

Csirmaz László

# NEMSZTENDERD ANALÍZIS

TypoT<sub>E</sub>X Kiadó

1999

Budapest

Csirmaz László – Computer Center  
Közép-Európai Egyetem  
csirmaz@ceu.hu

Lektorálta: Tardos Gábor  
© Csirmaz László, 1999, TypoT<sub>E</sub>X

ISBN 963 9132 683

# Tartalom

1. Bevezetés . . . . .	7
2. Logikai eszközök . . . . .	15
3. Bővítés . . . . .	35
4. Differenciál- és integrálszámítás . . . . .	49
5. Topológikus terek . . . . .	69
6. Metrikus terek . . . . .	85
7. Hézagok polinomok . . . . .	101
8. Komplex függvénytan . . . . .	113
Függelék: Cauchy és az egyenletes konvergencia . . . . .	135
Ajánlott irodalom . . . . .	140
Tárgymutató . . . . .	141

## 1. fejezet

# Bevezetés

A nemsztenderd analízis a végtelen kicsi és végtelen nagy mennyiségek matematikai elmélete. A differenciál- és integrálszámítás felfedezése idején az infinitezimális, vagyis végtelenül kicsiny mennyiségek jelentős szerepet játszottak, elsősorban *Isaac Newton* (1642–1727) fluxió módszerében. Az ilyen ideális mennyiségekkel való számolás problémáit hamar felismerték: a differenciálhányados kiszámításakor a  $dx$  mennyiséggel egy ideig mint nem nulla értékkel számolunk, azután hirtelen ráfogjuk, hogy nulla. A kalkulus másik felfedezője, *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716), a helyzet tisztázására programot hirdetett meg, melynek célja a számfogalom olyan kiterjesztése volt, amelybe a végtelen kicsi és a végtelen nagy számok egyaránt belefértnek. Ezt az elképzelést a képzetes számok sikeres bevezetése motiválta, amiket a harmadfokú egyenletek képlettel való megoldásakor adódó nehézségek megkerülésére találtak ki. Leibniz és követői végül is nem jártak sikerrel, és a múlt század végétől a „végtelen kicsi” csak illusztráció, a bizonyítások mind *Bernhard Bolzano* (1781–1848) és *Karl Weierstrass* (1815–1897) nevével fémjelzett „epszilon-deltás” határérték fogalmát használják. Századunk második felére a matematikai logika apparátusa megerősödött, és ezzel a Leibniz által kitűzött cél már elérhetőnek látszott. Különböző kezdeti próbálkozások után a valós számkör végtelen kicsi és végtelen nagy mennyiségekkel való konzisztens kiterjesztése végül is *Abraham Robinsonnak* (1918–1974) sikerült. Első, e témával foglalkozó *Non-standard Analysis* című dolgozata 1961-ben jelent meg. A



„nemsztenderd” jelző *T. Skolem* (1887–1963) egy még 1934-ből származó cikkére utal, melyben Skolem a természetes számoknak a szokásostól különböző, de attól belső eszközökkel (egészen pontosan elsőrendű formulákkal) megkülönböztethetetlen, úgynevezett *nemsztenderd* modelljét konstruálta meg. Robinson megmutatta, hogyan lehet az általa létrehozott eszközökkel az elemi analízist felépíteni, hogyan tulajdoníthatunk matematikailag pontos értelmet például annak a kijelentéseknek, hogy „ha  $x$  végtelen kicsivel változik, akkor  $f(x)$  is.” Az analízis bevezető tételeinek igazolására kifejlesztette a „nemsztenderd technikát,” később a matematika sok más ágát is megvizsgálta abból a szempontból, hogy a nemsztenderd módszer hogyan vihető át ezekre a témakörökre. Kutatásainak eredményeit az 1966-ban kiadott *Non-standard Analysis* könyvében foglalta össze, ami azóta a nemsztenderd analízis „bibliája.” Robinson könyvének legutóbbi, átdolgozott kiadása 1996-ból való. Ez a könyv, amit most az olvasó kezében tart, szintén sokat köszönhet Abraham Robinson e kitűnő munkájának; a szereplő témakörök, tételek és állítások jelentős része belőle származik.

Robinson felfedezése után igen lelkes és széles kutatómunka indult meg, aminek eredményeként a nemsztenderd módszer megjelent az egyetemi, sőt helyenként a középiskolai oktatásban is. A kezdeti sikerek és lelkesedés alapján az új módszertől sokan annak lehetőségein felül reméltek sikereket. Az elmúlt évtizedek tapasztalata azt mutatta, hogy a nemsztenderd módszer nem valamiféle új csodaszer, aminek segítségével eddig megoldhatatlan problémák válnak egy csapásra megoldhatóvá, hanem legjobb esetben is csak egy másfajta *látásmód*, aminek segítségével az eddig igazságtalanul kidobott „végtelenül kicsi” és a „végtelenül nagy” elfoglalhatja helyét a szigorú matematikai gondolkodásban. Minden nemsztenderd bizonyítás ugyanis átfogalmazható olyan bizonyítássá, melyben nemsztenderd fogalmakra egyáltalán nincs utalás, feltéve persze, hogy a tétel állításában nem szerepel nemsztenderd fogalom. Tipikusan egy-egy tételnek akár sztenderd, akár nemsztenderd bizonyítását nézzük, azok mélyén mindig ugyanaz az ötlet, meglátás húzódik. Maga az

ötlet a tétel vagy a problémakör alapos, mély megértéséből fakad, és nem valamiféle automatizmus szolgáltatja. Talán jó tudni, hogy a nemstenderd módszer sem gondolkodik helyettünk, ami más, az a *technika*. A nemstenderd bizonyítások mindezek mellett (vagy inkább ellenére) érthetőbbek, jobban emészthetők, könnyebben *interiorizálhatók* mint a hagyományos „epszilon–deltás” okoskodások. Talán nem véletlen, hogy az „intuitív” nemstenderd módszer az 1800-as évek közepéig az analízis alapvető módszere volt, és csak az után vált az „epszilon–delta” általánossá, mikor egyre-másra az intuitív okoskodás korlátaiba ütköztek, és nem sikerült elválasztani a „helyesnek látszó” okoskodást az igazán helyestől. Ennek a könnyebb érthetőségnek valószínűleg mélyebb pszichológiai okai vannak. *J. Piaget* (1896–1980) neves francia pszichológus kutatásainak eredményeképpen jól ismert, hogy bizonyos logikai összefüggések felismerése, megértése, nyilvánvalóvá válása életkorhoz kötődik. A kétéves kisgyerek ugyanakkora mennyiségű vizet többnek vagy kevesebbnek lát attól függően, hogy az keskeny magas vagy széles lapos pohárban van. Az egyenes és fordított arányosság (kétszer annyi pénzért kétszer annyi kenyeret kapunk, vagy hogy kétszer annyi munkás feleannyi idő alatt ássa ki a gödrot) 10–12 éves korban válik világossá. Noha a képletek mechanikus alkalmazására minden gyerek megtanítható, attól még nem fogja megérteni, hogy az „azt megszorozom, ezt elosztom” módszer miért működik, miért adja meg azt, amire kíváncsiak voltunk? Az epszilon–deltás fogalmak befogadása 16–20 éves korra tehető, ennek oka valószínűleg a kvantorok kettő mélységű egymásba ágyazódása: „az  $f$  függvény folytonos az  $x$  pontban ha minden pozitív  $\varepsilon$ -hoz van olyan pozitív  $\delta$ , hogy  $|x - x'| < \delta$  esetén  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ .” A nemstenderd analízis ezt a komplexitást szállítja le azzal, hogy megszabadul az egymásba ágyazott kvantoroktól. Az  $f$  függvény folytonosságának fenti definíciója a következő implikációvá egyszerűsödik: „ha  $x$  és  $x'$  végtelenül közel vannak egymáshoz, akkor  $f(x)$  és  $f(x')$  is végtelenül közeliek.” Az analízis alapjaival való ismerkedéskor ez a redukció sokat segíthet abban, hogy a tanulók a határérték, folytonosság lényegét értsék

meg, és ne akadjanak el olyan technikai részleteknél, mint például hogyan lehet megjegyezni a rengeteg bizonyítás mindegyikében azt, minek is kell  $\delta$ -t választanunk ahhoz, hogy a bizonyítás végére az  $\varepsilon$  kijöjjön? Érdemes talán összevetni a Riemann-integrál bevezetéséhez szükséges 4.21. állítás viszonylag egyszerű bizonyítását a hagyományos esetben szükséges tételekkel. Gyakorló matematikusnak persze egy bizonyítást akár egyik, akár másik nyelven megfogalmazni vagy megérteni rutin feladat, így számukra a nemsztenderd módszer igazán nagy előnyt (vagy hátrányt) nem jelent. Egyéb tudományágak művelőinek, akik a matematika apparátusát gyakran csak alkalmazzák, a nemsztenderd módszer jelentheti a különbséget a között, hogy valójában értsék, tudják mi is az analízis, hol vannak alkalmazhatóságának korlátai, lássák magát a módszert, valamint a képletek mechanikus, ellenőrzés nélküli alkalmazása között.

Különböző egyetemeken nem matematikus szakán bevezető analízis kurzusokat tartottak kizárólag a „végtelen kicsi” és a „végtelen nagy” intuitív fogalmára építve, vagyis a nehezebben emészthető logikai apparátusról nem esett szó. Minden itt vázolt előnye ellenére a nemsztenderd módszer nem terjedt el az oktatásban. Ennek fő oka valószínűleg a tudós társadalom erős konzervatizmusa. Az új módszert ismerő diák, ha később bizonyítania kell tudását egy vizsgán vagy beszámolón, csak a szokásos sztenderd módszereket használhatja. Ezért a nemsztenderd analízis oktatásakor nem csak azt kell megértetni a diákkal, hogy mi az a „folytonosság,” „derivált,” vagy egy „függvény integrálja,” hanem e mellé a régi definíciókat is be kell magoltatni, és igazolni, hogy a kétfajta definíció ugyanazt jelenti. Ez viszont már túl nagy terhet ró az oktatóra és a diákra, sőt az egész nemsztenderd módszer hasznát is megkérdőjelezi. Az e könyvben szereplő állítások és tételek jóval több, mint fele azzal foglalkozik, hogy megkeresse és bizonyítsa a szokásos matematikai fogalmak nemsztenderd megfelelőjét; a nemsztenderd definíciók gyakran jobban rámutatnak új fogalmak fontosságára, és azok bevezetése is gyakran természetesebben adódik.

A könyv második és harmadik fejezetében a nemsztenderd analízis felépítéséhez szükséges logikai módszereket és tételeket ismertetjük. Ebben kizárólag azokra a fogalmakra és tételekre szorítkozunk, melyek feltétlenül szükségesek. A felhasznált logikai apparátus természetesen sokkal tágabb, az itt csak érintett témaköröknek számos egyéb fontos alkalmazása van. A negyedik fejezet az „elemi analízissel” foglalkozik, a differenciál és integrál definícióival, sorozatok határértékével. A fejezet célja elsősorban a fogalmak gyakorlása, illetve a nemsztenderd módszer bemutatása. Az ötödik fejezetben a nemsztenderd módszert általános topológikus terek, a hatodikban metrikus terek tanulmányozására használjuk. Néhány sztenderd valós függvénytan tétel (például *Dini* és *Ascoli* tételei) mellett *Uriszon* nevezetes metrizációs tételét is igazoljuk. A hetedik és nyolcadik fejezet a komplex függvénytan egy-egy részét dolgozza fel. A hetedikben *Montel* és *Kakeya*, komplex együtthatós polinomok adott körbe eső gyökeinek számáról szóló tételeit igazoljuk, a nyolcadik fejezet pedig a nagy *Picard* tétellel és annak változataival foglalkozik: egy analitikus függvény egy lényeges szingularitás minden környezetében legfeljebb egy kivételével mindent komplex számot felvesz. Az utolsó három fejezet mutatja, hogy a nemsztenderd módszer nem csak triviális, hanem nehéz tételek esetében is jó szolgálatot tehet. Végül a függelékben *A. L. Cauchy* nevezetes, 1821-ből származó hibás állítását elemezzük a nemsztenderd módszer fényében.

A könyv csak a nemsztenderd módszer szempontjából bevezető jellegű, egyébként különösen a logikai háttérrel adó második és harmadik fejezet támaszkodik arra, hogy az olvasótól nem idegen a matematikai logika. Bár a felhasznált logikai tételeket és állításokat mind igazoljuk, a fogalmak megértése megfelelő előismeretek nélkül jelentős erőfeszítéseket kívánhat. A negyedik fejezettől a logikai apparátusra már csak implicit módon hivatkozunk, egyre inkább hagyatkozva az olvasó addigra már (feltehetően) kialakult intuíciójára azzal, hogy csak annyit mondunk: „nyilván formalizálható,” vagy „könnyen átírható arra a nyelvre,” stb, ahelyett, hogy a pontos formulát minden esetben felír-

nánk. A türelmetlen vagy a logikában kevésbé járatos olvasók kedvéért a nemsztenderd módszert használó bevezető analízis művekben szokás a bővítés alaptulajdonságait néhány pontban összefoglalni úgy, hogy a későbbiekben csak ezekre a tulajdonságokra kelljen hivatkozni. Ez itt hiányzik, főleg azért, mert ha kevés egyszerű elvet írunk fel, akkor az vagy túl szűk, és nem fedi le a lehetséges alkalmazások egy részét, vagy túl tág, és félrevezető, hibás intuíciót ad. A logikai állítások *bizonyítását* viszont a későbbiek megértésének veszélyeztetése nélkül át lehet ugrani. A második fejezetből csak a teljes és a gyenge magasabbrendű struktúra definíciójára, valamint a rájuk vonatkozó kompaktsági tételre (2.10.–2.12. definíciók, illetve 2.13. tétel) van később szükség, az ezt megelőző definíciók, lemmák és tételek a kompaktsági tétel bizonyításához szükségesek, bár további információt és motivációt is adnak. A harmadik fejezetben definiáljuk a bővítést, és bizonyítjuk annak alapvető tulajdonságait. A fent említett „általános elvek” az ebben a fejezetben kimondott definíciók, állítások és tételek kivonatolt vázlata szokott lenni. A további fejezetek megértését is nagymértékben megkönnyíti a tárgyalt témakör nagyvonalú ismerete. Feltételezzük például, hogy az olvasó ismeri a differenciál- és integrálszámítás alapjait, tisztában van a folytonosság és az egyenletes folytonosság közötti különbséggel, ismeri a topológikus valamint metrikus terek fogalmát, legalább definíciós szinten. A komplex függvénytanból Rouché tételét valamint Cauchy-féle integrálformulát is ismertnek tételezzük fel.

Végül a könyv felépítéséről és a használt jelölésekről essék néhány szó. A képletek, valamint a tételek, definíciók és állítások számozása minden fejezetben újra kezdődik, azon belül a számozás folyamatos. Így a 7.12. tétel a hetedik fejezet tizenkettedik (és egyben utolsó) tételét jelenti. Megpróbáltam különbséget tenni „állítások” és „tételek” között. Az „állítások” általában egy nemsztenderd fogalom ekvivalenciáját mondják ki a szokásos, sztenderd fogalommal, vagy nemsztenderd fogalmak egymás közötti kapcsolatáról beszélnek. Így például a 4.5. ál-

lítás azt mondja ki, hogy egy sorozat nemsztenderd indexű tagjaiból hogyan ismerhető fel, hogy a sorozat konvergens-e. A „tételek” általában szokásos matematikai állítások, melyekben egyáltalán nem szerepel nemsztenderd fogalom. Erre a tétel kimondásakor szereplő „sztenderd” jelzés is utal, mint például

**1.1. Tétel** (Sztenderd) *Minden konvergens sorozat Cauchy, és minden Cauchy sorozat konvergens.*

Amennyiben a tétel valamilyen személyhez kapcsolódik, vagy valamilyen néven ismert, azt is feltüntettük a zárójelben. A használt jelölések megegyeznek a matematikában általában szokásossal, talán az egyetlen lényeges eltérés, hogy az  $A \subset B$  jelölés használatakor megengedjük, hogy az  $A$  és a  $B$  halmaz megegyezzen, vagyis  $A \subset A$  igaz.

A nemsztenderd analízis egy másfajta látásmódot, a tételek, állítások új környezetbe helyezését jelenti. Nem bölcsék köve, nem lehet vele megváltani a világot, de érdekes új jelenségekre hívja fel a figyelmet.

Szeretném külön megköszönni a könyv lektorának, Tardos Gábornak a gondos munkát és az értékes megjegyzéseket, amivel segített néhány hiba és pontatlanság kijavításában. A maradt hibákért a felelősség természetesen a szerzőt terheli. Olvasóimnak kívánom, hogy olyan élvezettel olvassák ezt a könyvet, mint amilyenvel írtam és tanítottam.

## 2. fejezet

# Logikai eszközök

A fejezetben a nemsztenderd analízis felépítéséhez szükséges logikai fogalmakat és tételeket ismertetjük. Az *elsőrendű* logikából a kompaktsági tételre lesz szükségünk, ami szerint, ha egy (elsőrendű) formulahalmaz minden véges részének van modellje, akkor az egésznek is van. A tétel legegyszerűbb, ultraszorzatot használó bizonyítása is szerepel.

A *magasabb rendű* logika apparátusát fogjuk használni a *nemsztenderd*, vagy másképpen *ideális* elemek konstruálására és azok tulajdonságainak tanulmányozására. Annak megértéséhez, hogyan is működik a nemsztenderd analízis, bemutatjuk, hogyan fogalmazhatók meg a szokásos matematikai állítások a magasabbrendű logika nyelvén; mik a *teljes* illetve *gyenge* struktúrák, hogyan ágyazódnak ezek egymásba; milyen állítások vihetők át az egyikről a másikra.

## 1. Elsőrendű logika

Matematikai állítások matematikai vizsgálatához először is pontosan definiálni kell, hogyan írhatók fel ezek az állítások – ezek lesznek a formulák –, valamint azt is, hogy egy megfelelően felírt formula pontosan mit is jelent. Az előbbi alkotja a *szintaxist*, az utóbbi pedig a *szemantikát*. Ez a kettő együttesen már lehetővé teszi, hogy formulákról és modelljeikről tételeket bizonyítsunk. Az itt szereplő definíciók és

tételek nem a lehető legáltalánosabbak, mindig csak azokra a speciális esetekre szorítkozunk, amikre a későbbiekben szükségünk lesz.

Egy *hasonlósági típus*, *jelkészlet*, vagy *szignatúra* alatt a formulákban használható nem logikai jelek halmazát értjük; esetünkben ez kizárólag konstansjeleket valamint relációjeleket jelent. Természetesen azt is meg kell mondanunk, hogy a relációjelek hány változósak. Így egy  $t$  hasonlósági típus egy  $\langle C, R, \Phi \rangle$  hármas:  $C$  a konstansjelek halmaza,  $R$  a relációjeleké, a  $\Phi : R \rightarrow \mathbb{N}^+$  függvény pedig azt mondja meg, hogy az  $r \in R$  relációjelekhez hány argumentum tartozik.

A  $t$  típusú *elsőrendű formulák* alkotják azt a formális nyelvet, amivel struktúrák tulajdonságait írjuk le. Ezekben a típusban szereplő jeleken kívül az úgynevezett *logikai jelek*, mint például a zárójelek, vessző, vagy a  $\wedge, \vee, \exists$  jelek, valamint (individuumokat jelölő) *változójelek* is előfordulnak. A változókat általában  $x, y, z$  betűkkel jelöljük, ha szükséges, indexeket is használunk. A formulák pontos definíciója azok felépítésére vonatkozó rekurzióval történik:

## 2.1. Definíció

- (i) *Prímformula* az  $r(k_1, \dots, k_n)$  kifejezés, ahol  $r \in R$  egy  $n$ -változós relációjel és  $k_1, \dots, k_n$  mindegyike vagy konstansjel, vagy pedig változójel.
- (ii) A  $t$  típusú *elsőrendű formulák* a megfelelő jelsorozatoknak az a legszűkebb halmaza, amire a következők igazak:
  - (a) a prímformulák formulák;
  - (b) ha  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  formulák és  $x$  tetszőleges változójel, akkor a következők is formulák:  $\neg\varphi_1$ ,  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ ,  $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ,  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ,  $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ , valamint  $\exists x \varphi_1$ , végül  $\forall x \varphi_1$ .

A formulák matematikai állításokat fejeznek ki amik attól függően lehetnek igazak vagy hamisak, hogy mik a tekintett individuumok, és hogyan feleltetjük meg a különböző konstans-, reláció- és változójeleknek azok jelentését. Az individuumok egy  $A$  halmaz elemei, a konstans-



és relációjelek értékét pedig egy *interpretációnak* nevezett függvény adja meg.

**2.2. Definíció** Az  $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$  egy  $t$  típusú *elsőrendű struktúra*, ha  $A$  egy nem üres halmaz, és  $I$  a  $t$  típus konstans- és relációjeleinek *interpretáltja*, azaz  $c \in C$  esetén  $I(c)$  az  $A$  egy eleme; valamint  $r \in R$ , és  $\Phi(r) = n$  esetén  $I(r)$  egy  $n$ -változós reláció  $A$ -n.

A változójelek értékei a struktúra alaphalmazának, vagyis  $A$ -nak elemei közül kerülnek ki, azok bármelyikét jelenthetik. A konstansjelek az  $I$  interpretáció által meghatározott objektumokat jelölik. Az  $r(k_1, \dots, k_n)$  prímformula azt jelenti, hogy az  $r$  reláció interpretáltja fennáll a  $k_1, \dots, k_n$  értékeire.  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  igaz, ha  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  is igaz,  $\varphi_1 \vee \varphi_2$  igaz, ha **vagy**  $\varphi_1$  **vagy**  $\varphi_2$  igaz, vagy mindkettő, és hasonlóan a többi összetett formulára.  $\exists x \varphi$  igaz, ha az  $x$  változónak tudunk olyan értéket adni, amivel a  $\varphi$  formula igazzá válik;  $\forall x \varphi$  pedig azt fejezi ki, hogy bármi is  $x$  értéke (az  $A$  elemei közül),  $\varphi$  mindenképpen igaz. A  $\exists x \varphi$  és  $\forall x \varphi$  formulákban az  $\exists$  illetve  $\forall$  jelek *kvantorok*, az előbbi egzisztenciális, az utóbbi univerzális, ezek az  $x$  változójelet a  $\varphi$  formulában *lekötik*.

Az  $\mathfrak{A}$  struktúra fölötti *e értékelés* minden változójelhez hozzárendeli az  $\mathfrak{A}$  alaphalmazának egy elemét. Más szóval az értékelés mondja meg, hogy mi legyen a változójelek *értéke*. Adott értékelés mellett ki tudjuk számítani minden  $\varphi$  formula igazságát:  $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$  jelöli azt, hogy az  $e$  értékelés mellett a  $\varphi$  igaz,  $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e]$  pedig, hogy  $\varphi$  hamis. A pontos definíció a fenti leírás alapján a  $\varphi$  formula felépítése szerinti indukcióval történik.

### 2.3. Definíció

- (i) A  $t$  típusú  $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$  struktúrában az  $e$  értékelés mellett a  $c \in C$  konstansjel értéke  $I(c)$ , az  $x$  változójel értéke pedig  $e(x)$ .
- (ii) Prímformulára  $\mathfrak{A} \models r(k_1, \dots, k_n)[e]$  akkor, ha a  $k_1, \dots, k_n$  értékeiből alkotott  $n$ -esre az  $I(r)$  reláció fennáll.

- (iii)  $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[e]$  pontosan akkor, ha  $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e]$ ;  $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[e]$ , ha  $\mathfrak{A} \models \varphi_1[e]$  és  $\mathfrak{A} \models \varphi_2[e]$ ; hasonlóan a többi logikai összekötő jelre. Végül
- (iv)  $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi[e]$  ha az  $e$  értékelésben meg tudjuk változtatni az  $x$  változójel értékét úgy, hogy a kapott  $e'$  értékelésre  $\mathfrak{A} \models \varphi[e']$ ; végül  $\mathfrak{A} \models \forall x \varphi[e]$ , ha akárhogyan is változtatjuk meg az  $e$  értékelésben az  $x$  változójel értékét, minden esetben  $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ .

Legyen  $\Gamma$  egy  $t$  típusú formulákból álló halmaz,  $\mathfrak{A} \models \Gamma$ , szavakban  $\mathfrak{A}$ -ban igaz a  $\Gamma$ , vagy  $\mathfrak{A}$  modellje  $\Gamma$ -nak, ha minden  $\varphi \in \Gamma$  formulára és tetszőleges  $e$  értékelésre  $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ . A  $\Gamma$  formulahalmazról azt mondjuk, hogy *konzisztens*, ha létezik modellje, vagyis ha van olyan  $t$  típusú  $\mathfrak{A}$  struktúra, amire  $\mathfrak{A} \models \Gamma$ .

A 2.1. definíció mondta meg pontosan, hogy mik is azok a jel-sorozatok, amiket  $t$  típusú *elsőrendű formuláknak* nevezünk. Amikor azonban felírunk egy ilyen formulát, nem ragaszkodunk az abszolút pontos, definíció szerinti felíráshoz, hanem „értelemszerűen” egyszerűsítjük dolgunkat. Ahol szükséges, zárójelek ügyes elhelyezésével tesszük egy-értelművé, hogyan kell értünk egy formulát. Például a  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \vee \varphi_3$  kétféleképpen is előállhat:  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3$ , valamint  $\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ , hogy ezek közül melyikre gondolunk, a zárójelek mondják meg. Azért, hogy ne kelljen mindig minden zárójelet kiírni, szokás szerint a tagadás ( $\neg$ ) csak a közvetlenül utána következő formulára vonatkozik, így  $\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2$  azt jelenti, mint  $(\neg\varphi_1) \wedge \varphi_2$ . Ezen kívül az implikáció ( $\rightarrow$ ) és ekvivalencia ( $\leftrightarrow$ ) „gyengébben köt” mint a konjunkció és diszjunkció („vagy” valamint „és”), vagyis  $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \varphi_3 \wedge \varphi_4$  így értendő:

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_3 \wedge \varphi_4).$$

Egy formula  $\exists x \psi$  vagy  $\forall x \psi$  alakú részformuláiban a kvantorok a mögöttük álló  $x$  változójelet a  $\psi$  (rész)formulában lekötik. Tetszőleges  $\varphi$  formulára azokat a  $\varphi$ -ben szereplő változójeleket, amelyek valamelyik előfordulása nincs kvantorral lekötve, a formula *szabad változóinak*

nevezzük. Annak hangsúlyozására, hogy  $\varphi$  szabad változói az  $x_1, \dots, x_n$  közül kerülnek ki, használni fogjuk a  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  jelölést. Ha  $\varphi$ -nek egyáltalán nincs szabad változója, akkor  $\varphi$  *zárt* formula.

Adott  $\mathfrak{A}$  struktúrában a  $\varphi$  formula igazsága függhet (és általában függ is) a változójelek kiértékelésétől. Világos (és a formula felépítésére vonatkozó indukcióval könnyen bizonyítható is), hogy  $\varphi$  igazsága csak szabad változóinak értékétől függ. Ha az  $e$  értékelés az  $x_1, \dots, x_n$  változókhöz az  $A$ -beli  $a_1, \dots, a_n$  elemeket rendeli, akkor  $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[e]$  helyett azt írjuk, hogy  $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ .

Elsőrendű formulákra itt adott definíció annyival gyengébb a szokásosnál, hogy nem engedjük meg függvényjelek valamint az egyenlőségjel alkalmazását. A megszorítás miatt ilyen formulákkal bizonyos állításokat nem lehet megfogalmazni, viszont technikailag egyszerűbbé teszi a kompaktsági tétel bizonyítását, ami egyébként általános elsőrendű formulahalmazokra is igaz. A kompaktsági tételre nekünk csak ebben a speciális esetben lesz szükségünk.

## 2. Gödel kompaktsági tétele

Ebben a részben az elsőrendű logika egyik alapvető tételét bizonyítjuk be. A tételt elsőként *Kurt Gödel* (1906–1978) bizonyította még a harmincas években, az itt szereplő bizonyítás *Jerzy Łoś* ultraszorozatos technikáját használja. Sem magát a bizonyítást, sem a bizonyítás módszerét később nem használjuk, ebből a részből kizárólag a 2.7. tételre fogunk hivatkozni.

Legyen  $I$  egy indexhalmaz, és  $U$  az  $I$  részhalmazainak egy halmaza (családja).  $U$ -ról azt mondjuk, hogy

- (i) *centrált*, ha véges sok elemének metszete sohasem üres;
- (ii) *szűrő*, ha az üres halmaz nincs benne, metszetzárt és felszálló, vagyis  $A \in U, B \in U$  esetén  $A \cap B \in U$ , valamint  $A \in U, A \subset B$  esetén  $B \in U$ ;
- (iii) *ultraszűrő*, ha szűrő, és akárhogyan vágjuk  $I$ -t ketté, a két rész közül pontosan az egyik eleme  $U$ -nak.

Egy centrált rendszer *maximális*, ha nem tudjuk hozzáadni  $I$ -nek egyetlen további részhalmazát sem úgy, hogy centrált maradjon. A Zorn lemma alapján könnyen ellenőrizhető, hogy minden centrált rendszer kiterjeszthető maximális centrált rendszerré; továbbá az is igaz, hogy minden maximális centrált rendszer ultraszűrő.

Legyenek  $i \in I$ -re  $\mathfrak{A}_i$  közös  $t$  típusú struktúrák,  $U$  pedig az  $I$  halmazon egy ultraszűrő. Legyen  $A$  az  $\mathfrak{A}_i$  struktúrák  $A_i$  alaphalmazainak direkt szorzata:  $A = \prod \{A_i : i \in I\}$ . A szorzat  $a \in A$  elemének  $i$ -edik koordinátáját  $a(i)$ -vel jelöljük annak megfelelően, hogy a szorzat elemeit  $I$ -n értelmezett függvényeknek tekintjük.

**2.4. Definíció** Az  $\mathfrak{A}_i$  ( $i \in I$ ) struktúrák  $U$  ultraszűrő szerinti *ultraszorzata* az az  $\mathfrak{A} = \prod \{\mathfrak{A}_i : i \in I\} / U$  struktúra, aminek alaphalmaza az  $A_i$ -k direkt szorzata; a  $c \in C$  konstansjel  $\mathfrak{A}$ -beli interpretáltjának  $i$ -edik koordinátája  $c$ -nek  $\mathfrak{A}_i$ -beli interpretáltja; valamint minden  $r \in R$   $n$ -változós relációjelre és  $a_1, \dots, a_n \in A$ -ra

$$\mathfrak{A} \models r(a_1, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{\iff} \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models r(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in U.$$

**2.5. Tétel** (Łoś lemma) Minden  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  formulára és  $a_1, \dots, a_n \in A$ -ra

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in U.$$

**Bizonyítás** A  $\varphi$  formula felépítésére vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Ha  $\varphi$  prímmformula, akkor ez definíció szerint így van. Általában legyen

$$X_\varphi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_n(i))\}.$$

Ezzel a jelöléssel  $X_{\neg\varphi} = I - X_\varphi$ ,  $X_{\varphi \vee \psi} = X_\varphi \cup X_\psi$ , valamint  $X_{\varphi \wedge \psi} = X_\varphi \cap X_\psi$ . Ha most a tétel állítását tudjuk  $\varphi$ -re, akkor

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \neg\varphi &\iff \mathfrak{A} \not\models \varphi \iff X_\varphi \notin U \iff \\ &\iff I - X_\varphi \in U \iff X_{\neg\varphi} \in U. \end{aligned}$$

Az ekvivalenciák sorban a negáció definíciójából, a  $\varphi$ -re vonatkozó

indukciós feltevésünkéből, illetve abból következnek, hogy az  $U$  ultraszűrőben  $X_\varphi$  és komplementere közül pontosan az egyik van benne. Hasonlóképpen adódik az ultraszűrő további tulajdonságaiból, hogy

$$\begin{aligned}(X_\varphi \in U \text{ vagy } X_\psi \in U) &\iff X_\varphi \cup X_\psi \in U, \\ (X_\varphi \in U \text{ és } X_\psi \in U) &\iff X_\varphi \cap X_\psi \in U,\end{aligned}$$

innen pedig a tétel állítását  $\varphi \vee \psi$ -re valamint  $\varphi \wedge \psi$ -re könnyen megkapjuk, ha azt már tudjuk tudjuk  $\varphi$ -re és  $\psi$ -re. Az eljárás hasonló a többi logikai műveleti jelre is. Végül elegendő az egzisztenciális kvantorral foglalkoznunk, hiszen  $\forall x \varphi$  és  $\neg \exists x \neg \varphi$  ugyanazt jelentik. Az egzisztenciális kvantor definíciója szerint

$$(1) \quad \mathcal{A} \models \exists x \varphi(x, a_1, \dots, a_n) \iff \text{valamilyen } a \in A \text{-ra } \mathcal{A} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n).$$

Az indukciós feltevést  $\varphi$ -re alkalmazva ez tovább akkor és csak akkor teljesül, ha valamilyen  $a \in A$ -ra  $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi(a(i), a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in U$ . Tetszőleges  $a \in A$ -ra az itt szereplő indexhalmaznál biztosan bővebb azon  $i$  indexek halmaza, melyekre  $\mathcal{A}_i \models \exists x \varphi(x, a_1(i), \dots, a_n(i))$ , hiszen  $a(i)$  megfelelő elemet jelöl ki az  $\mathcal{A}_i$  struktúrában. Ha tehát (1) igaz, akkor igaz

$$(2) \quad \{i \in I : \mathcal{A}_i \models \exists x \varphi(x, a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in U$$

is. Ez fordítva is így van: a kiválasztási axióma alapján tudunk a szorzatban olyan  $a \in A$  elemet találni, hogy valahányszor  $\mathcal{A}_i \models \exists x \varphi(x, \dots)$ , akkor  $\mathcal{A}_i \models \varphi(a(i), \dots)$  is igaz. Így az (1) alattiak tovább ekvivalensek (2)-vel, ami mutatja a tétel állítását  $\exists x \varphi$ -re. Ezzel a tételt bizonyítottuk. ■

**2.6. Lemma** Álljon az  $I$  indexhalmaz a  $\Gamma$  véges részhalmazaiából, és minden  $i \in I$ -re legyen  $X_i = \{j \in I : j \supset i\}$ . Ekkor az  $\{X_i : i \in I\}$  halmazrendszer centrált.

**Bizonyítás** Legyen  $i_1, \dots, i_n$  véges sok index, és  $k = i_1 \cup \dots \cup i_n$ . Ez a  $k$  mint  $\Gamma$  véges sok véges részhalmazának uniója továbbra is véges

részhalmaza  $\Gamma$ -nak, továbbá bővebb mindegyik megadott indexnél. Ezért  $k$  eleme az összes  $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$  halmaznak, vagyis ezek metszete tartalmazza  $k$ -t, ezért biztosan nem üres. ■

**2.7. Tétel** (Elsőrendű logika kompaktsági tétele) *Tegyük fel, hogy  $\Gamma$  minden véges részének van modellje. Ekkor  $\Gamma$ -nak is van.*

**Bizonyítás** Legyen  $I$  mint a 2.6. lemmában, és  $U$  olyan maximális centrált rendszer, vagyis ultraszűrő, amelyik az összes  $X_i$  halmazt tartalmazza. Mivel  $i \in I$  esetén  $i$  a  $\Gamma$  véges része, azért a tétel feltétele szerint van olyan  $\mathfrak{A}_i$  struktúra, amiben  $i$  minden eleme igaz. Legyen  $\mathfrak{A}$  az  $\mathfrak{A}_i$  struktúrák  $U$  szerinti ultraszorzata. Állítjuk, hogy ez modellje  $\Gamma$ -nak.

A Łoś lemma miatt ehhez elég ellenőrizni, hogy minden  $\varphi \in \Gamma$  esetén  $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\}$  az  $U$  ultraszűrő eleme. De ha az  $i$  index, mint  $\Gamma$  véges része, elemként tartalmazza  $\varphi$ -t, akkor  $\mathfrak{A}_i$  definíciója alapján  $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ . Így elég, ha az teljesül hogy  $\{i \in I : i \supset \{\varphi\}\} = X_{\{\varphi\}} \in U$ , ami viszont  $U$  definíciója miatt igaz. ■

### 3. Többszortú logika

Az elsőrendű logika viszonylag egyszerű kiterjesztése a többszortú logika. Ebben a struktúra alaphalmaza nem objektumoknak differenciálatlan összessége, hanem különböző fajtájú, idegen szóval *szortú* (az angol *sort* szó ezt is jelenti) elemekből álló diszjunkt halmazok együttese. Ha  $S$  a szortok halmaza (ami lehet véges vagy végtelen is), akkor az  $A$  alaphalmaz a diszjunkt  $A_s$  halmazok uniója;  $A_s$  az  $s$  szortú elemek halmaza. Kétszortú struktúrában például az egyik szort lehet az idő, a másik a hely, ekkor  $S = \{\text{idő}, \text{hely}\}$ . Többszortú struktúrában értelmezett reláció minden argumentuma csak egyetlen meghatározott szortból vehet fel értékeket, bár ez koordinátánként más és más lehet. Így lehet például olyan háromváltozós reláció, melynek első két koordinátájába helyet, a harmadikba időt kell írni, de olyan nincs, aminek első koordinátájába

időt is meg helyet is lehetne tenni. Például a  $\kappa(x, y)$  reláció azt akarja kifejezni, hogy a  $\kappa$  részecske az  $x$  időpontban az  $y$  helyen van,  $x$  helyére csak idő,  $y$  helyére pedig csak hely szortú objektum kerülhet. Ha az időpontok rendezésére a  $\leq$  relációjelet használjuk, akkor ugyanez a jel már nem használható például helyek közti rendezés jelölésére.

A többszortú struktúra típusának megadásakor az egyes relációjelekhez nem csak az argumentumok számát kell megadni, hanem azt is, hogy melyik argumentum milyen szortú. Ehhez hasonlóan minden konstansjelhez az is hozzátartozik, hogy ő milyen szortú elemet jelöl. A változójelek is csak meghatározott szortú elemeken futnak végig, az azonban, hogy melyik ez a szort, már a formulától függ. A  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  formula *jól formált*, ha benne egyetlen konstans- vagy változójel sem fordul elő különböző szortú elemet megkövetelő helyeken, vagyis minden változójelről egyértelműen meg tudjuk állapítani, hogy az milyen szortú elemet jelöl. Jól formált formulákban a kvantorok az jelentik, hogy létezik megfelelő szortú elem, illetve minden megfelelő szortú elemre igaz a kvantor után felírt formula. Például az az állítás, miszerint a  $\kappa$  részecske minden pillanatban van valahol, a következőképpen írható fel:  $\forall x \exists y \kappa(x, y)$ , és az, hogy nincs egyszerre két különböző helyen:  $\forall x \forall y \forall z (\kappa(x, y) \wedge \kappa(x, z) \rightarrow U(y, z))$ , itt az „ $U(y, z)$ ” kétváltozós reláció helyek között állhat fenn, és csak akkor igaz, ha  $y$  és  $z$  ugyanaz a hely. A  $\kappa(x, x)$  nem jól formált, hiszen a  $\kappa$  relációjel két argumentuma különböző szortú, és  $x$  nem lehet egyszerre ilyen is meg olyan is. Hasonlóan nem jól formált a  $\forall x \exists y \kappa(x, y) \vee \exists z \forall x \kappa(z, x)$ , mert az  $x$  először idő, másodszor hely szortú helyre került.

A többszortú logika könnyen kiterjeszthető arra az esetre is, ha a nyelvben függvényjelek is vannak, ilyenkor az argumentumok illetve a függvényérték is csak meghatározott szortú lehet, és az egyenlőségjel sem okoz különösebb problémát. A változójelek használatára adott megkötéseink is lehetnek volna mások. Például jobban megszorítva a nyelvet minden szortra külön-külön végtelen sok, kizárólag az adott szort elemeit jelentő változójelet írhattunk volna elő, vagy a használt megkötésnél az a gyengébb is megfelelné, hogy a változójeleket még egy formulán belül sem kell ugyanolyan értelemben használni, csak addig, míg kvantorral nincs lekötve. Akik a programozási nyelveket ismerik, azoknak a következő analógia segíthet: a többszortú logika megfelel a típusos, míg az elsőrendű logika

a típus nélküli nyelveknek. A szabad változók típusa implicit deklarációval, használatukon keresztül van definiálva.

**2.8. Tétel** (Többszortú logika kompaktsági tétele) *Tegyük fel, hogy a jól formált formulákból álló  $\Gamma$  halmaz minden véges részének van többszortú modellje. Ekkor van modellje  $\Gamma$ -nak is.*

**Bizonyítás** Legyen  $S$  a szortok halmaza, minden  $s \in S$ -re válasszunk egy új  $\Phi_s$  egyváltozós relációjelet, amik a  $\Gamma$  nyelvének  $t$  típusában nem fordulnak elő. Legyen  $t' = t \cup \langle \Phi_s : s \in S \rangle$  egy elsőrendű típus, és jelöljük  $\Delta$ -val a következő,  $t'$  típusú elsőrendű formulákból álló halmazt:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta = & \{ \neg \exists x (\Phi_{s_1}(x) \wedge \Phi_{s_2}(x)) : s_1 \neq s_2, s_1, s_2 \in S \} \cup \\ & \{ \Phi_s(c) : a \text{ } c \text{ konstansjel } s \text{ szortú} \} \cup \\ & \{ \forall x_1 \dots \forall x_n (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Phi_{s_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \Phi_{s_n}(x_n)) : \\ & \quad \text{az } R \text{ relációjel argumentumai } s_1, \dots, s_n \text{ szortúak} \}. \end{aligned}$$

Az első sor azt fejezi ki, hogy nincs olyan elem, amelyik egyszerre két különböző  $\Phi_s$  relációt is kielégítené; a második sor minden konstansjelre előírja, hogy neki ki kell elégítenie a szortójának megfelelő relációt, végül a harmadik sor szerint ha az  $n$ -változós  $R$  reláció  $i$ -edik argumentuma  $s_i$  szortú és  $R$  igaz az  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$   $n$ -esen, akkor  $x_i$ -re igaz  $\Phi_{s_i}$  is.

Definiáljuk a  $t$  típusú többszortú  $\varphi$  formula  $\lambda[\varphi]$  fordítását a következőképpen:  $\lambda[\varphi]$  egy  $t'$  típusú formula lesz, és

- (i) ha  $\varphi$  prímformula, akkor  $\lambda[\varphi] = \varphi$ ;
- (ii)  $\lambda[\neg\varphi] = \neg\lambda[\varphi]$ ,  $\lambda[\varphi \wedge \psi] = \lambda[\varphi] \wedge \lambda[\psi]$ ,  $\lambda[\varphi \vee \psi] = \lambda[\varphi] \vee \lambda[\psi]$ , és hasonlóan a többi logikai összekötő jelre;
- (iii)  $\lambda[\exists x \varphi] = \exists x (\Phi_s(x) \wedge \lambda[\varphi])$ , illetve  $\lambda[\forall x \varphi] = \forall x (\Phi_s(x) \rightarrow \lambda[\varphi])$ , ha a formulákban  $x$  egy  $s$  szortú változót jelölt.

