

A BÚVÁR KÖNYVEI VIII.

EGMONT COLERUS

A PONTTÓL

A NÉGY DIMENZIÓIG

AMIT A GEOMETRIÁBÓL MINDENKINEK
TUDNIA KELL

TIZENHARMADIK EZER

FRANKLIN-TÁRSULAT BUDAPEST

É MŰ HREDETI CÍME :

VOM PUNKT ZUR VIERTEN DIMENSION

A FORDÍTÁS WINKLER JÓZSEF PÉTER MUNKÁJA

AZ ÍRÓNAK A FRANKLIN-TÁRSULAT
KIADÁSÁBAN MEGJELENT KÖNYVEI :

AZ EGYSZEREGETŐL AZ INTEGRÁLIG
AMIT A MATEMATIKÁBÓL MINDENKINEK TUDNIA KELL

31. ezer

PITHAGORASTÓL HILBERTIG
AMIT A MATEMATIKA TÖRTÉNETÉBŐL MINDENKINEK TUDNIA KELL

4.—6. ezer

ELŐSZÓ.

Egy éve lehet, hogy a gond és bizakodás vegyes érzésével megírtam az «Egyszeregytől az integrálig» könyvem előszavát. Azóta beigazolódtott bizakodásom jogossága, könyvem német kiadásának tizennegyedik ezre, magyar fordításának pedig hetedik ezre fogy.

De a gond sem hagyott el. Hiába volt a szakértők véleménye kedvező, hiába volt tanulmányaim további sora, ma éppen olyan kevésbé érzem magam szakembernek, mint ma egy éve. S így került sor arra, hogy megint csak élményeket, geometriai élményeimet írjam le, még ha magamra vállalom is a tudomány terén munkálkodók minden kötelezettségét a nélkül, hogy jogaiban is részesülnék.

Csak egyben volt teljes mértékben igazam. Beigazolódtott az a véleményem, hogy alapjában véve minden ember okos. Sohasem kételkedtem kulturális lehetőségekben és e kételkedés örömeit átengedem azoknak a «szellemi termék» gyárosoknak, akik értéktelen tákolmányaik láttán érzett örömlüket összetévesztik a nagyközönség ízlésével. Egy neves matematikus, aki már negyven évvel ezelőtt, mint a nagyhírű Lampe egyik tanítványa ezeket az elveket vallotta, azt írja nekem, hogy könyvem sikerét ő «a matematika hajnalhasadásának» tekinti. Sok országból, különböző korosztályokból és minden néprétegeből érkeztek hozzám megértő és bátorító szavak és nem utolsó sorban ezeknek, meg a jóindulatú és kedvező kritikának köszönhető, hogy ily hamar követi e második könyv: «Amit a geometriából mindenkinek tudnia kell», az első. De más balhiedelmek is megdőltek. Éppen a pedagógusok, művem leghivatottabb bírálói tekintettek el jóindulattal könyvem általam is jól ismert gyengéitől és

engedték, hogy érvényre jusson a mindnyájunkban közös jószándék.

Jelen könyvem szándéka ugyanaz, ami az előbbié volt. Könyvemnek az a hivatása, hogy mindenkinek, aki geometriával akar foglalkozni, de akinek eddig a szakkönyvek, szigorúságuk és ebből következő nehézségük miatt hozzáférhetetlenek voltak, legelső vezetője és mintegy tájékoztatója legyen. Leibniz mondotta, hogy a filozófia a bölcseségnek csak előszobája. Ennek a mondásnak változataként azt mondhatnám, hogy e könyv a «geometria előszobája». Bent, a megszentelt termekben tartózkodnak a legnagyobbak: Pythagoras, Euklides, Archimedes, Napier, Descartes, Legendre, Poncelet, Lobacsefszkij, Gauss, Riemann, Beltrami, Veronese, Poincaré, Hilbert. És a titkár az előszobában tanácsokat ad, hogy miként közeledhetünk a nagyokhoz a nélkül, hogy azonnal kiutasításban legyen részünk.

De nem ez az egyetlen célja könyvemnek. Másik könyvem előszavában említettem már, hogy sokan vannak, akik matematikai alacsonyabbrendűség érzésével küzködnek, mások elfelejtett tudásukat akarják felújítani és a geometriát magasabb szempontból szeretnék megismerni. Lehetnek tanulók is, — félve emlitem — akik könyvemet segédkönyvnek akarják használni. Ezeknek azt akarom a lelkükre kötni, hogy ha kétség merül fel, mindenkor hivatott tanáruknak van igaza; szerény könyvemnek semmiképpen sem hivatása, hogy az ő szavaikat helyesbítse.

Nem hallgathatom el azt sem, hogy eltérés van e könyvem és előző művem szempontjából kezdő és kezdő közt. A matematikát és az algebrát mintegy a semmiből lehetett felépíteni, a geometria viszont nem nélkülözhet bizonyos előzetes elemi matematikai ismereteket, mert ezek nélkül e könyv túlon túl terjedelmes lett volna. De bőven elegendő az a tudás, amelyet a középiskola harmadik osztályából kikerült tanuló magával hoz és első könyvem olvasói az e könyvben megkívántakhoz fölös tudással rendelkeznek. A geometria szempontjából azonban semmilyen előzetes tudás sem szükséges, így tehát bízom benne, hogy senkit sem tévesztett meg könyvem alcíme.

A geometria a 19. század eleje óta olyan forradalmat élt

át, amelyet talán semmiféle más tudományág. Természetesen nem mehettem el szó nélkül e változások mellett, nem enged meg ilyent a könyvnek sem címe, sem célja. Így azt az érzést is fel akartam kelteni az olvasóban, hogy a geometria még nem befejezett egész, folyton fejlődik és halad. Ez pedig nagy vigasztalás és jelentős biztatás az ember számára.

De most munkára fel! És mindenkor inkább higgyünk a bebizonyított igazságnak, mint a szerzőnek, mert csak így lehetünk a geometriának igazi művelői.

EGMONT COLERUS.

A rajzokat Hans Strohofer készítette, a 144—146. képeket Hans Mohrmann «Einführung in die nichteuclidische Geometrie» c. műve nyomán.

ELSŐ FEJEZET.

Geometria mindenütt.

A fiatal, alig tizenennyolc éves Herbert a minap tette le az érettségi vizsgát. Teljes sikerrel, úgyhogy valóra vált a szülei által jutalmul kitűzött utazás. Sajnos már ez is végére járt. De nem lett volna igazi tizenennyolc éves ifjú Herbert barátunk, ha nem lebegtek volna már most szeme előtt a végére járó nyári utazás halványodó körvonalai közt a jövő új feladatai: az egyetem, a tanulmányok, a szabadabb, de felelősségesebb élet.

De ne írjunk most regényt a nagyon rokonszenves, de egyáltalán semmilyen különös tulajdonsággal meg nem áldott ifjú barátunkról. Éppen az a körülmény teszi személyét számunkra érdekessé és fontossá, hogy átlagdiák, egyszerű, szürke átlagember.

Már említettük, hogy csak néhány nap választotta el a hazatéréstől. Azonban derék fiatalember volt és alaposan kihasználta a még rendelkezésére álló néhány szabad napot, így éppen ma mászott meg egy hegyoldalt. Most piheni ki fáradalmait és a házigazda erkélyén most költi el vacsoráját az alkonyodó napfényben.

Szóljunk néhány szót a házigazdásról is. Jómódú, gyermektelen sok-sok természetes ésszel megáldott parasztember a két öreg. De mivel egész eddigi életük, vagyónkájuk, megrendíthetetlen egészségük mindenkor kiáltó példája volt annak, hogy tudomány nélkül is lehet boldogulni, kicsit félvállról néztek minden tudományos igyekezetet, talán károsnak is tartották, mint olyasmit, ami megzavarja az egyszerű és nyugodalmas életet.

A másik náluk lakó vendég foglalkozását már értelme-

sebbnek tartották. Ez festő, gondtalanul járja a vidéket és a házukat ábrázoló, szép képpel ajándékozta meg őket.

De még mielőtt megismernék azt a vitát, amely minket témánk kellős közepébe fog vezetni, ismerkedjünk meg részletesen a helyzettel, hogy milyen volt akkor, ama szép nyári késő délutánon, ott az erkélyen.

Fiatal barátunk éppen vacsoráját költötte el és közben mesélt gazdáéknak. Elmesélte kirándulását és többek között megemlítette, hogy kapaszkodás közben zergéket látott. A gazda hihetőnek találta a dolgot, hisz ő maga is már ismételtén látott távcsövével zergebakokat a hegyoldalban. Csak az nem fordult még elő, — mondta — hogy a félénk állatok a járt út közelébe tévedtek. «Én magam sem a rendes úton kapaszkodtam fel», — felelte Herbert barátunk, «Hol látta akkor a zergéket?» — kérdi erre a gazda felesége. Herbert egy pillanatig habozva nézte a hegyeket, — jó-jó, ott az a hely ahol a zergéket látta, de hogyan mutassa meg a gazdának? Ebben a világításban nem voltak nagyobb színtkülönbségek, — nem igen látszott valamilyen feltűnőbb megkülönböztető jel. Ujjal mutogatni — ilyen távolságból már nem lenne eléggé pontos. «Csak egy pillanat türelmet kérek» — feleli tehát. Elkezdi ide-oda tologatni székét, mígcsak a kívánt dolgot meglelte. «Így öregem, — mondja nevetve — üljön egy kicsit ide a helyemre. Nézzen el most a templomtorony bal széle mellett, ott fenn, közvetlenül az eresz mentén. Nos, ha tovább néz, a vonal folytatása éppen azt a helyet mutatja, ahol a zergéket láttam.»

«Meglátjuk, meglátjuk» — mormogott magában az öreg, de leült s vizsgálódva nézett a megjelölt irányba. Rövid idő múlva elégedetten kelt föl. «Nagyon helyes — mondja — ott mindig van zerge, hisz ott váltanak. Most már mindent elhiszek. De nem lehetett valami egyszerű ott a kapaszkodás!»

«Nem is volt fontos, hogy egyszerű legyen» — felelte Herbert. De egyszerre még jobban ki akarta használni diadalát s ezért megjegyezte: «Nos, bebizonyítottam a zergéket, de bebizonyosodott a lenézett geometria haszna is.»

«Mi köze mindennek a geometriához?» — kérdezte támaszkodva az öreg.

«Több mint gondolná» — makacskodik a diák.



1. ábra.

«Nem értem. De nem innék inkább még egy pohár sört?» — próbálja más témára terelni a beszélgetést.

«Az is szívesen, de csak azzal a feltétellel, ha magának is hoz egy pohárral és ideül hozzám. Szépen körülnézünk a vidéken, csak a vidéket fogjuk nézni, s meglátjuk, mennyi geometria rejlik mindenben. Pictor barátunk is ideül mellénk. S mindenkinek, aki olyan tárgyat mutat, aminek nincs köze a geometriához, fizetek egy pohár sört.»

«Nem marad útiköltsége, én pedig eladom az egész sörömet», — nevet a gazda, de elindult a sörökért.

A következő órákban ijesztő beszélgetés folyt, amelynek csak egyes részleteit iktatjuk ide, nehogy az olvasó is abba a szinte beteges állapotba jusson, mint ez az asztaltársaság. A vidám, virágzó környék vonalak, görbék, méretek, szögek, arányok és tantételek kusza szövevényévé alakult át. S a diáknak nem igen volt alkalma sört fizetni, bár szívesen tette, sokszor olyankor is, mikor lehetett volna még valamilyes megjegyzése.

De lássuk, amint ígértük, a felsorolást.

Elsősorban itt volt maga a sör. Mit jelent egy liter, fél-liter, hektoliter? A liter ürmérték. Jelenti annak a kockának a térfogatát, amelynek minden éle 1 deciméter hosszú. Vagyis 10 centiméter. Mennyi egy centiméter? Egy század méter. Mi az, hogy méter? Méter a negyed délkör tízmilliomod része. Mi a délkör? De hisz ezt mindenki ismeri! Minden földgömbön láthatók a vonalak, amelyek az északi és a déli sarkon metszik egymást úgy, mint egy narancs gerezdjeinek választóvonalai. Egy ilyennek a negyedrésze a negyed délkör, például az a vonal, amely az északi sarktól Singapore-ig terjed. (Singapore kb. éppen az egyenlítőn fekszik.) A méter tehát és vele együtt a liter is, mintegy a természetből vett mértékegység.

Hát még a söröshordó! Itt kezdődik csak igazán a geometria! Bonyolult számításokkal igazolta már Kepler, hogy a hordók szokásos alakja alig tér el a legkedvezőbb alaktól. Még utalni sem áll módunkban rá, hogy miként, mert ez már a legfelsőbb matematika és geometria birodalmába tartozik.

De hagyjuk az ártalmas alkoholt. Fordítsuk szemünket

a templomtorony felé. Egyszerű a torony, sima, dísztelen, az a híre, hogy már ezer esztendeje ott áll. Igaz-e nem-e, aligha tudjuk ellenőrizni. Minket ugyanis csak az alakja érdekel. Alul ugyanis éppen olyan széles mint fent. Tehát az élei párhuzamosak. De ekérdés tárgyalásába egyelőre bele sem bocsátkozunk, ez a kérdés már kétezer éve a geometriának leg-többet vitatott tárgya. Épp elég bajunk lesz vele tanulmányaink során is. Vessünk fel inkább egy sokkal egyszerűbb kérdést: hogyan sikerült a kőműveseknek a négy élet pontosan párhuzamossá tenni? Függőn segítségével, feleli minden gyerek. Azonban merre mutat a függőn? A föld középpontja felé, — vágja rá mindenki. De szörnyű, ismét újabb rejtélyre bukkantunk, hisz ilyen körülmények közt a templomtorony élei nem is teljesen párhuzamosak egymással! A függőn útmutatása szerint épült templom tornya ezek szerint fent szélesebb mint lent, a föld színén, hiszen egy olyan gúlának része, amelynek a csúcsa a föld középpontja. Természetesen gyakorlatban nem lehet semmilyen eltérést észlelni, mert a torony 50 méter magassága teljesen elenyésző a föld 6,400.000 méteres sugara mellett. Hogy még nagyobb legyen a zavar, most a festő jegyzi meg, hogy még senki sem látta párhuzamosaknak a torony éleit. Ha a torony aljában állunk és felnézünk, a torony fent keskenyebbnek látszik. Fentről nézve pedig, mondjuk repülőgépről, a felső része látszik szélesebbnek. De ha kint, körülbelül a torony fél magasságában foglalunk helyet, akkor némi túlzással azt mondhatjuk, hogy a torony hordóalakúnak látszik. Vagyis a néző mind felfelé, mind lefelé vékonyodni látja. Milyen hát valóságban a torony? és mit jelent ilyen értelemben az, hogy «valóságban»? Hát nem a valóságot látjuk?

Hagyjuk a tornyot. Pihenjük ki fáradalmainkat, nézzük inkább a hegyeket. Ott az egyik csúcson kereszt áll. Nem kereszt az, mondja a gazda, hanem valami háromlábú fa-építmény. Nézzük meg távcsővel. Kár, hogy nem abban maradtam a gazdával. — gondolja Herbert barátunk — hogy minden geometriai «esemény» egy-egy pohár sört ér, mert most egy egész «kör» sört hozhatna. Az a fa-építmény ugyanis háromszögelési torony. S egyszerre három kérdés merül fel. Először is, mire jó az a három-

szögelési torony? A tornyokat hegytetőkön és más kiemelkedő pontokon szokták felállítani, segítségükkel készülnek a térképek. Hogy miként, az számunkra még egyelőre maradjon rejtély. A háromszög, nevéből ítélve feltétlenül valami jelentős szerepet játszik az egészben. Itt a térkép, itt a hegycsúcs, s rajta kis háromszög jelöli a faépitmény helyét. De még valamit látunk a térképen. Ide van írva, a háromszög mellé a hegy magassága, 1732 méter. 1732 méter a tenger színe fölött. De hogyan méri meg ezt a magasságot? «Geometriai úton», nevet a diák. De nem elégszik meg ezzel az egyetlen gonoszkodással, hozzáfűz mindjárt egy másodikat. «A távcső nélkül rá sem jöttünk volna, hogy az ott háromszögelési pont. De mi a távcső?» «Műszer», — feleli a gazda — de bizonytalanul cseng már a hangja. «Igaz, — feleli a diák — műszer. De ez is geometriát rejt, mert a tervei a geometriai elvek és számítások alapján készültek. Geometria nélkül még optika sem léteznék.»

Lement a nap. A hegyek biborszínt öltenek, de a gonosz diák itt is megjegyzi, hogy ez sincs geometria nélkül: a visszaverődés törvényeinek is a geometria az alapja és a nap sugarainak visszaverődése idézi elő közvetve a hegycsúcsok gyönyörű alkonypirját.

Éjjel lett. A hold és a csillagok megjelentek az égen és a diák ez alkalommal megemlíti, hogy időmérésünk is összefügg a geometriával, a csillagok pályáit geometriai törvényszerűségek alkalmazásával lehet meghatározni. A hajózás, a közlekedés a geometria gömbfelszínre vonatkozó ismereteit alkalmazza, amikor a tengeren a legrövidebb útirányt keresi, a szárazföldön pedig az utakat és a vasuti pályák helyét kitűzi. De minden gép is «tartalmaz» geometriát, szerkezeti elemei is, de az elkészítéséhez nélkülözhetetlen rajzok is. De mindezekén túl, a határok, határjelek, házak, kutak, edények, bútorok, a méhek sejtjei, a kristályok, minden ami szemünkbe ötlük, sőt szemünk maga is geometriai összefüggésekre utal.

Derék vendéglősünkkel együtt érzünk és megértjük, hogy zavarban vannak. Egyik pillanatban azt hisszük, hogy a diák túlzott, mindent a feje tetejére állított, össze nem tartozó dolgokat kapcsolt össze geometria örve alatt, nehogy sört

kelljen fizetnie, de a másik pillanatban már neki adunk igazat, s magunk is rejtőző geometriai tulajdonságok gyűjteményének látjuk a világot és különösen az tűnik fel, hogy nem csak a tárgyak kapcsolódnak a geometriához, hanem az olyan jelenségek is : mint a tükrözés, víztükör, hajnalpír és csillagzatok.

De ne bölcsekedjünk most sokat, lássuk inkább, mi történt másnap délelőtt ugyanezen az erkélyen. Bőven lesz anyagunk a kutatásra és a gondolkodásra. És csak azután fogunk gondolkozni, hogyan oldjuk meg azt a csomót, — amelyet magunk kötöttünk — lehetőleg egyszerű módon, hogy legalább valamelyes előzetes képünk legyen a geometriáról. Majd ha ennyire jutottunk, igyekezni fogunk azt a tudást elsajátítani, amellyel kínzó kérdéseinkre válaszolni tudunk.

MÁSODIK FEJEZET.

A miletosi Thales távolságmérője.

Másnap délelőttre különös változás mutatkozott társaságunk minden tagjának gondolkodásában. A diák rég elfeledte tegnapi geometriai propaganda-beszédét s vitorláscsónak-kirándulásra készült. De nem úgy a festő és a vendéglős. A festő hamarosan célozgatni kezdett beszélgetésünkre, de csak egy allegorikus mesével mert előhozakodni. A vendéglősön viszont meglátszott, hogy nem tudta a beszélgetés le-sújtó hatását olyan könnyen venni, mint a festő, égett a vágytól, hogy minél előbb kiszedhessen újból valamit a diákból. Egészen zavarban volt, már nem tudta, mit kérdezzen, nem tudta, mire legyen inkább kíváncsi : a mindenütt jelenlévőnek látszó tudomány gyakorlati következményeire vagy a tegnap hallott rengeteg, érthetetlen szakkifejezés magyarázatára. Így tehát, amint a diák reggel előkerült, azonnal odaült az asztalához, hogy egyik-másik szakkifejezés jelentését megmagyaráztassa magának.

Nem fogjuk a beszélgetést szószerint feljegyezni, csak a

lényegét. Geometria a ge és metron görög szavak összetétele, ge földet, metron mérést jelent. Geometria tehát a földmérés tudományának látszik; pedig még hazájában, Görögországban sem foglalkozott a nevében foglaltakkal. Inkább azokkal a tudományos eszközökkel, amelyek segítségével a geodézia a földet mérte. Még ma is geodézia annak a tudománynak a neve, amely mérésekkel és a mérési eredmények feldolgozásának segítségével a térképraajzoláshoz és a föld felszínével kapcsolatos egyéb problémához az adatokat szolgáltatja.

Látjuk tehát, hogy a geometria szó értelmének alig van valami köze ahhoz, amivel a »geometria tudománya« foglalkozik.

Lássuk most, mi történt ezután az erkélyen. Meglehetősen messze kint a tavon úszik egy úgynevezett világító bója. Nagyon jól látszott az erkélyről. A vendéglős, aki szemlátómást egészen betege lett a geometriának, egyszerre csak kijelenti, hogy nem lehet nehéz a bójának a tőlük mért távolságát geometriai eszközökkel meghatározni. Ugyanazt a műveletet kellene csak alkalmazni, amely a hegyek magasságának meghatározására szolgál.

Sőt könnyebb — feleli a diák. — Tekintve, hogy a víz felszíne vízszintes síknak tekinthető, sok nehézségtől megszabadulunk. Csak azt az egy adatot kellene tudnunk, — folytatja — milyen magasan van az erkély a víz színe fölött. — Megmondhatom — feleli a vendéglős, a házból írásokat hoz ki és megállapítja belőlük, hogy az erkély magassága a tó színe fölött pontosan 37 méter és 49 centiméter. Azért tudja ezt ilyen pontosan, mert a közelmúltban kutat ásott és a költségvetések éppen ezen az adaton alapultak, hisz a költségek a kút mélységével növekednek.

A következő órák bámulattal töltötték el a diák tanítványait. Ugyanaz a tudományos izgalom fűtötte őket, mint egykor Miletos lakóit a Kr. e. hetedik században, amikor a hét görög böles egyike egy magaslaton a kikötő közelében a később róla elnevezett távolságmérőt először felállította.

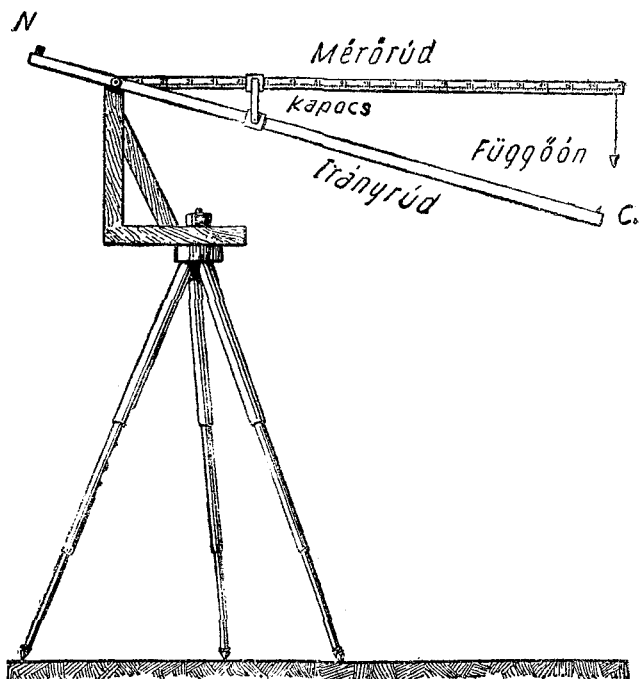
Most lássuk azt a műszert, amelyet a festő és a diák »Thales után szabadon« összeállított. Azonnal egész sorozatát

fogjuk megismerni a különféle alapvető geometriai feladatoknak.

Látjuk, hogy a két művészünk egy fényképezőgép állványát használta fel és arra erősítette a szerkezetet. Vágjunk kissé elébe a dolgoknak és említsük meg, hogy minden műszert vagy tárgyat, amelynek biztosan kell állnia, három ponton szabad csak megtámasztanunk. Három pont, ha nem esik véletlenül egy egyenesbe, már teljesen meghatároz egy síkot, s ezzel egy merev tárgy helyzete is rögzítve lehet. Ezért szokás azt mondani, hogy elméletileg is a legbiztosabb ülőalkalmatosság a háromlábú varga-szék, mert nem inoghat és csak ritkán borul fel. Ha negyedik támaszpontot is alkalmazunk, akkor ez is beleeshet az első három által meghatározott síkba, de nem kell beleesnie. Mindenki tapasztalatból tudja, mennyi bosszúságot okozhat az ingó négylábú asztal, szék vagy szekrény és hogy az egyik láb alá helyezett papírdarabkákkal, faforgáccsal kell és lehet a négy láb végét egy síkba hozni.

Lelkiismeretes matematikusok megnyugtatóására megemlítjük, hogy most még nem tudománnyal foglalkozunk. Nem, a szabadban, a vendéglő erkélyén beszélgetünk, az eseményeket szemléljük és mindennapi nyelven beszélünk róluk. Nem sokat törődünk azzal, hogy mit is jelent az a pont, egyenes, sík, szög, mert feltételezzük, hogy mindenki csak fog valami nagyjából megfelelő gondolni, ha ezeket a szavakat hallja. Nem fontos, ha számára a pontot egy nagyon finom tűszúrás jelenti, az egyenes egy ceruzavonal a papíron vagy egy kifeszített cérnaszál, a sík például a padló vagy a víz felszíne, a szöget meg csak egy olló két szára meg a forgáspontja jelképezi számára. De még minden szándékosan nagyon bizonytalan, pontatlan. Nem akarjuk mostani tudásunkat pontos meghatározásokkal terhelni, további tanulmányaink során a kifejezéseknek és még sok más kifejezésnek a helyes értelmét szervesen fogjuk megismerni.

De térjünk vissza végre távolságmérőnkhez, hiszen csak annyit mondtunk eddig róla, hogy egy fényképezőgép állványára szereltük fel. Lássuk inkább most készen, rajzban.



2. ábra.

Szerkezetünk lényege két rúd. Egyik mereven kapcsolódik az alaphoz és mindenkor vízszintesen fekszik, ez a mérő-rúd ; ezt a vízszinteséget a végén lógó függőön és egy derékszögű fa-rajzháromszög segítségével mindenkor ellenőrizhetjük. A másik rúd, az irányrúd mozgatható — egy tengely körül foroghat — és a lőfegyver irányzóberendezéséhez hasonló szerkezetet visel. *N* a nézőke, *C* a célgömb. Helyette, pontosabb kivitelnél, fonálkeresztes távcsövet is alkalmazhatnánk, úgy ahogy a vadászfegyvereken szokásos. De még egy igen fontos alkotórész van hátra : az összekötő-rúd vagy röviden a kapocs. A kapocs két végén egy-egy hüvely van,

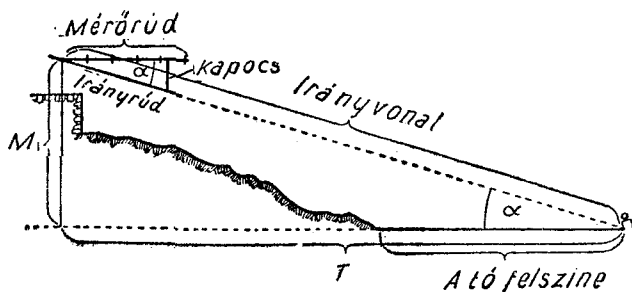
a felső a mérőrudat fogja körül csúsztathatón, a másik az irányrudat. A felső hüvely biztosítja, hogy a kapocs mindenkor merőlegesen álljon a mérőrúdra; így, ha mérni akarunk a szerkezettel, nincs egyéb teendőnk, mint az irányrúddal gondosan megcélozni a mérendő tárgyat, ebben az esetben a bóját. A kapocs miatt az irányrúd nem mozoghat szabadon. Tehát az az eljárás, hogy mindaddig mozgatom a kapocsrudat oda-vissza, amíg az irányrúd pontosan a célra, ebben az esetben a bójára mutat. Ezután már nincs más teendőnk, mint a mérőrúdon leolvasnunk, hogy a kapocs hüvelyének közepét mutató jel milyen beosztásnál áll. Tegyük fel, hogy a leolvasás eredménye 12·4. Ha ezt a 12·4-et a felállítási hely tőszintfeletti 37·49 méter magasságával megszorozom, akkor megkapom a bója távolságát. Ez a távolság tehát

$$12\cdot4 \times 37\cdot49 = 464\cdot876 \text{ méter,}$$

vagyis körülbelül 465 méter.

Barátunk ellenőrizte a számítás eredményét a térképen és kiderült, hogy a számított eredmény megfelel a valóságnak. A távolságmérő tehát alighanem helyes elven alapul. De ne csak utaljunk erre az elvre, hanem vizsgáljuk is meg alaposan.

Lássuk először egy vázlaton az egész helyzetet.



3. ábra.

A geometria nyelvén szólva, két hasonló háromszög keletkezett. A nagyobbik háromszög részei a műszer helyének M magassága a tó színe felett, az «irányvonalnak» a

mérőrúd forgáspontja és a bója közötti része és végül a bója T távolsága. A kisebbik háromszög a kapocsból, továbbá az irányrúdnak és a mérőrúdnak a forgáspont és a kapocs közötti részéből áll. Egy pillantásra észrevehetjük, hogy a kis háromszög a nagyinak mintegy kicsinyített mása, modellje. Két vagy több idom alakjának egyenlőségét, ha a méreteik különbözők, a geometria hasonlóságnak nevezi. Így a nagy háromszög és a kicsi hasonló egymáshoz. Ha azonban két idom hasonló egymáshoz, akkor megfelelő részeinek viszonya is feltétlenül egyenlő. Így ha egy kis emberalakot mintázok és az ember magassága a fejmagasság hétszerese, akkor a modell magassága is feltétlenül a fejmagasságának hétszerese lesz. Különbben a modell nem hasonlítana az eredetihez, azaz nem volna hozzá hasonló. Meg is fordíthatjuk ezt az összefüggést: akkor hasonló két idom, ha minden megfelelő alkotórésze arányosan kisebb vagy nagyobb. Levonhatjuk továbbá azt a következtetést is, hogy hasonló idomok alkotórészeinek nagyságviszonya teljesen független az alkotórészek valódi nagyságától. Ezt a tételt a perspektíva vagy a helyes látás törvényének is nevezhetjük. Ha egy mozdony kéménye a mozdony magasságának tizedrésze, akkor a kéménynek látszó magassága húsz méterről éppenúgy tizede lesz a mozdony látszó magasságának, mint két kilométerről, habár a mozdony ilyen távolságról már egészen aprónak látszik.

De erre még lesz alkalmunk visszatérni. Egyelőre állapítsuk meg, hogy két háromszögünk hasonló, tehát a nagy háromszög alkotórészeinek a viszonya ugyanaz, mint a kis háromszög alkatrészeié. De ha ez igaz, akkor az M magasság úgy aránylik a T távolsághoz, mint a kapocs a mérőrúd forgástengely és kapocs között levő részéhez.

Most olyan mesterfogást alkalmazunk, amellyel még gyakran fogunk találkozni. A kapocs hosszát egységnek tekintjük és ezt használjuk a mérőrúd beosztására. Miért tekintjük egységnek? Igaz, centiméterben is mérhetnők, s akkor a mérőrúdra is centiméterbeosztás kerülne, tekinthetném valamilyen tetszésszerint választott hosszegység háromezorosának is, vagy 245·8-szeresének, de, mint azonnal kiderül, egységnek venni a legkényelmesebb.

A mérőrúdról tehát most közvetlenül leolvashatjuk, hogy

a kapocsig terjedő része hányszorosa a kapocs hosszának, azaz a kapocs hosszát hányszor lehet a mérőrúdra rámérni. Lássuk most a nagy háromszög megfelelő alkotórészeit. A mérőrúdnak megfelel a távolság, a kapocsnak a magasság. A hasonlóság következtében tehát a távolság, (T) ugyanannyiszorosa a magasságnak, mint a mérőrúd «érvényes» része a kapocsnak. Mivel azt, hogy a mérőrúd «érvényes» része hányszorosa a kapocsnak, közvetlenül le tudtuk olvasni (12·4), a magasságot (37·49 méter) csak meg kellett szoroznunk ezzel a számmal, hogy a távolságot megkapjuk. $(12·4 \times 37·49 = 464·876.)$

De aránylat alakjában is felírhatjuk állításainkat :

$$m(\text{mérőrúd}) : k(\text{apocs}) = T(\text{távolság}) : M(\text{magasság})$$

A kapocs hosszát egységnek vettük, ebben az egységben mérve a mérőrúd 12·4 hosszúnak adódott, a magasság pedig 37·49, tehát

$$12·4 : 1 = T : 37·49.$$

Az ismeretlen T beltagja az aránylatnak, nagyságát megkapjuk, ha a kültagok szorzatát elosztjuk az ismert beltaggal. Az eredmény ugyanaz, mint előbb, természetesen, de itt is kiderül, hogy mennyire megkönnyítette a számolást, tehát milyen előnyös volt a kapocs hosszát a távolságmérőn egységnek tekinteni.

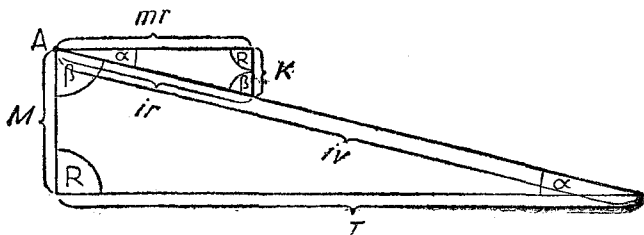
HARMADIK FEJEZET.

Előzetes megjegyzések a háromszögekről és a párhuzamosokról.

A távolságmérővel kapcsolatban érdekes volna megemlékezni a mérési hibákról és arról is, milyen módon lehet hatásukat a lehetőséghez képest csökkenteni. Nem volna érdektelen Gauss hibaelmélete sem, de mindez már messze túl van tárgykörünk határain. Hagyjuk tehát, hisz a távolságmérő tárgyalása során sokkal fontosabb, alapvető geometriai probléma bukkant fel. A matematika oldaláról megyük neki a kérdésnek. Felírtunk a távolságmérőn keletkezett két három-

szög alapján egy aránylatot. Szerencsére egyik tagját meg kellett határoznunk és így eleve biztosak lehettünk, hogy a kiszámított taggal kiegészített aránylat helyes lesz. Csupán az a kérdés, igaz volt-e az a feltevésünk, hogy az $m : k = T : M$ aránylat helyes? Hogyne, hisz a két háromszög hasonló! De néhány mondattal korábban kijelentettük: a háromszögek szemlátomást hasonlóak és éppen arról vettük észre a hasonlóságot, hogy az oldalak arányosak! Nem, ilyen okoskodással semmire sem megyünk! A hasonlóságot más kritérium alapján kell megállapítanunk. Ha az oldalak arányosak, akkor a háromszögek bizonyosan hasonlóak, de ne akarjuk akkor a feltételeket tanulságként levonni! Segítségül hívhatnánk perspektíva-törvényeket is, a háromszögeket párhuzamos síkokkal metszett gúla síkmetszeteinek tekinthetnők, de ilyenre még nem vállalkozhatunk és ilyen bonyolult kritériumnak most nem volna sok értelme. Egyszerűbb az az állítás, hogy két háromszög akkor hasonló, ha megfelelő szögeik egyenlők. (Lényegében ez is visszavezethető az előbbi — gúlával kapcsolatos — állításunkra.)

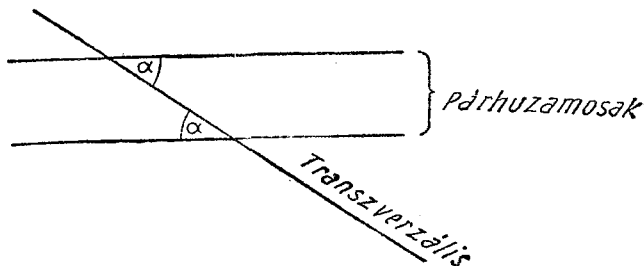
Kutatóútunk mindinkább izgalmassá válik. S megjósolom előre a szomorú eredményt: a legközelebbi percekben még mélyebbre süllyedünk az ingoványban. De így helyes, mert annál nagyobb örömet fog szerezni, ha az elmúlt évezredek geometria tudósainak vezetésével végül megérkeztünk az igaz, helyes geometria virányaira. Félig elfelejtett iskolai tanulmányainkat felhasználva, nyugodtan kapaszkodjunk, bármennyire veszélyesnek látszik is a mocsár. Először rajzoljuk fel ismét távolságmérőnk vázát, de most már csak puszta geometriai vonalakkal.



4. ábra.

A nagy háromszög szögei R , α és β .¹ Az R betűvel jelölt szög bizonyosan derékszög, hisz magasságon mindig függőleges magasságot értünk. A derékszögnek a kis háromszögben ismét derékszög felel meg, a mérőrúd és a kapocs bezárta szög. Emlékezzünk vissza, mikor a távolságmérőt építettük, éppen erre kellett ügyelnünk. A függőönt azért alkalmaztuk, hogy ügyelhessünk arra, hogy a mérőrúd és a mérendő T távolság párhuzamosak legyenek. Az irányrúdnak megfelelő vonal metszi ezt a két párhuzamost és ezzel úgynevezett váltószögek keletkeznek, amelyek egyenlők egymással. Most még higgyük el, lesz alkalmunk igazolásával találkozni.

Így már meghatároztuk háromszögeink két-két szögét; harmadik szögük szükségképpen egyenlő, hisz a háromszög szögeinek összege — emlékezzünk iskolai tanulmányainkra — 180° , tehát a harmadik szögre egyik háromszögben ugyanannyi marad, mint a másikban. Így — bár nehézkesen — bebizonyítottuk, hogy a két háromszög megfelelő szögei



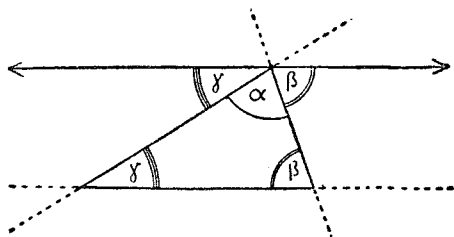
5. ábra.

egyenlők. De ha a két háromszög megfelelő szögeinek egyenlőségéből következtethetünk hasonlóságukra, akkor joggal írhatjuk fel az oldalakra alkalmazott, a hasonlóságból következő arányosságokat. A szögek egyenlősége alapján kimondható hasonlóság valóban igen fontos tétele a geometriának, szög-szög-szög tételnek is nevezhetjük, röviden SSS tételnek.

¹ R a derékszög szokásos jele, a latin *rectus angulus* kifejezés kezdőbetűje.

De hova lett az «ingovány», amellyel előbb fenyegetőztünk? Türelem, azonnal kiderül, hogy nem szabadultunk meg tőle.

Ha megint végig gondoljuk eljárásunkat, akkor rájövünk, hogy tételeket alkalmaztunk és egyik tétel szükségszerűen következett a másikból. S az egész gondolatmenet két tételen alapul. Az egyik párhuzamos egyenesek sajátságait taglalja, a másik szerint a háromszög belső szögeinek összege 180° . Lássuk először a másodikat. Az iskolában ezt a tételt a következőképpen bizonyították be. Húzzunk valamely háromszög egyik csúcsán keresztül a szembenfekvő oldallal párhuzamosot. Ezzel a párhuzamosokat metsző egyenesekre vonatkozó tétel alapján a háromszögnek mintegy valamennyi szögét összegyűjtöttük az egyik csúcspont köré. Azaz a fentemlített csúcs körül található olyan szögeket, amelyek a háromszög szögeivel azonosak. Az már azután nem szorul bizonyításra, hogy a szögek összege 180° , mert a 180° nagyságú szögnek éppen azt a szöget nevezzük, amelynek két szára egyetlen egyenesnek két része.

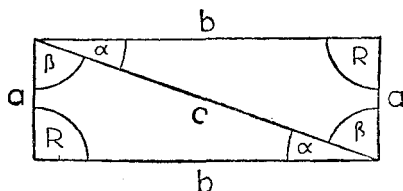


6. ábra.

Röviden, az α szög helyén marad, a két, β -val jelölt, szög váltószög, tehát egyenlő, a két, γ -val jelölt, szög úgyszintén. A fentebb mondottak szerint tehát összegük 180° .

Másképpen is bizonyíthatjuk, hogy a háromszög belső szögeinek az összege 180° . Igaz, ez a bizonyítás egy határesetre vonatkozik, így nem tekinthetjük egyszerűen általános érvényűnek. De lássuk legalább ezt a határesetet. Senki sem vonja kétségbe, hogy egy téglalap belső szögeinek az összege 360° . Ez már a téglalap meghatározásából következik, mert

azt a négyszöget nevezzük téglalapnak, amelynek mind a négy szöge derékszög, azaz 90 fok. Ha téglalapunkat átlóval ketté vágjuk, két háromszöget kapunk és ez a két háromszög egybevágó. Egybevágó, vagyis nem csak hasonló, hanem még egyforma méretű is. Vagyis nemcsak az alakja, hanem a nagysága is egyforma. Egybevágó idomokat kellőképpen eltolva, esetleg átfordítva mindenkor egymásra helyezhetünk. Ebből az is következik, hogy megfelelő alkotórészeik egyenlők, hisz ha a szögek vagy az oldalak közül valamelyik nem volna a másik háromszög megfelelő oldalával egyenlő, akkor a két háromszöget nem lehetne egymásra fektetni.



7. ábra.

Így tehát a két háromszög szögeinek az összege is szükségképpen egyenlő. De ha a szögek összege egyenlő és a két összeg együtt 360° , akkor bizonyos, hogy egyre-egyre csak 180° juthat. De bárhogyan csűröm-csavarom is a bizonyítást, mind az előbbit, mind ezt az utóbbit, valamilyen módon feltétlenül párhuzamosokra vonatkozó tételre bukkanok. Ha a két háromszög egybevágóságát be akarom bizonyítani, akkor például arra kell hivatkoznom, hogy párhuzamosak közt párhuzamosak egyenlők. (Ez a tétel téglalap esetén szemmel látható.) Tehát az a -val jelölt oldalak egyenlők, úgyszintén a b -vel jelöltek, a két háromszög c -vel jelölt oldala pedig közös. Ha két háromszög megfelelő oldalai egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó. (Mint látni fogjuk, ez a tétel ama feltételek egyik legfontosabbika, amelyek alapján háromszögek egybevágóságát felismerhetjük; oldal-oldal-oldal tételnek, vagy röviden OOO tételnek is nevezhetnők.) Ha nem akarom a párhuzamosokra vonatkozó fen-

tebbi tételt használni, akkor a szögeket kell szemügyre vennem. Az egyenlő derékszögeken kívül fel kell fedeznem, hogy váltószögeket találhatok, de ezzel ismét a párhuzamosokra vonatkozó egyik tételt alkalmaztam. Nem tudom tehát a párhuzamos egyenesek tulajdonságait mellőzni. Ezért mondják, hogy ha feltételezzük, hogy valamennyi derékszög egyenlő, akkor a párhuzamosakra vonatkozó tétel és az az állítás, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180° , egymással egyenlő értékű, ekvivalens. Egyenlő értékűeknek, ekvivalenseknek olyan látszólag egymástól különböző dolgokat nevezünk, amelyek következményeikben egymást teljesen helyettesíthetik. De az egyenlőértékűség jelentésére a tapasztalat fog minket legjobban megtanítani.

Fáradásunknak egy eredménye bizonyosan volt: beláttuk, hogy valamilyen úton-módon mindenkor a párhuzamosokra vonatkozó tételre bukkanunk. (Ezt a tételt egyébként «Euklides postulatuma» néven is említik.) A tétel maga, eredeti formájában, körülbelül így hangzanék: «Valamely egyenessel, egy kívüle fekvő ponton keresztül, mindenkor húzható párhuzamos egyenes, de mindenkor csak egy. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek nem metszik egymást, bármennyire meghosszabbítjuk is őket.»

Ez a tétel teljesen világosnak és magától értetődőnek látszik, de bármennyire természetes is, hogy például egy sínpárt kifektethetünk egy síkban, ameddig csak akarjuk, anélkül, hogy a sínszálak egymást messék vagy csak közeledjenek is egymáshoz, mégsem sikerült ezt a tételt tökéletesen bebizonyítani vagy akár más tételekkel való szükségszerű összefüggését kimutatni.

Az idők folyamán ez a tétel szinte matematikai botrányá dagadt. Ismételten azt hitték, hogy végre sikerült megfogni, de mindannyiszor kiderült, hogy nem hibátlan a bizonyítás. Míg végre a XIX. század elején egyszerre több lángeszű ember rámutatott, hogy az euklidesi posztulátum nem bizonyítható, sőt nem is általános érvényű.

De túlzottan elébe vágnánk tanulmányainknak, ha már most foglalkoznánk az úgynevezett nem-euklidesi geometriákkal. Mostani fejtegetéseinknek csupán az volt a céljuk, hogy a nehézségek egyik oldalát megmutassák.

Nagy mértékben zavar minket az is, hogy geometriai fogalmaink tisztázatlanok. Nyugodtan mondhatnók, hogy eddig kapkodtunk, azt hoztuk fel, hogy állításunk néha szemmel látható, másszor bizonyígtattunk s nem tudjuk, mi is az a bizonyítás? Vajjon csak azt szabad elhinnünk, aminek a bizonyítása logikai úton sikerült, vagy hitelt adhatunk annak, amit látunk? Mi is az a geometria? hogyan van jogunk geometriai tételeknek általános érvényt tulajdonítani? A geometriai igazságok tapasztalati tények vagy emberi kitalálások? a geometriai érzék talán velünk született?

Alighanem rosszul fogtunk a dologhoz, különben nem okozott volna olyan egyszerű szerkezet, mint Thales távolságmérője, ilyen bonyodalmakat. S teljes lesz zavarunk. ha elgondoljuk, hogy még ennél az igen pontatlan műszernél is elvi hibát követtünk el. Megfeledeztünk ugyanis arról, hogy a Föld gömbalakú és így azok a tételek, amelyeket alkalmaztunk, nem helytállóak. Igaz, ezeket a hibákat számítással ki lehet küszöbölni, de semmi esetre sem egyszerűen és a helyes számoláshoz szükséges tudásnak egyáltalán nem vagyunk még birtokában. De azt sem szabad elfelejtenünk, hogy a tó felszínét, a hullámoktól eltekintve, bízvást tekinthetjük síknak, mert nagy a Föld és kis távolságokon nem észlelhetnők a sík és gömb eltérését. Egyelőre nyugodjunk meg ennyiben, lássuk inkább, eddigi tapasztalatainkon okulva, hogy mi a geometria célja, feladata és mik az eszközei, hogy azután alapelemeiből kiindulva felépíthessük egész tudásunkat.

NEGYEDIK FEJEZET.

Helyzetgeometria. Mértékgeometria. Tér. Kiterjedés.

Bizonyára már eleinte is feltűnt, hogy két, egymástól alapjukban véve is különböző eljárásmodot használunk problémáink tárgyalására. Egyszer teljesen figyelmen kívül hagytuk geometriai idomaink méretet, csak alakjuk érdekelt és egymáshoz viszonyított helyzetük. Azután egyszerre

megint érdekeltek, az alakkal összefüggésben, bizonyos idomok méretei, például a szögek nagysága. Vagy a háromszögek oldalai hosszának viszonya. Egységnyi távolságokat jelöltünk ki, ilyen volt a kapocs hossza, vagy a méter, s úgy fogalmaztuk meg a kérdést, hogy más távolságok hányszor tartalmazzák ezt az egységet, hány ilyen egységből lehet a másik távolságot összeállítani. Ezt a műveletet mérésnek neveztük. S mérés közben a geometriát és az aritmetikát egymáshoz fűztük, s nem törődve semmivel, különféle számítási eljárásokat, például aránylatokat, alkalmaztunk távolságokra, tehát geometriai fogalmakra. Eszünkbe sem jutott ilyesmi például a párhuzamosság tárgyalásakor. Ott csupán a helyzetről volt szó, s legfeljebb még egyenlőséget vagy különbözőséget állapítottunk meg (például a váltószögek egyenlőségét). Nem mértünk semmit. Ugyanis nem tekintetjük mérésnek azt az állításunkat, hogy az egyenes szög 180° , mert az egyenes szöget nagyon jól felismerni tudom akkor is és kitűnően meghatározhatom, ha mitsem tudok arról, hogy szöget fokkal szokás mérni.

Sejtjük immár, hogy a geometria kétféle feladatcsoporttal foglalkozik: az idomok kölcsönös helyzetének megállapításával és vizsgálatával, továbbá az idomok méreteinek meghatározásával.

Ehhez a beosztáshoz szigorúan ragaszkodni akarunk. Valóban van úgynevezett «helyzetgeometria» és «mértékgéometria». E két feladatkör összekeverése, majd pedig az egyiknek a másik rovására történt fejlesztése sok bajt okozott a geometria története során. S csak Leibniz (1646—1716) fejtette ki egyik — kortársaitól alig értett — kis munkájában¹ teljesen világosan a helyzetgeometria elvét. Több mint 100 évbe telt, míg elgondolását valóban követni sikerült. De Monge, Poncelet, Grassmann és még sok más tudós kellett ahhoz, hogy a geometriának ez az ága fejlődésnek induljon. S az ő munkásságukon épült a modern geometria büszke épülete.

De itt is el kell halasztanunk a közelebbi és pontos kutatásokat. Mert egyelőre — más szempontból — nyakig benne

¹ Zur Analysis der Lage (Math. V., 178. köv. I.)

vagyunk az iszapban. Eddig ugyanis szándékosan csak olyan homályos és közkeletű kifejezéseket használtunk, mint «geometriai dolog», «geometriai idom» és először itt kell valamelyes rendet teremtenünk, hogy tovább juthassunk. Mi még bizonyos fokig kedvező helyzetben vagyunk, mert csak bevezetést adunk és nem az exakt tudománnyal foglalkozunk. Így könnyen túltehetjük magunkat a minden oldalról ránk rohanó problémákon, nem kell a finom rendszerezésre, szisztematikára ügyelnünk, hanem akárhol hozzáfoghatunk. Hogy milyen úton, milyen eszközökkel mászunk ki a mocsárból, egyremegy. Hisz ha már túlságosan terhünkre van a rendszertelenség és a geometriai pongyolaság, segítségül hívhatjuk tudományunk legnagyobb mestereit.

Nyugodtan beszélhetünk tehát geometriai idomainkról. De óvást jelentünk be. Továbbra sem fogunk szigorú meghatározásokat alkalmazni, sokkal előnyösebb számunkra, ha a dolgokat, amelyekről később még úgyis állandóan szó lesz, nyugodtan, minden oldalról szemügyre vesszük.

Ehhez azonban egy előzetes kérdést kell tisztáznunk. Mi az oka, hogy a világot a geometria át- és átszövi? Ennek bizonyára mélyebb oka van. S meg is adhatjuk ezt az okot. A geometria ugyanis a térrel foglalkozó tudomány. S minden, amit ismerünk a térben van, vagy helyesebben mindenben, amit csak elképzelünk, benne van a tér. Az már a filozófiára tartozik, hogy mi is tulajdonképpen a helyzet a térrel, vajjon a tér csupán szemléletünk következménye-e és mi a dolgokat csak a térbe helyezve tudjuk elképzelni, vagy pedig a tér és a térbeliség (kiterjedés) a természetnek és a dolgoknak alapvető tulajdonsága s mi csupán tapasztalat útján ismertük meg. Régi vitakérdése ez az elmúlt évezredek filozófiájának, a régi indusok óta mind a mai napig sokan, köztük Platon és Aristoteles, Descartes és Kant, Poincaré és Carnap foglalkoztak vele. Minket ez az ismeretelméleti kérdés nem foglalkoztat, ha még oly érdekes is; megnyugszunk abban, hogy tér van.

Tehát mi az a tér? Nagyon durva szemléltetés, ha azt mondjuk: «a kiterjedt». Nem baj, adjunk neki nevet, jelöljük zentül egyszerűen R -rel. Ezentúl tehát röviden: «nagy R » a teret jelöli. Feleslegesnek látszik ez a jelölés, de tudjuk,

hogy a matematika, Leibniz szavai szerint, «igaz kabbala». S a benne használt szimbolumok, rövidítések nem kis mértékben segítették elő a matematika diadalútját, jelentőségük nem csak a rövidítés, hanem mintegy önálló életre kelve, önműködő gondolkodó és számológép alkotórészei lesznek. Terünk, az R , ilyenformán a geometria «működési köre». Minden, ami látható, minden test, minden anyag a térben van, s részese a tér tulajdonságainak. S azért van olyan nagy szerepe a geometriának az anyagi világban, mert az anyagi világ térbeli világ is.

Most, minthogy már mindezt tudjuk, még egy mindennapi elképzeléstől kell szabadulnunk, hogy teljesen szabad kezét nyerjünk tudományos vizsgálódásainkban. A mindennapi élet a teret szobának, tornateremnek, konyhának vagy valami hasonlóknak képzei. Térölelő léptekkel jár az ember, egy nép életterében városok, folyók, hegyek vannak. Röviden: megszoktuk, hogy a tér olyan kiterjedt valamit jelent, amelyben jobbra-balra, előre-hátra, felfelé és lehetőleg lefelé is szabadon mozoghatunk. «Életterünknek» több szabadsági foka van. De nagyon jól elképzelhetünk olyan élőlényeket is, amelyek teljesen laposak és egy vastagságnélküli felületen élnek. Ezek a lények kevesebb szabadsági fokkal rendelkeznek, mint mi. Csak jobbra-balra és előre-hátra mozoghatnak. És ezek a lények, amelyeknek soha sem lenne meg a lehetőségük, hogy felfelé vagy lefelé mozoghassanak, térnek — az előbbieket mintájára — egy háromszöget, négyszöget vagy kört neveznének. Eresszük még jobban szabadjára képzeletünket. Tegyük fel, hogy vannak még szerencsétlenebb lények, amelyek egy vonalon, mint vonaldarabok tengetik életüket és csak oda-vissza mozoghatnak. Ezek szegények a vonal-darabot tekintenék térnek.

Most megállapodunk valamiben. Kiterjesztjük az R , tér, fogalom értelmét. És a szabadsági fokok számát inxdeként jobbra lent odaírjuk az R mellé. Így az R_0 mozgási lehetőség nélküli teret jelent, R_2 olyan teret, amelyben két jellegzetes mozgási irány lehetséges, R_n pedig egy olyant, melyben a szabadsági fokok száma n , és az n tetszésszerű egész számot jelenthet.

Szokás a tér szabadsági fokainak számát a dimenziók

számának vagy egyszerűen a tér dimenzióinak is nevezni. Így beszélhetünk «nulldimenziós», egy-, két-, három-, négy-, öt-, vagy általában n -dimenziós térről. Természetesen egyelőre teljesen figyelmen kívül hagyjuk, hogy ilyen terek vannak-e. Ezekkel a kérdésekkel, amelyeket végső célunkul tűztünk ki, könyvünk végén fogunk alaposan foglalkozni. Most sokkal fontosabb, hogy összefüggést találjunk dimenzióink és geometriai idomaink közt. Tehát fogjunk hozzá, alulról felfelé haladva, s kezdjük a legkevesebb szabadsági fokkal. Milyen is az az R_0 , amelyben egyáltalán nem lehetséges mozgás? Ez, azt hisszük, csak az lehet, amit köznyelven pontnak mondanánk. Pont az elképzelhető legkisebb térelem. Nem fér el benne egyéb, mint egy másik pont. Mivel pedig ez utóbbi pont teljesen kitölti, mozgása és ezzel szabadsági foka nem lehet. A pont tehát valóban a R_0 . Engedjük meg, hogy a második pont az elsőből kivándoroljon, akkor vonalon fog mozogni, illetve mozgása során nyomként vonalat hagy maga után. Tegyük fel továbbá, hogy a világból nem létezik más, mint ez a vonal, a pont még akkor is vissza tud vándorolni a helyére. Így tehát *egy* szabadsági foka van, vándorolhat, ha csak a vonal mentén is, tehát egy dimenzióban. Előre és hátra: pozitív és negatív irányt jelent; természetesen nem jelent többlet-dimenziót, épp olyan kevéssé, mint ahogy egy sínpár, amelyen egy mozdony előre és hátra mehet, nem jelent több sínpárt. Menjünk tovább; megállapítottuk, hogy az R_1 , az egyméretű tér, a vonal. Pontunk most hirtelen elhagyhatja a vonalat és jobbra-balra kiléphet belőle. Kötöttsége csak annyi már, hogy egy felületet nem hagyhat el, tehát egy olyan képződményt, amelyet az egész vonal mozgásával nyerhetünk. Most újabb szabadságfokot nyertünk — és bizonyos körülmények közt most lehetséges volna, hogy egészen zárt felületrészek, idomok mozoghassanak. Ezzel tehát az R_2 -be jutottunk, a kétméretű térbe. De pontunknak további igényei is vannak. Nem akar mindig a földhöz tapadva élni, kedve kerekedik porszemhez hasonlóan a levegőbe emelkedni, R_2 -jét, felületét, elhagyni és ezzel harmadik szabadsági fok birtokába jutni. Megválíthat tehát a felülettől és fel vagy le, merőlegesen vagy ferdén elhagyja. Ezzel kilép az R_3 -ba, a három szabadságfokú térbe, a három-

méretű térbe, abba, amelyet gyermekkorunk óta megszoktunk, s amelyet röviden térnek szoktunk nevezni. Úgy is nyerhetjük ezt a teret, hogy valamely felület olyan irányba mozdul el, amely eltérő a benne foglalt szabadsági fokokkal adott mozgási lehetőségektől.

Mi a helyzet a többi szabadsági fokkal? amelyek az R_4 , R_5 -, R_6 - s végül az R_n -hez vezetnének? Egyelőre erre a kérdésre nem felelünk, nagyon messzire vezetne, képzelőtehetségünk és tudásunk még ilyen bonyolult dolgok megértésére nem képesít. Földi tapasztalat még úgysem tette soha szükségessé, hogy 3-nál több dimenzióval törődjünk. Lássuk inkább közben az eddig tárgyalt R_0 , R_1 , R_2 , R_3 másik tulajdonságát, azt, amelyet nagyon durván és hozzávetőlegesen «egyenesség» szóval jellemezhetnénk.

Világos, hogy ez a tulajdonság az R_0 -ban, a pontban nem lehet meg. Egyik pont olyan, mint a másik. Az R_1 -ben már más a helyzet. Erről kiderítettük, hogy vonal, s a benne élőgelő lény csak nehezen tudná megállapítani, milyen alakú vonalban él tulajdonképpen? De az R_2 -be, a felületbe emelkedve már hamarosan megállapíthatjuk, hogy nem minden vonal egyforma. Egyik vonal «egyenes», a másik «görbe». Mi is az az egyenes?

Visszaemlékezve az erkélyre és arra, hogy a diák miként mutatta meg a háziaknak a zergék helyét, azt mondhatnók, hogy a látósugár és az egyenes egy és ugyanaz. Pontjaik a szemből kiindulva «fedezve» sorakoznak, úgyhogy az utolsó a célban van. Ezzel a pont az egyenes keresztmetszeteként is bemutatkozott. A pont természetesen minden vonalnak keresztmetszete, a vonal minden helyén. De emlékezzünk vissza, dereng még, hogy hallottuk: vannak különféle optikai csalódások is. A fénytörés néha nagyon is becsaphat. Azt hisszük, egyenesen nézünk végig, míg a valóságban tört, sőt esetleg görbe vonalon. Ha valami szigonyfélével gondosan megőlozzuk a víz alatt úszó halat és a szerszámot egyenesen nekivágjuk, akkor rendesen mellé találunk, még akkor is, ha a hal nyugton maradt. Mi tehát az egyenes? Évezredek óta próbálják ezt a fogalmat egyértelműn meghatározni. S a sokféle meghatározásból csak egy maradt érvényben: az egyenes a legrövidebb vonal két pont közt. Később még

meglátjuk, hogy ez a meghatározás mennyi bajt zudít a nyakunkba. De az is kiderül, hogy a sok baj újabb, általánosabb ismeretek forrásává lesz. De egy érzésünk mindenképpen megmarad: az egyenes valamiképpen kiemelkedik az összes R_1 közül ama tulajdonságával, hogy bármely két egyenes egymásra helyezhető és egymáson mindenkor elcsúsztatható. Továbbá gyanítjuk, hogy párhuzamosságról csak egyenesekkel kapcsolatban beszélhetünk.

Milyen lehet vajjon az egyenesnek megfelelő R_2 ? Mi viseli ott magán az egyenesség bélyegét? Aligha tévedünk, ha a síkot ruházzuk fel ezzel a tulajdonsággal. Mindjárt megállapítunk valamilyen összefüggést egyenesek és síkok közt. Igaz, nagyon sok olyan felület van, amelyen egyenest lehet húzni. Így például a körkúp palástján vagy a henger felületén. Sőt, a kúp palástját egy ponton keresztülmenő egyenesek nyalábjának is tekinthetjük, a hengerét pedig végtelen sok egymás mellé sorakozó párhuzamos egyenes összeségének. De egy görbe felületen nem lehet *tetszőszerinti irányban* egyenest húzni. Síkot viszont olyan módon is keletkeztethetünk, hogy egy egyenes egyik pontja körül forogni kezd mindaddig, míg eredeti helyzetébe vissza nem jut. Az így keletkezett síkot sugársornak is nevezik. Erről később lesz szó. Bizonyos csupán annyi, hogy a síkoknak, akárcsak az egyeneseknek, megvannak a különleges tulajdonságaik. Két vagy több síkot mindenkor hézagmentesen egymásra fektethetünk, egymáson mindenkor elcsúsztathatunk és tekintve, hogy az R_2 -ben két szabadsági fokkal rendelkezünk, a síkokat el is forgathatjuk egymáson.

Mi felel meg az R_3 -ban az egyenességnek? A mi tudásunkkal bizony nehezen felelhetünk e kérdésre. Mert amint az R_1 görbülségét csak az R_2 -ből szemlélve észlelhettük, az R_2 -ét viszont csak az R_3 -ból tekintve állapíthatjuk meg teljes bizonyossággal, — hisz például egy gömbfelületen számos síkot utánzó dolgot észlelhetnénk — az R_3 egyenességének kétségtelen megállapítására az R_4 -be kellene visszavonulnunk. De ez egyértelmű volna a negyedik dimenzióval, a babona szerint a kísértetek és szellemek hazájával. Nyugodjunk meg az az R_3 , amely az egyenesség kívánalmainak megfelel, az euklidesi tér és egyszerű módon felismerhető.

Ezt a módszert a nagytudású Bernhard Riemann írta le 1854-ben, «Die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen» című értekezésében. Ha ugyanis egyetlen háromszög akad a térben, amelyben pontosan 180° a szögek összege, akkor valamennyi háromszög ilyen. Ebben az esetben viszont a terünk euklidesi. Ezt az R_3 -at, egyenessége, helyesebben euklidesi szerkezete következtében szabadon eltolhatjuk önmagában, három szabadsági fokozata következtében szabadon forgathatjuk is, s nem következik be elgörbülés vagy eltorzulás. Ez az oka ama sok ember számára érthetetlen ténynek, hogy a tárgyakat szabadon mozgathatjuk és forgathatjuk. Ha a tárgyak eltorzulnának, akkor bebizonyosodnék, hogy terünk nem euklidesi, hanem görbült. De ezt ilyen módon nem igen lehetne bebizonyítani. Hiszen minden mérőeszközünk is tárgy, tehát szintén torzul, nyúlik, rövidül és a tárgyak egymás közötti viszonya változatlan maradna. Nem marad egyéb hátra, mint ellenőrzésül a háromszög szögeinek összegét használni. De tudjuk, hogy ez a 180 fokos összeg nem magában álló tétel, e mögött sokkal bonyolultabb helyzettörvény rejlik. Ez a párhuzamosak tétele. Tehát minden pontatlanság nélkül állíthatjuk, hogy egy R_3 akkor euklidesi, ha a párhuzamosak tétele feltétlenül érvényes benne. Vagy megfordítva: a párhuzamosak tételének feltétlen érvényessége bizonyítja, hogy euklidesi R_3 -ban tartózkodunk. Ilyen kísérlet gyakorlati megvalósítása egyáltalán nem egyszerű. Hangsúlyoznunk kell, hogy még senki sem mért pontosan 180 fokot a háromszög szögeinek összegeként és csak hibaelméleti megfontolások teszik nagymértékben valószínűtlenné, hogy e megfontolások alapján terünknek görbült részét fedezhetnők fel. Igaz, még hátra van az a lehetőség, hogy a méréshez használt fénysugarak nagyobb vagy igen nagy távolságokon már nem egyenesen, hanem görbülten haladnak keresztül. De ezzel kiesüszik kezünkől az ellenőrzés utolsó lehetősége is. Gauss, aki tudatában volt e körülményeknek és következményeinek, mindenesetre pontosan kimérte a Hohenhagen—Brocken—Inselberg háromszöget (oldalai 69 , 85 és 107 kilométer hosszúk) s ezzel akarta terünk euklidesi jellegét megvizsgálni. És nem tapasztalt semmilyen gyanút keltő eltérést, habár, mint később látni

fogjuk, a szögek összegének 180 foktól való eltérése okvetlenül együtt növekszik a háromszög területével. Azonban senki sem vonja kétségbe, hogy a párhuzamosakra vonatkozó tételt nem lehet közvetlenül e célra felhasználni. Mert a tétel azt kívánja, hogy a párhuzamosak ne messék egymást, bármennyire meghosszabbítjuk is őket. Így, akármekkora távolságban figyelem is egymástól való távolságukat, a teljességhez még mindig az egész végtelenség várna vizsgálatra.

Tehát foglaljuk össze a tanultakat. Itt-ott hozzá fogunk még fűzni egyet-mást, mert eddig nem akartuk vizsgálatainkat túlságosan sok részlettel terhelni.

Először egy alapvető megjegyzés. A pont, a vonal és a felület, (tehát az R_0 , R_1 és R_2) nagyon légiés dolog a mi R_3 -hoz szokott fogalmaink számára. Pontot, mivel kiterjedése nincs, szigorúan véve egyáltalán nem láthatunk. Ezzel magyarázható az a diáktrefa, hogy a pont olyan szög, amelynek kitéptük két szárát. De a háromszög oldalai és a szög szárai is láthatatlanok, hiszen sem az egyenesnek, sem semmiféle vonalnak nincs szélessége és vastagsága. Láthatatlan összekötése pontoknak, szinte láthatatlan zsinór. Ugyanígy vagyunk a felülettel is. A felület csak valamely anyagi test, kocka vagy gömb határlapjaként válik valósággá. De tiszta geometriai értelemben a test is csak az R_3 -nak képzelt, határozott alakú része.

Ha tehát elmélet-kívánta szigorúsággal vizsgáljuk a dolgokat, a «valóságban» «nincs» egyéb, mint test. Mert a legvékonyabb ceruzavonal egy mégoly vékony papírlapon sem más, mint festékszemcsék halmaza egy testen.

A híres geometra, M. Pasch — aki a geometria úgynevezett empirikus irányának egyik kiváló képviselője, tehát annak az iránynak, amely szerint minden geometriai igazság a tapasztalatból feltétlenül levezethető — mindeme fogalmak érzékeltetésére különféle szerszámokat eszelt ki. Elsősorban az úgynevezett «pontfogót», azaz olyan fogót, amelynek egymásfelé fordított poái tökéletesen hegyesek. Ha most ezzel a fogóval valamilyen képződményt minden oldalról végigtapogatok és azt találom, hogy a csúcsok mindenkor egymáshoz érnek, anélkül, hogy valami közöttük mutatkoznék, akkor pontot tapogattam végig. Hasonló módon vizs-

gálhatom meg a vonalakat és felületeket. Mi csak a teljesség kedvéért említjük itt e szerszámokat, mert szemléltetésre igen alkalmasak.

De ne titkoljuk el, hogy nagyon nyomós okok szólnak az ellen, hogy a geometriát tisztán tapasztalat eredményének tekintsük. Hogyan vettük magunknak a bátorságot, hogy a világot néhány geometriai idommal szinte behálózzuk? Hisz senkisémondhat ellent, ha valaki azt állítja, hogy valódi kör, gömb vagy bármilyen geometriai idom nincs is. Valóban, mindez idomok csak képzeletünkben élnek és csak a gondolatok rögzítésére és a továbbadás lehetővé tételére szolgáló szimbolumok.

Ezekkel a megfontolásokkal még egyáltalán nem jutottunk ki az iszapból. Még nem is sejtjük, milyen rejtélyekkel fogunk találkozni. Maga a geometriának mintegy alapfeltétele kiindulópontja, a látás is sok érdekességet rejthet; gondoljunk egyrészt arra, milyen jelentősége volt már eddig is a szemünkkel észlelt fénysugárnak és annak a körülménynek, hogy két idomot egyforma alakúnak ítéltünk. S a szemmel kapcsolatban találkozhatunk először azzal a problémával, amellyel most sokat fogunk foglalkozni: a perspektívával, amely a projektív geometriának egyik része. De ezek a megfontolások a fiziológia felé terelnék tanulmányainkat, holott még a geometriában is annyi a tennivalónk. Éppen ezért hagyjuk el a geometriai szempontból irracionális dolgokat és lássuk először legközelebbi témánk történetét.

ÖTÖDIK FEJEZET.

Projektív geometria.

Történelmi rejtély, hogy a geometriának perspektív szempontból való tárgyalása miért kezdődött olyan későn. Hisz a természetes geometria, amely tehát joggal viseli a «természetes» jelzőt, feltétlenül perspektív szempontokból indul ki; mivel tudjuk, hogy a látás, a külvilág tárgyainak a szem recehártyáján történő fényképezése is perspektív törvények szerint történik. Érthető, hogy a festők és az építészek,

különösen a renaissance idején, sokat foglalkoztak a perspektíva törvényeivel és mind Lionardo da Vinci, mind Albrecht Dürer bizonyíthatón jól ismerte a ma «ábrázoló» geometriának nevezett tudományt. De azt hiszem, hogy e történelmi rejtély sokkal kevésbé lesz talányos, ha meggondoljuk, hogy a festők és építészek tehetségük és mesterségük miatt kényszerültek arra, hogy perspektívával foglalkozzanak. A világ, még a geometria tudósainak világa sem ismerte a szem szerkezetét és a fény törvényeit. Az út számukra csak Galilei, Huygens és Newton optikai kutatásai, valamint az anatómiai és általános természettudományi kutatások előrehaladtával vált szabaddá, a tizenhetedik század folyamán. Még ezután is majdnem egy évszázadba telt, míg rátértek erre a felszabadult útra. Gaspard de Monge (1746—1818), a francia hajómérnök — akit változatos sorsa többek közt arra is kényszerített, hogy mint tengerészeti miniszter XVI. Lajos kivégzése ügyében intézkedjék — vetette meg 1799-ben az ábrázoló geometria alapját. De éppen olyan kiváló eszű és tehetségű tanítványának, Ponceletnek volt fenntartva az érdem, hogy a geometria új alapokra fektetésében a legnevezetesebb lépést megtehesse. Midőn Poncelet — Napoleon Moszkvából visszavonuló seregének egy részével együtt — 1812-ben orosz fogságba került, Saratovban nem volt semmiféle tudományos eszköze. Képzeletére támaszkodva itt alakult ki benne a projektív geometria, amelyet ma is ezen a néven, de esetleg helyzetgeometria vagy szintétikus geometria néven emlegetünk. A felfedezés lázában tért vissza 1814-ben Metzbe. Honfitársai azonban egyáltalán nem értették meg teljesítményének jelentőségét és a francia akadémia nem vállalta műveinek kiadását. Így ezek Németországban a Crelle's Journalban jelentek meg. De e körülménynek döntő jelentősége volt a geometria további sorsának kialakulására. Németországban ugyanis az új felfedezés termékeny talajra talált és a német tudósok és kutatók, így Pasch és Staadt és még sokan mások, tovább fejlesztették. Nem hagyhatjuk említetlenül Grassmannt sem, aki Leibniz nyomdokain haladva fejlesztette e tudományt.

Hát mi is ez a nagy felfedezésként beharangozott projektív geometria? Meg kell még jegyeznünk, hogy egyes nagyon

fontos, de magukban álló tételeket már Desargues és Pascal is ismert a XVII. században, s ezekre még visszatérünk. De most már hagyjuk a történelmet és haladjunk az alapon kezdve előre. Csak azt áruljuk még el, hogy a projektív geometria tiszta helyzetgeometria. És nagy mértékben eltér attól, amit az iskolákban általában geometriaként tanítani szokás. De nem variánsa a geometriának, hanem egyik mód, amellyel a geometriát egyáltalán igazolni lehet. Így tehát ne okoskodjunk tovább, vágjunk neki.

Már különféleképpen igyekeztünk a geometriai alapfogalmakat megismerni; ilyenek a dimenziók, pont, egyenes stb. s ha nem határoztuk meg őket, legalább megvilágítottuk. Nem fogjuk a tanultakat most sem elfelejteni, sőt alkalmazni fogjuk, habár céljaink most kissé mások.

Még egy legutolsó megjegyzés: A projektív geometriának egészen határozott nyelvezete, terminológiája van és határozott jelzősmódja, amelytől semmiesetre sem akarunk eltérni, Legnagyobb erőnei közé tartozik ez és ha akarjuk, ha nem, ezt a nyelvet meg kell tanulnunk, hogy mindenkor megértethessük magunkat. Érdemes is, mert mindenkor jó hasznát vesszük. Mert éppen a projektív geometria szolgáltat olyan algoritmust, gondolkodó gépet, amely akkor is segítségünkre lesz, amikor képzeletünk már csődöt mond. És ilyenkor is bizonyosan és aránylag egyszerűen vezet.

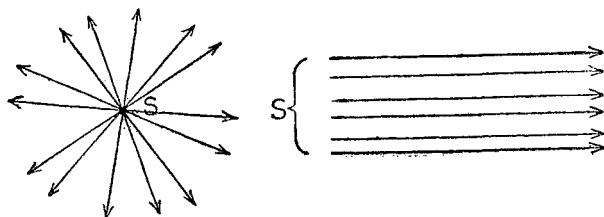
HATODIK FEJEZET.

Projektív alapalakzatok és a végtelenben fekvő pont.

A projektív geometria kizárólag az úgynevezett alapalakzatokat alkalmazza és ebből épít fel minden egyebet. Az elsőfokú alapalakzatok a következők:

a) *Sugársor.* Azon egy síkban fekvő sugarak összessége, amelyek egy ponton mennek keresztül. Ezt a pontot, a sorozó pontot, és vele együtt a sugársort, *S* betűvel szokás jelölni. A sorozó pont a végtelenben is fekehet, vagyis egymással párhuzamos egyenesek is sugársort adnak.

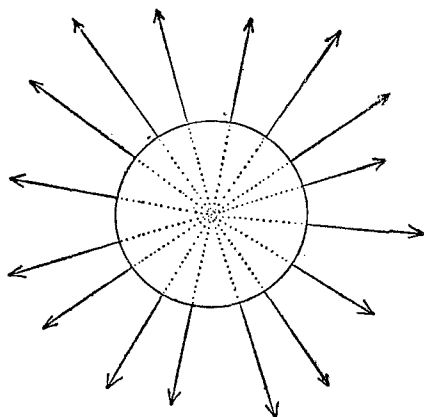
b) *Pontsor*. A második elsőfokú alapalakzat a pontsor, egy egyenes valamennyi pontjának összesége. A pontsort és vele az egyenest s betűvel szoktuk jelölni.



