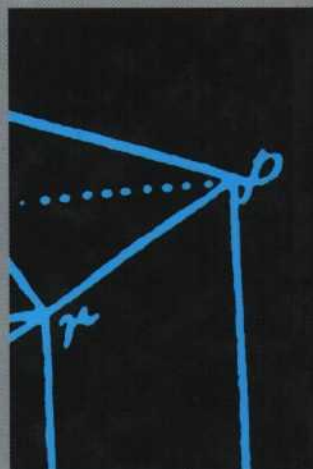
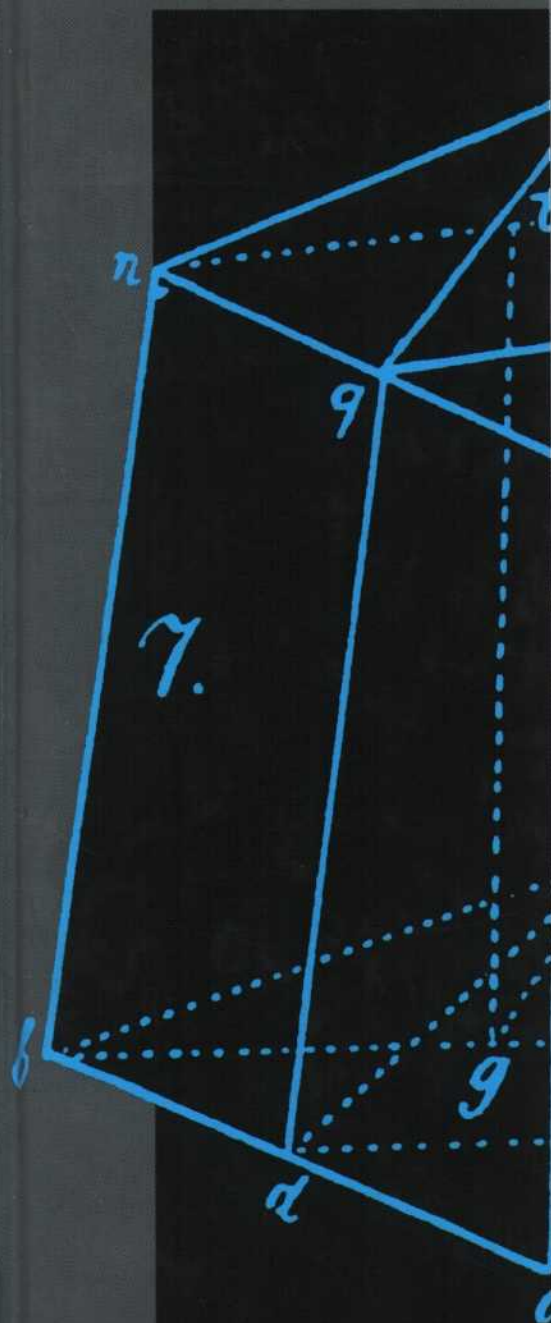


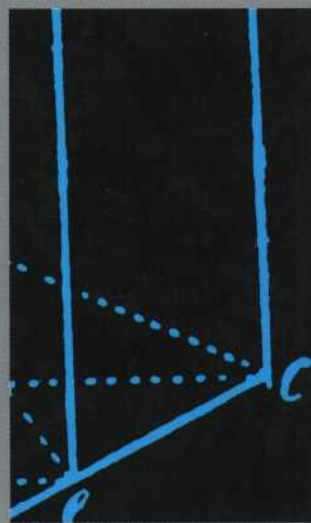
TUDOMÁNY – EGYETEM

Weszely Tibor

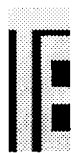
BOLYAI JÁNOS



Az első 200 év



VINCE KIADÓ



TUDOMÁNY – EGYETEM



BOLYAI JÁNOS (1802–1860)

*Zsigmond Attila alkotása
a korabeli dokumentumok és leírások alapján*

Weszely Tibor

Bolyai János

Az első 200 év

Vince Kiadó

A TUDOMÁNY – EGYETEM sorozat főszerkesztője:
Glatz Ferenc akadémikus

A Tudósportrék alsorozat szerkesztője:
Staar Gyula

Tudomány – Egyetem sorozat © Vince Kiadó
A sorozat grafikai terve Haász István,
tipográfiai terve Kempfner Zsófia munkája

A kötet szaklektora: Vekerdi László

© Weszely Tibor, 2002

A borító Bolyai János *Appendix* című műve ábráinak
felhasználásával készült.

Kiadta: Vince Kiadó Kft., 2002
(1027 Budapest, Margit körút 64/b)
az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja
A kiadásért a Vince Kiadó igazgatója felel
Szerkesztette: Teravagimov Péter
Nyomdai előkészítés: Badics és Társa Bt.
Nyomás és kötészet: Szekszárdi Nyomda Kft.
Felelős vezető: Vadász József igazgató
ISBN 963 9323 53 5 / ISSN 1417 6114

Tartalom

Prológus 9

1. A magyar tudománytörténet csillagos egének Szíriusza 11

- 1.1. Az erdélyi kulturális viszonyok és a marosvásárhelyi kollégium 11
- 1.2. A Bolyai család 14
- 1.3. Az erdélyi polihisztor 16
- 1.4. Bolyai János életútja 23
- 1.5. Egy mulasztás utóregzései 47

2. Az *Elemek*-től az *Appendix*-ig 49

- 2.1. Euklidész remekműve 49
- 2.2. A párhuzamosok két évezredes problémája 52
- 2.3. Minek tulajdonítható az oly sok kudarc? 57
- 2.4. Egy geometria megalapozása 59
- 2.5. Bolyai János és a 11. axióma 61
- 2.6. A Σ - és az S-rendszer 73
- 2.7. Az *Appendix* rövid kivonata 76
- 2.8. Az *Appendix* kezdeti fogadtatása 86

3. Az *Appendix* gondolatainak továbbfejlesztése a kéziratokban 99

- 3.1. Ami az *Appendix*-ből kimaradt 99
- 3.2. Az S-rendszer érvényessége és ellentmondás-mentessége 101
- 3.3. Az *Észrevételek* 107

4. A nemeuklideszi geometriák térhódítása 117

4.1. Riemann-terek 117

4.2. Euklideszi vagy nemeuklideszi térben élünk? 120

5. Prioritási kérdések 126

5.1. A három felfedező 126

5.2. Gauss és a nemeuklideszi geometria 128

5.3. Lobacsevszkij és Bolyai 135

6. A komplex számok elméletének kutatója 1436.1. Amire az *Appendix*-ben nem tért ki 1436.2. A *Responsio* 146

6.3. A komplex számok aritmetikája 150

7. Amiről még árulkodnak a kéziratok 1527.1. A *Raumlehre* 152

7.2. Küzdelem a „megoldhatatlan” problémákkal 156

7.3. Későn észlelt számelméleti kutatások 160

8. Filozófiai és társadalmi nézetei 164

8.1. Filozófiai gondolatok Bolyai életművében 164

8.2. Az *Üdvtan* 169

8.3. A nyelv megreformálása 177

8.4. Társadalom és forradalom 180

8.5. A becsület próbaköve 186

9. Morzsák a Bolyai-kultusz történetéből 189

9.1. A Bolyaiak „felfedezése” 189

9.2. Schmidt Ferenc és G. J. Hoüel 190

9.3. Az *Appendix* külföldi térhódítása 194

-
- 9.4. Magyarországi ébredés 197
9.5. Centenáriumai megemlékezések 203
9.6. A Bolyai-díj 204
9.7. Bolyai-emlékhelyek a nagyvilágban 207
9.8. A Bolyai-portré problémája 211

10. A Bolyaiak és a szépirodalom 216

Függelék 223

- Irodalom 225
Név- és tárgymutató 228

Szüleim emlékére

Weszely Péter (1905–1995)

Altman Jolán (1915–1998)

Prológus

„A magyar nép géniusza – a tudomány területén – a legmagasabb fokon Bolyai Jánosban öltött testet.” – Ezzel a mondattal nyitotta meg 1977. december 15-én a Magyar Tudományos Akadémia zsúfolásig megtelt dísztermében a zseniális matematikus születése 175. évfordulójára rendezett emlékülést az Akadémia akkori, ma már felejthetetlen emlékű elnöke, Szentágothai János. Azóta, az egy irányba és megállíthatatlanul múló idő mutatója a nagy tudós születésének bicentenáriuma-hoz érkezett.

Bolyai János soha sem dúskált anyagi javakban, kínzó szegénység és betegség jutott neki osztályrészül, s csak egyetlen gyönyörűen kimunkált értékes kincse volt: a 29 oldalas *Appendix*. Ezt ajándékozta magyar nemzetének, ezt helyezte letétbe az utókor számára. Ma már tudjuk, elméjének csodálatos produktumai túllépték az *Appendix* kereteit. S hogy ezek csak a sárguló lapok közé temetve maradtak meg a jövő számára, nem az ő hanyagságának tulajdonítható.

Bolyai előtt nemcsak a magyar nemzet, hanem az egész emberiség boldogulása lebegett célként, amelyet a befejezetlenül maradt *Údvtan* megírásával próbált előmozdítani. Fájdó érzés foghat el mindnyájunkat, amikor arra gondolunk, hogy ő mennyi mindent adott nekünk, de viszonzásul élete folyamán semmit sem kapott. Még az egyszerű elismerést is megtagadták tőle. A meg nem értés még elviselhetetlenebbé tette az amúgy is ellentmondásokkal teli mindennapjait. A becsületesség és igazságszeretet jellemezte őt élete végéig. Inkább a nélkülözést választotta mint az alattomos besúgást, rajongásig lelkesedett a matematikáért, amely hazájában semmiféle megbecsülésnek sem örvendett, határtalanul szerette szülőföldjét, amely valósággal kitaszította őt, és magáénak vallotta azt a népet, mely mit sem tudott róla. A pisztráng természete élt benne, a sebes ár ellen úszva szüntelenül kereste az újat és a frisset. Íróasztalánál ülve, szemet gyilkoló halvány gyertyafénynél, még lázas betegen is rótta a betűket és a matematikai képleteket a nyomorúságos kis nyugdíjából kényszerrel vásárolt papírlapokra. A könyvek és szakfolyóiratok hiányát elméjének csodálatos alkotóképességével próbálta ellensúlyozni. Nem-

hogy erkölcsi vagy esetleg anyagi haszon, de még a megjelentetés halvány reménye sem serkentette őt munkájában. Igazából csak az alkotó ember tudja felmérni ma is, hogy milyen bénítóan borzalmas ez az állapot. Az utókornak erkölcsi kötelessége, hogy legalább halála után törlesszen valamit abból az adósságból, amit környezete az élete folyamán nem adott meg neki. Már felszínre került a kéziratokon megörökített gondolatainak jó része, a korát megelőző merész alkotásának hatalmas értéke pedig több mint egy évszázada nyilvánvalóvá vált.

Mivel Bolyai nemcsak a matematikusoké, hanem mindnyájunké, jelen munkámmal az a célom, hogy a nagyközönséghez minél közelebb hozzam zseniális tudósunkat. Így az a törekvés vezérel, hogy a tudományos igények szigorú szem előtt tartásával a nem matematikus olvasó számára is minél érthetőbbé tegyem munkásságát és megvilágítsam eredményeinek jelentőségét. Mivel eddig elég nagy számban jelentek meg olyan munkák is, amelyek kimondottan a matematikát kedvelők részére íródtak (mint például: [11], [12], [19], [27], [28], [43], [51], [63], [64]), a még mélyebben érdeklődőknek javasolnám ezek elolvasását.

E munka megírására Staar Gyula, a *Természet Világa* főszerkesztője buzdított mindvégig, akinek őszinte hálával tartozom. Varázslatos egyéniségével csodálatos módon tudja összefogni az összmagyarság kulturális tevékenységének bizonyos szeletét.

Köszönetet mondok a Vince Kiadó munkaközösségének, Vekerdi Lászlónak, a kötet szaklektorának és mindazoknak, akik a jelen könyv megjelentetéséhez segédkezet nyújtottak.

Marosvásárhely, 2001. július

A szerző

1. A magyar tudománytörténet csillagos egének Szíriusza

Ezt a fiatal geometért, Bolyait,
elsőrangú lángésznek tartom.

C. F. Gauss

1.1. Az erdélyi kulturális viszonyok és a marosvásárhelyi kollégium

A magyar nép viharos történelmének körülményei s az ezzel összefüggő gazdasági és társadalmi viszonyok az évszázadok folyamán nagyban befolyásolták kulturális múltjának alakulását. A középkori Magyarország igyekezett lépést tartani az európai tudományos fejlődéssel és művelődési áramlatokkal. Az első magyar egyetem Nagy Lajos király uralkodása alatt 1367-ben Pécsen jött létre, szinte egy időben a krakkói (1364) és a bécsi (1365) univerzitásokkal. Nem sokkal ezután, 1389-ben Óbudán Zsigmond király alapította a második egyetemet magyar földön. Az első alapítását és működését V. Orbán, az utóbbiét pedig IX. Bonifác pápa is megerősítette.

A magyarországi humanizmus fellendülését nagymértékben elősegítette Vitéz János (1408–1472), aki a váradi könyvtár alapjait is lefektette, mely később a Corvinák bibliotékájává fejlődött. Az ő hatására fejlesztette Mátyás király budai várát a magyarországi reneszánsz központjává. Nagy királyunk 1465-ben Pozsonyban alapított egyetemet.

Az 1526-os esztendő fordulópontja a magyar történelemnek. A mohácsi vész, s ezt követően az ország három részre szakadása merőben új helyzetet teremtett. A török hódoltság területén szinte minden magasabb művelődési lehetőség megszűnt. Csak vajmi kevéssel volt jobb a helyzet a másik két országrészben, így a töröknek adót fizető Erdélyi Fejedelemségben is. Az ország testének szétszakadása a még működő egyházi felsőbb oktatást is szétzilálta; a külföldi egyetemek ifjak általi látogatása pedig a háborús veszélyek, valamint a lakosság általános elszegényedése

miatt nagy nehézségekbe ütközött. A török, majd később az országra egyre jobban nehezedő Habsburg elnyomás fékezte a magyar tudományos élet fejlődését.

A 16. században a reformáció a magyar nyelvterületeken is teret nyert. Az önálló Erdélyi Fejedelemségben fejedelmi vallássá váló protestantizmus készítette arra János Zsigmondot, hogy végrehajtsa az egyházi birtokok szekularizációját. Az egyházi birtokok kisajátításával egyidejűleg az erdélyi magyar nemesség és polgári réteg harcot kezdett a maga új iskoláinak megteremtésére, mely intézmények eszméik utánpótlását hivatottak biztosítani. Sokan az iszlám törökök és a katolikus Habsburg-házzal szemben a hitbeli ellenállás eszközét látták az új vallásban, úgy tekintve, hogy nemzeti törekvések érnek célzt az egyházi végzésekből, amelyek a reformátusok rendelkezésére bocsátják azokat a kolostori helységeket, amelyekből a szerzeteseket elűldözték, vagy amelyek elnéptelenedtek. Így a reneszánsz és a reformáció hatására meginduló szellemi fellendülés eredményeként Erdélyben is sorra alakultak a református iskolák és kollégiumok, melyek nagy mértékben járultak hozzá az erdélyi magyar kulturális élet fejlődéséhez. Ilyen kollégiumok alakultak az idők folyamán Kolozsváron, Marosvásárhelyen, Székelyudvarhelyen, Zilahon, Nagyenyedén, Szászvároson stb. Ezek között találjuk azt a tanintézetet is, amely a későbbiek során a Bolyaiak életében döntő szerepet játszott. A marosvásárhelyi református kollégiumról van szó, mely 1557 őszén *Schola Particula* néven nyitotta meg kapuját a tanulni vágyó fiatalok előtt. A város vártemplomának északkeleti oldalához épített régi épületrész biztosított helyet az új iskolának, mely azelőtt a Ferenc-rendiek otthona és intézete volt. E szerencsés választásnak köszönhetően az ősi falak ma is láthatók. A mai értelemben vett tantestület sok esetben egyetlen személyből, a *skólamester*-ből állt, akit egyes dokumentumok rektornak is neveznek. Kétségtelen, hogy ezeknek az iskoláknak a fő rendeltetése az új református vallás terjesztése volt. Ezt érzékelteti az egyik kéziratban ránk maradt megállapítás is, miszerint a Scholában „a teológiát oly fokon tanították, hogy innen külföldi egyetemekre vagy pedig egyenesen papságra mehetek az ifjak”. A fő tantárgyat képező teológia sikeres oktatása érdekében természetes, hogy a tanulót meg kellett tanítani írni, olvasni, számolni, valamint más általános „világi ismeretekre” is.

1601-ben Basta hadai a vártemplomot is feldúlták, emiatt 1602-ben a Schola átköltözött arra a helyre, ahol a marosvásárhelyi református kollégium, vagyis annak jogutódja, a Bolyai Farkas Líceum ma is található. Jelentős eseménye volt a marosvásárhelyi Schola történetének, amikor 1718. április 30-án egyesült a sárospataki kollégium azon részével, amely a hosszú hányattatása után végül is Marosvásárhelyen talált mene-

déket (a sárospataki kollégium diákjait és tanárait a vallási türelmetlenség űzte ki otthonukból még 1671 októberében). Az egyesítéssel mindkét iskola jól járt. A sárospatakiak biztonságos otthont találtak a székely fővárosban, a Schola pedig kollégiumi rangra emelkedett. Ezáltal megjelentek a felső tagozatú osztályok, tantervükben a teológia, valamint a humán tantárgyak mellett a filozófia keretén belül a természettudományok oktatása is helyet kapott.

Közben az ellenreformációval meginduló folyamat egyik eredményeként a 16. század második felében Kolozsvárra érkeztek a jezsuiták, s kollégiumot alapítottak, amelyet Báthory István nemsokára, már lengyel királyként, 1581. május 12-én a mai Vilniusban kelt alapítólevéllel egyetemi rangra emelt. Egyetemalapítását XIII. Gergely pápa (aki a naptár megreformálásában is fontos szerepet játszott), 1582. február 9-én erősítette meg. A nevezetes oklevél a király európai szellemét és a magyar civilizáció iránti törődését immár az erdélyi művelődési igényekkel egybeforrvá fejezi ki. Sajnos nemsokára, a vallási forrongások közepette, a kálvinista és unitárius rendek erőszakos nyomására a jezsuiták, akik itt egy meglehetősen magas szintű oktatási rendszert valósítottak meg, kénytelenek voltak elhagyni Erdélyt.

Magyarországon az első nyomda Mátyás király uralkodásának idején, csupán másfél évtizeddel a könyvnyomtatás felfedezése után, 1473-ban Budán jött létre. Jelenlegi ismereteink szerint, az első erdélyi nyomda viszont, több mint fél évszázaddal később, 1529-ben Szebenben kezdte meg működését. 1535-ben Brassóban állította fel a következőt Johann Honterus, az erdélyi szászok reformátora. Ezt követi 1550-ben Heltai Gáspár kolozsvári nyomdája, mely a német és lengyel nyomdák fraktúrbetűje helyett a latin antiqua típust tette magyar betűfajtvává. A 16. századbeli Erdély európaisága és magyarsága a nyomdastatisztika tükrében is megnyilvánul. A három részre szakadt Magyarország 661 nyomtatott könyvéből 360 (54%) az Erdélyben működő 18 nyomdában készült, melyek nyelvészeti megosztása a következő: 180 latin, 139 magyar, 15 német, 10 román, 9 ósláv és 7 görög kiadvány. A latin nyelvű könyvek magas száma nyilván abból adódik, hogy abban az időben ez a nyelv az iskolák felső osztályaiban folyó tanításnál, valamint a nemzetközi tudományos kommunikációban jelentős szerepet játszott.

Marosvásárhelyen csak a 18. század második felében állították fel az első nyomdát, amely a század vége felé doktor Mátyus István tulajdonába került, aki 1802-ben a marosvásárhelyi református kollégiumnak ajándékozta. Ebből, a máskülönben szerény felszerelésű kis nyomdából kerültek ki a Bolyaiak művei, köztük a világhírű *Appendix*.

A Bolyaiak élete és alkotó munkássága Erdélyben a bomlási szakaszuk-

hoz jutott, de megszűnni semmiképp sem akaró hűbéri termelési viszonyok és az utat törő új termelőerők ellentétének feszült légkörében zajlott le. Ez a vajúdjó, visszafojtott állapot aligha teremthetett megfelelő feltételeket a tudományos kutatások előmozdítására. A kibontakozó tudományos tevékenységet számos, sokszor áthatolhatatlan akadály fékezte: a kedvezőtlen gazdasági viszonyok, a színvonalas egyetemek és tudományos intézmények teljes hiánya, valamint az ebből a helyzetből fakadó kulturális elmaradottság. Ezáltal nemcsak az alkotás feltételei hiányoztak, hanem az az intellektuális réteg is, amely egy komolyabb felfedezést befogadni és értékelni képes. Bolyai Farkas például arról panaszkodott Gaussnak, miután Európa egyik legkiválóbb tudományos centrumából, Göttingából visszatért Erdélybe, és néhány év múlva mint kinevezett kollégiumi professzor Marosvásárhelyre került, hogy itt „matematikából még a tanult emberek is, a négy alapműveleten kívül alig ismernek többet”. Így a magas szinten alkotó tudóst nem megértés és elismerés, hanem cinikus közöny vette körül. Élesen rajzolódik ki ez az állapot Bolyai János tragikus és szomorú életpályájában. „Bolyai János – írja Bretter György – felőrldött abban az ellentmondásban, ami matematikai teljesítményének egyetemessége és a befogadó közeg sivársága között tátongott.” A kollégiumok és jobb hírű tanintézetek csak minimális középszerű feltételeket voltak képesek biztosítani a néha felbukkanó tudományos kutatások kibontakozásához és serkentéséhez. Az erdélyi körülmények egy tehetséges kutató esetleges elindítására adtak lehetőséget, de pályán tartására már nem. Ilyen társadalmi és kulturális környezetben kezdte meg tevékenységét a magyar tudományos élet két kimagasló egyénisége, Bolyai Farkas, az apa és Bolyai János, a fiú.

1.2. A Bolyai család

A hagyomány szerint a honfoglaló magyarok hét vezére egyikének, az Erdélyt meghódító Töhötöm (vagy Tuhutum) *Bua* nevű ükunokájától származtatják a Bolyai családot. A Bua név időközben alakult Buja majd Bolya hangzásúvá, mely ma is a Bolyai család ősi fészkeének számító erdélyi Bólya település neve. S innen eredeztetik a Bolyai családnevet is. Legalábbis ez olvasható Dávid Lajos (1881–1962) *A két Bolyai élete és munkássága* című könyvének elején, és e szerzőről köztudott, hogy műve megírásakor alaposan átnézte a levéltárak anyagait. Ha esetleg ennek történelmi valósága a hagyományok és legendák ködfelhőibe vész is, azt azért tényként kell elkönyvelnünk, hogy a Bolyaiak Erdély egyik legősibb magyar családja. Legutóbb Oláh-Gál Róbert közölt egy tanulmányt a *Ter-*

mészet Világa 1993. januári számában *A Bolyai-családfa* címmel, melyben a Bolyai-ősöket az 1276-ban született Bolyai Ákosig tudja visszavezetni. A Bólya községben, sajnos már romokban heverő, de ma is látható várkastélyt egyes források szerint királyi adományként kapta az egyik Bolyai a 13. század elején. Vannak viszont, akik azt állítják, hogy ezt valamelyik Bolyai ős maga építette. Mindenesetre egy 1324-ből származó adat szerint a bolyai várkastély akkori urai Bolyai Gáspár és neje, Bethlen Brigitta. A történelmi hagyományok szerint a Bolyaiak vitéz katonák voltak. A család egyik, Bolyai János nevű őse a 17. század első felében tíz esztendeig raboskodott török fogságban, Bolyai Zsigmond pedig a poroszok ellen vívott csatában szívós ellenállás után esett el.

A valamikor tekintélyes nagybirtokos család idővel elszegényedett. A bolyai várkastély is idegen tulajdonba kerül, s a nagybirtok is egyre fogyni kezd, annyira, hogy János nagyapja, Bolyai Gáspár (1732–1804) már csak egy Bólya határában található kisebb birtok tulajdonosa. Bólya annak idején Felső-Fehér vármegyéhez tartozott, a jelenlegi adminisztratív felosztás szerint Széchenyi megyei község. Ezt a hegyek által közrefogott szép fekvésű dél-erdélyi helységet patakok szelik át. Gyönyörű földrajzi adottságait még népdalok is megörökítették. Íme az egyik ilyen népdal szövege:

*Bólya völgye szép helyen van,
Bólya völgye szép helyen van,
Közepében templom is van.
 Templom körül arany csipke,
 Templom körül arany csipke,
 Rá szállott egy búsgerlice.
Ha én búsgerlice volnék,
Ha én búsgerlice volnék,
Babám ablakára szállnék.
 Ott mind azt turbékolnám,
 Ott mind azt turbékolnám,
 Ébren vagy-e kedves babám?
Ébren vagyok nem aluszom,
Ébren vagyok nem aluszom,
Most is rólad gondolkodom.*

A családi vagyont Bolyai Gáspár fiatal felesége, Pávai-Vajna Krisztina (1755–1788) gyarapítja a hozományként kapott és Domáldon található kis 12 holdas birtokkal. Ezt a Marosvásárhelytől nem messze lévő birtokoskát adományozza később Bolyai Gáspár a nagyobbik fiának, Bolyai Farkasnak, míg a kisebbik fia, Bolyai Antal (1778–1845) a Bólyán található földeket örökölte.

Két nagy tudósunk, Bolyai Farkas és Bolyai János életpályája annyira összefonódott, hogy János életéről csak akkor rajzolhatunk elfogadható képet, ha az apára, Bolyai Farkasra is kitérünk.

1.3. Az erdélyi polihisztor

Bolyai Farkas 1775. február 9-én született Bólyán. Még nem töltötte be hetedik életévét, amikor apja, Bolyai Gáspár gazdálkodó és szolgabíró 1781 őszén szekerre rakja fiát és elviszi Nagyenyedre az ottani református kollégiumba. Az a faládika, amelybe akkori utazásakor apró kis cókókjait pakolták, ma is látható a marosvásárhelyi Bolyai Múzeumban. Habár Farkas számottevő anyagi javakat már nem örökölt a szüleitől, de szellemi tehetséget annál inkább. Az akkori Erdély egyik legjelentősebb szellemi centrumában, a nagyenyedi református kollégiumban, kitűnő felfogóképességével és fejszámoló tehetségével hamar magára vonta tanárai figyelmét. A visszaemlékezések szinte egybehangzóan „csodagyereknek” mondják a kis Bolyai Farkast, aki kilencéves korában tetszés szerint feladott témákról latin verseket rögtönzött, valamint többjegyű számokból gyorsan és biztosan tudott négyzet- és köbgyököt vonni.

Visszahúzódó, meditálást kedvelő gyerek volt. Kissé károsan hatott szellemi fejlődésére, hogy tanítói, mint a kollégium büszkeségét gyakran szerepeltették saját, valamint mások szórakoztatására. Az állandó feszültség alatt tartott gyermekagy egy idő után kimerült, és bekövetkezett a szomorú visszahatás. Egy téli szünidőben káprázatai támadtak és mintegy álomképszerűen nappal is maga előtt látta a homéroszi hősöket. Nem ok nélkül nevezte Bolyai János hőhéroknak apja akkori tanítóit.

Tehetségének köszönhetette, hogy Kemény Simon báró felfigyelt rá és 1788-ban, Bolyai Gáspár beleegyezésével, a Farkasnál négy és fél évvel fiatalabb Simon nevű fia mellé vette *mentor*-nak, ami annak idején tanuló társat és oktatót jelentett egy személyben. Így került Farkas Marosvécsre, Kemény báróék kastélyába, majd két év múlva a kolozsvári református kollégiumba. Iskolai tanulmányai mellett más dolgok is érdekelték. „Kolozsvárt sokáig járva rajziskolába – írja Farkas – nagy kedvet kaptam különösen a történelmi képrészhez¹. A professzorom arra unszolt, hogy képíró legyek; de szemem. a lópornak – melyet magam csináltam – véletlen fellobbanásával annyira meggyengült, hogy az orvosok minden jó szemet kívánó életneméről lemondani tanácsoltak.” A marosvásárhelyi Bolyai

1 Festészet.

Múzeumban őrzött két festménye és egy önmagáról készített szénrajza bizonyítja, hogy a festészethez is volt tehetsége.

Közben színészkedéssel is foglalkozott. Egy 1793 májusából fönmaradt színházi plakáton, mely A. Kotzebue *Az indusok Angliában* című vígjátékát hirdeti, a szereplők felsorolásánál olvasható: „Fátzir, egy iffjú indus... Bolyai Úr”. Ezenkívül hegedülni is tanult: zeneelméleti felkészültségét egy zenei tárgyú dolgozata bizonyítja.

Az ifjú Kemény Simonhoz fűződő barátsága révén 1795 őszén vele együtt külföldi tanulmányútra indulhatott. De Farkas már Zilahon lemaradt gyomorbetegsége miatt, és csak a következő év tavaszán utazott tovább. Bécsbe érve a katonai pálya vonzáskörébe került, s ez, amint később látni fogjuk, János életpályájára is kihatással lesz. „A tüzérakadémiára menve – írja apjáról szóló egyik visszaemlékezésében Bolyai Gergely – amint ott a hallgató, de a maguk helyén annál hatalmasabban megszólaló ágyukat és az akadémistákat az előttük nyitva álló Vega felsőbb mennyiségtanával asztalaiknál ülve meglátta, úgy el lőn ragadtatva a katonai pálya iránt, hogy egy lépést sem akart tovább menni.” Azonban „amely nap felesküdtem volna – vallja később Farkas – a már Jénában volt B. Kemény Simon levelét vettem, melyben kért, hogy ha valaha ért a szava előttem valamit, menjek fel, hogy beszéljünk elébb együtt; felmentem, s ott maradtam a báró költségén”.

Farkas 1796 áprilisa körül érkezett Jénába. Úgy tűnik, hogy itt kezdett behatóbban foglalkozni a matematika alapjaival: „A Saale vize mellett sétálva kezdtem kevés szétszórt, homályos mathesisi ismereteimből azt az utat, melyben megvénülve is találom magam” – írja önéletrajzában. Ebben a városban ismerte meg személyesen Friedrich Schillert is.

Jénából Göttingába érve még azon év októberében beiratkoztak az ottani nagy hírű egyetemre, mivel Kemény Simon ennek a jogi karán akarta folytatni tanulmányait. Ez a választás Bolyai Farkas további életéveire is döntő hatással volt. F. K. Seyffernek (1762–1822), a göttingai egyetem csillagászatban professzorának házában, gyakran gyűltek össze diákok, ahol rendszerint tudományos kérdéseket vitattak meg. Ezek keretében gyakran esett szó a geometria alapjairól. Egy ilyen összefüggésben ismerte meg Farkas a nála két évvel fiatalabb Carl Friedrich Gauss (1777–1855) nevű diáktársát. A közös tudományos érdeklődés baráti kapcsolat forrása lett. Bolyai János leírása szerint egyszer, amikor apja a bástyasétányon andalogva előadta Gaussnak a geometria új megalapozására vonatkozó gondolatait, az hirtelen elragadtatásában a következő szavak kíséretében szorította meg kezét: „Sie sind ein Genie, Sie sind mein Freund!”² – Bo-

2 Ön egy zseni, ön a barátom!

lyai Farkas abban a pillanatban talán nem is sejtette, hogy ez az egyébként hallgatóg és elismeréseit szűkmarkúan osztogató húszéves fiatalember néhány év múlva a világ egyik legnagyobb matematikai szaktekintélye lesz, és az utókor a „princeps mathematicorum” (a matematikusok fejedelme) címmel tiszteli meg. Egyre mélyülő barátságukról maga Farkas számol be: „Szakadatlan, csendes munkája után többnyire nálam pihente ki magát. Semmiről sem beszélt előre, sőt már kész dolgairól is hallgatott; csak egyszer láttam rajta némi örömet, mikor nekem adta emlékül azt a kis táblát, melyen a tizenhét oldalú szöget kiszámította”. Ezt a kis táblát Farkas féltve őrizte élete végéig. Gauss itt azt mutatta ki, hogy a szabályos 17 oldalú sokszög megszerkeszthető csak körző és vonalzó segítségével. Ugyanis ez nem lehetséges akárhány oldalú szabályos sokszög esetében, mint például már a szabályos 7 oldalú sokszögnél sem. Ez a felfedezés a 18. század egyik szép geometriai eredménye, s egyben a körosztás általános Gauss-féle elméletének egyik sajátos esete.

Gauss elvitte barátját szüleihez is Braunschweigbe. Ezt a nem éppen rövid utat Göttingából rendszerint gyalog tették meg.

Bolyai Farkas 1799. június 5-én indult haza Göttingából. Barátai és ismerősei, köztük Seyffer professzor is a szomszéd faluig kísérték. „Az elváláskor – írja Farkas – sírva, mint egy gyermek, akaratom ellen mentem vissza, míg erőt vettem magamon; az utolsó tetőről, ahonnan még látszott Göttinga, még egyszer visszanéztem megállva, míg az örök elválás homályában az emlékképe megmaradott.” Pénze alig lévén, egy kalandos és balesettel is tarkított út végén, szeptemberben érkezik Kolozsvárra, ahonnan néhány napi pihenés után utazik tovább Bólyába az édesapjához szüretre. Anyja ekkor már több mint tíz éve halott. Itt Bólyán kapja Keményék Kolozsvárról érkező levelét, melyben felkéri, hogy az elkövetkezőkben legyen a család egyik 14 éves fiú tagjának nevelője. Farkas az ajánlatot elfogadta.

Kolozsvári tartózkodásáról kevés részletet ismerünk. Csupán a Gauss-hoz írt levelei szolgáltatnak egynéhány biztos adatot. Az 1800. április 13-án Kolozsváron kelt levelében tesz említést arról, hogy apja nem sokkal azelőtt érkezett leveléből értesült a Bólyán pusztított hatalmas tűzvészről. Majdnem mindenük leégett, köztük fontos vagyoni irataik is. De Farkas levele még mást is tartalmaz: „Közben én is megégettem magam egy másfajta tűznél. Van itt egy tizennyolc éves magyar lány, aki származásilag egyenrangú velem – és Neked már nem kell magyaráznom, hogy mindketten kimondhatatlanul szeretjük egymást. Nem éppen tündöklő szépség, de szerfelett vonzó, szelíd, nagyon finom lelkű, fortepiánón is játszik, kellemesen énekel kottából és nagyon jó zenei ízlése van. – Sokat foglalkozom vele, most készíték róla egy portrét, e művet be akarom fe-

jezni minél hamarabb, melyet Neked alkalomadtán elküldök. 1802 előtt nem akarok megházasodni, körülményeim (főképpen az írt tűzvész miatt) nem engedik... Képzeld csak el azt is, amióta ez az ügy tart, többet foglalkozom poézissal, mint matematikával; oly sok verset költöttem (magyarul), hogy egy egész könyvecskét kitenne.”

Bolyai Farkas azonban nem várta meg az 1802-es esztendőt.

Ugyanis a levélben említett lánnyal, Árkosi-Benkő Zsuzsannával (1780–1821), 1801. szeptember 28-án Kolozsváron, a Farkas utcai református templomban házasságot kötött. Az esküvő után a fiatal pár Domáldra költözik, ahol Farkas azonnal nekifog kis birtokának teljes rendbetételéhez. Természetszeretete és a szép iránti vonzalma arra ösztönzi, hogy valóságos kis parkot teremtsen az egyszerű falusi kertből. Eltéríti a patak vizét, hogy kertjén keresztül folyjon, vízesést tervez, virágokat ültet, falusi házát rendbe szedi, gyümölcsfákat telepít és új termelési módszerekkel kísérletezik.

1802 végén, amikor a gyermekük születését várták, Kolozsvárra utaztak. Itt született 1802. december 15-én kisfiúk, János. Farkas apósának, Benkő József kolozsvári kirurgusnak egyemeletes háza, melynek egyik emeleti szobájában a legzseniálisabb magyar matematikus meglátta a napvilágot, csak néhány lépésre van Kolozsvár főterétől.

Ahogy kitavaszkodott és lehetségessé vált a kisgyermekkel való utazás, visszatértek Domáldra immár hárman. Az esemény hatása alatt levő apa, mindjárt megérkezésük után a domáldi kisbirtokon nyírfacsemetéket ültet – „János születésének emlékoszlopait”, ahogyan Farkas nevezte.

Farkas viszonylag elég csendes és magányos domáldi életét nemsokára különös esemény zavarta meg. 1804 februárjában, az akkori szép szokásoknak megfelelően diákküldöttség kereste föl azzal a céllal, hogy az erdélyi református egyházkerület főkonzisztóriumának határozata alapján meghívja őt a marosvásárhelyi kollégium matematika–fizika–kémia tanzéskére professzornak. Farkas, akinek kemény munka után sikerült rendbehoznia domáldi gazdaságát, egy ideig ingadozott elhatározásában, de végül elfogadta a meghívást. Áprilisban beköltözött Marosvásárhelyre és május negyedikén tanári székfoglaló beszédét is megtartotta. Ezt a várost többé nem hagyta el, itt élte le életének még hátralevő 52 esztendejét egy szerény, még az akkori viszonyok polgári ízlésének is alig megfelelő tanári szálláson, a mai Bolyai, az akkor Nagyköznek nevezett utcában. Ez, a minoriták templomának szomszédságában épült ház, amelyben Erdély és a magyarság akkori szellemi életének egyik legkiválóbb művelője több mint egy fél évszázadon át lakott, és amelyben fia, Bolyai János a gyermekeveit töltötte, már nincs meg. A 20. század elején, a mai Köteles Sámuel utca megnyitásakor könnyelműen lebontották.

Negyvennyolc esztendőn át ebből a hajlékból indult el mindennap professzor Bolyai a lakásával szemben levő kollégiumba. Itt írta a *Tentamen*-t és az összes többi értékes művét, itt folytak le Farkas és János lázas tudományos vitái, s itt hunyta le örökre a mindig oly élénk, mélytűzű szemeit. Csak az 1906-ban épült új ház homlokzati falára elhelyezett emléktábla szavai juttatják eszébe az arra járóknak, hogy e helyen állott az a zsin-delyfedelű ház, amely valamikor a Bolyai család hajléka volt.

Meglehetősen szűkös, szinte nyomorúságos tanári fizetését a kollégium azzal próbálta pótolni, hogy a ház mellett egy nagyobbacska kertet is a rendelkezésére bocsátott. Itt is azonnal hozzálátott a kertészkedéshez. A virágágyások és veteményestáblák mellett megjelentek a szilva-, alma- és más gyümölcsfák.

Egy professzor rangját és tekintélyét már annak idején is nagyban növelte az, ha irodalmi vagy tudományos eredményeket tudott felmutatni. Új foglalatossága most már határozottan elősegíti visszatérését diákkori szerelméhez, a matematikához. Mindenekelőtt a párhuzamos egyenesekről szóló töprengéseit foglalja össze, melyről annak idején Göttingában is sokat tárgyalt. Az erről írt első próbálkozásáról, melyet 1804 őszén küldött el Gaussnak, az elkövetkezőkben még megemlékezünk. Amint látni fogjuk, e dolgozatába, melyben megkísérelte bebizonyítani Eukleidész párhuzamossági axiómáját, hiba csúszott, amit Gauss éles szeme azonnal észrevett, és ezt válaszlevelében tudatta barátjával. A felfedett hibát kiküszöbölni igyekvő második dolgozatát sem koronázta siker, amin nincs mit csodálkozni, hiszen úgy, ahogyan Farkas a problémát maga elé kitűzte, megoldhatatlan. Emberileg is megrázóak a helyes megoldást nem lelő, de ugyanakkor a téma izgató varázsától elszakadni képtelen tudós tépelődései. Ez a gyötrő sikertelenség is közrejátszott abban, hogy Farkas az irodalom felé forduljon, mely érdeklődése nem egészen új, hiszen a Gaussnak írt levelében már említette, hogy egy kötetre való verset írt.

Első irodalmi munkáját 1817-ben Szebenben jelenteti meg, *Öt szomorú játék* (írta egy hazafi) címen. Az öt színműve a következő: *Pausániás, vagy a nagyravágyás áldozatja; Mohamed, vagy a dicsőség győzelme a szerelmen; Kemény Simon, vagy a hazaszeretet áldozatja; A virtus győzelme a szerelmen; A szerelem győzelme a virtuson.*

1818-ban Marosvásárhelyen újabb színműve jelent meg, *A párisi per*, mely „érzékeny játék” előszavában megemlíti, hogy van még két „valószínűbb és szerelemmel nem hígított” tragédiája, melyeket most főleg a nyomdai költségek miatt nem tud kiadni.

Szépirodalmi munkái közé sorolhatjuk műfordításait is. E fordítások azonban nem tekinthetők hiteleseknek, mivel itt-ott új gondolatokat told be, amelyek az eredetiben nincsenek meg, de amelyeknek a kifejtését ő

szükségesnek tartja. Angolból lefordítja Pope *Próba-tétel az emberről* (Essay on Man) című tankölteményét. Ezt a fordítását, melynek toldalékában még Milton, Thomson, Gray és Schiller néhány versének a fordításai is szerepelnek, 1819-ben nyomtatta ki Marosvásárhelyen „a református kollégium betűivel”.

A Tudós Társaság (Magyar Tudományos Akadémia) 1832. március 9-én levelező tagjává választja Bolyai Farkast. Nagyrészt ennek az eseménynek a hatására írja meg néprajzi tárgyú tanulmányát, mely 1834-ben a *Tudománytár*-ban jelent meg *Marosszéki lakodalmi szertartások* címen.

Az 1820-as évek elején arról értesült, hogy az erdélyi kamarai erdők főfelügyelői állása megüresedett. Követelmény volt, hogy a leendő főfelügyelő ismerje azokat a nyelveket, amelyeket az Erdélyben élő nemzeti-ségek beszélnek, valamint az erdészeten kívül bizonyos matematikai ismeretekkel is rendelkezzen, mivel hatáskörébe tartozott a két utóbbi tantárgy tanítása is a szebeni erdészeti iskolában. A rendkívül jól javadalmazott állás elnyerése érdekében három különböző helyre ad be folyamodványt. A hét nyelvet ismerő Bolyai Farkas egyedül az erdészeti szak tudását igyekezett még emelni. Saját bevallása szerint több mint negyven erdészeti szakkönyvet tanulmányozott át. Ezek után ő maga is írt egy erdészeti szakdolgozatot, melyet ránk maradt kézíratai alapján csak 1911-ben jelentettek meg nyomtatásban *Bolyai Farkas erdészeti csonka munkája* címen, ugyanis a kézirat utolsó részét nem találták meg. A témában jártas kutatók véleménye szerint ez volt az első magyar nyelven írt erdészeti szakmunka. Végül is az állást nem ő kapta meg a rengeteg pályázó közül.

Kétségtelen, hogy munkásságának legjelentősebb részét matematikai tevékenysége képezi. Amellett, hogy ő is felsorakozott azok közé, akik két évezreden át próbálkoztak az euklideszi párhuzamossági axióma bizonyításával, több értékes meglátással és eredménnyel gazdagította matematikai ismereteinket. Legjelentősebb matematikai munkája a *Tentamen* két kötete, melyek 1832-ben illetve 1833-ban hagyták el a kollégium nyomdáját. De azelőtt és azután is több matematikai művet jelentetett meg. Ezeknek itt csak egyszerű felsorolására szorítkozunk; a művek kivétel nélkül a marosvásárhelyi kollégium nyomdájából kerültek ki: *Az aritmetika eleje* (1829/30); *Arithmetikának, geometriának és physikának eleje* (1834); *A Marosvásárhelyt 1829-ben nyomtatott aritmetika elejének részint rövidített, részint bővített, általában jobbított, s tisztáltabb kiadása* (1843); *Arithmetika eleje kezdőknek* (1850); *Úrtan elemei kezdőknek* (1851); *Kurzer Grundriss eines Versuchs...* (1851).

A párhuzamosok elméletének tisztázásáért kifejtett erőfeszítésein kívül – melyek során több helyettesítő axiómát talált –, igen jelentősek az ana-

Lízisben a sorok konvergenciájára vonatkozó vizsgálatai, bizonyos típusú algebrai egyenletek megoldására vonatkozó algoritmusa, valamint a sokszögek átdarabolhatóságából eredő végszerű területegyenlőség fogalmának a bevezetése és az ezzel kapcsolatos tétele.

Amikor arról értesült, hogy Bécsben egy bizottság a takarékosabb és jobb hatásfokú kályhák problémájával foglalkozik, ő is nekifog a gazdaságosabb kályhák megtervezéséhez és előállításához. Később, ezek a rendkívül leleményesen megépített úgynevezett „Bolyai-kályhák” Erdély-szerte híressé váltak.

Gyakorlati és technikai adottságai más téren is megnyilvánultak. A marosvásárhelyiek elképédésére egy régi szekerét szekérszobává alakította át, melyben még főzőkályha is volt, és ezzel ment kirándulni. Gyógyszerek készítésével, állatgyógyászati kérdésekkel, borkezelési problémákkal is foglalkozott. Ezekkel kapcsolatban gyakran keresték fel őt nemcsak Marosvásárhely, hanem a környék lakói is. Sokoldalú felkészültségét mindenhol ismerték. Az akkori feljegyzésekből és visszaemlékezésekből arra következtethetünk, hogy Bolyai Farkas köztisztelőben álló, népszerű ember volt. Bedőházi János, a Bolyaiak egyik életrajzírója, Farkas kortársainak elbeszélései alapján így jellemzi az öreg tanárt:

„Ha képet akar képzeletünk festeni róla, mindig az a középtermetű, szikár, hosszúkás, beretvált, nyájas arcú, kissé meggörnyedt öreg ember alakja áll előttünk kétfelé választott, vállaira omló hosszú fehér hajával, ajkai körül a mélabú, a szelíd bánat sajátságos vonásával, villogó mélytűzű szemeivel. Amint megjelen katedráján fekete, kissé kopottas ruhájában, hosszú szárú csizmákban, vállain kékes színű hosszú köpenyben, kezében széles karimájú kalapjával; mintha hallanók köhécselését, rekedtes hangját, amely az előadás tüzeiben átmelegedve visszanyeri csengését; vagy amint otthon gondolataiba vagy számjaiba merülve asztala előtt ül fehér flanel ujjasában, szemén a zöld ernyővel; mintha látnók tollának izgatott futását a papíron, mialatt betűi, keze nem tudván gondolataival versenyt haladni, alig olvasható sorokká alakulnak.”

Az évek múlásával érezte, hogy életereje is gyengül. 1851 októberében nyugdíjaztatási kérést nyújtott be a kollégium előjáróságához és a református főkonzisztóriumhoz, mert amint írja: „közel félszázados hivatalomat eréllyel folytatni elégtelennek érzem magamat... Fogyaték időmet és erőmet nem fogom hiába tölteni: nyomtatásaimat, míg lehet, folytatva s különösen a tanulni kívánókat ingyen tanítva s az igazságnak utolsó órámig hív apostola maradván. Sok jó tanítványaim hosszú sorára örömmel nézve vissza, búcsúszom azzal a reménnyel, hogy ha egy gyertya nem hozta fel a köznapot, az egymást gyújtottak sora hozza fel, hogy az a tan, amely az ekeket vezeti, közérdekű legyen”.

Nyugdíjba vonulása után még öt évet élt. 1856. november 20-án halt meg és a marosvásárhelyi református temetőben helyezték örök nyugalomra.

Ő maga is tudatában volt szerteágazó érdeklődésének. Ezzel kapcsolatban a halála előtt írt *Jelentés*-ben az alábbi vallomását olvashatjuk: „betegem s az élet gondjaitól s sok más keresztektől elnyomottan sokfelé oszlottan, egyre sem elég erővel, még a [mathesis] tan alapossága iránti szenvedélyért is sokaktól megfeszítetve, többet nem tehettem; bocsánat minden felől!!”

1.4. Bolyai János életútja

Koncz József (1829–1906), aki Bolyai Farkas halála pillanatában annak betegágya mellett tartózkodott, *A marosvásárhelyi Ev. Ref. Kollégium története* című vaskos művében hosszasan emlékezik meg egykori professzoráról. Visszapergetve az elmúlt éveket és felelevenítve a régi tanórákat, az alábbi eseményről is említést tesz: „Tanítványait holdvilágos tiszta estéken elvitte a vártemplom előtt levő magaslatra, s ott tanította csillagászatra, s nemcsak tanítványait, hanem az oda mintegy csudálkozásra csoportosan tódult nagy tömeget. Csak éjfél felé ért véget ilyenkor az érdekes tanítás. A Földről tanításával az egekbe felszállott tanár kísérő tömegét is magával ragadta, s nehezen bírta megválni kedves tantárgyától, s leszállni fényes csillagaitól a Föld porához”.

A mai kivilágított és szennyezett városi légrétegektől távol, ahol felhőtlen éjszakákon még tisztán láthatók a szikrázó fényű csillagok, csodálatos tudom szemlélni, a világmindenség egy szeletét tükröző csillagos égboltot. Ilyenkor gyakran eljátszadózom azzal a gondolattal, mely szerint a látható csillagokat nemzetünk egy-egy tudósával próbálom azonosítani úgy, hogy tudósi nagyságát a csillag fényessége érzékeltesse. Bolyai Jánosnak a születési és az elhalálozási dátuma is téli hónapokra esik. Mint ha a véletlen játéka lenne, hogy a mi tájainkon éjszakánként pont ilyenkor, vagyis télen látható az égbolt legfényesebb csillaga, a Szíriusz. Többek között ez is befolyásolta bennem azt a képzettársítást, hogy az így elképzelt magyar tudománytörténet csillagos egén a Szíriusz a legzseniálisabbnak vélt tudósunk, Bolyai János jelképe.

Magának a képzettársításnak effajta gondolata Bolyai esetében távolról sem számít újdonságnak. Ugyanis János születésekor a Gaussnak címzett levelében maga Bolyai Farkas már él ezzel az elképzeléssel. Éppen akkoriban, a 19. század első napján, 1801. január elsején Piazzí olasz csillagász felfedezte az első kisbolygót, a Cereszt. Piazzí – részben a közbejött betegsége miatt is – nemsokára elveszítette szeme elől a gyenge fényerejű kisbolygót, de Gauss számításai alapján pont felfedezése első évforduló-

jának napján sikerült újra megtalálnia azt, mely esemény nagyban növelte a kiváló német matematikus hírnevét. Bolyai Farkas az újságokból szerzett tudomást erről a dologról. 1803. február 27-én, a fia születése utáni első Gausshoz címzett levelében a következőket olvashatjuk:

„Tudósíts röviden egy postai levélben (mert itt semmihez sem jutok hozzá) a Ceresz pályájára vonatkozó fontosabb és szebb számításaidról, valamint az egésznek vázáról. Eközben én is adtam egy új planétát a világnak, de ennek sem középpontját, sem pályáját meghatározni nem tudom. 1802. december 15-én Isten egy szép fiúgyermekkel ajándékozott meg, akit Jánosnak kereszteltünk [...] itt van mellettem, égő sötétkék szemével rám mosolyog és sírom szélén deres koromra vigaszt ígér – hála Istennek, egészséges, nagyon szép gyermek, vonásai finomak, haja és szemöldöke fekete, égő sötétkék szeme úgy ragyog mint két drágakő; ennyiben anyjára hasonlított, egyébként rám is sokban, és nagyon mozgékony természet. Lelki képességei gyorsan kezdenek fejlődni, még három hónapos sincs s már érti szívem tónusát: ha lehanggoltan szomorú dolgokról beszélek sírásra, ha fennköltől beszélek ámulatra, mulatságosokról szólván örömujjongásra, madárcsicsergésre hasonló csacsogásra késztetem.”

A gondoktól sem mentes öröm hatása alatt levő apa kisleány arcvonásaiban és lelki megnyilvánulásaiban fürkészi annak jövőjét. Vajon mikre gondolatott akkor Bolyai Farkas? – nehezen hihető, hogy éppen arra, amit a korabeli körülmények kialakítottak később János számára, mivel az előtte álló életpálya nem sok örömet rejtett magában. Ezt a tragikus sorsú embert nagyon sok méltatlanság érte életében. Részben talán ezzel is magyarázható az a temérdek irodalmi alkotás, amely életéről, s főleg annak egy-egy megrázó mozzanatáról megjelent.

Farkas az elkövetkező években is figyelemmel kísérte fia fejlődését. 1807. december 18-án írt levelében, megint említést tesz Gaussnak Jánosról:

„Családom első szülöttemből áll (egy lányom meghalt),³ értelmes szép gyermek, jó kötésű, öt éves, még nem tanítom, de játékból az égbolt sok csillagát megtanulta, és az egyszerű geometriai alakzatokat és azok tudományát ügyesen alkalmazza, mint például: egyedül lerajzolja krétával a csillagok állását a csillagképekben. Egyszer, még a múlt télen egy burgonyát faragott és felkiáltott: »Hé! Táti, mit találtam, pityóka!⁴

3 János húga, Anna.

4 A burgonya székelyes megnevezése.

arcusnak pityóka szinuszát«, és úgy is volt. Máskor pedig falun, amint a Jupitert megpillantotta, azt kérdezte: »Hogy van az, hogy a városból és innen is látszik? Akkor úgy-e messze kell legyen?« – ismét három távol eső helységről, ahol járt, azt kérdezte tőlem, hogy egy szóval jellemezzem, ahogy elhelyezkednek; én nem tudtam felelni. Akkor azt kérdezte újból: »Egy vonalba esnek-e?« – mondom, hogy nem; s akkor megszólal: »Hát akkor háromszög!« – és sok ehhez hasonló. Nagyon szeret olóval papírt farigcsálni; egyszer egy háromszöget vágott ki, derékszögűt, és bár én soha nem beszéltem neki a háromszögek fajtáiról, azt mondta: »Ez a háromszög olyan, mint egy derékszögű négyszög fele.«

Ha jól meggondoljuk, ezek a megjegyzések egy csupán ötéves gyermek szájából a térviszonyok fantasztikus érzékelésére valamint kitűnő geometriai meglátásaira utalnak. Apja további feljegyzéseiből tudjuk, hogy ebben az időben nem csak ezek voltak az egyedüli ilyen természetű megfigyelései, de ugyanakkor Farkas nagy gondot fordít arra, hogy gyors szellemi fejlődése mellett a fizikai fejlődése sem maradjon el, hogy „egyen-súlyban maradjanak az erők, testvériesen együtt haladjanak, egyik se legyen a többi zsarnoka”. Ilyen szempontból is említést tesz Gaussnak az előbb említett levelében: „testét kiváltképp gyakorlom, kicsi ásójával ügyesen műveli meg a földet”.

Gyermekkorára visszaemlékezve János később ezt írta:

„Mikor körülbelül 3 éves koromban beszélni hallottam arról, de minden közelebbi magyarázat nélkül, hogy a világnak, ami alatt akkor csak a Földet értettem, nincsen vége, azt gondoltam, ha a Földnek, melynek a mélység felé a végtelenbe terjedőnek képzeltem, vége is volna, azaz széle volna, legalább rajta túl mégis valami végtelen mennyiségnek, azaz üres térnek kellene lennie; és így a térről már én alkottam saját magamnak valami fogalmat.”

Apja, látva fia rendkívüli gyors felfogóképességét, s okulva saját gyermekkorának tapasztalatain, óvakodik attól, hogy igen korai szellemi fejlődését erőltesse. Ilyen irányú pedagógiai elvét egyik kedvenc hasonlatával érzékeltette: „Egy maga idejében esett mag a késő vénségig terem, az egymásra tett vetésből semmi sem lesz”. Emiatt az elején csak néhány odavetett útbaigazítás alapján próbálja kisfia érdeklődését és ismereteit helyes irányba terelni. De ez is elegendő volt arra, hogy hat éves korában, szinte észrevétlenül, megtanuljon olvasni. Hétéves korában hegedűt adnak a kezébe és egy pár német szóra is megtanítják, de rendszeres oktatását csak kilencéves korában kezdik meg. Ekkor is csak a szülői háznál, az

apja által kiválasztott legjobb felső osztályos diákok foglalkoznak vele. Előbb Vajda Dániel, majd Szilágyi József az ilyen házitanítója. Többek között a házi tanítói alapozták meg János későbbi kitűnő és tömör latin stílusát. A matematika oktatását azonban Farkas senkinek sem engedte át, hanem ő maga végezte. Nem is tehetett mást, mert János tanítói nem tudtak volna lépést tartani vele ezen a téren. A gyermek leggyorsabban a matematikában és a zenében fejlődik. János vallomása szerint: „Nemsokára megtanultam Euklidész első hat könyvét. Később apám áttanulmányoztatta velem Euler algebrájának elejét, bezárólag a harmad- és negyedfokú egyenletekig. Azután átvettem Vega matematikájának és Döttler fizikájának nagy részét”. Fiának gyors előrehaladásáról a matematikában Farkas így ír: „A feladatok megoldását pillanatok alatt átlátja és utána mint az örök szökik elémbé és sürget, hogy menjek tovább”.

Zeneszerzési próbálkozásairól szintén az apja ír: „tízestendős korában komponálva és leírva találtam valami Adagio s Allegrókat, melyekben mind volt valami, nem csak gondolat, hanem mélyecske érzés is”. Kitűnő és szenvedélyes muzsikos volt egész életében s ahogy maga is vallotta: „a zene nem untatik meg soha”.

Körülbelül tizenkét esztendő s korától fogva volt rendes tanulója a marosvásárhelyi kollégiumnak. Egy különböző módon megítélhető följegyzés szerint inkább ostáblázni járt a kollégiumba, mint az órák kedvéért, de ennek ellenére mindenből kitűnően vizsgázik. Az akkori kollégiumokban szokásos „rigurózumot” 1817. július 30-án teszi le, mint első a rangsorban, és ezzel hivatalosan is deákká lépett elő. Hiteles tájékoztatásként idézzük Farkasnak az 1817 augusztusában fiáról írott egyik följegyzését:

„A tudományok és különösen a matematika tanulására nagy hajlandósága van. A muzsikában s különösen a hegedülésben virtuóz lehet. A rajzolásra is van kevés tehetsége. A költészetben, nem vettem semmiféle hajlandóságát észre. Meglehet, hogy ezután lesz. A nyelveket könnyen tanulja. Ezek mind természeti ajándékok.