Legyen  $\mathfrak{A}$  egy  $t$  típusú többszortú modell, és definiáljuk a  $\lambda[\mathfrak{A}]$   $t'$  típusú struktúrát úgy, hogy alaphalmaza és a  $t$  jeleinek interpretáltja ugyanaz maradjon, továbbá  $s \in S$ -re a  $\Phi_s$  jel  $\lambda[\mathfrak{A}]$ -beli interpretáltja éppen az  $s$  szortú elemek halmaza. A definíciókból azonnal adódik a következő állítás:



**2.9. Lemma**  $\lambda[\mathfrak{A}] \models \Delta$ , valamint minden  $t$  típusú többszortú formulára  $\mathfrak{A} \models \varphi$  akkor és csak akkor, ha  $\lambda[\mathfrak{A}] \models \lambda[\varphi]$ . ■

Feltételünk szerint  $\Gamma$  minden véges részének volt modellje, ezért a 2.9 lemma szerint a csupa elsőrendű formulából álló  $\Delta \cup \lambda[\Gamma]$  halmaz minden véges részének van elsőrendű modellje. A 2.7. kompaktsági tétel miatt ekkor az egész  $\Delta \cup \lambda[\Gamma]$ -nak is van elsőrendű modellje, legyen ez mondjuk  $\mathfrak{B}$ . Legyen  $s \in S$  az egyik szort, és nézzük azokat a  $b \in B$  elemeket, melyekre  $\mathfrak{B} \models \Phi_s(b)$ , legyen ezek halmaza  $B_s$ . Mivel  $\mathfrak{B} \models \Delta$ , azért (3) első sora szerint a  $B_s$  halmazok páronként diszjunktak.  $\mathfrak{B}$  alaphalmazából elhagyhatjuk mindazokat az elemeket, melyek egyik  $B_s$ -ben sincsenek, továbbra is  $\Delta \cup \lambda[\Gamma]$  egy modelljét kapjuk. Ez  $\Delta$  elemeire világos,  $\lambda[\Gamma]$  elemei közül egyedül a kvantorokat tartalmazó formulákkal lehetne gond, azokat viszont a többszortú formulák fordításában éppen úgy definiáltuk, hogy csak valamelyik  $B_s$  halmaz elemeiről beszéljenek. Definiáljuk az  $\mathfrak{A}$  többszortú modellt úgy, hogy az  $s$  szortnak megfelelő elemek halmaza  $B_s$ , a konstans- és relációjelek interpretáltját pedig  $\mathfrak{B}$  mondja meg. Ezzel valóban egy  $t$  típusú többszortú modellt kaptunk, ha ugyanis a  $c$  konstansjel szortja  $s$ , akkor (3) második sora szerint  $c$  interpretáltja tényleg  $s$  szortú lesz, és hasonlóan a relációjelek interpretáltja (3) harmadik sora alapján a megfelelő szortú elemek szorzatán van értelmezve. Így  $\mathfrak{B}$  éppen az  $\mathfrak{A}$  többszortú struktúra „fordítása”. Az előző lemma szerint minden  $\varphi$  többszortú formulára  $\mathfrak{B} \models \lambda[\mathfrak{A}] \models \lambda[\varphi]$  pontosan akkor, ha  $\mathfrak{A} \models \varphi$ . És mivel  $\mathfrak{B}$  úgy választottuk, hogy modellje legyen  $\lambda[\Gamma]$ -nak, azért  $\mathfrak{A}$  modellje  $\Gamma$ -nak. A tételt bizonyítottuk. ■

A többszortú logika kompaktsági tételét közvetlenül is lehet bizonyítani; ehhez az ultraszorzat konstrukciót és a Łoś lemmát kell általánosítani többszortú modellekre.

## 4. Magasabbrendű struktúrák

Elsőrendű nyelven egy  $A$  halmaz elemeiről tudunk beszélni, például a struktúrát és a nyelvet megfelelően definiálva olyan állításokat tudunk felfűzni, mint „ $A$ -ban van legkisebb elem,” vagy „ $A$  minden  $a$  eleméhez van pontosan egy olyan  $b$ , hogy az  $f(a, b)$  értéke nulla.” Sok állítás nem fogalmazható meg közvetlenül elsőrendű nyelven, mert a struktúra  $A$  alaphalmazának részhalmazain, vagy esetleg  $A \times A$  részhalmazain kellene kvantifikálnunk. Ilyen állítás például Weierstrass tétele: *minden zárt intervallumon folytonos függvény felveszi maximumát*, hiszen itt az univerzális kvantor egy bizonyos függvényosztály elemein fut végig. Az kompaktsági tétel bizonyításakor használtuk az a tételt, miszerint *minden centrált rendszer kiterjeszthető ultraszűrővé*. Ebben az állításban a *minden* kvantor az alaphalmaz részhalmazáiból álló halmazok halmazán fut végig.

A magasabbrendű logikában az alaphalmaz részhalmazairól, a részhalmazai halmazának részhalmazairól, stb. is lehet beszélni, mégpedig egy speciális többszortú struktúra segítségével. A szortokat itt *típusok*-nak nevezzük. Az  $A$  alaphalmaz elemei  $0$  típusú relációk lesznek. A  $(0)$  típusúak  $A$  részhalmazai, a  $(0, 0)$  típusúak pedig  $A$ -n értelmezett kétváltozós relációk, azaz  $A \times A$  részhalmazai. Egy  $((0))$  típusú reláció  $A$  részhalmazait tartalmazza elemként; egy  $A$ -n értelmezett ultraszűrő például  $((0))$  típusú. A típusokat  $\tau$ -val fogjuk jelölni, és pontos definíciójuk a következő.

**2.10. Definíció**  $\tau$  egy típus, ha vagy  $\tau = 0$ , vagy pedig  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ , ahol az itt szereplő  $\tau_1, \dots, \tau_n$  már korábban definiált típusok.

Egy  $0$  típusú reláció az  $A$  alaphalmaz egy eleme; egy  $\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$  típusú reláció olyan  $n$ -esekből áll, melyek elemei rendre  $\tau_1, \tau_2$ , stb.  $\tau_n$  típusú relációk. Így ha  $\Sigma_\tau$  jelöli az  $A$  fölötti  $\tau$  típusú relációk halmazát, akkor  $\Sigma_0 = A$ ,  $\Sigma_{(0,0)} = \mathcal{P}(A \times A)$ , és általában ha  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ ,

akkor  $\Sigma_\tau = \mathcal{P}(\Sigma_{\tau_1} \times \dots \times \Sigma_{\tau_n})$ . Ha külön hangsúlyozni akarjuk, hogy mi az alaphalmaz, akkor a  $\Sigma_\tau^A$  jelölést használjuk.

A magasabbrendű struktúrák *nyelve* a konstansjeleken kívül minden  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$  típusra tartalmazza a  $\Phi_\tau(x, y_1, \dots, y_n)$  relációjelet; az első argumentum, vagyis  $x$  szortja  $\tau$ , a többié rendre  $\tau_1, \dots, \tau_n$ ; valamint a  $\Theta(x, y)$  kétváltozós relációjelet, ahol mindkét argumentum 0 szortú.

**2.11. Definíció** Egy  $\mathfrak{A}$  teljes magasabbrendű struktúra olyan többszortú struktúra, melyben a szortok megegyeznek a fentebb definiált típusokkal, a 0 szortú elemek halmaza  $A_0 = D$ , és általában a  $\tau$  szortú elemek halmaza pedig  $A_\tau = \Sigma_\tau^D$ . A  $\Phi_\tau$  relációjel interpretáltja

$$\mathfrak{A} \models \Phi_\tau(a, b_1, \dots, b_n) \iff \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in a,$$

valamint  $\mathfrak{A} \models \Theta(a, b)$  pontosan akkor, ha  $a, b \in A_0$  és  $a = b$ .

Mivel a szortok és a típusok a magasabbrendű struktúráknál egybeesnek, azért ezt a két fogalmat a továbbiakban egymás szinonímájaként fogjuk használni. A 2.10.-ben definiált típust viszont nem szabad összekeverni a struktúra *hasonlósági típusával*, ami a tovább nem specifikált konstansjeleken kívül csak a  $\Phi_\tau$  és a  $\Theta$  relációjeleket tartalmazza. A relációjelek interpretáltja az  $\mathfrak{A}$  struktúra különböző típusú (szortú) elemei között áll fenn, bár a struktúra alaphalmazának elemei maguk is relációk.

A teljes struktúrában a 0 típusú elemek halmazának összes részhalmaza alkotja a (0) típusú elemek halmazát. Ennek nem feltétlenül kell így lennie, elképzelhető, és gyakran hasznos is, ha különböző  $\tau$ -ra  $A_\tau$ -nak  $\Sigma_\tau$  egy valódi részhalmazát választjuk, de azért nem tetszőlegesen. Lehetséges ugyanis, hogy például a struktúrába a ((0)) típusú  $U \subset \mathcal{P}(D)$  relációt bevettük, ennek az  $U$ -nak  $b \subset D$  egy eleme, de ugyanakkor  $b$  még sincs benne a struktúrában. Ha ilyen kivételes helyzet egyetlen  $\tau$  típusban sem fordul elő, akkor a struktúrát *gyengének* nevezzük.

**2.12. Definíció** Egy gyenge magasabbrendű struktúra az a többszortú  $\mathfrak{A}$  struktúra, melyben a szortok a típusok, és a  $\tau$  szortú elemek  $A_\tau \subset \Sigma_\tau$  halmaza kielégíti a következő feltételeket:

- (i)  $A_0 = \Sigma_0$ ,
- (ii) ha  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ ,  $a \in A_\tau$  és  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle \in a$ , akkor  $b_1 \in A_{\tau_1}$ ,  $b_2 \in A_{\tau_2}, \dots, b_n \in A_{\tau_n}$ ,
- (iii)  $\mathfrak{A} \models \Phi_\tau(a, b_1, \dots, b_n)$  akkor teljesül, ha  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle \in a$  és máskor nem, valamint  $\mathfrak{A} \models \Theta(a, b)$  pontosan akkor, ha  $a = b$ .

Jól látható, hogy a teljes struktúrák teljesítik ezeket a feltételeket, tehát minden teljes struktúra egyúttal gyenge magasabbrendű struktúra is. (ii) alatt az  $A_\tau$ -ra tett feltevés miatt nem csak a teljes, hanem a gyenge struktúrákban is igaz, hogy tetszőleges  $a \in A_\tau$  pontosan azokból a  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$  alakú  $n$ -esekből áll, amikre  $\mathfrak{A}$ -ban teljesül a  $\Phi_\tau(a, b_1, \dots, b_n)$  formula.

**2.13. Tétel** (Magasabbrendű logika kompaktsági tétele) *Tegyük fel, hogy a magasabbrendű logika formuláiból álló  $\Gamma$  halmaz minden véges részének van (gyenge) modellje. Ekkor  $\Gamma$ -nak is van gyenge modellje.*

**Bizonyítás** Defináljuk az  $E_\tau(x, x')$  formulát a  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$  típusra a következőképpen:

$$\forall y_1 \dots \forall y_n (\Phi_\tau(x, y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow \Phi_\tau(x', y_1, \dots, y_n)),$$

továbbá a kimaradt  $\tau = 0$  esetben legyen  $E_0(x, x')$  éppen a  $\Theta(x, x')$ . Tetszőleges  $\mathfrak{A}$  gyenge magasabbrendű struktúrában  $\Phi$  és  $\Theta$  interpretációja miatt  $\mathfrak{A} \models E_\tau(a, a')$  akkor és csak akkor, ha  $a$  és  $a'$  ugyanaz a  $\tau$  típusú eleme  $A_\tau$ -nak.

Készítsük el a nyelvben szereplő minden  $\Psi(x_1, \dots, x_n)$  relációjelre (vagyis a  $\Phi_\tau$  valamint  $\Theta$  relációjelekre) az alábbi formulát, feltéve hogy  $\Psi$ -ben az argumentumok típusa rendre  $\tau_1, \dots, \tau_n$ :

$$(4) \quad (E_{\tau_1}(x_1, x'_1) \wedge \dots \wedge E_{\tau_n}(x_n, x'_n)) \rightarrow \\ \rightarrow (\Psi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \Psi(x'_1, \dots, x'_n)).$$

Ezek azt fejezik ki, hogy  $\Psi$  igazsága nem változik, ha az argumentumokat

velük egyenlőkkel helyettesítjük. Az összes ilyen formula halmazához vegyük még hozzá az alábbi, az  $A_0$ -beli egyenlőség alaptulajdonságait kifejező formulákat, és az így kapott formulahalmazt jelöljük  $\Delta$ -val:

$$\begin{aligned}
 & \forall x \, \Theta(x, x) && \text{(reflexív)} \\
 (5) \quad & \forall x \, \forall y \, (\Theta(x, y) \leftrightarrow \Theta(y, x)) && \text{(szimmetrikus)} \\
 & \forall x \, \forall y \, \forall z \, (\Theta(x, y) \wedge \Theta(y, z) \rightarrow \Theta(x, z)) && \text{(tranzitív)}
 \end{aligned}$$

Mivel  $\Delta$  minden (gyenge) magasabbrendű struktúrában igaz, azért  $\Delta \cup \Gamma$  minden véges részének is van (gyenge) magasabbrendű modellje, és így speciálisan többszortú modellje is. Következésképp a többszortú logika 2.8. kompaktsági tétele szerint az egész  $\Delta \cup \Gamma$ -nak is van többszortú modellje; legyen  $\mathfrak{B}$  ilyen modell, természetesen a szortokat  $\mathfrak{B}$ -ben is a  $\tau$  típusok jelölik. Definiálni fogunk egy  $\mathfrak{A}$  gyenge magasabbrendű struktúrát és egy  $h : B \rightarrow A$  ráképezést úgy, hogy  $h$  megőrzi a többszortú formulák igazságát. Ha ezt megtettük, a tételt bizonyítottuk, hiszen ekkor  $\mathfrak{B} \models \Gamma$  miatt az  $\mathfrak{A} \models \Gamma$  is igaz, vagyis  $\mathfrak{A}$  gyenge magasabbrendű struktúra modellje  $\Gamma$ -nak.

Jelöljük  $\mathfrak{B}$ -ben a  $\tau$  szortú elemek halmazát  $B_\tau$ -val. Mivel  $\mathfrak{B}$ -ben teljesülnek az (5) alatti formulák, azért a  $\Theta$  interpretációja  $B_0$  elemein ekvivalencia reláció lesz. Álljon a definiálandó  $\mathfrak{A}$  struktúra  $A = A_0$  alaphalmaza ezekből az ekvivalenciaosztályokból választott egy-egy reprezentáns elemből. A  $h$  leképezést a  $B_0$  elemein értelmezzük úgy, hogy egy ekvivalenciaosztály elemeihez az osztályból kiválasztott reprezentánst rendelje.

Tegyük fel, hogy  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ , és már definiáltuk az  $A_{\tau_1}, \dots, A_{\tau_n}$  halmazokat és a  $h : B_{\tau_i} \rightarrow A_{\tau_i}$  leképezést úgy, hogy  $A_{\tau_i}$  a megfelelő  $\Sigma_{\tau_i} = \Sigma_{\tau_i}^A$  részhalmaza. Válasszuk ki  $B_\tau$  tetszőleges  $b$  elemét, és legyen

$$\begin{aligned}
 h(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle h(b_1), \dots, h(b_n) \rangle : b_1, \dots, b_n \text{ a } \mathfrak{B}\text{-nek olyan elemei,} \\
 \text{amikre } \mathfrak{B} \models \Phi_\tau(b, b_1, \dots, b_n) \}.
 \end{aligned}$$

Legyen végül  $A_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{ h(b) : b \in B_\tau \}$ . Világos, hogy  $A_\tau \subset A_{\tau_1} \times \dots \times$

$A_{\tau_n}$ , ami indukciós feltételünk szerint része  $\Sigma_\tau$ -nak. Az így definiált  $\mathfrak{A}$  a konstrukció miatt kielégíti a 2.12. definíció (i) és (ii) feltételeit. A  $\Phi_\tau$  valamint  $\Theta$  relációjelek interpretáltja legyen  $\mathfrak{A}$ -n a 2.12. definíció szerinti, ezzel kapunk egy gyenge magasabbrendű struktúrát. Világos, hogy  $h$  ráképezés, továbbá ha  $b$  és  $b'$  a  $\mathfrak{B}$ -nek 0 típusú elemei, akkor  $\mathfrak{B} \models \Theta(b, b')$  pontosan akkor, ha  $h(b) = h(b')$ , vagyis ha  $\mathfrak{A} \models \Theta(h(b), h(b'))$ . Tetszőleges  $b$ -re a  $h(b)$  definíciója szerint  $\langle h(b_1), \dots, h(b_n) \rangle$  akkor eleme  $h(b)$ -nek, vagyis akkor áll fenn, hogy  $\mathfrak{A} \models \Phi_\tau(h(b), h(b_1), \dots, h(b_n))$ , ha léteznek olyan  $b'_1, \dots, b'_n$  elemek, melyekre  $h(b'_i) = h(b_i)$  és  $\mathfrak{B} \models \Phi_\tau(b, b'_1, \dots, b'_n)$ .

Amit még meg kell mutatnunk az, hogy  $h$  megőrzi a formulák igazságát. Mivel  $h$  ráképezés, ehhez elegendő látnunk, hogy a nyelv minden  $\Psi(x_1, \dots, x_n)$  relációjelére (vagyis  $\Phi_\tau$ -ra valamint  $\Theta$ -ra)

$$(6) \quad \mathfrak{B} \models \Psi(b_1, \dots, b_n) \iff \mathfrak{A} \models \Psi(h(b_1), \dots, h(b_n)),$$

hiszen innen az ekvivalencia tetszőleges formulára már könnyen adódik a formula felépítésére vonatkozó indukcióval. Ezt az ekvivalenciát a  $\Theta(b_1, b_2)$  formulára az előbb láttuk. A  $\Phi_\tau$  relációjel esetére előbbi megjegyzésünk alapján (6) azonnal következik abból, hogy ha  $b, b', b_1, b'_1, \dots, b_n, b'_n$  megfelelő szortú elemekre  $h(b) = h(b')$  és  $h(b_i) = h(b'_i)$  minden  $i$ -re, akkor

$$(7) \quad \mathfrak{B} \models \Phi_\tau(b, b_1, \dots, b_n) \leftrightarrow \Phi_\tau(b', b'_1, \dots, b'_n).$$

Ez viszont egyenes folyamánya az alábbi lemmának és annak, hogy  $\mathfrak{B}$ -ben teljesül az összes (4) alatti formula. A lemma szerint a megadott feltételek mellett  $\mathfrak{B} \models E_\tau(b, b')$  valamint  $\mathfrak{B} \models E_{\tau_i}(b_i, b'_i)$ , tehát a (4)-beli implikáció előtagjában minden teljesül, és a konklúzió éppen (7)-et adja. ■

**2.14. Lemma** *Ha  $a$  és  $b' \in B_\tau$  elemekre  $h(b) = h(b')$ , akkor  $\mathfrak{B} \models E_\tau(b, b')$ .*

**Bizonyítás** A  $\tau$  felépítésére vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Legyen először  $\tau = 0$ . A  $h$  definíciója szerint  $h(b)$  a  $b$  ekvivalenciaosztályának

reprezentáns eleme, ezért  $h(b) = h(b')$  pontosan akkor, ha  $b$  és  $b'$  ugyanabba az ekvivalenciaosztályba esik, vagyis ha  $\mathfrak{B} \models \Theta(b, b')$ , vagy ami ugyanaz,  $\mathfrak{B} \models E_0(b, b')$ .

Legyen másodszor  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ . Válasszunk minden  $i$ -re a  $\tau_i$  szortú elemek közül kettőt,  $b_i$ -t és  $b'_i$ -t, amikre  $h(b_i) = h(b'_i)$ . Az indukciós feltevésünk folytán ekkor  $\mathfrak{B} \models E_{\tau_i}(b_i, b'_i)$ , továbbá nyilván  $\mathfrak{B} \models E_\tau(x, x)$ , ezért (4) alapján tetszőleges  $\tau$  típusú  $x$  elemre

$$(8) \quad \mathfrak{B} \models \Phi_\tau(x, b_1, \dots, b_n) \leftrightarrow \Phi_\tau(x, b'_1, \dots, b'_n).$$

A  $h(b)$  definíciója szerint ha  $\mathfrak{B} \models \Phi_\tau(b, b_1, \dots, b_n)$ , akkor egyúttal  $\langle h(b_1), \dots, h(b_n) \rangle \in h(b)$ . Ez az implikáció fordítva is igaz. Legyenek ugyanis  $b'_1, \dots, b'_n$  olyanok elemek, amikre  $\langle h(b'_1), \dots, h(b'_n) \rangle \in h(b)$ . A  $h(b)$  definíciója alapján tudunk találni olyan  $b_1, \dots, b_n$  elemeket, melyekre  $\mathfrak{B} \models \Phi_\tau(b, b_1, \dots, b_n)$  és  $h(b_i) = h(b'_i)$ . Ekkor (8) szerint  $\mathfrak{B} \models \Phi_\tau(b, b'_1, \dots, b'_n)$ , ahogyan állítottuk.

Ha  $h(b) = h(b')$ , akkor persze  $h(b)$  és  $h(b')$  ugyanazokból az  $n$ -esekből áll, következésképp tetszőleges  $b_1, \dots, b_n$  elemekre  $\mathfrak{B} \models \Phi_\tau(b, b_1, \dots, b_n)$  akkor és csak akkor, ha  $\mathfrak{B} \models \Phi_\tau(b', b_1, \dots, b_n)$ . Ezzel beláttuk, hogy  $h(b) = h(b')$  esetén

$$\mathfrak{B} \models \forall y_1 \dots \forall y_n (\Phi_\tau(b, y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow \Phi_\tau(b', y_1, \dots, y_n)),$$

ami azt jelenti, hogy  $\mathfrak{B} \models E_\tau(b, b')$ , amit bizonyítani szerettünk volna.



A kompaktsági tétel bizonyítása csak annyit adott, hogy  $\Gamma$ -nak létezik gyenge modellje. Ez nem véletlen, ugyanis ennél több már nem igaz. Mutatunk példát olyan formulahalmazra, aminél minden véges résznek van teljes modellje, de az egésznek nincs. Legyen  $\mathbb{N}$  a természetes számok halmaza, és legyen ez az  $\mathfrak{A}$  teljes magasabbrendű struktúra alaphalmaza. Az  $\mathbb{N}$  minden elemét jelöljük meg egy-egy konstansjellel, szokás szerint ezek legyenek 0, 1, 2, stb. Szükségünk lesz még a természetes számok rendezésére, ehhez válasszunk egy  $\tau = (0, 0)$  típusú

*konstansjelet*, amivel  $\mathfrak{A}$ -nak azt az elemét jelöljük meg, ami a természetes számok szokásos rendezésének felel meg. Természetesen ez a konstansjel  $\leq$  lesz, és  $\mathfrak{A} \models \Phi_{(0,0)}(\leq, x, y)$  pontosan akkor igaz, ha a természetes számokból álló  $\langle x, y \rangle$  pár a  $\leq$ -vel jelölt relációban van, vagyis ha tényleg  $x \leq y$ . Még egy relációt jelölünk meg konstansjellel: a jel  $\in$ , a típusa  $(0, (0))$ , és  $\mathfrak{A} \models \Phi_{(0,(0))}(\in, x, Y)$  ha a  $(0$  típusú)  $x$  természetes szám benne van (a  $(0$  típusú)  $Y$  részhalmazban.

Ugyanezt persze az  $\in$  jel nélkül is felírhatnánk, hiszen  $x$  akkor és csak akkor eleme  $Y$ -nak, ha  $\mathfrak{A} \models \Phi_{(0)}(Y, x)$ , és így

$$\mathfrak{A} \models \Phi_{(0,(0))}(\in, x, Y) \leftrightarrow \Phi_{(0)}(Y, x).$$

Az alábbi formula első sora azt mondja ki, hogy az  $Y$  halmaz (vagyis  $(0$  típusú elem) nem üres, a második szerint van felső korlátja, az utolsó kettő pedig azt állítja, hogy ekkor van maximális eleme:

$$\begin{aligned} & \forall Y (\exists x \Phi_{(0,(0))}(\in, x, Y) \wedge \\ & \quad \wedge \exists z \forall x (\Phi_{(0,(0))}(\in, x, Y) \rightarrow \Phi_{(0,0)}(\leq, x, z))) \rightarrow \\ (9) \quad & \rightarrow \exists x (\Phi_{(0,(0))}(\in, x, Y) \wedge \\ & \quad \wedge \forall z (\Phi_{(0,(0))}(\in, z, Y) \rightarrow \Phi_{(0,0)}(\leq, z, x))). \end{aligned}$$

Vegyük ehhez hozzá azokat a formulákat, amik kimondják, hogy a  $\leq$  tranzitív, valamint hogy a rendezés hogyan működik a számokon, tehát

$$\forall x \forall y \forall z (\Phi_{(0,0)}(\leq, x, y) \wedge \Phi_{(0,0)}(\leq, y, z) \rightarrow \Phi_{(0,0)}(\leq, x, z)),$$

valamint például  $\Phi_{(0,0)}(\leq, 3, 5)$ ,  $\neg \Phi_{(0,0)}(\leq, 7, 2)$ , stb. Legyen még  $c$  egy vadonat új  $0$  típusú konstansjel, utolsó adag formuláink szerint  $c$  nagyobb az összes konstansjellel megjelölt természetes számnál:  $\Phi_{(0,0)}(\leq, 1, c)$ ,  $\Phi_{(0,0)}(\leq, 2, c)$ ,  $\Phi_{(0,0)}(\leq, 3, c)$ , stb.

Az így kapott  $\Gamma$  formulahalmaz minden véges részhalmazának az  $\mathfrak{A}$  teljes struktúra modellje, egyszerűen  $c$ -nek a véges formulahalmazban szereplő véges sok szám mindegyikénél nagyobbat kell választanunk. Ugyanakkor  $\Gamma$ -nak már nincs teljes magasabbrendű modellje. Tegyük fel,



hogy  $\mathfrak{B}$  ilyen modell lenne. Ennek  $B$  alaphalmazában a  $c$  (interpretáltja) a  $0, 1$ , stb. mindegyikénél (vagyis ezek interpretáltjánál) nagyobb. Most vegyük a  $B_0$  alaphalmaznak azokat a  $b$  elemeit, amelyek a  $0, 1, \dots$  valamelyikénél *kisebbek*, vagyis amikre  $\mathfrak{B} \models \Phi_{(0,0)}(\leq, b, k)$  teljesül valamilyen  $k$  természetes számmal. Legyen ez a részhalmaz  $Y$ . A  $c$  jelenléte és a  $\leq$  tranzitivitása miatt  $c$  felső korlátja  $Y$ -nak, és persze  $Y$  nem üres, hiszen minden természetes szám benne van. A  $\mathfrak{B}$  modell teljessége miatt  $Y \in B_{(0)}$  tehát (9) alkalmazható erre az  $Y$ -ra. A formula első sora igaz, tehát igaz a konklúzió is: van  $Y$ -ban maximális elem. Legyen ez  $x \in Y$ . Mivel  $Y$  minden eleme kisebb valamelyik természetes számnál (pontosabban a szám interpretáltjánál), ez igaz  $x$ -re is, mondjuk  $x \leq k$ . Mivel  $k+1 \in Y$ , és  $x$  maximális  $Y$ -ban, azért  $k+1 \leq x \leq k$ , ellentétben azzal, hogy  $\leq$  tranzitív és  $\neg \Phi_{(0,0)}(\leq, k+1, k)$  is szerepel  $\Gamma$  elemei között.

Másképpen fogalmazva azt kaptuk, hogy a  $\Gamma$  formulahalmaznak semmilyen magasabbrendű  $\mathfrak{B}$  modelljében sem lehet az  $Y \subset B_0$  részhalmaz eleme a  $\tau = (0)$  típusú elemek halmazának, vagyis  $B_{(0)}$ -nak, és így persze  $\mathfrak{B}$  nem is lehet teljes.

### 3. fejezet

## Bővítés

A matematika igen sok ága egy–egy rögzített teljes magasabbrendű struktúra tulajdonságainak tanulmányozásával foglalkozik, más ágak pedig nem egy konkrét, hanem sok hasonló struktúra közös tulajdonságait vizsgálják. A kalkulus, beleértve a differenciál- és integrálszámítást, sőt még a valós függvénytan is része a valós számok teljes struktúrája elméletének. A komplex függvénytan (akár egy, akár többváltozós) pedig része a komplex számok teljes modelljének. Ha topológikus vagy Hilbert tereket nézünk, vagy akár differenciálható sokaságokat, azokban is teljes magasabbrendű struktúrák használhatók a diszciplína leírására.

Legyen ennek megfelelően  $\mathfrak{A}$  egy konkrét teljes magasabbrendű struktúra, amit tanulmányozni akarunk. Minden lehetséges  $\tau$  típusra az  $\mathfrak{A}$  struktúra összes  $\tau$  típusú elemének jelölésére vezessünk be egy–egy *konstansjelet*. Az, hogy ehhez általában nagyon sok jelre van szükségünk, nem fog minket zavarni. Ezek a jelek az  $\mathfrak{A}$ -beli elemek *nevei* lesznek, és persze nem azonosak velük, bár az elemek és az őket jelölő nevek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Legyen például  $R$  az  $\mathfrak{A}$  elemei közül egy  $n$ -változós  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$  típusú reláció, a hozzárendelt konstansjel pedig  $c_R$ . Az  $\mathfrak{A}$  struktúra rendre  $\tau_1, \dots, \tau_n$  szortú  $b_1, \dots, b_n$  elemeire az  $R$  reláció pontosan akkor áll fenn, ha  $\mathfrak{A}$ -ban igaz a  $\Phi_\tau(c_R, b_1, \dots, b_n)$  formula. Itt  $c_R$  a nyelv egy konstansjele,  $b_1, \dots, b_n$  pedig a struktúra elemeit jelöli. Hasonlóan, ha  $f$  egy, az  $A_0$  alaphalmazon értelmezett egyváltozós függvény, akkor  $f$  speciálisan  $(0, 0)$  típusú reláció is, tehát van  $f$ -et jelölő  $c_f$  konstansjelünk, és

$f(x) = y$  pontosan akkor, ha  $\mathfrak{A} \models \Phi_{(0,0)}(c_f, x, y)$ .

### 3.1. Definíció

- (i) Adott  $\mathfrak{A}$  teljes magasabbrendű struktúra *nyelve* áll: (a) a struktúra összes eleméhez hozzárendelt konstansjelből;  
(b) a  $\Phi_\tau(x, y_1, \dots, y_n)$  valamint  $\Theta(x, y)$  relációjelekből.
- (ii) Az  $\mathfrak{A}$  struktúra  $\text{Th}(\mathfrak{A})$  *elmélete* az összes  $\mathfrak{A}$ -ban igaz, a struktúra nyelvén felírt (többszortú) formula halmaza.

Mostantól kezdve minden formula, ha csak az ellenkezőjét nem mondjuk, a rögzített  $\mathfrak{A}$  magasabbrendű teljes struktúra nyelvén lesz megfogalmazva. Legyen  $\Sigma(x)$  egy olyan formulahalmaz, melynek formuláiban egyedül az  $x$  változójel fordul elő szabadon, és  $x$  típusa mindegyikben ugyanaz, mondjuk  $\tau$ . A  $\Sigma(x)$ -ről azt mondjuk, hogy *konkurrens*  $\mathfrak{A}$  *fölött*, ha  $\Sigma(x)$  minden véges  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  részhalmazához található az  $\mathfrak{A}$  struktúrájának olyan  $\tau$  típusú  $a$  eleme, amivel  $\mathfrak{A} \models \varphi_1(a) \wedge \dots \wedge \varphi_n(a)$ , vagyis amire

$$\mathfrak{A} \models \exists x (\varphi_1(x) \wedge \dots \wedge \varphi_n(x)).$$

A  $\Sigma(x)$  konkurrens formulahalmaz *realizálódik* a  $\mathfrak{B}$  struktúrában, ha van  $\mathfrak{B}$ -nek olyan  $b$  eleme, amire  $\Sigma(x)$  minden formulája igaz.

A konkurrens formulahalmazokat a matematikai logikában *típusoknak* szokás nevezni, de minthogy a *típus* szó már eddig is két különböző dolgot jelentett, még egy új értelemben való használata már teljes káoszt okozna.

**3.2. Definíció** Az  $\mathfrak{A}$  nyelvén értelmezett  $\mathfrak{B}$  gyenge magasabbrendű struktúra *bővítése*  $\mathfrak{A}$ -nak, ha  $\mathfrak{B} \models \text{Th}(\mathfrak{A})$ , és az összes  $\mathfrak{A}$  fölötti konkurrens formulahalmaz realizálódik  $\mathfrak{B}$ -ben.

**3.3. Tétel** *Létezik  $\mathfrak{A}$ -nak bővítése.*

**Bizonyítás** Minden  $\mathfrak{A}$ -ban konkurrens  $\Sigma(x)$  formulahalmazra válaszszunk egy-egy vadonat új, az  $\mathfrak{A}$  nyelvében nem szerepelő  $c_\Sigma$  konstansjelet; ennek típusa a  $\Sigma(x)$  elemei által megkövetelt közös típus lesz.

Jelölje  $\Sigma(c_\Sigma)$  a  $\{\varphi(c_\Sigma) : \varphi(x) \in \Sigma(x)\}$  formulahalmazt, és legyen a  $\Gamma$  a következő:

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \bigcup \{\Sigma(c_\Sigma) : \Sigma(x) \text{ konkurrens formulahalmaz } \mathfrak{A} \text{ fölött}\}.$$

Akárhogy vesszük ki  $\Gamma$ -nak egy véges  $\Delta$  részét, az abban szereplő  $c_\Sigma$  konstansjeleket tudjuk úgy értelmezni  $\mathfrak{A}$ -ban, hogy  $\Delta$  egy modelljét kapjuk. Ez azért van így, mert  $\Delta$ -ban minden konkurrens halmazból csak véges sok formula szerepelhet, és a konkurrens halmaz definíciója alapján létezik olyan elem  $\mathfrak{A}$ -ban, ami ezen véges sok formula mindegyikét kielégíti. Ezt az elemet kell  $c_\Sigma$  interpretációjának választanunk;  $\Delta$  többi eleme automatikusan teljesül  $\mathfrak{A}$ -ban.

A magasabbrendű struktúrákra vonatkozó 2.13. kompaktsági tétel szerint ekkor van  $\Gamma$ -nak  $\mathfrak{B}$  gyenge modellje, és ez jó lesz. Egyrészt  $\mathfrak{B} \models \text{Th}(\mathfrak{A})$ , másrészt minden  $\mathfrak{A}$  fölött konkurrens rendszer realizálódik  $\mathfrak{B}$ -ben. Ha ugyanis  $\Sigma(x)$  ilyen rendszer, akkor ezt éppen a  $\mathfrak{B}$ -beli  $c_\Sigma$  mutatja. ■

Jelölje  $^*\mathfrak{A}$  az  $\mathfrak{A}$  struktúra rögzített, de egyébként tetszőleges bővítését, és legyen  $a$  az  $\mathfrak{A}$ -nak egy  $\tau$  típusú eleme. Az ezt jelölő  $c_a$  konstansjel szerepel  $\mathfrak{A}$  nyelvében, ennek  $\mathfrak{A}$ -beli interpretáltja persze  $a$ , az  $^*\mathfrak{A}$ -beli interpretáltja pedig legyen  $^*a$ . Általában  $\mathfrak{A}$  egy tetszőleges elemét jelölő konstansjel  $^*\mathfrak{A}$ -beli interpretáltjára úgy hivatkozunk, hogy az  $A$ -beli elem jele elé egy kis  $*$ -ot teszünk.

Az  $\mathfrak{A}$  alaphalmazának  $0$  típusú elemei az  $A = A_0$  halmazt alkotják. Ez az  $A$  speciálisan egy  $(0)$  típusú egyváltozós reláció is, tehát elemként is megtalálható  $\mathfrak{A}$ -ban. Az  $A$ -t jelölő  $c_A$  konstansjel  $^*\mathfrak{A}$ -beli interpretáltja  $^*A$ , állítjuk, hogy  $^*A$  nem más, mint a  $^*\mathfrak{A}$  bővítés  $0$  típusú elemeinek halmaza. Ugyanis  $\mathfrak{A}$ -ban minden  $0$  típusú elem egyúttal eleme  $A$ -nak is, vagyis  $\mathfrak{A} \models \forall x \Phi_{(0)}(c_A, x)$ . Ez formula beletartozik  $\mathfrak{A}$  elméletébe, és így  $^*\mathfrak{A}$ -ban is teljesül, tehát a  $c_A$  jel  $^*\mathfrak{A}$ -beli interpretáltja, vagyis  $^*A$ , tartalmazza az összes  $^*\mathfrak{A}$ -ban  $0$  típusú elemet.

Definiáljuk az  $A$ -ból  ${}^*A$ -ba képező  $h$  függvényt azzal, hogy  $a \in A$ -ra  $h(a) = {}^*a$ . A  $\Theta(x, y)$  relációjel  $\mathfrak{A}$ -ban az egyenlőséget jelenti, ezért ha  $a$  és  $b$  különböző  $0$  típusú elemei  $\mathfrak{A}$ -nak, akkor

$$\mathfrak{A} \models \neg\Theta(c_a, c_b),$$

itt  $c_a$  illetve  $c_b$  az  $a$ -t,  $b$ -t jelölő konstansjelek. Ez a formula tehát eleme  $\text{Th}(\mathfrak{A})$ -nak, ezért igaz  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban is. Mivel  $\Theta(x, y)$  az  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban is az egyenlőség, azért különböző  $a$  és  $b$  esetén  $c_a$  és  $c_b$   ${}^*\mathfrak{A}$ -beli interpretáltja is szükségszerűen különbözik, vagyis  $h(a) \neq h(b)$ . Ezért  $h$  beágyazza  $A$ -t  ${}^*A$ -ba; ennek a leképezésnek segítségével  $A$  elemeit „azonosíthatjuk”  ${}^*A$  megfelelő elemeivel. Más szavakkal feltesszük, hogy a bővítésekben a  $0$  típusú elemekre  $a = {}^*a$  mindig teljesül, vagyis  $A \subset {}^*A$ . Ebben az esetben  $h$  identitás: egy  $0$  típusú elemet jelölő konstansjel interpretáltja  $\mathfrak{A}$ -ban és  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban ugyanaz az elem.

Ez a megállapodás lehetővé teszi azt is, hogy a  $0$  típusú elemeket ne különböztessük meg az őket jelölő konstansjelektől, hiszen ezeknek a jeleknek mind  $\mathfrak{A}$ -ban, mind  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban ugyanaz az interpretáltjuk.

**3.4. Állítás**  $A = {}^*A$  akkor és csak akkor, ha  $A$  véges.

**Bizonyítás** Legyen először  $A$  véges, mondjuk  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Ekkor a következő formula igaz  $\mathfrak{A}$ -ban, és ezért  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban is:

$$\forall x (\Theta(x, a_1) \vee \Theta(x, a_2) \vee \dots \vee \Theta(x, a_n)).$$

(Itt használjuk, hogy az  $a_i$  elemek egyúttal saját magukat jelölő konstansjelek is.) Mivel  $\Theta(x, y)$  az  ${}^*A$ -on is az egyenlőség, ez a formula a bővítésben értelmezve azt fejezi ki, hogy  ${}^*A$  minden eleme  $a_1, \dots, a_n$  közül kerül ki, és ezért  $A = {}^*A$ .

Legyen másodszor  $A$  végtelen,  $\varphi_a(x) = \neg\Theta(x, a)$ , és nézzük a  $\{\varphi_a(x) : a \in A\}$  formulahalmazt. Ez konkurrens  $\mathfrak{A}$  fölött, hiszen  $A$  végtelen és így véges sok  $a_1, \dots, a_n$  elemekhez mindig van olyan  $b \in A$ , ami ezek mindegyikétől különbözik, és erre a  $b$ -re a véges sok

$\varphi_{a_i}(b)$  mindegyike teljesül. Ekkor van olyan  $b \in {}^*A$ , amire az összes formula egyszerre igaz, vagyis  $\mathfrak{B} \models \neg\Theta(b, a)$  minden  $a \in A$ -ra. Ez pedig azt jelenti, hogy  $b \notin A$ , de  $b \in {}^*A$ , vagyis  $A \neq {}^*A$ . ■

Legyen  $R \subset A$  tetszőleges (0) típusú egyváltozós reláció  $A$ -n, az őt jelölő konstansjel  ${}^*\mathfrak{A}$ -beli interpretáltja pedig  ${}^*R$ . Ha az  $R$  reláció igaz az  $a \in A$  elemre, akkor a  $\Phi_{(0)}(R, a)$  formula teljesül  $\mathfrak{A}$ -ban, tehát teljesül  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban is, vagyis  ${}^*R$  is igaz  $a$ -ra. Másrészt ha  $a \in A$  és  $R$  nem igaz  $a$ -ra, akkor  $\mathfrak{A} \models \neg\Phi_{(0)}(R, a)$ , vagyis  ${}^*R$  sem igaz  $a$ -ra. Ezért  $R \subset {}^*R$  és  $R = {}^*R \cap A$ . A 3.4. állításhoz hasonlóan bizonyítható, hogy  $R$  és  ${}^*R$  akkor és csak akkor egyezik meg, ha  $R$  csak véges sok elemre igaz.

Legyen  $f : A \rightarrow A$  egy függvény, az  $\langle a, f(a) \rangle$  párokból álló (0, 0) típusú  $B$  relációról azt mondjuk, hogy  $f$ -et meghatározza.  ${}^*B$  most is a  $B$ -t jelölő konstansjel  ${}^*\mathfrak{A}$ -beli interpretáltja. Természetesen most is igaz hogy  $B \subset {}^*B$ , és  $a, b \in A$  esetén  $\langle a, b \rangle \in B$  akkor és csak akkor, ha  $\langle a, b \rangle \in {}^*B$ . Mivel  $B$  első elemeként  $A$ -nak tetszőleges eleme előfordulhat, azért a következő formula igaz  $\mathfrak{A}$ -ban:  $\forall x \exists y \Phi_{(0,0)}(B, x, y) >$ . Ugyanezt a formulát  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban kiértékelve azt kapjuk, hogy

$${}^*\mathfrak{A} \models \forall x \exists y \Phi_{(0,0)}({}^*B, x, y),$$

ami azt mutatja, hogy  ${}^*B$ -ben első elemként  ${}^*A$  minden eleme előfordul. Ezen felül  $B$ -re még az is igaz, hogy semelyik első elemhez sem találunk két különböző másodikat, amivel  $B$  teljesülne:

$$\mathfrak{A} \models \neg \exists x \exists y_1 \exists y_2 (\neg\Theta(y_1, y_2) \wedge \Phi_{(0,0)}(B, x, y_1) \wedge \Phi_{(0,0)}(B, x, y_2)).$$

Ugyanezt  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban nézve kapjuk, hogy  ${}^*B$  olyan reláció, amiben az első helyen  ${}^*A$  minden eleme pontosan egyszer fordul elő, vagyis  ${}^*B$  egy  ${}^*f$  függvényt határoz meg. Ráadásul  ${}^*f$ -nek az  $A$ -ra vett megszorítása megegyezik  $f$ -fel, vagy más szóval  ${}^*f$  az  $f$  kiterjesztése  ${}^*A$ -ra. Követve a hagyományt, miszerint egy függvényt és kiterjesztését ugyanúgy jelölünk (mint például a  $\sin$  függvényt a valós valamint komplex argumentumokra), hagyjuk a  ${}^*$ -ot és ezt a függvényt is  $f$ -nek hívjuk.

