

A BÚVÁR KÖNYVEI XVII.

EGMONT COLERUS
PYTHAGORASTÓL HILBERTIG

A MATEMATIKA TÖRTÉNETÉNEK KORSZAKAI ÉS MESTEREI

AMIT A MATEMATIKA TÖRTÉNETÉRŐL
MINDENKINEK TUDNIA KELL

ÖTÖDIK EZER

FRANKLIN-TÁRSULAT BUDAPEST

E MŰ EREDETI CÍME:
VON PYTHAGORAS BIS HILBERT
A FORDÍTÁS WINKLER JÓZSEF PÉTER MUNKÁJA

A SZERZŐTŐL
A FRANKLIN-TÁRSULAT KIADÁSÁBAN MEGJELENT:

AZ EGYSZEREGETŐL AZ INTEGRÁLIG
23.—25. ezer

A PONTTÓL A NÉGY DIMENZIÓIG
6.—8. ezer

ELŐSZÓ.

Majdnem érthetetlen számomra, hogy csak alig néhány esztendő telt el amióta az első, matematikát népszerűsítő kísérletemet, az «Egyszeregytől az integrálíg» c. könyvet útjára bocsájtottam. Az a visszhang, amelyet e könyvem, valamint a kb. egy évvel később megjelent «A ponttól a négy dimenzióig» című művem Európa számos országában keltett, úgyszólván kötelességemmé tette, hogy eleget tegyek a hatalmas matematikus tömeg kívánságának. Hisz műveim példányszáma minden nyelven sok tízezerre rúg!

Alázattal említem e számot és örömmel, a belőle következő szellemi érdeklődés miatt. De mint említettem, mély kötelezettség érzésével is. Bizonyos, sok kitűnő könyvet és értekezést írtak már a matematika történetéről. Könyvem olvasói és kritikusai (kísértést érzek, hogy az utóbbiakat mint előmozdítókat, terjesztőket említsem) nem egyszer kifejezték óhajukat, hogy szeretnék, ha a «keletkező tudomány» leírásával is foglalkoznám, és pedig nem csak a szigorú tudomány kívánalmainál és lehetőségeinél könnyebb, népszerűsítőbb módon, hanem figyelembe véve bizonyos általánosabb kultúrtörténeti szempontokat is. Hisz erre engem állítólag az a körülmény is képesít, hogy szerzője vagyok kultúrhistóriai-szellemtörténeti szintéziseknek.

Vonakodve és kételkedve vállaltam, meg kell vallanom, a rám bízott feladatot.

Az elmúlt évben tehát akarva-nemakarva ki kellett mélyítenem a már régebben megkezdett, a matematika történetére vonatkozó tanulmányaimat. Másodrendű munkával, meglevő matematikatörténetek alapján ugyanis nem akartam a «korszakokat» megírni. Hason rám, amennyire csak lehet, a matematika hőseinek eredeti műveiből áradó alkotó, a keletkezéstől és a felfedezéstől megrészegült izzó lehelete.

A magamra vállalt és a tudományos kutatás feltételeit is sokszor megközelítő kívánalmak és szigorítások ellenére sem tételeztem fel magamról, mélyenfekvő elvi okokból, hogy

népszerű matematika könyveim harmadik kötetében tudományos működést fejtettem ki. Célom, most éppen úgy, mint a múltban, a tudomány előcsarnokában a tudományt szomjazókat oktatni s az igazi tudomány élvezete felé vezető útjukat egyengetni.

E könyv a közönség még szélesebb rétegéhez fordul, mint két elődje, pedig tapasztalatom szerint azok olvasótáborára is igen különféle kor- és foglalkozási csoportokból tevődött össze. Miként a zene, a matematika is a szó legnemesebb értelmében vett emberi dolog. Rang, méltóság, kor, nem, származás közömbös számára, és azon igyekszik, hogy Isten akaratához és a legőszintébb, leghajthatatlanabb igazsághoz, amennyire embertől telik, közel jusson. De éppen úgy küzd a földi gőg, az intellektuális merészség és az apokaliptikus kétkedés ellen is, hisz egyrészt az égre-törőknek mennydörgő állj-t kiált, másrészt viszont évezredek fejlődésével bebizonyította, hogy mindig megújuló kultúrák, mindig új alakban építik tovább a szellem eme legfelső birodalmát s hogy egymás felé nyújtott kezük csak az utolsó emberrel végződő lánczá kapcsolódik össze.

Szinte két rétegben építettem fel ezt a könyvet, hogy a fejlődés menetét, úgy amint azt a régi egyiptomiak, mezopotámiaiak és indusok kora óta ismerjük, a legszélesebb körök számára is hozzáférhetővé tegyem. A matematikától távol álló, vagy kevésbé gyakorlott olvasó ugorja át a szórványosan előforduló matematikai képleteket, foglalkozzék csupán a kultúrtörténeti, életrajzi és filozófiai leírásokkal. Ezek sem könnyűk mindenkor, de a formulákkal írt matematika ellenségei számára megvan az az előnyük, hogy hétköznapi nyelven íródtak.

Igényesebb olvasót nem akartam megfosztani attól, hogy fejtegetéseimet példákkal ne fessek alá. Ezeket lehetőleg úgy választottam ki, hogy jellemzők és könnyen érthetők legyenek. A fejlődő tudomány leírásának eleve megvan az az előnye, hogy fokról-fokra építi fel a tudást.

Mindezek után nem kell hangsúlyoznom, hogy ez a könyv önmagában is zárt egész, és hogy ilyennek íródott, noha megírása ugyanabból a szellemből fakadt, mint két elődjéé, és segítő társként áll melléjük.

EGMONT COLERUS.

ELSŐ FEJEZET.

Pythagoras.

Matematika mint tudomány.

Képzeld, hogy a hatodik évszázadban vagyunk Krisztus születése előtt. És képzeljük el, hogy megvan az a mesés tehetségünk, hogy láthatatlanul mindenütt jelen lehetünk. Ne legyenek terveink, hogy merre utazzunk varázsszőnyegünkön. Csak a vágy vezessen, a szeszélyeink. És a látottak, meg a gondolataink, váljanak mondatokká, illeszkedjenek szép sorjában képekké.

Dús béke terpeszkedik el a fáraók országán. A kelet felől eljövendő viharok még a hangja sem hallatszik. Hacsak valaki nem tulajdonít túlzott fontosságot a perzsákkal folytatott ágas-bogas tárgyalásoknak. Miért is kellene nagyon komolyan venni? Az Egyiptomi Birodalom négyezer éves története alatt soha sem pihent a diplomácia. S titkok fátyla alá burkoltan, akár a Sphinx, terül el az ország, teljes pompájában.

Évről-évre elárasztja a Nilus partjait, iszapot hordva, új életet ébresztve törli el a gondosan kimért mesgyék jeleit. Alig futottak le a habok, már számtalan földmérő siet az iszapos terepre még ficánkoló halak és békák közé, cövekeket vernek le, mérőzsinórt feszítenek közéjük és számolnak. Számolnak éjjel-nappal, s rövidesen ismét megkapja minden birtokos a maga földjét.

Hatalmas építmények fejedelmi nyugalommal tekintenek le a nyüzsgő sokaságra. Csillogón szürke, tükörsíma felszínű, éles szélű piramisok. Rikító-tarka hieroglifákkal telis-tele rajzolva. Miért állnak ezek a pramisok oly valószínűtlen szabályossággal, geometriai rendszerességgel sorakozva? S miért nem maradnak el a templomok tartókölöpei, az obeliszek, az oszlopok, a csatornák gátjai és a gabonasilók kivitelük finomságában a piramisok mögött?

Megtudjuk a titok nyitját: építések ügyessége ez támogatják őket a zsinórhúzó és a geometerek, akik vastag papírusztekercsekről leolvasott képleteket alkalmaznak. Van olyan eljárásuk, amellyel derékszöget tudnak kitűzni. Tudják, hogyha zsinórból olyan háromszöget feszítenek ki, amelynek oldalai sorban 3, 4 és 5 egység hosszúak, s csúcspontjai helyét cövekkel rögzítik, akkor a 3 és 4 egység hosszú oldalak találkozásánál bizonyosan derékszöget kapnak. De ez elemi dolog. Már az egyiptomi geometerek számára is évezredek örökség. Ma már többet is tudnak Kemi szentelt földjén. Olyan eljárást ismernek, amelynek neve évezredek mulva trigonometria lesz. Vagy legalább néhány részét ismerik. Még pedig a cotangens szögfüggvényét. Röviden, tudják azt, hogy a derékszögű háromszög befogói és az egyik hegyes szög közt határozott összefüggés van. Az egyik befogó beve «pir-em-musz». Fülükbe jutott ez a görögöknek, de rosszul hallották és ebből torzították a piramis szót. De ez már később történt. Most még Krisztus születése előtt, a hatodik évszázad elején vagyunk. S nemcsak remek építményeit bámuljuk meg Egyiptomnak, hanem rendezett államszervezetét, virágzó kereskedelmét, igazságszolgáltatását és pénzügyeit is.

Ugyan hogyan is csinálják a számoló mesterek, akik ott, a termés halma körül, álldogálnak és kiosztják a halmot, előre rögzített arányok szerint az egyes tulajdonosok közt, még mielőtt csak egyetlen egységnek a súlyát lemérték volna? Eljárást eszeltek ki erre is. Halomszámításnak nevezik. Nagyon bonyolult felosztási feladatokról sem riadnak vissza. Arányos osztás, hármasszabály, egyismeretlenes egyenlet lesz annak később a neve, ami itt először szolgálja az ember érdekeit. Van még sok más is ez áldott ország földjén, amit nem tudunk áttekinteni, amibe nem tudunk behatolni.

De tudjuk, hogy egy évezredekén keresztül vezető repülés kezdetén vagyunk. Semmilyen varázs sem tartóztathat. Kelet felé szállunk, csodás dolgokat meséltek nekünk arról, amit ott — szintén évezredek óta — a kaldeusok művelnek.

A Tigris és Eufrates kettős folyam országa, amelynek most a perzsák az urai, szintén ősrégi kultúrájú vidék. Szumirok és akkadok, asszírok és babiloniak gondolkodtak, har-

coltak, szántottak és keveredtek itt. És mindegyik különös ékírási jegyeket karcolt cseréptáblákba. Raktárszámra. És ilyen táblácskák ezrein és ezrein számoltak. De itt a számítások végső célja, a pénzgazdálkodás, sőt szállítmánybiztosítás gyakorlati céljait kivéve, nem annyira a külső elrendezkedésre irányult, mint Egyiptomban. Babylonban és körülötte, a kettős folyam országában, az ég felé irányulnak a tekintetek. A kaldeusok az ismert világ legjobb csillagásza. A nap- és holdfogyatkozásokat előre kiszámítják, bírálják és szerkesztik a naptárt, pontosan ismerik a bolygók pályáit és a szögeket, ahogy a csillagzatok kelnek és lenyugszanak.

Gömbháromszögtannal foglalkoztak és szögmeréssel a gömb felszínén, s erre a célra az égboltozatot úgy használták, mint egy gömb belsejét. Ők osztják a kört 360 fokra, számrendszerük alapszáma 60, és bonyolult műveleteket végeznek igen nagy számokkal, sőt négyzet- és köbszámokkal is. Vajjon összeköttetésben voltak keleti szomszédaikkal, az indusokkal, és legtávolabbi szomszédaikkal, a kínaiakkal is?

De ne költsünk meséket itt. Csak annyit tudunk, hogy az indusok óriási számokkal számolnak, s az elképzelhetlennel határos számok részére is vannak számneveik. Az ősrégi Mahabharata eposz 24.10¹⁶ istent említ és Gautama Buddhának állítólag 600,000 millió fia volt. De Benares, piacán fülelve hallhatunk egy mesét, amely szerint hajdan az ősidőkben csata volt a majmok közt, s ebben 10⁴⁰ majom vett részt. Mekkora szám ez? Évezredekkel később kiszámították, hogy ennyi majom még akkora gömbben sem férne el, amelynek átmérője a naprendszer átmérőjével (a Neptun-pályájának átmérőjével) egyenlő. Hiszékenyek, nagyvonalúak és élénk képzeletűek ezek a régi indusok. S noha ilyen zabolátlan a fantáziájuk, vagy éppen azért, egyik igazságot a másik után fedezik fel. Ők is ismernek olyan fogást mint a Nílus-völgy zsinórhúzó. Csupán a derékszög kitűzésére használt háromszögük oldalainak hossza nem 3, 4 és 5 egység, hanem 5, 12 és 13. Ezzel a szerszámmal oltárok alaprajzát tűzik ki, s ez sokszor háromszögekből, rombuszokból és négyzetekből összeállított sasokhoz hasonlít.

Abban az időben, amelyben most repülünk, a szorgalmas kínaiak számolótáblákat használnak, rajtuk drótra fűzött

golyók sorakoznak. S egészen messze távol, nyugaton, az amerikai kontinensen, az eddig meglátogatott népektől teljesen függetlenül, a nagyműveltségű maják jól kigondolt számrendszerükkel rendben tartják államukat és közigazgatásukat, kereskedelmüket és naptárukat.

De a Földközi-tenger partjain közben nagy Teremtés folyik, csodás születés van folyamatban. A világos kék tengerből álomszerűen kiemelkedő szigeteken, ahol a domboldalak tüzes bort érlelnek és a szárazföldön, Miletosban, a rózsák városában leküzdhetetlen vágy fog el egyeseket. A kortársak bámuló szeme egyszerre Görögország hét bölcse felé fordul, s a bölcsek egyike a miletosi Thales. Földiei már fiatal korában a szellem és tudás fényes csillagának tartják. De ő hírét veszi, hogy van régebbi, mélyebb, tisztább bölcsesség is. Hajóra száll, világgá megy. Oda megy, ahonnan legtöbbet vár. A Nílus-deltában görög települések vannak. Görög segédesapatok állanak a fáraók szolgálatában. Nem csoda, hogy oda visz Thales útja. Barátságosan, atyai módon oktatják őt az egyiptomi papok. Persze nem titkaikra. Csak megmutatják neki, hogy kell egyszerűbb dolgokat megmérni és kiszámítani. De Thales szinte megrészegezik a tudásvágytól. Szelleme repülni kezd. És az egyiptomi papok kevésbé csodálják felfedezéseit, mint azt a nekik teljesen idegen szemléleti és általánosítási módot, amellyel az ifjú hellén a feladatokat megragadja.

Ott áll a sivatagban a nagy piramisok lábánál. Egyik egyiptomi pap mosolyogva megkérdi, hogy vajjon milyen magas lehet Kufu király piramisa (a Cheops-piramis). Thales gondolkodik. Majd azt feleli, hogy nem becsülni fogja a piramis magasságát, hanem megméri. Szerszámok és segéd-eszközök nélkül. Azzal lefekszik a homokba és megméri saját testének hosszát. Mit akar ezzel elérni, kérdi a pap. Megmagyarázza: «Egyszerűen testem megmért hosszának egyik végére állok és megvárom, míg árnyékom egyforma lesz testem hosszával. Ebben a pillanatban Kufu piramisotoknak, vagy amint a hellének mondják a Cheopsnak az árnyék-hossza ugyanannyi lépés lesz mint a magassága». De míg a pap, elképedve a megoldás egyszerűségétől, fontolgatja, hogy nincs-e hiba az okoskodásban, Thales már folytatja:

«De ha azt akarod, hogy a magasságot bármely órában mérjem, akkor ezt a vándorbotot beszúrom ide a homokba. Ime, árnyéka fele lehet magasságának. Elég ügyesek vagytok, hogy pontosan meg tudjátok mérni. S a bot hosszát árnyéka hosszával összevetve a piramis árnyékának hosszából osztással vagy sokszorozással mindenkor meghatározhatjátok az építmény magasságát.»

Ily módon ejti bámulatba a miletosi Thales az egyiptomiat. De szülővárosában megméri a tengeren közeledő hajók távolságát is. Csak egy irányzó berendezésre van szüksége és ismernie kell helyének magasságát a tenger színe fölött: háromszögek hasonlóságát használja fel, mivel a legegyszerűbb «viszonyokat és arányosságokat» már vizsgálatai körébe vonta. De ez még nem minden. Mélyebben fekvő dolgot fedezett fel, sokkal fontosabbat. Már tudja, hogy a félkörbe rajzolt szög, vagyis az a szög, amelynek szárai egy átmérő két végpontján mennek keresztül és amelynek csúcsa a félkör kerületén van, mindig derékszög. Ezzel utat tört, amely út a jövőben, sőt már a közeli jövőben sok új dolog felé fog vezetni. De nem elégszünk meg ezzel az utalással, félbeszakítjuk világutazásunkat és részletesen kifejtjük véleményünket. Ha egy olyan szellemi képességekkel megáldott férfi, mint a miletosi Thales, azt látja, hogy egy és ugyanazon átfogó fölé a félkörbe számtalan derékszögű háromszöget lehet rajzolni, akkor csodálatos, hogy nem teszi fel magának azt a további kérdést, milyen az összefüggés a befogók közt és milyen a viszonyuk a közös átfogóhoz. Hisz majdnem bizonyosra vehetjük, hogy hallott Egyiptomban arról a háromszögről, amelynek oldalai 3, 4 és 5 egység hosszúak. Vagy nem hallott volna Thales ezekről a háromszögekről? Nincs róla tudomásunk. Csak annyit tudunk, hogy a Samos szigetéről való Pythagoras ennek a miletosi Thalesnek a tanítványa volt. S hogy mit jelent ez a név e problémával kapcsolatban, az tisztán állhat mindenki előtt, aki a geometria elemeiről már hallott. Később még szó lesz erről. Igaz csak akkor, miután repülésünket még egy kissé folytattuk. A samosi Pythagoras a hatodik században élt Krisztus előtt, mint azt már többször említettük, s ennek tudománytörténeti fontosságára is hamarosan rátérünk. Fiatal korában

Pythagoras hosszú utakat tett. Később egész mondakör szövődött utazásai köré. Bizonyosnak látszik, hogy járt Egyiptomban. Mondják, hogy hosszas fáradozás után felvették az egyiptomi papi rendbe, s a papok teljes kiképzésében részesült. Sőt többet is mesélnek. Amidőn Krisztus előtt 525-ben Kambyzes meghódítja Egyiptomot, Pythagoras, egyiptomi papként szintén fogságba kerül és mint ilyent elhurcolják Babylonba. Innen állítólag Persepolisba, sőt Indiába is elkerült. Végre megszabadul és állítólag visszatér Samosba, de hálátlannak mutakozó hazáját azonnal ismét elhagyja.

Ezt mesélik később. Tudományosan igazoltnak azonban csak egyiptomi tartózkodását tekinthetjük. Kétségtelen még, hogy érettebb korában Dél-Itáliába költözik, ott ekkor élük virágkorukat a görög gyarmatvárosok; ezt a földet nevezték akkoriban Nagy-Görögországnak. Itt volt ebben a korban a hellén műveltség és kultúra súlypontja. Említsük példaként Sybaris, Kroton, Metapontion nevét. Pythagoras a dór eredetű Krotont, a legkiválóbb atléták városát választja lakóhelyül, itt alapítja meg esoterikus, titokzatos iskoláját, amelynek papi jellege erősen emlékeztet az egyiptomiakra és babiloniakra. Az iskolából hamarosan titkos-társulat, szekta fejlődik. Hatalmuk meglepően gyorsan növekszik. Sybarist elpusztítják, állítólag azért, mert lakói megsértették Pythagorast. Itt is sok mesére és titokzatosságra bukkanunk. Végül elpusztul az iskola is, mivel arisztokratikus szervezete miatt sok az ellensége és titokzatossága jó célpont minden támadásnak. Hogy ez Pythagoras életében történt-e, nem tudjuk. Kevéssé valószínű, noha Pythagoras életét nem Krotonban, hanem Metapontionban végezte.

A számunkra fontos körülmények közül a következőkhöz nem fér kétség: a pythagorasi szekta a matematikával való foglalkozást helyezte működésének középpontjába. És ilyen vagy amolyan formában fennállt két évszázadon keresztül. Eredeti titkos jellege majdnem lehetetlenné teszi, hogy megkülönböztessük, mit is fedezett fel maga Pythagoras és mit fedeztek fel tanítványai. De mivel minket csak a kezdet, az alapvetés érdekel, ezért mi, miként az iskola, minden felfedezést a nagy samosinak fogunk tulajdonítani, hisz óriási

befolyása érthetetlen volna, ha nem alkot úttörő jelentőségűt.

Ezzel immár annyira jutottunk, hogy meg tudjuk magyarázni eddigi célzásainkat a hatodik század fontosságáról. Ebben az időben történt matematikai téren a «görög csoda», a *Nyugat* megszületése szellemtudományi szempontokból. Ez az állítás nem a görögökért rajongó ókorkutató vágyálma. Ez szigorúan bizonyítható, ennek már a régiak is tudatában voltak, és véleményüket rövid, lakonikus szavakkal ki is fejezték.

Kissé elébe kell vágnunk az eseményeknek. Midőn ugyanis a hellének nagy századainak egészen valószínűtlen matematikai eredménye már látható volt vagy már legalább is kifejlődni látszott, akkor Aristoteles, a mindentudó, kíváncsún tartotta a matematikai fejlődés történetének rögzítését. Tanítványa, Eudemos vágott neki e feladatnak, s fáradozásainak nagy töredéke Proklos Diadochos, egy Krisztus után az ötödik században élt filozófus révén ránk maradt. Ez a «matematikus-jegyzék» (amely eddig úgyszólván minden történeti vagy más forrásból táplálkozó kritikának helyt állt) Pythagorusról a következő súlyos szavakat tartalmazza: «Utánuk¹ Pythagoras változtatta az e tudáságazattal (matematikával) való foglalkozást valódi tudománnyá, amelyben alapját magasabb szempontból tekintette és tételeit az anyagtól függetlenül és értelmi alapon vizsgálta. Ugyancsak ő volt, aki az irracionális elméletét és a kozmikus testek szerkesztését feltalálta.»

E fontos hely minden szavát meg fogjuk fontolni. Egyelőre megrendít minket az a megállapítás, hogy csak Pythagoras volt az, aki a matematikát a «tudomány» színvonalára emelte, vagy a matematikus-jegyzék szavait hívebben követve, valamely tudományt megelőző állapotból tudománnyá «változtatta».

Mit jelent ez? Mit jelent, éppen olyan szerző szájából, aki az imént számolt be Thalesről? Nem hallott ő Egyiptomról, Babylonról, Indiáról? Nem kísérelt meg ő is, hozzánk

¹ T. i. a. miletosi Thales és egy bizonyos Mamerkos után. Az utóbbinak csak a nevét ismerjük.

hasonlóan, képzeletben egy világutazást? Vagy hellén nemzeti hiúság töltötte el ezt az Eudemost? De miért másolja le ezt a részt a neoplatonikus Proklos nyolc századdal később minden széljegyzet nélkül? Olyan időben, amikor már minden kéjutazó olcsó pénzen tájékozódhatott a régi Egyiptom matematikájáról?

Ne törjük a fejünket. Döntsük el úgy a felvetett kérdést, hogy csakugyan létezett a «görög-csoda», és a matematikusjegyzék nem mond mást, mint a tiszta igazat. Semmiképpen sem könnyű a szellemtudománynak ezt a rohamos változását érthetővé tenni. Talán magától Pythagorastól is távol állt a tudományos forradalmárkodás. Bizonyára nem fejtette ki céljaként iskolájában: «Most pedig a matematikából végre tudományt csinálók. Eddig az egész céltalan és tervszerűtlen, mindenkor csak a gyakorlat szempontjai után igazodó tapogatózás volt». Így beszélhetett Kant a filozófiáról — persze csak miután az addigi filozófiát az addigi matematikával összehasonlította. De Pythagoras, hazatérvén Görögországba a Kelet kábító vidékeiről, bizonyosan nem akart mást, mint az ott tanultakat előadni. Sokfelét elhallgattak előtte, gondolhatta. Tehát meg kell találnia az ott tanultak magyarázatát, okait. Tanítványok tettek fel kérdéseket erről-arról, szent tudásvágytól űzve. S egyszerre — ez a Nyugat születése — tükröződni kezdett az idegen népektől ellesett tudás egy más szellemi szerkezetben, megtört a hellén szellemi génusz lencséjén és gyűlni kezdett. A rendszerező hellén szellem elkezdte az «anyag» feldolgozását, és «független, értelmi alapon való» vizsgálatát. Mi ez már megint? Hogy meri egy görög, egy ilyen «szemmel-néző» nép fia, Egyiptom és Babylon hűvösefjű számolóinak «anyagiaságát» megtagadni, és az immateriálist, a nem érzékit, az intellektuálist előtérbe hozni? Nem, annyira nem egyszerű a helyzet, mint Eudemos, az aristotelianus, gondolja. Nem csupán a szellemivé válás hozta létre a «görög csodát». Még inkább azt mondhatnók, hogy a görög népnek pusztán optikai tulajdonságai voltak azok, amelyek mindezt lehetővé tették. A hellének tervezéseiben és kutatásaiban első helyen nem az okoskodás állott, hanem valamely gyors áttekintés. Bizonyos, a görögök ajándékoztak meg a logika tudományával is, de ők aján-

dékoztak meg a plátói ideával is, minden létező ősi képével és ők ajándékozták nekünk azóta soha el nem ért szobrászatukat és plasztikájukat. És ezek a képességek működtek közre a «matematika tudományának» megszületésénél is. Minden céltől távol, csak önmagára támaszkodva, a világ összhangját keresve, keletkezik Pythagorasban a logikai, szemléleti és esztétikai szempontból egyaránt kielégítő matematika ideálja, amely a megismerés határait meghaladva vallásos-misztikus területekre nyúlik. A következőekben látni fogjuk, hogy a helléneknek ez az esztétikai tudományideálja¹ miként teszi lehetővé a görög tudomány teljes fejlődését, majd miként akadályozza azt és pusztítja el végül. Ilyen állítások látszólag ellenmondanak önmaguknak. De ez csak látszat. Mert minden rendszer magában viseli kiteljesülése határait.

Miben állt tehát — most már kevésbbé általánosan — az új «tudománynak» döntő újdonsága? A tudomány, szó szerint, összegyűjtött, egyesített, szabályba foglalt tudás. Jó, de hát egyesített tudás volt Ahmes számológönyve is a harmadik évezredből Krisztus előtt, és az volt a sok cseréptáblakönyvtár Mezopotámiában? Miért nem volt az valódi tudomány? Minden rangsorolás és értékelés nélkül szeretnők e helyen megállapítani, hogy technika és tudomány közt mély szakadék tátong. Alkalmazott vagy alkalmazásra szánt tudás a technika. Tanácsok, receptek, eljárások gyűjteménye, amely minden további indokolás nélkül az alkalmazó kezébe kerül. Persze Pythagoras előtt is volt valami tudomány-féle a számolni tudás, számoló-technika mögött. De a helléneket megelőző matematika nem is kereste az alapokat, megelégedett azzal, amit rapszodikusán, összefüggéstelenül talált, ami a gyakorlatban megfelelt és közelítésben pontos volt. És mindennek előtt sohasem volt kutatásának központja az általános érvényűre való törekvés. Minden egyes halomszámítási feladat (egyenlet) megoldásával külön gyötörték magukat Egyiptomban és eszükbe sem jutott, hogy hasonló

¹ Das ästhetische Wissenschaftsideal der Hellenen. Így nevezi Pierre Boutroux «Das Wissenschaftsideal der Mathematiker» című alapvető művének német fordításában.

vagy analóg feladatok számára közös szabályt keressenek. Még kevésbé jutott valakinek eszébe, hogy valamennyi egymáshoz hasonló feladat számára egységes írásmódot szerkesszen. Csak sokkal később elmondottak során látjuk majd, hogy mekkora «mulasztást» jelent ez.

Így tehát a «matematikus-jegyzék» még a miletosi Thalesnek sem adta meg a szigorú tudományosság minősítését, noha elismeri, hogy «egyes dolgokat érthetőbben, másokat általánosabban tárgyalt». Félreértések elkerülésére meg kell itt jegyeznünk, hogy az egyiptomiak és a babyloniak sem voltak teljesen híján az elméletnek. De elméletük, amennyire ma meg tudjuk ítélni, nem spekulatív, nem deduktív, hanem próbálgató és induktív jellegű volt. Szélső esetben valamely matematikai probléma «általános érvényűségét» sok egyes megoldásból következtették, ha ilyesmire egyáltalán vállalkoztak. De úgyszólván soha sem következtettek az általánosból az egyes esetre. Pedig ez a sajátsága a matematikának, még pedig alapvető sajátsága, hogy kutatómódjának a második, deduktív úton kell járnia, hogy valóban a magasba jusson s belőle a gyakorlat számára is alkalmas eszközt kovácsolhassunk.

Eszközt mondtunk. Tehát a matematika valóban csupán eszköz? Igen, adott esetben azzá lesz. Mert ha teljesen céltalan, akkor csak a szellem játéka, «szellemi sport», ahogy ma mondani szokás. Az olympiai játékok görögjétől az ilyen szellemi sport bizonyára nem állt nagyon távol. És nemcsak Pythagoras emelte ki igen erősen a matematikai tanulmányok tisztán nevelő hatását. Amint az atlétikai gyakorlatoktól adott testi felkészültség sem marad végeredményben öncél. Nem lehet mindig jobban és jobban felkészülni, úgyhogy végül maga a felkészültség okozzon örömet. E mögött mindenkor egy egész nép felemelkedésének gondolata rejlik, a felkészültség-készenlét ideálja. És ezzel könnyen és harmónikusan feloldódik az «öncélú-tudomány» és az «eszköz-tudomány» közt látszó ellentét: úttörők kis csoportja, szent vágytól űzve, elfelejti, hogy mire valók az eszközök. Az eszköz maga, önmagáért, mindenkori szerzője agyának szellemi és intuitív mélységeiből való elvek szerint, lehető tökéletes fokra fejlődik. Használja, aki akarja és akinek

kell. Bizonyos, hogy az illető nép, vagy csoport arzenáljának fegyverkészlete ezzel is szaporodott.

Ez a fejtegetés látszólag ellene mond Pythagoras követői titoktartásának. De ez a titoktartás nem vonatkozott mindenre, hanem elsősorban eljárásokra és még bizonytalan eredményekre. A nagy felfedezéseket akkor is nyilvánosságra hozták, olyan eredmények kivételével, amelyek a misztikus kultusz céljait szolgálták, vagy amelyek, véleményük szerint, inkább ártottak, mint használtak a tudomány fejlődésének. Bárhogy is volt: tagadhatatlan, hogy egy részben titokban tartott tudomány nem azonos gyakorlati szabályokkal. S most nézzük végig, hogy milyen rohamléptekben haladnak a felfedezések már első, görög származású képviselőjüknél.

A mítoszi Thales, aki eredetileg alkalmasint kereskedő lehetett és csak igen előrehaladott korában szentelte magát a matematikai tanulmányoknak, az igaz tudományhoz vezető átmenetet inkább még csak sejtette, mintsem megvalósította; viszont Pythagorasban mindaz, amit mesterétől, Thalestől tanult, rögtön úttörő jelentőségű eredmények sorozatával olvad össze utazásainak tanulságaival. Újításai közül beszéljünk először a legismertebbről, az ú. n. Pythagoras-féle tételről, hisz nélküle tágabb értelemben vett matematikát elképzelni sem lehetne. Nem akarunk itt túlságosan messzire előre nyúlni, de megemlíjtük, hogy e tétel nélkül alig képzelhető el a geometria bármely ága s a geometrián alapuló felsőbb mennyiségtan sem fejlődhetett volna.

Mindenki ismeri a tételt, tudja, hogy minden derékszögű háromszögben a derékszöggel szemben fekvő oldal (az átfogó) fölé rajzolt négyzet egyenlő a másik két oldal (a két befogó) fölé rajzolt négyzet összegével. A Schopenhauer által felvetett kérdésre, hogy miért áll fenn ez az összefüggés, éppoly kevéssé lehet válaszolni, mint a többi hasonló kérdésre. Százféleképpen be lehet bizonyítani, hogy igaz. Hiába, a «miért» mégis rejtély marad. A geometriai idomok tulajdonságai a lényegükből következnek, az idom fogalmából, amelyet magunk alkottunk. Éppen oly értelmetlenek ezek a kérdések, mintha azt kérdeznők: léteznek-e «valóságban» derékszögek. Ily módon felfogott «való-

ságban», szigorúan véve, nem «léteznek» szögek, mert szögek kiterjedéstelen csúcsa és végtelenül vékony vonal anyagi világban nem mutatkozhatik. A geometria valamennyi alakzata csak agyunkban létezik; ez szellemvilág, önmagában hordja törvényeit, függetlenül a tapasztalattól, és éppen ezért tiszta formák birodalmaként bármely «valósághoz» kapcsolva igaz és igaz marad. Háromszögre vonatkozó tételek egyaránt, száz százalékban, érvényesek, ha a háromszög állócsillagokból van, vagy fából, fémből, kőből vagy akár kenyértésztából készült. És akkor is, ha vonalakból. De ezt csak mellékesen említjük meg.

Pythagoras volt tehát az első, aki a tétel érvényességét minden háromszögre kimondta, mert az addig Egyiptomban csak a 3, 4, 5 oldalarányra (tehát $3^2 + 4^2 = 5^2$, azaz $9 + 16 = 25$). Indiában pedig csak az 5, 12, 13 oldalarányra (tehát $5^2 + 12^2 = 13^2$, azaz $25 + 144 = 169$) volt ismeretes. No meg a megfordítására, hisz ebből indultak ki tulajdonképpen Egyiptomban és Indiában. E két országban, tudjuk, azt mondták, hogy derékszög keletkezik, (vagy derékszögű háromszöget kapunk), ha az oldalak aránya ez meg ez. Pythagoras viszont azt mondtá, hogy minden derékszögű háromszögben, vagyis minden, de minden egyáltalán létező derékszögű háromszögben fennáll a már említett négyzetes összefüggés, a befogónégyzetek összegének és az átfogónégyzetnek egyenlősége. Miletosi Thales tétele segítségével közös átfogó fölé felrajzolhatnók azt a végtelen sok derékszögű háromszöget, amelyekben a derékszög csúcsa a kör kerületén van. Bármennyire eltérő is e háromszögek alakja, a kör átmérője fölé rajzolt négyzet területe mégis mindenkor egyenlő a másik két oldal fölé rajzolt négyzetek összegével. S most már azt hisszük, a legkétkedőbbek előtt is világos, mennyire eltér ez az általános érvényű törvény a magukban véve használható és helyes egyiptomi és indiai különleges esetektől. Pythagoras tétele, noha a valóságos mérést éppen lehetővé teszi, teljesen független minden konkrét hosszsmértéktől. Mérések alapja és kiindulópontja, nem pedig következménye vagy eredménye. Az addig kezdetleges «eszközből» szinte mindenre használható gép lett. És most már bizvást feltehetjük a kérdést, hogy mekkora vajjon az átfogó, ha a két befogót ismerjük :

$a=5$ és $b=7$. Az a^2+b^2 összeg tehát, számokkal $5^2+7^2=25+49=74$. De ez nem négyzetszám, nincs egészszámu «négyzetgyöke», mert $8^2=64$, viszont már $9^2=81$. Jelentős nehézség, de ezzel itt még nem akarunk foglalkozni. Pythagoras tehát mindjárt annak a módját is kereste, miként lehet korlátlan számban olyan számhármast találni, amelyekre az $a^2+b^2=c^2$ összefüggés érvényes és a , b és c mégis egészszám. Páratlan számra ő maga megtalálta a megoldást, páros számra csak századokkal később találta meg nagy tanítványa, Platon. Pythagoras megoldása, mai írásmóddal a következő: ha a páratlan szám, tehát $a=2n+1$, akkor $b=2n^2+2n$ és az átfogó $c=2n^2+2n+1$. Legyen $a=9$, vagyis $a=2 \cdot 4+1$, akkor $b=2 \cdot 4^2+2 \cdot 4=40$ és $c=2 \cdot 4^2+2 \cdot 4+1=41$. És valóban $9^2+40^2=41^2$, vagyis $81+1600=1681$.¹

E Pythagoras-féle képletből könnyen adódik $n=1$ helyettesítéssel az egyiptomi, $n=2$ helyettesítéssel pedig az indiai háromszög. Pythagoras valószínűleg tudta, hogy a számhármast bármely egész számmal megszorozhatja, anélkül, hogy ez a számok megoldásjellegén változtatna. Hisz a legegyszerűbb rajzról is kitűnik már, hogy a rajz lényegén a hosszegység megkétszerezése, megháromszorozása, megnégyeszerzése stb. mit sem változtat. Így $(3 \cdot 3)^2+(3 \cdot 4)^2=(3 \cdot 5)^2$ számok megint egészszámu oldalakból álló háromszöget adnak; $81+144=225$ egyenlőség bizonyítja állításunk helyességét.

Feltesszük a kérdést: miként oldotta meg Pythagoras azokat a határozatlan egyenleteket, amelyek ezekre az eredményekre vezettek? Talán ismert már valamilyen betűszámantant? Vagy tudásához az egyiptomi halomszámítások révén jutott? A második lehetőség fennáll, az elsőt feltétlenül el kell utasítanunk. De van egy harmadik lehetőség is és ezzel bizonyos okok miatt igen alaposan kell foglalkoznunk. Beszámolnak ugyanis arról, hogy már Pythagoras és tanít-

¹ Érdekessége miatt írjuk már ide Platon képletét, melyben páros számból indulunk ki. Legyen $2n$ páros szám, akkor a három oldalt a $2n$, n^2-1 és n^2+1 számok adják. Tehát $2n=8$ esetén a másik két szám 15 és 17. Így $8^2+15^2=17^2$ vagy $64+225=289$.

Persze a két képlet (Pythagorasé és Platoné) együtt sem adja meg az összes ú. n. Pythagoras-féle számhármast. (A ford.)

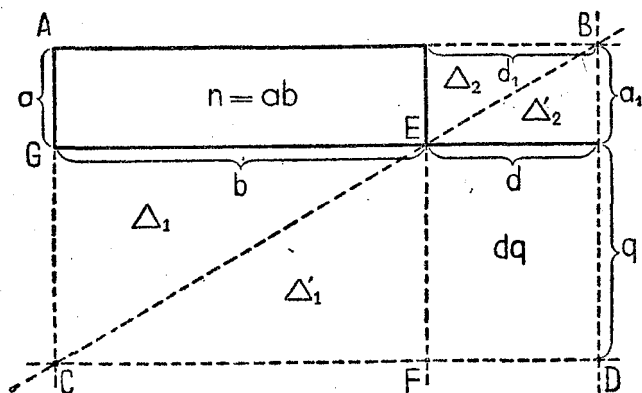
ványai is gyakorolták az «egymáshoz illesztés» művészetét és ismeretes volt előttük az egymáshoz illesztés mindhárom módja: a parabolikus, a hiperbolikus és az elliptikus. Egyáltalán ne gondoljunk itt — hangsúlyozzuk — az általunk jól ismert parabola, hiperbola vagy ellipszis görbékre. Ez a görbefogalom sokkal később fejlődött ki a pergai Apollonios-nál és éppen abból, amiről itt szó van. De most még nem tartunk ott. Az egymáshoz illesztés művészete, amely görög földön sajátosan magas fokra fejlődött, az átalakítás művészetéhez hasonló, ahhoz az ügyesséhez, amely geometriai idomokat más alakú, de ugyanakkora területű idomokká alakít át. A matematika történetének újabb kutatói ezt a műveletet találóan «geometriai algebrának» nevezték el.¹ És ez az algebra csakugyan lehetővé teszi úgynevezett négyzetes vagy másképpen vegyes másodfokú egyenletek álcázott megoldását.

Messze túl vezetne könyvünk keretein e módszer részletesebb ismertetése, mivel ez, mint egyenletek megoldására szolgáló módszer, csak a görög matematikában fordul elő.² Mégis kötelességünk, hogy legalább egy egyszerű példát (egy parabolikus egymáshoz illesztést) bemutassunk és megmagyarázzunk. Az világos, hogy a szorzást téglalapnak tekintetjük. a és b szorzata az a -szor b és ez a szorzat egy a és b oldalú téglalap területe. Ebből a szorzás megfordíthatósága is következik (kommutativitás), hisz a téglalap területe természetesen $b \cdot a$ -val is egyenlő. Ez szemmel látható, de egységnégyzetek berajzolása után a sorok leszámolásából rögtön kitűnik. Bonyolultabb feladatok megoldását is meg lehet kísérelni. Osszuk ugyanis ketté egy téglalap oldalait (helyesebben tekintsük azokat összegeknak), akkor azt találjuk, hogy $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$. Elég, ha az osztópontokon keresztül az oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk és a segédvonalak behúzásával keletkezett négy terület mérőszámát leolvassuk. És az általános $a \cdot b$ szorzatot

¹ Elsősorban Zeuthen. (Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter.)

² Valahányszor mégis felbukkan, az araboknál, vagy Európában, a középkorban és az újkor elején, mindenkor csak a görögök utánzása marad és reminiscencia jellegű.

valóban « ab téglalap»-nak nevezték Görögországban, ugyanúgy, ahogy az $a \cdot a$ -t, vagyis a^2 -t ma is «a négyzet»-nek mondjuk.¹ Egy szorzat azonban mindenkor újból szám, vagy annak tekinthető. Később ugyan látni fogjuk, hogy Vieta és több más újabkori matematikus helyteleníti, hogy a görögök a számokat hol vonalnak, hol pedig területnek tekintették. De erről később lesz szó. A görögök számára csak az volt fontos, hogyha sikerült valahogy egy n számot két a és b tényezőre bontani, akkor azt az a és b oldalú téglal-



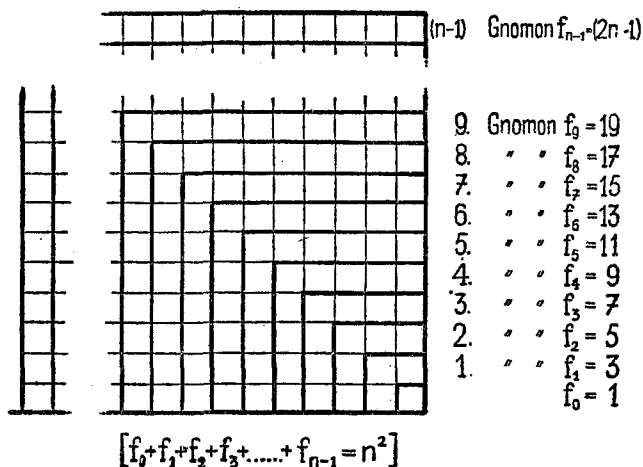
1. ábra.

lappal ábrázolhattuk. Tehát $n = a \cdot b$. Ezt a téglalapot meg is rajzolhatjuk. Ha most ezt az n számot valamely d számmal (=távolsággal) el akarjuk osztani, akkor, mondjuk, a b oldalt d -vel meghosszabbítjuk és a d -hez egy téglalapot «illesztünk». Úgy ahogy az ábrán látható. Megrajzoljuk a d_1 távolságot is, végpontja B , B és E pontokon keresztül az átlót és azt meghosszabbítjuk mindaddig, amíg az a meghosszabbítását metszi. Ezen a C ponton keresztül párhuzamost húzunk a b -vel, míg ez az a_1 meghosszabbítását D -ben metszi. Az így keletkezett új, nagy $ABCD$ téglalapot az átló két-

¹ Az előbbi kifejezés még Descartesnél is előfordul, sőt szórványosan később is.

egyenlő háromszögre osztja. Ezek mindegyike egy-egy téglalpból (ab , ill. dq) és két-két háromszögből (Δ_1 és Δ_2 , ill. Δ'_1 és Δ'_2) áll. Mivel Δ_1 és Δ'_1 , valamint Δ_2 és Δ'_2 szemmel láthatóan egyenlő, ezért, az ab téglalap is egyenlő az új, «odaillesztett» dq téglalappal. De ha $ab=dq$, akkor $\frac{ab}{d}=q$, vagyis az osztandó n szám d -vel osztva az eredmény q .

De ez csak egyike a parabolikus egymáshoz illesztés számos felhasználási módjának. Egy $ab=cx$ alakú lineáris



2. ábra.

egyenletet is megoldhatnánk vele. Úgyis fogalmazhatnók a feladatot, hogy az ab téglalap négyzetté alakítandó át, s ezzel az $ab=x^2$ tiszta másodfokú egyenlet megoldására jutnánk stb. Csak annyi bizonyos, hogy a problémák, amelyekkel Pythagoras és első tanítványai foglalkoztak, egyáltalán nem voltak egyszerűek.

Ez a benyomásunk csak erősödik, ha Pythagoras szám-tanát, aritmetikáját közelebbről szemügyre vesszük. Ismeretes, hogy Pythagoras az egységet, az 1-et nem számnak, hanem minden szám ősének tekintette. Abból az alapelvől

kiindulva, hogy minden dolognak a lényege a szám, nagyra fejlesztették a számmisztikát és a kutatások során sokféle, a számokkal kapcsolatos összefüggésre jöttek rá. De még mielőtt ehhez hozzáfognánk, még egy fogalmat kell tisztáznunk, amely a számelméletben is szerepelni fog. Azt az időmot, amely minden «egymáshoz illesztéssel» kapcsolatban szerepet játszott (pl. az 1. ábrán az $ABDFEG$) «gnomon»-nak nevezték. Pythagoras iskolája már az első időkben megkísérelte, hogy az egységnégyszethez, amint a 2. ábrán látható, derékszögű egyenlőszárú gnomokat illesszen. Ezzel arra a feltűnő összefüggésre jöttek rá, hogy a páratlan számok összege, bármeddig folytassuk is az összegezést, mindenkor négyzetszámot ad. Tehát $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$ stb., végül $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$, és itt n az egymáshoz illesztett gnomonok számánál 1-gyel nagyobb számot jelent.

A természetes számok összegezését, $1+2+3+4\dots$ pontokból alkotott háromszöggé ábrázolták, ennek az 1 volt az egyik csúcsa és ezért a természetes számok összegezése során adódó számokat háromszögszámoknak nevezték. Ilyenek voltak pl. 28 vagy 55. Foglalkoztak még az úgynevezett «barátságos számpárok» is (ilyenek pl. 220 és 284), mind-egyikük egyenlő a másik valamennyi osztójának összegével, mivel

$$220=1+2+4+71+142$$

és

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110.$$

«Tökéletes számok» viszont azok voltak, amelyek valamennyi osztójuk összegével egyenlők. Ilyen például

$$6=1+2+3$$

vagy $28=1+2+4+7+14,$

vagy $496=1+2+8+16+31+62+124+248.$

De mindez csak példája legyen annak, hogy Pythagoras és tanítványai miként foglalkoztak számelmélettel (amint Legendre óta működéskorukat nevezhetnők). De mi volt a céljuk ezekkel a számösszefüggésekkel? Ezt is tudjuk: a számok birodalmának harmóniáját és ezzel a világmindenség har-

móniáját akarták áttekinteni. Ilyen irányú vizsgálatainkban a zenében tapasztalható harmónikus összefüggések csak megerősítették őket, főképpen azok, amelyek egy monochord (egyhúrú hangszer) rezgő húr hosszának meglepő arányaiban nyilvánultak. Röviden, a világmindenség egész számokkal történő felfoghatóságában tetszelegtek és azt hitték, hogy a lét végső talányai megfejtésének nyomára jutottak. Az egyetlen módon, amely a hellén szellemnek megfelelt: hiánytalan harmónia, tiszta világosság és áttekinthetőség alakjában.

Ekkor tűnt fel, éppen a legfelsőbb, legnagyobb jelentőségű felfedezésekből kiindulva, hirtelen egy ördögi hatalom, amely ezt a szép álmot irgalmatlanul elpusztította; s akkor még csak nem is sejtették, de nem is sejtették, hogy ez a nem kívánt, szinte alvilági felfedezés teszi szabaddá az utat szédítő matematikai fejlődés felé. Ez volt az irracionális felfedezése.

A hellének felfogását erről a felfedezésről az Euklides elemeinek tizedik könyvéhez írt egyik régi scholion mutatja meg, amelyet az újabb időkben a már említett filozófus, Proklos Diadochos megjegyzésének tartanak. Így szól: «Azt mondják, hogy az az ember, aki az irracionális szemléletét rejtekeiből a nyilvánosságra hozta, hajótörésnél pusztult el. És pedig azért, mert ami kimondhatatlan és aminek nincs képe, annak örökké rejtve kellett volna maradnia. Éppen ezért a szentségtörőt, aki az elevennek ezt a képét véletlenül megérintette és felfedte, nyomban eltemették és körül folyják őt a hullámok».

Akinek e sorokat olvastán nem fut végig a hideg a hátán, annak nincsen érzéke a misztikum iránt. Egy szörnyű ősi fenyegetés hangja süvölt e szavakból, amilyenek csak próféták adtak hangot, ha egész népük céljait, ideáljait és jövőjét látják végveszélyben. A részvétnek nincs szava a szerencsétlen iránt, az elérékenyülésnek nincs hangja. A legszentebb ellen vétett, el kell némítani, meg kell semmisíteni, képtelen a «teremtés» helyén, vagyis a semmibe kell visszaütni, amelyből jött. Ott folyják körül örök hullámok, s tartásuk fogva örökké. Az élet ősmélysegeit érintette, ahová nem szabad visszatekintenünk. Mert előre kell néznünk,

és az élet ajándékát azért kaptuk, hogy a kimondhatatlantól és képnélkülitől, az ősi kaotikus mélységekből felemelkedjünk a tisztaság, a harmónia, a kozmosz, a szférák zenéje világába. A Tartaros maradéka, az alogon, az irracionális maradjon féltett titka a tudás kevés papjának, tartsák titkon törhetetlenül, nehogy iszapja, újból előtörve, az emelkedés nehezen tört útját járhatatlanná tegye.

Talán a leghellénebb minden legendák közt ez a legenda, a titok kifecseggőjére mért isteni büntetéséről szóló. De a titok, aránylag hamar, nyilvánosságra jutott és a tudománynak számolnia kellett vele. De a tudomány sem adta meg magát. Elkeseredett harcot vívott visszavonulás közben. Sőt még ma sem szűnt meg a harc az irracionális ellen, még a legutóbbi évtizedekben is voltak hősi kísérletek, megkötésére és elrendezésére.

Pythagoras számára először a legváratlanabb helyen bukkan fel. Ott, ahol a legnagyobb szabályosságot kellett volna várnunk. Még pedig a derékszögű egyenlőszárú háromszög, vagy ami ugyanaz, a négyzet átlója vizsgálatánál. Mivel itt a két befogó egyaránt 1 és 1, így az átfogó négyzete 2, mivel $1^2 + 1^2 = 2$, és az átfogó, modern írásmód szerint $\sqrt{2}$, azaz négyzetgyök 2. S hiába keresünk, — ezt már Pythagoras is tudta — olyan egész vagy tört számot, amely önmagával megszorozva, 2-t adna. Ma felírjuk: $\sqrt{2} = 1.4142135624...$ és pontokat írunk a végére. Ezek a pontok jelölik azt, hogy nincs vége a tizedestörtnek és nincs szabály, nincs tiszta vagy vegyes szakaszosság, amely lehetővé tenné, hogy akár gondolatban is végére juthassunk. A $\sqrt{2}$ szám, vagy eredménye alogos, ki nem mondható. Ez és a többi ilyen semmimű szabályba nem fogható szám képnélküli, amint azt már az Euklides könyvéhez írt scholion is mondja. Képe legfeljebb az élőnek magának, amely szintén irracionális, tehát gúnyt űz minden ratio-ból, minden taglaló, rendszerező értelemről. És mégis itt fekszik a derékszögű egyenlőszárú háromszög átfogója, a négyzet átlója, simán, zártan, magától értetődően, mintha mi sem különböztetné meg a többi távolságtól. Talán valójában nincs is hossza, ninesenek végpontjai? Végei szakadozottak, vagy rojtosak? Nem, bizonyosan nem! Sőt azonnal akadt még valami, valami sokkal barátságta-

nabb is: válasszuk a négyzet átlóját egységnek, akkor ez határozott távolság, hossza egészszám, 1. De mekkorák ekkor a négyzet oldalai, (a derékszögű egyenlőszárú háromszög szárai)? Ekkor bizonyos, hogy (ismét mai szokások szerint írva) $1^2 = x^2 + x^2$, tehát $1^2 = 2x^2$ és $x^2 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$. Ebből

$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy racionális nevezővel írva $\frac{\sqrt{2}}{2}$. De

ha $\sqrt{2}$ irracionális, akkor a fele is az. Mi történt itt? Az előbb racionális befogók lettek irracionálisak? Tudták is mindjárt, hogy mi történt. Magában véve egyik távolság sem irracionális. Nem racionális és nem irracionális. De sem egész, sem pedig valamilyen törtszám segítségével nem hasonlíthatók össze, tehát egymáshoz képest irracionálisak, inkommenzurábilisak, összemérhetetlenek.

De a minden irányba elinduló geometriai kutatás más állomásain is jelentkeztek irracionális tulajdonságok. Csodálatos módon, éppen a legszabályosabb részekben. Így különösen az egyenlő oldalú háromszögben, (az oldal és a magasság viszonya), a szabályos hatszögben és különösen a szabályos ötszögben. Az utóbbinak első ábrázolója és kutatója bizonyára Pythagoras iskolája, sőt talán maga Pythagoras. Ismeretes, hogy az ötágú csillag, amelyet később boszorkánylábnak is neveztek, mintegy címere, ismertetőjele volt Pythagoras követőinek.

De a szabályos sokszögek ismeretéből kényszerű és egyben hasznos átmenet vezetett a testtanhoz, a sztereometriához. A matematikus-jegyzék még általunk nem magyarázott helye szerint Pythagoras a «kozmosz-teszt»-ekkel is foglalkozott és ez nem jelent mást, mint a szabályos testek, poliéderek felfedezését. A görögök plasztikus látásának távolról sem voltak akkora nehézségei, mint amekkorát a történelem-kutatás sokszor emleget, ha valószínűtlennek mondja, hogy e felfedezés ilyen régi korból származik. Sok ásatásnál találtak azóta soklap (test) modelleket, (ma így mondanók), márványból, bronzból. Azonkívül senki sem tagadhatja, hogy a kocka, a tetraeder és az oktaeder már a régi Egyiptomban is ismeretes volt, legalább is ismereteseeknek kellett lenniök.

Felfedezni való tehát nem maradt, csak az ikozaeder, amelyet húsz szabályos háromszög határol és a tizenkét ötszögtől határolt dodekaeder. Éppen ez utóbbinak a felfedezése állhatott nagyon közel a szabályos ötszög felfedezőihez, sőt Jamblichosnál azt olvashatjuk, hogy egy bizonyos Hippasosznak, Pythagoras iskolájából, sikerült először dodekaedert gömbbe írni. Ezt a felfedezését az iskola minden hagyománya ellenére nyilvánosságra hozta és istentelensége miatt a tengerbe vészett. Tehát ismét «istenítélet» a «geometria ellen elkövetett bűn» miatt. Jamblichos, aki Krisztus születése után élt és írt, hozzáfűzi, hogy Hippasos, közlésével, a felfedezés dicsőségét megszerezte ugyan, de a dicsőség tulajdonképpen azé, akinek még a nevét sem merik kiejteni, vagyis magáé a nagy Pythagorasé. E nyilatkozatból számunkra az következik, hogy a régiek a dodekaeder gömbbe írását ugyan Hippasosznak, de felfedezését mégis Pythagorasnak tulajdonították.

De fűzzünk még egy szót a szabályos testek «kozmosz» jelzőjéhez. Ez a név valószínűleg Pythagoras koránál későbbi időből származó, a világot atomisztikusan felépítő elképzeléssel függ össze. Az elemek e szerint legkisebb részecskékből állnak, a tűz tetraederekből, a levegő oktaederekből, a víz ikozaederekből és végül a föld, mint elem, hexaederekből, kockákból. De mivel ebben a magyarázatban a dodekaeder nem kapott helyet, azt mondták, hogy utóbbi a mindenségnek mintegy tervrajza, körvonala.

Ha ez utóbbi kozmologikus világképet kissé naivnak és egyben mesterkéltnek tartjuk is, nem szabad elfelejtenünk, hogy legújabb elképzelésünk az anyag szerkezetéről egyáltalán nincs olyan ég és föld távolságban ettől az első, bátoratlan tudományos világmagyarázat-kísérlettől. Elemeink különféleségét mi is, legkisebb részeik, atomjaik különféleségével magyarázzuk. Niels Bohr «atom-modelljében», de méginkább Schrödinger és Heisenberg elméletében bizonyos geometriai képet adunk atomjainknak. De ez a képünk nem statikus és alakhoz-kötött, mint a régi helléneké, hanem kvantitatív (az elektronok száma) és dinamikus (elektronpályák).

Most immár nagyjából láttuk a legfontosabb részét annak, amit Pythagoras és tanítványai alkottak. Több az, mint amit

egy futó pillantás észrevenne, és több mint amit a későbbiek gondoltak, azok, akik oly sokra viszik, ha az alap egyszer kifogástalan. De ezt a szilárd alapot nem csak abban látjuk, hogy a matematika felemelkedett deduktív, tehát az általánosból az egyes esetre következtető tudománnyá. És itt ismét közömbös, hogy az általános tétel felfedezése induktív úton történt-e. Mert a matematika számára nem a kísérlet tilos, hanem a kísérletnél való megállás. Tehát nemcsak az általánosítás a Pythagoras-iskola érdeme. Részletekben is elmúlhatatlan alapokat raktak le és ezzel bebizonyították, hogy rendszerük nem csak terv, programm, hanem maga a «felfedezés művészete» és ez vitte őket fokról-fokra feljebb. Igaz, Pythagoras tétele a következő évezredekben magában is ugródeszka lett, és *pons asinorum*, számarak hídja. De belőle nőtt ki azonnal ez a barátságtalan új számfajta, az irracionális. És maga az a körülmény, hogy Pythagoras iskolája, noha eleinte csak misztikus-kultikus formában, számelmélettel kezdett foglalkozni, döntő jelentőségű a matematika felemelkedése szempontjából. Mert éppen ez a kutatás alapozta meg a sorokkal és sorozatokkal való foglalkozás lehetőségét. És meglepő összehasonlítása a dolgoknak az a körülmény, hogy ezek a sorok voltak hivatottak később arra, hogy hídként szolgáljanak a racionális partról az irracionálisnak még meg nem hódított, kimondhatatlan, képnélküli partjára.

MÁSODIK FEJEZET.

Euklides.

Matematika és filozófia.

Vitruvius meséli az építészetről szóló művének bevezetésében a következő jellemző anekdotát : «Aristippus philosophus Socraticus, naufragio cum eiectus ad Rhodiensium litus animadvertisset geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur : Bene speremus, hominum enim vestigia video.» Fordítsuk le ezt a részt szabadon, hogy tárgyunk szempontjából igen tanulságos szimbolum-tartalma világosan kiemelkedjék. Tehát Aristippos, Sokrates követője vagy tanítványa, hajótörés után Rhodos szigetének partjára vetődött. Itt homokba rajzolt geometriai ábrákat vett észre és állítólag ekkor, társaihoz fordulva, örömmel kiáltott fel: «Reménykedhetünk, ember kezenyomát látom!»

Fűzzük hozzá, igaz ember kezenyomát. A hellén számára nyilvánvaló volt : nem barbár lakott itt. Rössz embernek nincsenek «schemata geometrica», geometriai ábrái. A kultúrember képe ragyogott a geometriai ismeretből feléje és kezenyoma a geometriai rajz volt.

Ez az eset állítólag Platon idejében történt, vagyis mintegy 400 évvel Krisztus születése előtt. Tehát varázsszönyegünkkel nem téren, hanem időn kell keresztül sietnünk, hogy megláthassuk mindannak a lényegét, ami Pythagorastól kiindulva, a görög csoda fénylő csúcsára vezetett. Ezt az erjedő, előretörő, átmeneti időt a matematikába betörő filozófiával jellemezzük, noha nem hiányzik belőle sem a matematika önálló felődése, sem pedig az önálló matematikai teljesítmény. De a sok eredmény mellett sem érte volna el a végső magasságot, ha a hellén szellem más része nem csatlakozik hozzá részben megtermékenyítő, részben pedig bomlasztó hatásával.

Nagy-Görögország ugyanazon délitáliai részén, ahol Pythagoras iskolájának több maradványa mélyenjáró, titok fátylába burkolt kutatásait folytatja, egy filozófiai iskola is keletkezik, az eleai filozófusok iskolája, amely alapítója, Parmenides, a nagy filozófus után Zenonban végül a karrikatúra felé hajló képviselőt talál. Az utóbbi nem volt matematikus, sőt, miként Cantor mondja, inkább a matematikus ellentéte, de szkepszisével, semmilyen paradoxontól vissza nem riadó kételkedésével olyan vitát indít meg, amely napjainkig húzódik el, a nélkül, hogy bármikor nyugvópontra tudna jutni. Ő nyúlt először az emberi szellemben rejlő nagy ellentétekhez, a határtalan oszthatóság és folytonosság, valamint a nyugalom és mozgás antinómiájához. De még mielőtt Zenonról beszelnénk, vissza kell nyúlnunk: már a miletosi Anaximandrosról azt állítják, hogy ő vezette be a végtelen fogalmát a tudományba. Pythagoras és a pythagoreusok a számsorozatok vizsgálatával és az irracionális felfedezésével mély bepillantást nyújtottak a végtelen, a soha be nem fejezhető felé. Az alogon-t, a kimondhatatlant, igaz, háttérbe szorították, elutasították. Kijelentették, hogy igaz, minden számnak megfelelő valamilyen nagyság vagy távolság, de nem minden nagyságnak vagy távolságnak egy szám. De mit ért az ősi alapproblémának ilyen mellőzése? Az irracionális már utat tört magának, már létezett, akár elismerték a hellén gondolkodás teljesjogú kategóriájának, akár nem.

Még Zenon előtt élt egy, a geometriát jól ismerő filozófus, Anaxagoras, aki a folytonosság elvének a legélesebb fogalmazását adta. Anaxagoras kijelenti: «A kicsinyek közt nincs legkisebb, mert mindig van, ami még kisebb... de a nagyok közt is van még valami, ami mindenkor még nagyobb.» De alig húsz évvel Anaxagoras születése után ismét egy úttörő született, Demokritos, Abderában, az ókor kétes, Rátót-hírű városában, amelyről a legbolondosabb és legostobább meséket híresztelték. Az «abderita» Demokritos mégis elsőrangú csillagként vonul be a világtörténelembe. Mondhatnók, ő volt a materializmus első felfedezője és ugyancsak ő adott az atomfogalomnak, mint a végső, oszthatatlan legkisebb résznek első és egyben maradandó értelmezést. Demokritos nagyjelentőségű matematikus is volt, — mint annyian mások,

Egyiptomban is járt — és matematikai téren tőle származik egy felfedezés, — furcsa szeszélye a tudomány történetének — amely homlokegyenest ellentmond atomisztikus filozófiájának. Ő határozta meg ugyanis a gúla és a kúp köbtartalmát azáltal, hogy e testeket igen vékony szeletekre vágta és ennek alapján kijelentette, hogy köbtartalmuk egyenlő a velük egyenlő alapterületű és magasságú hasáb, illetőleg henger köbtartalmának harmadával. Ez a magában véve feltétlenül helytálló kijelentés — éppen ezt akartuk fentebb mondani — atomisztikus alapon lehetetlen. Mert nem elegendők ehhez vékony lemezek, hanem legvékonyabb, és még annál is vékonyabb metszetek, különben nem kapunk sima gúlát, hanem egy lépcsőzöttet, nem kapunk sima kúpot, hanem szintén lépcsőzöttet, amelyet a sima testekhez — akár gúla, akár kúp — nem hasonlíthatunk. De bármi is a helyzet Demokritos felfedezése körül, vagy azé az Anaxagorasé körül, aki politikai fogolyként Athén fogházában állítólag elsőnek szerkesztett ábrát a kör területének mérésére, bizonyos, hogy a filozófusok vitája a matematika legmélyebb kérdései körül fellángolt. S most kell előhívnunk az eleata Zenont, hogy nekünk a maga mulatságos módján bemutassa minden mélyreható matematikai igyekezet meddőségét. Zenon ellensége volt a pithagoreusoknak. Nem tudjuk, hogy miért. De tegyük fel, hogy nem személyes, hanem csupán tárgyi szempontok vezették. De minthogy ellenségük volt, azt kellett először megbontania, amit ezek legszentebbnek tartottak, a számfogalmat. És támadását igen jól megalapozta. Egyszerűen minden sokaság létezésének lehetőségét tagadta. Minden sokaság, így következtet, egységekből épül fel. Egység azonban, — már mint olyan, amely ezt a nevet csakugyan megérdemli, — csak akkor létezhet, ha oszthatatlan. De ami oszthatatlan, annak nincs kiterjedése, hisz különben osztható. De ha így az egységnek nincs kiterjedése, akkor az valójában a semmi. De a semmit sokszorozhatjuk, ahányszor csak akarjuk, mégis mindig csak semmire jutunk. Így tehát nem létezik sokaság. De ugyanígy azt is állíthatnók, hogy az egység végtelen nagy. Mert ha a sok, vagy sokaság valóban létezik, akkor részeinek távol kell egymástól feküdniök. Részei közé akkor újabb részeket iktathatunk, és ezeknek is van kiterjedésük, és így a végtelenségig.

Bármeddig folytatjuk is ezt az eljárást, mindenkor csak újabb részekre bukkanunk, újabb egységekre, amelyeknek van kiterjedésük, tehát végtelen sok részből állnak, de ezeknek is van kiterjedésük, s így tovább. Tehát minden egység végtelen nagy, mivel végtelen sok, magában is kiterjedt részből áll. De az a kétségbeejtő tényállás még nem elegendő, hogy nincs egység és nincs sokaság, tehát nincsenek nagyságok és nincsenek számok sem, és hogy mind az egységek, mind a sokaságok magukban is végtelen nagyok, de még mozgás sem létezik. Mielőtt egy kilótt nyíl céljához ér, útjának felét kell először megtennie, e fél útnak ismét felét és így tovább. Lehet, hogy minden ilyen félút az egész útnak $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, stb.

részből tevődik össze, s ekkor végtelen sok, mindinkább kisebbedő, de mégis létező útdarab összege. Ekkor azonban a nyílnak már a legkisebb tekintetbe jövő út megtételére is végtelen időre van szüksége, vagyis ott marad az újra feszített húron. De lehet, hogy az útrészek tovább nem oszthatók, vagyis semmik. De semmiknek még oly nagyarányú összegezéséből sem származhat valami. Ez esetben is ott marad a nyíl a húron. Hasonló okokból nem érheti utol soha a gyorslábú Achilles a teknősbékát, ha annak már valami előnye van. Mert amíg Achilles végigfutja a béka előnyét, addig az újabb előnyhöz jut, és így tovább, az idők végtelenségéig, de ezt Achilles éppen olyan kevéssé éri meg, mint a teknősbéka.

De Zenon, az eleata sokkal világosabb értelmű volt, sem hogy arra az ellenvetésre, hogy a nyíl valójában mégis elszáll és Achilles csak utoléri néhány szempillantás alatt a teknősbékát, ne ezzel a jóval későbbi mondással feleljen: «Ez már a tények baja». Inkább rikító színnel akart azokra a «tényleg» fellépő nehézségekre rávilágítani, amelyek egy kezdet, egy végső egység, egy oszthatatlan rész feltételezésének ellene szegülnek. És ezen mit sem változtat az a körülmény, hogy a kyrenei Theodoros időközben bebizonyította, hogy minden nem négyzetszámból vont négyzetgyök irracionális.

De már Anaxagorasról szólva utaltunk arra, hogy ez a nagy filozófus a kör négyszögesítésével is foglalkozott. Vajjon ez magában álló, kiragadott probléma volt, vagy pedig általános jelentőségű kérdés? Csupán az időrendet nézve, már itt

kellene a hellének három nagy problémájáról beszélnünk : a kör négyyszögesítéséről, a kocka kétszerezéséről és a szög harmadolásáról. De halasztást kérünk tárgyalásukra. A következő fejezetben fogjuk ismertetni. Ebben a fejezetben más problémákra kell szorítkoznunk, különben Euklides különleges helyzete nem jutna kellőképpen kifejezésre.

Csupán annyit jegyezzünk meg, hogy már ebben az időben is keletkezett sok minden, ami egy Archimedesnek, egy Apolloniosznak tetteit előkészíti. Euklides érdemei szempontjából az a legfontosabb, hogy belátták : nem elegendő matematikai feltaláló szellem és plasztikus látás a matematika fellendítésére. Pedig ez volt az eszményük a legemelkedettebb szellemeknek. A matematika, hogy teljes, igazi tudománnyá legyen, egy időre a filozófia ellenőrzése alá került. Az erők ilyen eltolódását elsősorban Zenon okozta, mértéktelen, de nagyon találó támadásokat intézve a matematika bihetetlenül törékeny és könnyen sebezhető alapjai ellen.

De még mielőtt tovább mennénk, egy közbevetett, rövid, de nagyon fontos megjegyzést. Hallottuk, hogy a régi görögök, és elsősorban a pythagoreusok, számelméletüket aritmetikának nevezték és ezt az elnevezést mindarra kiterjesztették, ami abban az időben algebra-jellegű volt. A számolást, konkrét számokkal, ami az egyiptomiak és babyloniak (és valamennyi nem görög nép) matematikai főfoglalkozása volt, hellén földön nem ismerték el tudománynak. Ennek számvizsgálás volt a neve, nagyrabecsült ügyességük volt a számvevőknek, de nem volt tudomány. Ez a lebecsülés, amelynek okát kell adnunk, sokkal súlyosabb bosszút állt a hellén matematikán, mint a gyakorlati, mérő geometriának, a geodéziának elválasztása a szellemi világban egyedül rangot élvező, szigorú, tudományos geometriától. A geometria szó, amely föld-«mérést», -«kimérést» jelent, helytelen és anachronizmus. Thales és a pythagoreusok bízást alkalmazhatták minden mellékgondolat nélkül, az egyiptomi szokásokhoz és módszerekhez kapcsolódva a görög matematikára, pedig legfeljebb idom-, alak-, vagy aránylattal lehetett volna a neve, hogy nevével is kifejezze azt, amit akart, illetve nem akart.

Távol áll tőlünk, hogy magunkat nevetségessé tegyük és egy tudomány megalkotóit egy elnevezés helytelen meg-

választása miatt bírálgassuk. Csak utalunk rá, hogy tévedéseknek útját álljuk. Jobban érdekel minket az a körülmény, hogy a görög matematika, két főágában, a számok és számértékek tanában (tehát az aritmetikában és az algebrában), valamint a méretek és viszonyaik tanában, (tehát a geometriában) nem tűrt meg gyakorlati vonást, vagy élesebben fogalmazva, nem tűrte, hogy bármelyiket is gyakorlati vonás éktelenítse el. Csak a gondolat világában szabad matematikával foglalkozni, csak oda való, a tapasztalat világából számúzték, amennyiben tudomány névre tart igényt. Ezáltal volt biztosítható legmagasabb fokú általános ervényűsége, általánosítóképessége és esztétikus-harmónikus egysége és ez az igazolása egy ilyen fokú puritánizmusnak, amely éppen az olyan életrevaló népnél feltűnő, mint amilyen a görög volt. De éppen ezáltal mellőzött nem egy olyan problémát, amelyet csupán a gyakorlat vethetett volna fel, és így fosztotta meg önmagát bizonyos rugalmasságtól és átfogóképességtől. Ez a klasszikus formák öncélú tisztaságának problémája; amivel itt találkozunk, az alaknak és a tartalomnak a problémája, amelyet a most ismertetett előkészületi kor végén Aristoteles fejt ki a maga teljes nagyságában. És ehhez járul még egy további, mély és talányos probléma: az egyes kultúrtényezők együttműködésének kérdése. Mert amíg Egyiptomban a matematika csupán segédeszköze volt építészeti és közigazgatási téren egy feltétlenül nagykultúrájú közösségnek, és amíg Babylonban, és ennek elődeinél is inkább csak támogatta az életet és a misztikát, addig a görögöknél megalapította saját világát. A matematika hellén földön önállósult, elkezdte a vezető emberek egész gondolkodását átalakítani, «felsőbbrendű tudománnyá» lett, mint a filozófia, amely szükségképpen mindenkor «felsőbbrendű tudomány». S a matematika e századokban ismételten összeütközésbe jut vetélytársával, a filozófiával. Hallatlan szellemi kínok közt születik meg az «euklidesi ember». Így nevezi Oswald Spengler azt az embertípust, amely olyan nagyra becsüli a formát, hogy szinte eltiltja a gyakorlatban majdnem leginkább használható tudomány gyakorlati alkalmazását, de ezzel viszont az évszázadok során olyan magasságra fejleszti, amilyent azóta

is csak a XIX. század végén ért el. Tévedhetetlenül haladnak ezen az úton, semmi sem túl jelentéktelen, és semmi sem túlságosan nehéz, ha a célhoz vezet. És Hellasnak e politikailag igen mozgalmas és viharos századaiban, amelyekben a perzsák rohama páncélos és kardot forgató művészek, filozófusok és matematikusok seregén török meg, amelyekben a testvérharc a peloponnesosi háborúban legvéresebb orgiáit űli, s amelyekben Platon pártütő tanítványa, Aristoteles, ez az óriásszellem, Makedónia lenézett hegyvidékeiről való félvad királyt tanít, aki azután Nagy Sándor néven szétzúzza kelet és dél, Aethiopia határáig terjedő, korhadt kultúrországait, — ezekben a viharos, de igazán nagy időkben fejezi be a filozófia a rábízott matematika megtisztítását. Pheidias és Praxiteles szobrászati és Aischylos, Sophokles és Euripides drámai remekműveivel egyidőben.

Platon akadémiájának állítólag az volt a feladata, hogy geometriához nem értők ne lépjenek be. És Aristoteles líceumában a geometria elemeinek ismeretét természetesnek tekintették. Sőt tovább: maga Platon állította fel azt a követelést, hogy csak akkor tekinthető geometriai szerkesztés kanonikusnak, ha körző és vonalzó segítségével végrehajtható. Ma már tudjuk, ez azt jelenti, hogy a feladat aritmetikai megfelelője legfeljebb négyzetes, vagyis vegyes másodfokú egyenletre vezethet. De Platon nem elégedett meg ennyivel. Tanult a pythagoreusoktól, tanult iskola-társaitól, így Theaitetostól és kortársaitól, így Eudoxostól. Közülük az előbbi fejtette ki az irracionalitás elméletét teljes általánosságában.¹ Így tehát az akadémia kapujára írt követelést egyáltalán nem tekintette szóvirágnak vagy szellemes megjegyzésnek. Annál kevésbbé, mert a matematika történetében először ő hozta a kutatás előtérbe az úgynevezett «analitikus módszert», amelynek lényege, hogy a megoldottnak tekintett geometriai problémából visszafelé következtetve az idomok tulajdonságait a maguk általánosságában kutatja. És ha a szabályos soklapokat, szabályos testeket platonai testeknek nevezik is, ez mégis inkább e testek természetfilozófiai értékelésével és alaposabb vizsgálatukkal függ össze, mint felfedezésükkel.

¹ Eudoxosról a következő fejezetben lesz részletesen szó.

Mint már említettük, Platon után akinek a matematika filozófiai és kritikai irányú művelésére buzdító szavai tanítványai lelkében termékeny talajra hulltak, Stagira nagy fia, Aristoteles lépett a porondra és az emberi gondolkodás csúcspontját jelentő művet alkotott. Szerkezetét a matematikától leste el, de vissza is adta neki, vezérfonalként és kutatásra vonatkozó útmutatásként. A logika tudományának megalapozására gondolunk ezzel, a platonai dialógusokban, amelyeket ma is teljesen eleveneknek, korszerűeknek érzünk. Aristoteles, akinek szelleme, Platonétól eltérően, nem annyira a szintetikus-deduktív, mint inkább az induktív gondolkodás felé hajlott, kutató és gyűjtő volt egyszerre. Éppen ezért buzdított mindenféle kompilációk készítésére. A matematika területén is. Egy történt, hogy tanítványa, Eudemos megírta a matematikának azt az érdekes történetét, amelynek Proklos révén fennmaradt töredékei «a matematikusok jegyzéke» néven felbecsülhetetlen értékűek.

Nagy Sándor világhódító hadjáratainak viharai elültek. Nagy Sándor bevégezte üstökösszerű pályafutását. A legyőzött kelet kiszívta erejét és korai végét okozta. És a diadochosok felosztották maguk között a világot, az örökséget. A keletkező világ ismét jóllakott nyugalomban hever és közepén uralkodik, Alexandriában, Ptolemaios Soter, az első görög származású egyiptomi király. A legmagasabb műveltség központja még mindig Athén, még nemes versengésben virágzik Platon akadémiaja és Aristoteles peripatetikus iskolája. Nagy-Görögország is csak veszélyben forog, de még nem szorongatják. De már a szellem súlypontja mégis Alexandria felé tolódik. Ott II. Ptolemaios Philadelphos uralkodása alatt a szellemnek nagy csarnokai épülnek, ott keletkezik a Museion, kutatóintézet, könyvtár és alapítvány egyidőben. A Museion tudósai mentesek minden személyes gondtól, a kelet és Egyiptom minden tudása akadálytalanul és hiánytalanul ömlik feléjük. És a csarnokokban ezer és ezer papirusztekercs, amelyekre a másolók szorgos kezei mindazt feljegyezték, amit a tudomány addigi fejlődésében világszerte elért.

E csarnokokon keresztül lépdel Krisztus születése előtt mintegy 300 évvel egy csendes ember. Honnan jött, nem

tudjuk. Azt sem tudjuk, hogy mikor született és mikor halt meg. Életében csak egyszer mondott valamit, és az udvaroncoknak ettől is égne meredt minden hajuk szála. Amidőn ugyanis Ptolemaios Philadelphos király megkérdezte tőle, nincs-e egyszerűbb és könnyebb útja a matematika megtanulásának, mint az ő «elemei», büszkén válaszolt: «Királyok számára sincs külön út a matematikában.» Ptolemaios Philadelphos nem haragudott meg. Valószínűleg nevetett. Nem jóindulatból. Mert az első Ptolemaiosok kitűntek ugyan gátlásmentes élvezethajhászásukkal, rokonyilkosságaikkal és hasonlókkal, de tékozló mecenás voltak is. Hatalmukat a jelen és az örökkévalóság előtt egyaránt meg akarták alapozni és ehhez nem az Egyiptom örökkévalósághoz szokott földjén ősidőktől szokásos piramisokat használták, hanem a kevésbé költséges művészeket, filozófusokat és matematikusokat. Euklides-szel e szándékuk remekül sikerült. A már említett «Elemek» a biblia után a legnagyobb példányszámban sokszorosított műve a nyugati kultúrkörnek és óvatos becslés szerint csak nyomtatásban több, mint 1500 kiadást ért meg, amelyek közt nem egy szédítőn nagy példányszámmal tűnik ki.

Könyvekről beszélünk. E vonatkozásban is nagy a változás a görög matematika kezdete óta. Thales vagy Pythagoras semminemű írott művet sem hagyott maga után, viszont most, néhány évszázaddal később, hemzsegek az ilyen feljegyzések. Sőt, a geometria «Elemei»-nek egész sora létezett már Euklides előtt is. De egyetlen ilyen gyűjtemény sem maradt ránk. Ez csupán történelmi véletlen? Vajjon Euklides csupán egy volt a sok közül, akinek a szerencsés véletlen megadta írásainak, pusztá fennmaradása által az örökkévalóságot? Semmi esetre sem! Ismét, mint már Pythagoras esetében is, egy Pallas Athéné ugrott ki teljes fegyverzettel Zeus fejéből. Az «Elemek» annyira újak, teljesek, véglegesek és megtámadhatatlanok voltak, hogy — amint ma mondanók — rögtön megjelenésük után a legnagyobb feltűnést keltették. Ezért sokszorosították őket az átlagot meghaladó számban, ezért lettek a tanulmányok alapjává, a művelt emberek közkincsévé, úgyannyira, hogy akkor sem tűntek el a szellemi életből, amikor a föld remegett és

új népek vették át a klasszikus ókor örökségét. Euklides elemei jelentették az örökség legnagyobb aktivumát.

Eddig csak külsőségekről számoltunk be: Euklides életrajzát mondtuk el, amely csupán egy anekdotából és egy bizonytalan évszámból áll. S beszámoltunk egy könyvsikerről, amelynek indokoltságát állítottuk ugyan, de amelyet egyáltalán nem kell csupán szavunknak hitelt adva megokoltnak tekinteni. Ezért itt az ideje, hogy a dolog lényegére térjünk.

Jól megfontolt szándékosság vezetett, amikor a görög filozófusok vitáját ennyire előtérbe hoztuk. A szellem heves vérmérsékletű, elkeseredett lovagai által felderített és megtisztított, de megint zivataros, görög eredetű kultúr-atmoszféra az alexandriai időszak elején mást követelt a «legbiztosabb tudománytól», mint alkalmilag meglepő kérdéseket és éppen annyira elképesztő megfejtéseket. De a «matematika szégyenének» megszüntetését is követelte, hiszen egyáltalán nem emelkedett attól a matematika tekintélye, hogy még a komédiaírók is a Zenon-féle paradoxonokhoz hasonló támadásokkal mulattatták a tömegeket. Követelte annál inkább, mivel a matematika nemzeti eszmény volt, a magasabbrendű kultúra, a civilizáció, az emberség bizonyítéka. Hogyan lehet ezzel a hatalmas feladattal megbirkózni? Erre csupán az Aristoteles logikája által kijelölt út állt nyitva. És ez: valódi tudomány felépítése legszigorúbb rendszerességgel. Tehát nem eredetieskedő gyűjtők vagy tudósok által, akik a matematikával mint külsőségek szerint csoportosított kuriózumgyűjteménnyel bánnának. Nem, az első, legmélyebb gyökerekből kell mindennek kinőnie, az alapkövektől felépülnie a bölcseségkedvelő szemeláttára, lépésről-lépésre, és az egyik igazságnak szükségszerűen kell a másikból következnie. Majd lesz még később idő a Platon által megkívánt analízisre. Elsőbb még, deduktív úton, a matematikai tudás lépcsőzetes összesítésére, szintézisére van szükség.

Euklides ezt az addig megoldhatatlannak látszó óriási feladatot oly módon oldotta meg, hogy építménye évszázadokon keresztül ellenállt minden bírálatnak, ha azok nem csupán rossz hangulat eredményei voltak, mint Schopenhauer

ellenvetései, vagy pedig nem voltak eleve a matematikai célkitűzéseire vonatkozóan tévedésben. És Euklides oly módon oldotta meg feladatát, hogy csak a tizenkilencedik század utolsó évtizedének fejlődése tudta elérni és általánosítani művét, de ezzel az általánosítással is inkább igazolta, mint támatta. Röviden, Euklides elemei főlé mottóként írhatnók egy könyv címét, azt, amelyet pater Saccheri, a nem-euklidesi geometria egyik előfutárja adott, kissé más értelemben könyvének: «Euclides ab omni naevo vindicatus». Magyarul: «A minden szeplőtől megtisztított Euklides.»

De csak mellékesen említsük meg, hogy Euklides volt az alapítója és első igazgatója az alexandriai nagy matematikus-iskolának; hogy még más nagyszabású művet is írt (Porisma, Data), könyvet írt a kúpszeletekről is és még több mást; és személyes felfedezései alapján is megilleti őt a nagyon nagy matematikus rangja. Még a látszatát is kerülni akarjuk annak, hogy ő csupán gyűjtő és rendszerező lett volna, noha ez a teljesítménye is halhatatlanná tenné, hisz a matematika egészének alapjaira vonatkozik.