8. ábra.

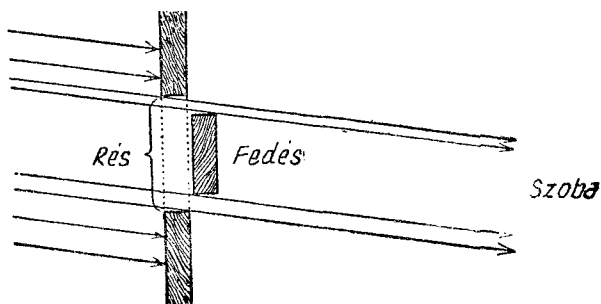
c) *Síksor*. Elsőfokú alapalakzat a síksor is. Jelenti azokat a síkokat, amelyek egy egyenesen keresztüllnének. Úgy képzelhetjük el, mint egy vízimalom lapátjait. Párhuzamos egyenesekből álló sugársorhoz hasonlóan párhuzamos síkokból álló síksor is lehetséges.

Az elsőfokú alapalakzatokhoz még egy fontos megjegyzést kell fűznünk. A sugársorral kapcsolatban említettek szerint elképzelhető, hogy egyenesek metszéspontja olyan messze van, hogy az abban összefutó sugarak már párhuzamosaknak tekinthetők. Közelítésben ismerjük ezt a helyzetet a Nap sugaraival kapcsolatban. Képzeljük el, hogy a «pont» a Nap középpontja és tegyük fel, hogy a Nap sugarainak csak egy síkban fekvő részével akarunk foglalkozni. Ezt elképzelni egyáltalán nem lehetetlen vagy meg nem engedett dolog. A Nap ebben a síkban sugarakat szór szét minden irányban, sugárzása tehát jellegzetes sugársor. Ez a fentemlített sík messzen valamilyen nagyon távoli tárgyat, mondjuk a Földet. Azt is elképzelhetjük, hogy e síknak a helyzetét egészen pontosan ismerjük és így a napsugarakat nagyon keskeny nyíláson tudjuk a szobánkba bebocsátani. Fedjük el a nyílás közepét, úgyhogy csak a fedő rész alatt és felett tudjon egy-egy sugár a szobába bejutni és vizsgáljuk e két sugár egymáshoz mért helyzetét. A sugarak valójában széttartók, hisz egy pontból indultak ki és a Nap véges, mérhető távolságra van tőlünk. Mégis párhuzamosaknak



9. ábra.

fognak a sugarak látszani, amit mindenki megerősíthet, aki már redőnyön keresztülszűrődő napfényt látott, ha a szobában táncoló porszemek megmutatták a sugarak útját. Ha pedig már ezeket a sugarakat is szabad párhuzamosaknak tekinteni, — márpedig az optika és a fizika is így tesz — akkor ezt a gondolatmenetet joggal folytathatjuk. Gondoljunk állócsillag-távolságot, vagy annál is nagyobbat, köd-

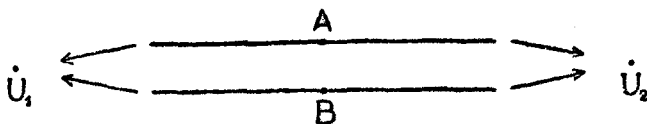


10. ábra.

feltok távolságát, vagy akkorát, hogy mellettük még ezek a távolságok is eltörpüljenek, nekünk ez nem elég, mi a párhuzamos sugarak metszéspontját a végtelenbe helyezzük.

De már Poncelet felvetette a kérdést, hogy hol keressük ezt a végtelenben fekvő pontot, ha egy papírlapon húzott két párhuzamos vonal fekszik előttünk. Kézenfekvő volna a gondolat, hogy keressünk két végtelenben fekvő pontot, hisz a vonalakat is két irányban tudjuk meghosszabbítani.

Gondolhatnánk így, hisz nehéz is belátni, hogy miért viselkednének a párhuzamosak egyik irányban másképpen, mint a másik irányban, ha a végesben valóban párhuzamosak. De ne feledkezzünk meg arról, amiből kiindultunk. Úgy

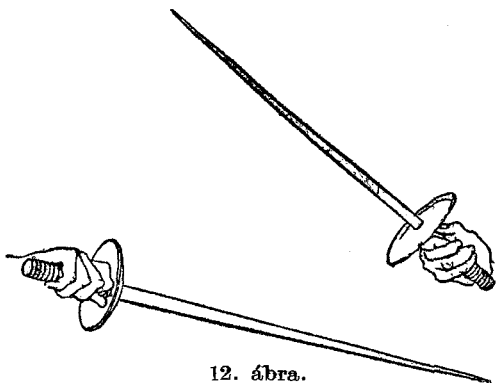


11. ábra.

akarjuk a párhuzamosakat venni, *mintha* egy, a végtelenben levő sugárzó pontból indulnának ki. Le kell mondanunk előbbi ötletünkről, mert azt már nemigen lehet elképzelni, hogy ugyanaz a sugár két végtelen távolfekvő sugárzó ponthoz tartozik. S alapalakzatainkat is összezavarja az ilyen feltevés. De felbukkan még egy nehézség. Nehezünkre esnék az egyenes egyik alaptulajdonságát módosítani. Az egyenest ugyanis két pontja teljesen meghatározza, két párhuzamosunk mindegyike pedig csupán három ponttal volna teljesen meghatározva: két végtelenben fekvő pontjukon kívül még egy végesben fekvő pontjukat is meg kellene adnunk, hogy legalább fogalmunk legyen, merre is keressük őket. Ez már olyan nehézség, hogy az egész geometriánk megváltoztatását kívánná kiküszöbölése, ha a két végtelenben fekvő ponthoz ragaszkodunk.

Kitartunk tehát álláspontunk mellett, minden egyenesnek csak egy végtelenben fekvő pontja van. Ez a megoldás annál könnyebben elfogadható, mert a napsugarakban könnyen érzékelhető példáját láttuk.

Nem tudjuk még a végtelenben fekvő pontunkkal együtt járó előnyöket teljesen értékelni és áttekinteni. Csak azt állapítjuk meg, hogy általuk már így is előnyhöz jutottunk. Megszabadultunk a már terhessé váló párhuzamosoktól. Most már síkban valamennyi egyenes metszi egymást, kitérő egyenesek már csak a térben, az R_3 -ban, lehetségesek. Egye-



12. ábra.

nest tehát változatlanul két pontja határoz meg, vagy egy pontja és az iránya. Irány viszont, a projektív geometria nyelvén, adott végtelenben fekvő ponttal való összekötésre szóló utasítást jelent.

Lássuk most a másodfokú alapalakzatokat.

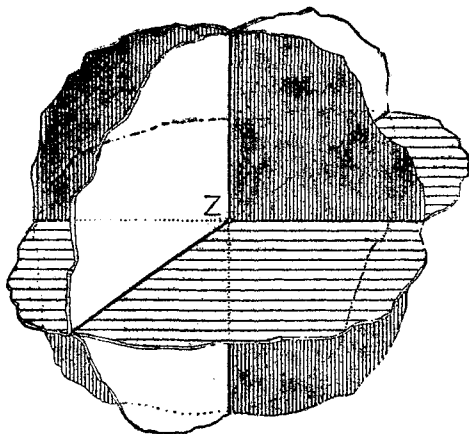
a) *A síkbeli rendszer.* Tartalmazza a sík valamennyi pontját és sugarát. Rendesen a kis görög η betűvel vagy más görög kisbetűvel jelölik.¹

¹ Könnyebbség kedvéért itt adjuk a görög ábécét:

A α Alfa	a	I ι Iota	i	P ρ Ro	r
B β Béta	b	K κ Kappa	k	Σ σ Szigma	sz
Γ γ Gamma	g	Λ λ Lambda	l	T τ Tau	t
Δ δ Delta	d	M μ Mü	m	Y υ Ipszilon	y
E ϵ Epsilon	e	N ν Nü	n	Φ ϕ Fi	f
Z ζ Zéta	z	Ξ ξ Xi	x	X χ Chi	ch
H η Éta	\acute{e}	O o Omikron	o	Ψ ψ Pszi	psz
Θ θ Theta	th	Π π Pi	p	Ω ω Omega	\acute{o}

Jegyezzük meg már itt, hogy később a szövegeket is görög kisbetűvel fogjuk jelölni.

b) *A központos nyaláb.* Rendesen Z -vel jelölik. A tér egy pontján keresztülménő valamennyi elemet jelenti. Jelenti tehát az összes egy pontból kiinduló sugarat (mint tehát a Nap valamennyi sugara) és az abból a pontból kiinduló valamennyi síkot. (Gondoljunk itt egy nagyon soklapú



13. ábra.

végtelenbe nyúló gulát vagy az analitikai geometriából ismert térbeli koordinátarendszer egy ponton keresztülménő síkjait.)

Említsük meg a harmadfokú alapalakzatot, a *térbeli rendszert*, amely a tér valamennyi pontját, síkját és egyenesét tartalmazza.

Most, hogy megismertük a projektív geometria alapalakzatait, még az illeszkedés fogalmát kell tisztázni. Illeszkedésről a következő esetben beszélünk:

- a) ha egy pont egy egyenesen fekszik,
- b) ha egy pont egy síkban fekszik,
- c) ha két egyenes metszi egymást és
- d) ha egy egyenes egy síkban fekszik, akkor az említett idomok kölcsönösen illeszkednek egymásra.

Ezzel megismertük a projektív geometria tárgyalásához szükséges alapalakzatokat és fogalmakat. Ha alaposabban meggondoljuk, csodálkozni fogunk, hogy milyen kevésből építjük fel az egész tudományt. Pont, egyenes, sík; illeszkedik, nem illeszkedik. Minden további fogalom ezekre vezethető vissza. S tapasztalni fogjuk ezzel azt is, hogy mivel minden idom fentiekből nyerhető, rajzoláshoz csak a rajzsík és legfeljebb még egy vonalzó lesz feltétlenül szükséges. Ezért is nevezték el a geometriának ezt az ágát helyzetgeometriának, de sokszor a vonalzó geometriájának, vagy körzőnélküli geometriának is.

HETEDIK FEJEZET.

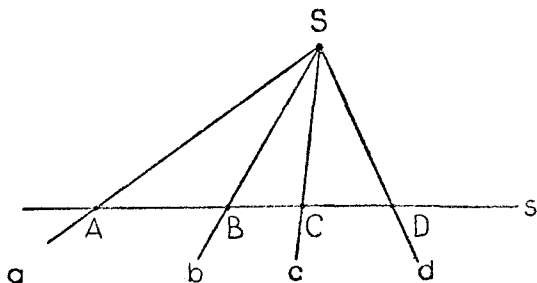
A dualitás elve.

Térjünk vissza az 1812. esztendőbe, a volgaparti Saratovba. A már ismert mérnökkari tiszt, Poncelet, mint hadifogoly, a legszörnyűbb nélkülözések közt éppen elérte ezt a várost. A tél még orosz viszonyok közt is szokatlanul szigorú volt, veszte lett magának Napoleonnak is; olyan hideg tél volt, — írja maga Poncelet, — hogy a hőmérőben megfagyott a higany. A fáradalmaktól és betegségtől elgyötörve érkezett meg Poncelet Saratovba. De szelleme csodálatosképpen élénk, nem tört meg. A rendelkezésére álló néhány kopekon durva papírt vett, míg tintáját — a takarékoság kedvéért valószínűleg koromból — maga készítette. Ezekkel a megdöbentően nagyszerű eszközökkel fedezte fel, dolgozta ki részletesen a projektív geometriát, s ennek keretében egy elvet, amely egyszerűségében és hatalmas hatásaiban méltán felveheti a versenyt a matematika legnagyobb vívmányaival. Ezt a tételt 1822-ben hozta nyilvánosságra, Gergonne tőle függetlenül ismerte fel és ismertette 1826-ban. Az elv neve azóta a dualitás törvénye vagy a kölcsönösség elve.

Már többször alkalmazott módszerünk szerint először nem az általános, hanem egy célszerűen választott különleges eseten fogjuk kipróbálni a tételt. Ez a példa egyúttal a geometriának legfontosabb tételei közül kettőt is bemutat.

De előbb még egy megjegyzést. Már beszéltünk előbb vetítésről és metszésről. Megkíséreltük megvilágítani, hogy mi is az a projekció. Tisztán a rajzolás szempontjából a projiciálás nem más, mint pontok összekötése, bizonyos szabályok szem előtt tartásával, projiciáló, más szóval vetítő sugarak segítségével. A dualitás elve végső eredményben a projiciálás műveletének kettősségén alapszik. Ha a metszés és vetítés fogalmakat felcseréljük, akkor bizonyos kettősség, dualitás nyomára jövünk. Ezt fogjuk a legegyszerűbb módon bemutatni.

Képünkön az s pontsort látjuk, A, B, C, D ennek pontjai. E pontok az s pontsornak és az a, b, c, d sugarakból álló sugársornak metszésével keletkeztek. De ugyanúgy jogosult azt mondanunk, hogy a sugársor vetíti az A, B, C, D pontokat. Ha tehát a metszés és vetítés fogalmát felcseréljük egymással, akkor a pontsor és a sugársor is helyet cserél.

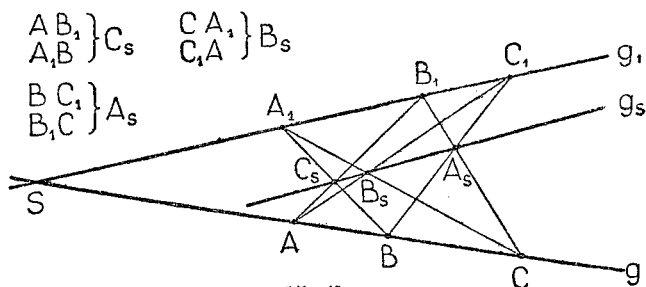


14. ábra.

De ez a példa még egyáltalán nem mutatja a dualitás elvének és nagyszerűségének igazi ízét. Éppen ezért, mint már bejelentettük, sokkal meglepőbb és tanulságosabb példát mutatunk be, amelynek a matematika történetében is jelentős szerep jutott. Blaise Pascal, a nagy matematikus, 1640-ben, tizenhat éves korában hozta nyilvánosságra híres tételét a kúpszeletekbe írt hatszögekről, s ennek egyik különleges esetét fogjuk mindjárt meglátni. Ha Pascal akkor a dualitás tételét ismeri, akkor mindjárt tételének duálját is kimond-

hatta volna, minden további gondolkodás nélkül. Így azonban 166 év telt el, míg ezt a duál-tételt Brianchon 1806-ban felfedezte.

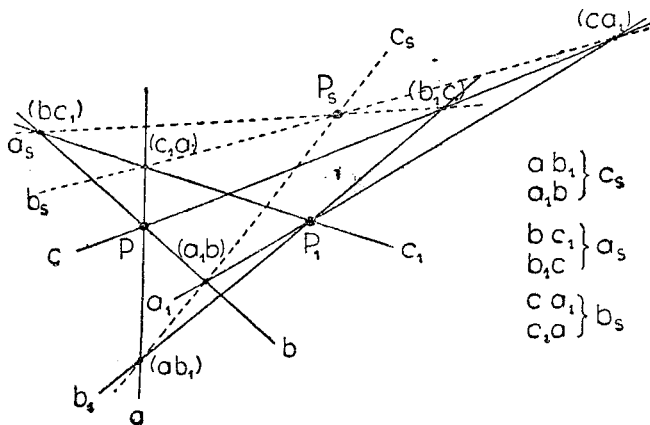
Legyen g és g_1 két egymást metsző egyenes (a végtelenben fekvő ponttal kapcsolatos megállapításaink következtében a párhuzamosak is ide tartoznak). A g_1 egyenesen fekszik három szabadon választott pont, A_1 , B_1 és C_1 . A g egyenesen



15. ábra.

hasonlóképpen: A , B , C . Most «összekötjük» az A és B_1 , valamint az A_1 és B pontokat, az összekötő egyenesek metszik egymást. Így keletkezik a C_s pont. Összekötjük azután a B és C_1 meg a B_1 és C pontokat, a metszéspont A_s , a C és A_1 , valamint a C_1 és A pontokat összekötő egyenesek metszéspontja B_s . E pontokat megfigyelve, meglepetten látjuk, hogy az A_s , B_s , C_s metszéspontok egy egyenesen (g_s) fekszenek. Mellesleg jegyezzük meg, hogy e feladat, vagy hasonló felrajzolásához némi ügyesség és tapasztalat kell. Nem kétes, a tétel mindenkor igaz, de gyakorlatban mégis megeshetik, hogy rosszul választott adatok esetén egyik, másik vagy harmadik metszéspont papírlapunkra már nem fér rá, vagy a rajz nagymértékben áttekinthetetlen lesz. Ezt a körülményt néha érvként is felhasználták a projektív geometria ellen, mondván, hogy az a geometria nyugodtan feltételezi, hogy metszés mindenkor létrejön, holott ez a «mindenkor» a rajzlap széléig terjed csupán. S ha esetleg 150 méter hosszú vonalakat kell húznom, akkor a geometria elvesztette a gyakorlati fontosságát.

De ne ijesszen el ez az önmagában véve nem jogosulatlan kritika, s ne csökkenjen csodálatunk akkor sem, amikor a dualitás elvének szárnnyain 166 évet átugrunk. Cseréljük fel egymással az «összekötni» és «metszeni», továbbá a «pont» és az «egyenes» fogalmát, s azonnal megkapjuk Pascal tételének duálját: Brianchon tételét. Ne töltsük az időt hiábavaló elméleti magyarázatokkal, lássuk állításunkat a gyakorlatban. Az új tételnek ilyennek kell lennie: Most két pontunk van, (P_1 és P), mert előbb, Pascal tételénél két egyenesünk volt (g_1 és g). A Pascal-tétel egyenesei három-három pontot (A_1, B_1, C_1 és A, B, C) kötöttek össze. A «Brianchon» nyelvére lefordítva ez annyit tesz, hogy a P_1 és P pontban három-három egyenes metszi egymást (a_1, b_1, c_1 és a, b, c). Nos tovább. A «Pascalnál» a három-három pontot kettesével összekötöttük, az összekötő vonalak metszették egymást. A «Brianchonnál» először az egyenesek kettőnkint metszik egymást. Tehát a és b_1 , a_1 és b ; b és c_1 , b_1 és c ; c és a_1 , c_1 és a . Ezzel a pontok összekötésének duál szerkesztésével vagyunk még csak készen. Mit tettünk ezután a «Pascalnál»? Az összekötő vonalakot hoztuk metszésbe. A «Brianchonnál»? A metszéspontokat kötjük össze. Az a, b_1 és a_1, b metszéspontjai



16. ábra.

a c_s , a b , c_1 és b_1 , c metszéspontjai az a_s , végül a c , a_1 és c_1 , a metszéspontjai a b_s egyenest adják. Tehát okszerűen jártunk el és a «Pascal» három metszéspontja, A_s , B_s , C_s helyett három összekötővonalat a_s , b_s , c_s kaptunk a «Brianchonnál». Még a végső következtetés van hátra: ha a «Pascal» három pontja egy egyenesen fekszik, akkor a «Brianchon» három egyenesének egy ponton kell átmennie. És csakugyan, végezzük a szerkesztést és meggyőződünk új gondolkodó eszközünk csálhatatlan biztosságáról.

De a dualitás elve sokkal nagyszerűbb, mint amennyire itt, ezen a példán bemutathattuk. Mert nemcsak a pont és az egyenes van síkban ily módon egymáshoz fűzve. Szerkesztünk messzebbre nyúlók; erre is látunk hamarosan néhány példát. Például a dualitás elméletének egyik fő tétele a következő: Minden síkbeli rendszer egy térbeli rendszer metszésével, minden térbeli rendszer síkbelinek vetítésével keletkezik. Ezt a nagymértékben tömören és pontosan fogalmazott mondatot némiképpen érthetőbbé kell tennünk. Nem mond többet és nem mond kevesebbet, mint azt, hogy a sík és a nyaláb egymásnak duális megfelelői. De ez az alapigazság a szem geometriájának az alapja. Mert a szemben találkozó sugárnyaláb (központos nyaláb) mindenütt, ahová eljut, metszésbe kerül egy síkkal, az egy síkban «látott» világgal. És ha most a sugarak irányát ismét visszafelé, a «képvilágtól» a szemhez, tekintem át, akkor a sugárnyaláb, a központos nyaláb, ismét a «képvilágnak» a szem felé való vetítésével keletkezik. A szem belsejében ugyanennek a folyamatnak a «duálja» játszódik le: az ideghártyára vetett kép a szemlencse felől jövő nyaláb metszete stb.

Ezért és csak így lehetséges, hogy tetszésszerűen síkon előállíthatjuk a látható világ képét. Mert maga a szem is a centrális perspektíva törvényei szerint rajzol, vagyis olyan projekció segítségével, amelynek vetítő sugarai a végesben fekvő középpontú nyalábhoz tartoznak. Ezért egyezik meg a kép azzal, amit a világ képeként szemünkkel látni szoktunk. Párhuzamos perspektívával rajzolt tárgyak képe tehát mindenkor többé-kevésbé természetellenes. És ez a megoldása annak is, hogy miért nem láthatunk «valóságban» soha párhuzamosakat. Mert a centrális perspektíva kizárja a pár-

huzamosságot. Szigorúan véve teljesen. Gyakorlatban csak akkor, ha nagyobb hosszúságú párhuzamosokról van szó, mint a távolba vesző vasúti sínek vagy a templomtorony élei. De ezekkel az elméleti korlátozásokkal szemben megszoktuk, hogy minden műszaki rajzot, metszetet és végül geometriai rajzaink nagy részét is párhuzamos perspektíva szerint rajzoljuk. Ez azért van így, mert a térről alkotott elképzelésünk párhuzamos perspektíván alapul és szemünk véleményétől teljesen eltekintünk. De mindig tudatában kell lennünk, hogy közben szándékosan eltérünk egy másik «valóságtól», a látás valóságától, s az absztrakció segítségével az utóbbit teljesen kiküszöböljük. Említsünk még valamit, ami ehhez hozzájárul. Említsük meg, hogy geometriai idomok esetén még egy véleménynel támogatjuk ezt az eljárást, habár ez a tapasztalat csak a minket környező világból származik. Minden geometriai idomot merev testnek tekintünk. Ha nem készíthetnénk gömböt, kockát, oktaédert, gúlát, kúpot fából, fémből, kőből, ha háromszögeket, négyzeteket csak nedves itatóspapírból, testeket pedig csak futóhomókból készíthetnénk, vagy esetleg csupán folyadékokból, akkor aligha jutottunk volna el mai geometriai tudásunkhoz. Mert a fénysugarak egyenesvonalú terjedése egyedül aligha vezetett volna ilyen hatalmas gondolat-építmény kiépítéséhez. Ezek a H. Poincarétól és Hugo Dinglertől származó megjegyzések meggondolásra kell hogy készítsenek. De teljesen helytelen, ha velük azt akarjuk bizonyítani, hogy a geometria egyesegyedül a tapasztalat alapján keletkezett. Szemléletnek és fogalmaknak tapasztalat *alapján* való keletkezése és tapasztalat *kapcsán* való keletkezése közt lényeges különbség van, mint erre már Kant is rámutatott. Tehát legfeljebb azt mondhatjuk jogosan, hogy az a mód, amellyel mi a geometriát megalkottuk, a gondolkodás lehetőségeinek és a merev testek létezésének hatása alatt állott, s ebből valóban következik a párhuzamos perspektíva, a látással meg nem egyező elképzelésünk a térről, s a bennelevő tárgyról.

De kitérésünkkel a dualitás elvének vizsgálatát eléggé el nem ítéltető módon elhagytuk. Azt mondtuk, hogy a Brianchon-tételt a Pascal-tételből már megkapjuk, ha a duali-

tás elvét ismerjük. Természetesen ugyanennyi tudással a Brianchon-tételből a Pascal-tételt is megkaphattuk volna, hisz a dualitás elve kölcsönös és egyértelmű vonatkozás, esetünkben pont és egyenes közt. Ilyen duáltételeket plasztikusan tükrőtételeknek is szokás nevezni. Természetesen ezt a tükrözést nem szabad a szavak szoros értelmében venni, hiszen ez a «tükrő» bizonyos fokig torzít, minthogy mindent ellenkezőjére változtat. Még egy megjegyzés: Magától értetődő, illetve annak kellene lennie, hogyha egy tételnek a duálját keressük, akkor az első tétel már bizonyított. Ne tekintse magát senki felfedezőnek, ha egy indokolatlan geometriai állításhoz a dualitás elve alapján a megfelelő tükrőtételt kimondja. A Pascal-tétel bizonyítva volt, Brianchonnak tehát nem kellett volna tételét önállóan felfedeznie, sem pedig bebizonyítania, ha a dualitás elvét ismeri. Tehát így fogalmazzuk meg egyelőre: Ha a projektív geometria valamelyik tétele helyes, kellőképpen bebizonyított, akkor a duál tétel is azonnal kimondható, külön bizonyításra nincs szükség, feltéve, hogy a dualitás elvét helyesen alkalmazzuk és a felcserélések tévedésmentesek. Erre a célra nagyon hasznos a helyes, logikus és áttekinthető írásmód. Mi a pontokat mindenkor nagy, latin betűkkel fogjuk jelölni, egyeneseket kis latin betűkkel, síkok jelölésére pedig kis görög betűket fogunk használni.

Ha homolog, azaz megfelelő alkotórészeket akarunk megjelölni, akkor legcélszerűbben indexeket alkalmazunk. Ha tehát a g egyenesen négy pontot az A , B , C , és D betűkkel jelöltünk, akkor a megfelelő pontok jele a g_1 egyenesen A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , a g_7 egyenesen A_7 , B_7 , C_7 , D_7 vagy a g_n egyenesen A_n , B_n , C_n , D_n . Ily rendszerben már maga a jelölés sok összefüggést elárul, képszerűvé teszi a leírtakat és gondolkodó gépként is szolgál. És éppen a projektív geometria, a maga bonyolult rajzaival, metszéspontjainak, sugársorainak és megfeleléseinek hozójával lett ezen a réven laikusok számára is járhatóvá, még azon a részén is, ahol a szakember iskolázott elképzelése is elakadna. De megfordítva, éppen ezzel a tulajdonságával járul hozzá nagy mértékben a képzelőtehetség fejlesztéséhez, s ezt mindenki, aki az eddigiek során követte előadásunkat, csak megerősítheti. Nagyon kíváncs

volna, ha olvasóim nemcsak nézegetnék ennek a könyvnek az ábráit, hanem maguk is rajzolgatnának, lehetőleg a könyvtől eltérő léptékekben. Amit a projektív geometria során a képeken nem lehet ábrázolni, az a képek fejlődési, keletkezési módja. Leghelyesebb, ha a fent említett módon a rajzolandókat előbb leírjuk, s ennek nyomán készítjük el a rajzot. Ismételten meg fog történni, hogy találkozunk az egyenesek már említett ellenállásával, vagyis hogy a metszéspontot csak a másik utcában tudnók megtalálni. De ezek a nehézségek is javítják, nevelik képzelőtehetségünket. Ez annál fontosabb, minthogy az utolsó évtizedekben szokássá vált geometriáról értekezéseket, sőt vastag könyveket írni, úgyhogy egyetlen ábra sincs bennük. Talán nem tévedünk, ha ebben bizonyos sportszerű élvezetet is látunk. És hogy ez óriási, már meglevő képzelőtehetséget feltételez. Mi természetesen, tekintve, hogy elemi oktatásról van szó, nem fogjuk ezt a módszert alkalmazni, sőt ellenkezőleg azon leszünk, hogy a képi ábrázolást mindenkor a magyarázat elé bocsássuk.

Folyton eltérünk a dualitás elvétől. Vigasztalódjék az olvasó, ebben az eltérégetésben is van rendszer. Nem akarjuk, hogy tanácsok, tételek, meghatározások tömege gyűljék össze, s hogy azokat hiányos összefüggésük miatt sem megérteni, sem pedig megjegyezni ne tudjuk. Inkább az a szándékunk, hogy mindent a maga helyén tárgyaljunk még akkor is, ha miatta a szigorú tudományos sorrend szenved. Mint vándor pajtások együtt szedünk virágokat, megnézzük őket s a kék égbolt alatt beszélgetünk róluk, szerkezetükről, szárukról, porzóikról. Ha otthon az egész botanikát bevágtuk volna, akkor talán rájönnénk egyre-másra útközben, de sokszor tévednénk is, sokmindenre nem emlékeznénk és az éppen látottak számára alighanem kevesebb érdeklődésünk maradna.

Már ismételten rámutattunk arra, hogy nemcsak pont és sugár közt van duális összefüggés. Sőt nem is csak sík és nyaláb közt, amivel a látással kapcsolatban találkoztunk. De nehogy túlságosan ellaposodjék tárgyalásunk, írjuk össze szépen és rendszeresen a duális összefüggéseket, de tartsuk magunkat közben az alapalakzatok beosztásához.

Tehát dualitás áll fenn :

A. A térben :

- a) pont (nyaláb) és sík közt,
- b) egyenes (síksor) és egyenes (pontsor) közt.

B. A síkban :

- a) pont (sugársor) és egyenes (pontsor) közt.

C. A nyalábban :

- a) egyenes (síksor) és sík (sugársor) közt.

Mint már a Pascal és Brianchon tárgyalásánál megtettük, az «összekötés» és «metszés» kifejezéseket mindenkor fel kell cserélni egymással, s ekkor már a legelemibb tételeknél is alkalmazhatjuk új varázserejű szerkezetünket, hogy élvezzük kiváló működését. Állítsunk össze kis táblázatot ilyen tételekből, olyan formában, ahogy ez már szokásos. A lap egyik oldalára kerül az arabs számmal jelölt tétel, mellé a vesszővel ellátott számmal megkülönböztetett duálja.

- | | |
|--|---|
| 1. Egy sík két pontját egy sugár köti össze. | 1'. A pont két sugár metszése a síkban. |
| 2. Egy nyaláb két sugarát egy sík köti össze. | 2'. Az egyenes a nyaláb két síkjának metszésvonala. |
| 3. A sík a tér három pontját köti össze. | 3'. A pont a tér három síkjának metszése. |
| 4. Egy sík összeköti a tér egy egyenesét és egy pontját, ha a pont nem illeszkedik az egyenesre. | 4'. A pont egy sík és egy egyenes metszése a térben, ha az egyenes nem illeszkedik a síkra. |

Ebből a kisszámú, aránylag nagyon egyszerű tételből is látjuk, hogy a geometria a dualitás elvének mekkora terjeszkedési lehetőséget köszönhet. Minden tétel magában visel egy másodikat és a duális összefüggések megsokszorozzák a tételek számát a síkban, térben és a nyalábban.

Szolgáltassa ismét egy történeti visszaemlékezés a továbbhaladásunkhoz szükséges anyagot. Körülbelül Richelieu-nek,

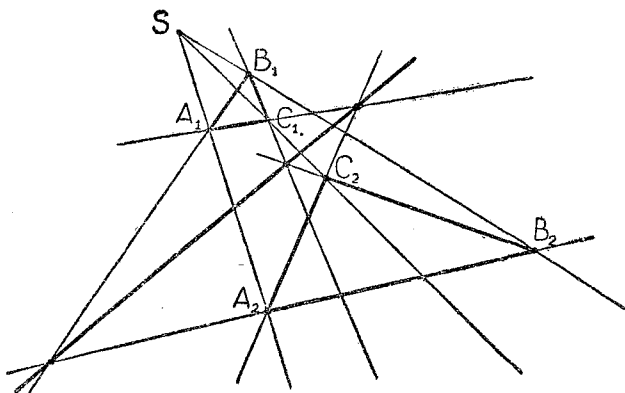
a nagy államférfinak és bíborosnak idejében, tehát a XVII. század elején élt Lyonban egy jegyzőnek a fia. Neve Desargues volt. A fiú kiváló építész és a geometriának lángeszű művelője volt, de megjelenése kissé különönc természetre vallott. Erre mutatott az is, hogy ellentétben a feltűnést hajhászó törtetők szokásaival, legfontosabb műveit is alig látható apró betűkkel, különálló lapokra nyomatta és így is csupán legbizalmasabb barátainak osztogatta. Sőt ezekben az alig hozzáférhető szövegekben is matematikától nagyon távolálló, a botanikától kölesőnzött tolvajnyelvet használ, mindenkor gyökerekről, levelekről, ágakról ír, ha geometriai alakzatokat akar említeni. Nagyon is megértjük, hogy kortársai miért tartották rajongónak és bolondnak. Csak a legnagyobb matematikusok, így Pascal és Fermat voltak más véleménynel a lyoni bölcsről. S nekik volt igazuk. Mert Desargues volt a projektív geometria tulajdonképpeni megalapítója, s a róla elnevezett tételnek az új geometria felépítésében akkora a jelentősége, hogy alig marad el a Pythagoras-tétel jelentősége mögött. Tudunk róla, hogy Poncelet hallott Desargues-ről, de hogy tanait róla ismert-e, bizonytalan, mert maga Poncelet panaszkodik, hogy Desargues-nak éppen a főműve veszett el.

A sors azonban úgy akarta, hogy egy másik férfi, aki Poncelet után sokat tett a projektív geometria fejlesztése terén, a francia Chasles, egyszer a szajnaparti könyvkereskedők egyikénél kotorászott és itt éppen ez a hivatott szakember találja meg Desargues-nak elveszett főművét.¹ Ma tehát többet tudunk Desargues-ről, mint a közben eltelt két évszázad matematikusai.

Desargues alapvető tétele, síkra alkalmazva, a 17. ábra jelöléseivel, a következők:

«Ha két háromszög — csúcsaik A_1, B_1, C_1 és A_2, B_2, C_2 — olyan fekvésű, hogy a megfelelő (egyenévű) csúcsaikat összekötő egyenesek egy ponton (S) mennek keresztül, akkor megfelelő, kellően meghosszabbított oldalaik metszéspontja egy egyenesen van.»

¹ Girard Desargues (1593—1662) főművének magyar címe ez lehetne: «Előzetes vázlata annak, hogy mi történik, ha kúp és sík találkoznak.»

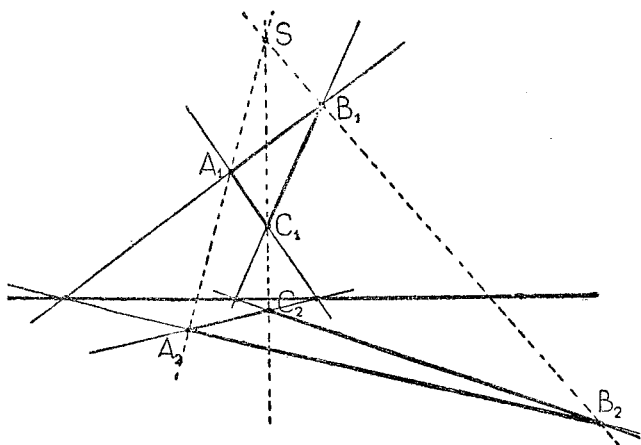


17. ábra.

Bármennyire jelentéktelennek látszik ez a tétel, mégis alapvető fontosságú az egész geometria szempontjából. Mert csak ennek nyomán lehet, a Pascal-tételen kívül, szigorú átmenetet találni a helyzetgeometriából a mértékgeometriába, ez pedig a geometria szintétikus, építő tárgyalásmódjának alapfeltétele. S ez a tétel nemcsak a síkban érvényes, hanem a térben és a nyalábban is. Ezekkel most nem foglalkozunk, csak megjegyezzük, hogy Desargues tételének ez a két változata mind a perspektíva, mind az ábrázoló geometria szempontjából különlegesen lényeges.

Desargues tétele projektív geometriai tétel, tehát alkalmazhatjuk rá a dualitás elvét. Megkíséreljük tehát «kulcsunk», «szótárunk» segítségével a duáltételét megtalálni. Így összekodunk: két háromszögünk volt, a dualitás értelmében két háromoldalunk lesz. Csúcsokat összekötő egyenesek ponton mentek át, most oldalak metszéspontjai egyenesen fekszenek. Ez a feltételre vonatkozott. A következmény: oldalak metszéspontjai egyenesen fekszenek, most csúcsok összekötő egyenesei ponton mennek át. Tehát Desargues tételének duál-megfordítása így hangzik:

Ha két háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai egy egyenesen fekszenek, akkor a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át. (18. ábra.)



18. ábra.

A dualitás hatása itt nem olyan szembeötlő, mint a Pascal—Brianchon esetben. A jobb megértés kedvéért fűzzük tehát még hozzá, hogy a duális megfelelés magja itt a következő: három egyenes megy az S ponton keresztül és három pont fekszik a g egyenesen. Ezért a duális megfordításnál a rajz változatlan marad, csak mintegy a felépítése lesz más. A Pascal-tételre a dualitás hatása azért szembeötlőbb, mert a Brianchon-tételle történő átalakulásnál az előbbi két egyenesen fekvő három pontjából az utóbbinak két ponton keresztül menő három egyenese lesz; a szerkesztés eredménye az elsőnél egyetlen, három ponton keresztülmenő egyenes, a másodiknál viszont három, egy ponton keresztülmenő egyenes.

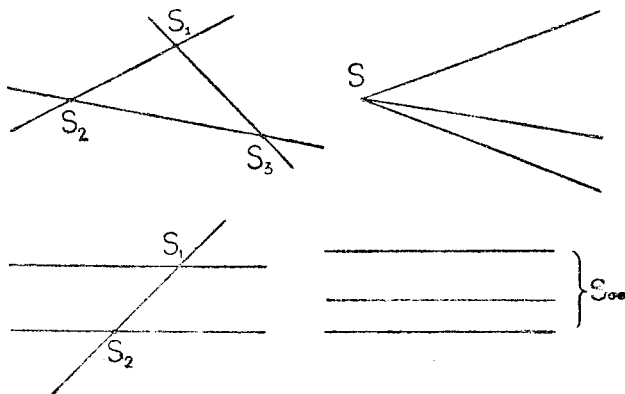
NYOLCADIK FEJEZET.

Teljes geometriai idomok.

Mielőtt még Pascal, Brianchon és Desargues tételeinek mértékgeometriai felhasználásához látnánk, fordítsuk figyelmünket könnyebb és egyszerűbb terület felé. Ez a kis pihenő

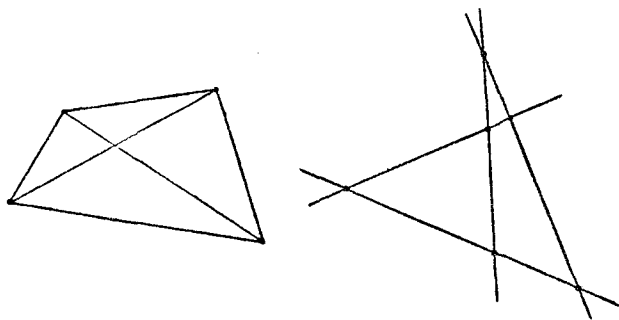
nagyon jó lesz arra, hogy már megismert alapalakzatokból tervszerűen idomokat alkossunk. Egyelőre úgynevezett projektív idomokat, amelyek feltétlenül a legáltalánosabbak, s legkevesebb feltételhez kötöttek, mert nagyságuktól teljesen eltekintünk és semminemű szabályosságot sem keresünk. Szem előtt fogjuk azt is tartani, hogy idomaink, a nélkül, hogy lényegük megváltoznék, eltorzulhatnak, elfajulhatnak.

Mielőtt még az idomok vizsgálatához kezdenénk, jegyezzük meg: különösen sok gondolkodás nélkül beláthatjuk, hogy idomon valamilyen elhatárolt dolgot kell értenünk. De ehhez még valami járul. Az elemi alapalakzatok — pont, egyenes, sík — nem idomok, csupán az idom építőköveinek tekintendők. Csak határesetet jelenthetnek, talán összezsugorodott, elfajult idomokat. De erről majd később. Az R_1 -ben létezik ugyan valami, ami bizonyos fokig idomnak volna tekinthető: a távolság, vagyis egy egyenesnek két ponttól határolt darabja. De egyelőre maradjunk abban, hogy ezt sem tekintjük idomnak. Tehát az R_2 -t kell elővennünk, ha idomot akarunk összeállítani. Legalább hány elem szükséges tehát ahhoz, hogy fogalmaink szerint idomot alakíthassunk? Egy egyenesből és pontokból nem lesz idom, sőt két egyenesből sem. Így tehát három egyenessel fogunk kísérletezni.



10. ábra.

Ez a kísérlet már sikerül. Természetesen csak akkor, ha egyeneseink közt nincs két, még kevésbbé három párhuzamos, vagy nem megy mind a három egy ponton keresztül. Megtaláltuk tehát a sík legegyszerűbb idomát, nevezzük háromoldalnak, mert három egyenesből (oldalból) keletkezett. E három oldal három pontban metszi egymást, ezeket nevezzük, mint eddig is, csúcspontoknak, vagy egyszerűen csúcsoknak. Idomunkban tehát az oldalak és csúcsok száma egyformán három. A háromoldal a háromszög duál megfelelője. Az ilyen idomokat egyszerű, vagy simplex idomoknak, simplexeeknek nevezzük. De vigyázzunk, a projektív geometria négyszöge vagy ötszöge egyáltalán nem ugyanaz, amit mi az iskolában négyszögnek vagy ötszögnek nevezünk. A projektív geometria mindenkor úgynevezett *teljes* idomokkal foglalkozik, mert bizonyos számú egyenesből adódó valamennyi csúcspontot megkeres, illetve a duálja bizonyos számú pontnak valamennyi összekötésmódját. A projektív geometria négyszögének hat oldala van és a négyszoldalnak hat csúcspontja. Ezeket az idomokat nevezzük



20. ábra.

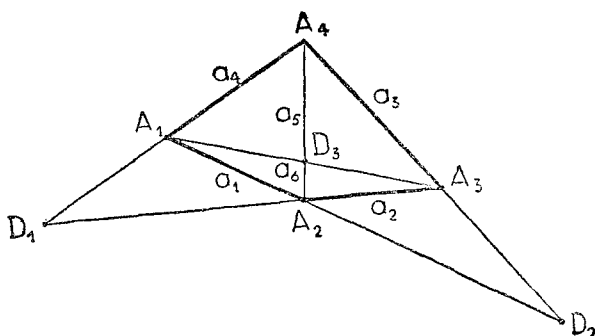
teljes idomoknak, s megkíséreljük családfájukat Carnot nyomán felépíteni. Felhasználjuk majd ezt az alkalmat bizonyos törvényszerűségek megismerésére is.

Beszélgünk először a sík teljes idomairól. A síkban csak kétféle idom lehetséges, mindkettő pontokból és egyenesek-

ből áll, egyik az n -szög, a másik az n -oldal; az n szabadon választható, kettőnél nagyobb egészszám. A kombinatorika szabályai szerint az n -szögnek mindenkor n csúcsa és $\binom{n}{2}$ oldala van, mert egy oldal, egy egyenes, mindenkor két pontot köt össze. Megfordítva, n -oldal esetén, mindenkor n egyenessel és $\binom{n}{2}$ csúcsponttal találkozunk. Mivel már megállapítottuk, hogy n legalább három, különben nem keletkezik idom, simplexként a háromoldal és a háromszög maradt. A háromszögnek, a meghatározás értelmében három csúcsa van és $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ oldala. A háromoldalnak három oldala és $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ csúcspontja. A háromszög és a háromoldal egyenértékű, így is kell lennie, ez kiderül, mihielyt ránézünk, hisz simplex idomnál átló meghúzásának lehetősége is hiányzik, így az oldalak és csúcsok számának meg kell egyeznie.

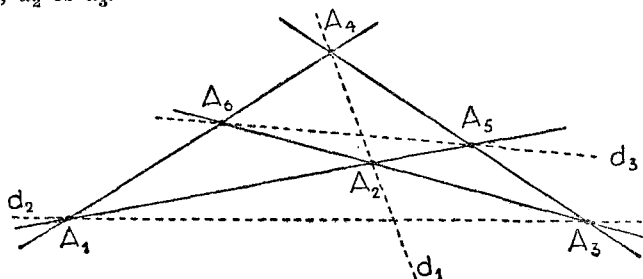
Négyszögnél már más a helyzet, hasonlóképpen a többi n -szögnél ($n \geq 4$). A teljes négyszögnek 4 szögpontja és $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ oldala van. A teljes négyoldalnak viszont 4 oldala és $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ csúcspontja. A teljes tízszögnek 10 csúcsa és $\binom{10}{2} = 45$ oldala van, a teljes tízoldalnak viszont 10 oldala és $\binom{10}{2} = 45$ csúcsa.

De nem elégszünk meg ezzel az eredménnyel: kibővítjük ismereteinket. Rajzoljunk fel tehát egy teljes négyszöget. Látjuk a négy csúcsát, A_1, A_2, A_3, A_4 és a hat oldalát $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, amelyeket három pár átellenes oldalal csoportosíthatunk. Ezek az átellenes oldalak is metszik egymást, metszéspontjuk az ú. n. átlópont. A 21. képen D_1, D_2, D_3 .



21. ábra.

A duál eset a teljes négyszög. Itt a négy oldalunk (22. kép, teljes vonal) van és három áttellenes pontpárunk: A_1A_3 , A_2A_4 és A_5A_6 . Ezeknek az összekötéséből adódnak az átlók, d_1 , d_2 és d_3 .



22. ábra.

Ezzel a sík teljes idomainak összes lehetőségeit kimerítettük. Éppen ezért tovább megyünk, felemelkedünk a nyalábba. A nyaláb, tudjuk, egy ponton keresztülmenő síkokat vagy sugarakat jelent. A sugarakat, idomok szempontjából éleknek nevezzük, a síkokat lapoknak. Megkülönböztetünk tehát n -élűeket és n -lapúakat. Az ilyen idomot durva hasonlaltal alul nyitott gúlának is mondhatnók. Ha

tehát ilyen idomot síkkal metszünk, akkor, ha a metsző sík egyik éllel sem párhuzamos, élek képe pontként, oldallapok képe pedig egyenesként jelentkeznek a metszősíkon. A nyaláb idomainak metszete tehát a síkban n -szöget, illetve n -oldalt ad. Ebből azonnal következik, hogy az oldalak és élek közötti összefüggés a nyaláb idomaiban ugyanaz, mint az oldalak és csúcsok összefüggése a síkidomokban. Tudjuk, hogy az n -élűnek n -éle és $\binom{n}{2}$ oldala van, az n -lapúnak pedig n lapja és $\binom{n}{2}$ éle; n itt is tetszősszerinti szám, de $n > 2$. Tudjuk, hogy a háromélű és a háromlapú egyenértékű, duálisótárunk segítségével azt is lefordíthatjuk, hogy átellenes lapjainak metszéspontjait átlósugarak, átellenes sugarait pedig átlósíkok kötik össze. A nyaláb simplex idoma a háromlapú és a háromélű.

Tekintve, hogy az R_3 -at nem akarjuk elhagyni, már csak a térbeli idomok vannak hátra. Természetesen térben sem köthetünk másképpen össze pontokat, mint mindenkor kettőt-kettőt egy egyenessel. Így természetes, hogy a térbeli n -szög n -csúcsa közt $\binom{n}{2}$ összekötő egyenes van.

Kissé más a helyzet az oldallapokkal. Tudjuk, hogy három-három pont határoz meg egy síkot. Következésképpen $\binom{n}{3}$ a térbeli n -szög oldallapjainak a száma és három pont nem fekszik egy egyenesen. A térbeli n -lapnak, mint neve mutatja, n -lapja van. Érthető, hogy az n -lap $\binom{n}{2}$ metszéspontot és $\binom{n}{3}$ metszéspontot határoz meg. A térbeli simplex a térbeli négyszög, a tetraéder. Ennek 4 csúcsa, $\binom{4}{2} = 6$ éle és $\binom{4}{3} = 4$ lapja van. Tükörképe a térbeli négylap, ennek 4 lapja, $\binom{4}{2} = 6$ éle és $\binom{4}{3} = 4$ csúcsa van. Egy teljes kockának, amely tudvalevően a térbeli teljes nyolcszög, $\binom{8}{2} = 28$ éle és $\binom{8}{3} = 56$ lapja

van. Tévedések elkerülésére megjegyezzük, hogy a térbeli nyolcszögnek, a kockának egyáltalán nem a térbeli hatlap a duál idoma, hanem a térbeli teljes nyolc lap, az oktaéder. Képleteink szerint ennek 28 éle és 56 csúcsa van.¹

Igazat adunk annak, aki azt mondja, hogy nagyon nehéz a térbeli idomokat elképzelni. De nyugodtan megbízhatunk algoritmusunkban. És ez egyik nem megvetendő előnye a projektív geometriának.

Most pedig egy pillantást vetünk magasabb dimenziókba, amire itt alkalom kínálkozik. Az általunk követett úton lehetségessé válik, hogy az R_3 -nál magasabb terek teljes idomaira következtethessünk. A négydimenziós tér simplexe, az úgynevezett ötsejt, egy politop,² egy több-mint-test, amelyet közönséges testek határolnak. A következtetés világos. Az R_2 -ben vonalak határolták az idomokat, az R_3 -ban síkok. Az R_4 idomait tehát csak testek határolhatják, az R_5 idomait pedig előbbi fajtájú politopok. Az R_4 -nek az R_3 -nál eggyel több szabadsági foka van, tehát a metszésre és összekötésre is több módozat nyílik. Még soha sem látott senki ötsejtet, legalább is a maga testi mivoltában, három dimenziós rajzát, modelljét azonban nem nehéz elkészíteni.

Az ötsejtnak 5 sejtje, $\binom{5}{2} = 10$ «lapja», $\binom{5}{3} = 10$ «éle» és $\binom{5}{4} = 5$ csúcsa van. De ezekről a négydimenziós idomokról az egyik későbbi fejezetben lesz bővebben szó.

¹ A közönséges geometria idomain, kockáján és oktaéderén látszólag hiába keressük ezt a sok alkotórészt. De ne felejtsük el: azokon nagyon sokszor fordul elő, hogy a teljes idom oldallapjai, élei vagy csúcsai közül több összeesik. Ahhoz, hogy valamennyi lapot, csúcsot és élet külön kapjunk meg, szükséges, hogy négy csúcspont soha se fektüdjék egy síkban vagy négy síknak ne legyen egy közös metszéspontja.

² Politopoknak a háromnál több dimenziós testeket nevezzük.

KILENCEDIK FEJEZET.

**A geometriai axiómák.
Hilbert axiomarendszere.**

Sok szépet és meglepőt tanultunk, s bár reméljük, hogy van némi képünk a projektív geometriáról is, mégis homokra építettünk az egész idő alatt. Az úgynevezett axiómákról ugyanis még csak nagyon felületesen beszéltünk, pedig azok az alappillérei a valóban tudományos geometriának. De ha ezzel a végső fokozattal kezdünk foglalkozni, pedig ide kell jutnunk, ha minduntalan a «miért?» kérdésekre felelgetünk, akkor látszólag elhagyjuk a projektív geometria területét. De ez csak látszat. Mert valami módon minduntalan visszatérünk. Eleinte új és idegen volt számunkra a projektív geometria, hisz alig hallottunk róla valamit az iskolában. De felkeltette érdeklődésünket, megkedveltük. És megbarátkoztunk vele. S akkor fogja csak nagy jelentőségét igazán megmutatni, amikor a mértékgeometriára kell róla áttérnünk.

Mik is azok a rejtélyes axiómák? Néha azt mondják róluk, hogy az alapigazságok, alaptételek, amelyek már tovább nem bizonyíthatók, a szemlélet következményei és csak a szemlélet igazolhatja őket. Ilyen axióma volna például az az állítás is, hogy minden egyenes legalább két pontból áll, és minden síkon legalább három nem egy egyenesen fekvő pont található. Ilyen példák alapján azt mondhatnók, hogy az axiómák szemléleti tartalmukon kívül némi logikai elemet is tartalmaznak. Hisz a sík képzelt valami, képzeletem terméke. Az axiómával pedig éppen azokat az ismertetőjeleket emelem ki újból, amelynek alapján én a fogalmat megalkottam.

De hagyjuk a böleselkedést, ne taglaljuk azt a kérdést, hogy a matematika csak megállapodás vagy még kevesebb, csupán tautológia, tehát mindig önmagába visszatérő, egy tengely körül keringő köre különféle okoskodásoknak. Az idevágó irodalom eléggé bő felvilágosítást nyújt. Nézzünk inkább körül — szokásunk szerint — a történelemben.

És itt valami egészen csodálatosat, a tudomány történe-

tében egyedülálló dolgot tapasztalunk : már Kr. e. a harmadik században a nagy tudású, kiváló Euklides axioma-rendszert állított fel «*Elemen*» («*Stoicheia*») elején és ez az axioma-rendszer kiállotta két évezred bírálatát. Feltétlenül voltak ismert geometriai elemek Euklides előtt is. De nem lehettek olyanok, mint Euklideséi. Mert kevés kivétellel ma is ismerjük az ókor valamennyi lényeges művét. Fontos dolog nem megy egykönnyen veszendőbe, hisz rendesen még szerzője élete folyamán, vagy kevéssel halála után kellő számban sokszorosítják munkáját. És Euklides műveit ma is nyomtatják. Sőt majdnem változatlan alakban használja az angol tanulóifjúság tankönyvül.

Ha lemondunk arról, hogy Euklides axiomatikáját részletesen ismertessük, akkor erre két nyomós ok készlet. Először is kerülni akarjuk, ha egyáltalán lehet, hogy egy dolognak többféle rendszerét ismertessük. Különbféle rendszerek összehasonlítása csak haladottabbaknak való és már a kutatásnak bizonyos fajtája. Tanítás alapja csak «*katekizmus*» lehet, nem pedig különböző rendszereket ismertető «*kompéndium*». De ez az ok talán még nem késztené arra, hogy Euklides teljesítményével olyan mostohán bánjunk. Az a fontos körülmény játszik még szerepet, hogy éppen az utolsó évszázad forradalmasította nagymértékben a geometria számos részét. A projektív geometriában a változás fontos fejezetét ismertük meg, de más változásokkal is lesz még alkalmunk megismerkedni. De ezzel azok a követelmények is megváltoztak, amelyeket egy axioma-rendszerrel szemben támasztunk. Új tényekkel szemben is meg kell állnia helyét, új, eddig ismeretlen területekről származó felfedezések helyét is ki kell jelölnie.

Ezek voltak az okok, amelyek miatt úgy határoztunk, hogy az egyik legmodernebb és egyben már klasszikussá vált axioma-rendszert választjuk további tárgyalásunk alapjául : még pedig a kiváló, ma is élő német geometriatudós-nak, David Hilbertnek, a göttingeni egyetem egykori tanárának rendszerét, ahogy a «*Grundlagen der Geometrie*» (A geometria alapjai) című munkájában 1913-ban megírta.

Természetesen ez a rendszer sem keletkezett önmagából. Találunk benne olyan axiómákat is, amelyeket már Euklides

is megírt. Mert a «görög csoda», a nagyfokú képzelőtehetségnek és kifogástalan logikának remek találkozása sok végleges érvényűt alkotott, olyant, hogy nekünk, késői utódoknak sem lehet okunk vagy szándékunk megváltoztatni vagy megtagadni. Hilbertnek és a többi újkori matematikusnak eredményeit mégis önállóknak kell tekintenünk. Mert csak beavatottak tudják megmondani, hogy milyen éles logika, az egész matematikának milyen átfogó ismerete kell ahhoz, hogy valaki csak félig-meddig használható axiomarendszert alkothasson. Az axiomarendszer axiomáinak egymástól függetleneknek kell lenniök, mert különben elvesztik axioma jellegüket. Nem lehetnek ellenmondók. Ehhez járul még a teljesség súlyos követelménye (szigorúan véve minden valaha felállított geometriai tételt meg kellene vizsgálni, hogy nem lépi-e túl az axiomarendszer határait).

Az itt következő, maguktól értetődő tételeket tehát mégis valamivel nagyobb megbecsüléssel kell néznünk, mint amilyent első pillanatban megérdemelni látszanak. Mert éppen ez a «magától értetődés» okozhatja a legnagyobb nehézséget.

Hilbert nem mond semmit az axioma lényegéről. Csupán egy előrebocsátott magyarázatban jelenti ki az alábbiakat, miután azokról a «dolgokról» beszélt, amelyeket mi pont, egyenes és sík néven említünk és amelyek az egyenes, a sík és a tér geometriai elemeinek tekintendők:

Pontokat, egyeneseket és síkokat — mondja — egymással bizonyos összefüggésben levőknek tekintünk és ezeket az összefüggéseket «fekszik», «között», «párhuzamos», «egybevágó», «folytonos» szavakkal fejezzük ki; ezeknek az összefüggéseknek matematikai használathoz szükséges teljes leírását a geometriai axiómák szolgáltatják.

Hilbert szerint az axiómák öt csoportba oszthatók. Minden csoport szemléletünk bizonyos szempontból tartozó alapvető fogalmait tartalmazza. Az axiómacsoportokat Hilbert a következőképpen nevezi meg (a római számok a csoport számát jelölik, az arabs számok az axiómák sor-számjai):

- I. 1—8. A kapcsolás axiómái.
- II. 1—4. Az elhelyezés axiómái.

III. 1—5. Az egybevágóság axiómái.

IV. A párhuzamosak axiómája.

V. 1—2. A folytonosság axiómái.

Tehát Hilbert szerint 20 axióma van.

Jegyezzük meg itt, hogy más axioma-rendszer, például Schur vagy Pasch axioma-rendszere, nem három elemből építi fel az egész geometriát, hanem egyből, a pontból. Ilyen axioma-rendszerek azután esetleg nemcsak az euklideszi, hanem a nem-euklideszi geometriákban is a maguk egészében érvényesek maradnak.

TIZEDIK FEJEZET.

A kapcsolás axiómái és az elhelyezés axiómái.

Az első axiomasoport, a kapcsolás axiómái, a pontok, egyenesek és síkok közt fennálló kapcsolatokat adják.

I. 1. «Két egymástól különböző A és B pont mindenkor meghatároz egy egyenest.»

(A «meghatároz» kifejezés helyett más kifejezés is használatos. Így: az egyenes keresztülmegy az A és B ponton, összeköti az A és B pontot.)

I. 2. «Egy egyenesen fekvő két pont meghatározza ezt az egyenest.»

I. 3. «Egy egyenesen mindenkor van legalább két pont, síkban mindig van legalább három nem egy egyenesen fekvő pont.»

I. 4. «Egy sík három nem egy egyenesen fekvő pontja A , B , C , meghatározza a síkot.»

I. 5. «Egy sík három pontja, ha nem fekszik egy egyenesen, meghatározza a síkot.»

I. 6. «Ha egy a egyenes két pontja, A és B egy a síkban fekszik, akkor az a egyenes minden pontja az a síkban fekszik.»

(Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy az egyenes a síkban fekszik.)

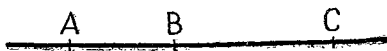
I. 7. «Ha két sík, α és β , egy A pontja közös, akkor van legalább még egy közös B pontjuk is.»

I. 8. «Van legalább négy nem egy síkban fekvő pont.»

Minden axiómából természetesen a tételek egész sora következik. De a jobb áttekinthetőség kedvéért az axiómákra szorítkozunk és ezért áttérünk a második csoportra.

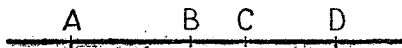
E csoport axiómái a «között» fogalmát határozzák meg és lehetővé teszik a pontok rendezését egyenesen, síkban, térben.

II. 1. «Ha A , B , C egy egyenesnek pontjai és a B pont A és C közt van, akkor a B pont C és A közt is van.»



23. ábra.

II. 2. «Ha A és C egy egyenesnek pontjai, akkor van legalább egy olyan B pont, amely A és C közt fekszik és legalább egy olyan D pont, hogy C fekszenjen A és D közt.»



24. ábra.

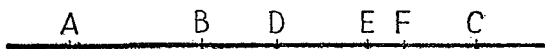
II. 3. «Egy egyenes három pontja közül egy és csakis egy fekszik a másik kettő közt.»

(Valamely a egyenes két pontját vesszük figyelembe. A vonalnak e két pont, A és B , által határolt részét AB vagy BA távolságnak nevezzük. Az A és B között fekvő pontok a távolság pontjai, vagy a távolságon belül fekvő pontok. A és B a távolság két végpontja. Az egyenes többi pontja a távolságon kívül van.)

II. 4. «Legyen A , B és C három nem egy egyenesben fekvő pontja egy síknak és a egy olyan egyenese, amely egyik ponton sem megy keresztül; ha az a egyenes keresztülmegy az AB távolság egyik pontján, akkor feltétlenül keresztül-

megy vagy a BC távolság egy pontján vagy az AC távolság egy pontján. (Ez az úgynevezett „Pasch-féle axioma“.)»

Az I. és II. axioma-csoportból ismét számos tétel következik. Ezek közül csak a számunkra legfontosabbat említjük, azt, hogy egy egyenes két pontja között mindenkor végtelen sok pont van. Mivel két pont mindenkor meghatároz egy egyenest, s mivel továbbá mindenkor található olyan pont, amely az egyenes két pontja között van, akkor ennek az eljárásnak ismétlése az alábbi elgondoláshoz vezet:



25. ábra.

Feltétlenül van az A és C pont közt még egy pont, legyen az B . De B és C az A -tól függetlenül is meghatároz egy egyenest, így van egy D pont a B és C közt. D és C B -tól függetlenül határozza meg az egyenest, van tehát köztük egy E pont. E és C ugyanilyen elgondolással adja az F pontot. Mint látjuk, korlátlanul ismételhető ez az eljárás, anélkül, hogy az A és C pont között el kellene hagynunk. Ezzel tehát végtelenül sok ponthoz jutunk; hasonló eljárással természetesen arra is rájövünk, hogy az AC köz bármelyik részén végtelen sok pontot találhatunk.

TIZENEGYEDIK FEJEZET.

Az egybevágóság axiómái. Háromszögek egybevágósága.

Lássunk most hozzá az axiómák harmadik csoportjának megismeréséhez; ezek tartalmazzák az egybevágóság és ezzel együtt az elmozgatás fogalmát. Kongruens, azaz egybevágó a geometria nyelvén az egyenlőségnek különleges esetét jelenti. Egybevágóságról csak akkor beszélhetünk, ha az egyenlő geometriai idomok csakugyan egymásra fektethetők, teljes fedésbe hozhatók. Ezt a látszólagos ravaszságot már itt meg akarjuk világítani. Két kesztyű egyenlő, ha minden méretük

megegyezik. Vagyis ha a két kesztyű egy pár. A kesztyűh mégsem hozható fedésbe. Csak akkor dughatók egymásba, ha az egyiket kifordítjuk. A kifordítás kesztyűknél, véletlenül, lehetséges. De ha két lovagi páncélkesztyűvel kísérletezném, semmiesetre sem sikerülne a dolog, nem hozhatnám őket semmimódon fedésbe. A két kesztyű tehát egyenlő ugyan, de nem egybevágó, hanem szimmetrikus. Szimmetria azonban nemcsak térbeli, hanem síkbeli vagy vonalszerű idomoknál is lehetséges. Az eredeti és a tükörképe, a nyomóforma és a nyomtatvány szimmetrikusak. Egybevágókká csak akkor lehetnek a szimmetrikus síkidomok, ha a síkból, az R_2 -ből kiemelve az R_3 -ban átfordítjuk őket. A síkban ám tologathatók és forgathatók őket, mégsem fednék soha egymást. Utaljunk itt arra is, hogy a «bal» és «jobb» problémája is ezzel függ össze. S egyelőre jegyezzük meg alapelveként, hogy két szimmetrikus n -dimenziós idom csak akkor hozható fedésbe, ha az R_{n+1} további szabadsági foka rendelkezésre áll. De ha nem szimmetrikus a két idom, az egybevágóságot akkor is csak az idom eltolása segítségével állapíthatjuk meg. Ezen alapul az az állítás, hogy az egybevágósággal az eltolás fogalmát is meghatároztuk.

De elhalasztjuk a szimmetria és dimenziók száma közt fennálló összefüggés tárgyalását, hogy figyelmünket az axiómák harmadik csoportjának tárgyalására fordíthassuk.

III. 1. «Ha az A és B pont valamely a egyenesen fekszik, A' pedig ennek az egyenesnek vagy egy másik a' egyenesnek egy pontja, akkor az a' egyenesen, az A' megadott oldalán mindenkor egy és csakis egy olyan B' pont található, amelyre nézve az AB és $A'B'$ távolság egymással egybevágó, vagyis

$$AB \equiv A'B'$$

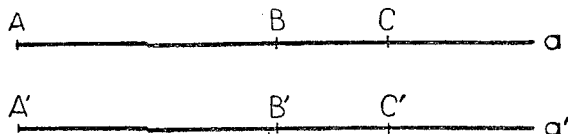
Minden távolság egybevágó önmagával, vagyis mindenkor igaz, hogy

$$AB \equiv AB \quad \text{és} \quad AB \equiv BA.»$$

(Ezt az állítást egyszerűbben úgy fogalmazhatjuk meg, hogy valamely távolság egy egyenesre egy adott pont valamelyik oldalán mindenkor egyértelműen mérhető fel.)

III. 2. «Ha egy távolság, AB , másik két, $A'B'$ és $A''B''$, távolsággal egybevágó, vagyis $AB \equiv A'B'$ és $AB \equiv A''B''$, akkor $A'B' \equiv A''B''$.»

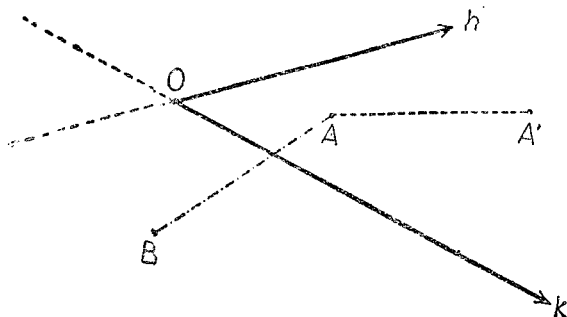
III. 3. «Legyen AB és BC két távolság az a egyenesen és ne legyenek közös pontjaik, s $A'B'$, valamint $B'C'$ két távolság ugyanazon az a , vagy valamely más a' egyenesen, s ezeknek se legyenek közös pontjaik; ha most $AB \equiv A'B'$ és $BC \equiv B'C'$, akkor $AC \equiv A'C'$ szintén helyes.»



26. ábra.

Mielőtt még további axiómákra áttérnénk, alapvető fogalmakat kell megismernünk. Mindeddig csak pontokkal, vonalakkal, távolságokkal vagy síkokkal volt dolgunk. Most új alakzatot kell bevezetnünk: a szöveget. Ennek lehetőleg tudományos szempontból kifogástalan módon kell megtörténnie, hisz mi, tekintve, hogy axiómákkal foglalkozunk, nem kell, hogy tudjuk, mi is az a szög. Ezt a fogalmat tehát lépésről-lépésre kell felépítenünk.

Legyen előttünk egy tetszőszerinti a sík, induljon ki valamely O pontjából két különböző félsugár. Ez a két félsugár két különböző egyeneshez tartozik.



27. ábra.

A félsugarak eme rendszerét nevezzük szögnek és $(h, k) \angle$ vagy $(k, h) \angle$ jellel jelöljük. A II. 2—4. axiómákból következik, hogy a h és k félsugarak (valamint az O pont) az α sík többi pontját a következőképpen osztják két tartományra: Legyen A az egyik tartománynak, A' pedig a másik tartománynak pontja, akkor minden vonal, amely az A pontot az A' ponttal összeköti vagy keresztül megy az O ponton, vagy a h , vagy pedig a k félsugár egyik pontján. A két tartomány közül egyik kitűnik a másikkal szemben; a különleges tartománynak az a tulajdonsága, hogy bármely két pontját összekötő távolság egész terjedelmében benne van e tartományban. Ezt a tartományt nevezzük a $(h, k) \angle$ belsejének, megkülönböztetésül a másik tartománytól, amelyet a $(h, k) \angle$ külsejének nevezünk. A h és k félsugár a szög két szára, az O pont pedig a szög csúcsa.

Szögek is bizonyos viszonyban vannak egymással, e viszonyok megjelölésére is az «egybevágó» vagy «egyenlő» szavakat használjuk.

III. 4. «Adjunk meg egy $(h, k) \angle$ szöget egy α síkban, és egy α' egyenest egy α' síkban, jelöljük meg továbbá az α' síknak α' -től számítva egyik oldalát. Legyen h' az α' egyenesnek O' pontjából kiinduló egyik félsugara; akkor az α' síkban és csakis egy olyan k' félsugár található, amellyel a $(h, k) \angle$ és a $(h', k') \angle$ egybevágó lesz, ha egyben a $(h', k') \angle$ valamennyi belső pontja az α' sík megadott oldalán van. Minden szög egybevágó önmagával; $(h, k) \angle = (h, k) \angle$ és $(h, k) \angle = (k, h) \angle$. Röviden azt is mondhatjuk, hogy egy adott szög, egy adott síkban egy adott egyenes egyik megjelölt oldalára egyértelműen mérhető fel.»

Ahhoz, hogy a következő tételt felír hassuk, néhány szó magyarázatot kell előrebocsátanunk. Legyen ABC egy háromszög; jelölje az A pontból kiinduló, B és C ponton keresztülmenő félsugarat h és k . A $(h, k) \angle$ akkor a háromszögnek az AB és AC oldalától bezárt, vagy a BC oldalával szemben fekvőnek mondott szöge; belsejében van a háromszög valamennyi belső pontja és $BAC \angle$ vagy $A \angle$ jellel jelöljük.

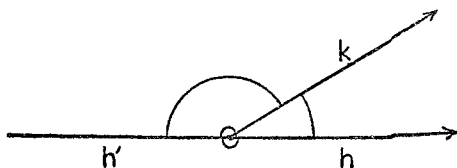
III. 5. «Ha két háromszögre (ABC és $A'B'C'$) nézve helyesek az alábbi egyenlőségek :

$$AB=A'B', \quad AC=A'C' \quad \text{és} \quad \angle BAC = \angle B'A'C'$$

akkor mindenkor helyesek az alábbiak is :

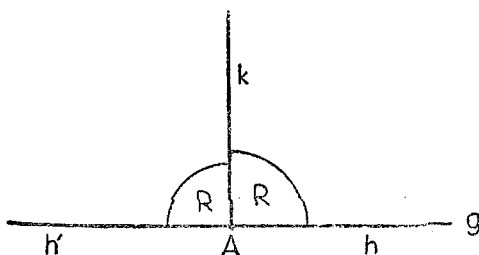
$$\angle ABC = \angle A'B'C' \quad \text{és} \quad \angle ACB = \angle A'C'B'.$$

Ezt az utóbbi axiómát a háromszögek egybevágóságának tárgyalásakor tudjuk majd jól alkalmazni. De most még sürgősen pótolnunk kell a szöggel kapcsolatos néhány fogalom ismeretét. Két szög mellékszöge egymásnak, ha egyik száruk és csúcsuk közös, másik száruk pedig egyenes vonal.



28. ábra.

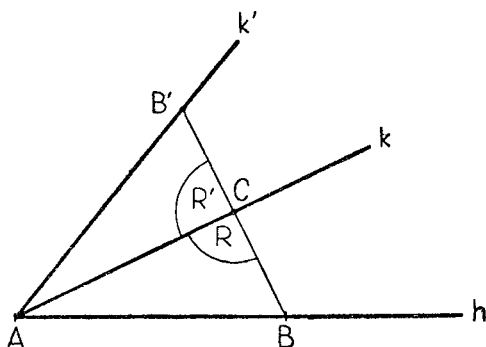
A (h, k) és a (h', k') egymásnak mellékszöge. Ha azonban mellékszögek egybevágók, egyenlők, akkor derékszögek. Vagy azt is mondhatjuk, hogy egy szög akkor derékszög, ha mellékszögével egybevágó.



29. ábra.

Azt is mondják, hogy a k egyenes merőleges a h és h' félsugarakból álló g egyenesre. Hilbert nyomán a III. 1., III. 4.

és III. 5. axiomákból következik a derékszögek létezése. Ha ugyanis valamely szöget egyik szárára újra felmérünk úgy, hogy a két szög csúcsa közös legyen; ezután a külső szárakra egyenlő távolságokat mérünk fel, akkor az ezek végpontjait összekötő egyenes merőleges a közös szárra.

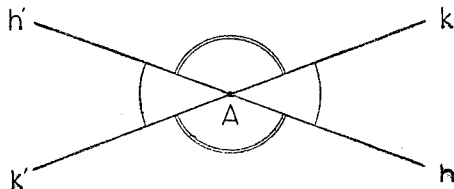


30. ábra.

Igaz ugyanis, hogy $AB \equiv A'B'$ és $AC \equiv A'C'$. Azonkívül $(h, k) \simeq (h', k') \simeq$.

Ezek szerint biztos, hogy az R szög egyenlő R' mellékszögével (a III. 5. alapján). De a mellékszögek egyenlősége éppen a derékszög definíciója.

A szögek más fajtái az úgynevezett csúcsszögek. Két szög akkor csúcsszöge egymásnak, ha csúcsuk közös és megfelelő száraik együtt egy egyenest adnak. Csúcsszögek mindenkor egyenlők, egybevágók. Megjegyezzük, hogy miként a $(h, k) \simeq$ és $(h', k') \simeq$ csúcsszögei egymásnak, éppen úgy a $(h, k') \simeq$ és $(h', k) \simeq$ szögek is csúcsszögek.



31. ábra.

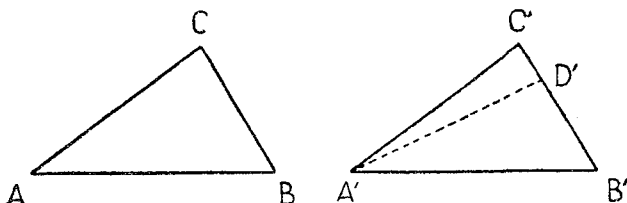
E megjegyzések után elkezdhetünk a háromszögek egybevágóságával foglalkozni. Csak azokat a háromszögeket tekintjük egybevágóknak, amelyeknek mind a hat alkotórésze (három oldala és három szöge) egybevágó. Tehát

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C';$$

és

$$\angle A \equiv \angle A', \angle B \equiv \angle B', \angle C \equiv \angle C'.$$

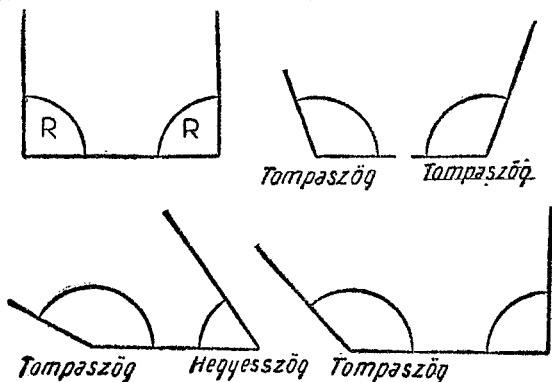
Már a III. 5. axioma megállapítja, hogy ha két háromszögben két oldal és a közbenzárt szög kölcsönösen egyenlő, akkor a másik két szög is kölcsönösen egyenlő. Így csak azt kell még bizonyítanunk, hogy a háromszögeknek a harmadik oldalai hasonlóképpen egyenlők.



