A BÚVÁR KÖNYVEI V.

EGMONT COLERUS

AZ EGYSZEREGYTŐL AZ INTEGRÁLIG

AMIT A MATEMATIKÁBÓL MINDENKINEK TUDNIA KELL

HUSZONKILENCEDIK EZER

FRANKLIN-TÁRSULAT BUDAPEST

AZ ÍRÓNAK A FRANKLIN-TÁRSULAT KIADÁSÁBAN MEGJELENT KÖNYVEI

A PONTTÓL A NÉGY DIMENZIÓIG

AMIT A GEOMETRIÁBÓL MINDENKINEK TUDNIA KELL

12.—14. ezer

PYTHAGORASTÓL HILBERTIG

AMIT A MATEMATIKA TÖRTÉNETÉRŐL MINDENKINEK TUDNIA KELL

4.—6. ezer

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

BEVEZETÉS

Egérfogó a matematika. Ha benne vagy, nehezen találsz utat, amely korábbi, matematikától mentes lelkiállapotodba visszavezetne. Hosszadalmas volna, ha ennek a jellegzetes tünetnek okát akarnók adni. Így tehát csak a következmények megállapításával fogunk foglalkozni.

Ennek az «egérfogó tulajdonságnak» első következménye: kevés a matematikus pedagógus. Ritkán egyesül a matematikai tudás könnyen érthető előadásmóddal. Ebből ered rögtön a második következmény: művelt emberek és művelődni vágyók «matematikai alacsonyabbrendűség-komplexum»-a.

Senki se értsen félre. Nem támadni akarok, ellenkezőleg: védekező állást foglalok el. Mert rendkívül szokatlan, hogy laikus merészelje a tudományok legszigorúbbikát magyarázni.

De mivel jól megfigyeltem saját szenvedéseimet és láttam iskolatársaim küzködését, megérett bennem az az elhatározás, hogy matematikai élményeimet tudásomnak már valamely alacsonyabb fokán feljegyzem Hisz az «egérfogóról» kialakult meggyőződésem szerint jogos a félelmem, hogy néhány év mulva magam sem találom meg a kivezető utat.

De még egy másik nyomós ok is késztetett vállalkozásomra. Minden tudományba, de mindennapi életünkbe is egyre mélyebben hatol be a matematika és a matematikai módszerek és fogalmak. És semmiképpen sem kielégítő — majdnem kultúrbotránynak nevezném — hogy egy félig-meddig komoly értekezés olvasója egyszerre hieroglifák egész birodalmával kerülhet szembe, amelyek megijesztik és elrettentik az olvasástól; de megtörténhetik, hogy a kevés számú beavatott gúnyos mosolyát kell zsebretennie. Nem a relatívitás és kvantumelmélet matematikai magasságairól van szó, ilyen eset bármelyik közgazdasági vagy orvosi lapban is előfordulhat. A statisztikát ne is említsük, az ma már — elsősorban az angolszász országokban — teljes egészében matematika. Belopózott azonban a matematika hétköznapi nyelvünkbe is. Az újságok «középértékekről» írnak, «átlaghőmérsékletet», «maximális teljesítményt», «görbék kritikus pontjait» és «erőtereket» emlegetnek : csupa olyan kifejezés, melyet a köznyelv a matematikától és a matematikai fizikától kölcsönzött.

Felesleges, hogy ilyen szavakat értelmetlen zörejként hallgassunk végig, sőt hatásukra magunkat kisebbértékűnek, esetleg műveletlennek tartsuk. Nagyszerű az ilyen szavak jelentése s ugyanannyira jelképes is, de felfogható és megtanulható.

Egyet mindenesetre feltételez könyvünk : bizonyos, tanulásra szánt és nélkülözhetetlen fáradozást. A monda szerint Ptolemaios Philadelphus király, Krisztus születése előtt 300 körül, megkérdezte a legnagyobb görög matematikust, Euklidest, miképpen lehetne a matematikát «könnyen» elsajátítani. A matematikus bátran felelte : «Királyok számára sincs külön út a matematikában!» Mindenkinek, aki csak felületesen is ismeri ezt a tisztán szellemi eredetű és lépésről lépésre felépülő tudományt, igazat kell adnia a nagytudású görögnek. De ne essünk kétségbe : «királyok útja» és «Himalája megmászása» közt, a folytonosság törvénye szerint, még számtalan középút is van.

Nagyérdemű és kiváló tudósok, így például Georg Scheffers, S. P. Thompson és Gerhard Kowalewski, teljes mértékben megértették és átérezték ezt a helyzetet és mindent elkövettek, hogy közbülső fokozatokat teremtsenek. Mindhárom kiváló pedagógus műve kultúrkincs. S mi sem áll távolabb tőlem, mint a merészség, hogy Scheffers plasztikus előadásmódjával vagy Kowalewski precizitásával, eleganciájával, akár pedig Thompson gazdag humorával versenyre keljek. De — és ez a «de» a lényeg — mindhárom mű feltételez valamit, amit nem volna szabad, ha teljesen le akarja küzdeni az olvasó alacsonyabbrendűség-érzetét : gimnáziumi műveltséget feltételez mindegyik, vagy legalább is a matematika elemeinek ismeretét. Magamon éreztem leginkább, — amikor statisztikai előadásokon vettem részt —

hogy a matematika szeretete és a valaha elsajátított tudás mellett is mennyire fogyatékosak lehetnek ezek az elemi ismeretek. Élményem hatására vágtam neki, őszinte tisztelettel és becsüléssel a valódi tudomány iránt, merész kísérletemnek. Észrevettem ezenkívül, hogy háromféle indok is késztethet arra valakit, hogy ilyen könyvet saját használatára összeállítson, vagy kartársától segítségül készen megkapjon. Először is célja lehet valamely elfoglalt embernek, talán orvosnak, közgazdának, kereskedőnek, iparosnak, hírlapírónak, természettudósnak — de katonának, hivatalnoknak, alkalmazottnak, munkásnak, iskoláslánynak vagy fiúnak éppenannyira, hogy a matematikát, az egyszeregytől az integrálig az iskoláétól lényegesen különböző szempontból ismerje meg és közben a legáltalánosabb ismereteket elsajátítva belső megnyugvást találjon. Megeshetik, hogy az előbbi elfoglalt ember többre vágyik. Szerény bevezetésem alapján akkor nyugodtan rábízhatja magát Scheffers, Thompson vagy Kowalewski erős vezető kezére és olyan mélyre hatolhat velük a matematikában, amennyire csak akar; míg csak maga is benne nem ül az «egérfogóban» és már nem érti, mire való volt az én szószaporításom és naivitásom. Ilyen olvasómra lennék a legbüszkébb, még akkor is, ha utólag mélyen megvet. Megtörténhetik végül, még hogy tanulók használják titokban könyvemet, mint tiltott segédeszközt. Kérem a pedagógusokat, ne vádoljanak azzal, hogy «elrontom az ifjúságot». Ünnepélyesen kijelentem már itt, ezen a helyen is, hogy ellentmondások esetén nem nekem van igazam, ne nekem, hanem hivatott tanáruknak adjanak hitelt.

Tanárokról szólván: nem mulaszthatom el e helyen sem ama kellemes és elkerülhetetlen kötelességemet, hogy köszönetet ne mondjak dr. Walther Neugebauernek, a kiváló matematikusnak, aki a már említett tanfolyam előadójaként elvezetett a matematika kellős közepébe és megvilágította előttem ennek a tudománynak igazi nagyságát. Novalis, a költő írja: «Az istenek élete matematika. Isteni küldött csak matematikus lehet. A tiszta matematika voltakép vallás. Csak matematikus lehet boldog. Az igazi matematikus magából merít lelkesedést. Lelkesedés híján nincs matematika».

Nagyon boldoggá tenne, ha csak leheletnyit is közvetíthettem ebből a felfogásból olvasóimnak. Mert fájdalom, a matematikai alacsonyrendűség érzése, mint minden hasonló érzés, gyűlöletet és ellenszenvet vált ki. A kitűnő görög Hypatiát, az egyetlen nőt, akinek a matematika őstörténetében szerepe volt, bizonyosan nemcsak vallási okokból kövezte meg a tömeg ; és a matematika következetes és kérlelhetetlen ellenségei szerint rossz szolgálatot tettem a nagy Leibniznek, midőn merészkedtem kiemelni és sikerrel bemutatni zsenijének középpontját, a matematikát.

Bárcsak ez a könyv is hozzájárulna ahhoz, hogy a matematika, a tudományok legszentebbike, iránt érzett ellenszenv csökkenjen. Felületes emberek sokszor tartják a matematikát a materializmus csúcsának. Ezek nem tudják, hogy a matematika nemcsak az indus, babyloni és egyiptomi papok szemében volt a vallás rokona. Nem tudják, hogy Pythagoras, Cusanus, Pascal, Newton, Leibniz — csak néhány nevet említve a sok közül — éppen a matematikából merítették azt a megismerést, hogy minden tudományok «legbiztosabbjának» ködbevesző határai tesznek valóban hívővé és alázatossá az Isten iránt.

Sokszor fogunk még együttes haladásunk folyamán ilyen problémákra bukkanni. Most még csak röviden könyvem «szereposztásáról» számolok be : egyedül, magam írtam ezt a könyvet, amennyire erről az évezredes együttműködéssel felépült matematikában egyáltalán szó lehet. A matematikus dr. Walter Neugebauer, — bíráló olvasóim megnyugtatására említem — gondosan átnézte és sok értékes tanáccsal szolgált, de azért távol álljon tőlem, hogy a felelősségnek akár csak kis részét is rá, a kiváló szakférfiúra, hárítsam.

Köszönettel kell még adóznom Hans Strohofernek, a Wiener Künstlerhaus festőtagjának is, hogy nem tartotta méltóságán alulinak adataim nyomán a szövegábrák megrajzolását.

És most — mert tudjuk, királyok számára nincs külön út a matematikában — olvasónak és írónak együtt kell dolgoznunk, szorgalmas munkával, hogy eljuthassunk az egyszeregytől az integrálig. Én remélem, hogy megadtam hozzá az elvi lehetőséget, a többit majd megmondják rosszakaróim.

EGMONT COLERUS.

ELSŐ FEJEZET

«Igaz kabbala»

Beteg üldögél az orvos várószobájában. Sejti, hogy nem kerül egyhamar sorra, így olvasmánnyal akarja idejét eltölteni. Az asztalon gyógyintézetek és hajóstársaságok tarka füzetei hevernek. Egyik kép különösen megragadja figyelmét, déli tengerek és trópusi városok pompája árad róla. Kíváncsian nyitja ki a könyvecskét, de csalódott. Érthető szót is alig talál benne. A prospektus látszólag délamerikai hajójáratot dícsér, de — betegünk ezt sem tudja bizonyosan — alighanem portugál nyelven. Mégsem teszi le. A kabinok, éttermek, az érintett kikötők képei szépek és érthetők is. De még mást is megért, anélkül, hogy fordításra lenne szüksége: a hosszú számoszlopokat, táblázatokat, közbeiktatott számításokat, érkezési és indulási adatokat.

Előre látom, hogy példámat gyerekesnek, magától értetődőnek, esetleg éppenséggel ostobának találják. Ki vonta valaha is kétségbe, — mondják — hogy ma majdnem valamennyi művelt nemzet ugyanazokat a számjegyeket használja? Mi volna ebben talányos vagy csodálatos? Kár volt a bevezető mondatért. A 3-as számjegy portugál szövegben ugyanazt jelenti, mint németben vagy angolban. És az $5214\times7=36.498$ számítás is független az országtól, amelyben végrehajtották. Ennyi az egész!

Készségesen elismerem, hogy e méltatlankodó bizonyítás és eredménye ellen keveset vagy inkább semmit sem lehet felhozni. Csupán az ellen tiltakozom, hogy a tárgyalást is lehetetlenné teszi. Sőt állítom, hogy az ostoba példa behatóbb vizsgálata egyenesen a matematika legbelsőbb rejtélyei felé vezet és számos igen fontos alapfogalom megismerését teszi számunkra lehetővé.

Ellenfelem figyelmét ugyanis elkerülte valami. Mindenekelőtt csak jelentésében azonos a német olvasta dolog a portugál által olvasottal, feltéve, hogy mindkettő a számokkal foglalkozik. Mert a portugál más szót használ a számjegyek kimondására, mint a német. Svédek, angolok, franciák ismét más szavakat. A számok kimondásának módja a számrendszerek titkáig vezet. Németül például a vier-und-zwanzig kifejezést használjuk, ha a 24 jelet látjuk, tehát a négy-és-húsz szóösszetételt. Az angol viszont a twenty-four, húsz-négy szavakat látja benne. A francia a nyolcvanat nem octante-nak nevezi, mint logikusan következnék trente, quarante stb. után, hanem szorzásszerű szóképzéssel, quatre-vingt, azaz «négy-húsz» kifejezéssel lep meg.

Első eredményként tehát megállapíthatjuk, hogy nemzetközi számjegyírásunk betűírásunkkal csak ritkán függ közvetlenül össze és mindenekelőtt mások az alapelvei. A számjegyírás magábanvéve tiszta fogalomírás, míg betűink önmagukban nem fogalmaknak, hanem csupán hangoknak jelképei. Csak később, szavakká összeillesztve lesz belőlük fogalmak szimbóluma. Ez a fogalom: 3 — a számjegyírásban egyetlen jelet kíván. Betűírásban már a német drei a *d*, *e*, *i* és *r* betűk bizonyos meghatározott sorrendjével fejezhető ki. Sőt a francia trois vagy a magyar három már csupán öt betűvel tudja ugyanazt megjelölni.

De még csak az elején vagyunk. A számok hegységének lábánál állunk és készülünk felkapaszkodni. Eddig csupán számokról és számjegyekről beszéltünk, de szavunk sem volt arról a csodálatos, számrendszernek nevezett építményről, amely az emberi szellem legnagyobb büszkesége lehet. Ellenfelem újabb gáncsoskodása ismét könnyen érthető. Így szól ugyanis: «Ha számrendszeren azt érted, amit minden gyerek az elemi iskola első osztályában tanul, tehát a tizes számrendszer írásmódját, akkor kérlek, hagyj inkább békében. Ismerjük, minden nap alkalmazzuk és semmi kedvünk, hogy írásvágyadat érdeklődésünkkel még fokozzuk is. De ha számelmélettel akarsz traktálni, Gauss, Dirichlet, Dedekind, Kronecker és más nagy tudósok vizsgálataival, akkor vedd tudomásul, már itt becsapjuk a könyvet és visszaadjuk a könyvkereskedőnek. Mert ez esetben nem tartottad meg ígéretedet, azt, hogy elfogulatlanul csak a legszükségesebbet adod elő».

«Helyesen szóltál, ellenfelem», válaszolom erre. «Csak azt felejted el, hogy amit a számrendszer titkairól elmondok, egyáltalán nem öncél. Távolról sem gondolok arra, hogy valódi számelméletet kezdjek előadni. Még kevésbbé csak azt, hogy miért írjuk a kétezerötszáztizennégyes számot éppen így: 2514. Helyesebben, nem akarok ilyes magyarázatoknál időzni. De mivel semmilyen előzetes tudást sem szabad feltételeznem, közismert dolgokhoz kell fejtegetéseimet kapcsolnom, hogy mindjárt az első fejezetben érthetővé tehessek igen nehéz matematikai fogalmakat. Megszakítom tehát párbeszédünket, hogy folyamatosan végezhessem vizsgálódásainkat».

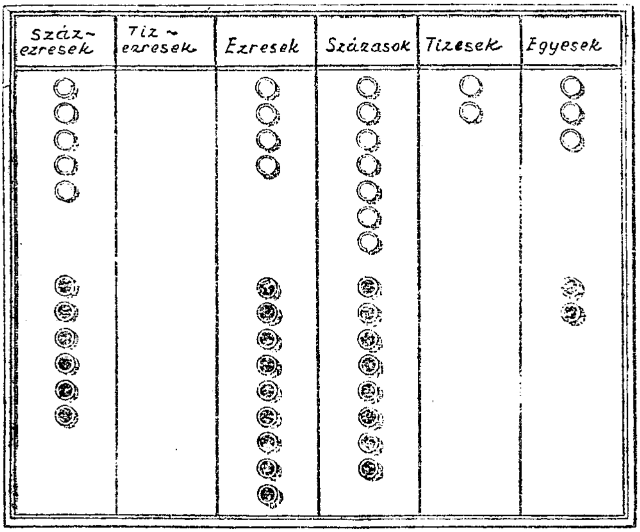
Idézzük a szellemtörténet egyik legnagyobb alakjának, Gottfried Wilhelm Leibniznek (1646—1716) a panhisztornak, mindentudónak szavait. Tudjuk, Leibniz nagy matematikus is volt és az úgynevezett infinitézimálszámítás, vagyis «felsőbb matematika» egyik úttörője. Szóval Leibniz szimbólumokra (népszerűen azt mondhatnók «nagyjelentőségű jelekre») vonatkozó általános tételeit «cabbala vera» igaz kabbala néven említi. Alighanem mindenki tudja, mit jelentenek a kabbala, kabbalisztikus kifejezések. Mágia, varázslat, ráolvasás, szavakkal és jelekkel felszabadított misztikus erők tartoznak a kabbala fogalma körébe. És a matematikai jelek igen lényeges, súlyos részei a Leibniz-féle szimbólumszámításnak, ennek az általános tanításnak a szimbólumokról.

Tudom, hogy ez az első utalás Leibniz gondolatmenetére nem lehet teljesen érthető. Így tehát Leibniz kijelentését a magunk számára egyszerűsíteni fogjuk és csak annyit jegyzünk meg, hogy a matematikai írásmód önmagában véve is valamelyes «igaz kabbalát» rejt. Világosabbá teheti gondolatmenetünket egy kis kirándulás a matematika, helyesebben a számjegyekkel való számolás történetébe. Nincs igaza ellenfelemnek, ha a tizes számrendszert oly becsmérlőn említi. Mérhetetlen és kimondhatatlan érdeme ennek a rendszernek, hogy minden elemista megtanulhatja. Mert a történelem távlatában másik képét is látjuk. Ami ma elemi iskolai tanulóknak való feladat, az néhány évszázaddal ezelőtt pályadíjjal jutalmazott feladvány volt a legnagyobb matematikusok számára. Hiányzott még ugyanis az a szinte önműködő gép, a számrendszer, a helyes írásmódban rejlő igaz kabbala.

Engedelmet kérek, hogy kissé eltérhessek itt a tárgytól. A helyes írásmódról volt szó. Igaz, a rendszer egészére vonatkozott. Az «írásmód» kifejezés e magasabb értelmezésén kívül arra is szeretném felhívni a figyelmet, hogy a matematikai jelek ismerője is csak akkor tud könnyen és biztosan e jelekkel bánni, ha szem előtt tart két közhelynek tetsző szabályt. Szépen, lehetőleg áttekinthetően kell írnia. Ne huzigáljon át, ne írjon keresztül-kasul semmit és ne firkálja tele a közöket és lapszéleket mellékszámításokkal. Másodszor, a kezdő — és ez a kezdő állapot messzire terjed tudományunkban — ne ugráljon át türelmetlenül közbenső műveleteket és a mellékszámításokat ne fejben végezze el. A kabbalára szántuk magunkat és a varázsjelek írásban akarnak élni. De ha valaki lényegesnek tartja, hogy tudása minden fokán fejben is végezzen számításokat, képzelőerejének kipróbálására és gyakorlására, akkor végezzen számításokat mondjuk elalvás előtt, jegyezze fel az eredményt és ellenőrizze őket másnap lépésről-lépésre az igaz kabbala segítségével. Ez szinte sportszerű tanács. A vívásnak, boxolásnak, tenisznek oktatója is minden ütést és vágást a legnagyobb pontossággal, részletről részletre, szinte lassítva ismételtet. A személyes stílus és az egyéni tempó az alapfogalmak csiszolódása folyamán amúgyis, magától is kifejlődik.

De térjünk vissza tárgyunkhoz. Említettem, hogy a mai számjegyekkel való számolás egyáltalán nem volt mindenkor magától értetődő. Csak a Krisztus utáni tizenkettedik században lett az igaz kabbala a nyugati népek közkincse. Egyszerűség kedvéért ismét említsük meg, hogy akkoriban a számolás két rendszere küzdött az elsőségért. Az abakuszosok iskolája és az algoritmikusok iskolája. Abacus a neve az ókorban is használt számolótáblának. Olyan táblát kell elképzelnünk, amelyet függőleges vonalak részekre osztanak. Minden oszlop egy-egy fokszámot jelképez, tehát egyeseket, tízeseket, százasokat, ezreseket stb. Ha számolni akarunk az abakuszon, minden oszlopba a megfelelő számú követ vagy táblácskát kell tennünk. Tegyük fel, hogy 504.723-hoz 609.802-t kellene hozzászámlálnunk, hozzáadnunk.

Láthatjuk, hogy a fehér táblácskákhoz (első szám) a fekete táblácskákat (második szám) hozzászámlálva a helyes 1,114.525 eredményt kapjuk. Nullát ez az abakusz számítás még nem alkalmaz. S figyelembe kellett még venni, hogy



1. ábra.

15 százas egy ezressel és 5 százassal, 14 ezres egy tízezressel és 4 ezressel és végül 11 százezres egy millióssal és egy százezressel azonos. Ne foglalkozzunk most behatóbban az abakuszosok művészetének, a számolótábla használatának szabályaival. De nem esik nehezünkre belátni, hogy az algoritmikusok iskolájának feltétlenül győznie *kellett.*

Most már oly ponthoz jutottunk, amely megérdemli teljes figyelmünket. De előbb egy szót kell megmagyaráznunk. Algoritmus (algoritmikus) egy névnek eltorzult alakja. Muhammed ibn Musa Alchvarizmi nevét rejti. Ez a keletarábiai matematikus Khorasszanból származott és később Bagdadban élt. 800 és 825 között Kr. u. többek közt könyvet írt az indiai (mai nevükön arab) jelekkel, ill. számjegyekkel történő számolásról. Mégpedig a helyértéket alkalmazva. Ő már ismerte a nullát, kis körnek rajzolta. Különféle utakon, a keresztes hadjáratok során, de a Toledoban, Sevillában, Granadában működő arab főiskolák útján is, megismerték a nyugat tudósai is, latin fordításban, az arab munkákat, köztük Alchvarizmi könyvét az indiai számjegyekről. Ismételjük: az algoritmikusok algoritmus néven az indiai számrendszert, a helyérték figyelembevételét honosították meg a nyugati tudományban. Ez volt az első lépés az igaz kabbala felé. S többé nem az esetlen számolódeszka szolgáltatta a számolási műveletek eredményét, hanem egy bizony titokzatos varázsírás tette lehetővé a legbonyolultabb és legnagyobb számítások csalhatatlan végrehajtását. Az egész varázslathoz mindössze tíz jel 0-tól 9-ig, egy darabka papír, toll és a kis egyszeregy ismerete volt szükséges.

Ma már aligha képzelhetjük magunkat azoknak a számolóknak a helyzetébe, akiknek nem kellett már számolótábla ahhoz, hogy például 85.243-at 9621-gyel megszorozzanak, hanem egy papírrongy is elegendő volt a szorzáshoz. A boldogság varázsos borzongása futhatott végig akkor a számolókon. És hányszor érezhették, hogy Bábel tornyának tetejére értek, ahonnan már kezükkel elérhetik az égboltot.

De kénytelenek vagyunk e történelmi ábrándozásunkból visszatérni hűvösebb világunkba. Egyelőre csak azt tudjuk, hogy az algoritmus szó bizonyos jelrendszeren alapuló írásos számolási eljárást jelent. Még pedig olyan zárt rendszeren belül, amely magában is feleslegessé teszi agymunkánk egy részét és hozzáférhetővé tesz olyan területeket, ahol képzeletünk már csődöt mond vagy legalábbis könnyen eltévedhet. Közelebbről kell tehát megvizsgálnunk, hogy honnan származik a varázsereje e különleges algoritmusnak, amelyet dekadikus, vagyis tizes számrendszernek hívunk.

MÁSODIK FEJEZET

A tízesrendszer

Ekkor először is a rendszer már jelzett hallatlan egyszerűsége tűnik szembe. Voltaképp tíz számjegyszimbólum az egész anyag, amivel dolgunk van. Ha ehhez még hozzávesszünk néhány összekapcsolási szimbólumot, mint a «több», «kevesebb», «szorozva» és «osztva» jelek (+, —, ×, :) és végül hozzávesszük az egyenlőség jelét (=) is, akkor mint derék algoritmikusok már a numerikus számítás egy egész világán uralkodunk. Mindenesetre még valami további is hozzátartozik, mint egyik legfontosabb feltétel, algoritmikus mesterségünkhöz: az ú. n. helyértékrendszer, ami talán magátólértetődőnek látszik, de maga a titok kulcsa.

Mint erőteljes példája a helyérték nélküli írásmódnak, álljon itt az ú. n. római számírás. Egy római «algoritmikust» fölszólították, hogy pl. csak adja össze az MDCCCXLIX és a MMCXXIV számokat. A tízeseknél és az egyeseknél a legnagyobb zavarba jön s kénytelen az abakuszhoz, a számolótáblához folyamodni, elismerve, hogy voltaképp semmiféle algoritmussal nem rendelkezik. Az indus rendszer algoritmikusa nem tartja érdemesnek fáradni az 1849 és a 2124 számok egymás alá való írásával sem. Néhány másodperc mulva már tudatja az eredményt, hogy az összeg 3973.

Foglalkozzunk most azonban közvetlenül a problémával. Helyértékrendszer alatt a számok oly írásmódját értjük, amely minden egyes számjegynek más-más értéket tulajdonít, ha a jegy más és más helyt áll. Akkor is ha ugyanarról a *jegyről* van szó. Éspedig, mivel a nagyságrend törvénye balról jobbra állapíttatott meg, pl. egy 3 az utolsó helyen 3, az utolsóelőttin 30, a hátulról harmadik helyen 300, a hátulról negyediken 3000, és így tovább. Az ú. n. tizedestörthelyekről még nem beszélünk. Egyelőre csak egész számokkal foglalkozunk Kronecker mondására gondolva, hogy az egész számok Istentől származnak és az összes többi emberi mű.

A 3-ra vonatkozó példánkból már látjuk, hogy a helyérték jobbról balra minden egyes lépésnél megtízszereződik. Innen ered a *tizedes- vagy dekadikus rendszer* elnevezés. A tízet itt a rendszer alapszámának nevezik.

Ámbár hatalmasan elébevágunk a dolgoknak, mégis a következő fejtegetések egyszerűsítése végett egy új fogalmat vezetünk be. T. i. a hatvány fogalmát. Ennél voltaképp nincs másról szó, mint valamely számnak önmagával való szorzásáról, amit egy különösen rövid jellel írunk. Egyelőre azonban semmiképp sem foglalkozunk az ú. n. «hatványozással» vagy a «hatványra emeléssel», hanem néhány példa kapcsán csak az írásmódot világítjuk meg. Tízszer tízet a tíz második hatványának nevezzük és így írjuk: 10^2. Tízszer tízszer tízet a tíz harmadik hatványának nevezzük és így írjuk: 10^3. $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$; $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ stb. Természetesen e számokat ki is számíthatjuk. Így $10^2 = 100$, $10^5 = 100.000$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$, $6^3 = 6.6.6 = 216$, stb. Valamely szám első hatványa magát a számot jelenti, mivel mintegy csak egyszer lép föl a szorzásban. Tehát $10^1 = 10$, $5^1 = 5$, $29^1 = 29$, stb. Az első hatványt, vagyis a kis egyest fölül jobbfelől, többnyire nem írjuk ki. De még egy hatványt kell bevezetnünk, amelynek különös eredményét e helyen nem magyarázhatjuk meg. T. i. az ú. n. zérusadik hatványt. Fölállítjuk tehát a követelményt, hogy valamely szám az önmagával való szorzásban egyáltalán ne forduljon elő mint tényező. Ennek jelentése mintegy 10^0 vagy szóval: tíz a zérusodik hatványon. Bárki jogosan jelentheti ki, hogy egy ily követelmény teljes értelmetlenség. «Szorozz valamit meg önmagával úgy, hogy a szorzásban egyáltalán ne szerepeljen, végezz egy számolást (még hozzá egy szorzást), amelyben az egyetlen megengedett tényező, t. i. az illető szám, zérusszor, tehát egyetlenegyszer sem, szerepel. És mondd meg nekem az eredményt». Ez a kérdéstétel. Mint már említettem, egyelőre udvariasan bocsánatot kell kérnem és közlöm, hogy bármely és bármiféle szám[1] a zérusodik hatványra emelve, eredménytelenül egyet ad. Tehát $10^0 = 1$, $25^0 = 1$, $275.859^0 = 1$, és így tovább bármily nagy számoknál.

[1] A 0^0 kivétel, mivel a 0 ebben az összefüggésben nem tekintendő számnak.

Tehát ismételve: bármely szám a zérusodik hatványon egyet ad. Az első hatványon önmaga. A második hatványon a szám önmagával szorozva. A harmadik hatványon a szám önmagával és mégegyszer önmagával szorozva és így tovább. Jelesen a 10 szám esetén: $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10.000$, ...

Jószemű ember e számsorozat szemlélésekor rögtön észreveszi, hogy a tíznél a kis számjegy jobbfelől fölül (az ú. n. hatványmutató vagy hatványkitevő) azon zérusok számát adja, amelyek tíz illető hatványában vannak. Bizonyára fontos és a számrendszerre nézve nagyon fölvilágosító összefüggés. De nem akarunk itt tovább vesztegelni, hanem most bátran behatolunk a számrendszer mélységeibe és magasságaiba. Mivel már kezünkben van az egész fölszerelés a mi számjel-algoritmusunk átkutatásához.

A számolódeszka megtekintésekor mindenki előtt világossá válik, hogy a tízesrendszer tetszőleges száma egyesek, tízesek, százasok, stb. bizonyos sokaságából áll. Arra törekszünk most, hogy alkalmas írásmódot találjunk, amely világosan megmutatja bármely szám belső szerkezetét a nélkül, hogy segítségül kellene vennünk a merev abakuszt (számolódeszkát). Az előbbiek után nem lehet túlnehéz ezt az írásmódot kitalálni. Ez az ú. n. additív vagy szummatorikus sor,[1] éspedig egy hatványsor. A tudós kifejezések senkit se riasszanak el. Mert egy példa az eljárást rögtön megmagyarázza. Legyen pl. hogy ily sorba kell szétszednünk az 1,483.706 számot. Ezt minden további nélkül meg tudjuk tenni eddigi ismereteinkkel. Írjuk először is még primitíven:

$$6\times1+0\times10+7\times(10\times10)+3\times(10\times10\times10)+$$
$$+8\times(10\times10\times10\times10)+4\times(10\times10\times10\times10\times10)+$$
$$+1\times(10\times10\times10\times10\times10\times10).$$

Erre nézve először is megjegyezzük, hogy bármely szám zérussal szorozva újra 0-t ad és hogy én ezért megfordítva minden zérust fölfoghatok mint valamely számnak és 0-nak

[1] A matematikában «sor» mindig számok vagy mennyiségek additív vagy szubsztraktív egymásmellé sorakoztatását jelenti.

a szorzatát. E megfordítást itt tudatosan fölhasználjuk a sornak a tízeshelyekre vonatkozó rendszeres kiegészítésére. Ezenkívül most még további egyszerűsítéseket alkalmazunk. Először elejtjük a nehézkes ferde keresztet (×) a szorzásnál és helyette a pontot alkalmazzuk, miként ez a matematikában általánosan szokásos. Azután a zárójelekben levő kifejezéseket megfelelő hatványokkal fejezzük ki. És végül megjegyezzük, hogy egy ily sorban a számjegyeket a hatványok előtt «koefficienseknek» (együtthatóknak) nevezik. 6, 0, 7, 3, 8, 4, 1 — röviden: a számunkat alkotó jegyek — a hatványsorban ezután csak mint «koefficiensek» szerepelnek. Vegyük egyelőre csak tudomásul ezt a fogalmat. Többet róla még nem mondhatunk e helyt.

Írjuk tehát most matematikailag helyesen:

$$1{,}483.706 = 6.10^0 + 0.10^1 + 7.10^2 + 3.10^3 + 8.10^4 + \\ + 4.10^5 + 1.10^6.$$

Ezzel teljesen és egyértelműen feltártuk a helyértékes tízesrendszer belső szerkezetét. Ennek a dolognak a megvilágítását, ú. n., «diszkusszió»-ját nem akarom az olvasóra hagyni, hanem — még hogy ha unalmas is — vele közösen akarom elintézni. Először is látjuk, hogy az ú. n. nagyságrendet megtartottuk. A tíz hatványai egymásután sorban következnek, mint 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, stb. Ezen semmit sem változtatnak a koefficiensek. Mert még 9.10^0 (tehát $9.1=9$) is mindig kisebb tartozik lenni, mint 0.10^1 (tehát $0.10=0$), mivel ez a zérus a tízesek helyén semmi mást nem jelent, minthogy a számban legalább 10 tízes előfordul, mivel egy szám sohasem kezdődhetik zérussal. Szolgáljon például ez a szám: 109, amely mint sor írva a következő: $9.10^0+0.10^1+1.10^2$. Hogy 10^0 egyenlő 1, ezt már említettük. Világos továbbá, hogy a sor elméletben a végtelenbe folytatható. Azaz nincs egyetlenegy még oly nagy szám, amely nem volna írható koefficiensekkel ellátott tízhatványok ily sorának az alakjában. Természetesen megfordítva minden olyan sor újra visszavezethető egy dekadikus számba. $5.10^0+7.10^1+0.10^2+8.10^3+9.10^4+3.10^5$ nem más, mint ez a szám: 398.075, t. i. mégegyszer — szinte fölösleges módon — szavakban: 5 egyes, 7 tízes, 0 százas, 8 ezres.

9 tízezres és 3 százezres. Szándékosan csak most említjük, hogy egy tökéletes számrendszer föltételezi még, hogy az ú. n. fokszámok (a tíz hatványai) tisztán nyelvileg saját nevükkel jelölhetők (tíz, száz, ezer stb.) A mi rendszerünkben nincs szigorúan keresztülvíve a dolog. Különös módon saját nevük csak 10^1, 10^2 és 10^3 számára vannak, azaz tíz, száz, ezer. Tízezer és százezer már szorzatos összetételek. 10^6, vagyis a milliónak van újra saját neve. Ezermillió (10^9), vagy a milliárd a legközelebbi szigorú elnevezés. És azután következnek a millió hatványai szerint, a billió ($1{,}000.000^2=10^{12}$), a trillió ($1{,}000.000^3=10^{18}$), a kvadrillió (10^{24}), a kvintillió (10^{30}) stb. E szabálytalanság okát nézetem szerint a históriailag adódott gyakorlati szükségletekben találjuk meg. A pénz- és hadügy kezdetben csak ezerig terjedő felsőbb egységeket kívánt. És állítólag csak Marco Polo gazdagsága tette szükségessé a millió fogalmát. Az egészen magas egységeket (pl. billió stb.) a közönséges nyelvhasználat is «csillagászati szám»-oknak nevezi és így mutatja alkalmazási területüket és keletkezésüket.

Végérvényesen ismételjük tehát: a tízesrendszer összekötve a helyértékrendszerrel egy algoritmus. Lehetővé teszi nekünk, hogy az összes számítási műveleteket a legnagyobb könnyedséggel véghezvigyük az összeadásnál, a kivonásnál, a szorzásnál és az osztásnál, amelyek szabályait mainapság már az elemi iskolában megtanuljuk. A tízesrendszer sajátos, a betűktől teljesen különböző fogalomszimbólumokból áll, amelyek a számértékeket jelentik 0-tól 9-ig. A rendszer alapszáma a 9-re következő szám, amelyet tíznek nevezünk és 10 által jelöljük. A további fokszámokra (a tíz hatványaira) részben saját nevekkel rendelkezünk, mint pl. száz, ezer, millió, milliárd, billió stb.

Mostmár oly magasra hágtunk a mi számhegyünkön, hogy egy végtelenbe nyúló, elágazó völgy, a tízesrendszer völgye fölött nyertünk kilátást és áttekintést. Megjegyezzük azonban, hogy még mindig igen mélyen a csúcs alatt vagyunk. Mit fogunk a csúcsról látni? Vannak-e még más völgyek is? Vagy magas fennsík a hegy, összeköttetés nélküli kősivatag?

Megpihenünk és tépelődünk. És eközben mindenfényugtalanító dolog jut eszünkbe. Mit jelent az, hogy pl. a német *nyelvben az «elf» és a «zwölf» szavak szerepelnek*, de utánuk «dreizehn» és «vierzehn» következik? Mit jelent a franciák talányos «quatrevingt»-je?. Ezek a tízesrendszer nézőpontjából rendszerbeli zavarok, kisiklások. Ebben a tekintetben nincs kétely. «Quatrevingt» (négy-húsz) kétségbeejtően hasonló szerkezetű, mint a német «vierzig». És «elf» és «zwölf» úgy látszanak, mint közvetlen folytatásai az «eins»-tól «zehn»-ig levő számoknak. Miért nem mondanak «elf» helyett «einzehn»-t és «zwölf» helyett «zweizehn»-t? Egyáltalán miért éppen a tíz az alapszáma a mi rendszerünknek? Kitűnteti talán valami a tízet más számmal szemben? Mintegy Isten által ajándékozott rendszer a tízesrendszer? Vagy talán csak az a tény okozta a tízesrendszer előnyben részesítését, hogy tíz ujjunk van és őseink egykor ujjukon számoltak?

De nem hagyjuk sokáig tépelődni számhegyünk vándorát. És odasúgjuk neki: a tízesrendszert semmi, de semmi sem tünteti ki elméletileg tetszőleges más alapszámú rendszerrel szemben. A történelem folyamán szerepelt már hatvanasrendszer, ötösrendszer, húszasrendszer és tizenkettősrendszer. Sőt a nagy Leibniz Rómában, az 1690-ik évben minden rendszerek legfigyelemreméltóbbját, a kettősrendszert (a diadikát vagy binär aritmetikát) fedezte föl, amely mindössze két számjegyet alkalmaz, a 0-t és az 1-et. És a mi «quatrevingt»-tünk valóban időszerűtlen maradéka egy kelta húszasrendszernek (ujjak meg lábujjak!), amely becsúszott a francia nyelvbe.

HARMADIK FEJEZET

Nem-tizes számrendszerek

Minthogy a tizesrendszer épületét, szerkezetét igen jól megismertük, merész kísérletként, teljesen önállóan, másik rendszert állítunk fel.[1] Válasszunk először tíznél kisebb alap-

[1] Kevésbbé gyakorlott olvasó nyugodtan kihagyhatja e fejezet egyes számításait a nélkül, hogy a végcél szempontjából károsodnék.

számot, legyen ez például hat. Felépítjük ezután, pontosan a tizes rendszer mintájára, új algoritmusunkat és majd meglátjuk, mire megyünk vele. Először csak egészen egyszerűen és érzés után: A tizesrendszerben tíz számjegyet — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — használtunk. Ezek szerint, következtetjük, hatosrendszerünkben hat számjegy, tehát 0, 1, 2, 3, 4, 5, elegendő lesz. De hogyan írjuk a hatot, a hetet, a nyolcat, a kilencet? Gondoljunk most hatványsorunkra. Az alapszám első hatványát így írtuk: 10^1. Vagy egyszerűen így: 10. Tehát az első kétjegyű szám volt. Tehát a hatosrendszerben is 10-nek írjuk az alapszámot, de ez itt nem tízet, hanem hatot jelent.

Elhiszem, hogy sok olvasóm zavarban lesz itt, mert azt hiszi, hogy a tizesrendszer isteni eredetű. Ezért lépésről-lépésre haladunk és elsősorban felírjuk a tizesrendszer első húsz számát egymás mellé és alájuk a hatosrendszer megfelelő első húsz számát.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32

Látható, hogy az írásmód ama tény közvetlen következménye, hogy a mindenkori számrendszerben másképpen nem is *lehet* írni. Öt számjeggyel és a nullával a hatot másképpen mint 10 nem tudom írni. Éppen olyan kevéssé, mint kilenc számmal és a nullával tizenkettő soha másképpen nem fejezhető ki mint 12.

Vegyük most szemügyre fokszámainkat. Értékük, tizesrendszerben írva 6^0, 6^1, 6^2, 6^3, 6^4 stb. kell hogy legyen. Vagy továbbra is tizesrendszerben, értékük 1, 6, 36, 216, 1296 stb. Sorként írva tehát tetszésszerinti számot a hatosrendszerben így fejezhetek ki: $2.6^0+4.6^1+0.6^2+3.6^3+5.6^4$ ami azt jelenti, hogy $2.1+4.6+0.36+3.216+5.1296$. Tizes rendszerben írva ez 7154-et ad eredményül. Jegyezzük meg jól, hogy tizesrendszerben írva sem haladhatják meg az «együtthatók» értékei az ötöt, mert ez megsértené a nagyságrend szabályát és nem lehetne a számot hatosrendszerben felírni. Most egy merész fogás következik. Fel fogjuk írni a fent említett számot a hatos számrendszerben. Ehhez nem kell egyebet tennünk, mint az együtthatókat egymás mellé leírnunk. Mégpedig a legmagasabb hatványával kezdve fogyó hatványok szerinti sorrendben. Számunk tehát, hatosrendszerben írva, ez lesz: 53.042. Tekintve, hogy ez nem jelent egyebet, mint ezt a kifejezést: $2.6^0+4.6^1+0.6^2+3.6^3+5.6^4$, megállapíthatjuk, hogy 53.042 (hatosrendszer) ugyanaz, mint 7.154-gyel (tizesrendszer). Bár felesleges, megcsinálhatjuk még a próbáját is és sorokká bonthatjuk a két számot:

7154 (tizesrendszer) $= 4.10^0+5.10^1+1.10^2+7.10^3$
53.042 (hatosrendszer) $= 2.6^0+4.6^1+0.6^2+3.6^3+5.6^4$,

azaz

$4.1+5.10+1.100+7.1000$ biztosan ugyanannyi, mint a $2.1+4.6+0.36+3.216+5.1296$.

A számítás természetesen helyes. Mind az első, mind a második sor összege (tízesrendszerben írva) 7154-et ad.

De hagyjuk most már teljesen a tízesrendszert és írjuk fel az előbbi számot, 53.042-t (hatosrendszer) sor alakjában, de saját rendszerében. Ilyenformán a következőt kapjuk:

$53.042=2.10^0+4.10^1+0.10^2+3.10^3+5.10^4$,

de itt a 10 már nem a tízesrendszer tízét jelenti, hanem a tízesrendszerbeli 6 fejezi ki az értékét.

De lényegesen többet akarunk elérni. Lássuk tehát, használhatjuk-e a hatosrendszert is algoritmusként, vagyis alkalmas-e arra, hogy benne számolási műveleteket, jól ismert összeadásunk, kivonásunk, szorzásunk és osztásunk stb. mintájára elvégezzünk. Ehhez azonban még egy segédeszközt kell előkészítenünk. A hatosrendszer egyszeregyét. Első pillanatra egy őrült számtani gyakorlatainak látszik. De némi gondolkodás és egy pillantás a számoszlopokra, valamint annak a megfontolása, hogy most csak hat számjegy áll rendelkezésünkre, csakhamar megnyugtatja a kedélyeket.

Írjuk fel tehát a boszorkányos egyszeregyet:

1.1=1	2.1= 2	3.1= 3	4.1= 4	5.1= 5
1.2=2	2.2= 4	3.2=10	4.2=12	5.2=14
1.3=3	2.3=10	3.3=13	4.3=20	5.3=23
1.4=4	2.4=12	3.4=20	4.4=24	5.4=32
1.5=5	2.5=14	3.5=23	4.5=32	5.5=41

Most összeadni, kivonni, szorozni, osztani fogunk úgy, mintha mitsem tudnánk a tízesrendszerről. Először tehát egy összeadást:

$$\begin{array}{r} 4325 \\ 5041 \\ \hline 13410 \end{array}$$

Valahányszor két szám összege a hatot eléri, tízet kell gondolnunk. Tehát 1 meg 5 az 10, marad 1. Négy meg egy az öt meg kettő 11, marad egy. Nulla meg egy az egy meg három az négy. Öt meg négy az 13. Természetesen nem szabadna tizet, tizenegyet, tizenhármat mondani, hanem inkább hatot, hatonegyet, hatonhármat. A legnagyobb nehézség ezek szerint a nyelvben rejlik. Mihelyst szavunk van a fokszámok részére, minden számrendszer ugyanolyan könynyen használhatóvá válik, mint a tizesrendszer.

Nézzünk egy kivonást:

$$\begin{array}{r} 5201 \\ -3544 \\ \hline 1213 \end{array}$$

Szavakban: négyhez hogy tizenegy (hatonegy) legyen kell három, marad egy. Négy meg egy az öt, öthöz hogy tíz (hat) legyen kell egy, marad egy. Öt meg egy az tíz (hat) meg kettő az tizenkettő (hatonkettő), marad egy. Három meg egy az négy meg egy az öt.

Most az igért szorzás, ehhez fog segítségül szolgálni az előbb felírt egyszeregy.

$$\begin{array}{r} 3425.31 \\ \hline 15123 \\ 3425 \\ \hline 155055 \end{array}$$

A szorzás próbáját tizesrendszerbe való átszámítással végezhetjük el.

$$\underset{\text{(hatosrendszer)}}{3425} = 5.6^0+2.6^1+4.6^2+3.6^3 = \underset{\text{(tízesrendszer)}}{809},$$

$$31 \text{ (hatosrendszer)} = 1.6^0+3.6^1 = 19 \text{ (tízesrendszer)}.$$

A tízesrendszerű szorzás a következő:

$$\begin{array}{r} 809.19 \\ 7281 \\ \hline 15371 \end{array}$$

Ha helyesen számoltunk, továbbá, ha az az állításunk, hogy a hatosrendszerben az algoritmus ugyanaz mint a tizesben, akkor 15.371 (tizesrendszerben) ugyanannyi mint 155.055 (hatosrendszer), tehát sorokban felírva $1.10^0+7.10^1+3.10^2+5.10^3+1.10^4=5.6^0+5.6^1+0.6^2+5.6^3+5.6^4+1.6^5$. Szerencsére és örömünkre fennáll a két sor megkövetelt egyenlősége, s erről mindenki meggyőződhet. Így tehát már csak a hatosrendszer osztásával vagyunk adósak, de ezt azonnal pótoljuk. Bátrak vagyunk és nem félünk a nagy számoktól. Tehát:

```
2004013 : 425=2413 (hatosrendszerben)
 3100
  1041
   2123
    000
```

Az osztás ezek szerint, ahogy mondani szokás, kiment. Természetesen az osztásnál is folyton szem előtt kellett tartanunk, hogy hatosrendszerrel van dolgunk, így már annál az első becslésnél is, amellyel az osztás minden rendszerben kezdődik. Kezdésnél ugyanis, osztás előtt, feltesszük magunknak a kérdést: hányszor van meg az osztó az osztandóban, illetve az osztandó számcsoportjában. Esetünkben: hányszor foglaltatik a 425 a 2004-ben? Tizesrendszerben néggyel kísérleteznék. Hatosrendszerben meg kell fontolnom, hogy 20 értéke tizesrendszerben 12, négyé viszont mindkettőben 4. Mivelhogy a 20 után ismét 0 következik, a 4 után pedig 2, ugyanaz a helyzet, mintha tizesrendszerben 120-at kellene 42-vel osztanom. Így tehát a kettest kell megpróbálnom. Az eredmény második jegyének meghatározásához 31 osztandó 4-gyel. 31 tizesrendszerben 19-et jelent, tehát négyet fogok próbaképpen felírni. Egyébként nemcsak használhatjuk, de használnunk is kell boszorkányos egyszeregyünket.[1]

Telhe tetlenekké tettek eddigi eredményeink, s a számelmélet tudományának újdonsült tudósaiként még feltétlen bizonyságát is kívánjuk annak, hogy osztásunk helyes. Erre két módunk is van. Először, mint a szorzásnál tettük, visszahelyezhetnők egész műveletünket a tizesrendszerbe, amelyben érthetőn biztosabbaknak érezzük magunkat. De ezúttal sokkal büszkébbek vagyunk, semhogy ezt a banális utat követnők. Mert algoritmusunkat még biztosabban markunkban szeretnők tartani. Ezért így következtetünk : minden elemi iskolás tanuló, ha nem, bízik benne, hogy helyes az osztása, megcsinálja a próbáját azaz megszorozza az osztót a hányadossal és megnézi, vajjon eredményül az osztandót kapja-e. Szkematikusan :

Osztandó : osztó=hányados,

Osztó $\times$ hányados=osztandó.

S minthogy, mint már említettük, a tizesrendszert már egyáltalán nem akarjuk segítségül igénybe venni és a hatosrendszer elemi iskolai tanulóinak tekintjük magunkat, szorozzuk össze (hatosrendszerben) az alábbi számokat :

$$
\begin{array}{r}
2413.425 \\
\hline
14500 \\
5230 \\
21313 \\
\hline
2004013
\end{array}
$$

Rendben van. A próba sikerült, ezek szerint helyesen kaptuk meg a hányadost. Ellenfelünk azonban körmünkre néz és következetlenséggel vádol. Ugyanis, felhívja figyelmünket, hogy nem a szkéma szerinti osztószor hányados hanem a hányadosszor osztó műveletet írtuk fel próbaként. Habár mindenki mellénk áll és vallja, hogy ez mindegy, mert hisz 4.5 ugyanazt az eredményt adja mint 5.4, mégis

[1] Ezzel feleslegessé válik, hogy minduntalan visszatérjünk a tizesrendszerbe.

hálásak vagyunk ellenfelünknek, hogy alkalmat adott egy kis kitérésre.

Összeadás és szorzás úgynevezett építő műveletek. Összekapcsolnak, szaporítanak. Eredményük összetétel, szintézis. Innen szigorúan tudományos nevük: szintetikus, vagy röviden tétikus műveletek. Ezzel szemben a kivonás és az osztás felold, csökkent, lebont. Így ezek analitikus, röviden litikus műveletek. Világos, vagy óvatosabban szólván, valószínű, hogy lesz még az építő és bontó műveleteknek közös csoporttulajdonságuk is. De e helyütt egyáltalán nem óhajtunk mélyebbre menni. Ellenfelünk közbeszólását csupán annak bemutatására akarjuk felhasználni, hogy az összeadásnak és szorzásnak a kivonással és osztással szemben igen fontos csoporttulajdonsága van, amelyet mindenki ismer: alkatrészeinek, tagjainak sorrendje felcserélhető, a nélkül, hogy az eredmény megváltoznék. $5+7+4=7+5+4=4+5+7$ stb. Ugyanígy $4.7.5=5.4.7=7.4.5$ stb. Szabály: építő, tetikus műveleteknél érvényes az alkatrészek felcserélhetőségének elve (kommutativ műveletek). Feloldó műveleteknél, amelyek mellesleg megjegyezve, tudásunk mostani fokán mindenkor csak két tagból állanak, semmi esetre sem érvényes ez a törvény. Ezek mintegy egyirányúak. Mert lényegesen más, hogy 5-ből vonok-e ki 4-et vagy 4-ből 5-öt. Éppígy más, hogy tizenkettőt osztok hárommal vagy hármat tizenkettővel. Megengedem, hogy ez a kitérés tudásunk mostani fokán természetes dolog fölöslegesen bőbeszédű taglalásának látszik, ezért már most rámutatok, hogy vannak további tetikus és litikus műveletek is, de azoknál a dolog korántsem ilyen egyszerű, azok tehát alaposabb vizsgálatra szorulnak.

De térjünk vissza számrendszereinkhez. A hatosrendszerrel elvégzett kísérleteink kíváncsivá tettek. Azt már elhiszszük, hogy tízen aluli alapszámmal érvényes az algoritmus, az igaz kabbala, de még egyáltalán nincs bebizonyítva, hogy tíznél nagyobb alapszám is beválik helyértékrendszer alapszámaként. Azonban nem vághatunk neki vaktában a számok tengerének, mert nem volna gazdaságos például 50-et alapszámnak választani. Persze lehetséges volna. De 50 hatványai oly szédítően gyors iramban nőnek, hogy áttekintésünket teljesen elveszítenők. S tudjuk azt is, hogy annyi számjegyre van szükségünk, ahány egységet alapszámunk tartalmaz. Hol vegyük a jeleket hozzá, ha nem akarunk napokat fordítani feltalálásukra és megtanulásukra?

Megelégszünk tehát azzal a feltétellel, hogy alapszámunk nagyobb legyen tíznél és jóravaló kabbalistákhoz méltón 13 lesz az alapszámunk. Mellékcélunk, hogy bemutassuk: alkalmas alapszám bármely úgynevezett törzsszám is, vagyis olyan szám, amely más egészszámmal nem osztható. Ehhez is fűzzünk egy megjegyzést. Dekadikus rendszerünk alapszámát (10), csak a 2 és az 5 osztja. 12-nek már 2, 3, 4 és 6 is osztója. Ezért már nem egyszer komolyan felvetették azt az ötletet, hogy hagyjuk el tizesrendszerünket és térjünk át a tizenkettesrendszerre. Pénz-, mérték- és súlyrendszerünk mérhetetlen hasznát látná, nem is szólván arról, hogy a nap beosztása (az óra számlapja) és a kör szögbeosztása könnyen egyesíthető a tizenkettesrendszerrel. Ellene főképpen természeti okok szólnak, ujjaink száma és egyéb testi adottságaink, amelyek nagyjából mindig a kettes és az ötös számokat kedvelik (szemek, fülek, karok, lábak, ujjak és lábujjak). Méterrendszerünk minden hozzáfűzött részével együtt tizes alapon függ össze a Föld méreteivel, mert a francia forradalom óta a Föld negyed délkörének tízmilliomod részeként határozzák meg a métert. A többi érték, így a liter, a kilogramm stb. tizesrendszerrel kapcsolódik a méterhez. Végül pedig csillagászati véletlen, hogy egyik legfontosabb világállandó, az úgynevezett fénysebesség másodpercenkint majdnem pontosan 300.000 kilométer.[1]

Kevés tehát a remény, hogy belátható időn belül más számrendszert kelljen megtanulnunk. És így nem annyira gyakorlati, mint inkább elméleti okokból fogunk most még egy keveset tizenhármas számrendszerünkkel foglalkozni. Ismét felírjuk egymás alá összehasonlításul az első számokat, ezúttal harmincat, tizes és tizenhármasrendszerben.

[1] Ha a métert a negyedmeridián tizenkettesrendszerben vett 10,000.000-d részeként definiálnók, akkor a fény tizenkettesrendszerben írt 26-szor akkora utat tenne meg másodpercenkint, azaz 260,000 »kilométert«. Ez pedig lényegesen kevésbbé »kerek« szám.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	A,	B,	C,	10,	11,	12,	13,

17,	18,	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30
14,	15,	16,	17,	18,	19,	1A,	1B,	1C,	20,	21,	22,	23,	24

Azonnal észre lehet venni, hogy a latin nagy A, B és C betüket is számjegyek jelölésére használtuk, minthogy a tizenhármas számrendszerben, a nullát beleértve, 13 számjegyre van szükségünk. Míg a hatos számrendszernél tizesrendszerbeli számjegyeket átugrottunk és ezek az átugrott számjegyek (6, 7, 8, 9) egyáltalán elő sem fordulnak, itt a helyzet éppen fordított. A tizesrendszer átugorja a tizenhármas három számjegyét (A, B, C).

Itt is felírhatnók boszorkányos egyszeregyünket, benne 5.8=31 és 7.7=3A stb. volna, de ezt a szorgalmi feladatot és azt a felfedezést, hogy A.B=86, azoknak az olvasóinknak engedjük át, akik a számrendszerek tanulmányozásában mélyebben óhajtanak elmerülni.

De tizenhármasrendszerünket valahogyan igazolnunk is kell. Erre a célra szorzást választunk ki. És pedig a 92B és A7 számok szorzását, amit a tizenhármasrendszer madárnyelvén körülbelül úgy lehetne kimondani, hogy kilencszázhuszonBészer Avanhét. Tehát:

$$\begin{array}{r} 92\text{B}.\text{A}7 \\ \hline 7126 \\ 4\text{C}6\text{C} \\ \hline 761\text{CC} \end{array}$$

Szavakkal: A-szor B az 86 marad 8, A-szor 2 az 17 meg 8 az 22 marad 2. A-szor 9 az 6C meg 2 az 71. Továbbá: 7-szer B az 5C marad 5, 7-szer 2 az 11 meg 5 az 16, marad 1. 7-szer 9 az 4B meg 1 az 4C. Ezután az összeadás. Egyesek helye: C. Második hely: 6 meg szintén C. Harmadik hely: C+2=11 marad 1. Negyedik hely: 4+1=5 meg 1 az 6. Ötödik hely: 7. Tehát az eredmény 76.1CC.

De mivel nem akarunk túlsokat kínlódni, megkockáztatjuk a banalitást és a próbáját tizesrendszerben csináljuk meg. Mégpedig sorrá való felbontással.

$$\begin{aligned}
&92B \text{ (tizenhármasrendszer)} = B.13^0+2.13^1+9.13^2= \\
&\qquad = 11.1+2.13+9.169= \\
&\qquad = 1558 \text{ (tizesrendszer)} \\
&A7 \text{ (tizenhármasrendszer)} = 7.13^0+A.13^1=7.1+ \\
&\qquad +10.13=137 \text{ (tizesrendszer)}.
\end{aligned}$$

Most végezzük el a tizesrendszerbeli szorzást:

$$\begin{array}{r}
1558.137 \\
4674 \\
10906 \\
\hline
213446
\end{array}$$

A tizenhármasrendszerbeli szorzás eredménye 761CC Szükségképpen ez ugyanannyi mint a tizesrendszerben 213446. Írjunk tehát tizesrendszerben, a hatványokat azonnal kiszámítva.

$$\begin{aligned}
&12.1+12.13+1.169+6.2197+7.28561= \\
&=12+156+169+13.182+199.927=213.446.
\end{aligned}$$

Ezzel megkaptuk a várt eredményt és bebizonyítottuk, hogy tizenhármasrendszerben, tehát olyanban, amelynek alapszáma tíznél nagyobb, a helyértékrendszer számítási szabályai alkalmazhatók. Meg kell ugyan jegyeznem, hogy matematikus ilyen bizonyítást egyáltalán nem tekint érvényesnek. Eljárásunkat még a legjobb esetben is csak igazolásnak, verifikációnak nevezi. De mi egyelőre megelégszünk ilyen csekély értékű «bizonyítással» is, tekintve, hogy esetünkben ez veszélytelen és egyértelmű.

Most egyszerre a számok hegységének tetején állunk. A kapaszkodás fáradalma, a számok és számolások tüskés bozótja pillantásunkat eddig a földre szögezte. Most azonban, túl minden panaszon, túl a sok izzadságon és türelmen, körülnézhetünk a magasban. Mit látunk? Számtalan sok völgyet látunk és sejtünk, mindegyik hasonlít valamelyest a tizesrendszer völgyéhez, mégis különböznek tőle sokrétűségükben és kezdetük (6, 10, 13) méretében. Mindegyik a végtelenbe vezet, a határtalanba. Mindegyik helyet ad valamennyi természetes számnak. És mégis, minden völgyben más és más a számnövénykék színe és vastagsága...

Ne vigyük túlzásba hasonlatunkat. Elégedjünk meg ama képszerű gondolattal, hogy oly csúcson állunk, ahonnan valamennyi helyértéktípusú számrendszert áttekinthetjük. Minden ilyen rendszer egy-egy tévedhetetlen, önműködő algoritmus, gondolkodó- és számológép. Egyforma a rendszerek szerkezete: egyetlen alapszám; annyi számjel, a nullát beleértve, ahány egységet az alapszám tartalmaz; helyérték, vagyis minden együttható, minden szám belsejében írt számjegy, az alapszám oly hatványával szorozva gondolandó, amilyen a helyét megilleti. Az egyesek helyét a rejtélyes nulladik, minden következő helyét eggyel-eggyel magasabb hatvány illeti meg. A kiszámított hatványokat fokszámnak hívjuk. Ha a rendszert gyakorlatban is használni óhajtjuk, az is szükséges, hogy legalább is az első fokszámoknak saját nevük legyen. Minden rendszerben vannak egy, két, három és többjegyű számok. Minden szám jegyeinek száma eggyel nagyobb, mint a legmagasabb helyértékű számához tartozó hatvány. (1268 például *négy*jegyű, legmagasabb értékű, ezres, helyén tehát *harmadik* hatvány fordul elő, mivel $1000 = 10.10.10 = 10^3$; *hét*jegyű számnál, például 2,586.933, a milliósok helyéhez tartozó hatvány a *hatodik*, mert $1,000.000 = 10.10.10.10.10.10 = 10^6$ stb.) Továbbá minden helyértéken alapuló számrendszerben egyformák az alapműveletek: az összeadás, kivonás, szorzás és osztás szabályai.

Mielőtt még a számrendszerekre vonatkozó vizsgálódásainkból végső következtetéseinket levonnók, meg kell említenünk, hogy ez az algoritmus, ez az igaz kabbala nemcsak a papíron végzett számításainknak nélkülözhetetlen kelléke. Csak az indiai helyértékrendszer alapján készíthetők a csodálatos mechanikus számológépek. Ezek regisztráló pénztárak és bérautók viteldíjmutatói alakjában láthatók leggyakrabban. Számelméleti kutatások alapján szerkesztették a tulajdonképpeni számológépeket is, azokat, amelyeket nagy bankok, könyvelőségek, műszaki irodák használnak. Bizony nem csodálatos, hogy az a nagy Leibniz alkotta az első számológépet 1674-ben Párizsban, aki az igazi kabbala elterjedésének is úttörője volt. Ez az első számológép már tartalmazta mindazokat az alkotórészeket, melyek a mai különféle rendszerű csodagépek alapjai.

De a helyesen megszerkesztett algoritmus automatikus működésének fogalmán kívül, — ennek jelentőségét már mindnyájan ismerjük — fáradozásaink eredményeként olyan matematikai alapfogalmakat is tisztázni és rögzíteni akarunk, amelyek elsősorban tudományunk magasabb fokán lesznek rendkívül jelentősek: az általánosság fogalmát, az alakegyenlőségét és a formaállandóságét. Mivel nem akarunk matematikai filozófiával foglalkozni, ezeket a nagyon elvont fogalmakat is képszerűen vezetjük le eddigi kutatásainkból. A tizesrendszerből indultunk ki, isteni eredetűnek tartottuk eleinte, de rövidesen észrevettük, hogy csak egy a számtalan lehetséges rendszer közül. Így bukkantunk a helyértékkel felírható számrendszerek *általános* alakjára. Ilyen rendszer számára, melyek alapszáma bármely tetszésszerinti szám lehet, *általános* szabályokat állítunk fel, ezek már nincsenek egy, különleges esethez kötve, hanem minden rendszerben érvényesek, tehát általánosak. Ezek szerint a rendszerek alakra egyformák. Tudományos néven ezt izomorfizmusnak hívják. A formaállandóság viszont azt jelenti, hogy bizonyos alakegyenlőség esetén szabályok egész sora nem változik meg, még ha valóságos megjelenési formájuk lényegesen eltér is egymástól. A tizesrendszer, a hatosrendszer, a tizenhármasrendszer és a többi sok más helyértéken alapuló számrendszer alakra egyenlő, izomorf. Ennek következtében a szorzás szabályai például valamennyiben azonosak. A helyértékrendszerek szorzással szemben formatartók, más szóval invariánsak, mintegy érzéketlenek. A szorzásra nézve közömbös, hogy milyen rendszerben hajtjuk végre. Mindig ugyanazon az úton-módon történik és eredménye mindig ugyanaz. Ezért minden számológépet, elvének megváltoztatása nélkül, néhány alkotórészének kicserélésével át lehetne alakítani hatos vagy tizenhármas rendszerre. Engedelmesen szolgáltatnák a más számrendszerben felírt eredményeket.

De ne mélyedjünk el túlságosan vizsgálódásainkban. Ez a pontosság rovására menne, tekintve, hogy tárgyi tudásunk mértéke nem haladja meg egy kilencéves elemi iskolai tanulóét.

Kétségeink is támadtak. Eszünkbe jutott a diadika, a nagy Leibniz kettesrendszere és felfedezzük, hogy e rendszer egyszeregye egyetlen tételből áll, abból, hogy 1.1=1, tekintve, hogy a nullán és az 1-en kívül más számjegyet nem ismer. Diákok ezt az egyszeregyet mindenesetre nagyon csábítónak tartják. Minket annál inkább zavarba hoz. Hisz azt állítottuk, hogy minden rendszerben egyforma szabályok szerint lehet számolni. Hogyan szorozzak azonban, ha csak annyit tudok, hogy egyszer egy az egy?

Más kérdés is kínoz. Eddigi tudásunkkal meg akartuk határozni, hogy hány két-, három-, négy-, tízjegyű szám van valamely tetszésszerinti alapszámú rendszerben; de közben különféle akadályba ütköztünk.

Így tehát még kénytelen-kelletlen továbbra is egészszámokkal kell foglalkoznunk, mielőtt a «számok elméletének» hátat fordítanánk és az algebrával, tehát általános számokkal történő számolással kezdenénk foglalkozni. Ott fog minket az algebrai formák varázsa, az igazi, nagy kabbala megborzongatni.

NEGYEDIK FEJEZET

Szimbolumok és parancsok

Most, mikor már körülnéztünk a számok barátságtalan hegyének tetejéről, leszállunk az egyik völgybe, a mennyiségek és formák elvarázsolt országába. S olyan kérdés vizsgálatát kezdjük el, amely már régóta és egyre jobban kínoz bennünket. Hát nem több mint érthetetlen, tesszük fel magunkban a kérdést, hogy minden számrendszerben egyaránt képesek voltunk néhány számjellel a számok végtelenbe nyúló sorát felépíteni? Sőt nem arra utalt a nagy Leibniz, hogy ezt akkor is megtehetjük, ha csak a nullát és az egyet ismerjük?

Mostantól kezdve már majdnem kizárólag a gyermekkorunk óta jól ismert indiai-tizesrendszer völgyében fogunk vándorolni. Ezt jóelőre megállapítjuk. De hogy tovább juthassunk, már mostan, utunk legelején felírom valamilyen táblára a következő bűvös jelet: 3! Mit jelent ez a számjegy a felkiáltójellel? Szinte kemény parancsnak látszik. De mit kíván tőlünk? Mit kezdjek egyetlen számmal? Széthasítsam, változtassam, nagyítsam, kicsinyítsem? Szerecsenek országába jutottam s az egyik vadember fejedelmi gesztussal dühös, tagolatlan hangot üvölt felém?

Egy kis türelmet kérek! — válaszolom. Két tervem is volt a bűvös jellel. Egyrészt bepillantást nyujtani a matematikai jelölésmódokba, másrészt elővenni ijesztő problémáink varázskulcsát, hogy már eleve kéznél legyen. A parancs természetesen nem csak 3! lehetett, 1! 5! 25! 273! 102077! éppen annyira lehetséges.

Azonban még mielőtt a felkiáltójellel jelölt parancs alaposabb tárgyalásához fognánk, lássuk előbb általában a matematikai parancsok módját és célját. Anélkül, hogy észrevettük volna, már ilyen parancsok egész sorozatának engedelmeskedtünk, mivel ehhez az engedelmességhez már az elemi iskolában hozzászoktunk. Megállapítottuk, hogy az egyes számjegyek és a belőlük összetett számok bizonyos csoportfogalmak jelei, jelképei, mondhatnók szimbolumai. Beszéltünk továbbá rendszerről és bizonyos csodálatos számolási eljárásról, az algoritmusról. De ez a világ még rejt valamit: éppen a parancsokat! Ezeknek a feljegyzése és általános érthetősége képesít csupán arra, hogy a magukban álló számjegyeket rendszerbe foglaljuk és algoritmussá bővítsük. Mivel a matematikai műveletet operációnak nevezik, operációsparancsról és ennek jeléről, operációs szimbolumról is beszélhetünk. A parancsnak röviden «operátor» is lehetne a neve. Azonban a következendők során megtartjuk egyszerű «parancs» kifejezésünket, de természetesen mindenkor matematikai parancsra, matematikai műveletek elvégzésére utasító felszólításra fogunk gondolni

Amint a katonaságnál eleinte nehezére esik az újoncnak, hogy a kaszárnyaudvaron vagy a gyakorlótéren egyetlen rövid vezényszó alapján bonyolult puskafogások egész sorát, legkevésbbé sem egyszerű menet- és díszalakzatba fejlődést kell pontosan elvégeznie, úgy számunkra is, akik a matematika újoncai vagyunk, a legnagyobb nehézség a «parancs» megértésében és pontos elvégzésében rejlik. Pedig ez a «matematikai fegyelem» rejti a matematikai készség kilenc tizedét.

Elhatároztuk, hogy a legegyszerűbb dolgokon kezdjük.

Először tehát a legegyszerűbb lépéseket és tisztelgési gyakorlatokat is parancsra fogjuk végezni.

A dolgok ilyen szövegezése meglepő lehet és rendíthetetlen ellenfelem megint felesleges bőbeszédűséggel gyanúsít. De nem tudok rajta segíteni. Mert feltett szándékom, hogy az integrál fogalmát éppen olyan érthetővé teszem, mint amilyen az összeadás jele. De ez a terv széleskörű előzetes matematikai tudás feltételezése nélkül csakis az én módszeremmel valósítható meg. Különben is, «parancsokról» már beszéltünk. Az összeadás jele is «parancs». Parancs az integrál jele is. Kissé bonyolultabb mint az összeadás jele, de lényegében nem más.

Ellenfelem befogja a fülét. Nehezményezi, hogy az integrált már most meg akarom magyarázni. Pedig csak a bátorságunkat akarom növelni. Mindenekfölött nem szándékozom az összeadáson lényegesen túlmenni; legalábbis az elvi nehézségek szemszögéből tekintve.

Megállapítjuk tehát, az összeadás parancs. 5+4=9. Mit jelentsen ez? Jelentése: «kedves barátom, végy öt egységet és tegyél hozzá, számlálj hozzá, további négyet». Kis szünet, amíg elkészül. Azután? Azután, az egyenlőség jelét tesszük utána, egy szimbolumot, amelynek pontosan a következő az értelme: «Alázatosan jelentem, a parancsot végrehajtottam». Nos, és? — kérdi a parancsoló. Felelet: «A parancs végrehajtása után a jobboldalon új jelképet látunk, neve: kilenc». «Jól van, végeztem!»

Tekintve, hogy gyengéd lelkeknek a katonai előadásmód valószínűleg nem igen tetszik, hagyjuk el a laktanya udvarát és beszéljünk elvontan. A kivonás is ilyenféle parancs, a szorzás és nemkülönben az osztás is. Mindnyájan tudjuk már, hogy matematikai parancsok végrehajtása nagyon bonyolult lehet. Mint például többjegyű számok osztása tizenhármas számrendszerben. Matematikai parancs az a tény is, hogy mindenkor egy bizonyos számrendszerben kell számolnunk. Természetesen parancs a hatványozás is.

Már megkockáztathatjuk azt az állítást, hogy a matematikai parancs fogalmának szemléltetésére igen jelentős demonstrációs és példaanyaggal rendelkezünk. Térjünk tehát vissza kiinduló pontunkra, ahhoz a jelhez, amely már külső megjelenésében — felkiáltó jel lévén — parancsra emlékeztetett. Milyen vezényszót jelent tehát 3! a matematikában? Akik már értenek a dologhoz azt felelik, hogy három «fakultás»-áról vagy (nem teljesen helyes kifejezést használva) «faktoriális»-áró van szó. Helyes, ne mellőzzük teljesen a szakkifejezéseket. De a magunk kaszárnya-nyelvére is át akarjuk tenni azt a parancsot, amely ebben és csakis ebben a felkiáltójelben rejlik. Általában azt jelenti: «Vedd az egyet, szorozd meg kettővel, az eredményt hárommal, majd néggyel, mindezt öttel és így szorozz tovább mindaddig, míg végül az utolsó szorzó a felkiáltójel előtti szám nem lesz». Ha a felkiáltójel az egy mögött áll, nincsen további tennivalónk. Körülbelül ugyanúgy, ahogyan első hatványra sem kell emelnünk. De ne sokat magyarázgassunk, számítsuk ki inkább nagymerészen néhány számnak eme misztikus «fakultását».

1!=1=	1
2!=1.2=	2
3!=1.2.3=	6
4!=1.2.3.4=	24
5!=1.2.3.4.5=	120
6!=1.2.3.4.5.6=	720
7!=1.2.3.4.5.6.7=	5.040
8!=1.2.3.4.5.6.7.8=	40.320
9!=1.2.3.4.5.6.7.8.9=	362.880
10!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10=	3,628.800
11!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11=	39,916.800
12!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12=	479,001.600
13!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13=	6.227,020.800
14!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14=	87.178,291.200
15!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15=	1,,307.674,368.000
16!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16=	20,,922.789,888.000

Látható, hogy parancsunk, a felkiáltójel hamarosan óriási eredményeket hoz létre. Ártatlanul, szinte alattomosan kezdődik az eredmények sorozata, fokozatosan növekedik, majd egészen hirtelen emelkedik és oly számokat ér el, amelyek messze meghaladják képzeletünket. Száznak a fakultása már gigantikus nagyságú számszörnyeteg. 158 számjeggyel lehet csak leírni.

Nem akarunk részletekbe bocsátkozni, de tisztán szemre is megállapíthatjuk, hogy a fakultás és a hatvány közt némi hasonlatosság van. Lényegbevágó különbség azonban, hogy amíg a hatványnál mindig ugyanazt a számot kell szorzóként alkalmaznunk, addig a fakultás egymás után következő tényezői fokozatosan növekszenek. Hatványozzunk összehasonlításul e helyen egy viszonylag kis számot, ezért említsük meg a sakktábláról szóló régi, ismert feladatot. A mese, erősen rövidítve, így szól: Bagdad egyik kalifája felszólítja matematikusát, hogy kívánjon magának valamit. Ez ártatlan arccal így szól: «Szerénytelen a kérésem, ó nagyhatalmú kalifa. Búza szemeket szeretnék jutalmul kapni. A következőképpen: annyi búzaszemet kapjak, ahány egy sakktábla utolsó mezejére kerül, ha az elsőn egyetlen szem fekszik és minden további mezőn kétszerannyi, mint ahány az előzőn volt». Nevet a kalifa és megigéri a kérés teljesítését. Szentül hiszi, hogy a hóbortos matematikus még egy egész kenyeret sem fog tudni sütni a búzából. De hamarosan eloszlanak kellemes illuziói. Tekintettel arra, hogy a búzaszemek száma $1\times2=2$, $2\times2=4$, $4\times2=8$, $8\times2=16$, $16\times2=32$, $32\times2=64$, $64\times2=128$, $128\times2=256$, vagyis $(1.2.2.2.2.2.2\ldots)$ és így tovább a sakktábla utolsó mezejéig. A sakktáblán 64 mező van, tehát a szemek száma 2^{63}, minthogy az első mezőn csak egyetlen búzaszem volt. Ha kiszámítjuk, a következő számot kapjuk:

9,,,223.372,,036.854,775.808

Azzal szemléltethetjük ezt a számot, hogy a «sakktábla utolsó mezejére» kerülő búzamennyiség megtöltene egy 7·48 kilométer élhosszúságú kockát, ha feltételezzük, hogy a búza szemenkinti átlagos helyszükséglet 45·45 köbmilliméter. A fenti adat valóságosan elvégzett számolásból ered, amikoris 22.000 szem búza ment egy literre.

De kalifánk teverakományra is átszámíttatta ezt a búzatömeget. Ez a kép még szörnyűbb. Ha, a mi mértékrendszerünkben számolva, egy teve 140 kilogrammot bír el és mondjuk «libasorban» 5 méter helyre van szüksége, akkor a búzánkat vívő, 2,,303.539,469.744 tevéből álló karavánunk 11,,517.697,348.720 méter, tehát több mint $11^1/_2$ millárd kilométer hosszú. Ez a karavánhossz azonban durván a Saturnus 8-szoros, vagy a Mars 50-szeres Naptávolságát jelenti.

Még egy harmadik hasonlat: A föld búzatermése az 1927—1931. évek átlagában évi 1236 millió métermázsa volt, tehát szegény kalifánknak 2609 huszadik századbeli, traktorral és műtrágyával előállított búzatermést kellett volna előteremtenie, hogy a matematikusnak tett igéretét megtarthassa.

A búzaszemek száma 19 számjeggyel írható le. Ebből talán sejtheti az olvasó, hogy mit jelent az a 158 jegyű szám, amely a 100! kiszámított értékét megadja.

ÖTÖDIK FEJEZET

Kombinatorika

Ártatlannak látszó, különféle matematikai «parancsok» következtében nagyranövő számok közé vezető kitérésünk után igyekezzünk tapogatódzva oda eljutni, ahol «fakultásokkal» számolunk: tehát arra a területre, ahol a felkiáltójeles számmal jelölt 1.2.3.4.5.6.7.8 stb. szorzat fogalmát használják. Ez a fogalom része a kombinatorika nevű algoritmusnak, tehát a tágabb értelemben vett kombinálási tudománynak. A «kombinálás» szó eléggé közkeletű ahhoz, hogy részletes magyarázgatásával ne kelljen sokat vesződnünk. Összeállítástudománynak, vagy az átrendezés tudományának is nevezhetnők, de azt hiszem nyugodtan megmaradhatunk a kombinatorika elnevezésnél is.

Távol álljon tőlünk ismét a gondolat is, hogy definiciók és megállapítások sorozatát bocsássuk előre, noha, matematikai szempontból ez volna a helyes eljárás. Újoncok, vadócok vagyunk és tapasztalatokat gyüjtünk és azt fedezzük fel, ami érdekel bennünket. Azonban ellenfelünk kétségbeesett oldalpillantásának hatására annyit engedek álláspontomból, hogy ezennel ünnepélyesen kijelentem, hogy azért sohasem fogjuk a matematikát tapasztalati tudománynak tekinteni. A matematika, nagyjában így mondhatnók, teljes egészében agyunk terméke, tapasztalatok nélkül is felépíthető és eredményeit tapasztalat sohasem fogja igazolni vagy megcáfolni. Erre csak logikai lépéseinek helyességét ellenőrző vizsgálat alkalmas. De mindez mellékes és csak a filozófiai érdeklődésű olvasóinknak szól; ezek pedig jegyezzék elő ennél a témánál az «a priori» és «apriorisztikus» szavakat.

Alkalmazzuk tehát, mitsem törődve ellenfelünkkel, az általunk már jól ismert matematikai anyagot. Vessük fel harmadszor is azt a kérdést, hogyan lehetséges tíz jellel a tizes számrendszerben a világ valamennyi számát felírni. Mindenki, aki csak ránéz a következő számokra: 123, 132, 213, 231, 312, 321, ha legalább valamelyes érzéke van a szavak mélyebb értelémhez, azt fogja mondani, hogy az egyes számjegyekből kombináltuk őket. Igaza van! A már tárgyalt rendszerek minden száma kombinatorikus úton származik a számjegyekből. Cserélgetjük a számjegyeket, a jelek váltogatásával állítjuk össze számainkat és így adunk az egyes számoknak más és más jelleget. Ne szóljunk itt a helyértékről. Minket csak az érdekel, hogy a «számképek» külső alakjuk szerint miképpen csoportosíthatók. De ha mindent pontosan átgondolok, rájövök, hogy lényeges eltérések mutatkoznak a csoportosítás módszerében is. Tíznél kevesebb jegyű számok esetén a tíz jelből csak egyet-egyet, kettőt-kettőt és így tovább, legfeljebb kilencet használok fel egy csoporthoz. Ezen felül jogom van ugyanazt a jelet, mint pl. 1111 vagy 1212, 1112 esetén, többször is felhasználni. Tízjegyű számoknál már valamennyi számjegyet is használhatom és megelégedhetem egymásközti cserélgetésükkel is. Például 1234567890 vagy 1347658092. De létezik olyan tízjegyű szám is, amelyben a jegyek ismétlődnek. Ilyen pl. 1.000,000.000 vagy 2.322,234.777. Tíznél több jegyű számok esetén már elkerülhetetlen, hogy egyes jelek ne ismétlődjenek, tekintve, hogy nem használhatok huszonötféle jelet, ha csak tíz létezik.

Darázsfészekbe nyúltunk. És azt hiszem, első lépésünk inkább zavarba hozott mint felvilágosított. Miként foghatjuk meg ezt a végtelenbe terpeszkedő számkáoszt bármilyen algoritmussal is? Mit használ a «parancs», ha az ember feje kóvályog? A «kísérlet» sem segít. Az elemek számának legkisebb növekedése — hamar meggyőződhetünk róla — a lehetőségek olyan számához vezet, hogy éjjel-nappal «kombinálva» is csak naprendszerek életkorával mérhető idő alatt jutnánk a végére. Bűvészinas lett az első «algoritmusunk» (a számrendszer) és úgy látszik, a maga hordta vízben merül el. Tehát mégis «parancsot»!

Igaz kabbalát csak kabbala győzhet le. Varázsszavak, bűvös jelek hatását csak varázsige semlegesítheti, teheti ártalmatlanná.

Kezdjük tehát azzal, hogy a kombinatorikát kombináljuk, az ördögöt Belzebubbal űzzük el. De hogy szakszerűségünket el ne veszítsük, a kombinatorika e kombinatorikáját, ezt a másodfokú kombinatorikát példákba bujtatjuk. De végül majd megvizsgáljuk, kimerítettünk-e minden lehetőséget és felállítjuk a kombinatorika zárt rendszerét is.

HATODIK FEJEZET

Permutációk

A sajnos, oly régmult idők valamely tisztes familiája tizennégy tagú: apa, anya és tizenkét pompás, egészséges gyermek. Békésen ülnek együtt ebédjüknél. Egyszerre egyik fiú hangosan kezd panaszkodni. Azt panaszolja, hogy a levesből mindig csak a maradék jut neki, mert nagyon kedvezőtlen a helye az asztalnál. A család békés természetű, iparkodnak az ellentéteket kölcsönösen kiegyenlíteni. Rövidesen elhatározzák, hogy minden nap más sorrendben fognak asztalhoz ülni, mivelhogy a szobalánytól igazán nem kívánható, hogy minden nap más úton menjen az asztal körül. Beszélgetni kezdenek a történtekről és hamarosan megkísérlik meghatározni azt az időt, amely minden lehetséges sorrendváltozáshoz szükséges. «Néhány napba bizonyára beletelik» véli áz egyik fiú. «Mondjunk inkább néhány hetet», vág közbe az egyik leány fölényesen. Végülis egy évben egyeznek meg. «Képlet van erre» szól most közbe a legidősebb fiú. «Nos, a matematika minek nevezi esetünket?» kérdi évődve az apa. A legidősebb néhány pillanatig habozik. Végül így szól: «Az asztal melletti ülésrendről lévén szó, nem közömbös, hogy Éva ül Alfonz után vagy Alfonz Éva után. Ez két különböző eset. Csoportokat sem alakítunk.

Mindnyájan, mind a tizennégyen, minden alkalommal más sorrendben ülünk. Ugyanaz az eset, mintha tizennégy tárgyat, — tizennégy elemet mond a matematika — akarnék egymásután minden lehetséges sorrendben elhelyezni. A sorrend ilyen változtatását permutációnak nevezik. Számukat az elemek számának fakultása adja meg. Esetünkben tizennégy és utána felkiáltójel. Tizennégy fakultása!» Az apa elégedetten bólint. A leves és a hús közt papírt és ceruzát hoznak és az idősebb gyerekek vérbeborult fejjel számolnak. Mennyi is lehet az a bűvös 14! Az eredmény ijesztő! Ennyi: 87.178,291.200. Mihez fogjanak e sok milliárd lehetőséggel? Mennyi idő kell hozzá? 365 napja van az évnek, osszuk el tehát 365-tel. Újabb számolás. Alfonz, a gyorsszámoló már mondja is: «238,844.633 az eredmény!» «Tudod mit jelent ez» kiált fel az egyik fiú, a család filozófusa, egészen elszörnyedve. «Azt jelenti, hogy közel 239 millió évre van szükségünk, hogy a lehetőségeket kimerítsük. Több mint 119 millió évre, ha naponta kétszer, s majd 60 millióra ha reggelinél, ebédnél, uzsonnánál és vacsoránál is változtatunk az ülésrenden». «És én meghalok, mielőtt még csak egyszer is jó levest kapnék» panaszkodik a kicsi.

Példánkon egyformán látszik az elcserélési lehetőségek sokfélesége, a «fakultás» parancs démoni hatása és a kombinatorikának egyik, első lehetséges fajtája. Ezzel ismét van «anyagunk, rendszeres feldolgozásra».

De még előbb az olvasó megnyugtatására: tisztes familiánk megriad a kombinatorika által szolgáltatott eredménytől s a legifjabb panaszának megszüntetésére lényegesen egyszerűbb megoldásra jutott. A szobalány parancsot kapott, hogy ezentúl mindig ugyanannál a *szék*nél kell a kínálást kezdenie, tekintet nélkül arra, ki ül ott. A család pedig, naponta egy székkel «odábbült», még pedig az óramutató járása irányában. Egymásközt, szomszédság tekintetében, az ülésrend változatlan maradt. De az asztalhoz viszonyítva napról napra változott. Ezáltal mindenki, minden két hétben egyszer, elsőnek kapott levest.

Matematikai szempontból itt is tizennégy különböző permutációval van dolgunk. Írjunk fel közülük néhányat:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (első nap)
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1 (második nap)
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 2 (harmadik nap)
és így tovább
14, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 (tizennegyedik nap)
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (tizenötödik nap)

De az így felírt 14 esetet (az első és a tizenötödik ugyanis azonos) más elv, az úgynevezett ciklus felcserélés elve alapján mesterségesen választottuk ki a permutációk lehetséges 87.178,291.200 esete közül, azáltal, hogy mellékesen az egymásközti sorrend változatlanságát is kikötöttük.

Fenti példánkban a cserélendő ülőhelyeket számokkal jelöltük meg. Ábécé rendben vett betűkkel is lehetne őket jelölni. Természetesen ilyen számozás egyáltalán nem jelent nagyság szerinti rangsorolást, amint nem jelent semmi ilyest a színházi széksor üléseinek számozása sem. Azokat a dolgokat, amelyeket cserélgetnünk kell, színekkel, nevekkel, bármiféle ismertető jellel is megjelölhetném. Éppen ezért nevezik eme teljesen egyenértékű dolgok megkülönböztető jeleit indexeknek. Számok vagy betűk ilyen, csupán sorrendet jelölő felhasználási módja különösen Leibniz működése óta játszik mindinkább jelentős szerepet a matematikában. Most megkíséreljük, hogy megmagyarázzunk magunknak valamit, ami igazán nehezen érhető. Leghatározottabban állítottuk, hogy dolgaink egyenértékűek, a számok és indexek semmiesetre sem jelentenek nagyságot. Mégis, egészen nyugodtan beszélnek arról, hogy a kettessel jelölt dolog «magasabb» vagy «magasabb rendű», mint az egyessel jelölt. Helyesen azt kellene mondani: a 2. jelű magasabb indexű, mint az 1. jelű. Egyébként az 1. jelű és a 2. jelű teljesen egyformák.[1]

Ismét valami kabbalaszerű dologról van szó. Még pedig a sorrend kabbalájáról, illetve a mellérendelés kabbalájáról. Egyszerűen nem tudnék beszélni, nem tudnék írni, ha nem szabadna az indexeket valamilyen rendszer alapján nagyság

[1] Elképzelhető ugyan, hogy a dolgok nagysága különböző, csupán nem törődöm vele. Engem csak az érdekel, hogy valamilyen dolog egység jellegű.

szerint rendeznem. Az ábécé korrektebb és talán kevésbbé kétértelmű, mint a számindexekkel való jelölés, hisz az utóbbiak akaratlanul is magukkal hurcolják mérték jelenésüket. A *d* betű magasabb helyen áll az ábécében, mint a *b*. Így a *d* jelű dolog rendje kombinációs szempontból magasabb, mint a *b* jelűé.[1]

A «helyérték» ilyenértelmű meghatározásából magától adódik a kombinatorikában nélkülözhetetlen és alapvető fontosságú «helyes sorrend» fogalma. Helyes sorrend például, ha következőképpen képezek permutációkat:

abc, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, vagy ugyanez számokkal 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Ha tehát ily módon haladunk, vagyis a «legalacsonyabb» elem addig marad a helyén, ameddig csak egyáltalán lehetséges, akkor «helyes sorrendben» emelkedünk a «legalacsonyabb» permutációtól a «legmagasabbhoz», egyetlen permutáció sem maradhat ki és fáradozásaink jutalmául végül az első permutáció fordítottját kapjuk. Míg az első permutációban magasabb elem sohasem előzött meg alacsonyabbat, addig az utolsóban alacsonyabb elem mindenkor csak magasabb után következhetik. Nem akarok zavart okozni, de elhallgatni sem tudom, hogy a permutációkat valódi számoknak olvasva a legalacsonyabb permutáció adja a legkisebb számot, a legmagasabb a legnagyobbat. (123........321). Közben vannak, helyes sorrendben, mindazok, amelyeket csupán az 1, 2, 3 számjegyekkel le lehet írni.

De a legutóbbi összefüggést feltétlenül el kell felejtenünk és visszatérünk méretmentes indexeinkhez. 123 ugyanannyit jelent tehát számunkra, mint 321 vagy 231, tehát a választott három index egy-egy permutációját.