Szép ítélőtehetsége van mind az emberek közt, mind egyebekben. Nem formátlan. Hangulat embere, úgyhogy tanulásbeli kötelességét némelykor nem teljesíti, máskor pedig reggeltől estig egyfolytában tanul, egészsége kárával is; mely hiba. Némelykor igen hipochondricus, máskor borúlátó olyan okból is, amit más nem lát. Szeret másokat székírozni, úgyhogy ritka az az ember, akivel nem jó össze. Ez éretlenség. – Némelykor engedetlen, kivált az anyjának, mely a nevelés hibája. De mindezt megjobbíthatja, ha akarja. Másokat nem rágalmaz; ha jót nem tud valakiről mondani, akkor semmit sem mond. Nem hazug. Az

igazságot nem engedi, mely nem prudencia. Szánakozó, még akkor is, amikor nem segíthet.

Háládatos. Senkit hibájáért nem utál. Jóságú. Haragos, amíg elfelejti a megbántást”.

Többször megtörtént, hogy kisebb korában az apja magával vitte a nagydiákoknak tartott előadásaira. Sőt, egyes kortársaik vallomásai szerint néha az is megesett, hogy ha apja betegség miatt hiányzott, ő tartotta meg a felső osztályos diákoknak a matematikai előadásokat. Ehhez még azt is hozzáfűzték, hogy egyszerű, lényegét kidomborító és világos magyarázatait sokkal jobban megértették a diákok, mint apja túlfűtött szavakkal körülcikornyázott előadásait.

Farkas látva fia tehetségét, egyre jobban melengette magában azt a tervét, hogy további szakmai irányítására ifjúkori barátját, Gausst kérje meg. A kis Bolyainak már kezdettől fogva úgy emlegették Gausst, mint apjának legbensőbb barátját, mint a német hon óriását, aki egyben a világ legnagyobb matematikusa. Gauss képe ékesítette Bolyai Farkas dolgozószobájának falát, és bizonyos, hogy ez az értelmes kisgyermek apja szobájába lépve égő sötétkék szemével gyakran megcsodálta e szellemóriás arcvonásait. A Bolyai családban Gausst nagy tisztelet övezte annak ellenére, hogy Farkas 1808. december 27-én írt legutóbbi levelére sem válaszolt. Bolyai Farkas mindenestre nehéz szívvel ülhetett le 1816. április 10-én, hogy megírja – a Bolyaikkal foglalkozó irodalomban rendkívül sokat kommentált – újabb balsikerű levelét. A levél kezdeti sorainak hangneme is elárulja, hogy milyen nehezére esett Farkasnak az írás.

„Kedves Gauss!

Emlékszel-e még erre a hangra, amely Hozzád szól? Tekints vissza a Te gazdag őszödből a virágos tavaszra! [...] lehulltak a virágok [...] és mi egyenlőtlenek lettünk. Mindazonáltal remélem, hogy egyformák is maradtunk, nemsokára elér az örökkévalóság tavaszának ezüst másodvirágzása; és mi ismét találkozunk (azonnal megírom tervemet fiammal), [...] és akkor majd különválasztom az én húszesztendőss Gaussomat az azóta újabb hús esztendő alatt messze magasan az én nívóm fölé nőtt óriástól, akit örömet átengedek a hozzá hasonló óriásoknak, magamnak csupán azt kérve, aki annak idején az enyém volt.

Fáj, hogy legutóbbi levelem felelet nélkül hagyta. [...] Mintha meghaltunk volna egymás számára. Hadd visszasütni a tavaszi napot a közelgő öregség jegére! [...] És ha már morajlanak is a végtelen óceán közeli hullámai, hadd, hogy még egyszer üdvözljük egymást az Elutazás

előtt. »Viszontlátásra Elizium ligeteiben!« – emlékszel, hogy énekeltük ezt? Énekeljük el még egyszer! és ha megismerem ismeretlen feledet, másodszor is testvéremmé leszel [...] Halljad tervemet!

Az én ($13 + \frac{1}{4}$) esztendőös fiam kilencedik esztendejébe lépve egyebet nem tudott, csak németül és magyarul beszélni és írni, kottából meglehetősen hegedülni. [Matematikából] Euklidésszel kezdtem, azután megismerte Eulert, most már Vegának (ami kollégiumi előadásaim kézikönyve) nem csak az első két kötetét tudja teljességgel, de járatos a harmadik, negyedikben is, kedveli a differenciál- és integrálszámítást és rendkívüli készséggel és könnyedén számol velük, amely könnyedén vezeti a vonót a hegedűconcertók nehéz futamaiban [...] most nemsokára befejezi fizikai és kémiai előadásaimat; egyszer felnőtt tanítványaimmal együtt nyilvánosan igen dicséretesen vizsgázott ezekből latinul, ahol egyrészt a jelenlévők közbevágva kérdezték, másrészt én csináltattam vele integrálszámítással néhány mechanikai bizonyítást, példának okáért a változó mozgásra, a cikloid tautochronizmusára stb. nézve. Minden tekintetben megfelelt; nemes egyszerűsége, világossága, gyorsasága és könnyedsége az idegeneket is elragadták; gyors esze van és sokat felfog, és olykor lángesze villanásainál több sort egyetlen pillantással tekint át; kedveli a tiszta, mély elméleteket és a csillagászatot; szép és meglehetősen izmos, egyébként csendesnek tetsző, kivéve, hogy nagy kedvvel és tüzesen játszik más gyerekekkel; amennyire megítélhetem, kemény és nemes jellemmé válik; én a Matematikának szántam őt, ő is ennek szentelte magát, és két esztendő múlva Rád volna szüksége, ha Te is óhajtasz az Igazságnak egy valódi apostolt nevelni egy távoli országba; három esztendeig szeretném Nálad tartani, és ha lehetne (híven és őszintén megfontolunk minden körülményt) a Te házában, mert egy 15 esztendőös ifjút nem lehet magára hagyni, és egy nevelő vele küldése meghaladja számos per gyengítette erőmet; mindazáltal egy innen felinduló diákra mégis rábízhatnám, akinek honoráriumot fizetnék, ha találnék olyat, akihez ennyi bizalmam lehetne. Feleségedet költségeiért persze kártalanítanám. Mindent eligazítanánk, amidőn vele Hozzád mennénk. E tervekre vonatkozóan tudósíts őszintén...”

Levelében ezután Bolyai Farkas aprólékosan érdeklődik Gauss családi viszonyairól, a legújabb göttingai eseményekről, valamint arról, hogy még mikre oktassa fiát. A levél elküldése után kevesen lesték oly izgalommal a postát, mint a két Bolyai. Hetek és hónapok teltek el, de válasz most sem érkezett. Rengeteg pro- és kontra-vélemény született ezzel az eseménnyel kapcsolatban a Bolyaiakról szóló irodalomban. Egyesek (pl. Bedő-

házi János) azt állítják, hogy Gauss azért nem válaszolt Farkas levelére, mivel akkor a göttingai új csillagvizsgáló berendezésével volt elfoglalva, valamint családi körülményei (első feleségének halála néhány évvel ezelőtt, második feleségével akkor várták az újabb gyerekük születését) gátolónak hatottak. Mások pedig (pl. Schlesinger Lajos) azt hozzák fel, hogy Bolyai Farkas levele túlságosan bizalmas hangú volt – sőt egyes helyeken sértő is, amikor Gauss belső családi viszonyairól érdeklődik – és így, nem annyira Gausst, mint inkább Bolyai Farkast kell elmarasztalni. Sajnos ebben is van valami igazság, mivel ilyen balsikerű mondatokkal nemcsak a mostani, hanem az 1808. december 27-én kelt levelében is találkozunk. S végül olyanok is akadnak, akik kimondottan Gausst bírálják (mint például Alexits György vagy Cselényi Béla).

Ha tárgyilagosan és emberségesen próbáljuk kezelni ezt a kérdést, oly módon, hogy minden körülményt mérlegelni próbálunk, akkor valahogy arra a megállapításra jutunk, hogy az előállt szerencsétlen helyzetért végeredményben nem annyira Bolyai Farkas és nem annyira Gauss, hanem sokkal inkább a korabeli Erdély társadalmi körülményei okolhatók. A kulturális elmaradottság, a fejletlen és nyomorúságos anyagi körülmények miatt olyan tehetségek számára sem volt továbbtanulási lehetőség, mint Bolyai János. Egy valóban ígéretes tehetség kibontakozása – hacsak nem volt gazdag család gyermeke – a legtöbb esetben valamely mágnás vagy főpap jóindulatától függött. Bolyai Farkast nehéz pénzügyi helyzete kényszerítette erre a lépésre, és Gaussról sem tudhatjuk pontosan, hogy – az akkori szokások ellenére – milyen mértékben ragaszkodott a legkisebb zavaró körülménytől is mentes családi környezethez. Úgy tűnik, fájdalmas csalódása ellenére Bolyai Jánosnál találjuk meg ennek a dolognak elfogadhatóbb magyarázatát és megítélését, melyet közvetlenül apja halála után vetett papírra:

„Egy olyan eseményt eleveníték fel, amely gyermekkoromban történt. Mivel a matematika iránt különös hajlandóságot mutattam, apám Gaussnak ajánlott, hogy engem esetleg magához vegyen, hogy ott az ő közelében és környezetében képességeim minél jobban fejlődjenek, mely alkalommal apám egyben egy nagy, szép tájékoztatót küldött neki ajándékba. Valószínű azonban, hogy Gauss az ajánlatot sem elfogadni sem visszautasítani nem akarta; – az elsőt, tekintve a tanítástól való idegenkedését nem csodálom, minthogy az én csekélységem is különös eseteiktől eltekintve, végtelen idegenkedéssel viseltetik iránta; az utóbbi pedig, ti. apám kérésének a megtagadása viszonyukat nyomasztóvá, vagy legalábbis kényelmetlenné tette volna. – Szóval Gauss jobbnak látta, hogy ettől az időtől fogva a válasszal adós maradjon és folytassa a

hallgatást 1832 tavaszáig... és csak ezután fejlődött ki újbóli levélváltás a két kolosszus között. Bolyai Farkas teljesen egyenrangú Gausszal. Mindent összevéve, egyetlen halandó sem lehet tökéletes. Farkas munkássága sem kevésbé fontos, és előnyösebbnek tartom, hogy inkább az utóbbinak a vezetése alatt álltam, mint a Gaussé alatt, mert Gauss sohasem csepegtethette volna belém a matematika, és még kevésbé a filozófia iránti tiszta lelkesedést, és egyáltalán nem lett volna képes önképzésemnek legkedvesebb és legjobb részeihez úgy járulni hozzá, mint Bolyai Farkas."

Nem kétséges, hogy van egy kis elfogultság ezekben a sorokban a nemrég elhunyt apa iránt, de tény, hogy helyes meglátásokat is tartalmaz. Még meg kell jegyeznünk itt, hogy az a fiú ír apjáról ilyen szépen és hálásan, akit egyes pletykagyűjtő, felületes, a lélek mélyét alig vizsgáló életrajz-írók olyan rossz és sötét színben tüntetnek fel.

Ahogy telt az idő, úgy gyengültek Farkas reményei, hogy János a nagy Gauss irányítása alatt majd Göttingában folytathatja tanulmányait. Be kellett látnia, hogy túlbecsülte a kettőjüket összekötő baráti szálak teherbíró képességét. Amikor egy év elteltével sem érkezett válasz, kénytelen volt új terveket latolgatni. Így arra is gondolt, hogy fiát a pesti vagy a bécsi egyetemre küldi. Azonban megítélése szerint az egyik felsőoktatási intézményben sem működött olyan matematikus, aki Jánosra hatással lehetett volna, és ebben az esetben továbbra is ott voltak a pénzügyi gondok. Maradt tehát az a nem éppen szerencsés választása, hogy fiát a bécsi katonai Akadémiára iratja be. Ennek egyik indítóoka kétségtelenül az volt, hogy fiatal korában – amint már említettük – volt egy időszak, amikor ő maga is ott szeretett volna tanulni, a másik pedig az, hogy reményei szerint a katonai oktatáshoz hamarabb kap pártfogót, mint valamilyen tudományegyetemen való képzéshez. Döntéséhez hozzájárult az is, hogy véleménye szerint az elérhető főiskolák közül János talán itt részesülhetett a legalaposabb matematikai oktatásban. Kétségtelen, hogy itt a matematika oktatására elég nagy gondot fordítottak, de a tananyag csak arra szorítkozott, ami egy hadászati mérnöknek feltétlenül szükséges. Ez pedig távolról sem emelkedett az akkori matematika kutatási területeinek szintjéig. Ráadásul sok olyan tárgyat kellett még tanulni, amelyeknek semmi köze sem volt a matematikához, mint például: harcászat, katonai levelezés, erődítéstan, cseh nyelv, stb. Ami pedig a tanulás költségeit illeti, a katonai Akadémia paradox módon még a göttingai egyetemen való tanulás kiadásait is túlszárnyalta.

Szinte megalázó kilincselések után végül is 1818-ban báró Kemény Miklós, a marosvásárhelyi kollégium Kolozsvárt élő főgondnoka elvállal-

ta János taníttatási költségeinek fedezését. Ezek pótlásához némileg báró Kendeffy Ádám is hozzájárult, aki már 1816 tavaszán ígéretet tett, hogy a Göttingába utazáshoz anyagi segítséget nyújt.

A bécsi katonai (vagy ahogy még nevezték: hadmérnöki) Akadémia hét évfolyamos volt. Az utolsó év, amelyre felvételi vizsga alapján jelentkezőket még fölvettek, a negyedik évfolyam volt. Farkas arra számított, hogy János felkészültsége alapján egyenesen az ötödik évfolyamra jelentkezhet, és így egy évvel lerövidül a tanulmányi időszak, ami anyagilag sokat számít. A minimum négy évet azonban a katonai kiképzés szempontjából az Akadémia vezetősége szükségesnek tartotta. Mivel a fő felvételi tárgyat a matematika képezte, felkészülésében János főleg a német nyelven való kifejezési ismereteket gyakorolta.

Kemény Miklós tiszteletreméltó támogatásával Bolyai János 1818 augusztusában Bécsbe utazott. Lehet, hogy éppen patrónusával együtt, aki gyakran megfordult az osztrák fővárosban. Utazása során Budán is megálltak, ahonnan levelet írt szüleinek. Sajnos János ifjúkori leveleinek zöme nem őrződött meg, pedig érdekes lett volna megtudni, hogyan vélekedett János az akkori magyar nagyvárosról.

A hosszú időre tervezett elválás szorongó és nehéz pillanatokat teremtett. A Bolyai család egyetlen gyermeke még addig soha sem hagyta el szülei nélkül huzamosabb ideig Marosvásárhelyt. János az akkori elváláskor látta édesanyját utoljára. A fiához görcsösen ragaszkodó, de a jövőjét szem előtt tartó egyre betegebb asszony anyai elszántsággal mondta: „itt-hon ne maradjon, de ha elmegy, meg fogok örülni”.

Probléma nélkül utaztak Bécsig, ahol János azonnal jelentkezett a katonai Akadémián. A sikeres felvételi után a negyedik évfolyamra vették fel. Erről Farkas szeptember 14-én értesült. Közvetlenül azelőtt, 1818. szeptember 10-én írja első levelét Bécsben tartózkodó fiának. Megegyezős alapján az egymásnak írt leveleket az elküldés sorrendjében megszámozták, hogy kölcsönösen tudomást szerezzenek arról, ha valamelyik levél bizonyos okokból elkallódott volna. Farkas még mindig abban a téves tudatban van, hogy a bécsi hadmérnöki Akadémián nem az irányadó katonai tantárgyak, hanem mindenek fölött a matematika a legfontosabb tanulandó tudományág. Ez érződik ki a most idézendő leveléből is, melyben hosszasan tárgyal számos matematikai problémát, valamint buzdítja fiát a matematika minél jobb elsajátítására.

„Kedves Édes Fiam!

Mind a két leveledet igen kedvesen vettük, Tégedet igazán szerető atyai és anyai szívvel; óhajta várjuk (amidőn Téged látni hiába óhajtunk), a harmadikat, remélvén, hogy abban állapotodról, szállásodról, kosztod-

ról, készületedről, kinézésedről bővebben tudósítva inkább megnyugtatsz. [...] ami időt az odavaló Mathesis enged, fordítsd a deákra,⁵ franciára majd angulusra és mindenek felett más Mathematicusok olvasására. Olvasd Karsten, Kästner, Pasquich, Euler, La Croix (Traité Élémentaire du Calcul différentiel et integral) Lagrange (Theorie des Fonctions) stb. munkáit [...] leginkább szeretném, ha La Croixt olvasnád, melyet nem sokára franciául is megértesz. Gyönyörűség azokat s hasonlókat egymaga idejében olvasni. Én későn és útmutató nélkül tanultam s hasonló vagyok a nagykorában tanult hegedűshöz, aki fél az applicaturától [...]. Te szerencsés vagy, csak becsüld meg szerencsédet [...].

Higgy nekem, hogy semmi sem emeli fel az embert úgy a Föld felibe, mint a felsőbb Mathesis, mint a Sas a mély égbe, úgy elsüllyed az ember, elhagyva az egész világot. Te ezt bizonyosan eléred; csak használd az időt, mely most és csak egyszer foly Rád nézve; az életed arany ideje ez, fuss a célra, ne mulasd el az út mellett majd egy s majd más félrecsalogató tárgyaknál [...]. Imádkozz és dolgozz! Semmit se félj; cselekedd azt, ami most elődbe van a gondviseléstől rendelve. Ha jól elkészülsz arra, amire ott legjobban lehet, sok kenyér közül választshatsz. Írd meg, most mit érzel, mire volna kedved a jövőben. Ide professornak volna-e?

Hova tovább azt hiszem, hogy nagy Mathematicus csak az lehet, aki excellens elmével jókor jó móddal hozzáfogva, serdülő korában olyan helyt, ahol mint a méheknél tavasszal egy az igyekezet, szüntelen való hosszas gyakorlással mint a nyelvbe, olyan készséget kap. Különbözik a nagy calculustól irtóznak, arravaló feszülés nem hagy erőt gondolkodni, s az elhibázás heteket s egészséget pusztít el; az az öröm, melyet a Mathematicus érez, bosszúsággá válik, midőn ott, ahol az mint egy óriás bokáig játszadozva halad, mélységbe süllyed ez s elmerül. [...]. Most van kitől kérdezz ott, s ne szégyellj; ahol nem érted, kérdezd meg; ha végére nem mehetsz s magad sem találod könnyen, jegyezd fel ezutánra, s most haladj; különben olyan matériába kaphatsz, hogy akár az öt esztendőt elnyelje.”

Ezután különböző felsőmatematikai példák hosszas levezetései következnek, majd a Marosvásárhelyre is beköszönő ősz nosztalgikus megemlékezésével zárja sorait:

„Itt kékelnek a szilvák, minden nap emlegetünk, de egy más gyümölcsökre gazdag őszre virágozol Te.”

5 Latin nyelvre.

Úgy tűnik, hogy János már az elején csalódottan írt szüleinek a pályaválasztásról. Sok olyan dologgal kell foglalkoznia, ami iránt semmiféle vonzalmat nem érez. Ezt érzékelteti Benkő Zsuzsannának 1818 decemberében fiához intézett levele:

„Édes Jó Fijam!

Ez a néhány rend csak pótléka az Édes Apád levelének. Neked szerencsés boldog Új Esztendőt kívánok, áldást a Mindenek Atyjától a te fedjre, növekedést a jóban, erősödést a Virtusban, Isten és emberek előtt való kedvességet remélj Édes Fijam! ez az erő lelkesítsen tégedet, a te kiszakadt Esztendeid észrevétlenül eltelnek; s mikor én is egy Derék Hazafit fogadok karjaim közé, akkor a te éretted esdeklő Anyádnak könnyei letöröltenek; – csak a jelenvaló kötelességed teljesítsd; ezt a rajzolásra és minden egyebekre értem.

Oh Édes Fijam! nem mindenkor van az embernek kedve sok dologhoz; de hozzá kell szoknunk jó idején azt tennünk, amihez teljességgel nincs kedvünk, így gyakorlódik a mi virtusunk, mert a kötelesség akármily keserű édességet hoz a szívbe, s nyugalmat a lélekbe, hogy az tette az ember, amit kellett. Tudósíts mihelyt ezen leveleket veszed, hacsak lehet még az első postán, nyughatatlanságunkat csendesítsd meg; tavasz jött, ha rólad jót hallok; örökös tél borul előmbe az ellenkező esetben. Szentgyörgyi Urat igen szívesen tisztetem; Jakab Laji óhajtja leveledet; én is nyughatatlanul várom válaszodat; addig is az Én Istenem legyen veled.

Csókol szerető Édes Anyád”

E néhány sor stílusa, valamint a szerencsésen megőrződött levélpapíron található szép kézírás ékesen bizonyítja, mennyire művelt asszony volt Bolyai János édesanyja.

Benkő Zsuzsanna azonban egyre betegbb. Ebben az időben Farkas a közeli bizalmas barátjához, Bodor Pálhoz írt leveleiben gyakran panaszkodik nyomorúságos anyagi körülményeire és felesége betegsége miatti álmatlan éjszakáira. 1821. szeptember 10-i hosszú levelében Jánost is értesíti édesanyja állapotáról, melyben Farkas beteg felesége számos mondatát megörökítette. Elevenítsük itt fel a levélnek azt a részletét, amelyre a későbbiekben még hivatkozni fogunk. 1821 augusztusában beteg felesége arra kéri Farkast, hogy együtt menjenek ki Domáldra, mivel szeretné még egyszer és utoljára látni azt a helyet, ahol életében a legboldogabb volt.

„Domáldra kívánczozott; elvittem ahhoz készített féderes ágyban; sok gyönyörűség volt ott, sokszor vitette magát a kertbe s a hegyre is ki.

A kert szép most; mintha egy havasba lépne be az ember; az egybe sűrűdett erdő a kanyargó utak felett sok helyt természeti ernyőt formál; kígyóznak a vizek, s esnek kőről-kőre le – egy szép remeteház a hajdani tó helyén nőtt erdő közepében van; künn kőasztal s üllő kövek s egy tűkörösés, melynek vize szépen kígyózva elmeneteled után egy sírhalom felibe mementónak tett követ jobbra hagyva, befoly a sűrűségbe. Kereken körül állnak a Veled egyidejű nyírfák, születésed emlékoszlopai, a kék egekbe érkező fejeikkel. Ott ebédeltünk a vízesésnél a kőasztalon; kivettem a te bécsi képedet is, hogy hárman legyünk... sok szép beszédeket s érzéseket vitt el azon óra az örökkévalóságba.

A hegyre is felkíváncozott; egyszer a közepén lévő nyugvóhelyhez; s ott azt kívánta, hogy érje meg egyszer még újból, hogy ott kávézzék; megfőztem ott, megitta, s sok szép beszédeink után így szólott ott: »*Engem ide temess!*«; én erre azt feleltem, hogyha meghalna is valamelyikünk, inkább illenék a hegy tetejére a nyugalom, arra ő azt mondta: »Nem, mert én nem hágtam ki az élet meredekét egészen, itt az én helyem – s mikor itt ültök Jánossal s emlegettek, meglátlak onnan fentről s én is leszálllok közétek; ha egy lassú zefír ezekről a fákról virágokat hint rátok, vagy egy bús szél sárga levelekkel jó, vagy valamely titkos fájdalommat éreztek egyszerre, én leszek az«”.

Nemsokára, 1821. szeptember 18-án meghalt.

„Meghagyása szerint – írja Bolyai Farkas Bodor Pálnak – Domáldra vittem, s oda temettem, ahova ő kimutatta volt, ott helybe szép beszédekkel: a kertben van egy magas hegy, s annak közepén van egy szép hely [...] Mikor itt [Marosvásárhelyen] a nép egybe volt gyűlve, akkor jutott eszembe kérése, s a fia képét az övé alá szegeztem remegő kezekkel.”

Farkas az október 1-jén írt levelében értesíti Jánost az édesanyja haláláról. Hosszú írását az alábbi sorokkal zárja:

„Te pedig én bennem folytasd Anyádhoz való kötelességedet! nyugodj meg az örök rend folyásán; adj egynéhány könnyet Édes Anyád megnyugodott porának, s folytasd férfiúi módon pályafutásodat! hogy nemsokára úgy ölelhesselek meg, hogy csak az fájjon, miért nincs Édes Anyád is ott; s amidőn Őtet is szíveinkből kihozza egy könny, mind a ketten meglátjuk Őt egymás szemeiben. Vagyok addig is s végig apai s már anyai szívvel is

szerető Édes Atyád,
Bolyai Farkas m. k.”

Bolyai János ebben az időben kezdte meg a hetedik és egyben az utolsó évfolyam tanulmányait. Tanárainak megítélése szerint ő volt a legtehetségesebb diákja az évfolyamának, azonban néhány melléktantárgyból (szépírás, rajz és francia) el nem ért maximális osztályzata, no meg diák-társainak szavazata alapján került a második helyre. Szily Kálmán leírása szerint az egyik alkalommal János főherceg – akinek az Akadémia irányítása is a hatáskörébe tartozott – annak az évfolyamnak a matematika-órájára ment be, amelyben Bolyai János tanult. Ilyenkor a tanárok a legjobb tanulókat szokták feleltetni, így természetesen sor került Jánosra is. Gyors észjárása, a legnehezebb kérdésekre is megadott pontos és világos válaszai „bámulatba ejtették a főherceget”. Az óra végén, állítólag, azt mondta a tanárnak az egész évfolyam előtt: „ennek a fiúnak a keze alá kell adni a többieket is, mert többet tud az egész osztálynál”. Ugyanis abban az időben szokás volt, hogy a növendékek kölcsönösen is tanították egymást, és a legtehetségesebb hallgatók voltak egy-egy évfolyam úgynevezett korrepetitorai. Hogy ennek a történetnek valóban van alapja, abból is kitűnik, hogy Bolyai nevét a főherceg a későbbiek során is észben tartotta, és amikor ő nehéz helyzetben hozzá fordult, mindig jóindulattal viseltetett iránta.

Hogy fogalmat alkothassunk arról, voltaképpen milyen matematikai képzésben részesült Bolyai János a hadmérnöki Akadémián, vessünk egy pillantást a különböző évfolyamok tanterveire. Összességében a tantárgyak a következők voltak: matematika, német, latin, francia és cseh nyelv, szép- és helyesírás, levelezés és ügyiratok, történelem, földrajz, szabadkézi rajz, tereprajz, műszaki rajz, erődítményi, építészeti és hadászati ismeretek. A matematikai anyag így oszlott meg az évfolyamok között: a 3. évfolyamon aritmetika és algebra, a 4. évfolyamon elemi geometria (sík- és térmértan), trigonometria, terepmérések, gömbi trigonometria, az 5. évfolyamon kúpszeletek, differenciál- és integrálszámítás elemei, matematikai földrajz. A 6. évfolyamon már csak a szilárd és cseppfolyós testek mechanikáját tanulták, a 7. évfolyamon egyáltalán nem szerepelt a matematika, mivel itt kimondottan a katonai tantárgyakat oktatták.

Ezek alapján látható, hogy a négy év alatt János csak az első két esztendőben tanult tulajdonképpen matematikát, és a tanított anyag is csak a felsőmatematikai alapismeretek tanulmányozásáig terjedt. Kétségtelen, hogy az akkori egyetemi oktatási szinthez viszonyítva ez sem megvetendő, de a 19. század komoly tudományos problémái előtt álló matematikus számára nem mondható elegendőnek. Nem beszélve még arról, hogy a katonai kötelezettségek a katonaság kötelékébe tartozók szabad idejét teljesen szétforgácsolták.

„A katonai életet – írja később Bolyai János – mint érzésteljes ifjú ember szerettem, de a csaknem szünet nélküli szolgálati elfoglaltatást, mint nagyrészt csupa mechanikumot, miből semmi *lényeges* hasznát az emberiségnek nem láttam, kereken mondva: untam; látván egyszerűsmind azt is, hogy azt akármelyik társam képes véghezvinni; azt pedig, amit én akarok és elkezdtem, még senki sem tette (mivel a nagy cél és vágy csírája már növendék koromban kezdett kifejlődni, s csakhamar eleven tiszta lángokban fellobbanva égni bennem).”

Valóban, a paralelák alapos tanulmányozását akadémiai növendék korában kezdi meg. Bécsi tartózkodásának elején egy értelmes partnere is akadt, akivel gondolatait kicserélhette. A nála öt évvel idősebb, szintén erdélyi származású Szász Károlyról van szó, aki 1817 és 1821 között a Bécsben tartózkodó gróf Teleki Elekéknél volt házitanító. Szász Károlyval, aki néhány évtized múlva Bolyai Farkas utóda lett a kollégiumi katedrán, „vasár-, ünnep- és általában kimenőnapokon” találkozott. Erre a következő fejezetben még bővebben utalunk, valamint arra is, ahogyan Farkas fogadta azt a hírt, miszerint János a párhuzamosok problémájával kezd foglalkozni.

A matematika melletti másik kedvenc foglalatosságát, a zenét sem hagyolta el.

„A muzsikában csak egy van nála valamivel jobb – írja Farkas Bodor Pálnak –, és az is a bécsi első hegedűstől Meiseler-től veszen per 5 Rhforintért órát; a fiamnak persze nincs módja órát venni, hanem az a nálánál valamivel jobb vasárnapokon kiviszi magával Meiselerhez, s még egy negyedikkel a legszebb kvartettekét csinálják; ez neki költség nélkül jó gyakorlás.”

Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy az akkori időkben Bécs volt a zenei világ legjelentősebb központja. S hogy mit jelentett János számára Bécs zenei és színházi élete, azt önéletírásában így fogalmazta meg:

„Kadétságom alatt minden elmerülésem s ragadtatásom mellett a tani tárgyaimba mikor csak szerét ejthettem, a gyönyörű bécsi színházakba pontosan megjelenni el nem mulasztottam, jelesen az operákban és baletteken; s oly gyönyört leltem azokban, hogy Bécset semmiért sem sajnáltam úgy ott (el-)hagyni, mint azon ritka szép színházakért.”

1822 szeptemberében János befejezte akadémiai tanulmányait, de kitűnő előmenetele miatt nem osztották be a sorhadhoz, hanem mint mérnökka-

ri tisztjelöltet még egy évig az Akadémián tartották továbbképzésre, hogy azután a műszaki csapatokhoz kaphasson beosztást. Miután ez az év is eltelt, 1823. szeptember 1-jén alhadnagynak nevezték ki a temesvári erődítési igazgatóságához.

A katonai kiképzés szerves részét képezte még annak idején a lovaglás valamint a kardvívás elsajátítása. János kitűnő vívótehetségének híre hamarosan Marosvásárhelyre is eljutott. De az apai intelmek sem késtek so-kaig, főleg miután János kilépett az Akadémia padjaiból:

„az első lépéstől irtózz, mert a meredek széléről bé feneketlen az ösvény és megállni többé nem lehet; eddig még kertben voltál,⁶ melyet a lopók nem hághattak könnyen által, eddig a békesség arany ideje volt, de most a természet nagy hadaira hajnalik [...] ezerképpen remegek, míg mostani korod bűbajos vidékein általmész”.

Majd elhagyva a költői hasonlatokat, prózaibb hangon is közli aggodalmait: „én téged a duellumoktól [párbajoktól] féltetek leginkább és a feshérnépektől”. Tehát a könnyelműen kötött házasság csalóka, esetleg szerencsétlenségbe sodró veszélyeitől is félti fiát.

Kinevezése után János elutazik Bécsből és szeptember 30-án megérkezik Temesvárra. Az ottani katonai életéről annyit tudunk, amennyit a kötelező katonai följegyzések, egy-egy szerencsésen megőrződött levele, valamint Schmidt Antal építész visszaemlékezéseiből ránk maradtak. Schmidt elbeszéléseit a fia, a lelkes Bolyai-kutató Schmidt Ferenc öröklötte meg az utókor számára, akinek a János iránti ügybuzgalma kétségtelenül az apai ráhatásnak köszönhető.

Alig töltött Temesváron egy hónapot, amikor János 1823. november 3-án megírta azt a matematikatörténeti jelentőségű híres levelét a Marosvásárhelyen élő édesapjának, melyben tudatja, hogy világra szóló felfedezés birtokában van, mellyel tisztazza a párhuzamosok több mint kétezer éves problémáját, és ezzel a „semmiből egy új, más világot teremtett”.

Csodálatos és véletlen egybeesés folytán, pontosan két év múlva, 1825. november 3-án teszi meg a pozsonyi országgyűlésen Széchenyi István nemes célú és igen jelentős anyagi felajánlását a Magyar Tudományos Akadémia létrehozására. Erre emlékezve a Magyar Köztársaság kormányja 55/1997. számú rendeletével november 3-át a *Magyar Tudomány Napjává* nyilvánította. Tehát ennek a napnak a jelentőségét a magyar tudományos élet szempontjából nemcsak Széchenyi nagy horderejű gesztusa, hanem Bolyai világraszóló felfedezésének bejelentése is emeli.

6 Vagyis az Akadémia tagja.

Elméletét állandóan tökéletesíti és hétévi marosvásárhelyi távollét után, 1825 februárjában meglátogatja az éppen 50. életévét betöltő édesapját. Ekkor a már kidolgozott új gondolatait is bemutatja Farkasnak. János nagy csalódására apja ekkor még nem tanúsított teljes megértést munkája iránt. A mostani látogatásakor más megrázkódtatás is éri. Édesanyja már három és fél éve halott, és a szülői házban helyette Bolyai Farkas új fiatal feleségét Somorjai-Nagy Terézt (1797–1833) találja, akivel apja csupán egy hónappal azelőtt kötött házasságot. Emiatt János tisztázni szeretne volna anyai örökségét. A közöttük ekkor keletkezett kisebb nézeteltérés (a két említett ok miatt) azonban nem tartott sokáig. Fia látogatásáról 1825. február 22-én Bolyai Farkas így ír Bodor Pálnak:

„Nagy, kemény természetű szép ifjú, a katonai bátorság és ártatlanság szemérmetességével bepelgyedett⁷ – se nem kártyázik, se bort, pálinkát, se kávé nem iszik, se nem pipázik, se nem tubákol, még nem beretválkozik, csak péhés – rendkívül való matematikus, igazi zseni, excellens hegedűs – minden hivatalok közt leginkább szereti a katonaságot; csak Otiumot [nyugalmat, pihenést] szeretne inkább, melyben dolgozhatnék, már is sokat dolgozott a hivatal mellett is.”

János tehát „otiumra” azaz szabadidőre vágyik. Arra, amit katonai teendői érhető módon elraboltak tőle. Pedig élete folyamán talán most lett volna a legnagyobb szüksége erre, hogy új elméletét teljes egészében kidolgozza és végleges formába öntse. Kétségtelen, hogy Farkas büszke volt a látogatóba hazaérkezett fiára. A rendkívüli eseményekben nem bővelkedő és szenzációkra éhes kisváros lakossága élénken beszélt az elegáns fiatal tisztról, aki – a korabeli leírások szerint – „gyakran megakadt a némberek szemében”. A főúri társaságokban is megfordult és ott valósággal gyönyörködtek szenvedélyes hegedűjátékában. A visszaemlékezések szerint ekkor Paganini-műveket adott elő, ami teljes összhangban volt rendkívül gyors és virtuóz képességeivel.

Szabadsága lejártával, március 11-én indul vissza munkahelyére Temesvárra. Farkas szeretne volna, hogy kitérővel Kolozsvár felé utazzék, hogy ottani látogatásával megköszönje Kemény Miklós báró tanulmányai elvégzéséhez nyújtott segítségét. De „sajnos – amint írja Farkas a már említett Bodor Pálnak írt levelében – Kolozsvárra mind az idő rövidsége, mind a pénz nemléte miatt akár mint sajnáljuk is, én is, ő is, el nem mehet”.

Bolyai Jánost 1826 márciusában Aradra helyezték át. Szerencsés vélet-

7 Fuvatva, lihegve.

lennek mondható, hogy szintén ez idő tájt vezényelték Aradra volt akadémiai matematikatanárát, Johann Wolter von Eckwehr (1791–1857) kapitányt is. Eckwehrnek, aki máskülönben Bolyai közvetlen felettese volt, 1826 tavaszán „egy írásbeli dolgot adott át, amelyben az egésznek az alapja le van téve”. A legvalószínűbb, hogy ez a dolgozat nem volt más, mint az *Appendix* első 33 §-ának német nyelvű fogalmazványa. Sajnos az ennek a felkutatására irányuló összes későbbi erőfeszítések eredménytelenek maradtak, és ma már azt kell hinnünk, hogy ez a rendkívül értékes kézirat az idők folyamán valahol elkallódott. Nem fér kétség ahhoz, hogy János ezzel – többek között –, az apja részéről elmaradt elismerést volt matematikatanáránál kereste. Nincs tudomásunk arról, hogy Eckwehr hogyan vélekedett János munkájáról. Minden bizonnyal ő sem értette meg. János fő művével, az *Appendix*-szel, a következő fejezet foglalkozik.

Sokat emlegetett párbajai főleg az aradi évekre eshettek. Az tény, hogy János kitűnő vívó volt, de sajnos idővel, a szenzációt hajhászó egyének népes hada ezt a legkülönbféle valótlan történetekkel színezte ki. A halálos kimenetelű párbajai pedig egyenesen koholmányok. Lobbanékony természete, valamint az akkori szokások érthető magyarázatként szolgáltak a párbajokra. És ha már itt tartunk, hadd említsük meg azt, hogyan vélekedett a párbajokról maga Bolyai János önéletrrásában:

„A párbajok egy esetben sem célszerűek, és valóságos maradványai a vadabb és műveletlenebb időknek. [...] de különben is velem született ambíció, amit a katonai nevelés még főlebb feszített, hogy erősen könnyen voltam sérthető, hamar rossz néven vettem valamit, azt gondolván, hogy szégyen, ha nem indulok föl és annyiban hagyom a sértést [...] a visszas nevelésből eredően több ízben volt karddal való kedvetlen össze-jöve telem, azonban szerencsésen elkerültem mindig minden tetemes sebesülést. Én magam csakugyan (egy esetet még az Akadémiában, növendék koromban kivéve: mikor is az elsőt magam hívtam spádéra s darabigi viaskodásunk után a társaink közbevetvén magukat megbékéltettek) senkit ki nem hívtam. Bajnok s velem vívott társaim azonban mind az actus előtt, mind azután a legjobb indulatot mutatták mindig hozzám.”

Aradon betegszik meg először: váltólázba esik. Ez is közrejátszott abban, hogy kezd meghasonlani tiszti állásával, elhanyagolva kötelességeit. „Unalmas és idegesítő lehetett előírásos katonai épületek tervezése annak – írja Dávid Lajos –, aki a geometria harmadfél ezer esztendős épületének új alapjain elmélkedett. A sok megfeszített, elvont gondolkodástól

fáradtan, csak kelletlenül végezte hivatalos munkáit [...] Ezt a kelletlenséget előljárói hamar észrevették: nem tudta eltitkolni szellemi erejének erőszakolt megosztását, nem tudta szépítgetni lelkiállapotát. Ezért főhadnaggyá való kinevezése is 9 hónapot késett.”

Említett maláriás megbetegedése és az esetleg gyógyító levegőváltás szükségessége játszhatott közre abban, hogy 4 évi és 8 hónapi aradi szolgálát után Lembergbe helyezték át, ahol 1830. december 8-án vették nyilvántartásba. Nem tudható biztosan, de János az ottani jelentkezése előtt adta át apjának a latin nyelven írt *Appendix*-et, melynek egyik ki nyomtatott példányát Farkas elküldte Gaussnak. Majd Lembergbe küldi el fiának annak a Gauss-levélnek a másolatát, amelyet a „princeps mathematicorum” János munkájával kapcsolatban írt. Ennek a levélnek a Jánosra gyakorolt lesújtó hatását szintén a következő fejezet tárgyalja.

Látva a testileg és lelkileg is súlyosan beteg beosztottját, a rendkívül emberséges A. Zimmer alezredes igyekszik Jánost könnyű építészeti feladatokkal megbízni. De János még ezeket sem tudja elvégezni. Egy katonai fürdőházhoz egy egyszerű kis toldalékot kellett terveznie, de beteget jelentve nem készítette el. Zimmer ekkor úgy gondolta, hogy Bolyai hipochondriáján segít egy kellemesebb foglalatossággal párosuló utazással. Felkérte egy lovasezred kerületének beutazására azzal a céllal, hogy az egyes szükséges javításokat jegyezze le, és ha lehet, tegyen javaslatokat ezek elvégzésére. De Bolyai erről is csak néhány tollvonásból álló zavaros jelentést nyújtott be, majd újból beteget jelentett. Ámde a János főhercegnek benyújtott jelentésében Zimmer kihangsúlyozta, hogy János „rajongva csüng a matematikán”, és egy ilyen tartalmú munka előnyére válna, sőt alázattal kéri a főherceget, hogy „Bécsben valami felsőmatematikai problémával bízza meg”, ami depressziójának biztos csökkenéséhez vezetne. Egyben kéri a „szerencsétlen” iránt János főherceg „atyai és kegyelmes szívbeli jóságát” arra nézve, hogy ilyen szolgálati tevékenysége ellenére se mellőzze őt a kapitánnyá való előléptetésnél, amivel esetleg már nyugalomba tudna lépni megélhetési lehetőséggel. János főherceg jóváhagyja Zimmer felterjesztését és Bolyai Jánost 1832. március 14-én másodosztályú kapitánnyá léptetik elő, majd két hónap múlva, május 11-én Olmützbe helyezik át. Már másnap útra kel, de utazásának hatodik napján Bielitz közelében szekere felborult. Súlyos fejsérülése miatt egy ideig eszméletlen volt. Miután magához tért, nem folytatta útját Olmütz felé, hanem valószínűleg gyógykezelésre a porosz-sziléziai Schwarzbachba utazott. Onnan visszatérve, utazóládája miatt heves összetűzésbe került a porosz vámtisztekkel, mely kínos ügy a bécsi hatóságokig jutott el. A bajt még az is növelte, hogy minden értesítés nélkül csak július 10-én jelentkezett Olmützben a katonai parancsnokságon. Katonai nyilván-

tartási és minősítő lapjába ez is bekerült: „A szolgálati buzgóság hiánya és felfortyanó viselkedése miatt megintésben részesült”.

Annyiban szerencséje volt, hogy Olmützben is emberséges előjáróra akadt.

„Főnöke, a derék Zitta őrnagy is megpedzette – írja Vekerdi László –, hogy valamilyen felsőbb tanintézet matematikaprofesszoraként lehetne a katonai szolgálat iránt szemmel láthatólag nem sok rokonszenvet mutató, s a Bánság mocsaraiban egyébként is súlyosan megbetegedett tisztet leg-
hasznosabban alkalmazni. A jó szándékú javaslatból persze semmi sem lett, az osztrák hatalomnak nem Bolyai-szerű matematikusokra volt szükség professzorként.”

Közben állandó jelleggel itt is beteget jelent, főleg reumás bántalmakra hivatkozva. Az ebből az időből származó hivatalos jelentések szerint szóltan, ingerlékeny, kerüli a tisztek társaságát, szolgálatát elhanyagolja, szenvedélyes sakkjátékos. Mindezeket számba véve, valamint azt, hogy többször fordult néhány hónapos szabadságolási kérelemmel a katonai hatóságokhoz, egy kivizsgálás következményeként 1833. május 18-án kelt rendelettel, június 16-i hatállyal, mint fél-rokkantat nyugdíjba helyezték, de „kilátással a későbbi visszahelyezésre”. János azonban soha sem élt a visszahelyezés lehetőségével. A végzésben feltüntették, hogy 10 év, 6 hónap és 14 napot szolgált, évi 280 forint nyugdíjat kap, melyet kérésére a szebeni hadipénztár fizet majd ki. Csupán összehasonlításként említjük, hogy nem sokkal azelőtt János 104 forintot és 54 krajcárt adott át apjának a 29 oldalas *Appendix* nyomtatási költségeinek a fedezésére.

1833. június 16-án reggel egy testi és lelki rokkantsággal nyugdíjba vonuló katonatiszt hagyja el a császárvárost. Pedig még nagyon fiatal. Alig töltötte be harmincadik életévét. Az akkori körülményekből fakadóan fárasztó utazás után megérkezik Marosvásárhelyre az apjához, aki csupán néhány hónappal azelőtt temette el második feleségét is, akitől Gergely nevű fia született. Mennyivel másképpen érkezett haza nyolc és fél évvel azelőtt! Akkor tele volt fiatalos lendülettel, reményekkel, tervekkel. Alig várta, hogy apjának bemutassa az ő „új, más világát”. Jánosban égett az alkotási vágy. A világ talán még mindig olyanak tűnt neki, mint ahogyan gyermekkorában elképzelte: igazságosnak és becsületesnek. Még hitte, hogy a nagy felfedezésekért elismerés és jutalom jár – esetleg egy akkora gyémánt, mint a Föld – ahogyan az apja mondta valamikor. Akkori hazaérkezésekor Farkas is másképpen tekintett a reményei szerint fényes karrier előtt álló fiára. A mostani helyzet különbözött az akkortól. Jánosnak már nem kellett visszautaznia Temesvárra, hogy folytassa felfelé ívelő pályáját. Beteg, életunt, mindenből kiábrándult ember lett.

Az elhibázott pályaválasztás egy átkos örökséget is maga után ha-

gyott: János mint katonatiszt, kaució nélkül nem házasodhatott meg. Ehhez pedig – pénz hiányában – Jánosnak kellett volna adományozni a domáldi kisbirtokot. Farkas azonban saját öregségére, valamint második fia, Bolyai Gergely (1826–1890) érdekeire is gondolva ebbe nem egyezett bele. Igaz, hogy még ott volt a bolyai gazdaság, amelyet öccse, az agglagény Bolyai Antal irányított, de állítólag Farkas kijelentette, hogy testvére szeszélyeiben nem bízhat. A Bolyaiak életrajzírói többféle módon ítélik meg Farkasnak ezt a fiával szembeni magatartását. Kétségtelen, hogy idővel ez is hozzájárult a két impulzív ember viszonyának romlásához, ami végül oda vezetett, hogy János kiköltözött Domáldra, és az apjával kötött megegyezés alapján haszonbért nem kellett fizetnie, csak „a téli gyümölcsnek (különösen a ponyik almának) kétharmadát küldje be”. Ezenkívül „minden esztendőben egy szép matematikai dolgozatot készít”, melyet apja „a Magyar Tudós Társasághoz küld fel és erről nyugtatványt adni tartozik” fiának. Az egyezés arra is kitér, hogy ez milyen esetben veszítheti érvényét. A megállapodás nyelbe ütésénél aktív szerepet játszott a segítőkész nagybácsi, Bolyai Antal. János az ő közvetítésével fogadta fel házvezetőnőjének Kibédi-Orbán Rozáliát, egy kórodszentmártoni kurtanemesi família leányát. Tehát az elszigeteltséggel párosuló véletlen sodorta elébe azt a nőt – Orbán Rozáliát – aki életét semmivel sem tette elviselhetőbbé. Természetes dolognak tekinthető, hogy a temperamentumos Bolyai János vonzódott a gyöngébb nemhez. Önmagáról írja 1845-ben:

„Jellememben két fő uralkodó alapvonal volt egész életemben: az *igazságnak* (tanilag és erkölcsileg) és a *némbereknek* határtalan szeretete. Az első tiszta erény, a második részint csupa természet ugyan, de ebben sokszor a gyengességig mentem”.

Vallomásaiból tudjuk, hogy mindig vágyott a meleg családi életre. Említést tesz arról is, hogy „egy kedvelt, nemes érzelmű, szelídebb lelkületű, magas erényű s a férfitől is hasonlót kívánó nemes arc – s ajak – vonalú némberek” egy életen át kordában tarthatja a saját maga által is elismert nehezebb természetét. Ehhez azonban hozzáteszi még: „De az ily is hasonló ritka és nehezen található ám!”

A domáldi évek alatt újból hozzálát a matematikai kutatásokhoz. A szakkönyvek, és az akkor már létező matematikai szakfolyóiratok hiánya bénítóan hatnak erőfeszítéseire. A tudományos információ áramvonalain kívül eső tudós néha olyan problémákon is töpreng, amelyekről szakfolyóiratok birtokában azonnal megtudhatta volna, hogy nem vezetnek az általa célba vett eredményhez. Ilyen kérdések voltak például a

négynél magasabb fokú algebrai egyenletek gyökmeghatározó képleteinek keresése, vagy olyan függvények integráljának a zárt függvényformában való eredménymegadása, amelyek ma az elliptikus függvények osztályát képezik. De hogy Bolyai ebben az időszakban is komoly eredményeket volt képes elérni, azt másik jelentős dolgozata, a *Responsio*, valamint Paul Stäckel és legújabban Kiss Elemér által közzétett kéziratban hagyott eredményei igazolják. Ezzel, és az ez idő tájt kibontakozó tervével, hogy egy nagy enciklopédikus műben foglalja össze gondolatait, a későbbiekben fogunk foglalkozni.

Bolyai domáldi tartózkodása idején többször tért vissza huzamosabb időre Marosvásárhelyre, főleg orvosi kezelés végett. Egyik kezelőorvosa, Péterfi Pál, naplót vezetett betegeiről. A Bolyaira vonatkozó első bejegyzés 1838. január 16-án kelt:

„Mérnök Kapitány Bolyai János Úr.

Munkás és mozgó életéből szünet nélküli szobába zárkózott állapotba lépés, valamint a lelki szenvedés és elégtelenség miatt hosszabb idő óta gyengélkedő állapotban lévén, 10 hét óta szobáját és ágyát el nem hagyta. Nagyon le van fogyva, csaknem elszáradva, arca halvány – flegmás köhögése mély hanggal gyakori – pulzusa gyöngült – éjjel izadási vannak – hasa szorult, mája keményke, különben a sok koplálás miatt belei béhúzódtak, tekintete..., csaldási érzéseit mint hypochondriában a betegségét feledtebb nagynak véli...”

Ezután a gyógyulás érdekében javasolt teák és orvosságok felsorolása következik. De a beteg állapota egy hónap eltelte után sem javul sokat:

„17. Febr. 838. Kapitány Bolyai János Úr.

Ez a priessnitzi hős – egész nyáron és őszön rengeteg hideg vizet ivott – de minden legkisebb haszon nélkül – sovány, fonnyadt, horpadt, – szemei béestek, arca halvány – álmatlan, rossz gyomor rossz digestió, – evés után néhány órával minden nagy teliség feszültség érzése a gyomorban.”

„Ami a »priessnitzi hős« enyhén malíciás megjegyzést illeti – írja Vofkori József – ismernünk kell ennek hátterét is. Minthogy Bolyai János sokat betegeskedett, orvosi dolgokról mindent elolvasott, ami a keze ügyébe került. A szerzett ismereteket Bolyai János autoterápiás célzattal föl is használta enyhülést keresve empirikusan panaszaira. Így ismerkedett meg az osztrák-sziléziai Vinzens Priessnitz empirikus gyógyeljárásával, a vízzel való gyógyítás különböző válfajaival is. Ennek egyik módozata a hideg-

víz-ivókúra, melyet Bolyai János kitartóan alkalmazott saját magán gyomor- és bélpanaszainak enyhítésére.”

Ami pedig „a lelki szenvedést” illeti, az még érthetőbbé válik, amikor az elkövetkezőkben az *Appendix*, majd a *Responsio* fogadtatását ismergetjük.

A *Responsio* című munkájával kapcsolatban egy más természetű dolog is meg kell említenünk. Ennek, valamint Farkasnak szintén a komplex számok elméletéről szóló dolgozatának Lipcsébe postázása alkalmával újabb nézeteltérés robbant ki apa és fia között. Ezzel kapcsolatban Farkas egy panaszkodó levelet írt a Bólyán tartózkodó Antal öccsének, amely annak 1845-ben bekövetkezett halála után János kezébe került. Mivel Farkas elég sok bántó megjegyzést tett Jánosra, amelyek közül néhány nem felelt meg a valóságnak, János haragra gerjedt. Farkas elővigyázatból ráírta ugyan az öccsének küldött levélre, hogy: *Égesd el!* – de Antal nem tett eleget bátyja kérésének. János ezt a levelet a saját kísértő soraival együtt visszaküldte Farkasnak. Az ebből származó ellentét, valamint hogy Farkas a domáldi látogatása alkalmával nehezményezte a birtokhoz tartozó erdő egy részének a János általi kivágatását, szerződésük felmondását eredményezte. Így János 1846-ban kénytelen volt elhagyni Domáldot és végérvényesen visszaköltözni Marosvásárhelyre, ahol a vár szomszédságában egy ingatlant vásárolt magának és családjának. Ugyanis Jánosnak még domáldi tartózkodása idején két gyermeke született Orbán Rozáliától: Dénes (1837–1913) és Amália (1840–1893). Alacsony nyugdíjából alig tud megélni. 1847 tavaszán tízéves fiát kénytelen a szebeni állami fiúnevelő intézetből kivenni, mivel „a legjobb szándék mellett sem képes a költségeket tovább fizetni”.

Új lakhelyén is visszavonultan élt. „Nem kereste különben a társaságot – írja Bedőházi János. Egyedül sétálgatott ki az Elba-ligetbe, a Maros partjára (ahol ma a sportstadion van), s ha ismerősökkel találkozott, bólintott a fejével és továbbment. Nem volt szüksége senkire, és ő sem tartotta magát arra hivatottnak, hogy egyeseknek szolgálatot tegyen vagy kedveskedjék.”

De a kisváros pletykaéhes és mások nyomorúságában vájkáló nyárszopolgárai nem ültel tetlenül. Élvezettel és piszkos fantáziájuk által kiszínezett mendemondákkal adták át egymásnak a „János erkölcstelen kapcsolatáról” szóló „híreket”.

„Az emberek olyanok – írja maga Bolyai János –, hogy csupa irigységből, gonoszságból kikoholnak rendszerint minden hírt, hazugságot, mely szájról szájra geometriai progresszióban terjed és közhitet talál.”

Maga Bedőházi János, a két Bolyai 19. századi életrajzírója sem vetkőzte le a rosszindulatú pletykákból eredő előítéleteket. Benkő Samu egyik tanulmányában leírja, hogy a domáldi öregek között – még a nagyapáiktól hallott elbeszéléseik alapján – Bolyai János egy csendes, állandóan betegeskedő és jólelkű ember hírében állott, akiről soha senki sem mondott rosszat. Úgy látszik, Domáld egyszerű parasztnépe sokkal nagyvonalúbban és humánusabban ítélte meg férfi és nő együttélésének kérdését, mint a marosvásárhelyi kispolgárok. Hogy János nem lépett törvényes házasságra, nem az ő mulasztása volt. A már említett kaució hiánya gátolta őt ebben. De ahogy a körülmények megváltoztak, és már nem volt szükség a császári katonai hatóságok beleegyezésére, 1849. május 18-án, nem sokkal a Habsburgok debreceni trónfosztása után Orbán Rozáliával házasságot kötött. A házassági szertartás tanúi „Orvostudor Engel József és Orgonacsínáló Szabó János Urak” voltak. A szabadságharc vérbefojtása után azonban a császár nem hagyta jóvá házasságkötésüket.

A kapcsolatuk amúgy sem volt problémamentes. János nem tudta elviselni a „legimpertinensebb és a szenvedhetetlenségig menő mérges, nyelves, szembeszálló és mások jelenlétét is számba nem vevő, mocskolódo magaviseletét”. De kétségtelen, hogy Jánosnak is voltak hibái. Látni az egyre mélyedő ellentéteket, mindketten elhatározták, hogy elválnak. 1852. november 26-án tanúk előtt írásbeli szerződést kötöttek, hogy János továbbra is Rozáliának hagyja a vár melletti házukat, ezen kívül még átad 1500 rhénus forintot, aminek ellenében Rozália magára vállalja Dénes és Amália további neveltetését. János továbbá kötelezte magát, hogy elköltözik, és a szerződés szövege szerint „mind-két fél egymás iránt oly idegen leend, mintha egymással soha semmi viszonyban sem lettek és egymást soha sem ismerték volna”. Elválásuk után János ennek ellenére továbbra is áldozatkész apa maradt, és amikor szükséges volt, gondoskodott gyermekeiről. 1853 februárjában például elintézte azt, hogy Dénest felvegyék inasnak egy segesvári vaskereskedőhöz.

Ahogy a szerződésben vállalta, János 1853-ban valóban elköltözött. A marosvásárhelyi Teleki-téka Bolyai-gyűjteményében található annak a szerződésnek az eredeti példánya, amellyel a város szélén fekvő rozoga kis zsindelyfedeles házban egy szobát bérelt magának. Íme a szerződés erre vonatkozó része, amelyet a háztulajdonos Kis József asztalmesterrel kötött:

„Alulírott kiadtam a mai naptól kezdve a jövő Sz. György napig cs. kir. Nyugdíjas Kapitány bolyai Bolyai János Urnak itt a Kálvária [ma Papiu Ilarian] utcában a 905 szám alatti telken, utcafelőli épület alsó, az a:

grádicson föl-menne jobbkézt fekvő szobát... 40 azaz negyven váltó Rh forintért...”

A legújabb levéltári kutatások alapján ma már kétségbe vonják azt az állítást, miszerint Bolyai a hátralévő éveit végig ebben a házban élte volna le, de a ház, amelybe időközben átköltözött, állítólag ennek szomszédságában feküdt. A 20. század elején, gyenge állapotuk miatt ezeket a házakat lebontották.

Egyszerű kis bérelt szobájából – mely nagyobb esőzések alkalmával gyakran beázott – általában csak akkor mozdult ki, ha halaszthatatlan sürgős teendői akadtak. Amikor nem volt ágyhoz kötött beteg, napestig görnyedett kézíratai fölött, vagy néha a Teleki-téka olvasótermét is felkereste, ahol többször összefutott édesapjával:

„Kedves Fiam! – írja Farkas 1853. szeptember 8-án – látván a minap, milyen messze tartod az írást, küldök egy okulárt próbára. Ha jó, tartsd meg. A Teleki thékában kedvesen lehet elálmodni az alig kiállható kedvetlen életet”.