32. ábra.

Ha most (mint ilyen bizonyításoknál gyakran szokás) feltételezzük, hogy a dolgok ellenkezője igaz, vagyis $BC \neq B'C'$ akkor az ilyen feltevés lehetetlenségét kell bebizonyítanunk, hogy első feltevésünket igazoljuk. Eredeti feltevésünk szerint $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. Mostani (lehetetlen) feltevésünk szerint $\angle BAC \not\equiv \angle B'A'D'$. Ez szemlátomást lehetetlen, de ezenkívül a III. 4. axioma szerint is helytelen, mert egy szöveget egy félsugár valamelyik oldalára csak egyféleképpen mérhetünk fel. Tehát ezek szerint $BC \equiv B'C'$ s ezzel az egybevágóság mind a hat alkatrészre igazolást nyert. Ebből pedig a háromszögek egybevágósága következik. Az egybevágóságnak ezt a tételét az egyenlőnek felvett alkotórészek helyzete alapján Oldal-Szög-Oldal tételnek nevezhetjük, rövidítve OSO tételnek.

Ha most két háromszög más három meghatározó alkatrészét vesszük egyenlőnek, például az egyik oldalt és a rajta fekvő két szöget, akkor a második egybevágósági tételt kapjuk, az úgynevezett Szög-Oldal-Szög, rövidítve a SOS tételt.



33. ábra.

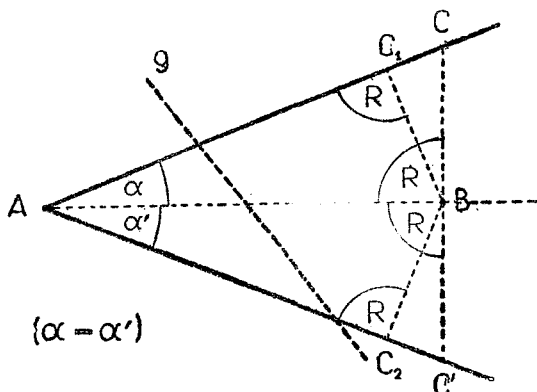
Ezt és a következő egy bevágósági tételeket már bizonyítás nélkül említjük. SOS tételünket azonban nem használhatjuk minden korlátozás nélkül.¹ Mert ha az oldalon fekvő két szög mindegyike derékszög vagy tompaszög volna (azaz olyan szög, amely nagyobb mint a derékszög), akkor nem keletkezik háromszög. (33. ábra.)

De akkor sem keletkezik háromszög, ha egy hegyesszög és egy tompaszög összege nagyobb két derékszögnél.

A SOS tételből a szögfelezőknek nagyon fontos tulajdonságait vezethetjük le. Világos, hogy az ABC és ABC' háromszög (34. ábra) a SOS tétel alapján egybevágó. Mert az AB oldal közös, az α és α' szög feltevésünk szerint egyenlő, tekintve, hogy mindegyik a szögnek a fele, a B mellett

¹ Ha három egyenlő alkotórészt tartalmazó két háromszög egybevágó, akkor valamennyi olyan háromszög is az, amely ezeket az alkotórészeket tartalmazza. Ezek az alkotórészek tehát meghatározzák a háromszöget, vagyis ismeretükben a háromszög már mindenkor felrajzolható, de ilyenkor ügyelni kell, hogy az alkotórészek megfelelők legyenek és a háromszög létre is jöhessen. (*A fordító.*)

fekvő két derékszög is egyenlő (azért derékszögek, mert a CC' egyenest úgy húztuk, hogy az AB egyenesre merőleges legyen). A háromszögek egybevágóságából következik, hogy a szögfelezőre, egyik pontjában, húzott merőlegesek egyenlők ($BC=BC'$), hogy ez a merőleges a szögek száraiból egyenlő darabokat vág le ($AC=AC'$) és hogy a $C\hat{A}=C'\hat{A}$. Ha viszont a szögfelező egyik pontjából húzunk a szög

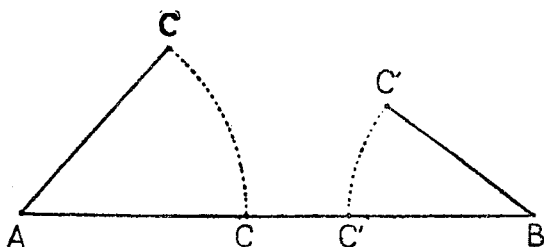


34. ábra.

száraira merőlegest, akkor szintén két egybevágó háromszöget kapunk. E háromszögek egybevágósága az SOS tétel egyik változatából következik: az OSS tételből. (Későbbi tanulmányaink során látni fogjuk, hogy ha két háromszög megfelelő két szöge egyenlő, akkor a harmadik szögek szükségképpen egyenlők.)

Tehát utóbbi esetünkben az ABC_1 és ABC_2 valóban egybevágó az OSS tétel alapján, mert a két háromszögben $AC_1=AC_2$, $\alpha=\alpha'$ és a két derékszög, amely a merőlegesek húzásával keletkezett, szintén egyenlő. Ebből az következik, hogy a szögfelező egyik pontjából a száraakra húzott merőlegeseknek a hossza egyenlő ($BC_1=BC_2$), és ezek a merőlegesek a száraiból egyenlő darabokat vágnak le. ($AC_1=AC_2$.)

Ha azonban a szögfelezőt nem az előbb említett merőlegessel metszem, hanem egy általános helyzetű g egyenes-

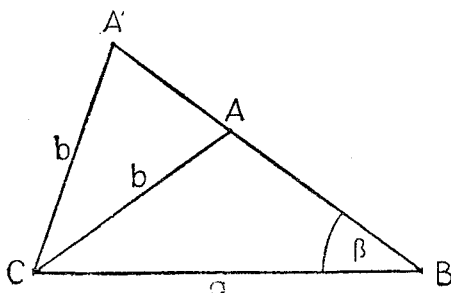


35. ábra.

sel (34. ábra), akkor ilyen összefüggéseket nem találunk. Később azonban megismerünk olyan összefüggéseket, amelyek egy szöget, illetve a szögfelezőt metsző két párhuzamos egyenes metszékeivel adódnak.

További egybevágósági tétel az úgynevezett Oldal-Oldal-Oldal tétel, rövidítve OOO tétel. Ez a tétel azt mondja, hogy két háromszög egybevágó, ha a két háromszögben három oldal egyenlő. Itt arra kell ügyelnünk, hogy két oldal összege mindenkor nagyobb legyen a harmadiknál. E nélkül nem szerkeszthető háromszög.

Utolsó egybevágósági tételként az Oldal-Oldal-Szög tételt említjük, rövidítve OOS tételt. E tétel szerint két háromszög egybevágó, ha két oldaluk és a nagyobbik oldallal szemben fekvő szögük egyenlő. Ha harmadik alkotórésznek a kisebbik oldallal szemben fekvő szöget választanók, akkor a megfelelő alkotórészek összeállítása nem volna egyértelmű. Mint a 36.



36. ábra.

ábrából kiderül, az utóbbi feltételnek mind az ABC , mind az $A'BC$ háromszög megfelel; az a és b oldaluk egyenlő, egyenlő a két háromszögben a β szög is, a két háromszög mégsem egybevágó.

Tehát foglaljuk össze befejezésül két háromszög egybevágóságának eseteit. Két háromszög egybevágó, ha három alkotórészük, köztük legalább egy oldal kölcsönösen egyenlő. Tehát egybevágó a két háromszög, ha a következő alkotórészek megegyeznek:

1. Két oldal és a közbezárt szög (OSO tétel).
2. Egy oldal és a rajtafekvő két szög (SOS tétel; ennek a esete az OSS tétel).
3. Mind a három oldal (SSS tétel).
4. Két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög (OoS tétel).¹

TIZENKETTEDIK FEJEZET.

Párhuzamosak axiomája és a folytonosság axiomája.

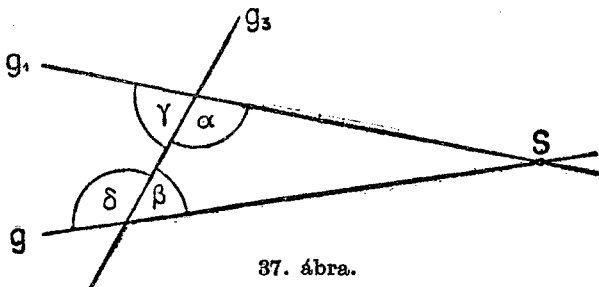
Megint eltértünk attól, amit tulajdonképpen tanulmányozni akarunk. Térjünk tehát vissza Hilbert axioma-rendszeréhez, annak is a IV. csoportjához. Ez csak egy axiómát tartalmaz. A hirhedt, talányos és veszélyes párhuzamosakra vonatkozó axiómát.

Már ismételten beszéltünk a párhuzamosokról. Azt is meglehetősen jól tudjuk már, hogy mit is kell róluk gondolnunk. Már csak az van hátra, hogy ennek az axiómának, amelyet euklidesi axiómának is neveznek, megfelelő tudományos fogalmazást adjunk.

Függesztjük föl egyszer azt az elvünket, hogy az axiómának csak Hilbert-féle fogalmazását adjuk, írjuk ide ennek azt az alakját is, szószerint, amelyet Euklides adott neki. Szerinte: «Ha két, egy síkban fekvő egyenest egy harmadik egyenes metsz, s a metsző egyenes egyik oldalán a belső

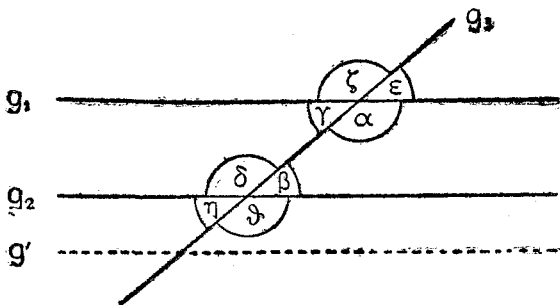
¹ A kis o betű jelentse azt, hogy a nagy O és nagy S betűkkel megjelölt alkotórészek fekszenek egymással szemben.

szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor a kellőképpen meghosszabbított két egyenes metszi egymást, még pedig azon az oldalon, amelyiken a két, együtt két derékszögnél kisebb belső szög fekszik.»



37. ábra.

Az α és β szög együttvéve kisebb, s így a γ és δ szög együttvéve nagyobb, mint két derékszög. Tehát a g és g_1 egyenes metszi egymást. Csak akkor nem metszenék egymást, ha $(\alpha + \beta)$, s ugyanígy $(\gamma + \delta)$ ¹ összesen két derékszöget ad. Ezekből a megfontolásokból könnyen megkapjuk azokat az összefüggéseket, amelyek a párhuzamosokat metsző transzverzális mentén fekvő szögek közt fennállnak.



38. ábra.

¹ A szög jelet (\sphericalangle) egyszerűség kedvéért nem írjuk ki állandóan. Ebben a fejezetben a görög betűk mindenkor szögeket jelentenek.

Mivel párhuzamosok esetén $\alpha + \beta = 2R$ és szemmel látható, hogy $(\alpha + \gamma) = 2R$, biztos, hogy $\beta = \gamma$. Továbbá $\gamma + \delta = 2R$ és $\gamma + \alpha = 2R$ biztos az is, hogy $\alpha = \mu$. Ezeket a szögeket nevezzük belső váltószögeknek. De egyenlők a következő szögek is: $\gamma = \varepsilon$, $\alpha = \zeta$, $\beta = \eta$, $\delta = \vartheta$, mert csúcsszögek. Ezért egyenlők még: $\varepsilon = \eta$, $\zeta = \vartheta$, s ezeket nevezzük külső váltószögeknek. Megfelelő szögeknek nevezik azt a két szöget, amelyek közül egyik külső, a másik belső, s a transzverzálisnak ugyanazon az oldalán fekszenek. Ezek is egyenlők egymással, tehát $\zeta = \delta$, $\gamma = \eta$, $\varepsilon = \beta$, $\alpha = \vartheta$.

«Posztulátumunkat» «állításunkat», «követelésünket», «feltevésünket») tehát így fogalmazhatjuk:

Ha egy egyenes két másikat metsz, oly módon, hogy a váltószögek kettőnkint egyenlők, akkor a megfelelő szögek is egyenlők és a transzverzális ugyanazon oldalán fekvő két külső vagy két belső szög egymásnak mellékszöge (egymást két derékszögre egészíti ki).

E posztulátum megfordításából más tételek egész sora adódik. Ilyen volna például az is, hogy ha a transzverzális mentén fenti szög-összefüggések teljesülnek, akkor a két egyenes párhuzamos. Ha az ábrába még egy harmadik g' -vonalat is húzunk (a 88. ábra szaggatott vonala), s a transzverzális ezt is metszi és azt követeljük, hogy fenti szög-összefüggések erre az egyenesre mind a g_1 -gyel, mind a g_2 -vel kapcsolatban érvényesek legyenek, akkor a g' a g_1 -gyel és a g_2 -vel is párhuzamos. De ebből az is következik, hogy ha két egyenes egy harmadikkal párhuzamos, akkor egymással is párhuzamosak.

A párhuzamosak axiómájának ismeretében arra is felhívjuk a figyelmet, hogy könnyen elképzelhető olyan geometria is, amelyben fennáll valamennyi axióma, csupán a párhuzamosak axiómája nem. Ilyen például a gömbfelületnek egyáltalán nem misztikus vagy titokzatos geometriája. Még részletesen fogunk erről beszélni, hisz e könyvnek egyik igen fontos célja, hogy megértést keltsen a nem-euklidesi geometriák iránt. Tehát, ha azokat a geometriákat, amelyekben a párhuzamosak axiómája nem érvényes, nem-euklidesi geometriáknak nevezzük, akkor azt a geometriát, amelyben a párhuzamosak tétele érvényes, joggal nevezhetjük, mint az

általában szokásos is, euklidesi geometriának. Kezdő meglepetten olvassa ezt. Hisz megszokta eddig, hogy a geometriát tartsa a legjobban megalapozott, vitathatatlan tudománynak. S most többféle, egyformán helyes és látszólag egyforma értékű geometriáról hall? Bizony, így van, feleljük nyugodtan. Nem csak többféle, hanem végtelen sokféle geometria van, s mindegyik egyformán helyes és logikai szempontból egyaránt zárt. Sőt Poincaré szerint csak szokás vagy meggyezés, hogy melyiket használjuk. De ne merüljünk túlságosan mélyen a matematika filozófiájába, állapítsuk meg, hogy a párhuzamosak tétele nincs bizonyítva, nem is bizonyítható és megszokott geometriánk, amely ezt a tételt elfogadja, csak egyike a lehetséges végtelen sok geometriának, habár valószínű, hogy szellemünknek szűkebb világunkban való használatra ez a legkényelmesebb.

De még adósak vagyunk a párhuzamosak axiómájának Hilbert-féle fogalmazásával.

IV. «(Euklidesi axioma.) Legyen a tetszősszerű egyenes, A kívülre fekvő pont, akkor az a egyenessel és az A ponttal meghatározott síkban legfeljebb egy olyan egyenes van, amely keresztül megy az A ponton és az a egyenest nem metszi. Ezt az egyenest nevezzük az a -hoz az A ponton át húzható párhuzamosnak.»

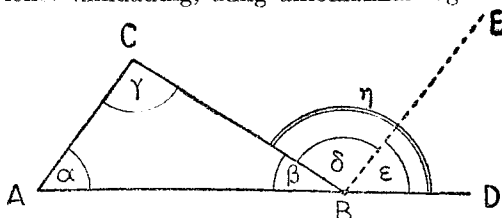
Ez a párhuzamos-tétel egyenértékű a következő tétellel:

«Ha két egyenes, a és b , nem metszi a közös síkjukban fekvő c egyenest, akkor egymást sem metszik.»

Sokat vitatkoztak már arról a kérdésről, amelyet már mi is érintettünk, hogy vajon egyenértékű-e a párhuzamosak tétele és az az állítás, hogy a háromszög szögeinek összege 180 fok. Hilbert oly módon dönti el a kérdést, hogy kijelenti: ha érvényes az úgynevezett Archimedes-féle axioma (erről rögtön lesz szó), akkor a párhuzamosak tétele és a háromszög 180 fokos szögösszegéről szóló tétel ekvivalens.

Most tehát a háromszög szögeivel fogunk tudásunk bővítésére valamelyest foglalkozni. Itt is csak az eddig megismert tételeket fogjuk alkalmazni, — amelyekből a szögek egyenlősége vagy nagyságuk különbözősége következik — továbbá az egybevágósági feltételekből levezetett derékszög

meghatározást. Valódi szögmérésről még nem lesz szó, sőt nem is lehet mindaddig, amíg axiómákkal foglalkozunk.



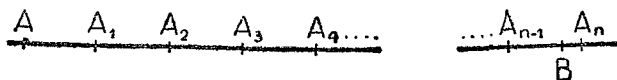
39. ábra.

Ha az ABC háromszög AB oldalát a B ponton túl meghosszabbítjuk a D irányában, akkor a CBD $\angle = \eta$ szöget kapjuk. Ezt nevezzük a háromszög B pontjához tartozó külső szögének. Ezt a külső szöveget az AC oldallal párhuzamos BE egyenessel két részre osztjuk, a két rész a δ és az ϵ szög. Ha most a BC és az AD egyeneseket a párhuzamos AC és BE egyenesek transzverzálisának tekintjük, akkor valamennyi nemrég levezetett szögegyenlőség itt is érvényes. Tehát $\delta = \gamma$, mert váltószögek és $\epsilon = \alpha$, mert megfelelő szögek. Kiderül a szerkesztésből, de szemmél is látható, hogy $\epsilon + \delta + \beta = 2R$, ezért $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ szintén igaz, tehát a háromszög belső szögeinek az összege két derékszög (180 fok). Ebből a szerkesztésből egy másik tétel is következik. Minthogy α illetve γ egyenlő az ϵ , illetve δ szöggel, a háromszög külső szöge, η , pedig éppen e két szög összege, kimondhatjuk, hogy a háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két szög összegével.

Most már csak az ötödik axioma-csoport, a folytonosság axiómái vannak hátra. Első pillanatban éppen ezek az axiómák fognak a legtermészetesebbeknek látszani. Pedig csak ezek teszik lehetővé a többi axioma gondtalan használatát, nélkülük egészen különös, nem-archimedeszi geometriákhoz jutnánk, de ezeknek itt csak a nevét említhetjük meg.

V. 1. «(A mérés axiómája vagy az Archimedes-féle axioma.)
Legyen A_1 valamely egyenes tetszőszerinti pontja és fekd-

jék az egyenes ugyancsak tetszésszerinti A és B pontja közt ; szerkesszük meg az $A_2, A_3, A_4 \dots$ pontokat oly módon, hogy A_1 az A és A_2 közt, A_2 az A_1 és A_3 közt, A_3 az A_2 és A_4 közt stb. feküdjék, továbbá az $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 \dots$ távolságok egymással egyenlők legyenek, akkor az $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \dots$ pontok sorozatában bizonyosan van olyan A_n pont, hogy B az A és A_n között fekszik.» Egyszerűbben



40. ábra.

fogalmazva azt mondja ez a tétel, hogy mindenkor okvetlenül sikerül a kisebbik AA_1 távolságot annyszor felmérni az egyenesre, hogy a felmérés eredménye véges számú ismétlés után nagyobb legyen a szintén véges AB távolságnál. Vagy még egyszerűbben: Valamely a távolság kisebb egy b távolságnál: $a < b$. Ha megfelelően választunk egy n számot, akkor bekövetkezik, hogy az a távolság n -szerese nagyobb, mint a b távolság: $na > b$.

Ezután már felírhatjuk az utolsó axiómát :

V. 2. «(A teljesség axiómája.) A geometria elemei (pont, egyenes, sík) dolgok olyan rendszerét adják, amely valamennyi előbb említett axióma fennállása esetén tovább nem bővíthet, vagyis pontok, egyenesek, síkok rendszeréhez már nem kapcsolható más «dolgok» rendszere, oly módon, hogy az összetétel által keletkezett rendszerben is érvényesek legyenek az I—IV. és V. 1. alatt felsorolt axiómák.»

Ez az utolsó axióma azt kívánja, hogy a rendszer esetleges bővítése esetén valamennyi előbbi axióma ugyanúgy érvényes maradjon, mint a rendszer bővítése előtt, hacsak az elemek viszonya meg nem változott. Tehát ha egy pont két másik között feküdt a «rendszer bővítése előtt», akkor ezentúl is a kettő közt kell maradnia ; ha szögek vagy távolságok egybevágók voltak, ezentúl is egybevágóknak kell lenniök.

TIZENHARMADIK FEJEZET.

Megjegyzések Hilbert axiomatikájához. A mértékgeometria alapjai.

Most már mögöttünk maradt a Hilbert-féle axiomatika hatalmas építménye. Egyelőre még nem tudjuk, mit ér számunkra egy ilyen rendszer. De ha érteni akarunk a geometriához, akkor vérünnké kell válniok az axiómáknak, nehogy akkor is bizonyításokkal kelljen vesződnünk, ha készenálló, bizonyításra nem szoruló alapigazságra, axiómára hivatkozhatunk. De már régen tartozunk olvasóinknak azzal, hogy a «bizonyításról» néhány szót szóljunk. Bizonyítani: számunkra annyit tesz, mint valamilyen geometriai állítást azzal megerősíteni, hogy logikai ugrások nélkül addig következtetünk belőle visszafelé, amíg végül csupa axiómára jutunk. Gyakorlatban megelégszünk azzal is, ha geometriai tételeket hozhatunk fel állításunk megtámogatására, hisz ezek a tételek is csak az axiómákon alapulnak. Állítsuk például, hogy egy háromszög bármely külső szöge egyenlő ama belső szögek összegével, amelyeknek a szárai nem ugyanazok, mint a külső szögé. Ezt bebizonyíthatjuk a háromszög belső szögeinek 180° fokos összegével is. De ez a tétel a párhuzamosak axiómáján alapul és az ebből következő, párhuzamosakat metsző transzverzális mentén található szögegyenlőségeken. És ezek a szögegyenlőségek ismét axiómákból következnek; hogy miként, azt már láttuk.

A bizonyításoknak szigorúaknak és általános érvényűeknek kell lenniök. A szigorúság megköveteli, hogy semmit se tételezzünk fel, amit előzőleg be nem bizonyítottunk, vagy ami nincs axiómával bizonyítva. Ügyelni kell továbbá, hogy hamis okoskodással a bizonyítandót bizonyítéknak ne használjuk. Végül általánosságot követelünk, vagyis óvakodnunk kell egyes magukban álló, vagy határesetektől. Ezért veszélyesek bizonyítás szempontjából például a szabályos idomok, ha csak bizonyításunk nem éppen ezekre a szabályos idomokra vonatkozik. Őrizkednünk kell attól is, hogy verifikációt bizonyításnak tekintsünk. Ha valamilyen állításunk, mondjuk, bizonyos távolságok adott viszonyára vonatkozik, s felrajzoljuk a

kérdéssé távolságokat, lemérjük, ha ebből kiderül, hogy állításunk helyes, akkor még csak verifikáltuk ezt az állítást, de nem bizonyítottuk. Mert mérni csak egyes esetet tudok, tíz, vagy száz esetet, de ezek még mindig csak induktív módon igazolják az állítást, s ezért az csak viszonylagos értékű. Hisz újabb mérések során előkerülhet olyan eset is, amelyen mérésünk már nem szolgáltatja a helyes eredményt. A verifikáció mégsem megvetendő tudományos segédeszköz. Ellenkezőjének, a falsifikációnak már nagyobb az ismeret elméleti jelentősége. Ha ugyanis méréssel megállapítom, hogy valamely hibátlan meggondolással bizonyított állítás helytelen, akkor azonnal feltételezhetem, hogy az alapul vett tétel nem érvényes, vagy nem általános érvényű.

De axiomatikai tanulmányaink befejezésül említsük meg azokat a követelményeket, amelyeket egy axiomarendszerrel szemben támasztunk. Azt, hogy az axiomarendszer teljes legyen, még külön axiómában is hangoztattuk. De legyen mentes ellenmondásoktól is, vagyis az axiómák sem részben, sem egészben véve ne cáfolják meg egymást. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor megeshetnék, hogy két, egymásnak ellenmondó állítás bizonyítására éppen a két axiómára hivatkozom. Ez természetesen a józan ész ellen való és felborítaná az egész geometriát. Harmadszor és végül az axiómák legyenek egymástól függetlenek. Hilbert axiomarendszerét vizsgálva kiderül, hogy semelyik axiómának lényeges részét nem lehet logikus következtetésekkel másik axiómából levezetni. Ezzel a függetlenség követelménye teljesült. Különösen érvényes ez az állítás a IV. párhuzamosak axiómájára.

Ezzel munkánk súlyos részén, szinte homoksivatagszerű nehézségeken, túljutottunk. Azt hallottuk minduntalan, hogy ezután már virágos vidékek következnek. Néha, rövid pillanatokra már úgy véltük, hogy a horizonton hatalmas hegyláncokat látunk. Nem képzelődés volt ez? Hát mi is tulajdonképpen tudományunk végső célja? Mi az a tulajdonsága, amely különleges helyzetet biztosított neki a tudományok közt? Ha alaposan megfontoljuk ezeket a kérdéseket, be kell látnunk, hogy a geometriának nem lehet célja, hogy idomoknak légies, majdnem kísértetszerű világát építse fel, ezeknek olyan külső tulajdonságait tanulmányozza, mint az élek vagy

lapok száma, szögek nagysága stb. Kétségtelen, ezeket a tulajdonságokat is tanulmányoznia kell. De nagyon közel jutunk ezzel ahhoz a veszélyhez, hogy kutatásunk játékká fajul el, sőt olyan szemlélődési móddá, amelyet a köznyelv saját farkába harapó kígyónak nevez. Idomokat kieszelni, s ezekből a kieszt tulajdonságokat ismét levezetni nem más, mint *circulus vitiosus*. De ez a *circulus* sem áll mindenkor fenn. Találhatunk új dolgokat is, ilyen volt Brianchon tétele, amelyet a Pascal-tételből a dualitás elvének alkalmazásával kaptunk. De mire jó ez? Elárulhatnók, hogy ezek a tételek a kúpszeletek (kör, ellipszis, hiperbola, parabola) tárgyalásánál igen hasznosak lesznek, de joggal válaszolja egy kételkedő, hogy mindez nagyon érdekes, de ebből még nem szabad a geometria világalalmára következtetni. Még mindig hiányzik e tudománynak a jogosultsága ahhoz, hogy mindenbe beletüsse az orrát. Mert a tett nagyobb értékű az emberiség emelkedésében, mint a pusztá megismerés. És helyzetek és ábrázolásmódok ismeretéből magából tett még nem következik. Ez az ellenvetés jogosult. Láttuk már könyvünk elején, együttes felfedező utunk kezdetén, hogy mit tekintettek az egyszerű emberek a legnagyobb csodának, mi volt rájuk a legnagyobb hatással. Azt a lehetőséget csodálták leginkább, hogy olyan dolgokat tudtunk megmérni, olyan méreteket tudtunk meghatározni, amelyek addig mérés számára hozzáférhetetlennek látszottak. Tehát megcsodálták például a bója távolságának meghatározását, amelyet logikus megfontolások alapján készült szerkezet egyszeri alkalmazásával, geometriai tételekkel, egyetlen mért adatból, az erkély magasságából nyertünk.

Azt hiszem, tisztában vagyunk már a lényeggel: a geometriának a csúcsa mindenkor a mérték-geometria. Mindenkor arra irányul igyekezetünk, hogy a kisszámú hozzáférhető adatból, elmélet után nyert geometriai tulajdonságok alkalmazásával olyan adatokat határozzunk meg, amelyek ismeretlenek, de nélkülözhetetlenek és érdekesek. Ezek az adatok nemcsak hossz méretek lehetnek, hanem területi vagy térfogati méretek is.

Ezzel teljes lett számunkra a geometria hatalmas épülete. Nem tettünk egyetlen felesleges lépést sem. Először az egész

építmény vázát kellett megismernünk. Utána tanulmányozhatjuk méreteit és elrendezését. S végül arra fogunk törekedni, hogy ne csak megállapítsuk mindezt, hanem részleteiben is megismerjük. Nincs itt kezdet, befejezés, fent, lent, minden együtt adja gyönyörű, nagy egységként a geometria épületét. Csupán az volt a kérdés, hol kezdjük el kutatásainkat. Rendszertelen kapkodásunk mocsárba vitt; erre hozzáfogtunk, hogy a geometriát alapjától, gyökereitől kezdve építsük fel. Közben sok meglepő dologgal találkoztunk és sikert sikerre halmoztunk. De a legnehezebb lépés még hátra van, pedig minden további ettől függ. Hátra van még az eddig tanultaknak és az arányok geometriájának, valamint a méretek geometriájának összekapcsolása.

Elébe vágunk kissé a dolgoknak, amikor most eláruljuk, hogy a geometriában tulajdonképpen csak kétfélet kell mérnünk, mert minden további ezekből adódik. Mérnünk kell távolságot (hosszúságot) és szöget. Már a távolságmérőnél is hosszúságról és szögről beszéltünk. Így lesz ez mindenütt. Mert a további mértékek, a terület- és köbtartalomértékek a hosszsmértékből levezethetők. Valamely tartály köbtartalmát nem térfogategységek felhasználásával mérjük meg, hanem hosszsmértékkel, habár az eredményt azután térfogategységekben adjuk meg.

Tehát ismételjük egészen határozottan: a mértékgeometria a helyzeten és arányokon kívül a méretviszonyokat is figyelembe veszi, vagyis a távolságoknak és a szögeknek viszonyát egységükhöz.

De még másról is beszéltünk. A számok világának a geometriába való bevonásáról. Ez a probléma, az aritmetikának és geometriának összekapcsolása sokkal bonyolultabb és nehezebb, mint első pillanatban gondolnók. Ha most rövid időre a mértékgeometria alapjainak ismeretét feltételezzük, azért történik, mert másképpen nem tudjuk a problémát kellőképpen megvilágítani. Tegyük fel, hogy előttünk van egy derékszögű háromszög, oldalai 5 centiméter, 12 centiméter és 13 centiméter hosszúk. Pythagoras tétele szerint a kisebb oldalak négyzetének összege egyenlő a legnagyobb oldal négyzetével. Vagyis $5^2 + 12^2 = 13^2$, azaz $25 + 144 = 169$. Feledkezzünk meg hirtelen arról, hogy geometriáról van szó,

gondoljuk, hogy matematikai feladattal van dolgunk. Csábít, hogy matematikai ügyeskedéseket végezzünk egyenlőségünkkel. Elképzeljük, hogy csak kettőt ismerünk számaink közül, meghatározhatjuk a harmadikat. Eszünkbe jut, hogy a matematika szabályai szerint megszorozzuk az egész egyenlőséget $3^2=9$ -cel; tudjuk, hogy ez az egyenlőségen mitsem változtat, mert ha egyenlőket egyenlőkkel szorzunk, ismét egyenlőket kapunk.

$$\begin{aligned} 3^2 \cdot (5^2 + 12^2) &= 3^2 \cdot 13^2 \\ 3^2 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 12^2 &= 3^2 \cdot 13^2 \\ 15^2 + 36^2 &= 39^2 \end{aligned}$$

Természetesen sokkal bonyolultabb átalakításokat is végezhetnénk.

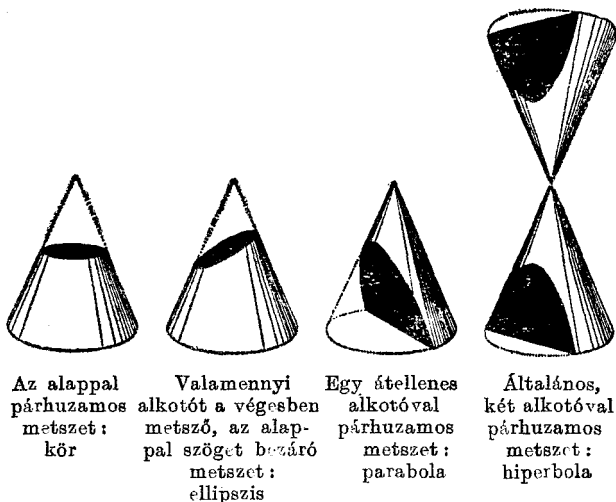
Most hirtelen eszembe jut Pythagoras tétele, mindent visszafordítok és azt állítom egyszerre, hogy az utolsó egyenlet: $15^2 + 36^2 = 39^2$ ismét egy derékszögű háromszög oldalaira vonatkozik. Természetesen minden helyes, kifogástalan, pontos. Mindaz, amit most állítottam, helyes. Néhány vonalból álló rajz erről különösen meggyőzne. Csupán az nem természetes, hogy mindez *csak* helyes lehet. Mert nagyon jól elképzelhető volna az is, hogy a matematika szabályai önmagukban véve helyesek, de a számítások eredményei nem vihetők újból át a geometriára. Egy egyenletet és annak átalakításait egy egész világ választja el a derékszögű háromszögtől és az oldalai közt fennálló összefüggésektől.

Ezért kell valami módon tisztáznunk az aritmetika és geometria közt fennálló párhuzamot. Nem tehetjük, hogy eleve helyesnek tartjuk, mint az iskolai geometriában szokás. Elárulhatjuk, hogy a geometriának és az aritmetikának ilyen kapcsolata sok gondot okozott az elmúlt évezred tudósainak. És a probléma megoldása kapcsán szívesen estek túlzásokba; volt, aki az egész geometriát matematikává akarta átalakítani, mások a matematikából akartak geometriát csinálni. Úgy vélték, hogy egyetlen dolognak két különböző alakjával van dolguk. Voltak olyanok is, akik a két tudományt egymás mellett fennállónak akarták meghagyni, a nélkül, hogy bármilyen kísérletet tettek volna a kettő egyesítésére. Csak a projektív geometria adta meg annak a lehetőségét, hogy

erőszak nélkül találjuk meg az utat, amely a tudomány két ágát egymással összeköti.

Itt derül majd ki, hogy milyen előnyt jelent a projektív geometriának és az axiómáknak ismerete. És megkíséreljük, hogy Hilbert nyomán megtaláljuk az utat, amely az arányok geometriájához és a mértékgeometriához vezet.

Vissza kell térnünk ezért Blaise Pascal tételéhez, bár

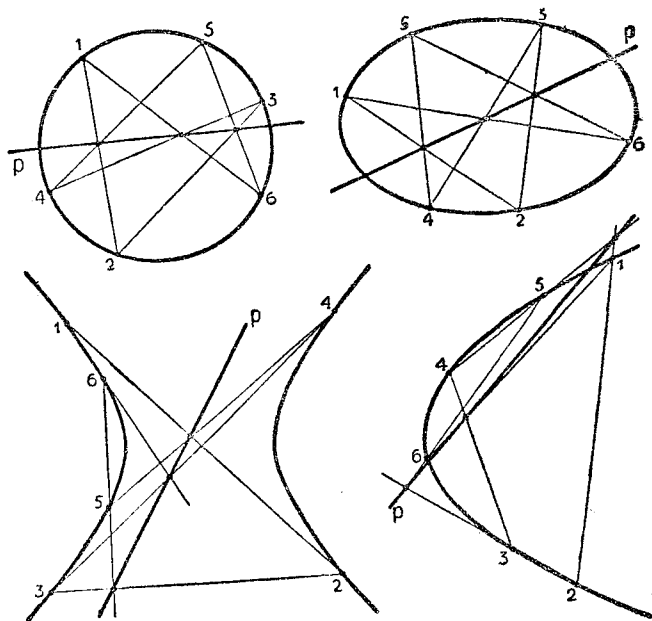


41. ábra. Az egyenes körkúp síkmetszetei.

célunk vele most egészen más, mint annakidején volt ; hisz akkor csak a dualitás elvének működését akartuk megismerni. Azóta már utaltunk arra is, hogy Pascal tétele kúpszeletekre vonatkozik. De hogy valamelyes képünk legyen a dologról, ismerkedjünk meg a kúpszeletekkel. (41. ábra.)

Pascal tétele tehát úgy szól, hogy ha egy kúpszeleten fekvő hat pontot bizonyos szabályok figyelembevételével összekötünk, akkor a keletkezett egyenesek három metszéspontja egy egyenesen fekszik. Hogyan kell a pontokat összekötnünk? Így : Számozzuk meg a pontokat sorban, 1, 2, 3,

4, 5, 6 és kössük össze őket «Pascal-féle hatszöggé», úgy, hogy egyenes vonalakat húzunk az 1-től a 2-höz, a 2-től a 3-hoz és így tovább, végül a 6-tól az 1-hez. Ekkor az 1—2 és 4—5, 2—3 és 5—6, valamint a 3—4 és 6—1 oldalakat egymással átellenes oldalaknak nevezzük. És éppen ezeknek az átelle-

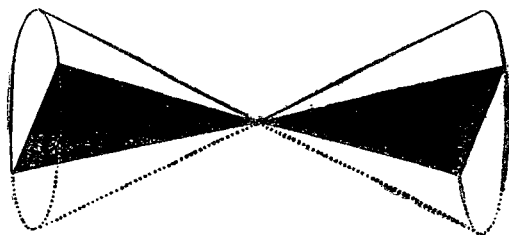


42. ábra.

nes oldalaknak a metszéspontjai fekszenek egy egyenesen, miként a 42. ábra négy különböző kúpszeleten bemutatja.

De a Pascal-tételt, még emlékszünk, egészen más formában ismertük meg! Akkor a tétel azt mondta, hogy a hat pont két egymást metsző egyenesen van. Tehát egyáltalán nem «kúpszeleten». Egy pillanat türelmet kérek. Mi is az a két egymást metsző egyenes? A végén még kiderül, hogy az

is kúpszelet? Talán a hiperbolának határesetje, elfajult alakja? Úgy van, kúpszelet az is, mert minden metszősík, amely a kúp csúcsát tartalmazza, metszésidomként két sugárból álló sugársort ad. Ha tehát Pascal tétele minden kúpszeletre érvényes, akkor tengelymetszetekre, elfajult kúpszeletekre is feltétlenül érvényesnek kell maradnia. De hogy egészen tisztán lássunk, jegyezzük meg azt is, hogy a Pascal-féle hatszög pontjai nem fekszenek szükségképpen a hiperbola

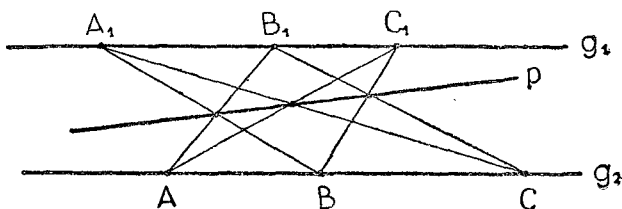


43. ábra.

egyik ágán, hanem szabadon megoszolhatnak a két ágon. Fekhetnek a görbe egy kis szakaszán is, sőt részben össze is eshetnek és így a hatszögből látszólag ötszög, esetleg négyszög vagy háromszög is lehet. Nem foglalkozhatunk azonban ezekkel a különleges esetekkel, nem lehet feladatunk ennyire a részletekbe merülni.

Ezért elvi szempontból sokkal lényegesebb feladatot mutatunk be, amelyen a geometriai lehetőségek számtalan sokféleségét is láthatjuk. Már régebben beszéltünk arról, hogy párhuzamos egyeneseket úgy tekinthetünk, mintha a végtelenben fekvő pontban találkoznának. Ha ez igaz, akkor két párhuzamos egyenes két sugárból álló sugársornak is tekinthető. De ha, mint már mondtunk, két sugárból álló sugársor kúpszelet, akkor a két párhuzamos egyenes is az. Ez teljes értelmetlenségnek látszik, de nem engedhetünk álláspontunkból; a két párhuzamos valóban kúpszelet, hengernek — a henger végeredményben kúp, amelynek a csúcsa a végtelenben fekszik — tengelyével párhuzamos metszete. Hogy a henger a kúpnak egyik, elfajult alakja, az is hihetővé

teszi, hogy kör és ellipszis metszetét mindenki nagyon jól el tudja képzelni. De ha a két párhuzamos egyenes kúpszelet, akkor Pascal tételének «természetesen» itt is érvényesnek kell lennie, vagyis a hat pont két párhuzamos egyenesen van. Kíséréljük meg, igaz-e boszorkányos következtetésünk.



44. ábra.

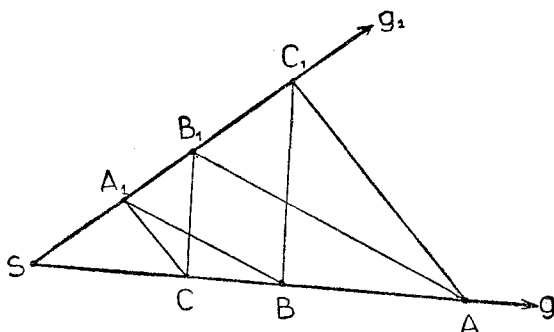
Sikerült a látszólagos geometriai szörnyűség. Remek Pascal-hatszöget kaptunk és az átellenes oldalak metszés-pontjai kifogástalan egyenest adtak.

Ez a geometriai «csoda» felbátorított. Hirtelen másik határesetet íránt kezdünk érdeklődni. Mi történik, fontolgatjuk, ha nem sikerül megtalálni az átellenes oldalak metszés-pontját? Ez is megeshet, ha az átellenes oldalak párhuzamosak, mint például a 45. képen.

Habár itt is betartottuk a Pascal-féle hatszög rajzolásának valamennyi szabályát, mégsem találjuk Pascal-féle egyenesünket, mert az átellenes oldalak, AB_1 és A_1B , BC_1 és B_1C , valamint CA_1 és C_1A nem hozhatók semmiképpen metszésbe. Metszéspont nélkül pedig nincs Pascal-féle egyenes, mert ezt éppen a metszéspontok összekötésével kapjuk. Megkíséréljük tehát, hogy a projektív geometria elveit alkalmazva valamilyen Pascal-féle egyenest mesterkedjünk erre az esetre is. Mert ha nem találunk ilyent, akkor azonnal romba dől szép szabályunk általános érvénye. Általános tételek nem tűrnek egyetlen kivételt sem, mert ha van ilyen, akkor vagy hamisak, vagy soha sem voltak általános érvényűek.

Hát hol metszik egymást egyenesek? — kérdezzük ártatlanul. A morcos Euklides-hívó barátságtalanul felel:

«Sehol! Hagyj békén. Látod, hogy az átellenes oldalak párhuzamosak. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyeknek nincs metszéspontjuk. Ügyelt volna Pascal jobban, akkor nem állított volna fel ilyen vad tételeket.» «Nem addig van az, — feleli a projektív geometria híve — nem bizony, barátom. Kissé avultak a nézeteid. Én úgy látom, hogy itt nincs semmiféle ellenmondás. Párhuzamos egyenesek végtelenben fekvő pontban metszik egymást. Itt tehát három, végtelenben fekvő metszésponttal van dolgunk.» «Nos, és?» — morog tovább Euklides késői utóda. «Mi hasznunk van az egészből?

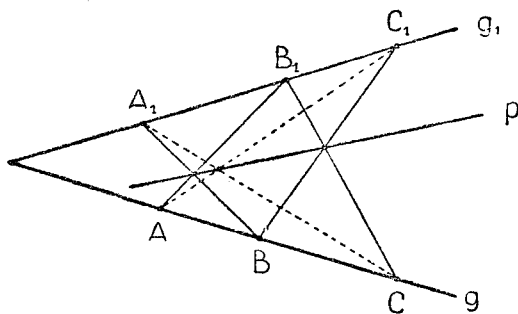


45. ábra.

Mesterkedéssel előteremtett pontjaid közül egyik itt, másik a másik oldalon van a végtelenben.» «Az már az én dolgom, hogy megállapítsam, melyik oldalon vannak a végtelenben fekvő pontok» — vágja vissza Poncelet tanítványa. «Itt három pár párhuzamosunk van, s ezzel három végtelenben fekvő pontunk. Egy oldalon tételezzük fel valamennyit, mindegyik a végtelenben van, tehát egy végtelenben fekvő egyenesen fekszik. Ilyen végtelenben fekvő egyenes elképzelése projektív szemlélet szerint jogosult és párhuzamos síkok metszésvonalának tekintjük, akárcsak a végtelenben fekvő pontot párhuzamos egyenesek metszéspontjának. De ezzel problémánk megoldódott. Határesetünkben a Pascal-féle

egyenes a sík végtelenben fekvő egyenes, ezen fekszenek az átellenes oldalak végtelenben fekvő metszéspontjai.»

Nem folytatjuk a vitát, a modern geometria valóban így módon intézi el ezt a különleges esetet. Csak azt említjük meg, hogy a Pascal-tételből általában és ebből az esetéből különlegesen, igen fontos következmények adódnak. Minthogy két pont már teljesen meghatároz egy egyenest, elég már két metszéspont a Pascal-féle egyenes meghatározásához. A Pascal-féle egyenest meghatározottnak tekinthetjük, ha az első két átellenes oldalpár metszéspontját megtaláltuk. Tisztán látszik ez a 46. képen, ahol a harmadik átellenes oldalpárt szakadozottan rajzoltuk meg.



46. ábra.

Különleges esetünkben még valaminek kell bekövetkeznie. Ha ugyanis két oldalpárról megállapítottuk, hogy párhuzamos, akkor már két végtelenben fekvő metszéspontunk van. Két végtelenben fekvő pont azonban feltétlenül végtelenben fekvő egyenest határoz meg. Ebből viszont az következik, hogy a harmadik oldalpár metszéspontja is a végtelenben van. Vagyis ebben az esetben a harmadik oldalpár oldalai is párhuzamosak. Ebben a megváltozott fogalmazásban, amely a mérték-geometria alapja lesz számunkra, így hangzik Pascal tétele: Legyen A, B, C , illetve A_1, B_1, C_1 három-három pont két egymást metsző g és g_1 egyenesen és egyik pont se essék össze a két egyenes metszéspontjával.

Ha most CB_1 és C_1B párhuzamosak, párhuzamosak továbbá a CA_1 és C_1A egyenesek is, akkor az AB_1 és A_1B egyenesek is párhuzamosak. Ebben az alakjában használja fel Hilbert a «mérték-Pascal» tételt. Általában azt mondhatjuk, hogy ha két átellenes oldalpár párhuzamosakból áll, a harmadik oldalpár oldalai is szükségképpen párhuzamosak egymással. (Lásd 46. ábra.)

De mielőtt az aritmetika és a geometria egyesítésére irányuló kísérletünket végrehajtanók, még egy körülménnyel kell tisztába jönnünk. Az aritmetikában mindenkor számokkal van dolgunk. A számok, mint tudjuk, egész, tört, racionális, irracionális számok lehetnek. Világos, hogy a mértékgeometriában mindenkor «nagyságokkal» lesz dolgunk. Ha azt akarjuk, hogy az aritmetika és a geometria teljesen megfeleljenek egymásnak, akkor számnak nagyság, nagyságnak pedig mindenkor szám kell, hogy megfeleljen. Önmagában véve ez nem túlzott kívánság. Nem lehet nehéz minden számhoz valamilyen nagyságot, minden nagysághoz pedig valamilyen számértéket rendelni. Hisz ezt teszi minden gyerek, ha centiméter beosztással valamilyen vonal hosszát leméri. Ezzel ugyan még nagyon keveset értünk el. A mértékgeometriában egyáltalán nem a közvetlen, hanem a közvetett mérés érdek, amelyet ismeretlen geometriai méretek kiszámításának is nevezhetnénk. De a kiszámítás szóban rejlik az egész probléma. Példán, a Pythagoras tételével kapcsolatban, nemrég már rámutattunk. Mi jogosít fel, kérdezzük ismét, hogy a számítás szabályait a geometriai méretek közt is érvényeseknek tekintsük? «Kiszámítás» a gyűjtőneve a matematikai műveletek egész sorának, amelyek a számok birodalmában érvényesek és amelyet csak ott alkalmazhatunk, ha nem akarjuk e birodalom határát nagyon is jogosulatlanul átlépni. De ezek a matematikai műveletek is, mint a geometriai tételek, kisszámú axiómára vezethetők vissza.

Vizsgálatunk tehát arra szorítkozhatik, hogy bebizonyuljon, hogy a számbirodalom fentemlített alaptörvényei a mértékek, esetünkben a geometriai méretek között fennálló viszonylatokban is helytállóak.

TIZENNEGYEDIK FEJEZET.

A mértékgeometria.

Ismét Hilbert nyomán fogjuk tehát azokat a szabályokat megállapítani, amelyek a valós számok birodalmában érvényesek. Valós számok, tudjuk, mindazok a számok, amelyek képzetes alkatrészt nem tartalmaznak. Céljaink elérésére elegendő, ha minket most csak ezek érdekelnek, hisz a geometria számunkra feltétlenül reális «méretek» világa.

Hilbert a következőket fejti ki: A valós számok összesége a maga egészében bizonyos tulajdonságokkal rendelkező dolgok rendszere, s ezeket a tulajdonságokat, a geometriai axiómákhoz hasonló módon foglalhatjuk csoportokba. A csoportok a következők:

A) A kapcsolás tételei (1—6).

1. Az a és b számból «összeadás» útján bizonyos, meghatározott szám, c , keletkezik, jelekkel

$$a+b=c \quad \text{vagy} \quad c=a+b.$$

2. Ha a és b adott számok, akkor egy és csakis egy olyan x szám, hasonlóképpen egy és csakis egy olyan y szám létezik, amellyel az

$$a+x=b \quad \text{és} \quad y+a=b$$

egyenlőségek fennállnak.

3. Létezik egy olyan szám, — neve nulla — hogy minden a -ra egyaránt

$$a+0=a \quad \text{és} \quad 0+a=a.$$

4. Az a és b számból más módon, szorzás útján is egy meghatározott c szám keletkezik, jelekkel:

$$a.b=c \quad \text{vagy} \quad b.a=c.$$

5. Ha a és b tetszésszerű számok és a nem 0, akkor létezik egy és csakis egy olyan x szám és egy és csakis egy olyan y szám, hogy

$$a.x=b \quad \text{és} \quad y.a=b.$$

6. Létezik egy bizonyos szám, — neve egy — hogy minden a -ra egyaránt

$$a \cdot 1 = a \quad \text{és} \quad 1 \cdot a = a.$$

B) A számolás szabályai (7—12).

Ha a , b és c tetszőszerinti számok, mindig fennállnak a következő számolási törvények:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociatív törvény);
8. $a + b = b + a$ (az összeadás kommutatív törvénye).
9. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asszociatív törvény).
10. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
11. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
12. $a \cdot b = b \cdot a$ (a szorzás kommutatív törvénye).

C) A sorrend törvényei (13—16).

13. Ha a és b két különböző szám, akkor egyik a két szám közül (mondjuk a) nagyobb a másiknál; az utóbbi akkor a kisebb. Jelekkkel

$$a > b \quad \text{és} \quad b < a.$$

14. Ha $a > b$ és $b > c$ akkor $a > c$ (tranzitív törvény).
15. Ha $a > b$, úgy mindenkor

$$(a + c) > (b + c).$$

16. Ha $a > b$ és $c > 0$, úgy mindenkor

$$a \cdot c > b \cdot c.$$

D) A folytonosság törvényei (17—18).

17. (Archimedes-féle tétel.) Ha $a > 0$ és $b > 0$ két tetszőszerinti szám, akkor mindenkor lehetséges a -t oly sokszor önmagához hozzáadni, hogy a keletkező összegnek a következő tulajdonsága legyen:

$$(a + a + a + a + a + \dots + a) > b.$$

18. (A teljességről szóló tétel.) Nem lehetséges a számok e rendszeréhez dolgoknak olyan rendszerét hozzáfűzni, hogy az összetétel után keletkezett rendszerben, a számok közt fennálló összefüggés fenntartásával, az 1—17. tételek mindegyike érvényes maradjon. Másképpen, rövidebben, így mondhat-

juk: A számok dolgoknak további bővítésre nem alkalmas rendszerét alkotják, ha valamennyi összefüggést és a fenti tételek mindegyikét fenntartjuk.

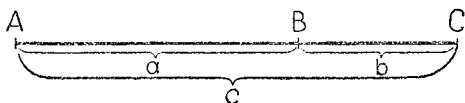
Ezt mondja Hilbert. Tisztában vagyunk azzal, hogy kezdőnek ugyanazok a kifogásai lesznek eme felállítás ellen, mint voltak a geometriai axiómák ellen. A tételek részben maguktól értetődőeknek látszanak, másik részük túlzottan elvont és messzefekvő. Végül — ezt maga Hilbert se tagadja — nem teljesen függetlenek ezek az aritmetikai tételek egymástól. Vannak köztük, amelyek más tételekből következnek. Mégis jól teszi a kezdő, ha igyekszik ezeket is megjegyezni és a geometriai axiómákkal a lehetőséghez képest összefüggésbe hozni. Helyes volna, ha egyszerű számokon vagy egyenleteken hatásukat kipróbálná. Sok mindenre rájön közben, olyan dolgokra, amelyekre példákat felsorolni, bármennyire egyszerűk volnának is, nincs helyünk.

Most nagy fáradsággal annyira eljutottunk, hogy következő lépéseinkkel már nagy darabot haladunk kifelé a mocsárból. Mert abban a pillanatban, hogy beláttuk a matematika és a geometria összekapcsolásának jogosultságát, már rendelkezésünkre áll a matematika teljes fegyvertára. Kétségtelen: problémák mindenkor akadnak majd. De akkor már biztos alapon állunk: axiómáink alapján! És csak akkor lesz módunk az egészben kételkedni, ha axiómáinkat valami okból el kell vetnünk. De ettől nem kell félnünk. És egyes axiómák feláldozása nem jelenti az egész bukását, ellenkezőleg, új ismeretek szerzését.

De még messze vannak tőlünk tudományunk forradalmi változásai, még nyugodtan állunk valamennyi geometriai axiómánk és aritmetikai tételünk alapján, — nem kutatjuk, hogy vajjon «természeti szükségszerűségnek», vagy pedig «megegyezésnek» a következtében. De terveink megvalósítása céljából megfordítjuk egyszer a dolgot. Most — ismét Hilbert nyomán — új módszert viszünk bele a számolásba, csupán nagyságokkal való számolást, távolságokkal való számolás formájában. Ehhez hasonló már a régi görögöknél is volt. Ott a geometria volt az elsőrendű számolás, a matematika csak másodrendű volt. De mi Árgus-szemekkel fogunk arra ügyelni, hogy távolságokkal való számolásunk közben

mindenkor igazoljuk a számokkal való számolás szabályainak alkalmazhatóságát. Itt, a beszéd egyszerűsítésére elhagyjuk az egybevágóság állandó jelölését (\equiv), helyette mindenkor csak az aritmetika egyenlőségi jelét ($=$) fogjuk használni.

Távolságok pontokkal határolt egyenesdarabok. A pontokat, mint eddig, latin nagybetűkkel jelöljük, a távolságokat viszont latin kisbetűkkel fogjuk jelölni.



47. ábra.

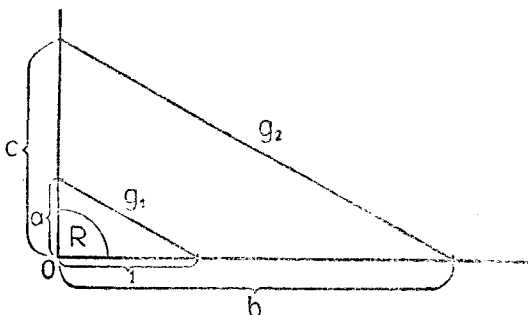
Legyen egy egyenesen három pontunk, A , B és C és legyen B az A és a C közt. Ha $c=AC$ jelöli a két, $a=AB$ és $b=BC$ távolság összegét, akkor azonnal érvényes a $c=a+b$ és $a+b=c$ összefüggés, ez pedig a számokkal való számolás első tétele. Most a biztosan kisebb, mint c , b szintén kisebb, mint c , ezzel megkaptuk a 13. tételt: $a < c$ és $b < c$ vagy fordítva $c > a$ és $c > b$. Továbbá ha feltesszük, hogy a nagyobb, mint b , — egyébként rajzunk is ilyen — akkor bizonyos, hogy $c > b$, mert $c > a$ és $a > b$. (14. tétel.) Az asszociatív és a kommutatív törvényeknek érvényessége a távolságok összeadására a geometriai axiómák III. (1—3) csoportjából azonnal következik. Tehát érvényes a számolás 7. és 8. szabálya távolságok esetén is.

Eddig semmilyen nehézségekre sem bukkantunk. Távolságok összeadása mindenben azonosnak mutatkozott a számok összeadásával. Ezért volt szabad az aritmetikában számokat távolságokkal ábrázolni és ezekkel úgy bánni, mintha számok volnának. Ennek a törvénynek gyakorlati alkalmazása a mindennapi mérés a méterrúddal.

Más természetű és lényegesen súlyosabb nehézségek merülnek fel, ha a szorzásra térünk át. Lehetséges ugyan a szorzás bizonyos törvényeit téglalapokkal bemutatni. De ehhez ismét axiómák egész sorára volna szükségünk és még így is, minél messzebb haladunk, annál nagyobb nehézségekre

bukkannánk. Ezért hívjuk segítségül, egyelőre még láthatatlanul, mérték-Pascal tételünket, ez fogja a nehézségekből a kivezető utat megmutatni. Egyelőre két egymásra merőleges egyenest rajzolunk, metszéspontjukat 0-val jelöljük.

A 0 ponttól jobbra felmérünk egy távolságot, ez mindig állandó marad, ez az 1, az egység. Ha a 0 ponttól jobbra a b távolságot is felmérjük, merőlegesen felfelé az a távolságot, akkor a szorzás végrehajtására más teendőnk nem marad, mint az 1 végpontját az a végpontjával összekötni és a b távolság végpontján át az előbbi g_1 összekötő vonallal párhuzamos g_2 összekötő vonalat húzni. Ahol a g_2 függőleget metszi, új metszéspont keletkezik. Ez új távolságot



48. Ábra.

határol, ezt nevezzük c távolságnak. Egyelőre kijelentjük, hogy c az a és b távolságok szorzata, vagyis $c = a \cdot b$ vagy $a \cdot b = c$ (4. tétel). E rajzból közvetlenül leolvasható a 6. tétel érvénye, mert ha a b távolságot és az 1 távolságot egyenlőnek veszem, akkor a két párhuzamos összeesik és $a \cdot 1$ távolságokkal való számolásban is a . Azt, hogy $1 \cdot a = a$ a kommutatív törvény segítségével azonnal szintén levezethetem.

Ez a törvény, amelyet általában $a \cdot b = b \cdot a$ alakban határozzunk meg, szintén bizonyítandó a távolságokkal végzett műveletekre, s ezzel 12. tételünk érvényessége is bizonyítást nyer. Először szerkesszük meg az ismert módon az $a \cdot b$ szorzatot. (49. ábra.) Mérjük fel továbbá a vízszintesre az a távol-

az $a.b=c$ végpontján ment keresztül, a g_4 -nek is ugyanezen a ponton kell átmennie. De ezzel megvan az $a.b=b.a$ tétel teljes bizonyítása.

Bármennyire érdekes volna a távolságokkal való számolás további fejlődését Hilbert vezetésével megismerni, ez az elmerülés részletekbe elterelne eredeti célunktól. Higgyen inkább itt az olvasó nekünk, annál inkább, mert Hilbert művéből bármikor meggyőződhetik állításunk valóságáról. Csak azt állapítjuk meg, hogy a mérték-Pascal segítségével meglehetősen egyszerűen bebizonyíthatnók mind az $a.(b.c)==(a.b).c$ törvénynek, mind pedig az $a(b+c)=a.b+a.c$ törvénynek érvényét távolságokkal végzett műveletekre. Kevés további feltevés kellene a többi számolási alaptétel bebizonyításához és így az aritmetika és a geometria összefüggését eltéphetetlenné tekinthetjük. Így tehát jogosult ezentúl távolságokból nyert tételeket matematikai úton tovább feldolgozni, s bármikor ismét visszatérhetünk idomokra, s minden kiszámított eredménynek helyesnek kell lennie. Mert a két birodalom teljesen azonos törvényeknek engedelmeskedik.

TIZENÖTÖDIK FEJEZET.

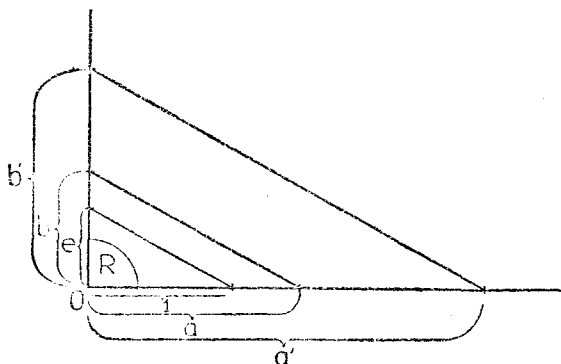
Az arányok geometriájának alapjai.

Mielőtt még a most már teljesen rendelkezésünkre álló mértékgeometriához fognánk, még egy látszólag kisjelentőségű, valójában azonban nagyfontosságú tanulmányt kell elvégeznünk. Ez a viszonyokra, másképpen arányokra vonatkozik. Azzal kezdjük, hogy kijelentjük : két háromszög akkor hasonló, ha megfelelő szögeik egyenlők. Most pedig azt is állítjuk, hogyha két ilyen háromszögnek a, b és a', b' megfelelő oldalai, akkor a úgy aránylik a b -hez, mint a' a b' -höz.

Fenti állításunk bizonyítására lássunk először egy különleges esetet, amelyben a hasonló háromszögek úgynevezett derékszögű háromszögek. Már a párhuzamosak tételével kapcsolatban megtudtuk, hogy derékszögű háromszögben csak egy derékszög lehet, mivel a háromszög belső szögeinek

összege 180° , és ha két szög derékszög, nem marad «hely» a harmadik szög számára.

Ábránk a következő gondolatmeneten épült fel: Ha két derékszögű háromszöget úgy rajzolok fel, hogy a két derékszög egybeessék, egyik szárakra felmérlek egy tetszőszerint választott és egységnek tekintett távolságot és ennek végpontjából párhuzamost húzok az átfogókkal, akkor ez a párhuzamos a másik szárból e távolságot metsz le. Az előző fejezetben



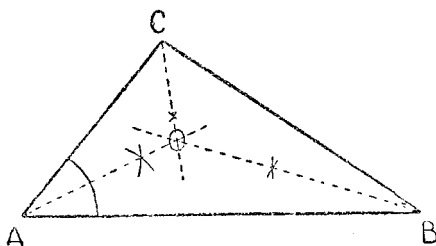
50. ábra.

látott, távolságokkal végzett aritmetikai műveleteink szabályai szerint fennállnak a következő egyenlőségek: $b = a \cdot e$ és $b' = a' \cdot e$. Ezekből $e = \frac{b}{a}$ és $e = \frac{b'}{a'}$. Ha két mennyiség egy harmadikkal egyenlő, akkor egymással is egyenlők, tehát $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$. Aránylatnak írva $b : a = b' : a'$, a beltagokat és a kültagokat felcserélve éppen a bizonyítandó $a : b = a' : b'$ aránylatot kapjuk.

Ha az aránylatok geometriájának ezt az alaptételét általánosan is be akarjuk bizonyítani, akkor meg kell ismernünk a háromszög úgynevezett nevezetes pontjainak egyikét, a szögfelezők metszéspontját.

Azt állítjuk, hogy a háromszög szögeit felező egyeneseknek

egy ponton kell keresztülmenniök. Ennek bizonyítása a következő módon történhetik: Az A és a B felező egyenese egymást az O pontban metszi. Húzzunk ebből a metszéspontból merőlegeseket a háromszög oldalaira (a szögek száraira). Az AB -re és az AC -re bocsátott merőlegeseknek a hossza, már ismert okokból (lásd a 11. fejezetben) egyenlő hosszú az OSO tétel alapján; ugyanebből az okból egyforma hosszúak az AB -re és a BC -re bocsátott merőlegesek is. Ebből az is következik, hogy az O pont az AC és a BC egye-



51. ábra.

nesektől egyforma távolságra van.¹ De ha ez áll, akkor ugyanebből az okból az O pont a C felező egyenesén is rajta fekszik. Ezt akartuk bizonyítani.

Tehát nemcsak a három szögfelező metszéspontja az O pont, hanem egyben egyforma távolságra van a háromszög oldalaitól is. Ezért a háromszöget most a következő módon is rajzolhatom. (52. ábra.)

Mellé rajzolhatok egy hozzá hasonló háromszöget és azt ugyanúgy bontom részekre. A megfelelő alkotórészek egyforma betűit melléjük tett vesszővel különböztetjük meg. Most már jogom van az előbb bebizonyított különleges arányossági tételt a keletkezett kis, derékszögű háromszögek mindegyikére alkalmazni. Tehát felírhatjuk:

$$\begin{array}{ll} a_b : r = a'_b : r' & b_c : r = b'_c : r' \\ a_c : r = a'_c : r' & b_a : r = b'_a : r' \end{array}$$

¹ Pontnak egyenestől mért távolságán a pontból az egyenesre húzott merőlegesnek a hosszát értjük.

Ha az aránylatokat törtek alakjában írjuk és az egymás alatt álló aránylatoknak megfelelő törteteket összeadjuk, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{a_b + a_c}{r} = \frac{a'_b + a'_c}{r'} \text{ és } \frac{b_c + b_a}{r} = \frac{b'_c + b'_a}{r'}$$

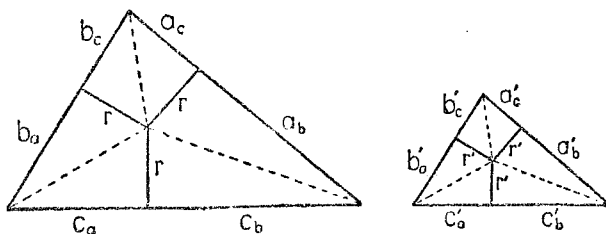
ez pedig, az ábra jelöléseit figyelembe véve, a következőkkel azonos:

$$a : r = a' : r' \text{ és } b : r = b' : r'.$$

Ha most ezt a két aránylatot egymással elosztjuk, az eredmény:

$$\frac{a}{r} : \frac{b}{r} = \frac{a'}{r'} : \frac{b'}{r'}.$$

Helyes aránylat helyes marad, ha egy kültagját és egy beltagját ugyanazzal a számmal szorzom. Szorozzuk tehát



52. Ábra.

az első két tagot r -rel, a másik kettőt r' -vel és ekkor a bizonyítandó

$$a : b = a' : b'$$

aránylatot kapjuk.

Ezzel a geometriai arányosságok tanát is vitathatatlanul megalapoztuk. Az éppen bebizonyított tételből közvetlenül következik az aránygeometriának következő fontos alaptétele:

«Ha két párhuzamos egy szög két szárából az a , b és a' , b' darabokat metszi le, akkor helyes $a : b = a' : b'$ aránylat.»

Ennek az alaptételnek a megfordítása: «Ha négy távolság,

a, b, a', b' , kielégíti az $a:b=a':b'$ aránylatot és felmérjük az a és a' , valamint a b és b' darabokat valamely szög egy-egy szárára, akkor az a és b , illetve a' és b' végpontjait összekötő egyenesek párhuzamosak.» E tételek bizonyítása azonnal adódik, ha két hasonló háromszöget úgy rajzolunk egymásra, hogy egyik szögük összeessék.

Jegyezzük meg még, hogy ennek a tételnek nagy szerepe van nagyítások és kicsinyítések készítésénél, vagy valamely rajznak más léptékben való elkészítése alkalmával és még sok más, hasonló esetben.

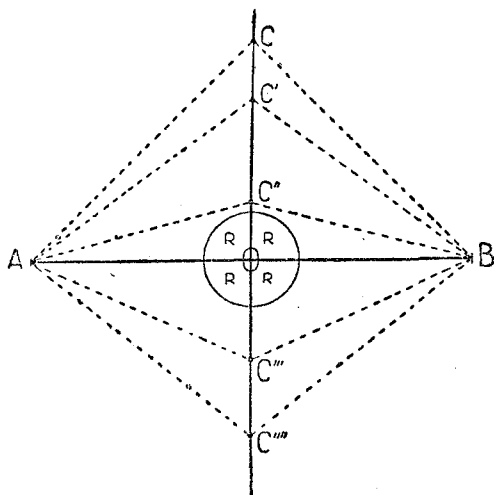
TIZENHATODIK FEJEZET.

A háromszög nevezetes pontjai.

Feltűnően sokat beszélünk a háromszögről, de ennek megvan a maga oka. A háromszög, tudjuk, a sík simplex idoma. Mivel pedig egyelőre a síkgeometriával, a planimetriával, fogunk foglalkozni, ezért a síknak ezt a legegyszerűbb idomát alaposan meg kell ismernünk. Elébe vágunk a dolgoknak, ha azt mondjuk, hogy a síkgeometriát szinte háromszöggeometriának mondhatnók, annyira megtaláljuk a háromszöget a legváratlanabb helyeken is. Mostani tudásunkkal nehezen tudjuk elképzelni, hogy még a körtanban is szerep jut neki. Sokszor fogunk nyíltan vagy rejtve háromszögre vonatkozó tételekre hivatkozni, ezért egyelőre a háromszögön tanulmányozzuk az alapfogalmakat, hogy ezeket később összerakosgatás vagy szétbontás segítségével más idomokra is — egy darabig csak síkidomokra — érvényesíthessük. Simplexünk lesz a vezetőnk sokdimenziós vagy nem-euklidesi geometriára vonatkozó tanulmányaink közben is. S miként építve haladtunk keresztül a helyzetgeometrián, ugyanúgy a háromszögből építve ismerjük meg a mértékgeometriát is. De ne bosszantson minket a háromszögnek ez a különlegesen előnyös helyzete. Fontoljuk meg; mindenkor távolságot és szöget mérünk. Ezek érdekelhetnek minket elsősorban a geometriában. S a háromszög a belőlük összeállítható legegyszerűbb idom, ezáltal láthatjuk meg rajta a kétféle méret közt fennálló összefüggéseket a legtisztábban.

S ez teszi lehetővé, hogy vele valamennyi síkidomot kapcsolatba hozzuk.

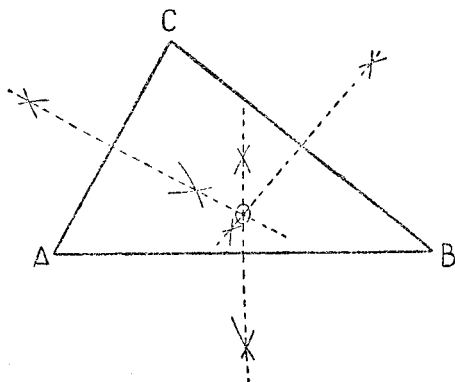
Már említettük egyszer a háromszög nevezetes pontjainak egyikét, a szögfelezők metszéspontját. Láttuk akkor különleges tulajdonságait, köztük a legnevezetesebbet, azt, hogy a háromszög oldalaitól egyforma távolságra van. Ha a következő nevezetes pontot akarjuk megismerni, akkor az oldalfelező merőleges nevét kell először említenünk. Ez az egyenes egyben az oldalaknak a szimmetriatengelye is. Valami tengelyfélének is képzelhetjük, mert ha körülötte összehajtjuk az idomot, akkor a két félidom szépen egymásra fog feküdni, az előbb még szimmetrikus félidomok egybevágókká lesznek. A köznyelv hajtogatásnak, összehajtásnak nevezi ezt a műveletet. De nem minden idomot hajthatok össze ily módon. Van idom, amelynek nincs szimmetriatengelye, ilyen például valamely szabálytalan négyszög. De távolságok és szögek mindenkor szimmetrikusak. És az oldal szimmetria tengelyének éppen úgy megvannak a határozott tulajdonságai, mint a szög szimmetriatengelyének, amelyet már előbb megismertünk. habár nem neveztük e nevén.



53. ábra.

A szimmetrikusan osztandó AB távolságot a szim. etria-tengely az O pontban merőlegesen felezi. Ha szimmetria-tengely bármelyik pontját, C, C', C'', C''' egyikét, a távolság két végpontjával összekötöm, akkor a szimmetria tengely egy pontjából kiinduló egyenesek egyforma hosszúak: $CA=CB$; $C'A=C'B$ stb. Ez a tulajdonság az egybevágóság OSO tételéből azonnal következik, s ennek alapján azonnal igazolhatjuk, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át.

E tételnek az AB oldalra való alkalmazásából következik, hogy $OA=OB$; az AC oldalra alkalmazva az $OA=OC$ egyenlőséget kapjuk. De akkor igaz az is, hogy $OB=OC$,



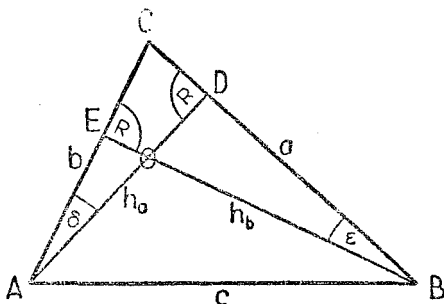
54. ábra.

vagyis ha két oldalfelező merőleges az O pontban metszi egymást (ez természetesen feltétlenül bekövetkezik), akkor a harmadik, BC , oldalfelezője szintén keresztülmegy ezen a ponton. Tehát az oldalfelező merőlegesei is egy ponton mennek keresztül, ez a pont a háromszög második nevezetes pontja. Ennek az a tulajdonsága, hogy a háromszög csúspontjaitól egyenlő távolságra van. Ez a pont a háromszögon kívül is fekehetik.

Ha a háromszög harmadik nevezetes pontját meg akarjuk ismerni, akkor ismét igen fontos új fogalmat kell bevezet-

nünk : a háromszög magasságának a fogalmát. A háromszög magassága valamely csúspontból a szemben fekvő oldalra vagy annak meghosszabbítására bocsátott merőleges. A háromszögnek tehát három magassága van. Azt az oldalt, amelyre a magasság merőleges, ebből a szempontból alapnak nevezzük. Alap és magasság a területszámításnál jut lényeges szerephez. Az teljesen közömbös, hogy melyik magasság és melyik alap — ezt már itt is bebizonyíthatjuk.