Most azt a problémát is meg fogjuk oldani, hogy titokzatos «parancsunk», «fakultásunk», a 3 a felkiáltójellel miért adja meg olyan pontosan a lehetséges permutációk számát. Először «a rendszer épségben tartása kedvéért» egy logikai értelmetlenséget fogunk állítani. Hasonlóval már a ha vá-

[1] Az ilyen sorrendet «lexikográfikus sorrendnek» is szokták nevezni. (Olyan mint egy lexikon!)

nyozásnál, még pedig a nulladik és első hatványnál találkoztunk. Azt akarjuk tudni, mekkora a permutációk száma, ha csak egy elemünk van. Pontosabban: «addig cserélgess egy elemet, helyes sorrendben, amíg csak valamennyi lehetőséget ki nem merítetted».

Kellő megfontolás után az értelmetlenségnek matematikai fogalmazást adunk és ezzel újabb, talán mégnagyobb értelmetlenséggel helyettesítjük. Büszkén felírjuk: a permutációk száma 1! (Egy fakultása.) Vagy szavakban: úgy kapjuk meg az eredményt, ha egyet, eggyel kezdve mindaddig szorozzuk az egymásután következő számokkal, míg végre utolsó szorzóként az egyhez jutunk! Nem lehet kétséges, hogy ily módon mást, mint egyet, nem kaphatunk eredményül.

Logikai kitérésünk után számoljunk óvatosan tovább. Mi történik két elem esetén? Írjuk fel helyes sorrendben:

$$a\,b \qquad b\,a$$

Kétségtelen: valamennyi permutációt felírtuk, a legalacsonyabbtól a legmagasabbig. Most pedig beretva éles okoskodással haladjunk, hogy megtaláljuk az összefüggést az állítás formájában már ismert képlettel. Mit is tettünk tulajdonképpen? Az a elemet addig tartottuk helyén, ameddig csak lehetett és közben a b-t permutáltuk. Mihelyt készen voltunk, a b került első helyre, és az a-t permutáltuk. Tehát két esetben kellett mindkétszer egy elemet permutálnunk. Egy elemnek azonban csak egy permutációja van, két elemnek ily módon 1.2, vagyis írásmódunk szerint 2!, azaz kettő fakultása, ami kettővel egyenlő.

Három elemnél:

$$\begin{array}{ccc} a\,b\,c & b\,a\,c & c\,a\,b \\ a\,c\,b & b\,c\,a & c\,b\,a \end{array}$$

Ha újból alkalmazzuk módszerünket, látjuk, hogy háromszor tartottuk a rendelkezésünkre álló mindenkori első elemet lehető legtovább helyén és közben két másikat permutáltunk. Mivelhogy két elem permutációinak a száma 1.2, ezt most hárommal kell még megszoroznunk. Tehát három elemnél a permutációk száma 1.2.3, azaz 3!, három fakultása számszerűen 6. Négy elem esetén a helyzet a következő:

a b c d	*b a c d*	*c a b d*	*d a b c*
a b d c	*b a d c*	*c a d b*	*d a c b*
a c b d	*b c a d*	*c b a d*	*d b a c*
a c d b	*b c d a*	*c b d a*	*d b c a*
a d b c	*b d a c*	*c d a b*	*d c a b*
a d c b	*b d c a*	*c d b a*	*d c b a*

Nem ismételjük most már az egész eljárást. Röviden: a mindenkori első elemet addig tartottuk helyén, amíg a többi három permutálásával elkészültünk. De mert négy elemem van, vagyis négy foglalhatja el az első helyet, a három elem permutációinak a számát néggyel meg kell szoroznom. 4-szer 1.2.3, vagyis 1.2.3.4 tehát 4!, négy fakultása, ez pedig 24.

Így továbbhaladva látjuk, hogy különböző indexű elemekből alkotott permutációk számát megadja az elemek száma felkiáltójellel. Tehát 10 elemnek 10!, 75 elemnek 75!, 3124 elemnek 3124! permutációja lehetséges és így tovább a végtelenségig.

Megeshetik, hogy nemcsak különböző elemek vagy indexek szerepelnek, hanem néhány egyenlő is van köztük. Durván: két almát, három barackot és egy szem cseresznyét cserélgessek, hogy e gyümölcsök összes lehetséges csoportosítása keletkezzék, de természetesen arra nem kell ügyelnem, hogy mikor veszem az 1. számú és mikor a 2. számú barackot. Ez azt jelenti, hogy a 2. számú alma, 1. számú alma, 2. számú barack, cseresznye, 3. számú barack, 1. számú barack sorrend és például 1. számú alma, 2. számú alma, 1. számú barack, cseresznye, 3. számú barack, 2. számú barack közt semmi különbség sincs. Egyszerűség kedvéért jelöljük az almákat *a* betűvel, a barackokat *b*-vel, a cseresznyét *c*-vel, akkor «helyes sorrendben» az első permutáció az

a a b b b c, és az utolsó *c b b b a a*.

Túlságosan sok időt venne igénybe, hogy módszerünkkel ilyen, «ismétléses permutációnak» nevezett esetekre a permutációk számát levezessük. Kérem tehát, higyjék el nekem úgy is a képletet, ha csak egyszerűen felírom. Esetünkben így hangzik: Az összes permutáció száma, tehát 6!, elosztandó az ismétlődő elemek fakultásának szorzatával. 6! tehát 2!, 3! és 1! szorzatával osztandó. Vagyis, ha ezt tört alakjában írjuk:

$$\frac{6!}{2!\,3!\,1!}=\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2\times1.2.3\times1}=60.$$

Gyümölcseinket tehát hatvan különböző csoportosításban helyezhetem el. Élénkebb matematikai fantáziájú olvasóim számára megjegyzem, hogy ez utóbbi képlet az általánosabb. Mert minden permutációnál feltehetem a kérdést, hogy hányszor szerepelnek az egyes elemek. És mondjuk öt különböző elem permutálásánál bízvást írhatom: a permutációk száma $=\frac{1.2.3.4.5}{1!1!1!1!1!}$ minthogy minden elem csak egyszer szerepel. Látjuk, az eredmény helyes. Első képletünk ezek szerint az általánosabb, másodiknak csak különleges (speciális) esete:

Permutációkra vonatkozó vizsgálataink befejezéseül még egy példa. Hány permutációja van az *a b b b b c* elemeknek? Természetesen.

$$\frac{6!}{1!4!1!}=\frac{1.2.3.4.5.6}{1\times1.2.3.4\times1}=30.$$

Jószemű olvasó bizonyára észreveszi, hogy ha a képletben eltekintek a felkiáltójelektől, akkor a törtvonal alatt és felett a számok összege szükségképpen azonos; ez természetes is, hiszen először valamennyi elem számának fakultását írtam számlálónak, majd pedig az egyes alcsoportok elemszámának fakultását nevezőnek.

Sok mindent lehetne még a permutációkról elmondani. A problémáknak még egész sorát tárgyalhatnók. De tekintve, hogy a permutáció általános matematikai szempontból éppen olyan kevéssé tekinthető a kombinációs módok legfontosabb fajtájának, mint ahogy nem az a mi különleges szempontjainkból sem, végezetül még csak megállapítjuk, hogy a permutációkban mindenkor *valamennyi* rendelkezésre álló elem szerepel, ezeknek az elemeknek sorrendjét változtatjuk és ez a sorrend mértékadó annak elbírálásánál, hogy két permutáció azonos-e vagy sem. Ha a sorrendtől eltekintenék és csak az összetételt venném figyelembe, akkor egy csoporton belül csak egy eset volna lehetséges. A permutálás tehát nem egyéb, mint elemek sorrendjének változtatása, elemek cserélgetése.

HETEDIK FEJEZET

Szorosabb értelemben vett kombinációk

Rögtön tapasztalni fogjuk, hogy az előbbi megállapításunk nem volt hiábavaló. A kombinációk második fajtájával fogunk megismerkedni, megint nem elméleti úton, hanem képszerűen. Térjünk tehát vissza tizennégytagú családunk baráti körébe. Amint belépünk, éppen ebéd után vannak és — ünnepnap lévén — valami csendes szórakozást keresnek. Amidőn kártyázást javasol valaki, eszükbe jut a megbabonázott asztalmelletti ülésrend és felvetődik az a kérdés is, hogy ugyan mennyi ideig tartana, amíg mindennapos tarokkpartijuk minden változata kimerülne. Persze nem a játszmák különféleségét tekintve, hanem az egy asztalnál ülő játékosok csoportosulásának módját. Egy játékhoz négy személy szükséges. Ugyanaz a négy játékos nem játszhat két napon együtt. És mind a tizennégyen tudnak játszani.

Most már mindenki fél és nem mer jósolgatni. Hátha megint évmilliók kellenek? Bizonyos, hogy jobb, ha a kabbalára, a kombinatorika algoritmusára bízzuk magunkat, mint ha vaktában találgatunk. A matematikus fiú rögtön el is mondja, hogy ez esetben szűkebb értelemben vett kombinációkról van szó. Tizennégy személy a matematikában tizennégy dolgot, elemet jelent. Az ebből alakítandó négyes csoportok neve quaterno, nevét mindenki ismeri a tombolából vagy a lutriból. Itten a quaternoknál már csak az összetétel a fontos, nem pedig a sorrend, vagy a csoporton belüli helycsere. Mert a parti ugyanaz marad, ha a résztvevőket apa, anya, Éva, Alfonz vagy apa, Alfonz, anya, Éva akárpedig apa, Éva, Alfonz, anya stb. sorrendben említem is. A számítás nagyon gyors, mert van egy igen egyszerű varázsjel, az úgynevezett «binomiális együttható». Mellesleg megjegye ve: nevének semmi köze mostani példánkhoz. Írjuk egyszerűen felülre az elemek számát, a csoport nagyságát alulra, tegyük két zárójel közé, olvassuk így: «tizennégy a négy fölött», vagy «tizennégy alatta négy» és számítsuk ki a parancsot annak rendje és módja szerint. Az eredmény $\binom{14}{4} = \frac{14.13.12.11}{1.2.3.4.}$, kiszámítva 1001, így tehát a tarokkpartik 1001 nap alatt, nem is egész három év alatt véget érnek.

Mindenki nekibátorodik most, mert elképzelhető szám az eredmény és egyik lány újabb kérdést vet fel. «Érdekes véletlen» — mondja — «hogy hat fiú és hat lány van tizenkettőnk között. Érdekelne, hogy hány különböző táncospárt lehet belőlünk alakítani. Ennek is kombinációnak kell lennie. Hiszen ismét tizenkét dologról van szó, ahogy már ezt olyan szépen mondani szokás. Ebből kettes csoportok alakulnak. Végül is mindegy, hogy Éva táncol Alfonzzal, vagy hogy Alfonz táncol Évával». «Igazad van, Gréte» — feleli a matematikus. — «Kombinációk, még pedig ambók közül kiválasztott esetek. Ambó a neve a kettes csoportoknak. Mint a lutri ambója, ami szintén nem egyéb, mint két számból alkotott csoport. Mellesleg feladatod, nem elegánsan ugyan, de kombinatorika nélkül is elintézhető. Mindegyik lány egymásután hat fiúval táncol. Tehát hatszor. Tehát harminchat különböző pár alakulhat». «Mire való akkor a bűvös képleted?» kérdi Éva. «Ebben az esetben egyszerűen számolhattunk. De megmutathatom neked, hogy a megvetett varázsképlettel lesz csak igazán áttekinthető számításunk. Mert: tizenkét elem ambóinak a száma $\binom{12}{2}$. De köztük két-két fivérből és két-két nővérből alakult csoportok is vannak. Tehát olyanok, amelyeket nem akarunk tekintetbe venni. További feltételünk ugyanis, hogy az igazi táncospárok számát keressük. Az egynemű párok számát tehát le kell vonnunk. Az egynemű párok ismét kombinációs esetek. Most azonban az elemek száma 6 a fiúknál és ugyancsak 6 a lányoknál. Tehát mind a fiúkból, mind a lányokból alakuló, egynemű, ambók száma $\binom{6}{2}$. Ezzel készen is van a számításunk. Együtt felírva:

$$\binom{12}{2}-\binom{6}{2}-\binom{6}{2}=\binom{12}{2}-2.\binom{6}{2}=\frac{12.11}{1.2}-2.\frac{6.5}{1.2}=66-30=36,$$

tehát pontosan a várt eredményt kapjuk.

De még mielőtt a Leonhard Euler és követői által a matematikába bevezetett írásmódot, a $\binom{14}{4}$, $\binom{12}{2}$ stb. «parancsot» közelebbről szemügyre vennők, vegyük elő, miként a permutációknál tettük, «indexeinket» és nézzük meg kombinációinkat helyes sorrendben felírva. Telhetetlenek vagyunk és azt állítjuk, hogy egyes csoportok, «uniók» is léteznek. Ezek maguk az elemek. *a b c d e f* elemekből tehát hat «unió» képezhető. Ezzel ennek a kombinációs lehetőségnek vége is van. Kettős csoportok neve ambó, hármas csoport ternó, négyes csoport quaternó, ötös csoport quinternó, hatos csoport sexternó, hetes csoport septernó, nyolcas octernó, ennél nagyobb csoportok neve már nemigen használatos. Egyszerűbb is mondjuk kilences, huszas vagy akár háromszáztizenötös csoportról beszélni.

Alakítsunk tehát az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemekből először ternókat (hármas csoportokat).

1 2 3	1 3 5	2 3 4	2 5 6
1 2 4	1 3 6	2 3 5	3 4 5
1 2 5	1 4 5	2 3 6	3 4 6
1 2 6	1 4 6	2 4 5	3 5 6
1 3 4	1 5 6	2 4 6	4 5 6

Arról vesszük észre, hogy készen vagyunk, hogy az utolsó csoportban a rendelkezésre álló elemek közül a legutolsók szerepelnek, helyes sorrendben, mégpedig annyi, amennyi a csoportot alkotó elemek száma. Esetünkben tehát a három legutolsó elem: 4, 5 és 6. Ha kilenc elemből, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, alakítanánk ambókat, akkor az első 12, az utolsó 89 lenne. Látjuk, hogy kombinációknál «magasabb» elem *sohasem* állhat «alacsonyabb» előtt. 42 mint kombinációs ambó nem lehetséges. Mivelhogy a 24 csoport előzőleg már feltétlenül szerepelt[1] és semmilyen összetétel sem fordulhat elő ismételten.

[1] Mindez természetesen csak akkor érvényes, ha az ambók felírásánál rendszeresen járunk el. Rendszertelen felírásnál, ambók esetén csak arra kell ügyelnünk, hogy pl. 42 még 24 alakjában se ismétlődjék.

Gyakorlásul írjuk még fel az a, b, c, d, e, f, g elemek négyes csoportjait.

abcd	*acde*	*adef*	*aefg*	*bcde*	*bdef*	*befg*	*cdef*	*cefg*	*defg*
abce	*acdf*	*adeg*		*bcdf*	*bdeg*		*cdeg*		
abcf	*acdg*	*adfg*		*bcdg*	*bdfg*		*cdfg*		
abcg	*acef*			*bcef*					
abde	*aceg*			*bceg*					
abdf	*acfg*			*bcfg*					
abdg									
abef									
abeg									
abfg									

Könnyen megfigyelhető, hogy miképpen kell eljárni. Felírjuk az első négy elemet, az első quaternót s a mindenkori utolsó elemet, amíg csak lehetséges, a következő magasabbal pótoljuk. Ha már nem lehet, az utolsó előttit növeljük és így tovább.

A lehetséges kombinációk számát a következő meggondolás adja. Legyen 6 elemünk és képezzünk belőlük kettes csoportokat. A hat elem mindegyikét a fennmaradó (6 — 1) elemmel, tehát 5 elemmel kell kapcsolnom. Ezek szerint $6.5 = 30$ ambóm volna. Ez már sok. Eljárásunkkal ugyanis minden csoportot kétszer kapunk meg, egyszer «*ab*», másodszor pedig «*ba*» alakban, minthogy *minden* elemet kapcsolok a többivel. A kombinációk száma helyesen tehát feleannyi, $\frac{6.(6-1)}{1.2}$ vagy $\binom{6}{2}$, mint hogy e «parancs» jelentése $\frac{6.5}{1.2}$. Ha ternókat akarok, akkor minden meglevő ambómhoz a benne még nem szereplő (6 — 2) elem egyikét kell hozzáfűznöm. A ternók száma tehát $\frac{6.(6-1)}{1.2} \cdot \frac{(6-2)}{3}$, minthogy az itt is fellépő akaratlan ismétlődéseket hárommal való osztással kell megszüntetni.

Ily módon mehetünk tovább is. De minthogy a számítási mód már világosan áll előttünk, írjuk fel azonnal a 10, elemből képezhető quinternók számát. A quinternók száma

$$\frac{10.(10-1).(10-2).(10-3).(10-4)}{1.2.3.4.5} = \binom{10}{5} = 252.$$

De nézzük meg most már közelebbről ezt a varázskulcsot, legyen az $\binom{14}{\ }$ vagy $\binom{10}{5}$ Bizonyos csupán az, hogy ez is «parancs». Viszont ennek a kombinációs operátornak, binomiális együtthatónak igen különös tulajdonságai vannak. Ennek a parancsnak ugyanis többféleképpen lehet engedelmeskedni. Elsősorban a már ismert módon. Mindenek előtt meg kell jegyeznünk, hogy a felső szám csak nagyobb lehet, mint az alsó, vagy legalábbis ugyanakkora. Ezt a feltételt szem előtt tartva így szól a parancs: «Változtasd a varázsjelet közönséges törtté, alulra írd az alsó szám fakultását, felülre írj a felső számmal kezdődő és mindig eggyel-eggyel csökkenő annyi tényezőt, ahányat az alsó szám mond». Kissé bonyolultnak látszik. Írjunk fel tehát gyorsan még három példát.

$$\binom{17}{\ } = \frac{17.16.15.14.13.12}{1.2.3.4.5.6};$$

$$\binom{8}{7} = \frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7}; \quad \binom{19}{2} = \frac{19.18}{1.2}$$

Röviden: alul egynél kezdem és az alsó számig megyek. Fölül ugyanannyi tényezőt írok fel a felső számtól vissza.

Ugyanezt az eredményt kapom másképpen is. $\binom{17}{6}$ így is írható $\frac{17!}{6!\,(17-6)!}$ Ez a következőt jelentené:

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17}{1.2.3.4.5.6\times 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$$

Ha csak egészen keveset is tud valaki számolni, látja, hogy 11! tényezővel rövidíteni lehet és azután csak az marad meg, amit az első módon felírtunk. Csak a felső tényezőket (12-től 17-ig) most növekvő sorrendben írtuk.

Kiderül azonban még egy dolog, amit áttekinthető példával világítunk meg. $\binom{8}{3}$ a második módon felírva $\frac{8!}{3!(8-3)!}$ vagyis $\frac{8!}{3!5!}$, vagypedig kiírva $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3\times 1.2.3.4.5}$ és rajtam múlik, hogy az 1.2.3, vagypedig az 1.2.3.4.5 tényezőkkel rövidítek-e. Mellékesen megjegyezve, nem csak a 3! és 5! tesz rövidítést lehetővé, sőt az e két rövidítés bármelyike után még más számokkal is lehetséges, de tegyük fel, hogy csak 3! és 5! egyikével szabad rövidítenem. Ha az 5!-t választom, az eredmény $\frac{6.7.8}{1.2.3}$, a számok sorrendjét fent megfordítva $\frac{8.7.6}{1.2.3}$, vagyis nem egyéb, mint a $\binom{8}{3}$-nek első írásmódja, amint már az első példánál megállapítottuk. Ha azonban a 3! tényezővel rövidítek, meglepetéssel látom, hogy mást kaptam. Mégpedig

$$\frac{4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5} \text{ vagyis } \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}.$$

Mit jelent ez? Itt valami nincs rendben. Hisz ez $\binom{8}{5}$, az első írásmód szerint kiszámítva. Nem lehet sokat okoskodni. $\binom{8}{3}$ tehát ugyanannyi, mint $\binom{8}{5}$? Lehetséges ilyesmi? Végre is, kiszámíthatjuk és igazolhatjuk.

$$\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56 \text{ és } \binom{8}{5} = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56.$$

Tehát nem csalódtunk. Kombinatorikai értelme ennek az, hogy 8 elemből ugyanannyi ternó, mint quinternó képezhető. Ugyanannyi ambó mint sexternó. Mert $\binom{8}{2}$ feltétlenül egyenlő $\binom{8}{6}$-tel, mert a második értelmezési mód szerint

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2!)} = \frac{8!}{2!\,6!} \quad \text{és} \quad \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8!}{6!\,2!}$$

tehát az eredmény mindkét esetben ugyanaz.

Ha most ilyen operátorok teljes sorozatát felírjuk, például ezeke $\binom{9}{1}\binom{9}{2}\binom{9}{3}\binom{9}{4}\binom{9}{5}\binom{9}{6}\binom{9}{7}\binom{9}{8}$ akkor már eleve tudjuk, hogy az első az utolsóval, a második az utolsóelőttivel, a harmadik az azelőttivel, a negyedik pedig a mégazelőttivel azonos számértéket jelent.

Mert mindig érvényes a következő összefüggés:

$$\binom{\text{Elemek száma}}{\text{csoportlétszám}} = \binom{\text{Elemek száma}}{\text{elemek száma kivonva belőle a csoportlétszám}}$$

Fenti sorozatot kiszámítva az eredmény: 9 egyes, 36 kettes, 84 hármas, 126 négyes, 126 ötös, 84 hatos, 36 hetes és 9 nyolcas csoport. Amint már előre megmondottuk. Ez a különös szimmetria, ez a szabályszerűség majd még foglalkoztat bennünket az úgynevezett «binomiális tétel» tárgyalásánál, mert kéttagú összegek hatványozására szolgáló, varázserejű algoritmusra fog megtanítani.

Most már a szűkebb értelemben vett kombinálást is megtanultuk. Még csak azt tesszük hozzá, hogy ama számot, amely megmutatja, hogy ambókat, ternókat stb. kell-e alkotnunk, a kombináció osztályának nevezzük. $\binom{5}{3}$ tehát ezt jelenti: «Számítsd ki egyik módszerrel e varázskulcs értékét és megkapod az öt elemből képezhető harmadosztályú kombinációk számát». Egyúttal megkapjuk az öt elemből képezhető másodosztályú kombinációk számát is, minthogy $\binom{5}{3}$ ugyanannyi mint $\binom{5}{5-3}$, tehát $\binom{5}{2}$-tel is azonos.

Miként a permutációknál, úgy itt is fennáll az úgynevezett «ismétlések» lehetősége. De kombinációknál ez már valami mást jelent. Helyesebben azt mondhatjuk, hogy permutációknál csak egyforma indexű, egyforma nevű dolgok többszöri előfordulásáról van szó (több alma, körte, *a* vagy *b* betű, több 1 vagy 3). Ismétléses kombinációknál viszont engedélyt kapok arra, hogy bármelyik elemet annyiszor használhassam, ahányszor csak akarom. Jogom van tehát 5 elemből, *a b c d e*, ilyen ternókat is képezni:

aaa, abb, bbc, dee, ddd

és így tovább.

Az ilyen kombinációs lehetőségek számát megadó képlet levezetése nehéz és bonyolult. Így csupán az eredményt említjük. A képlet a következő:

$$\binom{\text{Elemek száma plusz osztályszám minusz egy}}{\text{osztályszám.}}$$
alatta

Ha tehát 8 elemből kellene korlátlan ismétlést megengedve negyedosztályú kombinációkat alkotnunk, akkor ezek száma $\binom{8+4-1}{4} = \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} = 330$, ez természetesen lényegesen több, mint a nyolc elemből ismétlés nélkül képezhető kombinációké, amelyekből csak $\binom{8}{4} = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$ létezik.

A szűkebb értelemben vett kombinációkra vonatkozó tanulmányaink befejezéséül adjunk ki, mint már annyiszor megtettük, egy értelmetlen parancsot a «rendszer fenntartása és kibővítése» érdekében. Nekünk, matematikai ujoncoknak fegyelmünk érdekében hozzá kell szoknunk ilyen parancsokhoz. Katonaságnál, tudjuk, nincs «lehetetlen» és a parancs, parancs. Azt akarjuk megtudni, hogy milyen értéket tulajdonítsunk valamely számnak a nulla «fölött». Természetesen nem csak úgy egyszerűen «fölött». A «fölött» szónak kombinációs értelmét tekintjük. Vagyis mennyi lehet, mondjuk $\binom{9}{0}$ Így röviden csak bolondoknak, vagy spiritisztáknak való ez a kérdés. A kívánság nem más, mint hogy (az első írásmód szerint) szorozzak össze felül kilenccel kezdve nulla darab, egymás után következő, eggyel-eggyel kisebbedő tényezőt. Pihenésként pedig írjam alája a 0! értékét. Tehát számokat, egytől kezdve, mindaddig, amíg végül a nullához nem jutottam. Ez utóbbi legjobban ama követeléshez hasonlít, hogy addig másszak a hegyen felfelé, amíg csak az alant elterülő völgybe nem jutottam. Az ördögöt megint Belzebubbal űzzük el. Ellen-kabbalát alkalmazunk. Van még egy bolondoknak való feladat, de ez már ártalmatlanabb. Még pedig valamely szám önmaga fölött. Esetünkben tehát $\binom{9}{9}$. Ez legalább kiszámítható, így $\frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$ és eredménye természetesen 1. Számítás nélkül is természetés, hogy az összes elemből csak egy kombináció képezhető, vagyis, ha az osztály száma az elemek számával egyenlő. Most «fenntartom a rendszert». Már előbb láttuk, hogy ha az egy és ugyanazon elemszámra vonatkozó binomiális együtthatókat (kombinációs parancsokat) az egyesével növekvő osztályszámok szerint folytatólagosan rendezve sorban felírom, akkor a végektől egyenlő távol levő két-két binomiális együttható értéke ugyanaz. Mivelpedig e «parancsok» általános tulajdonságai következtében $\binom{9}{1}$ és $\binom{9}{8}$ egymással egyenlők voltak, már csak azt kell vizsgálnunk, hogy hol van $\binom{9}{0}$ és $\binom{9}{9}$ helye. Bizonyos, hogy sorunkban $\binom{9}{1}$ előtt, illetve $\binom{9}{8}$ után van a helyük. Még pedig közvetlenül mellettük. De mivel már tudjuk, hogy $\binom{9}{9}$ egyenlő 1, akkor $\binom{9}{0}$ értéke, a sor másik végének megfelelő helyén sem lehet más. Ezekszerint $\binom{9}{0}$ értékre eggyel egyenlő. Algoritmusunk tehát olyan szakadékok fölött is átvitt, amelyeknek mélyébe emberi szem már nem hatol be. Az egyik oldalon el nem képzelhető dolgok reménytelen bozótjába léptünk s a másik oldalon hirtelen egyszerű, világos, kerek, könnyen felfogható eredményre bukkantunk. Mindezt csak azért jegyeztük meg, mert jellemző vonása minden működésre képes algoritmus lényegének. Ha e fogalmat egyszer igazán, teljesen megértjük, akkor — ismétlem — az egész végtelenanalizist, a rettegett differenciál- és integrálszámítást gyerekjátéknak, mégpedig rendkívül tarka, hallatlanul mulatságos gyerekjátéknak fogjuk találni.

De más oldalról is ki kell próbálnunk, hogy a $\binom{9}{0} = 1$ egyenlőséggel kapcsolatos erőszakoskodásunk nem veti-e szét egész rendszerünket. Erre parancsunk másik tulajdonságát fogjuk felhasználni, mégpedig azt, hogy $\binom{9}{0}$ és $\binom{9}{9-0}$ is szükségképpen azonos, aminthogy például $\binom{9}{4}$ és $\binom{9}{9-4}$, azaz $\binom{9}{5}$ is mindenkor egyenlő. $\binom{9}{9}$ és $\binom{9}{9-9}$ egyenlőségét már az első rájuk vetett pillantás is elárulja.

Végezetül megemlítjük röviden azt is, hogy az egyugyanazon elemszámra vonatkozó binomiális együtthatók teljes sorának van még egy különleges tulajdonsága. Összege ugyanis mindenkor kettő, felemelve az elemek számával megadott hatványra, esetünkben tehát 2^9, azaz 512. Ha az elemek sorozatát összegezésre csakugyan egymás mellé írjuk, akkor az eredmény:

$$1+9+36+84+126+126+84+36+9+1=512.$$

Láthatjuk, a $\binom{9}{0}$ és a $\binom{9}{9}$ szárnytisztekként már közreműködnek. Mivel pedig — ismét egy megjegyzés — az osztályszám 0-tól terjed az elemek számáig, páratlan elemszám esetén a sor tagjainak a száma páros és viszont. Tíz osztályunk volt összesen, mégpedig a 0., 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9. osztály. A parancsok száma ezekszerint szintén tíz, ugyanígy a sor tagjainak a száma. Ha az elemek száma 4, akkor a sornak $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$, öt tagja van, kiszámítva 1, 4, 6, 4, 1. Összege megint a 2 megfelelő hatványa, mégpedig $2^4=16$. Továbbá a sor végétől egyforma távol levő-együtthatók ismét egyenlők. Csak a 6 a középen, a $\binom{4}{2}$ játszik mintegy kettős szerepet; kétszer számító tagnak felel meg. De ez már a páros szám természetéből következik. Abban a sorban, amelyben 10 szerepel a 0—10 osztályszámok fölött, egyszer feltétlenül előfordul a «10 a $\frac{10}{2}$ fölött», vagyis a $\binom{10}{5}$ tag. Ez viszont a $\binom{10}{10-5}$ taggal egyenlő, ami ismét $\binom{10}{5}$. Ha az elemek száma páratlan, akkor ilyen Janus-fejű tag nem létezhet, mert például $\binom{11}{5}$ annyi ugyan mint $\binom{11}{11-5}=\binom{11}{6}$, de $\binom{11}{6}=\binom{11}{11-6}=\binom{11}{5}$ már ismét visszalendül a másik irányba. «11 a $\frac{11}{2}$ fölött» egyszerűen nem létezik, mert $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ nem egészszám, ezért mint kombinációs osztályszám nem jöhet tekintetbe.

NYOLCADIK FEJEZET

Variációk

A kombinatorikát kombinálgató kutatásaink során először azt az esetet vizsgáltuk meg, melynél mindenkor fel kellett használnunk valamennyi elemet. Cserélgettünk, átrendeztük őket, sorrendjüket változtattuk. Ezt neveztük permutációnak. Idetartozó aleset volt, hogy bármely elem ismételten, többször is előfordulhat. Nem többször természetesen, mint az elemek teljes száma. Második lehetőségnek a szűkebb értelemben vett kombinációt tekintettük, ennél az elemek egy részét úgynevezett kombinációs csoportokban, osztályokban használhattuk fel, továbbá megállapodtunk ezeknél, hogy egyik csoportot csak akkor tekintjük egy másiktól különbözőnek, ha az elemeknek más keverékét tartalmazza, ha másképpen van összeállítva. Itt is foglalkoztunk az elemek ismétlődésének esetével is, még pedig a korlátlan ismétlések esetével, ami azt a lehetőséget jelenti, hogy, ha rákerül a sor, ugyanabból az egy elemből is összeállíthatunk csoportot. A «kombinatorikát kombinálva», mert hiszen ez tulajdonképpen szűkebb értelemben vett kombináció, már csak egy esetünk van hátra, az, hogy az elemeket csak részben, csoportokra, osztályokra bontva használjuk fel, de a csoportoknak osztályon belüli megkülönböztetésére nemcsak a csoport keverésmódja, összetétele szolgál, hanem az elemek csoporton belüli sorrendje is figyelembe vehető. Ha az *a b c d e f* elemek állnak rendelkezésünkre, akkor *ab* és *de* már nem egyetlenek a maguk nemében, mert a *ba* és *ed* ambók is figyelembe vehetők. Permutált kombinációkról van tehát szó, vagyis, amint a kombinatorika e fajtáját nevezik, variációkról, a kombináló mesterség legáltalánosabb alakjáról.

Tegyük fel, hogy számoláshoz példaként már sokszor előrángatott familia elhatározza, hogy öt gyermekét minden héten elküldi a színházban bérelt páholyba. E feladat, önmagában véve, csak szűkebb értelemben vett kombinációt jelentene, akárcsak a tarokkparti. Ötödosztályú kombinációt, tizenkét elemből. De a gyerekek állítása szerint a páholy minden helyéről más-más képet mutat a színpad. És csak akkor járnak el igazságosan, ha minden gyermek ugyanazon csoporton belül is minden helyen ült már. Tehát tarokkpárti, ülésrenddel egybekötve, ha már ismert képekben akarunk beszélni.

Azt hiszem, már eléggé járatosak vagyunk a matematikában ahhoz, hogy hamarosan végezhessünk a variációkkal. A variációs parancsot két részre oszthatjuk: először kombinálunk, azután az egyes kombinációkon belül permutálunk! A matematika nyelvén azonban ez nem jelent mást, mint a kombinációs és permutációs parancsot szorzással egymáshoz kapcsolni. Példánkon ez a $\binom{12}{5}$ és 5! szorzatát jelenti, vagyis ezt $\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} \times 1.2.3.4.5$, vagy pedig, minthogy a nevező és a permutáció öt-fakultása rövidül, egyszerűen ezt: 12.11.10.9.8=95.040. Jó testvéreinknek tehát $260^1/_3$ évre volna szükségük, hogy a színházzal kapcsolatos terveiket keresztülvihessék. Kevesebbre, mint az asztalnál, de azért ez az idő még türelmes emberek számára is kissé túlzottnak látszik.

A variációkat közvetlenül is elérhettük volna, ha úgy járunk el, ahogyan a szorosabb értelemben vett kombinációk első levezetésénél tettük. Ottan a szándékunk ellenére keletkezett variációkat az osztályszám fakultásával történt osztás tüntette el. Már elmondottakat röviden ismételve következőképpen számolhatunk. Tizenkét elemünk van. Tekintsük először az uniókat, az egy elemből álló csoportokat. Számuk természetesen tizenkettő. Hogy ambókat (kettescsoportokat) alakítsak belőlük, minden uniót valamennyi többi 12—1=11 másik elemmel össze kell kapcsolnom. Tizenkét elemnél tehát az ambók száma 132. Ternókhoz a fennmaradt 12—2=10 elem közül kell egyet-egyet minden egyes ambóhoz kapcsolni. Számuk tehát 12.11.10=1320 stb. Az elemek számával kezdve tehát addig kell mindig eggyel csökkenő tényezőket összeszoroznom, míg a tényezők száma annyi, mint az osztály száma. Nem szokásos, de megállapíthatnánk az «antifakultás»[1] számára is valamilyen jelölést, mondjuk ezt $12\dot{+}_5$, jelentése persze 12.11.10.9.8 volna. Ezen újítás által a variációnak is megvolna a maga «parancsa», tehát már külalakjáról is felismerhetővé válnék. A kombinációs parancs is például $\binom{10}{3}$, vagy új alakjában írva $\frac{10\dot{+}_3}{3!}$ azonnal elárulná a permutációtól mentesített variációs jellegét.

Mindez csak mellékes. Már csak azzal az egy lehetőséggel tartozunk, hogy az egyes elemek korlátlanul ismétlődhetnek az egyes csoportokban. Itt álljunk meg egy pillanatra. Mert egészen váratlanul, jóformán észre sem vettük, tanulmányaink egyik fontos mérföldkövéhez jutottunk. Magasabb csúcsra, mint amilyen a számok hegyéé volt, így tehát hatalmas összefüggésekre nyílik kilátásunk. Mit is jelent ennyi és ennyi elemből korlátlan ismétléssel alkotott variáció? Egyelőre még nem jelent egyebet, mint hogy másod-, harmad-, negyed- és így tovább, osztályú csoportokat kell alakítanunk; ezeket a csoportokat nem csak permutálhatjuk, hanem képzésüknél az elemeket ismételve is felhasználhatjuk. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemeket ismétléssel variálva tehát ilyen csoportokat kapunk: 111, 123, 321, 211, 335, 616, 422 stb. Ha alaposabban rájuk nézünk, azonnal megborzongunk. Hisz ez egészen olyan, mintha *valamennyi* számot fel akarnók írni! De ez nemcsak látszat. A számok képzésének éppen az az alaptörvénye. A nullát is hozzávéve az elemek számát tízre egészítjük ki, s parancsot adunk ismétléses variációk képzésére: Szemünk elé tárul az egész tizes rendszer. Egyetlen korlátozással csupán: nullával nem kezdődhetik semmilyen csoport. De erről később. Most tehát csak annyit mondunk, hogy az egy elemből álló csoportok az egyjegyű, a kettes csoportok a kétjegyű, a hármasok a háromjegyű számok és így tovább. De mivel még nem tudjuk, hogy miként kell egy bizonyos osztályú ismétléses variációk számát meghatározni, néhány

[1] Az «antifakultás», éppúgy mint a fakultás, különleges esete az általánosabb «faktoriális» parancsnak.

pillanatig még tűrtőztetnünk kell magunkat. Hagyjuk a tizesrendszert és vizsgáljuk higgadtan, hogy hány variációt alkothatunk az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* elemekből, tehát öt elemből. Ismét az egyes csoportokból indulok ki. Mivel itt korlátozás, nélkül ismételhetek, nem használom az «anti-fakultást»-hanem kettes csoport képzése céljából minden egyes csoport: hoz valamennyi elemet egymás után hozzáfűzöm. Tehát: *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *ba*, *bb*, *bc*, *bd*, *be*, *ca*, *cb*, *cc*, *cd*, *ce*, *da*, *db*, *dc*, *dd*, *de*, *ea*, *eb*, *ec*, *ed*, *ee*. $5 \times 5 = 25$ kettes csoportot kaptam. A hármas csoportokat a kettesekből ismét sorban valamennyi elem hozzáfűzésével kapom, tehát számuk $5 \times 5 \times 5 = 125$. A négyes-csoportok száma $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ stb. Itt tehát nem alkalmazok sem fakultást, sem binomiális együtthatót, sempedig «anti-fakultást», egyszerű hatványozás is megfelel. Az alap (így nevezik a hatványozandó számot) az elemek száma, a kitevő az osztályszám. Esetünkben, amikoris öt elemből képeztünk ismétléses variációt,

az elsőosztályú variációk száma $= 5^1 = 5$
a másodosztályú variációk száma $= 5^2 = 25$
a harmadosztályú variációk száma $= 5^3 = 125$
a negyedosztályú variációk száma $= 5^4 = 625$
és így tovább.

Most térünk vissza számrendszerünkhöz. Állítjuk, hogy egyik helyértékrendszer sem egyéb, mint helyes sorrendbe szedett ismétléses variációsrendszer, mellékfeltételként, megjegyezve, mint már tudjuk, hogy a nulla soha sem állhat számcsoport élén.

Építsük fel tehát először a tizesrendszert variációs csoportokból. Közbevetve, variáció szón az itt következő fejtegetések során nem variációt általában, hanem mindenkor ismétléses variációt fogunk érteni. Most, hogy ebben megállapodtunk, fogjunk munkához, de ne feledjük, hogy eme megállapodásunk csak a számrendszerek tárgyalásának idejére érvényes.

Kétségtelen, hogy a tíz egyjegyű számot rendszerünk uniói adják. Az uniók száma, képlet szerint 10^1, tehát valóban tíz. Az elemek száma a tizes rendszerben 10, az uniók esetén az osztályszám 1. Ambóknál már vigyáznunk kell. A képlet szerint a tíz számjegyünkből 10^2, azaz 100 ambó képezhető. Mindenki tudja azonban, hogy mindössze 90 kétjegyű szám létezik, a 10—99 terjedő számok. Ezek szerint tizes rendszerünk nem volna teljes variációs rendszer? Léteznek talán olyan számok, amelyek elkerülték figyelmünket? Kellemetlen gondolat. Feleletünk: igenis ilyen számok léteznek. De kiderül, hogy teljesen ártalmatlanok. A tíz, nullával kezdődő ambót hagytuk ki. Tehát a 00-tól a 09-ig terjedőket, amelyek nagyságra az egyjegyű számokkal egyeznek meg és csupán kombinatorikai jelentésük van; tekintve, hogy a kombinatorikában a számokat csupán elemeknek tekintjük, nagyságukkal pedig nem törődünk. A kombinatorikában a számjegy, ismételjük, mindenkor értékfoga om-mentes mutató, index, megkülönböztetést szolgáló szám. De menjünk tovább! 10^3, azaz 1000 ternónknak kellene lenni. Valóságban ismét kevesebb háromjegyű szám létezik. Mégpedig 900, a 100-tól 999-ig terjedő számok. És ismét kiderül, hogy azonnal megoldódik a rejtély, ha a nullákból álló, vagy nullákkal kezdődő csoportokat levonjuk, vagyis a 000-tól 099-ig terjedő csoportokat. Köztük 003 és 054 alakú számok szerepelnek, vagyis az összes egy- és kétjegyű szám. Ha 10^3-ból az egy- és kétjegyű számok számát levonjuk, tehát 1000-ből 10-et és 90-et, az eredmény 900, amint kívántuk. Ugyanígy mehetünk tovább. 10^4 annyi mint 10,000. De csak 9000 négyjegyű szám létezik. Ismét a 0000-tól 0999-ig terjedő négyescsoportokat kell levonnunk. Tehát valamennyi egy-, két- és háromjegyű számot. Valóban 10.000-ből 10, 90 és 900 a négyjegyű számok száma, vagyis 9000.

Némi meggondolással tovább egyszerüsíthetjük képletünket. Ha a fenti összeállítás alapján megfontoljuk, hogy a kétjegyű számok száma következőképpen adódott:

$$10^2-10^1=100-10=90, \text{ a háromjegyűeké így:}$$

$$10^3-(10^2-10^1)-10^1=10^3-10^2+10^1-10^1=10^3-10^2=900,$$

a négyjegyűeké így:

$$\begin{aligned}10^4&-[10^3-(10^2-10^1)-10^1]-(10^2-10^1)-10^1=\\&=10^4-[10^3-10^2+10^1-10^1]-10^2+10^1-10^1=\\&=10^4-[10^3-10^2]-10^2=10^4-10^3+10^2-10^2=\\&=10^4-10^3=9000,\end{aligned}$$

az ötjegyűeké pedig így:

$$10^5-\{10^4-[10^3-(10^2-10^1)-10^1]-(10^2-10^1)-10^1\}-[10^3-(10^2-10^1)-10^1]-(10^2-10^1)-10^1=10^5-\{10^4-[10^3-10^2+10^1-10^1]-10^2+10^1-10^1\}-[10^3-10^2+10^1-10^1]-10^2+10^1-10^1=10^5-\{10^4-10^3+10^2-10^2\}-10^3+10^2-10^2=10^5-10^4+10^3-10^2+10^2-10^3+10^2-10^2=10^5-10^4=100.000-10.000=90.000$$

és így tovább, akkor látjuk, hogy adott jegyszámú számok számát olymódon kapjuk meg, hogy a megfelelő variációk számát mutató hatványból levonjuk az eggyel alacsonyabb hatványt. Tehát a tizesrendszer, mondjuk, hétjegyű számainak száma $10^7-10^6=10,000.000-1,000.000=9.000.000$, vagyis helyes sorrendben felírt variációrendszerben az 1,000.000-tól 9,999.999-ig terjedő csoportok. Egyszerűbb úton úgy jutottunk vo'na ehhez az eredményhez, ha valamennyi 1000-nél kisebb számot már eleve ternóknak tekintettük volna, és azt a kérdést tettük volna fel, hogy melyik ternóval kezdődnek azok a csoportok, amelyeknek elején az 1 áll. Ez nyilvánvalóan a 100, mert helyes sorrendben ez a legalacsonyabb 1-gyel kezdődő csoport. Mivel pedig továbbá azokra a ternókra nincsen szükségem, amelyek egy vagy több nullával kezdődnek, tehát a 10^3-ból le kell vonnom a 000-tól 099-ig terjedő ternók számát, 10^2, azaz 100 ternót. Számoknak tekintve ezek az egy- és kétjegyű számok, beleértve a nullát. De még egy harmadik módon is számolhatunk. Mellőzzük teljesen a kombinatorikát és induljunk ki a számrendszerből. Állíthatom: $10^3=1000$, az első négyjegyű száma rendszerünknek, mert a megelőző szám 999. Szemmel látható, hogy a legmagasabb kétjegyű szám 99, mert a 100, az első háromjegyű szám következik utána. Tehát a háromjegyű számok száma $999-99=900$.

Most már ellenfelem sem állja meg szó nélkül, minekutána már egész idő alatt gyanakodva szemlélte a dologt. «Az imént akartam éppen a figyelmet erre a számítási módra felhívni», mondja gúnyosan. «Hegyeket mozgatsz meg variációiddal és csak kis egér születik végül. Rossz lelkiismeretedtől űzve végül is csak bevallottad, hogy az egész dolgot könnyebben lehet kombinatorika nélkül megoldani. Megmaradtál tehát hirhedt alape'vednél: miért egyszerűen, ha bonyolultan is lehet?»

Nem, kedves ellenfelem, nem ilyen egyszerű a dolog. A kerülő úton a dolgok egész sorát óhajtottam elintézni. A tudásnak szerpentin-útján haladtunk. Nem kevesebbet tettünk, mint igazoltuk számrendszerünket a kombinatorika segítségével és a kombinatorikát számrendszerünkkel. S közben tizesrendszerünk korlátlan ismétlésű, teljes variációrendszernek bizonyult. A tizesrendszer algoritmusa és a kombinatorikáé úgy kapcsolódik egymáshoz, mint két, pontos fogaskerék, mindennemű «holt járás» nélkül. Az «Istentől teremtett egészszámok» közt fennálló kapcsolatok mind világosabbak lesznek. Már értjük a különbséget a számok nagyságjellege és sorszám index-jellege közt. Haladjunk tehát ismét egy lépéssel, egy nagymértékben általánosító lépéssel tovább. Elhagyjuk a tizesrendszert. Feltesszük a kérdést, hány kétjegyű szám létezik a hatosrendszerben. És nyugodtan rábízzuk magunkat a kombinatorika algoritmusára. Az alap az elemek száma. A kitevő viszont az osztályszám. Ezek szerint $6^2—6^1=30$ kétjegyű szám létezik a hatosrendszerben. ırjuk fel őket: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 50 51, 52, 53, 54, 55, és ezután a 100-nak kell következnie.

Jóslatunk tehát bevált. És ugyanígy helyes, hogy a tizenhármasrendszerben $13^4—13^3=26.364$ négyjegyű szám van.

Ez az új varázsképlet Leibniz diadikájára tesz minket kíváncsivá. Ottan mi a helyzet? Megvizsgáljuk tehát, hogy ebben a barátságtalan rendszerben, ahol csak a 0 és az 1 számjegy létezik, hány egy-, két-, három-, négy-, öt- és hatjegyű szám fordul elő.

Egyjegyű:	2 (a nulla nélkül 1)
Kétjegyű:	$2^2—2^1= 4— 2= 2$
Háromjegyű:	$2^3—2^2= 8— 4= 4$
Négyjegyű:	$2^4—2^3=16— 8= 8$
Ötjegyű:	$2^5—2^4=32—16=16$
Hatjegyű:	$2^6—2^5=64—32=32$ és így tovább.

Ebből könnyen megláthatjuk: van még egy negyedik szabály is annak meghatározására, hogy hány adott számú számegyből álló szám létezik. Az egyjegyűek nulla nélküli számát kell a rendszer alapszámával folytatólagosan megszorozni. Esetünkben $1\times2=2$ (kétjegyű), $2\times2=4$ (háromjegyű), $4\times2=8$ (négyjegyű) és így tovább. Tizesrendszerben: 9 egyjegyű, szorozva 10-zel 90 kétjegyűt ad, $90\times10=900$ háromjegyűt és így tovább. Hatosrendszerben: 5 egyjegyű szorozva $6=30$ kétjegyű, 30 kétjegyű szorozva $6=180$ háromjegyű. De erre csak utalunk, habár ez is a kombinatorika mélységeibe vezethetne.

Intézzük el már végre kettes számrendszerünket. Írjuk fel először számainkat.

Tizesrendszer:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Kettesrendszer:	1,	10,	11,	100,	101,	110,	111,	1000,	1001,
Tizesrendszer:	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,		
Kettesrendszer:	1010,	1011,	1100,	1101,	1110,	1111,	10000		

Sorban feloldva például 1100 a következőt jelenti:

$$1100 \text{ (kettesrendszer) } = 0.2^0+0.2^1+1.2^2+1.2^3= \\ =0+0+4+8=12 \text{ (tizesrendszer).}$$

Tehát ez rendben volna. Végső kísérletként próbáljunk meg valamilyen számtani műveletet, mondjuk szorzást, kettesrendszerben elvégezni. Ennél már eleve zavarban vagyunk, mert valóban nem áll más egyszeregy rendelkezésünkre, mint $1\times1=1$, a «legkisebb egyszeregy». Miképpen szorozzunk ilyen körülmények között? Ijedten látjuk előre, hogy hiába fáradoztunk és sokszor dícsért algoritmusunk romokba dől. De már felelősségünk teljes tudatában levő matematikai kutatók vagyunk és összeszorítjuk a fogunkat. Anélkül, hogy tudnók, mit teszünk, felírunk két számot, csupa nullából és egyesből és hajrá! elkezdünk, «legkisebb egyszeregyünket» tekintetbe véve, szorozni. $1\times0=0$, ez egészen természetes, hisz a nullával való szorzás minden rend szerre «invariáns», változatlan. Semmiszer valami mindenütt semmi. De hogy a kettesrendszer számai csak egyest és nullát tartalmazhatnak, az csak feltevés. Ha viszont algoritmusunk, miként már ismételten állítottuk, invariáns minden rendszerre, akkor a szorzásnak sikerülnie kell.

$$\begin{array}{r}
101101011 \times 110 \\
\hline
101101011 \\
101101011 \\
000000000 \\
\hline
100010000010
\end{array}$$

Próbaképpen bontsuk fel sorokká a csodálatos számokat. A szorzandó

$$1.2^0+1.2^1+0.2^2+1.2^3+0.2^4+1.2^5+1.2^6+0.2^7+1.2^8=$$
$$=1+2+0+8+0+32+64+0+256=363$$

A szorzó:

$$0.2^0+1.2+1.2^2=0+2+4=6$$

Most az izgalom tetőfokra hág. Mert 363×6, tehát 2178 állítólag azonos a következő számszörnyeteggel:

100010000010, vagyis a következő sorral

$$0.2^0+1.2^1+0.2^2+0.2^3+0.2^4+0.2^5+0.2^6+1.2^7+0.2^8+$$
$$+0.2^9+0.2^{10}+1.2^{11}=0+2+0+0+0+0+0+128+0+0+$$
$$+0+2048$$

és ez a csodálkozó örömünkre szintén 2178-at ad.

Számrendszerünkre, négy alapműveletünkre és a kombinatorikára vonatkozó algoritmusunk leggondosabb vizsgálat után is mindenütt bevált és az egész vonalon győzedelmeskedett. Még a diadika, legkisebb egyszeregyével együtt, sem tudta megingatni. E rendszerben a szorzás különlegesen könnyű volt. Csak az összeadás okozott némi gondot, mert a kettesrendszerben 1+1=10 marad egy és 10+1=11, és továbbá 11+1=100 marad 10, stb. De ha magam elé teszem a felírt számsort, akkor az összeadás is gyerekjáték. Valami egymegegy félét használok itten egyszeregy helyett, mely utóbbira ebben az egyszerű rendszerben nincs is szükségem.

Mindenki megérti most már, miért hasonlította a kettesrendszert Leibniz a világ semmiből történt teremtéséhez. Egyesrendszerben csak a nulla volna az egyetlen számjegyem. A tiszta semmi. Sehogyan sem tudok belőle számot alkotni. Vegyük azonban — a teremtés sz mbolumaként — akár csak az egyet hozzá, akkor elhangzik a «legyen világosság» a számok és formák világában. Az egészszámok végtelen sokrétűsége nyílik meg azonnal előttem, alakíthatom, felírhatom őket bármilyen nagyságig. Felfedezhetek algoritmust, számolhatok, kombinálhatok, variálhatok, röviden: ezzel az egyetlen lépéssel ura lettem a számok egész birodalmának.

Mégsem elégedhetünk meg ezzel a magassággal, melyet immár elértünk. Új feladatok, amelyekhez most közeledünk, általánosabb gondolkodásmódot kívánnak tőlünk, újabbnál újabb algoritmusokat idéznek fel. S a matematika démona, amelyet keltegetni kezdtünk, nem fog addig békében hagyni, míg az «igaz kabbala» újabb és újabb varázsjeleinek birtokába nem jutunk, hogy azokkal, sejtelmünk szerint, a látható és láthatatlan világ jelentős részét meghódíthassuk magunk számára és uralmunk alá hajthassuk.

KILENCEDIK FEJEZET

Első lépések az algebrában

Nemcsak egy helyen, hanem tízszer, talán még többször is kínzón éreztük, mindnyájan egyaránt, hogy nem emelkedhettünk magasabb, általánosabb dolgok felé. Szigorú korlátokat szabtunk magunknak. Megtiltottuk, hogy a természetes számok területét elhagyjuk, vagy, hogy határait átlépjük. De magasabb algoritmusok árnya kísért egész utunkon. S egy helyen, ahol már sehogy sem tudtuk türtőztetni magunkat, alattomos és rejtett módon mégis áthágtuk a tilalmat. S még hozzá nagyon súlyos vétség formájában. Számolási műveletet végeztünk ugyanis, általánosságra való törekvésünkben, nem számokkal, hanem (ijesztő!) szavakkal. Azt mondottuk:

$$\text{Osztandó} : \text{osztó} = \text{hányados}$$
$$\text{Osztó} \times \text{hányados} = \text{osztandó}.$$

Csak később fogjuk meglátni, milyen nagy merészség volt ez. A binomiális együtthatónál még meg is ismételtük gyalázatos tettünket, ott $\left(\begin{matrix}\text{elemek száma}\\ \text{alatta}\\ \text{osztályszám}\end{matrix}\right)$ kifejezésről beszéltünk és a kombinatorika Euler-féle operációs parancsát nem számokkal, hanem szavakkal írtuk fel. De most nem bánkódunk, hanem Goethe szavai szerint: — «Mindenki hibázhat, de hibáját ki hogyan viseli, az tesz különbséget a tisztult és közönséges szellem között» — megkisértjük hibánkat a tiszta szellem szolgálatába állítani.

De feltétlenül szükséges ehhez, hogy többi megállapodásunkat kínos pontossággal megtartsuk. S ezek között is elsősorban azt az egyességünket, hogy a legegyszerűbbnél és kézzelfoghatóbbnál kezdünk el mindent.

Egy szoba területét kellene megmérnünk, pl. szőnyegvásárlás előtt. A szoba nem nagy, 5 méter hosszú és 4 méter széles. Rögtön látjuk, hogy a kérdéses terület 20 négyzetméter, mivel öt sorban egyenkint négy, vagy pedig négy sorban egyenkint öt négyzetméter helyezhető el a padlón — és ennyit el is kell helyezni — hogy a szobát teljesen befedjük. A megfelelő számítás $4 \times 5 = 20$, vagy $5 \times 4 = 20$. Azt is szokás mondani, hogy a szoba nagysága méterben 4×5. Ha egy másik szobát kellene szőnyeggel beterítenem, amelynek nagysága mondjuk 6×8, akkor e szorzás alapján 48 négyzetméter szőnyeget kellene vásárolnom. És így tovább. Mit jelent azonban itt ez az «és így tovább?» Semmi mást, mint bármely más «és így tovább» a matematikában. Vagyis azt, hogy minden további ilyen példa ugyanazon törvény szerint oldandó meg. Mi ez a törvény? Megint nem egyéb, mint egy magasabbrendű, általánosabb parancs. Esetünkben: «Ha valamely derékszögű négyszög területét akarod megkapni, akkor szorozd meg hosszát szélességével». «Milyen hosszát, mely szélességgel?» kérdezzük. «Nos, a mindenkori hosszat a hozzátartozó szélességgel. Vagy szorozz fordított sorrendben. Mert a legáltalánosabb esetben is érvényes a szorzás tényezőinek felcserélhetősége». Mindenki egyszerre mondja, hogy már tudja, miről van szó: képletről! Még pedig a derékszögű négyszögek területének megállapítására szolgáló képletről. Bizony arról a képletről van szó, amelyet rendesen $t = a \times b$ alakban szoktak felírni. t a derékszögű négyszög területe, $a . b$ vagy $b . a$ a szélességszer hosszúság vagy hosszúságszor szélesség. De milyen csodát műveltünk itt megint? Az algoritmus és a parancsok érvényét először szavakra, mostan pedig már betűkre is kiterjesztettük.

Mielőtt tovább elmélkednénk, lássunk még egy-két példát. Világos, hogy egy alma meg két alma együtt három alma. Négy alma meg három körte viszont 7 darab gyümölcs, vagy új gyüjtőfogalmat használva «egy tányér gyümölcs». Ugyanígy háromszor 5 alma az 15 alma. És 27 körtének kilencede 3 körte. Ha az almákat a-val, körtéket b-vel, gyümölcsöket c-vel jelölöm; továbbá «egy tányér gyümölcs» jelölésére a d betűt használom, akkor írhatom:

$1a+2a=3a$; $4a+3b=7c$; vagy $4a+3b=d$; $5a\times 3=15a$; $27b:9=3b$.

Mindez már rendkívül hasonlít egy új algoritmushoz, egy új önműködő számoló- és gondolkodógéphez. Még továbbmenve, következő kérdést vetjük fel: melyik számot kell 28-hoz adni, hogy e kérdéses szám háromszorosa legyen az összeg? Nem tudom milyen számot kell hozzáadni. Ismeretlen még előttem. Ezért a neve az «ismeretlen». Jelöljük pl. x-szel. Adjam hozzá a 28-hoz. Helyes. Ezt fel tudom írni. Ezzel teljesült az első parancs. Most ez a $28+x$ legyen egyenlő az ismeretlen szám háromszorosával. Csodálkozunk, mert az eddigiekben valaminek megállapításakor (konstatálásakor) használt egyenlőségi jel paranccsá vált. Mégpedig a következő paranccsá: $28+x$ *legyen* egyenlő, tegyük egyenlővé x háromszorosával, a $3.x$-szel, a $3x$-szel. De miként? Nos, addig keressük az x helyére számokat, amíg a parancs nem teljesült. Azt találjuk, hogy $x=14$ esetén $28+14=3.14$, vagyis $42=42$, ami nyilvánvalóan helyes.

De itt sem időzünk sokáig. Csak annyit jegyzünk meg, hogy csodálatos «kiegyenlítő» gépünknek egyenlet a neve és hogy «megoldásához» nemegy szabály ismerete szükséges. Lesz még alkalmunk mindezt megismerni. E helyütt nem előre, hanem vissza óhajtunk pillantani és megállapítani, hogy mi köze lehet a példáinkban említett szőnyegeknek és almáknak az ismeretlen x-hez.

Egyelőre csak külsőségeket állapíthatunk meg. Elhagytuk a most már csupasznak látszó természetes számok birodalmát és betűket fűztünk össze a számokkal; és a betűket a már jól ismert szimbolumainkkal és parancsainkkal kapcsoltuk egymáshoz. Algoritmikus mesterfogásainkat, «igaz kabbalánkat» egyszerre nemcsak számokra, hanem egyéb dolgokra is alkalmazzuk. Olyanokra, amelyekről nem is tudom előre, hogy mit jelentenek. Az *a* betű egyszer a szoba hossza, rögtön utána alma. De lehetséges, hogy nem almát, nem szobahosszat jelent, hanem éppenséggel *a* betűt. Hiszen három *a* betű hétszerese 21 *a* betű. De még *a* betűnél is kevesebbet jelenthét. Még pedig «valamit». «Valamit», amitől csak azt kívánjuk, hogy ugyanazon a számításon belül ugyanaz a «valami» maradjon, mivelhogy három «ismeretlen valami» meg két «ismeretlen valami» szintén öt «ismeretlen valami». Az ismeretlen x még sokkal rosszabb. Nemcsak határozatlan még, hanem meg is kell keresnünk. Keresett megoldása egy esetleg bonyolult matematikai rejtvénynek.

Mindenesetre bizonyos, hogy új fogalomírásmódot vezettünk be, amelynek írásjelei ködös, homályos dolgokat, nagyságokat jelentenek. Számunkra még meglehetősen kaotikusak, alaktalanok. S semmiesetre sem isteni eredetűek, mint a természetes számok és mindennek nevezhetők, csak egyértelműnek nem.

Éppen azért, mert nem egyértelműek, mert mintegy általános meghatalmazásuk van, bianko-váltószerűek, helyükbe tetszésszerinti értéket írhatok, (az x-et kivéve, melynek helyére esetleg egy bizonyos értéket *kell* írnom) lehetővé teszik e szimbolumok, hogy bizonyos viszonyokat, teljesen általánosan, minden esetre érvényes módon feljegyezhessek. $t=a.b$ nemcsak az én szobám területét jelenti, hanem minden derékszögű négyszögalakú szobáét. Sőt: területe minden derékszögű négyszögnek! És $3a+2a=5a$ éppenúgy helyes összege három és két almának, mint három és két vonalzónak, három és két mozdonynak. De éppen így helyes összege három és két *a* betűnek, három és két számjegynek, három és két ötösnek, tizenhármasnak, általában három és két tetszésszerinti egynemű dolognak vagy nagyságnak. Sőt még rejtélyesebben, három és két «valaminek».

Egy «igaz kabbala», egy puszta írásmód megint új varázslattal szolgált: az algebrának, az általános számolásnak varázslatával. Helyesebben azt mondhatnók, hogy általános számok birtokába jutottunk, amelyek időleges határozatlanságukban különböznek a természetes számoktól.

De még mielőtt új, nagy varázslatunk vizsgálatához fognánk — «ars magna» (nagy művészet) vagy «artium ars» (a művészetek művészete) néven is emlegették — szóljunk néhány szót eredetéről és nevének származásáról. Ugyanaz az arab matematikus, Alchvarizmi, akit már mint az algoritmus szó keresztapját megismertünk, Algebr' v al mukabala címen is írt egy értekezést. Ebben bizonyos egyenletekkel kapcsolatos számítási módokról van szó, de tárgyalásuk nem tartozik ide. Itt csak azt állapítjuk meg, hogy a történelmi véletlen Alchvarizmi nevét kétszeresen is megörökítette: eltorzult nevéből lett az algoritmus, művének eltorzult címéből pedig az algebra szó.

De egyáltalán nem igaz, hogy a nyugat az araboktól a betűszámtannak teljesen zárt rendszerét, határozott írásmódját, befejezett művészetét vette át. A nagy művészet hosszú fejlődésen ment át, amely az indusoktól, az arabokon, Vietán keresztül Descartesig és Huddeig terjed és lépésről lépésre fejlődött. És csak mintegy a 17. század végére ért el olyan általános-érvényűséget, hajlékonyságot és fejlettséget, amely a mi tudásunkhoz fogható. Leonhard Eulernél található először olyan írásmód, amelyet a maival azonosnak érezhetünk. Más összefüggések kapcsán még nem egyszer visszatérünk az algebra történetére, amelyre itten csak egészen felületesen utaltunk.

De most kérem, ne ijesszen el senkit az a néhány filozófiai természetű megfontolás, melyet együttesen kell elvégeznünk. Nehézségük lényegesen kisebb lesz, mint például egyik számrendszerről a másikra való áttérés. De mi nem akarunk semmiesetre sem mechanikus számítási módokkal megelégedni, hanem a matematika belső szerkezetébe is be akarunk hatolni.

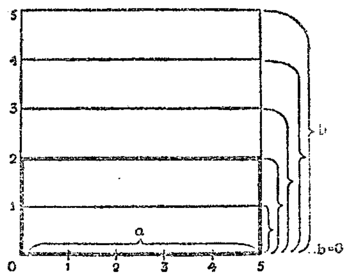
TIZEDIK FEJEZET

Algebrai írásmód

Térjünk vissza most szobapadlónkhoz és szőnyegünkhöz. Itt ismét általánosító lépést teszünk, nem leszünk többé a *tárgyra* tekintettel, csupán az *alakjára*. Ezentúl tehát mi csak derékszögű négyszögről, esetleg röviden négyszögről fogunk beszélni. Olyan geometriai idomról, amelyre jellemző, hogy négy, kettesével párhuzamos egyenes határolja és oldalai merőlegesek egymásra, tehát kettő-kettő derékszöget zár be. Ez az a terület, amelyre a $t=a.b$ képletünk érvényes. Egészen önkényesen megállapodunk, hogy a jelenti a négyszög hosszabbik oldalát, hosszát, b viszont a rövidebbet, szélességét. Az a körülmény, hogy «szélesebb, mint amilyen hosszú», természetesen a definícióban nem lényeges. Annak ugyanis, hogy «szélesebb, mint amilyen hosszú», semmilyen geometria értelme sincs. Valamelyes értelmet csak a tárgy helyzetére vonatkoztatva nyerhet. De mindez most egészen mellékes.

Ugyanígy eljuthatunk az $a.b$ szorzat, azt mondhatnók «algebrai» értelmezéséhez, ha általános érvényéről teljes mértékben meggyőződünk. Az a tetszésszerinti számot jelenthet, nullát éppenúgy, mint valamely igen nagy számot. Feltéve, hogy mellékes feltételünknek megfelel, vagyis nagyobb, mint a mellette álló b, habár az is tetszésszerinti, nagy szám lehet. 2×1 méretű négyszög éppen úgy elképzelhető, mint $1{,}994.373\times284.786$ méretű és a szorzás eredménye mindkét esetben a négyzet- (kvadrát-) egységekben mért területet fogja adni. A négyzetegység jelentését most ne vizsgáljuk, a kifejezést mindnyájan kellőképpen ismerjük a négyzetméter, négyzetcentiméter szavakból. Inkább vizsgáljuk meg algoritmusunkat érvényességének határán. E célból, a négyszög hosszát változatlanul hagyva növesszük, majd pedig csökkentsük szélességét addig, amíg csak lehet. Ekkor, megállapodásunkat figyelembe véve, két «határesetet» fogunk találni s a határok között foglalnak helyet a «rendes- (normál-) esetek». Megeshetik, hogy a szélesség mérete eléri a hosszúságét, úgyannyira, hogy többé nem tudunk hosszúság és szélesség közt különbséget tenni. Tehát a *b* akkora, mint az *a*. Hozzátesszük még, hogy a növekedés egyelőre nem történik folytonosan, hanem ugrásszerűen, mert egyelőre csak a természetes egészszámokat ismerjük.

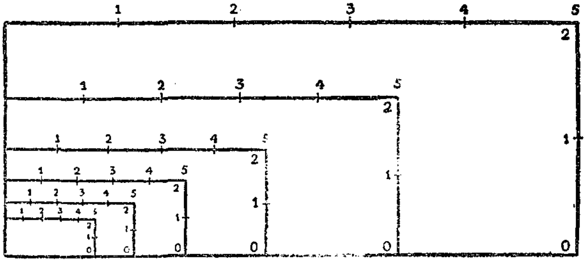
Mivel most a *b* egyenlő lett az *a*-val, írhatom, hogy $t=a.a$, amely kifejezéssel, mint azonos tényezők szorzatával, hatvány néven már megismerkedtünk. $a\times a$ tehát a^2, «*a* a másodikon», másképpen «*a* a négyzeten». A négyszögből négyzet lett. Belátom, hogy feltételünket, amely szerint a hosszúság mindenkor nagyobb a szélességnél, kissé tágan értelmeztük.



2. ábra.

Még pedig negatív formájában: «a szélesség soha sem lehet nagyobb a hosszúságnál.» Kicsit csaltunk tehát, «a törvény hézagát» használtuk fel, hogy besurranhassunk. Ezt magunkra vállalva, keressük meg a másik «határesetet». Mi történik, ha a szélesség a lehető legkisebbre, nullára csökken? $t=a.0=0$. Tehát a négyszög területe nullává lesz. A geometria nyelvén szólva: a négyszögből csupán egy vonaldarab marad s ennek a geometria szabályai szerint csak egy kiterjedése van, csak hossza. Szélessége egyáltalán nincs. Tehát a területre vonatkozó szabályaimmal olyan dologhoz jutottam, amely a területről alkotott fogalmainkkal teljesen ellenkezik. Bizony hatalmas erőpróbája volt ez algoritmusunknak és jó bizonyíték arra, hogy miképpen működik együtt több algoritmus: az «algebrai» és a pusztán számokra vonatkozó. Gondolkozógépünk tehát örvendetesen biztosan kezd működni.

Így bele merünk kezdeni lényegesen nehezebb dologba is. Második mellékfeltételt szabunk magunknak. Legyen a hosszúságnak és a szélességnek az aránya *5 : 2*. Közömbös, hogy ez most öt, illetve két fényévet, kilométert vagy valami kisebb mértéket jelent, vagy hogy egyáltalán méterrendszerre vonatkozik-e. Épp úgy lehetséges, hogy jelentése hüvelyk, verszt, vagy arasz, láb, stadion vagy bármi más. $t=a.b=$ $=5\times 2=10$. Négyszögünk területe mindenkor ötször kettő egyenlő tíz négyzetegysége az előírt mértékegységnek. Rajzoljuk fel tehát magunknak a dolgot, a nélkül, hogy valami léptéket követelnénk, különböző egységekben.



3. ábra.

Mindegyik négyszögnek egyaránt, a maga mértékegységének tíz négyzetegysége a területe. A képlet mindenkor érvényes, $a=5$ és $b=2$, tehát $t=5\times 2=10$. Ha most ismét nem folytonosan, hanem észrevehető utolsó ugrással a létező derékszögű négyszögek legkisebbikét képzelem magam elé, amelynek a hossza éppenúgy, mint a szélessége nulla, akkor számításunk: $t=0\times 0=0$. Kis négyszögünk területe tehát ismét nulla lett, azaz nincsen egyáltalán területe. De amíg az előbbi esetben legalább a hossza megmaradt (vagy a szélessége, mert eltekintve a «hossza nagyobb mint szélessége» kikötésünktől, az is lehetséges, hogy a szélességet tartjuk meg és a hosszat csökkentjük nullává: $0\times b=0$), most terület és szélesség egyaránt nulla lett. Ami megmaradt, az semmi, geometriai pont, kiterjedés nélküli idom. De talányos módon mégis megmaradt valami, amit első ijedtségünkben észre sem vettünk. Még pedig az a feltétel, hogy a hosszúság és szélesség viszonya $5:2$. Mivel ez a feltétel a mértékrendszertől és az idomok nagyságától teljesen függetlennek mutatkozott, mivel alakállandóságot mutatott minden, de minden mérettel szemben, elfogadhatjuk általános érvényűnek a klasszikus görög tételt, Euklides tételét, hogy két mennyiség viszonya független abszolut nagyságuktól. S azt állítjuk, bár közvetlen szemlélet nem támasztja alá, hogy pontunkon belül is úgy aránylik az eltűnt négyszög eltűnt hossza eltűnt szélességéhez, mint öt a kettőhöz. Ha ugyanis ezt nem fogadjuk el, más oldalról kerülünk algebrai és algoritmikai szempontokból bajba. Írjuk tehát, vakon bízva gondolkodó szerkezetünkben és az igaz kabbalában, feltételünket aránylat alakjában.

a úgy aránylik *b*-hez, mint öt a kettőhöz, vagyis

$$a:b=5:2$$

Ez olyan írásmód, amelyet már az elemi iskolából ismer mindenki. Ha *a* és *b* egyaránt, egyszerre nulláig csökken, akkor

$$0:0=5:2.$$

Ha továbbá váratlanul a két nulla ugyanazt jelentené, akkor az eredmény *egy* volna. Mert valamely szám önmagával osztva egyet ad eredményül. De ekkor az egyenlőségi parancs értelmében 5-öt osztva 2-vel 1-et kellene eredményül kapnunk, ami pedig nyilván értelmetlen követelés. Nem marad más hátra, mint hogy az aránylatot úgy kell elképzelnem, hogy benne a nullák aránya $5:2$. Ezért mondják, hogy nulla nullával osztva határozatlan kifejezés és esetrőlesetre meg kell és meg is szabad határozni az értékét.

De ismét másik kelepcébe jutottunk. Az aránylatokra vonatkozó egyik szabály szerint az aránylat kültagjainak a szorzata egyenlő a beltagok szorzatával. Ha tehát

$$0:0=5:2, \text{ akkor szükségképpen}$$
$$0\times2=0\times5,$$

ami kétségtelenül igaz, mivel 0×2 éppen úgy 0, mint 0×5. De, hogy teljesen világosan lássunk, mutassuk be a kültagol és beltagok szorzatának egyenlőségére vonatkozó szabályt *egy példán.*

13 : 39=7 : 21, ebből következik, hogy
13×21=39×7 ; tehát 273=273.

De ezzel még egyáltalán nem jutottunk kétségeinknek végére. Mert aránylatunk helyességéről más, algebrai úton is meggyőződést szerezhetünk. Írjuk fel ezt :

(5×0) : (2×0)=(5×1) : (2×1) s ez ismét
0 : 0=5 : 2 eredményre vezet.

Jogos ez az írásmód, tekintve, hogy az arányba állított mennyiségek egységét akkorának választhatom, amekkorának csak akarom. Választhatok nullákat egységül, egyeket, kettőket stb., minthogy az aránylat helyessége nem változik, ha mindkét tagot ugyanazzal a számmal szorzom.

Szándékosan törtünk be már mostan a felsőbb matematika, a végtelen analizis birodalmába, holott még az algebra alapfogalmaival sem vagyunk teljesen tisztában. Durva közelítésben a nagy Leibniz egyik gondolatmenete szerint jártunk el, aki «Herleitung der Differenzialrechnung aus dem gewöhnlichen algebraischen Kalkül»[1] címen fejtett ki ehhez hasonlót. De ezzel még nem szabadultunk kelepcénkből s nem szabadultunk a súlyos ellenmondásoktól. Csak annyit tudunk, hogy választanunk kell : vagy elfogadunk elképzelhetetlen dolgokat, azáltal, hogy kiterjedésnélküli pontról feltételezzük, hogy megkülönböztethető oldalhosszú négyszög ; vagy pedig részben elvetjük algoritmusunkat, számológépünket, az arányok állandóságáról szóló tanunkat. Csak az bizonyos, hogy a széltében és hosszában különböző semmire vonatkozó elképzelésünk lényegesen kisebb bajt okoz, mint az ilyen lehetőségek merev tagadása.

De most elhagyjuk ellenfelünk élénk rosszalása közben messze előre nyúlt vizsgálódásainkat és visszatérünk körtéinkhez és almáinkhoz. Két alma és öt alma együtt hét alma, ez most nem probléma számunkra. Sokkal gonoszabb

[1] «A differenciálszámítás levezetése a közönséges algebrai számításmódból».

feladatnak látszik, ha azt az állítást vesszük szemügyre, hogy 3 alma meg 5 körte együtt 8 darab gyümölcs, vagy egy tányér gyümölcs. Ha az almákat *a*-val, körtéket *b*-vel, a gyümölcsöt *c*-vel és az «egy tányér gyümölcsöt» *d*-vel jelöljük, akkor felírhatjuk, hogy

$$3a+5b=8c, \text{ vagy}$$
$$3a+5b=d.$$

Mivel pedig a matematikának kétségbevonhatatlan alaptétele, hogy ha két mennyiség egy harmadikkal egyenlő, akkor egymás közt is egyenlők, kiderül, hogy

$$8c=d$$

vagyis 8 gyümölcs együttvéve egy tányér gyümölcs. Még ezt a végső következtetést is problémamentesnek tekintjük, mivel már eleve, definiciószerűen feltételeztük, hogy a három alma és öt körte összeadása révén új fogalomhoz, a tányér gyümölcs, mégpedig egy éppen így összeállított tányér gyümölcs fogalmához jutunk. Sokkal misztikusabb az az állítás, hogy 3 alma meg 5 körte együtt 8 gyümölcs; habár első pillanatban sokkal egyszerűbbnek látszik is, mint a tányér gyümölcsre vonatkozó állításunk. Ugyanis súlyos következményei vannak. Ha 3 alma meg 5 körte valóban 8 gyümölcs, akkor tudtunkon kívül számolási müveletet végeztünk. A gyümölcsfogalom megalkotása által ugyanis magasabb szempotból azonossá tettem az almát és a körtét. S abban a pillanatban, amidőn gyümölcsben kezdek számolni, már nincsen szükségem az *a*, *b* és *c* megkülönböztetésére. Egyszerűen azt írhatom, hogy $3+5=8$ és minden megjelölést a végeredményig mellőzhetek. Elvben a gyümölcsben történő számolás nem egyéb, mint ha csupán almák vagy csak körték feküdnének előttem. Mert ezzel *a* egyenlő lesz *b*-vel és mindkettő *c*-vel ($a=b=c$), tehát nem betűkkel számolok többé, hanem az együtthatókkal.

Fentiekből az algebrának egy összekötő és nagyon általános fogalmát kaphatom meg. Tudvalevő, hogy minden mennyiség változatlan marad, ha 1-gyel megszorzom. Így tehát a közönséges, számokkal történő, számításainkat az algebra különleges eseteként az algebra fogalmába vonhatom be, a közönséges számokat koefficienseknek, együtthatóknak tekinthetem, csupán az almák vagy betűk helyére kerülnek *«egységek»*. 5 egység meg 17 egység együtt 22 egység. Vagypedig

$$5+17=22.$$

9348 egység szorozva 15-tel=140.220 egység, másképp $9348\times15=140.220$. Minden, bármilyen számrendszerben megnevezetlen számokkal történő számítás tehát megnevezett, «egységek» számát jelölő számokkal történő algebrai művelet. Így tehát a számrendszerektől az algebrához vezető remek, folytonos átmenetet találtunk. Jegyezzük még meg, hogy az eggyel való szorzás minden számrendszerben, természetesen még a kettesrendszerben is, magát a szorzott számot adja eredményül. Tehát valamennyi számrendszer invariáns, alaktartó az eggyel való szorzásra.

Miután így összefoglaltuk mindazt, amit eddig tudunk, remélem, nem fog semmilyen lényeges nehézséget okozni, ha az algebrába mélyebben bahatolunk. Egy kérdést bocsátunk előre. Mindig vegyesen számokkal és betűkkel kell számolnunk? Vagy lehetséges csak betűkkel ugyanúgy számolni, mint a számokkal? A kérdés teljesen jogosult és azonnal meg fogjuk közelebbről is vizsgálni. Csupán «az általános és konkrét együtthatók problémájává» fogalmazzuk át, saját használatunkra.

Azt, hogy mik a konkrét együtthatók, már nem egy helyen megmutattuk. Felületesen azt mondhatnók, hogy valamilyen egység darabszámát adják meg. $5a$ esetén 5 az együttható (koefficiens), a az egység, amellyel számolok. $5a+7b+3c+8d$ esetében 5, 7, 3, 8 a koefficiensek, a, b, c, d az egységek. Ez «egységek», «általános számok» helyébe tetszésszerinti számértéket tehetek, ha a behelyettesített számot a számítás egész folyamán, az eredményig változatlanul megtartom. A behelyettesített szám a számítás egész folyamán ugyanaz marad, változatlan, állandó. Innen az a, b, c, d neve: konstáns, állandó. Évszázados fejlődés és szokás szerint az állandók jelölésére rendszerint a latin ábécé kisbetűi használatosak. Mégpedig az a-tól egészen az u-ig.

Az *u* mögötti betűk mást célt szolgálnak, amiről később lesz szó. Az *r*, *s*, *t* mintegy középső helyzetet foglal el s csak elkerülhetetlen szükség esetén[1] használható «állandók» jelölésére. De néhány, az ábécé elején levő betű is megegyezésszerűen foglalt. Az *e* betű Euler óta mindenkor a «természetes logaritmusok» alapszámát jelöli, az *i* jelenti, Gauss óta, a «képzetes egységet» ; a *h* betűt szívesen használja a felsőbb matematika valamely tetszésszerinti kicsiny növekmény jelölésére. A *d* betűt (differenciálszámítás műveletjelét) szintén nem tanácsos a felsőbb matematikában állandó megjelölésére használni. Nagyobb számításoknál ily módon az ábécé-nek csak az *a*, *b*, *c*, *f*, *g*, *k*, *l*, *m*... betűi állnának rendelkezésünkre s e szaggatott sorozat használata elegáns sem volna, az áttekinthetőséget is csökkentené, tehát a modern algebra (természetesen más, fontos oka is van rá) a lényegében már Leibniztől javasolt indexes írásmódot használja. Általános mennyiségeket például valamely sor összegezendő tagjait, ennél az írásmódnál ugyanaz *a* betű jelöli, de jobbra, lent megkülönböztető jellel, index-szel látjuk el. Így : a_1, a_2, a_3, a_{27} stb. Példaképpen egy tetszésszerinti tizesrendszerbeli számot írjunk fel ilymódon s ennél még a nullát is használjuk indexként.

Tizesrendszerű szám $= a_0 . 10^0 + a_1 . 10^1 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + + a_4 10^4 + \ldots$ s így tovább.

Ellenfelem, akinek haragját szándékosan hívtam ki most magam ellen, azonnal közbevág és szememre veti, hogy itt a koefficienseket jelöltem betűvel és az egység jelölésére használtam számokat. Így helyes! Hisz éppen arról akarunk meggyőződni, hogy miként boldogulunk teljesen számok nélkül.

De alaposabban kell válaszolnunk, ha az ellenfelet el akarjuk hallgattatni, mert ő még mindig tiltakozik. Tehát először is: a_1, a_2, a_3, a_4 csak azt jelenti, hogy ezeken a helyeken *állhatnak*, az indexek sorrendjében, számjegyek. Más semmit. Tizesrendszerű számunknál természetesen csak a 0—9-ig terjedő számjegyek. S ezen kívül még, a legmaga-

[1] Például ha nagyszámú betűre van szükség, lexikográfikus sorrendben, így hosszú hatványsorok együtthatóinál.

sabb kitevőjű szám mellett csak az 1—9 számok, minthogy számunk nullával nem kezdődhetik. Tehát két «mellékfeltétel». Ezen a kereten belül persze valamennyi helyébe olyan számjegyet írhatok, amilyent csak akarok. Tehát $a_0=5$, $a_1=7$, $a_2=1$, $a_3=4$, $a_4=0$, $a_5=2$. S ekkor a 204.175 tizesrendszerű számot kapnám. De így is választhatnék: $a_0=0$, $a_1=2$, $a_2=5$, $a_3=9$, $a_4=8$, $a_5=9$, s akkor a 989.520 szám állna előttem, vagy így: $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=0$, $a_5=6$ s 600.000 volna az eredmény stb. Írásmódommal tehát egy tizesrendszerű szám vázlatát adtam meg, amely természetesen nem szükségképpen hatjegyű. Jelölhetne az a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} is számokat s ekkor *valamilyen* 7-, 8-, 9-, 10-, 11-jegyű számot kapnék. Az indexeket természetesen másképpen is alkalmazhatom. Például így:

$$a_1 10^0 + a_2 10^1 + a_3 10^2 + a_4 10^3 + a_5 10^4 + a_6 10^5$$

s ezzel együtt járna az az előny is, hogy a legmagasabb index azonnal megmutatná a jegyek számát, a legmagasabb kitevő pedig a szám végén álló nullák számát. Látjuk, hogy ismét önműködő számolószerkezetre bukkantunk, a rendnek egy algoritmusára.

Szokásunk szerint folytassuk általánosításainkat. Írjunk fel mostan nem tizesrendszerben, hanem valamely más, számrendszerben kifejezett számot ily módon, tudva, hogy számrendszer alapszáma 2-nél kisebb nem lehet és hogy az együtthatók a 0-tól az eggyel csökkentett alapszámig terjedő értékeket vehetik fel. A legmagasabb indexű együttható (amely a használt legmagasabb kitevőjű hatvány mellett áll), csupán az 1-től, az eggyel csökkentett alapszámig terjedő értékeket veheti fel. «Két szám közötti értékeket felvenni» a matematikában azt jelenti, hogy valamely általános szám a határok közt fekvő értékek bármelyikét jelentheti, példánkban természetesen csak az egészszámú értékeknek van értelmük.

Immár kellőképpen felkészülve még csak egy dologban akarunk megállapodni. Azt, hogy az alapszámot általában g betűvel fogjuk jelölni. Minthogy változatlan marad, azaz egy és ugyanazon rendszeren belül nem változik és nem is változhat, nincs indexe. Hatványkitevője azonban van, hisz a kitevőnek helyről helyre történő növekedése éppen a helyértékrendszernek lényege. Most már írhatjuk: g alapszámú rendszerbeli szám $= a_1g^0 + a_2g^1 + a_3g^2 + a_4g^3 + a_5g^4 + + a_6g^5 \ldots$ Csináljunk ebből hatosrendszerű számot; g akkor 6; a_1, a_2, stb. a 0-tól 5-ig terjedő értékeket vehetik fel, az a_6 viszont csak az 1-től 5-ig terjedőket. Tehát pl. így: $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=5$, $a_5=1$, $a_6=2$.

Sorként, a tizesrendszer írásmódjával: $2.6^0+3.6^1+ +0.6^2+5.6^3+1.6^4+2.6^5$, vagy hatosrendszerű számként 215.032.

Most a fenti általános sort a kettesrendszerre alkalmazom és a következő értékeket választom az együtthatókra: $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=1$, $a_5=0$ $a_6=1$.

A kettesrendszerű szám=101.001 (a g ez esetben 2). A tizenhármasrendszerben akarok dolgozni? g akkor 13. Legyen $a_1=9$, $a_2=A$, $a_3=5$, $a_4=0$, $a_5=C$, $a_6=7$. Tehát a 13 rendszerbeli szám: =7C0.5A9 (itt A és C a már ismert módon számjegyeknek tekintendők).

Látható, hogy a fenti $a_1g^0+a_2g^1+\ldots$ sor valamennyi helyértékrendszerben felírt szám általános képe. Csak bizonyos szabályok figyelembe vételével kell behelyettesítenünk.

Ehelyütt még nem is tudjuk kellőképpen értékelni, hogy mit is nyertünk tulajdonképpen. Hiszen az algebrának szinte célja, hogy ilyes általános képekkel ugyanúgy számolhasson, mintha valódi számok volnának. Alkalmazhatom a valódi számok algoritmusát az általános számokra is. Összeadhatok kivonhatok, szorozhatok, oszthatok, hatványozhatok stb. S csak a végeredménybe kell behelyettesítenem, ha történetesen nem elégszem meg azzal, hogy eredményként megkaptam az általános képletet, mintegy új törvényt, megőrzésre és adandó alkalommal történő felhasználásra.

De még mindig nem feleltünk arra a kérdésre, hogy boldogulhatunk-e esetleg teljesen számok nélkül is. Azt már tudjuk, hogy nem csak egységek és állandók jelölhetők betűkkel, hanem még együtthatók is. De indexként és kitevőként még mindig csak számjegyeket használtunk. Ne gondoljunk mostan a számrendszerekre, feledkezzünk meg róluk teljesen és írjuk fel magunknak általános számok egy összegezésre jelölt sorát, nem bánom, akár csak egy véges sorát, ne forduljon elő benne egyáltalán semmiféle számjegy sem s lássuk akkor, tudunk-e ebben a sorban valamilyen értelmet találni. Például

$$a_b g^b + a_c g^c + a_d g^d + a_e g^e + a_f g^f + a_h g^h + a_i g^i + a_j g^j$$ [1]

Mit jelenthet ez? Bizony ez azt jelenti, amit akarunk. Azzal az egyetlen korlátozással, hogy a g mindenkor ugyanaz maradjon és az indexek, valamint a kitevők növekvő sorrendben legyenek rendezve, amint ez a betűk sorrendjéből is magától értetődőnek látszik. Tegyük még hozzá, hogy egészszámokat kell használni, akkor ezt *is* jelentheti sorunk:

$$15.7^5+8.7^9+932.7^{10}+20.7^{13}+0.7^{25}+1.7^{26}+10.7^{49}+$$
$$+42.535.7^{1000000} \text{ vagy ezt is } 0.0^1+0.0^2+0.0^3+0.0^{15}+$$
$$+1.0^{30}+17.0^{31}+2.0^{50}+27.0^{642}$$

Röviden, már itt is egészen nagyszámú megfejtését tudtuk adni vázunknak, hisz nincsen másról szó, mint g tetszésszerinti számokkal szorzott növekvő hatványainak összegezéséről.

A következő sor még általánosabb volna:

$$a_b c^b + a_c d^f + a_d m^g + a_e o^h + a_s r^t$$

Itt már nem köt semmilyen feltétel, az együtthatók tetszésszerintiek, az alapok különbözők lehetnek. A kitevők nincsenek sem növekvő, sem pedig fogyó sorrendben. Számokat behelyettesítve e sornak a következő is lehetne a jelentése:

$$0.2^7+25.7^3+4.4900^{18}+74.1^{10}+1.8^2.$$

De az általánosság továbbhajtásával nem akarjuk azt a látszatot kelteni, hogy csak olyan sorok léteznek, amelyeknek tagjai együtthatóval szorzott hatványok. Ellenkezőleg; viszont egyszerű szerkezeteken akartuk megmutatni, hogy betűket együtthatóként, kitevőként, indexként egyaránt lehet használni. Minden számot, mennyiséget írhatok betűként, feltéve, hogy valódi értéke egyelőre még nem érdekel.

[1] Index és kitevő esetleg a tilos c, d, h, stb. betű is lehet.