Apjának 1856. november 20-án bekövetkezett halálával elveszítette azt az egyedüli embert is, akivel a környezetében gondolatait megoszthatta. Továbbra is viaskodva két megnyomorítójával, a betegséggel és a szegénységgel, csupán három év és két hónappal élte túl édesapját. 1860. január 18-án tüdőgyulladással végérvényesen ágynak esik. Egyedüli hűségese gondozója, Szóts Júlia, január 27-én a haldokló János helyett a következő drámai hangú – és a későbbiek során oly sokszor idézett – levelet írta a Bolyán gazdálkodó Bolyai Gergelynek:

„Maros Vásárhely, 27 Jan. 860.

Tekintetes Bojai Bojai Gergely Úr,

A Tekintetes Urat már rég akartam tudósítani de míg a bátya egészségebb volt nem engedte, most már kéntelen vagyok bár akarata ellen is tudtára adni hogy a kapitány Ur 18^{dik} Januárba rosszul lett, de mind beszélt sokszor kértem hogy írjon ötse után de ő a költségektől félt most már 26^{dik} Január reggelén 10 órakor a szava el állott azóta nem tud semit magáról, minden minutumban várom a halálát, mit tudok csinálni vele.

Ara kérem a Tekintetes Urat hogy siesen a Bátyához, tudja ki vele ha még életbe kapja, hogy pénzét is kinél tartotta, mert itthon nekünk soha sem mondotta, tsak kérem minél eléb siesen jöjön, ki alázatosan Esedezik

Szóts Júlia
szolgáló

Mig a levelet meg irtam adig megholt, így már nincs mit tagadni a Kapitány Ur nincs többé.”

Két nap múlva, január 29-én, a kötelező katonai kiküldötteken kívül három vásárhelyi lakos kíserte el utolsó útjára. A sír fölé semmiféle jelt sem helyeztek. A marosvásárhelyi református egyház halotti anyakönyve pedig az alábbi néhány sorral bővült:

„Bolyai János, nyugalm. Ingenieur Kapitány – meghalt agy- és tüdőgyulladásban –. Híres nagy elméjű mathematicus volt, az elsők között is első. Kár, hogy nagy talentuma használatlanul ásatott el.”

1.5. Egy mulasztás utórezgése

Ami a jelentőséget illeti, Marosvásárhely polgárai nem is sejtették, hogy azon a hideg januári napon voltaképpen kit is temettek el a város református sírkertjében. A jeltelen sírhalom az évek folyamán lassan besüppedt, és ellepte a gaz. Amennyire lehangoló és szomorú volt Bolyai János egész életpályája, épp annyira megrendítő és elgondolkodtató a neki megadott végtisztetség is. Még a város értelmiségéhez tartozó halotti anyakönyvvezető, Péterfi Károly esperes is azt jegyzi be, hogy „talentuma használatlanul [!] ásatott el”. Mégis, ez a nem mindennapi hozzátoldás, valahogy azt sugallja, egyesek azért csak sejtettek valamit Bolyai rendkívüli tehetségéről. De hogy mennyire méltatlan és ellenszenves volt az a sötét környezet, amelyben Bolyai János szerencsétlen életének utolsó évtizedeit leélte, ékesen bizonyítják a Bedőházi könyvében fellelhető, pletykáktól átitatott és rosszindulatot sugárzó szövegrészek, amelyek torz tartalmától az emberek még negyven év múltán sem voltak képesek megszabadulni. Ugyanis a nem marosvásárhelyi születésű Bedőházi János a 19. század végén idekerülve az idősebb városlakóktól gyűjtötte össze az „adatok” egy részét, amelyeket a józan gondolkodás és valóságérzet szítáján művelt ember létére sem volt képes átszűrni. Ami talán még jobban elgondolkodtat – és amit a 9. fejezetben fogunk ismertetni –: akik legelőször észrevették e csodálatos lángelme alkotásának értékét és jelentőségét, nem magyarok voltak, és az a magyarországi személy, aki ezek után kiharcolta, hogy a 19. század végén legalább egy egyszerű sírkő kerüljön a felismerhetetlen végső nyugalóhelyre, ugyancsak nem marosvásárhelyi volt. Bolyai Jánost ugyanis eredetileg nem az édesapja mellé temették el, hanem a domboldalon húzódó református temető felsőbb részében.

Amikor – főleg János tevékenységének köszönhetően – nevük világhírűvé vált, Magyarország tudományos és közigazgatási szervei úgy hatá-

roztak, hogy egymás mellé temetik őket. Így apa és fiú együvé tartozását nemcsak a *Tentamen* és az *Appendix* együttes megjelenése, hanem ez is érzékelteti. A hivatalosan megjelent kihantolási jegyzőkönyvből tudjuk, hogy – hatósági engedély alapján – a két holttestet 1911. június 7-én exhumálták. Mint hivatalos személyek jelen voltak: a Magyar Tudományos Akadémia részéről Farkas Gyula kolozsvári egyetemi tanár, a család részéről Bolyai Dénes, a marosvásárhelyi református kollégium igazgatója és tanári kara, a város rendőrségének képviselői, egyházi elöljárók, Hints Elek állami kórházi főorvos, és még sokan mások.

A két sírt felnyitották és a maradványokat egy-egy érckoporsóba helyezték. Csak a koponyacsontokat nem tették vissza. Ezeket Bolyai Dénes és a hatósági szervek beleegyezésével Hints Elek (aki máskülönben a Bolyaiak távoli rokona is) vette át, azzal a kötelezettséggel, hogy a megfelelő kezelési eljárások után átadja a marosvásárhelyi református kollégiumban létesítendő Bolyai Múzeumnak. Így kerültek végül is múzeumba a ma már megtekinthető koponyacsontok. „Mind Bolyai János, mind Bolyai Farkas koporsóját – olvasható az akkor készült jegyzőkönyvben – még a mai nap folyamán délután 5 órakor a Bolyai Farkas régi sírhelyén készített sírba hantoltattuk el, ünnepélyes temetéssel egybekötve.”

Ettől a naptól kezdve két nagy matematikusunk közös sírban alussza örök álmát.

2. Az *Elemek*-től az *Appendix*-ig

Euklidész műve az antik világ egyik legnemesebb alkotása. Élni fog akkor is, amikor már az összes mai tankönyv elavult és elfeledett lesz.

Thomas Heath

Az *Appendix* originális nagy munka; magyar tollából olyan mathematicus munka nem jött; akárhol számot teszen.

Bolyai Farkas

2.1. Euklidész remekműve

A geometria a matematika és egyben az egyetemes tudomány egyik legrégebbi ága. Maga a geometria szó földmérést jelent, és utal arra, hogy mi volt a szerepe az ősi földművelő társadalmakban (Egyiptom, Babilónia stb.). E népeknél – amint azt az eddig feldolgozott matematikatörténeti dokumentumok igazolják – a legtöbb geometriai ismeret tapasztalati leírások és állítások formájában élt. Tehát a felgyűlt ismeretanyag amolyan receptszerű szabályok gyűjteménye volt, amelyből hiányoztak a logikai indoklások. Az ókori görög matematikusoknak köszönhetjük azt a felismerést, hogy bizonyos geometriai kijelentéseket, az úgynevezett tételeket bizonyítani kell. Ezt a nagy jelentőségű előrelépést sokban elősegítették a különböző ókori görög filozófiai irányzatok is. Például az eleai iskola tanításának lényege az volt, hogy az érzéki észlelés csak látszat, ennél fogva csupán az értelemmel ismerhetjük meg a dolgok lényegét.

Több görög matematikusról tudunk, aki annak idején kísérletet tett az új felfogás alapján tárgyalt geometriai ismeretek összegyűjtésére és feldolgozására. Közülük sajnos csak kevesek alkotása őrződött meg napjainkig. Az idők viszontagságait szerencsésen átvészelő egyik ilyen munka Euklidész (kb. Kr. e. 330–275) tizenhárom kötetből álló *Elemek* (*Sztoikheia*) című re-

mekműve. Euklidész eredeti munkája is elveszett, de másolatok révén szövege megőrződött. Értékét mi sem bizonyítja jobban, mint az a tény, hogy az emberiség története folyamán a legtöbb kiadást megért tudományos mű az *Elemek*. A 9. századból ránk maradt másolatok alapján az első nyomtatott példány 1482-ben Velencében latin nyelven jelent meg, és azóta különböző nyelvekre is lefordítva több mint 600 kiadást ért meg. Állítólag csak a Biblia az a könyv, amelyet a nyugati világ történelme során többször sokszorosítottak és tanulmányoztak. Euklidész művének megírásához nagyban támaszkodott az akkoriban már létező, más szerzők által írt ugyancsak *Elemek* címet viselő geometriai munkákra, amelyek szövegei nem maradtak fenn napjainkig. Példaként említhető a khioszi Hippokratész (Kr. e. 460–377) *Elemek* című műve. Ezzel kapcsolatban Szabó Árpád a következőket írja:

„Arra nem vállalkozhatunk, hogy magából Euklidész művéből mutassuk ki a korábbi *Elemek* nyomait. Elégedjünk meg itt azzal a megállapítással, hogy az euklidészi *Elemek* magas tudományos színvonala, a bizonyítások szigorúsága, világos, tiszta megfogalmazása, egyszerűen: mindaz, ami Euklidészben az évszázadok hosszú során át felülmúlhatatlannak látszott, és amin úgyszólván csak a legújabb kori matematika tudott túlhaladni – mindez megerősíteni látszik azt az elgondolást, hogy nemcsak az *Elemek* egyes tételei, hanem magának az egész műnek a felépítése is több megelőző kísérlet után érlelődött olyanná, amilyen formában ránk maradt.”

Művében Euklidész néhány definícióból, axiómából és posztulátumból indul ki, amelyekből deduktív úton, a logikai szabályokra támaszkodó bizonyítások révén vezeti le az új állítások gyűjteményét, melyeket tételeknek nevezünk. Az egységes rendszerbe szedett tételek és a bizonyítások logikai láncolata a szerző magas fokú képzettségét igazolja.

Közismert, hogy axióma, valamint posztulátum alatt olyan matematikai állítást értünk, amelyet bizonyítás nélkül eleve igaznak fogadunk el. Ebből is kifolyólag, axiómának vagy posztulátumnak leggyakrabban olyan egyszerű kijelentéseket választunk, amelyeket a szemlélet alátámaszt, vagy ahogyan még népiesen mondani szokták: egyetlen józanul gondolkodó ember sem kételkedik a kijelentés igazságában. De ez nem zárja ki azt, hogy egy axiómaként elfogadott kijelentés fakadhat magasabb fokú absztrakciókból is. Ezekre a bizonyítás nélkül elfogadott állításokra azért volt szükség, mert a bizonyítások logikai láncolatát alkalmazva valahonnan el kell indulni.

Az *Elemek* első könyve 23 definícióval, 5 posztulátummal és 9 axiómával kezdődik. Említsünk itt meg néhány definíciót és soroljuk fel a posztulátumokat és axiómákat.

Definíciók:

1. A pont az, aminek nincs része.
2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.
3. A vonal végei pontok.
4. Egy vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.
5. Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.
[...]
23. Párhuzamosok azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkét oldalt meghosszabbítva egyikén sem metszik egymást.

Posztulátumok:

1. Bármely pontból minden más ponthoz húzható egyenes.
2. Az egyenes bármeddig meghosszabbítható.
3. Bármely pont mint középpont körül akármekkora sugárral kör rajzolható.
4. Minden derékszög egyenlő.
5. Ha egy egyenes másik két egyenest úgy metsz, hogy a metsző egyenes ugyanazon oldalán belül keletkező két szög összege a derékszög kétszeresénél kisebb, akkor a két egyenes határtalanul meghosszabbítva azon az oldalon találkozik, amelyiken a derékszög kétszeresénél kisebb összegű két szög van.

Axiómák:

1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.
2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, az összegek egyenlők.
3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.
4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk, az összegek nem egyenlők.
5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.
6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.
7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.
8. Az egész nagyobb a résznél.
9. Két egyenes nem fog közre területet.

A fentiek számozása az *Elemek* különböző kiadásában eltérő. Így például az 5. posztulátum egyes kiadásokban 11. axiómaként szerepel. Bolyai János is egy ilyen kiadásból ismerkedett meg Euklidész művével, mivel az 5. posztulátumot minden írásában 11. axiómaként említi. Így az elkövetkezőkben mind a kétféle megnevezést használni fogjuk.

2.2. A párhuzamosok két évezredes problémája

Figyelmesen elolvassa a posztulátumokat észrevehetjük, hogy az 5. mint-ha elütne a többi négytől, valamint az axiómáktól. Szövege lényegesen komplikáltabb, és nem tűnik annyira „nyilvánvalónak” mint a többi. Emiatt később nagyon sokan úgy vélték, hogy Euklidész itt tévedésből egy tételt sorolt az axiómák közé. Ahhoz, hogy ezt valóban kimutassák, a párhuzamosokra vonatkozó állítását megpróbálták bebizonyítani. És ezzel kezdetét vette egy több mint két évezredig tartó sikertelen kísérletsorozat, ugyanis a párhuzamos egyenesekre vonatkozó euklideszi kijelentés igazolása minden erőfeszítésnek ellenállt. A próbálkozók között sokan akadtak olyanok, akik azzal a tudattal haltak meg, hogy bebizonyították Euklidész párhuzamossági posztulátumát, de később kiderült, hogy bizonyításuk nem helyes. Bolyai Farkas, ismerve a számos kudarcot, melyet még saját sikertelensége is tetőzött, szinte kétségbeesve írja fiának 1820. április 4-én:

„Megfoghatatlan, hogy ez az elháríthatatlan homály, ez az örök napfogatkodás, ez a mocsok hogyan hagyott a Geometriában, ez az örök felleg a szűztiszta igazságon”.

A szóban forgó kérdés kiemelkedő jelentősége miatt próbáljuk kissé részletesebben megvilágítani ezt a problémát.

A párhuzamos egyenesekre vonatkozó viták megelőzték Euklidészt. Az eleai görög filozófus, Zénón (Kr. e. 5. század) paradoxonjai között szerepel egy olyan természetű következtetés is, mely szerint két egyenes a szelő egyenesnek azon oldalán sem találkozik, melyeknek az 5. posztulátum alapján metszeniük kell egymást. Tóth Imre néhány évtizeddel ezelőtti kutatásai pedig azt mutatták ki, hogy a párhuzamos egyenesek vizsgálata a nagy ókori gondolkodó, Arisztotelész (Kr. e. 384–322) munkáiban is előfordul. Nehezen hihető, hogy Euklidész nem ismerte volna ezeket az eszmefuttatásokat, és valószínű, hogy ő annak idején hosszas megfontolások után sorolta a párhuzamosokra való kijelentését a posztulátumok közé, amit az is sejtet, hogy ezt elég későn, csak a 29. tétel bizonyításánál használja fel először, amikor a posztulátum további mellőzése szinte lehetetlenné válik.

A bizonyítási kísérletek már nem sokkal az *Elemek* közzététele után megjelentek. Az első ismert próbálkozó Poszeidóniosz (kb. Kr. e. 135–51), aki azt használja fel bizonyításánál, hogy a párhuzamos egyenesek közötti távolság állandó marad. Hasonló meggondolásokkal kísérletezik Geminosz (Kr. e. 1. század) is. Az ókor híres csillagásza, Ptolemai-

osz (kb. Kr. u. 120–190) sem tud átsiklani a párhuzamosok problémája felett. Mindhármut próbálkozásairól az *Elemek* első alaposabb kommentátorától, Proklosztól (410–485) szerzünk tudomást, akinek írása 1533-ban jelent meg nyomtatásban Bázelen, görög nyelven. Ebben bírálat alá veszi Poszeidóniosz, Geminosz és Ptolemaiosz bizonyítási kísérleteit is. Az ókor utolsó kiemelkedő filozófusa kitűnő érzékkel azzal érvel, hogy két párhuzamos egyenes közötti távolságnak nem kell feltétlenül állandónak lennie, ugyanis abból, ha csökken, még nem következik, hogy az egyenesek metszik is egymást. Példaként az aszimptotikus tulajdonságot említi. Amint később látni fogjuk, Bolyai geometriájában a párhuzamosok többek között egy ilyen tulajdonsággal is rendelkeznek. Ugyanakkor Proklosz maga is megkísérli a párhuzamossági axióma bizonyítását. Ennek érdekében felhasználja azt a bizonyítás nélküli kijelentést, hogy ha a és b egyenesek párhuzamosak, és ha a c egyenes metszi az a egyenest, akkor metszi a b egyenest is. Ez az állítás azonban ekvivalens az euklideszi posztulátummal, tehát az erre alapozott bizonyítás nem elfogadható.

Egy kijelentésről akkor mondjuk, hogy ekvivalens az euklideszi párhuzamossági posztulátummal, ha e kijelentés és a többi axióma, valamint az ezekből levezetett tételek segítségével igazolni tudjuk Euklidész posztulátumát, és fordítva, a kijelentés is csak az igaznak elfogadott párhuzamossági posztulátum segítségével bizonyítható be. Máskülönben ez a hiba jellemzi az összes eddigi és az ezutáni bizonyítási kísérleteket is. Szintén mindegyikükben – anélkül, hogy tudatában lettek volna – olyan kijelentést is felhasználtak, amely a párhuzamossági axióma nélkül nem igazolható.

A párhuzamossági axióma bizonyítási kísérletei a középkorban sem szakadtak meg. Ez a folytonosság főleg az arab és perzsa matematikusoknak köszönhető.

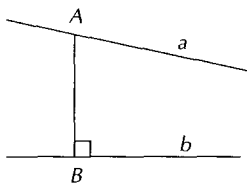
Al Aba ibn Szaíd al Dzsauhari (9. század) abból a kijelentésből indult ki, hogy ha két egyenest metszünk egy szelővel, mely a két egyenessel egyenlő megfelelő szögeket alkot, akkor az igaz bármely más szelő egyenesre is. Ez az állítás azonban ekvivalens az euklideszi posztulátummal.

Abul Abasz ibn Hatim An-Nairizi (900 körül) – latinostott nevén Anaritius – bagdadi matematikus a bizonyításában egy minden szögében derékszögű téglalap létezését is feltételezi. Ma már köztudott, hogy ez csak az euklideszi axióma érvényessége esetén lehetséges.

Hasszán ibn al Haitham (965–1039) – latinostott nevén Alhazen – arra a bizonyítás nélkül igaznak vélt kijelentésre támaszkodott, hogy egy egyenes távolságvonala (vagyis azoknak a pontoknak a sokasága, amelyek az egyenes által meghatározott egyik félsíkban egyenlő távolságra vannak az adott egyenestől) szintén egyenes. Megjegyzendő, hogy nyolc

évszázaddal később Bolyai Farkas és Bolyai János is a távolságvonal fogalmával foglalkoztak kezdetben, de ők már jóval mélyebbre hatoltak azaz, hogy nem feltételezték, hogy ez egy egyenes, hanem bizonyítani akarták azt. S ha ez valóban sikerült volna nekik, akkor innen már csak egy lépés lett volna a posztulátum bizonyítása.

A középkor egyik kimagasló szellemi egyénisége volt Omar Khajjam (1048–1123) perzsa matematikus, csillagász és költő. Többek között a párhuzamosok problémájával is foglalkozott. Megkísérelt bizonyításában – anélkül, hogy észrevette volna – azt az euklideszi axiómával ekvivalens, de bizonyítatlan kijelentést is felhasználta, miszerint az ugyanarra az egyenesre emelt két merőleges egyenes közötti távolság állandó marad.



1. ábra

Érdekes gondolatmenetet követ Naszir-Eddin at Tuszi (1201–1274). A párhuzamos egyenesekre vonatkozó munkája Rómában 1594-ben latin nyelven is megjelent, melyben a következő állítás felhasználásával igazolja az euklideszi axiómát: tekintsük az a és b egyeneseket és az a egyenes A pontjából a b egyenesre bocsátott AB merőleget (1. ábra). Akkor az AB szakasz hossza növekszik az a -val alkotott tompaszög és csökken az ezzel ellentétes hegyesszög irányában történő elmozdulással. Igazolható azonban, hogy ez a kijelentés is ekvivalens az euklideszi párhuzamossági posztulátummal.

A reneszánsz az európai művelődés igen jelentős korszaka. A tudományok és művészetek megújulásának vagyunk tanúi, élénkül az arab és keleti kultúrák iránti érdeklődés. Az arabok által átmentett örökséget átveve, Euklidész műve – nem sokkal a könyvnyomtatás felfedezése után – latinra fordítva Európában is megjelent. A mű tanulmányozása közben a párhuzamosokra vonatkozó posztulátum újból az érdeklődés középpontjába kerül.

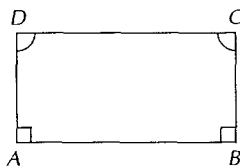
Christoph Schlüssel (1537–1612) – latinosított nevén Clavius – az 1574-ben Rómában megjelent *Euclidis Elementorum libri XIII...* című dolgozatában megpróbálja bizonyítani az euklideszi posztulátumot. Bizonyításában (akárcsak Alhazen, akinek munkáját valószínűleg nem ismerte), felhasználja azt az állítást, hogy egy egyenes távolságvonala szín-

tén egyenes. Manapság az a tétel, amely kimondja, hogy az euklideszi posztulátum ekvivalens azzal a kijelentéssel, hogy egy egyenes távolságvonala szintén egyenes, Clavius tétele néven honosodott meg a matematikában.

Úgy tűnik, hogy az első, aki tudatosan helyettesítette Euklidész posztulátumát egy más axiómával, John Wallis (1616–1703) angol matematikus volt. Wallis axiómája a következő: *Egy adott idomnak meg tudunk feleltetni egy vele bármilyen nagyságú, hasonló idomot.*

Az utólagos kommentátorok ezt a következő, konkrétabb és rövidebb megfogalmazásban módosították: *Léteznek hasonló, de nem egyenlő háromszögek.*

John Wallis az általa megfogalmazott axióma segítségével a posztulátum bizonyítását is megadta.



2. ábra

A párhuzamossági axióma elég mélyreható tanulmányozását találjuk meg Girolamo Saccheri (1667–1733) olasz jezsuita szerzetes *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euklidész minden folttól megtisztítva) című művében. Ez a kissé fellengzős című tanulmány 1733-ban jelent meg Milánóban. A szinte teljesen feledésbe merült műre 1889-ben Eugenio Beltrami (1835–1900) olasz matematikus hívta fel a figyelmet. Saccheri már ismerte Omar Khajjam és Naszir-Eddin munkáit, akik egy olyan $ABCD$ négyszög tanulmányozásából indultak ki, amelynek A és B szögei derékszögek, a szemben fekvő AD és BC oldalak pedig egyenlők (2. ábra). Ez a négyszög a matematikai szakirodalomban a Saccheri-féle négyszög megnevezéssel honosodott meg. Ennél a négyszögnél, akár szimmetriai okokra hivatkozva is könnyen belátható, hogy a C és D szögei egymással egyenlők, amelyek lehetnek derék-, hegyes- vagy tompaszögek. Saccheri mind a három esetet megvizsgálva kimutatta, hogy a két utolsó elfogadhatatlan. A tompaszög hipotéziséből kiindulva elég hamar sikerült ellentmondáshoz jutnia. De nem ez volt a helyzet a hegyesszög hipotézisével. Bonyolult és hosszadalmas erőfeszítések után sem talál meggyőző ellentmondást. Számos nemeuklideszi geometriában ismert tulajdonságot fedez fel, melyeket azzal utasít vissza, hogy ezek „ellentmondanak az egyenes természetének”. Így szerinte maradt az egyetlen

lehetséges eset, a derékszög hipotézise, melyből már valóban könnyen igazolható az euklideszi posztulátum.

Egy lépéssel Saccherinél is továbbment Johann Heinrich Lambert (1728–1777) svájci német matematikus. Művét azonban nem közölte. Johann Bernoulli (1710–1790) csak Lambert halála után, 1786-ban jelenteti meg *Theorie der Parallellinien* címen. E mű értékére 1893-ban Paul Stäckel (1862–1919) mutatott rá. Lambert egy olyan négyszöget tanulmányozott (amelyet annak idején Alhazen is vizsgált), amelynek három szöge derékszög. A negyedik szög tehát lehet derék-, tompa- vagy hegyesszög. Ő is a két utolsó feltevés elvetésének szükségességét próbálta igazolni. Lehet, hogy dolgozatával nem volt megelégedve, és emiatt nem közölte. Több érdekes észrevétele mellett érdemes megjegyeznünk a következőt: a hegyesszög hipotézise megvalósítható egy képzetes sugarú gömbön.

Nem érdektelen tudnunk, hogy később Bolyai János (aki nem ismerte Lambertnek ezt a munkáját) a *Responsio* című művének 9. paragrafusában pontosan ezt tárgyalja.

A párhuzamossági axiómával foglalkozó jelentősebb művek közül még érdemes megemlítenünk néhányat: Giovanni A. Borelli (1608–1676): *Euclides restitutus*, Pisa, 1658; Vitale Giordano (1633–1711): *Euclide restituto*, Róma, 1680; N. de Malézieu (1650–1727): *Éléments de géométrie*, Párizs, 1705.

A. G. Kästner (1719–1800) és G. S. Klügel (1739–1812) az 1763-ban Göttingában kiadott *A párhuzamosok elméletének bizonyítására irányuló legjelentősebb próbálkozások elemzése* című latin nyelvű disszertációban megpróbálják tüzetes vizsgálat alá venni az addig megjelent legfontosabb bizonyítási kísérleteket. Az ezzel kapcsolatos, addig megjelent munkák tekintélyes számát bizonyítja az a tény, hogy igényes válogatásuk után is több mint 30 dolgozatot érdemesítettek behatóbb elemzésre. Ez egyben azt is mutatja, hogy a párhuzamossági probléma tisztázása mind égetőbbé vált.

Ezután még két igen jelentős próbálkozást érdemes megemlíteni. Az egyik Adrien M. Legendre (1752–1823), a másik Bolyai Farkas ilyen irányú munkája.

Legendre azzal a kijelentéssel próbálkozik, mely szerint a háromszög szögeinek összege két derékszög. Több kiadást megért nagysikerű könyvében, melynek címe *Éléments de géométrie*, megpróbálja igazolni ezt a kijelentést, amely szintén ekvivalens a párhuzamos posztulátummal. Könyvének 1800-ban megjelent harmadik kiadásában – többek között – a következő két tételt bizonyítja:

Egy háromszög szögeinek összege nem lehet nagyobb két derékszögnél.

Ha létezik egy olyan háromszög, amely szögeinek összege egyenlő két derékszöggel, akkor bármely háromszög esetében igaz ez a tulajdonság.

A posztulátum bizonyításához tehát igazolnia kellett még azt, hogy nem létezik olyan háromszög, amely szögeinek összege kisebb két derékszögnél. Legendre ennek bizonyításánál hibát követett el. Ugyanis bizonyítás nélkül felhasználta azt az állítást, miszerint egy két derékszögnél kisebb szög belső tartományának bármely pontján keresztül mindig húzhatunk olyan egyenest, amely a szög mindkét szárát metszi. Ez a tulajdonság azonban nem bizonyítható Euklidész párhuzamossági axiómája nélkül.

Bolyai Farkas *A párhuzamosok elmélete* című dolgozatát 1804. szeptember 16-án írt levél kíséretében küldte el Gaussnak elbírálás végett, amelyben igyekszik kimutatni, hogy az egyenes távolságvonala szintén egyenes. Miután Gauss rámutatott a dolgozatban rejlő hibára, 1808. december 27-én Farkas egy másik, „jobbított” dolgozatot is elküld neki, melynek címe: *A párhuzamosok elméletének toldaléka*. Ebben továbbra is az euklideszi posztulátum bizonyítását tűzi ki célpontul. Amint már említettük, Gauss erre a levelére nem válaszolt.

Az *Elemek* megjelenésétől eltelt több mint két évezred e témával kapcsolatos fontosabb állomásainál megállva, talán sikerült érzékeltetnünk a kérdés kiemelt jelentőségét és a megoldásával kapcsolatos kudarccokat. Hogy az egyes kutatókat mennyire hatalmába tudta keríteni az egyes kutatókat ez a probléma, ízelítőt kapunk majd azoknak a leveleknek a szövegéből, amelyeket Bolyai Farkas akkor írt fiának, amikor megtudta, hogy ő is foglalkozik a párhuzamosok kérdésével.

2.3. Minek tulajdonítható az oly sok kudarc?

A legtöbb manapság használt iskolai tankönyvben az euklideszi párhuzamossági axióma a következő megfogalmazásban szerepel:

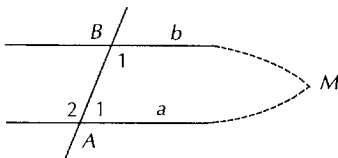
A síkban egy egyenesen kívül fekvő ponton keresztül, csak egy párhuzamos egyenes húzható az adott egyeneshez.

Az elkövetkezőkben arról is meggyőződünk, hogy ez a kijelentés szintén ekvivalens az *Elemek*-ben megfogalmazott 5. posztulátummal. Előbb kimutatjuk, hogy egy *a* egyenesen kívüli *A* ponton átmenő egyenesek között van *legalább* egy olyan, amely nem metszi az *a* egyenest. Ennek érdekében az *Elemek* első könyvének 16. tételére támaszkodunk, mely ki mondja:

Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög nagyobb mind a két nem mellette fekvő belső szögnél.

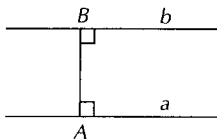
Euklidész ezt a tételt a párhuzamossági posztulátum felhasználása nélkül bizonyítja, tehát független a posztulátum igaz vagy hamis voltától. Máskülönben említettük már, hogy Euklidész a párhuzamossági axiómát legelőször csak a 29. tétel bizonyításánál használja, tehát az összes korábbi tétel független a párhuzamossági axiómától, vagyis – Bolyai János terminológiáját használva – *abszolút tételek*. A 16. tételt alkalmazva könnyen bizonyíthatjuk, hogy

Ha két egyenest metszünk egy harmadik szelő egyenessel, és a szelő ugyanazon oldalán keletkezett belső szögek összege a derékszög kétszeresével egyenlő, akkor a két egyenes nem metszi egymást.



3. ábra

Legyen a és b a két egyenes (3. ábra), melyeket egy harmadik, c egyenessel metszünk. A és B -vel jelölve a szelő egyenes által kapott metszéspontokat feltételezésünk alapján $m(A_1\angle) + m(B_1\angle) = 180^\circ$. Igazolnunk kell, hogy az a és b egyenesek nem metszik egymást. A *reductio ad absurdum* következtetési sémát alkalmazva tegyük fel, hogy ez a két egyenes az M pontban metszi egymást. Akkor az MAB háromszögre alkalmazva a 16. tételt azt kapjuk, hogy az A_2 külső szög nagyobb, mint a B_1 belső szög. De mivel a mi esetünkben mind a két szögnek ugyanaz az A_1 szög a kiegészítő szöge, az A_2 és a B_1 szögek egyenlők. Ezzel ellentmondáshoz jutottunk, mivel két szög nem lehet különböző és ugyanakkor egyenlő is. Tehát az a és b egyenesek nem metszik egymást.



4. ábra

Az előbbiekből arra is tudunk következtetni, hogy hogyan húzhatunk egy ponton át párhuzamost egy adott egyeneshez. Ennek érdekében elég, ha az a egyenesen kívül fekvő B pontból meghúzzuk a BA merőleget az a egyenesre (4. ábra), és a B -ben az AB -re emelt b merőleges lesz a keresett párhuzamos.

Eddig azt igazoltuk tehát, hogy az a egyenesen kívüli B ponton keresztül mindig húzhatunk olyan egyenest, amely nem metszi az a egyenest. És most vetődik fel a kérdés: hány ilyen párhuzamos húzható? Vagy más-képpen kérdezve: ezen a párhuzamoson kívül húzhatók-e még más párhuzamosok is A B ponton keresztül? Erre a kérdésre ad választ Euklidész axiómája, mely kimondja, hogy: *csak ez az egy párhuzamos húzható.*

Valóban, mert egy ettől különböző más egyenes esetében az AB szelő ugyanazon oldalán keletkezett belső szögek összege már nem lesz egyenlő két derékszöggel, és akkor az egyik ilyen belső szög-pár összegének kisebbnek kell lennie mint két derékszög. Ekkor pedig, az euklideszi posztulátum alapján ez a két egyenes már metszi egymást.

A két évezreden át tartó sikertelen próbálkozásoknak az az oka, hogy a „csak egy párhuzamos húzható” kijelentés a többi axióma és posztulátum segítségével már nem bizonyítható, ami egyben azt is jelenti, hogy az euklideszi párhuzamossági axióma független a többitől. Tehát a döntő hiba a probléma föltevésében és célkitűzésében volt: *minden előzetes vizsgálat és megfontolás nélkül egyszerűen úgy tekintették, hogy Euklidész 5. posztulátuma tulajdonképpen egy tétel, és így ennek már csak a bizonyítását keresték, ami ebben az esetben lehetetlen.*

2.4. Egy geometria megalapozása

Kétezer év sikertelen próbálkozásai egy másik fontos dologra is felhívták a figyelmet, éspedig: *a geometria alapjainak tisztázására.* Ugyanis észrevették, hogy az *Elemek* legelején adott definíciókkal is baj van. Az *Elemek* további logikus gondolatmenetében Euklidésznek például sehol sem kell használnia azt a definíciót, hogy „a pont az, aminek nincs része.” A vonal meghatározásánál pedig ismertnek tételezik fel a szélesség és a hosszúság fogalmait, amelyek – ha valóban következetesek akarunk lenni – szintén meghatározásra szorulnak. Kétségtelen, hogy ezek a definíciók bizonyos mértékig akadályozták a geometria későbbi fejlődését. Hasonlóképpen magával az egész axiómarendszerrel szemben is merültek fel problémák. Idővel például kiderült, hogy az annyit ostromolt 5. posztulátummal ellentétben a 4. posztulátum (minden derékszög egyenlő) végül is bizonyítható, tehát fölösleges a posztulátumok közé sorolni. Ugyanakkor a *rendezés axiómái* például teljes mértékben hiányoznak Euklidész axiómarendszeréből. Ezek alapján mind gyakrabban vetődött fel a kérdés: mire is építjük tulajdonképpen az egész geometriát, ha annak kiindulópontjai, az alapfogalmak és az axiómák még tisztázatlanok?

A 19. század végéig több kísérlet történt egy axiómarendszer kidolgo-

zására. Ezek közül talán a legsikerültebb a David Hilberté (1862–1943), amely még ma is az euklidészi geometria leggyakrabban használt axiómarendszerére. Híres munkája 1899-ben jelent meg *Grundlagen der Geometrie* (A geometria alapjai) címen.

A probléma természetéből fakadnak a következő kérdések: milyen követelményeknek kell eleget tennie egy axiómarendszernek, hogy az elfogadható, vagyis használható legyen? Ha nem fogadjuk el Euklidész definícióit, akkor hogyan járunk el ezen a téren?

Egy axiómarendszer alatt az olyan bizonyítás nélkül elfogadott kijelentések (axiómák) összességét értjük, amelyekre valamely matematikai elmélet épül, és ebből kiindulva, a matematikai logika bizonyítási módszereinek alkalmazásával vezetik le az illető elmélet összes többi állításait (tételeit).

Egy használható és sikerült axiómarendszerrel szemben általában a alábbi követelményeket szokták támasztani: legyen *ellentmondásmentes*, ami azt jelenti, hogy belőle kiindulva nem bizonyítható be egy állítás és ugyanakkor annak tagadása is; legyen *független*, azaz egyik axióma se legyen levezethető a többiből; és végül, bizonyos értelemben *teljes*, amin azt értjük, hogy lehetőleg tartalmazzon annyi és olyan axiómát, hogy belőlük kiindulva az illető matematikai elmélet állításait a bizonyítási eljárásokkal igazolni tudjuk.

A fogalmak bevezetésére általában a *definíciót* használjuk. Egy fogalmat definiálni (meghatározni) annyit jelent, hogy megadjuk a fogalom *nemét* (az általánosabb fogalomkört, amelybe a meghatározandó fogalom tartozik), majd megadjuk a fogalom *faját* (a speciális jegyeket, amelyek az illető fogalmat a többi fogalomtól megkülönböztetik). Például: „a rombusz egy olyan négyszög, amelynek oldalai egyenlők” definícióban megadjuk a fogalom (rombusz) nemét (négyszög) és faját (oldalai egyenlők).

Egy fogalom azonban nem mindig definiálható. Van úgy, hogy a fogalom annyira általános, hogy nincs neve. Ilyen a matematikában a *halmaz* fogalma. Ha mégis meg akarjuk magyarázni, hogy mit értünk halmaz alatt, akkor legtöbbször például azt mondjuk, hogy a halmaz bizonyos közös tulajdonságokkal rendelkező dolgok sokasága (vagy gyűjteménye). De ha tisztázni akarjuk, hogy mi a sokaság, vagy mi a gyűjtemény, akkor kiderül, hogy mindegyikük ugyanazt jelenti, mint a halmaz. Tehát a halmazt definiálni próbálván nem mondunk mást, mint hogy „a halmaz az – halmaz”.

A másik eset, amelyben a fogalom nem definiálható az, amikor a fogalom annyira egyedi, hogy már nincs faja, vagyis nem tudunk specifikus jegyeket felsorolni. Ilyen például a geometriában a *pont*, az *egyenes*

vagy a *sík*. Az ilyen fogalmakat a matematikában *primer-* vagy *alapfogalmaknak* nevezzük. Ezeket is definíció nélkül fogadjuk el. Tehát a fogalmak esetében is kell egy kezdet, amiből kiindulunk. Igen ám, de az alapfogalmak tartalmát is tisztázni kell valamilyen módon. Ha nem definícióval, akkor másképp. És ekkor vetődött fel Hilbertben a nagyszerű ötlet: az alapfogalmak tartalmát az axiómák határozzák meg azáltal, hogy leírják azokat az alapvető tulajdonságokat, amelyekből a többi tulajdonságuk levezethető. Ezzel lényegében megfosztottuk a fogalmakat tartalmuktól és formálisan kezeljük azokat. A formalizálással egyben elhárítottuk azt a veszélyt, hogy az új tételeknek az axiómákból és a már igazolt tételekből való szigorú levezetésénél valamely előzetesen megadott fogalommal olyan állításokat is becsempésszünk, amelyek az axiómákból nem következnek. Tipikus példaként említhetjük G. Saccherinek a párhuzamosok posztulátumára vonatkozó hibás bizonyítását, amikor tekervényes okoskodása végén egyszerűen kijelenti, hogy az euklideszi posztulátum tagadása képtelenséghez vezet, mert az „ellentmond az egyenes természetének”. Itt is kereshetjük a két évezreden át tartó kudarc sorozat egyik okát.

2.5. Bolyai János és a 11. axióma

Amint már említettük, Bolyai Farkas egyike volt azoknak a matematikusoknak, akik az 5. posztulátum (11. axióma) bizonyításán fáradoztak. Arról is szóltunk, hogy fia matematikatanítását nem bízta másokra, hanem ő maga végezte. Paul Stäckel a Bolyaiak hagyatékában sok olyan kéziratot talált, amelyekben maga János számol be apja tanórairól és a vele való vitáiról, valamint abszolút geometriájának keletkezéséről. Így valóban hiteles képet alkothatunk arról, hogyan haladt előre a párhuzamosok problémájának megoldásában. Emiatt, ahol csak lehet, hagyjuk, hogy János és néha Farkas nyilatkozzék erről a kérdésről. Maga János írja, hogy apja a leckéi alkalmával „a paralelák az egyenes és más alaptanok hiányosságaira figyelmeztette”. De János határozottan azt is kijelentette, hogy Farkas „titokban tartotta a 11. axióma lehetséges bizonyítására vonatkozó gondolatait és később is csak töredékeket közölt” vele. Ma sem tudjuk egészen biztosan, hogy mi volt Farkas eljárásának igazi oka. A legvalószínűbb az, hogy nem akarta – amint egyszer maga is írta –, hogy szerencsétlen élete fiában ismétlődjék. De az is lehet, hogy sikertelen próbálkozásairól nem akart már a legelején említést tenni fiának. Azonban a lelkét állandóan feszítő gondolat nyomásának engedve az egyik órán elszólta magát: „aki a 11. axiómára bizonyítást

találna, akkora gyémántot érdemelne, mint a Föld”, máskor pedig: „kinek ez sikerülni fog, annak halandók, örök emléket állítsatok”. János ezeket a gyermekkorában édesapjától hallott mondatokat többé soha sem felejtette el.

„A 11. axióma bizonyítására – írja János – először azt az utat követtem, hogy bizonyítsam, hogy az egyenessel egyenközű vonal, azaz a síkban tőle mindenütt egyenlő távolságra levő vonal szintén egyenes és evégből megvizsgáltam, hogy mik az ilyen vonal tulajdonságai az ellenkező esetben”.

Tehát János is, akárcsak néhány elődje (akiknek a munkái nagyrészt nem jutottak el hozzá) az axióma bizonyítása érdekében a távolságvonal (egyenközű vonal), vagy ahogyan még manapság nevezik, a *hiperciklus* tulajdonságait vizsgálta. Ugyanis ha be tudta volna bizonyítani, hogy ez a vonal egy egyenes (anélkül, hogy véletlenül felhasználna egy 11. axiómával ekvivalens kijelentést), akkor ezzel igazolta volna az euklideszi axiómát. De szerencsére nem haladt hosszú ideig ebben a zsákutcában.

Bolyai János az első komoly lépéseket a kitűzött cél felé a bécsi hadmérnöki Akadémián töltött diákévei alatt tette. Erre a kezdeti időszakra később így emlékezik vissza:

„Tizenhat éves koromban a feladatnak egészen különös kiválóságától és nagy fontosságától ingerelve elhatároztam: bármint legyen is, ebben a dologban minden lehetőt megteszek és a paralelák elmélete csakhamar kedvenc foglalkozásom lett.”

Még 18 éves sem volt, amikor 1820 tavaszán a 11. axióma bizonyítására vonatkozó kísérleteiről értesítette édesapját. Apja valósággal megrémült, ami egyben egyik bizonyítéka annak, hogy Farkas az egykori tanórái alatt ettől a kérdéstől féltette fiát. 1820. április 4-én egy hosszú levelet írt Jánosnak, melyben saját problémáinak ismertetése után az intelmeire is hosszasan kitér. Ezek a lebeszélő levélsorok egyben arról is tanúskodnak, hogy milyen mély hatást gyakorolt Bolyai Farkasra és általában a kutatókra a párhuzamosok problémájának tisztázása.

„A paralelákat – írja Farkas – azon az úton ne próbáld: tudom én azt az utat is mindvégig – megmértem azt a feneketlen éjszakát én, és életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne – az Istenért kérlek! hagyj békét a paraleláknak – úgy irtózz tőle mint akármicsoda feslett társalkodástól, éppen úgy megfoszthat minden idődtől, egészsé-

gedtől s egész életed boldogságától. Az a feneketlen sötétség talán ezer newtoni óriási tornyokat elnyél, sohasem világosodik meg a földön és soha sem lesz a szegény emberi nemnek semmije tökéletesen tiszta, a Geometria se; nagy s örökös seb ez az én lelkemen. Az Isten őrizzen meg téged, hogy ez valaha olyan mélyen béegye magát [nálád is] – ez a Geometriához, a földhöz elveszi az ember kedvét; én feltettem volt magamba, hogy feláldozzam magamat az igazságért, s kész lettem volna mártír lenni, csakhogy a Geometriát megtisztítva ezen mocsktól adhassam az emberi nemnek; irtóztató óriási munkákat tettem; talán mindent megpróbáltam; sokkal jobbakat csináltam, mint addig, de tökéletes meglegedést nem találtam; itt pedig *si paullum a summo discessit, vergit ad imum*⁸ – visszatértem, mikor átláttam, hogy ennek az éjszakának a földről fenekét érni nem lehet, vigasztalás nélkül, sajnálva magamat és a szegény emberi nemet. Tanulj te az én példámon: én a paralelákat akarva megtudni tudatlan maradtam, életem s időm virágját mindez vette el – sőt minden azutáni hibámnak töve mind ott volt s a házi fellegzésekből esett reá. Ha a paralelákat feltaláltam volna, ha senki sem tudta volna is meg, hogy én találtam, angyal lettem volna.

Higgy nekem! s tanulj most, haladj, jegyezd fel mit nem értesz, hol találsz hiánosságot s menj tovább [...]. El fogom én neked küldeni az én próbáimat; s akkor meggyőződsz közelebbről még most, amit Vajda úrral nektek tanítottam, melyet legkönnyebbnek találtam gyermeknek. [...] De az axiómám egyik se olyan, amilyennek lennie kellene. [...] Megfoghatatlan, hogy ez az elháríthatatlan homály, ez az örök napfogyatkozás, ez a mocskok hogy hagyatott a Geometriába; ez az örök felleg a szűz tiszta igazságon.

Ne próbáld, soha meg nem mutatod, hogy azokkal a meg nem szűnő mind egymértékű behajlásokkal valaha az alsó rectát [egyenest] vágni fogja [...] egy örökké magába visszaforgató circulus van ebbe a matériába, szüntelen becsaló labirintus, mint a kincskereső elszegényül, aki ebbe eleget és tudatlanul marad...”

Ezután Bolyai Farkas szakmai részletességgel tárgyalja és bírálja az általa megfogalmazott axiómákat, majd a végkövetkeztetést vonja le fia számára:

„... ezeken a tájakon vannak a Hercules columnái [oszlopai], egy lépést se menj tovább, különben elveszett ember vagy!”

Az apai aggodalmak a későbbi levelekben is kifejezésre jutnak. De Jánost más fából faragták!

8 „Ha bármely keveset marad el a tökéletestől, a mélybe zuhan.”

„Ahelyett, hogy elriasztott volna – írja János –, érdeklődésem csak még inkább élénkül, és a leghevesebbre fokozódott vágyam és energiám, hogy a lehetőség szerint minden áron keresztülhatoljak rajta.”

És valóban, az 1820. év vége matematikai kutatásainak fejlődésében minőségi ugrást hozott. Annak az évnek az őszén ugyanis János a 6. osztályba lépett, amelyben a mechanikát is tárgyalták és a mechanikai feladatok megoldását tartalmazó jegyzetfüzetének egyik lapján A *Parallelarum Theoriara* beiktatott cím alatt négy ábra található (1. kép) melyekből tisztán kiolvashatók az új nemeuklideszi geometria gondolatai. Erre a négy ábrára a későbbiekben még visszatérünk. Máskülönben erről az időszakról ő maga így nyilatkozik:

$$\text{igazán } m = \frac{1}{p} \log \left[\left(\frac{p^2}{p^2} + 1 + \left(\frac{p^2 x^2}{p^2} + \frac{2px}{p^2} \right) \right) \cdot \left(\frac{p(x-n)}{p} + 1 + \left(\frac{p^2(x-n)^2}{p^2} \right) \right) \right]$$

$$\text{Annak az új és első nagy számú Előfokát}$$

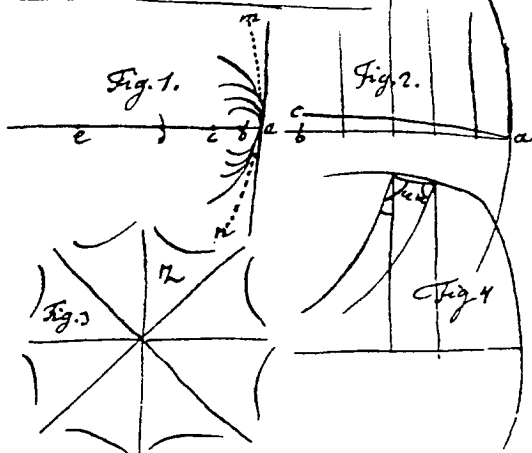
$$x = \frac{1}{p} \left(p^2 x^2 + 2px \right)^{\frac{1}{2}} \text{ és}$$

$$x' = \frac{1}{p} \left[p^2 (x-n)^2 + 2p(x-n) \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ felváltva}$$

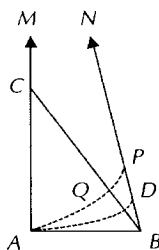
$$x+x' = \left(\frac{1}{p} \left(p^2 x^2 + 2px \right) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{p} \left[p^2 (x-n)^2 + 2p(x-n) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (II)$$

Jól látszik, hogy a G. (G. = geometria) és a H. (H. = mechanika) közötti különbség, bár a 5. és 6. számú, egyenlőségnek bizonyult.

A Parallelarum Theoriara.



1. kép



5. ábra

„Az út, melyet követtem, annál inkább érdemli meg a közelebbi megjelölést, mert a tárgy elég fontosnak tekinthető és azonkívül majd látszik, hogy ez az *egyetlen* ösvény, mely a meghódítható várhoz vezet. Beláttam, hogy az egyenes vonalú háromszögből a tizennegyedik axiómát illetően alig adódik ki valamivel több mint az, hogy két szög összege $< 2R$, [R a derékszöveget jelenti (*angulus Rectus*)] $>$ vagy $<$ oldalal egyidejűleg $>$ vagy $<$ szög [fekszik szemben], két oldal összege $>$ a harmadiknál. Itt azonban észrevettem, hogy amikor az egyik oldalt [AC -t; 5. ábra] vég nélkül megnagyobbítjuk, miközben egy oldal valamint a két oldal által bezárt szög [az AB oldal és az A szög] állandóak maradnak, a háromszög bizonyos konkrét síkbeli [$MABN$] határalakhoz közeledik, melyben mindezek ellenére több *közelebbi vonatkozás* ismerhető fel a meglevő hat alkotó rész között. Bizonyos volt ugyanis, hogy $BAM\angle + ABN\angle \text{ nem } > 2R$; a harmadik szög *eltűnt*, és mindjárt sejtettem, hogy ha a C körül CA [sugárral] az A -n keresztül vonalat húzunk, akkor ha $AC \rightarrow \infty$, a valóságos P metszéspontnak, melyek azon [körvonalak] a BN -t metszik, egy konkrét D határpontjuk van, és hogy (felületesen beszélve!) a BD két végtelen félegyenesnek, BN és AM -nek különbsége, vagy szigorúan véve a végtelenbe növekvő BC és AC oldalak különbségének határértéke. Azt is felismertem azonnal, hogy midőn a [CA] sugár $\rightarrow \infty$, akkor a körvonalnak van egy síkbeli határvonala, vagy ha a szót valamivel bővebb értelemben vesszük, felismertem a végtelen sugarú körvonal létezését, amely a véges sugarú körvonalakkal és az egyenes ekvidisztans vonalaival olyan vonatkozásban áll, mint a parabola az ellipszisekkel, illetve hiperbolákkal. Ez már minden esetre *valami*, nem is szalasztottam el többé; élelken éreztem, hogy a helyes útra tértem.”

Amint már említettük, Bécsben Jánosnak egy értelmes vitapartnere is akadt Szász Károly (1798–1853) személyében. János a kimenőnapokon rendszeresen meglátogatta Szászt és ez idő alatt legtöbbször matematiká-

ról tárgyaltak. Amint János ránk maradt egyik írásából megtudjuk, egyszer a paralelák problémáját tárgyalva Szásznak a következő

„szellemes, valóban geometriai és a 11. axiómától független tér tudománya helyes kifejtésének alapjául szolgáló eszméje volt: ha azt az egyenest, melyet valamely B pontból (5. ábra) egy másik egyenesnek egy C pontján keresztül húzunk, és ezt az egyenest a két egyenest meghatározta síkban a B pont körül forgatni kezdjük, akkor a forgó egyenes, mely a másik egyenest a C pontban metszi, attól egy bizonyos helyzetben – Szász kifejezésével élve – *elpattan*, és a BN helyzetben ezt az egyenest a legközelebbi paralelának, vagy nem vágónak nevezte.”

Később János a BN egyenest aszimptotikus paralelának is nevezte. Kétségtelen, hogy az elnevezés rendkívül kifejező, mivel az új geometriában ez a paralela a párhuzamossági irányban minden határon túl közeledik az AM egyeneshez anélkül, hogy ezt valaha is metszené, ami éppen egy aszimptotával rendelkező görbe és aszimptotája közötti viszonyt juttatja eszünkbe.

Egy alkalommal Szász azt a kérdést vetette fel Bolyai előtt, hogy vajon abból, hogy BN az AM aszimptotikus paralelje, nem következik-e, hogy $AM = BN$?

„És erre – tudósít János – rögtön nemmel feleltem. Mert ha AB merőleges AM -re [5. ábra] és C -től kezdve CB -re mindig rámérjük a $CQ = CA$ szakaszt, akkor a Q pont, miközben a BC -t a B körül a BN helyzetbe forgatjuk, végül is egy D határhelyzeti pontba megy át, mely pont abban az esetben, ha az ABN szög nem derékszög, B -től különböző.”

A továbbiakban Bolyai még azt is megemlíti, hogy Szásszal

„ösztonszerűleg éreztük a végtelen sugarú kör természetének és a 11. axióma igazsága szoros összefüggését, és nem kételkedtünk benne, hogy 11. axióma szigorúan igazolható, mielőtt a végtelen sugarú körnek egyenes voltát sikerül kimutatni. [...] De ennél aztán meg is álltunk.”

Valóban, Szász Károly 1820 végén elhagyta Bécset. Bolyai ezután már csak egyedül tépelődött a párhuzamosok kérdésén, hiszen kettejük beszélgetései során mindig ő volt a kezdeményező fél.

Új irányba forduló kutatásairól János megint értesíti apját. Csalódással tapasztalja, hogy Farkas elzárkózik az ő eredeti eszméi elől.

„Ami a végtelen sugarú kört illeti – írja János –, azt egészen elvetette, mondván, hogy ettől Euklidész elfordítaná az arcát, és el akarván velem hitetni, hogy Gauss és általában mindenki bizonyosan meg fog ütközni, és hogy [mindez] nélkülözhető.”

János címére továbbra is érkeznek Bécsbe a lebeszélő tartalmú levelek, melyekben Farkas óvja fiát attól, hogy tovább foglalkozzon a párhuzamosok kérdésével.

„Megvallom – írja Farkas –, hogy egyenesed elpattanásától sem várok semmit. Azt vélem, hogy ezeken a tájakon is jártam; e pokoli holt tenger minden szirtje mellett elhajóztam és mindenhol szétzúzott árboccal és elfoszlott vitorlákkal tértem vissza, és innen számítom kedvem pusztulását és bukásomat. Meggondolatlanul életemet és boldogságomat erre tettem – aut Caesar aut nihil.⁹ Alighanem ezzel Newton is egész becses életét eltékozolta volna. Ezt nagy szerencsétlenségnek tekintem. Sajnálak. Látom, hogy szerencsétlen életem benned ismétlődik. Mint egy vészes szirtek között, hol még mindenki hajótörést szenvedett, látlak sötét viharban ide-oda hányatni. Ijesztő csatátér ez, melyen mindenkor megvertem; a kutató eszme minden törekvésével dacoló bevehetetlen sziklavár. Ebbe a dologba merülve az egész élet csak tengerbe mártott égő fáklya. Valóságos betegség, az örület egy neme, zsarnok eszme. Olyan mint a kör quadratúrája, a bölcsek kövének keresése, az aranycsinálás, a kincsásás. A kincsásó elrongyosodik; minél mélyebbre ás, annál jobban reménykedik. Mindez – amint látom, jobb elménél a paralelák is – betegség. Nem sokára belátva, hogy e téren semmit sem tettél, alighanem hozzám hasonlóan el fogsz kedvetlenedni. Okulj erre és más dolgokra nézve példámon. Ha csakugyan kitaláltad volna, természetesen jobban örülnék neki, mint valami uradalomnak. De ezt általában nem hinném, attól félek, hogy mindenedet elvesztetted feltéve egy milliós betétű sorsjátékon.

Ha nekem akkor sikerült volna, egészen más ember vált volna belőlem, nem házasodtam volna kétszer, sem magamat a kertészkedésre, a költészetre, a fazekasságra nem adtam volna, elveszett kedvemet máshol keresve. Erkölcsileg jobbá lettem volna és helyemet mind hivatalomban, mind háztartásomban másképpen töltöttem volna be. Ha boldogok vagyunk, akkor másokat is könnyebben boldogítunk; mi csurogjon oly forrásból, mely maga is száraz? Egy órát se vesztegess vele. Nem hoz jutalmat, és az életet megmérgezi. Még száz nagy matemati-

⁹ Vagy Caesar, vagy semmi.

kusnak egy évszázadon át tartó fejtörésével se bizonyítható be [a 11. axióma] új axióma nélkül. Azt hiszem, hogy minden erre vonatkozólag kigondolható eszmét kimerítettem.

Ha Gauss idejét továbbra is a 11. axióma fölötti tépelődéssel töltötte volna, akkor a sokszögek tana *Theoria motus corporum coelestium* és minden egyéb munkái nem kerültek volna napfényre és ő egészen elmaradt volna. Írva megmutatom, hogy fejét a paralelákön törte [Gauss 1804. november 25-én írt levele]. Szóval és írásban kijelentette, hogy eredménytelenül gondolkozott azokon. Eszméim, bár korántsem elégtették ki, nagyon tetszettek neki és figyelmeztetett, hogy milyen fontos tárgy a paralelák dolga.”

Bolyai Farkas a tőle már megszokott irodalmi stílusban írt és pátosszal fűszerezett szövegével vetíti elének annak a tudósnek a lelkiállapotát, akinek szakmai életcélja volt a 11. axióma bebizonyítása, vagy legalábbis annak tisztázása, de célkitűzését nem koronázta siker. És ugyanakkor fiát is félti, akire ezek a sorok minden bizonnyal nem voltak valami buzdító hatással. Pedig Jánosnak a bátorító szavakra igencsak nagy szüksége lett volna. Figyelemre méltó viszont, hogy Farkas ebben a levelében már kételkedik a 11. axióma bizonyíthatóságában. Jánosnak erről a következő a véleménye:

„Az ő érvelése a lehetőség ellen az, hogy minden, ami a 11. axiómával ellenkezik, a végtelenben rejtőzik, és hogy ha ott, hol először (ugyanabban a síkban fekvő egyenesek) metszését tárgyalni kezdjük, bármiként vesszük fel ennek törvényét, ezt az előzmények nem ronthatják le, mert bennük a metszésnek törvényéből még semmi sem foglaltatván, tehát belőlük a metszés törvénye nem vezethető le. A 11. axióma helytelensége és minden, ami ebből következik, a többi geometriai tétellel megfér. Hogy ez az okoskodás mennyire érthetetlen és erőtlen, nem szorul bizonyításra. Ugyanavval a joggal azt is lehetne állítani, hogy semmiféle új tárgyról *nem* szerezhetünk tiszta ismereteket. A lehetőség helyes bizonyítása bizonyára mélyebben rejlő alapon épül fel.”

