékoszlop két vége között $p' - p'' = \gamma h_k$ nyomáskülönbséget találunk, amely a vízoszlopot nyugalmi helyzete felé (tehát negatív irányba) gyorsítja.

A h_k tehetetlenségi nyomásmagasság az adott esetben négy részből tevődik össze:

1. A baloldali légüstben a vízoszlop y_1 magassággal emelkedett.
2. A baloldali légüstben a nyomás a légtérfogat kisebbedése következtében $p_1 = p_{1k} + \Delta p_1$ értékére növekedett. Ez a nyomásemelkedés a $\Delta W_1 = F_1 y_1$ mértékű térfogatapadásnak a W_{1k} légtérfogathoz viszonyított értékéből számítható.
3. A jobboldali légüstben a vízoszlop y_2 süllyedést mutat.
4. Ennek következtében a W_{2k} térfogat $\Delta W_2 = F_2 y_2$ növekedésével arányos Δp_2 nyomáseséssel kell számolni. Írható:

$$h_k = \frac{p' - p''}{\gamma} = y_1 + \frac{p_{1k} + \Delta p_1}{\gamma} - (H_0 - y_2) - \frac{p_{2k} - \Delta p_2}{\gamma}. \qquad (217)$$

A (216) egyenlettel összevetve és a nyomásváltozásokat a térfogatváltozásokkal kifejezve, $p_{1k} = \gamma h_{1k}$ és $p_{2k} = \gamma h_{2k}$ jelölésekkel, a (217) egyenlet rendezése után a következő alakba megy át:

$$h_k = \left(1 + \frac{F_1 h_{1k}}{W_{1k}}\right) y_1 + \left(1 + \frac{F_2 h_{2k}}{W_{2k}}\right) y_2. \qquad (218)$$

A két víztükör kilengése a fentiek szerint a vízoszlop z kilengésével helyettesíthető, a tehetetlenségi nyomásmagasság pedig a vízoszlop $-\ddot{z}$ gyorsulásával a következő alakban fejezhető ki:

$$-h_k = \frac{1}{g}(l_1\ddot{y}_1 + l\ddot{z} + l_2\ddot{y}_2) = \frac{1}{g}\left(\frac{f}{F_1}l_1 + l + \frac{f}{F_2}l_2\right)\ddot{z}.$$

A **redukált csőhosszúság** bevezetésével (l. 74. példa) a legbonyolultabb esetek is visszavezethetők az egyenletes szelvényű l_r hosszúságú vízoszlop gyorsulására, ha a nagyobb szelvényű szakaszok hosszúságát a keresztmetszetek arányában megrövidítjük. Írható:

$$\boxed{l_r = l + \frac{f}{F_1}l_1 + \frac{f}{F_2}l_2} \quad \text{(m)}. \tag{219}$$

A helyettesítések elvégzése után a (218) egyenlet a következő:

$$\frac{l_r}{g}\ddot{z} + f\left(\frac{1}{F_1} + \frac{h_{1k}}{W_{1k}} + \frac{1}{F_2} + \frac{h_{2k}}{W_{2k}}\right)z = 0. \tag{220}$$

Ez a másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet a harmonikus lengésel alapegyenlete, amely a **redukált keresztmetszet** fogalmának bevezetésével veszi fel a legegyszerűbb alakját. A zárójeles tényező ugyanis négy felület reciprok értékének összege, amely (a párhuzamosan kapcsolt ellenállások mintájára) egy eredőnek a redukált keresztmetszetnek reciprok értékével helyettesíthető. ($W_k/h_k = W_k : p_k/\gamma$ kifejezés ugyanis szintén keresztmetszetet határoz meg, mint a légtérfogat és az abszolút nyomásmagasság hányadosa.)

A rendszer redukált keresztmetszetét kifejező egyenlet tehát:

$$\boxed{\frac{1}{F_r} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{h_{1k}}{W_{1k}} + \frac{h_{2k}}{W_{2k}}} \quad \text{(1/m}^2\text{)}. \tag{221}$$

Helyettesítés és rendezés után a (220) differenciálegyenlet a következő közismert alakba megy át:

$$\boxed{\ddot{z} + \alpha^2 z = 0}; \qquad \text{ahol:} \quad \boxed{\alpha^2 = \frac{fg}{F_r l_r}}. \tag{222}$$

Amint tudjuk, α a rendszer lengési szögsebessége, amely a folyadékoszlop redukált hosszúságától és keresztmetszetének a redukált keresztmetszethez viszonyított értékétől függ.

A redukált keresztmetszet értelmezése még szemléletesebbé válik, ha a *126. ábra* szerint a vízoszlopot légüstök helyett nyitott medencék közé iktatjuk, amelyek egyikének tükörfelülete akkora, hogy szintmagassága nem változik ($F_1 \cong \infty$; $1/F_1 \cong 0$). Nyitott medence tükrére az állandó légköri nyomás nehezedik, azaz:

$h_1 = h_2 = A$, a légtérfogat pedig: $W \cong \infty$. A (221) egyenlet négy tagjából tehát ilyenkor három kiesik és a redukált keresztmetszet a csővezetékhez kapcsolt nyitott medencének (kamrának) tükörfelületét jelenti.

A redukált keresztmetszet bevezetésével a lengőrendszer általános alakját az állandó szintmagasságról táplált csővezeték végére iktatott kiegyenlítőkamra esetére vezetjük vissza. Ennek tükörfelszíne a redukált keresztmetszetet adja.

A lengési szögsebesség (lengésszám) a rendszer mozgástörvényeit (a kezdőállapot ismeretével) egyértelműen meghatározza, így tehát e kérdés elméleti tárgyalását mellőzöm, és néhány gyakorlati példa ismertetésére szorítkozom.

A közismert lengéstani törvények alkalmazhatóságát még azzal is megkönnyítem, hogy a lengőrendszert helyettesítő ún. **matematikai inga** hosszúságát (L) is kifejezem:

$$\boxed{L = \frac{F_r}{f} l_r} \quad \text{(m)} \tag{223}$$

helyettesítéssel: a matematikai inga hosszát a csővezeték redukált hosszának a keresztmetszetaránnyal (áttétellel) módosított értéke szolgáltatja.

Az önlengés szögsebessége:

$$\alpha = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (\text{mp}^{-1}); \tag{224}$$

a féllengés ideje pedig:

$$\boxed{\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}} \quad \text{(mp)}. \tag{225}$$

76. példa. A *123. ábra* szerinti elrendezés egy dugattyús szivattyú nyomólégüstjéhez csatlakozó ún. **indítólégüstöt** ábrázol. Az összekötő csővezeték méretei: $l = 15$ m, $d = 0{,}2$ m, $f = 0{,}0314$ m². A nyomólégüst méretei: $F_1 = 0{,}196$ m², $W_{1k} = 0{,}120$ m³, az indítólégüsté: $F_2 = 0{,}5$ m², $W_{2k} = 0{,}4$ m³. Az abszolút nyomómagasságok: $h_{2k} = p_{2k}/\gamma = 90$ m, $H_0 = 5$ m és $h_{1k} = h_{2k} + H_0 = 95$ m.

A redukált csőhosszúság, $l_1 = 0{,}5$ m és $l_2 = 1{,}0$ értékkel:

$$l_r = l + \frac{f}{F_1} l_1 + \frac{f}{F_2} l_2 = 15 + \frac{314}{1960} \cdot 0{,}5 + \frac{314}{5000} \cdot 1 = \mathbf{15{,}143\ m.}$$

A redukált csőhosszúság helyett eszerint kis elhanyagolással a csőhosszúságot lehet helyettesíteni, ha $F_1 \gg f$ és $F_2 \gg f$.

A rendszer redukált keresztmetszete:

$$\frac{1}{F_r} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{h_{1k}}{W_{1k}} + \frac{h_{2k}}{W_{2k}} = \frac{1}{0{,}196} + \frac{1}{0{,}5} + \frac{95}{0{,}12} + \frac{90}{0{,}4} =$$
$$= 5{,}1 + 2 + 792 + 225 = 1024\ \text{m}^{-2},$$

azaz $\mathbf{F_r = 1 : 1024 = 0{,}00098\ m^2}$; azaz: **9,8 cm²**.

Az egyenértékű matematikai inga hossza:

$$\mathbf{L} = \frac{F_r}{f} l_r = \frac{9{,}8}{314} \cdot 15{,}143 = \mathbf{0{,}473\ m.}$$

Az önlengés szögsebessége:

$$\alpha = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}473}} = 4{,}55/\text{mp};$$

a percenkinti lengésszám tehát:

$$n_\alpha = \frac{60\,\alpha}{2\,\pi} = 9{,}55 \cdot 4{,}55 = 43{,}5/\text{perc},$$

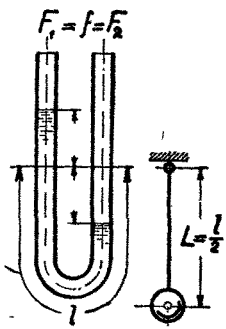
a féllengés ideje pedig:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{3{,}14}{4{,}55} = 0{,}69 \text{ mp}.$$

82. Az U alakú cső (folyadékmanométer)

Az egyenletes f keresztmetszetű U alakú csőbe zárt l hosszúságú folyadékoszlop lengéstörvényei az általános esetből $F_1 = F_2 = f$ helyettesítéssel és (nyitott csővégekre) $\Delta p_1 = \Delta p_2 = 0$ felvétellel vezethetők le.

A redukált keresztmetszet:



124. ábra. A folyadékoszlop lengései *U* alakú csőben

$$\frac{1}{F_r} = \frac{2}{f}, \quad \text{azaz:} \quad F_r = \frac{f}{2}.$$

és ezzel a matematikai inga hosszúsága: $L = \frac{l}{2}$;

a lengés szögsebessége pedig:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad (\text{mp}^{-1}). \tag{226}$$

Figyelmet érdemel, hogy a *(csillapítatlan) lengésszám a folyadék fajsúlyától független (tehát a higanyoszlopé ugyanakkora, mint a vízé). Ha tehát a folyadékmanométer önlegésszáma a gép ütemével rezonanciába kerül, akkor a nagy kilengések miatt leolvashatatlanná vált műszer lengési ideje csak az oszlop* **hosszúságának** *megváltoztatásával szabályozható.*

Kétféle folyadékkal töltött ún. differenciál-manométer *(10. ábra)* lengési szögsebességét a 81. pontban tárgyalt általános esetből már nem tudjuk leszármaztatni. Ilyenkor a **lengő tömeg** és a **rugóállandó** (a visszatérítő erőnek az egy méteres elmozdulásra eső megnövekedése) határozza meg a lengésszámot.

Ha az állandó f keresztmetszetű U cső $l = l_a + l_b$ hosszúságát a γ_a és γ_b fajsúlyú folyadék tölti ki, akkor a lengő tömeg:

$$m = \frac{f}{g}(l_a\gamma_a + l_b\gamma_b).$$

Az $y_1 = y_2 = y$ kilendüléshez tartozó visszatérítő erő pedig:

$$R = 2\,y\,f(\gamma_a - \gamma_b)$$

és ebből a rúgóállandó:

$$c = \frac{y}{R} = \frac{1}{2f(\gamma_a - \gamma_b)}.$$

A lengés szögsebessége (a lengéstanból közismert egyenlet szerint):

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{mc}} = \sqrt{\frac{2g(\gamma_a - \gamma_b)}{l_a\gamma_a + l_b\gamma_b}} \ (\mathrm{mp}^{-1}). \tag{227}$$

77. példa. A *10. ábra* szerinti **differenciálmanométer** teljes csőhosszúsága: $l = 1{,}80$ m. Az U csőbe töltött $\gamma_a = 13{,}6$ kg/l fajsúlyú higanyoszlop hosszúsága: $l_a = 0{,}8$ m, a két szárat kitöltő $\gamma_b = 1$ kg/l fajsúlyú vízoszlop együttes hosszúsága tehát: $l_b = 1{,}0$ m.

Az önlengés szögsebessége a (227) egyenlet szerint:

$$\alpha = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 12{,}6}{0{,}8 \cdot 13{,}6 + 1 \cdot 1}} = \sqrt{20{,}7} = \mathbf{4{,}55/mp}.$$

Abban az esetben, ha a higanyoszlop felett (víz helyett) **levegő** tölti ki a manométer két szárát, a lengés szögsebessége (226) szerint:

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{2g}{l_a}} = \sqrt{\frac{19{,}62}{0{,}8}} = \sqrt{24{,}5} = \mathbf{4{,}95/mp},$$

vagyis kereken 9%-kal megnagyobbodott.

83. A dugattyús szivattyú légüstje

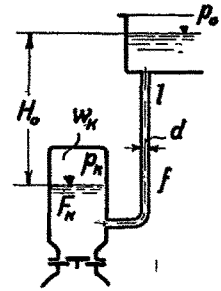
A dugattyús szivattyú vízszállításának kiegyenlítésére alkalmazott légüst a *125. ábra* szerint jóval kisebb keresztmetszetű csővezetékhez csatlakozik ($F_k \gg f$). A redukált felület egyenletéből — gyakorlatilag állandó H_0 sztatikai nyomásmagasság feltételezésével — három tag kiesik. A (221) egyenlet tehát így módosul:

$$F_r = \frac{W_k}{h_k}, \tag{228}$$

ahol (nyomólégüstnél) a nyomócső áramlási veszteségeinek figyelembevételével a közepes (abszolút) p_k nyomást meghatározó egyenlet:

$$h_k = \frac{p_k}{\gamma} = A + H_0 + h',$$

ahol A (m) a légköri myomásmagasság és h' (m) az egyenletesen áramló víz veszteségmagassága a nyomócső mentén.



125. ábra. Dugattyús szivattyú nyomólégüstje

Az önlengés szögsebessége, (222) és (228)-ból ($l_r \cong l$ helyettesítéssel):

$$\alpha = \sqrt{\frac{f h_k g}{l W_k}} \ (\mathrm{mp}^{-1}). \tag{229}$$

A dugattyús szivattyú egyenlőtlen vízszállítása következtében a légüst víztükre ütemesen emelkedik, mert a vízfelesleget elraktározza arra az időszakra, amikor a dugattyú az átlagosnál kevesebb vizet szállít. A víztükörre kényszerített lengések szögsebessége (ω_i) a szivattyútengely szögsebességének (ω) többszöröse, azaz $\omega_i = \varkappa\omega$, ahol a szivattyúrendszertől függően: $\varkappa = 1, 2, 4, 6$ lehet [78].

Rezonancia-veszély akkor van, ha az önlengés szögsebessége a kényszerített lengések szögsebességét megközelíti, azaz, ha $\alpha/\omega_i \cong 1$. A légüst légtérfogatának helyes méretezésével a rezonancia-veszély mindig elkerülhető.

78. példa. Egy $n = 100$/perc fordulatú egyszeres működésű dugattyús szivattyú légüstjében a víztükörre kényszerített lengések szögsebessége, $\varkappa = 1$ értékkel:

$$\omega_i = \varkappa \frac{2\pi n}{60} \cong 10{,}5/\text{mp}.$$

A közepes nyomásmagasság, $A = 10$ m, $H_0 = 65$ m és $h' = 2$ m értékkel:

$$h_k = A + H_0 + h' = 77 \text{ m}.$$

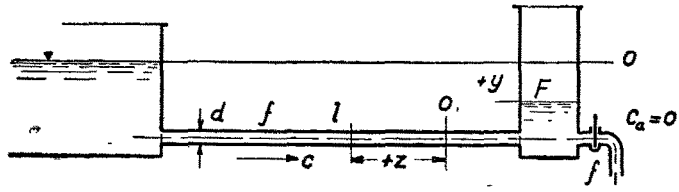
A nyomócső hossza: $l = 80$ m, keresztmetszete: $f = 0{,}00785$ m². Ha előírjuk, hogy a rendszer önlengésszáma a kényszerített lengésszám 10%-át ne lépje túl, azaz: $\alpha = 0{,}1\ \omega_i = 1{,}05$/mp legyen, akkor e feltételt kielégítő légtérfogat, (229) szerint:

$$\mathbf{W_k = \frac{f h_k g}{l \alpha^2} = \frac{0{,}00785 \cdot 77 \cdot 9{,}81}{80 \cdot 1{,}1} = 0{,}0675\ m^3},$$

azaz: 67,5 liter.

84. Lengések a kiegyenlítő medencében

Vízerőművek műcsatornáját kedvezőtlen terepviszonyok esetén zárt nyomócső (alagút) helyettesíti, amely a *126. ábra* szerint nyitott kiegyenlítő medencébe torkollik. A vízgyűjtő (tároló) medence tükörfelszíne akkora ($F_1 \cong \infty$), hogy szint-



126. ábra. Aknás kiegyenlítő medence elrendezése

változást nem szenved. A rendszer redukált felülete tehát ($F_2 = F$ és $l_r \cong l$ helyettesítéssel):

$$F_r = F,$$

és ezzel az önlengés szögsebessége:

$$\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{fg}{Fl}}} \quad (\text{mp}^{-1}). \tag{230}$$

A kiegyenlítő medence víztükre lengő mozgással közelíti meg a *126. ábrán* megjelölt egyensúlyhelyzetét. Bár e mozgás csak akkor kezdődik, amikor a vízerőműhöz vezető cső záródik ($c_a = 0$), a számításkor mégis abból indulunk ki, hogy a víztükör már lengésben van.

Ha tehát a zárás pillanatában ($t = 0$) a víz sebessége a csőben $c = c_0$ volt, a víztükör pedig $y = y_0$ lehajlást mutatott, akkor a kilengés legnagyobb értékét (Y) azzal a meggondolással lehet meghatározni, hogy a $t = 0$ pillanatban a víztükör már **emelkedik,** tehát a legnagyobb kilengés óta már t_0 időnek kellett eltelnie.

A víztükör lengő mozgását kifejező egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} y &= Y \cos \alpha\,(t + t_0), \\ \text{a tüköremelkedés sebessége pedig:} & \\ \dot{y} &= -Y \alpha \sin \alpha\,(t + t_0), \end{aligned}\right\} \qquad (231)$$

ahol a tükör sebességét a vízoszlop sebességével kifejezve, az előjelek figyelembevételével írható:

$$\dot{y} = \frac{f}{F}\dot{z} = -\frac{f}{F}c. \qquad (232)$$

A (231) egyenletpárból $t = 0$ helyettesítéssel (rendezés és négyzetre emelés után) a legnagyobb kilengés:

$$Y = \sqrt{y_0^2 + (\dot{y}_0/\alpha)^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{f c_0}{F \alpha}\right)^2}, \qquad (233)$$

az előresietés idejét jellemző $\varphi_0 = \alpha t_0$ fázisszög pedig:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-\dot{y}_0}{y_0 \alpha} = \frac{f c_0}{F y_0 \alpha}. \qquad (234)$$

A víztükör lengéseinek szemléletes leírása a *127. ábra* szerint többféle lehet.

A sebességet az út függvényében a $c = c(y)$ görbe ábrázolja, amely a méretarányok alkalmas választásával ellipszis helyett kör alakú.

A víztükör legnagyobb kilengése ugyanis Y, legnagyobb sebessége pedig a (231) szerint: $(\dot{y})_{\max} = Y \alpha$. A sebességet tehát $\alpha = 1$ méretarányban szintén az α szögsebességgel forgó Y rádiuszvektor vetülete ábrázolja.

A két egymásra merőleges vetület ábrázolása helyett az **út és a sebesség időbeli változása** az $y = y(t)$ és $\dot{y} = \dot{y}(t)$ függvényábrákkal is szemléltethető. Ilyenkor az átvetítés megkönnyítésére a kördiagramba az $Y\alpha$ sebességi rádiuszvektort is berajzoljuk (90°-os előresietési szöggel).

79. példa. A *127. ábra* szerint elrendezett kiegyenlítő medence keresztmetszete: $F = 50$ m², a nyomócső hossza: $l = 4000$ m, keresztmetszete: $f = 3{,}14$ m².

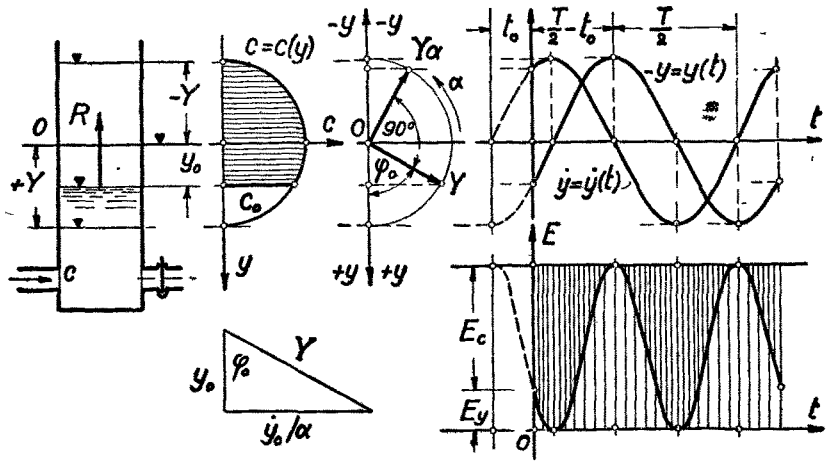
Az önlengés szögsebessége:

$$\alpha = \sqrt{\frac{fg}{Fl}} = \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 9{,}81}{50 \cdot 4000}} = \mathbf{0{,}0124/mp.}$$

Egy féllengés ideje tehát:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{3{,}14}{0{,}0124} = \mathbf{254}\ \textbf{mp.}$$

Ha a zárás pillanatában a víztükör lesüllyedése: $y_0 = 8{,}0$ m, a csőben áramló víz sebessége pedig: $c_0 = 2$ m/mp volt (vagyis a zárás előtt a nyomócső $V_0 = fc_0 =$



127. ábra. Aknás kiegyenlítő medencével kapcsolt vízoszlop munkaképességének időbeli változása

$= 3{,}14 \cdot 2 = 6{,}28$ m³/mp vizet szállított), akkor a legnagyobb kilengés a (233) egyenlet szerint, $F/f = 15{,}9$ és

$$\frac{\dot{y}_0}{\alpha} = \frac{fc_0}{F\alpha} = \frac{2}{15{,}9 \cdot 0{,}0124} = 10{,}1 \text{ m értékkel:}$$

$$Y = \sqrt{8^2 + 10{,}1^2} = \mathbf{12{,}9}\ \textbf{m},$$

a fázisszög pedig (234) szerint:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{10{,}1}{8} = 1{,}27; \text{ azaz: } \varphi_0 = 0{,}9 = \mathbf{51^\circ 40'}.$$

Az előresietés ideje:

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{\alpha} = \frac{0{,}9}{0{,}0124} \cong \mathbf{72}\ \textbf{mp.}$$

Az első (negatív) kilengés eléréséhez szükséges időtartam eszerint:

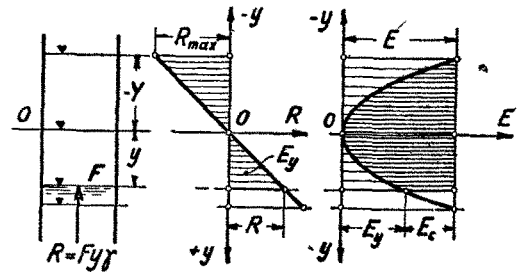
$$t_1 = \frac{T}{2} - t_0 = 252 - 72 = \mathbf{180}\ \textbf{mp} = \mathbf{3}\ \textbf{perc.}$$

85. A lengőrendszer munkaképessége

A **csillapítatlan** lengés a lengőrendszer munkaképességét nem apasztja, mert az energiaátalakulások **veszteségmentesek.**

A munkaképesség állandósága a *128. ábra* kapcsán az alábbi energetikai vizsgálattal is igazolható. Ez egyúttal szemléletes képet ad a periodikusan ismétlődő energiaátalakulások lefolyásáról is.

A *128. ábra* szerint a középállásból y mélységbe kilendített F felületű víztükörre nehezedő visszatérítő nyomás: $y\gamma$, az y kilendüléssel arányos visszatérítő erő tehát: $R = F\,\gamma\,y$.



128. ábra. **A munkaképesség útmenti változása a kiegyenlítő medencében**

A víztükör kilendítésére fordított munka, amelyet a rúgóval helyettesíthető rendszer potenciális energia (rúgópotenciál) alakjában raktároz, a háromszög alakú munkaterületből:

$$E_y = \frac{F\gamma}{2} y^2 \quad \text{(mkg)}. \tag{235}$$

A rendszer munkaképességének másik része az $m = l f \gamma/g$ tömegű vízoszlop lendülete, amely c sebességnél:

$$E_c = \frac{l f \gamma}{2g} c^2 \quad \text{(mkg)}. \tag{236}$$

A rendszer teljes energiatartalma: $E = E_y + E_c$ állandó marad, oly értelemben, hogy a mozgás addig tart, amíg a vízoszlop teljes lendülete potenciális energiává nem alakult át ($E_c = 0$, $E_y = E$). Ha tehát a rendszer munkaképességét ismerjük, akkor abból a legnagyobb (Y) kilendülés is kiszámítható. $E_y = E$ és $y = Y$ helyettesítéssel, a (235) egyenletből:

$$Y = \sqrt{\frac{2E}{F\gamma}} \quad \text{(m)}. \tag{237}$$

Hasonló meggondolással számítható ki a (236) egyenletből a vízoszlop legnagyobb (c_{max}) sebessége is, amely akkor jön létre, amikor a rendszer egész munkaképessége **lendületté** alakult át. $E_y = 0$, $y = 0$ és $E_c = E$ helyettesítéssel írható:

$$c_{max} = \sqrt{\frac{2gE}{l f \gamma}} \quad \text{(m/mp)}. \tag{238}$$

Az energia állandósága a (235) és (236) egyenlet összeadásával igazolható, ha a (236) egyenletben, $c = -\dot{y}\,F/f$ helyettesítés után, az y és $\dot{y}$ pillanatnyi

értékeit a (231) egyenletcsoport szerint az idő függvényében fejezzük ki. Írható:

$$E = \frac{F\gamma}{2} Y^2 \cos^2\alpha\,(t + t_0) + \frac{lf\gamma}{2g}\left(\frac{F}{f}\right)^2 \alpha^2 Y^2 \sin^2\alpha\,(t + t_0).$$

Ha α^2 értékét a (230) egyenletből a második tagba behelyettesítjük, akkor rövidítés után, a két szögfüggvény négyzetösszegének közös szorzója kiemelhető. Az eredmény:

$$\boxed{E = \frac{F\gamma}{2} Y^2} \quad \text{(mkg)}. \tag{239}$$

A két energia összegének állandóságát a *127. ábra* az idő függvényben is szemlélteti.

80. példa. A 79. példában körülírt $F = 50$ m² keresztmetszetű kiegyenlítőmedence víztükre a zárás pillanatában ($t = 0$), $y_0 = 8{,}0$ m lesüllyedést mutatott. A víztükörre nehezedő visszatérítő erő:

$$R_0 = F\gamma y_0 = 50 \cdot 1000 \cdot 8 = 400\,000 \text{ kg},$$

a kitéréssel tárolt munkaképesség tehát (235) szerint:

$$\mathbf{E}_{y_0} = \frac{R_0 y_0}{2} = \frac{400\,000 \cdot 8}{2} = \mathbf{1\,600\,000 \text{ mkg}}.$$

Az $l = 4000$ m hosszú, $f = 3{,}14$ m² keresztmetszetű vízoszlop kezdősebessége $c_0 = 2$ m/mp. (236) szerint a lendület:

$$\mathbf{E}_{c_0} = \frac{lf\gamma}{2g} c_0^2 = \frac{4000 \cdot 3{,}14 \cdot 1000 \cdot 4}{19{,}62} = \mathbf{2\,560\,000 \text{ mkg}}.$$

A lengő rendszer teljes munkaképessége tehát:

$$\mathbf{E} = E_{y_0} + E_{c_0} = \mathbf{4\,160\,000 \text{ mkg}}.$$

A legnagyobb kilengés, a (237) egyenletből:

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{2E}{F\gamma}} = \sqrt{\frac{8\,320\,000}{50\,000}} = \mathbf{12{,}9 \text{ m}}.$$

Ez az eredmény természetesen megegyezik a 79. példában más úton kiszámított értékkel.

86. A sebesség négyzetével csillapodó lengések

A 81. pontban felsorolt korlátozó feltételek közül a súrlódás figyelmen kívül hagyása torzítja el leginkább a lengési jelenségek várható lefolyását, különösen akkor, ha nagyobb kilengésekről van szó. Minthogy a folyadéksúrlódás a sebesség négyzetével növekszik, tehát a nagyobb sebességű lengések igen erőteljes csillapodást szenvednek: a lengőrendszer munkaképessége rohamosan felmorzsolódik.

A jelenség szabatosabb vizsgálatára különösen a vízerőművek kiegyenlítő medencéjének méretezésénél van szükség, mert a csillapítás figyelmen kívül hagyása erős túlméretezésre vezet. Erre való tekintettel a számítást a *126. ábrában* szemléltetett elrendezésre vonatkoztatom, de kiemelem azt is, hogy a kapott eredmények az általános esetre is érvényesek, mindössze csak a medence-keresztmetszet helyébe a lengőrendszer redukált keresztmetszetét kell helyettesíteni.

Itt említem meg, hogy a **sebességgel arányos csillapítás** törvényei oly lényeges eltéréseket mutatnak a folyadéksúrlódással szemben, hogy a közelítésnek ezt a szokásos módját a gyakorlat számára értéktelennek kell minősíteni. Kétségtelen, hogy a sebességgel arányos súrlódó erő bevezetése a lengési feladat analitikai tárgyalását megkönnyíti, de a kapott eredmények egészen hamis képet adnak a jelenség várható lefolyásáról. (A lengések a valóságban *nem* izokrónok, azaz nem azonos a lengési idejük, továbbá a kilengések kisebbedése *nem* logaritmikus s í. t.)

Mindazokban az esetekben tehát, amikor a jelenség vizsgálatánál a csillapítás figyelmen kívül nem hagyható, csak a **sebesség négyzetével arányos** súrlódásra alapított számításnak lehet gyakorlati jelentősége.

87. A kiegyenlítőmedence csillapított lengései

A *126. ábra* kapcsán tárgyalt lengőrendszer l hosszúságú folyadékoszlopa a 81. pontban felsorolt feltételektől *eltérően*, áramlási veszteségeket is szenved, amelyen a csővezeték d átmérőjével és egyenértékű l_e hosszúságával kifejezett veszteségtényezővel jellemezhetők, és az áramlás sebességének négyzetével arányosak. Írható:

$$h' = (1 + \zeta)\frac{c^2}{2g} = \lambda \frac{l_e}{d} \frac{c^2}{2g}.$$

Ez a veszteségmagasság okozza a kiegyenlítő medence víztükrének lesüllyedését. Ha az áramlás állandósult ($c = c_0$), akkor a szintkülönbség is állandó ($y_0 = h_0'$).

Ez az egyenletes üzemállapot a $t = 0$ időpontban a vízerőmű vízfogyasztásában beálló hirtelen változás következtében megszűnik, mert a medence víztükre új egyensúlyhelyzetét csak lengőmozgással közelítheti meg.

Valahányszor tehát a vízerőmű nyomócsövében az áramlás sebessége (c_a) megváltozik, a víztükör csillapodó lengőmozgása is megindul.

A *126. ábrában* a vízfogyasztás megváltozása a nyomócső **részleges** vagy **teljes zárásával** szemléltethető, de természetesen a lengőrendszer mozgása zárás helyett **nyitás** esetén is megindul.

A víztükör mozgástörvényeit az általános esetre, amikor t időpontban a medencébe $f c$ vízmennyiség érkezik és $f c_a$ mennyiség távozik, a *126. ábra* jelöléseivel a következő két alapegyenletből lehet leszármaztatni:

$$F\dot{y} = f(c_a - c) \tag{I}$$

$$y = h_a + h' = \frac{l}{g}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} + (1 + \zeta)\frac{c^2}{2g}. \tag{II}$$

Az (I) egyenlet az **anyag megmaradásának** vagy az áramlás folytonosságának törvényét fejezi ki, a (II) egyenlet pedig (202) szerint a gyorsuló vízoszlop **energiamérlege,** amely szerint az y esés egyik részét az áramlási veszteség (h') emészti fel, másik része pedig a vízoszlop tömegét gyorsítja, azaz annak tehetetlenségi nyomásmagasságával tart egyensúlyt.

Teljes zárás esetére az (I) egyenletből: $c = -\dot{y}\,F/f$ és $\mathrm{d}c/\mathrm{d}t = -\ddot{y}\,F/f$. Helyettesítés után tehát a (II) egyenlet így írható:

$$\frac{lF}{gf}\,\ddot{y} - \frac{(1+\zeta)\,F^2}{2g\,f^2}\,\dot{y}^2 + y = 0; \quad \text{azaz:} \quad \ddot{y} - \frac{1}{2}\,\frac{(1+\zeta)\,F}{f\,l}\,\dot{y}^2 + \frac{f\,g}{F\,l}\,y = 0.$$

Az y tényezője a **csillapítatlan lengés szögsebessége,** mert (230) szerint:

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{f\,g}{F\,l}} \qquad (\mathrm{mp}^{-2}).$$

Az $\dot{y}^2$ tényezőjének kétszeresét **csillapítási tényezőnek** nevezhetjük. Írható:

$$\boxed{m = \frac{F\,(1+\zeta)}{f\,l}} \qquad (\mathrm{m}^{-1}). \tag{240}$$

Ezekkel a jelölésekkel a csillapított lengések differenciálegyenlete:

$$\boxed{\ddot{y} - \frac{m}{2}\,\dot{y}^2 + \alpha^2 y = 0.} \tag{241}$$

Ez az egyenlet (zárt alakú) **általános** megoldást nem adhat, mert a sebesség minden féllengés után **előjelet vált,** amit a differenciálegyenletben a négyzetes tag nem juttat kifejezésre. A (241) egyenlet csak az **első** és általában a **páratlan** számú féllengésekre érvényes. A **páros** számú féllengésekre **pozitív** előjelű második taggal új egyenletet kell felírni, mert a csillapító erőnek a sebességgel együtt kell előjelet váltania. Ez azonban a feladat megoldása szempontjából csak annyit jelent, hogy a sebesség pozitív és negatív értéke más integrálási állandót is ad, vagyis a határfeltételeket kielégítő egyenlet érvényessége mindig csak egy féllengésre korlátozott, ennélfogva a számítást **lépésről lépésre** kell elvégezni.

A differenciálegyenletet $x = \dot{y}^2$ helyettesítéssel oldjuk meg, ahol: $\dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$.

Differenciálva:
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\,\dot{y}\,\ddot{y}$$

és ebből:
$$\ddot{y} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{\dot{y}} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

A (241) egyenletbe helyettesítve, rendezés után írható:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - mx + 2\,\alpha^2 y = 0 \tag{242}$$

Ennek az inhomogén differenciálegyenletnek megoldása:

$$x = C(y) \cdot e^{my}, \tag{243}$$

ahol a $C(y)$ az állandók variálásának módszerével határozható meg. Írható:

$$\frac{dx}{dy} = mC(y)\, e^{my} + \frac{dC(y)}{dy}\, e^{my}$$

és (242)-be helyettesítve, rendezés után:

$$\frac{dC(y)}{dy} = -2\alpha^2 y\, e^{-my}$$

Integrálva:
$$C(y) = \frac{2\alpha^2}{m^2}(my + 1)\, e^{-my} - C.$$

A (243)-ba helyettesítve, a megoldás tehát:

$$\boxed{x = \dot{y}^2 = \frac{2\alpha^2}{m^2}(my + 1) - Ce^{my}} \tag{244}$$

Ez az egyenlet a víztükör sebességét az út függvényében fejezi ki, de csak akkor használható, ha az integrálási C állandót is ismerjük.

A C állandó meghatározására alkalmas eljárások közül a *legegyszerűbb* azon a meggondoláson alapszik, hogy a $t = 0$ pillanatban a víztükör lesüllyedését az áramlási veszteségmagasság okozta, azaz $y_0 = h_0'$. Eszerint a **vízoszlopnak az első pillanatban még nem lehet gyorsulása,** vagyis $h_{a0} = y_0 - h_0' = 0$.

A (241) egyenlet tehát a kezdőértékekkel ($t = 0$; $\ddot{y}_0 = 0$; $y_0 = h_0'$) a következő alakba megy át:

$$\frac{m}{2}\dot{y}_0^2 - \alpha^2 y_0 = 0; \quad \text{azaz:} \quad \dot{y}_0^2 = \frac{2\alpha^2}{m} y_0. \tag{245}$$

Ha ezeket a kezdőértékeket a (244)-be helyettesítjük, akkor egyszerűsítés és rendezés után, az integrálási állandó:

$$C = \frac{2\alpha^2}{m^2} e^{-my_0}; \tag{246}$$

a (244) egyenlet pedig:

$$\dot{y}^2 = \frac{2\alpha^2}{m^2}(my + 1 - e^{m(y-y_0)}). \tag{247}$$

Ebből az egyenletből $\dot{y} = 0$ helyettesítéssel az egymást követő **legnagyobb kilengések** nagyságát lehet meghatározni.

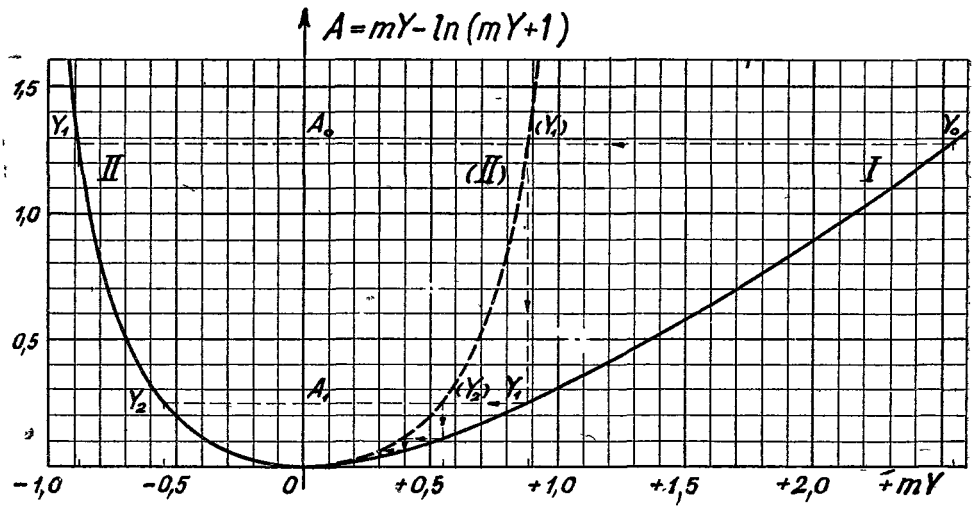
88. A víztükör legnagyobb kilengései

A kiegyenlítő medence méretezése szempontjából első sorban annak a megállapítására van szükség, hogy az első negatív kilengés milyen nagy, vagyis a víztükörnek mekkora legnagyobb felemelkedésével kell számolni.

Mises szerint a (247) egyenletet, $\dot{y} = 0$ helyettesítés után, **logaritmikus** alakban használjuk. Rendezés után, a legnagyobb kilengésekre, $y = Y$ jelölés bevezetésével írható:

$$mY - \ln(mY + 1) = m y_0; \tag{248}$$

ahol az egyenlet jobb oldala: $my_0 = A_{01}$ az első féllengés állandója, amely csak addig maradhat változatlan, amíg az $\dot{y}$ sebesség előjelét megtartja.



129. ábra. A sebesség négyzetével csillapított lengőrendszer legnagyobb kitérései. (*Mises*-féle görbe)

Általánosságban a (248) egyenlet a következő alakban írható:

$$f(Y) = mY - \ln(mY + 1) = A; \tag{248/a}$$

ahol az A állandót mindig az **előző féllengés** negatív kilengéséből lehet kiszámítani, ha azt a (248/a) egyenletbe **pozitív** előjellel helyettesítjük.

A csillapítóerő előjelcseréje helyett ugyanis a (241) egyenlet **változatlan alakban** is használható, ha a koordináta-rendszer **ordinátatengelyét forgatjuk át** minden féllengés után. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor minden féllengés útjának a **középszint felé** irányuló szakaszát, az ún. *belengést* minősítjük **pozitívnak,** a középszinttől **távolodó** szakaszát pedig *negatív* előjellel kell számításba venni. Minden féllengés útját tehát *befelé pozitívnak* és *kifelé negatívnak* kell minősíteni.

Jól áttekinthető képet és gyors megoldást eredményező eljárást kapunk, ha az $f(Y)$ előre kiszámított értékeit táblázatba vagy függvényábrába foglaljuk.

A *129. ábra* a (248/a) egyenlettel meghatározott $f(Y)$-görbét célszerűen az mY abszcisszák függvényében adja. A görbének a negatív abszcisszákhoz tartozó $(-mY)$ ágának tükörképét az átvetíthetőségre való tekintettel — (II) jelöléssel — a pozitív oldalra is átrajzoltam.

Ennek a negatív ágnak jellegzetessége, hogy az $mY = -1$ helyen a végtelenbe nyúlik, amiből azt a rendkívül érdekes következtetést vonhatjuk le, hogy az **első negatív kilengés** abszolút értéke sohasem lehet nagyobb $1/m$-nél. Ezt az $Y_\infty = 1/m$ nagyságú **kilengési korlátot** a berendezés jellemzői egyértelműen meghatározzák.

A (240) egyenlet alapján:

$$Y_\infty = \frac{fl}{F(1+\zeta)} \quad \text{(m)}. \tag{249}$$

A sebesség négyzetével arányos csillapításnak tehát az a jellegzetessége, hogy **bármekkora volt is a kezdő kilengés, a víztükör felemelkedése sohasem lépheti túl** a fentebbiek szerint könnyen előre számítható **kilengési korlátot.**

Ez a határérték már egymagában is értékes útmutatást ad a kiegyenlítő medence méretezéséhez, mert teljes biztonsággal kijelöli a víztükör felemelkedésének felső korlátját.

A függvényábrából az egymást követő legnagyobb kilengések pontosabb értéke is kiolvasható. A kezdőfeltételekből kiszámított A_{01} állandó magasságában a görbe két ágán megtaláljuk az Y_0 és Y_1 kilengéseket meghatározó mY_0 és $-mY_1$ abszcisszákat. Utóbbinak pozitív előjelű tükörképe viszont a görbe pozitív ágán jelöli ki a következő féllengésre érvényes A_{12} állandónak ordinátamagasságát, amely az Y_2 kilengés meghatározására vezet. Maga az eljárás az I és (II) görbe összetartozó pontjainak vízszintes és függőleges átvetítésével — (egyetlen lépcső-vonal megrajzolásával) — végezhető el, ha a kezdőértéket ismerjük.

81. példa. Egy vízerőmű $l = 4000$ m hosszú nyomócső-alagútja: $d = 4{,}0$ m átmérőjű ($f = 12{,}57$ m²). A veszteségtényező: $(1+\zeta) = 15$, a kiegyenlítő medence keresztmetszete: $F = 50\ f = 628{,}3$ m². Az áramlás kezdősebessége: $c_0 = 3$ m/mp.

Az áramlási veszteségmagasság (mint a víztükör leszállásának kezdőértéke):

$$y_0 = h_0' = (1+\zeta)\frac{c_0^2}{2g} = 15 \cdot \frac{9}{19{,}62} = \mathbf{6{,}86\ m.}$$

A csillapítás tényezője (240) szerint:

$$m = \frac{F(1+\zeta)}{fl} = \frac{50 \cdot 15}{4000} = \mathbf{0{,}187/méter.}$$

A (249) egyenletből azonnal megállapítható, hogy az első negatív kilengés semmi esetre nem lehet nagyobb alábbi határértéknél:

$$Y_\infty = \frac{1}{m} = \frac{1}{0{,}187} = \mathbf{5{,}35\ méter.}$$

A kilengések várható értékeit a *129. ábrából* a következő kezdő állandóval kapjuk:

$$A_{01} = m y_0 = 0{,}187 \cdot 6{,}86 = \mathbf{1{,}28.}$$

A függvényábrából leolvasott értékek a következők:

$$\begin{array}{llll} mY_0 = 2{,}55 & \text{azaz:} & Y_0 = 13{,}60 & \text{m} \\ mY_1 = 0{,}88 & & Y_1 = 4{,}70 & \text{m} \\ mY_2 = 0{,}55 & & Y_2 = 2{,}95 & \text{m} \\ mY_3 = 0{,}40 & & Y_3 = 2{,}14 & \text{m} \end{array}$$

Figyelemre méltó a négyzetes csillapítás ama jellegzetessége is, hogy az első kilengések erőteljes lefékezését követően a folyadéksúrlódás hatása mindinkább gyengül. Bizonyos idő múlva a lengés sebessége annyira kisebbedik, hogy e kis lengéseknél a súrlódás már elhanyagolható, ami azt is jelenti, hogy a lengés szögsebessége a csillapítatlan értékkel később már csaknem pontosan összevág. Az adott esetben kis lengésekre:

$$\alpha = \sqrt{\frac{fg}{Fl}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{50 \cdot 4000}} = 0{,}007/\text{mp}.$$

Egy féllengés ideje tehát:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{3{,}14}{0{,}007} = 450 \text{ mp}.$$

Itt jegyzem meg, hogy az *első* féllengés időtartama az adott esetben kb. 10%-kal hosszabb.

89. A víztükör lengéstörvényei. A lengési idő meghatározása

A négyzetes csillapítású lengések törvényét a (247) egyenletből lehet leszármaztatni, amely a **sebesség négyzetét** az **út** függvényében adja. Négyzetgyökvonás után a sebesseg reciprok értéke is kifejezhető az út függvényében, s abból integrálással az idő is kiadódik.

$\dot{y} = dy/dt$-ből ugyanis írható:

$$t_2 - t_1 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\dot{y}}\, dy \quad \text{(mp)}. \tag{250}$$

A (250) egyenlet **inverz** alakja az utat az idő függvényében fejezi ki, s ezzel a víztükör mozgását is leírja, mert abból az idő szerinti differenciálással a sebesség és a gyorsulás is leszármaztatható.

Ez a számítási eljárás hosszadalmas és áttekinthetetlen, ennélfogva a műszaki gyakorlat számára nem használható. Ezért a függvényábrák kényelmes felrajzolására vezető eljárást dolgoztam ki, amely feleslegessé teszi a görbe pontjainak felrakásához szükséges számítások elvégzését.

A (247) egyenlet alkalmas átrendezésével ugyanis oly egyszer s mindenkorra előre felrajzolható **alapgörbe** egyenletéhez jutunk, amelyből a lengőrendszer minden jellemzője leolvasható.

90. A lengőrendszer alapgörbéje*

A (247) egyenlet

$$h' = (1 + \zeta)\frac{c^2}{2g} = \frac{m}{2}\,\frac{\dot{y}^2}{\alpha^2}$$

*) Az alapgörbe és a belőle vonható következtetések kidolgozása egyike Dr. Pattantyus professzor elméleti kutató munkássága kiemelkedő eredményeinek, mellyel a műszaki tudományt gazdagította. Ezért — a szerző tiszteletére — javasoljuk a jövőben az alapgörbének **Pattantyús-féle görbe** elnevezését. (Szerk.)

helyettesítéssel alábbi áttekinthetőbb alakra hozható:

$$m\,h' = m\,y + 1 - e^{m(y-y_0)}. \qquad (247/a)$$

Ennek az egyenletnek az ad kettős energetikai értelmezést, hogy a h' **veszteségmagasság** a vízoszlop **lendületével** is arányos és ennélfogva a lendület útmenti változását is kifejezi.

Az **első féllengésre** érvényes: $m\,y_0 = A_{01}$ állandó helyettesítésével vezessük be az alábbi független változót:

$$x = m\,(y - y_0) = m\,y - A_{01}. \qquad (251)$$

Ezzel:

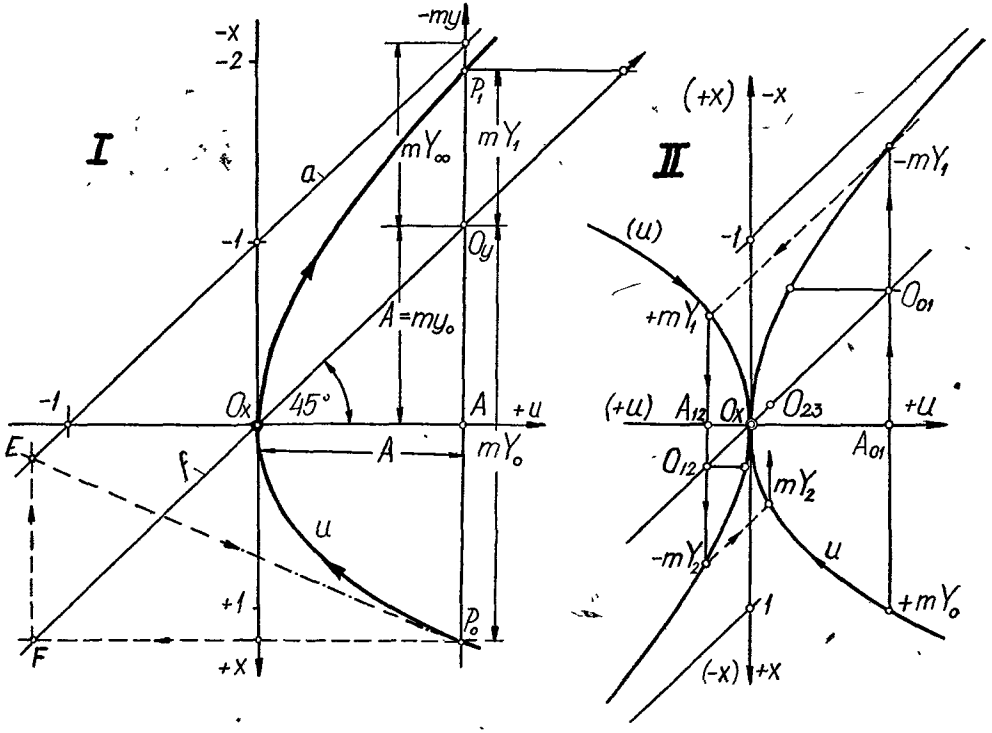
$$m\,h' = x + A_{01} + 1 - e^x = A_{01} - (e^x - x - 1) = A_{01} - u,$$

ahol az alapgörbe egyenlete:

$$\boxed{u = e^x - x - 1}. \qquad (252)$$

Az $u = u\,(x)$ alapgörbe a lengőrendszer méreteitől független és ezért előre felrajzolható, éppen úgy, mint a *129. ábrában* bemutatott *Mises*-féle görbe.

Az alapgörbe alakját a *130. ábra* mutatja.



130. ábra. A négyzetesen csillapodó lengőrendszer alapgörbéje. *(Pattantyús-féle görbe)*

A görbét az x tengely a koordináta-rendszer 0_x kezdőpontjában érinti. A görbének — éppen úgy, mint a *Mises*-féle görbének is — csak pozitív u koordinátái vannak.

A görbének mindkét ága a végtelenbe nyúlik, negatív ágának aszimptotája a két tengely negatív egységpontjait összekötő 45°-os hajlású egyenes.

A görbe felrajzolását megkönnyíti a felrakott pontokhoz tartozó $\overline{EP_0}$ érintő szerkesztése is, amely az $f = -x$ (45°-os hajlású) negatív felezősugár F pontjáról az $a = -x - 1$ aszimptotára átvetített E ponton megy keresztül.

Az alapgörbe x rendezője az A állandó hozzáadásával a kilengések $m\,y$ viszonylagos értékét jellemzi, az u rendező pedig, az A állandóból levonva, a veszteségmagasság viszonylagos értékét ($m\,h'$) adja, azaz:

$$m\,y = A + x \quad \text{és} \quad m\,h' = A - u. \tag{253}$$

Ez más fogalmazásban azt is jelenti, hogy az (x, u) koordináta-rendszer 0_x kezdőpontját az $f = -x$ felezősugár mentén ($x_0 = -A$ és $u_0 = A$ párhuzamos eltolással) 0_y-ba kell áthelyezni.

Ezt az 0_y kezdőpontot a féllengésenkint kisebbedő A állandó egyértelműen kijelöli. Az első féllengés A_{01} állandójára felírt (251) egyenlet ugyanis új állandók helyettesítésével a további féllengésekre is érvényes marad.

Az 0_y kezdőpont a víztükör nyugalmi egyensúlyhelyzetét ($y = 0$) jellemzi, és az alapgörbe $\overline{P_0P_1}$ húrjával szemléltetett féllengés útját egy pozitív és egy negatív kilengésre osztja.

Az $u = u(x)$ alapgörbe a *Mises*-féle görbéhez abban *hasonlít*, hogy szintén alkalmas az egymást követő legnagyobb kilengések meghatározására. A lényegbevágó *különbség* abban mutatkozik, hogy a közbenső ordinátametszékeknek a *Mises*-féle görbén értelmezés nem adható; az alapgörbe ordinátametszékei viszont a lengőmozgás minden jellemzőjét mennyiségileg is szabatosan meghatározzák.

91. A lengőrendszernek az alapgörbéből leszármaztatható jellemzői

a) **Az egymást követő legnagyobb kilengések.** A *130/I. ábra* részletesebb magyarázat nélkül is mutatja, hogy az első féllengés $A_{01} = my_0$ állandójával kijelölt O_y kezdőpont magasságában az Y_0 pozitív belengés és az Y_1 negatív kilengés nagyságát a görbe két ága ugyanabban az m-szeres méretarányban metszi ki, mint a *Mises*-féle görbe.

A következő (második) féllengés meghatározásához a koordináta-rendszert 180°-kal át kell forgatni. Ezt a legkényelmesebben úgy végezzük el, hogy a *130/II. ábra* szerint **ikergörbe** alakjában az O_x kezdőpont körül átforgatott alapgörbét is felrajzoljuk és a (negatív) $m\,Y_1$ kilengés P_1 végpontját az I görbe negatív ágáról a II görbe pozitív ágára vetítjük át, mégpedig az $\overline{O_x\,O_y}$ felezősugárral párhuzamos — tehát 45°-os — vetítősugárral.

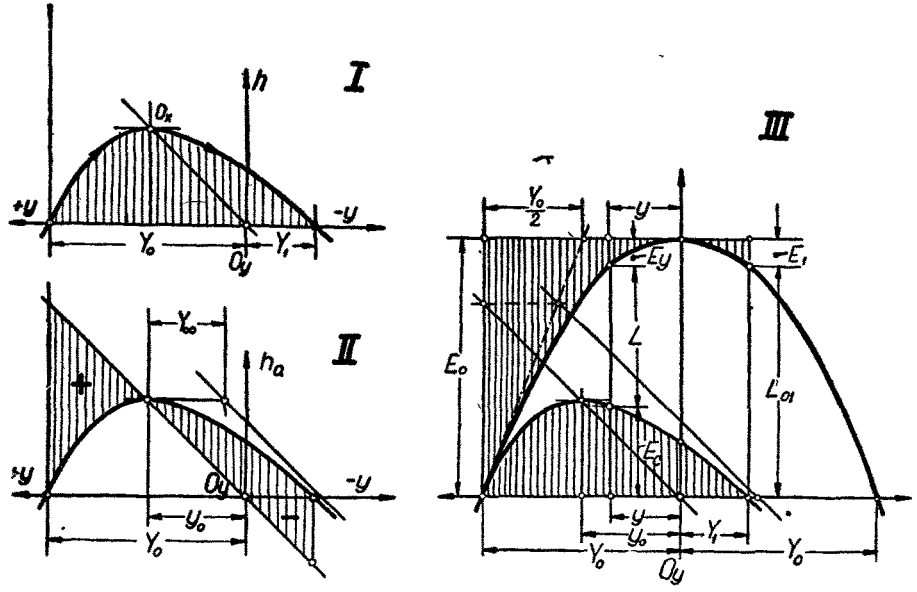
Az így kapott húrnak az x tengelytől mért távolsága megszabja az új A_{12} állandó nagyságát, hosszúsága meghatározza a második féllengés útját és O_{12} metszéspontja a felezősugárral kijelöli a nyugalmi egyensúlyhelyzetet.

A harmadik féllengés jellemzőit és A_{23} állandóját ismét az első alapgörbére való visszavetítéssel kapjuk. A szerkesztés az alapgörbepárból alkotott ikergörbén a *130. ábrán* bemutatott tört-csigavonalas vetítéssel tovább folytatható.

b) **A veszteségmagasság útmenti változását** a (253) egyenlet szerint az alapgörbe és a húrja közé eső ordinátametszékek szemléltetik (*131/I. ábra*).

Ugyanezek a metszékek más méretarányban a sebesség négyzetével arányos S **csillapítóerő** nagyságát is meghatározzák. A diagram területe eszerint az S csillapítóerőnek az első féllengés folyamán elfogyasztott L_{01} munkáját ábrázolja.

Végül ugyanezekkel a metszékekkel jellemezhető a lengő vízoszlop E_c **lendülete** is, amely szintén a sebesség négyzetével arányos.



131. ábracsoport. A lengőrendszernek az alapgörbéből leolvasható jellemzői. I. A veszteségmagasság és a lendület. II. A gyorsulás. III. Az energiamérleg

c) **A gyorsító nyomásmagasság útmenti változása** m-szeres méretarányban szintén az alapgörbe metszékeivel ábrázolható, ha azokat az $\overline{O_x O_y}$ felezősugártól az alapgörbéig mérjük. A gyorsító nyomásmagasság ugyanis:

$$h_a = y - h' \quad \text{azaz:} \quad m h_a = m y - m h'.$$

Egyszerű szemlélet igazolja, hogy a felezősugár ordinátái az y kitérés viszonylagos ($m\,y$) értékét adják, amelyből a h' veszteségmagasságot jellemző $m\,h'$ ordinátametszék levonódik.

Más méretarányban ugyanez a diagram a **gyorsulás** változását is szemlélteti sőt ugyanezek a metszékek a lengőrendszer **gyorsítóerőivel** is arányosak. (Vö. a *131/II. ábrával.*)

Ebből a függvényábrából világosan kitűnik, hogy a négyzetes csillapítóerő a lengő tömeg kezdőgyorsulását belengés közben erőteljesen kisebbíti, annyira, hogy a gyorsulás már jóval a nyugalmi helyzet előtt vált előjelet és lassítássá alakul át.

A gyorsítóerőnek (a *131/II. ábrában* vonalkázott) pozitív munkaterülete az álló helyzetből a legnagyobb sebességre felgyorsított tömegnek **lendületét** szemlélteti. Ezt a lendületet fogyasztja el a lassítóerő munkája: a *negatív* munkaterület tehát ugyanekkora.

A négyzetes csillapítás jellegzetessége az, hogy a **lassítás legnagyobb értéke** az aszimptotával kijelölt határértéknél mindig kisebb marad, bármekkora volt is a kezdőgyorsulás.

A víztükör lassításának ezt a felső határértékét az $Y_\infty = 1/m$ kilengési korlát szabja meg. Minthogy a diagramban a sebességeket α-szoros, a gyorsulásokat α^2-szeres léptékben kell lemérni, tehát a lassulásnak e felső korlátja:

$$|\ddot{y}|_\infty = Y_\infty \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{m} \quad (\mathrm{m/mp^2}). \tag{254}$$

d) **A lengőrendszer energiamérlege** az alapgörbe felrajzolásával a négyzetes csillapítás esetére rendkívül szemléletesen ábrázolható. Az alapgörbe különleges sajátossága az, hogy a lengőrendszer energiáit nemcsak **munkaterületek** alakjában szemléleti, hanem azokat az út függvényében **ordinátametszékek** alakjában is megadja.

Így például a *c)* pont *(131/II. ábra)* szerint a gyorsítóerő munkaterületét határoló alapgörbe *integrálgörbéje* a lendület útmenti változását szemlélteti, ez pedig a *b)* pont *(131/I. ábra)* szerint **ugyanennek** az alapgörbének metszékeivel ábrázolható.

Minőségi vizsgálat esetében az energiaábrát, a *128. ábra* mintájára szerkesztett *131/III. ábra* szerint, a lendületek útmenti változását jellemző alapgörbe léptékében szerkesztjük.

Ha a lendület görbéje fölé ugyanebben a méretarányban rajzoljuk fel a lengőrendszer **potenciális energiájának** parabola alakú függvényábráját, akkor a két görbe közé eső ordinátametszékek a **csillapítóerő munkájával** (L) arányosak, vagyis azt mutatják, hogy a lengőrendszer energiakészlete milyen ütemben morzsolódik fel.

A *131/III. ábra* a (teljes) első féllengés energiamérlegét mutatja, az Y_0 kilengéssel megszabott E_0 energiakészlet alapulvételével.

Itt jegyzem meg, hogy ennek az első féllengésnek útja a határfeltételekhez igazodóan az $Y_0 = y_0$ nagyságú első (csonka) útszakasszal kezdődik.

A potenciális energia görbéje a lépték ismerete nélkül is könnyen felrajzolható, ha oly parabolát szerkesztünk, amelynek tengelye a víztükör nyugalmi szintjével összeesik, vagyis az O_y ponton megy keresztül, kezdőérintője pedig az Y_0 pontban az alapgörbéével közös. E kettős feltétel a parabola alakját egyértelműen meghatározza és az energiakészlet E_0 kezdőértékének mérőhosszúságát is megszabja. (A kezdőérintő E_0 magasságú pontjának abszcisszája: $Y_0/2$.)

Az ábrából világosan kitűnik, hogy az első féllengés végén a rendszer energiakészlete az Y_1 abszcisszához tartozó E_1 értékekre zsugorodott. (Vö. a *131/III. ábrában* vonalkázott parabolametszékekkel.)

Hasonló energiaábra készíthető a további féllengésekre is, oly módon, hogy ugyanebbe az ábrába (jobbról balra, az abszcisszatengely *fölé)* a lendület változását szemléltető alapgörbe második ágát is berajzoljuk Y_1-től Y_2-ig s í. t.

Mennyiségi vizsgálat esetében az energiaábra méretarányát is meg kell határozni. Ez könnyen sikerül, ha figyelembe vesszük, hogy az alapgörbe méretnélküli egységpontja az $Y_\infty = 1/m$ nagyságú kilengési korlát mérőhosszúságát jelöli ki. Az alapgörbéből leolvasott $m\,y$ és $m\,Y$ értékek eszerint az Y kilengési korláthoz viszonyított arányszámok: azaz,

$$m\,y = \frac{y}{Y_\infty} \quad \text{és} \quad m\,Y = \frac{Y}{Y_\infty}. \tag{255}$$

Az ordinátaléptékeket az E_0 energiakészlet mérőhosszúságának és a (239) egyenletből kiszámított valóságos értékének egybevetésével kapjuk.

Az F felületű víztükörnek Y_0 kilengésével tárolt **potenciális energia** ugyanis:

$$E_0 = \frac{F\gamma}{2} Y_0^2 \quad \text{(mkg)}.$$

Ugyanerre az eredményre vezet az is, ha az ordinátaléptéket a **lendület** legnagyobb értékéből számítjuk át.

A legnagyobb lendület mérőhosszúsága $y_0 = h_0'$ helyen:

$$A_{01} = m\,y_0 = \frac{y_0}{Y_\infty},$$

a (236) egyenletből kiszámított értéke pedig:

$$E_{c0} = \frac{lf\gamma}{2g} c_0^2.$$

A lendület e legnagyobb értéke a $h_0' = (1 + \zeta)\, c_0^2/2g$ veszteségmagasság és az Y_∞ kilengési korlát helyettesítésével a következő alakban írható:

$$E_{c0} = lf\gamma \frac{h_0'}{1 + \zeta} = F\gamma Y_\infty h_0',$$

ahol: $h_0' = Y_\infty A_{01}$ a víztükör kezdő lehajlását okozó veszteségmagasság.

Ha ezt a fenti egyenletbe helyettesítjük és a lengőrendszernek az Y_∞ kilengési korláthoz tartozó

$$E_\infty = \frac{F\gamma}{2} Y_\infty^2 \quad \text{(mkg)},$$

potenciális energiáját **energiakorlátként** értelmezzük, akkor ezzel a lendület legnagyobb értékét és annak rajzléptékét alábbi egyszerű egyenlet adja:

$$E_{c0} = 2\, A_{01} E_\infty.$$

e) **A sebesség-út görbe szerkesztése.** Az alapgörbe $(A - u)$ ordinátametszékei a sebesség négyzetével arányos h' veszteségmagasságnak viszonylagos értékét adják. Négyzetgyökvonással vagy középarányos-szerkesztéssel tehát a sebességek is meghatározhatók.

Csillapítatlan lengések esetében kör alakú sebesség-út diagramot kapunk, ha a sebességet az $\dot{y}/\alpha$ mérőhosszúsággal ábrázoljuk. Ennek a mérőhosszúságnak viszonylagos értékét fogjuk az alapgörbe léptékében felrakni, mert ebben az esetben

a sebesség-út görbe torzulásából tudunk következtetni a csillapítás befolyására. (Vö. a 93. ponttal.)

A sebesség viszonylagos mérőhosszúsága:

$$z = m\frac{\dot{y}}{\alpha} = \frac{\dot{y}}{\alpha Y_\infty}, \tag{256}$$

az alapgörbe metszékeinek mérőhosszúsága pedig (247/a) és (252) szerint:

$$m h' = A - u = m\frac{m}{2}\frac{\dot{y}^2}{\alpha^2} = \frac{z^2}{2},$$

azaz:

$$z^2 = 2(A - u). \tag{257}$$

Az egységsugarú kör $\overline{AB}$ átmérőjére rajzolt derékszög $\overline{AG_0} = z$ befogója tehát **mértani középarányos** az $\overline{AE_0} = A - u$ és az $\overline{AB} = 2$ átfogó között.

A szerkesztés menete a *132. ábrából* további magyarázat nélkül is követhető. A $z = z(m\,y)$ függvényábra abszcisszatengelyét célszerűen az x tengelytől $u_0 = A$ távolságban az alapgörbe húrjára illesztjük.

A lengési idő a (250) egyenlet szerint a *z görbe* reciprok-görbéjének grafikus integrálásával szerkeszthető. A *132. ábrában* az $\overline{AP}$ alapot a *hosszúságegységgel* tesszük egyenlővé, mert ebben az esetben a vonalkázott területelemből az időelem α-szorosát azonos mértékarányban kapjuk.

Az ábra jelöléseivel ugyanis $\overline{AP} = 1$ felvétel esetén:

$\dot{y} \cong \Delta y/\Delta t$ helyettesítéssel írható:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{z} = \frac{\alpha}{m\dot{y}} = \frac{\alpha\,\Delta t}{m\,\Delta y}.$$

82. példa. *A 132. ábrát* a 81. példában kidolgozott adatokkal szerkesztettem meg.

Az $u = u(x)$ függvényábrát az $y_0 = 6{,}86$ m-es tükörállásból $m = 0{,}187$/méter csillapítástényezővel kiszámított: $A = m y_0 = 1{,}28$ magasság határolja, mint a $z^2/2$ metszékek új tengelye.

A víztükörsebesség legnagyobb értéke a $z_0^2 = 2A$ összefüggésből számítással is ellenőrizhető.

$$z_0 = \sqrt{2A} = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6$$

és ezzel:

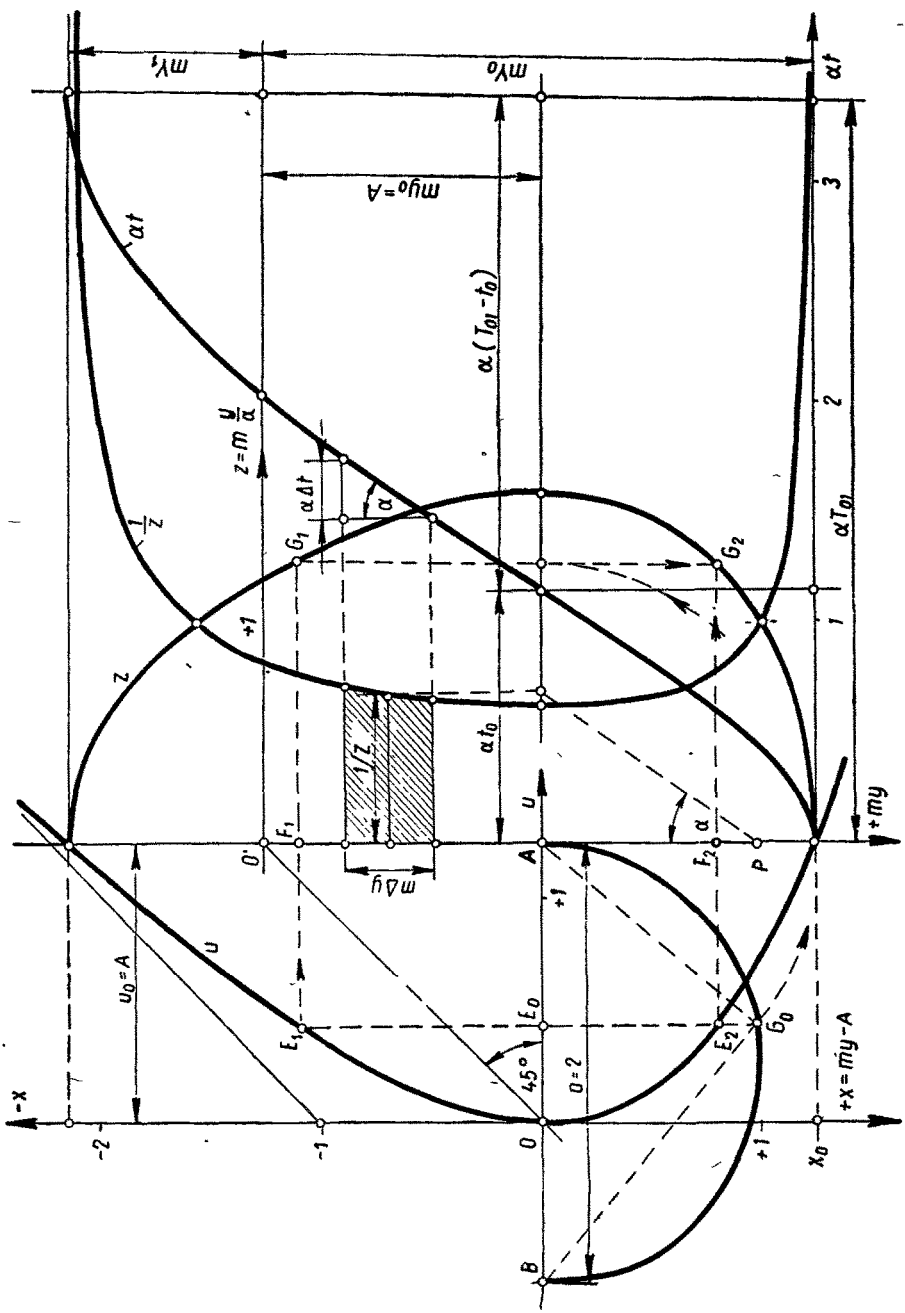
$$(\dot{y})_0 = \frac{\alpha z_0}{m} = \frac{0{,}007}{0{,}187} \cdot 1{,}6 = \mathbf{0{,}06\ m/mp.}$$

Ez az érték a $c_0 = 3$ m/mp kezdősebességből közvetlenül is kiadódik.

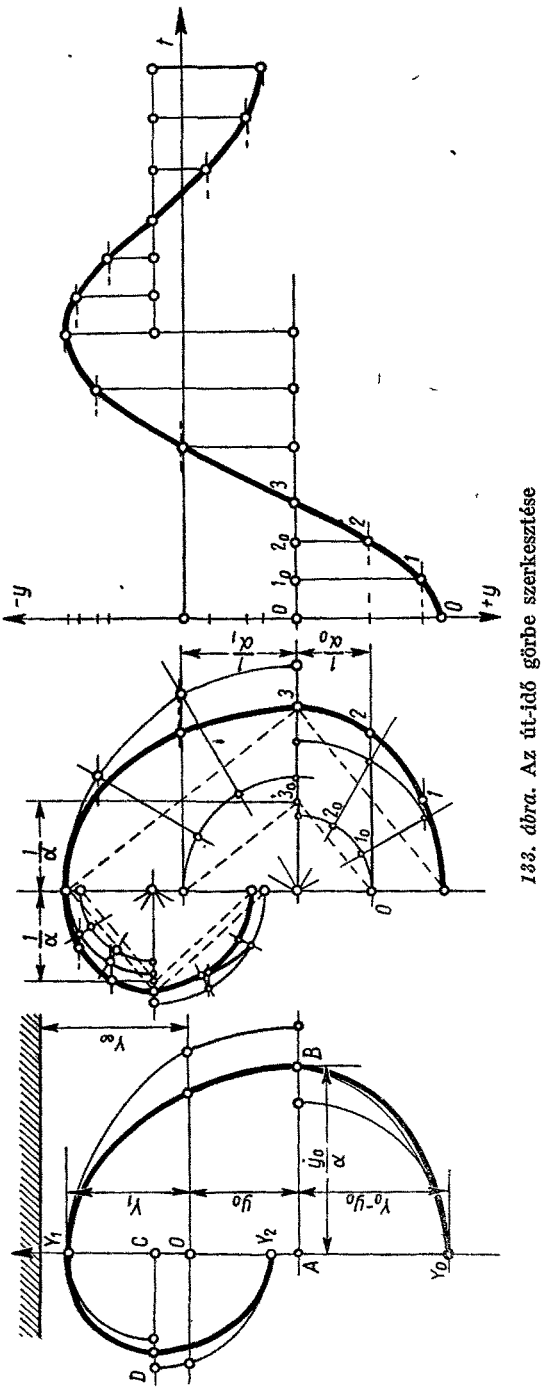
Az $1/z$ *görbe* grafikus integrálása az első féllengésre: $\alpha T_{01} = 3{,}4$ (lemért) alaphosszúságot eredményezett, amelyből a féllengés ideje:

$$\mathbf{T_{01}} = \frac{3{,}4}{0{,}007} \cong \mathbf{485\ mp.}$$

A csillapítatlan féllengés ezzel szemben: $T/2 = 449$ mp, vagyis 36 másodperccel rövidebb.



132. ábra. A sebesség-út görbe szerkesztése és a lengési idő meghatározása



133. ábra. Az út-idő görbe szerkesztése

A függvényábrából lemérhető az $\alpha t_0 = 1{,}15$ alaphosszúság is, amelyből a legmélyebb Y_0 tükörállás és az y_0 kezdőállás közé eső út befutásához szükséges t_0 idő:

$$t_0 = \frac{1{,}15}{0{,}007} \cong \mathbf{165}\ \text{mp.}$$

A nyomócső zárásától számítva ($t = 0$) tehát a víztükör emelkedésének tartama:

$$T_{01} - t_0 = 485 - 165 = \mathbf{320}\ \text{mp.}$$

Az első féllengésre bemutatott eljárás természetesen a további féllengésekre is alkalmazható. A szerkesztéshez ugyanazt az $u = u(x)$ függvényábrát használjuk fel, csak az A állandó értéke kisebb. Az első féllengésre: $A = A_{01}$, a további féllengések A állandóját az $u = u(x)$ függvényábra felhasználásával a *130 /II. ábra* szerint szerkesztjük.

Meg kell jegyeznem, hogy a *132. ábrában* bemutatott szerkesztés csillapítatlan lengésre is elvégezhető. Ebben az esetben az időtartam szorzószáma: $\alpha\, T/2 = \pi$.

92. A lengési idő közelítő meghatározása és az út—idő görbe szerkesztése

A sebesség—út görbének alakjából a lengési idő igen jó közelítéssel kiszámítható, ha a *133. ábra* szerint ezt a kördiagramból **csigavonallá** torzított függvényábrát egymást érintő **negyedellipszisekkel** helyettesítjük.

A *133. ábrából* kitűnik, hogy a pontosan szerkesztett csigavonal és a vékonyabb vonallal kihúzott ellipszis ordinátái között alig van eltérés, sőt egy féllengésen belül még ezek az eltérések is jórészt kiegyenlítődnek.

Újból kell itt is kiemelnem, hogy a csigavonal alakú függvényábrát a **kördiagram** szerkesztéséhez előírt $\dot{y}/\alpha$ sebességi mérőhosszúságokkal, a diagram egységes hosszléptékében kell felrajzolni (ahol α a **csillapítatlan** rendszer lengési szögsebessége).

A negyedellipszisekre bontható függvényábra alakjából alábbi következtetések vonhatók le:

a) Ellipszis alakú sebesség—út görbe — mint tudjuk — a **harmonikus lengés** jellemzője. Ebből az következik, hogy egy-egy negyedellipszis (állandó szögsebességű) **izokrón** lengést jellemez, ami azt is jelenti, hogy az út—idő görbe szakaszról szakaszra szerkeszthető **szinuszvonalakból** illeszthető össze, ami feleslegessé teszi a *132. ábrán* bemutatott szerkesztés elvégzését.

b) A negyedellipszis két főtengelyének aránya a **lengés szögsebességének változtatásával** módosítható. Ha azt találjuk, hogy az $\dot{y}/\alpha$ ordinátákkal szerkesztett út—idő görbeszakasz nem kör, hanem ellipszis, akkor ebből arra következtethetünk, hogy a rendszer lengési szögsebessége a csillapítás hatására megváltozott. A főtengelyek arányából az is kiszámítható, hogy milyen szögsebesség helyettesítésével alakítható át a sebesség—út görbe kördiagrammá.

A *133. ábra* szerint pl. a csillapítatlan lengés α szögsebességével kiszámított: $\overline{AB} = \dot{y}_0/\alpha$ mérőhosszúság nagyobb a kördiagram $Y_0 - y_0$ sugárnál. E megnagyobbodás úgy értelmezhető, hogy a lengőrendszer a valóságban a főtengelyarány mértékével megnagyobbodott α_0 szögsebességgel lengett. ($\dot{y}_0/\alpha_0$ helyettesítéssel ugyanis kördiagramot kapunk.)

A féllengés második szakaszában viszont a sebesség—út görbe ordinátáinak zsugorodása a valóságos α_1 lengési szögsebességnél nagyobb (csillapítatlan) α szögsebesség helyettesítésére vezethető vissza.

E gondolatmenet alapján, a *133. ábra* jelöléseivel a (teljes) első féllengés T_{01} időtartama így számítható:

$$T_{01} = \frac{\pi}{2\alpha_0} + \frac{\pi}{2\alpha_1} \quad \text{(mp)}, \tag{258}$$

ahol:

$$\alpha_0 = \frac{\dot{y}_0}{Y_0 - y_0} \quad \text{és} \quad \alpha_1 = \frac{\dot{y}_0}{Y_1 + y_0} \quad (\text{mp}^{-1}). \tag{259}$$

Ugyanezzel az eljárással számítható ki a következő féllengések T_{12}, T_{23} .. tartama is.

Megállapítható, hogy a négyzetesen csillapodó lengés **nem izokrón.** Az első féllengés időtartama a leghosszabb, majd a lengési idő mindinkább rövidül és féllengésenként mindjobban megközelíti a csillapítatlan lengés ütemét.

A lengési idő kiszámításához a (259) egyenlet helyett az **alapgörbe koordinátái** is felhasználhatók.

A *130/II.* ábrán felrajzolt alapgörbének A_{01} állandójához tartozó $x_0 + x_1$ hosszúságú húr két szelete adja az első féllengés útjának viszonylagos értékét. Írható:

$$x_0 = m\,Y_0 - A_{01} = m\,(Y_0 - y_0) \quad \text{és} \quad x_1 = m\,(Y_1 + y_0).$$

Ugyanebben a méretarányban a legnagyobb sebesség mérőhosszúságának viszonylagos értéke (256) és (257) szerint:

$$z_{01} = m\frac{\dot{y}_0}{\alpha} = \sqrt{2A_{01}}. \qquad (256/a)$$

A negyedellipszisek főtengelyeinek arányszáma: $\frac{z_{01}}{x_0}$ és $\frac{z_{01}}{x_1}$. A lengési szögsebességek tehát így írhatók:

$$\alpha_0 = \alpha z_{01}/x_0 \quad \text{és} \quad \alpha_1 = \alpha z_{01}/x_1. \qquad (259/a)$$

Az első féllengés időtartama (258) szerint, helyettesítés és rendezés után:

$$T_{01} = \frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{x_0 + x_1}{z_{01}} \quad \text{(mp)}. \qquad (258/a)$$

A lengőmozgás időbeli lefolyása az *út—idő görbe* szerkesztésével szemléltethető. E görbe felrajzolásához a *133. ábrában* az alapgörbéből négyzetgyökvonással leszármaztatott sebesség—út görbét használtam fel. (Vö. a *132. ábrával.)*

A görbeszakaszokat helyettesítő negyedellipsziseket a lengési szögsebesség arányos módosításával szakaszról szakaszra **kördiagramokká** alakítottam át. Ezek az α_0, ill. α_1 szögsebességgel forgó rádiuszvektor végpontjának vetítésével az út-idő ábra közismert szerkesztésére alkalmasak. A φ szögelfordulás időtartama az ábra szerint az $1/\alpha_0$, ill. $1/\alpha_1$ sugarú köríveken mérhető ($t_0 = \varphi/\alpha_0$, ill. $t_1 = \varphi/\alpha_1$).

A *133. ábrában* a vízszintes tengelyre az *időléptékben* felmért $1/\alpha$ mérőhosszúságból párhuzamos vetítősugarakkal a (259/a) egyenlettel kifejezett arányosságok alapulvételével szerkeszthető az $1/\alpha_0$ és $1/\alpha_1$ körsugár.

Az időtengelyre felmért π/α_0 és π/α_1 ívhosszúság egy-egy negyedhullám tartamát jellemzi. A szinuszgörbeszakaszok közbenső pontjait az ábrában e negyedkörök 30°-os osztásával szerkesztettem. Magának a szerkesztésnek menete — amelyet a második féllengésre is kiterjesztettem — az ábrából további magyarázat nélkül követhető.

83. példa. A 81. példa adataival a *132. ábrában* megszerkesztettük a víztükör első féllengésének **út—idő görbéjét.**

A féllengések idejét (258/a) és (259/a) szerint az út—idő görbe felrajzolása nélkül is számíthatjuk az alapgörbe alábbi jellemzőiből:

A lengőrendszer csillapítatlan lengési szögsebessége:

$$\alpha = 0{,}007/\text{mp},$$

a (csillapítatlan) féllengés ideje: $T/2 = \pi/\alpha = 3{,}14 : 0{,}007 = 449$ mp.

Az első féllengés állandója: $A_{01} = 1{,}28$, a legnagyobb kilengéseknek az alapgörbéből lemért viszonylagos mérőhosszúságai: $mY_0 = 2{,}55$ és $mY_1 = 0{,}88$.

A negyedellipszisek féltengelyei: $x_0 = mY_0 - A_{01} = 2{,}55 - 1{,}28 = \mathbf{1{,}25}$,

$$x_1 = mY_1 + A_{01} = 0{,}88 + 1{,}28 = \mathbf{2{,}16} \text{ és } z_{01} = \sqrt{2A_{01}} = \sqrt{2 \cdot 1{,}28} = \mathbf{1{,}6}.$$

A (259) egyenlet szerint a lengési szögsebességek:

$$\alpha_0 = \frac{z_{01}}{x_0}\alpha = \frac{1{,}6}{1{,}25}\cdot 0{,}007 = \mathbf{0{,}00896/mp} \text{ és } \alpha_1 = \frac{z_{01}}{x_1}\alpha = \frac{1{,}6}{2{,}16}\cdot 0{,}007 = \mathbf{0{,}00519/mp}.$$

A (teljes) féllengés ideje tehát, (258) szerint:

$$T_{01} = \frac{\pi}{2\alpha_0} + \frac{\pi}{2\alpha_1} = 1{,}57 \cdot \left(\frac{1}{0{,}00896} + \frac{1}{0{,}00519}\right) = 1{,}57 \cdot (111{,}7 + 192{,}8) = \mathbf{479\ mp.}$$

Ebből a t_0 előresietési idő:

$$t_0 = \frac{\pi}{2\alpha_0} = 1{,}57 \cdot 111{,}7 = \mathbf{176\ mp,}$$

a csővezeték zárásának $t = 0$ pillanatától a féllengés végéig számított időtartam pedig:

$$T_0 - t_0 = 479 - 176 = \mathbf{303\ mp.}$$

A 82. példában ezeket az időtartamokat grafikus szerkesztéssel határoztuk meg. A kapott eredmények ($T_{01} = 485$ mp, $t_0 = 165$ mp és $T_0 - t_0 = 320$ mp) a szerkesztés pontatlansága miatt is némi eltérést mutatnak a fentebb kiszámított közelítő értékekhez képest.

93. Lengések változó szelvényű (aknás) kiegyenlítőmedencében

A vízerőművek nyomócsövének védelmére beiktatott kiegyenlítőmedencéket változó keresztmetszettel szokás kialakítani, oly módon, hogy a kisebb szelvényű aknához alul és felül jóval nagyobb szelvényű medencék vagy tárnák csatlakoznak. Az akna kis szelvényét a lengésidő megrövidítése érdekében választjuk, a medencék nagy térfogatával viszont a tükör kilengései korlátozhatók.

Ha a nyomócsövet tápláló tónak vagy tárolómedencének vízállása egy alsó és egy felső határhelyzet között változik, akkor az akna a *134. ábra* szerinti elrendezéssel egy közbenső vízkamrával is kibővíthető. Ilyenkor a mértékadó legnagyobb kilengések meghatározására irányuló vizsgálatot a felső vízállásra (*N. V.*) és az alsó vízállásra (*K. V.*) elkülönítve kell elvégezni.

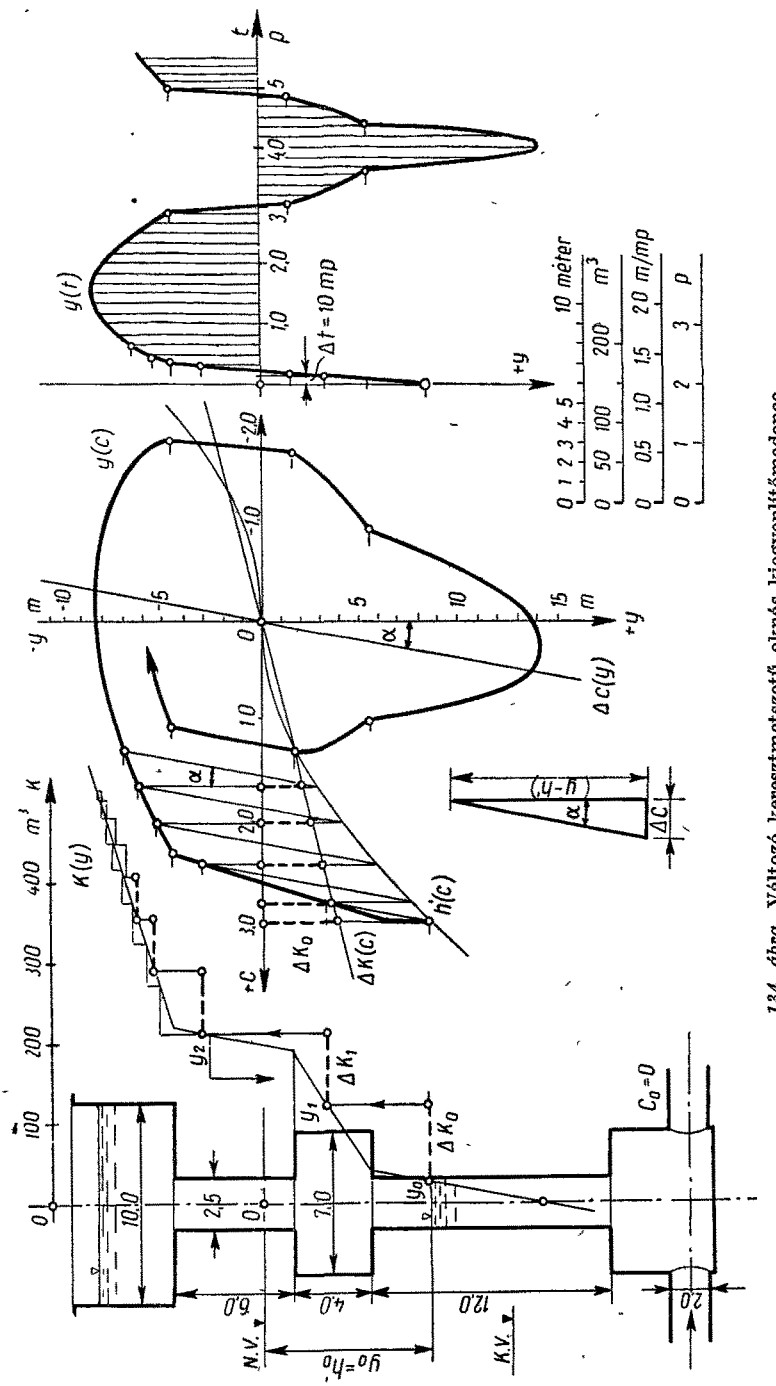
Változó keresztmetszet esetén számítás helyett közelítő szerkesztéssel lehet a lengőmozgás valószínű lefolyására következtetni.

E szerkesztések legtöbbje csak elsőrendű közelítést ad (*Braun, Schocklitsch*), de vannak módszerek (*Mühlhofer, Runge*), amelyek másodrendű közelítéssel igyekeznek a vizsgálat pontosságát fokozni.

A következőkben a *134. ábra* kapcsán a *Schocklitsch*-féle szerkesztést ismertetem, amelyet *Dr. Schiffmann* [88] fejlesztett tovább. A pontatlanságért kárpótol az eljárás áttekinthetősége. A gyakorlat igényeit ugyanis egy gyorsan célravezető durvább eljárás rendszerint jobban kielégíti, mint a nagyobb pontosság látszatát biztosító hosszadalmasabb módszer — annál is inkább, mert az áramlási veszteségeket teljes szabatossággal amúgysem tudjuk számításba venni.

A *134. ábrában* csak a felső vízállásra (*N. V.*) vonatkoztatott szerkesztést mutatom be éspedig arra a legegyszerűbb esetre, amikor a vízerőmű nyomócsövét a $t = 0$ időpontban teljesen lezárjuk ($c_a = 0$).

1. A szerkesztés előkészítéséhez a víztükör nyugalmi szintmagasságában kijelöljük az y (c) görbe derékszögű koordináta-rendszerének kezdőpontját. A függőlegesen lefelé *pozitív* kilengések méretaránya az aknamércével azonos, a nyomócsőben áramló víz c sebességét pedig alkalmasan választott méretarányban a vízszintes tengelyen (pl. balra pozitív irányban) olvassuk le.



134. ábra. Változó keresztmetszetű aknás kiegyenlítőmedence

2. Ugyanebben a koordináta-rendszerben rajzoljuk fel az áramlási veszteségek h' (c)-függvényábráját is, amelynek a c_0 kezdősebességhez tartozó pontja a víztükör kezdőállását is kijelöli ($y_0 = h_0'$).

A veszteséggörbe egyes pontjait a következő (jól ismert) egyenlet adja:

$$h' = (1 + \zeta)\frac{c^2}{2g}. \qquad \text{(I)}$$

3. A következő lépés: a medencetérfogat görbéjének felrajzolása a mérceállások függvényében. ($K(y)$-görbe.)

Egy alkalmasan kijelölt alsó szinttől ($K_0 = 0$) a víztükörig kitöltött köbtartalmat a medence méreteiből néhány mérceállásra kiszámítjuk, és pl. az aknatengelytől jobbra felrakjuk.

4. A jelenség időbeli lefolyását azonos Δt időközökkel — lépésről lépésre előrehaladva — közelítjük meg. A Δt szakaszok megrövidítésével a módszer pontossága fokozható, de az eljárás hosszadalmasabbá válik. A gyakorlat igényeit kielégíti 10, 15 vagy 20 másodperces lépések választása. (Az ábrában $\Delta t = 10$ mp.) A kilengések időbeli változásának szemléltetésére a nyugalmi szint magasságában kijelöljük az időtengely kezdőpontját is.

5. Az anyag megmaradásának törvénye a választott Δt időtartamra az általános esetben ($c_a \neq 0$) a következő egyenlettel fejezhető ki:

$$\Delta K = f(c - c_a)\,\Delta t \qquad (\mathrm{m}^3), \qquad \text{(II)}$$

ahol ΔK (m^3) a víztérfogat növekedése a medencében Δt idő alatt.

Ha $c_a = 0$, akkor: $\Delta K = f c\,\Delta t$, vagyis ilyenkor a térfogatnövekedés a c sebességgel arányos. A ΔK (c) függvényábrát tehát a kezdőponton átmenő ferde egyenes adja, amelynek a c_0 kezdősebességhez tartozó $\Delta K_0 = f c_0 \Delta t$ ordinátáját a medencetérfogat méretarányában (lefelé pozitív irányban) felrakjuk.

6. A gyorsuló vízoszlop egyensúlyfeltételét kifejező alapegyenlet a gyorsulás közelítő értékének helyettesítésével ($a \cong \Delta c/\Delta t$) a következő alakra hozható:

$$\Delta c = \frac{g}{l}(y - h')\,\Delta t \qquad (\mathrm{m/mp}). \qquad \text{(III)}$$

Azonos Δt időközökben a Δc sebességváltozás a h' veszteségmagassággal kisebbített y mélységgel arányos. Az y (c)-függvényábrában az ($y - h'$) metszékekhez tartozó Δc növekményeket tehát az y-tengellyel α hajlásszöget bezáró (egymással párhuzamos) ferde sugarak metszik ki. Ezek irányát a kezdőponton átmenő Δc (y)-függvényábra megrajzolásával jelöljük ki. E ferde sugár irányát a (III) egyenletből pl. $h' = 0$ és $y = 10$ m felvétellel kiszámított Δc felrakásával kapjuk meg. (A Δc méretaránya természetesen a c sebességével összevág.)

7. A szerkesztés jellegzetessége, hogy a Δc sebességváltozás meghatározásához a másodrendű közelítést biztosító $(y - h')_k$ középérték helyett a Δt szakasz **elején** talált h' veszteségmagasságot vonjuk le a szakasz **végén** talált y víztükörállásból.

E vízállás viszont a szakasz **kezdetén talált** c sebességgel számított ΔK térfogatváltozásból adódott. A közelítés fokára ezekből az elhanyagolásokból lehet követ-

keztetni. Különösen a legnagyobb kilengések helyén mutat az y (c) függvényábra némi torzulást, mert a szerkesztéssel kiadódó szélső értékek nem esnek bele a $c = 0$ tengelybe.

8. A szerkesztés menete ezek után a *134. ábrából* további részletesebb magyarázat nélkül követhető.

A c_0 kezdősebességhez tartozó ΔK_0 térfogatváltozás metszékét a medencetérfogat vonalához a kezdő tükörállás y_0 magasságában (vízszintes irányban) hozzámérjük, és e térfogatnövekedésnek megfelelő y_1 vízállás magasságában határoljuk a h_0' veszteségmagasság kezdőértékét jellemző A_0 pontból húzott ferde sugarat. Ezzel meghatároztuk az y (c)-görbe A_1 pontját, amely a szerkesztés következő lépésének kiindulópontja és egyben a y (t) görbe első szakaszának végpontját is kijelöli.

A Δc sebességváltozás az első lépéseknél *negatív*, mert $h' > y$. A Δc előjelváltása magából a szerkesztésből kiadódik, csak arra kell ügyelni, hogy a ΔK térfogatváltozást a medencetérfogat vonalához mindig helyes előjellel mérjük hozzá. (Térfogatcsökkenés esetén a ΔK a K-ból levonódik.)

A szerkesztési pontok összekötésénél azt is figyelembe kell venni, hogy a medence minden keresztmetszetváltozásának magasságában az $y(c)$-görbe és az $y(t)$-függvényábra is törést mutat.

84. példa. A *134. ábrában* bemutatott aknás kiegyenlítőmedence egy $l = 2500$ m hosszú, $d = 2{,}0$ m átmérőjű nyomócsőhöz csatlakozik. A kezdősebesség ($t = 0$ időpontban): $c_0 = 3{,}0$ m/mp.

Az áramlási veszteségmagasság ($1 + \zeta = 18{,}7$ veszteségtényezővel) az első pillanatban: $h_0' = y_0 = 8{,}6$ m. Ezzel a veszteségparabola is felrajzolható.

A medence főméretei — valamint a (legmagasabb) nyugalmi vízállás is — az ábrából kiolvashatók.

A szerkesztéshez használt mennyiségeket a térfogat-, sebesség- és időmérce egységeivel mértem fel. A medencetérfogat vonalának felrajzolása után a $\Delta K(c)$ függvényábra kezdőpontja is kijelölhető. $\Delta t = 10$ mp választással, a (II) egyenletből, *teljes zárásra:*

$$\Delta K_0 = f c_0 \Delta t = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10 \cong 94 \text{ m}^3.$$

A $\Delta c(y)$ függvényábra $c = 0$, $h' = 0$, $y - h' = 10$ m alapértékekhez tartozó ponton megy keresztül, amelynek helyét a (III) egyenletből kiszámított

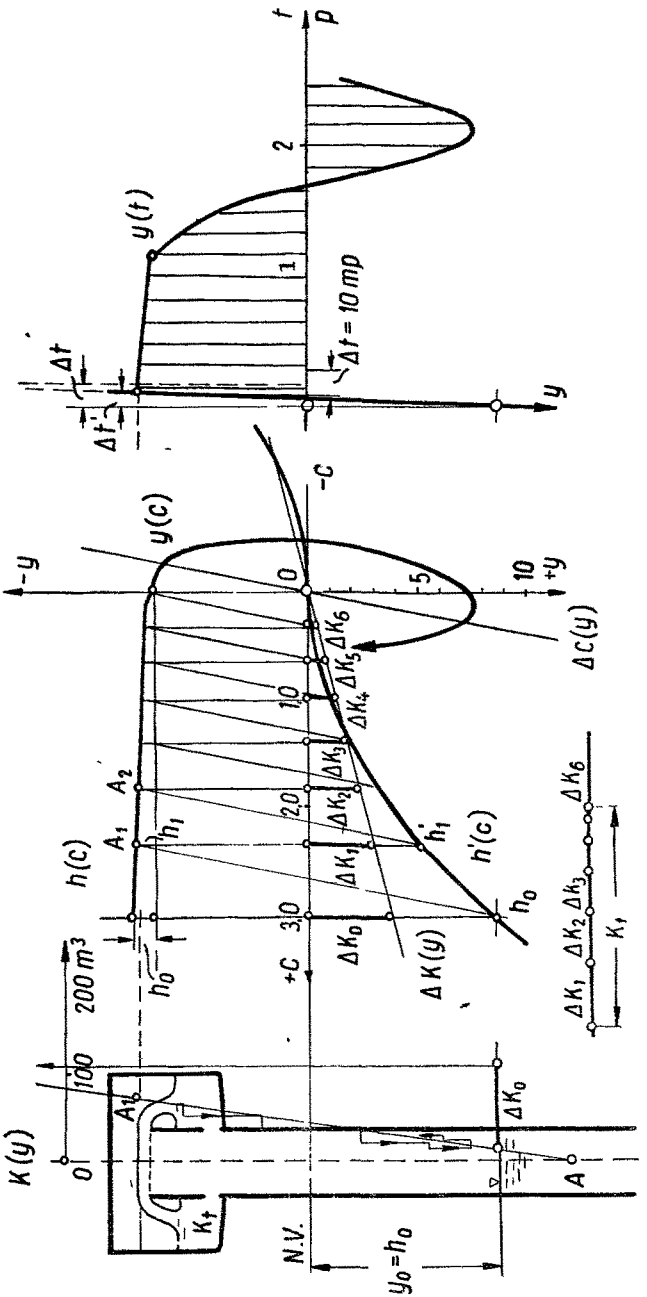
$$\Delta c = \frac{g}{l}(y - h')\,\Delta t = \frac{9{,}81}{2500} \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{0{,}394\ m/mp}$$

jelöli ki.

A szerkesztésnek fentebb leírt elvégzésével arra az eredményre jutunk, hogy a víztükör legnagyobb $Y_1 = 8{,}4$ méteres (negatív) kilengését mintegy 90 másodperc alatt éri el, az ezt követő féllengés tartama pedig kb. 150 másodperc.