Most azonban, hogy kissé elevebb bepillantást nyerjünk, lapozzuk futólag végig Euklides «Elemeit». Görögül «Stoicheia» a címük, és tizenhárom könyvre oszlanak. Élükön áll a híres Euklides-féle «axiomarendszer», az úgynevezett magyarázatok, követelmények és alapelvek összessége. E csoportokat definícióknak, posztulátumoknak és axiómáknak is nevezik, és sokat vitatkoznak azon, hogy miben különböznek egymástól. Az axiómák vagy alapelvek bizonyára általános, vagy általánosan elfogadott vagy minden ember számára közös ismeretek, amelyek nem szorulnak bizonyításra, de nem is bizonyíthatók. Minden, még oly bonyolult bizonyításnak is ez axiómákra kell vezetnie, mint végső okokra. Hogy az egész nagyobb minden részénél (9. axióma) vagy, hogy két egyenes soha sem határolhat teret (felületet), szükség képpen éppen annyira alapja minden matematikai és geometriai fejtegetésnek, mint az a követelmény (2. posztulátum), hogy egy véges egyenes folytonosan meghosszabbítható, vagy pedig, hogy bármely középpontból, bármekkora sugárral rajzolható kör (3. posztulátum). Az egész geo-

metria éppen így definíciószerűen feltételezi, hogy a pontnak nincs része (1. definíció), a vonalnak csak hossza van, de szélessége nincs (2. definíció), vagy, hogy minden szög derékszög, amelynek mellékszöge egyben tükörképe is (10. definíció).

Ebből a 35 definícióból, 3 posztulátumból és 12 axiómából¹ építi fel, mint már említettük, Euklides az egész matematikát, bár a tárgyalás további folyamán még nagyszámú definíciót fűz az eddigiekhez, de újabb axiómát vagy posztulátumot nem.

Az első könyvben háromszögekről, párhuzamos vonalakról és parallelogrammákról van szó és Pythagoras tételének euklidesi bizonyításával végződik. Itt még azt akarjuk megjegyezni, hogy a még ma is használatos bizonyítási módot, amely állításból, bizonyításból és záróformulából áll, (quod erat demonstrandum=amit bizonyítanunk kellett), Euklides alkalmazta először következetesen. Szerkesztéseknél a mondat így hangzik: «Amit szerkesztenünk kellett». A második könyv gyakran alkalmazza a «Magister Matheseos»-t (így nevezték később Pythagoras tételét) és mivel nagyszámú átalakítási feladatot tartalmaz, tulajdonképpen geometriai algebra, olyan, amilyent már Pythagorasznál megismertünk. A továbbiak planimetriával foglalkozó könyvek, a harmadik és a negyedik a körtant tartalmazza, a húr- és érintőszögek tanát, és végül az ötödik könyvvel, amely az arányosság tanát ismerteti és a hatodikkal, amely az idomok hasonlóságával foglalkozik, zárul az első rész. Külön kiemelendő az addig ismert tételek Euklides által történt nagyfokú általánosítása. Részletekbe nem bocsátkozhatunk, de nem mellőzhetjük, hogy a hatodik könyv 31. tételére ne utaljunk. Ez teljes általánosságban mondja ki azt a tételt, hogy egy derékszögű háromszög befogóira rajzolt hasonló idomok területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt, az előbbiekhöz hasonló idom területével. Ez a teljesen általános, Euklides által kétféleképpen is behatárolt tétel Pytha-

¹ Legújabb számolási mód szerint 23 definíció, 5 posztulátum és 8 axióma van, de a beosztás ilyen módosítása nem változtat a dolgok lényegén.

goras tételének jelentős általánosítása. Ezzel az is bebizonyult, hogy a befogók fölé rajzolt két holdacska¹ területének összege egyenlő az átfogó fölé rajzolt holdacska területével.

Ha Euklidesnél a planimetriai ismeretek ilyen kiszélesedését megcsodáljuk, akkor a következő 7—10. könyv bizonyosan még nagyobb bámulatba ejt. Az, ami itt szemünk láttára felépül, nem kevesebb, mint egy széleskörű számelmélet, kezdve a törzsszámok és összetett számok megkülönböztetésén, a közös mérték és közös többszörös fogalmán keresztül, annak bizonyításán keresztül, hogy végtelen sok törzsszám létezik, egészen az irracionális és inkommensurabilis fogalmáig. Egy újabbkori kutató, Nesselmann szerint az «Elemek»-ben lefektetett, magasabbrendű irracionálisokon tizenhét évszázad alatt sem tudtunk túljutni.

Ez érthető is, hiszen Euklides a $\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a \pm b}(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}))}$ típusú kifejezéseken különféle átalakításokat hajtott végre, lényegében algebrai írásmód nélkül, tehát javarészt geometriai úton. Nesselmannak ez a kijelentése találó cáfolata egy széles körben elterjedt tévhitnek, amely szerint régmúlt idők nagy szellemi naivak voltak, csak azért, mert néhány évezreddel korábban éltek, vagy mert talán egészen mást akartak, mint amit mi mai emberek akarunk.

Miután Euklides a számelmélettel végzett, a 11—13. könyvben a térbeli geometriára tér át és azt is szintetikus módon építi fel. Ezt nem tárgyalja olyan kimerítőn, mint a síkgeometriát, és ez a körülmény mind a mai napig érezteti hatását az oktatásban. De a sztereometriában is csodálatosak az eredményei; görbevonallú felületeknél, pl. a gömbnél már a végtelennel való számolás (infinitézimál-számítás) módszereit használja az úgynevezett exhausztiós eljárás alakjában. De erről a következő fejezetben akarunk csak beszélni. Hogy az ókor néhány kompilátora szerint az euklidesi könyvek végső célja és betetőzése a kozmikus testek (szabályos poliéderek) vizsgálata lett volna, azt csak mellé-

¹ V. ö. szerző *Az egyszerűektől az integrálig* c. könyvének 43. ábrájával, a 229. oldalon, ahol a chiosi Hippokrates egyik holdacska-szerkesztése látható.

kesen említsük. Csak annyi bizonyos, hogy Euklidesnél már kényszerítő erejű bizonyítéka merül fel annak, hogy csak öt szabályos test létezhetik, (a tizenharmadik könyv 18. tételéhez fűzött jegyzetben) és ezt nagyon elegáns módon mutatja be. Régi jó ismerősünk, Proklos, más helyen sokkal világosabban ír. Abból, hogy Euklides állítólag Platon filozófiájának híve volt, arra következtet, hogy a platonai szabályos testek ismerete volt az «Elemek» végcélja: «Elemeknek» nevezzük mindazokat a dolgokat, amelyek «elmélete hozzájárul más dolgok megértéséhez, és amelyek segítségével e más dolgok nehézségeinek megoldása sikerülhet.» Röviden: az Elemek teszik lehetővé, hogy a matematika más részein úrrá legyünk. Az Elemek tehát nem királyok számára készült utat jelentenek, hanem inkább az egyetlen széles, hadak útját, amely hegyen-völgyön át a matematikához vezet. Így adódik Euklides nyomán a matematika három fokozatú felépítése axiomatikából, az elemi tételek vizsgálatából és a további matematikából, amelynek területe nem határolható el és nem is szűkíthető. Így tehát a matematika alapjait Euklides örök időkre megvetette, következőképpen művét csak bővíthetjük, de soha új alapokra nem helyezhetjük. Így vélekedett még Immanuel Kant is a «Tiszta ész kritikája» második kiadásához írt híres előszavában, 1787-ben. Ez volt az «euklidesi» világ, «euklidesi» matematika, amelynek uralmát a XIX. század elejéig kétségbe nem vonták, noha az egyik axioma (a 11. axioma, vagy más elnevezés szerint az 5. posztulátum) már a régi görögöknek sok fejtörést okozott. Sőt nagyjelentőségű modern matematikusok, akik Euklides szellemébe teljesen bele tudják élni magukat, azt állítják, hogy maga Euklides is csak nagy lelkiismeretfurdalások közepette írhatta le ezt az axiómát. Így szól: «Ha egy egyenes két másikat metsz, és velük olyan belső szögeket alkot, amelyeknek összege az egyenes egyik oldalán kisebb mint két derékszög, akkor az a bizonyos két egyenes, a végtelenségig meghosszabbítva azon az oldalon metszi egymást, amelyiken a két derékszögnél kisebb összegű szögek fekszenek.»

Az iskolából tudjuk, hogy geometriánk legnagyobb része ezzel a tétellel áll vagy bukik. Mert például az a tétel,

hogy a háromszög belső szögeinek összege 180° , azaz két derékszög, a párhuzamosok axiómája nélkül nem bizonyítható. És már a régi görögök, akik a gömbháromszögekkel nagyon ügyesen bántak, észrevehették volna, hogy a gömb felszínén, ahol csak egymást metsző «egyenesek» (legnagyobb körök) léteznek, a háromszög belső szögeinek összege csakugyan mindenkor eltér a 180 foktól és mindenkor nagyobb annál.¹

De vissza az euklidesi világba! Tér- és időbeli helyzetünk számára — és ez Alexandria, Krisztus születése előtt a 4. és 3. században — a matematika Euklides által került először teljes biztonságra a filozófia oldaláról jövő bomlasztás-veszélyeitől. Tudományunk újjászülve, salaktalanul áll a világ bámuló szemei előtt. Nyitva áll az út a határtalan fejlődéshez, égis éró tornyok építése lehetővé vált, mert az alapok mélyen gyökereznek a gondolkodás ősi törvényeiben, a logikában, és egyúttal a tiszta szemléletben, a háromméretű «euklidesi» térben.

¹ A gömb felszínén «egyenesen» mindenkor két pont legrövidebb összekötő vonalát, tehát legnagyobb kört kell értenünk, feltéve, hogy a felszínt el nem hagyjuk. De ilyen általánosításokig a régi görögök nem jutottak el.

HARMADIK FEJEZET.

Archimedes.

Matematika és valóság.

Egy új, keletkező világhatalom lép a porondra akkor, amikor Nagy Sándor hadjáratai után a hellénség a világ uralom utolsó szép álmaiból ébredezni kezd. A Kr. e. 216. évben Cannae mellett Hannibal 50,000 vitéz római legionáriust győz le. Fordulópontja ez a római történelemnek, itt egy nemzet győzelme vagy pusztulása felett már nem a szellemi, hanem csupán a morális értéke dönthet. Rómának — úgy látszik — mindene elveszett. De összeszedi utolsó fegyverfogható fiait, felfegyverzi templomokból összeszedett ócska, zsákmányolt fegyverekkel és két évvel később M. Claudius Marcellus konzul a Cannae mellett majdnem teljesen elpusztult sereg maradványaival már Syracuse előtt áll, hogy megrendszabályozza Karthago szövetségesét. De a rómaiakat üldözi a balsors, negatív csoda esik meg itt is. Midőn Marcellus Syracusát a tenger felől akarja megtámadni, vas kezek és csőrök nyúlnak ki a falakról, beleakaszkodnak a hajókba, felemelik és azután elejtik őket. És a szétzúzott hajóoldalakra, amelyeknek gerendáiba fuldoklók kapaszkodnak, óriási szikladarabok olyan zápora zúdul, amilyent emberkéz még nem idézett elő. Még a legöregebb veteránok is elsápadnak. Ha csak egy kötélvég, vagy egy darab deszka mutatkozik a falakon, már menekülnek a legionáriusok szörnyű félelmükben. Mert szívesen harcolnak emberekkel, vagy ha kell, Hannibal harci elefántjai ellen, de haragos istenek, vagy százkarú óriások ellen többé soha. Azonban vezérük, a nagy Marcellus konzul gondoskodik arról, hogy a szörnyű csodára magyarázatot kapjanak. És megtudják, hogy egyetlen ember küzd ellenük, egy magányos, hetvenkét éves aggastyán. Archimedes a neve ; ő a legnagyobb hellén

matematikus, egyike ama hóbortos, világtól elfordult férfiaknak, akiknek lényét a római kemény, valóságban gyökerező észjárása még kevésbé tudja megérteni, mint a számára szintén rejtélyes foglalkozását betűkkel és vonalakkal. Varázslat ez? Oktalanul gúnyolódtak és nevettek eddig ezeken a fajankókon? Most látják, amikor komolyra fordult a dolog, hogy oktanul. Most, amikor vasból készült varázskarmok nyújtóznak a falakon át és úgy hullanak a kövek, mintha a Vezuv és az Etna egyszerre okádnák a föld belsejét.

És Archimedes, éppen ez az Archimedes, a leghóbortosabb a görög földről származó valamennyi geometer közt. Mindezt fogságba került syrakusaiak mesélték, olyanok akik meséikkel fogságukon akartak könnyíteni. Archimedes állítólag rokona a királyi családnak és családja is gazdag volt. De álmódosásával mindent eltékozolt. Hát csoda, ha tönkremegy az olyan ember, akit rokonainak kell szelíd erőszakkal a fürdőbe hurcolni, mert erről éppen úgy megfélemedezik, mint az étkezésről? S mikor végre megfürdött, akkor amíg illatos kenőcsökkel kenik, szakadatlanul vonalakat rajzol a homokba és érthetetlen szavakat mormol. Sőt, egyszer, állítólag, anya-szült meztelenül rohant végig Syrakusa utcáin, és egyfolytában kiabálta, hogy «Heureka! heureka!» Vajjon mit «talált»? Azt, hogy az aranyműves becsapta a királyt és az aranykoszorút nem készítette színaranyból? Erre állítólag abból jött rá, hogy a fürdő kicsordult, amikor beleült. Hát ez, az istenekre, nem nagy felfedezés. Csak az bizonyos, hogy ez az Archimedes vagy bolond, vagy démon vagy mind a kettő.

A római parasztokat, ezekből áll a légión, az izgatott syrakusaiak meséi nem vígasztalják meg. Ellenkezőleg. Most hisznek csak igazán a varázslatban és a rémben. És mikor végre két év múlva, csellel és rohammal kezükre jut Syrakusa, gyilkolva és rabolva rohannak végig a város utcáin, vadabbak mint máskor, mert minden útkanyarulatnál újabb archimedesi kísértetek felbukkanásától tartanak.

Közben egy legionista egy látszólag lakatlan házba lép be. A kertben ül egy aggastyán és a homokba vonalakat rajzol. Miért ne rajzolna? Igaz, ma kissé zajos a város. De ilyen zaj gyakran volt az elmúlt két évben. És a feladat nem tűr halasztást. Archimedes fel sem néz. Csak azt látja, hogy egy

láb lép vonalai közé. «Ne zavard köreimet!» mondja barátságosan. De a legionista kardja abban a pillanatban véget vet életének.

Tudta a katona, hogy Archimedest öli meg? A «varázslót» akarta elpusztítani, hogy a légiót és Rómát megmentse, habár Marcellus konzul meghagyta, hogy Archimedest kíméljék?

Marcellus nagyon haragudott, amikor a tettről hallott. Tiszteletadással temettette el és síremléket emelt neki. E síremlék évszázadokra feledésbe merült, bozót és tüskék takarták el. Cicero kutatta fel újra, megtalálta rajta a hengerbe írt gömböt és ezzel bebizonyította a világnak, hogy Archimedes nem csupán a mondákban, hanem valóban is élt. Tegyük hozzá: olyan ember, akinek démoni lelkeknél nagyobbbat a szellemtörténet alig tud felmutatni. Annyira döntő jelentőségű, annyira új, annyira a jövőbe való volt mindaz, amihez csak nyúlt, amit alkotott.

Varázsszönyegünkkel azonban vissza kell szállnunk olyan időkbe, ahol már egyszer jártunk, hogy ennek az óriásnak őseit megkeressük.

Az eleatákról, a Parmenides által alapított filozófiai iskoláról már hallottunk. Ez volt az az iskola, amely legfőbb principiumnak az örök valót, a nyugvót tekintette, és minden keletkezőt látszattá fokozott le. Ez volt az az iskola, amelynek Zenon szofista paradoxonai, majd hogy azt nem mondjuk, már karikatúrái voltak. Habár azokat a tévedéseket, amelyek ezekben a szellemi bukfencekben rejlettek, alaposabb szellemek hamarosan eloszlatták és helyes értékükre szállították le, az eleai bölcsesség magva mégis mélyen belegyökeredzett a hellén filozófiába, mivel alapjában nagyon illett a harmónia időtlen népének jelleméhez. És az eredeti eleai felfogás folytatódik a platonitanban az örökkévaló ideálokról, a lét ősképeiről, az árnyékszerű, tisztátalan valóságról. Az önmagában nyugvó örökkévalóság alaphangulata innen terjed messze túl Aristotelesre, míg végül geometriai téren Euklides tisztán statikus, világos és mozdulatlan matematikájában találja meg kiteljesülését. Euklides számára a kör egyáltalán nem a körző egy fordulatának az eredménye, sem egy már el-

vontabb eredménye egy körsugár, egyik végpontja körül eredeti helyzetéig megforgatott távolság mozgásának, hanem minden olyan pont összessége, amelyek távolsága egy kijelölt ponttól (az úgynevezett középponttól) egyforma. Az eleaták módján nem a kör keletkezése, hanem a kör léte nyer kifejezést. Bonyolultabb görbék esetén még feltűnőbb ez a különbség. Jellemzőn jegyzi meg A. Czwalina Archimedes-kutató, hogy Archimedes az általa felfedezett és róla elnevezett spirálist következőképpen írja le: «Ha egy kezdőpontja körül egyenletes sebességgel forgó félsugár, több fordulat után eredeti helyzetébe visszatér és a félsugáron egy pont a kezdőponttól elindulva egyenletes sebességgel mozog, akkor a pont spirálist ír le». Euklidesnek viszont, mondja Czwalina, ha önmagához hú akar maradni, következőképpen kellene a maga statikus módján ugyanazt a spirálist leírnia: «Legyen adva egy félsugár és rajta kívül egy pont. Vizsgáljuk mindazon pontok összességét, amelyekre nézve a félsugár végpontjától mért távolságuk úgy aránylik az adott pontnak a félsugár végpontjától mért távolsághoz, mint a félsugár elfordulásának szöge aránylik az említett távolság szögéhez».

Ezen a példán az euklidesi előadási mód határai világosan láthatók. Minden keletkezőnek logikai és világnézeti kizárása az előadás merevségét és áttekinthetetlenségét hozza magával, mihelyt bonyolultabb problémáról vagy definícióról van szó. De a különbség ebben nem merült ki. Mélyebben, elrejtettebb helyen kell keresnünk. Ezért varázsszönyegünkön ismét Parmenideshez kell visszatérnünk.

Már említettük, hogy a való filozófiája nagyon megfelelt a harmóniakedvelő hellén szellemnek. A görögök gyűlölték a parttalant, határtalant, alaktalant. S nem akartak olyan dolgokat érinteni, amelyek az emberi méreteken túlnyúlva tulajdonképpen az istenekre tartoztak. Prometheus is, mivel emberit meghaladó dolgokra tört, kovácsolt láncok kötik a Kaukázushoz, és Zeus keselyűi szaggatják a tehetetlen titán máját.

Vajjon jelképszerű az, hogy a nyugvást hirdető Parmenides-szel majdnem egyidőben, a hellén birodalom másik végén, Ephesosban, egy férfi kezdett tanítani, aki nem csak külsőleg volt közel a Kaukázushoz? Aki felszabadította Hel-

lasban a prometheusi tüzet vagy legalábbis megadta az alapot a felszabadulásához? Herakleitos volt a neve, s már az ókorban a «sötét Herakleitosnak» mondták, nem csupán bölcseségei epigrammatikus rövidségű fogalmazása miatt, hanem legalább ugyanannyira tanainak tartalma miatt is. Ezek a görög szellem ama másik lényét tükrözték, amely néha felszínre került és a nehezen megalkotott kozmoszt, a nehezen kivívott harmóniát megingatta. Herakleitos az eleaták valójával az örök keletkezést állítja szembe. «Minden folyik» és «az ellenkezés minden történés atyja» legfőbb alapelvei, amelyek az örök nyugvót szakadatlanul változóvá teszik és a valót megfoghatatlan, árnyszerű átmenetté süllyeszti a múlt és jövő közt. De ez a tan is, akárcsak az eleai, döntő hatással van a matematikára. Hisz maga a vonal, herakleitosi szemmel nézve, már nem szomszédos, de különálló pontok gyöngysora többé, hanem egy haladó pont nyoma és mint ilyen, folytonos. De ezzel bizonyos módon a tiltott, csak az istenek által felfogható végtelen is belekerült a geometriába, mert egy kontinuumnak, hogy valóban folytonos legyen, megszámlálhatatlanul¹ sok pontból kell állnia.

De nem csak Herakleitos tanai kísérték azt az időt, amelynek euklidesi tökéletességhez vezető útját már láttuk. Az irracionális sejtelmes meglátásán kívül e századokban, különösen Krisztus előtt az ötödik században állították fel az ú. n. három klasszikus problémát, amelyek megoldásuk nehézségeivel hirdették a matematikai kutatások titkát, és amelyek a végső és teljes harmónia lehetősége iránt kétéseket támasztottak. Első a sorban a szögharmadolás problémája, második a delosi probléma, vagy a kocka-kétszerezés, amely még szent, misztikus borzalmat is ébresztett. Súlyos bajban, járványoktól tizedelve a delosiak a delphoi jóshelyhez fordultak segítségért és ott azt a felvilágosítást kapták, hogy az isten haragját csak delosi oltára megkétszerezésével engesztelhetik meg. De az oltár kocka alakú volt, és sok kísérlet után rájöttek, hogy a probléma körző és vonalzó segítségével meg nem oldható. Ez nekünk ma már mindjárt

¹ A végtelen halmazok «számosságáról», a halmazelmélet értelmezésében, itt még nem beszélünk.

érthető, mivel a kockakétszerezés az $x^3=2a^3$ alakú, harmadfokú egyenlet megoldásával függ össze, körzővel és vonalzóval pedig legfeljebb másodfokú egyenletek oldhatók meg. A harmadik probléma a kör négyszögesítése volt, amellyel mint említettük, állítólag már Anaxagoras foglalkozott.

Nincs módunk e három probléma megoldására irányuló sokféle és szellemes kísérletet ismertetni, noha ezek, szögezzük le, igazi, komolyan veendő megoldásokat szolgáltatottak. Említsük meg csupán, hogy e megoldásokkal kapcsolatban egy «mozgásgeometria» alakult ki, amely mindig újabb és újabb és mindig bonyolultabb görbéket fedezett fel.¹

De most egy új titok mutatkozott, amely a kör-négyszögesítéssel kapcsolatban lett nyilvánvaló. A matematikusok egyik részének meggyőződése szerint görbevonallal határolt idomok és testek terület és köbtartalom mérése szükségképpen irracionális, tehát csak közelítően pontos eredményre vezet, viszont a másik rész csak az addigi módszerek tökéletlenségét hibáztatta. Pontosabb mérésnek racionális eredményre kell vezetnie. A véletlen hozta magával, hogy a második vélemény a chiosi Hippokrates holdacskáinak szerkesztésével támaszhoz és igazoláshoz jutott. Hippokratesnek ugyanis sikerült holdacskáinak, tehát minden oldalról görbe vonallal határolt idomoknak, területét egy derékszögű háromszöghöz viszonyítva racionális mérőszámmal kifejezni. De a derékszögű háromszöget az akkori geometerek már könnyű szerrel tudták ugyanakkora területű négyzetté átalakítani, tehát ezzel először sikerült egy görbe vonalakkal határolt idom «négyszögesítése». Így már senki sem állíthatta, hogy az ilyen idomok területe lényegénél fogva csak irracionális számmal fejezhető ki.

De azok a nagy remények, amelyeket Hippokrates eljárása mindazokban keltett, akik csak kvadraturával foglalkoztak, semmiképpen sem akartak valóra válni, és így ismét olyan eljáráshoz kellett folyamodni, amely magán viselte a megvetett «végtelen» bélyegét. Az atomisztikus álláspont

¹ Ilyen volt például a híres «quadratrix» (görög nevén «tetragonizousa»), amelyet Hippias szerkesztett meg és amely egy haladó és egy forgó mozgás eredője.

4 Gólerus: Pythagoras.

híve, Demokritos, mint említettük, a gúla és a kúp köbtartalmát, az ugyanakkora alapterületű hasáb, illetve henger köbtartalmának harmadával egyenlőnek találta azáltal, hogy valamennyit vékony szeletekre vágta. Ez az eljárás, ha helyes, tagadhatatlanul végtelen kis mennyiségekkel végzett művelet volt. De a kvadratura és kubatura számára ismertek egy másik eljárást is, amely abban állt, hogy a görbe vonalakkal határolt területet egyenes vonalú idomokkal töltötték ki, és az így berajzolt idomokat összegezni igyekeztek. Ha nem akarták, hogy ez az eljárás csak közelítés maradjon, akkor akarva, nem akarva végtelen sok tagot kellett összegezniök. De miként lehet ezt végrehajtani? Nem lesz a végtelen sok tag összege mindenkor végtelen nagy, ha az összeadandók még oly kicsinyek is? Probléma halmozódik problémára, ellentmondás ellentmondásra. De Hippokrates holdacskaíval elért eredménye nem azt bizonyítja-e, hogy az ilyen eljárásnak eredményre kell vezetnie? Kvadratura racionális eredménnyel másképpen elképzelhetetlen.

Az ingadozó fogalmak közt megint egy óriási szellem teremtetett rendet, akit eléggé nagyra nem is becsülhetünk, hisz eredményei mind a mai napig érvényesek és kielégítők maradtak. Eudoxos, Platon kortársa, egy csapásra megszüntette a «végtelen» és «véges» közt fennálló különbséget azzal, hogy a «tetszésszerint kicsi» fogalmát bevezette és ezzel az úgynevezett határátmenetet logikai szempontból megalapozta. Kimondta ugyanis: «Ha valamely mennyiségnek elveszünk a felét, vagy többet, mint a felét, és ezt az eljárást elegendő sokszor ismételjük, akkor mindig eljuthatunk olyan mennyiségekhez, amely kisebb bármely hozzá hasonló, adott mennyiségnél». Eudoxos nyomán tehát addig mehetünk a tetszésszerint kicsi felé, ameddig csak akarunk. Adott feltételek mellett, amelyet ma konvergencia-feltételnek mondanánk, a mennyiségek sorozata mindinkább nullához tart. Ma Eudoxos tételét így írónk: $\lim a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 0$, ha $a_1, a_2, \dots, a_n \leq \frac{1}{2}$ és tudjuk, hogy ez a sor csakugyan konvergens. Összege véges eredményt ad, mert tagjainak növekvő számát kellőképpen kiegyenlíti csökkenésük. A sorozatnak és a belőle adódó sornak véges határértéke van,

a sorozaté 0, a soré egy véges szám. Eudoxos követelése minden inkább, mint száraz elmélet. Euklides ugyanis azzal bizonyítja be, hogy két kör területének aránya át-mérőik négyzetének arányával egyenlő, hogy mindkettőt tetszésszerint nagy oldalszámú sokszögnek tekintí. Mert azt már bebizonyította, hogy körbe írt hasonló sokszögek területének aránya egyenlő a körátmérők négyzetének arányával. Annak bebizonyítására, hogy a kör csakugyan tetszés szerint nagy oldalszámú sokszögnek tekinthető, a sokszög oldalai és a kör közt maradó szegmentum háromszögekkel töltendő ki, és ezek a háromszögek megfelelnek Eudoxos követelményének, vagyis nagyságuk minden előírt méretnél kisebbé tehető. Ezzel «kimerítjük» a kör területét. Kimeríteni latinul a. m. exhaustire, ezért ezt a bizonyításmódot a tizen-hetedik században «exhausztiós bizonyítás»-nak nevezik. Exhausztiós bizonyítást Euklides másodszor ott alkalmaz, ahol bebizonyítja, hogy két egyforma magasságú három-oldalú gúla köbtartalmának aránya egyenlő alapterületeik arányával. Eudoxosról ezen kívül azt is olvashatjuk, hogy Demokritosnak a gúla és kúp köbtartalmára vonatkozó felfedezését végérvényesen exhausztiós eljárással bizonyította.

Noha a hellének Eudoxos módszerében egy logikailag jól megalapozott infinitézimális eljáráshoz jutottak, mégsem jutott eszükbe az eljárást általánosítani. Az exhausztiós bizonyításmódot, mint Euklidesszel kapcsolatban láttuk, minden egyes esetben külön alkalmazták, és a többi kvadraturát és kubaturát lehetőleg olyan eljárással oldották meg, amelyet az igazi geometriai eljáráshoz méltóbbnak tartottak.

De térjünk vissza fejezetünk hőiséhez, akiről az imént megírtuk, hogy Kr. e. 212-ben, 74 éves korában egy durva római katoná megölte. Utolsó küzdelme városáért mély szimbolumot rejt. Megmutatja, hogy a hellén matematika gögös magányából csak akkor fordult a valóság felé, amikor már késő volt. «Adjatok egy pontot a földön kívül és kiemelem a földet sarkaiból» mondta ugyanez a Archimedes büszkén, és szét tudott még zúzni néhány római hajót, de magát és népét már nem tudta megmenteni a pusztulástól. Mi lehet tulajdonképpen az a valóság, amelytől a matematika egy-

szer távoltartja magát, s amelyhez másszor közeledni tud? Vizsgáljuk most ezt.

Szellemünk számára kétféle formai lehetőség kínálkozik, hogy az eredeti chaosból megteremtse magának a kozmoszt. Ez a két szemléleti mód Kant szerint a tér és az idő. A kettő együtt adja a mozgást. És az élőnek része van mindkettőben. A régi hellének hajlamosak voltak arra, hogy a térnek, a szemünkkel látott világnak vizsgálatát helyezték előtérbe. Kétségbeesetten igyekeztek, hogy a világról, mai szavakkal élve, «pillanatképeket» kapjanak, és ezeken vizsgálták az összefüggéseket. Építészet és szobrászat ennek a szemléletnek művészi kifejező formái. Herakleitos hívei, a «pantaneis» (minden folyik) fanatikusai a történet «filmjét» akarták csak látni és mindent, ami van, keletkezése szemszögéből akartak megérteni. Alaptermészetük dinamikus, hisztorikus. Hisztorikus, nem a történelemkutatás szempontjából, hanem mint fejlődéstörténeti világszemlélet. Az eleata álláspont túlzott hangsúlyozása elvezet a valóságtól, valamiféle nirvánába, Herakleitos iskolájának következetes prometheusi vonása viszont a haladás örületéhez és felszínességhez vezet. Az életet azonban, amelynek törvénye a pythagorasi iskola szerint az irracionális törvénytelensége, egyik iskola sem tudja teljesen kielégíteni. A boldogságnak, az «euouisia»-nak jobban megfelel talán a való. Az élet ellenkezéseinek inkább az örvongó teremtés.

Ilyen lelki összetétel következtében mulasztotta el a görög matematika, egészen Archimedesig, hogy a mechanikán, mint hídon keresztül a technika valóságáig hatoljon, noha a lehetőséget mindenkor magában viselte. Ezt a hiányt évszázadokon keresztül tudta pótolni az egyes ember testi és szellemi képességeivel. De amikor Hellas Rómának fölényes szervezőképességével és magasabbfokú közösségérzetével került szembe, akkor rögtön kiderült, mint Syrakusa ostrománál, hogy a hellénség a formák euklidesi tisztaságának ideáljáért feláldozta magát. Már késő volt; az egyén, mint Archimedes, már nem tudta a katasztrófát megakadályozni. Mert ettől kezdve használja fel Róma világhatalmi törekvéseinek támaszául, eleinte csak lassan és félreértve, a görög szellemet.

De ne legyünk igazságtalanok. Mert egy Archimedesnek csak azért sikerült végeredményben a matematikát a «valóságba átültetni», mert a megtámadhatatlan euklidesi alapon építhetett tovább.

Miben különbözik Archimedes minden elődjétől? Miért érezzük minden gondolatát és tettét annyira újszerűnek? Ezt az érzést prometheusi gondolkodása kelti, amely minden vonalon, minden területen érvényre jut. Minden balvéleményt félretesz, hogy urrá legyen a «valóságon». De ez a «valóság» hajtja, űzi mindig tovább, mert nem tűr szemlélődő tartózkodást tiszta formáknál és arányoknál. A természetben nagyon ritkák a még csak közelítően szabályos geometriai idomok. Minden testszerű és a testek szabályos geometriai alaktalanságokat mindenféle csellel kell megközelíteni, a szabálytalanok számára módszert kell szerkeszteni, vagyis meg kell találni az utat és módot, hogy urai legyünk a görbének és alaktalannak. Az ilyen problémák a gondolkodást az irracionális és infinitézimális felé hajtják, mivel a mérték egyenes, ezért minden görbét rektifikálni (kiegyenesíteni) kell, minden görbével határolt területet négyszögesíteni, és minden ilyen testet köbözni. De itt nem lehet büszkén eltérni a számítástól, ha a dolog mélyére akarunk jutni.

Archimedes helyt állt valamennyi követelménynek. Egyike volt minden idők legtüneményesebb számolóművészeinek.

Jól tudja hogy a π értéke $3\frac{1137}{8069}$ és $3\frac{1135}{9847}$ között van, (ezt az értéket rövidítve $3\frac{10}{71}$ és $3\frac{10}{70}$ számokkal vezette be a matematikába) és éppen ilyen jól ismeri a négyzetgyökvonást, azt, hogy $\sqrt{349540} \sim 591\frac{1}{8}$ vagy $\sqrt{3} \sim \frac{265}{153} \sim \frac{1351}{780}$. (Itt a $\sim$ jel azt jelenti, hogy az eredmény csak közelítésben helyes.)

Syrakusában, Gelon király udvaránál egyszer szóba került, hogy a görögök rendszere, amellyel a számokat írják nem alkalmas nagyon nagy számok leírására, és ezzel kapcsolatban a beszélgetés elkalandozott a végtelenség felé, felfelé és lefelé egyaránt. Közben Archimedes a végtelen

kicsi példajaként talán az exhaustiót, vagy egy fogyó geometriai sort említhetett, amelyek, mint például az $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64} \dots$ is, hamarosan a megkülönböztethetetlen kicsi sötétjében vesznek el. De mi a helyzet a végtelen nagy terén? Van-e erre is példa, mint a csökkenő idomok, háromszögek? Nincs példa. Ilyen számokat csak a természetben lehet találni, kiálthatott fel valaki. Sicília partjain a homokszemek bizonyára megszámlálhatatlanok, bizonyára végtelen a számuk.

Néhány nappal később Gelon király levelet kapott, amelynek kezdőszorai a következők voltak: «Vannak, akik azt hiszik, ó Gelon király, hogy a homokszemek száma, végtelen. Nem a Syrakusa körül található homokra gondolok, sem pedig a Siciliában másfelé találhatóira, hanem minden homokra, ami csak szárazföldön, legyen az lakott vagy lakatlan, található. Mások nem hiszik, hogy ez a szám határtalan, viszont az a véleményük, hogy még soha sem volt e számnál nagyobbról szó. S ha ezek az emberek akkora homokhegyet képzelnek el, mint az egész föld, s betemetve gondolják homokkal a tengereket, és minden mélyedést, és kiegészítve olyan magasra, mint a legnagyobb hegyek, akkor annál több lesznek, akik azt hiszik, hogy nincs szám, amely ezt a homok mennyiséget felülmulná. Én azonban geometriai úton bebizonyítom, ó király, úgyhogy te is egyet értesz majd velem, hogy a Zeuxipposhoz intézett írásomban előforduló számok közt vannak olyanok is, amelyek nemcsak az előbbi módon elképzelt föld homokszemeinek számát mulják felül, hanem ama homokmennyiséget is, amely csak a világmindenségben férne el».

Archimedes beváltotta szavát. Kimutatta, hogy könnyű úgynevezett «oktádokat» alkotni, ezek a tízes rendszer számcsoportjai, az első a myriád (10000) második hatványáig, tehát 10^8 -ig terjed. A második oktád kezdete 10^8+1 , vége 10^{16} , a harmadik vége 10^{24} és így tovább, $10^{800.000.000}$ -ig, ez pedig olyan szám, amelyben az 1 után 800.000.000 nulla van. Ezzel végződik az első periodus, de erre felépíthetők még továbbiak is, sőt ez új szó és új elnevezés feltalálásával ismét egységgé is tehető, és így tovább a végtelenségig.

Tegyük fel, hogy egy homokszem a mákszem tizedrésze, amelyből 40 megy egy ujjszélességre (kb. $1\frac{1}{4}$ cm). A föld kerülete 40,000 km és feltesszük, hogy a nap a földtől 245 millió kilométerre van (a valóság csupán 150 millió km) s ha a naprendszerünk csak apró, tört része a világegyetemnek, úgyannyira, hogy sugara a földpálya sugarához úgy aránylik, mint az utóbbi a földéhez, akkor a világegyetem sugara $9\frac{1}{4}$ billió kilométer volna. Ez, mint ma mondanók, majdnem egy fényév. De ez a gömb már 10^{62} homokszemmel teljesen megtelnék, pedig ez a szám az első periodus legelejéről, a hetedik oktádból való.

Maradjunk meg itt egy kis időre. Az első, ami feltűnik nekünk, hogy Archimedes prometheusi-forradalmár szelleme nem riad vissza attól, hogy Eratosthenesnek, «Béta úrnak»,¹ az alexandriai könyvtár nagynevű könyvtárosának «lakott földjét» elhagyja és a samosi Aristarchos-szal a csillagok világába merészkedik. Aristarchos már elhagyta a geocentrikus rendszert és a heliocentrikusat fogadta el, a nélkül, hogy az ókorban hitelre talált volna. Csak Kopernikus és Galilei fejlesztették tovább Aristarchos rendszerét. Archimedes maga a geocentrikus álláspontot fogadta el. De nem utasította el teljesen Aristarchos véleményét, valószínűleg azért, mivel a mozgások relativitásáról átfogó képe volt. Meglep továbbá e «homokszámlálásban» a nagy számok olyan kedvelése, amely a régi indusokra emlékeztet. Ilyen szertelenséggel a számok terén az ókorban többé nem találkozunk.

De Archimedes számoló művészetét a homokszámítás egyáltalán nem meríti ki. Sőt a kör rektifikációja és kvadraturája sem, amelynek eredményeit (ezek az eredmények 0.6 ezrelékre pontosak!) már említettük. Más tudósok ugyanis általánosabb számolási feladatokat vetettek fel, amelyeket algebraiaknak nevezhetnénk. Ilyen például a spirális területének meghatározásával kapcsolatban másodrendű számtani

¹ Állítólag ez volt Eratosthenesnek mintegy gúnyneve, mivel ő minden téren a második legnagyobb tudósa volt az ókornak. Az első rangot jelentő α megjelölését tiszteletből a mult nagyjainak cartották fenn. Tőle származik a még ma is egyetlen módszer, amellyel a törzsszámokat meg lehet keresni.

sorok összegezése. Népszerűbben: négyzetszámok összegképletének meghatározásáról van itt szó. Tehát az $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \dots + n^2$ összegről. Hihetetlenül éleselméjű bizonyítással találja meg Archimedes az eredményt,

amely a mai $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

képletnek felel meg. Éppen így könnyűszerrel összegezi a parabola területének meghatározásánál fellépő $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ sort. Kétes, hogy Archimedes egy nyilvánvalóan konvergens sor végtelen sok tagjának összegére gondolt volna olyan értelemben, ahogy mi azt az $s = \frac{a}{1-q}$ kép-

lettel felírjuk. Ezzel a fenti $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$ sorra az

$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ eredményt kapjuk. Az exhaustiós eljárás

Eudoxos óta szándékosan kerüli a végtelen kicsi fogalmát. Inkább azt mondják, hogy a parabolaszélet «kimerítése» háromszögekkel, amelyeknek sorában minden háromszög elődjének negyede, bármennyig folytatható. Mert még oly kis mennyiséghez is található az eljárás folytatásával még kisebb háromszög. És Archimedes azt mondja, hogy a fenti sor összege, (tehát n tag véges összege) a mindenkor legkisebb háromszög területének harmadával kisebb, mint $\frac{4}{3}$. Vagyis

$s_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$. S mivel így mégis mindenkor marad

különbség, ha még oly kicsi is az, lehetetlen, hogy a háromszögek összege a parabola területénél nagyobb legyen. De abból, hogy ez a különbség minden előírt mértéken túl csökkenthető, következik, hogy a parabolaszélet területe sem lehet kisebb az eredeti háromszög területének $\frac{4}{3}$ -ánál.

Pontosabban fogalmazva; egyik sem lehet kisebb a másiknál,

tehát a két terület egyenlő. Vagyis a parabolaszeglet területe az első háromszög területének $\frac{4}{3}$ -a.

De Archimedes nem állt meg a kör, parabola, spirális területének meghatározásánál. Merész, lángeszű exhaustizós eljárásokkal meghatározza, a tudománytörténet szerint először, a gömb felszínét és köbtartalmát, a $4r^2\pi$ és $\frac{4}{3}r^3\pi$ képleteket. Írásaiban a π számot természetesen nem úgy nevezi, mint mi szoktuk. Csak az érthetőség kedvéért használjuk a mai írásmódot. Ehhez tartjuk magunkat akkor is, amikor felírjuk, hogy Archimedes a következő aránylat felállítására volt a legbüszkébb $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{2}{3}r^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi : 2r^3\pi = 1 : 2 : 3$, és ez a kúp, a gömb és a henger köbtartalmának a viszonya, ha a kúp és a henger alapkörének átmérője és magassága egyaránt a gömb átmérőjével egyenlő.

De még itt sem állt meg. Ő határozza meg először az ellipszis területét is, $T=ab\pi$, ha a és b a féltengelyek. A konoidokról és szferoidokról írt művében megállapítja a forgási paraboloid (konoid) és a forgási ellipszoid és hiperboloid (szferoid) köbtartalmát. Ez minden hozzáférhető görbére, és e görbékkel előállítható minden forgási testre kiterjedő infinitézimális geometria, amelynek tervszerűségét csak az elvakult doktriner tagadhatja.

Más kérdés, hogy milyen úton jutott Archimedes hatalmas felfedezéseihez. Erről J. L. Heiberg dán Archimedes-kutató egyik 1906-ban talált szerencsés lelete ad felvilágosítást. Ebben a Heiberg és Zeuthen által megfejtett palimpsestusban maga Archimedes írja egészen nyíltan Eratostheneshez: «Sok minden, ami előzőleg a mechanika által ismertté vált előttem, utóbb a geometria útján bizonyítást nyert, minthogy ama módszerrel még bebizonyítva nem volt; könnyebb ugyanis, ha ezzel a módszerrel¹ képet kaptunk a problémáról, a bizonyítást megtalálni, mint nélküle egy ideiglenes elképzelést felfedezni.» E bizonyítvány mellett,

¹T. i. a mechanikaival.

amelyet maga Archimedes állított ki, nem lehet szó nélkül elmenni. Mert ez bizonyítvány a matematikai felfedezésről általában is. A matematikának csak az utólagos, rendszeres előadása mondható fejlődéstörténeti szempontból szintétikusnak, axiómákon, definíciókon és posztulátumokon alapulónak. Az egyes igazságok felfedezése analitikus vagy mechanikus úton történik, sőt esetleg «matematikai kísérlettel», amilyent Pythagorasnak is tulajdonítanak. És nagyon valószínű, hogy Archimedes a mechanikus köbtartalomszámításoknál először mérleggel dolgozott, s a geometriai bizonyítást csak azután eszelte ki. Ez mit sem von le érdemeiből, mivel geometriai bizonyításai a szintétikus szigorúság és teljesség mintapéldáiként maradtak az utókorra. Igaz, a matematikai felfedezésnek van még más módja is. Ezt Oswald Spengler mágikus módnak nevezné. Leibniz igaz kabbalának, «cabbala vera»-nak mondja. De nem helyén való még hogy erről beszéljünk, minthogy sem Archimedesnél, sem hellén földön nem fordul elő. Itt még csak a mechanika és a mozgásgeometria (spirális, forgási test stb.) tört be az euklidesi «nyugvó» matematikába.

De a mechanika egyik fejezete az, amely Archimedes óta a matematika és fizika közt, furcsa átmeneti alakként megmaradt és amelynek ma is igen nagy a jelentősége. A lényegében Archimedestől megalapozott és már általa nagy tökéletességre emelt statikára gondolunk, a nyugvó testek egyensúlyáról szóló tanokra. Nem lehet eléggé világosan kifejezni, hogy matematikai statika végtelenre vonatkozó megfontolások nélkül elképzelhetetlen. Már a súlypont maga sem csupán egy testnek, megtámasztása szempontjából, tekintetbejövő pontja, hanem az a fikció, amely szerint az egész test súlya ebben a kiterjedéstelen pontban egyesül. És egyensúly is csak akkor lehetséges, ha súly létezik. Már maga Archimedes egyetlen fogással túlteszi magát ezen a természetesen látszó követelésen. Nehézségnek alávetett testek minden tulajdonságát, ilyenek a súlypont, súlyvonal, egyensúly stb. geometriai idomok számára is megköveteli. Minthogy kiterjedéstelen idomnak nincs tömege, tehát súlya sem lehet, ezért ez a fogás nagyobb jelentőségű és merészebb, mint amilyennek ma érezzük. Évezredek folya-

mán hozzászoktunk ahhoz az elképzeléshez, amely feltételezi, hogy egy fából készült háromszög (ez természetesen egy nagyon alacsony hasáb) mindinkább vékonyodik, míg mondjuk papírvékonyságú lesz. S még tovább fogyaszttjuk vastagságát és közben azt vizsgáljuk, hogy milyen tulajdonságai maradnak meg változatlanul, vastagságától függetlenül. Ám jó, a súlypont változatlan, illetve ránézetben ugyanazon a helyen marad, bármennyire csökkentem is a vastagságot. Ugyanez áll a súlyvonalakra is, és a súly- és súlymegoszlási viszonyokra, összehasonlítva ugyanolyan vastagságú más testekkel. Ha a súly és testszerűség már teljesen eltűnt, ha a test geometriai fogalomná lett, akkor ezek az összefüggések maradnak a kezemben maradékként. Noha óriási absztraháló erő kell végeredményben ahhoz, hogy súlytalan árnyak egyen-«súlyáról» vagy «súly»-pontjáról beszélhessünk. Bárhogymint forgassuk is a dolgot, infinitézimális megfontolások nélkül fennmarad az ellentét és a «valóságban» nem létező, geometriai idomok, analógiája is sántít. A geometriai idomok csak alakok, nagyságra vonatkozó szabályok, viszont statikai megfontolások súlyos tömeg nélkül, testi mivoltuk nélkül, minden értelműket elveszítik.

Bárhogymint áll is a dolog, Archimedes igen merész fogásokkal átkutatta a mechanikának ezt a részét. Tisztában volt az emelő törvényeivel, idomok egyensúlyát infinitézimális eszközökkel vizsgálta, és úttörő volt a hidrosztatikában is az «Archimedes-féle törvény»¹ felfedezésével, de megállapította a testek fajsúlyának fogalmát is, valamint az úszási helyzet és úszási stabilitás (a metacentrum magassága) törvényeit. Mechanikai tudása olyan óriási volt, hogy nem csak a «végtelen csavart» tudta vízszállításra felhasználni, nemcsak királyának, Hieronak tudta azt az örömet megszerezni, hogy egy nehéz hajót egyedül vízre bocsásson, hanem, mint már említettük, szülővárosát is két évig tudta védeni a rómaiak ellen.

De mindez, noha kétségtelenül megmutatná genialitását, nem tenné őt az ókor legnagyobb matematikusává. Mert mint matematikus termékenysége egyszerűen kimeríthetet-

¹ Úszó test és kiszorított víz súlyának egyenlősége.

len volt. És elsősorban óriási volt hajlékonysága, ha szabad ezt így mondani. Hogy a kör területe egyenlő olyan háromszög területével, amelynek alapja a kör kerülete, magassága pedig a kör sugara, éppen olyan mesteri, mint annak az új axiómának a felállítása, hogy az egyenes a legrövidebb út két pont között. És csak a legújabb időkben méltányolták érdeme szerint Archimedesnek egy másik, axioma-jellegű megállapítását. Ez az axioma minden mérésünk alapja és azt mondja, hogy bármely AB távolságnál nagyobb előállítható egy kisebb AC távolság kellőszámu többszörözésével. Ez tréfának hangzik, vagy valami útszéli igazságnak. Pedig kiderült, hogy ez és csakis ez az axioma teszi geometriánkat «archimedesi» típusúvá, és «nem-archimedesi» geometriatípusok egyáltalán nem ellenmondók, vagy lehetetlenek. Végül Archimedes a stereometriát is nagy mértékben fejlesztette a 13 Archimedes-féle vagy fél-szabályos test (poliéder) meghatározásával és vizsgálatával. Ezeket szabályos 3, 4, 5, 6, 8, 10 és 12 szögek határolják, s e testek közül tíznek kétféle, háromnak pedig háromféle szabályos sokszög határoló lapja van.

Évezredek elmúltával mutatkozik Archimedesnél az igaz emberi szellemi nagyság törvénye. Ő maga nagymestere volt az exhaustciónak. De művét, bármennyire kicsinek látszik is külsőleg, terjedelemre mégis alig lehet «kimeríteni». Még kevésbbé érthető az a csoda, hogy zárt kultúrákból ismét és ismét kiemelkednek emberek, akik a jövő, még meg sem született kultúráiba nyúlnak bele. Ez azonban «örök» értékek teremtésének a legaktuálisabb és legdinamikusabb fogalma, a valódi teljesítmények potenciális halhatatlansága. Mert a nyugati népek fausti szelleme majdnem tizennyolc századdal később ott folytatja, ahol a római katona vak dühe a titán köreit megzavarta.

NEGYEDIK FEJEZET.

Pergai Apollonios.

Matematika mint virtuozitás.

A tudománynak és a művészetnek fejlődését két teremtető szellem mozgatja. A kettőt éles határ választja el egymástól, sokszor ellenségek, egymással késre menő párthívekkel veszik körül magukat, de sokszor okot adnak böles és éleseszű elképzelések kialakulására arról, hogy mi is a «valódi» tudomány és a «valódi» művészet lényege.

Elképzelhetetlenül nehéz megállapítani, hogy miben különbözik egymástól e két típus, minthogy, minden élőhöz hasonlóan, számtalan árnyalat és átmenet van közöttük. Ennek következtében hibás minden merev fogalmazás. Mégis meg kell kísérelnünk a szélső megjelenési formák magyarázását, mert különben a szellemi és művészi fejlődés legfontosabb úttörőit nem tudnók megérteni.

Bizonyos — és ez az első különbség köztük, — hogy az egyik típus, mint Archimedes, noha ismeri a legtisztább formaadás varázsát, a valóságot mégsem csak a forma varázsával, hanem a tartalom segítségével is le akarja gyűrni. Tudni akar. A legvégső mélységig. És egy pillanatra sem nyugszik e művében. Dacos türelmetlenséggel rohan inkább egyik ismerettől a másikhoz, s műve ezért nem egyszer a befejezetlenség, ugrásszerűség, összefüggéstelenség bélyegét viseli magán. A másik típus viszont sokszor egyetlen művében nyilatkozik meg, amelyet utólérhetetlen tökéletességig fejlesztett, s amely úgy válik el szerzőjétől, mintha magában való élete volna, s ezzel a mű, szinte magától, örökkévalóságra tesz szert.

Beszéljünk, mint később történt, klasszikus vagy romantikus magatartásról, jellemezzük a különbséget velencei kifejezésekkel mint : furia és morbidezza, vagyis őrzőngő előre-

törésként vagy szinte beteges, páraszerű légyságként, beszéljünk tartalomról és formáról, dinamikáról és statikáról, létről és keletkezéséről, harmóniáról és formák feloldásáról, isteni nyugalomról és titánok dühéről, euklidesi és fausti lélekről avagy apolloi és dionysosi hajlamról: bizonyos csupán, hogy ez a két típus megvan minden kultúrában. Pontosan értsük meg: Archimedes és Apollonios viszonya olyan, mint Leibniz és Euler, Wagner és Mozart, Lionardo da Vinci és Raffael, Tintoretto és Tizian viszonya.

Nem relativizmus, ha azt állítjuk, hogy mindkét típus szükséges a fejlődéshez, s mindkettőnek, a maga helyén, ugyanannyi az örökérvényű tartalma s egyaránt a világ-megértés új kategóriáit tárják fel, s ez G. Simmel szerint jellemző a lángészre. Éppen ezért nagyon vitatható az az állítás, hogy csak a forma örökkévaló? Örökkévaló az, ami változatlanul megmarad az időkön keresztül, vagy az, ami a haladás részének vagy fokozatának bizonyul később, vagy pedig az ami olyan mélyen belevésődött a kultúrába, egészen a szavakba és a gondolkodásba, hogy létezéséről már tudomást sem veszünk. A formalisták az első, az új tartalmat hozók a második hatást érik el, de ezzel persze nem akarjuk egyiktől a tartalmat, a másiktól a formát elvitatni. Itt már a leghatalmasabb csúcsteljesítményekről van szó.

Mindezt csak azért akartuk rögzíteni, hogy elválaszt-hassuk egymástól Archimedes és Apollonios lángelméjét. Archimedest sokan mondják az ókor legnagyobb matematikusának, sőt néha minden idők legnagyobb matematikusának is. Apollonioszt viszont már a késői antik korok is a «nagy geometer» jelzővel illetik, és e nevét évszázadokon át változatlanul megőrizte. Tehát az egyik csupán nagy, a másik viszont legnagyobb úttörő volt? Vagy talán Apollonios közepes másoló volt, összefoglaló, kompilátor? Archimedes viszont sokkal szélesebb látókörű eredeti felfedező?

Később látni fogjuk a két korszakalkotó elme hatását mai matematikánkra. Mindketten közreműködtek kialakításában. S azt állítják, hogy Archimedes a végtelennel kapcsolatos fogalmainkat, Apollonios viszont a koordináta fogalmat alapozta meg, mindkettő nélkülözhetetlen feltétele «felsőbb matematikánk» kiépítésének.

Ha az ítéletek és értékelések nem egyértelműek, akkor helyes, ha a kérdésnek alaposabban utánanézzünk, mert már eleve félreértések és eltérő kultúrkritikai álláspontok tömege várható. Tehát eddigi szokásainknak megfelelően lássuk először Apollonios történeti helyzetét, hogy művének jelentőségéhez hozzászólhassunk.

Apollonios ifjabb kortársa volt Archimedesnek. Mintegy 40 éves lehetett, amikor Archimedest megölték. Ebben az időben már jelentős teljesítményt mondhatott magáénak. Apollonios jellegzetes alexandriai volt, Euklides első tanítványainak a tanítványa és életének nagy részét Alexandriában, a Museionban töltötte. Alighanem csak idős korában költözött Pergaiba. Nincs életrajza, amint általában a formavirtuózoknak nem szokott lenni, nincs sorsa, amely felrázna, vagy megragadna. Élt, alkotott, meghalt. Ilyen emberek belső harcairól vívódásairól, viharairól rendszerint nincs tudomásunk. Titkos törvény uralkodik itt, éppen úgy, mint Euklides, Raffael, Tizian, Euler, Aristoteles esetében. Ez a típus tekintélyes, nagyrabecsült, élte nyugodt, tiszta, sokszor szerény, s az embereket elsősorban műveik érdeklik és elfelejtik mögötte az alkotót; s maga az alkotó sem igyekszik a világ ilyen álláspontján változtatni. Csak azért lép előtérbe, hogy a forma megzavarói, a dinamikus-prometheusi alkotók műveinek magában, vagy pedáns és puritán követőik segítségével határt szabjon. De esetleg olyan békés természetű, hogy még ezt is mellőzi és megmaradt a maga formavilágában.

Bizonyos csupán, hogy Archimedes eget ostromló rohanását Apollonios nem követi. Csak annyit hallunk, hogy Apollonios halk, de valahogyan mégis bántó módon támadja Archimedes kutatásait, s erre válaszolt állítólag Archimedes éppen olyan halk, de szinte ironikus hangon az úgynevezett «ökörfeladattal». Apollonios ugyanis a π számára jobb közelítést talált, mint Archimedes, és amidőn a homokszámok nyilvánosságra kerültek, szintén könyvet írt a nagy számokról és ebben bírálta Archimedes periodus-rendszerét. Ekkor Fr. Huitsch szerint¹ Archimedes az ökörfeladattal meg

¹ Enzyklopädie der klassischen Altertumswissenschaft, 1896. II. kötet, «Archimedes» címszó.

akarta mutatni, hogy van olyan feladat, amely még Apolloniosnak is komoly nehézséget okoz. Legújabb kutatások szerint az egyenletrendszer megoldása olyan számokra vezet, amelyek tízes rendszerben csak 200,000 jeggyel írhatók le.

Említettük, hogy Apollonios tulajdonképpen nem folytatta Archimedes matematikáját. Ezt nyomatékosan hangsúlyoznunk kell. Apollonios nem törődött azzal, hogy körülötte reng a föld, hogy az ő korában folyt le a rómaiak döntő küzdelme a világalalomért, és hogy a görögök külső hatalma megsemmisült. Nem keltette fel Syrakusa lángoló jele, nem ébresztette fel Archimedes feltalálói működése, hanem folytatta a hellén matematikát, az eleai-euklidesi geometriát és tökéletessé fejlesztette. De nem zárkózott el teljesen az újítások elől, sőt ellenkezőleg a számelméleti ismeretekben annyira előrehaladt, hogy számírásunk helyértékrendszeréhez hasonló ismeretek közelébe jutott.

De korszakalkotó virtuózteljesítménye mégis az a nyolc híres könyv a kúpszeletekről, amelyek majdnem teljesen ránk maradtak, s amelyek olyan bámulatos tökéletességet mutatnak, hogy a görög matematika naivitására vonatkozó balvéleményünk utolsó nyomainak is el kell tűnniök. Az «alexandriai» alakja sajátos kulturfogalom. Euklides, Eratosthenes, Apollonios képe elegendő alakjának megrajzolásához. Kutatásaik üvegszerű átlátszósága, áttekintésük világuk fölött, tökéletességük kozmoszuk határain belül aligha érhető utól. Az alexandriai művének azt a látszatot kellett keltenie, hogy elérte a tudás csúcsát, és nem maradt már elérhető utána. De az ilyen teljesítmények nagyszerűségükön kívül veszélyesek is a kultúra további emelkedésére. Mert később kiderült, hogy a tökéletességbe vetett alexandriai hit mennyire csalóka volt. Igaz csak az emberi alkotókedv egyik pihenője után, amely századokon és kultúrkörökön nyult keresztül, míg végre oly irányokból, amelyeket addig járhatatlanoknak tartottak, tört fel váratlanul az új fejlődés.

Apollonios tehát, mint mondtuk, — néhány jelentéktelen engedményről nem szólván — a matematika nagy, hellén, euklidesi hagyományaiba kapcsolódott bele, nemcsak külsőleg, hanem egészen mélyen és a másodrendű görbék, másképpen kúpszeletek különleges területén ért el századokon

keresztül túl nem haladott tökéletességet. Igaz, a kúpszeletek már Platon Akademiájában is segédeszközök voltak a kocka kétszerezés feladatának megoldásánál, és már Euklides is tárgyalta őket egyik elveszett könyvében. De az a körülmény, hogy Archimedes még Menaechmos (IV. század Kr. e.) jelöléseit használja, világosan megmutatja, hogy még Euklides sem állhatott Apollonios ismereteinek magaslatán. Menaechmos és minden követője, Archimedest beleértve, még nem volt teljesen tisztában a kúpszeletek keletkezés módjával és viszonyaival, úgyhogy ennek megfelelően a parabolát olyan kúp egyik alkotójára merőleges sík metszeteként definiálták, amelynek nyílásszöge derékszög. A fenti metszet tompa nyílásszöge kúpon hiperbolára, hegyes nyílásszögű kúpon viszont ellipszisre vezet. S a parabola, hiperbola és ellipszis kifejezéseket sem használták, hanem csak «a derékszögű kúp metszete» stb. elnevezésekről beszéltek. Ez minden, noha a kúpszeletek sok tulajdonságát ismerték, sőt már Platon idejében voltak szerkezetek ilyen görbék (elsősorban parabolák) rajzolására. Megvolt tehát a parabola-körző és ismeretek voltak e görbének különféle tulajdonságai.

Apollonios mindjárt könyve elején annyira általánosította a kúpszeletek tanát, amennyire abban az időben egyáltalán lehetett. Egy egyenest, amelynek egyik pontját rögzítette, de amelyet mindkét irányban tetszés szerint meg lehet hosszabbítani, egy kör területén csusztat végig, mindaddig, amíg eredeti helyzetébe vissza nem tér. Ezzel forgási kúpot állított elő, sőt kettőskúpot, s azonnal megmutatja, hogy egyetlen, hegyes nyílásszögű kúp metszeteként négy különféle görbe adódhat: kör, ellipszis, parabola és hiperbola. Az, hogy melyik görbe keletkezik, csupán a sík és a kúp alkotójának hajlásszögétől függ. Ezzel meghatározta a kúpszeletek mindmáig érvényes, egyetlen kúp különféle metszeteként való keletkezési módját. De a görbék keletkeztetésének ez a mondhatnók észszerű módja nem az egyetlen elképzelhető mód. Kúptól teljesen függetlenek e görbéknek mértani helyként való keletkeztetései, amelyek a görbék planimetriai tulajdonságaiból adódnak, s amelyeknek ismerete a geometriai algebra ősrégi feladatai kapcsán, Pythagorasisg követhető nyomon. A «mértani hely» fogalmának megértéséhez jegyezzük

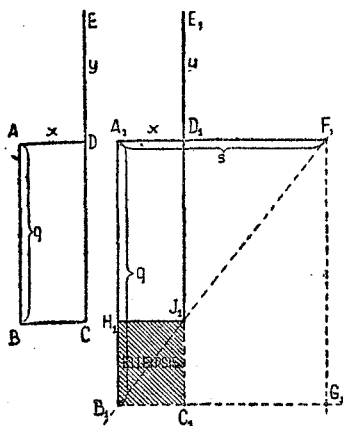
meg, hogy ez már régen ismeretes volt a hellén geometriában és távolságok vagy viszonyok összességét jelenti. Valamely görbének mértani helyként való felfogása az eleai, statikus felfogásmódból ered. Így a kör mindazon pontok geometriai helye, amelyek egy adott ponttól, a középponttól egyenlő távol vannak. És a szögfelező mindazon pontok mértani helye, amelyek egy szög száraitól egyenlő távolságra vannak stb.

Természetesen vannak lényegesen bonyolultabb feltételeknek megfelelő mértani helyek is; ilyen már bemutattunk akkor, amikor Czwalina nyomán leírtuk az archimedesi spirálisnak euklidesi nyelven fogalmazott definícióját. Ezzel már eljutottunk addig, hogy megmondhassuk: a kúpszeletek Apolloniosztól kapták mai nevüket és hogy miként jutottak ezekhez a nevekhez. De azt is taglalni fogjuk, hogy a pergai Apollonios volt a koordináta geometriának úgyszólván első felfedezője.

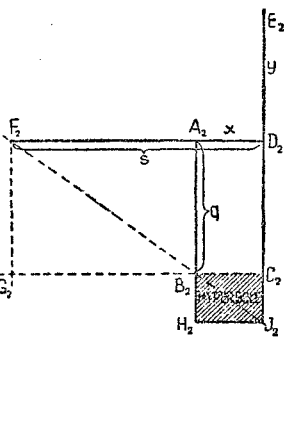
Ehhez azonban vissza kell nyúlnunk a területek egymáshoz illesztésének ama három módjára, amelyet már Pythagoras is ismert, illetve amelyet állítólag ő fedezett fel. Az első feladat, a parabolikus felület-egymáshozillesztés azt követeli, hogy az adott AB vonalra úgy illesszünk egy téglalapot, hogy annak területe egy megadott idom, mondjuk az ED oldalú négyzet területével egyenlő legyen. Tehát fennáll a következő összefüggés a területek közt: $\overline{ED}^2 = AB \cdot AD$. Ha most az AB távolságot állandónak tekintjük, q -val jelöljük és változatlanul megtartjuk, viszont az ED távolságot változtatjuk, akkor az AD távolságnak is változnia kell, hogy fenti követelésünk teljesüljön. Jelöljük az AD távolságot x , a DE távolságot y betűvel, tehát $AD = x$ és $DE = y$, akkor feltételünk az $y^2 = qx$ összefüggés, és ez pontosan megegyezik a parabola ma használatos, derékszögű koordinátákkal felírt csúcsponti egyenletével. Bizonyos okokból ma q helyet $2p$ -t írunk, de ez a lényegen nem változtat semmit, hisz q és $2p$ egyaránt állandó.

De minden félreértés elkerülésére rögzítsük már ezen a helyen: Apolloniosnál szó sincs általános értelemben vett koordinátákról, amelyek tengelykeresztként vagy vonatkozási rendszerként, minden idomtól függetlenül léteznek,

amelyekben analitikus vizsgálatra csak később helyezünk el görbéket. Apollonios bizonyos szempontokból ellenkező úton jár. Nála az idom az előbbrevaló, s bizonyos, az idomhoz tartozó, vagy legalábbis vele szoros kapcsolatban levő vonalakból adódnak planimetria arányok és összefüggések. Ezek az összefüggések definiálják azután az idomot. Tehát még egyszer: Apollonios nem alkalmaz cartesiusi értelemben vett koordinátákat, hanem a kúpszeleteket területi összefüggésekkel értelmezi és közben felismeri az Euklides által taglalt idom-



3. ábra.



4. ábra.

összeillesztési feladatoknak és a kúpszeleteknek összefüggését. Ez a hervadhatatlan érdeme. Mert kiderül, hogy parabola az a mértani hely, amely az előbbi összefüggésnek megfelel, vagyis az a görbe, amelyet az E pont leír, miközben a DE távolság változik.

Teljesség kedvéért bemutatjuk a másik két összeillesztési módot is. Ismét adott az A_1B_1 távolság és az E_1D_1 fölé rajzolt négyzet. Azonkívül még az A_1F_1 távolság, amely az A_1B_1 távolsággal az $A_1B_1G_1F_1$ téglalapot adja. Szerkesztendő az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap oly módon, hogy területe egy, az $A_1B_1G_1F_1$ téglalaphoz hasonló $B_1C_1H_1J_1$ téglalappal csök-

kentve (elleipsis, defectus) adja a D_1E_1 fölé rajzolható négyzette' egyenlő területű $A_1D_1H_1J_1$ téglalapot. Tekintve, hogy $B_1C_1H_1J_1$ és $A_1F_1B_1G_1$ hasonlósága biztosítva van azáltal, hogy a J_1 pont a B_1F_1 átlón fekszik, fennáll a következő aránylat:

$$C_1J_1 : B_1C_1 = F_1G_1 : B_1G_1$$

Ebből és a rajzból következik, hogy

$$C_1J_1 = \frac{B_1C_1 \cdot F_1G_1}{B_1G_1} = \frac{A_1D_1 \cdot A_1B_1}{A_1F_1}$$

Feltevésünk szerint tehát

$$\overline{E_1D_1^2} = A_1B_1 \cdot A_1D_1 - A_1D_1 \cdot \frac{A_1D_1 \cdot A_1B_1}{A_1F_1}$$

Ismét az $A_1B_1=q$, $A_1D_1=x$, $D_1E_1=y$ és végül $A_1F_1=s$ jelöléseket használva $y^2=qx-x\frac{xq}{s}$ és ez egy ellipszis csúcsponti egyenlete.

Vizsgáljuk végül a hiperbolikus összeillesztés néven ismert feladatot. Ennél az $A_2B_2C_2D_2$ négyszöghöz még hozzá kell tenni (hyperbole) az $A_2B_2G_2F_2$ négyszöghöz hasonló $B_2C_2H_2J_2$ téglalapot, hogy az E_2D_2 fölé rajzolt négyzettel egyenlő területű $A_2H_2J_2D_2$ téglalap keletkezzék. Az előbbi feladathoz képest csak egy előjel változott meg, tehát

$$\overline{E_2D_2^2} = A_2B_2 \cdot A_2D_2 + A_2D_2 \cdot \frac{A_2D_2 \cdot A_2B_2}{A_2F_2}$$

Ez a többlet (hyperbole, excessus) a hiperbola egyenletét adja, ha az előbbi feladathoz hasonló módon bevezetjük az x , y , q és s jelöléseket. A hiperbola csúcsponti egyenlete tehát $y^2=qx+x\frac{xq}{s}$.

De ez Apollonios kúpszeletvizsgálatainak csak a kezdetei. Ezenkívül megtalálja a kúpszeleteknek majdnem valamennyi fontos tulajdonságát, ismeri a hiperbola másik ágát, tisztában van az érintőkkel, gyújtópontjaikkal, hasonlósági viszonyaikkal, sőt két görbe metszéspontjával is, stb. Sőt a

csak a XIX. században nagygyá fejlődött projektív geometria néhány tételének is elébe vág.

Ily tudástömeg láttán nem csodálkozhatunk, hogy ismeri a hiperbola aszimptotáit is és hogy azok tulajdonságait vizsgálja. Tudjuk, az aszimptoták olyan egyenesek, amelyekhez görbék mindinkább közelednek anélkül, hogy a végesben elérnék vagy metszenék őket.

Történeti tanulmányunk jellegének megfelelően mellőznünk kell Apollonios érdemeinek részletes ismertetését, de meg kell mutatnunk, hogy a kúpszeletek ismerete miért olyan nagy jelentőségű a matematikára, hogy felfedezésüket korszakalkotónak mondhassuk. De ehhez a görbékről általában, a kúpról pedig részletesen kell beszélnünk.

A felületes, mélyebb összefüggéseket nem ismerő szemlélő meg tudja érteni, ha valaki olyan görbével foglalkozik, mint a kör. Ez végre is a szabályosság ideálja, és százféle módon kapcsolódik a természetbe. Különösen olyan kutatók számára, akiknek meggyőződése szerint minden égitest alakja gömb, pályájuk pedig kör. A technika, az építészet is minduntalan körre bukkan. Tengelyek, kerekék, árbócok, oszlopok, színházak ülésrendje,¹ hogy csak a legegyszerűbbeket említsük, köralakot mutat. Ehhez járul még a körző. Sok mindent le kell rajzolni megvalósítás előtt. S a rajzoláshoz körzőt és vonalzót használtak, tehát már a rajzolás módja következtében, rejtve vagy nyíltan majdnem mindenütt kör szerepel. De nem mellőzhetjük itt azt a kérdést, hogy nem befolyásolja-e lényegesen még ma is, a rajzolás és később a forgó szerszámgépekkel történő megvalósítás a technikában az alak megválasztását, elfedve és elnyomva más, esetleg kedvezőbb vagy hatásosabb alakot?

Ez világos. De mire való ez a nagy igyekezet, amellyel más görbéket vizsgáltak? Nem volt ez csak a hellén matematikusok geometriai terjeszkedési kedve? Vagy mélyebbek itt az összefüggések? Feleletünk: van itt több más összefüggés

¹ Ezzel a problémával az ókorban igen alaposan foglalkoztak. Geometriai eszközökkel vizsgálták és állítólag ezzel kapcsolatban fedezték fel, hogy a körben valamennyi, egy húron fekvő kerületiszög egyenlő. De ebből viszont az következik, hogy köralakú színházban valamennyi néző egyforma szög alatt látja a színpadot.

is, néhányat már előbb bemutatunk. Különös, összetartó fejlődés folyamán éppen Apollonios kúpszelettanában találkozott két matematikai gondolatsor. Még pedig a négyzetes egyenletek megoldásának problémája, amelyet Pythagoras fejlesztett ki, mint «geometriai algebrát» az összeillesztés módszerével és a három «klasszikus probléma» egyike, amely másodiknál magasabb fokú egyenletek megoldását kívánja, ezt Platon iskolájának kora óta kúpszeletek metszésével oldották meg és végeredményben a kúpszeletek felfedezésére vezetett. Ehhez járult még a folytonos arányokról szóló tan és a mértani helyek elmélete; az utóbbiban a függvény fogalomnak egyelőre statikus felfogása rejtett. Mert egy, ilyen vagy olyan feltételnek megfelelő görbe, vagy egy algebrai feltétel, amelynek ez vagy az a mértani hely felel meg, lényegében nem egyéb, mint egy függvény és a hozzátartozó képgörbe, különösen, ha csak az egyik mennyiséget tekintjük függetlenül változónak, és a másikat tőle függőnek tekintjük.

De nehogy hamis elképzelésekre vezessük olvasóinkat, hangsúlyozzuk, hogy még több alapvető, óriási lépésre van szükség, míg ezek a mély összefüggések tisztán és világosan meglátszanak. Tagadhatatlan viszont, hogy Apollonios műve ezeknek a dolgoknak a csíráit már tartalmazta és megvalósította az algebra és geometria egymáshoz kapcsolását, noha ez nem mutatkozhatott teljes mértékben, mivel a hellén algebra maga geometriába volt burkolva. De ebből az a különös helyzet adódott, hogy a geometriai megjelenésű algebra és a valódi geometria közé még egy tisztán geometriai réteg ékelődött, s ez gyakran meglepő felfedezésekre vezetett. Nagy a különbség ugyanis a görög és a mai geometriai analízis között. Mi maiak — erről még részletebben is szó lesz — algebrai, szimbolikus betűjelölésmódunkkal egy függvényt írunk fel, és a geometriai ábrázolás látványlag végtelen távolában kapjuk meg a hozzátartozó képet. Apollonios viszont felrajzolja — vegyünk konkrét példát — az ellipszist és ebbe olvasztja bele a megfelelő összeillesztés feladat algebrai-geometriai rajzát, amikor is az első rajz geometria, a második algebra jellegű. Ezzel ugyan veszendőbe megy az algebrai algoritmus, a gondolkodási gépezet nyuj-

totta előny, de éppen ezáltal tudta az egyik idom geometriai vonatkozásait a másik idom geometriai vonatkozásaival akadálytalanul összekapcsolni és ezzel új összefüggéseket felfedezni.

De ez a tényállás magában véve nem jellemző a kúpszeletekre. Mert ugyanez a módszer, igaz, alig áthidalható nehézségekkel, magasabbrendű görbékkel is elképzelhető.

Hát mi az a fontos körülmény, amely valamennyi görbe közül éppen a kúpszeleteknek biztosítja ezt a különleges, korszakalkotó jelentőséget? Jó, tudjuk, hogy úgyszólván ki-merítik a másodfokú egyenletek ábrázolásának birodalmát. Ezt már Apollonios megállapította a görbék definíciójában. Hozzátesszük, hogy sokkal később felismerték kozmikus jelentőségüket is, hogy ilyen a bolygók és az üstökösök pályája, forgó égitestek körvonala és az elhajított súlyos földi test pályája. De ez még nem minden. A kúpszeletek eddig nem említett főfontossága az ember érzékeinek mélyéből következik. Az embert tapasztalatainak megszerzésében első-sorban szeme befolyásolja. És a szembe érkező fénysugarak a kétszerdomború lencse fénytörésének szabályai szerint kúpot adnak. E fénykúp által hozzánk közvetített optikai valóság minden képe számunkra kúpszeletként mutatkozik, minden perspektíva és projekció alapja a kúpnak és metsző-síkjának viszonya. És így nem túlzás, ha látott világunkat «kúpszeletvilágnak» nevezték.

Ilyen ismeretek kezdetét, amelyek a maguk egészükben csak a XIX. században, a «projektív» vagy «új» geometriával bontakoztak ki, már Apolloniosnál is megtaláljuk, mert ő már sugárnyalábokkal dolgozik és taglalja összefüggésüket a kúpszeletekkel.

Nagyon helytelen tehát Apollonios kúpszelet-tanát «speciális kutatással» bélyegezni, olyanná, amelynek csak alárendelt jelentősége vagy artisztikus érdekessége van. Igaz, műve artisztikus, sőt virtuóz teljesítmény. Ez a mű tudunkkal az első és a maga koráig a legátfogóbb összefoglalása a matematikai vizsgálatnak. De a tárgya, mint előadni igyekeztünk, ezen felül mérhetetlen és döntő fontosságú. Ilyen még akkor is, ha nem vesszük figyelembe azokat a matematikát fej-

lesztó következményeket, amelyek Apollonios sejtéseinek rendszeres vizsgálata és felkutatása során adódtak.

Nem mellőzhetünk még egy fontos pontot. Ez az aszimptoták vizsgálata. Tudjuk, aszimptota a kúpszeletek tanában az a két egyenes, amely bizonyos előírt módon rajzolható a hiperbolához, ahhoz végtelenül közeledik, de sem nem metszi, sem nem érinti a hiperbólát. Ilyen egyenesek pusztán létezése, akár Apollonios fedezte fel azokat, akár már előtte is ismerték őket, két módon is megingatta az euklidesi szellem épületét. Először azzal, hogy a hellénség által annyira tilalmazott és háttérbe szorított végtelen-fogalom újból napirendre került. Jó, itt is lehet szépítve «tetszésszerű» megközelítésről beszélni. De hol végződik ez a tetszésszerű megközelítés? És a geometerek teljesen tudatára ébredtek, hogy a hiperbola és a parabola nyitott görbék, amelyek a végtelenbe vesznek el, amelyek alakjának törvényszerűsége mindenütt ismeretes, de maga az alak nem. És felmerült még egy másik veszélyes megfontolás is. Ez a párhuzamosok posztulátumára vonatkozott. Mert a vonalak egy harmadik nyugtalanító fajtája tolatkodott azok közé a vonalak közé, amelyek egymást metszik és azok közé, amelyek egymástól állandó távolságra maradtak, tehát egymást nem metszették. Ezek a vonalak nem metszették egymást, de nem is maradtak egymástól állandó távolságra. A párhuzamosok posztulátumának euklidesi fogalmazásában két vonal biztosan elvárható metszésének egymáshoz való közeledésük volt a megnyugtató jellemzője, az állandó távolság egymástól a nem-metszést, a párhuzamosságot jelentette. De az aszimptoták révén egyszerre kiderült, hogy a közeledés esetén sem kell feltétlenül metszésnek bekövetkeznie. Igaz, fel lehet ez ellen hozni, hogy Euklidesnél két egyenesről, itt viszont egy egyenesről és egy görbéről van szó, tehát ezek más törvényeknek engedelmeskednek, mint két egyenes. De az aszimptoták súlyos nyugtalanságot keltettek, és ez a párhuzamosok axiómáját évszázadokon keresztül újból és újból vita tárgyává tette. Mert ez a posztulátum, — és itt ismét rejtett összefüggés van — valamiképpen ellenmond a szemléletnek, a nélkül, hogy általában számot adnánk róla. A szem világa, a «kúpvilág», ahogy előbb neveztük.

nem ismer párhuzamosakat. Senki, aki a világot szemével ismeri meg, még nem látott «valóságban» párhuzamosokat, bármennyire furcsán hangzik is ez. Párhuzamos egyenesek léte csak követelés, csak fikció, de nem szemmel látható tény. Bizonyos: létezhetnek, távolságméréssel ellenőrizhetők és igazolhatók, éppen úgy mint ahogy lehetséges volna vasúti sínpárt vezetni a végtelenségig, hacsak végtelen hely és idő rendelkezésre állna. De ez kívül áll az észlelés lehetőségén.

A Pergaiból származó Apollonios, a «nagy geometer» az ó-hellén mesterek közt a matematika virtuóza, akivel az antik matematika hőskora tulajdonképpen lezárul, e virtuozitáson kívül a matematikának egynél több alapvető problémáját vetette fel. S ha ő bizonyos szempontokból a görög geometriának zárókövét tette is le, éppen ez a vélt záróköv lett, mint az elkövetkező haladás megmutatta, ismét talpköve a későbbi magasabb fejlődésnek.

ÖTÖDIK FEJEZET.

Diophantos.

Matematika, mint írásmód.

Tanulmányunk nem akarja a fejlődést a maga folytonosságában bemutatni, sőt ellenkezőleg, csak a legfontosabb időszakok bemutatására törekszik. Mégis szóvá kell tennünk azt az általános kultúrtörténeti ténytet, hogy miért csak évszázados megszakítással következnek vagy következhet be egy tudomány további emelkedése.

Kortárs gyakran nem tudja ezt az úrt észrevenni, vagy megérezni. Mert feldolgozásra, bővítésre, általánosításra kerülnek a nagy felfedezők által felvetett problémák. S megeshet, hogy fennálló hiányokat töltenek ki, és ehhez újabb felfedezésekre van szükség, olyanokra, amelyek minőségben nem maradnak el a klasszikus idők korszakalkotó felfedezései mögött, csupán a tudomány általános helyzete folytán már nem korszakalkotó jelentőségűek. Ez az epigonok általános problémája. Az epigon megjelölés nem csupán kisebb tehetséget jelent, hanem gyakran az elkésett születés szerencsétlen véletlenét. Az a körülmény, hogy egy saját határait ezernyi tényező behatása folytán átlépni nem tudó kultúrkörön belül már nincs tennivaló, számos esetben nem az egyén hibájára és tehetetlenségére, hanem inkább balsorsára magyarázható.

De ilyen bonyolult és áttekinthetetlen kérdésekben, amelyekhez még olyan történelemmorfológiai kutatások is szükségesek, hogy van-e kultúráknak ifjú-, érett-, és aggkora, nem lehet általános érvényű kijelentéseket tenni a nélkül, hogy a történeti tényeken erőszakot ne kövessünk el. Ide tartozik az a kérdés is, hogy a fejlődés fokozatai népekhez vagy kultúrkörökhöz kötöttek-e. De mit jelent a kultúrkör,

ha nem élő népeken alapul? Nem csak Oswald Spengler, mások is sokat írtak erről a kérdéstről. De nem merülhetünk széleskörű vizsgálatokba főfeladatunk veszélyeztetése nélkül. Másrészt viszont nem mehetünk el szó nélkül az Apollonioszt követő időszak matematikai dekadenciájának váratlan tünényé mellett. Mert kétségtelen, hogy matematikai jelentőségű korról Diophantosig nem lehet szó.

Élesen fogalmazva meg kell állapítanunk, hogy a Kr. e. második századtól egészen a Kr. u. harmadik századig a matematika egyetlen kivétellel csak a régiek örökségének kezelésével foglalkozott. És ekkor is csak görögök voltak, akik e feladatra vállalkoztak. A római matematika nem jön tekintetbe. A klasszikus Róma népe harcok jogászokból áll, a nem jogi tanulságot bizonyos fokig lenézi, nagy hatalmával szakértőket hozat a világ minden tájáról, ha technikai, építészeti vagy katonai okból szükséges. A római világuralom nagy időszaka, a pun háborúk végétől a Caesarok korának végéig, matematika szempontjából egyike a legmeddőbbeknek. Egy kivételt említettünk. Ez a trigonometria fejlődése és erről még lesz szó.

Szálljunk még egyszer varázsszónyegünkre és térjünk vissza Apolloniosz kúpszeletvizsgálataihoz. Világos, hogy az Archimedes által megkezdett alapos foglalkozás a görbékkel, amely Apolloniosz-szal folytatódott, ösztönzést adott valamilyen szabály szerint görbült vonalak további vizsgálatára. Így fedezték fel Kr. e. a második században Nikomedes a conchoist, a kagylógörbét, amelynek előállítására Nikomedes conchois-körzöt is szerkesztett. Mivel itt, az analízis kifejezéseivel élve, másodfokúnál magasabb fokú görbéről van szó, amelynek egyenletét ma $(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2$ alakban írjuk, ezért ez használható volt a szögharmadolás problémájának és a delosi problémának megoldására. Alkalmas erre Diokles cissoidája is, amelynek egyenlete $(a-x)y^2=x^3$ Cissoida is felrajzolható mechanikusan cissoida-körzövel. Ha még megemlítjük, hogy egy Perseos nevű geometer a spirálisokkal foglalkozott ebben az időben, akkor felsoroltuk a görbék tanának haladását Archimedes és Apolloniosz kora óta.

További jelentős alakja a klasszikust követő kornak az

alexandriai Heron. Heron elsősorban gyakorlati ember volt, fizikus és földmérő és hatalmasan fejlesztette a mértékgeometriát. Tőle származik az a híres képlet, amellyel az oldalból kiszámítható a háromszög területe.

A már említett trigonometria, amely az ismertté vált babyloni, chaldeus alapokon, a gömbtannal karöltve indult fejlődésnek, első nagy tudósát Hipparchosban, a samosi Aristarchos utódjában találja meg. Ő fedezi fel többek közt a stereografikus projekciót, amely az éggömböt egyik sarkából vetíti az egyenlítő síkjára. Ekkor változatlanok maradnak a szögek és a körök.