A katonai Akadémián töltött évei alatt, amikor csak ideje engedte, új meglátásain töprengett.

„Ezen az úton – írja János vizsgálatainak további folytatásáról – ugyan szerencsésen előre hatoltam, de a génie-akadémiában egyéb szakmáim miatt, onnan kilépve pedig a katonai szolgálatba lépésem miatt, időmnek csak jelentéktelen részét szentelhettem kedvenc tudo-

mányomnak és vizsgálataimnak, ezért csak 1823-ban hatoltam lényegében a dologba, habár később is mind anyag, mind alak tekintetében tökéletesítések történtek.”

János más kézírataiban is nyomatékosan említi az 1823. évet, mint új eszméinek keletkezési időpontját. A legfényesebb bizonyítéka annak, hogy ez az év János kutatómunkájában valóban a fordulópontot jelenti, az a – már említett – matematikatörténeti jelentőségű levél, melyet 1823. november 3-án írt Temesvárról Marosvásárhelyen élő apjának. Ezt a napot ma már úgy is tekinthetjük, mint a nemeuklideszi geometria születésnapját. E nevezetes levelében, amelyben a binomiális tételre vonatkozó bővebb fejtegetései is szerepelnek, gyermeki örömmel értesíti Farkast új meglátásairól és eredményeiről. Elevenítsük fel újból a már oly sok helyen megjelent sorokat:

„Kedves Édes Apám!

Annyi teméntelen megírni valóm van az új találmányaimról, hogy éppen most nem tudok másként segíteni magamon, mintha semmibe se ereszkedem belé s csak egy quartára¹⁰ írok... [...]

A feltételem már áll, mihelyt rendbe szedem, elkészítem, s mód lesz, a paralelákrol egy munkát adok ki; ebben a pillanatban *nincs* kitalálva, de az az út, melyen mentem, csaknem bizonyosan ígérte a cél elérését, ha az egyébiránt lehetséges; nincs meg, de olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, s örökös kár volna elveszni; ha meglátja Édes Apám, megesmeri; most többet nem szólhatok csak annyit: *hogy semmiből egy új, más világot teremtettem*; mindaz, amit eddig küldöttem, csak kártyaház a toronyhoz képest. Meg vagyok győződve, hogy nem sokkal fog kevesebb becsületemre szolgálni, mintha feltaláltam volna [vagyis, feltalálta volna a 11. axióma bizonyítását]. Választ várva vagyok örökös háládatossággal tisztelő fia

Bolyai mk

P. S. Én szüleményeit elmémnek Édes Apám előtt tökéletesen úgy meg merem ítélni, amint meg vagyok győződve; s nem tartok semmi félremagyarázástól, melyet ugyan nem is érdemelnék meg, amidőn az csak annak jele, hogy e tekintetben Édes Apámat úgy nézem, mintha az én Énem volna.”

Melegség és a tudomány iránti lelkesedés sugárzik ezekből a sorokból. A levél szövegéből kiderül, hogy világossá vált előtte a kitűzött probléma

10 Negyedívre.

megoldási eljárása, de nagyszerű ötleteit és eredményeit nem öntötte még megszövegezett, kidolgozott formába. Bolyai János akkori kutatási eredményeinek szintjét Schlesinger Lajos (1864–1933) a következő megállapításával jellemzi:

„Abból a feltevésből, ha a paralelák axiómája nem volna igaz, levonta a következményeket; ezek a következmények alkotják azt az új, más világot, amiről ír, és már most e következményekben keresi az ellentmondást; de már kételkedik abban, hogy ilyen ellentmondás egyáltalán létezik-e [...]. Hogy mikor tette meg a döntő lépést, azaz mikor jutott arra a meggyőződésre, hogy az a geometriai rendszer, amely a paralelák axiómájától független, magában fennállhat, teljes biztonsággal meg nem állapítható, csak annyit tudunk, hogy ez 1825 tavasza előtt történt.”

Ezt a megállapítást Schlesinger abból a már említett tényből szűrte le, hogy Bolyai János 1825 februárjában meglátogatta édesapját, mely alkalommal kéziratban is kidolgozott elméletét bemutatta neki. János azonban apjánál még most sem talált teljes megértésre. Nagy matematikusunk az utókornak tett szolgálatot azzal, hogy későbbi írásaiban az apjával akkor történt tudományos vitájukat megörökítette:

„[Felfedezésem] értékét minden gondolható módon kisebbiteni törekedett és minden tőle telhető módon szavalt ellene, minek okát annak a tehetetlenségében kerestem, hogy képtelen volt a dolog velejébe hatolni. Például magyarázataim után kicsinyléssel, mely azonban ő reá szállt vissza, azt mondta, hogy ez csak az antieuklidikus rendszer kidolgozása. Még ha valóban is csak az lett volna, akkor sem látszott volna neki olyan jelentéktelennek, ha értelmével világosabban felfogja és kedélye elfogulatlanabb lett volna. Egész kétségbeesítő módon azt állította, hogy csak két (subjective, succesive gondolható) rendszer van ti. az euklidikus és ha az nem áll fenn, akkor egyetlen másik, melyben a paralel szög nagysága abszolúte meg van határozva, és ezt a rögeszmét nem lehetett a fejéből kivenni és a lehető legvilágosabban előadott érveim után sem bírta belátni, hogy számtalan hipotetikus rendszer lehetséges, melyek közül a valódit nem vagyunk képesek kiválasztani, mivel például ugyanazt az AB alapvonalat [5. ábra] és ugyanazt BAM belső szöget tartva meg, $BN \parallel AM$ [BN aszimptotikusan paralel AM -mel] esetében a másik belső szögnek [az ABN szögnek] nyilván 0-tól (kizárólag) $2R-BAM$ szögeértékig (bezárólag) bármely tetszés szerinti értéket tulajdoníthatunk, amint az magában a tér-tudományában részletesen ki van fejtve.

Azt is hozzátette, hogy a paralelákat úgy, amint az kívánatos volna, nem fogom sohasem megtalálni. Akkor is, amikor mindenféle szép és 11. axióma lényegének kipuhatolására nézve fontos és nélkülözhetetlen dolgot, mint például az *Appendix* 23. §-át, bizonyítás nélkül vele közöltem, még inkább folytatta ezen a hangon, mert semmiképpen sem értett meg engem, sőt szavaimban kételkedni is kezdett. Én azonban kijelentettem neki, hogy azon az úton, melyen követni kezdtem – anélkül, hogy valamelyik bizonyítását velem közölné – képes vagyok bármelyik axiómájából a 11. axiómát levezetni. Ám de ő, anélkül, hogy ennek értékét felismerné és a csomó kioldását remélte volna, inkább azt válaszolta, hogy eddig még az ő saját bizonyítását tekinti a legjelesebbnek, és továbbra is közléseimet kicsinyléssel fogadta és csak felületesen, alig nézte át.

Meglepte, hogy az e szám az összefüggésekben gyakran lép fel és az átolvasás után azt kérdezte tőlem: vajon ez szükségszerűleg fordul elő? Én igennel feleltem, de értésére adtam, hogy az olyan kifejezésekben, mint pl.

$$e^{\frac{x}{k}},$$

az $e = 2,718\dots$ annyiban nem lényeges, amennyiben helyébe minden más nagyság tehető, hacsak k helyébe is a megfelelő hosszúságot választjuk. Erre az e szereplésén, mint valami játékszeren érzett öröme lelohadt és azt mondá: Igen, Igen! ebben a tudományban az e nem lép fel szükségszerűleg. Ezek szerint a k -val jelölt hosszúság roppant fontosságáról sejtelve sem volt, csak önkényszerűségnek gondolta [...].

Miután beláttam, hogy érvekkel (ésszel és értelemmel) semmire sem jutok, még csak tekintéllyel reméltem az aszimptotikus paralelek illő megbecsülésére bírni. Gausst említettem neki, megjegyezvén, hogy e kolosszális matematikus bizonyosan nem csak könnyen meg fogja érteni a dolgot, hanem abban majd tetszését is leli és annak valódi becsét el fogja ismerni, egyszersmind ajánlottam, küldjük meg [vizsgálataimat] a nagy férfiúnak."

Audiatur et altera pars (hallgattassék meg a másik fél is!) mondja egy latin közmondás. Valóban hiteles képünk lenne kettőjük vitájáról, ha Farkas nyilatkozatai is rendelkezésünkre állnának. De Farkas talán érthető okokból nem örököltette meg ezeket. Ismerve azonban János szilárd igazságszeretétét, elégedjünk meg ennyivel, nem járhatunk távol a valóságtól.

Ez a leírás élénken világítja meg az apa és fia közötti nézetkülönbséget. Valahogy minden mondatából érezni lehet, hogy Bolyai János a problé-

ma velejéig hatolt. Előítéleteinek ködfelhői viszont megakadályozták Farkast, hogy a vitatott téma lényegéig lásson. Íme, hogyan vélekedik erről Dávid Lajos:

„Lélektanilag megérthető, hogy Bolyai Farkas eleinte miért nem értette meg teljesen, lényegében a fia új, más világát. Hiszen vagy huszonöt esztendeig viaskodott a párhuzamosság nagy talányával, éspedig bebizonyítani akarta az 5. posztulátumot. Annyi év egyoldalú elmélkedése, egyirányú kutatása után mindent csak a *bebizonyítás* látszögéből tudott nézni, s ezért, amikor János előállott az *Appendix*-szel, azt hitte, hogy fia csak egy nemeuklideszi geometriát eszelt ki, vagyis olyant, amelyben nem igaznak van föltéve az 5. posztulátum, s most csak elmentmondást kellene találni benne, hogy indirekt be legyen bizonyítva a hírhedt alaptétel. És ettől a meddőnek látszó fáradozástól féltette fiát, a saját maga »elhibázott« életére gondolva. Amit manapság bizonyosan tudunk, azt Farkas még csak valószínűnek tartotta: az apa útjain a fiú is hiába törekedett volna célt érni.”

Amikor egy tudományos problémák iránt is érdeklődő összejövetelen valamilyen módon szóba kerül a két Bolyai, gyakran hangzik el az a leegyszerűsített kijelentés, hogy Bolyai Farkas nem értette meg fia új elméletét. Egy olyan számottevő és nagy tudású matematikusnál, mint Bolyai Farkas, ez nem állja meg a helyét. Ráadásul az ő egyik fő kutatási területe is ez volt, tehát minden mellékkérdést ismert. A valódi okra már Paul Stäckel valamint Dávid Lajos is rámutatott: Bolyai Farkas nem tudott végérvényesen elszakadni attól a kétezer éve megcsontosodott előítélettől, mely szerint Euklidész által a posztulátumok közé sorolt párhuzamossági kijelentés valamikor bizonyítást nyer. Szakmailag viszont annyi írható a rovására, hogy zseniális fiával ellentétben nem látta át teljes határozottsággal, hogy Euklidész állítását bizonyítani nem lehet, és itt végeredményben egy eldönthetetlen kérdéssel állunk szemben. Ennek alapján téves azt állítani, hogy Bolyai Farkas *nem értette meg* fiát. A valóság az, hogy *nem értett egyet* vele. Ezt sugallja Bolyai János apjához írott alábbi megjegyzése is:

„más józan, épen termett ember is éppen úgy képes jól látni és olvasni a természet nagy könyvében mint én, ha *elfogulatlanul* nyitja ki szemét s hamarosan ráfűggeszti”.

Nézeteltéréseik és vitáik ellenére komolyabb harag nem volt közöttük. János nem sokára visszautazott katonai állomáshelyére. 1825. április 24-én már ezt írja Farkas Bodor Pálnak:

„A fiammal hála Istennek megint jól vagyunk, írt már Temesvárról kétszer is – mely írásából azt is örömmel látom, hogy Erdélyre hazai érzéssel tekint vissza”.

Ugyanakkor azt sem szabad elfelejtenünk, hogy Farkas minden alkalommal nagyon szépen írt és nyilatkozott fia munkájáról, valamint azt sem, hogy ő buzdította művének mielőbbi közzétételére, mindjárt lehetőséget is kínálva neki azzal, hogy nagy készülő művével, a *Tentamen*-nel együtt nyomtassák ki a marosvásárhelyi református kollégium nyomdájában. Így jelent meg János remekműve, az *Appendix* a *Tentamen* első kötetének függelékeként, mint apa és fiú együvé tartozásának gyönyörű szimbóluma, mely Sarlóska Ernő szép és valóságot megragadó soraiban így jut ki-fejezésre:

„Az összetartozás ragyogó dokumentuma a *Tentamen* és az *Appendix* szoros kapcsolata. A *Tentamen* a sasszárny, amely alól az *Appendix* néhány oldalnyi eltűnődése az egekbe röppenhetett, és az *Appendix* jelentősége mentette meg a *Tentamen*-t, hogy az oly sokféle gondolati kísérletezés között észrevétlenül el ne süllyedjen.”

2.6. A Σ - és az S -rendszer

Ahogy Bolyai fokozatosan haladt előre a kutatásaival, úgy győződött meg mind jobban és jobban, hogy a 11. axióma igaz vagy hamis voltát nem lehet eldönteni. Ez óriási lépés volt akkor, amikor addig két évezreden keresztül szinte mindegyik matematikus, aki ezzel a kérdéssel foglalkozott, az axióma bizonyítását kereste. Ők hallgatólagosan abból indultak ki, hogy az axióma bizonyítható, és annak bizonyítását akarták megtalálni. Mivel a világegyetem dimenzióihhoz képest parányi méretű emberi környezetünkben a tapasztalat is azt sugallja, hogy a 11. axióma igaz, így a bizonyíthatatlansággal kapcsolatos kételyek fel sem merültek. Ebből a bűvkörből annak idején csak egy lángész törhetett ki!

Az axiómarendszerekkel kapcsolatos későbbi kutatások, valamint a matematikai logika terén azóta elért eredmények fényében ma már tisztán és könnyen átlátjuk ezt a problémát és annak akkori buktatóit. Anélkül, hogy e kérdés részleteibe merülnénk, említsük meg Kurt Gödel (1906–1978) egyik igen fontos erre vonatkozó tételét:

Minden használható axiómarendszerben meg lehet fogalmazni olyan problémát, amelyet az illető axiómarendszeren belül nem lehet eldönteni.

A Gödel-tételnek van egy érdekes következménye is, amelyre a követ-

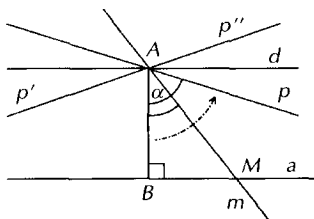
kezőkben még szükségünk lesz: *egyetlen axiómarendszer ellentmondás-talansági bizonyítása sem formalizálható az illető axiómarendszerben.*

Saccheri és Lambert eddigi bizonyítási kísérleténél láttuk, hogy az úgynevezett hegyesszög-hipotézisből kiindulva nem sikerül ellentmondáshoz jutni. Legendre próbálkozásait sem koronázta siker, amikor azt akarta igazolni, hogy az a kijelentés, mely szerint a háromszög szögeinek összege kisebb két derékszögnél, ellentmondáshoz vezet. Az előbbi esetekkel pontosan a Gödel-tételben említett „eldönthetetlen problémához” jutottunk el. A párhuzamosok axiómája nélkül, csupán a többi axiómára támaszkodva nem tudjuk tehát eldönteni, hogy egy háromszög szögei mértékének összege 180° vagy annál kisebb, és hasonlóképpen azt sem, hogy a hegyesszög vagy a derékszög hipotézise igaz.

Amikor Bolyai János 1825 februárjában azzal állt elő apjánál, hogy a párhuzamossági kérdés, amelyen ő éveken át töprengett és fáradozott, valójában eldönthetetlen probléma, és így minden addigi bizonyítási kísérlete hiábavaló volt, nem valami jó érzést válthatott ki Farkasban. Talán ez is oka lehetett annak, hogy az új elmélet iránt Farkas nem tanúsított teljes megértést. Úgy tűnik, az elején Farkast még az is gondolkodóba ejtette, hogy miként lehetséges az, hogy az euklideszi axiómára épült geometria ellentmondásmentes, és ugyanakkor ennek az axiómának a tagadására épült geometria is ellentmondás nélküli? De ha jól meggondoljuk, a valóságban itt semmiféle probléma sincs, amit egy latin mondás igen plasztikusan fejez ki: *Contraria non contradictoria sed complementa sunt* (Az ellentétek nem ellentmondóak, hanem kiegészítik egymást). Hogy mennyire helytálló ez a mondás, a későbbiekben is igazolódni fog.

Talán nem lépjük át a reális megítélés korlátjait, amikor azt állítjuk, hogy Bolyai János sajátos esetként már észrevette azt, amit egy évszázaddal később Gödel a híres tételében általánosan kimondott. Ezzel egyben igazolást nyert az is, hogy annak idején Euklidész helyesen járt el, amikor a párhuzamosokra vonatkozó kijelentését az axiómák közé sorolta, mivel ez független a többi axiómától és a geometria felépítésében alapvető szerepet játszik.

Az *Appendix* alapgondolatának jobb megértése érdekében vegyük újból szemügyre a párhuzamosok problémáját. Adott a síkban egy a egyenes és egy rajta kívül fekvő A pont (6. ábra). Legyen AB az A pontból az a egyenesre bocsátott merőleges és m az A pont körül a jelzett nyíl irányában forgó síkbeli egyenes. Ez az m egyenes eleinte metszi az a egyenest az M pontban. Forgatva ezt az egyenest, az M pont távolodik a merőleges B talppontjától, és amikor M az a egyenes „végtelen távoli” pontjába jut, az m egyenes – Szász és Bolyai már említett kifejezését használva – *elpat-tan*. Jelöljük p -vel az m egyenes elpattanási helyzetét, valamint α -val a



6. ábra

*BA*p szög mértékét. Mivel az *ABM* szög derékszög, és ha a *d* síkbeli egyenes merőleges *A*-ban az *AB*-re, akkor a *párhuzamosok posztulátumának felhasználása nélkül* már igazoltuk, hogy a *d* egyenes nem metszi az *a* egyenest. Tehát az „elpattanás”-nak legkésőbb az $\alpha = 90^\circ$ -ig be kell következnie, ami azt jelenti, hogy $\alpha \geq 90^\circ$. A két évezredig tartó különböző bizonyítási kísérletek lényegében mind azt akarták igazolni, hogy az „elpattanás” az $\alpha = 90^\circ$ -nál áll be. Ugyanis pontosan ezt mondja ki Euklidész posztulátuma. Valóban, az $\alpha < 90^\circ$ esetben a szelő *AB* egyenesnek azon az oldalán, ahol az a szög található, a keletkezett két belső szög összege ($m(\hat{B}) + \alpha$) kisebb két derékszögnél, így az euklideszi axióma követelménye alapján az *a* és *m* egyenesek metszik egymást.

Amint már említettük, Bolyai János zseniális rálátással észrevette, hogy a párhuzamossági axióma nélkül nem lehet eldönteni, hogy mekkora ez az α szög. Emiatt két különböző eset állhat fenn:

1. $\alpha = 90^\circ$ vagy 2. $\alpha < 90^\circ$.

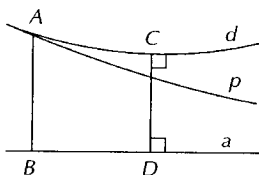
Az 1. esetben az euklideszi posztulátumban megfogalmazott kijelentést kapjuk, és az erre az axiómára is felépülő mértan az euklideszi geometria, amelyet Bolyai Σ -rendszer-nek nevez.

A 2. eset állítására épülő geometriát nevezi Bolyai *S-rendszer*-nek. Itt az A pontból húzott párhuzamos tehát az a p egyenes lesz, amely az AB merőlegessel az $\alpha < 90^\circ$ szöget zárja be (6. ábra).

Mivel ez az eset kissé komplikáltabb, hasonlítsuk össze a két rendszer síkbeli egyeneseinek egymáshoz viszonyított típusait.

A Σ -rendszerben az A ponton átmenő síkbeli egyeneseknél az a egyeneshez viszonyítva kétféle típusú egyenest különböztetünk meg: egyetlen d párhuzamost és végtelen sok m metsző egyenest.

Az S -rendszerben (amikor $\alpha < 90^\circ$) a helyzet már nem ennyire egyszerű. A forgatás által az első nem metsző (elpattanó) p egyenest nevezzük párhuzamosnak, amely AB -vel α szöget zár be. A p egyenesnek AB -re vonatkozó szimmetrikusa, a p' egyenes – mely szintén α szöget zár be az AB -vel – lesz az AB -hez viszonyított másik irányba húzott párhuzamos. Ezt a két egyenest – a p -t és a p' -t – nevezzük az A ponton átmenő és a -val



7. ábra

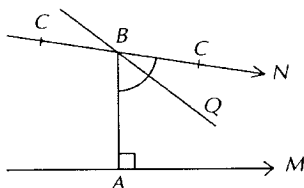
párhuzamos egyeneseknek. A $p'Ap$ szögtartományba eső összes m egyenesek *metsző* egyenesek lesznek. De létezik még egy harmadik típus is, az úgynevezett *divergens* vagy *szuperpárhuzamos* egyenesek, amelyek a pAp'' szögtartományba esnek (6. ábra), mint amilyen például a d egyenes is. Ebben a rendszerben mind a párhuzamos, mind a szuperpárhuzamos (divergens) egyenesek az a -t nem metsző egyenesek. De közöttük minőségi különbség van! Míg a párhuzamos egyenesek (mint amilyen az a és a p) a párhuzamossági irányban minden határon túl közelednek egymáshoz (7. ábra) anélkül, hogy találkoznának, addig a divergens egyenesek (mint az a és d egyenesek) esetében van egy közös CD merőlegesük, melytől kezdve mindkét oldalon az egyenesek vég nélkül távolodnak egymástól. Tehát a Σ -rendszerben egymáshoz viszonyítva kétféle típusú egyenespárt különböztetünk meg a síkban: *párhuzamos* és *metsző* egyeneseket; míg az S -rendszerben háromféle típust: *metsző*, *párhuzamos* és *szuperpárhuzamos* egyeneseket.

Bolyai János, részben a rövidség kedvéért a fogalmak jelölésére gyakran használ betűket, ami absztrakt modernségének is egyik tanúbizonysága. A jelen esetben a Σ és S betűk a latin *systema* (rendszer) szó s kezdőbetűjéből inspirálódnak. A görög ábécé S -nek megfelelő Σ betűje egyben az euklideszi geometria görög eredetét is érzékelteti, valamint hogy Euklidész műve eredetileg görög nyelven íródott. A latin S betűt pedig, amelyet az általa kidolgozott nemeuklideszi geometria megjelölésére használ, a latin nyelven írt *Appendix*, valamint a latin ábécét használó „magyar Euklidész”-nek is nevezett Bolyai szimbólumaként foghatjuk fel.

2.7. Az *Appendix* rövid kivonata

Az *Appendix* eredeti latin szövegének magyar fordítása már több alkalommal megjelent ([11], [12], [43], [64]). Némely fordítás szövegét még külön magyarázatokkal is ellátták, oldva rendkívüli tömörségét. Aki részletes alaposággal óhajta megismerni ezt a remekművet, annak ajánlható valamelyik említett kiadás tanulmányozása. Kitűzött célunkat szem előtt

tartva a teljes eredeti szöveg közlését itt nem valósíthatjuk meg, ugyanakkor ismertetésének mellőzése hiányossá tenné azt a képet, amelyet szerzőjéről óhajtunk nyújtani. Ugyanis Bolyai fő művéről van szó, melynek világhírnevét köszönheti. Így hasznosnak véljük egy rövid kivonat közreadását a nem matematikus olvasókra is gondolva.



8. ábra

Az Appendix 43 paragrafust tartalmaz. A szövegében használt jelmagyarázat után az 1. §-ban a párhuzamosság értelmezését találjuk. Erről az előbbieken már némileg értekeztünk. Legyen AM a sík egy tetszőleges egyenesre és B egy rajta kívül fekvő pont, melyből az AM -re a BA merőlegest bocsátjuk (8. ábra). A párhuzamosság újszerű értelmezése miatt Bolyai irányított egyeneseket használ. Emiatt a B ponton átmenő BN egyenesek helyett annak B kezdőpontú \overrightarrow{BN} félegyenesével dolgozik. Ha a B -ből kiinduló \overrightarrow{BN} félegyenes nem metszi \overrightarrow{AM} félegyeneset, de az ABN szögtartomány minden \overrightarrow{BQ} félegyenesre metszi \overrightarrow{AM} -et, akkor Bolyai AM és BN egyeneseket párhuzamosoknak nevezi, mely viszonyt így jelöli:

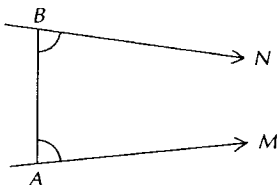
$$BN \parallel AM.$$

Az ABN szög nagyságára vonatkozóan Bolyai egyelőre nem jelent ki semmit: sem azt, hogy *derékszög* (mely kijelentés végeredményben az euklideszi axióma, mivel a BAM szög is derékszög), sem azt, hogy *kisebb, mint egy derékszög* (az euklideszi axióma tagadása).

Az ABN szöget az AB távolságnak (szakasz hosszának) megfelelő *párhuzamossági szögnek* is szokás nevezni.

További vizsgálatait Bolyai a párhuzamosság előbb ismertetett értelmezésére építi. Tehát ő arra törekedett, hogy a 11. axiómát vagy annak tagadását kutatásainak kiindulópontjánál kikapcsolja. Művének hosszabb címe is ezt tükrözi: „A tér abszolút igaz tudománya a 11. Euklidesz-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) igaz vagy nem igaz voltától függetlenül tárgyalásban...” Erre az értelmezésre és feltevésre épített geometria a Bolyai-féle abszolút geometria. Vagyis az abszolút geometria felöleli mindazokat a geometriai tulajdonságokat és tételeket, amelyeket a megmaradt axiómarendszerből és a párhuzamosság ilyen értelmezéséből levezethetünk.

Ezután az így értelmezett párhuzamosság tulajdonságait mutatja ki. Először azt igazolja, hogy a B pontnak a BN egyenesen nincs kitüntetett szerepe, mert a BN egyenes bármely C pontjára is (8. ábra) igaz a következő kijelentés: ha $BN \parallel AM$, akkor egyúttal $CN \parallel AM$ (2. §). Majd bizonyítja, hogy ha két egyenes külön-külön párhuzamos egy harmadik egyenessel, akkor ezek egymással is párhuzamosak (3. és 6. §).

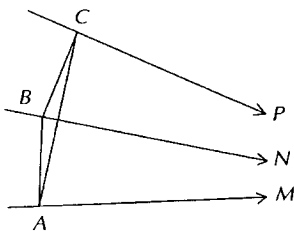


9. ábra

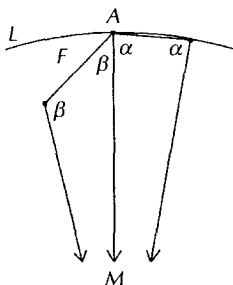
A 4. §-ban bevezeti az *egyenlő hajlású szelő* fogalmát. Ha $AM \parallel BN$ és $m(\angle ABN) = m(\angle BAM)$, akkor az AB az AM és AN egyenesek egyenlő hajlású szelője (9. ábra). Ebben az esetben az A és B pontokat korrespondáló vagy izogonális pontoknak nevezzük. Ezt az állást ő így jelöli:

$$AM \stackrel{\sim}{=} BN$$

Erre támaszkodva már könnyen igazolja a párhuzamosság *szimmetrikus* tulajdonságát: ha $AM \parallel BN$, akkor $BN \parallel AM$. Azt is kimutatja (10. ábra), hogy ha $BN \stackrel{\sim}{=} AM$ és $CP \stackrel{\sim}{=} AM$, akkor $BN \stackrel{\sim}{=} CP$ (10. §). A 9. §-ban az abszolút geometria egy sarkalatos tétele nyer bizonyítást. *Ha két síkot egy harmadik síkkal metszünk és a kapott metszésvonalak párhuzamosak, akkor ez a két sík a metsző síknak azon oldalán találkozik, ahol a keletkezett belső szögek összege kisebb mint két derékszög.* Meglepően érdekes tulajdonság! Tehát már a síkokra bizonyítható az euklideszi geometriában érvényes kijelentés! Ugyanis ha a keletkezett belső szögek összege két derékszög, a két sík már nem metszi egymást, és a két síkról ebben az esetben mondjuk, hogy párhuzamosak.



10. ábra



11. ábra

Továbbmenve, Bolyai felveszi egy adott iránnyal párhuzamos térbeli egyenesek sokaságát (11. §). Az egyik ilyen egyenesen egy tetszőleges A pontot választva az A -val korrespondáló térbeli pontok halmazát F -nek nevezi (11. ábra). Ez az F a *paraszférának* nevezett felület. Bolyai kijelenti, hogy az F *uniformis* felület. Így nevezi az olyan felületeket, amelyek minden irányban önmagukban eltolhatók, mint amilyen például a gömb vagy a sík. Később kimutatást nyert, hogy az ilyen felületek Gauss-féle görbülete állandó. Az F felületet egyenesek „végtelen sugarú” gömbként vagy határgömbként is emlegetik. A szóban forgó párhuzamos egyenesek a paraszféra *tengelyei*, és ezek merőlegesek az F felületre. Bármely tengelyen átmenő sík a paraszférát egy Bolyai által L -nek nevezett vonalban (*paraciklusban*) metszi.

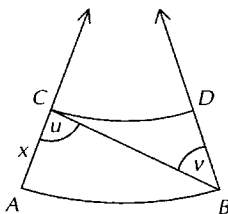
A 13. §-ban Bolyai azt igazolja, hogy ha két párhuzamos egyenest metszünk egy harmadikkal, és a keletkezett belső szögek összege két derékszöggel egyenlő, akkor ez a tulajdonság érvényes bármely más két párhuzamos egyenes esetében is.

A már említett úton haladva (vagyis nem véve tekintetbe az euklideszi párhuzamossági axióma igaz vagy hamis voltát), az *Appendix* szerzője elérkezett addig a szintig, ahonnan a további út szükségszerűen kettéágazik, és ezt a 15. §-ban fogalmazta meg: „A geometriának azt a rendszerét, mely Euklidész 11. axiómája igaz voltának feltevésén alapszik, nevezzük Σ -rendszernek, míg az ellentétes feltevésre épülő rendszert nevezzük S -nek. Mindazokat a tételeket, amelyeknél nem említjük meg kifejezetten, hogy Σ - vagy S -rendszerben érvényesek, *abszolút igaznak* tekintjük, ami azt jelenti, hogy érvényesek, akár a Σ , akár az S teljesül a valóságban.”

Ettől kezdve Bolyai az általa felfedezett új S -rendszer kidolgozását tartja szem előtt, ugyanis az ezutáni paragrafusok mind erre vonatkoznak, ami érthető, hiszen ez képezi az új, most felfedezett nemeuklideszi geometriát. Kezdetben kimutatja, hogy míg a Σ -ban az F a tengelyekre merő-

leges sík, addig az S -rendszerben görbült uniformis felület. Hasonlóképpen az L a Σ -rendszerben egyenes, az S -rendszerben pedig uniformis vonal (17. §).

A 21. §-ban a 9. § eredménye alapján kimutatja, hogy az F paraszférán, ahol az egyenesek szerepét az L paraciklusok töltik be, a Σ -rendszer, vagyis az euklideszi geometria érvényes. Tehát az S -rendszer keretén belül létezik egy olyan felület, amelyen az euklideszi geometria tételei igazak. Ilyenkor azt is szokták mondani, hogy az F paraszféra az euklideszi geometria (Σ -rendszer) hiperbolikus térbeli (S -rendszerbeli) „modellje”. Nem érdektelen kihangsúlyoznunk, hogy egyetemes matematikatörténésünk folyamán a modell fogalmával legelőször Bolyai remekművében találkozunk.



12. ábra

Az *Appendix* 22–24. §-aiban az egymástól ugyanolyan távolságra fu-
tató, tehát közös tengelyekkel rendelkező paraciklus ívekre vonatkozó té-
teleket bizonyít. Ezek a paraciklusok bizonyos értelemben párhuzamo-
saknak tekinthetők, mely viszonyt a „ \parallel ” szimbólummal jelöli, mint pél-
dául $AB \parallel CD$ (12. ábra). Kimutatja, hogy két tetszőleges tengely közé
eső bizonyos $AC = x$ távolságra lévő párhuzamos L vonalak ívhosszai-
nak $AB : CD$ aránya nem függ az őket közrefogó tengelyek egymáshoz
viszonyított helyzetétől (vagyis az AB és a neki megfelelő CD ívhosszak-
tól), hanem csak az $AC = x$ távolságtól. Ennek az aránynak az értékét az
 x távolságnak megfelelő nagy X -szel jelöli, amely az S -rendszerben nyil-
ván az x függvénye. Az S -rendszerben (mivel az arány nevezőjében a
párhuzamossági irányban fekvő „rövidebb” paraciklusív szerepel) $X > 1$,
míg a Σ -rendszerben $X = 1$. Ezt a függvényi kapcsolatot később a 30. §-
ban konkrétan megadja:

$$X(x) = e^{\frac{x}{k}},$$

ahol e a természetes logaritmus alapszáma, k pedig a hiperbolikus geo-
metriát karakterizáló görbületi paraméter.

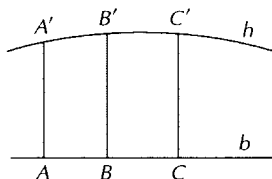
A 25. §-ban egy nagyon szép *abszolút érvényű* tételt igazol:

Bármely egyenes vonalú háromszögben az oldalakkal egyenlő sugarú körök kerületei úgy aránylanak egymáshoz, mint a velük szemben fekvő szögek szinusza.

Ez a tétel abszolút érvényű, mivel az S -rendszerben, a Σ -rendszerben, valamint a később felfedezett Riemann-féle elliptikus geometriában egyaránt igaz.

A 26. §-ban egy roppant érdekes és fontos tulajdonság bizonyítása található:

A gömbi trigonometria független a 11. axiómától.



13. ábra

Az S -rendszerben igen jelentős szerepet játszó *hiperciklus* és *hiperszféra* fogalmak a 27. §-ban jelennek meg. A hiperciklus egy b egyenestől (az általa meghatározott félsíkok egyikében) egyenlő távolságra ($\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \dots$) lévő (A', B', C', \dots) pontok összessége (13. ábra). A b egyenest a kapott h hiperciklus bázisának nevezzük. Hasonlóképpen a síktól az egyik féltérben egyenlő távolságra lévő pontok halmaza (mértani helye) a *hiperszféra*.

Bolyai Farkas rengeteget fáradozott annak kimutatásán, hogy a hiperciklus egy egyenes. Ez az állítás azonban csak az euklideszi geometriában (Σ -rendszerben) igaz, tehát a 11. axióma felhasználása nélkül nem bizonyítható. Az S -rendszerben viszont a hiperciklus egy uniformis görbe. Hasonló a helyzet a hiperszféra esetében is. A Σ -rendszerben a hiperszféra nem más, mint az adott síktól a megadott távolságra elhelyezkedő vele párhuzamos sík, az S -rendszerben pedig egy görbült uniformis felület. Bolyai János ebben a 27. §-ban kimutatja, hogy az AB bázisszakasz (13. ábra) és a neki megfelelő $A'B'$ hiperciklusív mértékére érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{\sin z},$$

ahol z a hiperciklust karakterizáló távolság párhuzamossági szöge.

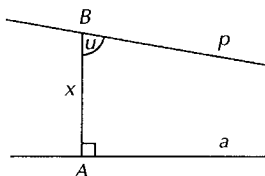
A 28. §-ban Bolyai már konkrét lépéseket tesz a 23. §-ban tárgyalt

AB : CD (azonos AC és BD tengelyekkel rendelkező AB és CD paraciklus-ívek) arányának meghatározására. A 12. ábrán feltüntetett adatok alapján

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\sin u}{\sin v}.$$

Erre az eredményre is támaszkodva vezet le Bolyai a 29. §-ban a *hiperbolikus geometria* (S -rendszer) *alapösszefüggését*, amely az $x = \overline{AB}$ távolság és a neki megfelelő u párhuzamossági szög (14. ábra) kapcsolatát fejezi ki. Ebben a §-ban Bolyai kimutatja, hogy

$$X(x) = \operatorname{ctg} \frac{u}{2}.$$



14. ábra

De a 30. §-ban, amint már említettük, kimutatta, hogy $X(x) = e^{\frac{x}{k}}$, tehát az S -rendszer alapösszefüggése:

$$e^{\frac{x}{k}} = \operatorname{ctg} \frac{u}{2}.$$

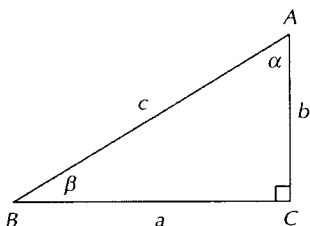
Ebből kifejezhetjük az x távolságnak megfelelő u párhuzamossági szöget:

$$u = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^{\frac{x}{k}}.$$

Ugyancsak a 30. §-ban mutatja ki Bolyai, hogy az y sugarú kör kerülete, melyet Oy -nal jelöl, az S -rendszerben a következő:

$$Oy = \pi \cdot k \left(e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}} \right).$$

A derékszögű háromszögekre vonatkozó trigonometriai összefüggések a 31. §-ban szerepelnek. A C -ben derékszögű ABC háromszög a és b oldalhosszúságú befogóival szemben fekvő szögeit α -val, illetve β -val jelölve (15. ábra), Bolyai – többek között – három alapösszefüggést fejez ki: az első az a , α és c átfogó; a második az a , α és β ; a harmadik pedig az a , b és c között. Ezekre alapozva – amint Bolyai is kijelenti – könnyen meg-



15. ábra

kaphatjuk az általános háromszögekre vonatkozó valamennyi trigonometriai összefüggést.

Hatalmas anyagot ölel fel az *Appendix* 32. §-a. Az ebben közölt kutatási eredményekhez Bolyai a matematikai analízis módszereit használta fel. Több olyan fogalom konkrét kifejtésére kerül sor, mely manapság a hiperbolikus differenciálgeometria tárgyát képezi. Így például pontosan meg van határozva egy $y = f(x)$ egyenletű görbe érintője és annak irányítanézója a görbe bármely pontjában; konkrétan meg van adva a *hiperbolikus sík első alapformája*, vagy *metrikája*:

$$ds^2 = dy^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{y}{k} dx^2,$$

ahol $\operatorname{ch} \frac{y}{k}$ a koszinusz hiperbolikus függvény.

Igen figyelemreméltó az a megállapítás, miszerint a görbület, evoluta, evolvens, stb. fogalmai az S -rendszerbeli görbékre is kiterjeszthetők. Ugyancsak ebben a §-ban találjuk a következő témák tárgyalását: a paraciklus egy adott koordináta-rendszerbeli egyenlete, valamint az ívhosszára vonatkozó számítások; egy $y = f(x)$ egyenletű görbe és az Ox tengely által az (a, b) sávközben határolt terület; a kör területe; két párhuzamos L vonal és két tengelyük által közrefogott terület; a gömb felszíne és köbtartalma; a p bázishossznak megfelelő hiperciklus ívhossza, valamint egy síkbeli t területű bázissal rendelkező és ennek megfelelő hiperszférarész felszíne; egy CD hiperciklusív AB bázisa körül történő forgatással keletkezett felület felszíne, valamint az így kapott forgástestrésztérfogata, stb.

Például egy x sugarú gömb felszíne illetve térfogata az S -rendszerben

$$F_g = \pi k^2 \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right)^2, \quad V_g = \frac{1}{2} \pi k^3 \left(e^{\frac{2x}{k}} - e^{-\frac{2x}{k}} \right) - 2\pi k^2 x,$$

melyeket manapság már a hiperbolikus függvényeket használva így is írhatunk:

$$F_g = 4\pi k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{k} \quad \text{és} \quad V_g = \pi k^2 \left(k \cdot \operatorname{sh} \frac{2x}{k} - 2x \right).$$

A kapott eredmények alapján Bolyai egy újabb szép abszolút tételre bukkant:

A gömbök felszínei úgy aránylanak egymáshoz, mint főköreik kerületeinek második hatványai.

A tárgyalt paragrafus mondanivalója fontos konklúzióval zárul:

ha $k \rightarrow \infty$, akkor az összes ilyen S -rendszerbeli kerület-, terület-, térfogat- és más természetű képletek, a nekik megfelelő analóg Σ -rendszerbeli képletekbe mennek át. Ugyanez áll a 31. § trigonometriai összefüggései-re is. Tehát a Σ -rendszer az S -rendszer határeset.

A 33. §-ban kap helyet az a kijelentés, miszerint eldöntetlen marad, hogy a valóságban az S -, avagy a Σ -rendszer érvényes. Az S érvényessége esetén pedig még mindig eldöntetlen marad e rendszer k paraméterének értéke. Ellenben egyetlen a -nak megfelelő A érték ismerete már megadná a k értékét, vagyis rögzítené a rendszert

$$(\text{ugyanis } k = \frac{a}{\log A}).$$

Ebben az esetben k természetes hosszegységnek is tekinthető.

A hátralevő tíz paragrafus az S -rendszerben elvégezhető néhány szerkesztési eljárást mutat be:

- hogyan szerkeszthető egy egyenesen kívül fekvő, az adott egyenessel párhuzamos félegyenes (vagyis a távolságnak megfelelő párhuzamossági szög megszerkesztése) (34. §);
- hogyan szerkeszthető egy hegyesszög egyik szárára merőleges egyenes, mely a másik szárral párhuzamos (tehát fordítva: a távolságot kell meghatározni, ha ismerjük a neki megfelelő párhuzamossági szöget) (35. §);
- létezés esetén hogyan kapható meg egy egyenes és egy sík metszéspontja, valamint két sík metszészvonala (36. §);
- hogyan határozható meg térgeometriai szerkesztés segítségével egy adott ponttal korrespondáló többi pont, valamint annak kimutatása, hogy a paraszférán (F felületen) a 11. axióma felhasználása nélkül elvégezhetők mindazok a szerkesztések, amelyek a Σ -rendszerben a síkon is elvégezhetők (37. §);
- ha ismert X , akkor hogyan szerkeszthető meg a neki megfelelő x (38. §);

– a 39., 40., 41. és 42. §-ok a 43. § két fontos eredményének kifejtéséhez és igazolásához szükséges segédtételek bizonyításait tartalmazzák. Az egyik ilyen 43. §-beli eredmény a hiperbolikus síkbeli ABC háromszög területképlete:

$$\Delta(ABC) = k^2 [\pi - (A + B + C)],$$

ahol k a hiperbolikus állandónak is nevezett görbületi paraméter, π a két derékszög mértéke radiánban kifejezve, A , B , C pedig a háromszög szögeinek mértéke.

A másik eredmény pedig annak a meglepően érdekes tulajdonságnak az észrevétele és igazolása, hogy a *hiperbolikus síkban bizonyos esetekben elvégezhető a kör négyszögesítése*.

Ez is egy két évezredes ókori probléma, mely azt kéri, hogy csak körzővel és vonalzóval szerkesszük meg azt a négyzetet, melynek területe egyenlő egy adott kör területével.

Ebben az utolsó paragrafusban még egy igen figyelemreméltó kijelentést találunk: „*vagy érvényes Euklidész 11. axiómája, vagy lehetséges a kör geometriai kvadrátúrája*”. Tehát: a kör négyszögesítésének lehetséges volta kizárja a 11. axiómát! Ha arra gondolunk, hogy még a 20. század elején is nem kis számban akadtak olyanok, akik azt állították, hogy sikerült a kört négyszögesíteni, miután Charles Hermite (1822–1901) és Ferdinand Lindemann (1852–1939) a 19. század utolsó évtizedeiben igazolták a $\pi = 3,14\dots$ szám transzcendens voltát, amiből az is következik, hogy a kör négyszögesítése az euklideszi síkban nem végezhető el, akkor megalapozott nyugodtsággal kijelenthetjük:

Bolyai János látta be először, hogy a kör négyszögesítése problémájának megoldása az euklideszi síkban lehetetlen.

Körülbelül ez lenne az *Appendix* rövid, tájékoztató jellegű kivonata.

Összehasonlítva Bolyai és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792–1856) új elgondolásait, a következőket állapíthatjuk meg: Lobacsevszkij az euklideszi posztulátum tagadásából indul ki, és az antieuklidikus rendszert építi fel. Bolyai viszont – az S -rendszer kidolgozása mellett – az abszolút érvényű megállapításokat és tételeket keresi, vagyis amelyek egyaránt érvényesek mindkét rendszerben, vagy – az ő kifejezését használva – „független a 11. axióma (a priori soha el nem dönthető) igaz vagy nem igaz voltától”.

„Nem túlozunk, ha azt állítjuk – írja V. F. Kagan –, hogy Bolyai a valóságban bármely állandó görbületű tér geometriájának alapjait alkotta meg, vagyis kiválasztotta azt az anyagot, amely tiszta geometriai formában az összes állandó görbületű terekre vonatkozólag közös kifejezést tételez fel. Nem lehet azt mondani, hogy az *Appendix* felépítése ebben a vi-

szonylatban egész szigorúan megérett, de tartalma rendkívül közel jár ehhez. [...] Bolyai azzal kezdi, és azt viszi végig rendszeresen egész művén, ami Lobacsevszkijnél a végső eredményt jelenti.”

Veniamin Fedorovics Kagan (1868–1953) mély meglátását továbbépítve kijelenthetjük: a hegeli fejlődési séma triászát használva, ha Euklidész elméleti elgondolása a *tézis*, akkor Lobacsevszkijé az *antitézis*, Bolyaié pedig a *szintézis* gondolata.

2.8. Az *Appendix* kezdeti fogadtatása

Hogyan fogdaták az *Appendix*-et még Bolyai János életében, közvetlenül a megjelenése után? Valósággal megrázó az a vergődés, ahogyan ez a tragikus sorsú lángész igyekezett zseniális munkáját a világgal megismertetni. Sajnos műve diadalútjának még a kezdetét sem érte meg. Már felfedezésének első lépéseit, eredményeit és elképzeléseit apja kétkedése kísérte. De Farkas mégiscsak apa volt, és azt javasolta, hogy János minél hamarabb jelentesse meg nyomtatásban új eredményeit. Ami a vitákat illeti, közös elhatározás alapján úgy döntöttek, hogy János munkáját elküldik Gaussnak, aki azután tisztázni fogja a közöttük támadt nézeteltéréseket. Így a vaskos, latin nyelven írt *Tentamen* megjelenése előtt, 1831 tavaszán különlenyomatok készültek János 29 oldalas ugyancsak latin nyelven írt munkájáról. Mivel az idő tájt ismerőseik közül senik nem utazott Göttingába, végül is úgy döntöttek, hogy Farkas postán küldi el Gaussnak János munkáját. Újból nehéz szívvel ülhetett le Farkas 1831. június 20-án a levélíráshoz, mivel Gauss két utóbbi levelére nem válaszolt. Ezt a szorongást a levél érezhetően tükrözi:

„Nagyra becsült Gauss!

Bocsásd meg, hogy háborgatlak óriáspályádon, tarts egy kis szünetet, és ajándékozz egy percet a barátságnak! Fogadd elmúlt napok vissz sugárzását és elutazásunk előtt az aggkor romjaiból még egyszer megifjulva nyújtsuk egymásnak jobbunkat egynéhány ország felett! Az Idő és Tér bilincsei nem kötik meg a lelkeket. A Földnek minden, magasabb lények szemében nevetségesen kicsiny (bár önnön magunknál soha sem kisebb, és relatíve mindig nagy) nagysága eltűnik a szeretet birodalmában, és csak a boldogság ez egyedüli forrásából fakadt áramlások folynak csillogva az örök Nap fényében az újra meglett Paradicsom hervadhatatlanul virágzó mezein.

A tavaszi napéjegyenlőségtől az őszi napéjegyenlőségig, egész nyáron által (legalább látszatra) holtak voltunk egymás számára, én (min-

dig változatlan) sok ezerszer gondoltam Rád! Nem kétlem, hogy nagy munkáid közben – jöllehet abban megakadályoztak, hogy utolsó két levelemre válaszoljál – olykor Te is gondoltál rám.”

Tovább folytatva még az ilyen csengésű sorokat, végül is rátér arra, amiért tulajdonképpen a levelét írja.

„Fiam most már a műszaki alakulatok főhadnagya, nemsokára kapitány, szép ifjú, virtuóz hegedűs, jó és merész vívó, de túl sokat párbajozik és általában még nagyon féktelen katona, de ugyanakkor igen érzékeny – fény a sötétben és sötét a fényben, és szenvedélyes matematikus, párját ritkító értelmi képességekkel. Most a leMBERGI garnizonban van. Téged igen-igen tisztel, megérteni és értékelni képes.

Az ő kérésére küldöm ezt az ő kis munkáját Hozzád: légy szíves ítél meg éles, átható szemekkel, s válaszodban, melyet epedve várok írd meg kímélés nélkül magas ítéletedet [...] Fiam többre becsüli a Te ítéletedet, mint egész Európáét.”

Majd a göttingai változásokról érdeklődik Farkas, és végül így zárja a levelét:

„Örvendeztess meg hamarosan válaszoddal, add vissza második életemet! Te gazdag vagy életben, már ezredéveid vannak. Királyi kincseddel szerencsésen átkeltél az Óceánon. Az én egem mindig borús volt, s dühöngő viharok verték szét hajómat a szirteken. De minél sötétebb volt kint, annál szebben sziporkáztak belső egem csillagai.

Bocsássa meg nekem az utókor, ha e hosszú levelem miatt talán szégyennebb lett egy szép gondolattal. A Te idődet is kímélni szeretném. Keveset írjál, csak annyit, hogy még szereted

a Te öreg
Bolyaidat”

A levél borítékjának belsejére írt utóiratban János mellékelt munkájáról tesz néhány magyarázó megjegyzést. Gauss a levelet megkapta, de János munkáját sajnos nem. Valószínű, hogy útközben a kolerajárvány okozta bonyodalmak következtében elkallódott. Valamilyen úton Farkas értesült erről, és emiatt 1832. január 16-án írt új levél kíséretében másodszor is elküldte fia érkezését Gaussnak, melynek kézbesítésére most már az éppen Göttingába utazó fiatal Zeyk Józsefet kérte meg, aki a küldeményt át is adta Gaussnak. Bolyai Farkas ebben a levelében is újból megemlíti „zaklatásának” okát:

„Bocsásd meg nekem az alkalmatlankodást, de fiam többre becsüli a Te véleményedet, mint egész Európáét, és csak arra vár. Szívem mélyéből kérlek, tudósíts mihamarabb ítéletedről...”

A küldemény átadásával kapcsolatban érdemes idéznünk néhány sort Zeyk József leveléből, amelyet 1832 márciusában írt szüleinek Kolozsvárra:

„Bolyainak mondják meg instálom, hogy az Olvasó társaságban búcsút vevén Gaussból és kérdezvén, hogy nem-e akar valamit üzeni, azt felelte, hogy nem sokkal azelőtt válaszolt levelére, amelyre aztán elbúcsúztunk. De azután egyszerre csak félretévén az újságot, ismét felkeresett és kérdezte, ha ismerem-e személyesen az ő – azaz a Bolyai – fiát, amelyre én igennel feleltem, és erre [Gauss] azt mondta: Der ist ein sehr ausgezeichnete Kopf, ja sehr ausgezeichnet.¹¹

Azután egy munkáját is átadta nekem, melyet hazamenetelkor oda fogok adni Bolyainak. – Nem tudom, írtam-e, hogy amikor János munkáját legelőbb átadtam neki, és miután titulusát elolvasta, meghűmögte magát, egyszersmind elmosolyodván, mintha mondta volna: magna petis Phaeton.¹² De úgy látom, mostani kifejezéséből, hogy jó-nak találta mégis.”

Valóban, nem sokkal azelőtt, 1832. március 6-án végül is (Farkas negyedik levelére!) válaszolt Gauss. Írja, hogy öröme szolgáltak kedves régi barátjának sorai, majd családi és más természetű ügyeiről értesíti Farkast. Menti magát, amiért az előbbi levelére nem válaszolt, ugyanis meg akarta várni az ígért művet is, majd így folytatja:

„Most valamit fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, hogy nem szabad megdicsérnem, bizonyára egy pillanatra meghökkensz; de ha megdicsérném, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérném, mert a mű egész tartalma, az út, amelyet fiad követ, és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30–35 év óta folytatott meditációimmal. Ez valóban rendkívül meglepett engem. Szándékom volt, hogy saját munkámból, melyből egyébiránt mostanáig csak keveset vettem papírra, életemben semmit se bocsássak nyilvánosságra. A legtöbb embernek nincs is meg a helyes érzéke az iránt, amin ez a dolog múlik, és csak kevés olyan emberre akadtam, aki azt, amit vele

¹¹ Nagyon kiváló koponya, igen, nagyon kiváló.

¹² Nagyrá törekszel, Phaeton.

közöltem, különös érdeklődéssel fogadta volna. Erre csak az képesít, hogy élénken érezzük, hogy mi az, ami tulajdonképpen hiányzik, és ami ezt illeti, a legtöbb ember nincs vele tisztában. Ellenben az volt a szándékom, hogy idővel mindent úgy írjak meg, hogy legalább majdan velem el ne pusztuljon.

Nagyon meglepett tehát, hogy e fáradságtól már most megkímélhetem magam, és nagyon örvendek, hogy éppen régi jó barátom fia az, ki engem olyan csodálatos módon megelőzött.

Nagyon jellemzőknek és rövideknek találom a jelöléseket; de azt hiszem, hogy jó lesz némely főfogalomra nemcsak jelet vagy betűt, hanem meghatározott nevet is megállapítani, és én már régen gondoltam néhány ilyen névre. Amíg a dolgot közvetlenül szemlélve átgondoljuk, nevekre vagy jelekre nincsen szükségünk, ezek csak akkor válnak szükségessé, ha másokkal akarjuk magunkat megértetni. Így például azt a felületet, amelyet fiad *F*-nek nevez, paraszférának, az *L* vonalat pedig paraciklusnak lehetne nevezni; alapjában ez a végtelen sugarú gömb illetve kör. Hiperciklusnak volna nevezhető ama pontok összessége, melyek valamely egyenestől, az illető síkban, melyben az egyenes található, egyenlő távolságra vannak. Hasonló volna a hiperszféra. Ámde mindezek csak jelentéktelen mellékes dolgok; a fődolog a tartalom, nem a forma.

A vizsgálat némely részében én némileg más úton haladtam; mutatványul ide csatolom (csak fővonalakban) tisztán geometriai bizonyítását annak a tételnek, hogy valamely háromszög szögei összegének 180° -tól való különbsége arányos a háromszög területével [...].

Itt csak a bizonyítás alapvonalait akartam bemutatni, minden számítás és csiszolás nélkül, amit neki megadni nem érek rá. Szabadságodban áll, hogy fiaddal közöld; mindenesetre arra kérlek, hogy őt részemről szívélyesen üdvözöld és különös nagyrabecsüléséről biztosítsd...”

Gaussnak ezt a levelét – amelyből itt főleg csak a témánkkal kapcsolatos részeket közöltük – Farkas egyik tanítványával lemásoltatta, és a másolatot elküldte fiának Lembergbe. Bolyai János, aki sivár környezetében, még nagy tudású apjánál sem talált teljes megértésre, Gaussnál kereste az elismerést. A nagy Gaussnál, akinek véleményét „többre becsülte egész Európa ítéleténél”. Tizenöt évvel ezelőtt, amikor a göttingai továbbtanulás reményében élt, talán még megközelítőleg sem várta oly izgalommal a „Göttingai Kolosszus” válaszát, mint ezekben a hetekben.

Gauss levele teljesen letörte Jánost. Eleinte kételkedett abban, hogy Gauss jóval előtte már eljutott a nemeuklideszi geometria gondolatához és ki-

dolgozta azt. Úgy érezte, hogy két dolog is alátámasztja gyanúját, miszerint Gauss alaptalanul akarja kisajátítani a felfedezésből eredő érdemeket. Az egyik az, hogy – Gauss saját bevallása szerint is – ezzel kapcsolatban abszolút semmit sem közölt. F. W. Bessel (1784–1846) matematikustársához írott egyik levelében például azzal indokolta ezt, hogy fél a böociaiak¹³ kiabálásaitól. A másik, az 1804. november 25-én apjához írt levele, melyben a német matematikus kifejti, hogy „megvan ugyan még mindig a reményem, hogy ama szirtek valamikor és még az én végem előtt megengedik az átjárást”. Azóta pedig távolról sem telt el 30–35 év.

Ez a kissé furcsa tartalmú levél talán Farkast is meglepte, és talán emiatt tartotta szükségesnek egy általa írt rövid kísérszöveggel szépíteni a dolgot: „Gaussnak a te művedre vonatkozó válasza igen szép, s hazánknak, valamint nemzetünknek dicsőségére válik. Egyik jó barátunk nagy elégtelnek mondta”.

Azonban Paul Stäckelnek a valósághoz közelebb álló megítélése szerint „egészen másképpen hatottak Gauss nyilatkozatai Jánosra. Hogy Gauss az *Appendix*-et nem méltatta nyilvános elismerésre és a prioritást a maga számára tartotta fenn, az Jánosnak oly csalódást okozott, amelyet sohasem tudott kiheverni. Ehhez még hozzájárult, hogy más helyről is elmaradt az elismerés, amely után tüzes lelke oly mérhetetlenül vágyott; a korát megelőző gondolatai ugyanis megértetlenül maradtak és az *Appendix*-nek a *Tentamen*-ben való közrebocsátása sem járt semmiféle sikerrel”.

A katonai okiratokból tudjuk, hogy Bolyai János 1826 után többször volt beteg. A testileg már amúgy is beteg embert Gauss válasza lelkileg is tönkretette. A lelkiállapotában beállt súlyos változások igazolására elegendő, ha összehasonlítjuk az 1831. és 1832. évekről kiállított katonai minősítési lapjait. A csendes és jóindulatú, közlékeny és barátságos, feletteseivel, polgári ismerőseivel és beosztottjaival tisztelettudó, és minden káros szenvedélytől mentes katonatisztból egy év leforgása alatt ingerlékeny és indulatos, tisztársaival minden érintkezést kerülő, zárkózott, szófukar, üres napjait szüntelen sakkozással agyonütő ember lett.