Hasonlóan, ahol félreértésre nem ad okot, a bővítés többi elemét is ugyanazzal a jellel jelöljük, mint az alapmodell megfelelő elemét.

Legyen  $A \subset B$ , az  $A$ -ból felépített teljes struktúra  $\mathfrak{A}$ , a  $B$ -ből felépített pedig  $\mathfrak{B}$ . Minden  $\tau$  típusra  $A_\tau$  az  $\mathfrak{A}$ -beli  $\tau$  típusú elemek halmaza,  $B_\tau$  pedig a  $\mathfrak{B}$ -beli  $\tau$  típusú elemeké. Mivel  $A = A_0 \subset B = B_0$ , a  $\tau$  típus felépítésére vonatkozó indukcióval azonnal látható, hogy  $A_\tau \subset B_\tau$ . Legyen  ${}^*\mathfrak{B}$  a  $\mathfrak{B}$  egy bővítése, ebben  ${}^*B_\tau$  a  $\tau$  típusú elemek halmaza, továbbá  ${}^*A_\tau \subset {}^*B_\tau$  az  $A_\tau$ -nak a bővítésbeli megfelelője (vagyis az  $A_\tau$  halmazt jelölő konstansjel interpretáltja a  ${}^*\mathfrak{B}$  bővítésben).

**3.5. Tétel** Az  ${}^*\mathfrak{A} = \langle {}^*A_\tau \rangle$  gyenge magasabbrendű struktúra és bővítése  $\mathfrak{A}$ -nak.

**Bizonyítás** Elsőként azt látjuk be, hogy  ${}^*\mathfrak{A}$  gyenge struktúra. Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden  $\tau = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$  típusra  ${}^*A_\tau \subset \mathcal{P}({}^*A_{\tau_1} \times \dots \times {}^*A_{\tau_n})$ . Mivel  $A_\tau$  minden eleme része az  $A_{\tau_1} \times \dots \times A_{\tau_n}$  szorzatnak, azért  $\mathfrak{B}$ -ben igaz a következő formula:

$$\forall x \forall x_1 \dots \forall x_n (\Phi_{(\tau)}(A_\tau, x) \wedge \Phi_\tau(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \rightarrow \Phi_{(\tau_1)}(A_{\tau_1}, x_1) \wedge \dots \wedge \Phi_{(\tau_n)}(A_{\tau_n}, x_n)).$$

Ha itt  $\Phi_{(\tau)}(A, x)$  helyett azt íránk, hogy  $x \in A$ , ami egyébként ugyanazt jelenti, a formula átalakul azzá, hogy  $x \in A_\tau \wedge \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in x \rightarrow x_i \in A_{\tau_i}$ . Ez tehát a bővítésben is igaz, ahonnan kapjuk, hogy  ${}^*\mathfrak{B}$ -ben az összes  $x$ -re, amire  $\Phi_{(\tau)}({}^*A_\tau, x)$  igaz, (vagyis  ${}^*A_\tau$  összes  $x$  elemére), ha  ${}^*\mathfrak{B} \models \Phi_\tau(x, x_1, \dots, x_n)$  (vagyis ha  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in x$ ), akkor mindegyik  $x_i$ -re  ${}^*\mathfrak{B} \models \Phi_{(\tau_i)}({}^*A_{\tau_i}, x_i)$  (vagyis  $x_i \in {}^*A_{\tau_i}$ ). És ezt kellett belátnunk.

Mivel  ${}^*\mathfrak{B}$  bővítése  $\mathfrak{B}$ -nek, azért  $\mathfrak{B}$  minden elemének, és így speciálisan  $\mathfrak{A}$  minden elemének is van megfelelője  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban. Az maradt csak hátra, hogy megmutassuk: minden  $\mathfrak{A}$  fölötti konkurrens formulahalmaz realizálódik  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban. Legyen  $\varphi$  egy tetszőleges  $\mathfrak{A}$  fölötti formula, definiáljuk a  $\varphi^B$ -t a következőképpen: prímmformulákra  $\varphi$  és  $\varphi^B$  ugyanaz,  $(\neg\varphi)^B = \neg(\varphi^B)$ ,  $(\varphi \vee \psi)^B = \varphi^B \vee \psi^B$ , hasonlóan a többi logikai

összekötő jelre, végül  $(\forall x \varphi(x))^B = \forall x (x \in A_\tau \rightarrow \varphi^B(x))$ , valamint  $(\exists x \varphi(x))^B = \exists x (x \in A_\tau \wedge \varphi^B(x))$ , feltéve, hogy a kvantorral lekötött változó típusa  $\tau$ . Természetesen  $x \in A_\tau$  itt is a  $\Phi_{(\tau)}(A_\tau, x)$  helyett áll. Világos, hogy  $\mathfrak{A} \models \varphi$  akkor és csak akkor, ha  $\mathfrak{B} \models \varphi^B$ , valamint  ${}^*\mathfrak{A} \models \varphi$  akkor és csak akkor, ha  ${}^*\mathfrak{B} \models \varphi^B$ , ez utóbbit úgy értve, hogy a  $\varphi^B$ -ben szereplő  $A_\tau$  helyébe mindenütt  ${}^*A_\tau$ -t kell tenni.

Legyen ezek után  $\Sigma(x)$  egy  $\mathfrak{A}$  fölötti konkurrens formulahalmaz, az  $x$  változó típusa pedig legyen  $\tau$ . Tudjuk, hogy ennek minden véges részéhez található  $A_\tau$ -nak olyan eleme, ami ezt a véges sok formulát kielégíti, ezért a  $\{\Phi_{(\tau)}(A_\tau, x) \wedge \varphi^B(x) : \varphi(x) \in \Sigma(x)\}$  halmaz konkurrens  $\mathfrak{B}$  fölött. Ezért a  ${}^*\mathfrak{B}$  bővítésben van olyan  $\tau$  típusú  $a$  elem, amire ez utóbbi formulák mindegyike teljesül, speciálisan az is, hogy  $\Phi_{(\tau)}({}^*A_\tau, a)$ , vagyis  $a \in {}^*A_\tau$ . Ezért  $a$  az  ${}^*\mathfrak{A}$ -nak is eleme,  ${}^*\mathfrak{B} \models \varphi^B(a)$ , ezért  ${}^*\mathfrak{A} \models \varphi(a)$  minden  $\varphi(x) \in \Sigma(x)$ -re. Ez mutatja, hogy az  ${}^*\mathfrak{A}$ -beli  $a$  kielégíti a konkurrens formulahalmaz minden elemét, vagyis  $\Sigma(x)$  realizálódik  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban, ahogyan kívántuk. ■

Az  $\mathfrak{A}$  teljes struktúra  ${}^*\mathfrak{A}$  bővítésről csak annyit tudunk biztosan, hogy gyenge magasabbrendű struktúra. Így például egyáltalán nem biztos, hogy  ${}^*\mathfrak{A}$ -ban  ${}^*A$  minden részhalmaza szerepel a  $(0)$  típusú halmazok között. Az  ${}^*A$ -hoz tartozó teljes struktúrában így háromféle elemet különböztethetünk meg: azokat, amelyek már  $\mathfrak{A}$ -ban is megvoltak (pontosabban amik az  $\mathfrak{A}$  egy-egy elemét jelölő konstansjelek interpretáltjai); azokat, amelyek az  ${}^*\mathfrak{A}$  gyenge struktúrába bekerültek; illetve a maradékot. Ezekre külön-külön elnevezéseket vezetünk be.

**3.6. Definíció** Az  ${}^*A$ -ból definiálható teljes struktúra  $\tau$  típusú elemei közül  ${}^*A_\tau$ -hoz tartozókat *belső*, a többi *külső* halmazoknak nevezzük. Egy *belső* halmaz *sztenderd*, ha  $\sigma$  egy  $\mathfrak{A}$ -beli elemet jelölő konstansjel interpretáltja, egyébként pedig *nemsztenderd*. Hasonlóan egy függvény *sztenderd*, *belső* illetve *külső* attól függően, hogy az őt meghatározó reláció milyen.



Az  ${}^*A$ -nak nincsenek külső elemei, viszont ha  $A$  végtelen, a 3.4. állítás szerint vannak benne nemsztenderd elemek is. Az  $A$  minden eleméhez létezik őt tartalmazó egyelemű halmaz, ezt az állítást így formalizálhatjuk:

$$\mathfrak{A} \models \forall x \exists y (\Phi_{(0)}(y, x) \wedge \forall z (\Phi_{(0)}(y, z) \rightarrow \Theta(x, z))).$$

Ez a formula igaz a bővítésben is, tehát  ${}^*A = {}^*A_0$  minden  $a$  eleméhez létezik  ${}^*A_{(0)}$ -ban olyan elem, aminek egyetlen eleme  $a$ , természetesen ezt is  $\{a\}$ -val fogjuk jelölni. Ha  $a$  sztenderd, akkor a kétféle  $\{a\}$  ugyanaz; ha viszont  $a$  nemsztenderd, akkor  $\{a\}$  nemsztenderd (mert nincsen neve), ugyanakkor belső halmaz (mert eleme  ${}^*A_{(0)}$ -nak). Egy  ${}^*\mathfrak{A}$ -beli sztenderd halmaz tipikusan nem egyezik meg azzal az  $\mathfrak{A}$ -beli halmazzal, aminek a megfelelője. Például  ${}^*A$  sztenderd, hiszen az  $A$  alaphalmazt jelölő konstansjel interpretáltja, de mint láttuk, általában  ${}^*A \neq A$ .

Jelöljük  $\mathbf{N}$ -nel az  $N = \{0, 1, \dots\}$  természetes számokból felépített teljes struktúrát, és legyen  ${}^*\mathbf{N}$  ennek egy tetszőleges bővítése. Az  $N$  alaphalmaz végtelen, ezért a 3.4. állítás szerint  ${}^*\mathbf{N}$  valódi bővítése a természetes számok halmazának, vagyis  ${}^*\mathbf{N}$ -ben vannak nemsztenderd elemek is.

Láttuk, hogy az alaphalmazon értelmezett akárhány változós műveletek mint függvények automatikusan kiterjednek a bővítésre is. Így speciálisan a természetes számokon értelmezett összeadás, szorzás, hatványozás, stb. is kiterjed  ${}^*\mathbf{N}$ -re. A műveletek szokásos tulajdonságai is megmaradnak, például az összeadás és szorzás disztributivitását kifejező  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  formula igaz az alapmodellben, és ezért igaz a bővítésben is. (Az állítás formális felírását az összeadást és a szorzást jelölő konstansjelekkel valamint a megfelelő  $\Phi_+$  és  $\Theta$  relációjelekkel az olvasóra bízunk.) A természetes számok rendezése egy kétváltozós reláció, ez is kiterjed a bővítésre, és ott is rendezés marad. A nulla minden más természetes számnál kisebb, ezért 0 a legkisebb szám  ${}^*\mathbf{N}$ -ben is. Az 1-nél csak a 0 kisebb, ezért minden nemsztenderd természetes szám is nagyobb 1-nél. Hasonlóan a nemsztenderd egészek minden  $k$  sztenderd

egésznél nagyobbak, így a rendezésben a sztenderd számok megelőzik a nemsztenderdekét. A sztenderd számokat ennek megfelelően *végesnek*, a nemsztenderdekét pedig *végtelennek* is hívjuk. Minden pozitív természetes számnak van közvetlen megelőzője, tehát ez így van  ${}^*\mathbf{N}$ -ben is; és ha  $n$  megelőzője véges, akkor  $n$  is szükségképpen véges. Következésképp végtelen egész megelőzője is végtelen, vagyis a végtelen természetes számok között nincs legkisebb.

A *teljes indukció* elve azt mondja ki, hogy a természetes számok minden nem-üres részhalmazában van minimális elem. Ezt félig formálisan, a szokásos jelölésekkel felírva

$$\forall Y (\exists x (x \in Y) \rightarrow \exists x (x \in Y \wedge \forall z (z \in Y \rightarrow z \geq x))),$$

a pontos formula pedig a következőképpen néz ki:

$$\forall Y (\exists x \Phi_{(0)}(Y, x) \rightarrow \rightarrow \exists x (\Phi_{(0)}(Y, x) \wedge \forall z (\Phi_{(0)}(Y, z) \rightarrow \Phi_{(0,0)}(\leq, z, x)))).$$

Ugyanez persze igaz az  ${}^*\mathbf{N}$  bővítésben is, ott azonban  $Y$  nem az  ${}^*\mathbf{N}$  összes részhalmazán fut végig, hanem annak csak az  ${}^*\mathbf{N}$ -ben megtalálható elemein, vagyis a *belső* részhalmazokon. A teljes indukció a bővítésben tehát így szól: *minden nem-üres belső halmaznak van minimális eleme*. Azt, hogy az elv nem marad érvényben e nélkül a megszorítás nélkül, jól mutatja a végtelen elemek halmaza.

**3.7. Állítás**  ${}^*\mathbf{N}$ -ben a sztenderd valamint a nemsztenderd természetes számok halmaza is *külső*.

**Bizonyítás** Mivel minden nem-üres belső halmazban van minimális elem, és nincs legkisebb végtelen természetes szám, a nemsztenderd egészek halmaza szükségképpen *külső*. Másrészt belső halmaz komplementere is belső, mivel a következő formula igaz az  $\mathbf{N}$  alapmodellben:

$$\forall X \exists Y \forall z (\Phi_{(0)}(X, z) \leftrightarrow \neg \Phi_{(0)}(Y, z)),$$

vagyis minden  $X$ -hez van olyan  $Y$  hogy  $z$  akkor és csak akkor eleme  $X$ -nek, ha nem eleme  $Y$ -nak. Ugyanez a formula a bővítésben is teljesül,

ami minden  $X$  belső halmazra garantálja olyan  $Y$  belső halmaz létezését, ami  ${}^*N$  azon elemeiből áll, amik nincsenek  $X$ -ben. Ha tehát a sztenderd természetes számok halmaza belső volna, akkor ennek komplementere, vagyis a nemsztenderd egészek halmaza is belső lenne, amiről már láttuk, hogy nem az. ■

A 3.7. állítást kicsit másképpen fogalmazva egy rendkívül hasznos lemmát kapunk:

**3.8. Lemma** (Túlcordulási lemma) *Tegyük fel, hogy az  $A \subset {}^*N$  belső halmaz tartalmazza az összes sztenderd (nemsztenderd) számot. Akkor  $A$  tartalmaz nemsztenderd (sztenderd) elemet is.*

**Bizonyítás** Ellenkező esetben  $A$  vagy csak a sztenderd, vagy csak a nemsztenderd számokból állna, és így nem lehetne belső. ■

Az a meggondolás, miszerint  ${}^*N$  belső részhalmazának komplementere is belső, könnyen átvihető tetszőleges bővítés tetszőleges elemére; sőt az is igaz, hogy kettő vagy akár véges sok belső halmaz uniója illetve metszete is belső. Belső halmazok tetszőleges metszete illetve uniója már nem feltétlenül belső, például a sztenderd számokat tartalmazó egyelemű halmazok mindegyike belső (sőt sztenderd is), uniójuk viszont már külső halmaz. Ha viszont az  $I$  indexhalmaz és az  $\{A_i : i \in I\}$  hozzárendelés (vagyis az összes  $\langle i, A_i \rangle$  párból álló halmaz) is belső, akkor az  $A_i$  halmazoknak mind a metszete, mind az uniója belső halmaz, ami azonnal adódik a következő tételből.

**3.9. Tétel** *Tetszőleges bővítésben belső halmazok segítségével formulával definiált halmaz is belső.*

**Bizonyítás** Legyen  $\mathfrak{A}$  az alapstruktúra és  ${}^*\mathfrak{A}$  a bővítés. Legyen a  $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$  formulában az  $x$  típusa  $\tau$ , a bővítésben  $p_1, \dots, p_n$

olyan elemek, melyek típusa megfelel a formula  $y_i$  változóinak. A tétel azt állítja, hogy a  $p_1, \dots, p_n$  elemekből a  $\varphi$  formula segítségével definiált

$$(1) \quad U = \{u \in {}^*A_\tau : {}^*\mathcal{A} \models \varphi(u, p_1, \dots, p_n)\}$$

halmaz belső, vagyis másképpen mondva  $U \in {}^*A_{(\tau)}$ . Mivel a  $p_i$ -ről csak azt tudjuk, hogy belső halmaz, azt nem, hogy sztenderd, azért általában nem létezik  $p_i$ -t jelölő konstansjel. Ezért (1) közvetlenül nem vezethető vissza egy  $\mathcal{A}$ -beli állításra, kerülő utat kell tennünk.

Az  $\mathcal{A}$  teljes struktúra, ezért a  $\{v \in A_\tau : \mathcal{A} \models \varphi(v, q_1, \dots, q_n)\}$  halmaz eleme  $A_{(\tau)}$ -nak tetszőleges  $q_1, \dots, q_n$  választása mellett, hiszen  $A_{(\tau)}$ -ban  $A_\tau$  minden részhalmaza benne van. Így  $\mathcal{A}$ -ban igaz a következő formula:

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \exists X \forall x (\Phi_{(\tau)}(X, x) \leftrightarrow \varphi(x, y_1, \dots, y_n)).$$

Tehát ez a formula  ${}^*\mathcal{A}$ -ban is igaz. Válasszuk  $y_i$  értékét  $p_i$ -nek. Azt kapjuk, hogy létezik olyan  $U \in {}^*A_{(\tau)}$ , vagyis *belső* halmaz, amire a formula maradék fele igaz, vagyis  ${}^*\mathcal{A} \models \forall x (\Phi_{(\tau)}(U, x) \leftrightarrow \varphi(x, p_1, \dots, p_n))$ . Mivel pedig  ${}^*\mathcal{A} \models \Phi_{(\tau)}(U, u)$  akkor és csak akkor, ha  $u \in {}^*A_\tau$  és  $u \in U$ , éppen azt kapjuk, hogy az (1) alatti halmaz eleme  ${}^*A_{(\tau)}$ -nak, és így belső.



Tételünk azt mondta ki, hogy egy bővítés *definíciósan zárt*, vagyis mindazok a halmazok, melyeket belső halmazokból valamilyen definícióval elő tudunk állítani, ismét belsők lesznek. Külső halmazt csak valamilyen külső eszköz segítségével tudunk megadni; ilyen külső eszköz például a sztenderd és nemsztenderd elemek megkülönböztetése. A 3.8. túlszordulási lemma éppen azt mondja ki, hogy  ${}^*\mathbf{N}$ -ben a sztenderd és nemsztenderd elemeket belső módszerrel nem is lehet szétválasztani. A lemmának még két további változatát is igazoljuk.

**3.10. Lemma** (Túlsordulási lemma, második változat)

- (i) *Tegyük fel, hogy az  $A \subset {}^*N$  belső halmazban minden sztenderd  $n \in N$ -re van  $n$ -nél nagyobb szám. Ekkor van  $A$ -ban nemsztenderd szám is.*
- (ii) *Tegyük fel, hogy az  $A \subset {}^*N$  belső halmazban minden nemsztenderd  $\omega$ -ra van  $\omega$ -nál kisebb elem. Ekkor van  $A$ -ban sztenderd elem is.*

**Bizonyítás** Az (i) esetben legyen  $B = \{n \in {}^*N : n \text{ kisebb valamely } A\text{-beli elemnél}\}$ , vagyis  $B$  azokból az  $n \in {}^*N$  elemekből áll, amikre

$${}^*N \models \exists x (\Phi_{(0)}(A, x) \wedge \Phi_{(0,0)}(\leq, n, x)).$$

Ez az előző tétel szerint belső halmaz, és az  $A$ -ra tett feltétel miatt az összes sztenderd számot tartalmazza. A 3.8. lemma alapján tehát van  $B$ -ben nemsztenderd szám is, és ekkor  $A$ -ban is van.

Az (ii) esetben  $B$  azokból az  $n$  számokból álljon, melyek  $A$  valamelyik eleménél nagyobbak, vagyis amelyekre teljesül az, hogy

$${}^*N \models \exists x (\Phi_{(0)}(A, x) \wedge \Phi_{(0,0)}(\leq, x, n)).$$

Most  $B$  az összes végtelen természetes számot tartalmazza, tehát tartalmaz végeset is, és ekkor szükségképpen  $A$  is tartalmaz véges számot.



A lemmára közvetlen bizonyítást is adhatunk felhasználva, hogy  ${}^*N$ -ben igaz a teljes indukció elve. E szerint minden nem-üres belső halmazban van legkisebb elem. Ha az  $A$  belső halmazban minden végtelen  $\omega$ -ra van  $\omega$ -nál kisebb, akkor az  $A$ -beli legkisebb elem nem lehet végtelen. Hasonlóan ha  $A$ -ban van akármilyen nagy sztenderd szám, de nincs benne akármilyen nagy szám, akkor van  $A$ -ban maximális elem, és ez szükségképpen végtelen.

Megjegyezzük, hogy az  ${}^*\mathbf{N}$ -beli végtelen számok és a (sztenderd) természetes számokon definiálható ultraszűrők között szoros kapcsolat van.

**3.11. Állítás** Legyen  $\omega$  végtelen természetes szám. Ekkor  $U = \{A \subset N : \omega \in {}^*A\}$  nem triviális ultraszűrő. Fordítva, minden  $N$  fölötti  $U$  nem triviális ultraszűrőhöz található (végtelen sok) olyan végtelen szám, ami az  $U$  minden elemében benne van.

**Bizonyítás** Legyen először  $U$  egy  $N$  fölötti ultraszűrő. Ekkor a  $\{\Phi_{(0)}(A, x) : A \in U\}$  formulahalmaz konkurrens, hiszen véges sok  $U$ -beli elem metszete nem üres. Következésképp van  ${}^*N$ -nek olyan  $\omega$  eleme, ami az összeset egyszerre kielégíti, vagyis  $\omega \in {}^*A$  az  $U$  minden elemére. És mivel  $U$  nem triviális,  $\omega$  nem lehet sztenderd. Hasonlóképpen mutatható meg, hogy nemcsak egy, hanem tetszőleges véges sok ilyen nemsztenderd elem létezik.

Másodszor legyen  $\omega$  nemsztenderd, ekkor elegendő belátnunk, hogy az  $\omega$ -t tartalmazó sztenderd halmazok egyrészt centrált rendszert alkotnak, másrészt tetszőleges  $A \subset N$ -re vagy  ${}^*A$  vagy  ${}^*(N - X)$  tartalmazza  $\omega$ -t. Legyen tehát  $\omega \in {}^*A_i$ , ahol  $A_i \subset N$  sztenderd  $i = 1, \dots, n$ -re, ezekre

$${}^*\mathbf{N} \models \exists x (x \in {}^*A_1 \wedge \dots \wedge x \in {}^*A_n),$$

amit az  $x = \omega$  választás mutat. Ezért ugyanez a formula igaz az alapmodellben is, vagyis az  $A_1, \dots, A_n$  halmazoknak is van közös eleme. Ez mutatja, hogy  $U$  centrált. Legyen végül  $X$  a természetes számok tetszőleges (sztenderd) részhalmaza, erre  ${}^*(N - X) = {}^*N - {}^*X$ . Valóban,  $\mathbf{N}$ -ben igaz az az állítás, ami kimondja, hogy  $X$  és  $N - X$  egymás komplementere:

$$\forall x (x \in X \vee x \in N - X) \wedge \neg \exists x (x \in X \wedge x \in N - X).$$

Következésképp ugyanez a formula igaz a bővítésben is, tehát  ${}^*X$  és  ${}^*(N - X)$  is egymás komplementerei. Ezért közülük pontosan az egyik tartalmazza  $\omega$ -t, amiért  $U$  maximális. ■

Az  $*N$  bővítés a természetes számok elméletének modellje, és különbözik a szokásos sztenderd  $N$  modelltől. Ilyen modell létezését T. Skolem bizonyította be először a harmincas években, és a *nemsztemderd* elnevezés is tőle származik.

## 4. fejezet

# Differenciál- és integrálszámítás

Legyen  $\mathbf{R}$  a valós számok halmaza, ugyanezt a jelet használjuk a valósakból felépíthető teljes struktúra jelölésére is. Legyen  ${}^*\mathbf{R}$  a teljes struktúra egy rögzített bővítése. Tudjuk, hogy  ${}^*\mathbf{R}$ -ben pontosan ugyanazok a matematikai állítások igazak, mint  $\mathbf{R}$ -ben, továbbá minden  $\mathbf{R}$  fölötti konkurrens formulahalmaz realizálódik a bővítésben.  $\mathbf{R}$  elemeit *sztenderdeknek*, az  ${}^*\mathbf{R}$ -beli, de  $\mathbf{R}$ -be nem esőket *nemsztenderdeknek* nevezzük. A sztenderd valósakon definiált minden művelet és függvény automatikusan kiterjed a bővítésre is változatlan tulajdonságokkal. Például az összeadás  ${}^*\mathbf{R}$  elemein is kommutatív, a szorzásra nézve disztributív; minden  ${}^*\mathbf{R}$ -beli elemnek a nulla kivételével létezik reciproka, valamint például az abszolútérték függvény is kielégíti a szokásos egyenlőtlenségeket, mint például  $|x + y| \leq |x| + |y|$ . (Használtuk az a korábbi megállapodásunkat, hogy egy függvényt és a függvénynek a bővítésbeli megfelelőjét ugyanúgy jelöljük.) Mivel  $\mathbf{R}$  rendezett testet alkot, azért ez igaz  ${}^*\mathbf{R}$ -re is ugyanazokkal a műveletekkel, és  ${}^*\mathbf{R}$ , mint test, bővítése  $\mathbf{R}$ -nek.  $\mathbf{R}$ -ben minden páratlan fokú polinomnak van gyöke, tehát ugyanez igaz  ${}^*\mathbf{R}$ -ben is, így  ${}^*\mathbf{R}$  valóban zárt test. Viszont  ${}^*\mathbf{R}$  nem *archimédeszi*, vagyis nem minden eleme kisebb az  $1$ ,  $1 + 1$ ,  $1 + 1 + 1$ , stb. számok valamelyikénél. Valóban, az  $x > 1$ ,  $x > 1 + 1$ ,  $\dots$  formulahalmaz  $\mathbf{R}$  fölött konkurrens, ezért van  ${}^*\mathbf{R}$ -ben olyan elem, amelyik mindegyiket kielégíti, tehát nagyobb minden sztenderd egésznél. Az ilyen végtelen nagy szám reciproka persze még mindig pozitív, viszont kisebb mint  $1/n$ , ha  $n$  sztenderd egész szám.



**4.1. Definíció** Az  $x \in {}^*\mathbf{R}$  szám *végtelen*, ha abszolút értéke nagyobb minden sztenderd számnál, *véges*, ha  $|x| < n$  valamilyen  $n$  sztenderd egészre, és *végtelenül kicsi*, vagy más néven *infinitesimális*, ha  $|x| < 1/n$  minden  $n$  sztenderd pozitív egész számra. Végül  $x$  és  $y$  *végtelenül közel van egymáshoz*, jelben  $x \simeq y$ , ha  $x - y$  végtelenül kicsi.

A definíció alapján világos, hogy  $x$  pontosan akkor infinitesimális, ha  $|x| < \varepsilon$  minden pozitív sztenderd  $\varepsilon$ -ra. A  $\simeq$  ekvivalencia reláció: mivel 0 végtelenül kicsiny, azért  $x \simeq x$ , továbbá  $x \simeq y$  esetén  $y \simeq x$  is igaz; végül a tranzitivitás: ha  $|x - y|$  valamint  $|y - z|$  is infinitesimális, akkor tetszőleges  $n$  sztenderd egészre

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

tehát  $|x - z|$  is végtelenül kicsiny. Ezért  ${}^*\mathbf{R}$  szétesik a  $\simeq$  szerinti ekvivalenciaosztályokra. Minden ilyen osztályban legfeljebb egy sztenderd valós szám lehet, hiszen különböző sztenderd valós számok nincsenek végtelenül közel egymáshoz. Azt az ekvivalencia osztályt, amibe az  $r \in {}^*\mathbf{R}$  szám esik, az  $r$  *monádjának* nevezzük, és  $\mu(r)$ -rel jelöljük.

**4.2. Állítás** Az  $r \in R$  monádja a 0 monádjának  $r$ -rel való eltolója:  $\mu(r) = r + \mu(0)$ .

**Bizonyítás** A  $\simeq$  definíciója alapján  $r \simeq x$  akkor és csak akkor, ha  $0 \simeq r - x$ , vagyis  $\simeq$  eltolásinvariáns. Innen az állítás azonnal következik. ■

Mivel végtelenül kicsiny mennyiségek összege is végtelenül kicsiny, azért  $x_1 \simeq x_2$  és  $y_1 \simeq y_2$  esetén  $x_1 + y_1 \simeq x_2 + y_2$ . Ugyanez általában nem igaz összeg helyett a szorzatra, hiszen ha  $\varrho$  tetszőleges végtelen szám, akkor  $0 \simeq 1/\varrho$ , míg ugyanakkor  $0 = 0 \cdot \varrho$  és  $1 = (1/\varrho) \cdot \varrho$  nincs végtelenül közel egymáshoz. Amit mondhatunk, az annyi, hogy ha  $x_1$  és  $x_2$  végtelenül közel vannak egymáshoz, továbbá  $y$  *véges*, akkor  $x_1 \cdot y \simeq x_2 \cdot y$ .

**4.3. Állítás**  $x \in {}^*\mathbf{R}$  akkor és csak akkor véges, ha  $x$  egy sztenderd valós szám monádjának eleme.

**Bizonyítás** Ha  $r$  sztenderd és  $x \in \mu(r)$ , akkor  $|x| < |r| + 1$ , tehát  $x$  tényleg véges. Fordítva tegyük fel, hogy  $x$  véges. Azt kell megmutatnunk, hogy valamilyen sztenderd valós számhoz végtelenül közel van. Ha  $x$  sztenderd, akkor ez persze így is van. Ha  $x$  véges és nem sztenderd, akkor két diszjunkt nem-üres részre osztja a sztenderd valóságokat: azokra, melyek kisebbek nála, és azokra, amelyek nagyobbak. Legyenek ezek a halmazok  $X_1 = \{r \in \mathbf{R} : r < x\}$  valamint  $X_2 = \{r \in \mathbf{R} : x < r\}$ . Az  $X_1$  bármelyik eleme kisebb az  $X_2$  bármelyik eleménél, ezért az  $\langle X_1, X_2 \rangle$  pár egy Dedekind-szeletet határoz meg. Így vagy van  $X_1$ -ben maximális elem, vagy van  $X_2$ -ben minimális, jelöljük ezt a sztenderd valós számot  $r$ -rel. Az első esetben  $r < x < r + \varepsilon$ , a másodikban  $r - \varepsilon < x < r$  minden pozitív sztenderd  $\varepsilon$ -ra, vagyis mindkét esetben  $r$  és  $x$  végtelenül közel vannak egymáshoz. ■

Mivel a természetes számok  $\mathbf{N}$  halmaza része a valóságok  $\mathbf{R}$  halmazának, azért a „természetes számnak lenni” relációt az  ${}^*\mathbf{R}$ -ben kielégítő  ${}^*\mathbf{N}$  a 3.5. tétel szerint  $\mathbf{N}$  bővítése. Egy  $n \in {}^*\mathbf{N}$  az előző fejezetbeli definíció értelmében végtelen, ha nem sztenderd; ez pontosan akkor következik be, ha ugyanez a szám, mint  ${}^*\mathbf{R}$  eleme, a 4.1. definíció szerint végtelen.

Megjegyezzük, hogy mind a véges, mind a végtelen valós számok halmaza is külső. Ez azonnal következik abból, hogy a 3.7. állítás szerint mind a véges, mind a végtelen természetes számok halmaza külső, és abból, hogy belső halmaznak és  ${}^*\mathbf{N}$ -nek a metszete is belső. Hasonlóan minden sztenderd szám monádja is külső halmaz, ezt természetesen elegendő a 0 monádjára ellenőrizni. A  $\mu(0)$ -ba eső nullától különböző számok reciprokai a végtelen nagy valóságokat adják ki, így ha  $\mu(0)$  belső volna, akkor ez utóbbi halmaznak is belsőnek kellene lennie.

Legyen most  $\{x_n\}$  egy (sztenderd) valós számokból álló (sztenderd) sorozat. Egy ilyen sorozat tulajdonképpen nem más, mint egy függvény, ami minden természetes számhoz hozzárendel egy-egy valós

számot, az  $n$ -hez rendelt érték éppen  $x_n$ . Láttuk, hogy minden függvény automatikusan kiterjed a bővítésben, tehát ugyanaz a függvény, ami  $n$ -hez  $x_n$ -t rendeli, a bővítésben  ${}^*\mathbf{N}$  minden eleméhez hozzárendeli  ${}^*\mathbf{R}$  valamely elemét. Más szavakkal egy (sztenderd) sorozatnak minden  $n \in {}^*\mathbf{N}$  indexre van  $n$ -edik eleme.

Természetesen ha a sorozat elemei kielégítettek valamilyen összefüggést, akkor ugyanaz az összefüggés a végtelen indexű elemekre is igaz marad. Ha például  $x_n = 1/n$ , akkor ugyanez áll akkor is, ha  $n$  végtelen. Ez abból következik, hogy az  $\{x_n\}$  sorozatot, mint kétváltozós relációt jelentő konstansjelre felírható formulák benne vannak az alapmodell elméletében, és így igazak maradnak a bővítésben is.

Emlékeztetünk az analízis néhány definíciójára. Az  $\{x_n\}$  sorozat *korlátos*, ha minden  $n$  indexre  $|x_n| < M$  valamely  $M \in \mathbf{R}$  számra. Az  $\{x_n\}$  sorozat *konvergál*  $r$ -hez, ha minden  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $n_0$  küszöbindex, hogy  $n > n_0$  esetén  $|x_n - r| < \varepsilon$ . A sorozat *Cauchy*, ha minden pozitív  $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan  $n_0$ , hogy  $n, m > n_0$  esetén  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ . Végül a sorozatnak az  $r$  *torlódási pontja*, ha minden pozitív  $\varepsilon > 0$ -hoz és  $n_0$  indexhez van olyan  $n > n_0$ , amire  $|x_n - r| < \varepsilon$ .

**4.4. Állítás**  $\{x_n\}$  akkor és csak akkor korlátos, ha a sorozat végtelen indexű elemei végesek.

**Bizonyítás** Tegyük fel először, hogy  $\{x_n\}$  korlátos, vagyis  $|x_n| < M$  valamilyen (sztenderd)  $M$  valós számra. Ekkor az alábbi formula (pontosabban a formula megfelelő formalizáltja) igaz az alapmodellben:  $(\forall n \in \mathbf{N}) (|x_n| < M)$ , tehát ez a formula benne van az alapmodell elméletében. Ezért ugyanez a formula igaz a bővítésben is, itt  $M$  mint önmagát jelentő valós szám változatlan marad;  $\mathbf{N}$ -et helyettesítenünk kell  ${}^*\mathbf{N}$ -nel, az  $\{x_n\}$  sorozat szintén megmarad. Így kapjuk, hogy  $(\forall n \in {}^*\mathbf{N}) (|x_n| < M)$ , vagyis a sorozat *összes*, tehát a végtelen indexű elemei is kisebbek  $M$ -nél, és így végesek.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $\{x_n\}$  nem korlátos, vagyis  $(\forall M \in \mathbf{R}) (\exists n \in \mathbf{N}) (|x_n| > M)$ . Most ez a formula igaz az alapmodellben, ezért

a bővítésben teljesül, hogy

$$(1) \quad (\forall M \in {}^*\mathbf{R}) (\exists n \in {}^*\mathbf{N}) (|x_n| > M).$$

Válasszunk  $M$ -nek egy végtelen nagy valós számot. (1) szerint találhatunk hozzá olyan  $n \in {}^*\mathbf{N}$  indexet, hogy a sorozat  $n$ -edik tagja abszolút értékben  $M$ -nél nagyobb. Ez az  $n$  nem lehet véges, hiszen a sorozat véges indexű tagja mind végesek, ezért van olyan végtelen  $n$ , amire  $|x_n|$  végtelen, ahogyan állítottuk. ■

**4.5. Állítás** Az  $\{x_n\}$  sorozat akkor és csak akkor konvergál  $r$ -hez, ha a sorozat végtelen indexű tagjai  $r$  monádjába esnek.

**Bizonyítás** Tegyük fel először, hogy  $\{x_n\}$  konvergál  $r$ -hez. Legyen  $\omega$  tetszőleges végtelen természetes szám, azt akarjuk megmutatni, hogy  $x_\omega$  az  $r$  monádjába esik, vagyis hogy az  $|x_\omega - r|$  különbség minden pozitív sztenderd  $\varepsilon$  számnál kisebb. Rögzítsük tehát ezt az  $\varepsilon > 0$  számot. A konvergencia szokásos definíciója szerint létezik olyan (sztenderd)  $n_0$  küszöbszám, hogy valahányszor  $n > n_0$ , akkor  $|x_n - r| < \varepsilon$ , vagyis a következő formula igaz az alapmodellben:

$$(\forall n \in \mathbf{N}) (n > n_0 \rightarrow |x_n - r| < \varepsilon).$$

Ugyanez a formula igaz a bővítésben is, az egyetlen különbség, hogy  $\mathbf{N}$  helyett  ${}^*\mathbf{N}$ -t kell írunk, vagyis nemcsak  $\mathbf{N}$ , hanem  ${}^*\mathbf{N}$  minden  $n_0$ -nál nagyobb elemére is igaz, hogy az ilyen indexű tag  $r$ -hez  $\varepsilon$ -nál közelebb van. Speciálisan  $\omega > n_0$ , hiszen  $\omega$  végtelen és  $n_0$  véges, tehát  $|x_\omega - r| < \varepsilon$ , amit igazolni akartunk.

Fordítva, tegyük fel, hogy minden végtelen  $\omega$  indexre  $x_\omega \simeq r$ . Állítjuk, hogy  $\{x_n\}$  konvergál  $r$ -hez. Válasszunk egy pozitív sztenderd  $\varepsilon > 0$  számot, ehhez keresünk megfelelő küszöbindexet. Mivel  $|x_n - r| < \varepsilon$  minden végtelen  $n$  indexre, azért a következő állítás igaz a bővítésben:

$$\exists n_0 (\forall n > n_0) (|x_n - r| < \varepsilon),$$

hiszen  $n_0$ -nak tetszőleges végtelen szám megfelel. Ezért ugyanez a formula igaz az alapmodellben is, ami a keresett  $n_0$  létezését adja. ■

**4.6. Állítás** Az  $\{x_n\}$  akkor és csak akkor Cauchy-sorozat, ha végtelen indexű elemei ugyanabba a monádba esnek.

**Bizonyítás** Legyen először  $\{x_n\}$  Cauchy sorozat. Elegendő megmutatnunk, hogy két tetszőleges végtelen indexű tag különbsége kisebb minden sztenderd  $\varepsilon > 0$ -nál. Mivel  $\{x_n\}$  Cauchy, azért ehhez az  $\varepsilon$ -hoz található egy (sztenderd)  $n_0$  küszöbindex, amivel igaz, hogy

$$\forall n \forall m (n > n_0 \wedge m > n_0 \rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon).$$

Ugyanez a formula a bővítésben is igaz, tehát végtelen  $n, m$  indexekre  $x_n$  és  $x_m$  különbsége szükségképpen infinitezimális.

Fordítva, legyen adva  $\varepsilon > 0$  sztenderd pozitív szám. Az alábbi formula igaz a bővítésben, egyszerűen  $n_0$ -ként tetszőleges végtelen indexet vehetünk:

$$\exists n_0 \forall n \forall m (n > n_0 \wedge m > n_0 \rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon).$$

Következésképp ugyanez a formula igaz az alapmodellben is, tehát létezik a megfelelő küszöbindex, a sorozat Cauchy. ■

**4.7. Tétel** (Sztenderd) Minden konvergens sorozat Cauchy, és minden Cauchy sorozat konvergens.

**Bizonyítás** A 4.5. állítás szerint konvergens sorozat végtelen tagjai a sorozat limeszének monádjába esnek, ezért az előző állítás szerint a sorozat Cauchy. A fordított irányhoz először is megjegyezzük, hogy egy Cauchy sorozat korlátos, például ha az  $\varepsilon = 1$ -hez tartozó küszöbindex  $n_0$ , akkor  $x_{n_0+1}$ -től minden későbbi indexű elem legfeljebb eggyel térhet el, ezeken kívül pedig a sorozatnak véges sok tagja van. Ezért a 4.4. állítás szerint a sorozat végtelen indexű tagjai végesek, az előző állítás szerint ugyanabba a monádba esnek, és 4.3. szerint ebben a monádban pontosan egy sztenderd szám van, mondjuk  $r$ . Ezek szerint az  $\{x_n\}$  sorozat végtelen indexű tagjai mind  $r$  monádjába esnek, ezért a 4.5. állítás szerint  $\{x_n\}$  konvergál  $r$ -hez. ■

**4.8. Állítás** Az  $\{x_n\}$  sorozatnak  $r$  akkor és csak akkor torlódási pontja, ha van olyan végtelen  $\omega$  index, hogy  $x_\omega \simeq r$ .

**Bizonyítás** Tegyük fel először, hogy  $r$  torlódási pont, ez azt jelenti, hogy minden  $\varepsilon > 0$ -hoz és  $n_0$ -hoz van a sorozatnak  $n_0$ -nál nagyobb indexű,  $r$ -hez  $\varepsilon$ -nál közelebb eső tagja:

$$(\forall \varepsilon > 0) \forall n_0 \exists n (n > n_0 \wedge |r - x_n| < \varepsilon).$$

Ez a formula igaz marad a bővítésben is, válasszuk meg  $\varepsilon$ -t végtelen kicsi, de azért pozitív számnak,  $n_0$ -at pedig végtelen nagynak. Ekkor van  $n$  végtelen (mert  $n_0$ -nál nagyobb) index, hogy  $r$  és  $x_n$  távolsága infinitezimális, tehát  $x_n \simeq r$ .