A gömbtan az alexandriai Menelaos munkálataival fejlődik tovább, a Kr. e. első században, míg végre Claudius Ptolemaios lesz, Kr. u. 140 körül, nagyjelentőségű fejlesztője. Igazságtalan volna, ha azt a szinte páratlan tökéletességet, amelyet a gömbtan és a trigonometria Ptolemaios munkáiban elért, nem tekintenők korszakos jelentőségűnek. E nagy matematikusnak, és csillagásznak, akinek világképe másfél évezredet befolyásolt, főműve, a «Megalé syntaxis» (nagy összefoglalás) vagy arabul az «Almagest», olyan nagy becsben volt, hogy a mű egy példányának kiszolgáltatása a kalifátus és Bizánc közt kötött valamelyik békeszerződésnek egyik fő pontja volt. Ma is számtalan kifejezést használunk, amelynek megalkotója Ptolemaios volt. Kör és szögfelosztásánál a részeket ő «partes minutae primae» és «partes minutae secundae»¹ néven nevezi. Innen származik, egyáltalán nem következetes szóhasználattal, a minutum (perc) és secundum (másodperc) elnevezés, hisz helyesen legfeljebb primum és secundum szavakat kellene használni.

S ha mégsem tudjuk magunkat rászánni, hogy a trigonometriát a fejlődés különálló fejezetének tekintsük, ez azért van, mivel ez csupán a mértékgeometriának jól elhatárolt fejezete és így szigorúan véve nagy részével nem a tiszta, hanem az alkalmazott matematikához tartozik. Hatalmas gyakorlati jelentőségét vitatni nem lehet, nem is vitatja senki, épp oly kevésbé, mint azt a körülményt, hogy alapjai, a szögfüggvények, Pythagoras tételével egyetemben a fel-

¹ Elsőrendű apró részek és másodrendű apró részek.

sőbb matematika alapjaihoz tartoznak. De keletkezésének oka nem ez utóbbi volt, tisztán gyakorlati célok szem előtt tartásával fejlesztették nagygyá, és ezért nem befolyásolta önmagában véve korszakalkotó módon a matematikai gondolkodás fejlődését. Haladt a maga gyakorlati útján, mint a csillagászat segédtudománya, s végül, meglehetősen hamar, tovább már nem fejleszthető tökéletességet ért el.

Nem csoda, hogy az ókori klasszikus időköt követő kor matematikájának gyakorlati irányzata mindinkább előtérbe hozta ismét magát a számolást. A számolás rossz híre lassankint, észrevétlenül mindinkább megszűnt, és már Heron olyan kiterjedt számításokat ír le könyvében, hogy könyvét később példatárrá dolgozzák át. A végrehajtott számítások szükségessége még világosabban látszik Ptolemaiosnál. Használható trigonometria kiterjedt számadatok nélkül nem képzelhető el, és ezért alkotta meg Ptolemaios alapvető, nagyarányú táblázatát, a «húrok táblázatát». Ez $\frac{1}{2}$ fokos beosztással 0° -tól 90° -ig terjedt, és feladata megegyezett a mai szögfüggvény-logaritmustáblák feladataival. A körmérő π szám megközelítő értékét is ismerte, szerinte

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3 \frac{17}{120} = 3.141666... \text{ és ez a helyes}$$

3.14159265... értéktől csak a negyedik tizedesjegyben tér el, tehát nem nagyon kényes gyakorlati céloknak megfelel.

Az új életre kelt aritmetikával való foglalkozást az az úgynevezett új-pythagoreusok folytatták, közülük került ki a geresai Nikomachos, Krisztus után a II. században. Ugyanehhez az iskolához tartozott a smyrnai Theon, ugyanabban a korban, aki szintén az aritmetikát fejlesztette és olyan képleteket alkalmazott, amelyeknek alapján feltehető, hogy ismerte a láncörteteknek gyökvonás céljára való használatát.

Már minden jel egy új korszak kezdetét jelezte, de a történelem folyása az előre láthatótól eltérő volt. Igaz, ez az új korszak Diophantos személyével megkezdődött. De ezzel ki is merült, s évszázadokra, sőt egy egész évezredre elmerült a történelem színpadának süllyesztőjében.

De még mielőtt megkísérleljük megérteni Diophantos teljesítményének lényegét és azt, hogy mivé fejlődhetett volna, el kell merülnünk az aritmetika és az algebra lényegé-

nek és az ezzel szorosan összefüggő számírás módszerének megismerésében. Utóbbival kezdjük, mivel elsősorban ilyen módon kerülünk szembe a számokkal. A görög számírás-módot fogjuk ismertetni, mivel az összes többi ókori nép legnagyobbbrészt még a helleneknél is rosszabb számírás-módot használt. Jobbat nem is fejlesztett ki egyik nép sem egészen Diophantos koráig.

Görögországban, Kr. e. az ötödik századtól kezdve olyan számírásmód fejlődött ki, amely az ábécé betűit használta, néhány idegen nyelvből vett jellel kiegészítve, a számok írására. A jelek a következők voltak: $1=a'$; $2=\beta'$; $3=\gamma'$; $4=\delta'$; $5=\epsilon'$; $6=\zeta$; (ez a sémi vav betű); $7=\zeta'$; $8=\eta'$; $9=\theta'$; $10=\iota'$; $20=\kappa'$; $30=\lambda'$; stb. Látható, hogy a számjelként alkalmazott betűkhöz fent, jobbra, megkülönböztetésként egy ékezetet, vesszőt írtak. A mi többjegyű számainkat összegként írták, a jelek nagyságuknak megfelelő sorrendben következtek úgy, hogy miként minálunk, balról jobbra haladva a nagyobb megelőzze a kisebbet. Ilyenkor elhagyták az ékezetet, s helyette az egész szám fölé vízszintes vonalat húztak. Tehát, mivel 300 jele τ' , volt, 345 $\tau\mu\epsilon$ alakban íródott. Ebben a rendszerben a nulla nélkülözhető volt, mivel a mi nullával végződő számainknak önálló jelek feleltek meg. Az ezresek jelölésére az 1—9 számok jeleit használták, megkülönböztetésül balra, lent látták el őket ékezettel. Tehát $7000=\zeta$; vagy $9000=\theta$. Myriádot, vagyis tízezreket is le tudtak írni, de nem akarunk mélyebben a részletekbe belemerülni.

Lássuk inkább a számok ilyen írásmódjának elvi következményeit. A görög írásmód, noha tagadhatatlanok az előnyei más, pl. a római, írásmóddal szemben, nem volt eléggé hajlékony eszköz a számoló kezében. Ezzel az írásmóddal szorzást és osztást, gyökvonásról nem is szólva, csak nagyon nehézkesen lehetett elvégezni. De még sokkal súlyosabb volt a második körülmény. Egy nép, amely a természetes számokat betűkkel jelölte, nem jöhetett arra a gondolatra, hogy betűkkel általános számokat jelöljön, és ez a körülmény, helyesebben ez a történelmi véletlen, végzetes volt az egész görög matematikára. S alig akad gondolkodó ember, aki a fejlődése láttán fel'nem teszi a kérdést, hogy mivé fejlőd-

hetett volna ez a görög matematika, ha hozzá méltó algebra támogatja.

De legutóbbi célzásunkat részletesebben is ismertetnünk kell. Hisz már nem egyszer volt alkalmunk a görögök kiváló algebrai teljesítményét említeni. Mit jelent ilyen körülmények közt ez a sajnálkozás az algebra hiányán? Formai dolgokról van itt szó, kifejezési módról, vagy a különbség mélyebben rejlik? Bizonyára a második feltevés a helyes. Sehol sem állítottuk, hogy a görögök betűkkel számoltak volna, mindenkor csak «geometria algebrajukról» beszéltünk. Ezen a fokon mindent röviden algebrainak mondunk, ha általános számokkal való számolásra vonatkozik. És az ilyen algebrainak a fejlődésében — Nesselmann nyomán mondjuk — három fokozat van. Első fokon a «szóalgebra» csak nyelvi eszközöket alkalmaz. Ennek a lehetőségét a görögök már Pythagoras óta ismerték. Ezen az első fokon tehát mindazt, amit képletnek nevezünk, szavakkal kell kifejezni. Ilyesformán: «a háromszög területe mindenkor egyenlő az alap, szorozva a fél magassággal, vagy a fél alap, szorozva a magassággal, vagy az alap és magasság szorzata osztva kettővel.» Más példa: «A kör kerülete egyenlő az átmérő, megszorozva egy $3\frac{10}{70}$ és $3\frac{10}{71}$ közt fekvő számmal.» Ilyen módon azonban egyenleteket is lehet tárgyalni és megoldani. Legyen például a feladat, hogy keressük azt a számot, amelyhez 15-öt kell adnunk, hogy 6 négyzetét kapjuk. Ma így írjuk: $15+x=36$, és a megoldás $x=36-15$, vagyis 21. Szándékosan választottunk nagyon egyszerű példákat, de tudjuk, hogy a görögök nem riadtak vissza bonyolult egyenletrendszereknek, ilyen pl. Archimedes «ökörfeladata», pusztán szavakkal való megfogalmazásától sem. E biztosan létezett szóalgebrát lényegesen egyszerűsítette a geometriai szerkesztés, az összeillesztés, görbék metszése, stb. E módszernek egy, igaz egyetlen, nagy előnye van. Geometriai eszközökkel nehézség nélkül, símán, egyértelmű vonalként kaphatjuk meg egyenletek irracionális megoldását is, ami aritmetikai eszközökkel nem volna lehetséges. Ha teljesen eltekintünk az egyenletek geometriai megoldásának nagy, sőt sokszor áthághatatlan nehézségeitől és attól, hogy ehhez különös intuitív tehetség

is kell, fennmarad még az a hátrány, hogy ilyen eszközökkel a számrendszer negatív, vagy imaginárius számokkal való kibővítése teljesen lehetetlen, sőt az ilyenek tárgyalásáról sem lehet szó. Továbbá, hogy a dimenziók száma is lehetetlenné teszi másodiknál magasabb fokú egyenletekre való alkalmazását, hacsak kúpszeletek, vagy esetleg magasabbrendű görbék, conchoisok, cissoidak metszését nem alkalmazzuk. De ennek is volna határa, amelyen alig lehetne túljutni.

De történetkritikai szempontból és külsőleg nézve mégis több, mint csodálatos, hogy az algebra második foka, amelynek kezdetei a halomszámításban már az egyiptomiak előtt ismeretesek voltak és amelyet innen a hellének is bizonyára ismertek, még Alexandriában sem fejlődött tovább. Hisz az egyiptomiaknak már Ahmes fáraó idejében külön hieroglifájuk volt az ismeretlen, a keresett nagyság jelölésére, sőt néhány operációs jel, az összeadás, a kivonás jele számára is. Az összeadást az írás irányába haladó lábak jelölték, a kivonást ugyanilyenek, de az ellenkező irányban haladva.

Azt a rendszert, amely algebrai tételeknél, ilyenek a képletek, vagy az egyenletek, a mondatszerkezetet, tehát a szavakba öltöztetést elvben még megtartja, de egyes gyakran visszatérő nagyságot, fogalmat, operációs jelet már rövidítéssel jelöl, szinkopált algebrának nevezzük.

Most már eljutottunk addig, hogy Diophantosnak az ókorban magában álló újításával foglalkozhassunk. Ez iskola-példája a szinkopált algebrának, és Diophantos művén meg látszik küzködése az új kifejezésmóddal, ami az új írásmód nem teljesen következetes alkalmazásában nyilvánul meg. Nincs tudatában, legalább is úgy látszik, rendszere jelentőségének, és valószínűleg csak azt hiszi, hogy csupán munkát takarít meg és az áttekinthetőséget növeli. Azt sejti, hogy félig öntudatlanul egy hallatlan pontossággal dolgozó «gondolkodó gép» birtokába jutott, de semmiesetre sem látta ezt teljesen világosan. Az algebra ilyen nagyon fontos alapvető kérdéseiről még szó lesz ebben a fejezetben, de lássuk előbb Diophantos rendszerét.

Kutatásainak fő területe az egyenletek vizsgálata és megoldása. Minthogy azonban minden egyenletben a főszerepet a keresendő nagyság (melyet ma pl. x -szel jelölünk), az «isme-

retlen» játssza, Diophantos először ennek jelölésére keres rövidítést. Az ismeretlen első hatványát, jobb híján, röviden «a szám» (arithmos) néven nevezi. És a sigma betű szóvégi alakjával írja le, amelyhez fent, jobbról ékezetet tesz. Tehát nála az ismeretlen jele σ . Ha a többesszámát akarja jelölni, akkor így írja: $\sigma\sigma$. Elágaznak a vélemények, hogy miért választotta éppen ezt a betűt. Egyesek azt állítják, hogy kénytelen volt ezt választani, minthogy a görög ábécé összes többi betűje természetes számok megjelölésére volt lefoglalva. Mások szerint az α és ρ összevonása a σ , α és ρ pedig az arithmos szó két kezdőbetűje. Az ismeretlen magasabb hatványai számára azonban Diophantos már nem talált olyan betűt, amely természetes szám jeleként ne lett volna használatban. Úgy segít tehát magán, hogy a hatvány nevének kezdőbetűjéhez jobbra fent egy második kisebb betűt ír, és ez a betű minden előforduló esetben az σ betű. Tehát x^2 jelölése σ^x (dynamis=négyzet), x^3 jele x^x (kybos=kocka), x^4 jele $\sigma\sigma^x$ (dynamodynamis = a négyzet négyzete), x^5 jele σx^x (dynamokybos = négyzetszer kocka), és végül $x^6 = xx^x$ (kybokybos), kockaszor kocka). Tovább nem ment. Viszont ama törtek megjelölésére, amelyeknek számlálója az egység, nevezője pedig az ismeretlen valamelyik hatványa, szintén van jele, és ez ide sorakozik a fenti jelölésekhez. A tört jelölésére a kis σ -jel mellé még egy, a görög χ (chi) betűhöz hasonló jelet ír, tehát $\frac{1}{x^2}$ (dynamoston) jele $\sigma^x\chi$, $\frac{1}{x^3}$ (kyboston) jele $x^x\chi$, $\frac{1}{x^4}$ (dynamodynamoston) jele $\sigma\sigma^x\chi$, stb. Az első hatvány reciprok értékének, $\frac{1}{x}$ -nek a neve arithmoston. Az ismeretlen első hatványa, vagy ennek reciprok értéke mögé csak az együttható megjelölése került, tehát $15x$ jele $\sigma\sigma x$. De mivel egyenletekben állandók is előfordulnak, ezeket félreértések elkerülése végett, külön meg kell jelölni, főképpen azért, mivel az összeadásnak nincs külön jele és minden összegezés mint pusztán egymás mellé írás jelentkezik. Ez a megkülönböztető jel a μ (my) betű, amely mellé fönt egy kis σ (omikron) kerül, így μ^{σ} , és ennek jelentése «egység» (monas). Tehát $23x^2+14$ jelölése $\sigma^x\chi\mu^{\sigma}\sigma\delta$.

De ezzel még nem merültek ki Diophantos szimbólumai.

A kivonás jelét is ismeri, ez a jel egy megfordított pszi betű : ϕ . Ez állítólag a «leipsis» szónak ligaturája (összevont rövidítése), ezzel Diophantos a «hyparxis», összeadás, ellenkezőjét, a kivonást jelölte. Végül némely helyen az «egyenlő» (isoi eisin) helyett egyszerűen az ι (iota) betűt találjuk. Ez a «némely helyen» korlátozó megjegyzés nagyon fontos. Ezt meg fogjuk látni néhány Nesselmann által közzétett eredeti példán. A következő például egy egyenlet :

$$\epsilon\varsigma^{\alpha\iota} \alpha\rho\alpha \iota \mu^{\delta\lambda} \iota\sigma\omicron\iota \epsilon\iota\sigma\omega \epsilon\varsigma^{\alpha\iota\varsigma} \iota\alpha \mu\omicron\nu\delta\alpha\iota \iota\epsilon.$$

Először a következőt jelenti : «10 ismeretlen, íme, és 30 egység annyi, mint 11 ismeretlen és 15 egység», tehát mai írásmódunkkal $10x+30=11x+15$. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az ismeretlen jele mellett fent az «oi» és «ois» betűk vannak, a hímnemű nominativus és többesszámú dativus jelölésére. Olyasféle ez, mint a napok megjelölésére a számokhoz írt kis betűk, pl. augusztus 8^{án}. Diophantos továbbá fenti példában a «monas» szót először nominativusban rövidíti, de másodszor dativusban teljesen kiírja. Végül nem találjuk a fenti példában az egyenlőség «jelét», helyette az egyenlő (isoi eisin) szavakat teljesen kiírja. Ebből látjuk, hogy mennyire foglya még Diophantos minden gondolata a régi szóalgebrának, s mennyire csak rövidítést jelent számára szimbolikája, ugyanúgy, amint a rövidítések gyakran előforduló szavakkal vagy végződésekkel kapcsolatban a matematikán kívül is szokásosak voltak. Az eredeti szöveg más helyen két többtagú (polinom) hányadosát olymódon írja le, hogy a mi törtvonalunk helyére a «moriou» szó kerül¹ s mindaz, ami e szótól jobbra van, a tört nevezőjét jelenti. Maga a kifejezés a következő :

$$\delta^{\nu\zeta} \lambda\epsilon\iota\phi\epsilon\iota \epsilon\varsigma \chi\delta \mu\omicron\rho\iota\omicron\upsilon \delta\bar{\alpha}\mu^{\circ}\iota\beta \lambda\epsilon\iota\phi\epsilon\iota \epsilon\varsigma\zeta$$

és a mi algebrai írásmódunkon a következőt jelenti :

$$\frac{7x^2 - 24x}{x^2 + 12 - 7x}. \text{ Az írásmód megint nem teljesen következetes.}$$

A kivonás ϕ jele helyett kétszer is kiírja a teljes $\lambda\epsilon\iota\phi\epsilon\iota$ szót, az x^2 együtthatójaként az egységet $\bar{\alpha}$ külön kiírja. Diophantos

¹ Máshelyen Diophantos az «en morio» szavakat is használja.

írásmódjának következetes alkalmazásával tehát felírunk egy e célra általunk szerkesztett példát és ez tartalmazza a Diophantos által különböző helyen alkalmazott összes rövidítést. Ez a példa a következő egyenlet:

$$\frac{x^5 + 3x - 10}{5x - 2} = 25x^6 + 18$$

és ez Diophantos szerint felírva a következő:

$$\delta x^5 \varsigma' \gamma \bar{\phi} \mu^{\bar{\delta}} \iota \mu \alpha \rho \iota \omicron \upsilon \varsigma' \bar{\epsilon} \bar{\phi} \mu^{\bar{\delta}} \beta \iota \chi \chi^{\bar{\upsilon}} \bar{\chi} \epsilon \mu^{\bar{\delta}} \epsilon \gamma.$$

Ebben már nem fordul elő szó, a törtet jelölő moriou kivételével, noha ennek egy felfordított η betű nagyon kézenfekvő szimbóluma lehetett volna. Némiképpen következetes alkalmazás esetén Diophantos már igen fejlett algebrai írásmóddal rendelkezik, persze el kell tekintenünk a számok írásától, mivel a helyértérendszer még ismeretlen.

De kerülni akarjuk a filológiai kicsinyességet, éppúgy mint Diophantos vizsgáztatását. Csak egy nagyon fontos kérdésnek akartunk a végére járni. Ezt általában az algebra jelentősége kérdésének mondhatnók, különösen pedig az algebrai írásmód kérdésének. Nem tréfa ugyanis, hanem történelmi tény, hogy a régi görögök geometriai algebrájának jelentését később fejtették meg, mint a hieroglifákat, noha Diophantos és a késői arabok lényegükben már az újkor elején érthetők voltak.

Először tehát az algebra jelentőségének kérdését kell felvetnünk, de ez már feltételezi azt a további kérdést, hogy mi az aritmetika jelentősége a matematikai gondolkodásban, hisz az előbbi az utóbbiból fejlődött ki. Filozófiai fogalmazásban a probléma alapja a fogalom és a szemlélet különbsége. Kant kifejezéseivel élve, azt mondhatjuk, hogy az ész a fogalomalkotás képessége, míg a szemlélet a látott dolgokat biztosítja számunkra. Az ész úgynevezett diszkurzív képesség, ez azt jelenti, hogy eredményeinek elérésére a dolgok egymásutánjára van szüksége, viszont a szemlélet úgyszólván időtlen és egyetlen pillantással nyerhető. De ezenfelül az ész valódi birodalma a taglalás, a felosztás, a szemlélet viszont szintetikus, összerakó képesség. Már Zenon paradoxonainak tárgyalása alkalmával szó volt ilyesmiről. Valódi folytonosságot

csak szemlélet tud megmutatni. Egy vonal, egy felület, egy test szemléletszerűen folytonos, kontinuus dolog. De ha ezt a dolgot az ész segítségével akarom felépíteni, akkor a végső elemekig kell visszanyúlnom, az elemi építőkövekig, az atomokig. Az atomok azonban mindenkor valahogy megszámlálhatók, még akkor is, ha azt állítom, hogy számuk végtelen.

De nem merülhetünk el itt mélyebben ilyen filozófiai megfontolásokban, mert akkor súlyos anachronizmus vétségébe esnénk. Még csak Diophantosnál tartunk, és nem a modern ismeretelméleti kritikánál, vagy halmazelméletnél. Csupán azt akarjuk megállapítani, hogy a szám és a számosság észműködés eredménye és az is észműködés, ha ezeket a számokat különféleképpen összefüggésbe hozzuk egymással. A szemlélet működése viszont az alakra vonatkozik, tehát mindarra, amit tulajdonképpen geometriának nevezünk. Magától értetődő, hogy az ész és a szemlélet nem lép sehol egymástól függetlenül, tisztán, keveretlenül működésbe, hisz Kant szerint a fogalmak szemlélet nélkül üresek és a szemlélet fogalmak nélkül vak. A végtelen önmagában véve elképzelhetetlen fogalmában is rejlik valami ködös szemlélet, és a háromszög képe is magán viseli a csúcspontok számának, ezek összekötésének fogalmi elemeit.

Egy matematikai problémában a fogalmi és szemléletes elemek különféle arányban keveredhetnek. És éppen az a meglepő, hogy a fogalmak látszólagos üressége és a szemlélet látszólagos megvakulása különösen alkalmas arra, hogy matematikai erőket mozgásba hozzon. Geometriai tényeket pusztá vázzá tudunk halványítani és számokat szimbólumokkal úgy felöltöztetni, hogy más, mint a legáltalánosabb számfogalom ne is maradjon belőlük. De éppen ez az algebra lényege. Nem számokkal, azaz konkrét számokkal foglalkozunk többé, hanem számokkal általában, vagy amint másképp is mondhatók: számhelyettesekkel. Keresünk egy ilyen és ilyen számot, vagy egy ilyen és ilyen négyzetszámot. Nem ismerjük még, mert ha ismernők, nem kellene keresnünk. De még mielőtt megtaláltuk volna, már nevet adtunk neki, már számolunk vele olyan szabályok szerint, amilyeneket egyébként csak valódi számokra alkalmaznánk. Összeadunk, kivonunk, szorzunk, osztunk ezekkel a még ismeretlen számokkal, négy-

zetre, n -edik hatványra emeljük őket, gyököt vonunk belőlük. Röviden, úgy bánunk velük, mintha természetes számok volnának.

Mindaz, amit eddig elmondtunk, gondolatban is lejátszódhatnék. Ez fogalmi, logikai működés, és nem kell, hogy csak az ő céljait szolgáló, írásmód is kísérje. És valóban ez volt a görögök helyzete az algebra terén egészen Diophantosig. «Gondoltak» algebrát, «beszéltek» algebrát, de nem «írtak» algebrát, vagy ha le is írták, a leírás akkor is csak közönséges, hétköznapi nyelven történt. És maga Diophantos is, mint már láttuk, az egyszerű rövidítés és az önálló szimbólum írás közt levő fokon kezdte el az algebrát «írni». Miként lehet tehát és miként kell az algebrát írni? Azt feleljük, hogy az algebrát szimbólumokkal és parancsokkal írjuk, és hogy így nem csupán gyorsírási, hanem sokkal mélyebben rejlő szempontokból írjuk. Bizonyos : nem lebecsülendő előny, hogy röviden $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ alakban írható a következő hosszúsövegű tétel : egy kéttagú kifejezés második hatványa egyenlő a tagok négyzetének és a két tag kétszeres szorzatának összegével. Ezzel időt, áttekintést és az egész szerkezetébe bepillantást nyerünk. Az így nyert kifejezést ismét négyzetre emelhetjük, ha mondjuk így írjuk : $[(a^2 + b^2) + 2ab]^2$. És megkapjuk az eredményt : először $(a^2 + b^2)^2 + 2.2ab(a^2 + b^2) + (2ab)^2$ alakban, amit könnyen kifejtethetünk $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 4a^2b^2$ alakba, és ebből az egynevű tagok összevonásával az $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ alakot kapjuk. Ilyen művelet szavakban kifejezve már súlyosan terhelné képzelőtehetségünket, a szimbólikus írásmóddal viszont csak némi figyelmet igényel, és valamelyes tiszta írást, hogy a hibákat elkerüljük. De még sokkal több történik itt. A szimbólumok (ezek az általános számok jelei, az a és a b , vagy Diophantosnál a ς) és a parancsok vagy operátorok vagy operációs szimbólumok (+, —, =, stb.) szinte önálló életre kelnek. Algoritmussá, gondolkodó géppé kapcsolódnak, s nincs már másra szükség, mint hogy néhány nagyon egyszerű szabálynak engedelmeskedve használjuk őket. Az izolált fogalmak önműködően gondoskodnak minden egyébről, hiba lehetősége nélkül és a végén ott találjuk az eredményt. De Diophantos idejében még itt sem tartunk, noha ő, az általa teremtet

eszközökkel eljuthatott volna idáig. Legfőbb érdeme, hogy nála kezdetét vette egy algebrai írásmód, egy úgynevezett «notáció», de nem egy algoritmus. A notáció nélkül természetesen algoritmus sem létezhet. De utóbbi kifejlődéséhez még hosszú az út, mint a következő fejezetben látni fogjuk. Az sem mond ennek ellent, hogy Diophantos egyik helyen egyértelmű általános szabályt ad egyenletek megoldására. Azt mondja: «Ha egy feladattal kapcsolatban olyan egyenletre jutunk, amely ugyan egynemű általános kifejezésekből áll, de oly módon, hogy az együtthatók a két oldalon eltérők, akkor addig kell egyneműt egyneműből levonni, amíg egyetlen taggal egyenlő egyetlen tag nem marad. De ha az egyik oldalon, vagy mindkét oldalon levonandó mennyiségek is vannak, akkor a levonandókat mindkét oldalhoz hozzá kell adni, mindaddig, amíg mindkét oldalon csak összeadandók maradnak. Ekkor ismét addig kell egyneműt egyneműből levonni, amíg a két oldalon egyetlen taggal egyenlő egyetlen tag nem marad.» Cantor megjegyzi e helyvel kapcsolatban, hogy ez egy egyenletnek $ax^m = bx^n$ alakra való visszavezetését jelenti, ahol m és n egymástól különböző egészszámok, és egyikük nulla is lehet. Ez a szabály, mondja továbbá Cantor, annyira egyértelmű, hogy hozzá hasonlót az ókorban ritkán találunk.

Cantorra hivatkozunk itt, igazolni azt az állításunkat, hogy Diophantos még nem találta fel az algoritmust, az általános gondolkodó gépet. Mert egyébként feltűnik a Diophantos által megoldott feladatokon az a szinte valószínűtlen személyes virtuozitás, amellyel ő minden feladathoz hozzányúl. De a feladatokat külön-külön kezeli, és nem foglalja az összetartozó dolgokat általános szabályokba. Nem állított fel tehát, mint egyszer Descartes a görög matematikusokról mondja, általános érvényű módszer szerint szabályokat, csupán azokat szedegette össze, amelyekkel véletlenül találkozott.

Megjegyezzük tehát még egyszer, hogy Diophantos — bár egy pillanatig sem vonjuk kétségbe lángelméjét — fejlődéstörténeti szempontból csupán az algebrai notáció, írásmód úttörőjének mondható, habár az egyenletek, különösen pedig a határozatlan egyenletek, megoldására számos példán

egészen új módszereket vezetett be. Lássuk most valamivel közelebbről ezt, a notáció feltalálásával vetekedő jelentőségű működését az egyenletek terén.

De előbb még egy megjegyzést, Diophantosnak nem az volt fontos, különösen határozatlan egyenletek esetén, hogy valamely egyenletnek valamennyi megoldását megtalálja. Legtöbbször megelégedett egyetlen megoldás megadásával. Még kevésbé igyekezett azon, hogy csak egészszámú megoldásokat keressen. Az erre vezető eljárást csak fordítója, Bachet de Méziriac teremtette meg a XVII. században. Ezt azért kell hangsúlyoznunk, mert ma az iskolai oktatás és a tudomány csak akkor nevezi «diophantosinak» a határozatlan egyenletet, ha egészszámokkal megoldható, illetve ezeket az egészszámú megoldásokat illeti a «diophantosi» jelzővel. Diophantos maga, műveiben mindenütt, csak pozitív, racionális megoldást követel. Irracionális mennyiséget, görög lévén, nem tekint számnak, a negatív mennyiségeket illetően pedig, az egész ókorhoz hasonlóan, eszébe sem jutott, hogy azokat is számokként, vagy egyenletmegoldásokként fogadja el. Hisz geometriai szempontból, különösen a görög geometria szempontjából, semmi értelmük sem volt. De ne elégedjünk meg csupán ezekkel az utalásokkal. Így különleges érdemeit nem látnók kellő megvilágításban. Ezek egyáltalán nem kicsinyek, sőt néha határozottan csodálatra méltók. Hiszen különösen egy nehézséggel kellett állandóan küzdenie. Ez a nehézség úgyszólván a «nyersanyagból», vagy szerszámainak hiányosságából következett. Mivel a ϵ betűn kívül más, számot nem jelentő betűt ismeretlen jelölésre nem talált, kénytelen mindenkor egyetlen ismeretlennel dolgozni. Segíthetett volna ugyan magán, ha más ábécéből vesz kölcsön jelet. De ez neki, a görögnek, bizonyára nem tetszett, hisz a régi hellének még az idegen szavakat is kerülték.

Főművének címe «Arithmetika» és számokra vonatkozó általános megjegyzéseken kívül egyenletek megoldásával foglalkozó példákat tartalmaz. Az első könyv 39. példája például azt kívánja, hogy két adott számhoz keressünk egy harmadikat úgy, hogy a három számból kettő-kettőnek az összege a harmadikkal szorozva olyan három számot adjon,

amelyeknek különbsége állandó. Bizony bonyolult feltételek. Diophantos a következőképpen okoskodik: Legyen az adott két szám 3 és 5, a keresett pedig x , (Diophantosnál természetesen s). Így a három szorzat $3(x+5)$, $5(x+3)$ és $x(3+5)$. Ezek közül az első szorzat, $3x+15$, nem lehet a legnagyobb a második $5x+15$ a legnagyobb vagy a középső lehet, a harmadik, $8x$, egyaránt lehet a legnagyobb, a középső vagy a legkisebb. Minthogy különbségeik a feltételek szerint egyformák, a legnagyobb és a legkisebb összege egyenlő a középső kétszeresével, (mai írásmód szerint: ha $a_1-d=a_2$, és $a_2-d=a_3$ akkor $a_1+a_3=2a_2$). Legyen most $5x+15$ a legnagyobb, $8x$ a középső a három közül, akkor $(5x+15)++(3x+15)=2 \cdot 8x$, vagyis $8x+30=16x$. Ha viszont $5x+15$ a legnagyobb, de $3x+15$ a középső, akkor $(5x+15)+8x=(3x+15)$, és ebből $13x+15=6x+30$. Ha végül $8x$ a legnagyobb és $5x+15$ a középső, akkor $8x+(3x+15)=2(5x+15)$ vagyis $11x+15=10x+30$. Ha most a három egyenletet külön-külön megoldjuk, az eredmény sorban $x=15/4$, $x=15/7$ és $x=15$. Mind a három megfelel a követeléseknek. E példából világosan látható, hogy Diophantos lényegében három egyenlettel, de külsőleg csak egyetlen ismeretlennel dolgozott.

De hogy lássuk, milyen virtuozitással bánt Diophantos az akkoriban igen bonyolultnak számító határozatlan egyenletekkel, bemutatjuk, Zeuthen átirásában, a Diophantosnál gyakran előforduló $y^2=a^2x^2+bx+c$ és $y^2=aa^2+bx+c^2$ egyenletek megoldási módját. Az első Diophantos úgy oldja meg, hogy az $y=ax+z$ helyettesítést alkalmaz, a másodikonál a helyettesítés $y=zx+c$. Az első esetben a helyettesítés után $(ax+z)^2=a^2x^2+bx+c$, vagyis $a^2x^2+2axz+z^2=a^2x^2+bx+c$, ebből $2axz+z^2=bx+c$, és ebből $2axz-bx=c-z^2$, vagyis $x(2az-b)=c-z^2$ és végeredményében $x=\frac{c-z^2}{2az-b}$. Külön-

böző z értékek most már gyorsan és biztosan adnak racionális x értékeket, x -ből pedig adódnak a megfelelő y értékek. Legyen pl. az eredeti egyenlet $x^2=16x^2+3x+10$, akkor az $y=4x+z$ helyettesítést kell alkalmaznunk. A fentiek szerint: $(4x+z)^2=16x^2+3x+10$, $16x^2+8xz+z^2=16x^2+3x+10$, $8xz+z^2=3x+10$ és ebből $x=\frac{10-z^2}{8z-3}$.

Ha most olyan z értéket választunk, hogy az eredmény ne legyen negatív, mondjuk $z=2$, akkor $x = \frac{10-4}{16-3} = \frac{6}{13}$.

A hozzátartozó $y = (4x+z) = \left(\frac{24}{13} + 2\right) = \frac{24+26}{13} = \frac{50}{13}$.

Ha ezt az eredeti egyenletbe behelyettesítjük, akkor

$$\left(\frac{50}{13}\right)^2 = 16 \cdot \left(\frac{6}{13}\right)^2 + 3 \cdot \frac{6}{13} + 10$$

$$\text{tehát} \quad \frac{2500}{169} = \frac{576}{169} + \frac{234}{169} + \frac{1690}{169}$$

és ennek helyessége nyilvánvaló. Analóg módon történik a második egyenlet megoldása is. Zeuthen megjegyzi, hogy ma is ilyen helyettesítéseket alkalmazunk, hogy irracionális differenciálokat racionálisakká alakítsunk át. Természetesen Diophantosnál az egész lényegesen bonyolultabbnak látszik, mivel ő csak egy ismeretlent alkalmaz és így minduntalan közbelső egyenleteket kell beiktatnia. Főképpen az zavarja az olvasót, hogy különböző egyenletekben az ismeretlen jele, noha jelentése is különböző, mindenkor ς (illetve négyzetéé δ). Annál csodálatosabb a biztosság az alkalmazásban. Már első példánkon tapasztalhattuk ezt a nehézséget, ahol a három egyenletben az x mindenkor mást jelentett. Ha ez egyetlen határozatlan egyenletben fordul elő, akkor még fokozottabb mértékben növeli a nehézségeket.

Lássuk végül a Diophantos egyetlen harmadfokú egyenletét, mai írásmódunkkal: $(x-1)^3 = (x+1)^2 + 2$. Kiszámítva $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 1 + 2$ és Diophantos szokásainak megfelelően átalakítva $x^3 + x = 4x^2 + 4$. Ő ugyanis mindenkor úgy alakítja egyenleteit, hogy csak pozitív értékek forduljanak elő. De adott esetben ez további átalakításra nyújt lehetőséget: $x(x^2+1) = 4(x^2+1)$ és ebből osztással $x=4$ eredmény adódik. A másik két megoldásról, amelyek példánkban képzetesek, természetesen nem esik szó.

De Diophantosnak ez az egyenletek megoldásában mutatkozó és majdnem kalandosnak mondható, ügyessége magyarázza meg későbbi hatását. Egyenletei felállítással kap-

esolatban gyakran messzebbmenő számelméleti igazságokra bukkan. Rájön például, hogy akkor is négyzetet kapunk, ha a derékszögű háromszög átfogójának négyzetéhez a befogók kétszeres szorzatát hozzáadjuk, vagy belőle levonjuk. Tehát $a^2 + b^2 \pm 2ab$ mindenkor négyzet, ami algebrai szempontból természetesen teljesen érthető, hisz a fenti kifejezés nem egyéb, mint $(a \pm b)^2$. Itt azonban mint a derékszögű háromszög oldalai közt fennálló újabb összefüggés jelentkezik. Felfedezi továbbá, hogy 65 kétféleképpen állítható elő, mint két szám négyzetének összege, még pedig mint $(16+49)$ és $(1+64)$. 65 viszont 5 és 13 szorzata, ezek mindegyike szintén két szám négyzetének összegeként írható. Algebránk nyelvére lefordítva ez a következő összefüggéseket jelenti: $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$. Rájön végül Diophantos arra is, hogy minden négyzet tet-szés szerint sok módon bontható másik két négyzet összegére. Legyen ugyanis a^2 a felbontandó négyzet-szám, x^2 az egyik, $(mx - a)^2$ a másik rész; m itt teljesen szabadon választható. Akkor $a^2 = x^2 + m^2x^2 - 2amx + a^2$, ebből $x^2(m^2 + 1) = 2amx$, és $x(m^2 + 1) = 2am$. Végül $x = \frac{2am}{m^2 + 1}$. A másik négyzetszám ebből: $(mx - a) = m \left(\frac{2am}{m^2 + 1} \right) - a = a \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \right)$. Valóban $a^2 = \left(\frac{2m}{m^2 + 1} \cdot a \right)^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \cdot a \right)^2$. Ha pl. $15^2 = 225$ számot akarjuk felbon-tani, és az $m = 3$ értéket választjuk, akkor $a^2 = 225 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144$. Ha az $m = 5$ értéket választjuk, akkor $a^2 = 225 = \left(\frac{75}{13} \right)^2 + \left(\frac{180}{13} \right)^2 = \frac{38.025}{169} = 225$.

Ezek a számelméleti megismerések később a XVII. század számelmélet-kutatóira, különösen Fermatra, nagyon ösztönzően hatottak.

Bármennyire érdekes volna, nem akarjuk már az olvasót Diophantos művének részleteivel terhelni. Csak be akartuk őt mutatni. Mert pusztá véleménnyel nem ábrázolható a hellén kor egyetlen nagy, igazi algebratudósa. Az a körülmény

hogy egyetlen maradt, történelmi szempontból egy bomlófélben levő kultúra keretein belül elfoglalt helyzete alapján érthető. Nem volt utódja, követője, mert a hellénség teremtménye kimerült. És talán még inkább azért nem, mert műve elhagyta a hellének által addig követett utakat.

Tudományunk történetében minden esetre magában álló jelenség. Magában is egy egész korszak. Mert elsőnek alkotta meg a szimbolikus írásmódot és ezzel ledöntötte a szó-algebra és a geometriai-algebra korlátait.

HATODIK FEJEZET.

Alchvarizmi.

Matematika, mint gondolkodó gép.

Varázsszönyegünk most saját szülőföldjére visz. Hirtelen az ezeregyéjszaka világában vagyunk, a nagy Almansur, Harun al Rasid, Almamun kalifák városában. A város neve Bagdad, és az álomszerű gyorsasággal felvirágzó kultúra most, a nyolcadik és kilencedik század határán nem öregebb egy évszázadnál. Mert csak a népvándorlás viharai után kovácsolta az izlám kötőereje az addig semmibe sem vett, csavargó, a sivatagban csillagos éjszakákon egymásnak meséket mondó nomád népből egy hatalmas és nagyrabecsült kultúrnemzetet.

A nyugati világban minden megváltozott: Merovingok, Karolingok, Pippin, Nagy Károly. Az utolsó, félig üres, szellemétől rég elhagyott filozófus iskolák kapui Kr. u. a hatodik században végleg bezárultak, az alexandriai könyvtárak kifosztva leégtek. Elfajult hellénség él még mereven, mint az aranyos mozaik, egy csalfasággal, kegyetlenséggel, paráznsággal és félműveltséggel telt birodalomban: Bizáncban.

A klasszikus kultúra elmerülése előtt még két matematikus emelkedett fel magasabb röptű geometriai gondolatokhoz. De ők sem korszakos jelentőségűek, inkább gyűjtők és visszatekintők, noha a lángelme szikráját magukban viselik. Egyikük Pappos, a másik Proklos Diadochos. A matematika történetének leírásából egyikük sem hiányozhat, mert önálló kutatások is fűződnek nevükhöz. A történelem megemlítené az alexandriai Theont és szerencsétlen lányát, Hypatiát is, úgyszólván az egyetlen nőt, aki ősi idők óta helyet érdemelt ki a matematika történetében. Julianus császár, a hitehagyott, védelmet nyújtott a filozófus iskoláknak a mindenfelől előre-

törő kereszténységgel szemben, és a műveltebb osztályok akkor még egyáltalán nem tértek volt meg. Sőt még évtizedekkel Julianus halála után sem. Hypatia pogány volt, de nagy becsben állt magas tudományos rangja folytán még Synesios ptolemaisi püspök előtt is. Még alexandriai Orestes, a császári prefektus is jóindulattal volt irányában. De megeseett, hogy éppen ez a prefektus utasította vissza Cyrillos püspök hierarchiai követeléseit. Hypatiát gyanúsították azzal, hogy befolyást gyakorolt a prefektusra. Ezért a csőcselék darabokra tépte. Alexandriának ugyanaz a nagyvárosi csőcseléke volt ez, amely 20 évvel korábban, vallássosság örve alatt, Theodosius parancsára a pogány templomokat elpusztította és elvakult rablásvágyában a Serapis-templomot, az alexandriai könyvtár utolsó menedékét felgyújtotta és földig lerombolta.

Szimbólumként hat Hypatia halála és szimbólum, hogy e kor a szellemi nagyság korának emlékeit szétrombolta. De a szellemvilágnak éppen ezen a helyén kezdődik az arabok hervadhatatlan érdeme. Varázsszőnyegünk visszavisz, ismét a kalifák székhelyén vagyunk, ott, ahol nemcsak a Seherezadek álltak becsben. Az arab kultúra nagyon férfias jellegű volt és így nagyon hajlott a matematika felé. Tüzes igyekezettel, a most beérkezett nép fanatizmusával gyűjtik Hellas örökségét, a kéziratokat. De nem csak görög papirusoknak van nagy értékük Bagdadban. Új-perzsa pehveli szövegek, szanszkrit szövegek kezdik a könyvtárakat megtölteni, fordítók serege fáradozik Euklides, Archimedes, Menelaos, Pappos és főképpen Ptolemaios «syntaxis»-ának arab fordításán. Ezt az utábbi után századokig csak «Almagest» néven emlegetik. Az iskolák tanmenete, — mivel a matematika közkincs lesz — Euklidesszel kezdődik és az Almagesttel végződik. Közben a tudomány egy más alkatú nép lelkén tükröződik, egy matematikai és logikai tehetséggel megáldott szellemen, de amelynek legfőbb jellemvonása az Oswald Spengler által «mágikusnak» nevezett irány volt. A görögség a szemlélet világában mozogva harmóniát keresett, viszont a mágikus lélek a gondolkodás terének szerkezetét kereste. Valami hallatlanul hideg, de csillogó külső rakódott erre a világra. Minden kép és fogalom, alkotás és fogal-

mazás éles lesz, mint egy kis rekesznyílással felvett és igen keményen másolt fénykép. És ebben a szellemi magatartásban nem jelent törést, ellenmondást, ha a kedély e mellett tarka mesékben keres menedéket. Mert Aladdin csudalompája is kertekbe vezet, ahol csiszolt drágakövek lógnak a fágakon. E kultúrából azonban hiányzik a festészet és a képzőművészet. Az életből mindazt számúzik, ami irracionális. Legalább is a látható világból, s maradványai legbelülre, a fantázia és a varázslat világába szorulnak.

Kimondtuk a varázslat szót. Mert a mágikus jelentése nem csupán a világkép racionális zártságában rejlik, vagy helyesebben a világ gondolatében, hanem van egy elletétes sötét kísérője is. Ahol a szemlélet véget ér, ott a forma mögött a chaos bukkan elő. Ahol azonban a ratio, a tudatos tevékenység árnyékba borul, ott az örület leselkedik, a borzalom, a varázslat. Az a varázslat, amely nem más, mint az ész birodalmát határain túl, a még fel nem kutatott felé kiterjesztő, félig hiábavaló igyekezet.

A matematika e kabbalisztikus-mágikus igyekezetnek mindenkor segítségére volt. Mindenki, aki csak mélyebben elmerül benne, meglepődik és egyben megijed attól a segítségtől, amelyet a megismerésben nyújt. Mert csak a matematika a «cabbala vera», ahogy Leibniz egy évezreddel később nevezte. Eredményei úgy ugranak elő sokszor, váratlanul az emberi elme legmélyéről, hogy már maga Platon sem tudta mással magyarázni, mint «anamnézissel», visszaemlékezéssel. Így a matematika nem egyéb, mint az emberrel veleszületett szellemi képesség feltámasztása. De nem csak az a varázslat, ha hosszas, passzív szemlélődés után összefüggések villannak fel, — minden geometer jól ismeri ezt az állapotot, — ha egész idomcsoportok szinte mozogni látszanak, rendeződni kezdenek, hogy végül nem is sejtett eredményeket hozzanak napvilágra. Éppen olyan kabbalisztikus az a vezetés, amelyet az algebrában és aritmetikában az «eszköz» magához ragad, és amellyel igazi bűvészinak bizonyul. És az eszköz vezetésével olyan szakadékok felett jutunk át, amelyeknek mélyébe gondolat soha sem hatol, amelyeknek fenekét gondolatainkkal soha el nem érhetjük. De a kabbalisztikus művészetek legmagasabb foka a helyes

notációból eredő algoritmus, az algebra és aritmetika gondolkodó gépe a maga szimbolum-varázslataival.

Egészen a tizenkilencedik századig nem tudták, hogy honnan származik az algoritmus szó, noha Leibniz óta általánosan használták. A logaritmus eltorzult alakjának gondolták, bizonyosnak látszott azonban, hogy a görög arithmos (szám) szóval valamilyen összefüggésben van. Csak az orientalisták fejtették meg a rejtélyt, megcáfolva egyben azt a balhiedelmet is, hogy Algoritmi varázslathoz értő, legendás indiai király volt. Kiderült, hogy élő ember, a kalifák idejének nagy matematikusa volt, Kr. u. 800 körül élt és Muhammed ibn Musa Alchvarizmi volt a neve. Alchvarizmi csupán azt jelenti, hogy Perzsia keleti részéről, Khorassan tartományból (ezt utóbb Khanat Chivanak is nevezték) származott. Muhammed Alchvarizmi 800 és 825 közt két matematikai könyvet írt, egyik ezek közül számológönyv, és ennek latin fordítása az «Algoritmi dicit» (Algoritmi mondja) szavakkal kezdődött. A másik könyv azonban genialis algebra, címe «Aldzsebr Valmukabbala» (ez nagyjából azt jelenti, hogy helyrehozás, szembeállítás). A cím arra vonatkozik, hogy akkor «helyrehozott» egy egyenlet, ha már csak pozitív tagokat tartalmaz. Szembeállítás viszont azt jelenti, hogy egyforma nagyságok az egyenlet két oldalából levonhatók, onnan elhagyhatók. Günther szerint Spanyolországban a mórok hatása alatt, az algebrista szó még Cervantes korában is használatos volt, hisz Don Quixotet, midőn lováról leesett, egy algebristához viszik, hogy kimarjult tagjait helyrehozza.

Csodás véletlene a tudomány történetének az a körülmény, hogy Alchvarizmi, különféle időpontokban kétszer is elnyerte az örökkévalóságot. Művének címéből a betűszámтан neve fejlődött ki, noha, mint látni fogjuk, Alchvarizminek fogalma sem volt a betűszámтанról; az első fokon, a szóalgebrán nem jutott túl. Eltorzult vezetékeve viszont a matematika egyik legmélyebb és legáltalánosabb fogalmát jelenti, éppúgy, mintha valamilyen algebrai fogalmat Gauss tiszteletére «Braunschweigi»-nek neveznék.

De hogy a megnevezést és az algoritmus fogalmát magát kellőképpen méltányolhassuk, látnunk kell, hogy legelőször

hol fordul elő a szó. Azután, Bagdad látogatóihoz méltó módon fel kell szállnunk varázsszönyegünkre, amely ezúttal nem visz minket túl az ezeregyéjszaka birodalmának határain. Azt már elárultuk, hogy hol fordul elő először a szó: egy számolókönyv kezdetén. Mi ennek a számolókönyvnek a tartalma? Valami, ami nekünk már teljesen magától értetődő; az alpműveletek, amelyeket ma már minden gyermek az elemi iskolában megtanul. Kiegészítve még két, azóta már jelentőségét veszített alpművelettel: a kétszerezés és felezés alpműveletével. Igaz, mi ezeket a műveleteket már maguktól értetődőknek tartjuk. De ennek az oka teszi őket éppen varázslatosakká. Ezek ugyanis, és ez a lényegük, a legtökéletesebb és legáttekinthetőbb rendszeren alapulnak, amelyet a szellemtörténet egyáltalán ismer: a számok helyérték-rendszerén. A szellemvilágban nincs semmi, ami ahhoz a tíz fogalomjelhez hasonló volna, amellyel a nyelvektől függetlenül, mindenkitől érthetőn, könnyen, tévedhetetlenül és egyértelműen felírhatjuk a számokat a legkisebbtől a csillagászat legnagyobb számaiig és még azokon is túl. Talán csak a kémia szimbolikája hasonlítható hozzá, noha az utóbbinak jeleit és elveit valamilyen szellemi forradalom kikezdhetné, a helyértékrendszert viszont soha. De ezzel még nem merült ki a helyértékrendszernek, — és ez egyáltalán nem szükségképpen tizesrendszer — varázssereje. Ebből úgyszólván folytonosan származnak az előnyök. Ez az első rendszer, amely gyerekesen egyszerűvé tesz bonyolult számításokat, és magából a rendszerből következnek az ellenőrzési módok és próbák. Ezáltal lesz ez az első igazi gondolkodó gép, amelynek kezelését minden elemista ismeri, de amelynek szerekezte és kerekei távolról sem olyan egyszerűek, mint ahogy a laikus gondolná. Aki olyan egyszerűnek tartja, az járjon előbb Gauss-hoz iskolába, ismerkedjék meg a maradékrendszerekkel és a törzsszám kutatás problémáival. De ezt csak mellékesen említjük.

Alchvarizminek jutott tehát az a történelmi feladat, hogy az indiai, tízes alapú helyértékrendszert egy számtankönyvbe összefoglalja és ez az a könyv, amelynek elejére ő maga, vagy egyik fordítója az «Algoritmi» nevet helyezte.

De lássuk most kissé közelebbről ezt az algoritmust, az

elsőt, amellyel találkozunk, s a legtökéletesebbet az összes algoritmus közt. Legyen tiszta képünk érdemeiről és arról, hogy az egyes kultúrkörök mivel járultak hozzá keletkezéséhez.

Colebrooke angol gyarmati tisztviselő úttörő és érdemes munkálatai óta, aki 1816-ban tárta fel az indus matematika érdemeit, és akinek műve alapvető nemcsak a nyugati, hanem az indiai kutatók számára is, tudjuk, hogy a régi hinduk nem egy módon járultak hozzá a matematika fejlődéséhez. Csapongó, zabolátlan fantáziával kevert matematikai tehetségük nagy felfedezésekre képesítette őket, és ezek közt is a legnagyobb helyértékrendszer. Természetesen az algebra-nak is éltek ott nagyérdemű tudósai, mint Aryabhatta (Kr. u. 476), Brahmagupta (Kr. u. 7. század) és Bhaskara (Kr. u. 12. század). Önállóan felfedezték a határozatlan egyenletek megoldásának módját, sőt az algebra harmadik fokáig, a tiszta szimbólikus írásmódig is elhatoltak. De művük, a számírás módjától eltekintve, nem járult hozzá az általános fejlődéshez és ezért jelentőségük nem korszakalkotó, hanem csak epizód jellegű. Mitsem változtat ezen az a körülmény, hogy Bhaskara helyesen becsüli meg az $\frac{a}{0}$ tört értékét, mond-

ván: «Mennél inkább csökkentjük az osztó értékét, annál inkább növekszik a hányados. Ha határtalanul kicsi az osztó, akkor határtalanul nagy a hányados. De amíg megmondhatjuk, hogy számértéke ez és ez, akkor még nem növekedett határtalanul, mert mindig megadhatunk egy még nagyobb számot. A hányados tehát¹ meghatározhatatlan nagy, és ezért joggal nevezhető végtelennek.»

Ha az infinitézimális számítás ilyen érett ismerete a meditáció meseországából, India iskoláiból, már abban az időben eljut hivatott nyugati szellemekhez, másképpen alakulhatott volna a világtörténelem. De nem így történt. S a nyugat a XIX. századig mitsem hallott arról, hogy Brahmagupta több ismeretlent színekkel különböztetett meg, az indiai algebra egyébként is költői jellegének megfelelően. Bhaskara például művének Lilavati című fejezetében így ír a számolás

¹ Ha az osztó végtelenül kicsi, vagyis 0.

művészetéről: «Csillogó szemű szép leányzó, mondd meg nekem, hisz ismered a megfordítás művészetét, hogy melyik az a szám, amely 3-mal szorozva, az eredmény $\frac{3}{4}$ -ével növelve, 7-tel osztva, a hányados harmadával csökkentve, önmagával megszorozva, 52-vel csökkentve, majd négyzetgyökvonás után 8-cal növelve és tízzel osztva eredményül 2-t ad?»

Ha Lilavati valóban szép leány volt, és nem, miként a történészek vélik, a számológépművészet allegorikus alakja, és ismeri is a «megfordítás művészetét», akkor is kissé elborult volna csillogó szeme, míg a feladat következő megoldását megtalálja. Mert a megoldás menete a következő: $(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196$;

$\sqrt{196} = 14$; és $\left(14 \cdot 1 \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7}\right) : 3 = 28$; mivel a megoldás-

hoz a szavakban megadott műveleteknek mindenkor a megfordítottját kell elvégezni, a megadottal ellenkező sorrend-

ben. Csakugyan, ha kipróbáljuk: $28 \cdot 3 = 84$. Hozzá $84 \frac{3}{4}$ -e,

vagyis 63 összesen 147. Következik $147 : 7 = 21$, ebből le $\frac{1}{3} \cdot 21 = 7$, marad 14, önmagával szorozva az eredmény 196.

$196 - 52 = 144$, ennek négyzetgyöke 12, 8-cal növelve az eredmény 20, és ennek a tizede valóban 2. Még költőibb a következő feladat: «Egy méhraj ötöde egy kadama-virágra száll, harmada pedig egy silindha virágra. A két szám különbségének háromszorosa egy kutuja virága felé veszi útját, s csak egy méh maradt fenn a levegőben, lebegve, mert egyformán csábította egy jázmin és egy pandamus édes illata. Mondd meg, ó gyönyörű asszony, mennyi volt a méhek száma?» A méhraj bizony nem volt nagy. Jelölje a méhek

számát x , akkor $x = \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) \cdot 3 + 1$, vagyis

$3x + 5x + 6x + 15 = 15x$, és ebből $x = 15$.

De nem a példák a fontosak. Vissza kell térnünk az indiai helyértérendszerhez. Ma már nem kétséges, hogy indiai találmány, habár keletkezésének ideje bizonytalan. Bizonyos csupán, hogy már Alehvarizmi kora előtt nagy mértékben fejlett volt. Természetesen, mint már mondtuk, a helyértérendszernek nem csupán az a jelentősége, hogy kényel-

mes számírást tesz lehetővé. Jellemzően algoritmikus az a tulajdonsága, hogy lehetővé teszi műveleteknek addig ismeretlen könnyúséggel való elvégzését, és ez a könnyűség a szorzásnál és osztásnál mutatkozik elsősorban. Nem merülhetünk az elmélet részleteibe. Csak annyit jegyzünk meg, hogy a helyértékrendszer lényegében csökkenő kitevők szerint rendezett hatványsor. Ennek alakja

$$a_0g^n + a_1g^{n-1} + \dots + a_{n-2}g^2 + a_{n-1}g^1 + a_ng^0$$

és $a_0, \dots, a_n$ az együtthatók, $g^0, \dots, g^n$ a g alapszám hatványai. Tizesrendszerben $g^0 = 10^0 = 1$ és $g^n = 10^n$. Ha most az együtthatókat helyes sorrendben írjuk, akkor a «helyértékű» megmutatja, hogy az alapszám melyik hatványával kell mindegyiküket megszorozni. A 3457 számban a 3 ezerszer annyi, mint a 72,553 számban. Így elegendő bármely szám leírásához tíz számjegy, igaz, hogy ezek közé tartozik a zérus is. Ezt találták fel legkésőbb és Indiában az «üres» (sunga) a neve. Csupán a zérussal záródik le a rendszer, mert ez jelöli az alapszám egyes hatványainak hiányát. De éppen a zérus, a nulla indiai találmány, ugyanúgy, mint az alapszám hatványainak (10, 100, 1000 stb.) 10^{10} -ig terjedően külön névvel való megjelölése. A nullát az arabok al sifr-nek nevezték, valószínűleg Egyiptomban fordították le így indiai nevét. Ebből a szóból származik a francia chiffre és a német Ziffer szó is.

Szó volt a helyértékrendszer algoritmikus tulajdonságairól. Igaz, a görögök is szoroztak és osztottak. A rómaiak is. De ők kénytelenek voltak a szorzás disztributív törvénye szerint a részletszorzatokat valóban kiszámítani és azokat összegezni éppen úgy, mintha polinomokat (többtagú kifejezéseket) szoroztak volna egymással. Tehát a 320 és 47 számokat így szorozták egymással:

$$\begin{aligned} (300 \times 40) + (20 \times 40) + (300 \times 7) + (20 \times 7) = \\ = 12,000 + 800 + 2100 + 140 = 15,040. \end{aligned}$$

Szándékosan választottunk nagyon egyszerű példát, amelyet a 320 végén álló nulla csak tovább egyszerűsít, mivel így két részletszorzatot még megtakarítottunk. De képzeljük el, hogy a $932,581 \times 764,922$ szorzást kellene ilyen módon el-

végeznünk, vagy még törteteket is tartalmaznának a tényezők, természetesen közösleges törték alakjában. Ebből érthető, hogy abban az időben egy nagyobb szorzás (osztásról nem is szólván), amelyet ma minden elemista kényelmesen elvégez, matematikusok vagy számológyművészek számára való feladat volt.

Az indusok viszont röviddel a helyértékrendszer teljes kiépülése után felismerték a rendszerben rejlő algoritmikus előnyöket és lehetőségeket. Példaként, hogy miként hajtották végre a műveleteket, álljon itt egyik módszerük, amelyet a «villámszerűnek» neveztek. Az összeszorozandó számokat egy

		2	9	7	6	
4		8	3	6	2	2
3		6	2	7	2	1
5		1	4	5	3	3
	1	2	9	4	5	6
						0

5. ábra.

négyszet vagy téglalap szélére írták, a szerint, hogy bennük a számjegyek száma egyforma vagy különböző volt. Vegyük az általánosabb esetet, a téglalapot, és szorozzuk össze a 2976 és a 435 számokat. A helyértékre való tekintet nélkül kiszámítjuk a 4×2 , 4×9 , 4×7 , és 4×6 részletszorzatokat, ezeket beírjuk az első sorba úgy azonban, hogy az egyesek a szaggatott vonallal rajzolt átló jobboldalára, az alsó háromszögbe, a tízesek viszont a baloldalra, a felső háromszögbe kerüljenek. Tízeseknél nagyobb helyérték nem fordulhat elő, mert az elképzelhető legnagyobb részletszorzat: $9 \times 9 = 81$. Látjuk, itt csak a «kis egyszeregyről» van szó. A második

sort az első mintájára a 3×2 , 3×9 , 3×7 , 3×6 szorzatokkal töltjük meg, és így tovább, a téglalap teljes megtöltéséig, ami példánkban az 5×2 , 5×9 , 5×7 , 5×6 részletszorzatok beírásával már megtörténik. Most már csak a párhuzamos szaggatott vonalak közt álló számok összegezése van hátra, és ezt jobbról balra haladva kell végrehajtanunk. Tehát először 0, azután $5+3+8$, azután $5+3+1+1+4$, azután $0+4+7+2+8+2$ és így tovább, az utolsók $8+3$ és 0. A keletkező tízeseket természetesen tovább kell vinnünk, az összeadásnál szokásos módon. Az eredményt a téglalap alsó szélére írjuk.

Nekünk távolról sem olyan csodálatos ez a «villámszerű» módszer, mint amilyen a régiek számára lehetett, hisz nekik a disztributív részletszorzatokkal kellett vesződniök. Igaz, itt is disztributív részletszorzatok keletkeznek, de ezek a helyértékrendszer következtében teljesen eltűnnek a számoló tudatából. A számolónak itt nincs egyéb teendője mint, hogy szolgálai módon figyeljen a négyzetekre és az átlókra és a kis egyszeregy kereteiben mozgó műveleteket hajtson végre. Minden egyebet elvégez az algoritmus, a gondolkodó gép, amelynek fogaskerekeit a helyértékrendszer rejti: még a végső összeadásnál is, ahol a számoló csak annyit mond, hogy $5+3+8=16$, marad 1 és leírja a 6 számot. Nem fontos, hogy az egyest, tízest, százast vagy ezrest jelent, nem kérdezzük, erre nem is gondolunk. Egyszerűen hozzáadjuk a következő oszlop összeadandóihoz és ez az egész. Ha ott csak nullák állnak, akkor egyszerűen leírjuk. Sőt tovább megyünk. Még csak «a következő magasabb helyértékű» oszlopra sem gondolunk. Ez az oszlop egy hellyel messzebb balra van, és a számolás során jobbról balra kell haladnunk. Ez a szabály. Minden egyébbel foglalkozzanak a számelmélet tudósai, ha ez örömet okoz nekik. És ez a helyzet ma is a négy alapművelettel. Majdnem mindenki megtanulta már gyermekkorában és kifogástalanul, sőt sokszor virtuóz módon alkalmazza. De alig tudja minden ezredik ember, hogy tulajdonképpen mit is csinál. Hisz a Leibniztől feltalált számológép sem más, mint az írott algoritmus mechanikus másolata. Vágjunk elébe kissé a dolgok menetének és jegyezzük meg, hogy az algoritmus használatának négy fokozata van. Az első a fejben

való számolás, de ez csak kivételesen nagy képzelőerővel megáldott emberek számára való. Második a papíron, írásban való számolás. Harmadik a kézi meghajtású számológép, ennél bizonyos részletműveleteket egy fogantyú forgatásával, majd egy másik szerkezeti rész tovább tolásával kell végrehajtanunk. A negyedik az automatikus számológép, ezen csak a számokat kell beállítanunk, majd a műveletnek megfelelő gombot lenyomni és a villannyal hajtott gép az algoritmus minden egyéb műveletét elvégzi. Ilyen automatikus munka bizonyos szempontokból az algoritmus végső célja. S egy algoritmus kisebb vagy nagyobb értékét éppen azon az alapon bírálhatjuk el, hogy mennyire közelíti meg az automatát. De itt nem csak a gondolkodás ökonomiája a fontos. Ez is szerepet játszik, de sokszor csak másodsorban. Fontosabb, hogy a feladatok bonyolultságának növekedésével az algoritmus önálló áttekintési és rendszerező elvként jut szerephez, s mint ilyen, már említettük, szakadékokon visz keresztül, amelyeknek mélységeibe az emberi elme le nem hatolhat. Látni fogjuk ezt később az imaginárius számokkal kapcsolatban és az infinitézimális számítás Leibniz szerint történő írásmódjánál.

Varázsszönyegünk túlszál velünk határokon. Alighanem azért, mert hazájában nagyon is tudatára jutott hatalmának. Szálljunk le tehát róla egy időre és menjünk Alchvarizmi műhelyébe, lássuk, hogy a számtan oktatásán kívül foglalkozott-e a matematika más ágával is. Szó volt már arról, hogy az arabok algebrával foglalkoztak, sőt maga az algebra szó is Alchvarizmi egyik művének címéből származik. Lapozgassunk most ebben a műben és lássuk, miképpen bánik Alchvarizmi egyenletekkel. Tropicke kitűnő művéből vesszük a példák egyikét és pedig az $x^2 + 21 = 10x$ vegyes másodfokú egyenlet megoldását. Alchvarizmi a következőket mondja (az x^2 és az x megjelölésére a később «census» és «radix» szavakkal fordított kifejezéseket használja): « $x^2 + 21 = 10x$ azt jelenti, hogy, ha egy szám négyzetéhez 21-et hozzáadsz, az összeg egyenlő a szám tízszeresével. A szabály azt kívánja, hogy felezd meg az x -ek számát, ez 5. Szorozd meg önmagával, ez 25. Vond le azt a bizonyos, a négyzettel együtt említett 21-et, marad 4. Vonj ebből gyököt, ez 2, vond le

ezt a 2-t az x -ek számának feléből, vagyis 5-ből. Marad 3, Ez a keresett négyzetnek a gyöke, a négyzet 9. Ha akarod, add a 2-t az x -ek számának feléhez, ez 7. Ez az x , négyzete $x^2=49$. Ha egy feladat téged ehhez a normál-alakhoz vezet, akkor vizsgálj előbb az összeadás útján kapott eredmény helyességét. Ha nem helyes, akkor a kivonás sem lehet kétséges. És a három normál-alak közül, amelyknél az x -ek számának felezéséről szó van, csak ennél az egynél megengedett a megoldás összeadással és kivonással. Vedd figyelembe továbbá, hogy nem lehetséges a megoldás, ha megesik, midőn az x -ek számát felezed és négyzetre emelsz, hogy az eredmény kisebb, mint az az állandó tag, amelyet az x^2 -tel egyenlíteni kellett. Ha egyenlő az állandó taggal, akkor az x egyenlő az x -ek számának felével, növelés és csökkentés nélkül.»

Szószerint idéztük ezt a szöveg részt, nemcsak azért, hogy mintát adjunk az «Aldzsebr Valmukabbala» szövegéből, hanem azért is, hogy megismerjük rajta az arabok algebrájának tulajdonságait. Először is azt látjuk, hogy az arabok működése formai szempontból Diophantoszhoz képest visszafejlődést jelent. A szimbólikus írásmódnak Diophantos synkopált algebrájában mutatkozó kezdetei ismét helyet adtak egy tiszta szó-algebrának. Tartalmi szempontból viszont haladás mutatkozik az algoritmus felé. Mert Alchvarizmi

megoldásmódja, amely a mi $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$ képletünknek

felel meg, teljesen eredeti és az arab szellem sajátja. Görög mintára geometriai bizonyításokat is fűzött hozzá. De ez tiszta algebrai előtetörését ismét visszavetette. Mert e miatt nem tudta a második, negatív megoldást elfogadni, amely

számunkra akkor adódik, ha $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$ nagyobb mint $\frac{a}{2}$. Alchvarizminél tehát csak akkor van a vegyes másodfokú

egyenletnek két megoldása, ha mindkettő pozitív, mint a

fenti példában. Azonkívül az $\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$ megoldást

előnyben részesíti az $\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$ megoldással szem-

ben, mert azt valamiképpen természetesebbnek tartja. Az Indiában felfedezett negatív megoldást semmiképpen sem tartja megoldásnak. Lehetetlennek tartja az imaginárius megoldást, vagyis ha c nagyobb, mint $\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Ez az «impossibilis»

(lehetetlen) szó kíséri az imaginárius számokat még több mint egy évezreden keresztül, míg végül Descartes a kevésbé tagadó imaginárius szóval helyettesíti.

Nincs okunk, hogy mélyebben elmerüljünk az arab matematika részleteiben, noha bizonyára nagyon érdekes volna. Miben áll tehát az arabok korszakalkotó jelentősége? Kutatás korszaka ez, vagy csupán az oktatásé, vagy esetleg csak gyűjtő és fordító munkáé, amelyet az a véletlen hívott életre, hogy a kalifák háziorvosai nestoriánus keresztények voltak, ezek az orvosok magukkal hozták és terjesztették a görög műveltséget? Vagy pedig a keleti és nyugati arabok a Sevilla, Granada és Toledo mór főiskolái koráig terjedő évszázadok alatt csakugyan alkottak maradandót, olyant, ami túlmege az indusoktól és görögöktől kapott örökségükön?

Erre a kérdésre nem könnyű a felelet. Annál nehezebb, mert a tudománytörténet bizonyossága szerint öröklött tudás felhasználása és alkalmazása hatásában korszakalkotó jelentőséget nyerhet. Lehet, hogy a hírnév sokszor érdemtelennek jut, nevek és kifejezések maradandósága tévútra vezethet. De az a körülmény, hogy számainkat «arabs» számoknak nevezzük, hogy szókinsünk az algebra, algoritmus, alhidade, zenit, nadir, almukantarát, zérus szavakat nem nélkülözheti, s hogy az égbolt arab nevű csillagokkal van tele, mint: Alkor, Mizar, Beteigeuze, Rigel, Algol, Aldebaran, Fomalhaut, Toliman, Kochab, Ras-Alhauge, Zuben el schemali, hogy csak néhányat említsünk, alighanem többet jelent, mint jogtalanul bitorolt szerzőséget, vagy pusztá közvetítő érdemet.

Tagadhatatlan, hogy az arabok tudományunk anyagához, magához a tartalomhoz aránylag kevés új dologgal járultak hozzá. Csupán a geometriát gazdagították a görögökhöz képest, főképpen a trigonometria és az asztronómia terén. Formai szempontból viszont felismerték az algebrában és

az aritmetikában rejlő gondolkodó gépet, s noha nem ők találták fel, mégis ők szabadították ki a geometria gyámkodásának korlátai közül. Hideg, racionális hajlamaiknak megfelelően a megismerés gondolkodási részét juttatták jogaihoz a szemlélettel szemben. Tehetséges, szorgalmas és érdeklődő matematikusok voltak. Az izlám terjeszkedési és térítő elveinek megfelelően nagyszabású iskolarendszert fejlesztettek ki, amelynek kereskedelmük fokozott jelentőséget biztosított. Tűzzel-vassal törtek, utat kultúrájuknak mindenfelé és véres hódító útjaikon nyomon követte őket matematikai tudásuk. De gyakorlati és terjeszkedő hajlamaik sem tették őket mérnökökké, vagyis nem támadták meg a matematika fegyverével a természetet, hogy azt, titkait felfedve, gépekkel szolgálatukba hajtsák. Mágikus hajlamaik a matematikát rejtvényekbe vezették, kabbalisztikus varázslatokba és asztrológikus jellegű asztronómiába. Megint titok és megfejtés lett a szám, a számok viszonya a világhoz és egymáshoz, miként a pythagoreusoknál. A kabbala itt kapta azt a mágikus hangzást, amelyet ma is tulajdonítunk neki. És a legvilágosabban látó arab koponyákban derenghetett már a sejtés, hogy a gondolkodó gép, az algoritmus mágikusabb, mint maguk a számok. Matematika tanításához és terjesztéséhez azonban szabályok kellenek. Szabályok pedig általánosításokra vezetnek. Az általánosításnak azonban feltétele az összefüggések pontos ismerete. És ezek a fokozatok szükségképpen odavezetnek, hogy a matematika egyik fokon bűvészinassá lesz. Az eszköz gondolkodik egyszerű helyettünk, és olyan területekre ragad el, amelyeknek létezését nem is sejtettük. S ezzel a matematikából igazán afféle «szézá, nyílj meg» lesz.

Ismét elragadt a varázsszönyeg, noha csak gondolatainkat vitte előre az időben. Mert még sok külső és belső, személyes és szerkezeti, véletlen és szükségszerű dolognak kellett történnie, míg az új matematika megszületésével egyidőben a külvilág is megváltozott. Mert éppen akkor, amikor egy másik mélységes hit küzdő seregeit világgá küldte, abban az időben, amikor a keletkező kultúröntudatuktól űzött kereszties lovagok győzve vagy elpusztulva küzdenek az arab sivatagban, akkor kezdenek gótikus tornyok az ég felé emelkedni

és gótikus ívek elmosódni a félhomályban, sejtetve egy rinascimentot, amely a valódi renaissancetól eltérőn, a szellem egészének újjászületését jelenti. Miként a kaukázusi népek minden nagy kultúrája, ez a keletkező kultúra is félszigeti jellegű volt. Kis-Ázsia, Görögország és Róma félszigete után «Európa félsziget» kezdte meg küldetését.

Minden készen állt, a csírák életképesek voltak, noha elültetőik már meghaltak vagy elpusztultak, vagy pedig végső küzdelemiket vívták. Minden készen állt. A gótikus-fausti szellem megkezdhette működését. Mert már felvirradt a népek hajnala, és nemzetek friss, érintetlen ereje várt olyan működésre, amelynek ideális előfutárjai a keresztes hadjáratok és a gótikus dómok. A Grál-lovag megkapta sebét Klingsortól, a varázslótól, s a seb nem heged be. A mágikus szellem e sebbel a fausti szellemet az örökös felfelétőrekvés vágyával tölti meg.

HETEDIK FEJEZET.

Leonardo da Pisa.

Matematika, mint kezdet.

Világmozgató tervek között, csaták és keresztes hadjáratok között, száműzetés és felemelkedés között tartja udvarát Palermóban a legtragikusabb sorsú Hohenstaufen császár: II. Frigyes. Áll az ünnep, susognak, beszélgetnek, mintha valami nagy eseményt várnának. Valóban nagy esemény várható? Senki sem tudja. Csak annyit sejt mindenki, hogy a császár annak tartja. Mert a várható küzdelem nem dalnokverseny, nem lovagi torna, nem hőstettek elbeszélése, hanem — verseny harmadfokú egyenletek megoldására. A palermói János mester ad feladatokat egy előkelő idegennak és az idegen azokat alighanem tökéletesen megfejti. Mert az idegen Leonardo da Pisa, az ismert világ legnagyobb algoritmikusa. Igaz ugyan, hogy főműve az ellenfél zászlaját hordja, mert címe: Az abacus könyve (Liber abaci).

Kétségtelen, Sicilia földjén még a mesevilágban élünk. A császári szeszély Syrakusa tirannusainak udvaránál folytatott beszélgetésekre emlékeztet, a Ptolemaiosok udvarára, arra az indiai királyra, aki a sakk feltalálójának azt a híres búzaszem-problémát feladta, és a nagy Abassidák, Almansur, Harun al Rasid, Almamun udvari szokásaira. Sejtjük tehát, hogy II. Frigyes hol vette a példát szokatlan cselekedetéhez. De ki ez a Leonardo da Pisa Mi történt időközben nyugaton a matematika terén? Mert, hogy ilyen sok évszázad telnessék el matematika nélkül, az legalább is valószínűtlen.

De még mielőtt a palermói verseny tartalmával foglalkoznánk, lássuk előbb amaz út állomásait, amely a matematika feltámadásához vezetett. Sok mindenre utaltunk már. Most részletesebben foglalkozunk vele, habár ezzel némiképpen túllépjük feladatunk határait. Mert itt nem kor-

szakalkotó dolgokról lesz szó, sőt ellenkezőleg, arról a korról, amelyben a matematika Pythagoras óta legmélyebbre süllyedt.

Azt, hogy a régi rómaiak mit sem tettek a matematika terén, azzal jellemeztük, hogy mély hallgatással mentünk el mellettük. De éppen a rómaiak voltak azok, akiknek hatalmi örökségét az európai nemzetek átvették. S kevesebbet hagytak utódaikra, mint Zeuthen megjegyzi, mint a régi egyiptomiak vagy hellének. Boethius, egy Kr. u. 480—524 közt élt előkelő keresztény római, akit Theodosius császár politikai okokból kivégeztetett, írt egy matematika-könyvet, és ez volt minden, amit a korai középkor kitermelt. Ez is csak Nikomachos (Kr. u. II. sz.) átdolgozása, és semmivel sem vitte előre a matematikát. Nem is vihette, mert nagyon sok mindent félreértettek ebben a korban. Így az ábrázolt számokban (háromszög-, piramisszámokban stb.), amelyek lényegükben sorozatok voltak, a megfelelő idomok területének, illetve köbtartalmának mérőszámát látták. Ami még Boethius művén kívül megmaradt, az csak a római agrimen-sorok (földmérők) különféle számolótáblázata, amelyeknek nagy része hibásan volt másolva, és már csak azért sem hathatott termékenyítőn a matematika fejlődésére. A régi görögök nagy öröksége azonban két, térben és politikában egymástól messzefekvő helyen feküdt, két helyen, ahol egymástól lényegesen különböző módon bántak vele: Bagdadban és Bizáncban.

Habár a bizánciaknak birtokában volt a régi görögöknek majdnem valamennyi matematikai könyve, alig jutott eszükbe valamelyiket tanulmányozni, továbbfejlesztésükről nem is szólván. Nem törődtek a kincsekkel, a matematikai érzék évszázadról évszázadra csökkent, a matematikusok játékokkal vesződtek, sőt tudásuk érthetetlenül visszafejlődött: így a körmérő π számról is azt hirdették, hogy értéke kisebb, mint 3.

De nem így az arabok. Tudjuk már róluk, hogy egy ifjú nép éhségével estek neki a görögök tudásának, sokban megkönnyítették és az indiai bölcseséggel fűzték össze. Későbbi idők arab tudósai korszakalkotó léptekkel haladtak. Kr. u. a X. században Alkarchi, az aritmetika tudósa kibővítette

a. Diophantos-féle notációt, és arra a forradalmi lépésre szánta el magát, hogy az irracionális mennyiségeket is számoknak tekintse. Ugyanezen a szinte modern vonalon haladt tovább a XII. században Alchajjami. Nála válik először tudatossá az egyenletek geometriai és aritmetikai fel fogásának szétválasztása. Átlátja, hogy a dimenziók száma következtében legfeljebb a harmadik hatvánnyal kapcsolatos irracionális mennyiségek ábrázolhatók közvetlenül, magasabbak csak összetett viszonyok segítségével. Ugyanebben az évszázadban működik «Nyugati Arábiában» azaz spanyol földön, Sevillában a nagy Dsabit ibn Aflah, akit Gebernek is neveznek. Ő hatalmasan fejleszti a gömbháromszögtant, vele együtt működik a kongeniális Abul Vafa, akinek trigonometriai (tangens) táblázatai jóval meghaladják Ptolemaios táblázatait. Ezek a táblázatok ugyanis 10 percről 10 percre adják a szögfüggvényeket s hibájuk kisebb, mint $\frac{1}{60^5}$. Ilyen

helyzetben csupán az érdeklődésnek, nem pedig a lehetőségeknek a kérdése volt a nyugati matematika életrekelése. Mert az eddigi eredmények megvoltak, Bizáncban szinte mumifikálva, az araboknál viszont tovább fejlődött, élő tudományként. S amikor a nagy Scotus Erigena a matematika mélyebb művelésére buzdít, szavai még úgyszólván csak gyermeki fülekhez jutnak. S az a bűbájos mágia, amely az arabok matematikáját belevet, éppen annyira buzdít a matematika mélységeinek vizsgálatára, mint amennyire elriaszt tőle.

De a népek közvetlen érintkezése azután döntő jelentőségű lett. Az arabok, mórok vagy bárhogy nevezzük is őket, itt voltak, a maguk fizikai valóságában, Spanyolországban, Sziciliában, és a Nyugat más részein. Főiskoláik Cordobában, Toledóban, Sevillában ápolták a matematikát. S a nyugat két mozgalma további érintkezést biztosított: egyik volt a három hatalmas köztársaság, Velence, Genova és Pisa keleti kereskedelme, másik pedig a keresztes hadjáratok.

E történelmi időpontban történt, hogy Leonardo da Pisa, akit Bonacci fiának, vagy összevonva Leonardo Fibonaccinak is hívtak, atyja foglalkozása következtében (konzuli tisztviselő féle volt) sokat utazott a Földközi-tenger vidékén és

már ifjúkorában az arabok tanítványa lett. S miután épp úgy mint Pythagoras Egyiptomba, Szíriába, Görögországba, Szicíliába és a Provenceba vezető útjai során látó körét lényegesen kiszélesítette, alkalmassá vált, hogy a nyugati kultúrában a matematika ébredésének szinte jelképe legyen. Teljesen függetlenül attól, hogy korszakalkotó módon tovább tudja-e már fejleszteni a matematikát, vagy sem.

De még mielőtt e kérdés taglalásához foglalkoznánk, meg kell említenünk az abacisták és algoritmikusok harcát, amely meghonosította nyugaton a matematikával való foglalkozást. E harc vagy vita két számolásmód körül forgott, a vonalon való számolás és a tollal való számolás körül, mint ahogy ezt később mondták. Szélső esetben az abacus, a vonal, vagy a számolódeszka, — amely máig is fennmaradt az olyan «számológép» formájában, amelyen a gyermekek, drótokon golyókat tologatva, a számtan első elemeit megtanulják — szóval szélső esetben az abacus egy tábla, amelyen vonalak választják el a 10 hatványainak oszlopait. Nullára itt nincs szükség, az oszlop üres marad, ha, mint 750 vagy 3009 esetében, egy vagy több hely nincsen számmal elfoglalva. A számolás jegyekkel történik. Eredetileg annyi jegyet tettek a megfelelő oszlopba, amennyit a 10 odavaló hatványának együtthatója mutatott. Fenti példák esetén tehát a százask oszlopába hetet, a tizedekébe ötöt, az egyesekébe egyet sem, vagy 3009 esetén hármat az ezresekhez és kilencet az egyesekhez, a százask és tizedek oszlopára viszont üres maradt. Sok szám esetén a számolásnak ez a módja nagyon áttekinthetetlenné vált, ezért egyszerűsítésül különböző értékű jegyeket kezdtek használni amelyek mindegyike az 1—9 terjedő számok egyikével volt megjelölve. Ezzel az abacus már közeledett az algoritmushoz, és ez a közeledés a harmadik fokon vált nagyon feltűnővé, amikor az oszlopokba már nem jegyeket helyeztek el, hanem a számokat írták beléjük. Ne bocsátkozzunk részletekbe, csupán azt állapítsuk meg, hogy mindkét iskola nagyon jófejú embereket mondhatott hívének. Nagy abacista volt pl. Gerbert, a későbbi II. Szilveszter pápa.

Az algoritmikusok győztek. A két «párt» (így is nevezhetnők őket) vitája sok számolással kapcsolatos kérdést ho-

zott felszínre és a nyugati matematikusok számára olyan ügyességet és hajlékonyságot szerzett, amely később sem ment veszendőbe. Hisz a «pártprogram» a főelveken kívül további feladatokat is tartalmazott és többek között gyökvonásra is kiterjeszkedett. A számolásnak a görögökhöz hasonló megvetése a középkorban egyáltalán nem mutatkozott, mivel mindjárt a kutatások kezdetén, késői arab példák nyomán, az aritmetika és a geometria teljesen egyenrangú volt. Ezt az állítást nem cáfolja meg az sem, hogy az aritmetikának bizonyos logikai elsőbbséget tulajdonítottak.