Azt, hogy János miként vélekedett a Gauss levelében található állításokról, azt a kéziratok között talált alábbi nyilatkozatából tudjuk meg:

„Nézetem szerint, és mint erősen meg vagyok győződve, minden elfogulatlan ítélőnek nézete szerint, mindazok az okok, melyeket Gauss arra felhoz, hogy miért nem akart e tárgyra vonatkozó dolgozataiból

¹³ Böocia vagy Boiotia Közép-Görögország egyik tartománya. Böocia népét az ókorban együgyűnek, műveletlennek és falánknak csúfolták, akik bármilyen kis nemtetszésüket ordibálással fejezték ki.

életében semmit sem közölni, erőtlene és semmisék; mert hisz a tudományban úgy, mint magában a közönséges életben, mindig arról van szó, hogy szükséges és közhasznú, hogy a még homályos dolgokat kelőn tisztázzuk, és az igaz és helyes iránt még hiányzó vagy inkább szunnyadó érzéket felkeltsük, kelőn eddük és előmozdítsuk. A matematika iránti érzék általában, az emberiség nagy kárára és hátrányára, fájdalom, csak igen kevés emberben ébred; és ilyen okból vagy ürügyből Gaussnak, hogy tökéletes maradjon, kitűnő műveinek még igen jelentékeny részét magánál kellett volna rejtienie. És ez a körülmény, hogy sajnos a matematikusok között, még pedig a híresek között is, nagy számmal vannak felületesek, értelmes embernek ez nem szolgálhat okul arra, hogy csak felületest és középszerűt alkosson, és a tudományt letargikusan csak az örökölt állapotban hagyja. Efféle feltevés egyenesen természetellenesnek és merő oktalanságnak nevezhető; és ennél fogva csak annál inkább zokon esik, ha Gauss ahelyett, hogy az *Appendix* és az egész *Tentamen* nagy becsét egyenesen, határozottan és nyíltan elismerte volna, és nagy örömét és érdeklődését nyilvánítva arra törekedett volna, hogy a jó ügynek illő fogadtatást szerezzen, inkább mindezek elől kitérve, csak jámbor jókívánságokkal és a kellő műveltség fölötti panaszokkal érte be. *Bizony, nem ebben áll az élet, a munkálkodás és az érdem.*"

A *Göttinger Gelehrte Anzeigen* hasábjain Gauss a matematikai felfedezésekről és eseményekről rendszeresen meg szokott emlékezni. Azonban az *Appendix*-ről, sem akkor amikor megkapta, sem a későbbiek során egy sort sem írt. Lehet, hogy még ez sem róható fel Gaussnak, de az már igen, hogy miután 1841-ben megismerte Lobacsevszkij *Geometriai vizsgálatainak* című művét, hozzá teljesen másképpen viszonyult. 1843-ban az ő javaslatára választották Lobacsevszkijt a Göttingai Tudós Társaság levelező tagjává, míg „rég jó barátjának” fiáról teljesen megfélemedezett. Szem előtt tartva a csodálatos precizitással megírt *Appendix*-et, erősen meggondolkoztató Gauss állásfoglalása és viselkedése. Az egyik ok feltehetően az lehetett, hogy Gauss már ismerte az *Appendix*-et, amikor Lobacsevszkij munkájával megismerkedett, és így belátta, hogy a nemeuklideszi geometria gondolata már áttörte a megmerevedett tudományos előítéletek frontját, tehát nincs értelme, hogy ez esetben is elhallgassa ennek a valóban merész felfedezésnek a közhírré tételét, mint ahogyan azt az *Appendix* megismerésekor tette. Talán nem tévedünk, amikor arra merészkedünk, hogy a másik okot Gauss szakmai irigységében keressük. Gauss ugyanis valóban birtokában volt a nemeuklideszi geometria gondolatának, amikor János munkáját átadták neki. Egyik bizonyítéka ennek

az a gúnyos mosoly, amely ekkor az arcán megjelent. De az *Appendix* elolvasása után, kénytelen megírni Farkasnak: „nagyon meglepett, hogy éppen jó barátom fia az, aki engem megelőzött”, és nagyon valószínű, hogy akkor ez a „megelőzés” nem esett jól neki. Lobacsevszkij jóval később megismert munkája már nyilván nem váltotta ki benne ezt az érzést.

Harmadik okként még felhozhatjuk Benkő Samu egyik megállapítását. Szerinte Gauss másképpen viszonyult az egyetemi professzor de főleg államtanácsnok Lobacsevszkijhez, mint a társadalmi ranglétra jóval alacsonyabb fokán álló kapitányhoz: „Gauss, a göttingai Georgia Augusta Egyetem professzora, lovagi címével, udvari tanácsosi méltóságával mindenkinél inkább tisztában lehetett azzal, hogy a feudalizmus mennyire komolyan veszi önmagát. A címek és rangok említésekor még a cinikusabb természetű emberek sem kacsintottak egymásnak cinkosan, hiszen a rendszer lényegéből fakadó dolgok voltak a külsőségek. A tudás társadalmi elismerésének Európa-szerte ugyancsak kialakult hierarchikus rendje volt”.

Mintha az előbbi megállapítást támasztaná alá az a tény is, hogy szűk körű magánlevelezésében Gauss már másképpen viselkedik. Az *Appendix* elolvasása utáni közvetlen benyomás hatása alatt, 1832. február 14-én többek között ezt írja Gerlingnek, a marburgi egyetemen tanító barátjának:

„Még megemlítem, hogy e napokban Magyarországból egy, a nem-euklideszi geometriát tárgyaló művecskét kaptam, amelyben valamennyi saját eszmémet és eredményemet nagy eleganciával kifejtve újból feltalálom, habár olyan alakban, melyek azok, kiknek ez a dolog új, tömörsége miatt nehezen követhetnek. Szerzője, ki egy nagyon fiatal osztrák katonatiszt, fia egyik ifjúkori barátomnak, akivel 1798-ban e dologról gyakran társalogtam, habár akkor eszméim még távol voltak attól a kialakulástól és érettségtől, melyet ez a fiatalember saját gondolkodása alapján nekik kölcsönzött. *Ezt a fiatal géométert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom.*”

Jegyezzük meg jól Gaussnak ezeket a szavait, mert egyes itteni állításainak következményeire az 5. fejezetben még visszatérünk. Az idézett rész befejező mondata: „Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse”, melyet Gauss a bevett saját kötelékeitől ideiglenesen megszabadulva, őszinteségi pillanatában írt, sohasem jutott el Bolyai Jánoshoz.

Paul Stäckel a Bolyairól írt kitérő monográfiájában, Schlesinger Lajos alábbi megállapításával igyekszik alátámasztani Gauss magatartását:

„De talán mégis helyesen cselekedett Gauss, midőn a fejlődés folytonos menetét nem akarta megszakítani, talán az ő tartózkodása – melyet mi, kik nagy szellemének útjait követni nem tudjuk, érthetetlennek találunk – óvta meg attól, hogy a böociaiak őt mint bolondot és eretneket rágalmazzák, és így legalább a magány nyugalmában részesíté azt, ki mint más úttörő is, meg nem érthette a tőle ültetett magból fakadó termésnek a megérését.”

Úgy tűnik, hogy Schlesinger Lajos, a kolozsvári egyetem hajdani professzora, aki a 20. század legelején, a feljegyzések és okiratok alapján Bolyai János szülőházát is felkutatta, Gauss tekintélye előtt meghajolva kész annak bármely magatartását helyesnek nyilvánítani. Vajon tényleg olyan hangos lett volna a „böociaiak” kiabálása, ha az akkor már világhírű Gauss a már nyomtatásban közzétett munkáról nyilvánosan kijelenti, hogy valójában értékes és helyes? És milyen fejlődési menetet szakított volna meg ezzel Gauss? Épp ellenkezőleg, hallgatása fékezte „a fejlődés folytonos menetét”.

A sikertelenségbe belenyugodni nem tudó, szerencsétlen sorsú matematikus zaklatott lelkiállapotában folyamodványt ír régebbi jóakarójához, Habsburg János főherceghez, melyhez az *Appendix* első 33 §-ának német nyelvű fordítását, valamint „hosszabb töprengés” után – Gauss levelének néhány részletét csatolta. A folyamodványok közül kettőnek is megőrződött a tervezete. Az egyiket 1832. május 3-án Lembergben, a másikat 1832. augusztus 8-án Olmützben készítette. Kérvényének akta-csomójához az utóbbit csatolta. Azt kérte a főhercegtől, hogy művét bíráltsa el valakivel, további tudományos kutatásaihoz pedig adjanak három hónapi szabadságot. Tudjuk, hogy az *Appendix*-ben foglaltakat akarta kiegészíteni és kibővíteni.

A szabadság iránti kérését végül is elutasították, hiszen azt csak a matematikai kutatásokra kérte. Pedig egyre súlyosbodó egészségi állapota is kellőleg indokolta volna szolgálatának megszakítását. A kedvezőtlen döntést még két bírálat befolyásolta. János főherceg – aki Sarlóska Ernő megítélése szerint többet tett Bolyai János elismertetése érdekében, mint Farkas „régí jó barátja”, a matematikus C. F. Gauss – valóban intézkedett az *Appendix* elbírálása ügyében. Utasítására a bécsi hadmérnöki Akadémia matematikaprofesszorát, Gustav Adolf Greisinger kapitányt kérték fel véleményezésre. Sürgetésre, végül is 1832. szeptember 14-én elkészült véleményezésével. Úgy tűnik, János főherceg nem volt megelégedve e felületes bírálattal, ezért hamarosan egy újabb matematikust, A. Ettingshausent (1796–1887), a bécsi Tudományegyetem professzorát kérték fel. Sajnos Ettingshausen bírálatát nem ismerjük, de hogy ez elkészült és szintén nem volt elismerő, azt Bolyai János egyik 1855-ben írt levelének aláb-

bi mondata igazolja: „Ettingshausent becsülöm, mint nagyérdemű és előkelő férfiút, habár annyira szerencsétlen, elvakult és elfogult, hogy minket [Jánost és Farkast] nem tud méltatni, és a már kész *Appendix* becsét sem volt képes fölismerni”.

„Elgondolkoztató tudománytörténeti adalék – írja Szénássy Barna –, hogy a Magyar Tudományos Akadémia (főként csillagászati és geodéziai eredményeiért) Gausst 1847-ben, Ettingshausent pedig 1868-ban külföldi tagjai közé választotta, de Bolyai János nevét 1868-ig még gondos kutatás révén sem fedeztük fel az Akadémia különböző kiadványaiban.”

G. A. Greisinger szakvéleménye az *Appendix*-ről viszont megtalálható az MTA könyvtárának levéltárában. Magyar nyelven ez az alábbiakban kerül először közlésre.

Gustav Adolf Greisinger
a cs. és k. mérnökkari testület kapitánya
a cs. és k. Mérnök Akadémia
felső matematika professzora
[szakvéleménye]
Bolyai János mérnök-kapitány
latin nyelven kiadott, *A Tér
Tudománya* c. munkájáról.

Császári Fenség!

Császári Fenséged legfelső parancsára, Koerber mérnök őrnagy úr révén, megkaptam a megbízatást, hogy részletes tájékoztatást készítsek Bolyai mérnök-kapitány latin nyelven kiadott *A Tér Tudománya* című munkácsról, amelyhez egy nem teljes német nyelvű fordítás és Gauss híres matematikus egyik levelének egy kivonata áll rendelkezésemre.

Az említett őrnagy úr később felsőbb parancsra felszólította alárendelt személyemet, hogy a feladat elvégzését lehetőleg gyorsítsam fel.

A latin nyelv ismeretének hiányában, a mellékelt német fordítás észrevehető tökéletlensége miatt, és azt a körülmény figyelembe véve, hogy a kérdéses munka kényes metafizikai megkülönböztetésekről szól, alárendelt személyem most egy általános véleményezést készít, és ugyanakkor az az alázatos kérése, hogy az itt... következő részleteket idővel egy paragrafusonkénti szigorú véleményezésnek vehesse alá.

A dolgozat célja a mértant, elsősorban a sík- és térbeli trigonometriát, mint a manapság egyre jobban terjedő analitikus mértan alapját függetleníteni Euklidész 11. axiómájától.

Ez az axióma így hangzik:

Ha két egyenest, AC-t és BD-t, egy harmadik AB-vel metszünk, és ha a

belső oldalon található CAB és DBA szögek együtt kisebbet tesznek ki, mint két derékszög, akkor az említett AC és BD egyenesek metszik egymást, ha azon az oldalon kellőképpen meghosszabbítjuk őket.

Tagadhatatlan, hogy ez az axióma Euklidész többi axiómájához képest egészen idegennek tűnik, és mint ilyen túl sokat foglal magában, más szóval ez nem axióma, hanem bizonyítást igényel.

Számtalan matematikus írt erről a tárgyról, és némely közülük, mint az éles eszű Legendre maga is, kifejezte kételyét, hogy vajon ezt a tételt (mert valóban az) a későbbi időkben nem tévedésből vették-e fel az axiómák sorába, miközben Euklidész talán bebizonyította, de a bizonyítás elveszett.

Bárhogy is lenne, helyességében remélhetőleg senki sem kételkedik, ellenkező esetben saját létét, illetve a kétely létjogosultságát vonja kétségbe.

Minden létező kurzus körüljárja így vagy úgy ezt az axiómát; alárendeltségem sem tagadhatja, hogy a legtöbb általa ismert kurzus – nevezetesen a cs. k. Akadémia kurzusa is, amely Euklidész nyomán a párhuzamosoknak az ettől az axiómától függő elméletét többé-kevésbé egy logikai körhöz hasonlítja – és köztük a legfontosabb is, átenged egyes dolgokat a szemléletnek.

A jelen dolgozat szerzője, mint már említettem, megpróbálja függetleníteni a sík- és gömbi trigonometriát az említett axiómától; munkája szerint az első csak részben, a második tökéletesen sikerült. Végül a szerző következtetéseket von le abból a feltevésből, amikor ez az axióma hamis lenne, így többek között, sikerül a kört mértanilag négyszögesíteni, vagyis azt egy vele egyenlő területű egyenes vonalakkal határolt idommal ábrázolnia.

Az értekezés ezen utóbbi részének nincs valós értéke; alárendeltségemnek meggyőződése ugyanis, hogy a szerző a maga nagy pontosságával csak az axióma bebizonyíthatóságát állíthatja, helytelenségét viszont már nem.

A dolgozat célkitűzésének értéke vagy értéktelensége végül is azon bizonyításon alapszik, amelyről a szerző azt állítja, hogy birtokában van, de amelyet itt nem közöl, vagyis hogy *a priori nem lehet eldönteni a párhuzamossági axióma igaz vagy hamis voltát*. Mert ha ez a lehetetlenség nem áll fenn, akkor célszerűbb lenne a megfelelő helyen a szerző által követelt szigorúsággal bizonyítani, hogy minden ezen alapszik, különösen..., ha az ember a lelkiismeretével nem tud egészen megbékélni, hogy a mértani bizonyításoknál, melyeket Legendre alapjában elégtelennek vél, kevesebb marad a szemléletre.

Alárendeltségem semmi szín alatt sem tudja a dolgozatnak és céljának

azt a fontosságot tulajdonítani, amelyet a szerző maga a 33. §-ban bejelent, s melyben valóságos matematikai rajongásig megy. Alárendelt személyeknek az a meggyőződése, hogy a világhírű matematikusnak, Gaussnak a mellékelt levélben közölt, különben nagyon általános véleménye nagyrészt annak a régi barátságnak a számlájára írható, amely őt a szerző édesapjához fűzi.

Végül az alárendelt nem kerülheti el, hogy ne méltányolja a szorgalmat és az éleselméjűséget, amellyel a szerző egy egyszer elfogadott hipotézisre egész munkáját felépítette és az elkövetkezőkben azt kívánja, hogy gyümölcsözőbb témát válasszon.

Bécs, 1832. szeptember 14.

Legmélyebb alázattal

Gustav Adolf Greisinger, a cs. és k.
mérnöktestület kapitánya, a cs. és k.
Mérnök Akadémia felső matematika
professzora"

Greisingernek ez a szövege ma már több szempontból is igen jelentős. Szakvéleménye kordokumentumként, konkrétan és hitelesen képes ecsetelni azt a tágabb környezetet is, amely annak idején Bolyai Jánost körülvette. Greisinger már nem a „flekkenváros”-nak is becézett Marosvásárhely egyik félművelt nyárspolgára, hanem a bécsi császári és királyi hadmérnöki Akadémia matematikaprofesszora. Ez egyben érzékelteti még azt, hogy a valóságban milyen magas matematikai oktatási szintet tudott biztosítani a bécsi katonai Akadémia, aminek pontos ismerete Bolyai matematikai képzési körülményeinek reális felmérésénél játszik szerepet. Természetesen ez az utalás nem csak a szóban forgó intézményre vonatkozhat. Ettingshausen, szintén abban az időben a bécsi egyetemen tanította a matematikát, akinek a feltételezett véleményéről már tettünk említést.

Greisinger soraiból kiderül, hogy írójától roppant távol estek az akkori matematikai kutatás áramlatai, szakmai szempontból egyszerűen képtelen volt felfogni és megérteni a bírálendő mű tartalmát és ebből kifolyólag az értékét. Mennyire igaz ebben az esetben is Bolyai János frappáns megjegyzése János főherceghez benyújtott folyamodványában: „sohasem lehet a szerző hibája, ha valamely ítélet csak azért ferde és lekicsinylő, mert az illető bíráló nem elég mestere a dolognak”.

Greisinger valószínűleg nem hanyagságból húzta-nyúzta a kért véleményezést, ami egy idő után a parancsba foglalt sürgetést vonta maga után, hanem egyszerűen képtelen volt megbirkózni a feladattal. Ez vehető ki a végül megírt bírálat körmönfont szövegéből, mely a szakmailag hibás állí-

tásoktól sem mentes. Azt viszont ő is kimondja, hogy Gaussnak a mellékelt levelében közölt véleménye nagyon általános és semmitmondó, ami valóban megerősíti Bolyai csalódásának reális alapját. De Greisinger addig megy, hogy még ezt sem a bírálendő mű értékének, hanem Gauss Bolyai Farkashoz fűződő barátságának tulajdonítja. Egészítsük ki még észrevételeinket Sarlóska Ernő ezzel kapcsolatos egyik meglátásával: „Greisinger természetesen tanácstalan a rábízott feladattal szemben, mindazonáltal fejtegetése tudománytörténeti szempontból nem lényegtelen. Végre előtűnik »szőröstől-bőröstől« egy igazi »böociai«. Egyszerre érthető lesz Gauss »rettenete«, bölcs kitérése minden nyilvános diszkusszió előtt, de saját gondolkodásának is lappangó gátlása”.

Az *Appendix*-ben lefektetett eszmékkel szembeni általános ellenállás nagyságát még az is érzékelteti, hogy ez akkor sem szűnt meg, amikor Bolyai remekművének világhírneve már emelkedni kezdett. Eklatáns példát szolgáltat erre Brassai Sámuel (1800–1897). Euklidész *Elemek* című művének első magyar fordítója úgy látszik, soha sem tudott elszakadni annak felfogásától. Brassai egyik igen számottevő életrajzi kutatója, Mikó Imre ezzel kapcsolatban a következőket írja:

„Amikor Brassai Euklidész *Elemi*-nek fordításához kezdett 1833-ban, akkor már megjelent Bolyai Farkas *Tentamen*-je és az ehhez fűzött *Appendix*, az ifjú Bolyai János munkája. Mire Brassai fordítása napvilágot látott, meghalt Bolyai Farkas. Brassai tartott emlékbeszédet felette, s beszédében a *Tentamen*-ről elismeréssel szólt, az *Appendix*-re vonatkozóan csak Bolyai Farkast idézte, aki szerint János »egy minden esetre függetlenül igaz geometriát szerkesztett«.

Hogy azonban fenntartásai is lehettek a geometriát forradalmasító művel szemben, az abból látszik: nem javasolta újrakiadását. Azzal tért ki előle – vannak még eladatlan példányai. Később az is kiderült, hogy Brassai nem tűri, ha Euklidészt bírálják, s inkább ez vezethette akkor is, amikor az *Appendix*-et is tartalmazó *Tentamen* kötet második kiadása ellen nyilatkozott.

Jóval később, 1875-ben, Lutter Nándor azt találta írni az Országos Közigazgatási Tanács közlönyében, hogy Euklidész *Elemi*-ben »a mértani anyag rendszeres beosztására még nagy gond nem fordítatott...«. Brassai felszisszent – külön füzetet adott ki Lutter ellen. Ez »hóbortság, legalább hallucináció!« – írta felháborodottan. »Az Elemek könyve nem anyaghalmoz, hanem valódi, mégpedig bámulatos szép rendszer«.

De nagyobb ellenfele is akadt Lutter Nándornál. Amikor Helmholtz, a neves német fizikus vitába keveredett Krauséval – aki Kanthoz híven a tétet és időt a szemlélet apriorisztikus formáinak tekintette, míg Helmholtz szerint a térszemlélet egyedül a tapasztalatból vezethető le – Brassai né-

met nyelvű röpiratban sietett megvédeni Krausét, illetve Kantot. Még hevesebben támadt Helmholtzra azért az állításáért, hogy Euklidész axiómái inkább valószínűek mint bizonyosak. A 11. axióma kétségbevonása, ami Bolyai János *Appendix*-ének is tárgya – Brassai szerint – »nem egy egeret, hanem egy hatalmas ostobaságot [einen kolossalen Unsinn] szült, mely 'abszolút geometriának' nevezi magát, de sem nem abszolút, sem nem geometria, hanem csak egy árnyjáték. [bloss ein Schattenspiel]«.

Ezt már Bolyai is magára érthette volna, ha akkor még élt volna. Az időzetből ugyanis az derült ki, hogy Brassai az idő múlásával egyre görcsösebben ragaszkodott régi nézeteihez, és ostobaságnak mondta a nem-euklideszi geometriát, amelynek alapjait Bolyai János és N. I. Lobacsevszkij egy időben, de egymástól függetlenül rakták le.”

Brassai Sámuel – „az utolsó erdélyi polihisztor”, ahogyan Mikó Imre is nevezi – 1872-től 1883-ig tanított elemi mennyiségtant a kolozsvári Tudományegyetemen. Sokirányú tudományos és kulturális tevékenysége néhány területen igen jelentős. De szerencsére a kolozsvári Tudományegyetem matematika tanszékén nemsokára Vályi Gyula is megkezdte tevékenységét, aki pár éven belül Bolyai szülővárosának egyetemét a Bolyai-kultusz egyik fellelegváraivá változtatja. Ugyanakkor nem kétséges, hogy Brassai Sámuel személyében egy másik „böociait” ismerhetünk fel.

3. Az *Appendix* gondolatainak továbbfejlesztése a kéziratokban

A geometria az a művészet, amely hibás rajzokból helyes következtetéseket von le.

H. Poincaré

3.1. Ami az *Appendix*-ből kimaradt

Többször említettük, hogy Bolyai Jánosnak az élete folyamán csak egyetlen műve jelent meg nyomtatásban: az *Appendix*. Új megoldásai és eredeti eredményei azonban – még geometriai szempontból is – messze túllepik azt a keretet, amelyet az *Appendix* paragrafusai megjelölnek. Mostoha körülményeinek tulajdonítható, hogy számos eredménye csak a vastkos kéziratkötegek sorai közé temetve őrződött meg az utókor számára, melyeket az évek múlásával egy-egy lelkes és kitartó kutató igyekezett a felszínre hozni. Ezáltal több ilyen felfedezése vált idővel ismertté, melyeket nyomtatásban is megjelentettek. De sajnos sok esetben megtörtént, hogy ezek közül néhány már nem volt újdonság, mivel Bolyai halála után más, szerencsésebb körülmények között dolgozó matematikus időközben újból felfedezte és közölte azt. Utólagosan közzétett eredményei így is hű bizonyítékai annak, hogy Bolyai gyakran megelőzte korát, vagy előre megsejtette bizonyos tudományágak későbbi megjelenését.

Mivel János arra törekedett, hogy az *Appendix* szövege minél rövidebb legyen, így az is előfordult, hogy ennek megírásánál tudatosan hagyott ki már kész, vagy éppen akkor vizsgált eredményeket. Ő maga hangsúlyozta, hogy az *Appendix* csak egy részét tartalmazza azoknak a vizsgálatoknak, amelyek őt az 1830-as évek körül foglalkoztatták. Nem vette be művébe például a komplex számokra vonatkozó elgondolásait, annak ellenére, hogy felismerte a képzetes mennyiségeknek az ő új geometriájában megnyilvánuló jelentőségét. Az *Appendix*-ben nem tért ki azokra a kutatásokra sem, amelyeket a hiperbolikus térbeli tetraéderek köbtartalmának

meghatározása érdekében végzett, vagy amelyek az *S*-rendszer ellentmondás-mentességére vonatkoztak. Akkor azonban még eltökélt szándéka volt, hogy ezeket az eredményeket később közölni fogja. Bolyai Farkas a *Tentamen* első kötetében tesz említést arról, hogy fia nem foglalta művébe összes akkori eredményét:

„Az *Appendix* szerzője, ki különös elmeéllal fog hozzá e dologhoz, olyan geometriát épített fel, amely minden esetben abszolút igaz; habár a kötet függelékében a nagy tömegből csak a legszükségesebbeket mutatta be, és rövidség kedvéért sokat elhagyott, mint amilyen például a tetraéder általános megoldása és több más elegáns vizsgálat.”

1835. április 20-án Gaussnak címzett levelében pedig a következőket írja:

„Szívesen kinyomattam volna a tetraéder megoldását is (melyre a fiam egy évvel az *Appendix* kinyomtatása előtt rájött), de a képletek, amiket láttam, túlságosan bonyolultak voltak, és én nem tudom őket. És mindenek felett annak bizonyítását nyomtattattam volna ki, hogy emberi szemnek teljességgel lehetetlen átlátni, vajon igaz-e a 11. axióma vagy sem. A fiam azt állítja, hogy megvan rá a kézzelfogható bizonyítéka.”

Gauss mindezt még nem tudta, amikor a neki megküldött *Appendix*-et megkapta és elolvasta, az 1832. március 6-án kelt válaszlevelében, Bolyai Farkas révén a következőre hívta fel János figyelmét:

„Közzöld fiaddal azt is, hogy a következő feladattal foglalkozzék: meghatározandó a tetraéder (négy sík által határolt tér) térfogata. Minthogy a háromszög területe olyan egyszerűen állítható elő, várható volna, hogy erre a térfogatra is van ilyen egyszerű kifejezés; ez a várakozás úgy látszik csalfa.”

A hiperbolikus térbeli tetraéder térfogatának kiszámításánál tehát a matematikusok fejedelme is komoly nehézségekbe ütközött. Ez a probléma még élete vége felé is foglalkoztatta Bolyait és főleg ebből az időszakból származó följegyzései maradtak ránk. Az erre vonatkozó kéziratban hagyott számításait Paul Stäckel tette közzé 1902-ben. Stäckel négy csoportra osztotta Bolyai ez irányú vizsgálatait a választott módszer típusától és a feldarabolási eljárástól függően. A megoldási kísérletek mindannyiszor bonyolult képletekhez és végül elliptikus integrálok kiszámításához vezettek, amelyekről ma már tudjuk, hogy ezek az integrálok általában nem fe-

jezhetők ki elemi függvényekkel. Így a tetraéder térfogatát kifejező zárt képlet meghatározása komoly akadályokba ütközött. A kérdés négyféle megközelítése tanúbizonyság arra, hogy Bolyai sokat bajlódott ezzel a feladattal. A komplikáltak tűnő számítások nem az esetleg rosszul választott megoldási módszerekből, hanem a probléma természetéből fakadtak. Ez tehát a Bolyai Farkas által is említett valódi ok, amely miatt János az erre vonatkozó vizsgálatait annak idején nem vette be az *Appendix*-be.

Az új geometriára vonatkozó és kéziratban maradt eredményei közül említésre méltók még a következők:

- a hiperbolikus síkbeli háromszög területképletére egy új bizonyítást ad, amely különbözik az *Appendix*-ben közölt levezetéstől;
- észreveszi, hogy bizonyos felületeknek megvan a maguk belső geometriája és sajátos esetként már megadta az állandó görbületű felületek geodetikus háromszögeire vonatkozó Gauss–Bonnet-féle területképletet, melynek általánosabb formáját csak később igazolták;
- kimutatja, hogy minden k értéknek megfelelő S -rendszerben léteznek olyan felületek, amelyek alakváltozás nélkül önmagukban minden irányban eltolhatók, és ezeket nevezi *uniformis* (undique uniformis) felületeknek. Megemlíti, hogy az S -rendszerben a síkon kívül három ilyen uniformis felület van: a gömb, az F felület (paraszféra) és az egyenközű felület (távolságfelület vagy hiperszféra), ellentétben a Σ -rendszerrel, ahol (a síkon kívül) csak a gömb rendelkezik ilyen tulajdonsággal.

Sok, az új geometriára vonatkozó meglátása szerepel még az *Észrevételek* című kéziratában is. A képzetes mennyiségeknek az új geometriában betöltött szerepére vonatkozó meglátásait a komplex számokról szóló fejezetben fogjuk megemlíteni.

3.2. Az S -rendszer érvényessége és ellentmondás-mentessége

Bolyai Jánost élete végéig foglalkoztatta az új geometriájának ellentmondás-mentessége, valamint, hogy a valóságban, vagyis a világegyetem térviszonyainak leírásában melyik geometriai rendszer érvényes, a Σ vagy az S . Ezt a kérdést még az *Appendix*-be is bevette. Művét ugyanis az alábbi mondattal fejezi be:

„Hátra volna végül a tárgy minden vonatkozásban való lezárása érdekében annak bizonyítása, hogy mindennemű feltevés nélkül nem lehet eldönteni, vajon Σ vagy valamelyik S (és melyik) teljesül; ezt azonban kedvezőbb alkalomra halasztjuk.”

Itt Bolyai is arra utal, hogy S érvényessége esetén még mindig eldöntetlen marad a rendszert jellemző k paraméter értéke. Emlékezzünk csak vissza! Amikor János 1825 februárjában legelőször mutatta be új elméletét apjának, Farkas makacsul azt állította, hogy S érvényessége esetén a k -t jól kell meghatározni, bár fia nyomatékosan hangsúlyozta ennek bármilyen pozitív értékű tetszőleges voltát. Talán ez is közrejátszhatott abban, hogy állításának alátámasztása érdekében János megkísérelte a k meghatározását. Úgy gondolta, hogyha az általa levezetett hiperbolikus geometriai képletekből sikerül olyan összefüggéshez jutnia, amelyből esetleg meghatározható a k értéke, akkor tisztázta a kérdést. Az ilyen irányú vizsgálatnak eredményeiről a következőket írja:

„A trigonometria segítségével tehát nem megy: annak minden alkalmazásánál csak megegyezéseket kapunk a határozatlan rendszerben; a rendszer meghatározása sohasem következik be. Ezzel a k meghatározatlan volta ki van mutatva.

Megnyugodhatunk e körülménynél? Teljességgel! A geometria így is szép marad. A dolog természetében van, hogy ez nem logikai következtetésekkel, hanem csak közvetlen szemlélet alapján ismerhető fel.”

Bolyainak ezt a helytálló észrevételét egy másik, igen jelentős meglátása követi. Észrevette, hogy a gömbi trigonometria és a hiperbolikus síkbeli trigonometria összefüggései között formai hasonlóság létezik. Ha a gömbi háromszög oldalhosszainak trigonometriai szögfüggvényeit a megfelelő hiperbolikus függvénnyel helyettesítjük, akkor a hiperbolikus síkbeli háromszög hasonló típusú összefüggését kapjuk. Például ha az ABC gömbháromszög szögei A, B, C és a velük szemben fekvő oldalak hossza a, b illetve c , akkor a gömbháromszög szinusztétele így írható:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

a hiperbolikus háromszög esetében pedig:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin C},$$

vagy ha ez a háromszög derékszögű A -ban, akkor a gömbháromszögnél a $\cos a = \cos b \cdot \cos c$, a hiperbolikus síkbeli háromszögnél pedig az ennek megfelelő $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c$ összefüggés érvényes, ahol sh és ch a szinusz hiperbolikus illetve koszinusz hiperbolikus függvények.

Mivel az *Appendix*-ben igazolta, hogy a gömbi trigonometria független

a 11. axiómától, ezenkívül eddig még semmiféle ellentmondást nem fedeztek fel benne, így folytatta gondolatait:

„Valamely [hiperbolikus] síkbeli pontrendszer vizsgálatánál nyilván ugyanazokat a képleteket kapjuk, mint a gömbön. A gömbi trigonometria abszolút érvényessége miatt a gömbön végzett bármilyen pontos elemzéseknél csak megegyezésekre juthatunk. Ezért [a gömbi és az S -rendszerbeli trigonometriai képletek tökéletes formai hasonlósága miatt] bármely síkbeli pontrendszer vizsgálatánál is megegyezésnek kell fennállnia. Ebből kitűnik, hogy S -ből a síkban sohasem [vezethető le ellentmondás].”

Természetesen Bolyai tisztában volt azzal, hogy ha az S -rendszerben valamilyen ellentmondáshoz sikerül jutnia, akkor ezzel a 11. axióma bizonyítását is megvalósította. Az ellentmondás-mentességi vizsgálatok tehát kétféle szempontból is fontosak voltak számára: egyrészt az S -rendszer létjogosultsága, másrészt az euklideszi axióma esetleges bizonyítása szempontjából. Egyik kéziratában így vélekedik elgondolásairól:

„Az új geometria alapvonalainak latin kiadásában a szerzőnek még az a reménye volt, hogy kimutatja.... [itt Bolyai minden valószínűség szerint az S -rendszerre gondolhatott] lehetetlenségét. A későbbi vizsgálatoknál azonban kitűnt, hogy akár az euklideszi rendszer mellett való döntésre, akár az eldöntetlenül maradásra van lehetőség, és hogy (ameddig a dolog eldöntetlen) még az eldönthetlenséget sem bizonyíthatjuk be a priori, úgy a döntés további kísérletei oly kincsásóra emlékeztetnek...

A 11. axióma vagy bebizonyítható vagy sem. Bizonyíthatatlansága azonban nem bizonyítható be, és a bebizonyíthatóságát is csak magával a bizonyítás effektív elvégzésével lehetne kimutatni.”

Az *Appendix* német átdolgozásának az 1837 körüli években írt lapszéli jegyzeteiben ez olvasható:

„Hogy a geometria e tekintetben is befejezést nyerhet-e, és vajon eldönthető-e, hogy a két rendszer közül melyik felel meg a valóságnak, hogy k véges-e vagy végtelen, ez eddig ismeretlen. Annyi bizonyos, hogy ha a döntés egyáltalán lehetséges, akkor az csakis az itt jelzett úton érhető el [az abszolút geometria teljes kidolgozásával és annak vizsgálatával, hogy az S -rendszerben nem jutunk-e esetleg ellenmondásra]. Ámde amennyiben S logikailag elgondolható, akkor ugyanez

áll Σ -ról (mint sajátos esetről, mivel az S -rendszerbeli F felületen Σ igaz); de fordítva ez nem mondható, ezért Σ a valószínűbb, de korántsem bizonyos.”

Ez a felismerés valóban méltó az *Appendix* szerzőjéhez. Habár a kitűzött célt teljes mértékben még nem sikerült elérnie, ő volt az első a világon, aki felfedezte a megoldás ma is elfogadott és járható helyes módszerét. Ugyanis azt már az *Appendix*-ben kimutatta, hogy az S -rendszerbeli F felületen az euklideszi geometria érvényes. Tehát ha az euklideszi geometriában valamilyen ellentmondás észlelhető, akkor ez megjelenik az S -rendszerben is, és ugyanakkor, ha az S -ben nincs logikai ellentmondás, akkor nem lehet a hiperbolikus térbe (S -rendszerbe) beágyazott paraszférán (F felületen) sem. Bolyai tehát ezen az úton észrevette, hogy az S ellentmondástalanságából következik a Σ ellentmondás-mentessége. Bolyai idézett szövege még azt a meglátását is elének vetíti, hogy a teljes megoldás érdekében a fordított tulajdonság fennállására is szükség van, vagyis: létezzen egy olyan euklideszi térbe ágyazott felület, amelyen a hiperbolikus geometria tételei érvényesek. Innen: a Σ ellentmondás-mentességéből azonnal következne az S ellentmondástalansága is. Amint később látni fogjuk, az euklideszi térben is létezik egy ilyen felület, a pszeudoszféra, melynek ilyen értelmű tulajdonságát csak Bolyai halála után mutatták ki.

A Bolyai által megvilágított helyes megoldási út az úgynevezett *modellmódszer*. Újból hangsúlyoznunk kell, hogy a modell fogalma és annak alkalmazása Bolyai János művében fordul elő először. Ő tudta és többször kijelentette, hogy bizonyos S -rendszerbeli felületeknek megvan a maguk sajátos belső geometriájuk. Világosan felismerte, hogy a paraszférán az euklideszi, a hiperszférán a hiperbolikus geometria tételei érvényesek.

A szóban forgó probléma a Bolyai halála utáni évtizedekben tisztázódott Arthur Cayley (1821–1895), Henri Poincaré (1854–1912), Felix Klein (1849–1925), David Hilbert, Kurt Gödel és mások munkássága révén. De a módszer, amely a végleges megoldáshoz vezette őket, ugyanaz, amit Bolyai már felismert: az úgynevezett modellmódszer. Az F felület, amelyeken az egyenesek szerepét a paraciklusok töltik be, az euklideszi síkgeometria hiperbolikus térbeli modelljének is tekinthető. 1868-ban Eugenio Beltrami (1835–1900) kimutatta, hogy a pszeudoszfa egy részén megvalósul a hiperbolikus geometria. A pszeudoszféra azonban, mely szinguláris pontokkal is rendelkezik, nem képezhető le a teljes hiperbolikus síkra, hanem csak egy bizonyos tartományára. Ezt a hiányosságot küszöbölik ki azok az euklideszi térbeli hiperbolikus geometriai

modellek, amelyeket H. Poincaré, A. Cayley, F. Klein és mások tettek közzé. Hogy egy axiómarendszer (és ezáltal az erre alapozott geometria) ellentmondásmentes, azt Hilbert nyomán úgy bizonyíthatjuk, hogy a rendszer egy modelljét megszerkesztjük. És itt eleveníthetjük fel újból Gödel már említett tételének következményét, mely szerint egyetlen axiómarendszer ellentmondástalansági bizonyítása sem formalizálható az illető axiómarendszerben. Tehát azonnal észrevehető, hogy a modell-módszer is csak *relatív ellentmondás-mentességet* bizonyít; vagyis az egyik rendszer ellentmondás-mentességét visszavezeti egy másik rendszer ellentmondástalanságára.

Paul Stäckel Bolyai egyik érdeméért emeli ki azt az elővigyázatos kérdésfeltevést, hogy vajon a síkbeli ellentmondástalanságból következik-e a térbeli ellentmondás-mentesség? Erre vonatkozóan Bolyai számításokat végez a hiperbolikus térben elhelyezett tetraéder lap- és síkszögeire. De „ez a módszer – írja Szénássy Barna – leleményes volta ellenére sem alkalmas egyetemes érvényű válasz megadására”. „Tehát eszerint János – írja Paul Stäckel – nem győződhetett meg arról, hogy az S -térben ez ellentmondásra vezet-e vagy sem. Valóban e kérdés nehézségeinek leküzdésére egészen másnemű segédeszközök kellene, mint amivel Bolyai János rendelkezett. De, hogy egyáltalán fölvetette a kérdést, hogy vajon nem bizonyítható-e a 11. axióma térbeli vizsgálatokkal, az már magában éleselméjűségének becsületére válik, és annál inkább említésre méltó, mert ezzel meghaladta Lobacsevszkijt, aki ugyan ismételtlen állítja, hogy az imaginárius geometria nem vezethet ellentmondásra, mert a háromszög szögei és oldalai közti összefüggések a szferikus trigonometria képleteibe mennek át feltéve, hogy az oldalakat képzeteseknek tekintjük, de – későbbi közleményeiben is – mindig a síkra szorítkozik.”

Annak eldöntésére, hogy a valóságban a Σ - vagy az S -rendszer érvényesül-e, Bolyai a nagy távolságú gyakorlati mérésekre is gondolt. Erre vonatkozó megjegyzéseit az *Észrevételek* cím alatt ismert kézirati anyagában fejti ki, melyben rámutat ezen mérések buktatóira is. Említsünk meg néhány gondolatot az erre vonatkozó megjegyzéseiből.

„A legfinomabb, legélesebb és legnemesebb érzékszervünk a szem. De a megfigyelő már a légköri fénytörés miatt tévedésbe esik, még akkor is, ha arra törekszik, hogy valamilyen okoskodással vagy újabb vizsgálatokkal a hibát kiküszöbölje. Ezenkívül akármilyen gondosan is végezzük el a méréseket, mely művelet alatt a nagyról a kisebbre térünk át, senki sem kezeskedhetik, hogy akár természeti, akár mesterségesen készített tárgyak egymáshoz viszonyított helyzetüket annyira megtartják, hogy mi a legkisebb változást sem legyünk képesek észrevenni...

A kisebbről a nagyobbra való áttérésnél a kisebbnél elkövetett hiba megnövekszik, ellenben a nagyobbban becsúsztott hiba a kisebbnél már kevésbé érezhető. Vegyünk fel a lehetőségekhez mérten egy minél nagyobb oldalú háromszöget, mely nem sokban tér el az egyenlő oldalú háromszögtől (ez esetben centrálás is szükséges), és ezek csúcsai lehetőleg magas és nagy látóhatárral rendelkező hegyek tetején legyenek kijelölve; majd mérjük meg akár a legkisebb és talán a legjobb, legkomplikáltabb és legdrágább szögmérővel, Reichenbach szorzóteodolitjával ennek három szögét a lehető legnagyobb pontossággal. Mi akkor a remélhető legnagyobb pontosság?”

Ezután Bolyai számításokat végez, hogy a Föld gömb alakja miatt mekkora lehet az a legnagyobb oldalú háromszög, amelyet a Föld felszínén felvehetünk, és milyen pontossággal mérhetünk. Majd így folytatja:

„De ha a háromszög szögeit a lehető legnagyobb pontossággal megmérjük, és a szögösszeget éppen $2R$ -nek találjuk, ki lehet mégis meggyőződve arról, hogy a fénytörés vagy más okokból adódó eltérés nem vezet egy még miáltalunk is észrevehető hibára? Fordítva, ha a szögösszeg csak néhány, például $16'$ -cel kisebbnek jön ki mint $2R$, amit mérföldnyi távolság esetében még az egyölnyi fényeltérés vagy deklináció is előidézhethet, emiatt ki állíthatja szilárd meggyőződéssel, nem-hogy melyik S , hanem, csak annyit, hogy *valamely* S és nem Σ érvényes? Sőt még az is előfordulhat, habár ez természetellenes, hogy a háromszög szögösszege nagyobbak adódjék $2R$ -nél. Földi mérésekkel tehát lehetetlen eldönteni azt, hogy a valóságban Σ vagy valamely S érvényes.”

E nem sok eredménnyel kecsegtető konklúzió után a megoldás és tisztázás további útjait kereste. Így jutott el egyik igen figyelemreméltó észrevételéhez, amely lehetőséget nyújthat a kérdés eldöntésére:

„De felhasználhatjuk azon különbséget, mely az égitestek helyének kiszámításánál mutatkozik, ha azt előbb arra a föltevésre építjük, hogy a szögösszeg $2R$, s a tömegvonzás mindig a távolsággal, mint sugárral leírt gömb felszínével fordítva arányos; azután pedig mindezt a $2R$ -től mindinkább eltérő szögösszeg feltételére ismételjük.”

Bolyai itt arra a tulajdonságra alapozott, hogy a két test közötti vonzóerő fordítva arányos az egymást vonzó testek közötti távolsággal megegyező sugarú gömbök felszínével. Ha figyelembe vesszük, hogy a O -rendszer-

ben az r sugarú gömb felszíne $4\pi r^2$, az S -rendszerben pedig

$$4\pi k^2 \text{sh}^2 \frac{r}{k},$$

akkor két égitest esetében a közöttük lévő q , majd p távolságnak megfelelő vonzóerők aránya:

$$\Sigma\text{-ban: } \frac{p^2}{q^2}; \quad S\text{-ben: } \frac{\text{sh}^2 \frac{p}{k}}{\text{sh}^2 \frac{q}{k}}.$$

Albert Einstein (1879–1955) gravitációelmélete és a kísérleti fizikusok legújabb eredményei azt igazolják, hogy a gravitációs tér mozgásban nyilvánul meg és az elektromágneses hullámokhoz hasonlóan fénysebességgel terjed. A tovaterjedő gravitációs tér gravitációs hullámokat kelt. S ha ennek alapján most tekintetbe vesszük, hogy bizonyos anyagkoncentráció maga körül létrehozott gravitációs tere megközelítőleg gömbhullámok formájában terjed (amelynek alakja valóban a gömbfelszín), akkor csak a legnagyobb elismerés hangján szólhatunk Bolyai János ezen meglátásáról is.

3.3. Az Észrevételek

A külföldi tanulmányúton tartózkodó Mentovich Ferenc (1819–1879) Göttingán keresztül utazva meglátogatta Gausst. A látogatás élményét a Kolozsvárt kiadott *Nemzeti Társalkodó* 1844. augusztus 30-i számában megjelent *Naplótöredék IV.* című cikkében örökítette meg. A Bolyaiakkal foglalkozó tanulmányok és monográfiák írói gyakran idéznek részleteket ebből a tudósításból, amelynek szerzője Gaussról többek között így írt:

„Midőn tudatám vele, hogy erdélyi vagyok, csakhamar élénk részvéttel kérdezé: ha vajon erdélyi jó barátjáról, professzor Bolyairól nem tudnék-e valami újabb tudósítást mondani egy őt előttem nem sok idővel meglátogatott erdélyi hazánkfiánál, professzor Szásznál? Mire válaszul adám: hogy csak óbbakkal szolgálhatok, minthogy már harmadfél éve lesz, hogy hazulról eljöttem. És ezen a megkezdett tárgyról beszélgetésünknek éppen nem megnyugtatósára szolgált feleletem után sem vala béfejezve Bolyaink feletti szóváltásunk; látszott rajta miszerint kedvenc tárgyán állapodott meg, miről a beszédben nem oly könnyen szeretünk eltérni. »Magamhoz hasonlóan mint megöszült és megöregedhetett az én barátom; valóban ha még egyszer találkozhatnám vele,

nem kis örömnök juttatna birtokába, mert az ember késő öregségében – midőn jó barátai és ismerősei mellőle apránként kidőlnek – megnövekedett hévvel ragaszkodik még fennmaradt kevés jóembereihez. Így sóhajt fel a tudós és látszott egész külsőjén egy rövid ideig tartó elmerengés az ifjúkor együtt töltött napjaira. Majd felvidámodva felkele ülőhelyéről, és egy egészen új külsejű könyvet vona elő, melyről azt mondá, hogy nem régiben vevé egy orosz matematikustól és előtte azért érdekes, mert nézeteiben merőben egyezik a Bolyaiak methésis körüli önálló nézeteikkel; holott meg van győződve, miszerint – mint egymástól oly messze fekvő tartományok lakói – a legkisebbet sem tud egyik a másíkról és eszméiket nem cserélhették egymással ki. E munka – folytatá tovább – megérdemli a figyelmet; s magyarnak a csodálatos nézetrokonságért kétszeresen érdekes s könnyen hozzájutható lehet, mert orosz nyelven van írva. Ezen nyilatkozatából úgy látszik Gauss is – mindamellet, hogy magyar barátja van – azon felette tévedt véleményben van – mi egyébiránt általános meggyőződés a németországi nem filológus tudósoknál – miszerint a magyar nyelv, mint a lengyel, tót, cseh stb. egy rokon ága a szláv nyelvtörzseknek; mely tudatlanság valóban megbocsáthatatlan a mindentudást igénylő német tudósoknál.

Láttam Bolyainak matematikai munkáját, dolgozó asztala melletti kisded könyvtárában, ahová úgy látszott kedveltebb írótoli és inkább kézikönyvül használni szokott művek valának beszorítva. E jeles férfiú minden szavából kitetszett, miként Bolyainkat nemcsak mint barátját tiszteli, de tudományos érdemeit is sokra méltatja. Miután búcsúzámm, meghagyá üdvözlőnémet nevében öreg barátját, s mondanám meg, miszerint nagy öröme leende, ha jelen állapota felől egy legújabb alkalom által saját levelében értesítenék. Ezt én megígértem.”

E sorok nem kerültek el Bolyai Farkas figyelmét. Ugyanis 1844. szeptember 10-én a következőket írta Domáldon élő fiának:

„Az újságban (*Társalkodó*-ban) jött ki Mentovich Gaussali dialógja... [Mentovichnak egy] bizonyos (nem említett nevű) orosz matematikusnak a könyvét mutatta Gauss, azon nyilatkozattal, hogy a bámulásig egyezik a Bolyaiakéval, holott egyik sem vehette a másíktól”.

De Gaussnál csak 1848. január 18-án írt levelében érdeklődik Farkas: „Tudósíts, mi a címe annak az orosz matematikai munkának, amely sokban hasonlít az enyémhez”. Erre a kérdésre Gauss még azon év április 20-án válaszol: „Az orosz matematikus művei legnagyobb részt a kazáni egyetem orosz emlékirataiban foglaltatnak. De alighanem könnyebben

beszerezheted a következő kitűnő kis értekezést: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien*, von Nicolaus Lobatschewsky, Berlin, 1840, a Fincke-féle könyvesboltban”.

Önkéntelenül vetődik fel a kérdés: vajon mi az oka annak, hogy Bolyai Farkas csak három és fél év eltelte után érdeklődött Gaussnál Lobacsevszkij műve iránt?

A valódi ok talán a következő: Mentovich megfogalmazásából az derül ki, hogy a könyv orosz nyelven jelent meg, és így – Paul Stäckel elfogadható véleménye szerint – „Valószínű, hogy Bolyai Farkas eleinte fölöslegesnek tartotta oly munka beszerzését, melynek nyelvét nemcsak maga nem értette, hanem alighanem más sem, akihez fordulhatott volna. Hogy később visszatért e dologra, arra fia, János indíthatta. Ennek hagyatékában terjedelmes »Észrevételek« találhatók Lobacsevszkij német nyelven írt munkájáról. Ennek végén János elmondja, mi indította kritikára”.

A szálak megint Gausshoz vezetnek: az *Észrevételek* terjedelmes kéziratában ugyanis a következő okfejtés található:

„Gauss, miután abbeli régi munkámat [az *Appendix*-et], bár kerülő szavakkal, miközben nagy mértékű meglepődését is kinyilvánította, annak idején megdicsérte [...] egy később Nála járt jeles Hazánkfia nyilatkozata szerint, az addig meglehetősen szótlan, társaságban részvétlen Nagy Ember és Kolosszus, [amikor] Honfitársunk a paralelákról kezdván szólni, Ő egyszerre kiderült arccal és meggyült hévvel Lobacsevszkij abbeli művét kezdé mint jól sikerültet az ő szelleme szerint dicsérni; az elején csakugyan kinyilvánított bámulata után, melyet a két munka csodálatos megegyezése okozott, az *Appendix*-ről nagyon méltatlanul, igazságtalanul, és nem kis szégyenére valólag még csak emlékezni sem akart”.

Paul Stäckel kétségbe vonja a Bolyai János által itt leírt történet hitelességét, melyet egy félreértés vagy rosszindulatú pletyka eredményének tulajdonít. Magáról az idézett szövegrészben említett „Hazánkfia” személyi kilétéről sincsenek pontos adataink, de feltételezhető, hogy Szász Károlyról van szó. Mindezekről eltekintve az viszont tény, hogy Bolyainak, aki az *Appendix* fogadtatása miatt már csalódott Gaussban, nem kellett sok, hogy egy ilyen történet számára negatívnak tűnő részleteit felnagyított ferdeségében lássa maga előtt. Érthető, hogy ezek után mindent elkövetett, hogy Lobacsevszkij művét beszerezze, amire apját kellett megkérnie, mivel ő volt levelező viszonyban Gauss-szal.

Bolyai Farkasnak sikerült meghozatnia a könyvet, és 1848. október 17-én továbbította fiának. Kevés ember vett olyan izgalommal könyvet a ke-

zébe, mint akkor Bolyai János. Négy éve, hogy a legkülönbébb feltételezések és gyanakvások mardosták a lelkét. Lázasan olvasásba kezd, melyet gyors jegyzetelés kísér. Fájdalmas panaszainak hű meghallgatója most is a türelmes néma papíros. Az egymásra torlódó gondolatokból és kritikai észrevételekből vaskos kézirat bontakozik ki. Matematikai feljegyzéseinek tekintélyes része német, néha latin nyelvű, de ez alkalommal a német nyelven olvasott szöveg ellenére a remegő kéztől irányított toll magyar anyanyelvén örökíti meg áradó panaszait. Amint mostani szövegében ő maga is kijelenti, mondanivalóját nincs szándékában nyilvánosságra hozni. Így szabad folyást enged tollának, minden keserűségét és gyanúját kiönti. Ezek a közlésre nem szánt bizalmas sorok ismételt bizonyítják emberi jellemének nagyságát, valamint mély, őszinte igazságérzetét. Ebben a zaklatott idegállapotban is megőrzi tárgyilagosságát és elismeri vetélytársa zsenialitását. Így például a *Geometriai vizsgálatok* (magyar fordításban így ismeretes Lobacsevszkij művének címe) 35. cikkelyéhez fűzött megjegyzésében azt állítja, hogy Lobacsevszkijnek a szferikus trigonometriára vonatkozó levezetéseit mesteri alkotásnak kell tekinteni:

„Ily éleken járva s hegyeken állva, suppanja ki nagyon-nagyon gyönyörűen és nemesen jelesen, derekason főeszméjében, Lobatsewsky, a kötél és dróton táncoló legnagyobb, ügyesebb és finomabb művészek módjára a gömbháromszögtan önállóságát”.

Mivel ez a kézirat nagyon sok eredeti meglátást és új matematikai eredményt tartalmaz, a Bolyai János tudományos hagyatékának feldolgozásán fáradozó Paul Stäckel és a fordításban is segédkező Kürschák József (1864–1933) végül úgy határoztak, hogy ennek lényegesebb részeit mégiscsak nyilvánosságra hozzák. A közzétett szöveg 1902-ben a *Matematikai és Természettudományi Értesítő*-ben jelent meg *Észrevételek* címmel, majd Paul Stäckel 1913-ban megjelent kétkötetes német nyelvű Bolyai monográfiájában újból közölte. A tudományos világ számára így váltak ismertté Bolyai kritikai észrevételei. Az *Észrevételek* közlői megemlítik, hogy a szerencsétlen sorsú, lángeszű matematikus „e kritikával könnyített elkeseredett szívéen”.

Mivel az *Észrevételek* Lobacsevszkij művével kapcsolatos, érthető, hogy az orosz és szovjet szakemberek azonnal felfigyeltek rá. Az *Appendix* oroszra fordítója, V. F. Kagan szovjet matematikus a következőket írja:

„János nagy figyelemmel tanulmányozta Lobacsevszkij művét, és minden sorát, hogy ne mondjuk, minden egyes szavát ugyanazzal a gondossággal elemezte ki, mint amilyenell az *Appendix*-et kidolgozta. Ez a mű

valóságos vihart keltett lelkében, és megpróbáltatásainak a *Geometriai vizsgálatoknak* szentelt hosszú megjegyzéseiben adott kifejezést.

A *Geometriai vizsgálatok*-hoz írt *Észrevételek* nemcsak kritikai elemzést adja e műnek [...]. Tartalmazza Jánosnak azt a panaszát is, hogy őt megrövidítették, azt a gyanúját, hogy a valóságban semmilyen Lobacsevszkij nem létezik, és hogy mindez csak Gauss rosszindulatú fondorlata. Annak a zseniális géométernek a tragikus panasza ez, aki tudatában volt saját alkotása nagyságának, és aki nem kapta meg annak az egyetlen embernek a támogatását sem, aki érdemeit megbecsülhette volna. Az *Észrevételek* helyes meggondolásokat tartalmaznak arra vonatkozólag, hogy miképpen lehetett volna jobban kifejeteni a nemeuklideszi geometria egyik vagy másik részét.

De alapvető tartalmát mégis azok a terjedelmes kritikai megjegyzések alkotják, amelyeket rendkívül kötekedő hangon írt meg. Vetélytársának kifejezéseiben nem bocsátja meg a legkisebb vigyázatlanságot sem. És erre neki megvolt az alapja, minthogy ő maga saját munkájában arra törekedett, hogy semmilyen vigyázatlanságot ne kövessen el. Bolyai saját munkáját majdnem tíz év alatt dolgozta ki.”

Megemlíttjük, hogy N. Lobacsevszkij a nemeuklideszi geometriáról több munkát közöl. A *Geometria alapjairól* című első dolgozata a *Kazanszkij Vjesztnyik* (*Kazán Híradó*) 1829/30-as számaiban jelent meg, és már eléggé alapos kifejtését tartalmazza a nemeuklideszi geometriának. Későbbi műveiben az itt közölt gondolatokat dolgozza át és fejleszti tovább. Ezek közül megemlíttjük a következőket: *Imaginárius geometria* (1835); *Új alapok* (az *Ucsenije Zapiszki Kazanszkovo Unyiverszityeta* című folyóiratban az 1836–1838-as években megjelent dolgozatsorozat); *Geometriai vizsgálatok* (1840); *Pángeometria* (1855).

Lobacsevszkij legsikerültebb műve a *Geometriai vizsgálatok*, vagyis pontosan az, amellyel Bolyai János is megismerkedett. Erről V. F. Kagan a következőket írja:

„Formára, kidolgozásra nézve a *Geometriai vizsgálatok* a nemeuklideszi geometria alapjainak Lobacsevszkij által adott legtökéletesebb kifejtése [...]. A *Geometriai vizsgálatok* nem egyszerű kivonata az azelőtt megjelent *Új alapok* című munkájának. Lobacsevszkij sok részt átdolgozott, másképpen magyarázott, egyes részeket valamivel jobban kifejtett, másokat lényegesen megrövidített. »Ezt a művet – mondja Gauss – Lobacsevszkij más munkáitól sokkal nagyobb pontossága és folyamatossága különbözteti meg«. Gauss ezzel a kis művel kezdte meg ismeretségét Lobacsevszkij munkáival; ezzel kell kezdenie ma is bárkinek, aki Lobacsevszkij munkáinak tanulmányozásához kezd; napjainkban is ez a nemeuklideszi geometria alapjainak egyik legvilágosabb és leghozzáférhe-

több kifejtése, a matematikai irodalom legértékesebb és legragyogóbb gyöngyeinek egyike.”