Háromszögünkben két magasság, m_a és m_b az O pontban metszi egymást, végpontjaik A és D , illetve B és E . Az ADC és a BEC háromszögek hasonlóak, mert egyik szögük közös,

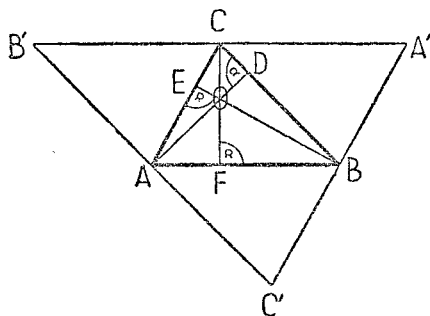


55. ábra.

másik szögük derékszög, így a δ és ϵ szögük szükségképpen egyenlő, tehát érvényes az SSS (Szög-Szög-Szög) hasonlósági tétel. Ha felírjuk az oldalak arányosságát : $a : m_b = b : m_a$, és felírjuk továbbá, hogy a beltagok szorzata egyenlő a kültagok szorzatával, végül az $a \cdot m_a = b \cdot m_b$ egyenlőségre jutunk. De minthogy fenti levezetést a harmadik magassággal és a most alkalmazottak közül egyikkel is elvégezhettem volna, azt is írhatom, hogy $a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c$. Ennek az a következménye, hogy ha valaha olyan tételre bukkanok, amelyben a háromszög alapja és a hozzá tartozó magasság szorzata szerepel, közömbös lesz, hogy melyik alapot és magasságot veszem figyelembe.

De lássuk végre a harmadik nevezetes pontot, a magasságok közös metszéspontját:

Tegyük fel, hogy már megrajzoltuk a háromszöget és benne a három magasságot. A három magasság csakugyan egy ponton megy át, egyelőre nem tudhatjuk, nem valami véletlennek következménye ez. Ezután a három — A, B, C — csúcsponton keresztül párhuzamosakat húzunk a szemben fekvő oldalakkal. Így ismét egy háromszöghöz jutunk, csúcsai A', B', C' . Mivel párhuzamosok közt fekvő párhuzamosok egyenlők, fennállnak az $AB' = BC$ és $AC' = BC$ egyenlőségek, tehát $AB' = AC'$ szintén igaz. Mivel pedig az FC merőleges az AB -re, merőleges az $A'B'$ -re is és ezzel



56. ábra.

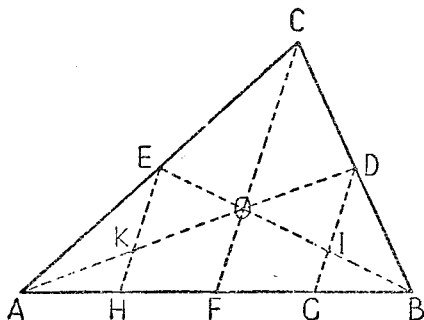
kiderül, hogy míg a kis háromszögnek magassága, addig a nagy háromszögnek oldalfelező merőlegese. Mivel ugyanez a helyzet a másik két magassággal és oldallal kapcsolatban is, bebizonyítottunk tekinthetjük állításunkat, mert ha három egyenes egy pontban találkozik, amikor oldalfelező merőlegesnek nevezzük őket (a nagy háromszögben), akkor ilyen helyzetük nem változik meg akkor sem, amikor magasság lesz a nevük (a kis háromszögben).

A negyedik nevezetes pont a mechanika területére viszi utunkat. Pontosabban az egyensúlytan, a statika területére és szigorúan véve nem is tartoznék a geometriához. Olyan dolgok, amelyeknek súlyuk van, nem is igen nevezhetők már geometriai idomoknak. A geometriai idomok anyagi testeknek csupán súlytalan vázai, teljesen anyagtalan képei.

A geometria tudománya mégis arra kényszerült különböző okokból, hogy ezekkel a feladatokkal is foglalkozzék, mert idomok egyensúlya bizonyos szempontokat figyelembe véve kizárólag geometriai alakjuktól, tehát geometriai törvényszerűségektől függ. Hiszen ha tiltakozni akarnánk ilyen feladatok ellen, azt is mondhatnók, hogy a testek köbtartalma a fizikára tartozik. Nyugodjunk tehát bele, hogy foglalkozunk az idomok bizonyos ideális egyensúlyi viszonyaival, mert ha azt fel szabad tételeznünk, hogy az idom belsejét teljesen homogén anyag tölti ki, egyensúlyi viszonyai csak geometriai alakjától függnének. Síkidomokat tehát mindenütt egyforma vastagnak kell képzelnünk, igaz, hogy ez a mindenhol egyforma vastagság nulla.

Az említett óvórendszabályok figyelembevételével most már megnevezhetjük a háromszög súlyvonalait, azokat az egyeneseket, amelyek a csúcsokat összekötik a szemben fekvő oldal felezőpontjával. Azt állítjuk továbbá, hogy ezek a háromszög negyedik nevezetes pontjában, a súlypontban metszik egymást, sőt a metszéspont mindegyiküket 1:2 arányú részekre osztja. Jegyezzük még meg, a súlypont lényegéből következik az is, hogy súlypontjában csak egy tűheggyel kell egy homogén anyagból készült háromszöget megtámasztanunk, hogy az ott vízszintes, egyensúlyi helyzetben megmaradjon. Más szavakkal: a háromszög anyaga a súlypont körül egyenletesen oszlik meg.

De lássuk már a súlyvonalakat.



57. ábra.

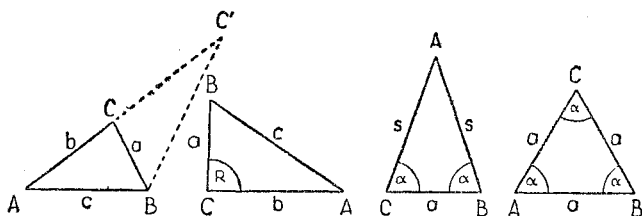
Tegyük fel, hogy az ABC háromszög B és C csúcsából már meghúztuk a BE és CF súlyvonalakat, s ezek egymást az O pontban metszik. Most az AC és BC oldal felező pontjából egy-egy párhuzamos egyenest húzok a CF súlyvonallal és ezek is metszeni fogják az AB oldalt. Ezzel egy projektív, párhuzamos sugársor keletkezett (HE , FC , GD), amely az $A \nrightarrow$, a $B \nrightarrow$ és az $ABE \nrightarrow$ és $BAD \nrightarrow$ szögek szárait egyaránt metszi. De ismerjük az ilyen metszések projektív következményeit. Az egyik szár pontviszonyai a másik száron pontosan mutatkozni fognak. Tehát a BC felezőpontjának a BF felezőpontja, G , fog megfelelni, az ABE sugársorban pedig a BF távolságot felező G pontnak a BO távolságot felező I pont. Mivel azonban $BF=AF$ és az előbbieknél mintájára a H pont szintén felezőpont, amely az AF távolságot két, a BG -vel és a GF -fel egyenlő részre osztja. Az AO egyenesen a H pontnak megfelelő K pont az AO felezőpontja stb. De mivel $HF=FG=GB$ ezért $EO=OI=IB$; vagyis igaz az eleve hangoztatott $EO:OB=1:2$ viszony helyessége. Mivel azonban ezeket a megfontolásokat az FC súlyvonal helyett az AD súlyvonallal is végezhetjük volna, s más, mint a BE súlyvonalnak $1:2$ arányban való eloszlása nem adódhatott volna, szükséges, hogy az AD súlyvonal ugyan- csak keresztülmenjen az O ponton és ezzel a háromszög negyedik nevezetes pontjának létezése bebizonyult.

TIZENHETEDIK FEJEZET.

A háromszögek felosztása.

Jó okunk volt, hogy csak most térjünk rá a háromszög fajtáinak ismertetésére. Alább egy képen négyféle háromszöget látunk: általános háromszöget, egyenlőszárú háromszöget, derékszögű háromszöget és egyenlő oldalú háromszöget. Hangsúlyozzuk, hogy az egybizonyos idomok közt mindenkor a legszabálytalanabb az általános jellegű. Tehát amit a fenti legszabálytalanabb idomról (háromszögek közt az általános háromszögről) bebizonyítottunk, az valamennyi különleges esetre is érvényes.

A háromszögeket oldalaik és szögeik szerint csoportosíthatjuk. A szögek szerint ismerünk hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszöget a szerint, hogy minden szöge kisebb 90 foknál, egyik szöge 90 fok, vagy egyik szöge nagyobb, mint 90 fok. Az 58. kép első rajzán ABC hegyesszögű, ABC' tompaszögű háromszög, a második rajz viszont derékszögű háromszög. Oldalak szempontjából ismerünk különböző oldalú háromszöget (alakját már neve is jellemzi), egyenlőszárú háromszöget (két oldala, két «szára» egyenlő) és



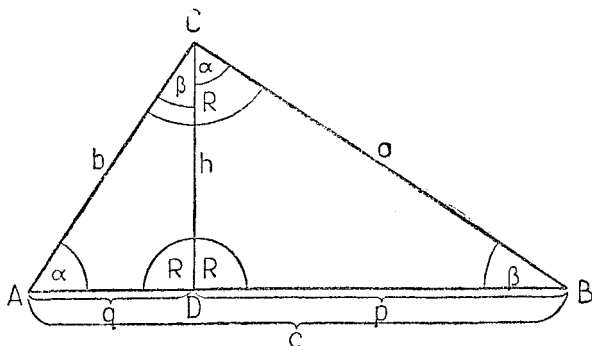
58. ábra.

egyenlő oldalú háromszöget (mind a három oldala egyenlő). Természetesen kevert alakok is lehetségesek, így pl. derékszögű vagy tompaszögű egyenlőszárú háromszögről is beszélhetünk stb.

Minthogy eddig érthető okokból csak általános háromszöggel foglalkoztunk, lássuk most a háromszögek különleges fajtáinak a tulajdonságait.

1. A derékszögű háromszög a geometria egyik legnevezetesebb idoma. Oldalai közt fennálló összefüggés, Pythagoras tétele, úgyszólván semilyen geometriai szerkesztésnél vagy számításnál sem hagyható figyelmen kívül. Ez az idom az alapja a szög és oldal közt található összefüggéseknek, az úgynevezett goniometriai függvényeknek, amelyek viszont a trigonometriának, a háromszögek számításának nélkülözhetetlen kellékei. Kétségtelen, hogy a legismertebb geometriai összefüggés Pythagoras tétele, amely szerint a derékszögű szárát alkotó két oldalnak, az úgynevezett befogóknak, négyzetének (második hatványának) összege egyenlő a harmadik

oldalnak, az úgynevezett átfogónak négyzetével. Lássuk tehát most ennek a háromszögnek nevezetes tulajdonságait.



59. ábra.

Bocsássunk a derékszög csúcsából az átfogóra merőlegest. Tudjuk, ez magassága a háromszögnek. (A másik két magasság mindenkor egybeesik a befogókkal, így a derékszögű háromszögek magasságainak metszéspontja, az ú. n. magassági pont, mindenkor a derékszög csúcsa.) Az SSS tétel szerint az átfogóhoz tartozó magasság meghúzásával keletkező két kis háromszög (ACD és BCD) hasonló a nagy háromszöghöz, ennek alapján a következő oldalarányokat írhatjuk fel:

$$c : b = b : q$$

$$c : a = a : p$$

$$q : m = m : p$$

Ezek alapján a következő összefüggések írhatók fel: $b^2 = c \cdot q$, $a^2 = c \cdot p$ és $m^2 = p \cdot q$; vagyis $b = \sqrt{c \cdot q}$; $a = \sqrt{c \cdot p}$ és $m = \sqrt{p \cdot q}$. Szavakkal ez azt jelenti, hogy bármelyik befogó mértani középarányos az átfogó és az átfogóra vetett vetülete közt, a magasság pedig mértani középarányos az átfogó két része közt. (Mértani középarányosnak nevezzük két mennyiség szorzatából vont négyzetgyököt.) Ha az $a^2 = c \cdot p$ és $b^2 = c \cdot q$ egyenlőségeket összeadjuk, akkor az $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q$ egyenlőséget kapjuk. Ez utóbbit átalakítva: $a^2 + b^2 = c \cdot (p + q)$.

De $p+q=c$, mert p és q éppen az átfogónak két része, így $a^2+b^2=c \cdot c=c^2$. Ezzel a képlettel közvetlenül meghatározhatjuk a derékszögű háromszögnek (és esakis ennek) két oldalából a harmadik oldal nagyságát.

Említsük még meg, hogy két derékszögű háromszög egybevágóságának megállapítására, mivel egyik alkatrésze, a derékszög állandó, már két (további) alkatrész egyenlősége is elegendő. Két derékszögű háromszög tehát egybevágó: ha két oldal egyenlő, vagy ha egy oldal és egyik hegyesszög egyenlő.

2. Áttérve az egyenlőszárú háromszögre, talán azonnal az egybevágóság feltételeivel kezdhetjük. E háromszögeknél is elegendő egybevágósághoz, ha két alkatrész, köztük legalább egyik oldal, egyenlő. Ennek az az oka, hogy az egyenlő hosszú oldalak, szárak metszéspontjából kiinduló magasság egyben szögfelező, oldalfelező és súlyvonal is, sőt szimmetriatengelye az egész háromszögnek és azt két egybevágó derékszögű háromszögre osztja. Ez utóbbi körülményből az is kiderül, hogy egyenlőszárú háromszög oldalaira — igaz, mindenkor csak közvetve — alkalmazható a Pythagorasz-tétel. Ilyenkor az alap (a másik kettőtől különböző oldal) fele az egyik, a főmagasság (az, amelyik egyben szimmetriatengely stb. is) a másik befogó, a háromszög szára pedig az átfogó. Az egyenlőszárú háromszög lehet egyben derékszögű is, ilyenkor mindkét hegyesszög 45° .

3. Az egyenlő oldalú háromszögnek a tulajdonságai még különlegesebbek. Mindhárom oldala egyforma hosszú, ezért valamennyi szöge is egyenlő, tehát 60° . Megszerkesztéséhez és egybevágóságához egy adat, az oldal ismerete elegendő. Minthogy valamennyi egyenlő oldalú háromszögnek szögei egyenlők, valamennyi hasonló is egymáshoz. Ez a háromszög az egyenlőszárú háromszög különleges esetének is tekinthető, így mindaz, amit arról mondtunk, erre is érvényes. Sőt fokozottan érvényes, mert ennek bármelyik magasságát tekinthetjük főmagasságnak. Az egyenlőoldalú háromszögnek mind a négy nevezetes pontja egybeesik.

TIZENNYOLCADIK FEJEZET.

A kör.

Mindeddig csak pontokról egyenesekről és síkokról beszéltünk. Görbülről, görbéről még szó sem esett egész építő tevékenységünk során. Mi is hát a görbe lényege? És hol találkozhatunk görbülttel? Világos, hogy az R_1 -ban, a pontban, aligha lehet szerepe. Görbe pont: ez még a mindenféle fikcióhoz hozzászokott matematikusnak is sok volna. Az R_1 -ben már szó lehet ilyesmiről. Mindenki tudja, milyen a görbe vonal. Miben is különbözik az egyenestől? Nem is olyan egyszerű erre a kérdésre a felelet, mint amilyennek látszik. Mert két pont közt a legrövidebb összekötő vonal nem feltétlenül az egyenes, mint általában hinnők. Gondoljunk például a gömb felületére. Ott az egyenes-pótlék éppenséggel egy legnagyobb körnek egy része. Gyakran a filozófus Hans Corneliusnak a meghatározását tekintjük irányadónak Mohrmann¹ nyomán, s az egyenest, a görbével szemben, olyan vonalalakzatként határozzuk meg, amelynek minden része mindig és mindenkor hasonló a bármekkora meghosszabbított egészhez. Ez az euklidesi egyenes számára olyan «kiválasztott», «kitüntetett» helyzetet biztosítana, amelyet később magasabb szempontokból el kell ejtenünk. De e pillanatban szolgáljon mértékül annak megállapítására, hogy mit tekintünk egyenesnek és mit ne.

Az irány fogalmát is belevonhatnók tárgyalásainkba és mondhatnók, hogy az a vonal egyenes, amely mindenkor megtartja irányát. De ez a fogalom, akármilyen világosnak látszik, könnyen circulusokhoz vezet, minthogy «irány» és «egyenesség» sok szempontból egymás ismeretét tételezi fel. De amíg megmaradunk az euklidesi geometria területén, bizvást használhatjuk az irány fogalmát, minthogy ott nem vezethet kétértelműséghez. Most még csak arra utalunk, hogy görbe R_2 és R_3 azaz görbe felület és görbe tér is van.

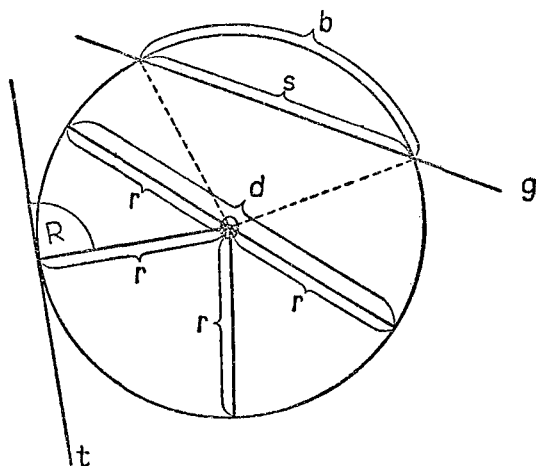
¹ Hans Mohrmann: Einführung in die nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1930.

Görbe is megtarthatja esetleg irányát és egyenesbe mehet át. Ezért például az analitikus geometria megfordítja az okoskodást és minden vonalat görbének tekint. Az egyenes ott a görbék egyik különleges esete, olyan görbe, amelynek a görbültsége észrevehetetlenül kicsi, vagy amelynek nincs görbültsége, ami ugyanaz. Az egyenes éppen úgy határeset, amint a párhuzamosak határesei az egymást metsző egyeneseknek és két egymást metsző egyenes a kúpszeletek határese. Ilyen általánosítások lehetővé teszik, hogy egyes tantételeket eredeti érvényességi területükön túl is alkalmazzunk és formaállandóságukat megállapítsuk és ezek alapján új összefüggéseket vegyünk észre.

De minderről még szó lesz. Most fordítsuk figyelmünket a feltétlenül legegyszerűbb és legszabályosabb görbe vonalra, a körre vagy másképp cirkulusra (circulus = kör). De előbb még meg kell világítanunk a «mértani hely» fogalmát, mint-hogy a kör tanulmányozása közben nagyon hasznos lesz számunkra. Mértani hely olyan geometriai alakzat, amelynek tulajdonsága, hogy mintegy gyűjtőhelye más alakzatok közt fennálló geometriai összefüggéseknek. Így például a szögfelező mértani helye a szög oldalaitól egyenlő távolságra levő pontoknak. Vagy sík a mértani helye mindazoknak a pontoknak, amelyek egy másik, vele párhuzamos síktól egyenlő távolságra vannak. Mértani helyek lehetnek pontok, vonalak, síkok vagy testek. Pont a mértani hely a következő esetben: Ha egy sugárnyalábba olyan gömbbel metszünk, amelynek a középpontja a sugárnyaláb sorozója, akkor ez a sugarakból egyenlő távolságokat metsz ki. E távolságok egyik végpontja a gömb felületén van, a másik végpontjuk mértani helye éppen a sugárnyaláb sorozó pontja. De ez a példa már meghaladja azt, amit mostani tudásunkról feltételezhetünk. Ezért befejezzük előzetes elmélkedéseinket és azt állítjuk, hogy a kör mértani helye valamennyi pontnak, amelyek egy nem a körön fekvő ponttól, a középponttól, egyenlő távolságra vannak.

Másképpen: a kör középpontja mértani helye a körkerület két-két lehető legtávolabb fekvő pontját összekötő egyenesek metszéspontjainak. De ezzel már meghatároztuk a kör több nevezetes tulajdonságát. Fűzzünk ezekhez még

néhányat. A kör görbe vonal, mégpedig olyan, amely minden helyén görbe és minden helyén egyformán változtatja irányát. Továbbá zárt, önmagába visszatérő vonal, tehát nem határolja végpont, ilyen szempontból tehát «végtelen». Tulajdonsága továbbá, hogy a kerületén belül, — kerületen a teljes körvonal hosszát értjük, valamely pontjától ugyanaddig a pontjáig — szóval a kerületén belül van egy pont, a középpont, amely a körvonal minden egyes pontjától egyenlő távolságra van. Vannak továbbá legtávolabbi pontokat

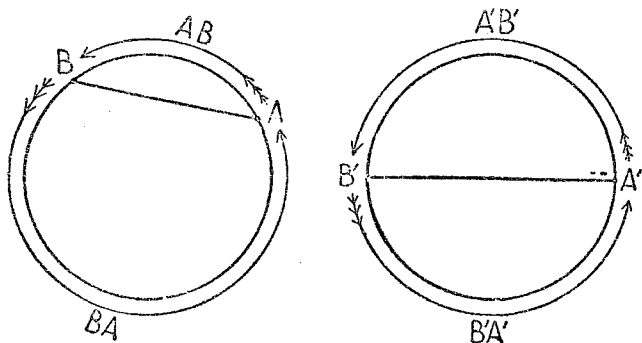


60. ábra.

összekötő egyenesek, ezek az átmérők, diaméterek, s egymást a középpontban metszik. Ilyen átmérő fele a sugár, a rádiusz, s azonos a már említett, a kör középpontjától a kerületig érő állandó távolsággal.

A sugarat, rádiuszt rendszeren r , az átmérőt d , a középpontot O betűvel jelöljük. A körnek két pontját összekötő egyenest általában húrnak nevezzük és h vagy s betűvel szoktuk jelölni. Ha egy átmérőt vagy egy húrt meghosszabbítunk a kör kerületén túl is, akkor a kört szelő egyenesről, szelőről, szekánsról beszélhetünk. Tehát általánosabban azt

mondhatjuk, hogy a szelőnek a körkerület két pontjával határolt része a húr. A húr nagysága különféle lehet. Ha a lehető legnagyobb, vagyis ha a kör középpontján megy keresztül, akkor átmérő a neve. De ha a húr két végpontjának egymáshoz történő közeledése következtében mind kisebb lesz, akkor a két végpont végül is egyesül és akkor a szelőnek a körrel már csak egy közös pontja lesz. Neve ekkor érintési pont és a szelőből érintő, tangens lesz. Ha az érintési pontot a kör középpontjával összekötjük, akkor fontos rádiust találunk, mert ez a sugár, mint látni fogjuk, mindenkor merőleges az érintőre. Ha viszont a középpont egy

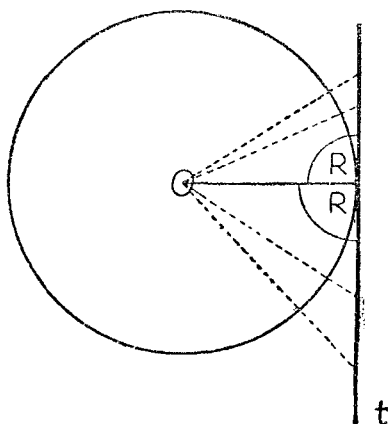


61. ábra.

húr két végpontjával kötjük össze, akkor a két sugár és a húr együtt egyenlőszárú háromszöget ad. Szárai sugarak, alapja húr. Végül pedig a körkerületnek két sugárral vagy egy húrral levágott részét ívnek, körívnek nevezzük (*i*). De minden ívhez tartozik egy második ív is, amely az első teljes körre egészíti ki. Nem tudhatjuk tehát előre, melyik ívről lesz szó. Ezért vizsgálatainkat, ahol tehetjük, félkörben végezzük vagy megállapodunk abban, hogy közelebbi megjelölés híján mindig a félkörnek kisebb ívre gondolunk. Teljes egyértelműséghez csak úgy juthatunk, ha a körív két végpontját betűvel jelöljük meg s megállapodunk egy bizonyos forgásirányban, például az óramutató járásával

ellenkező irányban. Csakugyan mindenkor így fogunk eljárni. A 61. ábrán az AB ív kisebb, mint a félkör, a BA nagyobb. De ezzel a módszerrel még félköröket is meg lehet egymástól különböztetni. Mert így az $A'B'$ a felső, a $B'A'$ az alsó félkört jelenti.

Íme, azonnal bizonyíték arra, hogy az érintő merőleges az érintési pontban húzott sugárra. Valamennyi sugár egyforma hosszú, — ez a kör keletkezése alapján természetes. Az érintési pontban húzott sugár mellett bárhol húzok is még egy

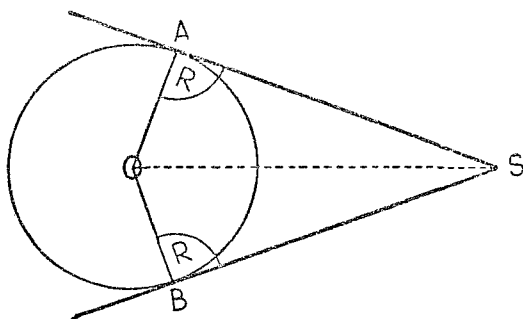


62. ábra.

második sugarat, azt feltétlenül meg kell hosszabbítanom hogy elérje az érintőt. Ebből már következik, hogy csak egy érintési pont, és csak egy, ezen keresztül menő sugár lehet. Ez a sugár a fentiek alapján a legrövidebb távolság a középpont és az érintő közt. De mivel pont és egyenes között a legrövidebb távolság a merőlegesen mérhető, bebizonyult, hogy az érintő és az érintési ponton keresztül húzott sugár merőlegesek egymásra. Bebizonyult továbbá az is, hogy csak egy ilyen sugár lehet. Az érintő eme tulajdonsága teszi érthetővé a körzöre szerelt kihúzó toll kifogástalan működését. Ugyanez a geometriai összefüggés teszi egyáltalán

lehetővé az esztergályozást, a marást és a körfűrész működését. A többi fontos technikai alkalmazást — sín és kerék, fogaskerék és fogasrúd — nem is említjük, annyira ismertek.

Vegyük inkább szemügyre a kör érintőjének egy másik fontos tulajdonságát. Ha ugyanis a körön kívül levő tetszős szerint fekvő S pontból meghúzzuk a két érintőt a körhöz, akkor az érintőnek az S pont és az érintési pontok (A és B)



63. ábra.

közt fekvő részei egyforma hosszúk. Igen egyszerű ennek a bizonyítása. Ha az S pontot a kör középpontjával is összekötjük s meghúzzuk továbbá a két érintési ponthoz tartozó sugarakat, akkor két derékszögű háromszög, SAO és SBO keletkezik. Bennük az AO és BO oldalak egyenlők, mivel sugarak. A legnagyobb szöggel szemben fekvő OS oldaluk közös. Legnagyobb szögük, derékszög lévén, szintén egyforma. Alkalmazható tehát az OoS szabály. Következésképpen $SA=SB$, s ezt kellett bizonyítanunk.

De ebből ismét az következik, hogy az SO felezi az S mellett fekvő szöveget, valamint az A és B érintési pontokat összekötő hűrt és hogy e húr merőleges rá.

Most a két érintőnkkel kapcsolatban kimutatjuk a kör egyik, sok feladatban alapvető szerepet játszó harmonikus tulajdonságát. Harmonikus tulajdonságon a következőt kell értenünk: Legyen egy egyenesen három pontunk,

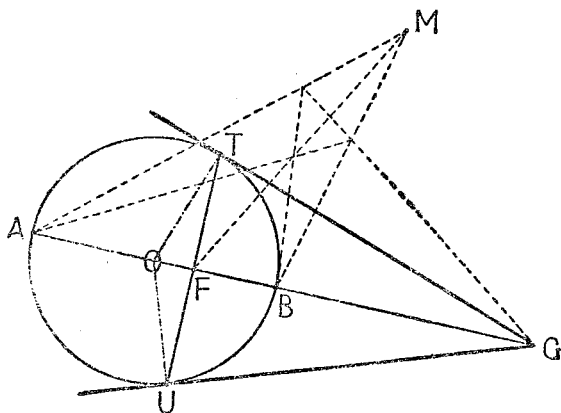
(a 64. ábra A , B , G pontja); ha az A és B pont helyét állandónak tekintjük, (ezeket éppen ezért alappontoknak nevezzük), akkor a G pont helyét az egyenesen az alappontoktól mért távolságainak viszonya egyértelműen meghatározza. Tehát az $\frac{AG}{GB}$ tört minden pozitív, vagy negatív értékéhez az egyenesnek csak egyetlen pontja tartozik. Negatív érték? A tört negatív csak akkor lehet, ha vagy a számlálója, vagy pedig a nevezője negatív. De akkor negatív távolságról kell beszélnünk! Igen, meg kell állapodnunk az egyenesen egy haladási irányban, legyen ez esetünkben A -tól B felé, s nevezzük ezt pozitívnak. Az ellenkező irány akkor negatív. Ezek szerint AG távolság pozitívnak tekintendő, a GA viszont negatívnak. Egy-két kísérlet hamar meggyőz, hogy ilyen körülmények közt az $\frac{AG}{GB}$ viszony értéke az egyenes minden pontjában valóban más és más.

De kereshetünk az egyenesen az A , B és G pontokhoz egy olyan negyedik F pontot, amelynek az a tulajdonsága, hogy az $\frac{AF}{FB}$ tört értéke az $\frac{AG}{GB}$ tört értékétől csak előjelben különbözik, vagyis $\frac{AF}{FB} : \frac{AG}{GB} = -1$. Ebben az esetben az F pontot az A , B és G pontokhoz tartozó negyedik harmónikus pontnak nevezzük, a négy pont pedig együtt harmónikus pontesoport.

Itt még azt kell megjegyeznünk, hogy mit nevezünk két mennyiség harmónikus középértékének? Tudjuk, hogy az a és b mennyiségek számtani, aritmetikai közepe $m_A = \frac{a+b}{2}$; mértani, geometriai középértéke $m_G = \sqrt{a \cdot b}$; harmónikus középértéke pedig $m_H = \frac{2a \cdot b}{a+b}$. Harmónikus pontjainknál éppen ez az érték játszik szerepet, mert ha az $AF = a$ és $AG = b$ jelölést használjuk, akkor $AB = m_H = \frac{2a \cdot b}{a+b}$.

Még csak azt kell megemlítenünk, hogy három pont-hoz a negyedik harmónikus megszerkesztése sem nehéz. (64. ábrán a szaggatott vonalak.) Válasszunk egyenesünkön kívül egy tetszőszerinti M pontot. Kössük ezt össze a két (A , B) alapponttal, a harmadik G pontból pedig húzzunk egy egyenest, amely fenti két egyenest metszi. A metszéspontokat kössük össze, keresztezve, az alappontokkal, a keresztezett egyenesek metszéspontját pedig az M ponttal, akkor az így kapott egyenes az eredeti egyenesünket a keresett negyedik harmónikus, F , pontban metszi.

Ezek után, ha meghosszabbítjuk a kör egyik átmérőjét a körön kívül fekvő tetszőszerinti G pontig, s e pontból

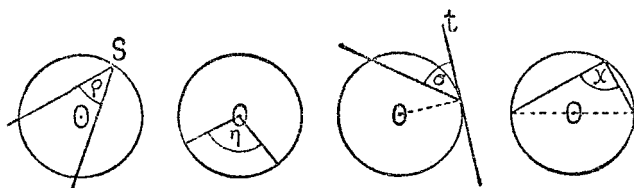


64. ábra.

meghúzzuk a körhöz az érintőket, akkor az érintési pontokat összekötő TU húr az átmérőt a G ponthoz tartozó negyedik harmónikus ponttal osztja két részre. Ez azt jelenti, hogy fennáll az $AF:BF=AG:BG$, vagy másképpen $\frac{AF}{BF}:\frac{AG}{BG}=1$ vagy még másképpen $AB=M_H=\frac{2ab}{a+b}$ összefüggés. Itt M_H a harmónikus közepet, a az AF és b az AG távolságot

jelenti. Ellenőrzésként segédszerkesztésül a körhöz tartozó szerkesztésünkbe egy harmonikus sugársort is rajzoltunk, olyant, amilyent fentebb a harmonikus pontok szerkesztésével kapcsolatban említettünk.

Látjuk, hogy állításunkat — bár bizonyítani sem volna nehéz — szerkesztéssel valószínűsítettük, verifikáltuk. De ez a szerkesztés számos új összefüggés kimutatására nyújtana alkalmat. Ezekről azonban el kell tekintenünk. mert a kör más, alapvető tulajdonságai inkább érdekelnek. A körben egyelőre háromféle szöget különböztetünk meg. A kerületi szöget, a középponti szöget és a húr és érintő által bezárt szöget, amelyet gyakran sorolnak a kerületi szögekhez. Ezekhez fog később csatlakozni a kerületi szög különleges

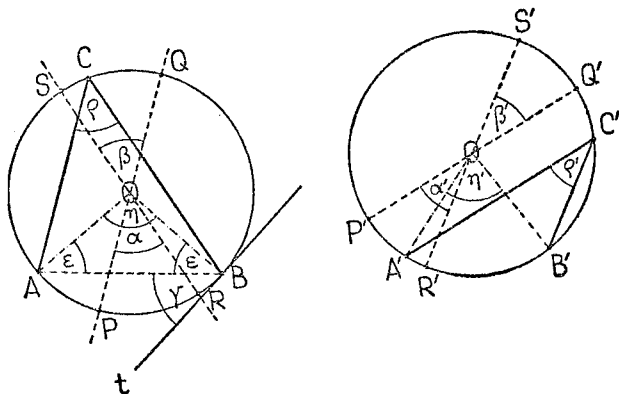


65. ábra.

eseteként a félkörbe rajzolt kerületi szög. A kerületi szög csúcsa a kör kerületén van, szárai húrok. Említettük, hogy tét az érintőt gyakran elfajult szelőnek tekintjük, így a húr is érintő alkotta szög a kerületi szög határesetének tekinthető. A középponti szög csúcsa viszont a középpontban van, két szára tehát a körnek két sugara. A félkörbe rajzolt kerületi szög a kerületi szögek különleges esete, amennyiben szárai egy átmérő végpontjain mennek keresztül. Felrajzoljuk mind a négy esetet, habár tulajdonképpen két esetté volnának összevonhatók. (65. ábra.)

Állítjuk, hogy e szögek közt a következő összefüggések állnak fenn. Ugyanazon az íven, vagy ami ugyanaz, ugyanazon a húron fekvő kerületi szögek egyenlők. Ez az egyenlőség érvényes a húr és az érintő közti szögre is, amelynek a fentemlített húr az egyik szára. Ha pedig ugyanarra az ívre a középponti szöget is megrajzoljuk (vagy ugyanarra a

húr), akkor e középponti szög kétszer akkora, mint «hozzá tartozó», vagyis ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. Végül a félkörbe írt kerületi szög, tekintve, hogy nem más, mint az átmérőhöz (vagyis két egyvonalba helyezett szárú, tehát 180 fokos szöget bezáró sugárból álló középponti szöghöz) tartozó kerületi szög, csak 90 fokos, azaz derékszög



66. ábra.

lehet. Az ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek egyenlőségét könnyen be lehet közvetlenül, projektív eljárással bizonyítani.¹ De mi inkább kevésbé elegáns, viszont részletesebb bizonyítást adunk, s ez egyúttal a kerületi szögnek a középponti szöghöz való viszonyát is bizonyítani fogja. Ezt a bizonyítást annál inkább alkalmazzuk, mivel a projektív bizonyításmód sok segédétel előzetes igazolását kívánná meg. Nézzük a 66. ábra baloldali képét és következtessünk: Az α és β szög egyenlő a ρ szöggel, a kerületi szöggel, mint-hogy az RS és az FQ egyeneseket, szándékosan, a kerületi

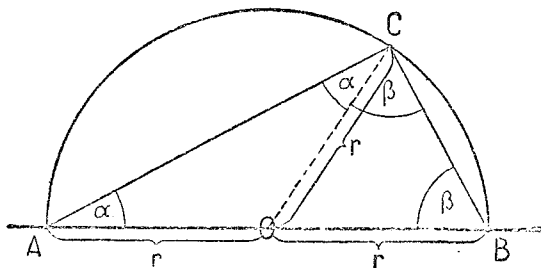
¹ Csak azok a kerületi szögek egyenlők egymás közt, amelyeknek a csúcsa az ív két végpontját összekötő húr egyik oldalán van. Azok a kerületi szögek, amelyeknek a csúcsa a húr másik oldalán van, egymásközt szintén egyenlők, de az előbbieknél mellékszögek, vagyis az előbbieket 180° -ra egészítik ki.

szög száraival párhuzamosan húztuk a kör középpontján keresztül. Ez utóbbi körülmény később lesz különösen fontos. Az RB ív meg az AP ív meg a PR ív együtt kétszer akkora, mint a PR ív, minthogy a PR ív egyrészt egyenlő a QS ívvel, másrészt ez a QS ív a CS és QC részekből tehető össze. Továbbá a CS ív egyenlő az RB ívvel, a QC pedig az AP ívvel, mivel a körben párhuzamos húrok közötti ívek egyformák. Ennek egyelőre nem látjuk bizonyítását, de bízunk ezúttal szemléletünkben annál is inkább, mert rövidesen a bizonyításra is sor kerül. De ha az egész AB ív kétszer akkora, mint a PR ív, akkor az AB íven nyugvó kerületi szög is kétszerese a PR íven nyugvónak. Ugyanabban a körben különböző íveken nyugvó kerületi szögek arányosak az ívekkel, amiről akkor lesz alkalmunk meggyőződni, amikor a szögek mérésével fogunk foglalkozni. Így tehát az η szög kétszer akkora, mint az α szög. De mert végül az α szög egyenlő a ϱ szöggel, ezért az η a ϱ szögnek is kétszerese, s épp ezt akartuk bizonyítani. De igaz ez a húr és az érintő közt levő

szögre is, $\gamma = \alpha = \varrho = \frac{1}{2}\eta$. Az AOB ugyanis egyenlőszárú háromszög. Szögeinek összege tehát $\eta + 2\varepsilon = 180^\circ$. Viszont $\gamma + \varepsilon = 90^\circ$, tehát $\varepsilon = 90^\circ - \gamma$. Az első egyenletbe behelyettesítve: $\eta + 2 \cdot (90^\circ - \gamma) = 180^\circ$, azaz $\eta + 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ$, tehát $\eta = 2\gamma$. Ezt akartuk bizonyítani. A másik képre vonatkozó bizonyítást, ahol a kerületi szög egyik szára a középponti szög szarát metszi, csak vázlatosan végezzük el. Ha most két betű fölé ívet rajzolunk, ezzel a két pontot összekötő ívet jelöltük. Tehát \widehat{AB} jelentése « AB ív». Így a második képen $\widehat{R'B'} + \widehat{P'R'} - \widehat{P'A'} = \widehat{2P'R'} = \widehat{A'B'}$, mert $\widehat{P'R'} = \widehat{Q'S'} = \widehat{C'S'} - \widehat{C'Q'}$. Így η kétszer akkora, mint akár az α' , akár a β' , akár pedig az ϱ' szög. Ezt kellett bizonyítanunk. Ezzel minden állításunkat bizonyítással támogattuk meg, hisz a félkörbe írt kerületi szög sem más, mint különleges, 180 fokos középponti szöghöz tartozó kerületi szög. De kiterjesztettük bizonyításunkat minden lehetséges esetre azzal, hogy a határesetet, a húr és érintő közt fekvő szöget is bevontuk bizonyításunkba. Így teljesen általánosan mondhatjuk, hogy

a kerületi szög mindenkor fele az ugyanazon az íven nyugvó középponti szögnek. Továbbá minden középponti szöghöz végtelenül sok kerületi szög tartozik, s mivel valamennyi fele a középponti szögnek, egymással egyenlők. Ezzel bebizonyult, hogy ugyanazon az íven vagy húron nyugvó kerületi szögek egyenlők, s már csak ennek a bizonyításával tartozunk. Megjegyezzük itt még, hogy a kerületi szög eme tulajdonságának a gyakorlatban is szerepe van. Ha ugyanis egy színpad elülső élet kör húrjának tekintjük, akkor a széksorokat csak körívalakúra kell készíteni, úgy hogy a színpad éle éppen e körnek a húrja legyen. Ezáltal minden néző — bárhol ül is a sorban — ugyanakkora látószöggel látja a színpadot. A látószögek ugyanis ily módon kerületi szögek egy körben, tehát egyenlők egymással. Ez az előny természetesen csak a látószög «nyílására» vonatkozik, mert a perspektíva miatt keletkező rövidülés a látósugaraknak és a színpad élének egymáshoz való hajlásától függ.

Habár azt, hogy a félkörbe írt kerületi szög mindenkor derékszög, az előzők során már elintéztük, mégis álljon itt egy másik bizonyítás is, amelyhez további megfontolásokat fogunk fűzni. Ezt a tételt egyébként Thales tételének is nevezik, a «távolságmérőnkkel» kapcsolatban megismert böles miletosi Thales nevééről.

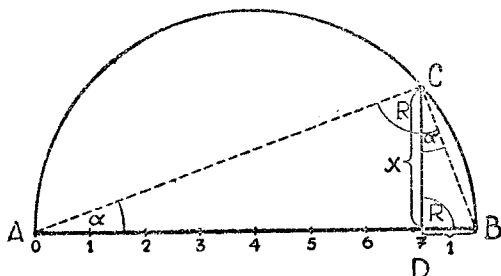


67. ábra.

Mint hogy AB feltevésünk szerint a kör átmérője, — átmérő nélkül nem keletkezhethet «félkör» — tehát a kör O középpontja rajta fekszik. Ha most az O pontot összekötjük az

AB fölött rajzolt kerületi szög csúcsával, akkor az OC távolság, akárcsak az OA vagy az OB , sugara a körnek. De ezzel két egyenlő szárú háromszög (AOC és BOC) keletkezett. Mindegyikben van két-két egyenlő szög, az α és a β . Mivel továbbá az ABC háromszög szögeinek összege $2\alpha + 2\beta = 180$ fok, ezért $\alpha + \beta = 90^\circ$. De $\alpha + \beta$ nem más, mint a félkörbe írt kerületi szögünk, s így ez a szög mindenkor derékszög. Ezt akartuk bizonyítani.

Ez a félkörbe írt kerületi szög nemcsak mértani szerkesztésekben és bizonyításokban jut jelentős szerephez, hanem négyzetgyökök megszerkesztésére is alkalmazható. Azt a pompás módot, amellyel Lionardo da Vinci e szög tulajdonságait kihasználta, azonnal be is mutatjuk. Szerinte azt a számot — legyen ez példánkban 7 — tetszésszerűen hosszú-



68. ábra.

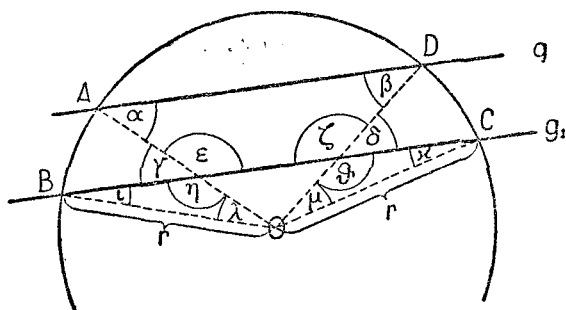
ságú egyenlő egységnek tekintett távolságok alakjában egymás után felrakjuk, utána még egyszer felmérjük ugyanezt az egységet, a teljes távolság felett félkört rajzolunk s végül a felmért távolságok (most 7) végpontjából merőleges egyenest húzunk a kör kerületéig. Ott, ahol ez a merőleges a kör kerületét metszi, ott lesz a gyöknek megfelelő távolság végpontja. Kezdeté egyenesünkön van, amely nem más, mint a kör átmérője. Járjunk el tehát az utasítás szerint, majd lássuk a bizonyítást.

Az utasítás szerint a CD vagyis x volna a 7 keresett négyzetgyöke. A bizonyítás során elsősorban azt állítjuk, hogy az ADC és a DBC háromszögek hasonlóak. A D mellett

fekvő szögek mindenesetre derékszögek, hisz ott merőlegest húztunk. Az α szög is egyenlő az α' szöggel, minthogy száraik kettésével merőlegesek egymásra. ($AC \perp CB$ és $AD \perp CD$.) Ez az összefüggés csak akkor állhat fenn, ha a félkörbe írt kerületi szög derékszög. A fentiek alapján a háromszögek harmadik szöge is szükségképpen egyenlő egymással. De így, mivel a háromszögek hasonlóságát az SSS törvény alapján megállapítottuk, a megfelelő oldalak arányosak, tehát mondjuk $AD : x = x : DB$. Ha pedig a távolságok helyett számértékeket helyettesítjük be, a $7 : x = x : 1$, vagyis $x^2 = 7$ eredményt kapjuk. Ezért $x = \sqrt{7}$, s ezt akartuk bizonyítani. Általában legyen a és b egy derékszögű háromszög két befogója és c az átfogója, jelölje p és r az átfogó két részét, s legyen továbbá m a háromszög derékszögéhez tartozó magasság. Ekkor mindig igaz, hogy $p : h = h : r$, tehát $h^2 = pr$ és $h = \sqrt{pr}$. Más aránylatokat is felírhatnánk, mert a rész-háromszögek mindegyike hasonló a nagy háromszöghöz. De egyelőre még nem távolságokból, hanem csak távolságok szorzatából vonunk gyököt. Igaz, a mérték-Pascal-tétel segítségével ezeket a szorzatokat távolságokká alakíthatnók, de ez céltalan volna. Mert mi azt a távolságot, amelyből gyököt akarunk vonni, eleve megadjuk, s nem utólag akarjuk kiszámítani, hogy miből is vontunk tulajdonképpen gyököt? Ezért Lionardo más fogást alkalmaz, tehát érdemes alaposan szemügyre venni. Ez a fogás lényegében szintén a mérték-Pascal. szerint végzett számításokon alapszik : Lionardo a szorzandó távolságok egyikét egységnek tekinti, ezáltal megtartja a másiknak változatlan hosszát. Ezt a fogást jól jegyezzük meg. Valahányszor szoroznunk vagy osztanunk kell és mégis meg akarjuk tartani e műveletek egyik tagját, akkor az egyik tényezőt vagy az osztót (nevezőt) egységnek fogjuk tekinteni. Az osztandót is tekinthetnők egységnek, de ezzel nem járunk jól, mert a megtartani szándékolt távolság a megtartott érték reciprok értékének felelne meg.

Másra akarjuk felhívni most a figyelmet. Valahányszor körrel kapcsolatos feladattal foglalkozunk, jelöljük meg az összes számbajöhető és a sugárral egyenlő távolságot r betűvel. Ugyanis nagyon sok feladat használja ki a sugarak

egyenlőségét, s az ennek folytán adódó egyenlőszárú háromszögek tulajdonságait : az alapon fekvő szögek egyenlőségét, a magassággal kapcsolatos szimmetria-tulajdonságokat stb. A körben a «viszonyok» ezzel nagymértékben egyszerűsödnek, mint az alábbi példa is mutatni fogja. Bizonyítsuk be például a már alkalmazott tételt, hogy párhuzamos egyenesek közt fekvő körívek egyenlők. Felhasználjuk itt a szög- és körmérés amaz alapvető szabályát, hogy egyforma középponti szögekhez egyforma ívek tartoznak ugyanabban a körben vagy egyforma nagy körökben.



69. ábra.

Messe két párhuzamos egyenes g és g_1 a kört és húzzunk a négy metszéspontban (A, B, C, D) egy-egy sugarat. Így két egyenlőszárú háromszög, AOD és BOC keletkezik. Ennek következtében $\alpha = \beta$ s velük egyenlők a váltószögek, vagyis $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Az utóbbiak mellékszöge lévén $\varepsilon = \zeta$. De η és ϑ az ε és ζ csúcshöge, tehát szintén egyenlő valamennyi. Egyenlő egymással az ι és κ is : egyenlőszárú háromszög alapján fekvő szögek ; következésképpen az AB és CD ívekhez tartozó középponti szögek, λ és μ szintén egyenlők. Ebből pedig azonnal következik az AB és CD ívek egyenlősége. Ezt kellett bizonyítanunk.¹

¹ Ha a kör középpontja a g és g_1 egyenesek között fekszik, nagyon egyszerű a bizonyítás az O középponton keresztül húzott párhuzamos segédegyenes felhasználásával.

TIZENKILENCEDIK FEJEZET.

Körösztás és a körbe írt sokszögek.

Foglalkozzunk most azokkal a körbe írt n oldalú sokszögekkel, amelyeknek oldalhossza és a kör sugara közt meghatározható összefüggés van, hogy ebből újabb összefüggések nyomára jöhessünk. De előbb szóljunk néhány szót a kör-, ill. szögmérésről. Ha a kör középpontján át két, egymásra merőleges átmérőt rajzolunk, akkor ezek az átmérők a kört négy egyenlő részre, négy negyedkőre osztják. Ha a derékszögeket ismét megfelezzük, nyolcadköröket kapunk. Ha viszont a derékszögeket harmadolnám, körtizenkettédeket kapnék. Két-két ilyen körtizenketted együtt hatodkört ad. A gyakorlatban ősrégi, még a babyloniaiktól származó szokás szerint az egész kör területét 360 egyenlő részre, ívfokra szokás osztani és ezeknek 360 szögfok felel meg középponti szöggént. Minden ilyen szög- és ívfok 60 szög-, illetőleg ívpercre, minden perc pedig 60 szög-, illetőleg ívmásodpercre oszlik. Az egész körnek, illetve a «teljes»-szögnek, 360 fok a mérőszáma. A félkör, illetőleg egyenes szög 180 fokos. A negyedkör és a derékszög 90 fokos. A 0 és 90 fok között levő szögek neve hegyesszög, a 90 és 180 fok között levőké tompaszög, 180 és 360 fok közt levő szögek pedig a domború szögek; ezekkel szembe állítva a 0—180 fokig terjedő szögeket, «homorú» szögeknek is szokás nevezni.

A félkörnek nem felelhet meg körbe írt szabályos sokszög. Ez természetes, hisz csak két metszéspontunk van, amelyen egyetlen átmérő megy keresztül. Most azonban alapos okunk van arra, hogy ne folytassuk vizsgálatainkat tovább, tehát ne vizsgáljuk egymásután a harmad-, negyed- és ötödkörnek megfelelő sokszöget, hanem a hatodkör vizsgálata következék. A hatodkörnek a $360:6=60$ fokos szög felel meg. Rajzoljuk tehát fel. (70. ábra.)

Hat 60 fokos szöget kaptunk és a hozzájuk tartozó hatodkör nagyságú íveket. A húrok is egyenlők ilyen körülmények közt. Mekkora ezek a húrok? A húrok és sugarak alkotta háromszögek biztosan egyenlőszárúak, hisz valamennyi sugar

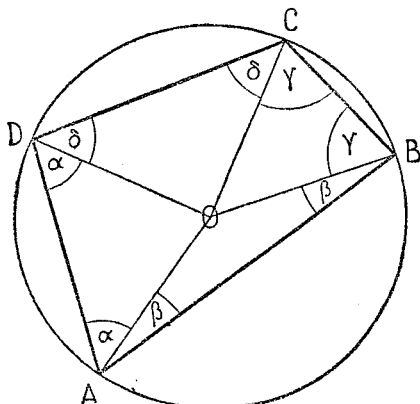
fekvő szöget, tehát az ABC háromszög magasságvonala és így merőleges a b -re. De ez a b éppen az a húr, amelyet keresünk. Nyilvánvaló, hogy az ABC és az AOC háromszög egybevágó. Így az is világos, hogy a b felezi az a -t. Pythagoras tétele segítségével a $\frac{b}{2}$ azonnal adódik, mint az átfogó (r),

és a másik befogó, $\left(\frac{a}{2}\right)$ négyzetének különbségéből vont négyzetgyök. Minthogy $a=r$, így a fenti különbség $r^2 - \frac{r^2}{2}$ alak-

ban is írható, vagyis $\frac{b}{2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r}{2} \sqrt{3}$.

És $b=r\sqrt{3}$. A további lehetséges összefüggések levezetését mellőzzük, egyrészt mivel minden tankönyvben olvashatók, másrészt pedig mert gyakorlás közben mindenki könnyen rájöhet. Inkább a körbe írt négyszöggel fogunk most foglalkozni, még pedig az általános, szabálytalan négyszöggel és ennek vezetjük le néhány különleges tulajdonságát.

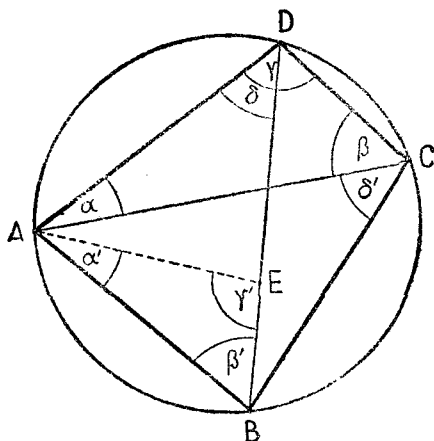
Azt állítjuk, hogy a körbe írt négyszögekben és csakis azokban, a szemben fekvő szögek összege mindenkor 180° és hogy csakis olyan négyszög csúcspontjait lehet egyetlen



71. ábra.

körrel összekötni, amelynek szögei a fenti feltételnek megfelelnek. Ha egy négyszög egyik átlóját meghúzzuk, két háromszögre bomlik és kiderül, hogy szögeinek összege 360° . Ezt, mint a képen is láthatjuk, oly módon is bebizonyíthatjuk, hogy a négyszög csúcsait összekötjük valamely belsejében fekvő ponttal. A keletkező négy háromszög szögeinek összege 720° , ebből le kell vonni az O pont körül levő szögek összegét, 360 fokot. Így ismét 360 fok adódott a szögek összegéül. Esetünkben azonban nem általánosan választottunk: négyszögünk körbe írható és az O pont éppen e körnek középpontja. A keletkezett háromszögek tehát egyenlőszárúak — két-két oldaluk a kör sugara — s ezért a szögek összege így írható: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$; vagy kettővel osztva: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Egy pillantás a 71. ábrára meggyőz, hogy a négyszög két-két szemben fekvő szöge éppen az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ részekből áll, összegük tehát 180° .

Mielőtt még rátérnénk a körbe írt szabályos négyszög tárgyalására, levezetünk még egy, a körbe írható négyszögekre vonatkozó általános érvényű tételt: Ptolemaios tételét. Ezt a tételt a nagy görög csillagász Kr. u. 150-ben, *Almagest* című munkájában írta le, s háromszögtani táblá-



72. ábra.

zatok kiszámítására használta. De említsük meg azt is, hogy új tételünk bizonyos szempontokból Pythagoras tételének általánosított alakja, mert körbe írt derékszögű négyszögre alkalmazva éppen Pythagoras tételévé alakul. A tétel a következő: Minden körbeírt négyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemben fekvő oldalak szorzatainak összegével. (72. ábra.)

A bizonyításhoz húzzuk meg az AE egyenest oly módon, hogy az α' szög az α szöggel egyenlő legyen. Az SSS tétel alapján állíthatjuk, hogy az ABE és az ACD hasonló háromszögek; az α és α' szögek egyenlők, mivel így szerkesztettük, a β pedig egyenlő a β' -vel, mert ugyanazon az íven fekvő kerületi szögek. Következésképpen a γ és a γ' egyenlő, tehát a háromszögek hasonlóak és megfelelő oldalaik arányosak. Vagyis $AB:AC=BE:CD$. Az aránylatot szorzatok alakjában írva (a kütagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával), $AB \cdot CD = AC \cdot BE$. Mivel továbbá δ és δ' is egyenlő, az ADE és az ACB háromszögek is hasonlóak. Ennek alapján helyes az $AD:AC=DE:BC$ aránylat is. Szorzat írva: $AD \cdot BC = AC \cdot DE$. Írjuk ezeket egymás alá és adjuk össze.

$$\begin{array}{l} AC \cdot BE = AB \cdot CD \\ AC \cdot DE = AD \cdot BC \\ \hline AC(BE + DE) = AB \cdot CD + AD \cdot BC; \\ \quad \quad \quad BD \end{array}$$

vagyis

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC;$$

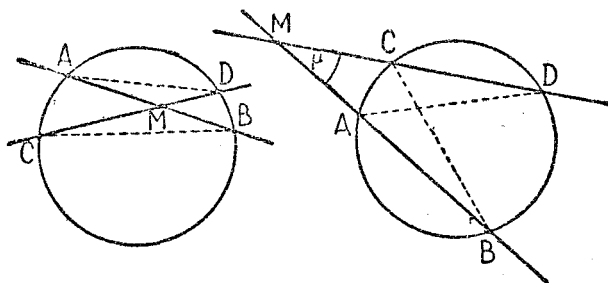
a körbe írható négyszögek átlóinak szorzata egyenlő a szembenfekvő oldalak szorzatának összegével. Ezt akartuk bebizonyítani. Ha négyszögünk történetesen derékszögű négyszög, — téglalap — akkor átlói egyformák, mindkettőt c -vel jelöljük, a szembenfekvő két-két oldal pedig a és b . A Ptolemaios-tétel különleges esete tehát ez lesz:

$$c \cdot c = a \cdot a + b \cdot b, \text{ vagyis } c^2 = a^2 + b^2$$

s ez nyilvánvalón Pythagoras tétele.

Vizsgálatainkat még egy, a sugársorokra vonatkozó tétellel egészítjük ki, s ezzel a körre vonatkozó újabb ará-

nyossági tételhez jutunk. A tétel a következő: Ha egy kört két tetszőszerinti sugárral metszünk, akkor a sugarak szeletei oly aránylatot alkotnak, amelynek kültagjai az egyik, a beltagjai a másik sugár szeletei. Más fogalmazással: a sugarak szeleteinek szorzatai egyenlők egymással.



73. ábra.

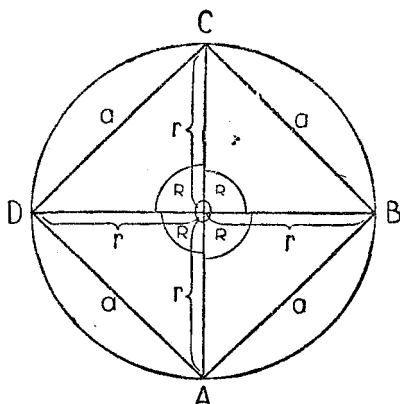
Tehát azt állítjuk, hogy a következő aránylat helyes: $MA:MC=MD:MB$, vagy ami ugyanaz: $MA \cdot MB=MC \cdot MD$. Bizonyítás: $\angle AMD = \angle BMC$ és $\angle MDA = \angle MBC$ (ugyanazon az AC íven nyugvó kerületi szögek). Tehát az MAD és az MBC háromszögek hasonlóak. Ha felírjuk a megfelelő oldalak arányát, akkor éppen a bizonyítandó $MA:MC=MD:MB$ aránylatra jutunk.

Bizonyításainkhoz, épp úgy, mint az előbbi esetben tettük, ezentúl már nem fogunk sok magyarázó szöveget fűzni, hisz van már elegendő gyakorlatunk ahhoz, hogy csak jelekkel leírt bizonyításokat is gyorsan és könnyen megértsünk. Helyet és időt takarítunk meg ezzel, s ez csak javára válik amúgyis nagyon nagy anyagunknak. A «rövid utat» természetesen csak már ismert összefüggések alkalmazásakor fogjuk használni. Új dolgokat továbbra is részletesen ismer-tetünk.

De mindez messzire vezetett eredeti, körosztási feladunktól. Sőt eddig teljesen mellőztük a kör négyfelé osztásával kapcsolatos feladatot.

Láthatjuk, hogy ha a kört négy egyenlő részre osztjuk,

négy egyenlőszárú háromszöggel találkozunk, száruk két-két sugár, alapjuk a , s az alapok együtt négyzetet adnak. Ez abból is látszik, hogy az alapon fekvő szögek — a középponti szög 90° — a $2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$ összefüggésből 45 fokosak. Ebből következik, hogy a keletkezett egyenlőszárú háromszögek egybevágók, tehát alapjaik egyformák, s következik



74. Ábra.

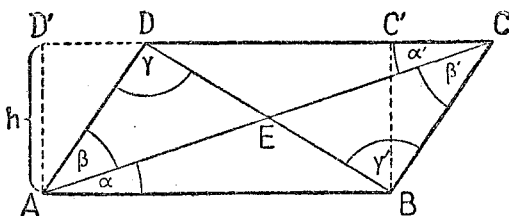
az is, hogy a négyszög szögei, minthogy két-két 45 fokos szög összege mindegyik, 90 fokosak. További következmény, hogy a négyszög átlói átmérők, egyenlők, merőlegesek egymásra és felezik egymást az O pontban. A négyzet oldala, a kör sugarából Pythagoras tételével számítva:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2d^2}{4}} = \frac{d}{2} \sqrt{2} = r \sqrt{2}$$

nos és egyenlőszárú trapézt különböztetünk meg, a szerint, hogy az alapon fekvő két szöge egyenlő-e, vagy sem. Az egyenlőszárú trapéz szimmetrikus idom, szimmetria-tengelye keresztülmegy az átlók metszéspontján és természetesen a párhuzamos oldalak felezőpontján is. A trapéz középvonalának a nem párhuzamos oldalak felezőpontját összekötő egyenest nevezik. Az egyenlőszárú trapéz csúspontjai fehetnek kör kerületén, de az általános trapéz csúspontjai semmi esetre sem.

3. Megeshetik, hogy egy négyszög két-két szemben fekvő oldala párhuzamos, ebben az esetben parallelogramma a neve. Köztük a legáltalánosabb az, amelynek szomszédos oldalai nem egyenlők, szögei nem derékszögek.

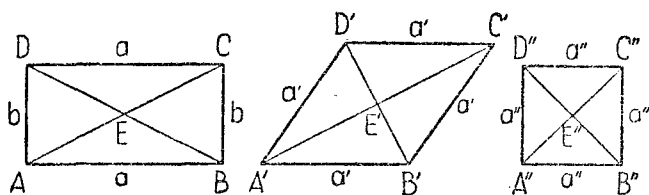
Legnevezetesebb tulajdonsága, hogy szemben fekvő oldalai, AB és CD , illetve AD és BC egyenlők (76. ábra). Ez azzal a tétellel bizonyítható, hogy párhuzamosak közötti párhuzamosak egyenlők egymással. Ez a tétel viszont az ABC és ACD háromszög egybevágóságából következik. Az AC a két háromszögben közös, α és α' , valamint β és β' szögek, váltószögek lévén, egyenlők, tehát a két háromszög a SOS tétel alapján egybevágó, s az AB és CD pedig meg-



76. ábra.

felelő oldalak. A parallelogramma átlói felezik egymást, mert az ADE és a BCE háromszög egybevágó (SOS tétel; $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, és $AD=BC$). Tehát a megfelelő oldalak: $AE=EC$ és $BE=DE$. Ez pedig a bebizonyítandó tétel helyességét jelenti. Végül természetes, hogy a szemben levő szögek egyenlők, hiszen váltószögek. Ezek az összefüggések mind megfordíthatók. Érdekes átmenetet találunk itt, amely a téglá-

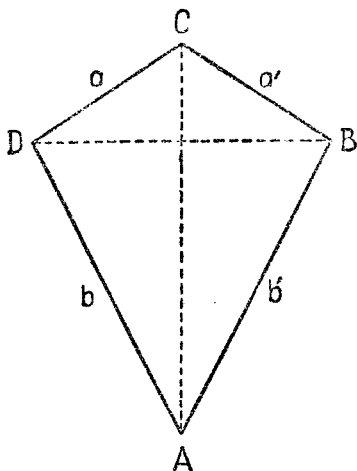
laphoz vezet. Elegendő ugyanis, hogy egy paralelogrammának egyetlen szöge derékszög legyen, hogy az általános paralelogramma téglalappá váljék. Ha ugyanis egyik szög derékszög, akkor a vele átellenes szög is az, a kettőnek összege pedig 180° . A másik két szög is egyenlő egymással, s tekintve, hogy a szögek összegének a felét, 180 fokot már előbb elhasználtuk, erre a kettőre is csak 180 fok marad, mindegyikre 90° . Természetesen erre is érvényes valamennyi



77. ábra.

tétel, amelyet a romboidnak is nevezett ferdeszögű paralelogrammáról levezettünk. Ezekhez járul még ezen kívül, hogy a téglalap két átlója egyenlő egymással. Ez az ABC és ABD háromszögek egybevágóságából következik. A téglalap mindenkor körbe írható négyszög, mert szemben fekvő szögei együtt 180 fokot adnak. Ez már önmagában is elegendő bizonyíték, de még csattanósabb a bizonyítás, hogyha tekintetbe vesszük, hogy mind a négy félátló egyforma hosszú, tehát sugara olyan körnek, amelynek középpontja az átlók metszéspontja. A ferdeszögű paralelogrammák egyik különleges esete a rombusz, amelynek minden oldala egyforma hosszú. Különleges tulajdonsága, hogy átlói merőlegesen egymásra, s felezik azt a szöget, amelyen keresztül mennek. Ez az egyenlőszárú háromszögekre vonatkozó tételekből természetesen következik. A rombuszra érvényes tételek természetesen érvényesek a négyzetre is, amelyet egyaránt nevezhetnénk «derékszögű rombusznak» vagy «egyenlő oldalú téglalapnak». Az utóbbi elnevezés magától értetődővé teszi, hogy átlói egyforma hosszúk. A rombusz sohasem lehet körbe írt négyszög, csak a négyzet, az viszont mindenkor.

Meg kell még említenünk az általános négyszögek egy különleges fajtáját, a deltoidot. Párhuzamos oldalai ugyan nincsenek, viszont van két-két egyenlő szomszédos oldala. Alakja papírsárkányéhoz hasonlít. Átlói merőlegesek egy-



78. ábra.

másra, az egyenlő hosszú oldalak metszéspontjait összekötő átló felezi az egész idomot, a szögeket, amelyeken átmegy és a másik átlót. Ha valamennyi oldala egyenlő hosszú, akkor rombusz lesz belőle.

HUSZONEGYEDIK FEJEZET.

Szűkebb értelemben vett sokszögek.

Most a tulajdonképpeni sokszögekkel fogunk foglalkozni, tehát azokkal, amelyeknek öt vagy annál több oldaluk és szögük van. Megjegyezzük azonban, hogy az itt levezetett tételek a három- és négyszögekre is érvényesek, igaz, hogy sokszor csak mint határesetekre vagy elfajult alakjukban.

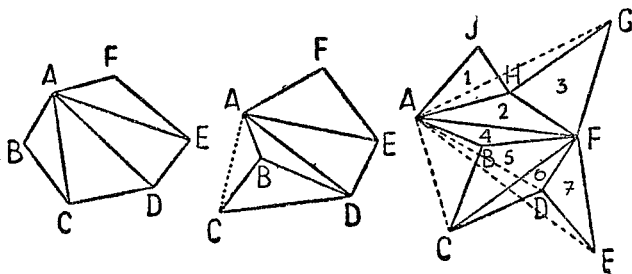
Már tudjuk, hogy minden sokszögnek ugyanannyi oldala van, ahány csúcsa, tehát ahány szöge.

Mekkora most egy n -szög átlóinak a száma, ha n akár-milyen 2-nél nagyobb egész számot jelenthet? Ne féljünk és gondolkozzunk logikusan: bármely csúcspontot összeköthetjük a többi csúcsponttal. Tehát $(n-1)$ átló. Igaz ez? Nem, téves, mert a két szomszédos csúcspontot nem lehet tekintetbe venni, az azokkal összekötő egyenes nem átló, hanem oldal. Ezek szerint $(n-3)$ átlót húzhatunk egy csúcspontból. Ha valamennyi csúcspontból meghúzzok minden átlót, akkor $n \cdot (n-3)$ átlót kapok összesen. De ez megint tévedés. Így minden átlót kétszer számolnék. Különbözőnek tekinteném ily módon például az AG és GA átlót, holott a kettő azonos.

Tehát a valóságban egy n oldalú sokszögben összesen $\frac{n(n-3)}{2}$

átló húzható. Ez a tétel igaz, ha $n > 2$. Háromszögben képletünk szerint 0, négyszögben 2, hatszögben 9, és mondjuk 23 szögben 230 átló húzható.

Most volt szó arról, hogy minden csúcspontból $(n-3)$ átló húzható. Ez az $(n-3)$ átló sokszögünket $(n-2)$ háromszögre bontja. A háromszögek száma szükségképpen eggyel nagyobb, mint az átlóké, mert az első átló levágja az első háromszöget, a második a másodikat, az utolsó, $(n-3)$ -dik viszont két háromszöget teremt; azt, melyet maga mögött hagy és azt, amely előtte keletkezik. Ez a tétel is akkor érvényes, ha $n > 2$. Így $(n-3)=0$ átló $(n-2)=1$ háromszögre bontja a háromszöget, a négyszöget egy átló bontja két



79. ábra.

háromszögre, az ötszöget $(5-3)=2$ átló bontja 3 háromszögre és így tovább. Joggal tehetjük fel a kérdést, hogy milyen a helyzet, ha a sokszögnek beszőgellő, tehát domború szögű csúcsai is vannak; tehát egy vagy több átlója részben vagy teljesen a sokszögön kívül van? A szabály ebben az esetben is érvényes marad. Az eredeti felbontás is lehetséges, csak az elképzelése okoz némi nehézséget, így inkább bizonyos számú «pótátlót» alkalmazunk és így is érvényes marad a szabály.

A 79. rajz első két esete nem szorul bővebb magyarázatra. Hatszögek s mindegyiket $(6-3)=3$ átló $(6-2)=4$ háromszögre bontja. A harmadik némi magyarázatra szorul. A helyzet valamivel bonyolultabb, mert ha az A pontból kiinduló átlókat kezdjük meghúzni, akkor 4, az F pontból kiinduló «pótátlót» kell segítségül vennünk, hogy a szükséges $(9-3)=6$ átlót megkaphassuk. De ebben az esetben is sikerült a sokszöget 6 átlóval 7 háromszögre bontani, ez nekünk további bizonyításaink során elegendő.

Határozzuk meg most, hogy mennyi az n oldalú sokszög szögeinek összege. Az előbbi eljárástunk, amellyel egy sokszöget háromszögekre bontottunk, erről is felvilágosít. Láthatjuk az előbbi rajzokon, hogy a sokszög szögeit a háromszögek szögei teljesen megtöltik, anélkül, hogy bármelyik háromszögnek csak egy szöge is megmaradna. Így a sokszög szögeinek összegét a háromszögek számának és egy háromszög szögei összegének szorzata adja: $2R \cdot (n-2) = S_n$. Vagy ha a jelölt szorzást elvégezzük: $S_n = 2nR - 4R$. Ez a képlet is érvényes természetesen három- és négyszögekre is. Tehát: Háromszög: $S_3 = 3 \cdot 2R - 4R = 2R$; $S_4 = 4 \cdot 2R - 4R = 4R$; vagy például $S_{17} = 17 \cdot 2R - 4R = 30R$, tehát 2700 szögfok. Érvényes továbbá az előbbi tételnek egy következménytétele is, amely szerint sokszögben 3-nál kevesebb homorú (180° -nál kisebb) szög nem lehet. Ha ugyanis egy n oldalú sokszögben csak 2 homorú szög volna, akkor a többi $(n-2)$ szög domború, vagyis nagyobb 180 foknál. Tehát a valamennyi szög számára lehetséges legnagyobb $(n-2) \cdot 2R$ összeget már a domború szögek összege maga meghaladja. A domború szögek összege ugyanis $(n-2) \cdot (2R + \eta)$. Itt η azoknak a többleteknek átlagát jelenti, amellyel a domború szögek a 180 fokot meg-

haladják. Ha viszont a sokszög három homorú szöget tartalmaz, akkor $(n-3)(2R+\eta)=2Rn-6R+\eta(n-3)$ a domború szögek összege; ha ezt levonjuk a szögek előbb meghatározott $(n-2) \cdot 2R=2Rn-4R$ összegéből: akkor a különbség $2R-\eta(n-3)$ marad a homorú szögek számára. E feltétel teljesíthető, mert bármennyivel kevesebb is $\eta(n-3)$, mint $2R$, már található három olyan kis szög, amelynek összege éppen a $2R-\eta(n-3)$ különbséggel egyenlő. Tehát három homorú szöggel már szerkeszthető sokszög.

Ha az eddig megismert tételekhez még hozzávesszük azt a tételt, hogy két sokszög egybevágó, ha a megfelelő részháromszögek azok és ennek megfordítását, hogy egybevágó sokszögek megfelelő részháromszögei is egybevágók, akkor körülbelül ismerünk a sokszögekre vonatkozó minden planimetriai tételt. Kivételek csak a szabályos sokszögekre vonatkozó tételek, de ezekkel a következő fejezetben fogunk megismerkedni. Itt csak a szabályos sokszögek egy-egy szögének nagyságát határozzuk meg pótlólag. Tekintve, hogy a szabályos sokszögek minden szöge egyenlő, egy-egy szög nagysága $\frac{S_n}{n}$ vagyis az n -szögszögei összegének n -ed részével.

Egy szög tehát

$$a_n = \frac{(n-2) \cdot 2R}{n} = \frac{2Rn}{n} - \frac{4R}{n} = 2R - \frac{4R}{n} = 2R \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

Mivel ez a tétel is érvényes, ha $n > 2$, összefoglalhatjuk az eddigieket. A szabályos

háromszög	egy szöge	$a_3 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
négyszög	« «	$a_4 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
ötszög	« «	$a_5 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$
hatszög	« «	$a_6 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
tízsög	« «	$a_{10} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$
tizennyolcszög	« «	$a_{18} = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$

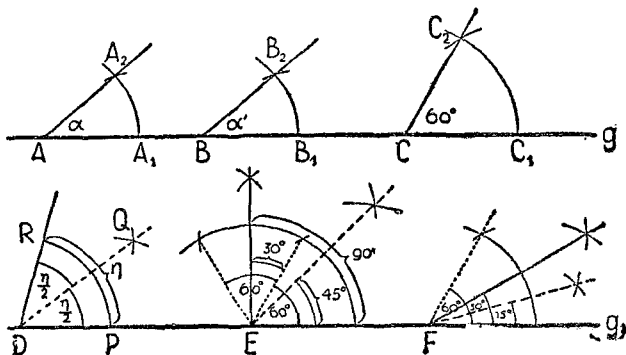
HUSZONKETTEDIK FEJEZET.

Szerkesztések és idomok átalakítása. Területmérés.

Ismételjük át a legegyszerűbb és egyben legfontosabb geometriai szerkesztéseket, hogy könnyebben tudjunk mozogni. Ismételjük át, ugyanis valamennyit tanultuk már mindnyájan az iskolában is, de könnyen lehetséges, hogy azóta egyiket-másikat, vagy talán valamennyit elfelejtettük. Körzót, vonalzót természetesen használhatunk.

Kezdjük a szögekkel, másolásukkal és felezésükkel. Képünkön láthatjuk, hogyan másolunk s felezzük a szöget, s hogy e műveletekkel különféle nagyságú szögeket nyerhetünk. Mindenkor a 60 fokos szögből indulunk ki, mivel ezt tudjuk legegyszerűbben szerkeszteni.