94. A kilengés korlátozása átbukással

A kiegyenlítőmedence vízállásának ingadozásai a vízerőgép üzemére is visszahatnak, mert az esés megváltozását eredményezik. E jelenség vizsgálatára itt nem terjeszkedem ki, csak arra mutatok rá, hogy a kiegyenlítőmedencében a víztükör emelkedése oly módon is korlátozható, hogy az első negatív kilengéssel felemelt víztérfogat egy részét az akna felső élén egy tárolómedencébe buktatjuk át és csak a lengések lecsillapodása után vezetjük vissza az aknába.



135. ábra. A víztükör kilengéseinek korlátozása átbukással

A szokásos elrendezést a *135. ábra* mutatja, amelyből az is kitűnik, hogy a tárolt vízfelesleg megfelelően méretezett nyílásokon keresztül folyik vissza az aknába.

A víztükör legnagyobb emelkedését a vízmennyiség átbukásához szükséges keresztmetszetből lehet kiszámítani.

Az átbukó vízmennyiség: $V = f(c - c_a)$, a (163) egyenlet szerint:

$$V_1 = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}} \quad (\mathrm{m^3/mp}),$$

amiből az átbukáshoz szükséges magasság (c_a/c arány bevezetésével):

$$h = \left(\frac{3f}{2\mu b \sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{c_a}{c} \right)^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}} \quad (\mathrm{m}). \qquad \text{(IV)}$$

A víztükörlengések vizsgálatára ebben az esetben is a 93. pontban leírt szerkesztés használható. Az eljárás az előbbenitől csak abban különbözik, hogy a $c(y)$ ábra szerkesztéséhez az átbukómagasságok $h(c)$-függvényábráját is fel kell rajzolni.

A *135. ábrában* a teljes zárásra ($c_a = 0$) érvényes $h(c)$-görbét rajzoltam be, amelynek pontjai a (IV) egyenletből számíthatók.

A szerkesztés menetét alábbi példa kapcsán ismertetem.

85. példa. A 84. példában tárgyalt $l = 2500$ m hosszú, $d = 2$ m átmérőjű nyomócső a *135. ábra* szerinti $D = 3$ m átmérőjű kiegyenlítő aknába torkollik. A kezdősebesség a csőben: $c_0 = 3{,}0$ m/mp, az ehhez tartozó veszteségmagasság: $h_0' = 8{,}6$ m.

Teljes zárás esetére ($c_a = 0$) a c_0 kezdősebességhez tartozó átbuktatómagasság, a (IV) egyenlet szerint $b = 3\pi = 9{,}4$ m-es gátkoronán, $\mu = 0{,}6$ átbukási tényezővel:

$$\mathbf{h_0} = \left(\frac{fc_0}{2/3\, \mu b \sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3{,}14 \cdot 3}{0{,}4 \cdot 9{,}4 \cdot 4{,}43} \right)^{\frac{2}{3}} \cong \mathbf{0{,}69\ m.}$$

A $h(c)$ görbét néhány pont kijelölésével felrajzoljuk, s a 93. pontban leírt szerkesztéshez szükséges $K(y)$, $\Delta K(c)$ és $\Delta c(y)$ függvényábrákat is elkészítjük.

A szerkesztést most is a víztükör kezdőállásához tartozó ΔK_0 térfogatnövekedés felrakásával kezdjük meg, de az A_0-ból induló ferde sugarat csak az átbukás vonaláig húzzuk meg (A_1 pontig). A víztükör emelkedését ugyanis az átbukás korlátozza és ennek következtében az első lépés időtartama is Δt-ről $\Delta t'$-re rövidül. A következő lépéseket szintén az átbukás vonala határolja mindaddig, amíg a sebesség előjelet nem cserél. Ezt követően a szerkesztés menete azonos a 93. pontban leírt eljárással, mert a víztükör az akna pereme alá süllyed. Amíg az átbukás tart, a ΔK térfogatnövekedések metszékei a tárolómedencébe átömlött mennyiségeket adják. A tárolómedence köbtartalmának tehát akkorának kell lennie, hogy az átbukó víztérfogatot befogadhassa.

Az adott esetben a szükséges térfogat (a rajzból) lemérve:

$$\mathbf{K_t = \Delta K_1 + \Delta K_2 + \cdots + \Delta K_6 \cong 255\ m^3.}$$

A lengés képe is igen jellegzetes. A víztükör a legmagasabb állását már mintegy 7 másodperc múlva éri el, az ezt követő féllengés tartama pedig kb. 2 perc.

A kiegyenlítőmedencék szabad lengéseinek vizsgálatát ki lehet terjeszteni arra az esetre is, amikor a csővezeték zárása (vagy nyitása) hosszabb ideig tart.

Schiffmann fentebb idézett tanulmányában erre az esetre is találunk szerkesztési eljárást, amelynek részletes ismertetése azonban itt mellőzhető.

Itt említem meg azt is, hogy *Dr. Schiffmann* szerkesztési módszerét legutóbb *Bouvard* és *Molbert* francia mérnökök továbbfejlesztették és kétaknás kiegyenlítőmedencék jellemzőinek meghatározására is alkalmassá tették [60].

95. Változó keresztmetszetű aknás kiegyenlítőmedence jellemzőinek szabatos meghatározása. Az alapgörbék egymásra illeszthetősége

A 93. pontban leírt — csak lépésről lépésre végezhető — közelítő szerkesztés helyett a kiegyenlítőmedence üzemi jellemzői változó keresztmetszet esetében is teljes szabatossággal meghatározhatók az alapgörbék egymásraillesztésének módszerével.

A szerkesztési eljárást a *136. ábrában* mutatom be, a *137. ábra* kapcsán a 86. példában pedig a közelítő eljárás ellenőrzésére alkalmazom.

A lépcsőzetesen változó keresztmetszetű akna minden szakaszához közös O_x kezdőponttal az ábra hosszléptékében rajzoljuk fel az alapgörbét. Minden F keresztmetszet, ill. F/f áttétel megszabja az Y_∞ kilengési korlát nagyságát. Ezek kiszámításával és felrakásával egy-egy alapgörbe léptékét is meghatároztuk.

Az ábra hosszléptékében felépített diagramból (méretnélküli $m\,y = y/Y_\infty$ viszonylagos értékek helyett) az y kilengések és h' veszteségmagasságok *közvetlenül* lemérhetők.

a) **Átmenet kisebb keresztmetszetre**

A szerkesztés menete a *136/I. ábrából* részletesebb magyarázat nélkül követhető.

Ez az ábra arra az esetre vonatkozik, amikor az y_0 mélységből emelkedő víztükör y_a mélységben az F_1-nél **kisebb** F_2 keresztmetszetű aknába lép át.

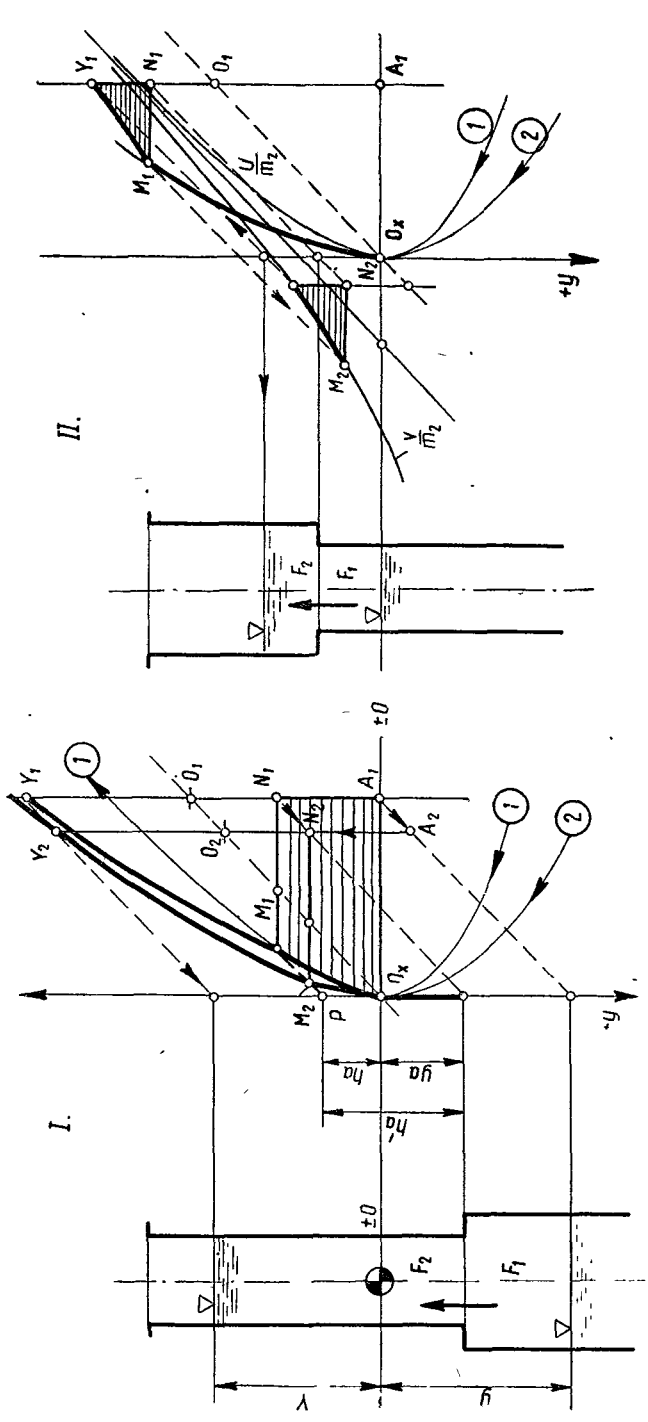
Az ábrába be nem rajzolt $Y_{2\infty}$ kilengési korlát ebben az esetben nagyobb az F_1 aknakeresztmetszettel megszabott $Y_{1\infty}$ kilengési korlátnál, ami azt is jelenti, hogy a víztükör a kisebb keresztmetszetű aknában magasabbra fog emelkedni.

A két alapgörbe felrajzolása és a nyugalmi víztükörállás bejelölése után az első alapgörbén az $y_0 = h_0'$ kezdő tükörállás 45°-os átvetítésével kijelöljük a diagram $\overline{O_x A_1} = h_0'$ kezdő ordinátáját és a 91/b. pontból megismert elven az F_1 szelvényű szakaszon megrajzoljuk a veszteségmagasságok útmenti változásának $h' = h'(y)$ diagramját.

Az y_a mélységben talált veszteségmagasság ebben a diagramban: $\overline{M_1 N_1} = h_a'$. Ezen a helyen lép át a víztükör a (szűkebb) F_2 keresztmetszetű aknaszakaszba, itt kell tehát az első és a második alapgörbéből szerkesztett veszteségdiagramoknak illeszkedniök.

Könnyen igazolható, hogy **a két alapgörbe egymásra illeszthető pontjait 45°-os vetítősugarak kapcsolják össze,** vagyis az első alapgörbe M_1 pontját a 45°-os felező-sugárral párhuzamosan kell a második alapgörbe M_2 pontjába átvetíteni.

Az átlépés pillanatában ugyanis a **lengőrendszer munkaképessége változatlan** marad, ennélfogva a vízoszlop c_a sebessége és h_i' veszteségmagassága nem változhatott meg ugrásszerűen.



136. ábra. Változó keresztmetszetű kiegyenlítőmedence alapgörbe-szakaszainak egymásra illesztése. I. Átmenet kisebb keresztmetszetre. II. Átmenet nagyobb keresztmetszetre. (A víztükör túlemelése)

A hirtelen keresztmetszet-változás ellenére tehát a **gyorsítómagasság is változatlan,** ami utasítást ad a szerkesztés elvégzésére, illetve bizonyítja a 45°-os átvetítés helyességét.

A *136/I. ábrából* meggyőződhetünk arról, hogy a *2* alapgörbének a 45°-os vetítősugárral kimetszett M_2 pontja az **egyetlen** pont, amely a fentemlített feltételt kielégíti. A h_a gyorsítómagasság azonosságának geometriai feltételét ugyanis az $M_1 M_2$ (45°-os) vetítősugár jelöli ki, amely ezt a $h_a = \overline{O_x P}$ magasságot az abszcisszatengelyre is kivetíti.

A h_a' veszteségmagasság változatlanságából következik, hogy $\overline{M_2 N_2} = \overline{M_1 N_1} = h_a'$ határolással a második alapgörbéből szerkesztett veszteségdiagramot is megkapjuk. Ennek a $h' = 0$ metszékhez tartozó Y_2 pontja kijelöli a víztükör legnagyobb magasságát.

A diagramnak e második szakasza (45°-os párhuzamos áthelyezéssel) a diagram első szakaszára illeszthető, és a sebesség—út görbe szerkesztéséhez is felhasználható.

b) **Átmenet nagyobb keresztmetszetre**

A *136/II. ábra* arra az esetre vonatkozik, amikor az emelkedő víztükör kisebb keresztmetszetű aknából nagyobb keresztmetszetű aknába lép át. Ebben az esetben előfordulhat, hogy a víztükör a nagyobb F_2/f áttételhez tartozó $Y_{2\infty}$ kilengési korláton **túlemelkedett,** ami azt jelenti, hogy a *2* alapgörbén nem találunk oly pontot, amely az átlépés határfeltételeit kielégíti. (A kilengési korlát ugyanis megszabta nemcsak a kilengésnek legnagyobb értékét, hanem a lassításnak és a munkaképességnek korlátjait is.)

A víztükör túlemelése esetében az $u = u(x)$ alapgörbe nem tájékoztathat a jelenség lefolyásáról, mert az $y_0 = h_0'$ határfeltétel ebben az esetben nem teljesülhet és ennélfogva a (244) egyenlet C állandóját más feltétel alapján kell meghatározni. Ennek az egyenletnek áttekinthetőbb alakja a h' veszteségmagasságot kifejező (247/a) egyenlet, amelyből a t_1 időpontban talált y_1 tükörlehajlás és h_1' veszteségmagasság helyettesítésével a C_1 állandó alábbi általánosabb alakban fejezhető ki:

$$C_1 = \frac{2\alpha^2}{m^2}(m y_1 - m h_1' + 1)\, e^{-m y_1}.$$

A (247/a) egyenletbe helyettesítve írható:

$$m h' = m y + 1 + (m h_1' - m y_1 - 1)\, e^{m(y - y_1)}. \tag{260}$$

Ez az egyenlet a $h_l = h' - y$ és $h_{l1} = h_1' - y_1$ **lassítómagasság** bevezetésével a következő alakra hozható:

$$m h_l = 1 + (m h_{l1} - 1)\, e^{m(y - y_1)}. \tag{261}$$

A második tag előjelét a lassítómagasság h_{l1} kezdőértéke egyértelműen meghatározza.

α) Ha a $h_{l1} < Y_\infty = 1/m$, vagyis ha a lassítómagasság kezdőértéke **kisebb** a kilengési korlátnál, akkor a második tag negatív, a lassítómagasság pedig **mindvégig kisebb marad** e határértéknél (vö. a 91/c. ponttal és a (254) egyenlettel). Ebben az esetben $y_1 = y_0 = h_1'$ helyettesítéssel a (247/a) egyenlethez jutunk, amelyből az $u = u(x)$ alapgörbét is leszármaztattuk.

β) Ha $h_{l1} > Y_\infty$, vagyis a lassítómagasság kezdőértéke **nagyobb** a kilengési korlátnál, akkor (261) második tagja mindig **pozitív.** Ilyenkor a $h_l = h' - y$ lassítómagasság sohasem lehet kisebb az Y_∞ kilengési korlátnál, de viszont az y mélység növelésével minden határon túl megnagyobbítható.

Az y_1 tükörlehajlás kezdőértékének alkalmas választásával a (261) egyenlet egyszerűbb alakra hozható.

Legyen: y_1 a tükörlehajlás ama kezdőértéke, amely a lassítómagasság alsó határértékének éppen a **kétszeresét** eredményezi, azaz:

$$h_{l1} = h'_1 - y_1 = 2Y_\infty = 2/m \quad \text{(m)}. \tag{262}$$

Ebben az esetben az eredeti jelölések visszahelyettesítésével írható:

$$m h' = m y + 1 + e^{m(y-y_1)}. \tag{263}$$

Ez az egyenlet — egyetlen előjel kivételével — teljesen összevág a (247/a) egyenlettel, amelyből az $u = u(x)$ alapgörbét leszármaztattuk.

$m y_1 = A$ állandó és $x = m y - A$ új független változó bevezetésével írható

$$m h' = A - v; \quad \text{ahol:} \quad v = -e^x - x - 1. \tag{264}$$

A $v = v(x)$ alapgörbe az u görbétől csak az első tag előjelében tér el, tehát szintén **független a lengőrendszer méreteitől;** az u görbe negatív ágával közös aszimptotája van és azt **felülről** közelíti meg.

A víztükör túlemelkedése esetében az előre felrajzolt v görbe veszi át az u görbe negatív ágának a szerepét. A *136/II. ábra* szerint ezt a görbét is 1/m-szeres méretarányban rajzoljuk fel és szintén 45°-os ferde vetítősugarakkal határoljuk annak a veszteség—út diagramba illeszkedő szakaszát.

86. példa. A *137. ábrában a Schiffmann*-féle közelítő szerkesztéssel vizsgált aknás kiegyenlítőmedence üzemi jellemzőit az alapgörbék egymásraillesztésének módszerével ellenőriztem.

Az eredmények összehasonlítása érdekében a 84. példával és a *134. ábrával* azonos aknaméreteket választottam. A víztükör kezdőlehajlása: $y_0 = h'_0 = 8{,}6$ m.

A háromféle keresztmetszethez három alapgörbét kell előre felrajzolni. Ezek léptékét a csillapítási tényezőkből alábbiak szerint kiszámított Y_∞ kilengési korlátok szabják meg. Az $l = 2500$ m hosszú és $d = 2$ m átmérőjű ($f = 3{,}14$ m²) nyomócsőhöz csatlakozó aknás medence méretei:

$D_1 = 2{,}5$ m,	$F_1 = 4{,}9$ m²,	$F_1/f = 1{,}56.$
$D_2 = 7{,}0$ m,	$F_2 = 38{,}5$ m²,	$F_2/f = 12{,}30.$
$D_3 = 10{,}0$ m,	$F_3 = 78{,}5$ m²,	$F_3/f = 25{,}00.$

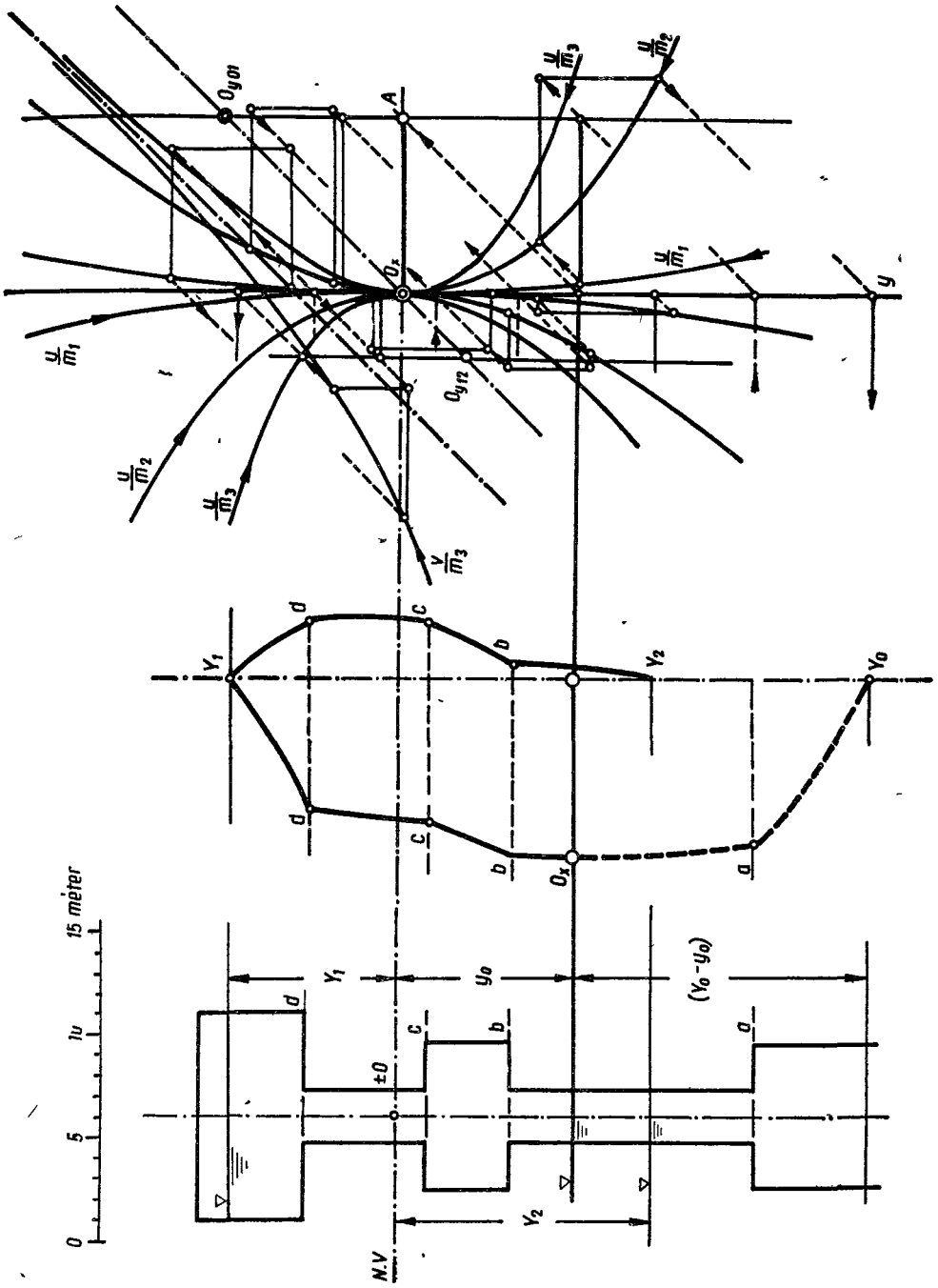
A három kilengési korlát, $1 + \zeta = 18{,}7$ veszteségtényezővel:

$$Y_{1\infty} = \frac{1}{m_1} = \frac{fl}{F_1(1+\zeta)} = \frac{2500}{1{,}56 \cdot 18{,}7} = \mathbf{86\ m}; \quad m_1 = 0{,}0117/\text{m}.$$

Hasonlóképpen: $Y_{2\infty} = 1/m_2 = \mathbf{10{,}9\ m}$ és $m_2 = 0{,}092/\text{m}$

és: $Y_{3\infty} = 1/m_3 = \mathbf{5{,}36\ m}$ és $m_3 = 0{,}187/\text{m}$.

Az O_x kezdőpontjukkal egymásra illesztett három alapgörbe pontjainak koordinátáit célszerűen táblázatosan számítjuk ki. A harmadik keresztmetszethez tartozó u görbe mellé — a víztükör túlemelkedése miatt — a v görbét is fel kell rajzolni.



127. ábra. Változó keresztmetszetű aknás medence veszteség-út diagramja

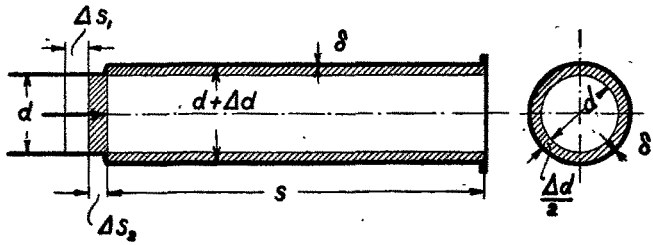
A görbeszakaszok egymásraillesztésével szerkesztett $h'(y)$-diagramot külön is felrajzoltam. Ebből a *132. ábrában* bemutatott mértani középarányos szerkesztéssel a sebesség-út-görbe is megrajzolható. (Tört csigavonal alakú diagram.)

A rajzból lemért legnagyobb kilengések: $Y_1 = 8{,}0$ m és $Y_2 = 12{,}4$ m. A *Schiffmann*-féle szerkesztés valamivel nagyobb értékeket eredményezett. (Az első negatív kilengésre kapott érték: $Y_1 = 8{,}4$ m, vagyis 5%-kal nagyobb a fenti szabatos eredménynél, ami elfogadható közelítés.)

C) A CSŐVEZETÉK HIRTELEN ZÁRÁSA. A VÍZLÖKÉS

96. Csőbe zárt vízoszlop rugalmassági tényezője

Eddigi vizsgálatainknál a cseppfolyós folyadék összenyomhatósága figyelmen kívül volt hagyható. Mihelyt azonban egy mozgásban levő folyadékoszlopot hirtelen megállítunk, a tehetetlenségi erők nagyságát csak a rugalmasságtan törvényeinek alapján lehet meghatározni.



138. ábra. Csőbe zárt vízoszlop rugalmassági tényezője

E vizsgálatok folyamán tehát a folyadék rugalmassági tényezőjét kell számításba venni, éspedig éppen olyan értelmezésben, mint a szerkezeti anyagoknál (*Hooke*-törvény).

Előzetes tájékoztatást ad az a hozzávetőleges adat, amely szerint a **víz rugalmassági tényezője kereken századrésze a vasénak** (lásd 44/b. pont), ami annyit jelent, hogy ugyanazzal a nyomással kb. százszoros az összenyomódás, ha a vízoszlopot teljesen merev, alaktartó (vastag) csőfal veszi körül.

A gyakorlatban előforduló esetek többnyire vékony falú csövekre vonatkoznak, amelyek a belső túlnyomás következtében keresztirányú nyúlást szenvednek. A vízoszlop összenyomódását ilyenkor a csőfal megnyúlásából származó térfogatnövekedés is kíséri, ami a folyadékoszlop további megrövidülését eredményezi.

A jelenség elméletét *Zsukovszkij* orosz professzor dolgozta ki, a szabatos mennyiségi vizsgálatot pedig *Alliévi* végezte el, aki 1903-ban megjelent első munkájában megvetette a csővezetékek gyors zárásával kapcsolatos jelenségek méretezési alapjait, és rámutatott e kérdés gyakorlati jelentőségére.

A *138. ábra* jelöléseivel a következő meggondolások tehetők:

A d átmérőjű s hosszúságú folyadékoszlop Δp nyomásemelkedés hatására az E_f rugalmassági tényezővel arányos Δs_1 megrövidülést szenved, amelynek nagysága:

$$\Delta s_1 = \frac{\Delta p}{E_f} \cdot s.$$

A csőfal keresztirányú tágulása miatt az oszlop további Δs_2 mértékű megrövidülést szenved, amelyet a $d\pi\Delta d/2$ gyűrűszelvénnyel megnagyobbodott cső-

keresztmetszetből lehet kiszámítani. A cső térfogatnövekedésének kitöltéséhez szükséges köbtartalom:

$$\frac{d^2\pi}{4} \cdot \Delta s_2 = \frac{d\pi s}{2} \Delta d;$$

amiből:

$$\Delta s_2 = \frac{2s}{d} \Delta d.$$

A δ vastagságú csőfal keresztirányú megnyúlása a vékonyfalú csőben ébredő σ húzófeszültségnek megnövekedéséből számítható, amely a cső hosszegységére eső $d\Delta p$ erővel arányos. A csőanyag E_c rugalmassági tényezőjének bevezetésével írható:

$$\Delta\sigma = \frac{d\Delta p}{2\delta} = E_c \frac{\Delta d}{d}.$$

A folyadékoszlop teljes megrövidülése a fenti egyenletek egybevetése és rendezése után:

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = s\left(\frac{1}{E_f} + \frac{d}{\delta E_c}\right)\Delta p.$$

A rugalmas csőbe zárt folyadékoszlop **redukált rugalmassági tényezőjének** (E_r) bevezetésével a fenti egyenlet a következő egyszerű alakba megy át:

$$\Delta s = s\frac{\Delta p}{E_r} \quad \text{(m)} \tag{265}$$

ahol:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_f} + \frac{1}{E_c \delta/d}. \tag{266}$$

A redukált rugalmassági tényező reciprok értékét a két tényező reciprok értékének összegéből kell kiszámítani. A (266) egyenlet szerint a cső rugalmassági tényezője δ/d arányban jut érvényre.

A szilárdságtani számításoktól eltérően itt minden méretet cm helyett **méterben** kell kifejezni (1 kg/m² = 10^4 kg/cm²). A redukált rugalmassági tényező kiszámításához szükséges gyakorlati adatok a következők:

Víz:	$E_f = 2{,}07 \cdot 10^8$	kg/m²
Folytacél:	$E_c = 2{,}0 \cdot 10^{10}$	kg/m²
Öntött vas:	$E_c = 1{,}0 \cdot 10^{10}$	kg/m²
Ólom:	$E_c = 2{,}0 \cdot 10^9$	kg/m²
Gumi:	$E_c = 4{,}0 \cdot 10^5$	kg/m² (átlagos érték).

87. példa. *a)* Egy $d = 1$ m átmérőjű, $\delta = 10$ mm falvastagságú **folytacélcsőben** a folyadékoszlop redukált rugalmassági tényezője:

$$E_r = \frac{1}{\frac{1}{2{,}07 \cdot 10^8} + \frac{100}{2 \cdot 10^{10}}} = \frac{10^8}{0{,}485 + 0{,}5} = \mathbf{1{,}015 \cdot 10^8\ kg/m^2}.$$

b) Egy 1″-es **gázcső** átmérője: $d = 27$ mm, falvastagsága: $\delta = 3{,}3$ mm, $\delta/d = 3{,}3 : 27 = 0{,}122$; $E_c\delta/d = 24{,}4 \cdot 10^8$ kg/m².

A redukált rugalmassági tényező:

$$E_r = \frac{10^8}{0{,}485 + 0{,}041} = \mathbf{1{,}9 \cdot 10^8\ kg/m^2}.$$

c) Egy $d = 20$ mm átmérőjű és $\delta = 2$ mm falvastagságú **gumicső** redukált rugalmassági tényezője, $E_c\ \delta/d = 4{,}0 \cdot 10^4$ kg/m² értékkel:

$$E_r = \frac{1}{\frac{1}{20700 \cdot 10^4} + \frac{1}{4 \cdot 10^4}} = \frac{10^4}{0{,}00005 + 0{,}25} \cong \mathbf{4{,}0 \cdot 10^4\ kg/m^2}.$$

97. A hirtelen zárásból eredő vízlökés. A hullámsebesség

Ha a csővezetékben c sebességgel áramló vízoszlopot a csővég hirtelen zárásával lelassítjuk, akkor annak tömegében ébredő impulzuserő Δp nyomásemelkedést hoz létre, amely a $\Delta c = (c - c_a)$ sebességapadással arányos. (Teljes zárásnál: $c_a = 0$).

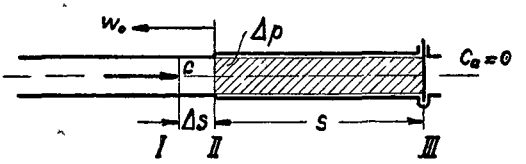
Ha az s hosszúságú folyadékoszlop $s f \gamma/g$ tömegének lelassításához (ill. megállításához) Δt idő szükséges, akkor a másodpercenkénti impulzusváltozásból számított impulzuserő:

$$J = \frac{f\gamma}{g} s \frac{\Delta c}{\Delta t}.$$

Ez az impulzuserő az f keresztmetszetű csőben $\Delta p = J/f$ nagyságú nyomásemelkedést okoz, amely a másodpercenként lelassított folyadékoszlop $w_0 = s/\Delta t$ hosszúságának bevezetésével így írható:

$$h_w = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{w_0 (c - c_a)}{g} \quad \text{(m)}; \tag{267}$$

teljes zárás esetére pedig $\Delta c = c - c_a = c$ értékkel:



139. ábra. Csővezeték hirtelen zárása

$$\boxed{h_w = \frac{w_0 c}{g}} \quad \text{(m)}. \tag{267/a}$$

A másodpercenként lelassított, ill. megállított folyadékoszlop hosszúságának értelmezése a *139. ábra* kapcsán az a **sebesség**, amelynél a Δp nyomásemelkedés, a cső mentén az **áramlással ellentétes irányban** tovaterjed.

A zárás pillanatát követő Δt idő alatt ugyanis a c sebességgel áramló folyadékoszlopnak s hosszúságú szakaszában jön létre a Δp nyomásemelkedés, amelynek (teljes zárás esetén) a (265) egyenlettel meghatározott Δs összenyomódás a következménye.

E Δs összenyomódásnak mértékét a megállított folyadékoszlophoz érkező mennyiség c sebessége határozza meg, amely Δt idő alatt $\Delta s = c\Delta t$ úttal halad előre. Minden Δt időszakban eszerint **újabb** s hosszúságú folyadékoszlopnak kell összenyomódnia, hogy az üzemi sebességgel érkező $f\Delta s$ térfogat helyet találjon, ami azt jelenti, hogy a nyomáshullám terjedési sebessége: $w_0 = s/\Delta t$.

E hullámsebesség nem más, mint a folyadékban terjedő **hang sebessége.** Kiszámításához a (265) egyenletet $\Delta s = c\Delta t$ és $s = w_0\Delta t$ helyettesítéssel a következő alakra hozzuk:

$$c = \frac{w_0}{E_r}\Delta p. \qquad (265/a)$$

A (265/a) és a (267/a) egyenletek összevonásával és a folyadék sűrűségének ($\varrho = \gamma/g$) bevezetésével írható:

$$\boxed{w_0 = \sqrt{\frac{E_r}{\varrho}}} \quad \text{(m/mp)}. \qquad (268)$$

A hullámsebességet eszerint a folyadékoszlop (redukált) rugalmassági tényezője és a sűrűsége egyértelműen meghatározza.

A (268) egyenlet arra is alkalmas, hogy a folyadékban terjedő hang sebességéből (hideg vízre: $w_0 = 1425$ m/mp) a rugalmassági tényezőt kiszámítsuk.

Hideg vízre:

$$E_r = \frac{\gamma w_0^2}{g} = \frac{1000 \cdot 1425^2}{9{,}81} = 2{,}07 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^2.$$

88. példa. *a)* A hullám terjedési sebessége $d = 1$ m átmérőjű, $\delta = 10$ mm falvastagságú acélcsőben, amelynek redukált rugalmassági tényezője a 87. példa szerint: $E_r = 1{,}015 \cdot 10^8$ kg/m^2,

$$\mathbf{w_0 = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 1{,}015 \cdot 10^8}{1000}} \cong 1000 \text{ m/mp}.}$$

Ha e csővezeték hirtelen lezárásával a c sebességgel áramló vízoszlopot megállítjuk, akkor a vízlökés nyomásmagassága, a (267/a) egyenlet szerint:

$$\mathbf{h_w = \frac{w_0}{g} \cdot c \cong 100\, c,}$$

vagyis minden 1 m/mp sebességre kb. 100 méteres nyomásmagasság emelkedéssel kell számolni.

Ha tehát egy $H = 500$ m esésre szerkesztett vízerőmű nyomócsövét hirtelen lezárjuk és abban zárás előtt a víz $c = 4$ m/mp sebességgel áramlott, akkor a nyomásemelkedés: $h_w \cong 400$ m, vagyis a cső belső túlnyomása 50 at-ról 90 at-ra emelkedik.

b) Az 1″-es gázcsőbe zárt vízoszlop redukált rugalmassági tényezője: $E_r = 1{,}9 \cdot 10^8$ kg/m^2, a hullámsebesség tehát:

$$\mathbf{w_0 = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 1{,}9 \cdot 10^8}{1000}} = 1370 \text{ m/mp}.}$$

c) A 87. példában tárgyalt $d = 20$ mm-es gumicsövet kitöltő vízoszlop redukált rugalmassági tényezője: $E_r = 4{,}0 \cdot 10^4$ kg/m^2.

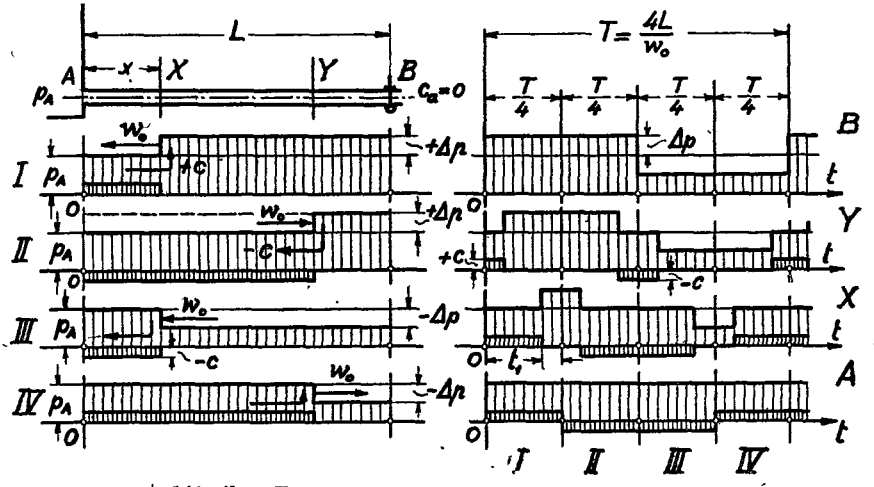
A hullámsebesség:

$$\mathbf{w_0 = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 4 \cdot 10^4}{1000}} \cong 19{,}8 \text{ m/mp}.}$$

98. A nyomáshullám (vízlökés) időbeli lefolyása

a) **Hirtelen zárás** ($T_z = 0$), **súrlódás nincs.** A csővezeték hirtelen zárásából eredő vízlökést a (267), ill. (267/a) egyenletből kiszámítható — **ugrásszerű** nyomásemelkedés jellemzi, amely a zárás pillanatában a cső lezárt végéről induló, **meredek homlokú nyomáshullám** alakjában a (268) egyenlettel meghatározott hullámsebességgel fut végig a csővezetéken.

Ha a csővezeték hosszúsága: L, akkor a nyomáshullám egyszeri végigfutásához $T/4 = L/w_0$ idő szükséges. Ennyi idő alatt az egész vízoszlop nyugalomba jutott ($c = 0$), de az egyensúly nem állhat helyre, mert a cső teljes hossza mentén Δp túlnyomás uralkodik, amelynek hatása alatt az áramlás iránya megfordul, a túlnyomás pedig — ugyanennyi idő alatt — ismét megszűnik.



140. ábra. Feszültségi hullám (vízlökés) zárt csőben

A jelenség lefolyását a *140. ábra* szemlélteti. A cső mentén végigfutó nyomáshullám a belépőnyílásig juthat el (A), ahol a sztatikai nyomás (p_A) változatlansága miatt **visszaverődik** és w_0 hullámsebességgel másodszor is végigfut a cső mentén, csakhogy ez alkalommal tehermentesítő hullám alakjában. A jelenség II. üteme végén az egész cső mentén megszűnt ugyan a túlnyomás, de a vízoszlop most c sebességgel **visszafelé** áramlik. E **lendület** következtében egy depresszió-hullám indul a zárás helyétől — Δp homlokmagassággal — a csőszáj felé (III. ütem), amely a vízoszlopot ismét megállítja ugyan, de azt szívóhatásánál fogva egy negyedik ütemre készíti elő. E IV. (kiegyenlítő) ütem alatt a meredekhomlokú hullám mégegyszer végigfut a cső mentén, a vízoszlop pedig ugyanebben az ütemben ismét felveszi c kezdősebességét.

Ha csillapítás (csősúrlódás) nincsen, a vízoszlop a IV. ütem végén ugyanabba az állapotba jutott, mint a zárás pillanatában volt, és a játék ismétlődik.

A csővezeték mentén végigfutó és visszaverődő nyomáshullám a vízoszlopot **hosszirányú** (longitudinális) lengésbe hozza. A lengés ideje a cső L hosszúságával arányos. Írható:

$$T_w = \frac{4L}{w_0} \quad \text{(mp)}. \tag{269}$$

A lengés képe minden keresztmetszetben más, mint az a *140. ábrából* is kitűnik. A csővezeték közbenső keresztmetszetében a nyomások időbeli változását ábrázoló törtvonal alakját a keresztmetszet x távolsága egyértelműen meghatározza. Az összefüggést alábbi példa is megvilágítja.

89. példa. A 87. példában kiszámítottuk a $d = 1$ m átmérőjű és $\delta = 10$ mm falvastagságú nyomócsőnek redukált rugalmassági tényezőjét, amely a 88. példa szerint kereken $w_0 = 1000$ m/mp hullámsebességet eredményezett.

Ha a cső hosszúsága: $L = 525$ m, akkor a nyomáshullám **négyszeri** végigfutásához szükséges idő:

$$T_w = \frac{4L}{w_0} = \frac{4 \cdot 525}{1000} = 2{,}1 \text{ mp.}$$

A cső végétől $(L - x)$ távolságban kijelölt X keresztmetszetbe a *140. ábra* szerint a nyomásemelkedés t_1 idő múlva jut el. Ha $x = 125$ m, akkor:

$$t_1 = \frac{L - x}{w_0} = \frac{525 - 125}{1000} = \mathbf{0{,}4 \text{ mp.}}$$

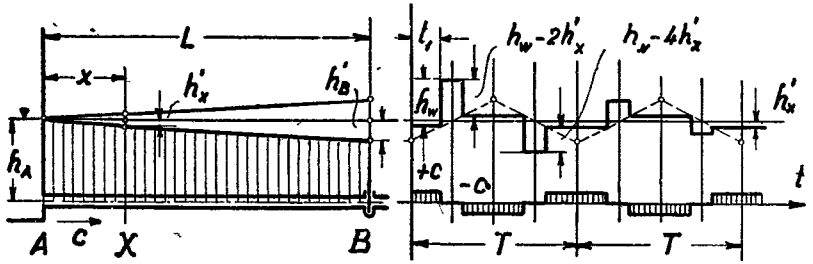
A nyomásemelkedés tartama pedig, az ábra szerint:

$$\frac{T_w}{2} - 2t_1 = 1{,}05 - 0{,}8 = 0{,}25 \text{ mp.}$$

b) **Hirtelen zárás. A csősurlódás befolyása.** A *140. ábra* szemlélteti a nyomáshullám ismételt visszaverődését, amelynek következtében a folyadékoszlop hosszirányú lengéseket végez. E lengőmozgás «szögsebessége» a $T_w = 4L/w_0$ lengési időből számítható. Nagysága:

$$\alpha_w = \frac{2\pi}{T_w} = \frac{\pi}{2} \frac{w_0}{L} \quad (\text{mp}^{-1}). \qquad (270)$$

A meredek homlokú nyomáshullám jellegzetessége, hogy egy kijelölt keresztmetszetben a folyadékoszlop sebessége az üzemi c értékről hirtelen csökken zérusra, majd $-c$-re. Ha csillapítás nincs, akkor a jelenség **változatlan erősséggel** ismétlődik.



141. ábra. Az áramlási veszteség befolyása a vízlökésre

A csősúrlódás **csillapító hatását** a *141. ábra* kapcsán az *üzemi sebességre vonatkoztatott* áramlási veszteségmagasság figyelembevételével egy tetszőlegesen kijelölt X keresztmetszetben a következő meggondolás alapján vizsgálhatjuk:

Az áramlási veszteségmagasság X pontban:

$$h'_x = \frac{x}{L} h'_B, \quad \text{ahol:} \quad h'_B = \lambda \frac{L}{d} \frac{c^2}{2g}.$$

Az X pontba érkező, $h_w = \Delta p/\gamma$ homlokú nyomáshullám a veszteségmagassággal apasztott $h_A - h'_x$ nyomásmagassághoz adódik hozzá. A végnyomás tehát az áramlási veszteségek miatt h'_x értékkel kisebbedik. A hullám visszaverődésekor viszont a visszafelé áramló folyadékoszlop h'_x veszteségmagassága az alapnyomást **megnöveli**, ami azt eredményezi, hogy a visszaverődő hullámhomlok a veszteségmagasság **kétszeres értékével** kisebbedett.

A hullámhomlok magassága tehát a féllengés végén már csak: $h_w - 2h'_x$; egy teljes lengés tartama alatt pedig: $h_w - 4h'_x$ értékre apadt. A jelenség lefolyását a *141. ábra* szemlélteti, amelyből arra is következtethetünk, hogy m számú lengés után a mozgás teljesen lefékeződött. Írható:

$$m \cong \frac{h_w}{4\,h'_x}. \tag{271}$$

90. példa. A 89. példában tárgyalt $L = 525$ m hosszú csővezeték hirtelen zárása $T_w = 2{,}1$ mp lengési idővel ismétlődő nyomáshullámot gerjeszt. A lengés «szögsebessége»:

$$\alpha_w = \frac{2\pi}{T_w} = \frac{6{,}28}{2{,}1} = \mathbf{2{,}98/mp},$$

a percenkinti lengésszám pedig: $\mathbf{n_w = \frac{60}{T_w} = \frac{60}{2{,}1} = 28{,}6/perc.}$

$c = 4$ m/mp üzemi sebesség és $w_0 = 1000$ m/mp hullámsebesség a 88. példa szerint $h_w = 400$ m-es nyomásmagasságot eredményezett.

Ezzel szemben az áramlási veszteségmagasság, $\lambda = 0{,}02$ tényezővel, a cső végén:

$$\mathbf{h'_B = \lambda \frac{L}{d} \frac{c_2}{2g} = 0{,}02 \cdot \frac{525}{1{,}0} \cdot \frac{4^2}{19{,}6} = 8{,}5\ m.}$$

A csillapítás a cső végén a legerősebb. Közepes értéke $x = L/2$-nél:

$$\mathbf{h'_x = h'_B/2 = 4{,}25\ m.}$$

A hullám teljes lefékezéséhez szükséges lengések száma:

$$\mathbf{m = \frac{h_w}{4\,h'_x} = \frac{400}{17} = 23{,}5.}$$

A jelenség lefolyásának időtartama tehát: $m\ T = 23{,}5 \cdot 2{,}1 = 49{,}5$ mp-re becsülhető.

Meg kell jegyezni, hogy *Gibson* indikátorral vette fel a csillapodó nyomáshullámok időbeli lefolyását. A felvett diagramok alakja jó egyezést mutat a *141. ábrával*. A kísérlet egy $L \cong 170$ m hosszú, $d \cong 95$ mm átmérőjű vastag falú csőre vonatkozott. A nyomáshullámok az adott esetben kb. 30 lengés után csillapodtak [19].

c) **Véges zárási idő** a nyomáshullám alakját oly értelemben módosítja, hogy a nyomás (ugrásszerű emelkedés helyett) a zárás időtartamától függő **folytonos átmenettel** veszi fel a hullámsebességtől függő legnagyobb értékét.

Ha feltételezzük, hogy a zárószerkezet T_z zárási idő alatt a c sebességet **egyenletesen** csökkenti, azaz $t < T_z$ múlva az áramlás sebessége: $c_t = c\,(1 - t/T_z)$ értékre csökkent, akkor a Δp nyomásemelkedés a t időpontban csak:

$$h_{wt} = \frac{w_0 c}{g} \frac{t}{T_z} = h_w \frac{t}{T}. \tag{272}$$

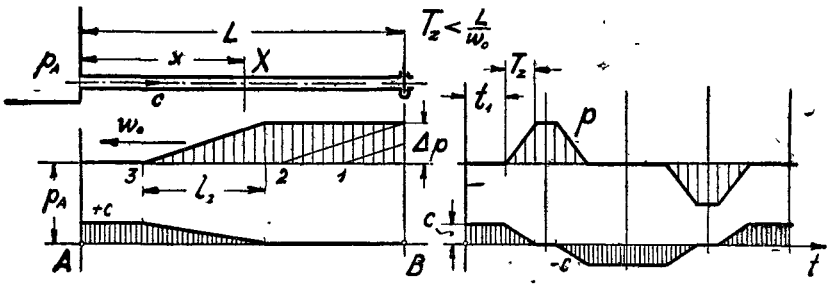
A nyomás tehát **lineárisan** emelkedik mindaddig, amíg $t = T_z$ időpontban eléri a hirtelen zárásnak megfelelő legnagyobb értékét.

Megjegyzem, hogy a valóságban rendszerint a kiömlő keresztmetszet időbeli változása $f = f(t)$ ismert, nem pedig a sebesség, $c = c(t)$ időfüggvénye. (Vö. a 102. ponttal.)

Ha a zárás ideje **hosszabb,** mint a nyomáshullám oda-visszafutásához szükséges $T_w/2 = 2L/w_0$ időtartam, akkor a nyomás legnagyobb értéke **létre sem jöhet,** mert a zárás utolsó szakasza már a *depressziós* (harmadik) ütembe nyúlik.

A *142.* ábra a nyomáshullámnak $T_z < T_w/4$ zárási időre vonatkoztatott alakját szemlélteti, amelynek homloka $l_z = w_0 T_w$ hosszúságú.

A nyomás és a sebesség időbeli változását mutató jobb oldali függvényábra az X keresztmetszetre vonatkozik.



142. ábra. Véges zárási idő befolyása a nyomáshullám kialakulására

A vízlökés káros hatásainak elkerülése érdekében **mennél hosszabb zárási idő** választása indokolt, de minden körülmények között elő kell írni, hogy az a féllengés idejénél hosszabb legyen, azaz:

$$T_z > \frac{T_w}{2} = \frac{2L}{w_0}. \tag{273}$$

91. példa. Az előző példában vizsgált csővezeték zárási ideje legyen: $T_z = 2$ mp. Minthogy az $L = 525$ m hosszú vízoszlop lengési ideje ($w_0 = 1000$ m/mp hullámsebességgel): $T_w = 2{,}1$ mp, tehát a zárás tartama kielégíti a (273) egyenlettel kifejezett feltételt.

A nyomásemelkedés a legnagyobb értékét $t = T_w/2$ idő múlva éri el. A $c = 4$ m/mp üzemi sebességre kiszámított $h_w = 400$ m-es vízlökés alapulvételével, a (272) egyenletből:

$$(h_w)_{max} = h_w \frac{T_w}{2T_z} = 400 \cdot \frac{2{,}1}{2 \cdot 2} = \mathbf{210\ m}.$$

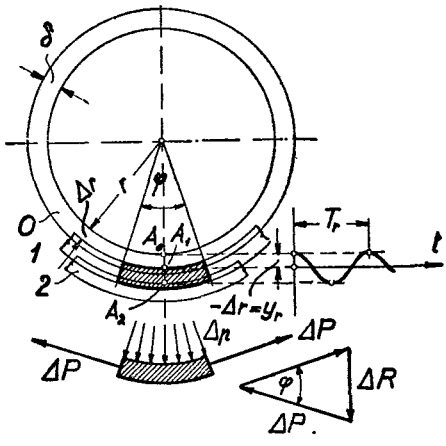
Ezzel a zárási idővel a nyomásemelkedés 40 at-ról máris 21 at-ra csökkent, ami azonban még mindig igen kedvezőtlen érték.

A gyakorlatban a vízlökés elkerülésére a fentinél jóval nagyobb ($T_z = 30 \div 60$ mp nagyságrendű) zárási idő választása szokásos. Különösen a vízerőművek nyomócsöveinek védelme kívánja még a turbinaszabályozó oly beállítását, hogy a teljes zárás és a teljes nyitás ideje ne legyen túlságosan rövid.

Itt említem meg, hogy nemcsak a zárás, hanem a **nyitás** is gerjeszt nyomáshullámokat. (Negatív vízlökés.)

99. A rugalmas csőfal keresztirányú lengései

Az előző pontokból megismertük a folyadék és a csőfal rugalmas alakváltozásának szerepét a vízlökés kialakulásában, és azt láttuk, hogy hirtelen zárás következtében a belső túlnyomás a cső egy-egy keresztmetszetében **ugrásszerűen** változik.



143. ábra. A rugalmas csőfal keresztirányú lengései

Eddigi vizsgálatainkat arra a feltevésre alapítottuk, hogy a csőfal *rugalmas* megnyúlása és összehúzódása a belső túlnyomásnak eme ugrásszerű változását késedelem nélkül követi.

A csőfal *tömegének* tehetetlensége miatt azonban ez a feltétel nem teljesül, mert a cső rugalmas alakváltozásában a rúgóerők és a tömegerők kölcsönhatásával jellemezhető **lengőrendszer** mozgástörvénye jut érvényre.

A vizsgálatot a *143. ábra* jelöléseivel a φ középponti szöggel kihasított m tömegű gyűrűelem *új* egyensúlyhelyzetének (A_1) kijelölésével kezdjük meg, amely a $t = 0$ időpontban talált (A_0) *régi* egyensúlyhelyzetből $y_r = \Delta r$ nagyságú út befutásával érhető el.

Ez az új egyensúlyhelyzet azáltal jön létre, hogy a gyűrű keresztmetszetében a húzófeszültség $\Delta\sigma = E_c\,\Delta r/r$ értékkel megnagyobbodik; a b szélességű gyűrűelemen tehát $\Delta P = b\,\delta\,\Delta\sigma$ nagyságú húzóerők tartanak egyensúlyt a nyomás növekedéséből származó $\Delta R = b\,r\,\varphi\Delta p$ erővel.

Az erőháromszögből, kis φ szögre helyettesítés után írható:

$$\Delta R = \varphi\,\Delta P = E_c \frac{b\,\delta\varphi}{r}\Delta r,$$

vagyis a ΔR *visszatérítő erő* a Δr úttal arányos.

A rendszer *rugóállandója* (az erő egységére eső kimozdulás):

$$C = \frac{\Delta r}{\Delta R} = \frac{r}{E_c\,b\,\delta\varphi} \quad \text{(m/kg)},$$

a lengő tömeg pedig (a csőanyag γ_c fajsúlyának bevezetésével):

$$m = b\,\delta\,r\,\varphi\frac{\gamma_c}{g}.$$

A lengőrendszer szögsebessége tehát, helyettesítés és rövidítés után:

$$\alpha_c = \sqrt{\frac{1}{mC}} = \sqrt{\frac{E_c\,g}{r^2\,\gamma_c}} \quad (\text{mp}^{-1}). \tag{274}$$

Ha a (268) egyenlet mintájára a rugalmas csőfalban terjedő hullám sebességét a csőanyag rugalmassági tényezőjéből és sűrűségéből kifejezzük, írható:

$$w_c = \sqrt{\frac{E_c g}{\gamma_c}} \quad \text{(m/mp)}. \tag{274/a}$$

E hullámsebesség helyettesítésével a csőfal keresztirányú lengéstörvényét kifejező (274) egyenlet az alábbi szemléletes alakra hozható:

$$\alpha_c = \frac{w_c}{r}, \qquad \text{azaz:} \quad w_c = r\,\alpha_c. \tag{274/b}$$

A keresztirányú lengésidő pedig:

$$T_c = \frac{2\pi}{\alpha_c} = \frac{2\pi r}{w_c} \quad \text{(mp)}. \tag{275}$$

A (275) egyenlet úgy is olvasható, hogy a keresztirányú lengésidőt a csőszelvény ($2\pi r$) kerületének egyszeri körülfutásához szükséges időtartamból lehet kiszámítani, ha a csőfalban w_c sebességgel terjedő nyomáshullám mozgását követjük.

A csőfal egy-egy elemének kilengései az idő függvényében az új egyensúlyhelyzet körül a következő egyenlettel fejezhetők ki:

$$y = -y_r \cos \alpha_c t, \tag{276}$$

ami annyit jelent, hogy $t = T_c/2$ idő múlva a csőfal tágulása a sztatikai érték kétszeresét éri el, és ehhez képest annak igénybevétele is $2\,\Delta\sigma$ növekményt szenved.

A csővezeték hirtelen zárásával gerjesztett vízlökés tehát a csőfal keresztirányú lengései következtében a (267/a) egyenlettel meghatározott Δp nyomásemelkedés **kétszeres** értékével terheli a csőfalat.

A keresztirányú lengések gyors csillapodása miatt a kilengések lépésről lépésre kisebbednek, azaz $y_1 = \beta\, y_0$, ahol $\beta < 1$. Ennek következtében a nyomásemelkedés csúcsértéke is valamivel kisebb. Írható:

$$p_{\max} = p_A + (1 + \beta)\,\Delta p,$$

ahol a csillapítás mértéke pontosabb mérési adatok hiányában $\beta \cong 0{,}8$ értékkel vehető számításba.

Ugyanilyen keresztirányú lengések gerjednek akkor is, ha a Δp túlnyomás hirtelen megszűnik, csakhogy most a kilengések előjelt cserélnek és $t = T_c/2$ idő múlva $\beta\,\Delta p$ nagyságú **depresszió** következtében a vízoszlop nyomása mélypontot ér el.

Ezt a depresszió-hullámot értékesíti a vízemelő kos az indítószelep önműködő nyitására [79].

A rendkívül gyors rezgések minőségi és mennyiségi vizsgálatát az alábbi számpéldával egészítem ki.

92. példa. Folytacélcső anyagának rugalmassági tényezője: $E_c = 2 \cdot 10^{10}$ kg/m², fajsúlya: $\gamma_c = 7700$ kg/m³.

A csőfalban terjedő hullám sebessége:

$$w_c = \sqrt{\frac{E_c g}{\gamma_c}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 2 \cdot 10^{10}}{7700}} = \sqrt{25{,}5 \cdot 10^6} = \mathbf{5050\ m/mp.}$$

A $d = 1$ m átmérőjű cső kerületének körülfutásához szükséges idő, a (275) egyenlet szerint:

$$T_c = \frac{d\pi}{w_c} = \frac{3{,}14}{5050} = \mathbf{6{,}25 \cdot 10^{-4}\ mp;}$$

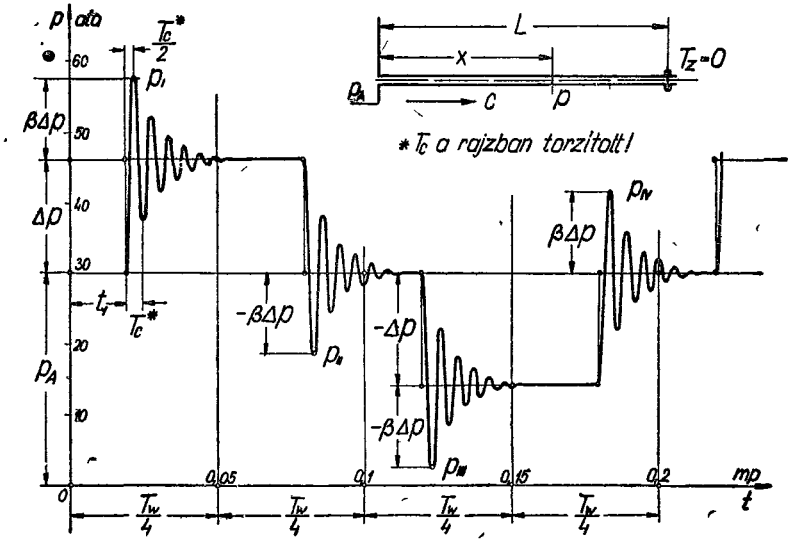
a lengések szögsebessége tehát:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{6{,}28}{6{,}25} \cdot 10^4 \cong \mathbf{10\,000/mp.}$$

Ezzel szemben a 88. példában kiszámított hullámsebesség ($\delta = 10$ mm falvastagság esetén) csak $w_0 = 1000$ m/mp, a hosszirányú lengések ideje pedig, $L = 50$ m felvétellel:

$$T_w = \frac{4L}{w_0} = \frac{4 \cdot 50}{1000} = \mathbf{0{,}2\ mp.}$$

A hirtelen zárással gerjesztett (meredek homlokú) hosszirányú nyomáshullámok fölé eszerint **rendkívül szapora** keresztirányú rezgések (lengések) helyezkednek, amelyek a **nyomások csúcsértékeit veszélyesen megnövelik.**



144. ábra. A csőfal igénybevételének időbeli-változása vízlökés következtében

A nyomások időbeli változását a *144. ábra* szemlélteti, amelybe azonban a csillapított keresztirányú hullámok csak erősen torzított méretarányban voltak berajzolhatók. (A valóságban ezek időtartalma jóval rövidebb.)

A nyomások csúcsértékeit a következő adatokkal számítottam:

A zárás ideje: $T_z = 0$, az üzemi nyomás: $p_A = 30$ ata, az üzemi sebesség: $c = 1{,}6$ m/mp, és ezzel: $\Delta p = 16$ at.

A nyomás időbeli változását a csővezeték X pontjára rajzoltam fel, amely a zárószerkezettől $(L - x) = 20$ m távolságra esik ($x = 30$ m). E szakasz befutásához szükséges idő:

$$t_1 = \frac{L - x}{w_0} = \frac{20}{1000} = \mathbf{0{,}002\ mp};$$

(ezzel szemben: $T_c/2 = 0{,}000\ 31$ mp, vagyis a t_1 időnek kereken egy hatvannegyed része!).

A nyomások csúcsértékei, $\beta \cong 0{,}75$ és $\beta\, \Delta p \cong 0{,}75 \cdot 16 = 12$ at felvétellel:

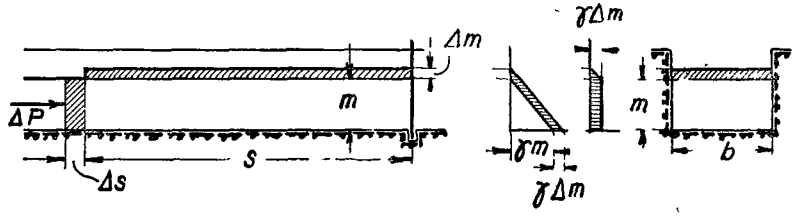
$$\begin{aligned} p_I &= p_A + (1+\beta)\,\Delta p = 30 + 1{,}75 \cdot 16 &&= \mathbf{58\ ata} \\ p_{II} &= p_A - \beta\,\Delta p = 30 - 12 &&= \mathbf{18\ ata} \\ p_{III} &= p_A - (1+\beta)\,\Delta p = 30 - 28 &&= \mathbf{2\ ata} \\ p_{IV} &= p_A + \beta\,\Delta p = 30 + 12 &&= \mathbf{42\ ata.} \end{aligned}$$

Véges zárási idő és a csősúrlódás csillapítóhatása következtében a nyomás csúcsértékei lényegesen kisebbek a fentebb kiszámítottaknál, de még mindig elég nagyok lehetnek csőrepedés vagy más romboló hatás előidézéséhez.

Itt említem meg, hogy a belső elégésű motorok (cseppfolyós) tüzelőanyagot adagoló csöveiben a nyomáshullámok zavaró hatása az adagolás késedelmében jelentkezik. A fáziskésés jelenségeinek szabatos vizsgálatával kapcsolatosan *Juhász Kálmán* és *Bergeron L.* eredményes kutatómunkája érdemel figyelmet.

100. A vízlökés nyitott csatornában

A nyitott csatorna hirtelen zárásával vagy nyitásával lényegében egészen hasonló lefolyású vízlökés gerjeszthető, csakhogy ebben az esetben a nyomásemelkedés a víztükör színtmagasságának változásában jelentkezik, a hullámsebesség pedig rendszerint oly kicsiny, hogy a jelenség lefolyása közvetlenül is megfigyelhető.



145. ábra. A vízoszlop «rugalmassági tényezője» nyitott csatornában

A hullámsebesség kiszámítására a nyitott csatorna esetén is felhasználható a (268) egyenlet, ha itt is bevezetjük a **rugalmassági tényező** fogalmát, amely a vízoszlop megrövidülését kísérő nyomásemelkedésből a *145. ábra* jelöléseivel a következőképpen számítható:

$$E = \Delta p : \frac{\Delta s}{s},$$

ahol kis összenyomódás esetén a nyomásemelkedés $\Delta p \cong \gamma\, \Delta m$, a víztükör emel-

kedése pedig (állandó b szélességű csatornára) a kiszorított köbtartalom állandóságát kifejező $m\Delta s = s\,\Delta m$ egyenletből: $\Delta s/s = \Delta m/m$.

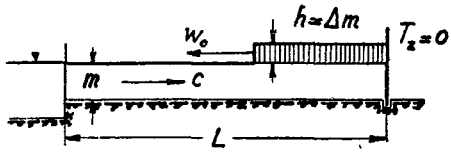
Helyettesítés és rendezés után, a rugalmassági tényező:

$$E = \gamma m \qquad (\mathrm{kg/m^2}); \tag{277}$$

a **hullámsebesség** pedig, a (268) egyenletből, ha abba E-t (277) szerint helyettesítjük:

$$w_0 = \sqrt{m g} \qquad (\mathrm{m/mp}). \tag{278}$$

A hullámsebességnek ezt az értékét a 76. pontban már megismertük, mint **határsebességet** az áramlás és a rohanás között.



146. ábra. Nyitott csatorna hirtelen zárása

A csatorna végének hirtelen lezárásakor keletkező vízlökés a *146. ábrában* szemléltetett **duzzasztóküszöb** (Stau-Schwall) alakjában terjed hátrafelé. A küszöb magassága a c üzemi sebességtől függ és a (267), ill. teljes zárásnál a (267/a) egyenletből számítható. A csatorna *végének* hirtelen nyitásakor **negatív vízlökést** kapunk.

Vízlökéssel indul meg az áramlás akkor is, ha a csatorna *elején* a zsilipet hirtelen **nyitjuk.** (Töltőhullám).

93. példa. Egy $b = 4$ m széles csatornában a mélység: $m = 1$ méter, az üzemi sebesség pedig $c = 1{,}5$ m/mp.

A rugalmassági tényező, a (277) egyenlet szerint:

$$\mathbf{E = \gamma m = 1000\ kg/m^2,}$$

a hullámsebesség pedig:

$$\mathbf{w_0 = \sqrt{mg} = \sqrt{9{,}81} = 3{,}14\ m/mp.}$$

Az $L = 80$ m hosszú csatorna hirtelen zárásával gerjesztett hullám küszöbmagassága, a (267/a) egyenlet szerint:

$$\mathbf{h = \frac{w_0 c}{g} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5}{9{,}81} = 0{,}48\ m.}$$

A vízoszlop hosszirányú lengésideje:

$$\mathbf{T_w = \frac{4L}{w_0} = \frac{4 \cdot 80}{3{,}14} = 102\ mp.}$$

A példa adataiból is kitűnik, hogy nyitott csatornában a hosszirányú lengések lefolyása oly lassú, hogy a jelenség lefolyása műszerek nélkül is jól megfigyelhető.

D) NYOMÁSINGADOZÁSOK MENNYISÉGI VIZSGÁLATA

101. Nyomásingadozások vizsgálatának tárgyköre

Eddigi tárgyalásaink során megismerkedtünk a csővezetékben áramló folyadék egyensúlyállapotának lassú vagy hirtelen külső megzavarásával létrehozott — részben aperiodikus, részben hullámszerűen terjedő — folyamatokkal, amelyeket könyvem 97—100. pontjaiban vízlökés címén ismertettem.

Ennek az elméletnek alapjait — mint tudjuk — *Zsukovszkij* orosz professzor vetette meg (1898-ban) és *Alliévi* [55] tárta fel — a műszaki gyakorlat számára — 1903-ban megjelent klasszikussá vált első munkájával. Ez az elmélet azóta külön tudományággá terebélyesedett, és sok kötetre menő szakirodalmában a jelenségek jellemzőinek szabatos mennyiségi kapcsolatait tisztázza. Ezzel alapot szolgáltat a nagy teljesítményű vízerőművek és a korszerű szivattyútelepek csővezetékeinek gazdaságos méretezéséhez és szilárdsági ellenőrzéséhez.

Az elmélet gyakorlati alkalmazhatóságát biztosító *analitikai* és *grafikus* módszerek megismeréséhez és begyakorlásához szükséges fejezetek beiktatása nélkül könyvem nem tudná kielégíteni a műszaki gyakorlat jogos igényeit, és ezért a következőkben ezzel a kérdéssel is behatóbban foglalkozom.

Sorrendben először tárgyalom azokat a nyomásingadozásokat, amelyeket egy **turbina nyomócsővezetékében** a **kifolyónyílás záródása** vagy **szabályozása** hoz létre. Alliévi nyomán a klasszikus szakirodalom ezt a kérdést tárgyalja a legrészletesebben, ami könnyen érthető, ha azokra az óriási károkra gondolunk, amelyek pl. számos nagy esésű vízerőmű turbinájának *csőtöréseket* okozó gyors zárására voltak visszavezethetők. Itt említem meg, hogy a műszaki gyakorlat ezeket az elméleti eredményeket nemcsak közvetlenül gyümölcsöztette a nyomócsövek megbízhatóbb *méretezési elveinek* kidolgozásával, hanem a turbina szerkesztőjét is arra késztette, hogy a nyomáslökés nagyságát korlátozó berendezéseket hozzon létre. Klasszikus példa erre a Pelton-turbina ún. *sugárterelője*, amelynek alkalmazásával a nyomócsővezetéket elzáró ún. *szabályozótű* zárási ideje tetszőlegesen meghosszabbítható.

Részletesebb tárgyalást kíván a nagy teljesítményű szivattyú-telepekkel táplált hosszú nyomócsővezetékek vizsgálata is. Hőerőműveink és ipartelepeink *vízellátása* sok esetben csak hosszú távolsági nyomócsővezetékek fektetésével biztosítható. Ebben az esetben a szivattyú-üzem megszakadása *(áramkimaradás* miatt) vagy hibásan méretezett önműködő- vagy távvezérlésű csőzárószervek rendellenes működése válthat ki káros nyomásingadozásokat, amelyek a vízoszlop elszakadására és sok esetben csőtörésre vezethetnek. Az itt várható lengési folyamatok tudományosan megalapozott teljes feltárása még a külföldi szakirodalomban is csak folyamatban van. A megoldásra váró feladatok sokrétűségéről *Ganderberger* [15] könyve és a szakfolyóiratok utolsó évfolyamaiban megjelent számos tanulmány ad tájékoztatást. E területen tehát kiforrott elmélet ismertetése még nem lehetséges.

Végül még nem maradhat említetlenül az *Alliévi*-féle elmélet két — az előbbiektől jellegében eltérő — alkalmazási területe sem. Az egyik: a Diesel-motor **adagoló-szivattyújának csővezetékében** végbemenő lengési folyamat, amelynek szakirodalmát *Juhász Kálmán* [68] alapozta meg szaktanulmányaival.

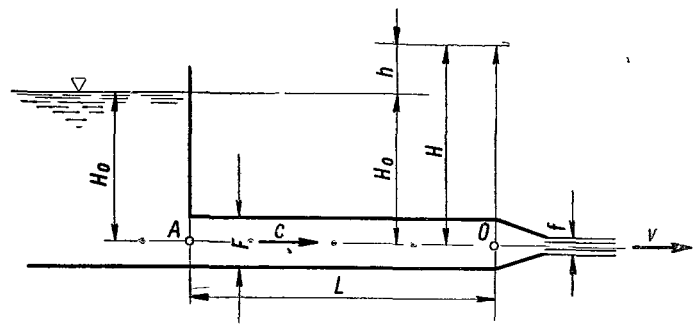
A másik terület: az empirikus úton megalkotott *vízemelő kos. (Montgolfier*, 1798), amelynek működési elvére *Alliévi* elmélete csak egy teljes évszázaddal később adott szabatos magyarázatot. Itt mutatok rá arra is, hogy a műszaki gyakorlatban ez az a terület, ahol az elmélet ismerete nem a folyamat káros hatásainak elhárítására ad útmutatást, hanem egy szerkezet működési feltételeit tisztázza. Ezen a területen még az orvostudomány is hozhat eddig ismeretlen tudományos kutatási eredményeket, mert a szívműködés és a vérkeringés eddig fel nem derített élettani folyamatainak megismerését is minden bizonnyal meg fogja könnyíteni az idevágó áramlástani elmélet továbbfejlesztése.

102. Nyomásingadozás a turbina nyomócsövében

(Merev rendszer, lineáris zárás)

Alliévi elmélete a vízzel telt csővezetéket *rugalmas* rendszerként vizsgálja. Ezzel az elmélettel párhuzamosan — mint a rugalmas elmélet határesetét — *Löwy R.* [33] nyomán egy oly számítási eljárást ismertetek, amely a folyadéktöltés és a csőfal rugalmasságát figyelmen kívül hagyja, vagyis a csővezetéket **merev rendszernek** tekinti.

Egy nagy medencéből táplált L hosszúságú és állandó F keresztmetszetű nyomócsővezetéken átáramló víz c sebessége a cső végére szerelt f keresztmetszetű kifolyónyílás *zárásával* vagy *nyitásával* előírt ütemben változik.



147. ábra. Nyomásemelkedés merev nyomócsőben a kifolyónyílás záródása miatt

A víz gyorsulásával arányos tehetetlenségi erők hatására a *nyomás* is megváltozik. (Vö. a 23. ponttal és a *45. ábrával.*)

A *147. ábra* kapcsán (első közelítésben) a következő egyszerűsítő feltételeket írjuk elő: A nyomócsövet *vízszintesen* helyezzük el. Figyelmen kívül hagyjuk az *áramlási veszteségeket* és — mint már kikötöttük — a rendszer *rugalmasságát.* Feltételezzük továbbá, hogy a táplálómedence tükörfelületének nagysága biztosítani tudja az esés állandóságát, azaz: $H_0 = állandó$. És végül: *lineáris* zárást (vagy nyitást) írunk elő.

A c sebesség *lassulását* előidéző *zárás* esetében *0* pontban a kifolyónyílás előtt a megnövekedett nyomómagasság: $H = H_0 + h$, és ennek következtében az f

keresztmetszeten kifolyó mennyiség:

$$f v = F c = f \sqrt{2gH} \qquad (\mathrm{m^3/mp}), \tag{279}$$

ahol a $h = H - H_0$ nyomásemelkedés, (53) szerint:

$$h = H - H_0 = -\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} \qquad (\mathrm{m}). \tag{280}$$

Bevezetve a teljes nyitás ($f = f_{\max}$) esetén az állandó H_0 eséssel kifolyó víz C sebességét, írható:

$$F C = f_{\max} \sqrt{2gH_0} \qquad (\mathrm{m^3/mp}). \tag{281}$$

A számítás alábbi viszonylagos értékekkel végezhető: a viszonylagos nyomásemelkedés:

$$\eta = \frac{h}{H_0} = \frac{H - H_0}{H_0}; \quad \text{ezzel: } H = H_0 (1 + \eta) \tag{282}$$

$$\text{és: } h = H_0 \eta,$$

a nyitás mértéke pedig:

$$\varphi = \frac{f}{f_{\max}}. \tag{283}$$

E viszonylagos értékek helyettesítésével és (281) figyelembevételével a (279) egyenlet így írható át:

$$c = \frac{f}{f_{\max}} \frac{f_{\max}}{F} \sqrt{2gH_0} \sqrt{1 + \eta} = \varphi C \sqrt{1 + \eta}\,. \tag{284}$$

A (280) egyenlet átrendezés után, figyelembe véve, hogy (284)-ben: $\varphi = \varphi(t)$ és $\eta = \eta(t)$ a t idő függvénye:

$$\eta = \frac{h}{H_0} = -\frac{L}{gH_0}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -\frac{LC}{gH_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \sqrt{1 + \eta}). \tag{285}$$

Ez az η nyomásemelkedés differenciálegyenlete, amely *lineáris* zárástörvény előírásával zárt alakban integrálható.

Ebben az egyenletben a 79. pont szerint

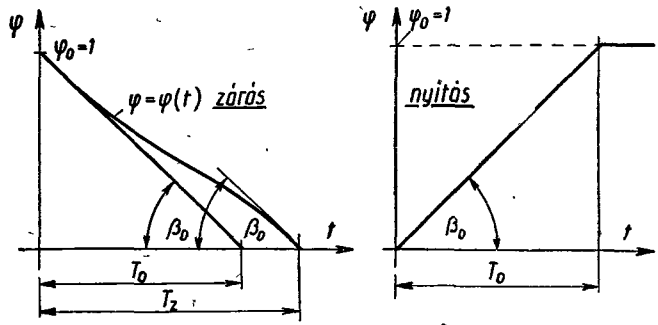
$$\frac{LC}{gH_0} = Z \qquad (\mathrm{mp}) \tag{205/a}$$

a teljesen nyitott ($f = f_{\max}$) kifolyónyílású nyomócsővezeték **időállandója** (amelyet a szakirodalom röviden, de nem szabatosan indítási időnek is nevez).

Ezzel a jelöléssel a (285) egyenlet, t szerint differenciálva így írható:

$$\eta = -Z\left[\sqrt{1 + \eta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\varphi}{2\sqrt{1 + \eta}}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right]. \tag{286}$$

Nem foglalkozom azzal a sokféle következtetéssel, amely ennek a (286) alapegyenletnek szabatos (és közelítő) megoldása kapcsán a nyomásingadozások kialakulására levonható, hanem a *148. ábrán* szemléltetett **lineáris zárással** létrehozható *legnagyobb nyomásemelkedés* (η_m) kiszámítására szorítkozom.



148. ábra. A zárás és nyitás időbeli lefolyása

A kifolyónyílás zárásának és nyitásának időbeli lefolyását szemléltető *148. ábra* szerint a teljesen nyitott ($\varphi_0 = 1$) csőzár zárási ideje lineáris zárás esetén a legrövidebb, feltéve, hogy előírunk egy legnagyobb zárási sebességet; azaz: $T_z = T_0$, ha az előírt $(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) = \mathrm{tg}\,\beta_0$ zárási sebbesség állandó.

Ilyenkor *zárásra*: $\varphi = \varphi_0 - t/T_0$ és $\mathrm{d}\varphi/dt = -1/T_0$,

teljes *nyitásra*: $\varphi = t/T_0$ és $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = +1/T_0$.

Az η nyomásemelkedés *legnagyobb értékét* a (286) egyenletből $\eta = \eta_m$ és $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}t = 0$ helyettesítéssel kapjuk, ha abba lineáris zárás esetére: $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = -1/T_0$ értéket helyettesítünk. Írható:

$$\boxed{\eta_m = \frac{Z}{T_0}\sqrt{1+\eta_m} = \tau\sqrt{1+\eta_m}}, \qquad (287)$$

ahol:

$$\boxed{\tau = \frac{Z}{T_0} = Z\,\mathrm{tg}\,\beta_0}$$

a zárás ütemét jellemző tényező, amely a csővezeték Z időállandójának és T_0 (lineáris) zárási idejének a hányadosa.

Ha τ értékét előírjuk, akkor ennek helyettesítésével — a (287) egyenlet átrendezése után — a legnagyobb nyomásemelkedés:

$$\eta_m = \tau\left[\frac{\tau}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 + 1}\right]. \qquad (288)$$

Ha viszont a nyomásemelkedés megengedhető legnagyobb η_m értékét írjuk elő, akkor (231)-ből:

$$\tau \leqq \frac{Z}{T_0} = \frac{\eta_m}{\sqrt{1+\eta_m}}. \tag{289}$$

és ebből a megengedhető legrövidebb (lineáris) zárási idő:

$$T_0 \geqq \frac{\sqrt{1+\eta_m}}{\eta_m} Z = \frac{\sqrt{1+\eta_m}}{\eta_m} \frac{LC}{gH_0} \quad \text{(mp)}. \tag{290}$$

Teljesség kedvéért számítsuk ki (lineáris) **teljes nyitás** esetén a csővezeték O pontjában keletkező **nyomásesés** (depresszió) legnagyobb értékét is:

$\eta_m^* = -\eta_m$ helyettesítéssel és a lineáris *nyitásra* talált $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = +1/T_0$ érték figyelembevételével a (286) egyenlet ($\mathrm{d}\eta^*/\mathrm{d}t = 0$ határesetre) így írható:

$$\boxed{\eta_m^* = \frac{Z}{T_0}\sqrt{1-\eta_m^*} = \tau\sqrt{1-\eta_m^*}} \tag{287/n}$$

Ebből:

$$\eta_m^* = \tau\left[\sqrt{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2+1} - \frac{\tau}{2}\right] \tag{288/n}$$

vagy a megengedhető legnagyobb (η_m^*) depresszió előírásával:

$$\tau \leqq \frac{\eta_m^*}{\sqrt{1-\eta_m^*}}; \quad \text{azaz:} \quad T_0 \geqq \frac{\sqrt{1-\eta_m^*}}{\eta_m^*} Z \quad \text{(mp)}. \tag{290/n}$$

94. példa. a) Egy $H_0 = 250$ m esésű *Pelton*-turbina $D = 300$ mm átmérőjű ($F = 0{,}0707$ m² keresztmetszetű) nyomócsővezetékében a víz sebessége teljes nyitás esetén: $C = 4$ m/mp. A nyomócső hossza: $L = 600$ m.

A csővezeték időállandója (205) szerint:

$$\mathbf{Z} = \frac{LC}{gH_0} = \frac{600 \cdot 4}{9{,}81 \cdot 250} = \mathbf{0{,}98 \text{ mp}}.$$

Ha a (lineáris) zárási idő: $T_0 = 4$ mp, akkor a nyomásemelkedés legnagyobb viszonylagos értéke (288)-ból, $\tau = Z : T_0 = 0{,}98 : 4 = 0{,}245$ ($\tau/2 = 0{,}1225$ és $(\tau/2)^2 = 0{,}0151$) értékkel:

$$\eta_m = \tau\left[\frac{\tau}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2+1}\right] = 0{,}245 \cdot \left[0{,}1225 + \sqrt{1{,}0151}\right] = \mathbf{0{,}277}.$$

A legnagyobb nyomásemelkedés tehát:

$$\mathbf{h}_m = H_0\eta_m = 250 \cdot 0{,}277 = \mathbf{70 \text{ m}},$$

vagyis a kifolyónyílás előtt (0 pontban) a megnövekedett esés:

$$\mathbf{H}_m = H_0 + h_m = 250 + 70 = \mathbf{320 \text{ m}}.$$

A nyomócsövet tehát legalább 32 att túlnyomásra kell méretezni.

b) Ha a nyomócsőben a záráskor keletkező nyomásemelkedés mértékét: $\eta_m = 0{,}2$ értékre kívánjuk korlátozni, ($h_m = 0{,}2 \cdot 250 = 50$ m), akkor a zárás időtartamát kell meghosszabbítani.

(289) szerint erre az esetre (lineáris zárás feltételezésével):

$$\tau \leqq \frac{\eta_m}{\sqrt{1+\eta_m}} = \frac{0{,}2}{\sqrt{1{,}2}} = \mathbf{0{,}183},$$

és ezzel a még megengedhető legrövidebb zárási idő:

$$\mathbf{T_0} \geqq \frac{Z}{\tau} = \frac{0{,}98}{0{,}183} = \mathbf{5{,}4\ mp.}$$

Ha a zárósebesség egyenletessége nem biztosítható, akkor a csőzár szerkezetéhez igazodóan a fentinél hosszabb zárási időt kell előírni (vö. a *148. ábrával*).

c) Ha a kifolyónyílás (lineáris) *nyitási* idejét az *a)* példa szerint a zárási idővel azonos $T_0 = 4$ mp értékkel írjuk elő, akkor (288/n) szerint a depresszió legnagyobb viszonylagos értéke, $\tau = 0{,}245$ helyetessítéssel:

$$\eta_m^* = 0{,}245\ [\sqrt{1{,}015} - 0{,}1225] = \mathbf{0{,}217.}$$

A nyomásmagasság tehát nyitáskor a kifolyónyílás előtt a $H_0 = 250$ m sztatikai esésről $h_m = -0{,}217 \cdot 250 = -54$ m depresszióval lecsökken:

$$\mathbf{H} = (1 - \eta_m^*)\, H_0 = 0{,}783 \cdot 250 = \mathbf{196\ m\text{-re}}.$$

Hosszabb csővezeték esetében az ebben a pontban ismertetett számítások eredményei **ellenőrzésre** szorulnak. Ilyenkor a rendszer rugalmasságának figyelmen kívül hagyásával — különösen a folyamat megindításának legelső szakaszában — a jelenség lefolyásáról nem kaphatunk reális képet.

103. Nyomásingadozás rugalmas nyomócsőben. Alliévi elmélete

Tegyük vizsgálat tárgyává mégegyszer a *147. ábrában* vázolt — nagy medencéből táplált — nyomócsövet, de — a 102. pontban előírt egyéb egyszerűsítő feltevések (állandó F keresztmetszet, vízszintes elrendezés, veszteségmentes áramlás) fenntartásával — tételezzük fel a 97. pont szerint a rendszer **rugalmasságát.**

Minthogy a nyomócsőben a medencéből a kifolyónyílás felé (AO irányban) áramló vízoszlop egyensúlyának megzavarása a cső *0* pontjában (a kifolyás helyén) indul és *0A* irányban (hátrafelé) terjed, tehát alábbi számításainkban a csővezeték kezdőpontját annak végére (*0* pontba) helyezzük át. A csőhosszúság mentén befutott x utak előjele tehát a c sebességével ellentétes.

A *149. ábra* jelöléseivel és az önkényes előjelcsere figyelembevételével a nyomócsőnek dx hosszúságú szakaszára felírható I. *Euler*-féle alapegyenlet tehát (l. a 8. pontban):

$$\frac{\partial c}{\partial t} - c\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \qquad (291)$$

Vízszintes csőre: $\partial U/\partial x = 0$;

F = állandó keresztmetszetű (merev) csőben: $\partial c/\partial x = 0$, rugalmas csőben pedig $\partial c/\partial t$ mellett elhanyagolhatóan kicsiny.

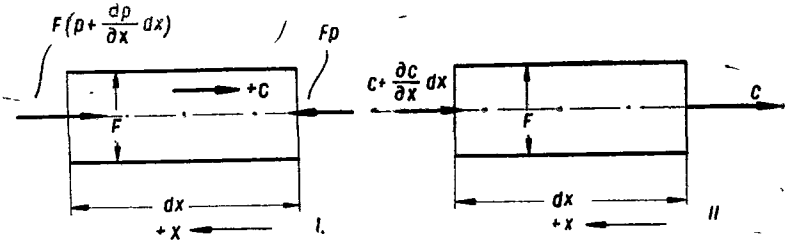
Írható ugyanis:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} - c\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}\left[1 - c\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial c}\right] = \frac{\partial c}{\partial t}\left[1 - \frac{c}{\partial x/\partial t}\right],$$

ahol $\partial x/\partial t = w$ a 98. pont szerint a nyomáshullám w terjedési sebessége, amely rendszerint többszázszor nagyobb a víz c áramlási sebességénél.

$c \ll w$ esetében tehát: $1 - c/w \cong 1$ helyettesítéssel:

$$dc/dt \cong \partial c/\partial t \quad \text{és} \quad \partial c/\partial x = 0.$$



149. ábra. A nyomás és a sebesség változása a nyomócső dx szakaszában

Fentiek alapján a (291) egyenlet a $H = p/\gamma$ — azaz : $\partial H = \partial p/\gamma$ — nyomásmagasság helyettesítésével így írható:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = g\frac{\partial H}{\partial x}.} \qquad \text{(I)}$$

Az I. Euler-egyenletből levezetett fenti összefüggés érvényessége a H magasság energetikai értelmezésével kiterjeszthető a vízszintestől eltérő csövekre is. (Ilyenkor $H = z + p/\gamma$ a potenciális energiaszint, amely a mindenkori z sztatikai magasság és a p/γ nyomásmagasság összegéből számítható.)

Az (I) egyenlet lényegében **azonos** a 102. pontban a merev rendszerre levezetett (280) egyenlettel, mert L hosszúságú és (egyenletes) F keresztmetszetű csőre:

$$\partial H/\partial x = h/L.$$

A *merev rendszerre* vonatkoztatott elmélet tehát szintén a fenti (I) egyenletre támaszkodik.

A *rugalmas rendszerre* a *149./II. ábra* szemléletével (és a 97. pontban levezetett E_r redukált rugalmassági tényezőnek bevezetésével) egy második alapegyenlet — a *kontinuitás egyenlete* — is felírható, amely a dx hosszúságú víztestbe dt idő alatt belépő dV térfogat-többletet teszi egyenlővé az $F dx$ térfogatelem összenyomódásával.

A *149. ábra* jelöléseivel a dt idő alatt a térfogatelembe behatolt víztérfogat:

$$dV = F\frac{\partial c}{\partial x}dx\,dt.$$

E dt idő alatt az $F\,dx$ térfogatelem összenyom ódását eredményező dp nyomás emelkedés:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t}\,dt,$$

amely a dx hosszúságú oszlopot $\varepsilon\,dx$ értékkel megrövidíti, ahol:

$$\varepsilon = \frac{dp}{E_r} = \frac{1}{E_r}\,\frac{\partial p}{\partial t}\,dt.$$

Az $F\,dx$ térfogatú víztestnek térfogatváltozása tehát dt idő alatt:

$$dV = F\,\varepsilon\,dx = \frac{F}{E_r}\,\frac{\partial p}{\partial t}\,dt\,dx.$$

A dV térfogatváltozást kifejező két egyenlet összevonásával, rövidítések után írható:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{E_r}\,\frac{\partial p}{\partial t}.} \tag{292}$$

$H = p/\gamma$, azaz: $\partial H = \partial p/\gamma$ nyomásmagasság helyettesítésével és a redukált rugalmassági tényezőnek (268) szerint a w hullámsebességgel kifejezett $E_r = \gamma w^2/g$ értékével a (292) egyenlet alábbi alakra hozható:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{g}{w^2}\,\frac{\partial H}{\partial t}.} \tag{II}$$

A rugalmas vízoszlop mozgástörvényei fentiek szerint a (I) és (II) differenciálegyenlet-párral fejezhető ki.

Ez az egyenletpár ($y = H$ helyettesítéssel) azonos a kifeszített húr csillapítatlan transzverzális lengéseit leíró egyenletekkel. Ezek alábbiak szerint egyetlen (másodrendű) differenciálegyenletté vonhatók össze. Írható:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = g\,\frac{\partial y}{\partial x},\quad \partial x \text{ szerint differenciálva: } \frac{\partial^2 c}{\partial t\,\partial x} = g\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{és}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{g}{w^2}\,\frac{\partial y}{\partial t},\quad \partial t \text{ szerint differenciálva: } \frac{\partial^2 c}{\partial x\,\partial t} = \frac{g}{w^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

A két egyenlet összevonása és átrendezése után írható:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - w^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.} \tag{III}$$

A rezgő húr analógiájára itt csak rámutatok, megemlítve az elektrotechnikai analógiát is, s visszatérek *Alliévi* elméletére, amely a differenciálegyenlet *Riemann*-féle megoldásából kiindulva — szukcesszív approximációval — lépésről lépésre számítja ki a kezdőfeltételekhez igazodó eredményeket.

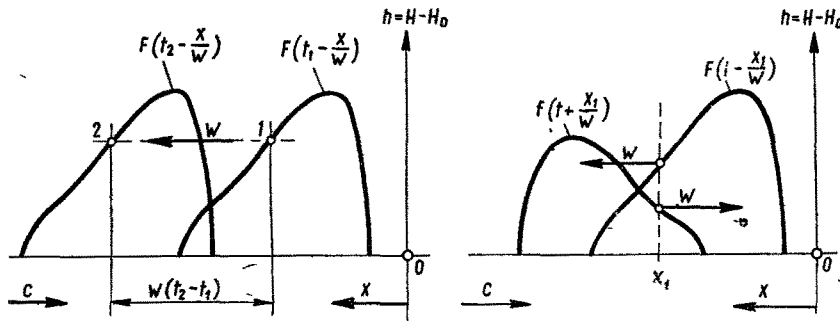
Visszatérve a nyomáshullámok (III) differenciálegyenletére, azt eredeti jelöléseinkkel így írjuk át:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - w^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0. \tag{293}$$

A *Riemann*-féle megoldás:

$$\left.\begin{aligned} H &= H_0 + F\left(t - \frac{x}{w}\right) + f\left(t + \frac{x}{w}\right) \\ c &= c_0 - \frac{g}{w}\left[F\left(t - \frac{x}{w}\right) - f\left(t + \frac{x}{w}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{294}$$

A megoldás két kétváltozós $F(t, x)$ és $f(t, x)$ *hullámfüggvényt* szemléltet (*150. ábra*), amelyek a csővezeték mentén $+x$ ill. $-x$ irányban a w hullámsebességgel futnak végig. A hullám alakja a hullámkeltés módjától függ. Az $F(t, x)$ hullámot egy $+x$ irányban w sebességgel haladó „megfigyelő" *álló hullám* alakjában látja. Ugyancsak álló hullám alakjában látja a $-x$ irányban w sebességgel haladó másik „megfigyelő" az $f(t, x)$ hullámot.



150. ábra. A csővezeték alsó végén keltett és felső végén visszavert nyomáshullám

E hullámfüggvények rendkívül bonyolult analitikai vizsgálatát a *147. ábrában* vázolt *egyszerű nyomócső* esetében feleslegessé teszi *Alliévi* láncegyenletrendszerének alkalmazása, mert ennek segítségével az előírt kezdőfeltételekből kiinduló számításból az $F(t, x)$ és $f(t, x)$ kétváltozós hullámfüggvény lépésről lépésre *kiküszöbölhető*.

Alliévi gondolatmenete a következő:

A nagy medencéből táplált nyomócsővezeték A pontjában ($x = L$ helyen) *állandó eséssel* számolhatunk (H_0 = állandó), így tehát az állandó keresztmetszetű csőben áramló vízoszlop egyensúlyállapotát csak a cső alsó végén (*0*

pontban $x = 0$ helyen) felszerelt kifolyónyílás zárása, nyitása vagy szabályozása zavarhatja meg. Minthogy a csősúrlódást figyelmen kívül hagyjuk, a gerjesztett nyomáslengések is *csillapítatlanok*, a gerjesztett hullámok tehát *torzítatlanul* futnak végig a csővezeték mentén.

Vizsgálatunkat $t = 0$ időpontban kezdjük meg, amikor az ezt megelőző *állandósult* állapotot $x = 0$ helyen:

$$t = 0;\ H = H_0;\ h_0 = H - H_0 = 0 \text{ és } c = c_0 \text{ jellemezte.}$$

A kifolyónyílás zárásával (vagy nyitásával) ebben az időpontban *0*-ból $+x$ irányban elindított $F(t, x)$ hullám tehát $x = L$ utat befutva $t' = L/w$ *átfutási idő* alatt elérkezik a nagy medencéből táplált A pontba, amelyben $H' = H_0 =$ állandó.

A (294) egyenletpár első egyenlete szerint tehát erre az $x = L$ pontra:

$$H' = H_0 + F\left(t - \frac{L}{w}\right) + f\left(t + \frac{L}{w}\right) = H_0$$

amiből:

$$F\left(t - \frac{L}{w}\right) = -f\left(t + \frac{L}{w}\right).$$

Ez azt jelenti, hogy az A pontban visszaverődő $F(t, x)$ hullám nagyságát megtartja, és csak előjelet vált. A hullám tehát az A pontban **teljes visszaverődést** szenved.

Általánosságban, $t = t_i - L/w$ helyettesítéssel írható:

$$F\left(t_i - \frac{2L}{w}\right) = -f(t_i),$$

vagy a

$$t_r = \frac{2L}{w} \tag{295}$$

visszaverődési idő helyettesítésével:

$$f(t_i) = -F(t_i - t_r). \tag{296}$$

Az A pontban feltételezett teljes visszaverődés esetében tehát a visszavert $f(t, x)$ hullámok *abszolút értéke* a csővezeték végpontjában mindig ugyanakkora, mint a direkt $F(t, x)$ hullámoké volt egy t_r-rel korábbi időpontban.

A t_r visszaverődési idő — a következőkben: *főidő* — bevezetésével a jelenség *fázisokra* osztható, ami jelöléseinket is egyszerűsíti, mert pl. az i-edik fázis végén a csővezeték *0* végpontjához $t_i = i\,t_r$ idő múlva visszaérkező f_i (visszavert) hullám abszolút értéke ugyanakkora, mint amekkora az F_{i-1} jelű direkt hullámé volt $t_{i-1} = (i-1)\,t_r$ időpontban (azaz: $f_i = -F_{i-1}$).

Alliévi láncegyenletei a $h_i = H_i - H_0$ nyomómagasságnövekedést és a c_i sebességet a csővezeték *0* végpontjában $x = 0$ helyen adják meg, de *mindig csak egy-egy főidő végén talált értékekkel*, tehát a t_0; t_1; t_2; .... $t_{i-1} = (i-1)\,t_r$; $t_i = i\,t_r$ .... időpontokban.

A műszaki gyakorlat számára *Alliévi* elmélete — bár nem ad teljes képet a jelenség időbeli lefolyásáról — rendkívül értékes méretezési alapot szolgáltat a nyomásemelkedések várható nagyságának szabatos meghatározásával.

Itt jegyzem meg azt is, hogy az 0 pontra kiszámított eredményből a csővezetéken kijelölt bármelyik közbenső pontban várható nyomásemelkedés is könnyen meghatározható. (Vö. az $F(t, x)$ és $f(t, x)$ hullámfüggvény két változójának: az x útnak és a t időnek lineáris kapcsolatával.)

A (294) egyenletpár az i-edik főidőre (vagy röviden: *fázis*-ra) azaz $t_i = i\,t_r$ időpontra, (296) figyelembevételével és új jelöléseinkkel így írható:

Az *első egyenlet:*

$$h_i = H_i - H_0 = F_i - F_{i-1},$$

Ebből:

$$F_i = F_{i-1} + h_i. \tag{297}$$

A *második egyenlet*, átrendezés után:

$$\frac{w}{g}(c_i - c_0) = -F_i - F_{i-1}.$$

A két egyenlet összege:

$$h_i + \frac{w}{g}(c_i - c_0) = -2F_{i-1},$$

azaz rendezés után:

$$\boxed{h_i = -\frac{w}{g}(c_i - c_0) - 2F_{i-1}} \tag{298}$$

Ezeknek az összefüggéseknek figyelembevételével az *Alliévi*-féle láncegyenletrendszer a $t = 0$ időpontra vonatkoztatott $c = c_0$, $H = H_0$, azaz $h_0 = 0$, és $F_0 = 0$ kezdőfeltételekkel a következőképpen írható fel:

$$\left.\begin{aligned}
&h_0 = 0.\\
&h_1 = -\frac{w}{g}(c_1 - c_0) - 2F_0 = -\frac{w}{g}(c_1 - c_0).\\
&h_2 = -\frac{w}{g}(c_2 - c_0) - 2F_1 = -\frac{w}{g}(c_2 - c_0) - 2(h_1 + F_0) =\\
&\quad = -\frac{w}{g}(c_2 - c_0) - 2h_1.\\
&h_3 = -\frac{w}{g}(c_3 - c_0) - 2F_2 = -\frac{w}{g}(c_3 - c_0) - 2(h_1 + h_2).\\
&\vdots\\
&h_{i-1} = -\frac{w}{g}(c_{i-1} - c_0) - 2F_{i-2} = -\frac{w}{g}(c_{i-1} - c_0) - 2\sum_1^{i-2} h_j.\\
&h_i = -\frac{w}{g}(c_i - c_0) - 2F_{i-1} = -\frac{w}{g}(c_i - c_0) - 2\sum_1^{i-1} h_j.
\end{aligned}\right\} \tag{299}$$

Ez az *Alliévi*-féle láncegyenletrendszer a főidők végén talált nyomásemelkedéseket a c_0 kezdősebességre vonatkoztatott $(c_0 - c_i)$ sebességapadásokkal fejezi ki.

Különösen a grafikus módszerek áttekinthetőségét fokozzuk ha a láncegyenletrendszer két egymást követő egyenletének különbségéből egy-egy főidő tartamára vonatkoztatott $(c_{i-1} - c_i)$ sebességkülönbséget fejezzük ki.

A láncegyenletrendszernek így leszármaztatott új alakja rövidítés és átrendezés után a következő:

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= 0. \\ h_1 &= \frac{w}{g}(c_0 - c_1). \\ h_2 &= \frac{w}{g}(c_1 - c_2) - h_1 \\ h_3 &= \frac{w}{g}(c_2 - c_3) - h_2. \\ &\vdots \\ h_{i-1} &= \frac{w}{g}(c_{i-2} - c_{i-1}) - h_{i-2}. \\ h_i &= \frac{w}{g}(c_{i-1} - c_i) - h_{i-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (300)$$

Hasonló egyenletrendszer írható fel $c_0 = 0$ helyettesítéssel a *nyitás* esetére is.