Felvetettük a kérdést, hogy Leonardot a nagy, úttörő matematikusok közé számíthatjuk-e. Felfedezett ő új kategóriákat a matematikai gondolkodásban és kutatásban? Erre a kérdésre csak nemmel felelhetünk. De nagyon tehetőséges, sőt talán genialis matematikus volt, akinek művében helyenkint új ismeret is felvillan. Így pl. amikor egyenletek negatív gyökét is megoldásnak tekinti, s megjegyzi, hogy az ilyen megoldásnak, mint «vagyonnak» sok értelme nem volna, de mint «adósságnak» bizony megvan az értelme. Akkor is csodálkozunk, amikor meghalljuk, hogy a palermói «versenyen» Johannes mester állítólag a harmadfokú $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ egyenlet megoldására szólította fel. Leonardo pedig megadta a megoldást; szerinte közelítésben $x = 1^\circ 22' 7'' 42''' 33^{IV} 4^V 40^{VI}$; de nem mondta meg, hogy miként számította ki. Itt 1° egy egészset jelent, $22'$ a $\frac{22}{60}$ törtet,

$7''$ a $\frac{7}{3600}$ törtet és így tovább hatvanados törtekben. Legújabb számítások kimutatták, hogy a Leonardo által megadott érték kicsi, de közte és a helyes érték közt a különbség kisebb, mint $\frac{1}{31.104.000.000}$. Arra is csak utalunk, hogy

Leonardo az első a matematika történetében, aki «házinyúl» feladatával kapcsolatban sorozatot rekurzív képlettel adott meg. Ez a feladat ugyanis azt a kérdést teszi fel, hogy hány pár házinyulunk születik egy év alatt a következő feltételek mellett: minden pár havonta egy új párt hoz a világra, s utóbbiak a második hónaptól kezdve szintén sza-

porodnak. Feltesszük, hogy egy pár sem pusztul el évközben. Az első hónap végén tehát az első pár és az általuk világra hozott pár nyulunk van. A második hónap végén még egy pár kerül az előzőkhöz. A harmadik hónap végén már az említetteken kívül két pár nyulunk van, mert a második pár is szaporodott. Egész évre ebből a következő sorozat adódik: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, s ennek minden számát az $a_{r+1} = a_r + a_{r-1}$ összefüggés adja meg. Az $a_{3+1} = 5$ tagot tehát az $a_3 + a_{3-1} = 3 + 2$ összegként kapjuk meg. A 21 pedig $8 + 13$ összeadásból adódik.

Habár Leonardo da Pisa az említetteknel lényegesen bonyolultabb feladatokat is megoldott, habár a határozott és határozatlan egyenletek megoldásának is mestere volt, valamint az egyszerű és kettős regula falsi-nak, a gyökvonásnak, és még sok más matematikai és geometriai ismeretet is sajátjának mondhatott, mégis elsősorban történelmi helyzete indította bennünket arra, hogy működését korszakosnak mondjuk. Ő az új idők első teljes értékű matematikusa, első példája az előtte elért eredmények visszaverődésének a késő-középkori nyugat másképpen kialakult lelkében. Ő e kor minden népét egyformán képviseli, noha művében a «latin népekhez» szól és számukra akarja feltámasztani a matematika eltemetett művészetét.

NYOLCADIK FEJEZET.

Nicole di Oresme.

Matematika és természet.

Mielőtt tovább mennénk, egy lényegbevágó megjegyzést kell tennünk. Ez a megjegyzés egyaránt vonatkozik a középkorra és az újkor elejére. A tényállás rövid összefoglalása amelyről szó lesz, a matematika történetének majd minden leírásában megtalálható és csak a legfontosabb korszakokat ismertető leírásnak is rá kell mutatnia, hogy mi az az új eszme, ami az általános helyzet következtében a nyugat kultúrájába behatolt.

Láttuk, hogy a hellén matematika, pártfogó istennőjéhez, Pallas Athenéhez hasonlóan teljes fegyverzettel pattant ki Zeus fejéből, s féltett művészetként, úgyszólván teljes tisztaságában maradt meg. Ettől lett erős és nőtt nagyra, de így vesztette el kapcsolatát a való élettel, megmerevedett és elpusztult. De ez tette teljesen individuális jellegűvé, lényegével az úttörőkhöz kapcsolódott, akik papjai módjára szolgálták.

Hasonló jelenséget, a matematikának szinte klasszikus korát figyelhetjük meg az újkorban is. De lényeges különbségek is mutatkoznak. Más a fejlődés, ha semmiből kell tudományt teremteni és más a továbbfejlődés, amely a régi eredményekből kiindulva azokat csak a saját, másképpen beállított lelkehez idomítja.

El kell ismernünk, hogy külsőleg sok minden ismétlődött, ami már a klasszikus ókorban megtörtént. De az ismétlődés részben az előző fejlődés közvetlen hatására utal. Négy hatalmas kultúrkör, olaszok, németek, franciák, angolok munkálkodnak, egymástól lényegesen eltérő külső és belső körülmények közt tudományunk újjáalkotásán. Összekötő kapcsolóként állt fölöttük eleinte a római egyház, később azonban a

katolicizmus és protestantizmus ellentétének szétválasztó hatása érvényesült, ha egyelőre a filozófiának később nagy mértékben kifejlődő hatásától eltekintünk. Ehhez járult még a kiterjedt iskolarendszer, amely vallási és szociális hatások alatt állt

Mindezzel csak arra akarunk utalni, hogy elkövetkező leírásainkban inkább a korszakokra kell figyelemmel lennünk, semmint a személyekre. Mert nem a legnagyobb matematikusok voltak mindenkor azok, akiktől az új származott. Különösen áll ez arra az «előkészületi időre», amely kb. Descartesig terjed.

Ezt a megjegyzést el kellett mondanunk, nehogy az olvasó hamis képet kapjon. S ne csodálkozzék senki azon, hogy egy Regiomontanusnak, vagy egy Peurbachnak a nevét csak mellékesen említjük, ugyanakkor, amikor sokkal kevésbbé átfogó szellemű matematikusokat korszakok jelképeiként jellemezzünk. De ők, Descartes kivételével, nem képviselői koruknak, inkább csak példák, fellobanó fények. Azt mondhatnók, hogy onnan, ahol most tartunk, egészen Cartesius koráig nem egyesek dolgoztak, hanem dolgozott az egész kor. S a matematika sokféle erő hatására nőtt nagygyá, s ezek az erők minden népekre más-más mértékben hatottak.

Már itt helyénvaló, hogy ezeket a fejlesztő erőket szemügyre vegyük. Olasz földön, mint már a Leonardo da Pisa példáján láttuk, a kereskedelem két módon is előnyös hatással volt a matematika fejlődésére. Nemcsak mozgékonyasága, utasforgalma és népeket összekötő ereje mozdította elő és támogatta a matematikai igyekezetet, hanem a maga köréből sajátos feladatokat is adott neki. Könyvelés, érmeszámítás, kamatszámítás, földrajz, csillagászat, aritmetikai ismeretek nélkül elképzelhetetlen, különösen akkor, ha jól számoló arabokkal állunk szemben és a feladatok is mindinkább bonyolultak lesznek.

A kereskedelem külső hatásához társult hamarosan a filozófia belső hatása, amely nem utolsó sorban vallási érzésekből fakadt. Oxford, Páris, Bologna egyetemeinek megalapítása után, — ezek Leonardo da Pisa korában már nagyra becsült intézmények voltak — új szellemkultúra keletkezett, amelyet később a humanisták, kissé lebecsülő hangszíval,

skolaszticizmusnak nevezték. De rögtön kimutatjuk, hogy talán a filozófiának éppen e köreiből származtak a legfontosabb, ösztökélő hatások a matematika fejlesztésére. És ki fog derülni, hogy a természettudomány, amely rövidebb vagy hosszabb ideig a skolaszticizmus ellenlábasának tartotta magát, legfontosabb fegyvereit félig öntudatlanul éppen ettől a skolaszticizmustól kapta.

Éppen arról a problémaköréről van itt is szó, amellyel már Archimedesszel kapcsolatban találkoztunk. A folytonosság, a végtelen fogalmáról és egy új fogalomról, amely már a «fausti» talajból sarjadt, a függvény fogalmáról.

Visszatérünk tehát Leonardo da Pisa korába, a Kr. u. XIII. századba. A pisainak még életében nagy vetélytársa támadt a német Jordanus Nemorarius személyében. Jordanus dominikánus szerzetes volt. Széles körben nagyhatású művének részleteibe nem bocsátkozhatunk. Csupán háromszögekről (de triangulis) írt művének bevezetéséből származó néhány sort veszünk közelebből szemügyre, hogy meglássuk, mennyire eltávozott már a «fausti» szellem görög és arab példaképeitől és mennyire önálló lett. Definíciókat olvashatunk ott, amelyekről azt hihetnők, hogy a XIX. századból származnak, Dedekindtől vagy Bolzanotól. Következőképpen definiál Jordanus: «Folytonosság határhelyek megkülönböztethetetlensége, kapcsolatban elhatárolás lehetőségével». «A pont az egyszerű folytonosság rögzítése.» «Szög keletkezik két folytonos alakzat találkozásánál folytonosságuk egyik végpontján.»

Bármit kifogásoljunk is, ilyen definíciók elképesztők a tizenharmadik század elején, mert arra vallanak, hogy az infinitézimális gondolat minden törvénytelenségével és nehézségével együtt mennyire elő volt már készítve a skolasztikusoknál. S ilyen skolasztikus volt Jordanus. Hisz állítólag a párizsi egyetemen tanított.

Nem csökken csodálkozásunk, ha egy ferences barát szavára figyelünk, aki csak néhány évvel később tanított Angliában, Oxfordban. Thomas de Bradwardina (Bredwardin) ez a szerzetes, akinek nevét rendszeren Bradwardinus alakban említik és aki a leghatalmasabb doktorok közt a «Doctor profundus» nevet érdemelte. Ezek a nagy doktorok szinte a hét görög bölcsre emlékeztetnek. Említsünk néhányat,

akik több-kevesebb kapcsolatban vannak fejtegetéseinkkel. Roger Bacon volt a «Doctor mirabilis», Aquinoi Szent Tamás a «Doctor angelicus vagy universalis», Duns Scotus a «Doctor subtilis», Raimundus Lullus a «Doctor illuminatus», Occami Vilmos a «Doctor invincibilis vagy singularis».

«Mélyenjáró» doktorunk, Bradwardinus tehát, aki Canterbury érsekeként halt meg 1349-ben pestisben, többek közt egy művet írt a folytonosságról (*Tractatus de continuo*). Ebben sok olyan tétel van, amelyről azt hihetnők, hogy a legmodernebb halmazelméletből származik. A folytonosat felosztja maradandóan folytonosra (*continuum permanens*), ilyenek a vonalak, felületek, testek, viszont a haladó folytonos (*continuum successivum*) az időben, vagy mozgás által valósul meg. Ilyen tételeket találunk: «Indivisibile est, quod nunquam dividi potest. Punctum est indivisibile situatum.» Magyarul: «Oszthatatlan az, amit már nem lehet részeire bontani. Pont a helyével meghatározott oszthatatlan.» Továbbá: «Az idő oszthatatlan része a pillanat.» «A mozgás az egymásután következő folytonos, amelyet az időben mérünk.» Ezután a kezdet és a vég problémáit vizsgálja a «Doctor profundus». Ezáltal szükségképpen oly végtelennel kapcsolatos megfontolásokhoz jut, amelyek egy hihetetlenül éleselméjű antithesisben végződnek. Különbséget tesz ugyanis kathetikus és synkathetikus végtelen közt. Kathetikus vagy egyszerűen végtelen egy mennyiség, ha nincsen vége. Synkathetikus viszont akkor, ha minden véges mennyiséghez rendelhető egy véges, de nagyobb mennyiség, a nélkül, hogy a növekedés valaha megszakadna. Legújabb időkben e két fogalom számára a «transfinit» és «infinít» kifejezéseket alkották, különösen a halmazelméletben, ahol végtelen halmazok számosságát röviden «transfinit rendszámnak» nevezik. Kijelenti továbbá Bradwardinus, hogy folytonos nem keletkezik végeesszámú oszthatatlan mennyiségből, de végtelen számúból sem. Csupán végtelen sok oszthatatlant tartalmaz. Minden végtelen folytonos sok hozzá hasonló folytonosból tevődik össze, végtelen sok sajátos atomja van. Egy vonal darab tehát végtelen sok vonaldarabból, egy felület végtelen sok felületből, és egy test végtelen sok testből. Ugyanabban az oszthatatlan helyzetben nem lehet egyszerre több

oszthatatlan (pontban pont) és ez a kijelentés nem egyéb, mint a testek áthatatlanságának matematikai-filozófia fogalmazása.

Minden matematikusnak be kell látnia, hogy ezek a kijelentések, amelyek Zenonra és Aristotelesre emlékeztetnek, sőt talán ezek hellén filozófiájához kapcsolódnak, egyáltalán nem skolasztikus értelmetlenségek, mint gondolkodni is lusta empiristák oly szívesen állítják. Mert gyakorló mérnök is fennakad néha egy-egy infinitézimális paradoxonon, ha nem akarja, hogy valamely függőhídja ilyen «skolasztikus bogarászás» miatt leszakadjon.

Tragikus törvénye a tudomány történetének: a «kémekeket szívesen használják, de megvetik». Mire való az állandó versengés a deduktív és induktív gondolkodás elsőbbségeért? Éppen a most következő idő fogja megmutatni, hogy csak mindkettő együtt tette lehetővé azt a hatalmasan felfelé ívelő görbét, amelyen a következő századokban az európai népek «fausti» szelleme emelkedett, míg végül eddig soha sem sejtett mértékben még külsőleg is rányomhatta a világra a maga képét.

Igyekeztünk megmutatni, hogyan vitte előre a kereskedelem és a filozófia az új nyugat matematikáját. De a keresztény népek lelkéből még egy ősrégi, talán Indiából származó örökség bukkant elő hatalmas erővel. Az a mély vágy, hogy megismerje a természetet, párosulva azzal a talán most keletkezett erős akarattal, hogy uralkodjék ezen a természetben és leigázza.

Tudjuk, hogy Aristoteles, röviden a «filozófus», a szóbanforgó századok gondolkodását nem csak befolyásolta, hanem szinte árnyékba borította. Stagira fiának ez a hatása nem korlátozódott a logikára és a filozófiára. Más területekre is átsapott, különösen a természettudományokra. Már utaltunk arra, hogy e századokban a természet mélyebb megismerésére irányuló szenvedélyes vágy fogta el az embereket s ez nem szűnt meg az elkövetkező századok alatt sem. Érthető, hogy e vágyra ott kerestek kielégülést, ahol a legnagyobb és végérvényes tekintélyt sejtették. És ezt találták meg Aristotelesben. Csak utalni tudunk arra, hogy itt a forma fogalma hatalmas szerepet játszott, s hogy e fogalom lénye-

géről hatalmas vita folyt a ferencesek és dominikánusok közt, és ebben legfőbb képviselőik Duns Scotus és Aquinoi Szent Tamás voltak. E mélyreható kutatásokból alakult ki végül a «forma» jelentése a természetvizsgálat számára, amelyet talán a «mérhető természeti tűnemény» szavakkal tudnánk visszaadni. De miképpen ábrázolható e formák fokozata, az «intensio»? Erre az egyetemeknek egy másik, a «Formák szélessége és hosszúsága» című tantárgya ad feleletet, s ezt Kr. u. a tizennegyedik században, a bécsi és kölni egyetem tantervében már a baccalaureatushoz kötelező tárgyak jegyzékében olvashatjuk.

Messzire vezetne, ha azt vizsgálnók, hogy ez csupán régebbi tradíció folytatását jelenti-e, vagy pedig már Oresmei Nicole tanításainak hatását. Ő kb. 1323 és 1382 közt élt és előbb tanítványa, később tanára, végül pedig előljárója volt a párisi Collège de Navarre-nak. Lisieux püspökeként halt meg. Művének címe «Tractatus de latitudinibus formarum» (Értekezés a «formák» «szélességéről») s legnagyobb mértékben felkelti érdeklődésünket. Még akkor is, ha elfelejtjük, hogy ez az érdeklődés a kortársak közt is megvolt, köztük a könyv eleinte kéziratban, a könyvnyomtatás feltalálása után pedig négy egymást gyorsan követő kiadásban terjedt. E «szélességek» ugyanis nem jelentenek mást, mint az első, általános, koordinátákat.

Térjünk vissza ismét «formáinkhoz». Ilyen forma például a hófok és e forma változása az időben történik. Miként ábrázolható és vizsgálható a változás módja, vagy Oresme szerint «a szélesség foka»? Milyen általános képet nyújt végre is a változás haladása? Nekünk ma e kérdésre adandó válasz egyszerűnek és magától értetődőnek látszik, hisz, mint egy lázgörbénél, az időegységeket egyenlő távolságokként mérnök fel egy vízszintes vonalra s az egyes időpontokhoz tartozó hőmérsékleteket a vízszintes vonalra merőleges távolságokként ábrázolnók. De továbbá feltennők, hogy az egész folyamat lefolyása «folytonos» s e fikció alapján az egyes «ordináták», tehát a hőmérsékletek végpontját görbével kötnők össze.

Két különböző dolog rejlik ebben az eljárásban. Egyrészt egy méreteiben felfogható tűnemény lefolyásának grafikus

ábrázolása. Másrészt azonban egy függőség, egy összefüggés megállapítása az idő és mért nagyság közt. S harmadszor, ha kiderül, hogy a mérés időpontja és a mérés eredménye közt nem csupán az a formális összefüggés áll fenn, hogy ez és ez a hőmérséklet ehhez és ehhez az időponthoz tartozik, hanem kikutatható, hogy a hőmérséklet változása törvényszerűen függ a mérés időpontjától, a lázgörbe napi lefutásának, vagy egy egész betegség lázgörbéjének megfelelően, akkor előttünk áll az, amit tulajdonképpen függvénynek nevezünk. Egy független vagy önkényesen választott mennyiség, az idő, összefügg egy másik, tőle teljesen és egyértelműen függő mennyiséggel, a hőmérséklettel. De ezzel a görbe már lényegesen több, mint a lefolyásnak egyszerű ábrázolása, már egy törvénynek kifejezésévé válik. Matematikai szempontból már csak egy lépés van hátra: magát a törvényt megtalálni. Vagyis a görbe menetét matematikai kifejezéssel rögzíteni és megfogni.

Vizsgáljuk azt, hogy Oresme mennyire jutott e gondolat-soron, hisz még ma is közkeletű mese, hogy Descartes a koordináta fogalmat szinte a semmiből teremtette. A XIX. század történelmi kutatása megcáfolta ezt a mesét, a nélkül, hogy ettől Cartesius érdeme számottevően csökkent volna.

Oresme a már említett értekezésében kifejtette, hogy «az események mérve (latitudines formarum) sokféle változásnak van alávetve, és ez a sokféleség nehezen különböztethető meg, ha szemléletüket nem vezetjük vissza geometriai idomok szemléletére.» Oresme kijelentése a fentebb elmondottakat figyelembe véve egészen elképesztő. Nem tartalmaz kevesebbet, mint a mérhető természeti tűnemények ábrázolására vonatkozó ígéretet. Most már az eseményeinket létrehozó két körülményt részben «hosszúságnak» (longitudo), részben pedig «szélességnek» (latitudo) tekinthetjük. A hosszúság vízszintes vonal, megfelel az abszcisszáknak, a szélesség viszont a mindenkori ordináta. Az egymást követő ordináták különbsége a «szélesség foka».

Oresme nagyon mélyen behatolt kutatásai tárgyába. Ezt ismeretei további beosztásából is láthatjuk. Ismer «szélességtelenséget» és «határozott szélességet», a szerint, hogy az illető helyen az ordináta nulla, vagy határozott értékű. Egész

terminológiát teremt a változás módjának leírására, az esemény állandóságának kifejezésére, a változás állandóságára, vagy változására. Amit ő «*excessus graduum*» néven említ, az már a változás mértéke. Ha változik az «*excessus*», akkor az ordináták végpontjai már nem egyenesen fekszenek, hanem görbén. A változás ilyen változására Oresme példát is mutat, e szerint a «szélességek» úgy változnak, mint 0, 1, 2, 4, 7, 11, 16 stb. A nulla persze helytelen.

Ha még hozzátesszük azt, hogy Oresme «*figura*» alatt azt az idomot érti, amely a hosszúságból keletkezik, ha hozzávesszük a két szélső ordinátáját a tartománynak, valamint a görbét, akkor jó fogalmunk van az igazi koordináta-geometria kezdeteiről.

Oresme, ha nem is tudatosan, még mélyebben behatolt az új módszer által hirtelen feltáruló titkokba. Ha ugyanis a «*figura*» például egy, a «hosszúság» fölé rajzolt félkör volna, akkor feltűnnék, hogy a széleken, ahol a félkör emelkedni kezd, illetve a «hosszúsághoz» visszatér, a «szélességek» igen gyorsan nőnek, illetve csökkennek. Ez a növekedés, vagy úgy is mondhatnók: a növekedés üteme, tempója, mindinkább csökken, és a «szélesség» legnagyobb értéke körül majdnem eltűnik.

Oresme e felismerésében bukkan fel először az «érintő problémája» és a «*differenciálhányados*». Ez mostani fokozatunkhoz mért eszközökkel megmagyarázva, olyan szemléleti módot jelent, amely valamilyen esemény lefolyását görbével ábrázolja és ezt a görbét különbözőképpen hajló érintőibe burkolva képzelel el úgy, hogy minden pontra jellemző a görbének rajta keresztülmenő érintője.

De mint mondtuk, évszázadokig nem jutottak túl ezen a sejtésen. És még Descartes kész koordináta-geometriájának is más elemek egész sorával kellett bővülnie, míg valóban infinitézimális-geometriává lehetett. Oresmenél tehát a problémának inkább filozófiai, mint matematikai oldalát kell vizsgálnunk. De szúrjunk közbe előbb valamit. Feltűnő, hogy a «hosszúság» és «szélesség» szakkifejezéseket éppen úgy használjuk, mint a földrajz vagy a csillagászat. E tudományokban ugyanis a földfelület valamely pontjának (mondjuk egy városnak) vagy valamely csillagnak a helyét szintén

«hosszúságával» és «szélességével» adják meg. Oresme «longitudo» és «latitudo» kifejezéseit bizonyára innen kölcsönözte. Mert már a Kr. u. tizedik századból ismeretesek csillagpályák olyan ábrázolásai, amelyek elkészítéséhez az égboltozatot először síkra vetítették, s e síkba rajzolták bele a hosszúság és szélesség alapján utólag a csillagpályákat. De ez a közbevetett megjegyzés azonnal visszavezet eredeti problémánkhoz. És lehetővé teszi hogy Oresme érdemének lényegét méltassuk. Mert lényeges a különbség, ha egy pályát ábrázolunk görbével, vagy pedig az időben lefolyó intenzitásváltozásokat. Mert ha a második, igen absztrakt, meggondolást általánosítjuk, akkor szükségképpen a függvény fogalmához jutunk. Mindent, aminek csak nagysága vagy fokozata van, most térbeli vagy időbeli megoszlásával, «szélességek» segítségével, ábrázolhatunk. Minden változáshoz egyszerre tartozik egy «figura», egy a görbéivel és koordinátaival határolt felület, és — további általánosítás — minden «figurának» megfelel egy változás.

A «latitudo formarum» valami döntő módon újat vitt bele a nyugati kultúrába, ez egy egészen új számfogalom, mint Oswald Spengler mondja, aki a függvényt «austi számnak» nevezi. E bámulatos fogalmazást itt még nem tudjuk értékelni, de hamarosan meglátjuk, hogy ez a fogalom magában foglalja az eleai és herakleitosi világnézet áthidalását. A függvény — bocsánat a hasonlatért — átkapcsoló, amely mindenkor lehetővé teszi, hogy meglevőt keletkezővé és keletkezőt meglevővé alakítsunk át. A megismerésnek éppen annyira statikus, mint dinamikus segédeszköze, s annyira alkalmas eszköz a természetnek és törvényszerűségeinek vizsgálatához, mint semmi más előtte. De az összefüggések teljes érvényesülésére még évszázadokig kellett várni, noha Oresmenél a készülő szerzsám olyan matematikus kezében volt, aki e korban már tört hatványkitevőket alkalmazott és ismerte jelentőségüket.

És ez a szellemi előrenyomulás, amelyhez a germán népek a végtelen misztikus borzalmával, a román népek pedig az analitikus ábrázolás szigorú forma-fantáziájával járultak hozzá, még a következő, tizenötödik században sem szűnt meg. Méltón csatlakozik a nagy szerezetesekhez Nicolaus

Cusanus bíboros, aki Kuesben, a Mosel partján született. Atyja Crypffs vagy Krebs nevű szegény halász volt, s a fiú kora egyik legnagyobb szellemévé növekedett. Cusanus, a tettek embere, aki egy személyben volt jogász, teológus, követ Bizáncban, államférfi, hadvezér és kiküldött a baseli zsinaton és még sok egyéb is, csak mellékesen foglalkozott matematikával. Igaz, hogy mindenben, amihez hozzányúlt, nagyot alkotott. Számunkra szigorú matematikai írásai kevésbé korszakalkotó jelentőségűek, mint azok a bepillantások és nyilatkozatok, amelyeket a végtelen fogalmának nehézségeivel kapcsolatban tőle kaptunk. Két különös, áttekinthetetlen, de bizonyára mélyen járó írásában — címük «Docta ignorantia» és «De Beryllo» — matematikai-filozófiai tárgyú gondolatait fejtegeti. «Docta ignorantia», «tanult tudatlanság» szimbólikus cím, amely Cusanus alapfelfogását tükrözi. Szerinte az ellentétek összekapcsolása minden tudás forrása. Később az ismeretszerzésnek ezt a módszerét a «koincideneciák művészete» néven is említi, és ez abban áll, hogy látszólag ellentétes dolgok számára közös magasabbrendű fogalmat kell találni. Így koincidál a legkisebb a legnagyobbbal, mert folytatásuk saját irányukban lehetetlen. Így koincidál egy végtelen egyenes a háromszöggel és a körrel. Mert ha egy háromszögnek egyik oldala végtelen hosszú, akkor a másik kettőnek is végtelennek kell lennie, hisz összegük nagyobb, mint az első oldal. De a végtelen már határ, aminél nagyobb nincs. Így tehát ha egy háromszög egyik oldala végtelen, akkor mindhárom oldalának egy egyenesen kell feküdnie. Ugyanez áll arra a körre, amely mindinkább növekszik, míg végül mint végtelen kör elveszti görbületét. Mindkettőnek össze kell esnie, koincidálnia kell az egyenessel.

A «De Beryllo» cím is képletesen értendő, mert itt a látás javítására szolgáló domború vagy homorú csiszolású követ jelent. Volna csak egy szellemi beryllünk, — véli Cusanus — amely egyszerre mutatja meg a legnagyobbat és a legkisebbet, akkor megismerhetnők minden dolog titokzatos eredetét. E művében Cusanus főképpen a legkisebb és a folytonosság problémáival foglalkozik lényegében oly módon, ahogy azt már Bradwardinussal kapcsolatban megismertük.

Bármennyire érdekes volna is e fontos és igen szubtilis kérdésekkel alaposabban foglalkozni, mégis csak azt említjük röviden, hogy valószínűleg Cusanus az első a matematika történetében, aki a kört nyíltan és szépítgetés nélkül végtelen sokoldalú sokszögnek mondja.¹

Bizonyos, hogy ilyen megállapítások megint felszínre hozzák mindazt a nehézséget, amely már a régi görögöket Eudoxos óta a «tetszés szerint» nagy és kicsi fogalmához és az exhaustió eljárásához vezette. De a szöges ellentét és ennek a koincidencia-módszerrel való áthidalása ismét új szempontokhoz vezet. S nem tudjuk elhallgatni véleményünket, hogy éppen a legújabb geometria, végtelenben fekvő pontjával, egyeneseivel stb. alig tér el Cusanus felfogásától, nem hogy ellenmondana neki. S ma is lélek nyugalommal dolgozunk végtelen nagy körökkel, amelyeknek görbülete nulla, és végtelen sokoldalú sokszögekkel, amelyek körök. Meglehetősen közömbös, hogy ezt az eljárást Vaihingerrel fikciónak vagy Cusanusszal koincidenciának mondjuk-e. És közömbös az is, hogy ilyen esetben a «határátmenet» elmosódottságát és homályosságát emlegetik. Közömbös ugyanis magasabb szempontból. Mert ha egyesek azt állítják, hogy legyen a sokszögnek mégannyi oldala, törtvonalként különböznie kell a lényegénél fogva minden helyén töretlen, görbült kör vonalától, akkor mások viszont azt felelhetik, hogy a végtelenben mások a szabályok, mint a végesben. S egy sokszögdoldalnak egyszer egész terjedelmében össze kell esnie a körkerület egyik pontjával.

Ilyen vizsgálatoknál az aktuális és potenciális végtelen különbségét nem kerülhetjük el. És rábukkanunk a folytonosnak és a diszkrétnek (különállónak) fogalmára, valamint az oszthatóság és az atom közt fennálló antinomiára. Végül Kanttal együtt be kell látnunk, hogy eszünk egyik nézethez túl hosszú, a másikhoz túl rövid. De bármennyire fontos is ez, nem ez a legfontosabb. Úgy látszik fontosabb — nyilván ezt bizonyítja tudományunk története — Herakleitos szava,

¹ «Quanto autem polygonia aequalium laterum plurium fuerit angulorum, tanto similior circulo; circulus enim si ad polygonas attendas est infinitorum angulorum.»

amely szerint minden történés atyja az ellentét, és Cusanus szava, az ellentétek áthidalásának termékenységéről.

Befejezésül bizvást mondhatjuk, hogy két, törvényt nem tisztelő fogalom volt az a robbanóanyag, amely eruptív módon átalakította teljes belső és külső világképünket. Egyik volt a függvény, amely a meglevőt a keletkezővel egyesíti, a másik a koincidencia, amely végest végtelenné, végtelent végessé tud tenni.

E két, tisztán nyugati-fausti, sőt különlegesen germán és francia eredmény, hogy teljesen kifejlődhessék, megint testvéries módon fogott össze az algoritmus mágikus és kabbalisztikus kategóriájával, amely végső fokon indiai szellem terméke.

A következő fejezet megmutatja majd, hogyan folyt le ez a végső roham s hogyan tárult fel egyszerre a legközelebbi csúcsra vezető út.

KILENCEDIK FEJEZET.

Vieta.

Matematika mint szimbolika.

Ha a hellénség matematikájáról azt állítjuk, hogy szinte belső problémaként jutott addig hogy további fejlődésre nem volt többé módja, akkor az újkor matematikájáról azt kell mondanunk, hogy bőven kapott kívülről buzdítást. Ezzel távolról sem állítjuk azt, hogy az új nyugat matematikája nélkülözze a tépelődő munkatársakat. De az új világnak más céljai nem kívánták egy tudomány magába zárt pusztá tökéletességét. Ez ösztönözte a matematikát mindig újabb és újabb «tettekre», a legnagyobb felfedezésekhez kívülről jövő feladatok adtak lökést, és ezek a feladatok «valószínűbbek» voltak, mint a kockakétszerezés, szögharmadolás és körnégyyszögesítés három klasszikus problémája.

Volt is ezekben a Cusanus és Descartes közt eltelt századokban, vagyis a tizenötödik századtól a tizenhetedik század elejéig eltelt időben, bőven, fontos, «valószínű» felfedezés.

Ragadjuk ki először azt az eseményt, amelyik számunkra a legfontosabb. 1453-ban Bizanc elfoglalásával elesett az antik tradíció utolsó mentsvára és a bizantin tudósok nyugatra vándoroltak, magukkal hozva nyugatra rengeteg megértett és meg nem értett klasszikus tudást. A humanizmus és a renaissance ezzel óriási, új feldolgozásra váró anyaghoz jutott, a matematika terén különösen sok olyan ókori mű került elő, amelyet addig csak arab fordítások nyomán, vagy egyáltalán nem ismertek. De megint nemcsak ez a külső körülmény játszott szerepet, hanem a renaissance és az azt követő idő szellemi beállítása is, mert ennek a hatása volt az antik matematika átvétele, beolvasztása, «receptiója». E mindmáig is tartó receptió lefolyását más helyen fogjuk megvizsgálni.

De külsőségek szempontjából még két eseménynek volt

hatása a matematika terjedésére és emelkedésére és ezek a már meglevő műzalmakat nagymértékben meggyorsították: a könyvnyomtatás feltalálása és a Föld felfedezése Columbus és követői által. S míg a könyvnyomtatás Luca Paciulo művének 1494-ben történt kiadásával a matematika, különösen az aritmetika fejlődését mozdította elő, addig a Föld alakja a hatalmasan megnövekedett terület keletkező geográfiaja, a hajózás és a vele kapcsolatos csillagászat újabb és újabb kérdéseket hozott felszínre, s közülük nem egy matematikai természetű volt. A kérdések száma még rohamosabban erősödött, midőn a Föld felfedezését az égbolt kutatása követte, és Kopernikus és Galilei megteremtették az új, heliocentrikus világképet, amely elfoglalta az addig érvényes ptolamaiosi világkép helyét. Megjegyezzük még, hogy ezek az újítások nem szorítkoztak asztromiai kategóriák új elképzelésére, hanem ezen kívül a fizikát és matematikát is új, dinamikus pályákra szorították, olyanokra, amelyek a matematikai tárgyalást nemcsak lehetővé tették, hanem egyenesen megkívánták.

Ismét meg kell itt állapítanunk, hogy nem akarjuk, de nem is tudjuk mindazt a nagy és értékes eredményt leírni, amely e századokban keletkezett, hisz nagyrészüik korszakalkotónak csak feltételelesen mondható. S ha mégis, akkor sem volt egyes ember működéséhez kötve hanem szükségszerűen a tudomány egészének fejlődéseként következett be.

E korszakot elsősorban az aritmetikával és algebrával való beható foglalkozás jellemezte. Az elméleti és gyakorlati célokra felhasznált számolás az algoritmussal való foglalkozásra kényszerített, s ne túlozunk, ha azt állítjuk, hogy e századokban keletkezett valamennyi matematikai jel, amelyet ma is használunk. Legalábbis az egyszerűbbek.

De még mielőtt az aritmetika fejlődése felé fordítanók figyelmünket, említsük meg, hogy a renaissance két nagy művésze sejtette meg a geometria egyik új ágának alapjait. Ezt az ágat csak a XVIII. század végén karolták fel újra és fejlesztették magas fokra. Leonardo da Vinci és Albrecht Dürer volt ez a két művész. akik mint festők, mérnökök és építészek először foglalkoztak a geometriai perspektiva kutatásával és az ábrázoló geometriával. De ezt csak melleleg említyük.

Az aritmetika mesterei, akikről már említést tettünk, a következők voltak : a német Michael Stifel, a francia Chuquet, és négy furcsa olasz, Ferro, Cardano, Tartaglia és Ferrari. Adam Riese és Rudolff viszont számológépművészek és pedagógusok voltak.

Stifel és Chuquet jelentős eredményeket értek el. Szembeállítottak egy számtani sort egy mértani sorral és ezzel náluk találjuk meg a logaritmus első nyomait. De az olaszoknak valami sokkal fontosabb sikerült. Ők tették meg ugyanis az első lényeges lépést az antik matematika határain túl, amidőn sikerült nekik harmadfokú egyenletet gyökjelek segítségével megoldani.

Mélyenfekvő oka van, hogy miért beszélünk «róluk», többeszámban. Az eredeti felfedező ugyanis állítólag az egyébként ismeretlen Ferro. Minden egyéb egy olyan elsőbbségi vita kódébe burkoltan maradt ránk, amihez hasonló a tudomány történetében talán nem is fordul elő. A részletek Boccaccio novellát, vagy egy rokokó-kalandor emlékiratait juttatják eszünkbe. Tömegesen fordulnak elő benne gúnyiratok, röplapok, szidalmazások, hivataltól való megfosztásokat szerződések és kihívások. Az igazságot sohasem lehetett egé, szén pontosan megállapítani, de a legújabb kutatás szerint úgy látszik, hogy az eredmény nagyobb része az esküszegő Cardano érdeme, s a dicsőségből az egyébként geniális Tartagliát csak a kisebb rész illeti meg. Így a harmadfokú egyenlet megoldására szolgáló végképletet Cardano-képlet néven szokták emlegetni, noha ez még akkor sem teljesen helyes, ha az elsőbbség-vitától teljesen eltekintünk. Cardano levezetéséből szükségszerűen következő végképlet ugyanis egy későbbi kiváló aritmetikustól, Bombellitól származik. Az olyan egyenletek megoldása, amelyekben az ismeretlen előforduló legmagasabb hatványa a harmadik illetve negyedik hatvány, vagyis röviden a harmad-, és negyedfokú egyenletek megoldása nemcsak magábanvéve volt nevezetes felfedezés, hanem e megoldásokkal kapcsolatban olyan eljárásokat alkalmaztak, amelyek később általánosítva igen nagy fontosságra tettek szert. A helyettesítés elvéről van itt szó, algebrai kifejezéseknek más, egyszerűbb vagy bonyolultabb kifejezésekkel való kicseréléséről. Mindenki, aki csak kissé

ért az algebrához, tudja, hogy az egyébként hozzáférhetetlen $x^6 + 5x^3 - 14 = 0$ hatodfokú egyenletet azzal lehet megoldani, hogy benne az x^3 helyett az új u ismeretlent írjuk, x^3 helyébe u -t helyettesítünk, és az új $u^2 + 5u - 14 = 0$

egyenletet oldjuk meg. Ennek, tudjuk, $-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14}$

a megoldása, vagyis $u_1 = 2$ és $u_2 = -7$. A hatodfokú egyenletet tehát visszavezettük egy vegyes másodfokú egyenletre, «redukáltuk» az egyenletet. Most már csak az $u_1 = x^3$ és $u_2 = x^3$ tiszta harmadfokú egyenleteket kell megoldani, vagyis $x = \sqrt[3]{u_1} = \sqrt[3]{2}$ és $x = \sqrt[3]{-u_2} = \sqrt[3]{-7}$ noha ez még újabb megfontolásokat igényel.

Ilyen fogások már az ókorban, különösen Diophantos előtt, ismeretesek voltak. Cardano kora tehát nem találta fel a helyettesítés elvét. Nem akarjuk azonban az alkalmat elmulasztani, mert az ú. n. Cardano-féle megoldás ilyen helyettesítéseknek egész hálózata és e megoldásmóddhoz néhány megjegyzést akarunk fűzni. A vegyes harmadfokú egyenletre fogunk e közben szorítkozni és minden levezetést modern írásmóddal írunk, noha ez Cardano idejében még egyáltalán nem létezett. Akkor még, néhány rövidítéstől eltekintve tiszta szóalgebrát alkalmaztak. Mostani beszéd-módunkkal megállapítjuk tehát, hogy minden vegyes harmadfokú egyenlet az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ alakra hozható és itt a, b, c bármely számot jelenthet. Ez az alak eddig minden megoldási kísérletnek ellenállt, és ebben, mint hamarosan kiderül, a négyzetes tag, vagyis az ax^2 volt elsősorban hibás. E tag kiküszöbölésére Cardano (tekintet nélkül az elsőbbségi vitára, mindenkor őt fogjuk említeni) x helyébe az $\left(y - \frac{a}{3}\right)$ kifejezést helyettesíti. A műveleteket végrehajtva

az eredmény $y^3 - 3y^2 \frac{a}{3} + 3y \frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + yb - \frac{ab}{3} + c = 0$ vagy összevonva $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$ tehát egy olyan egyenlet, amelyben az ismeretlennek már csak a harmadik és első hatványa for-

dul elő. Tehát általában $y^3 + py + q = 0$ alakú, mert p és q csak az a , b és c értékeiből tevődik össze. Egyszerűen p -t írtunk $\left(b - \frac{a^2}{3}\right)$ és q -t $\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$ helyett. Cardano most

e másodfokú tagtól mentes egyenlet megoldására egy újabb, látszólag értelmetlen helyettesítést alkalmaz, az ismeretlen y helyébe két új ismeretlent vezet be, az $u+v=y$ egyenlőséggel. Behelyettesítve az $y^3 + py + q = 0$ egyenletből az $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$ egyenletet kapjuk. Ezt rendezve az $u^3 + v^3 + q + (u+v)(3uv+p) = 0$ egyenlet keletkezik. Minthogy minden további nélkül feltehetjük, hogy $(3uv+p) = 0$ akkor az is következik, hogy $u^3 + v^3 + q = 0$. Két egyenletünk van most, két ismeretlen-

nel. De ha $(3uv+p) = 0$, akkor $3uv = -p$ és $v = -\frac{p}{3u}$ ezt a második egyenletbe helyettesítve $u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$. Ha

ezt az egyenletet még u^3 -nal megszorozzuk, akkor az $u^6 + u^3q - \frac{p^3}{27} = 0$ egyenletet kapjuk. Olyan hatodfokú

egyenlet áll tehát most előttünk, amely vegyes másodfokú egyenletre redukálható, mivel benne az ismeretlen csupán az n -dik és $2n$ -edik hatványon fordul elő. Ismét helyettesítenünk kellene, u^3 helyett mondjuk r -et írni, de ezt most csak gondolatban végezzük el és közvetlenül felírjuk, hogy

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

egyenlőséget figyelembe véve $v^3 = -q + \frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

vagyis $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ Nincs már más hátra, minthogy visszamenjünk az úton, amelyen jöttünk. Követel-

sünk szerint tehát $y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Meg kell mindenesetre je-

gyeznünk, hogy sem Cardanonál sem Bombellinél nem fordulnak elő az előjelek az általunk használt módon. Különösen a négyzetgyökkel előtt álló előjelek nem, mert még Bombelli is csak a $+$ előjelet írja az első tagban szereplő, és a $-$ előjelet a második tagban szereplő négyzetgyökkel elé. Ezt a «gyökkpolinomot» még tovább kellene visszavezetnünk, figye-

lembe véve p és q értékét, valamint az $x=y-\frac{a}{3}$ helyettesítést.

Megjegyezzük még, hogy már Cardano és társai is foglalkoztak a gyökkpolinom képzetessé válásának kérdésével és eme nehézség elkerülésére különféle újabb helyettesítéseket eszeltek ki. Cardano bukkant továbbá arra az eddig figyelmen kívül hagyott körülményre, hogy egy és ugyanannak az egyenletnek három megoldása van. Tudta továbbá azt is, hogy a helyettesítések nem mindig vezetnek célhoz, hogy vannak «irreducibilis» esetek is.

De ezzel elvben megvolt a harmadfokú egyenletek tisztán algebrai eszközökkel, tehát gyökjelekkel való megoldása, és mit sem változtat ezen a körülményen az, hogy a logaritmusok meghonosodása óta, Girard nyomán az ilyen egyenletek megoldására, a számítások egyszerűsítése céljából inkább trigonometriai eszközöket alkalmaznak.

De a speciális kérdésen kívül minden mélyebben gondolkodó matematikust azóta a helyettesítés elvének kérdése foglalkoztatta. Miért, mikor és miként lehet algebrai kifejezéseket egyszerűen másokkal helyettesíteni? Mi marad változatlan és mi változik az ilyen eljárás következtében? Hamarosan kiderült, hogy itt formáról és hasonlóságról van szó. De a formaállandóság és invariánsok kérdését ezen a fokon még nem lehetett megérteni, hisz a transzformáció fogalma csak a koordináta-geometriával kapcsolatban világosodott meg teljesen. De erre is csak majd a XIX. század algebrájának megbeszélésével kapcsolatban térhetünk ki. Egyelőre meg kell azzal elégednünk, hogy a harmadfokú egyenletekkel kapcsolatban megismertük a probléma súlyát és jelentőségét. Az emberi szellem ismét új varázsszerszözt kerített kezébe és nem fog addig nyugodni, amíg azt sokkal magasabb fokra nem fejlesztette.

Ezt a hatalmas lépést Vieta tette meg, a geniális aritmetikus

és algebrista, akit csak azért fogunk mindenkor algebristának nevezni, mert korszakalkotó működésének súlypontja erre a térre esett. Minden szempontból nagy matematikus volt. Meglepő, hogy nem volt szűkebb értelemben vett szakember, jogász volt, ügyvéd, mindenféle állami ügyekkel foglalkozott és többek közt megfejtette a spanyolok egyik 500 jelet tartalmazó titkos írását. Ezáltal vált lehetővé, hogy a franciák a velük hadban álló spanyolok minden sürgönyét nehézség nélkül elolvassák. Vieta eredetileg hugenotta volt, de ismételtén változtatta hitét és így is mindenkor Rohan védeence maradt. A francia király titkos tanácsosa lett, 20,000 tallér örökséget hagyott hátra, minden könyvét saját költségén nyomatta ki, mindenfelé ajándékozta azokat, barátainak, ismerőseinek és egyébként is szelíd kedélyű ember volt. Így hónapokig vendégül látta házában egyik tudományos ellenfelét, sőt hazautazása költségeit is megfizette.

Az emberiség azonban, minde szimpatikus vonáson túl, valami egészen különös dolgot köszönhet neki. Ő volt az ugyanis és csakis ő, aki az algebrát a harmadik, szimbolikus fokra emelte. Művében, amelynek címe «Bevezetés az analitikus művészetbe (In artem analyticam isagoge), az 1591 évben először a homogenitás elvét mondja ki, tisztán és világosan, amelyet ugyan a klasszikus hellén kor matematikusai ki nem mondva mindenkor betartottak, de a melyre Heron és Diophantos már nemigen ügyeltek. Röviden azt mondja ez az elv, hogy csak szigorúan egynemű mennyiségeket lehet összehasonlítani, tehát helytelen például, ha testeket, felületeket és vonalakat hozunk egymással összefüggésbe. Ezt az elvet Vieta betűszámтанában következetesen keresztülviszi. Mint már mondtuk, ő volt az első, aki az algebra szavakba burkolását mellőzi, és latin nagybetűket használ a számításokhoz. A magánhangzók az ismeretlen, a mássalhangzók az ismert nagyságok szimbolumai. Figyelemre méltó a «nagyság» szó. Még Vieta sem helyezi át teljesen egyértelműen az algebrát a számok birodalmába. A szemléletes, geometriai «nagyság» fogalma még hozzátapad valahogy betűihez. «Per species seu rerum formas» számol velük, tehát mint «térbeli alakzatok látható jeleivel». Megmarad e felfogásánál, noha nem érzi magát kötve a geometriai dimen-

ziófoglalomtól és nyugodtan számol még kilencedik hatványokkal is. Nehezen dönthető el, hogy mi játszódik le egy Vieta méretű matematikus fejében ennyire egybe nem vágó dolgok láttán. Sejtelve lett volna többmértű geometriákról? Vagy elég volt neki a homogenitás elve, hogy megtiltsa háromnál több dimenzió esetén is a különmemű nagyságok egymáshoz kapcsolását? Vagy a betűnagyságok magasabb dimenzióit nem is tekintette magasabb tér-dimenzióknak, mivel Cardano nyomán, helyettesítéssel, a természetes három dimenzióra redukálhatók? Nehezen lehet e kérdéseket eldönteni, éppen oly nehezen, mint azt a kérdést, hogy vajon egy mai geometer a háromnál magasabb dimenziószámú geometriát valóban létezőnek képzele-e. A matematika történetében mindeddig a matematikai formák gondolat- és szemlélet-tartalmát többé kevésbé tudatosan tologatták át az aritmetika oldaláról a geometria oldalára és viszont. A hellének és tanítványaik számára az algebra üres árnyékvilág, a mai matematikus számára viszont a geometria csak egyike a «csoporthoz», «hasonlóságokhoz», «halmazokhoz», «formákhoz» és «invariánsokhoz» foglalkozó magasabb rendű tudomány nagyszámú alkalmazási területeinek.

De ne vágjunk elébe az eseményeknek. Vieta tehát tökéletesen elválasztotta az aritmetikát, a konkrét számolást, a «számtant» «logistica numerosa» néven a «logistica speciosa»-nak elnevezett betűszámtantól, jöllehet a közönséges számokkal való algoritmikus, gépies számolást, ahol lehetett, átvitte a betűszámtanra is. A német eredetű $+$ és $-$ jelet már mindenkor használja, de a mai írásmód többi kapcsolószimbóluma még hiányzik, vagy más jeleket alkalmaz helyettük. A törtvonalat Vieta már úgy alkalmazza mint mi, és a gyökvonásra is van saját jele. Nem ismeretlenek előtte többtagú kifejezések összefogására a gömbölyű és a szögletes zárójelek.

Bízást mondhatjuk, hogy Vieta volt az első, aki matematikai komplexumokat formulákká foglalt össze operációs jelekkel, szimbólumokkal. Új öntvénye még nem volt mentes a salaktól, ilyen volt például a hatványok szavakkal való jelölése. De az öntvény oly fényesen, félreismerhetetlenül csillog a salak alatt, hogy a «matematika gyorsírása», vagy

helyesebben a «matematika esperantoja», vagyis a tiszta fogalom- és szimbólum-írás a Vieta korát követő 150 év alatt már majdnem teljesen a mai fokra fejlődött ki. A modern írásmód, vagyis a latin, dűlt (*kurzív*) kisbetűk használata algebrai mennyiségek jelölésére Thomas Hariot (1560—1621) oxfordi professzortól származik, aki ezt propagálta, valószínűleg lord Napier hatása alatt «*Artis analiticae praxis*» című művében.

Álláspontunknak megfelelően meg kell még Vietáról említenünk, hogy a «koefficiens» (együttható) szó is az ő szókészletéből származik. Egy geometriai feladatban fordul elő «*longitudo coefferiens*» «együttható hosszúság, távolság» összefüggésében. Koefficiens értelmé Vieta szerint tehát olyan távolság, amelynek szerepe van mennyiségek alakításában. Gondoljuk el azt az esetet, hogy egy $(A+B)$ oldalú négyzethez még egy téglalapot kell hozzátennünk. Ennek szintén $(A+B)$ az egyik oldala, a másik viszont legyen D . Az új idom területe tehát összesen $(A+B)^2 + D(A+B)$. Itt D a koefficiense az $(A+B)$ távolságnak. Közben Vieta a «homogenitás-elvnek» megfelelően úgy képzei, hogy az $(A+B)^2$ csak akkor összegezhető az $(A+B)$ -vel, ha utóbbi a D koefficiens folytán szintén terület kiterjedésű lesz. Különben vonalat kellene területhez adni, ami megengedhetetlen.

Vieta más, szintén igen magas matematikai kvalitásairól nem akarunk beszélni. Azt is csak röviden említjük, hogy algebristák és aritmetikusok egész iskolája munkálkodott az «*Ars magna*», a «nagy művészet» (így nevezte már Cardano is) fejlesztésén. Raimundus Lullus (Ramon Lull, Kr. u. XIII. század) óta az általános tudomány ideálja, egy olyan módszer, amely a gondolkodást teljesen gépiesíti, állandóan a tudósok szeme előtt lebegett. Ezek a félig-meddig misztikus törekvések, amelyek az algebra «*artium ars*», «művészetek művészetek» megjelölésében is mutatkoztak, természetesen a német-római bitrodalomban is jelentkeztek. Olyan férfiak művelték ezt mint Regiomontanus és Peurbach, valamint a «Cossisták» iskolája. Cossista egyértelmű az algebristával. A szó a *causa* vagy *cosa* szóból származik, jelentése «dolog». De az ismeretlennek «dolog» szóval való megjelölése India algebristáitól származhat, akik az ismeretlent szintén egyszerűen ezzel a szóval jelölték.

TIZEDIK FEJEZET.

Jost Bürgi.

Matematika mint táblázat.

Varázsszönyegünk szédítő módon rángat minket előre-hátra. Előadásunkat ezért azáltal kell szabályosabb pályára irányítani, hogy új problémát hozunk előtérbe, olyant, amely egyenesen áttekinthetetlen jelentőségű. Még egy második oka is van annak, hogy miért akarunk ezzel a kérdéssel behatóbban foglalkozni. Mert itt a tudomány egyik felületességével találkozunk, amelytől még sok, egyébként nagyon kitűnő matematikakönyv sem mentes. A logaritmusra gondolunk, amely oly sok matematikát tanuló diák rémálma.

Egészen természetes lett volna, ha a logaritmust szinte rendszeres kutatással fedezik fel. Az alpműveletek rendszeres vizsgálata megmutatta volna, hogy még további alpművelet is lehetséges. Az összeadás építő (thetikus) műveletének megfordítottja a kivonás lebontó (lytikus) művelete, ugyanígy megfelel a szorzásnak az osztás. Ez a kettősség még továbbmegy, mert a hatványozás és gyökvonás ugyanezt a kétoldalú szerkezetet mutatja. De még egy kérdés tehető fel. Ismeretes lehet egy hatvány alapja és ismeretlen a kitevő. Tehát az a^x kifejezésben az a bármely természetes szám, 10, 500 vagy akár 7324. Ha most $a^x = b$ és a b is ismert, akkor beláthatjuk, hogy itt a hatványozás másik megfordításáról van szó. Ez a kettősség itt abból adódik, hogy a hatványozás nem kommutatív művelet. Összeadásnál $x+a=b$ és $a+x=b$, éppen ezért közömbös, hogy melyiket használjuk. Ugyanúgy van a szorzásnál is, $a \cdot x=b$ és $x \cdot a=b$. Nem így a hatványozás. Egészen mást jelent az $x^a = b$ és az $a^x = b$ egyenlőség. Az első hatvány, a második exponenciális függvény. Az $a^x = b$ megfordítása a gyökvonás,

tehát $x = \sqrt[n]{b}$. De mi az $a^x = b$ megfordítása? Ha azt írjuk, hogy $a = \sqrt[n]{b}$ akkor semmire sem megyünk. Most merül csak igazán fel a kérdés, hogy miként határozzuk meg az x értékét?

Hamarosan visszatérünk erre is. De egyelőre megállunk legutóbbi kérdésünkönél, mivel más volt a történelmi fejlődés útja mindaddig, amíg a probléma általános jellegét át nem tekintették. És éppen ez a furcsa módon való közeledés a probléma magvához, felfedezéstörténeti szempontból nagyon érdekes. Mert a valóság, még a matematikában is Columbus útját választja. Columbus sem azt mondta elutazásakor: «Most pedig elindulok és felfedezem Amerikát.» Nem is gondolt egy még ismeretlen világrészre, csupán az Indiába vezető utat akarta megrövidíteni. Majdnem ugyanígy történt a logaritmus felfedezése is.

A titok első nyomai Archimedeshez vezetnek és számtani meg mértani sorok összehasonlításából származnak. Világosabb már az összefüggés Michael Stifelnél és Chuquetnél, aki, miként Stifel, genialis matematikus volt. Szóval egy számtani és egy mértani sor összehasonlítása a lényeg, és ezt Stifel «arithmetica integra» c. művében már ilyen formában találjuk meg:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \dots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ \dots & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & \dots \end{array}$$

Stifel megjegyzi: «Egész könyvet lehetne e számok csodálatos tulajdonságairól írni, de itt meg kell elégednem ennyivel és behúnyt szemmel kell mellettük elmennem.» Más helyen mindenesetre kissé kinyitja szemét, mert megjegyzi: «A számtani sorban végzett összeadás a geometriai sorban szorzásnak felel meg, éppen úgy kivonás az egyikben osztásnak a másikban. A számtani sorban végzett közönséges szorzás a mértani sorban önmagával való szorzássá (hatványozássá) lesz. A számtani sorban végzett osztásnak a mértani sorban a gyökvonás felel meg, például a felezésnek a négyzetgyökvonás.»

De ezzel már az 1544. évben teljes egészében kifejezésre

jutott a logaritmus elve, vagyis az a fontos lehetőség, hogy alpműveletek fokát szükség szerint eggyel leszállíthassuk. Hogy világosabban lássuk, próbáljuk ki Stifel második állítását az általa megadott számokon. Tegyük fel, hogy a 8.32 szorzást kell elvégeznünk. Csak azt kell megnéznünk, hogy milyen számok állnak felettük a számtani sorban. A 3 és 5 számokat össze kell adnunk, az eredmény 8. De a 8 alatt, a geometriai sorban a szorzás eredménye olvasható: 256. Természetesen kettőnél több tényezőt is vehetünk.

Legyenek ezek $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{2}$, 2 és 256. A számtani sorban nekik megfelelő számok összege $(-4) + (-1) + 1 + 8 = 4$, és a 4 alatt azonnal leolvashatjuk a 16 eredményt. Osztás helyett kivonást kell végeznünk. Így $128 : 32$ egyenértékű a $7 - 5 = 2$ kivonással, és a 2 alatt ott áll az eredmény: 4. A hatványozás valamely szám önmagával való ismételt szorzásának is tekinthető, a számtani sorban, miként Stifel is mondja, önmagával való ismételt összeadássá, vagyis szorzássá válik. Így tehát pl. 4^3 a $2+2+2=6$ vagy egyszerűbben a $3 \cdot 2=6$ művelettel található meg, az eredmény mindkét esetben egyformán a 6 alatt olvasható 64. Gyökvonás osztás által történik. 256 negyedik gyökét megkapjuk, a $8 : 4 = 2$ művelettel és ebből a gyök 4.

Ez a varázslat magában véve nem rejtélyes, különösen ha sorainkat így írjuk fel:

... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

... q^{-4} , q^{-3} , q^{-2} , q^{-1} , q^0 , q^1 , q^2 , q^3 , q^4 , q^5 , q^6 , q^7 , q^8 , ...

Rögtön látjuk, hogy a számtani «sor» nem más, mint a hatványkitevők sorozata és a számolásunk nem volt egyéb, mint hatványokkal végzett néhány művelet. Mert $q^5 \cdot q^{-2} = q^{5-2} = q^3$, vagy $q^3 \cdot q^4 = q^{3+4} = q^7$, vagy $q^8 : q^2 = q^{8-2} = q^6$, és $(q^3)^2 = q^{3 \cdot 2} = q^6$ végül $\sqrt[4]{q^8} = q^{8:4} = q^2$ stb.

Ezért nevezik ma is az $a^m \cdot a^n \cdot a^r \dots = a^{m+n+r+\dots}$ össze függést röviden a hatvány logaritmikus tulajdonságának, mert ebből valamennyi más tulajdonság levezethető. De ezt az általános fokot, főképpen a még fejletlen algebrai írásmód következtében, nem érték el azonnal. Stifel felfedezését a

későbbi algebristák mégis felkarolták és átvették, így különösen Jacob és így jutott Jost Bürgi tudomására is, aki éppoly genialis matematikus, mint gátlásokkal terhelt, bogaras ember volt. De majdnem ugyanakkor támadt ez a gondolat egy skótnak, Merchiston urának, lord John Napiernek (latinosan Neperus) fejében is. Ezzel a logaritmus iskola-példája lett az újítások kettős felfedezésének, ami későbbiek számára okulásul szolgálhatott volna. És akkor ezek nem kezdtek volna a tényállás vizsgálata nélkül olyan elsőbbségi vitát, amely a vitatkozóknak és a tudománynak egyaránt kárára volt. Mellékesen megjegyezve, a logaritmus felfedezése körül nem volt semminemű vita. Csak az utókor, beleértve a tankönyveket is, teljesen félreismerte a felfedezés lényegét, valamint Napier és Bürgi érdemeit a felfedezés körül.

Kezdjünk hozzá, tehát rendszeresen ismerjük meg, hogy mik voltak a problémák a tizenhetedik századforduló körül. Már egyszer megjegyeztük, hogy éppen a germán népek voltak azok, akik azt fejlesztették ami a matematikában a számolással kapcsolatos. És az algoritmikus számolás érvényre-jutása, a számolás és a műveletek lényegének megismerése ellenére is mindinkább áttekinthetetlenek és bonyolultak lettek a szükséges számítások. Gondoljunk csak Ludolf van Ceulenre, akinek 1596-ban sikerült Archimedes eredményét messze túlszárnyalva a π számértékét a körbe írt 1,073.741,284 oldalú sokszög segítségével 35 tizedesre meghatározni. Ez az érték: $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \dots$ A csillagászat, asztrológia, trigonometria, a kiterjedt kereskedelmi könyvvitel, az államszámvitel egyaránt azt mutatták, hogy szükséges a számítások megkönnyítése és pontosságuk növelése. Stifel és Jacob úgyszólván újjal mutattak arra a forrásra, amely e célra a számtani és mértani sorokban rejtett. Mindezt még növelte a tizedes törtek használatának elterjedése és a szorzás és osztás műveletéhez való segéd-könyvek. Ezért és csakis ezért fogott Bürgi és Napier, mikor elérkezett az ideje, munkához. Ma már tudjuk, helyesebben tudnunk kellene, hogy Bürgi volt előbb az új segédeszköz birtokában. De ő, állítólag idő híjján, nem engedte nyilvánosságra hozni, úgy, hogy a nagy Keplertől kapta a szemrehányást, hogy „szellemi gyermekét cserbenhagyta, ahelyett,

hogy a nyilvánosság számára felnevelte volna». Így járt el, mert ő «cunctator», habozó volt és «secretorum suorum custos», vagyis saját titkainak őre.

De miként jutott Bűrgi «haladvány-táblázataihoz», amelyek piros és fekete számaikkal ugyanazokat a szolgáltatokat tették, mint a mai logaritmusok? Nos, ő éppen Stifel két sorát¹ nézegette és megfontolta, amit ez róluk mondott. Jó matematikusként két dolgot ismert fel azonnal. Először hogy csak akkor használhatók az ilyen sorok a gyakorlatban, ha tagjai lehetőleg sűrűn következnek egymásután. Mert az olyan mértani sorban, amelyben a tagok az 1, 2, 4, 8, 16... sorhoz hasonlóan következnek egymás után, a hézagok a tagok közt egyre nagyobbak lesznek, így pl. a 25.37 szorzást sem lehetne velük végrehajtani. Nem is szólva a még nagyobb tagok pl. 1024 és 2048 vagy 2048 és 4096 közt maradó hézagokról. Másrészt azt is látta Bűrgi, amit elődei is tudtak már, hogy a logaritmikus tulajdonság nem szorítkozik 2 alapú hatványok sorára, hanem kiterjed bármely q hányadosú mértani sorra. Ezt már teljesen általánosan mi is láttuk. Néhány feltételt azonban be kellett tartani. A számtani sor csak a 0 értékkel, a mértani pedig csak az 1 értékkel kezdődhetett, hogy a logaritmikus tulajdonság épségben maradjon. A növekedés fokozatainak is lehetőleg kicsinek kellett lenniök, hogy a tagok lehetőleg sűrűn következzenek egymás után; ez a gyakorlati használhatóság szempontjából volt fontos, hogy mindkét sorban lehetőleg minden szám megtalálható legyen. Példaként, hogy meglássuk miről van itt tulajdonképpen szó, olymódon írtunk fel két sort, hogy a mértani sorban minden tag 1.01-szer akkora, mint a megelőző. Egy-szerűség kedvéért és azért, hogy a tizedeseket elkerüljük, minden tagot megszoroztunk egy millióval.

¹ Mai szóhasználattal nem sorok voltak ezek, csupán sorozatok. De itt mindenkor sorokról fogunk beszélni, mert akkor, és még azután is sokáig, így nevezték őket. Sorra és sorozatra egyaránt jellemző az ú. n. «képzési törvény», amely szerint felépülnek. De míg a sorozat tagjai csak egymás mellett állnak, addig a sorok tagjai összeadandók.

0	1	2	3
1.000,000	1.010,000	1.020,100	1.030,301
4	5	6	7
1.040,604	1.051,010	1.061,520	1.072,135
8	9	...	...
1.082,857	1.093,685	...	...

Mindenki meggyőződhetik arról, hogy e soroknak is megvan a logaritmikus tulajdonságuk, ha a helyértéket megfelelően figyelembe vesszük. Jost Bürgi haladványtáblázataiban még kisebb lépésekkel halad, amelyeket majdnem mikroszkópikusaknak lehetne nevezni. És ezt két módon érte el. A számtani sort megszorozta tízzel, a geometriai sor tagjainak a lépése pedig 1.0001 volt. Ezáltal a 0-hoz tartozó érték 100.000,000 volt, a 10-hez tartozó 100.010,000, a 20-hoz tartozó pedig 100.020,001. Az 1 és 10 közt fekvő számokat arányosan kellett beiktatni, közelítőleg feltételezve, hogy a mértani sor emelkedése e számközben arányos a számtani sor emelkedésével. A számtani sor számait piros számoknak nevezi, mert a táblázatban piros színnel lettek nyomtatva. A többi szám neve fekete szám. Ma a piros számokat logaritmikusoknak mondjuk, a feketék a numerusok, vagy röviden a «számok».

Noha Bürgi haladványtáblázatait a logaritmusszámítás módján kitűnően lehetett használni, e táblázatok a szó mai értelmében mégsem voltak logaritmikusok, mert ő nem törődött a rendszer alapszámával és sokszor teljesen kívülálló okokból kerekítéseket végez.

Lord Napier méginkább a gyakorlat követelményei alapján indult el. Nem mélyedhetünk el «*Mirifici logarithmorum canonis constructio*» című, 1619-ben, Edinburghban megjelent táblázatának igen bonyolult kiszámítási módjában, csak azt állapítjuk meg, hogy «csodatevő logaritmusai»-nak táblázata nem a természetes számok logaritmusait, hanem a sinus számértékeinek logaritmusai tartalmazta, tehát elődje volt a mi szögfüggvénylogaritmus-táblázatainknak. Egyébként Bürgihez hasonlóan, szintén két sorral dolgozik, de ezek ellenkező irányban emelkednek. A rendszer alapszámáról nem

beszél, mégkevésbé természetes logaritmusról. Rendszere alapszámának értéke kb $\frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{3} 10^{-14}\right)$ vagyis valamivel kevesebb a természetes logaritmusok $e=2\cdot718281828459\dots$ alapszámának reciprok értékénél. Kétségtelen csupán, hogy Napier táblázatai voltak legelső ilyenemű táblázatok, amelyek nyomtatásban is megjelentek, valamint az, hogy Napier a feltalálója a logaritmus szónak. A logaritmusok keletkezését két sor szinkron mozgásaként képzelte el, mintegy folyásaként (fluxio), tehát mechanikus-dinamikus módon. Ebből következett a két sor pontonként történő egymáshozrendelése, hogy az ismert viszonyok előálljanak. E «fluxió»-ban, amely Claviustól származhat, találjuk meg mindenesetre Newton végtelen-felfogásának egyik előfutárját. Meg kell még végül említenünk: már lord Napier buzdított arra, hogy a 10 számot kell logaritmusrendszer alapszámaként felhasználni, amit a vele jóbarátságban levő Henry Briggs oxfordi professzor meg is fogadott. Köztudomású, hogy ma legnagyobbbrészt a Briggs-féle logaritmusszámolunk, amelynek, mint mondtuk, alapszáma egyezik számrendszerünk alapszámával, vagyis 10. Ebből előnyöknek egész sora következik, ilyen a logaritmusok felbontása karakterisztikára és mantisszára. Minden Briggs-féle logaritmus ezek szerint két részből áll, egy egészszámból, amely megadja a numerus legmagasabb értékű jegyének helyértékét, és egy tizedestörtből, a mantisszából,¹ amely a számértékre jellemző. 3·84510 a 7000 logaritmusa, 7 logaritmusa 0·84510, 0·007 logaritmusa viszont 0·84710—3.

E felfedezések a tizenhetedik század elején nagymértékben tökéletesítették a számolást, lehetővé vált azonban olyan hatványok és gyökök kiszámítása is, amelyekre addig nem is gondolhattak. Ki tudta volna addig $7\cdot534^{27\ 19843}$ vagy $375\cdot722^{\frac{1}{\pi}}$ értékét kiszámítani? A logaritmusok használata folytán az ilyen és hasonló feladatok algoritmikus játékokká egyszerűsödnek. Noha a táblázatokat állandóan javították,

¹ Wallis nyomán nevezik így, noha ő még mantisszán általában tizedes törtet értett.

és habár az exponenciális függvény $a^x = b$ és az a alapú logaritmus, $x = {}^a\log b$, közt fennálló összefüggést csak Leonhard Euler tisztázta a XVIII. században, mégis mindjárt eleinte minden működésbe jött, ami lényeges volt. Az algoritmus, a gondolkodó gép új, hallatlanul finom és hatásos alkatrésszel gazdagodott, olyannal, amely egyszer táblázatba foglalva örök időken át feltárja csodálatos (mirifica) módon a számok világát.

Nem is sejtették még abban az időben, hogy az új számolási mód, végső szerkezetében, mint «logaritmus naturalis», az e számmal együtt szinte tengelye lesz az infinitézimálszámításnak. Még senki sem gondolt arra, hogy a logaritmus függvény lesz a híd, amelyen át vezet az út látszólag megoldhatatlan integrálfeladat megoldásához. Arra sem gondoltak, hogy milyen jelentősége lesz ennek az e számnak a kamatoskamatszámításban és a valószínűségszámításban.

De sokat végeztek. Finomították a szerszámot, javították a táblázatokat, tanulmányozták az interpoláció lehetőségét, hogy a táblázatokat teljesen sűrűvé tegyék és hozzáfogtak Keplerrel élükön olyan problémák megoldásához, melyeket a csillagászat és természettudomány szűnni nem akaró sorban vetett fel és amelyeknél a hozzáértés és pontosság maximumára van szükség.

De ugyanebben az időben már számtalan szikra izzott az alig elégett örömtüzek hamuja alatt, amelyek rövidesen új lángra keltve messze látható fénnel jelezték a matematika leghatalmasabb korszakának kezdetét. Mert most kezdődik Nyugat földjén a matematika nagyszerű hőskora.

TIZENEGYEDIK FEJEZET.

Descartes.

Matematika mint módszer.

Még mielőtt belépünk ebbe a hőskorba, nem mulaszt-hatjuk el, hogy a Nyugat sokszor idézett «fausti szelleméről» ne beszéljünk. Tudjuk, az az értelem, amelyre gondolunk, ha itt a «fausti» kifejezést használjuk, Oswald Spengler-től származik, akinek nagy matematikai tudása lehetővé tette, hogy az egyes kultúrák szerkezete főszimbolumának a matematikát tekintse. Történeti szemlélődésünk során hasonló eredményre jutottunk, láttuk, hogy milyen sokféle módon tükröződik a matematika különböző népekben, szerkezetekben vagy ezek egyes lángeszű képviselőinek lelkében. Ezért jogosnak gondoljuk, ha változékonynak mondjuk azt, amit Boutroux a «matematikus tudományos ideáljának» nevez. Ezzel azonban nem akarjuk azt mondani, hogy következtetéseinkben magunkévá tesszük az «*Untergang des Abendlandes*» lapjain leírt jövőt. De itt nem helyén való, hogy ezeket a kérdéseket feszegezzük.

Csak azt jelentjük ki, hogy hamarosan meglátjuk, milyen erők fejlesztik a matematikát és hogy mennyire különbözők lehetnek az eredmények, mennyire különbözőknek kell az eredményeknek lenniök aszerint hogy a kutatás mögött álló akarat esztétikus, mágikusan alakító vagy fausti törtető jellegű. A kulturakarat, ha szabad e kifejezést használunk, a külső cél kitűzésének módja, nagy szerepet játszik minden találmánnyal, minden felfedezéssel kapcsolatban. A régi kfmiaiak évezredek óta ismerik a puskaport, ismerték a benne rejlő hatalmas feszítő erőt is, — és kizárólag tűzijátékokhoz használták. Gyerekesség ez, ethikai felfogás, vagy egyszerűen ostobaság? Nagyon nehéz eldönteni. Bizonyos

csupán, hogy a kínai szellem középpontját nem harcias gondolatok foglalták el, különben feltűnt volna nekik az a hatalom, amely kezükben volt, s történelmüket is másképpen alakíthatták volna.

A régi hellénekkel kapcsolatban is bemutattuk, hogy egy tudományos ideálnak áldozták fel magukat, s nem sokat segített rajtuk, ha egy-egy prometheusi szellem át akarta törni a geometriához fűződő szigorú előírásokat.

A fausti népek mások. Fölöttük még a tudomány történetének kezdetén sem lebegett barátságos muzsák fénylő világa, a múzsaé, akiket akkor szolgáltak helyesen, ha művészi-harmonikus világukat a földön adaequat módon utánózták. A hellének számára sohasem volt ellenmondás, sohasem érezték zavarónak, ha a képzelettől nimfákkal és félistenekkel benépesített forrás mellett, vagy egy csendes berekben a homok «emberi kéz nyomával», geometriai rajzokkal volt tele. A tiszta arányok geometriája éppen úgy bele illett a «szférák harmóniájába», mint a zene, vagy a testi élvezet. A törtetőt, kísértőt, a csábítót elzárta egy «medén ágan» (semmiből sem túlsokat), és az első keresztények ördögének «peirastes» (kísértő) volt a neve, éppen olyan elutasító értelemmel, mint a görögöknél.

Fausti kozmoszunkat egy világ választja el ettől. Benne misztikus, homályba borult gótikus termekben «Nostradamus ódon könyve» mellett halálfej és sok más lidérc bújik meg. A küszöbön egér rágja a pentagrammot, mert itt a geometriai rajz már nem az emberi kéz barátságos nyoma, hanem az ördög előretörése ellen védő kabbalisztikus szimbolum. S a fenyegetődő, ingerkedő, de mégis segítő ördög ott leselkedik már az ajtó előtt. A szobában pedig doktor Faust elmélkedik, lelke kettősségével, a végtelen legnagyobb mélységein és az innenső világ meghódításán, és diszharmónia diszharmónia után fűzi őt égi tájakról öngyilkossággal határos elkeseredésbe. A gótikus-fausti szellemnek mélységes szimboluma az a néhány szó, amelyet Conrad Ferdinand Meyer a nagy Ulrich Huttannel mondat: «Vagyis: nem vagyok kiagyalt könyv, hanem ember vagyok, ellentmondásaival.» Embernek lenni fausti nyelven éppen annyi, mint polárisnak lenni. És poláris vagy diszharmonikus, az ugyanaz. Nem a statikus elszakadt-

ságnak, hanem a poláris erőktől mozgatott felfeléhajtottság-nak értelmében. Mert, oh, mindenütt két lélek lakik az ilyen emberek keblében. És az «oh» csak a gyenge emberke utolsó, szomorúan-megértő ágaskodása a felismert elkerülhetetlen sors ellen.

Ilyen lélekben nem tükröződhet ugyanúgy a matematika, mint a hellén vagy az arab lélekben. Másképpen kellett születnie is: harcban és izgalomban. És azt látjuk, hogy egy fiatal lovastiszt, akinek lelke csordulásig tele van mélységes vallási kérdésekkel, kétségekkel, igazságokkal, tervekkel és megvilágosodásokkal, nyeregben ülve, cseh földön vívott lovascsaták közepette jött tisztába problémáival, és a magyarországi téli szálláson olyan művet ír, amelyhez hasonlót alig ismer a tudománytörténet. Boutroux azt mondja e felfedezésről, hogy lényege «előre látni és megmutatni, hogy koordináták rendszeres alkalmazása olyan nagyerejű és általános módszert jelent, amilyent a matematika eddig nem ismert. Olyan módszert, amely minden eddigit megszüntetni és felülmúlni hivatott, és amely a függvény fogalmának segítségével az összes térrel és idővel kapcsolatos tudományt forradalmasítja és megújítja.»

Mi már tudjuk, hogy ez mit jelent. Tudjuk, hogy itt megint Oresmei Nicole «formái» bukkantak fel, és látjuk, hogy a franciák ajándékozták meg a világot e formák, a térrel és idővel kapcsolatos természeti jelenségek ábrázolásának lehetőségével. A franciákban a fausti vágy antik formakészséggel párosult. Mert nemcsak Descartes, (róla van itt állandóan szó, ő volt a fiatal nemes lovastiszt) jött rá a koordináták alkalmazásának módszerére. Lángeszű honfőtan, Fermat, hasonló utakon járt már. Miért áll tehát mindenkor Descartes előtérben? Történelmi igazságtalanság ez? Mindenki, aki csak konyít a matematikához, tudja, hogy még ma is vastag könyveket írnak Fermatról, a számelmélet hatalmas tudósáról. A Fermat-tétel még ma is megoldatlan probléma, megoldására hatalmas díjat tűztek ki (habár ez a díj az első világháború után elértéktelenedett). Teljesen ki kell vizsgálnunk Descartes érdemeit, ha e történelmi kérdést egészen meg akarjuk érteni. De előbb egy másik körülménnyel kell foglalkoznunk, amelyet «a görög geometria

receptiója» néven akarunk említeni. Ez olyan szellemtörténeti jelenség, amely még ma sem ért teljesen véget.

A jogtudomány története — ezt fenti elnevezésünk magyarázataként mondjuk el — beszámol arról, hogy a renaissance korában és közvetlenül utána a régi római jog gyönyörű lezárt rendszere feltartóztathatatlan áradatként borította el Európaszerte a középkor helyi jogszokásait. Ezt az örökséget nem annyira, a mult jogának érezték, ellenkezőleg, egyenesen a jövő jogát látták benne. Ilyen érzése lehetett volna a XVI. században valakinek a technikával kapcsolatban is, ha valamely csoda folytán egy a XIX. századból való kompendium kerül a kezébe. Tudjuk, hogy a «jog receptiója» alapján megváltoztatta a Nyugat polgárságának képét sőt politikáját is. Azt is tudjuk, hogy még ezen a téren sem fejeződött be a fejlődés, hisz éppen napjainkban a római jogtól való, részben tudatos, részben öntudatlan eltérés jelei mutatkoznak. Számos más okon kívül az is megmagyarázhatja ezt a jelenséget, hogy talán már magunk is kezdjük elérni azt a kultúrtörténeti érettséget, amellyel ezt a római jogot megalkották. De sajnos, ennek taglalása sem tartozik ránk:

Csak azt akarjuk megállapítani, hogy van olyan jelenség, amely párhuzamos az «ógörög matematika receptiójával». Érdekes törvény az ellenmozgás, amelyre tudtommal eddig a matematika történetének irodalma még nem utalt kellő világossággal, noha éppen ez a körülmény — mint mindjárt látni fogjuk — a modern matematika keletkezésére és jellemére vonatkozóan nagyon sok útmutatást nyújt.

Emlékszünk, hogy időrendben először Euklides működött, utána Archimedes, majd Apollonios és végül Diophantos. Azt is megemlégettük, hogy a szellem négy hőse közül, mindenféle kerülő úton, először Diophantos hatolt be a Nyugat tudatába. Meziriac fordította le és kommentálta, Fermat pedig sokféle számelméleti kutatásra talált benne ösztönzést. A nagy görögök közül tehát az utolsó recipiálódott, meglepő módon, először. Őt követte az utolsó előtti, Apollonios, akinek műve, mint rövidesen látni fogjuk, Descartes és Fermat koordináta-geometriájának lett kiindulópontja. Csak Apollonios után, az infinitézimális geometria felfedezésével lett Archimedes teljesen érthető és a receptió-sor utolsó tagjának teljes

szellemi feldolgozása szemünk előtt, még ma is, folyamatban van.

Hogy félreértéseknek és állításaink könnyű cáfolatának elébe vágjunk, megjegyezzük: nem azt állítjuk, hogy Euklideszt vagy Archimedeszt nem ismerték a középkorban, vagy az újkor elején. A recepció fogalmát szűkebben és egyben mélyebb értelemben használjuk. Csak akkor ismerjük el egy szellemi kozmosz recepcióját, ha minden következményével együtt szerkezetileg felszívódott, vagy egyenértékű módon feldolgozódott. Ilyen értelemben az általunk említett recepciók egyben a recipiált kibővítését jelentik, sőt esetleg szabadsulást hatása alól.

A fausti szellemnek minden mélység-keresése mellett bizonyos könnyelmű és merész vonása is van, s ezek nélkül meg sem tudna lenni. A görög matematika első befogadása, tehát megismerésének időszaka, nem volt sokkal több, mint félig- és félreértések sorozata, valahányszor nem egészen elemi dologról volt szó. De éppen ez a félig megértett állapot hatalmas ösztönzést jelentett. Minden részletbe be akartak hatolni, sokszor messze túllőttek a célon és ezáltal újat fedeztek fel. Igaz, nagyon rendszertelenül és filozófiai meg logikai gátlásoktól nem akadályozva. De amikor a XVII. század elején már eredmények egész sora állt készen és közülük nem egy messze meghaladta az ókori eredményeket, akkor a régi hellének szellemét részben áhítattal az elért eredmények ellenőrzésére akarták felhasználni, de részben kiindulópontokat és hiányosságokat kerestek bennük, amelyeken tovább építeni ill. amelyeket megszüntetni lehetne. És ekkor a régi írásokat mindinkább megértve, gyakran mély ámulatba estek, és hajlamosak lettek a görög műveket az elért saját eredmények ellenére is formai és tartalmi mintaképeknek tekinteni. Úgy vélték, igyekezni kell, ha tartalomban nem is, szerkezetben azonban feltétlenül hozzájuk hasonlónak válni. Ez a folyamat ma is tart. Mert mindaz, ami a «szigorúság» követelményével kapcsolatos, nem egyéb, mint görög mintákhoz, különösen pedig Euklideszhez idomuló igyekezet.

De a fausti szellem megtagadta volna önmagát, ha a görög gondolkodás kategóriáinak tagadhatatlan alaki és tartalmi felvétele után nem keletkezett volna helyenként igen

erős lázadó hangulat a nyomasztó görög behatás ellen. Hel-
last úgyszólván egyszerre kellett befogadni és szétzúzni. És
éppen itt a mélyreható különbség Fermat és Descartes közt.
Fermat számelméleti színezetű egyenletproblémákból —
láttunk ilyeneket Diophantosról szóló fejezetünkben — saját
számelméletének megalkotásához jut. Itt tehát fellázad és
Diophantost túlhaladva, korszakalkotó lesz. A geometriában
azonban, noha felfedezi a valódi koordinátákat, csak gon-
dozója a görögöknek, a szó szűkebb értelmében «recipciál»:
a geometriát tekinti a matematika megingathatatlan tenge-
lyének és nem akar mást, mint a geometriát az algebra és
aritmetika eszközei segítségével támogatni.

Descartes álláspontja egészen más. Ő nemcsak tisztán
logikai szempontból tartja az algebrát és az aritmetikát a
geometriánál előbbre valónak, hanem ezek tárgyi szempontból
is fölérendeltek. Mennyiségtani tartalmuk sokkal általánosabb
jellegű és «többek közt» a geometriára is alkalmazható. És ez
a «többek közt» a punctum saliens. Mert ez a felfogás meg-
adta a görög értékelésnek a kegyelemdöfést. A geometria
megszűnt a matematika királynője lenni, a geometriai jellegű
matematika helyére az algebrai jellegű lépett.

Mivel legutóbbi állításunk bizonyára kissé meglepő és
azonkívül is egészen egyszerű problémákról van szó, meg kell
állnunk kis időre Cartesius felfogásának ismertetésénél annál
is inkább, mert művének címe meglepő módon «Geometria».
Hagyjuk tehát őt magát szóhoz jutni. Descartes a «Geo-
metria» (1637) első könyvének elején a következőket írja:

«A geometria minden problémája könnyen alakítható át
olyan kifejezéssé, hogy azután csak bizonyos egyenes vonalak
ismerete legyen szükséges a probléma megszerkesztéséhez.
És amint a teljes aritmetika csak négy vagy öt alapművelet-
ből épül fel, az összeadás, kivonás, szorzás, osztás és gyök-
vonás műveletéből, ez utóbbi pedig szintén bizonyos fajta
osztásnak tekinthető: éppen úgy a geometriában sem kell
mást tennünk, ha azt akarjuk, hogy keresett vonalak át-
alakítása ismert eredményre vezessen:

más vonalakat kell hozzájuk fűznünk, vagy belőlük le-
vonnunk;

ha pedig adva van valami, amit én azért, hogy a szá-

mokkal közelebbi kapcsolatba hozzam, egységnek fogok nevezni és amit általában teljesen szabadon választhatunk meg, továbbá még két másik vonal — negyedik vonalat kell keresnünk, amely úgy aránylik kettő közül az egyikhez, mint a másik az egységhez, az a szorzás művelete ;

vagy pedig — negyedik vonalat kell keresnünk, amely úgy aránylik kettő közül az egyikhez mint az egység a másikhoz, ez az osztás művelete.

Vagy pedig — egy, két, vagy több középarányost kell keresnünk az egység és valamilyen vonalak közt, úgy ez a négyzet-, vagy köbgyökvonás művelete stb.

S nem fogok félni attól, hogy az aritmetikából kölcsönzött fenti elnevezéseket bevezessem a geometriába, csak azért, hogy érthetőbb legyenek.

Meg kell itt még jegyeznem, hogy a^2 vagy b^3 vagy hasonló alatt csak egyszerű vonalakat értek, és csak azért nevezem ezeket négyzeteknek vagy köböknek, stb. hogy az algebrában szokásos kifejezéseket használjam.»