Az elv nagyon egyszerű. Legyen a másolandó szög egyik szára a g egyenes, csúcsa pedig az A pont. Az A pontból mint középpontból tetszésszerű sugárú kört húzunk. A szög másik szára is metszi ezt a kört, valamely pontban. Ha most ennek vagy más egyenesnek egyik, mondjuk B pontját középpontnak vesszük s meghúzzuk ugyanazt a kört, akkor az α szöget úgy másolhatjuk, hogy a körnek az első szög két szára közt fekvő húrját (tehát az A_1A_2 távolságot)

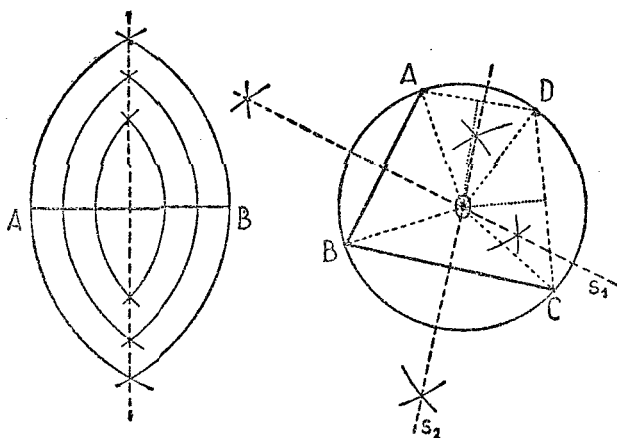


80. ábra.

körzöbe vesszük s felmérjük B_1 -ből kiindulva a másodszor rajzolt körre. Kössük össze B -t B_1 -gyel, a keletkezett a' szög egyenlő az α szöggel, mert egyforma sugarú körökben egyforma húrokhoz egyforma ívek, ezekhez pedig egyforma középponti szögek tartoznak. 60 fokos szöget úgy szerkesztünk, hogy egy pontból, pl. C -ből kört húzunk s arra magát a sugarat rámérjük. Ha C -t a keletkezett C_2 ponttal összekötjük, 60 fokos szöget kapunk. Ha a PDR szöget — jelöljük γ -val — meg akarjuk felezni, akkor húzzunk D középponttal olyan körívet, amely mindkét szárát metszi. Ezután R és P középponttal húzzunk köríveket, míg azok egymást Q pontban metszik. A Q és D összekötő egyenes felezi az γ szöget. Az E pontban derékszöget úgy tűzünk ki (úgy állítunk merőlegest a g_1 egyenesre az E pontban), hogy ott 60 fokos szöget szerkesztünk, s folytatólág még egyet, s ezt az utóbbit megfelezzük. Így, $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, derékszöget kapunk; ha ezt felezzük, két 45 fokos szöghöz jutunk. Ugyanígy az F pontban 60 fokos szög ismételt felezésével 30 és 15 fokos szögeket kapunk. Beláthatjuk már, hogy megfelelő felezéssel és kiegészítéssel számos különféle szöghöz juthatunk.

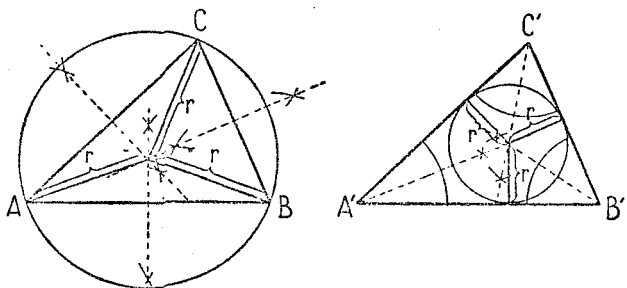
Térjünk át most más feladatra: szerkesszük meg egy távolság szimmetria-tengelyét vagy ami ugyanaz, a távolságot merőlegesen felező egyenest.

Ez oly módon történik, hogy a távolság A és B végpontjából egyenlő sugárral húzott köríveknek a távolság alatt és fölött fekvő metszéspontját összekötjük. Ha három pontunk van, A, B, C , akkor az AB és BC merőleges felezőinek metszéspontját, O -t is meghatározhatjuk, s ebből kört húzhatunk, amely mind a három ponton keresztül megy. (Bizonyítás $AO=BO$, mert az s_1 egyenes minden pontja egyenlő távolságra van A -tól és B -től; továbbá $BO=CO$, mert ugyanez igaz a B és C pontokra és az s_2 egyenesre. Tehát $CO=BO=AO=r$, vagyis mindegyik egyenlő az A, B, C pontokon keresztülmenő kör sugarával.) Használjuk fel az alkalmat és vizsgáljuk meg, miként kell háromszög köré kört rajzolni és miként lehet a háromszög oldalait érintő kört rajzolni. Ezt az utóbbit háromszögbe írt körnek nevezzük. Amikor a háromszögek nevezetes pontjairól beszéltünk



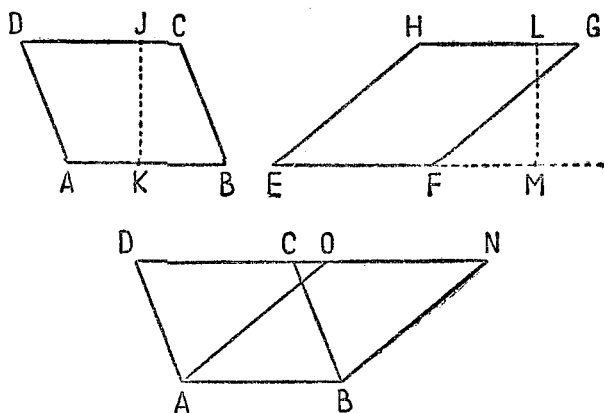
81. ábra.

és az oldal- valamint szögfelezőkről volt szó, már észleltünk olyan összefüggéseket, amelyek mostani feladatunk megoldására utaltak. Láttuk, hogy az oldalfelezők találkozási pontja egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól, a szögfelezők metszéspontja pedig az oldalaktól van egyforma távolságra. Az oldalfelezők metszéspontja tehát a háromszög köré írt kör középpontja, a szögfelezők metszéspontja pedig a háromszögbe írt kör középpontja. Képeink mutatják a két esetet, s meg kell még jegyeznünk, hogy elég két szögfelezőt, illetve oldalfelezőt megrajzolni, mert a harmadik szükségképpen keresztülmegy az első kettő metszéspontján.



82. ábra.

A szerkesztésre vonatkozó rövid megjegyzések után térjünk át a területmérésnek és a területek átalakításának problémájára. Már ismételten szó volt idomok egyenlőségéről. Távolságokról, szögekről állítottuk, hogy egyenlők, háromszögekről, hogy egybevágók, s ezt az utóbbit alak- és kiterjedés-egyenlőségnek tekintettük. De azt, hogy két idom egyenlő legyen, anélkül hogy alakjuk is egyenlő volna, még nem tapasztaltuk. Így lehetséges, hogy egy körív és egy egyenes távolság egyforma hosszú. Más egyenlőség a két különböző alakú idom közt nem is lehetne. Ugyanígy egy háromszög területe egyenlő lehet egy négyzet, téglalap, trapéz vagy kör területével. Itt tehát találtunk egy közös tulajdonságot, a területet, amely az alak különbözősége esetén is összehasonlítási alap, közös nevező lehet. Kutatási területünket e tulajdonságok vizsgálatával lényegesen kibővíthetjük. De jegyezzük meg, nagyon kevés az olyan idom, amelynek a területét közvetlenül, egységnyi területű négyzetek felhasználásával megmérhetjük. Az esetek legnagyobb részében a mindenkor lehetséges távolságmérésre leszünk utalva, s keresnünk kell olyan összefüggéseket, amelyek lehetővé teszik, hogy jellemző adatok hosszának lemérése után a területet kiszámíthassuk. Alaptételünk:



83. ábra.

egyforma magasságú és alapú paralelogrammák területe egyenlő, s ennek bizonyítását Euklides nyomán adjuk.

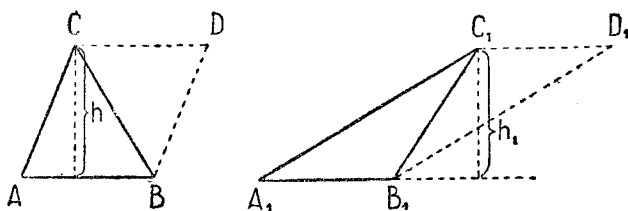
A 83. ábrán látható paralelogrammáknak egyenlő a magasságuk, ezért a kettőt egymásra is rajzolhatom, különösen mivel alapjuk is egyenlő. Ezzel a DC és a HL oldaluk ugyanarra az egyenesre kerül. Az ábrák összerajzolásával trapézt kapok. Nem szükséges, hogy ennek felső párhuzamos oldala egyenlő legyen a DC és HL összegével. Az $ABDN$ trapéz magassága ugyanaz, mint a paralelogrammáké, s benne az ADO háromszög egybevágó a BCN háromszöggel. Ha a trapézból az ADO háromszöget levonjuk, a maradék az $EFGH$ -val egybevágó $ABNO$ paralelogramma. Ha viszont a BCN háromszöget vonjuk le, akkor az $ABCD$ paralelogramma marad meg. Ha egyenlő mennyiségekből egyenlőket vonunk le, egyenlők maradnak, tehát — amit bizonyítanunk kellett — az $ABCD$ és az $EFGH$ paralelogrammák területe egyenlő. Tekintve, hogy a téglalap is paralelogramma, e szabály alapján minden ferdeszögű

n	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	$7n$	$8n$	$9n$	$10n$	$11n$	$12n$	
\vdots													
3	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	m_n
2	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	m_3
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

84. ábra.

paralelogrammát ugyanakkora területű, valamint ugyanakkora alapú és magasságú derékszögű paralelogrammává tudunk átalakítani. De a téglalap területe egységnégyzetekkel való lemérés számára már hozzáférhető, s szemmel látható, hogy területének mérőszámát alapja és magassága mérőszámának szorzata adja. Mert alapja mentén mindenkor annyi egységoldalú mérőnégyzetet helyezhetek el, ahányat annak mérőszáma mutat, s a magasság mérőszáma mutatja meg, hogy hány ilyen sor fér el benne. A téglalap területe tehát egyenlő az alap és magasság szorzatával, s ugyanez a

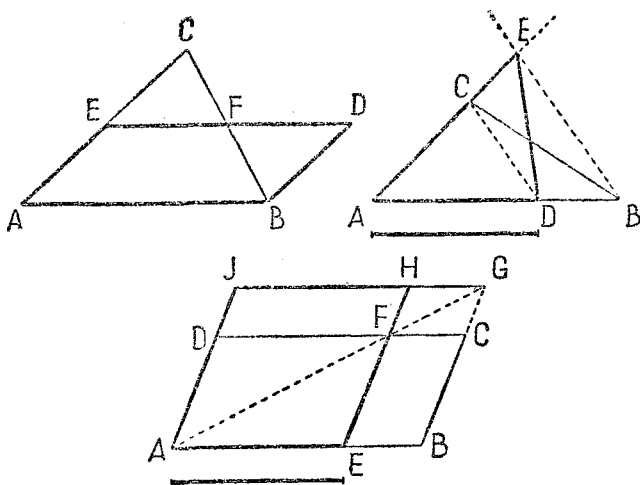
képlet alkalmas — az előbb tárgyalt euklidesi tétel alapján — bármely paralelogramma területének meghatározására. Tekintve azonban, hogy minden háromszöget a képeken látható módon paralelogrammákká egészíthetünk ki s a kiegészítő háromszögről bebizonyíthajtuk, hogy az eredetivel egybevágó, így a paralelogramma területe kétszerese a háromszög területének. Ezért a háromszög területe : alap szorozva a magasság felével, azaz $T = \frac{a \cdot h}{2}$.



85. ábra.

Minthogy most ismerjük a legfontosabb képleteket (említsük meg még, hogy az a oldalú négyzet területe a^2 , mivel alapja és magassága egyaránt a), lássunk néhány idomátalakítást. Először alakítsunk háromszöget paralelogrammává, aztán megfordítva. (Ehhez egyetlen rajz elegendő.) A második rajzon látható, hogyan alakítunk át háromszöget ugyanakkora területű, de más alapú háromszöggé, végül a harmadik paralelogramma átalakítását mutatja más alapú paralelogrammává. A terület természetesen egyik esetben sem változik. (86. ábra.)

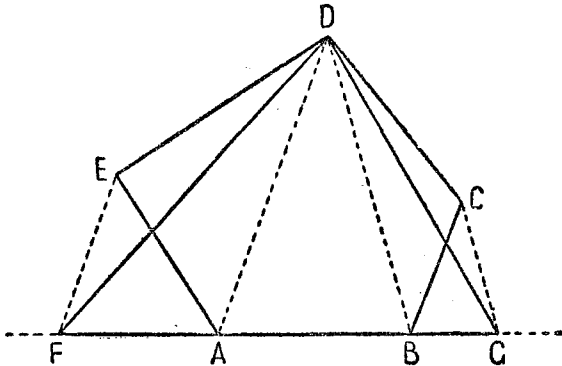
Bizonyítások : Első eset (háromszög átalakítása paralelogrammává és megfordítva) : A CEF háromszög és a BDF háromszög egybevágók, a terület tehát nem változik, akárhol csatoljuk is a háromszöget az $ABFE$ trapézhoz. A háromszögek az SOS tétel alapján egybevágók, mert a szerkesztés szerint a CB távolságot felező F ponton át húztunk az AB -vel párhuzamost, majd a B ponton keresztül az AC -vel. A második eset : (AB alapú háromszög átalakítása AD alapú háromszöggé.) A DCE háromszög területe egyenlő a BCD háromszög területével, mert alapjuk, CD közös, magasságuk



86. ábra.

pedig egyforma. Mindkettő magassága ugyanis a párhuzamos CD és BE egyenesek egymástól való távolságával egyenlő. Az ABC háromszög területe így egyenlő az ADE háromszög területével, mert a közös ACD háromszöghöz az egyik esetben a DCE , a másik esetben pedig a vele egyenlő BCD háromszöget tettük hozzá. A szerkesztés úgy történik, hogy az új alapot (AD) rámérjük az AB -re, a D -t összekötjük a C csúcsponttal. Ezzel az egyenessel párhuzamost húzunk a B ponton keresztül, s e párhuzamosnak és az AC meghosszabbításának metszéspontját (E) összekötjük a D ponttal. Ha a megkövetelt új alap nagyobb, mint az átalakítandó háromszög alapja, akkor a rajzon az ADE háromszöget kell adottnak tekintenünk. Az új alapot (AB) rámérjük a meghosszabbított AD egyenesre, a B pontot összekötjük az E ponttal, D -n keresztül párhuzamost húzunk az összekötő egyenessel, s ez metszi ki a keresett C csúcsponthoz. A harmadik esetben (parallelogramma átalakítása más alapú parallelogrammává) a következő szerkesztéssel jutunk eredményhez. Rámérjük az új oldalt, AE -t az AB -re, az E ponton át párhuzamost

húzunk AD -vel, ez kimetszi a CD -ből az F pontot, az AF a BC meghosszabbítását G -ben metszi. A G ponton keresztül az AB -vel húzott párhuzamos az AD és EF egyeneseket a keresett J és H pontokban metszi. Tehát $AEHJ$ a keresett, $ABCD$ -vel egyenlő területű paralelogramma. Szerkesztésünk igazolására be kell bizonyítanunk, hogy a közös $AEFD$ -hez felváltva függesztett $EBCF$ és $DFHJ$ paralelogrammák területe egymással egyenlő. Ez az egyenlőség adódik, ha az egybevágó ABG és AJG háromszögek területéből a szintén egybevágó AEF és ADF , valamint az FCG és FHG területét levonjuk.



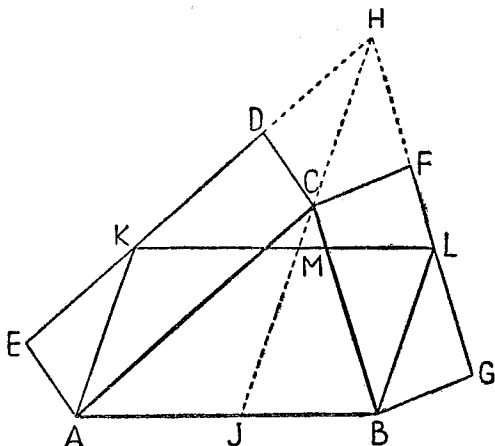
87. ábra.

Az előbbi második eset elvén alapul a 87. képen látható ötszögnek háromszöggé történő átalakítása is.

Számtalan más átalakítási feladat is van, s az ilyen feladatokat különösen a régi görögök kedvelték. Ez alkalommal már csak az alexandriai Pappus (Kr. u. 400 körül) tételét akarjuk bemutatni, továbbá azt az eljárást, amellyel egy téglalap területével egyenlő területű négyzet szerkeszthető. Az utóbbi előtt azonban meg kell ismernünk a Pythagorasz-tételnek Euklidesztől adott bizonyítását, amely önmagában véve is számos átalakítási feladatot tartalmaz, s a hellén geometriai tudás legszebb bizonyítékai közé tartozik.

Lássuk először Pappus tételét. Ez általános érvényű, a

parallelogrammák területének összeadására vonatkozó tétel. Rajzoljunk tetszésszerű háromszög két oldalára egy-egy tetszésszerű parallelogrammát. Hosszabbítsuk meg a két parallelogrammának a háromszög oldalaival párhuzamos oldalait metszésükig, a metszéspontot pedig kössük össze a háromszögoldalak metszéspontjával, majd húzzunk a háromszög másik két csúcsán át ezzel az összekötő egyenessel párhuzamosakat. Ha összekötjük azt a két pontot, amelyben



88. ábra.

ezek az egyenesek a fentemlített parallelogrammaoldalakat metszik, akkor a háromszög alapja fölé rajzolt parallelogrammához jutunk, amelynek területe az eredeti két parallelogramma területének összegével egyenlő.

Rettenetesen bonyolultnak látszik a tétel, habár nagyon egyszerű: rajzoljuk fel és mindjárt megértjük.

Bizonyítás: $AK=CH$, $BL=CH$ tehát $AK=BL$ (párhuzamosak közötti párhuzamosak). De mivel feltevésünk szerint AK és BL párhuzamosak: $ABLK$ parallelogramma. Megállapíthatók még a következő egyenlőségek a képen látható parallelogrammák közt:

$$\begin{aligned}AJMK &= ACHK = ACDE \\BJML &= BCHL = BCFG\end{aligned}$$

az egyenlőségeket összeadva

$$\frac{AJMK + BJML}{ABLK} = ACHK + BCHL = ACDE + BCFG$$

Mivel pedig $AJMK + BJML = ABLK$, tehát $ACDE + BCFG = ABLK$, tételünket bebizonyítottuk. Kiderül továbbá, hogy a paralelogrammák alakja mellékes. E tétel segítségével két tetszőszerinti paralelogramma területének összeadását elvégezhetjük, mert egy-egy oldalukat egy háromszög két oldalának tekintve és hozzájuk egy tetszőszerinti harmadik oldalt választva elvégezhetjük a szerkesztést.¹

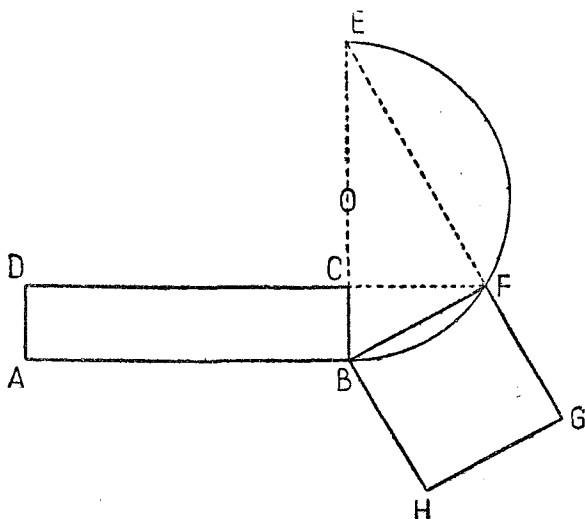
Pythagoras tételét már ismerjük. Tehát csak az euklidesi bizonyítást kell pótlólag megismernünk. E célt szolgálja az áttekinthetetlennek és zavarosnak látszó 89. ábra. A közepén levő háromszögben a derékszög C -nél van.

Annak bizonyítására, hogy a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével, elegendő bebizonyítani, hogy az $LAEK$ téglalap területe egyenlő AC négyzetével, s a $BDKL$ téglalap területe a BC négyzetével egyenlő. Bizonyítás: FAC háromszög területe az $FACG$ négyzet területének a fele. (FC átló és az átló mindenkor felezi a paralelogramma területét.) $FAC\Delta = FAB\Delta$, mert alapjuk közös, magasságuk egyaránt az AF és GB párhuzamos egyenesek egymástól való távolsága. Az FAB és CAE háromszögek egybevágók, mert $FA=CA$ és $AB=AE$ négyzetoldalak (így rajzoltuk) és $FAB\angle = CAE\angle = CAB\angle + 90^\circ$, területük tehát egyenlő. $CAE\Delta = LAE\Delta$, mert alapjuk, AE közös, magasságuk pedig egyenlő a párhuzamos AE és LK egyenesek egymástól való távolságával. Az LAE háromszög pedig a $KLAE$ téglalap területének a fele, mivel EL átló. A fenti egyenlőségeket összefoglalva az $FACG$ négyzet területének a fele egyenlő a $KLAE$ téglalap területének a felével. Ha az idomok terü-

¹ Ez a tétel is tartalmazza Pythagoras tételét, mint különleges esetet: ha paralelogrammául négyzeteket választunk és a négyzetoldalakból, mint befogókból derékszögű háromszöget szerkesztünk.

idom négyzetté alakítható, ha esetleg bonyolult műveletek útján is. Lássuk ennek a módját.

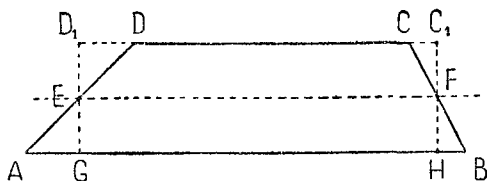
Hosszabbítsuk meg az $ABCD$ téglalap rövidebb BC oldalát annyira, hogy a BE távolság az AB -vel egyenlő legyen. Tekintsük ezt egy derékszögű háromszög átfogójának, felezzük meg s a kapott O pont körül rajzoljunk OB sugarú félkört. Kössük össze a B és E pontot azzal az F ponttal,



90. ábra.

amelyben az DC meghosszabbítása a kört metszi. Derékszögű háromszöget kaptunk, mert az F -nél fekvő szög félkörhöz tartozó kerületi szög. Azonban az imént megismert euklidesi Pythagoras-tétel levezetése szerint az $ABCD$ téglalap területe egyenlő a BF oldalú négyzet területével.

Ámbár eddigi ismereteink már elegendők ahhoz, hogy a legtöbb egyenes vonalakkal határolt síkidom területét megfelelő átalakítások és szerkesztések segítségével meghatározzuk, lássunk mégis néhány különleges esetet. Ilyen először is a trapéz.



91. ábra.

Ha egy pillantást vetünk a képre, azonnal láthatjuk, hogyan alakíthatjuk át a trapézt téglalappá azzal, hogy meghúztuk középvonalát. (Vegyük figyelembe, hogy $AEG\Delta \equiv DED_1\Delta$ és $BFH\Delta \equiv CC_1F\Delta$.) A trapéz középvonala a nem párhuzamos oldalak felezőpontját összekötő egyenes. Így a trapéz területét a középvonal és a magasság szorzata adja. A középvonal hossza a párhuzamos oldalak összegének a fele, másként a párhuzamos oldalak hosszának számtani közepe. Ez világos, mert:

$$AB + CD = (AG + GH + HB) + (C_1D_1 - D_1D - CC_1) = GH + C_1D_1;$$

mivel

$$AG = D_1D \text{ és } HB = CC_1.$$

Tehát

$$AB + CD = GH + C_1D_1;$$

de

$$GH = C_1D_1 = EF;$$

ezért

$$AB + CD = 2EF \text{ és } EF = \frac{AB + CD}{2}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

Lássunk egy másik feladatot. Láttuk már, hogy minden szabályos sokszög körbe írható, illetve, hogy minden szabályos sokszög köré kör rajzolható, mivel minden szabályos sokszöget megfelelő körosztási feladat elvégzésével kaphatunk meg. E szerkesztés folyamán körsugarak a szabályos n oldalú sokszöget n egyenlőszárú háromszögre bontják, ezek mindegyikének a szárai sugarak, tehát a középpontban metszik egymást. Körzővel és vonalzóval e sokszögek közül

csupán azok szerkeszthetők, amelyek oldalszáma, $n=4, 2.4, 2.2.4$ stb. vagy $6, 2.6, 2.2.6$ stb., továbbá Gauss bizonyítása szerint azok, amelyeknél $n=2^{(2^p)}+1$ és törzsszám. Ha $p=1, 2, 3, 4, \dots$ akkor $n=5, 17, 257, 65.537, \dots$ Több ilyen alakú törzsszámot nem ismerünk.

Ha eltekintünk a szerkesztés nehézségeitől, bizvást állít hatjuk, hogy minden szabályos sokszög területe n egyenlőszárú háromszög területének összegével egyenlő. De nyilvánvaló, hogy csupa egyenlőszárú háromszögről van szó, mert az alapok egyenlő sokszögoldalak, a szárak pedig a köré írt kör sugarai. Így tehát valamennyi háromszög magassága is egyenlő. Jelöljük a sokszögoldalakat a -val, a magasságokat

m -mel, akkor egy háromszög területe $\frac{a \cdot m}{2}$. A háromszögek száma n , tehát az egész sokszög területe $\frac{n \cdot a \cdot m}{2}$. Mivel

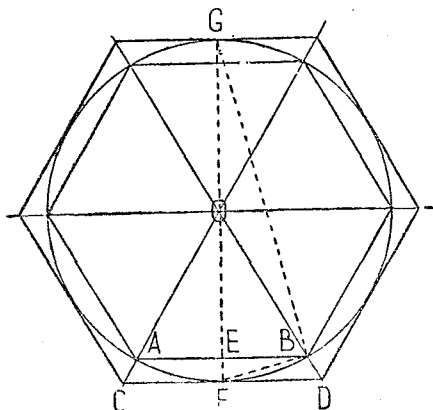
azonban $n \cdot a$ éppen a sokszög kerületét adja, a képletet rövidebben $T = \frac{k \cdot m}{2}$ alakban is írhatjuk (k a sokszög kerü-

letét jelöli). Ez azonban azt is jelenti, hogy minden sokszög területe egyenlő olyan háromszög területével, amelynek alapja a sokszög kerülete, magassága pedig egy háromszög magassága. Ezt az összefüggést használjuk a kör területének meghatározására is. Bocsássuk mindjárt előre, hogy a kör területét nem lehet körzővel és vonalzóval megszerkeszteni, s bebizonyult, hogy nem lehetett eredményes az erre irányuló évezredes igyekezet. Megismerünk még tanulmányaink során közelítő szerkesztéseket, van olyan különleges szerkezet, úgynevezett evolvens-körzőt, mellyel a kör területe pontosan meghatározható. Mégis a kör területének meghatározásában elsősorban számításra vagyunk utalva, amellyel ha teljesen nem is, minden kívánt pontossággal meghatározható a kör területe.

HUSZONHARMADIK FEJEZET.

A kör területe.

Képzeljük el: körbe írt sokszögünk oldalszámát növelni kezdjük, ugyanígy a kör köré írt sokszögét is. Végül is végtelenül sokoldalú sokszögekhez kell jutnunk, amelyeknek végtelenül sok, de a nullához közeledő hosszúságú oldaluk van. Az ilyen sokszög már «végtelen keskeny» egyenlőszárú háromszögekből tevődik össze, így az oldalak számával együtt a szárak hossza és a magasság hossza közötti különbség is elenyészik; mindkettő a kör sugarával lesz egyenlő, a beírt és a körülírt sokszögben egyaránt. Csak e két végtelenül sokoldalú sokszög kerületét kell meghatároznom: a területüket az imént levezetett képletből már megkapom. Mert a szabályos sokszög területe $T = \frac{k.m}{2}$; esetünkben tehát a «végtelen sokoldalúé» $T = \frac{k.r}{2}$. A sugarat ismerjük, hisz a területmeghatározást éppen a sugár ismeretében akarjuk elvégezni. Feladatunk tehát úgy módosult, hogy a kerületet kell a sugárból kiszámítanunk. Az ehhez használt, módszert már Archimedes eredményesen alkalmazta.



92. ábra.

Valósítsuk meg tehát tervünket : rajzoljunk kört, rajzoljunk bele szabályos sokszöget, — oldalai húrok, — rajzoljunk köré is egyet — oldalai érintők — ugyanazzal az oldalszámmal. Rajzoljuk a legegyszerűbben megszerkeszthetőt : a szabályos hatszöget.

Hangsúlyozzuk : egyáltalán nem fontos az a tény és nem is törődünk vele, hogy éppen hatszöget rajzoltunk. Épp oly jó a 17 szög is vagy a 264 szög. Csak azt nem felejtjük el, hogy OA és OB egyenlők és egyaránt sugarak. E körülmény ismeretében kiszámítjuk, hogy mekkora a kör köré írt szabályos sokszög oldala, ha a beírt sokszögé o_n és a kör sugara r . Tehát $AB=o_n$ és $OA=OB=r$. Hasonló háromszögekből következik, hogy $OE:OF=EB:FD$, vagy ha az aránylat jobb oldalának tagjait kettővel megszorozzuk (és a rajz jelöléseit figyelembe vesszük), $OE:OF=AB:CD$. Jelölje a CD távolságot O_n , akkor az utóbbi aránylatot így is írhatjuk : $OE:r=o_n:O_n$ (mert $OF=r$). Ha az OEB háromszögre Pythagoras tételét alkalmazzuk, akkor :

$$OE^2+EB^2=OB^2, \text{ azaz } OE^2+\left(\frac{o_n}{2}\right)^2=r^2 \text{ és } OE^2=r^2-\left(\frac{o_n}{2}\right)^2$$

végül $OE=\sqrt{r^2-\left(\frac{o_n}{2}\right)^2}$. Ha ezt az eredményt felhasználjuk, az előbbi aránylatot így is írhatjuk :

$$\sqrt{r^2-\left(\frac{o_n}{2}\right)^2}:r=o_n:O_n$$

és ebből O_n

$$O_n=\frac{r o_n}{\sqrt{r^2-\frac{o_n^2}{4}}}$$

Tűzzük ki a következő feladatot : határozzuk meg egy szabályos sokszög oldalhosszából és a sugárból a kétszeres oldalszámú sokszög oldalának (FB) a hosszát. Jelöljük az FB -t o_{2n} -nel és húzzuk meg a BG segédegyenest. Thales tétele szerint az FBG szög derékszög, mert GF átmérő. Helyes tehát az arány : $FG:FB=FB:FE$. De $FG=2r$,

$FB = o_{2n}$ előbb pedig láttuk, hogy $OE = \sqrt{r^2 - \frac{o_n^2}{4}}$, tehát

$FE = r - \sqrt{r^2 - \frac{o_n^2}{4}}$ s ezért az aránylatot így írhatjuk:

$$2r : o_{2n} = o_{2n} : \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{o_n^2}{4}} \right)$$

ebből

$$o_{2n} = \sqrt{2r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{o_n^2}{4}} \right)} = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{o_n^2}{4}}}.$$

Ha a hatszögből kiindulva sorban meghatározzuk a be- és körülírt hatszög kerületét ($k_6 = 6o_6$ és $K_6 = 6.O_6$), azután a tizenkétyszöget ($k_{12} = 12.o_{12}$ és $K_{12} = 12.O_{12}$), szembe ötlük, hogy a kör kerülete mindenkor nagyobb a beírt sokszög kerületénél és kisebb a körülírt sokszög kerületénél. A kerületek különbsége az oldalszám növekedésével mindinkább csökken, hisz a sokszögek mind jobban símulnak a kör kerületéhez. Ismerjük már tehát, ha a mód kissé nehézkes is, hogy miként határozhatjuk meg, illetve közelíthetjük meg tetszésünk szerinti pontosságig a kör kerületét, mert az eljárást korlátlanul folytathatjuk. S ha azt tapasztaljuk, hogy a körülírt és a beírt sokszög kerületének mérőszáma bizonyos számú tizedesig megegyezik, akkor ugyanannyi tizedesre pontosan a kör kerületét is ismerjük.

Állítsunk össze az ilyen számításról egy kis táblázatot.

Oldal- szám	Beírt sokszög fél kerülete	Körülírt sokszög fél kerülete
6	r.3	r.3.464101
12	r.3.105828	r.3.215390
24	r.3.132628	r.3.159660
48	r.3.139350	r.3.146086
96	r.3.141031	r.3.142714
192	r.3.141451	r.3.141874
384	r.3.141566	r.3.141647
768	r.3.141592	r.3.141593

Jól megfigyelhetjük ezen a táblázaton, hogy miként közelít a két sokszög kerülete egymáshoz. A 768-szögnél már csak a hatodik tizedes mutat eltérést, s ha ennyivel megelégszünk (ez többnyire elég is), állíthajtuk, hogy $\pi = 3.141592\dots$, de megjegyezzük, hogy az utolsó tizedesjegy már nem pontos. A π -nek fontos szerepe van a matematikában, s Ludolf van Ceulen nevéreől Ludolf-féle számnak is nevezik. Ugyanis Ludolf volt az, aki ezt az archimedesi módszert használva 1596-ban 35 tizedesjegyig pontosan meghatározta értékét. Szerinte

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288\dots$$

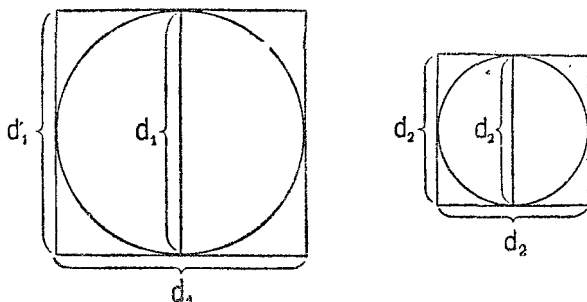
és a számítás során a szabályos 1073,741.284-szög adta ezt az értéket.¹ Ma már több mint 700 tizedes pontossággal ismerjük a π értékét. Kiszámítására felsőbb matematikai eszközök szolgáltak. A fenti számítást végezte Archimedes is, de már a 96-szögnél abbahagyta. Szerinte π értéke $3\frac{1}{7}$ és $3\frac{10}{71}$ közt van, aminek helyességéről meggyőz az előbbi táblázat. Tudjuk, hogy a π pontosan nem határozható meg, de ennek bizonyítása csak a XIX. század nyolcvanas éveiben sikerült Lindemannnak.

Most már a kör területének meghatározásához minden eszközünk megvan. Ha a kör félkerülete miként a táblázatból kiadódik, a beírt és körülírt sokszögek félkerületének közös határértéke, $r \cdot \pi$ és az egész $2r\pi$, akkor a sokszögekre vonatkozó képlet alapján a terület

$$T = \frac{k \cdot r}{2} = \frac{2r\pi \cdot r}{2} = r^2\pi.$$

Jegyezzük meg azt is, hogy a két kör kerülete úgy aránylik egymáshoz, mint a sugaraik, vagy átmérőik; területük aránya pedig sugaraik vagy átmérőik négyzetének arányával egyenlő, vagyis $r_1^2\pi : r_2^2\pi = d_1^2 : d_2^2$. Ez utóbbit a 93. kép is jól szemlélteti.

¹ E hallatlan szorgalommal végrehajtott számítás jutalma, hogy neve így hozzákapcsolódott a számhoz és 1840-ben még olvasható volt sírkövén az általa kiszámított 35 tizedesjegy.



93. ábra.

Területszámításaink befejezéseként még Heron képletét akarjuk csak említeni, amely az általános háromszög területét adja meg, ha az oldalakat ismerjük.

Levezetése oly módon történik, hogy a háromszög ismert területképletéből a magasságot kétszer alkalmazott Pythagoras tétellel kiküszöböljük és bevezetjük a következő, szokásos jelölésmódot: $s = \frac{a+b+c}{2}$. Ezek szerint a háromszög területe:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A következőkben pedig azzal a feladattal fogunk foglalkozni, hogy miként lehet — akárcsak most a területet — az oldalak segítségével a háromszög szögeit kiszámítani.

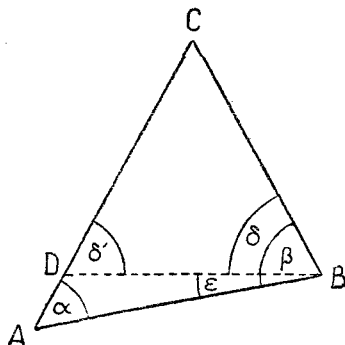
HUSZONNEGYEDIK FEJEZET.

Szögfüggvények.

Eddig szándékosan nem volt szó a háromszög szögeinek és oldalainak összefüggéséről, mert ezeket az összefüggéseket a geometriának külön ága tárgyalja: a trigonometria. A trigonometria ezek szerint azokkal a geometriai összefüggésekkel foglalkozik, amelyek lehetővé teszik, hogy a háromszögek ismert alkatrészeiből az ismeretleneket számítással meghatá-

rozhassuk. A «háromszögtannak» (görög *tri*=három, *gonü*=szög, *metron*=mérés) elemi foka a goniometria, a szögtan. Nem szokás a kettőt egymástól élesen megkülönböztetni, s a trigonometria szó használatos általában mindkettő jelölésére. Mi se fogjuk fel szigorúbban a dolgot, nevezzük mindkettőt trigonometriának.

Lássuk először a háromszögtannak egyik általános érvényű tételét: azt állítjuk, hogy egy háromszög nagyobb szögével szemben nagyobb oldal, a kisebbel szemben pedig kisebb oldal fekszik. Derékszögű háromszög esetén már meggyőződünk erről: a legnagyobb szög a derékszög, s a vele szemben fekvő átfogó bármelyik befogónál nagyobb. De nem akarunk ilyen különleges esetnek általános érvényt tulajdonítani, ezért az általános esetet is bebizonyítjuk.

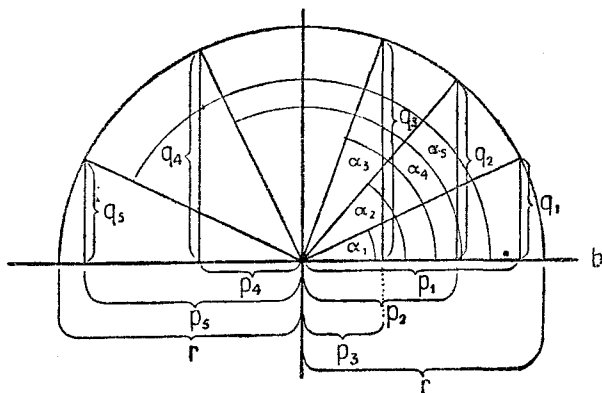


94. ábra.

Legyen az ABC háromszögben $AC > BC$ és mérjük rá az AC oldalra C -től a BC oldalt. Így jutunk a D ponthoz és a BCD egyenlőszárú háromszöghöz. Ebben a $\delta = \delta'$. A δ azonban nyilván csak egy része a β szögnek. Mivel továbbá a δ' külső szöge az ADB háromszögnek, így $\delta' = \alpha + \epsilon$, tehát $\delta' > \alpha$ és $\delta > \alpha$. Mivel pedig $\beta > \delta$, következésképpen igaz, hogy $\beta > \alpha$ s ezt akartuk bebizonyítani. Ha a bizonyítást a háromszög különféle oldalpárjaira megismételjük, kiderül, hogy a háromszögekben a legnagyobb oldal és a legnagyobb

szög, a legkisebb oldal és a legkisebb szög végül a «középső» oldal és a «középső» szög fekszik szemben egymással. De ezek az összefüggések még csak minőségiek, nem pedig mennyiségek. Ha derékszögű háromszöget vizsgálunk, meggyőződhetünk arról, hogy a derékszöggel szemben fekvő átfogó egyáltalán nem ugyanolyan hosszú, mint a két, együttvéve szintén 90 foknyi hegyesszöggel szemben fekvő befogó. Annál kevésbé állhat fenn ez az összefüggés, mert ha $a+b=c$, akkor a , b és c oldalakkal háromszög egyáltalán nem rajzolható.

Mennyiségi összefüggést oly módon találhatunk, ha azt vizsgáljuk, hogyan változik a derékszögű háromszög oldalainak a *viszonya*, ha a hegyes szögeket változtatjuk. E viszony változását legjobban úgy szemlélhetjük, ha egy kör sugarát



95. ábra.

nyugalmi helyzetéből az óramutató járásával ellenkező irányban elkezdjük forgatni és a mozgó sugár végpontját a nyugalmi helyzetére vetítjük. A sugár (r), a vetület (p) és a vetítő egyenes (q) együtt derékszögű háromszöget ad, az α_1 szöghöz például a q_1 vetítőegyenest és a p_1 vetület tartozik. Ha a mozgó szár összeesik a nyugvó szárral, akkor az α szög 0, a vetítő egyenes ugyancsak 0, a vetület viszont

a sugárral egyenlő. Ugyanez a helyzet, ha $\alpha = 180^\circ$. Ha viszont $\alpha = 90^\circ$, akkor a vetület értéke 0 és a vetítő egyenes lesz egyenlő hosszú a sugárral.

Látjuk tehát, hogy a szög változásával a p , q és r mértékeiből alakuló viszonyok szintén megváltoznak és viszont. Tehát teljesen jogos az az elgondolás, hogy a szögek jellemzésére éppen ezeket a viszonyokat használjuk fel s ezeket a viszonyokat a szög függvényeinek tekintjük. Itt természetesen nincs módunkban a függvény fogalmát megmagyarázni, utalnunk kell az «Egyszeregytől az integrálig» c. könyvünkben elmondottakra. Csak röviden megemlítjük, hogy függvényen azt a törvényszerűséget értjük, amelynek alapján valamely mennyiség változásából egy másik mennyiség viselkedésére (változására) következtethetünk.

A kombinatorika tanítása szerint a rendelkezésre álló három elemből hatféle viszonyt alkothatunk, mivel a viszonyok három elemből alkotható ismétlés nélküli másodosztályú variációk. Ezt a hat viszonyt nevezzük szögfüggvénynek. A következők során, mivel derékszögű háromszögekről lesz szó, kényelmesebb a szokásos elnevezések használata: sugár helyett mindenkor *átfogót* fogunk mondani, vetület helyett *szög mellett fekvő befogót*, vetítő egyenes helyett pedig a *szöggel szemben fekvő befogót*.

Nevezzük meg hat szögfüggvényünket:

Sinus $\alpha = \sin \alpha = q : r$	(a szöggel szemben fekvő befogó viszonya az átfogóhoz.)
Cosinus $\alpha = \cos \alpha = p : r$	(a szög melletti befogó viszonya az átfogóhoz.)
Tangens $\alpha = \operatorname{tg} \alpha = q : p$	(a szöggel szemben fekvő befogó viszonya a szögmelletti befogóhoz.)
Cotangens $\alpha = \operatorname{cot} \alpha = p : q$	(a szögmelletti befogó viszonya a szöggel szemben fekvő befogóhoz.)
Secans $\alpha = \sec \alpha = r : p$	(az átfogó viszonya a szög-melletti befogóhoz.)
Cosecans $\alpha = \operatorname{cosec} \alpha = r : q$	(az átfogó viszonya a szöggel szemben fekvő befogóhoz.)

Gyakorlatban csak az első négy szögfüggvény használatos. Ha előbbi rajzunkat ismét szemügyre vesszük, észrevehetjük, hogy ha a változó szög értéke a 90 fokot vagy annak valamely többszörösét túlhaladja, ismét az előbbi viszonyok kerülnek elő. Ha megállapodunk abban, hogy a kör középpontjától jobbra levő vetületeket és a vízszintes átmérő fölé emelkedő vetítősugarakat pozitívoknak tekintjük, a baloldali vetületeket illetve vízszintes alatti vetítő sugarakat negatívaknak és a sugárnak viszont mindenkor pozitív az előjele, akkor a szögfüggvényérték változásának igen fontos adatai kerültek birtokunkba.

Táblázatba foglalhatjuk, hogy miképpen ismétlődnek a szögfüggvények számértékei a síknegyedekben. A táblázat adatai egybevágó háromszögek tulajdonságai alapján adódnak: a forgó sugár útján gyakran fedezhetünk fel ilyeneket hisz mindenkor derékszögű háromszöget kapunk, a sugár állandó és éppen azok az esetek érdekelnek, amidőn a háromszög egyik szöge egy bizonyos, kiválasztott α . E három-

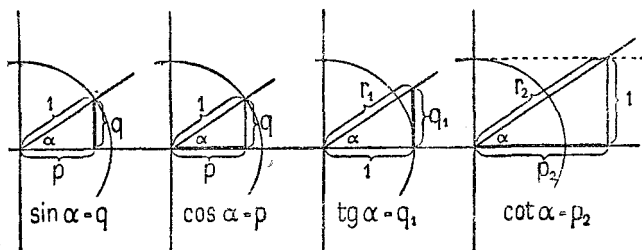
$\sin (90-\alpha)=\cos \alpha$ $\cos (90-\alpha)=\sin \alpha$ $\operatorname{tg}(90-\alpha)=\cot \alpha$ $\cot (90-\alpha)=\operatorname{tg} \alpha$	$\sin (90+\alpha)=\cos \alpha$ $\cos (90+\alpha)=-\sin \alpha$ $\operatorname{tg}(90+\alpha)=\cot \alpha$ $\cot (90+\alpha)=-\operatorname{tg} \alpha$
$\sin (180-\alpha)=\sin \alpha$ $\cos (180-\alpha)=-\cos \alpha$ $\operatorname{tg}(180-\alpha)=-\operatorname{tg} \alpha$ $\cot (180-\alpha)=-\cot \alpha$	$\sin (180+\alpha)=-\sin \alpha$ $\cos (180+\alpha)=-\cos \alpha$ $\operatorname{tg}(180+\alpha)=\operatorname{tg} \alpha$ $\cot (180+\alpha)=\cot \alpha$
$\sin (270-\alpha)=-\cos \alpha$ $\cos (270-\alpha)=-\sin \alpha$ $\operatorname{tg}(270-\alpha)=\cot \alpha$ $\cot (270-\alpha)=\operatorname{tg} \alpha$	$\sin (270+\alpha)=-\cos \alpha$ $\cos (270+\alpha)=\sin \alpha$ $\operatorname{tg}(270+\alpha)=-\cot \alpha$ $\cot (270+\alpha)=-\operatorname{tg} \alpha$
$\sin (360-\alpha)=-\sin \alpha$ $\cos (360-\alpha)=\cos \alpha$ $\operatorname{tg}(360-\alpha)=-\operatorname{tg} \alpha$ $\cot (360-\alpha)=-\cot \alpha$	$\sin (360+\alpha)=\sin \alpha$ $\cos (360+\alpha)=\cos \alpha$ $\operatorname{tg}(360+\alpha)=\operatorname{tg} \alpha$ $\cot (360+\alpha)=\cot \alpha$

szögek egybevágók, de helyzetük alapvonalainkhoz képest eltérő: vetületből ismételten vetítő egyenes lesz, vetítő egyenesből pedig vetület, s ez egyúttal azt jelenti, hogy az α szög cosinusa fogja esetleg a 90° többszörösével eltérő szög sinusának értékét megadni.

Ezek az összefüggések bonyolultaknak látszanak, pedig csak nagy számuk zavar. Ezen legkönnyebben úgy lehet segíteni, ha az olvasó levezeti a táblázatban összefoglalt összefüggéseket mind, vagy legalább néhányat. E közben természetesen az előjelekre gondosan kell ügyelni: például ha a vetület és a vetítő sugár egyaránt negatív, akkor viszonyuk feltétlenül pozitív!

A szögfüggvények értékét táblázatokból vehetjük ki. Nemcsak olyan táblázatok vannak, amelyek a szögekhez tartozó szögfüggvények értékét megadják, hanem olyanok is, amelyekből ezeknek a szögfüggvényeknek a logaritmusa közvetlenül kiolvasható. Sőt ezek az utóbbiak a pontosabbak, minthogy szögfüggvényekkel logaritmusok nélkül csak a leg-ritkább esetben szokás dolgozni.

Ha a szögfüggvények értékéről tájékozódni akarunk, akkor egy már ismert, jól bevált fogáshoz kell folyamodnunk. Válasszuk a kör sugarát az egységnek — ezt annál inkább megtehetjük, mert a sugár hosszáról eddig semmilyen feltevésünk sem volt — s lássuk, mi ennek az előnye. Szögfüggvényeinket most oly módon fogjuk az egység sugarú körbe — az egységgörbe — berajzolni, hogy a szögfüggvényeket adó törtek nevezője mindenkor az egység legyen.



96. ábra.

Ennek az lesz a következménye, hogy a számláló és a rajzon a neki megfelelő vonaldarab közvetlenül megadja a szögfüggvény értékét. Tehát a sinust és a cosinust oly módon rajzoljuk a körbe, hogy az egységnyi sugár az átfogó legyen, a tangens és cotangens esetében pedig a megfelelő befogó (a vetület vagy a vetítő egyenes). Ha a 96. ábra képeit szemügyre vesszük, világosan láthatjuk a fenti összefüggéseket. S ha az ábrán látható háromszögekre Pythagoras tételét alkalmazzuk, újabb összefüggéseket találhatunk a szögfüggvények közt. Ha pl. az első ábrára alkalmazzuk Pythagoras tételét: $q^2 + p^2 = 1$, mivel $q = \sin a$ és $p = \cos a$ igaz, hogy $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$. Most már minden eszköz a kezünkben van, hogy a szögfüggvényeket egymással kifejezhessük. Ezt mutatja összefoglalón az alábbi táblázat. Befejezésül említsük meg még a

$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$ $= \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}$	$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$ $= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$ $= \frac{\cot a}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}$
$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}$ $= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}$ $= \frac{1}{\cot a}$	$\cot a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a}$ $= \frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}$ $= \frac{1}{\operatorname{tg} a}$

negatív szögek függvényeit. Előve megállapodtunk, hogy a sugarat oly módon forgatjuk, hogy a forgásirány az óramutatóéval ellenkező legyen. Hallgatólag ezt tekintettük pozitív szögnek. Ebből szükségképpen adódik, hogy azok a szögek, amelyek a mozgó szár ellenkező irányú forgásával

adódnak, negatívak. Ezeknek függvényeiről is első, nagy táblázatunk ad felvilágosítást, mivel tudjuk, hogy a mozgó szár 360° befutása után ugyanarra helyre kerül, ahonnan elindult, tehát valamennyi szögfüggvény ugyanazt az értéket veszi fel. Ezek szerint $\sin(-\alpha) = \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$, amint a táblázatból kiolvashatjuk.

Foglaljuk még össze néhány nevezetesebb szög szögfüggvényeinek számértékét.

	Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens
$\alpha = 0^\circ$	0	1,00000	0	$+\infty$
$\alpha = 10^\circ$	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128
$\alpha = 30^\circ$	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205
$\alpha = 45^\circ$	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000
$\alpha = 57^\circ$	0,83867	0,54464	1,53987	0,64941
$\alpha = 60^\circ$	0,86603	0,50000	1,73205	0,57735
$\alpha = 79^\circ$	0,98163	0,19081	5,14455	0,19438
$\alpha = 90^\circ$	1,00000	0	$+\infty$	0

HUSZONÖTÖDIK FEJEZET.

A derékszögű háromszög trigonometriai megoldása.

Legutóbbi táblázatunkban felfedezhetnénk sinus és cosinus, tangens és cotangens között fennálló szimmetrikus vonatkozásokat, habár ezekre már előbb, rajzaink alapján is rájöhettünk volna. Foglalkozhatnánk azzal is, hogy az össze-foglalt számértékek meghatározása miként történt, s ez sem volna nagyon nehéz feladat. Mi azonban inkább szerzett tudományunk alkalmazásának módját szeretnők tanulmányozni, vagyis hogy a derékszögű háromszög megadott alkatrészeiből miként lehet a hiányzókat kiszámítani. Erre szolgálnak a derékszögű háromszögre vonatkozó úgynevezett trigonometriai alapképletek.

1. Egy a, b, c oldalú derékszögű háromszögben $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ és $\sin \beta = \frac{b}{c}$, tehát $a = c \cdot \sin \alpha$ és $b = c \cdot \sin \beta$.¹

2. Mivel $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ és $\cos \beta = \frac{a}{c}$, következik, hogy $b = c \cdot \cos \alpha$ és $a = c \cdot \cos \beta$.

3. Mivel $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$ és $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, következik, hogy $b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$ és $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

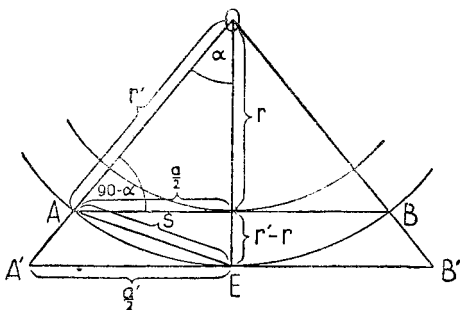
4. $a^2 + b^2 = c^2$. (Pythagoras tétele.)

Több alapegyenlet nem lehet, ezekkel viszont a derékszögű háromszögre vonatkozó valamennyi feladatot meg tudjuk oldani, ha a megoldás egyáltalán lehetséges, vagyis ha kellő számú adat áll rendelkezésünkre. Minthogy a derékszöveget ismerjük, még két adat ismerete már meghatározza a derékszögű háromszöveget, ha a kettő közül legalább az egyik oldal.

Világos, hogy tudásunk most már nem korlátozódik csupán a derékszögű háromszögre, hanem minden olyan idom adatait meghatározhatjuk számítás útján, amely derékszögű háromszögekre bontható. Boldogulunk már az egyenlőszárú háromszöggel és a rombuszal, sőt az általános háromszöggel is, ha történetesen ismerjük a magasságát. Ugyanígy a négyszetekkel és téglalapokkal is, átlóikkal, továbbá a szabályos sokszögekkel. Most már számos gyakorlati feladatot is meg tudunk oldani: távolságmérőnkön egyetlen szögmérést kell csak végeznünk, hogy a bója távolságát meghatározhassuk. Ha figyelőhelyünk magasságát ismerjük, tangens függvény-nyel meghatározhatjuk a bója távolságát.

Lássunk még egy példát. Kérdés: mekkora egy a oldal-hosszúságú szabályos n oldalú sokszögbe beírt és mekkora a sokszög köré írt kör sugara, továbbá mekkora a körülírt kör köré írható szabályos n oldalú sokszög oldala.

¹ A szokásos jelölési mód szerint α és β mindenkor egymással szemben fekvő alkotórészek. A c , az átfogó, természetesen mindenkor a derékszöggel szemben fekszik.



97. ábra.

Elhatározzuk, hogy lehetőleg nem alkalmazunk rekurzív eljárást: vagyis nem használjuk fel a már kiszámított eredményeket, hanem mindenkor az eredeti adatokból indulunk ki. A képen látható derékszögű háromszögben ismerjük az

$\frac{a}{2}$ oldalt. Mit még? Rejtve megkaptuk az α szöget is. Hisz

e nélkül tovább sem tudnánk jutni. Az α szög a sokszög szabályosságából adódik. A beírt és körülírt kör közös középpontjában a szögek összege 360° , egy-egy sokszögeikre tehát ennek n -ed része jut, ha a sokszög csücspontjaihoz tartozó r' sugarakat meghúztam. Az α szög viszont az előbbinek a fele, tehát $\alpha = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$. Most $\sin \alpha = \frac{a}{2} : r'$ és

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} : r$. Így azonnal megkaphatom a keresett r és r

darabokat. Mert $\sin \alpha = \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2r'}$; tehát

$$2r' \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} = a \quad \text{és} \quad r' = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}}.$$

Továbbá

$$\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2r}, \quad \text{így} \quad 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = a \quad \text{és} \quad r = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

Így tehát feladatunk teljes megoldásához már csak az a' meghatározása hiányzik. Itt már fel kell adnunk szigorú elveinket és az eddigi eredményeket is fel kell használnunk, mert hiába húzzuk meg az s segédegyenest és hiába tudjuk az $AA'E$ háromszög szögeit meghatározni, a ferdeszögű háromszög megoldását még nem ismerjük. Így tehát az egész $OA'E$ háromszögből indulunk ki, amelynek a' befogója, $\frac{a}{2}$ pedig szöge. Hozzávehetjük még a már kiszámított másik befogót, az r' -et. Ezekből az adatokból:

$$\frac{a'}{2} : r' = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \text{ tehát}$$

$$\frac{a'}{2} = r' \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \text{ és } a' = 2r' \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}. \text{ De } r' = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}},$$

$$\text{ezt felhasználva } a' = 2 \cdot \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} =$$

$$= \frac{a}{\sin \frac{180^\circ}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\cos \frac{180^\circ}{n}} = \frac{a}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$$

Sajnos, nem szaporíthatjuk példáink számát, de hirtelen kedvünk kerekedett, hogy oldalakból szögeket számítsunk ki. S feltesszük a kérdést, hogy annak idején az erkélyen vajjon milyen szög alatt láttuk a világító bóját? Ismerjük annak a derékszögű háromszögnek, amelyről akkor szó volt, két befogóját. Ugyanis $M=37.49$ és $T=464.88$ méter. Befogókból tangens és cotangens segítségével számolhatunk. Válaszszuk most változatosság kedvéért a cotangenst. Tehát $\cot \alpha = T : M = 464.88 : 37.49$. Logaritmussal fogunk számolni,¹

¹ A logaritmusok használatára vonatkozóan ismét csak a minden logaritmus táblában található használati utasításra utalhatunk. Itt csak azt jegyezzük meg, hogy a táblázatok a trigonometriai függvények logarit-

tehát logcot $\alpha = \log 464.88 - \log 37.49 = 2.66734 - 1.57392 = 1.09342$. Tehát logcot $\alpha = 11.09342 - 10$. Ha a táblázatban megkeressük az ennek megfelelő szöget, $4^\circ 36'$ és $4^\circ 37'$ közötti értéket kapunk, amivel meg kell elégednünk, hiszen alapvető méréseink nagyon pontatlanok voltak. (Ez a számítás végeredményként $4^\circ 36' 38''$ értéket adna.) Tehát az α nagysága körülbelül $4\frac{1}{2}^\circ$.

HUSZONHATODIK FEJEZET.

A ferdeszögű síkháromszög trigonometriai megoldása.

Most, hogy már minden gátlás nélkül mozgunk a trigonometria területén, vessünk talán egy pillantást tudományágunk történetére is. Nagyon régi tudomány ez, hisz mindenkor fontos segédeszköze volt a csillagászatnak. Már a régi egyiptomiak, babiloniak, asszírok és indusok több-kevesebb ismeret birtokában voltak. A régi görögök a nicæai Hipparchost emlegetik a trigonometria feltalálójaként (a Kr. e. 160—125 körüli időből). De csak az alexandriai Ptolemaios műve, a Megalé Syntaxis, másképp «Almagest» (Kr. u. 125—140 körül) terjesztette el a trigonometriai ismereteket az akkori művelt világban. (Ez volt az a Ptolemaios, akinek a világmépét egészen Kopernikus és Gallilei működéséig helyesnek tartották.) Ptolemaios főművét az arabok lefordították nyelvükre és ők nevezték Almagestnek. A fordítás Kr. u. 827 táján készült. Különösen hangzik manapság, hogy a bizánci császárságot legyőző bagdadi kalifátus egyik legfőbb békefeltétele egykor a Megalé Syntaxis egy példányának kiszolgáltatása volt. A Hohenstaufen-házból származó II. Frigyes német-római császár uralkodása alatt fordították le latinra az Almagestet és Kopernikusig és Keplerig a

musainak 10-zel növelt értékeit tartalmazták, értékükből tehát mindenkor levonandó 10. Ennek az a célja, hogy a táblázat a többnyire fellépő negatív karakterisztikát nagyobb helypocsékolás nélkül tartalmazhassa, mert ezt, ha nem ismerjük a függvény számértékét, a szög alapján nem tudjuk meghatározni.

trigonometriai tudásnak fő forrása maradt. Az ő idejünkben kezdődött a trigonometria nyugati, magasfokú fejlődése. Ma már bizvást állíthatjuk, a trigonometria a matematikának úgyszólván teljesen lezárt része, s már aligha várható területén meglepő újítás. Különbféle nevű szögmérő műszereinkkel elképzelhetetlen pontossággal tudjuk a földi és égi szögeket mérni. S említsük meg még azt is, hogy egy-egy csillagászati szögmérés alkalmával néhány száz hibaforrás hatását veszik figyelembe és küszöbölik ki, a lehetőséghez képest.

De mi szerények maradunk és nem kalandozunk olyan területre, amelynek megismeréséhez elkerülhetetlenül szükséges több évi tanulmány. Meg fogunk elégedni azzal, ha a ferdeszögű háromszögre vonatkozó trigonometriai törvényeket nagyjából megismerjük. Hisz nem akarjuk, hogy örökké csak derékszögű háromszög használatára legyünk utalva. Természetesen nem nélkülözhetjük őket, mert a ferdeszögű háromszög törvényeit csak a derékszögű háromszögek segítségével vezethetjük le. Csak arra kell törekednünk, hogy a derékszögű háromszöget, mert csak segédeszköz, a kellő pillanatban kiküszöböljük és eltüntessük.

A ferdeszögű háromszögre is csak kisszámú alapegyenletet állíthatunk fel. Ezek a kongruencia feltételeinek felelnek meg. Itt is három adatot kell ismernünk, hogy belőlük a többi kiszámíthatassuk. Ha az SOS vagy az OoS kongruenciátételnek megfelelő trigonometriai egyenletet keresünk, akkor olyan összefüggést kell keresnünk, amely két oldalt és két szögnek valamilyen függvényét tartalmazza. Ha ezek közül hármat ismerünk, a negyedik kiszámítható.

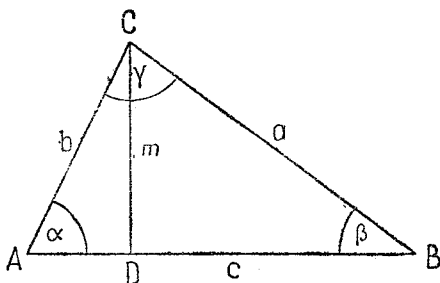
Követelményünknek az úgynevezett sinustétel felel meg, amely szerint minden háromszögben az oldalak aránya egyenlő a szemben fekvő szögek sinusainak arányával. Tehát

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Természetesen ezt az aránylatot részeire is bonthatjuk:

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta ; a : c = \sin \alpha : \sin \gamma \text{ és } b : c = \sin \beta : \sin \gamma$$

s ezek bármelyikével három ismert adatból a negyedik kiszámítható.



98. ábra.

Bizonyításul húzzuk meg a CD magasságot. Mivel $m : a = \sin \beta$, tehát $m = a \cdot \sin \beta$. Az m magasság azonban az ACD háromszöghöz is tartozik, s abból $m : b = \sin \alpha$, tehát $m = b \cdot \sin \alpha$. Ebből következik, hogy $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$, vagyis $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$. Ha a másik két magasságot húzzuk meg, megkapjuk a másik két egyenlőséget. Ezek az aránylatok így is írhatók:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}; \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ és } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\text{vagyis } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

és ezzel az $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ helyessége is bebizonyult. Az előbbi állandó érték — az oldal osztva a vele szemben fekvő szög sinusával — mint könnyen bizonyítható, a háromszög köré írt kör sugarát adja, s ebből ismét sok következtetést vonhatnánk le.

Ha most a második trigonometriai alapegyenletet keressük, azt, amely az OSO tételnek felel meg, akkor előre kell bocsátanunk, hogy a következő összefüggés magától értetődő: Ha ismerjük a háromszög egyik szögét, akkor azonnal meg tudjuk határozni a másik két szög összegének a felét.

Ha az α az ismert szög, akkor $\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ha most valahogyan meg tudnók határozni e két szög különbségének

a felét is, $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ akkor a β és γ szögeket is kiszámíthatnók (hisz két egyenletünk lenne két ismeretlennel), ezek felhasználásával pedig már a harmadik oldalt is meghatározhatnók. Ezt a célt a tangens tétellel érhetjük el. A tangens tétel szerint a háromszög két oldalának az összege úgy aránylik a két oldal különbségéhez, mint az oldalakkal szemben fekvő szögek összegének fele ugyanazon szögek különbségének a feléhez.

E tétel bizonyítása a sinustételből kiindulva egyszerű számítással adódik. Minthogy $a:b=\sin\alpha:\sin\beta$, az aránylatok szabályai szerint a következő is helyes:

$$(a+b):(a-b)=(\sin\alpha+\sin\beta):(\sin\alpha-\sin\beta).$$

De goniometriai levezetéssel bizonyítható volna, hogy két szög sinusának összege úgy aránylik a két szög sinusának különbségéhez, mint a szögek félösszegének tangense a szögek félkülönbségének tangenséhez. Ezt felhasználva kapjuk a tangenstételt:

$$(a+b):(a-b)=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right):\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

s ennek segítségével is meg tudunk oldani sok feladatot.¹

A kongruencia-tételek közül már csak az OOO tétel van hátra. A szögeket most csakis oldalak segítségével kell kifejeznünk. Az e célból felállítandó egyenleteinkben tehát csak egy szög szerepelhet, mivel ismertnek a három oldalt tekintjük, az egyenletben szerepelniök kell. Ezt a feladatot oldja meg a cosinus tétel: Egy háromszög bármely oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből e két oldalnak s az általuk bezárt szög cosinusának kétszeres szorzatát levonjuk.

Bizonyítása a Pythagoras tételből indul ki. A sinustétel bizonyításához használt 98. ábra jelöléseit alkalmazva, $a^2=m^2+BD^2$. De $m=b\sin\alpha$ és $BD=c-AD=c-b\cos\alpha$. Tehát, az első egyenletbe behelyettesítve

¹ Meghatározhatnók először a következőkben tárgyalandó cosinus-tétellel a harmadik oldalt, majd ezzel az oldallal, a sinus-tételt alkalmazva a szögeket. De, mint látni fogjuk, a tangens tétel használata kényelmesebb, mert a cosinustétel logaritmussal való számolásra alkalmatlan. (A ford.)

$$a^2 = b^2 \sin^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2 = b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

De mint tudjuk, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ezért (a tagok sorrendjét megváltoztatva)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Ugyanígy kapjuk a másik két oldalra :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \text{ és}$$

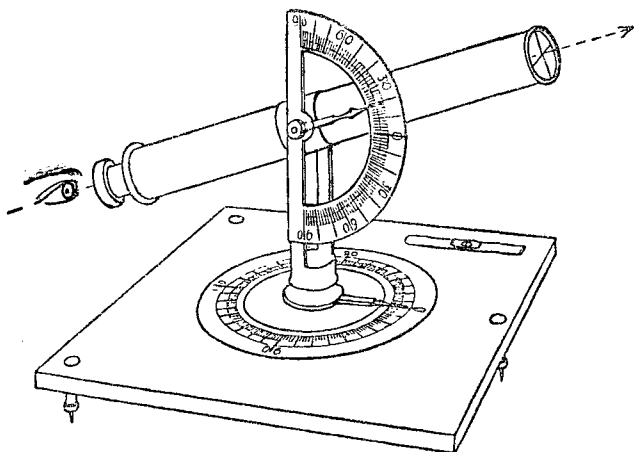
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

A cosinus tételt bizonyos szempontokból a Pythagoras-tétel általánosításának is tekinthetjük, mert ha a szögek egyike derékszög, akkor cosinusa nulla, s a megfelelő egyenletből Pythagoras tétele lesz.

Ezzel befejeztük a síkháromszögtant áttekintő tervezett tanulmányunkat. Azonban bemutatunk még néhány nagyon jellemző gyakorlati feladatot, amelyeknek megoldása megkívánja a ferdeszögű háromszög megoldásának ismeretét. Először azonban ismerkedjünk meg, ha nagyon felületesen is, a földmérő, a gyakorlati «geometra» szerszámaival. Távol-ságok mérésére mérőszalagok szolgálnak, ezek rendszerint acélból készülnek. Nagyobb távolságokat, természetesen lehetőleg nemtáguló, acélhúrokkal is szokás mérni, sőt optikai eszközök is állnak e célra rendelkezésre ; kisebbeket viszont mérőrudakkal is mérhetünk. Ez utóbbiak elsősorban nem túlságosan nagy magasságok mérésére szolgálhatnak.

Szögmérő műszerünk a teodolit. Lényege — hisz nem akarunk szerkezetének megismerésébe túlságosan elmerülni — távcső, amelynek belsejében, egyik lencse előtt fonálkereszt van ; a távcső mind vízszintes, mind függőleges tengely körül forgatható. Mindkét elfordulás mértéke körskálán leolvasható. Tehát mind vízszintes, mind függőleges síkban mérhetünk vele szöget. Beállítását és úgynevezett kiigazítását segédeszközök egész sora teszi lehetővé, amelyek közt a sokféle vízmérték, libella, a legfontosabb. Háromlábú állványra szerelhető és úgynevezett talpcsavarok segítségével még ennek az állványnak a felső lapján is állítható. Pontra állítását függőön segítségével végezzük.

A mérés eszközünkkel, elvben, úgy történik, hogy műszerünket felállítjuk, — ekkor mindkét skála mutatója

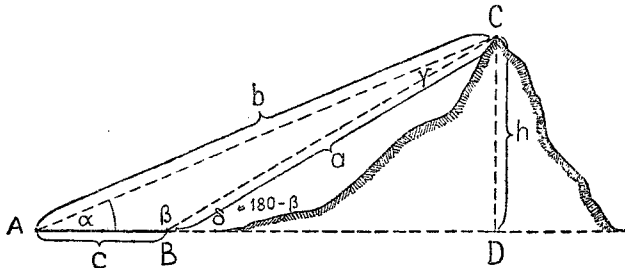


99. Ábra.

0-n áll — majd ráirányítjuk mérendő pontunkra. Az ekkor leolvasható szögeket feljegyezzük. Gyakorlatban, mint látni fogjuk, rendszeren két kijelölt pont között levő szöget kell lemérnünk, geometriai jelentése ennek két háromszögoldal bezárta szög. Ebben az esetben először az egyikhez, majd a másikhoz tartozó szöget olvassuk le és a két leolvasás különbsége, esetleg összege adja a keresett szöget. De ehhez tulajdonképpen nekünk semmi közünk.

Teodolittal és mérőszalaggal felszerelve azt a feladatot tűzzük magunk elé, hogy meghatározzuk egy megközelíthetetlen hegy magasságát.

Számításunk egyáltalán nem bonyolult. Először kitűzzük vízszintes alapvonalunkat (AB), oly módon, hogy meghosszabbítása a megméréndő hegycsúcs talppontján (D) menjen keresztül és mérőszalaggal megmérjük az alapvonal hosszát (c). Teodolitunkkal most felállunk az A , majd a B pontban és így lemérhetjük az α és a β , illetőleg δ szöget. A h keresendő, a δ ismert, s így ahhoz, hogy a BGD derékszögű háromszögből számolni tudjunk, ki kell számítanunk az

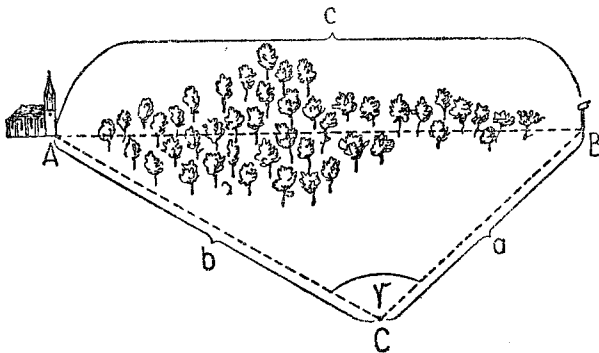


100. ábra.

a távolságot. Ezt azonban az ABC háromszögből a sinus-tétel segítségével megkaphatjuk. Fennáll a következő aránylat: $a:c = \sin \alpha : \sin \gamma$ tehát $a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$. De $\frac{h}{a} = \sin \delta$ és $h = a \sin \delta$, így végül

$$h = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} \sin \delta.$$

Az alkalmazott trigonometriának másik klasszikus feladata két pont egymástól való távolságát meghatározni abban az esetben, ha a közvetlen mérést valamilyen akadály, mondjuk erdő, lehetetlenné teszi.



101. ábra.

A mérés elvégzésére keressünk olyan harmadik pontot (C), ahonnan a keresett távolság mindkét végpontja, a templom (A) és az útjelző tábla (B) egyaránt jól látható. Le kell mérnünk mérőszalaggal a BC és AC távolságokat, majd a műszerrel a γ szöget.

Most a tangenstétellel számolhatunk:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}, \text{ tehát } \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Mivel pedig $\alpha+\beta=180^\circ-\gamma$, így $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$, továbbá

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right) = \cot \frac{\gamma}{2}. \text{ Ebből következik, hogy}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{\gamma}{2}. \text{ Az } a, b \text{ és } \gamma \text{ ismeretében ismerjük}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ értékét és kiszámíthatjuk } \frac{\alpha-\beta}{2} \text{-ét is, ebből pedig}$$

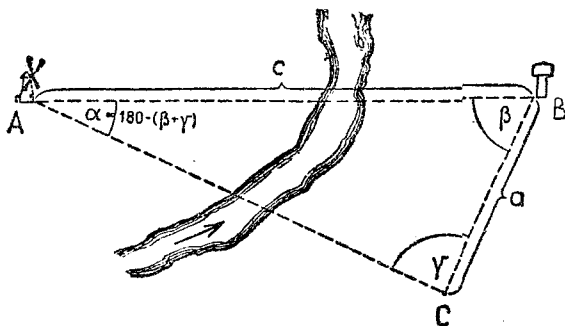
$$\alpha = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \text{ és } \beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Most már ismert a , b , α , β és γ tehát sinustétellel a c is kiszámítható.¹

Még egyszerűbb a számítás, ha két olyan pont távolságát keressük, amelyek közül egyik teljesen hozzáférhetetlen.

A folyó jobb partján tartózkodunk. Keresünk egy C pontot, lemérjük a CB ($=a$) távolságot, s a teodolittal mind a B pontban mind a C pontban felállunk és megmérjük a β és γ szöget. Ezzel természetesen már az α szöget is ismerjük. ($\alpha=180^\circ-\beta-\gamma$)

¹ Ismét számolhattunk volna a cosinus tétellel is, de nem tettük, mert tudjuk, hogy az logaritmusokkal való számolásra nem alkalmas.



102. ábra.

Ismét sinustétellel számolunk. Így $a : c = \sin a : \sin \gamma$, vagyis $a : c = \sin (180 - \beta - \gamma) : \sin \gamma$. De korábbi táblázatunk szerint $\sin [180^\circ - (\beta + \gamma)] = \sin (\beta + \gamma)$ s így a végeredmény:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

Utolsó megjegyzésként említjük meg, hogy képletek egész sorát vezették le, csakis arra a célra, hogy a logaritmusokkal való számolást megkönnyítsék. De valamennyi csak az általunk felírt alapegyenletek többé-kevésbé átalakított formája. Alapegyenleteink teljesen elegendők a trigonometria elemeinek megismerésére, hisz ügyes számoló minden feladatot meg tud oldani velük, igaz, hogy sokszor kerülő úton és nagyobb számolási nehézséggel, mintha a trigonometriát alaposan ismerné.

HUSZONHETEDIK FEJEZET.

Koordináták, görbék egyenlete és függvények.