Az *Alliévi*-féle láncegyenlet-rendszer a nyomások és a sebességek között fejez ki lineáris kapcsolatot, amely szemléletes ábrázolásban az ún. **lökésvonalakkal** jellemezhető.

A következőkben ismertetni fogom azokat a **grafikus módszereket,** amelyek e láncegyenletekkel való számolást rendkívüli módon meggyorsítják és szemléletességüknél fogva választ és megoldást adnak sok olyan kérdésre is, amelynek tisztázására az analitikai számítás — áttekinthetetlensége miatt — nem alkalmas.

Mégegyszer fel kell azonban hívnom a figyelmet arra, hogy az *Alliévi*-egyenletek *nagy medencéből táplált* „egyszerű" nyomócsővezetékre vonatkoznak, amelyben csak a *változó szelvényű* kifolyónyílás gerjeszt a cső *alsó végéről* (+ x irányban) induló ún. *direkt* hullámokat. A csővezeték elején feltételezhető **teljes visszaverődés** jelensége tette lehetővé a *csillapítatlan* **rugalmas** rendszerben lépésről lépésre kialakuló hullámképnek meghatározását.

Teljes visszaverődésről azonban sok esetben nem lehet szó, különösen akkor nem, hogyha a csővezetéket szivattyú táplálja, vagy ha a csővezetékbe légüstöt, fojtószelepet, visszacsapó szelepet (vagy általában energiaszolgáltatót, illetve energiafogyasztót) iktatunk. Ilyenkor *Alliévi* láncegyenletrendszere helyett a (294) egyenletpárból kell a megoldást levezetni.

A *Riemann*-féle megoldás átrendezett alakja:

$$\left.\begin{aligned} H - H_0 &= F\left(t - \frac{x}{w}\right) + f\left(t + \frac{x}{w}\right) \\ \text{és: } \frac{w}{g}(c - c_0) &= -F\left(t - \frac{x}{w}\right) + f\left(t + \frac{x}{w}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (294/a)$$

A két egyenlet *összege* és *különbsége* oly egyenletpárt ad, amely alkalmas a *két hullámfüggvény szétválasztására*, mert mindegyik egyenletből a *két hullámfüggvény egyike* kiesett. Írható:

$$\left.\begin{aligned} h = H - H_0 &= +\frac{w}{g}(c - c_0) + 2F\left(t - \frac{x}{w}\right) \\ \text{és}\quad h = H - H_0 &= -\frac{w}{g}(c - c_0) - 2f\left(t + \frac{x}{w}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (294/b)$$

A kezdeti feltételek és a határfeltételek szabatos és a feladat természetéhez igazodó előírásával a (294/b) egyenletpár mindig annyi egyenlettel egészíthető ki, hogy a nyomás változását a t_r visszaverődési idővel megszabott lépésekben meghatározhassuk.

104. Nyomásingadozás a turbina rugalmas nyomócsövében. A fűrészdiagram szerkesztése

Alliévi láncegyenletrendszere a zárásra levezetett (300) szerint a főidők végén talált nyomásemelkedéseket fejezi ki a főidő tartama alatt bekövetkezett sebességapadás függvényében. Ez a kapcsolat lineáris és a $H(c)$ [vagy $h(c)$] számsíkon ferde sugárral — az ún. *lökésvonallal* — ábrázolható. (Vö. a *151. ábrával.)*

A turbina nyomócsövének alsó végpontjára már a 102. pontban felírt — a *szabad kifolyás* törvényét kifejező — (279) és (284) egyenlet ad egy *második kapcsolatot* a csőben áramló víz c sebessége és a kifolyónyílás előtti: $H = H_0 + h$ nyomómagasság *négyzetgyöke* között. Ez a $c = c(H)$ függvény a $H(c)$ számsíkon egy ($H = 0$; $c = 0$) kezdőpontból induló *parabolasereggel* ábrázolható.

Egy-egy parabola paraméterét (283) szerint a *nyitás mértéke*: $\varphi = f/f_{max}$ szabja meg, amelynek időbeli változása a $\varphi = \varphi(t)$ zárástörvény előírásával grafikusan is szemléltethető.

A zárástörvény tetszőleges (nem lineáris) is lehet. A zárás (vagy nyitás) idejét célszerűen a t_r főidő többszörösében fejezzük ki.

Egy-egy parabola egyenlete:

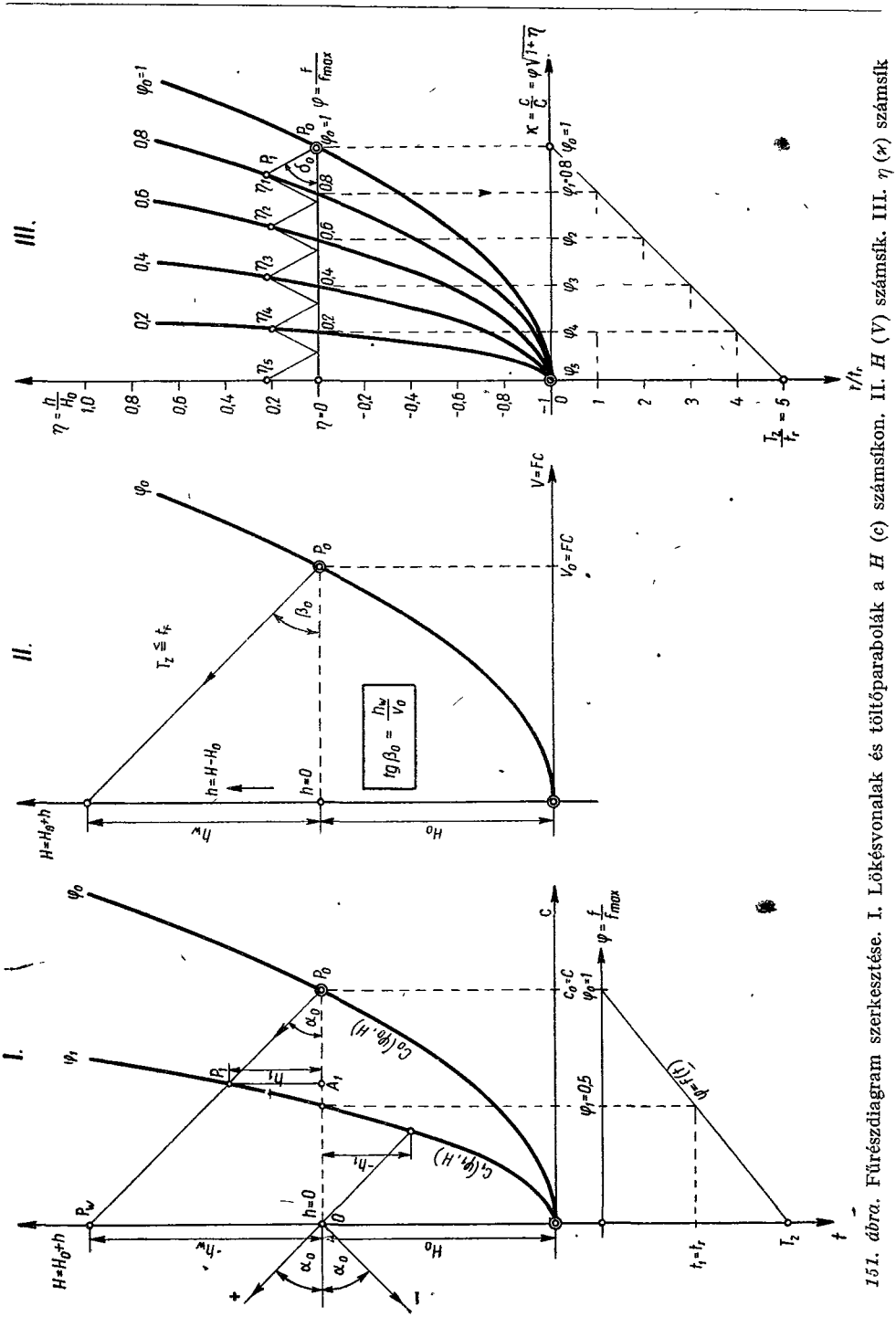
$$c_i = \varphi_i \frac{f_{max}}{F}\sqrt{2gH_i} = \varphi_i C \sqrt{H_i/H_0},$$

ahol (281) szerint:

$$C = \frac{f_{max}}{F}\sqrt{2gH_0}.$$

Ezeket a parabolákat a szakirodalom röviden: *töltési paraboláknak* is nevezi.

A következőkben a szakirodalomban elterjedt nagyszámú — gyorsan végezhető — grafikus eljárást a *129. ábra* kapcsán együtt ismertetem, mert valamennyi az ún. *fűrészdiagram* szerkesztésére irányul, és egymástól csak abban különbözik,



151. ábra. Fűrészdiagram szerkesztése. I. Lökésvonalak és töltőparaboláik a H (c) számsíkon. II. H (V) számsík. III. η ($\varkappa$) számsík

hogy a *lökésvonalakat*, a *töltésparabolákat* és a kifolyónyílás *zárástörvényét* más-más számsíkon rajzolja meg. Csak a történelmi hűség kedvéért említem meg, hogy *Alliévi* és *Gandenberger* [15] a H (c) számsíkot használja, *Schnyder* és *Bergeron* [7] a H (V) számsíkon szerkeszti a fűrészdiagramokat, de sok esetben ők is $c/C = V/V_0$ dimenzió nélküli viszonyszámokkal dolgoznak, amikor *előre felrajzolt* töltési parabolasereget használnak a szerkesztéshez.

A 102. pontból már megismert méret nélküli viszonyszámokkal szerkesztő módszerek közül itt *Braun* és *Löwy* [33] a fentebbiekkel azonos felépítésű grafikus eljárását ismertetem.

A η $(\varkappa)$ számsík méret nélküli koordinátái (a *151/III. ábra* szerint):

$$\eta = h/H_0, \text{ ahol: } h = H - H_0, \text{ azaz: } 1 + \eta = H/H_0 \text{ és}$$

$$\varkappa = c/C = \varphi\sqrt{1+\eta}.$$

A töltőparabola-sereg most a $H = 0$ esést jellemző $\eta = -1$ pontból indul és a $\varphi = 0$-tól $\varphi_0 = 1$-ig pl. egytizedes lépésekkel kijelölt φ paraméterekhez előre felrajzolható. A felrajzolást megkönnyíti a parabolák *affinitása*. (Csak a $\varphi_0 = 1$ paraméterhez tartozó parabolát kell szerkeszteni és ennek abszcisszáit tíz-tíz részre osztani.) A parabolaseregnek $\eta = 0$ magasságú abszcisszái a *nyitás mértékét* közvetlenül is megadják, azaz:

$$(\varkappa)_{\eta=0} = \varphi.$$

a) **A jelenség vizsgálata az első fázisban. A lökésvonal kijelölése. (A fűrészdiagram első ága.)**

A $t = 0$ időpontban állandósult ($H = H_0$, $h_0 = H - H_0 = 0$, $c = c_0$ és $\varphi = \varphi_0$) állapotából pl. a kifolyónyílás *zárásával* megzavart áramlás jellemzőinek kapcsolata az *első* főidő végén az *Alliévi*-féle (300) egyenletrendszer *első* egyenlete szerint:

$$h_1 = \frac{w}{g}(c_0 - c_1).$$

Ebből:

$$w/g = \operatorname{tg}\alpha_0 \tag{301}$$

helyettesítéssel az ún. *pozitív lökésvonal* iránytangensét kaptuk meg. Ez a $h(c)$ számsíkon *negatív* érték, mert $\Delta c_1 = c_1 - c_0$ (pozitív) sebességnövekedés helyett $c_0 - c_1 = -\Delta c_1$ sebességapadással számoltunk. A pozitív lökésvonal α_0 hajlásszögét tehát a c abszcissszatengely *negatív* ágára kell felmérni. A szerkesztés további lépéseihez az abszcisszatengelyre szimmetrikusan a negatív lökésvonalat is felrakjuk.

A teljesen nyitott ($\varphi_0 = 1$) kifolyónyílás kezdőállapotát jellemző P_0 ($c_0 = C$; $\eta = 0$) pontból indított (pozitív) lökésvonal a főidő végén talált φ_1 nyitású töltőparabolából közvetlenül kimetszi a keresett h_1 magasságba eső P_1 pontot.

A *129/I. ábrában* egyszerű geometriai szemlélettel igazolható, hogy a $P_0A_1P_1$ derékszögű háromszögnek α_0 szöggel szemben fekvő befogója:

$$h_1 = (c_0 - c_1)\operatorname{tg}\alpha_0.$$

A *151/I. ábrában* a h_1 nyomómagasságot arra az esetre szerkesztettük meg, amikor az első főidő végéig (a $t_1 = t_r$ visszaverődési idő tartama alatt) a teljesen nyitott kifolyónyílás *félig* záródott, azaz $\varphi_0 = 1$ és $\varphi_1 = 0{,}5$ volt.

Ugyanezzel a szerkesztéssel határozható meg a kifolyónyílás *nyitásával* gerjesztett $-h_1$ depressziómagasság is, csakhogy ebben az esetben a pozitív lökésvonalat a teljesen zárt ($\varphi_0 = 0$) kezdőállapotot jellemző *0* ($c_0 = 0$; $\eta = 0$) pontból a φ_1 paraméterű töltőparaboláig (lefelé) kell meghúzni.

Alliévi első egyenlete az *első főidő egész tartamára* érvényes, azaz akkor is, hogyha a T_z (teljes) zárási idő a t_r visszaverődési időnél rövidebb, vagyis, ha;

$$T_z \leqq t_r. \tag{302}$$

Ilyenkor (teljes zárásra) $\varphi_1 = 0$, $c_1 = 0$ helyettesítéssel az első *Alliévi*-egyenlet ($c_0 = C$ kezdőértékkel) így írható:

$$\boxed{h_1 = \frac{w c_0}{g} = \frac{w C}{g} = h_w}. \tag{303}$$

Ez a h_w nyomómagasság azonos a 98. pontban a **hirtelen zárás** esetére levezetett vízlökéssel, amely tehát akkor is teljes nagyságában létrejön, ha a zárás tartama véges, de kisebb a visszaverődési időnél. A szakirodalomban ezt a h_w-t szokás röviden **direkt lökésnek** vagy **Alliévi-lökésnek** nevezni.

A „hirtelen zárás" helyett szabatosabbnak tartom a **gyors zárás** megjelölést éspedig (302) szerint olyan értelmezésben, hogy a zárást mindaddig gyorsnak minősítjük, amíg tartama a visszaverődési időnél rövidebb. $T_z > t_r$ zárási idő esetén viszont **lassú zárásról** beszélünk.

A *151. ábrában* bemutatott grafikus szerkesztés szerint a h_w lökés nagyságát a P_0 kezdőpontból indított (pozitív) lökésvonalnak az ordinátatengelyre illeszkedő P_w pontja közvetlenül meghatározza. Ha viszont h_w nagyságát a csővezeték jellemzőiből kiszámítottuk, akkor a P_w pont felrakásával és a $\overline{P_0 P_w}$ összekötősugár meghatározásával a lökésvonal α_0 szögét is kitűztük. ($\operatorname{tg} \alpha_0$ numerikus kiszámítása tehát ezáltal feleslegessé vált).

(301) és (303) egybevetésével ugyanis írható:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{w}{g} = \frac{h_w}{C}; \tag{304}$$

ami azt jelenti, hogy a $P_0 O P_w$ derékszögű háromszög $\overline{P_0 P_w}$ átfogójának iránytangense valóban a lökésvonalnak iránytangensével azonos.

Nem szorul igazolásra, hogy a *151/II. ábrában* a $H(V)$ számsíkon felrajzolt lökésvonal β_0 szöge hasonló elven szerkeszthető, mert e számsíkon felrakott $H = H_0 + h$, ill. $h = H - H_0$ ordináták a $H(c)$ számsíkon ábrázolt diagram ordinátáival azonosak, és csak az abszcisszákat kellett az F csőkeresztmetszettel megszabott arányossági tényezővel megnyújtani.

Ezen a számsíkon a diagramokat ugyanis a

$$V = F c \qquad \text{és} \qquad V_0 = F C \qquad (\mathrm{m^3/mp})$$

vízáramok függvényében szemléltetjük.

Az első *Alliévi*-egyenlet módosított alakja tehát:

$$h_1 = \frac{w}{Fg}(V_0 - V_1)$$

és eszerint:

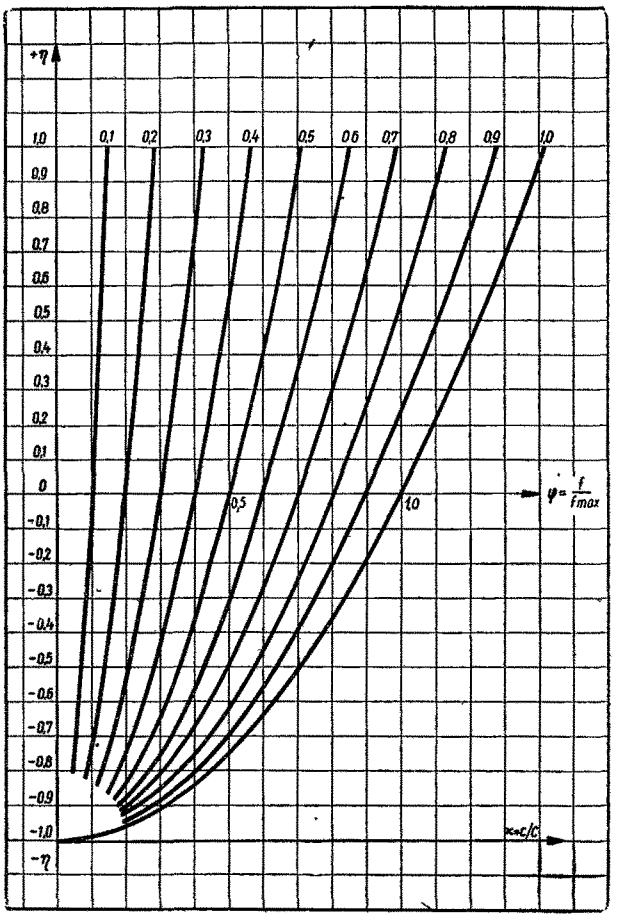
$$\frac{w}{Fg} = \operatorname{tg} \beta_0. \qquad (304)$$

A **gyors** *(teljes)* **zárás** ($T_z \leq t_r$) esetére kiszámított *Alliévi*-lökés h_w értékének felrakásával a lökésvonal ebben a számsíkban is közvetlenül szerkeszthető, mert

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{h_w}{FC} = \frac{h_w}{V_0} \qquad (304/w)$$

(Vö. a *151/II. ábrával*).

Magától értetődik, hogy a $H(V)$ számsíkon felrajzolt töltő-parabolasereg *értelmezése* is megváltozik, mert ezek a görbék most szintén nem a nyomómagasságokhoz tartozó sebességeket, hanem azokkal arányos vízáramokat jellemeznek. (A fűrészdiagram szerkesztésének menete azonban változatlan maradt.)



152. ábra. Töltő-parabolasereg

Elvileg változatlan a grafikus módszer akkor is, ha a szerkesztést a nyomómagasságok és a sebességek (vagy vízáramok) **viszonylagos** értékeivel végezzük el. Nagy előnye ennek a módszernek az, hogy **méret nélküli mennyiségekkel** dolgozunk. Ezáltal egyfelől lehetővé válik az idevágó feladatok gyors megoldásához **előre elkészített** és (pl. fénymásolással) sokszorosított (egységes) *töltőparabola-hálózat* használata, másfelől pedig a *viszonylagos lökésvonal* iránytangensének értékéből is rendkívül értékes következtetéseket vonhatunk le a nyomáslengések várható lefolyására. A *151/III. ábra* kapcsán tehát részletesebben foglalkozom a $\eta(\varkappa)$ számsíkon szerkesztett fűrészdiagram méret nélküli koordinátáinak már a *102.* pontban is megismert kapcsolatával.

A $\eta(\varkappa)$ számsíkon a sebesség (és a vízáram) méretnélküli koordinátái, a 102. pont (282), (283) és (284) egyenletei szerint:

$$\varkappa_i = c_i/C = V_i/V_0 = \varphi_i\sqrt{1+\eta_i}$$
$$\text{és } \eta_i = h_i/H_0 = (H_i - H_0)/H_0,$$

ahol: $$\varphi_i = f/f_{\max}.$$

A töltőparabola-sereg (*152. ábra*) felrajzolásáról már e pont elején volt szó. Írjuk át *Alliévi* első egyenletét a fenti koordinátákkal:

A H_0 és C értékekkel szorozva és osztva, írható:

$$\frac{h_1}{H_0} = \frac{wC}{gH_0}\left(\frac{c_0}{C} - \frac{c_1}{C}\right),$$

azaz $$\frac{h_1}{H_0} = \eta_1; \quad \frac{c_0}{C} = \varkappa_0 \text{ és } \frac{c_1}{C} = \varkappa_1$$

helyettesítéssel és

$$\frac{wC}{gH_0} = \chi \tag{305}$$

jelöléssel:

$$\eta_1 = \chi(\varkappa_0 - \varkappa_1). \tag{306}$$

A (305) egyenlettel kifejezett χ tényező a szakirodalom szerint a rugalmas rendszer **csőállandója**. E csőállandó jellegzetességeire később még visszatérünk.

Ha a kifolyónyílást $t = 0$ időpontban teljesen nyitva volt, akkor: ($\eta_0 = 0$, $\varphi_0 = 1, c_0 = C$ értékekhez tartozóan) $\varkappa_0 = 1$. A lökésvonal P_0 kezdőpontjának koordinátái tehát: $\varphi_0 = 1$ és $\eta_0 = 0$.

A lökésvonal iránytangense:

$$\operatorname{tg}\delta_0 = \eta_1(\varkappa_0 - \varkappa_1) = \chi.$$

A viszonylagos lökésvonal emelkedését tehát a csőállandó értéke szabja meg.

Gyors zárás esetére ($T_z \leqq t_r$), mint tudjuk, az *Allićvi*-lökés keletkezik. Ennek (303) szerinti értéke (305)-be helyettesítve, a rugalmas rendszer csőállandója így is kifejezhető:

$$\chi = \frac{h_w}{H_0}. \tag{307}$$

A csőállandó tehát (307) szerint úgy is értelmezhető, mint az *Alliévi*-lökésnek a H_0 sztatikus eséshez viszonyított értéke (amely azt mutatja, hogy h_w a H_0 esésnek hányszorosa).

A P_0-ból indított lökésvonal iránytangense tehát az $\eta(\varkappa)$ számsíkon is úgy jelölhető ki, hogy ($\varkappa_1 = 0$ előírással) az ordinátatengelyre a h_w *Alliévi*-lökés viszonylagos ($\chi = h_w/H_0$) értékét rakjuk fel. A *151/III. ábrába* ezt a szerkesztést nem rajzoltuk be.

***b)* A jelenség vizsgálata az első főidőt követő fázisokban**

A második főidőtől kezdődően az *Alliévi*-féle (300) láncegyenletrendszer egyenletei hasonló felépítésűek, így elegendő az i-edik főidő alatt bekövetkezett változás vizsgálata.

Az i-edik egyenlet — (301) szerint $w/g = \operatorname{tg} \alpha_0$ helyettesítéssel és átrendezéssel — a következő alakra hozható:

$$h_i + h_{i-1} = (c_{i-1} - c_i) \operatorname{tg} \alpha_0 . \tag{308}$$

A fűrészdiagram szerkesztéséhez ez a (308) rekurziós egyenlet *alábbi szemléletesebb alakra* hozható:

$$c_{i-1} - c_i = \frac{h_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_0} + \frac{h_i}{\operatorname{tg} \alpha_0} . \tag{308/c}$$

A *153. ábrán* a $H(c)$ számsíkon bemutatott szerkesztés menete (308/c) alapján külön magyarázatot nem kíván. Az ábrából kitűnik hogy a főidőtől kezdve a fűrészdiagramnak *fázisonként két ága* van. A h_{i-1} magasságú P_{i-1} pontból (záráskor) először negatív lökésvonalat húzunk a $h = 0$ tengelyig. Az így kapott A pontból az i-edik töltőparaboláig húzott *pozitív* lökésvonal a keresett h_i magasságban metszi ki a P_i pontot, ahonnan a szerkesztés tovább folytatható.

A lépésről lépésre szerkeszthető fűrészdiagram P pontjai — mint tudjuk — a csővezeték $x = 0$ végpontjában egy-egy főidő végén talált h magasságot jellemeznek. A fűrészdiagramban az abszcisszatengelyre illeszkedő A pontok viszont a csővezeték (A) belépő keresztmetszetébe $t_r/2$ átfutási idő végén visszaérkező (és onnan visszaverődő) hullámok $h = 0$ magasságát szemléltetik, és ezáltal egyben fizikai értelmezést is adnak az első főidőt követő szerkesztés menetének.

A fűrészdiagram szerkesztése tetszőleges (nem lineáris) zárástörvény esetére is elvégezhető, és akkor is szabatos eredményt szolgáltat, ha a zárási idő a főidőne nem egész számú többszöröse.

A kifolyónyílás *nyitásakor* keletkező depresszióhullámok magassága ugyanezen elven szerkesztett fűrészdiagrammal határozható meg.

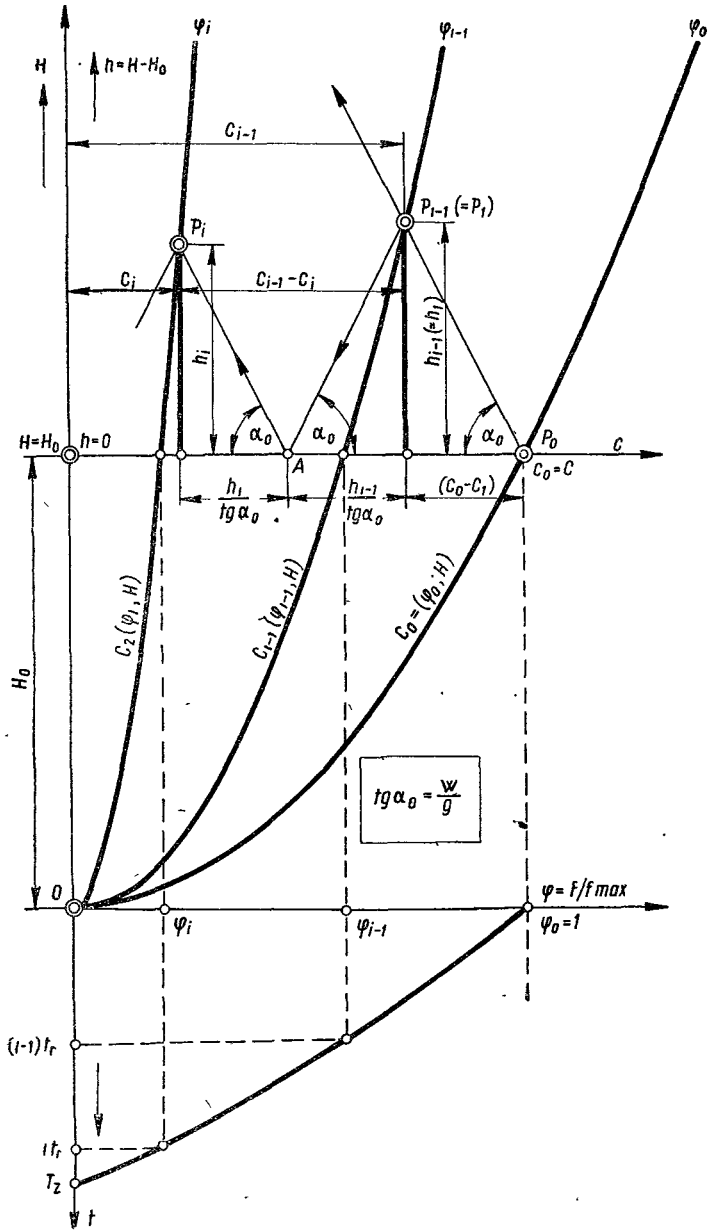
A *151.* és *153. ábrában* a zárás vagy nyitás ütemét szemléltető $\varphi = \varphi(t)$ függvényábrát is megtaláljuk.

Végül még itt mutatok rá a fűrészdiagram szerkesztésének *megfordíthatóságára* is. Ez a grafikus módszer ugyanis annyira áttekinthető, hogy módot ad oly zárástörvény meghatározására is, amellyel a nyomáshullám h_{max} magassága egy megengedett felső korlát fölé nem emelkedik. Könnyen belátható, hogy ilyenkor a fűrészdiagram P pontjait az előre meghúzott $h_{max} =$ állandó közös abszcisszára illesztjük és a zárástörvény függvényábráját az így szerkesztett P pontokon átmenő töltőparabolák φ paramétereivel rajzoljuk meg. (Vö. a *155. ábrával* és a 85. példával, amely ezt a szerkesztési elvet a $\eta(\varkappa)$ számsíkon méret nélküli koordinátarendszerben mutatja be.)

A $H(V)$ *számsíkon* szerkesztett fűrészdiagram felépítése az előbbenitől csupán a lökésvonal β_0 irányszögének kitűzésében tér el (vö. a *151/II. ábrával*), ezért ezzel tovább nem foglalkozunk.*

Visszatérünk azonban a **méret nélküli** fűrészdiagram szerkesztési alapjainak tüzetesebb vizsgálatára, hogy a lökésvonal $\operatorname{tg} \delta_0 = \chi$ iránytangensét szolgáltató **csőállandó** jelentőségét még jobban kidomborítsuk. (A csőállandó kritikus érté-

* Megjegyzendő, hogy $\operatorname{tg}\beta_0$ nem dimenzió nélküli szám, hanem azt a koordinátatengelyek léptékének megfelelően kell felmérni.



153. ábra. Nyomáshullámok a turbina nyomócsövében. Fűrészdiagram szerkesztése $H_(c)$ számsíkon

keinek ismertetésére és a jelenség lefolyásának jellegét determináló szerepére a 107. pontban még visszatérünk.)

A (305) és (307) szerint a rugalmas rendszer csőállandója:

$$\chi = \frac{wC}{gH_0} = \frac{h_w}{H_0}$$

Az *Alliévi*-féle (300) láncegyenletrendszer i-edik ún. rekurziós formulája (H_0 és C kiemelésével) a következő alakra hozható:

$$\frac{h_i}{H_0} = \frac{wC}{gH_0}(\varkappa_{i-1} - \varkappa_i) - \frac{h_{i-1}}{H_0},$$

és a $h/H_0 = \eta$ és $\varkappa = c/C = \varphi\sqrt{1+\eta}$ helyettesítések elvégzése után:

$$\eta_i = \chi(\varphi_{i-1}\sqrt{1+\eta_{i-1}} - \varphi_i\sqrt{1+\eta_i}) - \eta_{i-1}. \tag{309}$$

Kreitner [69] ezt a formulát az azonos főidőkhöz tartozó tagok szétválasztásával alábbi alakra hozza:

$$\chi\varphi_i\sqrt{1+\eta_i} + \eta_i = \chi\varphi_{i-1}\sqrt{1+\eta_{i-1}} - \eta_{i-1}. \tag{310}$$

Kreitner grafikus módszerének ismertetése kapcsán erre a (310) összefüggésre a 105. pontban még visszatérünk.

A méret nélküli fűrészdiagram szerkesztéséhez *Braun* és *Lőwy* $\operatorname{tg}\delta_0 = \chi$ átosztásával és $\varkappa$ visszahelyettesítésével a (309) egyenletet a (308/c) egyenlethez hasonló alakra írja át:

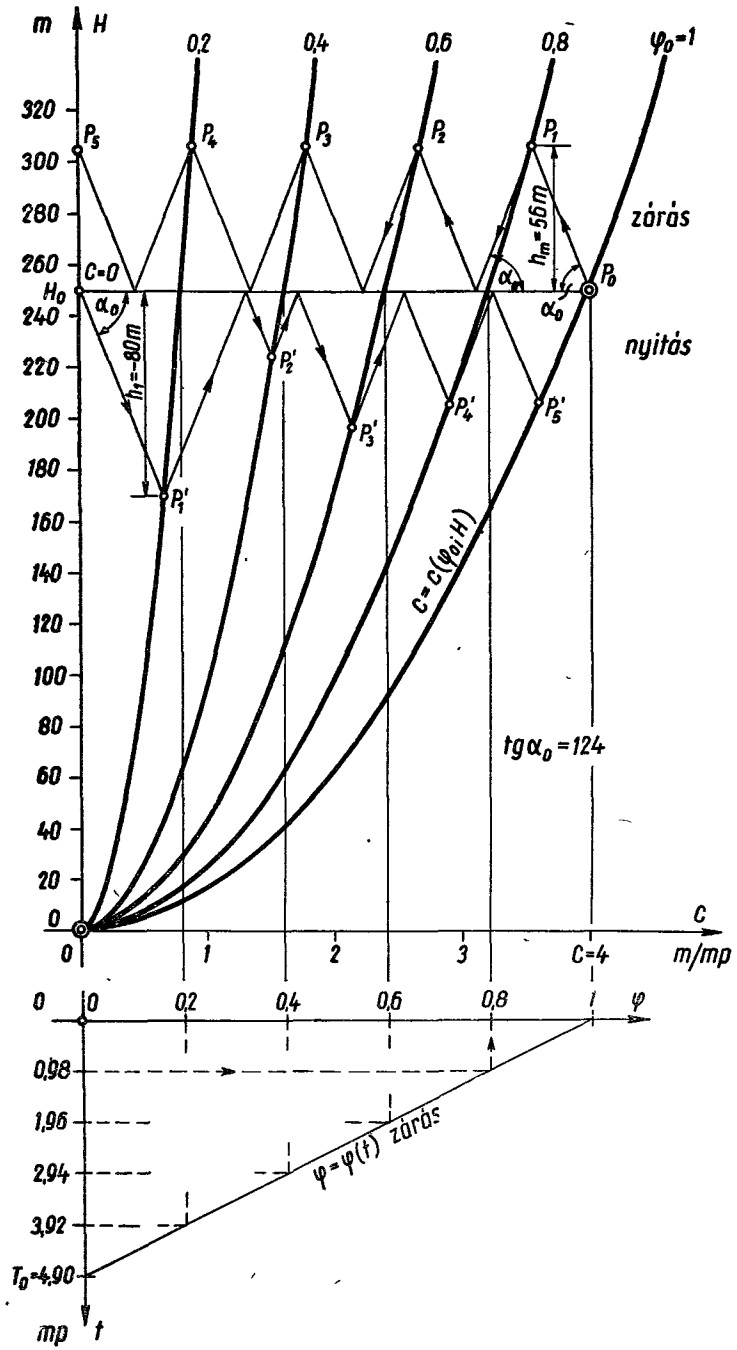
$$\varkappa_{i-1} - \varkappa_i = \frac{\eta_{i-1}}{\chi} + \frac{\eta_i}{\chi} = \frac{\eta_{i-1}}{\operatorname{tg}\delta_0} + \frac{\eta_i}{\operatorname{tg}\delta_0} \tag{309/c}$$

Ez az egyenlet a viszonylagos fűrészdiagram szerkesztéséhez az első fázist követő főidőkre pontosan ugyanolyan utasításokat fejez ki, mint a $H(c)$ számsíkra vonatkoztatott (308/c) egyenlet. Erre való tekintettel a *151/III. ábrában* a szerkesztés menetét minden magyarázat nélkül szemléltetem.

95. példa. A 94. példában a rendszer rugalmasságának figyelmen kívül hagyásával kiszámítottuk egy $H_0 = 250$ m esésű Pelton-turbina $L = 600$ m hosszú és $D = 300$ mm átmérőjű nyomócsövében várható nyomásingadozások határértékeit. Ismételjük meg a vizsgálatot a rendszer rugalmasságának figyelembevételével. A w hullámsebesség kiszámításához felvesszük, hogy az acélcső falvastagsága: 8 mm.

A redukált rugalmassági tényező (266) szerint, $E_f = 2{,}07 \cdot 10^8$ kg/m² és $E_c = 2{,}15 \cdot 10^{10}$ kg/m² értékekkel:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{2{,}07 \cdot 10^8} + \frac{300}{8 \cdot 2{,}15 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{1{,}52 \cdot 10^8}$$



154. ábra. Nyomáshullámok a turbina nyomócsövében lassú zárás, illetve nyitás esetében (95. példa)

a hullámsebesség tehát (268) szerint:

$$w = \sqrt{\frac{1{,}52 \cdot 10^8}{102}} = \mathbf{1220\ m/mp.}$$

A visszaverődési idő (mint főidő):

$$t_r = \frac{2L}{w} = \frac{1200}{1220} = \mathbf{0{,}98\ mp.}$$

A lökésvonal iránytangense:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{w}{g} = \frac{1220}{9{,}81} = 124.$$

A *154. ábrán* a nyomáshullámoknak az *Alliévi*-láncegyenlet-rendszerből számítható értékeit a $H(t)$ számsíkon lassú (lineáris) zárásra és nyitásra szerkesztettem. A zárás (és nyitás) idejét:

$$T_0 = 5\ t_r = 5 \cdot 0{,}98 = \mathbf{4{,}9\ mp}$$

értékkel vettem számításba.

A nyomásemelkedés legnagyobb értéke (az ábrából lemérve):

$$h_m = 306 - 250 = \mathbf{56\ m.}$$

A 94. példában a rendszer rugalmasságának figyelmen kívül hagyásával azonos kezdőfeltételekkel a következő eredményekre jutottunk:

$T_0 = 4$ mp zárási idővel: $h_m = 70$ m,

$T_0 = 5{,}8$ mp zárási idővel: $h_m = 50$ m.

A kétféle számítási mód eredményei az adott esetben lassú zárás esetére kielégítő egyezést mutatnak, amiről — annak ellenére, hogy a számítást nem azonos zárási időkre vonatkoztattuk — a $T_0\ h_m$ szorzatok összehasonlításával közvetett úton is meggyőződhetünk. (A vizsgált tartományon belül e szorzatok között 5%-nál kisebb eltérést találunk.)

Egészen más az összehasonlítás eredménye a *lassú nyitás esetére*, amelyből arra következtethetünk, hogy vannak esetek, amikor a rendszer rugalmasságának figyelmen kívül hagyásával nagy hibát követhetünk el.

A $T_0 = 4$ mp-es (lineáris) nyitás esetére ugyanis a legnagyobb depresszió a 94. példa szerint $h_m = 54$ m volt, az *Alliévi*-elméletre alapított szerkesztés viszont hosszabb ($T_0 = 4{,}9$ mp-es) nyitási idővel (a *154. ábrából* leolvasva) $h_1 = -80$ m-es, tehát az előbbeninél jóval nagyobb depressziót eredményezett, amely azonban nem a nyitási folyamat végén, hanem már az *első főidő végén* jött létre.

96. példa. Egy $H_0 = 50$ m esésű és $V_0 = 3$ m³/mp víznyelésű turbina $L = 2500$ m hosszú nyomócsövének átmérője: $D = 1$ m, (keresztmetszete: $F = 0{,}785$ m²). A hullámsebesség: $w = 1070$ m/mp, az üzemi áramlási sebesség pedig (teljes nyitáskor): $C = V_0/F = 3{,}0 : 0{,}785 = 3{,}83$ m/mp.

A **csőállandó** tehát (305) szerint:

$$\chi = \frac{wC}{gH_0} = \frac{1070 \cdot 3{,}83}{9{,}81 \cdot 50} = \mathbf{8{,}36.}$$

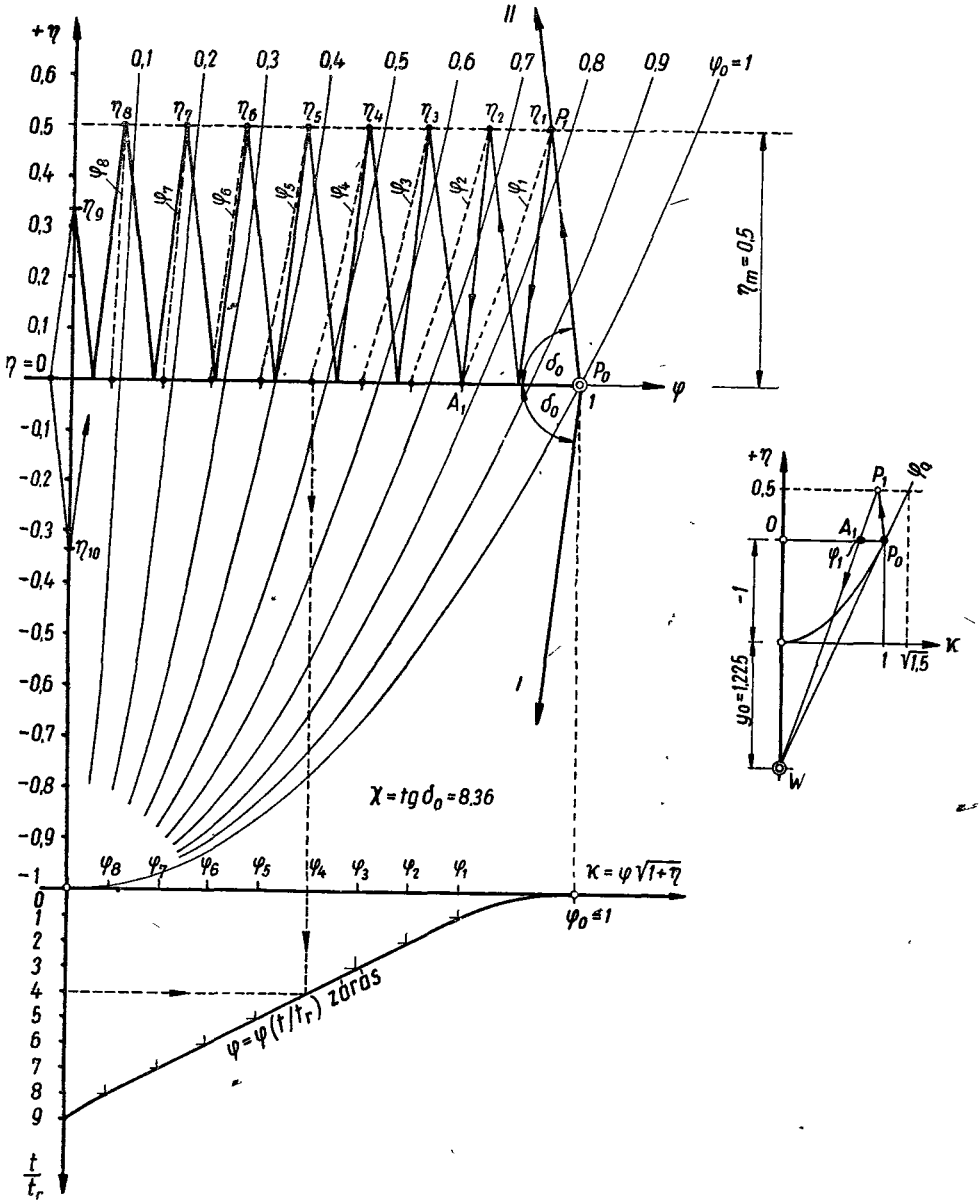
A *visszaverődési idő* (mint főidő):

$$t_r = \frac{2L}{w} = \frac{2 \cdot 2500}{1070} = \mathbf{4{,}67\ mp.}$$

Az *Alliévi-lökés*:

$$\mathbf{h}_w = \chi H_0 = 8{,}36 \cdot 50 = \mathbf{418\ m.}$$

A *155. ábrában* a zárás ütemét és a zárási időt úgy határoztuk meg, hogy a nyomásemelkedés minden főidő végén a megengedett $h_{\max} = \eta_m H_0$ felső határ-



155. ábra. A zárástörvény szerkesztése meghatározott fűrészdiagramhoz (96. példa)

értéket éppen elérje. Az adott esetben, $\eta_m = 0{,}5$ választással, a nyomásemelkedés a H_0 sztatikus esés 50%-át seholsem lépi túl.

Az előre megrajzolt (és célszerűen fénymásolással sokszorosított) parabolasereg-nek a teljes nyitást jellemző ($\varphi_0 = 1$ paraméterű) paraboláján $\eta_0 = 0$ magasságban kijelöljük a P_0 kezdőpontot, és azon keresztül meghúzzuk a tg $\delta_0 = \chi$ iránytangensű két lökésvonalat. A fűrészdiagram $P_1, P_2 \ldots P_i$ csúcsainak magasságát az $\eta_m = 0{,}5$ vízszintessel kijelöljük, és a diagramot megrajzoljuk. Minthogy a T_z zárási idő t_r főidőnek rendszerint nem egész számú többszöröse, tehát a fűrészdiagram utolsó ága az ordinátatengelyt $\eta_i < \eta_m$ magasságban metszi, ami azt jelenti, hogy a zárás pillanatában a nyomásemelkedés nem éri el a megengedett felső határértékét.

Az adott esetben (a rajzból lemérve): $i = 9$ és $\eta_i = 0{,}335$.

A teljes zárás pillanatában az η_i nagyságú nyomáshullám a lezárt nyílás helyén is (depresszió-hullám alakjában) visszaverődik, és *csillapítatlan* rendszerben ide-oda vándorol.

A zárástörvényt kifejező $\varphi = \varphi(t)$ diagramot a fűrészdiagram $P_1, P_2 \ldots P_i$ pontjaihoz tartozó töltőparaboláknak az $\eta = 0$ abszcisszatengelyen leolvasható φ paramétereinek levetítésével szerkesztjük.

A parabolasereg hálózatát a P pontokon átmenő parabolák (szabadkézi) berajzolásával sűrítjük. Pontosabb eredményhez jutunk, ha a parabolák berajzolása helyett az ábra szerint azok *affinitását* használjuk fel a φ paraméterek kijelölésére.

Az azonos η_m magasságú P pontokon átmenő parabolák $\overline{PA}$ húrjai ugyanis sugársort alkotnak, amelynek az η ordinátatengelyre illeszkedő W sorozója $\eta = -1$ mélységben talált közös kezdőpontja alatt $y_0 > 1$ mélységben jelölhető ki.

Elemi geometriai szemlélettel igazolható, hogy egy-egy töltőparabolának η_m magasságú P pontját az $\eta = 0$ magasságú A pontjával összekötő húr egy oly sugársornak eleme, amelynek W sorozója a parabolasereg közös kezdőpontja alatt

$$y_0 = \frac{\eta_m - (\sqrt{1 + \eta_m} - 1)}{\sqrt{1 + \eta_m} - 1}$$

mélységben jelölhető ki.

$\eta_m = 0{,}5$ értékkel: $\sqrt{1 + \eta_m} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}2247$, és ezzel:

$$y_0 = \frac{0{,}5 - 0{,}2247}{0{,}2247} = \mathbf{1{,}225.}$$

A szerkesztés további menete a *155. ábrából* kiolvasható. A zárási idő:

$$T_z = i\, t_r = 9 \cdot 4{,}67 = \mathbf{42\ mp.}$$

105. Kreitner grafikus módszere

Kreitner H. szintén méret nélküli fűrészdiagramot szerkeszt a legnagyobb nyomásemelkedés meghatározására. A szerkesztés menete akkor egyszerű, ha előre elkészített görbesereg-hálózat áll rendelkezésre. Ez az oka annak, hogy a *Kreitner*-féle módszer leginkább csak a turbinagyárak belső használatára szorítkozik, és az újabb szakirodalom nem ismerteti. A teljesség kedvéért foglalkozom ezzel a grafikus eljárással is, annál is inkább, mert a két görbeseregből alkotott hálózat görbéinek alakja szemléletesen domborítja ki a χ rugalmas csőállandó nagyságának jellegzetes befolyását a jelenség kialakulására.

A 104/*b.* pontban már rámutattunk arra, hogy *Kreitner* az *Alliévi*-féle rekurziós formulát az azonos főidőkhöz tartozó tagok szétválasztásával a következő alakra hozza:

$$\chi\varphi_i \sqrt{1 + \eta_i} + \eta_i = \chi\varphi_{i-1} \sqrt{1 + \eta_{i-1}} - \eta_{i-1}. \qquad (310)$$

Kreitner a $\chi\,\varphi$ abszcisszák függvényében rajzolja fel az η ordinátákat, éspedig az egymást követő két főidőre.

Az $(i-1)$-edik főidőre érvényes egyenlet:

$$\chi\varphi_{i-1}\sqrt{1+\eta_{i-1}}-\eta_{i-1}=a_{i-1}, \tag{310/a}$$

az i-edik főidőre érvényes egyenlet pedig:

$$\chi\varphi_i\sqrt{1+\eta_i}+\eta_i=a_i, \tag{310/b}$$

ahol a_{i-1} és a a_i a két görbesereg egy-egy görbéjét jellemző paraméter.

A hálózatot a *156. ábrában* mutatom be.

A hálózat szerkesztéséhez két görbesereg pontjait az előre választott *egész számú* (pozitív és negatív) paraméterekkel a (310/a) és (310/b) egyenletből számítjuk.

Írható:

$$\chi\varphi_{i-1}=\frac{a_{i-1}+\eta_{i-1}}{\sqrt{1+\eta_{i-1}}} \tag{I}$$

és

$$\chi\varphi_i=\frac{a_i-\eta_i}{\sqrt{1+\eta_i}}. \tag{II}$$

Az egész számú a_{i-1} = állandó és a_i = állandó paraméterekkel szerkesztett két görbesereg hálózata a paraméterek egytizedes vagy kéttizedes interpolációjával sűríthető. (Vö. a *156. ábrával.*)

Már itt mutatok rá az $a_{i-1}=2$ és az $a_{i-1}=3$ paraméterű görbék jellegzetesen eltérő alakjára. Ebből arra következtethetünk, hogy a χ rugalmas csőállandónak $\chi=2$ és $\chi=3$ értékei kiemelt határértékeknek tekinthetők, amelyek az $\eta(\chi\varphi)$ számsíkot három jellegzetes területre osztják.

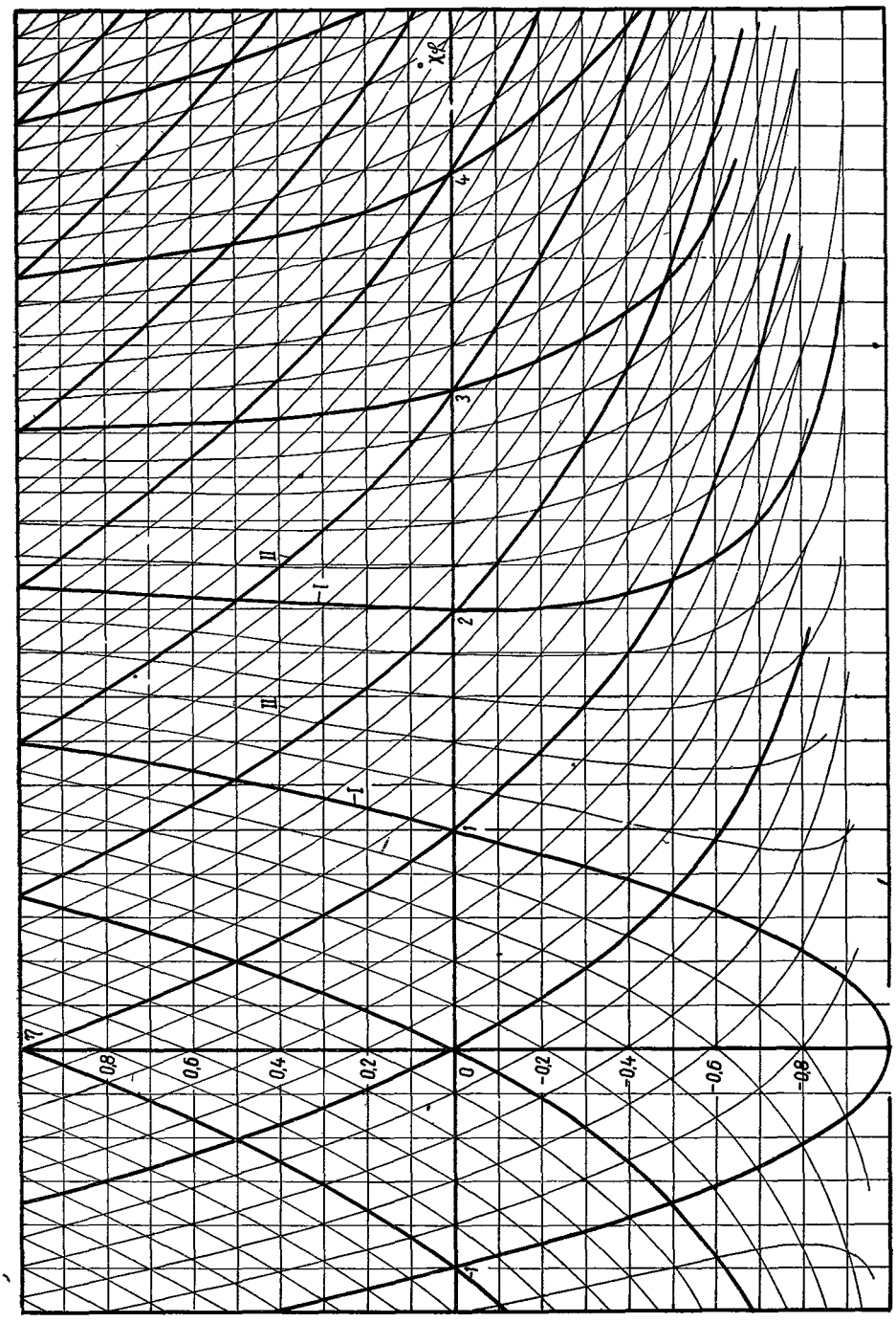
(Az $\eta=0$ magasságú abszcisszatengelyen ugyanis a *teljes nyitásra* ($\varphi=1$) leolvasott $\chi\varphi_{i-1}$, ill. $\chi\varphi_i$ abszcissza értékek magát a $\chi=a_{i-1}=a_i$ csőállandót jelentik. Az a_{i-1} paraméterű görbesereg $\chi<2$ esetén a pozitív térnegyedben emelkedő, viszont $\chi>3$ esetén süllyedő jellegű.)

A szerkesztés menete *zárás* esetére a következő:

Kiszámítjuk a χ csőállandót és a t_r visszaverődési időt. Megválasztjuk a T_z zárási időt és $\varphi=\varphi(t)$ összefüggés előírásával megszabjuk a zárás ütemét. Kiszámítjuk a főidők végén talált $\chi\varphi_i$ értékeket, és azok pontjait kijelöljük a diagram abszcisszatengelyén.

A szerkesztést ($\varphi_0=1$ esetén) a $t=0$ időpontra kijelölt P_0 ($\chi\,;\,\eta=0$) kezdőpontból felfelé indítjuk az e ponton átmenő i-jelű görbén.

Ennek a görbének a $\chi\varphi_1$ abszcisszához tartozó P_1 pontja esik a keresett η_1 magasságba. Ez könnyen igazolható az **első fázisra** levezetett (306) egyenlettel, amely $\varphi_0=1$, $\eta_0=0$, $\varkappa_0=1$ és $\chi\varkappa_1=\chi\varphi_1\sqrt{1+\eta_1}$ helyettesítéssel azonos a (310/b) egyenlettel, ha abba a kezdőállapotot jellemző $a_i=\chi\varphi_0=\chi$ paramétert és az első fázis végén talált $\eta_i=\eta_1$ értéket helyettesítjük.



156. ábra. A *Kreitner*-féle szerkesztéshez előre készített hálózat. (I és II egyenlet szerint)

Az így kijelölt P_1 ponton átmenő $(i-1)$ jelű görbén vissza kell menni a $\eta = 0$ tengelyig és onnan az e tengelyponton átmenő i jelű görbe mentén a $\chi\varphi_2$ abszcisszához tartozó η_2 magasságba eső P_2 pontig. (Vö. a *157. ábrával).*

Az így kapott fűrészdiagram görbe oldalait szabadkézzel rajzoljuk a hálózatba, a diagramot pedig lépésről lépésre visszük tovább a teljes zárást jellemző ordinátatengelyig.

A **második fázistól kezdve** a *Kreitner*-féle fűrészdiagramnak is fázisonkint *két ága* van. Az első ág a P_{i-1} pontból indított a_{i-1} paraméterű görbe, amely az *előző* fázis a_i paraméterű görbéjét a η_{i-1} magasságú P_{i-1} pontban metszi. Ha ugyanis $a_{i-1} = a_i$, akkor (310/a) és (310/b) szerint: $\eta_{i-1} = \eta_i$. Meg kell jegyezni, hogy a P_{i-1} pont η magassága $a_{i-1} = a_i$ helyettesítés után fenti egyenletekből számítással is meghatározható.

A fűrészdiagram első ágát az abszcisszatengelyig kell levinni, mert $\eta = 0$, és ekkor az a_{i-1} paraméterű görbének a **következő** fázis a_i paraméterű görbéjével van közös pontja ($\chi\varphi_i = \chi\varphi_{i-1}$ és $a_i = a_{i-1}$).

A kifolyónyílás **nyitása** esetén a depressziókat eredményező szerkesztést a koordináta-rendszer kezdőpontjából ($\chi\varphi = 0$; $\eta = 0$) indítjuk.

A fűrészdiagram P pontjait törtvonallal szokás összekötni. Ennek az összekötővonalnak azonban nincsen fizikai értelmezése, mert a fűrészdiagram csak a főidők végén talált nyomásemelkedéseket szemlélteti, de a jelenség időbeli lefolyásáról nem tájékoztat.

A *Kreitner*-féle szerkesztés is megfordítható és töredékfázis esetére is elvégezhető, valamint akkor is, ha nem lineáris zárástörvényt írunk elő. A zárási (vagy nyitási) folyamat végén várható kifutási jelenségek ebben a diagramban ábrázolhatók.

A Kreitner-féle szerkesztés menetét az alábbi példában mutatom be.

97. példa. Egy $H_0 = 100$ m esésű turbina nyomócsövének hossza: $L = 300$ m, átmérője: $D = 1{,}0$ m, ($F = 0{,}785$ m²). víz üzemi sebessége (teljes nyitás esetén): $C = 2{,}9$ m/mp, a hullámsebesség: $w = 1017$ m/mp.

A rugalmas rendszer csőállandója:

$$\chi = \frac{wC}{gH_0} = \frac{1017 \cdot 2{,}9}{9{,}81 \cdot 100} = 3.$$

A visszaverődési idő:

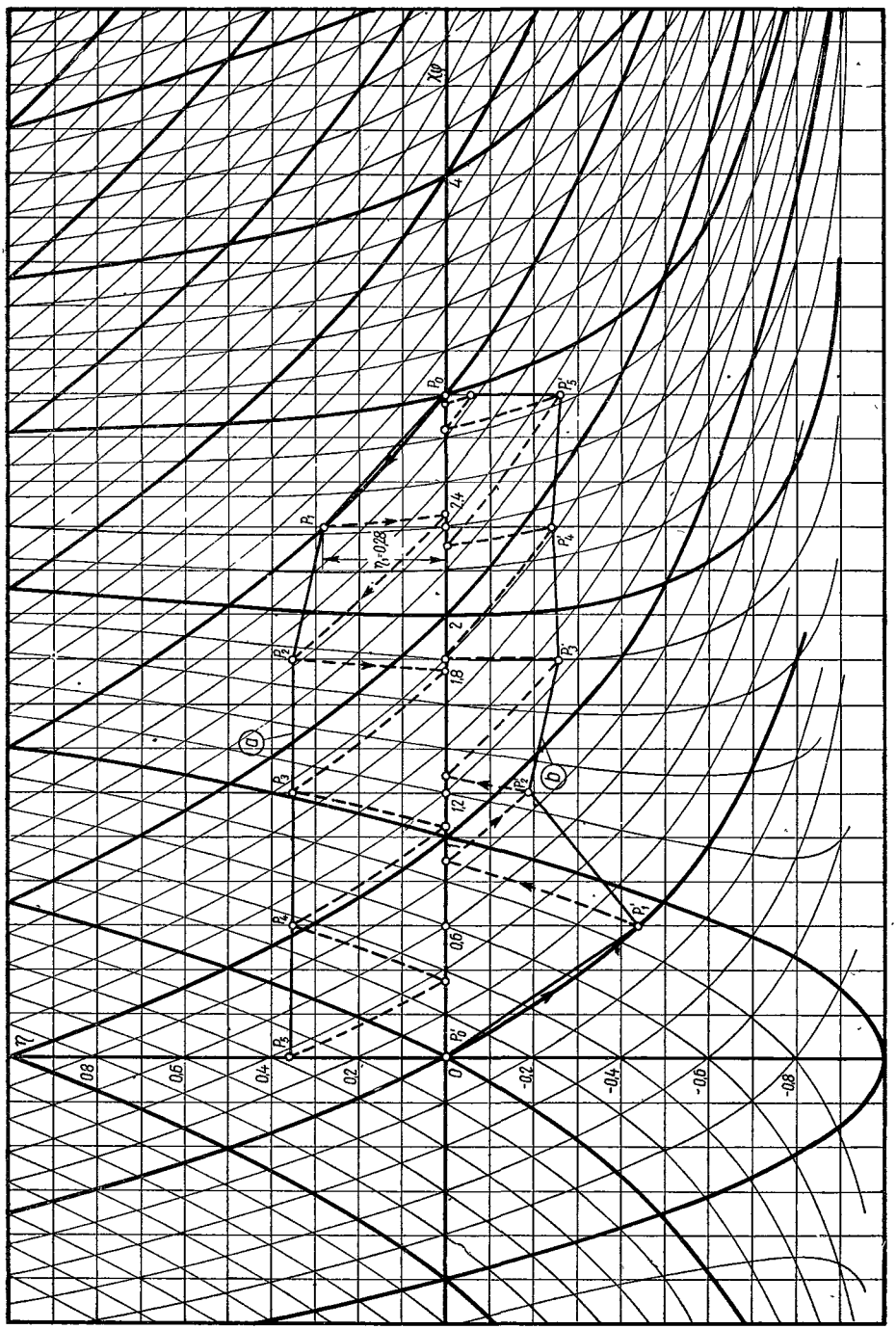
$$t_r = \frac{2L}{w} = \frac{2 \cdot 300}{1017} = 0{,}59 \text{ mp} = \mathbf{0{,}6 \text{ mp}}.$$

A zárási idő: $T_0 = 3{,}0$ mp.

Lineáris zárástörvény esetére a nyitás mértéke egy-egy főidő végén, $i = T_0/t_r = 3{,}0 : 0{,}6 = 5$ fázis alapulvételével:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Zárásra: } \varphi_j = \varphi_0 - \dfrac{jt_r}{T_0} \\ \text{nyitásra: } \varphi_j = j \cdot t_r/T_0. \end{array}\right\} \text{ ahol } t_r/T_0 = 0{,}2 \text{ és } j = 0, 1, 2 \ldots i$$

A szerkesztést a *157. ábrában* végeztük el. Az eredményeket pedig alábbi táblázatba foglaltuk össze:



157. ábra. A *Kreitner*-féle fűrészdiagram szerkesztése. *a)* Lineáris zárás. *b)* Lineáris nyitás

Zárásra:						
Fázis j	0	1	2	3	4	5
j t_r (mp) j t_r/T_0 φ	0 0 1,0	0,6 0,2 0,8	1,2 0,4 0,6	1,8 0,6 0,4	2,4 0,8 0,2	3 1,0 0
$\chi\varphi$	3,0	2,4	1,8	1,2	0,6	0
η	0	0,28	0,35	0,35	0,35	0,35
Nyitásra:						
j $t_r/T_0 = \varphi$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\chi\varphi$	0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0
η	0	−0,44	−0,19	−0,26	−0,24	−0,26

106. A kétféle elmélet összehangolása

A 102. pontban a turbina nyomócsövében gerjesztett nyomásingadozásokat a csőbe zárt vízoszlop rugalmasságának figyelmen kívül hagyásával határoztuk meg, vagyis a csővezetéket *merev* rendszerként vizsgáltuk.

A 94. példában *lineáris* zárástörvény esetére bemutattuk ennek a számítási módszernek alkalmazhatóságát. A 95. példában a számítás eredményeit összevetettük a rendszer *rugalmasságának* figyelembevételével (az *Alliévi*-féle elmélet alapján) meghatározott eredményekkel, és azt láttuk, hogy bizonyos esetekben a rugalmasság figyelmen kívül hagyása megengedhető, más esetekben viszont durva hibát okozhat.

Az összehasonlításból származó látszólagos ellentmondásokat a *158. ábra* (*Lőwy* nyomán [33]) segítségével oldhatjuk fel.

A *158. ábra* a zárószerv lineáris zárásának esetére szemlélteti a rugalmas rendszerben végbemenő nyomásingadozások időbeli lefolyását.

A *rugalmas* rendszer nyomása a csővezeték alsó végén lineáris zárás (vagy nyitás) esetén egy H_m eséssel (illetve $\eta_m = (H_m - H_0)/H_0$ értékkel) jellemezhető **határérték** felé tart. Ez a határérték azonos a *merev* rendszer elméletével is kiszámítható maximummal. (Vö. a (288) és (288/n) egyenlettel.) Ezt alább igazolni fogjuk.

A *158. ábra* szerint e határérték megközelítése — a rugalmas rendszer méreteitől és üzemi jellemzőitől függően — nem mindig *aperiodikus* (*158./I. ábra*), hanem

hullámszerű is lehet (*158/II. ábra*). Az utóbbi esetben az első főidő végén a h_m határértéknél jóval nagyobb h_1 nyomásemelkedés várható, és ezért az *Alliévi*-féle számítás vagy szerkesztés eredményei nem mellőzhetőek.

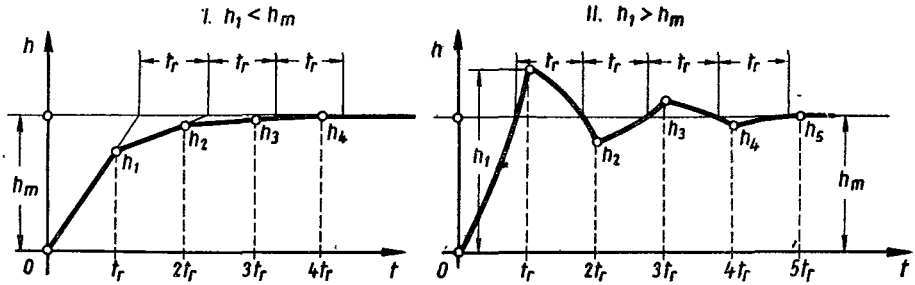
A két elméletet az η_m határnyomást kifejező (287) egyenlet átírásával hangolhatjuk össze. Lineáris zárás esetén:

$$\eta_m = \tau \sqrt{1 + \eta_m},$$

ahol $\tau = Z/T_0$; T_0 a zárási idő és

$$Z = \frac{LC}{gH_0}$$

a merev rendszer időállandója.



158. ábra. A nyomásváltozások kétféle időbeli lefolyása lineáris zárás esetén

Lassú zárás feltételezésével a *rugalmas* rendszerben w sebességgel ide-oda vándorló hullám a teljes zárás T_0 tartama alatt i-szer verődik vissza, azaz:

$T_0 = i\,t_r$; ahol (295) szerint: $t_r = 2\,L/w$ az ún. *főidő*.

A Z időállandó a rugalmas rendszer csőállandójával lineáris kapcsolatba hozható, ha abba a w hullámsebességgel és a t_r főidővel kifejezett $L = w\,t_r/2$ csőhosszúságot helyettesítjük:

$$Z = t_r \frac{wC}{2gH_0} = t_r \frac{\chi}{2}, \qquad \text{azaz} \quad \boxed{\chi = \frac{2Z}{t_r}}, \tag{311}$$

ahol

$$\chi = \frac{wC}{gH_0} = \frac{h_w}{H_0}$$

a rugalmas rendszer csőállandója.

A (311) egyenlettel kifejezett kapcsolat figyelembevételével írható:

$$\tau = \frac{Z}{T_0} = \frac{t_r}{T_0}\frac{\chi}{2} = \frac{\chi}{2i},$$

ahol $i = T_0/t_r$ a fázisok száma a teljes zárás vagy nyitás tartama alatt.

A fázisok száma a kifolyónyílás (lineáris) zárástörvényét is megszabja, mert a zárótest zárásának vagy nyitásának $\varphi = f/f_{\max}$ mértéke fázisonként:

$$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{i-1} = 1/i \tag{312}$$

értékkel változik. ($\Delta\varphi$ értéke záráskor negatív, nyitáskor pozitív.)

A (287) egyenlet $1/i$ helyettesítéssel kapott $\tau = \Delta\varphi\chi/2 = (\varphi_i - \varphi_{i-1})\chi/2$ értékkel, átrendezés után

$$2\eta_n = -\chi(\varphi_i - \varphi_{i-1})\sqrt{1+\eta_m} = -\chi\,\Delta\varphi\sqrt{1+\eta_m} \tag{313}$$

alakra hozható, amely az η_m határértékre az *Alliévi*-féle (309) rekurziós formulából is levezethető.

A 104/b. pontban ismertetett (309) egyenlet ugyanis (zárásra) átrendezés után így írható:

$$\eta_i + \eta_{i-1} = \chi(\varphi_{i-1}\sqrt{1+\eta_{i-1}} - \varphi_i\sqrt{1+\eta_i}).$$

Ha i eléggé nagy, akkor az η viszonylagos nyomásemelkedés az η_m határértékét mindjobban megközelíti, így a (309) egyenletbe jó közelítéssel $\eta_i \cong \eta_{i-1} \cong \eta_m$ helyettesíthető.

Ezzel a helyettesítéssel a merev rendszerre levezetett (313) egyenlethez jutunk. A merev rendszerre levezetett η_m határérték tehát valóban azt a $h_m = \eta_m H_0$ nyomásemelkedést jellemzi, amely a rugalmas rendszerben a *159. ábra* szerint határnyomásként jön létre.

107. A rugalmas rendszer csőállandójának jellegzetes értékei

A *158. ábra* alapján arra a következtetésre jutunk, hogy a lineáris zárással létrehozott η_m határnyomás nem mindig ad megbízható méretezési alapot, mert a nyomásemelkedés hullámszerű lefolyása esetén (*158/II. ábra)* jóval nagyobb nyomáscsúcsok jönnek létre. Igazolható, hogy ebben az esetben az *első fázis végén* keletkező $h_1 = \eta_1 H_0$ nyomásemelkedés a mértékadó legnagyobb érték. ($h_1 > h_m$, azaz $\eta_1 > \eta_m$.)

Vizsgáljuk meg, hogy a nyomásemelkedés kétféle időbeli lefolyásának mik a határfeltételei?

Erre a kérdésre, *Lőwy* nyomán, $h_1 = h_m$ (vagy $\eta_1 = \eta_m$) határfeltétel előírásával kapunk választ, amely jól kidomborítja a χ csőállandó nagyságának befolyását a jelenség lefolyására.

Az η_m határérték kiszámítására alkalmas (313) egyenletet rendezzük át a következő alakra:

$$\sqrt{1+\eta_m} = -\frac{2\eta_m}{\chi\,\Delta\varphi}. \tag{I}$$

Az *első főidő* végén talált η_1 értéket az *első fázisra* levezetett (306) egyenlet határozza meg:

$$\eta_1 = \chi(\varkappa_0 - \varkappa_1),$$

ahol *zárásra* $t = 0;\ \eta_0 = 0;\ \varphi_0;\ \varkappa_0 = \varphi_0\sqrt{1+\eta_0} = \varphi_0$

és $t_1 = t_r\ ;\ \eta_1\ ;\ \varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi;\ \varkappa_1 = (\varphi_0 + \Delta\varphi)\sqrt{1+\eta_1}$

helyettesítéssel:

$$\frac{\eta_1}{\chi} = \varphi_0 - (\varphi_0 + \Delta\varphi)\sqrt{1+\eta_1},$$

azaz
$$\sqrt{1+\eta_i} = \frac{\varphi_0 - \eta_1/\chi}{\varphi_0 + \Delta\varphi}\ . \tag{II}$$

A határesetre $\eta_1 = \eta_m$ helyettesítés után az (I) és (II) egyenlet összevonható, azaz:

$$-\frac{2\,\eta_m}{\chi\,\Delta\varphi} = \frac{\varphi_0 - \eta_m/\chi}{\varphi_0 + \Delta\varphi}, \quad \text{ebből } \eta_m = -\frac{\chi\varphi_0\,\Delta\varphi}{2\,\varphi_0 + \Delta\varphi}. \tag{III}$$

Ha η_m-nek a (III) egyenlettel kifejezett értékét az (I) egyenletbe helyettesítjük, akkor (négyzetre emelés és átrendezés után) alábbi egyenlethez jutunk:

$$\Delta\varphi\,(4\,\varphi_0 + \Delta\,\varphi - 2\,\chi\,\varphi_0^2 - \chi\varphi_0\,\Delta\varphi) = 0.$$

Az egyenlet egyik gyöke: $(\Delta\varphi)_1 = 0$;

másik gyöke: $(\Delta\varphi)_2 = \dfrac{2\,\varphi_0\,(\chi\varphi_0 - 2)}{1 - \chi\varphi_0}$,

azaz $\varphi_0 = 1$ értékkel:
$$\Delta\varphi = \frac{2\chi - 4}{1 - \chi} \tag{314}$$

Lőwy $\mu = \chi/2$ csőállandóval számol, és ehhez képest a (314) egyenletet a következő, kissé módosított alakban használja $\mu\,\Delta\varphi$ szemléltetésére:

$$\mu\,\Delta\varphi = \frac{4\,\mu\varphi_0\,(\mu\varphi_0 - 1)}{1 - 2\,\mu\varphi_0},$$

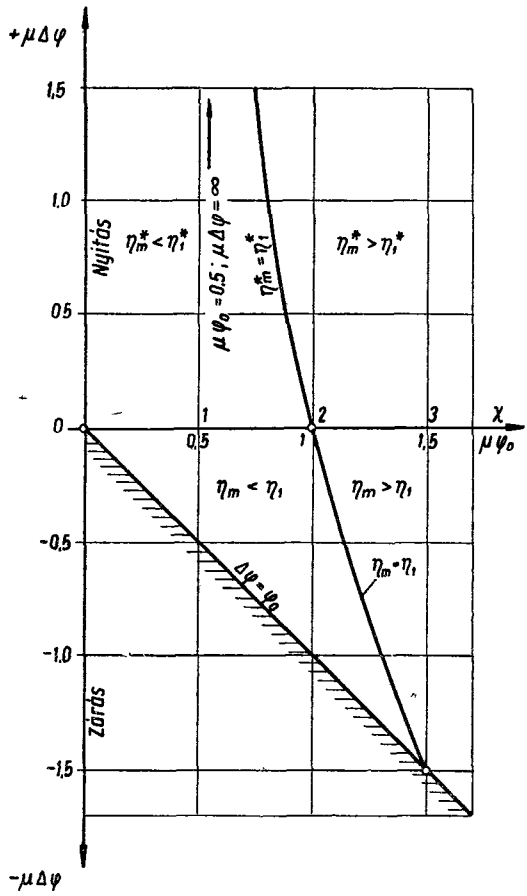
azaz $\varphi_0 = 1$ értékkel:
$$\mu\,\Delta\varphi = \frac{4\,\mu\,(\mu - 1)}{1 - 2\,\mu}. \tag{315}$$

A (315) egyenlettel adott függvényt a 159. ábra szemlélteti.

A *159. ábra* $\mu\varphi_0$ abszcisszák függvényében azt a görbét ábrázolja, mely a rugalmas rendszerben végbemenő nyomásváltozások kétféle időbeli lefolyását elhatárolja. A görbe ordinátái *zárásra* $\mu\Delta\varphi = \mu/i$ negatív értékeit, *nyitásra* pedig annak pozitív értékeit adják. Mivel $\varphi_0 = f/f_{max} = 1$ a teljes nyitás mértéke, tehát ennek fázisonkénti $\Delta t = 1/i$ változása $i \geqq 1$ fázis esetén φ_0-nál nagyobb nem lehet, azaz $\Delta\varphi \leqq \varphi_0$.

A $\mu\Delta\varphi(\mu\varphi_0)$ számsík *0* pontjából (lefelé) 45° alatt indított egyenes tehát — a $\Delta\varphi = \varphi_0$ határfeltétel megadásával — elhatárolja a számsík fizikailag nem értelmezett

területét. A megmaradó területet a pozitív oldalon az $\eta_m^* = \eta_1^*$ határgörbe, a negatív oldalon az $\eta_m = \eta_1$ határgörbe két-két részre osztja, és a *159. ábra* szerint tájékoztat a jelenség várható időbeli lefolyásáról.



159. ábra. A rugalmas rendszer csőállandójának jellegzetes értékei

Lőwy diagramjának abszcisszatengelyén a *teljes* nyitásra ($\varphi_0 = 1$ értékre) vonatkozó $\chi = 2\mu\varphi_0$ csőállandó értékeit is bejelöltük.

Az ábra világosan mutatja, hogy a rugalmas rendszer csőállandójának jellegzetes értékei : $\chi = 3$; $\chi = 2$ és $\chi = 1$. Ha ugyanis (lineáris zárás esetére):

a) $\infty > \chi > 3$, (azaz $\infty > \mu > 1{,}5$), akkor: $\eta_m > \eta_1$. Ilyenkor a nyomásemelkedés lefolyása *aperiodikus* (*158./I. ábra*), a mértékadó határnyomás tehát jó közelítéssel a rugalmasság figyelmen kívül hagyásával, a *merev* rendszerre levezetett egyenletekből számítható.

b) $3 > \chi > 2$, (azaz $1{,}5 > \mu > 1$) esetén $\eta_m \gtrless \eta_1$ lehet. A csőállandó ilyen értékei önmagukban nem elegendők a jelenség lefolyásának megítéléséhez, hanem (a *158. ábra* szerint) ehhez még a fázisok számának (*i* vagy $\Delta\varphi$) ismerete is szükséges.

c) $2 > \chi > 0$, (azaz $1 > \mu > 0$) esetén $\eta_m < \eta_1$.

Ebben az esetben a mértékadó nyomásemelkedés (a *158./II. ábra* szerint) az *első fázis végén* keletkezik. A rugalmasság befolyását ilyenkor figyelembe *kell* venni.

Lineáris *nyitás* esetére a csőállandó határértékei a következők (lásd a *159. ábrát*):

a) $\infty > \chi > 2$, (azaz $\infty > \mu > 1$) esetére $\eta_m^* > \eta_1^*$,

b) $2 > \chi > 1$, (azaz $1 > \mu > 0{,}5$) esetén $\eta_m^* \gtrless \eta_1^*$,

és *c)* $1 > \chi > 0$, (azaz $0{,}5 > \mu > 0$) esetén $\eta_m^* < \eta_1^*$.

Meg kell még említeni, hogy a csőállandó értékei — melyeket mindig a teljes ($f = f_{max}$, $\varphi_0 = 1$) nyitáshoz tartozó $c_0 = C$ sebességgel kell kiszámítani — a vízerőmű jellegéről is tájékoztatnak. Erre vonatkozóan közlöm a szakirodalomból vett alábbi adatokat:

Kis esésű vízerőművek ($H_0 = 5 \div 15$ m): $\chi = 10 \div 3$

Közepes esésű vízerőművek ($H_0 = 15 \div 200$ m): $\chi = 3 \div 1$

Nagy esésű vízerőművek ($H_0 = 200 \div 1500$ m): $\chi = 1 \div 0{,}1$.

Adott esetben a csőállandót a csővezeték méreteiből és üzemi jellemzőiből kell kiszámítani.

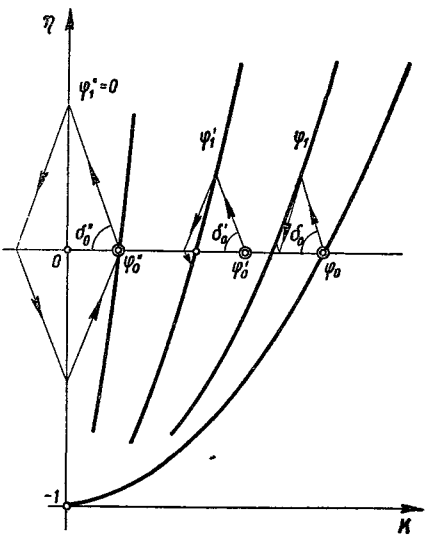
108. A nyomáshullám kifutása

Fűrészdiagram szerkesztésével a zárást vagy nyitást követő ún. *kifutási viszonyok* kilakulására is következtethetünk.

Teljes **zárás** ($\varphi = 0$) esetén a *155. ábra* szerint a lezárt csőben, ha $\eta > 0$, a vízoszlop nem jut nyugalomba, hanem teljes visszaverődést szenved és elméletileg csillapítatlan lengéseket végez, amelyeket azonban a vizsgálat során figyelmen kívül hagyott csősúrlódás a valóságban csillapít.

Részleges zárás esetén a fűrészdiagram módszereivel szerkesztett (elvileg végtelen hosszú) törtvonal szemléletesen tájékoztat a kifutás lefolyásáról. Ez $\varphi_1 > 0$ esetén *mindig csillapodó* és a χ csőállandó nagyságától függően *aperiodikus* lefolyású is lehet.

A *160. ábrából* részletes magyarázat nélkül is megérthető a szerkesztés menete, mely akkor is eredményre vezet, ha a zárás kezdetén a nyílás nem volt teljesen nyitva. ($\varphi_0' < \varphi_0 = 1$.)



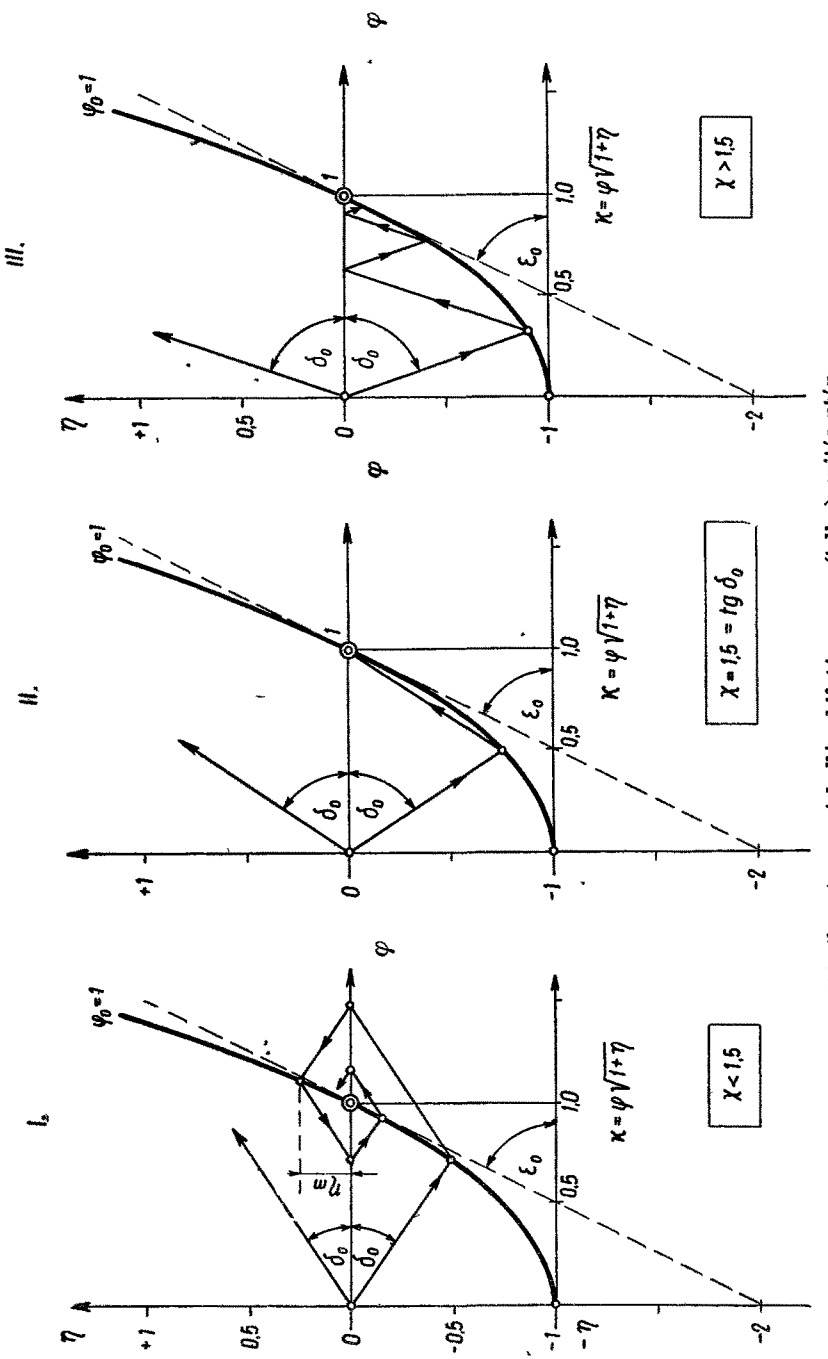
160. ábra. A nyomáshullám kifutása részleges zárás esetén

Hasonlóak a kifutási viszonyok **nyitás** esetében is. A *161. ábrából* kitűnik, hogy a csőállandó $\chi = 1{,}5$ értéke határállapotot jelent.

A nyitással együttjáró depresszió ugyanis $\chi > 1{,}5$ csőállandó esetén *aperiodikus* kifutással szűnik meg és csak $\chi < 1{,}5$ érték esetén csap át (pozitív) túlnyomásba, és mutat lengésszerű kifutást.

Geometriai szemlélettel igazolható *Alliévi*nek az a megállapítása is, hogy a gyors nyitást követő túlnyomás *(ellenlökés)* $\eta_{max} \cong 0{,}23$ legnagyobb értéket — mint lehetséges maximumot — nem lépi túl.

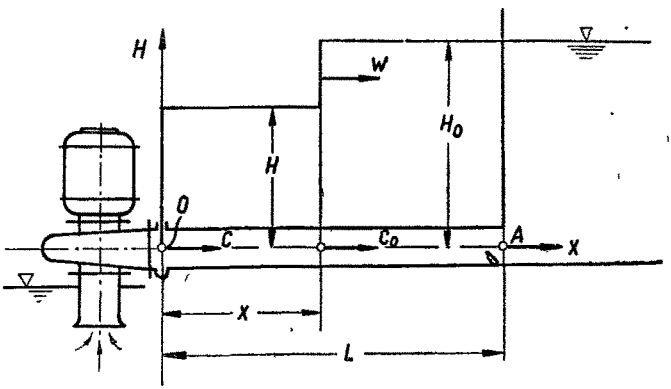
Ha ilyenkor a nyitást hirtelen (teljes) zárás követi, akkor a nyomás túllépi az ún. *Alliévi*-lökés nagyságát. Amikor tehát — pl. a turbina szabályozása során — a nyílás záródását nyitás követi (vagy megfordítva), előfordulhatnak az *Alliévi*-lökésnél nagyobb nyomásemelkedések is. Erre a jelenségre itt csak utalok, a folyamat vizsgálatára azonban nem terjeszkedem ki.



161. ábra. A nyomáshullám kifutása gyors (teljes) nyitás után

109. Nyomásingadozás szivattyútelepek nyomócsövében

Mint már a bevezetőben érintettük, a nagyteljesítményű, hosszú csővezetéket tápláló szivattyútelepek nyomócsöveiben is számottevő nyomásingadozás léphet fel az áramlás megzavarása esetén. Mint turbina-üzem esetén itt is előfordulhat, hogy gyors szabályozási folyamatok révén (automatikus üzemben) vagy a villamos áram kimaradása, esetleg a szivattyú-gépcsoport meghibásodása (géptörés) folytán a folyadékszállítás hirtelen megszűnik. Ebben az esetben a „gyors zárás" jelenségeivel kell számolnunk úgy, mintha az áramlás megszűnését egy zárószerkezet *hirtelen* lezárása okozta volna. A hirtelen leállást követő lengési folyamat során a nyomás az üzemi nyomást lényegesen meghaladhatja, vagy annyira lesüllyedhet, hogy depresszió következtében a *folyadékoszlop elszakad*. Mindkét eset csőtörést okozhat, ha a vezeték az így adódó terheléstöbbletre nincs méretezve. Ez indokolja, hogy a kérdéssel foglalkozzunk. Mivel azonban a jelenségek tárgyalására kiforrott, átfogó módszer ez idő szerint még nem áll rendelkezésre, csak néhány, a gyakorlat számára fontos, közelítő megoldás tárgyalására kell szorítkoznunk.



162. ábra. Nyomáslökés az örvényszivattyú nyomócsövében $t = 0$ zárási idő esetében

A *162. ábra* szerinti elrendezésű szivattyú-nyomócső-medence rendszert rugalmasnak tekintjük. A 103. pontban levezetett (I) és (II) alapegyenleteket azonban a feladat természetének megfelelően módosítani kell. A szivattyú leállása esetén ugyanis a nyomáshullámok a szivattyúból indulnak el, terjedésük iránya tehát egybe esik a folyadék áramlásának irányával. Ezért a koordináta-rendszer kezdőpontját a csővezeték kilépő A keresztmetszetétől áthelyezzük a belépő 0 keresztmetszethez. Tekintetbe véve még, hogy az áramlás megzavarása után a stacionárius állapothoz képest nem nyomásnövekedés, hanem depresszió lép fel, azt találjuk, hogy mindkét alapegyenletünk előjelet vált:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -g\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \text{(I/a)}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{g}{w}\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad \text{(II/a)}$$

A részletes bizonyítás az előbbi megjegyzések szem előtt tartásával a 103. pont gondolatmenetét követi.

Gyors leállás esetén, amikor a csővezeték végéről visszaverődött nyomáshullámok még nem érték el a szivattyút, az egyenletek *Riemann*-féle megoldásából az $f\left(t+\frac{x}{w}\right)$ függvény elmarad. Így a megoldás lesz:

$$\left.\begin{aligned} H &= H_0 - F\left(t-\frac{x}{w}\right) \\ c &= c_0 - \frac{g}{w}F\left(t-\frac{x}{w}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (294/a)$$

Arról, hogy a (294/a) egyenletpár valóban megoldása az (I/a), (II/a) alapegyenleteknek, könnyen meggyőződhetünk. Differenciáljuk az első egyenletet x, a másodikat pedig t szerint:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{w}F'\left(t-\frac{x}{w}\right),$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{g}{w}F'\left(t-\frac{x}{w}\right).$$

A két egyenlet egybevetéséből nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -g\frac{\partial H}{\partial x}. \qquad (I/a)$$

Megcserélt változók szerint differenciálva:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -F'\left(t-\frac{x}{w}\right),$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{g}{w}F'\left(t-\frac{x}{w}\right),$$

és a kettőt egybevetve kapjuk, hogy

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{g}{w}\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (II/a)$$

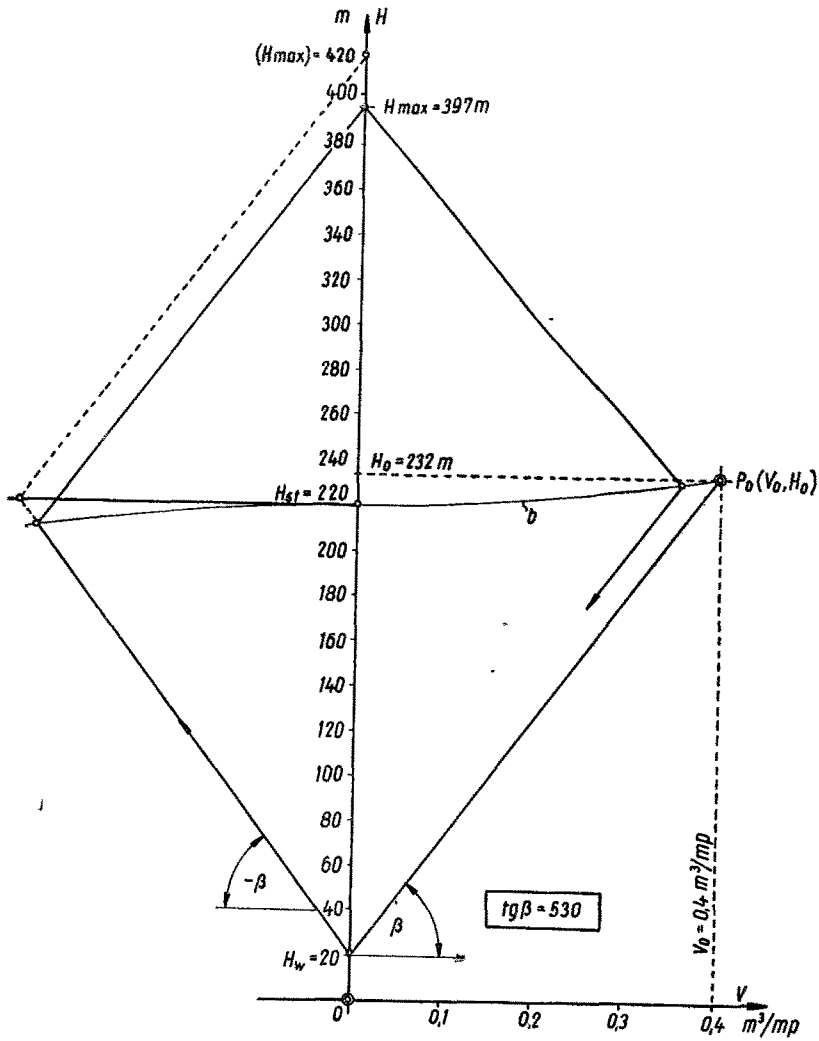
A (294/a) egyenleteket összevonjuk, így az F függvény kiesik. Elvégezzük a $c = V/F$ helyettesítést (ahol F a nyomócső végig állandó keresztmetszete), és rendezzük az egyenletet:

$$\boxed{H = H_0 - \frac{w}{Fg}(V_0 - V)} \qquad (316)$$

A (316) egyenlet a V (H) számsíkon a szivattyú (V_0, H_0) üzemi pontjából az áramkimaradást követően induló *Alliévi*-féle *lökésvonal* egyenlete. A lökésvonal iránytangense *(163. ábra)*

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w}{Fg}.$$

A $V = O$ vízszállítás elérése után az áramlás iránya megfordul. Ekkor a visszacsapó szelep bezárul, és a nyomás a $-\beta$ hajlású lökésvonal mentén ismét emelkedik. A H_{max} legnagyobb nyomás meghatározására irányuló további szerkesztést



163. ábra. Az *Alliévi*-féle lökésvonal a H (V) számsíkon. A legnagyobb nyomás meghatározása szerkesztéssel

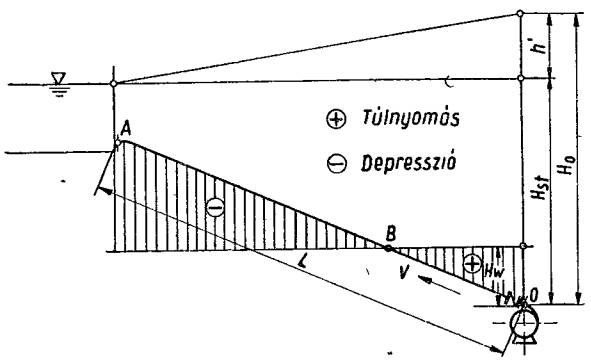
Bergeron, Jaeger és Gandenberger nyomán a *163. ábra* mutatja. Ez a módszer a súrlódás csillapító hatását a csővezeték b veszteség-parabolájára való vetítéssel veszi figyelembe, s a cső mentén elosztva jelentkező súrlódást — a valóságtól eltérően — a csővezeték végére áthelyezett, koncentrált ellenállás alakjában szá-

mítja, ami nyilván nem adhat pontos eredményt. Mégis jogosult ez az eljárás, mert pozitív áramlási irány esetén a súrlódási veszteség valóban hozzáadódik az *0* pontban levő nyomáshoz, az áramlás megfordulása után pedig levonódik belőle. Így a valóságot jobban megközelítjük, mint a veszteségek teljes elhanyagolása esetén. A súrlódás figyelmen kívül hagyásával mindenesetre nagyobb (H_{max}) nyomáslökést kapunk (szakadozott vonal). A cső szilárdsági méretezéséhez szükséges legnagyobb nyomás meghatározására ez a módszer kielégítő.

A csővezeték épségére azonban a $V = 0$ vízszállításhoz tartozó

$$H_w = H_0 - \frac{w}{Fg} V_0 \tag{317}$$

legkisebb nyomás is veszélyes lehet. A *164. ábra* szerint elrendezett csővezetéken a H_w nyomás mint depresszió-hullám w hangsebességgel fut végig. Amíg ez a nyomásszint a csővezeték nyomvonala *felett* jár, addig a csőben továbbra is túlnyomás uralkodik; amint azonban a nyomásvonal a csővezeték *szín jét metszi*, (*B pont*), a csőben depresszió lép fel. (Az ábrában vonalkázott „—" metszékek). Ha a nyomás az adott hőfokhoz tartozó telített gőz nyomásáig csökken, akkor a csőbe zárt vízoszlop elszakad. Az elszakadt víztestek újraegyesülésekor újabb, számítással pontosan nem követhető nyomáslökések keletkeznek. *Bergeron* [59] szerint ezek a nyomáslökések gyakorlatilag *minden* esetben csőtörést okoznak. Erre a kérdésre még visszatérek a 110. és 111. pontban.



164. ábra. A nyomáshullám végigfutása és depresszió az örvényszivattyú nyomócsövében áramkimaradás esetében

Megjegyzem, hogy a H_w = *állandó* felvétel a csővezeték mentén csak *súrlódásmentes* rendszerben igaz. A súrlódás befolyásának pontos kiderítése *kísérleti* kutatómunka feladata.

98. példa. A 164. ábra szerinti, $D = 500$ mm átmérőjű ($F = 0{,}196$ m²), $L = 2$ km hosszúságú csővezeték $V = 0{,}4$ m³/mp vizet szállít $H_{sz} = 220$ m sztatikus magasságra. A csővezeték veszteségmagassága $h' = 12$ m. $H_0 = H_{st} + h' = 232$ m. A hullámsebesség: $w = 1020$ m/mp.

A lökésvonal iránytangense

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w}{Fg} = \frac{1020}{0{,}196 \cdot 9{,}81} = 530,$$

a legkisebb nyomás pedig

$$H_w = 232 - 530 \cdot 0{,}4 = 232 - 212 = 20 \text{ m}.$$

A *164. ábrán* elvégzett szerkesztés szerint a legnagyobb nyomás

$$H_{max} = 397 \text{ m.}$$

Ez kereken 70%-kal haladja meg az üzemi nyomást, amit a cső méretezésénél feltétlenül tekintetbe kell venni.

110. A szivattyú-motor gépcsoport lendületének befolyása. A lendítőkerék

Az eddigi vizsgálat során feltételeztük, hogy a szivattyúk leállása *gyors*, de nem részleteztük, hogy valójában mennyi idő alatt következik be a folyadékszállítás teljes megszűnése. A folyamat természetesen *nem végtelenül* gyors. A lassulás éppen úgy meghatározható az idő függvényében, mint pl. a véges idő alatt lezárt tolózár esetében a zárástörvény. Ezt az összefüggést határozzuk meg a következőkben. Az eljárás lényegében egy differenciál-egyenlet lépésről lépésre történő numerikus integrálása, és az a csőbe zárt vízoszlop sebességének és a csővezeték alsó végpontjában talált nyomásmagasságának időbeli változásáról ad felvilágosítást. Az áramkimaradás pillanatában még teljes fordulatszámmal járó szivattyú-gépcsoport J tehetetlenségi nyomatékú forgó tömegeinek lendületapadásából lépésenként nyerjük az áramlás megváltozott jellemzőit és azok megváltozásához szükséges Δt időtartamokat.