Éppen ez az, ami «általános» az algebrában. De minden általánosság mellett is fel fognak bukkanni elkerülhetetlen konkrét számok. Ennek oka a számítási műveletekben és a parancsokban rejlik. Ha azt kívánom, hogy mondják meg nekem, mennyi $a.a.a$, nem felelhetem, hogy a^n, csak azt, hogy a^3. De itt is marad még kibúvó: még pedig ha azt állítom, hogy nem tudom még, milyen számrendszerben adjam meg a kitevőt. Az $a.a.a$ kettesrendszerben a^{11} volna, hármasrendszerben a^{10}. Most mondhatom, hogy $a.a.a=a^n$, mert a kitevő, n, csak a számrendszer megadtával írható. Éppen így az összeadásnál $a+a+a+a+a=5a$. De még meghatározatlan alapszámú számrendszer esetén állíthatom, hogy $a+a+a+a+a$ egyelőre $m.a$-val egyenlő. m értékét csak akkor tudom megadni, ha megmondják, hogy milyen számrendszerben írjam le. És így tovább.

TIZENEGYEDIK FEJEZET

Algebrai műveletek

Most már annyit tudunk az algebráról, hogy a műveletek szabályaival kell foglalkoznunk. Mindenekelőtt világos, hogy a számjegyekre érvényes algoritmusunk szabályait nem vihetjük át minden további nélkül a betűkre is. Nem alkothatunk valódi helyértékrendszereket, minthogy mindennek általánosnak és határozatlannak kell maradnia s nem adhatunk össze, vonhatunk ki, szorozhatunk vagy oszthatunk a számrendszerek szabályai szerint. Annál kevésbbé, hisz ez az algoritmus legszorosabban összefügg a helyértékrendszerekkel. Ha valaki így számolna: $a+b=c$ és marad egy, a nem-matematikus is joggal nevethetne.

Most tehát, állandóan lelki szemeink előtt tartva almáinkat és körtéinket stb. először az alapműveleteink szabályait keresgéljük össze, majd kissé bátrabban is nekivágunk.

$a+b$ azt jelenti, hogy két állandó, de tetszés szerinti, különböző mennyiséget adjak össze. Különbözők, mert külön nevet adtam nekik. Mit kezdjek velük? $a+b$ akkor is $a+b$ marad, ha csak «kiszámítás» a célom. Legfeljebb még azt mondhatom, hogy $b+a$, mert az összeadás kommutativ művelet, az összeadandók felcserélhetők. Továbbá $a+b+c+d$ szintén csak $a+b+c+d$ marad, vagy $a+b+d+c$, vagy $b+c+a+d$ és így tovább. $a+a=2a$, ezt már tudjuk. Így mondjuk

$$a+a+a+b+b+c+c+c+c+d=3a+2b+4c+d$$

Nem szokás az 1-et mint együtthatót kiírni. d ugyanannyi mint 1.d vagy $1d$. Indexekkel írva, amikor könnyebben elkerülhetem a «tiltott» betűk használatát, az előbbi példa így festene:

$$a_1+a_1+a_1+a_2+a_2+a_3+a_3+a_3+a_3+a_4=3a_1+2a_2+4a_3+a_4.$$

Álljon mostan előttem két összegszerű kifejezés Például:

$$\begin{array}{rl} & 3a+27b+10c+\ d+15e+\ 8f \qquad \text{és} \\ & \underline{7a+\ 0b+\ 9c+13d+\ 6e+101f} \\ \text{Összesen:} & 10a+27b+19c+14d+21e+109f. \end{array}$$

Látható, hogy egyszerűen az együtthatók adódnak össze, és szemünk előtt áll (természetesen helyérték nélkül) valami összeadás-szkémához hasonló dolog. A két kifejezést ugyan, plusz jellel egybekötve, zárójelekkel vagy azok nélkül egyetlen hosszú sorba is írhattam volna. Így például:

$$(3a+27b+10c+d+15e+8f)+(7a+0b+9c+13d+6e+101f)=$$
$$=3a+27b+10c+d+15e+8f+7a+0b+9c+13d+6e+101f=$$
$$=10a+27b+19c+14d+21e+109f.$$

Természetesen különböző indexű vagy hatványkitevőjű, tehát csak látszólag azonos mennyiségeket nem lehet összeadni, vagyis új, közös együtthatóval ellátni.

$a_1+a_2=a_1+a_2=a_2+a_1$ marad, akármit is csinálok. Ugyanígy $a^2+a^0+a^3$ soha sem lesz más, mint $a^2+a^0+a^3$. Rendezhetem növekvő hatványok szerint $a^0+a^2+a^3$, fogyó hatványok szerint $a^3+a^2+a^0$, írhatom rendezetlenül $a^2+a^3+a^0$, vagy $a^3+a^0+a^2$, vagy $a^0+a^3+a^2$.

Röviden, a második példában hat permutáció lehetséges.

mert 3 elem szerepel (permutációk száma $3!=1.2.3=6$), de különben nem változik semmi.

A kivonás, mondottuk, egyirányú művelet. $a-b$ tehát nem lehet más, mint $a-b$. És $2a-6b+7c-a+4b-2c$ ugyanannyi, mint $2a-a+4b-6b+7c-2c$, vagyis a ... : itt megakadunk. Hirtelen új fogalom került szemünk elé. Az a-kat és a c-ket el tudom intézni, de a b-ket nem. Hogyan vonjak le 4 körtéből 6 körtét? Egyszerűen akarunk a hurokból kiszabadulni. Ugyanúgy, ahogyan az a kereskedő könyvel, akinek 100 zechinoja van és 120 zechinoval tartozik. Adós marad 20 zechinoval, minusz 20 zechinoja lesz, ha e paradoxont szabad használni. A matematikában mindenesetre szabad. Számításunk eredménye a, $5c$ és minusz $2b$, vagy felírva $a-2b+5c$, vagy $a+5c-2b$, vagy $5c-2b+a$. De ha csak $4b-6b$ eredményét kellene kiszámítanunk, akkor ezt kellene írnunk: $4b-6b=-2b$. Ezzel a negativ szám fogalmához jutottunk el. Egy vonalra felmérve vonaldarabokként is elképzelhetjük őket.

4. ábra.

A nulla magábanvéve nem szám. Sokszor ugyan úgy használatos, mintha az volna. Maga a semmi. Így éppen olyan kevéssé általános, mint konkrét, vagy mind a kettő. Ahogy az ember éppen akarja. Nem szokás továbbá a pozitiv- (plusz-) számok elé a plusz jelet kiírni. A negativ- (minusz-) számoknál viszont a minuszt mindenkor ki kell írni. Analog ezzel a legközelebbi magasabb építő és lebontó (tetikus és litikus) műveletek írásmódja is. Háromszor a írható: $3.a$, vagy $3\times a$, vagy $3a$ alakban. A $3a$ a szokásos írásmód. De a $3:a$ művelet csak $3:a$, vagy $\frac{3}{a}$ alakban írható.

Most még a zárójeleket kell bevezetni, hogy magasabb szempontokhoz emelkedhessünk. A zárójelek, amelyeket már nem is egyszer, minden megjegyzés nélkül alkalmaztunk, így pl. a binomiális együtthatóknál, azt jelentik, hogy mindaz, ami köztük van, mint külön birodalom, összetartozik. A zárójelből tartalmát kiragadva, az teljesen önálló lesz és zárójelre való tekintet nélkül önállóan kezelhető. Így

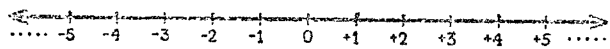
$$10.000-(5020+23-448)=?$$

Először a zárójel tartalmát veszem, kiszámítom, az eredmény 4595 és mostan zárójel nélkül írhatom és számíthatom: $10.000-4595=5405$. De ha azt gondoltam volna, hogy a zárójel egyszerűen felesleges és tartalmának figyelembe vétele előtt elhagyom, írva: $10.000-5020+23-448$, eredményül a teljesen helytelen 4555 számot kapom. Próbáljuk ki más példán is.

$$15.375-320+\underbrace{(8220-26+400)}=$$
$$15.055+\quad 8594 \quad =23.649.$$

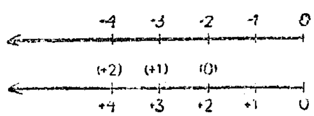
Ha viszont meg nem engedett módon a következőt írom: $15.375-320+8220-26+400$, eredményül csodálatos módon szintén 23.649 jön ki, tehát a helyes szám. Hogyan történt ez? Hát szabad a zárójeleket egyszerűen elhagyni? Rögtön eláruljuk: igen, ha plusz jel áll közvetlenül előttük; viszont nem szabad, vagy csak kiszámítás, vagy pedig határozott változtatások elvégzése után szabad elhagyni, ha a közvetlenül megelőző jel minusz. De ennek megmagyarázására mélyebben be kell hatolnunk a negativ számok lényegébe. Ehhez valamennyi számot «előjellel» (+ vagy —) kell ellátnunk és zárójelbe kell tennünk, hogy az «előjelet» az ugyanazon jellel írt «parancstól» megkülönböztethessük. $5+7$ ugyanis, mihelyt nem csak természetes számokkal számolunk, hanem pozitiv és negativ számokkal, tulajdonképpen a következőt jelenti: $(+5)+(+7)$, és az eredmény $(+12)$. Kivonás, pl. $12-7=5$ jelentése viszont a következő: $(+12)-(+7)=$ $=(+5)$.

Lássuk mostan előbb e két művelet az összeadás és kivonás értelmét a számvonalon, mielőtt még negativ számokkal történő műveletekkel kezdenénk foglalkozni.

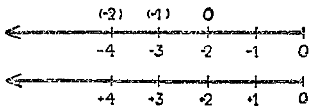


5. ábra.

Sok töprengés nélkül is világos, hogy az «összeadási parancsot» a számvonalon különféleképpen lehet végrehajtani. Ha a nullától jobbra adunk össze, tehát csupa pozitív számot, akkor az összeadás során mindinkább jobbra kerülünk. Mondjuk: (+1)+(+2)=(+3), ezután (+3)+(+1)==(+4) és így tovább. Ha a fentinek tükörképével foglalkozom, tehát nullától balra adok össze, akkor (—1)+(—2) eredményeként (—3) adódik. Ugyanúgy tovább (—3)++(—1)=(—4). Mert mintegy adósságot halmoztam adósságra. Olyan kivonásoknál, amelyek a nullának vagy a jobb, vagy a baloldalán maradnak, az eseményeknek ellenkező irányban kell bekövetkezniök. Kívülről közeledem a nullához. Tehát például: (+4)—(+3)=(+1), ugyanígy a tükörképe (—4)—(—3)=(—1), amikoris az adósság végösszegéből adósságot vettem el, tehát mintegy mentesítettem magam, azaz közeledtem a nullához, az adósságmentes állapothoz. Szükségképpen mások a viszonyok, ha számolás közben át kell lépnem a nullát. Tegyük fel, hogy (—2)-höz kell (+3)-at hozzáadnom. Ez esetben úgyszólván ketté kell vágnom a számvonalat és a részeket megfelelő módon egymásra kell illesztenem, még pedig úgy, hogy minden minusz-mennyiség a megfelelő plusz-mennyiség fölé kerüljön. Amidőn ez a módszer az adósságokat és a vagyont ilyen szempontból egyformává tette, megnézem, van-e többlet valamelyik csoportban. S amikor továbbá az adósság és a vagyon kölcsönös megszüntetésével mintegy új nullpontot állapítottam meg ezt az új nullpontot feljegyzem zárójelben a számvonal ama részére, ahol a többlet mutatkozott. Esetünkben a «plusz»-részre. S a számozást az új nullától folytatom. Az alsószám mutatja, mennyit haladok előre (itt +3-at), a felső pedig az eredményt (+1). Vegyük megint a tükörképet:



6. ábra.



7. ábra.

Itt a minusz-rész a nagyobb. Plusz 2 és minusz 2 megszünteti egymást, nulla lesz. Ennek megfelelő az új szám a minusz-három felett, tehát

$$(-3)+(+2)=(-1).$$

Így még hátra volna a kivonás a nulla átlépésével. Itten különleges figyelemmel kell eljárnunk. Legyen a példánk a következő: $(+2)-(-1)=(+3)$.

Mi lett az eredmény? 2 értékű vagyonból kell 1 értékű adósságot elvenni. Tehát nemcsak hogy megmaradt a vagyonunk, hanem még adósságtól is szabadultunk. Tehát a számításunk: vagyon 2, elvéve belőle adósság 1, eredmény 3, mint vagyon. Másképpen írva: $(+2)-(-1)=(+3)$.

Írjuk egymás alá az eddig tárgyalt eseteket, kiegészítve a többi lehetséges esettel, hogy szabályt vonhassunk le belőle.

$$\begin{array}{ll} (+1)+(+2)=(+3) & \quad (+3)+(-2)=(+1) \\ (-3)+(-1)=(-4) & \quad (-3)+(+2)=(-1) \\ (+4)-(+3)=(+1) & \quad (+2)-(-1)=(+3) \\ (-4)-(-3)=(-1) & \quad (-2)-(+1)=(-3) \end{array}$$

Ha figyelmesen megnézzük ezt az összeállítást és megpróbáljuk kitalálni, hogy miként kerülhetnők el a zárójelek használatát, akkor a következő ere ményre jutunk.

$$\begin{array}{ll} +1+2=+3 & \quad +3-2=+1 \\ -3-1=-4 & \quad -3+2=-1 \\ +4-3=+1 & \quad +2+1=+3 \\ -4+3=-1 & \quad -2-1=-3 \end{array}$$

Mit jelent ez tehát? Nem egyebet, minthogy az előjel a paranccsal csodálatos módon összekapcsolódhatik. Az első oszlopok, amelyek előtt nem állottak parancsok, mitsem változtak, csak a zárójeleket vettem el, mert az elvétel által semmi sem módosulhat, amiről a számvonalra vetett pillantás is meggyőz. De ott, ahol a zárójel előtt parancs állott, a zárójelek elhagytával részben történtek változások, részben minden maradt, amint volt. Mégpedig + és + eredménye +; + és — együtt —; — és + együtt —; — és — viszont +. Még tömörebben összefoglalva: ha előjel és parancs egyforma, az eredmény plusz; ha nem egyformák, az eredmény minusz. De ez a szabály nem csak a zárójelben levő *egyetlen* számra érvényes, hanem többre is. Ennek a viszonynak részletes levezetése nagyon hosszadalmas volna Elégedjünk meg tehát a tudottakkal és próbáljuk alkalmazni. Például:

$$20-(3+5-7+6-9)=20-3-5+7-6+9=22$$

s ez lett volna az eredmény akkor is, ha a zárójeles kifejezést kiszámítom és a következőket írom: $20-(-2)=20+2=24$. Ezzel megfejtést nyert egyik korábbi, megoldatlan rejtély. Mégpedig az, hogy miért hagyhatom el egyszerűen a zárójelet, ha + áll előtte. Magyarázat: ha a plusz plusszal találkozik, akkor változatlanul marad a plusz. Ha minusszal találkozik, megmarad a minusz. Ilyesformán:

$$25+(6-8+4+12-3)=25+6-8+4+12-3=36\ ;$$

vagy pedig a zárójelek előzetes kiszámításával $25+11=36$. De most már kényelmesen vonunk ki nagyobb számot kisebből. Például: $13-20=(+13)-(+20)=(-7)$ vagy $13-20=$ $=-7$, mivel ez ugyanaz, mintha 13 zechinoval 20 zechino adósságot kellene kifizetnem, 7-tel kevesebb a vagyonom; tehát marad 7 zechino adósságom.

Nyomatékosan megjegyezzük, hogy itt a dolgokat kissé futólag tárgyaltuk. Sokkal elegánsabb volna, ha az előjeleket is «parancsoknak» tekintenők, még pedig a számvonalon, a szám által mutatott lépéssel történő, tovahaladásra vonatkozó parancsoknak. Az irányt az előjel adná meg. Akkor (+3) azt jelentené: «Haladj jobbra a 3-ig!» (—7) pedig a következőt: «Haladj a számvonalon a nullától balra a 7-ig!» Ez az elmozdulási parancs összevonásra (összeadás, kivonás) vonatkozó paranccsal is összekerülhet. Tehát a számvonalon kell ide-oda haladni és közben össze kell vonni. Ha a konkrét számoktól teljesen eltekintünk, sőt általános számokat sem írunk, csak azt vizsgáljuk, hogy mi a hatása «parancsok» találkozásának, akkor parancsokkal végzett műveletek, úgynevezett «szimbólum kalkulus» áll előttünk. A kabbala e magasabb ágazatáig még nem szabad előrehatolnunk. De azt megállapíthatjuk, hogy «parancsok kapcsolásának» vagy a «szimbólum kalkulusnak» egyik egyszerűbb esetével van dolgunk, ha azt állítjuk, hogy egyenlő parancsok pluszszá, különbözők pedig minuszszá vonódnak össze.

Mostan többszörös zárójelekkel kívánunk foglalkozni. Ilyet már írtunk fel, minden közelebbi magyarázat nélkül. De most megvizsgáljuk az ilyen egymásba dugott zárójelek egy esetét. Legyen például az a kívánság, hogy $(3+4-7+2)$ eredményét le kell vonni 6-ból. Az eredmény kivonandó 15-ből és hozzá kell adni 5-öt. Ezzel az egésszel kisebbítendő $23-7+6$. És mindezt, bárminő előzetes kiszámítás nélkül. Felírjuk:

$$(23-7+6)-\{15-[6-(3+4-7+2)]+5\}=?$$

A zárójeleket, amelyek megkülönböztethetőségük érdekében kerek, szögletes és kapcsos alakban használatosak, legcélszerűbb belülről kifelé haladva felbontani. Kívülről is kezdhetném felbontani őket, de tapasztalat szerint kevésbbé biztos ilymódon a kezelésük. Bontsuk fel tehát először a kerek zárójeleket.

$$23-7+6-\{15-[6-3-4+7-2]+5\}=?$$

Ezután a szögletes zárójelek felbontása következik.

$$23-7+6-\{15-6+3+4-7+2+5\}=?$$

Végül a kapcsosoké.

$$23-7+6-15+6-3-4+7-2-5=6.$$

Az eredményt természetesen úgy is megkaphattam volna, ha a zárójeleket egyenként kiszámítom. Mert mindaz, ami a zárójelek előtt áll összesen 22, mindaz, ami zárójelben van 16, így a különbség 6. Ha nyomon követjük az eseményeket, látjuk, hogy a zárójelek felbontása során egyes számok többször is megváltoztatják előjelüket, amíg a számológépünkben egymást keresztező parancsok során végighaladva végleges, zárójelen kívüli előjelükhöz nem jutnak. Csak utalunk arra, hogy a változások e sorozata a parancsok szorzását jelenti, amivel később még alaposabban fogunk foglalkozni.

Itt az ideje ugyanis, hogy visszatérjünk az algebrához, amelyet a kivonás tárgyalásának elején zavartan abbahagytunk. De ez a művelet nem fog több rejtvényt feladni nekünk. Mert ha 2 almám van és 2 almát kell belőle odaadnom, 0 almám marad, azaz semmi. Ha 6 almám van és 4 almát kell belőle odaadnom, 2 marad. Ha viszont 3 volna és 7 almát kellene belőle odaadni, 4 alma adósság maradna. Ha végül már volna 5 alma adósság és hozzá jönne 3, akkor az összesen 8 alma adósság volna. És így tovább.

$(+5a)$ ugyanaz, mint 5 alma vagyon, $(-8a)$ ugyanaz, mint 8 alma adósság. Azt hiszem, nem kell a közbenső fokozatokat ismét átvizsgálnunk, hanem azonnal zárójeles kifejezések felbontásával kezdhetünk foglalkozni.

$$\begin{aligned} &15a-\{6a+(3b+5c-2a)+[3c-(5a+7b)]+c\}= \\ &=15a-\{6a+3b+5c-2a+[3c-5a-7b]+c\}= \\ &=15a-\{6a+3b+5c-2a+3c-5a-7b+c\}= \\ &=15a-6a-3b-5c+2a-3c+5a+7b-c= \\ &=16a+4b-9c. \end{aligned}$$

Észre lehet venni, hogy zárójelen belüli «kiszámítás» az algebrában csak akkor lehetséges, ha a zárójelen belül egynemű mennyiségek vannak. Mennyi tehát

$$17a-[6b+(9a-3b+c+5a-2c+b)+2b].$$

Itt a zárójelek felbontása előtt írhatnám:

$$\begin{aligned} 17a-[8b+(14a-2b-c)]=17a-[8b+14a-2b-c]= \\ =17a-6b-14a+c=3a-6b+c. \end{aligned}$$

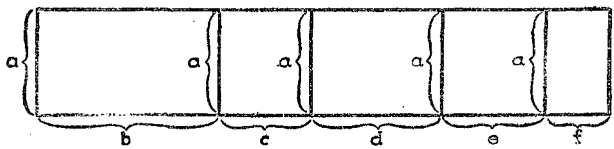
Már egész idő alatt nyelvünkön lebegett, hogy megemlítsük, hogy a kivonás, az összeadáshoz hasonlóan kommutatív művelet, ha az előjelet, a parancsot a számhoz tartozónak tekintjük. Így jutunk az úgynevezett algebrai, aritmetikai összeg fogalmához. Mert bizonyos szempontból tekintve egyáltalán nincs is kivonás, csupán csak plusz- és minuszszámok összeadása. $5-3-2+4$ kifejezést így is írhatom:

$+(+5)+(-3)+(-2)+(+4)$. De éppen így azt is állíthatnók, hogy összeadás nincs, csak kivonás. S ez esetben az algebrai vagy aritmetikai különbségről beszélhetnénk. Esetünkben: $-(-5)-(+3)-(+2)-(-4)$, s ez ismét ugyanazt, t. i. $(+4)$-et adná eredményül. Létezik tehát a parancsok felcserélhetőségének törvénye is, sőt plusz-szám esetén még azt sem tudhatom, hogy előjelét két plusz vagy két minusz eredményeként szerezte-e? Mellékes. Csak az fontos, hogy példánkat összegként tudtuk írni és a tagok sorrendjét felcserélhetjük. Mondjuk így: $+(-2)+(+5)+(+4)+(-3)$ az eredmény természetesen ismét $(+4)$.

Felfogásunk általános jellege szempontjából ismét jó darabbal jutottunk előre, így tehát (nem annyira logikusan, mint inkább nyaktörő merészséggel) a kommutativ törvény mellé egy a szorzásra jellemző törvényt, a disztributiv törvényt akarjuk állítani. Azt állítjuk, hogy $5(7+4-3+9)$ ugyanannyi, mint $5.7+5.4-5.3+5.9$ s ez szemlátomást igaz, mert a zárójel, kiszámítva, ugyanazt az eredményt $(5.17=85)$ adja.

Általánosságban $a(b+c-d+e-f)=ab+ac-ad+ae-af$, amiről természetesen ebben a példában nem tudunk jobban meggyőződni. Legfeljebb konkrét számok behelyettesítésével igazolhatnók. De az alapvető tétel szemléltetésére euklidesi módon geometriai bizonyítást használunk. Helyezzünk azonban egyelőre csupa pozitiv számot a zárójelbe.

$$a(b+c+d+e+f)=ab+ac+ad+ae+af.$$

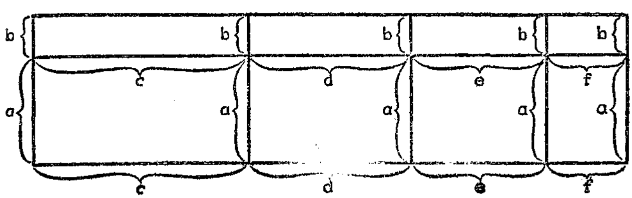


8. ábra.

Az egymás után sorakozó négyszögek területe, az ismert «szőnyeg»-képlet szerint: *ab, ac, ad, ae, af*. A négyszögek területének összege tehát $ab+ac+ad+ae+af$. Az összeg azonban nem egyéb, mint az egész, nagy négyszög. Mert, ha a nagy négyszög területét közvetlenül akarjuk kiszámítani, akkor a «hosszát», ez $b+c+d+e+f$, meg kell szoroznunk a «szélességével», a-val. Az eredmény $a(b+c+d+e+f)$. De minthogy mindkét számítási mód feltétlenül ugyanazt az eredményt adja, általánosságban is igazolva van, hogy $a(b+c+d+e+f)=ab+ac+ad+ae+af$.

Az olvasó kedvére bízzuk, hogy megfelelő négyszögeket vágjon ki magának és szabályunkat arra az esetre is igazolja, amikor a zárójelben negatív számok is szerepelnek. Ez esetben a «pozitív» négyszögeket egymás mellé kell helyezni és a «negatívokat» le kell vonni, úgy, hogy a pozitívok tetejére helyezzük őket. S ki fog derülni, hogy eredményül ismét ugyanazt kapta, mintha csak az alsó vonal hosszát állapította volna meg előre a b, c, d. stb vonaldarabok összeadogatásával és kivonásával és azután szorozta volna meg az eredményt az állandó a-val.

A disztributív törvényt mostan már «polinomokra», «többtagúakra» is kiterjeszthetjük, amelyek — nevük is mutatja — nem egy számból, hanem több tag összegéből alakított kifejezések. Ismét geometriai-euklidesi módszert alkalmazunk.



9. ábra.

Most az eredmény nyolc négyszög. Még pedig, azonnal területükkel megjelölve őket, alul az ac, ad, ae, af, felül pedig a bc, bd, be, bf négyszög. Az egésznek a területe viszont $(a+b).(c+d+e+f)$, tehát

$$(c+d+e+f).(a+b)=ac+ad+ae+af+bc+bd+be+bf.$$

Ezzel most az algebrai szorzásnak alapvető törvényét állapítottuk meg. Így hangzik: többtagút többtagúval úgy szorzunk, hogy először a második polinom első tagjával megszorozzuk az első minden egyes tagját (az előjel-szabályt figyelembe véve)[1] azután a második, harmadik stb. tagjával ismételjük meg ugyanazt, vagy viszont. Mert itten a kommutatív és disztributív törvény egymás mellett érvényesül. Bonyolultnak látszik a szabály, pedig nem más, mint amit már az elemi iskolában tanultunk. Sőt egyszerűbb, mert itten helyértékkel nem kell törődnünk. Erre csak később fogunk visszatérni. Előbb lássunk egy egyszerű szorzást algebrai polinomokkal (többtagú kifejezésekkel).

$$(7a+5b+8c+9d+e).(2f+4g+6h)=14af+10bf+16cf+18df+$$
$$+2ef+28ag+20bg+32cg+36dg+4eg+42ah+30bh+48ch+$$
$$+54dh+6eh.$$

Ezt a kifejezést immár nem lehet tovább egyszerűsíteni. Bizonyos módon ugyan még át lehetne alakítani, de ezzel nem most foglalkozunk. Látjuk, hogy a konkrét számokat, az együtthatókat, egyszerűen összeszoroztuk. Lényegében természetesen ezeknek a szorzása sem más, mint az általános a, b, c számoké. Csupán egy másik, különleges algoritmus értelmében az előbbieket össze tudtuk olvasztani. Tulajdonképpen először ezt kellett volna írnunk: $7a.2f$ vagy $7.2.a.f$, ugyanígy tovább: $5b.2f$ és $5.2.b.f$ stb. De szintúgy megeshetik, hogy valamilyen különleges algoritmus következtében az általános számok is összeolvaszthatók. Tegyük fel, hogy a következő szorzást kell elvégeznünk: $(2a+3b).(5a+7ab)$. Ez így festene:

$$(2a+3b).(5a+7ab)=5a.2a+5a.3b+7ab.2a+7ab.3b=$$
$$=10aa+15ab+14aab+21abb.$$

De azt már tudjuk, hogy $a.a$ és $b.b$ mit jelent. Ezzel a végeredmény: $10a^2+15ab+14a^2b+21ab^2$.

Legutóbbi példánkból új fogalmat szándékozunk levezetni. Még pedig a «tényező kiemelésének» a fogalmát. Ez a kiemelés a disztributív törvénynek következménye, más szempontból megfordítása. Külsőleg zárójelmentes kifeje-

[1] Itt ismét érvényes az előjelek kapcsolásának a szabálya: egyenlő előjelűek szorzata pluszt, különböző előjelűek szorzata minuszt ad.

zést alakítunk át ezzel zárójeles kifejezések szorzatává, vagy esetleg csak egyetlen egy tényezővel szorzott zárójeles kifeezéssé. Példaként legutóbbi eredményünket használjuk fel:

$$10a^2+15ab+14a^2b+21ab^2.$$

Ha azt kérdezzük, melyik szám szerepel minden tagban, első pillantásra látjuk, hogy az a megfelel ennek a követelésnek. Most tehát az a tényezőt kiemeljük.

$$10aa+15ab+14aab+21ab^2$$

Mi lesz a másik tényező? Természetesen $10a+15b+14ab+$ $+21b^2$. Tehát a fenti eredmény helyett a következőt is írhatjuk: $a(10a+15b+14ab+21b^2)$, tekintve, hogy a szorzás elvégzése az eredeti kifejezést adná. De más módon is kiemelhetünk. Például:

$2(5a^2+7a^2b)+3(5ab+7ab^2)$ vagy
$10a^2+b(15a+14a^2+21ab)$ vagy
$10a^2+15ab+7ab(2a+3b)$ vagy
$10a^2+ab[15+7(2a+3b)]$ vagy
$a\{10a+b[15+7(2a+3b)]\}$ és így tovább.

A «kiemelés», bonyolultabb kifejezések esetén gyakorlatot kíván. Jelentősége igen nagy lehet, mert például oly törteknél, amelyeknek számlálója is, nevezője is algebrai kifejezés, rövidítést tehet lehetővé. De ne kapkodjunk előre. Lássuk disztributiv törvényünket negatív számok esetén. Írjuk fel magunknak a következő feladatot, egyelőre algebrai összeg alakjában: $[(+a)+(-2b)].[(+c)+(-3d)]$, akkor az eredmény:

$$(+c).(+a)+(+c).(-2b)+(-3d).(+a)+(-3d).(-2b)=$$
$$=ac \quad - \quad 2bc \quad - \quad 3ad \quad + \quad 6bd.$$

Ugyanezt kaptuk volna akkor is, ha egyszerűen így számolunk: $(a-2b)$ $(c-3d)=ac-2bc-3ad+6bd$. Ismét érvényes az a szabály, hogy egyenlő előjelek szorzata pluszt, különböző előjeleké pedig mínuszt eredményez. Most kérdezzük, hol vannak a második esetben az előjelek? Felelet: a számok előtt keresendők, mint «összevont parancsok».

Most kibővítjük előjel-, illetve parancskapcsolási szabályunkat. Azt mondjuk: ha szorzásnál több előjel kerül össze, azaz össze kell őket kapcsolnunk, akkor tetszés szerinti számú plusz mindenkor ismét pluszt fog eredményezni. Viszont csak párosszámú minusznak a szorzata lesz plusz, mert a mínuszokból csak mindig kettő-kettő ad pluszt. Páratlan számú mínusznak a szorzata ismét mínuszt ad. Ha vegyesen kerülnek össze, akkor a pluszok számára való tekintet nélkül pozitív az eredmény, ha a szorzatban páros számmal vannak a mínuszok. Ellenkező esetben negatív az eredmény. Összefoglalva:

$(+a).(+b).(+c)=(+abc)$	tényezők száma	páratlan
$(+a).(+b).(+c).(+d)=(+abcd)$	« «	páros
$(-a).(-b).(-c).(-d)=(+abcd)$	« «	páros
$(-a).(-b).(-c) \quad =(-abc)$	« «	páratlan
$(+a).(+b).(+c).(-d).(-e)=(+abcde)$	mínuszok száma	páros
$(+a).(+b).(-c).(-d).(-e)=(-abcde)$	« «	páratlan.

Mostan már, kellő figyelemmel bármilyen egészszámú, algebrai szorzást el tudunk végezni. Számítsunk ki tehát egy valamivel bonyolultabb példát.

$$(5ab+3ad+9bc).(abc-6de)=$$
$$=5a^2b^2c+3a^2bcd+9ab^2c^2-30abde-18ad^2e-54bcde.$$

További példa:

$$(a-b).(2a+3b)=2a^2-2ab+3ab-3b^2.$$

Itt olyasmi bukkan fel, amivel eddig még nem találkoztunk. Ugyanis az ab tag kétszer fordul elő. Egyszer mint $(-2ab)$, azután mint $(+3ab)$. Ezeket összeadhatjuk vagy kivonhatjuk egymásból, hisz éppen olyan algebrai mennyiségek, mint akár az a, akár a b magában. Tehát: $(-2ab)+$ $+(+3ab)=1ab$ vagy ab. Tehát a végeredmény: $2a^2+ab-3b^2$. Ilyen összevonásnál nagyon is tanácsos a legnagyobb óvatosság és a leggondosabb, tiszta írás, nehogy tévedjünk. Csak akkor szabad összeadni, vagy kivonni, ha az egész csoport azonos. Mint a $7a^2$ és $4a^2$, vagy $5abc^2-3abc^2$ esetében. De lehetetlen a következő két tag összevonása egyetlen taggá: $5abc^2-3ab^2c$. Mert az abc^2 kifejezés ugyanannyira különbözik az ab^2c kifejezéstől, mint az alma a körtétől, habár hasonlók.

Hasonlóság nem jeent semmit, csak feltétlen és tökéletes azonosság tehet lehetővé összeadást és kivonást!

Most ismét másik algoritmust fogunk általánosan megvizsgálni, a hatványozást. Azt már tudjuk, hogy mi a hatványozás. Építő, összerakó, szintétikus, másképp tetikus számítási művelet, amelynél egy számot, az alapot annyiszor kell tényezőnek venni, ahányszor a kis kitevő, jobbra fent, megköveteli. $a^2=a.a$, $a^3=a.a.a$, $a^6=a.a.a.a.a.a$ stb. Miképpen szorzok össze hatványokat? Keressük, mondjuk, a^2 és a^7 szorzatát. Írjuk:

$$(a.a)\times(a.a.a.a.a.a.a).$$

Minthogy csupa szorzás szerepel, írhatom:

$$a.a.a.a.a.a.a.a.a.$$

Milyen viszonyban van az új kitevő, 9, a régi 2 és 7 kitevővel? Egyszerű: 9 a 7 és a 2 összege. Az eset tulajdonképpen teljesen világos. Minden kitevő azt kívánja, hogy az alapot annyiszor szorozzam önmagával, ahányszor ő mutatja. Ha több azonos alapú hatványt szorzással kapcsolok össze, akkor annyiszor kell a közös alapot tényezőül vennem, ahányszor összesen kívánják, tehát ahányszor összegük kívánja. Ezek szerint $a^{15}.a^6=a^{15+6}=a^{21}$; és $b^{10}.b^{11}.b^7=$ $=b^{10+11+7}=b^{28}$ és így tovább. Ha a szabályt egészen általánosan akarom felírni, akkor írhatom, hogy $a^n.a^m.a^r.a^s=$ $=a^{n+m+r+s}$ vagy $b^c.b^d.b^f=b^{c+d+f}$. Most más feladatot adok magamnak. Mi történik, ha hatványt hatványozni akarok? Mondjuk a^3 az ötödik hatványra emelendő, $(a^3)^5$. Ezt meg kell fontolnunk. Mit jelent ez? Nem mást, mint:

$$a^3.a^3.a^3.a^3.a^3=a^{3+3+3+3+3}=a^{5.3}$$

A szabály megint nagyon egyszerű. Ha hatványt hatványozok, a kitevőket össze kell szoroznom. Általánosan: $(a^n)^m$, vagy bonyolultabb esetre: $[(b^a)^m]^r=b^{amr}$.

Kiegészítésül ismételjük, hogy minden szám nulladik hatványa az egység. Az általános írásmód birtokában már írhatjuk: $a^0=1$, ahol a tetszésszerinti nagy, de véges számot jelenthet. Továbbá $a^0a^n=a^{0+n}=a^n$, aminthogy $1.a^n=a^n$ Természetesen $a^1.a^n=a^{n+1}$. Ha végül azt kérdezzük, hogy mennyi $[(a^0)^3]^5$, kiderül, hogy $a^{0 \cdot 3 \cdot 5}$, tehát a^0 vagyis 1. Természetes, hisz a^0 magában is 1 és egynek minden hatványa csak egy marad. Mert az egyet annyiszor írhatom tényezőnek, ahányszor csak akarom, anélkül, hogy az egytől különböző eredményt kapnék.

A dolgok mélyébe látó olvasóm észreveheti, hogy itten a három tetikus számítási mód együtt működik. Hatványozás nem egyéb, mint önmagával való szorzás. Hatványok szorzása a kitevők összeadását kívánja. Hatvány hatványozása kitevők szorzását vonja maga után. Itt csak arra mutatunk rá, hogy az egész algoritmus csak összeadások egymásra halmozása, mindenkor megadva, hogy hányszor kell összeadni. Mert $3^2=3.3$ nem egyéb, mint 3 háromszor összeadandóként, tehát $3+3+3$. És $3^2.3^3=3^5=3.3.3.3.3$ ismét nem más, mint 3, háromszor-háromszor-háromszor-háromszor, vagyis 81-szer önmagához adva. De ez összesen 243, vagy 3^5.

Aki a számológépeket ismeri, az könnyen megérti ezt. Minden úgynevezett szorzógép éppen azon alapszik, hogy a szorzandót addig összegezi, míg a szorzási parancs nem teljesült. Vagyis addig sorakoztatjuk ugyanazt az összeadandót egymás után, amíg csak a szorzó kívánja. Hogy ne okozzunk zavart, ezt a gondolatsort félbeszakítjuk és csak annyit állapítunk meg, hogy eddig minden tetikus művelet a közvetlenül alacsonyabból származott. Így, ha az összeadás, szorzás, hatványozás sorrendet tekintjük, minden szorzás a szorzótól meghatározott számú, a szorzandóval azonos tagnak összegezése, minden hatványozás pedig azonos tényezőknek, az alapnak, ismételt szorzása, ahol a tényezők számát a kitevő adja meg.

Jogosan gyaníthatjuk most, hogy az osztás ugyanígy függ össze a kivonással. Gyanúnk teljesen jogosult, amint egy teljesen egyszerű példa mutatja. Vonjunk ki egymásután ismételten 120-ból 13-at, akkor ezt kapjuk:

120—13=107	(1. kivonás),	55—13=42	(6. kivonás),
107—13= 94	(2. kivonás),	42—13=29	(7. kivonás),
94—13= 81	(3. kivonás),	29—13=16	(8. kivonás),
81—13= 68	(4. kivonás),	16—13= 3	(9. kivonás).
68—13= 55	(5. kivonás),		

Tovább pozitiv számokkal nem tudjuk folytatni. Kilencszer tudtunk kivonni és 3 maradt. Az osztás eredménye

$$120 : 13 = 9,$$

$$\cdot\cdot 3 \quad \text{tehát pontosan ugyanaz.}$$

Lelepleztük az osztást, kiderült, hogy ismételt kivonás, miként a számológépek minden ismerője tudja. Az osztás alapkérdése tehát nem csak az lehet: hányszor foglaltatik az osztó az osztandóban és mi a maradék? Éppen annyira jogosult az a kérdés is, hogy: hányszor vonhatom le ugyanazt a mennyiséget az osztandóból és mi marad, ha nem akarok negativ számok közé jutni?

Lássuk azonban az osztási algoritmus hatalmas előnyét az ismételt kivonás fölött. Az utóbbinál kilenc kivonást kellett végeznünk, mindegyik külön hibaforrás, az előbbi egyetlen fogással már az eredményt adja meg. Számológép megengedheti magának az ismételt kivonás fényűzését, s mert fogaskerekei csak helyesen tudnak dolgozni, nem tévedhet. Másodszor alkatrészeinek fordulatszáma tetszésszerint fokozható (ma már elektromotorral forgatják őket). Harmadszor írásban történő osztásunk aligha utánozható géppel, mert a nélkülözhetetlen beszorzásokat a gép éppen ismételt összeadásokkal végezné el. De ezt megint csak mellékesen. Most jutottunk arra a pontra, hogy általános kutatásaink részleges lezárásául az általános számok osztásával kell foglalkoznunk. Ismét a legegyszerűbbel kezdjük. Mennyi $a : b$? Felelet: nem egyéb, mint $a : b$. Az osztás nem felcserélhető, nem kommutativ művelet, a kivonáshoz hasonlóan egy irányban oldódik, egyfelé irányított. Legfeljebb másképpen írhatjuk, így talán: $\frac{a}{b}$. Ez nem nyereség, csak más írásmód, a parancs másképpen történt feljegyzése. Ugyanúgy, amint ab ugyanaz mint $a.b$ és $a \times b$. Az osztásra elvégre azt is írhatnók, hogy «*a* per *b*», «*a* osztva *b*-vel», vagy «*a* törve *b*-vel». Sőt esetleg azt is, hogy *a* aránylik a *b*-hez.

Miként a szorzásnál, itt is három esetét fogjuk az általános számok osztásának megvizsgálni. Mégpedig: magukban álló, általános mennyiségeknek együtthatóval és anélkül tanusított viselkedését, hatványokét és végül többtagú kifejezések (polinomok) viselkedését.

Magában álló mennyiségekkel, ha különneműek ($a : b$), említettük, nincs mit tenni. Oly paranccsal állok szemben, amelyet csak akkor tudok teljesíteni, ha az általános számok helyébe már behelyettesítek. Pl. $a=12$, $b=3$. Akkor persze $a : b=12 : 3=4$. De más lehetőségek is vannak. Mennyi $3a : a$? Ezzel azt kérdezzük, hogyan aránylik három alma egyhez. Vagy azt, hányszor van meg az egy alma a háromban? Világos a válasz. $3a : a=3$. Általánosan: $n.a : a=n$. Ugyanígy $15a : 3a=5$ és $ba : a=b$. Minthogy továbbá minden szám önmagával osztva egyet ad eredményül, $a : a=1$. Azt hiszem, beláthatjuk, hogy $25abcd : 5ac=5bd$. Csak az osztás «próbáját» kell szem előtt tartani. Utóbbi esetben $5bd.5ac=?$ Beszorozva azonnal megkapjuk, hogy $25abcd$ és állításunk beigazolódott. Itt tehát nincs további nehézség.

Lássuk most a hatványok viselkedését az osztáskor. Írjuk őket először szorzásnak. Mennyi

$$(a.a.a.a.a.a) : (a.a.a)=?$$

Az első zárójelben foglalt mennyiséget először a-val, majd ismét a-val, végül megint a-val kell osztanom, mert mellékes, hogy 27-et $9=3\times3$-mal, vagy először 3-mal és újból 3-mal osztom. A fenti osztás eredménye, eddigi tapasztalataink szerint

$$a.a.a.1.1.1=a.a.a$$

Vagyis $a^6 : a^3=a^3$. Továbbá $(b.b.b.b.b.b.b) : (b.b)$ egyenlő $b.b.b.b.b.1.1=b^5$ és tanulság $b^7 : b^2=b^5$. A szabály már világos. Ismét amolyan tükörképszerű jelenséggel van dolgunk és tisztán látjuk a két litikus műveletnek, a kivonásnak és az osztásnak a kapcsolódását. Mert $a^6 : a^3=a^{6-3}$ és $b^7 : b^2=b^{7-2}=b^5$. Nekünk, régi matematikusoknak már nincs sok beszélnivalónk, megalkotjuk a képletet $a^m : a^n=a^{m-n}$ ez $a^m : a^m=a^{m-m}=1$ esetén azonnal beválik és használható algoritmusnak bizonyul. Természetesen $a^m : a=a^{m-1}$ és $a^m : a^0= =a^m : 1=a^{m-0}=a^m$. Minden ellenőrző próbának helyes eredményt kell adnia. Például $a^m : a=a^{m-1}$; próba $a.a^{m-1}=$

$=a^1 . a^{m-1}=a^{1+m-1}=a^m$. Befejezésül még egy bonyolult példát, amelynél számos algoritmus játszik közre:

$$39a^7b^5c^rd^{m+2} : 13a^4c^sd^3=3a^{7-4} . b^5 . c^{r-s} . d^{m+2-3}=$$
$$=3a^3b^5c^{r-s}d^{m-1}.$$

Itt meg kell jegyeznünk, ha egy tényező nem fordul elő az osztóban,[1] akkor úgy tekintendő, mintha az illető alap a nulladik hatványon (egyenlő 1) szerepelne. Példánkban $39a^7b^5c^rd^{m+2} : 13a^4b^0c^sd^3$, kiszámításnál b-re $b^{5-0}=b^5$ adódik, tehát az eredményen mit sem változtat. Általában — már a tizesrendszernél tapasztaltuk — a nulladik hatvány bevezetése sokszor elegáns kiegészítése és kikerekítése lesz a törvényszerűségeknek.

Rövid előzetes megjegyzés után nekivágunk egyelőre legbonyolultabb feladatunknak, a többtagúak osztása tanulmányozásának. Ilyen kifejezéseknél vannak bizonyos rendezési elvek, amelyek gyakran nélkülözhetetlenek, habár a «rendezés» a kifejezésen, nagyságra, nem változtat semmit. Minden katona tudja, hogy egy század létszáma, harcereje alig változik attól, hogy menetalakzatban vagy díszelgésnél az össze-vissza álló katonákat nagyság szerint sorakoztatom fel. Mégis vannak előnyeim. Ha vonalból menetoszlopot alakítok, akkor a legnagyobb emberek mennek, kettős rendekben, az oszlop élén és hatalmas lépteikkel tempóban, magukkal ragadják a mögöttük menetelő, mindinkább kisebb társaikat. Kanyarodásoknál is, vonalban, rendesen a legkisebb ember a forgáspont, míg a szárnyon álló legnagyobb embernek kell a legnagyobb utat megtennie. Röviden: menetnél beválik rendezési módunk, mert bizonyos szempontokból meghatározott viszonyokat teremt s ezeket különleges célokra jól fel lehet használni.

Ilyen rendezési elvekkel már találkoztunk. A helyértékrendszerek «nagyságrendje» volt ilyen. Nem más, mint a számoknak az alapszám növekvő vagy fogyó hatványi szerinti kifejtése; növekvő vagy fogyó, aszerint, hogy elölről, vagy hátulról tekintjük a számot. Tizesrendszerünkben mindenkor

[1] Később még arról az esetről is fogunk beszélni, ha az osztandóban nem fordul elő.

a tíz fogyó hatványai szerint írunk balról jobbra. Mert 91.435 annyi mint $9.10^4+1.10^3+4.10^2+3.10^1+5.10^0$.

A felírásnak ezt a módját algebrai kfejezésekre is átvihetjük, valahányszor a hatványkitevők konkrét számok, vagy valamely mellékfeltételből ismerjük az általános hatványkitevők sorrendjét.

$a^3+a^7+a^4-a^2+a^{16}-a^5$ fogyó hatványok szerint rendezve így írható

$$a^{16}+a^7-a^5+a^4+a^3-a^2.$$

De ha $a^m+a^r+a^s-a^b-a^d+a^h$ kifejezést kellene rendeznünk és tudnók, hogy az ábécé hátrább levő betűje, bár még határozatlan, mégis biztosan nagyobb számot jelent mint az előbb álló betű, akkor fogyó hatványok szerint így rendeznők

$$a^s+a^r+a^m+a^h-a^d-a^b.$$

De mivel megszoktuk, hogy algebrai dolgainkat általánosan intézzük el, elveink további keresztülvitelénél bizonyos nehézségekre bukkanunk. Ugyanabban a tényezős kifejezésben különféle hatványok is előfordulhatnak, mint a $19a^2bc^7d^4$ vagy $5a^7b^3c^5d^9$ kifejezésekben. És kiderülhet továbbá, hogy mialatt az a hatványai szerint rendezünk, a b hatványait összekeverjük; b szerint rendezve az a hatványai keverednek, c szerint rendezve a, b és d hatványai zavarodnak össze és így tovább. Természetesen nincs más megoldás, mint elhatároznunk, hogy milyen elv alapján *akarunk* rendezni. Ha a könyvespolc könyveit nagyság szerint rendezzük, nem rendezhetjük őket ugyanakkor tartalom szerint is, hacsak a tartalom és a nagyság már eleve nem függött össze valamiképpen.

Most vágjunk neki merészen a többtagúak osztásának, minthogy már minden szükséges előzetes ismeretnek birtokában vagyunk. Vegyük talán a következő gonosz külsejű kifejezések osztását.

$$(10a^4b+35a^5h+45a^6b^2h-4abc^2h-14a^2c^2h^2-18a^3b^2c^2h^2):$$
$$:(-2c^2h+5a^3).$$

Első szabály: mindkét többtagú az első általános szám, tehát most az *a* betű fogyó hatványai szerint rendezendő. Tehát írjuk:

$$(45a^6b^2h+35a^5h+10a^4b-18a^3b^2c^2h^2-14a^2c^2h^2-4abc^2h):$$
$$:(5a^3-2c^2h)=?$$

A további eljárás hasonlít a tizesrendszer osztásához. Megnézzük ugyanis, hogy az osztó első tagja ($5a^3$) hányszor van meg az osztandó első $45a^6b^2h$ tagjában. Beszorzunk, vagyis az első eredményt az osztóval megszorozzuk és az osztandóból, illetve az osztandó megfelelő tagjaiból kivonjuk. Ha nem találunk megfelelő tagot, akkor a le nem vonható tagot a «maradékhoz» csatoljuk. Most megnézzük, hogy az osztó első tagja hányszor van meg a maradéknak az első általános számot legmagasabb hatványon tartalmazó tagjában. Az eredmény a hányadosba kerül. Ismét beszorzunk. És így tovább. Tehát ez a számítás menete:

$$\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{7}{l}{(45a^6b^2h+35a^5h+10a^4b-18a^3b^2c^2h^2-14a^2c^2h^2-4abc^2h):(5a^3-2c^2h)=} \\
\pm 45a^6b^2h & & & \mp 18a^3b^2c^2h^2 & & & & =9a^3b^2h+7a^2h+2ab \\
\hline
0 & +35a^5h & & 0 & -14a^2c^2h^2 & & \\
 & \pm 35a^5h & & & \mp 14a^2c^2h^2 & & \\
\hline
 & 0 & +10a^4h & & 0 & -4abc^2h & \\
 & & \pm 10a^4h & & & \mp 4abc^2h & \\
\hline
 & & 0 & & & 0 &
\end{array}$$

Az osztás kiment (amint mondani szokás) és az eredmény ($9a^3b^2h+7a^2h+2ab$), tehát szintén az *a* fogyó hatványai szerint rendezett polinom. A fenti mintához még azt a megjegyzést fűzzük, hogy a kivonást szimbolikusan az előjelek megváltoztatásával jeleztük, mert tudvalevő, hogy a minusz hatása az előjelek megváltozása. Így kettős előjeleknél csak az alsó érvényes. Hogy még világosabban lássunk: az első beszorzásnál eredményként ($45a^6b^2h-18a^3b^2c^2h^2$) kifejezést kaptuk. Az osztandóban is megtaláljuk ezt a két tagot. Most ezt írhatnók: az osztandóból ($45a^6b^2h-18a^3b^2c^2h^2$), levonva belőle a beszorzás eredménye ($45a^6b^2h-18a^3b^2c^2h^2$), tehát ($45a^6b^2h-18a^3b^2c^2h^2$) $-$ ($45a^6b^2h$ $-$ $18a^3b^2c^2h^2$) $=$ $45a^6b^2h$ $-$ $-18a^3b^2c^2h^2-45a^6b^2h+18a^3b^2c^2h^2$, ez nyilvánvalóan nullát eredményez. Hogy tovább oszthassunk, megkeressük az *a*-nak, kivonás által még el nem tűnt, legmagasabb hatványú tagját, ez $35a^5h$. Áttekinthetőség kedvéért ugyanúgy leírjuk a vonal alá, mintha maradék volna és a fentiek szerint járunk el továbbra is.

Egyáltalán nem feladatunk, hogy számolóművésszé képezzük ki magunkat. Gyakorlás céljára bármely középiskolai tankönyvben gazdag választékát találjuk a példáknak. Mivel nekünk mások a céljaink, a matematikának a szerkezetét, vázát, alakját akarjuk megismerni, hogy az integrálszámítással is meg tudjunk birkózni, megelégszünk azzal, hogy felírunk az algebra állandó (határozott) számokkal foglalkozó részének befejezéséül két ártatlan osztási feladatot.

$$
\begin{array}{l}
(a^2-2ab+b^2):(a-b)=(a-b) \\
\underline{\pm a^2 \mp ab} \\
0 - ab+b^2 \\
 \underline{\mp ab \pm b^2} \\
 0 \quad 0
\end{array}
$$

További feladat:

$$
\begin{array}{l}
(a^3+b^3):(a+b)=a^2-ab+b^2 \\
\underline{\pm a^3 \mp a^2b} \\
0 - a^2b+b^3 \\
 \underline{\mp a^2b \mp ab^2} \\
0 + ab^2+b^3 \\
 \underline{\pm ab^2 \pm b^3} \\
0 \quad 0
\end{array}
$$

Ezzel jelentősebb nyugvóponthoz értünk. Uralkodunk már a négy alapműveleten, összeadáson, kivonáson, szorzáson és osztáson, ezeken kívül a hatványozáson, egész számokkal valamennyi számrendszerben és általános, algebrai számokkal. Ezzel felfegyverkeztünk, hogy bizonyos korlátokon belül a matematikai rejtvényfejtéshez foghassunk, az ismeretlen x-re vonatkozó tanokhoz, ez egyenletek megismeréséhez, amelyek hídként vezetnek át tudományunk felső és legmagasabb régióiba.

TIZENKETTEDIK FEJEZET

Közönséges törtek

Még egy kis dombocskán kell túljutnunk, hogy azután szabadon mozoghassunk a matematikai rejtvények síkságán. Az osztásnak különleges írásmódjáról van szó, amely elvi újítás jellegű algoritmusunkban.

Történeti sorrendben a kettőspont jelent meg legutoljára az osztás jeleként. Eddig mi úgyszólván kizárólag ezt használtuk az osztás jelölésére. Ezt a jelet is Leibniz szerencsés keze teremtette.[1] A törtvonal, mint az osztás jele sokkal régebbi eredetű.

Tört egyelőre nem jelent egyebet, mint véghez nem vitt, vagy egészszámú eredménnyel keresztül nem vihető osztást. Ezúttal kivételesen általános számokon kezdjük, mert azoknak nagysága, nagyságuk viszonya semmiképpen sincsen meghatározva, így a tört típusaként felírhatjuk az $\frac{a}{b}$ kifejezést. Ennek a jelentése *a* törve *b*-vel, *a* per *b*, *a* osztva *b*-vel, $a:b$, vagy *a* viszonylik *b*-hez. A törtvonal feletti szám a számláló, az alatta levő a nevező. Ha számláló 1, tehát általánosan $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ stb., akkor egységtörtről beszélünk. Ha a számláló kisebb mint a nevező, akkor valódi törttel van dolgunk; általánosan ezt úgy lehetne írni, hogy $\frac{a}{b}$ valódi tört, ha $a<b$.[2] Az ez alkalommal először előforduló egyenlőtlenségi jel ($>$, $<$) hegye mindenkor a kisebb szám felé fordul, nyílása pedig a nagyobb felé. Természetesen visszafelé is lehet olvasni, jobbról balra, s egyformán jogos kijelentés az $(5+7-2) > (1+3-2+1)$ kifejezés kiszámítása után az, hogy 10 nagyobb mint 3 és az, hogy 3 kisebb mint 10.

[1] «De maximis et de minimis» című értekezésében. Acta eruditorum. 1684.

[2] Ha *a* és *b* pozitív számokat jelentenek.

De visszatérve törtjeinkhez, akkor mondják az $\frac{a}{b}$ törtet valódinak, ha pozitív a és b esetén $a<b$. És akkor nemvalódi vagy áltörtnek, ha $a>b$. Konkrét számokhoz visszatérve $\frac{1}{3}$ egységtört és egyúttal valódi tört is, $\frac{2}{3}$ valódi tört. $\frac{6}{4}$ vagy $\frac{3}{2}$ áltörtek, mert egészszámok és törtek összegeként is írhatók. Értékük ugyanis $1+\frac{2}{4}$ vagyis $1+\frac{1}{2}$.

A régi egyiptomiak és görögök számításaiban az egységtörteknek nagy szerep jutott. $\frac{7}{29}$ helyett az egyiptomiak az $\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$ egységtörteket írták és Görögországban is mindennaposak voltak a hasonló felbontások. Ma már el szoktuk hanyagolni az egységtörtekre bontást, minthogy mindennemű törttel könnyen és biztosan tudunk bánni. Csupán az integrálszámításban játszik még némiképpen hasonló eljárás szerepet, az úgynevezett részlettörtekre való bontás.

De a tört fogalma másra is megtanít minket. Rajta szerezzük első tapasztalatainkat gy szám részeiről. $\frac{1}{3}$ az egységnek a harmada, $\frac{5}{7}$ ötnek a hetede. Itt tehát valami olyan mutatkozik, mégpedig a valódi törteknél, ami a felosztás fogalmán túlmegy. Itt már nem az a kérdés, hogy valamely egész számot mily egészszámokra tudom felosztani, mint $12:3=4$ esetén például, amikor négyszer háromból keletkezettnek tekintem a tizenkettőt, vagy ahol a 12-ből a 3 által lesz a 4; hanem most az a feladat, hogy milyen közbenső számokat találhatok az egészszámok között, egészszámok osztása segítségével. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{29}{38}$ értéke egyaránt 0 és 1 közé esik. És végtelen sok ilyen számot tudunk felírni, amelyek mind 0 és 1 közé esnek, csupán a számlálót kell mindenkor kisebbnek választanunk a nevezőnél. Ezek szerint valamennyi valódi tört 0 és 1 közé esik. Értékük változatlan számláló esetén annál kisebb, minél nagyobb a nevezőjük. $\frac{2}{25}$ nagyobb mint $\frac{2}{729}$, s ez mindenkinek világos, akinek csak valami fogalma van a részekre bontás lényegéről. Ha a számláló és a nevező azonos, akkor az egység más írásmódjáról van szó. Mert $\frac{a}{a}$ ugyanannyi mint $a : a$, ez utóbbi pedig mindenkor eggyel egyenlő. Ha a számláló 0 akkor a tört értéke természetesen szintén 0. Ha viszont a nevező 0, akkor a legnagyobb zavarban vagyunk. Valamit semmivel kellene osztanunk. Tehát $a : 0 = ?$ Ha a megoldás próbáját akarjuk megcsinálni, akkor olyan számot kell keresnünk, amely 0-val szorozva a-t ad. Szemmel látható, hogy lehetetlen a kívánság, mert bármely, mégoly nagy szám is, nullával szorozva nullát ad. De ha másképpen számolunk, (majdnem azt mondanám, hogy nem «sztatikusan», hanem «dinamikusan»), akkor következőképpen okoskodhatunk: 5 osztva 100-zal 5 századot ad eredményül. 5 osztva 47-tel már sokkal több. Többet kapunk, ha az osztó 21, még többet, ha 7, annál is többet, ha 5, ez utóbbinál 1 az eredmény. Ha 3-mal osztunk, az eredmény $\frac{5}{3}$, azaz $1\frac{1}{3}$, ha 2-vel osztunk, az eredmény $\frac{5}{2}$, vagyis $2\frac{1}{2}$, végül 1 esetén a hányados 5. Ha most sorban valamennyi 1 és 0 közt fekvő számmal osztanánk, tehát valamennyi valódi törttel, például $\frac{5}{\frac{1}{20}}$, $\frac{5}{\frac{1}{365}}$, akkor nagyon gyorsan növekedő értékeket kapnánk. Mert $5 : \frac{1}{20}$ már 100, $5 : \frac{1}{365}$ pedig 1825, $5 : \frac{1}{100{,}000}$ pedig már 500,000 és így tovább. A nulla maga kisebb minden törtnél, ha annak *még oly nagy* is a nevezője. $\frac{5}{\frac{1}{\text{nagyon nagy szám}}}$ eredménye mindenkor ötszöröse a nagyon nagy számnak tehát még nagyobb. De nincsen olyan nagy szám, amelyik a tört magában is törtalakú nevezőjét nullává tenné. Mert $\frac{1}{\text{nagyon nagy szám}}$ még mindig nagyobb nullánál. Tehát $\frac{5}{0}$ nagyobb minden elképzelhető nagy számnál. S még annál is nagyobb. Erre a folyamarra kell gondolni, amikor azt mondjuk röviden, hogy $\frac{5}{0}$ végtelennel egyenlő. Jelekkel $\frac{5}{0} = \infty$

Mindaz, amit mi itten csak olyan felületesen számolgattunk, tulajdonképpen már a végtelen analizishez tartozik és határérték-megállapítás, «limes-megállapítás» a neve. Nem állíthatom ugyanis, hogy $\frac{5}{0}$ *egyenlő* végtelennel, csupán azt, hogy a végtelenbe növekszik. Azt, hogy oly határhoz (latinul limes=határ) közeledik, amelyet végül is csak a végtelen fejez ki tekintve, hogy a nagy, nagyobb, legnagyobb, legeslegnagyobb, sokszorosan legeslegnagyobb fokozást tetszés szerint folytathatom, de a képzés törvénye, a növekedés változatlanul fennmarad.

Szándékosan nyujtunk megfelelő helyen kilátást végcélunkra, ha mégúgy óv is ettől ellenfelünk. Mert azt hisszük, hogy az «alsóbb matematika» éppen attól nyeri kellemetlen, szakadozott, meg nem nyugtató jellegét, hogy ilyen helyzetben rendszerint dogmákra utal, vagy kerülgeti a dolgokat, mint a macska a forró kását. Mi nem kerülgetjük, hanem nyiltan kimondjuk: azon állítás, hogy $a:0=\infty$ lehetetlenség, mert $\infty . 0$ mindaddig csak nullát adhat eredményül, amíg a dolognak tisztán a sztatikus oldalát tekintjük. De mihelyst a nullát közelítéssel nyert minden képzelhetőnél kisebb számnak, valamely folyamat határértékének tekintjük, a végtelent pedig valamilyen ködös óriásszámnak és szintén határértéknek, akkor algoritmusunk sérelme nélkül írhatjuk, ha rövidítve is, hogy $a:0=\infty$. Hasonló különleges dologgal már eltűnő négyszögünk esetében is találkoztunk, sőt ottan $0:0$ értékének meghatározása volt a feladatunk.

De kitérésünk még egy különleges eredményhez vezet. Mivel minden, tetszésszerinti szám (esetünkben az 5, hisz azt vaktában választottuk) az előbbiek szerint nullával osztva végtelent ad eredményül, a művelet próbájának is sikerülnie kell. Ezek szerint: $5:0=\infty$, tehát $0 . \infty = 5$; ugyanez igaz azonban $7:0$ vagy $530:0$ esetére is, vagy bármely véges a szám esetére is. Így tehát $0 . \infty$ bármely véges számot jelenthet. Ez az első eset, hogy valamely számítási műveletünk eredménye határozatlan.

De már most vétkesen nagy távolságra csavarogtunk el «törtjeinktől». S még messzebb kell elmennünk, mivel az imént azt a szót ejtettük ki, hogy «arány» (más szóval viszony). Milyen mellékértelmét jelenti az osztásnak, ha azt mondom, hogy «a aránylik a b-hez» és ezt úgy írom, hogy $a:b$ vagy $\frac{a}{b}$? Legegyszerűbben akkor fogjuk a dolgot megérteni, ha feladatunknak valamilyen mérési, geometriai értelmet adunk. Megmérjük egy derékszögű négyszögalakú asztallap méreteit és hosszát 6 méternek, szélességét 2 méternek találjuk. Minden gyerek azonnal rámondja, hogy a hosszúság úgy aránylik a szélességhez, mint 6 a 2-höz. Vagyis $6:2=3$, tehát az asztal 3-szor olyan hosszú mint széles. Az úgynevezett aránynál tehát az egyik összehasonlítandó (arányba állítandó) mennyiséget a másik mértékegységnek választom, mert azt is mondhattam volna, hogy a szélesség úgy aránylik a hosszúsághoz, mint $2:6$ vagy $\frac{2}{6}$ azaz $\frac{1}{3}$, vagypedig hogy az asztal egyharmad olyan széles mint hosszú. Valaminek a mértékét meghatározni nem más mint megmondani, hogy hányszor van meg az egység az egészben. De ez ismét nem egyéb, mint az egységgel történő osztás. Első esetben a szélesség volt az egység. A hosszúság három egységet tartalmazott. A második esetben a hosszúság volt az egység és a szélesség egyharmad egységnyi volt. De ha az egység keresését elhalasztjuk és valamilyen külső egységet vonunk be, például a métert, azt mondhatjuk, hogy a hosszúság úgy aránylik a szélességhez, mint 6 méter a 2 méterhez. Teljesen általánosan: a hosszúság a szélességhez, mint $a:b$, vagy $\frac{a}{b}$ valamilyen egységben kifejezve.

Ezt az egyenlőségi jellel azonosnak kívánt két arányt, aránypárnak, vagy aránylatnak hívják. Ilyen pl.

$$a:b=6:3 \text{ vagy}$$

$$27:9=15:5 \text{ másképp } \frac{27}{9}=\frac{15}{5}.$$

De mivel az aránylat nem egyéb mint egy kötött formájú egyenlet, megelégszünk eddigi utalásainkkal és részletes vizsgálatainkat az egyenletek tárgyalásánál fogjuk megejteni.

Most azonban már igazán vissza kell térnünk törtjeinkhez és a rájuk vonatkozó számítási szabályainkat, algoritmusunkat kell megvizsgálnunk.

Első az összeadás és a kivonás. A törtek, mellékesen már megállapítottuk, új, az egészszámok közé eső számok. A valódi törtek nagyságra a 0 és az 1 közt vannak, az áltörtek valahol másutt a számsorban. Természetesen a törteknek is van előjelük. Vagyis léteznek negatív törtek is.

Ha a közönséges törteket[1] tekintet nélkül arra, hogy valódi törtek-e vagy pedig áltörtek, új számoknak tekintjük, akkor számunkra ugyanazt a szerepet játszhatják mint az alma vagy a körte stb. Alma jelentse az egyharmadot, körte az egynegyedet, a citrom pedig az egyhetedet. A tört jellegét kizárólag a nevezője határozza meg. A tört nevét adja. $\frac{3}{4}$ az háromszor $\frac{1}{4}$. Tehát a számláló együttható jellegű és $\frac{1}{4}$ azt jelentheti, hogy $3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)$, vagyis három darab új, törtet jelentő körte. Ez egyszerű megfontolásból a törtek összeadásának és kivonásának algoritmusa azonnal következik. Csak egynevű törtek adhatók össze és vonhatók ki egymásból. Tehát összevonhatjuk, összeolvaszthatjuk, közös nevezővel írhatjuk őket, következőképpen

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-\frac{2}{3}+\frac{0}{3}=\frac{1+5+7-2-0}{3}=\frac{11}{3}=3\,\frac{2}{3}.$$

De ha a nevezők különbözők, akkor az új, közös nevezőt előbb meg kell keresnünk. Azt, hogy ez miként történik, azt hiszem, teljes joggal tekinthetem ismertnek, s csak egy példát kell felhoznom a legkisebb közös többszörösre.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{5}{8}-\frac{4}{13}=?$$

[1] A közönséges és tizedes törtek szétválasztásával később fogunk foglalkozni.

Itt a közös nevező 3.5.8.13, tehát 1560. Ahhoz, hogy valamennyi törtet 1560-ad részekké tegyem, természetesen a számlálókat is meg kell változtatnom, nehogy az egyes törtek értéke megváltozzék. $\frac{1}{3}$ 1560-adokban $\frac{520}{1560}$, s rövidítéssel meg is győződhetek erről. A gyakorlat azt a kérdést veti fel, hogy mivel kell a számlálót megszoroznom, hogy ugyanazt a törtet más nevezővel kapjam meg. Minthogy 1560 annyi mint 3.5.8.13, tehát $\frac{1}{3}$ annyi mint $\frac{520}{1560}=\frac{1.5.8.13}{3.5.8.13}$ és így tovább. Számításunk eredménye tehát a következő

$$\frac{1.5.8.13}{3.5.8.13}+\frac{2.3.8.13}{5.3.8.13}+\frac{5.3.5.13}{8.3.5.13}-\frac{4.3.5.8}{13.3.5.8}=$$
$$=\frac{520+624+975-480}{1560}=\frac{1639}{1560}.$$

Általánosan valamely összeadás vagy kivonás ilyen volna:

$$\frac{2a^2b}{5c}+\frac{3df^2}{7bh}-\frac{19\,abcd^2}{3h^2m}=$$
$$=\frac{2.7.3a^2b^2h^3m+3.5.3cdf^2h^2m-19.5.7ab^2c^2d^2h}{5.7.3bch^3m}=$$
$$=\frac{42a^2b^2h^3m+45cdf^2h^2m-665ab^2c^2d^2h}{105bch^3m}=$$
$$=\frac{42a^2b^2h^2m+45cdf^2hm-665ab^2c^2d^2}{105bch^2m}.$$

Azt hiszem fenti általános eset gondos tanulmányozása után a törtek összeadásának és kivonásának, valamint a közös nevező megtalálásának módja teljesen világos lett. Ha a közös nevező valamennyi nevező szorzata, akkor minden számlálót a többi tört nevezőjével kell megszoroznom, hogy egyforma nevezőjű, de változatlan értékű törteket kapjak.

De mivel a törteket úgy tekintettük, mintha névadó egységtörtből (1 törve a nevezővel) és együtthatóból (számláló).

állnának, azonnal megkaphatjuk a szorzás egyik szabályát. Törtet úgy szorozhatok, hogy a számlálóját (az együtthatót) szorzom. Háromszor egy heted egyenlő $3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{7}$. Vagy 6-szor $\frac{4}{29}=6\cdot4\cdot\left(\frac{1}{29}\right)=\frac{24}{29}$. Általánosan $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$. De mivel a tört nem csak a számláló növekedtével lesz nagyobb, hanem akkor is, ha a nevezőjét csökkentem, más módon is szorozhatok. Kétszer egy negyed egyszer egy féllel is azonos. Vagyis $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4:2}=\frac{1}{2}$, de ezt természetesen $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ számításmóddal is megkaphattam volna. Általában $a\cdot\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{b}{c:a}$. Ez utóbbi szabályt használjuk a «rövidítéshez». Például $9\cdot\frac{5}{27}$ így is írható $9\cdot\frac{5}{3.9}=\frac{5}{(3.9):9}$ az eredmény $\frac{5}{3}$. Ez ugyanaz, mintha $\frac{9\cdot5}{9.3}$-et 9-cel rövidítettem volna.

Ha törtet törttel kell szoroznom, akkor valamennyi számlálót és valamennyi nevezőt összeszorzom. Pl.:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}$$

vagy konkrét számokkal

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{9}{12}=\frac{90}{1008}=\frac{45}{504}=\frac{5}{56}.$$

A legutolsó példánál már előre «rövidíthettem» volna. Minden számlálót és bármelyik nevezőt szabad ugyanis együtt rövidíteni, hisz valamennyi számláló az eredményben tényezőként szolgáltatja az új számlálót és valamennyi nevező az új nevezőt. De ezt is joggal gondolhatom ismertnek, hisz az elemi számolni tudáshoz tartozik.

Most már csak a törtek osztása és hatványozása volna hátra. Vegyük a hatványozást előre, mert az a szorzásnak csak egy módosulata.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a.a.a.a.a}{b.b.b.b.b}=\frac{a^5}{b^5}.$$

A szabály tehát igen egyszerű és azt mondja, hogy a számlálót és a nevezőt egyaránt ugyanarra a kitevőre kell hatványoznom.

Ha törtet kell osztani, akkor semmiféle új szabályra sincs szükségünk. Minthogy a számláló az n-ed részek számát adja meg, egyszerűen a számlálót osztjuk. $\frac{3}{4} : 3$ természetesen $\frac{1}{4}$, ugyanúgy mint három alma osztva hárommal egy almát ad. Bonyolultabb a kérdés, ha törtet, vagy egy egészszámot kell törttel osztanunk. $5 : \frac{3}{4}$ nem képzelhető el azonnal. Csupán az bizonyos, hogy az eredmény nagyobb mint 5, mert $\frac{3}{4}$ kisebb mint 1. De mekkora az eredmény?

A régi egyiptomiak és görögök módjára az egységtörtekhez menekülünk. Igaz, kissé más módon. Következőképpen okoskodunk: ha 30 osztandó 15-tel, akkor nyugodtan írhatom helyette, hogy $30 : (5 . 3)$, mert ez ugyanaz. Rajtam áll a választás, hogy először 5-tel osztok, s azután az eredményül adódó 6-ot 3-mal és így kapom a helyes, 2, eredményt. Oszthatnám először a 30-at 3-mal és azután a 10-et 5-tel, az eredmény, 2, ugyanaz. Így járunk el a törttel is. Mivel 5 osztandó $\frac{3}{4}$-del, így írjuk $5 : \left(3 \cdot \frac{1}{4}\right)$. Osszunk először $\frac{1}{4}$-del. Ez utóbbi az egységben négyszer foglaltatik, 5 egységben tehát 20-szor. A huszat mostan tovább kell osztanom hárommal, az eredmény $\frac{20}{3}$ másképp $6\frac{2}{3}$. Lássunk egy másik példát. $7 : 5 = 7 : \left(\frac{1}{9}\right)$ A tört a 7 egységben 63-szor van meg, 63 tovább osztandó 5-tel. Az eredmény $\frac{63}{5}$ azaz $12\frac{3}{5}$. Ha közelebbről megnézzük az eljárást, felfedezhetjük, hogy az egységtört nevezőjével meg kell szorozni az osztandót, s azután a számlálóval, amely mint második tényező szintén ott van a zárójelben, el kell osztani az eredményt. Általában:

$$\text{Osztandó} : \frac{\text{számláló}}{\text{nevező}} = \text{osztandó} : \left(\text{számláló} \times \frac{1}{\text{nevező}}\right) =$$
$$= (\text{osztandó} \times \text{nevező}) : \text{számláló}.$$

De a legutóbbi eredményt ilymódon is írhatnám: osztandó : $\frac{\text{számláló}}{\text{nevező}}$ = osztandó $\times \frac{\text{nevező}}{\text{számláló}}$, mivel az előbbi végeredményt is írhattam volna $\frac{\text{osztandó} \times \text{nevező}}{\text{számláló}}$ alakban.

Ezzel eljutottunk a «reciprok érték» fogalmához. A reciprok értéket akkor kapjuk, ha a számlálót és a nevezőt felcseréljük. $\frac{3}{4}$ reciprok értéke $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{9}$ reciprok értéke $\frac{9}{5}$ és általánosan $\frac{a}{b}$-nek $\frac{b}{a}$. S mivel mindeddig csupán csak az «osztandóról» beszéltünk, de egyáltalán nem mondtuk, hogy annak egészszámnak kell lennie (annál is kevésbbé, hisz az osztással kapcsolatos minden művelet az osztóban játszódik le), most teljesen általánosan megállapíthatjuk, hogy valamely számot törttel úgy osztunk, hogy a tört reciprok értékével megszorozzuk. Tehát $n : \frac{a}{b} = n \cdot \frac{b}{a}$, ahol az n általános vagy konkrét, pozitív vagy negatív, egész- vagy törtszám egyaránt lehet. Így tehát

$$\frac{n}{m} : \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \cdot \frac{b}{a} = \frac{nb}{ma}$$

Kíséreljük meg új szabályunk szerint kiszámítani első példánk eredményét.

$$: \frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}; \quad 7 : \frac{5}{9} = 7 \cdot \frac{9}{5} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}.$$

Algoritmusunk tehát hibátlan. Sőt ezen kívül a józan ész is igazolhatja. Igaz, hogy ez az igazolás teljesen csak a legegyszerűbb esetekben tekinthető át. Ha ugyanis valamely számot $\frac{1}{2}$-lel osztok, világos, hogy az eredmény csak az osztandó kétszerese lehet. 2-szer, vagyis $\frac{2}{1}$-szer az osztandó, minthogy bármely egészszámot olyan törtnek írhatok, amelynek a nevezője 1. Futólag számítsunk ki még néhány példát:

$$\frac{5}{3}:\frac{6}{8}=\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{6}=\frac{40}{18}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$$

$$\frac{17}{19}:\frac{9}{13}=\frac{17}{19}\cdot\frac{13}{9}=\frac{221}{171}=1\frac{50}{171}.$$

Megfontolásaink a dupla-, emeletestört fogalmához vezettek, de ez nem egyéb mint más írásmódja törtnek törttel való osztásának. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ osztást így is írhatom $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$[1] és mindkét írásmód ugyanazt az eredményt, $\frac{ad}{bc}$, kell hogy szolgáltassa. Az $a:\frac{c}{d}$ osztás így is írható $\frac{a}{\frac{c}{d}}$ vagy $\frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}}$ és az eredmény $\frac{ad}{c}$. Ha végül az $\frac{a}{b}$ törtet kellene c-vel osztani, akkor duplatörtként $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}$-nek kellene írni és az eredmény $\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}$, azaz $\frac{a}{bc}$. Az utóbbi eset azt is megmutatta nekünk, hogy miként kell törtet egészszámmal osztani.[2] Mégpedig a törtnek tekintett egészszám reciprok értékével való szorzással. Tehát:

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{b.c}.$$

Ebből az eredményből ismét új számítási szabály következik. Minthogy két egészszám osztását mindenkor fel tudjuk törtek osztásaként írni, például így:

$$a:b=\frac{a}{1}:\frac{b}{1}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.$$

[1] Emeletes törtnél az úgynevezett «főtörtvonalat» hosszabbítássa vagy vastagítással feltűnővé szokás tenni.

[2] Természetesen törtet egészszámmal, ha lehetséges, úgy is lehet osztani, hogy a számlálón (együtthatón) hajtjuk végre az osztást. $\left(\frac{5}{6}:5=\frac{1}{6}\right)$

Láthatjuk, hogy egészszámok osztása helyett is bármikor az osztó reciprok értékével való szorzást tehetjük. Így:

$$100:25=100\cdot\frac{1}{25}=\frac{100}{25}=4.$$

Ez algoritmus sokszor nyer alkalmazást a gyakorlati számolásban és a számológépek szerkesztésénél és kezelésénél.

Most már elvi megvilágításhoz elegendő mértékben megismertük a közönséges törtek kezelését, tekintve, hogy nem a számolásban történő teljes kiképzés a célunk, s így hozzáfoghatunk a régen igért «egyenletek» tanulmányozásához.

TIZENHARMADIK FEJEZET

Egyenletek

Utaltunk már arra, hogy az «ismeretlen x» az egyenletekről szóló tanban játszik nagy szerepet. Továbbá állítottuk, hogy az egyenlet algoritmus, s olyan, mint mindenféle rejtvények megoldását szolgáló, finoman kieszelt gondolkodó- és számológép. Végül még megállapítottuk, hogy az egyenlőségi jel nem puszta megállapítást nyujt, hanem parancs. Parancs, amely szerint x értékét úgy kell választanunk, hogy, amint mondani szokták, az egyenletet kielégítse, az egyenlőség valóban fennálljon.

Mindennemű elméleti megfontolás nélkül adjunk fel magunknak egy rejtvényt. Kérdezzük tehát: «mekkora az az x szám, az az előttem teljesen ismeretlen szám, amely a következő feltételeknek megfelel: megszorzom először 7-tel, hozzáadok 19-et, elveszek belőle 4-et és így az eredeti x-et, 10-zel megszorozva kapom eredményül». Matematikai módon írva:

$$7x+19-4=10x$$

Természetesen kiszámíthatom először mindazt, ami kiszámítható. Ezt kapom:

$$7x+15=10x$$

Akkor elkezdhetném a számokat, 1-től kezdve sorban x helyébe tenni, kipróbálni, és $x=5$ esetén, a következőképpen egyenlőséget kapnék.

$$35+15=50$$

A rejtvényt megoldottuk tehát. $x=5$. De az eljárás minden inkább mint kielégítő. Először nem tudhatom előre, vajjon az x szám egész-e vagy pedig tört. Azt sem tudom továbbá, pozitív-e, vagy negatív. Végül még azt sem tudom, nem létezik-e az ötön kívül még számtalan más megoldás is.

De még mielőtt hozzáfogunk egyenleteink algoritmusának tanulmányozásához, szemléljük meg közelebbről magát a szót és az egyenletek lényegét. Bocsánat a kuruzslásért. De az «egyenlet» szó nem is az igazi, jellemző kifejezése annak ami itt történik. A latin «aequatio» sokkal megfelelőbb volt. Latinul az igékből a -tio képzővel alkotott szavak működést jelentenek. «Aequatio» tehát «egyenlővé tevést» jelent, úgy ahogy a «privatio» (privare=rabolni igéből) elrablást, elvevést jelent. A kiegyenlítés szó sokkal inkább fedné a fogalmat. «Egyenlet» így magában kissé színtelen. De minthogy magunk sem tudunk jobbat javasolni, ne legyünk kritikusok s ne játsszuk a tagadás szellemét. A nyelvészkedést ugyis csak azért kezdtük, hogy a szó értelmét közelebbről meghatározzuk, mert jól tudjuk, hogy bevett szakkifejezések támadgatása mindenkor kissé visszatetsző.

Megállapítjuk tehát, hogy az egyenlet kifejezés alatt azt a követelést értjük, hogy valamit ki kell egyenlíteni, egyensúlyba kell hozni, vagy abban megtartani. Ostoba és felesleges volna a követelés, ha az egyenlőség már eleve fennállna. Csupán fenn *kell* állnia. És ezt éppen az x helyes megválasztásával érem el.

Még csak egy lépéssel sem jutottunk előbbre. Ismét ott tartunk, hogy valamely helyes értéket kell az x számára választanunk. Ez megint próbálgatást kívánna, pedig azt már határozottan elutasítottuk.

De még fennáll egy lehetőség az ismeretlen x számítással történő, egyértelmű, meghatározására: ha esetleg sikerül valamennyi x-et az egyik oldalon, minden egyebet a másikon összegyüjteni, akkor végül $x=a$, vagy $nx=b$ alakú egyenletet kell kapnom.

Ha már idáig eljutottam, meglenne oldva a problémám. Mert $x=a$ maga a megoldás, és $nx=b$, számpéldán $3x=9$ könnyen kibogozható. Ha ugyanis $3x=9$, akkor x bizonyára 3. Vagy általánosan $nx=b$ esetén $x=\frac{b}{n}$.

De amíg ehhez a végső alakhoz jutok, amely ráadásul arról is biztosít, hogy nincsen más megoldás, addig minden valamelyest is bonyolult egyenlet annyi változást szenved, hogy csupán a józan észre támaszkodó számolgatás nem elégséges. Sürgős szükségem van valamilyen általános érvényű algoritmusra, minthogy, különösen általános számok esetén, azonnal oly labirintusban találom magam, ahonnan nem látszik kiút. A történelemben is hosszú volt az algoritmus megtalálásának az útja. Teljes biztonságot az egyenletek tana terén csak a XVII. és XVIII. században kifejlődött algebrával nyertünk.

De még *mielőtt az algoritmus felfedezésének látnánk* neki, világosan le kell valamit szegeznünk. Minden egyenletben kétféle, a számoknak és mennyiségeknek egymástól nagy mértékben különböző, fajtája létezik. Az ismeretlen[1], az x és az úgynevezett állandók, amelyek már a számítás elején is ismertek, vagy ismerteknek tekintendők. Ezt a lényegbe vágó különbséget, még mielőtt a számítási szabályokkal foglalkoztunk volna, példákkal akarjuk megvilágítani. Mert akinek nem válik vérévé az ismert és ismeretlen mennyiségek megkülönböztetése, az nem juthat előre a magasabb matematika felé. Az x és az állandók a számok teljesen eltérő fajtájához tartoznak, ha ezt az állítást meg szabad kockáztatni. Az állandók lomhák, tehetetlenek, konzervatívak. Az x viszont mozgékony, sokértelmű, mindaddig, amíg a helyes értékét meg nem találta. Akkor és csak akkor lesz az x egyértelmű és állandó szám. Kártyás előzőleg a Jolly Jokerhez hasonlítaná. Természetesen csak elvben. Mert egy bizonyos egyenletben az x értéke már eleve határozott, ha nem is ismerjük. A következő egyenletben

$$7x+19-4=10x$$

[1] Szándékosan beszélünk egyelőre mindenkor csak egy ismeretlenről.

19 és 4 az állandók, $7x$ és $4x$ az ismeretlen többszörösei. A

$$7x+13x+9x-2x+25=106$$

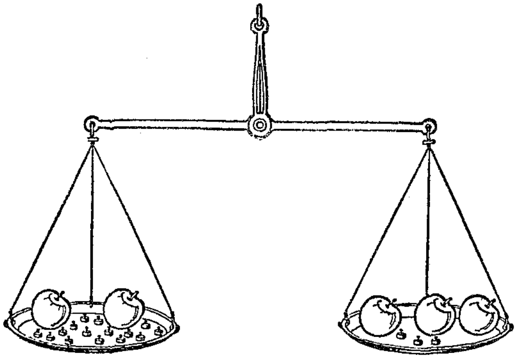
egyenletben természetesen az ismeretlenre vonatkozó összeadásokat és kivonásokat el szabad végezni. Hisz az x «alma» is, ha a nagyságát még nem is tudjuk. S fennáll az a követelés, hogy mindegyik x egy és ugyanazt kell, hogy jelentse. Ilyen követelések függetlenek attól, hogy a nagyságot ideiglenesen nem ismerjük. Mert ha azt állítom, hogy 3 állócsillag meg 5 állócsillag kivonva belőle 4 állócsillagot 4 állócsillagot ad, nem kell még tudnom a csillagok nagyságát. Egyszerűen egynemű mennyiségek aritmetikai összegéről van szó. Tehát $7x+13x+9x-2x+25=106$ ugyanaz, mint $27x+25=106$, s bár utóbbi lényegesen egyszerűbbnek látszik, még mindig nem a keresett megoldás. A megelőző példában valamennyi állandó egy oldalon volt ugyan, de az x két kifejezését választotta szét az egyenlőségi jel, most ugyan együtt vannak az x-ek, viszont az állandók oszlottak szét az egyenlőségi jel két oldalán. Kétségbeejtő! Mint egy fal, úgy akadályoz az egyenlőségi jel tervem keresztülvitelében, hogy valamennyi x-et az egyik, valamennyi állandót a másik oldalra vigyem. Pedig ez adná a megoldást, vagy legalább is a megoldás lehetőségét.

De meg az is előfordulhat, hogy az egyenlet kizárólag betükből áll. Sőt az egyenlet ilyen alakja a gyakoribb a matematikában. Például az ilyen

$$nx+a+b-c=d-mx.$$

Itt már teljesen csődöt mond képzelőtehetségem. Igaz. hogy azt állítom, hogy a, b, c, d, n és m már jóelőre ismertek, S csak azt kívánom, hogy az x ezen «állandók» valamilyen csoportosításaként jelentkezzék. Mondjuk így: $x=\frac{d-a-b+c}{n+m}$; mellesleg megjegyezve, az egyenletnek történetesen ez a megoldása. De miként jutottam ehhez az általános számokból álló szörnyhöz? Számítgatással miként juthattam volna el hozzá? S miként bizonyosodhatom meg arról, hogy x-nek éppen ez az értéke felel meg a kiegyenlítési parancsának?

Hasonlattal segítünk magunkon. Képzeljük el, hogy egyenletünk mérleg. A mérleg egyik serpenyőjében, tegyük fel, ennyi és ennyi állandó és ismeretlen fekszik, vegyesen. Tekintve, hogy a kiegyenlítési parancsot kiadtuk, az egyenlet csak akkor igazi egyenlet, ha a mérleg egyensúlyban van. Tehát, ha valamit megzavartam az egyensúlyon, ismét gondosan helyre kell hoznom, mert különben áthágom a kiegyenlítési parancsot: maradjunk meg egyelőre hasonlatunknál és tekintsük az állandókat ismert súlyú tárgyaknak, mondjuk rézsúlyoknak, az ismeretleneket viszont ismeretlen súlyú tárgyaknak, mondjuk almáknak.[1] Tehát feladatunk oda módosul, hogy miként határozhatom meg egy alma súlyát, ha jelenleg az almák és súlyok egy egyensúlyban levő mérleg két serpenyőjén vegyesen, össze-vissza hevernek. Szerkeszszük meg mondjuk a $2x+15=3x+3$ egyenletnek megfelelően mérlegünket.



10. ábra.

Az egyik csészében 2 alma és 15 egydekás súly fekszik, a másikban 3 alma és 3 egydekás. S mostan cserélgessek, változtassak addig, amíg meg nem tudom, mennyi a súlya egyetlen almának, de a nélkül, hogy a mérleget egyensúlyából kibillenteném. A «mérleg nyelve» állandóan jelzi, nem

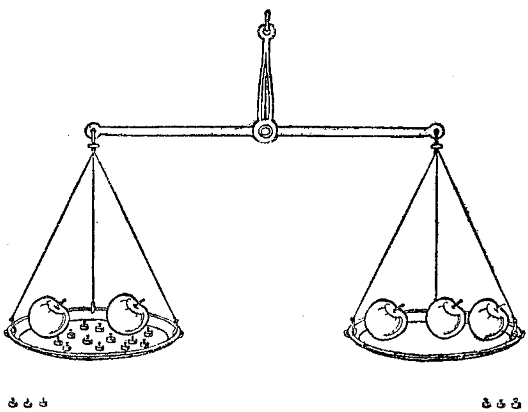
[1] Természetesen fontos, hogy valamennyi alma súlya ugyanaz legyen, s ezt még akkor is tudhatjuk, ha egy-egy alma súlyát nem ismerjük.

sértettem-e meg a parancsot. A «ne zavard az egyensúlyt» csak azt jelenti, hogy ha a mérleg mégis kibillen, vissza kell hoznom helyére. Ha az egyensúlyt tökéletesen fenn kellene tartanom, egyáltalán nem nyúlhatnék semmihez.