Most amikor már van némi sejtelmünk a trigonometriáról, a geometriának alapjában véve új területét kezdjük tanulmányozni, az úgynevezett analitikus vagy koordináta geometriát. A geometriának ez a része függ legszorosabban

össze az aritmetikával, a határok már szinte elmosódnak, és az aritmetika minden kifinomult eszköze a geometria szolgálatába áll. Sőt az úgy nevezett felsőbb matematika, a differenciál és integrálszámítás is itt függ legszorosabban össze a geometriával, úgyszólván a koordináta geometriából nő ki.

Minden okunk megvan tehát, hogy lehetőleg behatóan foglalkozzunk a geometria eme ágával.

Ha a matematika történetét tekintjük, akkor a projektív és nem-euklidesi geometriákat megelőző utolsó nagyjelentőségű felfedezése ez a geometriánk. Első nyomait ugyan a pergaeai Apollonius és Archimedes idejébe helyezik, de csak a szakember fedezhet fel hasonlóságot az ő munkásságuk és a ma analitikus geometriának nevezett tudományág között. Nagyobb már a hasonlóság oresmesi Nicole pontmeghatározása és a koordináták közt. De mi kitarthatunk azon véleményünk mellett, hogy számunkra az analitikus geometria kezdetét René Descartes és Fermat munkássága jelenti, akik nemcsak az elemeit teremtték meg eme tudománynak, hanem azt már jelentős mértékben ki is fejlesztették. Nem jogosulatlan tehát az analitikus geometria nevét Descartes-tal kapcsolthba hozni azáltal, hogy a koordinátarendszerek egyik fajtáját Cartesius-féle koordinátáknak nevezzük. Hogy ezzel Fermattal szemben igaztalanul járunk el, az már a tudománytörténet más lapjára tartozik.

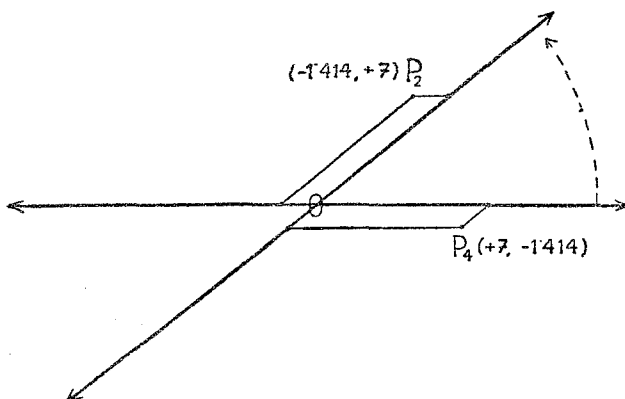
Az analitikus geometriát koordináta-geometriának is neveztük. Valóban a koordináták adják az egész analitikus geometriának a vázát, a kapcsolatot szám és méret közt. Maga a koordináta szó viszont se Descartesnál, sem Fermatnál még nem fordul elő, ez is Leibniznek egyik szerencsés szóalkotása: ő használta először az «Acta eruditorum»-ban. Mik is ezek az «egymáshoz rendelt» egyenesek?

Már az axiómákkal kapcsolatos tanulmányaink során bebizonyult, hogy számok és méretek közt kölcsönös és egyértelmű vonatkozás lehetősége áll fönn. Tehát bármikor alkalmazhatunk számok helyett távolságokat s távolságok helyett számokat. Ezt a szabadságunkat most jól felhasználhatjuk analitikai terünk felépítésére. Kezdjük egy R_1 -gyel, egy egyenessel. Jelöljük meg rajta az O kezdőpontot

(«0»-rigo=kezdet) s ekkor minden valós számnak helyet tudunk juttatni az egyenesen. Határozzuk el, — teljesen önkényesen, — hogy a pozitív számoknak az egyenes jobb oldalán adunk helyet, a negatívaknak a baloldalán. Megjegyezzük, minden valós számnak jut hely, jut pont az egyenesen és valamennyi számra szükségünk van, hogy a folytonos, szakadás nélküli egyenes minden pontjához tudjunk számot rendelni. Ez volna a legelemibb, vonalszerű «koordináta rendszerünk», a számvonal.

Ha fentieket jól megfontoltuk, akkor a továbbiak már nagyon egyszerűen és könnyen érthetőek lesznek.

Tegyük fel, hogy számegyenesünket a O pont körül kiforgatjuk eredeti helyzetéből és valahol eredeti helyzetével



103. ábra.

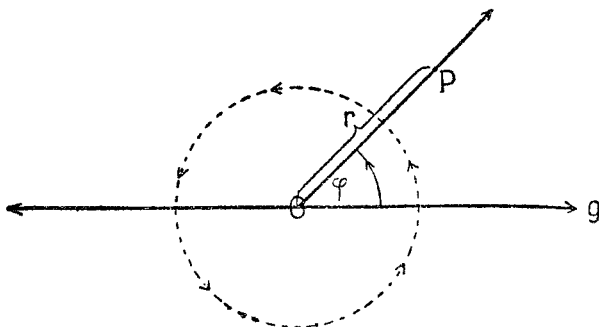
bizonyos szöget bezáró helyzetben állva hagyjuk. Ez esetben világos, hogy minden számértéket kétszer tudunk a síkon megtalálni. De többször nem. Így például a $(+7)$ érték előfordul egyszer a O -tól jobbra, egyszer pedig a O fölött, ha a pozitívnek tekintendő forgatás iránya az óramutató járásával ellenkező volt. A $-\sqrt{2} = -1.414 \dots$ szám szintén csak kétszer található. Egyszer a O -tól balra, egyszer pedig alatta. Módunk van tehát az egyik tengely valamilyen számát és a

másik tengely bármelyik számát egymással valamilyen összefüggésbe hozni, számpárokat alkothatunk, anélkül, hogy ismétlődéstől kellene tartanunk. A fenti két számból a $(+7, -1.414...)$ és a $(-1.414..., +7)$ számpárok alkothatók, s a kettő egyáltalán nem azonos, miként arról egykönnyen meg is győződhetünk.

De hová tegyük számpárjainkat? Gondolkozzunk egy kicsikét. Minden számpárnak részesednie kell az egyes számok irányában és nagyságában. Tehát minden számpárhoz pontot rendelünk és a hozzájuk rendelt pontnak kell tartalmaznia mindkét számnak a jellegét. Ezt oly módon érhetjük el, hogy pontunkat olyan egyenesek metszéspontjának tekintjük, amelyek a tengelyektől a megadott távolságra vannak. Az ilyen koordinátákat, minthogy pontokat határoznak meg, pontkoordinátáknak is nevezik. Ha most az egyik tengely valamennyi számát a másik tengely számaival összefűzzük, akkor az így adódó számpároknak megfelelő pontok teljesen kitöltik a síkot, egyértelműen és teljesen. Sehol sem marad köz, tehát a síknak, az R_2 -nek koordinátarendszerét adta meg eljárásunk. S ha a 0 pontból kiemelkednék egy harmadik tengely, tetszésszerűen szög alatt, akkor lehetővé válnék három számot összekapcsolni számhármassokká. S az e számokhoz rendelt pontok az R_3 -at töltenék ki teljesen és folytonosan. Ezzel megkapnók az úgynevezett térbeli koordinátarendszert. Észrevehetjük immár, hogy pontkoordináták esetén az egy ponthoz rendelhető számok száma megadja amaz R_n dimenzióinak a számát, amelyben a koordinátarendszer fekszik. Az R_1 pontjait magukban álló számok határozzák meg, az R_2 pontjait számpárok, az R_3 -ét számhármassok.

Számtalan különböző módon alkothatunk koordinátarendszert, ha tekintetbe vesszük, hogy a tér és a sík folytonossága következtében minden tengelyen szabadon választhatjuk meg az egység nagyságát. Szokásos is az ilyen eltérő egységmegválasztás: napilapok, folyóiratok grafikonjait szemlélve mindenki találkozott már ilyenekkel. De más rendszerek is lehetségesek. A mi rendszerünk tehát, hogy egymást metsző egyenesek határozzák meg a pont helyzetét, talán a leghasználatosabb és sok szempontból igen egyszerű. De nem

mulaszthatjuk el annak megemléztését, hogy a XIX. század elején Gauss, Plücker és Grassmann a koordináták fogalmát nagy mértékben kiterjesztette, ugyanannyira, hogy szokás Gauss-féle, Plücker-féle koordinátákról is beszélni. Vannak például háromszögkoordináták, ahol a számsokaság már egyáltalán nem jellemző az őt magában foglaló tér dimenziójának számára, mivel ezeknél az R_2 -ben egy ponthoz három számot rendelhetünk, a neki az R_3 -ban megfelelő tetraederkoordináták esetén pedig pontonként négyet. Ezeknél a számok számossága és a dimenziók száma között fennálló összefüggést kell megváltoztatnunk, vagy pedig — amint néhány matematikus meg is teszi — a síkot kell háromdimenziósnak, a közönséges teret pedig négydimenziósnak tekintenünk. Ez utóbbit azonban a magunk számára nem tartjuk előnyösnek, nem is fogunk vele foglalkozni. Említhetjük még a kör-, kúp- és gömbkoordinátákat is. De van még egy, számunkra sokkal fontosabb koordinátarendszer-típus is. Ennek legegyszerűbb esete az úgynevezett távolság-szög vagy más néven poláris koordinátarendszer. Ez a rendszer igen alkalmas csavarodó, spirális vonalak, görbék vizsgálatára. Az R_1 -ben természetesen nem létezhet, ott nem beszélhetünk szögről. A szög létezésének nélkülözhetetlen feltétele a két szabadsági fok: a két dimenzió. Az R_2 -ben a poláris vagy még másképpen sark-koordináták már minden nehézség nélkül elképzelhetők. Ezeknél a sík minden pontjához egy



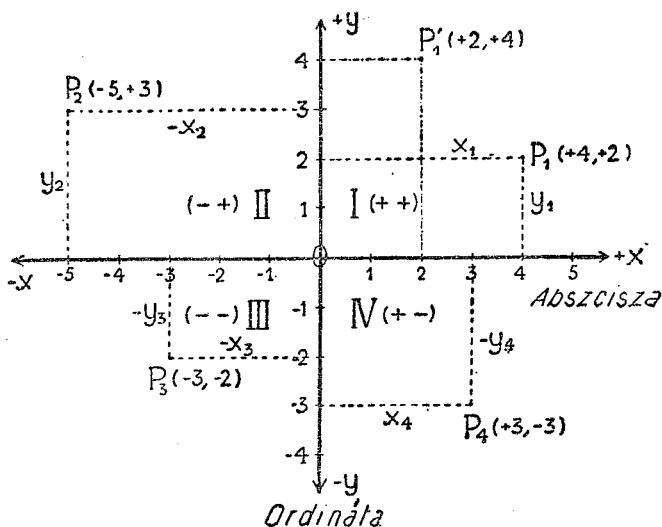
104. ábra.

távolságot és egy szöget rendelünk. Ez sem más végeredményben, mint két szám, vagyis egy számpár. Csak a számok jelentésében van különbség.

A polárkoordinátarendszernek is megvan a maga kiinduló O pontja, megvan az alapvonala és megvan a számvonala. De ez utóbbi nem a tengely, hanem az úgynevezett vezetősugár, a radius-vector, a keringő sugár. Második meghatározó alkatrész a φ szög, amely megmutatja, milyen helyzetet kell a sugárnak az alapvonalhöz képest elfoglalnia. Ha a szög alapján megrajzolt sugárra felmérjük az előírt hosszát, akkor megkaptuk a keresett P pontot. Egy korlátozás ugyan marad: valamely ponthoz tartozó szögekordinátát sohasem tudjuk egyértelműen megállapítani, mert nem látható, hogy a sugár csak φ szöggel fordult-e el eredeti helyzetéből, vagy pedig 360 fok valamely többszörösével nagyobb szöggel, tehát $\varphi + 360$ fokkal vagy $\varphi + n \cdot 360$ fokkal. Egyszeri vagy többszöri 360 fokos elfordulás ugyanis ugyanabba a helyzetbe hozza a vezetősugarat.

Tanulmányaink során a két egymást metsző egyenesből álló koordinátarendszer lesz a legfontosabb. Ezek közül is az egyik. Eleinte, az általános-érvényűség megóvása kedvéért, nem tettünk semmilyen kikötést arra, hogy milyen szöggel messe egymást a két koordinátatengely. Ilyen, úgynevezett ferdeszögű koordinátarendszerben is elvégezhető minden művelet, csak a két tengely hajlásszögét mindenkor figyelembe kell vennünk, s ez egyáltalán nem mondható kényelmesnek. Egyszerűbb egymásra merőleges koordinátatengelyek használata. A derékszögű, Cartesius-féle koordinátarendszer jelentősége éppen ez, habár nem megvetendő előnye a síknegyedek egyenlőségéből következő szimmetria sem. Nem hallgathatjuk el azonban, hogy maga Cartesius (Descartes) is ismerte és használta a ferdeszögű koordinátarendszereket is, tehát a Cartesius-féle koordinátarendszer elnevezés nem teljesen jogosult; azt sem tagadhatjuk, hogy vannak olyan esetek is, amikor a megfelelően választott ferdeszögű rendszernek különleges előnyei lehetnek.

De ezt is csak érinteni akartuk. Most, kezdetben éppen elég bajunk lesz, ha egy derékszögű rendszerben jól akarunk mozogni tudni, még akkor is, ha tanulmányainkat a síkra



105. ábra.

korlátozzuk. Előbb azonban még egy ábra kapcsán meg kell ismernünk a használatos elnevezéseket. (105. ábra.)

A képből tulajdonképpen minden kiderül. De ismételjük szavakkal is. Mindazt, amit a képen látunk, együttvéve derékszögű koordinátarendszernek nevezik. O a nullapont, a kezdőpont, szinte azt képzelhetnők, hogy a koordinátatengelyek ebből a pontból nőnek ki. «Koordináták» szó hallatára általában a két tengelyre szokás gondolni, pedig helyesebb, ha valamely pontnak a tengelyektől mért két távolsága lebeg szemünk előtt. A tengelyeket koordinátatengelyeknek nevezik, a vízszintes az abszcissza tengely, a függőleges pedig az ordinát tengely. A megfelelő tengellyel párhuzamosan mért távolságok az abszcisszák, illetőleg ordináták. A helyzet és az elnevezés természetesen nem jellemző tulajdonságai a koordinátáknak.

Egy tetszőszerinti P pont koordinátáit általában x -szel

és y -nal szoktuk jelölni. Ha a koordinátáknak a P_1, P_2, P_3, P_4 ponthoz való tartozását fel akarjuk tüntetni, akkor az x és y mellé is kiteszük a megfelelő indexet: x_1, y_1 vagy x_2, y_2 és így tovább. A tengelyeket is szokás x tengely és y tengely néven említeni. A síkot a koordinátatengelyek négy részre osztják, nevük síknegyed, vagy röviden negyed. Az óramutató járásával ellenkező irányban számozzuk meg őket, I., II., III. és IV. negyednek. Ismét hangsúlyozzuk, hogy a számozás módja és minden iránymegállapítás teljesen önkényes. A matematikában általában az x tengely jobbra futó szárát szokás pozitívnak tekinteni, a másikat negatívnak; az y tengelyen viszont felfelé mutat a pozitív irány. Természetesen más iránymeghatározás is helyes volna, amint hogy más tudományágak — így például a mechanika is — másképpen szokták a koordinátatengelyek pozitív irányát megállapítani. A negyedek számozása is történhetnék teljesen ésszerűtlen módon: jelölhetnők az I. negyedet IV-gyel és a II.-at III-mal. De ha a megszokott jelöléstől eltérnénk, csak felesleges zavart okoznánk. A matematikának ilyen szokásai, konvenciói egyáltalán nem tartalmaznak ítéletet arról, hogy mi helyes és mi helytelen. Sokkal inkább nyelvnek tekinthetjük őket: ha elhatároznók, hogy a burgonya neve mától «ribaran», az sem volna helytelen, legfeljebb érthetetlen, mert csak a könyv olvasói értenék meg és nem a több millió magyar. E példán okulva nem változtatjuk meg a koordinátarendszer elnevezéseit, inkább alkalmazkodunk az általános szokáshoz. Úgyis annyi lesz a dolgunk, hogy hamarosan elmegy a kedvünk a különleges jelölési módoktól. Ha egy pontot röviden meg akarunk jelölni, így írjuk: $P(x, y)$ vagy $P_1(x_1, y_1)$, tehát előbb jön az abszcissza és utána az ordináta. Amíg x -ről és y -ról van szó, természetesen nincs meg a tévedés lehetősége, ez a lehetőség csak akkor merül fel, ha konkrét számokat alkalmazunk. A $P_1(+4, +2)$ pont távol esik a $P_1(+2, +4)$ ponttól, miként a rajzból is könnyen kitűnik.

Ezzel most nagyjából összeszedtük azokat az alapismerteket, amelyek szükségesek, hogy a most tanult «nyelvet» alkalmazhassuk. De eddigi tudásunk csak arra jó, hogy pontokat jelölhessünk meg. Ez pedig aligha lehet az analitikus

geometriának teljes célja. Tehát szükségünk van valamilyen matematikai «szerszámmra», amelynek segítségével a többi geometriai idomot is — vonalat, felületet — leírhatjuk. Minket egyelőre csak a vonalak fognak érdekelni (az egyenesek és a különféle görbék). Miként lehet — tesszük fel a kérdést — a vonalakat matematikai úton leírni? Látszólag megoldhatatlan a probléma. De rövid meggondolás már megoldásra vezet. Azt a körülményt, hogy minden ponthoz két meghatározó adat tartozik, mindenesetre hasznunkra fordítjuk. Ezzel már a közelébe jutottunk a matematikai megoldásnak. A görbe ismeretében ugyanis minden pontjának abszcisszájához, x -éhez megtalálhatjuk a helyes ordinátát, az y -t. Persze, az R_1 -ben lényegesen egyszerűbb volna a helyzetünk; elegendő volna a pont egyértelmű meghatározásához egyetlen adat: a választott kezdőponttól mért távolság. Az R_2 természetéből fakadnak nehézségek, a mozgó pont szabadon használja ki két szabadsági fokát, él vele vagy visszaél vele, tetszése szerint. Ha úgy tetszik neki, elindulhat mondjuk, a kezdőpontból és mind az x , mind az y irányában távolodva a végtelenbe menekülhet. A következő pillanatban a végtelenből jövet az x tengely alatt bukkan fel és közeledik ismét kiindulópontjához. De ha feltételezzük, hogy csavargó pontunk nyomot hagy maga után, vagy elképzeljük, hogy megtett útját mintegy belevési a síkba, akkor ez a nyom feltétlenül vonal. A vonal minden egyes helyén tartozott a ponthoz x és y és esetleg találhatunk olyan összefüggést, amely fennáll a pont pályájának minden helyén. Legyen például pontunk mostani helyzete $P_1(+4, +2)$. Ekkor felírhatjuk, hogy most a következő összefüggés érvényes a hozzátartozó x és y közt: $y = \frac{x}{2}$. De ez az össze függés nemcsak erre az egyetlen pontra érvényes. Megfelel például az egyenlőségnek a $P_2(+2, +1)$ pont is, meg a $P_3(25, 12\cdot5)$, $P_4(-6, -8)$ pontok, sőt az $O(0, 0)$ is. Így nem sokra mennénk találmannyunkkal, viszont megeshet az is, hogy pontunk olyan pályát futott be, amelynek minden helyén érvényes a fenti egyenlőség, tehát a pálya mindama pontok geometriai helye, amelyek a fenti egyenletet kielégítik. Ezek szerint pontunk az I. és a III. síknegyedben csavaroghat, keresztülmegy a kezdő-

ponton is és mégis mindenkor kielégíti az előbbi egyenlőséget. Ha tovább folytatjuk ezt a gondolatmenetet, rájövünk, hogy elképzelésünk megfordítható, tehát valamint minden görbéhez találhatunk valamilyen, esetleg nagyon bonyolult, két ismeretlenes egyenletet, úgy minden egyenletnek is megrajzolhatjuk a megfelelő görbáját.¹

Tehát síkgörbének két változós függvény, két változós függvénynek pedig síkgörbe felel meg. Ennek elméleti alapjaival itt nem áll módunkban részletesen foglalkozni, helyünk sincs rá, utalnunk kell «Az egyszeregytől az integrálig» című könyvünkben elmondottakra vagy valamely más tankönyvre. Csak annyit említsünk meg, hogy pontunk vándorlásában a függvény az a törvényszerűség, amely a pont útvonalát megszabja. A függvény szó egyébként azt a tényt jelzi, hogy egy vagy több mennyiség változásából módunkban áll egy vagy több más mennyiség viselkedésére következtetni. Saját használatunkra (s e megszűkített meghatározást könyvünkben nem fogjuk áthágni) két változós függvény (esetleg röviden függvény) elnevezésen két mennyiség olyan összefüggését értjük, hogy az egyiknek megváltozásából a másiknak változása szükségszerűen következik.

Foglaljuk össze tehát mégegyszer: görbéhez találhatunk két változós egyenletet (függvényt); kétváltozós függvényhez megfelelő görbét. Ha az egyik változót, mondjuk az abszcisszájának megfelelő x -et változtatjuk, akkor a másik változó, az y -nak megfelelő ordináta is megváltozik. Ezzel azonban megállapítottuk a görbe keletkezésének a módját.

Ha ismét az előbbi függvényünket $\left(y = \frac{x}{2}\right)$ vesszük szemügyre és az x helyébe egymásután különféle, önkényesen választott értékeket teszünk (legyenek az értékek pl. $x=1, 2, 3, 4, 5$), akkor sorban kiadódnak a megfelelő y értékek ($y=1/2, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$). De ha az így adódó számpároknak megfelelő pontokat a papirosra összekötjük, akkor már egy további feltevessel éltünk, azzal, hogy minden két felrajzolt

¹ Teljesen általánosan ez utóbbi állításunk ugyan nem igaz, de a mi tudásunkkal aligha bukkanhatunk olyan egyenletre, amelynek görbéje nem rajzolható fel. (*A ford.*)

pont közé végtelen sok további pontot iktathatunk be. Röviden: azt tételeztük fel, hogy függvényünk folytonos, tehát görbénk is az. Ez természetesen nem igaz minden görbe esetén, megeshetik, hogy a függvény képe valahol megszakad, vannak különálló pontjai a görbén kívül; de az is lehetséges, hogy az egyébként folytonos görbe önmagát metszi, vagy csúcspontja van. Mindez figyelmeztet arra, hogy tanácsos minden függvényt folytonosság szempontjából és esetleges különleges viselkedés szempontjából is gondosan megvizsgálni, különben további következtetéseink során esetleg kellemetlen meglepetésben lehet részünk.

A matematikának rendkívül érdekes, de számunkra hozzáférhetetlenül nehéz része az úgynevezett függvény-elmélet. A matematikának ez az ága Gauss, Weierstrass és mások tanulmányai nyomán a XIX. században fejlődött ki, s ez foglalkozik a függvények folytonosságának kérdésével is. A nehézségek elkerülése céljából csakis olyan függvényekkel fogunk foglalkozni, amelyekről eleve tudjuk, hogy folytonosak, s számunkra ezzel a probléma elintézését nyert. Itt azonban meg akarjuk még a «tartomány» fogalmát is említeni. Megeshetik ugyanis, hogy valamely függvény bizonyos határok közt (mondjuk ha x nagyobb, mint m , de nem nagyobb, mint n) folytonos, e határokon kívül viszont különféle rendellenességeket mutat. A folytonossági tartományon belül ilyenkor is folytonosnak tekinthetjük a függvényt.

Sok mindent tanultunk immár, de még mindig csak nagy általánosságban mozogtunk. Szándékosan tettük, a részletes tanulmányok ezzel lényegesen könnyebbé váltak. Mégis kiragadunk most egy részletekbe vágó kérdést, még mielőtt tulajdonképpen görbékkel foglalkoztunk volna. Ez a kérdés a görbék metszéspontjának, érintőinek és aszimptotáinak kérdése. Ha két görbe metszi egymást, két görbének természetesen több metszéspontja is lehet, akkor a metszés helyén közös pontjuk van. Habár a két görbe pontjaihoz tartozó x -ek és y -ok általában különbözők, a metszéspont koordinátái szükségképpen azonosak. Ugyanez a helyzet a görbékhez tartozó egyenletben is. Az egyenleteknek megfelelő x és y értékek általában eltérnek egymástól, de lehetnek olyanok is köztük, amelyek mindkét egyenletet kielégítik. És éppen

ezek lesznek a metszéspontok s a két egyenletből alakított egyenletrendszer megoldásai a metszéspont (vagy metszéspontok) koordinátáit adják. Legyen egyik ismert összefüggésünk, egyenletünk az előbbi: $y = \frac{x}{2}$, s legyen egy másik görbe egyenlete $y = 3x + 4$, akkor a metszéspont, a közös megoldás

meghatározására a $3x + 4 = \frac{x}{2}$, azaz $6x + 8 = x$ egyenlet adódik. Ebből $x = -\frac{8}{5}$ és $y = -\frac{4}{5}$. Hasonló megfontolásokra

van alkalmunk az érintőkkel kapcsolatban. Egy görbének és egy megfelelően választott egyenesnek legalább két metszéspontja van. Ha az egyenesünket az egyik metszéspont körül forгатni kezdjük, akkor a másik metszéspontot egyik forgásirány alkalmazásával távolítjuk az elsőttől, a másikkal közelítjük hozzá. A metszéspontok addig közelednek egymáshoz, amíg találunk egy olyan helyzetet, határhelyzetet, amelyben a két metszéspont már összeesik, s ebben a helyzetben a metsző egyenes átalakult érintővé és a metszéspont érintési ponttá. Kivételek természetesen vannak: midőn nem két, hanem három vagy több pont olvad össze egy érintési ponttá, vagy az egyenes forgatása során nem egy, hanem két, sőt több határesetet találunk, vagy esetleg egyet sem, de mindez még nem tartozik ránk, meghaladja tudásunkat. Lényeges most csupán az, hogy a görbének és az érintőnek az érintési pontja közös, tehát a koordináták ugyanazok, vagyis az x és y értékek mind a görbének, mind az érintőnek az egyenletét okvetlenül kielégítik. Az aszimptoták végül olyan egyenesek, amelyekhez görbék közelednek, anélkül, hogy valahol is elérnék őket. Felfedezésük már a régi görögöket is óvatosságra intette a párhuzamosak euklidesi posztulátumával szemben, mert ha vannak olyan görbék, amelyek egymáshoz végtelenül közelednek, anélkül, hogy elérnék egymást, akkor a párhuzamosak ama meghatározása, hogy olyan egyenesek, amelyek bármeddig meghosszabbítva sem közelednek egymáshoz és éppen ezért nem metszik egymást, már nem kielégítő. Épp oly kevésbé, mint az egymást metsző egyenesek meghatározása: olyan egyenesek, amelyek egymáshoz köze-

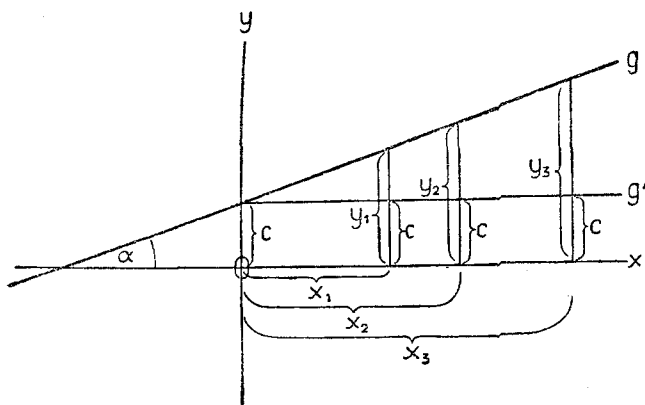
lednek, tehát metszik egymást. Az aszimptota jellegét arról ismerhetjük fel, hogy a görbe és az aszimptota ordinátáinak különbsége mindinkább csökken, ha az x növekszik. Ilyen aszimptotákkal a hiperbola tárgyalásánál fogunk találkozni és ott fogjuk őket közelebbről megismerni.

Ismételjük: az analitikus geometriában az elemi geometria tételeit ismerteknek és helyeseknek kell tekintenünk. Nem látszólagos okoskodás ez, ha fejtegetéseink során eredményként geometriai alaptételre bukkanunk. Ez az axiómáknak inkább valamilyen igazolása, visszatekintő, regresszív úton. Így tehát a hasonló háromszögekre vonatkozó tételeket, Pythagoras tételét stb. nyugodtan alkalmazhatjuk az analitikus geometria tárgyalása során is.

HUSZONNYOLCADIK FEJEZET.

Az egyenes és a kör.

Határozzuk meg először egy egyenes egyenletét. Húzzunk tehát egy derékszögű koordinátarendszerben tetszőszerinti g egyenest, amely az x tengely pozitív irányával α szöget zár be. Ha egyenesünknek és az ordinátatengelynek metszés-



106. ábra.

pontján keresztül az abszcissza tengellyel párhuzamos g' egyenest húzzuk, akkor g és g' közt is az α szög látható. A két szög szárai ugyanis párhuzamosak (sőt az egyik szár közös), tehát a szögek megfelelő szögek és így egyenlők. A g egyenes különféle pontjaiból az x tengelyre merőlegeseket húzva hasonló háromszögeket kapunk. Az így kapott háromszögek természetesen mind derékszögűek, befogóik sorban $x_1, y_1 - c$; $x_2, y_2 - c$; $x_3, y_3 - c$ és így tovább $x_n, y_n - c$. A háromszögek hasonlóságának törvényei szerint valamennyi háromszög hasonló, tehát $(y_1 - c) : x_1 = (y_2 - c) : x_2 = (y_3 - c) : x_3 = \dots = (y_n - c) : x_n$; vagyis az állandó c értékkel csökkentett ordinátáknak és az abszcisszáknak a viszonya állandó, bárhol választottuk is a pontunkat. E viszony értékét jelölhetjük is, legyen a jele a . Tehát a g egyenes minden pontjára igaz, hogy $\frac{y-c}{x} = a$. Ezt az egyenlőséget átalakítva meg-

kapjuk a függvényt: $y = ax + c$. A képen még két fontos összefüggést fedezhetünk fel. Az előbbi a valójában az α szög tangensének az értéke s meghatározza az egyenes irányát. A c értéke viszont azt mutatja meg, hogy a g egyenes hol metszi az y tengelyt. A második állításunkat ki is próbálhatjuk: az y tengely is csak egyenes, egyenlete nyilván $x = 0$, hisz ennek a feltételnek minden pontja megfelel. Messe tehát $y = ax + c$ egyenesünk az $x = 0$ egyenletű y tengelyt. A két egyenletből azonnal kiadódik a metszéspont két koordinátája: $y = c$ és $x = 0$, tehát az, amit előbb állítottunk. De jöjjünk tisztába azzal is, milyen befolyása van a c állandónak az egyenes és az x tengely metszéspontjának a helyére. Számítsuk ki. Egyenesünk egyenlete ismét $y = ax + c$, az abszcissza tengelyé pedig $y = 0$. Ebből $ax + c = 0$, vagyis $ax = -c$ és $x = -\frac{c}{a}$. Az x tengellyel való metszéspont helye

tehát a hajlásszögtől is, de a c állandótól is függ. Erre azonban úgys rájöhettünk volna, ha csak ránézünk az ábrára. Ha végül azt kívánjuk, hogy az egyenes keresztülmenjen a koordinátarendszer kezdőpontján, akkor a c értékét 0-nak kell választanunk és így az egyenes egyenlete $y = ax$. Ezt természetesen közvetlenül is levezethettük volna.

Megjegyezzük itt, hogy az a értéke itt a differenciálműveletre való utalást is lehetővé tenné, de ez most nem feladatunk és így ismét csak az «Egyszeregytől az integrálig» c. könyvre utalhatunk.

Adjunk az $y=ax+b$ egyenletünknek néhány feladatot és lássuk, hogyan működik új, analitikus gondolkodó gépünk. Keressük tehát annak az egyenesnek az egyenletét, amely keresztülmegy a $P_1(x_1, y_1)$ ponton, majd pedig azt, amely a $P_1(x_1, y_1)$ ponton és a $P_2(x_2, y_2)$ ponton is keresztülmegy.

Ha az $y=ax+b$ egyenes a P_1 ponton keresztülmegy, akkor bizonyos, hogy helyes az $y_1=ax_1+c$ egyenlőség. Ebből $c=y_1-ax_1$ és ezt az értéket az eredeti egyenletben felhasználva $y=ax+y_1-ax_1$; vagy másképp írva $y-y_1=a(x-x_1)$. Az a értékére nincs semmilyen kikötés, értékét szabadon választhatjuk $-\infty$ és $+\infty$ közt. Ez azt is jelenti, hogy egy ponton keresztül végtelenül sok egyenest húzhatunk (sugársort). De ha a P_1 -en kívül még egy pontot megadok, pl. a $P_2(x_2, y_2)$ pontot, akkor e második ponton is keresztülmegő egyenesek egyenlete $y_2-y_2=a(x_2-x_1)$. Ebből $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Ha mindkét ponton keresztülmegő egyenes

egyenletét keressük, akkor az a -nak emez értékét az előbbi egyenletbe kell helyeznünk s így a két ponton keresztülmegő egyenes egyenlete $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

Végül említsük meg még, hogy az egyenes egyenletének úgynevezett általános alakja a következő: $Ax+By+C=0$. Természetesen A , B és C tetszőszerinti számok. Ha ezt az egyenletet előbb megismert az alakra akarjuk hozni, akkor kifejezzük belőle y -t. $y=\frac{-Ax-C}{B}$, vagyis $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$.

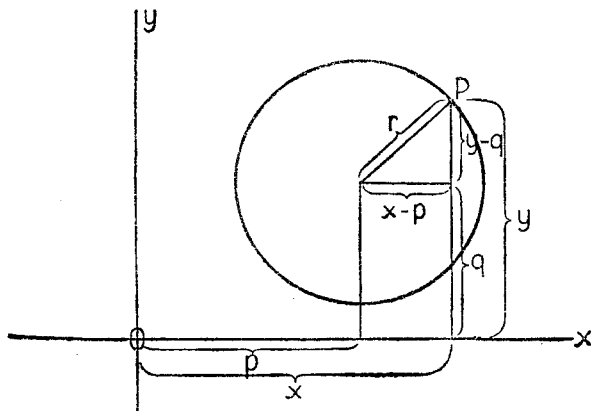
Tehát az $a=-\frac{A}{B}$ és a $c=-\frac{C}{B}$.

Már az előbb említettük, hogy a az α szög tangensével egyenlő, vagyis $a=\operatorname{tg} \alpha$. Ha tehát olyan egyenes egyenletét akarom felírni, amely egy adott egyenessel párhuzamos és keresztülmegy a $P_1(x_1, y_1)$ ponton, akkor a két egyenesnek az a irányítányezője — irányítányezőnek is szokás az a értéket

nevezni — feltétlenül ugyanaz. Ezenfelül még a P_1 ponton is keresztül kell mennie. Egyenlete tehát $y - y_1 = a(x - x_1)$. Ha a keresett egyenestől azt kívánjuk, hogy a P_1 ponton keresztül menjen és az $y = ax + c$ egyenesre merőleges legyen, akkor hajlásszöge feltétlenül $(\alpha + 90^\circ)$. De $\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\cot \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{a}$. Egyenletünk tehát ezt az értéket felhasználva $y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$ alakban adódik.

Eddigi műveleteink során egy nagyon jellemző körülményre is bukkantunk: x és y mindenkor csak az első hatványon fordult elő. Tekintve, hogy ez a körülmény csak egyenes egyenletében áll fenn, az ilyen egyenletet és ugyanilyen tulajdonságú függvényt lineáris (linea = egyenes) egyenletnek, ill. függvénynek nevezzük. Rövidesen látni fogjuk, hogy vonalunk görbülete az egyenletben előforduló x és y kitevőjét növeli. S már most megemlíttük, bár e kifejezés magyarázatával csak később fogunk találkozni, hogy a kúpszeletek, tehát kör, ellipszis, parabola és hiperbola egyenletében előforduló legmagasabb hatványkitevő csak 2 lehet. Ezért ezeket másodrendű vagy kvadratikus görbéknek is nevezik.

Köztük első a kör. Rajzoljunk fel egy koordinátarendszert



107. ábra.

és benne bárhol egy kört. Keressünk olyan összefüggést a P pont koordinátái közt, amely független a P pont választásától, tehát a kör minden pontjára egyaránt érvényes. Mi határozza meg a P pont helyzetét? Meghatározza magának a körnek, vagy ami ugyanaz, a kör középpontjának a helyzete a koordinátatengelyekhez képest: tehát a p és a q értéke. Továbbá jellemző a kör sugara, az r . Mint minden pont helyzetét, úgy a P pontét is koordinátái határozzák meg, tehát a kétféle jellemző közt valamilyen összefüggést kell találnunk. A képen derékszögű háromszöget látunk, az ott látható jelölésekkel felírjuk rá Pythagoras tételét. A háromszög oldalai r , $(x-p)$ és $(y-q)$ tehát $r^2 = (x-p)^2 + (y-q)^2$. Mivel nem volt semmilyen kikötés, hogy a kör melyik pontját válasszuk P pontnak, a talált összefüggés valamennyi pontra egyaránt érvényes, tehát magának a körnek az egyenlete. Ha a kör középpontja véletlenül egybeesik a koordináta-rendszer kezdőpontjával, akkor a kör úgynevezett középponti egyenletét kapjuk. Ekkor ugyanis $p=q=0$, tehát a kör egyenlete $x^2+y^2=r^2$.

Keressük most kör- és egyenes metszéspontját. Ez a feladat az $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ és $y=ax+b$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldását követeli. Belőle kiadódnak a metszéspont koordinátái:

$$x = \frac{1}{1+a^2} [p+aq-ac \pm \sqrt{(1+a^2)r^2 - (ap+c-q)^2}] \text{ és}$$

$$y = \frac{1}{1+a^2} [ap+a^2q+c \pm a \sqrt{(1+a^2)r^2 - (ap+c-q)^2}]$$

Ha a gyökjelek alatt olvasható kifejezések negatívak, akkor értékük képzetes. Ezzel a metszéspont koordinátái komplexek lesznek. Analitikusan ez azt jelenti, hogy egyáltalán nem metszi az egyenes a kört, hanem elmegy mellette. Ha viszont a gyökjel alatt álló kifejezés pozitív, akkor két metszéspont koordinátáit kapom, tehát az egyenes a körnek szelője. Végül a gyökjel alatt 0 is állhat, a körnek és az egyenesnek csak egy közös pontja van, tehát az egyenes csak érinti a kört, a metszéspont érintési ponttá lesz. A fenti

egyenletből az érintési pont koordinátái: $x_1 = \frac{p+aq-ac}{1+a^2}$; $y_1 = \frac{ap+a^2q+c}{1+a^2}$. Ezekből meghatározhatjuk az érintő egyenlete számára az a és a c értékét: $a = -\frac{x_1-p}{y_1-x}$ és $c = y_1 + \frac{x_1(x_1-p)}{y_1-q}$. Ebből a körhöz, valamely $P_1(x_1, y_1)$ pontjában húzható érintő egyenlete

$$y = \frac{x_1-p}{y_1-q} x + y_1 + \frac{x_1(x_1-p)}{y_1-q}$$

vagy másképpen

$$y - y_1 = -\frac{x_1-p}{y_1-q} (x - x_1)$$

Ebből már a kör normálisának, vagyis az érintési ponthoz tartozó sugárnak az egyenletét is felírhatjuk:

$$y - y_1 = \frac{y_1-q}{x_1-p} (x - x_1)$$

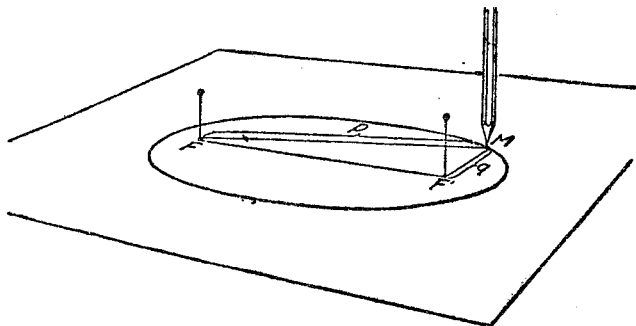
Továbbá ugyanezek az egyenletek a kör középponti egyenletére: az érintő egyenlete $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$ a normális egyenlete $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1} (x - x_1)$ mivel ekkor $p=q=0$.

HUSZONKILENCEDIK FEJEZET.

Ellipszis, hiperbola és parabola.

Lássuk az ellipszist. Ha fel akarjuk írni az egyenletét, ismernünk kell tulajdonságait. Talán mindenki tudja, hogy megrajzolása nagyon egyszerű eszközök segítségével lehetséges. Szúrjunk két ponton gombostűt egy lap papírba (ezeket a pontokat nevezzük majd gyújtópontoknak) és

helyezzünk el körjük egy zárt fonalat. Ha ceruzánkat is a fonál belsejébe helyezzük és úgy mozgatjuk, hogy a fonál mindenkor feszes legyen, akkor ceruzánk ellipszist rajzol.



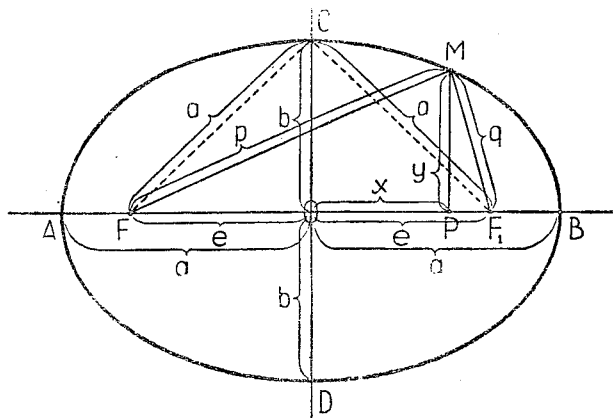
108. ábra.

A fonál hosszának legalább kétszer akkorának kell lennie, mint a két tű egymástól mért távolsága.

Ha a két tűt annyira közelítem egymáshoz, hogy végül egyetlen tűvel helyettesíthetem őket, akkor ellipszisem körré fajul el. A két gyújtópontot az ellipszis valamely kertületi pontjával összekötő egyenesek mindegyikének neve vezetősugár, mostani elfajult esetünkben ezek is összeesnek a kör egyetlen sugarává. A képről továbbá azonnal leolvasható, hogy a vezetősugarak összege az ellipszis minden pontjában állandó. A rajzoláshoz használt fonál alakja mindenkor háromszög, amelynek egyik oldala a gyújtópontok távolsága, a másik két oldala pedig a két vezetősugár, p és q . Ha pedig több háromszög kerülete egyforma, s az egyik oldal hossza állandó, akkor a másik két oldal összege minden háromszögben ugyanaz. Ha a gyújtópontok összekötővonalát az ellipszis területéig meghosszabbítjuk, akkor az úgynevezett nagytengelyt kapjuk, hosszát $2a$ -val szokás jelölni, s a vezetősugarak összege $p+q=2a$. Erről rövid megfontolással mindenki meggyőződhetik. Az ellipszis kistengelye merőleges a nagytengelyre, hosszát $2b$ -vel szokás jelölni. Merőlegesen felezi a gyújtópontok távolságát; ezt a távolságot az ellipszis

kétszeres excentricitásának, $2e$, is szokták nevezni. Az excentricitás tehát az ellipszis középpontjától bármelyik gyújtópontig mérhető távolság.

Fentiek ismeretében már meghatározhatjuk Pythagoras tétele segítségével az ellipszis középponti egyenletét. Határozzuk meg először a vezetésugarak hosszát. Azt már tudjuk,



109. ábra.

hogy $p+q=2a$, s legyen egy tetszés szerint választott M pont két koordinátája x és y . Ha még azt is megfigyeljük, hogy a kép szerint $FP=e+x$ és $F_1P=e-x$, akkor Pythagoras tétele alapján két egyenlőséget írhatok fel:

$$p^2 = (e+x)^2 + y^2$$

és

$$q^2 = (e-x)^2 + y^2$$

Ha a műveleteket elvégezzük és a két egyenletet egymásból kivonjuk, az eredmény:

$$p^2 - q^2 = 4ex; \text{ vagyis } (p+q) \cdot (p-q) = 4ex.$$

Mivel azonban $p+q=2a$, ezért $(p-q) = \frac{4ex}{2a} = \frac{2ex}{a}$.

A $(p+q)=2a$ egyenlőséget ismét figyelembe véve adódik, hogy $p=a+\frac{ex}{a}$ és $q=a-\frac{ex}{a}$. Ezzel kifejeztem a vezetősugarakat a pont koordinátáinak, a nagytengelynek és az excentricitásnak segítségével. (Az összefüggést csak az első síknegyedre vezettük le, de nem okoz nehézséget kimutatni, hogy minden síknegyedben érvényes a levezetett egyenlőség.) Most újból felírhatjuk minden ellipszisontra érvényesen:

$$y^2 = p^2 - (e+x)^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 - (e+x)^2 = a^2 + \frac{2ex}{a}a + \frac{e^2x^2}{a^2} - e^2 - 2ex - x^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - e^2.$$

De ez továbbá egyenlő

$$y^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - e^2,$$

s ebből

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

De $(a^2 - e^2)$ helyett Pythagoras tétele alapján (az OFC háromszögből) b^2 -et írhatok, mert FC és F_1C szimmetria alapján egyenlők, összegük $2a$, tehát mindegyik külön-külön a -val egyenlő. E helyettesítés után olyan egyenletét kaptuk az ellipszisnek, amely már a pont koordinátáin kívül csak a féltengelyeket tartalmazza. Ez az egyenlet a következő: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Ha $a=b=r$, akkor rövidítés után a kör jólismert középponti egyenlete áll előttünk: $x^2 + y^2 = r^2$. Ha pedig végül az ellipszis egyenletét a^2b^2 -tel osztjuk, akkor az egyenlet másik szokásos alakját kapjuk: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ezt könnyű megjegyezni, mert mindkét tengely mindenkor a vele párhuzamos ismeretlennel fordul elő együtt.

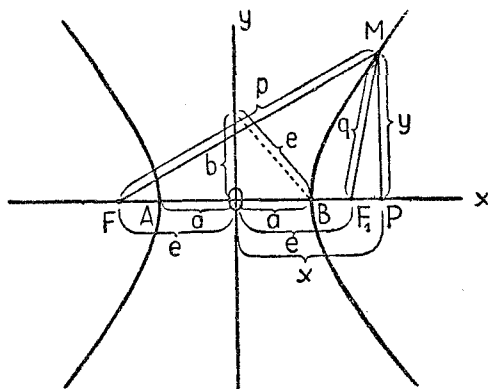
Az ellipszis érintőjének és normálisának egyenletét hasonló módon kaphatjuk meg, mint a körnél. Éppen ezért csak a végeredményt írjuk ide. A kerület $P_1(x_1, y_1)$ pontjában az ellipszishez húzható érintő egyenlete:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

és ennek megfelelően a normálisé :

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

A hiperbolára való áttérés nem fog jelentős nehézséget okozni. Vannak szempontok, amelyek miatt a hiperbolát az ellipszis negatív tükörképének tekinthetnők. A hiperbolának is van két gyújtópontja, vannak vezetéksugarai, de ezeknek nem az összege, hanem különbsége állandó és ezt a $2a$ távolságot nevezzük a hiperbola valós tengelyének ($p - q = 2a$).



110. ábra.

Ha továbbá a gyújtópontoknak a középponttól mért távolságait $OF = OF_1 = 2e$ ismét excentricitásnak nevezzük, akkor már teljes az analógia. Csak az okoz még nehézséget, hogy a hiperbola nem metszi az ordináta tengelyt. A másik tengelynek, amelyet képzetes tengelynek nevezünk, végpontjai az ordináta tengely ama pontjai, amelyek a valós tengely két végpontjától, a hiperbola «csúcsaitól», éppen az excentricitással egyenlő távolságra vannak.

A hiperbola nem zárt görbe, így ágairól beszélhetünk. Vegyük fel az M pontot, mondjuk, a jobboldali ágon. Mint az ellipszisnél, itt is meghatározzuk a vezetéssugarak hosszát,

$p = \frac{cx}{a} + a$ és $q = \frac{ex}{a} - a$. Az ellipszisnél tanultak mintájára adódik az FMP háromszögből az egyenlet: $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$. De $e^2 = a^2 + b^2$ és $a^2 - e^2 = -b^2$ és ezzel a hiperbola egyenlete $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$, azaz $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Ha ismét osztunk a^2b^2 -tel, az eredmény $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

A P_1 pontban húzott érintő egyenlete $y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$, a normálisé $y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$.

A hiperbolához azonban még két, igen különös egyenes tartozik. A két aszimptota. Létezésükre már előbb utaltunk.

Bocssassuk előre, bár a hiperbola egyenletéből is kiolvasható, hogy növekvő x -szel az y is növekszik, tehát a hiperbola ágai mindinkább szétnyílnak és a végtelenbe nyúlnak; ez a hiperbola kúpszelet-természetéből is következik. Visszatérve az aszimptotákra: minden olyan egyenesnek, amely keresztül megy a kezdőponton, $y = mx$ alakú az egyenlete, ha az iránytényezőt, a hiperbola valós tengelyének felével való összevetés elkerülése végett, a helyett m betűvel jelöljük. Ilyen egyenes és a hiperbola metszéspontjának koordinátái:

$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$ és $y = \frac{\pm amb}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$. Csak akkor van met-

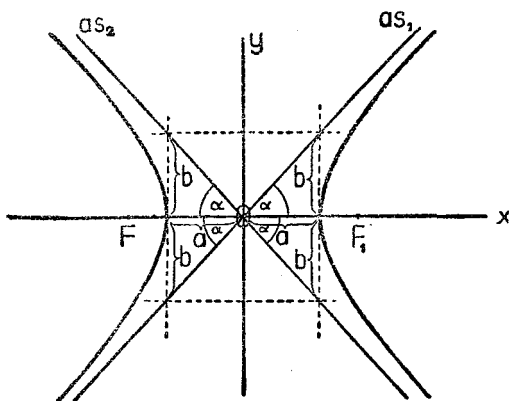
széspont, ha $b^2 > a^2m^2$ különben nincs, illetve képzetes. Azt az esetet kell még megvizsgálnunk, hogy mi történik, ha

$b^2 = a^2m^2$, vagyis $b = \pm am$, illetve $m = \pm \frac{b}{a}$. Az egyenes egyenlete ez esetben $y = \pm \frac{b}{a}x$. Most hasonlítsuk össze az

ugyanahhoz az abszcissa-értékhez tartozó egyenes-ordináta és hiperbola-ordináta nagyságát. A hiperbola egyenletét,

átalakítva, így is írhatjuk: $y = \pm \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$. Ha ezt

az egyenes egyenletével összehasonlítjuk, látjuk, hogy minden hiperbola-ordináta $\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$ -szer akkora, mint az egyenes megfelelő ordinátája. De $\left(\frac{a}{x}\right)^2$ értéke növekvő x -szel 0-hoz közeledvén, $\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$ határértéke 1, ha $x = \infty$ lesz, vagyis az egyenes és a hiperbola közt az eltérés elenyészik. De éppen ez az aszimptota meghatározása, vagyis $y = \pm \frac{b}{a} x$, tehát $y = + \frac{b}{a} x$ és $y = - \frac{b}{a} x$ a hiperbola két aszimptotájának az egyenlete, s ennek alapján meg is szerkeszthetők. A rajzon tehát az as_1 és as_2 egyenesek az aszimptoták.



111. ábra.

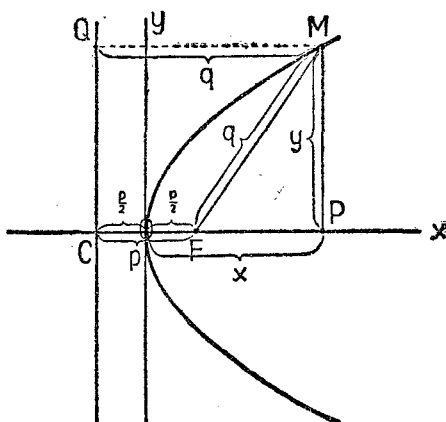
Ha $a=b$, akkor a hiperbolát egyenlőszárú hiperbolának nevezzük, s ez esetben az aszimptotái egy négyzet két átlójá-

hoz hasonlóan merőlegesek egymásra. A hiperbola egyenlete $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, vagy másképp írva $x^2 - y^2 = a^2$ alakú lesz. Ezt az egyenletet a kör $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletével összehasonlítva megértjük, hogy miért nevezték egyes matematikusok az ilyen hiperbolát negatív körnek.

Lássuk most az utolsó kúpszeletet, a parabolát: a kúpszeletei sorában a hiperbola és az ellipszis közt határhelyzetet foglal el. Ez ugyanis ama kúpszelet, amelyet a kúpnak csak egy alkotójával párhuzamos sík metsz ki a kútból. A hiperbolát kimetsző sík két kúpalkotóval párhuzamos, az ellipszist (és kört) szolgáltató metszősík viszont eggyel sem, vagyis valamennyi alkotót metszi.

A parabola analitikus meghatározása szerint olyan görbe, amelynek minden pontja egyenlő távol van egy ponttól (a gyújtóponttól) és egy egyenestől (a vezéregyenestől, directrixtől). Vezérsugár a parabola esetén bármely parabola-pontot a gyújtóponttal összekötő egyenes. A parabolák szimmetrikus görbék, s valamennyi hasonló egymáshoz, miként valamennyi kör is hasonló. Ez az általános hasonlósági tulajdonságuk az ellipsziseknek és hiperboláknak nincs meg; vannak ugyan hasonló ellipszisek és hasonló hiperbolák is, de nem valamennyi hasonló. Ilyen általános hasonlóság főképpen határeseteknél szokott előfordulni, így pl. valamennyi szabályos hatszög, háromszög, négyszög hasonló egymáshoz.

A koordinátatengelyeket a parabola vizsgálatához úgy helyezzük el, hogy x tengelynek a gyújtópontból a directrixre bocsátott merőlegest választjuk, kezdőpontnak pedig a gyújtópont és a vezéregyenes távolságának a felezőpontját. Ez a pont a parabola meghatározása szerint parabolapont, még pedig a parabolának úgynevezett csúcspontja. Az irányvonalnak a gyújtóponttól mért távolságát p -vel jelöljük. Ezáltal valamely M parabolapontnak a vezéregyenestől mért távolsága $x + \frac{p}{2}$.



112. ábra.

Ha az FM távolságot q betűvel jelöljük, akkor Pythagoras tétele szerint $q^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$. De $q = FM = QM = x + \frac{p}{2}$ tehát $y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, és továbbá $y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - x^2 + px - \frac{p^2}{4} = 2px$.

Ezek szerint a parabola egyenlete $y^2 = 2px$, vagy $y = \sqrt{2px}$. Mivel x növekedtével az y is növekszik, a parabolának mindkét ága a végtelenbe nyúlik. Negatív x képzetes y értékekre vezet, tehát parabolánknak nincs az y tengelytől balra pontja. Az $y^2 = 2px$ egyenletből következik, hogy $2p : y = y : x$, vagyis minden ordináta mértani közép-arányos az abszcissza és a «paraméter»-nek nevezett $2p$ távolság közt. Igazolható továbbá, hogy a parabola két pontjának koordinátái kielégítik a következő aránylatot: $x_1 : x_2 = y_1^2 : y_2^2$, vagyis két pont abszcisszái úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő ordináták négyzetei.

Az $P_1(x_1, y_1)$ pontban húzható érintő egyenlete az eddigi

minták nyomán meghatározva $y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1)$, a normalis pedig $y - y_1 = -\frac{y_1}{p} (x - x_1)$.

Mielőtt még az analitikus geometriával való foglalkozást abbahagynók, megemlítjük, hogy nem csak a síkban, hanem a térben is van analitikus geometria, sőt annak különleges jelentősége van. Csak utalhatunk arra, hogy háromdimenziós koordináta rendszerben háromváltozós függvényekkel foglalkozunk, amelyek közül kettő szabadon változik, a harmadik ezek függvénye. A tér minden pontját csak három koordináta határozza meg és egy, háromismeretlenes egyenletnek a képe a térben felület. Az egyenes irántangensének térbeli megfelelője a három iránycosinus, de ennek taglalásába sajnos nem bocsátkozhatunk.

Végül említsük azt is, hogy nyitva állna az út, hogy a koordináták számát hármon túl is növeljük. Ezzel az R_3 , R_4 stb. koordinátarendszereihez jutnánk és bennük egy pont helyének meghatározására már 3, 4 stb. adatra volna szükség. Uymódon alkalmaz a Minkowski—Einstein-féle geometria négy koordinátát, tehát egy bizonyos R_4 a tere, csak még bizonyos mellékfeltételek (görbült tér, egyik koordináta képzetes) még bonyolultabbá teszik a viszonyokat. Ilyen problémákkal még fogunk könyvünk végén foglalkozni.

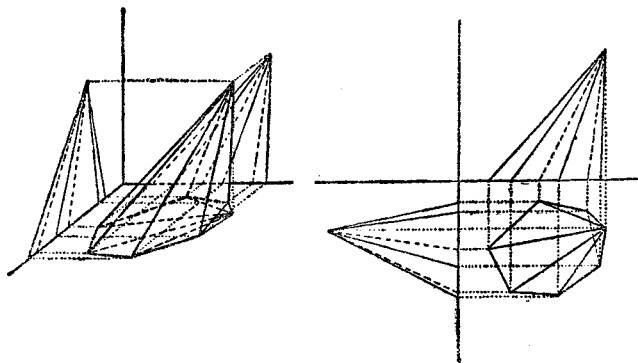
Ezzel befejeztük rövid bevezetésünket az analitikus geometriába. Aki bővebb ismeretekre óhajt szert tenni, könnyen találhat kimerítő szakkönyvet. Megemlíthetjük még egyszer, hogy a differenciál- és integrálszámításhoz innen is vezet átmenet, s e szempontból ismét az «Egyszeregytől az integrálig» című kötetre kell utalnunk.

HARMINCADIK FEJEZET.

A sztereometria legfontosabb tételei.

Eltételezve a legutóbbi megjegyzésektől, mindaddig csak az R_2 , még pedig egy különleges R_2 , a sík geometriájával foglalkoztunk. Csak a projektív geometria tárgyalása során utaltunk néhányszor, akkor is csak felületesen, az R_3 -ra és a

még több dimenziójú terekre. Annak is okát adtuk már, hogy miért olyan különösen fontos a síkgeometria tételeinek ismerete. Rövidesen kiderül ugyanis, hogy sok felvilágosítást adnak a sztereometriáról, a testek geometriájáról is. Annak idején azt állítottuk, hogy csak szöget és távolságot mérünk. Most «az R_3 idomaival», testekkel, foglalkozva rájövünk, hogy itt sem lehet más a helyzet. Csak egy nagyon fontos segédeszköznek a hiánya érint kellemetlenül: a rajzeszközök, a körző és vonalzó segítségével történő szerkesztés hiánya. Testeket közvetlenül kizárólag csak mintadarabok, tehát ismét testek útján tudunk ábrázolni. Ha a testeket le akarjuk rajzolni, akkor ezzel az R_3 idomait az R_2 -be helyezzük át. S csak úgy tudjuk őket lerajzolni, hogy egyik kiterjedésüktől, vetítéssel, megfosztjuk őket. Azt az előbbi kijelentésünket tehát, hogy testeket csak mintadarabokkal lehet ábrázolni, módosítjuk: a geometriának egyik fontos ága foglalkozik e feladat közvetett úton való megoldásával. A geometria emez ágán a De Monge kutatásai óta szigorú tudományos eszközökkel kifejlesztett ábrázoló geometriát értjük, azonban megértésének nélkülözhetetlen feltétele a sztereometria ismerete. E könyvben nem lehet feladatunk, hogy a geometriának e fontos és hasznos, de az általánosságtól némiképpen távolálló ágát tárgyaljuk. Csupán azért mutatunk be egy idevágó rajzot, hogy némi fogalmunk legyen ezekről. A rajz első része azt mutatja, hogyan kell a két, illetve



113. ábra.

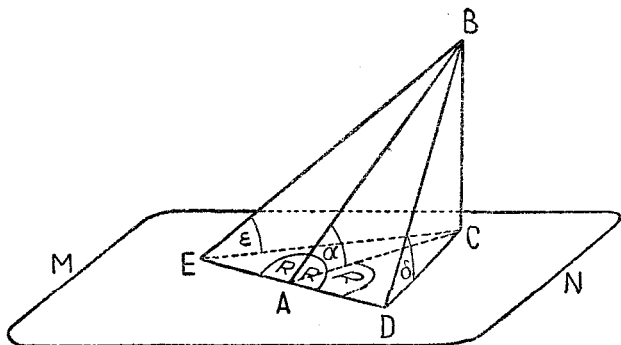
három rajzsík előtt álló gulát elképzelni, a második pedig azt, hogyan forgatjuk be egyetlen síkba a gula három vetületét. Továbbá a figyelmes szemlélő azt is észreveheti, hogy lehetséges valamely tárgy képét pusztán szerkesztéssel is megkapnunk. De mint már mondtuk, mindezt csak mellékesen említjük.

Még mielőtt a sztereometria tárgyalása során testekkel foglalkozhatnánk, meg kell ismerkednünk a térelemek, pont, sugár és sík egymáshoz való helyzetének különféle lehetőségeivel. Már tudjuk, hogy egy egyenes vagy párhuzamos egy síkkal, vagy pedig metszi, ha nem fekszik egész terjedelmében benne. Egyenes és sík metszése pont. Ha egy egyenesnek és egy síknak két közös pontja van, akkor az egyenes egész terjedelmében benne van a síkban és bármelyik pontja körül forgatható a nélkül, hogy a síkot elhagyná. Ha két síknak van közös egyenes, akkor ez a két sík metszésvonala. Ha két síknak közös pontja van, akkor ez feltétlenül a metszésvonalon fekszik. Ha két síknak három, nem egy egyenesben fekvő közös pontja van, akkor a két sík egész terjedelmében összeesik. Hallottuk már azt is, hogy síkot három nem egy egyenesben fekvő pont vagy egy egyenes és egy rajta kívül fekvő pont, továbbá két egymást metsző egyenes teljesen meghatároz.

Sík normálisán vagy síkra merőleges egyenesen azt az egyenest értjük, amely merőleges a talppontján (a síkkal való metszéspontján), keresztül menő valamennyi egyenesre. Elegendő ugyan már az a feltétel is, hogy a normális a talppontján keresztülmenő két egyenesre merőleges legyen. De ha egy egyenes három, egy pontján keresztülmenő egyenesre merőleges, akkor ezek közül bármelyik a másik kettővel meghatározott síkban fekszik. Ezt a tételt a gyakorlatban az esztergapadon hasznosítjuk, mert ha az esztergakést egy forgó tárgy forgástengelyére merőleges egyenes mentén mozgatunk, akkor az a tárgyra a forgástengelyre merőleges síkot fog vágni.

Lássuk most a párhuzamosság fogalmát a térben. Eleve világos, hogy a térben nem valamennyi egymást nem metsző egyenes párhuzamos. A térben kitérő egyenesek is lehetségesek, tehát eddigi feltételeinket azzal kell kiegészítenünk,

hogy a párhuzamos egyeneseknek egy síkban kell feküdniök. Megfordítva: a térben két párhuzamos egyenesen keresztül mindenkor fektethetünk síkot. Továbbá arra is következtethetünk, hogy két különböző síkban fekvő egyenes csak akkor lehet egymással párhuzamos, ha olyan harmadik sík-



114. ábra.

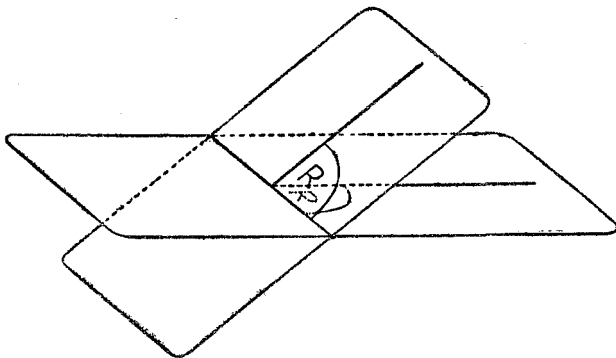
ban fekszenek, amely a két sík metszésvonalával párhuzamos. Két egyenes továbbá, amely ugyanarra a síkra merőleges, párhuzamos egymással, s ha egy egyenes egyszerre két síkra merőleges, akkor a két sík párhuzamos egymással.

Ezzel már elérkeztünk két sík hajlásszögének kérdéséhez, hisz a párhuzamosság 0 fok hajlásszöget jelent.

Lássuk először az egyenes és sík által bezárt szög kérdését. Kérdezzük, mekkora szöget zár be az AB , EB , DB egyenes az MN síkkal? A felelet: sík és egyenes hajlásszögén mindenkor az egyenes és a síkon fekvő vetülete által bezárt szöget értjük. A vetületet azonban úgy kapjuk meg, ha az egyenes valamely pontjából (rajzunkon ez a pont a három egyenes közös B pontja) merőlegest húzunk a síkra és a merőleges talppontját az egyenes talppontjával összekötjük. Így kapjuk a hajlásszöget, esetünkben az α , δ és ϵ szögeket. Érvényesek a következő nagyon könnyen bizonyítható tételek: sík és egyenes előbb körülírt hajlásszöge a legkisebb

ama szögek közt, amelyeket a ferde egyenes a síkban fekvő és a talppontján keresztülmenő egyenesekkel bezár. Mellékszöge ennek megfelelően a legnagyobb. Nagyon fontos az a tétel is, hogy ha egy síkot ferde szögben metsző egyenes talppontján keresztül a síkban az egyenes vetületére merőlegest húzunk, akkor ez magára az egyenesre is merőleges. Ezt látjuk a 114. képen az A pontban megrajzolva. E tételnek két megfordítása lehetséges: ha egy síkot ferde szögben metsző egyenes talppontján keresztül az egyenesre a síkban merőlegest húzunk, akkor ez a ferde egyenes vetületére is merőleges; továbbá: ha a síkkal ferde szöget bezáró egyenes és a síkban fekvő és az előbbi egyenes talppontján keresztül húzott egyenes egy harmadik egyenesre egyszerre merőleges, akkor a második az elsőnek a vetülete a síkon.

Ezzel megismertük az egyenes és sík hajlásszögének a fogalmát. Mit kell azonban két sík hajlásszögén értenünk?



115. ábra.

Kikeressük a legkisebb szöget, amelyet a két sík bezárhat és ezt tekintjük hajlásszögüknek. A hajlásszög meghatározás ezzel a következő: két sík hajlásszögét a síkok egy-egy olyan egyenesre zárja be, amely a két sík metszésvonalára annak egyik pontjában merőleges. A 115. képen láthatjuk, hogy az egyenesekkel bezárt szögekhez hasonló módon itt mellék-

hajlásszögről, csúcshajlásszögről beszélhetünk, tehát az egyenesek által bezárt szögekről tanultak itt is érvényesek. Ha továbbá valamely síkra merőleges egyenesen keresztül síkot fektetünk, akkor ez a hajlásszögről tanultak alapján az előbbi síkra merőleges lesz. Az analógiát tovább is fejleszthetjük: ha párhuzamos síkokat valamilyen síkkal metszünk, akkor a hajlásszögekre érvényesek azok a tételek, amelyeket a síkban párhuzamos egyeneseknek egy további egyenessel való metszésénél tanultunk stb.

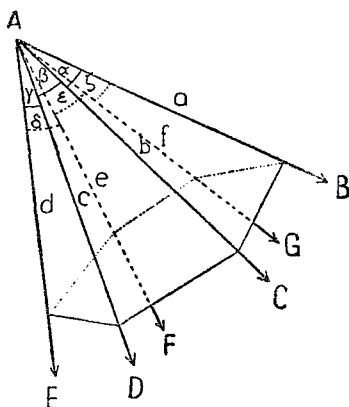
HARMINCEGYEDIK FEJEZET.

Testszögletek, Euler tétele, szabályos testek.

Most, amikor már túlestünk a térgeometria elemeinek kissé unalmas megismerésén, megállapíthatjuk, hogy nem tettünk mást, mint hogy a síkgeometria ismert tételeit a térbeli viszonyokhoz alkalmaztuk. Tovább megyünk tehát egy lépéssel és olyan idom felé fordítjuk figyelmünket, amely a sztereometriában éppen olyan fontos, mint a háromszög vagy a sokszög a síkgeometriában. Ez az idom a testszöglet. Azt az idomot értjük ezen, amelyet a hozzá nem értő laikus legszívesebben nyitott gulának nevezne. Tudományos nyelven úgy határozhatnók meg, hogy egy pontban találkozó három vagy több síkkal határolt térrész. Igaz, ha három vagy több sík találkozik egy pontban, akkor egynél több testszöglet keletkezik. Három sík találkozása a teret nyolc testszögletre osztja, amint hogy két egyenes metszése is négy szöget ad a síkban.

De amint a szög számára is tudtunk oly módon irányokat megadni, hogy azok a szögeket egyértelműen meghatározták, úgy a testszögletek közül is kiválaszthatjuk az egyiket.

A testszöglet alkotórészeinek megvannak a szokásos elnevezéseik. A síkok metszéspontját (a képen A) a testszöglet csúcsának szokás nevezni, a síkok metszéspontjai a testszöglet élei. A síkok maguk a testszöglet oldalai, nagyságukat a határoló élek által bezárt szögekkel adjuk meg. Más néven



116. ábra.

ezek a testszöglet élszögei. A testszöglet szögei, vagy másképp lapszögei a határoló síkok által bezárt szögek.

Egy pillantás a képre meggyőz arról, hogy síkgeometriai tételek egész sorát átvihetjük a testszögletekre, ha ezeket síkokkal metsszük. Itt említjük meg, hogy olyan testszögletekkel nem szokás foglalkozni, amelyeknek beugró élük van. Az oldalsíkok megfelelő meghosszabbításával ezek mindenkor kiküszöbölhetők.

Állítsuk össze most a testszögletekre vonatkozó legfontosabb tételeket:

1. Minden háromoldalú testszöglet (triéder) két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

2. Minden háromoldalú testszöglet két oldalának különbsége kisebb, a harmadik oldalnál.

3. Minden testszöglet oldalainak összege kisebb, mint négy derékszög. (Ha eléri ez az összeg a 360 fokot, akkor az oldalak már síkban fekszenek és nem adnának testszögletet.) Ennek megfelelően a testszögletek oldalainak összege 0 és 360 fok közt van.

Most egy időre abbahagyjuk a testszögletekkel való foglalkozást és a sztereometria egyik legfontosabb tételét fogjuk megismerni. Ez a tétel a poliéderekre vonatko-

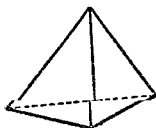
Euler-tétel. Poliéder olyan, minden oldalról zárt, térbeli idomot jelent, amelyet síkok határolnak. A síkok a poliéder lapjai, ezek metszésvonalai az élek, az élek és lapok viszont a csúcsokban futnak össze. Ha a lapok, élek és csúcsok számát sorban L , E és C betűvel jelöljük, akkor Euler tétele szerint $L+C=E+2$, vagyis «lap plusz csúcs egyenlő él plusz kettő». Bizonyítása nem volna nehéz, csupán nekünk kissé hosszadalmas. A poliédereknek azonban Euler-féléknek kell lenniök, vagyis nem szabad, hogy gyűrűszerű sokszögek határolják, sem pedig, hogy bemélyedéseket vagy üregeket tartalmazzanak. E tétel vizsgálatával kimutatható, hogy hányféle négy-, öt- stb. lapú poliéder képezhető különféle megszorító feltételek megtartása esetén. Minket sokkal inkább érdekelnek a szabályos poliéderek, szabályos testek vagy még másképp a «Platon-féle testek». Ez a nevük onnan származik, hogy Plato egyik dialógusában (Theaitetos) is szó van róluk.

Mit nevezünk tulajdonképpen szabályos poliédernek vagy másképpen szabályos testnek? Olyan testeket nevezünk így, amelyeket egybevágó, szabályos sokszögek határolnak s amelyeken a testszögletek is egybevágók és szabályosak. Mivel testszögletet háromnál kevesebb oldal nem határolhat, azonnal megmondhatjuk, hogy mely szabályos sokszögek vehetők egyáltalán szabályos test alkotása szempontjából figyelembe. Egy szabályos n oldalú sokszög egyik szöge, mint tudjuk, $\alpha = 2R - \frac{4R}{n}$. Mivel legalább három kell belőle testszöglet alakításához, az egy pontban összefutó szögek összege $\left(2R - \frac{4R}{n}\right) \cdot 3 = 6R - \frac{12R}{n} = 6R \frac{n-2}{n}$. De mivel egy testszöglet oldalainak összege sem haladhatja meg a $4R = 360$ fokot, $\frac{n-2}{n}$ feltétlenül kisebb, mint $\frac{2}{3}$. De n legkisebb értéke 3, mert a szabályos sokszögnek legalább három oldala van, legnagyobb értéke pedig 5, mert $n=6$ esetén $\frac{n-2}{n} = \frac{2}{3}$ és már nem felel meg előbbi feltételeinknek. Így tehát szabályos testet határoló sokszög csak a háromszög, a négyszög

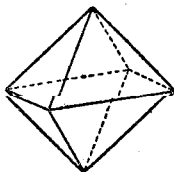
és az ötszög lehet. De alkotunk testszögleket háromnál több oldalból is. Valóban, 4 és 5 háromszögből is összeillesszhetünk testszögleket, mert $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$ és $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$. Hat háromszög már nem fordulhat elő, mert $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$, tehát meghaladja a megengedett mértéket. Négyzetekből alkotott testszöglek csak háromoldalúak lehetnek, mert $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$, de $4 \cdot 90^\circ$ már ismét 360° -ot ad. Végül még az ötszög: három ötszög ($3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$) még használható, négy már nem ($4 \cdot 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$).

A szabályos testek sorban a következők:

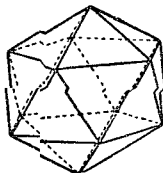
Szabályos háromszögek határolják a tetraédert, az oktaédert és az ikozaédert.



Tetraéder



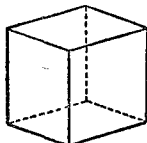
Oktaéder



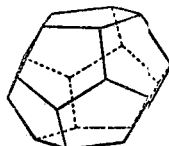
Ikozaéder

117. ábra.

A tetraéder testszöglei háromoldalúak, van $L=4$ lapja, $C=4$ csúcsa és $E=6$ éle. Az oktaéder testszöglei négyszögletűek, $L=8$, $C=6$, $E=12$. Az ikozaéder testszöglei ötszögletűek, $L=20$, $C=12$, $E=30$.



Hexaéder



Dodekaéder

118. ábra.

Négyzetek határolják a hexaédert, a kockát. Testszöglei csak háromoldalúak lehetnek, $L=6$, $C=8$, $E=12$.

Szabályos ötszögek határolják a dodekaédert. Testszögelei szintén háromoldalúak, $L=12$, $C=20$ és $E=30$.

Az előbb levezetettek szerint több szabályos test nem lehet.