S ha már az összehasonlításoknál tartunk, igazságérzettel és tiszta lelkiismerettel megemlíthetjük, hogy mindezen valódi pozitívumok ellenére a *Geometriai vizsgálatok* szerkezeti felépítés és precizitás szempontjából nem érik el az *Appendix* magas szintjét. Ezt még V. F. Kagan is beisméri. Lobacsevszkijnek viszont tagadhatatlan érdeme, hogy elméletét folyamatosan megjelenő műveiben nagyfokú részletességgel fejti ki. Talán Bolyainak az *Észrevételek*-ben tett néhány kritikai megjegyzése is elmarad, ha ismerte volna Lobacsevszkij addig megjelent többi munkáit is.

Kezdetben még helyt ad a marcangoló gyanúnak, de ahogy mind jobban belemélyed és előrehalad a mű olvasásában, úgy kezdenek szétoszlani a gyanakvás sötét felhői és jelenik meg előtte a világosságot árasztó igazság. Kezdi belátni és beismerni, hogy a *Geometriai vizsgálatok* eredeti, nagy alkotás, és ettől kezdve „az orosz tudósban – Benkő Samu megállapítása szerint – nem *vetélytársat*, hanem a tudományt nagy tudással és szorgalommal szolgáló *sorstársat* lát.”

Most hagyjuk megszólalni magát az *Észrevételek* szerzőjét:

„E nagyon nevezetes munka egész szelleme és eredménye, bár sokban különböző utakat követ, a Maros Vásárhelyt már 1832-ben megjelent Tentamen Matheseos-nak Appendix-éhez annyira hasonló, hogy annak megpillantása valóban csak rendkívül csodálkozást okozó lehet; és ha Gauss – nyilatkozata szerint – rendkívül meg volt lepve előbb az Appendix által, s újabban a magyar és muszka matematikus oly csodálatos egybetalálkozásán: valóban magam sem vagyok kevésbé.

Mert bár a tiszta tan lényege bárhol a világon természet szerint csak egyféle lehet, s amit egyik véges okos lény fölhalál, azt magában másnak sem lehetetlen fölhalálnia, s mindamellet, hogy a szellemi teremtményeknek is, mint a terményeknek némileg – az emberiség fejlődésének stádiuma szerint – ideje szokott eljőnni, úgyhogy olykor ugyanegy tárgy, mint például a differenciál- és integrálszámítást a tengeren és szárazon¹⁴ egy helyt is vizsgáltatik s rokoneszmék ébrednek; s bár végre a jelen tárgy magában éppen nem is valami különösen nehéz vagy elrejtett: mindezek mellett is, meggondolva mily kevés élesebb tapintatúnak volt meg a jobb matematikusok között is az érzéke, az ebbeli hiányt észrevenni, s annak betöltését lelkesen és tettel kívánni, továbbá, hogy Euklidész sőt az emberiség létezése óta e tárgybeli sok szép, elemés vizsgálatok mellett is – melyek között szigorúság, fény és mélység-

14 Angliában I. Newton és Németországban G. W. Leibniz.

re nézve kétségen kívül az első helyet érdemlik a Tentamen szerzőjének közvetlenül az említett *Appendix* előtti vizsgálatai – mind nem tétetett, legalább nyilvánosan, a jelen tárgyban csaknem semmi lépés, s hogy még az egyébiránt derék Ettingshausen is a már kész *Appendix* becsét sem volt képes fölismerni: ily körülmények között tán kevéssé lehet valószínűnek állítani azt, hogy két, sőt három ember egymástól oly messze és egymásról nem tudva csaknem ugyanegy időben, s bár külön utakon a dolgot egyszerre csaknem egészen bevégezze.

Melyeket megfontolva, nem tartom alaptalannak azon gyanút – bár nem örömet teszem e nem is közhírré teendő magánnyilatkozatot –, hogy Littrow, mint a kazáni univerzitás tiszteletbeli tagja, vagy éppen hajdan odavaló matematika professzor, Lobatsewsky könnyen lehetett levelezésben vagy közlekedésben, s ennek megküldte a Tentament, melyet atyám Ettingshausennek megküldött Bécsbe, és Lobatsewsky mint tagadhatatlanul különös szépelméjű ember, annak célját és becsét fölfogva, más úton is megkísérelte a cél elérését. Még valószínűbbnek látszik, hogy az anélkül is oly tömérdek kinccsel bíró Kolosszus Gauss, nem szívlelhetvén azt, hogy ebben is valaki megelőzze, s ennek már elejét csakugyan nem vehetvén, éppen *maga* dolgozta ki az egész munkát és adta ki Lobatsewsky neve alatt.”

De elérkezve a *Geometriai vizsgálatok* már említett 35. cikkelyéhez, a következő módon vélekedik:

„Mint az *Appendix*-nek a 29. § kételyen kívül egyik legsarkalatosabb része, úgy Lobatsewskynél is itt kezdődik leglényegesebb eredetisége vagy eltérése az *Appendix*-től. És valóban meg kell adni: hogy munkája innen hatalmas teremthő lángelmét áruel; és azon út és mód, melyet követ és azon eredmény, melyre vezetettik, őt kételyen kívül könnyen egyszerre a legelső rangú matematikusok közé helyezi.

Főeszméje remek. Okos tapintattal, jó rejtkezszögben keresi és találja az igazságot. Bár sok részben hosszasan bonyolítva bajlódik, s csakugyan meglehetősen távol marad azon tökélytől, mely kívánható, s melyet el is értem: mindamellett műve valóságos mesterműnek elismerendő.”

Az egyik kéziratában a következő sorok olvashatók:

„Én örömet megosztom a találói érdemet. Bár minden orosz és más államtanácsnok hasonló szeretettel bírna a tiszta mathesis, s tehát – mert az természetes és szükséges következmény – az erkölcsi igazsághoz is.”

Tehát önzetlen örömmel állapítja meg, hogy még vannak olyan kortársai, akik a tiszta igazságért és a matematikáért lelkesednek. Igazságszerető egyenes jelleméből fakad ez az öröm, amelyből mindig hiányzott az irigység. Ő sohasem neheztelt másokra, ha sikereket értek el, sőt becsülte azokat, sohasem követelt mások eredményéből őt meg nem illető részesedést; de az mindig bántotta és haragját fellobbantotta, ha az övét nem ismerték el, vagy jogtalanul akarták tőle elsajátítani. Egyenes jelleme nemcsak szavakban, hanem viselkedésében is megnyilvánul.

Lobacsevszkij művének értékein kívül hibáira is rámutat. Ezek nagy részével Bolyai és Lobacsevszkij műveinek kommentátorai is egyetértenek. A legsúlyosabb és egyben a legerősebb hangú bírálattal, amely a *Geometriai vizsgálatok* 27. cikkelyére vonatkozik, azonban nem. Bolyai itt nyomtatékosan állítja, hogy Lobacsevszkij ebben „szarvashibát” követett el. De már maga Paul Stäckel azt állítja, hogy bírálata alaptalan. Ehhez a véleményhez később az *Appendix* és az *Észrevételek* orosz nyelvű fordítója, V. F. Kagan azonnal csatlakozik. Mivel mindketten matematikai szaktekintélyek, így az az általános vélemény alakult ki, hogy Bolyai itt alaptalanul és rosszindulatúan bírál. Stäckel szerint: „János túllőtt a célon, és az az állítása, hogy »itt Lobacsevszkij szarvashibába esik« nem jogosult.” Miután leközi Bolyai kifogásait és bírálatait a róla írt monográfiájában, felteszi a kérdést: „Mit felelt volna Lobacsevszkij e fejtegetésekre? Hogy az igazságosság kötelességének eleget tegyünk, próbáljuk őt megvédeni!” Ennek érdekében Stäckel Lobacsevszkij más műveiből idéz e témára vonatkozó részeket, melyekbe saját szakmai érveit is beleszővi. Mindezt azért, hogy bebizonyítsa: Lobacsevszkij nem hibázott.

V. F. Kagan Paul Stäckel véleményéhez csatlakozva egy terjedelmesebb magyarázatot fűz ehhez a kérdéshez. Fejtegetéseinek végén a következőket írja:

„Bolyai nyilván észrevette ezt a dolgot [mármint, hogy a 27. cikkelyben a lapszög mértékét kifejező képletben egy bizonyos $\frac{1}{2}$ szorzótényező szerepel-e vagy nem], azonban figyelembe véve az ő ingerült állapotát, valamint Lobacsevszkijnek kevésbé precíz meghatározásait, alkalmat ad Jánosnak, hogy Lobacsevszkijt súlyos hibákkal vádolja. A valóságban nem létezik semmiféle hiba; csak hiányokról van szó, amelyeket – amint Stäckel is kimutatta – Lobacsevszkij más műveiben kiegészített.”

Sajnos, az a kijelentés, hogy Bolyai idegbeteg, másoknál is előfordul. Ez az a gyors és egyszerű érv, amellyel rosszindulatúan egy mondatban el lehet intézni mindazokat a meglátásait és cselekedeteit, amelyekkel valaki nem óhajt egyetérteni. Azt, hogy Bolyai nem úgy viszonyult környezetéhez, ahogyan azt egyesek szerették volna, azért nem ő, hanem az akkori társadalmi körülményei voltak hibásak. S amint Alexits György is ki-

hangsúlyozta, olyan műveket, mint a *Raumlehre*, amelyet Bolyai élete alkonyán írt, zavarodott elmével nem lehet megalkotni.

Világos, hogy Bolyai János tárgyilagos megítélésében a Bolyai-kutatás ezekre az addig meglévő megállapításokra és értékelésekre támaszkodhatott, mely ráutaltság még kihangsúlyozottabbá válik, ha az illető kutató nem matematikus szakember. Eklatáns példaként jut kifejezésre ez az állapot a Bolyaiak kitűnő ismerőjénél, Benkő Samunál, aki az 1968-ban megjelent *Bolyai János vallomásai* című könyvében a közhiedelemmel összhangban az alábbiakról számolhat be:

„S ahogy [Bolyai] olvasni kezdi a művet [mármint Lobacsevszkij *Geometriai vizsgálatok* című munkáját], úgy hesseget el magától minden korábbi gyanakvást, s már nem erkölcsi vétségen, hanem tudományos hibán akarja rajtakapni a vetélytársat. Sorra vizsgálja a *Geometrische Untersuchungen* paragrafusait, és melléjük állítja az *Appendix* gondolatmenetét. Igyekszik mindenbe belekötni, de mint a tudománytörténet kiderítette, helyes bíráló megjegyzései mellett sokszor túllő a célon és igazságtalanul támad. Így például nem volt igaza, amikor azt állította, hogy a 27. cikkelyben a gömbháromszög oldalait? -vel hasonlítva össze »Lobacsevszkij szarvashibába esik«.

Hogy a *Geometriai vizsgálatok* 27. cikkelyével még sincs minden rendben, két dolog is sugallja. Az egyik Bolyai János rendkívüli éleslátása és egyenes jelleme. Ez valahogy kizárja azt, hogy alaptalanul ilyen kemény bírálatot mondjon. A másik pedig a V. F. Kagan hosszas fejtegetéseiben rejtőző kétértelműségek, mint például az, hogy a lapszöveget mérhetjük így is, de mérhetjük úgy is. Emiatt például Lobacsevszkij szóban forgó művének 1946-ban Moszkvában megjelent orosz nyelvű kiadásánál a kiadók – V. F. Kagan vezetésével – a 27. cikkelyhez kénytelenek magyarázatot is mellékelni.

Végigolvasva Lobacsevszkij művét és különös figyelemmel a 27. cikkelyt, újból átnézve Bolyai János bírálatát és érveit, Paul Stäckel és V. F. Kagan megjegyzéseit és magyarázatait, meggyőződhetünk arról, hogy ez a cikkely valóban hibás. Ugyanis Lobacsevszkij a lapszöveget nem a neki megfelelő síkszöggel, és innen eredően *ívmértékkel*, hanem hibásan *gömbfelületmértékkel* méri. Ez a követelmény abból a topológiai jellegű tulajdonságból adódik, hogy mind az egy pontból kiinduló síkbeli félegyenesek, mind a térben egy adott egyenes által határolt félsíkok halmaza a körrel homeomorf alakzatok. Lobacsevszkij hibás mérési eljárásából az következik, amit a 27. cikkelyben is leír, hogy *ugyanannak a gömbnek mind a teljes felszíne, mind a főköreinek hossza 2π !* Ilyen gömb – bárhol is vesszük – nem létezik, mivel ez eleve ellentmond a hossz- és területegységek konvencionális kapcsolatának. Számomra rejtély marad, ho-

gyan nem vette észre ezt annak idején a magas matematikai műveltséggel rendelkező Paul Stäckel? V. F. Kagant viszont valahogy megértem, neki a Paul Stäckel már említett megállapítása után az orosz Lobacsevszkijről az akkori Szovjetunióban nem maradt más hátra, mint azonosulni Stäckel véleményével. Ami a hiba nagyságát illeti, Bolyai kifejezésével is egyet kell értenünk, mivel akárhogy is vesszük, ez „szarvashiba”. Természetesen itt távolról sincs szó Lobacsevszkij kitűnő érdemeinek az alábecsüléséről, hanem – Paul Stäckel kifejezését használva – „az igazságosság kötelességének tettünk eleget” és úgy gondoljuk, hogy emberileg ez mindig így helyes.

4. A nemeuklideszi geometriák térhódítása

A világegyetem egy olyan gömb, amelynek bárhol tekinthető a középpontja, a felszíne azonban sehol sem.

B. Pascal

4.1. Riemann-terek

A minket körülvevő tér szerkezetét hosszú időn át úgy képzelték el, ahogyan azt Euklidész az *Elemek*-ben kifejtette. Az „abszolút tér” koncepciójára támaszkodó Isaac Newton (1643–1727) klasszikus mechanikájának geometriai alapja az euklideszi mértan. A 20. századig a fizikai és csillagászati kutatások szintén az euklideszi térfelfogással számoltak. A 19. századig pedig, a legtöbb helyen, szinte változatlanul, úgy tanították a geometriát, ahogy az *Elemek*-ben le van írva. Ez nagyrészt a mű magas fokú didaktikai értékének is tulajdonítható. Immanuel Kant (1724–1804) apriorisztikus felfogása a térről filozófiai vonalon erősítette meg az euklideszi térfelfogást, melynek hatása a matematikai kutatásokban is érezhető volt. A nyilvánosság előtt Gauss élete végéig hallgatott új geometriai eszméiről, mivel a társadalmat még nem tartotta elég érettnek ezek befogadására.

Bolyai János felfedezésének értéke nem csak abban áll, hogy egy nagyon régi problémát tisztázott. Remekműve alapjaiban rengetett meg egy több mint kétezer éve szilárdan, magabiztosan és mereven álló térfelfogást. Ezzel új fejezet bontakozott ki a matematikában: a *modern térelmélet*. Az ezzel kapcsolatos kutatások megteremtették azt a fejlett geometriai szemléletet, amely nemcsak a matematikai, hanem a fizikai, csillagászati és más tudományágak keretében végzett vizsgálatokat is előmozdította. Alapot nyert Bolyai János önmagáról írt metaforikus állítása: „semiből egy új, más világot teremtettem”.

A Bolyai és Lobacsevszkij által felfedezett nemeuklideszi geometria más irányból történő, igen jelentős továbbfejlesztését nemsokára Bernhard Riemann (1826–1866) híres dolgozatában találjuk meg, aki részben Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curvas* című felületelméleti művéből is meríti kiinduló gondolatait. De Gauss-szal ellentétben ő már nem tételezte fel az általa általánosított n dimenziós terek „belső geometriájának” kidolgozásánál ezek magasabb dimenziójú térbe való beágyazását. Riemann nagyjelentőségű munkájával kapcsolatban idézünk néhány sort George Vrănceanu tanulmányából, melyet Bolyai János születésének 150. évfordulója alkalmából írt:

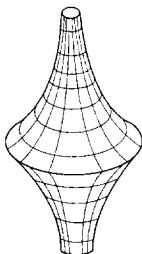
„Abban az eszméáramlatban, amely az első nemeuklideszi geometriának Bolyai és Lobacsevszkij általi megalkotásával indult meg, alapvető jelentőségű Riemann-nak *A geometria alapjául szolgáló hipotézisekről* című munkája. Riemann ezt a dolgozatot 1854. június 10-én olvasta fel docensi próbaelőadásként a göttingai egyetemen. [...] Az előadásnak nagy sikere volt, magát a 77 éves Gausst is fellelkesítette, aki a kari tanács előtt nagyon melegen emlékezett meg a kiváló dolgozat érdemeiről, ami nála ritka dolog volt.”

Az akkori visszaemlékezések szerint állítólag az akkor már nagyon beteg Gauss volt az egyedüli a hallgatóságból, aki egészében meg tudta érteni Riemann előadását. Az alig 19 oldalas dolgozatot, amelyben a későbbi matematikusok által terebélyessé fejlesztett *Riemann-terek* alapjait fektette le, csak szerzője halála után, 1868-ban publikálta Richard Dedekind (1831–1916). Ebben Riemann a teret, tetszőleges n dimenziójú topológiai sokaságnak értelmezi, amelyben a *metrikát* egy másodfokú differenciál alakkal definiálja; éspedig, egy görbe szakasz infinitezimális ds hosszúsága a következő:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$$

ahol g_{ij} a tér metrikus alaptenzorának komponensei, melyek az x^1, x^2, \dots, x^n változók függvényei. Itt azonnal felismerjük Gauss már említett művéből a felületi görbék ds ívelemére vonatkozó kifejezését, mint kétdimenziós térbeli sajátos esetet.

Ezek az úgynevezett Riemann-terek a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus tér nagyfokú általánosításai. Ennek ismerete tette később lehetővé A. Einstein számára azt a térszerkezeti leírást, amelynek alapján ki tudta dolgozni az *általános relativitáselméletet*. Riemann munkája révén az is tisztázódott, hogy az euklideszi és a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometrián kívül létezik még egy harmadik típusú mértan is, amelyet manapság *Riemann-féle elliptikus geometriának* nevezünk.



16. ábra

Adolf Minding (1806–1885) olyan felületeket keresve, melyeknek a Gauss-féle görbülete állandó, 1840-ben olyan felületre bukkant, melyet később Eugenio Beltrami *pszeudoszférának* nevezett el. Minding ezt a felületet, melynek geodetikus vonalait is tanulmányozta, a *traktrix*, vagy más néven *vontatási görbe* aszimptotájára körüli forgatásából kapta (16. ábra), és kimutatta, hogy ennek a felületnek a görbülete egy *negatív állandó*. Az a felület viszont, amelynek görbülete egy *pozitív állandó*, nem más, mint a *gömb*, vagy más néven *szféra*. Ebből a társításból nevezte E. Beltrami a Minding által felfedezett felületet *pszeudoszférának*, amit mi akár *pszeudogömbnek* vagy *álgömbnek* is mondhatunk. Amint már említettük, a pszeudoszféra számunkra azért fontos, mert 1868-ban Beltrami kimutatta, hogy ezen a felületen, melyen az egyenesek szerepét a *geodetikus vonalak* (azok a felületi görbék, amelyek mentén két felületi pont közötti távolság a legkisebb) töltik be, megvalósul a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria. Beltraminak ez az eredménye annak idején rendkívül jelentős volt, mert hatalmas lépést jelentett a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria létjogosultságának igazolása felé.

A pozitív állandó görbülettel rendelkező felületen – a gömbön – megvalósuló mértan a Riemann-féle elliptikus geometria, amelyen *pontoknak* az átmérősen ellentett pontpárokat, *egyeneseknek* pedig a gömbfelület legnagyobb gömbi köreit tekintjük (melyekről kimutatható, hogy a gömb geodetikus vonalai).

A differenciálgeometriában egy felület azon pontjait, amelyekben a felület görbülete (Gauss-féle görbülete) negatív, *hiperbolikus*, amelyekben zéró, *parabolikus*, és amelyekben pozitív, *elliptikus* pontoknak nevezzük. Ezzel összhangban honosodott meg idővel a három különböző típusú geometria elnevezése is: A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria a hiperbolikus, a Riemann-féle geometria az elliptikus, míg a mindenhol zéró görbületű felületen (az általunk közismert síkon) érvényes euklideszi geometria a parabolikus geometria megnevezést viseli.

A tér metrikus alapformája (lásd a képletet a 118. oldalon) pontosan

meghatározza a neki megfelelő geometria típusát, amely a g_{ij} komponensektől függően a tér különböző pontjaiban változhat. Ugyanis akárhány dimenziójú tér esetében a g_{ij} metrikus alaptenzor komponenseinek függvényében kifejezhető a tér görbületét karakterizáló *Riemann-féle görbületi tenzor*. Ha e tenzor összes komponensei mindenhol nullák, akkor a tér euklideszi. Tehát a Riemann-terek elméletének kidolgozása valóban a Bolyai és Lobacsevszkij által megalkotott nemeuklideszi geometria további nagyfokú általánosítását képezi.

Roberto Bonola (1874–1911) olasz matematikus összeállította mindazon tudományos munkák címjegyzékét, amelyek 1902-ig – azaz Bolyai János születésének centenáriumaig – jelentek meg az új, nemeuklideszi geometriával kapcsolatban. Az említett időpontig Bonolának 623 ilyen témájú tudományos dolgozatot, valamint 292 történelmi és kritikai munkát sikerült feltüntetnie, ami ékesen bizonyítja az új geometria óriási térhódítását. Ha valaki folytatná Bonola gyűjtőmunkáját, az azóta eltelt újabb száz évre is, roppant nagy anyagot tudna feltüntetni, ha a teljesség igényét szem előtt tartva egyáltalán képes lenne erre. Mindezt csak azért említettük, hogy ezzel is érzékeltesük a nemeuklideszi geometriák felfedezésének jelentőségét, amit az iránta tanúsított óriási érdeklődés is jelez. Ami a fejlődés jövőjét illeti, az beláthatatlan. A *Finsler-geometria* kidolgozásával már a Riemann-terek is nagyfokú általánosítást nyertek. Ennek alapjait P. Finsler (1894–1970) svájci matematikus fektette le.

Amint Toró Tibor egyik tanulmányában kifejtette [37], a nemeuklideszi geometriák komoly alkalmazást nyertek a modern fizikában, a relativisztikus kozmológiában valamint az asztrofizikában is. Ezen kívül hatással volt a matematikai logika kialakulására, valamint a filozófiai eszmék további fejlődésére.

4.2. Euklideszi vagy nemeuklideszi térben élünk?

Vegyük újból szemügyre a hiperbolikus geometria alapösszefüggését, amelyet Bolyai János az *Appendix 29*. §-ban állapít meg (lásd 14. ábra):

$$\operatorname{ctg} \frac{u}{2} = e^{\frac{x}{k}}$$

Mivel: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{k}} = e^0 = 1$, mely határesetben $\operatorname{ctg} \frac{u}{2} = 1$, vagyis $u = 90^\circ$.

Tehát ebből azonnal látható, hogy adott véges pozitív k érték esetén, minél kisebb az x , az u párhuzamossági szög, annál jobban megközelíti a derékszög értékét, ami az euklideszi geometria jellemzője. Ebből arra tudunk következtetni, hogy a tér nemeuklideszi jellege a méretek nagyfokú növekedésével mind kihangsúlyozottabbá válik, míg a kisméretű környezetekben az euklideszi geometriával kell számolnunk. Ez utóbbit manapság még így is mondjuk: a tér rendkívül kis környezeteiben – elfogadható pontossággal – ez euklideszi geometria tételei érvényesek.

De u -nak a derékszög értékét kapjuk akkor is, ha a k görbületi paraméterérték a végtelen felé tart, ami egyenértékű azzal, hogy maga a tér görbülete fokozatosan megszűnik, azaz zéró lesz. Említettük már, hogy az olyan felületeken, amelyeknek görbülete nullával egyenlő, az euklideszi geometria érvényes. A nemeuklideszi terek egyik alapvető jellemzője tehát a nem nulla értékű görbület. Ez a kettőnél több dimenziójú terekre is érvényes.

Bolyai János nagyon sokat töprengett azon, hogy a tér, amelyben élünk, vagyis maga a világegyetem (univerzum) euklideszi-e vagy nem? Ezért vetette fel ő is a csillagászati megfigyelések és mérések jelentőségét. Érdekes például Bolyai Farkas azon ötlete is, hogy a tér nemeuklideszi jellegére a bolygók mozgására mutató eltérésekből lehetne következtetni.

Komoly haladást jelentett e kérdés tanulmányozásában a relativitáselmélet kidolgozása. Einstein kimutatta, hogy a vonzó tömegek „elgörbítik” a tér-idő négydimenziós világát, amelyben a testek mozognak. Ez az elgörbült tér-idő – a gravitációs tér – határozza meg a tömegek mozgását, pályáját, sebességét. A gravitáció Einstein-féle geometriai elméletében „a gravitációs erő” eltűnik. A bolygók a tehetetlenség törvényének megfelelően mozognak, vagyis a Nap tömege által meghatározott nemeuklideszi (Riemann-) térben geodetikusokat írnak le. A gravitáció átminősítése fizikai jelenségből tisztán geometriai jelenséggé csodálatos teljesítmény volt. S ennek a csodálatos teljesítménynek – bármennyire is meglepő – az előfutára Bolyai János volt. Itt nem csak a nemeuklideszi geometria megalkotására gondolunk. Ugyanis a kéziratai között egy olyan szövegrészre bukkantak, amely teljes mértékben alátámasztja kijelentésünket. Azóta már megszüntetett magyar tannyelvű kolozsvári Bolyai Tudományegyetem gondozásában, Bolyai János születésének 150. évfordulója alkalmából egy emlékkötet jelent meg [12], melyben Benkő Samu, Szarvadi Tibor és Tordai Zádor szemelvényeket közöltek János addig még nem publikált kézirati hagyatékából. Ezek között található egy olyan szövegrész (2. kép), melynek kiemelkedő jelentőségére Toró Tibor hívta fel a figyelmet:

*az nehézkes törvénye is szoros öszveköttetésben folytatásban
tettszik (mutatkozik) az Űr természetével, valójával (alkatával),
mílségével; (gondolom) az egész természet (világ)*

2. kép

„Az nehézkes törvénye is szoros öszveköttetésben folytatásban tettszik (mutatkozik) az Űr természetével, valójával (alkatával), mílségével; s (gondolom) az egész természet (világ) állapotával”.

Ez végeredményben annak felismerése, hogy a fizikai gravitációs erő-tér és a tér geometriai szerkezete között szoros összefüggésnek kell lennie. Ezt a csodálatos meglátást több mint fél évszázaddal később, 1916-ban az általános relativitáselmélet kidolgozásakor A. Einstein konkrétan ki is mutatta, mely elméletének híres alapösszefüggésében jut kifejezésre:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik},$$

ahol g_{ik} a geometriai tér metrikus alaptenzora, mely komponensek a tömegek révén kreált tér által meghatározott görbült tér-idő szerkezetét adják, R_{ik} a tér Einstein-féle kontrahált görbületi tenzorának komponensei, R az invariáns görbületi skalár, κ az egyetemes gravitációs állandót is magába foglaló arányossági tényező, T_{ik} pedig az energia-impulzus-tömeg tenzor (vagy rövidebben anyagtenzor) komponensei. Ha jól megfigyeljük, az egyenlet bal oldalán a tér geometriai szerkezetét leíró mennyiségek, a jobb oldalán pedig a fizikai gravitációs tér tulajdonságait kifejező mennyiségek szerepelnek. Ennek alapján – Toró Tibor megfogalmazásában – „Bolyai János joggal tekinthető a 20. századi fizika egyik legszebb és legalapvetőbb fizikai alapeszméje: a fizika geometrizálása gondolatának legelső megfogalmazójaként, a fizika geometrizálása előfutáraként”.

Einstein egyik munkatársa, L. Infeld a következőket írja:

„A gravitációs tér geometriai térként való felfogása a fizika történetében valaha is bekövetkezett egyik legnagyobb és legforradalmibb eredmény. Egy világ tömegek nélkül, elektronok és elektromágneses tér nélkül üres világ, hamis elképzelés. De ha megjelennek a tömegek, töltött részecskék és az elektromágneses tér, akkor megjelenik a gravitációs tér is. Ha megjelenik a gravitációs tér, akkor meggömbül a világunk. Geometriája a Riemann-féle geometria és nem az euklideszi.”

Az univerzum nemeuklideszi térszerkezetének valóságát erősíti meg a három relativisztikus jelenségnek az igazolása, ami az általános relativitáselmélet elfogadását is eredményezte. Ezek az euklideszi geometria talpzatán álló newtoni elméletből egyáltalán nem következnek, tehát in-

nen kiindulva magyarázatuk sem lehetséges. Az alábbi három jelenségről van szó:

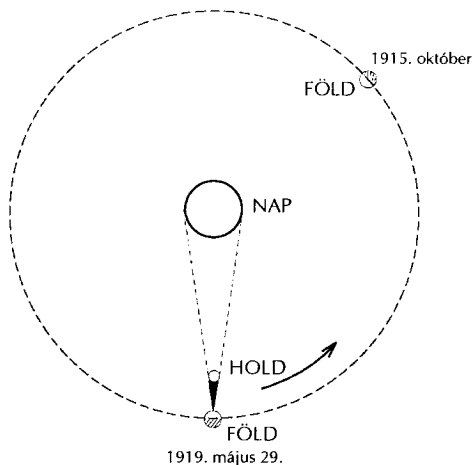
1. A fénysugár pályájának elgörbülése erős gravitációs mezőben;
2. A bolygók perihélium-mozgása;
3. A gravitációs vöröseltolódás.

A bolygók perihélium-mozgását már a relativitáselmélet felfedezése előtt észlelték, de nem tudták megmagyarázni. A fénysugár pályájának elgörbülését egy erős gravitációs térben viszont Einstein jóslta meg elméletének végleges kidolgozása előtt. Mivel az utóbbi jelenség a világ-egyetem nemeuklideszi jellegének egyik érdekes bizonyítéka, így erre kissé részletesebben kitérünk.

Einsteinnek *A gravitáció befolyása a fény terjedésére* című cikke 1911-ben jelent meg az *Annalen der Physik*-ben, melyben utalást találunk arra, hogy a Nap erős gravitációs tere elhajlítja a fénysugarakat. „Igen kíváncsú lenne – írja Einstein –, ha a csillagászok mihamarabb felfigyelnének erre a problémára, még ha a dolgozatban előadottak kellően meg nem alapozottnak, vagy éppenséggel vakmerőknek tűnnek is. Függetlenül minden elmélettől, tisztáznunk kell, vajon jelen adottságaink mellett ki tudunk-e mutatni olyan befolyást, amit a gravitációs tér gyakorol a fény terjedésére.”

A geometriai optika alaptétele a fény egyenes vonalú terjedése. Erre utal az árnyék keletkezése, valamint több egyszerű kísérlet szintén ezt mutatja. Így szerepel ez Newton műveiben is. De nézzünk kissé jobban a dolgok mélyére. *Fermat elve* szerint a fénysugár azon a pályán terjed, amelyen a legrövidebb idő alatt teszi meg az utat. Erre az elvre támaszkodva igazolható például a fénytörés törvénye. Tudott dolog, hogy a fény homogén közegben állandó sebességgel terjed, tehát ebben az esetben – Fermat elvéből adódóan – két pont közötti legrövidebb utat követi, mely út, amint már említettük, a *geodetikus vonalak* mentén valósul meg. Az euklideszi tér geodetikus vonalai az egyenesek. Igen ám, de ha a tér nem euklideszi, akkor ennek geodetikus vonalai már nem az egyenesek. Fordítva is igaz: ha egy tér geodetikus vonalai nem mind egyenesek, akkor az nemeuklideszi tér.

Az általános relativitáselmélet kidolgozása után Einstein azt is kimutatta, hogy a Nap mellett elhaladó fénysugár pályájának elgörbülése 1,7 ívmásodperc (1 fok = 3600 ívmásodperc). Ez rendkívül kis érték gyakorlati kimutatása nagyon pontos méréseket igényel. Einstein ezt az elhajlási értéket úgy kapta, hogy a Nap által előidézett erős gravitációs térszerkezetnek megfelelő Riemann-metrikát felhasználva geometriai számítássá redukálta a jelenség tanulmányozását. Az így kapott indefinit Riemann-metrikában vannak olyan görbék, amelyeknek hossza nulla. Ezeket „null-



17. ábra

geodetikuskok"-nak nevezzük. A fénysugarak az ilyen nullgeodetikus görbék mentén terjednek, melyekre a $ds^2 = 0$ feltétel érvényes. Ismerve a tér Riemann-metrikáját, az ívelemre kiszabott előbbi feltételből megkeressük azokat a görbéket, amelyek teljesítik ezt, vagyis a nullgeodetikus görbéket, melyekből azután kiszámítható a Nap közelében elhaladó fénysugár elhajlása. Igen ám, de hogyan mutatható ki ez kísérletileg is? Ugyanis a Nap mellett elhaladó, valamely csillagból érkező fénysugár fényét a Földünket körülvevő légkör és a Nap óriási fényereje miatt nem vehetjük észre és nem rögzíthetjük fényképfelvételeken. A kísérleti úton való kimutatásra egyedül a teljes napfogyatkozás adott lehetőséget. Ez azonban nem gyakori jelenség, és csak a Föld felületének igen keskeny sávján észlelhető. A napfogyatkozás létrejöttének feltétele az, hogy a Hold a Föld és a Nap közé kerüljön úgy, hogy a Hold árnyékkúpja érintse a Földet (17. ábra). A két égitest látszólagos nagysága közötti igen csekély különbség miatt a teljes napfogyatkozás (amikor a Hold teljesen eltakarja a Napot) csak néhány percig tart, mivel a Hold árnyékkúpjának csak a „hegye” érinti esetleg a Föld felületét. Einstein említett állítása ellentétben állt a newtoni felfogással. Érthető, hogy ennek tisztázása lázba hozta a kor tudósait. A csillagászok 1919. május 29-re jeleztek egy teljes napfogyatkozást. Közvetlenül az első világháború befejezése után a kérdés eldöntésében közelebből érdekeltek közül csak az angoloknak állt módjában, hogy tudományos expedíciót küldjenek arra a helyre, ahonnan a teljes napfogyatkozás látható. Ugyanis a német tudományos társaságok, részben a blokádnak, részben az anyagi eszközeik elégtelensége miatt erre alig-ha lettek volna képesek. Az angolok, biztonságból két expedíciót szer-

veztek, melyek közül az egyik a braziliai Sobral nevű helységbe, a másik pedig az Afrika nyugati partjaihoz közeli Guineai-öbölbeli Príncipe szigetére utazott erre az alkalomra. Az expedícióban neves angol csillagászok és fizikusok vettek részt, mint például Eddington, Crommelin, Davidson. Mindkét helyen a napfogyatkozás beálltának alig néhány perce alatt fényképfelvételeket készítettek az égbolt azon részéről, ahol az eltakart Nap volt. Még azon év októberében, amikor a Föld a Nap körüli keringése folytán már olyan helyzetbe jutott, hogy éjszaka láthatták az éggömbön pontosan azt a részt, amelyről a május 29-i napfogyatkozás alkalmával a felvételeket készítették, úgyelve arra, hogy még a horizont feletti magasságok is ugyanazok legyenek, újból felvételeket készítettek.

Ezután a két alkalommal készült felvételeket aprólékos figyelmességgel összehasonlították. Azt vették észre, hogy a napfogyatkozáskor készült felvételeken a későbbi felvételekhez viszonyítva, a csillagok az eltakart napkorong középpontjára nézve koncentrikusan szétfutottak. Meg kell azonban említenünk azt is, hogy az alig 1,7 ívmásodperces elhajlás miatt – amely érték helytállósága csodálatosan beigazolódott – a két alkalommal készített felvételek között nagyon kicsi az eltérés, amit csak igen érzékeny mérőműszerek segítségével sikerült kimutatni. A szenzációs hír bejárta a világot. Einstein ismert és ünnepeelt emberré vált. Ezzel gyakorlati igazolást nyert az, hogy az egyenlőtlen és különböző sűrűségű anyageloszlás, az óriási tömegű égitestek által létrehozott gravitációs mező „görbültté” teszi a teret, ami a tér nemeuklideszi jellegére utal. A görbület nem konstans, hanem a teret megtöltő anyag tömegeloszlásától függően pontról pontra változhat.

Tehát az expedíciók megfigyelése révén bebizonyosodott, hogy a gravitációs mező valóban hatással van „a tér természetére, valójára, alakára, milyenségére” úgy, ahogyan ezt a megállapítását Bolyai János több mint másfél évszázaddal ezelőtt megfogalmazta és papírra vetette.

És ha már gyakorlati igazolást nyert, hogy az a tér, amelyben élünk, a valóságban egy nemeuklideszi tér, akkor még felmerülhet az a kérdés, hogy milyen típusú? „... sem a megfigyelések, sem az elméleti vizsgálódások – írja Dobó Andor – nem tudták eldönteni, hogy negatív görbülettel nyílt-e vagy pozitív görbülettel zárt-e az univerzum [...]. A Gauss-görbületre kapott kifejezés diszkutálása azt mutatta, ha valaha is sikerül tisztázni, hogy a makrovilágot jó közelítéssel a pozitív görbületű (elliptikus) Riemann-geometria jellemzi, akkor – folytonos átmenettel – a *mikrovilágot* a negatív görbületű Bolyai-geometria és fordítva.”

5. Prioritási kérdések

Minduntalan azt vettem észre, hogy az emberek pretenciói fordítottan arányosak az érdemeikkel; ez az én erkölcsi axiómám.

J. L. Lagrange

5.1. A három felfedező

A tudományok fejlődési menetében gyakran fordul elő, hogy ugyanahhoz a felfedezéshez több tudós egy időben és egymástól függetlenül jut el. Ilyen volt például a differenciál- és integrálszámításnak a német W. G. Leibniz és az angol I. Newton, vagy a Neptunusz bolygónak az angol J. C. Adams (1819–1892) és a francia U. Le Verrier (1811–1877) általi felfedezése. E véletlennek tűnő jelenségre van magyarázat. Egyre gyarapodó tudományos ismereteink egy olyan szintre érnek, amikor bizonyos dolgok felfedezése időszerűvé válik, vagy ahogy még mondani szokták: „a probléma (és megoldása) a levegőben lóg”. Bolyai Farkas találóan jegyezte meg ezzel kapcsolatban fiának:

„Abban is van valami igaz, hogy bizonyos dolgoknak mintegy megvan a maguk korszaka, amikor különböző helyeken egy időben fedeztetnek fel, amint tavaszkor az ibolyák mindenütt kikelnek, ahol csak süt a Nap”.

Bolyai Farkas ezt annak idején a párhuzamosok problémájának megoldási lehetőségével kapcsolatban említette. Látnoki szavai később beigazolódtak.

Az eddigiekben bőven értekeztünk arról, hogy a párhuzamosok prob-

lémájával több mint két évezreden át sikertelenül foglalkoztak a különböző korok matematikusai. A 18. században, valamint az azt követő évszázad elején az ezzel foglalkozó próbálkozások száma hirtelen megnövekedett. Égető problémává vált a geometria alapjainak tisztázása. Végül a kérdés megoldása az euklideszitől különböző új geometria megjelenését vonta maga után.

Sok matematikatörténeti munkában azt olvashatjuk, hogy a nemeuklideszi geometria megteremtői a német Carl Friedrich Gauss, az orosz Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij és a magyar Bolyai János. Több könyv már leszűkíti a felsorolást és valódi megalkotóiként Bolyai Jánost és N. Lobacsevszkijt említi. Még tovább menve – főleg az orosz és volt szovjet eredetű írások –, csak Lobacsevszkijt tüntetik fel az új geometria felfedezőjeként. E változatok megjelenését részben befolyásolta az is, hogy egy nemzet vagy ország mennyit tett kitűnő tudósa elismertetése érdekében.

Az emberi jóézés azonban megköveteli a valódi tények igazságos megítélését, az életük folyamán meg nem értett és mellőzött szerzők verejtékes munkáinak utólagos elismerését és nacionalista elfogultságtól mentes közreadását. Ezeknek a szempontoknak a tiszteletben tartásával próbáljuk megvilágítani a reális tényeket és az ebből fakadó következtetéseket. Ennek érdekében csakis a konkrét dokumentumokra szabad támaszkodnunk, melyeket objektív vizsgálatnak kell alávetnünk.

Az első nemeuklideszi geometriák viszonylag késői megalkotását általában két okkal magyázzák a matematikai szakirodalomban. Az egyik az euklideszi geometriának a gyakorlattal való jó megegyezése, a másik pedig az akkoriban mélyen gyökerező, Kant-féle filozófiából eredő felfogás, mely fennen hirdeti, hogy a Newton által definiált „abszolút” tér euklideszi szerkezete gondolati szükségszerűség, velünk született „a priori” kategória. A 19. század elején azonban már több matematikus tette túl magát a Kant-féle filozófia eme korlátjain, és vallotta azt, hogy a valódi tér szerkezetének kérdésében a végleges választ a sokkal mélyebb elméleti vizsgálódás és a mind pontosabb gyakorlati mérések adhatják meg. Ilyen álláspontot foglalt el – többek között – F. K. Schweikart (1780–1859), aki néhány följegyzésében egy „asztrál-geometria” lehetőségét vázolta fel, vagy Bolyai Farkas, aki a tér milyenségének kérdésében kihangsúlyozta a csillagászati megfigyelések és mérések jelentőségét. Gauss is ilyen felfogást vallott, ugyanis hagyatékában több helyen található az a megjegyzése, hogy a tér nem *a priori* kategória, és nem ért egyet a Kant-féle térfogalommal.

5.2. Gauss és a nemeuklideszi geometria

Gaussnak a nemeuklideszi geometriára vonatkozó eszméit és azok eredetét két forrásanyagból tudhatjuk meg: az egyik a tudóstársaihoz írt levelei, a másik pedig a hagyatékában talált néhány kézírata és a fiatalkora óta szorgalmasan vezetett *Napló*-ja. Az említett témánk szempontjából az előbbiek bírnak nagyobb jelentőséggel, mivel az utóbbiak főleg a Bolyai és Lobacsevszkij műveinek elolvasása utáni megjegyzéseit és gondolatait foglalják magukban, *Napló*-jában pedig alig találunk erre vonatkozó utalásokat. Gauss ugyanis a nemeuklideszi geometriára vonatkozó eredményeiről egyetlen munkát sem közölt. Több általa írt levélben olvashatjuk azt a megjegyzést, hogy a nemeuklideszi geometria kidolgozásától és közzétételétől az tartja vissza, hogy fél „a böociaiak kiabálásaitól” és „darazsak röpködnének feje körül” ha ezt megtenné. H. Schumacher (1780–1850) csillagász barátjához írt egyik levelében pedig arról panaszkodott, hogy a térről vallott nézetei miatt „sárral dobálták meg”.

Vajon kiktől félt és kik támadták Gauszt? Ezekre a kérdésekre még a rendkívül tárgyilagos és a Gauss geometriai hagyatékát alaposan ismerő Paul Stäckel sem tudott meggyőző választ adni. A kommentárirodalom Gauss talányos szavait a korabeli tudósokra, közelebbről pedig néhány matematikusra és filozófusra vonatkoztatja. Vajon tényleg ők voltak? A kérdés azért jogos, mert több számottevő matematikussal folytatott levelezésében eléggé nyíltan írt a nemeuklideszi geometria jelentőségéről. Az is lehet, hogy néhány középszerű kísérletezővel (mint például M. Metternich, vagy J. Ch. Schwab) az euklideszi párhuzamossági axiómával foglalkozó hibás értekezéseikre írt recenzióért támadt esetleg nézeteltérése, de nagyon nehezen hihető, hogy miattuk meghátrált volna a nemeuklideszi geometria kidolgozásától, ha azt célszerűnek minősíti. Úgy tűnik, hogy Szénássy Barna (1913–1995) a valóságra tapint akkor, amikor azt állítja, hogy Gauss a hannoveri királyság vezetőitől tartott, akiktől tisztes jövedelmet és számos kitüntetést kapott, főként geodéziai munkálataiért, amelyek döntő módon az euklideszi geometriára támaszkodtak – és „ez a talán kisére merésznek tűnő feltételezés jól beillik a Gauss egész élete folyamán megfigyelhető, kenyerét féltő, óvatoskodó, minden kockázatot kerülő magatartásába”. Ismeretes ugyanis, hogy katonai okokból, továbbá megbízható adózási alap megteremtése érdekében 1816-ban Gauss a hannoveri kormánytól az ország pontos föltérképezését kapta feladatul, melyet – kisebb megszakításokkal – 1841-ig végre is hajtott. A méréseket a rá jellemző pontossággal végezte. A térképészeti elkészítéséhez szükséges trianguláció kiindulását három hegycsúcs, a Hohenhagen, a Brocken és az Inselberg képezte. Ezt főleg azért szükséges megemlíteni, mert többen –

minden alap nélkül – egyszerűen azt állítják, hogy Gauss ezeket a méréseket azért végezte, hogy eldöntse: vajon a tér euklideszi vagy nem. Holott éppen az ellenkezője tűnik valószínűbbnek: Gauss éppen a geodéziai megbízatása miatt nem látta jónak a nemeuklideszi geometria kidolgozását és népszerűsítését, mely térképeinek helytállóságát tette volna kérdésessé egyes tájékozatlan személyek számára.

Gauss rendkívül gazdag hagyatékában kb. 25 olyan szövegrészt találunk, amelyek valamilyen módon kapcsolódnak a geometria alapjaihoz, illetve a nemeuklideszi geometria gondolatához. Ezek levélrészleteket a vázlatos följegyzések vagy recenziók összességükben csak néhány oldalt tesznek ki. Sartorius von Waltershausen indoklása szerint Gaussot különösebben nem érdekelt a nemeuklideszi geometriai rendszer kidolgozásának a kérdése. Felix Klein már árnyaltabban úgy fogalmazott, hogy Gauss kedvenc kutatási területei a matematikában a három „A”: az *aritmetika*, az *algebra* és az *analízis*. Mintha e kijelentést támasztaná alá az is, hogy legjelentősebb geometriai vonatkozású műve az 1827-ben megjelent *Disquisitiones generales circa superficies curvas* című differenciálgeometriai értekezése, mellyel a modern felületelméletet alapozta meg, és a téma természeténél fogva az analízis tárgyalásmódján alapszik.

Ami a hagyaték időrendi eligazodását illeti, megbízható adatként csak levelezése és fiatal korában szorgalmasan vezetett naplója szolgál. Ebben 1796. március 30-tól 1814. július 9-ig 146 följegyzés található, melyek címszavakkal vagy eredmények néhány soros leírásával tüntetik fel új matematikai meglátásait. Ezek közül csak a 99. kapcsolódik a geometria alapjaihoz, mely így hangzik: „A geometria alapjaiban kitűnő előrehaladást értünk el. Braunschweig, 1799. szept.”. A legvalószínűbb, hogy ez arra vonatkozik, amit Gauss 1799. december 16-án Bolyai Farkasnak címzett levelében így írt le:

„Ha be lehetne bizonyítani, hogy létezik olyan egyenes vonalú háromszög, amelynek területe nagyobb bármely megadott területnél, akkor abban a helyzetben lennék, hogy az egész geometriát teljes szigorúsággal bebizonyítsam. Ezt valószínűleg a legtöbben axiómának tekintenék; én nem; jól elképzelhető az is, hogy a háromszög három csúcspontjának egymástól való távolságát bármekkora is tételezzük fel, a területe még mindig egy megadott határ alatt (infra) van.”

Kétségtelen, hogy az idézett szövegrész már némi kételyt árul el az euklideszi geometria egyedüli lehetséges voltát illetően. Lényegében itt fogalmazódott meg az a Gaussnak tulajdonított kijelentés, mely ekvivalens az euklideszi párhuzamossági axiómával: *létezik bármilyen nagy területű*

háromszög. Gauss olvasta Lambert munkáit, tehát ezt a Gauss-féle helyettesítő axiómát nagy valószínűséggel Lambert eredményei inspirálták, melyekből valóban nem nehéz erre a konklúzióra jutni.

Gaussnak az idők folyamán a geometria alapproblémáiról kialakult fejlődő véleményéről szintén némi tájékoztatást nyújt a Bolyai Farkasnak 1804. november 25-én írt levele, melyben a hozzáküldött dolgozatával kapcsolatban az alábbiakat írja:

„Dolgozatodat nagy érdeklődéssel meg figyelemmel olvastam át, és igazán gyönyörködtem a valóban alapos elméletedben. De te nem üres dicséretemet várod, amely némileg részrehajlónak látszanék, már azért is, mert a te eszmerendszered sokban hasonlít az enyémhez, amelynek alapján hajdan a gordiuszi csomónak kibontását megkíséreltem és mindeddig hiába próbáltam.

Te csak őszinte, nyílt ítéletemet kívánod. Ez pedig az, hogy a te eljárásod engem nem elégt ki. Megpróbálom, hogy a botrányozás követ, melyet még benne találok (és amely ismét szintén a szirtek ama csoportjához tartozik, amelyeken az én kísérleteim mindeddig hajótörést szenvedtek) oly tisztán, amennyire tőlem telik, megmutassam.

Van ugyan még mindig reményem, hogy ama szirtek valamikor még az én életem vége előtt átjárást engednek. Nekem azonban egyelőre annyi másféle dolgom van, hogy most reá sem gondolhatok, és hidd el nekem, szívből örülnék, ha engem megelőznél és sikerülne neked, hogy legyőzz minden akadályt. Én aztán a legbensőbb örömmel megtennék mindent, hogy a te érdemed – amennyire tőlem telik – érvényesüljön és a kellő világosságba helyezkedjék.”

Erre a levélrészletre a későbbiekben még visszatérünk, de addig is kövesk tovább a Gauss-levelekben található minket érdeklő kijelentéseit.

1817. április 28-án Wilhelm Olbersnek (1758–1840) küldött levelében ezt olvashatjuk:

„Én egyre jobban meg vagyok győződve arról, hogy a mi [euklideszi] geometriánk szükségszerűsége nem bizonyítható.”

Christian Gerlingnek (1788–1864) 1817. március 16-án írt levelében Gauss megemlíti, hogy „a háromszög defektusa arányos a területével”, ami lényegében már konkrétabb kinyilatkoztatása annak, amit Bolyai Farkasnak 1799-ben írt.

Az utólagos kommentátorok sok esetben eltérő módon értelmezték és ítélték meg annak a szövegrésznek a tartalmát valamint helytállóságát,

melyet Gauss 1824. november 8-án F. A. Taurinusnak (1794–1874) küldött levelében olvashatunk:

„Az a feltevés, hogy a három szög összege (a háromszögben) 180° -nál kisebb, egy sajátságos, a mi [euklideszi] geometriánktól tökéletesen különböző, de teljesen logikus geometriához vezet; ezt a geometriát teljesen kielégítően kifejlesztettem [... die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe], s így abban a helyzetben vagyok, hogy bizonyos állandó meghatározásának kivételével, amelyet »a priori« megállapítani lehetetlen, bármely feladatot meg tudok oldani.

Minél nagyobbra választjuk ennek az állandónak az értékét, annál jobban közeledünk az euklideszi geometriához, végtelen értéke esetén pedig a két geometria egybeesik. Ennek a geometriának a kijelentései részben paradoxonnak, sőt képtelennek tűnnek a laikus ember előtt; gondos és nyugodt megfontolás után azonban nyomban arra a következtetésre jutok, hogy semmi lehetlent nem tartalmaznak. Így például egy háromszög három szögét bármilyen kicsivé tehetjük, ha elég nagyok vesszük az oldalait, e mellett a háromszög területe, bármilyen nagyok legyenek is az oldalai, nem haladhat túl, sőt el sem érhet bizonyos meghatározott határértéket. Mindazon törekvésem, hogy ebben a geometriában valamilyen ellentmondást, vagy következetlenséget fedezzek fel, meddő maradt, és az, ami ellentmond értelmünknek, mindössze abban foglalható össze, hogy az esetben, ha ez a geometria érvényes lenne, léteznie kellene a térben egy önmagában meghatározott (ha általunk nem is ismert) lineáris mennyiségnek. Nekem viszont úgy tűnik, hogy a tér valódi lényegéről a metafizikusok semmitmondó bölcselkedései ellenére túlságosan keveset, sőt talán semmit sem tudunk; ezért azt, ami nekünk természetellenesnek tűnik, könnyen *abszolút lehetetlennek* tekintjük. Ha a nemeuklideszi geometria igaz volna, és a fent említett állandó meghatározott arányban állna olyan mennyiségekkel, amelyek a Földön, vagy az égen véghezvitt mérések határain belül fekszenek, akkor ezt »a posteriori« meg lehetne határozni. Én ezért, néha tréfából azt az óhajomat fejeztem ki, hogy bár ne volna igaz az euklideszi geometria, mert akkor lenne »a priori« abszolút mértékünk.”

Gauss határozottan megtiltotta Taurinusnak, hogy ennek a levélnek a tartalmát másokkal is közölje. Itt, ahogyan Szénássy Barna is megjegyzi, az „ezt a geometriát teljesen kielégítően kifejlesztettem” kijelentés támaszt többféle értelmezési lehetőséget, sőt kételyeket is. Mi tartozik és mennyi foglaltatik ebbe a „teljesen kielégítően” kifejezésbe? Ugyanis „Gauss ideartozó, még jóval későbbi följegyzései is – írja Szénássy Barna – inkább a

nemeuklideszi geometriára vonatkozó általános kijelentéseket tartalmaznak, matematikai formulázás nélkül”.

Egyáltalán nem akarjuk Gauss érdemeit kicsinyíteni, de a ránk maradt dokumentumok valóban ezt bizonyítják.

Sok mindent árul még el a F. M. Besselhez 1829. január 27-én írt levelében található mondat:

„hosszú ideig nem fogom tudni kidolgozni az erre vonatkozó [nemeuklideszi geometriai] intenzív vizsgálataimat, hogy azokat közzétegyem, és valószínű, hogy ez nem is fog megtörténni az életem folyamán, mert félek a böociaiak kiabálásaitól, ha netán ezt megteszem”.

1831. május 17-én Schumacherrel közli, hogy megkezdte a párhuzamosok kérdésével kapcsolatos mintegy negyven éve folytatott meditációinak leírását. Majd ugyancsak Schumachernek írja 1831. július 12-én (ekkor már a Gaussnak elküldött *Appendix* útközből valamelyik postai csomópontban kallódott):

„A nemeuklideszi geometria semmiféle ellentmondást sem tartalmaz, habár az elején sokaknak paradoxonnak tűnhet annak számos kijelentése; ellentmondásosnak vélni csak abból a számításból eredhet, hogy az euklideszi geometriát tekintjük az egyedüli igaznak. A nemeuklideszi geometriában nem léteznek hasonló, de nem egyenlő alakzatok”.

Ebben a levélben Gauss már képletileg megadja a kör területének hiperbolikus geometriai formuláját. E képlet eredetét Paul Stäckel a gömbi kör területének formulájában látta, mert ha a gömb valós r sugara helyébe a képzetes $i \cdot r$ sugarat írjuk, akkor a Gauss által közölt formulát kapjuk. Gauss tehát itt is a valós és képzetes sugarú gömb közötti – Lambert által észrevett – analógiára támaszkodott.

A 2. fejezetben már közöltük azokat a levélrészleteket, amelyeket Gauss az *Appendix* átvétele és átolvasása után 1832. február 11-én Gerlingnek, 1832. március 6-án pedig Bolyai Farkasnak írt. Figyelemmel olvasva e két levélrészletet, azonnal szembetűnik, hogy Gauss Bolyai Farkasnak már nem célzott arra, hogy hajdani beszélgetéseik a nemeuklideszi geometriára is kiterjedtek, holott egy ilyen utalás itt a legtermészetesebb lett volna. Ma határozottan úgy tudjuk, hogy kettejük egykori beszélgetései (lásd később Sartorius von Waltershausen munkáját is) kizárólag a tér filozófiai problémái körül forogtak, és a legvalószínűbb, hogy akkor semmilyen nemeuklideszi geometriai eszme kidolgozásának a gondolata föl sem merült bennük. Ha nem így lett volna, akkor nehezen lenne érthe-

tő, hogy Bolyai Farkas az 1804-es év második felében még mindig az euklideszi axióma szigorú bizonyítására vonatkozó próbálkozásait küldi el Gaussnak. Ezt az állításunkat még megerősíti Gauss már említett, 1832. március 6-án írt levele is. Ugyanakkor meg kell említenünk, hogy e levél mellékleteként Gauss közli Farkassal a hiperbolikus síkbeli háromszög területképletének vázlatos bizonyítását. Ez a bizonyítás hiányos – amelyre maga Gauss is utal –, mivel eleve fölteszi, hogy a maximális területű háromszög (melynek minden szöge zero) véges területű.

Az 1840. utáni években Gauss megjegyzéseket fűz Lobacsevszkij *Geometrische Untersuchungen* című könyvéhez. V. F. Kagan ezeket tekintti Gauss legértékesebb nemeuklideszi geometriai gondolatainak. Műtán Gauss tudomást szerzett Bolyai és Lobacsevszkij munkáiról, egészen természetes, hogy a saját gondolatainak egybegyűjtése és kidolgozása többé nem vetődött fel nála.