Most végre — ez a végcél — azon leszek, hogy az egyik serpenyőben csak alma, a másikban csak súly legyen. Ezután meg fogom próbálni, hogy egyik oldalon csak *egyetlen* alma feküdjék.

Nyuljunk először a súlyokhoz. Ezek, mint tudjuk az «állandóknak» felelnek meg. Világos, hogy az egyensúly mitsem változik, ha mindkét oldalon ugyanannyi darab súlyt elveszek vagy hozzáteszek. Vegyünk el tehát egyelőre a jobboldali serpenyőből három súlyt és a baloldaliból szintén hármat. A mérleg ingadozott ugyan, de újból egyensúlyba jutott.

Most tehát ilyen:



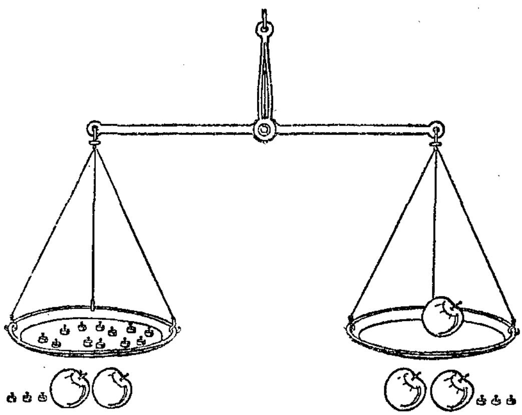
11. ábra.

Matematikai módon kifejezve:

$$2x+12=3x.$$

Most már csak a baloldalról kell a két almát elvennem, és elértem célomat. Ismét ugyanazt a fogást alkalmazom és állítom, hogy mindkét oldalon el kell két almát távolítanom, hogy az egyensúly megmaradjon.

Most már ez a helyzet:



12. ábra.

s matematikai jelentése, $x=12$, egyúttal egyenletünknek is a megoldása. Egy alma 12 deka súlyú.

Csináljuk meg az ellenőrző próbát. Eredeti egyenletünk így hangzott:

$$2x+15=3x+3.$$

Ha most x helyébe 12-t teszek, akkor a következőket kapom: $2.12+15=3.12+3$ vagy $24+15=36+3$, azaz $39=39$, s ez nyilvánvalóan helyes.

Kizárólag szemléleti úton igen fontos szabály birtokába jutottunk. Tudjuk, hogy egyenlőség megmarad, egyenlet nem változik, ha az egyenlőségi jeltől jobbra és balra ugyanazt a mennyiséget adom hozzá, vagy vonom le belőle. Pontosan fogalmazva: egyenlőkhöz egyenlőket adva, egyenlőket kapunk; egyenlőkből egyenlőket kivonva, szintén egyenlőket kapunk, bár ez természetesen mérleg és szemléltetés nélkül is világos.

A mérlegről alkotott képünket tovább is építhetjük. De többször már nem rajzoljuk le, bízunk a képzelőtehetségünkben. S ekkor világos lesz, hogy semmi sem változik az egyensúlyi állapoton, ha mindkét mérlegserpenyő tartalmát egyidőben ugyanazon tetszésszerinti számmal megszorozzuk. Teljesen mindegy az egyensúly szempontjából, hogy egyik oldalon 1 alma és a másik oldalon 12 súly, vagy az egyik oldalon 7 alma, a másikon pedig 84 súly fekszik, feltéve, hogy az almák ugyanolyan nehezek mint a súlycsoportok. Közömbös továbbá az egyensúly szempontjából, ha az egyenlet két «oldalát» ugyanazon számmal elosztom, vagy ugyanarra a hatványra emelem. Egyenlet «oldala» alatt az egyenlőségi jel előtt vagy után álló, ismeretlen vagy ismert mennyiségek összességét értjük. $5x-4+16=2x+8$ esetén $(5x-4+16)$ a baloldala, $(2x+8)$ pedig a jobboldala az egyenletnek.

Most megelégszünk elméleti eredményünkkel, hogy valamely egyenlet két oldalán egyidőben alkalmazott bármely ismert matematikai műveletünk (feltéve, hogy egyforma mértékben alkalmazzuk), az egyenlet lényegén, a két oldal egyenlő voltán mit sem változtat. A gyakorlatban ez kabbalisztikus varázslatként jelentkezik, mennyiségeknek egyik oldalról a másikra történő átvitelében és az ismeretlen x izolálásában. Legyen mondjuk a következő egyenletünk:

$$5x-4+16=2x+8,$$

akkor először a baloldalon a $(-4+16)$-ot 12-vé vonom össze és akkor

$$5x+12=2x+8$$

alakú az egyenlet.

Most mérlegünk mintájára megpróbálom, valamennyi «állandót» az egyik, valamennyi «ismeretlent» a másik oldalra juttatni. Ezen célból először mindkét oldalon levonom a $(2x+8)$ kifejezést.

$$\begin{array}{r} 5x+12= 2x+8 \\ \underline{-2x-8=-2x-8} \\ 3x+4= 0. \end{array}$$

Most valami ijesztő dolog történt. $(3x+4)$ nullával egyenlő. Vajjon azt jelenti ez, hogy minden elpárolgott? És az x is nulla lett? Türelem! Ezt biztosan nem jelentheti. Mert még találhatok kivezető utat. Mindenekelőtt még nincsen valamennyi x az egyik és valamennyi állandó a más k oldalon. Most tehát mindkét oldalon vagy $3x$-et vagy 4-et kell levonnom, hogy ez a szétválasztás megtörténjék. Próbáljuk meg a 4-et.

$$\begin{array}{r} 3x+4=0 \\ -4=-4 \\ \hline 3x=0-4. \end{array}$$

Az eredmény $3x=-4$, s örömmel látom, hogy a gyanus 0 megint eltűnt. Most közvetlenül az egyenlet megoldása előtt állok. Már csak az x-et kell «izolálnom». Mivel a baloldalon $3x$ áll, x-et úgy kaphatom meg, ha 3-mal osztok. De a «mérleg-szabályom» szerint ugyanazt az osztást a jobboldalon is el kell végeznem, hogy az egyensúly megmaradjon. Tehát:

$$3x : 3=(-4) : 3$$

$$x=(-4) : 3=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}.$$

Megoldottuk az egyenletet. Most azonban lássuk, helyesen oldottuk-e meg. Ezért helyettesítsünk be az eredeti egyenletbe:

$$5.\left(-\frac{4}{3}\right)+12=2.\left(-\frac{4}{3}\right)+8$$

$$-\frac{20}{3}+\frac{36}{3}=-\frac{8}{3}+\frac{24}{3}$$ (Mindent közös nevezőre, 3-ra, hoztuk.)

$$\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$$

A próba igazolja számításainkat.

Most már világítsuk meg az «átvivést», mert eszünkbe sem jut, hogy még egyszer ilyen nehézkesen számoljunk.

$$5x+12=2x+8.$$

Megint az előbbi egyenletet használjuk. És megjegyezzük, hogy az is eredményre vezet, ha megkíséreljük, hogy a $2x$-et az $5x$-hez és a 12-t a 8-hoz vándoroltassuk. De miként? Nos, nagyon egyszerű. Mindkét oldalon egyszerre le kell vonnunk $2x$-et. Mivel ezáltal jobboldalon teljesen eltűnik, csak baloldalon írjuk a kivonást. Tehát:

$$5x-2x+12=8, \text{ vagyis } 3x+12=8.$$

Most a 12-t vándoroltatom. Ez 12 mindkét oldalon történő levonásával lehetséges. Ezzel a baloldalról eltűnik teljesen, a levonást csak a jobboldalon kell kiírnunk. Tehát:

$$3x=8-12, \text{ vagyis } 3x=-4.$$

Most még az x együtthatója, a 3, menjen át a másik oldalra. Ehhez mindkét oldalt 3-mal kell osztani. A 3 ezzel a baloldalon eltűnik, s a jobboldalon jelenik meg mint osztó. Az eredmény

$$x=(-4):3=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}.$$

Készen vagyunk. Megvan a szabály. Így szól: ha valamely mennyiség keresztülmegy az egyenlőségi jelén, az operációs parancs ellenkezőjére változik. Tézisből lizis lesz, lizisből tézis. Konkrét módon: összeadásból kivonás, kivonásból összeadás, szorzásból osztás, osztásból szorzás, hatványozásból gyökvonás,[1] gyökvonásból hatványozás.

Most már urai vagyunk minden egyenletnek, ha az lineáris, vagyis az ismeretlen benne csak az első hatványon fordul elő. Annak, hogy az ilyen egyenletet miért nevezik «lineárisnak», később kapjuk geometriai magyarázatát.

Az olvasóra bízzuk eddigi feladatainknak új algoritmusunk szerinti újólagos kiszámítását. Mi azonban megvilágosításul bonyodalmasabb feladatokat számolunk át. Ilyen:

$$\begin{aligned} 5(x-2)-2x&=2(x-1 \\ 5x-10-2x&=2x-2 \\ 3x-2x&=-2+10 \\ x&=8 \end{aligned}$$

[1] Ezzel csak később foglalkozunk.

Példa csak betükkel:

$$a(b-c+d)-b(a+c-d)=ab-(bc-bd-x)$$
$$ab-ac+ad-ab-bc+bd=ab-bc+bd+x$$
$$ab-ac+ad-ab-bc+bd-ab+bc-bd=x$$
$$-ab-ac+ad=x$$
$$x=a(-b-c+d)$$

Ehhez a feladathoz csak azt akarjuk megjegyezni, hogy mindenkor szabad az egész egyenletet megfordítani, illetve a két oldalt felcserélni. Hisz az $x=5$ és $5=x$ állítás ugyanazt mondja. Ez már az egyenlőségi jel lényegéből következik. Ugyancsak szorozhatok mindkét oldalon (-1)-gyel és ha eredményként esetleg azt kapom, hogy $(-x)=(-10)$, írhatom, hogy

$$(-x).(-1)=(-10).(-1)$$

vagyis

$$x=10.$$

Ilyen szorzást ott alkalmazunk, ahol az x negatív alakban jelentkezik, minthogy engem a pozitív x érdekel. Tegyük fel, hogy valamily számítás eredménye $(-x)=(\pm a)$, ez azt jelenti, hogy x vagy plusz a-val, vagy mínusz a-val egyenlő, akkor felírom, vagy csak gondolom,

$$(-x).(-1)=(\pm a).(-1)$$

vagyis

$$x=\mp a.$$

Vegyük figyelembe, hogy most az a mellett felül van a minusz és alul van a plusz. Mert $(+a).(-1)=-a$, $(-a).(-1)=(+a)$. Tehát az a előtti mínusz az első, az a előtti plusz a második szorzás eredménye.

Vannak olyan esetek is, amelyeknél az egyenlet olyan, mintha számunkra hozzáférhetetlen volna, mivel az x elsőnél magasabb hatványát tartalmazza. Ilyen pl.

$$(x+1).(x-1)=x^2+x+1$$

Ez a látszólag másodfokú, kvadratikus egyenlet a kiszámítás során ártatlan lineáris egyenletnek bizonyul.

$$x^2+x-x-1=x^2+x+1$$
$$x^2-x^2+x-x-x=1+1$$
$$-x=2$$
$$(-x).(-1)=2(-1)$$
$$x=-2$$

Látszólag ugyancsak igen veszélyes az $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=2$ egyenlet is. Itt az x csak a nevezőben fordul elő. Lépésről lépésre haladunk: először közös nevezőre hozzuk a baloldalt.

$$\frac{1.(x+1)-1.(x-1)}{(x-1).(x+1)}=2$$
$$\frac{x+1-x+1}{x^2-x+x-1}=2$$
$$\frac{2\cdot}{x^2-1}=2,$$

vagy ami ugyanaz

$$2:(x^2-1)=2$$
$$2=2.(x^2-1)$$
$$2=2x^2-2$$
$$2+2=2x^2$$
$$4=2x^2$$
$$x^2=2$$

Itt valóban másodfokú egyenletre akadtunk, s még nem tudjuk megoldani, mert a gyökvonást még nem ismerjük. A megoldás $x=\pm\sqrt{2}=\pm 1{\cdot}414\ldots$ volna.

További példa:

$$\frac{5+x}{2}+\frac{13+7x}{3}=72$$
$$\frac{(5+x).3+(13+7x).2}{2.3}=72$$
$$(5+x).3+(13+7x).2=72.2.3$$
$$15+3x+26+14x=432$$
$$17x=432-15-26$$
$$17x=391$$
$$x=\frac{391}{17}=23$$

Általános megjegyzés: egyenletekkel való számolás a matematikában igen fontos dolog. Nagyon sok számítási előny, fogás létezik ezeknél. Az «egyenlet-gépezetet» minden matematikusnak úgy kell ismernie, hogy az «átvivést» az «izolálást» szinte álmában is el tudja végezni. Minden matematikai tankönyv számtalan ilyen válogatott példát tartalmaz. Különösen ajánlható Eulernek már ismételten említett kitűnő algebrája. Nyomatékosan ajánljuk, minthogy a matematikában nincsen «királyi út», lehetőleg ilyen egyenletek százainak megoldását, sőt feladatok készítését. Ez a foglalkozás legalább olyan érdekes, mint a keresztrejtvényfejtés, vagy a kártyázás. És kifejlődik közben az a bizonyos hatodik érzék, amelyet a laikus a matematikusban oly sokszor megcsodál. Az ész matematizálása majdnem fizikai jelenség, amint szinte tudat alatti módon magától értetődő az úszás, a kerékpározás, a helyes ütés a tenniszben. Röviden: a matematika *nagyon magas fokig tisztán gyakorlat dolga. Mindaz, amit* gyakorolni nem lehet, vagy alig, az a matematikának olyan magas részéhez tartozik, amely minket, újoncokat, aligha érint. Nem akarunk mi Moltke-k, Napoleon-ok lenni, legfeljebb jóravaló tisztek. De — és ez a legnagyszerűbb tudományunkban — sohasem lehet tudni, hogy nem találunk-e éppen mi, ihletett pillanatunkban valami rendkívülit. Aligha valószínű, de kizárva nincs.

De csökkentsük ismét önérzetünket és fojtsuk el álmainkat a «tarsolyunkban levő marsallbotról». És számítsunk végig, mielőtt még az egyenlet fogalmát kiterjesztenők, egy úgynevezett szöveges, vagy alkalmazott feladatot.

Egy apa jelenleg 48, fia pedig 21 éves. Hány éves volt a fiú, amikor apja tízszer olyan idős volt mint ő? Hány évvel ezelőtt volt az apa tízszer olyan idős mint a fia?

Ilymódon következtetünk: az apa és a fiú közti korkülönbség 27 év. Ez a mennyiség változatlan marad, tehát az egy állandó. Jelölje x a fiú korát abban az időben, amikor az apa tízszer olyan idős volt, mint ő, az apa pedig abban az időben $(x+27)$ éves volt. Feladatunk szerint azonban akkor az apa tízszer annyi idős volt mint a fia, tehát $10.x$ éves. Következésképpen $x+27=10x$, és ezzel «felállítottuk» az egyenletet. Most már nem törődünk azzal, hogy mit jelentenek a mennyiségek, nyugodtan rábízzuk magunkat algoritmusunkra.

$$x+27=10x$$
$$27=9x$$
$$x=\frac{27}{9}=3.$$

Az apa 30 éves volt, a fiú 3, amidőn az apa 10-szer olyan idős volt mint fia. Ez helyes, szemmel láthatóan. De az is kérdés, hogy hány éve történt ez az esemény, ha az apa ma 48 éves. Kivonunk, 48—30=18 és azt feleljük, hogy 18 éve. A fiú akkor 3 éves volt.

Egyébként az egyenletet azonnal úgy is felállíthattuk volna, hogy x közvetlenül azt a számot jelentse, ahány éve az apa tízannyi idős volt mint a fia. Akkor így kellene következtetni : az apa most 48 éves. Tehát $(48-x)$ éves korában volt 10-szer olyan idős mint a fia. De mivel a fiú ma 21 éves, és számára is x éve történt az esemény, tehát akkor $(21-x)$ éves volt. Az egyenletünk tehát

$$(48-x)=10(21-x) \text{ vagy } (21-x)=\frac{1}{10}\cdot(48-x).$$

Oldjuk meg az első egyenletet : hisz a két egyenlet azonos.

$$(48-x)=10.(21-x)$$
$$48-x=210-10x$$
$$9x=210-48$$
$$9x=1\ 2$$
$$x=\frac{162}{9}=18$$

Van még egy harmadik módja is a feladat megoldásának. Minthogy az apa 27 évvel idősebb fiánál, 27 éves volt akkor, amikor fia 0. Ebben az időben született. Most már az apa korának $\frac{1}{9}$-ével kellett, hogy öregedjék, hogy fiát tízszeresen felülmúlja. Mert ha a kilenc egyenlő részhez egy tizediket fűznek, éppen tíz rész adódik.

Másképpen mondva $\frac{9}{9}+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$ tizede azonban $\frac{1}{10}.\frac{10}{9}=\frac{1}{9}$, mert tízszer $\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$. Így, minthogy 27 kilencede három év, az apa, fia születése után 3 évvel, 30 éves korában, lett tízszer olyan idős mint hároméves fiacskája.

Csupán azt akartuk bemutatni, mennyi változatosságot, tárgyalási lehetőséget nyujt még egy ilyen egyszerű példa is és mennyire fontos már itt is a számoló ügyessége, a legvilágosabb és legelegánsabb megoldás megtalálása szempontjából. Olvasóinknak is nemsokára meg lesz az érzékük a matematikai pontosság és elegancia megítélésére. De mégegyszer: itt kezdődik a művészet és itt kell automatához hasonlóan gyakorolni.

Még csak egy szöveges példát akarunk ideiktatni, amely úgyszólván klasszikus nevezetességre tett szert. Ez az úgynevezett «Diophantos sírköve». Diophantos alexandriai matematikus volt, aki a Kr. u. IV. században élt. Zseniális matematikus, talán az egyetlen a maga nemében a görögök közt. A többi inkább geometer volt. Annyi bizonyos, hogy elsősorban ő fejlesztette ki az egyenletek elméletét, és jelentős hatással volt az arabok és a középkor matematikai tudására. Monda szerint sírkövének a következő volt a felirata:

Ím ezen emlékmű Diophantos hamva fölött áll
  Élte korát adják művei és ez a kő.
Ifjúként tölté hatod éltét isteni kegyből
  Még tizenkettted után, gyenge szakálla kiüt.
Egy heted élttel utóbb nászfáklyák égtek előtte
  Öt évvel azután, kis fia megszületett.
Ó, boldogság nélküli ifjú, félig el érték
  Évei atyja korát s lett hona szürke Hades.
Még négy esztendőn a tudás könnyíti a gyászát
  S hosszú élet után, őt is elérte a vég.

A szép patetikus disztichonoktól a hűvös matematikához visszatérve, megállapítjuk, hogy Diophantosnak előttünk egyelőre ismeretlen hosszú élte (x-nek nevezzük) fokozatosan, élete részeiből és többletévekből, tehát állandókból, tevődik össze. Életének $\frac{1}{6}$-áig gyermek, tehát $\frac{x}{6}$. Azután $\frac{x}{12}$ év telik el míg szakálla kinő. $\frac{x}{7}$ év mulva megnősül. 5 év mulva fia születik, aki azonban csak $\frac{x}{2}$ évig él. 4 évvel éli túl fiát Diophantos és x éves korában meghal.

Egyenletünk tehát a következő:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

A törtek közös nevezője 84, mert 84-ben úgy a 6, mint a 12. mint a 7 és a 2 megvan. Így írhatjuk:

$$\frac{14x}{84}+\frac{7x}{84}+\frac{12x}{84}+\frac{420}{84}+\frac{42x}{84}+\frac{336}{84}=\frac{84x}{84}$$

Az egyenlet mindkét oldalát most megszorozhatjuk 84-gyel, ezáltal valamennyi tört nevezője eltűnik. Marad:

$$14x+7x+12x+420+42x+336=84x$$
$$75x+756=84x$$
$$756=9x$$
$$9x=756$$
$$x=84$$

Diophantos tehát 84 éves lett. Tizennégy évig volt gyermek, 21 éves korában nőtt ki a szakálla, 33 éves korában megnősült, 38 éves mikor fia születik, aki 42 évig, tehát Diophantos 80 éves koráig élt. Gyászolva tölti a hátralevő 4 évet haláláig, amely 84 éves korában következett be.

TIZENNEGYEDIK FEJEZET

Határozatlan egyenletek

Nem minden szándékosság nélkül idéztük Diophantos szellemét. Ez a nagy matematikus tekinthető az egyenletek egyik különleges fajtájának, a határozatlan, diophantosi egyenletek felfedezőjének. Az a körülmény, hogy mennyire jogosult az egyenleteket őreá visszavezetni, legalább olyan «határozatlan», mint az egyenletei. Ránk maradt írásaiból a matematika történetének kutatói szerint nem derül ki olyan adat, ami ezt a feltevést alátámasztaná. De mert a név már meghonosodott, tartsuk meg mi is.

Ugyan mik ezek a kétszeresen is talányos «diophantosi» egyenletek?

Ezúttal szavakba foglalt feladattal kezdjük és e fontos egyenletek lényegét és kezelési módját együtt fogjuk felfedezni. Kérdezzük tehát: melyek azok a számok, amelyek egyikének nyolcszorosa a másik háromszorosával növelve összesen 91-et ad?

Olyan ez a kérdés, hogy eddigi tanulmányaink alapján nem tudunk rá válaszolni. Mert azonnal észrevesszük, hogy itt nemcsak egy ismeretlen x szerepel, hanem két ismeretlent kell meghatározni, amelyeket az x és y betükkel szándékozunk jelölni. Felírhatjuk tehát:

$$8x+3y=91.$$

De ezek után mit csináljunk? Szabályaink szerint

$$8x=91-3y \text{ és } x=\frac{91-3y}{8}, \text{ vagy } 3y=91-8x \text{ és } y=\frac{91-8x}{3}.$$

Egész természetes, hogy így nem jutunk tovább. Mert az egyik ismeretlent mindig csak a 91 és a másik ismeretlennel fejezzük ki. Valamilyen szerencsés sugallat alapján kipróbálom az $x=5$ és $y=17$ értékeket. Valóban: $8.5+3.17=$ $=40+51=91$. Ez tehát megoldás. De nagymértékben rosszallom, hogy nem az egyetlen. Itt is algoritmust kell tehát keresnünk, kabbalát, hogy az vezessen csalhatatlanul célhoz. De még egy mellékfeltételt is meg kell említenünk. Határozatlan, diophantosi egyenletek megoldásaként csak egész számokat fogadunk el. Különben már eleve végtelen sok megoldásunk volna. Nem kellene egyebet tennünk, mint x-et valamilyen tetszésszerinti számmal, mondjuk 7-tel egyenlővé tenni és a következőket kapnók:

$$8.7+3y=91$$
$$56+3y=91$$
$$3y=91-56$$
$$3y=35$$
$$y=35:3=11\frac{2}{3}$$

Az egyenletet x vagy y megválasztásával mindenkor, feltétlenül, egyértelműen megoldható, egy ismeretlenes egyenletre vezethetném vissza. Mert ismeretlennek tetszés szerinti megválasztása nem jelent kevesebbet, mint hogy az egyik ismeretlent ideiglenesen, adott esetre konstánssá változtatom.

Azt követeljük tehát, hogy a megoldás mindkét ismeretlenre egész számú értékeket szolgáltasson. De ez a követelés nem teljesíthető minden két ismeretlenes egyenletnél. Erről azonban csak később.

Még mielőtt közelebbről megismernők azt a zseniális megoldási módot, amellyel Leonhard Euler bennünket megajándékozott, még egy igengyakori matematikai mesterfogást kell megtanulnunk, amelynek nagyon nagy szerep jut a módszerben. Ez a mesterfogás a «helyettesítés», a «szubsztitució».

Lássunk egy konkrét példát. Senki sem állítja, hogy a következő egyenletnek

$$2\left(\frac{x-4}{3}\right)+3\left(\frac{x-4}{3}\right)-4\left(\frac{x-4}{3}\right)=9-2\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

túlságosan bizalomgerjesztő a megjelenése. De ha közelebbről megvizsgáljuk, kiderül, hogy benne az $\left(\frac{x-4}{3}\right)$ kifejezés állandóan ismétlődik és az x is egyedül és kizárólag ebben a kifejezésben szerepel. Ezt a kifejezést, $\left(\frac{x-4}{3}\right)$, szinte új ismeretlennek tekinthetem és úgy kezelhetem, mintha (beszédmodorunk szerint) alma lenne. Jelölje immár ezeket az almákat az n betű, akkor írhatjuk, hogy

$$2n+3n-4n=9-2n.$$

Azzal, hogy az n mit jelent, egyelőre nem törődöm. Nem kérdezem, hogy részletesen mit tartalmaz az alma, hány magja van, szára és csutkája, hanem megbízom a magasabbrendű algoritmusban és először azt igyekszem megállapítani, hogy milyen szám tartozik egy almához. Csak később fogom az alma részleteit közelebbről megvizsgálni. Új egyenletünk, amelynek az n az ismeretlene, a következőt adja:

$$2n+3n-4n+2n=9 \text{ ; vagyis } 3n=9 \text{ és } n=3.$$

De most tudom, hogy én magam vezettem be az $\left(\frac{x-4}{3}\right)$ jelölésére az n betűt. Itt mostan új egyenletünk van, amelyben az n már nem ismeretlen, hanem állandó, mégpedig 3-mal egyenlő. Az új egyenlet a következő:

$$n=\frac{x-4}{3} \text{ és } x=3n+4.$$

Itten, mint már mondottuk, $n=3$. Tehát $x=9+4=13$. Az olvasóra bízzuk az egyenletnek segédismeretlen helyettesítése nélküli közvetlen megoldását. Bizonyos, hogy e próba, vagy az $x=13$ helyettesítése igazolja eljárásunk helyességét. Most már gyakorlatból tudjuk, hogy mi a «helyettesítés». Valamely bonyolult felépítésű kifejezésnek egyszerűbb elnevezése. Legalább is a mi tudományunk jelenlegi fokán. A felsőbb matematikában, különösen pedig az integrálszámításban, ahol a helyettesítések nélkülözhetetlen és döntő szerepet játszanak, megeshet, hogy valamely egyszerűbb kifejezés helyettesítendő bonyolultabbal. Egyébként már magunk is tudunk ilyen esetekről. Ha valahol, valamilyen okból 1 helyett mondjuk 15^0 kifejezést írjuk, vagy valamely, mondjuk, b betűt b^1b^0-ból keletkezettnek tekintünk, akkor ez már egyszerűt bonyolulttal helyettesítésnek egy esete. Még ha nagyon különleges eset is. De, hogy állításaink általános érvényét kellőképpen megőrizzük, azt kell mondanunk, hogy «helyettesítésen», «szubsztitución» valamely kifejezésnek másikkal való pótlását értjük. Természetesen nem vaktában. Biztos, hogy x-et nem szabad u-nak mondani. De x helyett mindenütt írhatunk u-t, ha nem hanyagoljuk végül el a «feltételi egyenletet», hogy x éppen u-val azonos, vagyis $x=u$. x helyett mindenütt $2u$-t is írhatok. Vagy $\frac{u}{2}$-t, vagy pedig $\frac{u}{250}$-et. Az x akkor végül az u-nak kétszerese, fele vagy 250-ede.

Helyes, láttuk, hogy helyettesítéssel bonyolult számítások egyszerűsíthetők. De min alapszik tulajdonképpen az, hogy egyáltalán helyettesíthetek? Logikai szempontból a dolog egyszerű. Az $\frac{x-4}{3}$ kifejezésből éppen magasabbrendű fogalmat alkottunk, az n-et, amely szükségképpen tartalmazza az előbbit. Hisz a helyettesítésnek az $n=\frac{x-4}{3}$ egyenlőség *alapvető* feltétele! Matematikai nyelven azt mondjuk, hogy itt az izomorfizmusnak, alakegyenlőségnek az esete forog fenn. Az egyenlet szerkezetét, alakját vagy az elvégzendő műveleteket a helyettesítés nem érintette és az együtthatók, valamint a parancsok változatlanok maradtak. Algebrai szempontból több egyenletből álló rendszerrel van dolgunk, egyik közülük az alapegyenlet, a másik pedig feltételi egyenlet. Így:

$$2\left(\frac{x-4}{3}\right)+3\left(\frac{x-4}{3}\right)-4\left(\frac{x-4}{3}\right)=9-\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

és

$$\frac{x-4}{3}=n.$$

De ezzel sem foglalkozhatunk tovább, hogy végre a diophantosi egyenleteinkhez jussunk. Tudjuk már, hogy közben helyettesítések különleges fajtájával lesz dolgunk és a «feltételi egyenletek» más követelményekkel is kiegészülnek.

Előbbi példánkat kissé változott formában

$$3y+8x=91$$

ismét felírván, Euler módszere szerint először az egyik ismeretlent ki kell a másikkal fejeznünk. Gyakorlati szempontok azt kívánják, hogy a kisebb együtthatójú ismeretlent fejezzük ki a másikkal. Itt y-t az x-szel. Következőket kapjuk:

$$3y = 91-8x$$
$$y = \frac{91-8x}{3}.$$

Ez az első lépés. Most — Euler szerint — a törtet, áltörtnek tekintve, bontsuk szét egész és tört részre. Tehát:

$$y = \frac{91}{3} - \frac{8x}{3} = 30 + \frac{1}{3} - 2x - \frac{2x}{3}.$$

Most átcsoportosítunk, hogy ugy az egészek, mint a törtek egymás mellé kerüljenek:

$$y = 30 - 2x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{3} = 30 - 2x - \frac{2x-1}{3}.$$

Szintén gyakorlati szempontból írtuk a tört elé a — előjelet, tehát a tört nem $\frac{1-2x}{3}$, hanem $-\frac{2x-1}{3}$, de a kettő, tudjuk, azonos.

Itt kezdődik a tulajdonképpeni számítás. A diophantos egyenletek szellemében azt követeltük, hogy y egészszám legyen. Mivel x is csak egészszám lehet, $30-2x$ szintén az. De ha még y is egészszám, akkor a $30-2x-\frac{2x-1}{3}$ kifejezésben a $\frac{2x-1}{3}$-nak is egésznek kell lennie, különben a többi feltétel nincs kielégítve. Most kezdődik a «helyettesítés». Feltételünk szerint azt állítjuk, hogy $\frac{2x-1}{3}$ egészszám és elnevezzük n-nek. Az indexet azért írjuk, mert nem tudhatjuk, nem lesz-e ismételt helyettesítésre szükség. Marad tehát a feltételünk:

$$n_1 \text{ (egészszám)} = \frac{2x-1}{3}.$$

A fentiekkel azonos megfontolás szerint egyenletünket átalakíthatjuk olymódon, hogy n segélyével fejezze ki az x-et

$$n_1 = \frac{2x-1}{3}$$
$$3n_1 = 2x-1$$
$$2x = 3n_1+1$$
$$x = \frac{3n_1+1}{2}.$$

Most az x-et, annak is egészszámnak kell lennie, a tört felbontásával ismét egész és tört részre oszthatom.

$$x = \frac{3n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1+1}{2}.$$

A meggondolás ismét ugyanaz. x és n_1 szükségképpen egészszámok. Tehát $\frac{n_1+1}{2}$ is csak az lehet. Nagyon is helyén való volt óvatosságom, amellyel az n-eket indexszel láttam el. E legutóbbi egészszám $\frac{n_1+1}{2}$ jelölése, az új helyettesítés során n_2 lesz.

Ezt kapjuk:

$$n_2 \text{ (egészszám)} = \frac{n_1+1}{2}.$$

Ha a szintén egészszám n_1-et n_2-vel kifejezem, akkor az eredmény

$$2n_2 = n_1+1$$

vagyis

$$n_1 = 2n_2-1.$$

Mivel most már valamennyi tört eltűnt, megoldottnak tekinthetem a feladatomat. Már csak egy, nem nehéz, de eléggé bonyodalmas feladatom van hátra. Vissza kell nyernem az x-et és az y-t, s kifejezésünkben csak a legutolsó n-et, esetünkben az n_2-t hagyhatom meg. Minthogy $n_1 = 2n_2 - 1$ és $\frac{n_1+1}{2} = n_2$, tehát $x = n_1 + \frac{n_1+1}{2}$ lévén nem egyéb, mint $2n_2-1+n_2$ másképp $3n_2-1$. De y utolsó ki-

fejezése ez volt: $30-2x-\frac{2x-1}{3}$. Így $y=30-2(3n_2-1)-\frac{2x-1}{3}$
Mivel továbbá $\frac{2x-1}{3}$ nem más mint n_1, tekintve, hogy éppen azzal tettük egyenlővé, így $y=30-2(3n_2-1)-n_1$. De $n_1=2n_2-1$. Ezzel y, csak az n_2 állandóval kifejezve

$$y=30-2(3n_2-1)-(2n_2-1)=30-6n_2+2-2n_2+1=33-8n_2.$$

Áttekintés céljából írjuk fel diophantosi egyenletünk úgynevezett végleges, általános megoldásait újból, egymás alá. Az n mellől az indexet már elhagyhatjuk, hisz az index megkülönböztetést szolgáló jelzés, tehát elveszti minden értelmét, ha már nincs megkülönböztetni való. n_2 vagy n bárhogy is jelöljük most, tetszésszerinti egészszám, és

$$x=3n-1$$
$$y=33-8n$$

Lássuk, hogy az Euler-féle megoldás valóban helyes-e? n helyébe itt, mondtuk, bármely pozitív vagy negatív egészszámot (itt a nulla is egészszám) tehetünk. Az egyenlet:

$$8x+3y=91$$

$n=0$ esetén: $x=0-1=-1$ és $y=33-0=33$

Tehát: $8.(-1)+3.33=-8+99=91$

$n=1$ esetén $x=3-1=2$, és $y=33-8=25$.

Tehát: $8.2+3.25=16+75=91$

$n=-1$ esetén $x=-3-1=-4$, és $y=33+8=41$

$8.(-4)+3.41=-32+123=91$

$n=5$ esetén $y=15-1=14$, és $x=33-40=-7$

Tehát: $8.14+3(-7)=112-21=91$

és így tovább, a végtelenségig, pozitív és negatív irányban.

Valóban, csodálatos ez az algoritmus, lehetővé teszi két ismeretlen végtelen sok egészszámú értékének egyszerű képlettel való rögzítését. Első, kitalált értékpárunk $x=5$ és

$y=17$ az $n=2$ esetén keletkezik, mert ekkor $x=6-1=5$ és $y=33-16=17$.

Most további feltételeket is szabhatnánk és kereshetnők az 1 és 100, vagy a -10 és $+10$ közötti megoldásokat, vagy csak a pozitív, vagy csak a negatív értékeket. A gyakorlatban az ilyen megszorítások sokszor nagyon fontosak. A gyakorlott, vagy ügyes olvasó hamarosan rájön, miként lehet ilyen követelményeknek eleget tenni. Egyszerűen 0-tól felfelé és lefelé behelyettesítünk néhány számértéket, legjobb egy kis táblázatot felírni, és hamarosan kiderül, hogy meddig lehet elmenni.[1]

De a diophantosi egyenletek csak eszközei voltak célunknak, mint az a későbbiek folyamán kiderül. Nem mélyedünk tehát el érdekes különleges törvényeiben, csupán olyasmit jegyzünk még meg, amire már utaltunk. Azt ugyanis, hogy egyáltalán nem minden két ismeretlenes,

$$ax+by=c \quad (a,\ b,\ c \text{ pozitív vagy negatív egészszám})$$

alakú egyenlet valódi diophantosi, vagyis nem minden egyenlet ismeretlenei számára található összetartozó, egészszámú megoldáspár. Egyenlet diophantosi jellegéhez még további feltétel teljesülése elengedhetetlen.

Tegyük először fel, hogy az egyenletünket, mint mondani szokás, legegyszerűbb alakra hoztuk. Ez azt jelenti, hogy addig osztottuk mindkét oldalát valamely közös osztóval, amíg ilyen csak volt, tehát további osztás lehetetlenné nem vált. Ha ez az egyenletünk

$$9x+12y=51$$

akkor 3-mal oszthatunk és

$$3x+4y=17$$

az egyenlet legegyszerűbb alakja.

[1] Természetesen feltételi egyenlőtlenségeket is lehetne, teljesen korrekt módon, megadni. Pl. $x<10$, tehát $(3n-1)<10$, ezért $3n<11$ és $n<\frac{11}{3}$. Tehát az n legfeljebb 3 lehetne, hogy x 10-nél kisebb legyen. Most az y számára is fel kellene valamilyen egyenlőtlenséget írni stb.

Ha a

$$32x+24y=124$$

egyenletet a fenti módon 4-gyel egyszerűsítjük

$$8x+6y=31$$

adódik legegyszerűbb alakként.

Itt már habozunk. Megfejthetetlen, hogy miként lehet két páros szám összege páratlan? $8x$ és $6y$ pedig, ha x és y egész, feltétlenül páros. Mert 8.5, 8.7, $8.(-2)$ és $6.(-20)$, 6.1 stb. minden körülmények közt páros.

Sőt azt is állítjuk hogy a

$$3x+15y=19$$

sem diophantosi. Mégpedig azért, mert nemcsak az együtthatók páros jellege játszik szerepet, hanem az a körülmény is, hogy van-e az x és y együtthatójának oly közös osztója, amelyel az állandó nem osztható.

Ezen állítás igazolását helyes, érvényes matematikai bizonyítás példájaként fogjuk felhasználni. De előbb lássunk még egy szemléltető példát.

$$9x+12y=51$$

hárommal osztva az eredmény

$$3x+4y=17$$

3 és 4-nek nincs közös osztója, egyenletünk tehát valóban diophantosi, egészszámokkal megoldható. Euler szerint a megoldás:

$$3x+4y=17$$
$$3x=17-4y$$
$$x=\frac{17-4y}{3}=5+\frac{2}{3}-y-\frac{y}{3}=5-y-\frac{y-2}{3}$$
$$\frac{y-2}{3}=n$$
$$y-2=3n$$
$$y=3n+2,\quad x=5-(3n+2)-n=3-4n.$$

Itt nem alkalmaztunk indexet az n mellett az $y-2$ kifejezésben, mert a magában álló y-ról azonnal látjuk, hogy nem lesz több résztörttel dolgunk.

$n=3$ esetén $x=-9$, $y=11$ és

$$3(-9)+4.11=-27+44=17.$$

Ez esetben minden a legnagyobb rendben van, amint azt el is vártuk. De térjünk vissza a bizonyításhoz és az általános számokhoz. Tegyük fel, hogy egy egyenletet már a legegyszerűbb alakra hoztunk, vagyis az

$$ax+by=c$$

egyenletben a, b és c-nek már nincsen közös osztója, mert különben ez nem lehetne az egyenlet legegyszerűbb alakja. Az a-nak és b-nek még van közös osztója, de ezzel c már nem osztható. Hogy ez nincs kizárva, láthatjuk a következő példán is:

$$8x+6y=31$$

ahol 8 is, 6 is osztható még 2-vel. Általánosan azt mondhatjuk, hogy a és b közös osztója legyen m. Ez továbbá azt is jelenti, hogy $\frac{a}{m}$ és $\frac{b}{m}$ még egészszámok. Szorozzuk meg ezen egészszámokat a feltevésünk szerint szintén egészszámú x-szel és y-nal, az eredményt pedig adjuk össze. Tehát $\frac{a}{m}x+\frac{b}{m}y$. De $\frac{a}{m}x+\frac{b}{m}y=\frac{ax+by}{m}=\frac{c}{m}$, mivel az eredeti egyenlet szerint $ax+by=c$. Az $\frac{a}{m}$ és $\frac{b}{m}$ valamint x és y egészszámok lévén $\frac{a}{m}x+\frac{b}{m}y$ is egészszám, így $\frac{ax+by}{m}$ is az, tehát $\frac{c}{m}$-nek is annak kellene lennie, de ez ellentmond feltevésünknek, hogy a és b osztható m-mel, de c nem. Így egy $m.rx+m.sy=c$ alakú egyenletnek, ha c nem osztható m-mel, nincsen olyan megoldása, amelyben x is, y is egészszám, ha m, r, s és c egészszámok.

Még egyszer: diophantosi egyenletnél alapfeltétel, hogy az ismeretlen együtthatóinak ne legyen az egyenlet legegyszerűbb alakjában közös osztója. De bármelyik ismeretlen együtthatójának és az állandónak lehet közös osztója, mint az a $3x+4y=12$ egyenletből is kiderül. (4-nek és 12-nek közös osztója a 4, 3-nak és 12-nek a 3.) Ezen egyenlet általános megoldása

$$x=4-4n \text{ és } y=3n$$

tehát pl.

$$n=5\text{-re } x=4-20=-16 \text{ és } y=15.$$

A próba: $3(-16)+4.15=-48+60=12.$

TIZENÖTÖDIK FEJEZET

Negatív és tört hatványok

Nagyon csábító volna az egyenletek tanát tovább kutatni, mivel abban még egy egyenlettípusra akadnánk, amely megnyitja a voltaképpeni utat a felsőbb és legfelsőbb matematikához. Ez az egyenlettípus az úgynevezett «függvény», amely algebrai egyenletekből fesztelenül levezethető.

Kérjük azonban ezeket a szavakat mint egyelőre nagyon pontatlan célzást venni. A legközelebbi fejezetek már bevezetnek minket ebbe a bűvös világba. Mivel azonban a függvényekről szóló tanban sokkal szabadabban tudunk mozogni, ha előbb még van türelmünk a mi számfogalmunkat kibővíteni és a hatvány algoritmusát behatóbban tanulmányozni, azért nem sajnáljuk ettől a fáradságot.

Emlékezzünk vissza arra, hogy ugyanazon alapú hatványokat úgy osztunk, hogy a kisebbik hatványkitevőt kivonjuk a nagyobbikból. Tehát például $10^5 : 10^3 = 10^{5-3} = 10^2$ vagy $100.000 : 1000 = 100$. Vagy $a^{17} : a^6 = a^{17-6} = a^{11}$ stb. Itt hallgatólagosan azt a megállapodást tettük, hogy az osztandó hatványmutatója mindig nagyobb vagy legfeljebb egyenlő volt az osztó hatványmutatójával. Tehát általánosan: az $a^m : a^n$ osztásnál teljesül az $m>n$ föltétel. Vagy ami ugyanaz volna: $n<m$. Mivel m-et és n-et mindig pozitívnak vettük, sohasem fenyegetett a veszedelem, hogy eredményül valamely alapot negatív hatványmutatóval kapjunk. Ámde magában véve egy negatív hatványmutató igen jól elgondolható. A kérdés csak az, hogy mi értelme van a mi algorit-

musainkon belül, a nélkül, hogy felrobbantanók a mi rendszerünket, amelyet eddig fölépítettünk.

Egyelőre még ragaszkodni akarunk ahhoz, hogy m és n pozitív számok, de ez alkalommal meg akarjuk fordítani a föltételi egyenlőtlséget, azt állítva, hogy n nagyobb mint m ($n>m$ vagy $m<n$). Mivel továbbá azt követeljük, hogy az n mutató az osztóhoz tartozzék, azért az $a^m : a^n = a^{m-n}$ osztásnál okvetlen negatív számot kapunk az eredmény mutatójául, mivel a föltevés szerint nagyobbat kellett kivonnunk a kisebbikből. Konkrétebbül kifejezve: $a=10$, $m=5$, $n=7$; következőleg $10^5 : 10^7 = 10^{5-7} = 10^{-2}$.

Konkrét számokkal fesztelenül számíthatunk. A mi kellemetlen eredményünket tehát egyszerűen kiszámítjuk. Például a következő módon:

$$10^5 : 10^7 = \frac{10.10.10.10.10}{10.10.10.10.10.10.10}.$$

Mivel mármost nyilvánvalóan rövidíthetjük a felső öt tizes szorzót a nevező öt tizes szorzójával, azért mint eredményt a következőt kapjuk: $10^5 : 10^7 = \frac{1}{10.10} = \frac{1}{10^2}$. Ez az $\frac{1}{10^2}$ pedig 10^{-2} kell legyen!

Már sejtjük az új algoritmust, de óvatosságból még egy próbát csinálunk.

$$a^{11} : a^{16} = \frac{a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a}{a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a} = \frac{1}{a.a.a.a.a}.$$

És ez az $\frac{1}{a.a.a.a.a} = \frac{1}{a^5}$ és ez újra a következővel tartozik egyenlő lenni $a^{11} : a^{16} = a^{11-16} = a^{-5}$.

A mi keresett szabályunk tehát igen egyszerűen hangzik: valamely a alap negatív hatványmutatóval egyenlő ugyanazon alap fordított értéke ugyanazon pozitív hatványmutatóval. Mint képlet: $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, ahol a különböző kell legyen 0-tól.

Az utolsó korlátozásnak megvan a maga helyes értelme. Mert ha $a=0$, akkor $a^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$, és erről az $\frac{1}{0}$-ról tudjuk már, hogy voltaképp egy kifejezhetetlen érték, amelyet mi ∞ által, vagy «határérték, amely végtelenbe tart» által jelölünk.

Alig szükséges tovább egy szót is vesztegetni a negatív hatványmutatóról. Ami egyszerű szabályunk által ezt a hatványmutatót besoroztuk algoritmusaink közé és oly kifejezéseket, mint $b^{(-3+2-4+6-8)} = b^{-5} = \frac{1}{b^5}$ éppen oly biztosan kezelünk, mint $c^{(5+4-3)} = c^6$

A fordított érték lényegéből folyik még, hogy $\frac{1}{a^n}$ előállítható, mint $a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}$. Ellenben $\frac{1}{a^{-n}}$ úgy képzelhető, hogy így állott elő: $a^0 : a^{-n} = a^{0-(-n)} = a^n$. E szabály révén abban a helyzetben vagyunk, hogy bármely hatványt, ha tetszik, a hatványkitevő előjelének megváltoztatásával a törtszámlálóból a törtnevezőbe (és megfordítva) vihetünk át. Ezáltal adódik:

$$\frac{a^0}{a^n} = \frac{a^{-n}}{a^0} \text{ és } \frac{a^0}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^0} \text{ vagy } \frac{1}{a^n} = a^{-n}; \text{ és}$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n.$$

Most pedig még tovább akarjuk bővíteni algoritmusunkat. Ugyanis állítjuk, hogy lehetőnek kell lenni a hatványmutatót közönséges törtek alakjában írni. Tehát például: $10^{\frac{5}{6}}$, $a^{\frac{7}{8}}$, $15^{\frac{a}{b}}$, $20^{\frac{1}{10}}$. $4^{\frac{3}{7}}$, $9^{\frac{25}{8}}$, stb.

Az rögtön világos, hogy egyelőre semmit sem tudunk elképzelni valamely tört, mint hatványmutató gyanánt. Mert az a követelés, hogy vegyem a 10 alapot például $\frac{5}{6}$-szor mint tényezőt: az első pillanatra értelmetlen kívánságnak látszik. Még akkor is, ha akként akarok magamon segíteni, hogy az $\frac{5}{6}$-ot szétbontom $5.\left(\frac{1}{6}\right)$-ba, csak azt tudom, hogy először a 10-et 5-ik hatványra szabad emelnem, mivel $(10^5)^{\frac{1}{6}}$ is egyenlő $10^{\frac{5}{6}}$-val. Az 5-ik hatvány tovább nem okoz nehézséget. De hogy emelem $\frac{1}{6}$ hatványra a $10^5=100.000$ eredményt? Miként vehetem a 100.000-et egyhatodszor mint tényezőt? Nagyobb ezáltal aligha lesz, mivel még egyetlen egyszer sem kell tényezőül vennem. Itt tehát minden jel szerint egy új leépítő, litikus számolási mód előtt állok, amely úgy viszonylik a hatványozáshoz, mint az osztás a szorzáshoz vagy mint a kivonás az összeadáshoz.

El akarjuk árulni, hogy miféle új számolási módról, miféle «parancsról» van szó: az úgynevezett gyökvonásról vagy gyökfejtésről. És $(100.000)^{\frac{1}{6}}$ mint «parancs» nem jelent mást, mint a következőt: «keress egy még ismeretlen számot, amely hatszor tényezőül véve értékül 100.000-et ad».

Ha általánosan $c^{\frac{a}{b}}$ állott volna előttünk, írhattuk volna: $c^{\frac{a}{b}} = (c^a)^{\frac{1}{b}}$, ami annyit jelent, minthogy keresni kell egy még ismeretlen d számot, amely b-szer tényezőül véve, újra c^a-t ad. Tehát $(d.d.d.d.d\ldots\ldots)$ b-szer, mint tényező $= c^a$ vagy

$$d^b = c^a.$$

Ámde gyököket — amit mindenki tudhat — nemcsak fordított értékű hatványmutatók alakjában — tehát pl. $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{3}}$, $10^{\frac{1}{b}}$, stb. — írnak, hanem sok század óta alkalmazzák a gyökjelt, ami a radix (gyökér) szóból akként állott elő, hogy széthúzták $\sqrt{}$ alakba a kézzel írt kis latin r betűt. Ebből lett a mi $\sqrt{}$ jelünk. Tehát írjuk

$$\sqrt[2]{5816}.\quad \sqrt[3]{a.b},\quad \sqrt[a]{25a^4},\ \text{stb.}$$

Itt a gyöknek úgynevezett gyökmutatója vagy gyökkitevője van, ami nem más, mint a fordított értéke a törtnek, amelyet mint hatványmutatót már ismerünk. Tehát:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} \text{ vagy } 10^{\frac{5}{6}} = (10^5)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10^5},\ \text{stb.}$$

Tárgyalásunkból könnyen adódnak a gyökök kezelésének összes szabályai. És ajánljuk biztonság kedvéért a gyökökkel való összes bonyolultabb számítást utánavizsgálni, törtkitevőkkel való számítással, vagyis változtatva az algoritmust:

$$\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[7]{a^9} \text{ volna } a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{9}{7}} = a^{\frac{5}{3}+\frac{9}{7}} = a^{\frac{7\cdot5+3\cdot9}{21}} =$$
$$= a^{\frac{62}{21}} = (a^{62})^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{a^{62}}.$$

Ha a gyöknek tört a mutatója, akkor hatványként való írásánál a fordított érték veendő. Például

$$\sqrt[\frac{4}{5}]{a^3} = (a^3)^{\frac{5}{4}} = (a^{3\cdot5})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a^{15}}$$

vagy

$$\sqrt[\frac{4}{5}]{a^3} = \sqrt[4\cdot\frac{1}{5}]{a^3} = (a^3)^{5\cdot\frac{1}{4}} = [(a^3)^5]^{\frac{1}{4}} = [a^{15}]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a^{15}}.$$

Természetesen lehetséges osztani is gyökökkel (tört kitevőjű hatványokkal), amikor is pozitív vagy negatív eredmények adódhatnak. Például

$$\sqrt[5]{a^6} : \sqrt[3]{a^7} = (a^6)^{\frac{1}{5}} : (a^7)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{5}} : a^{\frac{7}{3}} = a^{\frac{6}{5}-\frac{7}{3}} =$$
$$= a^{\frac{6\cdot3-7\cdot5}{15}} = a^{\frac{-17}{15}} = a^{-\frac{17}{15}} = \sqrt[15]{a^{-17}} =$$
$$= \sqrt[15]{\frac{1}{a^{17}}} = \frac{\sqrt[15]{1}}{\sqrt[15]{a^{17}}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a^{17}}}.$$

Végül megjegyezzük, hogy a második gyököt rendesen nem írjuk ki, azaz hogy $\sqrt{a}$ annyit jelent, mint $\sqrt[2]{a}$ mivel, $\sqrt[1]{a}$-nak egyáltalán nincs szüksége a gyökjelre, tudniillik $\sqrt[1]{a} = a^{\frac{1}{1}} = a^1 = a$ tartozik lenni.

Azt mondtuk «végül». A gyökökről szóló tanításunkat szándékosan csak nagyon fölületesen végeztük. Mivel a mi további céljainkat tekintve, nem oly dolgok érdekelnek, amelyek minden tankönyvben pontosan és részletesen megvannak, hanem egy hasonlíthatatlanul mélyebb probléma érdekel. T. i. a számfogalom belső lényege és e fogalom bővítése a gyökművelet, a gyökvonó parancs bevezetésével, amelyet — mellékesen megjegyezve — egyszerűbb módon, az ú. n. logaritmusok segítsége nélkül számszerűleg tényleg véghezvinni csak bizonyos és nagyon korlátolt esetekben lehet.[1]

[1] Elvben minden gyök valamely konkrét számból kiszámítható. Az e célra kieszelt eljárás azonban, mint említettük, nagy gondot és fáradságot kíván, úgyhogy a számító praxisában alig jön tekintetbe.

TIZENHATODIK FEJEZET

Irracionális számok

Ha fölvetjük a kérdést, hogy mely föltétel alatt számítható ki, egész általánosan véve, valamely gyök, azt találjuk, hogy például $\sqrt[4]{a}$ akkor szolgáltat világos eredményt, ha a egyenlő egy p^4 számmal. Mert akkor $\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{p^4}=p^{\frac{4}{4}}=p^1=p$. Tehát p az eredmény és azt mondjuk, hogy p az a «negyedik gyöke».

Utána kell azonban néznünk, hogy vajjon ez a lehetőség mindig adott-e. Vegyük a legegyszerűbb esetet és követeljük, hogy a egész szám legyen. Valamely tetszőleges egész szám. Ha ebben már megállapodtunk, azonnal észrevesszük, hogy nagy véletlen szükséges ahhoz, hogy a valóban egy más p egész szám negyedik hatványa legyen. Mert az első száz pozitív egész szám között például negyedik hatványként csak a következőket találjuk: 1, 16 és 81. Azaz, bármely egész a esetén — kivéve az 1, 16 vagy 81 értékeket — nincs pozitív egész szám, amelynek negyedik hatványa a. A 25 például a 2^4 és 3^4, a 90 a 3^4 és 4^4 között van, stb. A matematikában az «egyenlőtlenségeket» alkalmazzuk ennek a «közöttiségnek» a kifejezésére. Mivel egy rendkívül fontos írásmódról van szó, amelyet különösen a felsőbb matematikában állandóan alkalmaznak, azért erről részletesebben akarunk szólni. Ha például följegyezni akarom, vagy föltételül állítani, hogy a b szám 30 és 40 között van, akkor írom:

$$30 < b < 40.$$

Ha ellenben azt akarom mondani, hogy b esetleg maga a 30 vagy 40 is lehet, akkor írom:

$$30 \leqq b \leqq 40.$$

Ezt az eljárást «határok közé zárásnak» is nevezik és itt 30 az alsó, 40 a felső határt jelenti. Általános számoknál természetesen nem tudom előre, hogy melyik szám a magasabb vagy a mélyebb. Ha írom, hogy

$$a < b < c,$$

akkor b van az a és c között. És e tétel révén, közvetve, tudom csak meg, hogy a három szám közül a a legkisebb, c a legnagyobb.[1]

Avégre, hogy ebből az írásmódból hasznot húzzunk mi gyökeinkre nézve, mondhatjuk 25 a 2^4 és a 3^4 között van,

$$2^4 < 25 < 3^4.$$

Nyilvánvaló tehát, hogy a 25 negyedik gyöke nem számítható ki $\sqrt[4]{p^4}=p$ mintájára (ahol a p pozitív egész szám). Van azonban nekünk egy másik fajtája is a számoknak, amelyek végtelen sokaságban és fokozatban vannak az egész számok között. Ezek a közönséges törtek. Mondtuk már, hogy például a törzstörtek $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, és így tovább, $\frac{1}{\text{majdnem } \infty}$-ig a 0 és 1 között vannak, valamint még az összes többi valódi törtek, mint $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{\infty-1}{\infty}$-ig.[2] Mivel azonban tetszőleges más egész számok között is középértékek helyezendők be — pl. 12 és 13 között nem valódi tört, tehát $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ vagy $12+\frac{1}{2}$, $12+\frac{3}{4}$, $12+\frac{7}{8}$ stb. alakjában — azért jogosult remény, hogy a mi $\sqrt[4]{25}$-ünket ha nem egészszámmal, hát legalább egy törttel megoldjuk. És úgy gondoljuk, hogy mivel $2^4=16$, $3^4=81$, azért ez a negyedik gyök 2 meg valamely bonyolult tört lesz, például $2+\frac{1}{4}$ körül, lévén $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ a negyediken egyenlő $\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4} = \frac{6561}{256} = 25{\cdot}63\ldots$ Tehát a mi durva becslésünkkel nem nagyot hibáztunk. Ámde tört végtelen nagy számban áll rendelkezésünkre és várhatjuk, hogy

[1] Az, hogy mikor $a<b$ és $b<c$, akkor egyúttal $a<c$, ez egyik esete az úgynevezett tranzitivitás elvének.

[2] Egyszerűségért ∞-t írunk «végtelen határértékhez közeledő nagy szám» helyett.

a $\frac{9}{4}$-nél kevéssel kisebb törttel pontosan eltaláljuk a mi negyedik gyökünket. A kipróbálás nagy fáradságot okozna és talán még affelől se biztosítana, hogy ezt a törtet valóban megtaláljuk. Ugyanis — ezt még egyszer hangsúlyozzuk — végtelen sok tört között választhatunk, amelyek nevezője 200 vagy 2000 vagy 2,000.000 jegyből is állhat. Talán a $\sqrt[4]{25}$ pontos értékét csak egy oly tört révén találnók meg, amelynek nevezője 10.000 kvintillió jegyből áll, vagy ez a szám még megszorozva egy billió szextillióval. Még mindig egy közönséges tört volna. És a nevező jegyeinek száma még mindig tovább és tovább emelhető.

Problémánkat tehát általánosan kell vennünk, ami nem nehéz. Tudjuk, hogy két eset van. n-ik gyöknél ez az a egyenlő lehet p^n-nel, ahol a és p pozitív egész számok. Vagy pedig a mi a-nk két egymás után következő szám, p és $(p+1)$ n-ik hatványa között van. Tehát $p^n < a < (p+1)^n$. A $(p+1)$ a p-re következő legközelebbi egész szám, mint például 17-re a $(17+1)=18$ szám következik. Mivel továbbá tudjuk, hogy a második esetben $\sqrt[n]{a}$ számára egész számot nem kaphatunk, azért azt kérdezzük, hogy vajjon nem fejezhető-e ki valamely $\frac{r}{s}$ közönséges törttel. Ekkor $\sqrt[n]{a}$ egyenlő tartoznék lenni $\sqrt[n]{\left(\frac{r}{s}\right)^n}$-nel, mivel ekkor $\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{n}{n}}$ is egyenlő volna $\left(\frac{r}{s}\right)^1 = \frac{r}{s}$-sel és így a gyök ki lenne számítva, mint közönséges tört. Magától értetődik, hogy r és s «közös osztó nélküliek», mivel a törtet a legegyszerűbb alakra hoztuk.

Például nem $\frac{24}{15}$-öt, hanem $\frac{8}{5}$-öt írnánk fel megoldásul.

Mivel $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\left(\frac{r}{s}\right)^n}$, azért a is természetesen egyenlő tartozik lenni $\left(\frac{r}{s}\right)$-sel, mivel semmi sem változik, ha az $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\left(\frac{r}{s}\right)}$ egyenletet n-nel hatványozom, tehát írom, hogy $(\sqrt[n]{a})^n = \left(\sqrt[n]{\left(\frac{r}{s}\right)^n}\right)^n$. Ebből azonban $a = \left(\frac{r}{s}\right)$. A további vizsgálat végett emlékeznem kell arra, hogy a egész szám. Ez volt vizsgálatunk kiindulópontja. De ha a egész szám, akkor annak is egész számnak kell lennie, ami vele egyenlő, vagyis $\left(\frac{r}{s}\right)^n$-nek. De $\left(\frac{r}{s}\right)^n$ tovább egyenlő $\frac{r^n}{s^n}$ -nel. És r és s közös osztó nélküliek. De ha számláló és nevező közös osztó nélküli, akkor oly sokáig hatványozhatom, ameddig akarom és ekkor sohasem lesz közös mértékük, mivel azáltal új tényező nem lép föl sem a számlálóban, sem a nevezőben. Ha például $\frac{3}{5}$-öt hatványozom, akkor kapom

$$\frac{3.3.3.3.3.3. \ldots\ldots \text{ a végtelenségig}}{5.5.5.5.5.5. \ldots\ldots \text{ a végtelenségig}}.$$

Így hát közösosztó nélküli számok n-ik (tetszőleges) hatványai is egymásra nézve közös osztó nélküliek maradnak. És közös osztó nélküli számok egymással osztva sohasem adhatnak egész számot, tehát a mi a-nk soha sem lehet $\left(\frac{r}{s}\right)^n$, ameddig fenntartjuk az a egész számúságának a föltételét.

A mi eredményünk egyenesen megijeszt. Mivel nem kevesebbet mond, mint azt, hogy habár az egész számok között levő törtek sokasága végtelen, mégsem tudok közönséges törtet találni, amely lehetővé teszi például a $\sqrt[4]{25}$ eredményének a kifejezését. De mivel ez a $\sqrt[4]{25}$ valami eredményt mégis csak kell, hogy szolgáltasson, amely eredményhez $2\frac{1}{4}$-del már igen közel voltunk, azért látszólag az egész és törtszámokon kívül még egy más típusa van a számoknak, amely típus a törtek közé becsúszik másodrendű, magasabb (vagy mélyebb) végtelen kicsiségében. Említettük még azt is, hogy a törtek az egszszámok közötti összes közöket kitöltik.

A mi eredményünk — mint a görögök Pythagoras óta mondták — «alogos», kimondhatatlan, értelem nélküli.

Ellentmond az értelemnek, a «ració»-nak.[1] És ezeket az új, misztikus számokat, amelyekről még azt sem tudjuk, hogy miként írandók, «irracionális», nem-racionális számoknak nevezzük.

De hogyan fejezzem ki ezeket a kifejezhetetlen számmonstrumokat, ezeket a különös közbeeső számokat, ha tilos úgy törtként, mint egész számként való írásuk?

Például $\sqrt[4]{25}$ számára logaritmikus számítással a 2·23606... értéket találom. A pontok azt tüntessék fel, hogy ezzel a számítás egyáltalán nincs lezárva. Egy más «irracionális» szám, az úgynevezett π körszám számára Leibniz egy számolási szabályt adott, amely azt mondja, hogy $\frac{\pi}{4}$ a következő sorral nyerhető:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \cdots$$

Azaz $\frac{\pi}{4}$ csak akkor volna kifejezve, ha ebben a sorban a végtelenségig számoltam volna. Tehát tetszőleges pontosan tudok számolni, de sohasem végig.

Már most két lehetőséget látunk irracionális számok kifejezésére, amelyek valójában ugyanoda lyukadnak ki. Tudniillik a tizedestörtek alakjában való írást és a végtelen sorok alakjában való írást, amely utóbbiak — mint a «Leibniz-sor» mutatja — keverhetik is az összeadást és a kivonást, amikor «alternáló» soroknak nevezik őket.

De még nem akarunk özelebbről foglalkozni a végtelen sorok nagyon nehéz tanával hanem ezt csak annyira akarjuk átkutatni, amennyire annak az állításunknak az igazolására szükséges, hogy az irracionális számok mindkét írásmódja voltakép ugyanazon az elven nyugszik: t. i. éppen a végtelen sorokkal való előállításon.

[1] Az irracionálisnak a racióból való levezetése a «helyes viszony» értelmében, az inkommenzurábilis fogalmánál fog megtörténni.

A Leibniz-sor megvizsgálhatósága végett már most megemlítjük, hogy a π körszám értéke tizedesen írva 3·14159265358979З... Egy másik ismert irracionális szám volna például a természetes logaritmusok alapja, az ú. n. «*e* szám», amely mint sor

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

és mint tizedesszám

$$e = 2{\cdot}718281828459045235З6\dots$$

alakban fejezhető ki.

Ámde most ellenfelünk joggal figyelmeztet, hogy mi tizedestörtekről még egyáltalán nem beszéltünk, tehát ha nem tételezünk fel semmilyen előzetes tudást, akkor nincs jogunk tizedestörteket felírni. Továbbá tehetségesebb és figyelmesebb olvasók azonnal közbevetik, hogy hát elég oly eset is adódik, amelyekben egy közönséges osztás — amint mondják — nem «megy fel». Itt valami nincs rendjén. Ugyanis tetszőleges egész számok osztása nem más, mint parancsként felírt közönséges tört vízszintesen felírva a kettőspont alkalmazásával. És azt állítottuk, hogy a közönséges törtek és irracionális számok egymással merőben ellentétesek; és hogy az irracionális számok a legközelebb szomszédos közönséges törtek (vagy osztások) «között» fekszenek. Továbbá mi úgy tettünk, mintha az irracionális számok csak a gyökvonás litikus műveletével állottak volna elő, holott ismeretes, hogy például 20 : 6 vagy $\frac{20}{6}$ éppenúgy irracionális számot, tudniillik a 3·33333333... vagy $3{\cdot}\dot{3}$ (három periodikusan) vagy

$$3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10{,}000} + \frac{3}{100{,}000} + \frac{3}{1.000{,}000} + \dots$$

számot szolgáltatja.

Nagyon hálásak vagyunk ezekért az ellenvetésekért. Mert feltűnő jelenség, hogy még jó számolók és gimnáziumi képzettségű emberek sem igazodnak el ezekben a különbségekben, sőt még nem is gondolkodtak erről vagy nem is ismerik ezeket kellőképpen. Hogy valamely tört különbözik egy irracionális számtól, ezt mindenki belátja. Ugyanis a közönséges tört lezárt, kész, bevégzett; ellenben az irracionális szám sohasem állítható elő mint szám, hanem mindig csak mint végtelen, soha le nem záródó *processzus*, mint számolási szabály, mint képzési törvény, mint sor. Nevezhető volna ezért az egész és a törtszám sztatikai számnak, az irracionális szám, az írásnak megfelelően, dinamikus számnak. Nem mennyiség, hanem egy irány bizonyos mennyiséghez, jóllehet mi mindig, részben megcáfolhatatlanul sztatikaivá tehetjük. És ezt megtehetjük, amennyire akarjuk. Ha $\sqrt[4]{25}$-nél csak azt akarjuk tudni, hogy mekkora ez a gyök három tizedesre, akkor $\sqrt[4]{25}$ éppen 2·236. Ha azonban azt akarnók tudni, hogy egyáltalán mekkora, akkor semmiesetre sem tudunk felelni. Mert nem tudunk végtelen sok tizedesjegyet felírni. De hát ezt 3·333333... (periodikus) esetén sem tud! juk megtenni? Ezt a számot sem tudjuk bevégezni. Valóbana T. i. *tizedestörtnél* ez lehetetlen. Igenis azonban lehetséges . befejezés ebben az esetben, mint közönséges törtnél. 3·3333...- (periodikus) ugyanis nem más, mint $\frac{20}{6}$ vagy $\frac{10}{3}$ vagy $10.\left(\frac{1}{3}\right)$. Ennél az írásmódnál semmi kétely sincs. És a számvonalon rá tudok ujjal mutatni a helyre, ahol ez a $10.\left(\frac{1}{3}\right)$ van. T. i. $\frac{1}{3}$ a 3 után. Mivel $\frac{10}{3}$ egyúttal $3+\frac{1}{3}$ vagy $3\frac{1}{3}$. De a $\sqrt[4]{25}$, ez a 2·236... még egy földöntúli mikroszkóppal sem található meg a számegyenesen. Még akkor sem, ha tudnám, hogy mely közönséges törtek között fekszik. Mert valahol ott van más irracionális számok egy végtelen sokaságában. Ez nagyon misztikusnak tűnik fel. Sajnos azonban a mi kereteink között nincs meg a lehetőség ezt a rendkívül felizgató dolgot maradéktalanul tisztázni.

TIZENHETEDIK FEJEZET

Törtrendszerek

Fordítsuk figyelmünket a törtrendszerekre, ez sokkal előbbrevaló feladat és különleges esetükre, a tizedestörtekre. A számrendszerekre vonatkozó vizsgálataink nyomán sejthetjük, hogy a «törtrendszer» mit jelenthet. Minden számrendszerben van olyasvalami, ami a tizedestörteknek megfelelője. A hatosrendszerben a «tizedespont» után (ott «hatodospont» lehetne a neve), a hatodok, harminchatodok, kétszáztizenhatodok stb. következnek. A kettesrendszerben a «kettedespontot» a felek, negyedek, nyolcadok, tizenhatodok stb. követik, a tizenhármasrendszerben a tizenharmadospont után a tizenharmadok, százhatvankilencedek, a kétezerszázkilencvenhetedek stb. sorakoznak, a tizesrendszerben a tizedek, századok, ezredek stb. Helyértékrendszerben írt számnak az alakja, rendszerben írt törttel, a következő, ha példaképpen öt egész és négy törtjegyet tartalmazó számot írunk fel és a kitevőket tizesrendszerben írjuk:

$$mg^4+ng^3+og^2+pg^1+qg^0+r\left(\frac{1}{g^1}\right)+s\left(\frac{1}{g^2}\right)+t\left(\frac{1}{g^3}\right)+u\left(\frac{1}{g^4}\right)$$

vagy egyszerűbben, ha negatív kitevőjű hatványokat alkalmazunk:

$$mg^4+ng^3+og^2+pg^1+qg^0+rg^{-1}+sg^{-2}+tg^{-3}+ug^{-4}$$

A tizedespontot a qg^0 és rg^{-1} közé kellene tennünk. De nem akarunk itt az összes lehetséges rendszerrel foglalkozni, hanem megelégszünk a tizesrendszer vizsgálatával. Tizesrendszerű szám, mondjuk az 50,341·7328, amelynek tizedes jegyei is vannak ilyen alaku, lenne: $5\cdot10^4+0\cdot10^3+3\cdot10^2+$ $+4\cdot10^1+1\cdot10^0+7\cdot10^{-1}+3\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}$ s ez a felépítési módját teljesen áttekinthetővé teszi. Tehát még egyszer: rendszerben írt tört alatt törtszámnak számrendszerben írt alakját értjük. Jelölésére rendesen a kis görög σ (szigma) betűt használjuk. De még mielőtt az ilyen rendszertörtek különböző fajtáit megismernők, ismerkedjünk meg egy új szimbolummal, amely az ilyen rendszeres sorok írását nagymértékben megkönnyíti. Ez az úgynevezett szummaoperátor, vagy szummajel, «szummája ...-nek». Jele a görög nagy Σ (szigma). Ki kell még tűznünk az összegezés határait. Ilyen határoknak csak akkor van értelmük, ha csupa lényegében egyforma szerkezetű kifejezés összegéről van szó és ezek csak valamilyen indexben különböznek egymástól. Sejteni kezdjük, hogy sorként írt tizes- vagy másrendszerbeli szám ennek a feltételnek megfelel. Hisz helyértékkel írt szám minden egyes tagja együtthatóból és alapszámból áll, az előbbieket indexük, az utóbbiakat kitevőjük teszi felismerhetővé s az index és a kitevő közt határozott összefüggés áll fenn. A következő, helyértékrendszerben írt szám: a_1g^0+ $+a_2g^1+a_3g^2+a_4g^3+a_5g^4+a_6g^5+a_7g^6+a_8g^7$ minden tagja a-ból és g-ből áll. Tehát valamennyi tag a és g szorzata. De melyik a és melyik g veendő tekintetbe? Nos, az 1-től 8-ig terjedő indexű a-k szorozva a 0-tól 7-ig terjedő kitevőkkel ellátott g-kel s minden tagban (ez az összefüggés) az index eggyel nagyobb mint a kitevő, vagy ami ugyanaz, a kitevő eggyel kisebb mint az index. A szám tehát valamennyi $a_\nu g^{\nu-1}$ vagy $a_{\varrho+1}g^\varrho$ alakú kifejezésnek összege. A ν (nü) és a ϱ (ró) görög kisbetűk. De ezzel még nincs a dolog befejezve. Még nem ismerem a határokat, amelyeken belül az összegezést el kell végeznem. Hogyan segíthetek itt magamon? Egyszerű! Mivel az index legkisebb értéke 1 és a legnagyobb 8, így «futásának» alsó határa 1, felső határa pedig 8. A határok mindenkor bezárólag, inkluzive értendők. A hatványkitevőnek viszont alsó határa 0, felső pedig 7. Tehát 0-tól 7-ig «fut». De felhívjuk itt a figyelmet arra — és ez igen fontos, alapvető megjegyzés — hogy ezt a «futást» nem-folytonos, szaggatott futásnak nevezik. Ez tulajdonképpen ugrás egyik egészszámú indexről a másikra, egyik kitevőről a másikra. Vigasztalásul megemlítjük, hogy a rettegett integrál lényegében nem egyéb, mint ilyen sorösszegezés, de ott a «futás» nem szaggatottan, hanem folytonosan történik. Tehát, ha a Σ=összegezési parancsot alaposan emlékezetünkbe véssük, sokat haladtunk az integrál fogalma szempontjából. Mert az összegezési-, szumma-parancs lényegében nem egyéb, mint a nem folytonos, eldurvult, szinte szabad szemmel is áttekinthető integráloperátor. És — ezt már itt eláruljuk — a nagy Leibniz 1676 október 29-én írta fel ama nagyjelentőségűvé vált papírlapra, hogy az új (integrál) jel $\int$ nem jelent egyebet, mint összegét valaminek. Ez a jel nem is más, mint eltorzított, széthúzott nagy latin S betű.

De mivel ellenfelem már öklével veri az asztalt és haját tépi, ijedten térek vissza szumma-jelemhez. Azt mondja ugyanis, mikor már kissé magához tért, hogy még azt sem tudjuk, mi a tizedestört.

Megállapítjuk tehát, hogy az ag szorzatoknak mind az indexei, mind a hatványkitevői valamilyen alsó határtól valamilyen felső határig «futnak». Ez annyit tesz, hogy egymás után, mindenkor egészszámot ugorva, felveszik a felső és az alsó határ közötti értékeket, a nélkül, hogy egyet is átugranának.

Ezzel már, azt hiszem, vagyunk annyira, hogy felírhassuk szummaoperátorunkat.

$$\sum_{0}^{7}{}^{\varrho}\, a_{\varrho+1}g^{\varrho} \quad \text{vagy} \quad \sum_{1}^{8}{}^{\nu} a_{\nu}g^{\nu-1}$$

Logikus és természetes, hogy az alsó határt a szummaparancs alá írjuk, a felsőt pedig fölé. Középen meg lehet jelölni, de nem kell, hogy melyik a «futó» mennyiség. Ez után következik az összegezendő kifejezés szerkezete, alakja, általános számokból alakult indexekkel és kitevőkkel. Természetesen két, három, négy, öt vagy esetleg még több általános szám is szerepelhet a szummajel mellett s mindegyiknek lehet indexe vagy kitevője, vagy mindkettő.[1] Ugyanannak a számnak is lehetne indexe és kitevője. Ez azt jelentené, hogy az illető általános szám értéke változik ugyan, ám kitevője valamilyen szabály szerint nő vagy csökken. De hogy a túlzottan elvont tárgyalásmódot elkerüljük, tudván, hogy a szummaparancs eleinte jelentős nehézségeket okozhat, számoljunk végig néhány többé-kevésbbé bonyolult példát. S jegyezzük még meg, hogy a szummaparancs megbecsülhetetlen mértékű egyszerűsítést jelent a számolásnál, mert

[1] Más lehetőséget itt szándékosan nem említünk.

lehetővé teszi más módon alig leírható kifejezéseknek egyetlen jellel való feljegyzését.

Legyen a $\sum_{2}^{9} a^\nu b_{\nu+1} c_\nu^{\nu+2}$ kifejezés megadva. Milyen ennek a «kifejtett» alakja? Egészen egyszerű:

$$a^2b_3c_2^4+a^3b_4c_3^5+a^4b_5c_4^6+a^5b_6c_5^7+a^6b_7c_6^8+a^7b_8c_7^9+a^8b_9c_8^{10}+a^9b_{10}c_9^{11}$$

Természetesen a «kifejtésnél» nagyon kell figyelni. De a szükséges figyelem és a nehézség sem a matematikában, sem az életben nem azonos.

Vegyünk most a gyakorlatból egy esetet. Hogyan írunk egy négyjegyű tizedestörtet?

Természetesen így: $0.g^0+\sum_{1}^{4} a_\nu \frac{1}{g^\nu}$ vagy $0.g^0+\sum_{1}^{4} a_\nu g^{-\nu}$.

Az első eset kifejtése: $0\cdot g^0+a_1\cdot\frac{1}{g^1}+a_2\cdot\frac{1}{g^2}+a_3\cdot\frac{1}{g^3}+a_4\cdot\frac{1}{g^4}$,

a másodiké: $0.g^0+a_1g^{-1}+a_2g^{-2}+a_3g^{-3}+a_4g^{-4}$, a kettő szemlátomást ugyanazt jelenti. Mégpedig 0 egyest, a_1 tizedet, a_2 századot, a_3 ezredet, a_4 tízezredet.

A határokat természetesen másképpen is megadhatom. Ha esetleg n jegyű tizedes törtet akarok felírni s ennél az n még határozatlan, de véges szám, akkor ezt írom:

$$0.g^0+\sum_{1}^{n} a^\nu g^{-\nu}=0.g^0+a_1g^{-1}+a_2g^{-2}+\cdots+a_ng^{-n}$$

A határokat még merészebben is megállapíthatom. Mondjuk végtelen tizedes tört esetén, vagyis ha a törtnek mindig újabb és újabb jegyei következnek:

$$0.g^0+\sum_{1}^{\infty} a_\nu g^{-\nu}=0.g^0+a_1g^{-1}+a_2g^{-2}+a_3g^{-3}+\cdots+a_\infty g^{-\infty}$$

Végül megpróbálunk még felírni új parancsunk segítségével valamely helyértékrendszerben, legáltalánosabb alakban felírt számot. Megjegyezzük, hogy miként a legtöbb hasonló esetben, itt is többféleképpen lehet a kifejezést felrni. Válasszunk tehát valamely könnyen érthető módot.

A helyértékrendszerben írt szám $=0.g^0+\sum_{+m}^{-\infty} a_\nu g^\nu$,itt $(+m)$

akármilyen nagy lehet. Kifejtve a parancs a következő sort adja:

$$a_m g^m + a_{m-1} g^{m-1} + \cdots + a_2 g^2 + a_1 g^1 + a_0 g^0 + \\ + a_{-1} g^{-1} + a_{-2} g^{-2} + \cdots + a_{-\infty} g^{-\infty}.$$

Új algoritmusunk, amelynél a számok szokásos írásmódjára való tekintettel látszólag értelmetlenül választottam meg az alsó és felső határt, a következő eredményt szolgáltatja:

1. Mindegyik $a.g$ csoportban az a indexe ugyanaz, mint a g kitevője.

2. Mindkettő az egészszámokon fut végig, $+m$-től kezdve csökkennek 0-ig és onnan a negativ számokon át $-\infty$-ig.

De ne hatoljunk túlságosan mélyre, mutassunk inkább egy egészen különös, bár gyakran használt írásmódot, amelylyel még «alternáló» sorokat is felírhatunk Ezeknél a tagok előjele szabályosan váltakozik. Próbálkozzunk talán a híres Leibniz-sorral:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

s írjuk fel tetszés szerinti, de *páros* tagszámra.

A következő írásmóddal valósítjuk meg szándékunkat:

$$\text{közelítő értékben } \frac{\pi}{4} = \sum_{1}^{2n}{}_{\nu} \frac{1}{2\nu - 1} (-1)^{\nu+1}$$

s megvizsgáljuk, hogyan működik algoritmusunk.

$$1.\ \text{tag:}\ \frac{1}{(2.1)-1} \cdot (-1)^{1+1} = \frac{1}{1} \cdot (-1)^2 = +1$$

$$2.\ \text{tag:}\ \frac{1}{(2.2)-1} \cdot (-1)^{2+1} = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = -\frac{1}{3}$$

$$3.\ \text{tag:}\ \frac{1}{(2.3)-1} \cdot (-1)^{3+1} = \frac{1}{5} \cdot (-1)^4 = +\frac{1}{5}$$

$$4.\ \text{tag:}\ \frac{1}{(2.4)-1} \cdot (-1)^{4+1} = \frac{1}{7} \cdot (-1)^5 = -\frac{1}{7}$$

$$2n.\ \text{tag:}\ \frac{1}{(2.2n)-1} (-1)^{2n+1} = \frac{1}{4n-1} (-1)^{n+1} = -\frac{1}{4n-1}.$$

Hibátlanul megkaptuk a Leibniz-sort. Meg kell jegyeznünk, hogy $2n$ a páros számot jelenti. Mert bárhogyan választjuk is az egészszámú n-et (esetünkben más, mint egészszám, nem is jöhet tekintetbe), kétszerese biztosan páros szám. Ha $n=2$, úgy $2n=4$. Ha $n=27$, akkor $2n=54$ stb. Ezért $2n+1$, amely a $2n$-edik tagban szerepel, páratlan szám. Ez is kitűnően beleillik algoritmusunkba, hisz minden páros sorszámú tag mutatója páratlan szám, pl. a 4. tag mutatója 5. Varázsjelünk kifogástalanul működik és még megelégedéssel látjuk azt is, hogy a látszólag jelekkel kifejezhetetlen, szabályos előjelváltozás követelményét is milyen egyszerűen ki tudtuk fejezni azáltal, hogy a hatvány tulajdonságait felhasználtuk. Negativ számok hatványai páratlan kitevőnél mindenkor negativ értéket adnak.[1] De hogy semmi egyéb ne változzék, csak az előjel ugráljon ide-oda, (—1)-et választottuk alapnak. Bizony ravasz eljárás!

Bármennyire csábító volna is ezt az algoritmust, melynek további tanulmányozását nagyon ajánljuk, alaposabban átvizsgálni, hiszen még csak egészen kis részét láthattuk, mégis át kell térnünk már végre tizedestörtjeinkre. Még pedig példák kapcsán. Feltesszük, hogy csak redukált törtekkel foglalkozunk, azaz olyanokkal, amelyeknek abszolút értéke kisebb mint 1 és a számlálójuknak és nevezőjüknek nincs közös osztója. De sajnos, halmozódnak az új kifejezések.« Abszolút» értékről beszéltünk, ezt a kifejezést tehát gyorsan meg kell magyaráznunk. Nyilvánvaló, hogy a kisebb, mint 1, kifejezés kétfélét jelenthet. Először azt, amit általában ezen értenek. Vagyis $\frac{1}{2}$ kisebb mint 1. $\frac{4}{7}$ kisebb mint 1. Általában minden valódi tört kisebb mint 1, hisz éppen azt neveztem valódi törtnek, amelyiknek ez a tulajdonsága. De van a «kisebb, mint 1»-nek még másik jelentése is. Ez utóbbi a negatív számok bevezetésével keletkezett. A 0 bizonyosan kisebb, mint 1. Még kisebb azonban a (—1), (—2), (—3) stb. és álta-

[1] A parancsok «összekapcsolásának» szabályaiból következik: $-a^3)=(-a)\,(-a)\,(-a)$ és $(-a)^6=(-a)\,(-a)\,(-a)\,(-a)\,(-a)\,(-a)$. Ha a minusz előjel szorzásban páros számban fordul elő, az eredmény pozitív, különben negatív.

lában valamennyi negativ szám. Akinek adóssága van, annak biztosan kisebb a vagyona, mint azé, akinek egy zechinója van. De éppen e második jelentés miatt nem állíthatom, hogy csak a valódi tört kisebb, mint 1. Éppen ezért minden szám nagyságára három esetet különböztethetek meg. Értékét pozitív értelemmel, negativ értelemmel és végül számértékét magában véve, vagyis abszolút, előjeltől mentes értékét. Ez utóbbi esetben a számot két függőleges vonás közt írom és kijelentem: $|5$ biztosan nagyobb, mint $|3|$, mind a mellett, hogy -5 bizonyosan kisebb, mint $+3$, sőt kisebb még, mint -3. Az abszolut $\left|\frac{1}{2}\right|$ szám mindenkor kisebb, mint $|1|$ és ugyanígy minden más valódi tört abszolút értéke is kisebb, mint 1.

E közjáték után már munkához láthatunk. Megkíséreljük először megállapítani, hogy mennyi lehet a $\frac{3}{400}$ tört értéke. Osztással a 0·075 értéket kapjuk, tehát úgynevezett véges tizedestört áll előttünk. Ugyanígy a $\frac{4}{125}$ esetében is, lévén ez tizedestörtben 0·032. Minden gyerek tudja, hogy $\frac{1}{2} = 0{\cdot}5$ és $\frac{1}{5} = 0{\cdot}2$. Ha most elfogadom az általánosan szokásos írásmódot és a redukált tört számlálóját p-vel, nevezőjét q-val jelölöm, akkor érvényes a szabály, hogy csak az a közönséges tört alakul véges tizedestörtté, amelyiknek nevezője, q csak a 10 alapszám 2 és 5 törzstényezőjéből áll.

$40 = 2.2.2.5 = 2^3.5$, $125 = 5.5.5 = 2^0 5^3$,[1] $2 = 2^1.5^0$, $5 = 2^0.5^1$.

Minden példánkban érvényesül ez a szabály. Tehát általánosan is állíthatjuk, hogy csak akkor remélhetjük, illetve vehetjük bizonyosra azt, hogy egy osztás «kijön», ha az osztó és osztandó valamennyi közös tényezőjével megtörtént rövidítés után az osztó csakis a 2 és 5 hatványainak szorzatából tevődik össze. A 2 és 5 természetesen a 0 hatványon is szere-

[1] A hiányzó tényező 0-dik hatványát az általános szabály fenntartása céljából írtuk ki.

pelhet, ami egyértelmű azzal, hogy egyáltalán nem szerepel tényezőként. Ha tehát kiszámítom, tegyük fel $2^{27}.5^{13}$ értékét, vagy általában a $2^n.5^m$ számot, meg lehetek győződve, hogy minden racionális szám ezzel a $2^n.5^m$-el osztva valamely zárt egész vagy véges tizedestörttel kifejezhető hányadost ad. Tehát minden $\frac{p}{2^n.5^m}$ alakú tört véges, nem periodikus tizedestörttel fejezhető ki. Általában, minden számrendszerben véges törthöz jutok, ha a p számlálót csupán az alapszám törzstényezőiből összetett nevezővel osztom. Kettes rendszerben csak a 2 hatványaiból álló számokkal végzett osztás eredménye véges. Ehhez a hatosrendszerben az szükséges, hogy a nevező 2 és 3 hatványaiból álljon, a tizenkettesrendszerben szintúgy, a harmincasrendszerben a nevező 2, 3 és 5 hatványaiból alakulhat. És így tovább. Ismételjük: biztos, hogy éppen az imént ismertetett összetételű közönséges törtek alakíthatók át véges tizedes- vagy más alapú törtté. Írásban $\sigma_n = 0.g^0 + \sum_1^n a_\nu g^{-\nu}$, amikor is az n értéke különféle lehet, de a végtelentől különböznie kell.

Ha a $\frac{p}{q}$ tört nevezőjének csupa olyan tényezője van, amelyekkel a rendszer alapszáma nem osztható (tehát a tizesrendszerben a 3, a 7, vagy a 3 és a 7 esetén), akkor az osztás eredménye úgynevezett tiszta szakaszos tört lesz. Egy számjegy, vagy a számjegyek csoportja a végtelenségig ismétlődik. $\frac{1}{7}$ például $= 0{\cdot}\overbrace{142857}\overbrace{142857}\overbrace{142857}\ldots$, $\frac{3}{7} = 0{\cdot}\overbrace{428571}\overbrace{428571}\ldots$, $\frac{5}{21} = 0{\cdot}\overbrace{238095}\overbrace{238095}\ldots$ $\frac{4}{11} = 0{\cdot}\overbrace{36}\overbrace{36}\overbrace{36}\ldots$, $\frac{2}{3} = 0{\cdot}\dot{6}\dot{6}\dot{6}\ldots$, stb. A szokásos írásmód szerint az ismétlődő számjegy, vagyaz ismétlődő csoport két szélső számjegye fölé pontot teszünk. Az utóbbi esetben szokás az ismétlődő csoport fölé vízszintes vonalat is húzni. Tehát $7{\cdot}\dot{3}$ jelentése $7{\cdot}3333333\ldots$ és így tovább, $0{\cdot}\dot{5}432189\dot{}$ vagy $0{\cdot}\overline{5432189}$ annyi mint $0{\cdot}\overline{5432189}\overline{5432189}\ldots$ stb.

Végül fennáll még annak a lehetősége is, hogy a nevező (osztó) tartalmaz ugyan a rendszer alapszámával közös törzstényezőket, de tartalmaz olyan más tényezőket is, amelyeknek nincs közös osztójuk a rendszer alapszámával. Tizes rendszerben ilyen osztó a 6, tényezői 2 és 3, $\frac{5}{6}$-nak megfelelő tizedestört a következő: 0·83333..., tehát a törteknek olyan típusa, amellyel eddig még nem találkoztunk. Neve «vegyes szakaszos tört». Először jön a 8 és csak azután kezdődik a szakasz, a 3. A keveredés itt nagyon egyszerű. De megeshetik az is, hogy mind a szakaszt megelőző csoport, mind maga a szakasz több számjegyből áll. $\frac{5}{22} = 0{\cdot}2\overset{\frown}{27}\overset{\frown}{27}\overset{\frown}{27}$ esetén a szakasz előtti csoport egyjegyű, a szakasz maga kétjegyű. $\frac{3}{26} = 0{\cdot}1\overset{\frown}{153846}\overset{\frown}{153846}\ldots$ szakasz előtti csoportja egyjegyű ugyan, de maga a szakasz hatjegyű. Végül $0{\cdot}26\overline{387}$ esetén (közönséges törtként ez a $\frac{2929}{111000}$ számot jelentené) a szakaszt megelőző csoport kétjegyű, tehát szintén többjegyű szám.