A szivattyú ugyanis áramkimaradás után lendületének rovására — folyamatosan csökkenő fordulatszámmal — továbbra is munkát végez. Valamely

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

időszakasz tartama alatt végzett munka nagysága egyfelől az ω_{i-1} szögsebességről ω_i-re lelassuló forgótömegek ΔE lendületapadásából, másfelől a szivattyú teljesítményéből fejezhető ki. Az i-edik szakaszra írható:

$$\Delta E = \frac{J}{2}(\omega_{i-1}^2 - \omega_i^2) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{V \gamma H}{\eta} \, dt = \gamma \frac{V_{ik} H_{ik}}{\eta_{ik}} \Delta t_i , \qquad (318)$$

ahol H_{ik}, V_{ik} és η_{ik} a szállítómagasságnak, a vízszállításnak és a szivattyúhatásfoknak az értéke a Δt_i időszakaszon belül a

$$t_{ik} = t_{i-1} + \Delta t_i/2$$

időpontban.

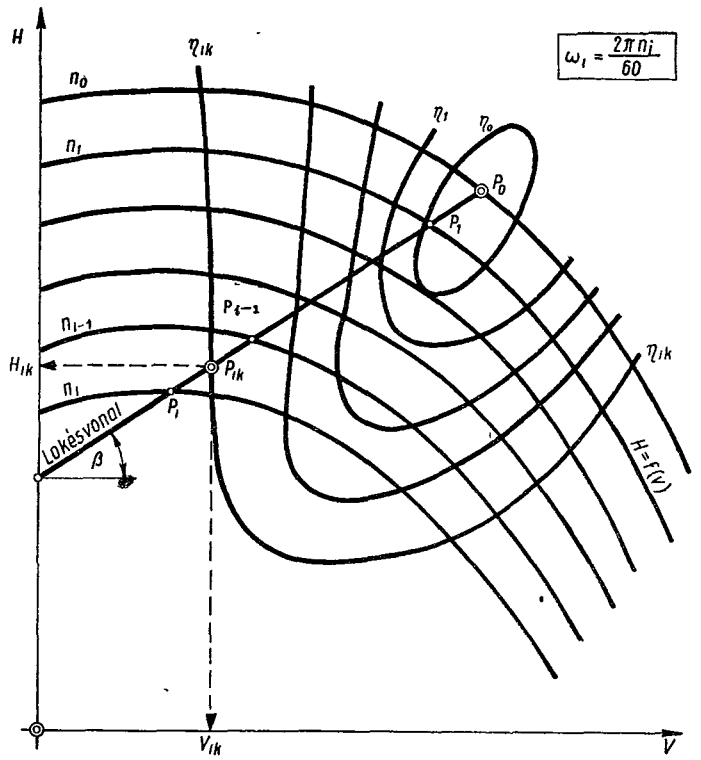
A V és H értékpár kapcsolatát az állandósult üzemállapot megzavarása után a 109. pont szerint a (316) egyenlet fejezi ki, amely úgy is értelmezhető, hogy az előre felvett V vízszállításhoz tartozó H szállítómagasság számítható, illetve az összetartozó értékek a (316) egyenletet ábrázoló lökésvonalról leolvashatók.

A V és H értékpárnak azonban ezenfelül egy második kapcsolatát a szivattyú jellemzői is megszabják. A V (H) számsík minden pontja a szivattyú úgynevezett kagylódiagramjának az n fordulatszámhoz (ω szögsebességhez) tartozó jelleggörbéjére is illeszkedik. Ha tehát a szivattyú (vagy több gép esetén a párhuzamosan

vagy sorba kapcsolt szivattyúk közös) kagylódiagramját felrajzoljuk, akkor abban a lökésvonal bármelyik (pozitív koordinátájú) pontja a szivattyú pillanatnyi üzemállapotát jellemző n fordulatszám és η hatásfok nagyságát is kijelöli (lásd a *165. ábrát)*.

A lépésről lépésre végezhető számítás menete már most a következő:

Az *Alliévi*-féle lökésvonalat tetszés szerinti szakaszokra osztjuk. A szakaszok végpontjait célszerű a lökésvonal és az adott n fordulatszámokhoz tartozó $H\,(V)$



165. ábra. Az örvényszivattyú kagylódiagramja és az *Alliévi*-féle lökésvonal egymásra illesztése

görbék metsződésénél kijelölni. Így a *165. ábra* szerint az i-edik szakasz P_{i-1} kezdő-, illetve a P_i végpontjához tartozó fordulatszámot (szögsebességet) közvetlenül, mint a ponton átmenő $H\,(V)$ görbe paraméterét kapjuk. Az így megkapott szögsebességekkel — ismert J tehetetlenségi nyomaték esetén — a (318) egyenlet alapján számítható az i-edik szakaszban a lendület rovására végzett munka és a Δt_i időre vonatkoztatott

$$N_{ik} = \frac{\Delta E_i}{\Delta t_i}$$

közepes teljesítmény.

Ez a közepes teljesítmény azonban a szivattyú üzemi jellemzőivel is kifejezhető. Az ábrában, a lökésvonalon kitűzzük a szakasz P_{ik} középpontját és a koor-

dináta-tengelyekről, valamint a P_{ik} ponton átmenő $\eta_{it} = állandó$ görbéről leolvassuk az összetartozó V_{ik}, H_{ik}, η_{ik} értékeket.

Ezekkel

$$N_{ik} = \gamma \frac{V_{ik} H_{ik}}{\eta_{ik}}.$$

N_{ik} kétféle kifejezésének összevetéséből a munka és a teljesítmény hányadosa a Δt_i időtartamot is megszabja, azaz:

$$\Delta t_i = \frac{\Delta E_i}{N_{ik}}. \tag{319}$$

A számítást célszerű táblázatosan berendezni.

Ez az eljárás csak akkor alkalmazható, ha a kagylódiagram rendelkezésre áll. Legtöbb esetben azonban egy felvett, esetleg csak előre tervezett jelleggörbére vagyunk utalva. Ismertetünk egy módszert, amely kis elhanyagolással ilyen esetben is célravezet. Az eljárás *Máttyus Sándor*tól származik, és azon a feltételen alapul, hogy a szivattyú különböző fordulatszámokhoz tartozó jelleggörbéinek affin pontjaiban a hatásfok ugyanakkora. Ez a feltétel csak közelítően teljesül, mert szigorúan csak a szivattyú mechanikai veszteségeinek elhagyásával számított belső hatásfokára érvényes, de különösen nagy szivattyúknál elég jó közelítést ad. Így a jelleggörbék affinitásának felhasználásával az üzemi n_0 fordulatszámra szerkesztett egyetlen jelleggörbe felrajzolása is eredményre vezet.

A jelleggörbék átképzésére alkalmas $V/V_0 = n/n_0$ és $H/H_0 = (n/n_0)^2$ összefüggések összevonásával a számsík kezdőpontjából induló *parabolasereg* alábbi egyenletéhez jutunk:

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2.$$

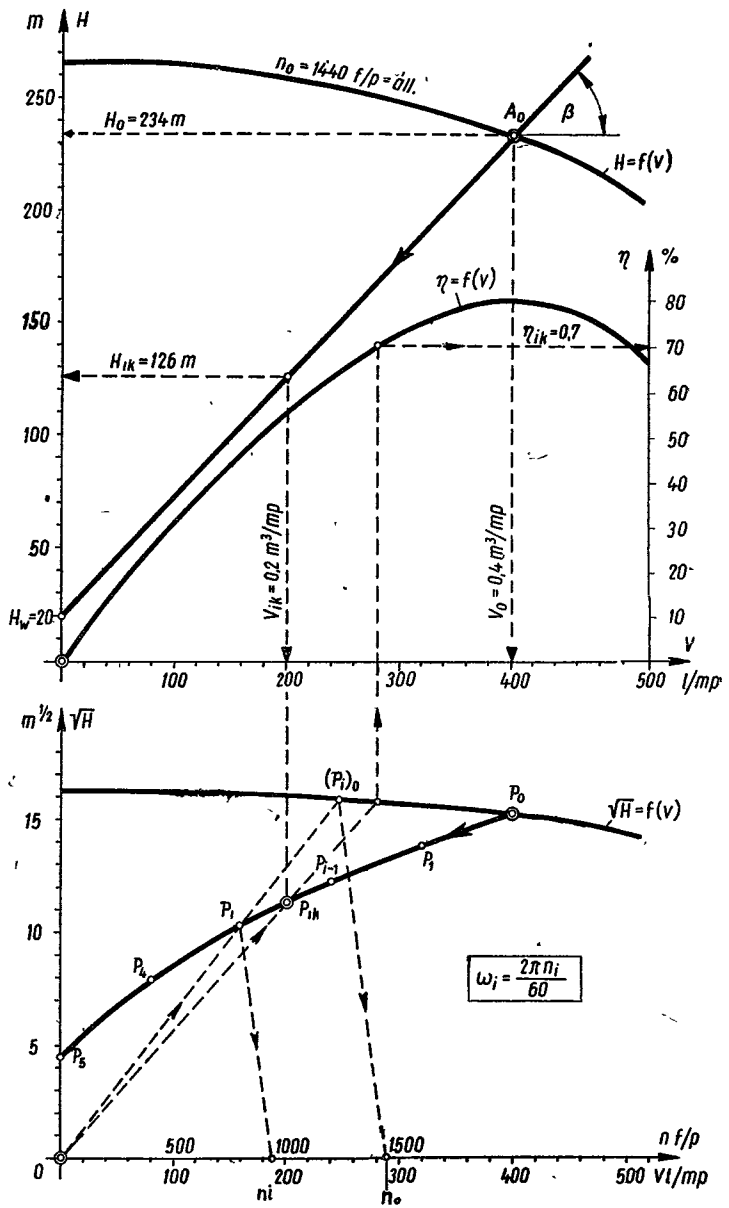
E parabolasereg felrajzolása helyett — *Máttyus* nyomán — a szivattyú jelleggörbéjét a $\sqrt{H}\,(V)$ számsíkra rajzoljuk át, mert ezáltal az affinitást szemléltető parabolasereg a számsík kezdőpontjából induló *sugársorrá fajul*, amely könnyen szerkeszthető *lineáris* kapcsolatot jellemez.

A *166. ábra* mutatja a szerkesztés menetét, amely a fordulatszámok viszonyát hasonló háromszögek közismert szerkesztésével határozza meg.

Tetszőleges P_i ponthoz tartozó n_i fordulatszámot például az abszcisszatengelyre felrakott fordulatmércén párhuzamos átvetítéssel kapjuk, ha az $\overline{OP_i}$ affin sugarat a torzított $\sqrt{H}\,(V)$ jelleggörbe $(P_i)_0$ pontjáig meghosszabbítjuk, és ezt a $(P_i)_0$ pontot a mérce n_0 (vagy ω_0) pontjával összekötjük. A hasonló háromszögek oldalarányainak egyenlősége alapján írható:

$$\frac{\overline{OP_i}}{\overline{(OP_i)_0}} = \frac{n_i}{n_0} = \frac{\omega_i}{\omega_0} = \frac{V_i}{V_0} = \frac{\sqrt{H_i}}{\sqrt{H_0}}. \tag{320}$$

A számítás menete most a következő:



166. ábra. A leállás ütemének vizsgálata egyetlen jelleggörbe alapján. $\sqrt{H}\,(V)$ számsík (99. példa)

A $\sqrt{H}\,(V)$ számsíkon felrajzolt (parabolikus) lökésvonalon tetszőlegesen kijelöljük az $(i-1)$-edik szakasz P_{i-1} jelű végpontjából induló új szakasz P_i végpontját, pl. oly módon, hogy vagy V_i, vagy H_i nagyságát lépésről lépésre megválasztjuk.

Ehhez a P_i ponthoz tartozó n_i fordulatszámot (vagy ω_i szögsebességet) a (320) egyenlettel kifejezett arányossági törvény alapján a fentebb leírt szerkesztéssel határozzuk meg.

Ennek az i-edik szakasznak közepén (az ábra szerint) kijelöljük a P_{ik} pontot, amelynek V_i, és $\sqrt{H_{ik}}$ koordinátája közvetlenül, illetve a $H(V)$ számsíkon az *Alliévi*-lökésvonalra felvetítve, H_{ik} is leolvasható. A hatásfoknak η_{ik} középértékét pedig a *166. ábrában* bemutatott — a jelleggörbék affinitásán alapuló — szerkesztéssel a hatásfok-görbén olvassuk le.

A kapott jellemzőkkel az előzőleg ismertetett eljárás analógiájára a (318) egyenletből meghatározható a Δt_i időtartam.

A számítás menetét a *166. ábra* kapcsán a *99. példában* is bemutatom.

99. példa. A 98. példa szerinti csővezetéket tápláló szivattyú-motor gépcsoport lendítőnyomatéka $GL^2 = 200$ kg m², vagyis tehetetlenségi nyomatéka: $J = 5{,}1$ kgmmp² és $J/2 = 2{,}55$ kgmmp². A leállás ütemét szolgáltató számítást táblázatosan végezzük el.

i	V_i m³/mp	V_{ik} m³/mp	H_{ik} m	$\sqrt{H_{ik}}$ m½	η_{ik}	N_{ik} mkg/mp
0	0,40					
		0,36	240,0	15,5	0,80	108 000
1	0,32					
		0,28	250,0	15,8	0,77	91 000
2	0,24					
		0,20	258,5	16,1	0,70	73 800
3	0,16					
		0,12	264,0	16,2	0,52	60 900
4	0,08					
		0,04	266,0	16,3	0,31	34 500
5	0,00					

i	ω_i mp⁻¹	ω_i^2 mp⁻²	$\omega_{i-1}^2 - \omega_i^2$ mp⁻²	ΔE mkg	Δt_i mp	t_i mp
0	150	22 500				0,000
			4500	11 500	0,107	
1	134	18 000				0,107
			4400	11 200	0,123	
2	117	13 600				0,230
			4200	10 700	0,145	
3	97	9 400				0,375
			4100	10 480	0,172	
4	73	5 300				0,547
			3550	9 100	0,264	
5	42	1 750				0,811

Mint látjuk, a vízszállítás — a forgó tömegek lendülete ellenére — már $t_5 = 0{,}811$ mp múlva megszűnik. A visszaverődés ideje:

$$t_r = \frac{2\,L}{w} = \frac{2 \cdot 2000}{1025} = 3{,}9 \text{ mp.}$$

Mivel $t_5 < t_r$, azaz a H nyomómagasság jóval rövidebb idő alatt eléri H_w legkisebb értékét, mint ahogy a csővezeték végénél levő tárolótól visszavert hullám a szivattyúhoz visszaérkezik, továbbra is *gyors* zárással van dolgunk. Ebben az esetben a kialakuló depresszióra és — a cső nyomvonalától is függő — vízoszlop-szakadásra a forgó tömegek munkaképessége lényeges befolyást *nem* gyakorolt.

A táblázatból az is kiderül, hogy a vízszállítás megszűnésének pillanatában a szivattyú még korántsem áll meg, hanem

$$n_5 = \frac{60\,\omega_5}{2\pi} = \frac{60 \cdot 42}{6{,}28} \cong 400 \text{ 1/p}$$

fordulatszámmal forog; azonban az n_5 fordulatszámhoz tartozó jelleggörbéjén a $H = H_w$ szállítómagassághoz $V = 0$ vízszállítás tartozik.

A (318) egyenlet alapján belátható, hogy a szivattyú lassulásának üteme a forgórészek J tehetetlenségi nyomatékának függvénye. Kellően *nagy* tehetetlenségi nyomatékkal elérhető tetszés szerinti *lassú* leállás, ami — mint tudjuk — *lassú zárásnak* felel meg. A feladat megfelelő méretű **lendítőkerék** alkalmazásával megoldható. Ez a megoldás azonban nem terjedt el, mert:

a) Induláskor a villamos elosztó-hálózatot erősen igénybe veszi.

b) Géptörés esetén nem használ semmit, esetleg inkább árt.

Ezért a lendítőkerék alkalmazásának lehetőségére csupán rámutattunk, részletesebb tárgyalását mellőzzük.

111. Légüst alkalmazása az örvényszivattyú nyomócső-vezetékében

Az egész világon mindenfelé folyamatban levő nagy, távolsági-csővezeték építkezések kapcsán a szakirodalomban egyre inkább előtérbe kerül a nyomócsőbe építhető légüst kérdése. Az egyes szerzők azonban más-más oldalról, különböző szemléletek alapján közelítik meg a kérdést. Ezenkívül még néhány probléma tisztázatlan is, mint pl. a súrlódás hatásának figyelembevétele vagy a levegő állapotváltozásának milyensége a légüstben. A kérdésnek tehát nincs kialakult, elméletileg pontos tárgyalásmódja. Itt olyan eljárást ismertetek, amely hasonló feladat megoldásakor hazánkban már alkalmazásra került.

A légüstöt — a dugattyús szivattyúhoz hasonlóan — örvényszivattyú esetén is közvetlenül a szivattyú *után* építik be a csővezetékbe *(167. ábra)*. Zavartalan üzemi viszonyok között nincs semmi szerepe. Ilyenkor a benne levő levegő az üzemi nyomás alatt komprimálódik, és az összenyomott rugóhoz hasonlóan energiát raktároz el. Áramkimaradás esetén — ha a forgó tömegek lendületétől eltekintünk — ez az egyetlen energiaforrás, amelyből a csővezetékben egyébként megszűnő áramlást táplálni lehet. A nyomás csökkenése következtében az összenyomott levegő expandálni kezd, és a légüst víztartalmát folyamatosan a csővezetékbe nyomja. Így fennmarad egy — állandóan csökkenő — V áramlás és a nyomásesés üteme lelassul. Az áramlás jellemzői az időben folyton változnak, ezért a vizsgálatot rövid, Δt időszakaszokra végezzük. Valamely Δt_i idő alatt a vízszállítás átlagos értéke V_{ik}, a légüst W légtérfogata pedig az expanzió következtében

$$W_i - W_{i-1} = \Delta W_i = V_{ik}\,\Delta t_i$$

értékkel növekszik. Az expanziót **izotermikusnak** tekintjük.

A $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$ időpontban tehát a csővezeték *0* szelvényében (a légüstnél) a vízszállítás:

$$V_i = V_{i-1} - 2(V_{i-1} - V_{ik}), \tag{321}$$

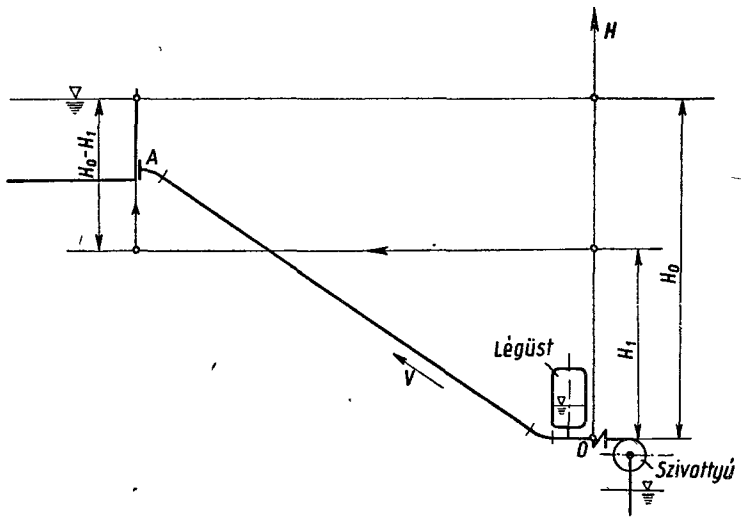
a légüst légtérfogata:

$$W_i = W_{i-1} + \Delta W_i = W_{i-1} + V_{ik}\,\Delta t_i\,, \tag{322}$$

a nyomómagasság pedig:

$$H_i = \frac{W_{i-1}}{W_i} H_{i-1} \tag{323}$$

értékű lesz. Megjegyezzük, hogy ezeknél a számításoknál H a szivattyú abszolút nyomómagasságát jelenti ($H = p_{abs}/\gamma$).



167. ábra. A légüst elhelyezése a csővezetéken

Politropikus állapotváltozás feltételezésével a (323) egyenlet a következő alakú lesz:

$$H_i = \left(\frac{W_{i-1}}{W_i}\right)^n H_{i-1} \tag{323/p}$$

ahol n a politropikus kitevő.

A H_i nagyságát azonban, a légüsttől függetlenül *Alliévi* (316) egyenlete is megszabja:

$$H_i = H_0 - \frac{w}{Fg}(V_0 - V_i). \tag{316/a}$$

A (323) és (316/a) egyenleteknek egyidejűleg teljesedni kell. A Δt_i és V_{ik} előzetes felvétele után kiszámítjuk (321) és (322) értékét, ezek felhasználásával pedig ellenőrizzük, hogy H_i kétféle kifejezése megegyező eredményt szolgáltat-e? Eltérés esetén V_{ik} értékét módosítjuk.

Amíg $t_i < \frac{2L}{w} = t_r$, a visszaverődött nyomáshullám megérkeztéig közvetlenül, *próbálgatás nélkül* is meghatározhatjuk az összefüggést a t idő és az állapotjelzők között. V_i felvételével H_i a (316/a) egyenletből számítható. Könnyen belátható, hogy

$$V_{ik} = \frac{V_{i-1} + V_i}{2}$$

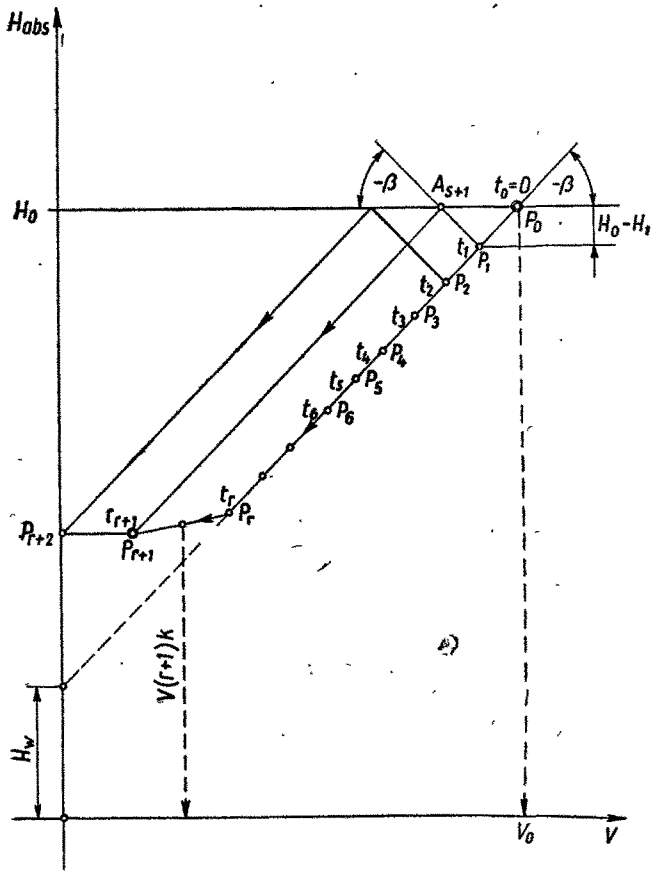
valamint a (323)-ból

$$W_i = \frac{H_{i-1}}{H_i} W_{i-1}$$

Ezekkel a (322) alapján

$$\Delta t_i = \frac{W_i - W_{i-1}}{V_{ik}} .$$

Mivel azonban $t > t_r$ esetén ez a közvetlen módszer nem alkalmazható, az egyöntetűség kedvéért végig a próbálgatás útján való számolást alkalmazzuk.



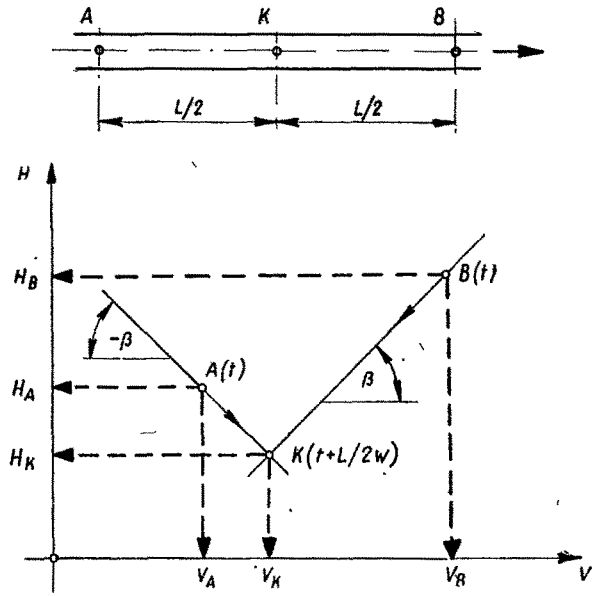
168. ábra. A lökésvonal szerkesztése $t > t_r$ idő esetében

Ezt az eljárást úgy is értelmezhetjük, hogy a lökésvonal egy-egy pontjához t_1, t_2, ... t_i idő-paramétereket rendelünk *(168. ábra)*. A módszer zavartalanul alkalmazható $t < t_r$ időpontokra. A továbbiakra nézve azonban újabb meggondolásokat kell tennünk. A vizsgálat során feltételezzük, hogy a folyadékszállítás **súrlódásmentes.**

A $t = t_r$ időpontig a csővezeték *0* pontjának V, H állapotjellemzői a P_0 pontból kiinduló, β hajlásszögű lökésvonalon sorakoznak. A csővezeték másik, A végének állapotát az átfutási idő $t_s = L/w = t_r/2$ végéig a P_0 pont jellemzi, ettől kezdve a H_0 = állandó vízszintes egyenesen vándorol. A csővezeték *0* pontjának t_1 időponthoz tartozó állapota a P_1 pontból induló, $-\beta$ hajlásszögű lökésvonalon halad, és az A pontba $t = t_s + t_1$ időpontban ér-

kezik, mikor ott a V, H állapotjellemzőket a H_0 = állandó vízszintes és a lökésvonal metszéspontja, A_{s+1} határozza meg. A továbbiakban ez veszi át a P_0 pont szerepét és hatása visszafelé haladva a cső mentén újabb $t_r/2$ idő múlva éri el a légüstöt. Az ebben a $t_{r+1} = t_r + t_1$ időpontban érvényes P_{r+1} pont tehát már nem a P_0, hanem az A_{s+1} pontból kiinduló lökésvonalon fog ülni *(168. ábra)*. Mivel a csővezeték jellemzői közben nem változtak, az új lökésvonal hajlásszöge is változatlanul β marad, mindössze a kezdőpontja vándorol P_0-ból A_{s+1}-be.

A t_{r+1} pillanathoz tartozó P_{r+1} pontot ezekután lényegében ugyanúgy határozzuk meg, mint az előzőeket. Az időköz adva van: $\Delta t_{r+1} = t_1$. Felvesszük



169. ábra. Az állapotjelzők szerkesztése két ismert pont közötti pontban

$V_{(r+1)k}$ értékét, és a mennyiségeket értelemszerűen helyettesítve, kiszámítjuk a (321), (322), (323) egyenleteket. Az eredmény ellenőrzésére azonban most nem a (316/a) egyenlet, illetve annak képe: az eredeti lökésvonal szolgál, hanem az A_{s+1}-ből induló új lökésvonal. Ezen kell ülnie a (V_{r+1}, H_{r+1}) pontnak. Ellenkező esetben a közepes vízszállítás felvételét módosítjuk.

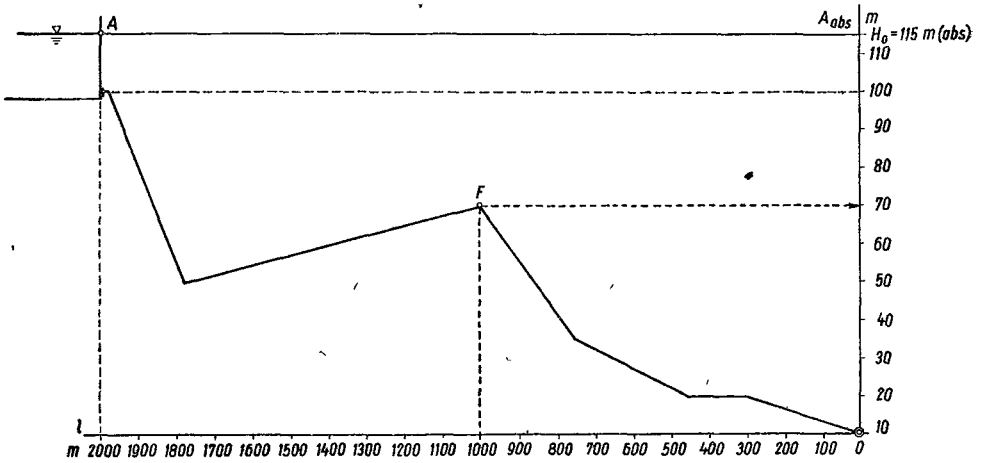
Az eljárás t_r periodusokra tagolva, tetszés szerinti időig folytatható. Megkönnyíti a számítást, ha a Δt_i időközöket a t_r, illetve a t_s egész számú hányadosainak választjuk. Közben megkapjuk a légüstnél fellépő legkisebb és legnagyobb nyomásokat, valamint a csővezeték másik végén, a medencénél végbemenő sebességváltozásokat is.

A csővezeték két végpontjában t időpillanatban ismert állapotjelzők segítségével *Jaeger* [26] nyomán meghatározhatjuk a csőhossz közepén, $L/2$-nél érvényes állapotot $t + L/(2w)$ időpontban. A feladat szerkesztéssel oldható meg igen könnyen és áttekinthetően *(169. ábra)*. A $H(V)$ számsíkon t pillanatban a cső két végpontján jelentkező állapot képe A és B pont. Ebben a pillanatban mindkét

pontból indul egy-egy lökésvonal, β illetve $-\beta$ hajlásszöggel. A mindkét végponttól $L/2$ távolságban levő K pont állapotának képe $t + L/(2w)$ pillanatban mindkét lökésvonalon rajta kell hogy legyen, azaz a vonalak metszéspontjaként adódik. Ezen az úton, a középső pont adataira támaszkodva, meghatározhatjuk a negyedelési pont állapotjelzőit is, és így tovább.

Az ismertetett eljárás alkalmas arra, hogy *felvett* légüst-térfogatot ellenőrizzünk segítségével mind a légüstnél fellépő legnagyobb, mind pedig a cső mentén jelentkező — a vízszálszakadás miatt veszélyes — legkisebb nyomások szempontjából.

100. példa. Bányaszivattyú $V_0 = 0{,}1$ m³/mp vízmennyiséget szállít $H_0 = 105$ m (115 m abs.) magasan fekvő tárolóba. A nyomócső átmérője $D = 350$ mm,



170. ábra. Bányaszivattyú nyomócsövének magassági szelvényei (100. példa)

keresztmetszete $F = 0{,}096$ m², hossza $L = 2000$ m. Hullámsebesség a vastagfalú csőben $w = 1110$ m/mp *(170. ábra)*.

$$[\operatorname{tg}\beta \doteq \frac{w}{Fg} = \frac{1110}{0{,}096 \cdot 9{,}81} = 1175.$$

$$H'_w = 115 - 1175 \cdot 0{,}1 = -2{,}5 \text{ m (abs.)}.$$

A vízoszlop tehát már a szivattyúnál elszakadna, hiszen a nyomás az abszolút zéró alá esik. Ennek megakadályozására $W_0 = 0{,}2$ m³ légtérfogatú légüstöt alkalmazunk. A hullám visszaverődésének teljes

$$t_r = \frac{2L}{w} = \frac{4000}{1110} = 3{,}6 \text{ mp}$$

idejét hat egyenlő $\Delta t = 0{,}6$ mp-es szakaszra bontjuk. A nyomások változását a *171. ábra* szem előtt tartásával a túloldal tábl zat szerint számítjuk. Az egyes pontok betűjele mellé indexül azt az időt írjuk (mp-ben), amely az áramkimaradás óta eltelt.

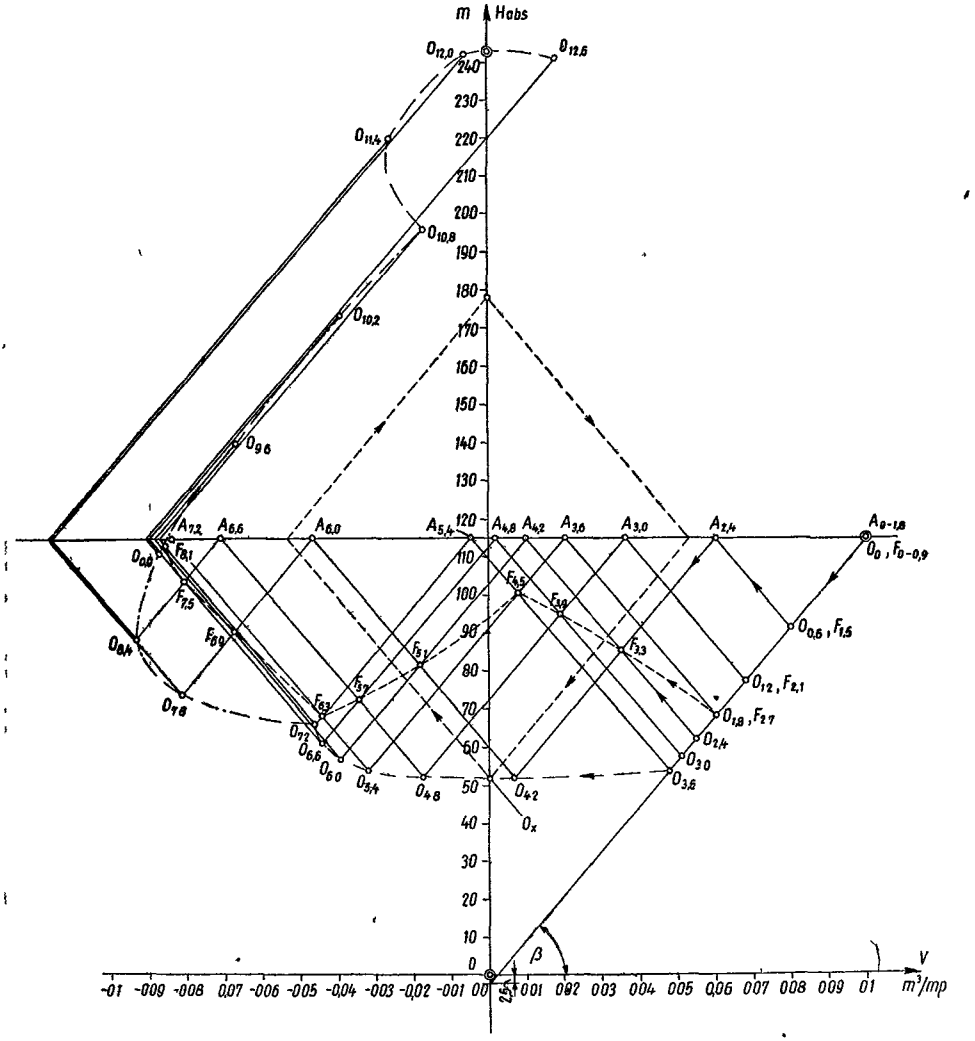
A *171. ábra* jól áttekinthetően szemlélteti a jelenségeket. Az *0* pontban a nyomás kb. $t = 12{,}1$ mp után éri el maximális értékét: $H_{max} = 243$ m (abs.) magasságot. Ez több. mint kétszerese az üzemi nyomásnak!

A pont jele	V_i (m³/mp)	$V_{ik} = (V_{i-1}+V_i)/2$ (m³/mp)	$\Delta W_i = 0{,}6 V_{ik}$ (m³)	$W_i = W_{i-1} + \Delta W_i$ (m³)	$q_i = \frac{W_i}{W_{i-1}}$	$H_i = H_{i-1}/q_i$ (m)
0_0	0,100			0,2000		115,0
		0,0900	0,0540		1,270	
$0_{0,6}$	0,080			0,2540		91,0
		0,0740	0,0445		1,175	
$0_{1,2}$	0,068			0,2985		77,5
		0,0640	0,0385		1,130	
$0_{1,8}$	0,060			0,3370		68,5
		0,0575	0,0343		1,100	
$0_{2,4}$	0,055			0,3713		62,1
		0,0530	0,0319		1,081	
$0_{3,0}$	0,051			0,4032		57,5
		0,0495	0,0297		1,075	
$0_{3,6}$	0,048			0,4329		53,8
		0,0275	0,0165		1,040	
$0_{1,2}$	0,007			0,4494		52,0
		−0,0050	−0,0030		0,995	
$0_{4,8}$	−0,017			0,4464		52,2
		−0,0245	−0,0147		0,970	
$0_{5,4}$	−0,032			0,4317		54,0
		−0,0355	−0,0213		0,950	
$0_{6,0}$	−0,039			0,4104		57,0
		−0,0415	−0,0250		0,936	
$0_{6,6}$	−0,044			0,3854		61,0
		−0,0450	−0,0270		0,930	
$0_{7,2}$	−0,046			0,3584		65,5
		−0,0635	−0,0380		0,895	
$0_{7,8}$	−0,081			0,3204		73,2
		−0,0870	−0,0520		0,835	
$0_{8,4}$	−0,093			0,2684		88,0
		−0,0900	−0,0540		0,800	
$0_{9,0}$	−0,087			0,2144		110,0
		−0,0770	−0,0462		0,788	
$0_{9,6}$	−0,067			0,1682		140,0
		−0,0530	−0,0319		0,810	
$0_{10,2}$	−0,039			0,1363		173,0
		−0,0280	−0,0168		0,880	
$0_{10,8}$	−0,017			0,1195		196,0
		−0,0215	−0,0129		0,890	
$0_{11,4}$	−0,026			0,1066		220,0
		−0,0160	−0,0096		0,910	
$0_{12,0}$	−0,006			0,0970		242,0
		+0,0060	+0,0036		1,030	
$0_{12,6}$	+0,018			0,1006		235,0

A nyomás e nagymértékű emelkedésének megakadályozására a légüstöt és a nyomócsövet összekötő vezetékbe kifelé nyíló visszacsapószelepet célszerű beszerelni. A visszacsapószelep az áramlás megszüntekor (ábrán $?_x$ pont) le zár, tehát ettől kezdve a viszonyok úgy alakulnak, mint a légüst nélküli nyomócsőnél. Ennek megfelelően a csővezeték *0* pontjában az állapotjellemzők, a *164. ábrához* hasonlóan, a *171. ábrába* pontozva berajzolt 0_x pontból kiinduló rombuszidom mentén vándorolnak körbe a súrlódás elhagyása esetén csillapítatlanul. Mint látható, a legnagyobb nyomás ez esetben csak 178 m-re emelkedik az előbbi 243 m-rel szemben.

A légüst az 0_x pontnak megfelelő állapotban maradna, azonban a visszacsapószeepet egy megkerülő vezetékkel kell áthidalni, melybe tolózárat iktatnak be.

A tolózárral beállított fojtásnak megfelelő csillapítással követi most a légüst vízmozgása a nyomócsőben végbemenő nyomásváltozásokat. Ennek a megoldásnak még az az előnye is megvan, hogy a fojtás hozzájárul a vízlengés energiájának megsemmisítéséhez, tehát nagyobb a csillapítás, mint csak a csősúrlódás figyelembevételével.



171. ábra. Állapotváltozások a csővezeték *O*, *A* és *F* szelvényében légüst alkalmazása esetében

Vízszálszakadás szempontjából a *170. ábra* szerint az $l = 1000$ m-es szelvénynél kiemelkedő F pont a veszélyes. Magassága $H_F = 70$ m (abs.). A *171. ábrában* szakadozott vonallal feltüntettük a nyomásnak változását az F pontban is. A nyomómagasságok 68 m abs. minimális értékét a $t = 2{,}7$ és $t = 6{,}3$ másodpercben kapjuk. Ez ugyan 2 m-rél alacsonyabb a pont tényleges magassági szintjénél, ennyi depresszió azonban még nem okoz üzemzavart.

A táblázatból kiolvashatjuk a légüstben expandált levegő legnagyobb térfogatát is az $0_{4,2}$ pontban: $W_{max} = 0{,}449$ m³. A légüst térfogatát ennél mintegy 20%-kal nagyobbra kell venni, hogy a levegő meg ne szökhessék belőle.

A kapott eredmények természetesen csak közelítőek és kellő óvatossággal kezelendők, mert a súrlódás befolyását elhanyagoltuk. Ez rövid és aránylag bő vezetéknél megengedhető, hosszú csővezeték esetén azonban súlyos hibát okozhat. A súrlódás hatásának figyelembevételére ez idő szerint *nincs* kielégítően megalapozott módszer. Ennek a kérdésnek a tisztázása még laboratóriumi és elméleti kutatómunka feladata.

IV. KEVERÉKEK ÁRAMLÁSA

A valóságos folyadék áramlásának eddig ismertetett törvényei érvényességüket vesztik abban az esetben, amikor szilárd anyaggal (az ún. hordalékkal) vagy gázbuborékokkal szennyezett folyadékról van szó, de akkor is, hogyha kétféle minőségű vagy munkaképességű folyadék egymással keveredik.

A műszaki gyakorlatban ennek a kérdésnek jelentősége **hidrológiai** vonatkozásban a természetes vízfolyások **hordalékmozgásának** és a **gázoskutak** üzemi jellemzőinek vizsgálata során domborodik ki. A **vízépítéstannak** és a **vízgépészetnek** egymástól elkülönítve tárgyalt idevágó anyaga is az áramlástannak ebbe a fejezetébe sorozható. A két folyadékkal dolgozó sokfajta ún. **energiatranszformátor** is a vízgépek e különleges csoportjába tartozik. Ilyen a **légnyomásos vízemelő** vagy **mammutszivattyú** és ilyenek a **gőzsugárszivattyúk** (injektor vagy lövettyű), továbbá **vízsugárszivattyúk** (mélyszívófej stb.) különféle változatai is. Végül az anyagszállítás korszerű berendezései közül ide sorozhatók a szemes anyagot légáramban vagy folyadékáramban továbbító pneumatikus és hidraulikus szerkezetek is. Ilyenek: az **anyagszivattyú,** a **pneumatikus gabonaelevátor** stb.

A keverékek áramlástana, mint a fentebbi erősen hézagos felsorolásból is kitűnik, igen sokrétű, és a gyakorlati alkalmazás tekintetében is széttagolt fejezetekre tagozódik, amelyeket a szakirodalom egy-egy tudományág keretében elkülönítve, egymástól függetlenül tárgyal. Ezt a szétszórt anyagot itt egységesebb szemlélettel dolgozzuk fel.

A *Gyakorlati áramlástan* e kiadásának IV. fejezete lényegesen kibővült az előző kiadáshoz képest. A Budapesti Műszaki Egyetem vízgépek tanszékének 1950 és 1957 között végzett laboratóriumi kutatásai és irodalmi gyűjtései szolgáltattak alapot a bővítésre az időközben elhúnyt szerző elgondolásai szerint.

A) KÉTFOLYADÉKOS ENERGIAÁTALAKÍTÓK (TRANSZFORMÁTOROK)

112. Kétfolyadékos energiaátalakítók felosztása

A mechanikai munkát **szolgáltató** vízerőgépek és a mechanikai munkát **fogyasztó** szivattyúk energiaátalakulás szempontjából egymással szembeállíthatók: az egyik esetben a gépbe vezetett folyadék munkaképessége alakul át mechanikai munkává, a másik esetben viszont a gép tengelyén bevezetett mechanikai munka

árán válik a szállított folyadék munkaképessé. Ha ezt a kétfajta vízgépet közlőmű közbeiktatásával **gépcsoporttá** egyesítjük, akkor e gépcsoportban végbemenő kettős energiaátalakulás végső célját úgy írhatjuk körül, hogy a kis munkaképességű ún. **szekunder** folyadéknak energiaszintjét a nagy munkaképességű ún. **primer** folyadék energiája emeli. A gépcsoportban a két folyadéknak ez az energiacseréje **mechanikai munkaátvitel** közbeiktatásával, tehát **közvetett** úton jött létre.

Ugyanez a folyamat azonban — a mechanikai elemek kihagyásával — **közvetlen** úton is létrehozható, oly módon, hogy a két folyadék **keveredése** biztosíthassa a folyadékenergiák kicserélődését [5].

a) A kétfolyadékos energiaátalakítók sokféle változata a primer és a szekunder **folyadék minősége** szerint a következő csoportokba sorozható:

	Primer folyadék	Szekunder folyadék	Kiviteli alak
1.	cseppfolyós (víz)	cseppfolyós (víz)	vízsugárszivattyú, mélyszívófej, vízemelő kos
2.	cseppfolyós (víz)	gáz (levegő)	vízsugár-légszivattyú
3.	cseppfolyós (víz)	szemes anyag	anyagszállítás vízáramban
4.	gáz (levegő)	cseppfolyós (víz)	légnyomásos vízemelő (mammut-szivattyú), gázoskút
5.	gáz (levegő)	gáz (levegő)	bányaszellőző, kovácstűzfúvó
6.	gáz (levegő)	szemes anyag	anyagszállítás légáramban
7.	gőz	cseppfolyós (víz)	gőzsugárszivattyú (lövettyű), pulzométer
8.	gőz	gáz (levegő)	gőzsugár-légszivattyú
9.	gőz	szemes anyag	anyagszállítás gőzáramban (sörgyári cefre)

b) Az energiaátalakító az **üzem minősége** szerint lehet:

1. folytonos üzemű, 2. szakaszos üzemű.

Szakaszos üzem esetében ugyanaz a folyadék is felváltva betöltheti a primer és a szekunder folyadék szerepét (vö. a vízemelő kossal).

c) Az **energiaátalakulás minősége** szerint a folyadéktramszformátorok szintén két nagy csoportba sorozhatók:

1. Az energiák **lendület** alakjában cserélődnek ki.
2. A két folyadék **potenciális energiája** egyenlítődik ki.

Az **első esetben** az impulzuscsere általában csak igen nagy Borda-féle veszteségek árán jöhet létre, ennélfogva a primer **folyadék lendületét hasznosító** energiaátalakítók (az ún. sugárszivattyúk) **nagyon rossz hatásfokkal** dolgoznak.

A veszteségek legnagyobbrészt az energiaátalakulás módjának **szükségszerű** következményei (vö. a 24/d. ponttal), azok tehát korszerű áramlástani és szerkezettani elvek alkalmazásával tökéletesített kialakítással is alig csökkenthetők.

Rossz hatásfoka ellenére ennek az energiaátalakítónak mégis nagyon elterjedt alkalmazást biztosít rendkívül egyszerű, olcsó szerkezete, kis helyszükséglete, nagy élettartama és üzembiztonsága.

A **második esetben** — amikor a két folyadék **potenciális energiája** cserélődik ki — a szerkezet korszerűsítésével **jó hatásfok** biztosítható, mert a veszteségek apasztásának itt elvi akadályai nincsenek. Jó üzemi hatásfok eléréséhez azonban az energiaátalakító szabatos elméletének ismeretére van szükség, mert csak az elméletre támaszkodó kísérleti kutatás eredményeinek felhasználásával lehet a szerkezet üzemét tökéletesíteni.

A következőkben az energiaátalakítók valamennyi fajtájának részletes tárgyalása helyett néhány jellegzetes szerkezeti változat ismertetésére szorítkozom, és elsősorban azok üzemi jellemzőinek meghatározására vezető elméleti alap felépítésére vetem a súlyt.

A folyadék minősége szerint csoportosított energiaátalakítók közül a hőenergiát is hasznosító gőzüzemű berendezésekkel nem foglalkozom.

A gázok és gázos keverékek áramlástani vizsgálatát az **izotermikus** állapotváltozás esetére korlátozom, ami az itt tárgyalt feladatok természetével teljes összhangban van (jó hűtés). Végül a folyadék módjára szállítható **szemes anyagok** összetétele tekintetében az egynemű, azonos szemnagyságú anyag (gabona, homok, liszt stb.) vizsgálatára szorítkozom.

113. A kétfolyadékos energiaátalakító hatásfoka

Az energiaátalakítók hatásfokának helyes értelmezését* félreérthetetlen alakban adja a *172. ábrában* vázolt energiaátalakító gépcsoport, amely egy vízerőgép és egy vízemelő szivattyú kapcsolata.

a) A **gépcsoport** (sztatikai) **hatásfokát** (beleértve az erőgépet a munkálógéphez kapcsoló mechanikai közlőmű hatásfokát is) a $V_2 \gamma_2 H_2$ hasznos vízemelőteljesítmény és az elfogyasztott $V_1 \gamma_1 H_1$ vízerőteljesítmény hányadosa fejezi ki, azaz:

$$\eta = \frac{V_2 \gamma_2 H_2}{V_1 \gamma_1 H_1} . \tag{324}$$

b) **Egynemű** primer és szekunder **folyadék** (pl. vízsugárszivattyú, vízemelő kos stb.) esetében ($\gamma_1 = \gamma_2$) a hatásfok:

$$\eta = \frac{V_2 H_2}{V_1 H_1} . \tag{324/a}$$

c) A (324) egyenlet akkor is használható, ha csak az **egyik folyadék** cseppfolyós (γ_v = állandó), a másik pedig oly **kis nyomáshatárok** között dolgozó gáz vagy levegő, amelyeken belül a gáz fajsúlya is gyakorlatilag állandó marad. (Ha $\Delta p \leqq 0{,}05\ p_0$, akkor $\gamma_g \cong$ állandó.)

---

* Indokoltnak látom e kérdés végleges és meggyőző tisztázása érdekében egy külön pont beiktatását, mert pl. a vízemelő kos hatásfokát a gyárak a mai napig hibásan számítják. Nem kisebb szakférfiak, mint *D'Aubuisson* és *Rankine* állottak szemben a sokáig eldöntetlenül maradt szakirodalmi vitában.

Ebben az esetben: $\Delta p = \gamma_g H_g$ helyettesítéssel pl. a **vízsugárlégszivattyú hatásfoka** — $V_2 = V_g$, $V_1 = V_v$ és $H_1 = H_v$ helyettesítéssel — így számítható:

$$\eta = \frac{V_g \Delta p}{V_v \gamma_v H_v}. \tag{325}$$

d) Ha **mindkét folyadék kis nyomáshatárok** között dolgozó gáz vagy levegő (bányaszellőző, Bunsen-égő stb.), akkor a hatásfok így írható:

$$\eta = \frac{V_2 \Delta p_2}{V_1 \Delta p_1}, \tag{326}$$

ahol az időegységben szállított γ_2 fajsúlyú V_2 gáztérfogatot és bevezetett (fogyasztott) γ_1 fajsúlyú V_1 térfogatot ugyanarra a (p_0 nyomású és τ_0 hőmérsékletű) *normálállapotra* kell vonatkoztatni.

e) **Nagy nyomáshatárok** között dolgozó gáz vagy levegő esetében az $x = p/p_0$ nyomásarány (kompresszióviszony) bevezetésével a V_{g0} normálállapotú légáram **izotermikus** teljesítménye:

$$N = V_{g0}\, p_0 \ln x,$$

és ezzel pl. a V_v vízáramot H_v magasságra szállító **légnyomásos vízemelő** hatásfoka, $A = p_0/\gamma_v$ légköri nyomásmagasság helyettesítésével:

$$\eta = \frac{V_v \gamma_v H_v}{V_{g0}\, p_0 \ln x} = \frac{V_v}{V_{g0}} \frac{H_v}{A \ln x}. \tag{327}$$

Hasonló értelmezéssel lehet kifejezni másfajta — itt nem tárgyalt — energiaátalakítók hatásfokát is.

101. példa. Egy **vízemelő kos** (átlagosan) $H_1 = 1{,}0$ m esésű $V_1 = 29$ l/perc vizet fogyaszt, és $H_2 = 3{,}2$ m magasságra $V_2 = 4{,}6$ l/perc vízmennyiséget szállít.

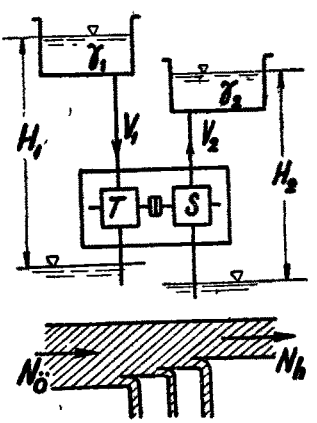
A vízemelő kos (sztatikai) hatásfoka (324/a) szerint:

$$\eta = \frac{V_2 H_2}{V_1 H_1} = \frac{4{,}6 \cdot 3{,}2}{29 \cdot 1{,}0} = 0{,}507\,; \text{ azaz: } 50{,}7\%.$$

A hatásfok értékének minősítése érdekében állítsuk szembe a *172. ábra* szerinti gépcsoport hatásfokát, amely egy $\eta_T = 80\%$-os hatásfokú turbina és egy $\eta_S = 70\%$-os hatásfokú szivattyú esetében még a közlőműves kapcsolat η_K hatásfokának figyelmen kívül hagyásával is csak:

$$\eta' = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = \mathbf{0{,}56}.$$

Az összehasonlításnál még azt is tekintetbe kell venni, hogy a vízemelő kos teljesítménye igen kicsiny, így tehát annak hatásfoka a jóval nagyobb teljesítőképességű gépcsoportéhoz viszonyítva igen jónak minősíthető.



172. ábra. Energiaátalakító gépcsoport

102. példa. Egy **légnyomásos vízemelő** (mammutszivattyú) $b_0 = 710$ m hg. o. barométerállásnál $p_0 = b_0 \gamma_h = 0{,}71 \cdot 13\,600 = 9660$ kg/m² légköri nyomáson $V_v = 1020$ l/perc vízáramot a kút üzemi szintjéről $H_v = 14$ m magasságra szállít.

A légsűrítő a levegőt az üzemi szint alatt $y_v = 22$ m mélységben adagolja a felszálló-csőbe (vö. *12. ábrával).*

A kompresszióviszony a p_0 (légköri) nyomás értékének helyettesítésével:

$$x = \frac{p_0 + y_v \gamma_v}{p_0} = \frac{9660 + 22 \cdot 1000}{9660} = \mathbf{3{,}28}; \quad (\ln 3{,}28 = 1{,}188).$$

A légnyomásos vízemelő hatásfoka (a légsűrítő és a légvezetőcső veszteségeinek figyelembevétele nélkül): $\eta' = 48\%$.

A keverési arány (327)-ből, $A = p_0/\gamma_v = 9{,}66$ m értékkel:

$$\nu_0 = \frac{V_{g0}}{V_v} = \frac{H_v}{\eta' A \ln x} = \frac{14}{0{,}48 \cdot 9{,}66 \cdot 1{,}188} = \mathbf{2{,}54};$$

a p_0 nyomású „beszívott" levegő mennyisége tehát:

$$\mathbf{V_{g0} = \nu_0 V_v = 2{,}54 \cdot 1020 \cong 2600 \text{ l/perc} = 43{,}4 \text{ l/mp} = 156 \text{ m}^3\text{/óra.}}$$

A légsűrítő hajtásához szükséges motorteljesítmény, $\eta_{iz} = 68\%$-os kompresszorhatásfok és a légadagoló-csőben $\Delta p = 0{,}4$ ata nyomásesés beszámításával:

$$\mathbf{N = \frac{V_{g0} p_0 \ln x_k}{75\ \eta_{iz}} = \frac{0{,}0434 \cdot 9660 \cdot 1{,}3}{75 \cdot 0{,}68} = 10{,}7 \text{ LE},}$$

ahol:

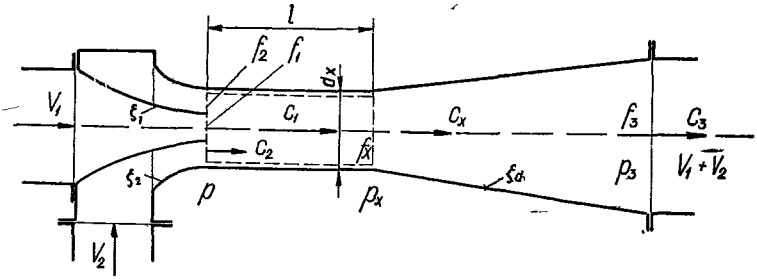
$$x_k = \frac{p_k}{p_0} = \frac{p_0 + y_v \gamma_v + \Delta p}{p_0} = \frac{31\,660 + 4000}{9660} = 3{,}69, \quad (\ln 3{,}69 = 1{,}3).$$

A teljes vízemelőberendezés hatásfoka tehát, $V_v = 1020 : 60 = 17$ l/mp helyettesítéssel:

$$\eta = \frac{V_v \gamma_v H_v}{75 \cdot N} = \frac{17 \cdot 1 \cdot 14}{75 \cdot 10{,}7} = \mathbf{0{,}296}; \qquad \text{azaz kereken: } 30\%.$$

114. A vízsugár — vízszivattyú

A vízsugárszivattyú elvi elrendezése a *173. ábrán* látható. Az alábbi összefüggések **egynemű** primer és szekunder folyadékra vonatkoznak ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) és feltételezzük, hogy $V_1 = f_1 c_1$ mennyiségű primer folyadék $V_2 = f_2 c_2$ szekunder



173. ábra. A vízsugárszivattyú elvi vázlata

folyadékárammal f keresztmetszetű **hengeres** keverőtérben elegyedik, és a keveredés befejeződése után $c_x = (V_1 + V_2)/f_x$ sebességgel lép át az f_3 keresztmetszetre bővülő diffúzorba. Feltételezzük továbbá, hogy minden sebesség tengelyirányú.

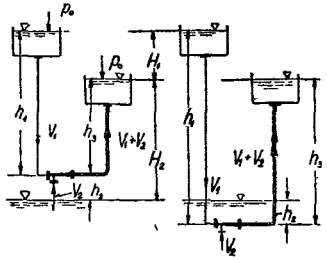
Az újabb gyártmányú szivattyúk hengeres keverőtérrel készülnek. *Citrini* ugyanis kimutatja, hogy a szűkülő (konfúzoros) keverőtér nem gazdaságos, mert a keveredés ugyan rövidebb szakaszon megy végbe, de a folyadék túlgyorsítása miatt szükséges nagyobb áttételű diffúzor többletveszteséget okoz.

A vízsugárszivattyú **hatásfoka** a *174. ábra* jelöléseivel a primer folyadék $H_1 = h_1 - h_3$ (m) esésének és a szekunder folyadék $H_2 = h_3 + h_2$ (m) terhelőmagasságának helyettesítésével így számítható:

$$\eta = \frac{V_2 \gamma H_2}{V_1 \gamma H_1} = \frac{H_2 f_2 c_2}{H_1 f_1 c_1}, \qquad (328)$$

ahol a h_1, h_2 és h_3 magasság a vízsugárszivattyú elhelyezésétől függ. Itt h_2 a «szivattyú» szívómagassága (negatív előjellel: a «hozzáfolyás» magassága) és h_3 a szivattyú nyomómagassága.

A hatásfok adott $\sigma = f_1/f_2$ keresztmetszetarány esetében a $\varphi = c_2/c_1$ sebességaránytól függ.



174. ábra. A vízsugárszivattyú üzemi jellemzői

A szivattyú működési elvének megértését megkönnyíti a keverőtérben végbemenő folyamat vizsgálata. A *173. ábra* szerint az ellenőrző felülettel körülzárt folyadéktest nyomása a hengeres keverőtérben p kezdőértéktől p_x-re emelkedik. E **nyomásemelkedés** az impulzustétel alkalmazásával a folyadéktest egyensúlyából így számítható:

$$f_x(p_x - p) = \frac{\gamma}{g}[V_1 c_1 + V_2 c_2 - (V_1 + V_2) c_x] =$$

$$= \frac{\gamma}{g} f_x c_x \left[\frac{V_1}{V_1 + V_2}(c_1 - c_x) + \frac{V_2}{V_1 + V_2}(c_2 - c_x)\right].$$

Rövidítés és rendezés után írható:

$$\frac{p_x - p}{\gamma} = \frac{V_1}{V_1 + V_2} \frac{2(c_1 - c_x) c_x}{2g} + \frac{V_2}{V_1 + V_2} \frac{2(c_2 - c_x) c_x}{2g} \quad \text{(m)}. \qquad (329)$$

Itt bevezetve az előzőkben értelmezett σ keresztmetszetarányt és φ sebességarányt, illetőleg ezekkel kifejezve a (329)-ben szereplő mennyiségeket:

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{\sigma}{\sigma + \varphi}, \quad \frac{V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\varphi}{\sigma + \varphi}, \quad c_x = c_1 \frac{\sigma + \varphi}{1 + \sigma}, \quad c_2 = \varphi c_1,$$

az összefüggés a következő egyszerű alakot veszi fel:

$$\frac{p_x - p}{\gamma} = \frac{c_1^2}{2g}\left[2\sigma\left(\frac{1 - \varphi}{1 + \sigma}\right)^2\right]. \qquad (329/a)$$

A keverőtérbe *belépő* primer és szekunder folyadék energiaegyenletei a konfúzor alakú szájnyílások ζ_1 és ζ_2 ellenállástényezőjének (illetve a szabadsugár-

turbináknál használt $\varphi_1 = 1/\sqrt{1+\zeta_1}$ és $\varphi_2 = 1/\sqrt{1+\zeta_2}$ sebességi tényezőjének) figyelembevételével az alábbi alakban írhatók:

$$A + h_1 = \frac{p}{\gamma} + (1+\zeta_1)\frac{c_1^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{\varphi_1^2}\frac{c_1^2}{2g} \quad \text{(I)} \qquad \text{és}$$

$$A - h_2 = \frac{p}{\gamma} + (1+\zeta_2)\frac{c_2^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{\varphi_2^2}\frac{c_2^2}{2g} \quad \text{(II)},$$

ahol $A = p_0/\gamma$ a légköri nyomásmagasság.

Meg kell jegyezni, hogy a ζ_1 és ζ_2 veszteségtényezővel csupán a vízsugárszivattyú belsejében keletkező áramlási veszteségeket vesszük számításba. (A csatlakozó csővezetékek veszteségmagasságát a h_1 és h_2 magasságokba kell belefoglalni, éppen úgy, mint másfajta szivattyúk esetében is.)

A két energiaegyenlet (I és II) összevonásával és $h_1 + h_2 = H_1 + H_2$ helyettesítésével a **primer folyadék sebességmagassága** így írható:

$$\frac{c_1^2}{2g} = \frac{H_1 + H_2}{1 + \zeta_1 - (1+\zeta_2)(c_2/c_1)^2} = \frac{H_1 + H_2}{\frac{1}{\varphi_1^2} - \left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)^2} \quad \text{(m)}. \qquad (330)$$

A primer folyadék c_1 sebessége (330) szerint a c_2/c_1 sebességi viszonytól is függ. Ennek kiszámításához a keverőtérből **kilépő** folyadékáram energiaegyenletét is felírjuk.

A keverőtérhez csatlakozó diffúzor ζ_d veszteségtényezőjével a *173. ábra* szerint:

$$\frac{p_r}{\gamma} + \frac{c_x^2}{2g} = A + h_3 + \zeta_d\frac{c_x^2}{2g} + \frac{c_3^2}{2g},$$

ahol: $f_3 c_3 = f_x c_x = V_1 + V_2$ a keverőtérből kilépő vízáram.

$c_3 = c_x f_x/f_3$ és $\zeta_3 = \zeta_d + (f_x/f_3)^2$ helyettesítéssel írható:

$$A + h_3 = \frac{p_x}{\gamma} + (1-\zeta_3)\frac{c_x^2}{2g}. \qquad \text{(III)}$$

A (II) és (III) energiaegyenlet összevonásával és $h_2 + h_3 = H_2$ helyettesítéssel az átrendezett egyenlet:

$$\frac{p_x - p}{\gamma} = H_2 + (1+\zeta_2)\frac{c_2^2}{2g} - (1-\zeta_3)\frac{c_x^2}{2g} \quad \text{(m)}. \qquad (331)$$

A (329) és (331) egyenlet egybevetésével és a vízáramok értékének helyettesítésével írható:

$$2g\,H_2 + (1+\zeta_2)c_2^2 - (1-\zeta_3)c_x^2 = \frac{f_1 c_1}{f_x c_x}2(c_1 - c_x)c_x + \frac{f_2 c_2}{f_x c_x}2(c_2 - c_x)c_x.$$

Ha $c_x = (f_1 c_1 + f_2 c_2)/f_x$ és $c_x^2 = (f_1^2 c_1^2 + 2 f_1 f_2 c_1 c_2 + f_2^2 c_2^2)/f_x^2$ helyettesítés után az egyenlet minden tagját c_1^2-tel elosztjuk és a $c_1^2/2g$ sebességmagasságot (330)-ból kifejezzük, akkor, rendezés után, a $\varphi = c_2/c_1$ sebességi viszonyra az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$A + B\varphi + C\varphi^2 = 0, \tag{332}$$

ahol:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{H_2}{H_1 + H_2}\cdot(1+\zeta_1) + \left(\frac{f_1}{f_x}\right)^2(1+\zeta_3) - \frac{2f_1}{f_x} = \\ &= \frac{H_2}{H_1 + H_2}\,\frac{1}{\varphi_1^2} + \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^2(1+\zeta_3) - 2\left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)\cdot \\ B &= \frac{2 f_1 f_2}{f_x^2}(1+\zeta_3) = 2\frac{\sigma}{(\sigma+1)^2}(1+\zeta_3) \\ C &= \frac{H_1}{H_1 + H_2}(1+\zeta_2) + \left(\frac{f_2}{f_x}\right)^2(1+\zeta_3) - 2\frac{f_2}{f_x} = \\ &= \frac{H_1}{H_1 + H_2}\,\frac{1}{\varphi_2^2} + \left(\frac{1}{\sigma+1}\right)^2(1+\zeta_3) - 2\frac{1}{\sigma+1}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{333}$$

A (332) egyenlet közismert analitikai megoldása

$$\varphi = \frac{c_2}{c_1} = \frac{-B \pm \sqrt{B_2 - 4AC}}{2C}\,. \tag{334}$$

Minthogy csak **pozitív** előjelű megoldásnak van értelme, azaz $\varphi > 0$, az egyenlet A állandójának **negatív** előjelűnek kell lennie.

Ez a feltétel ($A < 0$) akkor teljesül, ha

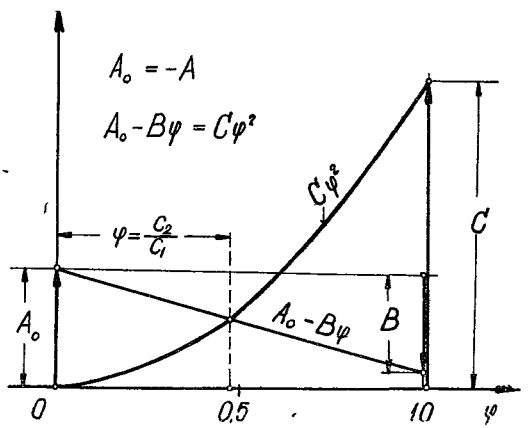
$$\frac{H_2}{H_1 + H_2} < \frac{2 f_x/f_1 - (1+\zeta_3)}{(f_x/f_1)^2(1+\zeta_1)}\,,$$

ami azt is jelenti, hogy a vízsugárszivattyú H_2 szállítómagassága nem lehet nagyobb egy, a keresztmetszetarányoktól és a veszteségtényezőktől függő határértéknél.

A φ sebességi arány kiszámítása után a (330) egyenletből a c_1 sebesség, illetve a (328) egyenletből a hatásfok is meghatározható.

A fentebb közölt számítás hosszadalmas és áttekinthetetlen, mert az egyenletet minden uzemállapotra más állandókkal kell megoldani.

Áttekinthetőbb képet kapunk a vízsugársrszivattyú üzemi jellemzőiről, ha a (332) egyenletet grafikusan oldjuk meg, annak A, B, C állandóját pe-



175. ábra. Másodfokú egyenlet grafikus megoldása

dig a szállítómagasságok és a keresztmetszetek függvényében szerkesztéssel határozzuk meg.

A (332) egyenlet megoldását adó szerkesztés a *175. ábrából* részletesebb magyarázat nélkül követhető.

Az egyenletet a negatív A állandó pozitív előjelű $A_0 = -A$ abszolút értékének helyettesítésével

$$A_0 - B\varphi = C\varphi^2$$

alakra hozzuk. A keresett φ megoldást az $A_0 - B\varphi$ ferde egyenes és a $C\varphi^2$ parabola metszéspontjának abszcisszája jelöli ki.

A grafikus eljárás előnye az, hogy az állandók különböző értékeinek felmérésével a szerkesztés **sorozatosan** végezhető el, ami a jelleggörbék pontjainak felrakását is megkönnyíti.

115. A tökéletes vízsugárszivattyú

A vízsugárszivattyú működési elvét első közelítésben az **áramlási veszteségek elhanyagolásával** lehet megismerni.

$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$ helyettesítéssel és a keverőtér méreteinek alkalmas választásával az egyenlet A, B és C állandója között egyszerű kapcsolatot találunk, amely szemléletesen ábrázolható.

Ha a keverőtér f_x keresztmetszetét a *173. ábra* szerint a primer és a szekunder belépőkeresztmetszet összegével tesszük egyenlővé, azaz:

$$f_x = f_1 + f_2,$$

akkor (333)-ból

$$\frac{H_1}{H_1 + H_2} = y_1 \quad \text{és} \quad \frac{H_2}{H_1 + H_2} = 1 - y_1 = y_2, \quad \text{továbbá}$$

$$\frac{f_1}{f_1 + f_2} = \frac{\sigma}{1 + \sigma} = z_1 \quad \text{és} \quad \frac{f_2}{f_1 + f_2} = \frac{1}{1 + \sigma} = z_2$$

jelöléssel, rövidítés és rendezés után, a három állandó:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{H_2}{H_1 + H_2} + \frac{f_1^2}{(f_1 + f_2)^2} - \frac{2f_1}{f_1 + f_2} = \\ &= 1 - y_1 + \frac{f_1^2}{(f_1 + f_2)^2} - \frac{2f_1(f_1 + f_2)}{(f_1 + f_2)^2} = \frac{f_2^2}{(f_1 + f_2)^2} - y_1 = z_2^2 - y_1, \\ B &= \frac{2f_1 f_2}{(f_1 + f_2)^2} = 2z_1 z_2, \\ C &= \frac{H_1}{H_1 + H_2} + \frac{f_2^2}{(f_1 + f_2)^2} - \frac{2f_2}{f_1 + f_2} = y_1 - \frac{f_2^2 + 2f_1 f_2}{(f_1 + f_2)^2} = \\ &= y_1 - z_2^2 - 2z_1 z_2. \end{aligned}\right\} \quad (335)$$

A három állandó összege: zérus, azaz ebben az esetben: $C = -(A + B)$, a másodfokú egyenlet pedig ezzel a helyettesítéssel:

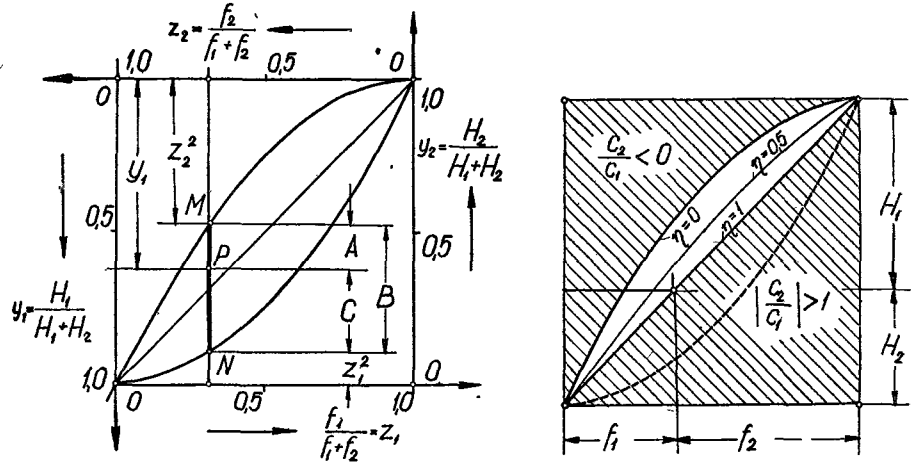
$$A(1 - \varphi^2) + B(\varphi - \varphi^2) = 0$$

alakban írható fel.

Az egyenlet két megoldása: $\varphi = 1$ és $\varphi = -A/(A + B) = A/C$.

Az állandók nagyságát a *176. ábra* szerint az alábbi egyszerű szerkesztéssel határozzuk meg. A felrajzolt diagram a vízsugárszivattyú működésének feltételeit is szemlélteti.

A négyzet alakú diagram függőleges tengelyén felülről lefelé az esés $y_1 = H_1/(H_1 + H_2)$ viszonylagos értékeit, alulról felfelé pedig a H_2 szállítómagasság viszonylagos értékeit olvassuk le.



176. ábra. A tökéletes vízsugárszivattyú diagramja

A diagram vízszintes tengelyén a z_1 és z_2 méretnélküli viszonyszámok alakjában a belépőkeresztmetszeteket rakjuk fel.

A vízszintes tengelyekre felrakott két egységparabola ordinátái az f_1, ill. f_2 keresztmetszet **négyzetével** arányosak, a két parabola közé eső $\overline{MN}$ metszék tehát a két keresztmetszet **kétszeres szorzatának** viszonylagos értékét ábrázolja, amely azok négyzetét összegük teljes négyzetévé egészíti ki.

Ezzel megkaptuk a B állandó mérőhosszúságát. Ezt az esés viszonylagos értékének y_1 magasságában kijelölt P pont kettéosztja. Egyszerű szemlélet igazolja, hogy az $\overline{MP}$ metszék az A állandó negatív értékét, a $\overline{PN}$ pedig a C állandót határozza meg. A P pont helye megszabja az $\overline{MP}/\overline{PN} = A/C$ viszony nagyságát is, amely az adott esetben a sebességek $\varphi = c_2/c_1$ arányát is megadja.

A diagramból mindenekelőtt megállapítható, hogy a vízsugárszivattyú üzemi feltételeit a belépőkeresztmetszetek aránya igen szűk területre korlátozza.

A *176. ábrában* vonalkázással kiemelt területek közül a felső azért esik ki, mert ebben a tartományban a sebességek aránya **negatív** azaz: $c_2/c_1 < 0$.

A vízszállítás $\eta = 0$ hatásfokkal a felső parabolán fekvő munkapontokban indul és a négyzet átlójával határolt felső területen lehetséges, mert ez az átló a $c_2/c_1 \leqq 1$ sebességarány határvonala, amelynél a sebességek azonossága ($c_2 = c_1$) következtében a primer folyadék energiaátadása megszűnik. (Az ábrában vonalkázott alsó terület tehát szintén kiesik.)

A tökéletes vízsugárszivattyú hatásfoka az ezen az átlós $c_2 = c_1$ határvonalon eléri ugyan a 100%-ot, de ez a hatásfok rohamosan csökken, mihelyt az energiaátadás feltételét a c_1 primersebesség megnövelésével teljesítjük.

A diagramalakja rávilágít a belépőkeresztmetszetek helyes méretezésének fontosságára is, mert az f_2/f_1 keresztmetszetarány a H_2 szállítómagasság és a H_1 esés viszonyával oly szoros kapcsolatban áll, hogy az üzemi jellemzők egészen kismértékű megváltozása a hatásfok rohamos romlását eredményezi.

A hatásfok *ideális* értéke a (328) összefüggés alapján a *176. ábra* minden egyes pontjához kiszámítható, s a számítás végeredményeként a következő alakban írható fel:

$$\eta_i = \frac{c_2 f_2 H_2}{c_1 f_1 H_1} = \varphi \frac{2 + \sigma (1 + \varphi)}{1 + \varphi + 2\sigma\varphi} . \tag{336}$$

Ha $\sigma \leqq 0{,}1$, akkor jó közelítést ad az $\eta_i \cong 2\varphi/(1 + \varphi)$ összefüggés is.

116. A vízsugár—vízszivattyú méretezése

Vogel [93] és *Citrini* [61] nyomán a vízsugár-vízszivattyú méretezése az alábbiak szerint végezhető.

1. A megadott hidraulikai jellemzők alapján a primer és szekunder folyadék φ/σ keverési aránya függvényében készült nomogramból *(177. ábra)* meghatározzuk (becsült φ_1, φ_2 és ζ veszteségtényezőkkel) a legjobb hatásfokot adó φ sebességarányt. Ezzel a σ keresztmetszetarány és a sugárszivattyú fúvóka- és keverőtér átmérője kiszámítható. (L. a 103. és 104. példát.)

2. A keverőtér optimális hossza a σ keresztmetszetarány és a φ sebességarány függvényében mérési adatok alapján felrajzolt nomogram felső határgörbéjével *(179. ábra)* számítható ki.

3. A keverőtér számított és a diffúzor felvett adataival ellenőrizzük, hogy a ζ veszteségtényezőt helyesen becsültük-e (105. példa), és kiszámítjuk azt a legkisebb szívómagasságot, ahol már kavitáció következik be. (L. a 106. példát.)

Ha az ellenőrzés azt mutatja, hogy a veszteségtényezőket nem becsültük helyesen, vagy az adott beépítés esetében kavitáció várható, akkor a méretezési számítást meg kell ismételni. A kavitáció elkerülése általában csak *rosszabb hatásfok* árán sikerül, ezért arra kell törekedni, hogy a szívómagasságot apasszuk.

A méretezéshez az eddig levezetett összefüggéseken némi átalakítást végzünk. Először a hatásfok kiszámításához átalakítjuk a H_2 (331) és a H_1 (330) kifejezéseit.

A sugárszivattyú *szállítómagassága* a (331) összefüggésből

$$H_2 = \frac{p_x - p}{\gamma} - (1 + \zeta_2) \frac{c_2^2}{2g} + (1 - \zeta_3) \frac{c_x^2}{2g} ,$$

illetve behelyettesítve a (329/a) összefüggésből $(p_x - p)/\gamma$ értékét; továbbá a $c_2 = \varphi c_1$, a $c_x = \frac{\sigma + \varphi}{1 + \sigma} c_1$ és az $(1 + \zeta_2) = 1/\varphi_2^2$ értékeket, a szállítómagasság kifejezése:

$$H_2 = \frac{c_1^2}{2g}\left[2\sigma\left(\frac{1-\varphi}{1+\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)^2 + (1-\zeta_3)\left(\frac{\sigma+\varphi}{\sigma+1}\right)^2\right]. \tag{337}$$

Bevezetve a $\psi_2 = H_2/(c_1^2/2g)$ (338)

és a $D = 2\sigma\left(\frac{1-\varphi}{1+\sigma}\right)^2 + (1-\zeta_3)\left(\frac{\sigma+\varphi}{\sigma+1}\right)^2$ (339)

jelöléseket, kapjuk, hogy

$$H_2 = \frac{c_1^2}{2g}\left[D - \left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)^2\right], \tag{337/a}$$

s ebből a *nyomásszám* kifejezése

$$\psi_2 = D - (\varphi/\varphi_2)^2. \tag{340}$$

A sugárszivattyú üzemeltetéséhez szükséges *esés* a (330) összefüggés átrendezésével és az előbbi jelölések bevezetésével:

$$H_1 = \frac{c_1^2}{2g}\left[\frac{1}{\varphi_1^2} - \left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)^2\right] - H_2 = \frac{c_1^2}{2g}\left[\frac{1}{\varphi_1^2} - D\right] = \frac{c_1^2}{2g}\psi_1, \tag{330/a}$$

ahol ψ_1 az esésre vonatkozó «nyomásszám».

A (330/a) és (331/a) értékeit behelyettesítve a hatásfok (328) szerinti kifejezésébe, továbbá figyelembe véve, hogy $V_2/V_1 = \varphi/\sigma$, adódik, hogy a *hatásfok*:

$$\eta = \frac{\varphi}{\sigma}\frac{D - \left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varphi_1^2}\right) - D} = \frac{\varphi}{\sigma}\frac{\psi_2}{\psi_1}. \tag{341}$$

A (331) összeffügésben ζ- értékében csak a diffúzorveszteséget és a kilépési veszteséget vettük figyelembe. A keverőtér veszteségét $h' = \lambda_r (l/d_x)\, c_x^2/2g$ formában felírva, az összevont ζ veszteségtényező:

$$\zeta = \lambda_r (l/d_x) + \zeta_3 = \lambda_r (l/d_x) + \zeta_d + n^4 =$$
$$= \lambda_r (l/d_x) + (1 - \eta_d) + \eta_d\, n^4,$$

ahol λ_r a keverőtér redukált ellenállási (súrlódási) tényezője, amelyet a későbbiekben, a (344) összefüggés határoz meg; $\zeta_3 = \zeta_d + n^4$ a diffúzor veszteségét és a kilépési veszteséget jellemző tényező (ebben $n = d_x/d_3$ a diffúzor áttétele) és η_d a diffúzor hatásfoka a (131/d) összefüggés szerint; továbbá l a keverőtér hossza, d_x pedig az átmérője *(173. ábra)*.

Az összevont veszteségtényező segítségével a keverőtér veszteségét tulajdonképpen a diffúzor veszteségéhez számítjuk hozzá, s a keverőteret veszteségmentes

nek tekintjük. A továbbiakban ezért ζ_3 helyett ζ értékével számolunk. A (339) összefüggés is eszerint módosul, azaz

$$D = 2\sigma\left(\frac{1-\varphi}{1+\sigma}\right)^2 + (1-\zeta)\left(\frac{\sigma+\varphi}{\sigma+1}\right)^2, \qquad (339/a)$$

amelynek első tagja lényegében a keverőtérben az ideális nyomásnövekedés értékére jellemző, második tagja pedig a diffúzorban tapasztalt nyomásnövekedés értékét adja (ha $c_1^2/2g$-vel szorozzuk), levonva belőle a keverőtér, a diffúzor veszteségét és a kilépési veszteséget.

A (341) összefüggésben a primer fúvóka sebességtényezője $\varphi_1 = 0{,}96$, a szekunderé $\varphi_2 = 0{,}93$ átlagértékkel vehető számításba. Ezeknek az értékeknek megkötésével a hatásfok már csak φ, σ és ζ függvénye. Ha σ és ζ értékét állandónak vesszük, akkor a hatásfok-görbe φ függvényében maximumot mutat ott, ahol $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\varphi = 0$. Minden kötött σ keresztmetszetarányhoz (adott ζ-val) más és más φ-értéknél kapjuk a hatásfok-görbe tetőpontját ($(\varphi)_{\eta\,\max}$ pontok).

1. **Méretezéskor** ezeket a legjobb pontokat kívánjuk elérni. Ha a *legjobb hatásfokokat* adó sebességarányok pontjait a φ/σ mennyiségarány függvényében ábrázoljuk, méretezési nomogramot *(177. ábra)* kapunk. Kötött φ_1 és φ_2 értékkel különböző ζ = *állandó* görbék mentén a legjobb hatásfokot adó φ sebességarány értékét és az elérhető legjobb hatásfokot leolvashatjuk az ábrából. (A diagramból látható, hogy a legjobb hatásfokot általában akkor érhetjük el, ha a primer és szekunder vízszállítás közel egyenlő és a fúvókák σ keresztmetszetarányát úgy választottuk, hogy φ értéke a maximumot közelítse meg.)

103. példa. $V_2 = 40$ m³/ó vízmennyiséget kell sugárszivattyúval $H_2 = 12$ m magasságra szállítani. Méretezzük a sugárszivattyút. ζ értékét 0,18-ra becsüljük. Ezzel az elérhető legjobb hatásfok ($\varphi_1 = 0{,}96$ $\varphi_2 = 0{,}93$ értékkel) 35% és ezt $V_2/V_1 = 0{,}85$ értéknél kapjuk. A szükséges üzemvíz mennyisége:

$$V_1 = \frac{V_2}{V_2/V_1} = \frac{40}{0{,}85} = 47 \text{ m}^3/\text{ó} = 13{,}07 \text{ l/mp}.$$

Az ehhez tartozó sebességarány: $(\varphi)_{\eta\,\max} = 0{,}387$.
A fúvókák kívánatos keresztmetszetaránya:

$$f_1/f_2 = \sigma = \frac{\varphi}{\varphi/\sigma} = \frac{\varphi}{V_1/V_2} = \frac{0{,}387}{0{,}85} = 0{,}455;$$

a primer fúvóka keresztmetszete tehát 45,5 százaléka a szekunder fúvókáénak. Koncentrikus körök esetén tehát a primer fúvóka és a keverőtér átmérőarányа (a fúvóka falvastagságát elhanyagolva):

$$d_1/d_x = \sqrt{\frac{f_1}{f_1+f_2}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma+1}} = \sqrt{\frac{0{,}455}{1{,}455}} = 0{,}56.$$

D értéke a méretezési pontban (339) szerint:

$$D = 2 \cdot 0{,}455\left(\frac{1-0{,}387}{1{,}455}\right)^2 + (1-0{,}18)\left(\frac{0{,}387+0{,}455}{1{,}455}\right)^2 = 0{,}435,$$

ezzel

$$\varphi_2 = 0{,}435 - \left(\frac{0{,}387}{0{,}93}\right)^2 = 0{,}262,$$

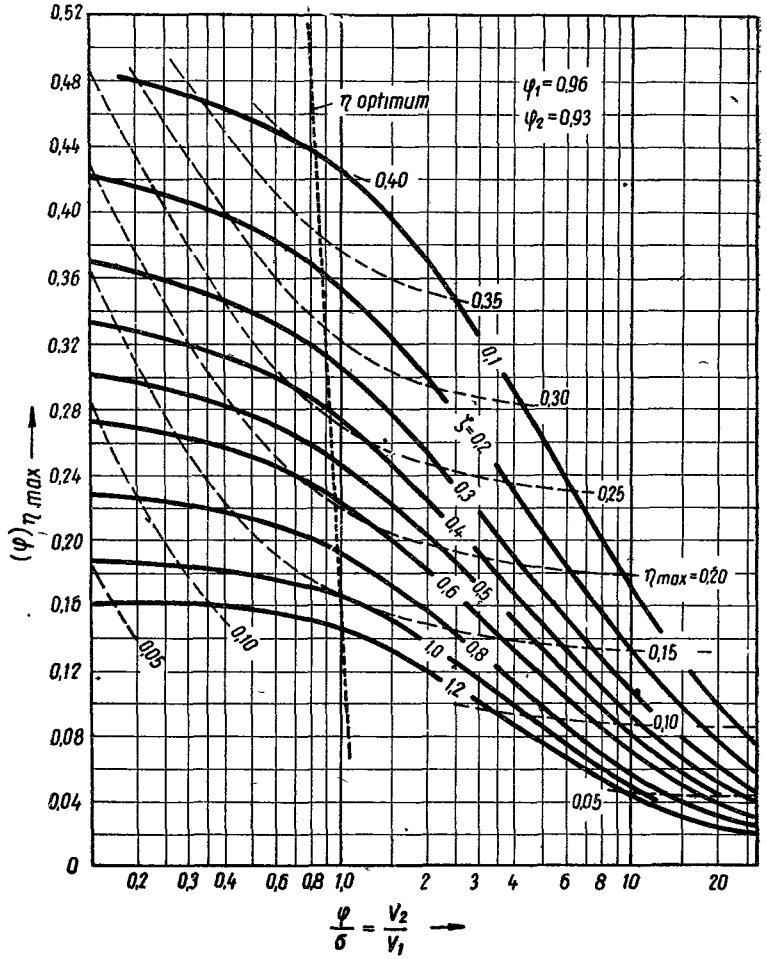
és így

$$c_1^2/2g = \frac{H_2}{\psi_2} = \frac{12}{0{,}262} = 45{,}7 \text{ m},$$

$$c_1 = 29{,}8 \text{ m/mp},$$

$$f_1 = V_1/c_1 = 0{,}01307/29{,}8 = 4{,}38 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4}{\pi} f_1} = 2{,}35 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \mathbf{23{,}5 \text{ mm}}.$$



177. ábra. Vízsugárszivattyú méretezési nomogramja

A keverőtér átmérője:

$$d_x = \frac{d_1}{d_1/d_x} = \frac{23{,}5}{0{,}56} = \mathbf{42 \text{ mm}}.$$

A szükséges esés a

$$\psi_1 = \frac{1}{0{,}96^2} - 0{,}435 = 0{,}651$$

értékből

$$H_1 = \psi_1(c_1^2/2g) = 0{,}651 \cdot 45{,}7 = \mathbf{29{,}7\ m.}$$

104. példa. $V_2 = 40$ m³/ó vízmennyiséget kell sugárszivattyúval $H_2 = 12$ m magasságra szállítani. Rendelkezésünkre álló primer vízmennyiség $V_1 = 15$ m³/ó. Mekkora a szükséges H_1 primer esés? Milyenek legyenek a sugárszivattyú méretei? Kiindulunk a

$$\varphi/\sigma = V_2/V_1 = 40/15 = 2{,}67$$

értékből.

Feltételezzük ismét a $\zeta = 0{,}18$, $\varphi_1 = 0{,}96$, $\varphi_2 = 0{,}93$ értékeket. A *177. ábrából* $\varphi = 0{,}29$ adódik, $\eta = 30\%$-os hatásfokkal.

Ezzel a keresztmetszetarány

$$\sigma = \frac{\varphi}{\varphi/\sigma} = \frac{0{,}29}{2{,}67} \cong 0{,}109.$$

Ilyen keresztmetszetaránynál általában $\zeta = 0{,}18$-at elérni nem lehet, a továbbiakban mégis ezzel számolunk:

$$D = 2 \cdot 0{,}109\left(\frac{1 - 0{,}29}{1{,}109}\right)^2 + (1 - 0{,}18)\left(\frac{0{,}29 + 0{,}109}{1{,}109}\right)^2 = 0{,}195,$$

$$\psi_2 = 0{,}195 - \left(\frac{0{,}29}{0{,}93}\right)^2 = 0{,}098,$$

$$c_1^2/2g = H_2/\psi_2 = 12/0{,}098 = 122 \text{ m és}$$

$$c_1 = 49 \text{ m/mp},$$

$$f_1 = V_1/c_1 = \frac{15}{3600 \cdot 49} = 0{,}85 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \text{ azaz}$$

$$\mathbf{d_1 = 10{,}4\ mm} \text{ és}$$

$$f_2 = \frac{f_1}{\sigma} = \frac{0{,}85 \cdot 10^{-4}}{0{,}109} = 7{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 780 \text{ mm}^2.$$

Ha a primer fúvóka falvastagsága a kilépésnél 0,3 mm, akkor a fúvóka külső átmérője $d_1^* = 11$ mm, $f_1^* = 0{,}95 \cdot 10^{-4}$ m², $f_2 + f_1^* = (7{,}8 + 0{,}95) \cdot 10^{-4} = 8{,}75 \cdot 10^{-4}$ m², és ebből a keverőtér átmérője:

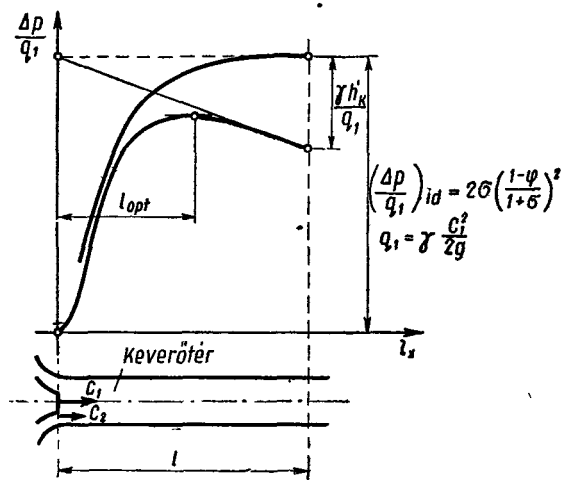
$$\mathbf{d_k} = \sqrt{\frac{4}{\pi}(f_2 + f_1^*)} = \mathbf{33{,}4\ mm.}$$

A szükséges H_1 primer esés:

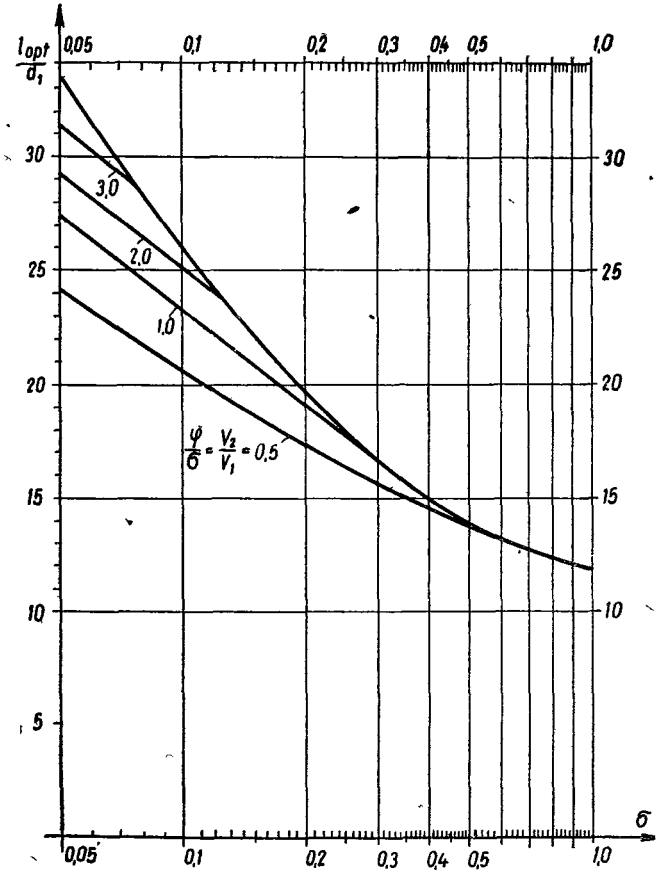
$$\psi_1 = \frac{1}{0{,}96^2} - 0{,}195 = 0{,}892 \quad \text{és}$$

$$\mathbf{H_1} = \psi_1 c_1^2/2g = 0{,}892 \cdot 122 = \mathbf{109\ m.}$$

2. **A keverőtér hosszát** *Vogel* nyomán a fal mentén mért nyomáseloszlásból határozzuk meg. Ha a keverőtér a legkedvezőbbnél hosszabb, akkor a falmenti nyomáseloszlásnak maximuma van: ott fejeződik be a keveredés, és onnan a h_k' csőellenállásnak megfelelően csökken a nyomás *(178. ábra)*. A nyomáscsúcs helyzete elsősorban a σ keresztmetszetaránytól függ, és csak igen kis mértékben a V_2/V_1 mennyiségaránytól (*179.* ábra).



178. ábra. Nyomáseloszlás a keverőtérben



179. ábra. Keverőtér gazdaságos hosszának méretezéséhez nomogram

A biztonságos méretezés a *179. ábra* felső határgörbéjével történhetik, hogy a szivattyú minden üzemállapotában elegendő hosszú legyen a keverőtér. A felső határgörbét jól közelíti az

$$l/d_1 = (7{,}2 + 4{,}66\,\sigma)\sqrt{\sigma} \tag{342}$$

empirikus összefüggés, amely egyszerű alakjánál fogva méretezéshez jól használható.

A (342) összefüggésben d_1 értéke az üzemvízfúvóka hidraulikai sugarának négyszerese. Ha a primer folyadék a külső, körgyűrű-keresztmetszeten lép be, akkor a hidraulikai sugár kisebb, mint azonos keresztmetszetű belső fúvókával, tehát a szükséges keverőtérhossz is erősen megrövidül. Az ilyen elrendezés hátránya viszont, hogy a nagysebességű sugár a fal mellé kerül, és így a rövid keverőtér vesztesége lényegesen nagyobb, mint a belső fúvóka hosszú keverőterének vesztesége.

3. A keverőtér **veszteségének** számításához feltételezhetjük, hogy a fal mentén, míg a sebesség c_2-ről c_x-re növekszik, a $c_2/2g$ sebességmagasság *lineárisan* változik:

$$\frac{c^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g} = \frac{l_x}{l}\left(\frac{c_x^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g}\right),$$

s ebből

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{c_2^2}{2g} + \frac{l_x}{l}\left(\frac{c_x^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g}\right).$$

Ez a valóságnál kedvezőtlenebb feltétel. A sima csőre *Blasius* által megadott $\lambda = 0{,}316/\sqrt[4]{Re}$ csősúrlódási tényező λ_r *redukált* értékét most már meghatározhatjuk. Az l hosszúságú keverőtér vesztesége ugyanis a c_x sebességre vonatkoztatva:

$$h'_k = \lambda_r \frac{l}{d_x}\frac{c_x^2}{2g} = \frac{\lambda}{d_x}\int_0^l \frac{c^2}{2g}\,\mathrm{d}l_x = \frac{\lambda}{d_x}\frac{c_2^2}{2g}\int_0^l \mathrm{d}l_x + \frac{\lambda}{d_x}\left(\frac{c_x^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g}\right)\frac{1}{l}\int_0^l l_x\,\mathrm{d}l_x =$$

$$= \frac{\lambda}{d_x}\frac{l}{2}\left(\frac{c_x^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g}\right) = \frac{\lambda}{2}\frac{l}{d_x}\frac{c_x^2}{2g}\left[1 + \left(\frac{c_2}{c_x}\right)^2\right]. \tag{343}$$

Ezzel a redukált súrlódási tényező:

$$\lambda_r = \lambda/2\left[1 + \left(\frac{c_2}{c_x}\right)^2\right] = \frac{\lambda}{2}\left\{1 + \left[\frac{\varphi(\sigma+1)}{\sigma+\varphi}\right]^2\right\}. \tag{344}$$

105. példa. Számítsuk ki a 103. példában kiszámított vízsugárszivattyú keverőtérméreteit és veszteségtényezőjét. A fúvókaátmérő $d_1 = 23{,}5$ mm. $\sigma = 0{,}455$ értékhez $l/d_1 = 13{,}8$ *(179. ábra)*. Ezzel $l = (l/d_1)\cdot d_1 = 13{,}8 \cdot 23{,}5 = 323$ mm. A keverőtér átmérője: $d_x = 42$ mm ($f_x = 13{,}8 \cdot 10^{-4}$ m²).

A víz átlagsebessége a keverőtér kilépőszelvényében a vízmennyiségből számítható:

$$V = V_1 + V_2 = 13{,}07 + 11{,}10 = 24{,}17 \text{ l/mp és}$$

$$c_x = \frac{V}{f_x} = \frac{24{,}17 \cdot 10^{-3}}{13{,}8 \cdot 10^{-4}} = 17{,}5 \text{ m/mp, továbbá}$$

$$c_2 = \frac{V_2}{f_2} = \frac{V_2\,\sigma}{f_1} = \frac{11{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}455}{4{,}38 \cdot 10^{-4}} = 11{,}6 \text{ m/mp.}$$

A keverőtér *Reynolds*-száma ($t = 20$ C°-os vízzel, $\nu = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ m²/mp):

$$Re_x = \frac{c_x d_x}{\nu} = \frac{17{,}5 \cdot 42 \cdot 10^{-3}}{1{,}0 \cdot 10^{-6}} = 735\,000.$$

A hidraulikailag sima cső súrlódási tényezője:

$$\lambda = 0{,}0123 \text{ (a (116) és (118) összefüggésből).}$$

A redukált súrlódási tényező pedig

$$\lambda_r = 0{,}0123 \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{11{,}6}{17{,}5}\right)^2\right] = 0{,}0123 \cdot 1{,}44/2 = 0{,}00886.$$

A keverőtér veszteségtényezője:

$$\zeta_k = \lambda_r \frac{l}{d_x} = 0{,}00886 \cdot \frac{323}{42} = 0{,}068.$$

A keverőtér veszteségmagassága:

$$\mathbf{h' = \zeta_k c_x^2/2g = 0{,}068 \cdot 15{,}6 = 1{,}06 \text{ m}} \text{ vízoszlop.}$$

A diffúzorhatásfokot $\eta_d = 0{,}92$-re és a kilépőkeresztmetszetet $f_3 = 0{,}0176$ m²-nek ($d_3 = 150$ mm) felvéve, a keverőtér és a diffúzor együttes veszteségtényezője a pont elején elmondottak szerint:

$$\zeta = \lambda_r l/d_x + (1 - \eta_d) + \eta_d(f_x/f_3)^2 = 0{,}068 + 0{,}08 +$$
$$+ 0{,}92\left(\frac{13{,}8}{176}\right)^2 = 0{,}068 + 0{,}08 + 0{,}0057 = 0{,}154,$$

ami jól egyezik (a biztonság felé eltolódva) a 103. példában felvett $\zeta = 0{,}18$ értékkel.