Az eddig közlőtekből már világosan kivehető (főleg a Bolyai Farkasnak az 1804. november 24-én írt leveléből), hogy ő is, akárcsak minden elődje, az euklideszi párhuzamossági axióma bizonyítási kísérleteivel kezdte, de rövid idő múlva tisztában volt ennek buktatóival. Ma már nyugodtan kijelenthetjük: Carl Friedrich Gauss volt az első matematikus a világon, aki szakmai alapossággal észrevette, hogy Euklidész párhuzamossági axiómája egy vele ekvivalens kijelentés felhasználása nélkül nem bizonyítható. Ugyancsak tudatában volt annak, hogy az euklideszi axióma tagadására épült új geometria éppen olyan ellentmondás-nélküli, mint az euklideszi mértan. Így Gauss kissé gúnyos mosolyát is megérthetjük, amikor a neki átnyújtott *Appendix* címét az első alkalommal hirtelenjében elolvasta. Biztos, hogy abban a pillanatban azt hitte, János is az euklideszi axióma bizonyításánál köt ki, akárcsak két évezreden át elődei, melyek között ott találjuk apját, Bolyai Farkast is. Tehát Gauss valóban birtokában volt a nemeuklideszi geometria gondolatának. Mivel a Farkashoz 1832. március 6-án írt levelében a paraciklus és paraszféra kifejezésekkel egyből igen jól sikerült elnevezéseket ajánlott a Bolyai János által bevezetett L vonalra és F felületre, ezek a fogalmak számára nyilvánvalóan már nem voltak újak. Hogy pontosan mikor kristályosodott ki előtte, miszerint az euklideszi geometrián kívül létezik egy teljesen konzisztens másfajta mértan is (amelynek *nemeuklideszi geometria* megnevezése szintén tőle ered) csak hozzávetőleg tudjuk meghatározni. Mint ahogy azt sem tudjuk biztosan megállapítani, mennyire sikerült behatolnia az új geometria rejtelmeibe. Némi tájékozódásként érdemes idéznünk néhány sort Császár Ákos előadásából, melyet az 1977-es Gauss-bicentenárium alkalmából tartott: „vannak, akik Bolyai Farkasnak [Gauss által] írt sorokat szó szerint értelmezve úgy vélik, hogy Gauss mindazt felfedezte, amit Bolyai János,

mégpedig – legfeljebb kisebb részleteket nem számítva – ugyanolyan módszerekkel. Erre nincs semmi bizonyíték, például a nemeuklideszi trigonometria képleteinek sem Gauss feljegyzéseiben, sem levelezésében nincs semmi nyomuk. Így joggal feltételezhető, hogy önállóan talált eredményei az *Appendix* anyagának csak egy részére terjedtek ki, és kérdéses, hogy ezeket mennyire tudta az *Appendix*-hez hasonló szabatos felépítésben összefoglalni”.

Általános következtetésként most már elmondhatjuk: az euklideszi párhuzamossági axióma bizonyítására tett rengeteg eredménytelen kísérlet hatására 1816-tól Gaussban egyre inkább megérlelődött a nemeuklideszi geometria lehetőségének gondolata. Összes elődeitől eltérően világosan látta, hogy Euklidész párhuzamossági axiómaként ismert kijelentése nem bizonyítható, annak igaz és hamis voltát nem lehet eldönteni. A hiperbolikus geometria körébe tartozó, papírra vetett eredményei erősen támaszkodnak Lambert vizsgálataira, valamint a „képzetes sugarú gömb” hipotézisére. Ez utóbbiból kitűnik, hogy fölismerte a hiperbolikus geometria egyes formuláinak alaki megegyezését a képzetes sugarú gömb geometriájának a képleteivel. Azonban a hiperbolikus geometriát nem dolgozta ki tervszerűen a matematikai szigor – általa is mindig megkövetelt – módszerességével. Ilyen vonatkozású gondolatairól és eredményeiről egyetlen sort sem publikált. Összehasonlítva ilyen irányú vizsgálatait a más területeken végzett gazdag és nagy értékű eredményeivel, teljes mértékben érvényt adhatunk nagy tisztelője, Sartorius von Waltershausen véleményének: „Gausst különösebben nem érdekelt a nemeuklideszi geometriai rendszer kidolgozásának a kérdése”. Ezek alapján a nemeuklideszi geometriák történetében nem illeti meg ugyanaz a hely, mint Bolyai Jánost és Nyikolaj Lobacsevszkijt.

Gauss előtérbe helyezése érdekében aktív tevékenységet fejtett ki Felix Klein, valamint a vele közeli kapcsolatban álló Friedrich Engel (1861–1941). Lobacsevszkij műveinek német fordítója. Engel gyakran hangoztatott olyan prioritási véleményeket, amelyek mindannyiszor Bolyai János kárára voltak.

Ami Gauss szerepét illeti a nemeuklideszi geometria kialakulásának történetében, érdemes odafigyelnünk még egy jelenségre. Mivel közismert, hogy Gauss abszolút semmit sem közölt a nemeuklideszi geometriára vonatkozó vizsgálatairól, főleg Felix Klein német matematikus – a göttingiai egyetemen az 1889–90-es tanévtől kezdődő előadásain – fennhangoztatta, hogy „semmilyen kételyünk nem lehet afelől, hogy Gauss befolyása ösztönözte Lobacsevszkij és Bolyai kutatásait”. Előadásainak anyaga rövidesen nyomtatásban is megjelent és közismertté vált. Ennek az „ösztönző befolyásnak” a közvetítője Lobacsevszkij esetében Gauss egykori tanára, Johann Christian Bartels (1769–1836) volt, aki 1808-

tól 1820-ig a kazáni egyetemen tanított, így Lobacsevszkij is tanítványa volt. Bolyai János esetében pedig apja, Bolyai Farkas volt a közvetítő. Állításának alátámasztására ebben az esetben Klein főleg Gauss 1832. február 14-én Gerlingnek írt levelének részletére támaszkodott:

„E napokban Magyarországról egy nemeuklideszi geometriát tárgyaló kis művet kaptam [...] szerzője egy nagyon fiatal osztrák katonatiszt, fia egyik ifjúkori barátomnak, akivel 1798-ban gyakran beszéltem erről a dologról”.

Lobacsevszkij esetében ennek alaptalanságát D. M. Burton azzal támasztja alá, hogy a Gauss–Bartels-levelezésben egyáltalán nem szerepel a párhuzamosok kérdése, és ezen kívül Bartels kazáni távozása után Lobacsevszkij 1823-ban még mindig az 5. posztulátum bizonyításával kísérletezik, ami nyilván nem történhetett volna meg, ha Gauss akkor már kialakult eszméi azelőtt eljutnak hozzá.

Ami Bolyai Jánost illeti, Klein kijelentésének alaptalanságát a már annyiszor idézett 1804. november 25-én írt Gauss-levél tartalma is bizonyítja. Ugyanis Gauss maga írja: „hajdan e gordiuszi csomónak kibontását megkíséreltem és mindeddig hiába próbáltam”, vagy „van ugyan még mindig reményem, hogy ama szirtek valamikor, még életem vége előtt átjárást engednek”. Tehát Gauss ekkor még nem volt meggyőződve egy új geometria létezéséről. Szerintünk Gauss sem úgy értette levélbeli kijelentéseit, mint ahogyan Klein tévesen értelmezte azt. Az ugyanis egészen természetes, hogy Gauss és Bolyai Farkas akkori beszélgetései alkalmával a párhuzamossági axióma is szóba került, mint az akkori idők egyik általánosan vitatott problémája, de távolról sem annak már megoldott és kidolgozott teóriája. Ezenkívül még fontos megjegyezni, hogy Gaussnál ekkor jelentkeznek a baráti elhidegülés jelei, mivel Farkas 1808. december 27-én, 1816. április 10-én valamint 1831. június 20-án írt leveleit válasz nélkül hagyja. Más bizonyítékai is vannak annak, hogy Kleinnek és követőinek ilyen kijelentései mind Bolyai János, mind Ny. Lobacsevszkij esetében minden alapot nélkülöznek.

5.3. Lobacsevszkij és Bolyai

Az egyik legtárgyilagabbnak tűnő szovjet matematikus, az *Appendix orosz nyelvű fordítója*, V. F. Kagan a következőket írja:

„Lobacsevszkij 1823-ban világosan látta, hogy a párhuzamos egyenesek posztulátumának bizonyítására vonatkozó összes kísérletek sikertele-

nek voltak. 1826. február 11-én (régí időszámítás szerint) Lobacsevszkij a kazáni egyetem fizika–matematika karának ülésén jelentést tett, amely már a nemeuklideszi geometria alapjainak rendszeres kifejtését tartalmazta; 1829-ben pedig a *Kazáni Híradó*-ban terjedelmes dolgozatot közöl *A geometria alapjairól*, amely a nemeuklideszi geometriának annyira alapos kifejtése, hogy összes többi geometriai műve már csak ugyanannak az anyagnak az átdolgozása és továbbfejlesztése.

Ha figyelembe vesszük, hogy Bolyai munkája csak 1832-ben látott napvilágot, és hogy Gauss élete végéig semmit sem közölt a nemeuklideszi geometriáról, akkor a nemeuklideszi (hiperbolikus) geometria közlésének elsőbbsége feltétlenül Lobacsevszkijt illeti meg.”

De ragadjunk ki a sok orosz és szovjet szerző munkáiból olyanokat is, amelyek a döntő többséget képviselik. Például B. V. Kutuzov *A Lobacsevszkij-geometria és a geometria alapjai* című könyvében, mely 1950-ben jelent meg a Szovjetunióban, egyetlen mondatban sem említi Bolyai Jánost. Pedig könyve elején részletesebb történeti áttekintést is közöl a párhuzamosok problémájáról. Még Bolyai Farkast sem felejtí ki, mint az egyik olyan kijelentésnek a szerzőjét, mely ekvivalens az euklideszi posztulátummal (bármely háromszög csúspontjai egy körön helyezkednek el).

N. V. Efimov a több mint 500 oldalas, *Felső geometria* című könyve – amelynek harmadik kiadása 1953-ban jelent meg Moszkvában – több fejezetben tárgyalja a „Lobacsevszkij-geometriá”-t és e geometria felfedezésének előzményeit. Könyvében röviden Bolyai Jánosról is említést tesz:

„A Lobacsevszkijel kortárs geométerek számára az ő eszméi paradoxonnak tündek és gúnnyal fogadták azokat. Csak kevesen tudták megérteni Lobacsevszkijt és értékelni munkáját; ezek között említjük meg Gausst és Bolyait. Ők is foglalkoztak a párhuzamosok kérdésével egymástól függetlenül, és mindketten függetlenül Lobacsevszkijtől. Gauss ismert egy tervet, az új geometria megalkotására, de csak vázlatokat hagyott maga után, amelyekben csak néhány legelemibb fogalom szerepelt. Ráadásul semmit sem publikált, mivel félt, hogy nem fogják megérteni. Bolyai viszont Lobacsevszkij első publikációi után csak három évvel később adta ki munkáját (nem tudott még Lobacsevszkij munkájáról), és csak egyszerű bevezetését adta annak az elméletnek, amelyet Lobacsevszkij olyan széles alapossággal dolgozott ki. De Bolyait sem ismerték el az ő idejében és támogatásra szorult.”

És ezzel, mint a továbbiakban nem létezött, el is intézte Bolyait, akit még ebben a néhány sorban is úgy állít be, mint azok egyikét, akik megértették Lobacsevszkij szokatlanul új és magas szintű gondolatait. Ez a két tipikus példa konkrétan jellemzi az említett értelmiségi csoport többsé-

gét. Be kell vallanom, én eddig egyetlen magyar szerzőtől sem olvastam olyan írást, amelynek célja Lobacsevszkij munkájának minden áron való kicsinyítése és lebecsülése lett volna. Egyhangúlag mindegyik elismeri, hogy a publikálás elsőbbsége valóban Lobacsevszkijt illeti meg, és zseniális alkotása egyenértékű a Bolyaival.

Ami pedig a három év késést illeti, már itt is szándékos csúsztatás van. Ugyanis Lobacsevszkij *A geometria alapjairól* című munkája a *Kazanszkij Vjesztnyik* 1829/30-as évfolyamaiban jelent meg, a későbbi hivatkozások azonban a 30-as évszámot szándékosan elhagyják. Az *Appendix* pedig nem 1832 januárjában jelent meg először, amikor a *Tentamen*, hanem különlenyomatként 1831 tavaszán, melyből Bolyai Farkas – amint már említettük – egy példányt küldött Gaussnak. „Következésképpen – írja Kiss Elemér – még egy év különbség sincsen a matematika két nagy alakja művének megjelenése között, nemhogy három esztendő, amit oly szívesen hangoztatnak egyesek”.

Nem mellőzhetjük annak a kijelentésnek a tisztázását sem, mely szerint Bolyai „csak egy egyszerű bevezetést adta annak az elméletnek, amelyet Lobacsevszkij olyan széles alapossággal dolgozott ki”. Amint már többször említettük, Bolyai János rendkívül tömören fogalmazta meg mondandóját az *Appendix*-ben. Ezt még „az egy szóból is mindent értő Gauss” is megjegyezte. Abban a mesterien megírt 29 oldalban óriási anyag van összesűrítve.

Lobacsevszkij viszont aprólékos részletességgel, bonyolult számítások elvégzésével, több éven át megjelentetett dolgozataiban tette közzé új elméletét. „Ezek a dolgozatok – írja Gauss – sűrű erdőre emlékeztetnek, amelyen keresztül nehéz megtalálni az utat és a világosságot, ha előzőleg nem tanulmányozunk minden egyes fát külön-külön.” Lobacsevszkij legsikerültebb és legérthetőbben megírt munkája az 1840-ben német nyelven megjelent kis könyve, amelyet Bolyai János is olvasott. Kagan is kihangsúlyozza ezt, és szerinte ha valaki Lobacsevszkijt akarja tanulmányozni, akkor ezzel a munkájával kezdje. Dolgozataiban részletesen kitér az „imaginárius geometria” (így nevezte Lobacsevszkij az új mértanát) felépítésére, az imaginárius analitikus- és differenciálgeometria alapjainak lerakására, valamint egy ehhez kapcsolódó terjedelmes integrálszámítás tárgyalására. Tehát valóban vannak olyan részek, amelyeket Bolyai nem tárgyalt az *Appendix*-ben és főleg nem olyan bonyolult részletességgel, mint Lobacsevszkij. Azonban az *Appendix* legterjedelmesebb 32. §-ában Bolyai is lefekteti a hiperbolikus differenciálgeometria alapjait, megadva a hiperbolikus sík első alapformáját, vagy más néven metrikáját (anélkül, hogy ismerte volna Gauss 1827-ben megjelent felületelméleti munkáját) és az integrálszámítás felhasználásával több alapvető számítást végez el itt. Azt is meg kell jegyeznünk, hogy

az *Appendix*-ben is szerepel több olyan tárgykör, amelyek Lobacsevszkij művében nem találhatók meg. Ilyenek például a szerkesztési problémák a hiperbolikus síkban, vagy a kör négyszögesítésének kérdése.

Nem árt, ha megemlítnünk még egy dolgot, amit eddig az összehasonlító kommentár-irodalom sokszor szinte szándékosan mellőz. Lobacsevszkij műveiben nem szerepel explicit formában (tehát egyetlen egy képletben sem) a hiperbolikus geometriánál igen fontos szerepet játszó úgynevezett *görbületi paraméter*. Ennek érzékeltetése érdekében tekintsük például a hiperbolikus, vagy más néven Bolyai–Lobacsevszkij-geometria alapösszefüggését, amelyet János már 1823-ban felfedezett. Amint már szóltunk róla, ez a távolság és a hozzá tartozó párhuzamossági szög közötti relációt adja meg. Lobacsevszkijnél ez így szerepel:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-x};$$

Bolyai Jánosnál pedig:

$$\operatorname{ctg} \frac{u}{2} = e^{\frac{x}{k}},$$

ahol Lobacsevszkijnél $\pi(x)$, Bolyainál u jelöli az x távolságnak megfelelő párhuzamossági szöget, k pedig a görbületi paraméter. Az összefüggés jobb oldalán szereplő exponenciális függvény e alapjáról Bolyai precíz bizonyítással kimutatja, hogy a matematikában valóban ezzel a betűvel jelölt $e = 2,718\dots$ természetes logaritmus alapszámáról van szó, míg Lobacsevszkij csak egyszerűen kijelenti, hogy $e > 1$. Tehát nyilvánvaló, hogy Lobacsevszkij távolról sem látta oly tisztán geometriájában a görbületi paraméter jelentőségét, mint Bolyai János. Nem kétséges, hogy orosz részről erre is szolgáltatnak magyarázatot. Egyesek azt hangsúlyozták, hogy „Lobacsevszkij egyszerűségéből [!] a k -t egynek tekintette”. Mások, jobban átgondolva a dolgot, azzal érvelnek, hogy tulajdonképpen ez a görbületi paraméter „rejtve” Lobacsevszkij relációjában benne van, mert ő az exponenciális függvény e alapjáról azt jelenti ki, hogy $e > 1$ és e^{-x} még így is írható:

$$(e^k)^{-\frac{x}{k}},$$

a k -t pedig úgy választhatjuk meg, hogy e^x a természetes logaritmus e alapszámával legyen egyenlő. De a „Lobacsevszkij összefüggése” megnevezés alatt természetesen ma már mindegyikük a

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$$

képletet tünteti fel, megemlítve, hogy e a természetes logaritmus alapszáma, k pedig egy pozitív állandó.

A nemeuklideszi geometria „születésének” időpontját igen sokan 1826. február 11. (az új időszámítás szerint 23.) napjában jelölik meg, mivel Lobacsevszkij ekkor tartotta nevezetes előadását a kazáni egyetem fizikai és matematikai szekciójának ülésén. Az előadásnak csak a francia nyelven írt címe maradt meg, magának az értekezésnek a szövege elvesztett. A cím a következő: *Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles* (Rövid értekezés a geometria alapjairól, a párhuzamosok tételének szigorú bizonyításával).

Ezzel kapcsolatban még V. F. Kagan is a következőket kénytelen megjegyezni:

„Ez az *Értekezés* eredeti szövegében nem maradt fenn. Maga a címe bizonyos zavart kelt. Nem beszél a párhuzamos egyenesek új elméletéről, a párhuzamos egyenesek kérdésének megoldásáról, hanem határozottan a *párhuzamos egyenesek tételének szigorú bizonyításáról* beszél. Nincs szó axiómáról, posztulátumról, hanem a párhuzamos egyenesek új tételéről, amelyet Lobacsevszkij szigorúan bizonyított. Milyen tételről volt tulajdonképpen szó? Annak a műnek figyelmes vizsgálata, amelyben új elméletét először közölte (*A geometria alapjairól*, 1829), nem ad teljesen határozott választ erre a kérdésre.”

A körmönfont mondatok után Kagan megpróbálja Lobacsevszkij *A geometria alapjairól* című munkájának szövegéből rekonstruálni azokat a gondolatokat, amelyek esetleg az *Exposition succincte*-ben szerepelhetnek. Ezt megteve kijelenti:

„Mindezek e sorok íróját arra a meggyőződésre juttatják, hogy 1826-ban, amikor Lobacsevszkij a fizikai és matematikai szekcióban bemutatta *Értekezés*-ét, már kétségtelenül birtokában volt a nemeuklideszi geometria alapjainak, de még nem becsülte fel eléggé felfedezésének anyagát és jelentőségét. Eszméi csak az 1826–1829. években bontakoznak ki eszméi egész teljességükben, értékükkel csak ebben az időszakban jött tisztába.”

Hogy mennyire helytállóak és helyesek Kagan következtetései, azt nehezen tudnánk megmondani, de kétségtelenül hogy van bennük némi reális meglátás is. Lobacsevszkij *Értekezés*-ének szövege híján csak a címe alapján tudunk tájékozódni, és igazságtalanság lenne bármilyen biztosnak vélt konklúziót levonni. De a címből még a következő megállapításra is juthatunk: Lobacsevszkij ebben az értekezésében, akárcsak 2000 éven át számos elődje, a párhuzamos egyenesekre vonatkozó euklideszi kijelentés „szigorú bizonyítását” próbálta megadni, melynek elvégzése után – amint az a címben is szerepel! – ez már valóban „tétel”-nek tekinthető. Ez pedig azt igazolja, hogy *Lobacsevszkijt 1826-*

ban még mindig Euklidész párhuzamossági posztulátumának bizonyítása foglalkoztatta, és távolról sem a nemeuklideszi geometria gondolata. Mindenesetre Kagan azon megállapítása látszik a legvalószínűbbnek, mely szerint „eszméi csak 1826–1829. Években bontakoztak ki egész teljességükben, értékükkel csak ebben az időszakban jött tisztaiba”.

Amint már említettük, a paralelák kérdésének behatóbb vizsgálatát Bolyai János bécsi diákéveinek elején kezdte meg. Ezen a téren való előrehaladásáról – a már szintén említett – 1820-as évekből fennmaradt diákkori jegyzetfüzetében *A Parallelarum Theoria* bejegyzés alatt található négy ábra tanúskodik (1. kép), melyben már határozottan észrevehetők az új geometria első gondolatai. Az 1., 2. és 4. ábrákon világosan megjelenik a hiperbolikus geometria jellegzetes görbéjének, a *paraciklus*nak a kétféle származtatási módja, valamint e görbe néhány tulajdonságának vizsgálata, a 3. ábrán egy olyan nyolcszög látható, melynek szomszédos oldalai egymással párhuzamosak, vagyis a nyolcszög mindegyik szöge zéró. Ilyen nyolcszög csak a hiperbolikus síkban létezik.

Konkrétabb eredmény elérését az 1823. november 3-án írt, matematikátörténeti jelentőségű temesvári levele jelzi, amelyben mámoros örömmel értesíti Marosvásárhelyen élő édesapját egy „új, más világ” felfedezéséről. A legtöbb matematikátörténész állítása szerint Bolyai ekkor már szilárdan hitte, hogy a párhuzamosokra vonatkozó euklideszi kijelentés nem bizonyítható, és ennek tagadása esetén egy teljesen új geometria létjogosultsága bontakozott ki előtte. Egy „új, más világ”, ahogyan Bolyai nevezte. *Észrevételek* című vaskosabb kéziratából pontos tudomást szerezhetünk arról, hogy mi okozta azon a temesvári éjszakán Bolyai kitörő lelkesedését:

„Csak még azt jegyzem erre nézve meg, hogy én ebbeli munkámat, melynek lényege már az 1823-év végével hatalmamban volt – éppen télben éjfél tájban rontván át, noha más és saját szépséges úton a 29. §-tan lényegén”.

Tehát Bolyai a hiperbolikus geometria alapösszefüggését fedezte fel, mely nem más, mint a távolság és a neki megfelelő párhuzamossági szög függvényi kapcsolata. Ez szerepel ugyanis az *Appendix* 29. §-ában, melyről maga Kagan is megjegyzi: „A bizonyítás eléggé komplikált, de kétségtelen, hogy magán viseli a zsenialitás nyomait”.

„A feltételem már áll – írja Bolyai a szóban forgó temesvári levelében –, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem s mód lesz, a paralelákrol egy munkát adok ki”.

A munkát valóban megírta, és 1826-ban átadta volt bécsi matematikatanárának, Wolter von Eckwehrnek. Ez lehetett az *Appendix* első fogalmazványa, melyet János német nyelven írt meg. Amint említettük, ez a kézirat sajnos elveszett, vagy legalábbis eddig minden erőfeszítés a megtalálására kudarccal végződött. Megalapozott feltételezésünk szerint Bolyai az abszolút geometriára vonatkozó eszméit az 1823–1825-ös években dolgozta ki, ugyanis amint említettük, 1825 februárjában már erről számol be apjának. Állításunkat, miszerint János egy kéziratot hagyott apjánál, melyben új eredményeit foglalta össze, Farkasnak egy 1830. június 23 előtti írt levéltöredéke támasztja alá, melyet Jakab Lajosnak címzett:

„Az *Arithmetica*-ba [Farkas kis könyve, mely 1829-ben jelent meg Marosvásárhelyen] maradt néhány hiba igazítatlan, de könnyű észrevenni. Jánosnak is mindjárt írok, s ma vagy holnap az Aradra indulóktól küldök, s elkérem az ő (a maga nemében egyetlen) munkáját, melyet az *Appendix*-hez kívánnék nyomtatni. *Megvan nálam, de tsak impure.*”

Bolyai János 1826. április 10. és 1830. szeptember 2. között szolgált Aradon. Apja kérésére János a német nyelven megírt *Appendix*-et latinra fordítja, mivel Farkas a *Tentamen*-t ezen a nyelven írta.

Az előbbieket alapján úgy érezzük, hogy alábbi kijelentésünk az igazság és a tárgyilagos megítélés talaján nyugszik:

Bolyai János, bár 10 évvel később született, mint Lobacsevszkij, néhány évvel korábban birtokában volt a párhuzamossági kérdés helyes megoldásának és az új geometria kidolgozásának. Lobacsevszkij viszont hamarabb közölte munkáját, mint Bolyai János. Tehát a feltalálás elsőbbsége Bolyai Jánost, a publikálás prioritása pedig Lobacsevszkijt illeti meg. Ugyanaz a helyzet áll fenn a differenciál- és integrálszámítás felfedezésével kapcsolatban is. Newton korábban fedezte fel, mint G. W. Leibniz, de Leibniz hamarabb publikálta felfedezését, és ma már az igazságnak megfelelően mindkettőjüket egyenlő mértékben tekintik és említik a matematikai analízis e rendkívül fontos ágának a megteremtőjeként. Tehát Bolyait és Lobacsevszkijt ugyanolyan hely illeti meg a párhuzamossági probléma végleges megoldásából eredő új geometriák felfedezésének történetében.

Befejezésül szóljunk még néhány szót arról, hogy akadtak olyanok, akik tudatos céllal, az *Appendix* terjedelmi rövidségébe kapaszkodva minden további nélkül kijelentették, hogy Bolyai csak rövid egyszerű bevezetőjét adta az új geometriának. Rossz szándék nélkül ezt csak az állíthatja, aki nem olvasta a csodálatos tömörséggel megfogalmazott és rengeteg anyagot tartalmazó remekművet. El nem olvasott tudományos dolgozatról pedig nem becsületes dolog szakvéleményt mondani. És ha már singgel mérik egyesek a tudományos művek értékét, akkor vajon mennyit érnek a szemükben Evariste Galois vagy Bernhard Riemann alig néhány oldalas világhírű munkái?

6. A komplex számok elméletének kutatója

Nemrég találkoztam valakivel, aki azt mondta, távol áll attól, hogy elfogadja mínusz egy négyzetgyökét, mert még a mínusz egyet sem tudja elfogadni. Ez minden esetre következetes magatartás.

E. C. Titchmarsh

6.1. Amire az *Appendix*-ben nem tért ki

A tér abszolút igaz tudományának a kidolgozása után Bolyai Jánosnak a komplex számokra vonatkozó kutatásai a legjelentősebbek. Már első életrajzírója, Schmidt Ferenc, az 1868-ban francia és német nyelven megjelent írásában említést tesz a komplex számokra vonatkozó vizsgálatairól. Kézirataiban Bolyai többször hangoztatja, hogy az 1831 előtti években észrevette a komplex számok jelentőségét és szerepét az általa felfedezett új geometriában. Mindez akkor történt, amikor Gausstól és Lobacsevszkijtől eltérően ő nem ismerte például Lambert (*Theorie der Parallellinien*) munkáját, melyben szó esik arról, hogy a hegyesszög hipotéziséből származó tulajdonságok megvalósulnak egy képzetes sugarú gömbön. De erre rövid időn belül Bolyai maga is rájön. Lobacsevszkij – részben e tulajdonság miatt is – saját geometriáját hosszú ideig *imagináris geometriának* nevezte.

Bolyai idejében a komplex számokat még a matematikus körökben sem tekintették általánosan elfogadott fogalomnak, ugyanis precíz elméletük akkoriban még csak forrásban lévő témakör volt. Kitűzött célunk azonban nem engedi meg az akkori helyzet részletes kifejtését, így amennyire csak lehet, Bolyai ezzel kapcsolatos vizsgálataira és a kézirataiban legújabbban is észlelt meglátásaira szorítkozunk. Azt, hogy az *Appendix* megjelenése előtt már tisztán látta a komplex számoknak az általa felfedezett *S*-rendszerben érvényre jutó szerepét, az alábbi sorai is igazolják:

„Atyámat az *Appendix* nyomtatásának befejezése után Lembergől [tehát 1832-ben] írásban figyelmeztettem arra, hogy ha az egyenes vonalú háromszög valamennyi oldalát k -ra, mint egységre vonatkoztatva épp olyan nagyságú képzetes mennyiségeknek tekintjük, akkor az egyenes vonalú háromszögekre vonatkozó minden reláció teljes analógiában áll azokkal, melyek a gömbi háromszögekre vonatkoznak. Például valamely derékszögű háromszögben, melynek befogói a és b , átfogója c , ha a háromszög gömbi

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

és így tehát, hogy ha egyenes vonalú

$$\cos ic = \cos ia \cdot \cos ib, \quad [\text{ahol } i = \sqrt{-1}].$$

Ezen a módon észrevehető a két trigonometria egyszerű kapcsolata. És mégis sajnálom, hogy erre legalább nem mutattam rá, mert hiszen mindenkinek észre kell vennie. Ez a kapcsolat – azóta, hogy ezeket a képleteket először feltaláltam – nem került el többé a figyelmemet, csak – hogy akkor főleg a paralelák materiáját, mint fő dolgot tartva szem előtt és a képzetes mennyiségek tanának általános hiányosságát és érthetetlen voltát véve fontolóra, annak a kísérletnek dacára, hogy ezt az eszmét el ne ejtsem – nem tudtam magamat rávenni, hogy olyan homályos tant vegyek fel, mint amilyen a képzetesekről addig volt, és minthogy az akkori körülmények parancsolta rövidség nem engedte meg, hogy [a képzetes mennyiségek tanába] mélyebben belebocsátkozzam, bár nem szívesen, elhatároztam magamban, hogy ezt a dolgot más alkalomra halasztom.”

A most idézett szöveg már kifejti az említett kapcsolat lényegét, és ezzel a komplex számoknak az új geometriában játszó komoly szerepét. De ugyanitt maga Bolyai is kihangsúlyozza, hogy az egyik ok, amiért az *Appendix*-ben nem tért ki az említett kapcsolat tárgyalására, a komplex számokról alkotott akkori homályos fogalmak és az ezzel járó véleménykülönbségek voltak. Egy másik kéziratában részletesen kitér arra, hogy az *Appendix* 31. §-ában levezetett hiperbolikus síkbeli trigonometriai összefüggések – az említett kapcsolat révén – hogyan következnek a gömbi trigonometria ismert analóg képleteiből.

Bolyai a hiperbolikus térbeli tetraéderek köbtartalmának meghatározására vonatkozó eredményeit sem vette be az *Appendix*-be. Vizsgálatai során mindvégig támaszkodik az előbb említett kapcsolatra, ami végül is a hiperbolikus függvények használatához vezet. Így az erre vonatkozó

számításaiban mindvégig szerepelnek az imaginárius mennyiségek a már említett formai megegyezés révén.

A komplex számok problémájával Bolyai Farkas is foglalkozott. Apa és fia nyilván erről a kérdésről is tárgyaltak egymással, és a nézetkülönbségek a keményebb hangú vitákat sem nélkülözték. Ami a szakmai meglátások helyességét illeti, az igazság minden esetben János oldalán volt. Említsünk meg erre egy példát. Farkas a szorzás és az osztás fogalmára vonatkozó meglehetősen homályos fejtegetései alapján a komplex mennyiségek teóriájában a proporciók olyan magyarázatát adta, melyből végül az

$$1:i = i:1$$

egyenlőség következett. Ez pedig valóban ellentmondáshoz vezet, mert ebből az aránypárból az $i = \sqrt{-1}$ imaginárius egységre vagy az $i^2 = -1$, vagy a $-i = +i$ hibás egyenlőség következik. Véleményét János nyíltan és minden szépítés nélkül megírta apjának:

„Nincs mód, hogy ezt a hibát kegyed észre ne vegye, s meg ne győződjék állításom alaposságáról, mert a Nap nem fénylik, ragyog oly tisztán, mint ez; s ha meggyőződött, győzze meg arról is magát, hogy (ami nem < dicsőségére válik mint a tanai), hogy minden szép, remek elmésség, igazi alaposság s evidencia vadászat mellett e tárgyban – mint ember s mint magam is nem egyszer, mint kalkuláló – megbotlott, s homályos alapra épített. Hogy oly hosszú ideig úgy el volt az egyik legfontosabb tárgy iránt fogulva: oka az s onnan ered, hogy előre megkedvelt s adoptált, de nem célszerű alapideáját, miszerint a multiplikációt előbb +1-re, azután *-1-re nézve kívánja véghezvinni, többé teljességgel szemé elöl nem akarta elbocsátani; s a komplikációt megérezvén, kész volt a proporció definícióján, s azonnal a természetén is erőszakot tenni, mint lemondani kedvelt alapideájáról. Most már nincs mód, hogy meg ne legyen győződve, hogy teóriája össze van omolva: bármily hosszas homályom vagy tévelyem eloszlata nekem éldeled, gyönyör s remélem kegyednek is az lesz.”

János éleslátását ezek a sorok is bizonyítják. Hogy az olvasó számára tisztázzuk a szövegben található *-1 fogalmát, meg kell említenünk a következőket. Farkas, a képzetes mennyiségek matematikában elfogadható realitását akarva hangsúlyozni, a következő csapdába esett: szerinte a képzetes is valósnak tekinthető, mert például a $\sqrt{9}$ vehető úgy, mint valós +1-re, a $\sqrt{-9}$ pedig valós -1-re nézve. Megkülönböztetésül ezeket így jelöli: $\sqrt{9} = \pm 3$ és $\sqrt{-9} = * \pm 3$.

Farkas, aki mindezek ellenére apai szeretettel élete végéig egyengette fia tudományos lépéseit, ez alkalommal sem mulasztotta el értesíteni Jánost egy éppen időszerű, talán vitájukat is eldöntő pályázatról. Ennek hatására írta meg János második jelentős művét, a komplex számokról szóló *Responsio*-t.

6.2. A *Responsio*

1837 őszén Bolyai Farkas figyelmét egyik kollégiumi tanártársa, az akkori Erdély nagyhírű jogtudósa, Dósa Elek (1803–1867) egy pályázati hirdetésre hívta fel. A lipcsei Jablonowski Társaság másodszori felhívása a németországi *Allgemeine Literaturzeitung* (Halle – Leipzig) azon év márciusi számában jelent meg, mely a komplex számok akkoriban élénken vitatott egyik kérdésének tisztázását tűzte ki. Mivel a novemberi beküldési határidő vészesen közeledett, Farkas azonnal értesíti erről Domáldon élő fiát, és egyben arra kéri, hogy ő is vegyen részt a pályázaton. A pályakérdést M. W. Drobesch (1802–1896), a lipcsei egyetem matematika tanára tűzte ki a következő szöveggel:

„Amint ismeretes, a képzetes mennyiségeket jelenleg nemcsak az analízisben, hanem az analitikus geometriában is gyakran alkalmazzák. Gauss megmutatta, hogy ezek a mennyiségek, melyeknek minden reális voltát közönségesen tagadni szokták, éppoly mértékben érzékelhetővé tehetők, mint a negatív mennyiségek. Azonkívül más geometerek, név szerint Buée, Mourey, Warren annak kimutatására törekedtek, hogyha a geometriai vizsgálatok képzetes mennyiségekre vezetnek, ezek mindig meg is szerkeszthetők. Mivel ez a tan nem talált még általános elismerésre, a Társaság azt a kérdést veti fel:

Vajon a képzetes mennyiségek szerkesztésének tana megalapozható-e és fejleszthető-e úgy, hogy ezáltal a szerkesztések biztos szabályok szerint történjenek, melyek bizonyára mindenütt, ahol a geometerek a képzetes mennyiségeket alkalmazzák, ezek burkolt alakban rejtőznek: vagy pedig, ha lehetetlen, legalább azok a feltételek derüljenek ki, melyek mellett ezek a mennyiségek megszerkeszthetők.”

A rövid hátralévő idő ellenére mindkét dolgozat elkészült. Sajnos ezek postai elküldésénél, egy félreértés miatt apa és fia között kínos ellentét robbant ki, melyet később főleg Farkas egyik ezzel kapcsolatos levele tetézt, amelyről már tettünk említést.

Ezen a pályázaton a két Bolyain kívül még Kerekes Ferenc (1784–1850), a debreceni kollégium tanára vett részt. Ma már tudjuk, hogy a három beküldött pályamunka közül Bolyai János *Responsio* című dolgozata volt a legjobb.

Annál is inkább, mivel mind Bolyai Farkas, mind Kerekes Ferenc értekezésébe hibák is becsúsztak. A pályázat eredményének a kihirdetése után mind a két Bolyai visszakérte dolgozatát, melyeket később Paul Stäckel a hagyatékukban megtalált. Bolyai Farkas *Sigillum veri simplex* (az egyszerű az igaznak jele) jeligével megjelölt dolgozata – melynek utolsó lapja sajnos hiányzik –, nagyrészt azt tartalmazza, ami a *Tentamen*-ben is megtalálható, valamint a János által már megbírált felfogást. Bolyai János *Fructus nonnisi maturi decerpendi* (csak az érett gyümölcsöt szabad leszedni) jeligéjű értekezését Stäckel 1899-ben megjelentette nyomtatásban, és ma már a latinon kívül német és magyar nyelven is olvasható.

Kerekes Ferenc az *Auf dem Gebiete der Mathematik...* (a matematika terén...) jeligével ellátott pályázati munkájában – amint Szénássy Barna is említi – mondanivalóját sajnos zavaros alapra építi.

A három beküldött dolgozat értékelését 1838 elején hozták nyilvánosságra, az alábbi megszövegezéssel:

„Az első munka, melynek jeligéje *Sigillum veri simplex*, részben abban a bajban szenved, hogy nyelvezete homályos, a fogalmak értelmezése nem világos, ok nélkül gyűjti halomra a szokatlan jelöléseket, és hiányában van a szüretelendő gyümölcsnek, hacsak a gyümölcsért kárpótlásul nem vesszük a szerzőnek azt a tanácsát, hogy azokat a görbéket, melyeknek egyenlete pusztán valós mennyiségekből van összetéve, fekete festékkel, azokat pedig, amelyeknél képzetes képletek szerepelnek, vörös festékkel ábrázoljuk.

Nem sokkal dicséretesebbnek mutatkozott a második munka, melynek jeligéje *Fructus nonnisi maturi decerpendi*. Ez amaz elsőhöz minden tekintetben, nevezetesen pedig abban hasonlított, hogy ha nem is olyan mértékben, ugyanabba a hibákba esik, melyeket az előbbinek megítélésénél megróttunk.

Az a munka, melynek jeligéje *Auf dem Gebiete der Mathematik...*, annyira kiválik a többi közül, hogy a Társaság a szerző úrnak a kérdéses díj felét ítélte oda, hacsak ő maga nem tartja jobbnak, hogy értekezését a Társaság programjában megjelölt hézagok és hiányok figyelembevételével 1838. november hó előtt átdolgozva és kibővítvé benyújtsa a Társaságnak. Felkéri tehát őt, hogy elhatározását, írásban közölje.”

A két Bolyai rövid időn belül, Kerekes viszont csak későn szerzett tudomást a kihirdetett eredményről és a neki szóló felhívásról. Figyelmesen követve a közzétett eredményhirdetés szövegét, János dolgozatáról egy semmitmondó, hozzá nem értésről árulkodó bírálatot olvashatunk. Bolyai Jánost, aki tudatában volt munkája értékének, lesújtotta a pályabírák ítélete. Ez már a második nagy csalódás, amelyet az *Appendix* fogadtatá-

sa után el kellett szenvednie. A reményét vesztt ember lelki fájdmán úgy próbál enyhíteni, hogy ő is megírja a véleményét a Társaság ítéletéről, melyet aztán a visszakért értekezéséhez csatolt:

„Kár, hogy e nagy kincs méltatlan kezekbe került. A Társaság tőle ktelhetőleg teljesítette kötelességét; most rajtam a sor, hogy én bíraskodjak a Társaság felett. Itt nincs mit védeni, hol az ellenfél mit sem bírál meg részletesen, még azt sem okolja meg, hogy valamit miért tart jelentéktelennek, vagy érthetetlennek, hanem csak halált mérő hatalmi szóval általában mondja ki az egésről, hogy haszontalan és érthetetlen. Az ilyen ritkán hallott ítélet csak olyan munkára illik, amely semmi jót vagy érthetőt nem tartalmaz; de rólam ilyent állítani, kinek sokkal nehezebb és rejtettebb dolgokkal volt alkalmam, egy Gauss (mely kolosszushoz képest ti csak törpék vagytok!) különös megbecsülését és meglegedését kiérdemelnem, ez valóban merészség, és nem tudom eleget csodálni, a Társaság hogyan merte – és nem érezte inkább szükségét, mielőtt ilyen döntő ítéletet bátorkodott kimondani, hogy [a dolgozatot] ismételten megvizsgálja –, mert ez örök szégyenre válik.”

Paul Stäckel, aki először közölte Bolyainak ezt a nyilatkozatát, a következő észrevételt fűzte hozzá:

„Igaz, hogy Jánosnak a képzetes mennyiségekre vonatkozó elmélete »nagy kincs«, melyet azonban, hogy értékesíthetővé váljék, előbb pénzé kellene kiveni; komoly lépést jelent ez az elmélet arról az álláspontról, melyet Gauss elfoglalt a komplex mennyiségek új tana felé. Ámde az, amit tisztán és világosan látunk, János előtt még ködbe és párába volt burkolva. Ő zseniális intuícióval sejtette a probléma megoldását, de arra már nem volt ereje, hogy kidolgozott, általánosan érthető alakban adja elő [...]».

Ebben a munkában csak a 10. § és a 11. §-nak egy része vonatkozik a képzetes mennyiségek geometriai szerkesztésére, amiért a logaritmusoknak és a haladványoknak a 8. §-ban tárgyalt, a maga idejét túlhaladó elmélet sem nyújthat kárpótlást, és a nemeuklideszi geometriára vonatkozó fejtegetések – önmagukban bármennyire érdekesek is – az akkori idők avatatlan olvasója előtt érthetetlenek voltak.

Ezek szerint a Társaságot nem illeti szemrehányás azért az ítéletért, melyet mély sajnálatára, János értekezéséről ki kellett mondania. Jánosnak természetesen ez az új balsiker igen nagy csalódást okozott, amely már amúgy is gyengült erejét évek során át megtörte.”

Szénássy Barna véleménye azonban a következő:

„A pályakérdés arra várt feleletet, vajon a geometriában előforduló képzetes mennyiségek szerkeszthetők-e? A bevezető sorok szerint a *Responsio* erre a kérdésre ad választ, de a tanulmány valójában vádirat a kérdés helytelen feltevése ellen. Bolyai János szerint a szerkeszthetőség itt egészen mellékes probléma, ezzel szemben igen fontos a komplex számok precíz értelmezése, valamint az a kérdés, hogy a geometriában hol van szerepük.

Ez utóbbi két vonatkozásában tartalmaz új eszméket a *Responsio*, mégpedig az elsónél Bolyai Farkas gondolatait továbbfejlesztve, a másodikonál az abszolút geometriára támaszkodva.”

Részben Bolyai naivsága nyilvánult meg akkor, amikor feltételezte, hogy a rá jellemző tömörséggel megírt dolgozatából a pályabírák érzékelni fogják utalását a komplex számok azon jelentőségére, melyet ezek a mennyiségek az új hiperbolikus geometriában játszanak. Hol voltak ők még akkor az *Appendix*-ben kifejtett eszméktől, amikor ez a munka el sem jutott hozzájuk! Mennyire beigazolódtott ez alkalommal is Bolyai már említett megjegyzése:

„Sohasem lehet a szerző hibája ha valamely ítélet csak azért ferde és lekicsinylő, mert az illető bíráló nem elég mestere a dolognak”.

Láttuk, hogy a három beküldött pályamunka közül szakmai szempontból egyedül Bolyai János dolgozata volt hibátlan. Mai szemmel nézve valóban felhozható egy-két kifogás, de ugyanakkor nem szabad elfelejtenünk, hogy a komplex számok elmélete abban az időben a matematikának még egy forrásban és kialakulófélben lévő része volt. Tehát csak a mostani leülepedett és kikristályosodott eredmények birtokában tehetünk néhány észrevételt. Egy ilyen megjegyzés lehet például az, hogy János a kelleténél több szimbólumot használ a *Responsio*-ban, ami részben túlzott precizitásának tanújele. A négy *műveleti* jelen kívül ugyanis még négy *minőségi* jelet is bevezet, mellyel a szöveg olvasását is megnehezíti. Ezenkívül a komplex számoknál manapság igényelt két egység, az 1 és az i helyett négy egységet vesz fel: az 1, i , -1 és $-i$ egységeket.

A sok új és értékes gondolatot tartalmazó *Responsio* nyolcoldalnyi eredeti kézirata a marosvásárhelyi Teleki–Bolyai Könyvtárban található. A mű 11 paragrafusból áll. Bolyai már az elsőben megemlíti, hogy a pályázatban kitűzötnél mélyebb problémákat is fog érinteni. Különös jelentőséggel bír a 6. §, melyben Bolyai – a vele egy időben közlétevő W. R. Hamilton ír matematikushoz hasonlóan – a komplex számokat rendezett valós számkettősként fogja fel, igaz, még nem éppen olyan kiforrott

formában, mint kortársa. Eredeti meglátást rejt a 8. §, melyben az apjának a valós számok logaritmusára vonatkozó újszerű felfogását a komplex számok esetére általánosítja. Mivel János nem ismerte A. Couchy (1789–1857) komplex függvénytan vizsgálatait, ezért ez az eredménye eredetinek tekinthető.

A matematikatörténészek a *Responsio* legértékesebb részének a 9. §-t tartják. Ebben szerzője az *Appendix*-re való egyszerű hivatkozással közli az abszolút trigonometria háromszögre vonatkozó két fontos képletét, megemlíti a hiperszféra fogalmát, továbbá, hogy az ezen a felületen érvényes hiperbolikus geometria trigonometriai képletei formailag megegyeznek a

$$\frac{k}{i}$$

sugarú gömb trigonometriájával. Ezekkel a vázlatosan közölt észrevételekkel azt igyekezett igazolni, hogy az i képzetes egységnek milyen óriási jelentősége van az általa megalkotott geometriai rendszerben, és ezzel a komplex számoknak új, eddig ismeretlen mértani alkalmazása tárul elénk.

A pályázatban kitűzött kérdésre a 10. és 11. §-ban igyekszik választ adni. A pályabírák alacsony színvonalán kívül Bolyai sikertelensége annak is tulajdonítható, hogy ebben a művében vázlatos tömörséggel fejt ki gondolatait. Azonban a *Responsio*-ból is sugárzik az *Appendix* szerzőjét karakterizáló eredetiség. „Minden elnagyoltsága mellett – írja Alexits György – a *Responsio* egymagában elég lenne ahhoz, hogy a Bolyai névnek helyet biztosítson a matematika történetében.” Paul Stäckel, aki a legtöbbet tett a *Responsio* nemzetközi megismertetése érdekében, így ír: „Ha nem is volt elég ereje, hogy gondolatait tisztázza és kialakítsa, ha fájdalom, nem adatott meg neki, hogy ifjúsága sokat ígérő gyümölcsét megérlelje, a képzetes mennyiségek elméletére vonatkozó alkotásai mégis méltók az *Appendix* szerzőjéhez, és örök időre helyet biztosítanak neki ennek az elméletnek a történetében.”

6.3. A komplex számok aritmetikája

Mivel Bolyai a párhuzamosok problémája mellett a komplex számok elméletével foglalkozott a legszívesebben, írásaiban az erre vonatkozó vizsgálatai élete végéig nyomon követhetők. Az évek folyamán írt, és mindmáig megőrzött papírlapjai gyakran rejtenek olyan szövegrészeket, melyek a komplex számokra vonatkozó eredeti meglátásokat tartalmaznak. Ezek nagy része az ő korában újdonság volt. Hogy ezen a téren is

még mindig akadnak fel nem tárt részek, azt Kiss Elemér legújabb kutatásai igazolják.

Bolyai János jól ismerte Gauss *Disquisitiones arithmeticae* című számelméleti munkáját, de a komplex számokkal foglalkozó igen jelentős dolgozatai közül sajnos már jóval kevesebbet. Bolyai Farkas leveleiben többször érdeklődött Gaussnál ilyen irányú munkáiról. A „Göttingai Kolosszus” azonban – nem tudni, mi okból – ezekről alig közölt információkat. Így – Kiss Elemér megállapításai szerint – János több olyan eredményre jutott, melyeket Gaussból függetlenül ő is felfedezett. Sőt még olyan meglátásai is voltak, amelyek Gaussnál nem találhatók meg. Az új adatok tanúbizonysága szerint Bolyai arra törekedett, hogy a számelmélet bizonyos fogalmait és tételeit – mint a prímszámok, prímtenyezőkre való bontás, kongruencia stb. – a komplex számokra is kiterjessze. Amint Paul Stäckel megjegyzi: „szám alatt János mindig egész számot ért, mely akár pozitív, akár negatív lehet”. Tehát vizsgálatai ez esetben is az $a + bi$ alakú komplex egészekre vonatkoznak, ahol a és b egész számok, i pedig az imaginárius egység. Megfontolt alapossággal próbálja osztályozni a komplex egészek gyűrűjében a prímszámokat, majd a számelmélet alaptételének megfelelőjeként itt is eljut a következő tételhez: *minden $a + bi$ alakú [komplex egész] szám (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelműen felbontható véges számú prímek szorzatára*. A komplex egész számok kongruenciájával is foglalkozott, és ezen a téren több figyelemre méltó megállapítást tett. Ezekkel az újabb adatokkal bővült az a kép, amelyet eddig a komplex számok terén végzett kutatásaiból ismertünk, más szóval „a Bolyai-kutatás egyik fehér foltja” tűnt el. Ha annak idején Bolyai ilyen irányú eredményeiről, ahogyan tervezte, „haladék nélkül egy kis terjedelmű munkát” tudott volna kiadni, akkor ma a tudománytörténet világszerte minden bizonnyal úgy is számon tartaná őt, mint a komplex számok elméletének egyik legjelentősebb megalapozóját.

7. Amiről még a kéziratok árulkodnak

A matematika a tudományok királya,
az aritmetika a matematika királynője.

C. F. Gauss

7.1. A *Raumlehre*

Bolyai János tervei között szerepelt egy matematikai enciklopédia közreadása, amely felölelte volna korának összes fontosabb ismeretét.

„Amikor apámat [erről] értesítettem – írja János –, hogy szándékom az egész matematikát kezdetétől fogva az elérhető, legszélsőbb tájékaig lehetőleg világosan és tökéletesen előadni, azt válaszolta: *Szerencsét kívánok! Ez szent gondolat! Ebből oly gyümölcs érhetik, melyet az idő már régen hordoz méhében, és egy ember életének méltó feladat. Sok időt fogsz vele eltölteni, még az elemi részekkel is, magamról tudom, bár te egészen másképp vagy felszerelve*”.

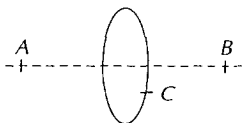
Ennek, mint egyik tervezett megjelentetési módozatát, az *Üdvtan* keretében képzelte el, amelyet a következő fejezetben ismertetünk. Erre utaló célzásokat már a János főhercegnek benyújtott folyamodványtervezetében is felfedezhetünk, amikor Bolyai azt írja, hogy „az eléggé felületesen tárgyalt matematikának a teljes reformjához fogtam hozzá”. Ebbeli törekvését valóban igazolja az 1832 táján elkezdett, de az előszó megírása után félbeszakadt *Reformation der Elemente der Mathematik* című munka tervezete. A mű két részből állt volna. „Az első rész, lényege szerint négy egymástól élesen elkülönített fő részre szakad; ezek a *számтан*, az *időtan* [algebra és analízis], a *tér tudománya* [geometria], a *mozgástan* [mechanika].” A második rész „a *logikát*, a *metafizikát*, ezek *szellemét és kritikáját*” tárgyalta volna. Érdekes idéznünk néhány sort az előszóból

annak bemutatására, hogy a matematikáért lelkesedő Bolyai János milyen gyönyörűen fejezi ki a matematikus hivatását:

„Elvitázhatatlan, hogy egyébként egyenlő körülmények közt, a matematikus a legnagyobb és legtisztább boldogságérzet tudatában van. Csak ő őrökdi szigorú értelmével, csak ő marad józan az érzéki mámortól. Csak őbenne (és nem az érzéki mámorban élő költőben, ki lelkesedésében ugyan gyakran, szépen csengő és az élet igen megható dolgait mondja el) lobog fel az égi tűz tiszta, világos fényében. Csak ő ismeri azt a magasztos kedélyállapotot, melyben hideg, nyugodt, s éppen ezért a legnagyobb lelkesedéssel szemléli a csodálatra méltó mindenséget és tőle telhetőleg a végső ok felé tör; mindennek az összefüggését és magyarázatát igyekszik megadni, és a legnagyobb szellem minél jobb megismerésére törekszik, minek lényege mind világosabban bontakozik ki előtte, mely benne ezáltal az iránta táplált fenséges szeretetérzet gyarapodását idézi elő. Ennek az érzetnek a legméltóbb és legnemesebb megnyilvánulása az, hogy az ő gondolata az extázis egy fajtát keltő lelkesedéssel tölt el bennünket. Aki úgy véli, hogy ennél magasztosabb feladatot és célt ismer, azt nem irigylem érte, hanem sajnálom kell őt.”

Egy kis szünet után, ez irányú tervének megvalósításához újból nekifog. Matematikai tárgyú följegyzései között egy vaskosabb kézirat található, mely a *Raumlehre* (a tér tudománya) címet viseli. A rendezett és gondozott anyag azonnal sejteti, hogy nyomtatásra kész munkának szánta. Úgy tűnik, hogy a megírásához 1850 körül fogott hozzá és 1855 után már nem folytatta, műve befejezetlen maradt. Főleg kínzó betegsége akadályozta ennek befejezésében, de a megjelentetés reménye sem serkenthetette munkájában. Az elkészült anyag három részre (fejezetre) oszlik, amelyek összesen 75 paragrafust tartalmaznak.

Az *Alapvetés* című első részben a geometria alapjait képező problémákat tárgyal. A *pontot* mint „rész nélküli részt” írja le, majd ezután egy „gyűrűnek” nevezett alapfogalom értelmezése következik: a *OABC gyűrű* a tér mindazon pontjainak összessége, amelyek az *A, B* pontpárhoz viszonyítva olyan helyzetben vannak, mint a *C*. Ha egy kicsit gondolkozunk, azonnal észrevevesszük, hogy a *OABC gyűrűt* elképzelhetjük úgy is, mint a *C* pontnak az *AB* tengely körüli forgatásából nyert kört (18. ábra). A gyűrű fogalmából kiindulva Bolyai rendkívül ötletesen származtatja az *A és B* pontok által meghatározott *abszolút egyenest*. Mindazon *C* pontok összessége, amelyekre nézve a *OABC gyűrű* egy ponttá (azaz magára a *C-re*) redukálódik, az *AB abszolút egyenest* származtatják. Ha a *C* pont az



18. ábra

AB abszolút egyenesen kívül fekszik, mint alaptétel ki van jelentve, hogy a $OABC$ egyszerű, egyenletes, zárt vonal.

Az egyszerű jelző úgy értendő, hogy a görbék lehetnek „egyszerűek” és „csomósak” (vagyis kettős vagy többszörös ponttal rendelkezők). „A pontoknak csak olyan összessége alkot egyszerű görbét, amelyek közül bármely ponttól akármelyik másik pontba vagy csak egy – anyagi pont által befutható – út vezet, vagy mindig legfeljebb két ilyen út létezik”. Bolyai ezen definíciójában az utóbbi nyilván a zárt egyszerű görbe esete, mint amilyen például a kör is. Ebben az intuitív szemléleten alapuló értelmezésben a mechanikai mozgás szerepeltetése a görbe folytonosságát involválja. Bolyai hasonló megfontolások alapján vezeti be a továbbiakban az *abszolút sík*, a *kerekség* (gömb), az *egyszerű felület* stb. fogalmait. A fentiek is ízelítőt adnak mély alaposságra és eredetiségre törekvő felfogásából. Kétségtelen, hogy ebben néha az apja hatása vagy a vele való nézetazonosság vehető észre.

A *Raumlehre* második része a *Szerkesztéstan*. Bolyai a geometriai szerkesztéseknek komoly jelentőséget tulajdonított. Amint láttuk, az *Appendix* utolsó paragrafusai is ezzel foglalkoztak. Úgy tűnik, hogy nagy hatással volt rá L. Mascheroni (1750–1800). *Geometria del compasso* (Pavia, 1797) (A körző geometriája) című munkája, melyet Bolyai több alkalommal dicsér.

A *Raumlehre* harmadik része a szögek és sokszögek tulajdonságaira vonatkozik.

A *Raumlehre* Bolyai utolsó nagyobb terjedelmű matematikai munkája, melyben itt-ott felcsillannak az őt még mindig jellemző eredeti ötletek. Egy-két paragrafusban túl messze elkalandozik, és néha alig lehet megérteni, hogy mit is akar mondani. A *Raumlehre*-ből már hiányzik az *Appendix*-re végig jellemző csodálatos, kristálytiszt logikai felépítés és előadásmód. Egyesekkel ellentétben mégis igazat kell adnunk azon életrajzíróinak, akik szerint alkotó- és munkaereje az 1830-as évek második felétől érezhetően hanyatlott. De a *Raumlehre* a bizonyossága annak, hogy alkotóképességét – habár meggyengülve is – élete végéig megőrizte.

Paul Stäckel mutatott rá, hogy nagy jelentőséggel bírnak Bolyainak a *Raumlehre* című munkához csatolt jegyzetei. Ezekben a poliéderekre vonatkozó *Euler-féle* összefüggéssel valamint az egyszerű felületek külön-

böző fajainak a tárgyalásával foglalkozik. Egy P poliéder Euler-féle karakterisztikája, melyet $\chi(P)$ -vel szokás jelölni, a következő:

$$\chi(P) = c - \acute{e} + l,$$

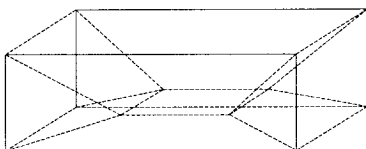
ahol c a csúcsok, \acute{e} az élek, l a lapok száma.

Euler tétele alapján a gömbbel homeomorf poliéderek esetében (melyek közül legegyszerűbbek a konvex poliéderek) $\chi(P) = 2$. Egyszerű példaként megemlítjük a kockát, ahol $c = 8$, $\acute{e} = 12$, $l = 6$.

Bolyai más típusú poliéderek esetében is megvizsgálta az Euler-féle karakterisztika értékét:

„A minden poliéder lapjainak, éleinek és csúcsainak számára vonatkozó fenséges Euler-féle tétel már régóta, de úgy látszik nem kellő általánossággal van bebizonyítva, mert nem minden poliéder-reláció nyerhető gúllák lenyесése útján. Fogjunk hozzá újból!... az Euler-féle reláció bebizonyítását a gyűrű alakú poliéderek és üreges síkterek esetére is [kiterjeszthetjük].”