Az osztónak, nevezőnek másféle összetétele azonban nincs. Teljes joggal megállapíthatjuk tehát, hogy közönséges törteknek valamely számrendszerben írt törtekké való átalakításánál (vagyis két szám osztásánál) csak véges, vagy tiszta szakaszos, vagy pedig vegyes szakaszos tört keletkezhetik.

Irracionális szám, vagyis olyan rendszertört, amelynél szabály nélkül, vagy az eddig ismertetett szabályoktól eltérő szabályosság szerint követik egymást a számjegyek a végtelenig, osztás eredményeként el nem képzelhető. Ilyen csak gyökvonás műveletéből (tört kitevőjű hatványokkal végzett műveletekből) vagy bizonyos csökkenő hatványsorok összegezésénél vagy más csökkenő sorok összegezésénél keletkezhetnek.

Bizonyosak lehetünk tehát abban, hogy minden racionális számok alkotta tört, vagy racionális számokkal végzett osztás ismét racionális számot eredményez. $\frac{p}{q} = r$ (racionális szám), legyen a p és a q bármilyen, pozitív vagy negatív, egész vagy tört szám, csak irracionális nem lehet egyik sem. De ha így áll a helyzet, akkor feltétlenül lehetséges minden tiszta szakaszos és minden vegyes szakaszos törtet $\frac{p}{q}$ alakú közönséges törtté visszaalakítani. De valamely számrendszerben felírt nem szakaszos, vagy nem periodikus szabály szerint képzett törtet soha sem lehet közönséges törtté visszaalakítani, mer tez esetben irracionális számról van szó és ellenkező esetben sikerülne irracionális számot racionálissá változtatni.

De a «visszaváltoztatás» kiváló próbája lesz eddigi állításainknak. Egyelőre még jóformán el sem tudjuk képzelni, hogy miként lehet végtelen törteket, akár csak periodikusakat is, matematikailag megfogni. Tudjuk ugyan, hogy $\frac{1}{3}$ egyenlő 0·33333... (periodikusan ismétlődve a végtelenig), de ha csak a 0·333333...-at látnók, bizony nem tudnók, miként fogjunk neki a visszaalakításnak. Legalábbis messzemenő megfontolások nélkül semmi esetre sem.

Biztos, hogy a legegyszerűbb valamely véges törtnek a visszaalakítása. Csak ki kell mondanom és azt, amit mondok, közönséges tört alakjában kell leírnom, máris megvan az eredmény. Tehát $0{\cdot}225 = \frac{225}{1000}$ és ez 25-tel rövidítve adja a tovább nem rövidíthető $\frac{9}{40}$ «redukált alakot». De ha az eredményt szigorúan tudományos módszerekkel kívánom f l-jegyezni, ezt kell írnom:

$$\sigma_m = \frac{\sum_{1}^{m} c_\mu g^{m-\mu}}{g^m}.$$

Ennél a μ (görög kis m betű) «fut», c a mindenkori együttható (esetünkben a 2, 2 és az 5) és g a rendszer alapszáma (most 10). Az m törtünk jegyeinek a számát jelenti (esetünkben 3). Tehát behelyettesítve:

$$\sigma_m = \frac{2.10^{3-1}+2.10^{3-2}+5.10^{3-3}}{10^3} = \frac{2.100+2.10+5.1}{1000} = \frac{225}{1000},$$

vagyis ugyanaz, amit józan eszünkkel is megállapítottunk. Képletünknek ezzel szemben megvan az az előnye, hogy minden számrendszerre érvényes és így pontos képét adja a helyzetnek.

Tiszta szakaszos törtek visszaalakítására a következő képlet szolgál:[1]

$$\sigma_r = \frac{\sum_1^r c_\varrho g^{r-\varrho}}{g^r-1};$$

s ez nem jelent egyebet, minthogy a számlálóba a szakaszt kell írni, a nevezőbe pedig annyi kilencest, ahány számjegyből a szakasz áll. Ez a magyarázat a kilencesekkel, természetesen csak a tizesrendszerre érvényes.

Ha $0{\cdot}\dot{3}$ a visszaalakítandó tört, egyszerűen felírhatom, hogy $\frac{3}{9}$ és rögtön megkapom az eredményt: $\frac{1}{3}$. Ugyanígy $0{\cdot}\dot{6}$, az eredmény $\frac{6}{9}$, illetve $\frac{2}{3}$. A tiszta szakaszos $0{\cdot}\dot{0}7692\dot{3} = \frac{76923}{999999}$ alakban írandó fel, rövidítve $\frac{1}{13}$ az eredmény. Mindenesetre óvatosan kell a «suszterszabályunkkal» bánnunk, ha csak az általános szabállyal nem ellenőrizzük mindenkor.

Kezdődjék ugyanis a szakasz egy vagy több nullával, akkor a nullákat a számlálóban nem kell kiírnunk, mert egészszámot nem kezdünk nullával. De ezeket a «nulla-együtthatókat» a nevezőbe kerülő kilencesek számának megállapításánál gondosan figyelembe kell vennünk. Mivel a szakasz, a nullát beleértve, 6 számjegyből állott, a nevezőben is 6 kilencest írtunk, bár a számlálóban, a nullát elhagyván, csak 5 számjegy maradt.

A vegyes szakaszos törtek visszaalakítása az eddig megismert két eljárásnak bizonyos egyesítése. Ha a tizesrendszer számára megint meg akarom adni a «suszterszabályt», akkor ezt kellene követelnem: «Írd a számlálóba egész számként az első szakasz végéig terjedő számjegyeket (tehát mind a szakaszt megelőző nem szakaszosokat, mind a szakaszt alko-

[1] A visszaalakítás képleteinek levezetése, hosszadalmas lévén, túlmegy a magunk elé tűzött célon.

tókat). Ebből az egész számból vond ki a nem szakaszos, másképp a szakasz előtti számjegyeket. Ezután írj a nevezőbe annyi kilencest, ahány jegyből a szakasz áll. A kilencesek után azonban írj annyi nullát, ahány számjegy a szakaszt megelőzi».

Tegyük fel, hogy a szabályt a 0·22727272727... törtre kell alkalmaznom. Akkor ezt kellene írnom:

$$\sigma_{(m,r)} = \frac{227-2}{990} = \frac{225}{990} = \frac{45}{198} = \frac{5}{22}$$

Látjuk, valamennyi visszaalakítási szabályunk rendesen rövidítetlen törtekhez vezet és ezeket kell a végleges $\frac{p}{q}$ alakra hoznunk (p-nek és q-nak már nincs közös osztója). De ez teljesen ártalmatlan feladat, hisz bármely középiskola legalsó osztályának minden tanulója hibátlanul el tudja végezni.

Természetesen e harmadik és utolsó esetben is fel tudunk írni a «visszaalakításra» általános, elegáns parancsot. A következőt:

$$\sigma_{(m,r)} = \frac{\sum_{1}^{m+r} c_\nu g^{m+r-\nu} - \sum_{1}^{m} c_\mu g^{m-\mu}}{g^m (g^r-1)}$$

itt m a szakasz előtti számjegyeknek, r a szakaszt alkotó számjegyeknek a számát jelenti, g a rendszer alapszáma, c a mindenkori együttható, ν az első összegezési parancsnak, μ a másodiknak a «futó» száma és ezeknek a felső és alsó határai állnak az összegezési parancs fölött és alatt.

Most már uralkodunk a törtrendszerek egész birodalmán és bármely számrendszer törtjét közönséges törtté tudjuk átalakítani.

Írjuk például fel a tizesrendszerben a $0{\cdot}23\dot{4}7\dot{1}\ldots$ törtet, és alakítsuk vissza az utóbbi, csak látszatra szörnyű képlet alapján:

$$\sigma_{(2,3)} = \frac{(2.10^{5-1}+3.10^{5-2}+4.10^{5-3}+7.10^{5-4}+1.10^{5-5})-(2.10^{2-1}+3.10^{2-2})}{10^2(10^3-1)} =$$

$$= \frac{23471-23}{100.999} = \frac{23471-23}{99900}{}^{1} = \frac{23448}{99900} = \frac{1954}{8325}.$$

[1] Hasonlítsuk össze a suszterszabállyal.

Ez az utóbbi példa azt is megmutatja, hogy egyszerűnek látszó vegyes szakaszos tört jelentősen bonyolult közönséges törtnek felelhet meg.

De már jelentős teljesítményekre tekinthetünk vissza. Ismerjük az egész, a tört és az irracionális számok birodalmát. Mindezeket nem csak az abszolut értékük szerint. Ismerünk ugyanis pozitiv és negativ számokat is. Sőt mindezeket valamennyi számrendszerben. Sőt tovább: foglalkoztunk általános számokkal is, láttuk, hogy állandókat és ismeretleneket is jelölhetnek. S most, midőn az egy ismeretlenes egyenletek és az úgynevezett diophantosi egyenletek algoritmusát is megismertük, vagy legalább is a lényegüket, kellőképpen érettek vagyunk arra, hogy a matematika legfontosabb témájával, a függvényekkel kezdjünk foglalkozni. De itt már nem álcázva, hanem nyiltan és örömmel lépünk a felsőbb matematika valódi talajára és ismét Leibniz hatalmas szelleme lebeg előttünk. Mert ő volt az, aki a függvény, a funkció fogalmát a 17. század kilencvenes éveiben a maga mélységében és általánosságában felfogta és neki ezt a nevet adta. Oswald Spenglerrel szólunk, ha a függvényt a «fausti», a «napnyugati» számnak nevezzük. Mert éppen ez a «fausti» jelleg az, ami a felsőbb matematikát oly kalandossá, izgatóvá és egyúttal legmélyebb alapjaiban oly könnyűvé teszi.

E helyütt kijelentjük, annak teljes tudatában, hogy állításainkat tényekkel kell majd igazolnunk: minden, ami e könyvben még következik, könnyebb mint az eddigiek! Sokat fogunk ezentúl beszélni, magyarázni, sok mindent fogunk együtt megtárgyalni. De a fáradságos számolgatás, bíbelődés megszűnik s a matematika magaslati levegőjén fogjuk a merész mesterfogásokat, bizarr paradoxonokat és meglepő, szinte felfoghatatlan megoldásokat élvezni.

TIZENNYOLCADIK FEJEZET

Függvények (Algebrai levezetés)

Válasszunk példának egy egyszerű diophantosi egyenletet, legyen ez a következő:

$$3x—y=(—5)$$

Oldjuk meg olymódon, hogy megkapjuk az egészszámú megoldásait, tehát az Euler-féle módszerrel. Az eredmény:

$$x=\frac{y—5}{3} \quad \text{és} \quad \frac{y—5}{3}=n, \quad \text{tehát} \quad x=n.$$

Továbbá az y számára a $3n+5$ eredményt. Tegyük most az n helyébe 1-től kezdve a számokat.

$n=1$;	$x=1$;	$y=8$;	Próbája:	$3—8=—5$
$n=2$;	$x=2$;	$y=11$;	«	$6—11=—5$
$n=3$;	$x=3$;	$y=14$;	«	$9—14=—5$
$n=4$;	$x=4$;	$y=17$;	«	$12—17=—5$
$n=5$;	$x=5$;	$y=20$;	«	$15—20=—5$

és így tovább.

Tehát Euler módszere számtalan egészszámú megoldást szolgáltatott. Ugyanígy számtalan negatív megoldást is találhatunk. Mert

$n=—1$;	$x=—1$;	$y=2$	Próbája:	$—3—(+2)=—5$
$n=—2$;	$x=—2$;	$y=—1$	«	$—6—(—1)=—5$
$n=—3$;	$x=—3$;	$y=—4$	«	$—9—(—4)=—5$

és így tovább.

Látjuk, hogy $n=(—2)$ értéktől kezdve, mindkét ismeretlen negativ, hisz $x=n$ lévén, negatív n-nek esetén x is negatív. y is mindig negatív, ha n egész és kisebb mint —1. Mert $3n$ abszolut értéke már $n=—2$ esetén is nagyobb, mint az állandó, a $+5$. Még sokkal inkább ez a helyzet $n=—3$, tehát $y=—9+5$ esetén.

Fentiek szerint már két ízben találtuk végtelen sok megoldását egyenletünknek és ezekhez járul még két eset:

egyiknél $n=-1$, itt $x=-1$, $y=+2$ a másiknál $n=0$ $x=0$, és $y=+5$.

Most kissé átalakítjuk diophantosi egyenletünket, de semmi mást nem változtatunk rajta. $3x-y=-5$ helyett ugyanis így írjuk:

$$y=3x+5$$

Ezt minden további következmény nélkül megtehetjük. Most azután elhatározzuk, hogy nemcsak az egészszámú, hanem a törtszámú megoldások is érdekelnek bennünket. Megállapodunk továbbá, hogy mindenkor az x-et fogjuk szabadon választani, a hozzátartozó y-t behelyettesítve fogjuk kiszámítani. Esetünkben ez az egyszerűbb, mert az y együtthatója 1 és ezért nincs szükség osztásokra, de igaz, hogy itt még nem említett elvi okaink is lehetnének arra, hogy így járjunk el. Keressünk tehát néhány törtalakú megoldást.

$$x=\frac{1}{2},\ y=3\cdot\frac{1}{2}+5=\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}$$

$$x=\frac{1}{3},\ y=3\cdot\frac{1}{3}+5=\frac{3+15}{3}=6$$

$$x=\frac{2}{7},\ y=3\cdot\frac{2}{7}+5=\frac{6+35}{7}=\frac{41}{7}.$$

és így tovább.

Természetesen y számára egészszámú értékek is adódhatnak, ez az eset $x=\frac{1}{3}$-nál be is következett. De bizonyos, hogy az esetek többségében tört x esetén tört y-t fogunk kapni. Ismét számtalan megoldását találtuk, immár nem diophantosi egyenletünknek (nem diophantosi, mivel törtszámú megoldások is érdekelnek). $x=-\frac{5}{3}$ esetén $y=0$. Minden $-\frac{5}{3}$-nál kisebb tört (vagyis a számvonalon messzebb balra eső tört) már negatív y-hoz vezet.

De bizonyos, hogy határozatlan egyenletünk számára már számtalan egészszámú és törtszámú megoldást találtunk.

Kibővített számfogalmunk kapcsán eszünkbe juthatna, hogy x helyébe egy vagy több irracionális számot is helyettesíthetünk. Mondjuk $\sqrt[4]{25}$ értéket. Ezzel y is irracionális lesz. Ha ugyanis az irracionális számot végtelen tizedestörtnek írjuk és az állandót hozzáadjuk, az eredmény, y, egy állandónak és egy nem szakaszos tizedes törtnek az összege, természetesen szintén irracionális.

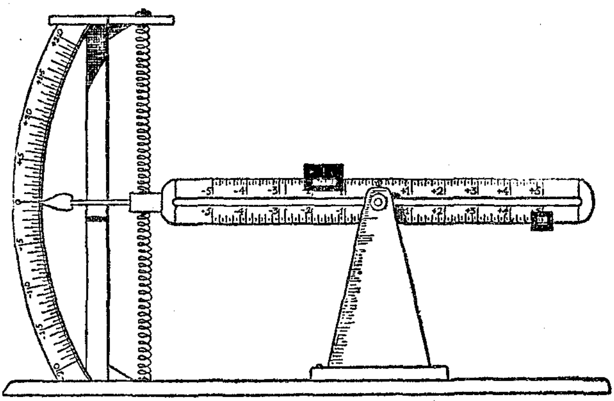
Így tehát a megoldások végtelenjével állunk szemben és elborzadunk, hogy az ártatlan külsejű

$$y=3x+5$$

egyenletünk mennyi megoldást rejt.

De azért, hogy algoritmusunkat, amelynek sokoldalúságát már láttuk ugyan, de jelentőségét még nem foghattuk fel, teljesen át tudjuk tekinteni, szerkesszünk egyszerű gépet és működtessük, legalább gondolatban.

A következő szerkezetet állítjuk össze.



13. ábra.

Egy mérlegszerű szerkezet egyik karjának végére szerelt mutató körívalakú skála számbeosztása előtt mozog. Maga a mérlegkar olyan alakú, hogy alul és felül két futósúlynak pályájául szolgál. A két pályán is pontos számbeosztás van. A pályán mozgatható futósúyok cserélhetők is. A mechanika legelemibb törvényei alapján tudjuk, hogy esetünkben egy súlynak a hatása nem csak a nagyságától függ, hanem attól is, hogy az «emelőkarnak» melyik részén van éppen. Egy kilogramm súly a kezdő-, forgásponttól mért 5 egység távolságban ötször akkora hatású, mint egy kilogramm 1 egység távolságban. Tudjuk, ez a tizedesmérlegnek is az elve. Még a következőt kell megállapítanunk: a mutató az ívalakú skálán mérlegünk mindenkori megterhelését mutatja meg. Ha a mérleg egyensúlyban van, akkor a mutató a nullára mutat, mert lefelé vagy felfelé történő elmozdulás ellen rugók rögzítik. A rugók szerkezete olyan legyen, hogy húzással szemben nagyon erős ellenállást fejtsenek ki, nyomással szemben viszont nagyon kicsit (elméletileg: egyáltalán semmi ellenállást). Végül még, az alsó pálya az állandó beállítására szolgál, a felső pedig az x-ére. Mindenkor a kilogramm az egységünk.

Most már céljaink szolgálatába állíthatjuk gépünket. Használati módját mintegy használati utasítás alakjában állítjuk össze magunknak. Tegyük fel, hogy szekrényben tárolva, futósúlyoknak egész sorozata áll rendelkezésünkre. Most kiveszünk a szekrényből az

$$y=3x+5$$

egyenletünk ábrázolására egy szép egykilogrammos súlyt, ráhelyezzük mérlegünk «állandó» jelzésű pályájára és addig toljuk, amíg középpontjának a jele a skála 5 számával össze nem esik. Erre a célra szolgál a súlynak az úgynevezett «ablaka». Ilyen súlyok minden gyógyszertár személymérlegén láthatók. Tekintve, hogy állandóról van szó, a súlyt a helyén rögzítem. Természetesen csak arra az időre, amíg az

$$y=3x+5$$

egyenlet tárgyalásával foglalkozom. Mérlegünkre mostan ez az 1 kilogramm ötször akkora hatást fejt ki, mint ha a skála 1 jelű pontján állna. S ha most semmi egyebet sem állítok be, akkor a mutató az ívskála ötösére kell, hogy mutasson. Mert feltételeztük, hogy a rugókat ily módon méretezték. Most kell az x-et beállítani. De tekintve, hogy nem egyszerűen x szerepel az egyenletben, hanem az x együtthatója 3, kikeresek egy 3 kilogrammos súlyt és azt helyezem a felső pályára, mivel egy kilogramm számunkra az 1 számot jelképezi. De hova toljam ezt a súlyt? Zavarban vagyok, matematikai alapon kell a dolgot megfontolnom. Ebből azonnal kiderül, hogy x helyébe be kell helyettesítenem, az x-et szabadon választhatom. Tehát felteszem magamban, hogy először azt az x-et keresem ki, amelynél a mérleg egyensúlyban van, tehát amelynél $y=0$. Minden számolás nélkül, csak próbálgatással rájövök, hogy a kívánt eredményt akkor értem el, ha a 3 kilogrammos futósúly a felső skálának pontosan a $-\frac{5}{3}$-ot, azaz a $-1\frac{2}{3}$-ot mutató jeléhez ért. Ekkor ugyanis baloldali mérlegkarnak (ezt nevezzük ezentúl negatívnak) a terhelése 3 kilogramm $-\frac{5}{3}$ távolságra a forgásponttól, a jobboldali (pozitív) mérlegkar terhelése pedig a $+5$ távolságra elhelyezett 1 kilogramm. De mivel továbbá a mechanika törvényei szerint a mindenkori terhelés a súlynak és a forgásponttól mért távolságnak a szorzatából adódik, első esetben a terhelés $3.\left(-\frac{5}{3}\right)$, a másodikban pedig $1.5=5$, vagyis abszolút értékre egyformák. De mert mérlegünkön egyensúly akkor áll fenn, ha a pozitív és a negatív terhelés abszolút értéke egyforma, eredményünk szemmel láthatóan igazolja, hogy az

$$y=2x+5$$

egyenletben x-et $-\frac{5}{3}$-nak kell választanunk, hogy y nulla legyen.

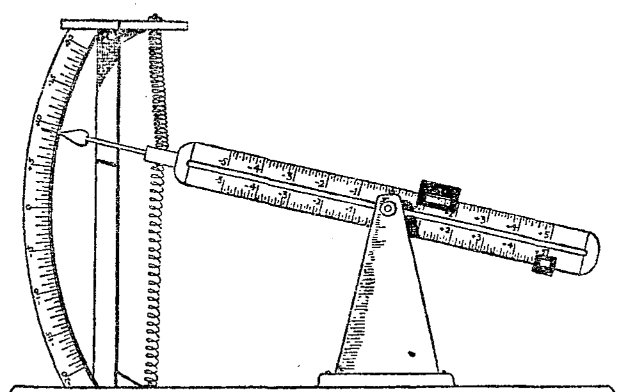
Már említettük, hogy az állandót nem szabad semmiképpen sem változtatnunk. Mégis gépünkön más, elegánsabb módon is beállíthattuk volna. Ha ugyanis meggondoljuk, hogy az $y=3x+5$ egyenletet ilyen formában is írhatnók:

$$y=3x^1+5x^0$$

minthogy minden nulladik hatvány értéke 1, tehát egyenletünk az ilyen írásmód következtében mitsem változnék és ezután a felső pályát az x^1, az alsót pedig az x^0 helyének tekintve, az 5 az x^0 együtthatójaként fog szerepelni. De ez esetben vehetünk egy 5 kilogrammos súlyt is, megerősíthetjük az alsó pálya 1 jelénél és ez ott is maradhat, mert x^0 minden x értéknél egyaránt 1 lévén, $5x^0$ mindenkor az $5.1=5$ értéket adja. Itt ez még mellékes. De még visszatérünk erre.

Mi azonban most megelégszünk az első változattal, vagyis azzal, hogy 1 kilogrammot erősítettünk az 5 jel mellé. És megjegyezzük továbbá, hogy az állandóval többé nem törődünk, mert mostani egyenletünk szempontjából mintegy a mérleg alkatrésze lett és önállóan fejti ki hatását.

Annál jobban izgat a másik súly, kísérletezni szeretnénk vele. De a súlyon látható jelzővonal-mutatta érték a mindenkori x-et jelenti, rajtunk múlik, hogy hová toljuk mozgási határain, a $+5$-ön és a -5-ön belül. De helyzetváltozás az emelő karok törvénye szerint terhelési állapot változást is jelent. Kısérletezzünk tehát. Toljuk a 3 kilogrammos futósúlyt, mondjuk, az $x = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ jelre. A jobboldali mérlegnél azonnal süllyedni kezd, a skálán mutatott y érték változik. Néhány lengés után a mutató megállapodik a $9\frac{1}{5}$ értéken. Az egyenlet szerint valóban $y = 9\frac{1}{5}$, mivel $3\cdot\frac{7}{5} + 5 = \frac{21+25}{5} = \frac{46}{5} = 9\frac{1}{5}$.



14. ábra.

Ha tehát az x-et önkényesen változtatjuk, gépünkön vele változott az y is. Így egyelőre egészen pontatlanul csak annyit állapítunk meg, hogy az egyik ismeretlen önkényes, független változásától szükségképpen függ a másik változása. Ha pedig a «változó ismeretlen» és hasonló kifejezések helyett röviden «változót» mondunk, akkor állíthatjuk, hogy a «független változó», az x, minden változása, maga után vonja a «függő változó», a «függvény», az y változását. Ennek az összefüggésnek, törvénynek, a neve «függvény». Gépünk eddig magától szolgáltatta az eredményeket, mivel ezt a törvényt állítottuk be rajta. De a törvény nem volt más, mint az egyenletünk,

$$y=3x+5.$$

És éppen ezt az «egyenletet» ebből a szempontból függvénynek nevezzük. Általános alakját Leibniz szerint így írjuk: $y=f(x)$ és így mondjuk: y függvénye x-nek, vagy y egyenlő funkció x. S ez nem jelent mást, mint hogy y értéke valamilyen összefüggésben van az x értékével.

Foglaljuk tehát még egyszer össze: az

$$y=3x+5 \text{ vagy általánosan } y=f(x)$$

függvényben az x a független változó, y pedig a függő változó, amelyet kissé megtévesztő módon szintén függvénynek szokás nevezni. x és y együtt a változók.

Most, hogy már valamelyest megismertük a függvénytan kifejezéseit, térjünk vissza gépünkhöz, függvény-kiszámító szerkezetünkhöz és végezzünk vele újabb kísérletet. Toljuk el valamelyest a 3 kilogrammos futósúlyt az x pályán mostani helyéről és figyeljük meg, mit jelez közben mutatónk az y skálán. Látjuk ekkor, hogy folytonosan mozgott közben. Végül is megállapodott a beosztás két vonala között. De a futósúlyunk se áll pontosan a pályája valamelyik beosztással jelölt helyén.

Gépünkkel mostan más mutatványt akarunk bemutatni. Azt állítjuk, hogy a pályánk a számvonal. De mivel már tudjuk, hogy a számvonal megszakítás nélkül, folytonosan tartalmazza valamennyi egész és tört, valamint irracionális számot, így minden folytonos eltolás egyaránt azt jelenti, hogy az x, eltolás közben, a rendelkezésre álló kereteken belül valamennyi lehetséges értéket felveszi. Tehát mind az egészszámúakat, mind a tört és irracionális értékeket.

A folytonosság fogalma a függvénytanban igen nagy szerepet játszik, különösképpen a nagy matematikus, Weierstrass felfedezései óta. De egyelőre megelégszünk azzal, hogy utaltunk erre a fogalomra, annál inkább, mivel mi geometriai úton sokkal világosabban tudjuk tárgyalni és megmagyarázni.

A függvényekre vonatkozó eddigi tudásunkat inkább egy másik feladat megoldására használjuk fel, amelynek értelmét és célját azonban nem tudjuk egyelőre felfogni. De mivel ez a feladat felettébb egyszerű, nem látjuk semmilyen okát sem annak, hogy ne foglalkozzunk vele.

Feltesszük tehát a kérdést, hogy mi történik az y mutatóval, ha az x értékét valamely helyen egy bizonyos értékkel növeljük. Valószínűnek látszik, hogy a mutató is bizonyos, meghatározott értékkel fog elmozdulni. De minthogy már egyszer euklidesi módon megállapítottuk, hogy mennyiségek viszonya független nagyságuktól, így a változás látható mértékéül felhasználhatnók az x növekményének és a belőle következő y növekménynek a viszonyát. S ha továbbá, teljesen általánosan, az x-nek valamilyen helyen bekövetkezett növekedését, növekményét tekintjük, akkor természetes, hogy a hozzátartozó y növekmény is «valamilyen helyen» vett növekmény lesz. Ugyanúgy, mintha a pályát és az y skálát nem láthatnók.

Tehát «valamely x» vagy másképpen «az x» — hisz ez utóbbi is ugyanazt jelenti, tekintve, hogy az x értékét nem rögzítem — véges értékkel növekszik. Ezt a véges értéket Δx-szel jelölöm. A háromszög (Δ) a görög nagy D betű (neve delta). Minden gyermek ismeri mint a Nílus-delta jelképét. Az x-et a deltánk után írom annak jelölésére, hogy az x növekményéről van szó. Az eddig megismert függvények törvényeiből következik, hogy az y-mutató is kilendül helyéből. Ezt az elmozdulást Δy-nal jelölöm. Természetesen csak akkor, ha a mérlegen a tárgyalandó függvénynek megfelelő a beállítás, vagyis az alsó pályán a 1 kilogramm az 5 ponthoz rögzítve, a 3 kilogrammos súly pedig valahol a felső pályán tartózkodik.

Algebrai nyelven a kérdés most a következő: hogyan viszonylik a mérlegen beállított függvény esetén a Δy a Δx-hez? Másképpen: milyen Δy következik szükségképpen az x-nek Δx-szel történt megváltozásából?

Ne törjük a fejünket, álljunk neki és számoljunk. Ha növekményünket alkalmazni kívánjuk egyenletünkben, akkor ezt kell felírnunk:

$$(y+\Delta y)=3(x+\Delta x)+5$$

Mert az x-ből növekedése után $(x+\Delta x)$ lesz s ebből következik, hogy az y-ból $(y+\Delta y)$.

Ismételjük, most már szinte fölösleges módon: nem tudjuk, mennyi az x. Azt sem tudjuk, mennyi a Δx. Csak az a kívánságunk, hogy az értéke véges legyen. Mellesleg megjegyezzük: bármekkora lehet. És csakis a következők könnyebb megértése okából tekintjük kicsinek. Tehát

$$(y+\Delta y)=3(x+\Delta x)+5$$

Keressük $\Delta y : \Delta x$, vagyis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ értékét. Más szóval a Δy-nak és Δx-nek a viszonyát. Végezzük el a szorzásokat, hogy végre megszabaduljunk a zárójelektől.

$$y+\Delta y=3x+3.\Delta x+5.$$

Most olyan mesterfogást alkalmazunk, amely még Leibniztől származik. Igaz, ő más formában írta. Emlékezzünk vissza, $y=3x+5$, tehát levonhatjuk az egyenlet mindkét oldalán ezeket az egyenlő mennyiségeket, s ezzel semmi sem változott. Az almákkal és a súlyokkal foglalkozó első példánk ilyen művelet jogosságát kellőképpen igazolta. Tehát:

$$\begin{array}{rcl} y+\Delta y & = & 3x+3\Delta x+5 \\ -y & = & -3x \qquad\quad -5 \\ \hline \Delta y & = & 3\Delta x. \end{array}$$

De ha $\Delta y=3\Delta x$, akkor ebből azonnal következik, hogy

$$\Delta y : \Delta x=3\Delta x : \Delta x,$$

vagyis
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3\,;$$
aránylatnak írv pedig
$$\Delta y:\Delta x=3:1.$$

Megoldottuk feladatunkat. Tudjuk, hogy a viszony értéke független az összehasonlított mennyiségek nagyságától, tehát ezért a Δy és Δx tetszés szerint kicsinek tekinthető, a nullát megközelítő kicsinek. A matematika nyelvén azt mondhatnám, hogy a futósúlyt csak a legközelebbi irracionális számig tolom el. A számvonal tanulmányozásánál tudjuk meg, hogy milyen hatványozottan kis eltolást jelent ez. De az x ilyen rendkívül kis növekményének már nem Δx a szokásos jele, hanem dx, a hozzá tartozó Δy jele ugyancsak dy. Tehát ezt írjuk:
$$\frac{dy}{dx}=3.$$

Most már leleplezzük az egész eljárást: minden különösebb nehézség nélkül meghatároztuk a rettegett «differenciálhányadost». És azt mondhatjuk, hogy az $y=3x+5$ függvény «differenciálhányadosának» az értéke 3. Másképp $\frac{dy}{dx}=3$, vagy $y'=3$. Az y' jelentése $\frac{dy}{dx}$, vagyis az $y=f(x)$ függvény «első» differenciálhányadosa, tehát olyan függvénynek, amelyben az y az x független változónak valamilyen kifejezésétől függ.

Most látjuk, hogy ominózus «differenciálhányadosunk» mindenütt egyforma. Akárhol növelem is az x-et a nagyon kis dx értékkel, a dy viszonya dx-ünkhöz mindenkor 3, azaz $3:1$ marad. Az állandó itten semmilyen szerepet sem játszott. Ha elhagyom, akkor ezt kapom:

$$\begin{aligned} y&=3x\\ y+\Delta y&=3(x+\Delta x)\\ y+\Delta y&=3x+3\Delta x\\ -y&=-3x \end{aligned}$$

levonjuk az alapegyenletet

$$\Delta y=3\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3\,;\quad \text{és}\quad \frac{dy}{dx}=3.$$

Azt, hogy ez miért van így, később látjuk meg. De gépünk alapján tulajdonképpen érthető is. Hiszen az egyensúly megbontása[1] csakis a 3 kilogrammos x súly eltolásának a következménye. És ez mindenütt egyformán következett be. A «differenciálhányados» tehát a függvény változásának az x minden értékére egyaránt érvényes törvénye.

Új algoritmusunknak, a «differenciálszámításnak», amelyet csak külsőségekben megnyilvánuló kabbalának ismertünk meg egyelőre s csak egészen kis részét tudtuk megragadni, további alkalmazását fogjuk megkísérelni. Egészen merészen, mert a számunkra teljesen új négyzetes, «kvadratikus»

$$y=2x^2+7$$

függvényt fogjuk az imént megismert módon vizsgálni. Gépünkkel most már egyáltalán nem törődünk és teljesen rábízzuk magunkat a megismert eljárásra. Szkémánk szerint ezt kell tennünk:

$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2+7.$$

Mivel $(x+\Delta x)^2$ értékét nem tudjuk közvetlenül felírni, nehézkesen $(x+\Delta x)$ $(x+\Delta x)$ szorzásnak fogjuk tekinteni és így számítjuk ki. Az eredmény $[x^2+x\Delta x+x\Delta x+(\Delta x)^2]$, azaz $x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

Most alkalmazzuk a fogást:

$$\begin{array}{rcl} y+\Delta y & = & 2x^2+4x\Delta x+2\,(\Delta x)^2+7 \\ -y & = & -2x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad -7 \\ \hline \Delta y & = & 4x\Delta x+2\,(\Delta x)^2. \end{array}$$

Az így kapott eredményből eddigi eljárásunkkal nem tudjuk a Δy és a Δx viszonyát meghatározni. Számoljunk tehát valamelyest. Mondottuk, hogy végeredményben minket nem az úgynevezett «differenciahányados» $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ érdekel, hanem a «differenciálhányados» $\frac{dy}{dx}$. De ennél a dx már biztosan rendkívül kis szám. Ha ezt a rendkívül kis számot egészen

[1] Ha az 5 kg súly «tehetetlenségétől» eltekintünk

durván valamilyen $\frac{1}{q}$ törtnek képzelem el, akkor, a q természetesen csak óriási nagy lehet, hatványozva $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{1}{q^2}$ alakú lenne, a nevező tehát az előbbi óriási szám négyzete. Így tehát olyan számot kapok, amely négyzetesen kisebb az előbbi rendkívül kis számnál, tehát még az előbbi rendkívül kis szám mellett is elhanyagolható. A «különböző rendű kicsiny» fogalmának tisztázásával később alaposabban is foglalkozunk, de említsük már itten Leibniz hasonlatát. Ő ugyanis ennek magyarázására egyszer azt mondta, hogy a mennybolt úgy aránylik a földhöz, mint a föld egy porszemhez; a föld pedig a porszemhez, mint a porszem az üvegen is keresztül hatoló mágneses részecskéhez.[1] A mi $(dx)^2$ szintén úgy viszonylik a dx-hez, mint a porszem a földhöz. Tehát bizonyosan magasabbrendű kicsi, s így bízvást elhagyható. Vagyis ha a differenciálhányadost akarjuk megkapni, e helyett:

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2,$$

már csak ennyit írunk:

$$dy = 4xdx$$

és a végeredmény

$$\frac{dy}{dx} = 4x.$$

Itt a kvadratikus függvénynél egészen különös dolgot tapasztalunk. A változás törvénye már nem mint puszta szám mutatkozik, hanem függ az x-től; tehát az x mindenkori értékével együtt változik a kiszámított értéke. Tehát, itt, azt mondhatnók, maga a változás is változékony. Igaz ugyan, hogy szigorúan a $4x : 1$ viszony megszabta módon.

Az eddigi módszerrel, szigorúan szabályokhoz kötött módon levezethetnők a differenciálszámítás teljes algoritmusát. Matematikai pontosságunk csak nyerne ezzel. De mivel a kezdő számításmódunk minden problémáját jobban át tudja tekinteni, ha képszerűen látja a dolgokat maga előtt; tekintve továbbá, hogy kalkulusunk történelmi fejlődése is

[1] **Ma bizonyára elektront mondanánk.**

majdnem kizárólag geometriai alapon nyugodott, hagyjuk most szintétikus előadásmódunkat, hisz ez pszichologiai szempontból is előnyös lesz és szerezzük meg új számításmódunkhoz és az egész végtelenanalizis tanulmányozásához nélkülözhetetlen geometriai alapismereteket.

TIZENKILENCEDIK FEJEZET

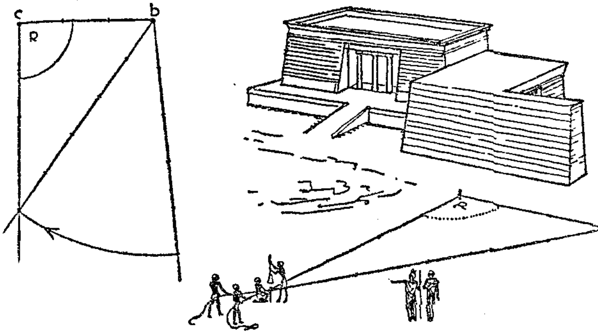
A Pythagoras-tétel

Menjünk vissza néhány percre a messze ősidőkbe. A régi egyiptomiakhoz és indusokhoz. Még ma is csodálják az építészeti szakértők azt a hihetetlen pontosságot, amellyel különösen az egyiptomiak építményeik szögeit és oldalait kitűzték. Ez az ú. n. *kötélfeszítők*, harpedonaptusok érdeme, akik geometriai ismereteik révén kitűzték a szögeket, különösen a derékszögeket. Hogy ez miként történt: rögtön megtudjuk.

Gondoljuk, hogy pl. egy hatalmas, derékszögű négyszögalakú templomot akartak építeni. Ekkor aránylag kis eltérések a szögekben számottevők. Ezt jól tudja minden kőműves és ács, akik munkájuk közben sűrűn alkalmazzák mérőeszközeiket. A kötélfeszítők — egy a papi rendbe tartozó céh — már az alapkövek ünnepélyes letételénél közreműködtek geometriai ceremóniájukkal. Ezt egy hosszú kötéllel végezték, amelyet (15. ábra) négy csomó 4 : 3 : 5 arányú részekre

15. ábra.

osztott. Jelöljük őket sorban *a*, *b*, *c* és *d* betűkkel. A *c* csomói a kitűzendő derékszög csúcsába téve, a 3 hosszúságegységnyt kötéldarabot kifeszítették az előírt irányban. A *c* és *b* csomókat cölöpökkel rögzítették. Azután a 4 hosszúságegységnyi kötéldarabot úgy irányították, hogy szemmérték szerint derékszöget alkosson az előbbi, már kifeszített és rögzített kötéldarabbal. Ha most az 5 hosszúságegységnyi kötéldarabot addig forgatták a *b* cölöp körül, hogy az *a* és *d* csomók egybeessenek és mindenik kötéldarab teljesen kifeszítve legyen, akkor *c*-nél *pontosan* derékszög állt elő. Képben ezt a 16. ábra mutatja.



16. ábra.
R a derékszög.

Szokás egyiptomi háromszögnek nevezni éppen ezért az olyant, amelynek oldalai 3 : 4 : 5 viszonyban állanak. Az ilyen háromszög mindig derékszögű, ezt illusztrálja 16. ábránk is.

De nemcsak a régi Egyiptomban, hanem a régi indusoknál is voltak a papok között, akik ismerték és alkalmazták a derékszög ily módon való kitűzésének titkát. Csak Indiában nem az előbbi háromszöget alkalmazták, hanem olyant, amelynél — különös módon — az oldalak egymáshoz való viszonya 15 : 36 : 39 volt. Könnyebb kifejezések kedvéért alkalmazzuk a derékszögű háromszögeknél szokásos két elnevezést: a leghosszabb oldal az *átfogó*, a másik kettő a két *befogó*. Tehát az egyiptomi háromszög átfogója 5, befogói 4 és 3, az indiai háromszög átfogója 39, befogói 36 és 15 hosszúságegységnyiek.

A derékszögű háromszög egy speciális eset az összes lehetséges háromszögek között. A befogók pontosan 90°-ot zárnak be, a másik két szögnek együttvéve szintén 90°-ot kell kitennie, mivel tudvalevően a háromszög szögeinek az összege 180 , azaz $2R$, vagyis 2 derékszög (R-rel jelölve szokásosan a derékszöget). Mivel továbbá ismeretes, hogy kisebb szöggel a kisebbik oldal az átellenes (és megfordítva), azért a derékszögnek a legnagyobb oldallal, vagyis az átfogóval kell átellenben lennie. Ámde sejthető, hogy a derékszögű háromszögnél nemcsak egy ilyen nagyjában való «nagyobb—kisebb» vonatkozás áll fenn, hanem számszerűleg is határozott az összefüggés. Úgy gondoljuk, hogy a derékszögű háromszög oldalai között is van valami olyan összefüggés, amely megfelel a két hegyes szög összege és a derékszög között fennálló egyenletnek. Első gondolatunk talán az lehet, hogy e megfelelés szerint a két befogó összege egyenlő az átfogóval. De az egyiptomi háromszögnél $3+4=7$ és nem 5, az indiainál pedig $15+36=51$ és nem 39. Ez az első gondolatunk tehát helytelen!

Talán nem is derékszögűek az előbbi háromszögek? Nem, a piramisok és az indiai épületek megcáfolnak minden kétkedő kérdést.

Nyugodjunk meg! Kifogástalanok a derékszögek, jobbak nem is lehetnének. Jó az egyiptomi és jó az indiai is. Csupán az oldalak közötti összefüggés bonyolultabb, mint előbbi első gondolatunk. Egyelőre indokolás nélkül mondjuk, hogy 2-ik hatványra emelve az oldalak hosszának mértékszámait, egész máskép áll a dolog. Ugyanis

$$3^2+4^2=9+16=25, \text{ tehát } 3^2+4^2=5^2;$$
$$15^2+36^2=225+1296=1521, \text{ tehát } 15^2+36^2=39^2.$$

És ez az összefüggés egyike a geometria legfontosabb és legkevésbbé nélkülözhető szabályának. Neve: Pythagoras-tétel. Középkori tanulók elnevezése szerint: «pons asinorum», azaz szamarak hídja. Sokan valószínűnek tartják, hogy *Pythagoras* egyiptomi utazásakor ismerte meg tétele alapjait, s a monda szerint 100 ökröt áldozott föl hálája jeléül az isteneknek, mikor rájött e tételre.[1]

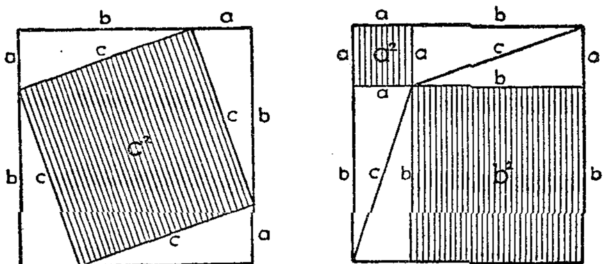
[1] Ezért szokták tréfásan mondani, hogy azóta fél minden ökör az új alkotásoktól.

Ha általánosan a és b jelöli a befogók, c az átfogó hosszát, akkor a szóbanforgó tétel szerint bármely derékszögű háromszögnél:

$$a^2+b^2=c^2.$$

E tétel rendkívül sokféleképp bizonyítható be. Álljon itt egy igen egyszerű bebizonyítás vázlata.

A 17. ábrán két egybevágó nagy négyzet egyikébe (oldalaik hossza $a+b$) egy c oldalú (árnyékolt) négyzet, a másikába



17. ábra.

egy a és egy b oldalú (árnyékolt) négyzet van beírva. Utóbbi esetben két segédvonallal a nagy négyzet többi része ugyanazon négy egybevágó (a, b, c oldalú) háromszögre bomlik, amelyek az előbbi esetben is jelentkeznek.

Tehát az első esetben

$$c^2 = \text{nagy négyzet} - 4 \text{ háromszög},$$

a második esetben

$$a^2 + b^2 = \text{nagy négyzet} - 4 \text{ háromszög},$$

ahol mindkét esetben területre nézve ugyanazon 4 három szög szerepel.

Mivel az előbbi egyenletek jobboldalai azonosak, azért a baloldalok egyenlők. Tehát valóban

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

ami bebizonyítandó volt.

Ezzel általános érvényű szabálynak jelentettük ki Pythagoras tételét s ezzel azt is, hogy korlátlan számban létezik ilyen háromszög. Más szóval: Pythagoras tétele valamennyi derékszögű háromszög közös tulajdonságát fejezi ki.

Új képletünket, mivel már általánosan bebizonyítottuk és mivel már szemmel látható, hogy akárhány derékszögű háromszög létezhetik, egyszerűen egyenletnek fogjuk tekinteni és az egyenletek algoritmusa szerint fogjuk kezelni. Vagyis kiszámítható a háromszög bármelyik oldala, ha a másik kettőt ismerjük. Erre írjuk fel, egyelőre még általánosan a megoldásokat, bár ezek négyzetes alakúak.

$$c^2=a^2+b^2$$
$$a^2=c^2-b^2$$
$$b^2=c^2-a^2$$

Ha mostan az oldalak négyzete helyett magukat az oldalakat akarom kiszámítani, akkor az egyenletek mindkét oldalán négyzetgyököt vonok.

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$
$$b=\sqrt{c^2-a^2}.$$ [1]

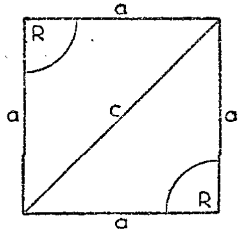
Tudjuk azonban, hogy nagyon sok gyökvonás irracionális eredményt ad. Ennek azonnal tanulságos példáját fogjuk látni. Tegyük fel, hogy a befogók egyenlő hosszúk, jelük tehát nem a és b, hanem mindkettőé a. Akkor az úgynevezett egyenlőszárú derékszögű háromszögre a

$$c^2=a^2+a^2$$
$$c^2=2a^2$$

$c=\sqrt{2a^2}$ összefüggéseket kapjuk és mivel az a^2-ből lehet négyzetgyököt vonni, $c=a\sqrt{2}$.

De a 2-ből vont négyzetgyök, tekintve, hogy 2 nem négyzetszám, feltétlenül irracionális. Racionális a esetén $a\sqrt{2}$ is

[1] Céljainknak a gyöknek a pozitív értéke felel meg. Arról, hogy negatív értéke is van, a képzetes számok tárgyalásával egyidőben fogunk beszélni.



18. ábra.

irracionális. Mellesleg megjegyezve, két egyenlőszárú derékszögű háromszöget négyzetté egyesíthetünk és a c akkor a négyzet átlója. Ebből az is következik, hogy a négyzet átlójának és oldalának viszonya teljesen nem fejezhető ki, irracionális. Természetesen fordítva is. Mert ha a c-t választom egészszámnak s belőle az a-t akarom kiszámítani, akkor $2a^2=c^2$ levén, a^2-re a $\frac{c^2}{2}$ értéket, a-ra pedig a $\frac{c}{\sqrt{2}}$ értéket kapom. De ezt már az előbbi $c=a\sqrt{2}$ megoldás alapján is láthattuk volna.

Az irracionalitás fogalma tehát geometriai szempontból nem egy mennyiségnek a tulajdonsága, hanem két mennyiség viszonyáé, ha ez a viszony csak irracionális számokkal fejezhető ki. Ezt nevezzük inkommenzurábilitásnak. Hisz szabadon választhatok, hogy két összehasonlítandó mennyiség közül melyiket válasszam egységnek vagy az egység egész számú többszörösének. Sőt ráadásul: ha négyzetünkben *az a-t választom egységnek, c irracionális. Ha viszont* c az egység, akkor a lesz irracionális. Így alapvető hiba az az állítás, hogy a kör kerülete azért irracionális, mert az ismert $2r\pi=$*kerület* képletben, racionális sugarat kell az irracionális 2π-vel megszorozni. Csupán szokás, hogy a sugarat tekintjük adottnak s ezért egységnek. De ha fordítva járnék el és egy vashengert addig esztergályoznék, amíg a kerülete a legfínomabb mérőszalaggal mérve is 1 méter lenne, akkor a kerület$=2r\pi$ képletéből a sugár, $r=\frac{kerület}{2\pi}$ bizonyosan irracionálisnak adódik. Tehát egyszer a kerület, másszor a sugár mértékszáma irracionális, a szerint, melyiket tekintjük racionális egységekben adottnak.

Pythagoras állítólag ezt az inkommenzurábilis, semmiféle szabállyal meg nem fogható viszonyt számmisztikumában az élet jelképének tekintette, mint olyant, ami a mérhetőséggel dacol. De ne mélyedjünk el ezen a helyen új geometriai kabbalánk szimbolikus értelmezésében, hanem vessünk fel inkább egy valóban kabbalisztikus kérdést. Azt kívánjuk ugyanis, hogy adjunk meg egy olyan szabályt, amellyel valamennyi egészszámmal kifejezhető oldalhosszú derékszögű háromszöget megtalálhatjuk. Tehát nem csupán az egyiptomit, vagy indiait, hanem ahányat csak akarunk.

E végből táblázatot adunk itt, a nélkül, hogy levezetésébe belemennénk. Legyen u és v tetszés szerinti pozitiv egész szám és $u>v$, akkor a következő képletek: $c=u^2+v^2$; $a=u^2-v^2$; $b=2uv$; egész számokkal kifejezett oldalhosszú derékszögű háromszögek oldalait adják.

u	v	$u^2+v^2=c$	$u^2-v^2=a$	$2uv=b$
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10
5	2	29	21	20

és így tovább.

Szabad még ezen kívül az ilymódon megállapított oldalhosszakat — mondjuk, az egyiptomi háromszög oldalainak a hosszát — tetszés szerinti egész számmal megszorozni s az eredmény ismét számtalan sok racionális oldalhosszú derékszögű háromszöghöz juttat. Így példának okáért:

$$(3.5)^2=(3.4)^2+(3.3)^2$$
$$15^2=12^2+9^2$$
$$225=144+81.$$

Így keletkezett táblázatunk adataiból az indiai háromszög is:

$$(3.13)^2=(3.5)^2+(3.12)^2$$
$$39^2=15^2+36^2.$$

Egész számokkal történt osztás is számtalan racionális háromszöget eredményez, igaz, hogy ezeknek az oldala már nem egész szám, hanem tört. Például:

$$\left(\frac{1}{4}\cdot 5\right)^2=\left(\frac{1}{4}\cdot 4\right)^2+\left(\frac{1}{4}\cdot 3\right)^2$$
$$\frac{25}{16}=\frac{16}{16}+\frac{9}{16}.$$

Még tovább is mehetek, hisz nem kell feltétlenül egységtörtekkel az oldalakat megszorozni:

$$\left(\frac{3}{7}\cdot 5\right)^2=\left(\frac{3}{7}\cdot 3\right)^2+\left(\frac{3}{7}\cdot 4\right)^2$$
$$\left(\frac{15}{7}\right)^2=\left(\frac{9}{7}\right)^2+\left(\frac{12}{7}\right)^2$$
$$\frac{225}{49}=\frac{81}{49}+\frac{144}{49}.$$[1]

HUSZADIK FEJEZET

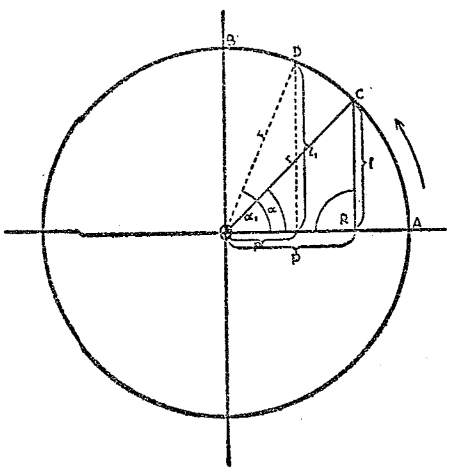
Szögfüggvények

De ne tévedjünk el teljesen. Mert újabb nagy feladat kívánja megint teljes figyelmünket. Már a Pythagoras tételénél sejtettük, hogy valamilyen szoros összefüggés áll fenn a derékszögű háromszög oldalai és szögei között. Az a tudomány, amely ezeket az összefüggéseket kutatja, tudvalevőleg a trigonometria. És az összefüggések neve, amint már az

[1] Általában azt mondhatjuk, hogy valamennyi $(mc)^2 = (ma)^2 + (mb)^2$ alakú kifejezés helyes, ha m racionális egész- vagy törtszámot, a, b, c pedig a táblázatból kivehető számtalan értékcsoport egyikét jelenti, vagy annak racionális többszörösét.

«összefüggés» szó megpillantásakor sejtettük, szög*függvény*. Természetesen a matematikának ezzel az ágával sem tudunk sokáig foglalkozni. De meg fogjuk ismerni néhány alapvető tételét, mivel azok később szorosan kapcsolódnak a differenciálszámításhoz.

Rajzoljunk először egy tetszés szerinti sugarú kört, két egymásra merőleges húrral osszuk négyfelé, négy negyedkörre, kvadránsra.



19. ábra.

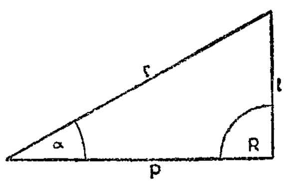
Ha továbbá elképzeljük, hogy egyik r sugár nyugalmi (OA) helyzetéből a nyíl irányában elindul és a középpont körül forog, míg csak az OB helyzetben új nyugalmi helyzetet nem talál, akkor útközben a nyugvó OA szár és a mozgó sugár közt valamennyi $0°$ és $90°$ közötti szög keletkezett. Hisz tudja mindenki, hogy az egész kör 360 fokra oszlik, így a negyedkör 90 fokos. Minden ívfoknak megfelel egy szögfok a kör középpontjában. Ha a mozgó sugár a kör kerületén, tegyük fel, 45 ívfoknál áll, akkor a hozzátartozó szög a középpontban éppen 45 szögfok. Most már állíthatjuk, hogy az α (alfa) szög az első negyedben (kvadránsban) valamennyi $0°$

és 90° közötti értéket felveszi. Ha továbbá abból a pontból, amelyben a mozgó r sugár a kör kerületét éri, legyen ez a C pont, merőlegest bocsátunk a nyugvó OA szárra (l), akkor derékszögű háromszög keletkezik. Oldalai: átfogója a mozgó sugár, befogói az l merőleges és a nyugvó szárból lemetszett p távolság. Van a sugárnak két helyzete, amelyben ez a háromszög eltűnik, illetve egyetlen egyenes vonallá fajul. Először akkor, amikor a mozgó sugár még a kiinduló OA helyzetében van, másodszor viszont akkor, amikor végső helyzetébe, az OB egyenesbe kerül. A kettő közt végtelen sok háromszög van s mindegyikben természetesen más és más az α szög.

A trigonometria alapfeladata meghatározni a derékszögű háromszög oldalainak ismeretében az α szöget. Bizonyos, hogy fennáll valamilyen összefüggés. A pontozott háromszögben ugyanis, amelyben az α szög nagyobb mint 45°, változatlan átfogó mellett az előbbitől eltérő befogók vannak. Jelölje ezeket l_1 és p_1.

A legegyszerűbb volna, ha a szögek meghatározását a szemben fekvő l, illetve l_1 befogókból kísérelnők meg. Nem csodálkozunk, hogy ez nem sikerül, hisz már a Pythagoras tételénél is tapasztaltuk, hogy a dolgok bonyolultabbak. Így hát itt is megpróbálkozunk komplikáltabb dolgokkal. A szöget így két oldal viszonyából határozzuk meg. Régi matematikusok vagyunk már, emlékezünk, hogy a három oldalból a kombinatorika szabályai szerint három oldalnak 6 különböző viszonyát állíthatjuk elő. Hisz a három oldal, az «elemek», a viszonyok kettes csoportok, variációk ismétlés nélkül. A képlet erre $\binom{3}{2}.2\,! = \frac{3.2}{1.2}\cdot 1.2 = 6$. A viszonyok maguk a következők: $l:r$, $p:r$, $l:p$, $p:l$, $r:p$, $r:l$. Valóban valamennyi szögfüggvény.

Rajzoljuk fel ismét a derékszögű háromszöget.

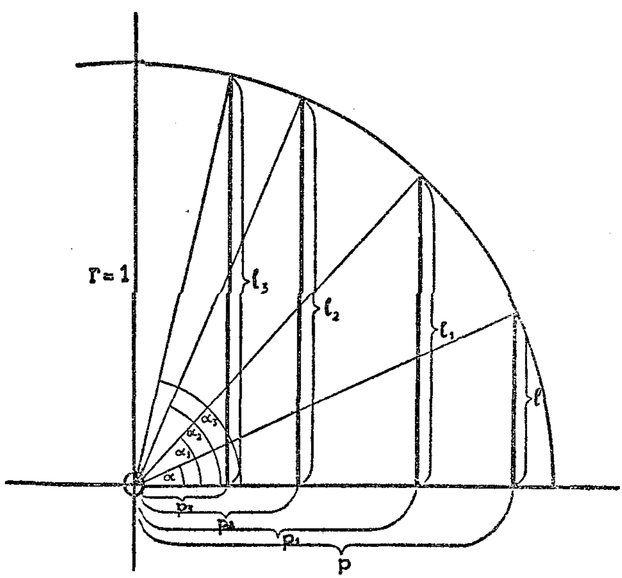


20. ábra.

És nevezzük meg ezenkívül a 6 szögfüggvényünket.

$l : r$	neve	«sinus»	(a szöggel szemben fekvő befogó viszonya az átfogóhoz),
$p : r$	«	«cosinus»	(a szögmelletti befogó viszonya az átfogóhoz),
$l : p$	«	«tangens»	(a szöggel szemben fekvő befogó viszonya a szögmelletti befogóhoz),
$p : l$	«	«cotangens»	(szög melletti befogó viszonya a szöggel szemben fekvő befogóhoz),
$r : p$	«	«secans»	(az átfogó viszonya a szögmelletti befogóhoz),
$r : l$	«	«cosecans»	(az átfogó viszonya a szöggel szemben fekvő befogóhoz).

Rendesen csak az első négy szögfüggvény használatos, tehát nem kell megijedni. Hogy az ijedsé még tovább csökkenjen, eláruljuk, hogy tulajdonképpen csak a tangensre



21. ábra.

lesz szükségünk. De elvi okokból először a sinusnak az első szögnegyedben történő viselkedésével foglalkozunk. Ehhez egy mesterfogást alkalmazunk. Mivel a sinus a szöggel szemben fekvő befogó viszonya az átfogóhoz (a körben ez a sugár), vizsgálataink céljára az úgynevezett egységsugarú kört használjuk. Ezt annál inkább megtehetjük, mert senki sem szabhatja meg, hogy mekkora kört használjunk. De fogásunk következtében a sinus mértékszáma $l:1$, tehát l és ezzel eredeti tervünk megvalósult: a szöget a szemben fekvő oldallal mérhetjük, az l jelű függőleges vonallal és ezzel csodás módon szöget mérhető hosszúsággá alakítottunk át. De mivel az «egységsugár» bármekkora lehet, hisz a szabadon választott sugarat tettük meg egységnek, a függőleges mindenkor a sinusnak a sugárral, mint egységgel mért «valódi hosszát» adja. Ez ugyanazt jelenti, mint hogy sinus α az $l:1$, $\frac{l}{1}$ vagy l osztva 1 viszony értékét jelenti. (21. ábra).

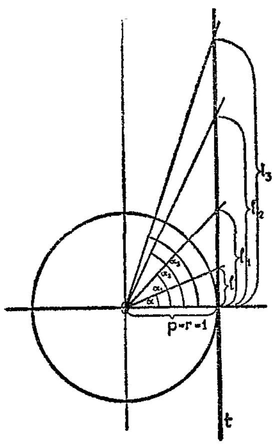
A rajzban tehát az l, l_1, l_2, l_3 sorban az α, α_1, α_2, α_3 sinusát adja. És azonnal leolvashatom, hogy 0° sinusa 0, 90° sinusa viszont a sugár, vagyis mértékünkben mérve 1 A sinus tehát az első szögnegyedben 0-tól 1-ig nő és közben minden értéket (természetesen irracionalis értékeket is) felvesz. Nem fejezhető ki mindenkor közönséges törtekkel. Így például $\alpha=45°$ esetén az l értéke azonos egy r oldalhosszú négyzet átlójának a felével. Pythagoras tétele szerint ekkor: $r^2=l^2+l^2$ vagy

$$r=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2};\quad \frac{l}{r}=\frac{l}{1}=l=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

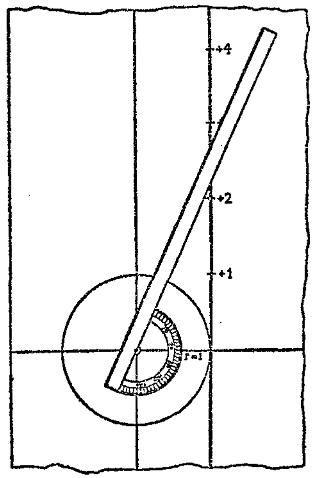
tehát biztos, hogy az eredmény irracionalis.

De ne folytassuk gondolatmenetünket, jegyezzük meg csupán, hogy a gyakorlatban nem szoktuk a «valódi hosszakat» használni, hanem logaritmusukat. Ezekkel a táblázatokban másodpercnyi pontossággal megadott szögek szögfüggvényei is meghatározhatók (1 fok=60 perc, 1 perc=60 másodperc, jelekkel: $1°=60'$; $1'=60''$).

Most hasonlóképpen meg fogjuk vizsgálni a számunkra oly különösen fontos tangens függvény viselkedését. Gyanítjuk, hogy a tangens valamiképpen az érintővel lehet összefüggésben (tangens=érintő). Most pedig gépet szerkesztünk erre a célra s ennél előbbi gyanakodásunk igazolást fog találni. Tekintve, hogy tangens $\alpha = l : p$, más fogásra lesz most szükségünk. Azt kívánjuk mostan, hogy a p legyen az egység. Így tehát a mozgó szár most már nem lehet a sugár, hanem valamilyen másik egyenes. Rajzoljuk fel tehát:



22. ábra.



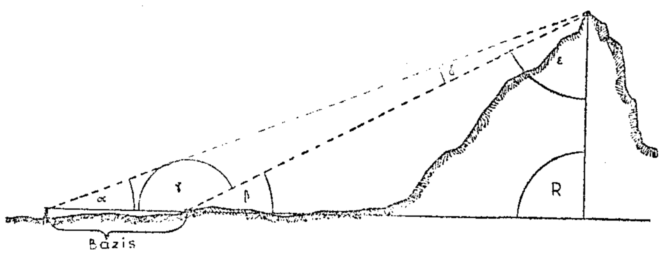
23. ábra.

$l : p = l : r = l : 1$ mostan az egységkör érintőjének metszeteként adódik. A sugár itt az egyik befogó, most a másik befogó és az átfogó változik. Szerkezetünk ezt az elvet követi. (23. ábra.) Látható e képen az egységsugarú kör, az érintő, ráḿérve egységenként a sugár és végül a középpont körül forgatható átfogó, amely az érintőből a megfelelő darabokat levágja. Az α szöget közvetlenül leolvashatjuk az átfogóra szerelt szögmérőről.

Ha a szög 0, akkor tangense is 0, mivel $0 : 1 = 0$. De innen kezdve az «érintőn» leolvasható tangens értéke rohamosan nő. $\alpha = 45°$ esetén tangens $\alpha = 1$, 60°-nál már 1·73205, 70°-nál 2·74748, 80°-nál 5·67128, 85°-nál 11·43005, 89°-nál 57·28996,

$89\frac{5}{6}°$-nál már 343·77371 és végül 90°-nál plusz végtelen, a mozgó átfogó a végesben már egyáltalán nem éri el az érintőt. Láthatjuk, hogy a legnagyobb növekedés, $89\frac{5}{6}°$ és 90° között, már rendkívül rohamosan történik.

Most már joggal kérdezhetjük, mire való tulajdonképpen a trigonometria? Már megmondtuk, hogy a tangens, a tangensfüggvény, nélkülözhetetlen számunkra a felső matematikában. De ez nem lehet az egyetlen oka annak, hogy ilyen bonyolult és nem egyszerű tudomány olyan részletesen kiépült. Utaljunk tehát egészen röviden arra, hogy a trigonometria minden olyan feladatnál nélkülözhetetlen, ahol háromszög oldalaiból szögeket, vagy szögekből oldalakat kell kiszámítani. Vagy ahol oldalak és szögek valamilyen kombinációjából a többi szöget és oldalt kell meghatározni. Térbeli távolságok trigonometriai számítások útján határozhatók meg. Az egész geodézia tudománya (földméréstan) trigonometriai alapokon nyugszik. A Mount Everest magasságát például, amelyre ember még nem jutott fel, így lehet nagy távolságból meghatározni. A síkságon ismert hosszúságú alapvonalat kell kitűzni, a hegycsúcsot szögmérő távcsővel (teodolittal) beirányozzuk és a háromszögből a hegy magasságát jelentő befogót kell kiszámítanunk.



24. ábra.

Az α és a β (görög kis béta) szög meghatározása után kiszámítható a γ (görög kis gamma) szög is, hisz az $(180°-\beta)$. Ebből aztán kiszámítható a δ (görög kis delta) szög is. $\delta=[180°-(\alpha+\gamma)]$. Továbbá $\beta+\varepsilon$ egyenlő 90° így ε (görög kis epszilon) annyi mint $(90°-\beta)$. De ha már valamennyi szöget ismerem, akkor ismerem a szögfüggvényeket is és eléggé egyszerű képletekkel kiszámíthatom az alapvonal, az α és a γ segítségével, előbb valamelyik látóvonalnak a hosszát, abból pedig az α és a β figyelembevételével a hegy magasságát. Hasonló eljárást alkalmaz a tűzérség is a lövésnél.

De nem foglalkozunk tovább a nagyon érdekes trigonometriával, a gömb felületére rajzolt háromszögekkel foglalkozó tudománynak, a gömbháromszögtannak (szférikus trigonometriának) csak a nevét említjük, habár az utóbbinak a földrajzban és a csillagászatban jut érthetően nagy szerep. Teljesség kedvéért és a geometria más fontos területének megismerésére inkább megismerkedünk a számok egy újabb típusával, az eléggé barátságtalanul hangzó nevű imaginárius, vagy képzetes számokkal, amelyeknek ábrázolása a nagy Karl Friedrich Gaussnak (1777—1855) sikerült először.

HUSZONEGYEDIK FEJEZET

Imaginárius számok

Jól bevált szokásunk szerint ezt a nehéz területet is a legegyszerűbb eszközökkel fogjuk megközelíteni. Emlékezzünk: a gyökvonás szolgált az első nagy számelméleti meglepetéssel: irracionális eredményekhez vezetett. És ismét a gyökvonás az, amely az imaginárius, képzetes számok birodalmába vezet. Imago latin szó, magyar jelentése kép, de a valószerűtlenség árnyalata is tapad hozzá. Imaginatio tehát képzelődést, de csalóka képet is jelent. Számainkhoz tehát már eleve valamelyes majdnem degradáló értelem fűződik. Régente egyenesen «lehetetlen» számoknak is nevezték őket.

További megállapítások helyett nézzük inkább keletkezésüket. Ha visszaemlékezünk a szorzás előjelszabályaira, azonnal eszünkbe ötlik ama csodálatos tény, hogy a szorzást elvégezve legjobb akarattal sem tudjuk megállapítani, milyen tényezőket szoroztunk össze. Senki sem tudhatja, hogy plusz két pozitív, vagy két negatív szám szorzásából keletkezett-e? Ha $(+a^2)$-et írok, akkor ez az a^2 úgy a $(+a)$ $(+a)$ szorzásnak, mint a $(-a)$ $(-a)$-nak az eredménye lehet. Közönséges számok esetén a probléma nem érdekes. Tehát az alapműveleteknél nem aktuális és jelentéktelen. Összeadásnál éppúgy nincs közöm ahhoz, hogy a $(+a^2)$ miként keletkezett, mint kivonásnál. Értéke $(+a^2)$ és így kell mindenkor használnom. Szorzásnál és osztásnál sem más a helyzet. Mert akár $(+a)$-val, akár $(-a)$-val osztok, helyes és egyértelmű eredményre jutok, közömbös, hogy a $(+a^2)$ miként jött létre. Mert tegyük fel, hogy $(-a)$ $(-a)$-ból keletkezett. Akkor a $(+a)$-val történő osztás:

$$\frac{(-a)(-a)}{(+a)} = \frac{(-a)[(+a).(-1)]}{(+a)} = \frac{(-a)(+a)(-1)}{(+a)} =$$
$$= \frac{(-a).(-1)}{(+1)} = (+a).$$

A $(-a)$-val történő osztás:

$$\frac{(-a)(-a)}{(-a)} = (-a).$$

De ha $(+a)$ $(+a)$-ból keletkezett, akkor a $(+a)$-val való osztás esete egyszerű:

$$\frac{(+a)(+a)}{(+a)} = (+a)$$

és a $(-a)$ esete:

$$\frac{(+a)(+a)}{(-a)} = \frac{(+a)[(-a)(-1)]}{(-a)} = \frac{(+a).(-a)(-1)}{(-a)} =$$
$$= (+a)(-1) = (-a).$$

De négy esetünk helyesnek mutatkoznék akkor is, ha nem érdeklődünk az előjel származása iránt, hanem egyszerűen elvégezzük az algebra szabályai szerint az osztást. Mert az előbbiekben a számlálókat összeszorozva, minden kétértelműség nélkül azonnal adódik, hogy $(+a^2):(+a)=(+a)$ és hogy $(+a^2):(-a)=(-a)$.

Gyökvonásnál más a helyzet. Mert ha mégegyszer felírjuk, hogy $(+a).(+a)$ és $(-a).(-a)$ egyaránt $(+a^2)$, akkor a megfordított, litikus művelet, a $\sqrt{a^2}$ eredménye többértékű szám. Bizonyos ugyan, hogy a gyök abszolút értéke feltétlenül $|a|$, de előjeléről a $\sqrt{a^2}$ jelölés semminemű felvilágosítást nem ad. Becsületesen be kell tehát vallancm tudatlanságomat és eredményként $(\pm a)$-t kell írnom, ez pedig azt jelenti, hogy vagy $(+a)$ vagy $(-a)$. Ez a bizonytalanság nem vonatkozik minden gyökvonásra. $\sqrt[3]{a^3}$ esetén határozottan tudom, hogy a megoldás $+a$. Mert $(-a).(-a).(-a)$ eredménye $(-a^3)$ volna, de ebből azonnal következik, hogy $\sqrt[3]{-a^3}$ egyértelműen $-a$. Negyedik gyöknél ismét felmerülnek a kétségek. Mert $(+a^4)$ ismét éppen úgy keletkezhetett a $(+a).(+a).(+a).(+a)$, mint $(-a).(-a).(-a).(-a)$ szorzásból. $\sqrt[4]{a^4}$ tehát ismét $(\pm a)$, vagyis $(+a)$ *vagy* $(-a)$. Látjuk már a képzés törvényét. A szorzás törvényei szerint párosszámú pozitív és negatív tényező egyaránt pozitív eredményre vezet. De mivel a kitevő azt mutatja, hogy a hatvány hány tényezőt tartalmaz, tehát a páros kitevőjű gyökök többértékűek, a páratlanok pedig egyértékűek. Általában

$$\sqrt[2n]{r}=(\pm s);\quad \sqrt[2n+1]{r}=(+s);\quad \sqrt[2n+1]{(-r)}=(-s).$$

Eddig tisztázott a dolog. De senki sem akadályozhatja meg, hogy meg ne kérdezzük, mi az értéke egy negatív számból vont páros kitevőjű gyöknek. Például

$$\sqrt[2n]{(-r)}=?$$

Semmiképpen sem tudunk erre az egyébként jogosult kérdésre felelni. Mert az eddig megvizsgált számok közt nincs olyan negativ szám, amely páros kitevőre emelés útján keletkezett volna. Minden szám $2n$-edik hatványa feltétlenül pozitív. De ha a számot, amelyből $2n$-edik gyököt akarunk vonni, nem lehet $2n$-edik hatványnak tekinteni, akkor nem is lehet belőle gyököt vonni. Sem általánosan, sem konkrét számokkal. Az eredmény nem lehet sem egész, sem tört, sem pozitív, sem negatív, sem racionális, sem irracionális szám.

Tehát tagadhatatlan, hogy új, ismeretlen számfajtával állunk szemközt, olyannal, amelynek az a különleges tulajdonsága van meg, hogy $2n$-edik hatványa negativ szám. De — ez később kiderül — minden ilyen szám visszavezethető a (-1)-ből vont négyzetgyökre, ezért egyelőre hagyjuk az általánosságot és beszéljünk a (—1)-ből vont négyzetgyökről, a $\sqrt{-1}$-ről, hisz ez bizonyára különleges esete általános fel adatunknak. A $\sqrt{-1}$-et új számként vezetjük be és i-vel jelöljük. Az i azért tesz nagyon jó szolgálatokat, mert például $\sqrt{-15} = \sqrt{(-1).(+15)} = (\sqrt{-1})(\sqrt{15}) = i\sqrt{15}$.

A képzetes számokkal kapcsolatban egészen váratlan eredményekre bukkanhatunk. Huygens, a nagy fizikus és matematikus joggal csodálkozott, amikor Leibniz feladta neki a kérdést: számítsa ki $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$ összegét, sőt még azt is állította, hogy a számítás eredménye valós szám, 2·4494897... vagyis $\sqrt{6}$. Hogyan lehetséges, kiálthatott fel Huygens, hogy két gyökkifejezésnek, az összszege, amelynél a gyökjel alatt az egységnek és egy képzetes gyökkifejezésnek az összege és különbsége áll, igaz, hogy irracionális, de mégis valós számot adjon eredményül? Milyen mélységek felett vitt ismét símán keresztül algoritmusunk? Mindenesetre kövessük nyomon keletkezésében eredményünket. Tehát állítólag

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}.$$

Ellenőrzésül emeljük négyzetre.

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\right)=$$
$$= \sqrt{6}\,.\,\sqrt{6}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}.\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1+\sqrt{-3}}.\sqrt{1-\sqrt{-3}}+$$
$$+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}.\sqrt{1-\sqrt{-3}}=6$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{-3})^2}+2\sqrt{(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})}+\sqrt{(1-\sqrt{-3})^2}=6$$

$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{1-\sqrt{-3}+\sqrt{-3}-\sqrt{(-3)^2}}+1-\sqrt{-3}=6$$

$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{1-(-3)}+1-\sqrt{-3}=6$$

$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{4}+1-\sqrt{-3}=6$$

$$1 \qquad +4 \qquad +1 \qquad =6.$$

Leibniz eredményét tehát kiválóan verifikáltuk. De hogy ilyen nehézkes számolásra máskor ne legyen szükségünk, jegyezzünk meg két egyszerű mesterfogást. Ezeket:

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2,$$

vagyis azt, hogy két szám összegének és különbségének a szorzata egyenlő a két szám négyzetének a különbségével. Továbbá: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$, vagyis két szám összegének vagy különbségének négyzete egyenlő a két szám négyzetének összege, plusz, illetve minusz a két szám kétszeres szorzata. Ezt csak mellékesen. Említettük, hogy a képzetes egységet, a $\sqrt{-1}$-et i betűvel jelöljük. Ha az i, vagy valamely többszöröse összeadás vagy kivonás révén «reális» (valós) számmal kapcsolódik, «komplex» számot kapunk. Ennek általános alakja $a+bi$. Az $a+bi$ és a $a-bi$ alakú számokat együtt, ilyenek szerepeltek a Leibniz—Huygens példában is, konjugált komplex számoknak nevezzük. Konjugált komplex számok szorzata valós szám. Mivel $(a+b)(a-b)=$ $=a^2-b^2$; tehát $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2-b^2\sqrt{(-1)}^2=$ $=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2$, tehát az i kiesett.

Most, amikor már valamennyi számtípust ismerjük, írjuk fel, mielőtt még a képzetes számok ábrázolásához fognánk, a számoknak mintegy «családfáját».

Komplex számok $(a+bi)$

Valós (negativ és pozitiv) számok $(a \neq 0,\ b=0)$

A) Racionális számok

a) Racionális egész-számok (2, 4, 99)

b) Racionális tört-számok $\left(\frac{1}{2},\ 0{\cdot}25,\ 0{\cdot}\dot{3}\right)$

B) Irracionális számok $\left(\sqrt[4]{25},\ 3{\cdot}141592\cdots=\pi\right)$

zűkebb értelemben vett komplex számok $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

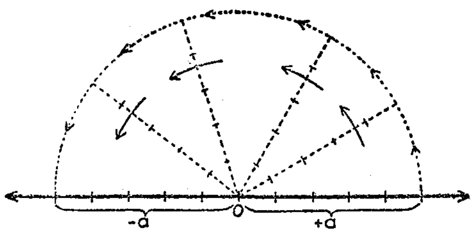
Képzetes számok $(a=0,\ b \neq 0)$

További megkülönböztetések, a valós számok mintájára, lehetségesek, de nem szokásosak.

Ezzel végérvényesen és visszavonhatatlanul felérkeztünk képzetes irányba is kiterjeszkedett számhegyünknek a tetejére. A még általánosabb hiperkomplex számokkal, köztük a Hamilton-féle quaterniokkal, nekünk nem kell foglalkoznunk. Megelégedettek lehetünk az elért magassággal. Ennek birtokában be tudunk hatolni a matematikának minden általunk érintett és érintendő részébe.

Térjünk vissza tehát «számvonalunkhoz», amely már oly sok jó szolgálatot tett nekünk bonyolult fogalmak szemléltetésénél. És lássuk, miként tudjuk rajta csodálatos és baráttágtalan immaginárius számainkat, ezeket a számkísérteteket elhelyezni.

Tehát megrajzoltuk a számvonalat és most mindenféle átalakító bűvészmutatványt kísérelünk meg rajta.

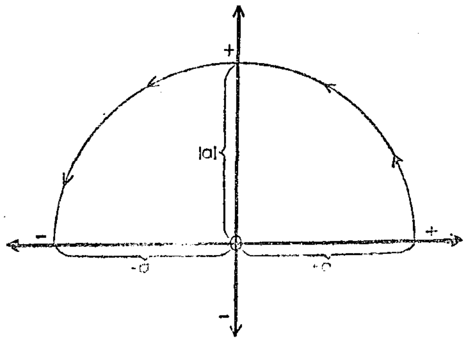


25. ábra.

Hogy általánosan számolhassunk, tekintsük a számvona pozitív részének 0-tól kiinduló a hosszúságú darabját. Ennek hossza esetünkben 5. Természetesen az a abszolút értéke bármely véges szám lehetett volna. Ha mostan a nullpontot tekintjük forgáspontnak, akkor $(+a)$-t addig fordíthatjuk, amíg csak az abszolút értékre ugyanakkora $(-a)$-t nem fedi, azzal azonos nem lesz. Közben két teljesen önkényes megállapítást tettünk. Először is a számvonal baloldalát a negatív számok helyének jelöltük ki. Másodszor az óramutató járásával ellenkező forgási irányt neveztük pozitivnak. Ismét kérdezzük tehát: miként lett hirtelen a $(+a)$-ból $(-a)$? Mit kellett matematikai, illetve geometriai szempontból tennünk, hogy ehhez az eredményhez jussunk? Geometriai szempontból nyilvánvaló, hogy félkörrel, 180 fokkal kellett egyenesünket a 0 pont körül elfordítanunk. Ha ennek a forgásnak matematikai értelmet is akarunk tulajdonítani, olyat, amelyik általános algoritmusunkkal összeegyeztethető, akkor az «algoritmus fenntartására» azt kell állítanunk, hogy az ilyen 180 fokos forgatás (—1)-gyel való szorzással egyértelmű. Circulus vitiosusnak látszik ez a megállapítás, de hamarosan hasznát fogjuk venni. Mert máris tudjuk belőle, hogy $(+a)\ (-1)=(-a)$. A (—1)-et ezért «forgási tényezőnek» nevezzük. Ha most az előbbi irányban tovább akarok forgatni, akkor a $(-a)$ további 180 fok után ismét $(+a)$-vá változik és $(-a)$ szorozv a forgási tényezővel, (—1)-gyel, $(+a)$-t ad. Algoritmusunk tehát eddig kifogástalanul működik.

A következőkben a nagy Karl Friedrich Gaussnak itt alkalmazott mesterfogását fogjuk megismerni, sőt szinte átélni. Feltesszük ugyanis a kérdést: mi történik, ha a tengelyrészt *nem 180 fokkal, hanem csak 90 fokkal fordítom el? Mi lesz* akkor a $(+a)$-ból? Hogy az abszolut értéke a forgatás minden fázisában változatlanul $|a|$ marad, az már csak abból is következik, hogy a sugara egy éppen keletkező körnek. De mi az *előjele* ennek az immár merőlegesen felfelé álló $|a|$-nak? Kijelentjük, hogy plusz, mert így akarjuk. És azt állítjuk, hogy ez a felfelé álló $|a|$ hosszúságú + előjelű vonaldarab «természetesen» nem lehet egyéb, mint $(+a)$. De ez a dolog egyáltalán nem természetes. Mert ha az első 90 fokos fordítás mitsem változtatott az előjelen, miért változtatja akkor a következő hirtelen minusz (—)-ra az előjelet? Pedig, hogy így van, az a 26. ábrán is jól látható. (1?8. lap)

Csak nem lehet a forgási tényező egyszer (+1) és az azután következő ugyanakkora forgásnál (—1)? Ilyen «alternáló» forgási tényező teljesen elviselhetetlen volna számunkra. És az is maradna. Mert ha, tegyük fel, a forgatást újabb 90 fokkal folytatom, akkor a függőleges tengelynek lefelé irányuló, logikusan (—) előjelű részét kapom, tehát a forgási tényező megint (+1). Ha most a negyedik negyedkört próbáljuk ki, akkor a pluszból ismét minusz lesz, mert $(-a)\ (-1)$-gyel szorzandó, hogy az eredmény $(+a)$ legyen. Röviden, a helyzet teljesen tarthatatlan és ez méginkább kitűnik, ha állításainkat összefoglaljuk és azt mondjuk, hogy 180 foknak



26. ábra.

(—1) felel meg mint forgási tényező, de a 180 fok két felének felváltva (+1) és (—1).

De van arra eszközünk, hogy ebből a zsákutcából szabadulhassunk. Egyszerűen *keresni* fogjuk, hogy mekkorának *kell* a 90 foknak megfelelő forgási tényezőt választanunk. Valami előttünk ismeretlent keresni: egyenlettel való dolgozást jelent. Tehát csak arról van szó, fel tudunk-e írni valamilyen egyenletet. Azt tudjuk, hogy 180 fok a (—1)-nek megfelelő elfordulás. Tehát 180 foknak a (—1) felel meg. De ez a (—1) szám két egymásután következő 90 fokos részforgásból adódik. Ebből következik, ha a 90 foknak megfelelő, egyelőre ismeretlen forgási tényezőt x-szel jelöljük, hogy a 90 fokkal elfordított a-ból, $a.x$ lesz. Ha újabb 90 fokkal fordítom el, akkor ismét x-szel kell szoroznom. Tehát $(a.x).x$ és ez annyi mint $a.(-1)$. Egyenletben: $(ax)x=a(-1)$. Osztunk a-val

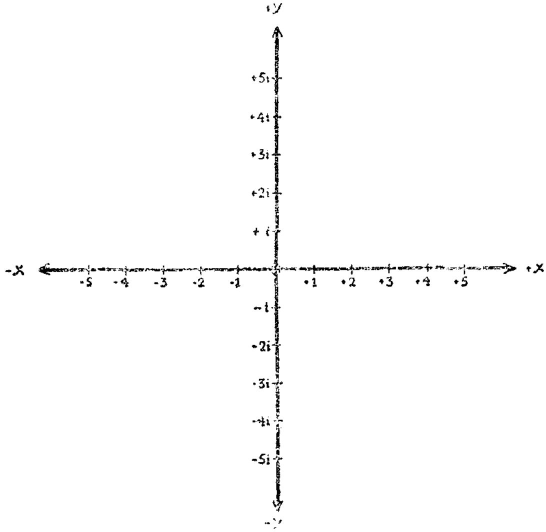
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm\sqrt{-1}.$$

Meglepetve kapjuk 90 foknak megfelelő forgási tényezőként az i számot. De ezzel együtt megkaptuk a képzetes számok számvonalát is. És ez az egészen misztikus felfedezés azt is mutatja, hogy a képzetes számok vonala a valós számok vonalára a 0 pontban merőleges. Az algoritmus továbbá még valamiről gondoskodott, még pedig arról, hogy bármely számértéket 90 fokkal elforgathassunk; erről a forgásnak mind a négy negyedben való követése utján fogunk meggyőződni. Ismét a $(+a)$-ból indulunk ki. Forgassuk el 90 fokkal, az eredmény $(+ai)$. Újabb 90 fok után: $(+ai)i$, tehát $(+ai^2)$. De mivel i^2 egyenlő (-1), az eredmény 180 fok után $(-a)$, ami szemmel láthatóan helyes. A harmadik negyedkör után $(-a)\ (+i)=(-ai)$ az eredmény és végül a negyedik után $(-ai)i=(-a)i^2=(-a)\ (-1)=(+a)$.

Ha most az eredményt áttekintjük, látjuk, hogy a valós és képzetes számok együtt egy síkban fekszenek, helyesebben csak síkban ábrázolhatók. Mert egy derékszögű tengelykereszt csak síkban, szóval felületen létezhetik. Alapfeltétel a második dimenzió.

De az eddigiekkel egyáltalán nem elégszünk meg és kiterjesztjük újonnan szerzett tudásunkat. Ezért rajzoljuk fel újból a tengelyeket számsíkunkban, ezúttal konkrét számokkal.

A vízszintes tengelyt, tehát a szokott közönséges számvonalunkat nevezzük x tengelynek, két fele a $+x$ és a $-x$ tengely. A képzetes tengelyt viszont y tengelynek nevezzük.



27. ábra.

a $(+i)$-ket tartalmazó felső része a $+y$ a $(-i)$-ket tartalmazó alsó része a $(-y)$. Ez a szokásos megjelölése a tengelykeresztnek, bármilyen célt szolgál is. Lesz még dolgunk vele.

Most az érdekel, hogy a képzetes számok ugyanolyan sűrűn helyezkednek-e el a tengelyen, mint a valósak. Mert biztos, hogy ettől függ magának a számsíknak a teltsége, hézagmentessége is. Ha ugyanis a képzetes tengelyen nem helyezkednének el a számok éppen olyan sűrűn, mint a valós tengelyen, akkor nem tudnám a számsíknak minden, tetszés szerinti pontját valamilyen valós és képzetes részből álló kombinációval kitölteni. De ezzel előre nyúltunk. Mert hisz még azt sem tudjuk, hogy ilyen kombináció rajzban egyáltalán lehetséges-e? és ha lehetséges, akkor milyen.

Ezért a következőképpen okoskodunk. Az i sem egyéb, mint valamilyen parancs. Parancs: i-vel való szorzást kíván. Minden a számnak van abszolut értéke $|a|$, közönbös hogy ez a szám egész, tört vagy irracionális-e. Ezt az a-t mindenkor megtalálom a valós számvonal pozitív részén. De gondolatmenetünkben a számvonalnak e részéből indultunk ki és ebből származtattuk az összes többit. Ezen találtuk meg először a természetes egész számokat, itt helyeztük el közben először a racionális törtszámokat, majd az irracionális számokat. Most lesz azonban az előjelnek a kérdése időszerű. Ha az $|a|$ abszolut értéket a $+$ vagy $-$ fogalmával kapcsolom össze, nyerem a $(+a)$ és a $(-a)$ értékeket. Negyedkörrel történő elforgatás vezet a $(+ai)$ és $(-ai)$ értékekhez. Tehát a $(+i)$ parancs azt jelenti, hogy $|a|$ darabbal függőlegesen felfelé a 0-tól. A $(-i)$ viszont, hogy $|a|$ darabbal lefelé. Első problémánk ezzel megoldódott. Az $|a|$ tengelykeresztünk mind a négy ágán egyformán érvényesül. Előjel és i parancsok csak más-más módon való megnyilvánulásra késztetik. Nincs már semmilyen kétségünk az i tengelyen elhelyezkedő számok sűrűsége felől. Ugyanaz a szerkezete, mint a valós tengelyé, izomorf vele. És valóban léteznek ilyen számok: $\frac{1}{5}i$, $\frac{1}{17}i$, $i\sqrt[4]{25}$, $\frac{9}{5}i$. Az i előjelnek, vagy együtthatónak is tekinthető, tehát így is írhatnók:

$$i\cdot\frac{1}{5};\ i\cdot\frac{1}{17},\ i\sqrt[4]{25},\ i\frac{9}{5}.$$

De most merül fel a további kérdés: milyenek tehát a valós és képzetes részből álló additiv vagy szubsztraktiv számkombinációk? Röviden, mily módon rajzolhatók fel az $(a \pm ib)$ alakú komplex számok? Világos, hogy az összekapcsolást egy tengelyen aligha végezhetem el. $(+1)$ vagy (-1) alakú forgási tényezők az $|a|$ értéket a valós tengely valamelyik részébe fordítják, a $(\pm i)$ alakú forgási tényezők pedig a képzetes tengelybe. Tehát a számok legáltalánosabb fajtáját, a komplex számokat forgási tényezőkkel tulajdonképpen így kellene írnom:

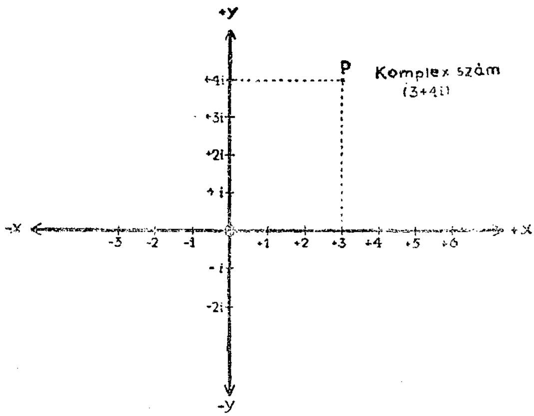
$$(\pm 1)|a| + (\pm i)|b|.$$

Most az, hogy ez a kifejezés valós vagy képzetes számot jelent-e, már kizárólag az $|a|$ és $|b|$ értékétől függ. Ha $|a| = 0$, akkor a $(\pm i)|b|$ marad meg, vagyis a képzetes $\pm bi$ szám. Ha viszont $|b| = 0$, akkor $(+1)|a|$ a maradék vagyis a valós $(\pm a)$ szám. Ha $|a|$ és $|b|$ egyszerre 0, akkor az eredmény 0. Ha viszont sem $|a|$, sem $|b|$ nem 0, akkor a szám legáltalánosabb alakja, a komplex szám áll előttünk.