A fúvókák veszteségtényezője (φ_1 és φ_2) a felvett értékeket általában jól közelíti; ellenőrzését úgy végezhetjük, hogy szakaszokra bontva a fúvókákat, rész-veszteségeket számítunk s ezeket összegezzük. Itt a sima csőre érvényes csősúrlódási tényező *másfélszeres* értékével lehet a számítást végezni.

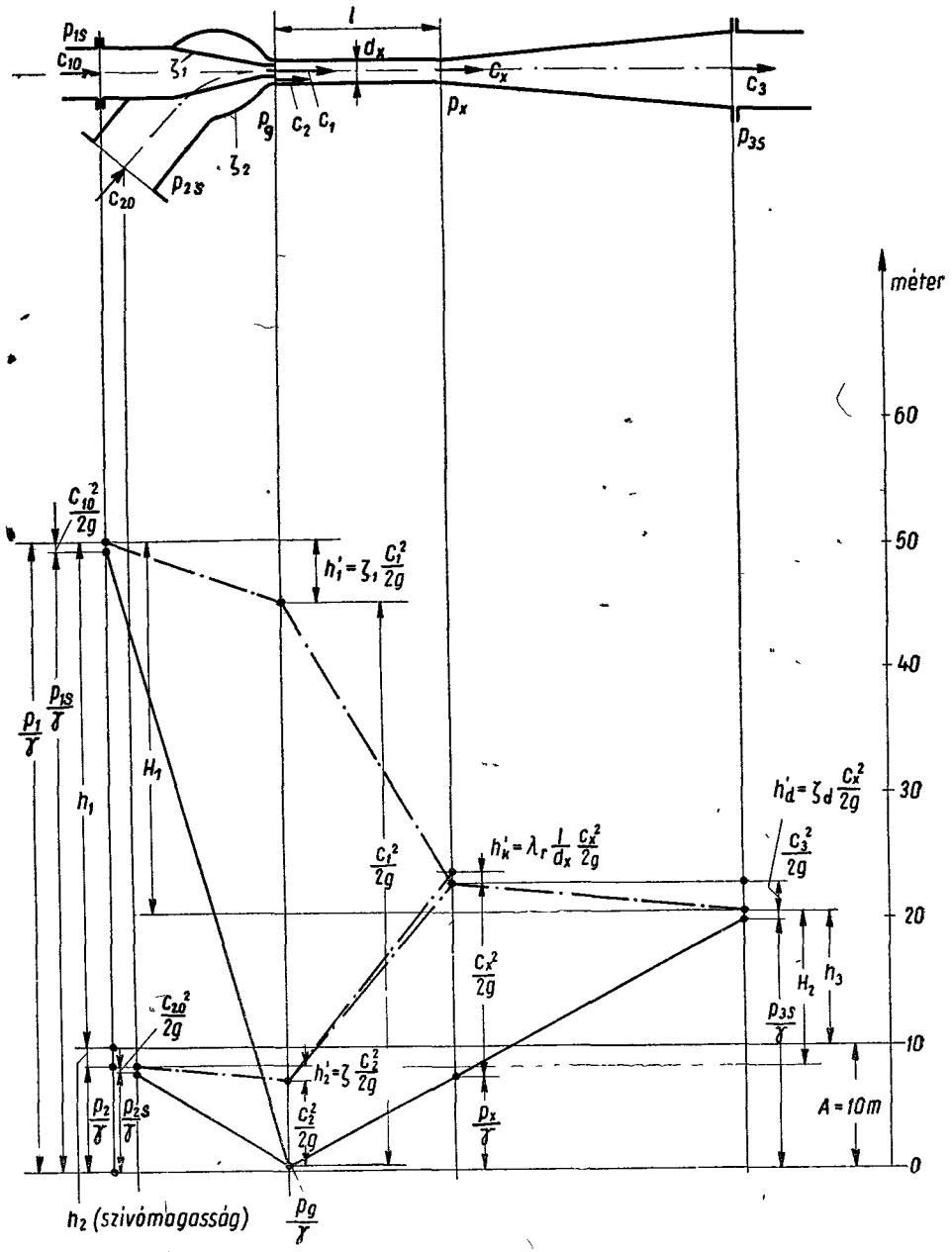
A sugárszivattyúban *kavitáció* kezdődik — és ez a V_2 vízszállításnak felső határt szab — amikor a szekunder sugárban a nyomás leesik az adott hőfokon telített vízgőz p_g nyomására, azaz $p = p_g$. Ha a primer fúvóka előtt az energiaszintet $p_1 = p_{1s} + q_1$-gyel (ahol p_{1s} a sztatikus nyomás és q_{1s} a hozzáfolyócsőben a torlónyomás), a szekunder fúvóka előtt az energiaszintet $p_2 = p_{2s} + q_2$-vel jelöljük, akkor **kavitáció** esetére felírható:

$$p_g = p_1 - \frac{1}{\varphi_1^2}\frac{c_1^2}{2g}\gamma_2 = p_2 - \frac{1}{\varphi_2^2}\frac{c_2^2}{2g}\gamma, \tag{345}$$

ebből átrendezés és gyökvonás után a

$$\sqrt{\frac{p_1 - p_g}{p_2 - p_g}} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\varphi = 1 = k \tag{346}$$

összefüggést kapjuk. A kavitáció tehát akkor következik be, ha a k kavitációs tényező eléri az *egységet* (a gyakorlatban $k = 0{,}97$-nél már észlelhető).



180. ábra. Nyomásviszonyok a vízsugárszivattyúban a kavitáció határán

Megjegyezzük, hogy a kavitáció a két sugár között indul meg, a fal mentén csak kifejlettebb formájában észlelhető. Roncsolási nyomok ezért kevésbé tapasztalhatók, mint más gépek kavitációja során. A hatásfok azonban leromlik.

106. példa. Számítsuk ki, hogy a 103. és 105. példákban meghatározott méretű sugárszivattyú ∅100 mm-es szívócsonkján milyen h_1 szívómagasság esetén következik be a kavitáció. A telített gőz nyomása: $p_g = 320$ kg/m² ($\tau = 20$ C°-os vízzel). A *174. ábra* jelöléseivel $p_1 = (A + h_1)\gamma$ és $p_2 = (A - h_2)\gamma$, továbbá $h_1 + h_2 = H_1 + H_2 = 29{,}7 + 12 = 41{,}7$ m.

Minthogy $h_1 + h_2 = (p_1 - p_2)/\gamma$,

$$p_1 - p_2 = 41{,}7 \cdot 1000 = 41\,700 \text{ kg/m}^2.$$

A kavitációs feltétel szerint

$$k = 0{,}97 = 0{,}387 \frac{0{,}96}{0{,}93} \sqrt{\frac{p_1 - 320}{p_2 - 320}}.$$

A két egyenletet átrendezve, megkaphatjuk p_2-t. Ehelyett gyorsabb és áttekinthetőbb számítást végezhetünk a (345) összefüggés alapján:

$$p_2 = p_g + \frac{1}{\varphi_2^2} \frac{c_2^2}{2g} \gamma = 320 + \frac{1}{0{,}93^2} 6{,}9 \cdot 1000 = 8300 \text{ kg/m}^2,$$

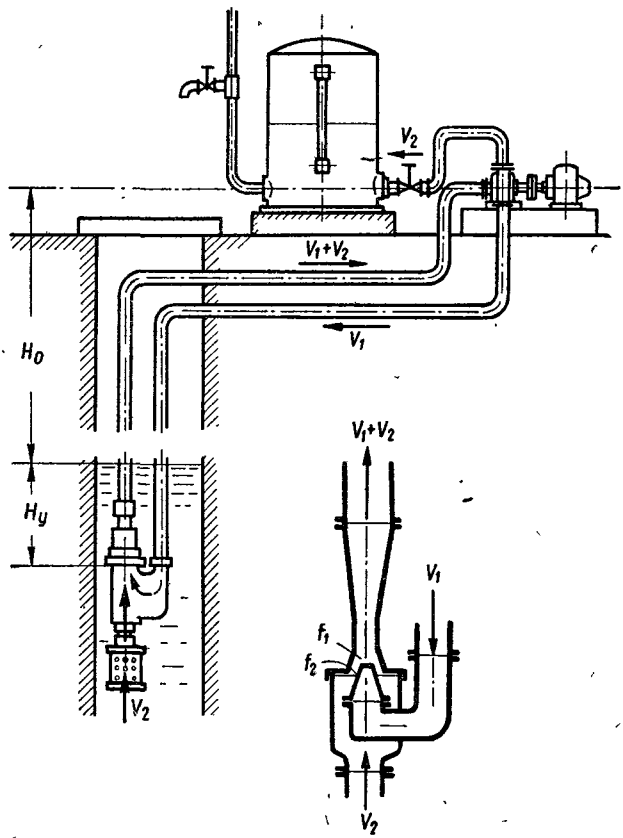
azaz a szívómagasság:

$$h_2 = A - \frac{p_2}{\gamma} =$$
$$= 10 - 8{,}3 = 1{,}7 \text{ m}.$$

A 103., 105. és 106. példa adatai alapján a *180. ábrában* felrajzoltuk a sugárszivattyú nyomásviszonyait is.

A sugárszivattyú hatásfoka az örvényszivattyúhoz hasonlítva rossz. Szerkezete azonban rendkívül egyszerű, **olcsó,** nincs mozgó alkatrésze, tehát rendkívül **üzembiztos.** Alkalmazható mindenütt, ahol aránylag kevés a gép üzemideje, viszont elsőrendű fontosságú az üzem biztonsága (pl. hajó víztelenítése, tűzoltóság), továbbá olyan helyen, ahol a kis helyszükséglet jelent előnyt, így mélykút-szivattyúként, **mélyszívófej** formájában.

Itt utalunk arra, hogy a primer vizet szolgáltató szivattyúhoz többféle megoldás szerint kapcsolódhat a

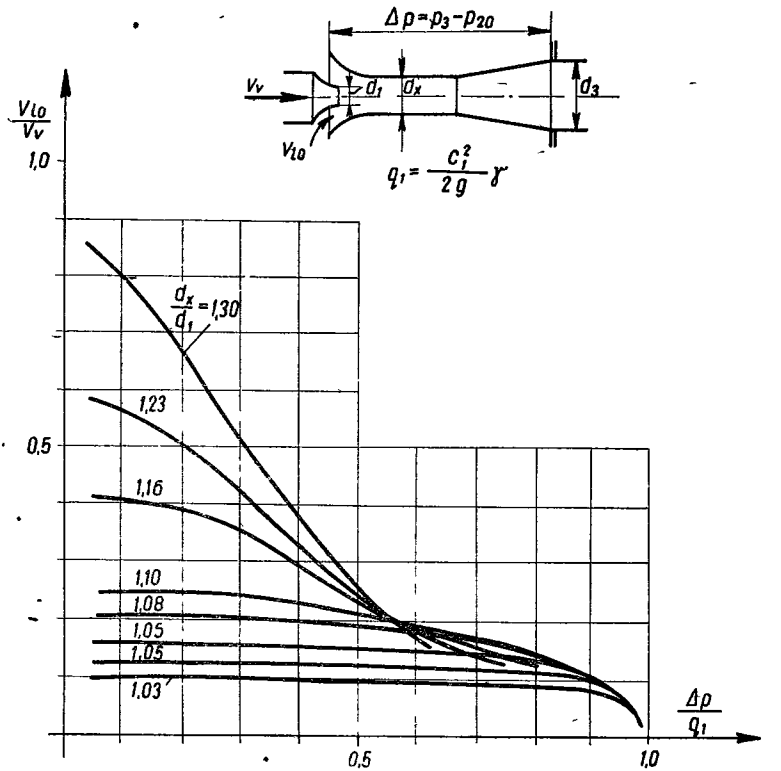


181. ábra. Mélykút-vízsugárszivattyú

sugárszivattyú. A leggazdaságosabb üzemet általában úgy lehet elérni, ha az örvényszivattyú teljes szívóképességét kihasználják, és a mélységkülönbségre méretezik a mélyszívófejet, továbbá, ha a hasznos vízmennyiséget az örvényszivattyú nyomócsonkjáról veszik el (*181. ábra*), [71, 72].

117. A vízsugár-légszivattyú

A vízsugár-légszivattyú csak annyiban tér el a vízsugár-vízszivattyútól, hogy a szekunder (beszívott) közeg levegő vagy gáz. A berendezés hatásfoka — amelyet a (325) összefüggés alapján számíthatunk — általában igen rossz, mert a víz-levegő keverék veszteségei nagyobbak, mint a víz vesztesége. A gyakorlati esetek többségében a levegő nem tekinthető összenyomhatatlannak, mert a



182. ábra. Vízsugár-légszivattyú jelleggörbéi

kompresszióarány nagy. Megjegyezzük, hogy a szivattyú oly nagy szívást tud létrehozni, amely elérheti a primer víz hőfokán telített gőz nyomását.

A vízsugár-légszivattyú elmélete még nem tekinthető minden részletében kiforrottnak, ezért annak ismertetése helyett csak a jelleggörbéket és néhány gyakorlati vonatkozást tárgyalunk.

A vízsugár-légszivattyú nagy szívást tud létrehozni és üzembiztosan tartani, ha megfelelő nyomású víz áll rendelkezésre. Olyan esetekben, ahol valamilyen tér egyszeri légtelenítése, leszívása a feladat (szivornyás Kaplan-turbinák, szivornyák indítása, műszerekbe vízfelszívás stb.), a sugárszivattyú méret megválasztása általában nem kényes kérdés, csak bizonyos szélső határokat, méretarányokat nem szabad túllépni. Ha a berendezéssel folyamatos elszívást kell megvalósítani (pl. gyógyászatban mellkasszívó, gyógyszeriparban légtelenítések, lég-bekeverés megvalósítása), a méretezést igen gondosan kell végezni, sőt célszerű a berendezés mintapéldányán (kismintáján) előzetesen kimérni a jelleggörbéket.

A berendezés kialakításakor az áramlást határoló felületek törésmentességét és minél nagyobb simaságát kell biztosítani.

A berendezés jelleggörbéjét legjobban a sugárcső d_1 és a keverőtér d_x átmérőaránya (d_x/d_1) befolyásolja *(182. ábra)*. Ha az átmérőarányt csökkentjük, azzal a beszívható légmennyiség értékét korlátozhatjuk.

Különleges esetekben, amikor igen nagy mennyiségű levegőt kell bekeverni a folyadékba, és a keveréknek nem kell lényeges ellennyomással szemben áramlania, több párhuzamosan működő sugárra lehet megosztani a folyadékot (tűzoltó habsugárcsövek). Ilyen berendezésekkel a víztérfogat tíz-húszszorosának megfelelő levegőt is egyenletesen kifolyó habbá lehet felkeverni, ha a vízbe igen kis mennyiségű (3—5%) habképző anyagot adagolnak.

118. A vízemelő kos

A hidraulikus kos csak tágabb értelemben sorozható a kétfolyadékos energiaátalakítóknak egyféle folyadékos csoportjába. A primer és szekunder folyadék itt nemcsak egynemű, hanem **ugyanaz** a folyadék ütemesen váltakozva — időbeli eltolódással — veszi át egyszer a primer, majd a szekunder folyadék szerepét.

Meglepően egyszerű szerkezete és rendkívül olcsó üzeme egészen kis vízlépcsők gazdaságos hasznosítására ad lehetőséget, olyankor, amikor a rendelkezésre álló vízáramnak csak egy részét kell nagyobb magasságra átemelni. Háztartások, majorok, kisipari üzemek, fürdők vízszükségletét a vízemelő kos úgyszólván költségmentesen tudja fedezni. A kertgazdaságok öntözővíz-szolgáltatásának kérdése időszerűvé teszi az **öntözőkos** szerkezetének tökéletesítését is. Ez indokolja a vízemelő kos elméletének részletesebb összefoglaló ismertetését.

A vízemelő kos elrendezését a *183. ábra* mutatja. Lényeges része a munkavezeték vagy **lendítőcső** (C), amelynek l hosszúságú és f keresztmetszetű víztöltése ütemesen változó gyorsulással áramlik először egy alsó szintre (H_1 esésű primer folyadék), majd egy magasabb szintre (H_2 szállítómagasságú szekunder folyadék).

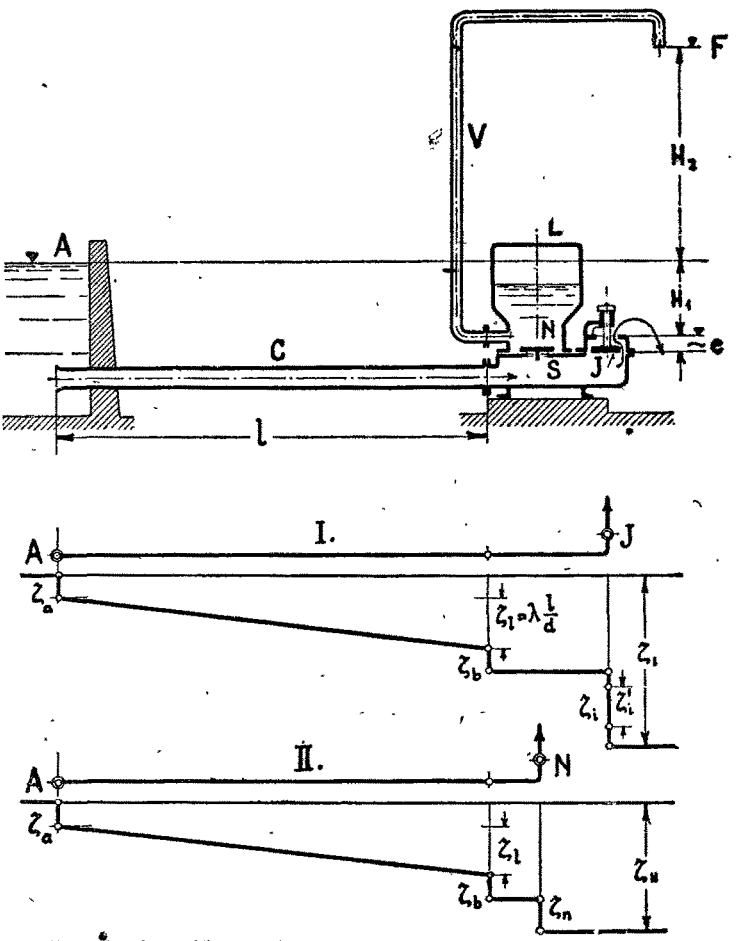
1. Az **indítóütem** tartama alatt az (S) szivattyútérbe nyíló (J) indítószelep nyitva van, a H_1 esésű víz tehát gyorsulva áramlik a gyűjtőmedencéből az alsó szintre. A vízoszlop felgyorsulásának törvenyeit a 80. pontból és a *120. ábrából* már megismertük. A gyorsulás a_0 kezdőértéke a (203) egyenletből, a sebesség c_∞ felső határértéke pedig a (204) egyenletből számítható.

A sebesség időbeli változását jellemző **menetábra** egyenlete:

$$c = c_\infty \operatorname{th} t/Z_1 \qquad \text{(m/mp)}, \qquad \text{(206/k)}$$

ahol a Z_1 időállandó nagyságát (205) az indítócső l hosszúsága és $(1 + \zeta)$ veszteségtényezője szabja meg, amelynek jelentős része (ζ_i) az indítószelep ellenállására vonatkozik.

A vízoszlop indítóütemének T_1 tartalmát az indítószelep záródása szabja meg. Ennek $b_i = (p' - p'')/\gamma$ nagyságú fajlagos (negatív) szelepterhelését úgy kell



183. ábra. A vízemelő kos vázlatos elrendezése és a lendítőcső ellenállása

beállítani, hogy a szelep már a vízoszlop oly $c_x < c_\infty$ határsebességének elérésekor záródjék, amely az (egyenletes) üzemi sebesség nagyságát el nem éri.

Ez a c_x határsebesség a lendítőcső f keresztmetszetére vonatkozik és a *184. ábra* jelöléseivel az indítószeleptestet palástszerűen körüláramló vízáram ζ_i ellenállásának $p' - p''$ nyomásesést eredményező «hasznos» részéből (ζ_i') számítható.

Az indítószelep veszteségtényezője ugyanis két részre bontható ($\zeta_i = \zeta_i' + \zeta_i''$) Ezek közül a szelephez érkező és a szelepet elhagyó vízáram veszteségei (ζ_i'')

a szeleptányért terhelő nyomásesést nem okoznak és csupán az f_i keresztmetszetű gyűrű alakú rés méreteitől és kialakításától függő ζ_i' tényezőjű ellenállás tarthat egyensúlyt a szelepterheléssel.

A szeleptányért c_i sebességgel körüláramló víz a szelepet magával sodorja, mihelyt:

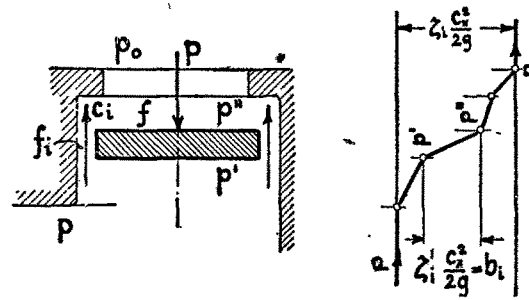
$$b_i = \frac{p' - p''}{\gamma} \cong \zeta_i' \frac{c_i^2}{2g}\,; \text{ ahol: } \alpha_i f_i c_i = f c_x \text{ és } \zeta_i' \cong \left(\frac{f}{\alpha_i f_i}\right)^2 .$$

Ebből a határsebesség:

$$c_x = \sqrt{\frac{2g\,b_i}{\zeta_i'}} .$$

E határsebesség előírásával ($x = t/Z_1$; $y = c/c_\infty$ és $y_x = c_x/c_\infty$ jelöléssel) az indítóütem tartama:

$$T_1 = Z_1 \operatorname{Ar\,th} c_x/c_\infty = \\ = Z_1 \operatorname{Ar\,th} y_x \quad \text{(mp)}. \qquad (206)$$



184. ábra. Az indítószelep ellenállása és terhelése

2. Az **indítószelep záródásának** T_2 időtartama szabja meg a primer vízveszteség nagyságát, mert ezalatt a vízoszlop gyorsulása a szelepellenállások megnövekedése miatt gyakorlatilag megszűnik: a víz tehát hatástalanul folyik el az alsó szintre. *Harza* [25] kísérletei szerint a zárás ideje a szelep minőségétől függően

$$T_2 \cong 0{,}1 \div 0{,}2 \text{ mp-re becsülhető, de lehet ennél rövidebb is.}$$

A víz sebessége ezalatt eleinte kissé c_x fölé emelkedik, majd ismét kisebbedik. Jó közelítéssel felvehető, hogy a sebesség a zárás végén $c_2 \cong c_x$, vagyis ugyanakkora maradt, mint a zárás kezdetén volt.

Itt emelem ki azt is, hogy a vízemelő kos hatásfoka elsősorban az indítószelep **gyors zárását** eredményező szerkezeti kialakítással javítható.

3. **A nyomószelep nyitásához szükséges vízlökéssel** fejeződik be a vízemelő kos második üteme. Az indítószelep záródásának pillanatában keletkező Δp nyomásemelkedés nagyságát a zárt nyomószelepre nehezedő ellennyomás szabja meg. E lökésszerű nyomásemelkedés a 98. pontban levezetett (267) egyenlet szerint a vízoszlop sebességének ugrásszerű Δc kisebbedését eredményezi, azaz:

$$\Delta c = c_2 - c_3 = \frac{g\,\Delta p}{w_0\,\gamma} \qquad \text{(m/mp)}, \qquad (267/\text{k})$$

ahol w_0 az indítócsőben a zárás helyétől **hátrafelé terjedő** nyomáshullám sebessége, amely a kos szokásos kialakítása esetében átlagosan $w_0 \cong 1300$ m/mp értékkel vehető számításba.

A (267/k) egyenlet meghatározza a vízemelő kosban létrehozható vízlökés lehetséges legnagyobb értékét is, amelynél a vízoszlop a sebességét teljesen elveszti ($c_3 = 0$), vagyis a vízszállítás megszűnik.

A nyomószelep nyitásához szükséges $\Delta p = p_3 - p_2$ nyomásemelkedés (vízlökés) nagyságát a szelepre **felülről** nehezedő p_3 nyomás és a szivattyútérben (a szelep alatt) mérhető p_2 nyomás különbsége szabja meg.

A p_2 nyomást a szelepre **alulról** nehezedő ($H_1 + e$) vízoszlopmagasság szabja meg, amelyből a nyomószelep felé irányuló áramlás veszteségmagassága levonásba kerül.

E nyomás kezdőértékét (a nyomószelep nyitásának első pillanatára, $c_3 \cong c_2$ felvétellel) a *183. ábrában* kijelölt II. jelű áramlási iránynyom ($1 + \zeta_{II}$) veszteségtényezőjével kell kiszámítani. Írható:

$$\frac{p_2}{\gamma} = H_1 + e - (1 + \zeta_{II}) \frac{c_2^2}{2g} \qquad \text{(m)}, \tag{347}$$

ahol e a nyomószelep tányérjának szerkezeti magassága és az ($1 + \zeta_{II}$) veszteségtényező az indítószelepen átvezető I. iránynyom ($1 + \zeta_I$) veszteségtényezőjétől főleg abban tér el, hogy itt az indítószelep ζ_i ellenállástényezője helyett a nyomószelep jóval kisebb ζ_n veszteségtényezőjét kell számításba venni.

A szelepre **felülről** nehezedő p_3 nyomást a *183. ábra* szerint a nyomócsőbe zárt vízoszlop ($H_1 + e + H_2$) magassága határozza meg. Ehhez a nyomószelep b_n fajlagos terhelését és a nyomócső h'_n veszteségmagasságát is hozzá kell számítani. Írható tehát:

$$\frac{p_3}{\gamma} = H_1 + e + H_2 + b_n + h'_n \qquad \text{(m)}, \tag{348}$$

és

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_3 - p_2}{\gamma} = h_2 + (1 + \zeta_{II}) \frac{c_2^2}{2g}; \quad \text{ahol:} \quad h_2 = H_2 + b_n + h'_n. \tag{349}$$

A Δp nyomásemelkedés ismeretével a vízlökés létrehozásához szükséges Δc sebesség-ugrás is kiszámítható.

Megjegyezzük, hogy a valóságban a vízoszlop lassulása, a nyomásugrás már az indítószelep záródása közben bekövetkezik, és így a lassítóütem már a szelepzáródási ütem alatt megkezdődik.

4. A **lassítóütem** a nyomószelep nyitásával kezdődik. Ekkor indul meg a (szekunder) vízszolgáltatás. Ez mindaddig tart, amíg a vízoszlop sebessége $c_3 = c_2 - \Delta c$ kezdőértékről $c_3 = 0$ sebességig le nem lassult, vagyis amíg lendületét el nem vesztette.

A T_3 tartamú lassítóütem mértékadó három üzemi jellemzőjét a 81. pont szerint számítjuk.

A mértékadó lassítás a vízoszlop megállásának pillanatában (amikor $c = 0$):

$$a_{lo} = \frac{g\, h_2}{l} \qquad \text{(m/mp}^2\text{)}. \tag{210/k}$$

A mértékadó üzemi sebesség, amelynél az áramlási veszteség éppen ugyanakkora, mint a h_2 terhelőmagasság:

$$c_{lo} = \sqrt{\frac{2g\,h_2}{1+\zeta_{II}}} \qquad \text{(m/mp)}, \qquad (209/k)$$

a lassítás időállandója pedig, (211) szerint:

$$Z_l = \frac{c_{lo}}{a_{lo}} = \frac{l\,c_{lo}}{g\,h_2} = \frac{2\,l}{(1+\zeta_{II})\,c_{lo}} \qquad \text{(mp)}. \qquad (211/k)$$

A lassítóütem tartama, (213) szerint:

$$T_3 = Z_l \operatorname{arc\ tg}\, c_3/c_{lo} \qquad \text{(mp)}. \qquad (213/k)$$

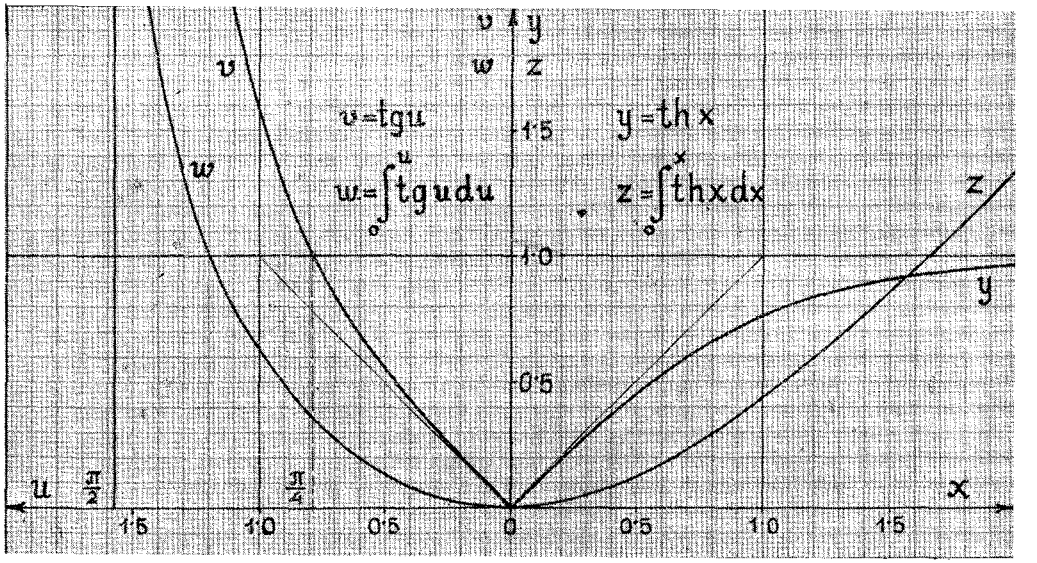
A lassuló vízoszlop mozgástörvényét a (214) egyenlet fejezi ki. Eszerint:

$$c = c_{lo} \operatorname{tg}\ (T_3 - t)/Z_l \qquad \text{(m/mp)}, \qquad (214/k)$$

vagy $u = (T_3 - t)/Z_l$ és $v = c/c_{lo}$ méretnélküli változókkal:

$$u = \operatorname{arc\ tg}\, v; \qquad \text{azaz:} \qquad v = \operatorname{tg} u. \qquad (215/k)$$

A számítást megkönnyíti a *185. ábra* görbéjének használata, amelyből a méretnélküli eredmények közvetlenül leolvashatók. (Megjegyzendő, hogy az ábra jobb oldali része a T_1 tartamú indítóütemre, bal oldali része a T_3 tartamú lassítóütemre vonatkozik.)



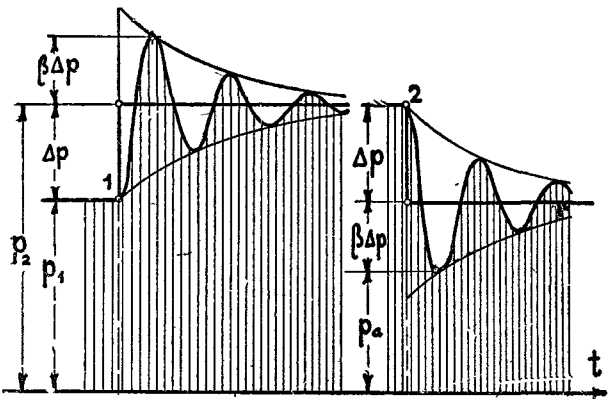
185. ábra. A gyorsuló és lassuló vízoszlop mozgástörvényei

A lassítóütem tartama alatt a «szekunder» vízáram kisebbedő sebességgel jut a nyomótérbe. A vízszállítás egyenletességét a nyomószelep fölött elhelyezett (L) **légüst** biztosítja.

Megjegyezzük, hogy a lendítőcsövet úgy kell méretezni, hogy a vízszolgáltatás megkezdésével a csövön w_0 sebességgel indult p nyomáshullámoknak a csővégről visszaverődő negatív értéke csak a lassítóütem végén érkezzék vissza, és így lényeges hatásfok-romlást ne okozzon a vízszállítás apasztásával. Ez a visszaverődő hullám oka lehet az indítószelep rendellenes kinyitásának.

5. **A nyomószelep záródása és az indítószelepet nyitó nyomáshullám.**

A vízemelő kos **harmadik** üteme: a **szállítóütem** a vízoszlop megállásának pillanatában véget ér. Ezt követően azonban a nyomószelep zárásához és az indítószelep nyitásához véges T_4 időtartamra van szükség.



186. ábra. Nyomáshullámok a vízemelő kos rugalmas vízoszlopában

A nyomószelep záródásával a szivattyútér kapcsolata a légüst nyomóterével hirtelen megszakad, és ennek következtében a nyomás a nyomószelep alatt a (348) egyenlettel kifejezett $p_4 = p_3$ értékről hirtelen lecsökken a $(H_1 + e)$ esésből származó $p_5 = \gamma (H_1 + e)$ sztatikai nyomásra.

Meg kell jegyezni, hogy még ez a lecsökkent p_5 nyomás is **zárva tartja az indítószelepet,** mert annak (negatív) fajlagos terhelése mindenesetre kisebb az esésnél, azaz: $b_i < H_1 + e$. Az indítószelep nyitásához tehát a szivattyútérben pillanatnyi **depresszionak** kell létrejönnie, mert enélkül azt minden lassítóütem végén kézierővel kellene kinyitni, üzeme tehát nem volna önműködő.

A rugalmas vízoszlop tömege azonban a megfeszített rúgóként viselkedő csőfallal együtt **lengőrendszert** alkot, amely a Δp hirtelen nyomáseséssel megszabott új egyensúlyhelyzetét csak rendkívül szapora, gyorsan csillapodó lengőmozgással tudja felvenni. (Vö. a 100. ponttal és a *144. ábrával.*)

Csillapítás nélkül a nyomáshullám első (negatív) kilengése a Δp nyomáseséssel azonos nagyságú depressziót adna az új nyugalmi szint alatt. A csillapítás mértékétől függően ez a depresszió $\beta\, \Delta p$ értékre apad, ahol $\beta < 1$.

A nyomáshullámok időbeli lefolyását (erősen torzított időléptékben) a *186. ábra* szemlélteti. A nyomáshullámok vízlökésből keletkeznek. A csőfal szilárdsági ellenőrzéséhez a gyakorlatban a nyomásemelkedés kétszeresét kell számításba venni.

Az indítószelepet zárva tartó nyomás sztatikai értékét — mint láttuk — a H_1 esés szabja meg. Ez mindenesetre jóval nagyobb a b_i (negatív) szelepterhelésnél, tehát a nyomószelep zárásakor legalább akkora depressziónak kell gerjednie,

mint amekkora az indítószelep biztos nyitásához szükséges. A biztos nyitás feltétele az ábra jelöléseivel így írható:

$$\beta \frac{\Delta p}{\gamma} > H_1 - b_i, \tag{350}$$

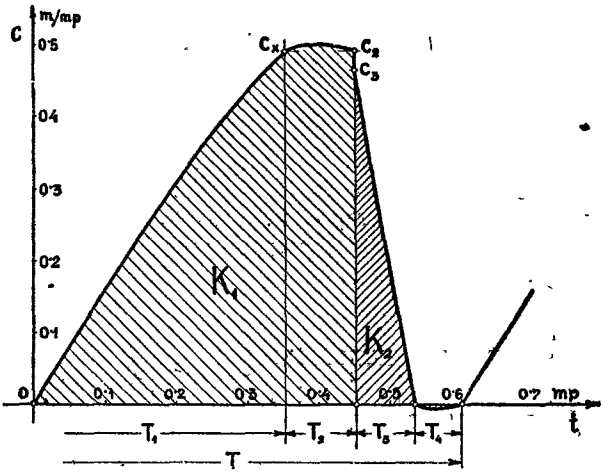
ahol:

$$\Delta p = p_3 - p_2 \qquad (\mathrm{kg/m^2}).$$

Az indítószelep gyors nyitásához a fenti egyenlőtlenséget úgy kell kielégíteni, hogy a szeleptest gyorsításához kellő nagyságú erőfölösleg álljon rendelkezésre. Ez a követelmény annál könnyebben teljesíthető, mennél nagyobb a H_1 eséshez viszonyított szállítómagasság.

Itt emelem ki a vízemelő kos ama figyelemreméltó sajátosságát, hogy az indítószelep önműködő nyitásának szükségszerű feltétele: a H_1 esésnél **nagyobb** H_2 szállítómagasság. Ellenkező esetben ugyanis a nyomószelep záródása nem gerjeszthet akkora depresszióhullámot, amely az indítószelepet tehermentesíteni tudná.

Az indítószelep terhelésének változtatásával a kos percenkinti löketszáma tág határok között változtatható.



187. ábra. A vízemelő kos vízoszlopának „menetábrája"

A *Garvens*-művek gyártmányai $n = 80 \div 100$/perc löketszámmal dolgoznak a leggazdaságosabban.

6. **Vízemelő kos szállítóteljesítménye és hatásfoka.** Egy teljes üzemszakasz tartama, a kettős szelepjáték figyelembevételével:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (\mathrm{mp}),$$

amelyből a percenkinti löketszám:

$$n = \frac{60}{T} \qquad (\mathrm{perc^{-1}}). \tag{351}$$

Az üzemszakasz négy ütemének időbeli lefolyását a *187. ábra* szemlélteti. A sebességi ábra f-szeres méretarányban a szolgáltatott és fogyasztott vízáramot is megadja.

Egy teljes üzemszakasz $T_1 + T_2$ tartama alatt **fogyasztott** víztérfogat:

$$K_1 = \int_{T_1+T_2} \int c \, dt \qquad (\mathrm{m^3}). \tag{352}$$

Az üzemszakasz $T_3 + T_4$ tartama alatt **szállított** víztérfogat pedig:

$$K_2 = f \int_{T_3+T_4} c \, dt \quad (m^3). \tag{353}$$

A löketszám figyelembevételével a percenkint fogyasztott és szállított vízáram is kiszámítható ($V_1 = n K_1$ és $V_2 = n K_2$).

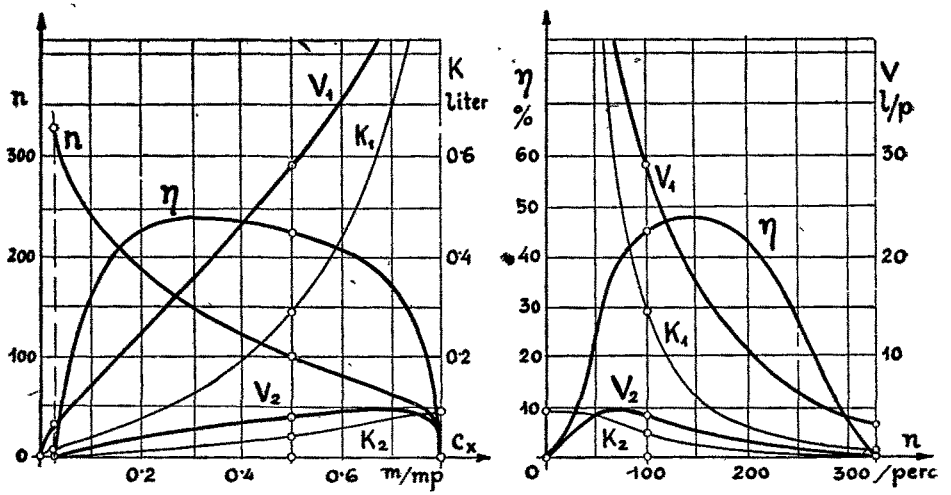
A K_1 és K_2 víztérfogatot a kos menetábrájában a vonalkázott területek szemléltetik.

Területmérés helyett a *185. ábra* integrálgörbéi is felhasználhatók a K_1 és K_2 víztérfogat meghatározásához (l. a 107. példát).

A vízemelő kos *hatásfoka* a V_1 és V_2 vízáram helyett az egy üzemszakaszra eső K_1 és K_2 víztérfogatból is számítható. Írható:

$$\eta = \frac{K_2 H_2}{K_1 H_1}. \tag{354}$$

Befejezésül a *188. ábrában* a vízemelő kos jelleggörbéit is bemutatom. Az ábra egy $H_1 = 1$ m esésre és $H_2 = 3{,}2$ m szállítómagasságra szerkesztett kos üzemi jellemzőit a c_x sebesség és az n löketszám függvényében szemlélteti. A kos hatásfokgörbéje «laposhátú», vagyis tág határok között változtatott löketszámnál csak kis ingadozást mutat.



188. ábra. A vízemelő kos jelleggörbéi

Meg kell jegyezni, hogy az indítószelep tömegeinek kisebbítésével és a szelepterhelés változtatásával sikerült ugyanennek a vízemelő kosnak vízszolgáltatását $V_2 = 6$ l/perc értékre, hatásfokát pedig $\eta \cong 60\%$-ra emelni.

107. példa. A vízgép-laboratóriumban felszerelt vízemelő kos *(183. ábra)* munkavezetékének hossza: $l = 6$ m, átmérője: $d = 50$ mm. ($f = 19{,}6$ cm²).
A hasznos esés: $H_1 = 1$ m.

A csővezeték **veszteségtényezői** $\lambda = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}5$ és $f/f_i = 2$ értékkel:

$$\begin{aligned} 1 + \zeta_a &= 2 \\ \zeta_l = \lambda\, l/d = 0{,}05 \cdot 6 : 0{,}05 &= 6 \\ \zeta_b &= 3 \\ \zeta_i' = (f/f_i : \alpha)^2 = (2 : 0{,}5)^2 &= 16 \\ \zeta_i'' &= 5 \\ \hline 1 + \zeta_I &= 32 \end{aligned}$$

Ezzel a végsebesség:

$$c_\infty = \sqrt{\frac{2gH_1}{1+\zeta_I}} = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 1}{32}} = 0{,}784 \text{ m/mp.}$$

A kezdőgyorsulás:

$$a_0 = \frac{gH_1}{l} = \frac{9{,}81 \cdot 1}{6} = 1{,}64 \text{ m/mp}^2,$$

az indítóütem időállandója tehát: $\mathbf{Z_1 = c_\infty/a_0 = 0{,}784 : 1{,}64 = 0{,}48}$ **mp.**

Az indítószelep fajlagos terhelése: $b_i = 0{,}2$. A szelep záródásához szükséges határsebesség tehát:

$$\mathbf{c_x = \sqrt{\frac{2g\,b_i}{\zeta_i'}} = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 0{,}2}{16}} = 0{,}495 \text{ m/mp.}}$$

Ezzel:

$$y_x = c_x/c_\infty = 0{,}495 : 0{,}784 = 0{,}63 \text{ és } x_x = \text{Arth } 0{,}63 = 0{,}742.$$

Az **indítás ideje** tehát: $\mathbf{T_1 = x_x Z_1 = 0{,}742 \cdot 0{,}48 = 0{,}356}$ **mp.**

Az indítószelep zárási ideje: $T_2 = 0{,}1$ mp-re becsülhető.

Primer vízfogyasztás az I. és II. ütem alatt, a *185. ábrában* a $z = z\,(x)$ integrálgörbéből lemért: $z_x = 0{,}248$ és $y_2 = y_x$, továbbá $x_2 = T_2/Z_1 = 0{,}208$ értékkel:

$$\mathbf{K_1} = f\, c_\infty Z_1 (z_x + x_2 y_x) =$$

$$= 0{,}00196 \cdot 0{,}784 \cdot 0{,}48 \cdot (0{,}248 + 0{,}208 \cdot 0{,}63) = 0{,}28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = \mathbf{0{,}28\ l.}$$

A kos szállítómagassága: $H_2 = 3{,}1$ m
A nyomószelep fajlagos terhelése: $b_n = 0{,}2$ m
A nyomócső veszteségmagassága: $h'_n = 0{,}1$ m
A teljes **szállítómagasság** tehát: $\mathbf{h_2 = 3{,}4}$ **m.**

A nyomószelep felé vezető vízáram veszteségtényezője, $\zeta_n = 3$ értékkel számítva:

$$1 + \zeta_{II} = 1 + \zeta_a + \zeta_l + \zeta_b + \zeta_n = 2 + 6 + 3 + 3 = 14.$$

Ezzel:

$$(1 + \zeta_{II})\frac{c_2^2}{2g} = 14 \cdot \frac{0{,}495^2}{19{,}62} = 0{,}175 \text{ m,}$$

és a vízlökés nyomásmagassága (349) szerint:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = 3{,}4 + 0{,}175 = 3{,}575 \text{ m.}$$

A vízlökést adó sebesség apadása (267/*k*) szerint, $w_0 = 1300$ m/mp hullámsebességgel:

$$\Delta c = \frac{9{,}81}{1300} \cdot 3{,}575 = 0{,}027 \text{ m/mp.}$$

a szállítóütem kezdősebessége tehát:

$$\mathbf{c_3 = c_2 - \Delta c = 0{,}495 - 0{,}027 = 0{,}468 \text{ m/mp.}}$$

A lassítóütem üzemi jellemzői, $1 + \zeta_{II} = 14$; $h_2 = 3{,}4$ m és $l = 6$ m helyettesítéssel, (209/k), (210/k) és (211/k) szerint:

$$c_{lo} = \sqrt{\frac{2gh_2}{1+\zeta_{II}}} = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 3{,}4}{14}} = \mathbf{2{,}19\ m/mp},$$

$$a_{lo} = \frac{gh_2}{l} = \frac{9{,}81 \cdot 3{,}4}{6} = \mathbf{5{,}56\ m/mp},$$

és

$$Z_l = \frac{c_{lo}}{a_{lo}} = \frac{2{,}19}{5{,}56} = \mathbf{0{,}393\ mp}.$$

A lassítóütem tartama (213/k) szerint, $v_3 = c_3/c_{lo} = 0{,}468 : 2{,}19 = 0{,}213$ és $u_3 = \text{arc tg}\ v_3 = \text{arc tg}\ 0{,}213 = 0{,}21$ értékkel:

$$T_3 = u_3 Z_l = 0{,}21 \cdot 0{,}393 = \mathbf{0{,}0825\ mp}.$$

A Δp nyomáshullám a csövön

$$t = \frac{2l}{w_0} = \frac{2 \cdot 6}{1300} \cong 0{,}0092 \text{ mp alatt ér vissza.}$$

A lendítőcső hosszabbítása tehát még hatásfokjavulást eredményezhet!

A **szállított víztérfogat** (353) szerint a *185. ábrában* felrajzolt $w = w\,(u)$ integrálgörbe $u_3 = 0{,}21$ abszcisszájához tartozó $w_3 = 0{,}0226$ ordinátahosszúsággal:

$$K_2 = f c_{lo} Z_l w_3 = 0{,}00196 \cdot 2{,}19 \cdot 0{,}393 \cdot 0{,}0226 = 0{,}0382 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = \mathbf{0{,}0382\ l}.$$

A vízemelő sztatikai hatásfoka:

$$\eta = \frac{K_2 H_2}{K_1 H_1} = \frac{0{,}0382 \cdot 3{,}1}{0{,}28 \cdot 1} \cong 0{,}423;\ \text{azaz:}\ \mathbf{42{,}3\%}.$$

Egy teljes üzemszakasz tartama, a nyomószelep zárási idejének becslésével:

$T_1 = 0{,}3560$ mp $T_2 = 0{,}1000$ mp $T_3 = 0{,}0825$ mp $T_4 = 0{,}0615$ mp $\mathbf{T = 0{,}600\ mp.}$	a löketszám tehát: $\mathbf{n = \frac{60}{0{,}6} = 100/perc.}$

A vízszállítás tehát: $\mathbf{V_2 = nK_2 = 100 \cdot 0{,}0382 = 3{,}82\ l/perc}$,
a vízfogyasztás pedig: $\mathbf{V_1 = nK_1 = 100 \cdot 0{,}28 = 28\ l/perc}$.

A fenti számítás a valóságosnál kedvezőtlenebb eredményeket szolgáltat, mert a laboratóriumi mérésekkel kb. 50%-os hatásfok volt kimutatható. Az indítószelep zárási ideje ugyanis a valóságban kisebb volt a becsléssel felvett $T_2 = 0{,}1$ mp-nél. Erre mutat az üzemi vizsgálat ama eredménye is, amely szerint a percenkinti löketszám is mintegy 10%-kal nagyobb volt a számított értéknél.

B) SZEMCSÉS ANYAG SZÁLLÍTÁSA FOLYADÉKÁRAMBAN

Az igen szétágazó tárgykörnek néhány különleges ágával foglalkozik ez a fejezet. A szemcsés anyagok folyadékáramban való szállításának határesetenként fogható fel a nyugvó anyagoszlop szemcséi között áthajtott gázáram, illetőleg az így kialakuló folyékony keverék tulajdonságainak vizsgálata. A vízszintes és függőleges gázáramban való szállítás és a szállított anyag leválasztása a következő pontok tárgya. S végül ugyancsak ide tartozó feladat a természetes folyóvizek hordalékmozgásának a tanulmányozása.

119. Nyugvó szemes anyag folyadékáramban. A fluidizáció

Itt főként két kérdéssel foglalkozunk: a csövet teljesen megtöltő szemes anyag hézagain átnyomott gázáram *ellenállásának* vizsgálatával, továbbá azzal a jelenséggel, amikor a szemcsés anyag igen sűrű rácselrendezésben lebegve helyezkedik el a folyadékáramban, és a keverék számos — folyadékra jellemző — tulajdonsággal rendelkezik *(fluidizáció)*.

A kérdés gyakorlati jelentőségét növelik a **gabonafélék szellőzésével, a talajbeli vízszivárgással, vegyipari műveletek** végrehajtásával (pl. vízlágyítás, gázabszorpció stb.) kapcsolatos feladatok. Ezekre való tekintettel tárgyaljuk a kérdéscsoportot, részben a vízgéplaboratóriumban végzett mérések, részben irodalmi adatok alapján.

Mindaddig, míg a folyadékáram a szemcséket helyzetükből nem mozdítja ki, a csővezetékekben való áramlás analógiájára a szemek közötti **hézagok hidraulikai sugarának** meghatározására irányul a kutatás. A következőkben feltételezzük, hogy a vizsgált szemcsés anyag meglehetősen homogén, szemcseméret-ingadozása $\pm 20\%$-on alul marad.

Egy L hosszúságú csatorna hidraulikai sugarát — a csatornakeresztmetszet és a nedvesített kerület viszonya helyett — az L hosszúságra vonatkoztatott csatornatérfogat és a „nedvesített" felület hányadosával is kifejezhetjük.

Az F keresztmetszetű és L hosszúságú csőbe zárt szemcsék **hézagai** változó keresztmetszetű, tekervényes és egymásba fonódó csatornanyalábot alkotnak, amelynek **együttes** K_g hézagtérfogata a szemek γ_a fajsúlyának és γ térfogatsúlyának viszonyából számítható. (A hézagokat kitöltő levegő súlya itt figyelmen kívül hagyható.)

A teljes térfogat: $K = F\,L$, a szemcsék együttes tömör térfogata: $K_1 = G_a/\gamma_a$, ahol az együttes anyagsúly:

$$G_a = K\,\gamma = K_a\,\gamma_a.$$

A hézagtérfogat tehát:

$$K_g = K - K_a = G_a\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_a}\right) = \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a\,\gamma}\,G_a.$$

A csatornanyalábok együttes „nedvesített" felülete a szemcsék méreteiből számítható. Írható: $F_g = z\,d\,l\,\pi$; ahol: z a $K = F\,L$ (teljes) térfogatban foglalt szemek száma, a, b és l pedig az ellipszoid alakú szem három főmérete és $d = \sqrt[3]{a\,b}$ a magátmérő.

A hidraulikai sugár kiszámításához az együttes anyagsúly egy-egy anyagszem súlyából is kifejezhető:

$$G_a = z\,\frac{\pi}{6}\,d^2\,l\,\gamma_a.$$

A **hidraulikai sugár** helyettesítés és rendezés után így írható:

$$r'' = \beta\,\frac{K_g}{F_g} = \frac{\beta}{6}\,\frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma}\,d \qquad \text{(m)}, \qquad (355)$$

ahol a $\beta < 1$ tényezőnek bevezetésére azért van szükség, mert a tekervényes hézagcsatornák hossza nagyobb az oszlop L hosszúságánál ($L_g > L$) és azok keresztmetszete, is változó. Gabona esetére: $\beta \cong 0{,}5$ érték helyettesíthető.

108. példa. A búzaszem méretei: $a = 2{,}5$ mm, $b = 3{,}0$ mm, $l = 6{,}5$ mm; fajsúlya: $\gamma_a = 1300$ kg/m³, térfogatsúlya: $\gamma = 820$ kg/m³.

A magátmérő: $d = \sqrt[3]{2{,}5 \cdot 3} = 2{,}74$ mm.

$\beta = 0{,}5$ tényezővel a hidraulikai sugár (355) szerint:

$$r' = \frac{\beta}{6}\frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma} d = \frac{0{,}5}{6} \cdot \frac{1300 - 820}{820} \cdot 2{,}74 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 0{,}133 \cdot 10^{-3}\,\text{m}; \text{azaz: } \mathbf{0{,}133\ mm.}$$

A hidraulikus sugárral kifejezett Reynolds-számból (Re') számítható a *határsebesség*:

$$(c_g) = \frac{\nu \cdot (Re')}{r'},$$

ami azt jelenti, hogy a hézagokon átfújt levegő áramlása mindaddig lamináris marad, amíg a sebesség e határértékét el nem éri. A határsebességet jellemző Reynold-szám $(Re') = 0{,}5$. Ha Re' 0,5 és 1,3 közé esik, átmeneti, 1,3 felett pedig turbulens áramlás alakul ki.

Lamináris (réteges) áramlásra a csősúrlódás tényezője: $\lambda = 64/Re$, ahol: $\lambda = 4\lambda'$ és $Re = 4\,Re'$ a csőátmérőre vonatkoztatott érték. Az L hosszúságú anyagoszlop veszteségmagassága tehát, $Re' = c_g\, r'/\nu < (Re')$ esetben:

$$h' = \lambda' \frac{L}{r'} \frac{c_g^2}{2g} = \frac{64 \cdot L\, c_g^2}{16\, Re'\, r'\, 2g} = \frac{2\nu L\, c_g}{(r')^2\, g} \qquad \text{(m)},$$

a *nyomásesés* pedig $a\ \mu = \nu\, \gamma_g/g$ dinamikai viszkozitás bevezetésével:

$$\Delta p = \gamma h' = \frac{2\mu}{(r'^2)} L\, c_g \qquad (\text{kg/m}^2). \tag{356}$$

A nyomásesés tehát a c_g sebességgel arányos. A c_g sebesség az oszlopon átfújt V_g gázárammal is kifejezhető, azaz: $V_g = f_g\, c_g$, ahol: f_g a hézagcsatornák együttes keresztmetszete.

Egyenletes szemeloszlás esetén a hézagkeresztmetszet viszonylagos értékét a viszonylagos hézagtérfogat köbgyökének a négyzete adja, azaz:

$$\varphi = \frac{f_g}{F} = \left(\frac{K_g}{K}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a}\right)^{\frac{2}{3}} = \varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

Ezzel:

$$c_g = \frac{V_g}{f_g} = \frac{V_g}{F\,[(\gamma_a - \gamma)/\gamma_a]^{\frac{2}{3}}} \qquad (\text{m/mp}).$$

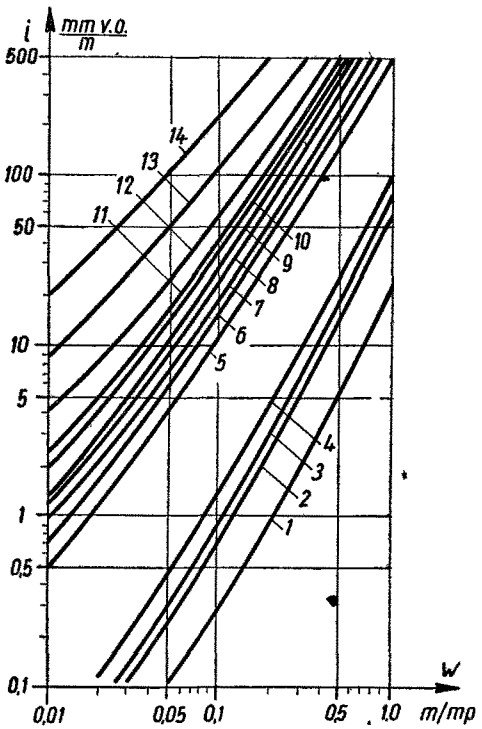
és a nyomásesés:

$$\Delta p = k \frac{L}{F} V_g \qquad (\text{kg/m}^2), \tag{357}$$

ahol:

$$k = \frac{2\mu}{(r')^2\,[(\gamma_a - \gamma)/\gamma_a]^{\frac{2}{3}}} \qquad (\text{kg mp/m}^4). \tag{358}$$

A k tényező nagysága a gabona minőségétől is függ. *Matthies* [70] vizsgálatai alapján a *189. ábrán* felrajzoltuk az $i = \Delta p/L$ nyomásesésértékeket a $w = V_g/F$ függvényében különféle mezőgazdasági anyagokra (lásd a táblázatot).



189. ábra. Mezőgazdasági termények szellőzési ellenállás-görbéi. (*Matthies* mérései)

Anyag	Egyenértékű szematmérő d_0 mm	Tiszta anyag fajsúlya γ_a kg/m³	Térfogatsúly γ kg/m³	A gorbe jele
Árpa	3,9—4,1	1200	700	11
Bab	8,7	1280	860	6
Borsó	6,7	1370	860	5
Burgonya	48,0	1110	660	3
Búza	3,9—4,1	1300	780	9
Bükköny	4,5	1360	880	7
Cukorrépa	105,0	1030	620	2
Kukorica	8,0	1240	740	8
Lóheremag	1,2	1300	780	14
Repce	2,0	1086	720	13
Rozs	4,2	1200	735	10
Sárgarépa	40,0	1110	605	4
Takarmányrépa	126,0	1020	560	1
Zab	3,2	1120	625	12

109. példa. A 108. példa adataival a hézagtérfogat viszonylagos értéke:

$$\varepsilon = \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a} = \frac{1300 - 820}{1300} = 0{,}37; \text{ azaz}$$

$$\varphi = \varepsilon^{\frac{2}{3}} = 0{,}37^{\frac{2}{3}} = 0{,}516.$$

A gabonarétegen áthajtott $t = 20$ C°-ú levegő dinamikai viszkozitása:

$$\mu = 1{,}845 \cdot 10^{-6} \text{ kgmp/m}^2.$$

Ezzel (358)-ból a k együttható, $(r')^2 = 0{,}133^2 \cdot 10^{-6}$ m^2 értékkel:

$$k = \frac{2\mu}{\varphi (r')^2} = \frac{2 \cdot 1{,}845 \cdot 10^{-6}}{0{,}516 \cdot 0{,}0177 \cdot 10^{-6}} = 404.$$

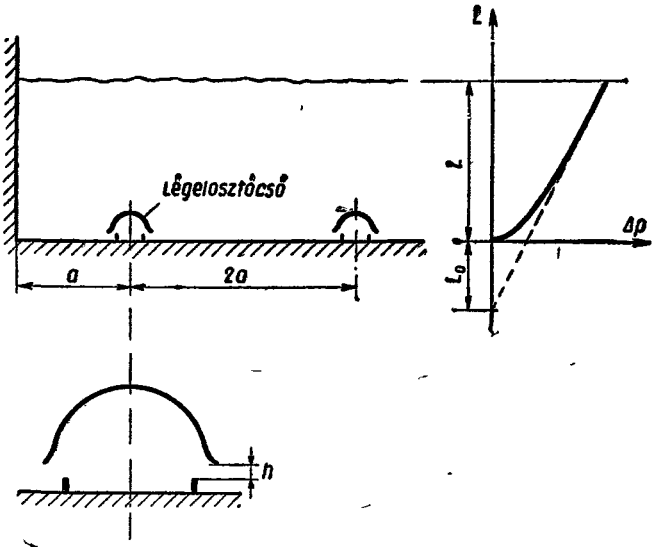
Egy $F = 4$ m^2 alapterületű silóba töltött $L = 10$ m magas gabonaoszlopon átvezetetett $V_g = 0{,}2$ m^3/mp mennyiségű légáram nyomásesése (357) szerint:

$$\Delta p = k \frac{L}{F} V_g = 404 \cdot \frac{10}{4} \cdot 0{,}2 = 202 \text{ kg/m}^2.$$

Ömlesztve tárolt *szemcsés anyag szellőzése* légelosztó rendszerek segélyével oldható meg. A légelosztó cső környezetében mindaddig, míg a teljes keresztmetszetben egyenletes nem lesz a sebességeloszlás, nagyobb a légsebesség és ez ellenállás-többletet okoz. Ez a **járulékos veszteség** egy L_0 egyenértékű oszlophosszal vehető számításba, amelyet az L oszlopmagassághoz hozzá lehet adni. Ennek figyelembevételével a nyomásesés az L magasságú oszlopban:

$$\Delta p = k \frac{L_0 + L}{F} V_g \qquad (\text{kg/m}^2). \tag{359}$$

Az L_0 oszlophosszúság egyszerűbb esetekben (például négyszög alapterületű padozaton $2a$ távolságban elhelyezett párhuzamos légelosztócsövek) síkáramlás-



190. ábra. Légelosztó rendszer egyenértékű oszlopmagassága (L_0) és egyenértékű résmagassága (h)

ként a komplex számsíkon elméleti úton jól számítható, és *Fáy Csaba* [64] meggondolásai szerint az alábbi összefüggéssel határozható meg:

$$L_0 = a \cdot 1{,}468 \cdot \lg\left(\frac{a}{2h} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{(m)}, \tag{360}$$

ahol h a légelosztócső 1 méteres szakaszának egyik oldalán levő nyílások keresztmetszetéből számított egyenértékű résmagasság ($h = f_{sz}/l$ méter, ahol l a légelosztócső hossza).

Matematikai úton nem követhető esetben L_0 értéke kismintaméréssel *potenciálkádban* igen egyszerűen és gyorsan határozható meg.

110. példa. Egy szellőzőpadozaton a szellőzőcsövek egymástól $2a = 1{,}60$ méter távolságban helyezkednek el. A légelosztócső két oldalán nyílásokat képeztek ki. Az egyik oldal egy méterére eső keresztmetszet $f_{sz} = 0{,}01$ m²/m, azaz $h = 0{,}01$ m a résmagasság. A felhalmozott gabona oszlopmagassága $L = 3{,}0$ méter. Az egyenértékű oszlopmagasság $a/2h = 0{,}8/0{,}02 = 40$; $a/(2h) + 1/2 + 40{,}5$ értékkel:

$$\mathbf{L_0 = 0{,}8 \cdot 1{,}468 \cdot \lg 40{,}5 = 0{,}8 \cdot 1{,}468 \cdot 1{,}608 = 1{,}88\ m.}$$

A légellenállás tehát a légbevezetés miatt a 3 méteres oszlophoz képest 63%-kal növekedett meg.

A szemcsés anyagon átáramló folyadék (gáz) mennyiségét növelve, elérünk egy **határesetet**, amikor az oszlop két vége közti nyomásesésből számított emelőerő egyenlő az anyagoszlop γ_f fajsúlyú folyadékban mért súlyával, azaz

$$G_v = \frac{\gamma_a - \gamma_f}{\gamma_a} K\gamma = \frac{\gamma_a - \gamma_f}{\gamma_a} F L\gamma = \Delta p\, F = k\, L\, V_g \quad \text{(kg)}, \tag{361}$$

illetve átrendezve

$$V_g = \frac{\gamma_a - \gamma_f}{\gamma_a} \frac{F\gamma}{k} \quad \text{(m³/mp)},$$

vagy gáz esetében ($\gamma_f \ll \gamma_a$)

$$V_g = \frac{F\gamma}{k} \quad \text{(m³/mp)}.$$

111. példa. Számítsuk ki a 109. példa adataival a kritikus sebességet adó V_g értékét.

$$V_g = \frac{4 \cdot 820}{404} = 8{,}1 \text{ m³/mp},$$

a szabad keresztmetszetben a sebesség:

$$c = V_g/F = 8{,}1/4{,}0 = 2{,}0 \text{ m/mp},$$

a szemcsék közti sebesség pedig $c_g = c/\varphi = 2{,}0/0{,}516 = 3{,}88$ m/mp, tehát jóval kisebb, mint a teherbíró légáram sebessége (lásd a 124. pontot).

A 111. példa eredményeiből is látható, hogy a légáram a *sűrű rácsban* elhelyezkedő szemcséket képes felemelni, holott sebessége még jóval a teherbíró légáramé

alatt marad. Ilyenkor az egész anyagoszlop *fellazul*, a szemcsék kissé eltávolodnak egymástól, az állandó keresztmetszetű csőbe zárt anyag felszíne 10—20 százalékkal felemelkedik, és minden szemcse örvénylő, táncoló mozgásba kezd. A jelenség a *Brown*-féle mozgásra emlékeztet; ez a *fluidizáció*.

Megjegyezzük, hogy mivel a példabeli sebességnél az áramlás a szemcsék között már turbulens, a k tényező értéke is megnövekedett, ezért a valóságban már kisebb sebességnél ($c = 0{,}75$ m/mp) bekövetkezik a szemcsék lebegése (fluidizáció).

A nyugvó szemcsés anyaghoz képest itt már ténylegesen belekeveredett a folyadékba a szemcsés anyag: rézsüszöge 0 fok, egészen kis szemcséjű anyagok *önthetők*, igen kis hajlásszögű (1—2°-os) lejtőn jól folyik le (*Polysius*-vályú), sőt a lebegésben tartott, elkevert szemcsék *súlya* hidrosztatikai nyomás formájában átadódik a falakra.

A szemcséket hordozó folyadék sebességét tovább növelve, a fellazulás és az áramlási ellenállás egész kis mértékben növekszik (a csőfalsúrlódás növekedése miatt) mindaddig, amíg a függőleges szállítás meg nem indul.

Nem homogén szemcsézetű, kisszemcséjű anyagoknál megfigyelhető a lebegő állapotban, hogy a szemcsék a magasság függvényében a csőben sűrűsödő-ritkuló mozgást végeznek, s az örvénylő anyag felszíne hullámzik. Ez a jelenség igen hasonlít a későbbiekben a mammutszivattyú kapcsán tárgyalt buborékmozgáshoz és az ott is megfigyelhető periodikus vízszállításhoz.

120. A folyadékba merített test mozgástörvényei

A folyadékba merülő testet gravitációs erőtérben az ún. **«vízben mért súly»** támadja, amely annak tömegét függőleges irányban gyorsítja. (Vö. a 10. ponttal.)

A G súlyú test tömege: G/g, fajsúlya: γ_a, térfogata tehát: $K = G/\gamma_a$. A γ fajsúlyú folyadékban a sztatikus felhajtóerő: $F = \gamma K = \gamma G/\gamma_a$; a «vízben mért» súly tehát:

$$G_v = G - F = K(\gamma_a - \gamma) = \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a} G \qquad \text{(kg)}. \tag{362}$$

Ha a folyadék fajsúlya kisebb a test fajsúlyánál ($\gamma_a > \gamma$), akkor a test a_0 kezdőgyorsulással **lefelé süllyed,** a folyadéknál kisebb fajsúlyú ($\gamma_a < \gamma$) test viszont a folyadékban **emelkedik.**

Mihelyt a test mozgásba jött, számolni kell a w viszonylagos sebességgel ellentétes irányú E közegellenállással is, amely az aerodinamikai szárnyszelvények jellemzésére bevezetett c_e ellenállástényezővel így írható:

$$E = \frac{\gamma}{2g} w^2 f c_e \qquad \text{(kg)}, \tag{363}$$

ahol f a test keresztmetszetének a w sebesség irányára merőleges vetülete.

Az ellenállás a viszonylagos sebesség négyzetével nő, ennélfogva a test felgyorsulhat oly w_∞ határsebességre, amelynél beáll az egyensúlyállapot, és a mozgás egyenletessé válik.

a) A **határsebesség,** ha $\gamma_a > \gamma$, $G_v = E$ feltételből, helyettesítés és rendezés után így írható:

$$w_\infty = \sqrt{\frac{2g}{c_e}\,\frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma}\,\frac{K}{f}} \qquad \text{(m/mp)}. \tag{364}$$

Kis fajsúlyú folyadék **(levegő vagy gáz)** esetében: $\gamma_a \gg \gamma$. Ilyenkor a gáz fajsúlya a test fajsúlya mellett elhanyagolható, azaz: $\gamma_a - \gamma \cong \gamma_a$ helyettesítéssel a határsebesség:

$$w_\infty \cong \sqrt{\frac{2g}{c_e}\,\frac{\gamma_a}{\gamma}\,\frac{K}{f}} \qquad \text{(m/mp)}. \tag{364/g}$$

b) A folyadéknál **kisebb fajsúlyú test** ($\gamma_a < \gamma$) a sztatikus felhajtóerő hatására a folyadékban felfelé gyorsul a w_∞ határsebességig, amely ebben az esetben az $F - G = E$ egyenletből számítható. Írható:

$$w_\infty = \sqrt{\frac{2g}{c_e}\,\frac{\gamma - \gamma_a}{\gamma}\,\frac{K}{f}}\,. \tag{365}$$

A műszaki gyakorlatban különös jelentősége van a cseppfolyós folyadékba ágyazott **gázbuborékok** határsebességének, amely a $\gamma_a = \gamma_g$ gázfajsúly kis értéke miatt a buboréksúly figyelmen kívül hagyásával, $\gamma - \gamma_g \cong \gamma$ helyettesítésével így számítható:

$$w_\infty = \sqrt{\frac{2g}{c_e}\,\frac{K}{f}} \qquad \text{(m/mp)}. \tag{365/g}$$

A közegellenállás nagyságát a w **viszonylagos sebesség** nagysága szabja meg.

c) **Nyugalomban** levő folyadékban, pl. állóvízben ($c_v = 0$) vagy nyugvó levegőben ($c_g = 0$) a viszonylagos sebesség a süllyedő test c_a sebességével megegyezik ($w = c_a$). Ilyenkor a w_∞ határsebesség azt a legnagyobb süllyedési sebességet szabja meg, amelyre a test felgyorsulhat. Ennek a kérdésnek a derítés és az ülepítés feladatainak kapcsán van gyakorlati jelentősége.

A határsebesség meghatározásához a test alaki jellemzőinek és c_e ellenállástényezőjének ismeretére van szükség. Ez az ellenállástényező nemcsak a szemcsék alakjától és nagyságától függ, hanem a szállítóközeg minőségétől és sebességétől sem független.

Egészen kis szemnagyságú gömb esetére — ha a szemcsére vonatkozó Reynolds-szám: $Re_0 \leqq 1$ — a közegellenállás kifejezésére a (363) egyenlet helyett az ettől egészen eltérő felépítésű alábbi *Stokes*-féle képlet használatos:

$$E = 3\,\pi\,\mu_g\,d_0\,w \qquad \text{(kg)}, \tag{363/s}$$

ahol μ_g (kg mp m^{-2}) a közeg dinamikai viszkozitása és d_0 (m) a szemátmérő.

A szemcse Re_0 Reynolds-számának bevezetésével azonban a (363) egyenlettől eltérő felépítésű képletek használata feleslegessé válik, mert csak a c_e ellenállástényezőt kell a Reynolds-számhoz igazodó értékkel megválasztani.

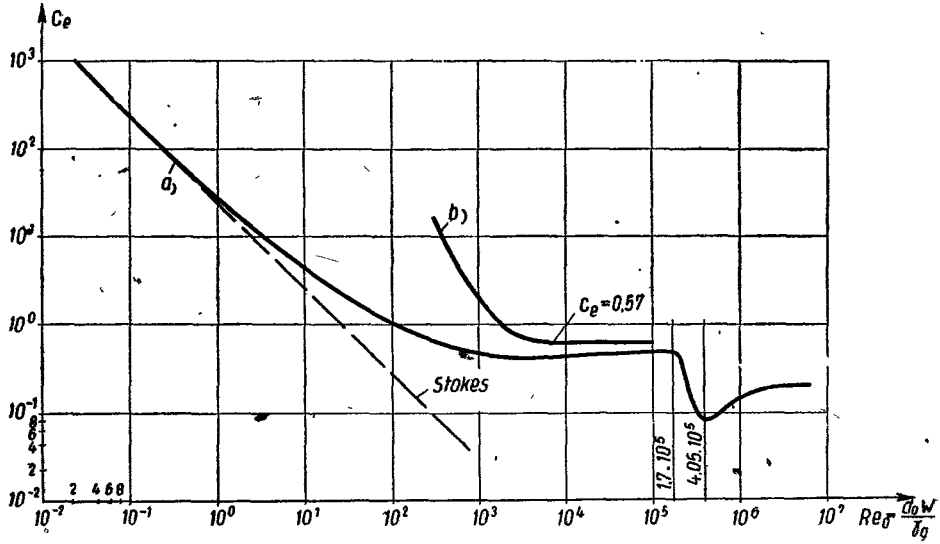
Pontosan ugyanazt a gondolatmenetet követhetjük tehát itt is, mint a csősúrlódás veszteségmagasságának kiszámításakor, amikor a λ csősúrlódási tényező megfelelő helyettesítésével a Hagen-Poiseuille-féle képlet használatát a réteges (lamináris) áramlás esetére is kiterjesztjük.

A w (viszonylagos) sebességgel megfúvott gömb alakú szemcse Reynolds-száma:

$$Re_0 = \frac{d_0 w}{\nu_g},$$

ahol $\nu_g = \mu_g/\varrho_g$ a közeg kinematikai viszkozitása és $\varrho_g = \gamma_g/g$ annak sűrűsége.

Gömb esetében a c_e ellenállástényező a Re_0 Reynolds-szám függvényében a *191. ábrán* látható **a)** jelű görbe szerint változik. E görbe használatával tehát a szemre ható közegellenállás — bármekkora Re_0 esetében — a (363)-ból számít-



191. ábra. Gömb (*a*) és búzaszem (*b*) légellenállástényezője a *Reynolds*-szám függvényében

ható. Még egyszerűbb alakra hozható ez az összefüggés a gömb köbtartalmának: $K = d_0^3 \pi/6$ és keresztmetszetének: $f = d_0^2 \pi/4$ helyettesítésével, ugyanis:

$$\frac{K}{f} = \frac{2}{3} d_0$$

írható, és ezzel a határsebesség a szemcseátmérővel fejezhető ki:

$$w_\infty = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma} \frac{g}{c_e} d_0} \qquad \text{(m/mp)}. \qquad (366)$$

Gömb ellenállástényezője $Re_0 = 10^3 \div 1{,}7 \cdot 10^5$ értékek között gyakorlatilag állandónak $c_e \cong 0{,}45$-nak vehető.

Gömbtől eltérő szemcsealak esetében a Reynolds-szám kiszámításához szükséges d_0 szemcsenagyságot a szemcsékkel azonos térfogatú (és egyben azonos G_a súlyú) gömbök átmérőivel helyettesíthetjük. Így, külön formatényező bevezetése nélkül, a c_e ellenállástényező kísérlettel meghatározott értékében jut kifejezésre a szemcsealak befolyása.

A szemcseátmérő a

$$G_a = \frac{d_0^3 \pi}{6} \gamma_a$$

összefüggésből:

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{6\,G_a}{\pi\,\gamma_a}} \quad \text{(m)}. \tag{367}$$

A szemcse megfúvott keresztmetszetének ún. **redukált** értéke pedig:

$$f_0 = \frac{d_0^2 \pi}{4} = \sqrt[3]{\pi \left(\frac{3\,G_a}{4\,\gamma_a}\right)^2} \quad \text{(m}^2\text{)}. \tag{368}$$

A *191. ábra* **b)** görbéje búzaszem ejtési kísérlettel meghatározott c_e ellenállástényező értékeit mutatja a Reynolds-szám függvényében. Abban a szakaszban, ahol az értéke állandó, $c_e \cong 0{,}57$ értékkel számolhatunk.

Meg kell jegyezni, hogy a gömbre vonatkozó ellenállástényező-értékek abban az esetben is igazításra szorulnak, amikor nem **egyetlen test** hanem **szemes anyag-áram** mozgástörvényeiről van szó. Aerodinamikai fogalmazásban az **anyag-rács** ellenállástényezőjét egy ún. **rácstényező** bevezetésével helyesbítjük, amely a rács sűrűségének a függvénye. Idevágó kísérleti eredmények még hiányoznak.

Az ellenállástényező értéke nem lehet független a folyadékot befogadó medence (vagy csővezeték) kiterjedésétől sem. Idevágó kísérleti eredmények hiányában meg kell elégednünk durván becsült tényezők használatával. Ezek szabatosabb meghatározásához tudományos kísérleti kutatásra van szükség.

A (366) összefüggésből számos gyakorlati értékű következtetés vonható le.

Derítés és **ülepítés** szempontjából megállapítható, hogy az ülepedés sebessége a d_0 szemátmérő négyzetgyökével arányos, a nagyobb szemek tehát gyorsabban süllyednek.

A szemnagyság szerinti **fajtázás** eszerint vízszintes vízáramban végezhető oly módon, hogy a lassabban süllyedő kisebb kavics- és homokszemeket a víz messzebb sodorja és távolabb rakja le.

A (366) egyenletből azt is kiolvashatjuk, hogy szemnagyság szerint csak **azonos fajsúlyú** anyagok választhatók szét, mert (azonos alaki jellemzők esetében) az ülepedés sebessége különböző szemátmérő esetén is azonos, ha a kisebb szemek fajsúlya nagyobb, azaz ha:

$$(\gamma_a - \gamma)\, d_0 = \text{állandó}.$$

Végül a (366) egyenlet az 5. pont szerint g^* helyettesítéssel a gyorsuló erőtérben — így például a **centrifugában** és a **szeparátorban** — végbemenő folyamatok vizsgálatára is alkalmassá tehető (vö. a *32. ábrával*).

112. példa. A tónak $\gamma = 1000$ kg/m³ fajsúlyú vízébe dobott $\gamma_a = 2100$ kg/m³ fajsúlyú kavicsok süllyedési határsebessége, $c_e = 0{,}5$ helyettesítéssel a (366) szerint:

$$w_\infty = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{2{,}1 - 1}{1} \cdot \frac{9{,}81}{0{,}5}}\,\sqrt{d_0} \cong 0{,}17\,\sqrt{d_0\ \text{(mm)}}.$$

A süllyedés határsebessége tehát a szemnagyság szerint:

$$\begin{array}{ll} d_0 = 10 \text{ mm} & w_\infty = 0{,}54 \text{ m/mp}, \\ 20 \text{ mm} & 0{,}76 \text{ m/mp}, \\ 50 \text{ mm} & 1{,}2 \text{ m/mp}. \end{array}$$

113. példa. Gabonatárház silócellájába töltött gabonaszemek fajsúlya: $\gamma_a = 1300$ kg/m³, a levegő fajsúlya az adott esetben: $\gamma = 1{,}2$ kg/m³. Egy szem súlya az egy kilogrammban levő szemek számából: $n_1 = 27\,000$ db/kg-ból számítható:

$$G_a = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{27\,000} = 37 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

A (redukált) átmérő (367) szerint:

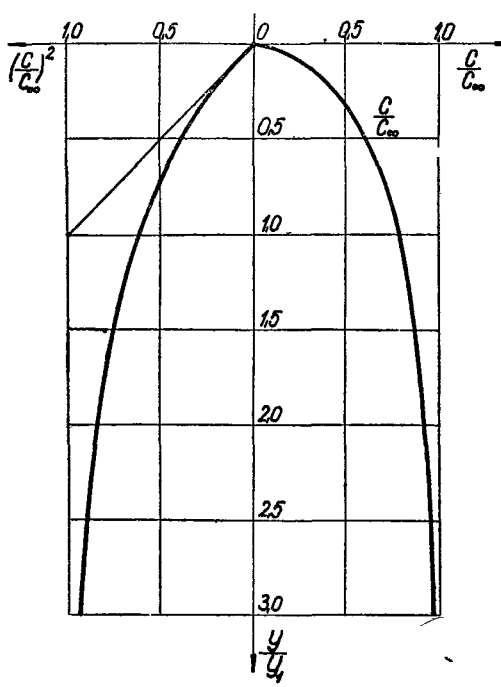
$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 37 \cdot 10^{-6}}{3{,}14 \cdot 1300}} = 3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3{,}8 \text{ mm}.$$

A redukált keresztmetszet: $f_0 = 11{,}3 \cdot 10^{-6}$ m².

Az eső szemek *Reynolds*-számának kiszámításához a határsebességet előre meg kell becsülni. $w_\infty = 10$ m/mp-es sebességet felvéve, $\nu_g = 16 \cdot 10^{-6}$ m²/mp kinematikai viszkozitású levegőben

$$Re_0 = \frac{w_\infty d_0}{\nu_g} = \frac{10 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-6}} = 2370.$$

Ehhez a Reynolds-számhoz tartozó c_e érték (*191. ábra b)* görbéjéből): $c_e = 0{,}57$; a (366) szerint a határsebesség ($\gamma_a - \gamma \cong \gamma_a$ egyszerűsítéssel:



192. ábra. Folyadékban szabadon süllyedő test sebessége

$$w_\infty = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{1300}{1{,}2} \cdot \frac{9{,}81}{0{,}57} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-3}} = 9{,}7 \text{ m/mp},$$

jól egyezik az előre felvett értékkel, Re_0 és a hozzátartozó c_e értékét tehát nem kell korrigálni.

121. A test sebességének útmenti és időbeli változása

A $c_a = 0$ kezdősebességgel **nyugvó** folyadékba ejtett tömeg sebessége a lendület **útmenti** növekedéséből határozható meg.

A *192. ábra* jelöléseivel y mélységben c_a sebességgel süllyedő G_a/g tömegű test lendületnövekedése dy úton a $G_v - E$ gyorsítóerő munkájából jött létre. Írható tehát:

$$dL = (G_v - E)\,dy = \frac{G_a}{g} c_a\,dc_a$$

Nyugvó folyadék esetére, (362) és (363) szerint, $w = c_a$ helyettesítéssel:

$$\left(\frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a} G_a - \frac{\gamma}{2g} f\, c_a^2 \mathfrak{e}_e\right) \mathrm{d}y = \frac{G_1}{g} c_a\, \mathrm{d}c_a$$

Ez a differenciálegyenlet az $a = \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a} g$ és $b = \frac{\gamma f \mathfrak{e}_e}{2 G_a}$ állandó helyettesítésével alábbi alakra hozható:

$$(a - b\, c_a^2)\, \mathrm{d}y = c_a\, \mathrm{d}c_a.$$

(A b állandóban szereplő $\mathfrak{e}_e$ ellenállástényezőt állandónak tekintjük. Ez a feltevés a jelenség matematikai alapon történő tárgyalását teszi lehetővé, és a valóságot igen jól megközelítő eredményre vezet.)

$c_a^2 = u$; $(2\, c_a\, \mathrm{d}c_a = \mathrm{d}u)$ új változó bevezetésével az egyenlet alábbi integrálható alakra hozható:

$$\mathrm{d}y = \frac{2\, c_a\, \mathrm{d}c_a}{2\,(a - b\, c_a^2)} = \frac{\mathrm{d}u}{2\,(a - b\, u)}\,.$$

Az **általános esetben** legyen $y = 0$ helyen: $u = u_0 = c_0^2$, azaz a test kezdősebessége: c_0. Az integrálás eredménye:

$$y = \frac{1}{2b} [ln\,(a - b\, u)]_u^{u_0} = \frac{1}{2b} ln \frac{a - b\, u_0}{a - b\, u}\,,$$

vagy inverz alakban:

$$e^{2by} = \frac{a - b\, u_0}{a - b\, u}\,.$$

Ebből rendezés után írható:

$$u = c_a^2 = \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} - c_0^2\right) e^{-2by}. \qquad (369)$$

Az egyenlet áttekinthetőbb és általánosabb alakra hozható az alábbi jelölések bevezetésével:

$$\frac{1}{2b} = \frac{G_a}{\gamma f \mathfrak{e}_e} = \frac{\gamma_a}{\gamma} \frac{K}{f \mathfrak{e}_e} = y_1 \quad \text{(m)}. \qquad (370)$$

Ezt az állandót dimenziója miatt **alaphosszúságnak** nevezem, és a következőkben y_1 jelöléssel használom. Nagysága a szemes anyag jellemzőiből előre kiszámítható.

Gömb alakú testekre $K/f = d_0\, 2/3$ értékkel:

$$\boxed{y_1 = \frac{2}{3} \frac{\gamma_a}{\gamma} \frac{d_0}{\mathfrak{e}_e}} \quad \text{(m)}. \qquad (370/d)$$

Az a/b hányados a jellemzők helyettesítése után a határsebesség négyzetével egyenlő, azaz (nyugvó folyadékban):

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0}{b} = w_\infty^2 = c_\infty^2 \qquad (\mathrm{m^2/mp^2}). \tag{371}$$

A (369) egyenlet tehát (370) és (371) helyettesítésével így írható:

$$c_a^2 = c_\infty^2 - (c_\infty^2 - c_0^2)\, e^{-y/y_1}; \tag{372}$$

$c_0 = 0$ kezdősebesség esetében pedig:

$$\left(\frac{c_a}{c_\infty}\right)^2 = 1 - e^{-y/y_1}. \tag{373}$$

Ez az egyenlet egy méretnélküli viszonyszámokkal előre felrajzolható alapgörbét jellemez, amely az y_1 alaphosszúság és a c_∞ határsebesség kiszámítása után szemléletes képet ad a sebesség útmenti lefolyásáról.

Az ordinátamagasságok kiszámított vagy megszerkesztett négyzetgyökének felrakásával a **sebesség-út görbe** is felrajzolható (*192. ábra*).

Az y_1 alaphosszúság energetikai értelmezését a (366) és (370/d) egyenlet összevonásával és $c_\infty = w_\infty$ helyettesítéssel kapott alábbi képletből olvassuk ki:

$$\boxed{y_1 = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma}\,\frac{c_\infty^2}{2g}}\;; \quad \text{azaz} \quad c_\infty = \sqrt{2g\,\frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a}\,y_1}\,. \tag{374}$$

Kis fajsúlyú folyadékra (pl. levegőre), $\gamma_a - \gamma \cong \gamma_a$ helyettesíthető, és erre az estre a fajsúlytényező kiesik. Írható:

$$y_1 \cong \frac{c_\infty^2}{2g}\;; \quad \text{azaz:} \quad c_\infty \cong \sqrt{2gy_1}. \tag{374/g}$$

Az y_1 alaphosszúság tehát a levegőben ejtett test c_∞ *határsebességének a sebességmagassága*, vagyis az a mélység, amelyben a szabadon eső test a határsebességet elérné, ha mozgását a légellenállás nem fékezné.

A **lendület-út görbe** és a **sebesség-út görbe** felrajzolását megkönnyíti az alábbi táblázat használata, amelyben: $x = y/y_1$ az ejtés viszonylagos mélysége.

x	e^{-x}	$1-e^{-x}$	$\sqrt{1-e^{-x}}$	x	e^{-x}	$1-e^{-x}$	$\sqrt{1-e^{-x}}$
0,2	0,819	0,181	0,425	1,4	0,247	0,753	0,869
0,4	0,670	0,330	0,574	1,6	0,202	0,798	0,894
0,6	0,549	0,451	0,672	1,8	0,165	0,835	0,914
0,8	0,449	0,551	0,742	**2,0**	**0,135**	**0,865**	**0,930**
1,0	**0,368**	**0,632**	**0,795**	2,5	0,082	0,918	0,958
1,2	0,301	0,699	0,836	3,0	0,050	0,950	0,975

114. példa. A 113. példában kiszámított $c_\infty = 9{,}7$ m/mp határsebességet a gabonaszem elméletileg végtelen nagy mélységben éri el.

Az ejtés alaphosszúsága (nyugodt levegőben) a (374/g) egyenlet szerint:

$$y_1 \cong \frac{c_\infty^2}{2g} = \frac{9{,}7^2}{19{,}62} = \mathbf{4{,}8\ m.}$$

Az alaphosszúság mélységében a gabonaszem (a táblázat szerint) határsebességének kereken 80%-ára gyorsulhat. Sebessége ebben a mélységben:

$$w_1 = 0{,}795 \cdot 9{,}7 = \mathbf{7{,}7\ m/mp.}$$

Ha a silócella teljes magassága: $h = 10$ m, akkor az **üres** silóban ezzel az ejtőmagassággal kell számolni. Az ejtés viszonylagos mélysége:

$$x = h/y_1 = 10 : 4{,}8 = 2{,}08.$$

Ezzel: $e^{-x} = 0{,}125$ és $1 - e^{-x} = 0{,}875$.

A $c_0 = 0$ kezdősebességgel ejtett gabonaszemek legnagyobb sebessége **tehát,** (373) szerint:

$$c_a = c_\infty \sqrt{1 - e^{-x}} = 9{,}7 \cdot \sqrt{0{,}875} = \mathbf{9{,}1\ m/mp.}$$

A test sebességének időbeli változása. Az ún. **menetábra** szerkesztése helyett elegendő, ha annak valószínű alakját határozzuk meg a Z időállandó kiszámításával. Az időállandó nagyságrendjéből következtethetünk a felgyorsulás idejére. A T_i indítási idő ugyanis — a közelítés előírt pontosságától függően —

$$T_i = (2 \div 3)\, Z.$$

A sebesség elméletileg csak végtelen hosszú idő alatt aszimptotikusan éri el a c_∞ határértéket, de azt a gyakorlat igényeit kielégítő pontossággal már az időállandó két-háromszoros tartama alatt megközelíti.

Az időállandó az az időtartam, amely alatt a test a határsebességet változatlanul maradó a_0 kezdőgyorsulással tudná elérni. Írható tehát:

$$Z = \frac{c_\infty}{a_0}\ (\text{mp}), \tag{375}$$

ahol a $c_0 = 0$ sebességhez tartozó kezdőgyorsulás, a 10. és a 11/*e.* pont szerint (a $\lambda^* \gamma$ a nevezőben elhanyagolható !):

$$a_0 = \frac{G_v}{G} g = \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a} g \qquad (\text{m/mp}^2). \tag{376}$$

115. példa. A 112. és 113. példában kiszámítottuk a silóba töltött gabonaszem határsebességét és meghatároztuk a sebességnek útmenti változását is.

A búzaszemek határsebessége: $c_\infty = 9{,}7$ m/mp, a kezdőgyorsulás pedig, $\gamma_a = 1300$ kg/m³ és $\gamma = 1{,}2$ kg/m³ értékkel és $\gamma_a - \gamma \cong \gamma_a$ helyettesítéssel:

$$a_0 \cong 9{,}81\ \text{m/mp}^2.$$

Az időállandó tehát:

$$Z = \frac{9{,}7}{9{,}81} = \mathbf{0{,}99\ mp,}$$

a felgyorsuláshoz szükséges idő pedig, $T_i = 2{,}5\ Z$ felvétellel:

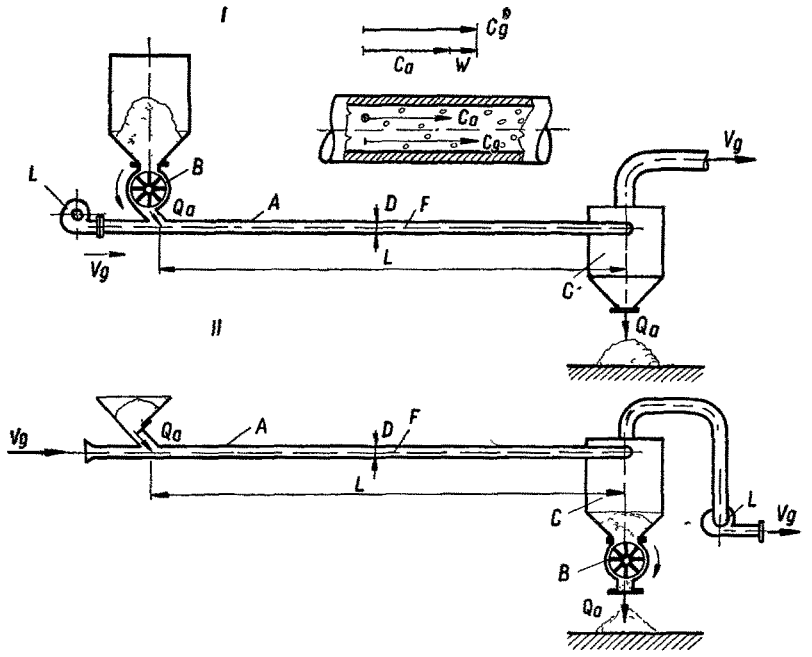
$$T_i = 2{,}5 \cdot 0{,}99 = \mathbf{2{,}47\ mp.}$$

A silótöltésnél a határsebesség eléréséhez szükséges magasság nem áll rendelkezésre, tehát az indítási idő kiszámításának gyakorlati értéke nincsen.

122. Anyagszállítás vízszintes gázáramban

Pneumatikus szállító berendezés lényege: a szállító légáram **vízszintes** vagy **függőleges** tovavezetésére alkalmas zárt csőrendszer, amelynek elején egy szellőző, fúvó vagy légsűrítő a levegőt túlnyomással betáplálja **(nyomóüzem)**, vagy pedig a levegő a csőszájon légköri nyomáson lép be, és azt a csővezeték végéhez csatlakozó szellőző vagy légszivattyú szívja keresztül **(szívóüzem)**.

A szállító berendezés motorja tehát minden esetben légszállítógép, amelynek jellemzői megszabják a szállító berendezés jellegét.



193. ábra. Nyomó (*I*) és szívó (*II*) üzemű pneumatikus szállító berendezés

A *193/I. ábra* nyomóüzemű, a *193/II. ábra* szívóüzemű berendezést mutat. A szállító berendezés lényegesebb részei: a *D* átmérőjű szállítócső **(A)**, a légelzárást is biztosító (nyomóüzemben) adagoló-, illetve (szívóüzemben) ürítő berendezés **(B)**, a szállított anyagnak és a szállítógáznak szétválasztására alkalmas ciklon **(C)** és a légszállítógép **(L)**.

A szállítócsőben létrejövő nyomásesések szempontjából az üzem lehet **kis**- ($\Delta p < 1000$ kg/m²), **közép**- ($\Delta p = 5000$ kg/m²-es nyomásesésig) vagy **nagynyomású** ($\Delta p > 0{,}5$ at). A nyomáseséseknek megfelelően a légszállítógép szellőző, fúvó vagy légsűrítő (kompresszor).

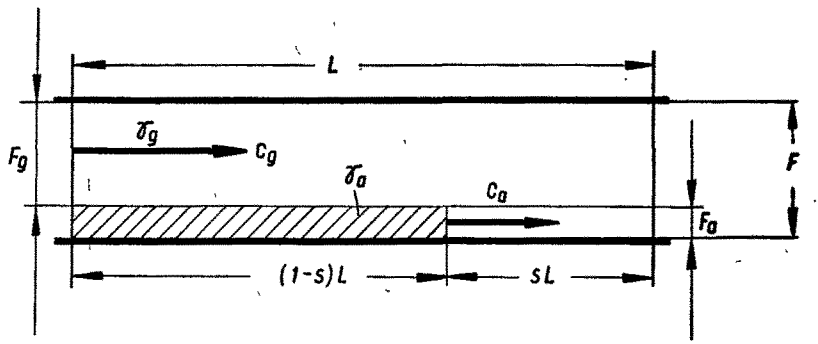
Szemes anyagot folyamatosan szállító berendezések kozos jellemzői: a Q_a (kg/mp) **szállítóteljesítmény**, amely időegység alatt szállított anyagmennyiséget jelent. A szállítótávolság vízszintes (*L*) és fuggőleges (*H*) szakaszokból állhat.

A mechanikai elven működő vontatóelemes szállító berendezések közös jellemzője az, hogy az ún. **anyagáram** alakjában szállított anyag c_a sebességét a vontatóelem sebessége szabja meg. Az anyagáram a vontatóelem (pl.: szállítószalag) sebességével viszonylagos elmozdulás nélkül halad előre.

Pneumatikus szállítás esetében a D átmérőjű (F keresztmetszetű) és L hosszúságú szállítócsőben (l. a *193. ábrát*) a c_g sebességű gázáram a beadagolt szemes anyagot csak a gázsebességnél kisebb $c_a = c_g - w$ anyagsebességgel továbbítja. **Az anyag**

$$w = c_g - c_a \tag{377}$$

viszonylagos (relatív) sebességgel **a gázáramhoz képest visszamarad.**



194. ábra. Keverési súlyarány a szállítócsőben

Ez a viszonylagos sebesség szolgáltatja az anyag szállításához szükséges hajtóerőt, nagysága tehát zérusnál mindig nagyobb, aminek viszont az a következménye, hogy pneumatikus szállításnál az ún. **szlipveszteségek** el nem kerülhetők.

A szlip (az anyagáram viszonylagos visszamaradása a gázáramhoz képest):

$$s = \frac{w}{c_g} = \frac{c_g - c_a}{c_g} = 1 - \frac{c_a}{c_g}. \tag{378}$$

A szlip bevezetésével a szállított anyag sebessége így fejezhető ki:

$$c_a = (1 - s)\, c_g. \tag{379}$$

Az anyagáram viszonylagos visszamaradása, a szlip az adagolási viszonyokhoz képest a csőben szállított keverék összetételét megváltoztatja.

Az **adagolási súlyarány,** az ún. **keverési arány** a következő:

$$\boxed{\mu = \frac{Q_a}{Q_g},} \tag{380}$$

ahol Q_g (kg/mp) a szállítást végző gáz (legtöbbször levegő) másodpercenkénti súlymennyisége.

A szállítócsövet **egyidejűleg kitöltő keverék súlyarányát** a *194. ábra* szerint úgy határozhatjuk meg, hogy a c_a sebességgel továbbított szemes anyagot egy F_a

keresztmetszetű összefüggő (tömör) áramcsőbe zárt anyagárammá egyesítve képzeljük, amely párhuzamosan halad, a teljes csőkeresztmetszethez képest leszűkített, $F_g = F - F_a$ keresztmetszetű és c_g sebességű gázárammal.

Az anyagáram folyómétersúlya:

$$q_1 = \frac{Q_a}{c_a} = \frac{Q_a}{c_g (1 - s)} = F_a \gamma_a \quad \text{(kg/m)}. \tag{381}$$

A gázáram folyómétersúlya pedig:

$$q_g = \frac{Q_g}{c_g} = F_g \gamma_g \quad \text{(kg/m)}. \tag{382}$$

A két folyómétersúly hányadosa a *csőben egyidejűleg jelenlevő keverék súlyarányát* fejezi ki (a (380) figyelembevételével):

$$\boxed{m = \frac{q_a}{q_g} = \frac{\mu}{1 - s}} \tag{383}$$

A szállítócső kihasználására jellemző az ún. **koncentráció**, amely a cső térfogategységében egyidejűleg jelenlevő anyag súlyát jelenti. $L = 1$ m hosszú cső térfogata: F, a benne levő anyag súlya: q_a; az anyag koncentrációja tehát:

$$\nu_a = \frac{q_a}{F} \quad \text{(kg/m}^3\text{)}. \tag{384}$$

A keverék fajsúlya (tökéletes keveredésre):

$$\gamma = \frac{q_a + q_g}{F} = \frac{F_a \gamma_a + F_g \gamma_g}{F} = \left(\frac{\mu}{1 - s} + 1\right) \gamma_g = (m + 1) \gamma_g. \tag{385}$$

A gázban szállított szilárd anyag fajsúlya általában több nagyságrenddel nagyobb a gáz fajsúlyánál ($\gamma_a \gg \gamma_g$), ezért az anyagáram F_a keresztmetszete oly kicsi, hogy az a gázáram számára a csőkeresztmetszetet gyakorlatilag nem szűkíti, vagyis:

$$F_g \approx F \quad \text{(m}^2\text{)}.$$

Ezzel az elhanyagolással a légáram súlya jó közelítéssel így számítható: $Q_g \cong F c_g \gamma_g$ (kg/mp).