Vizsgáljuk meg tehát ezeket a mindjárt Descartes «Geometriájának» elején olvasható szavakat kissé közelebbről, Tartalmuk forradalmibb, mint ahogy azt első pillanatban gondolnók. Mert bennük már kifejezésre jut a legfontosabb koordinációs elv : az az elv, amely minden számhoz egy távolságot rendel, tekintet nélkül arra, miként jött létre az a szám. Az a mennyiség távolsággal jelölhető, az $(a+b)$ összeg vagy az $(a-b)$ különbség éppenúgy, de éppenúgy az $a.b.c.d...$ szorzat is vagy az $a:b$ hányados. De ez még nem minden. Az a^2 , a^3 , a^4 vagy a^n is hosszúságnak mondható és minden fokú gyök is. Ezzel megszabadult a geometria algebrai feladatától. Megdőlt a dimenziófogalom, helyesebben az a korlát, amelyet a dimenzió fogalma minden geometriai algebra útjába állított. A homogenitás elve már csak fikció és csak formálisan létezik. Mindennemű mennyiség egyforma dimenziójú, mert már csak számvonalakkal dolgozunk. És az ismeretlenek minden hatványa is csak távolság, illetve, egyelőre csak határozatlan pontja a számvonalnak. Mi már nem érezzük Descartes algebrai hőstettét olyan nagyszabásúnak, mert módszere már átment a vérünkbe. De ez egyelőre csak algebrai hőstett volt, amely a másik hőstettet, a koordi-

náta geometriát lehetővé tette. És igazat kell adnunk Zeuthennek, amikor azt állítja, hogy Descartes után lett a matematika kézműiparból nagyüzemmé. S ez még csak a «Geometria» és nem a «Calcul du Monsieur Descartes». Még visszatérünk erre az írásműre, amelyben az elmondottak még világosabban olvashatók.

Descartes forradalmi tettét nagyon helyesen értékelte. Néhány oldallal tovább azt mondja: «... Ezt a régiek úgy látszik nem vették észre, mert különben sajnálták volna a fáradságot, hogy róla annyi vastag könyvet írjanak, olyanokat, amelyekben már tételeik rendszeréből is kiderül, hogy nem voltak ama helyes módszer birtokában, amelyből a tételeik következnek, s csak azokat szedegették össze, amelyekre véletlenül rátaláltak.» Más helyen pedig: «Itt futólag azt szeretném megjegyezni, hogy a régiek aggályai az aritmetika kifejezéseinek geometriai használata ellen (ez csak onnan származhatott, hogy nem voltak kellőképpen tisztában a két tudományág összefüggéseivel) a kifejezésmód bizonyos homályosságára és nehézkességére vezettek...»

A második idézet Apolloniosra illetve Papposra vonatkozik. Az ítéletek bizonyára túlságosan kemények. Bizonyára részben túl is lőnek a célon. De csak azt akartuk velük bizonyítani, hogy mennyire tisztában volt Descartes tettének jelentőségével. A görögök, ismételjük, Descartes szerint nem voltak a «helyes módszer» birtokában. Nem látták az algebra és geometria azonosságát. Nem építettek ezért szintetikus úton az algebrából egy általános érvényű formatant, amely a dimenzióknak és a térnek sajátos, tartalmi kérdéseitől nem korlátozva olyan magasságig tonyosulhat, ahogy csak jól esik. De ha egyszer a kombinatorikus és algoritmikus varázserők következtében teljesen általánosan felépültek a formák, akkor mindig megvan a mélyen az ilyen általános algebra alatt fekvő aritmetikai és geometriai szabályokhoz való visszatérés lehetősége. Mindkettő pusztán alkalmazási területté süllyed.

Noha Descartes maga nem fogalmazta ilyen élesen véleményét, mégis kivehető mindez közvetlen követőinek kommentáraiból. A cartesiánus Erasmus Bartholin a következőket írja a «Geometria» 1659. évi kiadásának előszavában: «Kez-

detben szükséges és hasznos volt, ha segítséget kerestünk a tiszta gondolkodás-képességünk számára; a geometerek ábrákhoz menekültek, aritmetikusok számjelekhez, mások más segédeszközökhöz. De ez az eljárás, úgylátszik nem méltó a nagy szellemekhez, olyanokhoz, akik igényt tartanak a nagy tudós névre. Ilyen nagy szellem volt Descartes.¹ És a már említett «Calcul»-ben Descartes minden konkrét számtól vagy rajztól mentes algebra felállítását kísérelte meg.

Fűzzük itt még hozzá, hogy Descartes, külsőleg, úgyszólván teljesen azt az írásmódot «notációt» használja, amely mindmáig használatos. Mert Leibniz-cel kapcsolatban látni fogjuk, hogy sokszor matematikai összefüggések ismeretének fontossága adott körülmények közt háttérbe szorul az egyenértékű notáció fontosságával szemben. Azért van ez így, mert a matematika mégis csak valamilyen lullusi gondolatvarázslat, s a szellemek csak akkor jelennek meg, ha a helyes varázsigével idézzük őket.

Descartes tehát nem kisebb célt tűzött módszere elé, mint hogy legelemibb feltevésekből újjáépíti az egész matematikát, s ezek a feltevések nem geometriaiak voltak, mint Euklidesnél, hanem algebraiak. E módszerből a geometriának egyszer, valahogyan, kész eredményként kell kiadódnia.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy ez a remény, teljes általánosság szempontjából túlzott volt. Nagyrészt helyes volt ugyan, számunkra ma már magától értetődő, hogy minden algebrai formát görbeként¹ és minden görbét algebrai formaként értelmezhetünk. De ez az azonosság csak a legújabb időben, elsősorban Hilbert óta, tekinthető teljesen bizonyítottnak. Miként akarja Descartes, matematikáját, amelyben minden szám egy vonal, felépíteni? Erről is pontos felvilágosítást ad. Azt mondja: «Ha meg kell oldani valamilyen problémát, akkor azt először is már befejezettnek tekintjük és minden, a szerkesztéshez szükségesnek látszó vonal számára, tehát az ismeretlenek és többiek számára egyaránt, jelöléseket vezetünk be. Akkor, a nélkül hogy ismert

¹ A görbe szó itt teljesen általános értelemben használjuk. Ha valamilyen formában kettőnél több változó van, akkor természetesen felületet, vagy testet, vagy pedig még magasabb rendű alakzatot jelent.

vagy ismeretlen vonalak közt különbséget tennénk, olyan sorrendben, amint a vonalak kölcsönös összefüggése a legtermészetesebb módon megkívánja, átkutatjuk a feladat nehézségeit mindaddig, amíg megtaláltuk a módját, hogy egy és ugyanazt a mennyiséget két különböző módon állítsuk elő. Ez egyenletre vezet, mert a két előállítási módban a megfelelő mennyiségek azonosak. Annyi ilyen egyenletet kell találnunk, ahány ismeretlen vonalunk van; ha nem tudunk annyit találni, noha nem hagytunk ki semmit abból, ami a feladatban megvan, akkor a feladat nem teljesen határozott...

E helyen az az egyértelmű követelés a fontos, hogy fel kell tételezni a probléma befejezettségét, és hogy addig kell vizsgálni a «vonalak» összefüggését, amíg egy vagy több egyenlet felírásához megtaláltuk az eszközöket. Mindkettő alapvető követelménye az analitikus geometriának és az analitikus módszernek általában. Bizonyos tételek, kapcsolatok, összefüggések ismerete nélkül nem tudjuk átvizsgálni őket és nem tudunk egyenleteket felírni. Ez a Descartes által az algebraiban képviselt szintetikus ideálnak éppen az ellenkezője. Ugyanis mindkét módszert alkalmazni kell. Engedni kell, hogy az algoritmus vezessen, amíg kiépül a formáknak egy lehetőleg hiánytalan világa, amelyet visszafelé analitikusan átvizsgálunk. Vegyük példának az összes $y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ alakú egyenletet. Rájövünk, hogy mindegyik «harmadrendű görbét» jelent és tiszta algebrai úton megtaláljuk e görbéknek általános és közös tulajdonságait, például azáltal, hogy feltesszük a kérdést: hány metszéspontja van egy ilyen görbének egy $y = b_1x + b_2$ alakú egyenes-sel. Mert erre választ kapunk tiszta algebrai, algoritmikus úton, ha két ismeretlenes egyenleteknek tekintjük a két kifejezést. De ha fordítva, egy görbe egyenletét akarjuk meghatározni, olyan görbéét, amelynek csupán mechanikus előállításmódját ismerjük, akkor mindenféle tétel, arány stb. segítségével kell olyan összefüggéseket keresnünk, amelyeknek a görbe minden pontja megfelel. Mégpedig két egyébként eltérő kifejezés egyenlőségeként, «egyenleteként».

De meg kell állapítanunk, hogy a «koordináta» szót Descartes még nem használja. Ezt a szót a XVII. század

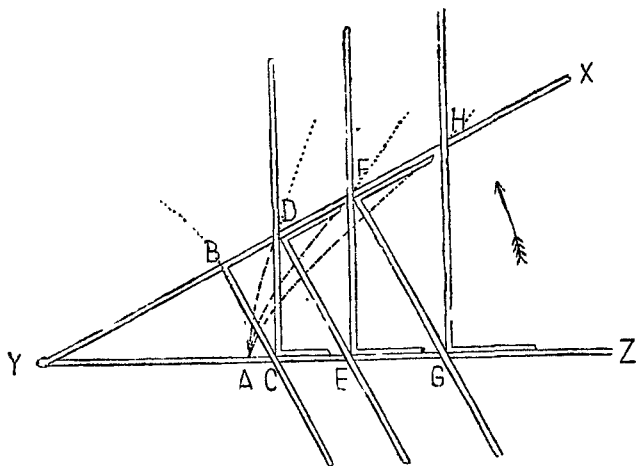
kilencvenes éveiben alkotta Leibniz annak jelölésére, amit Descartes «alapvonalnak» mond. De maga Descartes a ma Descartes-félenek nevezett derékszögű koordinátarendszert is nagyon ritkán használta. Ő mindenféle ferdeszögű, a mi szemünk számára nagyon bonyolultnak látszó koordinátákat alkalmaz. Az egymáshoz rendelés, a koordinálás sem történt nála, mint már mondtuk, a mai értelemben. Ez azonnal kiderül a «Geometria» második könyvéből, amelyben a görbéket behatóbban vizsgálja az analitikus lupével és ahol magasabb és magasabb rendszámú görbék «végtelen soráról» beszél és rendszámukat egyenletükben előforduló legnagyobb hatványkitevőből származtatja. Mert, mondja, «... ahhoz, hogy a természetben egyáltalán előforduló összes (görbét) összefoglalhassuk és sorban csoportokba oszthassuk, legjobban, ha azt emeljük ki, hogy geometriainak mondható görbe, vagyis minden olyan görbe, amely szigorú és éles mérték alkalmazását teszi lehetővé, és egyenes pontjai közt szükségképpen olyan összefüggéseknek kell fennállnia, amely egy és csakis egy egyenlettel jellemezhető teljesen és ez a görbe az első és legegyszerűbb csoportba sorolandó ha egyenlete csupán a két határozatlan mennyiségből alkotott téglalapot¹ vagy pedig az egyik négyzetét tartalmazza (ehhez az első csoport-hoz csak a kör, parabola, hiperbola és ellipszis tartozik), a második csoportba tartozik viszont akkor, ha egyenlete a két határozatlanban (mert kettőre van szükség, hogy egyik pont viszonyát a másikhoz leírhassuk) avagy legalább egyikükben harmad- vagy negyedfokú, a harmadikba akkor, ha az egyenlet ötödik vagy hatodik hatványt tartalmaz stb. és így a végtelenig.»

Ez az alapvető részlet néhány kiegészítő megjegyzésre szorul. Már említettük, hogy Cartesius tisztában volt azzal, hogy a mindig összetettebb görbék sorozata határtalan. Akkor «összetett» azonban egy görbe, ha előállítása mindinkább távolodik a körzövel és vonalzóval való előállíthatóságtól. Ennek bemutatására Descartes egy szerkezetet ír le, amelyet a következőkben mi is bemutatunk.

Az Y pont forgáspont, amely körül az YX szár az YZ

¹ A. m. a két ismeretlen szorzata.

helyzetéből, a nyíl irányában kifordítható. A szárazon tetszés szerinti számú vonalzó csúszik, amelyek a kiindulási helyzetben olymódon fekszenek egymáson, hogy a B, C, D, E, F, G és H pontok az A ponton egybeesnek. Ha most a nyíl irányában forgatunk, akkor a vonalzók a megmaradt szabadsági fokuknak megfelelően eltolódnak, és a B, D, F és H pontok különböző görbéket írnak le, amelyek mindegyike «egy fokkal összetettebb mint a megelőző». A B pont kört ír le. S bár nem tárgyalhatjuk a fenti szerkezet adta problémákat



6. ábra.

részletesen, mégis meg kell állapítanunk, hogy Descartes a görbéket dinamikus illetve phoronomikus úton keletkezőknek képzelte. A ma már feledésbe ment phoronomia kifejezés elvont mozgástant jelent. Descartes azt is mondja más helyen, hogy foksámukra való tekintet nélkül minden görbét be kell a geometriába vonni «feltéve, hogy egy folytonos mozgással leírtnak tekinthetők, vagy több, egymás után következő olyan mozgás által, amelyek mindegyikét a megelőző teljesen meghatározza ; mert ilyen módon mindenkor határozott képet kaphatunk az ilyen vonal méreteiről.» Továbbá úgy

véli, hogy a régi görögöket csupán egy történelmi véletlen riasztotta el magasabbrendű görbék vizsgálatától, mivel először a spirálist és a quadratrixet állították elő phoronomiai eszközökkel és azokat vizsgálták. De ezek a görbék csak «olyan két, egymástól különböző mozgással állíthatók elő, amelyek nincsenek egymással pontosan mérhető kapcsolatban». Mai nyelven tehát nem írhatók le algebrai függvényekkel, vagyis transcendensek. De ezt gondolták minden, a kúpszeletek foksámát meghaladó görbéről is, noha nem igaz, és ezért nem folytatták a kutatásokat.

Fent idézett helyhez csupán azt kell még hozzáfűznünk, hogy Descartes azért vonta össze a harmad- és negyedfokú, valamint az ötöd- és hatodfokú görbéket egy csoportba, mert megfelelő átalakítással mindig módja van a negyedfokot harmadfokká, a hatodfokot ötödfokká redukálni. Ma már általában nem használatos ez a Cartesius-féle csoportosítás, és a foksámot, mint már említettük, a görbe egyenletében előforduló legmagasabb kitevővel tekintjük egyenlőnek.

Descartes továbbá azt mondja egy másik helyen, hogy azért választja az egyenest, hogy «pontjaira vonatkoztathassa egy görbe vonal pontjait.» Egy pontot választ továbbá ezen az egyenesen, és ettől mint kiindulóponttól kezdendő a számítás. «Azt mondom — folytatja — hogy mindkettőt választom, mert egészen tetszésem szerint vehetem fel mindkettőt; mert megfelelő választással elérhető, hogy az egyenlet rövidebb és egyszerűbb legyen, de az is könnyen bebizonyítható, hogy mindig ugyanazt a vonalfajtát kapom, akárhogyan történt is a választás».

Azért beszéltettük olyan sokszor és olyan részletesen magát Descartes-ot, hogy mindenkinek fogalma lehessen arról, mennyire tisztában volt ő maga módszerének lényegével. Gyakran olvashatunk olyan leírást, amely a tényeket pozitív vagy negatív irányban meghamisítja. Vagy azt tulajdonítják Descartes-nak, hogy nem volt elődje, a semmiből teremtette ideáit, vagy azt állítják, hogy a mai értelemben vett analitikus geometriát csak megsejtette. Saját szavai szerint egyikről sem lehet szó. Ismeri elődjeit egészen Apolloniosig, de éppen olyan pontosan tudja azt is, hogy filozófiájával összefüggésben valami újat is alkot. «Geometriája» végén

az analízist teljesen algoritmus módjára fogja fel, és az analízis alátámasztására szintetikus úton az egyenletek olyan elméletét építi fel, amely magában véve is érdekes. Világosan látja közben, hogy az egyenlet fokszámából következik a gyökök száma¹ és ezek negatívak vagy (így mondja) «hamisak» is lehetnek. Mellékesen bevezeti a «reális» és «imaginárius» kifejezéseket is és felfedezi a róla elnevezett előjelszabályt. A «Geometria» végén azt is mondja, hogy nem volt szándéka vastag könyvet írni, ellenkezőleg azon igyekezett, hogy kevés szóval sokat mondjon. Módszerével — mondja körülbelül — a geometria valamennyi magasabbproblémáját meg lehetne oldani, hisz a matematikában nem nehéz, az első láncszemek ismerete alapján a többbit megtalálni. «És remélem, — fejezi be — hogy unokáink nemcsak azért lesznek hálásak nekem, amit itt kifejtettem, hanem azért is, amit szándékosan kihagytam, hogy nekik a felfedezés örömét meghagyjam.»

Az utolsó mondat párját aligha találjuk meg a tudomány történetében. Mert feltétlenül becsületes, szubjektív és objektív szempontból egyaránt. Descartes egyedül álló, uralkodó szellem, grandseigneur a tudomány legfelső részeiben is. Műveiből szinte egy arisztokratának bőbeszédűség iránt érzett ellenszenvét érezzük ki. Ismeri a dolgokat, tisztában van velük és ez kielégíti. Mi köze másnak gondolataihoz? Ez a gondolkodás — «cogito, ergo sum» — a világ létének bizonyítéka. De katonatiszt is, ismeri a kötelesség súlyát. Noblesse oblige. Beszélnie kell. Tehát elmondja a legfontosabbat, a különlegest, a megismételhetetlent. De csak egyszer, legalábbis a matematika terén. Hisz az egész «Geometria» csak függeléke egy sokkal hatalmasabb kinyilatkoztatásának, a «Discours sur la methode»-nak. Nem érdeklik a felfedezések vagy eredmények, csupán az eszközök tökéletesítése. És a «Geometria» megjelenése után közvetlenül a következőket írja Mersenne-hez: «A geometriával kapcsolatban ne várjon tőlem többet. Jól tudja, hogy már régen irtózom a vele való foglalkozástól.» Más tervei vannak. «Ha valaki figyelmesen vizsgálja gondolataimat — írja a «Regulae» IV. könyvében — hogy egy a matematikától lényegesen eltérő

¹ Ez az «algebra alaptétele». Elsőnek Girard mondta ki 1629 ben.

tudomány lebeg szemem előtt. A matematika inkább burkolata lehetne, mint része». Ez az utolsó vallomása sokat elárul. Mert ez igazolja mindazt, amit Descartes-ban korszakalkotónak tartunk, ha a szakszerűtől elvonatkozva kissé magasabb szférába emeljük: Descartes az első, tetteinek teljesen tudatában levő megalapítója egy általános matematikának, amelyet «eszközös matematikának» is mondhatnánk. A matematika célhoz vezető út, módszer, burkolat, eszköz. S e gépet ki kell építeni, finomítani kell, csiszolni, tökéletesíteni, hogy minden «fordulatszámra» képes legyen.

Algoritmus és írásmód, a legáltalánosabb forma vizsgálata, aritmetika és geometria testvéri egyesülése azok a követelmények, amelyek Descartes-nak a kezdetet jelentik a továbbhaladáshoz. De a gép tengelye, amely körül az egész forog: a koordinátatengely. Ez teszi lehetővé, pontról pontra való vonatkoztatással az egyenes meggörbítését és a görbe ki-egyenestítését. S habár — gondolja Descartes — görbe és egyenes viszonya sohasem lesz teljesen tisztázható, mégis kezünkben a gép, amellyel a probléma közelébe férközhetünk. Mert az egyenes adja az egységet, híd lesz a mértékszámhoz, és ezzel magához a számhoz is. Ettől kezdve két végtelen távol fekvő szféra tükröződik egymásban, kölcsönzi egymásnak sajátos erőit és lehetőségeit. A «gondolat» és a «kiterjedt» szférái ezek, hogy a filozófus Descartes szavaival éljünk. Fogalom és szemlélet, mondanók ma. Így lesz a magasabbrendű algebrai formából egyszer szám, máskor idom. És egy ismételt, szakadatlan és újra kezdhető átugrás vezet az algoritmustól a görbéhez és a görbétől az algoritmushoz. De ezzel minden «forma», minden természeti jelenség leírható és matematikai eszközökkel megfoghatóvá válik. És a dinamikából a statikába mehetünk vissza és a nyugalomból a mozgásba.

De egy helyen Descartesnál már ismét új világok csírája mutatkozik, amelyet ő maga is ilyennek érez. Mert azt mondja: «Azt hiszem mindazt előhoztam, ami görbe vonalak elemi ismeretéhez szükséges, ha még általában kifejtem a módszert, amely szükséges, hogy egy görbe bármely pontjához olyan egyenest húzhassunk, amely derékszögben metszi a görbét. S ki merem mondani, hogy ez nem csak a legáltalánosabb és

leghasznosabb feladat, amit csak ismerek, hanem ez az, amit a geometriában mindenkor tudni vágytam». Ezzel teljes általánosságban feltárult az érintők, normálisok problémája, mégpedig analitikus-geometriai formában. Descartes tudja, hogy nem unalmas játékról van szó. Mert átható pillantásával látnia kellett, hogy az érintők, a normálisok szabják meg a görbék törvényei. Ezért akarja a normális egyenletét a görbe minden pontjában ismerni. Mert ezzel megvan az érintő is, és az érintő hajlásszöge a koordinátákkal vagy az alapegyenessel. Megint egy gépezet: az érintő egyenletében az egyik változó helyébe valamilyen szabadon választott értéket teszünk és megkapjuk a görbe megfelelő pontjában az érintőnek és a vízszintes tengelynek a hajlásszögét. De eddig, legalábbis kifejezetten, nem jut el Descartes kutatásai során. Ilyen megfontolások számára csak a feltételeket teremti meg és pusztán algoritmikus eszközökkel azon igyekszik, hogy elhárítson az útból minden nehézséget.

Befejezésül válasszuk el Descartes módszerét az előző koordinátás kísérletektől. Descartes tette meg az utolsó lépést e kérdés különleges fejlődése útján. Szabadon választja meg alapvonalait, koordinátatengelyeit, szabadon választja meg a kezdőpontot, és az analizálandó idomot pontról-pontra a koordinátatengelyekre vonatkoztatja. A koordinátatengelyek azonban már burkolt számegyenesek, amelyek minden számot jelenthetnek, mert a számok immár mindenkor vonalak, bármilyen számításból keletkeztek is. Összegek, különbségek, hatványok és gyökök csak számok, mindenkor csak számok. De ezzel bármely, tetszőleges, két ismeretlenes algebrai egyenlet hosszúságok összefüggésének rendszerévé lesz, tehát a megválasztott koordinátarendszerre ekvivalens és egy-egyértelmű módon leképezhető. Fordítva, minden idom és görbe, bármennyire bonyolultnak keletkezzék is, akárhány mozgásból tevődjék is össze tisztán phoronomia-i szempontból, egyenlet alakjába öltöztethető és az egyenlet hiánytalanul tartalmazni fogja a görbe törvényeit. De mivel megtaláltuk a számnak és formának mintegy közös nevezőjét, a hosszúságot, most már szabad a két, egymástól ég és föld távolságban levő birodalomban tovább építeni, szabad összetenni vagy felbontani, a megfelelő törvények szerint.

Az egyenlettel az aritmetika és algebra módszerei szerint számolhatunk, éppen úgy, mintha csupán számok közt fennálló összefüggéseket jelentenének. Az idomokkal kapcsolatban olyan szerkesztéseket végezhetünk, amilyeneket a geometria törvényei megengednek. Mindenkor, bármely helyen és bármely állapotban, a két birodalom egymástól független kezelése mellett is meg kell maradni az egyezésnek, ha csak a görbe és az egyenlet kapcsolata eredetileg helyes és teljes volt. Janus-fejű algoritmus keletkezett tehát, kettős gépezet, kényszerített összefüggéssel. És Descartesnak ez a hőstette uralkodik, mint tudjuk, «analitikus geometria» néven a matematikai gondolkodáson mind a mai napig. Sőt: a kettős algoritmus lett az eszköz, amellyel, az eszközt a fizikában, mechanikában és technikában alkalmazva, a Nyugat embere megváltoztatta Föld bolygónk arculatát.

TIZENKETTEDIK FEJEZET.

Gottfried Wilhelm Leibniz.

Matematika mint kozmosz.

Ha e fejezet számára egész könyv állna rendelkezésünkre, fáradság nélkül meg tudnók tölteni. Az a szédítő iram, amellyel a matematika a tizenhetedik században, a mindent felforgató politikai események közt előretört, páratlan a tudomány történetében. Ha kiemeljük a politikai eseményeket, nemcsak a harmincéves háborúra gondolunk. XIV. Lajos rablóhadjáratai, és az a hatalmas küzdelem, amely Anglia és Hollandia közt a tengeri hatalomért minden tengeren folyt, szintén betöltik ezt a századot és a matematika vezéregyéniségei, mint Jan de Witt, szintén részt vesznek bennük. Így Hudde is, aki Amsterdam polgármesterségével rárótt hazafias kötelességét fontosabbnak érzi, mint matematikai geniejét és így önként válik ki a nagy matematikusok sorából. Ilyen elhatározások elé került Leibniz és Newton is; a század végén a törökök betörése Európába, a Keletrol elömlő áradat a nyugati matematikának éppen tető alá került épületeit elmosással fenyegette és azzal, hogy újabb évszázadokra izsappal temeti be az egészet.

De kiderült, — és ezt «hősi törvénynek» mondhatjuk, — hogy nagyon szűk keretek közt érvényes csak a közmondás: «inter arma silent musae». Még a lírára, még idillek ecsetelésére sem igaz, hogy múzsái hallgatnak a fegyverzajban. Legkevésbé érvényes, a tudomány történetének tanúsága szerint, szellemi téren, ahol igazi férfiak működnek. És ide tartozik elsősorban a matematika tudománya. A kultúra története könnyebben igazolná azt a tételt, hogy nagy események hullámaina rezonál a nagy alkotók lelke és felélénkölve rezeg velük. S miként a nagy idők asszonyai sem vonják ki magukat természetes hivatásuk alól és boldogan adnak az emberiségnek új embereket, nehogy a történelem véget

érjen, éppen úgy megfeszítik a férfiak is végső erejüket, családért és hazáért, mindegyik a maga helyén, hogy saját világuk győzedelmes uralmához hozzájáruljanak.

Nyomós okai vannak, hogy Leibniz-cel kapcsolatban ilyen gondolataink támadnak. Mert vele megint olyan ember lépett a porondra, aki tudatosan indult el, hogy szétszakított népét újból a magasba segítse. És Leibnizen újból megmutatkozik, mint tudományunk elején Pythagorason, hogy égő nemzeti érzés a legkiterjedtebb és legáltalánosabb nagyvilági érvényesülést foglalhatja magában, sőt kell is magában foglalnia; mert csak az az ember, aki gátlástalanul engedelmeskedik személyisége törvényeinek, aki lényének minden erejét összefogja, tud magából olyan szellemet árasztani, amely — miként Goethe Schillerről mondja — előbb vagy utóbb leküzdi az eltompult világ ellenállását.

De ne vágjunk elébe az eseményeknek, mert Leibniz eredményeinek és jelentőségének megértésében a problémák általános helyzetének megismerése fontosabb, mint bármely más matematikus esetében. Annál is inkább, mert kortársain kezdve két évszázad nagyon átlátszó okokból azon igyekezett, hogy Leibniz alakját és művét elhomályosítsa. De erre sem terjeszkedhetünk ki e helyen, szűkre kell szabnunk mondani-valóinkat. Azzal akarjuk először jellemezni a tizenhetedik század matematikájának helyzetét, hogy emlékezetünkbe idézzük Descartes gúnyos kijelentését a görög matematikusok «vastag könyveiről» és azt, hogy szemükre vetette, hogy nem rendszeres kutatással jutottak eredményeikhez, hanem csak útközben szedegették fel azokat. Alig egy emberöltővel később Leibniztől halljuk, hogy mennyire korlátolt Descartes úr geometriája, a legfontosabb problémák egyáltalán nem olyan egyenletektől függnek, mint amilyenekre Descartes úr egész geometriája visszavezethető és így tovább. Már a «Descartes úr» kifejezés is megmutatja, hogy milyen rövid volt a fejlődés ideje. Leibniz úgy vitatkozik Descartes-tal, mintha az még élne. S végül annyira megy, hogy azt mondja: «Nem tudtam elfojtani a nevetést, midőn azt láttam, hogy ő (a Cartesius-tanítvány Malebranche) az algebrát¹ tartja a tudományok közt a legnagyobbnak és legfenségesebbnek.»

¹ Értve ezalatt a véges mennyiségek algebráját.

Ne taglaljuk itt azt, hogy mennyire túllőtt a célon Descartes is, Leibniz is. Az itt elmondandókból úgyis ki fog derülni. De mutassunk rá, hogy mennyire szubjektíven érezte ez a két úttörő a fejlődés ütemét. És látjuk, hogy azt minden túlzás nélkül «rohamosnak» mondhatjuk. Mert különben értelmetlen volna, hogy az egyik kigúnyolja elődjei egész teljesítményét, a másik viszont alig negyven év múlva csak nevetni tud ezen a szellemi forradalmon.

Azon kell tehát majd igyekeznünk, hogy pontosan leírjuk mindazt, ami új, és mindazt ami összekötő jellegű ebben a felfedező korszakban. Hisz ez volt talán a legtermékenyebb az összes addig eltelt korszakok közt. De ehhez nagyon széles körre kell kiterjeszkednünk. Igaz, csak abból a szempontból, amely Leibniz-cel és a végtelen matematikájával, az infinitézimálszámítással van kapcsolatban. Különben lehetetlen volna ezt a számolásmódot megértenünk és Leibniz tetteinek világgraszoló jelentőségét sem tudnók helyes világításba helyezni.

Archimedesről szóló fejezetünkben tudjuk, hogy a végtelennel való foglalkozás hellén földön sem volt ritkaság és hogy ez Archimedes által hihetetlen lendületet vett. Ez a lendület nem vezetett általános módszerhez, magukban álló problémák megoldásába fulladt és nem bővült lényegesen, noha az antik kor Krisztus utáni idejében Pappos, ötödik könyvében, izoperimetrikus problémákig jut el. Ezek pedig bizonyos fokig rokonai azoknak a mai feladatoknak, amelyek egy függvény szélső értékeit keresik.

Beszéltünk az ókori matematika recepciójáról is. És azt is mondtuk, hogy ez úgyszólván fordított időrendben folyt le. Ez az állításunk fennáll, mivel Leibniz és Newton tekinthető Archimedes receptorának vagy modern megfelelőjének. Igaz, e recepciónak nem jelentéktelen története is van, és ezzel akarunk most foglalkozni. Annak okát is meg fogjuk tudni, hogy az elődöket miért nem tekinthetjük Archimedes-szel egyenrangúnak. Őket ugyanis Demokritos-szal, legfeljebb azonban Eudoxos elődeivel tekinthetjük spengleri értelemben kulturszinkronoknak.

Első helyen Galileit és tanítványait kell említenünk. Második helyen Keplert, noha élsősorban vele fogunk foglal-

kozni. Utaljunk arra, hogy az új, infinitézimális matematika megszületésénél a csillagászat és a fizika is közreműködött. Igaz, e kalkulus egyik különleges változatánál, amelyet inkább a végtelen-probléma phoronomikus-dinamikus felfogásának mondhatnánk, s amely Isaac Newtonban találta meg legragyogóbb képviselőjét. A fausti szellem ez oldalával már Oresmei Nicolevel, Bradwardinusszal, Cusanusszal kapcsolatban megismerkedtünk, «formák» olyan leírása ez, mozgások olyan analízise, amely mindig határos volt a nyugaton is jól ismert Zenon paradoxonaival. Keplert, ezt a furcsa csavargó génuszt külső körülmények hozták e problémákkal kapcsolatba. Az 1612. év Linznek és az egész szomszédos Dunavölgy bortermő vidékeinek különlegesen gazdag szüretet hozott. És midőn Kepler e konjunkturából — ma így neveznők — magának is hasznót akart húzni és a folyamon felfelé odavontatott hajóról olcsó pénzen néhány hordó bort akart vásárolni, akkor csodálkozva látta, hogy a hordók tartalmának meghatározására az eladó egy beosztott rudat dugott le a hordó nyílásán, és a bor felszínének a szembenlevő dongától mért távolságából számította ki a hordó tartalmát. Kepler tudta ugyanis, hogy a Rajna vidékén a hordók tartalmát korsókkal mérték meg, vagy pedig, ha ilyen mérőrudat használtak, akkor mérések sorozatára volt szükség a hordó ürtartalmának meghatározására. Három napig okoskodott a forgási testnek tekinthető hordók ürtartalmának meghatározásán, és megoldotta a feladatot. Közben — a legenda szerint — más szempont is érdekelte. Alig tudták ugyanis, hogy a nagy mennyiségű bort hova tegyék. És Kepler azt remélte, hogy sikerül majd olyan hordóalakot szerkeszteni, amelynek felülete ugyanakkora, tehát ugyanannyi anyag felhasználásával készül, de ürtartalma nagyobb lesz, mint a használatos hordóknak. Ennek persze sok előnye lett volna, hisz a donga faanyaga és a kádármunka akkor is igen drága volt, amint hogy ma is igen drága. De meggyőződött arról, hogy a «*dolia Austriaca*», az ausztriai hordók alakja megközelíti a lehető legjobbat, és mindenesetre lényegesen jobb, mint a Rajna vidékén használatos hordóké. Ez készítette a következő kijelentésre: «*Quis neget, naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione docere geometriam?*»

Ki tagadhatja, hogy az emberi természet maga, minden fejtörő, racionális megfontolások nélkül is, tanítja a geometriai igazságokat? Így kellene ezt a meglepő kijelentést szabadon lefordítanunk, és Kepler megjegyzi még valahol, hogy e közben az embert kizárólag a szeme (szemmértéke) és a készült tárgy szépsége irányítja. Tehát az intuición és esztetikus arány- és formaérzék szinte természetes követelményei a geometriai feltaláló szellemnek. Kétszeresen meglepő e kijelentés, mivel attól a Keplertől származik, akit az utókor szívesen tekint hideg, száraz számolónak és kőkemény racionalistának. Nem mulaszthatjuk el itt azt a megjegyzést, hogy lépten-nyomon meglepetésben van részünk, ha minden hivatott vagy kontár történetírót kikapcsolva, szellem-történeti kérdésekben magukat a forrásokat vizsgáljuk. Érthető, hogy pártoskodók gyűlölete vagy kedvezése eltorzítja a jellemzéseket és ingadozóvá teszi a történelmet. De egy ilyen ingadozó történetírás egy egész nemzetet kimozdíthat jövője irányvonalából különösen akkor, ha a démoni Keplert száraz racionalistának, a tettek emberét, a fausti Leibnizet pedig begyepesedett könyvmolynak, sőt a liberális felvilágosodás vezetőjének rajzolja. Nagy szellemek mindenkör komplex természetűek, sőt irracionálisak, különben nem érthetnék meg világuk szintén komplex, irracionális szerkezetét. Műveikben tehát könnyen akadhatunk nagyon eltérő hipotéziseket alátámasztó részletekre. De a történelmi pszichológus számára vannak kiváltságos, előnyben részesítendő részletek is. Ezek olyan kitételek, amelyek egy csapásra, villámszerűen megvilágítják a hős világnézetének sötét hátterét, és amelyek éppen egyértelműségük következtében alkalmatlanok a magyarázgatásra. Egy megátalkodott intellektualista sohasem állíthatta volna Keplerhez hasonlóan azt, hogy maga a természet taníthat maximum-feladat megoldására. Erről legfeljebb azt lehetne mondani, hogy túlzó módon intuicionális vagy metalogikus felfogás.

De félbe kell szakítanunk módszer-vitánkat, bármilyen érdekes volna is a folytatása. Megállapítjuk tehát, hogy Kepler többé nem tudott a boroshordók problémájától szabadulni, és végül 1615-ben, Linzben kinyomatta korszakalkotó művét «Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, accedit Sterio-

metriae Archimedaee supplementum» címmel. Előzőleg azonban egy túlböles augsburgi kiadó megtagadta a mű kiadását, mondván, hogy egy ilyen úgyszólván kompromittáló témát még egy nagyon híres ember sem emelhet tudományos színvonalra. Ez a «boroshordók új sztereometriája» amely címe szerint az archimedesi sztereometria kiegészítője, megcáfolva az augsburgi kiadó véleményét, doliometria néven örök életű lett. Tartalma nagyszerű. Nem kevesebb mint 92, Archimedes által még nem ismert forgási test kubaturáját végzi el Kepler, s a testeknek sorban alakjuknak megfelelő neveket is ad: az almaalakú, a citromalakú, az olajbogyó alakú stb. Művének további részében azután a boroshordókkal foglalkozik, és problémája természete maximumfeladatokhoz vezet. Itt Oresmei Nicolenél is határozottabban rájön arra a körülményre, hogy egy függvény változása a maximum közelében mindinkább megszűnik.

Itt sem időzhetünk sokáig, figyelmünket e kor másik markáns személyisége felé kell fordítanunk, a jezsuita Bonaventura Cavalieri felé, aki professzor Bolognában és itt adja ki 1635-ben híres művét «Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota» címmel. Galilei tanítványa volt és «az oszthatatlanok geometriája» nagy feltűnést keltett. Igaz, hogy már a kortársak is azt mondták róla, hogy megérdemelné a «sötétség» nagydíját, ha ilyen egyáltalán kiosztásra kerülne. Már láttuk egyszer, hogy a kortársak a «sötét» jelzővel illették valakit. Herakleitossszal esett meg. És meglepő módon, majdnem ugyanabban az összefüggésben, vagyis a folytonosnak, a kontinuumnak dinamikus fogalmazása miatt. Igaz, ma is el kell ismernünk, noha az infinitézimális számításoknak két évszázada van mögöttünk, hogy Cavalieri műve nem lehetne példaképe a világos fogalmazásnak. Ez annyira megy, hogy a legfőbb fogalmat, az «oszthatatlan elemeket» — így kellene ma az «indivisibilia» kifejezését fordítani — sehol sem definiálja, és ezáltal az összes, nagyon merész következtetése szinte a levegőben lóg. Miért tette ezt? mindmáig titok, amelyet sokféleképpen akartak megfejteni annál is inkább, mivel Cavalieri eredményei, módszerétől eltérően, nagyon is helyesek és egyértelműek. Vannak történettudósok, akik azt hiszik, hogy

Cavalieri, szerzetes lévén, a Galilei körül lejátszódott események hatása alatt nem mert olyan elméletet teljesen leírni, amelyet — esetleg — forradalminak tarthattak volna. De nem merülünk el ilyen bonyolult történelmi részletkérdésekben, csupán arról számolunk be, hogy a tárgy még az akkori idők számára is igen nagy nehézségeket rejtett. És hogy a renaissance óta szokássá vált több értéket tulajdonítani a találat-konyságnak mint a logikus szigorúságnak. Ez megegyezik mindazzal, amit a görögök recepciójáról mondtunk. A fausti út jobban hasonlít a prometheusihoz és dionysosihoz mint az euklidesi vagy apolloniosi úthoz.

Cavallieri tehát minden geometriai idomot vonalak vagy síkok összességének tekintett, a szerint, hogy síkidomról vagy testről volt szó. A «summa omnium...» egy bizonyos «folyás» által keletkezik, és ez az egyik párhuzamos vonalat a másikba, az egyik párhuzamos síkot a másikba viszi át. Egy későbbi művében Cavalieri a felületeket képszerűen szövetekkel, a testeket pedig könyvekkel hasonlítja össze. Az oszthatatlan elemek geometriája hetedik könyvének első mondatában azután előírja, hogy síkbeli és térbeli idomok tartalma csak akkor egyforma, ha a két, egyforma magasságban készült metszet egyenlő hosszúságot illetve egyforma területet ad. Ez Cavalieri híres alapvető tétele, amelyet már az iskolában tanulunk és amely minden térfogatmérésnek alapja. De tulajdonképpen minden területmérésé is. Évszázados használata során úgyyszólván teljesen elvesztettük azt az érzékünket, amely megmutatná, hogy ez az elv nem csupán egy infinitézimális megfontolást jelent, hanem logikai veszélyei is vannak és önmagában véve paradox is. Ezt rögtön meglátjuk abból a támadásból, amelyet Guldin intézett Cavalieri ellen. Az a Guldin, akiről a «Guldin-szabály»¹ a nevét kapta, noha ezt a szabályt nem ő fedezte fel, hanem már a klasszikus ókorban is ismeretes volt. Guldin tehát a következőket hozza fel Cavalieri ellen. Rajzoljuk meg egy tetszésszerű ABC háromszögben a BD magasságot. Ez a háromszöget két, egymástól általában nagyon különböző derékszögű három-

¹ «A forgási test köbtartalma egyenlő a létrehozó idom területének és súlypontja útjának szorzatával.»

szögre bontja. Húzzunk az alappal párhuzamos vonalakat és húzzunk az alapra merőlegeseket azokon a pontokon át, amelyekben az előbbi párhuzamosok az AC és BC oldalakat metszik. Ezek a merőlegesek akkor páronként egyenlők, minthogy párhuzamosok közé rajzolt párhuzamos egyenesek. Ezt az eljárást, ha végtelen sok párhuzamost húzunk az alappal, végtelen sokszor ismételhetjük, és végül azt találjuk, hogy az ABD háromszög ugyanazokból az oszthatatlan részekből áll, mint a vele egyáltalán nem egyenlő BCD háromszög. Ezzel önmagában megdől az egész «summa omnium linearum» elven alapuló következtetési módszer. Cavalieri 1647-ben «Exercitationes geometricae sex» címen válaszol ezekre és más ellenvetésekre és a fentebb részletesen leírt támadással kapcsolatban megjegyzi, hogy kifejezetten előírta: az «oszthatatlanoknak páronként egyenlő távolságban kell lenniök, hogy a területek egyenlők legyenek». De ez a vita elriasztó jel a végtelenvizsgálatok éjszakájában. Mert amennyire helyes Cavalieri válasza, annyira cáfolhatatlan Guldin kifogása is. Aktuális végtelen feltételezésével antinómiák közé kerülünk, és az ilyenek áthidalására hivatott halmazelméletben a legújabb időben Zermello, Hausdorff és mások vizsgálatai még sokkal súlyosabb paradoxonokra bukkantak.

Helyszűke és e mű természete következtében nincs módunk arra, hogy az infinitézimális matematikának akárcsak féligmeddig teljes történetét leírassuk. Azzal a megjegyzéssel kell beérnünk, hogy Kepler és Cavalieri után sem tűnt el a probléma a matematikusok napirendjéről. Ellenkezőleg: egyéni teljesítményeknek majdnem szakadatlan láncá kapcsolódik az általunk említett kezdeményezőkhöz és Fermat, Pascal, James Gregory, Wallis neve e problémakörrel van kapcsolatban. Ki kell emelnünk, hogy a «határátmenet» problémáját, vagyis a véges mennyiségektől a végtelenhez és vissza vezető átmenet problémáját teljes szélességében az angol Wallis tekintette át és oldotta meg.

Másrészt azonban meg kell állapítanunk, — és ez az egyik főoka annak, hogy nem bocsátkozunk az egyes különálló teljesítmények ismertetésébe —, meg kell tehát állapítanunk, hogy ezek többnyire csupán különálló teljesítmények

voltak, és a végtelen-analízisnek csak egyik oldalát vizsgálták, éspedig az integrálszámítást. Vagyis azokat a feladatokat, amelyek terület, köbtartalom és ívhosszság számításáról szóltak. Tehát nem jelent semmit, ha azt halljuk, hogy Newtonnak és Leibniznek nem kellett az infinitézimális számítást felfedezni, hisz az már készen állt. Igaz, az integrálszámítás ötlete megvolt. Annál is inkább, mert megvolt már Archimedesnél is. De mégis több az, mint felszínes különbség. Newtonig és Leibnizig egész kötetek kellettek néhány konkrét integrál kiszámításához, ők néhány szóba összefoglalható teljes és általános módszert állítanak fel, amely lehetővé teszi, hogy minden ilyen probléma megoldásához hozzáfoghassunk. Lényeges különbség előtt állunk ismét, és ez nagyjából megfelel a Descartes és Apollonios «koordinátái» közt mutatkozó különbségnek.

Már néhányszor használtuk a «Newton és Leibniz» kifejezést, éppúgy, mintha közös felfedezésről volna szó. De ezzel az «és» szócskával a tudomány történetének egyik legbonyolultabb elsőbbségi versengését érintjük. Még a legújabb időkben is voltak a matematika történetének egyébként komolyan veendő bűvarai, mint pl. Eneström, akik nem hisznek a pioritás-vita eldöntöttségében és szívesen fenntartanak azt a rossz fényt, amely két évszázadon át Leibnizre sugárzott. Kettőzött óvatossággal és pontossággal kell e fejezetünket folytatnunk, hogy kiemeljük mindazt, ami valóban lényeges és hogy kimutassuk az elsőbbségi vita értelmetlenségét. De ehhez nem elegendő a probléma helyzetének ismerete, a Leibniz-cel kapcsolatos személyes körülményeket is pontosan ismernünk kell.

Leibniz 1646-ban, két évvel a harmincéves háborút befejező westfáliai béke előtt, tekintélyes egyetemi tanár fiaként született Lipcsében. Kora ifjúságában már hihetetlen szellemi képességekről tett tanúbizonyságot, s mivel ezeknek szülővárosában nem tudott elismerést szerezni, ezért az őt barátságosan befogadó Nürnbergben promoveált a jogtudományok doktorává. Itt ismerkedett meg báró Boineburggal, az államférfival, és ez az ismeretség döntő befolyással volt sorsára. Először az ő személyes szolgálatába áll, majd Mainz nagyhercegének, Boineburg uralkodójának szolgálatába, és

1672 márciusában mainzi diplomáciai küldetéssel Párizsba utazik. Ott hamarosan bekerül a szellemi élet gyújtópontjába, megismeri a matematikus és fizikus Huygens-t, olvassa Pascal és Descartes írásait, sőt egyik angliai útja alkalmával neves angol matematikusok ismeretségére is szert tesz. Bármennyire hatottak is e külső körülmények szellemi kialakulására, mégis, véleményünk szerint, lelkének belső szerkezete volt az, ami felfedezéseinek csodáit létrehozta. Az idő megérett a végső algoritmikus rohamra, különösen Leibniz számára, aki már ifjúkorában egy «általános karakterisztikáról», logikai kalkulusról álmodott, amely általános gondolkodó gépként lehetővé teszi, hogy kérdésekre szinte automatikusan választ kaphassunk. A «cabbala vera», a «lullusi művészet» vezessen minket, az «ars inveniendi», az «ars combinatoria». Tehát a felfedezésnek és a kombinációnak különleges művészete. Itt látjuk első ízben az algoritmikus ideált a maga teljességében, teljesen öntudatosan felépítve. És olyan szívós tervszerűséggel, amelyet hamarosan nemegy tett igazol.

Tehát még egyszer és olyan világosan, ahogy csak lehet. A gyermekkorból alig kinőtt Leibniz egyáltalán nem matematikusnak készül. Teljesen általános tudásszomj gyötri, és egy teljesen külső tettvágy, amely ráveszi, hogy Lengyelország sorsába beleavatkozzék, és amely arra bátorítja, hogy a német biztonság érdekében a napkirálynak, XIV. Lajosnak egyiptomi expedíció tervét terjessze elő. Leibniz ebben az időben majdnem kizárólag filozófus és jogász, és talán még fizikus, történész, kémikus és teológus. De a tudás sokoldalúsága, a kész tudomány ismerete nem elégti ki. Miként Goethe Faustja, felüti «Nostradamus ódon könyvét», és «ahogy az tudásvágyát varázslattal kapcsolja össze, úgy keresi az ifjú Leibniz az igazi kabbalát. Iskolázva, a klasszikus és skolasztiкус műveltség birtokában Raimundus Lullus szellemét idézi, akinek műveiben felfedezni véli a követendő utat. Feltétlenül lehetséges — ez Leibniz meggyőződése — az összes egyszerű dolog kombinációjából az összetetteket megkapni, s ennek megvan az az előnye is, hogy a felfedezés ilyen szintetikus, összerakó útján semmi sem kerülheti el a figyelmet.

Világos, hogy Leibniz, mielőtt Párisba ment, a matematikának csak elemeit ismerte. Sőt, ez is beigazolódott, való-

ban csak az első elemeit. Így tehát több mint érthető, hogy Párizsban egy szellemi bódulat fogja el midőn meglátja, hogy mennyi minden áll tervei számára készen. A mélyebb matematika, különösen Cartesius algebrája, a logaritmusok, az analízis, a sorbafejtésre irányuló törekvések, Cavalieri oszthatatlanai, az imaginárius számok kinyilatkoztatásként hatottak rá. Rájött, hogy $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$, és ő maga számol be arról a felfedezői ijedségről, amelyet ekkor érzett. Tiszta egyszerű szavakkal mondja el ő maga azt az anekdotát, hogy miként mutatta meg ezt az eredményt Huygensnek és hogy az hogy csodálkozott rajta. De a szavak mögött érezhető az izgalom remegése, amelyet ez az eredmény Leibnizben keltett. Mert itt élete céljának igazolása állt szeme előtt. Az algoritmus, a gondolkodó gép elvégezte azt, hogy két, mai nevén komplex gyök összege, tehát két teljesen érthetetlen és elképzelhetetlen kifejezés együtt irracionális, de tagadhatatlanul megfogható eredményt adjon.

Mint már mondtuk, nem állhatunk meg részletkérdések-nél. Csak azt akarjuk megjegyezni, hogy Leibniz az algoritmust magát háromféle módon fejlesztette. Először a számológép feltalálásával, amelynek lényege még a mai számológépeknek is az alapja. Igaz, az első ötlet nem tőle származik ezen a téren, hanem részben Pascal gondolatait folytatta. Gépe azonban biztosan sokkal tökéletesebb volt, mint Pascal működésre képtelen szerkezete. A számológép gyakorlati jelentőségétől itt teljesen eltekintünk. Csak azt hangsúlyozzuk, hogy Leibniz algoritmus-vágyának mintegy vasból és fogaskerekekből álló jelképe volt. E gépben is rejtett kombinációs művészet végezte a számolás műveletét, egyszer s mindenkorra szerkesztett fogaskerek zúgtak benne. Kérdés és megoldás közt önműködő szerkezet volt, az algoritmus hídja volt. Ez az első siker, amely szemmel láthatóan igazolta azt, amire Leibniz törekedett, új tettekre tüzelte. Egy második, sokkal bonyolultabb mechanizmussal tett kísérletet, és ennek az a feladata, hogy a régiexhaustió módszerének aritmetikai mása legyen. Az irracionális és transcendens számok ilyen megbolygatása, amelyeknek már tizedes törtekkel is igyekeztek közelébe jutni, csak sorok segítségével volt lehet-

séges. És így teljesen Leibniz gondolatmenetébe vág, ha megalkotja a sorok algoritmusát, ahol ilyen problémára bukkant. És ismeretes, noha itt másirányú elsőbbségi igényekkel léptek fel, hogy párisi tartózkodása alatt fedezi fel a ma is róla elnevezett végtelen sort. Az úgynevezett Leibniz-sor az arcustangens függvény sorbafejtéséből keletkezik ha $x=1$, és a következő értéket adja $\pi/4$ számára:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Ez a sor ugyan π gyakorlati meghatározásának céljára nem alkalmas, de ez mit sem változtat azon a körülményen, hogy a sor mély bepillantást ad e függvény szerkezetébe.

Már ismételten használtuk a függvény szót. Ez a fogalom volt a harmadik feladat, amelyre párisi tartózkodása alatt Leibniz algoritmikus fáradozása irányult. Az érdekes Leibniz-kutató, Dietrich Mahnke «Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung» című művéből vesszük a következőket. Leibniz már 1673-ban eljutott addig, hogy «Methodus tangentium inversa seu de functionibus» című nagy értekezésében felismerte a megfordított érintő-feladat valamint a kvadratura és rektifikációs feladatok egyenértékűségét, és a kettőt együtt infinitézimális összegezési feladatokként szembe állította az infinitézimális különbség feladat jellegű közönséges érintő-feladattal. Itt már bevezette a «functionem faciens» vagy röviden «functio» (függvény) kifejezést is, valamilyen törvény szerint változó mennyiségek megjelölésére. Ilyenek például az érintők, normálisok, subtangensek vagy más hasonló vonalak, amelyeknek valamilyen «functio»-juk van a görbével kapcsolatban. Például érintik a görbét, merőlegesen állnak rá stb. és míg a görbével együtt haladnak, viszonyuk változik a görbe ordinátájához és abszcisszájához... Ezt mondja Mahnke. Mi pedig most lehetőleg érthetően igyekszünk ezt a nagyon érdekes leírást taglalni.

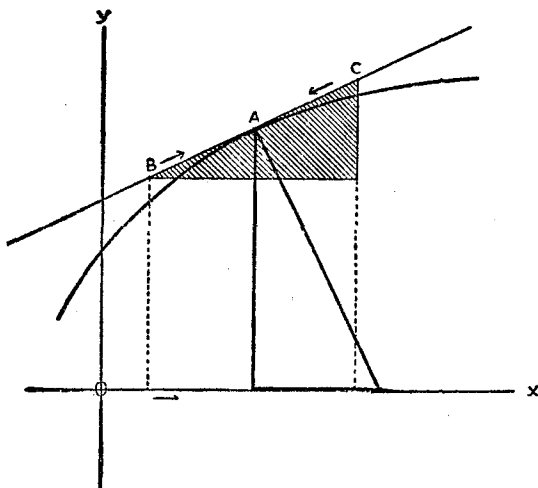
Leibniz tehát már 1673-ban tudta, hogy a végtelen kalkulus két különálló problémakörből áll. A «megfordított» és a «közönséges» érintő-feladatból. A megfordított érintő-feladat egyenértékű a kvadraturákkal és rektifikációkkal, a közönséges pedig a végtelen kis mennyiségek különbségeinek képzésével. Mit jelent ez? Hogy erre a kérdésre felelhessünk,

vissza kell emlékeznünk a koordináták felfedezésére, helyesebben feltalálására. Ilyen vonatkozási rendszerben a görbét egy egyenlet fejezi ki, és kétféleképpen tehetjük fel a kérdést — amint ezt már Roberval megtette, — ha a görbét az érintőből származtatjuk. Kérdezhetjük egyrészt, hogy vajon milyen az az általános érvényű törvény, amelynek az érintő engedelmeskedik, és milyen az egész görbére érvényes egyenlet, amelyből minden helyen, a görbe minden pontjában, tehát az abszcisszának, az x -nek minden értéke mellett, meghatározható. Ez az általános érintő-törvény Leibniz szerint aritmetikai szempontból infinitézimális különbségek meghatározását kívánja, mivel a görbe valamely pontját a rákövetkezővel vagy megelőzővel kell összemérnünk, hogy képletet kapjunk. Tegyük fel továbbá, hogy a görbe mindenütt folytonos és szabályos menetű — ez elengedhetetlen feltétel — akkor a szomszédos pontok összehasonlítása az irányváltozás törvényét szinte a görbén legördülő érintő törvényeként adja meg. Ha most elképzeljük és ez a «megfordított» érintő-probléma, hogy már ismerjük azt a törvényt, amelyből a mindenkori érintő, illetve annak hajlásszöge nyerhető, akkor megfelelő számolási eljárással az érintő egyenletéből a még ismeretlen görbeegyenlet megállapítása is lehetővé fog válni. Ez utóbbit nevezzük ma a primitív függvénynek. Az már Leibniz genialis meglátása, hogy az az eljárás azonos a kvadrátúrához vagy rektifikációhoz szükséges eljárással, mert ez a probléma megfogalmazásából nem következik.

S noha Leibniz világosan felismerte a kérdés lényegét, mégis néhány évbe telt, amíg elgondolásait meg tudta valószínűsíteni. De a megvalósítás itt sem volt egyéb, mint egy új algoritmusnak, vagy legalábbis egy új notációnak feltalálása vagy összeállítása. De még egy további körülmény is megkönnyítette munkáját. Matematikai tehetsége következtében az elhunyt Pascal barátai felkérték, hogy tekintse át a hagyatékot és rendezze sajtó alá. E közben kezébe került egy raja, s ez a sinus függvénynek az első szögnegyedben való viselkedését ábrázolta. Ez a rajz Leibniz felfedezésre hajlamos lelkében az úgynevezett «karakterisztikus háromszög» általánosult, és ezt mutatja a következő ábránk.

Leibniz gondolatmenete itt a következő. Ha egy érintő

az A pontban érint egy görbét, akkor a B és C pontokban már jelentős távolságra van tőle. Ha most olyan derékszögű háromszöget szerkesztünk, amelyben a B és C pont az átfogó két végpontja és amelynek befogói a koordinátatengelyekkel párhuzamosak, akkor ez a háromszög hasonló egy másikhoz, s ez utóbbi az A ponthoz tartozó normálisból, az abszcissza-tengely egy részéből és egy, az ordinátatengellyel párhuzamos egyenesből áll. A 7. ábrán ez az utóbbi háromszög vastagabb

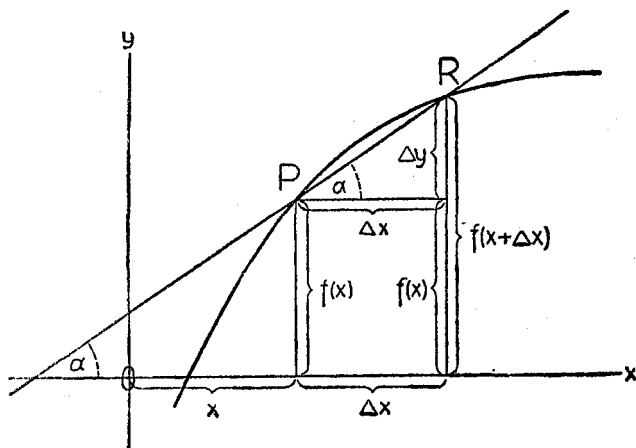


7. ábra.

vonalai révén jól látható. Tehát röviden: a vonalkázott háromszög és a vastagvonalú háromszög hasonlók. Tegyük fel, hogy a B és C pont a nyílak irányában az A pont felé tart. Ettől a vonalkázott háromszög mind kisebb lesz, a nélkül, hogy alakját változtatná. Vagyis hasonló marad a vastagvonalú háromszöghöz. De a zsugorodásnak nincs határa. A B és C addig közelednek egymáshoz, ameddig csak akarjuk, s nem tudjuk azt a pillanatot meghatározni, amelyben elvesznek szem elől azáltal, hogy az A , B és C egy pontba esnek össze. A vonalkázott háromszög — így teszi fel

magának Leibniz a kérdést — ezzel megszűnt? Igennel felelhetünk erre a kérdésre, minthogy érthető módon nem létezhet háromszög akkor, ha három csúcsa összeesik és nincs meg a lehetőség oldalainak meghúzására. De az is nehezen képzelhető el, hogy ez eltűnés egy csapásra megtörténjék, hisz ennek a vonal feltételezett folytonossága ellenemond. Nem volna logikusabb, más szempontból, ha azt tételeznők fel, hogy a háromszög eltűnt ugyan szemünk elől, de tulajdonságai fennmaradtak? Hisz már a görögök kora óta tudjuk, különösen pedig Euklides óta, hogy az arányok függetlenek az abszolút nagyságtól. Nos tehát, a vonalkázott háromszög arányai mindenkor ugyanazok voltak, bármennyire összezsugorodott is, mint a vastagvonalú háromszög arányai, hiszen a két háromszög hasonló. Szabad tehát azt feltételeznünk, s ez Leibniz felfedezésének koronája, hogy bár eltűnt a vonalkázott háromszög, arányai a vastagvonalú «karakterisztikus» háromszögben megmaradtak, nagy méretekben, jól mérhetően. Most tehát az érintő törvényét a görbe bármely pontja számára kifejezhetjük a karakterisztikus háromszög oldalviszonyaival, vagy ami ugyanaz, az érintő hajlásszögének valamilyen szögfüggvényével. De miként lehet ezt a törvényt általában megtalálni, vagyis mi ennek az összefüggése a görbe egyenletével? Leibniz itt a differenciaszámítást alkalmazza és ezt építi ki határátmenet segítségével differenciálszámítássá. És alapnak elegendő egyetlen képlet, amelyet Leibniz-képlet néven ismer a tudomány története. Ha elképzeljük ugyanis, hogy az abszcissza nőtt, akkor az y , vagyis az ordináta szintén nőtt valahogyan, feltéve, hogy emelkedő görbét választottunk példának. Első görbével a levezetés kissé másképpen alakulna, de a lényeg mit sem változnék. Megállapítjuk tehát, hogy ha az x értékét egy véges Δx értékkel növeljük, akkor az y értéke is egy véges Δy értékkel növekszik. Ennek ábrázolására egy rajzot készítünk, amely közeli rokona a karakterisztikus háromszögnek. Ebből láthatjuk, hogy véges növekmény esetén csak a P és R pontokon keresztülmenő metsző egyenes a hajlásszögét kapjuk meg, ha a szög tangensét, mint Δy és Δx hányadosát felírjuk. De Δy nem más, mint a függvény értéke az $x + \Delta x$ helyen, levonva belőle az függvények az x helyhez tartozó értékét,

minthogy az $y=f(x)$ függvény a növekményeket tekintetbe véve az $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ alakba megy át. Mondhatjuk tehát, hogy az α szög tangense, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Szavakban: ha a megnövekedett függvény értékéből az eredeti függvényértéket levonjuk és az eredményt az x növekményével elosztjuk, akkor a P és R pontokon keresztülmenő metsző egyenes hajlásszögének tangensét kapjuk. De minthogy nem



8. ábra.

a P és R ponton átmenő metsző egyenesre, hanem az érintőre vagyunk kíváncsiak, végtelen kis dx növekményt kell felvennünk. Most tehát már nem a metsző α hajlásszögét, hanem az érintő α' hajlásszögét keressük, de ezt éppen olyan könnyen és gyorsan kaphatjuk meg, mint véges különbségek esetén. Mert ebben az esetben sem lehet más a szög, mint az érintőnek és a pozitív x -ek tengelyének a tangens függvényével jellemzett hajlásszöge. De $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx}$, és dy , teljesen algoritmikus úton a következő egyenletekből határozható

meg: $y=f(x)$, $y+dy=f(x+dx)$. Ezekből $f(x)+dy=f(x+dx)$ és $dy=f(x+dx)-f(x)$, és végül $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$.

Kicsit elébe vágunk az eseményeknek, hisz Leibniz nem ilyen jelöléseket használt. De az első felfedezésre vonatkozó tényeket lényegükben helyesen írtuk le, habár későbbi írásmódot használunk. Amint mondtunk, a Leibniz-képlettel a «közönséges» érintőfeladat megoldást nyert s már csak az egyes szabályokra van szükség, hogy ezt a képletet helyesen alkalmazzuk. Egyszerű példán világítjuk meg a kérdést. Legyen adva az $y=x^2-7$ parabola és keressük az érintő szabályát, vagyis a «differenciálhányadost» a görbe minden egyes pontjában. A Leibniz képlet szerint

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{[(x+dx)^2-7]-[x^2-7]}{dx} = \\ &= \frac{[x^2+2xdx+(dx)^2-7]-[x^2-7]}{dx}. \end{aligned}$$

A zárójelek felbontása után

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2xdx+(dx)^2-7-x^2+7}{dx} = \frac{2xdx+(dx)^2}{dx}.$$

Most kerül sor az úgynevezett határátmenetre, vagyis azokra a megfontolásokra, amelyek végtelen kicsi mennyiségekkel történő számolásokkal kapcsolatban fontosak. Mert fenti kifejezéseket véges növekményekkel, differenciáhányadosokként éppenígy megkaphattuk volna, és ekkor az eredmény

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x, \text{ a metsző egyenes hajlásszöge. Most kétféle}$$

képpen hajthatjuk végre a határátmenetet. Vagy már eleinte kizárólag differenciáhányadosokkal számolunk és végül kijelentjük, hogy $2x + \Delta x$ végtelen kis növekmény esetén, vagyis ha Δx összezsugorodik dx nagyságúra, egyszerűen $2x$ lesz, mert véges mennyiség nem változik, ha végtelen kicsit adunk hozzá.

Vagyis $\frac{dy}{dx} = 2x$. Vagy pedig kezdettől fogva differenciálokkal számolunk és a $\frac{2x dx + (dx)^2}{dx}$ képletben a $(dx)^2$

tagról kijelentjük, hogy «másodrendű végtelen kicsi» és úgy aránylik a dx -hez, mint dx az x -hez. Így tehát egyszerűen elhagyjuk, és ezáltal a következőt kapjuk: $\frac{2xdx + (dx)^2}{dx} = \frac{2xdx}{dx} = 2x$. Vagyis ugyanaz az eredmény. Leibniz egyszer

ezeket a felsőbbrendű kicsinyeket azzal akarta képszerűvé tenni, hogy elmondta: Az égbolt úgy aránylik a Földhöz, mint a Föld egy porszemhez, és a Föld továbbá úgy aránylik a porszemhez, mint a porszem a mágneses részecskéhez, noha utóbbi az üvegen is keresztülmegy. (Ma elektront mondanánk helyette). Leibniz szerint az égbolt az x , a Föld a dx , a porszem a $(dx)^2$ és a mágneses részecske $(dx)^3$. Feltétlenül elegendő, ha az égbolt mellett a Földet még figyelembe vesszük. A porszemre és a mágneses részecskére is figyelemmel lenni annál értelmetlenebb, mivel már a Föld, a dx is végtelen kicsi az égbolthoz képest.

Most félbe kell szakítanunk a speciális algoritmus ismertetését. Csupán annyit állapítunk meg, hogy Leibniz rövid idő alatt nemcsak az egyszerűbb függvényeket és az ilyenekből álló kifejezéseket tudta differenciálni, hanem Párisban már felsőbbrendű differenciálhányadosokat, tehát differenciálhányadosok differenciálhányadosait is kiszámította. Ezek fizikai szempontból nagyon hasznosak, mert az út-idő függvény első differenciálhányadosa sebességet, a második gyorsulást jelent. A felsőbbrendű differenciálhányadosok szélsőérték meghatározásoknál nélkülözhetetlenek.

A felfedezések történetének szerencséjére Leibniznek megvolt az a szokása, hogy kutatásainak jelentős állomásairól jegyzetet készített és e jegyzetlapokra a dátumot is gondosan rávezette. Ebből tudjuk, hogy még Párisban, 1675. október 29-én teljesen tisztába jött kalkulusa jelentőségével. Ezen a napon ugyanis a következőket jegyzi fel: «Hasznos lesz, Cavalieri összegei helyett tehát 'valamennyi y összege' kifejezés helyett mostantól kezdve az $\int y dx$ kifejezést írni. Itt megmutatkozik végre a kalkulus új fajtája, az, amely az összeadásnak és szorzásnak megfelelője. Ha viszont adott az $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ kifejezés, akkor azonnal kínálkozik a másik,

feloldó művelet, az, amelyik a $d\left(\frac{y^2}{2}\right)$ kifejezést újból y -ná alakítja. Mert amennyire a f jel a dimenziók számát növeli, annyira csökkenti azt a d jel. Az f jel egy összeget jelent, a d viszont különbséget.

Ez a felismerés megalapozta az infinitézimális algoritmust, ez hamarosan meghódította az egész világot, és azóta is övé maradt ez a világrajalom. Nehéz eldönteni, hogy Leibniz a tudomány melyik ágában volt a legnagyobb. De az vitán főlül áll, hogy egészen különleges genie volt a helyes és egyenértékű matematikai írásmód terén. Új fogalmak és új jelek bevezetését mély, valószínűleg fel sem fedhető titokzatosság borítja. E fogalmak és jelek közt kevés az olyan, amely annyira helyes, annyira fedi a kívánalmakat, hogy általánosan használatba kerül. De ha viszont valamelyik használatba került, akkor olyan kitartó, mintha természetes dolog volna, nem pedig pusztán konvenció. A titok kis része azonban mégis megfeythető, legalábbis az, ami az új «jeleket» illeti. Ezeknek ugyanis bele kell illeszkedniök a hagyományba, illeniök kell a matematikai kozmoszhoz alakra és esztétikai szempontokból is. Egy megelevenedett organizmusra — és ilyen a matematika is, — nem lehet önkényesen mesterséges szerveket aggatni vagy esetleg azt követelni, hogy valamely «parancs» egyetlen pontocskával kellőképpen meg legyen határozva, ha végrehajtásához bonyolult és szokatlan műveletek szükségesek. Az a «parancs», amelyet az x^3 jel ad, nagyon átlátszó. Emlékeztet a $3x$ -re, de a feljebb írt 3 szám kellőképpen meg is különbözteti a $3x = x + x + x$ kifejezést az $x^3 = x \cdot x \cdot x$ kifejezéstől. De hogyan képzelhette volna el a XVII. század embere, hogy Newton $\dot{x}$ jelölése olyan bonyolult dolgot jelentsen, mint a differenciálhányados képzése? Hát még az $\ddot{x}$ amelynek integrálás a jelentése. Ma is előfordul még, hogy fejlett technikával készült könyvekben, amelyek Newton jelölésmódját mint történelmi érdekességet közlik, lemarad a pont az x betű fölül, vagy nem teljesen beavatottak csak nyomási vagy papírhibának nézik. De még sokkal súlyosabb az a kifogás, hogy Newtonnál a számítás szerkezete nem látszik meg, egyáltalán nincs betekintésünk az algoritmus működésébe. Leibniznél ez mindenkor megvan.

Szabadjon éppen ezért ezt a notációt egy jelentősen egyszerűsítő, de a szigorú álláspont alapján joggal támadható módon ismertetni. Ami hibát közben elkövetünk azt rövidesen ismét jóvá fogjuk tenni. De — és ez a «de» döntő fontosságú, azt állítjuk, hogy a végtelennek népszerű módon szokásos elképzelése a szemléletnek az a maradványa amely az algoritmus tisztán fogalmi, de magában véve mégis meglehetősen áttekinthetetlen mivoltát könnyen érthetővé teszi. Nem fogunk tehát többé végtelen kis mennyiségeknek csupán viszonyáról beszélni, hanem valami bűvös mikroszkóppal egyenként megnagyítjuk és differenciáloknak mondjuk őket. Számunkra a dx egy hosszúság, dy hasonlóképpen, és az integráljel, ami nem egyéb mint egy megnyújtott S betű, arra utal, hogy az integrálás valami folytonos, egymásba folyó infinitézimális összeget jelent. Ezzel a kalkulusról azonnal áttekinthető képet kapunk. Legyen adva az $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

egyenlet, amelyről még azt sem kell tudnunk, hogy a függvénynek differenciálhányadosát, deriváltját jelenti-e, vagy sem. Akkor az egyenletek szabályai szerint írhatjuk: $f'(x) dx = dy$. De már tudjuk, hogy egy egyenlet nem változik ha mindkét oldalán ugyanazt a műveletet hajtjuk végre. Határozzuk el tehát, hogy Cavalieri nyomán a «summa omnium linearum» műveletet végezzük. Mivel Leibniz «hasznosnak» tartja, nem ezt fogjuk írni: $\text{Omnia } dy = \text{Omnia } f'(x) dx$, hanem egyszerűen, ezt $\int dy = y \int f'(x) dx$. Valamennyi dx összege nem más mint az y növekményeinek összege 0-tól x -ig, tehát a tartomány végpontjának ordinátája. Ezért $\int dy = \int f'(x) dx$. De továbbá $y = f(x)$ az eredeti függvény. Ezért $y = \int f'(x) dx$ vagyis a differenciálhányados integrálja az a függvény, amelyből a differenciálhányados keletkezett. És itt a dx , amely az integrált mintegy lezárja, furcsa szerephez jutott. Mert ez nem egyéb, mint az a tényező, amellyel a differenciálhányados egyes értékeit megszorozva, a területet adó, összeadandó téglalapokat kapjuk. A dx tehát mintegy a lépés nagysága, a távolság az ordináták közt. Eddig szándékosan elhallgattuk, hogy a differenciálhányados maga nem egyéb, mint a 7. ábrán

látható összezsugorodott «vonalkázott» háromszög befogóinak viszonya. Az infinitézimális méretű háromszög átfogója az a darab, amelyben az ív és az érintő összeesnek. Vagyis a görbe rektifikációs darabja. Legyen ennek ds a jele és akkor Pythagoras tételével: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Ebből $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ valamennyi ds összege pedig $\int ds$ és ez a görbe ívhosszúsága. Ha tehát $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ akkor az ívhosszúság $s = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ de itt még sokféle meggondolásra volna szükség.

Ez tehát az összefüggés a differenciál- és integrálszámítás közt akkor, ha a differenciálhányadosból indulunk ki. Ha viszont, miként Leibniz tette világhírű jegyzetében, az integrálból indulunk ki, és megadottnak tekintjük az $\int y dx = \frac{y^2}{2}$ összefüggést, akkor azt találjuk, hogy $d\left(\frac{y^2}{2}\right)$,

vagyis az integrálás eredményének differenciálhányadosa ismét az y -t adja, vagyis azt, ami az integrál jele alatt állt.

Nem feladatunk, nem is szándékunk itt az infinitézimális számításról tankönyvet írni. Csupán azt akartuk bemutatni, hogy milyen egyszerűen és milyen természetesen lehetett Leibniz írásmódját a már meglevő algoritmusba beépíteni és, hogy milyen áttekinthető volt ez az írásmód. A differenciál sehol sem tudott megszökni. Megnagyítva mindenkor benne maradt a számításban, tehát állandó megfigyelés alatt volt. És Leibniz-cel alig fordult elő, hogy hibásan számolt volna. Pedig ez Newtonnal gyakran megesett az $\ddot{x}$, $\ddot{x}$ jelű magasabb differenciálhányadosok használata közben, mivel személyes virtuozitása sem volt elég ahhoz, hogy ura lehessen gépezetének. Newton végtelenszámítása úgy viszonylik Leibnizéhez mint a szóalgebra az algoritmikus módon írt algebrához! Ezt nem lehet az évszázadok során eléggé gyakran ismételni, hogy Newton és Leibniz elsőbbségi küzdelmének értelme vagy értelmetlensége kellőképpen kiemelkedjék. Teljesen eltekintve attól, hogy felfogásaik közt más, lényegbevágó eltérések is vannak.

Még mielőtt Leibniz matematikai kozmoszának áttekin-téséhez fognánk, számoljunk be történetíró módjára e helyen

még arról, hogy Leibniz 1684-ben az általa alapított «Acta Eruditorum» folyóiratban nyilvánosságra hozta differenciálszámítását, és annak alkalmazását maximum-minimum feladatok megoldására. E munkában vezeti be véglegesen a kettőspontot az osztás jelölésére. Leibniz csak kilenc évvel a felfedezés után szánta el magát módszere nyilvánosságra hozatalára, ekkor is csak azért, mert barátja, a geniális, de kalandor-szerű gróf Walter Ehrenfried Tschirnhaus már elkezdte a bizalmasan tudtára adott eredményeket sajátjaként közölni. S e közben, igaz, sokszor zsákutcába jutott. Tschirnhaus egyébként nem volt mindennapi ember. Csupán kissé gyenge jellem volt. Tőle származik a harmadfokú egyenletek egyik legjobb megoldásmódja. De mindezt csak mellékesen jegyeztük meg.

Nos, Leibniz módszerének nyilvánosságra jutása mindörökre felfedte a végtelen analízis titkát. Geniális munkatársak, így két Bernoulli, Varignon, l'Hospital magukévá tették a kalkulust, és néhány év alatt annyira kiépítették, hogy hatalmas teljesítményük még ma is bámulatra méltó. A végtelen analízis minden irányba, még a legbonyolultabb variációszámítás irányába is erősen fejlődött, noha az alapok sem voltak még teljesen készen. És alig tudjuk megérteni, hogy a Bernoulliak miként számították ki a legbonyolultabb integrálokat is. A variáció-számítás — említsük meg mellel — nemcsak görbék egyes pontjainak maximum-minimum tulajdonságait vizsgálja, hanem egész görbék ilyenemű tulajdonságait. Az úgynevezett «brachistochron» feladat lyennemű probléma. Ez a probléma, amelyet Johann Bernoulli adott fel a matematikusoknak, a következő: Keresendő az a görbe, amelyen egy, csupán a nehézségi erőnek alávetett anyagi pontnak mozognia kell, hogy egy függőleges síkban magasabban fekvő pontból ugyanennek a síknak mélyebben, de nem függőlegesen az első alatt, fekvő pontjába legrövidebb idő alatt jusson el. A feladatot Leibniz, l'Hospital, Newton és a két Bernoulli külön-külön megoldották, és egyöntetűen arra az eredményre jutottak, hogy a görbe egy ciklois. És Jakob Bernoulli azt is felfedezte, hogy valamely görbe egészben csak akkor felel meg a brachistochron feltételnek, ha minden része külön-külön megfelel ennek.

Nem csoda, hogy a módszernek azonnal ellenzői is jelentkeztek, noha Leibniz kalkulusa nem is egyszer, és nem utolsó sorban, például az úgybevezett «firenzei feladattal» kapcsolatban, bebizonyította helyességét. Viviani, egy Galilei-tanítvány felszólította ugyanis Leibnizet, hogy oldjon meg egy feladatot, amellyel ő maga már archimedesi elvek szerint foglalkozott. Leibniz az új kalkulus segítségével azonnal ugyanarra az eredményre jutott sőt Jakob Bernoulli azt is bebizonyította, hogy a feladatnak végtelen sok megoldása van. A feladat egy kupola és egy henger metszéséről szólt, s e metszés következtében négy ablak keletkezik a kupolán. A feladat az, hogy a megmaradó kupolafelszín racionális szám legyen. A fent említett támadásokban, amelyeket még olyan eredmények sem tudtak elhallgattatni, mint a «firenzei feladat» megoldása, nagy szerepe volt sok, szándékos és akaratlan félreértésnek. Ezek azután az elsőbbségi vita során hihetetlenül megnöttek. Leibniz a kortársak szemében valami csaló, szellemi tolvaj, sarlatán volt. Az udvari aranycsinálók, intrikusok, kalandorok egyike. Tekintve, hogy a barokkban sok ilyen volt, nem használt Leibniznek semmiféle cím, kitüntetés vagy megtiszteltetés. «Végtelen-paradoxonok» kifejezés hallatán a német-angol nemzeti ellentétre gondoltak, vagy a whigek és toryk harcára. S el kell ismernünk, hogy a román népek hamarabb álltak Leibniz mellé, hamarabb szolgáltattak neki igazságot, mint honfitársai. Csak a halál akadályozta meg Leibnizet abban, hogy hátralevő életét Bécsben, vagy még inkább Párisban emigránsként töltsse el. Ez a terv, megvalósulása esetén a legtalálóbbról válasz lett volna egyes nemzetek magatartására.

Mint már többször említettük, nem feladatunk, hogy az infinitézimálszámítást behatóan ismertessük. De másrészt említenünk kellett néhány alapelvét, mert különben éppen ezen a téren nem tudtuk volna Leibniz érdemeit kellő világításba helyezni. A néhány kiragadott részhez hozzáfűzzük még, hogy az integrálás jelét Leibniz vezette be, de az «integrál» szó Jakob Bernoullitól származik. A két matematikai nagyhatalom, Leibniz és Bernoulli megegyeztek ugyanis, hogy a jövőben a Leibniz által használt jel, de a Bernoulli által használt integrál elnevezés alkalmazandó

a matematikában. Ez a megállapodás érvényes ma is az egész világon.

Mielőtt még Leibniz matematikát fejlesztő további érdemeit emlitenők, amelyek tulajdonképpen működésbe hozták azt amit mi «matematika, mint kozmosz» kifejezésen értünk, előbb még egy ma is nagyon elterjedt félreértést kell tisztáznunk. Mégpedig azt, hogy Leibniz, filozófiai naivitásból, vagy híres (szintén gyakran félreértett és félremagyarázott) monád-tana alapján csak úgy vaktában használta differenciál-jait, és ezek szerepe olyan matematikai atom-féle volt. Tehát ő tudtán kívül a végtelenanalízis olyan hibáiba és ellenmondásaiba keveredett bele, amelyek még az eleai Zenon támadásaitól is megdőltek volna.

Nem állítjuk, hanem bebizonyítjuk, hogy az ellenkezője igaz. Bizonyos, hogy Leibniz gyakran igen hozzávetőlegesen beszélt, hogy igen új fogalmait (a filozófiában kevésbé jártas matematikusok közt is) népszerűsítse. De az ilyen beszéd nem tudományos értekezés, ez inkább a pedagógia és tudományos politika körébe tartozik. Midőn a már említett fizikus és matematikus, Varignon, (ő fogalmazta meg először teljesen általánosan az erőparallelogramma-tételt) barátságosan felhívta a figyelmét azokra az ellenvetésekre és támadásokra, amelyek őt Franciaországban egyik kijelentése nyomán érték, akkor 1702. február 2. kelttel a következő félre nem érthető választ adta: «Nagyon hálás vagyok önnek uram, és országa tudósainak is, mert megtisztelnek azzal, hogy megjegyzéseket tesznek egy levelemre, amelyet egy barátomhoz válaszként intéztem, a „Journal de Trevoux” oldalain differenciál- és összegkalkulusaimmal kapcsolatban megjelent ellenvetésekre. Nem emlékszem már pontosan a kifejezésekre, amelyeket használtam, szándékom volt azonban megmutatni, hogy a matematikai analízist nem kell kapcsolatba hozni metafizikai vitákkal, tehát nem szükséges azt állítani, hogy a természetben vannak olyan vonalak, amelyek, a közönségesekhez képest, szigorúan végtelen kicsik, vagy hogy vannak olyanok, amelyek végtelen sokszor hosszabbak mint e közönséges vonalak. Tehát e szubtilis vitakérdések elkerülésére, hisz fejtegetéseimet mindenki számára érthetővé akartam tenni, megelégedtem azzal, hogy

a végtelent az összehasonlíthatatlannal magyarázzam, tehát feltételeztem olyan nagyságokat, amelyek össze nem hasonlítható módon nagyobbak vagy kisebbek a mi mennyiségeinknél. Ezen a módon ugyanis az össze nem hasonlítható mennyiségek sokféle fokozatát kapjuk, ha egy hasonlíthatatlanul kicsinyt, valahányszor egy hasonlíthatatlanul nagyobb meghatározásáról van szó, a számításnál figyelmen kívül hagyhatunk. Így tehát egy mágneses részecske, amely az üvegen is áthatol, egy homokszemmel, ez megint a földgolyóval, a földgolyó pedig az égboltozattal nem hasonlítható össze. Ezért állítottam fel előzőleg az „Acta Eruditorum”-ban néhány segéd-tételt, az összehasonlíthatatlanról, amelyek egyformán alkalmazhatók a szigorúan vett végtelenre és azokra a mennyiségekre, amelyek egy másikhoz képest figyelmen kívül hagyhatók.

Figyelembe kell azt is venni — folytatja Leibniz e levelét — hogy az összehasonlíthatatlan kis mennyiségek, még népszerű értelmükben sem állandók és határozottak, sőt mivel olyan kicsinek vehetjük őket, ahogy csak akarjuk, geometriai megfontolásokban ugyanaz a szerepük, mint a szigorúan vett végtelen kicsinyeké. Ha ugyanis valamely ellenfelünk tételeink helyességét tagadni akarja, akkor kalkulusunk azt mutatja, hogy tévedésünk kisebb mint bármely megadható mennyiség, mert módunk van az összehasonlíthatatlan kicsinyt — minthogy ezt olyan kicsinek választhatjuk, ahogy csak akarjuk — e célból kellőképpen csökkenteni. Ez lehet az, amit ön a kimeríthetetlenen gondol, és kétségtelenül ebben rejlik az infinitézimálszámításunk szigorú bizonyítása. Az a legnagyobb előnye, hogy közvetlenül, szemmel láthatóan és a felfedezés valódi forrásait feltáró módon adja azt, amit a régiek, köztük Archimedes, kerülő úton, közvetett bizonyításokkal értek el. Ők azonban, ilyen kalkulus híján, bonyolultabb esetekben nem tudtak helyes eredményt elérni, noha ismerték a felfedezés alapjait. Így tehát a végtelen és végtelen kicsi vonalakat — mégha a metafizikai szigorúságot tőlük megtagadva reális dolgoknak tekintjük is őket — gondtalanul használhatjuk olyan ideális fogalomként, amelyek a számítást megrövidítik úgy, mint a közönséges analízis úgynevezett imaginárius gyökei, pl. $\sqrt{-2}$.