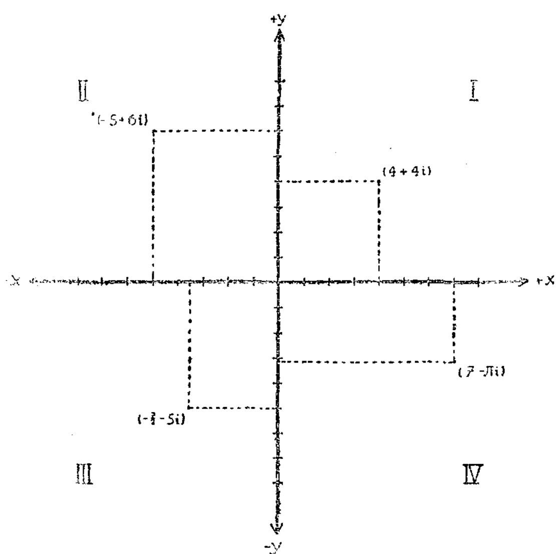
Ennek a fogalomnak képszerűvé tételéhez szükséges, hogy felvessük a kérdést: mit jelent tulajdonképpen egy $a+bi$ vagy $a-bi$ alakú parancs. a vagy $+a$ azt jelenti, hogy a számvonal pozitív részén a darabbal kell előre haladnunk. Például 3 egységgel. bi azt jelenti, hogy emelkedjünk az előbbi mozgásra merőlegesen, felfelé, bi-vel. Például $4i$-vel. Mozgási jelenséggel, tehát kinematikai, foronomiai feladattal állunk szemben. (Kinema a. m. mozgás, foronomia a. m. általános elvont mozgástan.) A mozgás eredménye két egymásra merőleges irányban egyidőben végzett mozgással érhető el, tehát mindkét elmozdulásnak az eredőjét kell ábrázolnia. Röviden, az így adódó végpont mind a valós, mind a képzetes parancsnak megfelel. Rajzoljuk fel ezt a $3+4i$ számot. (29. ábra, 202. lap.)

Most már tisztán látjuk az előjel és i parancsok értelmét. Figyelemreméltó a IV. negyedben látható szám, mert ennél a képzetes rész irracionális. Mégpedig $-i\pi$, ez annyi mint $-(3{\cdot}141592\ldots) \times \sqrt{-1}$.

Érdekes és termékeny volna a komplex számok további



28. ábra.



29. ábra.

elméletével foglalkozni. Hisz a felsőbb matematikának egyik fontos része foglalkozik a «komplex változók elméletével», de kitűzött célunktól túlságosan eltérnénk ezáltal. Tehát csupán annak megjegyzésére kell szorítkoznunk, hogy komplex számainkat egyszerűen többtagú algebrai kifejezéseknek tekinthetjük s ha némi óvatossággal is, de szabadon végezhetjük velük alapműveleteinket. Végeredményben az i sem egyéb, mint egy «alma». Bizonyos ugyan, hogy valóságban számolva nem szabad elfelejtenünk, hogy jelentése tulajdonképpen $\sqrt{-1}$. De minden számításnál boldogulunk alapműveleteink szabályaival.

Éppen most utaltunk arra, hogy semmilyen nehézséget sem okozhatnak a képzetes számok a négy alapművelet végzésében. De ne hagyjuk el a matematikának ezt a különös részét úgy, hogy csodáiról valamelyes fogalmunk ne legyen. Ezért eláruljuk, hogy az i hatványozása, forgási tényezői mivoltának megfelelően szakaszosan ismétlődő, ciklikus eredményt ad. Ennek a következő a lefolyása:

$$\begin{aligned}
i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^1 &&= -1\\
i^3 &= i^2.i \quad = (-1).i &&= -i\\
i^4 &= i^3.i \quad = (-i).i = (-1)i^2 &&= +1\\
i^5 &= i^4.i \quad = (+1).i &&= +i\\
i^6 &= i^5.i \quad = (+i).i = \quad i^2 &&= -1 \text{ stb.}
\end{aligned}$$

Vagy általánosan:

$$\begin{aligned}
i^{4n} &= +1\\
i^{4n+1} &= +i\\
i^{4n+2} &= -1\\
i^{4n+3} &= -i \text{ stb.}
\end{aligned}$$

ahol az n bármely véges egészszámot jelenthet.

Imaginárius és komplex számokból való gyökvonás még bonyolultabb, mint a hatványozás. Az a célunk mindenkor, hogy a (—1) magasabb kitevőjű gyökeit a (—1) négyzetgyökével, tehát i értékekkel fejezzük ki. Erre számos zseniális módot eszeltek ki és képletet találtak a forgási tényező jelleg figyelembevételével. Ezeknek a levezetése megint túlságosan messzire vezetne.[1] Megelégszünk tehát azzal, hogy valamely komplex szám négyzetgyöke a következőképpen számítható ki:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Ezt a képletet az i négyzetgyökének kiszámítására is használhatjuk, mert az i sem más, mint olyan komplex $(a+bi)$ szám, amelyben az $a=0$ és a $b=1$. Képletünk szerint $\sqrt{i}$ értéke $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\sqrt{-i}$ ugyanazon képlet szerint $\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$ Az i négyzetgyöke tehát már nem a képzetes tengelyen van, hanem valahol a számsíkon.

Általánosan az i n-edik gyökét fenti képlettel aligha tudjuk meghatározni, csak akkor, ha az $n=4$, 8, 16, 32 stb., szóval kettőnek valamilyen hatványa és akkor is csak nehézkesen, a képlet ismételt alkalmazásával. Az n-edik gyök meghatározására általánosan a következő képlet szolgál:

$$\sqrt[n]{i} = \cos\left(\frac{90}{n}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{90}{n}\right)^\circ.$$

Ebből a példából már sejtheti az olvasó, hogy milyen hihetetlen lehetőségek vannak képzetes szellemvilágunkban: i-ből vont n-edik gyök hirtelen szögfüggvényekből alakult komplex számmá változott. Magasabb nézőpontból ez nem meglepő: az alsóbbrendű világok ellentétei fönn találkoznak és kiegyenlítődnek.

Most a teljes számvilág birtokában és a mozgási parancsok követésmódjának ismeretében olyan cél elérésére fogjuk tudásunkat használni, amely egymástól nagyon távolesőnek látszó dolgokat kapcsol össze.

Hosszú történeti fejlődés előzte meg az «analitikus geometria» és a «koordináták» felfedezését. Ez a fejlődés a per-

[1] Nem okoz nehézséget, ha az i-nek valamilyen együtthatója van. Például $\sqrt[12]{-9}=\sqrt[12]{9}\cdot\sqrt[12]{-1}=\sqrt[12]{9}\cdot\sqrt[6]{i}$, általában $\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[n]{i}$

gai Apolloniustól a kolostorokban a XIV. században folyó skolasztikus kutatásokon át, majd Kepleren keresztül Fermatig és Descartesig vezet. De Descartes (Cartesius) nevéhez a zseni iránti mérhetetlen csodálatunk f ződik, mert ő fiatal lovastiszt korában, a harmincéves háború borzalmai közepette, magyarországi téli táborokban emelte a matematikai «analizist» arra a fokra, amely egy időre tetőpontot és nyugvópontot jelentett.

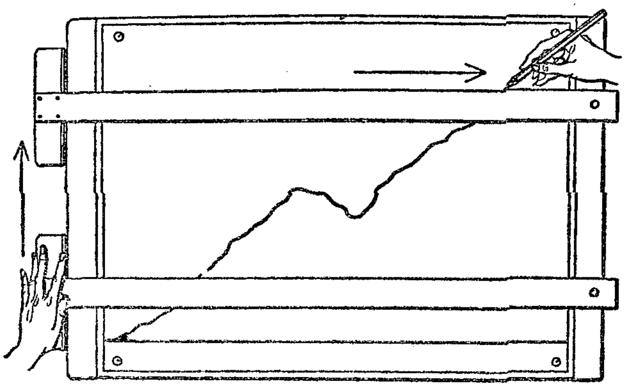
HUSZONKETTEDIK FEJEZET

Koordináták

Eddigi szoksaink szerint, még mielőtt a részletes tárgyaláshoz fognánk, gépszerű berendezéshez folyamodunk, hogy az általános mozgástan, a foronomia néhány jelenségét megismerjük. A *foronomiának ma már a neve is majd feledésbe merült.* A mozgástan a fizikában kinematika néven szerepel, s inkább fizikailag érzékelhető testek szélső esetben az anyagi pont mozgásával foglalkozik, vagyi testnek a mozgásával, mégha az egyetlen ponttá, «anyagi ponttá» zsugorodott is össze.

De minket nem érdekel, hogy mi mozog. Bár ez a valóságban lehetetlen, mégis absztrakció segítségével csak magára a mozgásra leszünk tekintettel. Matematikai pontokat alkalmazunk, szélesség nélküli, matematikai vonalakat és vastagság nélküli felületeket. Tehát csak gondolható, de nem észlelhető tárgyakat. Ezért mulatságos az a régi adoma, amelyben a parvenű apa fia egyéves önkéntesként szolgál. A fiú, sokszor és különféle ürügyekkel pumpolván apját, végül már azért kér pénzt, mert eltörte a puskáján az «irányvonalat» («vizir» vonalat) s helyette másikat kell a kincstár számára vásárolnia. Ez az «irányvonal» az ideálunk. Mert valódi, testnélküli, matematikai vonal. Azt a vonalat jelenti ugyanis, amely képzeletben a célzó szemet, az irányzékot, a célgömböt és a célt összeköti. Tehát csak hossza van, szélessége egyáltalán nincs. Érthető, hogy nem lehet egykönnyen eltörni.

De mindez csak annak magyarázatára szolgál, hogy mit is kell gondolnunk akkor, ha a következők során pontokat és vonalakat rajzolunk. Szimbólikus vastagságot, szélességet kapnak, de soha sem szabad elfelejtenünk, hogy tulajdonképpen láthatatlanoknak kellene lenniök. De lássuk gépünket. Feszítsünk ki rajztáblánkon egy ív közönséges rajzpapírt és tegyünk a táblára, közel az alsó széléhez egy fejes vonalzót. Húzzunk mellette vonalat, majd kérjünk meg valakit, hogy tolja felfelé a vonalzót, akár változó sebességgel. Ugyanakkor ismét végighúzzuk balról jobbra ceruzánkat a vonalzó mentén egyenletes sebességgel.

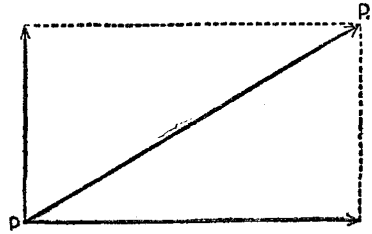


30. ábra.

Meglepetésünkre nem egyenes, hanem többé-kevésbbé szabálytalan, zeg-zugos vonal rajzolódik a papírra. Nem is emelkedik mindenütt, egyik részén süllyed, segédünk kezéből kisiklott a vonalzó és így az visszacsúszott. Kísérletünket természetesen bármikor és sokféle módon megismételhetjük. Megállapodhatunk segédünkkel, hogy egyenletesen taszítsa a vonalzót, vagy bizonyos módon változó sebességgel. Hogy ez a megállapodás mire vezet, később látjuk meg.

De előbb a foronomia gondolatmenete nyomán lássuk, hogy miként keletkezik a különös alakú vonal. Világos, hogy két egymásra merőleges mozgás játszódik le egyidőben. Egyik a ceruzám egyenletes mozgása balról jobbra, a másik a vonalzónak, a segítőtől származó, változó mozgása alulról-felfelé.

Ceruzám kénytelen a mozgás pillanatában, egyidőben, mindkét mozgást követni. És a ceruza a mozgás minden, legkisebb részében egyidőben mozgott felfelé és jobbra. Mondhatnók, hogy legjobb tudása szerint törekedett mindkét mozgást kielégíteni. Ha vonat halad záporesőn keresztül s pl. az esőcseppek függőlegesen esnek lefelé, akkor a kocsiablakon az esőcseppek nyoma nem függőleges, hanem ferde vonal lesz. Annál ferdébb, minél gyorsabban megy a vonat. Az esőcseppek is mindkét, egymásra merőleges mozgást el akarják végezni. A mozgásnak igen-igen kis részét így is képzelhetjük:

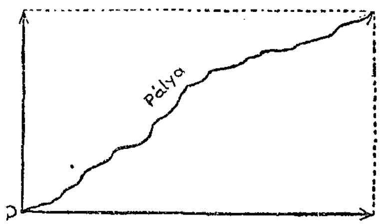


31. ábra.

Ez az úgynevezett «mozgási parallelogramma» szemlélteti, hogy a P pont mindkét mozgási parancsnak eleget tesz: P_1-be úgy jutott, hogy jobbra is haladt, felfelé is.

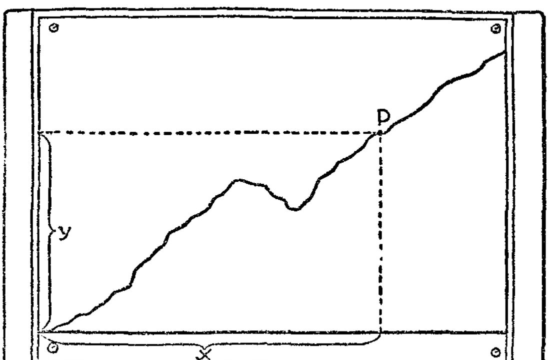
Ez a parallelogrammával történő szemléltetés csak megközelítő, hacsak nem pontosan állandó a felfelé irányuló mozgásnak sebessége is. Vagyis a pont P és P_1 közti pályája csak akkor pontosan egyenes darab, ha *mindkét* mozgás egyenletes sebességű. De gépszerű berendezésünknél megengedtük, hogy a felfelé irányuló mozgás teljesen tetszésszerinti, azaz általános legyen. Ezért mozgási parallelogrammáról a mozgás bármilyen kis részénél is csak megközelítésben beszélhetünk, mert a pálya mégoly kicsi része is zeg-zugos vonal. (32. ábra, 208. l.) És bármilyen kis részt választok is, az egyenetlen emelkedés következtében pálya részei mindenkor egyenetlenek.

Másképpen kell vizsgálatunkhoz fognunk. Az egyetlen lehetőség az, hogy a legkisebb részeiben is szabálytalan pálya nehézségeinek elkerülésére a pályának hosszúság nélküli darabját, tehát egy tetszés szerinti pontját vizsgáljnk.



32. ábra.

Levéve a tábláról a fejesvonalzót, válasszuk ki céljainkra a P pontot. Miként részesült ez a pont a két mozgásban? Bizonyára úgy, hogy x távolsággal tolódott jobbra, vagyis a ceruzánkat x távolságnyira kellett jobbra húznunk. A felelé tolásból eredő magasságát y jelöli.



33. ábra.

Ezt a megfontolásunkat a pálya bármelyik pontjára elvégezhetjük és minden egyes esetben x jelöli a «hosszirányú», y pedig a «magassági» elmozdulást. Tehát a pálya minden pontja jellemezhető az x-ével és y-ával. Az x és y, amelyeket könnyen lemérhetünk, az illető P ponthoz rendelt, «koordinált» értékek. És Leibniztől származó nevük: koordináták Pontosabban «pontkoordináták», mert ponthoz rendeltünk koordináltunk, helyzetükre jellemző adatokat.

Mindezzel azonban nagyon kevésre megyünk, mert nem mérhetjük le a pálya végtelen sok pontján az x és y értékét, a koordinátákat. Hogy a pálya végtelen sok pontból áll, az onnan is következik, hogy az x egyenes minden egyes pontja fölött van a pályának is egy-egy pontja és mert rajzolása közben ceruzánkat sohasem emeltük fel a papirosról. Eddigi ismereteink szerint az ilyen folytonos vonal végtelen sok pontból áll. Aritmetikai szempontból azt is állíthatom, hogy az alapvonalunk nem egyéb, mint a számegyenes. Hisz az x szabadon választható: 0, tört vagy irracionális is lehet. Általános szabály az x és y meghatározására: ez az, ami nekünk még hiányzik. Tudjuk, hogy az olyan képlet, amelyben az x és az y előfordul és ismeretlen, az diophantosi, vagy nem diophantosi, de mindenképpen határozatlan egyenlet két ismeretlennel. Ámde az x ismertté tehető, amennyiben szabadon választom. De ha az x szabadon választható, akkor a megfelelő y kényszerítő erővel adódik.

Tehát egyszerre megtaláltuk a kivezető utat. Sőt, azt is tudjuk, hogy milyen eszközzel tudunk ezen az úton biztosan haladni. Függvénnyel! Vagyis y az x függvénye, mivel a függvénynél tartozik tetszőleges x-hez bizonyos y. Hogy kapjuk meg azonban a pálya minden pontjára érvényes függvényt? A dolog nagyon kétségbeejtőnek látszik. Józan ésszel csak egy egyenes, vagy kör, vagy ellipszis, vagy más szabályos pálya számára találhatok egy pályafüggvényt, de nem bármely szabálytalan zeg-zugos pályához. Volna még egy utolsó kivezető út. Talán fölbontható pályánk kellő szabályosságú részekre és azután e részek mindegyikének a pályafüggvénye veendő. Eláruljuk, hogy úgy az ellenvetések, mint a javaslatok helyénvalók. Biztos, hogy a «szabályosság» fogalma nagyon üres. És azonkívül egy cirkulus. Mert meg is fordítható az egész probléma és állíthatjuk, hogy ha minden pályának megfelel egy függvény, akkor minden függvénynek megfelel egy pálya. Nagyjában ez is helyes. Hogy sejtelmeink nek alakot adhassunk, koordináta-geometriánk számára to vábbi eszközökről gondoskodunk.

Tudjuk, hogy egy függvényt általánosan pl. $y=f(x)$ alakban írunk. Ez azt fejezi ki, hogy y bizonyos (de különben tetszésszerinti) kifejezés x-ből és állandókból. Pl. az

$$y = (2x+5)\,\frac{\sqrt{5x^3-19}}{x^5-x^3+2}\cdot 25x^7$$

megadott — meglehetős bonyolult — függvénye az x-nek. És pl. $y=5x+13 \sin x$ szintén az. A függvény szó jelentése nem teljesen egyértelmű. Néha magát az egész egyenletet akarja jelenteni, máskor pedig csak az y-t, mint az x-re kirótt számítások eredményét. Utolsó egyenletünk így is írhatnók:

$$(\text{funkció } x)=f(x)=5x+13 \sin x,$$

vagy részletezve:

$$\begin{array}{r} y=f(x), \\ y=5x+13 \sin x, \\ \hline f(x)=5x+13 \sin x. \end{array}$$

Természetesen így is:

$$\begin{array}{r} f(x)=y, \\ f(x)=5x+13 \sin x, \\ \hline y=5x+13 \sin x. \end{array}$$

A függvény szó különféle jelentésének összecserélésével sok hibát szokás elkövetni, pedig végső elemzésben csak egységes a jelentése. S ez a kezdőt könnyen megzavarja. Éppen ezért az egész ügyet a kezdet-kezdetétől vezetjük le. Legyen valamely egyenlet előttünk, pl. a

$$15x^2+9x+3y=12x-27.$$

Ebben x, y szerepelnek, az x még hozzá két különböző hatványon, az y-nak együtthatója van, a 3. Ha ezzel a «függvénnyel» dolgozni akarnánk: zavarban lennénk. A mi előbbi mutatóval ellátott gépszerű berendezésünk is csődöt mondana. Mert ez y-t és nem $3y$-t mutatja. Egy ilyen függvényt éppen ezért *implicit*nek (mintegy beburkoltnak) nevezünk és meg kell próbálnunk *explicit*té (azaz kifejtetté) változtani. Mivel eddig mindig az érdekelt, hogy mekkora az y, azért az y-t úgy kell «izolálnunk», miként annak idején az x-et izoláltuk az egyenleteknél. A két eset lényegében alig különböző. Mert ha jogunkban áll az x számára tetszésszerinti értéket fölvenni, akkor mindazon tagok, amelyekben előfordul az x állandókká válnak. Ekkor azonban (az egyenletek nézőpontjából beszélve) ismeretlen csak az y marad. Egy egyenletet oldunk meg y-ra nézve úgy, miként pl. a

$$2x+5a=24+17b$$

egyenletet oldjuk meg x-re, ha szabad a és b helyébe tetszőleges értékeket helyettesíteni. Pl. $a=2$, $b=4$ esetén

$$\begin{aligned} 2x+(5.2)&=24+(17.4) \\ 2x&=24+17.4-5.2, \\ 2x&=82, \\ x&=41. \end{aligned}$$

Valamely egyenlet függvény jellege mindenesetre akkor érvényesül, ha x helyébe nemcsak egyszer és csak egy számot helyettesíthetünk be, hanem bárhányszor és bármely számot. A megelőző példabeli

$$15x^2+9x+3y=12x-27$$

függvényünket y szerint akarva megoldani, egymásután a következő egyenleteket írhatjuk:

$$\begin{aligned} 3y&=12x-27-9x-15x^2, \\ 3y&=3x-15x^2-27, \\ y&=x-5x^2-9, \end{aligned}$$

vagy rendezve

$$y=-5x^2+x-9.$$

Most már valóban mondhatjuk, hogy y az x függvénye, vagy $y=f(x)$, ha odagondoljuk, hogy az x tetszőleges értékűnek választható. Más és más x-értékek esetén általában más és más y érték áll elő. És természetesen akárhány ily y-t számíthatunk ki. Álljon itt a következő kis táblázat ennek illusztrálásául:

x	y	x	y	x	y
1	—13	$^1/_2$	$-\frac{39}{4}$	0	— 9
2	—27	$^2/_3$	$-\frac{95}{9}$	$\sqrt{2}$	—17·586...
3	—51	$^1/_8$	$-\frac{573}{64}$	π	—55·2064...
4	—85	$^4/_7$	$-\frac{493}{49}$	e [1]	—43·227...

A táblázat első oszlopába egyszerűen természetes számokat, a második oszlopba közönséges törteket, a harmadik oszlopba 0-t és irracionális számokat választottunk x gyanánt. Mindenütt határozott érték adódott y számára.

Minden egyes x-et a hozzátartozó y-nal együtt egy számpárnak véve, annyi számpárunk lesz, ahány x értéket behelyettesítettünk.

A mondottak szerint y mintegy az x-szel változó «mozgó szám» jelentkezik. Természetesen nem állítható, hogy mivel az x tetszőleges, azért az y is minden értéket fölvehet. Ellenkezőleg, bizonyos korlátok közé van szorítva annak megfelelően, hogy az x mily módon szerepel. Az x-szel változó, «mozgó számként» jelentkező y képe foronomiai nézőpontból a mi pályánk, egy görbe (görbevonal), a függvény geometriai képe.

Mint már említettük, úgy áll a dolog a függvénynél, hogy minden probléma megfordítható. Így azt is mondhatjuk, hogy számpárok valamely sorozata egy függvény. Ezek után háromféle módon adható meg függvény:

1. Mint implicit vagy explicit két [2] ismeretlenes egyenlet Például $y=-5x^2+3x-9$.

2. Mint görbe, amelyhez még ezután keresendő a képlet a «függvény».

3. Mint számpárok táblázata, amelyek mondjuk észlelések

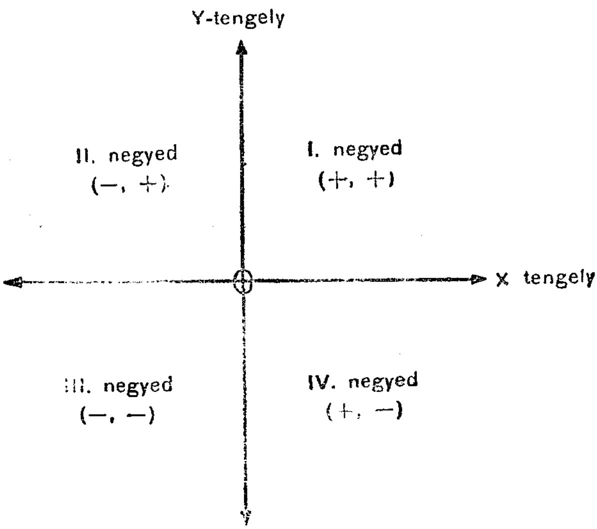
[1] Itt $e=2{,}7182\ldots$ az ú. n. természetes logaritmusok alapszáma.
[2] Csak két ismeretlennel foglalkozunk!

eredményei. (Például zivatarok havi száma bizonyos, a hónaphoz tartozó átlagos hőmérséklet esetén.)

A második esetben még keresendő a függvény, a harmadik esetben még megállapítandó, hogy egyáltalán van-e szerves, törvényszerű összefüggés.

Mindezekkel a mélyebb belátásokkal nem jutunk tovább, ha nem veszünk igénybe «analitikai» segédeszközöket. Fölvetjük tehát a kérdést, hogy valamely megadott függvényt miként változtathatunk át görbére. A kérdéssel, hogy megadott görbét miként változtathatunk vissza függvényre, csak az utolsó fejezetben foglalkozunk. Éppenúgy azzal a kérdéssel is (interpoláció problémája), hogy megadott számpárokból miként jutunk el görbéhez.

Kérdésünkre mielőtt gyorsan és egyszerűen felelnénk, egy apróságot kell elintézni. T. i. a «koordináta-rendszer» szokásos megállapítását. Ez nem okoz nagyobb nehézséget, mivel hasonlóval már a komplex számoknál volt dolgunk.



34. ábra.

Descartes nyomán ú. n. *derékszögű* (ortogonális) koordináta-rendszert választunk, amelynél mindenféle elnevezésekben és sorrendbeli föltevések dolgában megállapodunk. Hangsúlyozzuk újból: *megállapodunk* rendszerünkben, mivel elvileg semmi sem teszi más lehető koordináta-rendszerek elé, legfeljebb bizonyos egyszerűség. (34. ábra a 213. lapon.) Rendszerünk a következő.

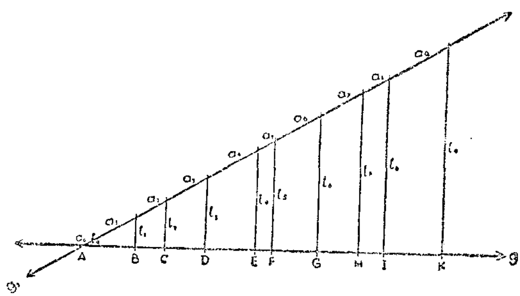
Az O pont a koordinátakezdőpont. Az x-tengely az abszcissza-, az y-tengely az ordináta-tengely. Az x-értékek az abszcisszák, az y-értékek az ordináták. Abszicsszák és ordináták együtt a koordináták. A kvadránsok, mintegy a negyedei egy határtalan síknak, az óramutató járásával ellenkező irányban vannak számozva. Könnyű megjegyezni a kvadránsok számozása alatti előjelek értelmét. Ugyanis a tengelyeket két egymásra merőleges számegyenesként foghatjuk föl. Ekkor az előjelek jelentése magától következik, ha föltesszük, hogy a vízszintes egyenesnél az O-tól balra, a függőleges egyenesnél az O-tól lefelé vannak a negativ számok. Mármost minden további nélkül tudunk «számpárokat» elhelyezni. A világ minden számpára koordináta-rendszerünkben egy-egy pont, föltéve, hogy valós számok párjairól van szó, mivel mindkét tengelyen valós számokat ábrázolunk. Komplex számpárok nem helyezhetők el egy és ugyanazon síkban. Ehhez két sík szükséges és ekkor «konformis leképezéshez» jutunk. Ez azonban már messze túl van a mi kereteinken, mert a matematika legfelső részeibe tartozik.

HUSZONHARMADIK FEJEZET

Analitikus geometria

Célunk a végtelen analizisének, az ú. n. felső matematikának alapfogalmait megszerezni. Minden lépésünkkel új előkészítőanyagot gyüjtünk e cél számára. Bizonyos mértékig elhanyagoljuk a részletet, az egyest, bármilyen érdekes és fontos is az. És sok mindent csak a legdurvább körvonalaiban vagy a közönséges tanításban szokatlan megvilágításban mutatunk be. Éppen így most igen hézagosan és önkényesen tárgyaljuk majd a *koordináta-* vagy másképp *analitikus geometriát*, jóllehet éppen ez egyik főfeltétele a felső matematikának. De ne fecsegjünk tovább, hanem cselekedjünk.

Kezdjük azzal a látszólag nem idetartozó kérdéssel, hogy mily föltételeknek kell eleget tenniök valamely egyenesre merőleges egyenes daraboknak avégre, hogy végpontjaik egyetlen egy egyenessel összeköthetők legyenek. Úgy járunk el — a geometria gyakori szokása szerint — hogy föltételezzük az egyenessel való összekötés lehetőségét és keressük ennek a «föltételeit».



35. ábra.

Gondoljuk, hogy a «g egyenes» pontjaiban A-tól K-ig merőlegeseket állítunk s ezek pontosan oly hosszúak, hogy végpontjaik mind egy egyenesen, a g_1-en vannak. A megjelölt merőlegesek l_0-tól l_9-ig tetszőleges távolságban vannak egymástól. Ha az A pontot választom a mérés kiindulópontjának s megválasztom a hosszúság egységét, akkor megeshet, hogy egyik, vagy másik merőleges talppontja irracionális számhoz tartozó pontra kerül. De ez minket, tudjuk, semmiképpen sem zavar. A keresett föltételt kevés geometriai rátermettséggel is azonnal leolvashatjuk az ábráról. Az AB, az l_1 és az a_1 egyenesdarabok derékszögű háromszöget alkotnak. Ezzel hasonló az AC, l_2 és az a_1+a_2 egyenesdarabokból álló, szintén derékszögű háromszög. Ezzel pedig szintén hasonló (tehát a legelsővel is) az AD, l_3 és az $a_1+a_2+a_3$ egyenesdarabokból álló, szintén derékszögű háromszög. És így tovább, pl. az ábrán levő utolsó derékszögű háromszögig, amelyet az AK, l_9, $a_1+a_2+\ldots+a_9$ egyenesdarabok alkotnak. E háromszögek hasonlóságából azonban következik, hogy két-két befogó viszonya valamennyinél ugyanaz. Minthogy a merőlegesek végpontjainak egyenessel történő összeköthetősége a háromszögek hasonlóságából következett, a hasonlóság pedig a befogók viszonyának állandóságából, bizonyos, hogy a keresett föltétel éppen e viszony azonossága. Mivel pedig a függőlegesek egymástól való távolsága, vagy — ami ugyanaz — valamely fix ponttól való távolságuk tetszőleges, azért a g_1 egyenes helyzetének jellemzésére elég, ha egyetlen egy függőleges és távolság viszonyát ismerem. Legyen pl.

$$\textit{távolság} : \textit{függőleges} = m : n,$$

azaz

$$n\text{-szer } \textit{távolság} = m\text{-szer } \textit{függőleges},$$

tehát

$$\textit{függőleges} = \frac{n\text{-szer } \textit{távolság}}{m}.$$

Ez az utolsó egyenlet nyilván egy függvényt képvisel, mivel ha írjuk, hogy a tetszőleges

$$\textit{függőleges} = y;$$
$$\textit{távolság} = x,$$

akkor lesz

$$y = \frac{n}{m}x.$$

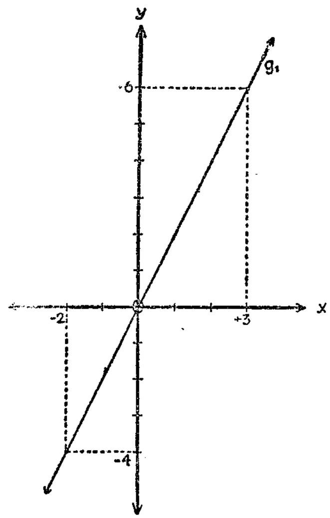
Az n/m tört helyett rövidségért írjunk pl. k-t. Tehát végül

$$y = kx$$

a föltétele annak, hogy a szóbanforgó végpontok egy egyenesen legyenek.

Például vegyük a $k=2$ esetet. A megfelelő egyenest, mint bármely más egyenest, két tetszőleges pontja kijelöli. Tekintsük egyenesünket derékszögű koordináta-rendszerben és válasszuk ily kijelölő pontoknak az $x=3$ és az $x=-2$ értékeknek megfelelőket. (Lásd 217. lap).

Mivel az $y=kx$ jelentése $k=2$ esetén $y=2x$, így $x=3$ ese-



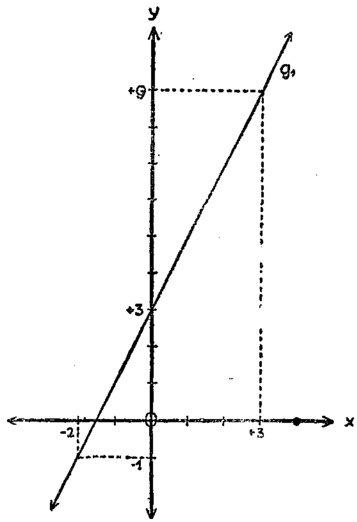
36. ábra.

tén $y=6$ és $x=-2$ esetén $y=-4$. Átmegy a 0-ponton is, mivel $x=0$ esetén $y=0$. Az olvasó legcélszerűbben milliméter papiroson keresheti meg tetszőleges x-hez a megfelelő y-t, s meggyőződhet róla, hogy valamely x-hez kiszámított y végpontja mindenkor az egyenesen van. Az előbbiek szerint tehát az egyenesnek megfelelő egyenlet: az *egyenes egyenlete* egy $y=kx$ alakú függvény. Mindkét változó (ismeretlen) az 1-ső hatványon szerepel. Az ily függvényt mondjuk lineárisnak, a linea=egyenes vonal szóról. Mielőtt még tovább mennénk, szóljunk néhány szót az egyenlet és a függvény szónak felváltva történő használatáról. Röviden végzünk ezzel a dilemmával. Megállapítjuk, hogy minden függvény egyenletnek nevezhető, mert $y=f(x)$ alakban, egyenlőségnek írható. De nem minden egyenlet függvény. Így például $5x^2+3x+9=27$ biztosan egyenlet, de nem függvény. Csak az x szerepel benne mint ismeretlen, ez meghatározható, de nyoma sincsen benne független vagy függő változónak. Ez a kettős szóhasználat is nehézséget okoz a kezdőnek.

Az egyenes egyenletének vizsgálata azonban még nincs kész. Állítjuk ugyanis, hogy pl. az

$$y=2x+3$$

alakú függvény is «lineáris», azaz egyenes a geometriai képe. Tegyünk próbát rajzban (37. ábra). Függvényünknél $x=3$

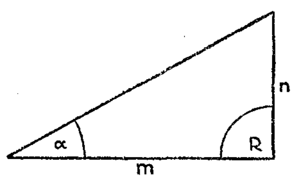


37. ábra.

esetén $y=9$ és $x=-2$ esetén $y=-1$. Ez az egyenes nem megy át a koordináta-rendszer kezdőpontján. Ez abból is következik, hogy $x=0$ esetén y nem 0 (hanem $+3$). Ha $x=0$, az geometriailag azt jelenti, hogy keresem az ordináta-tengely azon pontját, amelyen egyenesünk átmegy. Éppen így $y=0$ véve, geometriailag az egyenesnek az abszcissza-tengellyel való metszéspontjának a megállapítása. Példánknál e metszéspontok tehát $x=0$, $y=2.0+3=3$; $y=0$, $0=2x+3$, ahonnan $x=-\frac{3}{2}$. Egy pillantás ábránkra igazolja, hogy egyenesünk valóban átmegy az ordináta-tengely $+3$ és az abszcissza-tengely $-{}^3/_2$ pontján. Új számoló- és gondolkodógépünk ismét rendkívüli varázseszköznek bizonyul és különösen rejtélyes, mert aritmetikát és geometriát fűz össze. De ezt még ismételten, bonyolultabb példákon is tapasztalni fogjuk. Lássunk mindjárt ízelítőt. A 0 ponton átmenő egyenes egyenletéül az

$$y=\frac{n}{m}x$$

összefüggést állapítottuk meg, hasonlósági meggondolások révén. Itt n/m a függőlegesnek a távolsághoz való viszonyát jelenti. E viszony — két befogó viszonya — az α-szög trigonometriai függvénye.



38. ábra.

Még pedig a már ismert értelmezés szerint az α tangense:

$$\operatorname{tg} \alpha=\frac{n}{m}.$$

Az $n/m=k$ jelölésünk szerint az

$$y=kx$$

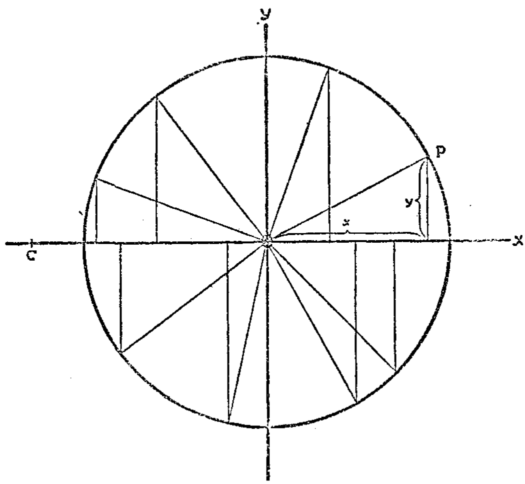
egyenletben az x együtthatója, k annak a szögnek a tangense, amelyet az egyenes az abszcissza-tengellyel alkot. Éppen így az általános helyzetű egyenes

$$y=kx+c$$

egyenleténél, ahol c tetszőleges állandó. Hogy ez is egyenes egyenlete: az nyilvánvaló, t. i. a megfelelő vonal az $y=kx$

egyenes önmagával párhuzamosan, c hosszúsággal való eltolása. Tehát szükségkép szintén egyenes. De ha a tangenst ismerjük, akkor ismerjük a szöget is, az egyenesnek a pozitiv abszcissza-tengellyel bezárt szögét. Ennek a meggondolásnak a későbbiek során még jó hasznát fogjuk venni.

Megbarátkozva mindezekkel, analitikai ambícióink annyira megduzzadtak, hogy görbe vonal, például kör egyenletét is meg akarjuk állapítani.



39. ábra.

Vagyis oly képletet keresünk x és y között, amely az egyes x-ekhez oly y-okat szolgáltat, hogy a végpontok egy körön vannak. Rögtön látjuk, hogy csak azoknak az x-értékeknek van megfelelő y-értékük, amelyek úgy a pozitiv, mint a negativ irányban nem nagyobbak a körsugárnál. Mert pl. a C-beli függőleges nem metszi a kört. De különben, hogy fogjak neki kényes föladatomnak? Talán ismét egy «viszony» segít célhoz? Bármely szóbajöhető x-hez tartozó föggőlegesnek a körrel való metszéspontját a (koordináta-rendszer kezdőpontjául választott) középponttal összekötve: a kör egy-egy sugarát kapjuk. Ekként csupa derékszögű háromszög adódik: átfogójuk egy körsugár, befogójuk egy abszcissza és egy ordináta. Ezeket sorban r, x és y által jelölve a *Pythagoras*-tétel szerint

$$x^2+y^2=r^2.$$

Ebből az egyenletből

$$y^2=r^2-x^2,$$

tehát

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}.$$

Sokszor fog y irracionálisnak adódni, de ez a gyökvonás természetéből azonnal következik. Az y számára tehát a szóbajöhető x-ek bármelyikét véve, két, csak előjelben különböző, vagyis abszolut értékre nézve egyenlő értéket nyerünk. Ábránk valóban azt mutatja, hogy az x-hez két y tartozik, egyik a kör felső, másik a kör alsó feléhez. De mindkettő hosszúságra nézve ugyanakkora, csupán előjelük, ezzel helyzetük a koordináta-rendszerben különböző. Látjuk, hogy amit aritmetikai úton nyertünk, az geometriailag is helyes. Valóban bámulnunk kell a koordináta-geometria varázserejét, mert szinte érthetetlen, hogy másutt tanult dolognak, miként jelen esetben a négyzetgyök kétértékűségének, geometriai jelentése van. Kétségtelen, hogy az emberi elme egyik legnagyobb eredménye az aritmetikának és a geometriának ez a bámulatos, a kezdőt némelykor zavarbaejtő összefüggése, egybetalálkozása. Ennek a bizonyos értelemben vett azonosságnak gyökerekig menő megmagyarázása mély és nehéz matematika-filozófiai fejtegetések tárgya. De ez már a mi kereteinken kívüli. Éppen ezért a legegyszerűbb indokolásra szorítkozunk. Ez pedig az, hogy mi voltaképp nem geometriát űzünk a koordináták alkalmazásakor. Mi két egymásra merőleges számegyenesen számpárokkal dolgozunk. Ezek azonban a sík pontjaiként jelentkeznek mint szimbolikus leképezések. De mert síkban fekszenek, engedelmeskednek a síkgeometria törvényeinek. Csak filozófálni szerető olvasók számára jegyeztük ezt meg. Az analitikus (azaz koordináta-) geometria bármely jó tankönyve belevilágít e dologba.

Még másként is akarjuk illusztrálni a koordináta-geometria mivoltát. Azáltal, hogy megpróbáljuk a kör egyenletével a másodfokú (négyzetes, kvadrátikus) egyenlet megoldását.

A kör egyenlete

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

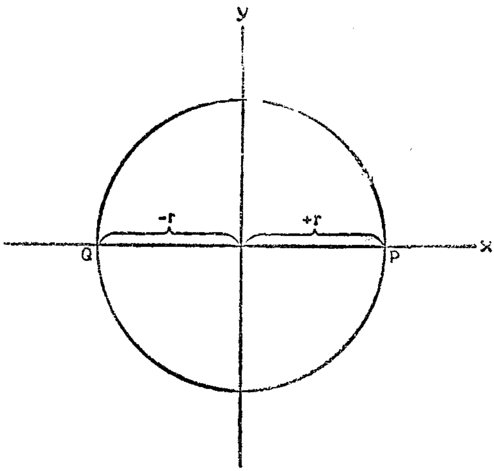
Kereshetjük tehát a kör azon pontját vagy pontjait, amelyeknél $y=0$. Az előbbi egyenlet négyzetreemelés után

$$y^2 = r^2 - x^2$$

alakú. Ha $y=0$ tartozik lenni, akkor

$$0 = r^2 - x^2 \text{ és } x^2 = r^2$$

Vagyis $x = \sqrt{r^2} = \pm r$.



40. ábra.

Ahol $y=0$, ott metszi körünk az abszcissza-tengelyt. A metszéspontok P és Q. A négyzetgyök kétértékűsége itt is mutatkozik.

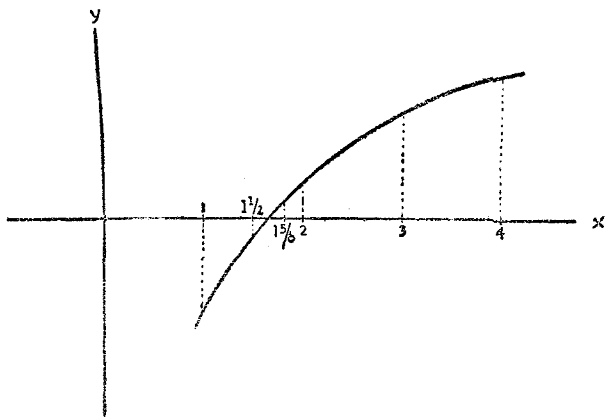
Ily módon általános egyenleteket is megoldhatunk. Ugyanis bármely egy ismeretlenű egyenlet úgy fogható föl, mint oly függvény, amelyben y-t 0-val egyenlőnek tettük. Pl. ha az

$$x^2-2x-15=0$$

egyenletről van szó, akkor vegyük az ennek megfelelő következő függvényt

$$y=x^2-2x-15.$$

Az egyenlet számára mint megoldás az az x adódik *grafikus* úton (azaz rajz segítségével), amelyben a függvény geometriai képe (a függvénynek megfelelő görbe) metszi az abszcissza-tengelyt. E metszéspontban (metszéspontokban) ugyanis $y=0$. Ha a görbét milliméterpapiroson fölvett koordináta-rendszerben rajzoljuk meg, akkor ily metszéspontokul az $x=5$, $x=-3$ pontokat találjuk. Ezt a grafikus módszert oly egyenletek közelítő megoldásánál is használhatjuk, amelyek aritmetikai megoldása nehézségekbe ütközik. Pl. amelyeknél az x 4-iknél magasabb hatványon fordul elő. Az ilyen egyenleteknél áttérve a megfelelő függvényre, különböző x-ekhez tartozó y-ok révén iparkodunk lehető pontosan megrajzolni a függvény geometriai képét, az illető görbét. Próbálgatással oly x-ek választására törekszünk, amelyek környezetében görbénk közeledik az abszcissza-



11. ábra.

tengelyhez. Ha elég közel ért e tengelyhez, akkor a behelyettesítendő x-eket lehetőleg sűrűn, egymáshoz közel vesszük föl, hogy a metszéspontot, vagyis a megoldást szolgáltató x-et kellő pontossággal kapjuk. Próbálgatás közben túl is haladhatunk ezen a ponton. A 41. ábra (223. lap) mutatja ezt a helyzetet, ha valamilyen tetszőleges görbét rajzolunk.

De ennél a témánál sem időzhetünk tovább, mert a megismerendő anyag részletkérdései egyre számosabbak lesznek. Csak annyit jegyzünk még meg, hogy az x előforduló legmagasabb hatványától függ általában, hogy a görbe hányszor metszheti az abszcissza-tengelyt. Lineáris egyenletnek egy metszéspontja van, másodfokúnak kettő, harmadfokúnak három stb. Így minden egyenletnek annyi megoldása van, ahányat a legmagasabb x hatványkitevő mutat. Azt csak mellesleg említjük, hogy «képzetes» és «komplex» megoldások, ill. metszéspontok is léteznek.

Gyakorlati okokból intézzük el még gyorsan az általános, úgynevezett vegyes másodfokú egyenlet aritmetikai megoldását is. Ebben az x úgy első, mint második hatványon szerepel. Általános alakja tehát

$$x^2+bx+c=0$$

ahol b, c tetszőleges pozitív vagy negatív, megadott (vagy ilyennek tekinthető) állandók. Egyenletünk így írható,

$$x^2+bx=-c.$$

A már ismert

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

képletbe a helyett x-et és b helyett $\frac{b}{2}$ -t írva, kapjuk

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=x^2+bx+\frac{b^2}{4}.$$

Az itteni jobboldalt egybevetve egyenletünk baloldalával, azt látjuk, hogy az utóbbi majdnem egyenlő az

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

kifejezéssel. A pontos egyenlőséget elérjük, ha egyenletünk mindkét oldalához $\frac{b^2}{4}$-et adunk. Kapjuk

$$x^2+bx+\frac{b^2}{4}=-c+\frac{b^2}{4},$$

vagyis

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-c.$$

E fogással — teljes négyzetre való kiegészítéssel — nyert előbbi egyenletből könnyű az x-et izolálni. Először is

$$x+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c},$$

ebből pedig

$$x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}.$$

E rendkívül fontos képlet segítségével bármely négyzetes egyenletet meg tudunk oldani. A kiindulásul vett egyenletben x^2 együtthatója 1. Ha nem ilyen egyenletről van szó, akkor előbb az x^2 együtthatójával az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk.

Álljon itt példaként a következő egyenlet

$$4x^2+7x-57=0$$

megoldása. Először is szabadítsuk meg x^2-et együtthatójától: osztunk 4-gyel:

$$x^2+\frac{7}{4}x-\frac{57}{4}=0.$$

Az előbbi képletbeli $b=\frac{7}{4}$, és a $c=-\frac{57}{4}$.

Tehát példánknál

$$x = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} - \left(-\frac{57}{4}\right)}$$
$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{57}{4}}$$
$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49+57.16}{64}}$$
$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{961}{64}}$$
$$= -\frac{7}{8} \pm \frac{31}{8}$$
$$= \frac{-7 \pm 31}{8}.$$

Tehát az x egyik értéke $-\frac{7}{8} + \frac{31}{8} = 3$, a másik $-\frac{7}{8} - \frac{31}{8} = -\frac{38}{8} = -\frac{19}{4} = -4\frac{3}{4}$.

Az $y=4x^2+7x-57$ függvény görbéjének az abszcisszaengelyt az

$$x = 3 \quad \text{és} \quad x = -4\frac{3}{4}$$

pontokban kell metszenie, amiről az olvasó milliméter papiroson meggyőződhet.

A koordináta-geometriáról szóló fejezetünket, amely szintén különböző kitérésekre csábított, a következő ismétlésekkel, megállapításokkal, illetve tájékoztatásokkal végezzük.

Bármely

$$y = f(x)$$

függvénynek koordináta-rendszerünkben a képe egy görbe. A «görbe» elnevezés alá véve az egyenest, a voltaképpeni görbék határesetét, a görbület (görbeség) nélküli vonalat is. A zérus hatványtól kezdve már többízben találkoztunk azzal az eljárással, hogy első megismerés szerint talán össze nem tartozó dolgokat egységes rendszer nyerése végett közös felsőfogalom alá soroztunk. Így tekintjük az egyenest is görbének (görbe vonalnak). A görbéknél beszélünk 1-ső, 2-od, 3-ad stb. *rendű* görbékről az x legmagasabb előforduló hatványa szerint. Pl. az egyenes első, a kör másodrendű görbe. Másodrendűek az összes kúpszeletek: az ellipszis (közöttük a kör), a parabola s a hiperbola. A magasabbrendű görbék, pl.

$$y = x^3 + x^2 + 5x - 17,$$
$$y = x^7 + 4x^3 - 7x - 49$$

magasabbrendű (3-ad, illetve 7-ed rendű) parabolák.

Sok további érdekes, csábító föladat kínálkozik a koordináta-geometriában. Pl. kiszámítani két görbe metszéspontjainak koordinátáit, vagy megállapítani valamely görbe érintőjének (mint bizonyos egyenesnek) az egyenletét. De mellőznünk kell mindezeket, hogy mielőbb az ú. n. felső matematika problémáival foglalkozhassunk. De hogy a kérdéssel foglalkozni tudjunk, a következő fejezetben teljes határozottsággal fogjuk megfogalmazni és történeti fejlődésén is végigfutunk.

HUSZONNEGYEDIK FEJEZET

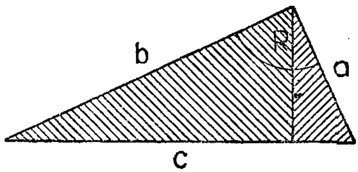
A kvadratura problémája

Minden olvasó hallott már bizonyára valamilyen összefüggésben a kör négyszögesítéséről. S azt is hallotta, hogy ez épp úgy megoldhatatlan, mint a perpetuum mobile szerkesztése.

Mit nevezünk négyszögesítésnek, kvadraturának? Nos, ez lényegében nem más, mint területmérés. Mert a feladat vagy azt kívánja, hogy bontsunk egy kört négyzetegységekre, alakítsuk ilyen négyzetek összegévé, tehát mondjuk meg, hogy területe hány négyzetegység (mondjuk négyzetmilliméter), vagy pedig azt, ami lényegében úgy sem más, hogy ábrázoljuk olyan négyzettel, amelynek területe éppen a kör területével azonos. Már régebben is sejtették, de csak a mult század nyolcvanas éveiben bizonyította be Lindemann, hogy ez a feladat megoldhatatlan, bármilyen kicsiny egységet választok is. A π szám tehát végtelen tizedestört, jellegre nézve irracionális, s tekintve, hogy a kör területe mindenkor $r^2\pi$, úgy racionális r esetén a terület csak irracionális lehet. Ilyen számot azonban soha sem lehet mérésre használt négyzetekkel ábrázolni, mert utóbbiak méretét végtelen kicsinek kellene választanunk, hogy ne maradjon a területből semmi.

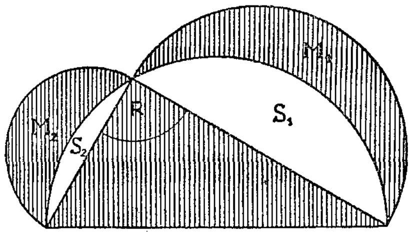
De már a nagy Archimedes is tudta, hogy a körnél bonyolultabb idomok is léteznek, s még sincs területük kifejezésére iracionális számra szükségünk. S nehéz elképzelni, hogy miért volna lehetetlen, hogy valamely görbe vonalakkal határolt idom területe történetesen racionális számú területegységgel egyenlő. Sőt ezt még igen észszerű bizonyítékokkal is alá lehet támasztani. Ha nagyon egyenletes vastagságú kartonból kivágunk egy négyzetet, mondjuk olyat, amelyiknek oldala 1 centiméter, súlyát precíziós mérlegen lemérjük és kerekszámban $\frac{3}{10}$ grammnak találjuk, akkor feltétlenül lehetséges ugyanabból a kartonból, kellő gondossággal, pontosan 3 gramm súlyú, de görbe vonalakkal határolt idomot kivágni. Az idom területe ekkor biztosan 30 négyzetcentiméter. Irracionális számokról nincs is szó.

Ilyen megfontolásokon kívül sok gondot okoztak a görög matematikusoknak például a «keosi Hippokrates holdjai». Kvadraturájuk Pythagoras tételének általánosításán alapul. Már az ókorban bebizonyították, hogy nem csak a befogók fölé rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogón rajzolt négyzet területével, hanem általában az is igaz, hogy a befogók fölé rajzolt hasonló idomok területének öszszege egyenlő a hozzájuk hasonló és az átfogóra rajzolt idom területével. Mellékesen ez az általánosított Pythagoras tétel a «szamarak hídjának» igen egyszerű és szellemes bizonyítására is alkalmas.



42. ábra.

A 42. ábrán látható derékszögű háromszöget a magasság két, hasonló, részháromszögre bontja. Hasonlók, mert megfelelő szögeik egyenlők. A két háromszög a befogók fölé rajzolt hasonló idomnak tekinthető, habár befelé rajzoltuk őket. Az egész háromszög a szögek azonossága következtében szintén hasonló a részháromszögekhez, s az «átfogóra rajzolt hasonló idomnak» is tekinthető. Ebből az általánosított Pythagoras tétel helyessége szembeötlő világossággal mutatkozik. A befogóhoz tartozó háromszögek összege ugyanis nem egyéb, mint maga az «átfogóra rajzolt háromszög».



43. ábra.

Az általánosított Pythagoras tétel alapján az átfogóra rajzolt félkör területe is egyenlő a befogóra rajzolt félkörök területének összegével. A félkörök ugyanis mindig egymáshoz hasonló idomok. Mivel ábránkon az átfogóra rajzolt félkör a háromszög és a fehér S_1 és S_2 szegmensek területéből tevődik össze, továbbá a befogó fölé rajzolt félkörök területe az S_1 hold és az M_1 szegmens, illetve az S_2 hold és az M_2 szegmens területének az összege, az általánosított Pythagoras tétel értelmében igazak a következő egyenlőségek:

Háromszög területe $+\ S_1+S_2 = (M_1+S_1)+(M_2+S_2)$
Háromszög területe $+\ S_1+S_2 = M_1+M_2+S_1+S_2$
Háromszög területe $= (M_1+M_2)+(S_1+S_2)-(S_1+S_2)$
Háromszög területe $= M_1+M_2$.

Meglepetéssel látjuk, hogy elemi geometriai eszközökkel sikerült a «holdacskák» területének összegét meghatározni. A háromszög területe ugyanis oldalaiból mindenkor meghatározható. A holdacskák viszont minden oldalról görbe vonallal határolt idomok lévén, joggal kelthették azt a gyanút, hogy területük *csak* irracionális számmal fejezhető ki. Kétségtelen azonban, hogy ez nem igaz.

Mint említettük, ilyen és hasonló dolgokat már az ókorban is ismertek s ezért azt hitték, hogy a körmérést módszereik tökéletlensége hiusítja meg. Ehhez járult még egy körülmény. A kvadraturának a térbeli megfelelője az úgynevezett kubatura, vagyis valamely testnek egységkockákkal történő ábrázolása. Már eleve lehetetlen volna egy kilogramm körte lemérése vagy egy-két liter ürtartalmú öblös korsó gyártása, ha görbe vonalú, illetve felületű idomok kubaturája nem volna lehetséges. Kubatura és kvadratura lehetősége tehát nem a felületek szabálytalanságán és hajlásán múlik, hanem azon, hogy hiányzik a felület leírásához szükséges matematikai módszer. Derékszögű négyszög, háromszög, gula, hasáb, vagy akár trapéz és oktaeder területe, illetve köbtartalma meghatározható, ha kellő számú meghatározó adat rendelkezésre áll. Kúpnál, hengernél és gömbnél már a π nem kerülhető el, használata következtében ismét találkozunk az irracionalitás fogalmával. A forgási ellipszoidnál mondjuk, szintén. De a matematika legnagyobb rejtélyei és legégetőbb problémái közé tartozott, hogy miként lehet bonyolult módon görbe felületű vagy körvonalú idomok kubaturáját és kvadraturáját elvégezni, annál is inkább, egyik-másik idom területét illetve köbtartalmát súlymérés alapján meg tudták határozni. Tulajdonképpen már elmondott dolgokat ismétlünk, ha elmondjuk, hogy képzeljük magunkat azon matematikus helyzetébe, akitől megkérdezik: kubaturának tekintendő-e az, ha 25 köbcentiméter, pontosan kimért 1 cm^3 nagyságú kockákban előttünk fekvő ólmot beolvasztunk és feltételezve azt, hogy az ólomból nem vész el semmi, valamilyen szabálytalan alakú «kalácsot» öntünk belőle. Mi történik, ha a kalács súlyát lemérve meggyőződünk arról, hogy súlya a 25 kockáéval azonos; és mégis azt állítják, hogy a kalács kubaturája nem végezhető el? Hisz kiderül, hogy a köbtartalom pontosan 25 cm^3. A matematikus nem számára marad más felelet, be kell vallania, hogy a matematika nem tudja a kubaturát elvégezni. Hacsak kerülő úton nem. Például úgy, ahogy Archimedes tette, aki syracusai Hieron király koronájának aranytartalmát azzal határozta meg, hogy a koronát vízbe mártva megmérte és meghatározta a kiszorított víz súlyát. Ez a híres archimedesi tantétel.

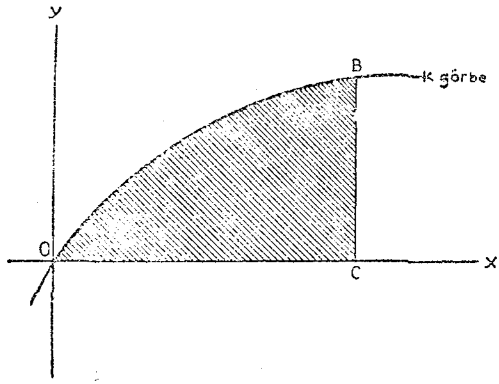
De ne szaporítsuk a szót. Evezredek gondolkodása, a legrégebbi időktől Keplerig mégis némi fényt derített a problémára. Úgyannyira, hogy Kepler, aki a nagyon bő bortermésű 1624. évben alapos tanulmányok tárgyává tette a boroshordókat, már nem csak ürtartalmukat vizsgálta, hanem azt is, hogy miként lehet lehető legnagyobb ürtartalmú hordót legkevesebb fából előállítani. (Ennek a követelésnek geometriai jelentése lehető legkisebb felületű idom keresése.) A tizenhetedik században, — elég ha Fermat, Cavalieri, Pascal, Gregorius a Sto. Vincentio, Wallis, Sluse és de Witt nevét említjük — már minden oldaltól közelebb férkőztek a kvadratura és kubatura nehéz problémájához és sok fontos és helyes összefüggést találtak meg. Részben Archimedes módszerét használták fel, de ezzel itt még nem foglalkozhatunk. Teljes világosságot a dologra csak a Leibniz és Newton által felfedezett infinitézimálszámítás vetett.

Ezzel most befejezzük történelmi előadásunkat és megpróbáljuk, a kvadratura problémáját lépésről-lépésre, lehetőleg kézzelfoghatóan megoldani. A probléma kényes, még ma sem teljesen tisztázott filozófiai részeire természetesen nem terjeszkedhetünk ki, nincs is szándékunkban. Oly módon foglalkozunk a problémával, hogy ellenfelünk sokszor fogja kétségbeesetten az égfelé fordítani szemét. De hisszük, hogy többet ér, ha a dolgokat legalább körülbelül értjük, mint ha sehogyan sem. Annál is inkább, hisz nem követünk el mást, minthogy olyan dolgokat írunk le, amelyeket a XVIII. században még a legnagyobb matematikusok sem tartottak helytelennek. S a többre, helyesebbre vágyó olvasó később a matematika nagy és szigorú tudósainak művei segítségével túljuthat a mi kuruzslásszerű tanításainkon.

Bevezetésül megemlítjük, hogy a kvadratura probléma

[1] Szándékosan hanyagoljuk el a nagymértékben hasonló kubatura-problémát, mert csak az analitikus síkgeometriával szándékozunk foglalkozni.

csak akkor lett hozzáférhető, amikor a koordinátageometria ismertté vált. Lényegében csak Descartes után. S most fejünkbe vesszük, hogy olyan idom területét fogjuk meghatározni, amelyet nem csak egyenes vonalak határolnak. Például az *OBC* idomét.



44. ábra.

A *K* görbe nem körív. Valamilyen görbe ez, de kitűnik azzal, hogy véletlenül ismerjük az «egyenletét». Legyen ez az egyenlet $y=f(x)$, vagyis bármely x-hez tartozó y behelyettesítéssel kiszámítható. Szándékosan nem írunk ide valamilyen bonyolultabb függvényt, hogy később könnyebben számolhassunk. Feltételezzük azonban, hogy az $f(x)$ valamilyen bonyolultabb kifejezést jelent, olyant, amely együtthatós x hatványokból és állandókból áll. Ilyen kifejezést jelent tehát az $f(x)$, de a részletek pillanatnyilag nem érdekelnek.

A kezdőt ez a megnövekedett általánosság esetleg zavarja. Most már nem is általános számokkal számolunk, hanem még magasabb egységekkel, függvényekkel. Éppen ezért mégegyszer röviden rámutatunk a dolgok lényegére.

$$y=f(x) \text{ legyen például } y=\frac{x^2}{5}+3.$$

Természetesen éppenúgy lehetne $y=3x^2+4x+9$, vagy valami egészen más is. Például $y=2\sqrt{x^4-1}\left(\frac{2}{x}+17\right)$. Valamennyi esetnek közös tulajdonsága az $y=f(x)$ alak. Vagyis mindegyikné feltételezzük, hogy az x értéke szabadon választható és ezáltal az y értéke is szükségképpen adott. Aritmetikai szempontból tehát mindegy, hogy y-t vagy $f(x)$-et mondunk. A két mennyiség azonos, geometriai jelentésük ordináta, s az ordináták végpontjai alkotják a görbét.

Még egy kis közbevetett megjegyzés mielőtt még a kvadratura feldezésének nekifognánk. Függvénynek azt a körülményt nevezzük tulajdonképpen, hogy egy mennyiség valamilyen törvényszerűség következtében függ egy másiktól. Minden gyermek tudja, hogy a testek a hő hatására kitágulnak. Ezen a tapasztalaton alapul a higanyos hőmérő is. Tehát mondhatom, hogy a tágulás a hőmérséklet függvénye. Ezrével lehet ilyen példát említeni. Utazásnál a megtett távolság a sebesség függvénye. A szabad esés sebessége függvénye a föld vonzóerejének, az ember testmagassága korának függvénye. Még a bornak, vagy a gorgonzola sajtnak a jósága is függvénye az időnek.

Minthogy a kör területe a sugarától függ, tehát a terület a sugárnak a függvénye. Vegyünk most egy példát a mindennapi életből. Minden dohányos tudja, hogy a vastagabb cigaretta íze enyhébb. Ugyanaz a dohány vékonyabb hüvelybe töltve erősebb ízű, mint vastagabb hüvelyben. Mi ennek a magyarázata? A magyarázat nagyon egyszerű. A papír mennyisége a cigaretta vastagságával lineárisan növekszik. A kerület$=2r\pi$. Ha r mondjuk 5 milliméter, akkor $(2.5.3{\cdot}14)=$ $=31{\cdot}4$ milliméter papír füstje jut egy szippantásba. Ha $r=10$ milliméter, akkor a papír égő kerülete $(2.10.3{\cdot}14)=62{\cdot}8$ milliméter. Az égő dohányfelület viszont az $r^2\pi$ képlet adja. $r=5$ mm esetén a felület $(25.3{\cdot}14)=78{\cdot}5$ mm^2, $r=10$ mm esetén pedig $(100.3{\cdot}14)=314{\cdot}1$ mm^2. Egy négyzetmilliméter égő dohányra eső papír vékony cigarettánál sokkal több, mint a vastagnál, vagyis gyakorlatban ez azt jelenti, hogy az «enyheség» négyzetes függvény lévén sokkal gyorsabban nő, mint a lineáris «erősség». Ha függvények képét megrajzolom, ugyanezt látom.[1] Ezért enyhébb ízű az ugyanolyan anyagból készült vastagabb cigaretta, mint a vékonyabb.

Végül még egy paradoxonnak látszó példa Georg Scheffer könyvéből. Gondoljuk, hogy az egyenlítőn egy csupa 1 méter hosszú részből álló vasgyűrű fekszik. A földet síma, geometriai szempontból is pontos gömbnek tekintjük. Mennyit tágul a gyűrű, mennyire emelkedik fel a föld felszínéről, ha valahol még egy 1 méter hosszú darabot beiktatok. A «józan esze» alapján mindenki azt mondaná, hogy a lazulást bizonyára észre sem lehetne venni. A távolság nem lehet látható, hisz mérete legfeljebb néhány milliomod milliméter lehet. Semmi esetre sem ilyen egyszerű a dolog. Példánk nem csak a «józan ész» megbízhatatlanságáról győz meg, hanem a matematika csodálatos egyöntetűségéről is.

Így következtetünk: az eredeti kör kerülete $2r\pi$. Sugara tehát $\frac{2r\pi}{2\pi}$. Az 1 méterrel növelt sugarú kör kerülete $(2r\pi+1)$, tehát sugara $\frac{2r\pi+1}{2\pi}$ mivel a kerületből a sugár mindenkor a $\frac{\text{kerület}}{2\pi}$ képlet segítségével adódik. Vonjuk ki a kisebb sugarat a nagyobbikból, ezzel megkapjuk, hogy mennyire áll el a gyűrű.

$$\frac{2r\pi+1}{2\pi}-\frac{2r\pi}{2\pi}=T=\text{Távolság}$$

$$\frac{2r\pi}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}-\frac{2r\pi}{2\pi}=T$$

$$T=(\text{Távolság})=\frac{1}{2\pi}.$$

Méterben számolunk, tehát $1:2\pi=1$ m $:6{\cdot}283=15{\cdot}92$ centiméter, kereken tehát 16 centiméter az eredmény. Valóben meglepő! A föld körül fekvő gyűrű 40,000 kilométerébe iktatott egyetlen méter az egészet 16 centiméter magasra emeli. A matematikus nem csodálkozik. Ő ugyanis a

$$T=\frac{1}{2\pi}$$

[1] Az «enyheség» képe parabola, az «erősségó» egyenes.

összefüggésből látja, hogy a T távolság csak a π-től függ, tehát olyan mennyiségtől, amelynek semmi köze a sugárhoz. Felírná, hogy

$$y=T=f(\pi)$$

s ezzel azt fejezné ki, hogy az eltávolodás új darab beiktatása esetén mindig ugyanannyi, akár az egyenlítőről, akár egy arany karikagyűrűről, vagy pedig a körnek képzelt Neptunpályáról van is szó. Általános érvényű összefüggés, hogy

$$y=T=\frac{D}{2\pi},$$

ha D jelenti a beiktatott új darabot. Ha történetesen a kör kerületével egyenlő hosszúságú részt iktatok be, vagyis $2r\pi$-t, akkor az eredmény

$$y=\frac{2r\pi}{2\pi}=r$$

s ez azt mondja, hogy kétszeres kerületű kör sugara is kétszeres. De ezt már láttuk a cigarettával kapcsolatos példán, igaz, hogy fordított felállításban.

A «józan ész» hívei számára csak még azt akarom megjegyezni, hogy 16 centiméter a föld sugarához képest éppen olyan kevés, mint az 1 méter a föld kerületéhez képest. Ha ezt kellőképpen megértettük, felírhatjuk, hogy

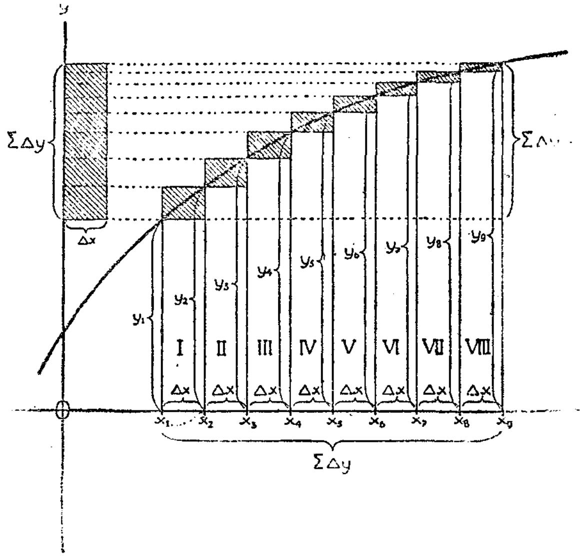
16 cm : föld sugara=1 m : föld kerülete

s ebbe már belenyugodhatunk.

De most, hogy már megint valamivel műveltebbek lettünk, vissza kell térnünk a kvadraturához.

A feladatunkat már ismerjük: ki kell számítanunk, az $y=f(x)$ görbe, az abszcissza tengely és két ordináta, y_1 és y_9 által határolt területet. (45. ábra, 236. lap.)

A képből kiderül, hogy a keresett terület a függőleges sávok területének kétféle összege közé esik. Az egyik összegbe beleszámítanak a kis, vonalkázott négyszögek is, a másikba nem. Ha nem görbéről, hanem egyenesről volna szó,



45. ábra.

egyszerű volna a helyzetem. Egyenes ugyanis a vonalkázott négyszögeket felezné és ezzel nagyon könnyűvé válnék a helyzetünk. De mivel éppen görbét választottunk számításaink alapjául, tovább kell számolnunk. Mekkora először is az úgynevezett «a görbébe beírt» sávok területe. A sávokat megszámoztuk.

I. sáv$=(x_2-x_1)\cdot y_1$
II. sáv$=(x_3-x_2)\cdot y_2$
III. sáv$=(x_4-x_3)\cdot y_3$

és így tovább, végül

VIII. sáv$=(x_9-x_8)\cdot y_8$.

De minthogy $(x_2-x_1)=(x_3-x_2)=(x_4-x_3)$ stb., minthogy az x értékét mindig ugyanannyival növeltük, jelöljük fenti különbségeket Δx-szel. Ezzel a jelöléssel a beírt sávok területének összege

$$S_b=y_1\Delta x+y_2\Delta x+y_3\Delta x+y_4\Delta x+y_5\Delta x+y_6\Delta x+y_7\Delta x+y_8\Delta x.$$

A körülírt sávok magassága természetesen mindenkor nagyobb, mint a megfelelő beírt sávoké. Összegük az ábra értelmében a következő.

$$S_k=y_2\Delta x+y_3\Delta x+y_4\Delta x+y_5\Delta x+y_6\Delta x+y_7\Delta x+y_8\Delta x+y_9\Delta x.$$

Emlékezzünk vissza, ilyen összegeket a szumma jellel is írhatjuk. Így az első összeg $S_b=\sum_1^8 y_\nu \Delta x$, a második pedig $S_k=\sum_2^9 y_\varrho \Delta x$. A disztributiv törvény értelmében a közös tényezőt a szumma jel elé emelhetjük ki. Tehát írhatom: $S_b=\Delta x\sum_1^8 y_\nu$ és $S_k=\Delta x\sum_2^9 y_\varrho$. Ha végül a görbe keresett területét F-fel jelöljük, akkor

$$\Delta x\sum_1^8 y_\nu < F < \Delta x\sum_2^9 y_\varrho$$

s ez nem egyéb, mint annak a ténynek matematikai fogalmazása, hogy a görbével határolt terület a beírt sávok és a körülírt sávok területének összege közé esik.

Vehetnők magunknak a fáradságot, hogy az ismert $y=f(x)$ egyenletből az x-ekhez tartozó y értékeket kiszámítsuk. Ezzel megkapnók úgy a körülírt, mint a beírt sávok területének összegét és tudnók, hogy a görbe területe valahol a két érték közt fekszik. Ha a Δx-et mind kisebbnek és kisebbnek választom, akkor ezzel a körülírt és beírt sávok területének különbsége szintén fogy, amint ez a 45. ábra, de még inkább egy külön rajz megfigyeléséből kiderül. Ha ezt az eljárást, amely a valóságot mindinkább kimeríti (innen a neve is exhaustiós módszer, exhaurire=kimeríteni alapján) folytatjuk, hamarosan elég jó közelítő eredményt kaphatunk. Igaz, a munka rendkívül nagy, s mint említettük, az eredmény mégis csak megközelítő. Képzeljük el, hogy ezzel a módszerrel kellene az $y=\frac{x^2}{5}+8$ parabola területét $y_1=5$ és $y_{1000}=10$ közt meghatároznunk. Először a Δx értékét kellene megállapítanunk. Tekintve, hogy $x=5$ és $x=10$

közé 999 sávot kell elhelyeznem, $\Delta x = \frac{10-5}{999} = \frac{5}{999}$. Most egymás után ezerszer kell az y értékét meghatározni.

$$x_1 = 5 \qquad y_1 = \frac{25}{5} + 3 = 8$$

$$x_2 = 5 + \frac{5}{999} \qquad y_2 = \frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3$$

$$x_3 = 5 + \frac{10}{999} \qquad y_3 = \frac{\left(5 + \frac{10}{999}\right)^2}{5} + 3$$

és így tovább.

Ekkor kellene valamennyi beírt és körülírt sáv területét kiszámítani.

Beírt sávok:

$$\mathrm{I} = y_1 \Delta x = 8 . \frac{5}{999} = \frac{40}{999}$$

$$\mathrm{II} = y_2 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \frac{5}{999}$$

és így tovább.

Körülírt sávok:

$$\mathrm{I} = y_2 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \frac{5}{999}$$

$$\mathrm{II} = y_3 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{10}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \frac{5}{999}$$

és így tovább

Igaz, 999 sáv helyett 1000 sávot is vehettem volna a számítás egyszerűsítésére, igaz továbbá, hogy minden körülírt sáv ugyanakkora, mint a megelőző beírt sáv, mégis látjuk, hogy még egy nagyon egyszerű

$$y = \frac{x^2}{5} + 3$$

függvény is igen jelentős nehézségeket okoz, s az eredmény mégis csak közelítő.

Más is látszik. Az, hogy az eredmény pontossága a sávok növekvő számával nő. Ha tehát a Δx-et a lehető legkisebbnek választjuk, ha a Δx-ből elenyésző dx-et csinálunk, s ezt választjuk sávjaink alapjának, akkor pontos kvadraturához jutunk. De ehhez végtelen sok y értékét kell kiszámítanunk, mivel minden véges távolság végtelen sok dx-ből áll. Olyan műveletet keresünk tehát a kvadraturához, amely lehetővé teszi, hogy valamennyi, az x_1-től x_n-ig terjedő tartományon belül fekvő y ordinátát dx-szel megszorozzuk és a szorzatokat összegezzük. A nagy Cavalieri tehát a kvadratura problémáját «Summa omnium y» (valamennyi y összege) alakjában írta. S Leibniz írta egy történelmi nevezetességű papírlapra 1676 október 29-én a következő szavakat: «Hasznosabb lesz ezentúl Cavalieri «summa omnium y» kifejezése helyett az $\int y dx$ jelölést írni...»

Ezzel tulajdonképpen elérkeztünk könyvünk tetőpontjához. Leibniz azt állítja, hogy *hasznosabb* a «summa omnium y» parancs helyett az $\int y\,dx$ integrálparancsot[1] használni. Nem puszta játék ez a szavakkal? Vagy ismét új «igaz kabbala» rejlik mögötte?

Ezt most lépésről-lépésre kell megvizsgálnunk. Azt legalább már tudjuk, hogy mit kívánnak tőlünk. De lássuk azt még világosabban. Miként a szumma jelnél tettük, az integrál jelére is odaírjuk a határokat, s ezzel «határozott» integrállá alakítjuk. Tegyük fel, hogy az első minket érdeklő $x=a$, az utolsó pedig $x=b$. Ekkor ezt írjuk:

$$\int_a^b y\,dx$$

s így olvassuk: «integrál a-tól b-ig ydx.»

[1] Az integrál szót Jak. Bernouilli alkotta és alkalmazta Leibniz-cel egyetértésben az új, $\int ydx$ algoritmus jelölésére.

Még egy lépést teszünk előre. Tudjuk, hogy $y=f(x)$, tehát ezt is írhatjuk :

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ezzel a parancs készen áll. Csak még a végrehajtás módszere hiányzik. Mert önmagábanvéve ismét őrültség, amit a parancs kíván. Nézzük meg csak közelebbről, hogy milyen beteges kívánságot kellene teljesítenünk. Varázsszerkezetünknek nem kevesebbet kellene teljesítenie, mint a következő végtelen sok tagot összegezni :

$$\begin{aligned}\text{Első sáv} &= f(a)\,dx\\ \text{Második sáv} &= f(a+dx)\,dx\\ \text{Harmadik sáv} &= f(a+2dx)\,dx\\ \text{Negyedik sáv} &= f(a+3dx)\,dx\end{aligned}$$

és így tovább, végtelen sokszor.

$$\begin{aligned}\text{«Utolsóelőtti» sáv} &= f(b-dx)\,dx\\ \text{«Utolsó» sáv} &= f(b)\,dx.\end{aligned}$$

Itt $f(a)$, $f(a+dx)$ stb. a mindenkori y értéket jelenti, azt, amely az $x=a$, $x=(a+dx)$, $x=(a+2dx)$ helyettesítésekből adódik. Ezen felül dx határértéke 0 kell, hogy legyen. Amit pontatlanul úgy is mondhatunk, hogy dx végtelen kicsi.

Mivel azonban sem Leibniz, sem a többi nagy tudós, aki ezt a tudományt megalapozta, nem volt őrült, ne okoskodjunk tovább, hanem fogadjuk inkább hálásan kezükből ezt a csodálatos tudományt.

HUSZONÖTÖDIK FEJEZET.

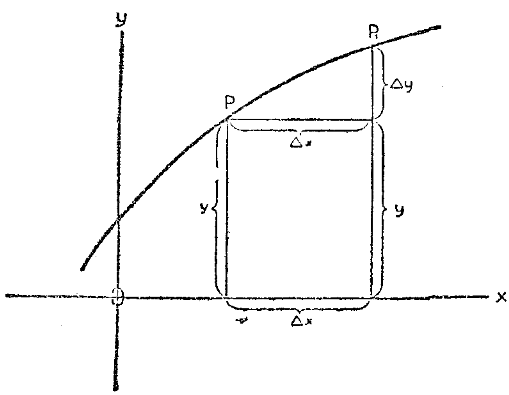
A differenciál és az ívhosszúság mérése.

Már ismételten beszéltünk Δx-ről és Δy-ról, dx-ről és dy-ról. Különösen a dx és dy látszott mintegy a felsőbb matematika kulcsának. Most tehát közelebbről is szemügyre vesszük ezeket az apró dolgokat. Már eleve meg kell jegyeznünk, hogy maga a «dolog» kifejezés is hibás. Mert hiszen valóságban ezek a még véges nagyságú Δx-nek és a Δy-nak eltűnő, vagy már el is tűnt határértékei.

Történelmi és pedagógiai okai vannak, hogy miért nevezzük őket dolgoknak. Ebben a könyvben csak bevezetést adunk, szinte csak felkeltjük az érdeklődést az infinitézimálszámítás iránt, tehát ragaszkodnunk kell a szemlélethez. Tudományunk is a szemlélhetőből, a megfoghatóból ered. És így születtek az első nagy felfedezések. Hogy azután további két évszázad logikailag erősen kifínomította, nem jogosít fel arra, hogy az úttörőket lenézzük. A legpompásabb gyémánt is gyakran üvegtörmeléknek látszik, amikor Afrika kék agyagjából napfényre kerül. Nem szabad semmibe sem venni az amsterdami gyémántköszörűs munkáját, hisz ő adja meg a kőnek csillogását és fényét. De gyémánt híján nincs mit csiszolni. És éppen így a differenciál első durva fogalma nélkül nincsen modern, puritán matematika sem. A fínom kérdéseket tehát arra az időre halasztjuk, amikor már későbbi tanulmányok során valamennyi alapismeretet megszereztük. Akkor már örömmel fogjuk egy Cezàro, egy Kowalewski, egy Peano precízitását élvezni és csodálni.

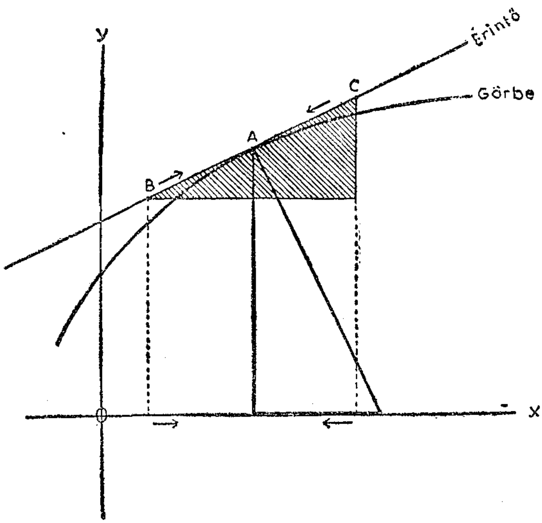
De most vegyünk egy olyan görbét, ahol az x növekedtével az y is nő. Az x növekménye Δx, y-é Δy.

Az x, amely a hozzátartozó y útján egyértelműen meghatározza a görbe szóbanforgó P pontját, Δx-szel, tehát egy



46. ábra.

véges értékkel nőtt. Így keletkezett a hozzátartozó, megnövekedett y érték, $y+\Delta y$. Az új ordináta végpontja a P_1 pont. PP_1 a görbének ívdarabja. Ha nem Δx-szel mennék előre az abszcissza-tengelyen, hanem csak egy majdnem végtelen kicsi dx darabbal, a görbe akkor is emelkedett volna. Igaz, hogy csak egy szintén nagyon kicsi dy darabbal. A P és a P_1 pont «kettős ponttá» olvadna össze és a PP_1 ívdarab is elenyészően kicsi volna: olyan kicsi, hogy közömbös, hogy görbének vagy egyenesnek tekintjük-e. De éppen ez a körül-



47. ábra.

mény, hogy «közömbös», hogy egyenes vagy görbe, döntő gondolat az infinitézimál számításban. Ez teszi lehetővé, hogy egyenes vonalakkal határolt idomokra vonatkozó szabályokat görbe vonalú idomokra alkalmazzunk. Hasznát vesszük a kvadraturánál és a rektifikációnál[1] is. De lássuk Leibniz úgynevezett «karakterisztikus háromszögét», hogy

[1] A rektifikáció értelmét e fejezet végén magyarázzuk meg.

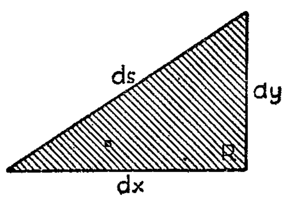
mélyebben hatolhassunk be a vizsgálatba. Leibniz Blaise Pascal hátrahagyott feljegyzései közt rajzot talált, amely a sinus-függvény vizsgálatára vonatkozott. Ez a rajz vezette rá Leibnizet nagy felfedezésére, a differenciálszámításra. De zavarok elkerülésére rajzoljuk fel a karakterisztikus háromszöget, anélkül, hogy lényegén változtatnánk, Leibniz rajzától kissé eltérő módon. (47. ábra.)

Tetszőleges görbe A pontjában húzzunk érintőt. Ezen vegyük fel A-tól jobbra is, balra is, ugyanakkora távolságra a B és C pontot. Az A-ból bocsássunk merőlegest az x tengelyre és ugyancsak az A-ban állítsunk merőlegest az érintőre is. Egyszerű geometriai tételekből következik, hogy a vonalkázott háromszög és a vastagon rajzolt háromszög hasonlók. A vastagon rajzolt háromszög átfogója merőleges a vonalkázott háromszög átfogójára s a hosszabbik befogók is merőlegesek egymásra. (Így rajzoltuk!) Ebből következik, hogy az előbbinek A-nál fekvő szöge egyenlő utóbbinak B-nél fekvő szögével. De ha két derékszögű háromszög egyik hegyesszöge egyenlő, akkor a másik is az. Azok a háromszögek pedig, amelyeknek megfelelő szögeik egyenlők, hasonló háromszögek.

Gondoljuk mármost, hogy B és C egyenletesen közelednek A-hoz. Ezzel a vonalkázott háromszög mind kisebb és kisebb lesz, anélkül, hogy alakja változnék. Végül már elképzelhetjük, hogy a B és a C A-ban szinte összeütköznek. Ezzel már kezünkben van a differenciál csodája: az A pontban van most egy szinte mikroszkópikusan kicsi, szabad szemmel láthatatlan háromszög. De alakját a hozzá képest óriási vastagon bekeretezett háromszög megőrizte. És ezzel a szögeit is, valamint oldalainak a viszonyát. De mégegy csoda történt. A vonalkázott háromszög átfogója az A pontban rajzolt érintőnek egy része. Tehát az A pontban, amely az érintőhöz és a görbéhez egyaránt tartozik, egy apró egyenes érintődarabka rejlik, de az ugyanakkor a görbe apró ívdarabjának is tekinthető.

Belátjuk, hogy felváltva görbe, majd egyenes ívelem Janus-fejűsége a «fekete mágiára» emlékeztet. Gondoljunk azonban a kerékpárláncra, amely egyenes darabokból áll és mégis odasímul a fogaskerekekhez. S képzeljük el, hogy a láncszemek végtelen kicsinyek. Természetesen logikánk azt mondja, hogy van egy pont, ahol valami megszűnik egyenes lenni. Egyenes és görbe bizonyos álláspontból tekintve olyan különbözők, mint tűz és víz, mint fekete és fehér. Viszont más oldalról nagyon is könnyen elképzelhető az átmenet. Valamely kisebb tó felszíne ideálisan síknak látszik, bár a föld gömbalakja miatt jól lemérhetően görbe. De kevésbbé görbült, ha ugyanazt a tavat a Nappal egyenlő nagyságú gömb felületén gondolom. Tejút méretű gömbön görbültsége még kisebb. A differenciálra vonatkozó elképzelésünk éppen ilyen méreteket tüntet fel. Mert végre is, elképzelhető, hogy a B és a C pont mind közelebb kerül egymáshoz.

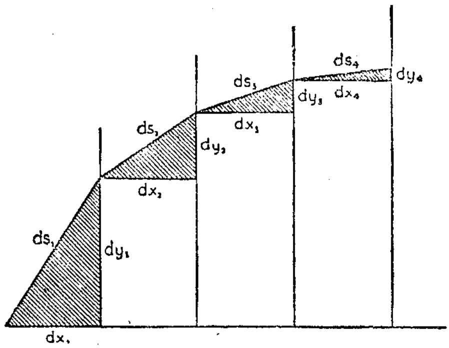
Ideális esetben az A pontunk egy nagyon kicsi vonalkázott háromszöget tartalmaz. Ez mindenkor hasonló a karakterisztikus háromszöghöz, tehát óriásira nagyítva le tudjuk rajzolni.



48. ábra.

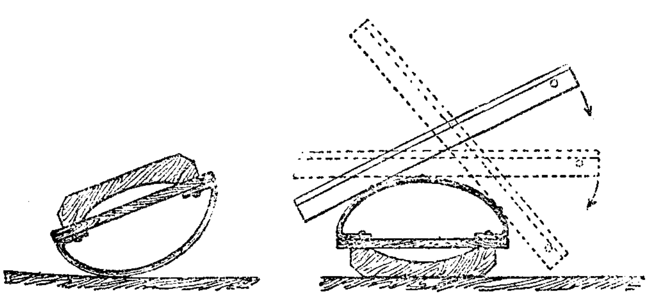
Három oldalát differenciáloknak nevezik. Az abszcisszatengellyel párhuzamos befogó a dx, a másik dy és az átfogóként mutatkozó, Janus-fejű «ívelemnek», jele ds.