Fordítva, tegyük fel, hogy  $r$  olyan (sztenderd) valós szám, amihez található olyan végtelen  $\omega$  index, amire  $x_\omega \simeq r$ . Állítjuk, hogy  $r$  torlódási pontja a sorozatnak. Ezt megmutatandó, válasszunk egy pozitív (sztenderd)  $\varepsilon$  értéket és egy (véges)  $n_0$  küszöbindexet. Azt kell megmutatnunk, hogy a sorozatban van  $n_0$  után  $r$ -hez  $\varepsilon$ -nál közelebb eső elem. Most a bővítésben igaz az, hogy

$$\exists n (n > n_0 \wedge |r - x_n| < \varepsilon),$$

hiszen  $n = \omega$  ilyen. Következésképp ugyanez a formula az alapmodellben is teljesül, ami bizonyítja állításunkat. ■

**4.9. Tétel** (Sztenderd, Bolzano–Weierstrass) Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

**Bizonyítás** A 4.4. állítás szerint korlátos sorozat végtelen indexű tagjai végesek, a véges számok viszont 4.3. szerint egy-egy sztenderd szám monádjában vannak. Ezek a sorozatnak mind torlódási pontjai. ■

**4.10. Definíció** Egy véges  $x$  szám sztenderd részének nevezzük, és  ${}^\circ x$ -szel jelöljük azt a sztenderd valós számot, aminek  $x$  a monádjában van.

Ezt a jelölést használva pontosan megmondhatjuk, hogy mik egy sorozat torlódási pontjai: ezek a végtelen indexű tagok közül a végesek sztenderd részei.

Könnyen ellenőrizhető, hogy két véges szám összegének, szorzatának sztenderd része a sztenderd részek összege illetve szorzata. Ugyanez a hányadosra is igaz, feltéve hogy a nevező sztenderd része nem nulla. Véges számokon a sztenderd rész *monoton*, vagyis ha  $x \leq y$  és mindketten végesek, akkor  ${}^{\circ}x \leq {}^{\circ}y$  is teljesül.

**4.11. Tétel** (Sztenderd) *Legyen  $r$  torlódási pontja az  $\{x_n\}$  sorozatnak. Ekkor van a sorozatnak  $r$ -hez konvergáló részsorozata.*

**Bizonyítás** Mivel a sorozatnak van olyan végtelen indexű tagja, ami végtelenül közel van  $r$ -hez, azért tetszőleges sztenderd  $\varepsilon > 0$ -ra és véges  $n_0$  számra a bővítésben igaz, hogy

$$(2) \quad \exists k (k > n_0 \wedge |x_k - r| < \varepsilon),$$

tehát ugyanez a formula igaz az alapmodellben is. Válasszuk  $\varepsilon = 1$ -et, ekkor (2) szerint van  $k_1$  index, hogy  $|x_{k_1} - r| < 1$ , és általában, ha már a  $k_{n-1}$  indexet kiválasztottuk, akkor (2)-t  $\varepsilon = 1/n$ -nel alkalmazva található olyan  $k_n > k_{n-1}$ , amire  $|x_{k_n} - r| < 1/n$ . Világos, hogy az  $\{x_{k_n}\}$  részsorozat  $r$ -hez konvergál. ■

Ebben a bizonyításban a torlódási pont nemsztenderd definíciójából indultunk ki, a kapott (2) összefüggés lényegében a ugyanennek a sztenderd ekvivalense, ahogyan azt a 4.8. állításban már láttuk.

Legyen  $f$  egy valósakon értelmezett, valós értékeket felvevő függvény,  $f$  automatikusan kiterjed a bővítésre is. Az  ${}^*\mathbf{R} \rightarrow {}^*\mathbf{R}$  függvények közül azokat, melyek valamilyen  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  függvény ilyen értelemben vett kiterjesztései, *sztenderdeknek* nevezzük. A továbbiakban, ha külön az ellenkezőjét nem mondjuk, függvényeink értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Az alábbiakban kimondott tételek könnyen átvihetők arra az esetre is, mikor az értelmezési tartomány egy tetszőleges intervallum.

**4.12. Állítás** Az  $f$  sztenderd függvény az  $x \in \mathbf{R}$  sztenderd pontban pontosan akkor folytonos, ha  $x \simeq y$  esetén  $f(x) \simeq f(y)$ . Más szavakkal  $f$  folytonos, ha végtelen közeli helyeken végtelen közeli értékeket vesz fel.

**Bizonyítás** Tegyük fel először, hogy  $f$  folytonos az  $x$  pontban, és  $y \in {}^*\mathbf{R}$  végtelenül közel van  $x$ -hez. Azt kell megmutatnunk, hogy  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  minden pozitív sztenderd  $\varepsilon$ -ra. Rögzítsünk tehát egy ilyen  $\varepsilon > 0$  számot. Feltételünk szerint  $f$  folytonos az  $x$  pontban, a folytonosság szokásos definíciója szerint ekkor található olyan sztenderd  $\delta > 0$ , amire

$$\forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ez a formula igaz az alapmodellben, tehát igaz a bővítésben is. Így ha  $y$  végtelenül közel van  $x$ -hez, akkor  $x$  és  $y$  távolsága természetesen kisebb  $\delta$ -nál, következésképp  $f(x)$  és  $f(y)$  távolsága is kisebb  $\varepsilon$ -nál, ahogyan kívántuk.

Fordítva tegyük fel, hogy  $x$  monádjának képe beleesik  $f(x)$  monádjába, be akarjuk látni, hogy ekkor  $f$  folytonos az  $x$  pontban. Válasszunk egy pozitív sztenderd  $\varepsilon$  valós számot, ehhez keresünk megfelelő  $\delta > 0$ -t. Most a bővítésben igaz, miszerint

$$(\exists \delta > 0) \forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$$

hiszen itt  $\delta$ -nak tetszőleges végtelenül kicsiny mennyiség megfelelő. Tehát ugyanez a formula igaz az alapmodellben is, amivel a megfelelő  $\delta$  létezését bizonyítottuk. ■

**4.13. Állítás** Az  $f$  függvény akkor és csak akkor korlátos az  $A \subset \mathbf{R}$  halmazon, ha  ${}^*A$  elemein csak véges értékeket vesz fel.

**Bizonyítás** Az, hogy  $f$  korlátos  $A$ -n, azt jelenti, hogy valamilyen  $M$  sztenderd valós számra  $(\forall x \in A) (|f(x)| < M)$ . Ugyanez a formula a



bővítésben azt mutatja, hogy  $f$  az  ${}^*A$  halmazon csupa véges értéket vesz fel.

Fordítva, ha  $f$  csak véges értékeket vesz fel  ${}^*A$ -n, akkor a bővítésben teljesül az, hogy  $\exists M (\forall x \in {}^*A) (|f(x)| < M)$ , hiszen  $M$ -nek tetszőleges végtelen nagy valós szám megfelel. Ezért ugyanez a formula igaz az alapmodellben is, vagyis  $f$  korlátos  $A$ -n. ■

**4.14. Tétel** (Sztenderd) *Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.*

**Bizonyítás** Jelöljük  $A$ -val az  $[a, b]$  zárt intervallumot,  $x \in A$  pontosan akkor, ha  $a \leq x \leq b$ . A bővítésben  ${}^*A$  definíciója ugyanez a formula, ezért  ${}^*A$  minden  $x$  eleme is  $a$  és  $b$  közé esik, tehát véges, továbbá  $x$  sztenderd része,  ${}^{\circ}x$  is eleme az  $[a, b]$  intervallumnak. Mivel  $f$  folytonos  $A$ -n, azért tetszőleges  $x \in {}^*A$  esetén  $f(x) \simeq f({}^{\circ}x)$ , ezért  $f(x)$  szükségképpen véges. Az előző állítás szerint ekkor  $f$  korlátos is. ■

**4.15. Tétel** (Sztenderd, Weierstrass) *Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény felveszi maximumát.*

**Bizonyítás** Legyen a zárt intervallum  $[a, b]$ , és legyen  $\omega$  egy végtelen természetes szám. Osszuk fel az intervallumot  $\omega$  egyenlő részre, az osztópontok  $r_i = a + i \cdot (b - a) / \omega$ , ahol  $i = 0, 1, 2, \dots, \omega$ . Ez a felosztás formálisan tulajdonképpen  ${}^*N$  egy kezdőszületéből  ${}^*R$ -be képező belső függvény. Belső, hiszen képlettel definiáltuk, és az ilyenek a 3.9. tétel szerint belső objektumok. Véges sok szám között mindig van legnagyobb, ezt a következőképpen fogalmazzuk át: „ha  $N$  egy kezdőszületének elemeihez valós számokat rendelünk, azok között lesz maximális.” Az idézőjelbeli állítás már formalizálható, és így a bővítésben is igaz, azzal különbséggel hogy  $N$  helyett  ${}^*N$ -et kell tennünk. Legyen az  $i$ -hez rendelt szám  $f(r_i)$ , tehát az  $f(r_i)$  számok között van maximális, mondjuk  $f(r_k)$  ilyen:

$$\text{minden } 0 \leq i \leq \omega \text{ esetén } f(r_i) \leq f(r_k).$$

Legyen  $r = {}^{\circ}r_k$ , vagyis az  $r_k$  sztenderd része,  $a \leq r_k \leq b$  miatt  $r$

is eleme az  $[a, b]$  zárt intervallumnak. Állítjuk, hogy sztenderd  $x$ -ekre  $f(x) \leq f(r)$ , vagyis  $f$  a maximumát az  $r$  pontban veszi fel.

Legyen ehhez  $x$  tetszőleges sztenderd pontja az  $[a, b]$  intervallumnak. Mivel a szomszédos  $r_i$  osztópontok közötti távolság  $(b - a)/\omega$ , valamelyikük biztosan beleesik  $x$  monádjába. Ez például következik abból, hogy minden legalább  $2(b - a)/\omega$  hosszúságú intervallumban van osztópont, így van az  $(x - (b - a)/\omega, x + (b - a)/\omega)$  intervallumban is, ami viszont teljes egészében benne van  $x$  monádjában. Legyen ez az osztópont mondjuk  $r_i \in \mu(x)$ . Az  $f$  folytonos az  $x$  és  $r$  pontokban, tehát  $f(x) = {}^{\circ}f(r_i)$ ,  $f(r) = {}^{\circ}f(r_k)$ . Még azt is tudjuk, hogy  $f(r_i) \leq f(r_k)$ , ebből a sztenderd rész monotonitása miatt  ${}^{\circ}f(r_i) \leq {}^{\circ}f(r_k)$ . Tehát  $f(x) \leq f(r)$ , amit bizonyítanunk kellett. ■

**4.16. Tétel** (Sztenderd, Bolzano) *Legyen  $f$  folytonos az  $[a, b]$  zárt intervallumon,  $f(a) < 0$  és  $f(b) > 0$ . Ekkor van olyan  $a < c < b$ , hogy  $f(c) = 0$ .*

**Bizonyítás** Válasszunk ismét egy végtelen  $\omega$  természetes számot, és osszuk fel az  $[a, b]$  intervallumot  $\omega$  egyenlő részre az  $\{r_i : i \leq \omega\}$  pontokkal. Az első osztópontban felvett érték negatív, az utolsóban pedig pozitív. Véges sorozat esetén mindig van egy olyan közbülső  $i$  index, mikor a sorozat éppen vált, vagyis  $f(r_i) < 0$  de  $f(r_{i+1}) \geq 0$ . Ezt az állítást az előző tételbeli meggondoláshoz hasonlóan formalizálhatjuk, így ha „véges” jelenti a „végesnek lenni” reláció bővítésbeli megfelelőjét (például  ${}^*\mathbb{N}$  kezdőszeletei ilyenek), akkor az  $\{f(r_i) : i \leq \omega\}$  sorozat  ${}^*$ véges, és így benne is van egy legkisebb  $i$  index, amikor a sorozat vált, vagyis olyan  $0 \leq i < \omega$ , hogy  $f(r_i) < 0$  és  $f(r_{i+1}) \geq 0$ . Mivel  $r_i$  és  $r_{i+1}$  távolsága  $1/\omega$ , vagyis végtelenül kicsi, azért  $r_i \simeq r_{i+1}$ , vagyis mindkettő ugyanannak a sztenderd  $c$  számnak van a monádjában. Az  $f$  folytonos ebben a  $c$  pontban is, tehát  $c$  monádjában található értékek képe beleesik  $f(c)$  monádjába. Az egyetlen szám, aminek a monádjában negatív és nem-negatív értékek egyaránt előfordulnak, a nulla, ezért  $f(c)$  szükségképpen 0, amit bizonyítanunk kellett. ■

Az  $f$  függvény egyenletesen folytonos az  $A \subset \mathbb{R}$  intervallumon, ha  $A$  pontjaiban az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  számot az  $x$ -től függetlenül tudjuk megválasztani: minden pozitív  $\varepsilon$ -hoz van olyan  $\delta > 0$ , hogy tetszőleges  $x, y \in A$ -ra  $|x - y| < \delta$  esetén  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**4.17. Tétel** (Sztenderd) *Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen folytonos.*

**Bizonyítás** Jelöljük a korlátos zárt  $[a, b]$  intervallum pontjainak halmazát  $A$ -val, és legyen  $x$  és  $y$  két olyan (nem feltétlenül sztenderd) pontja  ${}^*A$ -nak, melyek végtelenül közel vannak egymáshoz.  $x$  és  $y$  is véges, sztenderd részük eleme  $A$ -nak, és persze ugyanaz. Ezért

$$f(x) \simeq f({}^\circ x) = f({}^\circ y) \simeq f(y),$$

így  $f(x) \simeq f(y)$ , vagyis  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  tetszőleges pozitív sztenderd  $\varepsilon$ -ra. Ezért  $\delta$ -nak tetszőleges végtelenül kicsi pozitív számot választva adódik, hogy az alábbi állítás teljesül a bővítésben:

$$(\exists \delta > 0) \forall x \forall y (x \in {}^*A \wedge y \in {}^*A \wedge |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ezért ugyanez a formula igaz az alapmodellben is, vagyis az adott  $\varepsilon$ -hoz létezik olyan (sztenderd)  $\delta > 0$ , hogy ha  $x$  és  $y$  távolsága kisebb mint  $\delta$ , és mindketten  $A$ -ból valók, akkor  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , vagyis  $f$  valóban egyenletesen folytonos  $A$ -n. ■

Az  $f$  függvény  $x$  pontbeli deriváltja az  $(f(x+h) - f(x))/h$  kifejezés határértéke  $h \rightarrow 0$  esetén, feltéve, hogy létezik.

**4.18. Állítás** *Az  $f$  függvény  $x$  pontbeli deriváltja  $f'(x) = c$  akkor és csak akkor, ha minden nullától különböző infinitezimális  $h$ -ra*

$$(4) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \simeq c.$$

**Bizonyítás** Ugyanazt a módszert alkalmazzuk, mint korábban. Ha  $f'(x) = c$  létezik, akkor definíció szerint az  $\varepsilon > 0$  sztenderd számhoz

található  $\delta > 0$ , hogy  $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  esetén az  $(f(x+h) - f(x))/h$  hányados  $c$ -hez  $\varepsilon$ -nál közelebb van. Ez mutatja, hogy ha  $h$  infinitezimális, akkor (4) két oldalának különbsége kisebb  $\varepsilon$ -nál, tehát valóban infinitezimális.

Fordítva, ha (4) igaz infinitezimális  $h$ -kra, akkor rögzített sztenderd  $\varepsilon > 0$ -ra az állítás, miszerint „létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy  $|h| < \delta$ ,  $h \neq 0$  esetén a bal oldali tört és  $c$  értéke  $\varepsilon$ -nál közelebb van” igaz a bővítésben ( $\delta$ -nak tetszőleges pozitív infinitezimális mennyiség megfelel), tehát igaz az alapmodellben is. Ezért a tört határértéke  $c$ . ■

**4.19. Tétel** (Sztenderd) *Ha  $f$  deriválható az  $x$  pontban, akkor ott folytonos is.*

**Bizonyítás** Legyen a kérdéses pontban a derivált  $c$ ,  $h$  pedig végtelenül kicsi szám, ekkor  $f(x+h) - f(x) \simeq h \cdot c$ . Mivel  $h$  infinitezimális,  $c$  pedig véges, azért  $h \cdot c$  is infinitezimális, vagyis  $f(x+h) \simeq f(x)$ . A 4.12. állítás szerint ekkor  $f$  folytonos az  $x$  pontban. ■

A derivált nemsztenderd jellemzésével könnyen igazolhatók az összeg, különbség, szorzat, hányados, összetett függvény deriváltjára vonatkozó szabályok. Például  $f + g$  deriváltja

$$\begin{aligned}
 (5) \quad (f(x) + g(x))' &\simeq \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\
 &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &\simeq f'(x) + g'(x),
 \end{aligned}$$

hiszen két szám összegének sztenderd része megegyezik a sztenderd részek összegével. Az első és utolsó tag egyaránt sztenderd, ugyanabba a monádba esnek, tehát egyenlők is.

Ez a számolás azt mutatta meg, hogy ha  $f(x)$ ,  $g(x)$  valamint az összegük is deriválható az  $x$  pontban, akkor az összeg deriváltja egyenlő a deriváltak összegével. A pontos tétel viszont úgy szól, hogy

ha  $f(x)$  és  $g(x)$  is deriválható, akkor az összegük is, és ez utóbbi derivált értéke  $f'(x) + g'(x)$ . Ez utóbbi állítás igazolására 4.18. szerint az kell megmutatnunk, hogy ha  $h$  tetszőleges nem nulla infinitezimális mennyiség, akkor

$$\frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h}$$

sztenderd része  $f'(x) + g'(x)$ . Ezt viszont (5) mutatja, amennyiben elfelejtkezünk a bal oldalon álló első tagról.

A szorzatra a számolás a következő: ha  $f$  és  $g$  is deriválható az  $x$  pontban, és  $h$  tetszőleges nem nulla infinitezimális mennyiség, akkor

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} &= \\ &= f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\simeq f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x), \end{aligned}$$

hiszen végtelenül közeli mennyiségeket véges számmal szorozva továbbra is végtelenül közeli mennyiségeket kapunk. Ezért ekkor  $f(x) \cdot g(x)$  is deriválható, és a derivált értéke  $f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$ .

Az  $F(x) = f(g(x))$  összetett függvény deriváltja megegyezik az  $(F(x+h) - F(x))/h$  hányados sztenderd részével tetszőleges végtelen kicsi  $h$ -ra. Mivel ilyenkor  $g(x+h)$  és  $g(x)$  is végtelenül közel vannak egymáshoz (hiszen  $g(x)$  folytonos), azért  $\ell = g(x+h) - g(x)$  infinitezimális, és ha nem nulla, akkor az

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f(g(x) + \ell) - f(g(x))}{\ell}$$

hányados sztenderd része  $f'(g(x))$ . Következésképp

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\simeq f'(g(x)) \cdot g'(x), \end{aligned}$$

ha  $g(x+h) \neq g(x)$ . Ha pedig itt egyenlőség áll, akkor  $g'(x)$  csak nulla lehet, és így

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 0 = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ezért  $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ , ahogyan azt az iskolában tanultuk.

**4.20. Tétel** (Sztenderd) *Tegyük fel, hogy  $f$  az  $(a, b)$  nyílt intervallumban a maximumát a  $c$  pontban veszi fel, és ott deriválható. Ekkor  $f'(c) = 0$ .*

**Bizonyítás** Az  $f$  függvény nem csak a sztenderd  $(a, b)$  intervallumon, hanem a teljes nemsztenderd  $^*(a, b)$  intervallumon is a  $c$ -ben veszi fel a maximumát. Ennek oka, hogy a  $c$ -beli maximalitást kifejező

$$\forall x (a < x < b \rightarrow f(x) \leq f(c))$$

formula igaz a bővítésben is. Ha most  $h$  infinitezimális, akkor  $c+h$  is eleme az  $^*(a, b)$  nyílt intervallumnak, és ezért  $f(c+h) \leq f(c)$ . Következésképp

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \geq 0 & \text{ha } h < 0, \\ \leq 0 & \text{ha } h > 0. \end{cases}$$

Tudjuk, hogy a bal oldali tört  $f'(c)$  monádjába esik, márpedig az egyetlen sztenderd szám, aminek monádjába mind  $\geq 0$ , mind  $\leq 0$  szám is esik, a 0. Ezért  $f'(c) = 0$ , ahogyan állítottuk. ■

A sztenderd végpontú  $[a, b]$  zárt intervallum egy *finom felosztásán* egy  $x_0, x_1, \dots, x_\omega$  valamint egy  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\omega-1}$  belső számsorozat együttesét értjük, ahol  $\omega$  egy végtelen természetes szám,  $x_0 = a$ ,  $x_\omega = b$ , az  $x_i$  sorozat szigorúan monoton nő, a szomszédos osztópontok közötti  $x_{i+1} - x_i$  távolság minden  $0 \leq i < \omega$  indexre infinitezimális, végül  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ . Legyen  $\pi$  egy finom felosztás,  $f(x)$  pedig

egy, az  $[a, b]$  intervallumon értelmezett függvény.  $f$ -nek a  $\pi$ -hez tartozó *integrálösszege*

$$(6) \quad S(\pi, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\omega-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Az itt álló  $\sum$  jel a sztenderd, véges sok számhoz azok összegét rendelő függvény nemsztenderd kiterjesztése. Bár az összegzés végtelen sok tagra terjed ki, a bővítésben  $\omega$  az  ${}^*\mathbb{N}$  eleme, vagyis ez végül is egy közönséges  ${}^*$ véges tagú összeg.

**4.21. Állítás** Legyen  $\pi_1$  és  $\pi_2$  a sztenderd végpontú  $[a, b]$  intervallumnak két finom felosztása,  $f$  pedig folytonos. Ekkor  $S(\pi_1, f) \simeq S(\pi_2, f)$ .

**Bizonyítás** Jelöljük  $\pi_1$  osztópontjait  $x_i$ -vel, a  $\pi_2$  osztópontjait  $y_j$ -vel, a közbülső pontok legyenek  $\pi_1$ -ben  $\xi_i$ ,  $\pi_2$ -ben  $\eta_j$ . Az  $x_i$  valamint  $y_j$  osztópontok unióját nagyság szerint rendezve az  $a = z_0 < z_1 < \dots < z_\nu = b$  pontokat kapjuk. Ez persze egy  ${}^*$ véges belső sorozat, amiben a tagok száma az  $x_i$  valamint  $y_j$   ${}^*$ véges sorozatok tagszámának összege, levonva belőle a két sorozat közös elemeinek számát. Ezekkel a (6) összeg a következőképpen írható át:

$$S(\pi_1, f) = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(\xi_{i(k)})(z_{k+1} - z_k),$$

$$S(\pi_2, f) = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(\eta_{j(k)})(z_{k+1} - z_k)$$

Itt  $\xi_{i(k)}$  valamint  $\eta_{j(k)}$  a  $\xi_i$  és az  $\eta_j$  értékek megismétlése annyiszor, ahányszor a megfelelő  $[z_k, z_{k+1}]$  intervallum része az  $[x_i, x_{i+1}]$  illetve  $[y_j, y_{j+1}]$  intervallumnak. Mivel  $\pi_1$ -ben és  $\pi_2$ -ben is a szomszédos osztópontok végtelenül közel vannak egymáshoz, azért minden  $k$ -ra

$\xi_{i(k)} \simeq \eta_{j(k)}$  is teljesül. Az  $f$  függvény folytonos, tehát ekkor  $f(\xi_{i(k)}) \simeq f(\eta_{j(k)})$  is igaz, így

$$\begin{aligned} |S(\pi_1, f) - S(\pi_2, f)| &\leq \sum_{k=0}^{\nu-1} |f(\xi_{i(k)}) - f(\eta_{j(k)})| (z_{k+1} - z_k) \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{\nu-1} (z_{k+1} - z_k) = \varepsilon \cdot (b - a) \end{aligned}$$

tetszőleges pozitív szttenderd  $\varepsilon$  számra. Ez igazolja állításunkat. ■

Mivel korlátos intervallumon folytonos függvény korlátos is, hasonló számítás mutatja, hogy a (6) alatti integrálösszeg véges. Ezért létezik egy és pontosan egy szttenderd valós szám, aminek monádjában az összes  $S(\pi, f)$  integrálösszeg benne van. Ezt a számot nevezzük *az  $f$  függvény  $[a, b]$  intervallumon vett határozott integráljának*, és így jelöljük:

$$(7) \quad \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} S(\pi, f).$$

**4.22. Állítás** *Az így definiált érték folytonos függvényekre ugyanaz, mint amit a határozott integrál szokásos definíciója ad.*

**Bizonyítás** Az  $[a, b]$  intervallum  $n \in \mathbb{N}$  részből álló  $x_0, x_1, \dots, x_n$  felosztása  $\delta$ -nál finomabb, ha a szomszédos osztópontok távolsága kisebb, mint  $\delta$ . Az integrál hagyományos definíciójából tudjuk, hogy minden pozitív  $\varepsilon$ -hoz található olyan  $\delta > 0$ , hogy ha  $\pi$  tetszőleges  $\delta$ -nál finomabb felosztás, akkor az integrál és az  $S(\pi, f)$  közelítő összeg különbsége kisebb  $\varepsilon$ -nál.

Ez az állítás formalizálható, és így a bővítésben is igaz. Ha most veszünk egy finom felosztást, akkor abban a szomszédos osztópontok távolsága mindenütt kisebb, mint a szttenderd  $\delta$ , ezért az integrál és az  $S(\pi, f)$  összeg különbsége kisebb, mint  $\varepsilon$ . Ez minden pozitív szttenderd  $\varepsilon$ -ra így van, tehát a két mennyiség távolsága infinitezimális, vagyis (7) jobb oldala tényleg az integrál értékét adja meg. ■



**4.23. Tétel** (Sztenderd, középértéktétel) *Tegyük fel, hogy  $f(x) \leq M$  minden  $x$ -re az  $[a, b]$  intervallumon. Ekkor  $\int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$ .*

**Bizonyítás** Az adott feltétel mellett  $f(\xi_i) \leq M$  tetszőleges  $\pi$  finom felosztás közbülső pontjaira. Ezért

$$S(\pi, f) = \sum_{i=0}^{\omega-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{\omega-1} M \cdot (x_{i+1} - x_i) = M \cdot (b - a).$$

Mivel  $M \cdot (b - a)$  sztenderd szám, azért nem csak  $S(\pi, f)$ , hanem ennek sztenderd része is kisebb vagy egyenlő nála, ahogyan állítottuk. ■

**4.24. Tétel** (Sztenderd, az integrálszámítás alaptétele) *Legyen  $F(u) = \int_a^u f(x) dx$ . Ekkor  $F'(u) = f(u)$ .*

**Bizonyítás** A határozott integrál (7) szerinti definíciója csak abban az esetben működik, ha az integrálás határai sztenderd valós számok. Ha ez nem így van, akkor azt tehetjük, hogy minden valós számra igaz összefüggéseket írunk fel, és azután következtetünk arra, hogy ugyanez érvényben marad nemsztenderd számokra is. Az első ilyen összefüggés az addíciós képlet:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx,$$

ami könnyen ellenőrizhetően az  $a, b, c$  számok tetszőleges elrendezése mellett igaz marad. Ehhez szokás szerint  $a > b$  esetére az  $\int_a^b f(x) dx$  integrált úgy definiáljuk, mint a már ismert értékű  $\int_b^a f(x) dx$  ellentettjét;  $\int_a^a f(x) dx$  pedig mindig nulla. A másik az előbb bizonyított középértéktétel: ha  $f(x) \leq M$  a teljes  $[a, b]$  intervallumon, akkor  $\int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$ . Mivel ezek az összefüggések minden *sztenderd* valós számra igazak, következésképp igazak maradnak akkor is, ha bennük  $a, b, c$  az  ${}^*\mathbf{R}$  tetszőleges elemei.

Ezek után térjünk rá a tétel bizonyítására. Mivel  $f$  folytonos az  $u$  sztenderd pontban, azért  $u \simeq v$  esetén  $f(u) \simeq f(v)$ , vagyis ilyen  $v \in {}^*\mathbf{R}$  számokra és tetszőleges pozitív sztenderd  $\varepsilon$ -ra

$$(8) \quad f(u) - \varepsilon < f(v) < f(u) + \varepsilon.$$

Válasszunk most egy nullától különböző végtelenül kicsi  $h$  mennyiséget,  $F'(u)$  nem más, mint  $(F(u+h) - F(u))/h$  sztenderd része. Beírva ide  $F(u+h)$  és  $F(u)$  definícióját, majd a fenti addíciós összefüggést alkalmazva

$$\begin{aligned} \frac{F(u+h) - F(u)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_a^{u+h} f(x) \, dx - \int_a^u f(x) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_u^{u+h} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Mivel a kérdéses  $[u, u+h]$  intervallumban (8) szerint az integrálandó függvény értéke  $f(u) - \varepsilon$  és  $f(u) + \varepsilon$  közé esik, azért a középérték tétel alapján a legutolsó integrál értéke  $h \cdot (f(u) - \varepsilon)$  és  $h \cdot (f(u) + \varepsilon)$  között van, vagyis

$$f(u) - \varepsilon < \frac{F(u+h) - F(u)}{h} < f(u) + \varepsilon.$$

Mivel ez tetszőleges sztenderd  $\varepsilon > 0$  értékre fennáll, a középső tört értéke  $f(u)$  monádjában van, és ezt kellett igazolnunk. ■

## 5. fejezet

# Topológikus terek

## 1. Általános topológia

Topológikus tér egy olyan  $\langle X, \tau \rangle$  pár, amelyben  $X$  egy nem-üres halmaz, és  $\tau$  az  $X$  részhalmazainak egy családja.  $X$  elemei a topológikus tér *pontjai*,  $\tau$  pedig a tér *nyílt* halmazai. Ahhoz, hogy egy ilyen  $\langle X, \tau \rangle$  pár topológia legyen, a következő feltételeknek kell teljesülniük:

- (i)  $X \in \tau$  valamint  $\emptyset \in \tau$  (vagyis az üres halmaz és az egész tér mindig nyílt);
- (ii) két nyílt halmaz metszete is nyílt; valamint
- (iii) nyílt halmazok tetszőleges halmazának uniója is nyílt. Egy topológikus tér *bázisa* nyílt halmazoknak olyan rendszere, hogy minden nyílt halmaz előáll bázisbeli halmazok uniójaként. A topológiát egyértelműen meghatározza tetszőleges bázisa. Jól jellemezhetők azok a halmazrendszerek, melyek valamilyen topológia bázisaként szerepelhetnek:
  - (i)  $X$  minden eleme benne kell hogy legyen a bázis valamelyik elemében;
  - (ii) ha  $A$  és  $B$  a bázis két eleme,  $x \in A \cap B$ , akkor van olyan  $x$ -et tartalmazó báziselem, ami része  $A \cap B$ -nek.

Egy topológikus teret azonosítunk a  $T = \langle X, \tau \rangle$  teljes struktúrával. A pontok  $X$  halmaza  $(0)$  típusú,  $\tau$  pedig  $((0))$  típusú. Legyen  ${}^*T$  a  $T$  rögzített bővítése; a  ${}^*T$ -beli pontok halmaza  ${}^*X \supset X$ . Az  $X$  elemei a *sztenderd* pontok,  ${}^*X - X$  elemei pedig a *nemsztenderdek*.  ${}^*\tau$

a bővítésben  $*X$  részhalmazából álló belső halmaz; és elemei, amiket  $*nyílt$ aknak fogunk nevezni, szintén belső halmazok. Mivel  $\tau$  kielégíti a fenti (i)–(iii) feltételeket, azért  $*\tau$  is, egyetlen apró különbséggel. (i)-ből következik  $*X \in *\tau$  valamint  $\emptyset \in *\tau$ ; (ii)-ből hogy két  $*nyílt$  halmaz metszete is  $*nyílt$  (azaz  $*\tau$ -beli); (iii)-ből azonban nem következik, hogy  $*nyílt$  halmazok tetszőleges halmazának uniója is  $*nyílt$  lenne, hanem csak annyi, hogy  $*nyíltak$  *belső* halmazának uniója  $*nyílt$ . Ezért általában  $*\tau$  nem topológia, hanem csak egy topológia bázisa.

Természetesen ha egy  $A \subset X$  sztenderd nyílt, akkor  $*A$   $*nyílt$  is, továbbá  $A \subset *A$ , hiszen ha  $p \in A$ , akkor ugyanez a formula a bővítésben is igaz. Ráadásul a 3.4. állítás alapján, ha  $A$  végtelen, akkor  $A$  valódi része  $*A$ -nak.

Bár didaktikai szempontból hasznos lenne, ha mindenütt megkülönböztetnénk a sztenderd és nemsztenderd fogalmakat, ezt csak bizonyos visszafogottsággal fogjuk megtenni. Tetszőleges fogalom azonosítható a hozzá tartozó objektumok összességével, és ezeket a matematikában egymás szinonímájaként is szokás használni. Így például a *nyílt* szó jelölheti magát a nyílt halmazok halmazát, és lehet, hogy ennek a halmaznak egy *neve*. Az előbbi esetben jogosan különböztetjük meg a „nyílt” és a „ $*nyílt$ ” halmazokat, míg az utóbbiban a „nyílt” név más-más összességet jelöl az alapmodellben és a bővítésben, és a „ $*nyílt$ ” jelölés értelmetlen.

Az alaphalmaz részhalmazainál, vagyis (0) típusú elemek esetén, ez nem annyira zavaró, hiszen ugyanaz a név a bővítésben egy nemsztenderd elemekkel kibővített halmazt jelöl. Például a *pozitív* vagy *egész* nevek által jelölt nemsztenderd halmazokat a sztenderdekre megszorítva a pozitív sztenderd számokat, illetve az egész sztenderd számokat kapjuk vissza. Másképpen fogalmazva a *pozitív* a szokásos „pozitívnak lenni” tulajdonság kiterjesztése nemsztenderd elemekre. Nyílt halmazokra ez nem így van, tipikusan egyáltalán nincs is olyan sztenderd halmaz, ami a bővítésben rendelkezne a „nyílt halmaznak lenni” tulajdonsággal. E szerint egy sztenderd nyílt halmaz csak a legritkább esetben  $*nyílt$ .

(Ugyanakkor ha  $A$  nyílt, akkor  ${}^*A$  természetesen  ${}^*$ nyílt.) Itt és a későbbi fejezetekben azt az elvet fogjuk követni, hogy ezek a magasabbrendű fogalmak, mint amilyen a *nyílt, környezet, lezárt, értelmezési tartomány*, stb, mind *nevek*, vagyis egészen mást jelenthetnek (és jelentenek is) az alapmodellben, mint a bővítésben. Azért, hogy segítsük az eligazodást, időnként használni fogjuk a  ${}^*$ nyílt,  ${}^*$ környezet, stb. változatot annak hangsúlyozására, hogy a fogalmat a bővítésben kell érteni.

Legyen az  $\langle X, \tau \rangle$  topológikus tér egy sztenderd pontja  $p$ , és definiáljuk  $p$  monádját a következőképpen:

$$\mu(p) = \bigcap \{ {}^*U : U \text{ sztenderd nyílt és } p \in U \}.$$

Vagyis  $p$  monádja mindazokból a (sztenderd és nemsztenderd) pontok áll, amik benne vannak az összes  $p$ -t tartalmazó  ${}^*X$ -beli sztenderd nyílt halmazban. Világos, hogy  $p \in \mu(p)$ , és hogy  $\mu(p)$  lehet külső halmaz is. A valós számok esetén a monádnak ez a definíciója ugyanazt a halmazt szolgáltatja, mint amit az előző fejezetben használtunk. Valóban, a valósak topológiájának egy bázisát alkotják a nyílt intervallumok. Ezért sztenderd  $n$  természetes számra a  $(p - 1/n, p + 1/n)$  intervallum egy, a  $p$  számot tartalmazó nyílt halmaz, és a  ${}^*(p - 1/n, p + 1/n)$   ${}^*$ intervallumok metszete éppen  $p$ -nek az előző fejezetben definiált monádja. Másrészt ha az  $U$  sztenderd nyílt halmaz tartalmazza a  $p$  számot, akkor  $U$ -nak része egy  $p$ -t tartalmazó nyílt intervallum is, és ezért van olyan sztenderd pozitív  $n$  egész is, hogy  $(p - 1/n, p + 1/n) \subset U$ , és ezért  $\mu(p) \subset {}^*(p - 1/n, p + 1/n) \subset {}^*U$ .

**5.1. Lemma** Minden  $p$  sztenderd ponthoz található  $V$   ${}^*$ nyílt (azaz  $V \in {}^*\tau$ ), ami tartalmazza  $p$ -t, és része  $\mu(p)$ -nek.

**Bizonyítás** Legyen a sztenderd  $U$  halmazra a  $\varphi_U(x)$  formula a következő:

$$x \text{ nyílt halmaz, } p \in x \text{ és } x \subset U.$$

Mivel véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt, azért a  $\{\varphi_U(x) : p \in U\}$  formulahalmaz konkurrens, hiszen véges sok  $U$ -hoz azok metszete

megfelel  $x$ -nek. Ekkor a bővítés alaptulajdonsága szerint van olyan  $V$   $^*$ nyílt halmaz is, ami egyszerre kielégíti az összes formulát. Ez pedig éppen olyan, amelyet kívántunk. ■

**5.2. Állítás** Az  $A \subset X$  akkor és csak akkor nyílt, ha minden  $p \in A$ -ra  $\mu(p) \subset ^*A$ .

**Bizonyítás** Az állításnak az a fele, ami szerint nyílt halmaz tartalmazza pontjainak monádját, a monád definíciója alapján világos. A fordított irányhoz tegyük fel, hogy  $^*A$  tartalmazza  $A$  pontjainak monádját. Meg akarjuk mutatni, hogy  $A$  nyílt, vagyis hogy minden  $p \in A$ -hoz tudunk találni  $p$ -nek olyan nyílt környezetét, ami teljes egészében  $A$ -ban van. Az előző lemma alapján  $p$ -nek van  $^*$ nyílt környezete  $\mu(p)$ -ben, s mivel  $\mu(p) \subset ^*A$ , azért az alábbi állítás igaz a bővítésben:

*létezik  $p$ -nek olyan  $^*$ nyílt környezete, ami  $^*A$ -ban van.*

De ekkor ez igaz az alapmodellben is, vagyis van  $p$ -nek  $A$ -beli (most már sztenderd) nyílt környezete. Ezért  $A$  tényleg nyílt. ■

Mivel zárt halmazok a nyíltak komplementerei, az előző tételből azonnal adódik, hogy  $A$  akkor és csak akkor zárt, ha tetszőleges sztenderd  $p$  pontra  $\mu(p) \cap ^*A \neq \emptyset$  esetén  $p \in A$ . Az  $A$ -nak  $\overline{A}$  lezártja a legszűkebb  $A$ -t tartalmazó zárt halmaz,  $A$ -nak int  $A$  belseje pedig a legbővebb  $A$ -ban levő nyílt halmaz.

**5.3. Állítás** Tetszőleges  $A \subset X$ -re  $A$  lezártja azokból a (sztenderd) pontokból áll, melyek monádjá elmetszi  $^*A$ -t;  $A$  belseje pedig azokból a pontokból, melyek monádjá teljes egészében  $^*A$ -ban van.

**Bizonyítás** Ha  $\mu(p) \cap ^*A = \emptyset$ , akkor van  $p$ -nek  $A$ -t elkerülő nyílt környezete (mert 5.1. szerint van  $^*A$ -t elkerülő  $^*$ nyílt környezete), tehát  $p \notin \overline{A}$ . Ha pedig  $\mu(p) \cap ^*A \neq \emptyset$ , akkor  $p$  minden sztenderd környezete elmetszi  $A$ -t (legyen ugyanis  $U$  a  $p$  egy sztenderd környezete, ekkor  $\mu(p) \subset ^*U$ , és ezért  $^*U \cap ^*A \neq \emptyset$ , tehát valóban  $U \cap A \neq \emptyset$ ), és így  $p \in \overline{A}$ .

A második állítás: ha  $\mu(p) \subset {}^*A$ , akkor van  $p$ -nek környezete, ami teljes egészében  $A$ -ban van, tehát  $p \in \text{int } A$ . Ha pedig  $p$  nem ilyen, akkor  $p$  minden sztenderd környezete tartalmaz  $A$ -n kívüli pontot is, tehát  $p \notin \text{int } A$ . ■

#### 5.4. Definíció Az $X$ topológikus tér

- (i) *Hausdorff* ( $T_2$ ), ha tetszőleges  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$  pontpárnak van diszjunkt környezete;
- (ii) *reguláris* ( $T_3$ ), ha  $T_2$ , és minden zárt  $A \subset X$  részhalmaznak és abban nem levő  $p$  pontnak van diszjunkt környezete;
- (iii) *normális* ( $T_4$ ), ha  $T_2$ , és bármely két diszjunkt zárt halmaznak van diszjunkt nyílt környezete.

**5.5. Állítás** Az  $X$  tér pontosan akkor Hausdorff, ha a  $p \neq q$  sztenderd pontokra  $\mu(p)$  és  $\mu(q)$  diszjunktak.

**Bizonyítás** Ha  $p$ -nek és  $q$ -nak van diszjunkt (sztenderd) környezete, akkor persze a monádok, mint az őket tartalmazó sztenderd környezetek metszetei, is diszjunktak lesznek.

Fordítva, 5.1. szerint kiválaszthatjuk  $p$ -nek és  $q$ -nak egy-egy  ${}^*$ környezetét, ami teljes egészében a megfelelő monádban van. Ezek a feltétel szerint diszjunktak, így a bővítésben igaz, hogy „ $p$ -nek és  $q$ -nak van diszjunkt  ${}^*$ nyílt környezete.” Ám ekkor ugyanez igaz az alapmodellben is. ■

Ahhoz, hogy hasonló állítást tudjunk megfogalmazni reguláris és normális terekre, definiáljuk egy tetszőleges  $A \subset X$  halmaz monádját a következőképpen:

$$\mu(A) = \bigcap \{ {}^*U : U \text{ nyílt és } A \subset U \}.$$

Az 5.1. lemmához hasonlóan igazolható most is, hogy mindig van  ${}^*$ nyílt  $V$ , amire  $A \subset V \subset \mu(A)$ , ebből pedig azonnal adódik a következő:

**5.6. Állítás** Az  $X$  tér pontosan akkor reguláris, ha a pontok zártak, és zárt  $A \subset X$  és  $p \notin A$  pontra  $\mu(p) \cap \mu(A) = \emptyset$ .

Az  $X$  tér pontosan akkor normális, ha a pontok zártak, és diszjunkt zárt  $A$  és  $B$  halmazokra  $\mu(A) \cap \mu(B) = \emptyset$ . ■

Legyenek  $X$  és  $Y$  topológikus terek, és legyen  $f : X \rightarrow Y$  egy  $X$  pontjait  $Y$ -ba képező függvény. A klasszikus definíció szerint  $f$  folytonos a  $p \in X$  pontban, ha  $f(p)$  minden  $V$  környezetéhez található  $p$ -nek egy  $U$  környezete, hogy  $U$  pontjai  $V$ -be mennek:  $f(U) \subset V$ .