Hiába mondjuk ezeket imagináriusoknak, mégis hasznosak, sőt sokszor teljesen nélkülözhetetlenek reális nagyságok analitikus kifejezésére. Így például lehetetlen segítségük nélkül egy olyan egyenes analitikus kifejezése, amely egy szöveget három egyenlő részre oszt. Éppen így nem lehetne a transzcendens görbék kalkulusát felírni, a nélkül, hogy eltűnőfélben levő különbségekről beszéljünk, s itt egyszerűsmindenkorra be lehetne vezetni az összehasonlíthatatlan kicsi fogalmát, a helyett, hogy korlátlan csökkenésre képes mennyiségekről beszéljünk. Éppen így képzelünk el háromnál több dimenziót, és hatványokat, amelyeknek kitevője nem közönséges szám; csak azért, hogy olyan fogalmakat alkossunk, amelyek a számítást megrövidíteni hivatottak, és amelyeknek realitás az alapja.

De nem szabad azt gondolni, — folytatja Leibniz — hogy e magyarázat a végtelen tudományát lebecsüli és fikciókra vezeti vissza, mert mindig megmarad — hogy iskolásan fejezzem ki magam — egy synkategorematisztikus végtelen¹, így mindig igaz marad például, hogy $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$ vagyis egyenlő olyan törtek végtelen sorával, amelyben a tagok számlálója csupa 1, nevezőjük pedig geometriai sorként emelkedik. E sorban mégis csak közönséges számok fordulnak elő, és sohasem lép fel egy végtelen kis tört, amelynek nevezője végtelen nagy szám...

Azért idéztük e levél messze túlnyomó részét, mert nemcsak kérdésünkben foglal egész világosan állást, hanem ezen túlmenve, Leibniz matematikai-filozófiai álláspontját is jellemzi. Ilyen szavak után már csak a rosszindulat állíthatja Leibniz filozófiai naivitását vagy könnyelműségét.

Természetesen korlátlan számban lehetne az ilyen bizonylat-szerű idézeteket kiválasztani. De csak még egy, az aktuális-végtelent legalább ugyanannyira elutasító helyet ragadunk ki. Ezt Gerhardt adta közre és így szól: «a végtelen kicsi

¹ Ez azonos a «potenciális» végtelennel, amely határtalan haladásból keletkezik.

vagy végtelen nagy mindenkor tetszésszerint kicsinek, vagy tetszés szerint nagynak tekinthető, úgyhogy a kifejezés mindenkor csak egy összességet, egy fajtát jelent, de semmi esetre sem egy 'utolsó' tagot e fajtán belül».

De térjünk vissza az integrálás kérdéséhez, amelyről még alig beszéltünk. Csak arra utaltunk, hogy ezt a művészetet tulajdonképpen nem kellett feltalálni, minthogy bizonyos formában már a régi hellének is alkalmazták. Igaz, ezt mindig hangsúlyozni kell, csak egyes esetekre. Végtelen kicsi, tetszésszerint kicsi mennyiségek, oszthatatlanok, differenciálok vagy bárhogy nevezzük is ezeket, összegezésére nem volt általános módszerük, mégkevésbé ilyen számításokhoz való algoritmusuk. Annál nagyobb volt az igyekezet, hogy ezt az algoritmust megtalálják. Sajnos — és erről már az első úttörők hamarosan meggyőződhettek, — ilyen algoritmus felállítása alig áthidalható nehézségekbe ütközik. A kivonás lytikus művelete egyértelmű, az osztás már próbálgatást kíván, a gyökvonás még többet, sőt ha a gyökkitevő több mint 3, akkor csak különféle bonyolult fogással lehetséges. A logaritmus kiszámításának nehézségeit nem érezzük, az eredmények már táblázatként állnak rendelkezésünkre. De a következő fokozatnál kezdődik a nehézség. A következő lytikus számítási mód a differenciálás. Ez magában véve bonyolult lehet, ha összetettebb függvényekről van szó, de elvi akadályok nem merülhetnek fel. Ez nagyon kellemes. Hisz a thetikus műveletek (összeadás, szorzás, stb.) szintén könnyen kezelhető «gondolkodó gépek». Annál nagyobb volt a csalódás, mikor kiderült, hogy az integrálás, amely lényegében thetikus művelet, nem osztozik az építő műveletek ilyen tulajdonságában, sőt inkább, algoritmikus szempontból, lytikusnak mutatkozik és még köztük is áttekinthetetlenlenségével tűnik ki. Hisz egy integrál megoldásánál vagy kiértékelésénél az a kérdés, hogy melyik volt az a függvény, amelynek az integrál jele mögött álló függvény a differenciálhányadosa. Durván olyan ez a kérdés, mintha azt követelnék, hogy mondjuk meg, minek a hányadosa 729 vagy minek a szorzata $(x^2 - 3x + 19)$. Sokszor van támpont a felelethez, máskor nincs. Mesterfogásokat kell alkalmazni, kerülő utakat választani. De az integrálást algoritmikus szempontból sohasem

szabad mindenkor alkalmazható gépnek tekinteni. Világos azonban, hogy van mód arra, hogy a feladat közelébe férközzünk. Így például eleve tudjuk, hogy az integrációs állandótól eltekintve $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$. De minthogy továbbá

$\int (x^n + x^m + x^r + \dots) dx = \int x^n dx + \int x^m dx + \int x^r dx + \dots$ világos, hogy bonyolult integrál is könnyen megoldható, ha sikerül az integrandust hatványsorba fejteni. Ily hatványsor esetében, mégha végtelen is, összetartását feltételezve, tetszőszerinti pontosságú közelítő megoldást kaphatunk. Az x változó együtthatói itt nem játszanak szerepet, mivel állandóként mindenkor az integrál jele elé helyezhetők. Így például

$$\int (ax^n + bx^m + \dots) dx = a \int x^n dx + b \int x^m dx + \dots$$

De már Stifel kiderítette, hogy sorfejtésekben a kombinatorikának igen nagy a szerepe. Így például egy binom hatványának sorbafejtése nem más, mint sokszoros szorzás és ennek következtében a hatványok együtthatói kombinatorikus úton határozhatók meg.

Az említett összefüggésekre való tekintettel, de általában is úttörő jellegű volt sir Isaac Newton felfedezése, midőn 1676-ban rájött, hogy az $(a+b)^e$ a kitevő minden értéke mellett binomiális sorba fejthető. E felfedezés korszakalkotó fontosságára való tekintettel bemutatjuk, hogy miként terjeszthető ki a binomiális sorbafejtés tört kitevőkre, vagyis gyökvonásra.¹ Legyen a binom $(a+b)^e$ és itt a e valódi tört. Ezt átalakíthatjuk. Tegyük fel, hogy $a > b$, és emeljük ki a -t. Az eredmény $\left[a \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right]^e = a^e \left(1 + \frac{b}{a} \right)^e$. Minthogy

most $a > b$, $\frac{b}{a}$ is valódi tört, jelöljük ezt x -szel, és ne törődjünk többé az a^e -vel. Legalábbis egyelőre. Az tehát most a feladatunk, hogy az $(1+x)^e$ binomot sorba fejtsük. Mint-hogy Newton maga is homályban hagyta módszereit és csak

¹ Egészszáma kitevőre lásd szerzőnek Az egyszeregytől az integrálíg c. kötetét, 254. old.

az eredményeket közölte, írjuk mindazt, ami következik, modern alakban. Tehát, így következtetünk, ha a binomiális tétel negatív és törtkitevős hatványokra is kiterjeszthető, akkor $(1+x)^e = \sum_0 \binom{e}{k} x^k$. A felső határt óvatosságból egye-

lőre üresen hagytuk. De azért, hogy a kezdet még világosabb legyen, írjuk a e helyébe, hisz az úgyis valódi törtet jelent, az $\frac{1}{n}$ értéket. Nincs más hátra, mint hogy a sor $x^0, x^1, x^2, x^3 \dots$ tagjainak együtthatóit meghatározzuk. Egy nehézség minden-

esetre adódik. $\binom{\frac{1}{n}}{0}, \binom{\frac{1}{n}}{1}, \binom{\frac{1}{n}}{2} \dots$ alakú binomiális együtthatókat kell kiszámítanunk, pedig ezeknek még semmiféle értelmük sincs. Mert a kombinatorika lényegéből következik, hogy $\binom{p}{r}$ egészszám, hisz a p a kombinálandó elemek száma,

az r pedig a kombináció osztályszáma. Így például $\binom{5}{3}$ az öt elemből alkotható harmadosztályú kombinációk számát jelenti és az értéke $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Nincs más hátra, ki kell bőví-

tenünk az algoritmust, érvényesnek kell tekintenünk magukbanvéve értelmetlen műveletekre. Lehet, hogy találunk olyan mesterfogást, amely átvezet ezen a nehézségen. Megkíséreljük tehát Newton nyomán a nehézség áthidalását.

Haladjunk lépésről lépésre. Tudjuk, hogy $\binom{e}{e}$ mindenkor ugyanannyi, mint $\binom{e}{0}$ és $\binom{e}{e} = 1$. Továbbá $\binom{e}{1} = e$. Ezzel megtaláltuk a két első együtthatót és minthogy $x^0=1$ és $x^1=x$ rögtön felírjuk:

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = \sum_0 \binom{\frac{1}{n}}{k} x^k = 1 + \frac{1}{n} x + \sum_2 \binom{\frac{1}{n}}{k} x^k$$

Most azt kell megtalálnunk, hogy általában miként számítható ki $\left(\frac{1}{n}\right)_k$ értéke. Felhasználjuk azt az összefüggést, hogy

$$\left(\frac{q}{k}\right) = \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-k+1)}{k!}.$$

$$\text{Tehát } \left(\frac{1}{n}\right)_k = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-k+1\right)}{k!};$$

vagy a számláló minden tényezőjét n -nel, a nevezőt pedig az n megfelelő n^k hatványával szorozva

$$\left(\frac{1}{n}\right)_k = \frac{1(1-n)(1-2n)\cdots[1-(k-1)n]}{n^k \cdot k!}$$

Már ez a képlet is arra mutat, hogy végtelen sort fogunk kapni, minthogy a számláló tényezőinek abszolút értéke állandóan növekszik, nem úgy mint egész számú kitevő esetén. Mert ekkor a csökkenő tényezők egyike nulla lesz és ezzel a sor megszakad. Emeljük ki most a $(-1)^{k-1}$ tényezőt, ez ugyanazt jelenti, mintha minden egyes tényezőt -1 -gyel megszoroztunk volna. Ekkor az eredmény:

$$\left(\frac{1}{n}\right)_k = \frac{(n-1)(2n-1)\cdots[(k-1)n-1]}{n^k \cdot k!} (-1)^{k-1}$$

Ezt még tovább is átalakíthatjuk,

$$\left(\frac{1}{n}\right)_k = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{3n-1}{3n} \cdots \frac{(k-1)n-1}{(k-1)n} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{n \cdot k!}$$

és így megkapjuk a binomiális sort tört kitevőkre:

$$(1-x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n} \sum_2^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \cdots \right. \\ \left. \cdots \left(1 - \frac{1}{(k-1)n}\right) \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right] x^k$$

Az x ebben feltétlenül kisebb mint 1, különben a sor nem összetartó.

Ez nagyon bonyolultnak látszik, pedig gyakorlatban legfeljebb egy kis figyelmet kíván. Így például

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

és

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \dots$$

Látjuk, hogy a sorok alternálóak, vagyis a második tagtól kezdve a tagok előjele váltakozva $+$ és $-$.

Leibniz a binomiális tételt kombinatorikus úton tovább fejlesztette és végül a polinomiális tételre jutott, amely kettőnél több tagú kifejezések hatványozását tette lehetővé. De ezzel itt nem foglalkozhatunk. Csupán arra akarunk rámutatni, hogy a tizenhetedik század hősei kezén a matematika különböző ágai miként kapcsolódtak össze. Az analitikus geometria az algebrának és a geometriának testvéries együttműködése. Ebből fejlődött ki az érintőprobléma és vele a differenciál és integrálszámítás, a függvény fogalma és a végtelenanalízis ezekkel kapcsolatos számtalan más problémája. Ilyenek például a függvények szélső értékének meghatározása, területek, köbtartalmak, felületek, ívhosszúságok számítása és a variációszámítás, vagyis adott maximum vagy minimumfeltételeknek megfelelő függvények felkeresése. Kerülőúton, a sorfejtéseken, különösen pedig a binomiális soron keresztül az integrálszámítás a kombinatorikával került kapcsolatba, és ez a kapcsolat mindig szorosabbnak bizonyult, sőt a magasabb differenciálhányadosokra is kiterjedt. Ugyanebben az időben Leibniz genieje, egyik l'Hospital-hoz intézett levélben, a determinánsok elméletének alapjait vetette meg, s a determinánsok később a matematika leg-hatalmasabb eszközei közé emelkedtek. Itt csak annyit említünk róluk, hogy Leibniz volt a felfedezőjük, részletebben más összefüggésben később lesz róluk szó. De ez sem elegendő. Az alig felfedezett logaritmus a legváratlanabb helyen tört be az infinitézimálszámításba, megvetette ott a

lábát és a felsőbb matematikának mintegy alapja lett. Az egyszerű $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$ integrálási képlet alkalmazása során hamarosan váratlan folytonossági hiányra bukkantak. Az algoritmus minden m értékre, pozitívra és negatívra, egésze és törtre egyaránt helyes megoldást adott, pl.:

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4; \quad \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}};$$

$$\int x^{-1} dx = -\frac{1}{3} x^{-3} \text{ stb.}$$

viszont az $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx$ eredményként $\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{1-1} x^{-1+1} = \frac{1}{0} x^0 = \frac{1}{0} \cdot 1$, tehát végtelen, vagyis lehetetlen eredményt szolgáltatott. Ez így nem lehet helyes. Itt az algoritmus felmondta a szolgálatot. De hamarosan rájöttek, hogy az $\frac{1}{x}$ primitív függvénye $\log x$, vagyis $\int \frac{1}{x} dx = \log x$, tehát az $\log x$ differenciálhányadosa $\frac{1}{x}$. Ismét hatalmas felfedezés, amely a matematikai kozmosz távolfekvő részeit köti össze.

E néhány példa csak arra a mozgalomra mutasson rá, amelyben Leibniz élt és amely Leibniz körül forgott, és néhány évtized alatt megteremtette mindazt, ami azóta a nyugati-fausti világot átalakította. Ma nehezen tudjuk az akkori idők szellemi mámorát elképzelni. A késői barokk és a rokokó laza társaságaiban a matematikáról folyik a társalgás, s nem csak a nemes l'Hospital gróf foglalkozik infinitezimál-számítással. Ő csupán leghatalmasabb népszerűsítője, és áttekinthető, részletes tankönyve majd egy évszázadig alapja az e tárgyra vonatkozó tanulmányoknak. Mindenütt emlegetik a láncgörbe megoldásának problémáját, — ez is Leibniz érdeme — amely egy szabadonfüggő lánc alakját, illetve az általa elfoglalt görbe egyenletét adta. Emlegetik a brachistochron feladatot, a «firenzei problémát», (ezeket már említettük), a traktrix-görbét, amelyik úgy keletkezik, hogy mondjuk egy zsebórát az asztalra teszünk és azt, lánc

végét egy egyenesen végighúzza, vonszoljuk. Az óra középpontja akkor mindinkább közeledni fog a «vezéregyeneshez», a nélkül, hogy azt valaha is elérné. Ezt a traktrix-görbét szintén Leibniz vizsgálta, és vele a Gauss-Bolyai-Lobacszevszkij-féle nem-euklidesi geometriával kapcsolatban fogunk újból találkozni.

Csak utalásokra szorítkozhatunk. Futólag említjük, hogy Leibniz a «helyzetgeometriát» is áttekintette, és világos szavakkal elválasztotta a mértékgeometriától. Csak ismételve hangsúlyozhatjuk, hogy írásmódja, (notációja) mindenkor mintaszerű volt. Ő látta át először az indexek jelentőségét, és ezekről sokszor ismételte, hogy nem tekintendő számoknak. Ez egy olyan gondolat, amely úttörő jelentőségű a kombinatorika és ezzel a determinánsok elmélete számára és erre még szó kerül később.

Leibniz árnyéka meglátszik a következő századok fejlődésén és még ma sem tudjuk egészen pontosan, hogy hátrahagyott írásaiban, amelyek sajnos, nagyrészt mindmáig sem kerültek nyilvánosságra, nem rejlenek-e nyíltan vagy rejtve az elkövetkező századoknak is utat mutató elméletek. De arról is csak később lesz szó, hogy ma is félig kifejlődött matematikai felfedezések kaoszának közepette vagyunk.

Most, a fejezet végén vessünk még egy futó pillantást Leibniz és Newton áldatlan elsőbbségi vitájára. Ez csak ártott a tudománynak, mert Leibniz sok felesleges energiát pazarolt rá, és a kissé mogorva Newtont annyira vitte, hogy dühében az egyész végtelenanalízist elátkozza.

Tagadhatatlan, ma már tudjuk, hogy Newton és Leibniz, egymástól függetlenül felfedezték ugyanazt a matematikai tényállást és helyesen alkalmazták. Newton foronomikusan és dinamikusan fogta fel és a fizikára alkalmazta. Fluxióról és fleuensről beszél, a fluxiót $\dot{x}$, a fluenst $\bar{x}$ jellel jelöli. Tény továbbá, hogy időrend szempontjából, Newton korábban ismerte az infinitézimálszámítást, mint Leibniz, valószínűleg már 1665-ben. Leibniz viszont egészen más úton, logikus és kombinatorikus eszközök révén, valamint véges differenciák vizsgálatával jutott el kalkulusához. Nem az volt a célja, hogy ő maga jól ismerje a tényállást, és jól tudja alkalmazni, hanem algoritmizálni akarta, teljes kalkulussá fejleszteni.

Ezt lényegében 1675. október 28-án meg is valósította és 1684-ben nyilvánosságra is hozta. Ebben az időben viszont Newton még nem lépett felfedezésével a nyilvánosság elé.

Ne szóljunk a vitáról többet. Az a körülmény, hogy az egész világ, beleértve az angolszászokat is, kizárólag és kivétel nélkül Leibniz írásmódját használja, objektív szempontból már eldöntötte a vitát. Mert itt nem is a felfedezett dolog maga a lényeges. Hisz az nagyrészt már ismeretes volt akkor, amikor a két vetélytárs a porondra lépett. Fontos, lényeges csupán az, hogy miként lehet a problémából és annak rész-megoldásaiból az átlagember számára is megtanulható és áttekinthető algoritmust csinálni úgy, hogy az a fejlődésnek se álljon útjában. Ezt azonban csak Leibniz valósította meg a két nagy vetélytárs közül. Newton viszont örökértékű fizikai elméletein kívül inkább a sorok és a valószínűség-számítás terén teremtett korszakalkotót.

Egyáltalán nem tudjuk Leibniz nagyságát a maga megdöbbentő mivoltában felfogni. Úttörő volt mint jogász, teológus, történész, feltaláló, fizikus, természetkutató, geológus, vegyész, politikus, nyelvész és «mellékesen» mint matematikus. A filozófus Leibnizről és a lírikus Leibnizről nem is szólunk, hisz köztudomású, hogy ő «elsősorban» filozófus volt. Mi volt ő tehát «elsősorban»? Majd minden szaktudomány története azt állítja, hogy csak lassanként jövünk rá, hogy Leibniz éppen «ebben» a szakmában volt a legnagyobb.

Nem akarunk dönten. Megállapítjuk csupán, hogy egy ilyen értékelés érthetővé teszi azt a felfogást, hogy benne a fausti szellem a szó szoros értelmében véve is olyan univerzális lángésszé sűrűsödött, amilyent a világ nem látott, sem azelőtt, sem azóta. Mert csak ebből az egyesített tudásból fejlődhetett ki a matematika mint kozmosz. Szakszempont nem homályosította el világképét. S lángesze mögött hatalmas, maradéktalan hazafisága állott és megingathatatlan hite Istenben; a harmincéves háború pusztításain felül-emelkedő optimizmusa barátjává és tanácsadójává tette őt Savoiai Jenő hercegnek, Nagy Péter cárnak, XIV. Lajosnak, a porosz királyoknak és királynőknek, Lipót és Károly német császároknak és a Welf hercegeknek.

Leibniz nemcsak a maga személyében jelentette a német matematika dicsőségét, hanem meghonosította a matematikát német földön, talán azáltal, hogy feltárta a fausti szellem legmélyét is.

Nem akarjuk bármely nyugati-fausti nemzet matematikai érdemeit bármiben is kisebbiteni. Hamarosan teljes fényükben fogjuk mindegyiket látni. De meg kell mondanunk, hogy Leibniz óta a német nép egyenrangú maradt a többi matematikai nagyhatalommal, sőt sokszor felül is múlta azokat. Német érdem marad minden esetre, hogy Leibniz után még egy Euler, egy Riemann, egy Weierstrass, egy Grassmann kerülhet ki fiai közül, és mindenekfölött a «princeps mathematicorum», a matematikusok királya, Carl Friedrich Gauss, akit matematikai nagyságában csak Archimedeshez hasonlíthatunk.

TIZENHARMADIK FEJEZET.

Jean Victor Poncelet.

Matematika mint varázstükör.

Ha valaki csak valamelyest is foglalkozott Leibniz-cel és Newton-nal, hamar rájön, hogy a történelmi tények e két szellemóriással kapcsolatban messze felülmúlnak minden várakozást. Éppen ezért mindaz, amit művünkben elmondhattunk és amit el szabadott mondanunk, rövid utalásná nem volt több.

De Leibniz után még sokkal bonyolultabb tudomány-történeti tényekkel kerülünk szembe, annyira, hogy ezeknek néhány szót kell szentelnünk. Mi, mai emberek, — le kell írunk ezt a banális megállapítást — alig kétszáz év távlatából szemléljük az imént elmondott eseményeket. Mondtuk ugyan, hogy a matematika Descartes óta a kézműipar állapotából nagyiparrá fejlődött, az egész világhelyzet továbbra is szinte megsokszorozó fogaskerék-szerkezetként hatott és ez a tudomány iparosodását hatványozott mértékben fokozta. Mi magunk viszont mégsem fejlődtünk emberfeletti emberré s nem mondhatjuk, hogy nincsen másunk a szellemtörténetben. S egyáltalán nem tudhatjuk, hogy nem dobják-e el egykor az iparszerűen előállított matematikánk szellemi tartalmát, mint egy elmúlt időből ittmaradt, divatjamúlt holmit. Röviden: az elmúlt két évszázad történelmi távlatának kevés és a jövődőléshez szükséges prófétaí extrapoláció tehetsége is hiányzik belőlünk.

Minthogy azonban a matematika fejlődésének korát éljük még ma is, — legalábbis így gondolják a jelenkor legmegfontoltabb és legtehetségesebb matematikusai — ezért a Leibnizet követő korok leírása legfeljebb hangulatkép-jellegű lehet, annál is inkább, mivel Leibniz örökségét sem tudjuk

még minden következményével együtt kellő mértékben értékelni. A klasszikus örökség néhány része már közkincs. Viszont az is bizonyos, hogy az egésznek a bővítésével még nem értük el a lehetőségek határát.

Vállalkozásunkat azonban még egy második, sokkal súlyosabb körülmény is akadályozza. Bátran megtehetjük, hogy olvasóinkat a fejlődés során az infinitizémiászámítás kellős közepéig vezessük. Le kellett írunk, hogy miként fejlődtek az alapl műveletek, az összeadásból a szorzás, ebből a hatványozás és miként alakult ki végül az integrálás. A fejlődés túlsó oldala, a kivonás, osztás, gyökvonás, logaritmuskeresés, differenciálszámítás sem idegen már számunkra. Nem mulasztottuk el, hogy utaljunk a számfogalom bővülésére, a természetes számokon keresztül a képzetes számokig. Többé-kevésbé megbarátkoztunk a végtelennel kapcsolatos problémákkal és a különféle paradoxonokat maguktól értetődő kísérő jelenségeinek tartjuk. A magunk méretei közt értjük az algoritmus, a rendszer jelentőségét. Nem csodálkozunk, ha a sorokból szinte egy új számfogalom bukkan elő, éppen így a függvényekből; viszont azt is tudjuk, hogy a sorok eleinte megközelítési kísérletek voltak és a függvények törvényszerű összefüggéseket foglaltak képletbe. De a későbbi algoritmikus fejlődés hamarosan elmosta ezeknek az igen világos és aránylag könnyen érthető fogalmaknak a határait. Mert számítási kényszerűségtől hajtva, egyszerre mindent megfordítottak, a kész adatok lehetséges keletkezési módját keresték, véletlenül adódott nagyságokat tőlük távoleső sorozatokként értelmeztek. Vagyis a helyett, hogy valamely gyök értékét a binomiális sor összegének tekintenék, inkább minden irracionális számot sornak tekintenek és azontúl sorként bánnak vele. Máskor pedig mérési eredményekből adódó számok sorozatára egyszerűen ráfognak, hogy ordináták, vagyis függvényértékek s megkísérlik ennek alapján összekötésüket valamilyen törvény segítségével. A függvény fogalma ezáltal igen nagy mértékben kibővül, meri így minden, bármilyen módon keletkezett szám esetleg függvény és minden matematikai összefüggést függvénynek mondhatunk.

Ez a haladás, valamint a matematikai fogalomalkotás

bonyolódása a matematikához közeledni szándékozó, átlagos műveltségű embert nagyon zavarja, sőt elriasztja és ma még kevésbé vezet a modern matematika labirintusába olyan Ptolemaios Philadelphos által kívánt «királyi út».

Előre kellett mindezt bocsátanunk, nehogy az olvasó csalódást érezzen az utolsó fejezetek miatt. Minden igyekezetünkkel azon leszünk, hogy el tudjuk fogni a titkoknak legalább valamely sarkocskáját, de a dolog természetéből következő, hogy a legmodernebb matematikáról csak általánosságban szólhatunk, arról is csak oly módon, hogy már ismert dolgokhoz kapcsolódunk és egyszerűbb dolgokat «helyettesítünk be» a bonyolultabbak helyére. De ez a fenntartás a geometriára érvényes a legkisebb mértékben. Annál inkább érvényes a «felsőbb matematika» további részére és a végtelenanalízisre.

Az alkalmazás minden módja arra mutat, hogy a differenciál- és integrálszámítás elterjedésével oly hatalmas fegyver került az ember kezébe, amilyen semelyik korábbi időszakban nem volt. Ezzel a fegyverrel neki lehetett vágni a valóság folytonos birodalmának, a lét «kontinuumának», a függvényszerkezetű keletkezésnek, röviden minden «áгурának» és «formának». Az egész tizenharmadik század ebben a racionalisztikus bódulatban telt el, végérvényes és álmyszerű biztonsággal emelkedő világuralommal kecsgettette az embert. Az «értelem istennője» csábítóan mosolygott és mindig újabb és újabb előretörésre biztatott.

Részletesen le sem írhatók azok a korszaktöredékek, amelyekben a legnagyobb szabású matematikai lángeszek működtek. Közéjük tartoztak a Bernoullik, — ez a család egész matematikus-dinasztiává fejlődött — Leonhard Euler, Lagrange, Legendre, D'Alembert, hogy csak a legkiválóbbakat említsük. És a század végén a lángeszű Hindenburg körül egész iskola alakult ki, amely az említett polinomiális tételt alapul véve, a matematikát tisztán kombinatorikus alapon igyekezett felépíteni. Röviden az algebrának és az algoritmusnak Descartes által bevezetett és Leibniztől megalapozott uralma a fejlődés végeláthatatlan útjának látszott. Mellékesen közbevetve említsük meg, hogy Gabriel Cramer 1750-ben Leibniztől függetlenül, másodszor is lefekteti a determinánsok tanát.

Később meglátjuk, hogy ez az algebra és algoritmikus irányzatnak a csúcspontját jelenti.

Ezért írhatta a nagy Laplace 1799-ben a híres «Exposition du système du monde» című művében a következőket a matematikáról: «Az algebrai analízis hamarosan elfeledteti velünk kutatásaink legfőbb tárgyát, elvont kombinációk felé vezet és csak legvégül tér vissza tárgyunkhoz. De ha az analízis módszereire bízunk magunkat, akkor hála e módszer általános érvényének és annak következtében, hogy általa következtetéseket mechanikus műveletekké alakíthatunk át, oly eredményeket érünk el, amelyek a geometriai szintézis számára hozzáférhetetlenek. Az algebrai analízis termékenysége akkora, hogy elég a különleges feladatokat általános érvényű nyelvére lefordítani és a pusztá kifejezés-módból már tömegesen nőnek ki az új és váratlan igazságok. Minden más nyelvből hiányzik ez az elegáns kifejezés-mód, amelyet ennél látunk, ha a kifejezések hosszú sorát írjuk fel, és ezek valamennyien kapcsolatban vannak egymással és ugyanabból az alapötletből származnak. A század matematikusai biztosak fölényükben és éppen ezért serényen munkálkodnak az analitikus módszer uralmának bővítésén és korlátainak ledöntésén.»

Ezt mondja Laplace. Látjuk, hogy ő még teljesen benne él a tizennyolcadik század algoritmikus-racionalisztikus bódulatában és le akarja bontani a matematika teljes algebraizálódásának útját álló végső korlátokat is. Az «analízis» vagy «analitikus módszer» természetesen Laplace számára algebrát és csakis algebrát jelent.

Szegezzük le mégegyszer, hogy a tizennyolcadik század érdeklődésének előterében úgyszólván kizárólag az algebrai jellegű, algoritmizált végtelenséganalízis volt és legjobban bonyolult integrálproblémák megoldásának és a variációszámítás fejlődésének tudott örülni. Már maga Leibniz, az egész mozgalom megindítója, megjegyzi «Ars inveniendi» (A feltalálás művészete) című művében: «A geometerek gyakran kevés szóval be tudnak bizonyítani valamit, aminek számolással való bizonyítása nagyon hosszadalmas volna... az algebra útja feltétlenül célhoz vezet, de nem mindenkor a legjobb út.» Már utaltunk arra, hogy ugyanaz a Leibniz a

«helyzetgeometriára» gondolva, olyan önálló és nagyjövőjű feladatokat látott a geometria számára, amelyek algebrai úton csak nehezen hozzáférhetők.

Nem is nagyon csodálatos, ha Pascal hagyatékának feldolgozójában ilyen gondolatok támadnak. Leibniznél kisebb szellem is elcsodálkozott volna azokon a Pascalnál található utalásokon, amelyek még járatlan irányba mutattak. De akkora volt a zaj az infinitezimálszámítás és a vele kapcsolatos koordinátageometria körül, hogy ezek az utalások és tervek a tizenhétedik század végéig meg nem hallottak maradtak.

Néplélektan szempontjából nagyon érdekes, hogy a geometriának most következő korszaka is kizárólag francia szellem terméke. De hogy ezt részletesen is kimutathassuk, szálljunk ismét varázsszövegünkre és vigyen ez bennünket Leibniznél régebbi korba, Lyon városába. Ott élt a tizenhetedik század első felében egy fiatal építész, a neve Girard Desargues. Sok más nagytudású matematikushoz hasonlóan, ő is kissé bogaras természetű volt. Írt egy nagyon mélyenjáró művet, amelynek körülbelül a következő a címe: «Azon események vázlata, amelyek megtörténnek, ha egy kúp egy síkkal találkozik.»¹ De mivel ő, mint már említettük, nagyon bogaras volt, úgy találta helyesnek, hogy művét különálló lapokra nyomassa, gombostűfejnyi betűkkel. De még ez sem volt neki elég. Felfedezéseit ezenkívül még dagályos nyelvezet is rejtette, mert geometriai fogalmaknak botanikai neveket adott és folyton virágokról, törzsekről, ágakról és hasonlókról beszélt.

Ezeket a lapokat barátainak küldte meg, de küldött belőlük híres matematikusoknak is. Igazán nem csodálatos, hogy ezek nem tudtak mit kezdeni ezzel az új dologgal, amely ráadásul ilyen zavaros formában jutott tudomásukra. Min-

en tudományban, így a matematikában is, minden korban sok volt a zavarosfejú sarlatán, és bizony gyakran nagyon nehéz az újdonságot a nagyravágyástól és hóborttól megkülönböztetni. Desargues megtett minden tőle telhetőt, hogy őt is ilyen lézengő szerencsevadásznak tartsák. Csak néhány igen nagytudású ember, így Fermat, Descartes, Pascal, vette

¹ Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan. (1639.)

magának a fáradságot, hogy áttörjön a lyoniak ezen a matematikai-botanikai bozótján és egészen a lényegig hatoljon. Míg azonban az első kettő annyira elmerült a koordináta-geometria fejlesztésében, hogy bár felfogták a lényeget, nem haladhattak a Desargues által kijelölt úton, addig a harmadik, a geniális Blaise Pascal már 16 éves korában elhatározta, hogy Desargues felfedezéseit tovább fejleszti.

De még mielőtt ezzel foglalkoznánk, lássuk Desargues legfőbb eredményeit legalább vázlatosan. Érthető, hogy építészeti működése során gyakran kerültek útjába a perspektíva problémái. A perspektíva problémája — amellyel gyakorlati szempontból előtte is már többen foglalkoztak — az ő fejében egészen matematikai jelleget öltött és ezzel valódi tudománnyá lett. Két alapvető kérdés lebegett szeme előtt, és ez a két kérdés a tizenkilencedik században emelkedett különös fontosságra. A pergai Apollonios még az egyes kúpszeletek tulajdonságait vizsgálta, ő viszont folytonosan változtatta a kúpot metsző síknak és a kúp tengelyének hajlásszögét, a derékszögtől a párhuzamossáig, sőt azt az esetet is vizsgálta, amelyben a sík a kúp tengelyén ment keresztül, és rájött, hogy a tulajdonságok egész sorozata változatlan marad akkor is, ha a sík hajlásszöge változik. Ezek tehát a kúpszeletek közös tulajdonságai. A második kérdés, melylyel Desargues foglalkozott, az a szakadék, amely az egymást metsző egyeneseket a párhuzamosoktól elválasztja. Hamarosan rájött, hogy az egymást metsző és a párhuzamos egyeneseknek több a közös, mint az eltérő tulajdonsága. Sőt perspektíva szempontjából gyakran azonosnak kell a kettőt tekintenünk; ez világossá válik mindenki előtt, ha elképzeljük, hogy perspektívában, helyesen választva a nézőpontot, a párhuzamosak gyakran látszanak egymást metsző egyeneseknek. De ez bizonyos szempontokból a kúp és henger azonoságára vall és felbukkan egy paradox fogalom, amely még hallatlan termékeny lesz a geometriában. Ez «a végtelen távoli pont» és általában a «végtelen távoli elemek» fogalma. A párhuzamos egyenesek a végtelen távoli pontban metszik egymást s ezáltal metsző egyenesekké lesznek. A henger olyan sugárnyaláb lesz, amelynek sorozója egy végtelen távoli pont. De párhuzamosokon nincs két végtelen távoli pont a szerint,

hogy jobbra vagy balra hosszabbítjuk meg az egyenest. Nagyön furcsán hangzó feltevés, de minden párhuzamos sugársornak (a síkban), és minden párhuzamos sugárnyalábnak (a térben) csak egy közös végtelen távoli pontja van. Amint-hogy a napsugarak is párhuzamosoknak látszanak és mégsem jut eszünkbe, hogy két Napból származnak.

Csak akkor derült ki, amidőn az idő már erre megérett, hogy a végtelen távoli pont fogalma és az idomok perspektívikus alakváltozástól független közös tulajdonságainak felfedezése egészen új geometriát teremtett. Egyelőre Desargues csak nevetségeseznek látszott, akárcsak az a híres tétele, amely szerint két tetszés szerinti, perspektívikus helyzetű háromszögnek megfelelő oldalai egymást egy egyenesen metszik. Csupán Pascal vizsgálta tovább a kúpszeleteket Desargues módszerével és hamarosan egy annyira varázslatosnak látszó alapvető tételre bukkant, hogy azt még maga Pascal is csodátevőnek nevezte. És joggal, mert Pascal tételéről, éppen úgy, mint Desargues tételéről csak a tizenkilencedik század végén derült ki, hogy hídként kötik össze az algebrát a geometriával s rajtuk keresztül lehet csak a logika sérelme nélkül az egyiktől a másikhoz eljutni. Erről később lesz szó. Itt csak egy furcsa véletlent kell említenünk. Desargues említett főművét kétszáz évi lappangás után 1845-ben Michel Chasles, a híres geometer és matematika történetének kutatója találta meg a Szajna-parton, egy könyvkereskedő ládájában. Ekkor azonban Poncelet és v. Staudt már újra megalapozta az «új, vagy projektív» geometriát.

Hallottuk, hogy a nagy Laplace a tizennyolcadik század utolsó évében igen meleg hangon emlékezett meg az algebrai algoritmus mindenre kiterjedő hatalmáról. Annyira lelkesedett, hogy mindenki azt hihette, nincs már más út a matematika fejlesztésére, mint az algoritmikus algebra, az infinitézimálszámítás, koordináták és függvények. De ebben az időben két esemény történt, melyek egyikéről most rögtön szó lesz, a másikat csak a tizenötödik fejezetben fogjuk méltatni, mert az már az ifjú Gauss működésével kapcsolatos. Az 1798. évben Gaspard de Monge, egy lángeszű geometer, a francia hadsereg kitűnő műszaki tisztje, nyilvánosságra hozta évtizedes kutatásai eredményét. E mű volt az első tel-

jes és kimerítő ábrázoló geometriai tankönyv. Ezt a tudományát általában csak a matematika alkalmazott formájának tekintik, de oly sok a kapcsolata a tiszta matematikával, hogy akkor sem mehetnénk el némán első ismertetése mellett, ha történetesen Poncelet nem lett volna de Monge tanítványa és tisztelője. Mellékesen megjegyezve, a sors e korban minden francia matematikust hihetetlen kalandokba kergetett. Magának de Monge-nak, a híres Ecole normale és Ecole polytechnique megalapítójának az a kétes dicsőség jutott osztályrészül, hogy forradalmár tengerészeti miniszterként ő hajtatta végre a halálos ítéletet XVI. Lajoson. Napoleon alatt magas állást kapott, de a nagy korzikaival együtt bukott és visszavonulva töltötte hátralévő éveit.

Tanítványa Jean Victor Poncelet szintén műszaki tiszt volt a francia hadseregben. Ezzel együtt vonult 1812-ben Oroszország ellen és sok bajtársával együtt Krasnoje mellett fogságba került. Azon a hideg télen, amelyen a higany a hőmérőben megfagyott, gyalog kellett a Volga-menti Saratovig elmennie, ahová betegen és összetörve érkezett meg. Annál csodálatosabb e férfi lelki nagysága, hogy az élelmezésre kapott néhány kopekból durva papírt és tollat tudott venni. Tintát lámpakoromból magának kellett csinálnia, hisz végeredményben élelmezésre is kellett a pénz. Ezekkel a szánalmas eszközökkel vázolta fel későbbi főműve alapjait. Ez a mű Desargues és Pascal munkálataihoz kapcsolódik, noha Poncelet az elsőnek művét nem ismerte közelebbről. Előszavában ugyanis arról panaszkodik, hogy mennyire nélküli Desargues főművét, ugyanazt a művet tehát, amelyről már említettük, hogy Chasles 1845-ben találta meg újra.

Poncelet 1814-ben tért vissza hazájába, Metzbe és 1822-ben befejezte főművét, amelynek címe «Traité des propriétés projectives des figures». (Értekezés idomok projektív tulajdonságairól.) Műve korszakalkotó a matematika történetében, de hazájában egyáltalán nem talált megértésre. Ez az értetlenség akkora volt, hogy a francia akadémia megtagadta felfedezése kiadását, úgyhogy ezek Németországban, a Crelle's Journal-ban jelentek meg. Ez a véletlen azonban javára vált a matematikának, mert Németországban kongeniális szellemek egész csoportja, elsősorban Steiner és

v. Staudt fogott munkához. Ezek fejlesztették azután a projektív geometriát a mai tökéletességéig.

Ne vágjunk a dolgok elébe, halljuk inkább magától Poncelettől, hogy mit tekintett feladata lényegének. «Vizsgáljunk», mondja, «valamely idomot olyan általános, sőt bizonyos szempontból határozatlan helyzetben, amilyent az idom a rendszer részei közt fennálló törvényeknek, feltételeknek, összefüggéseknek (ezeket az idom definíciója már meghatározza) sérelme nélkül elfoglalhat; tegyük fel továbbá, hogy ilyen feltételek közt megismertük az idomnak egy vagy több, metrikus vagy projektív tulajdonságát. Ha most azonos feltételek közt az eredeti idomot tetszés szerint kis mértékben megváltoztatjuk, vagy az idom bizonyos részeinek folytonos, de egyébként tetszésszerű mozgását engedjük meg, nemde világos akkor, hogy mindazok a tulajdonságok és összefüggések, amelyek az első rendszerben érvényesek voltak, alkalmazhatók maradnak a belőle fentiek alapján adódó új rendszerben is?»

E szavak félreérthetetlenül azt a «helyzetgeometriát» követelik, amelyet már Leibniz is sejtett. A méret és az alak eltűnik a geometriából, csupán árnyékszerű «összefüggések» és «tulajdonságok» maradnak meg, amelyek magukban véve, vagy csoportosan is, érzéketlenek a rendszer minden torzulásával és változásával szemben. Ilyen, helyzetre vonatkozó tételeket fedezett fel Desargues és Pascal is, Leibniz és Euler is sokat tett ezen a téren. Ezek közé tartozik a híres, poliéderekről szóló Euler-féle tétel: «Lap plusz csúcs egyenlő él plusz kettő». Ez érvényes, néhány, a mindennapi geometriában alig előforduló esettől eltekintve, minden soklapra. A francia Carnot is az idomoknak olyan rendszerét állította össze, amely az eddigi geometriai idomokkal a «teljes» idomok csoportját állítja szembe. Négy pont például teljes négyszöget ad, ha az összes olyan egyenest meghúzzuk, amely ezen a négy pont közül kettőn-kettőn keresztül mehethet. E teljes négyszögnek tehát 4 sarka és $\binom{4}{2} = 6$ oldala van. Négy egyenes viszont $\binom{4}{2} = 6$ pontban metszheti egymást, stb.¹

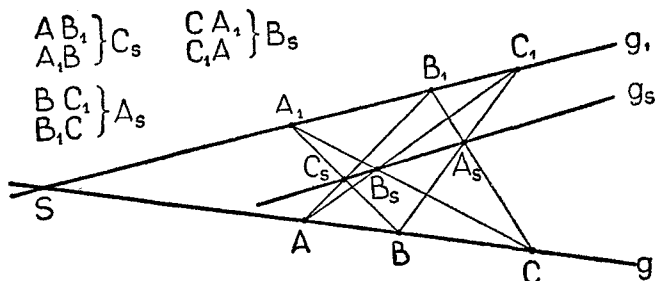
¹ Részletesebben lásd többek közt szerzőtől: A ponttól a négy dimenzióig c. könyv 58. oldalán.

Idomoknak elemeiből, tehát pontokból, egyenesekből, síkokból való felépítése szintétikus jellegű. Ezért nevezik gyakran a projektív geometriát szintétikus geometriának is. Megteremtésének legmélyebb oka az volt, hogy a túlságosan nagyra nőtt analitikus geometria terjeszkedésének és az egész matematika algebraizálódásának és algoritmizálódásának azzal akartak határt szabni, hogy a geometria számára is biztosítsák az algoritmus előnyeit. Merész rohammal vissza akarták szerezni a geometria hatalmi helyzetét. Ezzel csakugyan új csodák világába jutottak, de végül — tragikomikus — az új geometria elkezdett kivetkőzni geometriai mivoltából és ma határozottan felismerhetők rajta egy bizonyos, álcázott, algebra vonásai. Közben Lullus sok álma megvalósult, a legszebb ezek között «a dualitás elve», amelyet Poncelet fedezett fel és 1822-ben hozott nyilvánosságra. Néhány évvel később, Poncelet-től függetlenül Gergonne is felfedezte és közzétette.

Ez a bűvös elv, amelynek most egy meglepő példáját fogjuk leírni, lehetővé teszi, hogy fogalmak nevének pusztá megváltoztatásával, illetve felcserélésével új geometriai tételeket állítsunk fel. Csupán a «metszés» és «összekötés», «pont» és «egyenes» kifejezéseket kell felcserélnünk, hogy új tételekre bukkanjunk. Ha tudjuk, hogy egy síkban két «egyenes» egymást egy «pontban» «metszi», akkor ezt a tételt «duáljára» lefordítva, rögtön kijelenthetjük, hogy a síkban két «pontot» egy «egyenes» «köt össze». Ilyen egyszerű geometriai tételeknél a dualitás elvének működése magátólértétdőnek látszik és egyáltalán nem meglepő. De hogy mennyire csalóka ez a látszat, azt az a körülmény is bizonyítja, hogy Pascal híres hatszögtételét már 1640-ben felfedezte, ennek duálját viszont Brianchon csak 1806-ban, tehát 166 évvel később fedezte fel. Ha már Pascal ismerte volna a dualitás elvét, akkor ez a 166 év két percre rövidülhetett volna. A «Pascaltételnek» különleges alakja, amelyre szükségünk lesz, így hangzik:

Legyen két egymást metsző egyenesünk (ezekhez számíthatódnak természetesen a végtelen távoli pontra vonatkozó megállapodásunk alapján a párhuzamosok is). A két egyenes jele g_1 és g . A g egyenes három tetszés szerint választott pontja legyen A_1 , B_1 és C_1 . Válasszunk a g egyenesen is tetszésünk szerint

három pontot: A , B és C . Kössük most össze az A és B_1 , valamint az A_1 és B pontokat, a két összekötő egyenes metszéspontja legyen C_s . Kössük azután össze a B és C_1 valamint a B_1 és C pont okatebből az A_s metszéspontot kapjuk. Ha végül a C és A_1 valamint a C_1 és A pontokat kötjük össze, akkor megkapjuk B_s metszéspontot. Legnagyobb meglepetésünkre észrevehetjük, hogy a három metszéspont, A_s , B_s és C_s egyetlen g_s egyenesen fekszik. Jegyezzük meg itt, hogy ilyen feladatok megrajzolásához bizonyos áttekinthető képesség és rutin szükséges. Igaz ugyan, hogy a tétel minden esetre érvényes, de a gyakorlatban megeshet, hogy ha a pontokat ügyetlenül választjuk, akkor nem elég nagy a rajzlap a met-

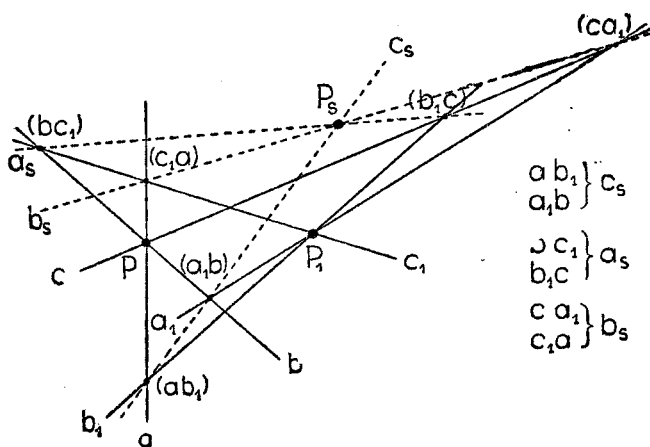


9. ábra.

széspontok megtalálására. Ezzel természetesen a rajz nagyon áttekinthetetlenné válik. Gyakran támadták is e miatt a projektív geometriát és azt mondták: ez a geometria nyugodtan feltételezi, hogy minden «metszés» valóban megvalósítható. A «valóban» kifejezés alatt természetesen a megrajzolás lehetőségét kell érteni. De ha olyan vonalakat kell húznunk, amelyek csak 150 méter távolságban adják a keresett metszéspontot, akkor a szerkesztés a gyakorlatban úgyszólván használhatetlen.

De ne ijesszen el minket ez a magában véve nem teljesen jogosulatlan bírálat és csodálkozásunk se legyen kisebb, ha a következő néhány percben a dualitás elve segítségével szinte 166 évet ugrunk. E célra csak az «összekötés» és «metszés», valamint a «pont» és «egyenes» fogalmait kell felcserélnünk,

hogyan a Pascal-tétel dualját, Brianchon tételét kimondhassuk. Ne bíbelődjünk sokáig az elmélettel, próbáljuk meg a gyakorlatban. A következő új tételt kell kapnunk: Van két pontunk: P_1 és P . Mivel a Pascal-tételnél két egyenesünk volt: g_1 és g . A Pascal-tételnél három-három $(A_1, B_1, C_1$ és $A, B, C)$ «pontot» egy-egy «egyenes» «kötött össze», most tehát két «pontunkban» (P_1 és P) három-három «egyenes» $(a_1, b_1, c_1$ és $a, b, c)$ «metszi egymást». Kutassunk tovább. A Pascal-tételnél «összekötöttük» a «pontokat», tehát a Brianchon-



10. ábra.

tételnél a három «egyenest» páronként «metszésbe» kell hoznunk, mégpedig ugyanolyan rendszer szerint, mint a Pascal-tételnél, tehát az a és b_1 , a_1 és b ; b és c_1 , b_1 és c , végül c és a , c_1 és a egyeneseket kell egymással metszésbe hoznunk. De ezzel még csak a Pascal-tétellel kapcsolatos szerkesztésünk összekötő egyeneseinek duális megfelelőjét találtuk meg. Mit csináltunk előbb ezután? Az «összekötő egyeneseket» metszésbe hoztuk egymással. Mit kell tehát most tennünk? A «metszéspontokat» «összekötni». Így kapjuk az a_s , b_s és a_1 egyeneseket. A dualitás elvét szigorúan követve, csak gondolatokkal játszva, a Pascal-tétel három «metszéspontja»

A_s , B_s és C_s helyett a Brianchon-tételnél három «összekötő egyenest», a_s , b_s és c_s kaptunk. Most levonhatjuk a dualitás elvéből a végső következtetést is. Ha ugyanis a Pascal-tétel három «metszéspontja» ugyanazon az «egyenesen» fekszik, akkor a Brianchon-tétel három «összekötő egyenesének» egy P_s ponton kell keresztülmennie. Valóban, ha megrajzoljuk az ábrát, csodálkozva láthatjuk új gondolkodó gépünk csalhatatlan, biztos működését.

De a dualitás elve még sokkal nagyszerűbb, mintsem ezen a példán mutatkozott, mert nemcsak a sík «pontját» és «egyenését» kapcsolja egymáshoz a dualitás tétele. Bűvös gépünk hatalma még sokkal messzebb terjed és ennek is bemutatjuk mindjárt néhány példáját. A dualitás elméletének egyik főtétele például a következő: «Minden síkidom egy centrikus idom metszete és minden centrikus idom egy síkidom vetülete». Ezt a nagyon szabatosan fogalmazott tételt kissé érthetőbbé, kell tennünk. Nem mond többet és nem mond kevesebbet, mint hogy a sík és a sugárnyaláb egymás «duális megfelelői» de ez az alapigazságok közé tartozik és egyben alapja a szem geometriájának. Mert a szemünk látósugarai (központos nyaláb) mindenütt, ahová csak elérnek, «metszésbe jutnak» egy síkkal, az egy síkra vonatkoztatott világgal s ha e kép-világ útját vissza, a szem felé követem, akkor a fénykúp, «sugárnyaláb», nem más, mint ennek a világnak a vetítése. A látósugaraknak a szemben történt kereszteződése után a duális folyamat még egyszer lejátszódik. Mert most a szemfenéken keletkező kép a nyaláb metszete.

Ezért és ily módon tudjuk csupán a látható világnak a képét tetszésünk szerint bármely síkon előállítani, mert a szem maga, az ú. n. centrális perspektíva törvényei szerint «rajzol» vagy «fest». Centrális perspektíván olyan projekciót kell értenünk, amelynél a vetítésugarak központos nyalábhoz tartoznak. Ez az oka, hogy csupán centrális perspektívával előállított kép egyezik azzal a képpel, amelyet a külvilág képeként szemünk révén megszoktunk. S ezért hat minden «paralel» perspektívával előállított kép többé vagy kevésbé természetellenesen. És ez egyúttal annak a rejtélynek is a megfejtése, hogy miért nem látunk «valóságban» párhuzamos egyeneseket. A centrális perspektíva ugyanis nem ismer pár-

huzamosokat. Szigorúan véve egyáltalán nem ismer ilyent. A gyakorlatban csak nagyobb hosszúságú párhuzamosokon mutatkozik ez a hatás, mint pl. egy templomtorony élein, vagy pedig a távolban elvesző vasúti síneken. De fenti elméleti korlátozások ellenére a gyakorlatban megszoktuk, hogy minden műszaki tervet, rajzot, sőt a geometriai idomok nagyrészt is parallel perspektívában ábrázoljuk. Ez onnan származik, hogy képzeletben a teret tisztán parallel perspektívikus tulajdonságokkal ruházzuk fel és szemünk álláspontjáról valamint annak projektív tulajdonságairól nem veszünk tudomást. De legyünk tisztában azzal, hogy e közben egy másik «valóságot», a nézés valóságát mellőzzük, vagyis ezt a valóságot teljesen kikapcsoljuk. Ehhez járul még egy második körülmény is, és ezt itt meg kell említenünk. A különféle geometriai idomokkal kapcsolatban még egy feltevéssel élünk, noha ez csak a *mi* világunkból származó tapasztalaton alapul. Minden geometriai idomot ugyanis merev testnek gondolunk. Ha nem tudnánk fából, fémből vagy kőből golyót, kockát, háromszöget, kúpot, gúlát, oktaédert stb. előállítani és háromszöget, négyzetet csak nedves itatós-papírból, testeket pedig csak száraz homokból vagy valami sűrű folyadékból tudnánk csak készíteni, akkor aligha szerezhettük volna meg geometriai ismereteinket. Mert a fénysugarak egyenesvonalú terjedése magábanvéve aligha lett volna elég egy ekkora gondolatépítmény megteremtéséhez. Feltétlenül gondolkodóba ejtenek ezek a Poincaré-tól és Dingler-től származó megjegyzések. De másrészt viszont nem szabad azt a következtetést levonnunk, hogy a geometria kizárólag a «tapasztalathból» keletkezett. Mert nagy a különbség a fogalmaknak tapasztalathból és a tapasztalattal kapcsolatban való keletkezése közt, mint ezt már Kant is kimutatta. Legfeljebb annak kijelentésére van tehát jogunk, hogy geometriai módszerünk merev testek elképzelhetősége és világunkban való létezése folytán fejlődött éppen ilyen módon. De ebből következik az is, hogy miért képzeljük el a «valóságos teret» és a benne levő tárgyakat túlnyomórészt parallel perspektívában, tehát a valóságos látással meg nem egyező módon.

De kitérésünkkel vétkes módon félbeszakítottuk a dualitás elvének vizsgálatát. Mondottuk, hogy csupán a pont és

egyenes közt fennálló dualításra volt szükségünk, amikor Brianchon tételét a Pascal-tételből levezettük. Ez természetesen is, mivelhogy a dualitás megfordítható, ú. n. egyegyértelmű egymáshozrendelés. Ugyanezekkel az eszközökkel a Pascal-tételt is levezethettük volna a Brianchon-tételből. Minden tétel szinte duális tétele tükörképének mondható. De helyesebb, ha nem vesszük túlságosan szószerint ezt a tükrözést. Mert a duális tükör bizonyos értelemben torzító tükör. Minden alapalakzatot az ellenkezőjére fordít át. Helyesebb volna vele kapcsolatban «varázstükörről» beszélni. De még egy megjegyzést: magától értetődik, helyesebben magától kellene értetődnie, hogy annak a tételnek, amelyből kiindulva a duális tételt felírjuk, bizonyítottnak kell lennie. Ne tekintsük magunkat felfedezőnek, ha valamely teljesen indokolatlan geometriai állításhoz a dualitás elve segítségével a duális tételt felírjuk. Pascal tétele be volt bizonyítva, tehát Brianchonnak, ha ismeri a dualitás-elvet, fel sem kellett volna önállóan tételét fedeznie és be sem kellett volna bizonyítania. Foglajuk tehát össze kijelentéseinket a következőkben: ha valamely projektív geometriai tétel helyes és kellőképpen bebizonyítottuk, akkor a dualitás elve segítségével nemcsak a hozzátartozó, megfelelő tételt lehet azonnal kimondani, hanem feleslegessé vált utóbbinak külön bizonyítása is. Feltevése természetesen, hogy a dualitás elvét helyesen alkalmaztuk és a különböző cseréket kifogástalanul végeztük. De a tiszta, világos és áttekinthető írásmód itt teszi a legjobb szolgálatot.

A következőket kiépített s mindinkább kibővített írásmód valószínűleg meg azt, amint már említettük, hogy a projektív geometria geometriai burka egyszerre eltűnt és egy algoritmus maradt hátra. Ez az oka annak, hogy ma már vannak olyan geometriai könyvek is, amelyekben vonalak és rajzok helyett csak betűk, indexek és kombinatorikai képletek láthatók. Tehát a szintetikus geometria győzelme az analitikus felett tulajdonképpen világraszóló kibékülésé, kiegyezésé vált, és kiderült, mint a tudomány története során már annyiszor, hogy két különféle úton, nagyon eltérő vidékeken keresztül haladva jutottunk ugyanoda és közben nagyon sok új tudással gazdagodtunk.

Minden elméleti változáson kívül az új geometriának még egy tisztán gyakorlati előnye is van. Számptalan, különösen kúpszeletekre vonatkozó szerkesztést tesz lehetővé, legkülönbözőbb perspektív torzításokkal, még pedig körző használata nélkül. A «pusztán vonalzóval való» szerkesztés egyike az «új geometria» nagy eredményeinek. De még egy nagy horderejű lehetőség fejlődött ki ebből a geometriából. Mint-hogy általa minden idom általános felépítési törvénye tanulmányozhatóvá és az általános kombinatorikus algoritmusnak alárendelhetővé vált, Grassmann, Schläfli és mások meg tudták szüntetni geometriáknak három dimenzióra való korlátozottságát. Ha a nulla dimenzióknak legegyszerűbb idoma, «simplex» a pont, az egy dimenzióé vonaldarab, a távolság, akkor a síkban, az R_2 -ben, a két dimenziós térben az a legegyszerűbb idom, amelynek nem lehet átlója. Az R_2 simplex, az S_2 tehát a háromszög, illetőleg háromoldal. $\binom{3}{1}$ csúcsa és $\binom{3}{2}$ oldala, illetőleg $\binom{3}{1}$ oldala és $\binom{3}{2}$ csúcsa van. Azaz 3 oldala és 3 csúcsa. Az R_3 -ban úgy kapjuk meg az S_3 -at ha megfontoljuk, hogy egy R_3 teret csak 4, nem egy síkban fekvő pont határoz meg. Kombinatorikus értelemben ezt $\binom{4}{1}$ pontnak tekinthetjük, amelyet $\binom{4}{2}$ egyenes és $\binom{4}{3}$ lap köt össze, mivel két pont mindenkor egy egyenesen, három pont pedig egy síkon fekszik és ezeket nevezzük a pontok összekötő egyenesének, illetőleg síkjának. Az R_3 simplexének tehát 4 csúcsa, 6 éle és 4 lapja van. Ez a tetraeder. Most folytathatjuk következtetésünket és kijelenthetjük, hogy az R_4 -ben, tehát a ret-tegett negyedik dimenzióban, a simplex az $\binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}$ törvényszerűségnek engedelmeskedik, minthogy az eddigiek alapján négydimenziós teret öt pont határoz meg. Láttuk ugyanis, hogy az R_0 meghatározásához egy pont, az R_1 meghatározásához két pont, az R_2 -éhez három pont, az R_3 -éhoz pedig négy pont kellett, tehát általában az R_n meghatározásához $(n+1)$ pont szükséges. Kombinatorikus képleteinkből tehát az következik, hogy a négydimenziós simplex

5 csúcsból, 10 élből, 10 lapból és 5 határoló testből vagy «sejt-ből» áll. Általában azt mondhatjuk, hogy az n dimenziós simplexet az $\binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2} \dots \binom{n+1}{n}$ felépítési mód teljesen meghatározza.

De még többet is mondhatunk. A modern geometria algoritmusai lehetővé teszi, hogy akárhány dimenziós terekben levő testek kapcsolatait tanulmányozhassuk. Van például olyan «metszési törvény», amely lehetővé teszi, hogy akárhánymértékű térben akárhánydimenziós idomok metszésének dimenziószámát meghatározzuk. Ha ugyanis két idom m és n dimenziószáma kisebb, mint az őket magukban foglaló tér d dimenziószáma, akkor érvényes a következő összefüggés

$$(d+1) = (n+1) + (m+1) - (n \cdot m + 1),$$

vagyis

$$d = n + m - n \cdot m$$

és $n \cdot m$ a metszési idom dimenziószáma. Ha d , m és n ismert, akkor $nm = n + m - d$. Mellékesen tegyük fel a kérdést, mi egy egyenesnek és egy síknak a metszésidoma a térben. Vagyis egy R_1 -nek és egy R_2 -nek az R_3 -ban. A képlet szerint $nm = 1 + 2 - 3 = 0$, tehát a metszésidom egy R_0 , vagyis egy pont és ez szemmel láthatóan igaz. A négydimenziós térben két sík az $nm = 2 + 2 - 4 = 0$ összefüggés szerint, egy egyenes és egy test pedig az $nm = 1 + 3 - 4 = 0$ összefüggés szerint szintén egy pontban metszi egymást, noha ezt semmiképpen sem tudjuk elképzelni. Az ötdimenziós térben két test az $nm = 3 + 3 - 5 = 1$ összefüggés szerint egy egyenesben metszi egymást, két egyenes pedig az $nm = 1 + 1 - 5 = -3$ szerint egy pontban metszheti egymást, éppúgy, mint megszokott R_3 -unkban, de, a negatív eredmények általános értelme szerint, kitérő is lehet. Kitérhetnek, keresztezhetik egymást egy általunk is ismert módon, de azonkívül még két, számunkra elképzelhetetlen módon is. Az R_7 -ben már két test is keresztezheti egymást, az R_6 -ban pedig metszésidomuk egy pont.

A többdimenziós geometria a tizenkilencedik század egyik legnyugtalanítóbb eredménye, mivel kristálytisztán és mégis áttekinthetetlenül áll szemünk előtt. Bízunk jobban az algoritmusban, mint a szemléletben? Merészkedjünk ki pusztán az

«ész szárnyain» az R_n -be, amelynek csupán az R_3 -ból kombinatorikus eszközökkel extrapolált törvényeit ismerjük? Néhány matematikus arról biztosít, hogy ebben nincs semmi misztikus, hogy ez éppen olyan veszélytelen és ártalmatlan, mint az a^4 , a^5 stb. kifejezések és hogy nem egyéb, mint csak «számítás», amelyet egyáltalán nem kell elképzelnünk. Mindez csupán logikus térben, gondolattérben, vagy későbbi nevén konfigurációs térben, vagy esetleg csupán egy kombinatorikus térben van. «Tapasztalathoz», «valósághoz» a többdimenziós tereknek semmi közük. Még az sem biztos, hogy tapasztalati terünk háromdimenziós. Az is lehet, hogy dimenziótlan vagy metadimenziós.

Itt már csak utalhatunk a dolgokra, mert a fejlődés legújabb koráig jutottunk el. Nem merünk itt semmiféle döntésről beszélni, inkább ama sejtésünknek adunk kifejezést, hogy a dimenzióprobléma, amely csak a projektív geometria ismeretében vált igazán mozgékonyvá, még sokféle szempont figyelembevételével fejlődik tovább, mert tovább kell fejlődnie, és ekkor a filozófiai és ismeretelméleti álláspont nem fog utolsó szerepet játszani.

Ne zárjuk le a fejezetet, bármily izgalmas maga a probléma, a nélkül, hogy a dimenzióelmélet megalapítójának, Grassmann személyének néhány szót szenteltünk volna. 1809-ben született Stettinben, teológiai és filológiai tanulmányokat folytatott, a matematikában viszont autodidakta volt. Noha matematikát nem hallgatott soha, 1840-ben mégis letette a kiegészítő tanári vizsgát e tárgyból is, minthogy tanárként ezt akarta előadni. 1844-ben megjelent «Lineale Ausdehnungslehre» című művét nem méltatták figyelemre. Csak amikor mint szanszkrit filológus (Wörterbuch zum Rigveda), mint német népdalok kiadója, mint lapszerkesztő már érvényesült, akkor tűntek fel, éppen Helmholtznak, az elektromos áramra, színelméletre és akusztikára vonatkozó kutatásai. Ő segítette azután a matematikust a megérdemelt elismeréshez, ami most már annál is könnyebb volt, mert már más matematikusok is foglalkoztak hasonló kutatásokkal. Grassmann tanári pályája mártírium volt, tanítványai előtt nem volt tekintélye, nem engedelmeskedtek neki, előadásai zajba fulladtak. Főképpen azért, mert Grassmann jel-

leme csak jóságot, szerénységet és barátságos vonásokat tartalmazott.

Mint már mondtuk, e lángészből és különcségből összetett furcsa ember megérte gondolatai igazolását és elismerését, fellendülésüket, sőt személyes hírnév is osztályrészül jutott neki.

Kissé melankólikusan végződik ez az emberekben és talomban oly mozgalmas fejezet. Más összefüggésben még szó lesz néhány, itt felvetett problémáról. És ott is alkalmunk lesz néhány tragikus sorsú embert megismerni, mintha a tudományunk legmagasabb problémáinak érintése, miként hajdan Hellasban, ma is a hatalmas istenek haragját hívná ki maga ellen.

TIZENNEGYEDIK FEJEZET.

Evariste Galois.

Matematika, mint általánosítás.

Az a körülmény, hogy egyenletek minden fajtája és rendszere mindenkor kedvence volt a matematikai kutatásnak, már csak azért is érthető, mert úgyszólván sehol sem mutatkozik meg annyira az algoritmus varázshatalma, mint éppen ezekben. Valami ismeretlen. És nem használ a gondolkodás megtalálására. Gondolatmenetek és számok, összefüggések és kísérletek csak zavart keltenek és csődöt mondanak. Ekkor előveszünk valami silány papírlapot, kezünkbe vesszük a ceruzát, «felírjuk» az egyenletet és minden továbbit bizalommal és kíváncsian rábízunk az eljárás-automatára. És megkapjuk az eredményt olyan pontossággal, amint csak kívánjuk.

Nem, sajnos, nincs így! Nem kapjuk meg mindig az eredményt, mert minél magasabb az egyenletnek a «foka», annál nagyobbak a nehézségek és végül csalódunk a fegyverben, amelyet már büszkén tartottunk kezünkben. Igen, felírtuk az egyenletet. Ha megoldottuk, megfelel kérdésünkre. Hacsak ez a «fokszám» minden továbbit lehetetlenné nem tenne.

Eddigi kutatásainkból tudjuk, hogy nagyon hamar felbukkan ez az akadály. A harmadfokú egyenlet és még inkább a negyedfokú, különböző bonyolult kerülő utakkal oldható csak meg és még ezek a megoldások is csődöt mondanak az «irreducibilis» esetekben. De fizikai és technikai problémákban egyáltalán nem lehet az ismeretlennek eleve előírni, hogy egy esetleg életbevágó fontosságú problémában hányadik hatványon forduljanak elő. Segélykérően fordul a fizikus vagy mérnök a matematikushoz. És ez sajnálkozva vonogatja vállát, hacsak a véletlen nem ad neki lehetőséget valamilyen

mesterfogáshoz, hogy vele a magasabb fokú egyenletet megoldható foksámra visszavezesse.

De ebben a sötét ügyben, e matematikai botrányban (igaz, ez csak egyike tudományunk botrányainak) az volt a legrosszabb, hogy még azt sem tudták, vajjon a megoldás lehetetlensége vagy pedig csak tehetetlenségük zárja el a magasabb fokú egyenletek megoldásához vezető utat. A tizenhetedik és tizennyolcadik században nem egyszer remélték, hogy a jövő hamarosan világosságot hoz ezen a téren is. Ez annál valószínűbbnek látszott, mivel Euler sok új fényrel világította meg az egyenletek világát és Cramer, Lagrange, később pedig Cauchy igen sok új, az egyenletek tanára vonatkozó adatot fedezett fel. Az «algebra alaptételéről» nem is szólva. Ez ugyanis azt mondja, hogy minden egyenletnek annyi megoldása van, amennyi az egyenletben az ismeretlen legmagasabb hatványkitevője. Ez a tétel, amelyet mindenkor sejtettek, sőt néha alkalmaztak is, először 1629-ben Girardnál fordul elő pusztá állításként, Descartes és az őt követő algebristák többé-kevésbé feltételezik, d'Alembert 1746-ban igazolja és végül Gauss a tizenkilencedik század első évtizedeiben többféle bizonyítással vitathatatlanná teszi.

Hagyjuk most az egyenletek tanának elvi ismertetését, céljainknak megfelelő mértékben ismerjük már, fordítsuk inkább figyelmünket két olyan életrajzra, amelyek hőseit mindenkor az egyenletek mélyebb megismerésével együtt fogják emlegetni. A két hős Niels Henrik Abel és Evariste Galois.

Abel a norvégiai Finhöben, 1802-ben született. Az ottani lelkész fia volt és a sors már abban a korban háromszorosan megbélyegezte, amikor más ember még pirosposztag arcra hancúrozik a hóban és jövődő boldogságról álmodozik. Szegénység, epilepszia és melancholia kísérték egész életén, egy olyan életen keresztül, amely hatalmas teljesítményei ellenére sem volt igazi élet. Észak fiának gyenge keblében mégis fékezhetetlen démoni vágy izzott s az különösen matematikai térre hajtotta és lehetővé tette, hogy az ifjú ember autodidakta létére is mélyen behatoljon tudományunk rejtelmeibe. Már 1822-ben Christiania egyetemének hallgatója és 1823-ban azt hiszi, hogy egy világraszóló felfedezés vége egy kis fénysugarat hoz borús életére. Azt hitte ugyanis, hogy

a matematika történetében elsőnek sikerült neki az ötödfokú egyenletek általános megoldását megtalálni. A következő év belső tragédiája alig képzelhető. Sejtjük csupán, hogy lázas éjszakákon jön rá «felfedezése» fokozatos bomlására és arra, hogy remélt szerencséje is vele együtt tűnik el örökre a semmiségbe. Kétségbeesetten méri 1824-ben ő maga saját elméletére a döntő csapást. Beh bizonyítja, ezúttal szintén először a történelemben, hogy ötödiknél magasabb fokú egyenletek általában gyökjelekkel nem oldhatók meg, de sorsa ezzel újból kedvező lendületet vesz. «Illetékes helyen» azonnal felismerik e látszólag negatív tény nagy jelentőségét. Hisz ez mindörökre határt szab a kutatásnak, feleslegessé tesz hiábavaló fáradozásokat. Így egy kicsi, de mégis számottevő ösztöndíjhoz jut. Új reménysugár dereng Abel szeme előtt, Berlinbe utazik Crelle-hez. Ez alapította meg 1826-ban a híres Crelle's Journalt, a matematikai értekezések híres orgánumát, de mint szervezőnek matematikai téren egyébként is igen nagyok az érdemei. Ebben a Journalban teszi közzé Abel az ötödfokú egyenletekre vonatkozó alapvető kutatásait, valamint a binomiális sor konvergenciájára vonatkozó kutatásainak eredményét. Utóbbiban Cauchy eredményei is befolyásolták. Abel még 1826-ban Párisba utazik, a már akkor is világhírű Cauchy látogatására, akit ő a távolból is mestereként tisztelt. Cauchy jelleme azonban sokszor nem állt arányban teljesítményeivel és gonosz természetének nem egyszer tanújelét adta. Nem fogadta Abelt. Ehhez fogható tragédiát kigondolni is nehéz. Ösztöndíjának, korrepetálási honoráriumának nehezen összekuporgatott utolsó filléreiből utazott Abel Párisba és éppen ott talált zárt ajtókra, ahová őt érdeklődésén kívül még nagy szellemi vonzalom is vitte. De még ez sem törte meg végleg a szerencsétlen ifjút, noha betegsége is egyre súlyosbodik. Lángesze még egy óriási tettet visz véghez. Felfedezi és nyilvánosságra hozza a róla elnevezett Abel-féle tételt, amely az elliptikus integrálok Euler-féle összeadási tételének általánosítása. Itt csak annyi jegezzünk meg, hogy elliptikus integrál kb. azt jelenti, hogy az integrandus bonyolult irracionális kifejezés, mint a következő két példában :

$$\int \sqrt{a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4} dx \text{ és } \int \sqrt{a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5} dx$$

A gyakorlat sokszor vezet ilyen integrálokra, megoldásuk nehézsége már régóta ismeretes volt, ezért gyakoriak voltak a megoldásukra irányuló kísérletek. Abelnek még az ilyen integrálok inverziójának megoldása is sikerült, és vele együtt megoldotta az elliptikus integrálokkal szorosan összefüggő lemniszkáta-osztásnak problémáját is. Ebben az időben Abel komplexszámokkal is foglalkozik.

Párisból hazatérve Abel Gauss is fel akarta keresni, akinek híre akkor már tetőpontján volt. De Cauchyval tett tapasztalatai annyira bátortalanná tették, hogy hirtelen gátasok fogták el és ezek egészen a félelemig fokozódtak. Halálos beteg menekül vissza Christianiába, ahol rövid ideig éhezve és fázva bolyong, hogy valami szerény álláshoz jusson. Sikertelenül. 1829-ben halt meg. Néhány nappal halála után érkezett Christianiába az az anyagi és szellemi szempontból is nagyjelentőségű levél, amely őt Berlinbe hívja és a halottat 1830-ban a francia Akadémia is díjjal tünteti ki.

Nem fűzünk megjegyzést ahhoz a pokolhoz, amelybe ez a lángész ártatlanul jutott. Kis jóakarattal tudhatták volna róla, hogy lángész. A Crelle's Journal minden olvasójának tudnia kellett, s ezek voltak azok a bizonyos szakkörök. A nagy emberek legrejtélyesebbjének, Gaussnak is tudnia kellett, hisz róla halála után kiderült, hogy ő a tizenkilencedik század első évtizedeiben, tehát már húsz éve, saját kutatásai alapján ismerte Abelnek úgyszólván minden felfedezését, de elhallgatta azokat. De mindenkifelett tudta Jacobi, aki, teljesen ártatlanul, valószínűleg oka volt Abel korai halálának. Vele versenyzett ugyanis Abel az elliptikus integrálok elméletének felépítésében, tudva, hogy ő is foglalkozik velük és ebben merítette ki végső erejét. De ne hullassunk farizeusi könnyeket, mert mindannyian segítettünk már méltatlanon és hagytunk cserben érdemeseket s némely embernek az a sorsa, hogy noha kellőképpen értékeli őket, mégsem szánja el magát senki érdekükben valamilyen tetre.

Abeléhez hasonló balsors sujtott egy másik ifjúra is. Ennek sorsa legalább ugyanolyan tragikus, mint Abelé, de az ő katasztrófáját nem külső, hanem belső okok idézték elő. Páris mellett Bourg-la-Reine városban 1811-ben született egy gyermek, a neve Evariste Galois, s már 1823-ban el kel-

lett hagynia a szülői házat, hogy bevonuljon a «Louis le Grand» kollégium negyedik osztályába. Alig volt Evariste Galois 15 éves, már megnyilvánultak rendkívüli matematikai képességei. Ezek olyan nagyszabásúak voltak, hogy már nem törődött a tankönyveivel, hanem elmerült a matematika akkor ismert klasszikusainak, elsősorban Lagrange műveinek tanulmányozásában. Picard, akinek ezeket és a további adatokat is köszönhetjük, azt állítja, hogy Galois alighanem már 17 éves korában nagyjelentőségű matematikai felfedezések birtokában lehetett. Sajnos, Galois fiatalkorából származó írásai, amelyeket az Akadémia elé terjesztett, elvesztek.

Igen nagy volt abban az időben a már említett párisi «Ecole polytechnique» híre. Azt is említettük már, hogy ezt az iskolát De Monge, a hadimérnökkari tiszt alapította. Néhány évtizedes fennállása elég volt ahhoz, hogy Franciaország kormányzása matematikusok és mérnökök kezébe kerüljön. Olyan körülmény ez, amelynek még a mai Franciaországban is megvan a hatása, mert egy «technokráciának» más a jellege, mint egy «jusztokráciának» vagy egy olyan «literatokráciának», amilyen az évezredek folyamán Kínában fejlődött hatalmas méretűvé.

Egészen természetes, hogy egy Galoishoz hasonló fiatal-ember magától értetődőnek tartja, hogy pályáját az Ecole polytechnique hallgatójaként kezdje. Tizennyolcéves korában, 1829-ben felvételi vizsgára jelentkezik ott, de kétszer is megbukik, mert megtagadja az általa nevetségesnek és feleslegesnek tartott kérdésekre, ilyen pl. logaritmuskok számtani elmélete, a feleletet.

Egy Galois megbukik a felvételi vizsgán matematikából, egy olyan ember, akitől abban a korban a legnagyobbak is csak tanulhattak volna: ezzel megkezdődött a tragédiája. Picard azt állítja, hogy nagyon szomorú módon fizette meg a fiatal ember lángeze árát. Amily mértékben fejlődtek matematikai képességei, ugyanolyan mértékben borult el jelleme is, pedig az egykor vidám és nyílt volt; hatalmas fölényének érzése exaltált göggé fejlődött.

Galois mélyen megbántva a szintén De Monge által alapított Ecole normale hallgatója lesz. De ezt az iskolát is el kell hagynia egy éven belül «illetlen magaviselet» miatt.

Ezzel azonban megszakadt az utolsó polgári kapcsolata is. Galois a politikára veti magát, elfogják, több hónapot tölt a «Sainte Pelagie» fogház rácsai mögött, de a matematikát ilyen események közepette sem téveszti szeme elől. A végső katasztrófa előzményeiről nincsenek pontos adataink; csak sejthetünk egyet-mást, ha egy régi metszeten megnézzük makacs, szinte oroszos vágású arcát. És akkor azt hisszük, hogy ezt a nagyon fiatal testet, ezt a keskenyvállú fiút a benne lakozó démon szinte széjjelszaggatta. Valamilyen szerelmes históriából indult ki állítólag az a veszekedés, amely végül párbajra vezetett. Talán egy másiknak a menyasszonya, felesége, szerelmese kedvelté meg túlságosan az ifjút. Talán. Csak az bizonyos, hogy Galois nem vonta ki magát férfiúi kötelessége alól, noha tudta, hogy az ő lángesze pótolhatatlan. E párbaj áldozata lett, 1832. május 31-én, amikor még huszonegyéves sem volt.

Az utolsó éjszakán, halála előtt, amelyet *úgy látszik, megsejtett*, levelet írt barátjához, Chevalierhez. A szellemtörténet egyik legmegrázóbb okmánya ez a levél, hisz e matematikai értekezés minden sora mögül a Pusztító csontos ujjai és üres szemgödrei villannak elő és a fogalmazás kétségbeesett szűkszavúsága arra az igyekezetre vall, amely az utolsó órákban akarja kicsikarni mindazt, aminek megérlelésére még esetleg évek kellettek volna.

De itt se érzélegjünk, ne bankódjunk olyan emberért, aki büszkén, gőgösen halt meg és «végrendeletében» sem ad hangot engedékenységnak vagy gyengeségnek. Éppen Galois bizonyítéka, fénylő példája annak, hogy a matematika, ha a közönséges mértéket meghaladja, férfiak dolga a szó legjobb értelmében. A matematika istentisztelet, hivatás, megvilágosodás, és egyben Isten közelsége és a valóság bódulata. Jaj annak, aki a világ mozgatóerejét csupán sallagnak, száraz semminek, vagy tudósok hóbertjának nézi. Megragadja majd egyszer e kozmikus hatalom egyik végső fuallata és száraz falevélként sodorja a történelem szemétdombjára. Biztos és világos, hogy nem foglalkozhat mindenki matematikával és nem is kell vele minednkinek foglalkoznia. De az is kétségtelen, hogy a matematika tagadása bűn a szellem, a kultúra és az emberiség emelkedése

ellen. E szavakkal tartoztunk Pythagoras, Archimedes, Leibniz és Galois szellemének.

De tegyük most félre a bátor ifjú földi balsorsát, és az oly korán elhúnytnak üstököshöz hasonló pályafutását, hogy annál világosabban kiemelkedjék mindaz, ami a matematikában Galois működése következtében hatalmassá, sőt talán korszakalkotóvá fejlődött. S az ifjú hírnevének emlékművén aranyos betűkkel fénylik a felírás: «csoportelmélet». Keveset mond nekünk egyelőre ez a szó, pedig mindazt magában foglalja, ami ma a matematika legfelső fokát jelenti. És ez ébresztette a legnagyobb szellemekben, így Oswald Spenglerben is, azt a gondolatot, hogy ezzel az elmélettel a matematika felül nem múlható általánosságra tett szert és örökre megmerevedett. Már itt megjegyezzük, hogy nem osztjuk ezt a felfogást, mert tudománytörténeti tapasztalatok szerint nincs a megismerésnek ilyen «végső állapota». Viszont ugyanúgy hangsúlyoznunk kell azt is, hogy az «általánosság» kifejezés a legnagyobb mértékben érvényes a csoportelméletre. Ennek kifejtése azonban nem könnyű kereteink között. Ismét egész kötetet kellene írunk, ha azt akarnók, hogy az elmélet leírása félig-meddig teljes és tudományos szempontból hibátlan legyen. De a korlátok ellenére is kötelességünknek érezzük, hogy ne dobálódzzunk csupán nevekkal és szak kifejezésekkel úgy, ahogy azt néhány tudománytörténet teszi. És most éppúgy, mint eddig, többre becsüljük valami halvány ismeret megszerzését a teljes tudatlanságnál. Annál is inkább, mert az ilyen vázlatos ismertetés gyakran buzdítja a tehetséges érdeklődőket, hogy művészetünk mestereitől szigorú, pontos és teljes tudást szerezzenek.

A modern matematika számára a csoport fogalma éppen olyan alapvető jelentőségű és termékeny fogalom, mint pl. a mérték, a nagyság, a függvény fogalma. Csak elvontabb és általánosabb, mint a felsorolt kategóriák. Ezért csak lassan és tapogatódzva igyekszünk célunkhoz jutni. Nagyon keveset mond nekünk egyelőre az a kijelentés, hogy csoportnak nevezzük a dolgok olyan rendszerét, amelynek vannak bizonyos «csoporttulajdonságai». Miféle «rendszer» és miféle «dolgok»? Azt feleljük, hogy a csoportot alkotó dolgok nagyon eltérők lehetnek. Hamarosan pontosabban is megfogalmazzuk

ezt, de lássunk előbb néhány példát a matematikából. Tehát «matematikai dolgok rendszerét». Mert tulajdonképpen nem is szükséges, hogy matematikai «dolgok» legyenek. De ne növeljük a zavart, jelentsük ki, csak úgy felületesen, hogy például csoport a természetes számok összessége. Valamennyi logaritmus szintén. Vagy a teljes elemi geometria. Vagy az összes, n elemből alkotható permutációk. Vagy összes, bizonyos alakú egyenlet, például az összes algebrai egyenlet, tehát azok az egyenletek, amelyekben csak algebrai jelek fordulnak elő. Vagy valamennyi szám, amely bizonyos számmal osztva ugyanazt a maradékot adja, stb.