De a görbe bármelyik pontját tekinthettük volna egy karakterisztikus háromszög csúcsának. S ha eljárásunkat a görbe minden pontján megismételjük, akkor görbénk ilyen vonalkázott háromszögek gyöngysorának fogható fel. Az ívhossz tehát az ilyen ds ívelemek összege. Óriási nagyítással ilyen volna a görbénk:



49. ábra.

De teljesen félreértjük az analízis célját, ha túlságosan ragaszkodunk a karakterisztikus háromszöghöz fűződő elképzelésünkhöz és megfeledkezünk a legelső rajzunkról. Figyelembe kell vennünk, hogy a dx_1, a dx_2 stb. az x-nek apró növekményei, a dy_1 stb. pedig az ezekhez az $y=f(x)$ összefüggés következtében tartozó növekmények. A ds_1, ds_2 az e közben keletkező ívelemeket, érintő elemeket jelenti. A görbéket ugyanis számtalan érintőelemből is származtathatjuk. Ha például itatóshenger billeg a papíron, akkor a papír jelenti az érintőt és az itatós a görbét. Ha az egészet megfordítom és a hanyatt fektetett itatóshengeren merev vonalzót gördíteném végig, akkor a vonalzó az érintő és a



50. ábra.

görbét végtelen nagyszámú érintőelemből származónak tekinthetnők. A geometriában gyakran szoktak görbéket érintőik segítségével megrajzolni. Szigorúan véve a körző hegye sem más, mint a kör érintőjének kis része.

Eddigi tanulmányaink nagy, összefoglaló ismeretek küszöbére vezettek. Ezek az ismeretek egy csapásra megadják az egész felsőbb matematika algoritmusát.

Először lássuk a rektifikációt. Így az ívhossz nagyságának megállapítását nevezik. Tekintve, hogy hosszúságmérőnk egyenes darabokból áll, gondolatban a görbét ki kell egyenesítenünk («rectam facere»). Innen a rektifikáció elnevezés. Elvben ez nem nehéz. Valaha azt hitték, hogy görbe ívhosszát csak irracionális szám fejezheti ki. Akárcsak a racionális sugarú kör kerületét. Már utaltunk arra, hogy az irracionális relativ fogalom. Görbéknek általában nem kell, hogy közük legyen hozzá. Bármilyen hosszúságú zsinórt tudok görbeként az asztalra fektetni. Mindez mellékes. Tudjuk, — vissza kell már térnünk végre a rektifikációhoz — hogy minden görbe a ds-ek gyöngysora. De mindegyik ds kifejezhető Pythagoras tételével: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ vagy $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Ez teljesen rendben van. Csak az a csekélység hiányzik még, hogy miként határozhatom meg valamenynyi ds összegét. De ezzel integrál-szerű parancshoz jutottunk, amelyet egyelőre nem tudunk végrehajtani. S nem sokat segít, ha sejtjük, hogy az ívhossz $x=a$ és $x=b$ közt alighanem integrál ds, vagy ami ugyanaz: integrál $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Az $\int_a^b ds$ integrált mégcsak megoldanók egyszerű megfontolások alapján. Az a és b abszcisszák közti ívhosszat jelenti. De ezzel még semmire sem mentünk. Mert ez nem a felelet, ez a kérdés. Felelet csak a $\int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ integrál megoldása volna. S reméljük, hogy számításunknak az $y = f(x)$ ismerete csak segítségére lesz. De miként?

Ezzel visszatértünk kiindulópontunkhoz. Tudjuk már, hogy mit kellene tennünk a kvadraturánál és a rektifikációnál. Sőt ehhez már szép varázsjelünk is van. De mintha gyökeret vert volna lábunk, nem tudjuk az integrál-parancsot végrehajtani, hasonlóan ahhoz az alvóhoz, aki álmában nem tud megmozdulni, míg végre gyötrelmében megizzadva felébred. Ezt a megmentő felébredést legközelebbi fejezetünk hozza számunkra.

HUSZONHATODIK FEJEZET

A differenciálhányados és az integrál összefüggése

Már láttuk, hogy tisztán aritmetikai módon meg tudjuk határozni, nem ugyan magukat a differenciálokat, hanem a viszonyukat, a differenciálhányadost. Vagyis $\frac{dy}{dx}$ értékét, ha ismerjük az $y=f(x)$ függvényt. Két függvény deriváltját, a differenciálhányadost így is nevezik, meg is határoztuk. És elhiheti az olvasó, hogy bármely függvény egyszerűbb vagy bonyolultabb számítással differenciálható.[1] Nemsokára megismerkedünk a differenciálás szabályaival és látni fogjuk, hogy az éppen olyan biztosan kezelhető művelet, mint pl. a szorzás. Megoszlanak a vélemények arról, hogy a tetikus vagy pedig a litikus műveletek csoportjába tartozik-e. Mert tulajdonságai mindkét típusra emlékeztetnek. De ezen egyelőre ne törjük tovább fejünket, inkább lássuk, nem adja-e kezünkre a differenciálhányados az integrálszámítás kulcsát. Aritmetikai eszközökkel fogunk munkához, egyelőre mellőzzük a geometriát. Hisz már az imaginárius számok tanulmányozásakor sikerült egy hozzáférhetetlennek látszó rejtélyt megoldani s kimutatni, hogy az i a 90 fokhoz tartozó forgási tényező.

A kvadratura-feladat Terület $=\int y dx$ és Terület $=\int f(x)\,dx$ alakú parancsokra vezetett. Mindkét parancs tartalmazza a görbe egyenletét (egyszer az y ordináta alakjában, másodszor az azzal egyenlő $f(x)$-ként), valamint a dx-et. Először azt a kérdést kell vizsgálnunk, hogy vajjon ez a dx az $f(x)$-ből

[1] Természetesen feltéve, hogy nincsenek a függvénynek a differenciálhatósággal ellenkező tulajdonságai.

származik-e. Határozottan látjuk, hogy nem. Mert csak ezt az egyenletet ismerjük

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Eddigi ismereteink szerint dx sohasem tartozik «törzsfüggvényhez», hanem mindenkor a törzsfüggvény y' vagy $f'(x)$ alakban írt deriváltjának, differenciálhányadosának része. Most gondolatban azt a merész fogást alkalmazzuk, amelyet Leibniz használt a történelmi jelentőségű 1676 október 29. napon. Az integrál jel mögött álló kifejezést nem törzsfüggvénynek, hanem differenciálhányadosnak fogjuk tekinteni. Ismét hangsúlyozzuk, valójában ezzel semmi sem változott. Csupán felfogásunk kabbalájában történt változás. Ha annak a görbének, amelynek a területét meg akarjuk határozni, $y=x^2$ volt az egyenlete, akkor az is marad. Csupán azt állítjuk, hogy létezik egy másik olyan $F(x)$ függvény is, amelynek $y=x^2$ a differenciálhányadosa.

Tudjuk, hogy elképzelésünknek ilyen változtatása jelentős nehézsége az infinitézimálszámítás megértésének. De ha megértettük ezt a fogást, akkor minden további könnyű és többé-kevésbbé gépiesen végezhető. De bármilyen nehéz is a dolog, gyerünk tovább. Egyszerűen tegyük fel, hogy előttünk áll a

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$$

differenciálhányados.

Aritmetikai szempontból ez éppen olyan egyenlet, mint bármely másik. Vagyis az egyenletekre vonatkozó szabályok szerint bánhatok vele. Tehát megszorozhatom dx-szel. Ne zavarjon e közben, hogy két egyenlőségi jel szerepel. Mert ha egy derékszögű négyszögnek $a=5$ és $b=3$ volnának az oldalai, akkor írhatom, hogy $T=a.b=5.3$, sőt azt is, hogy $T=a.b=5.3=15$ és minden helyes marad, ha 2-vel szorzok és írom: $2T=2.a.b=2.5.3=30$. Tehát szorzunk dx-szel, az eredmény:

$$\frac{dy}{dx}dx = f'(x)\,dx = y'dx$$

vagy

$$dy = f'(x)\,dx = y'dx.$$

De a mérlegnél tanultak szerint az egyenlőség nem változik, ha egyenlő dolgokon azonos műveleteket végzünk. Tehát minden oldalon kiadhatjuk az integrálparancsot:

$$\int dy = \int f'(x)\, dx = \int y' dx.$$

Meglepetve látjuk, hogy az integrálnak igen fontos tulajdonságának jöttünk nyomára. Arra, hogy a differenciálásnak megfordított művelete. Mert ha ismét elhagyom az integráljeleket (mostani tudásunk alapján integráltalanításnak neveznők ezt a műveletet), akkor a

$$dy = f'(x)\, dx = y' dx$$

egyenlőséget, ezt dx-szel osztva a

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \frac{dx}{dx} = y' \frac{dx}{dx}$$
$$= f'(x) \qquad = y'$$

egyenlőségeket, vagyis végül az eredeti differenciálhányadost kapnám. Már csak azzal kell törődnünk, hogy mit jelent az $\int dy$. Jelenti valamennyi, végtelen sok dy-nak, tehát valamennyi y növekményének az összegét, a görbe általunk választott tartományában. Természetesen arról a görbéről beszélünk, amelynek egyenletét differenciálnunk kellett, hogy y'-t, illetve $f'(x)$-et kapjunk. Tehát az integrálásnál keresett, ismeretlen, törzsfüggvényről van szó. Írhatjuk tehát

$$f(x) = y = \int y' dx = \int f'(x)\, dx.$$

Ezzel megadtuk az integrálszámítás feladatát. A feladat a következő: ha egy megadott függvényt integrálunk, eredményül a törzsfüggvényét kapjuk, azt a függvényt, amelynek differenciálhányadosa a megadott függvény.

Kezdőnek itten nehézséget okozhat a szokásos jelölési mód. Ha ugyanis a megadott függvényt $y=f(x)$-szel jelöltük, akkor a törzsfüggvényt, megkülönböztetésül $F(x)$-szel kell jelölnünk és y helyett is más betűt, mondjuk Y-t kell használnunk. Fenti egyenlőség ez esetben így fest:

$$Y = F(x) = \int f(x)\, dx = \int y\, dx.$$

Ha viszont a megadott függvény jelölésére már az $y'=f'(x)$ jelölést használtuk, akkor a törzsfüggvényt jelölhetjük $y=f(x)$-szel. Ez esetben az egyenlőség a következő:

$$y = f(x) = \int f'(x)\,dx = \int y'dx.$$

Fel kell itt egy kézenfekvő kérdést is vetnünk. Miért írtuk a quadratura és rektifikáció feladat megoldásához az integrál jele mellé a határokat s miért hagytuk el őket most? Nem egyszerű a felelet. Létezik ugyanis «határozott» és «határozatlan» integrál. A határozott integrál körülhatárolt tartományon belül végzett összegezés eredményét adja, a határozatlan viszont nem határolt tartományban végzett összegezés eredményét. Nagyjából azt mondhatnók, hogy ugyanaz a viszony a határozott integrál és a határozatlan között, mint a konkrét szám és az általános közt. Ha a határozatlan integrált ismerem, amelyet «általános» integrálnak is hívnak, akkor határok behelyezésével mindenkor «határozott» integrálhoz juthatok. De mindezt hamarosan gyakorlatból is meg fogjuk ismerni.

Most azonban a differenciálszámítással kell foglalkoznunk, hogy meg legyen a lehetőségünk az integrálok kiszámítására. E közben a szokásos eljárással ellentétben a két műveletet mindenkor együtt fogjuk tanulmányozni. Előkészületként azonban még két kis dombon kell keresztüljutnunk. Foglalkoznunk kell a különböző rendű kicsinyek analizisével és meg kell ismernünk az úgynevezett binomiális tételt, amelynek általánosabb érvényű alakját Isaac Newton vezette le.

HUSZONHETEDIK FEJEZET

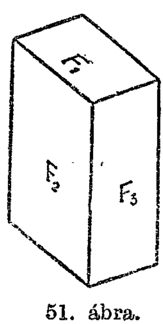
A háromféle semmi

Mit jelent az, hogy különböző rendű kicsi? Már utaltunk rá, amikor az infinitézimálszámítással kapcsolatban «kicsiny»-ről «még kisebb»-ről és «legkisebb»-ről beszéltünk. Azt állítottuk, sőt törteken be is mutattuk, hogy a $(dx)^2$ mindenkor elhanyagolható a dx mellett, mivel az x úgy aránylik a dx-

hez, mint a világmindenség a Földgolyóhoz, a dx pedig a $(dx)^2$-hez, mint a Földgolyó a porszemhez. Ha most valamilyen rajzon a Földet tekintem az ábrázolható legkisebb pontnak, akkor a porszem már szóba sem jöhet. Nem szabad ugyan elhallgatnunk, hogy ezt a felfogást nagyon sokan támadják. Elismerik, hogy *gyakorlatban* nem kell a porszemet tekintetbe venni, sőt *elméletben* is szabad elhanyagolni, de tulajdonképpen nem lehet tőle megszabadulni. S azt állítják, hogy az infinitézimálszámítás ilyen körülmények közt nem «preciziós» matematika, hanem csak «approximációs» (közelítő) matematika, ugyanúgy, ahogy csak közelítés volna minden számítás, amelyben irracionális szám előfordul. Érdekes lenne ugyan megismerni azokat a modern kísérleteket, amelyek ezen a nehézségen igyekszenek segíteni, de meg kell maradnunk kereteink közt. Inkább megkíséreljük a különféle rendű kicsit kézzel foghatóan bemutatni, azáltal, hogy rajzban mutatjuk be a háromféle semmit.

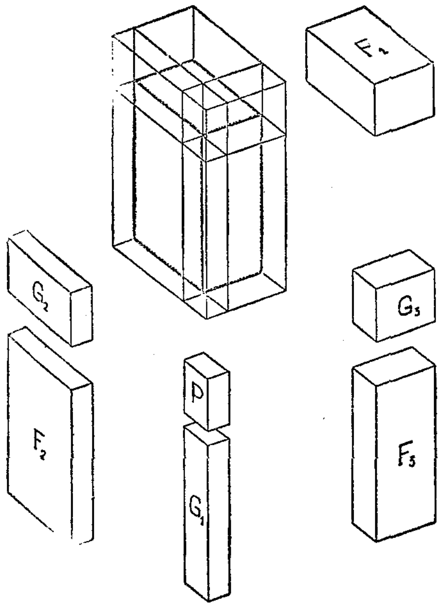
Képzeljünk el egy derékszögű parallelepipedont (egy oszlopot, amelynek összefutó élei merőlegesek egymásra). Legyen ez az oszlop fémből s a fém, miként a többi, táguljon a hő hatására. Rögzítsük ezt az oszlopot oly módon, hogy a tágulás csak három lapja irányában történhessék, például azzal, hogy egy szoba sarkában helyezzük el.

Az oszlop természetesen nem tágul külön a különböző irányokban, hanem egyszerre. Várjuk meg, míg az oszlop eléri legnagyobb térfogatát és bontsuk most részeire. Mégpedig oly módon, mintha a három F_1, F_2, F_3 felület mindegyike a többire való tekintet nélkül növekedett volna, előre illetve felfelé. (52. ábra.)



51. ábra.

Könnyebb megértés kedvéért a növekmény egyes részei kétszer láthatók a rajzon: az együttes képen és külön is. Világos, hogy az oszlop, ha ismét eredeti hőmérsékletére hűtjük le, eredeti térfogatára zsugorodik össze. A növekmények nulla méretűre zsugorodnak, mondanók az aritmetika nyelvén. Semmivé lesznek. De közvetlenül mielőtt megsemmisülnének, nagyságuk csodálatosképpen lényegesen különböző. Az oldalak



52. ábra.

növekményeiből (F_1, F_2, F_3) vékony lapocskák lesznek, a három rúdalakú kitöltőrész (G_1, G_2, G_3) vonalakká, a kockaszerű képződmény (P) ponttá zsugorodik. Ismét ama rejtélyes jelenségre bukkanunk, hogy a semminek fokozatai vannak. Felület-semmi, vonal-semmi és pont-semmi nem egy és ugyanaz. Különböző rendű semmik ezek, ha szabad ezt a kifejezést használni. Csak utalunk arra, hogy ezt másképp is kifejthetjük, ha a pontot a semmi «egységének» tekintjük. A pont az *egy* semmi. A vonaldarab végtelen sok pont sorozata, tehát végtelen sokszor nagyobb mint a pont, mindamellett, hogy szintén *semmi*. Sőt a felület az hosszúságnak és szélességnek a szorzata, tehát végtelenszer végtelen, tehát végtelen a négyzeten számú pontot tartalmaz. Jóllehet, hogy képzelt határaival és vastagság híján szintén a semminek egyik fajtája.

A valami, fizikai szempontból csak a harmadik dimenzióval kezdődik. «Valami» és három «dimenzió» bizonyos szempontból elválaszthatatlanok. De ne merüljünk túl mélyen a halmazelméletbe, a felső matematikának új és nagyon elvont részébe. Csak azt állapítjuk meg, hogy nemcsak logikai és aritmetikai szempontból, hanem kézzelfoghatóan is meggyőződtünk arról, hogy nem csak nagy méretek közt, hanem a kis méretek világában is van értelme és jelentősége a nagyságrend fogalmának. S beszélhetünk első-, másod-, harmad- stb. rendű kicsiről. dx elsőrendű kicsi, $(dx)^4$ negyedrendű kicsi, $(dx)^n$ n-ed rendű kicsi és így tovább a ∞ rendű kicsiig, vagy a többszörösen ∞-ed rendű kicsiig. A józan ész tiltakozik ugyan az ellen, hogy a legkisebb alatt még kisebbet keressen, de ugyanaz a józan ész követeli, hogy valamely önmagával megszorzott kicsi kisebb legyen, mint a szorzatlan. Ugyanúgy, ahogy $\frac{1}{10}$ nagyobb, mint $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$ Lehetséges volna az az ellenvetés, hogy nem szabad a végesben érvényes és bizonyítható fogalmakat és szabályokat egyszerűen ama ellenőrizhetetlen és elképzelhetetlen műveletekre alkalmazni, amelyekben a végtelen is szerepet játszik. Jó kifogásunk van ez ellen, az, hogy tulajdonképpen nem is végtelen kicsivel, hanem csupán tetszés szerint kicsivel dolgozunk. A nullát csak határértékként alkalmazzuk s nem vele végezzük a műveleteket. Továbbá mindenkor módunkban van verifikálni infinitézimális állításunkat, ha nem is tudjuk esetleg bizonyítani.

De érdekes tárgyalásainkat félbe kell szakítanunk, hogy megint valamilyen konkrét dologhoz foghassunk s utolsó előkészületeinket a csúcs meghódításához megtehessük. Összeszedjük tehát eddigi tudományunkat, hogy megbirkózhassunk a híres «binomiális tétellel». Többféleképpen bizonyítható a tétel. Mi az elegáns kombinatorikai bizonyítást fogjuk követni, hogy tisztán láthassuk a kombinatorika és a már többször említett binomiális együttható összefüggését.

HUSZONNYOLCADIK FEJEZET

Binomiális tétel

Tisztázzuk először a fogalmakat. Binom az $(x+a)$ vagy $(x+b)$ alakú kifejezés, s ha szorzat tényezőjeként jelentkezik, akkor neve binomiális tényező. Az x láttára senki se gondoljon ismeretlenre, jelentősége sokkal inkább az, hogy a két tag már első pillanatra megkülönböztethető legyen.[1] Binom általában az olyan kifejezés neve, amely két szám összeadása vagy kivonása útján keletkezett és valamilyen szempontból új egységnek tekintendő.

Ha az $(x+a)$ és $(x+b)$ binomot összeszorzom, vagyis az $(x+a)$ és az $(x+b)$ binomiális tényezők szorzatát képezem, akkor a következő az eredmény:

$$(x+a).(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

Hasonlóképpen

$$(x+a).(x+b).(x+c)=$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

Erről minden olvasó könnyen meggyőződhet.

Abból a célból, hogy az eredmény szerkezete világosabban lássék, írjuk eredményünket úgy, ahogyan azt már Leibniz is írta néhány alkalommal.

$$(x+a)\,(x+b)=x^2+\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}x+ab$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)=x^3+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\bc\end{matrix}\right\}x+abc.$$

Gyakorlott szem két dolgot már itt is észrevesz. Előbb azt, hogy a valamennyi binomiális tényezőben szereplő x az eredményben fogyó hatványai szerint rendezve jelentkezik. Másodszor azt, hogy az x hatványok együtthatóinak kétség-

[1] Az x használatát úgy is lehet magyarázni, hogy a binomiális tétel olyan függvények kifejtésére használatos, amelyekben az x változó szerepel.

telen a kombinatorikus jellege, hisz elől az a, b és c elemeknek első osztályú kombinációit látjuk, utána a másodosztályúakat, végül pedig a harmadosztályúakat. Az elemek ismétlés nélküli kombinációkban jelentkeznek. Erre a célra valamennyi, a binomokat alkotó, nem egyenlő a, b, c tag rendelkezésre áll.

Könnyebb és jobb áttekintésül lássunk még egy, valamivel bonyolultabb példát.

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+e)=$$

$$=x^5+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix}\right\}x^4+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\ad\\ae\\bc\\bd\\be\\cd\\ce\\de\end{matrix}\right\}x^3+\left.\begin{matrix}abc\\abd\\abe\\acd\\ace\\ade\\bcd\\bce\\bde\\cde\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}abcd\\abce\\abde\\acde\\bcde\end{matrix}\right\}x+abcde.$$

E különös struktura keletkezésének az oka nem is olyan talányos, mint amilyennek első pillanatban látszik. A szerkezet úgy keletkezik, hogy szorzás közben esetünkben mindenkor öt-öt tényezőt kell összeszorozni.[1] x^5 nem egyéb, mint $x.x.x.x.x$ és ax^4 annyi mint $x.x.x.x.a$. Továbbá $acex^2$ ugyanaz, mint $a.c.e.x.x$. Ennyi utalás egyelőre talán elégséges arra, hogy a gondolkodó olvasót a kombinatorikai összefüggés igazságáról meggyőzze.

Foglaljuk most össze az eddig tanultakat szabállyá és határozzuk meg olyan binomok szorzatának általános alakját, amelyekben az egyik tag x, a másik viszont mindegyikben más és más.

Ilyen binomok szorzata x fogyó hatványai szerint rendezett sornak fog adódni, az első tagban az x kitevője azonos a binomok számával. Ebben a hatványsorban a kitevő tagróltagra eggyel csökken. x^1 után még van egy tag: x^0, az ered-

[1] Általában annyit, ahány binomot összeszorzunk.

mény tehát a binomok számánál eggyel több tagot tartalmaz. A sor, egyelőre együtt hatók nélkül, a következő:

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x^1 + x^0$$

n a binomok száma. Írjunk minden egyes taghoz együtthatót:

$$C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_{n-2}x^2 + C_{n-1}x^1 + C_nx^0.$$

Az együttható indexe megmutatja, hogy az együttható az n elemnek hányadosztályú kombinációit jelenti. x^n együtthatója $C_0=1$, tekintve, hogy ez a tag csak x-ből áll. Az x^{n-1} együtthatója az n elemből képezhető valamennyi első osztályú, az x^{n-2}-é valamennyi másodosztályú, az x^{n-3}-é valamennyi harmadosztályú stb. kombináció. Még pedig ismétlés nélküli kombináció. De ezek a kombinációk már nem csupán különböző csoportosításban felírt elemek, itt már az elemeket össze kell szorozni, tehát kombinációk képzését és szorzást kell egyidőben végezni.

Ismét egy fogáshoz folyamodunk. Az eddig különböző a, b, c stb. tagokat egyenlőknek fogjuk tekinteni, vagyis $a=b=c=d=e$ ezáltal a kérdéses szorzatot egyszerűen így rhatjuk:

$$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a) \text{ stb.}$$

vagy ami ugyanaz

$$(x+a)^5 = ?$$

Most jutottunk a matematikában oly nagy jelentőségű binomiális tétel lényegéhez. A megoldás lehetővé teszi, egyelőre ugyan csak pozitiv egészszámokra nézve, hogy valamely binom minden hatványát x fogyó hatványai szerint rendezett hatványsor alakjában közvetlenül felírhassuk. Most már közömbös, hogy továbbra is x-et írok-e, vagy valamilyen más betűt írok helyébe. Mi csak azért használjuk továbbra is az x-et, hogy az előzőkkel való összefüggés világosan megmaradjon.

Eddigi szabályaink szerint az n-szer tényezőnek vett $(x+a)$ vagyis az $(x+a)^n$ kifejtve így írható

$$C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_{n-2}x^2 + C_{n-1}x^1 + C_nx^0.$$

$C_0=1$, ezt már tudjuk. De mennyi a C_1, C_2, C_3 stb? Gondolkozzunk logikusan. C_1 az n darab binom x-től különböző tagjából alkotható valamennyi elsőosztályú kombináció összege. Az összeadandók mindegyike a-val egyenlő, a tagok száma n, vagy kombinatorikai jelöléssel $\binom{n}{1}$, az összeg tehát $a+a+a+a+a+\cdots+a$ (n-szer) $=na=\binom{n}{1}a$. C_2 a másodosztályú kombinációk összege. A kombinációk mindegyike $a.a=a^2$, számuk $\binom{n}{2}$, összegük ezek szerint $\binom{n}{2}a^2$. A harmadosztályú kombinációk $a.a.a=a^3$ alakúak. C_3 ezek szerint $\binom{n}{3}a^3$. Az eddigiekről már leolvashatjuk a képzés törvényét. Ezzel pedig elértük kitűzött célunkat. Tehát:

$$(x+a)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\cdots$$
$$+\binom{n}{n-1}a^{n-1}x+\binom{n}{n}a^n.$$

Mielőtt még példát dolgoznánk ki, ismerjük meg előbb a «Pascal-féle háromszög» néven ismert táblázatot. Erről lehet ugyanis legkönnyebben leolvasni a valamely hatványhoz tartotó binomiális együtthatókat. A Pascal-féle háromszög a következő:

0	1							
I	1	1						
II	1	2	1					
III	1	3	3	1				
IV	1	4	6	4	1			
V	1	5	10	10	5	1		
VI	1	6	15	20	15	6	1	
VII	1	7	21	35	35	21	7	1

és így tovább.

Kissé körülményes volna a bizonyítás, ezért csak felhívjuk arra a figyelmet, hogy a táblázat belsejében bármely szám a fölötte jobbra és balra olvasható két szám összege. Ezzel egészen gépiesen bármeddig tudjuk a táblázatot folytatni. Említsük még azt is, hogy Pascal az általa felfedezett háromszöget «triangulus mathematicus»-nak nevezte, de a binomiális együtthatókat előtte már Stifel is említi 1544-ben, kínai matematikusok pedig már a Kr. u. XIII. században ismerték.

Joggal kérdezhetjük immár, miként kell ezt a táblázatot használni? Használata nagyon egyszerű. A baloldalon olvasható római számok azt a pozitiv, egészszámú hatványkitevőt mutatják, amelyre a binomot emelni akarjuk. Az ugyanazon sorban, a háromszögben olvasható számok pedig sorban az előbbi $C_0, C_1, C_2 \ldots C_{n-1}, C_n$ értékei. Ezek szerint a számok a kombinatorikai jelölésmóddal írt együtthatóval azonosak. Írjuk fel ezek alapján $(x+a)^7$ értékét x fogyó hatványai szerint rendezett hatványsorban.

$$(x+a)^7 = x^7 + \binom{7}{1} x^6 a + \binom{7}{2} x^5 a^2 + \binom{7}{3} x^4 a^3 +$$
$$+ \binom{7}{4} x^3 a^4 + \binom{7}{5} x^2 a^5 + \binom{7}{6} x a^6 + a^7.$$

Ha kiegészítésül x^7 mellé kiírjuk a $\binom{7}{0}$ együtthatót és az a^7 mellé a $\binom{7}{7}$ együtthatót, akkor a 7 hatványhoz tartozó együtthatók sorban a következők:

	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$
kiszámított értékük:	1	7	21	35	35	21	7	1

s ezzel a Pascal-féle háromszöget hibátlanul verifikáltuk.

Még egy példa.

$(4+7)^5$? Természetesen egyszerűen összeadhatnók a két számot és közvetlenül felírhatnók a 11 ötödik hatványát, $11^5=161051$. De felhasználjuk az alkalmat a binomiális tétel újabb kipróbálására és megjegyezzük, hogy a gyakorlati számolás szempontjából is előnyös valamely számot, hatványozásra binommá szétszedni.[1]

[1] Helyértékrendszerben írt számok négyzetre, köbre emelése és általában hatványozása is ezen alapul. Pl. $13^2=(10+3)^2$ stb.

Így számolunk:

$$(4+7)^5=\binom{5}{0}4^5.7^0+\binom{5}{1}4^4.7^1+\binom{5}{2}4^3.7^2+\binom{5}{3}4^2.7^3+$$
$$+\binom{5}{4}4^1.7^4+\binom{5}{5}4^0.7^5=$$
$$=1.1024.1+5.256.7+10.64.49+10.16.343+$$
$$+5.4.2401+1.1.16807=$$
$$=1024+8960+31360+54880+48020+16807=161051$$

s megkaptuk a várt, helyes eredményt.

Második példa.

$$(1+x)^9=\binom{9}{0}1^9x^0+\binom{9}{1}1^8x^1+\binom{9}{2}1^7x^2+\binom{9}{3}1^6x^3+\binom{9}{4}1^5x^4+$$
$$+\binom{9}{5}1^4x^5+\binom{9}{6}1^3x^6+\binom{9}{7}1^2x^7+\binom{9}{8}1^1x^8+\binom{9}{9}1^0x^9=$$
$$=1+9x+36x^2+84x^3+126x^4+126x^5+84x^6+36x^7+9x^8+x^9.$$

Jegyezzük meg végül, hogy a binom természetesen $(x-a)$ vagy $(-x-a)$ is lehet. Az előjelet a szorzásnál és hatványozásnál tanultak szerint kell az x és az a előforduló hatványaiból megállapítani. Ha például $(x-a)^4$ kiszámításakor $4x^3a$ előjelét kell megállapítanunk, akkor világos, hogy az előjel minusz. Mert a szorzat $4.x.x.x.(-a)$, az eredmény pedig $-4x^3a$.

Írjuk végül a binomiális tételt szumma alakjában.

$$(x+a)^n=\sum_{0}^{n}\binom{n}{\nu}x^{n-\nu}.a^\nu=\binom{n}{0}x^na^0+\binom{n}{1}x^{n-1}a^1+\cdots+\binom{n}{n}x^0a^n.$$

A matematika azonban a binomoknak nemcsak pozitiv egész számú hatványaival foglalkozik. Foglalkoznunk kell tehát azzal az esettel is, amikor a kitevő tört, vagy negativ szám. Először az $(1+x)^n$ binommal foglalkozunk és azt kívánjuk, hogy n tört vagy negatív szám legyen. Kereteink közt nincs módunkban ennek az esetnek is a mélyébe hatolni, tehát meg kell elégednünk annak megállapításával, hogy tört vagy negatív kitevőre binomiális képletünk végtelen «binomiális sorrá» alakul át. Ennek alakja:

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{r}x^r+\ldots$$

Benne r véges számot jelent, amely n-nél nagyobb is lehet. Ha történetesen nem $(1+x)$ valamilyen hatványát akarom binomiális sorba fejteni, hanem $(a+x)$-ét, akkor ismét egy fogást kell használnom. $(a+x)^n$ egyszerűen $a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ alakban írandó. Ekkor $\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ a tanult képlettel kiszámítható, végtelen binomiális sorba fejthető, s az eredményt egyszerűen meg kell a^n-nel szorozni.

Erre, mint említettük, csak utalunk. De ha már «végtelen sorok» s óba kerültek, röviden meg kell magyaráznunk, hogy mit is nevezünk általában «sor»-nak.

A sor szó maga is mutatja, hogy tagoknak egymás utáni sorozásáról van szó. S a tagokat összeadással vagy kivonással fűzzük egymáshoz. Véges a sor, ha véges számú tag után megszakad, ellenkező esetben végtelen. Végtelen például a Leibniz-sort: $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ A Leibniz-sor kapcsán másik fontos fogalommal is megismerkedhetünk. Tudjuk, hogy a végtelen sok tag összege $\frac{\pi}{4}$ tehát véges. Ilyen sort konvergensnek, összetartónak mondunk, mert az összege véges érték felé (példánkban $\frac{\pi}{4}$ felé) konvergál, az $1+3+$ $+5+7+\cdots$ vagy hasonló sorok összege szemmel láthatóan végtelen. Ilyen sort divergensnek, széttartónak mondunk.

A matematika legnehezebb problémái közé tartozik annak megállapítása, hogy valamely sor konvergens-e vagy divergens. Mert szükséges ugyan, hogy a tagok fokozatosan csökkenjenek, közeledjenek nullához, de ebből még nem következik az, hogy a sor konvergens. Így például a végtelen

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdots$$

sor divergens, bár minden tagja kisebb a megelőzőnél. A sor összege végtelen, míg például a szintén végtelen

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots$$

sor konvergens és összege 1.

Végtelen sorok gyakran tesznek jó szolgálatot kvadraturaproblémák megoldásakor. Az integrálandó függvényt sorrá alakítva megkönnyíthetjük az integrálás elvégzését. Már Archimedes is alkalmazott konvergens végtelen sorokat kvadraturaproblémák megoldására.

HUSZONKILENCEDIK FEJEZET

Archimedes parabolakvadraturája

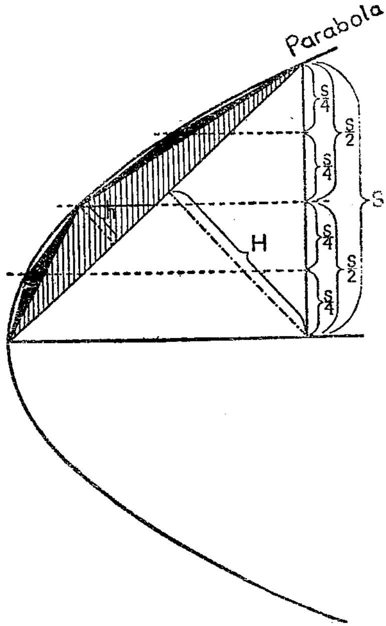
A nagy Archimedes kétségtelen érdeme, hogy görbevonalú idomok kvadraturájára olyan zseniális módszereket gondolt ki, hogy ezek a XVII. század végéig hatással voltak a matematika fejlődésére és általánosan alkalmazták őket. Éppen ezért nem resteljük a fáradságot és kissé mélyebben megismerkedünk Archimedes idevágó gondolataival. Evégből a két értekezésben is tárgyalt parabolakvadraturát fogjuk megismerni. Az ő geometriai okoskodásait vesszük elő és mellőzzük a számunkra nehezebb sztatikai módszert.

Archimedes geometriai módszere, az úgynevezett exhaustio, vagyis kimerítés; már szóltunk róla. Lényege, hogy könnyen kezelhető, *egyenes vonalú* idomokat ír bele az illető görbevonalú idomba. Ha végnélkül szaporítjuk a beírt idomok számát, úgyhogy valamennyi végnélkül kisebbedjék: végnélkül símulnak az egymásutáni egyenesvonalú idomok a görbevonalúhoz, mindaddig, amíg végtelen sok ismétlés után olyan egyenesvonalú idomhoz érkezünk, amelynek határvonalai a görbe ívelemeinek tekinthetők. Most kell a második, lényeges lépést megtennünk: összegeznünk kell a végtelen sok, egyenessel határolt idomot, mert ez az összeg adja a «kimerített», a végtelen sok, hasonló idommal megtöltött, görbevonalú idom területét. Hogy ez részleteiben miként történik, azt később látjuk meg. Most azonban vegyük fel a «közönséges parabola» tetszésszerinti darabját. E parabolának számos tulajdonsága már Archimedes idejében ismeretes volt.

Határozzuk meg tehát egy úgynevezett parabolaszelet, azaz parabolaszegmens [1] területét. Rajzoljunk ebbe a szeletbe háromszöget olymódon, hogy csúcsa a parabolának úgynevezett csúcsával essék egybe és e csúccsal szemben fekvő oldala a parabola tengelyére merőleges legyen. Egyszerűség kedvéért, — hisz a parabola szimmetrikus a tengelyére, — s a későbbi, integrálással történő területmeghatározással való könnyebb összehasonlítás kedvéért, a parabolaszeletnek csak a felső felét vesszük tekintetbe. Ebben a részben most egy nagy, derékszögű háromszög van, átfogója a parabolának úgynevezett csúcsától a szeletet határoló húrnak és a parabolának metszéspontjáig terjed. E háromszögnek, amelyet a következőkben «a nagy háromszög»-nek fogunk nevezni, egyik befogója a parabola tengelye, a másik pedig egy arra merőleges S egyenes, amely nem egyéb, mint az imént említett húrnak a fele.

Fogjunk már most neki az exhaustionak, a kimerítésnek. Evégre a nagy háromszög átfogójára mint alapra új, (az 53. ábrán vonalkázott) háromszöget rajzolunk, de ez már természetesen nem derékszögű. A vonalkázott háromszög két oldalára mint alapra ismét egy-egy, a képen fekete, háromszöget helyezünk. E fekete háromszögek harmadik csúcsa, miként minden eddigi háromszögé, a parabolán van. Most már gondolatban tovább is folytathatjuk ezt az eljárást. A fekete háromszögek két-két szabad oldalára ismét egy-egy, még kisebb, háromszöget gondolhatunk, csúcsaik természetesen ismét a parabolán vannak és így tovább a végtelenségig. Mindenki belátja, hogy a háromszögek sorozata kitölti a fél parabolaszegmenst. De hogyan tudjuk összegezni e végtelen sok háromszöget?

[1] Szegmens, mint tudjuk, a szelet neve, a szektor viszont a cikknek a megfelelője. A kezdő gondoljon a szegmens hallatán egy kerek kenyérből levágott részre, a szektor viszont köralakú tortából szokott módon kivágott részt jelent.



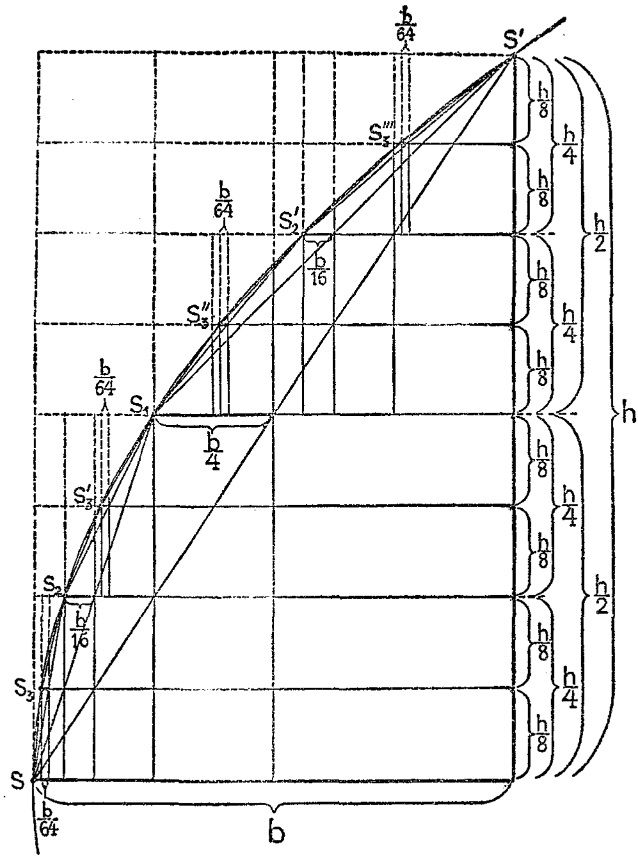
53. ábra.

Az erre adott felelet teljes fényében mutatja a régi görögök matematikai lángeszét. S megcsodálhatjuk azt a szinte hihetetlenül egyszerű és világos módot, amellyel Archimedes ezt a látszólag megoldhatatlan problémát elintézte. Tudta ugyanis, hogy olyan fogyó végtelen sorok összege meghatározható, amelyekben a tagok viszonya állandó. Tudta tehát, hogy pl. az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ sor összege véges, mégpedig $=2$. Ha tehát sikerül a szemmel láthatóan kisebbedő háromszögek csökkenését valamely állandó viszonyszámmal ki fejezni, akkor az egész feladatot fogyó végtelen sorok összegezésére vezettük vissza. A nagy háromszög bármekkora lehet, egyszerűen egységnek tekintjük és a többi háromszög területét ebben az egységben fejezzük ki. Azután, ha az összegezés megtörtént, az eredményt megszorozhatjuk a nagy háromszög valódi területével, s ebből azonnal megkapjuk a parabolaszelet területét.

Archimedes valóban elérte ezt a célt. Az ő gondolatmenetét fogjuk követni, némiképpen egyszerűsített, de lényegében változatlan módon. Jó szolgálatot tesz majd eközben az 54. ábra vázlatos rajza. Előrebocsájtjuk, hogy a parabolának igen sajátos tulajdonságai vannak, de ezek bizonyítása túlságosan messze vezetne. Tehát csak annyit említsünk, hogy azokat a vízszintes, párhuzamos egyeneseket, amelyek a parabolát az S, S_3, S_2, S_3' stb. pontban metszik, a parabola átmérőinek nevezzük. Egy ilyen átmérő akkor felezi a metszett parabola-húrt, ha az átmérőnek a húr és az ív közé eső része a leghosszabb átmérődarab az illető húr által levágott szeletben. Ez esetben az átmérőnek és a parabolának metszéspontját az illető szelet csúcsának is nevezik. Így S_1 a csúcsa az SS' húr által levágott szeletnek, S_2 az S és S_1 közötti szeleté, S_3''' pedig az S_2' és S' közöttié stb. Említsük még, hogy a régi görögök, így Archimedes is tudták, hogy a b tengelydarab úgy viszonylik valamely részéhez, mint h^2 viszonylik az illető rész végpontjában emelt merőleges tengely és parabola közötti részének négyzetéhez. Mai matematikai nyelvünkön ez azt jelenti, hogy a parabolának analitikus jelöléssel írt egyenlete $y^2 = x$, vagy $y = \sqrt{x}$.

De most foglalkozzunk magával a problémánkkal.

A nagy háromszögnek itt (54. ábra) b és h a befogói, átfogója pedig az SS' húr. Területe ezek szerint $\frac{bh}{2}$. Húzzunk a $\frac{h}{2}$ végpontján keresztül átmérőt, akkor ismét új, az $SS'S_1$ szelethez tartozó S_1 parabolacsúcshoz jutunk. Az ebbe a szeletbe beírt $SS'S_1$ háromszöget a $\frac{b}{4}$ távolság két részre osztja, a két rész alapja közös, $\frac{b}{4}$, magasságuk pedig egyformán $\frac{h}{2}$. Területük együttvéve $2\left(\frac{b}{4}\cdot\frac{h}{2}\right):2$. Ez azt jelenti, hogy $\frac{bh}{8}$ az $SS'S_1$ háromszög területe. Az előző ábra kifejezéseivel élve azt mondhatnók, hogy a nagy három-



54. ábra.

szög területe négyszer akkora, mint a vonalkázott háromszögé. Húzzunk most további két átmérőt $\frac{h}{4}$-nél és $\frac{3h}{4}$-nél, vagyis a két $\frac{h}{2}$-t ismét megfelezzük. Az osztópontokon keresztül húzott átmérők ismét csúcspontokat adnak, az S_2 és S'_2

pontokat. Az új SS_1S_2 és $S_1S_2'S'$ szegmensekbe újból háromszögeket rajzolunk. Ezeket a háromszögeket neveztük előbb «fekete háromszögeknek», s a parabola tulajdonságai alapján megismétlődik az előbbi játék változott méretekkel. Négy $\frac{b}{16}$ alapú háromszögünk van most, kettő-kettő együtt egy-egy fekete háromszöget ad. Mindegyik részháromszögnek $\left(\frac{b}{16}\cdot\frac{h}{4}\right):2$ a területe, tehát a négyé együtt $\left(4\frac{bh}{64}\right):2$. Vagyis $\frac{bh}{32}$. De ez azt jelenti, hogy a két «fekete háromszög» területe együtt a vonalkázott háromszögek területének negyede. Ugyanezt a képzési törvényt újból alkalmazva megfelezzük az ábrán látható $\frac{h}{4}$ darabokat, akkor négy új átmérő négy új csúcspontot ad: S_3, S_3', S_3'', S_3'''. A négy exhaustiós háromszög nyolc $\frac{b}{64}$ alapú háromszögre bontható. Magasságuk $\frac{h}{8}$ összes területük tehát $8\left(\frac{b}{64}\cdot\frac{h}{8}\right):2=\frac{bh}{128}$. De ez megint nem jelent mást, mint hogy új háromszögeink területe negyede az előbbi két fekete háromszög területének. Nem merülünk ábránkról leolvasható további nagyon változatos törvényszerűségek ismertetésébe, csupán a számunkra jelentős tanulságokat foglaljuk össze. Azt tapasztaltuk, hogy eljárásunk: h felezése, átmérő rajzolás, háromszögszerkesztés, fogyó sort szolgáltat. Ezt a sort egyelőre csak szavakba foglalva írjuk le. A nagy háromszög négyszer akkora, mint a vonalkázott. A vonalkázott a két feketének négyszerese. A két fekete négyszerese annak a négy háromszögnek, amelyek csúcsai sorban S_3, S_3', S_3'', S_3''' és így tovább a végtelenségig. Ha most a nagy háromszöget tekintjük egységnek, akkor a parabolaszelet területét a következő sor szolgáltatja:

Parabolaszelet területe $=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$, minthogy ebben a sorban minden tag a megelőzőnek negyede. Most már csak a sor összegét kell a nagy háromszög területével, a korábbiak szerint, megszoroznunk, hogy a parabolaszelet területét megkapjuk. Tehát a végeredmény:

$$\text{Parabolaszelet} = \text{nagy háromszög} \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right).$$

Most már csak az van hátra, hogy a végtelen sok tagból álló fogyó sor összegét meghatározzuk. Elébevágunk tanulmányainknak, de eláruljuk, hogy az összeget az $S_\infty = \frac{a}{1-q}$ képlettel kell meghatározni. A képletben a a kezdő tagot jelenti, q a hányadost, a kvocienst. Esetünkben a kezdő tag 1, a hányados $\frac{1}{4}$, tehát $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$. Ezzel mindent tudunk. A parabolaszelet területe a nagy háromszög területének pontosan négyharmada. Ha ábránkat a szaggatott vonalakkal kiegészítve tekintjük, akkor egy derékszögű négyszög áll előttünk, oldalai b és h, területe pedig a nagy háromszög területének kétszerese. Területe tehát a nagy háromszöggel mint egységgel mérve 2. Ha végül a parabolaszelet és a négyszög területét hasonlítjuk össze, akkor kiderül, hogy a kettőnek a viszonya $\frac{4}{3} : 2 = \frac{2}{3}$. Ez azt jelenti, hogy a parabolaszelet területe kétharmada a húr feléből és a tengely metszetéből alkotott négyszögnek.[1] Mielőtt még a klasszikus görög geometria érdekes területét elhagynók, meg kell említenünk, hogy az első háromszögnek egyáltalán nem kellett derékszögűnek lennie. Kiindulásul valamely ferdén levágott szeletet, így például a vonalkázott háromszöget és a hozzá tartozó szeletet is választhattuk volna. Sőt ez a választás helyesebb is, mert általánosabb. Ha így választunk, akkor azt találjuk, hogy valamely ferdeszögű parallelogramma két átellenes csúcsán keresztülmenő parabola a parallelogrammát $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ arányban osztja két részre. Továbbá, hogy az

[1] Helyesen, az analízis kifejezéseivel, azt is mondhatnók, hogy a parabolaszelet területe ama pont koordinátáiból alkotott négyszög területének kétharmada, amelyben a húr a parabolát metszi.

exhaustiós háromszögek területének összege mindenkor egyharmada a kiindulásul választott háromszög területének. Mi a derékszögű esetet csak a levezetés és demonstrálás egyszerűsítése céljából választottuk, valamint azért, hogy a későbbi tanulmányaink folyamán integrálszámítással végzett területmeghatározást példánkkal könnyebben összehasonlíthassuk.

HARMINCADIK FEJEZET

Sorok

Most azonban újra a sorok elméletéhez kell fordulnunk és hozzácsatoljuk még a soroknál levő egy másik különbség rövid megemlítését. Vannak sorok, amelyek additív nőnek vagy szubtraktív fogynak. Például

$$1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm 9 \pm \ldots\ldots\ldots \text{ és így tovább}$$

vagy

$$500 \pm 496 \pm 492 \pm 488 \pm \ldots\ldots \text{ és így tovább}$$

Az első sor tagonként 2-vel nő, a második 4-gyel fogy. Az ilyen sorokat számtaniaknak nevezik. Ha ellenben a sorok szorzás által nőnek és a legközelebbi tagot úgy kapjuk, hogy az adott tagot egy mindig ugyanaz maradó tényezővel szorozzuk (vagy egy állandó osztóval osztjuk), akkor egy mértani sorról beszélünk. Például:

$$1 \pm 3 \pm 9 \pm 27 \pm 81 \pm \cdots \text{ és így tovább}$$

vagy

$$1 \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{16} \pm \frac{1}{64} \pm \frac{1}{256} \pm \cdots \text{ és így tovább.}$$

Általában írva így hangzik a számtani sor:

$$a \pm (a+d) \pm (a+2d) \pm (a+3d) \pm \cdots \pm (a+nd)$$

vagy

$$a \pm (a-d) \pm (a-2d) \pm (a-3d) \pm \cdots \pm (a-nd),$$

a mértani ellenben:

$$a \pm aq \pm aq^2 \pm aq^3 \pm \cdots \pm aq^{n-1}$$

vagy

$$a \pm a\frac{1}{p} \pm a\frac{1}{p^2} \pm a\frac{1}{p^3} \pm \cdots \pm a\frac{1}{p^{n-1}}.$$

Itt is eltekintünk a levezetésektől és csak megemlítjük, hogy e sorokat «progressziók»-nak is szokás nevezni és hogy az a-t, ami természetesen egyáltalán nem kell 1 legyen, «kezdőtag»-nak nevezik. A számtani progresszióknál a növekedési vagy kisebbedési szám d a «differencia», a mértani progresszióknál a q-t vagy az $\frac{1}{p}$-t «kvociens»-nek nevezik.

Minket elsősorban egy ilyen sor összege érdekel. Számtani soroknál, ha a kezdőtag a, a differencia d és a tagok száma n, akkor az összegképlet

$$s_n = \left[a + \frac{d(n-1)}{2}\right].n$$

Számtani sorok végtelen összege nem lehetséges, ami azt teszi, hogy ezek mind végtelent adnak összegül, tehát minden számtani sor divergens. Következőleg az n-t mindig véges számként kell megadni, ha értelmes feladatot akarunk felállítani. Számítsuk ki például az első 9 páros szám összeget, tehát

$$2+4+6+8+10+12+14+16+18=?$$

A kezdőtag $a=2$, a differencia $d=2$ és a tagok száma $n=9$. Tehát

$$s_n = \left[2 + \frac{2(9-1)}{2}\right]\cdot 9 = [2+8]\cdot 9 = 90.$$

ami képletünket kitűnően igazolja.

A mértani progressziókra nézve érvényes az összegképlet:

$$S_n = \frac{q^n-1}{q-1}\cdot a.$$

Tehát ha keresnők a

$$3+15+45+\cdots$$

progresszió első 6 tagjának az összegét, akkor tudnók, hogy $a=3$, $q=5$ és $n=6$. Tehát:

$$S_6 = \frac{5^6-1}{5-1}\cdot 3 = \frac{15625-1}{4}\cdot 3 = 3906.3 = 11718,$$

ami a

$$3+15+75+375+1875+9375=11718$$

összeadással könnyen ellenőrizhető.

Most egyszer egy oly mértani progressziót akarunk megvizsgálni, amelynek «kvociense» tört, $\frac{1}{p}$. Utalunk arra, hogy éppen ezek a mértani sorok, amelyek mindegyre fogynak és ezért voltaképp nem «progresszióknak», hanem «degresszióknak» volnának nevezhetők, az egész matematikában rendkívüli szerepet játszanak. Általánosan írva n tagszám esetén ily alaknak:

$$\sum_{0}^{n-1} a\cdot\frac{1}{p^\nu} = a + a\frac{1}{p} + a\frac{1}{p^2} + \cdots + a\frac{1}{p^{n-1}}.$$

Azok után, amiket eddig hallottunk, a sorok eme fajtájánál is lehet értelme végtelen sok tag összege után kérdezősködni. Felállítjuk ezért a problémát, hogy mely határértékhez «konvergál» egy ily sor, mely összeghez tart. Egy ily sorra nézve áll a képlet $S_\infty = \frac{a}{1-q}$, ahol itt q-t tettünk egyszerűségért $\frac{1}{p}$ helyébe azért, hogy ne kapjunk törtestörtet (kettőstörtet). Tehát írhatjuk

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, \text{ az } \left|\frac{1}{p}\right| = |q| < 1 \text{ föltétellel,}$$

ami nem mást jelent, mint hogy itt a «kvociens» valódi tört. Eme képlettel először a parabolaszeletre vonatkozó Archimedes-féle sort akarjuk megvizsgálni. Ennek alakja

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \cdots$$

Itt az a kezdőtag 1-gyel egyenlő. A «kvociens» $\frac{1}{4}$, mivel minden következő tag egynegyede a megelőzőnek (vagy minden tagot $\frac{1}{4}$-del kell megszorozni, hogy a legközelebbi tag adódjék). Az összegnek tehát végtelen sok tag esetén az $S_\infty = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ értékhez kell konvergálni.

Ámde $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ egyenlő $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$, amit már előbb mint eredményt állítottunk oda.

Ha például az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

sor volna előttünk, akkor most rögtön tudnók, hogy végtelen összege $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Egy másik sor

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$$

végtelen összege ellenben $S_\infty = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

Általánosan a mi képletünk alkalmazásával állítható, hogy az $|x| < 1$ feltétel mellett bármely $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$ alakú végtelen sor összege $\frac{1}{1-x}$, ami hasonlóképp messzehordó jelentőségű.

Már e néhány példából eljutunk annak a belátásához, hogy konvergens sorok végtelen összegének a kiszámításában egy határozott infinitézimális elv rejlik, amely lehetővé teszi mindenféle geometriai probléma megoldását. Például mihelyt képesek vagyunk valamely idomot — mégha görbevonalú határa is van — oly végtelen sok idomra bontani szét, amelyek területei fogyó mértani sorba rendezhetők, akkor a kvadratura integrálszámítás nélkül is elvégezhető. Egy ilyenféle példát már Archimedesnél láttunk. És nincs jogunk lekicsinyelni Archimedes utolsó tanítványainál — mint például egy Galileinél vagy Vivianinál — azt a roppant éleselméjűséget, amely az exhaustio módszerében egyenesen hihetetlent végzett. Ezen természetesen mit sem változtat az, hogy éppen Vivianinak, a nagy Leibniz barátjának, kellett át szenvednie annak tragikumát, hogy alkotásának a tetőpontján a matematikai trónról menthetetlenül letaszította és fáradozásának minden gyümölcsét elvette az infinitézimális számítás csodája. Mi epigonok azonban most véglegesen birtokunkba akarjuk venni az érett gyümölcsöket.

HARMINCEGYEDIK FEJEZET.

A differenciálszámítás technikája.

Mivel művészetünk alapjait oly lelkiismeretesen megvilágítottuk, most jogunkban áll a felsőbb matematika algoritmusát tisztán formálisan levezetni. A differenciálszámítás élére az úgynevezett Leibniz-féle alaptételt állítjuk. Ez így hangzik:

$$\text{differenciálhányados} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

Lényegében ez az egyenlet számunkra nem ad mást, mint egy másik írásmódot oly valami számára, amit mi számításszerűleg már megvizsgáltunk. Ugyanis mi annakidején megalkottuk a differenciálhányadost oly módon, hogy az eredeti $y=f(x)$ függvényt levontuk a dx növekménnyel előállott új $(y+dy)=f(x+dx)$ függvényből. Tehát

$$\begin{array}{rl} y+dy & =f(x+dx) \\ -y & =-f(x) \\ \hline dy & =f(x+dx)-f(x). \end{array}$$

Ha most az egyenlet mindkét oldalán dx-szel osztunk, valóban kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

Ámde $\frac{dy}{dx}$ helyébe tudvalevőleg $f'(x)$ vagy y' is írható Következőleg helyes a mi első egyenletünk.

De őszintéknek kell lennünk és megmondanunk, hogy a «Leibniz-egyenlet» csak mintegy a héj, amelyből a magvat minden egyes esetben ki kell szedegetnünk. És ez nem mindig oly könnyű. De ha rendszeresen járunk el, akkor a differenciálás számára mintegy alapszámítási szabályokat vezethetünk le, amelyek a kezelésre annyira hozzáférhetővé tesznek bármely bonyolult differenciálszámítást, mintha például egy szorzásról vagy osztásról volna szó. Először is egy hatvány számára iparkodunk általános differenciálási törvényt nyerni, mivel a függvényekben mindig x hatványai szerepelnek. Kezdjük az első hatvány legegyszerűbb esetével. Például:

$$y=x+6.$$

Ekkor

$$y+dy=(x+dx)+6 \quad \text{és a}$$

differenciálhányados a Leibniz-képlet szerint

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)+6-(x+6)}{dx}=\frac{x+dx+6-x-6}{dx}=\frac{dx}{dx}=1.$$

Már itt meg kell jegyezni, hogy minden additív vagy szubtraktív állandó (a mi esetünkben $+6$) a differenciálásnál egyszerűen eltűnik. Ennek kényszerítő alapját később fogjuk belátni. A második hatvány pedig:

$$y=x^2-7.$$

Ekkor a Leibniz-képlet szerint:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)^2-7-(x^2-7)}{dx}=\frac{x^2+2xdx+(dx)^2-7-x^2+7}{dx}=$$

$$=\frac{2xdx+(dx)^2}{dx}.$$

Itt is az állandó (szubtraktív!) egyszerűen eltűnt. Visszamaradt egy bonyolultabb kifejezés, amelyben $(dx)^2$, tehát egy «másodrendű kicsi» szerepel. Ezt egyszerűen elhanyagoljuk már gyakran kifejtett okokból és akkor

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xdx}{dx}=2x$$

Hatványról-hatványra fáradságosan felkapaszkodhatnánk az úgynevezett «teljes indukció» útján. Mint járatos matematikusok lenézzük ezt a kerülő utat, mivel a binomiális tétel lehetővé teszi számunkra a dolog általános elintézését. Differenciálnunk kell tehát az $y=x^n+a$ függvényt.

Mivel az állandónak úgyis el *kell* tűnnie a Leibniz-képlet szerkezete szerint, azért elhagyjuk és csak az

$$y=x^n$$

függvényt vesszük.

Az x-nek dx-szel való megnövelése az

$$y+dy=(x+dx)^n$$

függvényt hozza létre.

És a differenciálhányadosnak a Leibniz-képlet szerint így kell szólnia

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)^n-x^n}{dx}.$$

Ha most az $(x+dx)^n$ binomot a binomiális tétel szerint kifejtjük, kapjuk

$$\frac{dy}{dx}=$$

$$=\frac{\left[x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}dx+\binom{n}{2}x^{n-2}(dx)^2+\binom{n}{3}x^{n-3}(dx)^3+\dots\right]-x^n}{dx}$$

Látható, hogy x^n mindig kiesik, úgyhogy marad

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}dx+\binom{n}{2}x^{n-2}(dx)^2+\binom{n}{3}x^{n-3}(dx)^3+\dots}{dx}$$

Látható továbbá, hogy a binom kifejtésében mindenesetre már a harmadik tagban, a második tagban ha a kiesett x^n-től eltekintünk, a dx-nek az elsőnél magasabb hatványon *kell* szerepelnie. Ez a binomiális tétel szerkezetéből folyik. Ámde $(dx)^2$ már másodrendű kicsi. Másodrendű kicsivel való szorzás pedig újra másodrendű kicsit ad, hacsak véges értékkel szorzunk. Még inkább áll ez a további tagokról, amelyek még harmad, negyed stb. rendű kicsiket is tartalmaznak tényezőkül. Következőleg a differenciálás számára csak az első tagot kell alkalmazni, az összes többi elhagyandó, mint elhanyagolható magasabbrendű kicsi. Marad tehát:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}dx}{dx}=\binom{n}{1}x^{n-1}=nx^{n-1}$$

Tehát itt közvetlenül megkaptuk valamely hatvány differenciálásának általános képletét. Így hangzik:

$$f'(x^n)=nx^{n-1}.$$

Hogy az algoritmus kifogástalan eredményeket szolgáltat az például kipróbálható az $y=x$, $y=x^2$ és egy állandó esetén. Az $y=x$ számára adódik $y'=1.x^{1-1}=1.x^0=1.1=1$, az $y=x^2$ számára következik $y'=2x^{2-1}=2x^1=2x$ és egy állandó esetén, amely mint $y=ax^0$ írható, eredményül kapjuk $y'=a.0.x^{0-1}=$ $=a.0.x^{-1}=0$. Ezután például a differenciálhányados $y=x^{16}$ számára egyenlő: $f'(x)=y'=16x^{16-1}=16x^{15}$. Észrevesszük, hogy a differenciálszámítás egyik sajátossága, hogy eggyel lejjebb szállítja a hatványt. Teljesség kedvéért megemlítjük még, hogy képletünk nemcsak pozitív egész, hanem éppenúgy negatív és tört kitevőkre is érvényes, tehát például $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ számára a differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

vagy ugyanaz $y=x^{-3}$ esetén $\frac{dy}{dx}=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}$ alakú. Hogy itt, negatív hatványmutató esetén, a hatvány magasabb és nem alacsonyabb lesz: ez csak látszólagos kivétel. Mert egy negatív hatványmutató törtet jelent és egy tört *kisebb* lesz, ha emelkedik a hatvány. Az illető függvénynek a differenciálás okozta eme «megkisebbedéséből», valamit ama körülményből, hogy a differenciálás egy hányadost vesz alapul: arra lehet következtetni, hogy a differenciálás a litikus, a szétoldó műveletekhez tartozik. Az integrál ellenben az összeg egy fajtája és — mint látni fogjuk — emeli a kitevőt és eátal a függvényértéket. Ezért az integrálszámítás a feléíő, a tétikus számítási műveletekhez tartozik. Így is akarjuk tárgyalni. Mindenesetre főellenérv egy ilyen besorozáshoz az a körülmény, hogy a differenciálhányados, miként az összeg és a szorzat mindig könnyen és egyértékűleg képezhető, ellenben azintegrál értékének megállapítása azáltal mutat szerkezet szerinti rokonságot az osztással és a gyökvonással, hogy a próbálgatásnak valami bizonytalanságát, többértékűségét és szükségességét hordozza magával.

A figyelmes olvasó észrevehette, hogy az eddigi differenciálszámításunknál a tetszőleges x változó mindig együttható nélkül szerepelt. Az y függő változónál ez teljesen magától értetődő. Mivel mi csak akkor differenciálunk, ha a függvényt az explicit (kifejtett) $y=f(x)$ alakra hoztuk. Egyáltalán nem magától értetődő ez az együtthatónélküliség az x-hatványoknál. Ellenkezőleg: az x-hatványok rendesen együtthatókkal jelentkeznek. Mivel továbbá az együtthatók nem mások, mint multiplikatív, (szorzó) állandók, azért rögtön meg kell vizsgálnunk, hogy vajjon a multiplikatív állandó mennyiségek éppenúgy eltűnnek-e, mint az additívok és a szubtraktívok. Megkíséreljük tehát az

$$y=3x^2+19$$

függvényt differenciálni. A Leibniz-képlet szerint

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(x+dx)^2+19-(3x^2+19)}{dx}, \text{ tehát}$$

$$=\frac{3[x^2+2xdx+(dx)^2]+19-3x^2-19}{dx}=$$

$$=\frac{3x^2+3.2xdx+3(dx)^2+19-3x^2-19}{dx}=$$

$$=\frac{3.2xdx+3(dx)^2}{dx}$$

és a másodrendű kicsi $3(dx)^2$ elhanyagolása után:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3.2xdx.}{dx}=3.2x=6x.$$

Látjuk ebből, hogy a differenciálhányadosnál megmaradnak a multiplikatív állandók mint együtthatók. Mi ugyanis ugyanazt az eredményt kaptuk volna, ha az $y=3(x^2)+19$ függvényt szétválasztva differenciáljuk, éspedig olymódon, hogy először az x^2 differenciálhányadosát keressük meg és azután szorzunk 3-mal. Az x^2 differenciálhányadosa $2x$ és ez 3-mal szorozva: $3.2x=6x$. Az additív állandó 19 mindenkép eltűnik.

Most még csak azt az esetet vizsgáljuk meg, hogy egy függvényben az x több hatványa fordul elő. Ha ezt sikeresen elintézzük, akkor már az összes úgynevezett egész racionális függvényeket és ezeken kívül az összes függvényeket tört és negatív hatványmutatóval tudjuk differenciálni, amennyiben ily alakúak: $y=ax^n\pm bx^{n-1}\pm cx^{n-2}\pm\ldots$ és így tovább. Mint mondtuk, itt az n tört vagy negatív szám is lehet.

Megkíséreljük tehát az

$$y=4x^3-7x^2+9x-26$$

függvényt a szokásos módon kezelni.

$$\frac{dy}{dx}=$$

$$=\frac{4(x+dx)^3-7(x+dx)^2+9(x+dx)-26-(4x^3-7x^2+9x-26)}{dx}=$$

$$=\frac{4[x^3+3x^2dx+3x(dx)^2+(dx)^3]-7[x^2+2xdx+(dx)^2]}{dx}+$$

$$+\frac{9(x+dx)-26-(4x^3-7x^2+9x-26)}{dx}=$$

$$=\frac{4x^3+4.3x^2dx+4.3x(dx)^2+4(dx)^3-7x^2-7.2xdx-7(dx)^2}{dx}+$$

$$+\frac{9x+9dx-26-4x^3+7x^2-9x+26}{dx}$$

az összes magasabbrendű kicsik elhagyása illetve összeadások és kivonások elvégzése után :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4.3x^2dx-7.2xdx+9dx}{dx}=12x^2-14x+9.$$

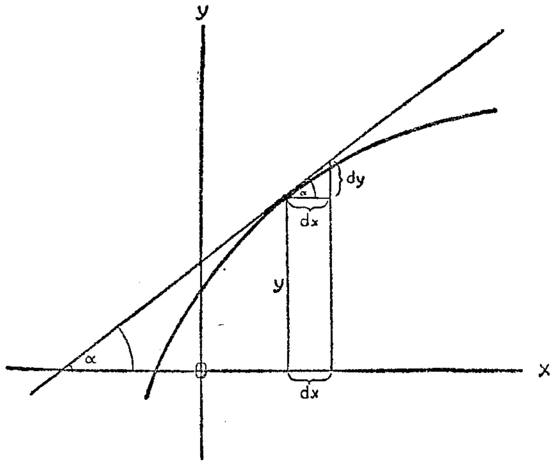
Ugyanazt az eredményt kaptuk volna, ha tagonként differenciáltunk volna. Ugyanis $4x^3$ differenciálhányadosa $4.3x^2=12x^2$, a $-7x^2$-é egyenlő $-7.2x=-14x$ és a $9x$-é $9.1x^0=9$. Az állandó (-26) természetesen elesik. Tehát most tudjuk, hogy egy összeg differenciálhányadosa egyenlő az összes összeadandók differenciálhányadosainak az összegével.[1]

Figyelmeztetésül nyomatékosan megjegyezzük, hogy egy szorzat vagy egy hányados, pl. $y=(x^2+3x+1)(5x-16)$ vagy $y=\frac{2x^2-7}{3x+9}$ differenciálásánál egyáltalán nem szabad analog járni el. Ezekben az esetekben saját képletek érvényesek, amelyek azonban túlmennek a mi kereteinken. Szabad azonban, ahol lehetséges, mindig megkísérelni a differenciálás előtt a szorzást vagy osztást elvégezni, mivel ezáltal a mi ismereteink számára hozzáférhető egész függvényt kaphatunk.

Ideje most, — mivel számításszerűleg voltaképp mindazt elintéztük, amit tudnunk kell a differenciálszámításról — hogy a differenciálhányados geometriai jelentését is megismertessük, amiből nagy alkalmazási terület adódik, t. i. a maximumok és minimumok, a legnagyobb és a legkisebb értékek vagy másként a szélsőértékek meghatározása. Tudjuk, hogy a differenciálhányados nem más, mint az infinitézimális (jobban : a tetszőleges kis) ordinátanövekmény viszonya a tetszőleges kis abszcissza növekményhez. Másként fejezve ki : hogyan viszonylik az ordinátanövekmény az abszcisszanövekményhez, ha valamely x tetszőleges kis értékkel nő?

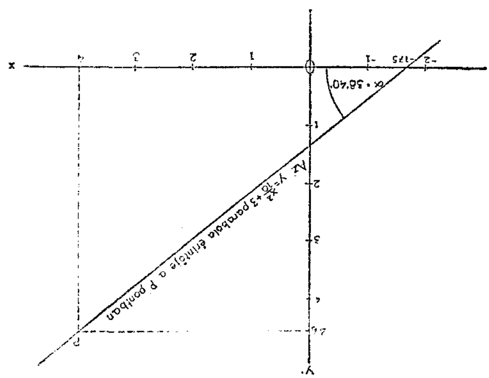
Mivel ds tudvalevőleg nem más mint az érintő egy darabja, azért meghosszabbíthatom ezt a darabot amíg metszi az

[1] Az «összeg» itt mindig mint «aritmetikai összeg» fogandó fel, tehát magában foglalja a különbséget, amit negatív együtthatójú tagok összeadásaként lehet felfogni.



55. ábra.

x-tengelyt. De a szög, amelyben az érintő az abszcissza-tengelyt metszi, egyenlő a ds és dx közötti szöggel, mivel két szár (ds és ennek meghosszabbítása) azonos, míg a másik szár, dx, feltevés szerint párhuzamos az x-tengellyel. Ha továbbá a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányadost mint trigonometrikus függvényt fogom fel, akkor el kell ismernem, hogy a szöggel átellenes és a szög mellett levő befogók viszonya nem más, mint az α szög tangensfüggvénye. Tehát a differenciálhányados számszerinti értéke a görbe minden helyén egyenlő azon szög tangensfüggvényének az értékével, amelyet e pont érintője a mindig pozitívnak gondolt abszcisszatengellyel alkot. Ebből az a roppant fontosságú következmény adódik, hogy valamely görbe analitikus egyenlete lehetővé teszi bármely görbepont pontkoordinátáinak a kiszámítását, míg eme analitikus egyenlet (függvény) differenciálhányadosa mintegy tartalmazza a görbe menetének, azaz a mindenkori érintő irányának az általános törvényét. Csak egy tetszőleges számot kell a függvénybe az x számára betenni és ezáltal rögtön meg tudjuk az y-t, azaz tudjuk, hogy hol van az illető görbe pont. Ha pedig e függvény differenciálhányadosának az x-ébe tesszük be ugyanazt az értéket, akkor az előbbieken fölül még megtudjuk, hogy mekkora a görbe eme pontjához tartozó érintő hajlása. Egy konkrét példán mutatjuk be ezt a boszorkányságot, amely lehetővé teszi érintőt rajzolni a nélkül, hogy látnók a görbét. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{10} + 3$ parabolát az $x=4$ pontban.



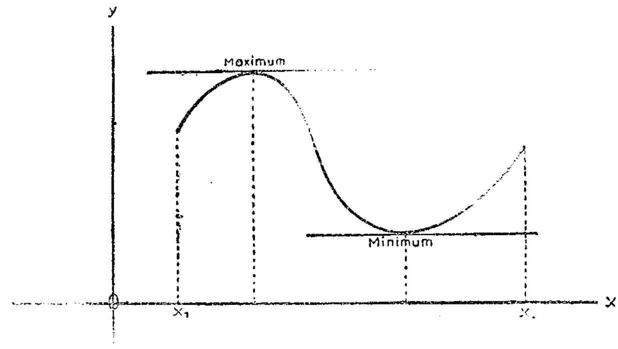
56. ábra.

Az $x=4$ esetén $y=\frac{16}{10}+3=\frac{46}{10}=4{\cdot}6$. A P pont koordinátái tehát $x=4$, $y=4{\cdot}6$. Ha differenciáljuk az $y=\frac{x^2}{10}+3$ függvényt, akkor kapjuk a $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{10}.\,2x=\frac{x}{5}$ differenciálhányadost. A P pontbeli érintő és az abszcisszatengely alkotta szög tangensfüggvénye $x=4$ esetén tehát: tang $\alpha=\frac{4}{5}=0{\cdot}8$ Ennek az értéknek körülbelül 38 fok 40 perces szög felel meg. Az érintő helyzete teh t a rajz szerinti. Ha most az egész parabolát megrajzolnók, akkor az érintőnek a kellő helyen kellő módon hajszálpontossággal kell feküdnie a parabolán.

HARMINCKETTEDIK FEJEZET

Maximumok és minimumok

A differenciálhányados ennek a tulajdonságának köszönheti, hogy felfedezték. Családfája szintén az «érintő problémákkal» kapcsolatos. Ezt a problémát a tizenhetedik században, Descartes óta, mindinkább szemügyre vették és mindjobban átkutatták. Az érdeklődésnek többek között a következő körülmény is oka volt: minden, valamilyen formában szabályos esemény lefolyása, vagy nagyságviszonyok összefüggése függvénnyel fejezhető ki és így görbével is ábrázolható. A vizsgált részen (tartományon) belül fontos lehet az a kérdés, hogy mely ponton éri el a görbe (s vele együtt a fügvény) a legmagasabb vagy legalacsonyabb pontját (értékét). E szélső értékeket maximumoknak és minimumoknak nevezik, de e kifejezések bizonyára ismeretesek már valahonnan mindenki előtt.



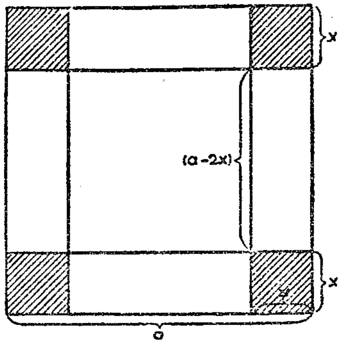
57. ábra.

A rajzból azonnal kiderül, hogy a rajta látható görbedarabnak x_1 és x_2 között egy maximuma és egy minimuma is van. Mindenki belátja továbbá, hogy az érintőnek mind a legmagasabb, mind a legmélyebb pontban vízszintesnek kell lennie, vagyis az x tengellyel párhuzamosnak. A görbét csupán meghajlított bádogszallagnak kell tekintenünk és ehhez kell vonalzót illesztenünk. Vagy még helyesebb, ha a bádogszallagot egyszerűen az asztalra tesszük, anélkül, hogy egyébként helyzetét befolyásolnók. Bizonyos, hogy érinteni fogja a vízszintes asztalt, mégpedig a legmélyebb pontjával. Mert, ha ennél még mélyebb pontja is volna, akkor be kellene az asztalba hatolnia. Most következik az a mesterfogás, amelyet Leibniz az «De maximis et de minimis... stb.» című dolgozatában (1684), a differenciálszámítás algoritmusával együtt közöl, az általa alapított legelső német tudományos folyóiratban: az «Acta Eruditorum»-ban. A következtetés: ha a differenciálhányados értelme trigonometriai tangensfüggvény, akkor értéke nulla kell hogy legyen azokon a helyeken, ahol az érintő az x tengellyel párhuzamos, vagyis ahol iránya nem tér el az abszcissza tengely irányától. Mert 0 fokú szög tangense, mint tudjuk, 0-val egyenlő. Zseniális megfordítással a differenciálhányadost nullával tesszük egyenlővé, ha maximumot vagy minimumot akarunk találni és kiszámítjuk az így adódó egyismeretlenes egyenletből x értékét. Ezen az x helyen csak az ordinátát kell a görbéig meghúznom és az esetek legnagyobb részében biztosra vehetem, hogy maximumra vagy minimumra bukkanok.

Maximumot «vagy» minimumot mondtunk. Állításunk ingadozónak, bizonytalannak látszik. Megnyugtatásul közöljük, hogy már maga Leibniz ismerte valamennyi szükséges mellékszámítást és ismertetőjelet, amelyekből kiderül, hogy adott esetben melyik szélső értékről van szó. Sokszor magáról a görbéről leolvasható, máskor egyéb körülmény teszi nyilvánvalóvá. Maga az analízis, a számításmód nem időszerű számunkra, mert számos olyan ismeretet feltételez, amely lényegesen meghaladja kereteinket. De mi bátran és merészen néhány érdekes példán fogjuk ezt a technikában és fizikában olyan fontos számítást bemutatni.

Elsőnek szinte klasszikus feladatot vegyünk. Egy bádogdarabot felül nyitott, négyzetalapú edényekké kell feldolgozni. Mily módon nyerhetünk lehető legnagyobb térfogatú (űrtartalmú) edényeket? Minthogy mindegyik edény egyetlen bádogdarabból készül, forrasztással, tehát az eredeti bádoglapot négyzetalakú részekre kell vágni s minden egyes darab egy-egy edénynek lesz az anyaga.

Minden gyermek tudja, hogy a doboz úgy készül, hogy a négyzetes nyersanyag négy sarkán egy-egy kis négyzetet kell kivágni és az így alakult oldalfalakat fel kell hajlítani. De



58. ábra.

mostan egyáltalán nem biztos, hogy mekkorák legyenek ezek a kivágott (az ábrán vonalkázott) négyzetek. Hosszuk, x, elvben 0-tól $\frac{a}{2}$-ig növekedhetnék. $x=0$ esetén a kivágandó négyzetek a négy sarokponttá fajulnának el és dobozunknak ilymódon nem lenne magassága, mivel nem volna mit felhajlítani. $x=\frac{a}{2}$ esetén az egész bádogot ki kell vágni és a doboznak nem maradna alapja. E két határeset között, amelyek feladatunk határait tűzik ki, végtelen sok dobozméret lehetséges. Olyan doboztól kezdve, amelynek úgyszólván nincsen magassága, egészen addig a dobozig, amelynek alapja elenyésző négyzetecske. Hogyan válasszam ki e számtalan lehetséges doboz közül azt, amelynek éppen a legnagyobb a köbtartalma? De ha sikerül függvénnyel kifejezni a doboz űrtartalmának és a kivágott négyzetek oldalhosszának összefüggését, akkor különféle x értékek behelyettesítésével meg tudom rajzolni az összefüggést ábrázoló görbét. A képen körülbelül megkereshetem a «maximumot», minthogy a görbének a legmagasabb pontja szolgáltatja a keresett legnagyobb értéket. De ezzel a szélső értéket még csak «körülbelül» ismerném. Már világosan látjuk, hogy pontosan csak számítással találhatjuk meg, amennyiben megkeressük azt a pontot, amelyben az érintő az x tengellyel párhuzamos, vagy aritmetikai nyelven szólva, azt az x értéket, amelynél a differenciálhányados értéke nulla. Egy szélső érték feladat ezek szerint mindig többféle műveletet kíván meg. Először ki kell tűznünk feladatunk határait, amelyeken belül a maximumot vagy minimumot keressük. Másodszor fel kell állítanunk a fügvényt, amelynek képe legmagasabb vagy legmélyebb pontjával a szélső értékeket megmutatja. Harmadszor a differenciálhányadost kell képeznünk. Negyedszer nullával kell egyenlővé tennünk a differenciálhányadost, hogy egyenletet kapjunk, amelyekben az x az ismeretlen. Ötödször szükséges ennek az egyenletnek a megoldása, ami által a keresett szélső értéket megkapjuk. Ezután következnék annak a vizsgálata, hogy tartományunkban van-e egyáltalán szélső érték és ha igen, maximum-e vagy minimum. De e két utóbbit, mint kereteinket meghaladó vizsgálatot, figyelmen kívül hagyjuk. Ezért csak olyan példákat veszünk, amelyekben ez a kérdés szinte magától megoldódik.

Most pedig pontosan felállított szabályaink szerint járunk el. Tartományként már megállapítottuk az $x=0$ és $x=a$ közötti értékeket. Most a függvényt kell felállítanunk. Mivel űrtartalmat keresünk és annak a maximumát, jelölje y az űrtartalmakat. Ezt az y-t az a (a bádognégyzet oldalhossza) és az x (a kivágott négyzetek oldalhossza) segítségével kell kifejeznünk. Ilyen derékszögű parallelepipedon[1] (négyzet alapú, derékszögű hasáb) űrtartalma azonban egyenlő alapterület szorozva magassággal. A doboz alapjának oldala $(a-2x)$, így az alap területe $(a-2x)^2$. A doboz mindenkori magassága viszont éppen x, mivel a felhajtott oldalaknak ez a szélessége. Tehát az űrtartalom, $y=(a-2x)^2x$ vagy $y=(a^2-4ax+4x^2)x$, ami kiszámítva és x fogyó hatványai

[1] Parallelepipedon alapja általában bármilyen derékszögű négyszög lehet. Esetünkben az alap egy különleges négyszög, még pedig négyzet.

szerint rendezve az $y=4x^3-4ax^2+a^2x$ fügvényt adja. Következő lépésünk a differenciálhányados képzése.

$$y'=\frac{dy}{dx}=4.3x^2-4.2ax+a^2.1.x^0$$
$$=12x^2-8ax+a^2.$$

Ezt a fügvényt kell nullával egyenlővé tennünk. Tehát

$$12x^2-8ax+a^2=0$$

A vegyes másodfokú egyenletek szabályai szerint először az x^2-et kell izolálnunk. Ha ezért az egész egyenletet 12-vel osztjuk, a következőt kapjuk:

$$x^2-\frac{8}{12}ax+\frac{a^2}{12}=0 \quad \text{vagy}$$
$$x^2-\frac{2a}{3}x+\frac{a^2}{12}=0$$

Az a ismert, állandó érték, hisz éppen a konkrét esetben választott bádognégyzet oldalhosszát jelenti. Ezért úgy használjuk, mintha konkrét szám vagy együttható volna. A vegyes másodfokú egyenletek feloldására vonatkozó szabályok szerint (225. lap) x-re a következő értéket kapjuk.

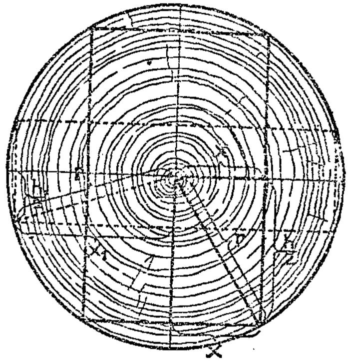
$$x=\frac{2a}{6}\pm\sqrt{\frac{4a^2}{36}-\frac{a^2}{12}}$$
$$=\frac{2a}{6}\pm\sqrt{\frac{4a^2-3a^2}{36}}$$
$$=\frac{2a}{6}\pm\sqrt{\frac{a^2}{36}}$$
$$=\frac{2a}{6}\pm\frac{a}{6}$$

x számára tehát az $\frac{a}{2}$ és $\frac{a}{6}$ érték adódik. De mivel az $\frac{a}{2}$ nem jöhet tekintetbe, mivel nincsen a tartomány *belsejében*, hanem egyik határán és még értelmetlen is, így a doboznak akkor van a legnagyobb köbtartalma, ha a bádoglap oldalának hatodát hajlítjuk fel minden oldalon. Ezek szerint az alapnégyzetnek $\frac{4a}{6}=\frac{2a}{3}$ az oldalhossza és a doboz magassága $\frac{a}{6}$. Hogy képet alkossunk magunknak számításunk helyességéről, tegyük fel, hogy a bádognégyzet élhossza 60 cm. A doboz alapja, ha a, vagyis 10 cm nagyságú négyzeteket vágunk ki, 4×4 deciméter, 16 négyzetdeciméter; magassága 1 deciméter. Így az ürtartalom pontosan 16 köbdeciméter, 16 liter. De ha 5 cm oldalhosszú négyzeteket vágnánk ki, akkor az alap területe 5×5 deciméter, 25 négyzetdeciméter volna. A magasság ez esetben 5 cm$=\frac{1}{2}$ deciméter, 25 dm^2-rel szorozva csak $12\frac{1}{2}$ dm^3, $12\frac{1}{2}$ liter ürtartalmat adna. Ha viszont a kivágott négyzetek oldalát 15 cm-nek választom, úgy az alapterület $3\times3=9$ dm^2, az ürtartalom pedig, a magasság 1·5 dm lévén, 13·5 dm^3=13·5 liter. Mindkét eredmény kisebb, mint az, amelynél a kivágást a-nak választottuk.

Ez után az előzetes gyakorlat után vegyünk egy másodikat, a szilárdságtanból. Ez már az eddigiek után lényegesen kevesebb nehézséget fog okozni.

Köralakú fatörzsből (l. 287. lap) derékszögű négyszög keresztmetszetű gerendát kell kivágni úgy, hogy a hordképessége maximum legyen.[1] A fatörzs sugara ismert és r betűvel jelöljük. Bizonyítás nélkül megadjuk, hogy milyen szerepet játszik a gerenda magassága és szélessége a teherbírás szempontjából. A «teherbírás» T=magasság négyzete, szorozva a szélességgel. Tehát $T=h^2b$. Ha tehát a gerenda félszélességét x-szel jelöljük, akkor Pythagoras tétele szerint $\left(\frac{h}{2}\right)^2=r^2-x^2$, vagy $\frac{h^2}{4}=r^2-x^2$ vagy $h^2=4r^2-4x^2$. A teherbírás érjen el maximumot. Teherbírás$=T=h^2b$. De mivel tudjuk, hogy $h^2=4r^2-4x^2$ és $b=2x$, tehát $T=y=(4r^2-4x^2).2x$ vagy másképp $y=8r^2x-8x^3$. Most megvan a függvényünk. Milyen tartomány jön tekintetbe? A szélesség ($2x$) 0 és $2r$ közt változhat, ez a képről szemmel látható. Maga a két határ értelmetlen, mivel az egyiken a gerendának nincsen

[1] A szaggatott vonallal határolt keresztmetszet a végtelen sok, más módon történő, kivágási lehetőségre utal.



59. ábra.

vastagsága, a másikon nincsen magassága. Megállapítjuk ezenkívül, hogy negativ x-ek sem érdekelnek, mivel negativ vastagságú gerenda éppen olyan értelmetlen, mint a magasság vagy vastagság nélküli. Most már képezhetjük a függvény differenciálhányadosát.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 8r^2 . 1 . x^0 - 8 . 3 . x^2$$

$$= 8r^2 - 24x^2$$

Rögtön utána nullával tesszük egyenlővé és megoldjuk x-re az így alakult egyenletet.

$$8r^2 - 24x^2 = 0$$

$$24x^2 = 8r^2$$

$$x^2 = \frac{8}{24} r^2$$

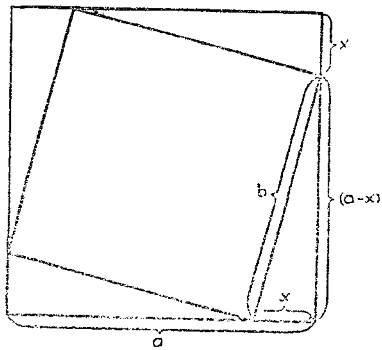
$$x^2 = \frac{1}{3} r^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{r^2}{3}}$$

$$x = \pm r \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{r}{\sqrt{3}} = \pm \frac{r\sqrt{3}}{3} = \pm \frac{r}{3} \sqrt{3}$$

Minthogy minket csak a pozítiv érték érdekel, megállapítjuk, hogy a gerenda hordképessége akkor a legnagyobb, ha szélessége $b = 2x = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$ Ha a sugár 1 dm, akkor a szélesség 1·15470 dm-nek adódik.

Befejezésül még egy minimum-feladatot. Tudvalevő, hogy egy négyzetbe végtelenül sok másik négyzet írható be. E beírt négyzetek közül melyiknek a területe a legkisebb?



60. ábra.

Tartományunk határaiként valamennyi négyzet figyelembe jön, melyeknél x 0 és a közé esik. A legnagyobb a beírt négyzet, ha $x=0$, vagyis azonos magával a nagy négyzettel. Ha mostan az x növekszik, a beírt négyzet mindinkább kisebb lesz. Igaz, hogy csak az a távolság egy, előttünk még ismeretlen pontjáig, mivel ha x elérte az a hosszát, ismét a nagy négyszög áll előttünk, csupán a beírt négyzet fordult el 90 fokkal. Most keressük a függvényt. Legyen a beírt négyzet oldala b, tehát területe b^2. Ez a terület legyen minimum, tehát $b^2=y$. De hogyan fejezem ki b^2-et x segítségével? Ismét Pythagoras tétele segít. Mert $b^2=x^2+(a-x)^2$, ezt kiszámítva $b^2=x^2+x^2-2ax+a^2=2x^2-2ax+a^2$ adódik. Elvben tehát már megvan a függvény.