Azonban vannak még úgynevezett félig szabályos vagy Archimedes-féle testek. Határlapjaik ugyan szabályos sokszögek, de nem egyenlők: például szabályos háromszögek és négyzetek egy testen vegyesen is előfordulhatnak. A testszögletek pedig egybevágók ugyan, de nem szabályosak. Egy ilyen félig szabályos testen legfeljebb háromféle szabályos sokszög fordulhat elő, pl. háromszög, négyszög és ötszög (szögeik összege $60^\circ + 90^\circ + 108^\circ = 258^\circ$, tehát ezekből testszöglet alkotható), vagy háromszög, négyszög és hatszög ($60^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 270^\circ$), de négyféle már nem, mert ebben az esetben a szögek összegének minimuma: $60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ$, tehát több mint a megengedett 360° . Nem bocsátkozhatunk részletekbe, csak megemlítjük, hogy 12 kétféle sokszögből álló és 3 háromféle sokszögből álló Archimedes-féle szabályos test van.

Végül említsük meg azt is, hogy a félig szabályos testek egyik fajtája a romboederek csoportja. Ezeket csupa egybevágó rombuszlap határolja, s jelentős szerepük van a kristálytanban. Legegyszerűbb a rombhexaéder, a «ferde kocka». De van rombdodekaéder stb. is.

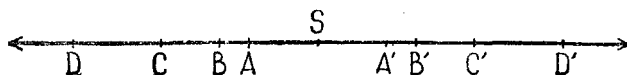
HARMINCKETTEDIK FEJEZET.

Cavalieri tétele. Köbtartalom-mérés.

Bármennyire érdekes lett volna Euler tételét részletesen megismerni vagy további következményeivel és kapcsolataival foglalkozni, sajnos, itt mégis abba kell hagynunk, vissza kell térnünk a testszögletek vizsgálatához, s ezeknek tulajdonságait fogjuk az általános poliéderekre alkalmazni.

Az R_3 -ban nemcsak egybevágóságról és hasonlóságról beszélhetünk, hanem ezekhez társul harmadiknak a szimmetria is. Már utaltunk egy ízben arra, hogy szimmetrikus testeket úgy lehet egymással fedésbe hozni, hogy egy magasabb dimenzióba kiemeljük és abban átfordítjuk őket. Az

R_1 -en belül két «irányított» távolságot nem lehet egymással fedésbe hozni. Szimmetrikusak maradnak akkor is, ha egymásra toljuk őket, mivel irányuk mindenkor eltérő marad. Ez az «irányítotttság» egyáltalán nem csupán állításunk bizonyítására kitalált ügyeskedés. Képzeljünk el a két távolságon szimmetrikus fekvésű, de egymástól különböző távolságra levő pontokat és azonnal be kell látnunk a kongruenciához szükséges átfordítás jelentőségét.



119. ábra.

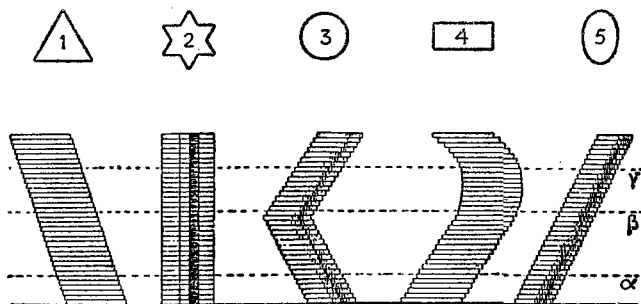
Tologatással nem fog sohasem sikerülni A és A' , B és B' stb. pontokat egymással egy időben fedésbe hozni. Az R_2 -ben már nem lesz akadály, ott már megtudjuk fordítani a távolságot. Az R_2 -ben ugyanaz a helyzet. Szimmetrikus háromszögeket az R_3 -ba kell kiemelni, ha egymásra akarjuk őket helyezni. De nincs ember, aki szimmetrikus testszögleteket az R_3 -ban egymással fedésbe tudna hozni. Ilyen szimmetrikus testszögletpár keletkezik például, ha valamely testszöglet éleit a csúcson túl meghosszabbítjuk. Ezt a «csúcestestszögletet» az R_4 -be kellene kiemelni, hogy a párjával azonos fekvésbe fordíthassuk. Az R_3 -ban csak önmagába fordíthatnók ki, mint a kesztyűvel szokás. Ez az eljárás elképzelhető volna egy háromszöggel is a síkban, ha egyik csúcsát erőszakkal «keresztül húzzuk» az egyik oldalra. Vagy az egyenest az osztópontokkal rendkívül vékony tömlőnek tekinthetnők, s annak mintájára próbálnók kifordítani. De hogy ez mennyire csak önámítás, azonnal kiderül, ha mondjuk, cipőre gondolunk, amellyel kapcsolatban «kesztyűszerű» kifordítás már aligha képzelhető el.

Poliéderek akkor egybevágók, ha megfelelő lapjaik és szögleteik egybevágók. Ha azonban a megfelelő alkatrészek közt szimmetrikusak is vannak, akkor az egész idomnál csak szimetriáról beszélhetünk. A jobboldal-baloldal problémája, amely az R_1 -ben s az R_2 -ben magasabb rendű térbe

emelkedéssel megoldhatóvá vált, az R_3 -ban abszolút jelentőségre tett szert. E problémáról az utolsó fejezetekben még sok meglepőt fogunk olvasni.

De most lássuk a köbtartalom-mérést, az utolsó feladatot, amellyel a sztereometriával kapcsolatban még foglalkozni fogunk. Amint a sík idomok területét egységnyi négyzettekkel mérjük, ugyanúgy a testek köbtartalmának mérésére hosszegységnyi oldalú kockák szolgálnak. A kubatura a kvadratura mintájára megy végbe, s nem kell magyarázni, hogy 5 olyan kockaréteg, amelyek mindegyike 8 egység hosszú és 3 egység széles, $5 \cdot 8 \cdot 3 = 120$ egységkockát tartalmaz. Síkban a téglalap területét hosszúság, szorozva szélesség adja, térben viszont hosszúság, szorozva szélesség szorozva magasság a köbtartalom-mérés alapképlete. De a geometria tudósainak legnagyobb problémái közé tartozik az, hogy területmérés és térfogatmérés közt az átmenet szigorúan alig található meg. Itt vagy rendkívül kezdetleges eszközökkel kell megelégednünk, vagy éppen felsőmatematikai eszközöket kell igénybevennünk, ha ezek még oly egyszerűnek látszanak is. Elsősorban Cavalieri tételére gondolunk itt, amelyet a térfogatmérés egyik alaptételének, alapelvének kell tekintenünk.

Álljon rendelkezésünkre különféle alakú, de tegyük fel, egyforma alapterületű lemezeknek egész sora. Minden különösebb magyarázat nélkül világos, hogy a rajzon látható külön-



120. ábra.

féleképpen ferde tornyocskáinknak a köbtartalma egyenlő lesz, tekintve, hogy egyenlő számú, egyenlő területű lemezből állnak. De a dolog mégsem olyan teljesen világos, mint amilyennek az első pillanatban látszik. Hisz csak azt tudjuk valamennyi lemezről, hogy *területük* egyenlő. Így a lemezeket mindig vékonyabb és vékonyabb lemezekre hasítva kell képzelnünk, míg végtelenül vékony és finom lemezekhez jutunk, hogy azt mondhassuk, hogy valóban egyenlők. De arra viszont nincsen semmilyen bizonyítékunk, hogy akár végtelen sok ilyen nagyon vékony lemez összege véges. Itten már ismét a folytonosság problémájára bukkantunk. Mégis megbízhatunk a Cavalieri-elvben, mert eddig még sohasem jutott ellentétbe a tapasztalattal és minden közvetett matematikai ellenőrzést kiállt. Maga a tétel így szól: Ha több testet párhuzamos síkokkal metszünk és az egy síkban fekvő metszetek területe egyenlő, bárhol vettük fel a metszősíkot, akkor a testek köbtartalma is egyenlő.

Cavalieri tétele nem egyéb, mint kibővített térbeli megfelelője Euklides ama paralelogramma-tételének, amely szerint minden olyan paralelogramma területe egyenlő, amelynek alapja és magassága egyforma.

Most, hogy már birtokában vagyunk a sztereometria számos alapfogalmának, lássuk sorban a legnevezetesebb testeket, kivéve a már eddig tárgyaltakat.

1. *A hasáb.* Poliéder, két párhuzamos és egybevágó sokszög határolja alul és fölül, oldallapjai paralelogrammák, még pedig annyi, ahány oldala a két alapsokszögnek van. Az alaplapok oldalainak száma szerint három-, négy-, stb. *n*-oldalú hasáb a neve.

Általában jegyezzük meg, hogy valamely test felületén valamennyi határoló lapja területének összegét értjük.¹ Hasábnál tehát az oldallapokat és a két alaplapot. Ha egy papiroslapra ezeket a felületeket úgy rajzoljuk le, hogy belőle a megfelelő test modelljét összehajtogathatjuk, akkor a test ilyen vetületét a test hálózataának nevezzük. Nagyon ajánljuk

¹ Viszont egy test köpenyének vagy palástjának felszíne valamennyi oldallap területének összegét jelenti az alaplap vagy alaplapok területe nélkül.

minden olvasónknak, hogy rajzoljon ilyen hálózatokat és állítsa össze belőlük a megfelelő testet, ha a sztereometriában jártasságra akar szert tenni.

A hasábnak a következő különleges fajtáit különböztethetjük meg:

a) Egyenes hasáb. Valamennyi oldaléle merőleges az alapra.

b) Szabályos hasáb. Alapja szabályos sokszög.

c) Parallelepipedon. Alaplapja is parallelogramma.

d) Egyenes parallelepipedon. Oldalélei merőlegesek az alapra.

e) Derékszögű parallelepipedon. Egyenes parallelepipedon, amelynek alapjai derékszögű négyszögek.

f) Kocka. Derékszögű parallelepipedon, amelynek minden éle egyforma hosszú, vagy ami ugyanaz, valamennyi határoló lapja négyzet.

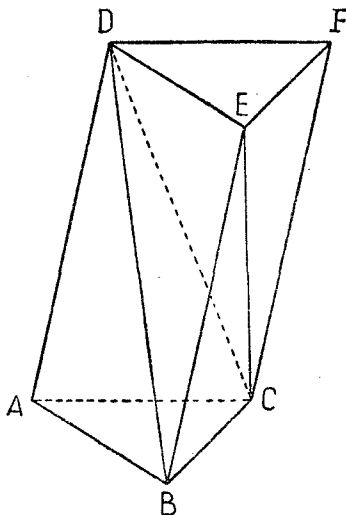
A párhuzamosakra vonatkozó tételek segítségével bebizonyítható, hogy az alapsokszögek és a velük párhuzamos síkmetszetből adódó sokszögek egybevágók. Mivel a derékszögű parallelepipedon köbtartalmát hosszúságának, szélességének és magasságának kezdete, vagy ami ugyanaz, alapja területének és magasságának szorzata adja, ezért Cavalieri tételéből következik, hogy valamennyi hasábnak köbtartalmát e képletből kapjuk; hisz minden metszetét egyenlő területűnek tekinthetjük egy megfelelően választott parallelepipedonéval. A hasábok különleges alakja a henger, amely éppen úgy tekinthető végtelen sokoldalú hasábnak, amint a kör végtelen sokoldalú sokszög. A hasábra vonatkozó tételeket tehát azonnal alkalmazhatjuk a hengerre is, így annak köbtartalma $r^2\pi m$ (ha r az alapkör sugara és m a henger magassága). Az ellipszis területe $ab\pi$, így az elliptikus henger köbtartalma $ab\pi m$. (a és b az ellipszis féltengelyei, m a henger magassága.)

2. A *gúla*. Alapja sokszög, ennek csúcsait kötik össze oldalélei egy ponttal, a csúcsponttal. Két-két szomszédos oldalél és egy alapél együtt háromszögeket ad. Különleges gúla a kúp, mert alapja végtelen sokoldalú sokszög.

A gúlákra vonatkozó alaptörvényszerűség szerint az alappal párhuzamos síkmetszetek hasonlóak az alaphoz, de

ezt már a projektív geometriából is tudjuk. Területeik úgy aránylanak, mint a csúcstól mért távolságaik négyzetei. Az utóbbi összefüggés planimetriai törvényekkel könnyen igazolható.

Gúlának térfogatának meghatározására a hasábból indulunk ki, még pedig a háromoldalú hasábból.



121. ábra.

Azt állítjuk, hogy minden háromoldalú hasáb három egyforma köbtartalmú gúlára bontható. Vegyük először szemügyre a rajzon az $ABCD$ és a $BCDE$ gúlát. Alapjuk területe egyenlő (ABD és BDE egy paralelogrammának két fele), csúcsuk közös (C), tehát magasságuk is egyforma. (A C pontból az $ABCD$ síkra bocsátott merőleges hossza.) Így a két gúla köbtartalma is egyforma, mert az előbb említett arányossági tétel szerint a csúcstól egyforma távolságra levő, az alappal párhuzamos síkmetszetek területe egyenlő. Legyen az alap (területe T) a csúcstól M távolságra és a csúcstól M' távolságra levő síkmetszeteket hasonlítsuk

össze (területük az egyik gúlában t , a másikban t'). Akkor az egyik gúlában $T:t=M^2:M'^2$; a másik gúlában pedig $T:t'=M^2:M'^2$; de ekkor $t=t'$. Tehát Cavalieri tétele szerint a két gúla köbtartalmának is egyenlőnek kell lennie. Most ugyanígy kimutathatnók, hogy $BCDE$ és a $CDEF$ gúla (közös csúcsuk a D pont) köbtartalma egyenlő. De ilyen körülmények közt $ABCD$ gúla $= BCDE$ gúla $= CDEF$ gúla. Minthogy pedig köbtartalmuk együtt a hasáb köbtartalmát adja, egynek-egynek a köbtartalma a hasábénak a harmada. Ha tehát a hasáb köbtartalma $V=a_1 m$, a gúláé $\frac{a_1 m}{3}$. Mivel tudjuk, hogy minden sokszöget háromszöggé alakíthatunk, Cavalieri tételének ismételt alkalmazásával a háromoldalú gúla köbtartalmára vonatkozó most talált képletet minden sokszögalapú gúlára kiterjeszthetjük. Ezzel az általánosítással a kúp köbtartalmát is a vele egyenlő alapú és magasságú henger köbtartalmának harmadával egyenlőnek mondhatjuk. Ezért a kórkúp köbtartalma $V=\frac{r^2 \pi m}{3}$; az elliptikus kúpé $\frac{ab \pi m}{3}$.

Több sztereometriai képletet már nem sorolunk fel, megtalálhatnók bármely képletgyűjteményben. Levezetésük is egyszerű, többnyire csak planimetriai ismereteket igényel. Talán fölösleges is említenünk, hogy a trigonometriának is és a felsőbb analízisnek is jelentős szerep juthat a sztereometriában. Csak az integrálszámítás segítségével tudjuk például bonyolultabb görbe felületekkel határolt testek, különösen forgástestek köbtartalmát meghatározni. Forgástestek akkor keletkeznek, ha egy görbét tengely körül forgatunk. A legszabályosabb forgástest a gömb. Ezzel külön fejezetben fogunk foglalkozni, de előbb még azokat a feladatokat akarjuk megismerni, amelyek nagyon sokkal előre vitték a geometriát azáltal, hogy megoldásuk a szokásos eszközökkel (körzövel és vonalzóval) nem lehetséges.

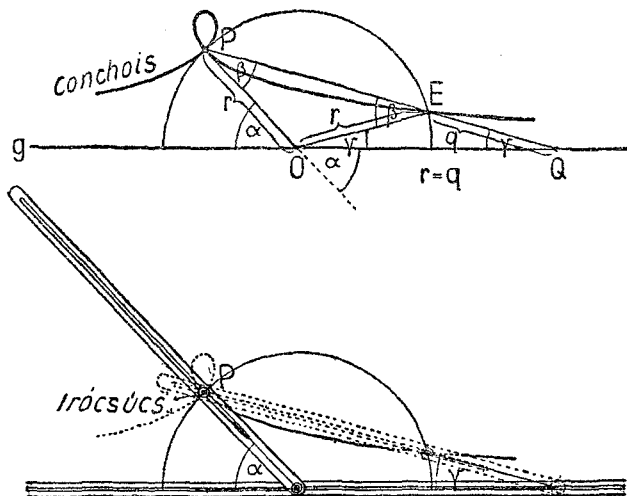
HARMINCHARMADIK FEJEZET.

Szög harmadolás, kör négyszögesítés
és kocka kétszerezés szerkesztéssel.

E három, híres, klasszikus feladat közül először a szögek harmadolását nézzük meg közelebbről. E feladatot Nikomedes görög matematikus oldotta meg elsőnek, igaz, nem körzővel és vonalzóval, hanem egy különleges görbének, a conchoisnak, kagylógörbének felhasználásával. Forgassunk egy sugarat egyik pontja, P körül. Forgás közben e sugár messen egy adott g egyenest. A conchoist a forgó sugár ama két pontja írja le, amely a sugárnak a g egyenessel való metszéspontjától adott q távolságra van. Aszerint, hogy a g egyenes a P ponttól (pólustól), q -nál nagyobb, q , vagy q -nál kisebb távolságra van, a conchoisnak a képen látható három alakja keletkezik. Szögharmadolásra közülük a harmadik, hurkolt alakot fogjuk használni. (122. ábra.)

A szögharmadolás menete a következő elgondoláson alapul: Vegyünk fel a harmadolandó α szög (csúcsa az O pont) egyik szárán tetszés szerint egy pontot (123. ábra). Ez lesz az előbbi P pont, a pólus, a szög másik szára pedig a g egyenes. Húzzunk az $OP=r$ sugárral az O pont körül kört, s tekintsük ugyanazt a távolságot az előbbi szerkesztés q távolságának is. Ezekkel az adatokkal szerkesszünk conchoist. A conchois az E pontban metszi a kört, az E pontot a P -vel összekötő egyenes a Q pontban a g egyenest. A conchois tulajdonságai következtében az EQ távolság $= q = r$. Két egyenlőszárú háromszöget kaptunk: egyik a POE háromszög, a másik az OEQ háromszög. Mindkettőnek a szárai egyformán q hosszúságúak. A β szög az OEQ háromszög külső szöge, tehát $\beta = 2\gamma$. A POE háromszögben pedig $2\beta + (180^\circ - \alpha - \gamma) = 180^\circ$, tehát $\alpha + \gamma = 2\beta$. (Ezt az összefüggést a rajzról közvetlenül is leolvashattuk volna.) A két egyenlőségéből következik, hogy $\alpha + \gamma = 4\gamma$, tehát $\alpha = 3\gamma$. A γ szög tehát az α szög harmada, s ezzel feladatunkat megoldottuk. E szerkesztés gyakorlati megvalósítására már az ókorban is szerkesztettek készülékeket, úgynevezett conchois-körzőket. Na-

gyon egyszerű az ilyennek a szerkezete. A g egyenest egy vonalzó-féle, nevezzük «álló rúdnak» szolgáltatja, amelynek egy hasítéka van egy másik rúd («mozgó rúd») végének vezetésére. Ezen a mozgó rúdon nyer elhelyezést az írócsúcs, akárcsak egy rúdkörzön. Azonban e rúd hosszában is van egy nyílás, ebbe kerül a P pont rögzítésére szolgáló



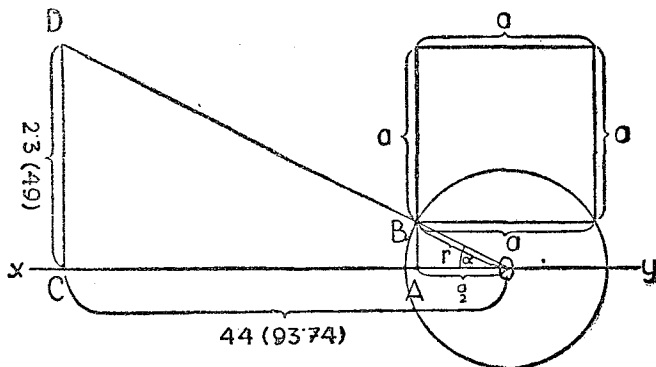
123. ábra.

szeg felső csapja, s ezzel biztosítottuk, hogy a mozgó rúd mindenkor keresztül menjen a P ponton. Az írócsúcsnak és a mozgó rúdnak a vonalzóra eső végének távolsága az előbbi q távolság.

Szerkezetünket a következőképpen használjuk: a vonalzót elhelyezzük a harmadolandó szög egyik szárán. A mozgó rúd végét a szög csúcsára toljuk, s az írócsúccsal e középpont körül kört rajzolunk. A körnek és a szög másik szárának metszéspontjába leszúrjuk a P pontot jelentő szöget, ráfűzzük a mozgó rudat és megrajzoljuk a conchoist. A conchoisnak és a körnek a metszéspontját a P ponttal összekötő

egyenes a g egyenessel együtt megadja a keresett szögharmadnyi szöget.

A kör négyszögesítése a második klasszikus feladat, amelynek megoldásán annyian fáradoztak sikertelenül. Először egy közelítő szerkesztést mutatunk. Ezt a szerkesztést Quoika osztrák ezredes 1934-ben egy röpiratban hozta nyilvánosságra. Ebből a röpiratból származik a következő rajz is. Rajzoljunk az xy egyenes egyik pontját középpontnak véve tetszésszerű sugárral kört. Válasszunk valamely tetszésszerű távolságot egységnek és xy egyenesre mérjünk



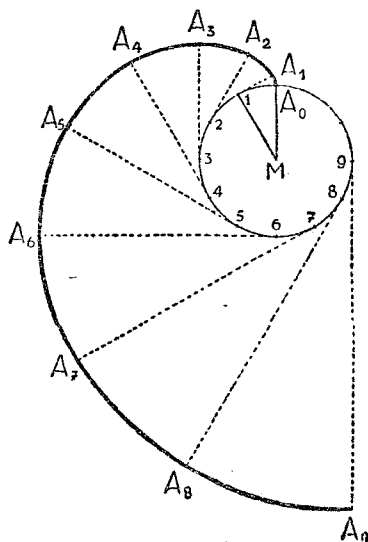
124. ábra.

fel 4.4 (98.74) egységet. Így adódik az OC távolság. (A zárójelben lévő számok ugyanezzel a szerkesztéssel pontosabb eredményt szolgáltatnak.) A C pontban emeljük merőlegest az OC -re és erre mérjük fel 2.3 (49), az előbbivel egyforma nagyságú egységet. Így kapjuk a D pontot, s ha a D pontot az O középponttal összekötjük, az összekötő egyenes B pontban metszi a kört. Ha a B ponton keresztül az xy egyenessel párhuzamos hűrt húzunk, akkor a vele mint oldallal rajzolt négyzet területe jó közelítéssel azonos a kör területével. A szerkesztés igazolása egyszerű, s egyúttal megkapjuk azt is, hogy mekkora hibát követünk el, ha a négyzet területét a kör területével azonosnak tekintjük. A kör négyszögesítésé-

nek feltételi egyenlete $a^2 = r^2 \pi$ (r a kör sugara, a a kör területével egyenlő területű négyzet oldala), ebből $\pi = \frac{a^2}{r^2}$. Az AOB háromszögből $\frac{a}{2} = r \cdot \cos \alpha$, tehát $\frac{a}{r} = 2 \cdot \cos \alpha$ és $\frac{a^2}{r^2} = 4 \cos^2 \alpha = \pi$. A nagyobbik OCD háromszögből viszont $\cos \alpha = \frac{OC}{OD}$ és $\cos^2 \alpha = \frac{OC^2}{OD^2}$. Pythagoras tételével $\cos^2 \alpha = \frac{4 \cdot 4^2}{2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2}$, a pontosabbik esetben pedig $\cos^2 \alpha = \frac{93 \cdot 74^2}{49^2 + 93 \cdot 74^2}$. Ha a fent kijelölt számításokat elvégezzük, az eredményeket 4-gyel megszorozzuk, akkor az első esetben $\pi = 3 \cdot 141582$, a másodikban pedig $\pi = 3 \cdot 141594$ közelítő értékeket kapjuk, a helyes $\pi = 3 \cdot 141592 \dots$ érték helyett. A hiba első esetben kisebb, mint $\frac{1}{2}$, mint $\frac{1}{100,000}$, a másodikban pedig kisebb, mint $\frac{1}{1,000,000}$ tehát a gyakorlat szabta követelményeknek teljesen megfelel. Quoiha még megjegyzi, hogy az eddig ismert legpontosabb közelítő szerkesztés Kochanski jezsuita atyától származik, 1685-ből, s abból $\pi = 3 \cdot 141588$ adódik. A hiba tehát kb. $\frac{6}{100000}$.

Itt akarjuk megjegyezni, hogy az önmagukban véve igen kitűnő közelítő szerkesztések mit sem változtatnak azon a tényen, hogy körzövel és vonalzóval a körrel egyenlő területű négyzet nem szerkeszthető. E helyen ezt nem bizonyíthatjuk, nagyon messzire letérnénk utunktól, meg is haladja tudásunkat. Csak azt említjük meg, hogy a π , mint Lindemann bebizonyította, transzcendens szám, s a szerkesztés lehetetlensége ebből következik. De újabban sikerült olyan szerkesztést találni, amely teljes pontossággal megadja a kör területét, s az eljárás hibái nem az elvből, hanem csak az eszközök pontatlanságaiból adódnak. A szerkesztés a Vietoris-tól feltalált, úgynevezett evolvenskörzű segítségével történik. A körevolvens a spirálisok egyik fajtája. Akkor keletkezik, ha a körhöz érintőt húzunk, s ezt az érintőt a kör kerületén

csúszás nélkül végiggördítjük. Ha ez eljárásunk közben a gördülő érintő egyik pontja «nyomot hagy», akkor a keletkezett görbe körevolvens. Ha «nyomot hagyó» pontnak azt a pontot választjuk, amelyben az egyenes a kört eljárásunk



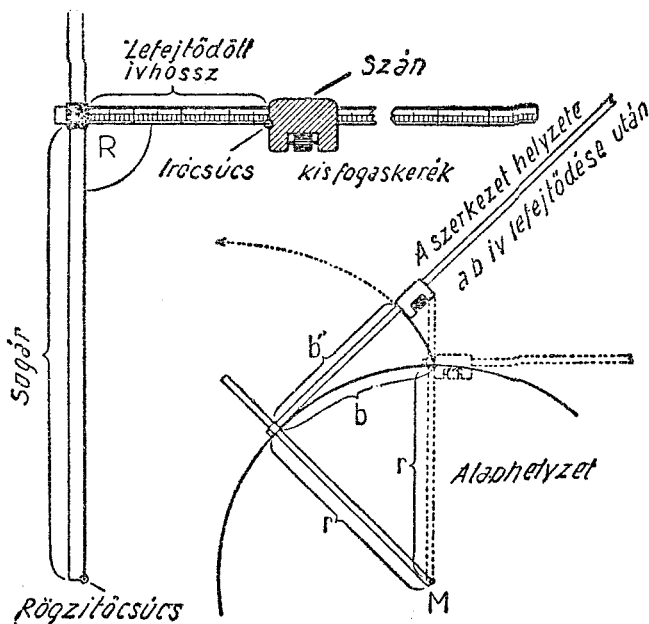
125. ábra.

kezdetekor érintette, akkor a «nyomot hagyó» pont és a mindenkor érintési pont közti távolság a már «elhasznált» körívvel egyenlő hosszú.

Ezzel az eljárásunkkal a kör területét mintegy «kiegyenesítettük», rektifikáljuk. Ha tehát evolvens körzónk segítségével, mondjuk a kör negyedrésztét kiegyenesítettük, akkor a kvadratura problémája megoldást nyert. A negyedkör kerülete ugyanis $\frac{r\pi}{2}$ a kör területe $r^2\pi$, tehát a kapott, negyedkör ívhosszának megfelelő távolság fölé $2r$ magasságú téglalapot rajzolunk, akkor annak a területe valóban egyenlő lesz a

körével. A téglalapot pedig, ha kedvünk tartja, a már ismert szerkesztésekkel bármikor négyzetté alakíthatjuk.

Az evolvens szerkesztése az úgynevezett evolvenskörzövel történik. Ennek igen egyszerű a szerkezete. Egy egyenes rúd egyik végén tű van s ezzel forgathatón valamely felülethez erősíthető. (Akárcsak egy körző.) Ehhez az első rúdhoz csúsztathatóan kapcsolódik egy második rúd. Ez az utóbbi mindenkor merőleges az elsőre, s csúsztathatósága következtében annak bármelyik pontjához rögzíthető. Úgy állítandó be, hogy a kereszt-rúd a mérendő kör érintője legyen. A kereszt-rúdon kocsi csúszkálhat, ez hordja a sugárirányú rúd felé fordult oldalán a rajzoló hegyet. Ez a kocsi kis, élesfogú fogaskerékkel támaszkodik a rajzpapírosra. Ha az egész szerkezetet a középpont körül forgatjuk, akkor a kereszt-rúd



126. ábra.

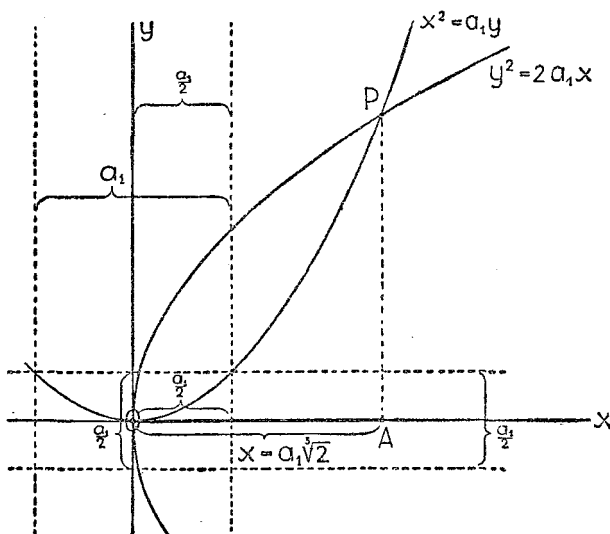
a kereket, tengelyénél fogva, a mindenkori érintővel párhuzamos helyzetbe hozza, az éles fogak ellenállnak a fordításnak, eredményeképpen a kocszi a keresztrúdon kifelé csúszik és a ceruza körevolvens rajzol. A keresztrúdnak a sugárirányú rúd és a rajzoló hegy közötti része pedig az addig lefejtett körkerületet mutatja. A szerkezet, mint már említettük, L. Vietoris (Innsbruck) találmánya.¹

A klasszikus szerkesztési feladatok közt utolsónak az úgynevezett «delosi problémát» említjük. (A kocka kétszeresítésének problémája, «duplicatio cubi.»)

A monda szerint Minos krétai király kockaalakú síremléket emelt fiának. De ez, az építész hanyagsága következtében túlságosan kicsi lett. Elhatározták tehát, hogy a 100 láb magas márványkockát lebontják és helyette kétszer akkora térfogatú kockát építenek. De a matematikusok nem boldogultak az új kocka élhosszána kiszámításával. Másik, szintén klasszikus monda szerint a delosi orákulum egyszer azt a tanácsot adta az athenieknek, hogy a Delos szigeten álló, Apollónak szentelt, kockaalakú oltár helyett kétszer akkora és szintén kockaalakú oltárt állítsanak. Athénben ugyanis pestisjárvány dühöngött, s a betegséget Apollo haragja következményének tulajdonították. Minthogy a kor geometriatudósai nem tudták a feladatot megoldani, Platonhoz fordultak az athéniek tanácsért. De ő állítólag azt válaszolta, hogy az istennek nem annyira a kétszeres terjedelmű oltár a fontos, követelésének inkább az volt a célja, hogy e feladatával a geometria tudományának művelésére buzdítson.

¹ A kétségtelenül igen ügyes szerkezet a kör négyszögesítésének problémáját nem oldja meg. Mert, ha a problémát abban látjuk, hogy a kör területével egyenlő területű négyzetet rajzoljunk, akkor ez a feladat eddig is megoldható volt. A kört ki kellett vágunk papírosból és valamilyen egyenes mentén végig kellett gördítenünk. Így a kör kerülete közvetlenül adódott. Bizonyos, hogy az evolvens körző ezt az eljárást lényegesen megkönnyíti és egyszerűsíti, de elvben újat nem tartalmaz. Ha viszont annak meghatározását tekintjük a körnégyszögesítés feladatának, hogy megadjuk, hány egységnyi négyzet helyezhető el a kör területén, akkor ez az átalakítás se visz tovább, mert ha a sugár hosszát racionális szám adja, a keletkezett négyyszög területe épp oly kevésbé racionális, mint a köré. Az evolvens-körző elsősorban nem a kör területének meghatározására szolgál, hanem fogaskereknek fogainak megrajzolásánál van jelentősége. (A fordító.)

Kétségtelen, hogy a delosi problémának már az ókorban nem egy megoldását ismerték. Igaz, nem körzével és vonalzóval szerkeszthető megoldásokat. Bebizonyítható ugyanis, hogy ha az eredeti kocka élének hossza a_1 , a megnagyobbított kockáé pedig a_2 , akkor $2a_1^3 = a_2^3$, vagyis $a_2 = a_1 \sqrt[3]{2}$, s ez az összefüggés körzével és vonalzóval nem szerkeszthető meg. Hisz tudjuk, hogy ezekkel az eszközökkel legfeljebb csak másodfokú egyenletek megoldását kaphatjuk meg. Más görbék, tehát nem kör, segítségével a feladat minden nehézség nélkül megoldható. Már a Kr. e. V. században sikerült a «holdacskáiról»¹ nevezetes, Chios szigetről származó Hippo-



127. ábra.

kratesnek két parabola metszéspontjának megszerkesztésével a keresett távolságot meghatározni. Az $x^2 = a_1 y$ és az

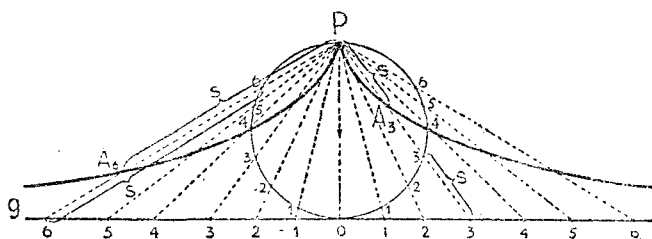
¹ Lásd többek közt szerzőnek «Az egyszeregytől az integrálig» c. kötetében, 229. lap.

$y^2=2a_1x$ parabolák metszéspontjának abszcisszája éppen a keresett élhosszat adja, ha a_1 az eredeti kockának az élhossza. Az első egyenlet alapján ugyanis $y = \frac{x^2}{a_1}$, ezt az értéket a második egyenletbe behelyettesítve: $\frac{x^4}{a_1^2} = 2a_1x$; vagyis $x^3=2a_1^3$ és $x = a_1\sqrt[3]{2}$, tehát x éppen a keresett távolságot adja.

Mivel pedig az ókorban ismertek parabola-körzőket, könnyen meg tudták szerkeszteni a metszéspontot. A szerkesztés menetét egyébként a 127. ábra mutatja.

Egy másik görög matematikus, Diokles, Kr. e. 150 körül a kocka-kétszerezés céljából különleges görbét szerkesztett. E görbének, a cisszoidnak a tulajdonságait és elvét a 128. ábra szemlélteti. Egy körhöz érintőt húzunk s az érintési ponton keresztülmenő átmérő másik végpontján át sugarakat fektetünk. Ha minden sugárra felmérjük a P ponttól a sugárnak a kör kerülete és az érintő közötti részét, akkor cisszoid pontjait kapjuk. A rajzon ezt az összefüggést mutatja, hogy $\overline{3,3}=\overline{PA_3}$ (szóval: a 3 és 3 jelű pontok közötti távolság egyenlő a P és A_3 pontok közötti távolsággal); $\overline{6,6}=\overline{PA_6}$ stb.

A cisszoid egyenlete $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$; a itt a kör átmérője.

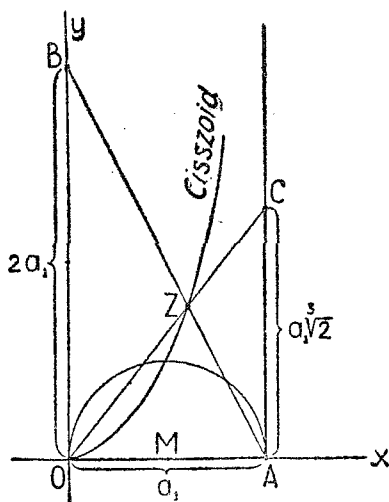


128 ábra.

A görögök természetesen nem foglalkoztak sem a paraboláknak, sem pedig a cisszoidnak az analitikai tárgyalásával. Vizsgálataikat az arányok geometriájának segítségével végezték. Ma, számunkra, azonban már egyszerűbbek az

analízis eszközei, tehát a megoldás igazolására ezeket fogjuk használni.

Rajzoljuk fel tehát először, hogyan kell a cisszoidot a kocka-kétszerezés megoldására használni. Jelentse ismét a_1 az eredeti kocka élhosszát. Azt állítjuk, hogy a 129. ábrán látható AC távolság: $AC = a_2 = a_1 \sqrt[3]{2}$.



129 ábra

Bizonyításul határozzuk meg először a cisszoidnak és az AB egyenesnek Z metszéspontját. Ehhez először az AB egyenes egyenletét kell felírunk. Ez az egyenes keresztülmegy az $A(a_1, 0)$ és $B(0, 2a_1)$ pontokon. Az egyenlete tehát $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ képlet alapján $y - 2a_1 = \frac{2a_1 - 0}{0 - a_1} (x - 0)$, vagy átalakítva: $y = 2(a_1 - x)$. Ha ezt az értéket a metszéspont meghatározása céljából a cisszoid $y^2 = \frac{x^3}{a_1 - x}$ egyenletébe behelyezem, a következőt kapom:

$$[2(a_1 - x)]^2 = \frac{x^3}{a_1 - x};$$

vagyis

$$4(a_1 - x)^2 = \frac{x^3}{a_1 - x}.$$

Ebből

$$4(a_1 - x)^3 = x^3.$$

Tehát

$$\frac{x^3}{(a_1 - x)^3} = 4 \text{ és}$$

$$\frac{x}{a_1 - x} = \sqrt[3]{4}.$$

Ebből az egyenletből

$$x = \frac{a_1 \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4}} \text{ és az } y = 2(a_1 - x)$$

egyenlet felhasználásával

$$y = \frac{2a_1}{1 + \sqrt[3]{4}}.$$

Most már a C pont meghatározására az OZ egyenes egyenletét kell felírunk. Két pontját ismerjük: $O(0, 0)$ és

$$Z\left(\frac{a_1 \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4}}, \frac{2a_1}{1 + \sqrt[3]{4}}\right). \text{ Az egyenes egyenlete tehát:}$$

$$y - 0 = \frac{\frac{2a_1}{1 + \sqrt[3]{4}} - 0}{\frac{a_1 \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4}} - 0} (x - 0) = \frac{2a_1}{a_1 \sqrt[3]{4}} x = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} x.$$

$$\text{De } \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[3]{2}, \text{ tehát az } OZ \text{ egyenes egyenlete}$$

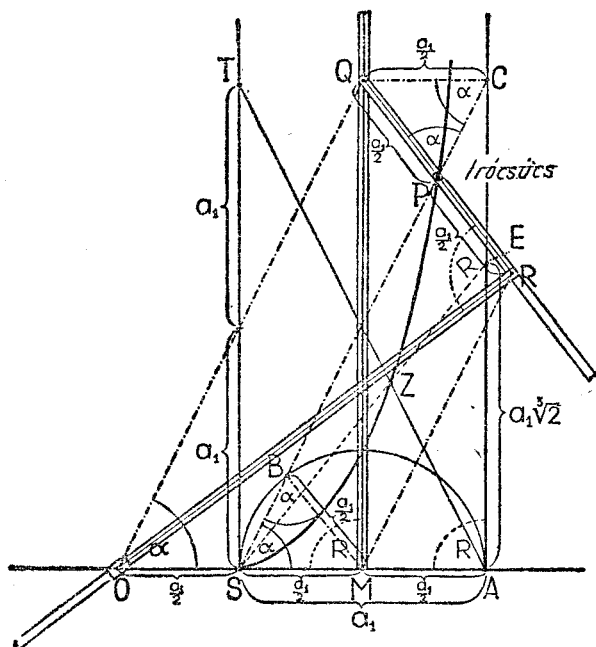
$y = x \sqrt[3]{2}$. Mivel pedig az AC egyenes egyenlete $x = a_1$, a két egyenes metszéspontjának ordinátája $y = a_1 \sqrt[3]{2}$ tehát éppen a «kétszeres» kocka keresett élhossza.

A cisszoid előállítására már a görögök is szerkesztettek

megfelelő körzőket. Ezeknek egyszerűbb fajtáját befejezésül ismertetjük és képét bemutatjuk. (130. ábra.) Lényege két egymásra merőleges rúd, egymáshoz erősítve. Az egyik ágának a hosszát beállíthatjuk, úgy hogy a_1 legyen, szabad vége (Q) a QM sínen csúszik. Ennek az ágnak a felezőpontjában (P) van az írócsúcs. A másik szár (RO) keresztezi a QM sít és az O pontban elhelyezett, szabadonforgó hüvelyben csúszhat. Az OM távolság merőleges a QM egyenesre, hossza $OM = a_1$. A körzővel oly módon oldjuk meg a feladatot, hogy a körzőt beállítva először megrajzoljuk a cisszoidot. Az OM távolságot felező S pontban merőlegest állítunk az OM -re, erre kétszer felmérjük az a_1 távolságot, az így adódó T pontot összekötjük az M -től jobbra, $a_1/2$ távolságra fekvő A ponttal. Az AT egyenesnek és a cisszoidnak Z metszéspontját összekötjük az S ponttal, ennek az egyenesnek a meghosszabbítása metszi ki az M pontban emelt AM -re merőleges egyenesből az E pontot. Az AE távolság adja a keresett a_2 -t: $AE = a_2 = a_1 \sqrt[3]{2}$

Hátra van még annak a bizonyítása, hogy az előbb ismertetett szerkezetünk csakugyan cisszoidot rajzol. Minthogy a P pont, amelyen az írócsúcs éppen áll, a görbének egy tetszésszerű pontja, elegendő azt bebizonyítani, hogy ez a pont valóban pontja a cisszoidnak. Ez csak abban az esetben igaz, ha a $\overline{BC} = \overline{SP}$ feltétel teljesül. Ennek bizonyítására rajzoljunk M középpont körül $\frac{a_1}{2}$ sugarú kört, húzzuk meg

az OQ és MR segédvonalakat, valamint az MB sugarat. Az OMQ és ORQ háromszögek egybevágók, mert az M és R pont mellett fekvő szögük derékszög, OQ oldaluk közös, $\overline{OM} = \overline{QR} = a_1$. Ezért az QOM szög $= OQR$ szög, tehát az $OMRQ$ idom egyenlőszárú trapéz. Az SP egyenes a nem-párhuzamos oldalak felezőpontját köti össze, tehát a trapéz középvonala és párhuzamos az OQ és MR egyenesekkel. Az SP egyenes meghosszabbítása a C pontban metszi az A pontban az AM egyenesre emelt merőlegest. Mivel OQ és SC párhuzamos; $QOM \sphericalangle = CSA \sphericalangle$; továbbá $\overline{OM} = \overline{SA}$; ezért az QOM és CSA háromszögek egybevágók, tehát $\overline{QM} = \overline{CA}$. Ebből következik, hogy \overline{QC} és \overline{MA} párhuzamos



130. ábra.

és egyenlő, tehát $QCP \sphericalangle = BSM \sphericalangle$ (váltószögek). Következik továbbá, hogy a CQP és BMS háromszögek egybevágók, mert $\overline{SM} = \overline{BM} = \overline{QP} = \overline{CP} = \frac{a_1}{2}$. BMS háromszögek egybevágók, mert $\overline{SM} = \overline{BM} = \overline{QP} = \overline{CP} = \frac{a_1}{2}$. Az egybevágóságból végül kiderül, hogy

$$\overline{SB} = \overline{PC}.$$

Hozzáadva a

$$\overline{BP} = \overline{BP}$$

azonosságot,

$$\underbrace{(\overline{SB} + \overline{BP})}_{\overline{SP}} = \underbrace{(\overline{BP} + \overline{PC})}_{\overline{BC}}$$

az eleve felállított feltételünk helyessége beigazolódott, a rajzolt görbe feltétlenül az $\frac{a_1}{2}$ sugarú körhöz és az S pólushoz tartozó cisszoid.

HARMINCNEGYEDIK FEJEZET.

Gömbtan (szférika) és gömbháromszögtan.

A figyelmes olvasónak talán már feltűnt, hogy a legszabályosabb testről, a gömbről még egyáltalán nem volt szó. Szokott általánosító módszerünkkel végtelen sok lapu poliédernek tekinthettük volna. Ilyen körülmények közt végtelen sok, de «végtelen keskeny» gúlából állna, valamennyi gúla alapja a felület, csúcsa pedig a gömb középpontja. Köbtartalma ezek szerint az elfajult alapok összegének, vagyis az egész gömbfelületnek és a sugár harmadának szorzata. De mekkora a gömb felülete? A felület, a végtelen sok, végtelen kisméretű gúla-alap területének az összege. Meghatározása tehát infinitézimális számítást igénylő feladat, így számunkra jelenleg hozzáférhetetlen.

Érthető, hogy a gömb-nyújtotta feladat megoldása nagy-jelentőségű teljesítmény volt. Archimedes volt az első, aki e feladatra világosságot derített. Tudatában is volt teljesítménye jelentőségének ugyanannyira, hogy azt kívánta: véssék sírkövére az általa felfedezett összefüggést gömb és henger közt. Ez megtörtént és századok múlva erről ismerte fel a sírt Cicero, a nagy római szónok és bölcselő, megerősítve az addig mende-mondának tartott szájhagyományt.

A szférikának számunkra az a jelentősége, hogy átmenetet biztosít a nem-euklidesi geometriákhoz. De nem kisebb a gyakorlati jelentősége sem, mert egyik ága, a gömbháromszögtan nélkülözhetetlen a földrajzban, a csillagászatban és a hajózásban.

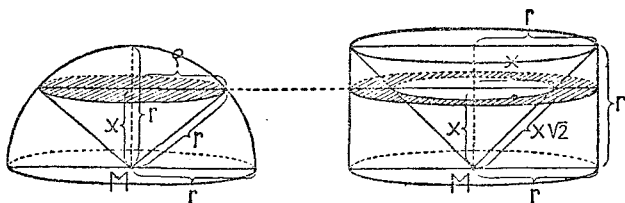
Lássuk tehát Archimedes nevezetes rajzát abban az alakjában, amint századokon át fennmaradt.

A Cavalieri-elv alapján akarunk eljárni, — ezt Archimedesnek valamilyen alakjában ismernie kellett — ezért egy göm-

böt és egy olyan hengert, amelynek alapköre a gömb «legnagyobb köre» valamilyen x magasságban alapjukkal párhuzamos síkkal metszünk. A gömb metszeteként $x=0$ esetén a legnagyobb kört kapom, növekvő x -szel a kör területe mindinkább csökken, végül ha $x=r$, a körből már csak egy pont marad. A henger metszetei végig egyenlők az alapkörrel. Arról, hogy mi is az a legnagyobb kör, még lesz alkalmunk részletesen beszélni. Egyelőre csak annyit, hogy minden olyan kör, amelynek sugara a gömb sugarával egyenlő, a gömbnek legnagyobb köre. De ezzel nem jutottunk még tovább. Eddig csak annyit tudunk, hogy a gömb és a henger metszetei nem egyenlő területűek, de ez szemmel látható. Most következik a mesterfogás. A hengerbe kúpot helyezünk, oly módon, hogy a kúp csúcsa a henger alapkörének M középpontjába essék, alapja pedig a henger felső zárólapja legyen. A rajzról is látjuk, hogy a kúp magassága r , alkotói 45° szöggel hajlanak az alaplapijához. A tengelyen keresztülmenő síkmetszete derékszögű háromszög, amelynek a tengely a magassága. Ha ezt az egyesített hengerből és kútból álló idomot metsszük párhuzamos síkokkal, $x=0$ esetén továbbra is a legnagyobb kört kapjuk, növekvő x mellett azonban már x növekedtével csökkenő területű körgyűrűk maradnak csak a henger és a kúp közt, $x=r$ magasságban a körgyűrű területnélküli körvonallá fajul el. A körgyűrűkből épül fel a «maradék test», amelynek köbtartalma a kúp köbtartalmának kétszerese, mert tudjuk, hogy a kúp köbtartalma a hengerének harmada.

Határozzuk meg az x magasságba fekvő metszet területét a gömbben és a «maradék testben». A gömb metszetének területe $\rho^2\pi$, de Pythagoras tételével $\rho^2=r^2-x^2$, $T_g=(r^2-x^2)\pi$. A maradék test metszete két kör területének különbsége $T_m=r^2\pi-x^2\pi=(r^2-x^2)\pi$. Meglepetve látjuk, hogy a metszetek területe egyenlő, még a határokon is. Tehát Cavalieri elve szerint a két test köbtartalma is egyenlő. Mivel azonban a «maradék test» köbtartalma a henger köbtartalmának és a

$$\text{rúp köbtartalmának különbsége, tehát } r \cdot r^2\pi - \frac{r \cdot r^2\pi}{3} = \\ = \frac{2r^3\pi}{3}, \text{ így a félgömb köbtartalma is } \frac{2r^3\pi}{3}, \text{ az egész gömbé}$$



131. ábra.

pedig $\frac{4r^3\pi}{3}$. Ebből adódik az a másik, már Archimedes által

megadott arányosság a legegyszerűbb körkeresztmetszetű testek, henger, kúp és gömb köbtartalma közt, feltéve, hogy a sugaruk egyforma, a kúpnak és a hengernek a magassága pedig egyenlő a sugár kétszeresével. Kúp : gömb : henger

$$= \frac{2r^3\pi}{3} : \frac{4r^3\pi}{3} : 2r^3\pi = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2 = 1 : 2 : 3. \text{ Jegyezzük meg}$$

talán azt is, hogy a forgási ellipszoidok köbtartalmának képlete is hasonlít a gömbre vonatkozó képlethez ; csupán a sugár helyén a féltengelyek kapnak helyet benne. Forgási ellipszoid akkor keletkezik, ha ellipszist egyik tengelye körül forgatunk.

Köbtartalma $\frac{4a^2b\pi}{3}$ vagy $\frac{4ab^2\pi}{3}$, aszerint, hogy a forgatás a vagy az a tengely körül történt. Az úgynevezett három-tengelyű ellipszoid köbtartalma $\frac{4abc\pi}{3}$. E testnek mindhárom

tengelymetszete ellipszis ; a , b és c a féltengelyei.

Most már számítással is meg tudjuk határozni a gömb felszínét. Már említettük, hogy a felületet megkapjuk, ha a köbtartalmat $\frac{r}{3}$ -mal osztjuk, vagyis a gömböt gúlákból összerakottnak tekintjük. Ezek szerint a gömb köbtartalma $K = \frac{4r^3\pi}{3} = F \cdot \frac{r}{3}$ (F a gömb felszíne), tehát $F = \frac{4r^3\pi}{3} : \frac{r}{3} = 4r^2\pi$. A gömb felszínét tehát legnagyobb körének négyszeres területe adja.

Most, hogy a gömb felszínét és köbtartalmát már meg-

határoztuk, nem foglalkozunk tovább a sztereometria gömbre vonatkozó részével. Nem tekintjük ezentúl a gömböt testnek, az R_3 részének, hanem inkább mint felülettel fogunk vele foglalkozni. Figyeljük meg alaposan az itt következőket, nagyon egyszerű módját fogjuk találni az egyik nem-euklidesi geometria megismerésének. Szándékosan mondjuk, hogy «egyk» nem-euklidesi geometria. Mert többféle van és a gömbfelületen ezenfelül csak az egyiknek a planimetráját ismerjük meg. E szempontból a gömbfelület az euklidesi síknak felel meg, mert mindenütt egyformán és pozitív értelemben görbült. Gauss elnevezése szerint a gömb¹ állandó pozitív görbültségű felület. A görbület állandósága következtében a gömbfelszín minden része, minden ebből összerakott idom a gömbön éppen úgy eltolható és elfordítható, mint ahogy a síkidomok a síkban. Röviden tehát, a gömbfelszín állandó, pozitív görbültségű kétméretű tér, görbült R_3 . Ezt akkor fogjuk igazán hihetőnek találni, ha a gömb sugarát nagyon nagyra vesszük. Így a felszín is igen kiterjedt lesz, mint például a föld felszíne. Az ember akkor már észre sem veszi, nem is gondol arra, hogy idomok, pl. földterületek határvonalait tulajdonképpen gömb felszínén szerkeszti meg. Ilyen nagy felületekre is nyugodtan alkalmazzuk a sík geometriáját, habár az csak közelítőn érvényes

Lássuk most azokat az elemeket, amelyekből a gömb felszínének geometriáját felépíthetjük. A pont feltétlenül ilyen elem. A pontnak, mivel nincs kiterjedése, közömbös, hogy milyen felületrészének tekintjük. Hisz görbültségről mindenkor csak több pont esetén szerezhethünk tudomást, egy pont esetén soha. De mi az egyenes gömbfelszíni megfelelője?

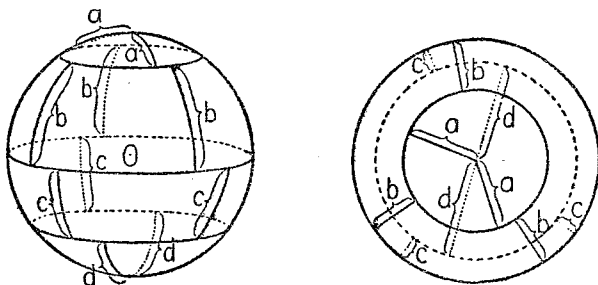
Kétségtelen, hogy az euklidesi egyenest hiába keressük a gömb felszínén. A gömb felszínén, ha az R_3 -ból szemléljük, minden vonal görbült, sőt esetleg többszörösen görbült is lehet. Körzővel viszont a gömb felszínére szép szabályos köröket is rajzolhatunk — csak egyenest soha.

De különös ötletünk támad. Rajzoljunk párhuzamos

¹ Ismételten fogjuk a «gömb» szót «gömbfelület» értelemben használni.

vonalakat a gömbön! E feltételen az egymástól mért egyforma távolság követelményét is érthetnők, hisz a földön a szélességi köröket párhuzamos köröknek is szokás nevezni.

Ilyen «párhuzamos körök» egymástól mért távolsága mind az egyenlítő síkjával párhuzamosan, mind pedig a sarkokat összekötő egyenes irányában nézve valóban állandó. De most meghökkenünk. Távolságokat mértünk! E távolságok a 132. ábra második képén valóban egyenesek. De az



132. ábra.

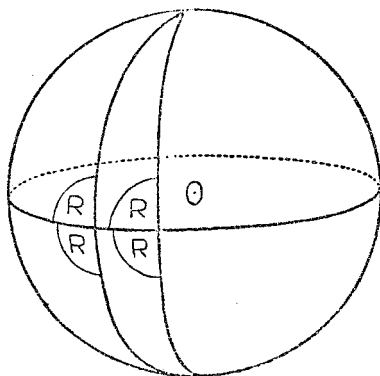
első képen? Görbe vonalak! De távolságon két pont közt húzható legrövidebb vonal hosszát értjük. De mi a legrövidebb összekötő vonal két pont közt? Síkban bizonyosan az egyenes. Hisz az egyenest a síkban, annak idején, éppen e tulajdonságával határoztuk meg. Vajjon e tulajdonság nyomára vezet a gömbfelszín «egyenésének»?

De ne találgassunk, keressük tovább a párhuzamosakat. Emlékezzünk vissza, akkor is párhuzamos egyeneseket kaptunk a síkban, ha egy egyenesre egymás mellett két merőlegest állítottunk. Tehát tegyük fel, hogy az egyenlítőn állunk és abban a naív hitben leledzünk, hogy a föld felszíne sík. Valami szerintünk sík mezőn meghúzzuk az egyenlítő egyik darabját és két merőlegest húzunk erre az «egyenesre».

Ha merőlegeseinket meghosszabbítjuk, legnagyobb csodálkozásunkra mindkét irányban a végesben, a föld két sarkán metszenék egymást.

Ne keltsünk tehát több zavart, áruljuk el: a gömb felüle-

tén vannak különleges vonalak, s ezek megfelelnek a sík egyeneseknek : ezek az úgynevezett legnagyobb körök. Mindenkör egy legnagyobb körrész a legrövidebb összekötő vonal a gömbfelszín két pontja közt. És két legnagyobb kör egy gömb felületén mindenkor két pontban metszi egymást, egy



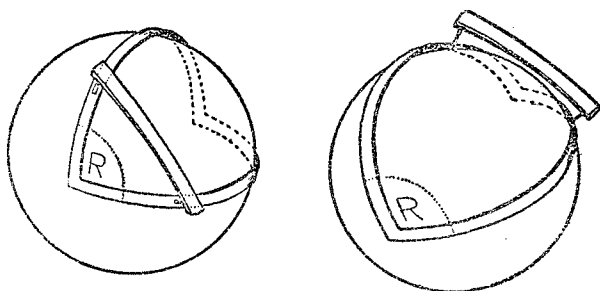
133. ábra.

gömbátmérő két végpontjában, két «átellenes pontban». Még akkor is, ha, mint előbb velünk megesett, egyik részükön párhuzamosaknak véltük őket.

Ebben még nincs semmi csodálatos. A gömbön bizony más a helyzet, mint a síkban. Csodálatos csupán az, hogy a párhuzamosakra vonatkozó tételen kívül valamennyi axióma a gömbre is teljes mértékben érvényes, tehát minden olyan tétel, amely a párhuzamosak tételétől független, minden további meggondolás nélkül alkalmazható a gömbön is ; csupán az «euklidesi egyenes» helyébe kell mindenkor gömbi főkört (legnagyobb kört) tenni. Mohrmann javaslatára ilyen látszólagos egyeneseket g -vonalaknak is szokás nevezni, mert ezek, mint pontokat összekötő legrövidebb vonalak, a vonalak különleges csoportjába tartoznak. Geodetikus vonalak, világvonalak, néven is találkozhatunk velük. Ezek szerint a sík g -vonalai az egyenesek, a gömb g -vonalai pedig a legnagyobb (vagy másnéven fő-) körök.

A következőkben Mohrmann nyomán bemutatunk egy euklideszi szerkesztést, amely teljes mértékben független attól, hogy milyen geometria segítségével oldjuk meg. Éppen úgy helyes tehát a síkban, mint a gömbön. Vannak tehát olyan geometriai tételek, amelyek függetlenek attól, hogy melyik geometriában végezzük a szerkesztést, minden geometriában érvényesek. Ezért ezeket az abszolút geometriához tartozó tételeknek is nevezik. Szerkesztésünk tehát az abszolút geometriához tartozó szerkesztésnek látszik, mivel gömbön éppen úgy végrehajtható, mint síkon. Tudománytörténeti tréfának hangzik: Euklides egyik szerkesztése, mint nem-euklideszi szerkesztés!

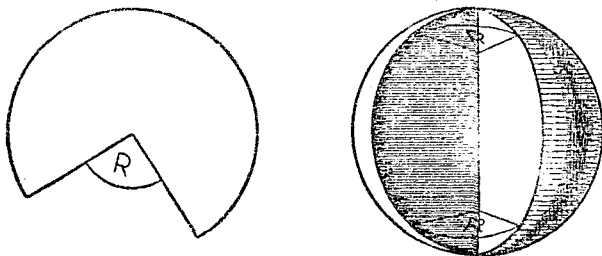
Szokásunk szerint nem árasztjuk el az olvasót ilyen alapvető ismeretek új tételeinek tömegével, inkább addig mutatjuk a feladatot más-más oldaláról, amíg ebből az egész feladatkör elve ki nem derül, s közben összehordjuk a szükséges



134. ábra.

ismereteket. Szó volt már körzőről és vonalzóról. Körző? Jó, már tudjuk, hogy közönséges körzővel is tudunk a gömb felületére kört rajzolni. Még egyszerűbb lesz a körhúzás, ha a körző rajzoló szárát a másiknál valamivel hosszabbra vesszük. Itt jegyezzük meg, hogy általában nem szokás a gömbfelület félgömbnél nagyobb részét szerkesztésre használni. De milyen a vonalzó, amellyel az egyenesnek megfelelő legnagyobb köreinket rajzolhatjuk? Erre is használnánk valami különleges körzőfélét, olyant, amelynek

nyílása éppen a gömb negyedét fogja át. Ez a vonalzó-pótlék azonban nem volna valami könnyen kezelhető, így helyette inkább gömbi vonalzót használunk. Ez a gömbhöz pontosan símuló két fémpántból áll, külső, rajzhoz használt élei a gömbnek éppen főkörei. A két pánt két pontban metszi egymást és ezekben a pontokban merőlegesek egymásra. Együtt tehát úgynevezett derékszögű gömbkétszöget adnak.



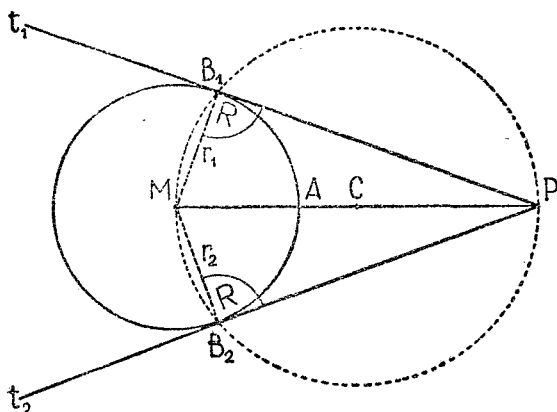
135. ábra.

Durván azt mondhatjuk, hogy egy negyedgömb határoló vonalait használjuk vonalzónak, tehát egy negyed narancs héját.

Ilyen vonalzóval mindenkor össze tudjuk kötni a gömbfelület tetszésszerű két pontját g -vonallal. E vonalzóval továbbá mindenkor rajzolhatunk egymásra merőleges gömbi g -vonalakat.

Most már hozzáfoghatunk a bejelentett szerkesztéshez. A feladat: szerkesszük meg a körhöz a kívülről fekvő P pontból húzható két érintőt. Euklidesi megoldása e feladatnak Thales tételével történik (félkörben fekvő kerületi szög derékszög) s rajzban a 136. ábra mutatja. A P pontot összekötjük a kör M középpontjával, e távolságot megfelezzük, s felével mint sugárral a C felezőpont körül kört rajzolunk. Ez a kör az eredeti kört a B_1 és B_2 érintési pontban metszi. (Az r_1 és r_2 ugyanis az eredeti körnek sugara, a segédkörben viszont Thales tétele alapján merőleges a t_1 és t_2 egyenesre; t_1 és t_2 tehát az eredeti körnek érintője.)

Ez a szerkesztés, ha rejtve is, tartalmazza a párhúza-



136. ábra.

mosak posztulátumát. Thales tétele ugyanis a háromszög szögeinek 180 fokok összegével bizonyítható. Ez a megoldás tehát kötve van az euklidesi geometriához, a gömbre nem vihető át. De egy másik megoldás, amely a párhuzamosak posztulátumát nem tartalmazza, körző és gömbi vonalzó segítségével mindenképpen megvalósítható a gömbön is. A 137. képen¹ láthatjuk a szerkesztést, «gömb-táblára» krétával felrajzolva. Számunkra a feketére festett gömb az iskolai falitábla, a «nem-euklidesi rajzfelület». A szerkesztés a következő. A kör M középpontját összekötjük a P ponttal, az érintők előírt közös kiindulópontjával. A P ponton keresztül M középpontú segédkört rajzolunk ezután és merőlegest állítunk az AP vonalra az A pontban. Ez a merőleges a segédkört a Q_1 és Q_2 pontban metszi, s ha e pontokat az M ponttal összekötjük, akkor az összekötő vonalak a kört az érintési pontokban (B_1 és B_2) metszik. A B_1 és B_2 pontot a P ponttal összekötve kapjuk a keresett érintőket. (A szerkesztés helyessége az MAQ_1 , MB_1P és MB_2P háromszögek egybevágóságán alapszik. Ebből ugyanis következik, hogy az

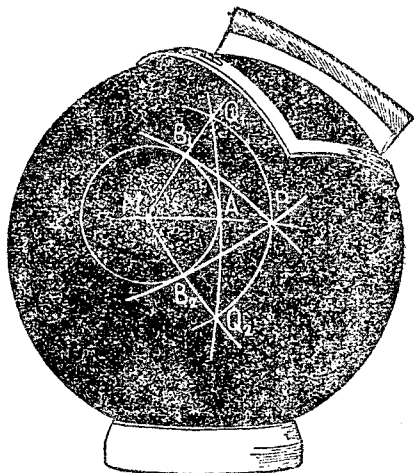
¹ Ez a kép Hans Mohrmann: «Einführung in die nichteuklidische Geometrie» című könyve nyomán készült.

MAQ_1 , MB_1P és MB_2P szög egyenlő és hogy mindegyik derékszög.)

Most, hogy megéreztük a nem-euklidesi geometria első fuvallatát, túlzott általánosítások elkerülésére néhány korlátot szabó megjegyzést kell tennünk. Először is a gömbfelület önálló geometriája — tehát ha nem kérdezzük, hogy milyen tulajdonságú a tér, amelyben a gömb helyet foglal — csak egyike a számtalan lehetséges nem-euklidesi geometriának. Egyébként a planimetriának felel meg, tehát nem-euklidesi planimetria. Nem-euklidesi a geometria, ha a párhuzamosak tétele nem érvényes. Ez a helyzet minden görbült R_2 -ben, vagy R_3 -ban. Az R_1 -ben nem lehet szó párhuzamosokról. A görbült terek közt is vannak különlegesek, még pedig azok, amelyeknek a görbületi mértéke állandó, ennek következtében bennük az idomok alakváltozás nélkül tolhatók és fordíthatók el. E kiváltságos tereknek csak három fajtájuk lehetséges. Azt a teret, amelynek görbületi mértéke állandó és pozitív, szférikus térnek nevezzük, s a gömbfelület az e térhez tartozó R_2 . A görbültségnélküli, nulla görbültségű tér a mi mindennapi terünk, a hozzátartozó R_2 a sík. Végül az állandó negatív görbültségű tér, a pszeudoszférikus tér, a hozzá tartozó R_2 a pszeudoszféra («álgömb»), amelyről később még szó lesz.

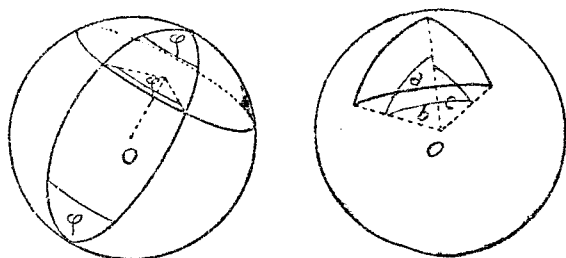
De most még háttérbe kell szorítanunk nem-euklides álmainkat és figyelmünket a gömb geometriájára kell fordítanunk. A gömböt most euklidesi környezetben fogjuk tanulmányozni. Már megállapítottuk, hogy a gömb felszínén kétszögek is vannak, ilyen idomot pedig a síkból nem ismerünk. Két síkbeli g vonal, egyenes, ugyanis nem zárhat közre semmilyen síkrészt. Az ilyen gömbi kétszög mindenkor szimmetrikus, két főkör fele határolja. Két szöge, jelöljük φ -vel, mindenkor egyenlő. Így két gömbkétszög egybevágóságához, ugyanazon a gömbön egyetlen szög azonossága elegendő. A gömb sugarából és e szögből a gömbkétszög további jellemzői is számíthatók. Ilyen például a gömbkétszög felszíne és az oldalakat adó főkörök síkjával határolt gömbszektor köbtartalma.¹ A képleteket nagyon egyszerűen

¹ Legjobban egy narancsgerezdhez hasonlít.



137. ábra.

kapjuk meg. Mivel az egész gömb olyan gömbkétszögnek tekinthető, amelynek határoló főköréi összeesnek, az ilyen kétszöghöz tartozó szög 360° . Itt kell beszúrnunk néhány szót a gömb felületén történő szögmérésről. Euklidesi szempontból a gömb felületén görbe vonalak által bezárt szögekkel van dolgunk, tehát a szöget a görbe vonalak érintői közt kell mérnünk. Projektív szempontból a gömb esetén a gömbi főkörök szögét a főköröket tartalmazó síkok hajlásszöge adja meg. A gömb felületére rajzolt sokszögek esetén pedig (ha az oldalak száma $n \geq 3$) a csúspontokat összekötjük a gömb középpontjával, ezáltal testszöglet keletkezik és e testszögletnek és a gömbfelületnek metszésvonalai a gömbi sokszög oldalai. Világos, hogy a testszöglet oldalai (azaz élszögei) látszanak oldalaknak a gömb felületén, szögei pedig a gömbsokszög oldalai lesznek. A testszöglet élszögeivel adjuk meg tehát a gömbi sokszög oldalait. Az oldalakat a gömbsokszögekben is a latin abécé első kisbetűivel fogjuk jelölni, s ezért lesz eleinte kissé idegenszerű, hogy az oldalak hosszát is fokokban adjuk meg. A legnagyobb köröktől



138. ábra.

bezárt szögek a testszöglet lapszögei lesznek. E szögeket szokásunk szerint kis görög betűkkel fogjuk továbbra is jelölni.

De most nagyon messze vetődtünk eredeti célunktól. Térjünk tehát vissza a gömbkétszög területének, valamint a gömbszektor köbtartalmának meghatározásához. Tehát megállapítottuk, hogy a teljes gömbfelület 360 fok szögű gömbkétszög. Mivel azonban a gömb felszíne $F = 4r^2\pi$, minden 360 foknál kisebb szögű gömbkétszög területe arányosan

kisebb, vagyis $F_\varphi = 4r^2\pi \cdot \frac{\varphi}{360}$. Ha $\varphi = 90^\circ$, akkor $F_\varphi = \frac{4r^2\pi \cdot 90}{360}$,

vagyis a gömb felszínének negyede, tehát az eredmény nyilván helyes. A gömbszektor köbtartalma viszont $K = \frac{4r^2\pi}{3} \cdot \frac{\varphi}{360}$,

s e képlet helyességét maga az olvasó kipróbálhatja, ha a φ számára különböző értékeket vesz fel. Természetesen e képletek a határesetekre, $\varphi = 360^\circ$ és $\varphi = 0^\circ$ is érvényesek.

Most jutottunk el a tulajdonképpeni gömbháromszögtanhoz, az elemi geometria még tárgyalandó utolsó fejezetéhez. Habár kijelentettük, hogy jelentősége lényegesen eltörpül a gömbfelszín geometriájának, mint a nem-euklidesi geometria egyik fajtájának, jelentősége mellett, nem szabad ezt az állításunkat sem félreérteni. Gömbháromszögtan nélkül még csak a pontos időt sem ismernők, oly fontos segédeszköz ez a tudomány a csillagásznak. És éppen ilyen fontos a földmérőnek is. De még egyszer: a geometria további fejlődése szempontjából a »geometria forradalma» szempontjából előbbi,

nem-euklidesi kirándulásunk tanulságosabb volt. Mert ott látszott meg, hogy az euklidesi geometria nem az egyetlen, Istentől származó geometria, hanem van még más geometria is és mind teljesen egyenrangú, egyforma értékű.

Gömbháromszögről beszéltünk már. Három g -vonal (legnagyobb kör, főkör) határolja. És mindenkor csak g -vonal. A közös síkháromszögnek projektív megfelelője a gömb felületén. Ez közvetlenül világos lesz előttünk, ha mindkettőt egy triéder metszetének, sík-, illetve gömbmetszetének tekintjük. Így tehát érvényesek a projektív tételek a gömbháromszögre is. A gömbháromszögnek is vannak tehát különleges pontjai. Csupán azok a tételek nem igazak, amelyek a párhuzamosak posztulátumával függnek össze, tehát első sorban nem igaz, hogy szögeinek összege 180° . A gömbháromszög szögeinek összege mindenkor több mint 180° , s azt a szöget, amellyel a szögek összege a 180 fokot meghaladja, gömbi többletnek, szférikus excessusnak nevezik. Erről a szférikus excessusról (ϵ betűvel szokás jelölni) még lesz szó. Említetük, hogy a gömbháromszög oldalait a hozzátartozó triéder élszögeivel mérjük. Ezzel minden feladatunk független lett a gömb sugarától. Természetesen a gömb sugarát bármikor ismét behozhatjuk számításainkba. De egyelőre teljesen figyelmen kívül maradhat. A gömbháromszög szögei viszont a triéder lapszögei.

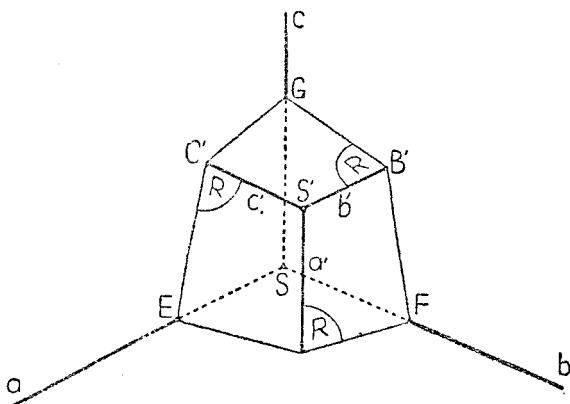
Ne feledkezzünk meg arról sem, hogy a síkgeometriához hasonlóan a gömbfelületen is foglalkozhatnánk sokszögekkel. Ezek is felbonthatók volnának gömbháromszögekre, esetleg kivételesen gömbkétszögekre is. Ezeket a gömbi sokszögeket is elképzelhetjük mint egy megfelelő oldalszámú testszöglet és egy gömbfelület metszését és itt is átvihetők a megfelelő projektív tételek a testszögletről a gömbi sokszögre.

Nagyon hasznosnak látszik ezek szerint, ha emlékeztünkbe idézzük és némiképpen kiegészítjük a testszögletekről tanultakat. Különösen fontosak számunkra a háromoldalú testszögletek.

1. Először is állapítsuk meg, hogy egy n oldalú testszöglet oldalainak összege mindenkor kisebb 360 foknál. Durva, de szemléltető hasonlat, ha a testszögletet kínai ernyőhöz hasonlítjuk. Ezt háromszögekből állónak tekinthetjük, és ha

annyira kifeszítettük, hogy egészen köralakú lett, akkor oldalainak összege elérte a 360 fokot és síkba feküdt ki. Tehát a gömbsokszög oldalainak összege mindenkor kisebb 360 foknál.

2. Nagyon fontos eredményt ad a testszöglet úgynevezett sarktestszögletének vizsgálata. Ha ugyanis elképzeljük, hogy egy testszöglet belsejében fekvő pontból merőleges egyeneseket bocsátunk a testszöglet oldalaira, akkor ismét testszöglet



139. ábra.

keletkezik. Ennek az utóbbinak az oldalszáma természetesen megegyezik az eredeti testszöglet oldalszámával. Egyszerűség kedvéért csak háromoldalú testszögletet, triédert rajzolunk fel.