E közelítő számítási mód hibájának nagyságrendjére az alábbi számpélda eredményeiből következtethetünk.

116. példa. Egy vízszintes, szívóüzemű pneumatikus szállító berendezés $D = 120$ mm átmérőjű csőben (a keresztmetszet: $F = 0{,}0112$ m^2) $\gamma_a = 1300$ kg/m^3 fajsúlyú búzát szállít $c_g = 32$ m/mp sebességű és $\gamma_g = 1{,}1$ kg/m^3 fajsúlyú légáramban. A szlip vízszintes gabonaszállítás esetében: $s = 0{,}4 = 40\%$.

A szállító légmennyiség súlya:

$$Q_g \cong F c_g \gamma_g = 0{,}0112 \cdot 32 \cdot 1{,}1 = 0{,}395 \text{ kg/mp}.$$

$\mu = 7{,}5$-es keverési aránnyal (adagolási súlyaránnyal) a szállítóteljesítmény:

$$Q_a = \mu Q_g = 7{,}5 \cdot 0{,}395 = 2{,}96 \text{ kg/mp}.$$

Az anyagáram sebessége:

$$c_a = (1 - s)\, c_g = (1 - 0{,}4) \cdot 32 = 19{,}2 \text{ m/mp},$$

és folyóméter-súlya:

$$q_a = \frac{Q_a}{c_a} = \frac{2{,}96}{19{,}2} = 0{,}154 \text{ kg/m}.$$

Az anyagáram keresztmetszete tehát:

$$F_a = = \frac{q_a}{\gamma_a} = \frac{0{,}154}{1300} = \mathbf{0{,}000{,}118\ m^2},$$

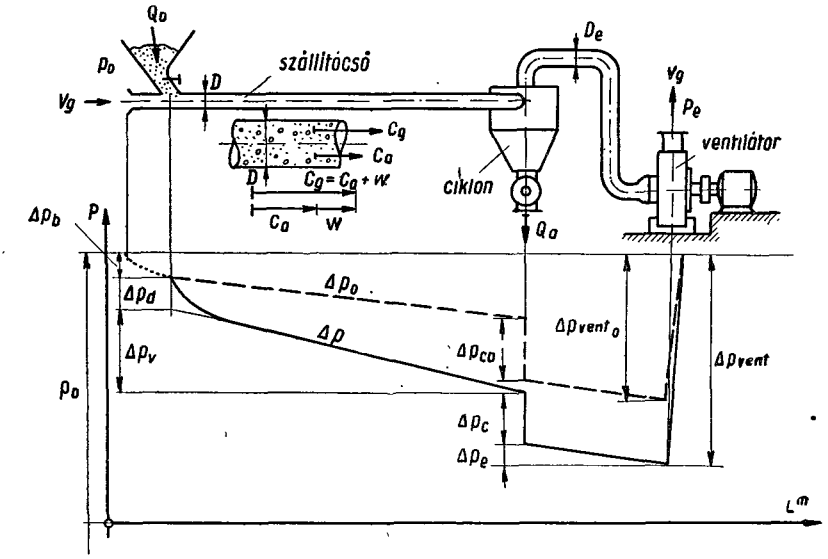
azaz *mindössze 1,05%-a a cső keresztmetszetének.* Vagyis, ha a szállító levegő számára rendelkezésre álló keresztmetszetet a cső keresztmetszetével azonosnak vesszük, csupán 1,05%-os hibát követünk el. Ez a hiba kisebb a csővezeték gyártása közben adódó keresztmetszeti egyenlőtlenségeknél.

A csővezetékben egyidejűleg jelen levő keverék súlyaránya, 7,5-es keverési aránynál:

$$m = \frac{\mu}{1 - s} = \frac{7{,}5}{1 - 0{,}4} = 12{,}5.$$

123. A vízszintes szállítócsőben jelentkező ellenállások

Az anyagszállítás megindulásával a szállítócső végei között a nyomásesés megnő a változatlan gázsebességnél levő üresjárási nyomáseséshez képest. (Üresjárás $Q_a = 0$ szállítóteljesítményt jelent.) A *195. ábra* egy szívóüzemű szállító



195. ábra. Pneumatikus szállító berendezés mentén a nyomásesések üresjáráskor és anyagszállítás esetében

berendezést és a csőhossz mentén üresjáráskor (Δp_0 jelű görbe), valamint az üresjárási gázsebességgel egyező gázsebességnél anyagszállításkor jelentkező (Δp jelű görbe) nyomásesést mutat.

Az adagolás után következő csőszakaszt **indítószakasznak** nevezzük. Itt gyorsulnak fel a szemek az egyenletes üzemállapotnak megfelelő sebességre. A szemek felgyorsítása energiát igényel, amely az egyenletes szállítás nyomásesésén túlmenő nyomásesésben, a **gyorsításhoz szükséges nyomásesésben** (Δp_d) jelentkezik.

Ha a szemes anyagot a vízszintes cső tengelyére merőlegesen vezetjük a c_g sebességű gázáramba, akkor $c_a = 0$ anyagsebességről, az egyenletes üzemállapotnak megfelelő c_a anyagsebességre kell minden egyes szemet felgyorsítani. A gyorsításhoz szükséges nyomásesést az impulzustételből számíthatjuk. Az impulzuserő:

$$J = \frac{Q_a}{g} c_a \qquad \text{(kg)},$$

mely a csőkeresztmetszet és a gyorsításhoz szükséges nyomásesés szorzatával fejezhető ki: $J = F\,\Delta p_d$.

A gyorsításhoz tehát:

$$\Delta p_d = \frac{Q_a\, c_a}{g\, F} \qquad \text{(kg/m}^2\text{)} \tag{386}$$

nyomásesés szükséges.

a) *Gasterstädt elmélete*

A vízszintes egyenes szállítócsőben az egyenletes anyagszállítás szakaszában (vagyis az indítószakasz után) jelentkező nyomáseséseket (Δp_v) **Gasterstädt a nyomásesések** $\pi = \Delta p_v / \Delta p_0$ **arányával** fejezi ki.:

$$\Delta p_v = \pi \Delta p_0. \tag{387}$$

Az itt szereplő π tapasztalati képlettel fejezhető ki:

$$\pi = 1 + k_G\, \mu, \tag{388}$$

ahol k_G: a Gasterstädt-féle állandó.

b) *Pápai elmélete*

A Budapesti Műszaki Egyetem vízgépek tanszékének laboratóriumában végzett kísérletek alapot adtak arra, hogy az anyagszállításkor jelentkező nyomáseséseket — elméletileg is indokolhatóan — a **nyomásesések különbségével** vizsgáljuk. Ezek szerint a vízszintes szállítócsőben **anyagszállításkor jelentkező többletnyomás** (Δp_{sv}) a teljes nyomásesés (Δp_v) és az üresjárási nyomásesés (Δp_0) különbsége:

$$\Delta p_{sv} = \Delta p_v - \Delta p_0. \tag{389}$$

A *196. ábrán* vízszintes $D = 130$ mm átmérőjű szállítócsőben búza szállításakor jelentkező nyomásesések láthatók a c_g légsebesség függvényében. A görbesereg paramétere a Q_a szállítóteljesítmény.

Az üresjárási nyomásesést az abszcissza-tengelytől lefelé, az anyagszállításkor jelentkező többletnyomást pedig felfelé felmérve találjuk. A mérések azt

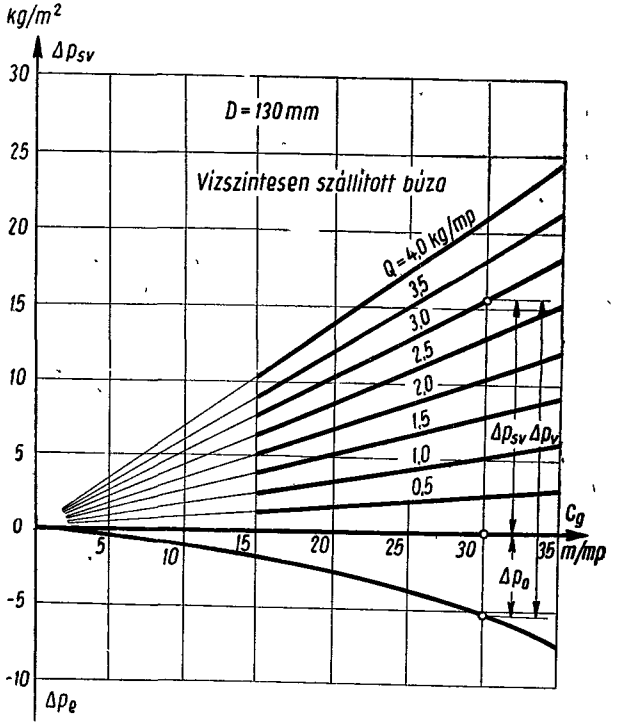
mutatják, hogy a szállítás folytonosságát biztosító gázsebességek felett az anyagszállítási többletnyomás pontos arányosságot mutat a c_g gázsebességgel és a Q_a szállítóteljesítménnyel, különböző átmérőjű szállítócsőben végzett mérések szerint pedig a cső keresztmetszetével (F) fordítottan változik, vagyis a következőképpen fejezhető ki:

$$\Delta p_{sv} = k_v L \frac{Q_a c_g}{g F} \quad (\mathrm{kg/m^2}). \tag{390}$$

A (390)-ben szereplő k_v (1/m) *Pápai*-féle tényező a vízszintesen szállított anyagra jellemző; értéke gabonára:

$$\boxed{k_v = 0{,}023/\mathrm{m}.}$$

Az *a)* pontban ismertetett Gasterstädt-féle elmélet igen egyszerű ugyan, de nem elégíti ki a műszaki gyakorlat igényeit, mert nem írja le szabatosan a jelenség lefolyását. A k_G állandó nem független a csőátmérőtől, a szállított anyag jellemzőitől és a csősúrlódási tényezőtől. Ezzel szemben a Budapesti Műszaki Egyetem vízgépek tanszékén kialakított Pápai-féle elmélet lehetővé tette, hogy a szállítócsőben lejátszódó jelenségeket (nyomás-, sebesség-, energia-viszonyok stb.) fizikai összefüggésekből kiindulóan szabatosan lehessen vizsgálni.



196. ábra. Vízszintes szállítócsőben jelentkező nyomásesések a légsebesség függvényében

A légáramban történő anyagszállítás további fejezetei ezekre az eredményekre támaszkodnak.

117. példa. A 195. ábrán látható szívóüzemű vízszintes szállítócső hossza $L = 20$ m, az átmérője $D = 100$ mm ($F = 0{,}00785$ m²). $Q_a = 3{,}0$ t/ó ($= 0{,}833$ kg/mp) búzát szállítunk $c_g = 25$ m/mp-es légsebességgel. Az anyagáram szlipje $s = 40\%$. A szállítógáz (levegő) fajsúlya $\gamma_g = 1{,}2$ kg/m³.

A levegőnek a szállítócsőbe belépéskor jelentkező nyomásesése $\zeta_b = 1{,}2$-es belépési veszteségtényezővel:

$$\Delta p_b = \zeta_b \frac{c_g^2}{2g} \gamma_g = 1{,}2 \frac{25^2}{19{,}62} 1{,}2 \cong 46 \ \mathrm{kg/m^2}.$$

A cső üresjárási nyomásesése $\lambda = 0{,}018$ értékkel (a csősúrlódási tényező kis értékű, mert a falhoz ütköző szemek a falat simára csiszolják.)

$$\Delta p_{\text{cső}} = \lambda \frac{L}{D} \frac{c_g^2}{2g} \gamma_g = 0{,}018 \cdot \frac{20}{0{,}1} \cdot \frac{25^2}{19{,}62} \cdot 1{,}2 = 137 \ \mathrm{kg/m^2}.$$

A ciklonig terjedő csőszakasz üresjárási nyomásesése tehát:

$$\Delta p_0 = \Delta p_b + \Delta p_{0cső} = 46 + 137 = \mathbf{183\ kg/m^2}.$$

Az anyag felgyorsításához szükséges nyomásesés:

$$\Delta p_d = \frac{Q_a c_a}{gF} = \frac{Q_a (1 - s) c_g}{gF} = \frac{0{,}833 \cdot 0{,}6 \cdot 25}{9{,}81 \cdot 0{,}00785} = 163\ \text{kg/m}^2.$$

Az egyenletes szállításnál jelentkező többletnyomás:

$$\Delta p_{sv} = k_v L \frac{Q_a c_g}{gF} = 0{,}023 \cdot 20 \frac{0{,}833 \cdot 25}{9{,}81 \cdot 0{,}00785} = 125\ \text{kg/m}^2.$$

A ciklonig terjedő szakaszban anyagszállításkor jelentkező teljes nyomásesés:

$$\Delta p = \Delta p_0 + \Delta p_d + \Delta p_{sv} = 183 + 163 + 125 = \mathbf{471\ kg/m^2}.$$

124. A vízszintes szállítás sebességviszonyai

A szállított anyag és a szállító gáz nem alkot együtthaladó keveréket. A szemekre szállítás közben **visszatartó erők** hatnak, amelyek a szemek csőfalhoz történő ütközéséből adódnak. Ezen erők hatására a szemek visszamaradnak a légáramhoz képest, de meg nem állnak, mert a visszamaradásuk következtében jelentkező relatív sebesség **szállításirányú aerodinamikai erőt** hoz létre. Ez az erő a szállítócsőben levő szemre ható hajtóerő a (363) szerint számítható:

$$P_1 = \frac{\gamma_g}{2g} f_0\, \mathbf{c}_e\, w^2 \qquad \text{(kg)}. \tag{363}$$

Egyenletes anyagszállítást vizsgálva, vagyis az adagolási helytől oly távolságban, ahol a szemeknek a c_a anyagsebességre való felgyorsulásuk már megtörtént, az egyes G_a (kg) súlyú szemekre az ütközésből származó S_1 (kg) visszatartó erőt folyamatosan hatónak tételezhetjük fel. (vagyis az ütközésből adódó erők statisztikus átlagát vesszük).

Ilyen állapotban az **egyenletes üzem** erőtani feltétele a

$$P_1 = S_1 \qquad \text{(kg)} \tag{391}$$

erőegyensúly.

Szállítás közben az L (m) hosszúságú csőben egyidejűleg n darab G_a súlyú szem van. De mivel:

$$n\, G_a = L\, q_a, \tag{392}$$

innen

$$n = L \frac{q_a}{G_a} = L \frac{Q_a}{c_a\, G_a}. \tag{393}$$

Az L hosszúságú csőben levő minden egyes szemre hat az S_1 visszatartó erő és a P_1 hajtóerő is, az erők összege: $nS_1 = n P_1$. Ez az erő a cső két vége között az üres cső súrlódási nyomásesésén túlmenő többletnyomásesésként jelentkezik.

Az üresjárási nyomásesés és az ütközésből származó nyomásesés összegeződik: $\Delta p_v = \Delta p_0 + \Delta p_{sv}$.

A szemek szállításához szükséges többletnyomás a következőképpen fejezhető ki:

$$\Delta p_{sv} = \frac{n P_1}{F} \qquad (\mathrm{kg/m^2}) \tag{394}$$

A (394) egyenletbe Δp_{sv} (390)-es, n (393)-as és P_1 (363)-as kifejezését helyettesítve, a

$$k_v L \frac{Q_a c_g}{g F} = \frac{L}{F} \frac{Q_a}{c_a G_a} \frac{\gamma_g}{2g} f_0 e_e w^2 \tag{395}$$

egyenletet kapjuk, amelybe $c_a = c_g - w$, összefüggést helyettesítve, a *vízszintes egyenletes szállítás sebességviszonyaira jellemző egyenlet* adódik. Az egyenlet rendezésekor Q_a szállítóteljesítmény és F csőkeresztmetszet kiesik, az egyenlet tehát Q_a és F bármely értékére érvényes. Rendezés és az állandók összevonása után írható:

$$w^2 + A c_g w - A c_g^2 = 0, \tag{396}$$

ahol az egyenlet állandója:

$$A = \frac{2 G_a k_v}{\gamma_g f_0 e_e}, \tag{397}$$

értékét tehát a szállított anyag és a szállítógáz jellemzői meghatározzák.

A (396) egyenletből a **vízszintes egyenletes szállítás relatív sebessége** kiszámítható, amely **a gázsebességen kívül tehát csak a szállított anyag jellemzőitől függ.** (A másodfokú egyenlet két megoldása közül, anyagszállításkor csak a pozitív w értéknek van fizikai értelme.)

Az egyenlet átrendezés után még egyszerűbb alakban írható fel:

$$\left(\frac{w}{c_g}\right)^2 + A \frac{w}{c_g} - A = 0,$$

vagy mivel a szlip: $s = w/c_g$:

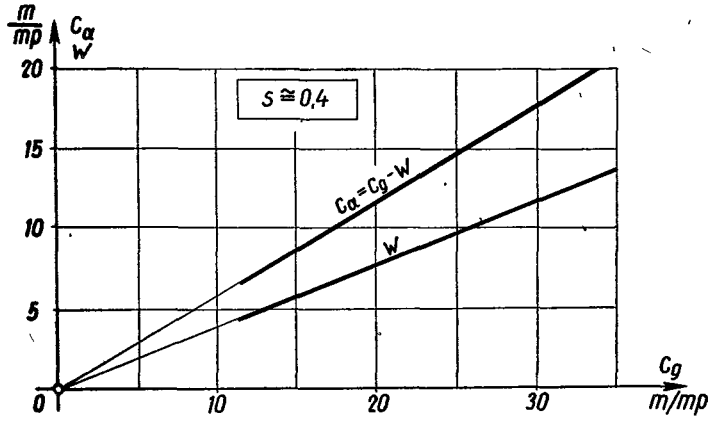
$$s^2 + A s - A = 0$$

és innen a szlip kifejezve:

$$s = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4A}}{2}. \tag{398}$$

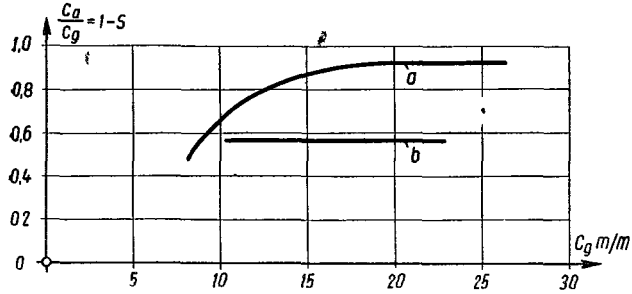
A vizsgálatok tehát arra a meglepő eredményre vezettek, hogy a **vízszintes egyenletes anyagszállításkor az anyagáram viszonylagos visszamaradása, vagyis a szlip** (s) **állandó marad** függetlenül a szállítóteljesítménytől, csőmérettől és gázsebességtől. Ez más szóval azt is jelenti, hogy anyagszállítás esetében az anyag-

áram $c_a = c_g - w$ sebessége és a w relatív sebesség is a gázáram sebességével arányosan növekszik. Gabonaszállítás esetében vízszintes egyenletes szállításra vonatkozóan a c_a (c_g), valamint a w (c_g) függvény a *197. ábrán* látható.



197. ábra. A vízszintes egyenletes gabonaszállítás sebességei

Hangsúlyozni kell, hogy ezek a vízszintes egyenletes anyagszállításra vonatkozó rendkívül egyszerű összefüggések csak a **dugulásmentes anyagszállítást** biztosító c_{g0} sebességi határnál nagyobb ($c_g > c_{g0}$) légsebességekre érvényesek.



198. ábra. Uszpenszkij szénporszállítás közben mért sebességi viszonyai

A *Budapesti Műszaki Egyetemen* végzett pneumatikus szállítási kísérletek folyamán, búza üvegcsőben történő szállításánál fényképezéssel történt a szemsebesség — vagyis az anyagsebesség — mérése. Ezek a mérések is igazolták az elméleti számítás helyességét.

A *198. ábra Uszpenszkij* [52] szénporszállítás közben végzett anyagsebesség mérési eredményeit mutatja. A légsebesség függvényében $c_a/c_g = 1 - s$ értékei láthatók kétféle szemnagyságú szénpor esetében: **a** jelű görbe $d_0 = 0{,}142$ mm átmérőjű, a **b** jelű $d_0 = 0{,}82$ mm átmérőjű szénporra vonatkozóan. Az ábra szerint $c_g > 15$ m/mp esetében a szlip állandó, értéke a $d_0 = 0{,}142$ mm-es szemre vonatkozóan $s = 8\%$ ($c_a/c_g = 0{,}92$), a $d_0 = 0{,}82$ mm átmérőjű szemnél $s = 43\%$ ($c_a/c_g = 0{,}57$).

A szemek szállításakor jelentkező többletnyomásesés a szemeknek a csőfalhoz történő ütközéséből adódik. Az ütközések folyamán — ha az ütközéskor fellépő S_1 erőhatást folyamatosan hatónak tételezzük fel — $L = 1$ m hosszú csőben a szemek elveszítenék lendületük ξ_v részét, ha ezt az energiaveszteséget a P_1 hajtóerő

munkája nem fedezné. Az energiaveszteség az S_1 visszatartó erők munkájával egyenlő:

$$L\,\xi_v \frac{G_a\, c_a^2}{2g} = L\,S_1 \qquad \text{(mkg)}.$$

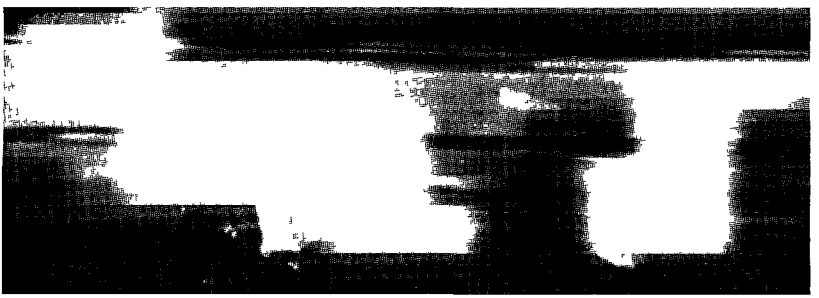
A szállítási többletnyomást az ütközési erővel kifejezve: $\Delta p_{sv} = n\,S_1/F$; S_1 értékét az energetikai meggondolás után felírt egyenletből, n-et pedig a (393)-ból helyettesítve:

$$\Delta p_{sv} = \xi_v\, L \frac{Q_a\, c_1}{2g\,F} \qquad \text{(kg/m}^2\text{)} \qquad (399)$$

egyenletet kapjuk, és ez formailag is megegyezik a mérési eredmények alapján felírt (390) képlettel. Nem jelent különbséget az sem, hogy itt a c_a anyagsebesség szerepel a (390)-ben látott gázsebesség helyett, mivel vízszintes szállításnál a szlip állandó, az anyag- és gázsebesség átszámításához szükséges állandót az egyenlet állandójával összevonhatjuk. A (390) és a (399) összehasonlításával a mérésekből adódó k_v tényező a következőképpen fejezhető ki:

$$k_v = \xi_v \frac{1-s}{2} \qquad \text{(1/m)},$$

ahol ξ_v azt jelenti, hogy a szem anyagszállítás közben a lendületének hányadrészét veszíti el csőfolyóméterenként. (Innen adódott az 1/m dimenzió).



199. ábra. Búzaszállítás vízszintes üvegcsőben

A vízszintes szállítócsőben a szem mozgását Dr. *Eck* Bruno gömb alakú test esetére ún. **autorotáció** jelenségével próbálja magyarázni. Eszerint autorotáció folytán keletkező felhajtóerő hatására a szem a folyadékáram belsejében lebegve futja be vízszintes pályáját. Gömbtől eltérő alakú test esetében a súlyerővel egyensúlyt tartó felhajtóerőt a szemen (mint tökéletlen szárnyprofilon) keletkező **aerodinamikai erővel** lehetne magyarázni.

Ezzel szemben a valóságos helyzet az, hogy a szemek nem lebegnek a csőben, hanem nagy sebességgel vízszintesen elhajított test pályájához hasonlóan, igen elnyújtott **parabola pályán** repülnek, s a cső aljáról, illetve oldaláról visszapattannak.

Ezt igazolja a *199. ábrán* látható fénykép, ahol vízszintes üvegcsőben történő búzaszállítás látható. Van szem, amelyik lefelé tart, másik felfelé, van amelyik éppen vízszintesen repül. Némelyik a csőfalról visszapattanás miatt forog is.

A vízszintesen szállított szem súlyával a szem ütközésekor a cső falán jelentkező reakcióerő tart egyensúlyt. Mérlegre helyezett szállítócsővel a csőben egyidejűleg jelenlevő szemek súlyát tehát megmérhetjük. Anyagszállítás közben 1 m hosszú cső éppen a q_a anyagáram folyóméter súlyával nehezebb, mint üresjáráskor.

A folyómétersúly mérésének ez az egyszerű módja egyúttal az anyagsebesség egyszerű meghatározását is lehetővé teszi, ha a folyómétersúly mérésével egyidőben a Q_t szállítóteljesítményt is megmérjük

$$c_t = \frac{Q_a}{q_a} \qquad \text{(m/mp)}.$$

118. példa. Vízszintes, egyenletes búzaszállítás szlipjét kívánjuk kiszámítani. Ehhez a (397)-tel kifejezett A állandót kell először kiszámítani. A szükséges adatok: Egy búzaszem súlya: $G_a = 37 \cdot 10^{-6}$ kg, a légáram fajsúlya (szívó üzemben), $\gamma_g = 1{,}1$ kg/m³, a mérések alapján adódó szemkeresztmetszet és ellenállástényező szorzata: $f_0 c_e = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ m², a vízszintes szállítási tényező: $k_v = 0{,}023$/m.

Ezekkel:

$$A = \frac{2 \cdot 37 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}023}{1{,}1 \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}238$$

és a szlip a (398) szerint

$$s = \frac{-0{,}238 + \sqrt{0{,}057 + 4 \cdot 0{,}238}}{2} = \mathbf{0{,}384},$$

azaz $s = 38{,}4\%$.

A gabonaszemek nagysága a felvett értékhez képest szórást mutatnak. Erre való tekintettel *gabonaszállító berendezés méretezéséhez a szlip számértékét $s = 40\%$-ra felkerekített értékkel vesszük számításba.*

A (399)-ben szereplő ξ_v tényező értéke:

$$\xi_v = \frac{2 k_v}{1 - s} = \frac{2 \cdot 0{,}023}{1 - 0{,}4} = 0{,}077/\text{m} = \mathbf{7{,}7\ \%/m}.$$

Ez azt jelenti, hogy gabonaszállítás közben folyóméterenként a szállított anyag lendületének 7,7%-át kell pótolni.

125. Anyagszállítás függőleges csőben

Függőleges szállítócsőben csak a (364) — (366) egyenletekkel kifejezett határsebességnél, azaz az ún. **lebegési sebességnél** nagyobb légsebesség esetén indulhat meg az anyagszállítás. A jelentkező nyomásesések a vízszintes szállításnál látottakhoz képest eltérnek, mert a csőben levő szemek emeléséhez is nyomáskülönbségre van szükség.

$H = 1$ m hosszú csőszakaszra átszámított egyenletes búzaszállítási Δp_f nyomáseséseket látunk a *200. ábrán*, két különböző ($Q_a = 1{,}9$ kg/mp, illetve $Q_a = 0{,}83$ kg/mp) szállítóteljesítmény esetében. A szállítócső $D = 130$ mm, a szállítást szívóüzemben levegő végzi.

A függőleges egyenletes anyagszállításnál jelentkező Δp_f nyomásesés a következő részekre osztható:

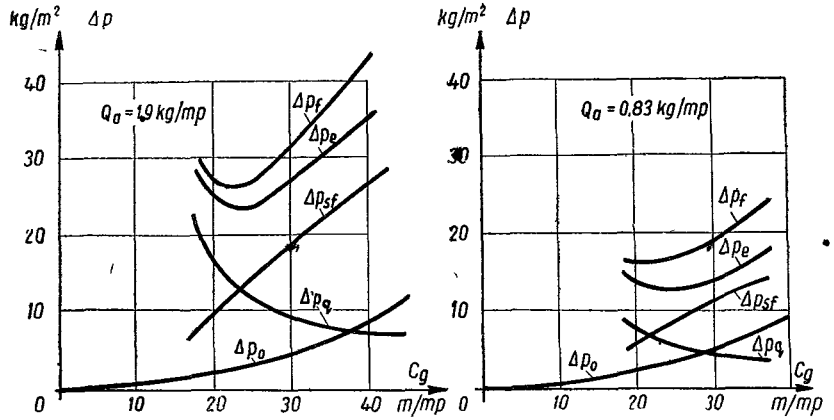
A függőleges anyagszállításkor jelentkező nyomásesésből az **üresjárási nyomásesés** (Δp_0) grafikus kivonása után kapható:

$$\Delta p_e = \Delta p_f - \Delta p_0, \tag{400}$$

amely a szemeknek a **függőleges csőben történő ütközéséből adódó többletnyomás** (Δp_{sf}) és a csőben levő **szemek emeléséhez szükséges nyomásesés** (Δp_q) összege:

$$\Delta p_e = \Delta p_{sf} + \Delta p_q. \tag{401}$$

A függőleges anyagszállításkor jelentkező többletnyomás (Δp_e) részekre bontása most is az erőhatásokkal magyarázható. Függőleges szállításkor a szemet hajtó



200. ábra. Függőleges szállításnál jelentkező nyomásesések. Szívó üzemű búzaszállítás, $D = 130$ mm, $H = 1$ m

P_1 erőnek (mely most is a (363)-ból számítható), nemcsak a szemek ütközéséből származó S_1 visszatartó erőt kell legyőznie, hanem ezen felül a szállított szem G_a súlyát is, azaz

$$P_1 = S_1 + G_a.$$

A szakirodalomban elterjedt az a tévedés, amely szerint a függőleges anyagszállítás relatív sebessége ($w = c_g - c_a$) a w_0 lebegtetési sebességgel egyenlő. A szemek lebegését eredményező $c_a = 0$ anyagsebességnél a szemek relatív sebessége valóban $w = w_0$. Értéke mint láttuk $P_1 = G_a$ feltételből a (392) szerint számítható.

Anyagszállításnál a szemek ütközési ellenállása miatt ($S_1 > 0$) a relatív sebességnek mindig nagyobbnak kell lennie a lebegési határsebességnél. Vagyis anyagszállításnál:

$$c_a > 0 \quad \text{és} \quad w > w_0,$$

mert ebben az esetben a G_a szemsúlynál nagyobb a hajtóerőszükséglet és ez csak nagyobb relatív sebességgel jöhet létre.

A függőleges szállításkor jelentkező többletnyomás részeinek számítási módja:

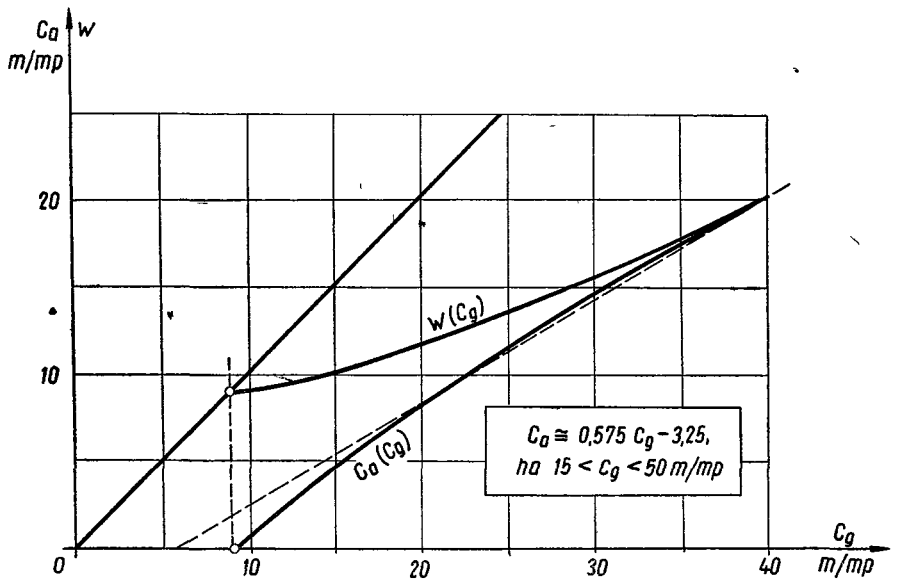
A csőben levő **anyag emeléséhez szükséges nyomásesés:**

$$\Delta p_q = H \frac{q_a}{F} = H \frac{Q_a}{c_a F} \qquad (\mathrm{kg/m^2}). \tag{402}$$

Az **ütközésből adódó többletnyomás:**

$$\Delta p_{sf} = H k_f \frac{Q_a c_t}{g F} \qquad (\mathrm{kg/m^2}), \tag{403}$$

ahol H (m) a függőleges szállítás magassága és



201. ábra. Függőleges egyenletes gabonaszállítás sebességei a légsebesség függvényében

k_f (1/m) függőleges ütközési tényező méréssel határozható meg, s a szállított anyagra jellemző érték. A (403) összefüggés alakilag hasonló a vízszintes szállítás többletnyomás számításának (390) összefüggéséhez. A különbség csupán az, hogy a függőleges szállításnál az ütközésekből származó többletnyomást nem lehet gázsebességre vonatkozó állandóval kifejezni, mert — mint a *201. ábrából* is látható — függőleges szállításnál nincs lineáris kapcsolat a gáz és az anyagsebesség között. (A szlip nem állandó.)

A k_f tényező értéke gabonaszállítás esetében:

$$\boxed{k_f = 0{,}093/\mathrm{m}.}$$

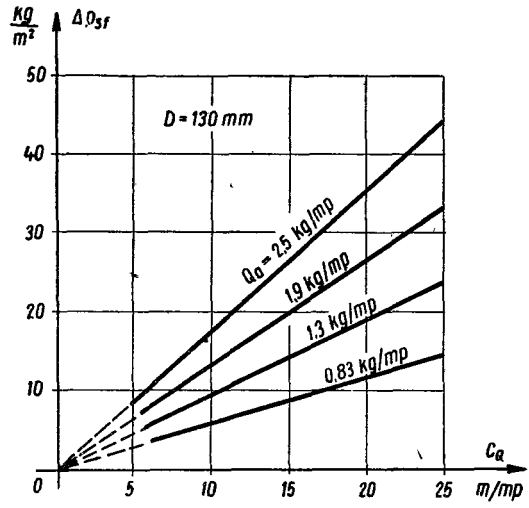
A függőleges szállítócsőben létrejövő nyomásesések számításához tehát ismerni kell a $c_a\,(c_g)$ *vagy* $w\,(c_g)$ *függvényt.* Gabonaszállításra vonatkozó anyag-, valamint relatív sebességet a légsebesség függvényében a *201. ábrán* láthatjuk.

A k_f tényező fizikai értelmezése hasonló a vízszintes szállításnál látott k_v tényezőhöz, vagyis a szemek ütközése miatt jelentkező energiaveszteséggel magyarázható. Ha a függőlegesen szállított szemek ütközése folytán előálló lendületapadás jellemzésére — a vízszintes szállításnál részletesen tárgyalt módnak megfelelően (l. a 124. pontot) — egy ξ_f tényezőt vezetünk be, ennek értéke a k_f tényezővel kifejezve:

$$\xi_f = 2\,k_f \qquad (1/\mathrm{m}).$$

Gabonaszállításnál ezek szerint $\xi_f = 0{,}186/\mathrm{m} = 18{,}6\%/\mathrm{m}$. Az egyes szemek az ütközések miatt tehát elveszítenék lendületük 18,6%-át folyóméterenként, ha ezt az energiát a Δp_{sf} nyomásesés újragyorsítás révén nem pótolná.

Függőleges anyagszállításnál a szemek ütközéséből adódó többletnyomásesés (Δp_{sf}) és a vízszintes szállítási többletnyomásesés közös tulajdonságait a *202. ábrán* látjuk, ha ezt az ábrát az *196. ábrával* összehasonlítjuk. Az anyagsebesség függvényében ábrázolt Δp_{sf} nyomásesések origóból kiinduló egyenesek, a görbék iránytangensei pedig a szállítóteljesítménnyel arányosak.



202. ábra. Függőleges gabonaszállításnál a szemek ütközéséből adódó nyomásesés az anyagsebesség függvényében; $D = 130$ mm, $H = 1$ m

126. A függőleges szállítás sebességviszonyai

Az előző pontban a *201. ábrával* ismertetett sebességviszonyok kialakulása még magyarázatra szorul. A sebességviszonyok vizsgálatát most is az erőjátékból kiindulva végezhetjük.

Egy H hosszúságú és F keresztmetszetű cső végei között jelentkező erők egyensúlya, ha a csőben egyidejűleg n szem van:

$$n\,P_1 = H\,q_a + n\,S_1,$$

vagyis a *hajtóerők összege* ($n\,P_1$) *a csőben levő szemek emelésére* ($n\,G_1 = H\,q_a$) *és az ütközésből származó erők* ($n\,S_1$) *fedezésére szolgál.*

Ebbe az egyenletbe helyettesítjük a következő értékeket: $n = HQ_a/c_a\,G_a$, $P_1 = \gamma_g\,f_0\,e_e\,w^2/2g$, $q_a = Q_a/c_a$, valamint $n\,S_1$ ütközési erők összegét az ütközésből származó nyomásesésekkel kifejezve: $n\,S_1 = H\,k_f\,Q_a\,c_a/g$:

$$H\frac{Q_a}{c_1\,G_1}\frac{\gamma_g}{2g}f_0\,e_e\,w^2 = H\,\frac{Q_1}{c_a} + H\,k_f\frac{Q_a\,c_1}{g}\,.$$

Ez az egyenlet rendezés után a következő alakra hozható:

$$w^2 - w_0^2 - A' c_a^2 = 0.$$

Itt w_0 a lebegési határsebesség és

$$A' = \frac{2 G_a k_f}{\gamma_g f_0 c_e}$$

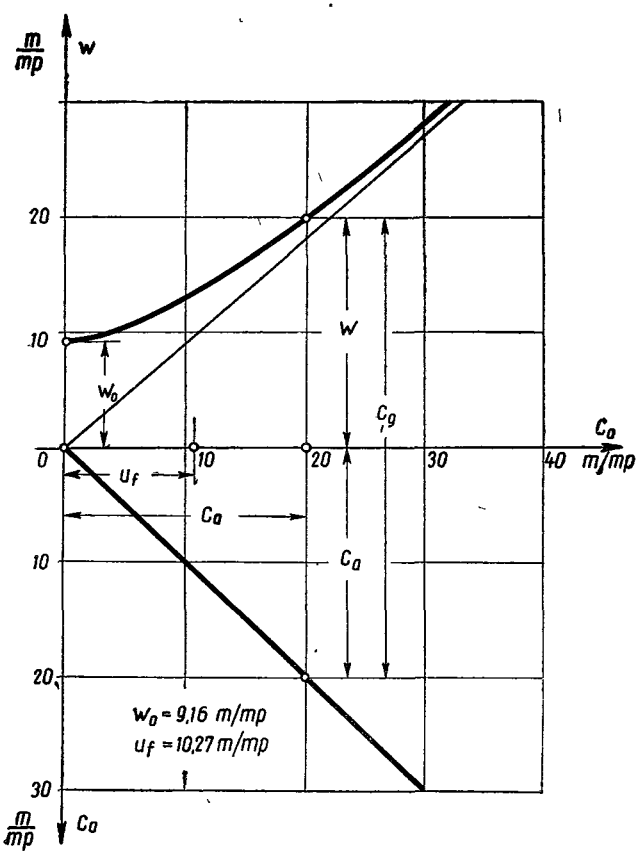
a szállított anyag jellemzőitől függő állandó.

Ha a w relatív sebességet kifejezzük az anyagsebesség függvényében:

$$w = \sqrt{w_0^2 + A' c_a^2} \quad \text{(m/mp)}. \tag{404}$$

Ez az egyenlet — a *203. ábrán* gabonaszállítás esetére megrajzolt — hiperbolát jellemez.

A függőlegesen szállított anyag visszamaradásának w sebessége tehát a szállítás megindulásakor a lebegési határsebességgel egyenlő ($w = w_0$, ha $c_a = 0$), az anyagszállítás sebességének növekedésével folytonosan nő olyképpen, hogy a folytonosan csökkenő szlip egy a hiperbola aszimptotájának iránytangensével megszabott alsó $s_{f\infty}$ határérték felé közeledik.



203. ábra. Függőleges anyagszállítás sebességi diagramja gabonaszállításnál

A függőleges szállítás szlipje ugyanis:

$$s_f = \frac{w}{w + c_a} \tag{405}$$

ellentétben a vízszintes szállítás szlipjével *nem állandó* érték. A szlip alsó határértéke pedig a *203. ábra* szerint

$$s_{f\infty} = \frac{w_0}{w_0 + u_f} \tag{406}$$

A (406) egyenletben felírt u_f sebességi paraméter a ξ_f ütközési tényezővel fejezhető ki:

$$u_f = \sqrt{\frac{2g}{\xi_f}} \quad \text{(m/mp)}. \tag{407}$$

Az u_f sebességi paraméter bevezetésével a függőleges szállítás relatív sebessége még a következőképpen is kifejezhető:

$$w = w_0 \sqrt{\left(\frac{c_a}{u_f}\right)^2 + 1} \qquad \text{(m/mp)}. \qquad (408)$$

A *203. ábra* teljes áttekintést ad a sebességek várható kialakulásáról, mert abból a c_g légsebesség is leolvasható, mint a w ordináta és az abszcisszatengelyről az ordinátatengelyre (45°-os sugárral) átvetített c_a ordináta összege. Egyébként a gabonaszállításra vonatkozó $w(c_a)$ görbe metszékei a *201. ábrán* szemléltetett függvényábra adataival is összevágnak.

119. példa. A függőlegesen szállított gabona lebegési határsebessége (a kísérlet szerint): $w_0 = 9{,}16$ m/mp.

Az u_f sebességi paraméter a (407) szerint:

$$u_f = \sqrt{\frac{19{,}62}{0{,}186}} = 10{,}27 \text{ m/mp}.$$

A szlip alsó határértéke (406) alapján:

$$s_{f\infty} = \frac{9{,}16}{9{,}16 + 10{,}27} = 0{,}47.$$

$c_a = 20$ m/mp anyagsebességnél a relatív sebesség (408)-ból:

$$\mathbf{w = 9{,}16 \sqrt{\left(\frac{20}{10{,}27}\right)^2 + 1} = 20 \text{ m/mp}.}$$

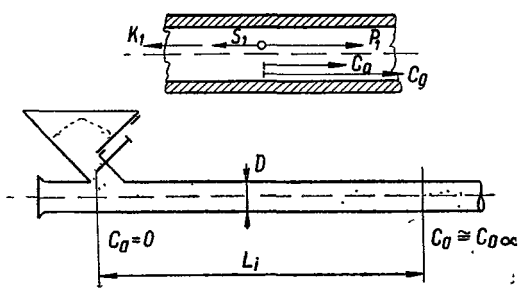
A légáram sebessége tehát $c_g = c_a + w = 20 + 20 = 40$ m/mp és a szlip

$$\mathbf{s = \frac{w}{c_g} = \frac{20}{40} = 0{,}5 = 50\%}.$$

127. Az indítószakasz

Az adagolót követő ún. **indítószakaszban** $c_a = 0$ kezdősebességű szemek az egyenletes üzemnek megfelelő $c_a = c_{a\infty}$ sebességre gyorsulnak fel. A felgyorsításhoz szükséges Δp_d nyomásesés számításának módját a 123. pontban már láttuk.

Az *indítószakaszban az egy szemre ható hajtóerő és a mozgást gátló visszatartó erők nincsenek egyensúlyban*, hanem vízszintes szállításnál $P_1 > S_1$, függőleges szállításnál pedig $P_1 > S_1 + G_1$, a szem tehát gyorsulva fog mozogni. (Vízszintes szállításra vonatkozó erőjátékot l. a *204. ábrán.)*



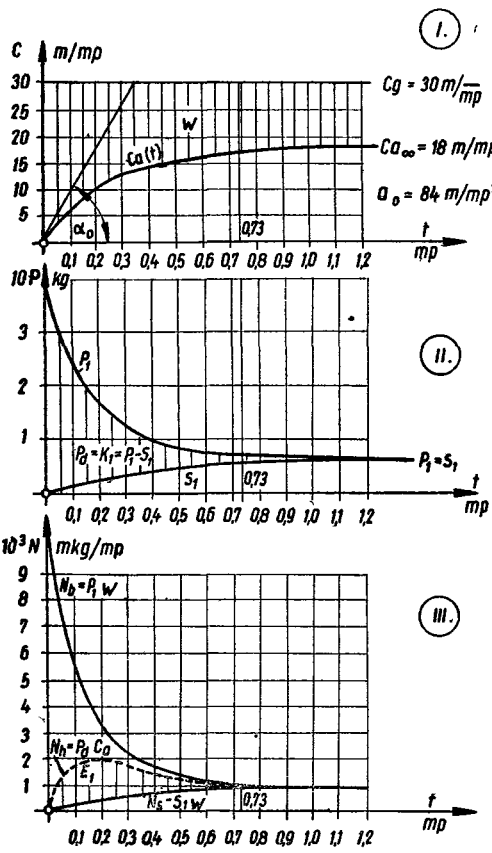
204. ábra. Vízszintes indítószakasz

Erőegyensúlyi egyenletet írhatunk fel most is, ha a gyorsítás következtében fellépő tehetetlenségi erőt (K_1) bevezetjük. Ezzel az erőegyenlet **vízszintes** indításnál:

$$P_1 = S_1 + K_1.$$

Végezzük el a következő helyettesítéseket: a P_1 hajtóerőt mint aerodinamikai erőt a (363)-ból kifejezve $w = c_g - c_a$ helyettesítéssel: $P_1 = \gamma_g f_0 c_e (c_g - c_a)^2/2g$; az ütközésekből adódó S_1 erőt a 124. pontban leírt módon a ξ_v lendületapadási tényező segítségével kifejezve: $S_1 = \xi_v G_a c_a^2/2g$; K_1 tehetetlenségi erőt pedig a $K_1 = m_a \, dc_a/dt$ egyenlettel. Ekkor az indítószakaszban a szem mozgására jellemző alapegyenletet kapjuk:

$$\frac{\gamma_g}{2g} f_0 c_e (c_g - c_a)^2 = \xi_v \frac{G_a c_a^2}{2g} + \frac{G_a}{g_a} \frac{dc_a}{dt}. \qquad (409)$$



205. ábra. Vízszintes indítószakaszban a sebességek (*I*), az erők (*II*) és a teljesítmények (*III*) az idő függvényében. Anyag: búza, $c_g = 30$ m/mp

Ez a differenciálegyenlet határozza meg a mozgástörvényeket a vízszintes indítószakaszban. Megoldása — a szlip értékének helyettesítésével —

$$c_a = c_g (1 - s) \frac{1 - e^{-\alpha t}}{1 - (1 - 2s) e^{-\alpha t}} \quad \text{(m/mp)}. \qquad (410)$$

Itt a szlip mindig az egyenletes üzemhez tartozó állandó értékű szlipet jelenti és

$$\alpha = c_g \sqrt{\frac{\xi_v \gamma_g f_0 c_e}{G_t}} = \frac{c_g}{w_0} \sqrt{2g \xi_v}, \qquad (411)$$

ahol w_0 a (364/g) szerint számítható.

A (410) egyenlet görbéjének lefolyása a *205/I. ábrán* látható, búza $c_g = 30$ m/mp légsebességgel történő indítása esetében. **Az anyagsebesség** — mint az a görbén is látható — **aszimptotikusan közeledik az egyenletes üzemállapothoz tartozó értékéhez:** $c_a \to c_{a\infty}$, melyet tulajdonképpen csak végtelen idő múlva érne el.

A szem felgyorsításának ideje, az ún. **indítási idő** elvileg végtelen volna, hacsak az anyagsebesség felső értékét egy bizonyos kis h hibával nem korlátozzuk. Ha befejezettnek tekintjük az indítást, amikor a c_a anyagsebesség eléri a $c_{a'} = (1 - h)\, c_{a\infty}$ értéket, az ehhez tartozó t_i indítási időt a (410) inverzéből számíthatjuk:

$$t_i = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1 - c\,/c_{a\infty}}{1 - (1 - 2s)\, c_a/c_{a\infty}} \quad \text{(mp)}. \qquad (412)$$

Az indítási idő, a h felgyorsítási hiba rögzítése esetén — a (412) és (411) összevetésével kiolvashatóan — a c_g *gázsebességgel fordítottan arányos*. Kis gázsebességgel indításkor tehát a szemek sokáig tartózkodnak az indítószakaszban. Az anyagmennyiség folyamatos adagolásakor ilyen esetben az adagolót követő csőszakaszban a keverék súlyaránya nagyon megnő. Ez pedig a szemek lerakódásához, esetleg a szállítás folyamatosságának teljes megszűnéséhez (dugulás) vezethet. Van tehát a vízszintes szállításnak is egy alsó gázsebességhatára. (Részletesen l. a 128. pontban).

A **szem gyorsulása** a (410) egyenlet idő szerinti deriváltja:

$$a = \frac{\mathrm{d}c_a}{\mathrm{d}\,t} = 2\, c_g\,(1 - s)\, \frac{\alpha\, s\, e^{-\alpha t}}{1 - 2(1 - 2s)e^{-\alpha t} + (1 - 2s)^2\, e^{-2\alpha t}} \quad \text{(m/mp}^2\text{)} \qquad (413)$$

A szem kezdő vagyis $t = 0$ időhöz tartozó **gyorsulása:**

$$a_0 = c_g\,(1 - s)\frac{\alpha}{2s} = c_{a\infty}\frac{\alpha}{2s} \quad \text{(m/mp}^2\text{)}. \qquad (414)$$

A szemek felgyorsítási hibájának megadásával meghatározható az **indítási úthossz:** az a csőhossz, amelyen belül a szemek felgyorsítása megtörténik. A (410) egyenlet integrálásával az út-idő: $L_i\,(t)$ összefüggést megkapjuk:

$$L_i = \int_0^{t_i} c_a\, \mathrm{d}t = c_g\,(1 - s)\left[t_i - \frac{2\,s}{\alpha(1 - 2s)} \ln \frac{1 - (1 - 2s)\, e^{-\alpha t_i}}{2\,s}\right] \text{(m)}. \qquad (415)$$

A (415) egyenletből az a meglepő eredmény olvasható ki, hogy ha egy bizonyos anyag szállításánál az indítási időt (és ezzel az indítási utat is) a szemek felgyorsulásának h hibaszázalékával korlátozzuk, az L_i indítóhossz független az indításnál alkalmazott légsebességtől. (A jobb oldali zárójelbeli kifejezésben ugyanis t_i fordítottan és α egyenesen arányos c_g-vel, ami a (411) és (412) egyenletből közvetlenül belátható.) *Vízszintes szállításnál tehát az indítási úthossz csak a szállított anyag fajtájától függ.* Értékének ismerete a szállító berendezés elkészítésénél azért lényeges, mert az indítószakaszon belül akármilyen zavaró hatás — akár csak egy ív is — könnyen dugulásához vezethet, illetve az üzembiztonság végett (a dugulás elkerülésére) a szállítást végző gázsebességet a különben alkalmazható értéknél jóval nagyobbra kell választanunk.

A *205. ábrán* búza $c_j = 30$ m/mp-es légsebességgel történő indításánál fellépő erők és teljesítmények is láthatók az idő függvényében.

A *205/II. ábrán* levő P_1 hajtóerő az I. ábrából leolvasható ($c_g - c_a$ kivonásból adódó) w relatív sebesség négyzetével arányos. Az S_1 ütközésből adódó visszatartó erő pedig a c_a anyagsebesség négyzetével arányos. E két erő különbsége a gyorsítóerő (P_d), illetve a gyorsítóerővel megegyező nagyságú, de ellenkező értelmű tehetetlenségi erő (K_1).

A *205/III. ábra* a teljesítmények ábrája. Az indításhoz bevezetendő teljesítmény:

$$N_b = P_1 w \qquad \text{(mkg/mp)}.$$

Az ütközésből adódó visszatartó erők teljesítménye:

$$N_s = S_1 w \qquad \text{(mkg/mp)}.$$

A gyorsítóerők teljesítménye:

$$N_h = P_d c_a \qquad \text{(mkg/mp)}.$$

Ezen az ábrán a görbék alatti területek munkát jelentenek. Az N_h görbe alatti terület az N_s görbéig (az ábrán vonalkázással kiemelt) a gyorsítóerők munkája, vagyis a felgyorsított szem lendülete. Értéke számítással is meghatározható:

$$E_1 = \frac{G_a c_a^2}{2g} \qquad \text{(mkg)}.$$

Az itt részletesen tárgyalt vízszintes indítószakasz mozgás- és energiaviszonyaihoz képest a **függőleges** indítás viszonyai kis mértékben eltérnek. Az eltérés annál nagyobb, minél nagyobb a szállított szem súlya. A pontos számítást úgy végezhetjük el, hogy a vízszintes szem mozgására jellemző (409) egyenlet jobb oldalához még a G_a súlyerőt is hozzáadjuk. [75]

120. példa. Vizsgáljuk meg búza $c_g = 30$ m/mp-es légsebességgel történő indítását (l. a példa adatai alapján szerkesztett *205. ábrát)*.

Az indítás első pillanatában ($t = 0$ időben), amikor az anyagsebesség $c_a = 0$ és $w = c_i$, a jelentkező hajtóerő ($\gamma_g = 1{,}2$ kg/m³ és $f_0 \mathbf{e}_i = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ m²-rel):

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\gamma_g}{2g} f_0 \, \mathbf{e}_e \, c_g = \mathbf{3{,}5 \cdot 10^{-4}\ kg}.$$

A kezdőgyorsulás értéke akár a (414)-ből $\sigma = 3{,}8$ és $s = 0{,}4$ értékkel, akár a most kiszámított $P_0 = ma_0$ hajtóerőből

$$a_0 = 84 \text{ m/mp}^2.$$

Az indítási idő, ha a szemek felgyorsulásánál $h = 5\%$-os hibát engedunk meg (azaz befejezettnek tekintjük az indítást, ha $c_{a\infty} = (1 - s)\, c_g = 18$ m/mp-es anyagsebesség helyett elérünk $c_{i\infty} = (1 - h)c_i = (1 - 0{,}05)18 = 17{,}1$ m/mp-es anyagsebességet):

$$t_i = 0{,}73 \text{ mp},$$

és ehhez a felgyorsítási hibához tartozó indítási úthossz a (415)-ből:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{9{,}2\ m}.$$

Ez az úthossz a szállító légsebesség értékétől független. Ha tehát egyenletes búzaszállítást kívánunk vizsgálni vízszintes szállítócsőben, az adagoló után mintegy 10 m-rel kezdhetjük a méréseket.

Függőleges szállítócsőben $c_g = 30$ m/mp-es sebességgel indított búza — $h = 5\%$-os felgyorsulási hibát megengedve — már $H_i = 4{,}8$ m-es úthosszon felgyorsul az egyenletes üzemállapot közelébe. A függőleges indítási út a vízszinteshez képest azért rövidebb, mert a szemet kisebb végsebességre kell felgyorsítanunk függőleges szállításnál.

128. A szállítógázáram határsebességei

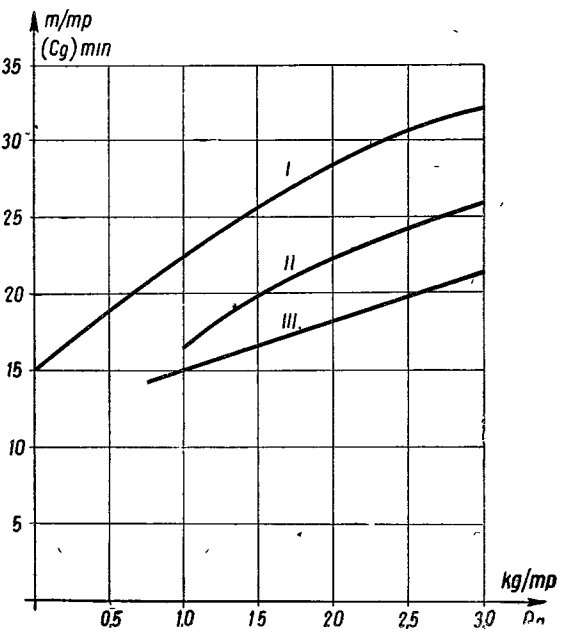
A szállítógáz c_g sebességének választását korlátozza egy felső és egy alsó határérték. A megengedhető üzemi sebesség:

$$(c_g)_{min} < c_g < (c_g)_{max},$$

ahol a gázsebesség maximumát voltaképpen a szállított anyag megengedhető $(c_a)_{max}$ sebessége szabja meg (pl.: gabonaszállításnál a szemek törése a korlát), míg a minimális gázsebesség a dugulásmentes üzemet biztosító legkisebb sebesség, amely fölött az üzem zavartalansága érdekében kell maradni. A szállítógáz sebességének kisebbedésével a csövet kitöltő anyag mennyisége rohamosan nő, majd az anyagszállítás megszűnik, a szemek a cső falán lerakódnak, és a cső hamar eldugul.

Az **üzembiztos szállítást biztosító minimális gázsebesség** a szállítócső alakjától, a szállított anyag mennyiségétől és fajtájától függ, míg a cső átmérőjétől (a szállításnál szóba jövő csőméret határokon belül, azaz $D = 50-400$ mm között) gyakorlatilag független.

A *206. ábrán* I. búza, II. salak, III. pernye minimális szállító légsebessége látható a szállítóteljesítmény függvényében, ha a szállítócső vízszintes egyenes. Az ábrán közölt minimális sebességek csak egyenletes adagolásra vonatkoznak. Ha az anyagmennyiség adagolása nem egyenletes, az adagolt anyagmennyiség pillanatnyi maximuma szabja meg a minimális gázsebességet.

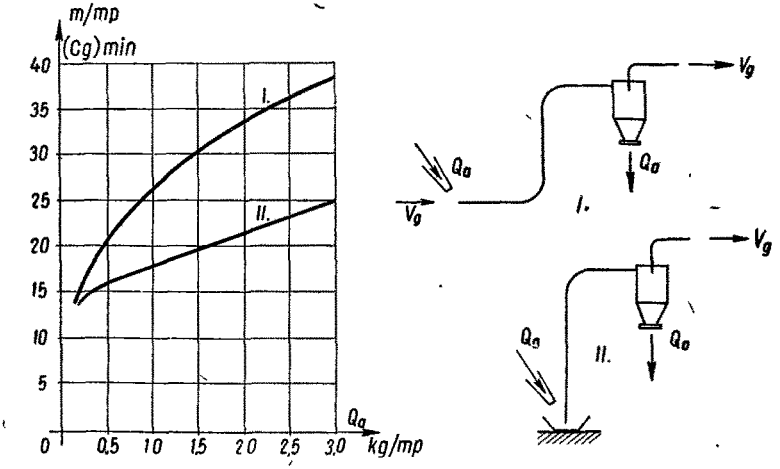


206. ábra. Búza (*I*), salak (*II*), pernye (*III*) minimális szállító légsebessége vízszintes szállítócsőben

A minimális szállítósebességet lényegesen befolyásolja a szállítócső alakja is. Ha a szállítócsőben ívek is vannak, az alkalmazandó minimális szállítósebességet

lényegesen nagyobbra kell választanunk, mint egyenes cső esetében. A *207. ábrán* nyersfoszfát szállításához szükséges minimális légsebességek láthatók. (A nyersfoszfát $d_0 = 10 - 150$ mikron közötti szemnagyságú, $\gamma_a = 3000$ kg/m³ fajsúlyú anyag). Ha az alkalmazott szállítócsőben vízszintesből függőlegesbe vezető és függőlegesből vízszintesbe vezető ív is van (I. görbe), a minimális légsebesség nagyobb, mintha csak függőlegesből vízszintesbe vezető ívet alkalmazunk.

Az anyagszállítás folyamatosságának megszűnése (dugulás) szempontjából az ívek térbeli elhelyezkedése nem közömbös. Függőleges irányból vízszintesbe vezető ív alig jelent veszélyt dugulás szempontjából, mert ilyen ívnél lerakódás nehezen indulhat meg. Ívekben ugyanis a lerakódás mindig az ív külső kerületén kezdődik a centrifugális erő hatására. Függőlegesből vízszintesbe vezető ívnél ez



207. ábra. A legkisebb légsebesség nyersfoszfát szállításánál, két különböző alakú csővezeték esetében

a külső kerület az ív felső részén van, ahova ha lerakódnak anyagszemek, ezek a saját súlyuk hatására vissza fognak esni a szállítócső belseje felé, és ott az áramló gáz ismét magával ragadja, továbbszállítja.

Éppen ellenkező a helyzet vízszintes irányból függőleges irányba vezető ívnél, mert ott a centrifugális erő is és a súlyerő is a szemeket a cső aljára kényszeríti és hacsak a szállítógáz sebessége nem elegendő nagy, ott le is rakódnak. Ha a szállítócsőben vízszintesből függőlegesbe vezető ív is van, és nem kellő értékű az alkalmazott gázsebesség, mindig ennél az ívnél kezdődik az anyag lerakódása, dugulása. Ezért, ha a csővezeték vonalvezetése lehetővé teszi, ilyen ívet ne alkalmazzunk.

121. példa. Malom pneumatikus szállítóberendezésének a feladata, hogy a malmi féltermékeket a hengerszéktől a magasabb szinten levő szitához szállítsa. A *208. ábra* a feladat megoldására alkalmas két különböző alakú csővezeték vonalvezetést mutat. Az I. elrendezés szerint a csővezeték 180°-os $R_1 = 600$ mm görbületi sugarú ívvel kezdődik, majd $H = 8{,}5$ m hosszon függőlegesen az épület fala mellett halad, majd pedig $R_2 = 1{,}5$ m görbületi sugárral vízszintesbe megy át, és rövid $L = 1{,}0$ m vízszintes szakasszal eléri a szita fölött elhelyezett ciklont. Ehhez a csővezeték

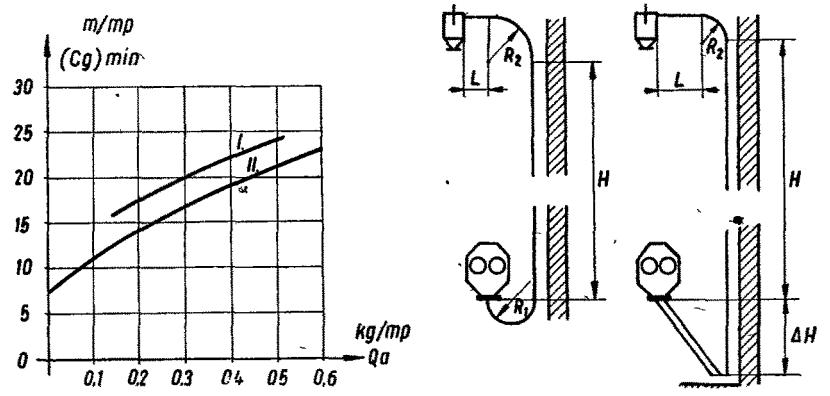
alakhoz tartozó minimális légsebesség értékeket a Q_a szállítóteljesítmény függvényében első töret szállításakor az ábrán közölt diagram I. görbéje mutatja.

A II. elrendezés szerint a hengerszéktől surrantón vezetjük a szállítandó anyagot az épület fala mellett függőlegesen ΔH-val meghosszabbított cső alá. A szállítócső függőleges hossza az I. elrendezéshez képest $\Delta H = 1{,}8$ m-rel meghosszabbodott, viszont a most alkalmazható minimális légsebesség görbe (II) jóval az előbbi görbe alatt jár.

A kétféle elrendezés közül azzal dolgozhatunk gazdaságosabban, amelyiknél ugyanakkora szállítóteljesítménynél kevesebb a szállításhoz használt légáram teljesítménye. Egy $Q_a = 3$ vagon/nap (megfelel $Q_a = 0{,}35$ kg/mp-nek) kapacitású malomban a mérések szerint az első töret szállításához az I. elrendezés esetében szükséges légsebesség

$$c_g = 22 \text{ m/mp}, \text{ és } \Delta p = 615 \text{ kg/m}^2$$

nyomásesés jelentkezik a $d = 83$ mm átmérőjű szállítócső végéig (a ciklonba csatlakozásig terjedő szakaszban).



208. ábra. A legkisebb légsebesség első töret szállításánál, két különböző alakú szállítócső esetében

A szállítást végző légmennyiség ($F = 0{,}0054$ m²-es csőkeresztmetszettel):

$$V_g = F \cdot c_g = 0{,}0054 \cdot 22 = 0{,}119 \text{ m}^3/\text{mp}.$$

A szállítást végző levegő teljesítménye:

$$N = \frac{V_g \, \Delta p}{75} = \frac{0{,}119 \cdot 615}{75} = \mathbf{0{,}98 \text{ LE}}.$$

Ha a szállítást a II. elrendezés szerint végezzük változatlan szállítóteljesítmény és csőátmérő esetében, a szükséges légsebesség, illetve a csővezeték végéig terjedő nyomásesés:

$$c_g = 17 \text{ m/mp} \text{ és } \Delta p = 465 \text{ kg/m}^2.$$

A légmennyiség értéke most $V_g = 0{,}0054 \cdot 17 = 0{,}092$ m³/mp.
A levegő teljesítménye:

$$N = \frac{V_g \, \Delta p}{75} = \frac{0{,}092 \cdot 465}{75} = \mathbf{0{,}57 \text{ LE}}$$

jóval kevesebb, mint amennyi az I. elrendezés esetén adódott.

A II. elrendezésnek még az is az előnye az I-hez képest, hogy ott dugulás nem fordulhat elő, legfeljebb a surrantón érkező anyagmennyiséget nem teljes egészében szívja fel a függőleges cső.

129. A szállítás gazdaságossága

Pneumatikus szállító berendezések energiafogyasztása általában jóval nagyobb, mint a mechanikus elven működő szállító berendezéseké. Éppen ezért olyan helyen alkalmazzák elsősorban, ahol a pneumatikus szállítás előnye jelentősebb, mint a nagy energiafogyasztásból adódó költségtöbblet (pl.: pormentes rakodás, mérgező anyagok szállítása vegyi üzemekben, vagy időszakos üzem, ahol a nagy energiafogyasztásból adódó többletköltség megtérül, a kis beruházási költséggel előállítható pneumatikus berendezés felépítésekor.) Üzeme mindenképpen gazdaságos, ha alkalmazásával emberi munkaerőt tudunk megtakarítani.

Pneumatikus szállító berendezésnél a szállítás műszaki jellemzői nagymértékben befolyásolják az üzem gazdaságosságát (az energiafogyasztást). Függőleges szállításnál szállítás közben az anyag helyzeti energiáját megnöveljük, H (m) magasság esetén másodpercenként:

$$N_h = Q_a H \quad \text{(mkg/mp)}$$

értékkel, és ehhez a szállító gázárammal bevezetendő teljesítmény:

$$N_b = V_g \Delta p_f \quad \text{(mkg/mp)},$$

ahol Δp_f a H méter hosszú függőleges csőben egyenletes szállításkor jelentkező nyomásesés. A két teljesítmény hányadosa a **függőleges szállítás hatásfoka:**

$$\eta = \frac{Q_a H}{V_g \Delta p_f}. \tag{416}$$

Vízszintes szállításnál az üzem gazdaságosságát a hatásfok mintájára felírt **ún. jósági fokkal** jellemezhetjük:

$$j = \frac{Q_a L}{V_g \Delta p_v} \tag{417}$$

ahol Δp_v az L méter hosszú vízszintes csőszakaszban egyenletes szállításkor jelentkező nyomásesés.

A *209. ábrán* $D = 130$ mm átmérőjű és a kijelölt Q_a = állandó szállítóteljesítményekhez, mint paraméterekhez vízszintes gabonaszállítás jósági foka látható a c_g légsebesség függvényében. A görbék azt mutatják, hogy a légáram c_g sebességének csökkentésével a vízszintes szállítás jósági foka rohamosan növekszik. Azonos sebesség esetében a Q_a szállítóteljesítmény növekedésével javul az üzem gazdaságossága.

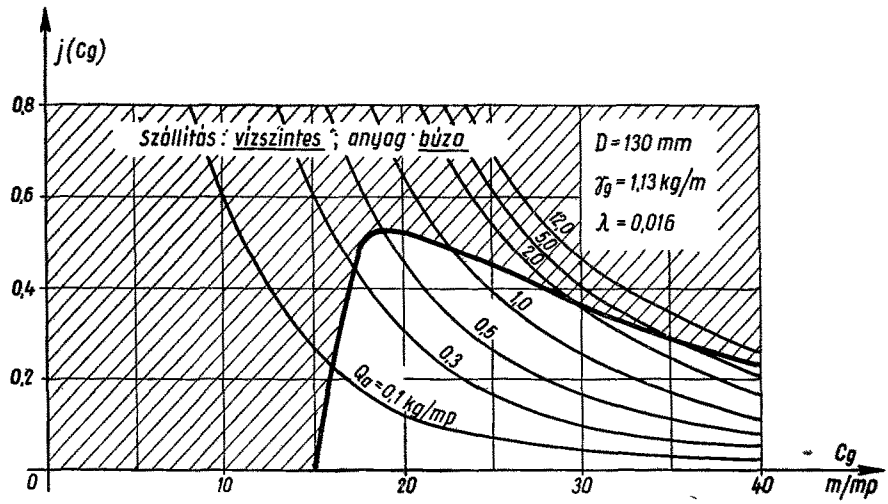
Ez a megállapítás azonban csak a görbesereg alakjára érvényes, de a berendezés üzemére nem vonatkoztatható, mert az üzembiztos (dugulásmentes) anyagszállítás érdekében a görbeseregnek csak a $(c_g)_{min}$ alsó határsebesség fölött járó szakaszai vehetők figyelembe.

Ha a *209. ábrán* minden Q_a görbén kijelöljük a $(c_g)_{min}$ határpontokat, akkor e pontokat összekötő határgörbével kirekesztettük a diagramnak azt a (vonalkázással jelölt) területrészét, amely anyagszállítás szempontjából számításba

nem vehető. A *209. ábra* jól szemlélteti az üzembiztos szállítás tartományát, melynek alakjából az alábbi következtetések vonhatók le:

a) Bármely Q_a szállítóteljesítmény választása esetén mindig *a légáram alsó határsebessége biztosítja a leggazdaságosabb uzemet,* mert a vízszintes szállítás jósági foka a még megengedhető legkisebb légsebességnél a legnagyobb.

b) Előírt csőátmérő esetében *a vízszintes szállítás jósági foka csak az anyagszállítás kezdetén* (gabonaszállításnál mintegy $Q_a = 0{,}5$ kg/mp értékig) *növekszik egy legnagyobb értékig, azontúl azonban a Q_a szállítóteljesítmény növelésével a jósági fok kisebbedik.* A gazdaságos üzemvitel követelménye tehát — az elterjedt felfogással ellentétben — a kisebb szállítóteljesítmények választását indokolja.



209. ábra. A szállítás jósági foka a légsebesség függvényében

Könnyen igazolható, hogy a **csőátmérő kisebbítésével a szállítás jósági foka megnagyobbodik.** Az átmérő növelése tehát az üzem gazdaságossága szempontjából nem előnyös, hanem káros.

Ez a (417) egyenlet átrendezésével igazolható, ha az egyenletet a $\Delta p_v = \Delta p_0 + \Delta p_{sv}$ nyomásesés két tagja értékeinek helyettesítésével felírjuk:

$$j = \frac{Q_a}{F c_g \left(\frac{\lambda}{D} \frac{c_g^2}{2g} \gamma_g + k_v \frac{Q_1 c_a}{g F} \right)} . \tag{418}$$

$F = D^2\pi/4$ és annak figyelembevételével, hogy előírt Q_a szállítóteljesítmény esetében a *209. ábra* szerint mindig a megvalósítható $c_g = (c_g)_{\min}$ határsebesség helyettesítése adja a jósági foknak legnagyobb értékét, a (418) egyenlet a következő alakra hozható:

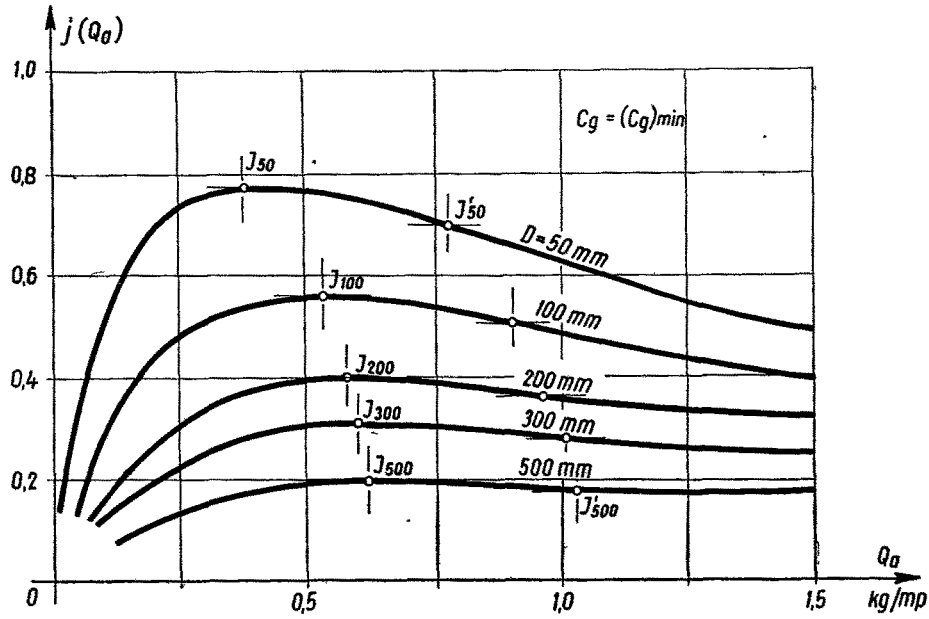
$$j = \frac{1}{AD + B} , \tag{419}$$

ahol:

$$A = \frac{\pi \gamma_g (c_g)^3_{\min}}{8g\, Q_a} \quad \text{és} \quad B = \frac{k_v (c_g)^2_{\min}}{g} .$$

A (419) egyenletben Q_a = állandó esetében az A és B állandó érték, a jósági fok tehát a D átmérő növelésével valóban csökken.

Ezt az összefüggést a *210. ábra* vízszintes búzaszállításra vonatkozó értékekkel szemlélteti. A Q_a szállítóteljesítmény függvényében megrajzolt jósági fok görbe-



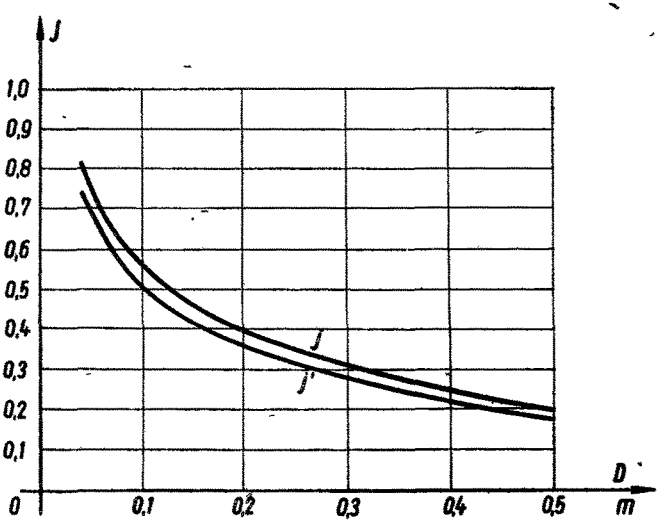
210. ábra. A jósági fok a szállítóteljesítmény függvényében

sereg paramétere a D csőátmérő, amelynek mennyiségi befolyását a diagram jól érzékelteti.

Látható, hogy *minden egyes csőben bizonyos anyagmennyiség szállítható a legnagyobb jósági fokkal.* A jósági fok görbének maximuma van (ábrán J jelű pontok). Ez a maximum nagyobb csőátmérők esetében kisebb, bár nagyobb szállítóteljesítményekhez tartozik. Gazdaságosság szempontjából adott méretű pneumatikus szállítócsőben a jósági fok maximumánál vagy legalábbis a közelében történjék a szállítás.

Tekintve, hogy a *210. ábra* görbéi laposak, kis jósági fok romlással tekintélyes nagyságú szállítóteljesítménynövekedés érhető el. Ha a görbék maximumait jelző J pontokon kívül — 10%-os jósági fok csökkenést megengedve — kijelöljük a $0{,}9(j)_{\max}$-hoz tartozó J' pontokat, az így keletkező sáv kijelöli a gazdaságos szállítás tartományát. Gabonaszállításnál ez $Q_a = 2-4$ t/ó szállítóteljesítményt jelent.

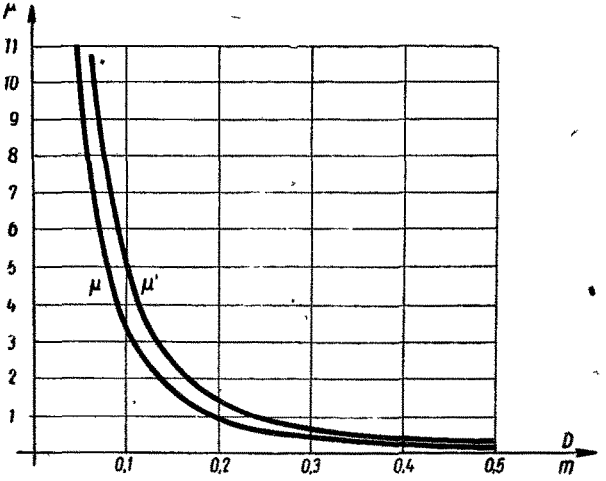
A *211. ábra* a *D* csőátmérő függvényében mutatja a legjobb jósági fok változását (*j* görbe), valamint a szállítóteljesítmény növelése folytán adódó $0{,}9(j)_{max}$ értékeket (*j'* görbe).



211. ábra. Az elérhető legjobb jósági fok változása a csőátmérő függvényében

A μ adagolási súlyarány (keverési arány) a szállítás gazdaságosságára önmagában semmitmondó, legfeljebb csak a csővezeték kihasználására jellemző. Ezt mutatja a *212. ábra* vízszintes gabonaszállításra vonatkozóan, ahol a *D* csőátmérő függvényében a legjobb jósági fokkal történő szállítás keverési aránya látható (μ jelű görbe). Ha a maximális jósági fok helyett — a nagyobb szállító teljesítmény érdekében — $0{,}9(j)_{max}$ értékekkel történik a szállítás, a keverési arány (*212. ábrán* μ' jelű görbe) is természetesen megnő.

A vízszintes jósági fok alakulására vonatkozó következtetések nemcsak gabonaneműek, hanem más anyagok szállítására is érvényesek, természetesen az ábrákon közölt számértékektől eltérő értékekkel, sőt az általános következtetések függőleges vagy más alakú csővezeték esetében is helytállók. Ebből következik, hogy az üzem gazdaságossága érdekében lehetőleg kis átmérőjű csőben, és az illető csőátmérőhöz tartozó legjobb jósági foknak megfelelő anyagmennyiséget szállítsunk. Előírt — és a nagy jósági fokoknak általában megfelelő $Q_a = 3$—5 *t/ó szállítóteljesítménynél nagyobb szállítóteljesítmény esetében a szállítást érdemes több — egymással párhuzamosan haladó — szállítócsőben végezni.* Erre vonatkozó számítást mutat a 122. példa.



212. ábra. A legjobb jósági fokkal való szállításkor az adagolási súlyarány változása a csőátmérő függvényében

122. példa. *a)* $D = 150$ mm átmérőjű ($F = 0{,}0177$ m² keresztmetszetű) szállítócsőben $L = 40$ m vízszintes szállítótávolságra $c_g = 34$ m/mp sebességű (szívóüzemben) $\gamma_g = 1{,}1$ kg/m³ fajsúlyú légáramban $\mu = 4$ adagolási súlyaránnyal $\gamma_a = 1300$ kg/m³ fajsúlyú gabonát szállítunk.

A szállítóteljesítmény:

$$Q_a = \mu F c_g \gamma_g = 4 \cdot 0{,}0177 \cdot 34 \cdot 1{,}1 = 2{,}65 \text{ kg/mp},$$

azaz $3{,}6 \cdot 2{,}65 = 9{,}5$ t/óra.

(Ezt a szállítóteljesítményt a megadott légsebesség a *206/I. ábra* alapján üzembiztosan szállítja.)

A csővezeték üresjárási nyomásesése $\lambda = 0{,}016$ értékkel:

$$\Delta p_0 = \lambda \frac{L}{D} \frac{c_g^2}{2g} \gamma_g = 0{,}016 \frac{40}{0{,}15} \cdot \frac{34^2}{19{,}62} \cdot 1{,}1 = 277 \text{ kg/m}^2.$$

Anyagszállításkor az ütközések miatt adódó többletnyomásesés:

$$\Delta p_{sv} = k_v L \frac{Q_a c_g}{gF} = 0{,}023 \cdot 40 \cdot \frac{2{,}65 \cdot 34}{9{,}81 \cdot 0{,}0177} = 480 \text{ kg/m}^2.$$

A két nyomásesés összege:

$$\Delta p_v = \Delta p_0 + \Delta p_{sv} = 277 + 480 = \mathbf{757 \text{ kg/m}^2}.$$

A vízszintes szállítás jósági foka, $V_g = Fc_g = 0{,}0177 \cdot 34 = 0{,}6$ m³/mp értékkel:

$$\mathbf{j} = \frac{Q_a L}{V_g \Delta p_v} = \frac{2{,}65 \cdot 40}{0{,}6 \cdot 757} = \mathbf{0{,}232}.$$

b) Ha az előbbi szállítóteljesítményt $i = 2$ párhuzamosan haladó $D = 100$ mm átmérőjű szállítócsőben valósítjuk meg (azaz egy-egy csőben csupán $Q_a' = 1{,}33$ kg/mp anyagmennyiséget szállítunk), akkor elegendő, ha $c_g = 24$ m/mp-es légsebességet választunk, a *206. ábra* szerint ez a légsebesség már üzembiztosan végzi a szállítást.

A légmennyiség:

$$V_g = iFc_g = 2 \cdot 0{,}00785 \cdot 24 = 0{,}376 \text{ m}^3/\text{mp}.$$

A keverés arány:

$$\mu = \frac{Q_a}{V_g \gamma_g} = \frac{2{,}65}{0{,}376 \cdot 1{,}1} = 6{,}4.$$

A csővezeték üresjárási nyomásesése $\lambda = 0{,}016$ értékkel:

$$\Delta p_0 = \lambda \frac{L}{D} \frac{c_g^2}{2g} \gamma_g = 0{,}016 \frac{40}{0{,}1} \cdot \frac{24^2}{19{,}62} \cdot 1{,}1 = 208 \text{ kg/m}^2.$$

Az anyagszállításkor jelentkező többletnyomásesés:

$$\Delta p_{sv} = k_v L \frac{Q_a' c_g}{g F} = 0{,}023 \cdot 40 \cdot \frac{1{,}33 \cdot 24}{9{,}81 \cdot 0{,}00785} = 383 \text{ kg/m}^2.$$

A két nyomásesés összege:

$$\Delta p_v = \Delta p_0 + \Delta p_{sv} = 208 + 383 = \mathbf{591 \text{ kg/m}^2}.$$

A szállítás jósági foka most:

$$j = \frac{Q_a L}{V_g \Delta p_c} = \frac{2{,}65 \cdot 40}{0{,}376 \cdot 591} = \mathbf{0{,}475},$$

azaz az előbbi szállítási módhoz képest több mint kétszeresre növekedett.

(A légszállítógép által létesítendő nyomáskülönbségnek a példában kiszámított Δp_v nyomásesésnél nagyobbnak kell lennie, mert ehhez még hozzájárul a szemek felgyorsításához szükséges nyomásesés, a berendezéshez tartozó ciklon, elszívócső stb. ellenállása folytán jelentkező nyomáskülönbség.)

130. A leválasztás. Ciklonok

A pneumatikus szállítóberendezés része a gáz és a szállított anyag különválasztására alkalmas berendezés, amely a leggyakrabban **ciklon.** Ciklon vázlata látható a *213. ábrán.*

A pneumatikus szállítócső a ciklon D_1 átmérőjű ún. **bemenőcsonkjához** csatlakozik. *Az anyag és a gáz szétválasztása a* D_c *átmérőjű* **hengeres térben** *történik.* A szemek itt a fellépő centrifugális erő hatására a hengeres palást belső felületére kerülnek, majd pedig csigavonal alakú pályán a ciklon alsó **kiömlőnyílásán** át távoznak. A gáz pedig a ciklon belsejébe benyúló *d* átmérőjű ún. **kimenőcsövön** át távozik.

A ciklontól megkívánjuk, hogy a **leválasztása** jó legyen. A leválasztás (ciklonhatásfoknak is szokták nevezni) a ciklonban leválasztott (Q'_a) és a ciklonba érkező anyagmennyiség (Q_a) hányadosa:

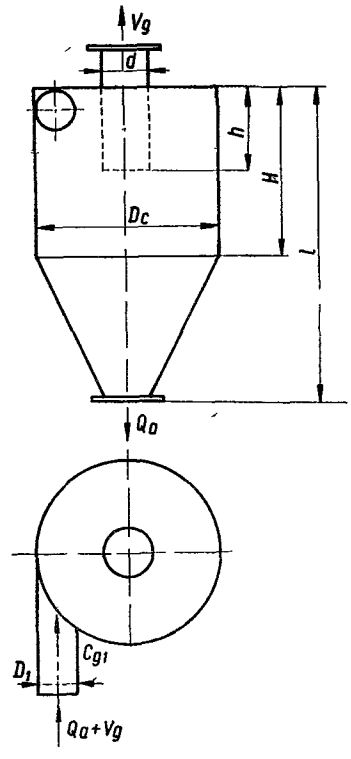
$$\varepsilon = \frac{Q'_a}{Q_a}, \qquad (420)$$

mely értéket %-kal szokás kifejezni.

A leválasztás értéke a leválasztandó anyag szemcséinek méretétől a ciklon kialakításától és az üzemi jellemzőktől (c_g, γ_g stb.) függ. A ciklonban még leválasztható legkisebb szemcseméret meghatározásánál a ciklon belsejében kialakuló sebességeloszlásból kell kiindulni.

A *214. ábra* a ciklon belsejében kialakuló **gázsebességeloszlást** mutatja. Az *I. ábrán* a gázsebesség érintőirányú (c_t) és a gázmennyiség átáramlása folytán adódó sugárirányú (c_r) sebességkomponensek láthatók különböző magasságokban a sugár függvényében.

A gázsebesség tangenciális komponenseiből kialakuló áramkép az ún. **primer áramkép: örvény.** Az örvény részei: a hengerpalásttól egy a középvonal közelében levő sugárig tartó **forgatag,**

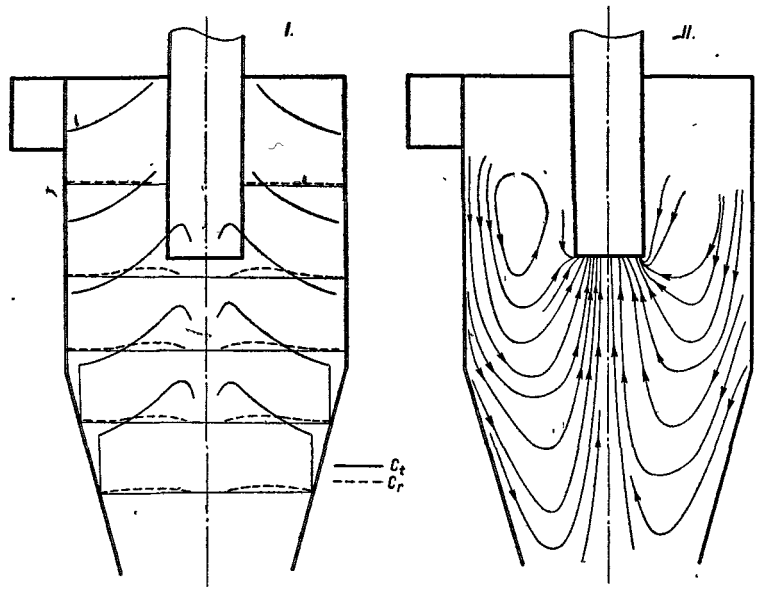


213. ábra. Ciklon

(c_t sebesség hiperbolikusan nő a középpont felé haladva) és az ezen belül levő **mag** (itt a c_t sebesség lineárisan csökken).

A primer áramképhez szuperponálódik – a V_g gázmennyiség ciklonon történő átáramlása következtében – az ún. **szekunder áramkép,** melynek áramvonalait a *214/II. ábra* szemlélteti.

A ciklonban még leválasztható szemek méreteinek számítására a továbbiakban *Pápai* módszerét követjük.



214. ábra. A ciklon belsejében az érintőirányú (c_t) és a sugárirányú sebességek (c_r) változása. II. A szekundér áramvonalak

A szemek leválasztása a forgatagban történik, ennek áramképét kell részletesen vizsgálni. Súrlódásmentes gáz áramlása esetében a forgatagban a c_t sebesség az r sugár mentén

$$c_t r = \text{állandó} \tag{421}$$

hiperbolával írható le.

A súrlódás hatására az áramkép módosul, ekkor a sebességfüggvény:

$$c_t r^n = \text{állandó}. \tag{422}$$

Az összefüggésben szereplő $n = 0{,}5 - 0{,}6$ között van.

Primer áramlásba helyezett $\gamma_a > \gamma_g$ fajsúlyú szem a ciklon palástjához kerül, azaz leválasztható, mert a jelentkező centrifugális erő

$$C = m_a \frac{c_t^2}{r} \qquad \text{(kg)} \tag{423}$$

az m_a tömegű szemet a ciklon palástja felé mozgatja. (A leválasztás szempontjából problémát jelentő kis — 1÷100 mikron szemnagyságú — szemek érintőirányú sebességkomponense egyenlő lesz a gázsebesség c_t érintőirányú komponensével, ezért igen jó közelítéssel számolható a C erő a (423) egyenletből.)

A ciklonon átáramló gázmennyiség által keltett *szekunder áramlás következménye, hogy egyes szemek a kimenőcsövön távoznak.* A szekunder gázáramlásnak ugyanis van középpont felé mutató komponense (c_r), és ez az egyes szemeken a középvonal irányába mutató S aerodinamikai erőt (súrlódóerőt) ébreszthet. Ez az S erő a Stokes-féle tétel alkalmazásával számítható, mivel az igen kisméretű szemekre vonatkozó *Reynolds*-szám (Re_0) az egységnél kisebb:

$$S = 3\pi\,\mu_g\,d_0\,w_r \qquad \text{(kg)} \tag{424}$$

(w_r : a gáz és a szem sugárirányú sebességkülönbsége, μ_g a gáz dinamikai viszkozitás-tényezője).

A (424) alkalmazható, ha

$$Re_0 = \frac{d_0\,w_r}{\nu_g} < 1.$$

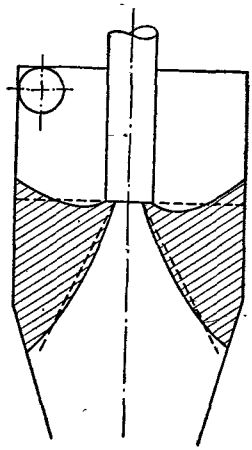
A c_r gázsebességkomponens átlagos értékét egy r sugarú palláston a kontinuitásból számolhatjuk. A ciklonon átáramló gázmennyiségnek ugyanis egy h magasságú hengeres palástfelületen kell átáramlania. Átlagos értéke tehát:

$$(c_r)_{\text{átl}} = \frac{V_g}{2\,r\,\pi\,h} \qquad \text{(m/mp)}.$$

A *215. ábrán* vonalkázással kiemelve látható az a terület, ahol sugárirányú (a kimenőcső felé irányuló) gázáramlás van. A sugárirányú gázáramlás egy pontszerű nyelő felé történő áramláshoz hasonlít; azaz a h palástmagasság a sugárral arányosan változik. Ennek figyelembe vételével a c_r gázsebesség maximális értéke egy r sugarú palláston:

$$(c_r)_{\max} = \varphi\,\frac{V_g}{2\,r^2\,\pi} = \varphi\,\frac{D_1^2\,c_1}{8\,r^2\,\pi}, \tag{425}$$

ahol $\varphi = \dfrac{(c_r)_{\max}}{(c_r)_{\text{átl}}}$ a ciklonban kialakuló sebességeloszlás mérésével meghatározható tényező.



215. ábra. A kimenőcső felé irányuló sugárirányú gázáramlás területe

A ciklon a palástjához érintőirányban bekerülő szemcsék közül azokat választja le, amelyekre ható sugárirányú erők eredője a középponttól kifelé mutat. Ez esetben tehát a centrifugális erő nagyobb, határesetben egyenlő a súrlódóerővel. $C=S$ határesetből kiszámíthatjuk a ciklonban még leválasztható legkisebb szemcseméretet. Ez esetben a szem sugárirányban nem mozdul el, a relatív sebesség magá a gázsebesség c_r komponense lesz. A súrlódóerő (424) egyenlettel felírt alakja módosul:

$$S = 3\pi\,\mu_g\,d_0\,c_r. \tag{424/a}$$

A centrifugális és a súrlódóerő egyensúlya a mag és a ciklon palástja közötti, s a középvonaltól r távolságra levő pontban, a leválasztás szempontjából a legkedvezőtlenebb esetben, vagyis $c_r = (c_r)_{max}$ értékkel számolva:

$$m_a \frac{c_t^2}{r} = 3\,\pi\,\mu_g\,d_0\,(c_r)_{max}.$$

Végezzük el az egyenletben a következő helyettesítéseket:

$$m_a = \frac{d_0^3\,\pi}{6}\,\frac{\gamma_a}{g}\,, \qquad c_t = (c_t)_R \left(\frac{R}{r}\right)^{0,5} \quad \text{és} \quad (c_r)_{max}$$

(425) egyenlettel kifejezett értékét.

Itt $(c_t)_R$ a gázsebesség érintőirányú komponense a ciklon $D_c/2 = R$ sugarú palástjánál. Ez a sebesség a ciklon bemenőcsonkjában levő c_{g1} gázsebességgel azonos: $(c_{tR}) = c_{g1}$.

A helyettesítések elvégzése után az egyenletből a ciklonban még leválasztható legkisebb szemcseméret kifejezhető:

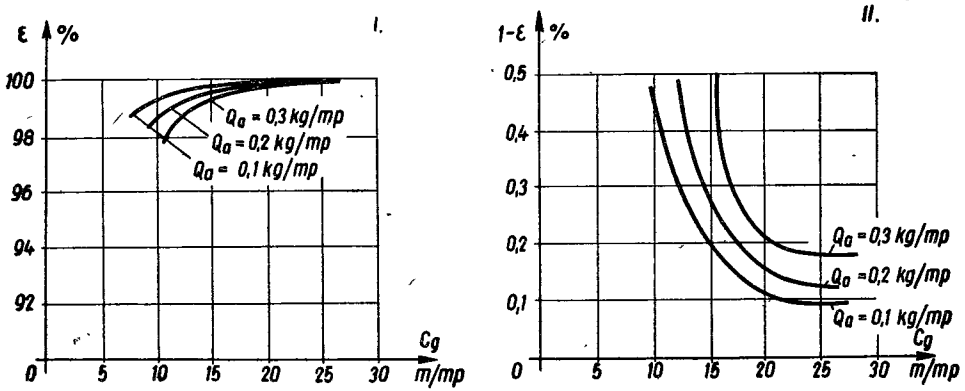
$$d_{0min} = K \sqrt{g\,\frac{\mu_g}{\gamma_a}\,\frac{D_1^2}{c_{g1}}\,\frac{1}{D_c}} \qquad \text{(m)}. \tag{426}$$

Az állandó: $K = \sqrt{\frac{9}{2}\,\varphi}$, melynek értéke elsősorban a ciklon kialakításától függ. Jól kialakított ciklon esetében $K = 3 \div 6$ között van, kedvezőtlen viszonyok esetében $K \gg 6$.

Ha a ciklon bemenőcsonkjának D_1 átmérője a szállítócső átmérőjével azonos ($D_1 = D$, és mivel ekkor $c_{g1} = c_g$), a leválasztható legkisebb szemcseméret kifejezése:

$$d_{0min} = K \sqrt{g\,\frac{\mu_g}{\gamma_a}\,\frac{D^2}{c_g}\,\frac{1}{D_c}} \qquad \text{(m)}. \tag{426/a}$$

A (426) illetve (426/a) összefüggésből kiolvasható, hogy *a ciklon még kis szemcséket is leválaszt* (azaz a leválasztás hatásfoka jó lesz), *ha a gáz dinamikai*

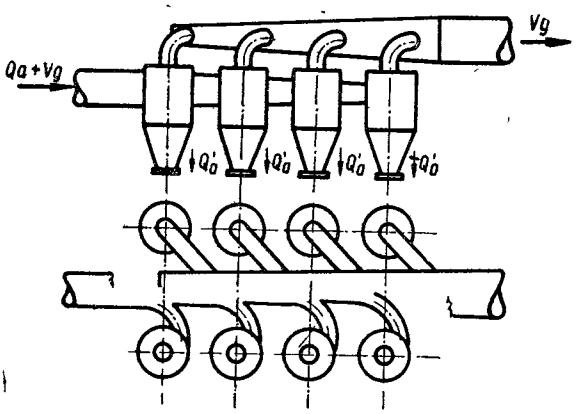


216. ábra. Ciklon leválasztása a légsebesség függvényében

viszkozitási tényezője kicsi, a leválasztandó anyag fajsúlya nagy. Igen lényegesen befolyásolja a d_{0min} értéket a szállítócső, illetve vele közel azonos méretű bemenőcsonk mérete. A ciklonhoz csatlakozó pneumatikus szállítócsőben levő gázsebesség és a D_c ciklonátmérő növelése is javítja a leválasztást.

A *216. ábrán* $D_c = 270$ mm átmérőjű ciklon mérésekkel meghatározott ε leválasztása (I. ábra) és a jobb áttekinthetőségért megrajzolt $1-\varepsilon$ értékek (II. ábra) láthatók a gázsebesség függvényében, különböző ciklonba érkező anyagmennyiségek (Q_a) esetében. A leválasztandó anyag: kenyérliszt, a szállítógáz: levegő. Látható, hogy a c_g légsebesség növelésével ε javul, de a Q_a anyagmennyiség növelésével romlik.

Nagy nehézségbe ütközik nagy keresztmetszetű szállítócsőből igen kis szemcseméretű anyag leválasztása (pl: hőerőművek füstgáz-csatornáiból a pernye vagy cementgyárakban a szállítócsőből a cement leválasztása). Ilyen esetekben a leválasztás javítása érdekében ún. **multiciklont** alkalmazhatunk. Ez több ciklonelemből álló leválasztó rendszer, melynek leválasztása az egyes elemek leválasztásától függ.



217. ábra. Multiciklon

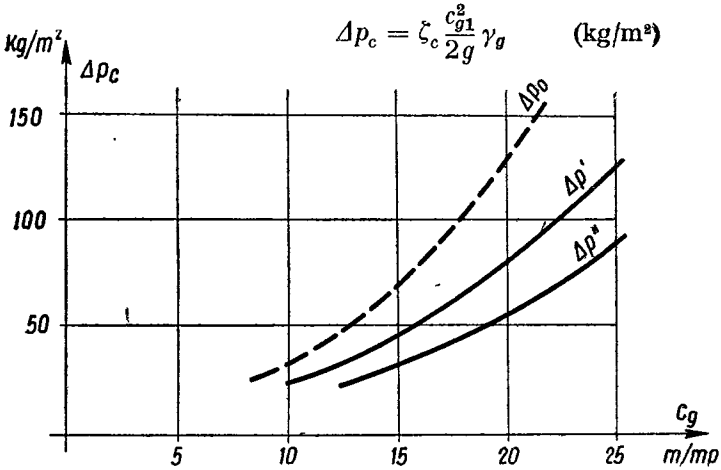
Nyolc elemből álló multiciklon vázlatát mutatja a *217. ábra.*

A ciklonon a gáz keresztüláramlásakor az áramlási veszteségek miatt nyomásesés (Δp_c) jelentkezik, melynek értéke:

$$\Delta p_c = \zeta_c \frac{c_{g1}^2}{2g} \gamma_g \quad (\mathrm{kg/m^2}) \qquad (427)$$

alakú összefüggésből számítható. Itt ζ_c a ciklon veszteségtényezője, melynek értéke a szokásos ciklonalakok esetében: $\zeta_c = 2 \div 5$ között van.