E csoportelméletnek egyáltalán nem csupán az a célja, hogy megállapítsa, vajjon a dolgok rendszere hozzátartozik-e valamely csoporthoz vagy sem. Inkább annak pontos ismerveit keresi, hogy csakugyan csoporttal van-e dolgunk? mert ettől függ megint az is, hogy bánhatunk-e az egészszel, mint csoporttal, tehát kapcsolatba hozhatjuk-e más csoportokkal és hogy egyik csoport belsejében fennálló összefüggésekből következtethetünk-e a másik csoport összefüggéseire. E gondolatok szemléltetésére egy számunkra is hozzáférhető példát, még pedig a logaritmusok példáját vesszük elő. Hígyjük el minden további bizonyítás nélkül, hogy a racionális számok, és logaritmusaik csakugyan egyaránt csoportot alkotnak. Mindkettő bizonyára végtelen csoport, minthogy végtelen sok racionális szám van és végtelen sok a nekik megfelelő logaritmus is. A számok, illetve a logaritmusok a két csoport «elemei». A csoportelmélet szerint az első csoporttulajdonság az, hogy van előírás, amely a csoport valamely S elemét és egy másik T elemét egyértelműen összekapcsolja, vagyis egy ST -t definiál. Az összekapcsolás módja egyáltalán nincs meghatározva, továbbá az S és a T azonos elemet is jelenthet. A két elemet tehát összeadhatjuk, kivonhatjuk, szorozhatjuk stb. és ekkor — ez a második csoporttulajdonság — az összekapcsolás eredményének ismét a csoportba tartozó elemnek kell lennie. A racionális számoknál ez a tulajdonság egész közönséges. Két racionális szám szorzata ismét racionális szám. Két logaritmus összege ismét logaritmus. Példáinkban meghatározott összekapcsolási módokat vettünk figyelembe. Ez természetesen megengedhető,

sőt adott esetben szükséges is. Az asszociatív tulajdonság a következő csoporttulajdonság. E szerint $(ST)U$ ugyanaz, mint $S(TU)$, vagyis az elemeket a kapcsolásnál tetszésszerűn komplexumokká vonhatjuk össze a nélkül, hogy az eredmény változnék. Így pl. $(3 \cdot 5) \cdot 8$ ugyanaz, mint $3 \cdot (5 \cdot 8)$, és $(\log 3 + \log 5) + \log 8$ ugyanaz, mint $\log 3 + (\log 5 + \log 8)$. Nem követeljük, hogy a kommutativitás is csoporttulajdonság legyen, mert éppen a nem kommutatív csoportok igen érdekesek. Azt mondtuk: «nem követeljük». Arra akarunk ezzel utalni, hogy a csoportfogalom nem a természettel adott valami, hanem egy definícióval megállapított dolog, amely, akárcsak egy axiómarendszer, más fogalmazású is lehetne. De nem bocsátkozhatunk most mélyebben ilyen igen bonyolult, a matematika alapjait érintő vizsgálatokba. Inkább a negyedik csoporttulajdonságot vesszük szemügyre. Ez azt kívánja, hogy legyen a rendszerben egy egységnek nevezett elem, amelynek az a különleges sajátsága, hogy az előírt kapcsolási módot alkalmazva, a csoport minden elemét változtatlanul hagyja. Ilyen pl. racionális számok szorzással való összekapcsolásánál az egység (1). Mert minden racionális szám eggyel szorozva ismét ugyanazt a racionális számot adja. Az összeadás útján összekapcsolt logaritmusok esetén az egység, általánosan fogalmazva, az alap nulladik hatványának a logaritmusa, vagyis ${}^a\log a^0$ amelynek értéke mindenkor 0. Ha az alap 10, akkor mindig igaz, hogy $\log 10^0 + \log n = \log 1 + \log n = \log n$. Végre az ötödik és egyben utolsó csoporttulajdonság azt követeli, hogy legyen a csoportban minden S elemhez egy olyan tulajdonságú inverz elem, amely az előírt kapcsolási móddal az elemből az egységet csinálja. Ezt néha a reciprokok elemnek is nevezik. Racionális számok szorzásánál ez az inverz elem a szám reciprokok értéke.

Mert $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, és ez megfelel követelésünknek. Az összeadás-sal kapcsolódó logaritmusok esetében az inverz elem $-\log n$, mert $\log n + (-\log n) = 0$, vagyis az «egység», az ${}^a\log a^0$.

Felületesen szemlélve mindaz, amit elmondtunk, unalmas játéknak vagy káros köröskodásnak (circulus vitiosus) látszik. Vagy legjobb esetben valamely rendszer logikus vizsgálatának. Annyit elárulhatunk azonban, — többet sajnos,

nem lehet — hogy a fent előadott csoporttulajdonságokon és csoportdefiniciókon egy egész algoritmus épült fel, amely lehetővé teszi, hogy egy előttünk ismert és számunkra hozzáférhető csoport tulajdonságaiból egy más csoport tulajdonságaira következtethessünk. Ha ugyanis két csoport «izomorf», akkor bennük az összekapcsolási mód ugyanaz és elemeik oly módon rendezhetők, hogy az egyik csoport két vagy több elemének összekapcsolásából adódó eredmény ugyanazon a helyen áll, mint a másik csoport megfelelő két vagy több elemének összekapcsolásából adódó eredmény. De ha azt állapíthatjuk meg, miként a mi racionális számokról és logaritmusokról szóló példánkban, hogy az egyik csoportban az összeadás analóg helyen adja az eredményt, mint a szorzás a másik csoportban és viszont, akkor egy transzformációról van szó és meg lehetünk győződve, hogy ez az összefüggés feltétlenül fennmarad. Lehetséges az az ellenvetés, hogy «a logaritmikus tulajdonságok» teljesen «általánosan» is bizonyíthatók, nincs tehát szükség csoportelméletre a bizonyításhoz: Ebben az esetben helyes ez az ellenvetés. De csak azért, mivel a példát elemeinek ismert volta miatt választottuk így meg. Számtalan más vizsgálatnál és transzformációnál viszont nem jogosult. Nem jogosult pl. már azoknál az átalakításoknál sem, amelyeket röviden «szubsztitúcióknak» is nevezünk és amelyek néhány példáját Diophantos és Cardano egyenleteivel kapcsolatban ismertük meg. Mert csak a csoportelmélet segítségével vált lehetségessé, hogy némely esetben szinte megjósoljuk azt, hogy az egyenletek milyen transzformációja fog célhoz vezetni és milyen nem. Sokszor természetesen hallatlanul nehéz az egyes esetre a csoporttulajdonságot megállapítani. Vannak viszont tételek és módszerek, amelyek lehetővé teszik, hogy bizonyos tulajdonságokból a csoporttulajdonságok létrehozhatók legyenek, noha ezek a tulajdonságok első pillanatra egyáltalán nem hasonlítanak az általunk felsorolt öt csoporttulajdonsághoz.

Röviden, a csoportoknak egész algoritmusa épült már ki, és nem csupán a konkrét csoportokra. Megteremtették az «absztrakt csoport» fogalmát, ennek is megvan a maga algoritmus és ezzel megvizsgálhatjuk a csoportok legáltalánosabb szerkezetét is. Egyenesen szédítő az absztrakciónak az a

magas foka, amelyre e közben szükség van, mert az algebra és geometria fölé először egy második általánosabb építmény kerül, amely azokat csoportelméleti szempontból magában foglalja. De e fölött harmadik réteggént terül el a legáltalánosabb absztrakt csoportelmélet, amely a geometriák, egyenletek és modulrendszerek nyalábjával úgy bánik, mint az alsóbb algebra a konkrét számokkal.

Varázsszónyegünkön majdnem a legújabb időkhöz szállunk. A csoportelméletnek az a fejlődése, amelyre utaltunk, csak Galois után következett be Camille Jordan, Sophus Lie és Felix Klein működése nyomán, hacsak a legfontosabb neveket akarjuk említeni. Vissza kell azonban most térnünk fejezetünk tragikus hőiséhez, Evariste Galois-hoz, aki utolsó földi éjjelén Chevalierhez írt levelében lerakta a csoportelmélet alapjait, kemény, sokszor szinte titokzatos szavakkal, s arra kérte barátját, hogy levelének tartalmát ne csak nyilvánosságra hozza, hanem közölje külön Gaussal és Jacobi-val is. Nem azért — mondja Galois — hogy megállapításai helyességét elbírálják, hanem azok rendkívüli hordereje miatt.

Galois, mint Lagrange és Cauchy tanítványa, (közülük utóbbi már bizonyos csoportelméleti kérdésekkel is foglalkozott) az egyenletek tanától jutott a csoportelmülethez. Galoisnak tudomása volt Abel erdményeiről, tudta, hogy nincs remény negyediknél magasabb fokú egyenleteknek gyökjelekkel való megoldására. Kivételes esetek természetesen megoldhatók, még pedig azok az esetek, amelyekben sikerül ügyes mesterfogással vagy transzformációkkal az egyenlet fokszámát negyedik vagy még alacsonyabb fokúra leszállítani. Ezt a lehetőséget általában nem lehet valamely egyenleten eleve felismerni, még kevésbbé lehet egy ilyen átalakítás lehetetlenségét csak félig-meddig megbízhatóan is állítani. Itt fogott Galois munkához és az út, amelyet mutatott, annyira alapvető és genialis, hogy Galois nevét mindenkor a legnagyobb matematikusoké közt kell említeni. Feltette ugyanis általában a kérdést, hogy milyeneknek kell egy n -ed fokú egyenlet együtthatóinak lenniök, hogy az egyenlet redukcióval megoldható legyen. Az ismeretlen hatványaitól nem függet a megoldhatóság, mivel az ismeretlen

ugyanolyan hatványai, de különböző együtthatók esetén egyik esetben lehetséges a redukció, a másikban nem. És Galois a csoportelméleti vizsgálati módot ott találta fel, ahol a legbonyolultabb, mégpedig a permutációs csoportokon. Egy permutációs csoport biztosan véges. Mert véges számú elemből csak véges számú permutáció alkotható. A lehetséges permutációk száma $n! = 1.2.3 \dots n$. Permutáció két dolgot jelent. Először az elemek megtörtént átcsoportosítását, ebben az értelemben 1243 egy permutációja a kezdeti 1234 permutációnak. De az áthelyezés műveletét, tehát a «permutálás műveletét» szintén nevezhetjük permutációnak. E második értelemben használja a csoportelmélet a permutáció fogalmát és a szó általánosabb értelmében vett szubsztitúciónak is nevezi. Helyezzük most az egyik sorrendet a másik helyébe, akkor az első helyeken bekövetkezett változások a permutációs csoport elemei, de közben identikus permutációk is előfordulhatnak, vagyis 123-ból ismét 123 lesz. Ugyanazon számjegyeknek két permutációját, mondjuk azt, amelyik a 123 csoportot 312-vé és azt, amelyik a 123 csoportot 132-vé változtatja, azzal kapcsolhatjuk össze csoportelméleti szempontból, hogy egymásután végezzük el őket. Az első permutációnál az 1 helyébe 3, a másodikonál a 3 helyébe 2 kerül, ha mindkettőt egymásután végrehajtjuk, akkor az 1 helyébe 2 kerül. Az elsőnél továbbá 2 helyébe 1 kerül, a másodikonál 1 helyébe 1, összesen tehát a 2 helyébe 1 kerül; végül a 3 helyébe 2 és a 2 helyébe 3, összesen tehát a 3 helyébe 3 kerül. E kapcsolás eredménye a csoport új eleme, ismét a 123 permutációja még mindig 213. Hasonló módon folytathatók és a folyamatot megfelelő írásmóddal egyszerűbbé, biztosabbá és áttekinthetőbbé tehetnők. De a részletek ismertetése messze meghaladná kereteinket, úgyhogy csak szakkönyvekre utalhatunk. Azt azonban megállapíthatjuk, hogy mint utalásaink mutatják, permutációkból is alkothatók valódi csoportok, olyanok, amelyek valamennyi csoportszajátsággal rendelkeznek. Evariste Galois pedig — ez volt előbbi fejtegetéseink célja — tetszésszerűen egyenlet együtthatóinak permutációit vizsgálja és ezáltal egy egyenletből az egyenletek egész csoportját fejleszti ki. A szubsztitúciókat, a permutációkat továbbá abból a szempontból vizsgálja meg, hogy lehet-e

belőlük alcsoportokat kapni. Ez a vizsgálat volt az egésznek főcélja, mert egy ilyen alcsoport tartalmazhatja egy egyenlet megoldható formáját. Ha továbbá felfedezhető az, hogy a főcsoport miként állítható elő bizonyos alcsoportjaiból, akkor ez a probléma megoldását jelenti. Ismételjük kissé világosabban: az első lépés valamely egyenlet együtthatóiból alkotható permutációs csoport felírása. A második, ennek alcsoportokra való bontása s ezek közül egyik vagy másik, együtthatók eltűnése következtében, legfeljebb negyedfokú egyenletre vezet. A harmadik lépés az a kísérlet, hogy ezekből az alcsoportokból bizonyos segédkomplexumok segítségével összeállítsuk a főcsoportot. Ha ez sikerül, akkor n -edfokú egyenlet ($n > 4$) olyan egyenletekre redukálható, amelyik gyökvonással megoldható.

Nehéz elképzelni, hogy miként tudta a még alig 21 éves ifjú az addig alig kifejlődött csoportszerkezeteket a legnehezebb oldalukról annyira áttekinteni, hogy még gyakorlatban is alkalmazni tudta őket. S minden szellemi alkotással foglalkozó számára ijesztő ama teljesítmény elképzelése, amely viszálykodások, politika, fogság, szerelem és párbaj közt, néhány hónap alatt annyira jutott, hogy pontosan megfogalmazhatóvá vált. És a levélnek csupán az első részét tölti meg a csoportelmélet, második részében legalább ugyanannyira csodálatos megállapítások foglaltatnak az elliptikus integrálokról, azokról, amelyeknek végleges megoldása csak Riemantól és Weierstrasstól származik.

A levél végén egyszerűségükben is annyira megrázó szavak állnak, hogy ide kell iktatnunk őket. E szavak a következők: «De nincs már időm és e hatalmas területre vonatkozó gondolataim még nem fejlődtek ki teljesen. E levelet ki fogod nyomtatni a „Revue encyclopédique” hasábjain. Életemben sokszor mertem olyan javaslatokkal előállni, amelyekben még nem voltam biztos; de mindaz, amit itt leírtam, már majd egy éve megvan, habár csak a fejemben és nagyon is érdekem, hogy ne tévedjek, nehogy azzal gyanúsíthassanak, hogy olyan tételeket fejtek ki, amelyeknek nem ismerem tökéletes bizonyítását. Meg fogod kérni Jacobit és Gausst, hogy mondják meg véleményüket, nem tételeim igazságáról, hanem fontosságukról. Ezek után remélem, lesz-

nek emberek, akiknek előnyére válik, ha e zűrzavaros sorokat kibetűzik. Forró szeretettel öllek...»

Ezek az utolsó szavak, melyeket az oly korán elhunyt az örökkévalóság számára mondott. Összes művei, Picard kiadásában, csupán egy vékony, 61 oldalas kötetet tesznek ki. De tettei a matematika általánosítása terén oly hatalmas lépést jelentenek, hogy joggal mondhatjuk őt Abel mellett a modern algebra első megalapozójának.

Már említettük, hogy a csoportelméletet különösen Jordan építette tovább. Közben azonban korábbi felfedezések több irányban fejlődtek s ezek is fegyvereket szolgáltatattak az algebra általánosításához. E felfedezések közül egyiket szintén említettük már, mégpedig a determinánsokat. E nagyszabású algoritmus alapelveit Leibniz egyik l'Hospital-hoz intézett levelében már tisztán és világosan kifejtette, s úgy látszik, jelentőségükkel is teljesen tisztában volt. Levele végén ugyanis azt írja: «Itt látjuk azt, amire már utaltam, hogy az algebra tökéletesítése a kombinációktól függ». De Leibniz vagy idő híján, vagy pedig mert a végtelen analízist sürgősebbnek és fontosabbnak tartotta, nem építette ki sokat ígérő algebrai-kombinatorikus felfedezését, úgyannyira, hogy idevágó érdemei teljesen feledésbe merültek. Ennek következtében Gabriel Cramer 1750-ben újból ugyanarra a felfedezésre jutott s annyiból tekinthető jogosan a determinánsok felfedezőjének, hogy minden későbbi kutató az ő műve nyomán indult el. Elsősorban Laplace, Lagrange, Gauss és Cauchy. A legutolsó használja először a «determináns» kifejezést, csodálatosképpen egy idő múlva felhagy vele és helyette a «fonction alternée» elnevezést alkalmazza.

Csak Carol Gustav Jacob Jacobi tette 1841-ben megjelent művében («Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten») ezt a matematikai kategóriát a matematikusok közkincsévé.

Később egy angol matematikus, Sylvester, aki a determinánsok elméletét az invariánsok elméletévé általánosította, azt mondta róluk: «Mi is alapjában véve a determinánsok elmélete? Algebra felett álló algebra ez, számolási eljárás, amely lehetővé teszi számunkra, hogy kombináljuk s előre

megmondjuk algebrai műveletek eredményét ugyanúgy, amint az algebra segítségével megtakaríthatjuk az aritmetika egyes műveleteinek végrehajtását».

E hivatott szájából származó szavakra újból fel kell figyel-nünk, amint hogy felfigyeltünk akkor is, mikor a csoport-elmélet közelebbről szemügyrevéve az algebra algebrájának bizonyult. Mindenki feltehet most a kérdést, aki eddigi céljainkat ismeri, mik azok a rejtélyes determinánsok. El-árulhatjuk róluk azt is, hogy a Cramer és Jacobi közt eltelt időben a legjelentékenyebb matematikusok számára bizonyos fajta titkos vagy magántudomány szerepét játszotta.

Hogy e kérdésre felelhessünk, egy kis kitérést engedünk meg magunknak. Leibniz óta, számítás közben, egy át-hidalhatatlan akadályra bukkant minden algebrista. Ha egy egyenletrendszer akartak megoldani, amely nem is túlsok egyenletből állt, akkor az úgynevezett megoldásrendszerek olyan bonyolultakká váltak; hogy egész oldalakat meg-töltöttek és számtalan hibalehetőséget rejtettek. De ha tetszésszerű számú egyenletet akartak megoldani, tehát n egyenlet általános megoldását keresték, akkor nem volt algoritmus és nem volt írásmód, amely erre képes lett volna, pedig legkülönbözőbb algebrai és geometriai okok miatt kerestek ilyen általános megoldásokat.

A keresett segédeszköz éppen a determináns fogalma volt. Ennek bemutatására, a nélkül, hogy a számtalan részlet-kérdésbe is belemerülnénk, egy egyszerű példán bemutatjuk a gondolatmenetet. Legyen két egyenletünk, jelölje ezeket f_1 és f_2 . Két lineáris, kétismeretlenes egyenletről van szó. Ezek a következők:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_2 = 0 \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

Hamarosan ki fog derülni, hogy miért írtunk az együtthatók mellé kettős indexet. Nem «a tizenegy» és «a tizenkettő» sze-repel az egyenletekben, hanem «a egy-egy» és «a egy-kettő» stb. A kettős index első száma a «sort» a második száma pedig az «oszlopot» jelöli. A kettős indexek általános skémája tehát a következő:

11, 12, 13, 14, . . .	$1n$
21, 22, 23, 24, . . .	$2n$
31, 32, 33, 34, . . .	$3n$
.	.
.	.
.	.
$n1, n2, n3, n4 . . .$	nn

Egyenleteinkre átvive a_{53} (a öt három) azt jelenti, hogy a rendszer ötödik egyenletének harmadik ismeretlenéhez tartozó együttható van előttünk.

Fentieket feltételezve foglalkozzunk most egyenleteinkkel. Ha az egyik ismeretlent azzal küszöböljük ki, hogy az első egyenletet a_{22} -vel, a másodikat pedig $-a_{12}$ -vel megszorozzuk, illetve az első a_{21} -gyel, a másodikat pedig $-a_{11}$ -gyel, ezután az egyenleteket összeadjuk, akkor az egyenletek megoldásrendszereként a következőket kapjuk:

$$x_1 = -\frac{a_{22}c_1 - a_{12}c_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{a_{11}c_1 - a_{21}c_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Már itt feltűnik, hogy mind a két nevező ugyanaz, vagyis $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Ha ez a kifejezés nulla volna, akkor nem volna az egyenleteknek megoldásuk. Ezért tehát ez a kifejezés jellemző az egyenletrendszerre, determinálja, vagyis a rendszer «determinánsa». De a determinánsok elméletének ez csak egyik feladata, valamint a determináns névnek nyelvtani magyarázata. A determinánsok sajátos írásmódja és tisztán kombinatorikus jelentőségük felismerése minden továbbinak a kulcsa. E rendkívül fontos mennyiség írásmódjaként a $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ jelölést találták fel és ennek, mint minden operációs utasításnak, megvannak a saját szabályai. Esetünkben egyszerűen az átlókat kell összeszorozni és az első átló $a_{11}a_{22}$ szorzatából levonjuk a másik átló $a_{12}a_{21}$ szorzatát.

Részletekbe persze itt sem bocsátkozhatunk. Csak annyit közlünk, hogy a determinánsoknak egész algebraja fejlődött ki. Ebben az ilyen vonalak közt álló rendszerek «számokként» szerepelnek, összeadhatók, kivonhatók, szorozhatók, sőt

differentiálhatók is. Van azonkívül sok olyan szabály és tétel is, amely lehetővé teszi, hogy determinánsok különféle tulajdonságait azonnal felismerjük. Könnyű többek között azt felismerni, hogy mikor nulla egy determináns értéke, ami esetünkre nézve azt jelentené, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása. De hogy az olvasó legalább felületesen meggyőződhessek arról, hogy miként használhatók a determinánsok egyenletrendszerek megoldására, írjunk ide egy nagyon egyszerű számpéldát. Legyen pl. a következő két egyenletünk :

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 1 &= 0 \\ 5x + 2y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezeket determinánsok segítségével. Ha el tudjuk képzelni az általános indexszkémát, akkor tudjuk, hogy az első egyenlet 3 és 4 együtthatója az a_{11} és az a_{12} , a második egyenlet 5 és 2 együtthatója az a_{21} és az a_{22} . Tudjuk akkor azt is, hogy a determináns $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ és értéke $3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 = -14$.

De ez még csak annak a biztosítéka, hogy a rendszer megoldható. A végleges megoldás

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} \quad \text{és} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}$$

minthogy a számlálókat is determinánsok alakjában kapjuk, ismét meghatározott szabályok szerint. Ezek a fent felírt megoldásokból kiolvashatók. Itt sem bocsátkozhatunk részletekbe, csak a végeredményt írjuk ide. Eszerint

$$x = -\frac{-22}{-14} = -\frac{22}{14} \quad \text{és} \quad y = -\frac{13}{-14} = \frac{13}{14}.$$

Helyességükről fenti egyenletekbe helyettesítve meggyőződhetünk.

Mindehhez még néhány általános szót akarunk hozzáfűzni. A determinánsok fogalmával és alkalmazásával lehetőségessé válik, hogy tetszésszerűen számú ismeretlen tartalmú egyenletrendszer megoldását egyszerűen felírassuk.

Itt mindenkor csak lineáris egyenletekről lehet szó, vagyis olyan egyenletekről, amelyekben valamennyi ismeretlen csak az első hatványon fordul elő. De a determinánsok alkalmazása felfedi a szóbanforgó egyenletrendszerek legmélyebb szerkezetét és átmenet adódik a már említett permutációs csoportokhoz, valamint az általános csoportelmélethez és innen az úgynevezett invariáns-elmélethez. Egy determináns ugyanis azzal lesz «invariáns», hogy egy egyenletrendszer teljes megoldásrendszerére jellemző, és egyforma szerkezetű determinánsokkal rendelkező egyenletrendszerek egész csoportjának sok közös tulajdonsága van. Determinánsokkal végzett műveletek eredményéből pedig következtethetünk a kombinált egyenletrendszer tulajdonságaira. Az algebra itt már nem egyenletekkel és egyenletrendszerekkel foglalkozik, hanem egyenletrendszerek csoportjaival, amelyeknek előre meghatározott tulajdonságai vannak.

De ezzel az eredménnyel az algoritmus és a notáció az általánosság olyan magas fokát érte el, amelyet felülmúlni már alig lehet. Kronecker írásmódjában egy n -edfokú determináns jele $|a_{ik}|$, i és k az $1, 2, 3 \dots n$ értékeket veheti fel. Egy n egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszert ma egyszerűen így írunk $\sum_k a_{ik} x_k = c_i; (i, k = 1, 2, 3 \dots n)$.

Természetesen nem az a megdöbbentő, hogy így írunk, noha egy ilyen «gyorsírást» alkalmazó matematikai könyv tanulmányozása már igen éles matematikai szemet és fület kíván. Tulajdonképpen az a csoda, hogy nyugodtan számolunk ilyen egész matematikai világot magukban rejtő gondolkodó gépekkel, mintha csak közönséges számok volnának. Aki ismeri a kalkulust és kellőképpen uralkodik rajta, az egy tetszés szerint választott koordináta-rendszer valamennyi egyenletével és egyenletcsoportjával éppoly könnyen és kényelmesen számol, mint bármely más algoritmussal, sőt arra is képes, hogy megmondja, mit fog az egyenletrendszereknek egy egész csoportja egy másik koordináta-rendszerben művelni. Tudja, hogy mily tulajdonságok nem változnak e transzformációnál és hogy melyek változnak meg. Ilyen, majdhogya azt mondanám, jóslatok adott esetben alapvető fontosságúak lehetnek a fizikában, sőt a matematikában is, minthogy ezek egyenletrendszerek óriási csoportjait kapcsolhatják egymás-

hoz vagy választhatják el egymástól. Röviden, a csoport és determinánselmélet, amelyekhez a projektív geometria is csatlakozott (noha eredetileg az algebraizálás ellentétéként indult, de végül maga is algebrává lett), kifejlődött a formáknak egy igen általános elmélete, amelyben az absztrakciónak alig van határa. Ezzel Leibniz ötlete közel vitt a legfelsőbb kabbalához, a legáltalánosabb kalkulus megvalósításához.

Mindezekhez azonban még egy további diszciplína társul, amelyet bizonyos szempontokból szintén egy «matematika feletti matematikának» mondhatunk: a halmazelmélet. E fejezetben előforduló sokféle tárgy közül ezt lehet talán legvilágosabban leírni, noha azok a nehézségek, melyek fejlődésének útjában állanak, majdnem áthidalhatatlanok.

Varázsszönyegünket nagyon igénybe kell vennünk, ha pontosan akarunk tájékozódni. Térben, időben és a fogalmak közt kell vele ide-oda szállnunk, mert a halmazelmélet majdnem minden matematikai témával kapcsolatban van. A «halmaz» a gondolkodásnak éppen olyan kategóriája mint a szám, nagyság, fok vagy csoport. Írjuk ide Georg Cantor-nak, a halmazelmélet megalapítójának klasszikus definícióját: «Halmaznak nevezzük szemléletünk vagy gondolkodásunk jól megkülönböztethető tárgyainak (ezeket nevezzük a halmaz elemeinek) összefoglalását egy egésszé».

Egy század katonaság katonák halmaza. Ha ezek helyesen vannak felszerelve, akkor magukkal viszik fegyvereknek, csizmapárokknak, acélsisakoknak ekvivalens halmazát és töltnényeknek egy nagyobb halmazát. Minden töltnény puskaország halmazát tartalmazza s ez ismét nagyobb, mint a töltnények száma. De mindezek «véges», tehát egyúttal természetesen «megszámlálható» halmazok. Ilyen halmaz minden része kisebb, mint az egész halmaz és általában van értelme a rész és egész, valamint a nagyobb és kisebb fogalmának. De a matematikában, mint jól tudjuk, ismételten bukkanunk olyan halmazokra, amelyek végesnek egyáltalán nem mondhatók. De ezeknek nem kell feltétlenül megszámlálhatatlannak lenniök. Mert «a megszámlálhatóság» nem egy működés, amelynek a fogalomból következően végének kell lennie. A természetes számok sorozatában minden n -hez azonnal elképzelhető egy $(n+1)$ és minden $(n+1)=m$ után következő

egy $(m+1)$ stb. Ezt a végtelenséget, a tetszés szerint folytathatóságot vagy potenciális végtelenséget már számos változtatban megismertük. Tisztán logikusan el tudjuk képzelni, mint a számlálás következményét. De mind pszichológiai, mind pedig transzcendens szempontból e potenciális végtelenség eredetét Kant nyomán a térnek, vagy pedig különösen az időnek tiszta szemléletéből származtathatjuk és tudjuk, hogy már Zenon néhány olyan paradoxonra bukkant, amely ebből a végtelenségből ered. Minden sorként megadott szám, tehát pl. egy irracionális szám, egy exhausztiós levezetésen alapuló konvergáló szám vagy pedig a kontinuum felépítése ugyanazt a rejtélyt adja fel nekünk. De új szempontok csak növelik ezt a rejtvényt, a kontinuummal kapcsolatban, valamint a konvergenciával kapcsolatban is. Mindkét esetben a végeredmény végtelen sok részből szinte szemünk előtt épül fel és a sor összegében vagy a geometriai idomban az aktuális, vagy teljes, vagy lezárt végtelen, vagy röviden egy csakugyan végtelen halmaz van a kezünkben. Csak utalunk arra, hogy az előadásnak fenti módja ellen irányuló támadások sohasem fognak elhallgatni. Szemünkre fogják vetni, hogy egy «rész» csak akkor lehet végtelen kicsi, ha végtelen sok ilyen rész összege mindenkor kisebb marad az egységnél, vagyis az eredmény kevesebb, mint az elképzelhető legkisebb valóságos egység. Ha elismerjük is, hogy ez az álláspont relatíve jogosult, azt válaszolhatjuk a szigorú logikusoknak, hogy ilyen szigorúsággal a végtelenségek egész zűrzavarába kerülünk, amelybe végleg belefulladunk, vagy legalább is megismerés szempontjából tehetetlenek leszünk. Az emberi ész ugyanis a végtelen kérdésében egész más álláspontot foglal el, mint az intuíció. Az észnek el kellene utasítania minden magasabbrendű infinitézimális meggondolást s meg sem szabadna kísérelnie, hogy a logika burkából a «határérték fogalmának» vagy «határátmenet fogalmának» posztulálásával szabaduljon. Nincs megdöbbenőbb az ész számára, mint Leibniznek az a már ismert megállapítása, hogy egy olyan konvergens sorban, mint $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$ sohasem találunk olyan tagot, amely valóban végtelen kicsi. Minden tagnak végesnek kell maradnia, ha még oly kicsi is, tehát minden konvergens sor — alighanem

ez a legélesebb «*contradictio in adiecto*» — *divergens* volna, mert véges mennyiség végtelen sokszor egymáshoz adva természetesen végtelen. Fenti megfontolásnak azonban éppen annyira «természetesen» érvényes az ellenkezője is, de erre inkább az intuíció vezet minket, mert a logika minden apagogikus bizonyítás ellenére is kissé határozatlan marad.

Tudjuk továbbá azt is, hogy már a skolaszticizmus, első sorban Bradwardinus, Aquinoi Szent Tamás és Cusanus, mélyen behatoltak ezekbe az antinómiákba. Ezek az antinómiák a modern logika, logisztika, «als-ob-filozófia» és alapelvekutatás igyekezete ellenére a kérlelhetetlen és dogmákat megvető szemléllő számára, mostan éppen úgy, mint hajdan, a matematikai «*Credo, quia absurdum*» jelentőségével bírnak, — és fűzzük hozzá — helyesen, mert csak e metalogikus szempontokból tárulnak fel tekintetünk számára a megismerés új területei.

A halmazelmélet és a csoportelmélet büszke és kemény logikus területei tartoznak — ne ijedjünk meg — ezekhez a metalogikus területekhez. Mert a modern fizikával együtt ezek tették a logikát Procrustes-ágygá. Röviden azt mondhatjuk, hogy egy új meta- vagy kontralogikus felfedezés után azzal mentik meg a logikát, hogy különös gondosság nélkül «megnyújtják» és azután büszkén kijelentik, hogy az új tanok nagyszerűen összeférnek a logikával. Ezáltal lett — erről még szó lesz a legutolsó fejezetben — a tizenkilencedik század «a nyújtható mérővesszők évszázada». De térjünk vissza a halmazelmülethez. Milyen a logikai értelme annak az apodiktikus kijelentésnek, hogy bizonyos körülmények között a rész egyenlő az egészszel? és hogy végtelen sok ilyen rész összege ismét nem lehet nagyobb, mint az egész? Hétköznapi értelemben vett logika számára mindez teljes értelmetlenség, sőt örültség, a józan észnek ellentéte.¹ Ezek a lehetőségek azonban rögtön megszűntetik a teljes elemi matematika biztonságát, ha logikai szempontból elfogadhatóknak mondjuk őket. Most jön azonban a mesterfogás : egyszerűen kiterjesz-

¹ Végtelen halmazok esetén «ekvivalenciáról» és «különböző számosságokról» szokás beszélni, hogy az egyenlőség illetve a nagyobb és kisebb fogalma megkerülhető legyen. De ezt, ha akarjuk, a logika nyújtása alól mentesítő alibi kísérleteknek is nevezhetjük.

tik a logikát, elhatárolják ezeket a területeket, amelyeken ezek a «törvénszörnyek» érvényesek és egy szörnyű és idétlen mérővesszőnyújtás és általánosítás segítségével a véges törvényeit az aktuális végtelen kozmoszának alárendelt jelentőségű különleges eseteinek mondják. Mindez ellenmondás nélkül elképzelhető a tizenkilencedik század elején élt Bolzano működése óta. «Paradoxien» című művének 14. pontjában megállapítja Bolzano, hogy ha valaki Prága vagy Peking lakosságára gondol, akkor nem gondol egyúttal minden egyes lakóra is, éppoly kevésbé szabad, fűzzük hozzá mi, egy végtelen «pontság» (ponthalmaz) elképzelésével minden egyes pontot gondolatban üldözőbe venni.

Számunkra Bonzano kijelentése egyenesen bizonyítéka annak, hogy mind e dolgokban «metalogikáról» van szó: az örökös összehasonlíthatóság, a végesből a végtelen felé törekvő extrapolálás, az egyes eseteknek, az alkotórészeknek szándékos elmosódottsága intuitív optikus eljárás, amelyet mégoly éleselméjű circulus vitiosusokkal sem lehet megcáfolni. Georg Cantor maga elméletét feltétlenül tisztán logikusan gondolta el. Eleinte ugyan keveset törődött a filozófiával, ezt azonban később skolasztikus műveltségű szerzetesekkel való érintkezéssel alaposan kipótolta, és itt bukkant Aquinói Szent Tamásra és az ő «aktuális végtelenjére». Távol áll tőlünk, hogy a halmazelmélet genialitását kétségbevonjuk, vagy pedig csökkentjük Cantor óriási érdemeit. Csak azt érezzük, tisztán történeti szempontból, hogy ezen a téren ismét világra szóló jelentőségű szellemi döntés küszöbén állunk, amely a matematika fejlődésében rövidebb-hosszabb idő múlva korszakalkotó jelentőségű lesz. Matematikai jellegűvé válik a logika vagy logikai jellegűvé a matematika? Ez a kérdés magva és az euklidesi, mágikus és fausti szellem ellentétének a kérdése az, hogy miként foglalunk állást ebben a problémában, helyesebben probléma-csoportban. De erre a hatalmas változásra is csak utalhatunk, noha ma még mindkét lábunkkal benne vagyunk, nehogy hűtlenek legyünk eredeti feladatunkhoz. Térjünk a tárgyra: egy halmaz, amelyet már definiáltunk, véges lehet, miként egy gyufaskatulya gyufáinak a halmaza vagy a tízezerig terjedő páros számok halmaza. Vagy pedig az 1—79-ig terjedő törzsszámok halmaza. Az ilyen

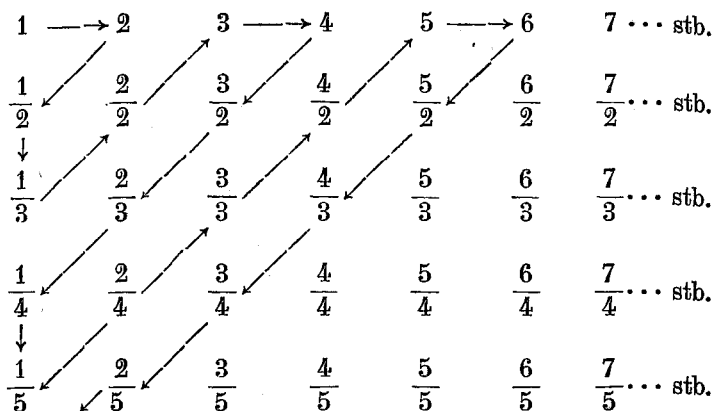
véges halmazok mindenkor megszámlálhatók.¹ Vannak azonban végtelen halmazok is, amelyek megszámlálhatók és éppen eme halmazok kedvéért teremtették meg a halmazelméletet. A természetes számok halmaza megszámlálható. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy egy ember meg tudja számlálni, hanem csupán azt, hogy a megszámlálás elvben lehetséges. Ez az elviszámlálási lehetőség annyira magától értetődő, hogy ötéves kislánykám is azt mondta: «Csak a jó Istenke tud a végéig számolni; mert ő örökké él». De az összes többi végtelen halmaz is megszámlálható, ha lehetséges minden eleméhez egy természetes számot egyegyértelműen hozzárendelni. Ilyen például az összes párosszám, az összes törzsszám, az összes 3-mal, 5-tel, 13-mal, 79-cel osztható szám. Világos, hogy az összes ilyen halmaz részhalmaza a természetes számok halmazának, amelyhez egy ú. n. «transzfinit rendszámot» rendelhetünk. De rögtön előáll az a szörnyűség, hogy minden ilyen részhalmaz, durván azt mondhatjuk, ugyanakkora, mint a természetes számok összességének a halmaza. Vázlatunk pontosan megmutatja ezt a szörnyűséget:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8, ... ∞
2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16, ... ∞
1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15, ... ∞
3,	6,	9,	12,	15,	18,	21,	24, ... ∞
13,	26,	39,	52,	65,	78,	91,	104, ... ∞ stl.

Minthogy a «nagyobb», «kisebb», «rész» és «egész» fogalma elvesztette értelmét, Cantor bevezette a halmaz «számosságának» fogalmát, a számosságra csoportokat állított fel és ezeket transzfinit rendszámokként indexekkel különböztette meg egymástól. Az új szám jele $\aleph$ (alef) és indexet kap, tehát $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\infty$. Valamennyi fenti példánk az $\aleph_0$ típushoz tartozik.

Sokáig azt hitték, hogy a racionális számok halmaza nem számlálható, tehát nem tartozik az $\aleph_0$ csoportba. Cantor azonban bebizonyította, hogy ez a hiedelem téves. Gondoljuk el ugyanis, hogy az összes racionális számot a következőképpen írjuk fel:

¹ És, mint mondani szokás, csakugyan meg is számoljuk őket.



Világos ebből, hogy a nyílak mentén haladva, úgy számlálhatunk, hogy egyetlen elképzelhető racionális szám sem marad ki, sőt a szkémában sok racionális szám többször is előfordul.

Így pl.: $1, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}$ stb. és $\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}$ stb.

Könnyű bebizonyítani, hogy a következő alakú algebrai kifejezések halmaza is megszámlálható:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0.$$

A halmazelmélet legsúlyosabb problémája ma is mindazon számok halmaza, amelyekből a kontinuum összerakható. Bizonyos, hogy az irracionális számok halmaza, amelyet a racionális számokhoz hozzá kell tennünk, hogy a folytonosságot megtöltsék, helyesebben létrehozzák, nem-megszámlálható. A reális számok halmaza tehát nem tartozik az $\aleph_0$ típusba. Hova tartozik tehát? Ez még nem világos, és sok kutató e miatt hajlandó volna a számosság fogalmát elejteni.

De, sajnos, itt sem mélyedhetünk el a részletekben, ezért csak néhány, a halmazelméletből adódó paradoxont említünk fel. Ilyen például Russel híres paradoxona; az olyan halmazok halmaza, amely nem tartalmazza sajátmagát elemként.

De az újabb időkben Hausdorff és még mások is más halmazelméleti paradoxonok egész sorát fedezték fel, főképpen

a geometriában, s ezek sokszor fantasztikus eredményekre vezetnek. Bebizonyítható például ilymódon, hogy a Nap szét-szedhető és almanagyságúra rakható azután össze, a nélkül, hogy belőle bármit elvettünk vagy bármit hozzátettünk, vagy bármit összenyomtunk volna.

A geometriai «sokaság», így nevezte eredetileg Cantor is a halmazokat, már Grassmann és Riemann óta nagy szerepet játszik a matematikában. Minden kiterjedt dolog elemi építőkövéről van itt szó. Azt hitték, és a «közönséges emberi ész» számára természetes is, hogy a vonal pontjainak a száma a felület pontjainak számához, illetve a test pontjainak számához úgy aránylik, mint ∞^1 , ∞^2 és ∞^3 . E halmazok számosságának tehát a különböző fokú végtelennek megfelelően különbözőnek kellene lennie. A halmazelmélet tagadja ezt a különbözőséget és minden dimenzióban a pontok számának csak egyféle számosságát ismeri. Nagyon barátságtalan a következő antinomia is. Tegyük fel, hogy egy közönséges Descartes-féle koordinátarendszerben az x tengelyen az egy-séget mikron-nagyságúnak, az y tengelyen viszont néhány billió fényévnek választottuk. Az x irányban a pontok száma «természetesen» ugyanaz, mint az y irányban, különben nem volna lehetséges az egyértelmű egymáshozrendelés és lehetetlen volna a számpárok alakítása. Milyenek már most ezek a pontok? Ésszel elképzelhető, hogy itt is pontokról van szó? Ezeknek ilyenformán «természetesen» az y irányban jelentősen megnyúlt valamiknek kellene lenniök. Helyes, végtelen halmazokról van szó és a végtelenséggel szemben eltűnnek olyan nevetséges különbségek, miént mikron és fényév. De? Itt nincs de. Mert ha hirtelen felcseréljük a két koordinátatengely léptékét, akkor sem történik semmiféle hatalmas változás, sőt halmazelméleti és analitikus szempontból egyáltalán semmi sem történik. Még a legegyszerűbb transzformáció sem.

Röviden, fausti szempontból a kabbala és a gótikus csúcs-ívek megint testvériséget fogadtak és elmerülnek a sejtelen barátságtalan félhomályban. A logista nem ijed meg. Számol, szétválogat, bírál, elhatárol, fölényesen mosolyogva mondja, hogy türelmetlen gyermekekhez hasonlóan viselkednek azok, akik az ilyen gondolkodó-gépre tartozó dolgok mögött mindig valami szemléleteset keresnek. Semmit sem

szabad elképzelni, mert ez már matematikán kívüli vágyakkal való fertőzöttséget jelent vagy pusztán gyerekességet.

Merev, rideg keretei közé szorítva, a halmazelmélet is algoritmussá fejlődött és fejlődik, és a számelmélet, függvényelmélet és integrálmélet alátámasztására használják, de egy hirtelen fordulat és már az egész matematikának, sőt a logikának is felsőbb, összefoglaló tudományává válik. A csoportelmülethez hasonlóan felsőbbrendű tudomány lesz belőle, a gondolkodás általános kategóriája.

De mindenfelől villogtatja felénk sárkányfogait, ha szabad ezt a kifejezést használunk, és minden pillanatban várhatjuk, hogy megszólal egy mennydörgő hang: *«Du gleichst dem Geist, den du begreifst, nicht mir!»*

Mert az intuíció nemcsak gyermekeknek való, az csúcsteljesítményeiben isteni eredetű. Újra felmerül az a sötét kérdés, hogy mi halandók elhagyhatjuk-e büntetlenül a «ge oikoumén», a lakott föld határait és hogy szabad-e a határon túl, az istenek birodalmában bolyonganunk. Büntetlenül olyan értelemben, hogy nagyon kérdéses, szabad-e a logikát földi, mágikus felfuvalkodottsággal kijavítanunk, ha történetesen szükségünk van rá. Vagy nem fausti köteleességünk inkább az, hogy éppen akkor mellőzzük a logika kiigazítását, ha mélyebb alapok közelléte válik érezhetővé? Puritán matematikus megijed az «érezhető» szótól. Goethe világkategóriáinak felemlítése sem látszik itt helyénvalónak, mivel Goethe vitathatatlanul nem-matematikusan szellem volt, noha sokan igyekeznek állítólagos matematikai érzékét bizonygatni.¹

De ez a korlátozás mitsem változtat azon, hogy ugyanaz a Goethétől származó szerkezet a matematika területére is kiterjedhet, sőt ki is kell terjednie. Nem vaktában mondjuk ezt, Poincaréhoz, Boutroux-hoz hasonló szellemű kiváló német matematikusok, például Bieberbach legújabb kutatásai szintén ebben az irányban haladnak s nem mindenki hagyja magát becsapni azzal, hogy a «logika nyujtása» nyo-

¹ A nem matematikus Goethéről elmondott véleményünket nyomatékosan bizonyítja színelmélet, mert ez mintapéldája a mennyiségi szempontokat teljesen figyelmen kívül hagyó, pusztán minőséget tekintő fizikának.

mán egy hamisított logikájú matematika keletkezik. Emeljük ki ismételve: ugyannyira jogosult azt állítanunk, hogy van a matematikának olyan birodalma, amelyet felfedeznünk, nem pedig feltalálnunk kell. Ha egyszer felfedeztük, akkor logikai vagy logisztikai vagy bármilyen eszközzel művelhetjük, általánosíthatjuk, formalizálhatjuk. De olyan nagy ez a birodalom s annyi sohasem látott csodával van tele, hogy egy figyelmes történetíró sohasem képzelhette, soha nem is fogja elképzelni tudni azt, hogy már teljesen felfedeztük, vagy hogy egyáltalán teljesen felfedezhető. Újra meg újra ki fog nőni a pompás matematikai építmények kövei közül az örök fejlődés füve, rombadólnak az épületek és városok, belepi őket a hamu, míg egyszer új építőművészek új, sohasem látott stílusú épületeket emelnek és ezekben még sohasem hallott nyelvjárások fognak megszólalni.

Az algoritmus és az általánosítás, hogy újból a matematika nyelvén beszéljünk, hallatlan tömegeket tud összefoglalni. De minden «számfeletti szám» mögött mindenkor meg fogjuk találni azt a közönséges számot, amely lehetővé teszi, hogy előbbiekkal egyáltalán számoljunk. Az algoritmus és az általánosítás csupán segédeszközei a kutatásnak akkor is, ha vad bűvészinásoknak mutatkoznak néha. Ma már kevésbbé hisszük, mit a nagy Laplace idejében, hogy a matematikát az algoritmus segítségével iparszerűen lehet átkuatni. A legjobb, legnagyobb matematikusok saját vitathatatlan tapasztalatukból tudják, hogy új matematikai ismereteket nemcsak számítással szerezhetnek, hanem a legnagyobb felfedezések sosem hallott dallamként egyszerre bukkannak fel olyan mélységből, melybe a felfedező sohasem fog lejutni vagy bevilágítani tudni.

A tautologisták és a panlogikusok puritán igyekezetükkel matematikai kozmosz megmerevedését és bevégződését igyekeznek elérni, a Spenglerhez hasonlóan bukást jósoló próféták pedig a matematikai kutatást kétségbeesésbe akarják kergetni. Nem becsmérő hangsúllyal mondjuk ezt, csupán megállapítjuk. De mindkét irányzattal nemcsak a vallásos és a fausti érzés ellenkezik, hanem úgyszólván az ősi biológiai törvény is annyira, hogy ezen a téren a materializmust materialista eszközökkel is le lehetne győzni. De jegyezzük

még meg, félreértések elkerülése végett, hogy a matematikának tisztán instrumentális panlogikus kezelését feltétlenül materialista jellegűnek kell mondanunk, mert az a gondolat más világszemléletbe nem kapcsolódhatnék bele ellenmondásoktól mentesen, de — és legyen ez fejezetünk békülékeny befejezése — a matematika logizálása és a logika matematikai fogalmazása nagymértékben hozzájárul tudományunk elmélyítéséhez, ha a növekedésnek nem túlzásait, hanem inkább gyümölcsit tekintjük. A matematika birodalmában még néhány olyan tartományon kell átvándorolnunk, amelyekben a tizenkilencedik században hatalmas forradalmak játszódtak le, de állapítsuk meg, noha ezzel elébe vágunk a dolgoknak, hogy az «algebra és általánosítás» tartomány urai rendet teremtettek és minden készen áll, a túlvilágról jövő vendégek és követek méltó fogadására.

TIZENÖTÖDIK FEJEZET.

Carl Friedrich Gauss.

Matematika, mint világutazás.

Azzal fejeztük be legutóbbi fejezetünket, hogy még néhány matematikai tartomány bejárása hátra van. Könyvünk szempontjából érvényes ez az ígéret, helyesebben elhatározás. De nem érvényes Gauss számára. Mert az a hős, akihez most illő tisztelettel közeledünk, nemcsak e tartományok egyikének ura, hanem a kétségbe nem vont «princeps mathematicorum», a matematika egész birodalmának fejedelme. Folt, árnyék nem homályosítja el ezt a különleges, legelsőrendű csillagot, ezt az alakot, aki Leibnizhez, Goethehez, Kanthoz hasonlóan az emberiségnek, minden nemzetnek és minden időnek legnagyobbjai közé tartozik.

Kant egy szegény nyergesmester fia volt, és az ifjú Gauss első életévei is egy kőműves szerény házában teltek el. De nem, az apa nemcsak kőműves volt, hanem «vízmester» is, tehát olyasvalaki, aki szökőkutak építésével is foglalkozott. Gauss 1777-ben Braunschweigben született, fentnevezett atyja is odavaló volt. Ő maga meséli, hogy élte első éveiben előbb tanult meg számolni, mint beszélni. Azután rokonaihoz «betűkért» kezdett könyörögni és egyszerre csak már tudott írni és olvasni a nélkül, hogy valaki meg tudta volna mondani, hol tanulta ezt meg. Hétéves korában került elemi iskolába, itt közel száz osztálytársa volt és semmivel sem emelkedett ki közülük. Tehetségét kilencéves korában egy véletlen hozta napfényre. Tanítója, Büttner, azt a feladatot adta akkor a tanulóknak, hogy adják össze az 1-től 60-ig terjedő számokat. Aki készen van, tegye palatábláját a nagy asztalra, egyiket a másikra, hogy a tanító meg tudjon győződni munkájuk gyorsaságáról és az eredmény helyességéről. Alig telik el

néhány pillanat a feladat elhangzása óta, az apró Gauss már felugrik, az asztalhoz siet és leteszi palatábláját. A tanító, kezében a korbács, sajnálkozva néz a sápadt kis kölyökre. Jó, legyen úgy, ahogy ő akarja. Majd elveszi a vessző a kedvét az ilyen tréfáktól. Jókora idő múlva, amikor már valamennyi tábla az asztalon fekszik, sorban előveszi azokat a tanító és ennek nyomán dicséretet és rovásokat oszt. Majd elfelejtette már az első táblát. Hogyan? miként? Hisz erre a táblára nincs más felírva, mint a végeredmény, 1830. Hogyan csinálta ezt ez a tökmag? Kívülről tudta volna vélefele az eredményt? Gauss azonban egyszerűen elmondja, hogy gondolatban a legnagyobb számot írta a legkisebbik alá, a legnagyobbat megelőzőt pedig a legkisebb után következő alá, és így tovább. Ezt írta tehát:

$$\begin{array}{r} 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 30 \\ 60, 59, 58, 57, 56, \dots, 31 \\ \hline 61, 61, 61, 61, 61, \dots 61 \end{array}$$

Ezután kettőt-kettőt összeadott és a harminc egyforma eredményt összeadta, helyesebben a 30×61 szorzás eredményéből kapta meg a végösszeget. Háromszor hatvanegy az 183, szorozva tízzel, az 1830. Ez volna olyan nehéz? Büttner leteszi vesszőjét és olyasmit tesz, amiért szobrot érdemelne. Gauss számára Hamburgból hozat matematikai tankönyvet és röviddel ezután nyíltan kijelenti, hogy Gauss nem tanulhat már tőle semmit. De így ment a dolog tovább is. A göttingeni technológia és egyetem sem tudott az óriási szellemnek valamit nyújtani, mert ő, akárcsak Galois, tizenötéves korában már Newtont, Eulert és Lagrange-ot tanulmányozta. Még nincs tizenkilencéves, amikor a körosztási egyenletet felfedezi (erre még visszatérünk) és később maga mondja, hogy felfedezésén csak «mérsékelt örömet» érzett. E melancholikus öröm hatása alatt legjobb barátjának, Bolyai Farkasnak ajándékozza a történelmi jelentőségű palatáblát, amelyen matematikai pályafutása kezdetét vette. De rögtön újabb feladatokat keres. Már tanulóéveiben megírja a matematika történetének egyik legjelentősebb művét, címe «Disquisitiones Arithmeticae», ez 1801-ben jelenik meg. Az öreg Lagrange maga úgy nyilatkozik erről, hogy általa Gauss a legelső mate-

matikusok sorába emelkedett. Huszonhároméves korában Gauss már tagja a szentpétervári akadémiának, huszonötéves korában pedig az egész világot bámulatba ejti. A «Ceres» nevű kisbolygót röviddel felfedezése után, a csillagászok elvesztették szemük elől és nem tudták, hogy lehetne újból megtalálni. Ekkor a matematika ifjú fejedelme leül íróasztalához, számításai megtöltene néhány lapot és azután kijelenti, hogy meghatározta a «Ceres» pályáját. Itt és itt kell a kis csillagnak lennie. Keresni kezdték és rögtön megtalálták. Gauss azonban ezzel világsoda lett és az államok versengeni kezdtek érte. Csak azért, hogy otthontartsák, kinevezték a még fel sem épült göttingeni csillagvizsgáló intézet igazgatójává. Mint ilyen működött élte végéig, 1855-ig.

Életpályájának ez a rövid vázlata. Három tulajdonság kapcsolódott egymással Gauss szellemében, akárcsak Archimedesében, és ez a három együtt tette őt ilyen naggyá. Úgy tekint le a matematikára, mintha az térkép volna, csak meg kell fejteni jeleit, hogy legtávolabbi vidékeit összeköthessük. Prometheusi szellemként azt is tudta azonban, hogy nem öncél a matematika. S miként Siegfried, ő sem elégedett meg kardjának kovácsolásával. Ezzel a Nothunggal le akarta győzni a földet és az eget. Ezáltal azonban az alkalmazott matematika úttörője lett, különösen a geodéziában, fizikában és csillagászatban. Harmadszor, ez is Archimedesre emlékeztet, nincs szüksége segítségre még a legbonyolultabb és fárasztóbb számításokhoz sem. Éppen olyan szorgalmasan számol közönséges számokkal, mint integrálokkal, komplex változókkal vagy görbült terekkel. Vagy pedig valószínűségi görbékkel és kongruenciákkal. Felmér egy óriási háromszöget. sarkai Brocken, Hohenhagen, Inselsberg városok, csak azért, hogy hibaelmélettel végzett számításokból kiderüljön, vajjon az a tér, amelyben élünk, sík-e vagy pedig görbült. És ami a legrejtélyesebb: legfontosabb felfedezéseit, ezt már Niels Henrik Abelrel kapcsolatban is olvashattuk róla, titokban tartja és nyugodtan nézi, nem úgy mint Newton, hogy mások is felfedezik és nyilvánosságra hozzák felfedezéseit. Sőt, áradozó szavakkal meg is dicséri őket. De mikor egyszer megkérdezték tőle, hogy miért nem hozta nyilvánosságra az általa jól ismert nem-euklidesi geometriát, azt felelte, hogy félt a

«boiotiaiak lármájától». Kétkedni merünk e szavak objektív igazságában, noha Gauss mondta őket. Gaussnak nem kellett e kiabálástól félnie, hisz élte hatvan évén keresztül minden mértékadó kritikus hódolattal és csodálattal, irigység nélkül, kegyét keresve, szinte térdrehullva hajolt meg előtte. Attól félt inkább, hogy a legnagyobb mélységekből származó titoknak, amelynek ő is csak véletlenül jött nyomára, elárulásával megbontja a szférák harmóniáját, hogy olyan erőket hoz mozgásba, amelyet ember már nem tudna fékentartani. Mi magunk a «Gauss-rejtélyt» főpapi cselekedetnek tartjuk, isténfélelemnek és moralitásnak, a szó legnemesebb értelmében, mélységes németiségnek, amely számára a világ érdeke fontosabb minden egyéni szempontnál. Gauss semmiesetre sem mondható bogarasnak. Csupán olyan bölcs volt, hogy nem akart olyan dolgokat megmozgatni, amelyek ideje még nem érkezett el. Ha más, saját erejéből, rájött egyik-másik titkára, akkor ez annak a jele volt számára, hogy mégis megérett az idő. S mivel ő igazán tudta, hogy milyen nehéz az új ismereteket megszerezni, azért írja Bolyainak Farkas, amidőn ennek fia felfedezi a nem-euklidesi geometriát, s ezzel a világ szemében övé lesz a felfedezés dicsősége: «Ezt a Bolyait, az ifjú geometert, elsőrangú lángésznek tartom». Mi azonban hozzáfűzzük, hogy Gauss túláradó szívvel és legmélyebb hódolattal legelsőrangú jellemnek tartjuk és ez talán több, mint a legnagyobb genialitás.

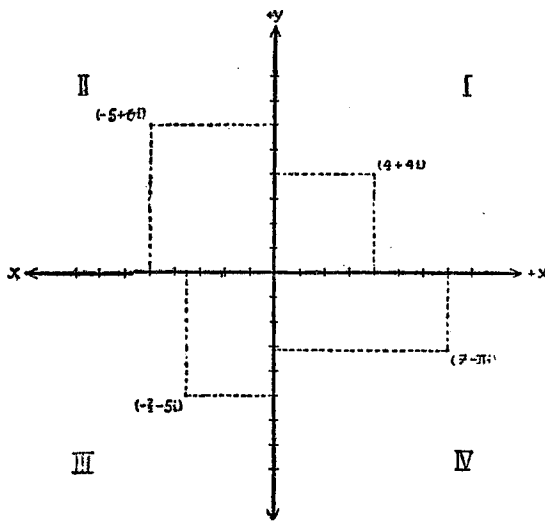
Korszaktörténetünk keretein belül nincs módunk e férfit teljes egészében méltatni. De vigasztalódjunk azzal, hogy Gauss, tudományos szempontból, köztünk él és mindenki számára, aki a matematikába behatol, nem egy módon hozzáférhető. Tehát arra fogunk szorítkozni, hogy legfontosabb felfedezéseire utalunk és azokat a már ismételtén alkalmazott módon, saját méreteinkhez idomítjuk, miközben igyekezni fogunk már ismert dolgokhoz kapcsolódni. Először Gaussnak legkorábbi korszakalkotó felfedezését, a körosztási egyenletet vesszük szemügyre. Bocsássuk előre, hogy Gauss egyike volt a számelmélet legnagyobb tudósainak. Éppen ezzel a tárgykörrel foglalkozik az 1801-ben megjelent «Disquisitiones Arithmeticae» című műve is. Ezt a címet szabadon így fordíthatnók le: «A számok birodalmára vonatkozó vizsgálatok».

Wesselnek, a norvég földmérőnek sikerült először 1798-ban anélkül, hogy Gauss tudott volna róla, az imaginárius számok analitikus leírása. Ezeket, tudjuk, eddig «lehetetleneknek» tartották vagy legfeljebb a képzelet teljesen ábrázolhatatlan termékeinek. Megemlítjük Wesselt, nehogy egy lángeszű tettének dicsőségétől megfosszuk. Korszakalkotóvá azonban csupán Gaussnak, közel az előbbivel egyidőben történt felfedezése vált. Alig tudjuk ma azt a helyzetet elképzelni, amellyel az ifjú Gauss szembekerült, hisz minden középiskolai matematikakönyvből és lexikonból rövid és tömör leírásait kaphatjuk az imaginárius és komplex számok ábrázolásának. Az egész tizenharmadik században még nagyon gyanakodva néztek az imaginárius számokra, mert ezekkel számolva, még nagy matematikusok is súlyos hibákat követtek el. Végül már egyik sem merte a matematikai kísérletek világaért jól megalapozott hírért kockára tenni. Igaz, felfedeztek mindenféle rejtélyes dolgot. De Moivre már 1738-ban kimondta, hogy egy komplex szám n -edik hatványa $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$. Euler a következő össze-

függést ismerte fel: $i = e^{\frac{\pi}{2}}$ és végül Bernoulli és D'Alembert felfedezik, hogy komplex számokon algebrai műveleteket végezve ismét komplex számot kell kapni. Mellékesen megjegyezve De Moivre képlete erre nagyon is közismert példa.

Az imaginárius és komplex számok birodalma azért mégis kellemetlen kísértetvilág maradt. Törvényei megfoghatatlanul és ellenőrizhetetlenül úgy folytak szét a merész behatoló keze között, mintha kísértetek fátylai után kapkodna és azokat igyekeznék megragadni. De a matematika egyik tartományában nem lehetett ezt a «szellemvilágot» elkerülni. Mégpedig az egyenletek elméletében. Mert ha érvényes az «algebra alaptétele» (n -edfokú egyenletnek mindig n megoldása van), akkor nem lehet a komplex-megoldásokat elkerülni. Természetesen az $x^n = 1$, azaz $x^n - 1 = 0$ típusú egyenleteknél sem. Ilyen egyenleteknek legfeljebb két megoldása reális szám, mégpedig $+1$ és -1 , ha az n páros, az összes többi megoldás szükségképpen komplex. Gaussnak sikerült, mint már mondtuk, zseniális módon megtalálni a komplex számok egyik analitikus geometriai ábrázolási módját. Ezek

a számok az ilyen ábrázolási mód szerint nem számegyenesen, hanem számsíkon fekszenek. A 11. ábrán ez a komplex «számsík» van előttünk, részletes magyarázatát «Az egyszeregytől az integrálig» című könyvünkben találhatjuk meg. Ha az $x^n - 1 = 0$ egyenlet megoldásait egy számsíkra felrajzoljuk, akkor a számoknak megfelelő pontok, egyenesekkel összekötve, szabályos n -szöget adnak. Alig lehet leírni, hogy milyen mágikus csudát jelent ez a felfedezés. Legyünk tisztában



11. ábra.

azzal, hogy mi is történik: reális és komplex számok csoportja, amelyek együttvéve az egyenlet megoldását jelentik, egy kétméretű analitikus geometriai ábrázolásmódban szabályos sokszöget adnak és ezzel a sokszög körül írt kört n részre, illetve n egyforma középponti szögre osztják. Aritmetika, algebra, analitikus geometria, trigonometria és függvénytan kapcsolódik össze itt az elemi geometriával. Mert most vizsgálható és előre megmondható, hogy milyen szabályos n -szög szerkeszthető körzővel és vonalzóval. Még a

legnagyobb kortársak is csodálkoznak, amikor Gauss bebizonyítja, hogy a szabályos tizenhétszög körzővel és vonalzóval megszerkeszthető, mert az $x^n - 1 = 0$ egyenlet akkor vezethető vissza négyzetgyökvonásra,¹ ha n törzsszám és $2^k + 1$ alakul, itt pedig a k maga is 2^s alakú. E követelményt figyelembevéve ha $s=0$, akkor $n=3$, ha $s=1$, akkor $n=5$ és ha $s=2$, akkor $n=17$ stb. Természetesen a képletből adódó n nem mindenkor törzsszám.

Az ifjú Gauss már e tétellel is a «három nagy A» mesterének bizonyult: az aritmetika, algebra és analízis mesterének.

Ismét csak utalunk a dolgok lényegére, ha megmondjuk, hogy az egyenletek mellé egy egészen új, algoritmikus jellegű művelettypust állított. Ezt $a \equiv b \pmod{n}$ alakban írja és a következőképpen olvasandó: « a kongruens b -vel modulo n ». A kongruenciáknak lényegében egy csoportelméleti gondolat az alapja, mert egy számnak e művelettel nem egyenlőség folytán felel meg egy másik, csupán «szerkezeti azonosság» folytán, ha szabad ezt a kifejezést használnunk. Így például 19 kongruens 40-nel modulo 7, vagyis $19 \equiv 40 \pmod{7}$, mint-hogy mindkét szám maradéka 7-tel osztva egyaránt 5, vagyis a közös 7 modulusra vonatkozóan egyformán viselkednek.

A kongruenciákkal kapcsolatban egyszerű példaként vizsgáljuk meg számelméleti szempontból az úgynevezett kilences próbát, amelyet már a régi Görögországban és Indiában is ismertek és amelyet minden matematikus nagyon titokzatosnak tartott. Tudjuk, hogy a tízes rendszerben maradva, tizenegyespróba is létezik. Nem tízes rendszerben, ha az alapszám g , van $(g-1)$ -es és $(g+1)$ -es próba is.

Legyen z egy tízes rendszerű szám $z = a_m 10^m + \dots + a_0 10^0$.

Ezt a következőképpen alakíthatjuk át:

$$a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0 - a_m - a_{m-1} - \dots - a_1 +$$

$$\underbrace{\phantom{+a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0}}_{\text{Maradék}}$$

$$+ a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0$$

¹ Tudvalevő, hogy körzővel és vonalzóval való szerkeszthetőségnek ez a feltétele.

A szögletes zárójellel összefogott kifejezés továbbá egyenlő $a_m(10^m - 1) + a_{m-1}(10^{m-1} - 1) + \dots + a_1(10^1 - 1)$; és $(10^{m-\mu} - 1) = (10^1 - 1)(10^{m-\mu-1} + \dots + 10^0)$, és itt μ mind-egyik egész számot jelentheti 0 és $(m-1)$ között. Ebből az összefüggésből kiderül, hogy a z szám szögletes zárójellel összefogott része feltétlenül osztható a $(10^1 - 1) = 9$ számmal.

De ez az $a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0$ nem más, mint a z szám számjegyeinek az összege, minthogy a_n a 10 hatványainak az együtthatóit jelöli, vagyis azokat a számjegyeket, amelyek a z szám leírásához szükségesek. Jelölje a számjegyek összegét $S(z)$, akkor vagy azt írjuk, hogy $a_m + a_{m-1} + \dots + a_0 = S(z)$, vagy pedig Gauss szerint $z \equiv S(z) \pmod{9}$, mivel az egész z szám és számjegyeinek összege 9-cel osztva feltétlenül ugyanazt a «kilences maradékot», az $(a_m + a_{m-1} + \dots + a_0)$ összeget adja. Maradékot kapunk természetesen akkor is, ha azt mondjuk: «8 : 9 = 0 marad 8». Mindebből az is kiderül, hogy $z \equiv S(z) \pmod{g-1}$, ha g a rendszer alapszáma. Eddigi levezetésünket ugyanis minden változtatás nélkül 10 hatványai helyett g hatványaival is végezhetjük volna. Tehát a rendszer alapszámától teljesen függetlenül.

Minthogy pedig számjegyek összegét kifejező szám jegyeinek összege kongruens az először említett számjegyösszeggel, ezért kongruens magával az eredeti számmal is. Ebből adódik a 9-es próba következő skémája:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Összeadás :} \\ \text{Kivonás :} \end{array} \right\} a \pm b = c.$$

$$\begin{array}{l} S(a) \equiv a \\ S(b) \equiv b \\ \hline S(a) \pm S(b) \equiv [a \pm b = c] \equiv S(c). \end{array}$$

$$\text{Szorzás : } a \cdot b = c.$$

$$\begin{array}{l} S(a) \equiv a \\ S(b) \equiv b \\ \hline S(a) \cdot S(b) \equiv [a \cdot b = c] \equiv S(c) \end{array}$$

Osztás: $a = b \cdot q + r$.

$$q = \frac{a-r}{b} \quad (r = \text{maradék}).$$

$$S(a) \equiv a$$

$$S(b) \equiv b$$

$$S(q) \equiv q$$

$$S(r) \equiv r$$

$$S(q) - S(r) = a - r; \quad a - r = b \cdot q;$$

$$S(a) - S(r) \equiv S(b) S(q); \quad S(a) \equiv S(b) S(q) + S(r) \quad ^1$$

Hogy tisztábban lássunk, ideírunk minden alpműveletre egy-egy számpéldát.

Összeadás: $a + b + c = d$ (SS a számjegyek összegében jelenti a számjegyek összegét).

$$\begin{array}{lll} a = 1638 & S(a) = 18 & SS(a) = 9 \\ b = 1224 & S(b) = 9 & SS(b) = 9 \\ c = 37 & S(c) = 10 & SS(c) = 1 \\ \hline d = 2899 & S(d) = 28 & SS(d) = 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lll} a \\ b \\ c \\ d \end{array}} \right\} 19; 19 \equiv 10 \pmod{9}.$$

Szorzás: $a \cdot b = c$.

$$\begin{array}{lll} a = 1726 & S(a) = 16 & SS(a) = 7 \\ b = 321 & S(b) = 6 & SS(b) = 6 \\ \hline c = 554.046 & S(c) = 24 & SS(c) = 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lll} a \\ b \\ c \end{array}} \right\} 42; 42 \equiv 6 \pmod{9}.$$

Osztás: $a : b = q$ maradék: r .

$$a = b \cdot q + r.$$

$$\begin{array}{lll} a = 4647 & S(a) = 21 & SS(a) = 3 \\ b = 215 & S(b) = 8 & SS(b) = 8 \\ \hline q = 21 & S(q) = 3 & SS(q) = 3 \\ r = 132 & S(r) = 6 & SS(r) = 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lll} a \\ b \\ q \\ r \end{array}} \right\} 3 \equiv \frac{8 \cdot 3 + 6}{30} \pmod{9}.$$

¹ Minden kongruenciához képzeljük hozzá a «mod ($g-1$)» kifejezést. Esetleg azt, hogy «mod 9», ha kifejezetten a 9-es próbára gondolunk.

A kilencespróba példájával megkíséreltük, hogy a számelmélet nagyszerűségének egy kis sugarát megmutassuk és most legalább utalni fogunk Gaussnak híres «négyzetes reciprocitás» törvényére. Ez ismét egyike legfontosabb tételeinek és szintén a «Disquisitiones Arithmeticae» című művében olvashatjuk. Számelméleti fontossága rendkívüli, maga Gauss illette a «Theorema Aureum» és «Theorema Fundamentale» névvel. Ez a tétel Legendre írásmódjával a következő $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ és itt $\left(\frac{q}{p}\right)=+1$ azt jelenti, hogy q egy négyzetszám maradéka lehet modulo p . $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ viszont azt jelenti, hogy q nem lehet maradéka egy négyzetszámnak, modulo p . A reciprocitás törvénye azt is követeli, hogy p és q egymástól különböző páratlan törzsszámok legyenek. Azt is meg akarjuk jegyezni, hogy mod 3 csak 1 lehet négyzetes maradék, mod 5 viszont 1 és 4, mod 7 pedig 1, 2 és 4, mod 11 viszont 1, 3, 4, 5, 9 stb., minthogy a négyzetes maradékok szinte periodikus jellegűek és egy periódusban, szimmetrikus elrendezésben mindig ugyanazok a maradékok lépnek fel. Ha 0^2 értékkel kezdjük, akkor például mod 7 következő lesz a periódus: 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0 és mod 11 például: 0, 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1, 0. Tehát 5^2 -nek mod 7 négyzetes maradéka 4, minthogy $25:7$ maradék 4 és a $c^2\equiv q(\text{mod } p)$ feltétel akkor teljesül, ha, mint már említettük, $\left(\frac{q}{p}\right)=+1$. De ne időzzünk itt tovább, csak azt említsük, hogy Gauss egy másik, «Algebra» című főművében bebizonyítja az algebrának már ismételten említett alaptételét. Gauss a bizonyítást többször és egymástól lényegesen eltérő módon vezeti le. Egy másik nagy teljesítménye a hipergeometrikus sorok felállítása. Ennek az a nagy jelentősége, hogy ez a sor számos más sort foglal magában különleges esetként. Képzési törvénye a következő:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots,$$

Legyen konkrét példaként $\alpha = 2$, $\beta = 5$ és $\gamma = 3$, akkor

$$F(2, 5, 3; x) = 1 + \frac{10}{3}x + \frac{15}{2}x^2 + 14x^3 \dots$$

De itt sem időzhetünk. Tudjuk, hogy Gauss emlékének áldozunk, ha azokra a dolgokra térünk rá, amelyeket élete végéig sem hozott nyilvánosságra. Tudjuk azt is, hogy ma már aligha akadnak «boiotiaiak», akik kiabálnának, ha nem-euklidesi geometriáról beszélünk. Ma már másféle «boiotiaiak» élnek. Ezek történelmi és matematikai szempontból is félig-képzett emberek, akik azt hiszik, hogy mindezeket a dolgokat a legújabb idők fizikájával kapcsolatban találták fel. Azt hiszik, hogy most találták fel a mozgások relativitását, amelyet pedig már Newton is jól ismert, az imaginárius vágymot, a görbült tereket és a többdimenziós geometriákat, vagyis azokat, amelyekben a dimenziók száma $d > 3$. De ezzel nem akarjuk támadni az új fizikát, amely a tizenkilencedik század folyamán a matematikát szinte állandóan hajszolta előbbre és előbbre. Annál kevésbbé, mivel maga Gauss is, vagy Hamilton és még sok más úttörő matematikus nagy érdemeket szerzett az elméleti fizikával kapcsolatban, sőt sokszor maguk is fizikusok voltak. Éppen ezért nem szabad a felfedezéstörténetet ilyen éles formában elhomályosítani, mert a gondos vizsgálat többnyire nem igazolja a modern fizikusok forrásidézteit sem. De a nagy fizikusok az új idők boiotiai népe számára a valóság nehézsúlyú bajnokai és meglehet, hogy jobb az igazságot kétségbevonni, mint egyszerűen elsiklani felette.

Már említettük, hogy Euklides a párhuzamosok posztulátumának bonyolult fogalmazását adta és ez a fogalmazás lényegesen eltért a többi axiómáétól. A régi hellének éber matematikai szellemének alighanem feltűnt ez az egyenlenség, ehhez járult még az a zavar is, amelyet az aszimptoták felfedezése okozott, ahogy ezt már szintén említettük. Ezért már korán megkezdődött a kutatók igyekezete, hogy rendet teremtsenek e zavaros helyzetben és a fáradozások két irányt vettek. Egyrészt egyszerűsíteni akarták a párhuzamosok posztulátumának formáját és a többi alaptételhez hasonlóvá akarták tenni; másrészt megpróbálták bebizonyítani, ez pedig

nem jelent mást, minthogy meg akarták fosztani axióma-jellegétől. Magyarazzuk meg itt kissé a kifejezések használatát. Euklides szétválasztja a geometriai idomokra vonatkozó alaptételeket (posztulátumok), és a tiszta nagyságviszonyokra vonatkozó alaptételeket (axiómák). Mivel azonban modern álláspont szerint az ilyen megkülönböztetésnek nincs semmi jelentősége, számunkra ugyanis egy axióma mindenkör olyan állítást vagy megállapítást tartalmaz, amelynek további bizonyítása felesleges (mivelhogy ezek az alaptételek jelentik minden bizonyítás kiindulópontját), ezért a következőkben a posztulátumokat és a szűkebb értelemben vett axiómákat egyaránt axiómának fogjuk nevezni; így tehát például mindenkör a párhuzamosok axiómája kifejezést fogjuk használni. Tehát még egyszer: egyszerűsíteni akarták a párhuzamosok axiómáját. Proklos (Kr. u. 410—485) is ezt akarta és így fogalmazta meg: «Ha az a egyenes keresztülmegy a P ponton és párhuzamos g -vel, akkor nincs még egy olyan, a -tól különböző párhuzamos, amely ezen a P ponton keresztülmenni». Vagy a többi axiómából akarták levezetni és ezzel közönséges levezetett tétellé akarták lefokozni. De e közben szabályszerűen és tévedhetetlen biztossággal kiderült, hogy a párhuzamosok axiómájának minden ilyen «bizonyítása» valamilyen hátsó ajtón egy, Euklides többi axiómája közt meg nem található axiómát csempész be és ezekről a becsempészett axiómákról előbb-utóbb kiderült, hogy ekvivalensek a párhuzamosok axiómájával. A tizenkilencedik század végén, illetve a huszadik század elején két geometer: M. Pasch és Baldus bebizonyították, hogy a párhuzamosok axiómáját pótolhatjuk többféle más axiómával és ezek mindegyike alkalmas arra, hogy belőle, Euklides többi axiómáit felhasználva, a párhuzamosok axiómáját levezessük. Ezzel a párhuzamosok axiómája valóban levezetett tétellé válik. Ilyen helyettesítő axióma például a következő is: «Egy háromszögben a szögek összege mindenkör két derékszöggel egyenlő», «van két nem egybevágó hasonló háromszög», «valamely egyenesnek ugyanazon oldalán fekvő és az egyenestől egyforma távol levő pontok szintén egyenesen fekszenek» stb.

Abból is láthatjuk, hogy milyen zavar uralkodott ebben a kérdésben, hogy a tizenkilencedik század végéig számos geo-

metriai tankönyvben a párhuzamosok axiómájának «bizonyítását» olvashatjuk és ezt a bizonyítást a szerzők még gyermekkorukból hozhatták magukkal. A modern kutatás fényében természetesen ezekről a bizonyításokról is kiderült, hogy logikai szempontból hiányosak és rejtett feltételezéseket tartalmaznak. Ki is maradtak azóta a tankönyvekből.

Csak mellékesen említjük meg, hogy görög, arab, olasz, német, angol, francia és magyar tudósok foglalkoztak a párhuzamosok axiómájával és hogy több, mint 250 komolyan veendő értekezést ismerünk e tárgyról, úgyhogy végül már rezignált álláspontot elfoglalva, óvtak mindenkit az ilyen kísérletektől. Mert nem is egyszer csakugyan megtörtént, hogy rendkívül tehetséges matematikusok éleslátásukat és egy hosszú élet minden erejét a párhuzamosok rejtélyének megfejtésére pazarolták és hiába elfecsérelt életüket mélységes kétségbeeséssel végezték. Ilyen sors érte például Gauss barátját, Bolyai Farkast, akinek még az a tragikum is osztályrészül jutott, hogy fia, Bolyai János a legelső közt volt, akik a rejtvényt megfejtették és az apa nem értette meg és nem ismerte el a megfejtés helyességét.

De vissza kell térnünk a chronologikus sorrendhez. Be kell arról számolnunk, hogy a lángeszű jezsuita, Gerolamo Saccheri a nyelvtannak, filozófiának, vitázó hittudománynak, aritmetikának, algebrának, geometriának stb. tanára a páviai egyetemen, közzétett egy értekezést, amelyben, durván mondvá, feltételezi a párhuzamosok axiómájának helytelenségét és a feltevést ad absurdum igyekszik cáfolni. Ez az apagogikus bizonyítás aránylag könnyen sikerült neki, a «tompaszögek hipotézisével» kapcsolatban. A «hegyesszögek hipotézisével» kapcsolatban látszólagos bizonyítások tévútra vezetnek Saccherit, úgyhogy végül azt a következtetést vonja le, hogy Euklidest minden szeplőtől megtisztította. Ebből következik művének címe is: «Euclides ab omni naevo vindicatus». Említsük meg itt utólag, hogy mik is azok a fentemlített hipotézisek. Ha ugyanis egy négyszöget vizsgálunk, amelynek AB alapjára merőlegesen állnak az egyenlő hosszúnak feltételezett AD és BC oldalai, vagyis az alapon fekvő két szög α és β egyenlő és derékszög, akkor bebizonyítható, a párhuzamosok axiómájától függetlenül, hogy a fennmaradó két szög,

γ és δ egyenlő egymással. De nem bizonyítható be, a párhuzamosok axiómája nélkül, hogy derékszögek.

De Saccheri óta problémánk nem került többé nyugvópontra, sőt fejlődése szinte drámai jellegűvé vált. J. H. Lambert (1728—1777) mindkét hipotézist megvizsgálva, eléggé messze jutott kutatásaiban; szerepelnek bennük a 180 foknál nagyobb szögösszegű gömbháromszögek is; tudatában volt, hogy a párhuzamosok tétele és a háromszög 180 fokos szögösszege ekvivalens. Ő már a képzetes gömböt is említi. G. S. Klüger (1739—1812) és a nagy Legendre (1752—1833) is beleütközik e problémába, de a párhuzamosok tételét mindketten érvényesnek tekintik, bár kételkednek benne, hogy a priori igazság volna. A geometria nagy forradalma így Gaussal kezdődik, aki — Bolyai Farkashoz írt leveléből kiderül — már 1799-ben foglalkozott a párhuzamosok tételével. Bolyai Farkas maga is egész életén át foglalkozott a problémával, de végül be kellett látnia fáradozásainak céltalanságát és Euklides igazát. És ekkor kezdődik a tudománytörténet legkülönösebb felfedezésegyidejűsége, amelyet, nehogy zavaros legyen, szkematikusan kell leírnunk.

a) Gauss maga, mint már említettük, hamarosan rájött a titok nyitjára. Olyan ellenmondásmentes geometriát épített fel, amelyben a párhuzamosok tétele nem érvényes és a háromszög szögeinek összege kisebb, mint 180° .

b) Lényegében ugyanerre a geometriára jutott egy Schweikart nevű jogász; tudomására hozta Gaussnak és dicséretet kapott érte.

c) Schweikart veje, Taurinus, e témáról írt értekezését 1825-ben nyilvánosságra hozza. Ebben a hegyesszög és a tompaszög hipotézisét is vizsgálja, sőt az imaginárius gömbről is beszél. De ugyanabba a hibába esik, mint Saccheri, úgyhogy végül Euklides tételének kizárólagos helyességét hirdeti.

d) Csak Bolyai János, a magyar mérnökkari tiszt épít ki a Gauss-félével teljesen azonos nem-euklidesi geometriát 1823-ban. (A háromszög szögeinek összege szerinte kisebb, mint 180°), de csak 1832-ben hozza nyilvánosságra.

e) A többiektől teljesen függetlenül¹ jutott az orosz

¹ Ha eltekintünk attól, hogy Gauss egyik tanítványa kollégája volt az oroszoknak az egyetemen és így esetleg említhette neki, hogy Gauss a párhuzamosok tételével foglalkozik.

I. N. Lobacsefszkij (1793—1856) ugyanarra a geometriára 1826-ban és felfedezését előterjesztette a kazáni egyetemnek («Kazáni értekezés»). Nyilvánosságra 1829—1840 között került. Lobacsefszkij határozottan egyenértékűnek mondja geometriáját Euklidesével.

f) Teljes általánosságban a lán geszű Bernhard Riemann, Gauss tanítványa és későbbi göttingeni professzor készítette elő 1854-ben a forradalom végleges győzelmét. Habilitációs dolgozata «Über die Hypothesen die der Geometrie zugrunde liegen» (A geometria alapvető hipotézisei) s amelyet Gauss végighallgatott, mindhárom geometria ($\Sigma = 2R$, $\Sigma < 2R$, $\Sigma > 2R$) ismeretét tanúsítja.

g) A végső győzelmet Beltrami és F. Klein munkálkodása hozza; Ők ketten kimutatják, hogy van csupa valós pontból álló, állandó negatív görbületű felület (az állítólagos «imaginárius gömb» szintén állandó negatív görbületű), ezenkívül lényegesen egyszerűsítették és tökéletesítették a geometria világszemléletét.

Egyáltalán nem lehet feladatunk, hogy behatóan vizsgáljuk e különleges felfedezések történetét, inkább az ismeretkritikai következményekkel foglalkozunk. Részletekre vonatkozóan többek között «A ponttól a négy dimenzióig» című könyvünkre utalunk.