**5.7. Állítás**  $f$  pontosan akkor folytonos  $p$ -ben, ha  $f(\mu(p)) \subset \mu(f(p))$ .

**Bizonyítás** Elsőként tegyük fel, hogy  $f$  folytonos  $p$ -ben. Ahhoz, hogy  $p$  monádjának képe része  $f(p)$  monádjának, elegendő megmutatnunk, hogy  $f(\mu(p))$  része  ${}^*V$ -nak, ahol  $V$  tetszőleges sztenderd környezete  $f(p)$ -nek. Legyen tehát  $V$  az  $f(p)$ -nek tetszőleges nyílt környezete. A folytonosság definíciója miatt van  $p$ -nek olyan (sztenderd)  $U$  környezete, hogy  $f(U) \subset V$ . Ez a formula igaz a bővítésben is, tehát  $f({}^*U) \subset {}^*V$ . Mivel  $\mu(p) \subset {}^*U$ , azért  $f(\mu(p)) \subset {}^*V$ , amit igazolni akartunk.

Fordítva tegyük fel, hogy  $f(\mu(p)) \subset \mu(f(p))$  és  $V$  egy adott sztenderd környezete  $f(p)$ -nek. Ekkor persze  $\mu(f(p)) \subset {}^*V$  és az 5.1. lemma szerint van  $p$ -nek  ${}^*$ nyílt környezete  $\mu(p)$ -ben. Ezért a bővítésben igaz, hogy

*van olyan  $U$   ${}^*$ nyílt környezete  $p$ -nek, amire  $f(U) \subset {}^*V$ .*

De ekkor ugyanez a formula igaz az alapmodellben is, igazolva, hogy  $f$  tényleg folytonos  $p$ -ben. ■

A tétel közvetlen következménye, hogy homeomorfizmusnál monádok monádba mennek át, vagyis egy pont monádja nem függ a tér definiálásának módjától, hanem csak a topológiától; más szóval a monád topológiai invariáns.



**5.8. Állítás** Legyen  $f$  homeomorfizmus az  $X$  és  $Y$  topológikus terek között. Ekkor  $X$  minden  $p$  pontjára  $f(\mu(p)) = \mu(f(p))$ . ■

Egy topológikus tér monád struktúrája nem csak invariáns, hanem meg is határozza a tér topológiáját:

**5.9. Állítás** Legyen  $\tau_1$  és  $\tau_2$  két topológia  $X$ -en és tegyük fel, hogy tetszőleges sztenderd  $p$  pontnak a  $\tau_1$  és a  $\tau_2$  szerinti monádja megegyezik. Ekkor  $\tau_1 = \tau_2$ .

**Bizonyítás** Az 5.7. tétel szerint ekkor  $X$ -en az identitás mint  $\langle X, \tau_1 \rangle$ -ből  $\langle X, \tau_2 \rangle$ -be képező függvény mindkét irányban folytonos, tehát homeomorfizmus. Ezért a  $\tau_2$  szerint nyílt halmazok éppen a  $\tau_1$  szerint nyílt halmazok képei, tehát  $\tau_1$  és  $\tau_2$  egybeesik. ■

Ugyanez az állítás már 5.2.-ből is következik, ami szerint egy  $A \subset X$  halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha minden  $p \in A$ -ra  $\mu(p) \subset A$ . Ha most  $\tau_1$  és  $\tau_2$  szerint ugyanazok a monádok, akkor a feltétel ugyanaz, akár arra vagyunk kíváncsiak, hogy  $A$   $\tau_1$  szerint nyílt-e, akár arra, hogy  $\tau_2$  szerint nyílt-e. Ezért a két topológia szerint ugyanazok a nyílt halmazok, vagyis  $\tau_1 = \tau_2$ .

**5.10. Állítás** (Sztenderd) Az  $f : X \rightarrow Y$  függvény pontosan akkor folytonos, ha minden  $Y$ -beli nyílt halmaz inverz képe nyílt.

**Bizonyítás** A  $V \subset Y$  inverz képe  $f^{-1}(V) = \{p \in X : f(p) \in V\}$ . Tegyük fel először, hogy  $f$  folytonos,  $V \subset Y$  sztenderd nyílt halmaz, és  $A = f^{-1}(V)$ . Ekkor természetesen  $*A = f^{-1}(*V)$  is igaz. Legyen  $p \in A$  tetszőleges sztenderd elem, azt kell megmutatnunk, hogy  $p$  monádja része  $*A$ -nak. De  $f(p) \in V$ ,  $V$  nyílt, ezért  $f(p)$  monádja része  $*V$ -nek. Másrészt  $f$  folytonos, ezért  $p$  monádját beleképezi  $f(p)$  monádjába, és így  $*V$ -be. Következésképp  $\mu(p) \subset *A$ , ahogyan kívántuk.

Másodszor tegyük fel, hogy  $f$  nem folytonos. Ekkor van  $p \in X$  és  $q \in \mu(p)$ , hogy  $f(q)$  nincs benne  $f(p)$  monádjában, vagyis van olyan  $V \subset Y$  sztenderd nyílt, hogy  $f(p) \in V$ , de  $f(q) \notin *V$ . Ekkor viszont  $V$

inverz képe nem nyílt, hiszen  $*$ -ja  $p$ -vel együtt nem tartalmazza annak teljes monádját. ■

A bizonyításból azt az erősebb állítást is kiolvashatjuk, hogy a folytonosság biztosításához nem feltétlenül szükséges az összes  $Y$ -beli nyílt inverz képének nyíltságát megkövetelnünk, hanem csak azokét, melyekkel tetszőleges  $Y$ -beli sztenderd pontot el tudunk választani a monádjában nem levőtől. Ez a helyzet például, ha a valósak esetén a  $(-\infty, c)$ , és  $(c, \infty)$  nyílt intervallumokat választjuk, itt  $c$  tetszőleges sztenderd valós (vagy akár csak racionális) szám lehet. Valóban, ha  $x \in \mathbf{R}$  és  $y$  nincs az  $x$  monádjában, akkor van vagy az egyik, vagy a másik alakú nyílt halmaz, ami  $x$ -et tartalmazza, de  $y$ -t nem.

**5.11. Tétel** (Sztenderd, Uriszon) *Legyen  $X$  normális, valamint  $A$  és  $B$  az  $X$ -nek diszjunkt zárt halmazai. Ekkor van olyan  $f : X \rightarrow [0, 1]$  folytonos függvény, amelyre  $f(a) = 0$  minden  $a \in A$ , és  $f(b) = 1$  minden  $b \in B$  esetén.*

**Bizonyítás** Álljon  $D$  a 0 és 1 közötti diadikus számokból, azaz azokból, amiket  $m/2^k$  alakban lehet írni, ahol  $0 \leq m$  és  $1 \leq k$  természetes számok. Ilyen  $p \in D$  racionális számokhoz hozzárendelünk egy-egy  $U_p$  nyílt halmazt azzal a tulajdonsággal, hogy

$$0 \leq p < q \leq 1 \text{ esetén } \overline{U_p} \subset U_q.$$

Az  $U_p$  nyílt halmazokat rekurzióval definiáljuk a normális terek következő tulajdonságát kihasználva:

(1) *ha  $F \subset H \subset X$ ,  $F$  zárt és  $H$  nyílt, akkor van olyan  $G$  nyílt, hogy*

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H.$$

(Hogy lássuk, hogy ez tényleg így van, használjuk a normalitás definícióját az  $A = F$  és a  $B = X - H$  zárt halmazokra.)

Elsőként  $U_0$ -t és  $U_1$ -et adjuk meg. Mivel  $A \subset X - B$  (hiszen  $A$  és  $B$  diszjunktak), továbbá  $X - B$  nyílt, azért (1) szerint van olyan  $U_0$  nyílt, amire

$$A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset X - B,$$

és hasonlóképpen van olyan  $U_1$  nyílt is, amire

$$\overline{U_0} \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset X - B.$$

Ezzel  $U_0$  és  $U_1$  már megvannak, és tegyük fel, hogy  $U_p$ -t már definiáltuk minden  $p \in D_n$ -re, ahol

$$D_n = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \text{ egész és } 0 \leq m \leq 2^n \right\}.$$

Ha most  $q \in D_{n+1} - D_n$ , akkor  $q = m/2^{n+1}$  alakú, ahol  $m$  páratlan. Így  $U$ -t már definiáltuk  $p$ -re és  $r$ -re, ahol  $p = (m-1)/2^{n+1}$  és  $r = (m+1)/2^{n+1}$ , továbbá  $\overline{U_p} \subset U_r$ . Ismét (1) szerint ehhez a párhoz is találhatunk olyan  $U_q$  nyílt halmazt, amire

$$\overline{U_p} \subset U_q, \quad \overline{U_q} \subset U_r.$$

Álljunk meg az  $n$ -edik lépésben, és definiáljuk az  $f_n : X \rightarrow [0, 1]$  függvényt a következőképpen:  $f_n(x) = 1$  ha  $x \notin \overline{U_1}$ , egyébként pedig legyen

$$f_n(x) = \min \{p \in D_n : x \in \overline{U_p}\}.$$

Világos, hogy  $f_n$  az  $X$  minden elemén értelmezve van, valamint, ha  $x \in A$ , akkor  $f_n(x) = 0$ , és ha  $x \in B$ , akkor  $f(x) = 1$ . Mivel  $D_n$  elemein az  $U_p$  halmazok nőnek, és mindegyik lezártja benne van a következőben, azért ha  $f_n(x) < p$ , akkor  $x \in U_p$ ; ha pedig  $p < f_n(x)$ , akkor  $x$  nincs benne  $U_p$  lezártjában sem.

Legyen most  $\omega$  egy rögzített végtelen természetes szám; jegyezzük meg, hogy minden sztenderd diadikus szám eleme  $D_\omega$ -nak. Tekintsük

az előbb definiált  $f_\omega$  függvényt. Mivel csak 0 és 1 közti értékeket vesz fel, azért értelmes az alábbi definíció az  $X$  tér sztenderd  $x$  pontjaira:

$$f(x) = {}^\circ f_\omega(x).$$

Ez lesz az a függvény, aminek létezését a tétel állította. Az világos, hogy  $f$  az  $A$  pontjain 0-t,  $B$  pontjain pedig 1-et vesz fel, így csak azt kell megmutatnunk, hogy folytonos. Ehhez az 5.10. állításhoz fűzött megjegyzésünk értelmében elegendő belátnunk, hogy minden (sztenderd) valós  $c$ -re a  $(-\infty, c)$  valamint a  $(c, \infty)$  nyílt halmazok inverz képei nyíltak.

Legyen ehhez  $c$  tetszőleges (sztenderd) valós. Először is állítjuk, hogy  $f(x) < c$  akkor és csak akkor, ha van olyan  $q < c$  sztenderd diadikus tört, amire  $x \in U_q$ .

Valóban, legyen  $q < c$ ,  $q \in D_\omega$  sztenderd diadikus tört, és  $x \in U_q$ . A minimális  $p \in D_\omega$ , amire  $x \in \overline{U}_p$ , csak  $q$ -nál kisebb vagy egyenlő lehet, ezért  $f_\omega(x) \leq q$ . Mivel  $q$  sztenderd, azért  $f_\omega(x)$  sztenderd része is legfeljebb  $q$ , vagyis  $f(x) \leq q < c$ . Ezzel az állítás „akkor” részét beláttuk. Fordítva, ha  $f(x) < c$ , akkor válasszunk egy  $q$  sztenderd diadikus törtet e kettő szám között:  $f(x) < q < c$ . Mivel  $f_\omega(x)$  sztenderd része,  $f(x)$  kisebb a sztenderd  $q$ -nál, azért  $f_\omega(x)$  is szükségszerűen kisebb, és ekkor  $x \in U_q$ , ahogyan azt fentebb láttuk.

Másodszorra állítjuk, hogy  $f(x) > c$  akkor és csak akkor, ha van olyan  $q > c$  sztenderd diadikus tört, amire  $x \notin \overline{U}_q$ .

Hasonlóan az előzőhöz, most is az „akkor” résszel kezdjük. Ha  $x \notin \overline{U}_q$ , akkor a minimális  $p \in D_\omega$ , amire  $x \in \overline{U}_p$ , mindenképpen nagyobb  $q$ -nál, tehát  $f_\omega(x) > q$ . Ebből  $f(x) \geq q > c$  azonnal adódik. Fordítva, legyen  $f(x) > c$ , válasszunk ismét egy  $q$  sztenderd diadikus törtet, amire  $c < q < f(x)$ . Most  $f_\omega(x)$  sztenderd része nagyobb a sztenderd  $q$ -nál, ezért  $f_\omega(x)$  is nagyobb, tehát  $x \notin \overline{U}_q$ .

A két állítást összefoglalva:

$$f^{-1}((-\infty, c)) = \bigcup \{U_q : q < c, q \text{ sztenderd diadikus tört}\},$$

$$f^{-1}((c, \infty)) = \bigcup \{X - \overline{U}_q : q > c, q \text{ sztenderd diadikus tört}\}.$$

A bal oldalon a kérdéses inverz képek állnak, a jobb oldalon pedig sztenderd nyílt halmazok uniói. Ezért az inverz képek nyíltak, tehát  $f$  folytonos, ahogyan állítottuk. ■

A tétel csak annyit mond ki, hogy ha  $A$  és  $B$  diszjunkt zártak, akkor valamilyen folytonos  $f : X \rightarrow [0, 1]$  függvényre  $A \subset f^{-1}(\{0\})$ , és  $B \subset f^{-1}(\{1\})$ . Itt egyenlőséget csak akkor tudunk garantálni, ha az  $X$  térre még további megszorítást teszünk, például, hogy második megszámlálható (lásd a 6.12. tételt).

## 2. Kompakt terek

A következőkben a kompaktság nemsztenderd megfogalmazását adjuk. A szokásos definíció szerint az  $X$  tér egy  $A$  része kompakt, ha  $A$  minden nyílt fedésének van véges részfedése.

**5.12. Definíció** Legyen  $A \subset X$ . Egy  $p \in {}^*X$ -beli pont  $A$ -majdnem sztenderd, ha benne van egy sztenderd  $A$ -beli pont monádjában. A  $p$  pont majdnem sztenderd, ha  $X$ -majdnem sztenderd.

**5.13. Tétel** A következő állítások ekvivalensek:

- (i)  $A \subset X$  kompakt;
- (ii)  $A$  monádja megegyezik az  $A$ -beli (sztenderd) pontok monádjának uniójával;
- (iii)  ${}^*A$  minden pontja  $A$ -majdnem sztenderd.

**Bizonyítás** (i) $\Rightarrow$ (ii) Minden  $A$ -t tartalmazó nyílt halmaz egyúttal  $A$  minden pontját is tartalmazza, ezért  $A$  minden pontjának monádja része

$A$  mondájának. Így csak a fordított irányú tartalmazást kell igazolnunk. Legyen ehhez  $q \in {}^*X$  olyan, ami nincs benne egyetlen  $p \in A$  pontnak sem a monádjában, azaz minden  $p \in A$ -hoz található olyan  $U_p$  nyílt, hogy  $p \in U_p$ , de  $q \notin {}^*U_p$ . Azt akarjuk megmutatni, hogy  $q$  nincs  $A$  monádjában, vagyis létezik olyan  $U$  nyílt, hogy  $A \subset U$ , de  $q \notin {}^*U$ .

Az  $\{U_p : p \in A\}$  nyílt halmazok uniója lefedi  $A$ -t,  $A$  feltevés szerint kompakt, ezért közülük már véges sok is fed:

$$A \subset U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup \dots \cup U_{p_n}.$$

Jelöljük a jobb oldalon álló nyílt halmazt  $U$ -val. Mivel az  $U = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}$  formula a bővítésben is igaz, azért

$${}^*U = {}^*U_{p_1} \cup {}^*U_{p_2} \cup \dots \cup {}^*U_{p_n}.$$

Mivel  $q$  nincs egyetlen  ${}^*U_p$ -ben sem, azért nincs  ${}^*U$ -ban sem. Ez mutatja, hogy  $U$  olyan nyílt környezete  $A$ -nak, amire  $q \notin {}^*U$ , vagyis hogy  $q \notin \mu(A)$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ha  $A \subset U$ , akkor természetesen  ${}^*A \subset {}^*U$ , ezért  ${}^*A \subset \mu(A)$ . Így ha  $A$  monádja megegyezik az  $A$ -beli pontok monádjainak uniójával, akkor speciálisan  ${}^*A$  minden pontja is benne van egy sztenderd  $A$ -beli pont monádjában, tehát  $A$ -majdnem sztenderd.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Tegyük fel, hogy  $A$  nem kompakt, ekkor van olyan  $U_i : i \in I$  nyílt halmazokból álló fedése, aminek nincs véges részfedése, vagyis akárhogyan is veszünk ki véges sokat az  $U_i$  halmazok közül, mindig találunk olyan  $A$ -beli pontot, ami nincs benne egyikben sem. Ez éppen azt jelenti, hogy a  $\varphi_i(x) = „x \in A \text{ és } x \notin U_i”$  formulákból álló rendszer konkurrens, tehát van olyan  $q \in {}^*A$ , amire ezek mind igazak, speciálisan  $q \notin {}^*U_i$ . Állítjuk, hogy ekkor  $q$  nem lehet  $A$ -majdnem sztenderd. Ugyanis tetszőleges  $p \in A$  sztenderd pont benne van valamelyik  $U_i$  nyílt halmazban, ezért  $\mu(p)$  része  ${}^*U_i$ -nek. S mivel  $q$  nincs  ${}^*U_i$ -ben, azért  $q \notin \mu(p)$ , tehát valóban  $q$  nem  $A$ -majdnem sztenderd. ■

A tételnek azt a formáját fogjuk legtöbbet használni, ami szerint a teljes  $X$  tér akkor és csak akkor kompakt, ha  $*X$  minden pontja majdnem sztenderd, vagyis  $*X$  minden pontja benne van egy sztenderd pont monádjában.

**5.14. Tétel** (Sztenderd) *Minden kompakt  $T_2$  tér normális.*

**Bizonyítás** Legyenek  $A$  és  $B$  diszjunkt zárt halmazok  $X$ -ben. Mivel  $X$  kompakt, azért kompakt  $A$  és  $B$  is, tehát az előző állítás szerint  $\mu(A) = \bigcup \{\mu(p) : p \in A\}$ , valamint  $\mu(B) = \bigcup \{\mu(q) : q \in B\}$ . Ha  $p \in A$  és  $q \in B$ , akkor  $\mu(p)$  és  $\mu(q)$  diszjunkt, hiszen a tér  $T_2$ . Következésképp  $\mu(A)$  és  $\mu(B)$  is diszjunkt, amit bizonyítanunk kellett. ■

**5.15. Tétel** (Sztenderd) *Kompakt halmaz folytonos képe is kompakt.*

**Bizonyítás** Legyen  $A \subset X$  kompakt,  $f$  folytonos, és  $f(A) = B$ . Ekkor  $f(*A) = *B$ . Azt akarjuk megmutatni, hogy  $*B$  minden pontja  $B$ -majdnem sztenderd. Ha  $y \in *B$  tetszőleges, válasszunk hozzá  $x \in *A$ -t, amire  $f(x) = y$ .  $A$  kompakt, tehát  $x$   $A$ -majdnem sztenderd:  $x \in \mu(p)$  valamilyen  $p \in A$  sztenderd pontra.  $f$  folytonos, ezért  $f(x) \in f(\mu(p)) \subset \mu(f(p))$ , ami mutatja, hogy  $y$  valóban  $B$ -majdnem sztenderd. ■

### 3. Topológikus terek szorzata

Ha egyszerre több topológikus teret tekintünk, akkor az összeset egybefoglaljuk egy hatalmas struktúrába, beleértve az indexhalmazokat is, és ennek vesszük egy alkalmas bővítését. Legyenek tehát  $i \in I$ -re  $X_i$ -k topológikus terek. Az  $X_i$  halmazok *direkt szorzata* az összes olyan  $I$ -n értelmezett  $p$  függvényből áll, melyre  $p(i) \in X_i$  minden  $i \in I$  esetén. A szorzaton tekintjük a szokásos szorzat topológiát, amit  $X$ -szel jelölünk;

ennek bázis, vagy más szóval *elemi nyílt* halmazai a direkt szorzatnak az

$$U = \{p : p(i_\nu) \in U_\nu, \nu = 1, 2, \dots, k\}$$

alakú részhalmazai, ahol  $i_1, \dots, i_k$  véges sok előre rögzített  $I$ -beli elem,  $U_\nu$  pedig az  $X_{i_\nu}$  topológia rögzített nyílt halmaza. Szokás szerint  $p(i)$  helyett  $p_i$ -t is fogunk írni, és ezt az értéket a  $p$  pont  $i$ -edik koordinátájának hívjuk.

A bővítésben  ${}^*X$  pontjai természetesen továbbra is függvények, mégpedig  ${}^*I$ -on vannak értelmezve, és  $p \in {}^*X$ ,  $i \in {}^*I$  esetén  $p_i \in {}^*X_i$ . Sztenderd  $i$  indexre (koordinátára)  ${}^*X_i$  az  $X_i$  topológikus tér bővítése, nemsztenderd index esetén (vagyis ha  $i$  az  ${}^*I - I$  eleme)  ${}^*X_i$  valamiféle ideális objektum, melynek természetesen mindazok a tulajdonságai megvannak, amik a szorzat sztenderd tényezőinek.

**5.16. Állítás** Legyen  $p$  sztenderd,  $q$  pedig tetszőleges pontja az  ${}^*X$  szorzattérnek. Ekkor  $q \in \mu(p)$  akkor és csak akkor, ha minden sztenderd  $i$  indexre  $q_i \in \mu(p_i)$ .

**Bizonyítás** Ha van olyan sztenderd  $i$ , hogy  $q_i$  nincs benne  $p_i$  monádjában, akkor vegyük az  $X_i$  térben az ezt tanúsító  $U_i$  sztenderd nyílt halmazt. A szorzattérben az  $U = \{f : f(i) \in U_i\}$  bázis nyílt halmaz olyan, hogy  $p \in U$ , de  $q \notin {}^*U$ , vagyis  $q$  tényleg nincs  $p$  monádjában.

Fordítva, ha minden sztenderd  $i$ -re  $q_i$  benne van  $p_i$  monádjában, és  $p$  eleme az  $U = \{f : f(i_\nu) \in U_\nu, \nu = 1, 2, \dots, k\}$  elemi nyílt halmaznak, akkor  $q_\nu \in {}^*U_\nu$ , és  ${}^*U = \{f : f(i_\nu) \in {}^*U_\nu, \nu = 1, 2, \dots, k\}$  miatt  $q \in {}^*U$ . ■

**5.17. Tétel** (Sztenderd) Hausdorff terek szorzata Hausdorff.

**Bizonyítás** Legyen  $p$  és  $q$  két különböző sztenderd pontja a szorzattérnek. Van olyan sztenderd  $i \in I$  index, hogy  $p_i$  és  $q_i$  különböznek. A feltétel szerint  $X_i$  Hausdorff tér, tehát  $\mu(p_i)$  és  $\mu(q_i)$  diszjunktak. 5.16. szerint ekkor  $p$ -nek és  $q$ -nak nem lehet közös elem a monádjában. ■



**5.18. Tétel** (Sztenderd, Tyihonov) *Kompakt terek szorzata kompakt.*

**Bizonyítás** Azt kell megmutatnunk, hogy  $*X$  minden pontja majdnem sztenderd. Tegyük fel először, hogy mindegyik  $X_i$  Hausdorff, és legyen  $p \in *X$  tetszőleges. Mivel sztenderd  $i$ -re  $X_i$  kompakt, azért  $p_i$  majdnem sztenderd  $X_i$ -ben, és ezért van  $q_i \in X_i$  sztenderd, mégpedig pontosan egy (a  $T_2$  tulajdonság miatt), amire  $p_i \in \mu(q_i)$ . Az 5.16. állítás szerint ekkor  $p$  benne van az ezekből összeállított  $q \in X$  pont monádjában.

Ha nem tudjuk, hogy az  $X_i$ -k  $T_2$  terek, akkor az  $i$ -edik koordinátában  $p_i$ -hez számtalan  $q_i$  is tartozhat. A szorzatban a  $q$  elemet úgy kell kivennünk, hogy minden  $i$ -re a megfelelő  $q_i$ -k közül egyet választunk – ezt pedig a kiválasztási axióma segítségével meg tudjuk tenni. ■

Könnyen igazolható, hogy a kiválasztási axióma következik Tyihonov fenti tételből. A bizonyításban Hausdorff terek esetén egyáltalán nem volt szükségünk a kiválasztási axiómára. Ez nem azt jelenti, hogy egyáltalán nincs is rá szükség: a kiválasztási axiómának azt a gyengébb változatát, miszerint minden szűrő kiterjeszthető ultraszűrővé, a bővítés létezésének igazolásakor felhasználtuk. Így annak bizonyítására, hogy kompakt Hausdorff terek szorzata is kompakt, elegendő a kiválasztási axiómának ez a gyengébb formája.

## 6. fejezet

# Metrikus terek

Az  $X$  halmazon a  $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  kétváltozós függvény *metrika*, ha teljesíti a távolságfüggvényre szokásos követelményeket: szimmetrikus, különböző pontok távolsága pozitív, minden pont saját magától 0 távolságra van, végül a háromszög-egyenlőtlenséget. Ha  $X$ -en van egy metrika, az egyúttal egy topológiát is definiál, a bázis nyílt halmazok a pontok körüli  $r > 0$  sugarú gömbök:

$$B(p, r) = \{q \in X : \varrho(p, q) < r\}.$$

Egy topológikus térben egy  $p$  pont *környezetbázisán* olyan  $p$ -t tartalmazó nyílt halmazok összességét értjük, hogy minden  $p$ -t tartalmazó nyílt halmaz a környezetbázis valamelyik tagját részként tartalmazza. A tér *első megszámlálható*, vagy más néven  $M_1$ , ha minden pontnak van megszámlálható környezetbázisa; és *második megszámlálható*, vagyis  $M_2$ , ha a teljes térnek van megszámlálható sok halmazból álló bázisa. Világos, hogy minden  $M_2$  tér egyúttal  $M_1$  is (hiszen minden pont környezetbázisát a tér bázisából választhatjuk ki), viszont van olyan  $M_1$  tér, amelyik nem  $M_2$ . Metrikus terek  $M_1$  terek: a  $p$  pontnak megszámlálható környezetbázisát éppen a  $p$  körüli  $1/n$  sugarú gömbök alkotják.

A bővítéshez az alapmodellben nem csak  $X$ , hanem a távolságfüggvény, és vele együtt a valós számok  $\mathbf{R}$  halmaza is szerepel. Így a  $\varrho$  távolságfüggvény  ${}^*X$  párjain van értelmezve, és ott  ${}^*\mathbf{R}$ -beli értékeket vesz fel. Egy  $p \in {}^*X$  pont *monádján* mindazon pontok halmazát értjük,

melyek távolsága  $p$ -től infinitezimális. Ez a definíció sztenderd pontokra megegyezik a topológikus tereken definiált monáddal. Valóban, ha  $p \in X$  és  $r > 0$  sztenderdek, akkor a bővítésben

$${}^*B(p, r) = \{q \in {}^*X : \varrho(p, q) < r\},$$

valamint minden  $p$ -t tartalmazó sztenderd nyílt halmazban a  $B(p, 1/n)$  gömbök valamelyike benne van, ezért

$$\begin{aligned}\mu(p) &= \bigcap \{ {}^*U : U \text{ sztenderd nyílt és } p \in U \} \\ &= \bigcap \{ {}^*B(p, 1/n) : n \text{ sztenderd} \} \\ &= \{q \in {}^*X : \varrho(p, q) < 1/n \text{ minden sztenderd } n\text{-re}\} \\ &= \{q \in {}^*X : \varrho(p, q) \simeq 0\}.\end{aligned}$$

Így az előző fejezetbeli tételek mind érvényben maradnak. Egy monádban legfeljebb egy sztenderd pont lehet, hiszen különböző sztenderd pontok távolsága nem végtelenül kicsi. Ha  $p$  és  $q$  távolsága végtelenül kicsi, vagyis  $\varrho(p, q) \simeq 0$ , azt így is jelöljük:  $p \simeq q$ . Egy  $q \in {}^*X$  pont *véges*, ha valamilyen sztenderd ponttól véges távolságra van.

Az  $X$  metrikus tér egy  $A$  részhalmaza *korlátos*, ha bármely két pontjának távolsága kisebb mint egy rögzített  $M$  valós szám.

**6.1. Állítás**  $A \subset X$  akkor és csak akkor korlátos, ha  ${}^*A$  minden pontja *véges*.

**Bizonyítás** Legyen először  $A$  korlátos, és  $p \in A$  annak tetszőleges pontja. Az alapmodellben igaz az a formula, ami szerint „ $A$  tetszőleges pontjának távolsága  $p$ -től legfeljebb  $M$ ,” ezért ugyanez igaz a bővítésben is, vagyis  ${}^*A$  tetszőleges pontjának távolsága  $p$ -től legfeljebb  $M$ .

Fordítva, ha  $A$  nem korlátos, akkor a rögzített  $p \in A$ -tól akármilyen messze, mondjuk legalább  $m$  távolságra van pontja. (Ha ez nem így volna, akkor  $\varrho(q_1, q_2) \leq \varrho(q_1, p) + \varrho(p, q_2) \leq 2m$  miatt  $A$  korlátos lenne.) Ez a formula igaz a bővítésben is, ezért a végtelen nagy  $m$

valós számhoz is található  $a \in {}^*A$ , hogy  $\varrho(p, a) > m$ . Állítjuk, hogy  $a$  nem véges, azaz  $\varrho(p', a)$  végtelen tetszőleges sztenderd  $p' \in X$  pontra. Valóban, a háromszög-egyenlőtlenség miatt  $\varrho(p, a) \leq \varrho(p, p') + \varrho(p', a)$ , a bal oldal végtelen,  $p$  és  $p'$  távolsága viszont véges, tehát  $\varrho(p', a)$  szükségképpen végtelen. ■

**6.2. Tétel** (Sztenderd) *Metrikus tér minden kompakt része korlátos.*

**Bizonyítás** Legyen  $A \subset X$  kompakt. Ekkor  ${}^*A$  minden pontja  $A$ -majdnem sztenderd, vagyis valamilyen  $A$ -beli (sztenderd) pontnak a monádjában van. Tehát minden  ${}^*A$ -beli pont véges, és így  $A$  korlátos. ■

A szokásos definíció szerint az  $x_n$  sorozat *konvergál* a  $p$  ponthoz, ha  $p$  tetszőleges környezete a sorozatból csak véges sok tagot hagy ki; és  $p$  *torlódási pont*, ha  $p$ -nek minden környezete a sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Az alábbi állítás a valós sorozatokra vonatkozó hasonló állítás általánosítása, és nem csak metrikus terekben, hanem tetszőleges topológikus térben is igaz. A bizonyítás a valós esetről szóló 4.5. és 4.8. állítások bizonyításának hű mása, így azt elhagyjuk.

**6.3. Állítás** *Legyen  $x_n$  egy végtelen sorozat az  $X$  topológikus térben. A sorozat konvergál  $p$ -hez, ha minden végtelen  $\omega$  indexre  $x_\omega \in \mu(p)$ . A sorozatnak  $p$  torlódási pontja, ha valamely végtelen  $\omega$  indexre  $x_\omega \in \mu(p)$ .*

■

**6.4. Tétel** (Sztenderd) *Kompakt térben minden sorozatnak van torlódási pontja.*

**Bizonyítás** Mivel  $X$  kompakt, azért minden pontja majdnem sztenderd, speciálisan  $x_\omega$  is, ahol  $x_\omega$  a sorozat tetszőleges végtelen indexű eleme. Vagyis  $x_\omega \in \mu(p)$  valamilyen sztenderd  $p$  pontra, és ekkor  $p$  torlódási pontja a sorozatnak. ■

Egy topológikus tér *megszámlálhatóan kompakt*, ha benne minden sorozatnak van torlódási pontja. A 6.4. tétel szerint minden kompakt

tér egyúttal megszámlálhatóan kompakt is, aminek megfordítása ugyan általában nem igaz, de metrikus terek esetében igen:

**6.5. Tétel** (Sztenderd) *Ha egy metrikus tér megszámlálhatóan kompakt, akkor kompakt is.*

**Bizonyítás** Tegyük fel, hogy az  $X$  metrikus tér nem kompakt, gyártunk egy sorozatot, aminek nincs torlódási pontja. Mivel  $X$  nem kompakt, azért van olyan  $p \in {}^*X$  pont, ami nem majdnem sztenderd, vagyis nincs benne egyetlen sztenderd pont monádjában sem. Megkülönböztetünk két esetet: (i) van olyan pozitív sztenderd  $\varepsilon$ , hogy  $p$  távolsága minden sztenderd ponttól legalább  $\varepsilon$ , illetve (ii) ilyen  $\varepsilon$  nincs.

Az (i) esetben indukcióval kiválasztjuk a sztenderd elemekből álló  $x_1, x_2, \dots$  sorozatot a következőképpen. Legyen  $x_1 \in X$  tetszőleges, és ha már  $x_1, \dots, x_k$  megvan, akkor legyen  $x_{k+1}$  olyan, ami az összes többitől legalább  $\varepsilon$  távolságra van. Ilyen elem van a bővítésben, nevezetesen  $p$ , ezért ilyennek az alapmodellben is kell lennie. Az előálló  $\{x_n\}$  sorozat bármely két elemének távolsága legalább  $\varepsilon$ , így nem lehet torlódási pontja.

Az (ii) esetben úgy vegyük ki a sztenderd  $x_n$  pontot, hogy  $p$ -től való távolsága legyen kisebb  $1/n$ -nél. Állítjuk, hogy ez a sorozat nem konvergens. Legyen ugyanis  $x$  tetszőleges sztenderd pont. Mivel  $p$  nem majdnem sztenderd,  $\varrho(x, p) > 1/k$  valamilyen  $k$  sztenderd egészre. A háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges  $n$ -re

$$\varrho(x, x_n) \geq \varrho(x, p) - \varrho(p, x_n) > \frac{1}{k} - \frac{1}{n},$$

vagyis az  $x$  körüli  $1/2k$  sugarú gömbben legfeljebb az  $x_1, \dots, x_{2k-1}$  pontok lehetnek, ezért  $x$  nem torlódási pont. ■

Legyen  $X$  tetszőleges topológikus tér,  $Y$  pedig metrikus tér. Legyen adva  $X$ -ből  $Y$ -ba képező függvényeknek egy  $\{f_n(x)\}$  sorozata.  $\{f_n\}$  tart  $f$ -hez *pontonként* ha minden  $x \in X$ -re az  $(Y$ -beli)  $f_1(x), f_2(x), \dots$

sorozat konvergens és tart  $f(x)$ -hez. Ez a konvergencia *egyenletes*, ha tetszőleges pozitív  $\varepsilon$ -hoz van  $n_0$ , hogy minden  $x \in X$ -re és  $n > n_0$ -ra  $\varrho(f(x) - f_n(x)) < \varepsilon$ .

**6.6. Állítás** Az  $\{f_n\}$  sorozat pontosan akkor tart  $f$ -hez, ha  $f_\omega(x) \simeq f(x)$  minden végtelen  $\omega$ -ra és minden sztenderd  $x \in X$ -re. A konvergencia akkor és csak akkor egyenletes, ha  $f_\omega(x) \simeq f(x)$  minden végtelen  $\omega$ -ra és tetszőleges  $x \in {}^*X$ -ra.

**Bizonyítás** Csak az egyenletes konvergenciára vonatkozó állítást bizonyítjuk, a másik a 6.3. állításból jön. Tegyük fel először, hogy  $\{f_n\}$  egyenletesen konvergál  $f$ -hez,  $\omega$  adott végtelen egész, és  $x \in {}^*X$  tetszőleges pont. Azt akarjuk megmutatni, hogy  $\varrho(f_\omega(x) - f(x)) < \varepsilon$  minden előre adott pozitív sztenderd  $\varepsilon$ -ra. Az egyenletes konvergencia definíciója szerint adott  $\varepsilon$ -hoz van olyan (sztenderd)  $n_0$ , hogy

$$\text{minden } x\text{-re és minden } n > n_0\text{-ra } \varrho(f_n(x) - f(x)) < \varepsilon.$$

Mivel ugyanez a formula igaz a bővítésben is, és lévén az általunk választott  $\omega$  végtelen,  $\omega > n_0$  is igaz, azért készen vagyunk.

Fordítva, tegyük fel hogy  $f_\omega(x) \simeq f(x)$  tetszőleges  $x$ -re és minden végtelen  $\omega$ -ra. Legyen adva egy sztenderd  $\varepsilon > 0$ . A következő állítás igaz a bővítésben:

$$\text{létezik olyan } n_0, \text{ hogy minden } x\text{-re és minden } n > n_0\text{-ra} \\ \varrho(f_n(x) - f(x)) < \varepsilon,$$

hiszen  $n_0$ -nak tetszőleges végtelen természetes szám megfelel. Ekkor azonban ugyanez az állítás az alapmodellben is igaz, mutatva az egyenletes konvergenciát. ■

Az  $\{x_n\}$  sorozat *monoton tart*  $x$ -hez, ha a  $\varrho(x_n, x)$  távolságokból álló sorozat monoton csökkenve tart nullához.

**6.7. Tétel** (Sztenderd, Dini) *Legyen  $X$  kompakt,  $Y$  pedig metrikus tér, és tegyük fel hogy a folytonos függvényekből álló  $\{f_n\}$  sorozat minden  $x$  pontban monoton konvergál az ugyancsak folytonos  $f$ -hez. Ekkor a konvergencia egyenletes.*

**Bizonyítás** A monotonitás miatt  $m > n$  esetén  $\varrho(f_m(x), f(x)) \leq \varrho(f_n(x), f(x))$ . Legyen  $\omega$  tetszőleges végtelen index,  $n$  valamilyen sztenderd természetes szám. A fenti formulát a bővítésben felírva azt kapjuk, hogy  $\varrho(f_\omega(x), f(x)) \leq \varrho(f_n(x), f(x))$  tetszőleges  $x \in {}^*X$  pont-ra. Legyen  $x$  a sztenderd  $y \in X$  pont monádjában, az  $X$  kompaktsága miatt ilyen  $y$  létezik. A háromszög egyenlőtlenség szerint

$$|\varrho(f_n(x), f(x)) - \varrho(f_n(y), f(y))| \leq \varrho(f_n(x), f_n(y)) + \varrho(f(x), f(y)).$$

Az  $f_n$  és  $f$  függvények folytonosak, ezért a jobb oldal infinitezimális, tehát a bal oldal is, és ezért  $\circ\varrho(f_n(x), f(x)) = \varrho(f_n(y), f(y))$ . Innen a sztenderd rész monotonitása alapján

$$\circ\varrho(f_\omega(x), f(x)) \leq \circ\varrho(f_n(x), f(x)) = \varrho(f_n(y), f(y)).$$

Mivel sztenderd  $y$  pontokra  $\varrho(f_n(y), f(y))$  akármilyen kicsi lehet, ez az egyenlőtlenség csak úgy állhat fenn minden sztenderd  $n$ -re, ha a bal oldal infinitezimális, vagyis  $f_\omega(x) \simeq f(x)$  tetszőleges  $x \in {}^*X$ -ra. Az előző állítás szerint ez pedig azt jelenti, hogy a konvergencia egyenletes.



Az  $\{f_n\}$  függvénysorozat egyenlő mértékben folytonos az  $x \in X$  pontban, ha minden  $\varepsilon > 0$  (sztenderd) valós számhoz található  $x$ -nek olyan  $U_\varepsilon$  nyílt környezete, hogy tetszőleges  $n$  indexre és  $y \in U_\varepsilon$  pontra  $f_n(x)$  és  $f_n(y)$  távolsága kisebb  $\varepsilon$ -nál. Ha a függvénysorozat egyenlő mértékben folytonos, akkor persze minden tagja folytonos is.

**6.8. Állítás** *Az  $\{f_n\}$  függvényekből álló sorozat akkor és csak akkor egyenlő mértékben folytonos  $x$ -ben, ha  $x \simeq y$  esetén minden (véges és végtelen)  $\omega$ -ra  $f_\omega(x) \simeq f_\omega(y)$ .*

**Bizonyítás** Először legyen  $\{f_n\}$  egyenlő mértékben folytonos. Válasszuk  $y$ -t az  $x$  pont monádjában, és vegyünk egy tetszőleges  $\varepsilon > 0$  sztenderd valós számot. Azt akarjuk megmutatni, hogy  $f_\omega(x)$  és  $f_\omega(y)$  távolsága kisebb  $\varepsilon$ -nál. Nézzük  $x$ -nek az „egyenlő mértékben folytonos” definíciójában szereplő  $U_\varepsilon$  környezetét, erre az alapmodellben igaz a következő formula:

$$\text{minden } n \text{ indexre és } y \in U_\varepsilon\text{-ra } \varrho(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon.$$

Ekkor ez a bővítésben is így van, s mivel  $x \simeq y$ , azért  $y \in {}^*U_\varepsilon$ , tehát  $\varrho(f_\omega(x), f_\omega(y)) < \varepsilon$ , ahogyan kívántuk.

Fordítva, tegyük fel, hogy minden  $\omega$ -ra  $f_\omega(x) \simeq f_\omega(y)$  valahányszor  $y$  az  $x$  monádjából való. Válasszunk egy pozitív sztenderd  $\varepsilon$  számot. Az 5.1. lemma szerint van  $x$ -nek olyan  $U$  nyílt környezete, ami része  $\mu(x)$ -nek, ezért a bővítésben igaz a következő állítás:

- (1) *létezik  $x$ -nek olyan  $U$  nyílt környezete, hogy minden  $n$  és minden  $y \in U$  esetén  $\varrho(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ .*

Ezért az alapmodellben is így van, legyen  $U_\varepsilon$  sztenderd nyílt környezete  $x$ -nek, ami ezt mutatja. Ez pedig (1) miatt teljesíti az egyenlő mértékben folytonosság definícióját. ■

**6.9. Tétel** (Sztenderd) *Ha az  $f_n : X \rightarrow Y$  függvények folytonosak az  $x \in X$  pontban, és egyenletesen konvergálnak az  $f : X \rightarrow Y$ -hez, akkor  $f$  is folytonos  $x$ -ben; továbbá az  $f_n$  függvények egyenlő mértékben folytonosak  $x$ -ben.*

**Bizonyítás** Legyen  $y \in \mu(x)$ , azt kell megmutatnunk, hogy  $f(x)$  és  $f(y)$  végtelenül közel van egymáshoz. Először is megjegyezzük, hogy feltételünk szerint minden sztenderd  $n$ -re  $f_n$  folytonos az  $x$  pontban, tehát  $f_n(x) \simeq f_n(y)$ . Állítjuk, hogy ekkor van olyan végtelen  $\omega$  index is, amire ugyanez fennáll. Tekintsük ugyanis az adott  $x$  (sztenderd) és



$y$  (nemsztenderd) elem mellett a természetes számoknak a következő részhalmazát:

$$\left\{ n \in {}^*\mathbf{N} : \varrho(f_n(x), f_n(y)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Ennek az előzőek szerint minden sztenderd természetes szám eleme, továbbá formulával definiált, tehát belső halmaz. A túlcsordulási lemma szerint nem állhat csak a sztenderd természetes számokból, vagyis van egy  $\omega$  nemsztenderd eleme is. Így tehát  $f_\omega(x)$  és  $f_\omega(y)$  távolsága, lévén kisebb  $1/\omega$ -nál, infinitezimális, ahogyan állítottuk.