A *218. ábra* $D_c =$ = 400 mm átmérőjű ciklon ellenállását mutatja üresjárás (Δp_0) és két különböző szemcseméretű anyag leválasztása esetében ($\Delta p'$ görbe



218. ábra. $D_c = 400$ mm átmérőjű ciklon ellenállása üresjárás és két különböző szemcseméretű anyag leválasztása esetében ($\Delta p'$: kenyérliszt, $\Delta p''$: búza)

kenyérliszt, $\Delta p''$ görbe búza leválasztásánál jelentkező nyomásesés) a gázsebesség függvényében.

A leválasztásnál jelentkező nyomásesés nem függ a ciklonba érkező anyagmennyiségtől és értéke azonos légsebességnél — ellentétben a pneumatikus szállítócsővel — kisebb, mint az üresjárási nyomásesés. Az anyag leválasztásakor jelentkező nyomásesés értéke a gázsebességen kívül az anyag szemcseméretétől függ csupán.

123. példa. A vízgépek tanszékének laboratóriumában kenyérliszt leválasztására kialakított ciklon $D_c = 400$ mm átmérőjű. A pneumatikus szállítócső, mely változatlan keresztmetszettel csatlakozik a ciklon palástjához, $D = 70$ mm átmérőjű. A kenyérliszt szemcséinek mérete $d_0 = 15 \div 20$) mikron között van, fajsúlya $\gamma_s = 1200$ kg/m³. A szállítógáz: levegő, viszkozitása: $\mu_g = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$ kgmp/m² és $K = 3{,}5$. Ezekkel a még leválasztható szemcseméret $c_g = 15$ m/mp légsebességnél a (426/a) szerint:

$$d_{0\min} = 3{,}5 \sqrt{9{,}81 \frac{1{,}8 \cdot 10^{-6}}{1200} \cdot \frac{0{,}07^2}{15} \cdot \frac{1}{0{,}4}} = 12 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 12 \text{ mikron}.$$

Mivel a leválasztandó lisztben 15 mikronnál kisebb szemek csak elvétve akadtak, e ciklon leválasztása a kísérletek szerint is gyakorlatilag 100%-osnak mondható.

131. Anyagszállítás vízáramban

Szemcsés anyagok nemcsak légáramban, hanem áramló vízben is szállíthatók. Ezzel a módszerrel *szenet, szénport, hamut* (zagyot), *homokot* (iszapot), *mezőgazdasági terményeket* (cukorrépát, almát stb.) szokás szállítani.

A szállítást sokszor a *mosás* egyidejű elvégzése teheti gazdaságossá.

A kérdést elsősorban irodalmi források *(Durand, Condolois* [63], *Babbitt, Caldwell* [58]) alapján tárgyaljuk.

A mezőgazdasági terményeket is beleértve, a szállított anyagok szemcsemérete igen tág határok között változik. A szemcsék fajsúlya általában csak néhányszorosa a szállító közeg fajsúlyának (pl. cukorrépa kb. 1050 kg/m³, szén 1200—1500 kg/m³, homok 2650 kg/m³). A szemcsék vízben mért súlya, nagysága és alakja meghatározza a lebegési sebesség értékét.

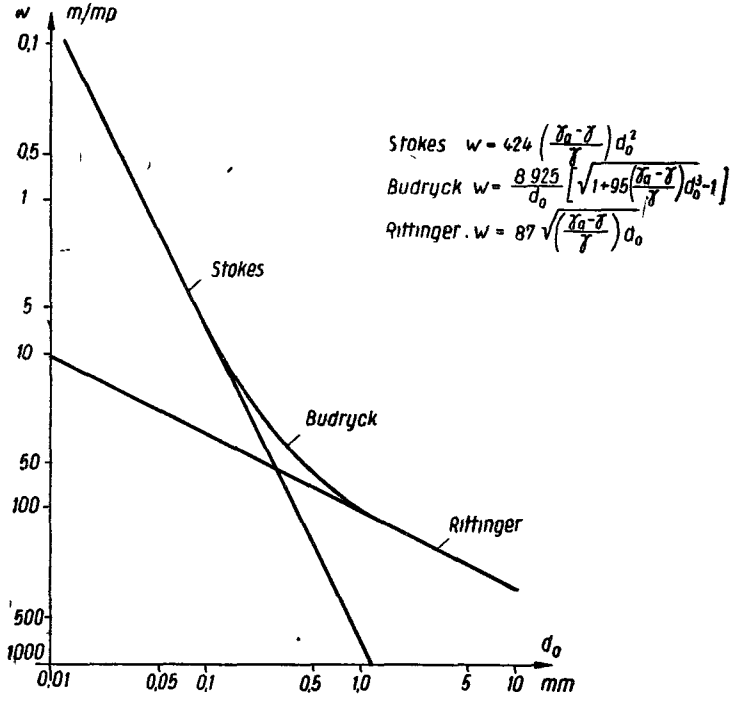
Gömb alakú szemcse esetében a $Re_0 = w\, d_0/\nu_g$ Reynolds-szám függvényében ismerjük a c_e ellenállástényező értékét *(191. ábra)*; a Reynolds-szám kifejezésében w a lebegési sebesség, d_0 a gömbátmérő, ν_g a kinematikai viszkozitás. Ebből az összefüggésből megszerkeszthető a szemcseátmérő és lebegési sebesség közötti kapcsolat minden adott fajsúlyú anyagféleségre (pl. a *219. ábrán* homok esetére). Egytized milliméter alatti homokszemcsére a *Stokes*-törvény vonatkozik, 1 milliméter feletti szemcsékre a *Rittinger*-összefüggés. Az átmeneti szakaszra *Budryck* ír fel közelítő összefüggést.

Tapasztalat szerint a szállító közegben a szemcsék viselkedése egészen más aszerint, hogy a szemcse mérete a lamináris zónába esik vagy a turbulens zónába.

a) *Lamináris lebegésű szemcsék szállítása*

Ha csőbeli turbulens vízáramba finom szemcséjű szilárd anyagot adunk, egy bizonyos keverési arány túllépésekor a turbulens áramlás laminárissá válik. Az anyag «plasztikus» lesz és a keverék tulajdonságait ekkor a *Bingham*-féle

törvény írja le. Eszerint ilyen anyagban elhelyezett síklapra ható súrlódóerő (vagyis τ csúszófeszültség) lineárisan növekszik a c áramlási sebességgel, de zérus



219. ábra. Homokszemcsék lebegési sebessége a szemcseátmérő függvényében ($\gamma_a = 2650$ kg/m³)

sebességnél is jelentős értéke van (τ_0) (*220. ábra*). D átmérőjű csőben áramláskor a csőfalra ható τ súrlódóerő

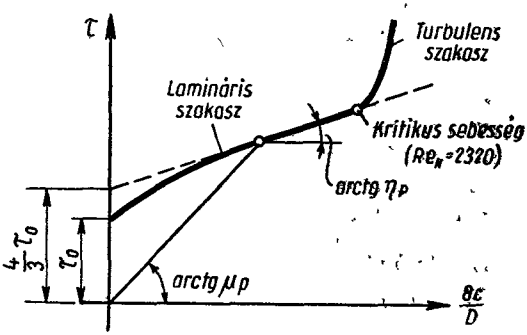
$$\tau = \eta_p \frac{8\,c}{D} + \frac{4}{3}\tau_0 \qquad (\text{kg/m}^2), \tag{428}$$

ahol η_p a *plasztikus* anyag *viszkozitási* tényezője. (Ha $\tau_0 = 0$, azaz nem plasztikus anyagról, hanem folyadékról van szó, η arányos a μ viszkozitással.)

τ_0 és η értékét speciális keverék-viszkoziméterrel lehet meghatározni.

A keverék tényleges viszkozitása (tiszta folyadékhoz hasonlóan):

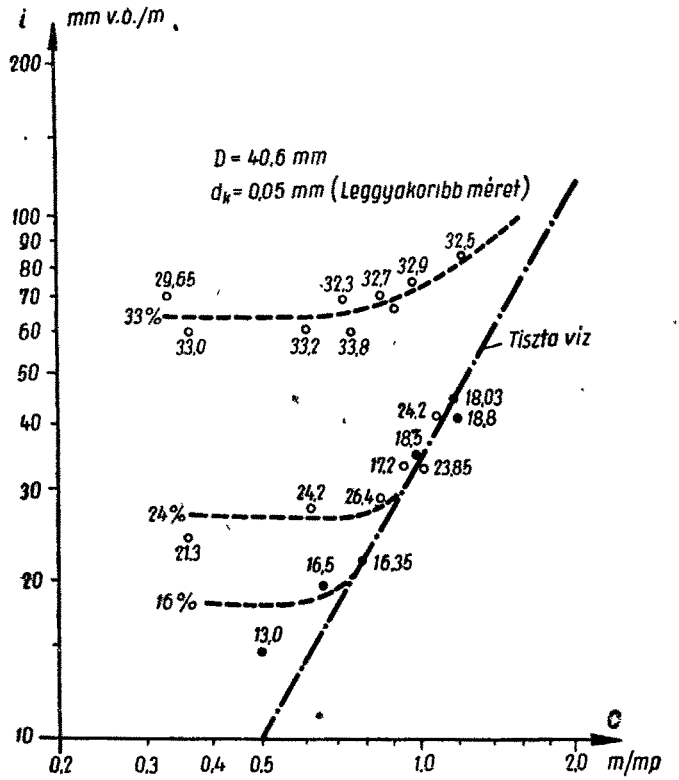
$$\mu_p \cong \tau : \left(\frac{8\,c}{D}\right) = \eta_p + \frac{1}{6}\frac{\tau_0 D}{c} \qquad (\text{kgmp/m}^2). \tag{429}$$



220. ábra. «Plasztikus» anyag csúszófeszültsége

Ezzel a viszkozitással számítva a csővezeték *Reynolds*-számát (Re_D), azt tapasztalták, hogy a $Re_k = 2320$ kritikus érték keverékekre is érvényes. A csőben a kritikus sebességet ebből a *Reynolds*-számból lehet kiszámítani, ha a $\nu_p = \mu_p/\varrho_p$ összefüggésben ϱ_p a *keverék* sűrűsége. τ_0 értéke egyébként függ a koncentrációtól és növekvő koncentrációval exponenciálisan növekszik.

Ha az áramlási sebesség nagyobb, mint a kritikus sebesség, akkor a tapasztalat szerint a keverék *semmi többletellenállást* nem okoz. Finom homokkal végzett



221. ábra. Lamináris lebegésű szemcsés homok szállítási ellenállásgörbéi vízáramban, különböző keverési térfogatarányok (%) esetében

mérések eredménye látható a *221. ábrán*. A nyomásesés 1 méteres szakaszra vonatkozó $i = h'/L$ értéke látható az ábrán a csőbeli áramlási sebesség függvényében tiszta víz és különböző keverési arányú (koncentrációjú) keverékek esetében.

Célszerű a berendezéseket úgy méretezni, hogy az áramlás a csőben mindenképpen *turbulens* legyen.

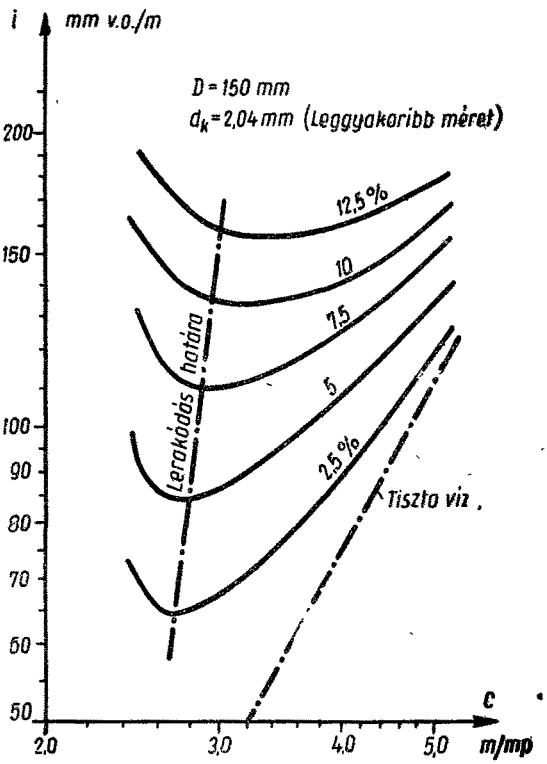
b) *Turbulens lebegésű szemcsék szállítása*

Nagyobb sebességű folyadékáramba jutott egy-egy szemcse útját követve, megfigyelhető, hogy az aránylag rövid idő alatt a csőfenékre száll le, ott az áramlás görgetni vagy tolni kezdi, majd felemeli. (Forgásból adódhat ui. felhajtóerő,

a szemcse falmenti érdességbe akadhat, és felbillenés közben adódhat emelőfelülete stb.) Bizonyos röppálya után ismét feneket ér és a jelenség elölről kezdődik. Ha sok szemcse van az áramló közegben, azok nagy része nem jut le a fenékig, hanem a szemcsék egymás közti ütközéssel veszik át egymástól a fal fékező hatását. Ezzel kialakul a szemcsék átlagos sebessége, amely *kisebb* a folyadéksebességnél.

A *222. ábrán* látható egy homok-víz keverék egységnyi csőhosszra eső i nyomásesése a sebesség és koncentráció függvényében. Látható, hogy a jelleggörbék teljesen hasonlók a pneumatikus gabonaszállítási jelleggörbékhez, ahol a szállítás ugyancsak a turbulens zónába esik. Az ilyen keverékekre *Durand* mérései alapján az alábbi közelítő tapasztalati összefüggést nyerte a főbb jellemzők között:

$$\varphi = \frac{i - i_0}{\mu i_0} = 204\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\sqrt{d_0}}{D}\frac{c^2}{w}\right]^{-1,6}. \qquad (430)$$



222. ábra. Turbulens lebegésű szemcsés homok szállítási ellenállásgörbéi vízáramban, különböző keverési térfogatarányok (%) esetében

ahol φ lényegében a pneumatikus szállításnál megismert *Gasterstädt*-féle tényező (lásd a (388) összefüggést),

μ G_a/G_v az anyag adagolási súlyaránya (anyag kg/víz kg),

i_0 a tiszta víz áramlásának egységnyi hosszra eső veszteségmagassága (mm v. o./m),

D a csőátmérő (m),

d_0 a szemcse egyenértékű átmérője (lebegési sebesség szempontjából gömbbel egyenértékű) (m),

c a vízsebesség (m/mp),

w a lebegési sebesség (m/mp),

g a nehézségi gyorsulás (m/mp²).

A *Rittinger*-féle összefüggés (l. a 219. *ábrán*) szerint azonban

$$w = 87\sqrt{\frac{\gamma_a - \gamma_v}{\gamma_v}}\sqrt{d_0} \text{ (m/mp)}, \qquad (431)$$

s ezt behelyettesítve a (430) egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\varphi = 204 \left(87 \sqrt{g} \sqrt{\frac{\gamma_a - \gamma_v}{\gamma_v} \frac{D}{c^2}}\right)^{1,6}. \tag{432}$$

Ebből adott L hosszúságú cső esetén a h' csőveszteség:

$$h' = L\,i = L\,i_0\,(1 + \varphi\,\mu) = L\,i_0 + L\,i_0\,\varphi\,\mu \quad \text{(m)}. \tag{433}$$

A szemcsék ütközéséből adódó többletellenállás tehát az $L\,i_0\,\varphi\,\mu$ tényezővel arányos. Ha ezt összevetjük a pneumatikus szállításra *Pápai* által nyert (390) összefüggéssel, nem találunk teljes analógiát, mert

$$k_p = A\frac{\varphi}{D} = B\frac{D^{0,6}}{c^{3,2}} \tag{434}$$

nem állandó*, hanem kis mértékben függ még a csőátmérőtől és a szállítósebességtől is.

Durand méréseit $D = 40 \div 580$ mm átmérőjű csővezetékekben végezte $d_0 = 0{,}2 \div 25$ mm átmérőjű szemcsékkel, $\mu = 0{,}05 \div 0{,}6$ koncentrációhatárok között. Méréseinek szórása a (432) összefüggéshez képest $\pm$ 10%, de a szállított homokfajták szemcsézete nem volt homogén.

Inhomogén szemcsézetű anyagok biztonságos szállítása úgy méretezhető, hogy a legnagyobb anyagszemcsét vesszük irányadónak.

A vízáramban szállítás során is tapasztalták a csővezeték *eldugulását*. A dugulás anyaglerakódással indul meg. A lerakódás kezdetére jellemző c_d sebesség (40 mm-es és 150 mm-es csövekben végzett mérés tanúsága szerint) nagy szemcsékre bizonyos keverési arány felett csak a csőátmérőtől függ és a

$$c_d = A\sqrt{D} \qquad \text{(m/mp)} \tag{435}$$

összefüggés szerint számítható, ahol $A = 6{,}27$ (ha $d_0 > 2$ mm homok), továbbá D (m) a csőátmérő.

Kisebb szemcsékre (amelyek lebeségi sebessége lamináris és turbulens közé esik) $A = 6{,}56$, lamináris zónába eső szemcsékre $A = 5{,}63$ értékkel vehető biztonsággal figyelembe.

A dugulási határsebesség ugyan a szállított anyagmennyiséggel is változik (mint pneumatikus gabonaszállításnál is), de ez a változás itt oly csekély mértékű, hogy nyugodtan elhanyagolható: a biztonság nem vezet túlzott túlméretezésre.

Végeredményben azonban megállapítható, hogy a keverékáramlás teljesen egységes szemléletének kialakításához még sok további mérést kell végezni.

132. Hordalékmozgás. Kimosás, lerakódás

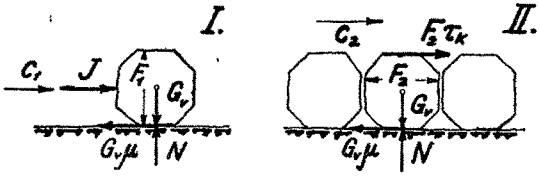
A hordalékmozgás szemcséinek mozgása a vízáramban szállítás kapcsán megismert szabályok határesetenként is tárgyalható. E helyett a klasszikus tárgyalási mód ismertetésére szorítkozunk.

---

* Ha a pneumatikus szállításnál képezzük a $\varphi = \frac{\Delta p_{sv}}{\mu \Delta p_0}$ viszonyszámot, akkor φ/D = *állandó* adódik. (Szerk.)

A természetes vízfolyások hordalékmozgása a mederképződés szempontjából rendkívül fontos tanulmány tárgya, amely azonban a gépészmérnök feladatkörétől annyira távol esik, hogy e kérdés tárgyalására nem terjeszkedem ki.

A jelenség vizsgálatának elméleti alapjairól annyit azonban meg kell említenem, hogy korszerű felfogás szerint a mederfenékből kiálló szemekre ható *impulzuserők helyett* a mozgatóerőt a meder nedvesített felületén ébredő **csúsztatófeszültség** szolgáltatja, amely akkor is hatásos, amikor a hordalék nagyobb kiszögellések nélkül helyezkedik el. Végeredményben e felfogás szerint is kijelölhető egy olyan **határsebesség,** amelynél a hordalékmozgás megindul, hiszen a (108) egyenlet szerint a csúsztató feszültség is az áramlási sebesség függvénye.



223. ábra. A hordalékmozgás erőjátéka

A *223. ábrában* a kétféle felfogást magyarázó vázlatokat szembeállítom, annak igazolására, hogy az egymástól eltérő erőjátékból is hasonló felépítésű egyenlet származtatható le, amelynek együtthatóit **kísérleti úton** kell meghatározni.

a) 223/I. ábra szerint a d szemnagyságú kavics F_1 homlokfelületét a meder alján c_1 sebességgel áramló víz impulzusából származó J erő terheli, amely az (55) egyenlet szerint az érkező víz sebességének a négyzetével arányos. A felület alakjától és az elterelés mértékétől függő ε tényező bevezetésével írható:

$$J = \varepsilon \frac{\gamma}{g} d^2 c_1^2.$$

A homlokfelület a szemnagyságot jellemző d méret négyzetével arányos akkor is, ha nem gömb alakú, hanem tetszőleges (pl. szögletes) hordalékszemekről van is szó.

Az impulzuserő mindaddig elmozdulást nem létesíthet, amíg a hordalékszem fenéksúrlódását le nem győzi. E súrlódó erőt a hordalékszem vízben mért súlya ébreszti, amely a (felhajtóerő miatt) a szilárd test γ_a és a folyadék γ fajsúlyának különbségével és a szemnagyságot jellemző d méret köbével arányos. μ súrlódási tényezővel és $\varkappa$ arányossági tényezővel a fenéksúrlódás:

$$S = \varkappa \mu (\gamma_a - \gamma) d^3.$$

A hordalékmozgás megindulásának feltétele eszerint: $J \geqq S$. Helyettesítés és rendezés után írható:

$$c_1^2 \geqq A_1 \mu \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma} d, \tag{436}$$

ahol $A_1 = \varkappa g/\varepsilon$ a hordalékszem alakjától függő állandó.

b) A 223/II. ábra szerint az S súrlódóerőt a hordalékszem felső lapjának F_2 felületén működő T csúsztatóerő győzi le, amely a meder nedvesített felületén

ébredő τ csúsztató feszültséggel arányos. A szem alakjától függő β tényező bevezetésével a felső lap felülete: $F_2 = \beta d^2$, a csúsztatóerő pedig:

$$T = \beta d^2 \tau$$

és ezzel a hordalékmozgás megindulásának feltétele: $T \geqq S$.

$B_2 = \varkappa/\beta$ helyettesítéssel írható:

$$\tau \geqq B_2 \mu (\gamma_a - \gamma) d. \tag{437}$$

A τ csúsztató feszültség az l hosszúságú csatorna $K l$ nagyságú felületén ébred. Közepes értéke (τ_k) az egyenletes áramlás ama feltételéből számítható, hogy az $Fl\gamma$ súlyú víztest egyenletes sebességgel csúszik le a $\operatorname{tg} \alpha = i$ esésű lejtőn, a súlyerő pályamenti összetevőjét tehát a nedvesített felületen ébredő súrlódóerő éppen kiegyensúlyozza. A kis esésre való tekintettel — $\sin \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha = i$ helyettesítéssel — írható:

$$F l \gamma i = K l \tau_k.$$

A hidraulikai sugár: $r' = F/K$ bevezetésével a csúsztató feszültségnek τ_k közepes értéke szerint:

$$\tau_k = \gamma i r'. \tag{438}$$

A csúsztató feszültség helyi eloszlása a meder alakjától és érdességétől függ. A meder kimosása szempontjából τ legnagyobb értéke a mértékadó, amely az eloszlás egyenlőtlenségétől függően: $\tau = \xi \tau_k$, ahol $\xi \geqq 1$. Meg kell jegyezni, hogy szabályos szelvényű és egyenletes érdességű csatornában a kísérleti eredmények szerint a csúsztató feszültségek eloszlása eléggé egyenletes, vagyis: $\xi \cong 1$.

A hordalékmozgás határfeltételei a (437) és a (438) egyenlet egybevetésével az esés és a hidraulikai sugár szorzatával is kifejezhetők. Írható:

$$i r' \geqq B \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma} d \tag{439}$$

ahol: $B = \xi \mu \varkappa/\beta$ állandó.

A fajsúlyarány $\gamma_a/\gamma = 1{,}5 \div 2{,}5$ értékkel vehető számításba, a B állandó becslése eléggé bizonytalan, ezért a mozgás megindulására még azonos szemnagyság esetén sem lehet éles határokat kijelölni, hanem rendszerint egy **alsó és egy felső határral** számolunk, aszerint, amint a kimosás elkerülése a cél, vagy pedig a hordalék lerakódását kell megakadályozni.

Krey szerint a hordalékmozgás megindulásának feltétele a (439) egyenlet alapján:

$$i > \frac{d}{8 r'} \div \frac{d}{20 r'}. \tag{440}$$

Befejezésül még egyszer visszatérek a **határsebesség** feltételére, amely a csúsztató feszültségre vonatkoztatott (438) egyenletből is leszármaztatható. A (106) egyenlet szerint ugyanis a τ_k csúsztató feszültség a sebesség négyzetével arányos

— a (438) egyenletbe helyettesítve pedig a Chézy-féle képletet adja. (L. 47. pont, (115) egyenlet.) Írható tehát:

$$\tau_k = \gamma \frac{c^2}{C^2}, \tag{441}$$

ahol: $C^2 = 2g/\lambda'$ és a (437) egyenletve helyettesítve:

$$c^2 \geqq A\,\mu \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma} d, \tag{442}$$

ahol: $A = \xi C^2 \varkappa/\beta = 2\,\xi\,\varkappa g/(\beta\,\lambda')$.

Az így kapott (442) egyenlet felépítésében teljesen összevág az impulzustétellel leszármaztatott (436) egyenlettel, csakhogy most a mederfenék mentén feltételezett és nehezen becsülhető c_1 sebesség helyett a közepes $c = V/F$ sebességgel számolhatunk. (Természetes, hogy az A és az A_1 állandók értékei is különbözők.)

$C = 50$ Chézy-állandóval és $\gamma_t/\gamma = 2$ fajsúlyaránnyal a (440) egyenletben kifejezett *Krey*-féle határfeltétel a c sebességre a következő értékeket szolgáltatja:

$$c \geqq 11 \div 17 \sqrt{d} \quad \text{(m/mp)}, \tag{443}$$

ahol a d szemnagyságot **méterben** kell helyettesíteni!

A gyakorlatban a sebesség **alsó** határát (a **kimosás** elkerülésére) a mederfenék minőségéhez igazodóan a következő irányértékekkel szokás előírni:

Iszapos föld	$c < 0{,}12$ m/mp
Finom homok	$c < 0{,}16$ m/mp
Agyag	$c < 0{,}25$ m/mp
Agyagos homok	$c < 0{,}50$ m/mp
Kavics	$c < 1{,}00$ m/mp

A sebesség **felső** határértékét pedig (a **lerakódás** elkerülésére):

Könnyű iszap	$c > 0{,}25$ m/mp
Finom homok	$c > 0{,}50$ m/mp

124 példa. A $d = 1$ mm-es szemnagyságú homok mozgatásának feltétele a (443) egyenlet szerint, $\sqrt{d} = \sqrt{0{,}001} = 0{,}032$ értékkel:

$$\mathbf{c \geqq 11 \cdot 0{,}032 \div 17 \cdot 0{,}032 = 0{,}35 \div 0{,}54\ m/mp,}$$

ami jól összevág a táblázatban megadott értékkel.

Ha a $b = 1{,}5$ m szélességű és $m = 1$ méter mélységű csatornának azt az esését keressük, amelynél e homokszemek mozgása megindul, akkor a (440) egyenlet szerint, $r = 1{,}5 : 3{,}5 = 0{,}43$ m értékkel:

$$\mathbf{i = \frac{0{,}001}{8 \cdot 0{,}43} \div \frac{0{,}001}{20 \cdot 0{,}43} = 0{,}29 \div 0{,}12\ ‰.}$$

A csúsztató feszültség közepes értéke pedig, a (438) egyenletből (pl. $i = 0{,}2‰$ esésnél):

$$\tau_k = \gamma\, i\, r' = 1000 \cdot 0{,}0002 \cdot 0{,}43 = \mathbf{0{,}086\ kg/m^2.}$$

C) FOLYADÉKSZÁLLÍTÁS GÁZADAGOLÁSSAL

Ezen az elven működik a **légnyomásos vízemelő** vagy **mammutszivattyú,*** amelynek felszálló csövébe buborékok alakjában adagolt sűrített levegő **potenciális** munkaképessége szolgáltatja a vízemeléshez szükséges energiát. Ezt a folyamatot külső energiabevezetés nélkül az ún. **gázoskutakban** is megtaláljuk, csakhogy itt a munkaképes gázbuborék adagolása tökéletesebb. A nagy mélységből feltörő gázosvíz ugyanis **elnyelt** (oldott) állapotban hozza magával a gázt, amely a «kritikus mélység» fölé emelkedve, egyenletesen elosztott apró buborékok alakjában válik ki és keveredik a folyadékkal.

A mammutszivattyú és a gázoskút közös jellemzője: a keverékoszlop fajsúlyának a szabad gáztérfogattól függő kisebbedése.

A vízszolgáltatás mindkét esetben csak akkor indul meg, amikor a keverékoszlopnak a kút tükrétől mért fölemelkedése, vagyis a **szállítómagasság** (H) eléri a kifolyónyílás szintmagasságát.

Az áramlás fenntartásához akkora belső (vagy teljes) szállítómagasság (H_0) létrehozására van szükség, amely a felszállócső áramlási veszteségmagasságát is fedezi, azaz: $H_0 = H + h'$.

Ez a H_0 szállítómagasság a keverék szabad gáztérfogatától függ, tehát nem csupán a keverési arány függvénye (Vö. a 4/d. ponttal és a 8. példával). Kiszámításához figyelembe kell venni, hogy az emelkedő keverékoszlop szabad gáztérfogata — azonos keverési arány esetében is — három okból változik meg:

a) A gázbuborék kisebbedő nyomáson izotermikusan **kiterjeszkedik,** a keverékfajsúly tehát a kifolyószinten a legkisebb.

b) A keverék szabad gáztartalma az elnyelt mennyiség fokozatos **kiválása** következtében is megnagyobbodik, ha a nyomás csökken.

c) **A buborék előresietése** viszont az emelkedő keverékoszlop gáztartalmát kisebbíti.

Gázoskút esetében a belső szállítómagasságot e három jelenség figyelembevételével kell meghatározni. Itt **állandó keverési aránnyal** számolhatunk, mert a feltörő gázosvíz a kritikus mélységig teljes egészében elnyelt állapotban (oldat alakjában hozza fel gáztartalmát.

Légnyomásos vízemelő esetében a vízhozamtól függetlenül (külső) **gázadagolás állandóságával** lehet számolni, a keverési arány tehát a mindenkori üzemállapothoz igazodó változást szenved. A gázelnyelés és gázkiválás itt oly jelentéktelen, hogy figyelmen kívül hagyható.

Ezek az eltérések a kétféle berendezés elkülönített vizsgálatát teszik szükségessé. Összefoglalóan tehát csupán a mindkét esetre érvényes jelöléseket ismertetem, és az elvi összefüggések tisztázására szorítkozom.

---

* A mammutszivattyú elnevezés a Borsig-cég védjegyén ábrázolt, ormányával locsoló mammutkép után alakult ki.

133. A gázbuborékok előresietése

A 120/b. pontban a (365/g) egyenlettel kifejeztük a folyadékba ágyazott gázbuborék határsebességét. A buborék gömb alakjának feltételezésével, $K/f = 2d/3$ helyettesítéssel a buborék előresietésének határsebessége így írható:

$$w = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{c_e}d} \qquad \text{(m/mp)}, \tag{444}$$

ahol az ellenállástényező a *191. ábra* szerint változik.

Figyelemre méltó, hogy a buborék határsebessége a fajsúlyoktól független és elsősorban a buborék nagyságának függvénye.

A gázbuborékok kiválása az erőtér erősítésével — pl. **centrifugálással** — gyorsítható. A gravitációs erőtérre levezetett (444) egyenlet az 5. pont szerint $g = g^*$ helyettesítéssel a gyorsuló erőtérre is alkalmazható.

Az előresietés határsebessége szabja meg a **gázoskutak** és a **légnyomásos vízemelő** vagy **mammutszivattyú** üzemtani jellemzőit.

A (függőleges) felszállócső γ_v fajsúlyú víztöltésébe adagolt γ_g fajsúlyú levegő vagy gáz a c_v vízsebességnél nagyobb c_g buboréksebességgel emelkedik a kifolyónyílásig. Ennek az előresietésnek nagyságát a buborékok viszonylagos határsebessége szabja meg, azaz:

$$c_g = c_v + w.$$

A vízemelő akkor dolgozik jó hatásfokkal, ha a buborékok e viszonylagos előresietése kicsiny, vagyis: ha kicsiny az ún. **szlipveszteség.** Ezt a gyakorlatban **kis buborékok** adagolásával lehet megvalósítani.

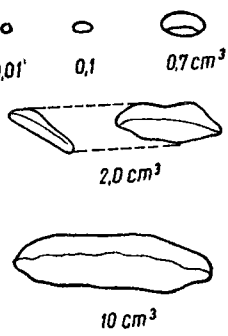
A c_v sebesség fokozásával, vagyis a szállítóteljesítmény növelésével a szlipveszteség kisebbíthető, de ennek is határt szab az áramlási veszteségek rohamos megnagyobbodása.

A *buborékok alakja* azonban a valóságban erősen eltér a gömb alaktól, ezért az előresietési sebesség általában nem a (444) összefüggés szerint számítható. A buborékra mozgás közben három erő hat: a *felületi feszültség*, a *felhajtóerő* és az *ellenállás*. A felületi feszültség gömb alakúan igyekszik tartani a buborékot, mert ekkor a legkisebb a térfogategység felülete. A gömb alakú buborék függőleges egyenes pályán halad felfelé. A mozgásával ellentétesen ható ellenállás igyekszik ellaposítani. Egy bizonyos buboréknagyságnál (kb. 1 mm-es) a buborék ellaposodása bekövetkezik, és ekkor a függőleges pálya körül spirálison halad felfelé. Az ellaposodott lencse alakú buborék ugyanis a legkisebb folyadékellenállás irányában: oldalirányban mozdulna el; ez a felszállás irányához adódva csavarvonalat eredményez. 3—4 mm feletti buborék alakja határozott lencse (diszkosz) alakot mutat. Nagyobb méretek esetén gomba (meduza) szerű instabil alakot vesz fel, amely mozgás közben töredezett kődarab, kavics formát mutat (224. ábra).

Pályája bizonytalan. Egészen nagy buborékok (15 mm felett) lapos kupola alakban szállnak felfelé (ez ismét stabil forma), és jó közelítéssel egyenes mentén mozognak.

Az egyes légbuborékok felszállósebességére nyugvó vízben az alábbi összefüggéseket találták:

$d = 0{,}06$ mm-ig a *Stokes*-formula érvényes: $w \cong 0{,}4\ d^2$ (ha d mm és w m/mp) $d = 0{,}06-1{,}0$ mm-ig (*Allen* szerint [54]) $w = A\,d - B$ (d méter, w m/mp), ahol A és B értéke a buborék sűrűségétől, a folyadék sűrűségétől és viszkozitásától és az erőtér gyorsulásától függ:



224. ábra. Légbuborékok alakjai

$$A = \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma - \gamma_g}{\gamma_g}\frac{g}{\sqrt{\nu}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 10^4 \qquad \text{és}$$

$$B = \frac{1}{5}\left(\frac{9}{2}\frac{\gamma - \gamma_g}{\gamma_g}\frac{\gamma_v}{\gamma_g} g \nu\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{-2}.$$

Levegő és víz esetére ($\gamma = 1000$ kg/m³, $\gamma_g = 1{,}2$ kg/m³, $g = 9{,}81$ m/mp², $\nu = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ m²/mp):

$$A = 0{,}925 \cdot 10^4\ 1/\text{mp}, \quad B = 0{,}647 \cdot 10^{-2}\ \text{m/mp}.$$

1 mm buboréknagyság környezetében a felszállósebesség csúcsértéket mutat (*225. ábra)*, majd 2÷5 mm környékén $w = 0{,}215 \div 0{,}24$ m/mp állandó értékre esik vissza. E felett a felszállósebesség kismértékű növekedése észlelhető a buborékátmérő függvényében.

Ha a buborék mérete a felszállócső átmérőjét megközelíti, a falhatás már nem hanyagolható el és más, empirikus összefüggések használata indokolt.

A kérdés részletes elemzése helyett csak *Dumitrescu* [62] elméleti vizsgálatának *Német Árpád* és *Szabó Ákos* méréseivel egybevágó eredményét ismertetem:

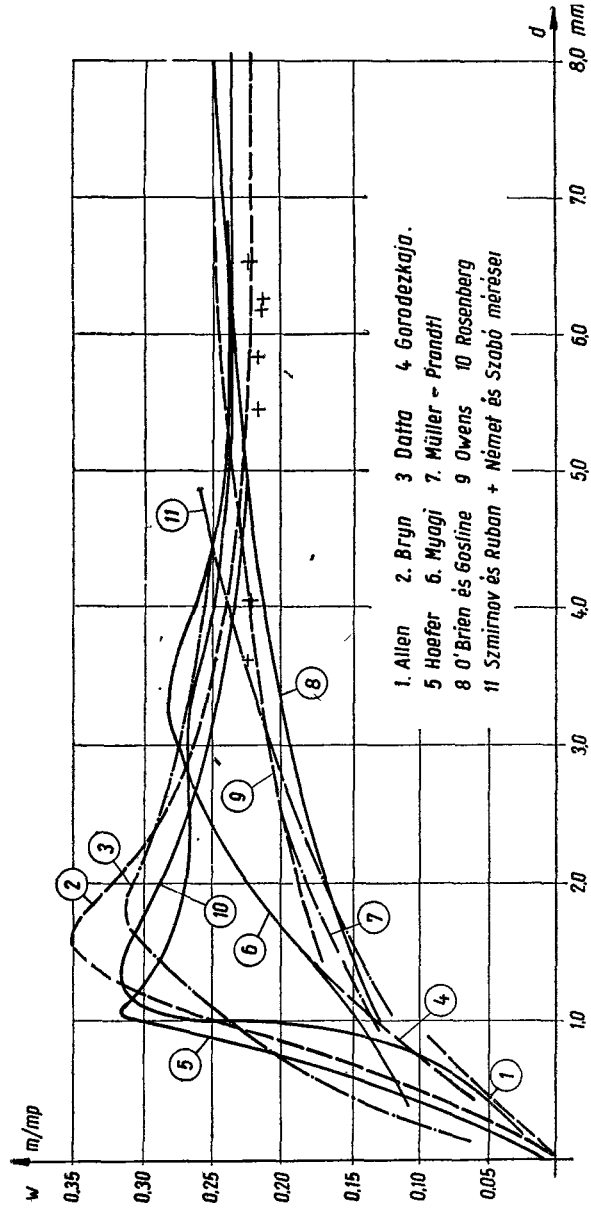
Dumitrescu a vizsgálatnál feltételezi, hogy a folyadék ideális (örvénymentes), és a megoldást a potenciálelmélet segítségével végzi. A kapilláris erők elhanyagolásakor dimenzióanalízissel kimutatja, hogy a sebességre

$$w = \varphi^* \sqrt{g\,D/2} \tag{445}$$

összefüggés érvényes, és φ^*-ot, mint $\Delta\varphi = 0$ differenciálegyenlet saját értékét határozza meg.

Ha a súly- és kapilláris erő hányadosából a $P = D\sqrt{\gamma/k}$ méret nélküli számot alkotjuk (ahol D a csőátmérő méterben, k a kapilláris állandó kg/m-ben), s φ^* mért értékét ennek függvényében ábrázoljuk, tapasztalható, hogy $P = 10$ felett a mért érték jól egyezik az elméleti úton meghatározott $\varphi^* = 0{,}496$ értékkel. $P < 10$ esetén a kapillaritás hatása nem hanyagolható el *(226. ábra)*.

A (445) összefüggés arra mutat, hogy a csövet majdnem kitöltő buborék mozgása szabad felszínű folyadékáramlási kérdés és ezért a *Froude*-szám (l. a 44/II. pontot) állandósága jellemzi.



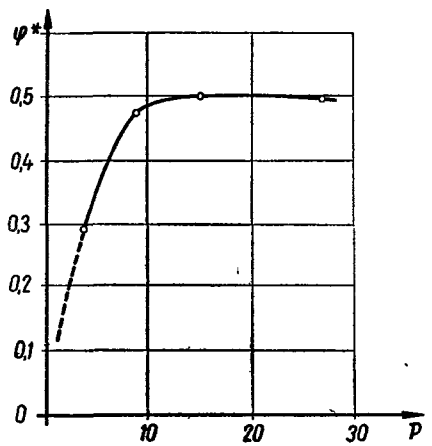
225. ábra. Gázbuborékok felszállósebessége nyugvó vízben

A *Dumitrescu*-összefüggés kis D értékekre a fentiek szerint nem ad jó értéket. Erre a szakaszra *Gibson* mérései fogadhatók el, illetve tetszőleges csőátmérőre a két összefüggést egybefoglaló és mérésekkel alátámasztott *Német Árpád*-féle formula használható:

$$w = 0{,}35 \sqrt{g\left(D - \frac{D_0^2}{D}\right)}, \qquad (446)$$

ahol $D_0 = 0{,}00535$ m. $D > 2$ cm-es csövekre D_0^2/D elhanyagolható a D mellett és lényegében a *Dumitrescu* összefüggés használható:

$$w = 0{,}35 \sqrt{g\,D}. \qquad (445/a)$$



226. ábra. Légbuborék felszállósebességi tényezőjének változása

Az egyes buborékok előresietését *nem befolyásolja* a víz áramlási sebessége. Mivel a csővezetékben a turbulens sebességeloszlás szerint pontról pontra változik a sebesség értéke, s a buborék csavarvonalban halad a vízben, a buborékot *szállító átlagos vízsebesség* általában nem egyezik a *közepes vízsebességgel*. Emiatt egyes szerzők arra a téves következtetésre jutottak, hogy a víz áramlása apasztja az előresietési sebesség értékét. Kísérleteink igazolták, hogy ismert sebességeloszlású szállítócsőben filmezve a buborék pályáját, a buborék előresietése minden pontban egyezett a nyugvó vízben mért előresietési sebességgel, noha az átlagos vízsebességből számított értéktől eltért.

Buborék csoportok viselkedésére általában csak korrekcióval érvényesek az egyes buborékokra megállapított összefüggések. Buborékcsoportokat folyamatosan adagolva csőben nyugvó vízbe, azok előresietési sebessége kis légadagolásnál is jól mérhetően $w = 0{,}3 \div 0{,}5$ m/mp értékek közé esik (a gyorsítási szakasz feletti részen a légadagolófej kialakításától függetlenül).

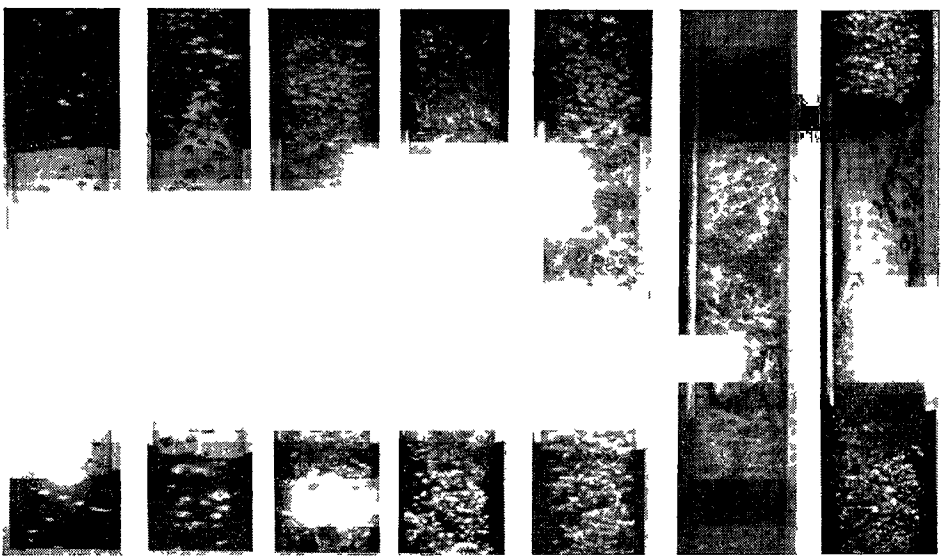
Megfigyelhető, hogy kis légadagolással a buborékok sűrűsödnek ugyan, de még egymásra alig van hatásuk *(227. ábra)*, a buborékok mérete 1÷3 mm közé esik, mert ezeknek a buborékoknak állandó az előresietése és ezért a kisebb méretű buborékok — akár lassabbak, akár gyorsabbak — beleolvadnak ezekbe, mert vagy a nagy buborék éri utól az egész kicsit, vagy a közepes éri utól a nagyobbat. A légadagolás növelése e nagy buborékok sűrűsödését okozza, sok egység összeolvad és kialakulnak azok a buborékok, amelyeknek a mozgása már gyorsabb, mint az 1÷3 mm-es buborékoké. Így a nagy buborékok fokozatosan utólérik és «felfalják» a kisebbeket, végül kialakul az egész csövet kitöltő *óriásbuborék*, amely ugyan lassabban halad a csőben, de a statisztikus valószínűség szerint mögötte majdnem egyenletes távolságban periodikusan kialakult következő buborék már nem éri utól. Ezzel a víztükör kezdeti felemelkedése periodikusan lüktető jellegű lesz. Ez a periodikus lüktetés mammutszivattyúknál is és gázos kútnál is bekövetkezik bizonyos magassági méret felett. Ezen a téren még a kísérletek kiterjesztése szükséges.

A w határsebesség eléréséhez szükséges (viszonylagos) **úthosszúságot** a gyakorlat igényeit kielégítő pontossággal a 121. pontban bevezetett y_1 alaphosszúság két

és félszeresében szabhatjuk meg. (Az ottani táblázat szerint az elkovetett hiba: 4,2%, mert ezen az útszakaszon a buborék a határsebességének 95,8%-ára gyorsult fel.) Írható: $y_\infty \cong 2{,}5\ y_1$.

Az y_1 alaphossszúságot kifejező (374) egyenletet a $\gamma = \gamma_v$ fajsúlyú víznél könnyebb $\gamma_a = \gamma_g$ fajsúlyú **gázbuborékok** esetére: $\gamma_v - \gamma_g \cong \gamma_v$ helyettesítéssel (az emelkedésnek megfelelő) ellenkező előjellel kell felírni:

$$y_1 \cong \frac{\gamma_g}{\gamma_v} \frac{w^2}{2g} \quad \text{(m)}. \tag{447}$$



227. ábra. Buborék-csoportok mozgása nyugvó vízben

A felgyorsulás **időtartamát** (az indítás idejét) a 121. pont, a (375) szerint kiszámított Z időállandó két és félszeresével vehetjuk számításba, azaz: $T_i = 2{,}5\ Z$.

Az időállandó nagyságát meghatározó **kezdőgyorsulás** a gyorsulva emelkedő buborékot körüláramló folyadék *redukált tomegének* figyelembe vételével a 11. pont (32) képlete alapján $\gamma = \gamma_v$ és $(\gamma_v - \gamma_g) \cong \gamma_v$ helyettesítéssel és előjelváltással az **emelkedő buborék** esetére így írható:

$$a_0 \cong \frac{\gamma_v}{\gamma_g + \lambda^* \gamma_v} g \qquad \text{(m/mp}^2\text{)}. \tag{448}$$

Az időállandó tehát:

$$Z = \frac{w}{a_0} \cong \frac{\gamma_g + \lambda^* \gamma_v}{\gamma_v} \frac{w}{g} \qquad \text{(mp)}. \tag{449}$$

125. példa. Az $y = 40$ m mélységben $t = 10$ C°-os $\gamma_v = 1000$ kg/m³ fajsúlyú vízbe adagolt légbuborék fajsúlya, $p_0 = 1$ ata, $(p_0/\gamma_v = A = 10$ m) légköri nyomású környezetben, $x = (y + A)/A = 5$-szörös kompresszióviszony esetén:

$$\gamma_g = x \cdot \frac{273}{273 + t}\,\gamma_l = 5 \cdot \frac{273}{283} \cdot 1{,}293 = 6{,}24 \text{ kg/m}^3.$$

$d = 5$ mm-es buborék határsebessége a *225. ábra* szerint

$$w \cong 0{,}22 \text{ m/mp}.$$

A határsebesség eléréséhez szükséges **úthosszúság:**

$$y_\infty = 2{,}5\frac{\gamma_g}{\gamma_v}\frac{w^2}{2g} = \frac{2{,}5 \cdot 6{,}24 \cdot 0{,}22^2}{1000 \cdot 19{,}62} = \mathbf{0{,}38 \cdot 10^{-4}\ m = 0{,}038\ mm.}$$

Az **indítás ideje** a gömb alakú buborékra kiszámított $\lambda^* = 0{,}5$ értékkel:

$$T_i = 2{,}5\,\frac{\gamma_g + \lambda^*\gamma_v}{\gamma_v}\frac{w}{g} = \frac{2{,}5\,(6{,}24 + 0{,}5 \cdot 1000)}{1000} \cdot \frac{0{,}22}{9{,}81} = \mathbf{0{,}0285\ mp.}$$

Figyelemre méltó a gázbuborékok felgyorsulásához szükséges időtartam rövidsége. A példa adatai szerint a buborék mindössze **négy század milliméteres** úthosszúság befutása után **három század másodpere** alatt eléri az előresietési határsebességét, ami azt is jelenti, hogy a buborék instacionárius mozgásának behatóbb vizsgálata a gyakorlat számára érdektelen.

134. A teljes (belső) szállítómagasság

Már a 4/d. pontban kimutattam, hogy a γ_v fajsúlyú vízoszlopba p_1 nyomással adagolt gázbuborékok a keverékfajsúlyt a keverési aránytól és a nyomástól függő $\gamma < \gamma_v$ értékre apasztják. E keverékfajsúly a kifolyónyílás magasságában a legkisebb, amikor (szabad kifolyás esetén) a gázbuborékok izotermikus terjeszkedése a $p_0 = A\,\gamma_v$ légköri nyomáson befejeződött.

Az áramlási veszteségmagasság figyelmen kívül hagyásával a felszállócső dl hosszúságú elemén a nyomás megváltozása:

$$dp = \gamma\,dl. \tag{450}$$

Az $x = p/p_0$ nyomásarány és a $z = \gamma_v/\gamma$ fajsúlyarány bevezetésével írható:

$$dl = \frac{dp}{\gamma} = A\,z\,dx. \tag{451}$$

Gázmentes tiszta vízre, $z = 1$ helyettesítéssel:

$$dy = A\,dx.$$

A teljes vagy belső H_0 szállítómagasság úgy értelmezhető, mint a víztükör alá y_1 mélységig bemerülő tiszta vízoszlop ama **járulékos magassága,** amellyel a keverékoszlop a fajsúlyapadás következtében a víztükör fölé emelkedik. Ha tehát a

keverékoszlop teljes magassága: l_0, akkor az x_1 és x_0 határok között integrálva írható:

$$H_0 = l_0 - y_1 = A \int_{x_0}^{x_1} (z - 1)\,dx \qquad \text{(m)}. \tag{452}$$

(Szabad kifolyás esetén: $x_0 = 1$.)

A H_0 szállítómagasság (452) egyenletből számítható, ha a $z = z(x)$ függvényt ismerjük.

A kovetkező pontokban a függvény meghatározását a mammutszivattyú és a gázoskút esetére elkülönítve fogom tárgyalni. Itt csupán azt jegyzem meg, hogy a mérnöki gyakorlat számára az analitikai megoldás, bonyolultságánál fogva, szóba sem jöhet, ennélfogva a **függvényábrák** grafikus integrálásával szerkesztett gorbeseregeket kozlok a szállítómagasság meghatározásához.

135. A hatásos szállítómagasság

Az áramlási veszteségek miatt a H_0 teljes (vagy belső) szállítómagasságnak nagyobbnak kell lennie a kifolyószint $H = l - y_1$ magasságával megszabott sztatikai értéknél, amely **hatásos szállítómagasságnak** nevezhető.

Ha h' a felszállócső áramlási veszteségmagassága, akkor a hatásos szállítómagasság így írható:

$$H = H_0 - h'.$$

Minthogy a változó fajsúlyú folyadék nyomása nemcsak a mélységtől függ, hanem az áramlási veszteség miatt is megváltozik, tehát az áramlási veszteségmagasság elkulonített kiszámítása helyett a nyomás megváltozását okozó tényezőket **egyszerre** (egy egyenletben) kell figyelembe venni. Ez a H hatásos szállítómagasság *kozvetlen* kiszámítására vezet. A belső és a hatásos szállítómagasság *kulonbségéből* azután a veszteségmagasság szabatos értéke is kiadódik. ($h' = H_0 - H$.)

A felszállócső dl hosszúságú elemén — a (450)-től eltérően — a nyomás nemcsak $\gamma\,dl$ értékkel változik meg, hanem ezenfelül az áramlási veszteségmagasság is $\gamma\,dh'$ nyomásesést okoz. A nyomás megváltozása tehát:

$$dp = \gamma\,(dl + dh'), \tag{453}$$

ahol a felszállócső hosszegységére eső ι veszteségmagasság bevezetésével: $dh' = i\,dl$.

E folyómétervesztegnek a γ_v fajsúlyú **tiszta vízre** vonatkoztatott **alapértéke:**

$$\iota_0 = \frac{\lambda_r}{d_r}\,\frac{c_0^2}{2g}, \tag{454}$$

ahol a λ_r redukált csősúrlódási tényező megnagyobbításával vehetők figyelembe a járulékos veszteségek (csőkotések, belépési és kilépési veszteségek). Itt ugyanis az egyenértékű csőhosszúsággal nem számolhatunk, mert az oszlopmagasságok valóságos értékeit kell helyettesíteni.

Az egyenletben $d_r = d - d_0$ a redukált csőátmérő, amely általában gyűrű alakú szelvényre vonatkozik. Ha a felszállócső szelvényét a d_0 átmérőjű légvezető-cső nem szűkíti, akkor: $d_0 = 0$.

c_0 a teljes szabad f szelvényre átszámított tisztavíz-sebesség, amely V_v vízhozam esetében: $c_0 = V_v/f$.

A c keveréksebességet a z fajtérfogatarány **lineárisan** megnagyobbítja, azaz: $c = z\,c_0$.

A γ fajsúlyú keverékoszlop folyóméterenkénti veszteségmagassága tehát:

$$i = \frac{\lambda_r}{d_r}\,\frac{c^2}{2g} = i_0\,z^2. \tag{455}$$

A teljes szállítómagasság kiszámítására vezető gondolatmenet alapján, (451) mintájára, a (455) egyenlet figyelembevételével, a (453) egyenlet a következő alakra hozható:

$$\mathrm{d}l = A\,\frac{z}{1 + i_0\,z^2}\,\mathrm{d}\,x = A\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(m)}, \tag{456}$$

ahol:

$$\Phi = \frac{z}{1 + i_0\,z^2} \quad \text{és} \quad z = z\,(x). \tag{457}$$

A Φ függvényt a z fajsúlyarány minden i_0 paraméterhez egyértelműen meghatározza. A $z = z\,(x)$ összefüggés ismeretével értékei az x nyomásarány függvényében (pontról pontra) kiszámíthatók, és ezáltal a $\Phi = \Phi\,(x)$ alakban felrajzolt függvényábra az x és x_0 határok között grafikusan integrálhatóvá válik.

A **hatásos szállítómagasságot** a (456) egyenlet integrálásával kapott l keverékoszlopmagasságnak a víztükör fölé emelkedő szakasza adja, ez pedig az egyenletes üzem feltételét akkor elégíti ki, hogyha éppen akkora, mint a felszállócsőnek vízbe nem merülő $l - y$ hosszúsága. Írható:

$$H = l - y = A\int_{x_0}^{x_1}(\Phi - 1)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(m)}. \tag{458}$$

A h' veszteségmagasság szabatos kiszámítása eszerint eléggé körülményes, mert minden csőmérethez és minden üzemállapothoz két területintegrál meghatározását teszi szükségessé. Különösen a $\Phi = \Phi\,(x)$ görbeseregek felrajzolása teszi hosszadalmassá ezt az eljárást.

136. Az áramlási veszteségek közelítő számítása

A 135. pontban ismertetett szabatos számítás annyira hosszadalmas, hogy gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából értéktelen.

A (458) egyenletnek átalakításával azonban oly közelítő eredményhez jutunk, amely feleslegessé teszi a $\Phi\,(x)$ görbék felrajzolását, és a gyakorlat igényeit igen jól kielégítő pontossággal a h' közvetlen meghatározására vezet.

Ha figyelembe vesszük, hogy a Φ nevezőjében az $i_0\,z^2$ az egységnél mindig jóval kisebb, ennek **négyzete** tehát az egységhez képest (az i_0 és z szokásos értékei esetén

ben mintegy 10% pontatlansággal) elhanyagolható, akkor — a tört számlálóját és nevezőjét $1-i_0 z^2$ tényezővel szorozva, $1-i_0^2 z^4 \cong 1$ helyettesítéssel írható:

$$\Phi = \frac{z}{1 + i_0 z^2} \cong z - i_0 z^3. \qquad (457/k)$$

A (458) egyenlet e közelítő érték helyettesítésével az alábbi kéttagú eredményt adja

$$H = H_0 - h' \cong A \int_{x_0}^{x_1} (z - 1)\,\mathrm{d}x - A\, i_0 \int_{x_0}^{x_1} z^3\,\mathrm{d}x. \qquad (458/k)$$

A közelítő számítás előnye abban domborodik ki, hogy a felszállócső h' áramlási veszteségeit **elkülönítve** is megadja. Az első tag ugyanis (452) szerint a teljes (H_0) szállítómagasságot fejezi ki, ennélfogva a második tag a **veszteségmagasság** közelítő értékét szolgáltatja, azaz:

$$h' \cong A\, i_0 \int_{x_0}^{x_1} z^3\,\mathrm{d}x. \qquad (459)$$

Ha a $z = z(x)$ függvényt ismerjük, akkor a veszteségmagasság a csőméretektől független (előre felrajzolható) integrálgörbesereg felhasználásával határozható meg, éppen úgy, mint a H_0 teljes szállítómagasság is.

Figyelemre méltó, hogy a felszállócső veszteségmagassága a keverék **fajtérfogatának harmadik hatványával** növekszik. Ez azt is jelenti, hogy a gázadagolás fokozásával a teljes szállítómagasság megnövekedése mellett számolni kell a veszteségek **hatványozott** megnagyobbodásával is.

Valamivel **durvább közelítéssel** a veszteségszámítást a folyadékoszlop fajsúlyarányának z_k **közepes értékére** vonatkoztatjuk. (459) szerint írható:

$$h' = A\, i_0 z_k^3 \quad (x_1 - x_0) \qquad \text{(m)}. \qquad (459/k)$$

Ez a közelítő számítás egyszerűségénél fogva érdemel figyelmet, és elfogadható pontosságú eredményt szolgáltat, ha a z_k középértéket helyesen értelmezzük. A $z = z(x)$ függvény középértékét az $x_1 - x_0$ nyomáshatárok között kell meghatározni, mert csak így adja ugyanezt a (teljes) szállítómagasságot. Írható:

$$z_k (x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} z\,\mathrm{d}x. \qquad (460)$$

126. példa. Egy $d = 100$ mm (belső) átmérőjű felszállócső keresztmetszetét egy $d_0 = 60$ mm (külső) átmérőjű légadagolócső szűkíti. A redukált csősúrlódási tényező: $\lambda_r = 0{,}04$, a (tiszta) víz sebessége: $c_0 = 1{,}8$ m/mp, $(c_0^2/2g = 0{,}166$ m).

A folyóméterenkénti veszteség, (454) szerint, $d - d_0 = 0{,}1 - 0{,}06 = 0{,}04$ m helyettesítéssel:

$$i_0 = \frac{\lambda_r}{d - d_0} \frac{c_0^2}{2g} = \frac{0{,}04}{0{,}04} \cdot 0{,}166 = \mathbf{0{,}166}.$$

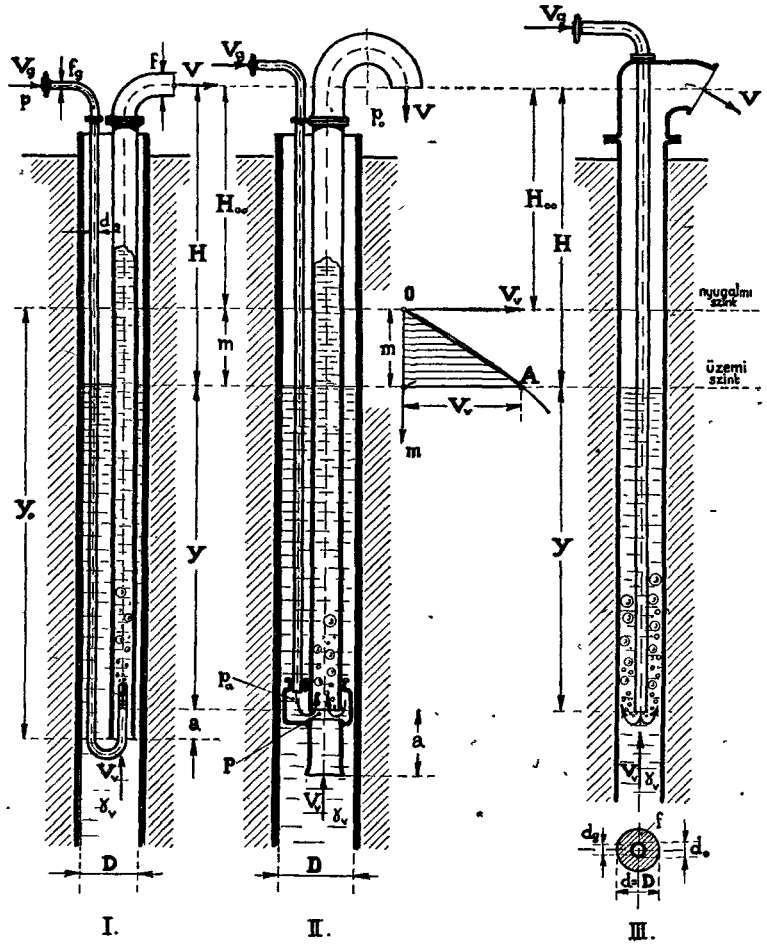
Ha gázadagolással a keverékoszlop fajsúlyának közepes értéke $1/z_k = 0{,}85$-re csökken, azaz: $z_k = 1 : 0{,}85 = 1{,}177$, $(z_k^3 = 1{,}63)$, akkor a keverék veszteségmagassága, azonos vízhozam esetén, $A = 10$ m, $x_1 = 6$ és $x_0 = 1$ értékekkel:

$$\mathbf{h' \cong A i_0 z_k^3 (x_1 - x_0) = 10 \cdot 0{,}166 \cdot 1{,}63 \cdot (6 - 1) = 13{,}5\ m.}$$

137. A légnyomásos vízemelő. (Mammutszivattyú)

A légnyomásos vízemelő elvi elrendezését a 4/d. pontban már ismertettem. (Vö. a *12. ábrával.*)

A szokásos kiviteli változatok vázlatát a *228. ábracsoport* mutatja.



228. ábra. A légnyomásos vízemelő változatai. I. Belső adagolás. II. *Borsig*-rendszerű külső adagolás. III. A béléscsőből kialakított változat

Az I. és II. változat jellemzője: a kút béléscsövénél jóval kisebb átmérőjű felszállócső, amelyben a víztükör alatt y mélységben adagolt levegő buborékok alakjában keveredik a vízzel. A kívül vezetett légvezetőcső az I. változat szerint pipa alakú végével a felszállócső tengelyvonalába torkollik **(belső adagolás)** a II. változat szerint a felszállócső külső palástjára szerelt adagolófejhez csatlakozik **(külső adagolás)**

Ahol a béléscső szelvénye oly kicsiny, hogy abban az adagolófejjel felszerelt felszállócső el nem helyezhető, ott a III. változat szerint maga a béléscső használ-

ható a víz kivezetésére. Ebben az esetben csupán a (belső adagolású) légvezetőcső lemélyítésére van szükség. Ez az olcsó, de tökéletlen változat csak szükségmegoldásnak minősíthető.

Ennél a harmadik változatnál a víztükör üzem közben egészen eltűnik, mert a légbuborékokkal keveredő vízoszlop a béléscső szabad szelvényét a szájnyílásig teljesen kitölti. E nálunk (főleg az Alföldön) elterjedt változatnak alig 10%-os hatásfoka az adagolás tökéletlenségében és a szokatlanul nagy szlipveszteségben talál magyarázatot.

A légnyomásos vízemelő üzemi jellemzőit és azok kapcsolatát a $z = \gamma_v/\gamma$ fajsúlyarány szabja meg, amelyet az $x = p_1/p_0$ nyomásarány függvényében kell meghatározni.

Ha V_{go} normálállapotú gázáramot y_1 mélységben $p_1 = p_0 + \gamma_v y_1$ nyomással adagolunk az f keresztmetszetű felszállócsövön c_v sebességgel emelkedő V_v vízáramba, akkor a tapasztalat szerint a gázbuborékok

$$w \cong 0{,}6 \div 1{,}6 \text{ m/mp}$$

viszonylagos előresietési sebességgel emelkednek a vízoszlopban. A gázsebesség tehát : $c_g = c_v + w$. (Vö. a 133. ponttal.)

A szlipveszteséget okozó előresietés következtében a γ keverékfajsúly a szállítómagasság rovására megnagyobbodik.

A γ fajsúly meghatározására a gyöngyfüzér alakjában emelkedő buborékokat f_g keresztmetszetű folytonos csatornává egyesítjük, amely a cső teljes szelvényéből a vízáram számára $f_v = f - f_g$ szűkített keresztmetszetet hagy szabadon.

E keresztmetszetek arányától függ a keverék fajsúlya is, amely a dy hosszúságú keverékoszlop súlyának és térfogatának hányadosából, a gázsúly elhanyagolásával így írható:

$$\gamma = \frac{f_v \gamma_v + f_g \gamma_g}{f} \cong \frac{f_v}{f} \gamma_v; \quad \text{azaz:} \quad z = \frac{f}{f_v} . \tag{461}$$

A $V_v = f c_0 = f_v c_v$ vízáram sebessége tehát a gázadagolás következtében: $c_v = z c_0$, a gázáramé pedig $c_g = z c_0 + w$.

$p = x p_0$ nyomáson a gázáram térfogata (x-szeres sűrítés miatt): $V_g = V_{go}/x = f_g c_g$ és ezzel a gázcsatorna keresztmetszete:

$$f_g = \frac{V_{go}}{x c_g} = \frac{V_v}{c_0} - \frac{V_v}{c_v} .$$

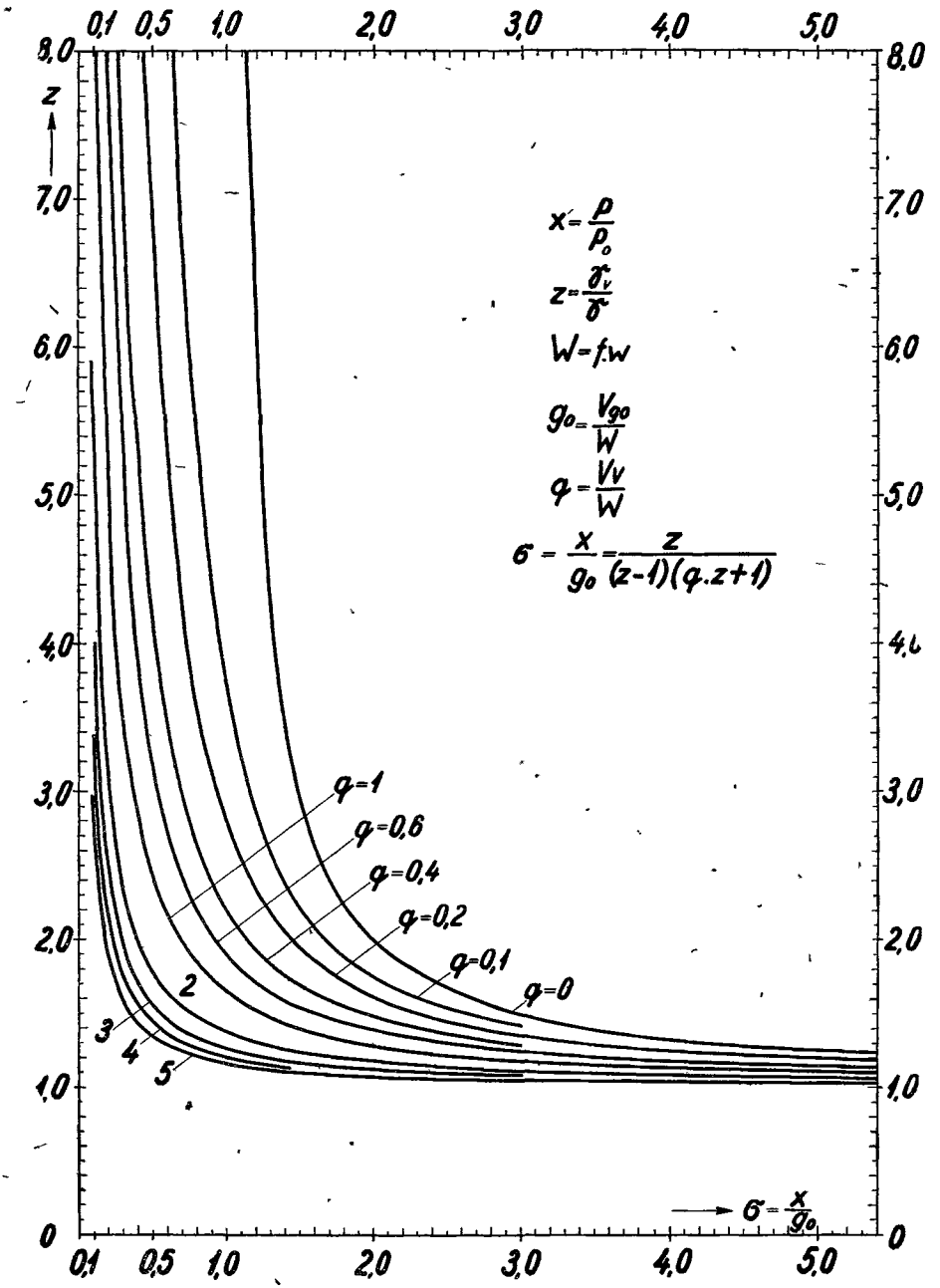
Ez az egyenlet a sebességek helyettesítésével a z fajsúlyarány és az x nyomásarány között fennálló kapcsolatot fejezi ki. Rendezés után írható:

$$x = \frac{V_{go} z}{(z-1)(V_v z + W)} , \tag{462}$$

ahol:

$$W = f w \qquad (\text{m}^3/\text{mp}) \tag{463}$$

a w viszonylagos sebességgel **hatástalanul** átáramló gázmennyiségnek a teljes (f) csőszelvényre átszámított értéke, vagyis a vízemelő **névleges gázvesztesége.**



229. ábra. A légnyomásos vízemelő z gorbéi

E névleges gázveszteség a berendezés egyik legfontosabb jellemzője. Nagyságát a felszállócső f keresztmetszete és a w előresietési sebesség egyértelműen meghatározza. A szlipveszteségek csökkentése érdekében e névleges gázveszteség kisebbítésére kell törekedni.

A fajsúlyarány és a nyomásarány között fennálló kapcsolat **egyetlen** görbesereggel ábrázolható, ha a (462) egyenletbe a V_v vízáramnak és a V_{g0} gázáramnak a névleges gázveszteséghez viszonyított értékét helyettesítjük, vagyis alábbi fajlagos értékekkel számolunk:

$g_0 = V_{g0} : W$ a fajlagos gázadagolás, vagyis a «beszívott» gáz és a névleges gázveszteség arányszáma.

$q = V_v : W$ a fajlagos vízhozam, vagyis a szállított vízáram és a névleges gázveszteség arányszáma.

$\sigma = x : g_0$ a sűrítési fok és a fajlagos gázadagolás arányszáma.

E jelölésekkel a (462) egyenlet — átrendezéssel — a következő alakra hozható:

$$\sigma = \frac{x}{g_0} = \frac{z}{(z-1)(q\,z+1)}\,. \tag{464}$$

Ennek az egyenletnek z szerint megoldott inverz alakja az x/g_0 független változó függvényében **egyetlen** előre felrajzolható görbesereggel ábrázolható.

Minden q fajlagos vízhozamhoz egyetlen görbe tartozik, amely a z fajsúlyarányt az $x = \sigma g_0$ nyomásarány függvényében egyértelműen meghatározza.

Ezt a görbesereget a gyakorlatban előforduló q és g_0 értékekkel a *229. ábrában* grafikus integrálásra alkalmas alakban közlöm, mert az analitikai számítás, bonyolultságánál fogva, a gyakorlat számára használhatatlan.

A függvényábra használata feltételezi a névleges gázveszteség ismeretét; adott esetben tehát a w előresietési sebességet az adagolás jósága szerint (becsléssel) előre kell felvenni, és a felszállócső f keresztmetszetét is meg kell választani.

138. A légnyomásos vízemelő teljes szállítómagassága

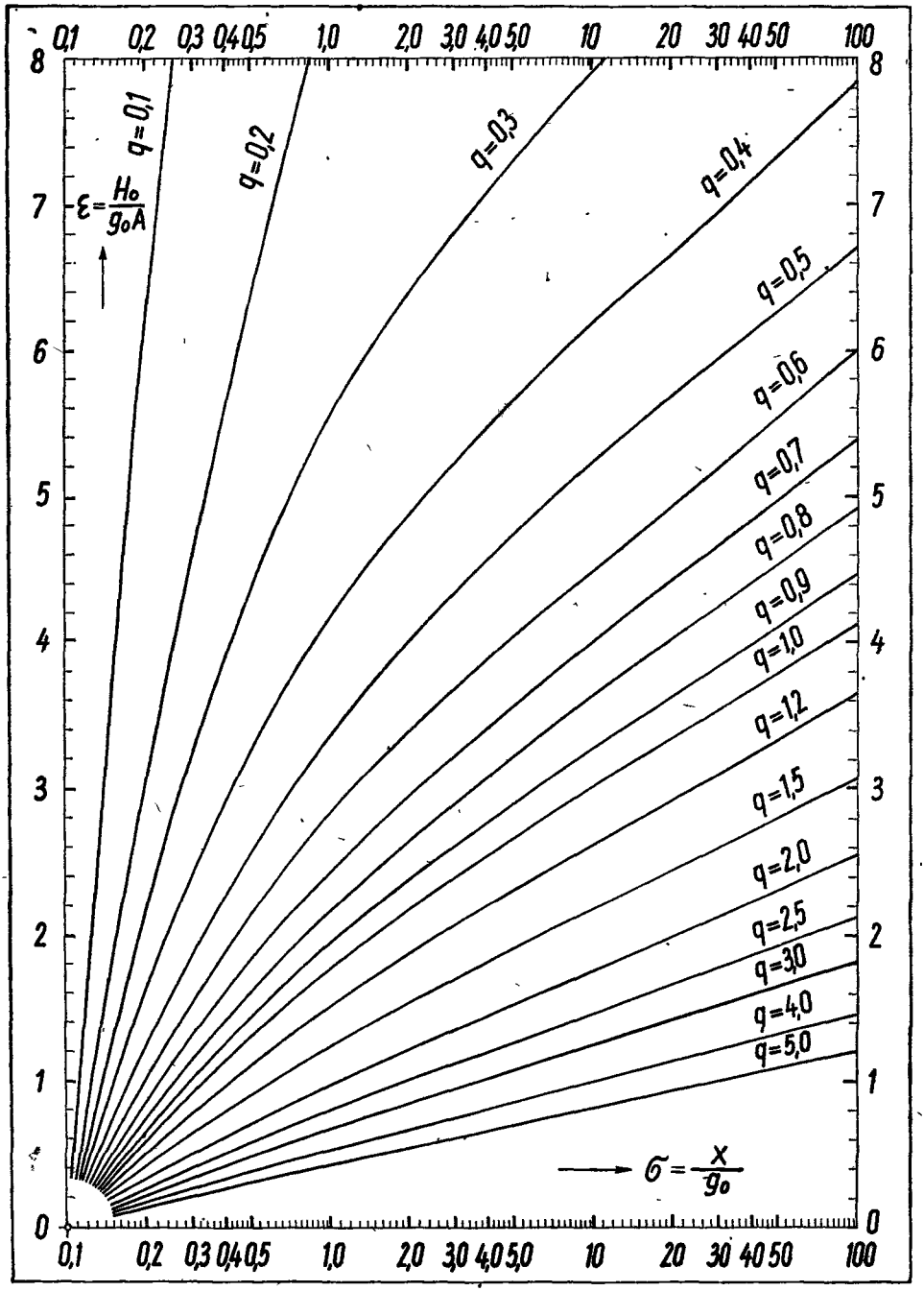
A légnyomásos vízemelő *teljes (belső) szállítómagasságát* a fajsúlyarány $z = z(x)$ függvényábrájának grafikus integrálásával lehet meghatározni.

Ez a művelet előre elvégezhető, és a mértékrendszertől is független integrálgörbeseregek szerkesztésére alkalmas. E görbék a H_0 szállítómagasság helyett annak az A légköri nyomásmagassághoz viszonyított H_0/A értékét szolgáltatják, ami még azzal az előnnyel is együttjár, hogy a számítás minden barométerállásnál szabatos eredményt ad.

Ha a függvényábrát a g_0 fajlagos gázadagolás egységére vonatkoztatjuk, akkor — úgy, mint a z görbesor esetében — a gyakorlatban előforduló minden üzemállapot jellemzésére a *230. ábrában* bemutatott *egyetlen* görbesereget kapunk.

A számítások elvégzéséhez a (452) egyenlet — $g_0 > 0$ esetére — átrendezéssel a következő alakra hozható:

$$\frac{H_0}{g_0 A} = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} (z-1)\,\mathrm{d}\sigma = \varepsilon_1 - \varepsilon_0. \tag{452/m}$$



230. ábra. A teljes szállítómagasság (Ho) görbéi; $\varepsilon(\sigma)$ görbesereg

ahol: $\sigma_0 = x_0/g_0$ és $\sigma_1 = x_1/g_0$ a sűrítési fok és a fajlagos gázadagolás arányszámának alsó és felső határa.

A *230. ábrában* a q fajlagos vízhozam minden értékéhez egy-egy integrálgörbe tartozik. Ezek mindegyike ugyanabból a $\sigma_a = x_0/g_{0a} = 0{,}1$ kezdőpontból indul.

Ez a közös kezdőpont $x_0 = 1$ sűrítési fokon $g_0 = 10$-szeres fajlagos légadagolást jellemez. Ennyire túlhajtott légadagolással a vízemelő üzeme már nem lehet gazdaságos, tehát a görbesor kezdőpontjának ez az önkényes kijelölése a gyakorlat igényeit kielégíti.

Az $\varepsilon(\sigma)$ görbesereget ún. **fél logaritmus papiroson** szerkesztettem, mert a szállítómagasság meghatározásához ebben az esetben a $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ ordinátametszékek a függvényábrából közvetlenül lemérhetők.

Az előírt x_0 és x_1 nyomáshatárok között elérhető H_0 szállítómagasságnak a g_0 légadagoláshoz tartozó viszonylagos értékét a görbesor egy-egy q = *állandó* görbéjén a *231. ábrán* bemutatott módon olvassuk le. (Vö. a vízgőz közismert *J-S diagramjának* használatával, amelyen az entrópiahatárok között az adiabatikus hőesést ugyanígy olvassuk le.)

A diagramból lemért $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ ordinátametszékeket be kell szorozni a g_0 fajlagos légadagolás és az A légköri nyomásmagasság számértékével azaz:

$$H_0 = g_0 A \Delta\varepsilon \quad \text{(m)}. \tag{465}$$

127. példa. Egy mammutszivattyú $A = 10$ m légköri nyomásmagasságon $y = 20$ m mélységben adagolt levegővel $x_0 = 1$ és $x_1 = (y + A)/A = 3$ sűrítési határok között dolgozik.

A buborékok előresietési sebessége a $d = 80$ mm átmérőjű, $f = 50{,}3$ cm² keresztmetszetű felszállócsőben: $w = 0{,}8$ m/mp, a névleges gázveszteség tehát:

$$\mathbf{W = fw = 50{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-4} = 0{,}00403\ m^3/mp = 4{,}03\ l/mp.}$$

A légsűrítő szállítása: $V_{g0} = 16$ m³/óra «beszívott» levegő, a fajlagos gázadagolás tehát:

$$g_0 = \frac{V_{g0}}{W} = \frac{16 \cdot 10^3}{3600 \cdot 4{,}03} = 1{,}11$$

Az integrálási határok: $\sigma_0 = x_0/g_0 = 1 : 1{,}11 = 0{,}9$ és $\sigma_1 = 3 : 1{,}11 = 2{,}7$.

A teljes szállítómagasság viszonylagos értéke, $q = 0{,}8$ fajlagos vízszállítás esetén a *231. ábrában* lemért $\Delta\varepsilon = 0{,}76$ értékkel:

$$\mathbf{H_0 = g_0\ A\ \Delta\varepsilon = 1{,}11 \cdot 10 \cdot 0{,}76 = 8{,}4\ m,}$$

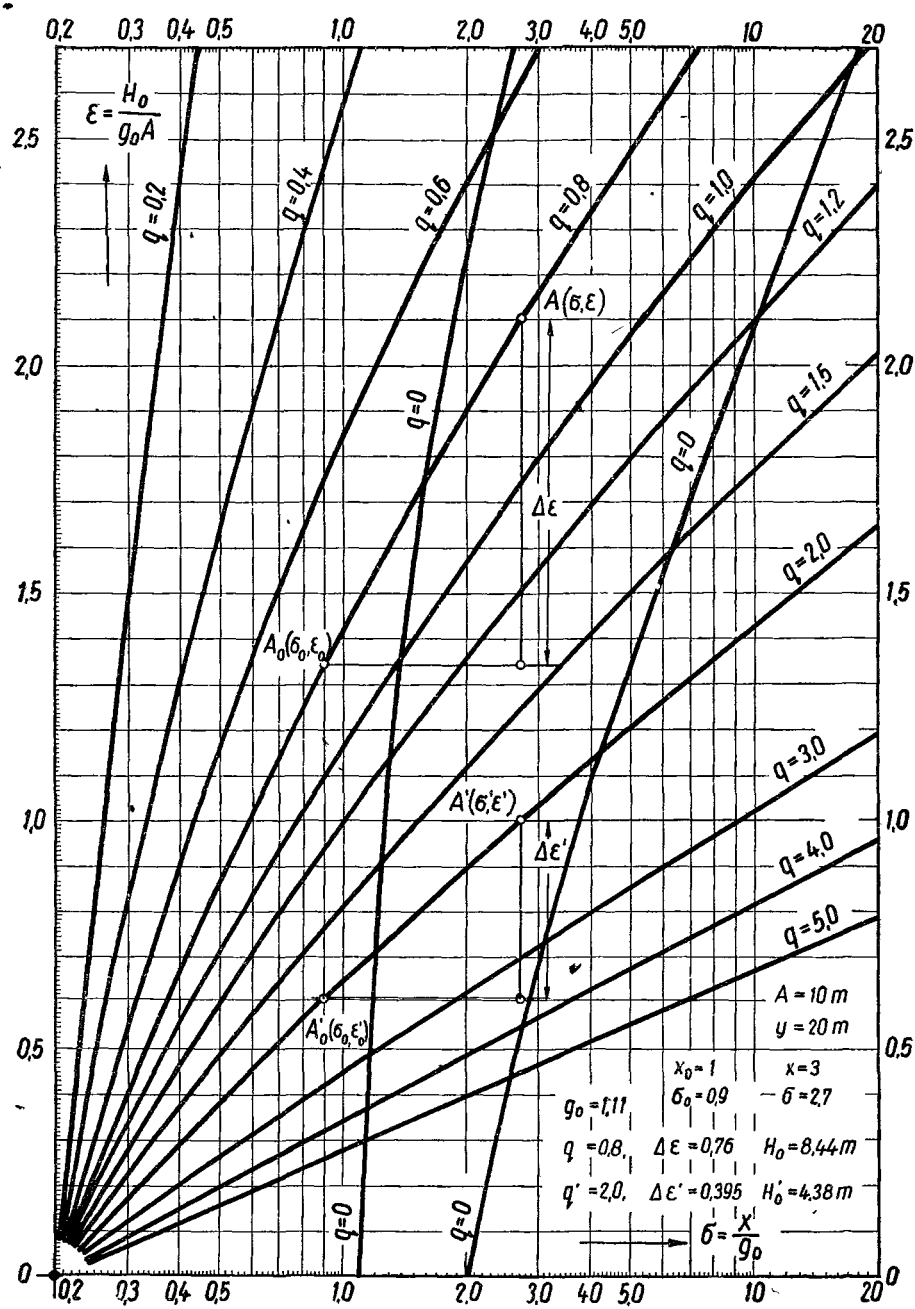
az emelő vízszállítása pedig:

$$\mathbf{V_v = q\ W = 0{,}8 \cdot 4{,}03 = 3{,}2\ l/mp.}$$

Ha a vízhozam, $q = 2{,}0$ értékkel $V_v' = 8{,}06$ l/mp-re emelkedik, akkor a teljes szállítómagasság, a diagramból lemért $\Delta\varepsilon' = 0{,}395$ értékkel már csak:

$$\mathbf{H_0' = 1{,}11 \cdot 10 \cdot 0{,}395 = 4{,}38\ m.}$$

A függvényábra használatával az adott esetben a $H_0(g_0)$ görbesor q = *állandó* görbéi is könnyen szerkeszthetők.



231. ábra Példa az $\varepsilon(\sigma)$ gorbesereg használatára

139. A felszállócső áramlási veszteségei

A 135. pontban a **hatásos szállítómagasság** szabatos meghatározására vezető eljárást ismertettem, amely azért hosszadalmas, mert a (458) egyenlettel megadott Φ függvényt minden szerkezetre és minden üzemállapotra más görbesereggel kell ábrázolni. Ezt az eljárást bonyolultságánál fogva csak kivételesen alkalmazzuk, olyankor, amikor a 136. pontban ismertetett közelítő módszerek pontosságának ellenőrzésére van szükség. Minden más esetben azonban a veszteségtényezők becslésének bizonytalansága miatt a gyakorlat igényeit teljesen kielégíti a **veszteségek közelítő meghatározására** vezető (459) képlet használata, amely a buborékok w előresietési sebességének bevezetésével alábbi alakra hozható:

$$h' = A\, i_w\, q^2 \int_{x_0}^{x_1} z^3\, \mathrm{d}x \qquad \text{(m)}, \tag{466}$$

ahol:

$$i_w = \frac{i_0}{q^2} = \frac{\lambda_r}{d_r}\,\frac{w^2}{2g} \tag{467}$$

a felszállócső folyóméterenkénti fajlagos veszteségmagasságának a $q = 1$ fajlagos vízszállításra vonatkoztatott **alapértéke,** amely az előresietési sebességmagasságból (a vízhozamtól függetlenül) előre kiszámítható.

A *229. ábrában* közölt $z(\sigma)$ diagram felhasználásával a (466) egyenlettel jellemezhető integrálgörbe-sereg is előre felrajzolható méretnélküli függvényábra alakjában.

A függvényábra egyenlete a $\sigma = x/g_0$ független változó bevezetésével a következő méretnélküli alakra hozható:

$$\frac{h'}{g_0\, A\, i_w} \cong \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} q^2 z^3\, \mathrm{d}\sigma = \nu_1 - \nu_0 = \Delta\nu. \tag{466/m}$$

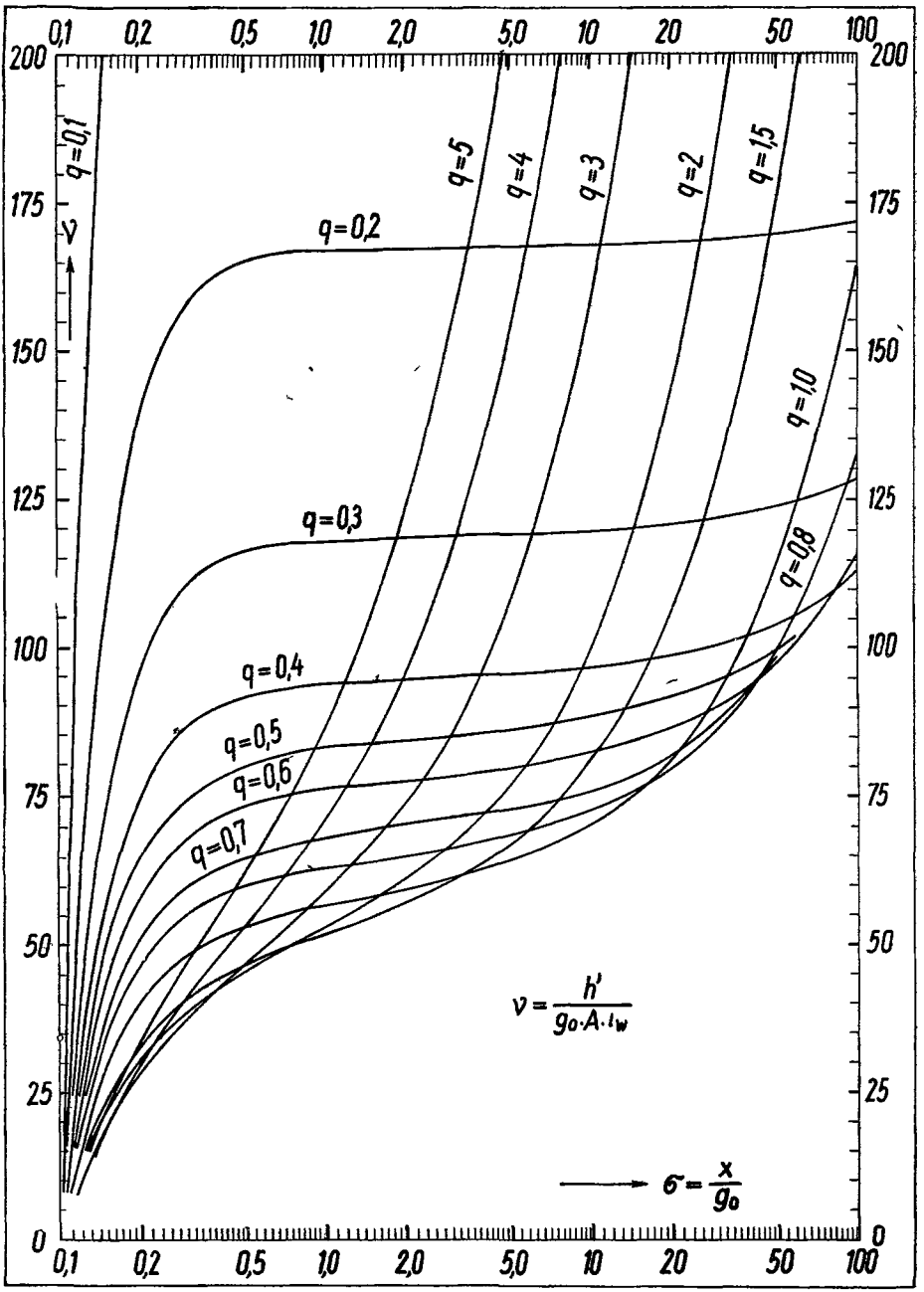
Ezt az integrálgörbe-sereget $\sigma_{00} = 0{,}1$ kezdőértékkel a q^2z^3 görbesereg grafikus integrálásával a *232. ábrában* szintén fél logaritmus papiroson szerkesztettem meg.

A görbék különleges alakja megnehezíti az **interpolációt,** amire a q nem kerekszámú értékeinél van szükség. Erre való tekintettel a *233. ábrában* a $\nu(q)$ görbesereget a q fajlagos vízhozam függvényében is felrajzoltam, ami lehetővé teszi bármelyik közbenső értékhez tartozó görbe pontjainak közbeiktatását.

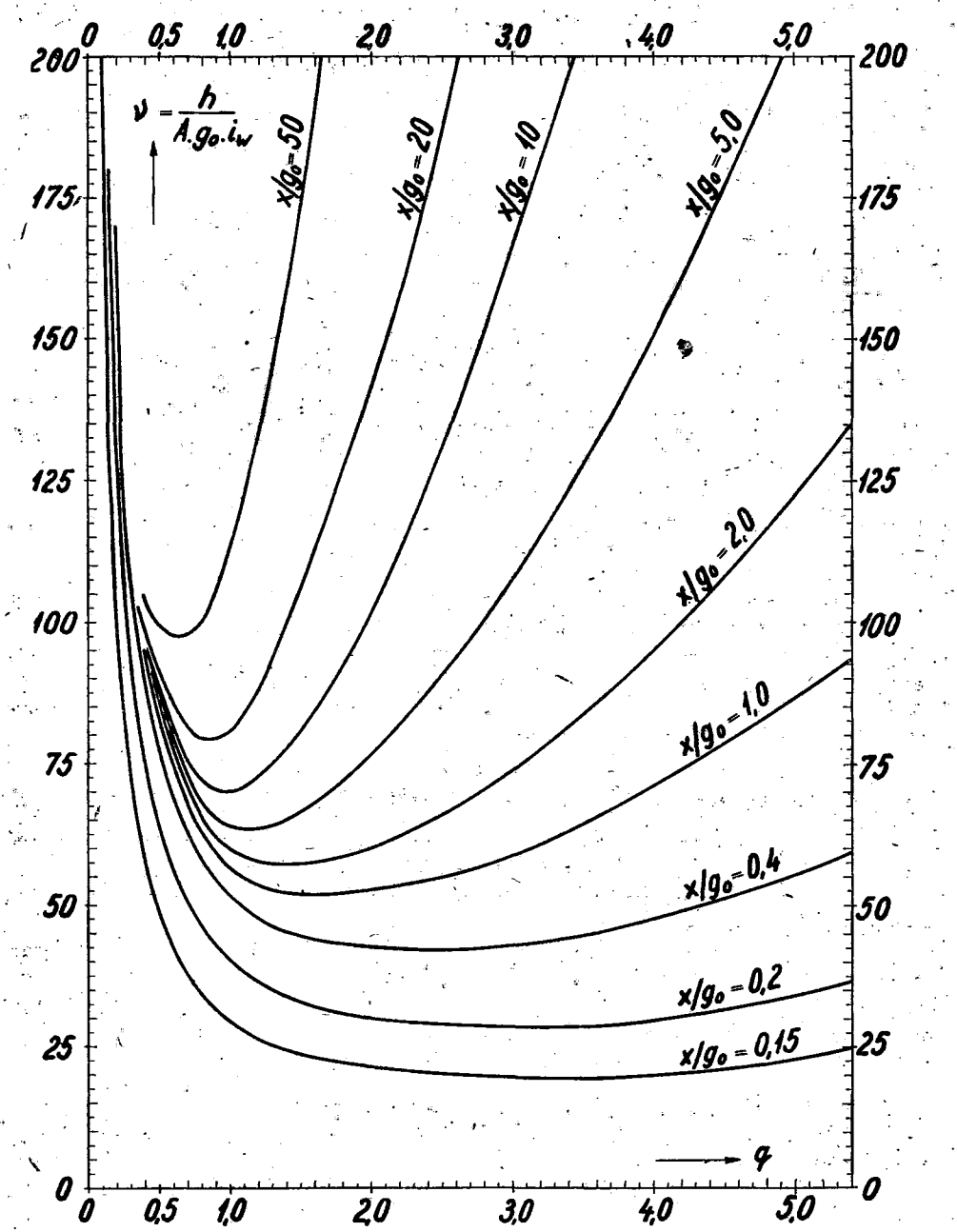
A veszteségmagasságok $\nu(\sigma)$ görbeseregének használata teljesen hasonló a teljes szállítómagasság meghatározására vezető eljárással. A veszteségmagasság fajlagos értékét most is az előírt x_0 és x_1 nyomáshatárok közé eső görbeszakasz ordinátametszékeinek $\Delta\nu$ különbsége szabja meg. A diagramból lemért $\Delta\nu$ metszékből a felszállócső veszteségmagassága:

$$h' = g_0\, A\, i_w\, \Delta\nu \qquad \text{(m)}. \tag{468}$$

128. példa. A 127. példában tárgyalt mammutszivattyú felszállócsövének teljes hossza: $l = H + y = 30$ m.



232. ábra. Az áramlási veszteségmagasságok $\nu(\sigma)$ diagramja



233. ábra. Az áramlási veszteségmagasságok ν(q) diagramja

A folyóméterenkénti veszteségmagasság, $\lambda_r = 0{,}05$, $d_r = d = 0{,}08$ m és $w = 0{,}8$ m/mp, ($w^2/2g = 0{,}0326$ m) értékkel, (467) szerint:

$$i_w = \frac{\lambda_r}{d_r}\frac{w^2}{2g} = \frac{0{,}05}{0{,}08} \cdot 0{,}0326 = 0{,}0203.$$

A példában előírt $x_0 = 1$ és $x_1 = 3$ nyomáshatárok, illetve a $g_0 = 1{,}11$ viszonylagos légadagolással megszabott $\sigma_0 = 0{,}9$ és $\sigma_1 = 2{,}7$ integrálási határok között a diagramból lemért ordinátametszékek:

a $q = 0{,}8$ görbén: $\Delta v = 2{,}0$
a $q' = 2{,}0$ görbén: $\Delta v' = 13{,}0$.

Az áramlási veszteségmagasság, $A = 10$ m légköri nyomásmagasság esetén,

$$A\, g_0\, i_w = 10 \cdot 1{,}11 \cdot 0{,}0203 = 0{,}224$$

értékkel:

$q = 0{,}8$, azaz: $V_v = 3{,}2$ l/mp vízhozamnál: $\mathbf{h' = 0{,}224 \cdot 2{,}0 = 0{,}45\ m}$,
$q' = 2{,}0$, azaz: $V'_v = 8{,}06$ l/mp vízhozamnál: $\mathbf{h' = 0{,}224 \cdot 13 = 2{,}91\ m}$.

Meg kell jegyezni, hogy a valóságban ezek a veszteségmagasságok nem jöhetnek létre, mert az első esetben a hatásos szállítómagasság a felszállócső l hosszúságával előírt $H = 10$ m helyett csak:

$$\mathbf{H = H_0 - h' = 8{,}4 - 0{,}45 = 7{,}95\ m},$$

a második esetben pedig:

$$\mathbf{H' = H_0' - h' = 4{,}38 - 2{,}91 = 1{,}47\ m}.$$

A légadagolást tehát mindkét esetben fokozni kell, hogy az előírt $H = 10$ m magasságon kifolyóvizet kaphassunk.

Adott esetben az előírt H szállítómagasság alapulvételével a fenti eljárással pontról pontra meghatározott $H = H_0 - h'$ görbesereget kell különböző q vízhozamokhoz felrajzolni és ebből azokat az üzemi pontokat kiválasztani, amelyek az előírt kiindulófeltételeket is kielégítik.

140. Az áramlási veszteség közelítő értéke. A redukált csőhosszúság

A 136. pont szerint a felszállócső áramlási veszteségmagasságának **közelítő értéke** a gázos vízoszlop közepes (z_k) fajsúlyarányából is kiszámítható.

A (459/k) egyenlet szerint az áramlási veszteség a szabad gáztartalom növelésével rohamosan (a fajsúlyarány köbével) megnagyobbodik.

A veszteségmagasság e rohamos megnagyobbodása szemléletesen fejezhető ki a felszállócső **redukált hosszúságával,** vagyis azzal az L_r csőhosszúsággal, amelynek mentén a **buborékmentes** víz ugyanazt az áramlási veszteséget szenvedné, mint a z_k fajsúlyarányú keverék az $l = H + y$ hosszúságú felszállócsőben.