A merőlegesek meghúzásával négyszögek keletkeznek, mindegyikben az egyik szög az eredeti triéder lapszöge, két szög derékszög, végül a negyedik szög a sarktriéder élszöge. Ebből a leírásból is világos már, hogy az eredeti triéder lapszöge és a sarktriéder élszöge együtt 180 fokot adnak, hiszen minden négyszög szögeinek 360 fokos összegéből a két derékszög már 180 fokot lefoglal. De mivel fordítva is: az eredeti triéder élei merőlegesek a sarktriéder lapjaira (ez igen könny-

nyen bizonyítható), az eredeti triéder élszögei a sarktriéder megfelelő lapszögeivel szintén 180 fokot adnak. A két triédert tulajdonképpen csak akkor szokás egymás sarktriéderének nevezni, ha csúcsaik egybeesnek. A viszonyokon azonban ez az elhelyezkedés sem változtat semmit, hisz a pontot, amelyből a merőlegeseket húztuk, a triéder belsejében bárhol felvehettük, tehát helyéül az eredeti triéder csúcsát is választhattuk volna. A helyzetet úgy képzelhetjük el legjobban, ha a képen is látható «belső» triédert addig nyomjuk bele a másikba, amíg csúcsaik össze nem esnek. Ezek az összefüggések természetesen a gömbháromszögekre is átvihetők; sarkgömbháromszöge egymásnak az a két gömbháromszög, amelyek sarktriédereknek ugyanazon gömbbel történt metszéséből származnak. Ekkor az egyik gömbháromszög oldala és a másiknak megfelelő szöge együtt 180 fokot ad.

3. Az előbbi tételből és a testszögletekre vonatkozó általános tételekből adódnak azok a határok, amelyeken belül fekszik a gömbháromszög szögének összege. Ezt az összefüggést a következő egyenlőtlenség alakjában írhatjuk:

$$180^\circ < (\alpha + \beta + \gamma) < 540^\circ$$

mindaddig, míg a félgömb határait át nem lépjük.

4. Minden triéderben és minden gömbháromszögben:

- a) egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek fekszenek,
- b) nagyobb szöggel szemben nagyobb oldalak, kisebb szöggel szemben kisebb oldalak fekszenek, és viszont,
- c) két oldal összege nagyobb mint a harmadik oldal.

5. Két triéder vagy két gömbháromszög egybevágó vagy tükörképszerűen szimmetrikus, ha egyenlő a kettőben:

- a) két oldal és a közbezárt szög,
- b) egy oldal és a rajta fekvő két szög,
- c) mind a három oldal,
- d) mind a három szög,
- e) két oldal és az egyikkel szemben fekvő szög. (De ekkor a másik oldallal szemben fekvő szög mindkettőben nagyobb legyen 90 foknál vagy mindkettőben kisebb.)
- f) két szög és az egyikkel szemben fekvő oldal. (De a

másikkal szemben fekvő oldal mindkettőben nagyobb vagy kisebb legyen 90 foknál.)

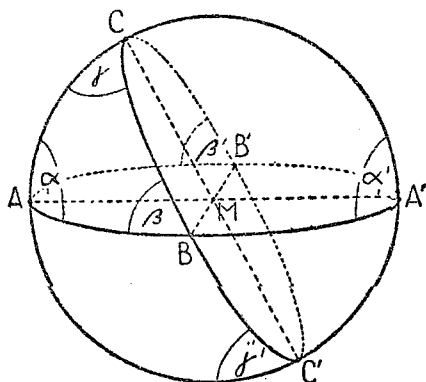
E kongruencia-tételekhez még azt kell megjegyeznünk, hogy ezek egyúttal szimmetriatételek is. A gömbháromszögek ugyanis térbeli tulajdonságai is vannak és így az euklidesi R_3 -ban nem fordítható át. Csak egyenlőszárú és egyenlőoldalú gömbháromszögben egyértelmű az egybevágóság és a szimmetria. Továbbá megállapítottuk, hogy a síkgeometriával ellentétben itt az SSS tételből is egybevágóság következik. Könnyű belátni, hogyan lesz itt a hasonlósági tétel egybevágóságra vonatkozó tetellé. Mert míg triéderünket síkokkal bármelyik részén metszhetjük, s ha a metsző síkok párhuzamosak, a kimetszett háromszögek hasonlóak lesznek, addig itt, egy bizonyos gömbbel való metszést kell mindenkor figyelembe vennünk. Ezzel a hasonló idomok helyett természetes egybevágó idomokat nyertünk.

6. Már említettük, hogy a triédernek vannak különleges egyenesei, amelyek a gömbháromszögben mint különleges pontok jelentkeznek. A triéderbe és a triéder köré írható kúpnak megfelelően van a gömbháromszögbe és a gömbháromszög köré írt kör is. Az előbbinek a középpontja (akárcsak a síkháromszögben) a szögfelezők metszéspontja, utóbbié pedig az oldalefelező merőlegesek metszéspontja.

Ezzel már elég ismeretet gyűjtöttünk, hogy a gömbháromszögtanhoz szorosabban tartozó feladatok megoldásához foghassunk. E tudománynak, igaz, csak az alapvonaláival foglalkozhatunk, nem mintha az összefüggések túlságosan nehezen érthetők volnának. Sokkal nagyobb nehézséget jelent, hogy minden idevágó feladat megoldása a gyakorlatban hosszadalmas és nehézkes számolást igényel. S továbbá minden érdeklődő bőséges és nagyszámú tankönyvet találhat és az alapfogalmak ismeretében nehézség nélkül tanulmányozhat.

Először határozzuk meg a szférikus excesszus fogalmát. E fogalom azt a többletet jelenti, amennyivel nagyobb egy gömbháromszög szögeinek összege, mint egy síkháromszögé. Tehát képletben: $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$. Igyekezni fogunk e szférikus excesszus jelentőségét közelebről megismerni. A 140. képen AA' , BB' és CC' a gömb tetszésszerű átmérői.

Az ABC pontokkal alkotott gömbháromszög, mint bármely gömbháromszög, két-két oldalának meghosszabbítása által három módon egészíthető ki gömbkétszöggé. Az így adódó gömbkétszögek szöge sorban $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$. Már tudjuk, hogyan lehet a gömbkétszög területét meghatározni, s így



140. ábra.

felírhatjuk az alább következő egyenlőségeket. T mindenkor a gömbháromszög területét jelenti, a T mellé annak a háromszögnek a csúcsait írjuk, amelynek a területét jelölni akarjuk.

$$T_{(ABC)} + T_{(A'BC)} = 4r^2\pi\alpha \frac{1}{360}$$

$$T_{(ABC)} + T_{(AB'C)} = 4r^2\pi\beta \frac{1}{360}$$

$$T_{(ABC)} + T_{(ABC')} = 4r^2\pi\gamma \frac{1}{360}$$

A harmadik egyenlet helyett ezt is írhatjuk:

$$T_{(ABC)} + T_{(A'B'C)} = 4r^2\pi\gamma \frac{1}{360},$$

mert az ABC' és az $A'B'C$ háromszög egybevágó, helyesebben szimmetrikus, egymással, mivel ugyanahhoz a gömbhöz és csücsütriéderekhez tartoznak.

Ha három egyenletünket (a harmadik egyenletnek második írásmódját véve) összeadjuk, akkor az összeg

$$T_{(ABC)} + T_{(ABC)} + [T_{(ABC)} + T_{(A'BC)} + T_{(AB'C)} + T_{(A'B'C)}] = \\ = 4r^2\pi(\alpha + \beta + \gamma) \frac{1}{360}.$$

Az ábrán jól látszik, hogy a szögletes zárójelbe foglalt kifejezés a félgömb felszíne, tehát $2r^2\pi$, és ezzel az egyenlet

$$2T_{(ABC)} + 2r^2\pi = 4r^2\pi(\gamma + \beta + \alpha) \frac{1}{360}.$$

Kettővel osztva és átalakítva

$$T_{(ABC)} = 2r^2\pi(\alpha + \beta + \gamma) \frac{1}{360} - r^2\pi = \\ = r^2\pi \left[(\alpha + \beta + \gamma) \frac{2}{360} - 1 \right] \\ = r^2\pi \left[(\alpha + \beta + \gamma) \frac{1}{180} - \frac{180}{180} \right] \\ = r^2\pi \frac{(\alpha + \beta + \gamma) - 180}{180}$$

Ha a tört számlálóját pontosabban szemügyre vesszük, láthatjuk, hogy az az ABC háromszög szférikus excessusa:

$= \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$. Írhatjuk tehát, hogy $T_{(ABC)} = r^2\pi \frac{\varepsilon}{180}$, s ebből kiderül, hogy azonos sugár esetén a gömbháromszög területe arányos a szférikus excessussal, vagyis

$$T_1 : T_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2,$$

tehát más szavakkal: a szférikus excessus a gömbháromszög területével arányosan nő vagy fogy. Most értjük meg, hogy Gauss tulajdonképpen miért igyekezett lehetőleg nagy háromszögben meghatározni a szögek összegét. Természetesen egy

látszólag sík háromszög szögeit akarta megmérni, mert nem a föld gömbalakú felszíne érdekelte, hanem az, hogy vajjon «egyenes» vagy pedig «görbült» R_3 -ban élünk-e.

Lássunk példákat. A gömb negyedrészt fedő háromszög szférikus excesszusa 180° . A háromszög területéből és a gömb sugarából ugyanis meghatározható a szférikus excesszus, mivel $T = r^2 \pi \frac{\varepsilon}{180}$ és ebből $\varepsilon = \frac{T \cdot 180^\circ}{r^2 \pi}$. Ha a háromszög

területe $3r^2 \pi$, tehát nagyobb a félgömbnél, az excesszus 540° . Ha a terület 0, akkor $\varepsilon = 0$, tehát ez is igazolja annak a jogosultságát, hogy a gömbfelület egy pontját sík pontjának is tekinthetjük. Ha a gömbháromszög területe a félgömb területénél kisebb, — már előre elhatároztuk, hogy csak

ilyen háromszögekkel foglalkozunk — akkor $2r^2 \pi > r^2 \pi \cdot \frac{\varepsilon}{180}$ vagy $2 > \frac{\varepsilon}{180^\circ}$, tehát $\varepsilon < 360^\circ$, az excesszus kisebb mint 360° .

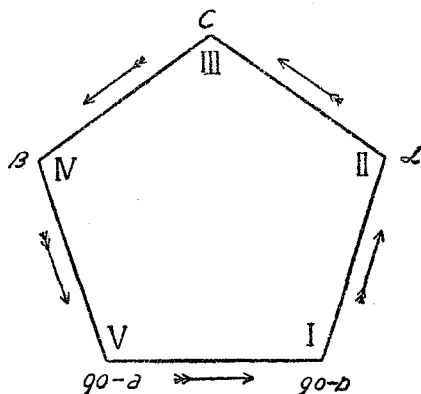
Ezzel a háromszög szögeinek összege, figyelembe véve, hogy $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma = \varepsilon + 180^\circ < 360^\circ + 180^\circ$; tehát $\alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$. Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a sarktriáderén és a sarkgömbháromszögon alapuló megfontolással.

A síkháromszöghöz hasonlóan most is a derékszögű gömbháromszöggel kell tárgyalásainkat kezdenünk. De itt felmerül a kérdés: mit nevezünk derékszögű gömbháromszögnek? Hisz esetleg három derékszög is lehet egyetlen háromszögben! A válasz: az a gömbháromszög derékszögű, amelynek legalább egyik szöge derékszög. És valamennyi idevágó képlet erre vonatkozik, tekintet nélkül arra, hogy a többi szög mekkora. Miként a síkháromszög esetében, a derékszögű gömbháromszögre vonatkozó képletek is a háromszögnek három alkotórészét tartalmazzák. A gömbháromszögre vonatkozó képletekben megeshetik ugyan az is, hogy egy képletben két szög és egy oldal szerepel csak, de ez az egybevágóságról mondottak alapján nem meglepő. A képletek hasonlóak a következő képlethez:

$$\cos a = \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

Vagyis egyik alkotórész (szög vagy oldal) valamilyen szögfüggvénye egyenlő két másik alkotórész szögfüggvényének szorzatával.

Ezeket a képleteket Sir John Napier (akinek a nevét már a logaritmusokkal kapcsolatban ismerjük) egyszerűen és áttekinthetően foglalta össze.



141. ábra.

Hagyjuk most el a derékszöget, akkor a derékszögű gömbháromszögnek öt alkotórésze marad. (Három oldal és két szög.) Ha ezeket elhelyezkedésük sorrendjében egy ötszög csúcsaihoz írjuk (141. ábra), akkor a következő összefüggés érvényes: bármely alkotórész cosinusa egyenlő a szomszédos alkotórészek sinusainak vagy a nem-szomszédos alkotórészek cotangenseinek szorzatával, csak a befogók helyett mindenkor a pótszögeket kell vennünk. Tehát például:

$$\cos (90^{\circ}-a)=\sin \beta . \sin (90^{\circ}-b)=\cot c . \cot a,$$

vagyis

$$\sin a=\sin \beta . \cos b=\cot c . \cot a .$$

Ha valamilyen feladatot akarunk megoldani, akkor is így kell eljárunk. Derékszögű gömbháromszöget két alkotórésze egyértelműn meghatároz (az általános törvényből ez

azonnal következik, hisz egy harmadik alkotórész, a derékszög, magától értetődően ismert). Ha egy harmadik alkotórészt keresünk, akkor csak elővesszük az ötszöget és megnézzük, hogy a három alkotórész (két ismert és egy ismeretlen) közül melyik a «középső», tehát melyik «szomszédos» vagy «nem-szomszédos» mindkét másikkal. Ennek az alkotórésznek a cosinusa egyenlő tehát a másik kettő megfelelő függvényének szorzatával és az így adódó egyenletből az ismeretlen kiszámítható. Például a és b ismert, keresendő c .

Az a «szomszédja» a b -nek és a c -nek, tehát

$$\cos a = \sin(90^\circ - b) \cdot \sin c;$$

ebből

$$\sin c = \frac{\cos a}{\sin(90^\circ - b)} = \frac{\cos a}{\cos b}$$

Ferdeszögű gömbháromszögre éppen úgy vannak képletek, mint a ferdeszögű síkháromszögre. Négy ilyen képletesoport van, mert négyféleképpen válogathatunk össze egy ismeretlen és három ismert alkotórészt egy képletbe.

1. Összefüggés két oldal és a velük szemben fekvő szögek közt. (A gömbháromszög sinustétele. Nem ad egyértelmű eredményt, ezért alig használatos.)

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Írható így is:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = M,$$

és M a gömbháromszög «modulusa».

2. Összefüggés két oldal, az általuk bezárt és az egyikükkel szembenfekvő szög között.

$$\cos c \cos a = \sin c \cdot \cot b - \sin a \cot \gamma.$$

Ez az egyenlet az alkotórészek más összeválogatásával öt más módon is írható.

3. Összefüggés három oldal és az egyik szög között (A gömbháromszög oldal-cosinustétele.)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \gamma.$$

A három oldalnak megfelelően háromféleképpen írható.

3. Összefüggés három szög és az egyik oldal közt. (A gömbháromszög szög-cosinustétele.)

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha.$$

Ez is háromféleképpen írható.

Végül meg kell még említenünk, hogy a szférikus excesszus a három oldalból is meghatározható a Heron-képlettel analóg L'Hulier-képlettel. Jelölje s a háromszög oldalai összegének

$$a \text{ felét, tehát } s = \frac{a+b+c}{2}$$

akkor

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}}.$$

Nem mélyedünk el tovább a gömbháromszögtan képletrengetegében, hisz e képletek javarésze arra való, hogy a logaritmussal való számolást lehetővé tegye. Befejezzük elemi geometriai tanulmányainkat, hogy a könyvünk címében is említett negyedik dimenzióval foglalkozhassunk. Azoknak, akik velünk együtt haladtak, egyszerű játéknak fog tűnni, habár kellő felkészültség híján a legjobbaknak is nehézséget okozhatna. De túlzásokba ne essünk. Nem volt feladatunk és nem is lehetett, hogy a nem-euklidesi, vagy háromnál több dimenziós geometria tudósaivá képezzük ki magunkat. Könyvünkkel sokkal inkább arra törekedtünk, hogy megszüntessük azokat az első nehézségeket, amelyek a tanulni vágyók nagy részét elriasztják a geometriai tanulmányoktól.

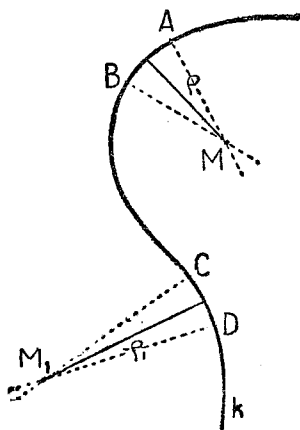
HARMINCÖTÖDIK FEJEZET.

Nem-euklidesi geometriák.

Most már túl vagyunk munkánk nehezebbik részén: összeszedtük az elemi geometria eszköztárát. Igaz, csak az alapvonalakat láttuk és minden fejezetben egész sora maradt a megoldatlan, meg nem ismert problémáknak; de az alapvonalak megismerésén nem is akartunk túlmenni. Éppen

olyan kevésbé kívánhatjuk, hogy a következő fejezetek során mélyebben merüljünk a feladatokba. De a bibliával szólva: az ígért földjét legalább távolról megpillanthatjuk. Sőt, néhány eredményt részletesebben is megismerünk.

A laikus és a kezdő kellemetlen képeket fűz a görbült terek és a negyedik dimenzió fogalmához. Az ijedtség ellen lassankint már felvérteztük magunkat. Kezdjük tehát a görbült terekkel. Mivel számunkra a «tér» szó csak valamilyen R_n -et jelent, a gömb felülete görbült R_2 volt. Még pedig pozitív és állandó görbültségű R_2 . A kör állandó, pozitív görbültségű R_1 . Már Newton ismerte a görbület mértékét, igaz, csak az R_1 -re vonatkoztatta. A görbületi mérték e fogalmát Gauss terjesztette ki felületekre. E kiterjesztés lényege körülbelül az, hogy két jellemző számértékkel megadjuk a felület valamely elemének legnagyobb és legkisebb görbületét. Lássuk ezeket valamivel részletesebben. Azt az álláspontot foglaljuk el, hogy minden görbe vonal legkisebb részecskéjét körívvel szemlélhetjük. Így minden részecskének van görbületi sugara: annak a körnek a sugara, amelynek elemi részével a görbeelemet azonosnak tekintjük.



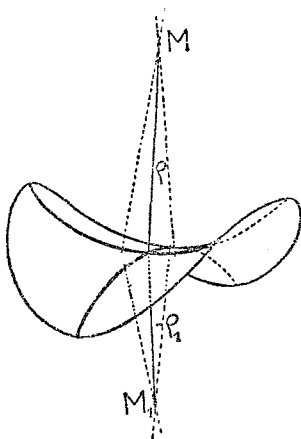
142. ábra.

Így a k görbe AB darabkájának ϱ a görbületi sugara, a CD darabnak pedig ϱ' . Szigorúan véve ez csak akkor igaz természetesen, ha az A és B pontok, valamint a C és D pontok olyan közel vannak egymáshoz, hogy «közvetlen szomszédoknak» tekinthetők. A görbületi mérték viszont a görbületi sugár fordított, reciprokok értéke, a görbület irányát pedig a görbületi mérték előjelével szokás meghatározni.

Ha tehát előbbi példánkban az egyik görbületi mérték $\frac{1}{\varrho}$, akkor a másik $-\frac{1}{\varrho'}$, vagy fordítva $-\frac{1}{\varrho}$ és $\frac{1}{\varrho'}$, tekintve, hogy a két görbületi középpont, M és M_1 a görbének két különböző oldalán van. Ha egy felület görbületi mértékét akarjuk megkapni egyik pontjában, akkor Gauss nyomán e pontban érintősíkot fektetünk a felülethez, s erre merőleges egyenest állítunk az érintési pontban.¹ Ha e merőleges egyenesen síkokat fektetünk keresztül és meghatározzuk az ezek által kimetszett görbék görbületi sugarait, akkor a legnagyobb, illetve legkisebb görbületi sugár két, egymásra merőleges síkhoz tartozik. Jelölje a legnagyobb, illetve legkisebb görbületi sugarat ϱ_1 és ϱ_2 , akkor a felület Gauss-féle görbületi mértéke e pontban $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$. Ha a kimetszett görbék úgy görbülinek, hogy a két görbületi sugár a felület más-más két oldalára kerül, akkor ϱ_1 vagy ϱ_2 negatív, s vele együtt a görbületi mérték is az. Ilyen esetben beszélünk negatív görbületű vagy nyeregfelületekről.

Ha végül bárhogy választjuk is a két, egymásra merőleges metszősíkot, a két görbületi sugár mindenkor legfeljebb előjelben különbözik egymástól, úgy állandó pozitív, illetve negatív görbületű felülettel van dolgunk. A görbületi mérték $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ vagy $-\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$, a szerint, hogy a két görbületi sugár előjele egyenlő vagy különböző. E szempontból háromféle felülettel lehet dolgunk. Ha $\varrho_1 = \varrho_2$, akkor felületünk gömb, ha $\varrho_1 = -\varrho_2$, vagyis abszolút értékük egyenlő, de előjelük különböző,

¹ Felületekhez éppen úgy tartozik érintő sík, mint a görbékhez érintő (egyenes).



143. ábra.

akkor az állandó, negatív görbületű felülethez jutunk. E felületnek nyeregfelületszerűnek kell lennie, s néha pszeudo-szférának, álgömbnek is szokták nevezni. Azt hitték, hogy ez a felület képzetes gömb, mert ha egy gömb sugara $r=iR$, akkor a görbületi mértéke valóban $K=-\frac{1}{R^2}$; de Beltrami 1868-ban kimutatta, hogy e feltételnek megfelelő mindenütt valós pontú felületek is vannak. Ha végül a görbületi sugarat $\pm\infty$ -nek vesszük, akkor a felület görbületi mértéke $\frac{1}{\infty^2}$ vagy $\frac{1}{-\infty^2}$. Mindkettő, tudjuk, nulla. De nulla görbületű felület a sík.

E megjegyzések után vázolhatjuk a nem-euklidesi geometria történetét, s utána lényegére is utalhatunk. Tudjuk, hogy már az ókorban sem bíztak nagyon az euklidesi posztulátumnak, a párhuzamosak posztulátumának helyességében. E bizalmatlanságnak aligha volt egyetlen oka az a bonyolult fogalmazás, amelyet Euklides adott tételének. Olyan tények is hozzájárultak a bizalmatlanság növeléséhez, mint a hiper-

bola aszimptotáinak tulajdonságai. Igyekeztek tehát a posztulátumot «bebizonyítani», azaz egyszerűbb axiómára visszavezetni és a bizánci Proklos (Kr. u. 410—485) egyszerűbben fogalmazta meg. Az \acute{o} fogalmazásában a tétel így szól: «Ha a a P ponton keresztülmenő és a g egyenessel párhuzamos egyenes, akkor a P ponton keresztül nem húzható még egy, az a -tól különböző és a g -vel párhuzamos egyenes.» Természetesen minden bizonyítás sikertelen volt, úgyhogy egy ezredévvél később más hipotéziseket kezdtek felállítani. A jezsuita G. Saccheri 1833-ban hozta nyilvánosságra «Euklid, von jedem Makel befreit» című művét¹ s benne egy ilyes «hipotézist» állít fel és cáfol meg. A cáfolat azonban helytelen volt, úgyhogy Saccherit tekinthetjük a később hosszú sorban következő «Euklides-tagadók» ősének. J. H. Lambert (1728—1777) eléggé messze jutott kutatásaiban; szerepelnek bennük a 180 foknál nagyobb szögösszegű gömbháromszögek is; tudatában volt, hogy a párhuzamosak tétele és a háromszög 180 fokok szögösszege ekvivalens. Ő már a képzetes gömböt is említi. G. S. Klügel (1739—1812) és a nagy Legendre (1752—1833) is beleütközik e problémába, de a párhuzamosak tételét mindketten érvényesnek tekintik, bár kételkednek benne, hogy *a priori* igazság volna. A geometria nagy forradalma így Gauss-szal kezdődik, aki — mint Bolyai Farkashoz írt leveléből kiderül — már 1799-ben foglalkozott a párhuzamosak tételével. Bolyai Farkas maga is egész életén át foglalkozott a problémával, de végül be kellett látnia fáradozásainak céltalanságát és Euklides igazát. És ekkor kezdődik a tudománytörténet legkülönösebb felfedezés-egyidejűsége, amelyet, nehogy zavaros legyen, szkematikusan kell leírnunk.

a) Gauss maga hamarosan rájött a titok nyitjára; olyan ellenmondásmentes geometriát épített fel, amelyben a háromszög szögeinek összege kisebb mint 180° és a párhuzamosak tétele nem érvényes. De nem hozta nyilvánosságra és még 1829-ben is azt írja Besselnek, a nagy csillagásznak, hogy fél a beóitaiak hangoskodásától, ezért nem

¹ «A szeplőtlen Euklides» lehetne a magyar címe.

fejt ki teljesen véleményét. Ez a talányos eljárása még pszichológiai és történeti magyarázatra vár.

b) Lényegében ugyanerre a geometriára jutott egy Schweikart nevű jogász; tudomására hozta Gaussnak és dícséretet kapott érte.

c) Schweikart veje, Taurinus, e témáról írt értekezését 1825-ben nyilvánosságra hozza. De ugyanabba a hibába esik, mint Saccheri, úgy hogy végül Euklides tételének kizárólagos helyességét hirdeti.

d) Csak Bólyai János, a magyar mérnökkari tiszt épít ki a Gauss-félével teljesen azonos nem-euklidesi geometriát 1823-ban (a háromszög szögeinek összege szerinte kisebb, mint 180°), de csak 1832-ben hozza nyilvánosságra.

e) A többiektől teljesen függetlenül jutott az orosz I. N. Lobacsefszkij (1793—1856) ugyanarra a geometriára 1826-ban¹ és felfedezését előterjesztette a kazáni egyetemnek. («Kazáni értekezés».) Nyilvánosságra 1829—1840 közt került. Lobacsefszkij határozottan egyenértékűnek mondja geometriáját Euklidesével.

f) Teljes általánosságban a nagytehetségű Bernhard Riemann, Gauss tanítványa és későbbi göttingeni professzor, készítette elő 1854-ben a forradalom végleges győzelmét. Habilitációs dolgozata: «Über die Hypothesen die der Geometrie zugrunde liegen» (A geometria alapvető hipotézisei), s amelyet Gauss még végighallgatott, mindhárom geometria ($\Sigma > 2R$, $\Sigma = 2R$, $\Sigma < 2R$) ismeretét tanúsítja.

g) A végső győzelmet Beltrami és F. Klein munkálkodása hozza; ők ketten kimutatják, hogy van csupa valós pontból álló állandó negatív görbületű felület, ezenkívül lényegesen egyszerűsítették és tökéletesítették a geometria világszemléletét.

Ez a nagy forradalom rövid története, talán a legnagyobbé, amelyet a tudománytörténet ismer. Jegyezzük meg, a «nem-euklidesi» kifejezés Gaussból származik. Ma ez a szó szinte teljesen körülvesz már minket. Már a népszerű tudománnyal

¹ Ha eltekintünk attól, hogy Gauss egyik tanítványa kollégája volt az oroszoknak az egyetemen és így esetleg említhette neki, hogy Gauss a párhuzamosak tételével foglalkozik.

foglalkozó verebek is mind ezt csiripelik. Azért olyan nagy ez a népszerűség, mert Einstein ezeket a geometriákat a fizikában kezdte alkalmazni. Cáfolja meg a történet ismerete azt a laikus véleményt, hogy a modern fizikusok a görbült terek és a negyedik dimenzió feltalálói. A fizikai alkalmazás természetesen *időszerűbbé* tette a nem-euklidesi geometriákat. Erről egyébként mindenki meggyőződhet, ha kezébe veszi azt a népszerű leírást, amelyet maga Einstein adott e témáról.

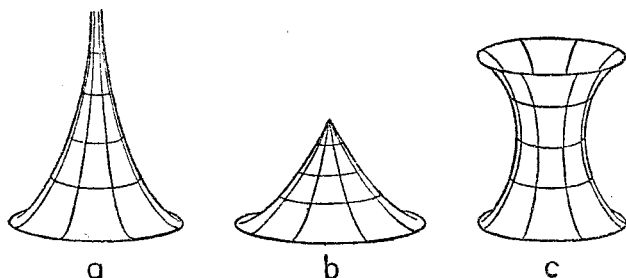
De nekünk ez most mellékes. Kezdjük inkább ismét ott, ahol a görbe terek tárgyalását abbahagytuk; megállapítjuk azt, hogy egy görbe felületnek, egy görbe R_2 -nek, amelynek görbültsége minden irányban egyenlő és ezáltal a benne fekvő idomok szabadon forgathatók és eltolhatók, a görbületi mértéke, figyelembe véve a $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ (állandó) feltételt, csak $+\frac{1}{\varrho^2}$, 0, vagy $-\frac{1}{\varrho^2}$ lehet. Ahhoz, hogy a görbületi mérték 0 legyen, elegendő volna, hogy vagy a ϱ_1 vagy ϱ_2 a végtelenbe növekedjék. Ezzel már $K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = 0$, s a felület mégis görbült, mint például a henger vagy a kúp felszíne. Itt csodálhatjuk a nagy Gauss éles eszét. Ugyanis ő jött rá arra, hogy a felület euklidesi vagy nem-euklidesi jellege éppen a görbületi mértékkel van összefüggésben. Ha a görbületi mérték 0, akkor a felületen érvényes az euklidesi geometria, ha 0-tól különböző, akkor valamilyen nem-euklidesi geometria érvényes. Valóban a kúp és a henger palástja síkba fejthető, vagyis nyúlás és alakváltozás nélkül «csavarhatjuk le» és fektethetjük ki síkba palástjukat. Ha papírlapon valamilyen geometriai szerkesztést végzek, akkor ezt a papírlapot akadálytalanul csavarhatom rá hengerre vagy kúpra, s az idom körülményei mitsem változnak. És viszont. Csak azt kell elképzelnünk, hogy ez a fel- és lecsavarás korlátlanul folytatható, különben az idomok önmagukkal kerülhetnének fedésbe. Így a kúp vagy henger tengelyére merőleges irányban is vannak végtelen euklidesi egyenesek.

Felvetjük a kérdést, hogy milyenek a másik két geo-

metria g -vonalai? Megállapítjuk, hogy $\frac{1}{\rho_2} > 0$ esetén, tehát a gömbön, a g -vonalak legnagyobb körök. Ezzel már foglalkoztunk és azzal indokoltuk, hogy a gömbfelület két pontja közt a legrövidebb összekötő vonal a gömb legnagyobb körének egyik része, a másik része pedig a leghosszabb összekötő vonal. Ha az összekötendő pontok átellenesek akkor a két összekötő vonal egyforma hosszú. De ekkor nem egy összekötésmód van, hanem végtelen sok, mert az egyik ponton keresztülmenő minden legnagyobb kör a másik ponton is keresztül megy. Egyértelmű szerkesztési eljárások kedvéért a gömbfelület geometriáját félgömb felületére szokás korlátozni.

A g -vonalak alakjából következik, hogy a gömbön nem érvényes a párhuzamosak tétele. A gömb felületén egyáltalán nincsenek párhuzamos g -vonalak; bármely két g -vonal, kellőképpen meghosszabbítva a végesben metszi egymást. Viszont a párhuzamosak tételének érvénytelenségéből az következik, hogy a háromszög belső szögeinek összege nem 180° . A gömbháromszög szögeinek összege $\Sigma > 180^\circ$. A 180 fok felett fennmaradó többlet a szférikus excesszus és ez arányos a háromszög területének az egész gömb felületéhez való viszonyával. A gömbfelület geometriája egyik nem-euklidesi planimetria, amelyre jellemző, hogy $\Sigma > 180^\circ$ és párhuzamosak száma 0 ; e jellemző tulajdonságokkal meghatározott geometriákat nevezik szférikus vagy elliptikus geometriáknak. Ha $\rho_1 = \rho_2 = \infty$, akkor a sík planimetriáját kapjuk, az euklidesi planimetriát. Parabolikus planimetriának is nevezik és az elliptikus és a hiperbolikus planimetriák határesetete. Ha a görbületi mérték kisebb mint 0 , akkor e negatív görbületű felületen a Gauss, Bolyai és Lobacsefszkij felfedezte pszeudo-szférikus, másképp hiperbolikus geometria érvényes. A felület, ha negatív görbületi mértéke minden pontjában egyforma, nyeregfelület s a görbületi sugarak hossza állandó. Ma már tudjuk, hogy többféle olyan felület van, amely a «képzetes gömb» e követelményének megfelel. Az «álgömb» leggyakrabban használt alakja az úgynevezett forgási traktrix-felület, amelyet a 144. kép a rajzán láthatunk. A Leibniz és Huygens által tanulmányozott traktrix, más néven üldöző-görbe,

akkor keletkezik, ha például egy zsebórát az asztalra fektetünk, láncát megfeszítjük és a lánc végét a kifeszített lánc irányára merőleges egyenes mentén húzzuk. Ekkor az óra traktrixot rajzol az asztalra. Ez a görbe mindinkább közeledik az egyeneshez, amelyen a lánc vége mozog, anélkül, hogy valaha is elérné. Az egyenes tehát az üldöző-görbe aszimptotája. Ha az egész görbét az egyenes körül megforgatjuk,



144. ábra.

akkor a traktrixfelületet kapjuk, helyesebben a felét. A másik fele az előbbinek tükörképe, tehát az egész traktrixfelület két, nyílásával egymásra helyezett harsonához hasonlít. A «harsonák» csöve végtelenbe nyúlik és mindinkább vékonyodik. Van még két másik álgömbyszerű forgási test is, amely a széléig kielégíti $\rho_1 = -\rho_2$ feltételünket (144. képen *b* és *c*). De e kettő már periodikus, vagyis a forgástengely irányában mindig újabb és újabb részeket kell egymáshoz illeszteni. «Álgömb iskolatáblának» a képen *c*-vel jelzett alak felel meg a legjobban.

Természetesen a negatív görbületű nem-euklidesi térben és R_2 -ben is vannak *g*-vonalak, s ezek két pont legrövidebb összekötő vonalai. Ha a negatív görbületű tér *g*-vonalai háromszöget határolnak, akkor azt tapasztaljuk, hogy a háromszögben a szögek összege kisebb mint 180° . Ezzel a párhuzamosak tételének is más alakja lesz. Az álgömbön ugyanis egy ponton keresztül valamely «egyenessel» két párhuzamos húzható. Van azonkívül végtelen sok olyan *g*-vonal,

amely az előbbi metszi, de van végtelen sok olyan is, amely nem párhuzamos ugyan az előbbi «egyenessel», de azt nem is metszi. A pszeudoszférikus, Bólyai—Lobacsefszkij geometria tehát szintén nem-euklidesi geometria. A most elmondottak e geometria planimetriájára vonatkoztak. E planimetriát egy $-\frac{1}{\varrho^2}$ görbületű felületen tanulmányoztuk, rajta a háromszög szögeinek összege $\Sigma < 2R$ és a valamely ponton keresztül húzható, egy g -vonallal párhuzamos g -vonalak száma kettő. Mielőtt ezt a tényt részletesebben tárgyalnók, foglaljuk össze táblázatban a három geometria fő tulajdonságait.

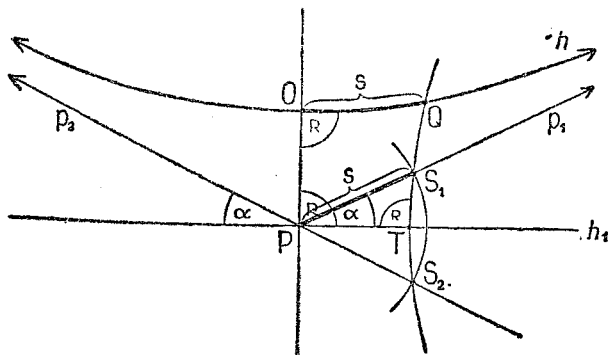
Az R_2 alakja	Görbületi mérték	Egyenessel kívül fekvő ponton keresztül húzható párhuzamosak száma	A geometria elnevezése
Gömbfelület	$K = \frac{1}{\varrho_2} > 0$ $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ (állandó)	0	Szférikus vagy elliptikus geometria. (Nem-euklidesi)
Sík (esetleg kúp vagy henger stb. felülete)	$K = 0$ $\varrho_1 = \varrho_2 = \infty$ (esetleg) $\varrho_1 = \infty$ vagy $\varrho_2 = \infty$	1	Síkgeometria. Parabolikus geometria. (Euklidesi)
Algömb (pszeudoszféra, vagy a másik két forgásfelület)	$K = \frac{1}{\varrho_2} < 0$ $ \varrho_1 = \varrho_2 =$ (állandó) de $\varrho_1 = -\varrho_2$	2	Pszeudoszférikus geometria. Hiperbolikus geometria. (Nem-euklidesi)

Megjegyezzük, hogy számtalan olyan tétel van a geometriának, amely a párhuzamosak tételétől független, így mindhárom geometriában változatlanul érvényes. Eppen ezeknek a tételeknek az összessége az «abszolút geometria».

Mielőtt e tanulmányainkból következtetéseket vonnánk le,

lássunk egy szerkesztést: szerkesszünk «álgömb» iskolatáblánkon párhuzamosakat. Először vázlatosan fogjuk a szerkesztést felrajzolni, a bizonyítás azonban túlmegy könyvünk keretein.

Rajzoljunk tehát a P ponton keresztül a h -val jelzett g -vonallal párhuzamost. Először merőlegest kell a P pontból a h -ra húznunk. Ezt könnyen megtehetjük; az «álgömb»-táblához megfelelő vonalzó is tartozik, amely, akárcsak a gömbvonalzó, teljesen hozzásimul a táblához. E merőlegesnek O a talppontja. Mérjük fel most az O pontból a h «egye-



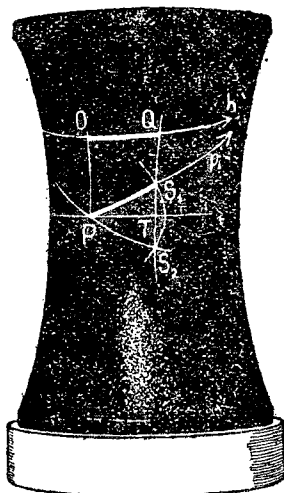
145. ábra.

nesre» valamilyen s távolságot, ennek a végpontja Q . Most a Q pontból húzzuk merőlegest arra a h_1 «egyenesre», amelyet úgy kaptunk, hogy az OP vonalra, annak P pontjában merőlegest állítottunk. Ha a P pont körül s sugárral kört rajzolunk, akkor ez a QT g -vonalat az S_1 és S_2 pontban metszi. Ezt a két pontot kell a P ponttal összekötnünk, hogy a keresett két (p_1 és p_2) párhuzamost megkapjuk.

Valamennyi olyan g -vonat, amely az α szögnél nagyobb szögben metszi a h_1 -et, metszi a h -t is. Ha azonban ez a hajlásszög kisebb mint α , akkor a g -vonalak nem metszik a h -t, de nem is párhuzamosak vele.

Az eddigiekhez még hozzá kell fűznünk, hogy valamennyi

pszeudoszférikus háromszögnek, mivel szögeik összege $\Sigma < 2R$, pszeudoszférikus defektusa van, $\vartheta = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$, s ez, akárcsak a szférikus excesszus, a háromszög területével növekszik. Oly módon válik ez a növekedés leginkább értethetővé, ha elképzeljük, hogy minél nagyobb a háromszög a felülethez képest, annál inkább részesedik annak tulajdonságaiban és a görbültség következményeiben. Így mindhárom



146. ábra.

geometria elenyésző kis részén igaz, hogy $\Sigma = 180^\circ$ és érvényes a párhuzamosak tétele, mert eléggé kis felületelemet görbültség nélkül valónak tekinthetünk. Véges nagyságú méretek közt azonban az euklidesi geometria csak azon a felületen érvényes, amelynek a görbületi mértéke 0, tehát a síkban és a tágulás nélkül síkbafejthető felületeken, mint például a kúp vagy a henger palástja.

Természetesen mindebből nem következik, hogy a görbületi mérték a felületek minden pontjában csak állandó vagy a két görbületi sugár csak egyforma lehet. Ilyen nem

állandó görbületű felületek mindegyikének, ha egyik görbületi sugár sem végtelen, megvan a maga különleges, nem-euklidesi geometriája. Ezeken azonban nem tolhatók vagy fordíthatók el tángulás nélkül az idomok, hisz minden helyzetükben más és más görbületi viszonyokhoz kellene alkalmazkodniok. Képletesen : a tenger színén lebegő ázott papírlaphoz hasonlítanának, amelynek követnie kell állandóan a hullámok alakját.

Tehát annyiféle a geometria, ahányféle felület létezik. S ezeknek elenyésző kis részében érvényes csak a párhuzamosak euklidesi tétele, míg a többi nélküle áll fenn és az euklidesivel valamennyi egyenrangú, egyformán zárt és teljes. S hogy oly keveset hallunk mégis a nem-euklidesi geometriákról, azt annak köszönhetjük, hogy semmi okunk sincs foglalkozni velük. Görbe felületeket, köztük a leggyakoribb gömbfelületet, mindenkor euklidesi térbe ágyazva vizsgálhatunk, derékszögű, közönséges Descartes-féle koordinátákra vonatkoztathatunk, s nem találunk olyan problémát, amely a gömbfelületnek, mint nem-euklidesi R_2 -nek tárgyalását kívánná. Más volna persze a helyzet, ha olyan R_n -ben élnénk, amelyről csak mi hisszük, hogy euklidesi. Akkor geometriánk csakugyan hibás volna. Ezt a lehetőséget azonban más görbe terekkel kapcsolatban azonnal látni fogjuk.

HARMINCHATODIK FEJEZET.

Görbült terek.

Ezért lássuk, előzetes megjegyzésként, az úgynevezett «Beltrami-féle hipotézist» a felületlényekről, felületlakókról. Tegyük fel, hogy vannak — mint nevük is mutatja — teljesen vastagság nélküli, tehát geometriai szempontból is csupán kétdimenziós felületlakók, s ezeknek ne legyen módjuk a felületet elhagyni. Így tehát terünk egy R_2 . Ez az elképzelés egyáltalán nem olyan lehetetlen, mint amilyennek első pillanatban látszik. Erős közelítésben mi, a földfelszín lakói, is hasonlítunk hozzájuk. A déli tengerek egyik korallszigete lakóinak, akiknek otthona 10 méterre emelkedik a tenger

színe fölé, s ha valamelyikük eléggé ügyes, 5 méter mélyre is le tud szállni a tenger alá, szabadsága föggőleges irányban összesen tán 20 méterre terjed. Képzeljük el ezeket a kezdetleges embereket a tundra-vidékeknek eszkimóktól jól ismert ködös, borús környezetében, s máris látjuk, hogy a Föld 12,754.784 méteres átmérőjéhez képest bizony nem igen lehet magassági méretekről fogalmuk. Ha még a Föld méretei is megnövekednének, akkora lenne a Föld, mint a Nap vagy a Tejút valamelyik «vörös óriása», akkor gömblakóink gömbjükön bizony csak euklidesi síkgeometriával foglalkozhatnának, sohasem jönnének nyomára valamilyen szférikus excesszusnak, mert ez legfinomabb mérőműszereik számára sem lenne hozzáférhető. De ha valódi, Beltrami-féle felületlakók, akkor a harmadik dimenzióknak még az érzéke is hiányoznék belőlük, bár erről még a déli tengerek említett lakója is tudomást szerez némiképpen, legalább álló járásából vagy egy pálma láttára. A felületlakók, éljenek gömbön vagy álgömbön, kétdimenziós, euklidesi geometriával fognak foglalkozni, s aligha kételkedhetnek a párhuzamosak tételében.

De szörnyű meglepetés is érhetné egyszer őket, mind a dimenziók száma, mind a görbültség szempontjából. Vegyük először a R_2 -ből borzalmasnak, okkultnak látszó «harmadik dimenziót». Tegyük fel, hogy felületlakóink átlátszó üveg-szerű anyagból «zárt edényt» készítettek. Milyen is lenne ez? Alighanem valami zárt geometriai idom volna, talán kör vagy négyszög, vagy valami hasonló. Az «edény» belsejébe csak úgy juthatnának felületlakóink, ha a határvonalat valahol áttörik. Feküdjék most valamilyen lapos részecske az edény mellett, a falán kívül. A részecskét most hirtelen valamilyen csak ráható természeti erő ragadja meg, a mágneses erő felemeli a harmadik dimenzióba, ott megperdíti, átfordítja s így ejti be az edénybe. Az átlátszó vonalfalon keresztül égnék álló hajjal szemlélő felületlakóink a tűneményt és még akkor sem tudná a részecskét, legyen ez mondjuk háromszögalakú, eredeti helyzetébe visszafordítani, ha végre áttöri a vonalfalat és így hozzáfér a csodához.

Mi bizony nagyon egyszerűnek látjuk a tűneményt. Mágnes kapott fel egy vasdarabkát; ezen a világon emelte ki a felületből, átfordította és beejtette a körbe, bár annak

falát felületlakóink átjárhatatlannak tartották. Igaz, a hasonlat kissé sántít. Vastagságnélküli részecskét nem vonz magához a mágnes sem. De nem is akartuk ezt ilyen szigorúan venni, bár a kiterjedési viszonyok teljesen helyesek. Alakítsuk át most a példát úgy, hogy számunkra is ijesztő legyen. Csináltassunk magunknak hatalmas üveggömböt, tegyünk melléje a padlóra egy középkori páncélkesztyűt. A páncélkesztyű most hirtelen eltűnik s néhány pillanat múlva benne van az üveggömbben, sőt az eredetileg jobbkézre való kesztyűből időközben balkesztyű lett. Ekkor, azt hiszem, nekünk állna égnek a hajunk.

Megállapítjuk: az R_1 -ben egy pont már áthághatatlan akadály és egy távolság már edény. Zárt edény az R_2 -ben minden vonalakkal határolt idom. Az R_3 -ban zárt edényt felülettel kell elhatárolni. Következtetünk: az R_4 -ben az edényeket alighanem testek határolják. De erre még visszatérünk.

Másik csalogató feladat valamely R_n -et úgy két részre osztani, hogy az egyik rész valamelyik pontjából ne lehessen a másik rész valamilyen pontjába az elválasztó alakzat átlépése nélkül eljutni. Az R_1 két tartományát már egyetlen pont elválasztja egymástól. Az R_2 -t csak végtelen vonallal választhatjuk ketté, például egyenessel, ha euklidesi síkról van szó. Az R_3 elválasztásához már felület kell, például sík.

Az R_n elválasztása mindenkor $(n-1)$ méretű alakzattal történik. De tévedhetünk is. Ha R_1 -ünk nem egyenes, hanem például kör, akkor pontszerű lényük neki szalad a zárópontnak, ott visszafordul és egyszerre a másik oldalon jelenik meg a zárópont, számára, állítólag hozzáférhetlen oldalán. Vagy legyen R_2 -nk autótömlőalakú és válasszuk szét, pontosan ügyelve a szabályokra, a gyűrűt megkerülő vonallal. Felületlakóink nehézség nélkül, számtalan úton juthat a záróvonal túlsó oldalára. Az ilyen tereket «többszörösen összefüggő tereknek» nevezik, s jellemző rájuk, hogy összefüggésüket magasabb dimenzióból, tehát ha n dimenziósak, akkor már $(n+1)$ dimenzióból azonnal áttekinthetjük. Többszörösen összefüggő R_3 -at nem tudunk elképzelni, csak azt mondhatjuk, hogy az elválasztásnak gömbfelülettel kellene történnie, vagy legalább valamilyen összefüggő zárt felülettel, amelyet megkerülhetünk. De ez

csak hozzávetőleges hasonlat. Mert a való helyzetet csak az R_4 -ből tekinthetnők át, tehát R_3 -unkat valamilyen R_4 -nek kellene magában foglalnia. De mint már többször említettük, nincs egyelőre semmi okunk, hogy a negyedik dimenzió létezését követeljük.

Azt is hangsúlyoztuk már, hogy végtelen és határtalan nem azonos fogalmak. Körvonal vagy gömbfelület benne élő képzelt lakóknak feltétlenül határtalan, bár biztos, hogy véges. Mert ha a kör kerületén egyik pont állva marad, másik pedig mellőle elindulva folyton előre halad valamelyik irányban, végül visszaérkezik a várakozó ponthoz. Ugyanilyen egy «világvándorlás» gömb felületén is.

Hasonló dolgok görbe R_3 -ban szintén lehetségesek. S a legújabb fizikai és csillagászati kutatások során már komoly megfontolások tárgya volt, hogy ha terünk görbült, akkor az ég két ellentétes pontján látható ködfolt nem azonos-e. De egy görbült R_n fogalma akkor sem rejt önmagában ellentmondást, ha $n > 2$. Bernhard Riemann többször idézett magántanári értekezésében Gauss felületelméletével kapcsolatban már tárgyalja a görbült n méretű tereket, Fréchet pedig Lebesgue integrálméletéhez kapcsolódva Riemann térelméletét még jobban kiterjesztette, úgyannyira, hogy a matematikus szempontjából az egész kérdés már nem mondható misztikusnak vagy tisztázatlannak.

Tekintve, hogy legmagasabb matematikai ismeretek nélkül nem tudunk e problémához hozzáférni, csak annyit jegyezzünk meg, hogy a g -vonalak magasabb dimenziók esetén is alkalmazkodnak a tér jellegéhez. Euklidesi R_1 , R_2 , R_3 , ... R_n egyenese mindig egyforma, vagyis éppen az euklidesi egyenes. Ezt kell a többi g -vonatról is feltételeznünk, ha a tereinknek állandó a görbülete. Ha a görbület változik, akkor pontról-pontra változik a g -vonal jellege is. De két pontot összekötő vonalak közt mindenkor a g -vonal a leg-rövidebb, hisz ez a lényege.

Van tehát a görbült tereknek, az R_3 stb. R_n -nek is nem-euklidesi sztereometriája. De például az is világos, hogy vannak tételek, — ilyen például Euler tétele¹ — amelyek

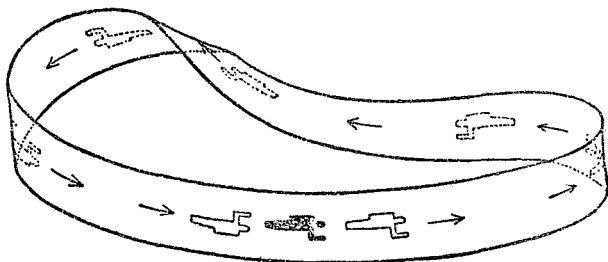
¹ Lap plusz csúcs egyenlő él plusz kettő.

az abszolút geometriához tartoznak, tehát bizonyos korlátozásokkal a nem-euklidesi geometriákban is érvényesek. Csak az olyan tételek érvénye szorítkozik az euklidesi geometriára, amelyek a párhuzamosak tételéből következnek. Ilyen a háromszög szögeinek az összege. Azonban a szférikus excesszus és a pszeudoszférikus defektus függ a háromszög méreteitől és a tér görbületi mértékének nagyságától. Ebből az is következik, hogy ha a tér görbütsége kicsi, tehát a görbületi sugarak a végtelenbe nőnek, akkor csak igen nagy háromszögeken volna észlelhető, akár excesszus, akár defektus. Ezért nem tudjuk még megállapítani, hogy terünk görbült-e vagy nem. De azt már majdnem biztosra vehetjük, hogy háromdimenziós. És az Einstein-féle képzetes, negyedik, időkoordináta sem dönti ezt meg, mert a relativitás elmélete is csak három térkoordinátát ismer. A négydimenziós «idő-tér koordinátarendszer» csupán számolási módnak is nevezhető, az úgynevezett Hamilton-féle quaterniok alkalmazásának, de erről nem beszélhetünk itt részletesebben. Görbütséget Einstein is feltételez. De szabálytalant, pontról-pontra változót. Ezért mondják azt is, hogy a tapasztalati tér Riemann-féle, s görbülete nem állandó.

Befejezésül mutassunk be egy egészen különleges módon görbült R_2 -t, az úgynevezett Möbius-szalagot. Mintáját bárki könnyen elkészítheti egy darabka papirosból. Egy papírszalag egyik végét 180 fokkal elfordítjuk és így ragasztjuk hozzá a másik végéhez. Ha most valahol elkezdünk egy, a papír szélével párhuzamos g -vonalat húzni, akkor azt a váratlan tüneményt látjuk, hogy a vonal önmagába visszatér, tehát határtalan. Ha most újra szétvágjuk a gyűrűt, meglepetten tapasztaljuk, hogy az egyetlen vonal a papírlap mindkét oldalán végigmegy. Olvasóink idegeit kímélni akarjuk, ezért csak utalunk arra az ijedségre, amely e felület lakóit érheti. Ha a «világot körülhajózza» egyikük,¹ akkor szószerint és fizikai értelemben tükörképévé alakul át. Kétméretű szíve például a jobboldalra kerül. Az otthon maradt rokonok

¹ Akkor mondjuk, hogy «körülhajóztuk» a Möbius-szalagot, ha az utas a felület másik oldalán újból eléri a kiinduló pontot. A felület oldalának fogalma a felületlakók számára közömbös, mivel vastagságuk nincs.

fordítottanak látnák a világutazót és kölcsönösen bolondoknak tartanák egymást. A képen láthatjuk, hogy «Fehér úr» otthon maradó «Fekete» barátjának *jobb* kezével búcsút int, Möbius-féle világutazása után hazatérve ugyanazzal a kezé-



147. ábra.

vel akarja üdvözölni «Fekete» barátját, de «Fekete» úr és mi is, itt kint az R_3 -ban, kezét most *balkéznek* nézzük. Ő azonban váltig bizonygatja, hogy «Fekete» úr változott meg, velünk együtt, s *mi* köszönünk egyszerre *balkéz*zel. Jegygyűrűjét az egész úton, az egész idő alatt nem vette le a kezéről, — de «Fekete» úr sem. Bele lehet bolondulni. Nyugodjunk meg, az ilyen tereket «mem-orientálódó tereknek» nevezik, s itt megjegyezzük, hogy még háromdimenziós zárt nem orientált Riemann-terek is léteznek, s matematikailag szerkeszthetők. A mozgás nem vezet túl a harmadik dimenzión. Ilyen térben negyedik dimenzió nélkül is átalakulhat egy jobb páncélkésztyű balkésztyűvé. De a szimmetriát kongruenciává átalakításhoz szükséges $(n+1)$ -edik dimenzió hiánya csak lát-szólagos. Mert mint a Möbius-szalag az R_2 megcsavarásával az R_3 -ban készült, úgy a nemorientált R_3 «elkészítése» az R_4 használatát igényli. Ezek a váltók természetesen már fölölegessé tehetik magasabb dimenzió használatát, hisz már maga a tér csavarodott el.

De még nem vagyunk a végén. A könyv címében ígértet még nem teljesítettük. A legmagasabb általánosítás a legmagasabb csúcs megmászása a következő fejezetre marad.

HARMINCHETEDIK FEJEZET.

Négy és több dimenziós geometria. Befejezés.

Jó ügyünkért lángoló lelkesedésünk se tegye akár egy percre is kétségesse, hogy e könyv a nem-euklidesi és több-dimenziós geometriák megértésének és elképzelésének csupán kezdeti nehézségeitől szabadíthat meg. Mindkét terület nagy, hatalmas ága a matematikának, s további tanulmányok céljára csak a számos kiváló szakkönyvre utalhatunk.

De ez az óvatos bejelentésünk ne legyen akadály a annak, hogy annyira belekóstoljunk a kérdések megismerésébe, amennyire könyvünk és tudásunk terjedelme megengedi.

A geometriának ez az ága, G. Cantor és Hausdorff halmazelméleti fejtegetéseitől eltekintve, a legújabb ága tudományunknak. A német Grassmann (1809—1877) foglalta először rendszeresen össze 1844-ben, *«Lineare Ausdehnungslehre»* című művében. De olyan kevésbé értették meg őt, hogy csalódottan fordult el a matematikától és szanszkrít nyelvészettel kezdett foglalkozni. Ebben az új működés körében olyan úttörő eredményeket mutatott fel, hogy általános elismerésben lett része. Ez az elismerés viszont matematikusi hitelét is emelte, s a nagy Helmholtz is megtett minden tőle telhetőt, hogy a régi igazságtalanságot feledtesse. Természetesen Riemann 1854-ben megjelent értekezésének is része volt ebben. Az angol Cayley és a francia Cauchy is körülbelül Grassmannal egyidőben foglalkozott a többdimenziós geometria egyes kérdéseivel, a nélkül azonban, hogy tételeiket rendszerré fejlesztették volna. Még egy másik, nagyszű matematikus is osztozott Grassmann balsorsában és ez még azt sem érte meg, hogy műve nyomtatásban megjelenjék. A svájci egyetemi tanár, L. Schläfli (1814—1895) volt ez a matematikus, aki 1850—1852 közt írta művét, amely nyomtatásban hálás tanítványa, a szintén kitűnő matematikus, J. H. Graf fáradozásainak eredményeként jelent meg. Ekkor derült ki, hogy Schläfli műve korát jóval megelőzte és e tudomány alapvető könyve.

De elég legyen ennyi ennek a ma már elismert matematikai rendszernek történetéből. Most tehát mindazt, amit már

tudunk, latba vetjük, hogy minél előbb behatolhassunk a matematikai szellemvilág közepébe. Már megszoktuk, hogy R_1, R_2, R_3 stb. R_n -ről beszélünk. Most csak abban állapodunk meg, hogy akkor is beszélünk idomról, ha $n < 2$. Így a távolság az R_1 -ben idom, idom a pont is az R_0 -ban, habár az utóbbiban nem tudunk «tér» és «idom» közt különbséget tenni. S ha most ismét elővesszük a «simplex» fogalmát, s ezt S -sel jelöljük, akkor a pontot az R_0 simplexének nevezhetjük, az R_1 simplexe a távolság, a háromszög az R_2 simplexe és az R_3 -é a tetraéder. A simplexek számozása indexszel történik, az index a pontok számát adja meg, amelyek a simplexet meghatározzák. Tehát az R_0 simplexének a jele S_1 , az R_1 távolság-alakú simplexének jele S_2 , az R_2 -ben az S_3 háromszög a simplex, a tetraeder az R_3 -ban az S_4 stb. általában az R_n simplexét S_{n+1} jelöli. Mi is az ilyen simplex? A simplex a megfelelő térnek, R_n -nek, a legegyszerűbb alakzata, amelyet $(n+1)$ pont összekötése által nyerünk. Átlók ekkor nem keletkezhetnek, mert csak két pontja fekszik egy egyenesen, három pontja egy síkban stb. s pontjainak a száma éppen hogy elegendő az illető tér meghatározására. Természetesen nem felelhet annyi pontja egy alacsonyabb indexű térben, hogy azt *túlhatározzák*. Ha két pont egy pontba, egy R_0 -ba esik, akkor nem keletkezik az R_1 -ben távolság (S_2). Ha három pont egy egyenesen fekszik, nem határoz meg háromszöget (S_3) a síkban (R_2). S ha végül négy pont egy síkban van, akkor nem keletkezik tetraeder (S_4) az R_3 -ban stb. Tehát megengedhetetlen, hogy $(n+1)$ pont egy R_{n-1} -ben feküdjék, mert különben nem keletkezik az S_{n+1} az R_n -ben.

A simplexek jelentősége azért olyan nagy, mert egy S_{n+1} simplex meghatároz egy R_n teret. Természetesen a pontok helyzetére vonatkozó megszorítások betartása esetén. Ezt azonban, ha simplexeokról beszélünk, nem is kell külön hangsúlyoznunk. Mert ha a pontok helyzete nem megfelelő, akkor nem is keletkezik a megfelelő simplex. Régi beszédmódunk szerint azt mondtuk volna: egy pont R_0 -t határoz meg, tehát saját magát. Kettő meghatároz egy egyenest (R_1), három pont egy síkot (R_2), négy pont egy R_3 -at stb.; s magasabb dimenziók esetén a pontokat simplexeikké vonhatjuk össze. Így a síkot egy pont (S_1) és egy távolság (S_2) is meghatározza,

egy teret két S_2 , ha nem metszik egymást stb. Tehát egy R_n meghatározásához szükséges, hogy a meghatározó egymástól független simplexelek indexének összege $(n+1)$ legyen. Ha a simplexelek metszik egymást, akkor figyelmen kívül maradnak, elesnek azok a pontok, amelyek a metszésidomot, mint simplexet meghatároznák. Így két S_2 , ha metszi egymást, csak R_2 -t határoz meg, mert habár indexeik összege $2+2=4$, de ennek jelentése $(n+2)$, mivel van egy közös részük, egy S_1 . Az indexek összege szempontjából tehát írható, hogy $S_2+S_2=S_3+S_1$ vagy $S_2+S_2-S_1=S_3$, vagyis ha az $(n+1)=3$ egyenlőséget tekintem, helyesen kapom, hogy $n=2$.

Egy R_5 -öt három egyenes határoz meg, ezek együtt egy S_6 -ot adnak. De nem elég, hogy e három egyenes kiterő legyen, mert ez már az R_3 -ban is megtörténhet. A harmadik egyenesnek el kell kerülnie a két első, kiterő egyenest és el kell kerülnie az azokkal meghatározott R_3 -at is.

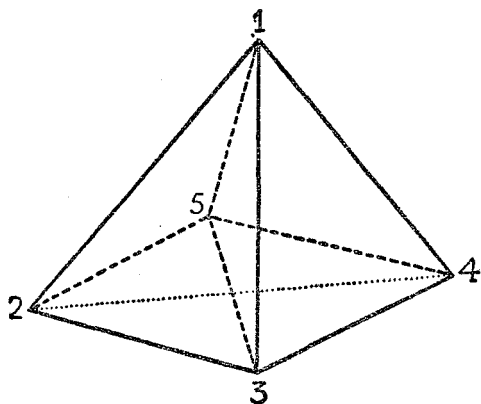
E kombinatorikus jellegű megfontolásokkal kapjuk egy R_n úgynevezett pontértékét. Az R_n -et ebben az összefüggésben, anélkül, hogy ezzel valami újat mondanánk, R_d -vel fogjuk jelölni. Minden R_d -nek a pontértéke $(d+1)$, vagyis ama pontok száma, amelyek oly módon függetlenek egymástól, hogy sohasem fekszik közülük több pont egy R_n -ben, mint ahányat annak indexe megenged. Nem fekszik tehát két pont egy R_0 -ban, három pont egy R_1 -ben, négy pont egy R_2 -ben és általában n pont egy R_{n-2} -ben, hanem legfeljebb egy R_{n-1} -ben. Egy R_7 szempontjából legfeljebb 6 pont fekehet egy R_5 -ben, 5 pont egy R_4 -ben, 4 pont egy R_3 -ban, 3 pont egy R_2 -ben, 2 pont egy R_1 -ben.¹ E feltételekben nincs semmi rejtélyes. Az R_3 -ig gyakran alkalmaztuk őket, mert megakadályozzák az idomok elfajulását.² Követelésüknek azonban más, csodálatos következményei is vannak. Ha betartjuk, akkor egyszerűen kombinatorikus eljárással megkaphatjuk akárhány dimenzió esetén a simplex adatait. Így például az S_5 -öt, a négydimenziós tér simplexét öt független pont adja, mert az R_4 pontértéke $(d+1)=5$; ennek

¹ E feltételek mindegyike az öt megelőző feltételekből már természetesen következik. (A ford.)

² Vagy más szóval ne legyen «túlhatározott».

tehát a következő részei vannak: $\binom{5}{1} = 5$ pontja, $\binom{5}{2} = 10$ éle, $\binom{5}{3} = 10$ háromszög alakú lapja és végül $\binom{5}{4} = 5$ határoló teste, amelyek mindegyike tetraéder. Tehát 5 «sejtből» áll, innen a neve is: az R_4 simplexét, az S_5 -öt «ötsejt»-nek is nevezik. Valamely S_{d+1} általában $\binom{d+1}{n}$ alacsonyabbrendű simplexből, S_n -ből áll, s az n 1-től d -ig változik. Ezzel lehetővé vált tisztán kombinatorikus eljárással akárhányméretű tér simplexét felépíteni.

Nos, az úgynevezett «Schlegel-féle diagrammok feltalálása óta egyáltalán nem lehetetlenség, hogy a harmadiknál magasabb dimenzióba belepillanthassunk. Miért is ne? Hisz egy



148. ábra.

Beltrami-féle felületlakó is lerajzolhatja magának egy háromdimenziós tetraéder képét világában és tanulmányozhatja. Mi magunk is rajzolunk házakat, fákat, poliédereket, gömböket minden félelem nélkül papírra. Mi az R_3 testjeit nyugodtan vetítjük egy R_2 -be, síkba. Ne hozzuk fel ezzel szemben azt, hogy nem mászkálunk ebben az R_2 -ben. Hisz ugyanolyan joggal azt is állíthatnók, hogy nem lehet fogalmunk

egy házról, mert ugyanabban az R_3 -ban mászkálunk. Világos ezek alapján, hogy kellőképpen átgondoltuk a valamennyi R_d szempontjából invariáns, változatlan testképző törvényeket, hogy az R_4 idomait az R_3 -ba vetítsük. A német Schlegel ezt valóban meg is tette és rézdrótból, selyemzsinórokból készített modelleket. Ez az eljárás az R_3 -ba való rajzolásnak felel meg. A perspektíva szabályai szerint tehát bármely magasabb indexű térből vetíthetünk alacsonyabb indexű térbe. Az R_4 -nek S_5 simplexét tehát Schlegel-diagrammá vetíthetjük az R_3 -ba, s ezt a diagrammot, amely még testszerű modell, az R_2 -re lerajzolhatjuk, újabb projiciálás, vetítés segítségével. Vagyis egyszerűen lerajzolhatjuk. Ezt most rögtön meg is tesszük. A már egyáltalán nem rejtélyes negyedik dimenzió egyik testének, politopjának képen tehát mindazt láthatjuk, amit előbb elmondtunk. Megszámolhatjuk 5 csúcsát, 10 élét, 10 oldallapját és 5 határoló tetraéderét (1234, 1235, 1245, 1345, 2345) és nyugodtan megállapítjuk, hogy minden csúcsában 4 éle található, 6 oldallapja és 4 oldaltér. Az utóbbiakat kissé nehezen láthatjuk, legkönnyebben akkor, ha elképzeljük, hogy az 5 pont az 1234 teraéder belsőjében «lebeg». Továbbá minden élen 3 oldallap megy keresztül és 3 oldaltér, végül minden oldallapon 2 oldaltér. Vagy mint de Vries egyszerűen leírta: az S_5 «ötsejtet» 5 tetraéder határolja, kettő-kettőnek közös egy oldallapja (összesen 10 oldallap), három-háromnak egy éle közös (összesen 10 él), négy-négynek pedig közös egy csúcsa (összesen 5 csúcspont). (148. ábra).

Kissé kevésbé bizalmatgerjesztő, ha halljuk, hogy az R_3 lakóinak két diagrammra van szükségük, ha az S_6 -ot akarják lerajzolni. (S_6 az ötdimenziós simplex.) Először négydimenziós modelljét kellene elkészíteni, majd ennek a háromdimenziós diagrammját, s végül ezt lehetne papírra lerajzolni.

Mielőtt befejezzük, még egy kis varázslatot szeretnénk bemutatni. Az ötsejt tárgyalásakor arról is beszéltünk, hogy két magasabbrendű térnek milyen közös része van, vagyis milyen metszésidom keletkezik, ha metszik egymást. A községes geometriából tudjuk, hogy két sík egymást egyenesben metszi, két test síkban, test és egyenes egyenesben,

test és sík síkban.¹ Mivel a sokdimenziós geometriában is szükségünk van általános metszési törvényre,ilyent fel is állítottak, még pedig igen egyszerű alakban. Nem elég ugyanis tudni, hogy milyen R_n -ek metszik egymást, azt is tudnunk kell, hogy milyen R_d -n belül történik a metszés. S ma már teljesen világosan tudjuk, hogy ha az egymást metsző idomok kiterjedései (n és m) kisebbek, mint az őket körülvevő tér kiterjedése (d),² akkor a következő összefüggés érvényes:

$$(d+1)=(n+1)+(m+1)-(nm+1),$$

vagyis

$$d=n+m-nm,$$

ha nm a metszésidom dimenzióinak számát jelenti, $(nm+1)$ pedig ennek pontértéke. Ha d , n és m ismert, akkor $nm=n+m-d$.

Első kísérleteinket végezzük a már jól ismert R_3 -ban. Ez esetben $d=3$, egy egyenes értéke 1, egy síké 2, egy ponté 0. Tehát egy egyenes és egy sík metszése esetén a térben $nm=2+1-3=0$, vagyis egyenes és sík pontban metszik egymást. Két sík a térben: $nm=2+2-3=1$, vagyis egyenesben metszi egymást. Fontos, hogy $(n+m)$ együtt legalább annyi legyen, mint d , mert különben a metszés alacsonyabb dimenzióban történik és megeshet, hogy a magasabb dimenzióban az idomok kitérnek, kereszteznek egymást. Így két egyenes a térben: $nm=1+1-3=-1$. Síkban viszont: $1+1-2=0$. A minusz előjel azt jelenti, hogy még van fölösleges szabadsági fok, amelynek következtében keresztezés lehetséges, tehát metszés előfordulhat ugyan, de nem következik be feltétlenül. Azt, hogy a bekövetkezett metszés eredménye mi lesz, csak egy alacsonyabb dimenzióban tudjuk meg, bár ez az eredmény rendesen pont. Az R_4 -ben test és egyenes $nm=1+3-4=0$ alapján pontban metszi egymást. Két sík ugyancsak pontban, $nm=2+2-4=0$, bár ezt

¹ Mindez különféle «terekben» történik.

² Tehát két idom metszi egymást, amelyek pontértéke $n+1$ és $m+1$ és $d > n$ és $d > m$.

sem tudjuk elképzelni. Sík és test: $2+3-4=1$, tehát egyenesbe metszik egymást. Végül két test: $3+3-4=2$, tehát síkban metszik egymást. Egyenes és sík kitérő is lehet: $1+2-4=-1$ stb. Utolsó példánkban visszatérünk az R_3 -ba és azonnal megkapjuk a megoldást $nm=1+2-3=0$, a metszés tehát pont, mint vártuk.

A politopok elmélete éppen olyan exakt és pontos, mint az eddig tanultak. Ez az elmélet lehetővé teszi, hogy a politopok (soksejtek) lapszögeit¹ stb. meghatározzuk. Minden dimenzióban meghatározhatjuk a szabályos testek, helyesebben politopok vagy soksejtek számát is. Megkapjuk, hogy az R_4 -ben hat szabályos politop szerkeszthető. Ezek: a szabályos ötszejt, nyolcszejt, tizenhatsejt, huszonnégyszejt, százhuszsejt és a hatszázsejt. Még egy búcsúmegjegyzés: többdimenziós tanulmányaink során mindeddig lineáris, euklidesi térben mozogtunk. Ezt már olyan kifejezésekről is észrevehettük, mint egyenes, sík, háromszög, tetraéder. De természetesen itt is megvannak az ismert általánosítások; már Riemann beszélt sokdimenziós, szférikus és pszeudoszférikus terekről, ma pedig már a matematika közkinccse, hogy a térnek a görbültség és a dimenziók száma a jellemzője. Ezen felül csak utalunk arra, hogy maga a tér is csak egy fajtája egy magasabbrendű fogalomnak, az n -mértékű sokaságnak. Ezt a gondolatot is Riemann vetette fel már 1854-ben. Geometriai világunk a legmagasabb algebrával, függvényelmélettel invariáns elméletekkel kapcsolatban mind szédtöbb magasságok felé tör. S ember nem mondhatja meg, hogy mennyi belőle «valóság» s mennyi csak «álom». De a geometriai «álom» is engedelmeskedik a legszigorúbb logika törvényeinek — — —

Azt hisszük, teljesítettük ígéretünket. Ha valakit fájdalmasan érint, hogy már elhagyjuk e varázsvilágot, vigasztalódjék, hisz tanulmányaink, például azok is, amelyek többmértékű terekről szóltak, csak egy euklidesi R_d ismeretének elemeit tartalmazták. Azoknak is csak kis részét. A geo-

¹ Itt egészen kísérteties dolgokra bukkanhatunk, mert például egy egyenes merőleges lehet egy térre stb.

metria tanulmányozása még minden irányban előttünk áll! S mindnyájan, szerző és hűséges olvasói, egyaránt köszönetet akarunk mondani azoknak a nagy szellemeknek, akik önzetlen, hősi munkával feltárták az egyik kaput a másik után, hogy roppant távlatot nyissanak a geometria csillogó birodalmába, a tiszta formák világába, amelynek kimeríthetetlen harmóniája megmutatja nekünk, az R_3 szegény lakóinak, a Mindenható nagyságának kis sugarát.

TARTALOM.

	Oldal
Előszó	5
1. fejezet. Geometria mindenütt	9
2. „ A miletosi Thales távolságmérője.....	15
3. „ Előzetes megjegyzések a háromszögekről és a párhuzamosokról	21
4. „ Helyzetgeometria. Mértékgeometria. Tér. Kiter- jedés	27
5. „ Projektív geometria	36
6. „ Projektív alapalakzatok és a végtelenben fekvő pont.....	38
7. „ A dualitás elve	44
8. „ Teljes geometriai idomok	55
9. „ A geometriai axiómák. Hilbert axiomarendszere	62
10. „ A kapcsolás axiómái és az elhelyezés axiómái	65
11. „ Az egybevágóság axiómái. Háromszögek egybe- vágósága	67
12. „ Párhuzamosok axiómája és a folytonosság axio- mája	77
13. „ Megjegyzések Hilbert axiomatikájához. A mérték- geometria alapjai	83
14. „ A mértékgeometria	95
15. „ Az arányok geometriájának alapjai	101
16. „ A háromszög nevezetes pontjai	105
17. „ A háromszögek felosztása.....	111
18. „ A kör	115
19. „ Körosztás és a körbe írt sokszögek	130
20. „ A négyszögek általában	137

21. fejezet.	Szűkebb értelemben vett sokszögek	140
22. "	Szerkesztések és idomok átalakítása. Területmérés	144
23. "	A kör területe	158
24. "	Szögfüggvények	162
25. "	A derékszögű háromszög trigonometriai meg- oldása	169
26. "	A ferdeszögű síkháromszög trigonometriai meg- oldása	173
27. "	Koordináták, görbék egyenlete és függvények..	181
28. "	Az egyenes és a kör	193
29. "	Ellipszis, hiperbola, parabola	198
30. "	A sztereometria legfontosabb tételei	207
31. "	Testszöglek, Euler tétele, szabályos testek...	212
32. "	Cavalieri tétele. Köbtartalom-mérés	216
33. "	Szögharmadolás, kör négyszögesítés és kocka kétszerezés szerkesztéssel	223
34. "	Gömbtan (szférika) és gömbháromszögtan	237
35. "	Nem-euklidesi geometriák	258
36. "	Görbült terek	270
37. "	Négy és több dimenziós geometria. Befejezés..	276