Legyen tehát a fentiek szerint  $\omega$  olyan végtelen természetes szám, amire  $f_\omega(x) \simeq f_\omega(y)$ . Mivel  $\{f_n\}$  egyenletesen konvergál  $f$ -hez, a 6.6. állítás szerint minden végtelen indexre, speciálisan az általunk kapott  $\omega$ -ra is  $f(x) \simeq f_\omega(x)$  és  $f(y) \simeq f_\omega(y)$ . A háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\varrho(f(x), f(y)) \leq \varrho(f(x), f_\omega(x)) + \varrho(f_\omega(x), f_\omega(y)) + \varrho(f_\omega(y), f(y)),$$

A jobb oldali mennyiségek végtelenül kicsik, ezért  $f(x)$  és  $f(y)$  távolsága is végtelenül kicsi, ami igazolja, hogy  $f$  folytonos.

Legyen most  $n$  tetszőleges végtelen index,  $x$  sztenderd, és  $x \simeq y$ . Ismét a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\varrho(f_n(x), f_n(y)) \leq \varrho(f_n(x), f(x)) + \varrho(f(x), f(y)) + \varrho(f(y), f_n(y)).$$

Itt a két szélső tag az egyenletes konvergencia miatt infinitezimális, a középsőről pedig éppen most láttuk be ugyanezt. A 6.8. állítás szerint ez azt jelenti, hogy az  $\{f_n\}$  sorozat egyenlő mértékben folytonos az  $x$  pontban. ■

A bizonyításban használt „túlcsordulási” lemma további alkalmazásával metrikus terekben pontosan meg tudjuk mondani, mikor lesz egy pont monádja külső, és mikor belső halmaz.

**6.10. Állítás** *Metrikus térben  $\mu(p)$  akkor és csak akkor belső halmaz, ha  $p$  izolált pont.*

**Bizonyítás** Ha  $p$  izolált, akkor  $\mu(p) = \{p\}$ , valóban belső halmaz. Másrészt tegyük fel, hogy  $\mu(p)$  belső, és nézzük a természetes számoknak a következő részhalmazát:

$$\left\{ n \in {}^*\mathbb{N} : B(p, \frac{1}{n}) \subset \mu(p) \right\}.$$

Ez belső részhalmaz, ha  $\mu(p)$  belső halmaz. Ráadásul minden végtelen természetes szám eleme, ezért kell legyen véges eleme is, mondjuk  $m$ . Ekkor a  $p$  körüli  $1/m$  sugarú gömb része  $p$  monádjának, tehát része minden  $p$  körüli sztenderd sugarú gömbnek is, ami csak úgy lehetséges, ha nincs  $p$ -től  $1/m$ -nél kisebb távolságra egyetlen sztenderd pont sem. Vagyis  $p$  izolált. ■

Hasonló, csak technikailag bonyolultabb bizonyítás mutatja, hogy ugyanez az állítás érvényben marad metrikus tereken kívül  $M_1$  terekben is, vagyis amikor minden pontnak van megszámlálható környezetbázisa. Ugyanakkor lehet példát mutatni olyan topológikus térre, ahol  $\mu(p)$  belső halmaz annak ellenére, hogy  $p$  nem izolált.

Az  $f : X \rightarrow Y$  függvény *egyenletesen folytonos*, ha adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  nem függ  $x$ -től, azaz ha minden pozitív  $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan  $\delta > 0$ , hogy tetszőlegesen választva a  $p, q \in X$  (sztenderd) pontokat,  $\varrho(p, q) < \delta$  esetén  $\varrho(f(p), f(q)) < \varepsilon$ .

**6.11. Állítás** *Az  $f : X \rightarrow Y$  függvény akkor és csak akkor egyenletesen folytonos, ha tetszőleges  $p, q \in {}^*X$ -ra  $p \simeq q$  esetén  $f(p) \simeq f(q)$ .*

**Bizonyítás** Legyen először  $f$  egyenletesen folytonos, és  $p, q \in {}^*X$  olyanok, hogy  $p \simeq q$ . Azt szeretnénk megmutatni, hogy ekkor  $\varrho(f(p), f(q)) < \varepsilon$  minden pozitív sztenderd  $\varepsilon$  számra. Az egyenle-

tes folytonosság definícióját  $\varepsilon$ -ra használva kapjuk, hogy van olyan (sztenderd)  $\delta$ , hogy a következő formula igaz az alapmodellben:

$$\text{minden } p, q\text{-ra, ha } \varrho(p, q) < \delta, \text{ akkor } \varrho(f(p), f(q)) < \varepsilon.$$

De ekkor ugyanez a formula igaz a bővítésben is, és használjuk az adott  $p$ -re és  $q$ -ra. Ezekre  $p \simeq q$  miatt a formulában felírt feltétel igaz, tehát  $\varrho(f(p), f(q)) < \varepsilon$  is teljesül, ahogyan kívántuk.

Fordítva, legyen  $\varepsilon$  adott sztenderd valós szám. Most a bővítésben igaz, hogy

$$\text{létezik olyan } \delta > 0, \text{ hogy minden } p \text{ és } q\text{-ra } \varrho(p, q) < \delta \text{ esetén} \\ \varrho(f(p), f(q)) < \varepsilon,$$

hiszen  $\delta$ -nak tetszőleges pozitív infinitezimális szám megfelel. Ekkor ugyanez a formula igaz az alapmodellben is, mutatván, hogy  $f$  teljesíti az egyenletes folytonosság definícióját. ■

**6.12. Tétel** (Sztenderd) *Kompakt metrikus térben minden folytonos függvény egyenletesen folytonos.*

**Bizonyítás** Ha  $f : X \rightarrow Y$  folytonos,  $r \in X$  sztenderd, és  $p \simeq r$ , akkor  $f(p) \simeq f(r)$ . Ha  $X$  kompakt, akkor  ${}^*X$  minden pontja majdnem sztenderd, vagyis ha  $p, q \in {}^*X$ , és  $p \simeq q$ , akkor van olyan sztenderd  $r \in X$ , hogy  $q \simeq r$  valamint  $p \simeq r$ . Ha  $f$  még folytonos is, akkor  $f(p) \simeq f(r) \simeq f(q)$ , vagyis  $f(p) \simeq f(q)$ , ahogyan kívántuk. ■

Egy topológikus tér *metrizálható*, ha alaphalmazán definiálni tudunk egy olyan metrikát, hogy az abból adódó topológia megegyezik a megadottal. Fontos és sokat vizsgált kérdés, hogy adjunk meg olyan topológiai tulajdonságokat, amelyek meglepte már biztosítja, hogy a tér metrizálható legyen. Ebből nyújtunk most egy kis ízelítőt. Természetesen a valósaknak minden része az öröklött topológiával metrizálható. A  $[0, 1]$  egységintervallum minden véges hatványa, mint a véges dimenziós Euklideszi tér altere, szintén metrizálható. A  $[0, 1]$  megszámlálható sok példányának szorzatát *Hilbert-kockának* hívják.

**6.13. Tétel** (Sztenderd) *A Hilbert-kocka metrizálható.*

**Bizonyítás** A tér pontjai azok a (megszámlálható hosszúságú) valós számokból álló sorozatok, amelyekben minden elem a  $[0, 1]$  zárt intervallumba esik. Legyen  $x$  és  $y$  két ilyen sorozat, és definiáljuk  $x$  és  $y$  távolságát a következőképpen:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

Könnyen látható, hogy ez metrika, csak azt kell megmutatnunk, hogy ugyanazt a topológiát generálja, mint a szorzat. Az 5.9. állítás szerint ehhez elegendő ellenőriznünk, hogy a két topológia monád struktúrája megegyezik. A metrika definíciója szerint  $y$  pontosan akkor van  $x$  monádjában, ha minden véges  $i$  indexre  $y_i \in \mu(x_i)$ . Az 5.16. állítás szerint a szorzattérben  $y$  pontosan akkor van  $x$  monádjában, ha  $y_i \in \mu(x_i)$  minden sztenderd  $i$ -re, láthatóan mindkét esetben ugyanazt a feltételt kaptuk. ■

**6.14. Tétel** (Sztenderd) *Ha az  $X$  tér normális és második megszámlálható, akkor minden zárt  $A$  halmazhoz létezik olyan folytonos  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , amire  $A = f^{-1}(\{0\})$ .*

**Bizonyítás** (Sztenderd) Abból, hogy  $X$  reguláris és második megszámlálható (vagyis létezik a topológiának megszámlálható bázisa) könnyen adódik, hogy minden zárt halmaz előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként. (Legyen ugyanis  $A$  zárt, és válasszuk el  $A$ -t nyílt halmazokkal az összes benne nem lévő ponttól. Az elválasztáskor az egyes pontok  $V_i$  környezeteit a megszámlálható bázisból vehetjük, ezért van megszámlálható sok  $\langle U_i, V_i \rangle$  nyíltakból álló pár, hogy  $A \subset U_i$ , és az  $U_i$ -k valamelyike minden  $p \notin A$  pontra elválaszt. Ekkor viszont  $A$  éppen az  $U_i$  halmazok közös része.)

Legyen tehát  $A = \bigcap \{U_i\}$ , és válasszunk az 5.11. tétel alapján olyan  $f_i : X \rightarrow [0, 1]$  folytonos függvényt, ami elválasztja  $A$ -t és

(a tőle diszjunkt és zárt)  $X - U_i$ -t, vagyis  $A \subset f_i^{-1}(\{0\})$  valamint  $X - U_i \subset f_i^{-1}(\{1\})$ . Legyen

$$(2) \quad g(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i(p)}{2^i}.$$

Világos, hogy  $g$  nulla és egy közötti értékeket vesz fel;  $A \subset g^{-1}(\{0\})$ , továbbá ha  $p \notin A$ , akkor  $p \in X - U_i$  valamilyen  $i$ -re, és ekkor  $g(p) \geq 2^{-i} > 0$ . Ezért  $g^{-1}(\{0\}) = A$ , csak azt kell látnunk, hogy  $g$  folytonos.

Jelöljük  $g_n$ -nel a (2) alatti összeg első  $n$  tagjának összegét. Mivel mindegyik  $f_i$  folytonos, azért  $g_n$  is az, továbbá a  $\{g_n\}$  sorozat éppen  $g$ -hez konvergál. Mivel

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

$x$ -től függetlenül, azért a konvergencia egyenletes. A 6.9. tétel szerint ekkor  $g$  folytonos is. ■

**6.15. Tétel** (Sztenderd, Uriszon metrizációs tétele) *Ha az  $X$  tér normális és második megszámlálható, akkor metrizálható.*

**Bizonyítás** Legyen  $\{U_n\}$  a tér egy megszámlálható bázisa, és legyen  $f_n : X \rightarrow [0, 1]$  az előző tétel szerint létező folytonos függvény, amire  $f_n^{-1}(\{0\}) = X - U_n$ . Jelöljük a Hilbert-kockát  $H$ -val, és definiáljuk az  $f : X \rightarrow H$  függvényt úgy, hogy  $n$ -edik koordinátája éppen  $f_n$ . Mivel  $f$  minden koordinátája folytonos, azért  $f$  is folytonos. Másrészt  $f$  injektív, azaz ha  $p \neq q$ , akkor  $f(p) \neq f(q)$ . Ehhez elegendő egyetlen olyan  $n$  indexet találnunk, melyre  $f_n(p)$  és  $f_n(q)$  különböznek. Válasszunk olyan  $U_n$  bázis nyílt halmazt, ami  $p$ -t tartalmazza,  $q$ -t pedig nem, erre  $f_n(q) = 0$ , és  $f_n(p) \neq 0$ , ahogyan kívántuk.

Állítjuk, hogy  $f$  homeomorfizmus  $X$  és  $f(X)$  között, ebből a tétel már következik, hiszen  $f(X)$ , mint a Hilbert-kocka altere, metrizálható az öröklött metrikával. Mivel  $f$  folytonos is, a homeomorfizmus igazolásához azt kell csak megmutatnunk, hogy  $f$ -nek az inverze is folytonos.

Ehhez viszont elég látnunk, hogy ha az  $x$  sztenderd pont  $X$ -ben, és  $y$  nincs  $x$  monádjában, akkor  $f(y)$  nem eleme  $f(x)$  monádjának. Mivel  $y \notin \mu(x)$ , tudunk találni a bázis nyílt halmazok között olyat, mondjuk  $U_n$ -et, ami  $x$ -et tartalmazza, de  $y$ -t nem. Ekkor viszont  $f_n(x) > 0$  sztenderd szám, viszont  $f_n(y) = 0$ , tehát  $f_n(y) \notin \mu(f_n(x))$ , s így az 5.16. állítás szerint  $f(y) \notin \mu(f(x))$ . A tételt bizonyítottuk. ■

A fejezetet egy Ascoli-tól származó tétellel zárjuk. Legyenek  $X$  és  $Y$  metrikus terek, és  $f_n$   $X$ -ből  $Y$ -ba képező függvények. Az  $\{f_n\}$  sorozatról azt mondjuk, hogy *egyenlő mértékben egyenletesen folytonos*, ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy minden  $p, q \in X$ -re és minden  $n$ -re, ha  $\varrho(p, q) < \delta$ , akkor  $\varrho(f_n(p), f_n(q)) < \varepsilon$ .

**6.16. Tétel** (Sztenderd, Ascoli) *Legyenek  $X$  és  $Y$  kompakt metrikus terek, és az  $X$ -ből  $Y$ -ba képező  $\{f_n\}$  függvénysorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos. Ekkor létezik az  $\{f_n\}$ -nek olyan  $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$  részsorozata, ami egyenletesen konvergál egy egyenletesen folytonos  $F$  függvényhez.*

**Bizonyítás** Csak az egyenletes konvergenciát kell belátnunk, innen már 6.9. és 6.12. alapján  $F$  egyenletes folytonossága már következik. Rögzítsünk egy  $\omega$  végtelen természetes számot. Legyen az  $x \in X$  sztenderd pontokra  $F(x) \in Y$  az a sztenderd pont, aminek monádjában  $f_\omega(x)$  van. Mivel  $Y$  kompakt tér,  ${}^*Y$  minden pontja majdnem sztenderd, ezért  $F(x)$  egyértelműen definiálva van. Állítjuk, hogy  $F$  folytonos. Ennek igazolására a folytonosság sztenderd definícióját használjuk. Legyen tehát adva tetszőleges  $\varepsilon > 0$  sztenderd szám. Az  $\{f_n\}$  függvénysorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos, válasszunk egy, a definíció szerint létező  $\delta > 0$  sztenderd számot, amire

tetszőleges  $n$ -re és  $p, q$  pontokra,  $\varrho(p, q) < \delta$  esetén

(3)

$$\varrho(f_n(p), f_n(q)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Állítjuk, hogy ha  $p$  és  $q$   $\delta$ -nál közelebb van egymáshoz, akkor  $F(p)$  és  $F(q)$  távolsága  $\varepsilon$ -nál kisebb, ami igazolja, hogy  $F$  tényleg egyenletesen folytonos. Valóban, (3) igaz az alapmodellben, ezért igaz a bővítésben is, speciálisan az  $n = \omega$  esetben: ha  $p$  és  $q$  olyan pontok, melyekre  $\varrho(p, q) < \delta$ , akkor  $\varrho(f_\omega(p), f_\omega(q)) < \varepsilon/2$ . A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\varrho(F(p), F(q)) \leq \varrho(F(p), f_\omega(p)) + \varrho(f_\omega(p), f_\omega(q)) + \varrho(f_\omega(q), F(q)).$$

A jobb oldalon sztenderd  $p$ -re és  $q$ -ra az első és harmadik tag  $F$  definíciója miatt infinitezimális, a középső tag (3) alapján legfeljebb  $\varepsilon/2$ , tehát  $\varrho(F(p), F(q))$  valóban kisebb  $\varepsilon$ -nál olyan sztenderd  $p$  és  $q$  pontokra, melyek távolsága kisebb, mint  $\delta$ . Ezzel megkaptuk, hogy  $F$  folytonos.

Mivel  $X$  kompakt, azért  ${}^*X$  minden  $p$  pontja benne van egy sztenderd  $q \in X$  pont monádjában, és így mivel  $F$  folytonos  $q$ -ban:

$$F(p) \simeq F(q) \simeq f_\omega(q) \simeq f_\omega(p),$$

a harmadik  $\simeq$  szintén (3)-ból következik, hiszen  $p \simeq q$  és így  $p$  és  $q$  minden sztenderd  $\delta$  távolságnál közelebb van egymáshoz, ezért  $\varrho(f_\omega(p), f_\omega(q)) < \varepsilon$  is igaz minden pozitív sztenderd  $\varepsilon$ -ra. Ezzel azt kaptuk, hogy

$$(4) \quad \text{minden } p \in {}^*X\text{-re } F(p) \simeq f_\omega(p).$$

Ezek után már csak olyan részsorozatot kell találnunk, hogy  $f_{n_k}$  egyenletesen konvergáljon  $F$ -hez. Tegyük fel, hogy  $n_k$ -t már kiválasztottuk. A

*létezik olyan  $n > n_k$  index, hogy  $\varrho(f_n(p), F(p)) < \frac{1}{k}$  minden  $p$  pontra*

állítás (4) szerint igaz a bővítésben, válasszuk ugyanis  $n$ -et  $\omega$ -nak. Ezért ugyanez igaz az alapmodellben is, a megfelelő index legyen a sztenderd

$n_{k+1}$ . Mivel  $f_{n_{k+1}}$  és  $F$  távolsága mindenütt kisebb  $1/k$ -nál, azért az  $\{f_{n_k}\}$  sorozat tényleg egyenletesen konvergál  $F$ -hez. ■

A tétel feltételeiből könnyen adódik, hogy végtelen  $\omega$  indexre  $p \simeq q$  esetén  $f_\omega(p) \simeq f_\omega(q)$ , és  $F$  definíciója alapján  $F(p) \simeq f_\omega(p)$  sztenderd pontokra. E kettőből azonban nem következik minden további nélkül (4), vagyis hogy  $F$  és  $f_\omega$  minden helyen végtelenül közel lenne egymáshoz (amiből persze az is rögtön adódna, hogy  $F$  folytonos). Ezért kellett kerülő úton előbb bizonyítanunk, hogy  $F$  folytonos, és csak ezután tudtuk levonni azt a következtetést, hogy  $F$  és  $f_\omega$  nem csak a sztenderd helyeken közeli.



## 7. fejezet

# Hézagos polinomok

Legyen  $\mathbf{C}$  a kétdimenziós Euklideszi tér a szokásos, komplex számok által meghatározott struktúrával ellátva. A komplex számokat azonosíthatjuk a valós számokból álló számpárokkal, és így a komplex számokról szóló állításokat tekinthetjük valósokról szóló állításoknak is. A komplex számok  ${}^*\mathbf{C}$  bővítése így tulajdonképpen már  ${}^*\mathbf{R}$ -ban megtalálható, de inkább úgy gondoljuk, hogy  $\mathbf{C}$ -nek külön készítjük el a bővítését. Mivel  $\mathbf{C}$ -nek része  $\mathbf{R}$ , azért  ${}^*\mathbf{C}$ -ben a valósak bővítése csakúgy megtalálható, mint az egész vagy természetes számoké.

Minden  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  komplex függvény automatikusan kiterjed a bővítés elemeire, így például az abszolút érték, a valós illetve képzetes rész is. Legyen  $P$  a komplex együtthatós polinomok halmaza, ekkor  ${}^*P$  elemeit  ${}^*$ polinomoknak hívjuk. Természetesen minden polinom egyúttal  ${}^*$ polinom is. Minden  $p(z)$  (sztenderd) polinomhoz létezik egy  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$  függvény, ami  $p$  együtthatóit adja meg;  ${}^*P$  elemeinél ez  ${}^*\mathbf{N}$ -et képezi  ${}^*\mathbf{C}$ -be. Mivel egy polinomnak csak véges sok nem nulla együtthatója van, az együtthatókat előállító  $f$  függvény egy idő után csupa nullát ad vissza. A legutolsó nem-nulla együttható helyét hívjuk a polinom *fokának*, és  $\deg(p)$ -vel jelöljük. Szokás szerint egy  $n$ -edfokú polinomot

$$p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0, \quad c_n \neq 0$$

alakban írjuk fel; ugyanezt az alakot használjuk  ${}^*$ polinomok esetében is, bár ekkor  $n$  lehet végtelen természetes szám is.  ${}^*$ Polinomokra is

ugyanazok az összefüggések érvényesek, mint a (sztenderd) polinomokra, például értéküket a megfelelő hatványok összeadásával számíthatjuk ki. (Ennek a kijelentésnek még abban az esetben is lehet értelmet tulajdonítani, ha a  $^*\text{polinomban}$  végtelen sok tag szerepel!)

Egy  $n$ -edfokú polinomnak pontosan  $n$  gyöke van, ha a gyököket mutiplicitással számoljuk. Egy  $p$  polinomnak az  $r$  sugarú körbe eső gyökeinek számát (mutiplicitással) egy  $h : P \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{N}$  függvény adja meg; ugyanez a függvény adja meg a bővítésben tetszőleges  $^*\text{polinomra}$  és  $r \in {}^*\mathbf{R}$  sugárra a gyökök számát, ami  ${}^*\mathbf{N}$  egy eleme lesz. Ha a  $p(z)$   $^*\text{polinom}$  foka  $n \in {}^*\mathbf{N}$ , akkor a gyökök száma soha nem haladja meg  $n$ -et, és van olyan  $r \in {}^*\mathbf{R}$ , hogy az ekkora sugarú körben  $p$ -nek pontosan  $n$  gyöke van.

Általában nem jelöljük, hogy sztenderd polinomokról vagy pedig  $^*\text{polinomokról}$  van-e szó, csak ha azt valami miatt hangsúlyozni szeretnénk. Ennek oka, hogy mikor melyik fajta polinomról van szó egyrészt világos a környezetből, másrészt minden formulával megfogalmazható állítás akkor és csak akkor igaz az egyikre, amikor a másikra.

Fogjuk használni Rouché tételének az alábbi alakját, melyet könnyen interpretálhatunk a bővítésben. A tételt nem bizonyítjuk.

**7.1. Tétel** (Sztenderd, Rouché) *Legyenek  $p(z)$  és  $q(z)$  olyan polinomok, hogy az  $r$  sugarú kör területén, vagyis  $|z| = r$  esetén  $|q(z)| < |p(z)|$ . Ekkor az  $p(z)$ -nek és  $p(z) + q(z)$ -nek mutiplicitással számolva az  $r$  sugarú körben pontosan ugyanannyi gyöke van. ■*

A fejezetben elsősorban olyan polinomokkal foglalkozunk, melyeknek legfeljebb  $r$  nem nulla együtthatójuk van, ahol  $r$  valamilyen rögzített véges egész. Az ilyen polinomokat  $r$  tagú *hézagos polinomoknak* hívjuk, és persze ezek felírhatók

$$(1) \quad p(z) = c_1 z^{n_1} + c_2 z^{n_2} + \dots + c_r z^{n_r}$$

alakban, ahol  $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ . A bővítésben egy  $r$ -hézagos  $^*\text{polinomnak}$  sem az együtthatóknak, sem a kitevőknek nem kell szten-

derdeknek lenniük, de a benne levő tagok száma továbbra is legfeljebb  $r$  lehet, ahol  $r$  rögzített véges természetes szám.

A nem azonosan nulla, egyetlen tagból álló  $az^n$  polinomot *monomnak* hívjuk.

**7.2. Definíció** Legyen  $az^n$  és  $bz^m$  két monom. Az elsőről azt mondjuk, hogy *dominálja* a másikat, jelben  $az^n \gg bz^m$ , ha  $n \neq m$  és van olyan véges  $\varrho$  valós szám, hogy  $|az^n| > |bz^m|$  minden olyan véges  $z$ -re, amire  $|z| > \varrho$ .

**7.3. Állítás** Legyen  $az^n$ ,  $bz^m$  és  $cz^k$  olyan, hogy az első dominálja a másodikat és a második dominálja a harmadikat. Ha még  $n \neq k$ , akkor  $az^n \gg cz^k$ .

**Bizonyítás** Legyen  $\varrho$  az első illetve a második domináláshoz tartozó  $\varrho_1$  és  $\varrho_2$  maximuma. Ha  $|z| > \varrho$  és véges, akkor  $|az^n| > |bz^m|$  és  $|bz^m| > |cz^k|$ , vagyis  $|az^n| > |cz^k|$ . ■

A bizonyításból az is kiolvasható, hogy nincs két olyan monom, melyek egymást dominálnák. Ekkor ugyanis elegendően nagy véges  $z$ -re  $|az^n| > |az^n|$  lenne, ami lehetetlen.

**7.4. Állítás** Legyen  $az^n$  és  $bz^m$  két különböző fokú monom. Ekkor vagy  $az^n \gg bz^m$ , vagy  $bz^m \gg az^n$ .

**Bizonyítás** Nézzük a  $(b/a)z^{m-n}$  hányadost. Ennek abszolút értéke  $|z| = \varrho$  esetén  $f(\varrho) = |b/a|\varrho^{m-n}$ . Ez folytonos, és ha  $m < n$ , akkor  $\varrho$ -ban szigorúan monoton fogy, ha pedig  $m > n$ , akkor szigorúan monoton nő. Ha minden  $\mathbf{R}$ -beli szttenderd  $\varrho$ -ra az  $f(\varrho)$  hányados 1 alatt van, akkor  $az^n$  dominálja  $bz^m$ -t. Ha  $f(\varrho)$  mindig 1 fölött van, akkor viszont  $bz^m$  dominálja  $az^n$ -t. Marad az az eset, mikor  $f$  nem csak az egyik fajta értéket veszi fel. A szigorú monotonitás és a folytonosság miatt ekkor az 1-et is fel kell vennie, mégpedig pontosan egy  $\varrho_0$  helyen. Négy lehetőség van:

- (i)  $\varrho_0$  véges és  $f$  csökkenő. Ekkor  $f(\varrho) < 1$  elegendően nagy szttenderd  $\varrho$ -ra, ezért  $az^n$  dominálja  $bz^m$ -et.
- (ii)  $\varrho_0$  véges és  $f$  növekszik. Ekkor  $f(\varrho) > 1$  elegendően nagy szttenderd  $\varrho$ -ra, vagyis  $bz^m$  dominálja  $az^n$ -et.
- (iii)  $\varrho_0$  végtelen és  $f$  csökkenő. Ekkor minden szttenderd  $\varrho$ -ra  $f(\varrho) > 1$ , tehát  $bz^m$  dominálja  $az^n$ -et.
- (iv)  $\varrho_0$  végtelen és  $f$  növekszik. Ilyenkor szttenderd  $\varrho$ -kra  $f(\varrho) < 1$ , és így  $az^n$  dominálja  $bz^m$ -et.

Több lehetőség nincs, az állítást bizonyítottuk. ■

**7.5. Állítás** Legyen  $az^n \gg bz^m$ , és  $r > 1$  véges valós szám. Ekkor van olyan véges  $\varrho$  valós szám, hogy minden olyan véges  $z$ -re, amire  $|z| > \varrho$ ,

$$\frac{|bz^m|}{|az^n|} < \frac{1}{r}.$$

**Bizonyítás** A dominálás azt jelenti, hogy  $|b/a||z|^{m-n} < 1$  minden elegendően nagy véges  $z$ -re, mondjuk ha  $|z| > \sigma$ . Elsőként legyen  $m > n$ . Ekkor  $r^{m-n} \geq r$ , továbbá  $|z| > \sigma$  esetén  $|r \cdot z| = r \cdot |z| > \sigma$  is igaz, tehát

$$\left| \frac{b}{a} \right| |z|^{m-n} = \left| \frac{b}{a} \right| |r \cdot z|^{m-n} \cdot \frac{1}{r^{m-n}} < 1 \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r}.$$

Ha viszont  $m < n$ , akkor  $r^{m-n} \leq 1/r$ . Így ha  $|z| > r \cdot \sigma$ , akkor  $|z/r| > \sigma$ , tehát

$$\left| \frac{b}{a} \right| |z|^{m-n} = \left| \frac{b}{a} \right| \cdot \left| \frac{z}{r} \right|^{m-n} \cdot r^{m-n} < 1 \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r}.$$

Tehát az első esetben  $\varrho = \sigma$ , a másodikban  $\varrho = r \cdot \sigma$  megfelelő választás. ■

Legyen  $r$  szttenderd véges szám és  $p$  egy (1) szerinti legfeljebb  $r$  tagból álló hízagos polinom. A  $p$ -ben szereplő nem nulla együtthatójú

tagok az előzőek szerint lineárisan elrendezhetők a szerint, hogy melyik dominálja a másikat. Ezért lesz egy olyan tag, mondjuk  $c_i z^{n_i}$ ,  $c_i \neq 0$ , amelyik dominálja az összes többi. Ebben az esetben  $n_i$ -t a  $p$  polinom *rendjének* nevezzük, és  $\text{ord}(p)$ -vel jelöljük. Egy polinom rendje és foka nem kell, hogy egybeessen: például ha  $|a|$  végtelen, akkor  $z^2 - 2az + 1$  foka 2, de rendje 1. A fejezet fő eredménye az alábbi tétel, erről fogunk számos bört lenyúzni.

**7.6. Tétel** *Legyen  $r$  sztenderd természetes szám, és tegyük fel, hogy a  $p(z)$  egy legfeljebb  $r$  tagú hézagos polinom. Legyen  $p(z)$  rendje  $\nu$ . Ha  $\nu$  véges, akkor  $p(z)$ -nek pontosan  $\nu$  véges gyöke van; ha  $\nu$  végtelen, akkor  $p(z)$ -nek végtelen sok véges gyöke van.*

**Bizonyítás** Legyen  $cz^\nu$  a maximális rendű (nem maximális fokú) tag  $p(z)$ -ben, és  $q(z)$  a maradék, vagyis  $p(z) = cz^\nu + q(z)$ . Ekkor  $q(z)$  felírható a következőképpen:

$$q(z) = c_1 z^{n_1} + c_2 z^{n_2} + \dots + c_{r-1} z^{n_{r-1}}.$$

Feltétel szerint  $cz^\nu$  dominálja az összes itteni tagot, tehát a 7.5. állítás szerint van olyan véges  $\varrho$ , hogy minden  $\varrho$ -nál nagyobb de véges  $z$ -re  $|c_i||z|^{n_i} < (1/r)|c||z|^\nu$ . Ezért ugyanezen  $z$ -kre a  $q(z)$ -ben szereplő mind az  $r - 1$  tag abszolút értéke kisebb  $|c||z|^\nu$   $r$ -ed részénél, tehát  $|q(z)| < |cz^\nu|$ .

Ez azt mutatja, hogy minden véges  $r > \varrho$  esetére a Rouché tétel feltétele teljesül a  $cz^\nu$  és  $q(z)$  polinomokra, így az  $r$  sugarú körön belül  $cz^\nu$ -nek és  $cz^\nu + q(z) = p(z)$  polinomnak multiplicitással számolva ugyanannyi gyöke van.

Ha most  $\nu$  véges, akkor a  $cz^\nu$  polinomnak a nulla  $\nu$ -szörös gyöke, és így  $p(z)$ -nek minden véges  $r > \varrho$  sugarú körön belül is pontosan  $\nu$  gyöke van. Ezért  $p(z)$ -nek van legalább  $\nu$  véges gyöke, de több nem lehet, mert akkor volna olyan véges  $r$  hogy legalább  $\nu + 1$  gyök esik az  $r$  sugarú körön belültre.

Végül, ha  $\nu$  végtelen, akkor minden véges  $k$ -ra  $cz^\nu$ -nek a nulla  $k$ -szoros gyöke, és így  $p(z)$ -nek is legalább  $k$  gyökének kell lennie minden véges  $r > \varrho$  sugarú körön belül. ■

Láttuk, hogy ha  $a$  végtelen, akkor a  $z^2 - 2az + 1$  polinom foka 2 és rendje 1. A tétel szerint pontosan egy véges gyöke van; s valóban, a két gyök egyike  $2a$  körüli, és ezért végtelen; a másik ennek reciproka, tehát infinitezimális és így véges is.

### 7.7. Tétel (Sztenderd, Montel) Legyen

$$(2) \quad p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + a_{k+1} z^{n_{k+1}} + \cdots + a_{k+\ell} z^{n_{k+\ell}},$$

ahol  $0 < k < n_{k+1} < \cdots < n_{k+\ell}$  és  $a_k \neq 0$ . Ekkor létezik olyan pozitív  $\varrho$ , ami csak az  $a_0, a_1, \dots, a_k$  értékektől és  $\ell$ -től függ (és nem a további együtthatóktól és kitevőktől), hogy tetszőleges  $a_{k+1}, \dots, a_{k+\ell}$  együttható és megfelelő  $n_{k+1}, \dots, n_{k+\ell}$  kitevő esetén  $p(z)$ -nek legalább  $k$  gyöke van a  $\varrho$  sugarú körön belül.

**Bizonyítás** Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy ilyen  $\varrho$  korlát nem létezik az adott  $a_0, \dots, a_k$  számokra és  $\ell$ -re. Ekkor a következő állítás igaz az alapmodellben, következésképp a bővítésben is:

*minden  $\varrho > 0$ -ra tudunk választani olyan  $a_{k+1}, \dots, a_{k+\ell}$  együtthatókat és  $n_{k+1}, \dots, n_{k+\ell}$  kitevőket, hogy a (2) polinomnak legfeljebb  $k - 1$  gyöke van a  $\varrho$  sugarú körön belül.*

Válasszuk  $\varrho$ -t végtelen nagynak, (3) szerint létezik olyan (2) alakú  $p(z)$  \*polinom, aminek legfeljebb  $k - 1$  gyöke kisebb  $\varrho$ -nál, tehát speciálisan legfeljebb  $k - 1$  véges gyöke van.

Az, hogy  $p(z)$  megfelelő ellenpélda, azt jelenti, hogy ebben a polinomban az abszolút tag  $a_0$ , az elsőfokú tag együtthatója  $a_1$ , stb, a  $k$ -adfokú tag együtthatója  $a_k$  (itt  $k$  és az együtthatók rögzített sztenderd valós számok), továbbá a polinomnak még további legfeljebb  $\ell$  nemnulla tagja van, melyek foka mind nagyobb  $k$ -nál. Ezen tagok foka és

együtthatója már lehet nem sztenderd elem is.  $p(z)$ -ben a tagok száma legfeljebb  $k + \ell$ , ami véges, így alkalmazható rá a 7.6. tétel. Próbáljuk meghatározni  $p(z)$  rendjét. Világos, hogy  $a_k z^k$  dominálja az összes olyan  $a_i z^i$  tagot amire  $i < k$  és  $a_i \neq 0$ , hiszen mindegyik  $a_i$  sztenderd szám. A későbbi tagok között lehet néhány olyan, ami dominálja  $a_k z^k$ -t, de azok foka nagyobb  $k$ -nál. Ezért  $p(z)$  rendje legalább  $k$ , és így 7.6. szerint van legalább  $k$  véges gyöke. A kapott ellentmondás bizonyítja állításunkat.



Két polinomról azt mondjuk, hogy *diszjunkt*, ha nincs bennük ugyanolyan fokú tag. Ez a helyzet például, ha az egyikben csak páros, a másikon csak páratlan kitevőjű hatványok szerepelnek.

**7.8. Tétel** (Sztenderd) *Van olyan  $\varrho(k, r)$  pozitív valós értékeket felvevő függvény, amire a következő teljesül. Ha  $p(z)$  és  $q(z)$  diszjunkt nem azonosan nulla polinomok,  $p$  és  $q$  külön-külön legfeljebb  $r$  tagból áll, továbbá  $p$ -nek és  $q$ -nak is van legalább  $k$  gyöke az egységsugarú körön belül, akkor  $p(z) + q(z)$ -nek is van legalább  $k$  gyöke a  $\varrho(k, r)$  sugarú körben.*

**Bizonyítás** Megint tegyük fel, hogy az állítással ellentétben adott fix  $k$  és  $r$  mellett ilyen  $\varrho$  nem létezik. Ekkor a következő állítás teljesül az alapmodellben és ezért a bővítésben is:

- (4) *minden  $\varrho > 0$ -ra van két diszjunkt, külön-külön legfeljebb  $r$  tagú  $p(z)$  és  $q(z)$  nem nulla polinom úgy, hogy mindkettőnek van  $k$  gyöke az egységkörben, de  $p(z) + q(z)$ -nek legfeljebb  $k - 1$  gyöke van a  $\varrho$  sugarú körben.*

Válasszuk  $\varrho$ -t végtelennek, és legyenek  $p(z)$  valamint  $q(z)$  az ellenpélda \*polinomok. Ekkor  $p + q$ -nak legfeljebb  $k - 1$  véges gyöke van, ugyanakkor mind  $p$ -nek mind  $q$ -nak van legalább  $k$  gyöke az egységsugarú körben. Legyen  $p$ -ben a maximális rendű tag  $a_i z^{n_i}$ ,  $q$ -ban pedig  $a_j z^{n_j}$ . A 7.6. tétel szerint  $n_i \geq k$  és  $n_j \geq k$ , hiszen mind  $p$ -nek, mind  $q$ -nak

van  $k$  véges gyöke, továbbá  $n_i \neq n_j$ , hiszen  $p$  és  $q$  diszjunktak, mivel ugyanolyan kitevővel nem szerepel bennük  $z$ -hatvány.

Mivel  $p$  és  $q$  diszjunktak, azért az összegben azok és csak azok a tagok szerepelnek, melyek vagy  $p$ -ben vagy  $q$ -ban benne vannak. Ezért  $p+q$  legfeljebb  $2r$  tagú hézagos polinom. Mi lehet  $p+q$  rendje? Tudjuk, hogy  $a_i z^{n_i}$  dominálja az összes  $p$ -beli tagot,  $a_j z^{n_j}$  pedig az összes  $q$ -belit. A 7.4. állítás szerint e két domináns monom valamelyike dominálja a másikat, mondjuk  $a_i z^{n_i} \gg a_j z^{n_j}$ . De ekkor  $a_i z^{n_i}$  maximális rendű tag  $p+q$ -ban is, vagyis  $p+q$  rendje is  $n_i$ . Ekkor ismét a 7.6. tétel miatt  $p+q$ -nak van legalább  $n_i \geq k$  véges gyöke, ellentmondásban azzal, hogy  $p+q$ -nak legfeljebb  $k-1$  véges gyöke lehet. ■

A tételt könnyen általánosíthatjuk mindjárt két irányban is. Az egyik, hogy az egységkör helyett a  $\varrho_0$  sugarú körben kívánjuk meg hogy legyen  $p(z)$ -nek és  $q(z)$ -nek is legalább  $k$  gyöke. Ekkor a 7.8. tételt a  $p(z \cdot \varrho_0)$  illetve  $q(z \cdot \varrho_0)$  polinomokra alkalmazva adódik, hogy  $p(z) + q(z)$ -nek van  $k$  gyöke a  $\varrho_0 \cdot \varrho(k, r)$  sugarú körben. Másik lehetséges általánosítás, ha nem kettő, hanem  $s$  darab páronként diszjunkt, egyenként legfeljebb  $r$  tagú polinom összegét nézzük. Ebben az esetben a  $\varrho$  korlát  $k$ -től,  $r$ -től és  $s$ -től is függ, a bizonyítás változatlan.

A 7.8. tételnek a 7.7. is következménye. Legyen ugyanis  $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k$ , és  $q(z) = a_{k+1} z^{n_{k+1}} + \dots + a_{k+\ell} z^{n_{k+\ell}}$ , legyen  $r$  a  $k$  és  $\ell$  közül a nagyobbik, továbbá  $\varrho_0$  akkora, hogy  $p(z)$ -nek mind a  $k$  gyöke a  $\varrho_0$  sugarú körön belül legyen. Mivel  $q(z)$ -nek a nulla  $n_{k+1} > k$ -szoros gyöke, az összegnek is van legalább  $k$  darab  $\varrho_0 \cdot \varrho(k, r)$ -nél kisebb abszolút értékű gyöke.

Ismert, hogy a  $p(z)$  polinom deriváltjának gyökei benne vannak  $p(z)$  gyökeinek konvex burkában. Így ha  $p(z)$   $n$ -edfokú, és mind az  $n$  gyöke benne van az egységkörben, akkor  $p'(z)$ -nek is mind az  $n-1$  gyöke beleesik ugyanebbe a körbe. Kakeya alábbi tétele arról beszél, hogy ha  $p(z)$ -nek csak a  $k$  legkisebb gyökéről tudjuk, hogy az egységkörben



van, akkor hol helyezkedhetnek el  $p'(z)$   $k - 1$  legkisebb abszolút értékű gyökei.

**7.9. Tétel** (Sztenderd, Kakeya) *Van olyan  $\varrho(k, n)$  függvény, hogy ha  $p(z)$   $n$ -edfokú polinomnak van legalább  $k$  gyöke az egység sugarú körben, akkor a deriváltjának van legalább  $k - 1$  gyöke a  $\varrho(k, n)$  sugarú körben.*

Természetesen az állítás ekvivalens azzal, hogy  $z \cdot p'(z)$ -nek van legalább  $k$  gyöke az egységkörben. Ezért Kakeya tétele azonnal adódik a következő, jóval általánosabb tételből.

**7.10. Tétel** (Sztenderd) *Létezik  $\varrho(k, r)$  függvény a következő tulajdonsággal. Ha a*

$$p(z) = c_1 z^{n_1} + c_2 z^{n_2} + \dots + c_r z^{n_r}, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_r$$

*legfeljebb  $r$ -tagú polinomnak van  $k$  gyöke az egység sugarú körben, akkor tetszőleges*

$$0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_r|$$

*komplex számokra a*

$$q(z) = \lambda_1 c_1 z^{n_1} + \lambda_2 c_2 z^{n_2} + \dots + \lambda_r c_r z^{n_r}$$

*polinomnak is van legalább  $k$  gyöke a  $\varrho(k, r)$  sugarú körben.*

**Bizonyítás** Ahogyan eddig is tettük, most is indirekt módon abból indulunk ki, hogy az állítás semmilyen  $\varrho$ -ra nem igaz, vagyis teljesül a következő állítás:

- (5) *minden  $\varrho > 0$ -ra van olyan  $r$ -tagú  $p(z)$  hézagos polinom és  $\lambda_i$  számok, melyekre a tétel feltételei teljesülnek úgy, hogy  $p(z)$ -nek legalább  $k$  gyöke van az egységkörben, és  $q(z)$ -nek legfeljebb  $k - 1$  gyöke a  $\varrho$  sugarú körben.*

Ez az állítás a bővítésben is igaz, válasszuk  $\varrho$ -t végtelennek. Az ellenpélda  $p(z)$  hézagos polinomnak van  $k$  véges gyöke (hiszen ennyi gyöke

még az egység sugarú körben is van), ugyanakkor  $q(z)$ -nek legfeljebb  $k - 1$  véges gyöke lehet. Legyen a  $p(z)$  polinom maximális rendű tagja  $c_i z^{n_i}$ , a  $q(z)$  maximális rendű tagja pedig  $\lambda_j c_j z^{n_j}$ , vagyis  $p$  rendje  $n_i$ ,  $q$  rendje pedig  $n_j$ . A 7.6. tétel szerint  $p$  rendje legalább  $k$ ,  $q$  rendje pedig legfeljebb  $k - 1$ , így  $n_i \geq k$  és  $k - 1 \geq n_j$ . Ezek szerint  $n_i > n_j$  és ebből következően  $i > j$  és  $|\lambda_i| \geq |\lambda_j|$  is fennáll.