A veszteségmagasság, (459/k) szerint, így is írható:

$$h' \cong A\, i_0\, z_k^3\, (x_1 - x_0) = i_0 L_r,$$

ahol (460) szerint, $l_0 = H_0 + y$ jelöléssel és $y = A\,(x_1 - x_0)$ helyettesítéssel a fajsúlyarány közepes értéke:

$$z_k = \frac{\int_{x_0}^{x_1} z\, dx}{x_1 - x_0} = \frac{l_0}{y} = \frac{H_0 + y}{y}. \qquad (469).$$

Helyettesítés és átrendezés után a redukált csőhosszúság közelítő értéke:

$$L_r = \left(\frac{H_0 + y}{y}\right)^3 y = \left(\frac{H_0 + y}{y}\right)^2 (H_0 + y) \quad \text{(m)}. \tag{470}$$

A (teljes) H_0 szállítómagasságnak az y bemerüléshez viszonyított

$$m_0 = \frac{H_0}{y} \tag{471}$$

értéke a mammutszivattyú **terhelésének** fokmérője. Ez az m_0 tényező tehát a vízemelő **terhelési fokának** nevezhető. Nagysága egyértelműen szabja meg az L redukált csőhosszúságnak az y bemerüléshez, illetve a H_0 (teljes) szállítómagassághoz viszonyított értékét. $H_0 = m_0 y$ és $l_0 = H_0 + y = (m_0 + 1) y$ helyettesítéssel írható:

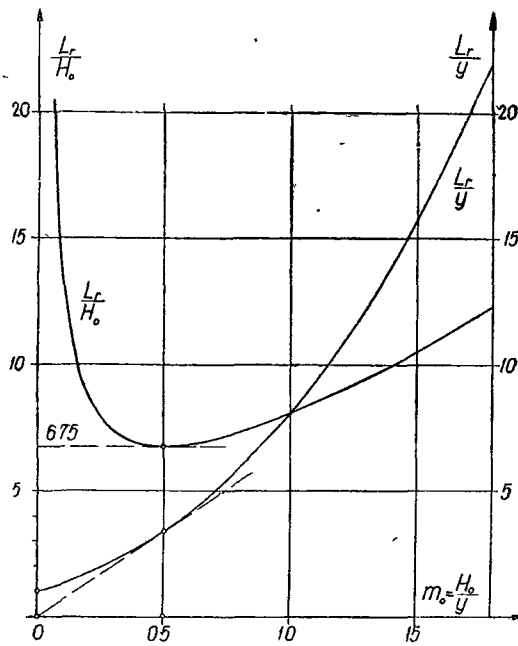
$$L_r = (m_0 + 1)^3 y = \frac{(m_0 + 1)^3}{m_0} H_0 \quad \text{(m)}. \tag{470/m}$$

Az L_r redukált csőhosszúságnak az m_0 terhelési foktól függő rohamos megnagyobbodása mennyiségileg is helyes útmutatást ad a légnyomásos vízemelő üzemének helyes vitelére.

A *234. ábra* az m_0 terhelési fok függvényében szemlélteti a redukált csőhosszúságnak az y bemerüléshez viszonyított rohamos megnagyobbodását. Az L_r/y görbéné l is szemléletesebb a redukált cső hosszúságnak a H_0 szállítómagassághoz viszonyított (L_r/H_0) változása, amely az $m_0 = 0{,}5$ helyen veszi fel a legkisebb értékét, vagyis ott, ahol **a felszállócső bemerülése éppen kétszer akkora, mint a teljes szállítómagasság.**

A kísérleti kutatás eredményei és az üzemi tapasztalatok is igazolják ennek a megállapításnak a helyességét. Ezt a legjobb hidraulikai hatásfokot biztosító üzemállapotot azonban sajnos csak akkor lehet megvalósítani, ha a kút ilyen mértékű lemélyítése akadályokba nem ütközik.

A redukált hosszúság bevezetésével a veszteségmagasság közelítő értékének kiszámítása igen egyszerűvé válik, a *235. ábrán* bemutatott szerkesztéssel pedig az előírt H hatásos szállítómagasság eléréséhez szükséges H_0 teljes szállítómagasság is (a «regula falsi» alkalmazása nélkül) közvetlenül meghatározható.

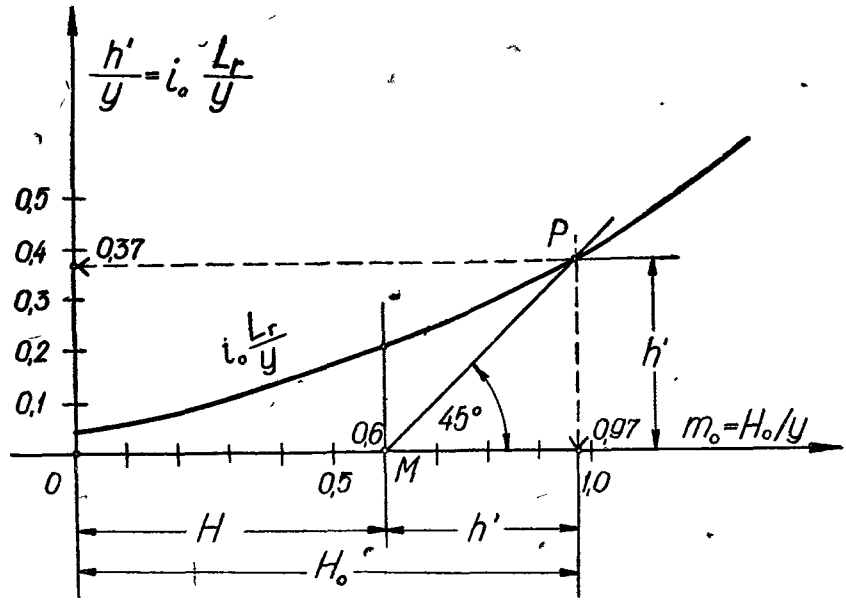


234. ábra. A keverékoszlop redukált hosszúságának függvényábrái

Az L_r redukált csőhosszúságnak és a folyóméterenkénti i_0 veszteségmagasságnak szorzatából kiszámított h' veszteségmagasságot a H szállítómagasság léptékében felrakva, a *234. ábrában* bemutatott L_r/y gorbéhez hasonló diagramot kapunk (*235. ábra*), amelynek abszcisszái (állandó y bemerülés esetében) az $m_0 = H_0/y$, ill. $m = H/y$ terhelési fokot is jellemzik, ordinátái pedig a veszteségmagasságnak a bemerüléshez viszonyított h'/y értékét adják.

A felszállócső l hosszúságával megszabott $H = l - y$ hatásos szállítómagasság viszonylagos értékével ($m = H/y$) kijelölt M pontból húzott 45°-os sugár a gorbét P pontban metszi és ezzel az abszcisszatengelyre is átvetíti a veszteségmagasságnak a keresett $H_0 = H + h'$ teljes szállítómagassághoz tartozó értékét.

A számítás menetét az alábbi példában ismertetem.



235. ábra. A veszteségmagasság szerkesztése

129. példa. Egy légnyomásos vízemelő $l = 32$ m hosszú felszállócsövének bemerülése: $y = 20$ m. A szükséges (hatásos) szállítómagasság tehát: $H = 12$ m.

A csőátmérő, a 128. példa szerint: $d = 80$ mm ($f = 50{,}3$ cm²), a sűrítési fok: $x_1 = 3$. Az előresietés sebessége: $w = 0{,}8$ m/mp, a névleges gázveszteség: $W = 4{,}03$ l/mp.

A folyóméterenkénti veszteségmagasság, $i_w = 0{,}0203$ és $q = 1{,}54$, ($q^2 = 2{,}38$) értékkel:

$$i_0 = i_w\, q^2 = 0{,}0203 \cdot 2{,}38 = \mathbf{0{,}0483}.$$

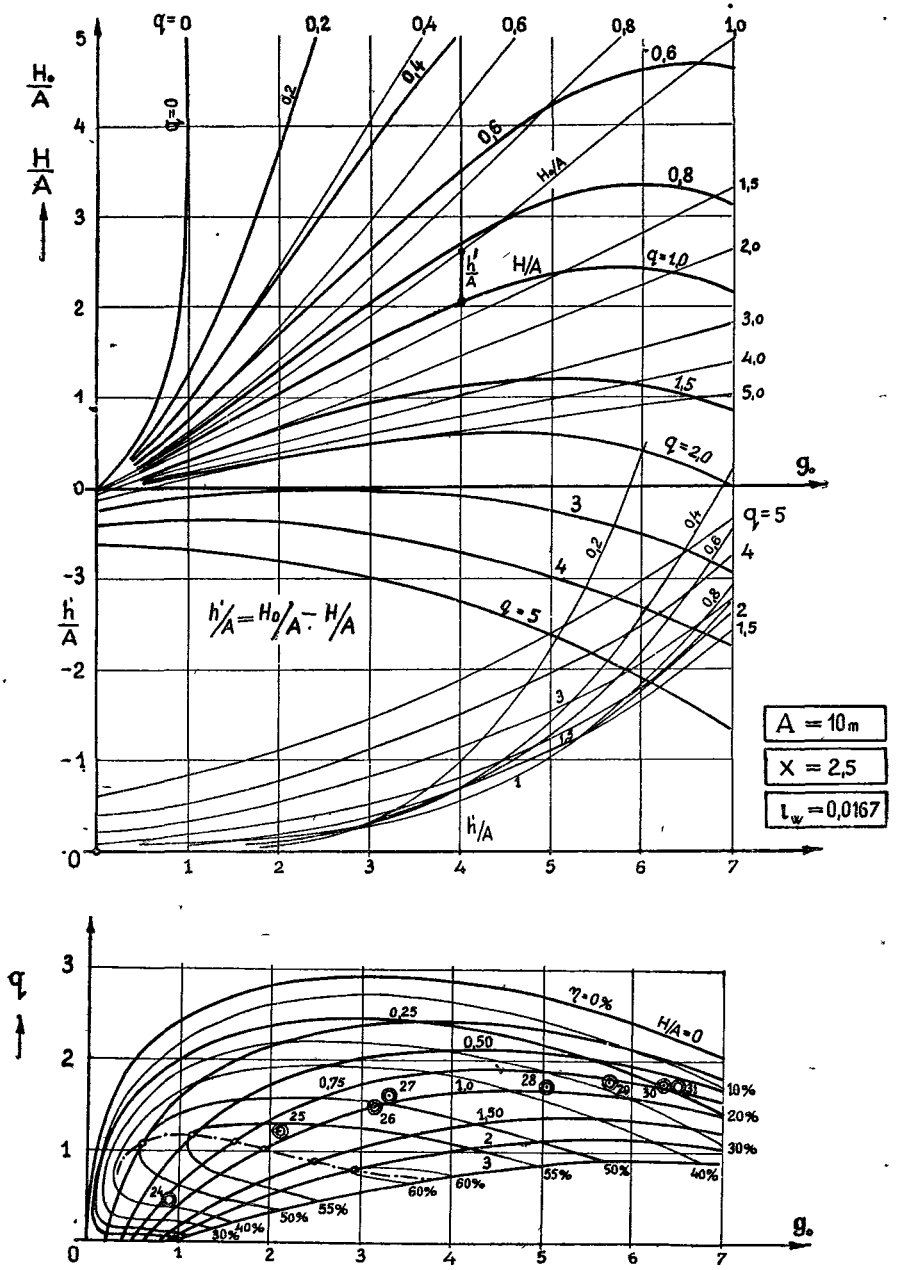
A hatásos szállítómagassághoz tartozó terhelési fok: $m = H/y = 0{,}6$, az ehhez tartozó redukált csőhosszúság:

$$L_r = (m + 1)^3\, y = 1{,}6^3 \cdot 20 = 4{,}1 \cdot 20 = 82 \text{ méter}$$

és ezzel a diagram $m = 0{,}6$ abszcisszájához tartozó ordináta:

$$h'/y = i_0 L_r/y = 0{,}0483 \cdot 4{,}1 = 0{,}198.$$

A gorbét felrajzoljuk, és az M pontból húzott 45°-os sugárral kimetszett P pont koordinátáit leolvassuk.



236. ábra. A légnyomásos vízemelő kagylóábrája

. Az adott esetben: $m_0 = H_0/y = 0{,}97$ és $h'/y = 0{,}37$; azaz:

$$\mathbf{H_0 = 19{,}4\ m \quad és \quad h'_0 = 7{,}4\ m.}$$

A H_0 teljes szállítómagasság eléréséhez szükséges légadagolást a $H_0(g_0)$ függvényábra néhány pontjának felrakásával kapjuk meg. Az eredmény: $g_0 = 3{,}7$. Az $A = 10$ m-es légköri nyomásmagasságon beszívott levegő mennyisége tehát:

$$V_{g0} = g_0 W = 3{,}7 \cdot 4{,}03 = \mathbf{14{,}9\ l/mp},$$

a vízhozam pedig: $V_v = qW = 1{,}54 \cdot 4{,}03 = 6{,}2$ l/mp.

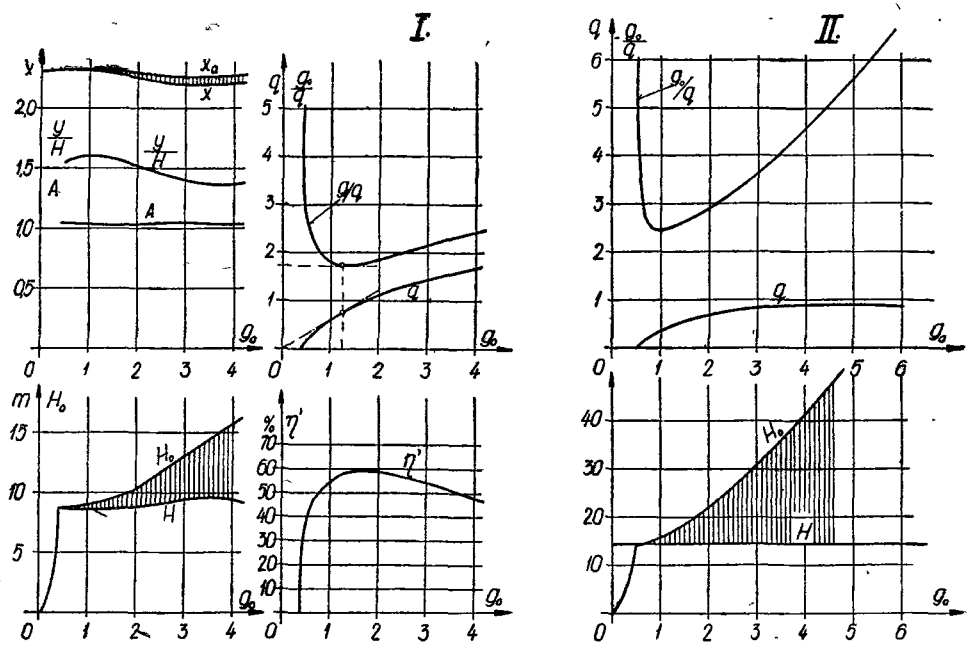
A vízemelő hatásfoka: $x_1 = 3$, (ln 3 = 1,099) értékkel:

$$\eta' = \frac{V_v H}{V_{g0} A \ln x} = \frac{62{,}12}{14{,}9 \cdot 10 \cdot 1{,}099} = \mathbf{0{,}455}.$$

A vízemelő hatásfoka a légadagolás veszteségeinek figyelembevételével is még mindig jóval nagyobb marad 40%-nál, ami kedvezőnek minősíthető. A berendezés hatásfokának meghatározásához természetesen a légsűrítő hatásfokát is számításba kell venni.

141. A légnyomásos vízemelő jelleggörbéi

A légnyomásos vízemelő üzemi jellemzőinek vizsgálatát megkönnyíti a jelleggörbék felrajzolása, mert azok alakjából a légadagolás jósági fokára is következtethetünk.



237. ábra. A légnyomásos vízemelő jelleggörbéi. I. *Hoefer* kísérletei. II. *Pickert* kísérletei

Legjellegzetesebb a légadagolás függvényében felrajzolt vízhozam görbéje, amelyet a *236. ábrában* állandó ($y = 15$ m) bemerülés alapulvételével különböző szállítómagasságokra szerkesztettem. A $q(g_0)$ görbesereget az azonos hatásfokot adó pontok rétegvonalas összekötésével ún. **kagylóábrává** egészítettem ki, amely a vízemelő viselkedését minden üzemállapotra jól szemlélteti.

A *237. ábrában* két vízemelő jelleggörbéit közlöm *Hoefer* és *Pickert* mérési adatainak felhasználásával. A görbék alakjából is következtetni lehet a jó gázadagolás fontosságára.

Hoefer a kísérleteket gondosan szerkesztett Borsig-féle adagolófejjel végezte, ezzel szemben *Pickert* adagolócsöve teljes szelvényével oldalról torkollik be a felszállócső palástjába. A rossz adagolás következménye volt a buborékok nagy előresietési sebessége, a kis vízhozamhoz viszonyítva igen nagy légszükséglet és a rossz hatástok.

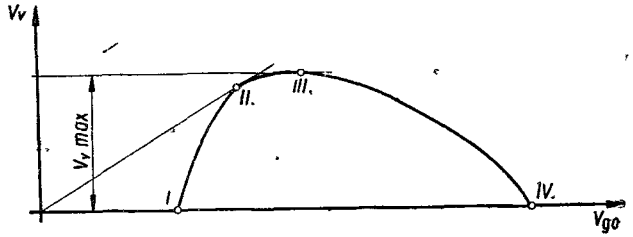
142. A legnagyobb folyadékszállítás meghatározása

A Budapesti Műszaki Egyetem vízgép-laboratóriumában végzett mérések alapján rövidebb (4—20 m-es) mammutszivattyú-csövek, továbbá irodalmi adatok alapján hosszabb (100 méter feletti) csövek esetére egy adott cső legnagyobb folyadékszállítása előre, jó közelítéssel meghatározható.

A részletes levezetés helyett *Német Árpád* [73] eredményeinek ismertetésére szorítkozunk.

Adott kút esetében a jelleggörbének négy jellemző pontja van (*238. ábra*):

I. A víztükör a beadagolt V_{g0} mennyiségű levegő következtében a cső kifolyónyílásáig emelkedett. Ha a levegő mennyiségét egy kicsit növeljük, megindul a folyadékszállítás.



238. ábra. Mammutszivattyú vízszállítási görbéje

II. A legjobb hatásfokú pont (ahol a kezdőpontból érintőt húzhatunk, a görbéhez), itt a keverési arány a legkedvezőbb.

III. A folyadékszállításnak a gázadagolás függvényében *csúcsértéke* van, amely után a légadagolás fokozásával a folyadékszállítás apad.

IV. A folyadékszállítás egészen megszűnik.

A legnagyobb folyadékszállítás esetén a gyakorlati esetek túlnyomó többségében a gáz a csőkeresztmetszetet teljesen kitöltő zsákok (óriás buborékok) formájában halad előre, s ekkor a víz lökésszerű lüktetéssel érkezik a kifolyónyílásból.

Hosszú csövek esetében elsősorban a *csősúrlódás*, **rövid csövek** esetében elsősorban az *adagolás* és a *fajsúlyarány* határozza meg a legnagyobb folyadékszállítást.

a) **Hosszú csövek** ($l > 100$ m)

A (453) összefüggésben dh' értékét a (454) és (455) összefüggésből kifejezve kapjuk, hogy

$$dp = \gamma \left(dl + \frac{\lambda_r}{d_r} \frac{c_0^2}{2g} z^2 \, dl, \right), \tag{472}$$

illetve a tiszta vízre és a felszállócső egységnyi hosszára vonatkozó fajlagos nyomásesés:

$$\frac{dp}{\gamma_v \, dl} = \frac{1}{z} + \frac{\lambda_r}{d_r} \frac{c_0^2}{2g} z. \tag{473}$$

A (473) szerint jól látható, hogy adott vízszállítás (c_0) esetén a fajlagos nyomásesés a γ keverékfajsúly apasztásával ($z = \gamma_v/\gamma$ növelésével) csak bizonyos határig csökkenthető, az áramlási veszteség egyidejű növekedése miatt. Ha feltételezzük, hogy λ_r a z fajsúlyaránytól csak elhanyagolható mértékben függ, szélsőértékszámítást végezhetünk, amely szerint a *legkisebb* fajlagos nyomásesést

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_v} \right)^* = \frac{1}{z^*} = c_0 \sqrt{\frac{\lambda_r}{2g \, d_r}}$$

értéknél kapjuk és értéke

$$\left(\frac{dp}{\gamma_v \, dl} \right)_{\min} = 2 c_0 \sqrt{\frac{\lambda_r}{2g \, d_r}}. \tag{474}$$

A teljes csőhosszra (y bemerülés esetében) eső nyomáskülönbség: $\Delta p = \gamma_v y$, amelynek *egységnyi hosszra* eső része a (474) összefüggésben megadott legkisebb értéknél csak nagyobb, vagy szélső esetben egyenlő lehet, azaz

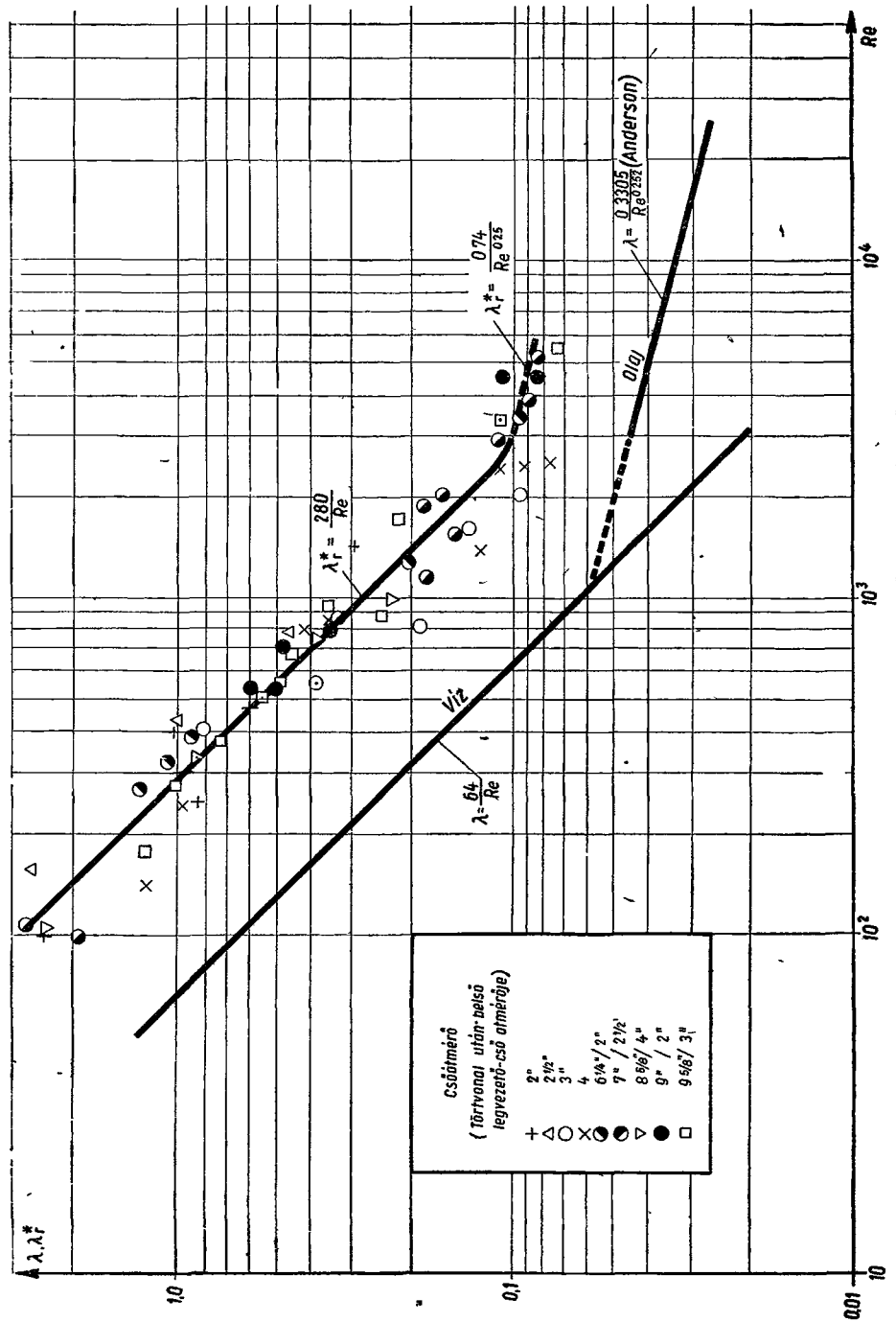
$$\frac{\Delta p}{\gamma_v \, l} = \frac{y}{l} \geqq \left(\frac{dp}{\gamma_v \, dl} \right)_{\min}. \tag{475}$$

A legnagyobb vízszállítást ott kapjuk, ahol c_0 értéke maximális, vagyis (474) és (475) egyenletből kifejezve:

$$c_{0\,\max} = \frac{y}{2 \, l \sqrt{\lambda_r/(2g \, d_r)}}. \tag{476}$$

Kísérleti adatok alapján feltehetjük, hogy hosszú csöveknél a csőmenti nyomásgradiens-eloszlások különböző berendezéseken közel affinok, azaz a legkisebb értéktől csak egy állandó tényezőben különböznek:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\int_0^l \left(\frac{dp}{dl} \right) dl}{l} = \text{állandó} \cdot \left(\frac{dp}{dl} \right)_{\min}.$$



239. ábra. Hosszú felszállócsovek csősúrlódási tényezői

Az állandó értékét úgy vesszük figyelembe, hogy λ_r értékébe belefoglaljuk, és λ_r^*-ot használunk helyette, ami annál inkább megtehető, hiszen λ_r^* értékét kísérleti úton határozzák meg.

Ezzel a végleges összefüggés (476)-ból

$$c_{0\,\max} = \frac{y}{2\,l\sqrt{\lambda_r^*/(2g\,d_r)}} \tag{477}$$

alakban írható fel, azaz a *legnagyobb vízszállítás*:

$$V_{v\,\max} = f\,c_{0\,\max} = \frac{f\,y}{2\,l\sqrt{\lambda_r^*/(2g\,d_r)}} \quad (\mathrm{m^3/mp}). \tag{478}$$

Hosszú csövekben *Thein* [91] adatai (lotharingiai bányák szivattyúzása), továbbá olajkutak szivattyúzási adatai alapján számítottuk λ_r^* értékeit, és azt a $Re = c_0\,d_r/\nu$ alakú *Reynolds*-szám függvényében a *239. ábrán* mutatjuk be. Összehasonlításul berajzoltuk a tiszta víz lamináris áramlására és olajra (nagy átmérőjű csővezetékekre) *Anderson* [57] által kapott gorbét is. A gázosvíz áramlására kapott redukált tényező gorbéjének lefolyása igen hasonló a tisztavízre kapott görbéhez, s az $Re = 3000$ alatt a

$$\lambda_r^* = \frac{280}{Re}$$

összefüggéssel kozelíthető, $Re = 3000 \div 6000$ között pedig a

$$\lambda_r^* = \frac{0{,}74}{\sqrt[4]{Re}}$$

összefüggés használható.

b) **Rövid csövek** ($l = 4 \div 20$ m)

Rovid csövekre számos mérés alapján a $Re > 20\,000$ tartományra általános és egyértelmű osszefuggést találtunk két méretnélküli mennyiség kozott (kulső gyűrűfelületű résen történő adagolás — Borsig-fej — esetére) *(240 ábra)*.

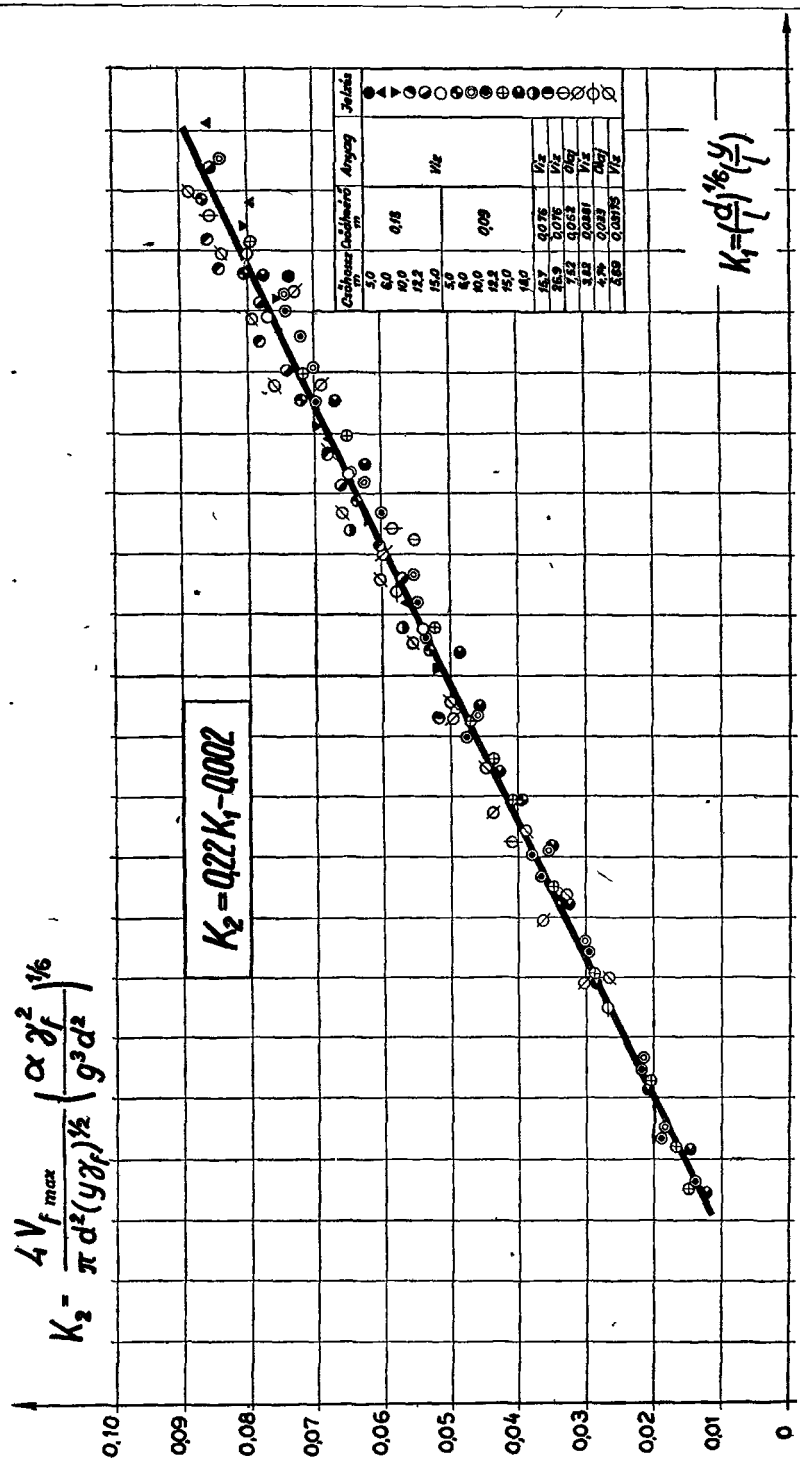
Eszerint a

$$K_1 = \left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{y}{l}\right) \quad \text{és} \quad K_2 = \frac{V_{f\,\max}}{(y\,\gamma_f)^{1/2}}\,\frac{4}{d^2\pi}\left(\frac{\alpha\,\gamma_f^2}{g^3\,d^2}\right)^{1/6}$$

méretnélküli mennyiségek bevezetésével (ahol α a feluleti feszultség, kg/m és g a nehézségi gyorsulás, m/mp²) felírható az alábbi tapasztalati osszefüggés

$$K_2 = 0{,}22\,K_1 - 0{,}002. \tag{479}$$

A (478) és (479) összefuggés segítségével hosszú és rövid csovek méretezhetok a *legnagyobb* folyadékszállításra. Ennek kulonosen ott van jelentősége, ahol egy *túlméretezett* mammutszivattyú a kutat *tonkreteheti*, mert a túlnagy vízkivétel kimosásokat és iszapos víz szolgáltatását, ezt kovetően a vízadó réteg beomlását és a kút elapadását eredményezheti; a legnagyobb vízszállítás korlátozásával ezt el lehet kerülni.



240. ábra. Rövid felszállócsövek méretezéséhez diagram

143. A gázoskút elmélete

A gázoskút «szállítómagassága» — éppen úgy, mint a légnyomásos vízemelő esetében — a keverék szabad gáztartalmától függő fajsúlyapadás hatására jön létre. A H_0 teljes szállítómagasság és annak a h' áramlási veszteségmagassággal csökkentett értéke: a hatásos szállítómagasság ($H = H_0 - h'$), a 134. és 136. pont szerint, az x sűrítési foktól függő z fajsúlyarányból számítható.

A $z(x)$ függvény felépítése azonban egészen más, mint a légnyomásos vízemelő esetében, mert itt a gázosvíz **keverési aránya állandó** marad, a gáztartalomnak azonban csak a szabad része ad felhajtóerőt; elnyelt (vagy oldott) része azonban a keverék térfogatát nem növeli és ennélfogva hatástalan.

Ha V_v a gázoskút vízhozama és $V_{g0} = r_0 V_v$ a légköri nyomásra vonatkoztatott **egész** gázhozam, akkor az állandó keverési arány:

$$\boxed{r_0 = \frac{V_{g0}}{V_v}}. \tag{480}$$

$p = x p_0$ nyomás alatt az egész gáztérfogat: $V_g = V_{g0}/x = r V_v$. Ebből: $V_g'' = \varepsilon^* V_v$ az elnyelt rész, ahol: $\varepsilon^* = V_g''/V_v$ a gázelnyelési együttható.

A szabad gáztérfogat p nyomáson:

$$V_g' = V_g - V_g'' = (r - \varepsilon^*) V_v. \tag{481}$$

Itt $r = r_0/x$ az egész gázhozamra vonatkoztatott térfogatarány p nyomáson. A nyomás fokozásával a víz szabad gáztartalma kisebbedik, sőt teljesen eltűnik. ($V_g' = 0$), mihelyt a keverék az ún. **kritikus nyomás** ($p_{kr} = x_{kr} p_0$) hatása alá kerül.

A (481) egyenletből: $r = r_0/x_{kr}$ helyettesítéssel az $x_{kr} = p_{kr}/p_0$ kritikus nyomásarány így számítható:

$$V_0' = 0, \text{ ha } \varepsilon^* V_v = r V_v;$$

azaz:

$$x_{kr} = \frac{r_0}{\varepsilon^*}.$$

A kritikus nyomásnál a keverék **telített gázoldat** alakjában szabad gázt nem tartalmaz. Ha a nyomást még tovább fokozzuk, akkor az oldat telítetlenné válik.

A gázosvíz a mélykút vízáteresztő rétegére nehezedő p_t telepnyomás hatása alatt rendszerint **állandó összetételű** telítetlen oldat alakjában jut a kút talpszintjéhez.

A p_a talpnyomást a kút nyugalmi szintjétől mért (gázmentes) γ_v fajsúlyú vízoszlop y_a magassága határozza meg. Ha a vízszolgáltatás szünetel, akkor a talpnyomás megegyzik a kút telepnyomásával, azaz:

$$p_t = p_a = \gamma_v y_a; \qquad \text{ha} \quad V = 0.$$

V_v vízhozam esetében a vízáteresztő réteg minősége és vastagsága szerint a vízmozgás irányában Δp_a nyomáseséssel kell számolni, amely a lamináris áram-

lásra érvényes Poiseuille-törvény szerint az ún. «szűrősebesség»-gel arányos. Ilyenkor tehát a kút talpnyomása kisebb a telepnyomásnál, a víztükör üzemi szintje tehát leszáll a nyugalmi szint alá. A víztükör leszállása a kút V_v vízhozamának függvényében a vízáteresztő réteg **jelleggörbéjével** szemléltethető. Ez a *Dupuit—Thiem*-féle elmélet szerint az ún. Dupuit-féle parabola alakját veszi fel, amelynek első szakasza mélykutak esetében jó közelítéssel **lineáris.** (A parabola szárának első szakasza mérsékelt vízkivétel esetében annak húrjával helyettesíthető.)

A jelleggörbe egyenlete tehát:

$$h'_a \cong B_a V_v \quad \text{(m)}; \tag{482}$$

annak $B_a = h'/V_v$ állandóját kísérlettel kell meghatározni.

A gázoskút jellegzetessége, hogy nyugalmi szintje — ellentétben az artézi kutakkal — m mélységben marad a napszint alatt, és ennélfogva (magára hagyva) **felszállóvizet nem ad.** A **nyugalomban gázmentes** vízoszlop emelkedése csak akkor indulhat meg, ha a nyugalmi egyensúlyállapotot **szívattyúzással** vagy **lekanalazással** megbontjuk, vagyis, ha az áramlást **megindítjuk.**

A felfelé áramló vízoszlop szelvényeiben emelkedés közben a nyomás mindaddig kisebbedik, amíg az ún. (y_{kr}) **kritikus mélységben** az oldat **telítetté** válik, és a gázkiválás megindul. ($y_{kr} = p_{kr}/\gamma_v$) A gázosvíz szabad gáztartalma teljesen **egyenletes eloszlású** apró buborékok alakjában — tehát a mammutszivattyútól eltérően: **tökéletes adagolással** — keveredik a vízhez. A keverék fajtérfogata itt emelkedés közben gyorsabban növekszik, mint a légnyomásos vízemelő esetében, mert a fajsúlyarány nemcsak a buborékok kiterjeszkedése miatt változik, hanem a csökkenő nyomáson folyamatos gázkiválás következtében a szabad gáz mennyisége is megnagyobbodik.

A $z = \gamma_v/\gamma$ fajsúlyarányt most is az $x = p/p_0$ sűrítési fok függvényében kell kifejezni, csakhogy a gázoskút esetében a számítás menete a szabad gáztartalom változása miatt eltér a mammutszivattyú esetében alkalmazott eljárástól. Az eredményt ezenfelül mennyiségileg is kedvezőbbé teszi a gázadagolás tökéletessége is, amely a buborékok előresietési sebességének kis értékével ($w_0 = 0{,}3 \div 0{,}4$ m/mp) jellemezhető.

Itt említem meg, hogy a légnyomásos vízemelő **gázadagolójának jósági foka** a buborékok (átlagos) w előresietési sebességének a gázoskútban talált w_0 alapértékéhez viszonyított arányszámával fejezhető ki. A gázoskút adagolásánál $\varphi_0 = 100\%$-os jósági fokához viszonyítva a mammutszivattyú adagolójának jósági foka:

$$\varphi = \frac{w_0}{w}, \tag{483}$$

ha az adagoló $w > w_0$ buborékelőresietést eredményez.

A gázoskút esetében a szlipveszteséget a következőkben

$$\mathbf{w_0 = 0{,}4\ m/mp}$$

állandó előresietési sebesség alapulvételével fogom meghatározni. A névleges gázveszteség tehát a gázoskút esetében a felszállócső f keresztmetszetével megszabott állandó érték ($W_0 = f\, w_0$).

A z fajsúlyarány kiszámításához a 137. pontból már megismert gondolatmenet szerint a felszállócső keresztmetszetét a $c_g = c_v + w$ sebességű gázáram f_g szelvényű csatornája szűkíti. A vízáram sebessége tehát az f_v/f szűkítés arányában változott meg $c_v = z\,c_0$ sebességre, ahol: $c_0 = V_v/f$ a buborékmentes víz sebessége, és $z = \gamma_v/\gamma = f/f_v$ a fajsúlyarány.

Az $f_g = f - f_v$ keresztmetszet nagyságát most a V_g' *szabad* gáztérfogatból kell kiszámítani.

Írható:

$$V_g' = V_g - V_g'' = \left(\frac{r_0}{x} - \varepsilon^*\right) V_v$$

és ezzel:

$$f_g = \frac{V_g'}{c_g} = \frac{V_v}{c_0} - \frac{V_v}{c_v}\,;\ \text{azaz:}\ \left(\frac{r_0}{x} - \varepsilon^*\right) \cdot \frac{V_v}{z\,c_0 + w_0} = \frac{V_v}{c_0} - \frac{V_v}{z\,c_0}\,.$$

Rövidítés és átrendezés után, $q = V_v/W_0 = c_0/w_0$, illetve $n = 1/q = w_0/c_0$ helyettesítéssel ez az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\boxed{x = \frac{r_0}{\frac{z-1}{z}\,\frac{zq+1}{q} + \varepsilon^*} = \frac{r_0}{\frac{z-1}{z}\,(z+n) + \varepsilon^*}} \qquad (484)$$

A (462) egyenlethez hasonlóan ennek a függvénynek inverz alakja is $z = z(x)$ görbesereg felrajzolására alkalmas, mert a teljes szállítómagasság kiszámításához szükséges integrálás analitikai elvégzése helyett itt is a grafikus területintegrál ad a gyakorlat számára használható eredményt.

A $z = z(x)$ görbesereg pontjainak koordinátáit (a gyakorlatban előforduló $q = c_0/w_0$ paraméterekhez) előre felvett z értékekkel táblázatosan kiszámított x abszcisszahosszúságok szolgáltatják.

A görbesereget célszerűen $z(x)$ helyett $z(\varrho)$ alakban rajzoljuk fel, ahol:

$$\varrho = x/r_0.$$

Ezek az abszcisszahosszúságok az x sűrítési foknak az r_0 keverési arányhoz viszonyított értékei, vagy más szóval: az $r_0 = 1$ keverési arányhoz tartozó x sűrítési fokot adják.

A H_0 teljes szállítómagasságot — éppen úgy, mint a légnyomásos vízemelő esetében — most is a $z(x)$ görbék integrálgörbéinek ordinátametszékei szolgáltatják, csakhogy itt az integrálás felső határát a p_{kr} nyomáshoz tartozó $x_{kr} = p_{kr}/p_0$ kritikus sűrítési fok szabja meg.

A (452/m) egyenlet tehát a gázoskút esetére így módosul:

$$H_0 = A \int_{x_a}^{x_{kr}} (z-1)\,\mathrm{d}x. \qquad (452/g)$$

Az előforduló legkisebb $\varrho_{0\alpha} = x_0/r_{0\alpha}$ (közös) kezdőpontból induló **egyetlen görbesereg** itt is a H_0 teljes szállítómagasság viszonylagos értékének meghatáro-

zására vezet, ha azt $\varrho = x/r_0$ és $\varepsilon = H_0/(\varrho A)$ méretnélküli koordinátákkal rajzoljuk fel.

Egy-egy q vízhozamhoz tartozó görbe egyenlete:

$$\frac{H_0}{r_0 A} = \int_{\varrho_0}^{\varrho_{kr}} (z-1)\,\mathrm{d}\varrho = \varepsilon_{kr} - \varepsilon_0 = \Delta\varepsilon. \qquad (452/\mathrm{r})$$

Ebben az alakjában az $\varepsilon(\varrho)$ görbesereg szerkesztésére még nem került sor, ezért ezt most nem közlöm. Itt is célszerű a fél logaritmus papiros használata.

Hasonló elven szerkeszthető a H hatásos szállítómagasság grafikus meghatározására vezető $\Phi(x)$ függvényábrasereg is. [Vö. a 135. ponttal és (458) egyenlettel.]

Ehelyett jó közelítéssel a h' veszteségmagasság viszonylagos értékét adó (466) egyenlet mintájára itt is görbesereget rajzolhatunk, amelynek egyenlete:

$$\frac{h'}{r_0 A i_w} = \int_{\varrho_0}^{\varrho_{kr}} q^2 z^3\,\mathrm{d}\varrho = \nu_{kr} - \nu_0 = \Delta\nu. \qquad (466/\mathrm{g})$$

Meg kell jegyezni, hogy a gázoskút felszállócsöve a mélyfúrás feltételeihez igazodóan rendszerint **különféle keresztmetszetű** szakaszokból készül. Minden f keresztmetszethez más c_0 sebesség és más $q = c_0/w_0$ paraméter tartozik, és a folyóméterenkénti i_0 veszteségmagasság is megváltozik. Erre való tekintettel a grafikus integrálást minden csőszakaszra külön kell elvégezni.

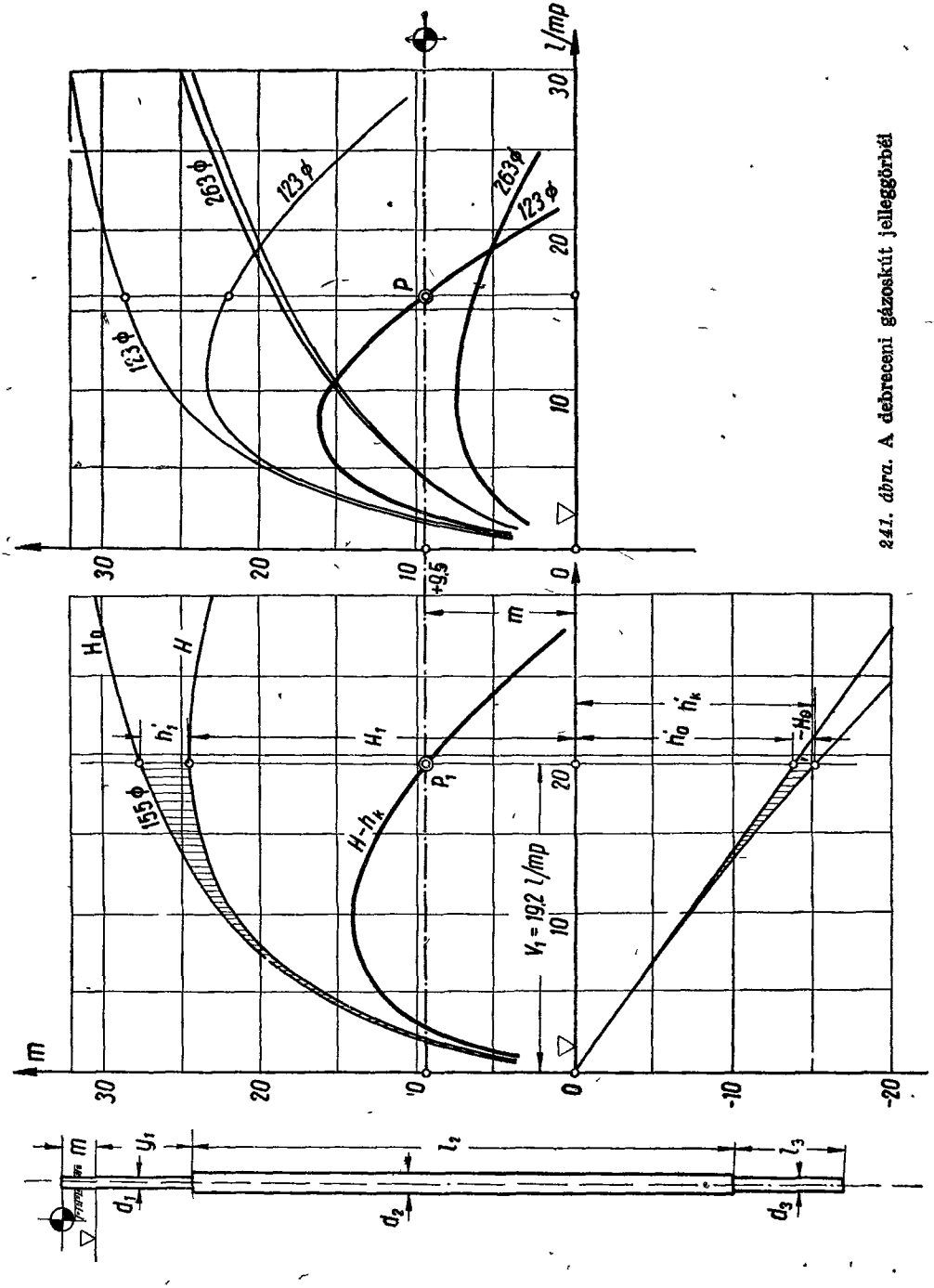
A mélykútnak a kritikus mélységig emelkedő alsó szakasza gázmentes vizet szállít, áramlási veszteségei tehát a folyóméterenkénti i_0 veszteségmagasságból közvetlenül számíthatók.

Itt hívom fel a figyelmet a gázoskút ama sajátosságára, hogy annak **vízhozama a legfelső csőszakasz szűkítésével megnövelhető.** Minden gázoskút felső csőszakaszának megállapítható egy **optimális átmérője,** amely az előírt H hatásos szállítómagasságra a legnagyobb vízszállítást biztosítja. A csőszakasz szűkítésével ugyanis a vízáram c_v sebessége megnagyobbodik, a **szlipveszteség** tehát kisebbedik, ami a teljes szállítómagasság megnövekedését eredményezi. A csőszakasz túlságos szűkítése viszont az áramlási veszteségmagasság megnagyobbodását eredményezi, ami leronthatja a kisebb csőkeresztmetszet alkalmazásának előnyeit.

A fentebb ismertetett elmélet alkalmazhatóságát a debreceni gázoskút adataival szerkesztett jelleggörbéknek közlésével igazolom. [77] (Vö. a *241. ábrával* és az alábbi példával.)

130. példa. A debreceni I. számú gázoskút jellemzőit *Dr. Schmidt Eligius Róbert* idevágó tanulmánya [89] alapján vettem számításba. A *241. ábra* kb. 1000 méteres kút vázlatos elrendezését mutatja. A kút $l_1 = y_1 + m = 89{,}5 + 9{,}5 = 99$ méter hosszúságú felső szakasza eredetileg az $l_2 = 870{,}5$ m hosszú középső szakasz $d_2 = 263$ mm átmérőjével azonos méretű volt. Ezt a felső szakaszt az üzemi kísérlet során különböző szűkebb átmérőjű ($d_1 = 123$, 155, 191 mm-es) csövekkel kicserélték és végleges alakjában ezek közül a legmegfelelőbbnek bizonyult $d_1 = 155$ mm-es átmérőjűvel készítették el.

A harmadik (legalsó) csőszakasz méretei: $l_3 \cong 40$ m, $d_3 = 191$ mm.



241. ábra. A debreceni gázoskút jelleggörbéi

A vízáteresztő réteg jelleggörbéjének közelítő alakja a kút $V_1 = 1150$ l/perc = = 19,2 l/mp nagyságú vízhozamához közvetett számítással megállapított $h'_a = 13{,}57$ m-es veszteségmagasság alapulvételével szerkeszthető. A (lineáris) függvényábra egyenlete:

$$\mathbf{h' = BV} \text{ ahol: } \mathbf{B} = h'_a/V = 13{,}57 : 0{,}0192 = \mathbf{705\ mp/m^2}.$$

A kút alsó szakaszában gázmentes víz áramlik, a középső szakaszban pedig a gázkiválás még oly jelentéktelen, hogy a két alsó szakasz együttes $h' = B_0 V_v^2$ veszteségmagassága a gáztartalom figyelmen kívül hagyásával számítható.

$\lambda = 0{,}05$, ($\varkappa = 0{,}083 \cdot 0{,}05 = 0{,}0042$) tényezővel írható:

$$B_0 = \varkappa\left(\frac{l_3}{d_3^5} + \frac{l_2}{d_2^5}\right) = 0{,}0042 \cdot \left(\frac{40}{256} + \frac{870{,}5}{1260}\right) \cdot 10^6 = 0{,}00354 \cdot 10^6\ \text{mp}^2/\text{m}^5,$$

és ezzel a $V_v = 19{,}2$ l/mp, ($V^2 = 370 \cdot 10^{-6}$ m^6/mp^2) vízhozamhoz tartozó veszteségmagasság:

$$\mathbf{h'_0 = 0{,}00354 \cdot 370 = 1{,}31\ m.}$$

Az *ábrában* a (gázmentes) kút jelleggörbéjét fenti két veszteségmagasság összegezésével rajzoltam fel. Normális vízszállítás esetében tehát:

$$\mathbf{h'_k = h'_a + h'_0 = 13{,}57 + 1{,}31 = 14{,}88\ m.}$$

A gázoskútnak szállítómagasságot szolgáltató **vízemelője** az adott esetben: az $l_1 = 99$ m hosszúságú **felső csőszakasz.** Ennek h' veszteségmagasságát — úgy, mint a mammutszivattyú és másfajta vízgép esetében is — belső veszteségnek minősítettem és a vízemelő teljes (H_0) szállítómagasságából hoztam levonásba. Az így kapott $H = H_0 - h'$ hatásos szállítómagassággal szerkesztettem a vízemelő jelleggörbéjét.

A felső csőszakasz keresztmetszetének változtatásával a vízemelő üzemi jellemzői módosultak, ami úgy is fogható fel, hogy a mélykutat más-más szivattyú tartotta üzemben.

A szállítómagasság grafikusan végzett számításának itt csak az eredményeit közlöm a *241. ábrába* berajzolt jelleggörbék alakjában.

Az üzemi munkapont helyét a vízemelő és a kút jelleggörbéjének metszéspontja jelöli ki. E két jelleggörbének szokásos felrajzolása helyett (vö. a *105. ábrával)* itt azt az eljárást követtem, hogy a kút sztatikai terhelőmagasságához nem adtam hozzá annak veszteségeit, hanem ezeket a vízemelő (hatásos) szállítómagasságából hoztam levonásba. (A gázoskút üzemi munkapontjai ugyanis ebben az ábrázolásban a kifolyószint magasságába esnek.)

Az ábrából kitűnik, hogy a gázoskút a **263 mm**-es átmérőjű felszállócsővel a 9,5 méteres szinten nem adhatott kifolyóvizet, annak ellenére, hogy a felszállócső h' veszteségmagassága egészen jelentéktelen volt. (A teljes és a hatásos szállítómagasság vonala ebben az esetben nagyon közel esik egymáshoz.)

Az ábrába be nem rajzolt **191 mm**-es csőátmérővel már jóval kedvezőbb üzemállapot volt elérhető, amennyiben a vízhozam a +9,5 m-es kifolyószinten mintegy $V = 17{,}8$ l/mp-re emelkedett.

Ezen a kifolyószinten a legnagyobb ($V = 19{,}2$ l/mp mennyiségű) vízhozamot a **155 mm** átmérőjű felszállócsővel lehetett biztosítani. (Ennek a vízáramnak alapulvételével számítottam ki a veszteségmagasságokat is.)

Végül a **123 mm** átmérőre szűkített felszállócső a 9,5 m-es kifolyószinten a jelleggörbe szerint csak $V = 15{,}8$ l/mp vízmennyiséget eredményezett, annak ellenére, hogy a teljes szállítómagasság jelleggörbéje valamennyi változat között a legmagasabbra emelkedett. Az átmérő túlságos szűkítése miatt ugyanis a szállítómagasság nagy részét az áramlási veszteségek emésztik fel.

Befejezésül még arra hívom fel a figyelmet, hogy a gázoskút üzemi vizsgálatának szabatossága a **gáznyelési együtthatónak** helyes értékelésétől függ.

A gáz minőségétől és a víz hőmérsékletétől függő ε_0^* elnyelési együtthatónak táblázatban [32] található értékét áramló folyadékban nem lehet minden korrekció nélkül számításba venni, mert az emelkedő vízoszlop szabad gáztartalma a **gázkiválás időbeli késedelme** miatt mindenesetre **kisebb** marad az ε_0^* együtthatóval számított értéknél. Éppen úgy, mint az oldás, a gázkiválás is véges időtartam alatt végbemenő folyamat, így tehát a gázkiválás az emelkedő vízoszlopban sem lehet tökéletes.

Idevágó kísérleti adatok hiányában ezt a kiválási késedelmet a példában közölt esetben az elnyelési együtthatónak mintegy 20%-os megnövelésével vettem figyelembe, azaz:

$$\varepsilon^* = \xi\, \varepsilon_0^*$$

gázelnyelési együtthatóval számoltam.

A debreceni földgázos kútra, a 65 C°-os hőmérséklethez tartozó $\varepsilon_0^* = 0{,}0234$ érték helyett, $\xi = 1{,}2$ tényezővel:

$$\varepsilon^* = 1{,}2 \cdot 0{,}0234 = \mathbf{0{,}028}$$

elnyelési együtthatóval az elméleti számítások az üzemi mérések adataival jól egybevágó eredményeket szolgáltatnak.

BEFEJEZÉS

A korszerű vízgép szerkesztése megkívánja az áramlási jelenségek szabatos ismeretét. E jelenségek egyik csoportja a **tökéletes folyadék** áramlási jellemzőivel a gyakorlat igényeit kielégítő pontossággal vizsgálható. Erre való tekintettel könyvem **első** részében részletesebben tárgyaltam az egy- és többméretű áramlás mindama vonatkozásait, amelyek a vízgép működésének **erőtani** megismerésére vezetnek, és annak szabatos méretezését megkönnyítik. Ebbe az első részbe foglaltam bele a **nyugvó folyadékok** erőtanának a gyorsuló erőterekre is kiterjesztett tárgyalását.

Az **energetikai** vizsgálat a **valóságos folyadék** áramlási veszteségeinek szabatos ismerete nélkül el nem végezhető. A vízgép teljesítő képességének és hatásfokának előre számítása a veszteségek részletes elemzését teszi szükségessé, ez pedig csak akkor sikerülhet, ha a veszteségek forrását és azok apasztására vezető eszközöket is megismerjük. Ez a célkitűzés tette szükségessé, hogy a könyv **második** részében oly nagy részletességgel tárgyaljam az áramlási veszteségek különböző fajtáit, és annyi számpéldával egészítsem ki a veszteségtényezők meghatározására vezető módszerek ismertetését.

A **harmadik** részben foglaltam össze a vízgépek üzemét befolyásoló, ún. **instacionárius** jelenségek ismertetését, amelyek az egyensúlyállapot megváltozását kísérik. A változó sebességű folyadék áramlástanának figyelmet érdemlő fejezete: **a folyadékok lengéstana,** amelynek analitikai tárgyalása a szabatosság érdekében nem volt elkerülhető. Az eredmények gyakorlati alkalmazhatóságát azonban itt is igyekeztem azzal biztosítani, hogy a túlságosan elvont elméleti okfejtések helyett számpéldákkal is alátámasztott szemléletes és jól érzékelhető módszerek kialakítására törekedtem.

Végül a **keverékek áramlása** címmel beiktatott **negyedik** részben egészítettem ki a **kétfolyadékos energiaátalakítók** elméletét a vízsugárszivattyú, a vízemelőkos és a légnyomásos vízemelő üzemi jellemzőinek meghatározására vezető módszerek ismertetésével. Ebben a részben foglaltam össze a **folyadékáramban szállított szemes anyag** áramlásának alaptörvényeit is.

A gyakorlati alkalmazhatóságra irányuló törekvésben talál magyarázatot az egyes fejezetek klasszikus elméleti alapjainak kissé szűkre szabott terjedelme is. Az elméleti kutató igényeit e könyv sok helyütt hézagos tárgyalási módja bizonyára nem fogja kielégíteni, de a fejezetek anyagának összeválogatásában az **áttekinthetőség** feltétele volt a mértékadó, ez pedig megkívánta a terjedelem korlátozását és egyes — a gyakorlat szempontjából túlságosan elvont — részletek elhagyását.

SZAKIRODALOM

A) Könyvek

[1] *Agroszkin, I. I., Dmitriev, G. T., Pikalov, F. I.:* Gidravlika. (Moszkva—Leningrád, 1950.)
[2] *Akszenov, N. P.:* Oborudovanie litejnüh cehov. (Moszkva, 1949.)
[3] *Alliévi, L.:* Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen. (Berlin, 1909.)
[4] *Angus, R.:* Hydraulics for Engineers. (London, 1931.)
[5] *Bánki Donát:* Energiaátalakulások folyadékokban. (Budapest, 1916.)
[6] *Bergeron, L.:* Machines hydrauliques. (Paris, 1928.)
[7] *Bergeron, L.:* Méthode graphique générale de calcul des propagations d'ondes plans. (Paris, 1937.)
[8] *Citkin, Sz. N.:* Centrobezsnüe kompresszorü, gazoduvki i ventiljatorü. (Kijev—Moszkva, 1950.)
[9] *Csaplügin, Sz. A.:* Izbrannüe rabotü po teorii krüla. (Moszkva, 1949.)
[10] *Csertouszov, M. D.:* Szpeciál'nüj kursz gidravliki. (Leningrád—Moszkva, 1949.)
[11] *Eck, Bruno:* Technische Strömungslehre. (Berlin, 1949.)
[12] *Dr. Fényes Kornél:* Hidraulika. (Budapest, 1933.)
[13] *Forcheimer, Ph.:* Hydraulik. (Leipzig, 1930.)
[14] *Fűzy Olivér:* Vízgépek. II. kiadás, (Budapest, 1957.)
[15] *Gandenberger, W.:* Grundlagen der graphischen Ermittlung der Druckschwankungen in Wasserversorgungsleitungen. (München, 1950.)
[16] *Gardel, A.:* Chambres d'équilibre. (Lausanne, 1956.)
[17] *Gasterstädt, J.:* Die experimentale Untersuchung des pneumätischen Fördervorganges. (Berlin, 1924.)
[18] *Geiger, H. und Scheel, K.:* Handbuch der Physik. VII. Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. (Berlin, 1927.)
[19] *Gibson, A. H.:* Water Hammer in Hydraulic Pipelines. (London, 1908.)
[20] *Gibson, A. H.:* Hydraulics and its Applications. (London, 1930.)
[21] *Goldstein, S.:* Approximate Two-dimensional Aerofoil Theory. Part I—VI. (London, 1942—1945.)
[22] *Grammel, R.:* Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. (Berlin, 1927.)
[23] *Dr. Gruber—Blahó:* Folyadékok mechanikája. (Budapest, 1952.)
[24] *Dr. Gruber—Dr. Pattantyús:* Szárnylapátos vízgépek. (Budapest, 1949.)
[25] *Harza, F.:* An Investigation of the Hydraulic Ram. (Madison, 1908.)
[26] *Jaeger, Ch.:* Technische Hydraulik. (Basel, 1949.)
[27] *Kaufmann, W.:* Angewandte Hydromechanik. (Berlin, 1931.)
[28] *Keller, C.:* The Theory and Performance of Axial Flow Fans. (London-New York, 1937.)
[29] *Kováts, A.—Desmur, G.:* Pompes, ventilateurs, compresseurs centrifuges et axiaux. (Paris, 1953.)
[30] *Kövesi Antal:* Hidraulika. (Budapest, 1948.)
[31] *Lamb, H.:* Lehrbuch der Hydrodynamik. (Leipzig, 1931.)
[32] *Landolt—Börnstein:* Physikalisch-Chemische Tabellen. (Berlin, 1912.)
[33] *Dr. Löwy, R.:* Druckschwankungen in Druckrohrleitungen. (Wien, 1928.)
[34] *Dott. Ing. Malavasi, C.:* La constuzione delle moderne pompe. (Milano, 1934.)
[35] *Mihajlov, K. A., Bogomolov, A. I.:* Gidravlika, gidrologija, gidrometrija. (Moszkva, 1950.)

[36] *Dr. Ing. Neményi, P.:* Wasserbauliche Strömungslehre. (Leipzig, 1933.)
[37] *Dr. Pattantyús:* Vízerőgépek I., II. és III. (Budapest, 1936.)
[38] *Dr. Pattantyús:* Gépészeti lengéstan. (Budapest, 1952.)
[39] *Dr. Pattantyús:* A gépek üzemtana. VIII. kiadás. (Budapest, 1958.)
[40] *Pavlovszkij, N. N.:* Gidravlika. (Moszkva, 1928.)
[41] *Pavlovszkij, N. N.:* Gidravlicseszkih szpravocsnik. (Moszkva, 1937.)
[42] *Pfleiderer, C.:* Die Kreiselpumpen für Flüssigkeiten und Gase. (Berlin, 1955.)
[43] *Dr. Ing. Pöschl, Th.:* Lehrbuch der Hydraulik. (Berlin, 1924.)
[44] *Dr. Sasvári Géza:* Hidrodinamika I. (Budapest, 1925.)
[45] *Schlag, A.:* Hydraulique générale et mécanique des fluides. (Paris, 1950.)
[46] *Dr. Schlichting, H.:* Grenzschicht-Theorie. (Karlsruhe, 1951.)
[47] *Segler, G.:* Pneumatic Grain Conveying. (Braunschweig, 1951.)
[48] *Spannhake, W.:* Mitteilungen des Instituts für Strömungsmaschinen der Technischen Hochschule Karlsruhe. (Berlin, 1939.)
[49] *Stepanoff, A. J.:* Centrifugal and Axial Flow Pumps. (New York, 1948.)
[50] *Tenot, A.:* Mécanique des fluides appliquée. (Paris, 1939.)
[51] *Thoma, D.:* Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München. (München, 1939.)
[52] *Uszpenszkij, U. A.:* Pneumaticseszkij transzport. (Moszkva, 1952.)
[53] *Wien, W. und Harms, F.:* Handbuch der Experimentalphysik. IV. Hydro- und Aerodynamik. (Leipzig, 1930–32.)

B) Szakcikkek

[54] *Allen:* The Motion of a Sphere in a Viscous Fluid. (Phil. Mag., 1900.)
[55] *Alliévi, L.:* Theoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione. (Ann. Soc. Ing. Arch., 1903.)
[56] *Alliévi, L.:* Air Chamber for Discharge Pipes. (Trans. ASME, 1937.)
[57] *Anderson:* Crude-Oil Flow Characteristics Experience in Large Diameter Lines. (Trans. ASME, 1950.)
[58] *Babbitt and Caldwell:* The Flow of Solid-Liquid Mixtures. (Proc. of the Second Hydr. Conf. Iowa Univ. 1942.)
[59] *Bergeron, P.:* Complexité des phénomenes de coups de bélier sur les installations de pompage et essai de classification des solutions générales pour y remédier. (La Houille Blanche, 1949.)
[60] *Bouvard, M. et Molbert, J.:* Méthode graphique pour la calcul des cheminées d'équilibre. (La Houille Blanche, 1950.)
[61] *Citrini:* Contribution a l'étude des éjecteurs ou trompes hydrauliques. (La Houille Blanche, 1956).
[62] *Dumitrescu:* Strömung an einer Luftblase in senkrechtem Rohr. (ZAMM, 1943.)
[63] *Durand et Condolois:* Étude experimentale de refoulement des matériaux en conduites, en particulier des produits de dragage et des schlamms. (Compte Rendu des Deuxiemes Journées de l'Hydraulique, 1952.)
[64] *Fáy Cs. és Fáy Á.:* Szellőzött gabonaoszlop áramlási ellenállása. (Acta Technica s. a.)
[65] *Goldstein, S.:* Low Drag and Suction Airfoils. (Journal of the Aeronautical Sciences, 1948.)
[66] *Dr. Gruber J.:* Szárnylapátos szellőző méretezése és üzeme. (Technika, 1943.)
[67] *Dr. Gruber J.:* Lapátmetszetszerkesztés axiális vízgépeknél. (MTA VI. Oszt. Közl., 1953.)
[68] *Juhász, K. J.:* Analysis of Surges in Fuel Injection Pipes. (State College, 1935.)
[69] *Kreitner:* Druckschwankungen in Turbinenrohrleitungen. (Die Wasserwirtschaft, 1926.)
[70] *Matthies, H. J.:* Die Strömungswiderstand beim Belüften landwirtschaftlicher Erntegüter. (VDI-Forschungsheft 454. 1956.)
[71] *Német Árpád:* Mélyszívófejes turbinaszivattyúk. (Épületgépészet, 1955.)
[72] *Német Árpád:* Vízellátás mélyszívófejes turbinaszivatty ival. (Épületgépészet 1955.)

[73] *Német Árpád:* Gázos folyadékkal telt függőleges csövek maximális folyadékszállítása. (Acta Technica s. a.)
[74] *Pápai L.:* Pneumatikus gabonaszállítás. (MTA VI. Oszt. Közl., 1954.)
[75] *Pápai L.:* Examination of the Starting Section in Pneumatic Grain Conveying. (Acta Technica, 1956.)
[76] *Pápai L.:* Ciklonkísérletek és eredményeik. (Épületgépészet, 1956.)
[77] *Dr. Pattantyús:* A gázoskútak üzemi jellemzői. (Bányászati és Kohászati Lapok, 1935.)
[78] *Dr. Pattantyús:* A légüst szerepe a dugattyús szivattyú üzemében. (Bányászati és Kohászati Lapok, 1936.)
[79] *Dr. Pattantyús:* A vízemelő kos üzemtana. (Technika, 1941.)
[80] *Dr. Pattantyús:* Vízszolgáltatás mélykutakból, tekintettel az Alföld ivóvízellátására. (M. Tud. Akadémia, 1942.)
[81] *Dr. Pattantyús:* Csillapított lengések energetikai jellemzői. (Magyar Technika, 1946.)
[82] *Dr. Pattantyús:* A szárnylapátos szivattyú jelleggörbéjének közelítő szerkesztése sebességi háromszögekből. (Műegy. Közl., 1949.)
[83] *Dr. Pattantyús:* Nyugvó folyadék munkaképessége gravitációs erőtérben. (MTA VI. Oszt. Közl., 1953.)
[84] *Dr. Pattantyús:* Anyagszállítás légáramban. (M. T. I., 1953.)
[85] *Dr. Pattantyús:* Áramlás betoncsatornákban. (MTA VI. Oszt. Közl., 1953.)
[86] *Dr. Pattantyús:* Pneumatic Conveying. (Acta Technica, 1954.)
[87] *Dr. Pattantyús—Dr. Terplán:* Wirkungsweise und Berechnung des Stosshebers. (Acta Technica, 1952.)
[88] *Dr. Ing. Schiffmann:* Zeichnerisches Verfahren und Darstellung der Schwingungen in Kammer- u. Überfallwasserschlössern. (Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1942.)
[89] *Dr. Schmidt Eligius R.:* A debreceni I. sz. kincstári gázoskút hidromechanikai viszonyai és az azokból levonható általános tanulságok. (Bányászati és Kohászati Lapok, 1934.)
[90] *Starosolszky Ö.:* A csőelágazások nyomásviszonyai. (Vízügyi Közlemények, 1958.)
[91] *Thein, K.:* Die Sümpfung des lotharingischen Steinkohlengraben während des Krieges. (Glückauf, 1950.)
[92] *Twort:* Water Hammer. (Water and W. Eng., 1955.)
[93] *Vogel:* Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Strahlapparaten. (Maschinenbautechnik, 1956.)

C) Szabványok

[94] MSZ 1709. Csőben áramló folyadék mennyiségének mérése.
[95] MSZ 3255. Ásványolajtermékek viszkozitásának mérése.
[96] MSZ 3258. Kenőolajok kinematikus viszkozitásának megállapítása grafikus úton.
[97] Magyar ásványolajtermékek kézikönyve. (Budapest, 1954.)

NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

Abszolút perdület 85
abszolút sebesség 81
abszolút vízút 82
adagolófej 404
aerodinamikai szárnyelmélet 75, 87
aknás kiegyenlítő medence 212, 233—
alapgörbe 222
alaphosszúság 351
Allen 396
Alliévi 244, 257—
Alliévi elmélete 262—
Alliévi láncegyenlet-rendszere 265—
Alliévi-lökés 272, 291
Anderson 422
anyagáram 355
anyagrács 349
anyagszállítás függőleges csőben 364—
anyagszállítás vízáramban 386—
anyagszállítás vízszintes gázáramban 354—
Archimedesz 37—
d'Aubuisson 312
autorotáció 363
axiális járókerék 78

Állandósult áramlás 29, 51—, 107—
állásszög 88
áramcsövek 28
áramlás görbületekben 163
áramlás mozgó csatornában 80
áramlás nyitott csatornában 192—
áramlás zárt csőben 124—
áramlási veszteségek 109, 186
áramlástani sugár 116
áramvonal 28
áramvonalas elmélet 75, 98
áramvonalhálózat 56
átbukás 171, 236
átfolyás 170—
átfutási idő 266
átlépési veszteség 143, 185, 186

Babbitt 386
Bánki 52
Bánki-turbina 60
bányanyílás 174
Bazin 98
Bauersfeld 56
beállítási szög 92
belépési veszteségmagasság 143
belépő nyílás 142, 182
belépő sebességi háromszög 81
béléscső 404
belső adagolás 404
belső szállítómagasság 400
Bergeron, L. 255, 271, 295
Bergeron, P. 296
Bernoulli 97
Bernoulli-egyenlet 51
Bidone-féle vízküszöb 133
Bingham 386
Blaes 174
Blasius-képlet 125, 326
Borda-féle csőtoldat 132, 140
Borda-féle kifolyónyílás 69, 170
Borda-féle veszteség 70, 132, 139—
Borsig 394, 404, 419, 422
Bossut 98
Bouvard 239
bővülő csőtoldat l. diffúzor
Boyle—Mariotte-t. 206
Braun 233, 271, 277
Braun-f. diagram 192
Bresse 195
Brown-féle mozgás 346
Bryn 397
buborék l. gázbuborék
Budryck 386
bukógát 172

Caldwell 386
centrifuga 349
Chézy 98
Chézy-képlet 117, 121
ciklon 381—
ciklonhatásfok 381
cirkuláció 76
Citrini 311, 320
Colebroock 127
Condolois 386
Coriolis-gyorsulás 84
Coriolis-lapátterhelés 84
Couplet 98

Csapok 146, 183
csillapítatlan lengések 206—
csillapító erő 225
csillapított lengések 217
csőállandó 274, 275, 288—
csőidomok 127—
csősúrlódás tényezőjének értéke 124
csőszáj 142, 182
csővezeték hirtelen zárása 244—
csővezeték jelleggorbéje 176
csővezeték uzemi jellemzői 175
csőzárószerkezetek 146, 183
csúsztatófeszultség 107

Darcy 98
Datta 397
depresszió magasság 140
derítés 347, 349
diffúzor 131, 133—
diffúzor hatásfoka 134
dinamikai hasonlóság 111
dinamikai szívómagasság 136
dinamikai viszkozitás 106, 108
direkt lokés 272
Dubuat 98
dugulás 371, 390
dugattyús szivattyú légustje 211
dugulásmentes anyagszállítás 362
Dumitrescu 396
Dumitrescu-f. osszefuggés 398
Dupuit 98, 110
Dupuit-f. parabola 425
Dupuit—Thiem-f. elmélet 425
Durand 386, 389
duzzasztás 195—
duzzasztó kuszob 256

Eck 363
egyenértékű átmérők 137
egyenértékű csőhosszúság 173
egyenértékű nyilas 174
egyenirányított szinuszgorbe 169
egyenlőtlenségi fok 168
egylépcsős szivattyú 185
egymásrahelyezhetőség 62
egyméretű áramlás 29, 53—
egyszeres működésű dugattyús szivattyú 169, 180
Eisner 114
ellenállástényező 88
ellenlokés 291
ellenőrző aknák 154
ellenőrző felulet 68, 69
elnyelési egyuttható 102, 424
elosztócső 155
elosztott lapátterhelés 77
elterelt szabadsugár 71
eltérítési háromszog 73, 82, 90
energiatranszformátor 310—
Engler-f. viszkoziméter 105
Engler-fok 105
erőtani hasonlóság 111
erőtani nyúlósság 108
erőtér 11
erővonal 12
esés 82
Euler 28, 97
Euler-f. egyenletek 30
Euler-f. turbinaegyenlet 82

Élesfalú nyílás 170
érdes cső 126
érdesség 100, 126
érdességi paraméterek 126

Fajlagos gázadagolás 407
fajlagos perdulet 74
fajlagos szelepterhelés 148
fajlagos vízhozam 407
fajsúly 103
fajtázás 349
falnyomás 32
Favre 153
Fáy 345
felfűzési terv 93
felhajtóerő 37, 78, 88
felhajtóerő tényező 88
felszállócső 404
felszíni feszultség 101, 102
felszíni hullámok 103
felszíni hullámsebesség 115
Filonyenko képlete 125
fluidizáció 341, 346
folyadék súrlódása 107—
folyadékba merített test mozgástörvényei 346—
folyadékmanométer 210
folyadékmentes űr 64
folyadékok jellemzői 103
folyadékoszlop elszakadása 64
folyadékszállítás gázadagolással 394—
folyadéktest 68
folytonosság 29
forgatag 62, 63
forgatónyomaték 74
forgó rendszer 14, 16
főidő 266
Francis-turbina 85, 98
Froude-f. szám 113
függőleges szállítás hatásfoka (pneu.) 376
fűrészdiagram 269—

Gabonatárház 350
Gandenberger 257, 271, 295
Ganguillet 98
Gardel 153
Garvens 337
Gasterstadt 358
Gasterstädt-f. állandó 358, 389
Gauss tétele 29

gázadagolás állandósága 394
gázbuborékok elóresietése 395—
gáznyelési egyuttható 429
gázok jellemzoi 103
gázoskút 394, 395, 424—
geometriai hasonlóság 111
Gibson 398
gomolygó áramlás 109
Gorodezkaja 397
Gosline 397
gorbe lapáttal eltereit szabadsugár 71

Gyakorlati áramlástan 97
gyors zárás 272
gyorsítóerő 30
gyorsító nyomásesés 358
gyorsító nyomásmagasság 66
gyorsuló áramlás egyenes csőben 66
gyorsuló rendszei 12
gyűjtőcső 154

Hagen 98, 118
Hagen—Poiseuille-képlet 109, 117
háromméretű aramlás 62
Harza 333
határgyorsulás 67
határmélység 193
határnyomás 287
határréteg 99, 117, 131
határréteg-leszívás 134
határsebességek 114, 193
hatásos lapáterő 77
hatásos szállítómagasság 401
hátragorbített lapát 86
Hermann 125
hézagok hidraulikai sugara 341
hidraulika 97
hidraulikai hatásfok 186, 191
hidraulikai perdulet 75
hidraulikai sugár 116, 341, 392
hidraulikai veszteségek 184—
hidraulikailag sima 127
hidrosztatika 11, 32—
hirtelen keresztmetszetváltozás 70, 182
hirtelen zárás 246, 272
Hoefer 397, 419
Hoffmann 184
holt leágazás 154
homokérdesség 127
Hooke 244
hordalékmozgás 390—
hordalékmozgás határsebessége 115
hullámosság 126
hullámsebesség 115, 246—

Időállandó 201
impulzus 67
impulzuserő 67
impulzusnyomaték 74
impulzustétel 67

indítási idő 200, 259, 371
indítási úthossz 371
indítólégust 209
indítószakasz 358, 369—
indítószelep 331
indítóutem 331
iránytorés 81, 143, 185
ívcső 163
ívdarab ellenallasa 163, 184

Jaeger 295, 305
járókerék 185, 187
járókerék teljesítménye 82
járulékos magasság 400
járulékos veszteségek 132, 166—
jósági fok (gázoskút) 425
jósági fok (pneu.) 376
Juhász 255, 257

Kagylódiagram 298
kapilláris erő 101
Kaplan-turbina 65, 96
kavitació 64—
kavitációveszély 87, 89
Kelvin 103
kerékperdulet 83
keresztirányú áramlás 163, 166
keresztmetszet-bóvulés 182
keresztmetszet-szűkulés 182
keringés 76
keringési sebesség 63, 135
kétfolyadékos energiaátalakítók 310—
kétméretű áramlás 56—
kettősműkodésű dugattyús szivattyú 169
keveredési veszteség 132
keveredő áramlás 109, 125
keveredő áramlás veszteségei 116
keverékek aramlása 310—
keverési arány 22, 355, 394
keverőtér 315
kiegyenlítő medence 212, 217
kifolyás 170—
kifolyási tényező 170
kilengés korlatozása átbukással 236
kilengési korlát 221
kilépési veszteség 162, 164
kilépő sebességi háromszog 81
kimosás 390
kinematikai hasonlóság 111
kinematikai viszkozitás 102, 105, 108
kismintakísérlet 107, 110
kismintakísérlet korlátai 114
kismintatorvény 99, 110—
klasszikus hidrodinamika 97
kohézió 100
koncentráció 356
konfúzor 127
kontinuum 38—
kontrakció 69
kontrakció tényezője 69, 170

konvektív gyorsulás 30
könyökcső 163
könyökténvező 55
körlapát 71
körperdület 76
középsebesség 167
Kreitner 277—
Kreitner grafikus módszere 281—
Krey 114, 393
kritikus mélység 425
külső adagolás 404
kúpos szűkítő idom l. konfúzor
kúposság 129
Kutta—Zsukovszkij—tétel 77
Kutter 98

Lábszelep 147—
Lagrange 28, 97
lamináris áramlás 108
„lamináris lebegésű" szemcsék 386
lapátcsillag 75, 80
lapáterő 72, 80
lapátnyomás 72
lápátpe dület 76
lapátrács 72, 78, 80
lapátsor 72
lapátszám 73
lapátterhelés 72
lapátterhelés eloszlása 78
lassítás időállandója 205
lassú zárás 272
leágazás 153 —
lebegési sebesség 364
légelnyelés 102
légnyomásmérő 19
légnyomásos vízemelő 21, 313, 394, 395, 404—
légnyomásos vízemelő jelleggörbéi 418—
légüst 211, 302, 336
légüstök csillapítatlan lengései 206—
lekanalazás 425
lendítőcső 331
lendítőkerék 302
lengések kiegyenlítő medencében 212—
lengőrendszer munkaképessége 163—
lerakódás 390—
leválási veszteségek 131—
leválasztás 381—
levegő viszkozitása 106
Lindquist 114,
lineáris lapátterhelés 77
lineáris zárástörvény 259—
lokális gyorsulás 30
Lorenz 56
lökésvonalak 269—
Lőwy 258—

Malavasi 182
malom pneumatikus berendezése 374
mammutszivattyú l. légnyomásos vízemelő
manometrikus szállítómagasság 164, 166
Matthies 343
Mátlyus 299—
mechanikai veszteségek 184—
medermenti erők 194
megfúvás 91
mélyszívófej 329
mennyiségmérés könyökben 54
merev rendszer időállandója 287
meridiánáramlás 62
meridiánsebesség 63, 75, 135
meridiánsík 60
mértani hasonlóság 111
metacentrikus magasság 45
metacentrum 43
minimális gázsebesség 373
Mises 220—
Mises-görbe 220
Molbert 239
mozgásmennyiség 67
mozgástani hasonlóság 111
mozgástani nyúlósság 102, 105, 108
Mühlhofer 233
multiciklon 385
munka ont 177
Murgue 174
Müller 397
Myagi 397

Nazzani 182
negatív vízlökés 256
nehéz öblítés 101
Német 396, 397, 419—
Német formulája 398
névleges gázveszteség 405
Newton 30, 98, 107
Nikuradse 117, 125, 126

Nyírófeszültség 107
nyomás 17
nyomás alsó határa 64
nyomás gyorsuló rendszerek erőterében 23
nyomásarány 22
nyomáseloszlás a csővezetékben 172—
nyomáshullám 248—
nyomáshullám kifutása 291—
nyomásingadozás 257—
nyomásingadozás rugalmas nyomócsőben 262—
nyomásingadozás szivattyútelepek nyomócsövében 293—
nyomásingadozás turbina nyomócsövében 258—
nyomásingadozás turbina rugalmas nyomócsövében 269—
nyomásmagasság 18, 52
nyomásmérés 18
nyomásszám 321
nyomószelep 147, 150—

nyomótér 186
nyomóüzem 354
nyugvó folyadék munkaképessége 38
nyúlósság 100, 105

O'Brien 397
óriásbuborék 398
Owens 397

Önműködő szelep 147
öntözőkos 331
örvény 63
örvénymentes áramlás 28
örvényszivattyú 75, 86
összehúzódás tényezője 69, 170

Pápai elmélete 358—
Pápai-f. tényező 359, 390
parányi négyzetek módszere 57
párhuzamos átömlésű járókerék 78
párhuzamosan kapcsolt csővezeték 175—
Pattantyús-görbe 222
Pelton-kanál 71
Pelton-turbina 257, 261, 277
perdület 54, 74
perdületmentes kilépés 81
perdülettétel 53, 75
Pickert 419
plasztikus anyag 387
pneumatikus szállító berendezés 356
Poiseuille 98, 108—
Poiseuille-f. cső 108
Polysius vályú 346
Poncelet-gát 171
Poncelet-kerék 98
Poncelet-nyílás 170
potenciál 11
potenciálkád 345
potenciálos áramlás 28
Prandtl 99, 131
primér folyadék 311
Prony 98
propeller turbina 96

Rácshatás 89
rácstényező 349
radiális átömlésű járókerék 83
Rákóczy 55
Rankine 312
redukált csőhosszúság 203, 208, 414—
redukált keresztmetszet 208, 349
redukált rugalmassági tényező 245
redukált tömeg 399
rekurziós formula 277
relatív érdesség 126
relatív sebesség 81, 355
réteges áramlás 108, 124
Reynolds-f. törvény 112
Reynolds-szám 112
Reynolds-szám kritikus értéke 115, 118, 124, 388
Riemann 265, 294
Rittinger-f. összefüggés 386, 389
rohanás 115, 193
Rosenberg 397
Ruban 397
rugalmas csőfal keresztirányú lengései 252—
rugalmas rendszer csőállandója 287—
Rühlmann 195
Runge 233

Schiffmann 233
Schiller 125
Schmidt E. R. 427
Schnyder 271
Schocklitsch 233
sebesség négyzetével csillapodó lengések 216—
sebességi háromszög 80—
sebességi potenciál 28
sebességi tényező 170
sebességi tér 28
sebességingadozás 168
sebességmagasság 52
sebességnyomaték 74
Segner 97
Segner-kerék 98
síklappal elterelt vízsugár 71
siklószám 188
silócella 350
sima cső 125
Simpson-szabály 45
sorbakapcsolt csővezetékek 175—
stacionárius áramlás 29
Stokes-törvény 347, 386, 396
sugárterelő 257
súrlódási veszteség 131
sűrítési fok 407
sűrű leágazás 154—
sűrű öblítés 101
sűrűlapátozású kerék 75, 80

Szabad gáztartalom 102
szabad gáztérfogat 424
szabad kifolyás 68
szabályozótű 257
szállítás gazdaságossága 376
szállítómagasság 82
szárnylapátos kerék 75
szárnylapátos vízgépek 87—
szárnylapátos vízgépek veszteségei 187
szárnyrács 89
szárnyszelvény 87
szegmens gát 36
szekundér áramlás 163, 166
szekundér folyadék 311
szelepek 147—
szemcsés anyag szellőzése 344
szemcsés anyagok szállítása folyadékáramban 340—

szemes anyagáram 349
szeparátor 349
szintfelület 11
szívócső 135—
szívócső hatásfoka 135
szívócső veszteségtényezője 136
szívószelep 147, 150—
szívótér 185, 187
szívóüzem 354
szlipveszteség 355, 395, 405
Szmirnov 397
sztatikus szállítómagasság 165
szűkítés mértéke 128
szűkítő idom áttétele 128
szuperpozició 62

Tápláló vezeték 157
tárcsasúrlódás 184
tehermentes lapát 78
tehetetlenségi erő 30
tehetetlenségi nyomásmagasság 66, 201
telített gázoldat 424
teljes perdület 75, 85
teljes sebesség 81
teljes szállítómagasság 400, 407—
teljes visszaverődés 266
tengelyszimmetriás áramlás 60
térbeli áramlás 62
térerő 11
terhelési fok 415
terhelőmagasság 204
Thein 422
Thiem 425
többlépcsős szivattyú 186
tökéletes adagolás 425
tökéletes átbukás 171
tökéletes folyadék 11
tökéletes vízsugárszivattyú 318—
tolózár 146, 183
töltési parabola 269
töltőhullám 256
trajektória hálózat 29
túlnyomás 20
turbina 75, 80
turbinaszivattyú l. örvényszivattyú
turbulens áramlás 109
turbulens áramlás veszteségei 116
„turbulens lengésű" szemcsék 388

U cső 210
Uszpenszkij 362

Ülepedési sebesség 349
ülepítés 347, 349
üresjárás 357
üresjárási nyomásesés 365
űrképződés határa 115, 328
űrképződésből származó veszteségek 162—
ütközési veszteség l. keveredési veszteség

Valóságos folyadék 100—
változó szelvényű kiegyenlítő medence 233—
véges lapátosztás 75
Venturi-cső energiaábrája 53
Venturi-mérő 30
veszteségek vízgépekben 184—
veszteségmagasság 70, 109
veszteségparabola 175
veszteségtényező 127, 181—
vezetőcsatorna 58
vezetőkerék 185, 189
viszkozitás 100
viszonylagos előresietési sebesség 405
viszonylagos perdület 83
viszonylagos sebesség 81, 346, 355
visszacsapószelep 147
víz jellemzői 101
víz rugalmassági tényezője 244—
vízelosztó-rendszerek 177
vízemelő kos 258, 313, 331—
vízgyűjtés diagramja 179—
vízküszöb 133
vízlökés 115, 246—
vízlökés nyitott csatornában 255—
vízlopás 140
víznyelés 85
vízoszlop szabad gyorsulása 200—
vízoszlop szabad kifutása 204—
vízoszlop szabad lengései 206—
vízsugár összehúzódása 69
vízsugár-vízszivattyú 314—
vízsugár-légszivattyú 330
vízsugár-légszivattyú hatásfoka 313
vízsugárszivattyú 314—
vízszállítás diagramja 178—
vízszintes szállítócső 357
vízszolgáltatás tárolással 178—
víztest 70, 108, 167
víztükör lehajlása 195—
Vogel 320, 324
volumetrikus veszteségek 184—

Wasielewski 184
Weber-f. szám 114
Weisbach 98, 147
Westphal 150

Záróaknák 154

Zsukovszkij 244, 257

TARTALOM

Előszó az I. kiadáshoz (1942) 3
Előszó az átdolgozott II. kiadáshoz (1951) 4
Előszó a lényegesen átdolgozott III. kiadáshoz (1956) 4

Bevezetés 9

I. A tökéletes (ideális) folyadék áramlása

1. A tökéletes folyadék 11
2. Az erőtér, a térerő és a potenciál 11
3. A nyomás 17
4. A nyomás nehézségi erőtérben. A nyomásmagasság. A nyomás mérése ... 18
5. A nyomás gyorsuló rendszer erőterében 23
6. A térbeli áramlás sebessége. Az áramvonal. A sebességi potenciál 28
7. Az anyag megmaradásának törvénye 29
8. Az áramló folyadék egyensúlya. Az Euler-féle egyenletek 30

A) A nyugvó folyadék egyensúlya (Hidrosztatika)

9. A folyadék nyomása (szilárd) határoló felületekre. A falnyomás 32
10. Folyadékba merített test egyensúlya. A (sztatikus) felhajtóerő 37
11. Nyugvó folyadék munkaképessége gravitációs erőtérben 38
12. Úszó testek stabilitása. A metacentrum 43
13. Folyadékba merített test egyensúlya gyorsuló erőtérben 49

B) Állandósult (egyenletes) áramlás

14. A munkaképesség megmaradásának tétele. A Bernoulli-egyenlet 51
15. Egyméretű áramlás vizsgálata. A nyomás eloszlása 53
16. A szabad áramlás törvénye. A perdület állandóságának tétele 53
17. Kétméretű (szabad) áramlás a síkban. Eljárás az áramvonalhálózat szerkesztésére 56
18. A nyomás eloszlása a kétméretű sebességi térben. A csatornafalak terhelése 58
19. Tengelyszimmetriás (szabad) áramlás forgásfelületekkel határolt térben 60
20. A térbeli (háromméretű) áramlás vizsgálata. Az egymásrahelyezhetőség 62
21. A forgatag 63
22. A nyomás alsó határa. A kavitáció 64

C) Változó sebességű áramlás álló térben

23. Gyorsuló áramlás egyenes csőben. A gyorsító nyomásmagasság és a tehetetlenségi nyomásmagasság 66
24. Az impulzustétel és alkalmazásai 67
25. Elterelt szabadsugár erőhatásai. Az elosztott lapátterhelés 71
26. A lapáterő. Az eltérítési háromszög 72
27. Az impulzusnyomaték (perdület). A forgatónyomaték 74

28. A körperdület (cirkuláció). A lapátperdület 76
29. Az elosztott (lineáris) lapátterhelés 77
30. A hatásos lapáterő. Kutta—Zsukovszkij tétele 77
31. A tehermentes lapát. A lapátterhelés eloszlása 78

D) Áramlás mozgó csatornákban

32. Állandó sebességgel haladó csatorna. A sebességi háromszög 80
33. A járókerék teljesítménye. Az esés és a szállítómagasság. Az Euler-féle turbinaegyenlet 82
34. A radiális átömlésű járókerék forgatónyomatéka és teljesítménye 83

E) Szárnylapátos vízgépek járókereke

35. A szárnyszelvény fontosabb jellemzői 87
36. A szárnylapátos vízgépek fontosabb jellemzői 89
37. A szárnylapátos szivattyú járókereke 92
38. A szárnylapátos turbina járókereke 95

II. A valóságos folyadék áramlása

39. Áttekintés. A gyakorlati áramlástan fejlődéstörténete 97
40. A valóságos folyadék 100
41. A víz jellemzői 101
42. Folyadékok és gázok jellemzői 103

A) Állandósult (egyenletes) áramlás

43. A folyadék súrlódása 107
44. A kismintatörvény 110
45. A kismintakísérlet korlátjai. A határsebességek 114
46. A hidraulikai sugár 116
47. A keveredő (turbulens) áramlás veszteségei zárt csőben és nyitott csatornában 116

B) Áramlás zárt csőben

48. A csősúrlódás tényezőjének értékei 124
49. Csőidomok. A kúpos szűkítőidom vagy konfúzor 127
50. Leválási veszteségek 131
51. A bővülő csőtoldat vagy diffúzor 133
52. Hirtelen keresztmetszet-bővülés 139
53. Hirtelen keresztmetszet-szűkítés 142
54. Belépőnyílás. Csőszáj 142
55. Iránytörés 143
56. Csőzárószerkezetek 146
57. Önműködő szelep 147
58. Leágazás 153
59. Sűrű leágazás 154
60. Az űrképződésből származó veszteségek 162
61. Áramlás görbületekben. Ívdarab ellenállása 163
62. A kilépési veszteség 164
63. Járulékos veszteségek 166
64. Kifolyás és átfolyás 170
65. A nyomás eloszlása a csővezetékben 172
66. Az egyenértékű csőhosszúság 173
67. Az egyenértékű nyílás (keresztmetszet) 174
68. A csővezeték üzemi jellemzői. A jelleg-görbe 175
69. Vízszolgáltatás tárolással. A vízgyűjtés diagramja 178
70. Csőben áramló folyadék (víz) veszteségtényezői 181

C) Veszteségek a vízgépekben

71. A veszteségek fajtái ... 184
72. Centrifugális átömlésű szivattyú hidraulikai veszteségei ... 185
73. Szárnylapátos vízgépek veszteségei ... 187
74. Hidraulikai veszteségek a szárnylapátos szivattyúban ... 187

D) Áramlás nyitott csatornában

75. Állandósult áramlás nyitott csatornában. A Braun-féle diagram ... 192
76. Nyitott csatornában áramló folyadék egyensúlya. A keresztmetszetet terhelő erők vonala ... 194
77. A duzzasztás és a víztükör lehajlása nyitott csatornában ... 195

III. A változó sebességű folyadék áramlása

78. Az egyensúlyállapot megzavarása ... 200

A) A vízoszlop szabad gyorsulása

79. Az indítás ideje ... 200
80. A vízoszlop szabad kifutása ... 204

B) A vízoszlop szabad lengései

81. Légüstök és medencék csillapítatlan lengései ... 206
82. Az U alakú cső (folyadékmanométer) ... 210
83. A dugattyús szivattyú légüstje ... 211
84. Lengések a kiegyenlítőmedencében ... 212
85. A lengőrendszer munkaképessége ... 215
86. A sebesség négyzetével csillapodó lengések ... 216
87. A kiegyenlítőmedence csillapított lengései ... 217
88. A víztükör legnagyobb kilengései ... 220
89. A víztükör lengéstörvényei. A lengési idő meghatározása ... 222
90. A lengőrendszer alapgörbéje ... 222
91. A lengőrendszerrek az alapgörbéből leszármaztatható jellemzői ... 224
92. A lengési idő közelítő meghatározása és az út idő görbe szerkesztése . 230
93. Lengések változó szelvényű (aknás) kiegyenlítőmedencében ... 233
94. A kilengés korlátozása átbukással ... 236
95. Változó keresztmetszetű aknás kiegyenlítőmedence jellemzőinek szabatos meghatározása. Az alapgörbék egymásra illeszthetősége ... 239

C) A csővezeték hirtelen zárása. A vízlökés

96. Csőbe zárt vízoszlop rugalmassági tényezője ... 244
97. A hirtelen zárásból eredő vízlökés. A hullámsebesség ... 246
98. A nyomáshullám (vízlökés) időbeli lefolyása ... 248
99. A rugalmas csőfal keresztirányú lengései ... 252
100. A vízlökés nyitott csatornában ... 255

D) Nyomásingadozások mennyiségi vizsgálata

101. Nyomásingadozások vizsgálatának tárgyköre ... 257
102. Nyomásingadozás a turbina nyomócsövében. (Merev rendszer, lineáris zárás) ... 258
103. Nyomásingadozás rugalmas nyomócsőben. Alliévi elmélete ... 262
104. Nyomásingadozás a turbina rugalmas nyomócsövében. A fűrészdiagram szerkesztése ... 269
105. Kreitner grafikus módszere ... 281
106. A kétféle elmélet összehangolása ... 286
107. A rugalmas rendszer csőállandójának jellegzetes értékei ... 288
108. A nyomáshullám kifutása ... 291

109. Nyomásingadozás szivattyútelepek nyomócsövében 293
110. A szivattyú-motor gépcsoport lendületének befolyása. A lendítőkerék .. 297
111. Légüst alkalmazása az örvényszivattyú nyomócső-vezetékében 302

IV. Keverékek áramlása

A) Kétfolyadékos energiaátalakítók (Transzformátorok)

112. Kétfolyadékos energiaátalakítók felosztása 310
113. A kétfolyadékos energiaátalakító hatásfoka 312
114. A vízsugár-vízszivattyú 314
115. A tökéletes vízsugárszivattyú 318
116. A vízsugár-vízszivattyú méretezése 320
117. A vízsugár-légszivattyú 330
118. A vízemelő kos 331

B) Szemcsés anyag szállítása folyadékáramban

119. Nyugvó szemes anyag folyadékáramban. A fluidizáció 341
120. A folyadékba merített test mozgástörvényei 346
121. A test sebességének útmenti és időbeli változása 350
122. Anyagszállítás vízszintes gázáramban 354
123. A vízszintes szállítócsőben jelentkező ellenállások 357
124. A vízszintes szállítás sebességviszonyai 360
125. Anyagszállítás függőleges csőben 364
126. A függőleges szállítás sebességviszonyai 367
127. Az indítószakasz 369
128. A szállító gázáram határsebességei 373
129. A szállítás gazdaságossága 376
130. A leválasztás. Ciklonok 381
131. Anyagszállítás vízáramban 386
132. Hordalékmozgás. Kimosás, lerakódás 390

C) Folyadékszállítás gázadagolással

133. A gázbuborékok előresietése 395
134. A teljes (belső) szállítómagasság 400
135. A hatásos szállítómagasság 401
136. Az áramlási veszteségek közelítő számítása 402
137. A légnyomásos vízemelő. (Mammutszivattyú) 404
138. A légnyomásos vízemelő teljes szállítómagassága 407
139. A felszállócső áramlási veszteségei 411
140. Az áramlási veszteség közelítő értéke. A redukált csőhosszúság 414
141. A légnyomásos vízemelő jelleggörbéi 418
142. A legnagyobb folyadékszállítás meghatározása 419
143. A gázoskút elmélete 424
Befejezés 431
Szakirodalom 432
Név- és tárgymutató 435

A kiadásért felelős a Tankönyvkiadó Vállalat igazgatója 1959

Kiadásra előkészítette: Dr. Rochlitz József
Műszaki vezető: Horváth János
Műszaki szerkesztő: Kormanik Béla
A kézirat leadva: 1958 szeptember
Megjelenés: 1959 július

Példányszám: 3100
Terjedelem: 38,75 (A/5) ív. 241 ábra
Készult monotype szedéssel, íves magasnyomással, az MSZ 5601—54 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint

59/18513. Franklin-nyomda Budapest. Felelős: Vértes Ferenc