A beírt négyzet területe$=b^2=y=2x^2-2ax+a^2$. A diffe-

renciálás eredménye $y'=2.2x-2a.1.x^0$, vagy $y'=\frac{dy}{dx}=4x-2a$
A régi módszer szerint a differenciálhányadost nullával teszszük egyenlővé és az egyenletet megoldjuk x-re. Tehát

$$4x-2a=0$$
$$4x=2a$$
$$x=\frac{a}{2}$$

Mivel a maximumok voltak tartományunk határai köztük kell egy minimumnak lennie. Hisz saját szemünkke láttuk, hogy a beírt négyzet az $x=0$ határtól csökkenni kezdett és az $x=a$ határnál ismét elérte eredeti nagyságát. Számításunk továbbá csak egy értéket ad e minimum számára. Tehát létezik és szimmetrikusan fekszik, pontosan 0 és a között, még pedig $x=\frac{a}{2}$ értéknél. Az olvasóra bízzuk, hogy megvizsgálja, mekkora a beírt négyzet területe, $a=1$ dm esetén, ha x helyébe egyszer a minimumot szolgáltató $\frac{a}{2}$ azaz 5 cm $=\frac{1}{2}$ dm, azután a $\frac{3a}{4}$ és az $\frac{a}{4}$ értékeket helyettesítem. Mivel a görbe szimmetrikus, a két utóbbira ugyanazt az értéket kell kapnom, s ezek mindenesetre nagyobbak az $x=\frac{a}{2}$-nél kapott minimális négyzet területénél. A területeket a $b^2=$ $=2x^2-2ax+a^2$ képlet szerint kell kiszámítani. (Megoldás: a minimum esetén $b^2=\frac{a^2}{2}$; a másik két x értéknél $b^2=\frac{5}{8}a^2$.)

HARMINCHARMADIK FEJEZET

Az integrálszámítás technikája

Ott kell folytatnunk újra, ahol félbeszakítottuk az integrálás lehetőségének a tárgyalását. Megállapítottuk ott, hogy az integrál alatti függvény pontosan úgy viszonylik a kiszámított integrál értékéhez, amiként a differenciálhányados ahhoz a függvényhez, amelyből kiszámítottuk. Tehát $F(x)=\int y'dx$ vagy $\int f'(x)dx$, mert hát $dy=f'(x)dx$ és ennek az egyenletnek mindkét oldalát integrálva $\int d\,y=\int f'(x)dx$ adódik. Az $\int dy$ azonban $F(x)$, az úgynevezett törzsfüggvény vagy egyszerűen y.

Mivel közben megismertük a differenciálszámítas alapvető számítási szabályait, azért az ismeretestől fogunk haladni az ismeretlen felé avégre, hogy megkapjunk bizonyos számítási szabályokat az integráláshoz. Egyszerűen valamely függvényt differenciálunk és azután megkíséreljük az integrálás útján újra visszaváltoztatni a differenciálhányadost a törzsfüggvénybe. E kísérletnél meg tudjuk majd világítani — legalább is így reméljük — az integrációs eljárás lényegét tisztán számítástechnikai és aritmetikai szempontbó . De ha egyszer miénk már az integrálás algoritmusa, akkor tulajdonképpen elértük könyvünk végső célját.

Válasszuk tehát «törzsfüggvény» gyanánt az

$$F(x)=y=2x^3-7x^2+x+89$$

függvényt és alkossuk meg a differenciálhányadosát. Ez így hangzik :

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=y'=2.3x^2-7.2x+1.x^0=6x^2-14x+1.$$

Már itt észrevesszük az integrálás egy fatális többértékűségét. Ugyanis a differenciálhányadosnak a törzsfüggvénybe való visszaváltoztatásakor (és éppen ez az integrálás) senki a világon nem tudja megadni, hogy mekkora volt az állandó. Még azt sem tudjuk, hogy egyáltalán volt-e állandó. Talán több állandó, vagy állandók egy szorzata vagy egy hányadosa volt az, ami differenciálásnál eltűnt sohaviszontlátásra. Ha tehát az integrál alatti függvényt valóban úgy tekintjük, mint a differenciálhányadosát valamely még előttünk ismeretlen törzsfüggvénynek, akkor logikusan nem lehet *egy* törzsfüggvényről beszélni. Bármely differenciálhányadosnak végtelen sok oly törzsfüggvény felel meg, amelyből ő előállhat. És ezek a törzsfüggvények éppen egy C additiv vagy szubtraktív állandóban különböznek. Szigorúan helyesen tehát így kell írnom: $F(x)=y=\int f(x)dx\pm C$ vagy $\int f'(x)dx+C$ ha megengedem, hogy C negatív is lehet. Az általános vagy határozatlan integrált mindig is ebben az alakban írjuk és ha nem így írjuk, akkor odagondolandó az egészen tetszőleges additív állandó. Később mutatjuk meg, hogy miként válik ártalmatlanná ez az állandó a határozott integrálnál (amelyet t. i. tényleges kiszámításnál alkalmazunk) és hogy mit jelent ez az állandó fizikailag és geometriailag. Egyelőre nem engedjük magunkat zavartatni ettől az állandótól.

Azt állítottuk tehát, hogy az $F(x)$ vagy y törzsfüggvénynek egyenlőnek kell lennie az $\int f'(x)dx$ integrállal vagy a mi konkrét esetünkben:

$$F(x)=y=\int(6x^2-14x+1)dx+C.$$

Gyakorlatilag megjegyezzük, hogy a dx mindig lezárja jobbfelől az integrál «tartalmát», úgyhogy senki sem lehet kétségben affelől, hogy a $+C$ az integrálon kívül áll. Mi most egyáltalán ügyet sem vetünk erre a C-re. És összehasonlítjuk az eredeti törzsfüggvény x-tagjait az integrál alatti megfelelő tagokkal. Evégre írjuk e tagokat először egymás alá:

x-hatványok a törzsfüggvényben:	$2x^3-7x^2+x$
x-hatványok az integrál alatt:	$6x^2-14x+1$

Először megjegyezzük, hogy — miként a differenciálásnál — integrálhatunk is «tagonként», hogyha additíve vagy szubtraktíve összekötött x-hatványokról van szó. Ezt mindjárt leszögezzük mint szabályt és írjuk:

$$\int(6x^2-14x+1)dx=\int 6x^2dx-\int 14xdx+\int 1dx.$$

Egy összeg integrálja egyenlő tehát az összeadandók integráljainak az összegével. Másodszor emlékezzünk arra, hogy az integrál infinitézimális részek egy bizonyos fajtájú összege. Egy ilyen összegnél érvényes a disztributív törvény (a megfelelő kiosztás törvénye) a változatlan, tehát állandó szorzókra (együtthatókra) nézve. Mert minden ily összegnél: $3a+3(a+h)+3(a+2h)+3(a+3h)+\ldots$ írhatom $3[a+(a+h)+$

$+(a+2h)+(a+3h)+\ldots]$ vagy egyenlő $3\sum_{0}^{n}(a+\nu h)$. Tehát szabad az integrál elé tenni az összes multiplikatív állandókat, úgyhogy így is írhatjuk:

$$\int(6x^2-14x+1)dx=6\int x^2dx-14\int xdx+1\int dx.$$

Most pedig újra vissza akarunk térni arra a kérdésre, hogy miként áll elő az integrál alatti x-hatványból a törzsfüggvény megfelelő x-hatványa. Tehát miként csinálok $6x^2$-ból újra $2x^3$-t, $14x$-ből újra $7x^2$-t és 1-ből x-et. Az első, ami feltűnik, az, hogy az integrálás az x hatványát 1-gyel emeli, ami nagyon magától értetődő, ha meggondoljuk, hogy az x-hatvány a differenciálással 1-gyel alacsonyabb lesz. Tehát általánosan $\int x^m dx =$ valami együtthatószor $\int x^{m+1}$ Mily nagy hát ez az együttható? A $2x^3$-ból $6x^2$ lett. A $6x^2$-ból ismét $2x^3$-nak kell lennie. Mivel x-nél már ismerjük az eljárást, még csak azt kérdezzük: hogyan csinálunk 6-ból újra 2-t? Nos, nagyon egyszerűen. Tudniillik 3-mal való osztással. De még nincs előttem a törzsfüggvény, csak a differenciálhányados. Mivel továbbá gyanítom, hogy az együttható változása is összefügg az x hatványával, mivel differenciálásnál is az együttható (amennyiben már nem volt készen) az x hatványa révén állott elő (vagy részben állott elő), azért meg kell kísérelnem, hogyan nyerem az együtthatót az integrál alatti x hatványából. Mivel feljebb általánosan m-nek neveztem a 2 hatványmutatót, azért a 6-ot $(m+1)$, tehát 3 által kell osztanom, hogy megkapjam a $2x^2$ együtthatóját, a 2-t. Következőleg összefoglalóan állítjuk, hogy $\int x^m dx$ egyenlő $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$. Végezzük el mindárt a próbát a mi többi hatványunknál. Miféle értékű $\int 14xdx$? Itt $m=1$. Tehát a keresett érték $\frac{14}{1+1}x^{1+1}=\frac{14}{2}x^2=7x^2$, tehát pontosan az, amit vártunk. Ha végül $\int 1dx$ iránt érdeklődünk, akkor kapjuk — mivel $\int 1\,.dx=\int x^0dx$ — értékül $\frac{1}{0+1}x^{0+1}=$ $=\frac{1}{1}x^1=x$, ami szemmelláthatóan talál. Mi tehát a félelmetes integrálszámítás algoritmusához valósággal röpülve értünk. És ezzel beváltottuk ígéretünket, hogy egyáltalán nem tűnik fel nehezebbnek az integrálparancsot követni, mint bármely más matematikai parancsot. Mindenesetre csak egész racionális algebrai függvényekre áll ez. Ezért nem is titkoljuk el, hogy bonyolultabb függvények integrálszámítása többé nem mesterség, hanem művészet. Hogy például

$$\int_0^x \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}} + \frac{k}{2}\log\left(\frac{x}{k}+\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\right)$$

azt a mi egyszerű szabályainkkal sohasem tudjuk kinyomozni. Ehhez mindenféle műfogás szükséges. Ezért az integrálokkal való gyakorlati számításokhoz külön táblázatok szolgálnak, amelyekben bizonyos nézőpontok szerint rendezett különböző alakú integrálok megoldásai megtalálhatók.

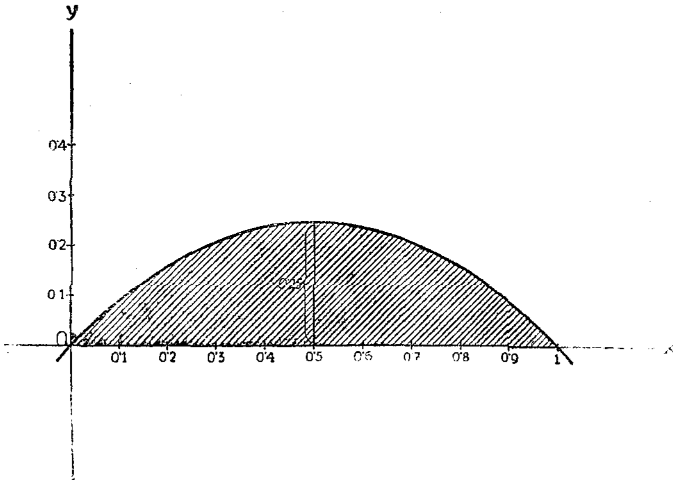
Továbbá azt sem akarjuk elhallgatni, hogy vannak integrálok, amelyek egyáltalán nem oldhatók meg. Mivel tudunk oly kifejezéseket alkotni, amelyek nem léteznek mint valamely törzsfüggvény differenciálhányadosa. T. i. nem gondolható egy oly törzsfüggvény sem, amely éppen azt a differenciálhányadost adná. De ha nincs törzsfüggvény, akkor az integrál kiszámítása sem lehetséges pontosan. Legfeljebb közelítő eredmény van. Végül megjegyezzük, hogy a gyakorlat számára bármely integrál megközelítő megoldása tetszőleges pontossággal lehetséges.

Bár megmutattuk a szerény határokat, amelyek között a mi ismereteink terjednek, mégsem akarjuk szegre akasztani a puskát. Ugyanis számtalan föladatot meg tudunk oldani, habár az integrálszámításbeli kiképzettségünk csekély. És főleg ura vagyunk az elvnek és ezáltal sok mindent megértünk, ami különben a laikus számára megoldhatatlan rejtély.

Ismét a kvadratura-probléma felé fordítjuk figyelmünket. Az a feladatunk, hogy felrajzoljuk az $y=x-x^2$ függvényt

[1] Az $y=\frac{x^2}{2k}$ parabola rektifikációja. (G. Kowalewski: Einführung n die Infinitesimalrechnung c. művéből.)

és bizonyos határok közt végzett kvadratura eredményét követeljük. Tekintve, hogy ez a görbe $x=0$ esetén a koordinátarendszer kezdőpontján megy keresztül, koordinátái $x=1$ értéken túl ismét negatívok és a görbe x növekedtével is a IV. negyedben marad, a kvadraturát csak az $x=0$ és $x=1$ közötti részen végezzük.



61. ábra.

Minden irányban kihasználjuk tudományunkat és elsősorban szélsőérték feladatként megállapítjuk a görbedarab legmagasabb pontját. Az $y=x-x^2$ görbe differenciálhányadosa $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=1-2x$. Nullával tesszük egyenlővé: $1-2x=0$. Az egyenlet megoldása: $2x=1$; vagyis $x=\frac{1}{2}$. Ez az érték szemmelláthatóan tartományunkban fekszik, hisz 0 és 1 közt pontosan közepén található. Most visszatérünk a görbe egyenletéhez behelyettesítjük az $x=\frac{1}{2}$ értéket. Ebből $y=x-x^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. A görbének tehát $\frac{1}{4}$ a legnagyobb magassága az x tengely felett, ez az eredmény az ábráról azonnal leolvasható. Azt is láthatjuk, hogy ez a maximum az $x = \frac{1}{2}$ értékhez tartozik.

Most lássuk a kvadraturát. Tudjuk már, hogy a kvadratura-feladat megoldását határozott integrál, azaz alsó és felső határral ellátott integrál szolgáltatja. Esetünkben tehát $\int\limits_0^1 (x—x^2)\,dx = ?$ Hogyan bánjunk a «határozott» integrállal? Egyszerű az eljárás. Először mintegy az általános képletet, a határozatlan integrált kell kiszámítanunk, ez megadja a kvadraturához tartozó törvényszerűséget. Tehát

$$F(x) = y = \int (x—x^2)\,dx = \int x dx — \int x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{1+1}x^{1+1} — \frac{1}{2+1}x^{2+1} = \frac{1}{2}x^2 — \frac{1}{3}x^3$$

(a C állandót természetesen ismételten ki kellett volna írnunk).

Következő feladatunk a «határok» figyelembevétele. Felületesen azt mondhatjuk, hogy ennek nagyon egyszerű a szabálya. Ez a szabály: a felső határon vett integrálértékből le kell vonni az alsó határon vett értéket. Ha általánosan az alsó határt a-val, a felsőt b-vel jelöljük, tehát az $\int\limits_a^b f'(x)dx$ áll előttünk, akkor legyen a határozatlan integrál eredménye $f(x) + C$. Most az $x = a$ és $x = b$ értékeket kell behelyettesítenünk, az eredmény $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = [f(b) + C] — — [f(a) + C] = f(b) — f(a)$. Látjuk, hogy az állandó a határozott integrál kiszámítása során feltétlenül kiesik, tehát egyértelmű eredményt kapunk. Példánkban a felső határ 1, az alsó pedig 0. Mivel a határozatlan integrál értéke $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$, be kell helyettesítenünk:

$$\left[\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3 + C\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 + C\right] =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + C - C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Ezzel első kvadratura feladatot megoldottuk.

A vonalkázott, görbe vonallal határolt terület $\frac{1}{6}$ része az x tengelyen kijelölt egységhez tartozó területegységnek. Ezt az egységet alkalmazzuk az ordináta tengelyen is. Tehát az idom területe, amint mondani szokás, $\frac{1}{6}$ négyzetegység.[1]

HARMINCNEGYEDIK FEJEZET

Középérték és határozott integrál

Nem tesszük félre az előbbi példát mindaddig, amíg még egy körülményre nem utaltunk. Az ábra alapja 1 egység hosszú, területe viszont $\frac{1}{6}$ négyzetegység, tehát ugyanakkora, mint egy 1 egység hosszú és $\frac{1}{6}$ egység magas derékszögű négyszögé. Azt mondhatná valaki, hogy mivel számtalan ordináta[2] kisebb ennél az $\frac{1}{6}$ értéknél és számtalan pedig nagyobb nála ez az $\frac{1}{6}$ a «közepes ordináta», «vala-

[1] Ha az abszcissza és az ordináta mértékegysége nem azonos, akkor az integrál a mérő egységnégyszögek számát adja meg. Ennek egyik oldala az abszcisszán, másik az ordinátán választott egység. A négyzetegység csak különleges esete egy általánosabb lehetőségnek. Mi a könyvben csak a négyzetegységekre szorítkozunk.

[2] Természetesen a tartomány határain belül.

mennyi ordináta középértéke», az «átlagos ordináta». De, hogy ezt megérthessük, jobban szemügyre kell vennünk a «középérték» fogalmát, amit a mindennapi nyelvhasználat «átlagnak» nevez. A legegyszerűbb középérték az úgynevezett számtani közép. Minden gyerek már szinte ösztönszerűen így számol átlagot. Legyen három almának sorban 5 cm, 10 cm, 15 cm az átmérője, akkor az átlagos almának az átmérője 10 cm. Vagy ha először 80 fillérért, másodszor 90 fillérért harmadszor 95 fillérért, negyedszer pedig 99 fillérért veszek egy kilogramm cukrot, akkor tudom, hogy egy kilogramm cukornak az átlagos ára $\frac{80+90+95+99}{4}=91$ fillér. A számtani (aritmetikai) középértéket általában a $M_A=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$ képlettel számítják.[1]

Esetünkben azonban nem véges számú, hanem végtelen sok ordinátának a középértékét (a «közepes ordinátát») kell meghatározni. Ha $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ldots$ jelöli az ordinátákat akkor $M_A=\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_\infty}{\infty}$ értékét kellene meghatározni. Szemmel látható, hogy ez így nem határozható meg. De ha a középérték meghatározást infinitézimálszámítási feladatnak tekintjük, akkor megkaphatjuk a keresett eredményt. Mert a végtelen sok ordináta összege nem egyéb, mint a kvadratura eredménye: a terület, tehát a tartományra vonatkozó határozott integrál. De mi lesz a nevező? Bizonyára az ordináták száma. Tehát mintegy a számvonalnak az ordináták talppontját tartalmazó része. De ez ismét nem más, mint az x tengelynek a tartományt határoló része. A középérték tehát ezzel az írásmóddal:

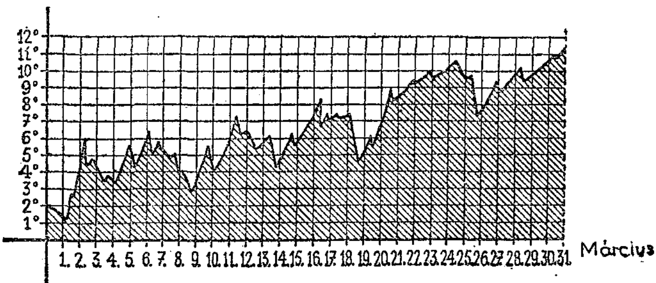
$$\frac{\int_a^b f'(x)dx}{b-a}.$$

[1] Az úgynevezett geometriai középérték $M_G=\sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n}$ az n érték szorzatából vont n-edik gyök.

Próbáljuk ki tehát ezt a képletet előbbi példánkon, mielőtt még jelentőségéről gyakorlati példa kapcsán meggyőződnénk. Meghatároztuk az $\int_0^1 (x-x^2)dx$ integrál értékét és területként az $\frac{1}{6}$ értéket kaptuk. Tehát ez az $\frac{1}{6}$ a számláló. A nevező a határok különbsége: $1-0=1$. Tehát az ordináták középértéke esetünkben

$$M_A = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$$

Bizonyára látott már mindenki úgynevezett regisztráló műszert. Van ilyen hőmérő, légnyomás mérő, stb., amely maga jegyzi fel a mutatott értéket. Az írókar dob fölött mozog, a dobra kifeszített milliméterpapíron jelek vannak, amelyek a napokat és órákat mutatják. Ezek a beosztások a kerületen vannak, míg a dob magassága irányában a hőmérsékletnek, légnyomásnak stb. megfelelő beosztások láthatók. A dobot óramű hajtja, pontosan a beosztásoknak megfelelő módon, az íróműi tolla viszont a légnyomást, hőmérsékletet követi felfelé és lefelé irányuló mozgásával. Mivel pedig a levegőnek mindenkor, minden időpillanatban van hőfoka, nyomása stb., bizonyos, hogy a felrajzolt görbe mindenütt folytonos és differenciálható. De a rajzolt görbe annyira bonyolult alakú, hogy a gyakorlatban lehetetlen számára képletet felírni. Ha például egy hónap után a papírt leveszszük a dobról, akkor ezt a képet látjuk rajta.



62. ábra.

A március hónap közepes hőmérséklete érdekelne minket. Most azt az ügyes fogást fogjuk bemutatni, amellyel ezt minden különösebb számítás nélkül meg tudjuk határozni. Így gondolkozunk: nem ismerjük a görbe egyenletét és nem is áll módunkban meghatározni. Pedig szükségünk volna rá, hogy a területet meghatározzuk. De az integrál értéke a görbe, a tartomány első és utolsó ordinátája és az x tengely által határolt terület. Vágjuk ki tehát ezt a területet éles ollóval papírból, mérjük le preciziós mérlegen, vágjuk ki továbbá ugyanabból a papírból a területegységet is. Mérjük meg ennek a súlyát is és most a súly alapján egyszerűen osztással meghatározhatjuk a területet, azaz az integrál értékét. A négyzetegység oldalának például az 1°-nak megfelelő távolságot vehetjük s legyen ugyanekkora az egy napnak megfelelő távolság. Most már nem kell egyebet tennünk, mint a súlyméréssel meghatározott területet (b—a)-val, itten (31—0)=31 értékkel elosztani. Ezzel megkaptuk infinitézimális pontossággal a hónap közepes hőmérsékletét, mint a hónapban előfordult végtelen sok hőmérséklet átlagát. A «függvényről» még csak azt kell megjegyeznünk, hogy itt a hőmérsékletet az idő függvényének tekintettük. Megjegyezzük továbbá, hogy nem feltétlenül szükséges a napokat az x egységének tekinteni. Úgy is eljárhattunk volna, hogy az x hosszt egyszerűen az y egységével mérjük és ez esetben is a helyes középértéket kapjuk. Írjuk még fel végül fogásunkat matematikai alakban:

$$\frac{\text{A mérlegelés eredményeként kapott } n \text{ területegység} = \int_a^b f'(x)\,dx}{b-0},$$

itt b-t a négyzetegység oldalhosszával egyenlő egységekben kell mérni. Ez a példa megmutatja a gondolatban végzett műveletek nagy jelentőségét. Mert valóságban csak súlyt mértünk, osztottunk és számoltunk. Integrálásról szó sem volt. Mégis, fogásunk jogosultságát csak az integrálszámítás igazolhatta, mert ilyen megfontolások nélkül végtelen sok ordináta középértékét sehogyan sem kaphattuk volna meg.

Mielőtt még további kvadraturákkal foglalkoznánk, tanulmányozzuk a határozott integrál ama tulajdonságát, amely a kezdőnek sok fejtörést okoz. Az integrációs állandó eltűnéséről van szó. Rámutattunk már arra, hogy a felső határhoz tartozó integrálérték és az alsó határhoz tartozó integrálérték kivonásánál az állandónak el *kell* tünnie. Közömbös, hogy az állandónak mekkora az értéke. Legyen a határozatlan integrál $\int f'(x)dx$, és ehhez járuljon a C állandó, akkor a kiszámításnál az integrál értéke mindenkor ilyen alakú volna:

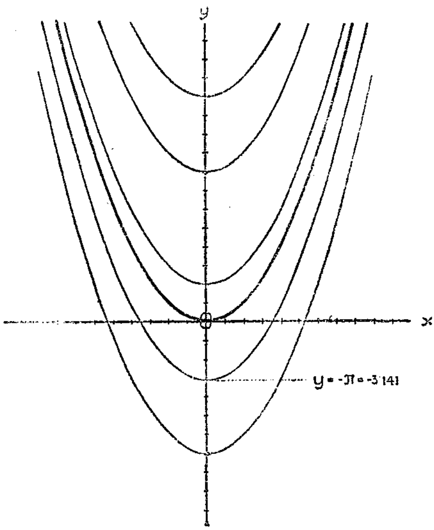
$$\left(\int f'(b)dx+C\right)-\left(\int f'(a)dx+C\right)=f(b)+C-f(a)-C=f(b)-f(a).$$

Geometriai szempontból a kivonás két terület különbségét jelenti. Végeredményben. Mert amíg az állandó szerepet játszik, addig két ordináta különbségéről van szó. Ahhoz, hogy ezt helyesen megérthessük, a differenciálgörbe és integrálgörbe fogalmával kell közelebbről megismerkednünk. Tudjuk, hogy minden függvénynek görbe felel meg az analitikában. Egyik korábbi példánkban az $y=x-x^2$ függvényről volt szó. Ennek a függvénynek megfelelő görbét egészben, vagy legalább is részben megrajzolhatjuk, amint a 61. ábrán (294. lap) meg is tettük. Ha most a függvényt integráljuk, akkor az eredmény

$$F(x)=\int(x-x^2)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C$$

ismét függvénye az x-nek, tehát szintén felrajzolhatjuk. Ezt a törzsfüggvényt nevezzük az eredeti $y=x-x^2$ függvény integrálfüggvényének. Csak a C értékéről nem tudunk semmit. Pozitív és negatív is lehet, vagy akár 0, nem tudjuk. Mit jelent analitikai szempontból egy ilyen additiv állandó? Eláruljuk: a görbe maga ugyanaz marad, alakja nem változik, akár ott van az állandó, akár nincs. Az állandó csak az egész görbét tolja el a koordináta rendszerben. Az $y=x^2+C$ parabolát látjuk a 63. ábrán, különböző helyzetben, aszerint, hogy mekkora a C értéke.

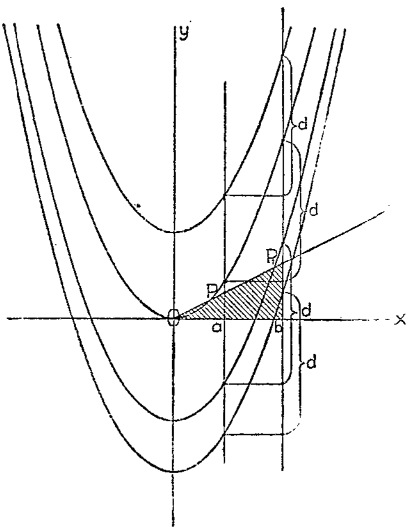
Tekintve, hogy a C bármely értéket $+\infty$ és $-\infty$ közt felvehet, minden határozatlan integrál görbesereget jelent; s ezek a görbék olyan sűrűen vannak egymás mellett, hogy valójában az egész síkot beborítják. Az integrál eme tulaj-



63. ábra.

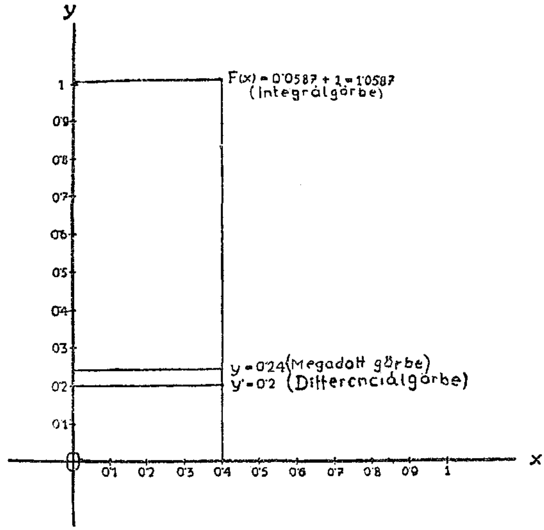
donságának a fizikában van nagy szerepe. Ha sikerült valamely tartományra (területre vagy térrészre) úgynevezett differenciálegyenletet felírni, akkor ezzel meghatároztuk a tartomány minden pontjának valamely tulajdonságát. A differenciálegyenletnek a megoldását ugyanis éppen integrálással kapjuk meg. És ez az integrál, az állandó helyes megválasztása után, bármely pont állapotát meghatározza. De ezt csak mellékesen említjük. Most már tudjuk, hogy végtelen sok integrálgörbe létezik, s ezek egymástól az állandó hatására csak helyzetükben különböznek, egyébként egybevágók. Ha az $y' = \frac{x}{2}$ görbét kell integrálnunk, akkor integrálgörbeként az $F(x) = \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4} + C$ görbesereget kapjuk. Bármely határozott integrál ilyetén-képpen $\int_a^b \frac{x}{2}\,dx = \left(\frac{b^2}{4} + C\right) - \left(\frac{a^2}{4} + C\right) = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ alakban adódik. De tekintve továbbá, hogy $\frac{x^2}{4}+C=F(x)=y$ általában az integrálgörbe ordinátáját jelenti, látjuk, hogy a határozatlan integrál az integrálgörbének valamely ordinátáját, a határozott integrál viszont két meghatározott ordinátájának különbségét adja meg. Még pedig az integrációs tartomány első és utolsó ordinátájának a különbségét. Rajzon fogjuk ezt könnyebb megértés kedvéért bemutatni, még pedig olyan rajzon, melyen az integrálandó $y=\frac{x}{2}$ függvényen kívül néhány integrálfüggvénygörbe is látható. Az integrációs tartománya az a és b közötti rész.

Könnyen észrevehető, hogy a meghatározandó terület a vonalkázott OP_1b és OPa háromszög területének különbsége $OP_1b—OPa$. Ezt a területet adná az integrálgörbék ordinátáinak különbsége. Az ábrán világosan látható, hogy az ordináta-különbség valamennyi görbén ugyanakkora, a határozott integrál értéke tehát valóban teljesen független a határozatlan integrál állandójának értékétől.



64. ábra.

Beszéltünk még differenciálgörbéről is. Tekintsük ismét előbbi példánkat, $y=x-x^2$. Ennek integrálja $F=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C$. Amidőn a görbének szélső értékét kerestük, még egy harmadik $\frac{dy}{dx}=f'(x)=y'=1-2x$ függvénnyel is találkoztunk. Természetesen ennek is megfelel egy görbe. Most tehát árom görbénk van. Egyik a megadott $y=x-x^2$ függ-



65. ábra.

vénynek megfelelő görbe, másik az integrálgörbe (válasszuk példánkban a C-t $+1$-nek), harmadik a differenciálgörbe $y'=1-2x$. Rajzoljuk meg a három görbének az $x=0{\cdot}4$ értékhez tartozó ordinátáit. Természetesen megrajzolhatnók milliméterpapíron az egész görbét is, de ezt már az olvasóra bízzuk.

A három görbének 0·4-hez tartozó ordinátája $y=0{\cdot}24$ (megadott görbe), $F=1{\cdot}0587$ (integrálgörbe) és $y'=0{\cdot}2$

differenciáigörbe). Kíséreljük meg most az integrálgörbéhez tartozó differenciálgörbét meghatározni. $F=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C$ lévén $\frac{dF}{dx}=2\cdot\frac{1}{2}x-3\cdot\frac{1}{3}x^2=x-x^2$, ez pedig meglepetésünkre az eredeti görbe. Ha viszont a differenciálgörbét integráljuk: $y'=1-2x$; $\int(1-2x)\,dx=\int 1.dx-\int 2xdx=$ $=\frac{1}{0+1}x^{0+1}-2\frac{1}{1+1}x^{1+1}=x-x^2$ ismét az eredeti görbéhez jutunk. Pontosabban: ha az itt fellépő állandót 0-nak vesszük, akkor jutunk az eredeti görbéhez. Most már nyitva áll előttünk az egész szerkezet: a differenciálgörbét integrálva az eredeti görbéhez, ezt integrálva viszont az integrálgörbéhez jutunk. Továbbá: ha az integrálgörbét differenciáljuk, az eredeti görbét kapjuk, ha ezt ismét differenciáljuk, akkor kapjuk a differenciálgörbét. Ha még a magasabb differenciálhányadosokat is tekintetbe vennők, valamint ismernők a többszörös integrálokat, akkor fokozatainkat mindkét irányban korlátlanul folytathatnók, illetve addig, amíg végül valamelyik differenciálhányados esetleg el nem tűnik. De ez csak egyes nem periodikus függvényeknél következhetnék be

HARMINCÖTÖDIK FEJEZET

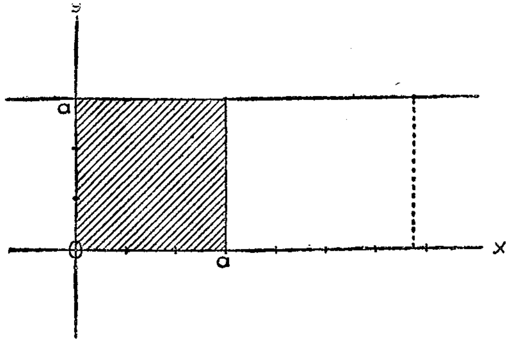
További kvadraturafeladatok

Az előbbi megállapítások után, amelyeket sajnos nem folytathatunk, próbáljuk ki az integrál algoritmusát egy határeseten. Azt a tréfát fogjuk magunknak megengedni, hogy a négyzet területét határozzuk meg kvadratura segítségével. A négyzetünket határoló «görbe» természetesen egyenes, amely az x tengellyel párhuzamos. Az x tengelytől mért távolsága a négyzet a oldalhossza.

A görbe egyenlete $y=a$, vagy, ha az x-et becsempésszük, $y=ax^0$. Ahhoz, hogy négyzetet kapjunk, $x=0$-tól $x=a$-ig kell integrálnunk. Írjuk tehát: $F=\int_0^a ax^0dx=a\int_0^a x^0dx$. A határozatlan integrál eredménye

$$F = a\int x^0 dx = a\frac{1}{1+0}x^{+1} + C = ax + C.$$

A határozott integrál ezáltal: $F = (a.a + C) - (a.0 - C) = a^2 - 0 = a^2$ s ezzel a négyzet területét integrálással határoztuk meg. E példánkban az integrálgörbe egyenes, egyenlete $ax+C$. Meg kell még jegyeznünk, hogy ez a mód a derékszögű négyszögnek általában is megadja a területét. Terjed-



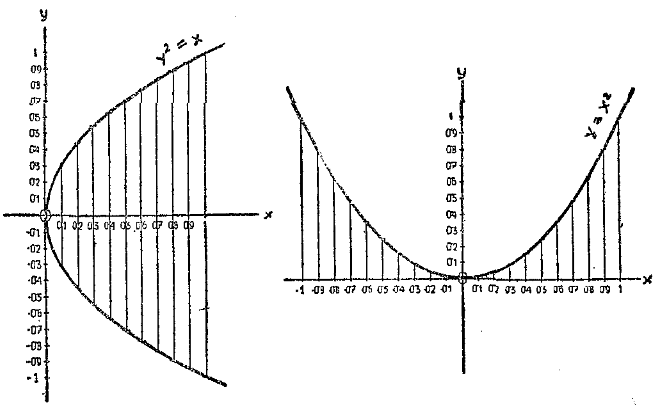
66. ábra.

jen ugyanis az integrálás tartománya nem 0-tól a-ig, hanem 0-tól b-ig, akkor a határozatlan integrál változatlan marad, mert az eredeti $y=ax^0$ sem változott. A határozott integrál viszont a következő eredményt adja:

$$F=(a.b+C)-(a.0+C)=ab-0=ab,$$

ez pedig a derékszögű négyszög területének a képlete. Megjegyezhetjük még, hogy az integrál a magasságú derékszögű négyszögek területet adta meg és csak speciális esetként kaptuk az $x=a$ helyen a négyzet területét.

Most a parabola kvadratuáját fogjuk integrálszámítással megoldani, azt a feladatot, amellyel már Archimedes is foglalkozott. Erre ő a következő képletet vezette le: parabolaszelet területe = beírt háromszög területe $\times \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right) =$ = beírt háromszög területe $\times \frac{4}{3}$. Az iskolában a parabola egyenletét rendszerint $y^2=2px$ alakban tanuljuk. Ez azonban a parabola egyenletének nem a legegyszerűbb alakja, hanem annak úgynevezett inverz függvénye. Ha azt a parabolát vizsgáljuk, amelynek paramétere $p=\frac{1}{2}$, akkor az $y^2=2px$ egyenletből az $y^2=x$ egyenlet, vagy másképpen írva az $y=\sqrt{x}$ egyenlet lesz. A függvénytan és az analitikai geometria szerint valamely függvényben az x és y felcserélése a görbének 90 fokkal történő elfordulását eredményezi. Az $y^2=x$ parabolát vízszintes fekvésűnek mondhatnók, mert főtengelye vízszintes, azonos az x tengellyel, az $y=x^2$ parabola viszont függőlegesnek mondható.

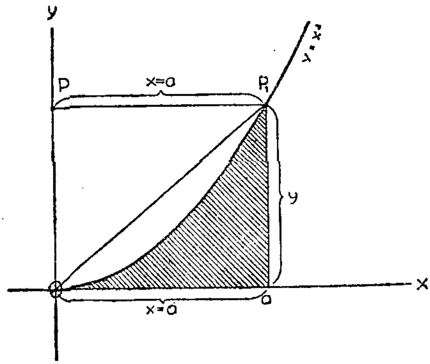


67. ábra.

Egyik görbe a másiknak «inverz görbéje», a függvények egymásnak inverz függvényei. De mindezt csak azok megnyugtatására említjük, akik lelkiismeretfurdalást éreznek, ha a két egyenletet felváltva olvassák a parabola egyenleteként.

Archimedes eljárásának megfelelően rajzoljunk egy fél parabolaszeletbe egy háromszöget.

Az integrálszámításnak elsősorban a rajzon vonalkázással jelölt terület hozzáférhető, ez a terület az $x=0$-tól $x=a$-ig



68. ábra.

terjedő integrációs tartomány. Görbénk egyenlete $y=x^2$, ennek határozatlan integrálja $F=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$. Mivel mi az $F_{(0,\,a)}=\int\limits_0^a x^2dx$ határozott integrál értékét akarjuk tudni, a következő műveletet kell végeznünk:

$$F_{(0,\,a)}=\left(\frac{1}{3}a^3+C\right)-\left(\frac{1}{3}0^3+C\right)=\frac{a^3}{3}.$$

De mekkora a parabolaszelet területe? Kivonással igen egyszerűen megkaphatjuk. Az $x=a$ és az y oldalakból alkotott derékszögű négyszög területéből le kell csak vonni az imént kiszámított, vonalkázott területet. Az eredmény $ay-\frac{a^3}{3}$. De az eredeti függvény szerint, vagyis $y=x^2$, $x=a$ esetén $y=a^2$. Ennek következtében

$$ay-\frac{a^3}{3}=a.a^2-\frac{a^3}{3}=a^3-\frac{a^3}{3}=\frac{3a^3-a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3$$

De Archimedes mértékegysége nem az a volt, ő a területet mint a beírt nagy háromszög területének többszörösét adta meg. Tehát a beírt OPP_1 háromszög területét kell még meghatároznunk. Ez a háromszög derékszögű, befogói y és $x=a$. Területe tehát $\frac{y.a}{2}$ vagyis $y=x^2=a^2$ lévén $\frac{a^3}{2}$. Ennek a háromszögnek a területét szorozza Archimedes az $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$ sor összegével, $\frac{4}{3}$-dal. Tehát a parabola-szelet területe Archimedes szerint $\frac{a^3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}a^3$, vagyis ugyanazt az eredményt kaptuk, mint integrálszámítással. S ehelyen őszinte csodálattal adózunk Görögország emelkedett szellemének és fejet hajtunk Eudoxusnak és Archimedesnek, az integrálszámítás első úttörőinek lángesze előtt.

Természetesen integrálszámítással a «fekvő» parabola ($y^2=x$ vagy $y=\sqrt{x}$) területét közvetlenül is meghatározhatjuk. Meglátjuk ezen a példán, hogy az integrál algoritmusa tört kitevőjű hatványokra is könnyen és egyszerűen alkalmazható. Hogy az előbbi példával való összecserélés lehetőségét elkerüljük, terjedjen tartományunk ezúttal $x=0$-tól $x=b$-ig. E jelölést alkalmazva, az $F=\int_0^b\sqrt{x}dx=\int_0^b x^{\frac{1}{2}}dx$ értékét kell meghatároznunk. b jelöli a parabola tengelyének a parabola csúcsától a szeletet határoló húrral való metszéspontjáig terjedő darabját, tehát pontosan azt a darabot, amelyet az 54. ábrán b-vel jelöltünk. A számítás menete: $\sqrt{x}$ határozatlan integrálja $=F=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C=$ $=\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. Ha most a 0 és b határokat behelyettesítjük, akkor a határozott integrál

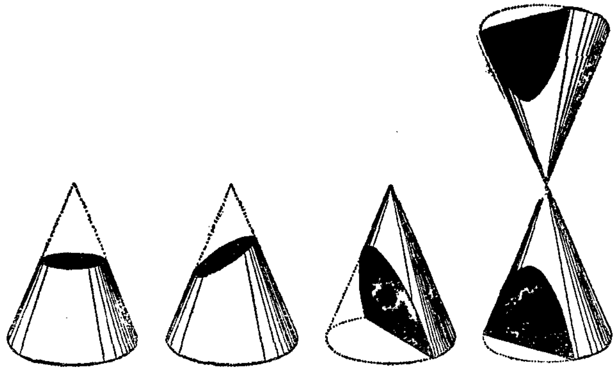
$$F=\int_0^b x^{\frac{1}{2}}dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{b^3}+C\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{0^3}+C\right)=$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{b^3}=\frac{2}{3}b\sqrt{b}.$$

De a «fekvő» parabola esetén b az «Archimedes-féle nagy háromszögnek» egyik befogója, a másik viszont a húr fele $\sqrt{b}$ (a parabola $y=\sqrt{x}$ egyenlete alapján), így a háromszög területe $\frac{b\sqrt{b}}{2}$; ezt kell a végtelen $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$ sor összegével, $\frac{4}{3}$-dal megszoroznunk. A parabola területeként így $\frac{4}{3}\cdot\frac{b\sqrt{b}}{2}=\frac{2}{3}b\sqrt{b}$ eredményt kapjuk, tehát pontosan ugyanazt, mint integrálással.

Most már olyan nagy gyakorlatunk van az integrálszámításban, hogy egyszerű negatív kitevőjű hatványfüggvény, $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ integrálását is megpróbálhatjuk. Az $y=\frac{1}{x}$ egyenlet hiperbolát jelent, ágait könnyű jól választott x értékek segítségével koordinátarendszerben felrajzolni. Ha $x=1$, akkor y szintén $=1$, de nem tudjuk a görbének az x vagy az y tengellyel való metszéspontját megtalálni. Mert ha az x mégoly nagyra növekszik is, az y nem lesz sohasem 0, ha pedig x helyébe 0 értéket helyettesítjük, akkor $y=\frac{1}{0}$, ezt pedig mi ∞ jellel szoktuk jelölni. Görbénknek két ága tehát megmarad az I. illetve III. síknegyedben és a koordinátatengelyek a hiperbolának úgynevezett aszimptotái, vagyis olyan egyenesek, amelyekhez a görbe mindinkább közeledik, anélkül, hogy valaha is elérné őket.

De szúrjunk itt közbe valamit. A kör, az ellipszis, a parabola és a hiperbola úgynevezett másodrendű görbék, mert egyenletük másodfokú. Ne tévesszen meg senkit a hiperbola egyenletének nevezőjében első hatványon szereplő x. Ez a függvény mégis másodfokú, mert törtek alkalmazása nélkül sem az x, sem pedig az y nem izolálható. Másodfokú görbék geometriai szempontból kúpszeletek.

A görbéknek a kúpon elfoglalt helyzete mindenkinek, aki csak valamelyes geometriai érzékkel rendelkezik, megmutatja, hogy a hiperbola (és éppen így a parabola) mindinkább szélesedik, a kör és az ellipszis viszont zárt görbe vonal.



Az alappal párhuzamos metszet kör

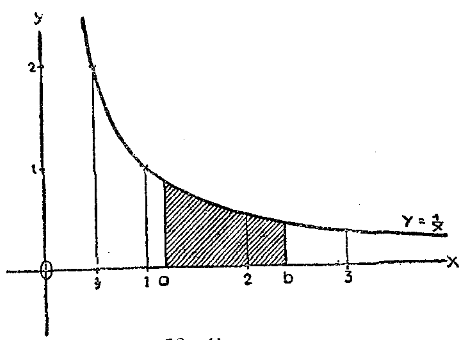
Valamnyi en alkotót a végesben metsző, az alappal szöget bezáró metszet: ellipszis

Egy átellenes alkotóval párhuzamos metszet: parabola

Általános, két alkotóval párhuzamos metszet: hiperbola

69. ábra. Az egyenes körkúp síkmetszetei.

A következő ábra még mást is mutat. Azt, hogy a hiperbola kvadraturája alighanem minden további nehézség nélkül, feltétlenül lehetséges.



70. ábra.

Az $x=a$ és az $x=b$ közötti darab, mondjuk, valószínűleg nagyon könnyen meghatározható, hisz ismerjük az $y=\frac{1}{x}$ függvényt és ez még nagyon egyszerűnek is látszik. Szokás szerint határozzuk meg először a határozatlan integrált: $F(x)=\int\frac{1}{x}dx=\int x^{-1}dx$. Annak idején megállapítottuk, hogy $\int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}$, bármekkora pozitív vagy negatív, egész vagy tört szám is az m. Most derül ki, beválik-e itt is algoritmusunk? Tehát

$$F(x)=\int x^{-1}dx=\frac{1}{-1+1}x^{-1+1}+C=?$$

Kétségbeesetten akadunk meg. Mert határozatlan integrálunk, amelyből a határozottat alakíthatjuk, az $\frac{1}{0}\cdot x^0=$ $=\frac{1}{0}\cdot 1=\frac{1}{0}$ értéket veszi fel. Ilyesmi még nem esett meg velünk. Mert minden behelyettesítés már eleve értelmetlenségre vezet. Ilyenre

$$(\infty\, b^0+C)-(\infty\, a^0+C)=\infty-\infty$$

ha ezt egyáltalán szabad számításként alkalmaznunk. Pedig a vonalkázott idomot, amelynek a területét a kvadratura eredménye megadja, ott láthatjuk az előbbi ábrán. Tehát van olyan eset, s ez az egyetlen, amelyre az $\int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}+C$ képlet nem alkalmazható. Ez az x^{-1} vagyis az $\frac{1}{x}$. Így írják tehát általában a képletet $\int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}$, $[m\neq -1]$ s ez azt jelenti, hogy m nemegyenlő -1, vagyis nem veheti fel a -1 értéket. Az áthúzott egyenlőségi jel jelentése nem egyenlő, különböző.

Most már elárulhatjuk, hogy szándékosan vittük jégre az olvasót, hogy érzékeltessük azt az ijedséget, amelyet az integrálszámítás első felfedezői éreztek, amidőn erre a folytonossági hiányra bukkantak. Leibniz ugyan tudta, más kutatásai révén, hogy ezt a hiányt el lehet tüntetni, de abban az időben nagy volt még e téma körül a bizonytalanság és sokan az infinitézimálszámítás ellen irányuló támadásaik olcsó céltáblájának használták e hiányosságot, mások pedig a matematika szégyenének érezték.

Nekünk epigonoknak már könnyű a helyzetünk, mert a megoldást olyan részletesen ismerjük, hogy szinte zsonglőrszerűen, tetszésszerinti oldaláról mutathatjuk be. A megoldás kabbalájának kulcsszava a «logaritmus», s ezt kimondva világosság derül az egész kérdésre. S ezt a rejtélyt sem hagyjuk megoldatlanul, habár célunkat, azt, hogy az olvasót az egyszeregytől az integrálig elvezessük, immár elértük.

De szóljunk még néhány szót a rektifikációról. Említettük, hogy a görbék ívhossza is meghatározható integrálszámítás, mégpedig az $\int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ kiszámítása segítségével. Példát erre, sajnos, nem mutathatunk, mivel itt olyan komplikált integrálok kerülnek elő, amelyeknek megoldásához rendelkezésre álló eszközeink elégtelenek. De hogy valamit mégis mutassunk, ide írjuk, hogy az $y=kx^2$ parabola $x=0$ ponttól az $x=x$ pontig terjedő ívhosszát a $\int_0^x \sqrt{1+4k^2x^2}dx$ integrál adja meg. Számos, sokszor igen merész közbenső műveletet megkívánó átalakítás után eredményként a következő képlet adódik:

$$\text{Parabolaív} = s = \frac{1}{2} x\sqrt{1+4k^2x^2} + \frac{1}{4k}\,{}^{e}\log\left(\sqrt{1+4k^2x^2}+2kx\right)$$

a k tetszésszerinti pozitív vagy negatív, egész vagy tört, racionális vagy irracionális állandót jelent.

HARMINCHATODIK FEJEZET

Logaritmus

Ha arról a magaslatról, ahová eljutottunk, visszapillantunk és seregszemlét tartunk a számítási műveletek fölött, a következőket találjuk:

Tetikus műveletek.	Litikus műveletek.
1. Összeadás	Kivonás
2. Szorzás	Osztás
3. Hatványozás	Gyökvonás
4. —	—
5. Integrálás	Differenciálás.

De miért üres összeállításunk 4. számú helye? Egyszerű a válasz: a 4. szám logaritmus-számításnak, a logaritmusnak a helye. Magyarázzuk meg először a szót. A logaritmusnak nyelvészetileg semmi köze sincs az algoritmushoz. Tudjuk, hogy az algoritmus nem egyéb, mint az arab Alchvarizmi név eltorzult alakja. A logaritmus viszont a «logos arithmos» kifejezésből származik, jelentése «helyes viszony». A logaritmusokat Michael Stifel s tőle függetlenül Sir John Napier (Nepernek is nevezik) találta fel.

De nem töltjük időnket történelmi visszapillantásokkal, ha mégoly érdekesek is, hanem éppolyan biztosan és bátran áthaladunk az utolsó lépcsőfokon, mint az eddigieken.

Beláthatjuk, hogy a hatványozásból a függvényeknek két különböző típusa származhat. Az egyik az, amellyel eddig kizárólag dolgoztunk, vagyis hogy y egyenlő x felemelve az n-dik hatványra, s itt az n valami állandót jelent. Ezzel megismertük az x^0, x^1, x^2,...x^n kifejezéseket. Ezek valamennyien úgynevezett hatványfüggvények. A megfelelő. ellentétes művelet volt a gyökvonás. Ha $x^n=y$, akkor $x=\sqrt[n]{y}$ Természetesen a megfordítás (inverzió) is lehetséges. Azt is írhatnók, hogy $y^n=x$ és $y=\sqrt[n]{x}$. De az is elképzelhető, hogy a hatványkitevő nem állandó, hanem a független változó áll a kitevőben. Tehát így: $y=a^x$. Akkor nem a következőt kérdezzük: «mi az eredmény, ha egy tetszésszerinti x értéket az n-dik hatványra emelek?», hanem azt: «mi az eredmény, ha egy állandó a számot tetszésszerinti x hatványra emelek?» Ezt a függvényt, amelynél a változó a kitevőben van, *exponenciális* függvénynek nevezzük. De, hogy a dolog teljesen világos legyen, válasszunk egy példát. Mindkét esetben vegye fel a független változó az 1, 2, 3, 4 értékeket. Az állandó legyen mindkét esetben 5. Akkor a hatványfüggvény, $y=x^n$, $n=5$ esetén az $1^5=1$; $2^5=32$; $3^5=243$ és $4^5=1024$

értékeket veszi fel. Az exponenciális függvény, $y=a^x$, $a=5$ esetben sorban az $5^1=5$; $5^2=25$; $5^3=125$ és $5^4=625$ értékeket adja. Világos, hogy $y=x^n$ alapján, mondjuk $y=1024$ és $n=5$ ismeretében az x értékét az ismert $\sqrt[5]{1024}=4$ művelettel kiszámíthatjuk. Az exponenciális függvény, $y=a^x$ megfordított műveletét kereső kérdés egészen más. Még pedig: «milyen hatványra kell az ismert $a=5$ állandót emelni, hogy az $y=125$ eredményt kapjam?» Az sem segít, ha felírjuk, hogy $\sqrt[x]{125}=5$. Mert x-edik gyököt semilyen általunk ismert művelettel sem tudunk vonni. Teljesen egyszerű viszonyok között, kísérletezve, esetleg megtalálhatnók az eredményt. Ám kíséreljük meg azt meghatározni, hogy hányadik hatványra kell a 10-et emelni, hogy az eredmény 2 legyen, azonnal tudatára jutunk, hogy az exponenciális függvény problémájával szemben tehetetlenek vagyunk, ha annak a litikus, megfordított, műveletéről van szó.

Tehát mégegyszer: $y=a^x$, keressük, mekkora az x, ismert a és y esetén. Ez a megfordított, litikus művelet a logaritmus. Ha $y=a^x$, akkor x az y-nak az állandó a alapra vonatkozó logaritmusa. Így írjuk: $x={}^a\log y$. Ez a függvény is megfordítható és a logaritmikus függvényként $y={}^a\log x$ is írható. Ezzel a kérdés is úgy módosul, hogy milyen y hatványkitevőre kell az állandó a alapot emelnünk, hogy a szabadon választott x legyen az eredmény. Például: milyen y kitevőre kell 10-et emelni, hogy a választott 2 értéket kapjuk eredményül? Analitikai fogalmazással: mekkora ordináta tartozik az $y={}^{10}\log x$ függvény $x=2$ abszcisszájához? Eláruljuk, hogy esetünkben $y=0{\cdot}30103\ldots$ s ezzel mindazt megtudtuk, amit akartunk. Tehát

$$0{\cdot}30103\ldots={}^{10}\log 2 \text{ és } 10^{0{\cdot}30103}=2.$$

Tehát a következőképpen egészíthetjük ki előbbi táblázatunkat:

Tetikus műveletek.	Litikus műveletek.
1. Összeadás $(a+b+c\ldots)$	Kivonás $(a-b)$
2. Szorzás $(a.b.c\ldots)$	Osztás $(a:b)$.
3. Hatványozás (a^n)	Gyökvonás $(\sqrt[n]{a})$
4. Exponenciális függvény (a^x)	Logaritmus $({}^a\log x)$.
5. Integrálás $(\int f'(x)\,dx)$	Differenciálás $\left(\frac{dy}{dx}=y'=f'(x)\right)$

Most már ismerjük a logaritmus operátort, de az eljárást, a használati módját, a «logaritmus algoritmusát» még egyáltalán nem ismerjük.

Ahhoz, hogy ezt megismerhessük, két dologra kell a figyelmet felhívnunk. A logaritmus általában irracionális szám, kivéve, ha az alap valamely racionális kitevőjű hatványáról van szó. Kiszámításuk bonyolult és messze túlhaladja kereteinket. De abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy olcsó pénzen vásárolhatunk úgynevezett logaritmustáblát, s ez a tábla valamennyi, a gyakorlatban előforduló szám logaritmusát tartalmazza. Sőt benne vannak a szögfüggvények logaritmusai is. Három évszázad rettenhetetlen számolói mérhetetlen munkát takarítanak meg számunkra. Mert csak a logaritmus használata teszi nekünk egyáltalán lehetővé bonyolult hatványok és gyökök kiszámítását. «Egyáltalán» természetesen úgy értendő, hogy ilyen hatványok és gyökök kiszámítása logaritmus nélkül rendkívül nagy munkát jelentene.

Nem a mi feladatunk, hogy a logaritmus-tábla szerkezetét és használati módját itt elmagyarázzuk. Csak arra utalunk, hogy a logaritmus segítségével a szorzás öszeeadássá, az osztás kivonássá, a hatványozás szorzássá, a gyökvonás osztássá alakul, tehát az előbbi összefoglaló táblázat második és harmadik fokozatában álló tetikus és a litikus műveletek eredménye eggyel alacsonyabb művelet elvégzése segítségével meghatározható.

Logaritmusrendszer alapszáma, elvben bármely 0-tól és 1-től különböző egész szám lehet. Gyakorlatban kizárólag a 10 alapú, úgynevezett Briggs-féle, és az e (2·7182818...) alapú, úgynevezett Napier-féle, vagy természetes logaritmust használják. ${}^{10}\log x$ nem a szokásos írásmód. Egyszerűen $\log x$ mindenkor 10 alapú logaritmust jelent. A Napier-féle logaritmust ${}^{e}\log x$, $\ln x$ vagy $l\,x$ jelöli. A $\ln x$ megjelölés «logarithmus naturalis» (természetes logaritmus) rövidítése. Mi azonban félreértések elkerülésére a ${}^{10}\log x$ számára a $\log x$ jelölést, a természetes logaritmus részére pedig az ${}^{e}\log x$ jelölést fogjuk használni. Logaritmust általában az ${}^{a}\log x$ jelentsen, ahol az a tetszésszerinti állandó.

Az a törvény, hogy az egyenlőség helyes marad, ha mindkét oldalával ugyanazt a műveletet végezzük, a logaritmusra is igaz. Ha $c=d$, akkor ${}^a\log c={}^a\log d$ és viszont, ha ${}^a\log c=$ $={}^a\log d$, akkor $c=d$. Ezt a második műveletet a numerus (a szám) keresésének, vagy egyszerűen visszakeresésének hívjuk.

A logaritmus alaptulajdonságát a következő egyenlőség fejezi ki:

$$^a\log (c.d) = {}^a\log c + {}^a\log d,$$

tehát az a tény, hogy szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusának összegével. Ezt az «alaptulajdonságot» le is vezetjük. Legyen két a alapú logaritmus ${}^a\log b=B$ és ${}^a\log c=C$. A logaritmus keletkezési módja következtében azonban (exponenciális függvény) igaz, hogy $a^B=b$ és $a^C=c$. Mert hiszen a logaritmus nem egyéb, mint az a hatványkitevő, amelyre az a alapot fel kell emelnem, hogy a numerust (b és c) kapjam. De ha $b=a^B$ és $c=a^C$, akkor $bc=a^{B+C}$. A $bc=a^{B+C}$ egyenlőséget szemlélve könnyen rájövünk, hogy belőle újabb a alapú logaritmus értékét határozhatjuk meg. A következőt: ${}^a\log(bc)=B+C$. Mert $B+C$ az a kitevő, amelyre az a állandót fel kell emelnünk, hogy $b.c$ legyen az eredmény. Tehát $B+C$ a $b.c$ logaritmusa. Ha az ${}^a\log(b.c)=B+C$ egyenlőségbe végül az első feltevésünk alapján B és C-vel jelölt $B={}^a\log b$ és $C={}^a\log c$ értékeket behelyettesítjük, akkor megkapjuk az «alaptulajdonságot».

1. ${}^a\log b.c={}^a\log b+{}^a\log c.$

Gondolkodó olvasó azonnal rájön, hogy ez a hatványokkal való műveletek szabályainak egyik folyománya. Nem is csodálatos, hisz a logaritmus éppen az ismeretlen hatványkitevőből származik.

A logaritmussal való számolás további szabályait indokolás nélkül írjuk fel.

2. ${}^a\log \frac{b}{c}={}^a\log b-{}^a\log c$ (osztás logaritmussal).

3. ${}^a\log c^d=d\,{}^a\log c$ (hatványozás logaritmussal).

4. ${}^a\log \sqrt[d]{c}=\frac{1}{d}\,{}^a\log c$ (gyökvonás logaritmussal).

A negyedik szabály valójában a harmadiknak közvetlen következménye, hisz ${}^{a}\log \sqrt[d]{c} = {}^{a}\log c^{\frac{1}{d}}$ ez pedig a harmadik szabály alapján is $\frac{1}{d}\,{}^{a}\log c$-nek adódik.

Felületesen tájékozódtunk a logaritmusról. Szorgalmas olvasó jó logaritmustábla tanulmányozásával és gyakorlással bővítheti ismereteit. Minden jó logaritmustábla tartalmaz részletes használati utasítást. Mi azonban most a felsőbb matematika közepében álló szám, a természetes logaritmus alapszáma, az e felé fordítjuk figyelmünket. Nem szorul magyarázatra, hogy valamennyi, logaritmusra vonatkozó szabály az e alapú logaritmusra is érvényes, hisz feltételeztük, hogy az a (az alap) bármely, tetszőleges szám lehet. Így természetesen e is, tehát ${}^{e}\log b.c = {}^{e}\log b + {}^{e}\log c$ szintén igaz.

Látszólag teljesen indokolatlanul felvetjük a következő problémát: valamilyen mennyiség, nyugodtan vehetjük, hogy az egység, valamilyen rendkívül kis mennyiséggel nő. Tehát valamilyen nagyon kicsi tört részével, $\frac{1}{n}$-nel; amikor is az n nagyon nagy. De ez a növekedés «szervesen» folytatódjék, tehát a megnövekedett mennyiség ugyanúgy növekedjék. És így tovább, határtalanul. Kérdés, mekkorára növekszik fel az 1 ily módon. Első pillanatban azt gondolhatnók, hogy az eredmény végtelen. De ez nem igaz, éppoly kevéssé, mintahogy végtelen sok ordináta egymás mellett nem ad feltétlenül végtelen területet. Ezt már a kvadratura tárgyalásakor láttuk. Ugyanezt láttuk konvergens soroknál. Az Archimedes által alkalmazott sor $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$ is végtelen sok tagot fűz egymáshoz s összege mégis véges, $s_\infty = \frac{4}{3}$. Ugyanígy viselkedik a «Leibniz-sor» is és a fogyó geometriai sorok általában. De lássuk csak, mi történik a növekvő 1-gyel. Tehát ismételjük: az 1 először végtelen kis tört részével növekszik, de ezt a növekedést, mintegy kárpótlásul, végtelen sokszor ismételheti meg.

Ha tehát 1 a tetszés szerint kicsi $\frac{1}{n}$ értékkel nő, akkor belőle $1+\frac{1}{n}$ lesz. Jelöljük ezt az értéket egyelőre a-val. Az a növekedjék ugyanígy tovább. Azaz szintén a nagyon kicsi, tört részével növekedjék, vagyis $\frac{a}{n}$-nel. Lesz belőle $a+\frac{a}{n}$, s ezt b-vel jelöljük. Ha tovább megyünk, akkor b-ből $b+\frac{b}{n}$ lesz stb. Most lássuk, mit jelentett mindez. Azt mondtuk, hogy $1+\frac{1}{n}=a$. Azután a-ból $\left(a+\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{an+a}{n}\right)=$ $=a\frac{n+1}{n}=a\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=a\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=$ $=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ lett, ha a helyébe értékét, $1+\frac{1}{n}$, újból beírjuk. A második kifejezés, $\left(b+\frac{b}{n}\right)=b\frac{n+1}{n}=b\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=$ $=b\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Ismét beírjuk, hogy $b=\left(a+\frac{a}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, ezzel $b\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ az eredmény. Mivel ezt a számítást korlátlanul folytathatjuk, s már tudjuk, hogy a szerves növekedés első lépésének eredménye $1+\frac{1}{n}$, a másodiké $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, a harmadiké $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ s a képzés törvényének kétségtelen következménye, hogy ez így folytatódik, joggal következtethetünk arra, hogy n lépés után az eredmény $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Az n értékét tetszés szerint nagynak vehetjük és az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ értékét binomiális sorba fejtjük. Az 1 minden hatványa újból 1, így elhagyható, ha tényezőként lép fel.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$
$$+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \binom{n}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \dots =$$
$$= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot\frac{1}{n^4} + \dots$$

Ha az n a végtelen felé növekszik, akkor mellette a kivonandó tagok, 1, 2, 3 stb. elhanyagolhatók, vagyis $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, stb. helyett nyugodtan írhatok n-et. Ezzel binomiális sorunk ilyen alakú lesz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\,\frac{1}{n} + \frac{n.n}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n.n.n}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} +$$
$$+\frac{n.n.n.n}{4!}\cdot\frac{1}{n^4} + \dots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

A tagokat kiszámítva ezt kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

Most e sor végtelen sok tagjának összege érdekel. Az összeg bizonyosan nagyobb mint 2, hisz az első két tag együtt már kettőt ad. Ha továbbá megfontoljuk, hogy sorunkból az első tag elhagyása után $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\dots$ lesz, akkor összehasonlíthatjuk egy úgynevezett «majoráns» sorral, olyannal azonban, amelynek az összegét ki tudjuk számítani. Ilyen például egy fogyó végtelen geometriai sor, az $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\right)$ sor. Ez a sor az előbbinek bizonyosan majoránsa, azaz minden tagja nagyobb a másik sor megfelelő tagjánál. Az jellemzi ugyanis a majoráns sort, hogy minden tagja legalább egyenlő, de általában nagyobb a vizsgálandó sor analóg tagjánál. Tehát:

$$\text{vizsgálandó sor: } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots$$

$$\text{majoráns sor: } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

A majoráns sor definiciójából következik, hogy végtelen sok tagjának összege, miként akárhány, véges számú tagjának összege is nagyobb a vizsgálandó sor megfelelő összegénél. Esetünkben a majoráns sor összege $s_\infty=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. De mint-hogy a vizsgálandó sor első tagját, 1-et, elhagytuk, ezt a végleges összehasonlításnál mind a majoránshoz, mind a vizsgálandó sorhoz hozzá kell adnunk. Ezek szerint az eredmény: majoráns sor összege$+1>$vizsgálandó sor összege $+1$. De mivel a majoráns összege $+1=3$, bizonyos, hogy $3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ha $n=\infty$. Tehát $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ értéke ezek szerint 2 és 3 közt van, ha n eléggé nagy. Ezt akartuk éppen megtudni.

Kellő számú tag kiszámítása $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ számára a 2·71828182845904... értéket adja.

Ez a szám is, miként a π irracionális és Euler nyomán az egész világon e betűvel jelölik. Rövidesen megtudjuk, hogy miért játszik a matematikában olyan nagy szerepet.

Megint nem mondjuk meg, hogy miért adjuk azt a feladatot, hogy fejtsük sorba az e alapú exponenciális függvényt. Felírjuk a következő feltétlenül helyes összefüggéseket:

$$e=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

és

$$e^x=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x$$

ahol n természetesen változatlanul végtelen nagynak tekinthető. De a hatványozás szabályai szerint $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x=$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}, \text{ így ez ismét binomiális sorba fejthető kifejezés.}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1^{nx}+\binom{nx}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{nx}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{nx}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$

$$=1+\frac{nx}{1!}\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

Az előbbihez hasonló megfontolások után, s mivel azt is tudjuk, hogy a végtelen felé tartó n-nel együtt nx is a végtelenhez tart, az nx mellől elhagyjuk a kivonandókat. Az eredmény:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n^2x^2}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n^3x^3}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots=$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Ezt a sort exponenciális sornak nevezzük. Visszatérve eredeti egyenlőségünkhöz, megállapítjuk, hogy

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Most megpróbáljuk az exponenciális sort differenciálni. Egyszerű, mert tagonkint differenciálhatunk.

$$y=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d(e^x)}{dx}=0+\frac{1}{1!}+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}+\cdots=$$

$$=0+\frac{1}{1.1}+\frac{2x}{1.2}+\frac{3x^2}{1.2.3}+\frac{4x^3}{1.2.3.4}+\cdots$$

Ha rövidítünk, akkor az eredmény:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots,$$

de ez nem egyéb, mint az eredeti exponenciális sor.

Olyan függvényre bukkantunk tehát, amelynek differenciálhányadosa egyenlő magával a függvénnyel. Most már érthető, hogy miért olyan fontos az e a felső matematikában. e^x az egyetlen olyan függvény, amely differenciálhányadosával egyenlő. De ha a differenciálhányados egyenlő az eredeti függvénnyel, akkor a differenciálhányados integrálja is egyenlő magával a differenciálhányadossal. Tehát $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$ és $\int e^x dx = e^x + C$. Most azt is felismerhetjük, hogy mekkora könnyebbséget jelent, ha valamilyen mennyiséget az e hatványaként tudunk kifejezni. Ezt a fogást a felső matematika lépten-nyomon alkalmazza. De vissza kell térnünk a logaritmushoz, miután most már a logaritmusrendszer alapját és exponenciális függvényét letárgyaltuk. Az e alapú logaritmus függvény

$$y = {}^e\log x$$

Ha y az x-nek e alapú logaritmusa akkor

$$x = e^y.$$

Ez ugyanannak az összefüggésnek más írásmódja. Itt az x és az y szerepet cserélt. Most y a független, x pedig a függő változó. Differenciáljuk ezt a függvényt, természetesen ezúttal y szerint. Most láthatjuk új fogásunkat először működésben. e^y e alapú exponenciális függvény, tehát differenciálhányadosa «saját maga». Tehát

$$x = e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y.$$

Ha két mennyiség egyenlő egy harmadikkal, akkor egymás közt is egyenlők. Így $\frac{dx}{dy} = x$. De mi nem $\frac{dx}{dy}$-nak, hanem $\frac{dy}{dx}$-nek az értékét akarjuk tudni. Ez a feladat is megoldható most. $\frac{dy}{dx}$ aritmetikai szempontból nem egyéb mint $\frac{dx}{dy}$ reciprok értéke, amint $\frac{2}{3}$ reciprok értéke $\frac{3}{2}$. De mivel egyenlőség áll előttünk, mindkét oldalán reciprok értékekre kell áttérnünk, hogy az egyenlőség érvényes maradjon. Ha ugyanis két mennyiség egyenlő egymással, reciprok értékeik s egyenlők. Ha $\frac{6}{2}=3$, akkor $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Ez szemmel láthatóan igaz. Képezzük végre a reciprok értéket.

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x}; \text{ vagyis } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Hosszú utunk végén ahhoz a felettébb meglepő eredményhez jutottunk, hogy $y={}^e\log x$ differenciálhányadosa $\frac{1}{x}$. A hatványozás szabályai szerint $\frac{1}{x}=x^{-1}$. Az x^{-1} eredményt mint differenciálhányadost hatványok differenciálásának $\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$ szabálya szerint sohasem kaphattunk volna. Mert x^3 differenciálhányadosa $3x^2$, x^2-é, $2x^1$, x^1-é 1, x^0-é $0.x^{0-1}=0$, mivel $x^0=1$, vagyis állandó, ami a differenciálásnál eltűnik. De x^0 után x^{-1} következik a lefelé haladó sorrendben, ennek a differenciálhányadosa $-1x^{-1-1}=-x^{-2}$. Nem csoda tehát, hogy az integrálásnál az $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$ képlet érvényességében folytonossági hiányt találtunk akkor, amikor az x kitevője $m=-1$ volt. Tudjuk ugyanis, hogy az a kifejezés, amely az integrál jele mögött áll, mindenkor valamilyen törzsfüggvény $F(x)$ differenciálhányadosának tekintendő és a törzsfüggvényt kell meghatároznunk. Kétségbeejtő helyzetben voltunk, mert $m=-1$ esetén az $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$ szabály is csődöt mondott, nem akadt függvény, amelynek x^{-1} a differenciálhányadosa lett volna és így az $y=\frac{1}{x}$ hiperbola kvadratúráját sem tudtuk elvégezni.

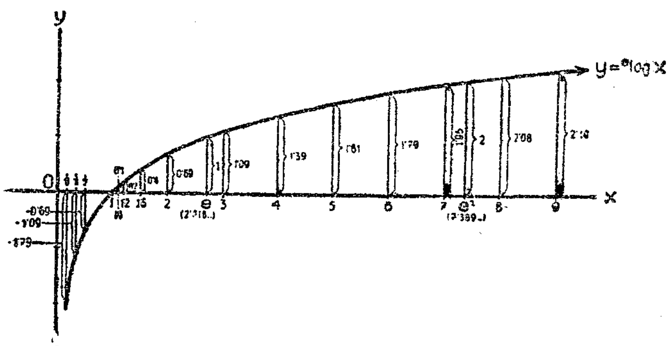
De most már megoldottuk a rejtélyt. x^{-1} törzsfüggvénye $y={}^e\log x$, mivel az ehhez hozzátartozó y' vagy

$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}=x^{-1}$. Így a keresett y'-höz tartozó $y={}^e\log x$. Tehát x^{-1} határozatlan integrálja $F(x)=\int x^{-1}dx={}^e\log x+C$. A határozott integrál pedig $F_{(a,\ b)}=\int_a^b x^{-1}dx=({}^e\log b+C)-$ $-({}^e\log a+C)={}^e\log b-{}^e\log a$.

A logaritmus sajátságai következtében itt átalakítások lehetségesek. ${}^e\log b-{}^e\log a$ helyett ${}^e\log\frac{b}{a}$ is írható, s ennek rövidítés szempontjából jelentősége lehet. Ha például az integrálás határai $x=a$ és $x=a^2$, akkor a határozott integrál ${}^e\log a^2-{}^e\log a={}^e\log\frac{a^2}{a}={}^e\log a$. A határozatlan integrálnál az integrációs állandót egyszerűség kedvéért következőképpen szokás kifejezni: $F(x)=\int x^{-1}dx={}^e\log x+C={}^e\log x+{}^e\log c$, vagyis az állandót, amely tetszés szerinti értékű, valamely c szám logaritmusának tekintjük. Így a határozatlan integrál, másképpen írva ${}^e\log cx$, mivel ${}^e\log x+{}^e\log c={}^e\log cx$.

Csak azt akarjuk még hozzáfűzni, hogy egyik logaritmusrendszer átszámítható a másikba. A felsőbb matematikában, mindaddig, amíg a számítás csak általánosan történik kizárólag az e alapú rendszert használjuk. Az eddigiek ezt részletesen megindokolják. De tekintve, hogy a logaritmustáblák legnagyobb része nem a természetes, hanem a 10 alapú logaritmusokat tartalmazza, sokszor kell természetes logaritmust 10 alapúra, vagy viszont átszámolnunk. Erre szolgál a modulus. A képletet levezetés nélkül közöljük. A modulust m-mel jelöljük és $m=0{\cdot}4342944819\ldots$ Ha 10 alapú logaritmust e alapúra számítunk át, akkor a ${}^e\log x=\frac{1}{m}\,{}^{10}\log x$ képletet használjuk. Fordítva ${}^{10}\log x=m\,{}^e\log x$. Írjuk ide még az $\frac{1}{m}$ értékét is: $\frac{1}{m}=2{\cdot}3025850929\ldots$ Világos, hogy e modulus csak természetes és tizes logaritmus átszámítására való, más (gyakorlatban szerepet nem játszó) logaritmusrendszerekre más a számértéke.

Végül rajzoljuk még fel az $y={}^e\log x$ görbéjét, az úgynevezett logaritmus-görbét. Minthogy 1 logaritmusa minden rendszerben 0, mert $e^y=x$ és $x=1$, 1 mint hatvány, 1-től különböző alap esetén csak 0 hatványkitevő esetén létezik, a logaritmusgörbe az x tengelyt az $x=1$ és $y=0$ pontban metszi. Ha $x=e$, akkor $y=1$, mert $e^y=x$ és $x=e$, tehát $e^1=e$. Hasonlóképpen $x=e^2$ esetén $y=2$ és $x=e^3$ esetén $y=3$ stb. Általában, minden logaritmusrendszerben az alapszám logaritmusa 1 és az alapszám hatványának logaritmusa a kitevő. Ez az utóbbi a definiciós egyenletből, $y={}^a\log x$, $x=a^y$, következik. Tehát az 1 tizes rendszerű logaritmusa 0, 10 logaritmusa 1, 1000 logaritmusa 3, 1,000.000 logaritmusa 6, $\frac{1}{10}$-é viszont -1, $\frac{1}{1000}$-é pedig -3. Az alapszám hatványai közé eső számok logaritmusai irracionális számok, amelyek természetesen tartalmazzák a legközelebbi alacsonyabb hatvány logaritmusát. Így ${}^{10}\log 105=2\cdot02119\ldots.$ Ezt a 2-t nevezzük karakterisztikának, a fennmaradó tizedes rész neve pedig mantissza (mantissa=maradék). Közelebbi adatok szempontjából ismét csak a logaritmus-táblázatokra utalunk.



71. ábra.

HARMINCHETEDIK FEJEZET

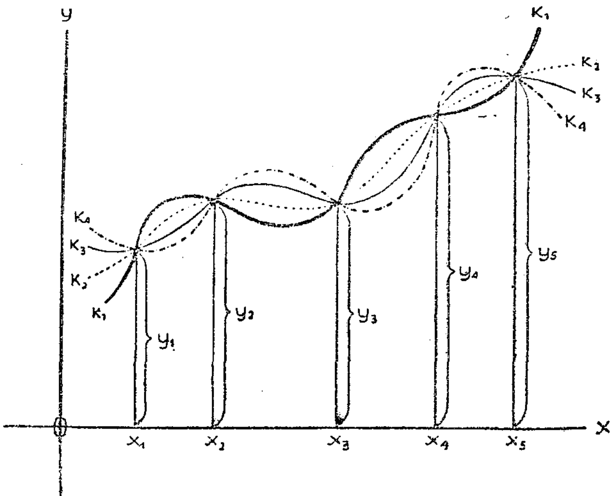
Interpoláció Extrapoláció Befejezés

Logaritmus kereséskor sokszor merül fel az a feladat, hogy közbenső értékeket kell meghatároznunk, mert természetesen a logaritmustábla nem tartalmazhatja a számvonal végtelen sok számának logaritmusát. Közbeeső értékek keresését a matematika interpolációnak nevezi. (Interpolare= közbeiktatni.)

Világítsuk meg röviden ezt a kifejezést, tekintve, hogy a matematikában és a fizikában, különösen pedig a matematikai stat sztikában rendkívül nagy szerepet játszik. Részletekbe nem bocsátkozhatunk, túl nehéz ehhez a probléma, hisz megoldása szinte önálló tudomány. Arra a kérdésre, hogy mekkora egy közbeiktatott érték, matematikai és geometriai úton felelhetünk. Matematikai szempontból egy interpolált érték két ismert érték közé eső szám. De nem csak vaktában választott közbenső szám, hanem a számköz meghatározott helyére eső érték. 1499 logaritmusa például 3·17580, 1500-é pedig 3·17609. Ha 1499·5 logaritmusa érdekel, azt úgynevezett ötjegyű táblázatban nem találom meg közvetlenül. A józan ész azt mondatja velem, hogy mivel 1499·5 1499 és 1500 között középen van, valószínűleg a logaritmus is középen lesz. 3·17580 és 3·17609 középértékét kell tehát keresnünk. Ha ezt a műveletet elvégezzük, az utolsó jegyét felkerekítve *y* logaritmus számára a 3·17595 értéket kapjuk. Hasonlóképpen lehetne más helyen is interpolálni. 1499·8 esetén például azt mondhatnók, hogy a logaritmusok «közét» tíz részre kell osztani és a kisebbik logaritmushoz nyolc ilyen tizedrészt hozzá kell adni. A köz 3·17609—3·17580, vagyis 0·00029, ennek tizede 0·000029. Nyolc ilyen tized 0·000232, tehát 1499·8 logaritmusa egyenlő 1499 logaritmusa plusz nyolc tized-köz, vagyis 3·17580+0·000232=3·17603.

Ilymódon történik az interpoláció a logaritmustáblák *P.P.* rovata segítségével is (*P.P.*=partes proportionales= arányos részek). Ez a rovat éppen az előbbi tizedeket tartalmazza. De itt valami igen fontos dolgot feltételezünk, ami pedig, különösen kis számok logaritmusánál, nem áll fenn.

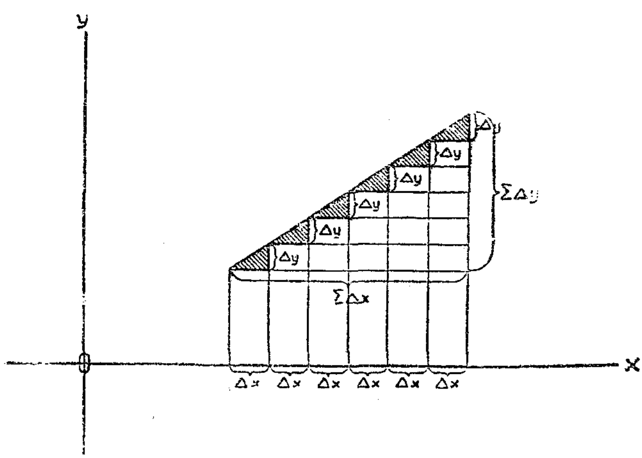
Azt tételezzük fel ennél az arányos, «lineáris» interpolációnál, hogy a közben a viszonyok végig lineárisak, arányosak. Ezt egészen világosan csak geometriai elképzelés magyarázata nyomán láthatjuk. A számokat, amelyeknek közöttes értékeit keressük, ordinátákkal, ipszilonokkal jelképezzük. Szétszórt ordinátákról beszélünk akkor, ha az ordináták közötti értékeket még nem ismerjük hiánytalanul. Abban a pillanatban, amikor az egész görbe egyenletét megtudjuk, nincs már több ismeretlen ordináta. Mert ekkor már minden «helyhez», itten x-hez, abszcisszához, meg tudjuk adni az ordinátát, csak be kell helyettesítenünk. Analitikus geometriai szempontból tehát interpoláció esetén szétszórt ordinátákhoz tartozó függvényt keresünk, s ez a függvény olyan legyen, hogy valamennyi ordináta végpontja a görbe egyenlete értelmében a görbén feküdjék (pontja legyen a görbének). Már futólagos rajz is megmutatja, hogy tetszés szerinti ordinátavégpontok közt végtelen sok olyan görbe lehetséges, amely valamennyi végpontot összeköti.



72. ábra.

Tehát az interpoláció problémája önmagában véve megoldhatatlan, hacsak bizonyos feltevésekkel nem élünk. Ezekről lesz most szó. Tegyük fel, hogy a még ismeretlen görbének csak két pontja között kell interpolálnunk. (78. ábra.)

Válasszuk az úgynevezett lineáris interpolációt, akkor a két pontot egyszerűen egyenessel kötjük össze. Ha tehát a közt valamennyi részköz összegének tekintjük, és $\Sigma\Delta x$-szel jelöljük, akkor az ordinátakülönbség, ennek megfelelően $\Sigma\Delta y$. A közt most egyenlő Δx részekre osztjuk. A rajzból kiderül, hogy minden Δx-hez tartozik egy Δy, s a Δy-ok egyenlők, ha a Δx-ek azok. Fennáll tehát a $\Sigma\Delta x : \Sigma\Delta y = \Delta x : \Delta y$ egyenlőség. A Δx egyenlő a $\Sigma\Delta x$ n-ed részével, ha n a részek száma. Tehát $\frac{\Sigma\Delta x}{n} = \Delta x$ és ennek megfelelően $\frac{\Sigma\Delta y}{n} = \Delta y$. Az arányos interpolációnak ezt a módját csak ott szabad alkalmazni, ahol valóban joggal tekinthetjük a görbe ívét egyenesnek. Tekintve, hogy a lineáris interpolációt nagyobb számok logaritmusaira szokták alkalmazni, tekintsük meg a logaritmus-görbét. Látjuk, hogy nagy számok esetén sem egyenes, de az egyeneshez annyira közel áll, hogy



78. ábra.

jó közelítéssel vehetjük annak, vagyis az elkövetett hiba bizvást elhanyagolható. De az elméleti és gyakorlati statisztika egyáltalán nem csak lineáris interpolációt alkalmaz. Feltételezheti és követelheti azt is, hogy a még ismeretlen görbe, amely valamennyi ponton keresztülmegy, n-ed rendű parabola legyen, egyenlete pedig ilyen alakú:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x^1 + a_nx^0 = y.$$

Adott pontokhoz tartozó ilyen egyenletek felállítására igen szellemes és fínom módszerek állnak rendelkezésre. Hasonló módszerek adnak ama kérdésre is választ, hogy miként kell a már ismert görbék alapján az interpolációt végezni. Az y növekménye itt már egyáltalán nem arányos a köz részeivel, hanem sokkal bonyolultabb összefüggés szerint adódik belőlük. Szerepet játszik továbbá az is, hogy a megadott pontok egyforma távolságban vannak-e egymástól, ekvidisztáns pontok-e vagy sem. De a lineáris és parabolikus interpoláción kívül más igen fínom módszerek is vannak, ezekre még csak utalni sem tudunk. És így, habár végtelen sok módja lehetséges az interpolációnak, vagyis a probléma teljesen nyílt, mégis sikerül tudományos és gyakorlati céloknak sokszor teljesen megfelelő és igen pontos interpolációs értékeket kiszámítani.

Hogy rá ne unjunk a sok elméleti fejtegetésre, mutassuk be gyakorlatból vett példákon az interpoláció célját. Valamely országban minden tíz évben van népszámlálás. Pénz híján egyik időpontot elmulasztották. Tegyük fel, hogy az 1870, 1880, 1890, 1900, 1910 és 1930 években megtartották a népszámlálást. Minket azonban az ország 1885-ben, vagy 1907-ben, vagy 1914-ben, vagy 1921-ben élt lakosainak száma érdekel. De érdekelhetne az 1920. évi lélekszám is, amikor a népszámlálás elmaradt. Ha háborútól, járványoktól stb. eltekintünk, akkor feladatunk interpolációval oldható meg. Még pedig részben nem ekvidisztáns ordináták közti interpolációval, mivel egyik köz húsz évre terjed. Érdekelhetne ezen kívül, hogy mennyi volt a lélekszám 1870 előtt, mondjuk 1860-ban, vagy hogy mennyi lesz 1940-ben. Az adatok közén kívül eső értékek számítását «extrapolációnak» nevezzük.

Lényegében azt kutatja az extrapoláció, hogy az egyes ordinátákból nyert függvény miként viselkedik a szélső ordinátákon kívül, feltéve, hogy az összefüggést létrehozó törvényszerűségek ott is érvényesek.

A másik példát a csillagászat nyujtja. Ismerjük egy üstökös pályájának egy részét, egyes különálló megfigyelések alapján. A pálya egyenletét még nem tudtuk meghatározni, még nincs elegendő megfigyelési adatunk, azonban ki tudjuk számítani interpoláció és extrapoláció segítségével, hogy milyen a pálya valószínű alakja. S a megfigyelés később megmutatja, mennyire volt helyes a feltevésünk. «Többtest probléma» esetén, vagyis olyankor, amikor a pálya egyenletét több mint egy test vonzása befolyásolja, mindenkor ilyen módszerekre vagyunk utalva, mert ez a probléma mindmáig csak statisztikai eszközök számára hozzáférhető.

Csak annyit akarunk még hozzáfűzni, hogy az interpoláció és az extrapoláció jelentősége messze túlterjed a matematika és a statisztika körén. Számtalanszor alkalmazzuk mindkettőt, nem tudatosan, a politikában, a történelemben, az üzleti életben, orvostudományban, amidőn egy jelenség lefolyásából a multra következtetünk vagy belőle jósolni próbálunk. Helyes volna, ha a matematikus óvatosságával alkalmazná mindenki az extrapolációt a matematikán kívüli életben, óvatosabban, mint ahogyan általában szokás. A jelenből a jövőre vont sok téves következtetést lehetne ezzel megtakarítani.

Alaposan kimerítettük a választott tárgykört. Reméljük és hisszük, hogy teljesítettük igéretünket: elvezettük az olvasót az egyszeregytől az integrálig. S ha, főképpen a magasabb részeknél, mind gyakrabban következett be az a ki nem elégítő állapot, hogy ki kellett jelentenünk: ez a megoldás is, amaz is messze meghaladja kereteinket, akkor — bocsássák meg nekem — ez az ismételt utalás tehetetlenségünkre szándékosan történt. Képességeink határának világos felismerése soha sem lehet lesujtó. A becsületes szellemet inkább arra ösztönzi, hogy a nemtudás szálkáját mihamarabb távolítsa el testéből. És csupán a tudatlanság felismerése hajszol arra, hogy a hiányt munkával eltüntessük. Minden ember, minden nemzet és az egész emberiség jövője annyit ér, amennyi a megoldatlan problémája, s amennyit igazán kínzónak érez. Mert a haladás befejezése mindenkor csak szubjektiv látszat és az úgynevezett beteljesülés megmerevedést jelent. Valamennyi matematikus héroszunk, ha Pythagoras, Eudoxus, Euklides, Archimedes, pergai Apollonius, Alchvarizmi, Kepler vagy Descartes volt is a neve, abban a tévhitben volt, hogy vele a fejlődés lezárult. Mégis jött utánuk Newton, jött Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Weierstrass, Minkovszki, Hilbert. Mindenkor újak jönnek a régiek után. A matematikában is. S habár az eddigiek során csak vajmi kevéssé hatoltunk be a matematikába, mégis büszkén mondhatjuk, hogy a lényeges dolgokat, legalább is elvben tanulmányoztuk. És még egy igen fontos dologra jöttünk rá. Ugyanis már tudjuk, mit érhetünk el a matematikában, mit tanulhatunk meg, s mit kutathatunk át. S ezzel elértük a legfontosabbat: őszinte tisztelői lettünk a szellemi nagyságnak. Faust mondja: «Megszoktuk már, hogy az ember kigúnyolja azt, amit nem ért». Ha Goethe szavainak «inverz függvényét» megalkotjuk, akkor azt fejeztük ki, amit közös munkánk nyereségének akarunk tekinteni: «Csak azt becsüli az ember, amit megért». S csak a becsülés teszi a becses dolgokat értékesekké. És az értékes felé kell az egyénnek, a nemzetnek és az emberiségnek törekednie. Nem önös érdekből, hanem Isten nagyobb dicsőségére.

TARTALOM