Az ellentmondást megkapjuk, ha megmutatjuk, hogy  $q$ -ban az  $n_j$  kitevőjű tag mégsem dominálja az  $n_i$  kitevőjű tagot. Mivel

$$\left| \frac{\lambda_j c_j z^{n_j}}{\lambda_i c_i z^{n_i}} \right| = \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right| \left| \frac{c_j z^{n_j}}{c_i z^{n_i}} \right| \leq \left| \frac{c_j z^{n_j}}{c_i z^{n_i}} \right|,$$

és  $p(z)$ -ben  $c_j z^{n_j} \ll c_i z^{n_i}$ , ezért a jobb oldal elegendően nagy de véges  $z$ -re 1-nél kisebb, tehát a bal oldal nem lehet ugyanerre a  $z$  értékre 1-nél nagyobb. Ezzel a keresett ellentmondás előállt, a tételt bizonyítottuk. ■

Lényegében ugyanez a számolás adja a következő eredményt is:

**7.11. Tétel** *Létezik  $\varrho(k, r)$  függvény a következő tulajdonsággal. Ha a*

$$p(z) = c_1 z^{n_1} + c_2 z^{n_2} + \dots + c_r z^{n_r}, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_r$$

*legfeljebb  $r$ -tagú polinomnak van  $k$  gyöke az egység sugarú körben, akkor tetszőleges  $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_r$  egész számokra a*

$$q(z) = c_1 z^{n_1 + \ell_1} + c_2 z^{n_2 + \ell_2} + \dots + c_r z^{n_r + \ell_r}$$

*polinomnak is van legalább  $k$  gyöke a  $\varrho(k, r)$  sugarú körben.*

**Bizonyítás** Az előző tétel bizonyítását követve legyen  $p(z)$  és  $q(z)$  a végtelen nagy  $\varrho$ -hoz tartozó ellenpélda, továbbá  $p$ -ben az  $n_i$  és  $q$ -ban az  $n_j + \ell_j$  kitevőjű tag a maximális rendű. Ekkor egyrészt a 7.6. tétel szerint  $n_i \geq k$  és  $k - 1 \geq n_j + \ell_j$ , tehát például  $n_i > n_j$ , és ezért

$\ell_i \geq \ell_j$ ; másrészt  $c_i z^{n_i} \gg c_j z^{n_j}$ , valamint  $c_i z^{n_i + \ell_i} \ll c_j z^{n_j + \ell_j}$ . Ez pedig nem lehet, mert  $|z| > 1$  esetén

$$\left| \frac{c_j z^{n_j + \ell_j}}{c_i z^{n_i + \ell_i}} \right| = |z|^{\ell_j - \ell_i} \left| \frac{c_j z^{n_j}}{c_i z^{n_i}} \right| \leq \left| \frac{c_j z^{n_j}}{c_i z^{n_i}} \right|,$$

és elegendően nagy, de véges  $z$ -re a bal oldal 1-nél nagyobb, a jobb oldal 1-nél kisebb, ami adja a kívánt ellentmondást. ■

Végül a 7.8., 7.10. és 7.11. tételeket össze is tudjuk fogni a következőképpen.

**7.12. Tétel** Legyen  $k$ ,  $r$  és  $s$  rögzített pozitív egész számok, ezekhez létezik egy  $K = K(k, r, s)$  szám a következő tulajdonsággal. Induljunk ki legfeljebb  $s$  darab, egyenként legfeljebb  $r$ -tagú polinomból, melyek mindegyikének legalább  $k$  gyöke van valamely  $\varrho$  sugarú körben. Mind-egyik polinomban külön-külön az együtthatókat a kitevők szerint egyre növekvő abszolút értékű számmal megszorozhatjuk, majd a kitevőket is növekvő sorrendben tetszőlegesen megemelhettjük egyre nagyobb értékekkel úgy, hogy az így előálló  $s$  darab polinom páronként diszjunkt legyen. Végül vegyük ezek összegét. Ennek a polinomnak még mindig van legalább  $k$  gyöke a  $K \cdot \varrho$  sugarú körben.

**Bizonyítás** Először mind az  $s$  polinomra alkalmazzuk a 7.10. majd 7.11. tételeket; kapjuk hogy valamely  $K_1$  számra mindegyik így adódó polinomnak van legalább  $k$  gyöke a  $K_1 \cdot \varrho$  sugarú körben. A 7.8. tételt összesen  $s - 1$ -szer alkalmazva mindig tudunk adni olyan  $K_2^2, K_2^3, \dots, K_2^s$  számokat, hogy a  $K_2^i \cdot \varrho$  sugarú körben az első  $i - 1$  polinom összegének és az  $i$ -edik összeadandónak is van  $k$  gyöke. Végezetül  $K = K_2^s$  adja a keresett értéket. ■

Megengedhetnénk azt is, hogy az összegül kapott polinomra ismét alkalmazzuk a 7.10. és 7.11. tételek transzformációit, valamint azt is, hogy az összeg helyett tetszőleges lineáris kombinációt vegyünk. Ezzel

azonban nem kapnánk új polinomokat, mert a változtatásokat még az összegképzés előtt is elvégezhetjük.

## 8. fejezet

# Komplex függvénytan

## 1. $S$ -topológia

Legyen  ${}^*\mathbb{C}$  szokás szerint a  $\mathbb{C}$  komplex számtest bővítése. Tetszőleges  $z_0 \in {}^*\mathbb{C}$  és sztenderd  $\varepsilon > 0$ -ra legyen

$$S(z_0, \varepsilon) = \{z \in {}^*\mathbb{C} : |z - z_0| \text{ sztenderd része } < \varepsilon\}.$$

Ezek a halmazokat  $S$ -köröknek nevezzük. Az  $S$ -körök együttesen egy topológia bázisát alkotják. Hogy ez tényleg így van, ahhoz mindössze a következő ténnyt kell ellenőrizni, amit az olvasóra hagyunk: ha  $z_0$  benne van az  $S(z_1, \varepsilon_1)$  és  $S(z_2, \varepsilon_2)$  halmazok metszetében, akkor valamely  $z_0$  körüli sztenderd  $\varepsilon_0$  sugarú  $S$ -kör is része mindkét halmaznak. A generált topológiát  $S$ -topológiának hívjuk. Fontos szerepet fog játszani a különböző halmazoknak az  $S$ -topológia szerinti *belseje*, amire külön jelölést is bevezetünk:

$${}^oA = \{z \in {}^*\mathbb{C} : S(z, \varepsilon) \subset A \text{ valamilyen sztenderd } \varepsilon\text{-ra}\}.$$

Bár  ${}^*\mathbb{C}$  tetszőleges részhalmazának létezik  $S$ -belseje, és így ez a definíció  ${}^*\mathbb{C}$  minden részhalmazára értelmes, mi kizárólag belső  $A$  halmazok esetén fogjuk használni.

Egy  $A \subset {}^*\mathbb{C}$  halmaz pontosan akkor  $S$ -nyílt, ha megegyezik saját  $S$ -belsejével, vagyis ha  $A = {}^oA$ . Ha az  $A$  egy  $S$ -nyílt halmaz, akkor

minden  $z$  elemével együtt tartalmaz egy  $z$  körüli  $S$ -kört is, vagyis  $S(z, \varepsilon) \subset A$  valamilyen sztenderd  $\varepsilon > 0$  számra. Ezért ebben az esetben  $A$  ugyancsak tartalmaz egy  $z$  körüli sztenderd sugarú körlapot is, például az  $\varepsilon/2$  sugarút. Speciálisan ha  $A \subset \mathbb{C}$  sztenderd és  ${}^*A$   $S$ -nyílt, akkor  $A$  szükségképpen nyílt.

**8.1. Állítás** *Legyen  $A \subset {}^*\mathbb{C}$  belső halmaz.  $z \in {}^\sigma A$  akkor és csak akkor, ha  $z$  monádja része  $A$ -nak.*

**Bizonyítás**  $A$  csak akkor rész triviális, hiszen  $z$  monádja része  $S(z, \varepsilon)$ -nek minden sztenderd  $\varepsilon$ -ra. Fordítva, tegyük fel, hogy  $\mu(z) \subset A$  és tekintsük mindazokat a természetes számokat, melyekre igaz, hogy

$$(1) \quad \text{minden } z' \text{-re } |z - z'| < \frac{1}{n} \text{ esetén } z' \in A.$$

A feltétel szerint minden végtelen egész ilyen, ezért a túlsordulási lemma miatt van ezt a feltételt kielégítő véges természetes szám is, mondjuk  $n \in \mathbb{N}$ , és legyen  $\varepsilon = 1/n$ . Ha  $|z - z'|$  sztenderd része kisebb mint a sztenderd  $\varepsilon$ , akkor  $|z - z'|$  is kisebb, és ekkor (1) szerint  $z' \in A$ -ban van. Tehát  $S(z, \varepsilon) \subset A$ , vagy másképpen  $z \in {}^\sigma A$ , ahogyan állítottuk. ■

Az állításból kiolvasható, hogy egy korlátos sztenderd  $A$  halmaz akkor és csak akkor  $S$ -nyílt (vagyis  ${}^*A = {}^\sigma({}^*A)$ ), ha  $A$  nyílt.

**8.2. Következmény** *Legyen  $A$  sztenderd nyílt halmaz. Ekkor*

$$\bigcup \{\mu(z) : z \in A\} \subset {}^\sigma({}^*A),$$

*és egyenlőség áll ha  $A$  korlátos.*

**Bizonyítás**  $A$  tartalmazás az  $A$  halmaz nyíltsága és az előző állítás miatt világos, csak az egyenlőséget kell megmutatnunk abban az esetben mikor  $A$  korlátos. Ám ekkor  ${}^*A$  minden eleme majdnem sztenderd, vagyis van sztenderd része. Legyen  $z \in {}^\sigma({}^*A) \subset {}^*A$ , ekkor  $z$ -nek létezik  ${}^\circ z$  sztenderd része és az előző állítás szerint  $\mu(z) \subset {}^*A$ . Mivel  $z \in \mu({}^\circ z) = \mu(z)$  és

$A$  nyílt, ezért  $z \in A$ . Ez pedig azt mutatja, hogy  $z$  eleme valamilyen sztenderd  $A$ -beli elem monádjának, és így eleme a bal oldali uniónak is, ahogyan állítottuk. ■

A továbbiakban  $f(z)$  olyan  ${}^*C$ -ből  ${}^*C$ -be képező belső függvényt jelöl, aminek értelmezési tartománya a  $D \subset {}^*C$  halmaz, és legyen  $z_0$  egy  $S$ -belső pontja  $D$ -nek. Az  $f(z)$  függvényről azt mondjuk, hogy  *$S$ -folytonos a  $z_0$  pontban*, ha folytonos itt az  $S$ -topológiára nézve, vagyis minden pozitív sztenderd  $\varepsilon$ -ra található olyan sztenderd  $\delta > 0$ , hogy az  $S(z_0, \delta)$  halmaz  $f$  szerinti képe része  $S(f(z_0), \varepsilon)$ -nak.

**8.3. Állítás** *Az  $f(z)$  akkor és csak akkor  $S$ -folytonos a  $z_0$  pontban, ha minden  $z_1 \simeq z_0$  esetén  $f(z_1) \simeq f(z_0)$ .*

**Bizonyítás** Megjegyezzük, hogy mivel  $z_0$   $S$ -belső pontja  $D$ -nek, azért  $z_0$  monádja is hozzátartozik  $f(z)$  értelmezési tartományához.

Tegyük fel először, hogy  $f(z)$   $S$ -folytonos. Legyen  $\varepsilon > 0$  tetszőleges sztenderd szám. Az  $S$ -folytonosság definíciója szerint az  $A_\varepsilon = S(f(z_0), \varepsilon)$   $S$ -környezethez található  $z_0$ -nak olyan  $S(z_0, \delta)$   $S$ -környezete, hogy az ebbe eső pontok képe  $A_\varepsilon$ -ba kerül. Ezért  $z_0$  monádjának képe minden sztenderd  $\varepsilon$ -ra része  $S(f(z), \varepsilon)$ -nak, vagyis része ezek metszetének, ami pedig  $f(z_0)$  monádja.

Fordítva, ha  $f(z)$  nem  $S$ -folytonos, akkor van olyan sztenderd  $\varepsilon > 0$ , hogy az  $S(f(z_0), \varepsilon)$  környezethez egyetlen  $S(z_0, \delta)$  sem jó. Ha erre a  $\delta$ -ra ezt  $z_1$  tanúsítja, akkor egyrészt  $|z_0 - z_1| < \delta$ , másrészt  $|f(z_0) - f(z_1)| > \varepsilon$  hiszen ezek az egyenlőtlenségek még a megfelelő abszolút értékek sztenderd részére is igazak. Így az alábbi állítás az összes pozitív sztenderd egész  $n$  számra igaz:

$$\text{van olyan } z_1, \text{ amire } |z_1 - z_0| < \frac{1}{n} \text{ és } |f(z_1) - f(z_0)| > \varepsilon.$$

A túlsordulási lemma miatt ugyanennek valamelyik nemsztenderd számra is teljesülnie kell, ami mutatja olyan  $z_1$  létezését, amire  $z_1 \simeq z_0$ , de  $f(z_1) \not\simeq f(z_0)$ . ■

Az állításból kiolvasható, hogy egy sztenderd függvény egy sztenderd pontban akkor és csak akkor  $S$ -folytonos, ha ott folytonos.

**8.4. Lemma** *Tegyük fel, hogy  $f(z)$  véges a  $z_0$  monádjában. Ekkor van olyan sztenderd  $\varepsilon > 0$ , hogy  $f(z)$  véges a  $z_0$  körüli  $\varepsilon$  sugarú körben és annak határán.*

**Bizonyítás** Megjegyezzük, hogy  $f(z_0)$  természetesen véges. Mivel  $z_0$  az  $f(z)$  értelmezési tartományának,  $D$ -nek  $S$ -belső pontja, azért van olyan sztenderd  $n_0$  természetes szám, hogy a  $z_0$  körüli  $1/n_0$  sugarú kör határa és belseje még mindig  $D$ -ben van. A feltétel szerint természetes számoknak alábbi belső halmaza annak minden végtelen elemét tartalmazza:

$$\left\{ n \in {}^*\mathbf{N} : n > n_0, \text{ és ha } |z - z_0| \leq 1/n, \right. \\ \left. \text{akkor } |z - z_0| \cdot |f(z) - f(z_0)| < 1 \right\},$$

hiszen  $z_0$  monádjában  $z - z_0$  infinitezimális,  $f(z) - f(z_0)$  pedig véges. A túlcsoportulási lemma szerint ekkor van ennek a halmaznak sztenderd eleme is, mondjuk  $n_1 \in \mathbf{N}$ , ekkor  $\varepsilon = 1/n_1$  jó választás. Valóban,  $|z - z_0| \leq \varepsilon$  esetén  $|z - z_0| \cdot |f(z) - f(z_0)|$  véges, mert még 1-nél is kisebb, és ezért  $|f(z) - f(z_0)|$  nem lehet végtelen. ■

**8.5. Lemma** *Álljon az  $A$  halmaz a  $D$   $S$ -belsejének sztenderd pontjaiból, és tegyük fel hogy az  $f(z)$  belső függvény véges és  $S$ -folytonos  $A$  elemein. Ekkor az  $A$ -n értelmezett (sztenderd)  $F(z) = {}^{\circ}f(z)$  függvény folytonos.*

**Bizonyítás** A folytonosság sztenderd definícióját alkalmazzuk. Rögzítsük a  $z_0 \in A$  sztenderd pontot és a pozitív sztenderd  $\varepsilon$  számot, ehhez keresünk egy megfelelő  $\delta$ -t. A feltétel szerint  $f(z)$   $S$ -folytonos  $z_0$ -ban, azért 8.3. szerint az alábbi állítás minden végtelen  $n$  természetes számra igaz:

$$(2) \quad \text{minden } z_1 \in D\text{-re } |z_1 - z_0| < \frac{1}{n} \text{ esetén } |f(z_1) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A túlcsoportulási lemma miatt van olyan véges  $n$  is, amire ez teljesül, és legyen  $\delta = 1/n$ . Ha most  $z_1$  az  $A$ -nak olyan pontja, ami  $z_0$ -hoz  $\delta$ -nál



közelebb van, akkor  $F(z_1)$  definíciója miatt  $F(z_1) - f(z_1)$  infinitezimális (és persze  $f(z_0) - F(z_0)$  is az), továbbá (2) szerint  $|f(z_1) - f(z_0)| < \varepsilon/2$ . Következésképp

$$\begin{aligned} |F(z_1) - F(z_0)| &\leq \\ &\leq |F(z_1) - f(z_1)| + |f(z_1) - f(z_0)| + |f(z_0) - F(z_0)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ahogyan kívántuk. ■

Egy  $X \subset {}^*\mathbb{C}$  halmaz  $S$ -összefüggő, ha nem fedhető le két diszjunkt  $S$ -nyílt halmazzal. Szükségünk lesz arra, hogy bizonyos szakaszok illetve körívek  $S$ -összefüggők, ezt bizonyítjuk most be.

**8.6. Lemma**  *$S$ -összefüggők azok a zárt szakaszok, melyek mindkét végpontja véges. Ugyancsak  $S$ -összefüggők véges pont körüli véges sugarú körök kerületének zárt ívei.*

**Bizonyítás** Egy szakasz pontjai  $z_t = z_0 + t(z_1 - z_0)$  alakban írhatók,  $z_0$  és  $z_1$  a szakasz végpontjai és  $0 \leq t \leq 1$  valós szám. Hasonlóan a  $c$  középpontú  $r$  sugarú kör  $\vartheta_0$  és  $\vartheta_1$  szögű félegyenesek közötti ívének pontjai

$$z_t = c + r \cdot e^{\vartheta_0 + t(\vartheta_1 - \vartheta_0)}.$$

Mivel  $z_0$  és  $z_1$  végesek, a  $[0, 1]$  zárt intervallum végtelen közeli  $t_1$  és  $t_2$  pontjainak végtelen közeli pontok felelnek meg a szakaszon, hasonlóképpen a lemma feltételei mellett ugyanez igaz a körívre, és ekkor a 8.3. állítás szerint mindkét leképezés  $S$ -folytonos. Így a lemma állításához elegendő megmutatnunk, hogy a  $[0, 1]$  zárt intervallum  $S$ -összefüggő, hiszen  $S$ -összefüggő halmaz  $S$ -folytonos képe is  $S$ -összefüggő.

Legyen tehát  $G_1$  és  $G_2 \subset {}^*\mathbb{C}$  két diszjunkt  $S$ -nyílt halmaz, melyek lefedik  $[0, 1]$ -et, és mondjuk  $0 \in G_1$ . Nézzük az összes olyan  $t$  sztenderd számot, amire a  $[0, t]$  zárt intervallum része  $G_1$ -nek. Ha ennek a halmaznak 1 eleme, akkor már  $G_1$  is lefedti  $[0, 1]$ -et, és készen vagyunk. Ha nem ez a helyzet, akkor legyen  $c$  ennek a halmaznak a legkisebb felső

korlátja;  $c$  minden sztenderd környezetében van  $G_1$ -nek és van  $G_2$ -nek is pontja. Most  $c$  vagy  $G_1$ -nek, vagy  $G_2$ -nek eleme, és mivel mindkettő  $S$ -nyílt,  $c$ -nek valamely sztenderd sugarú környezete is ugyanahhoz a halmazhoz tartozik. Ez pedig azt jelenti, hogy  $G_1$  és  $G_2$  nem diszjunkt, ellentétben a feltevéssel. ■

## 2. Analitikus függvények

A komplex számokon értelmezett  $f(z)$  függvény *analitikus*, más néven *reguláris*, vagy még másképpen *holomorf*, ha értelmezési tartománya, amit mindig  $D$ -vel jelölünk, egy tartomány (azaz  $\mathbb{C}$ -nek nyílt és összefüggő része), és az értelmezési tartomány minden pontjában létezik  $f$  deriváltja:

$$f'(z) = \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}.$$

Jelöljük az analitikus függvények halmazát  $\mathcal{A}$ -val, természetesen a  $\mathcal{A}$  elemeit is analitikus függvényeknek hívjuk; ezek mind belső függvények lesznek, és eleget tesznek mindazoknak az állításoknak, amiknek a sztenderd analitikus függvények. Többek között igaz rájuk a Cauchy-féle integrálformula: ha egy körlemez határával együtt az  $f(z)$  értelmezési tartományában van,  $z$  a körlemez belső pontja,  $K$  pedig a határa, akkor

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Itt az integrált (például) úgy értelmezhetjük, mint annak a kétváltozós függvénynek a kiterjesztését, amely egy megfelelő  $\mathbb{C}$ -beli irányított görbéhez (jelen esetben a körvonalhoz) valamint egy függvényhez annak a vonal menti integrálját rendeli hozzá.

A további előkészítő állításokban  $f(z)$  tetszőleges belső (és nem feltétlenül sztenderd) analitikus függvényt jelöl, ami a  $D$  tartományon van értelmezve;  $z_0$  pedig továbbra is  $D$ -nek egy  $S$ -belső pontját jelenti.

**8.7. Lemma** Az  $f(z)$  akkor és csak akkor  $S$ -folytonos a  $z_0$  pontban, ha  $f'(z)$  véges a  $z_0$  monádjában.

**Bizonyítás** Tegyük fel először, hogy  $f(z)$   $S$ -folytonos. Ekkor a  $g(z) = f(z) - f(z_0)$  (szintén belső) függvény analitikus  $D$ -n, és az  $S$ -folytonosság miatt infinitezimális  $z_0$  monádjában, tehát speciálisan ott véges is. Ezért a 8.4. lemma szerint  $g(z)$  véges  $z_0$ -nak valamilyen sztenderd  $2\varepsilon$  sugarú körén belül. Legyen  $^*K$  az  $\varepsilon$  sugarú kör kerülete, ott  $|g(\xi)|$  felveszi maximumát, amit jelöljünk  $M$ -mel. Mivel  $g(\xi)$  véges a kör teljes kerületén, azért  $M$  is véges. Felírva a Cauchy-féle integrálformulát a  $z_0$  monádjában található  $z$  pontra

$$|g'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{^*K} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{4M}{\varepsilon},$$

hiszen  $|g(\xi)| \leq M$  a  $^*K$  körön,  $|\xi - z| \geq |\xi - z_0| - |z_0 - z| > \varepsilon/2$ , és a kör kerülete  $2\pi\varepsilon$ . A jobb oldal véges és  $f'(z) = g'(z)$ , amivel készen vagyunk.

Fordítva, tegyük fel hogy  $f'(z)$  véges  $z_0$  monádjában. 8.4. szerint  $f'(z)$  véges egy  $z_0$  körüli sztenderd sugarú kör határán és belsejében. Mivel  $f'(z)$  is analitikus, azért a körön belüli  $M$  maximumát a határon veszi fel. Ebből következik, hogy  $M$  véges és  $|f'(z)| < M$  a  $z_0$  monádjában.

Legyen  $z \in \mu(z_0)$  tetszőleges. A  $z$ -t  $z_0$ -lal összekötő  $|z - z_0|$  hosszúságú  $\ell$  szakasz mentén integrálva

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \int_{\ell} f'(\xi) d\xi \right| \leq M \cdot |z - z_0|.$$

A jobb oldal infinitezimális, ezért a bal oldal is. Ez pedig 8.3. alapján azt jelenti, hogy  $f(z)$   $S$ -folytonos  $z_0$ -ban. ■

**8.8. Lemma** Legyen  $f(z)$   $S$ -folytonos a  $z_0$  pontban. Ekkor van olyan sztenderd  $\varepsilon > 0$ , hogy  $f(z)$   $S$ -folytonos  $z_0$ -nak  $\varepsilon$  sugarú környezetében.

**Bizonyítás** Az előző lemma szerint  $f'(z)$  véges a  $z_0$  monádjában. A 8.4. lemma szerint ekkor  $f'(z)$  véges  $z_0$ -nak valamilyen sztenderd

sugarú  $S$ -környezetében, és ekkor megintcsak az előző lemma szerint  $f(z)$   $S$ -folytonos ugyanebben a környezetben. ■

**8.9. Lemma** *Ha  $f(z)$  véges a  $z_0$  monádjában, akkor  $S$ -folytonos is  $z_0$ -ban.*

**Bizonyítás** Legyen 8.4. alapján  $\varepsilon > 0$  olyan kicsi sztenderd szám, hogy a  $z_0$  körüli  $\varepsilon$  sugarú  ${}^*K$  körvonalon és azon belül  $f(z)$  véges, mondjuk  $|f(z)| \leq M$ , ahol  $M$  véges. A Cauchy-féle integrálformula szerint  $z_0$  monádjának minden  $z$  pontjára

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{*K} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{4M}{\varepsilon},$$

hasonlóan 8.7. bizonyításához. Ezért  $f'(z)$  véges  $z_0$  monádjában, és így  $f(z_0)$  valóban  $S$ -folytonos. ■

**8.10. Lemma** *Tegyük fel, hogy  $f(z)$  véges  ${}^oD$  elemein. Ekkor  ${}^oD$  sztenderd pontjain értelmezett  $F(z) = {}^o f(z)$  függvény analitikus.*

**Bizonyítás** Álljon  $A$  a  ${}^oD$  halmaz sztenderd pontjaiból. Először is megjegyezzük, hogy  $A$  nyílt; másrészt  $f(z)$  végessége miatt  $F(z)$  egyértelműen meghatározott.

Mivel  $z_0 \in A$  esetén  $z_0$  a  $D$  tartomány  $S$ -belsejének eleme, azért  $z_0$  monádj is része  ${}^oD$ -nek. Ebben  $f(z)$  véges, tehát az előző lemma miatt  $f(z)$   $S$ -folytonos is. A 8.5. lemma alapján ekkor  $F(z)$  folytonos az egész  $A$ -n. Ha  $z_0 \in A$  tetszőleges, és  $z$  a  $z_0$  monádjában van, akkor  $f(z) \simeq f(z_0)$  az  $S$ -folytonosság miatt,  $F(z) \simeq F(z_0)$  az  $F$  folytonossága miatt, vagyis  $f(z) \simeq F(z)$  az  ${}^*A$  minden majdnem sztenderd pontjában.

Annak igazolására, hogy  $F(z)$  analitikus, elegendő megmutatnunk, hogy minden  $A$ -beli egyszerű zárt töröttvonal mentén az integrálja 0. Legyen  $\Delta$  egy ilyen töröttvonal, teljes hossza  $h$ , és jelölje  ${}^*\Delta$  a vonal

pontjait a bővítésben. Mivel  $f$  analitikus és  ${}^*\Delta$  teljes egészében  $D$ -ben halad, azért

$$\int_{{}^*\Delta} f(z) dz = 0.$$

A  $\Delta$  töröttvonal kompakt halmaz, tehát minden rajta folytonos függvény felveszi a maximumát. Ez a tulajdonság a bővítésben is megmarad, tehát ha  $g$   ${}^*$ folytonos függvény, akkor  ${}^*\Delta$ -n felveszi maximumát. Most  $F$   ${}^*$ folytonos, hiszen ő egy sztenderd folytonos függvény, másrészt  $f$  belső analitikus, tehát ezért  ${}^*$ folytonos. Így a  ${}^*\Delta$  mentén az ugyancsak  ${}^*$ folytonos  $g(z) = |f(z) - F(z)|$  is felveszi maximumát, vagyis valamilyen konkrét  $z' \in {}^*\Delta$  pontra  $|f(z) - F(z)| \leq |f(z') - F(z')| = \eta$ . Ez a különbség előbbi megállapításunk szerint  ${}^*A$  minden majdnem sztenderd pontjában infinitezimális, következésképp  $\eta$  is infinitezimális. A sokszög  $h$  kerülete véges, tehát

$$\begin{aligned} \left| \int_{{}^*\Delta} F(z) dz - \int_{{}^*\Delta} f(z) dz \right| &= \left| \int_{{}^*\Delta} (F(z) - f(z)) dz \right| \\ &\leq \int_{{}^*\Delta} |F(z) - f(z)| dz \leq \eta \cdot h \simeq 0. \end{aligned}$$

Láttuk, hogy  $f(z)$ -nek a  ${}^*\Delta$ -n vett integrálja 0, tehát az egyenlőtlenség alapján  $F(z)$ -nek ugyanott vett integrálja szükségszerűen infinitezimális. Mármost  $F(z)$  sztenderd függvény, azért  $\Delta$ -n vett (sztenderd) integrálja, és a  ${}^*\Delta$ -n számított nemsztenderd integrálja megegyezik, vagyis ez az érték sztenderd szám. Az egyetlen infinitezimális sztenderd érték a nulla, vagyis ennek az integrálnak az értéke egyenlő nullával, amit igazolni akartunk. ■

Kis kitérőként a lemma alapján közvetlen bizonyítást adunk a Vitali-féle tételre.

**8.11. Tétel** (Sztenderd, Vitali) *Legyenek az  $\{f_n(z)\}$  függvénysorozat elemei közös korláttal rendelkező, a  $D$  tartományon analitikus függvények. Tegyük fel, hogy konvergálnak egy olyan  $z_k$  pontokból álló*

*halmazon, melynek  $D$ -ben van torlódási pontja. Ekkor  $\{f_n\}$   $D$  minden pontjában konvergens, és konvergencia  $D$  belsejének korlátos részein egyenletes.*

**Bizonyítás** Jelöljük a sorozat közös korlátját  $M$ -mel. Válasszunk tetszőleges  $\omega$  végtelen indexet, ekkor  $|f_\omega(z)| < M$  is teljesül  ${}^*D$  pontjain, ezért egyrészt  $f_\omega$  mint korlátos belső analitikus függvény  $S$ -folytonos, másrészt az  $F(z) = {}^\circ f_\omega(z)$  formulával definiált függvény a 8.10. lemma szerint analitikus  $D$ -n. Ugyanakkor ez a függvény nem függ az  $\omega$  megválasztásától, hiszen az  $\omega_1$ -ből és  $\omega_2$ -ből definiált analitikus  $F_1$  és  $F_2$  értéke megegyezik a torlódási ponttal rendelkező  $z_k$  pontthalmazon, vagyis mindenütt megegyeznek. Ezért minden sztenderd  $z \in D$ -re és tetszőleges végtelen  $\omega$  indexre  $f_\omega(z) \simeq F(z)$ , ami azt jelenti, hogy  $\{f_n(z)\}$  pontonként konvergál  $F(z)$ -hez.

Azt kell még megmutatnunk, hogy a konvergencia egyenletes  $D$ -nek kompakt részhalmazain. Legyen  $E \subset D$  kompakt, és  $z \in {}^*E$ . Mivel végtelen  $\omega$ -ra  $f_\omega(z)$   $S$ -folytonos, továbbá  $F(z)$  (mellékesen) folytonos is, azért

$$f_\omega(z) \simeq f_\omega({}^\circ z) \simeq F({}^\circ z) \simeq F(z).$$

A 6.6. állítás szerint ez éppen azt jelenti, hogy  $\{f_n(z)\}$  egyenletesen konvergál  $F(z)$ -hez az  $E$  pontjain. ■

Térjünk vissza előkészítő lemmáinkhoz.

**8.12. Lemma** *A 8.10. lemma feltételei mellett tegyük még fel, hogy  $F(z) = {}^\circ f(z)$  nem konstans,  $z_0 \in {}^\circ D$  sztenderd és  $F(z_0) = b$ . Ekkor van olyan  $z \simeq z_0$ , amire  $f(z) = b$ .*

**Bizonyítás** Mivel analitikus függvény gyökei nem torlódhatnak, elegendően kicsiny sztenderd  $\varepsilon > 0$ -ra a  $g(z) = F(z) - b$  függvénynek csak a  $z = z_0$  gyöke van a  $z_0$  körüli  $\varepsilon$  sugarú körben. A kör kerületén ezért  $|g(z)| > \eta$  valamilyen sztenderd pozitív  $\eta$  számra, míg ugyanazon körön  $f(z) \simeq F(z)$ , vagyis  $|f(z) - F(z)| < \eta$ . A 7.1. Rouché tétel szerint  $g(z)$ -nek és  $g(z) + (f(z) - F(z))$ -nek ugyanannyi gyöke van a

körön belül. Ezért  $g(z) + (f(z) - F(z)) = f(z) - b$ -nek is kell legalább egy gyökének lennie az  $\varepsilon$  sugarú körben.

Ezzel azt mutattuk meg, hogy  $f(z) - b$ -nek van gyöke minden  $z_0$  körüli sztenderd sugarú körben. Ahhoz, hogy  $z_0$  monádjában is találjunk gyököt, Rouché tételét kicsit gondosabban kell alkalmaznunk. Legyen  $g(z)$ -nek a  $z_0$   $m$ -szeres gyöke, itt  $m$  sztenderd egész szám. Ekkor  $f(z) - b$ -nek multiplicitással számolva *pontosan*  $m$  gyökének kell lennie minden sztenderd  $\varepsilon$  sugarú körön belül. Ha most az  $m$  gyök bármelyike nem  $z_0$  monádjában lenne, akkor a gyököt és  $z_0$ -t elválasztó, még mindig sztenderd sugarú körön belül már nincs meg az  $m$  darab gyök. ■

**8.13. Tétel** (Sztenderd, Hurwitz) *Tegyük fel, hogy a  $D$  tartományon reguláris függvények  $\{f_n(z)\}$  sorozata konvergál egy  $f(z)$  nem konstans függvényhez, mégpedig minden korlátos halmazon egyenletesen. Ekkor tetszőleges  $f(z_0)$  értéket  $f_n(z)$  is felvesz  $z_0$  minden környezetében minden elég nagy  $n$ -re.*

**Bizonyítás** Mint az a 8.11. Vitali tétel bizonyításában láttuk, ekkor  $f(z) = \circ f_\omega(z)$  minden végtelen  $\omega$  indexre. Legyen  $\varepsilon$  tetszőleges sztenderd valós szám. Az előző lemma szerint  $f_\omega(z)$  felveszi az  $f(z_0)$  értéket a  $z_0$  monádjában, ezért a következő állítás igaz, ha  $\varepsilon$ -nak tetszőleges sztenderd pozitív számot és  $n_0$ -nak tetszőleges végtelen indexet választunk:

*minden  $n > n_0$ -hoz van  $z'$ , hogy  $|z' - z_0| < \varepsilon$  és  $f_n(z') = f(z_0)$ .*

Ez az állítás ekkor az alapmodellben is igaz, ami éppen Hurwitz tételét adja. ■

**8.14. Lemma** *Tegyük fel, hogy  $D$  minden eleme véges, továbbá hogy  $f(z)$  sehol sem nulla. Tekintsük mindazon  $z_0 \in {}^\circ D$  pontok halmazát, melyek monádjában  $f(z)$  csak végtelen értékeket vesz fel. Ez a halmaz  $S$ -nyílt.*

**Bizonyítás** Legyen  $z_0$  ilyen pont. Feladatunk, hogy találjunk olyan pozitív sztenderd  $\varepsilon$  számot, hogy  $S(z_0, \varepsilon)$  minden pontjában  $f(z)$  végtelen értéket vesz fel. Elsőként használjuk ki, hogy  $D$  minden eleme véges, így  $z_0$  monádjában van sztenderd komplex szám is, ezért feltehetjük hogy  $z_0$  maga sztenderd.

Tekintsük a  $g(z) = 1/f(z)$  függvényt. Mivel  $f(z)$  nem tűnik el, a  $g(z)$  analitikus a  $D$  tartományon, és  $z_0$  monádjában infinitezimális, hiszen ott  $f(z)$  végtelen. A 8.4. lemma szerint ekkor  $g(z)$  véges a  $z_0$  pont valamely sztenderd  $\varepsilon$  sugarú környezetében is. Defináljuk a sztenderd  $E$  halmazt mint azon  $z' \in \mathbb{C}$  pontok halmazát, melyekre  $|z' - z_0| < \varepsilon$ , ekkor  ${}^*E \subset D$  és  ${}^*E$ -on  $g(z)$  véges. A 8.10. lemma szerint az  $E$ -n definiált  $G(z) = {}^\circ g(z)$  függvény analitikus, és természetesen  $G(z_0) = 0$  mivel  $g(z_0)$  infinitezimális. A 8.12. lemma alapján ha  $G(z)$  nem konstans  $E$ -n, akkor  $g(z)$  felveszi a  $G(z_0)$  értéket  $z_0$  monádjában. De ezt nem teszi, hiszen  $g(z)$  sehol sem nulla. Így  $G(z)$  konstans, vagyis  $E$  minden pontjában  $G(z) = 0$ , ami azt jelenti, hogy  $g(z)$  infinitezimális  ${}^*E$  sztenderd pontjaiban. Mivel  $g(z)$  a teljes  ${}^*E$ -n véges, a 8.9. lemma szerint  $g(z)$   ${}^*E$  sztenderd pontjaiban  $S$ -folytonos, tehát  $g(z)$  infinitezimális  ${}^*E$  összes sztenderd pontjának monádjában. 8.2. szerint ez a halmaz éppen  $S(z_0, \varepsilon)$ , tehát itt  $f(z)$  végtelen, amit bizonyítanunk kellett. ■

### 3. A Kis Picard tétel

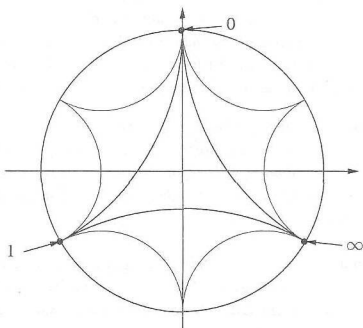
Már majdnem minden technikai eszköz rendelkezésünkre áll a Picard tétel bizonyítására. Ami még hiányzik, az alapvető eszköz, a nagy *ötlet*, amiből azután a Picard tétel és annak különböző változatai a fentebb igazolt technikai eszközökkel már könnyen következnek. Ez az eszköz tulajdonképpen egy speciális analitikus függvény, aminek létezésére egy vázlatos sztenderd bizonyítást adunk.

**8.15. Lemma** (Sztenderd) *Létezik olyan, az egységkör belsejében értelmezett analitikus  $\lambda(z)$  függvény, hogy minden egyszeresen összefüggő*



$D$  tartományon értelmezett analitikus  $f(z)$  függvényre, ami sem a  $0$ -t, sem az  $1$ -et nem veszi fel, található ugyancsak  $D$ -n értelmezett analitikus  $g(z)$ , ami az értékeit az egységgörben veszi fel, és amire  $f(z) = \lambda(g(z))$ .

**Bizonyítás** (Sztenderd) Legyen  $\mu(z)$  az az analitikus függvény, ami a felső nyílt félsíkot ráképezi az egységgörbe írt 120 fokos körívekből álló háromszög belsejébe úgy, hogy a három csúcspontba a  $0$ , az  $1$  és a  $\infty$  pontok képei kerüljenek.



Ilyen leképezés létezése például következik a Riemantól származó *konformis leképezések alaptételéből*, de közvetlenül is megkonstruálható. Ez mindhárom körív mentén a tükrözési elv segítségével külön-külön kiterjeszthető az alsó félsíkra, az alsó félsík képei a középső ívelt háromszög inverz képei (lásd az ábrát). Innen tovább terjeszthető a felső félsíkra, stb. Végül is  $\mu(z)$  egy végtelen sok rétegű síkon értelmezett leképezés ami az egységgör belsejére képez. Legyen a  $\mu(z)$  inverze  $\lambda(w)$ , ez analitikus az egységgör belsejében és a  $0$  és  $1$  kivételével minden értéket végtelen sokszor vesz fel.