Csupán azt a kérdést vetjük fel, mi volt annak a következménye, hogy belátták: a párhuzamosok kérdése azért áttekinthetetlen, mert azt az eddigi módon fel sem szabad vetni. Hirtelen megtudták, hogy elképzelhetők olyan geometriák, sőt bizonyos szempontokból meg is valósíthatók, amelyekben nem húzható egy ponton át adott egyenessel párhuzamos egyenes, vagy kettő is húzható. Igaz, hogy itt az «egyenes» fogalmát archimedesi értelmében kell venni s mindazt «egyenesnek» kell tekinteni, ami az adott felületen «két pont legrövidebb összekötővonala». Ha tehát egy «görbült tér», mondjuk a görbült R_2 , a gömbfelület, egy sík, vagyis nem görbült, euklidesi R_3 -ba van beágyazva, akkor ebből a szempontból a nem-euklidesi tér «egyenes» «görbült». De csupán ebből, a nem-euklidesi geometrián kívül álló szempontból. Ha egy hosszújaratú hajóskapitány Plymouthból New-Yorkba vezet hajóját, akkor úgy jut oda «egyenes» úton,

ha egy gömbi legnagyobb körön vezet. Vagyis, Mohrmann kifejezésével élve, egy nem-euklidesi g -vonalon. Belátjuk, hogy ez a búvészkedés a látszólagos ellenmondásokkal a «józan emberész» számára gyanússá teszi a nem-euklidesi geometriákat. De kérdéssel vághatunk vissza, mert mi vezet ezt az emberi észet, ha józan óhajt lenni? Alighanem a logika törvényei. Ha tehát Archimedes óta «egyenesnek» két pont legrövidebb összekötő vonalát nevezzük, és egyáltalán nem követeljük, hogy ez az összekötés feltétlenül az euklidesi R_2 -ben, tehát síkban történjék (a síknak ezt a tulajdonságát, mellékesen megjegyezve, szintén külön meg kellene állapítanunk), akkor számunkra nem marad más hátra, mint hogy azt az alakzatot nevezzük «egyenesnek», amely a definíciónak megfelel. Ha az «egyenes» szó zavar, akkor használjuk nyugodtan a « g -vonal» «geodetikus vonal» vagy legrövidebb összekötővonal kifejezést, vagy bármilyen mást. A dolognak nem ez a látszólagos összeférhetetlenség a lényege, hanem egy sokkal feltűnőbb szimmetria. Kiderül ugyanis, hogy a párhuzamosok axiómájától eltekintve, Euklides minden axiómája a nem-euklidesi geometriákban is ellenmondásoktól mentesen érvényes és hogy minden olyan szerkesztést, amelynek nem feltétele a párhuzamosok axiómája, bármely geometriában egyformán végezhetünk el. Ezért volt szó az utóbbi években nem is egyszer az «abszolút geometriáról», értve ez alatt valamennyi geometriai axióma és tétel összességét, amelyek a geometriára nézve invariánsak, vagyis szinte érzéketlenek az illető geometria szerkezetével szemben.

A térben és időben történt matematikai utazásunk során bizony már jócskán eltompultunk az általánosításokkal és különféle antinomiákkal szemben. De a tapasztalat azt mutatja, hogy a nem-euklidesi elvekkel kapcsolatban még azok is türelmetlenek és dühösek lesznek, akik jószívvel megbocsátják a többi antinomiát. Itt olyasmi kerül ugyanis szóba, amia «*common sense*»-nek nemcsak mint észnek, hanem mint szemléletnek is ellenmond. Kantig azt hitték, sőt a matematikában kellőképpen nem tájékozott filozófus körökben ma is azt hiszik, hogy geometriánk a priori a háromdimenziós, euklidesi, egyenes térhez van kötve. Tehát ez a természettől adott valami, más «valóság» csupán fantaszták álma, vagy

legjobb esetben a panlogika híveinek tisztán racionalisztikus konstrukciója. Ezek, a fogalmakkal bűvészkedve, csupán körbe forognak ; ráadásul még az ismertből kiindulva, örökké az ismeretlen felé extrapolálnak. Mert a szemléletnek csak ott, az ismeretlenben lehetnek olyan törvényei, amelyek annyira eltérnek a mi szemléletünkől, hogy miattuk lehetőségeink átlépésének pusztá kísérletét is üres metafizikai játéknak kelljen bélyegeznünk.

Ilyen ellenvetésekre, különösen a legújabb idők fizikájával kapcsolatban, sokféle válasz adható. Néhányan — köztük G. Simmel — kijelentik : a geometria kiterjesztése egyáltalán nem érinti Kant értelmében vett a priori elvét. Hisz teljes mértékben érvényben hagyjuk ezt az axiomatikára és a logikára vonatkozóan, sőt éppen azáltal hajlunk meg e «szükségesség» és «általános érvényűség» előtt, hogy feladjuk a párhuzamosok posztulátumának egyoldalúan lefektetett pozícióját és ezzel az általánosítással megszabadítjuk a geometriát belső gyengeségétől, sőt egyik belső ellenmondásától. Ami a tapasztalatot illeti, az R_2 -ben körzővel és vonalzóval egyaránt kipróbálhatjuk a szférikus nem-euklidesi geometriát a gömbfelületen, és a pszeudoszférikusat a pszeudoszféra felületén. Éppen úgy, mintha az euklidesi geometriával iskolai falitáblára rajzolnánk. Az viszont nagymértékben kétséges, hogy az R_3 -nak, mint tapasztalati térnek euklidesinek kell-e lennie ahhoz, vagy sem, hogy életünket és ismereteinket lehetővé tegye. Ma már a földünket sem tekintjük sík lapnak, noha a mindennapi életben úgy járunk el, mintha az volna. Lehet, hogy térérzékünk is csak egy ilyen «mintha» (als ob). Mit jelentene számunkra, tesszük fel a kérdést, ha kifinomodott mérési eljárásaink valaha azt mutatnák, hogy minden háromszög szögének összege valamivel több vagy kevesebb, mint 180° ? Semmi sem változnék, feleljük azonnal. A csillagászat és az elméleti fizika már úgyis nem-euklidesi geometriákkal dolgozik, mindennapi életünk számára pedig az euklidesi geometria, miként eddig, kielégítő megközelítéssel érvényes maradna. És ha még ezt a megközelítő érvényességét is elvesztené? A gondolkodásnak ilyen forradalmát is átéltük már valamilyen formában ; és nem betegedtük bele, amikor megtudtuk, hogy a kör négyszögesítése megvalósít-

hatatlan. De a tér görbültségével kapcsolatban még olyan nagyságrendű eltérésről sem lehet szó, mint a π eltérése valódi értékétől és a modern fizika feltevése szerint bizonyos területeken az euklidesi geometria érvényessége egyáltalán nem lehet kétséges.

Semmi esetre sincs azonban egyelőre kísérlettel alátámasztott okunk arra, hogy elhagyjuk az euklidesi geometriát szűkreszabott kereteink közt. De fel kell készülnünk arra, hogy egyszer reális értelemben is felmerül a térgörbültség feltételezésének szüksége. Teljesen eltekintve attól, hogy más utakon is szabadulhatunk a dilemmából. Mindenkor lehetséges ugyanis görbült tereknek többdimenziós «euklidesi» térbe való «beágyazása» és az euklidesi geometriának projektív alkalmazása. Ilyen gondolatmenetből adódik a «megegyezéssel» vagy «konvencionalista» álláspont, amelyet bizonyos értelemben Henri Poincaré képvisel. Ő ugyanis az alkalmazandó geometriát nem «igazsága», hanem «kényelmessége» alapján választja meg. Ezzel az «igazság» kérdése teljesen kikapcsolódott. Azt hisszük ugyan, hogy maga Poincaré sem képviseli egész szélsőségesen ezt az álláspontot, mert gátolja őt ebben intuicionizmusa, amely nem bízik a pusztán «helyességben», vagyis a logikai szempontból való «megtámadhatatlanságban».

Egyelőre hagyjuk abba ezt. Csak annyit fűzzünk még hozzá, hogy a nem-euklidesi geometriák fejezete véleményünk szerint még távolról sincs lezárva, noha hatalmas lépést jelentett a matematikai kozmosz meghódítására. De ezen a téren is inkább előbb, mint utóbb még nagy meglepetések érhetnek, mert a matematikának néhány forradalmi tartománya, miután megvívta a maga belső harcát, magasabbrendű összefoglalást kíván és ez épp annyira alapvetően megváltoztathatja mai helyzetét, mint ahogy megváltozott az érintő értelme az infinitézimálszámítás következtében. Csak az dicsekedhet azzal, hogy már mindent felfedeztünk, aki lelkében «alexandriai», Őszinte kutatók sok helyen mutatnak még «fehér foltokra» a matematika térképén és ezek a ki nem kutatott területeket jelzik. De ha már nem is volna ilyen fehér folt, akkor is könnyen lehetséges, hogy a matematikának már békés területein a járt utaktól távoleső völgyekben még ki nem bányászott kincsek hevernek.

Nehogy teljesíthetetlen reményeket ébresszünk, kijelentjük e helyen is, hogy itt nem a szögharmadolásnak körzővel és vonalzóval való megszerkesztésére vagy a racionális számmal kifejezett négyzetgyök kettőre gondolunk, mert ezeket semilyen új matematika nem fedezheti fel, hacsak túl nem teszi magát mindennemű logika szabályain.

De nyíltan kimondjuk, mi, akik a történet szemüvegén keresztül nézzük a fejlődést, semmi áron sem vagyunk hajlandók ahhoz a véleményhez csatlakozni, amelyet gyakran hallunk. Ahhoz a véleményhez, amely szerint a matematika elérkezett lehetőségeinek határához. Éppen olyan nehezen látható az, hogy zsákutcába jutott, mint ennek az ellenkezője. Lehetséges, hogy míg ezeket a sorokat írjuk, valahol egy ifjú Galois vagy Gauss ül az íróasztalánál és most alakítja ki a még csak számára érthető hieroglifáit egy új kalkulusnak, és ez az összes általunk ismert területet ismét csak különleges esetként foglalja magában. De az is lehet, hogy egy sokkal átfogóbb tudomány — Lullusnak, Descartesnak, Leibniznek álma — öleli magába a matematikát és új értelmet ad neki. Az sem lehetetlen, hogy a matematikáról derül ki hirtelen, hogy tudomány felett álló tudomány és gondolkodásának legmagasabb formáiból fog egyik-másik ilyen «általános matematikává» átalakulni.

A jelek sokasodnak. Elkövetkeznek a tettek is.

TIZENHATODIK FEJEZET.

Bernhard Riemann.

A matematika mint szellemvilág.

Az emberiség egyik legrégebbi és legnagyobb álma abba az országba vezet, ahol mindaz egészen tökéletes, aminek itt a földön csak töredékeit vagy távoli visszfényét láthatjuk. Nem kisebb ember, mint Platon adott mélységes kifejezést ideái tanában a «vágy ősmitoszának». Az ideák tanát annakidején az «eleai» bölcsesség csúcspontjának mondtuk és utaltunk arra, hogy az ideákban a lét, az örök való testestül meg, amelyhez az örökös fejlődésnek alávetett valóság fokozatosan közeledhet, de amelyet soha el nem érhet. Ebből a szempontból az ideák tana ismét valami dinamikus-prometheusi vonást kap, mert minden vágy, minden tudátszomj az ideák felé úz, akár elveszett paradicsomnak, akár pedig távoli, elérhetetlen célnak tartja is azokat.

A tizenkilencedik századnak volt egy olyan birodalom meghódítása fenntartva, amely valamelyest emlékeztet Platon ideáinak birodalmára. A matematika e szellemvilágára már utaltunk. Most azonban túlmegyünk ezeken az utalásokon és bizonyos mértékig felfedjük a képét. Közben néhány pillantást vethetünk majd ama mágikus kulisszák mögé is, amelyek mögött mindaz lejátszódik, amit matematikának nevezünk. A szellemvilágon keresztül vezető utunk közben felejtjük el, hogy lehet hűvösen, logikusan, józanul is szemlélni mindazt, ami kutatóutunk során csodának látszik. De hogy részünk lehessen ebben az élményben, ismét nagy kerülőt kell tennünk.

Az algoritmus, a notáció, a szimbolika s a különleges kalkulus lényegéről már nincs mit mondanunk, láttuk már e matematikai eszközöket évezredek fejlődésük során. Mégis

közelebből szemügyre kell vennünk az algoritmusnak egyik különleges oldalát és néhány szót kell szólnunk a számolásnak valamint a számtípusoknak tulajdonságairól.

Az algoritmusok általánosítására irányuló kísérletek közben különös és egyben meglehetősen zavaró tünetmények is mutatkoztak. Ha a természetes számok birodalmában számításokat végeztünk, akkor azonnal csalódást is érezhattünk és ez arra kényszerített, hogy túllépjük e birodalom határait. A természetes számok eredeti típusához mindig újabb és újabb számtípust kellett «adjungálnunk», magyarul: hozzáfűznünk. A litikus műveletek legkisebb általánosítása már ilyesmire kényszerített. Ha b -t kell kivonnunk a -ból, a és b természetes számok, akkor már a $b > a$ feltétel elegendő a természetes számok tartományának felrobbantására. Vagy «hamisnak» tekintjük az eredményt, Descartesig ez volt a szokás. Vagy el kell szánnunk magunkat arra, hogy bevezessük az «egészszámok» átfogóbb jellegű típusát. Ez már magában foglalja a pozitív (természetes) egész számokat és a negatív egészszámokat is. Az osztás más módon robbantja fel a természetes számok rendszerét. Az a követelés, hogy egy kisebb természetes számot egy nagyobbbal osszunk, a valódi törtek fogalmához vezet. Ezek még pozitívok és negatívok is lehetnek, ha az osztáshoz nemcsak a természetes, hanem általában az egész számokat használjuk. De ezzel már szám-tartományunkat valamennyi racionális szám tartományává bővítettük ki. E számtípus tagjai egymáshoz mindig racionális viszonyban állanak. Röviden, a racionális számok tartományában az osztás elvben mindenkor elvégezhető. A következő, magasabb litikus művelet a gyökkvonás, új problémát ad fel és új számtípust szolgáltat, amely messze túllépi az imént nagynehezen elhatárolt racionális tartomány határait. A gyökök legnagyobb része az irracionális számok birodalmához tartozik, s ezeknek kimerítő leírása statikus eszközökkel lehetetlen. Az irracionális számok megfogásához dinamikus eszközök szükségesek és legjobb esetben egy sor képzési törvényét fedezhetjük fel, amellyel egy irracionális szám valódi értékét oly mértékben megközelítjük, ahogy csak nekünk tetszik. Vagyis a hibát bármelyik kívánt határ alá csökkenthetjük. A gyakorlatban, ahol úgyis csak a megközelítés

matematikáját használjuk, ezt a lényeges megkülönböztetést sokszor érzékelni sem tudjuk és valahol abbahagyjuk a tizedesjegyek kiszámítását, akár racionális, akár irracionális számról van szó. Nem törődünk azzal, hogy a félbeszakítás elvben nem egyforma jellegű. Elméletileg azonban meg kell állapítanunk, hogy az irracionális számok bevonása műveleteink közé a számforgalom leghatalmasabb kiterjesztését jelenti. Mert bebizonyítható, hogy minden két egymáshoz végtelenül közel eső racionális szám között végtelen sok irracionális számnak kell lennie. A halmazelmélet kifejezéseivel élve, számosságuk már meg nem számlálható, transzfinit rendszámuk indexrendje mindmáig nincs meghatározva. A számfogalom e legújabb kiterjesztésével, az irracionális számok «adjunkciójával» a számtartományunkat a reális számok tartományává bővítettük ki és ebben helyet foglal valamennyi pozitív és negatív egész szám, valamennyi pozitív és negatív törtszám és valamennyi pozitív és negatív irracionális szám.

De az egyenletek algoritmusa hamarosan felfedte, hogy a gyökvonás műveletét nemcsak pozitív számokra alkalmazhatjuk. Meg kell itt még azt is jegyeznünk, hogy e problémának akkor is fel kellene merülniök, ha a műveleteket tisztán kombinatorikus úton alkalmazzuk valamennyi számtípusra. Ilyen vizsgálatnál nem csupán a negatív számok osztását kellene nagyítóüvegünk alá vennünk, hanem a belőlük vonható gyököket is. Az egyenleteket tehát nem elvi, hanem tisztára történeti szempontból említettük meg, minthogy az egyenletek megoldásával kapcsolatos gyökvonások vezettek először a «lehetetlen» vagyis «imaginárius» számokra. Mi is tudunk már egyet-mást ezekről az imaginárius számokról és a velük való bánásmódról, tudjuk, hogy az algebra alaptétele alapján véve abból következik, hogy az n -edik gyöknek éppen n különböző értéke van, és ezek részben imagináriusok, illetőleg komplexek.

Arra is utaltunk már, hogy D'Alembert, Euler és mások felfedezték azt a rendkívül fontos körülményt, hogy a komplex, vagyis az $(a+bi)$ alakú számokon végzett alapműveletek sohasem lépik túl a komplex számok tartományának határait. Ha összeadjuk, kivonjuk, szorozzuk, osztjuk, hat-

ványozzuk a komplex számokat, vagy gyököt vonunk belőlük, mindig újra komplex számot kapunk. Később azután más műveleteket is végeztek komplex számokkal. Megismerték a komplex számok logaritmusát, a szögfüggvényeket is alkalmazták a komplex számokra s eközben is mindig legfeljebb komplex számokra volt szükség, úgyhogy végül ki kellett jelenteni, hogy ezekkel elértük a számok birodalmának határát. Gauss és Cauchy már eljutottak idáig. Éppen így Grassmann és még mások is. De felvetődött az a gondolat is, hogy feltétlenül meg kell-e maradni a Gauss által elképzelt komplex számsíkon vagy pedig megvan-e a lehetőség a térre kiterjeszkedve az $a+bi+cj$ alakú hiperkomplex-számok részére. Az idevágó vizsgálatok hamarosan kimutatták, hogy a háromtagú hiperkomplex számok aszimmetriájuk következtében csak nehezen és körülményesen kezelhetők és semmiféle előnyük sincs. Ezért szánta el magát — mondjuk el előre — Sir William Rowan Hamilton, a tizenkilencedik század egyik legnagyobb, de legmakacsabb szelleme arra, hogy bevezesse a matematikába a quaterniókat, az $a+bi+cj+dk$ alakú számokat. Ezekről később lesz szó.

Már e fejezet elején is utaltunk arra, hogy e közben fejlődéstörténeti és fejlődépszichológiai szempontból rendkívül érdekes helyzet következett be. Gauss és Cauchy bizonyos fokig itt is vezetészerepet játszott. Mert amint a konkvisztádorok távoli, újonnan meghódított területekről visszanézve hazájukat új megvilágításban kezdik látni és az új ország kincsei alapján az «óvilág» sok berendezkedésében egy még régebbi világ elmorzsolódott és tökéletlen maradványait fedezik fel, úgy néztek vissza a komplex szellemvilág konkvisztádorai mindarra, ami a számoknak Dorádója alatt maradt. S közben kiderült, hogy a reális számok birodalma gyakran csakugyan nem több, mint csökevényes maradványa egy eredeti, tökéletesebb, szimmetrikusabb világnak. Ezt a régebbi világot itt a szellemvilágban szinte a kezünkkel is elérhetjük, mintha csak a matematika platonai ideáinak birodalmában volnánk. És mikor azután az is kiderült, hogy az ősi mintáképek viselkedéséből egy eddig hozzáférhetetlen módon következtethetünk az alsóbb világ számainak viselkedésére, sőt viszonylagos könnyűséggel kimutathatóvá vált

az is, hogy még nagy matematikusok is miért halmoztak hibát-hibára, akkor ezzel további emelkedés hatalmas kapuja nyílt meg. Formák új világához vezetett ez a kapu és olyan sokoldalú és oly jelentőségteljes lett ez a világ, hogy a tizenkilencedik század végének egyik nagy matematikusa ezt a számot röviden a «függvénytan századának» nevezte.

Kimondtuk azt a szót, amelynek tartalmához eddig csak lassan igyekeztünk közeledni. Itt ugyanis ismét arra kényszerülünk, hogy közvetett leírással nyujtsunk valamelyes betekintést a matematika legkevésbé hozzáférhető és legkevésbé népszerű területére: a «komplex változók» elméletébe, vagyis a szűkebb értelemben vett «függvényelméletbe».

«Függvényelméleten» általában a matematikának igen nagy részét kellene értenünk, mert ugyan mit nem tekinthetünk végeredményben függvénynek? Már a tizenkilencedik század elején elhagyták a függvényfogalom klasszikus értelmezését és annyira kibővítették, hogy ez az általánosítás majdnem egyértelmű volt egy megváltoztatással. Dirichlet ugyanis úgy változtatta meg a függvényfogalom értelmét, hogy egy reális x változónak egy a , b tartományban vagy intervallumban vett függvénye alatt azon y mennyiséget kell értenünk, amelynek az x minden e tartományhoz tartozó értékéhez csak egyetlen, meghatározott értéke tartozik, és ezt az értéket az x teljesen meghatározza vagy általa megtalálható; és az közömbös, hogy számítással, geometriai szerkesztéssel megfigyeléssel vagy más eszközökkel. Így például egy tizedestört, amelynek jegyeit kockadobások útján kapjuk meg, függvénye a dobások x számának, stb. A legáltalánosabb értelemben vett függvénytantannak tehát a függvényeknek e szinte határtalan sokaságában kellene rendet teremtenie, osztályoznia kellene őket, tulajdonságaikat kellene kikutatnia, kalkulusukat megvizsgálnia stb. De a függvényfogalom ilyen általánosítása következtében a függvényfogalom definícióját a szűkebb értelemben vett függvényelméletben is olyan mértékben ki kellett terjesztenie, hogy e birodalomban — mint ezt például Knopp¹ is mondja — általános érvényű törvényekkel és tételekkel uralkodni már nem lehet.

¹ «Funktionentheorie» (Götschen kiadás).

Knopp így folytatja: «Az tehát a feladatunk, hogy a feltételeket, megfelelően választott módon, úgy szűkítsük meg, hogy a függvények összességéből egy különlegesebb, azonban sokkal értékesebb függvényosztály váljék ki, értékesebb, matematikai és természettudományi használhatóságukat tekintve. E szűkítő követelmények a folytonosság és differenciálhatóság követelményei lesznek.»

Szándékosan idézzük e mondatokat egy egészen újkeletű tankönyvből, mert megmutatják, hogy a kutatók álláspontja a függvényelméletben annak felfedezése óta alig változott. Folytonosság és differenciálhatóság «értékes» tulajdonságok, mert csak az ilyen függvények hozzáférhetők az infinitézimális számítást alkalmazó matematika számára. Mert ez a lényeges, bár nagyon mélyenjárók és bonyolultak azok az eszközök, amelyek ehhez a meggyőződéshez vezetnek, mielőst csak kis mértékben is nem-elemi függvényekről van szó. Az infinitézimális vizsgálat bővelkedik rejtett nehézségekben és szakadékokban, lépten-nyomon készen kell állnunk függvények különleges viselkedésére és egy függvény kimerítő ismerete általában csak akkor lehetséges, ha komplex, ősi vagy ideális állapotában vizsgáltuk meg. Írjunk ide Wieleitner¹ nyomán egy egyszerű példát, amely az exponenciális, illetve logaritmusfüggvényre vonatkozik. Euler 1748-ban fedezte fel a következő összefüggést: $e^{ia} = \cos a + i \sin a$. Ismeretes, hogy $\sin a = 0$, ha $a = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots \pm n\pi$, és $\cos a = 1$, ha a a π -nek páros számú többszöröse. Itt a π a 180° ívmértékét jelenti, amint az az analízisben általában szokásos. Ezek szerint $e^{2n\pi i} = 1$, mivel ha $a = 2n\pi$ akkor $\sin a = 0$ és $\cos a = 1$. Legyen adva az e valamilyen hatványa, mondjuk e^m akkor helyette bármikor az $e^{m+2\pi i}$, $e^{m+4\pi i}$, általában $e^{m+2n\pi i}$ értékeket írhatjuk, mert ettől nem változik. Mert $e^{m+2n\pi i} = e^m$. $e^{2n\pi i}$ és mint már láttuk, $e^{2n\pi i} = 1$. Ha fenti «hatványt» exponenciális függvénynek tekintjük, tehát a kitevőt tekintjük változóznak, akkor kiderül, hogy az exponenciális függvény komplex tartományban végtelen sokértelmű. Ha azonban most az $e^m = a$ exponenciális egyenlet logaritmusát

¹ «Der Gegenstand der Mathematik im Lichte Ihrer Entwicklung» (Mathematisch-physikalische Bibliothek).

vesszük, akkor fentiek alapján és a logaritmus lényegéből következően nem csupán az $\log a = n$ megoldást kapjuk, hanem éppen olyan joggal az $\log a = m + 2m\pi i$ megoldást is és itt n valamely 0 és $\pm \infty$ között fekvő egész számot jelent. A szellemvilágban tehát minden a számhoz végtelen sok logaritmus tartozik, noha ezek között csak az az egyetlen reális, amelyet mi, közönséges halandók «a logaritmusnak» nevezünk.

De a komplex területekre átmenve, a sorok elméletében is hasonló kiterjeszkedésekre bukkanunk. Az általunk ismert

sorok, mint például az $1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots$ típusú fogyó

geometriai sorok kizárólag a számvonalon mozognak, geometriai ábrázolásuk ezen történik. Ezen a vonalon van a határértékük, a konvergenciapontjuk. Ez utóbbi például az

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ sor számára a számegyenes 2 pontja.

A konvergens komplex sorok egész másképpen viselkednek. Komplex számok különleges sajátságának megfelelően az ilyen sorok szétterülnek a számsíkon és a konvergenciapontból ennek megfelelően konvergenciakör lesz. Kissé sántító hasonlattal azt mondhatnók, hogy a komplex számsíkot két szilárd töltésen futó, egymást keresztező úthoz hasonlítjuk. Ha megmaradunk a reális vagy tiszta képzetes számok birodalmában, akkor minden számítási folyamat ezeken a szilárd utakon játszódik le. De ha a két számfajta keverékével van dolgunk, vagyis komplex számokkal, akkor a komplex számsík minden irányban süppedő ingoványába jutunk és ez kvadránszerűen terül el a kereszteződő utak közt.

Már ismételten említettük, hogy nincs módunk itt olyan tárgyat előadni, amelynek lelkiismeretes ismertetéséhez egész kötet kellene, még akkor is, ha csak legfontosabb részeire térünk ki. Ismét arra kell szorítkoznunk, hogy «pedagógiai szubsztitúció» segítségével néhány példát mutassunk be, amelyek felsőbb régiókba visszatranszformálva mutatják csak tárgyunk igazi nehézségeit. Hallottuk már, hogy folytonosság és differenciálhatóság egy függvényosztály jellemző és fontos sajátságai. Ezzel az osztállyal van az «életben»

többszörféle dolgunk. «Életben» itt fizikát, technikát, geodéziát, csillagászatot, meteorológiát stb. kell értenünk. Az infinitézimális számítás tudományának kezdetén e két tulajdonságot a függvény lényegéből következő ismertetőjelnek tartották, de legalább is határozott volt az a meggyőződés, hogy ez nem két különálló tulajdonság. Ha tudták, hogy egy függvény folytonos, akkor differenciálhatónak tekintették, ha differenciálható volt, folytonosnak. De ha megvolt akár az egyik, akár a másik tulajdonsága, akkor képgörbéjének feltétlenül volt érintője, mert a differenciálhányados nem egyéb, mint az érintővel összefüggő projekciók bizonyos matematikai kifejezése. Annál nagyobb volt a csodálkozás, amidőn Weierstrass véget vetett e szép álomnak. Mert a Riemann és Weierstrass által megállapított függvénytan nemcsak fenti tulajdonságokra vetett új fényt, hanem azt is bebizonyította, hogy folytonosság és differenciálhatóság két egymástól független tulajdonság. Vannak tehát olyan függvények, amelyek folytonosak és mégis differenciálhányadosuk, tehát nincsen érintőjük.¹ Geometriai szempontból alig elképzelhető dolog ez. Ma már azt is tudjuk, hogy a folytonos és differenciálható függvények csak kis szigetét jelentik az e tulajdonsággal nem rendelkező függvények óceánjának. Meg kell jegyeznünk, hogy logikai szempontból ez a körülmény nem annyira a függvényfogalom lényegének eredeti meghatározásából, mint inkább annak kiterjesztéséből következik és hogy itt magasabb szempontból álokoskodásról van szó. De ezt nem írhatjuk a matematika terhére, mert csak a függvény fogalmának ilyen kiterjesztése tette lehetővé, hogy a régi értelemben vett függvény fogalmát teljesen elhatároljuk és biztosítsuk és még a szükséges, úgyszólván klasszikus függvények birodalmában is találjunk olyan dolgokat, és abnormitásokat, amelyeknek mélyebb összefüggései csak a komplex függvényekre kiterjesztett birodalomban találhatók meg.

De példákat ígértünk, hogy legalább fogalmat adjunk azokról a mélységekről, amelyekről e fejezetben szó van. Ha

¹ Látni fogjuk, hogy vannak olyan helyek is, ahol van differenciálhányados és még sincs érintő.

például az $y=x^{\frac{1}{3}}$ függvényt kellene vizsgálnunk, akkor rögtön be kell látnunk, hogy ez $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig terjedő tartományban folytonos. E függvény differenciálhányadosa $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

ha y kisebb vagy nagyobb, mint 0. Ha $x=0$, akkor a differenciálhányados $y'=\infty$. Függvényünknek tehát van differenciálhányadosa, ez azonban egy bizonyos meghatározott helyen nem véges. Bonyolultabb a helyzet, ha az úgynevezett

Neil-féle parabolát, $y=x^{\frac{2}{3}}$ vizsgáljuk, ez $-\infty$ és $+\infty$ közt szintén folytonos. E görbének ugyanis az $x=0$ helyen van úgynevezett elülső vagy jobboldali differenciálhányadosa, ennek értéke $+\infty$, és van hátsó vagy baloldali differenciálhányadosa, ennek értéke viszont $-\infty$. Ezen a helyen tehát, noha folytonos a függvény, nincs érintője. Ugyanez a helyzet az $y=|x|$ függvényeknél is, amelynek az $x=0$ helyen a jobboldali differenciálhányadosa $+1$, a baloldali viszont -1 , tehát ismét nincs érintő, noha a függvény folytonos és differenciálható. Vannak azonban, mint már mondtuk, mindenütt folytonos, viszont sehol sem differenciálható függvények is, de nincs módunk ezekkel itt foglalkozni. De befejezésül még egy kis példa: A komplex mennyiségek be-

vezetéséig joggal hitték, hogy az $y=\frac{1}{1+x^2}$ függvény folytonos. Közelebbi vizsgálatnál azonban rögtön kiderült, hogy e függvénynek az $x=\pm i$ értéknél két szakadása van és a függvény értéke itt a végtelenben növekszik, mivel $\frac{1}{1+i^2}=\frac{1}{1+\sqrt{(-1)^2}}\sqrt{-1^2}=\frac{1}{1-1}=\infty$, $x=-i$ esetén ugyanez a helyzet.

Világos az is, hogy ezeknek és hasonló messzebbmenő vizsgálatoknak rendkívüli a jelentőségük az integrálok szempontjából is. Az is világos továbbá, hogy e jelentőségük megmarad egy olyan területen is, amely az integrálszámítás legfőbb alkalmazása: a differenciálegyenletek elméletében. Olyan egyenletet nevezünk differenciálegyenletnek, amelyben nemcsak a változók, mondjuk x és y fordulnak elő, hanem differenciálhányadosok is, pl.: y' és y'' stb. Az elméleti fizika

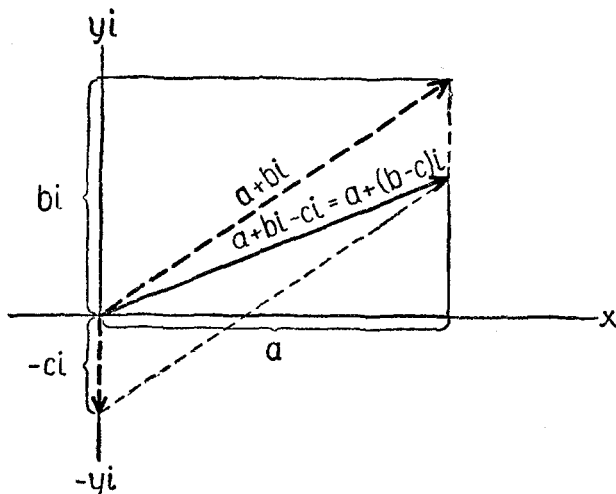
minden részén találkozunk ilyen egyenletekkel. Természeti jelenségek leírására szolgálnak, mivel differenciálegyenletek segítségével egész tartományok viszonyait tudjuk rögzíteni. Ilyen egyenletek megoldásában az utolsó lépés esetleg az ismételten átalakított egyenlet mindkét oldalának integrálása. Ezzel a differenciálegyenletet közönséges többváltozós függvényre vezettük vissza. Mi játssza e problémákban, amelyekhez sokszor még súlyosbításként a parciális differenciálhányadosok szereplése is járul, a főszerepet? A függvény, a differenciálás és az integrálás. Hogyan tudom ezeket a területeket kellőképpen megközelíteni? Ismét csak a függvényekkel kapcsolatos lehetőségek kimerítő ismeretével.

Azt hisszük, hogy már sejti az olvasó, hogy mi is lényegében a függvénytan célja és meggyőződött arról, hogy halálos komoly dolgokról van benne szó és nem matematikus akrobaták mutatványairól. De nem fejezzük be ezt a fejezetet, amíg nem nyitottunk kaput egy nagyszabású kilátás felé oly vidéken, amely szoros kaocsolatban van a mai dinamikus fizikával. De egyúttal elkezdjük leírásunk életrajzi részét is és néhány szót szólunk Sir William Rowan Hamilton-ról, aki 1805-ben, Dublin városában született. Már mondtuk róla, hogy makacs természetű lángész volt. Pedig majdnem több volt. Egyike volt tudományunk, helyesebben nagy művészetünk isteni megszállottjainak. Hamilton tízéves korában már kívülről tudta Homerost és ezután arabul és szanszkritül kezdett tanulni. Néhány évvel később már tizenhárom nyelvet tudott. Költött is és jó barátja volt Wordsworth. Huszonhárom éves korában a Dublin mellett fekvő Dulsing csillagvizsgáló megtisztelő igazgatói állását tölti be, címe «Royal Astronomer of Ireland» s ebben az állásában haláláig (1865) megmarad. Egész életében nem lett hűtlen a költészethez sem. De sajnos, az alkoholhoz sem, amelyet annyira kedvelt, hogy állítólag egy éjjel kötéllel kellett a távesőhöz kötni, hogy le ne zuhanjon. A matematika, a filozófia, költészet és alkohol mámorea következtében végül elborult elméje, úgy-hogy élte utolsó éveiben különös vagy talán teljesen abnormális volt. Természetesen nem akarjuk az ő életét érvként felhozni, csupán megállapítjuk, hogy dionysiosi módon élt, alkotott és halt meg. Mert szándékai még sokkal hatalma-

sabbak voltak, mint óriási tettei, úgyhogy ő a matematika szellemvilágának legnagyobb prófétái közé tartozik.

Hamilton első, «konjugált függvényekről» szóló műve 1835-ben jelent meg. Filozófiai szempontból ebben Kant nyomán igyekezett haladni és a számfogalmat az idő szemléletmódjából akarja levezetni. Ezt fejezi ki a következő mondata is: «A térbeli mennyiség fogalma csak a különbség kérdésével jut be képzeletünkbe, ezzel vált lehetségessé a mérés művelete.» A közönséges komplex számokat ebben az értekezésében számpároknak tekinti. Ez az értelmezésük azóta sem merült feledésbe, mert analitikus tárgyalásukat nagy mértékben megkönnyíti.

Fizikai témákra kell áttérnünk, hogy legalább valamit mondhassunk azokról a «quaterniókról», amelyek Hamilton



12. ábra.

közléseiből (1853-ban és 1866-ban) jutottak be a matematikai köztudatba. Leibnizről szóló fejezetünkben említettük, hogy Varignon fedezte fel az erőparallelogramma-tételt. E tétel teszi lehetővé két erőkomponens eredőjének meghatározását,

illetve valamely erőnek a két komponensre bontását. Ha most a komplex számot nem a szokott módon ábrázoljuk, hanem sarkkoordináták segítségével, akkor minden komplex szám helyett egy úgynevezett vektort kapunk. A vektor olyan irányított egyenesdarab, amelynek hosszából, irányából és az abszcisszatengellyel bezárt szögéből a komplex szám minden meghatározó adatát leolvassuk. Ha két ilyen vektort összeadunk, akkor a keletkező rajz teljesen megfelel az erő paralelogramma képének. Komplex számmal végzett művelet tehát dinamikus folyamatoknak pontos képe és komplex műveletek eredménye bizonyos körülmények között azonos mechanikai vizsgálatok és átalakítások eredményével. Matematikai fogalmazásban az $(x+iy)+(a+ib) = (x+a)+i(y+b)$ összeadás a síknak $(a+ib)$ darabbal való, párhuzamos eltolását jelenti. Az $(x+iy) \cdot (a+ib) = (x+iy)\rho e^{i\varphi}$ szorzás a síknak φ szöggel való forgását jelenti, a koordináták kezdőpontja körül, miközben minden távolság az $1:\rho$ arányban megnyúlik. Ez tehát egy hasonlóságot megtartó transzformáció és egyben forgás, vagy röviden egy úgynevezett forgónyújtás.

Az úgynevezett «vektoranalízis», vagyis az ilyen irányított távolságokkal való számolás időközben a matematikának és fizikának hatalmas működési területévé fejlődött, mivel az ilyen tárgyalási móddal a legtöbb mechanikai és egyéb természeti jelenséget hihetetlen mértékben, közvetlenül és egyszerűen lehet matematikailag leírni. Hamilton maga vezette be a vektorfogalmat a matematikába egy 1845-ben, a Quarterly Journalban megjelent értekezésében. Később minden komplex mennyiséget a tisztán számszerű skaláris és az irányított vektoriális részre bontott. E megkülönböztetésnek érthető módon igen nagy a jelentősége minden vektorokkal való számításban, minthogy a mennyiség skaláris részére más számológási szabályok érvényesek, mint a vektoriális részre.

A sokszor említett quaterniók $t+ix+jy+kz$ alakú hiperkomplex számok, ezekben t a skaláris és $ix+jy+kz$ a vektoriális rész. Elsősorban mozgások (forgónyújtások és még több más) térbeli leírására szolgálnak és meghatározásukhoz négy koordinátára van szükségünk. A quaterniókkal való számolás szabályai igen bonyolultak és csak annyit

említünk meg, hogy szorzásuk nem kommutatív művelet, tehát két quaternion szorzatának, a tényezők sorrendjének megfelelően, két különböző értéke van. Felix Klein, akinek eddig is sok adatot köszönhetünk «Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX. Jahrhundert» című művében körülbelül azt mondja, hogy a quaterniók akkora feltűnést keltettek Angliában, hogy Dublin iskoláiban egészen Credoszerű jelentőségük volt. Kezelési módjuk olyan elegáns, a fizika bizonyos problémáira olyan szimmetrikus módon alkalmazhatók, hogy ennek a módszer bizonyos túlbecsülésére kellett vezetnie. Így megalakult Angliában 1895-ben a «Világszövetség a quaterniók fejlesztésére» és ez kutatási céljaként a «quaterniók függvényelméletet» tűzte ki. Ettől a matematikában forradalmi eredményeket vártak, sőt bizonyos szempontokból világrejtélyek megoldódását. E vizsgálatok végre arra vezettek, hogy van egy olyan quaterniók algebra, amelyben az algebra alaptétele nem érvényes és amelyben van egy harmadfokú egyenlet, amelynek minden létező quaternion megoldása.

Ma még nem derült ki, hogy hova vezet a matematikának ez az útja. Hamilton quaternióinak látható sikere alkalmazásuk Einstein relativitáselméletében, mert ezeknek köszönheti ez az elmélet bizonyos értelemben lekerekített megjelenési formáját.

Meg kell tehát állapítanunk, hogy a matematika szellemvilága több, különféle módon ragadta magához az uralmat más matematikai és matematikai-fizikai tartományok felett és ősképek világaként, valamint vektorok világaként hozzájárul a függvényelmélet és a vektoranalízis megalapításához. De a legújabb időkben a halmazelmélet és a csoportelmélet a függvényelmélettel és a vektoranalízissel talált kapcsolatot, úgyhogy valóban egy óriási matematikai világ van keletkezőfélben. Ennek kisegítő területei még a többdimenziós, nem-euklidesi és projektív geometriák, de ezek is számos kapcsolatban vannak egymással.

De legfőbb ideje lassanként, hogy megemlékezzünk azokról a férfiakról, akik a komplex változók elméletének, tehát a szűkebb értelemben vett függvénytanak alapjait lerakták. Ezek Bernhard Riemann és Carol Weierstrass, akiket Felix

Klein, ő maga is elsőrendű matematikus, a következőképpen jellemez: «Riemann ragyogó intuíciójú férfi. Széleskörű lángesze minden kortársán felülemeli. Ha valami felkelti érdeklődését, akkor az alapokból indul ki, nem zavarják őt a hagyományok és nem ismeri el a rendszerekből adódó követelményeket. Weierstrass elsősorban logikus elme; lassan, rendszeresen, lépésről-lépésre halad. Ha valamihez hozzáfog akkor lezárt eredményre törekszik.» Csak annyit fűzünk még hozzá, hogy a két német úttörőnek, akiknek a világ a tizenkilencedik század leghatalmasabb matematikai haladását köszönheti, élete is hajlamaiknak megfelelően alakult. Vagy pedig hajlamuk életpályájuk képe volt.

Riemann atyja, akárcsak Abelé, vidéki lelkész volt. Ő maga 1826-ban született. Az isteni gondviselés, amelyben jámboran hitt, nem egész negyven földi évet adott neki, s ez a negyven év is alig elképzelhető szenvedések sorozata volt. Először anyját veszti el, 1855-ben atyját és nővérét, 1857-ben bátyját, 1864-ben másik nővérét: ez a sorsa egy epilepsziás családnak és ez a sors hamarosan őt is megragadja. 1862-ben megnősül. Alig egy hónapra az esküvője után már mellhártyagyulladás veri le lábáról, és ez már a vég kezdete. Megéli még gyermeke születésének örömét, a gyermek 1863-ban Pisa városában látta meg a napvilágot. Elténnek három utolsó éve zűrzavaros álmhoz hasonló. E három év nagy részét Olaszországban tölti, de 1865-ben visszamenekül munkája helyére, Göttingenbe és megkísérli, hogy egy tél munkájával mentse azt, ami még menthető. Nyár elején hirtelen úgy érzi, hogy mindennek vége. Mégegyszer fellángol élet akarata s Olaszországba akar eljutni. Ekkor az Ausztriával vívott háború zárja el útját. Kasselban felszedték a síneket. Mégis délre akar jutni. Lovaskocsival, gyalog. Június 28-án végre megérkezik a Lago Maggiore mellé és július 20-án mint egy szent hal meg Selascaban az Intra mellett, a Villa Pisoni kertjében. Utolsó napjáig dolgozott. A rendelkezésére álló tizenöt évet végtelenségig kihasználta hatalmas gondolatainak felépítésére.

Ahová csak nyúl, sosem látott fényben csillan fel a matematikai kozmosz. 1854-ben íródott habilitációs irata «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen», érett

tudásának klasszikus terméke, amelynek még a halálhoz közelálló Gaussra is mély hatása volt. De már 1851-ben benyújtotta doktori értekezésésként: «Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Grösse», és ez az értekezés semmiféle visszhangot sem keltett, noha mindaz benne van, ami a modern matematika haladását megalapozza. Riemannnak az volt a sorsa, hogy elhanyagolják, noha a hivatalos pályafutásában egyáltalán nem maradt el, hisz aránylag fiatalon már professzorrá nevezték ki. Csendes, ezoterikus, mély módszerének a következménye az, hogy a kilencvenes évek lexikonaiban még hiába keressük nevét. Nagyon megrendítő ez a körülmény. De ennek végső oka annyira az általa tárgyalt és kikutatott anyagban rejlik, hogy tetteit még csak félig-meddig népszerűen sem tudjuk leírni. Azzal kell megelégednünk, hogy megemlítsük a «Riemann-féle felületet». Ez a matematika egyik legkiválóbb felfedezése, amely lehetővé teszi igen bonyolult függvények ábrázolását is és ezáltal olyasmit tesz megfoghatóvá, ami nélküle örökké tiszta absztrakció maradt volna.

Weierstrassal kapcsolatban sem sokkal jobb a helyzetünk, noha e férfinak megadatott, hogy gondolatait hosszú évek folyamán megérlelje. 1815-ben született Münster vidékén-Ostenfeldeben. Eleinte Bonnban jogászkodott. Élete mozgalmas volt, bár sokszor szegényes, 1842-től 1848-ig a nyugat poroszországi Deutsch-Crone gimnáziumában tanár, 1848-tól 1851-ig a keletporoszországi Braunsbergben levő Collegium Hosaeum tanára. 1854-ben nyeri el Königsbergben a tiszteletbeli doktori címet és 1856-ban a matematika professzorának hívják meg Berlinbe. Ott ad elő majd harminc évig egyre növekvő hallgatóságnak és 1897-ben hal meg. Az volt a szokása, hogy alig adott ki valamit nyomtatásban, megkövetelte, hogy előadásait jegyezzék és még a jegyzetek sokszorosítását sem engedte meg.

Mint már említettük, Weierstrassnak köszönhetjük a függvényelmélet kerek lezártságát és azt az ismeretet, hogy a folytonos és differenciálható függvények csoportja csak kis sziget a függvények óceánjában. Ezenkívül a hatványsorokat vizsgálta és ezeket függvényekké alakította át.

Nem akarjuk ezt a fejezetet lezárni addig, amíg nem utal-

tunk volna arra, hogy mivel is foglalkozik hozzávetőlegesen a sokszor emlegetett függvényelmélet. E célból átlapozunk egy modern, függvényelméletről írt könyvet és megállapítjuk, hogy alapfogalomként a sík pontjaira vonatkozó halmazelméleti vizsgálatok és egy komplex változó függvényeire vonatkozó definíció, valamint a folytonosságra és differenciálhatóságra vonatkozó vizsgálatok szerepelnek benne. Ezt követik az úgynevezett integráltételek, ezek között fontos helyet foglal el Cauchy egyik tétele; ezt a konvergencia-vizsgálatok követik, valamint analitikus függvények hatványsorba való fejtésének vizsgálata, majd transzcendens függvények és úgynevezett szinguláris helyek vizsgálata következik. Meg kell itt jegyeznünk, hogy analitikus függvények végtelenben való viselkedésének vizsgálata a szinguláris helyek vizsgálatának körébe vág. Ezek teszik az elmélet általános alapjait. Különleges elmélet foglalkozik most az egyértelmű függvényekkel, idetartoznak a periodikus függvények, és a többértelmű függvényekkel, amelyeket mint gyököket és mint logaritmusokat már megismertünk. Ez utóbbi függvényeket a Riemann-féle felületen is ábrázolják.

Természetesen egy ilyen kis lapozgatásnak nincs több jelentősége, mint valamelyes biztatásnak vagy utalásnak a függvényelmélet gyakorlati jelentőségére. Azonban e bonyolult függvények fizikai jelentősége alkalmazásaik következtében igen nagy. De elemi ismertetésük és megtanulásuk olyan nehézségeket okoz, hogy ali van egyelőre remény ezoterikus jellegük megváltozására.

Lezárjuk tehát ezt a fejezetet a nélkül, hogy mélyebb behatolást mernénk megkísérelni. Ismét hangsúlyozzuk csupán, hogy ma a «matematikai szellemvilág» uralkodik a matematika alacsonyabb tájain és teljesen lezárja a számok világát. Ebből természetesen nem szabad arra következtetnünk, hogy ezen a téren új felfedezések lehetetlenek. Hisz tudjuk maguk a komplex számok voltak azok, amelyeknek évezredek keresztül kijárt a «lehetetlen», «impossibilis» jelző.

TIZENHETEDIK FEJEZET.

David Hilbert.

Matematika és logika.

Megkíséreltük, hogy a matematika legutóbbi évszázadban történt fejlődésére néhány fénysugarat vessünk. E közben a lángeszű felfedezések tömegéből néhányat ki tudtunk emelni. Ezeket a történész iskolázott szeme korszakalkotónak vagy korszakok kezdetének látta. Mégis azon fogunk most igyekezni, hogy még magasabb álláspontot foglaljunk el azáltal, hogy a már eddig hallottakat egyszerűsítjük. Valamely tárgy átvizsgálásának belső törvénye ugyanis, hogy először a különlegességek, a különbségek, az eltérések uralkodnak, mivel általában a részleteken keresztül jutunk magukhoz tárgyainkhoz. Csak lassan és nagy fáradtság árán lesznek a mélyebb összefüggések láthatók, eltűnnek a különbségek és a csúcson tiszta és világos kilátás tárul elénk.

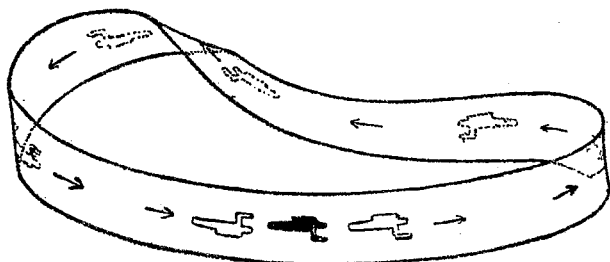
A «részletek összevonásának törvénye», ezt a nevet adhatnók neki, seholsem működik olyan hatásosan, mint egy fejlődő tudományban. Ezer helyen fejlesztik a részleteket, kísérnelnek meg új utakat, új áttöréseket. Ily áttörésnél valaki új forrásra, új telérre bukkan. Vajjon összefüggnek ezek a szomszéd völgyben felfedezett erekkel? Milyen vízrendszerhez tartozik a forrás? Hova folyik a patak? Rövidebb utat találtunk Indiába vagy egy új Amerikát fedeztünk fel? Sem a forrás, sem a telér, sem a világrész nem ad ilyen kérdésekre feleletet. Sokszor évszázadokba telik, míg minden összefüggést megismerünk. Sokszor halálos bűnnek tartják a kutatást, mint például az irracionális számok esetén, míg végül évezredek múlva kijelenthetővé válik, hogy

az irracionális szám fogalma nélkül a folytonosság értelmetlen és a számsík az irracionális számok nélkül legjobb esetben pontrács maradna.

Nemcsak a föld, hanem a szellemi kozmosz is valahogyan körben forog. Lehet, hogy spirálison mozog, amely, a szerint, hogyan nézzük, a középpontot, mindenagjobb ívekben kerüli meg, vagy mind szorosabban öleli körül s aligha van matematikus, aki a kétségbeesés óráiban ne tenné fel magának a bús kérdést, hogy vajjon a matematika világa nem hasonló-e egy óriási szappanbuborékhoz. Biztos, gyakran kidüllesztí mellét a matematikus, rámutat a hatalmas eredményekre, amelyek az ember karját a legtávolabbi spirálködökhöz nyújtották meg és amelyek az embernek a varázsló s próféta hatalmát adják meg. De vajjon csakugyan ilyen hosszú lett az ember karja? Nem szörnyű önámítás az egész? Minek foglalkozunk a komplex változók elméletével, ha már egy görcsös felszínű tölgyfa köbtartamának meghatározása is szinte lehetetlen matematikai eszközökkel?

El kell ismernünk, hogy alaptalan az érzelmek ilyen káosza. De a dolog megint egyszer nem egyszerű. Mert ha egy polgárember órájára néz, ezután bekapcsolja rádiókészülékét, hogy a sportjelentésből automobil- és repülővilágrekordokat hallva, örvendezhessen, akkor szubjektív szempontból becsületesen jelentheti ki, hogy ő matematika nélkül jutott ebbe a kedvező helyzetbe és számára a felsőbb matematika csak humbug. Igaz, arról a csekélyiségről megfeledkezik közben, hogy mások matematika segítségével teremtték meg számára ezt a «jólétet». Kezdve az órán, amelyre ránézett. Ilyen értelmetlenséggel nem vitázunk tovább, csak arra gondolunk, hogy nagy matematikusok elméjében is felmerülhet néha az egyszerű embernek egy-egy ilyen gondolata. Vajudnak a hegyek és egy kis egér születik. Ilyennek látják a kutatók is sokszor az egész fáradozásukat és a kételkedés ilyen időszakából származhatik Brunschwiecknak, a kiváló francia matematikusnak a felkiáltása: «Ünnepi pillanat számomra, ha matematikának két területe egymással kapcsolatba kerül». Mert akkor, fűzzük mi hozzá, remélhető, hogy megint megbomlott a zavar csomójának egyik része.

Olvasóink panaszkodhatnak, ha nem matematikusok, hogy az utolsó fejezetekben mind bonyolultabbá váló matematikai szenzációkkal egészen elborítottuk őket. Nagy tévedés! Szinte atyai érzéssel tartottuk tőlük távol, amennyire lehetett, a részletek ijedelmeit, csupán a csúcsokról vetettünk széles országokra egy-egy pillantást, országokra, amelyek e csúcsokról nézve békésen pihennek a napfényben. Ha belépünk ezekbe az országokba, ott rögtön hatalmas zaj, tolongás, felkelés, vad kiáltozás fogad. Az utcák, amelyekbe menekülni akarunk, mind járhatatlanabbak és kanyargósabbak, mint a krétai labirintus útjai. Sok mindent elhallgattunk. Semmit sem mondtunk a magasabbrendű felületekről, hallgattunk a



13. ábra.

nem irányítható terekről, amelyekben a világot megkerülve a jobboldalon találnánk szívünket, míg az indulásnál helybenmaradt barátunk szíve a helyén, a baloldalon maradt volna meg. Ilyen különleges tér legegyszerűbb példája az ismert Möbius-féle szalag. Ezt egy darabka papírból könnyen össze-ragaszthatjuk és rajta egyetlen folytonos ceruzavonással mindkét oldalán nyomot hagyhatunk. Ezt ábrázolja képünk is, megmutatja, hogy a világ megkerülése közben a jobb- és baloldal felcserélődik. Egy úgynevezett Beltrami-féle felületlakó meg sem értené ezt, mert neki nincs fogalma a harmadik dimenzióról.

Arról a nagy izgalomról sem számoltunk még be, amelyek a geometriai felfedezésekből eredtek. Így például a spektrum- és protuberancia-vizsgálatairól híres Zöller asztrofizikus

véletlenül meghallotta Felix Kleintől, hogy az R_3 -ban a csomók a topológia vizsgálati körébe tartoznak, tehát lényegüknél fogva érzéketlenek a torzítások iránt. Az R_4 -ben viszont az ilyen csomó pusztán torzítás segítségével kibontható. Klein nagyon csodálkozott azon, hogy milyen örömmel fogadta Zöller ezt a közlést. De egészen kétségbeesett, amikor meghallotta, hogy Zöller ezután a hírhedt és később leleplezett Slade nevű amerikai médiummal és okkultistával társult, hogy csomók felbontása révén bebizonyítsa a negyedik dimenzió valós létét. Slade bűvészfogásai következtében sikerre vezettek a kísérletek, noha lepecsételték a csomókat és egyéb óvintézkedéseket is tettek. Ezekután Zöller már nem ismert korlátokat. Lázas munkálkodásba fogott, élete utolsó éveiben naponta legalább egy ívre való értekezést nyomtatott ki és a sok izgalom következtében 1882-ben, nem egészen ötvenéves korában gutaütésben halt meg.

De még sok más dologról is hallgattunk. Így elsősorban a ma már rendkívül fejlett valószínűségszámításról, amely győzedelmesen vonult be egyre újabb és újabb tudományágakba és megkezdte a «törvények» uralma alatt álló klasszikus világképeknek «statisztikus» világképpé való átalakítását. Ebben már nincsen bizonyosság, csak különböző fokú valószínűség. Azt sem említettük, hogy Hamilton, Cayley és más matematikusok az algebrát olyan szimbolumkalkulussal bővítették ki, amely általánosságában és kikutatatlanságában minden eddigit felülmúl; nem vethettünk világot a kombinatorikára sem, amely pedig némely matematikus számára a kutatásban egyenesen alapvető jelentőségre tett szert. Hallgattunk teljesen a számelmélet legfelsőbb részéről, amelyről még némi matematikai képzettséggel rendelkezők sem tudnak maguknak képet alkotni.

De még ez sem elég. Van még valami sokkal zavarosabb is a mai matematikában, amiről jobb volna, ha a laikusok nem is hallanának. Megesett, hogy az angol «quaternionisták» a tizenkilencedik század egyik legnagyobb-geometeréről, a függvénytan egyik legnagyobb tudósáról, Felix Kleinről, egyik quaterniókról szóló munkája alapján kijelentették, hogy azok egyáltalán nem quaterniók, amikről ő beszélt. A kiváló matematikusról és a számelmélet nagy tudósáról,

Kroneckerről pedig Henry Poincaré jelentette ki, hogy semmi geniálisat sem alkotott volna, ha nem feledkezik meg néha kutatásainak filozófiai alapelveiről. Riemann és Weierstrass sem jártak sokkal jobban és nem vitatható, hogy vannak olyan területek, amelyeken nagy matematikusok sem tudják egymás gondolatait követni.

Saját szakmájuk komoly tudósairól beszélünk itt és nem a számtalan mellékesen matematikával is foglalkozó filozófusról, akik szélteben-hosszában terjesztik véleményüket a «matematika lényegéről», viszont azonnal elhallgatnak, ha egyik állításuk cáfolataként a matematika valamely területéről származó még oly egyszerű példa tárul szemük elé.

De mindez ne akadályozzon meg bennünket abban, hogy szilárd alapon kutassuk e babiloni zavar okát. Megmaradunk a mellett, hogy a számfogalom alapja marad minden matematikának. A tizenkilencedik században a komplex számok elméletének kifejlődésével nagyon sokat nyertünk ezen a téren és az egyenletek elmélete is megtette a tőle telhetőt a számfogalom rögzítésére és bővítésére, hisz gyökökkel, irracionalitásokkal és komplex számokkal legszorosabban összefügg. A tizenkilencedik századnak köszönhetjük az ötödfokú és magasabb fokú egyenletek megoldhatatlanságának végleges bizonyítását, valamint annak bizonyítását, hogy a kör négyszögesítése lehetetlen (Lindemann 1882); determinánsokban, halmazokban, csoportokban új «számfeletti számokra» tettünk szert s a velük kapcsolatos műveleteket nehézség nélkül tudjuk elvégezni. Az ábrázoló, a projektív és a nem-euklidesi geometria a geometriának hatalmas fejlődését vezette be és ez a fejlődés messze túlnyúlik minden megelőzőn.

Mindazok után, ami a matematika, fizika és filozófia terén a tizenkilencedik században történt, világos, hogy nem egy nagyszerű fejben támadt a gondolat: meg kell fékezni a geniális felfedezések és általánosítások nyomán támadt óriási kaoszt és igyekezni kell e buja növekedésnek gyökereit feltárni. Geometriai téren e fáradozásoknak volt egy ragyogó mintaképe, mégpedig Euklides, akinek a nem-euklidesi geometriák folytán bekövetkező bukását csak a mindenáron újítani vágyó progresszisták hitték, mivel nekik minden igaz-

ság megszűnése és viszonylagossá válása feküdt csupán szívükön.

David Hilbertnek (szül. 1862, utoljára tanár Göttingen egyetemén) sikerült végül a geometria alapjaival kapcsolatos kérdéseket végérvényesen tisztázni és az általa felállított axiómarendszer egyike a tizenkilencedik század legnagyobb teljesítményeinek. Ez az axiomatika lehetővé teszi ugyanis, hogy minden geometriai típus szerkezetét és feltételeit tisztázzuk. Bizonyos axiómák pusztá elhagyásával nehézség nélkül megkapjuk a nem-euklidesi, nem archimedesi és más geometriákat és így megérthetjük, hogy miképpen lehetségesek olyan ellenmondásmentes geometriák, amelyeket euklidesi alapon iskolázott érzékeink első pillanatra örülségnak tartanak. De Hilbert a «Grundlagen der Geometrie» című művében sokkal többet is tett. Mindenekelőtt kimutatta, hogy a geometria és aritmetika, tehát kiterjedés és szám kapcsolata csak akkor tartható fenn, ha valamennyi, reális számokra vonatkozó, számítási szabály pontosan azonos a távolsággal való számolások szabályaival. Ha egy ilyen azonosság kimutatható, akkor, mutatis mutandis, kiterjedés és szám vagy szám és kiterjedés szinte csoportelméleti módon felcserélhető egymással. Ez a lehetőség, amely hallgatólagos feltétele minden analitikus és minden mértékgeometriának, elengedhetetlen alapja minden mértékgeometria logikai jogosultságának. Hilbert kimutatja, hogy a kiterjedésnek és a számnak ez a kapcsolata egyáltalán nem magától értetődő, hanem a projektív geometria alapján, elsősorban Pascal és Desargues tételeivel, gondosan ellenőrzendő és bizonyítandó.

Nem akarjuk elhallgatni Pasch, Schur, Zermello és sok más kiváló geometer munkálkodásának jelentőségét az axiomantikus alapelvek vizsálatában. Ez a vizsgálat immár legalább ötven éve «napirenden» van és szellemi tulajdonunk biztosítására sohasem volt olyan erős az igyekezet, mint ma.

Ilyen igyekezetek oka nagyon mélyen fekszik és különböző irányokban kereshető. Történeti szempontból Euklidesnek a fausti kultúrkörbe való recepciójáról van szó. De erről is csak részben, mert Raymundus Lullus szellemét is megtalálhatjuk ez igyekezetek mögött. Tudományos-pszichologikus szempontból egyszerűen nem tudunk szabadulni

a «gondolkodó gép», az «általános karakterisztika» az «ars inveniendi» álmától és a matematika logizálásával kísérletezünk, ha az algoritmussal és kalkulussal magával már nem boldogulunk. De közben a logika ugyanúgy jár, mint a geometria. Már előbb említettük azt a tragikomédiát, hogy a projektív geometriát az algoritmus és algebra tagadásának szelleme hozta létre. A végeredmény mégis a geometria teljes algebraizálódása lett, közben a projektív geometria és az algebra majdnem szétválaszthatatlanul összefonódtak és a forradalmár geometriából formák, invariánsok és más összefüggések algebraja lett. Úgy látszik, az algebra olyan fényforrás, amelybe büntetlenül nem repülhetnek bele más szellemi tájak pillangói. Mert igaz, hogy a logika hirtelen magasabbrendű matematikaként kezdett viselkedni. Tudomány felett álló tudománnyá kezdett alakulni, a szimbolika minden eszközt kezdte használni, mégis igen hamar kiderült, hogy csendben algebraizálódott. Úgy járt a logika és a logisztika, mint az a harcos hódító, amely elfoglalja az idegen országot, végül azonban megtanulja a leigázott ország nyelvét, felveszi annak szokásait és csak minden fogalom teljes összefoglalásával állíthatjuk komolyan, hogy a kalkulushoz és a szimbolikus írásmódnak a gondolata logikai kategória, nem pedig matematikai.

Mindaddig nem vonjuk kétségbe a «logika nyújtásának» ilyen természetű termékenységét, amíg értelmes határok közt marad. De ha egyesek állítása szerint hirtelen «kiderült», hogy a matematika csupán tautológiák és körbenjáró okoskodások gyűjteménye, akkor a matematika történetírójának rá kell mutatnia, hogy ez a felfogás legalább is kissé egyoldalú, noha nem lehet rövid úton megcáfolni. Azért nehéz a cáfolat, mert olyan dolgokat posztulál, amelyek teljesen önkényünk-től függenek. Ezek a dolgok a logika és matematika illetékeségének éppen a határán vannak. Évezredek óta keresztül használta a matematika a következtetés, bizonyítás és analízis logikai műveleteit. Mindenkor, minden időben meg volt benne az igyekezet, hogy meg ne sértse az igazságnak eme «negatív» kritériumait, ahogy ezeket Kant nevezi. De kénytelen volt nemcsak a formális, hanem a transzcendens logikát is figyelembe venni. Sőt ezen túlmenve, a meta-

fizika, sőt a misztika határain is kellett működnie, különben éppen legfényesebb csúcsait nem érhetne volna el. Bizonyos szempontokból vizsgálni lehetne a matematika biológiai feltételeit is, vagy legalább is kultúrmorfológiai feltételeit.

Ilyen kötöttségek között és ilyen kötöttségek ellen fejlődött ki a matematika és a lényegét vizsgálva aligha lehet kétséges, hogy mit lehet matematikai gondolkodás és cselekvés alatt érteni. Ha tehát egy, eddig a matematika mellé rendelt tudomány hirtelen használni kezdi a matematika összefoglaló jellegű eredményeit s e helyzete alapján elsőbbségi igényekkel lép fel, akkor a dolog lényegében történeti szempontból éppen fordított helyzet áll fenn.

Írjuk ide Hilbertnek néhány, a «Logik und Arithmetik» című értekezéséből származó mondatát, amelyek véleményünk szerint nagyon élesen rámutatnak a lényegre. Hilbert azt mondja: «Az aritmetikát a logika egy részének szokás mondani és az aritmetika megalapozásánál feltételezik a bevezetett logikai alapfogalmak helyességét. Csak igen figyelmes vizsgálattal vesszük észre, hogy a logikától kölcsönzött tételek már bizonyos aritmetikai alapfogalmakat, például a halmaznak, részben pedig a számnak, különösen mint számosságnak fogalmát magukban foglalják. Nagyon nehéz helyzetbe jutunk így, és paradoxonok elkerülése végett szükséges, hogy együtt fejlesszük ki, legalább részben, az aritmetika és a logika törvényét».

Szándékosan idéztük egyik matematikai logikus szavait, nem pedig egy intuicionistától vagy pedig a matematika egyik misztikusától származó szavakat, mert az a meggyőződésünk, hogy ez a szélsőségektől mentes és objektív állásfoglalás a két tudomány, a logika és a matematika rangsorolásában érvényre kell, hogy jusson. Mert a határok elmosása vagy megváltoztatása egyik tudomány számára sem jelenthet huzamosabb időn át előnyt. Meggyőződésünk továbbá az is, hogy a történetírás nem is olyan hosszú idő múlva megállapítja, hogy lezárult egy korszak, amely fölé címként «a matematika és logika elsőbbségi vitája» szavakat lehetne írni. Itt az «elsőbbség» szót nem időben, hanem ismeretkritikai szempontból kell felfognunk.

Mégegyszer : Eszünkbe sem jut, hogy félreismerjük vagy csökkentjük a matematika logikai megalapozására és meg-tisztítására irányuló igyekezetek jelentőségét. Aki ilyenre gondol, az nem viseli szívén az igazság ügyét. Meg kell vet-nünk őt mint egy rossz embert, aki nem fontolja meg azt, amit mond, de másrészt úgy látjuk, hogy éles visszautasításra méltó bűn a szellem ellen az a ma nagyon elterjedt igyekezet, amely mindenáron gátat vet a matematika termékenysége-nek és azt a tévhitet teremti, hogy már mindent «megismer-tünk». Ezek a sterilitást ígérő jóslatok, amelyek a világtör-ténelem Beckmessereinek működéséhez hasonlóan a puri-tanizmus köntösében jelentkeznek, elzárják a matematika «mesterdalnokainak», elsősorban a Stolzingoknak azt az egyetlen útját, amelyen a tudomány a matematika történe-tének tanúsága szerint előrehaladhat, mert nem minden lángeszű matematikus lehet — és ez a veszély — feltétlenül, a priori, nagy, szakszerűen képzett logikus és filozófus. Meg-eshet, hogy a jövő úttörői elcsüggednek, bátortalanok lesz-nek, ha maguk előtt azt a pusztaságot látják, amelyen állí-tólag keresztül kell haladniok, vagy ha a filozófiai oldaláról azt magyarázzák nekik, hogy bűvös körben vannak, amelyből nem tudnak kiszabadulni.

Nem a szakembereknek szól intelmünk, amely a mate-matika valószínűleg hamarosan elmúló, egyoldalú, túlzott logizálásával szemben intenzívebb történelmi állásfoglalást követel. Hisz a jelek szerint ez a túlzott logizálás nem egyéb, mint a logika matematizálásának tragikomédiája. A szak-emberek bizonyára jól ismerik ezeket a tényeket és saját tanaikat nem fogják fel annyira egyoldalúan, mint azok, akik sem a matematikát, sem a logikát, sem a filozófiát, sem pedig a kultúrtörténetet kellőképpen nem ismerik. Röviden összefoglalva : amióta a matematika alapjainak kutatását megkezdték és a logikai kalkulust feltalálták, azóta a logi-kának és matematikának igen feszült és nagyon érdekes kor-szakát éljük át. Ez a korszak nem szegény problémákban, különösen amióta a többértékű logikát felállították és amióta Reichenbach összekapcsolta az n értékű logikát és a való-színűségelméletet. De a matematika történetének hűvös-fejű vizsgálója bizonyos kétkedéssel állapíthatja meg, hogy

ezek a túlzott bonyodalmak még egyáltalán nem bizonyították be termékenység szempontjából képességeiket.

Elhagyjuk tehát a logizált matematikának és a matematizált logikának szigorú birodalmát, melyet úgyis csupán érintenünk volt szabad. Időn és téren keresztülvezető utunk végén vizsgáljuk inkább azt a kérdést, hogy milyen magasabbrendű jegyeit láthatjuk a Leibniz óta eltelt évszázadok, különösen pedig a tizenkilencedik és a megkezdett huszadik század igyekezteinek. Tisztában vagyunk, hogy ezzel bizonyos fokig elhagyjuk a tények biztos talaját és az egyéni benyomások régióiba emelkedünk. De igyekezni fogunk, hogy e benyomásokból ne legyenek álmok és elmondásuk ne fajuljon mesélgetéssé.

Ha tehát visszatekintünk arra a hosszú és fárasztó útra amelyen együtt végigjöttünk, akkor egy furcsa tulajdonság ötlík szemünkbe, amely többé-kevésbé ott rejtőzik az elmúlt 150 év minden felfedezése mögött. Egyelőre egész felületesen nevezzük «perspektívának», «hasonlóságvizsgálatnak» és «lép tékváltoztatásnak». Lényegükben mind a három szorosan összefügg. De nem akarunk nagy összefüggésekre való utalásoknál maradni, hanem sejtéseinket részletesen leírjuk.

Világos és nem szorul további magyarázatra, hogy az ábrázoló és a projektív geometria, tehát általában minden helyzetgeometria fenti három fogalomkategóriával foglalkozik és azzal is kell foglalkoznia. A projektív és ábrázoló geometria szűkebb területén messze túlterjedt már az a vágy, amely mindent más szempontokból akar ábrázolni, amely azért akar mindent transzformálni, hogy megvizsgálhassa, mi marad e közben változatlan és mi nem. Ez azután, például a nem-euklidesi geometriák szempontjából, a geometria fogalmának általánosításához is vezetett. És ebből fejlődött ki az invariáns, az érzéketlen rész elmélete, amelyet sok szerző találóan «abszolút geometriának» is nevez, mivel minden geometriának közös része. Mivel azonban Descartes óta a geometria és algebra szerkezetének nagyfokú párhuzamos-sága, sőt talán azonossága áll fenn, vagyis a matematika birodalmának két része immár csupán a tiszta formák föléjük rendelt birodalma két hűbéres államának tekinthető, ezért nincs mit csodálkoznunk azon, hogy a geometriáról vallott

felfogásunk változásának az algebra és általános szimbolika országában is alkotmányváltozás volt a következménye. A Gauss-féle kongruenciákra valamint a csoportokra vonatkozó korszakos felfedezések is e gondolkörbe tartoznak. E gondolatépítményekben mindenütt valamiképpen arról van szó, hogy mi marad változatlan, invariáns, torzulások, különféle perspektívák, valamint transzformációk ill. szubsztitúciók alkalmazása esetén. A rejtett összefüggések kiterjedt kutatása akaratlanul is Cusanus «koincideniciáit» idézi emlékezetünkbe. Természetesen nagyon halovány a hasonlóság a skolasztikus «koincidenencia» és a modern «szerkezeti invariancia» fogalma közt. Valamelyest azonban mégis fennáll, különösen a problémák megfogásának pszichológiai szempontjából.

Mi lehet végeredményben e perspektivikus fáradozások legmélyebb értelme és végső célja? — tesszük fel magunkban a kérdést. Csak arra igyekszünk, hogy a dolgokat igen különböző szempontokból lássuk, általánosabbakká, pontosabbakká tegyük? Persze ilyen motívumok is előfordulnak a kutatás céljai közt. De véleményünk szerint nem ezek jelentik első sorban a mozgató erőt. Mert az «általánosítás» magában véve extenzív jellegű, tehát egyáltalán nem volna intenzív jellegű tevékenység. Általa végeredményben csak kiterjedne a kutatás területe, és egyáltalán nem juthatnánk közelebb az igazi összefüggések felismeréséhez. Ellenkezőleg: a mértéktelen általánosítás eltávolítana — és ez látszólag részben be is következett — még a kapcsolatok áttekintésének lehetőségétől is. De csak felületes szemlélők látták így. Mert az általánosításra törekvés és az invariancia egyidejű felismerése egészen más, mint az általánosított anyag kiterjesztése és felhalmozása az invariancia-vizsgálatok ellenőrzése nélkül. Lássuk ezt egy egyszerű példán: Már Diophantos ösztönszerűen tudta, sőt talán néhány korábbi matematikus is, hogy egy önmagában véve megoldhatatlan egyenlet megoldhatóvá válik, ha az ismeretlenek helyébe, a szó hétköznapi értelmében, egyszerűbb, vagy esetleg bonyolultabb kifejezéseket «helyettesítünk», «szubsztituálunk». De az átalakítás művelete, amelynek eredményes működését a harmadfokú egyenlet Cardano-féle megoldásával kapcsolatban volt alkalmunk megismerni, nem korlátozódik az egyenletekre. Sokkal

átfogóbb és egyben kevésbé áttekinthető alakban jelentkezik az integrálok kiértékelésénél (megoldásánál), sőt itt jelentős részben az egész integrál-algoritmus használhatóságának alapvető feltétele lett. Miért szabad az egyik esetben helyettesítenünk és miért nem szabad a másik esetben? Miért vezet valamely transzformáció bizonyos integráloknál eredményre- és miért marad hatástalan másoknál? Mit, mikor és mivé szabad transzformálni? Az elméleti fizikát meg sem említjük- mert ott szinte óránként merülnek fel ilyen kérdések.

Röviden: világot kellett deríteni az algoritmusok ilyen problémáira, egyes algoritmusokat «rész-algoritmussá» kellett lefokozni, hogy a formák egyik birodalmából a másikba vezető átmenet helyessége kiderüljön. Jó szolgálatot tett e célnak a komplex számok bevezetése is. Ismételten beszélünk a matematika «szellemvilágáról», a komplex alakzatokat ismételten hasonlítottuk Platon ideáljaihoz, és ismételten hangoztattuk azt is, hogy ezek szimmetriájuk és tökéletességük folytán mintaképei a számoknak. Mert a számok gyakran annyira elfajulnak, annyi «földi» tökéletlenség és fogyatkozás tapad hozzájuk, hogy valódi tulajdonságaik fel sem ismerhetők. E miatt székségképpen hibázunk, s a hibák csak akkor kerülhetnek el, ha a szellemvilághoz, az ősi mintaképekhez fordulunk tanácsért. E módszernek is egy perspektívikus-ábrázoló gondolat az alapja. A reális birodalmat úgyszólván a komplexre vetítjük, a komplexet a reálisra, és e transzformáció közben felismerjük, hogy mely tulajdonságok maradnak meg, és hogy melyek változnak. És sokszor végezhetünk a komplexben igen általános műveleteket, amelyeknek a reális területen végzett műveletek csupán mint igen szűkkörű különleges esetek felelnek meg. Gondoljunk csak az algebra alaptételére, a gyökök sokszögön való elhelyezkedésére, és a vele összefüggő körosztási elméletre. A körosztási elmélet trigonometriai, konstrukciós és egyenleteleméleti irányban folytatódik, és megalkothatjuk, mondjuk a csoportelméletben egy n -edfokú egyenlet megoldásainak «csoportját». Ez megint a csoportelmélet algoritmusá szerinti maradék és modulus-rendszerekkel hozható kapcsolathoz. Vagy gondoljunk a logaritmusokra. Tulajdonságaik érthetőbbé, de egyben misztikusabbakká és «csodálatosabbakká» válnak, ha meg-

tudjuk, hogy a «szellemvilágban» minden számhoz végtelen sok logaritmus tartozik. Ezek a «szellemtulajdonságok» egyszer-szeder váratlanul a «reális» földön is felbukkannak és pusztítók, átlátszatlanok, ha nem ismerjük mintaképeiket.

De van a matematikának más olyan területe is, amelynek köze van az általunk a tizenkilencedik század kutatására jellemzőnek tartott «perspektív világszemlélethez». A konvergencia fogalmára gondolunk. Optikai szempontból egy konvergencia sor olyan «skála», amelynek «egységei» valahogy perspektivikus helyzetűek. Bizonyos konvergencia sorok, képletesen szólva, végtelenbe vesző mérőszalaghoz hasonlítanak: úgyhogy az «egységek» mindinkább rövidülnek, míg végül beleütköznek a határértékük *sky-line*-ébe, horizontjába, vagy a komplexből vett kifejezéssel a konvergenciakörük szélébe. Ily megfontolások alapján a nem-euklideszi geometriák, a projektív geometria és a konvergenciavizsgálatok azonnal magasabb egységbe kapcsolódnak. De az ilyen álláspont kozmologikus megfontolásokra vezet, így a világegyetem végességének és zártságának feltételezésére, hisz ez is csak tapasztalati terünk nem-euklideszi szerkezetének posztulálásán mulik. De maga a halmazelmélet is helyet foglal a tizenkilencedik és megkezdett huszadik század «perspektivikus világképében», noha aktuális végtelenével első pillantásra nem tud engedelmeskedni a perspektíva törvényeinek és látszólag a maga külön útját járja. Mert a halmazok «pontonként való egymáshozrendelése» szintén a perspektívát érintő összefüggés, és a pont-halmazokkal foglalkozó koordináta-geometria minden lépték-kérdése ilyen problémára vezet.

Megkíséreltük rövid összefoglalásunkban bemutatni, hogy a legutolsó 150 év matematikájának van egy nagyon határozott «konvergencia-pontja» és ez a pont egyáltalán nem fekszik a végtelenben, habár a matematika nagyon sokféle ágazónak, zavarosnak, ezoterikusnak és más jellegűnek látszik. A jakobinus De Monge-nak és tanítványainak tette amely német talajon kapott fausti lendületet, ráveti árnyékát az évszázadra. És azt sejtjük, hogy történeti szémszögből nézve, e sokféle «perspektivikus» kezdetnek nagyarányú szintézise van készülőben, amely valamilyen általános «hasonlósági matematikát» eredményez. Ezzel szembeállítva, a

«Galois-t megelőző» és «Gausst megelőző» matematikát «egyenlőségi matematikának» nevezhetnők.

E hatalmas szintézisnek, amelyhez a vektoralgebra is teljes mértékben hozzátartozik, kifogástalan és biztos felépítése természetesen lehetetlen a leggondosabb filozófiai ellenőrzés nélkül. Ezen a helyen és e szempontokból a logisztika közreműködése nemcsak érdekes, hanem nagyon hasznos is, feltéve, hogy tudatában van ellenőrző feladatának és nem hiszi magáról azt, hogy ő az elkészült logikai-matematikai kozmosznak legfelső, elbírálásra jogosult fóruma. Mert ez az utóbbi gondolat, amint megkíséreltük kimutatni, ellenmond a történelmi tényeknek. És ellenmond, számtalan példát lehetne erre felhozni, számos elsőrangú matematikus ösztönének.

Felix Klein például a már említett «Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX. Jahrhundert» című művének 51. oldalán körülbelül azt mondja, hogy a matematika «szigorúsága» az antik görög korból származó ideál, és a matematika egészének lehetőleg kis számú, előrebocsátott tételből való tisztán logikus levezetését jelenti. «Azt akarom itt hangsúlyozni», — folytatta Klein — «hogy ideális „szigorúság” esetén is marad valami nem-logikus, szemléleti elem az alapelvek megteremtésében.» Továbbá az 53. oldalon ezt mondja: «Tudományunk történetét szemlélve kiderül ugyanis, hogy a „szigorúság” nagyon viszonylagos követelmény és csak a tudomány haladásával párhuzamosan fejlődik ki. Érdekes megfigyelni, hogy egy szigorúságra törekvő korban a kortársak mindenkor azt hitték, hogy e téren elérték a maximumot és hogy egy későbbi generáció mennyire túltesz követeléseiken és eredményeiken. Így avult el Euklides, így Gauss és így Weierstrass. A fejlődésnek, ebben az irányban, úgy látszik, éppen oly kevéssé van határa, mint a teremtető felfedező-erő irányában.»

E szavak nem programot jelentenek, hanem egy nagyon gazdag élet tapasztalatainak összegét. Az akkor több mint 60 éves F. Klein az első világháború első éveiben tartotta előadásait, vagyis olyan időpontban, amikor már ismereteseek voltak a ma annyiszor idézett, a matematika alapjaira vonatkozó vizsgálatok. Kronecker, Frege, Hilbert — hogy csak

néhány nevet említsünk — eredményeit Klein már ismerte, úgyszintén Poincaré, Couturat és mások eredményeit.

E szavakat tehát egy szellemes megjegyzésnél többre becsüljük. És téren és időn keresztül vezető utunk végén nem tudunk hitelt adni semmilyen beteljesedést vagy elmerülést jósló kijelentésnek. Ellenkezőleg: Miként tudományunk egyik legnagyobb alakjának, a nagy Leibniznek, monadokról szóló tana szerint az egyik Kozmosz a másik tetejére épül, hogy végül a monadok monadjában, Istenben végződjenek, éppen úgy nincs határ — ismételjük röviden Klein szavait — remek, valóban királyi tudományunk kritikai vagy produktív fejlődésének kiépítésében.

TARTALOM.

	Oldal
Előszó	5
1. fejezet. <i>Pythagoras</i> . Matematika mint tudomány	7
2. " <i>Euklides</i> . Matematika és filozófia	29
3. " <i>Archimedes</i> . Matematika és valóság	44
4. " <i>Pergai Apollonios</i> . Matematika mint virtuozitás	61
5. " <i>Diophantos</i> . Matematika, mint írásmód	74
6. " <i>Alchvarizmi</i> . Matematika, mint gondolkodó gép	92
7. " <i>Leonardo da Pisa</i> . Matematika, mint kezdet ..	107
8. " <i>Nicole di Oresme</i> . Matematika és természet ...	113
9. " <i>Vieta</i> . Matematika mint szimbolika	125
10. " <i>Jost Bürgi</i> . Matematika mint táblázat	134
11. " <i>Descartes</i> . Matematika mint módszer	142
12. " <i>Gottfried Wilhelm Leibniz</i> . Matematika mint kozmosz	159
13. " <i>Jean Victor Poncelet</i> . Matematika mint varázs- tükör	194
14. " <i>Evariste Galois</i> . Matematika, mint általánosítás	213
15. " <i>Carl Friedrich Gauss</i> . Matematika, mint világ- utazás	241
16. " <i>Bernhard Riemann</i> . A matematika mint szellem- világ	260
17. " <i>David Hilbert</i> . Matematika és logika	276



A BÚVÁR KÖNYVEI



- I. LAMBRECHT KÁLMÁN *Az ősvilági élet*
- II. EDDINGTON *A természettudomány új útjai*
- III. REICHENBACH *Atom és világegyetem*
- IV. HUZELLA TIVADAR *Az élet tudománya*
- V. COLERUS *Az egyszeregytől az integrálíg*
- VI. TANGL HARALD *A hormon és az ember*
- VII. MANNINGER VILMOS *A sebészet diadalútja*
- VIII. COLERUS *A ponttól a négy dimenzióig*
- IX. JEANS *Zene- és természettudomány*
- X. PONGRÁCZ SÁNDOR *Az ősködtől az emberig*
- XI. MARALDI *Az ágyútól a halálsugárig*
- XII. TASNÁDI KUBACSKA A. *Gyűjtés hegyen-völgyön*
- XIII. ZIMMER *Forradalom a fizikában*
- XIV. FRANCÉ *Az állatok csodálatos világa*
- XV. FRANCÉ *Földünk kincsei*
- XVI. EREDIA *A légkör titkai*
- XVII. COLERUS *Pythagorastól Hilbertig*
- XVIII. PONGRÁC SÁNDOR *A mindennapi élet biológiája*
- XIX. WALTER KVASNIK *A kémia világa*
- XX. CSILLAGÁSZATI ÉS METEOROLÓGIAI LEXIKON
- XXI. BIOLÓGIAI LEXIKON
- XXII. LEHNER FERENC *A lélek megismerése*
- XXIII. M. ZEMPLÉN JOLÁN *Archimedestől a relativitásig*



FRANKLIN-TÁRSULAT KIADÁSA