Legyen  $z_0 \in D$  tetszőleges, és válasszuk meg  $z_0$  képét,  $d$ -t vagy a belső háromszögben vagy valamelyik szomszédjában (attól függően hogy  $f(z_0)$  képzetes része pozitív vagy negatív) úgy, hogy  $\lambda(d) = f(z_0)$  legyen. Ebből kiindulva a  $D$  minden pontjának elegendően kis környezetében tudjuk  $g(z)$ -t analitikusan folytatni, hogy ott  $f(z) = \lambda(g(z))$  fennálljon. Mivel  $D$  egyszeresen összefüggő, a monodrómia tétel feltételei teljesülnek, így  $g(z)$  az egész  $D$ -re kiterjeszthető. ■

A bizonyításból több is következik, mint amit a lemma kimondott. Nevezetesen az, hogy a kiindulási  $z_0$  pontban korlátozhatjuk a  $g(z)$  függvény értékét. A  $z_0$  képét a belső háromszögben vagy annak valamelyik szomszédjában választjuk, ezért ha  $f(z_0)$  a 0, 1 és  $\infty$  pontoktól távol van, akkor  $g(z_0)$ -t már az  $1 - \delta$  sugarú körön belül is választhatjuk:

**8.16. Lemma** (Sztenderd) *Minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $\delta > 0$ , hogy ha  $f$  analitikus az egyszeresen összefüggő  $D$  tartományon,  $f(z)$  nem veszi fel a 0-t és az 1-et, továbbá  $z_0 \in D$  olyan, hogy  $f(z_0)$  a 0-tól és az 1-től is  $\varepsilon$ -nál távolabb van,  $|f(z_0)| < 1/\varepsilon$ , akkor van olyan  $D$ -n analitikus  $g(z)$ , ami az egységkörbe képez,  $D$ -n  $f(z) = \lambda(g(z))$ , és  $|g(z_0)| < 1 - \delta$ .* ■

**8.17. Lemma** *Legyen az  $f(z)$  belső függvény analitikus a  $D$  tartományon, továbbá  $z_1 \in {}^oD$ . Tegyük fel, hogy  $z_1$  monádjában  $f$  sem a 0 sem az 1 értékeket nem veszi fel, de felvesz véges értéket. Ekkor  $f$   $S$ -folytonos  $z_1$ -ben.*

**Bizonyítás** Legyen  $c$  az a véges érték, amit  $f$  felvesz a  $z_1$  monádjában, mondjuk  $f(z_0) = c$ . Feltehetjük, hogy  $c$  sem a 0, sem az 1 monádjába nem esik. Ha ugyanis  $f$  vagy csak a 0 monádjába vagy csak az 1 monádjába eső értékeket venne fel, akkor készen volnánk, hiszen az ilyen  $f$   $S$ -folytonos. Ha pedig felvesz ilyet is és olyat is, akkor a két pontot összekötő szakasz mentén  $f$  folytonosan változik, tehát fel kell vennie olyan értéket is, aminek abszolút értéke pontosan  $1/2$ . Ezért van  $\varepsilon > 0$  sztenderd, hogy  $c$  az 1-től és a 0-tól is legalább  $\varepsilon$  távolságra van, továbbá  $|c| < 1/\varepsilon$ , tehát  $f(z)$  teljesíti a 8.16. lemma feltételeit, ha  $f(z)$

értelmezési tartományát megszorítjuk a  $z_0$  körüli elegendően kicsiny sztenderd sugarú körre. Legyen a sztenderd  $\delta > 0$  és az analitikus  $g(z)$  azok, amik a lemma szerint léteznek. Ekkor  $g(z)$  a 8.9. lemma szerint  $S$ -folytonos  $z_0$ -ban, hiszen  $|g(z)| < 1$  tetszőleges  $z$ -re. Mivel  $|g(z_0)| < 1 - \delta$ , azért  $g(z_0)$  sztenderd része is belső pontja az egységkörnek, tehát a  $\lambda(z)$  sztenderd analitikus függvény folytonos (és így  $S$ -folytonos) a  $g(z_0)$  pontban. Ekkor viszont a  $\lambda(g(z))$  összetett függvény is  $S$ -folytonos a  $z_0$  pontban, így a  $z_0$  pont monádjában is. ■

**8.18. Tétel** (Sztenderd, Picard) *Ha  $f(z)$  egész analitikus, nem konstans, akkor legfeljebb egy értéket hagy ki.*

**Bizonyítás** Ha  $f$  kihagyja az  $a$  és  $b$  értékeket, akkor az ugyancsak analitikus és nem konstans  $g(z) = (f(z) - a)/(b - a)$  a 0-t és 1-et hagyja ki. Megmutatjuk, hogy ez utóbbi lehetetlen. Legyen  $G(z) = g(\omega z)$  valamilyen végtelen  $\omega \in {}^*\mathbb{N}$ -re. Ekkor  $G(0) = g(0)$  véges érték, és  $G(z)$  a nulla monádjában sem veszi fel a 0-t és az 1-et. Az előző lemma miatt ekkor  $G$   $S$ -folytonos 0-ban. Márpedig  $g(z)$  nem konstans, így van  $z_1$  amire  $g(z_1) \neq g(0)$ . Ekkor viszont  $G(z_1/\omega)$  és  $G(0)$  nincs végtelenül közel egymáshoz, pedig  $z_1/\omega \simeq 0$ , ellentétben az  $S$ -folytonosság 8.3. szerinti jellemzésével. ■

A tétel szokásos sztenderd bizonyítása a 8.15. lemmát használja közvetlenül, ami szerint a mindenütt értelmezett  $f(z)$  analitikus függvényhez létezik olyan, ugyancsak mindenütt értelmezett és analitikus  $g(z)$ , ami értékeit az egységkörben veszi fel, továbbá amire  $f(z) = \lambda(g(z))$ . Liouville egyik tétele szerint egy mindenütt értelmezett analitikus függvény csak úgy lehet korlátos, ha konstans. Jelen esetben a  $g(z)$  függvény korlátos, tehát csak egyetlen értéket vesz fel, amiből azután már közvetlenül adódik, hogy  $f(z)$  is konstans. Az általunk adott bizonyítás bonyolultabb, viszont kis fáradsággal további információt nyerhetünk az analitikus függvények globális viselkedésére.

**8.19. Tétel** (Sztenderd, Landau) *Adott  $a_0$  és  $a_1 \neq 0$  számokhoz létezik olyan  $\varrho_0 = \varrho_0(a_0, a_1)$ , hogy ha  $f(z)$  analitikus a  $|z| < \varrho$  körben,  $f(0) = a_0$ ,  $f'(0) = a_1$  és  $f(z)$  nem veszi fel a 0-t és az 1-et, akkor  $\varrho < \varrho_0$ .*

**Bizonyítás** Tegyük fel, hogy ilyen  $\varrho_0$  nincs, vagyis tetszőlegesen nagy  $\varrho$ -hoz található olyan  $f$  analitikus függvény, amire  $f(0) = a_0$ ,  $f'(0) = a_1$ , és  $f$  nem veszi fel a 0-t és 1-et a  $\varrho$  sugarú körben. Válasszunk most  $\varrho$ -nak egy végtelen számot, és legyen  $f(z)$  az ellenpélda. Legyen  $F(z) = f(\varrho \cdot z)$ . Ez analitikus a 0 egy kis környezetében, továbbá sem 0-t sem 1-et nem veszi fel  $|z| < 1$  esetén, tehát speciálisan 0 monádjában sem, továbbá  $F(0) = f(0) = a_0$  véges. Ezért a 8.17. lemma szerint az  $F(z)$  függvény  $S$ -folytonos 0-ban, vagyis 8.7. szerint  $F'(0)$  véges. Ámde  $F'(0) = \varrho \cdot f'(0) = \varrho \cdot a_1$  ami  $a_1 \neq 0$  miatt végtelen. A kapott ellentmondás bizonyítja állításunkat. ■

**8.20. Tétel** (Sztenderd) *Adott pozitív valós  $\varepsilon$  számhoz található olyan  $\varrho_0 = \varrho_0(\varepsilon)$ , hogy ha  $f(z)$  analitikus a  $|z| < \varrho$  körben,  $f(0) = 0$ ,  $|f'(0)| > \varepsilon$ , és az  $1/\varepsilon$  sugarú körben van két, egymástól legalább  $\varepsilon$  távolságra levő pont, melyeket az  $f(z)$  nem veszi fel, akkor  $\varrho < \varrho_0$ .*

**Bizonyítás** Rögzítsük az  $\varepsilon$ -t és tegyük fel, hogy nem találunk hozzá megfelelő  $\varrho_0$ -t, azaz van akármilyen nagy  $\varrho$  sugarú körben analitikus függvény, ami két megfelelő értéket kihagy. Válasszuk  $\varrho$ -t végtelen nagynak, és legyen  $f(z)$  az ellenpélda függvény. A kihagyott értékek legyenek  $a$  és  $b$ ; ezekre  $|b - a| > \varepsilon$ ,  $|a|, |b| < 1/\varepsilon$ . Legyen  $g(z) = (f(z) - a)/(b - a)$ . Ezzel  $g(0)$  véges,  $g'(0)$  szintén véges és nincs a 0 monádjában, mivel

$$|g'(0)| = \left| \frac{f'(0)}{b - a} \right| > \frac{\varepsilon}{2/\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2},$$

továbbá  $g(z)$  nem veszi fel a 0-t és az 1-et. Legyen  $G(z) = g(\varrho \cdot z)$ , ez analitikus az egységsugarú körben, és mint az előbb,  $S$ -folytonos a 0-ban, deriváltja nem véges, ami adja a kívánt ellentmondást. ■

## 4. A Nagy Picard tétel

A Nagy Picard tétel azt mondja ki, hogy ha egy analitikus függvénynek a  $z_0$  pontban lényeges szingularitása van, akkor  $z_0$  minden környezetében

egy kivételével minden értéket fel kell vennie. Ez a Casoratti–Weierstass tétel erősítése, mely szerint lényeges szingularitás minden környezetének képhalmaza sűrű  $\mathbb{C}$ -ben. Amit bizonyítani fogunk még egy ennél is többet mondó állítás, ami *Gaston Julia*-tól (1893–1978) származik.

Legyen  $f(z)$  belső analitikus függvény a  $D$  tartományon értelmezve. A  $z_0 \in {}^oD$  komplex számról azt mondjuk, hogy  $p$ -pontja  $f(z)$ -nek, ha a  $z_0$  monádjában az  $f(z)$  által fel nem vett véges értékek mind egy sztenderd pont monádjába esnek. Másképpen mondva  $z_0$  nem  $p$ -pontja  $f(z)$ -nek ha vannak olyan véges  $a$  és  $b$  komplex számok, melyek távolsága nem infinitezimális, és  $f(z)$  sem az  $a$ -t sem a  $b$ -t nem veszi fel  $z_0$  monádjában. Ugyanez a  $z_0 \in {}^oD$   $p$ -végtelen, ha  $z_0$  nem  $p$ -pont és  $f(z)$  felvesz  $z_0$  monádjában végtelen értéket is; és  $p$ -véges, ha nem  $p$ -pont és  $f(z)$  felvesz  $z_0$  monádjában véges értéket is.

**8.21. Állítás** *A  $D$  tartomány  $S$ -belsejében egy pont nem lehet egyszerre  $p$ -véges és  $p$ -végtelen is.*

**Bizonyítás** Mutassa a véges  $a$  és  $b$  azt, hogy  $z_0$  nem  $p$ -pont. Ha  $z_0$   $p$ -véges, vagyis  $f(z)$  felvesz véges értéket is  $z_0$  monádjában, akkor a 8.17. lemma alkalmazható a  $g(z) = (f(z) - a)/(b - a)$  függvényre, hiszen ekkor  $g(z)$  nem veszi fel a 0-t és az 1-et, de felvesz véges értéket. Így  $g(z)$   $S$ -folytonos, tehát  $f(z)$  is  $S$ -folytonos  $z_0$ -ban. 8.3. szerint  $z_0$  monádjának képe  $f(z_0)$  monádjába esik, ezért  $f(z)$  itt nem vehet fel végtelen értéket, vagyis  $z_0$  nem lehet  $p$ -végtelen. ■

A lemma állítását úgy is lehet fogalmazni, hogy  $p$ -végtelen pont monádjában  $f(z)$  csak végtelen értékeket vesz fel,  $p$ -véges pont monádjában pedig csak véges értékeket.

Megjegyezzük, hogy ha  $f(z)$   $S$ -folytonos a  $z_0$  pontban, akkor  $z_0$  nem  $p$ -pont, hiszen 8.3. szerint ekkor  $z_0$  monádjában  $f(z)$  nem vehet fel két különböző monádba eső értéket, és még kevésbé egy monád híján az összes véges értéket.

**8.22. Lemma** *Tegyük fel, hogy a  $D$  tartomány minden eleme véges. Ekkor mind a  $p$ -véges, mind a  $p$ -végtelen pontok halmaza  $S$ -nyílt.*

**Bizonyítás** Legyen elsőként  $z_0$   $p$ -végtelen pont. Ennek monádjában  $f(z)$  végtelen, ezért speciálisan nem veszi fel a 0-t sem. Ekkor található olyan sztenderd pozitív  $\varepsilon$ , hogy  $f(z)$  a  $z_0$ -nak még az  $\varepsilon$  sugarú környezetében sem tűnik el. Ebben a környezetben alkalmazva a 8.14. lemmát kapjuk, hogy  $z_0$ -nak valamely  $S$ -környezetében minden pont  $p$ -végtelen.

Másodjára legyen  $z_0$   $p$ -véges. A 8.21. állítás bizonyításában láttuk, hogy ilyen pontokban  $f(z)$   $S$ -folytonos, 8.3. szerint ekkor  $f(z)$  a  $z_0$  monádját egyetlen monádba viszi, itt tehát  $f(z)$  itt csak véges értékeket vesz fel. A 8.4. és 8.8. lemmák szerint ekkor van  $z_0$ -nak olyan sztenderd sugarú környezete, hogy abban  $f(z)$  egyrészt véges, másrészt  $S$ -folytonos is. Mivel  $p$ -pontban  $f(z)$  nem  $S$ -folytonos, azért  $z_0$ -nak ebben a környezetében minden pont szükségszerűen  $p$ -véges, vagyis találtuk  $z_0$ -nak olyan  $S$ -környezetét amilyent kerestünk. ■

**8.23. Tétel** (Sztenderd, Schottky) *Minden pozitív  $\alpha$ -hoz és  $0 < r < 1$ -hez létezik olyan  $\lambda = \lambda(\alpha, r)$ , hogy ha az  $f(z)$  analitikus az egységkörben,  $|f(0)| \leq \alpha$ , és  $f(z)$  nem veszi fel a 0 és 1 értékeket, akkor minden  $|z| < r$ -re  $|f(z)| < \lambda$ .*

**Bizonyítás** Tegyük fel, hogy adott  $\alpha$ -hoz és  $r$ -hez ilyen  $\lambda$  nem létezik, vagyis akármilyen nagy  $\lambda$ -hoz létezik ellenpélda. Legyen  $\lambda$  végtelen nagy, és legyen  $f(z)$  az ehhez a  $\lambda$ -hoz tartozó ellenpélda. Az előző lemma szerint az egységkörben a  $p$ -véges valamint a  $p$ -végtelen pontok halmaza is  $S$ -nyílt.  $|f(0)| \leq \alpha$  miatt a 0  $p$ -véges, továbbá az  $r < 1$  sugarú körben van olyan  $z_1$  pont, ahol  $f(z_1)$  végtelen, ezért ez a  $z_1$   $p$ -végtelen. A 8.6. lemma szerint 0-t a  $z_1$ -gyel összekötő szakasz  $S$ -összefüggő, ezért a  $p$ -véges illetve  $p$ -végtelen pontokból álló  $S$ -nyílt halmazok nem fedhetik le. A kimaradó pontok bármelyike az  $f(z)$  függvény  $p$ -pontja kell hogy legyen, de mivel  $f(z)$  sem a 0-t sem az 1-et nem veszi fel, ilyen pont nincs. ■

A bizonyításban a  $z_1 < r$  feltételre annak biztosításához volt szükségünk, hogy  $z_1$  az egységs kör  $S$ -belső pontja legyen. Csak abból, hogy  $z_1 < 1$  ez még nem következik.

Hasonlóan ahhoz, ahogyan 8.20-at kaptuk 8.19-ből, itt is erősíthetjük a tételt azzal, hogy  $f(z)$ -ről a helyett hogy a 0-t és az 1-et ne vegye fel, csak annyit kívánunk, hogy ne vegyen fel két  $1/\varepsilon$ -nál kisebb, egymástól legalább  $\varepsilon$  távolságra levő értéket. Természetesen ekkor  $\lambda$  ettől az  $\varepsilon$ -tól is fog függeni.

Legyen  $f(z)$  egy rögzített sztenderd függvény ami analitikus valamilyen sztenderd  $r$  sugarú körön kívül, és aminek a végtelenben lényeges szingularitása van. Ez a korábban idézett Casoratti–Weierstass tétel szerint azt jelenti, hogy végtelenbe tartó pontsorozatok mentén a függvény értékei mindenütt sűrűn vannak. Ebből mindössze azt fogjuk használni, hogy van olyan  $\{u_n\}$  és  $\{v_n\}$  sorozat, hogy az  $r_n = |u_n| = |v_n|$  tart a végtelenhez,  $|f(u_n)|$  korlátos, míg  $|f(v_n)|$  tart a végtelenbe. Ilyen sorozatokat például a következőképpen konstruálhatunk. Legyen  $\{u_n\}$  olyan végtelenbe tartó sorozat, amin  $f(z)$  korlátos. Az origó középpontú,  $r_n = |u_n|$  sugarú körön  $f(z)$  a maximumát vegye fel a  $v_n$  pontban. Mivel tartományon analitikus függvény mindig a tartomány szélén veszi fel a maximumát, azért  $|f(v_n)|$  valahonnantól kezdve szigorúan monoton növekvő, és persze tart a végtelenbe.

Legyen  $\omega$  egy végtelen természetes szám, és  $\varrho = |u_\omega| = |v_\omega|$ . Tekintsük a  $g(z) = f(z \cdot \varrho)$  belső analitikus függvényt az  $a = u_\omega / \varrho$  és a  $b = v_\omega / \varrho$  helyeken. Mivel  $f(u_n)$  korlátos, azért  $g(a) = f(u_\omega)$  véges, és ugyanezért  $g(b)$  végtelen. Ha most sem  $a$  sem  $b$  nem  $p$ -pont, akkor az  $a$  szám  $p$ -véges,  $b$  pedig  $p$ -végtelen. Az  $a$  és  $b$  mindketten az egységsugarú kör kerületén vannak, az őket összekötő (rövidebbik) ív a 8.6. lemma szerint  $S$ -összefüggő, továbbá teljes egészében benne van  $g(z)$  értelmezési tartományának  $S$ -belsejében. Mivel mind a  $p$ -véges pontok halmaza, mind a  $p$ -végtelen pontok halmaza  $S$ -nyílt, azért az íven kell lennie olyan pontnak, ami sem nem  $p$ -véges, sem nem  $p$ -végtelen. Ezzel igazoltuk a következő állítást.

**8.24. Tétel** Legyen  $f(z)$  olyan sztenderd analitikus függvény valamilyen origó körüli kör külsejében, aminek a végtelenben lényeges szingularitása van. Ekkor van olyan végtelen  $\xi$ , hogy az egység abszolút értékű  $\xi_0 = \xi/|\xi|$  szám  $p$ -pontja a  $g(z) = f(z \cdot |\xi|)$  függvénynek. ■

**8.25. Következmény** (Sztenderd, Nagy Picard tétel) Tegyük fel, hogy az  $f(z)$  analitikus függvénynek lényeges szingularitása van a  $z_0$  pontban. Ekkor  $f(z)$  a  $z_0$  minden környezetében legfeljebb egy kivételével minden értéket felvesz.

**Bizonyítás** Feltehetjük, hogy  $z_0$  a végtelen pont, ennek környezetei az origó középpontú sztenderd sugarú körök külseje. Legyen  $\xi$  a 8.24. tétel szerint létező végtelen nagy szám. Mivel  $\xi_0 = \xi/|\xi|$   $p$ -pontja a  $g(z)$ -nek, azért van olyan sztenderd  $w \in \mathbb{C}$ , hogy az összes,  $\xi_0$  monádjában  $g(z)$  által fel nem vett véges érték  $w$  monádjába esik. (Ha semmi nem maradna ki, akkor  $w$ -t választhatjuk tetszőlegesen.)

Legyen  $r$  tetszőleges (sztenderd) valós, és  $w' \neq w$  ugyancsak sztenderd komplex szám. Állítjuk, hogy  $f(z)$  felveszi a  $w'$  értéket az  $r$  sugarú körön kívül. Valóban,  $\xi_0$   $p$ -pontja  $g(z)$ -nek, és  $w'$  véges, nincs a  $w$  monádjában, tehát  $g(z)$  felveszi  $w'$ -t a  $\xi_0$  monádjában. Tehát van olyan  $z \in \mu(\xi_0)$  hogy  $g(z) = f(z \cdot |\xi|) = w'$ . Ekkor  $|z|$  sztenderd része 1, így  $z \cdot |\xi|$  végtelen, tehát a  $z' = z \cdot |\xi|$  választás mutatja, hogy a következő állítás igaz a bővítésben:

$$\text{van olyan } z', |z'| > r, \text{ hogy } f(z') = w'.$$

Ez tehát igaz az alapmodellben is, ami a tételt bizonyítja. ■

**8.26. Következmény** (Sztenderd, Julia) Legyen  $f(z)$ -nek lényeges szingularitása a végtelenben. Ekkor van olyan  $w$  kivételes érték és  $\vartheta$  irány, hogy minden  $\varepsilon > 0$ -hoz a  $\vartheta$  irányban akármilyen messze található olyan  $z_0$  pont, hogy a  $z_0$  körüli  $\varepsilon \cdot |z_0|$  sugarú körben  $f(z)$  minden értéket felvesz, ami  $w$ -tól  $\varepsilon$ -nál messzebb és hozzá  $1/\varepsilon$ -nél közelebb van.



**8.24. Tétel** Legyen  $f(z)$  olyan sztenderd analitikus függvény valamilyen origó körüli kör külsejében, aminek a végtelenben lényeges szingularitása van. Ekkor van olyan végtelen  $\xi$ , hogy az egység abszolút értékű  $\xi_0 = \xi/|\xi|$  szám  $p$ -pontja a  $g(z) = f(z \cdot |\xi|)$  függvénynek. ■

**8.25. Következmény** (Sztenderd, Nagy Picard tétel) Tegyük fel, hogy az  $f(z)$  analitikus függvénynek lényeges szingularitása van a  $z_0$  pontban. Ekkor  $f(z)$  a  $z_0$  minden környezetében legfeljebb egy kivételével minden értéket felvesz.

**Bizonyítás** Feltehetjük, hogy  $z_0$  a végtelen pont, ennek környezetei az origó középpontú sztenderd sugarú körök külseje. Legyen  $\xi$  a 8.24. tétel szerint létező végtelen nagy szám. Mivel  $\xi_0 = \xi/|\xi|$   $p$ -pontja a  $g(z)$ -nek, azért van olyan sztenderd  $w \in \mathbb{C}$ , hogy az összes,  $\xi_0$  monádjában  $g(z)$  által fel nem vett véges érték  $w$  monádjába esik. (Ha semmi nem maradna ki, akkor  $w$ -t választhatjuk tetszőlegesen.)

Legyen  $r$  tetszőleges (sztenderd) valós, és  $w' \neq w$  ugyancsak sztenderd komplex szám. Állítjuk, hogy  $f(z)$  felveszi a  $w'$  értéket az  $r$  sugarú körön kívül. Valóban,  $\xi_0$   $p$ -pontja  $g(z)$ -nek, és  $w'$  véges, nincs a  $w$  monádjában, tehát  $g(z)$  felveszi  $w'$ -t a  $\xi_0$  monádjában. Tehát van olyan  $z \in \mu(\xi_0)$  hogy  $g(z) = f(z \cdot |\xi|) = w'$ . Ekkor  $|z|$  sztenderd része 1, így  $z \cdot |\xi|$  végtelen, tehát a  $z' = z \cdot |\xi|$  választás mutatja, hogy a következő állítás igaz a bővítésben:

$$\text{van olyan } z', |z'| > r, \text{ hogy } f(z') = w'.$$

Ez tehát igaz az alapmodellben is, ami a tételt bizonyítja. ■

**8.26. Következmény** (Sztenderd, Julia) Legyen  $f(z)$ -nek lényeges szingularitása a végtelenben. Ekkor van olyan  $w$  kivételes érték és  $\vartheta$  irány, hogy minden  $\varepsilon > 0$ -hoz a  $\vartheta$  irányban akármilyen messze található olyan  $z_0$  pont, hogy a  $z_0$  körüli  $\varepsilon \cdot |z_0|$  sugarú körben  $f(z)$  minden értéket felvesz, ami  $w$ -től  $\varepsilon$ -nál messzebb és hozzá  $1/\varepsilon$ -nél közelebb van.

**Bizonyítás** Legyen ismét a  $\xi$  végtelen pont olyan, hogy a  $\xi_0 = \xi/|\xi|$  szám  $p$ -pontja  $g(z) = f(z \cdot |\xi|)$ -nak;  $w$  az a sztenderd szám, aminek monádja tartalmazza a kimaradó véges értékeket, végül  $\vartheta$  az egység abszolút értékű  $\xi_0$  sztenderd részének argumentuma (vagyis iránya).

Rögzítsük a pozitív sztenderd  $\varepsilon$  és  $r$  számokat; a  $\xi_0$  sztenderd része körüli  $\varepsilon$  sugarú kör teljes egészében tartalmazza a  $\xi_0$  pont monádját, tehát ebben a körben  $g(z)$  minden véges értéket felvesz, ami nincs  $w$  monádjában. Ezért a  $z' = {}^\circ\xi_0 \cdot |\xi|$  választás mutatja, hogy az alábbi állítás igaz a bővítésben:

- van a  $\vartheta$  irányban olyan  $z'$ ,  $|z'| > r$ , hogy a  $z'$  körüli  $\varepsilon \cdot |z'|$  sugarú*  
 (3) *körben  $f(z)$  minden értéket felvesz, ami  $w$ -től  $\varepsilon$ -nál messzebb és hozzá  $1/\varepsilon$ -nél közelebb van,*

hiszen az itt szereplő kör a  ${}^\circ\xi_0$  körüli  $\varepsilon$  sugarú kör  $|\xi|$ -szeresére való nagyítása, így benne  $f(z)$  ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint  $g(z)$  ez utóbbiban. Következésképp az állítás az alapmodellben is igaz, ahogyan állítottuk. ■

Azokat a  $\vartheta$  irányokat, melyek rendelkeznek a tételben kimondott tulajdonsággal, *Julia irányoknak* vagy *Julia félegyeneseknek* nevezik. A bizonyításból az is kiderül, hogy az origóból induló félegyenesek helyett a komplex számsík tetszőleges olyan részhalmazait is használhatnánk, melyek a valósak (vagy akár egy tetszőleges topológikus tér) egy kompakt részhalmazának elemeivel vannak indexelve. Legyen tehát  $\Gamma$  egy kompakt indexhalmaz, és minden  $\gamma \in \Gamma$  indexre legyen  $C_\gamma \subset \mathbb{C}$  a komplex számsík egy tetszőleges részhalmaza, azzal a feltétellel, hogy  $\bigcup \{C_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  egy véges körlap kivételével lefedi a teljes síkot. Julia tételében  $\Gamma$  a  $[0, 2\pi]$  zárt intervallum, és  $C_\gamma$  az origóból induló,  $\gamma$  argumentumú félegyenes.

**8.27. Következmény** *Tegyük fel, hogy  $f(z)$ -nek lényeges szingularitása van a végtelenben. Ekkor van olyan  $w$  kivételes szám és  $\gamma_0 \in \Gamma$  érték,*

hogy minden  $\varepsilon > 0$ -hoz és akármilyen nagy  $r$ -hez a  $\gamma_0$  minden környezetében található olyan  $\gamma \in \Gamma$  index és a  $C_\gamma$  részhalmazban olyan  $r$ -nél nagyobb abszolút értékű  $z_0 \in C_\gamma$  pont, hogy a  $z_0$  körüli  $\varepsilon \cdot |z_0|$  sugarú körben  $f(z)$  minden értéket felvesz, ami  $w$ -tól  $\varepsilon$ -nál messzebb és hozzá  $1/\varepsilon$ -nél közelebb van.

**Bizonyítás** Mint az előbb, legyen most is az egységnyi abszolút értékű  $\xi_0 = \xi/|\xi|$  egy  $p$ -pontja a  $g(z) = f(z \cdot |\xi|)$  függvénynek, a sztenderd  $w \in \mathbb{C}$  pedig az a komplex szám, aminek monádja tartalmazza a kimaradó véges értékeket. Tudjuk, hogy  $\xi$  végtelen, ezért van  $\gamma \in {}^*\Gamma$  index, amire  $\xi \in C_\gamma$ . Feltevésünk szerint  $\Gamma$  kompakt, ezért  $\gamma$  eleme valamely sztenderd  $\gamma_0 \in \Gamma$  monádjának.

Ezek után rögzítsük az  $\varepsilon$  és  $r$  valós pozitív sztenderd számokat valamint a  $\gamma_0$  egy tetszőleges  $U$  (sztenderd) környezetét. A  $z' = \xi$  és a fenti  $\gamma \in {}^*\Gamma$  mutatja, hogy az alábbi állítás igaz a bővítésben:

(4) *van az  $U$  környezetben olyan  $\gamma$  index és van olyan  $r$ -nél nagyobb abszolút értékű  $z' \in C_\gamma$  szám, hogy a  $z'$  körüli  $\varepsilon \cdot |z'|$  sugarú körben  $f(z)$  minden értéket felvesz, ami  $w$ -tól  $\varepsilon$ -nál messzebb és hozzá  $1/\varepsilon$ -nél közelebb van.*

Így az állítás az alapmodellben is igaz, ami egyúttal igazolja a fenti állítást is. ■

Ahhoz, hogy 8.27-ből megkapjuk Julia tételének állítását, még csak annyit kell észrevennünk, hogy ha  $z_0$  argumentuma  $\vartheta - \varepsilon$  és  $\vartheta + \varepsilon$  között van, akkor  $z'_0$ -t válasszuk úgy, hogy argumentuma éppen  $\vartheta$  legyen, és abszolút értéke megegyezzen  $z_0$  abszolút értékével. Ezzel a  $z_0$  körüli  $\varepsilon \cdot |z_0|$  sugarú kör teljes egészében benne van a  $z'_0$  körüli  $2\varepsilon \cdot |z'_0|$  sugarú körben, s így ez utóbbiban az  $f(z)$  mindazokat az értékeket felveszi, amiket a  $z_0$  körüli körben felvett.

## Függelék

# Cauchy és az egyenletes konvergencia

Az 1700-as évek végén *J. B. J. Fourier* (1781–1840) jött rá, hogy a hővezetés leírására alkalmas parciális differenciálegyenlet rendszer megoldására az úgynevezett trigonometrikus sorok nagyon jól használhatók. Ezek a hatványsor mintájára készülnek, csak bennük nem az  $x^k$  hatványok konstansszorozói vannak összeadva, hanem  $\sin kx$  valamint  $\cos kx$  konstansszorozói. Úgy képzelte, hogy az előállítandó megoldás megegyezik egy ilyen végtelen, ismeretlen együtthatójú *Fourier sornak* az összegével. Az már ismert volt, hogy bizonyos Fourier sorok nem konvergálnak mindenütt; amit bizonyítani szerettek volna, az az, hogy ha egy Fourier sor mindenütt konvergens, akkor az összegfüggvény, mint a folytonos részletösszegek limesze, maga is folytonos lesz. *S. D. Poisson* (1781–1840) egyik korai bizonyításáról maga *A. L. Cauchy* (1789–1857) mutatta meg, hogy hiányos, és nem fedi le az összes lehetséges esetet. Cauchy saját bizonyítási kísérlete, ami a *Course d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* című tankönyvben jelent meg 1821-ben, szintén hibás volt. Ez utóbbi tanulságos hibát a matematikatörténet gyakran idézi, mert ez volt az első példa arra, hogy egy új matematikai fogalom, jelen esetben az *egyenletes konvergencia*, nem egy matematikai vagy fizikai probléma vizsgálatakor került elő, hanem egy hibás bizonyítás kijavításához volt rá szükség. A történetet saját elméletének szemszögéből részletesen tárgyalja Lakatos Imre a *Bizonyítások és cá-*

*folatok* című könyvének függelékében. A „hiba” megítélésekor persze nem szabad elfelejtkeznünk, hogy a folytonosság, konvergencia abban az időben meglehetősen homályos fogalmak voltak, és a matematikához nem tartozott az a szigorú, egzakt gondolkodás, ami ezt a tudományt ma jellemzi.

Az állítás, amit Cauchy bizonyítani vélt, a következőképpen hangzik:

*Tegyük fel, hogy az  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ , ... függvények mindegyike folytonos az  $a < x < b$  intervallumon, és tekintsük az*

$$(1) \quad u_0(x) + u_1(x) + \dots$$

*összeget. Ha (1) konvergál pontonként az  $s(x)$  függvényhez, akkor  $s$  folytonos.*

A „bizonyítás” az idézett műben így hangzik:

*Legyen  $s_n(x)$  az (1) első  $n$  tagjának összege, és  $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$  a maradék. Válasszunk tetszőleges  $a < x_1 < b$  számot, és egy  $\alpha$  infinitezimális mennyiséget. Ezzel*

$$(2) \quad \begin{aligned} s(x_1 + \alpha) - s(x_1) &= \\ &= \{s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)\} + \{r_n(x_1 + \alpha) - r_n(x_1)\}. \end{aligned}$$

*A bal oldal végtelenül kicsi, mert a jobb oldalon  $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$  végtelenül kicsi az összes lehetséges  $n$ -re, hiszen  $s_n$  folytonos, továbbá  $r_n(x_1 + \alpha)$  és  $r_n(x_1)$  végtelenül kicsi végtelen nagy  $n$ -re, mert az összeg  $s(x)$ -hez konvergál.*

Cauchy állítására ellenpélda például a  $(-1, +1)$  intervallumon értelmezett következő függvénysorozat. Legyen  $n > 1$ -re az  $s_n(x)$  részletösszeg a  $2/n$  széles és 1 magas tüske, vagyis  $s_n(x) = 0$  ha  $1/n \leq |x| < 1$ , és  $s_n(x) = 1 - n \cdot |x|$  ha  $|x| < 1/n$ . Világos, hogy ha  $x \neq 0$ , akkor  $s_n(x) = 0$  ha  $n$  elég nagy (vagyis ha  $n > 1/|x|$ ), ezért ilyenkor  $s_n(x)$

limesze 0. Ugyanakkor minden  $n$ -re  $s_n(0) = 1$ , ezért az  $s_n$  függvény-sorozat limesze az

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \neq 0, \\ 1 & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

ami persze nem folytonos a 0 pontban.

A klasszikus példa nem folytonos összegű Fourier sorra, ami ugyan-csak ellenpéldát ad az állításra, *N. H. Abel*től (1802–1829) származik még 1826-ból, amikor egy cikkének lábjegyzetében megjegyzi, hogy „úgy vélem, vannak kivételek Cauchy tétele alól,” és a

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ +\frac{1}{2}(\pi - x) & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$$

példát adja, ami láthatóan szintén nem folytonos az  $x = 0$  pontban. Ez utóbbi ellenpéldát valószínűleg Cauchy maga is ismerte.

Vizsgáljuk meg Cauchy bizonyítását a nemsztenderd analízis módszerével. Az okoskodás tulajdonképpen két helyen is hibás. Az első hibát Cauchy ott követte el, mikor azt állította, hogy  $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$  végtelenül kicsi *minden*  $n$ -re. Való igaz, hogy ez a különbség sztenderd (vagyis véges)  $n$  indexekre infinitezimális, hiszen  $s_n$  ilyenkor sztenderd folytonos függvény. Ha viszont  $n$  végtelen, akkor  $s_n$  már nem feltétlenül sztenderd, és így csak annyit mondhatunk róla, hogy \*folytonos. Ebből viszont nem következik feltétlenül, hogy  $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$  infinitezimális lenne. Amit biztosan tudunk, hogy rögzített végtelenül kicsi  $\alpha$  mellett ez a különbség infinitezimális *elegendően kicsi* végtelen  $n$  számokra – ez a 3.10. túlsordulási lemma következménye. Ugyanis \*N-ben minden sztenderd  $n_0$  egészre teljesül az, hogy

$$\text{minden } n < n_0 \text{ esetén } n \cdot |s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)| < 1,$$

tehát van ilyen tulajdonságú végtelen  $n_0$  is. Eddig a végtelen indexig a különbség szükségszerűen végtelenül kicsi.

Az  $r_n(x_1)$  maradéktag végtelenül kicsi minden végtelen nagy  $n$  indexre, hiszen az  $r_n(x_1)$  sorozat konvergens; ugyanez már nem feltétlenül igaz  $r_n(x_1 + \alpha)$ -ra – és ez a másik hiba. Amit tehát tudunk, az annyi, hogy  $r_n(x_1 + \alpha)$  végtelenül kicsi ha  $n$  *elegendően nagy* végtelen szám ( $\alpha$ -tól függően), és  $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$  végtelenül kicsi, ha  $n$  *elegendően kicsi* végtelen szám (ismét csak  $\alpha$ -tól függően). Ezért lehet, hogy a kétfajta index nem ér össze, vagyis valahányszor a két összeadandó közül ez egyik végtelenül kicsi, a másik nem az. Így tehát nem vonhatjuk le azt a következtetést, hogy  $s(x_1 + \alpha) - s(x_1)$  végtelenül kicsi.

A bizonyítás – és ezzel együtt a tétel – azzal javítható, ha elérjük, hogy valamelyik indexhalmaz az összes végtelen egész számot tartalmazza. Ez elegendő, hiszen ekkor  $n$ -nek vagy elegendően kicsi, vagy elegendően nagy végtelen értéket választva (2) jobb oldala – és ezzel együtt a bal oldala is – végtelenül kicsi lesz.

Az első lehetőség, hogy  $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$  végtelenül kicsi az összes végtelen  $n$ -re is valahányszor  $\alpha$  végtelenül kicsi. Ez pontosan akkor következik be, ha az  $\{s_n(x)\}$  sorozat egyenlő mértékben folytonos az intervallum minden  $x$  pontjában (lásd a 6.8. állítást). A másik lehetőség, hogy  $r_n(x_1 + \alpha)$  infinitezimális minden végtelen nagy  $n$ -re és végtelen kicsi  $\alpha$ -ra, ez pedig akkor van így, ha  $\{s_n(x)\}$  egyenletesen konvergál  $s(x)$ -hez (lásd 6.6. állítás).

Cauchy az eredeti állítás publikálása után mintegy harminc évvel maga is hasonló következtetésre jutott, és egy 1853-as dolgozatában az alábbi javított változatot mondja ki:

*Ha az*

$$(3) \quad u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

*sorozat tagjai mint az  $x$  valós változó függvényei folytonosak egy adott intervallumban, továbbá ha az*

$$(4) \quad u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n'-1}$$

*összeg minden  $x$ -re végtelenül kicsi valahányszor  $n$  és  $n' > n$  végtelenül*

*nagyok, akkor a (3) tagokból álló sor konvergens és a sor összege folytonos.*

Ha itt azt, hogy „minden  $x$ -re” úgy értjük, hogy nem csak szttenderd, hanem a nemsztenderd  $x$ -ekre is, akkor ez a feltétel a 6.6. állítás alapján éppen az egyenletes konvergenciát szabja meg. Bár kétségtelenül vitatható, hogy tényleg ez-e Cauchy javított bizonyításának olvasata, az általánosan elfogadott nézet szerint az egyenletes konvergencia fogalmát, ami azután a folytonos függvényekből álló sor határértékének folytonosságát már biztosítja, egymástól függetlenül három matematikus: *G. Stokes* (1819–1903) és *P. L. Seidel* (1821–1896) valamivel korábban és Cauchy egy kicsit később találta meg.



## Ajánlott irodalom

- Császár Ákos: *Bevezetés az általános topológiába*, Akadémiai Kiadó, 1974
- Halász Gábor: *Komplex függvénytani füzetek I-III*, ELTE Egyetemi jegyzet, Budapest, 1996-98
- Lakatos Imre: *Bizonyítások és cáfolatok – a matematikai felfedezés logikája*, Typotex, 1998
- J. Malitz: *Introduction to Mathematical Logic*, Undergraduate texts in mathematics, Springer, 1979
- Pintér Lajos: *Analízis I-II*, Typotex, 1995
- Abraham Robinson: *Non-standard Analysis* (Revised Edition), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996
- Szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei*, Közoktatásügyi Kiadóvállalat, 1951
- Szőkefalvi-Nagy Béla: *Komplex függvénytan*, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, 1970

# Tárgymutató

\* jelölés 37

Abel, N.H. 137

analitikus folytatás 126

analitikus függvény 118

Ascoli tétel 97

bázis topológikus térben 69

belső halmaz 41

Bolzano, B. 7

Bolzano tétel 59

Bolzano–Weierstrass tétel 55

bővítés 36

Cauchy, A.L. 135

Cauchy sorozat 53

Cauchy-féle integrálformula 118

centrált halmazrendszer 19

derivált 60

Dini tétel 89

dominálás 103

elemi nyílt halmaz 81

elmélet

– struktúra elmélete 36

első megszámlálható ( $M_1$ ) tér 85

értékelés 17

finom felosztás 63

folytonos leképezés 74

folytonos

– egyenletesen 60, 93

– egyenlő mértékben 90

– egyenlő mértékben egyenletesen 97

folytonosság 56

formula

– elsőrendű 16

– jól formált 23

– több szortú 23

– zárt 18

Fourier, J.B.J. 135

függvény kiterjesztése 39

Gödel, K. 19

háromszög-egyenlőtlenség 85

hasonlósági típus 16

Hausdorff terek szorzata 82

Hausdorff topológikus tér 73

Hilbert-kocka 94

Hurwitz tétel 123

infinitezimális mennyiség 49

integrál

– határozott 65

– középértéktétel 65

- integrálösszeg 63
- integrálszámítás alaptétele 66
- interpretáció 17
- Julia, G. 129
- Julia
  - irányok 133
  - tétel 132
- Takeya tétel 109
- kiválasztási axióma 83
- kompakt topológikus tér 79
- kompaktsági tétel
  - elsőrendű 22
  - magasabbrendű 28
  - többszortú 24
- konformis leképezés 125
- konkurrens formulahalmaz 36
- konvergencia
  - egyenletes 88,135
  - metrikus térben 87
  - monoton 89
  - pontonként 88
- konvergens sorozat 53
- konzisztens 18
- korlátos
  - részhalmaz 86
  - sorozat 52
- környezetbázis 85
- külső halmaz 41
- kvantor 17
- Landau tétel 127
- Leibniz, G.W. 7
- logika
  - elsőrendű 15
  - többszortú 22
- Łoś, J. 19
- Łoś lemma 20
- majdnem sztemderd pont 79
- második megszámlálható ( $M_2$ ) tér 85
- megszámlálhatóan kompakt tér 87
- metrika 85
- metrikus tér 85
- metrizálható tér 94
- modell 18
- monád
  - metrikus tér pontja 85
  - topológikus tér pontja 71
  - topológikus tér részhalmaza 73
  - valós szám 50
- monodrómia tétel 126
- monom 103
- Montel tétel 106
- $\mathbb{N}$  - természetes számok 42
- \* $\mathbb{N}$  - természetes számok bővítése 42
- nemstenderd elem 41
- Newton, I. 7
- normális topológikus tér 73
- nyelv
  - magasabbrendű struktúrájé 36
- nyílt halmaz 70
- \*nyílt halmaz 70
- $p$ -pont 129
- Piaget, J. 9
- Picard tétel
  - kicsi 127
  - nagy 132
- Poisson, S.D. 135

- polinom  
– diszjunkt 107  
– fok 101  
– hézagos 102  
– rend 104
- R** - valós számok 49
- \***R** - valós számok bővítése 49
- reguláris függvény 118
- reguláris topológikus tér 73
- Robinson, A. 7
- Rouché tétel 102
- $S$ -belseje (halmaznak) 113
- $S$ -folytonos függvény 115
- $S$ -kör 113
- $S$ -nyílt halmaz 113
- $S$ -összefüggő halmaz 117
- $S$ -topológia 113
- Schottky tétel 130
- Seidel, P.L. 139
- Skolem, T. 8
- Stokes, G. 139
- struktúra  
– elsőrendű 17  
– gyenge 27  
– magasabbrendű 27  
– teljes 27  
– többszortú 23
- szort 22
- szorzat  
– struktúrák 20  
– topológikus terek 81
- sztenderd elem 41
- sztenderd  
– függvény 56  
– rész (valós számé) 55
- szűrő 19
- teljes indukció elve 43
- típus 26  
– hasonlósági 16
- topológikus tér 69
- torlódási pont 54  
– metrikus térben 87
- túlsordulási lemma  
– első változat 44  
– második változat 46
- Tyihonov tétel 82
- ultraszorzat 20
- ultraszűrő 19
- Uriszon metrízációs tétele 96
- Uriszon tétel 76
- véges szám  
– természetes 43  
– valós 49
- végtelen szám  
– természetes 43  
– valós 49
- végtelenül kicsi 49
- Vitali tétel 121
- Weierstrass, K. 7
- Weierstrass tétel 58