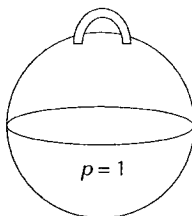
Ez egy valóban érdekes vizsgálat. Maga Euler csak a gömbbel homeomorf poliéderekre állapította meg tételét, igazolva, hogy az említett karakterisztikáját adó összefüggés értéke minden ilyen poliéderre nézve 2-vel egyenlő. A 19. ábrán viszont egy „gyűrű alakú” poliéder látható, amely már nem a gömbbel, hanem a *torusz*-szal homeomorf felület. Ennél a poliédernél $c = 12$, $\acute{e} = 24$, $l = 12$, tehát az Euler-féle karakterisztikája $\chi(P) = c - \acute{e} + l = 0$.



19. ábra

Bolyai idejében még nem fejlődött ki a geometriának ma *topológia* néven ismert ága. Így igen jelentős az a megjegyzése, amelyet az *egyszerű felületek* különböző fajainak a tárgyalásánál fejt ki. Itt leírja, hogy az egyszerű és összefüggő felületekből hogyan nyerhetjük az egyszerű felületek új típusait:

„Lehet valamely tetszés szerinti egyszerű felületből tetszés szerinti számmal lyukakat kiemelni, e helyekre csöveket illeszteni és ezeket páron-



20. ábra

ként egyesíteni. A legáltalánosabb esetben az egyszerű felület ilyen természetű.”

Vegyünk egy „egyszerű felületet”, például a gömböt, amelyen $2p$ számú – tegyük fel, hogy kör alakú – lyukat vágunk és ezeket páronként csövekkel, vagy úgynevezett fogantyúkkal való összekötés által beragasztjuk (20. ábra). Az így kapott *irányítható felületet* p fogantyúval ellátott gömbfelületnek nevezzük. Minden irányítható zárt felület homeomorf valamely megfelelő számú fogantyúval ellátott gömbbel (a p lehet zéró is). Például $p = 1$ esetén a torussszal homeomorf felületeket kapjuk. A p szám az illető felület *nemszáma*. Az ilyen F felületek p nemszáma és $\chi(F)$ Euler-karakterisztikája között a következő összefüggés áll fenn:

$$\chi(F) = 2 \cdot (1 - p).$$

Mind a p , mind a $\chi(F)$ az F felület *topologikus invariánsa*. A Bolyai által említett „gyűrű alakú” poliéderek esetében $p = 1$, tehát $\chi(P) = 0$. Ezen az akkoriban ismeretlen területen persze Bolyai még nem hatolt ennyire előre. Mindezt csak azért említettük, hogy ezáltal is érzékeltesük azt a matematikai mélyenlátást, amellyel a topológia jövőbeli kivételes jelentőségét megsejtette.

7.2. Küzdelem a „megoldhatatlan” problémákkal

A kézirati hagyaték átnézése közben Paul Stäckel olyan cédulákat is talált, amelyekre Bolyai János azokat a problémákat jegyezte fel, amelyekkel az elkövetkezőkben foglalkozni akart, vagy a tervezett nagy enciklopédikus műve részére akart megírni. Ezek közül említsünk meg mi is néhány érdekesebb témakört:

- valamennyi egyenlő poliéder végszerű egyenlőségének bebizonyítása;
- bármely egyenletnek algebrai úton való megoldása;
- minden differenciál véges integrálása;

- valamennyi fajtájú törzsszám véges alakja [képlete];
- minden végtelen sor véges összegezése;
- minden véges egyenletnek vagy egyenletrendszernek racionális megoldása;
- a mozgás tökéletes tana;
- a folyadék tökéletes tana.

Figyelmesen olvasva ezeket a témaköröket, észrevehetjük, hogy néhány esetben már a kérdések megfogalmazása elvágja a sikerhez vezető utat. Ugyanis, ezeket úgy teszi fel, mintha a megoldások lehetségesek lennének, csak meg kell találni azokat.

Bolyai szerette a rejtélyes, minden bizonyítási kísérletnek ellenálló problémákat, és külön vizsgálat tárgyává tette mindazokat a kérdéseket, amelyek megoldási lehetőségeiről Gauss egyik vagy másik művében kételkedően nyilatkozott. Ezek közé sorolhatjuk például az első három említett témakört. A marosvásárhelyi Teleki–Bolyai Könyvtárban őrzött matematikai tárgyú kéziratok igazolják, hogy János behatóan foglalkozott ezekkel a kérdésekkel.

Apjának egyik legnagyobb jelentőségű önálló matematikai eredménye a *végyszerű területegyenlőség* fogalmának a bevezetése, amely napjainkban a modern területszámítás megalapozásában fontos szerepet játszik. Értelmezése szerint: két egyenlő területű síkidom akkor végszerűen egyenlő, ha véges számú, kölcsönösen egybevágó darabokra oszthatók. Bolyai Farkas a bizonyítását is megadta a ma már a nevét viselő tételnek:

Két, egyenes vonalakkal határolt, egyenlő területű síkbeli sokszög végszerűen egyenlő.

Szintén ő vetette fel a végszerű térfogat-egyenlőség kérdését is. A síkbeli esethez analóg módon, két egyenlő térfogatú poliéderről akkor mondjuk hogy végszerűen egyenlő, ha véges számú, páronként egybevágó darabokra bonthatók.

„Vajon valamely tetszés szerinti – írja Bolyai Farkas – háromoldalú gúla végszerű egyenlőség útján hasábra vezethető-e vissza vagy sem (ez mostanig) még nincs tisztázva.”

Bolyai János ennél még általánosabban vetette fel a problémát. Ő nemcsak a háromoldalú gúlára, hanem bármely tetszőleges poliéderre vonatkozóan vizsgálta ezt a kérdést. Hagyatékában ezt olvashatjuk:

„Apámnak az volt az eszméje, hogy mindenütt, ahol csak lehetséges, a végszerű egyenlőséget mutassa, és engem már kora ifjúságomban, ter-

mészetesen csak néhány figyelmeztetéssel, utasított erre a fogalomra [...]. A gúla feladata, nevezetesen bármely két egyenlő [térfogatú] háromoldalú gúla és evvel együtt bármely két [egyenlő térfogatú] síktér, vagyis poliéder végszerű egyenlőségének kimutatása reám nézve egyike volt a legridegebbeknek, a legnagyobb ellenállást kifejtőknek és hihetetlen nehézségeket okozott nekem... Izgatva a feladat egészen sajtáságos, legnagyobb mértékű csinossága által, nem kevés időt szántam neki, de ami a fő célt illeti, teljesen eredménytelenül. Aki erről meg akar győződni, és erejét meg akarja ismerni, az fogjon hozzá.”

Kéziratainak számos oldala tanúskodik arról, hogy sokat bajlódott ezzel a kérdéssel. Előbbi szövegéből érződik, hogy arra a konklúzióra jutott, miszerint a síkbeli esettel ellentétben a térben ennek nincs mindig megoldása. Valóban, néhány évtizeddel később Bricard és Dehn vizsgálatai kimutatták, hogy két poliéder átdarabolása csak bizonyos feltételek teljesülése esetén lehetséges. Ma már tudjuk például, hogy az egyenlő köbtartalmú hasábok végszerűen egyenlők, de két gúla térfogatának egyenlőségéből már nem következik szükségszerűleg, hogy végszerűen egyenlők.

Bolyai Jánosnak szinte mindegyik életrajzírója megemlíti, hogy geometriai beállítottsága ellenére, behatóan foglalkozott az algebrai egyenletek elméletével is. Gauss 1799-es doktori disszertációja, a *Demonstratio nova*, amelyben az algebra alaptétele nyer legelőször szigorú bizonyítást, János fiatalkori olvasmányai közé tartozott. Ebben Gauss annak a tételnek a bizonyítását adja, hogy minden komplex együtthatójú algebrai egyenletnek van megoldása (gyöke) a komplex számok testében. Különös jelentőséggel bír viszont annak a kérdésnek a tisztázása, hogy egy adott algebrai egyenlet esetében hogyan kapjuk meg ezeket a gyököket. Ez a kérdés a 16. századtól kezdve foglalkoztatta élénken a matematikusokat, közülük főleg az itáliaiak, Scipione del Ferro (1465–1526), Tartaglia (Niccolò Fontana) (1500–1557), Girolamo Cardano (1501–1576), Ludovicco Ferrari (1522–1565) tűnt ki. Erőfeszítéseik révén döntő előrehaladás történt a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldóképleteinek megtalálása felé. Igazolást nyert, hogy az első-, másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek esetében megoldhatók azok a zárt képletek, amelyek az együtthatók függvényében a négy alapművelet és a gyökvonás felhasználásával az illető egyenlet gyökeit határozzák meg. A következő kérdés az volt, hogy folytatható-e ez a négynél magasabb fokú általános algebrai egyenletek esetében is. Érdemes eredményt ezen a téren szintén egy olasz matematikus, Paolo Ruffini (1765–1822) ért el, aki azt állította, hogy a négynél magasabb fokú általános algebrai egyenletek esetében nincsenek gyökmeghatározó képletek. Ennek többféle bizonyítását is kö-

zölte, ám később mindről kiderült, hogy hibás. A döntő lépéseket a tragikusan rövid életű Niels Abel (1802–1829) és Evariste Galois (1811–1832) tette meg, akik igazolták Ruffini állításának helyességét. Abel – aki ugyanabban az évben született mint Bolyai János – a norvégok jeles matematikusa csak a harmadik nekifutásra tudott úrrá lenni a feladaton. Először ő is, mint sokan mások, az ötödfokú egyenlet gyökmeghatározó képleteit kereste, és kezdetben azt hitte, hogy meg is találta azokat. Egy 1824-es tanulmányában azonban leleplezte előző gondolatmenetének hibáját, és arra a meggyőződésre jutott, hogy az általános ötödfokú egyenlet a szokásos képletekkel nem oldható meg. De bizonyítása, akárcsak Ruffinié, hézagos volt. Két év múlva, 1826-ban azonban már hibátlan bizonyítást adja a Ruffini által is megfogalmazott állításnak. Abel a Crelle-féle folyóiratban közölte munkáit. Galois későbbi eredményei aztán végleg eldöntötték Ruffini állításának helyességét bármely négyenél magasabb fokú általános algebrai egyenlet esetében. A szóban forgó tétel később Ruffini–Abel-tétel néven vált ismertté a matematika történetében.

Bolyai János Andreas von Ettingshausen könyvéből szerzett tudomást Ruffini általa is hibásnak tartott bizonyításáról. Ezen kívül még J. L. Lagrange (1736–1813) munkái is megfordultak a kezében, aki szintén e probléma tisztázásán fáradozott. Ezt a kérdést János az apjával is többször megtárgyalta. Mivel az egyik munkájában Gauss is kétkedően nyilatkozott a négyenél magasabb fokú egyenletek megoldási lehetőségeiről, János többször nekifogott az ötödfokú egyenlet megoldási képleteinek a megkereséséhez. Ami Bolyainak erre vonatkozó kézirati hagyatékát illeti, komoly jelentőséggel bírnak Kiss Elemér nemrég végzett kutatásai. Ebben megerősítést nyert az a régebben is ismert megállapítás, hogy Bolyai éveken át foglalkozott a négyenél magasabb fokú egyenletek megoldási lehetőségeivel, mivel a világtól szinte elzárva sajnos nem szerzett tudomást Abel és Galois munkáiról. Ruffini hibás bizonyítása pedig táplálta benne a reményt, hogy erőfeszítéseit siker koronázza. A Kiss Elemér által felszínre hozott adatok főleg azért jelentősek, mert ezek azt mutatják, hogy Bolyai idővel tudatosan felmérte próbálkozásainak sikertelenségét, és két különböző kézirati töredékben megfogalmazza a Ruffini–Abel-tételt, vagyis hogy a négyenél magasabb fokú általános algebrai egyenletek esetében nincsenek gyökmeghatározó képletek. Sőt az egyikben annak bizonyítását is megkezdte, de sajnos folytatása hiányzik.

A Bolyai által kitűzött témakörök között szerepel egy harmadik „megoldhatatlan” probléma is: „minden differenciál véges integrálása” címen. Ezt a témakört szintén abban az időben tisztázták. Kimutatták, hogy az úgynevezett elliptikus integrálok eredményei nem fejezhetők ki véges alakban írt elemi függvényekkel. Bolyai az ilyen típusú függvények integ-

rálásának a nehézségeibe főleg akkor ütközött, amikor a hiperbolikus térbeli tetraéderek köbtartalmát akarta kiszámítani. Ezen a téren végzett vizsgálatairól kéziratai talán még tartogatnak meglepetéseket.

Befejezésül megemlíjtük még egyik diákkori eredményét, amely az ókor egyik híres problémájára, a szögharmadolásra vonatkozik. Ez a feladat azt kéri, hogy csak körző és vonalzó segítségével osszunk fel egy tetszőleges szöget három egyenlő részre. Amint később beigazolódott, a kitűzött szerkesztés általános esetben nem végezhető el. János 17 éves korában kimutatta, hogy ha felhasználhatja azt a meghúzott görbét, amit mi egyenlő oldalú hiperbolának nevezünk, akkor a szögharmadolás elvégezhető.

7.3. Későn észlelt számelméleti kutatások

Hosszú ideig tartotta magát az a vélemény, hogy Bolyai Jánost különösebben nem érdekelték a számelméleti problémák. Ezt a következtetést abból szűrték le, hogy semmiféle ilyen vonatkozású eredményéről nem volt tudomásunk. Pedig János jól ismerte Gauss *Disquisitiones arithmeticae* (1801) című számelméleti remekművét. Ezzel kapcsolatban Farkas a következőt írta 1831. június 20-án Gaussnak:

„Fiamnak szándéka volt, hogy a Te körosztás elméletedet németre fordítva, a kisebb kaliberű elméknek könnyebben hozzáférhető módon adja ki, mert bosszantja, hogy ezt az elméletet nem ismerik annyira, amint ő kívánná.”

Maga János pedig így ír a szóban forgó műről:

„Az, ki az emberi elméknek egyik legremekebb és mélyebb mívén erejét meg akarja próbálni, és magát a netaláni maga-kétség-kórságából meggyógyítani, annak ajánlom például a Göttingai Kolosszus Gaussnak *Disquisitiones arithmeticae* című munkáját.”

Farkas többször említette Jánosnak az analízis és az aritmetika komoly kutatási lehetőségeit. Egyik alkalommal azt javasolta, hogy készítse el a legegyszerűbb bizonyítását a $4n + 1$ alakú prímszámok két négyzet összege alakjában való előállításának, vagy szolgáltatassa egyszerű igazolását a következő tételnek: ha két négyzetszám összege osztható egy másik négyzetszámmal, akkor a hányados vagy maga is négyzetszám, vagy pedig két négyzetszám összege.

A közelmúltig a Bolyaiakkal foglalkozó monográfiák és tanulmányok szerzői, szinte egybehangzó következtetéssel állították, hogy az abszolút geometria megalkotója alig foglalkozott számelméleti kérdésekkel, és amit ezen a téren elért, nem különösebben jelentős. Kiss Elemér legfrissebb kutatásai azonban kimutatták, hogy zseniális matematikusunk számelméleti vizsgálatai is jelentősek, több olyan tulajdonságot és tételt fedezett fel, melyeket jóval későbbi, de szerencsésebb körülmények között dolgozó matematikusok újra feltaláltak és nyomtatásban közöltek, ezért ma ezek az eredmények az ők neveikhez fűződnek.

Amint Kiss Elemér hangsúlyozza, Bolyai János számelméleti vizsgálatai között megkülönböztetett helyet foglalnak el a prímszámok. Egyik rejtett törekvése a prímszámok megadására alkalmas képlet felfedezése volt. Az ehhez vezető út kiindulópontját a kis Fermat-tétel által kimondott kongruencia-relációban látja, mely szerint: ha p prímszám, a pedig p -vel nem osztható egész szám – vagyis a és p relatív prímek –, akkor $a^{p-1} - 1$ különbség osztható p -vel, amit kongruencia-relációs alakban még így is írhatunk: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Ennek a tételnek a fordítottja így hangzik: Ha n nem osztója a -nak, és $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, akkor n prímszám. Ha a fordított tétel is igaz lenne, akkor ez már nagy lépést jelentene az óhajtott képlet megtalálása felé. Annak igazolására, hogy a fordított tétel nem igaz, elegendő legalább egy olyan n összetett számot találni, amely kielégíti az $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ relációt és n nem osztója a -nak. És ha találunk ilyen n összetett számot, akkor ezt pszeudoprímnek, vagy álprímnek nevezzük.

„Apja ösztönzésére – írja Kiss Elemér – megkísérelte bebizonyítani a kis Fermat-tétel fordítottját. Ha a bizonyítás sikerrel jár, akkor ez a tétel szolgáltatna volna a hőn áhított prímszámképletet. Néhány kísérlet után rádöbbsent arra, hogy a bizonyítás lehetetlen, vagyis a kis Fermat-tétel fordítottja általában nem érvényes. Megpróbált ellenpéldát keresni. Fáradozását siker koronázta. A prímek képletét ugyan nem sikerült megtalálnia, de rátalált az első álprímszáma.”

Világos, hogy a vizsgálatok akkor a legegyszerűbbek, ha $a = 2$. Bolyai ezt az esetet tanulmányozva azt találja, hogy az $n = 341$ szám teljesíti azt a feltételt, hogy $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, bár $341 = 11 \cdot 31$, vagyis a 341 már nem prímszám. A 341 a legkisebb álprímszám.

Ezt a számot a következő ötletes eljárással kapta: feltételezte, hogy $n = p \cdot q$, melyre az $a^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}$ kongruencia teljesül, ahol p és q prím-számok, a pedig olyan egész szám, amely nem osztható sem p -vel, sem q -val.

Vizsgálatai során végül is a következő eredményre jut:

ha $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{q}$ és $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}$, akkor $2^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}$, vagyis

ha p és q két olyan prímszám, amelyekre

$$\frac{2^{p-1}-1}{q} \text{ és } \frac{2^{q-1}-1}{p}$$

és egész számok, akkor $n = p \cdot q$ a keresett álprím. Rendre kipróbálva, hogy milyen prímszámok teljesítik az előbbi két feltételt, eljut a $p = 11$ és $q = 31$ számokhoz, és ezáltal a $11 \cdot 31 = 341$ számhoz.

Amint Kiss Elemér kihangsúlyozta, Bolyainak ez az eredménye, amelynek segítségével az említett álprímet is megkapta, nem más mint James Jeans (1877–1946) tétele, amelyet az angol matematikus és csillagász 1898-ban közölt. Ha annak idején, 1869 és 1894 között, amikor a Bolyai-kéziratok a Magyar Tudományos Akadémiá voltak, az átvizsgálással megbízott testület rábukkant volna erre az eredményre és közölte volna azt, akkor ez a tétel ma a számelméletben nem *Jeans*, hanem *Bolyai* néven lenne ismert, hiszen nagy matematikusunk egy fél évszázaddal korábban fedezte fel.

Bolyai a kutatásai során más álprímeket is talált, az általa kapott tételt pedig megpróbálta általánosítani. Ennek érdekében felveti az $a^{pqr-1} \equiv 1 \pmod{pqr}$ eset tárgyalását, ahol p, q, r prímszámok, a pedig olyan egész szám, amely nem osztható ezek közül egyikkel sem.

Említettük már, hogy Bolyai Farkas a $4n + 1$ alakú prímszámokra hívta fel fia figyelmét. Ezt követően Bolyai János négyféleképpen bizonyította azt a tételt, mely szerint a $4n + 1$ alakú prímszámok, ahol n egy természetes szám, egyértelműen felírhatók két egész szám négyzetének összegeként. Bizonyításánál János a komplex egészeket is felhasználta.

Bolyai foglalkozott még a $2^n + 1$, valamint $2^{2^n} + 1$ úgynevezett Fermat-féle számokkal is. Ezek a számok többek között – amint az *Appendix* befejező mondatai igazolják – azért foglalkoztatták őt, mert komoly szerepet játszanak a szabályos sokszögek körzővel és vonalzóval történő gauszi szerkeszthetőségi elméletében.

Bolyai János kézírataiban a Wilson tételével kapcsolatos gondolatok is előfordulnak. Ez a tétel kimondja, hogy ha p prímszám, akkor $(p-1)! + 1$ osztható p -vel. Ennek a tételnek a fordítottja is igaz: ha $(n-1)! + 1$ osztható n -nel, akkor n prímszám. Gauss a *Disquisitiones arithmeticae* című munkájában – amelyből a Bolyaiak számelméleti ismereteik legnagyobb részét merítették – nem tesz említést a fordított tételről, melyet máskülönben még művének megjelenése előtt mások már igazoltak. Farkas erről mit sem tudva, felveti a fordított tétel bizonyításának a gondolatát. Apja kezdeményezésére János azonnal megadja ennek bizonyítását.

Végezetül említést teszünk a Bolyai János által szerkesztett bűvös négyzetről. Bűvös négyzet a természetes számokkal képezett olyan négyzetes

mátrix, amelynek minden sorában, minden oszlopában és minden átlójában lévő számok összege ugyanaz. Az általa szerkesztett harmadrendű bővös négyzet a következő:

x	y	$3b-x-y$
$4b-2x-y$	b	$2x+y-2b$
$x+y-b$	$2b-y$	$2b-x$

Amint látható, ennek nagyfokú pozitívuma, hogy nem egy egyedi, sajátos esettel van dolgunk, hanem az x , y és b megválasztásával (úgy, hogy szintén természetes számokat kapjunk) végtelen sok bővös négyzetet származtathatunk. Kéziratának egyik mondatában szerepel a további általánosítás gondolata is: egyrészt a harmadrendűn kívül a tetszőleges n -ed rendű bővös négyzetek felkutatása, másrészt olyan bővös négyzetek szerkesztése, ahol a tagok oszlopok, sorok vagy átlók menti összegének egyenlősége helyett az illető tagok szorzatának egyenlősége szerepel.

„Ha számba vesszük Bolyai Jánosnak fentebbi eredményeit – írja Kiss Elemér –, akkor a magyarországi számelméleti kutatások kezdetét mintegy fél évszázaddal előre kell helyeznünk... [és] elmondhatjuk, hogy az első magyar matematikus, aki a számelmélet terén jelentős eredményeket ért el, az Bolyai János volt.”

8. Filozófiai és társadalmi nézetei

Az igazság nem más, mint a bölcsesség
ember általi szeretete.

G. W. Leibniz

8.1. Filozófiai gondolatok Bolyai életművében

Bolyai János filozófiai nézeteiről, kézírataiban található számos filozófiai tárgyú okfejtéséről, valamint az *Appendix* ilyen vonatkozású jelentőségéről külön kis kötetet is lehetne írni. Ugyancsak apja volt az, aki felkeltette fiában „a filozófia iránti tiszta lelkesedést”. Ehhez minden bizonnyal hozzájárult még kedvelt kollégiumi filozófiatanára, Köteles Sámuel is.

„Bolyai nem foglalkozott filozófiai rendszerek felállításával – írja Tóth Imre –, nézeteit nem is fejtette ki rendszeresen. De a felfedezéséből és kutatásaiból eredő legfontosabb filozófiai konzekvenciákat pontosan átlátta. Filozófiai megjegyzései szórványosak és mindenütt szorosan a kutatás konkrét anyagához kapcsolódnak. Ő a reá jellemző merészséggel fogott hozzá a felfedezéseiből eredő tanulságok filozófiai általánosításához. És itt is a helyes úton járt, ha ezt az utat a korára jellemző korlátok miatt nem is járhatta be egészen végig.

Bolyai filozófiája legerőteljesebben és legvilágosabban nem annyira szavaiban, mint inkább tetteiben nyilvánul meg: az *Appendix*-ben és a képzetes mennyiségek elméletében.

Nem azzal látott munkához, hogy filozófiai nézeteit szabatosan kifejtse és rendszeres formába öntse, hanem azonnal és közvetlenül a gyakorlati kutatásban alkalmazta őket. Abszolút geometriájában Bolyai szintetikus módszerrel, egyidejűleg, egyben tárgyalja a két, egymással ellentétes Σ - és S -rendszert. Ezáltal gyakorlatilag alkalmazta az ellentétek egységéről szóló dialektikus tanítást. Bolyai szintetikus, abszolút tárgyalásmódjának, tudományos, elvi jelentősége abban áll, hogy rendkívül meggyőzően, úgyszólván kézzelfoghatóan adja vissza a valóságos tér dialektikus el-

lentéiteit. Az alkalmazás módja természetesen spontán volt. De a megalkuvás nélküli elméleti tudós helyes érzékével és a lángész biztonságával, Bolyai helyesen alkalmazta a dialektikus logikát kutatásaiban, anélkül, hogy tudta volna, mi az a dialektika. Csak később, az *Appendix* keletkezésének történetéről írva mutat rá Bolyai azokra az elvekre, amelyek a kutatásaiban vezették. Későbbi nyilatkozatai híven tükrözik, milyen mértékben vált benne tudatossá az *Appendix*-ben spontán módon nyilvánuló bölcséleti felfogás.

Idézett nyilatkozataiból kitűnik: Bolyai felismerte, hogy geometriája alapjainál egy új filozófiai felfogás áll, hogy ez szemben áll az idealizmus minden válfajával, valamint a vulgáris materialisták felületes empirizmusával, de nem találta meg a kapcsolatot a mechanikus materializmust meghaladó korabeli materializmussal.

Az új geometria dialektikus elemei spontán módon nyilvánulnak meg nála. De ennek ellenére többé-kevésbé nyíltan is fel-felcsillannak. Így mindenekelőtt a konkrét és az elvont, a látszat és a lényeg viszonyát illetőleg [...].

Figyelemre méltó, hogy a képzetes mennyiségek vizsgálata során milyen élénken és plasztikusan nyilvánulnak meg nála a matematika dialektikus felfogásának elemei: »az egyenlők különböző tulajdonságokkal vannak felruházva« – írja a *Responsio*-ban, majd 1850 táján, magyarázólag a következőket fűzte ehhez: »és hasonlóképpen lehetséges, hogy ugyanaz a személy, vonatkozással különböző személyekre, egy időben és egyszerre apa és fiú«.

Azt viszont Bolyai már tudatos alapossággal észrevette és ki is hangsúlyozta, hogy a nemeuklideszi geometria felfedezése megdönti Kant *apriorisztikus* térszemléletét, mert „a tér tulajdonságairól csak a kísérlet, a tapasztalás, és a mély elméleti vizsgálódások tudósíthatnak bennünket”. Tehát az új geometria felfedezése éppen azt bizonyítja, hogy az euklideszi tulajdonságok *a priori* nem szükségszerűek, hogy a térnek más, az euklideszitől eltérő tulajdonságai is lehetnek. Ez nem volna lehetséges, ha a tér tulajdonságait kifejező euklideszi tulajdonságoknak *csak* az egyedüli *a priori* szükségszerű érvényük volna. Ráadásul a két geometria mindegyikének keretén belül megvalósul a vele ellentétes másik geometria: az *S*-rendszer paraszféra felületén a Σ -rendszer, a Σ -rendszer pszeudoszféra felületén az *S*-rendszer. Nem kétséges tehát, hogy az új geometria felfedezése komoly hatással volt a filozófia további fejlődésére.

Bolyai kéziratai nagyon sokat árulnak el konkrét filozófiai megfigyeléseiről és nézeteiről. A „tér és az idő” apja által oly fontosnak vélt két filozófiai kategóriáján kívül élénken értekezik az anyag és mozgás viszonyáról, a világegyetem és az élet kialakulásáról, a biológiai fejlődés mozzanatairól.

ról, ismeretelméleti kérdésekről, a természeti törvények mibenlétéről és érvényesüléséről, a közerkölcs, etika és szabadság problémáiról, Isten fogalmával és a léttel való viszonyáról, hogy csak néhány fontosabb témakört említsünk.

Különböző módon, de Bolyai számtalanszor hangoztatta, hogy a tudomány az objektív valóság megismerésére törekszik. Az ő korában – amint már említettük – az a felfogás volt divatban, mely arra is enged következtetni, hogy a tudomány nem a valóságot tükrözi, hanem a tudat a priori fogalmait. Egyrészt ezt a dogmatikus idealizmust, másrészt a kételkedő agnoszticizmust Bolyai élesen elítélte:

„Csak beteg agyvelő, nem pedig komoly, józan belátás vezethet azon szédeltető ábrándra, mellyel az úgynevezett idealista filozófusok aggodnak, tépelődnek, miszerint az ők szerencsétlen, elficamodott, lázas ábrándjukon kívül semmi sem volna. Leomlik tehát ez. Azon más felekezete a filozófusoknak, akik magukat kétlőknek, szkeptikusoknak nevezik, némileg inkább ajánlja magát: amennyiben óvakodásra int a tanakodásban, és az elhirtelenkedéstől őriz, int; de az is rémületbe és túlzásba esik, mihelyt azt állítja, hogy éppen semmi bizonyos ismeretre ne lennének képesek szert tenni [...] sok tanokra igenis képesek vagyunk, tehát a *kételeyre* nézve is az illő középutat jó megtartani.”

Az akkoriban igen divatos Kant felfogását nyíltan is bírálja:

„a különben sokérdemű és szépelméjű Kant erősen alaptalan, s helytelenül elficamodva az értelmetlen tant is találta állítani: hogy a tér és az idő nem önálló valami, hanem csak nézet vagy látványaink idoma (!)”.

Kézirataiban kifejezésre jut a tér és az anyag bizonyos egységéről valló felfogása:

„Minden anyagnak (valamely) alakja van, – alakban jelenik meg, s (puszta) üres alak nincs”.

Sokat árul el a következő kijelentése:

„Ami egyszer látszik, anyag vagy mozgás, annak öröktől fogva léteznie kell és fenn kell maradnia; és a tapasztalat arra mutat, felismerni engedni, hogy a természet folyása örök, változatlan, szükségszerű törvények szerint megy végbe”; majd máshol így folytatja: „Az Isten és senki ugyan az anyagot, vagyis új anyagot semmiből nem teremthetett, azaz,

ott ahol egykor nem volt, s azután lett, csak máshonnan mozgatva állíthatott elő, s csak az anyag alakját változtathatja, s új anyagot nem teremthet, mint [ahogyan] időt és tért sem teremthet senki”.

Természetfelfogásában a mozgás és az anyag szoros egységet képeznek, amit tömören így fejez ki: „Minden ami mozog, anyagi testtel bíró (és megfordítva)”. Máshol pedig ezt írja: „A külső világ minden változása mozgás”. Ez utóbbinál az ő idejében igen figyelemreméltó az, hogy nem korlátozza a mozgást a pusztá mechanikai változásra, és ugyanakkor még kijelenti: „mozgás van szüntelen, nyugalom (soha, semmikor) egykor sincs”.

A természet és a világegyetem tárgyainak valamint jelenségeinek kölcsönhatásait Bolyai így fogalmazza meg:

„A külső vagy anyagi világ egy részének állapota és változása (néha) befolyással, hatással lehet egy másik (részének) helyzetére vagy állapotára. A világban minden változás (amely csak mozgás lehet) a világ más darabjainak, sőt az összes pontok megváltozását is maga után vonhatja [...]. Az egész világ részei között szükséges és szoros törvényszerűség van, vagyis az egész világ kétségen kívül egy, mégpedig tökéletesen élő egész [...]. A világ minden pontja változik anélkül, hogy megmerevedne, a világ, a (külső) természet él!”

Bolyai a gondolkodást is az anyag egyik tulajdonságából származtatja: „magának az anyagnak (éppúgy, mint vonzóerőt) gondolkodó erőt kell tulajdonítani”. Az anyag és a gondolkozás helyes viszonyának felismeréséből ered az ismereteink eredetére vonatkozó helytálló felfogása: „Külső ismeretek a külső érzékek által, szem, kéz stb. által nyerődnek (szereztetnek)”.

Az anyagot, a teret, az időt objektív létezőként, a mozgást az anyag létezésének attribútumaként tárgyaló Bolyai azt is vallja, hogy anyagot semmiből maga az Isten sem teremthet, tehát magát a világot sem teremthette. De Isten létét nem tagadja. Szerinte Isten maga a tökéletesség, azt állítva, hogy

„szorosan véve vagy nincs Isten, vagy a világ is tökéletes mint Isten”
– márpedig –, „lélek, anyag, természet tökéletes mint Isten maga”.

Tehát isten nemléte egyenlő lenne a lélek, anyag, természet tökéletlenségével, ami viszont ellentmond a tapasztalatnak. Így Isten létét a világegyetem harmóniájában kell látnunk.

Bolyai kézirataiban nem találunk utalást Spinoza (1632–1677) holland filozófus műveire, és azt sem tudjuk, hogy ezeket egyáltalán ismerte-e. Ennek ellenére némi hasonlóságot fedezhetünk fel Bolyai és Spinoza Istenről szóló tanai között. Spinoza egy matematika-filozófiai világgéppel igazolta monisztikus istenelméletét, és tudományos világmagyarázati rendszerét. Ismerettana a szubsztancia fogalmából indul. Isten a végtelen egyetemes szubsztancia, mely egy a természeti kozmosszal. A szubsztancia attribútumai, a gondolatok és kiterjedés (szellem és anyag) nem jelennek két különböző lényeket, hanem az isteni szubsztancia két örök megjelenési formáját. Így a természettörvények és Isten viszonya konfliktusmentes. Emiatt hiábavalóak az olyan imák, amelyek isteni beavatkozást kérnek a dolgok természetes folyásának módosítására. Ez a felfogás érződik Bolyai egyik nyilatkozatából is:

„Senkinek éretlen, rövidlátású kívánságáért az Isten a természet örökvégzésű és véghetetlen bölcs rendjét legkevésbé is meg nem változtatja, útjából ki nem tér, és a *valóság*, azaz mi volt, van és lesz, az *elkerülhetetlenül* persze [önmagától] valósul; és hogy a mi vágyaink a valóval gyakran meg nem egyeznek, s a való ellen megelégedetlenül rugódozunk, csak belátásunk hiányából ered, a *mindent tudó mindenben tökélyes* boldogságot találván. Az Isten tökélyes jót akar, s a valóság az akarhatja; s nem valót maga az Isten sem akarhat, midőn önmagával s a természettel ellenkeznék, mi lehetetlen. Az Isten *mindenhatósága* tehát korántsem abban áll: hogy mindent *képes* legyen akarni, mit bármely éretlen gondolkozású ember vagy gyermek kohol – mint a helytelenül gondolkozó ábrándozza –, mert úgy igazán még az Isten sem volna képes mindenkit kielégíteni, midőn egyik például esőt kiabál ugyanakkor és ott, mikor és hol a másik szárazságot óhajt – vagy hogy éppen a *lehetetlent*, mint tetszőleg a bűvész megvalósítsa, s véghezvigye például: hogy kétszer kettő ne legyen négy, hanem három vagy öt, s a kör legyen 3-szögű; mert mindez éppen isteni természete és véghetlen tökélye ellen volna; hanem áll a mindenhatóság abban: hogy az egész természet folyása a mindenható, tökélyes jót választó és akaró Isten műve és ereje vagy hatása által esik.”

Több filozófiai témájú gondolatának kéziratos megőrkítését részben annak is köszönhetjük, hogy életének utolsó évtizedeiben az emberiség boldogítására szánt művén, az *Üdvtan* megírásán fáradozott. Művének célkitűzése számos filozófiai eszmefuttatást tett szükségessé.

8.2. Az *Üdvtan*

A Bolyaiak első, nagyobb lélegzetű életrajzírója, Bedőházi János már bővebb említést tesz János *Üdvtan*-áról, „amely tannal boldogítani akarja a világot”. Szerinte zseniális matematikusunk úgy nyilatkozott, hogy

„Istentől a magyar nemzet éppen általa, jelesen tanai által látszik arra választva lenni, hogy maga még e Földön *üd*-üljön, s az egész emberiséget üdítse tökéletesen, és a földgömböt egy okos, művelt második paradiocsommá varázsolja, természetes, józan, okos úton”.

Az első alapos és igényes Bolyai-monográfia szerzője, Paul Stäckel a könyvében azt állítja, hogy János már az abszolút geometria felfedezése idején foglalkozni kezdett az *Üdvtan*-nal. Állítását két adattal támasztja alá: az egyik Bolyainak egy 1852-ből származó följegyzése, amelyben arra utal, hogy a szóban forgó probléma harminc éve foglalkoztatja őt, a másik pedig a János főherceghez intézett, 1832. május 3-án kelt folyamodvány fogalmazványa. Ez utóbbiról Sarlócska Ernő is azt írta, hogy „nem matematika az már csak, ami a lemergi folyamodványban kísért”.

Az *Appendix*, majd nemsokára a *Responsio* kedvezőtlen fogadtatása csak tovább erősíti elhatározását egy ilyen enciklopédikus mű megírására. Érti ugyanis, hogy sikertelensége nagyrészt az őt körülvevő környezet alacsony kultúrshívonalából fakad.

Benkő Samu megállapítása szerint „az *Üdvtan*, mint az egész emberi tudást összefoglaló, rendező valamint az egyént és közösséget egyaránt boldogságra vezérlő enciklopédikus mű, a negyvenes évek legelején merül fel Bolyai János tervei között”. A megírandó mű egyik előszó-fogalmazványát hozza fel ennek alátámasztására, melyben Bolyai ezt írta:

„E munka (irat) kezdődött Februárius 2-dikán 1841-ben (a róla való gondolkodás reái készülés s elszánás, írása meghatározása pedig az azelőtti éjjel...)”.

Bolyainak az *Üdvtan* megírására vonatkozó indítékait Dávid Lajos a következőkben látja:

„Ezt a szenvedélyét is apjától örökölte, s bizonyára apjával való beszélgetések hatására is János már ifjú korában hivatottnak érezte magát arra, hogy megmutassa az emberiségnek az általános boldogság útját. Mégpedig – ellentétben apjával – kizárólag a *földi* boldogság útját. Ez az út lett volna az *Üdvtan*. Úgy gondolta, hogy elérni célját, ha az összes tudományokat egyetlen tökéletes rendszerbe foglalja össze. A tudományok e

szerves egészében János alapul a matematika logikai alapjait vette, befejezésül pedig az Istenről szóló tant.”

Bolyai ezt a művét nem fejezte be. Ebben többek között közrejátszott az *Üdvtan* szerteágazó és nagyra tervezett mérete, valamint János egyre rosszabbodó egészségi állapota. A kézirati hagyaték alapján Benkő Samu próbálta megadni az *Üdvtan* szerkezeti felépítését. A fennmaradt nagyszámú címlaptervezet azt mutatja, hogy a készülő mű címe kezdetben egyszerűen csak *Tan* volt. Az ötvenes években, munkájának részbeni előrehaladásával, a *Tan* azonosul az *Üdvtan*-nal, és Bolyai a *Tan*-t *Üdvtan*-ra javítja az egyik címlaptervben. Ennek magyarázata a tervezett mű tartalmi szerkezetének ismertetése után érthetővé fog válni. A *Tan* három fő részt tartalmazó műre volt tervezve, melynek tartalomjegyzéke Benkő Samu szerint a következő:

I. ÜDVTAN

0. [zéró] *Nyölv* [Nyelv]

- a) Magyar nyelv
- b) Géber nyelv [algebrai szimbólumok nyelvé]

1. *Nyítan* [Matematika]

- a) Űrtan-elő [valószínű az euklideszi geometria]
- b) Rá-tan [kombinatorika]
- c) Számtan
- d) Idtan [az idő tudománya: algebra]
- e) Űrtan-utó [valószínű az abszolút geometria]
- f) Erőtan [mechanika]
- g) Szertan

2. *Széptan*

α) Hangművészet

- a) Hangtan, muzsika, ének
- b) Költészettan
- c) Szónoklattan

β) Képzőművészet

- a) Képrás [festészet]
- b) Szobrászat
- c) Kertészet
- d) Építészet
- e) Széprás, rajzolás

γ) Művölő művészet

- a) Tánc
- b) Színészet
- c) Némászat vagy néma játék-tan

- d) Kardoskodás
- e) Testgyakorlás; tag mozgatás
- f) Lovaglás
- g) Úszás

3. Jótan

- a) Erkölcs- vagy erénytan
- b) Belvilág- vagy szellemvilágtan [lélektan]
- c) Törvények, életszabályok tana [jog]
- d) Bölcsészet [filozófia]

II. MELTAN

III. MULTAN

A *Meltan* – mely melléktant jelent – tulajdonképpen az „*Üdvtan* csak ideig szükséges magyarázata”, s egyben rendeltetése, hogy az olvasót „rávezesse” az *Üdvtan*-ra. A *Multan* pedig az elmúlt eseményekkel, vagyis a történelemmel foglalkozó rész. A *Meltan* és *Multan* megírásánál, Bolyai nehézségekbe ütközött, és arra a következtetésre jutott, hogy itt „tökélyest és örök-lényegűt nem lehet alkotni”. Megírási kísérletei is minden rendszeresség nélkül történtek. A *Multan*-ra még voltak elképzelései. Itt a következő tanok kaptak volna helyet: régiségtan, úrbértan, adótan, vezértan és az egészet bezárta volna az Isten-tan. E tanok megírására tett is erőfeszítéseket. A *pénztan* például meglehetősen gondosan elkészített kézirattal. Ezek után érthetővé válik a két utolsó rész beolvadása az *Üdvtan*-ba. Magában az *Üdvtan*-ban pedig érződik a matematika kiemelt szerepe, mivel ennek Bolyai önmagában is különleges világboldogító erőt tulajdonított. Ezt tükrözi még az *Üdvtan* tervezetének három részére vonatkozó megjegyzése: „a 3 főrész nagyon egyenetlen izmosságú volna, midőn a szép- és jótan-ba aránylag igen kevés jutna”.

Az *Üdvtan* szerkezeti beosztásával a továbbiakban is állandó jelleggel foglalkozott. Így a felsoroltak mellett még más tudományágakról is tesz említést: élőtan [biológia], gyógytan, mécs- és gyertyatan stb. Az *Üdvtan*-ba átsoroláskor az egész *Üdvtan*-t megelőzi a *Vezértan*, amely az alapvető és irányító gondolatok tárgyalását foglalja magában. Bolyai egyik ilyen alapvető gondolata például az, hogy

„semmiféle egyéni üdv nem létesíthető vagy nem állhat fenn közüd nélkül”.

Ezt az állítást János szerint szigorúan be lehet bizonyítani. Ezt az alapvet

„mindenki megismervén, átlátván, tudván, mégpedig állandóan szem előtt tartva az igazi, valódi, állandó önjavát: ezt részint eredeti, kiirhatatlan szívhajlamból, részint a tökélyes meggyőződésből, hogy önüdv is csak közüdv kifolyása lehet, akkor minden más élő társa is, annak állapotjához illő, okosan kiszabott arányban lehetőleg kiterjeszteni, kedves kötelességének tartja, általában a megismert tökélyes jót, tökélyes törvényt állandóul jó szívvel, készséggel, önként, áldozat-érzet nélkül, kedves szükségességgel és nőtten növő lelkesedéssel követi.

[Ekkor pedig] a már majd két évezred óta naponta annyi millió buzgó imától égő ajk által óhajtott, tetteleg pedig már körülbelül hatezer év óta hiába keresett Isten Országa [valósulna meg]: *egy, az elveszettnél sokkal szebb, gyönyörűbb, művelt, okos második Paradicsom*; ahol mindenki a legkisebb fáradsággal, sőt fáradság és áldozat nélkül lehető legtöbb éldeletben részesüljön, és mind maga, mind leendő ivadécai boldog jövője iránt biztos és nyugodt lehessen.”

János az emberi boldogságot tehát az *emberi belátásra* építi, amiről az évezredek tapasztalatait leszűrve sajnos meg kell jegyeznünk, hogy eléggé naivnak tűnő alapozás. Szerinte a művelt, okos ember, amely a közös üdvre épít, nem akarhat mást, csak jót, és

„a rokonszenv és részvét helyébe a józan okosságnak kell lépnie [...] nem nógatás, nem törvény, nem parancs, nem erőszak kell, hanem művelés [és ekkor] ellenállhatatlan varázserejének a hatalmánál fogva a közüdv magától bekövetkezik”.

„Az *Üdvtan* – Abafáy Gusztáv szerint – értelmi és erkölcsi templom, melyben visszatükröződik az örökmozgású világmindenség. Az *Üdvtan*-hoz tartoznak Bolyai utópista, szocialista nézetei is. Az *Üdvtan* az egész emberiséget magában foglaló mozgástan. Célja: aranykorszak megteremtése a Földön, amelyben csupán az aranyat imádók vesztek el életük értelmét.”

Egy kis figyelemmel élesen megkülönböztethetjük az *Üdvtan tárgyát* az *Üdvtan céljától*. Tárgya: tudományokat osztályozó rendszerezés; célja: megmutatni a boldog jövő társadalmához vezető utat.

Ami a tudományrendszerezés alapjainak eszmei mondanivalóját illeti, világosan kitűnik, hogy Bolyai Jánosban a matematikus és a gondolkodó elválaszthatatlan egységet alkot.

„Az abszolút tudomány [ezen Bolyai a geometriáját érti] tárgyának lényegét felismerjük és ez megadatott nekünk... a matematikus az, aki hidegen-higgadtan szemléli és éppen ezért a legnagyobb szenvedé-

lyességgel szemléli a világmindenség csodálatra méltó egészét, törekedvén a végső okok kifürkészésére, minden dolgok összefüggéseinek feltárására.”

Az *Üdvtan*-t áthatják Bolyainak a világ megismerhetőségére vonatkozó gondolatai is, amit a filozófiai nézeteiről szóló előbbi részben már érintettünk. Megállapítja, hogy érzetünk forrása az objektív valóságban van, s hogy a világ jelenségei véghetetlenül gazdagok, de érzéki megismerésünknek határai vannak. A tapasztalatokon alapuló megfigyeléseink értékei csak viszonylagosan igazak. A megismerésből eredő megértés útjáról pedig ezt írja:

„Az értés fokai: az első fok a szenvedőleges, rabszolgai megértés, a második fok az egész ok-sor felfogása, a harmadik az út szükségességének átlátása, vagy minden utak kimerítése”.

A gyakorlat, a tapasztalat, a megismerés alapja és egyben az igazság kritériuma.

„Szokás a tant elméleti és gyakorlati tanra felosztani. Ez a felosztás azonban csak feltételeesen alkalmazható, mert a legelvontabb tan sem lehet tapasztalás nélküli. És fordítva: csupán tapasztalati tan sincsen”.

Érdekes Bolyainak a tudományok felosztására vonatkozó felfogása. Kortársa, Auguste Comte (1798–1857) francia filozófus, aki élete vége felé az *emberiség vallásának* a kidolgozásán fáradozott, tudományrendszerező felfogásában élesen elhatárolja egymástól a tudományokat, egyszóval, metafizikusan skatulyáz. Bolyai János azonban tudományrendszerező elveinek kidolgozásához figyelembe veszi a tudományok egymáshoz való viszonyát és kölcsönhatásukat:

„A dolgokba mélyebben behatoló bölcs meg van arról győződve, hogy az összes tudományok, művészetek (mesterségek) egymással valamilyen módon kapcsolatban állnak és kapcsolatban kell állniuk”.

Ebből pedig az következik, hogy

„az *Üdvtan* oly felosztása nem adható, mely szerint mindegyik egyszer elkezdett tan önállólag magára folytattassék s a lehető határig be is végeztesse, midőn időről-időre más tanba kell átmennie... a rendszerezésnek olyan módon kell történnie, hogy lehetővé tegye folytatatólagos

kiegészítését, s oly képpen kell osztályozni, hogy a tanok egyfelől önállóan is tanulmányoztathassanak, másfelől pedig – ha ez időről időre szükségessé válik –, más tannal kapcsolatban is tárgyalathassanak. Azok a tanászok, akik már készen levő alapokra fektetve, új segédtanokat dolgoznak ki, a további tanok »folytatvány« cím alatt illesztessék a tan egészébe”. [Ezáltal kiküszöbölődik az] „a nehézség, hogy a tanok szakadatlanul egymásba folynak”.

Bolyai nem csak elméleti síkon foglalkozott a tudományok osztályozásának a kérdéseivel. Tudományrendszerező elveit egyik kéziratában a tudományokat osztályozó táblázataiban alkalmazta is. Bolyainak ez a rendszere, az általa máskülönben kedvelt, 12-es alapú számrendszert használó osztályozási princípiumra épült. Ez – amint hangsúlyozta –, azért fontos, hogy a tanulmányozásánál „a könyvtárban idővesztéség nélkül rá lehessen találni”. Ebből látható, hogy Bolyai a könyvtári osztályozórendszerek kidolgozásában is úttörő volt.

„Bolyai korában a tudományok – írja Abafáy Gusztáv –, szorosabban a természettudományok állása nem kívánta meg a tudományok többoldalú viszonyulásának a rögzítését. Annál jelentősebb tehát Bolyai tudományos előrelátása, az, hogy elméletileg kidolgozza a tudományok osztályozásának kétsíkú »rectangulumokba« foglalt táblázatát, majd egy háromsíkú »paralelepipedon-idomba« foglalt »tár«-ban való rendszerezését.”

Bolyai azt is latolgatta, hogy az *Üdvtan*-t milyen nyelven adja ki. Amint láttuk, a német nyelven írt *Appendix* latin nyelven jelent meg. Kézirataiban is elég gyakoriak a német nyelven írt matematikai tárgyú szövegek. Az *Üdvtan*-t azonban magyar nyelven kezdte kidolgozni, de többször hangoztatta, hogy „tökélyes tan megírásához, tökélyes nyölv szükséges”. Főleg ezért bonyolódott bele a magyar nyelv megreformálásának a problémájába, amelyre a következő részben térünk ki. 1854-ben pedig így vélekedik:

„A jó dolognak annál hatásosabb, vagy sikeresebb, vagy fontosabb vagy biztosabb terjesztésére már én magam is *három* nyelven kívánom, vagy szándékozom kiadni, vagy közhírré tenni, vagy világ elébe terjesztetni, vagy tisztelt közönségnek átadni, tudniillik magyarul, németül és latinul”.

Nyomorúságos anyagi körülményei miatt azt is mérlegelte, hogy mennyi legyen – ha műve megjelenik – egy példánynak az ára. Szerette volna, ha a kiadási költségek megtérülnek, de arra is gondolt, hogy a könyv a vevő számára se jelentsen anyagi megterhelést, nehogy emiatt lemondjon annak megvételéről.

Apjával ellentétben, aki művein nem tüntette fel a nevét – és emiatt néhányan álszerénységgel vádolták –, János a szokásoknak megfelelően, munkáin a nevét is kiírta. Mint szerző, természetesen az *Üdvtan*-on is tervezte nevének feltüntetését, de egy följegyzése arról tanúskodik, hogy idővel közeledett apja gondolkodásmódjához:

„Maradjon mindnyájunk neve örök feledésben; annál inkább fog élni szellemünk a tanban, mely a megszabadított és újjászületett emberiséggel együtt... élő sírkövünk lesz. [...] Tanomra nézve is kijelentem, hogy nevem csak addig kívánom, hogy a cím-lapokon álljon, míg a tan a Föld-gömbön általánosan elterjed, azután a címlapról töröltessek”.

A tanok megismertetésének és terjesztésének a módjára is gondolt. Ezt úgy képzelte el, hogy ő, a tanok írója, kiképez 12 „tanítványt”, akik ezután „tanítótá” válva, egyenként újabb 12-12 „tanítványt” avatnak be a tanba. Ez a mértani haladványban terebélyesedő kiképzési forma egy idő után felölelné az egész emberiséget.

Nem elhanyagolható azoknak a száma, akik még ma is úgy tekintik, hogy az *Üdvtan* Bolyai tudományos életútjának zsákutcája, s ide betévedve a matematikai kutatásai szenvedtek kárt. Noha e kijelentésben van némi igazság, a legutóbbi kutatások szerint Bolyai ebben az időszakban sem hanyagolta el teljesen matematikai vizsgálatait. Hiszen maga az *Üdvtan* tartalomtervezete is bővelkedik matematikai részekben. De az *Üdvtan* fejezetein töprengve születnek meg Bolyai más témájú munkái is. Bizonyos részek kéziratban maradt gondosabb redaktálása bizonyítja, hogy a kiadás szinte teljes reménytelensége ellenére is szorgosan dolgozott e művön. Igyekezett a különböző fejezeteket és alfejezeteket sorra kidolgozni. Így íródott meg például a *Muzsika-tan* is. Jánosnak ezt a töredékes zeneelméleti írását szakmai magyarázatokkal kísérve Benkő András adta ki 1975-ben, aki szerint „míg Bolyai Farkas a zene nevelő jellege felől közeledve jut el a matematikai vonatkozásokon alapuló általánosításokhoz, fia a számtani arányokból kiindulva illeszti be a muzsikát utópisztikus filozófiai keretbe, az *Üdvtan* szerves részeként”.

Szerencsétlen életének körülményeit a bölcs belátáson alapuló keménységgel és nyugodtsággal próbálta elviselni. Ezt a sztoikus filozófiai életfelfogást érezzük az *Üdvtan* egész koncepciójában. Mintha azt vallaná, az egyén egyedüli rendeltetése, hogy felolvadjon az egyetemesben és elérje az erkölcsiség egyedüli etikai attribútumát: az erényt. Németh László Bolyai János sztoicizmusának két megnyilatkozási formáját emeli ki: önzetlenséggel párosuló igénytelenségét és filozófusi életre való törekvését. Számára azonban a sztoicizmus nem az egyedüli gyakorlati életfi-

lozófia, alkotásvágytól hajtott természete és tettekre sarkalló becsvágya meghaladja a sztoicizmust, mivel nem elégti ki a pusztá szemlélődés és a közösségtől függetlenített belső elégedettség. Ő így ír erről:

„Az ugyancsak magas szellemű sztoikusok elve sem tartathatik elégségesnek, midőn jó, vagy nyugodt lelkiismeret földolog, vagy legnemezebb része a boldogságnak, de egyedül a tökélyes boldogságra nem elég; s némi anyagi kedvező körülmény is arra szükséges, midőn Istené sohasem válhatunk, bármint fölemeljük is magunkat a kültermészet mostoha változásain, sőt még inkább túlságoskodik vagy tévelyeg, s nem elég belátású az egyébiránt derék Seneca, midőn azt merészeli állítani és javasolni: hogy *úgy*, vagy *az által*, vagy *annyiban*, vagy *azon tekintetben*, ha magát fölülhelyezi szellemi erővel a viszályokon, az ember még Istent is felülmúlhatja.”

Dávid Lajos szerint „az *Üdvtan* inkább úgynevezett észvallás, mint társadalmi rendszer... bántó fontoskodás a mai ember tapasztalatával bírálgatni a legnagyobb magyar matematikus *Üdvtan*-át. Örvendjünk inkább, hogy balsorsú lángelménk legalább akkor boldog volt, mikor mindenről megfélekezve Isten küldöttjének, vagy éppen fiának, a minden más könyvet fölöslegessé tevő »új biblia« leendő megírójának érezte magát, és az »elveszetteknél sokkal szebb, gyönyörűbb Paradicsom« képein álmodozott.”

Hasonlóan nyilatkozik Benkő Samu is: „Az *Üdvtan* tételeit már-már grafomániás buzgalommal fogalmazó Bolyai tragédiájában valóságos viszonyok, közelebbről az éretlen társadalmi viszonyok tükröződnek. A termelőerők fejletlensége, a természettudományos szükségletek alacsony szintje, a tudományszervezés és megfelelő intézmények hiánya determinálták Bolyait arra, hogy végül is a fantasztikumok birodalmát ostromolja. Azt is látnunk kell azonban, hogy amikor az *Üdvtan* a kíváncsatos matematikai munkálkodás mezejéről eltértette, egyben vigasztalásul is szolgált az élet elviseléséhez.

A maga nyomorúságán úgy akart segíteni, hogy hadat üzent az általános nyomorúságnak és embertelenségnek. Az *Üdvtan* fejezetein töprengve élete végéig megőrizte a gondolkodás örömét, és munkája azzal a reménységgel töltötte el, hogy része a humánus jövőt formáló cselekedeteinek.”

Az ember nyugtalanságig fokozódó tudásszomja főleg az igazság megismerésére irányuló vágyból és a rejtélyes jelenségek törvényszerűségének megfjtését célzó törekvésből származik. Erről és a megismerhetőség hatáiról így nyilatkozik Bolyai:

„Mi is *mindentudók* leszünk, amennyiben minden véges tant megtudunk valamikor; de mindent sohasem... vágyom tudni – gyönyörű nekem a tudás”.

Ez a határtalan tudásvágy indította az *Üdvtan* megírására.

8.3. A nyelv megreformálása

Amikor Bolyai nekifogott az *Üdvtan* tervbe vett fejezeteinek a megírásához, nehézségei támadtak a nyelvvel. Efölötti aggodalmáról kézírataiban is említést tesz:

„minthogy nyelvünk eddigi állapotjában (abban tudniillik: melyben azt szeretett anyámtól s a dicső magyar nemzettől vettem) tán egy szabályt sem lehet híven s minden olvasó kedve szerint követni, azon egyszerű okból, hogy részint (minden számos foliántnyi nyelvtanok mellett) tudomra, s mint hiszem, még eddig egyetlenben egy tökélyes nyelvszabály sem vala – nemcsak a magyar, hanem már e földgömböni nyelvtanban is –, s ami volt is, vagy kivételt szenvedhető határozatlan (az eddigi ingadozó, tántorgó elvek szerint kinek-kinek kénye szerint), vagy legalább rossz ízlésű, ami pedig legveszélyesebb kétértelműségnek kitévő volt; tökélyesen szabályszerűleg (tehát következetesen s híven egyidomúlag) csak úgy kezdhethék: ha előbb Euklidesi vagy mathesisi szellemben és szigorral (rigorral, more geometrico, mit mathematischer Strenge) a követett nyelvszabályaimat kijelenteném”.

Ő, aki matematikai szigorral próbálta kezelni ezt is, észrevette, hogy a nyelvi anyag nem engedelmeskedik neki úgy, ahogyan szeretné. A szavak és fogalmak között nincs kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: még vannak fogalmak, melyekre nincs megfelelő szó a magyar nyelvben, máskor pedig éppen a szavak sokasága zavarta gondolatmenetének tisztaságát. Emiatt kézírataiban gyakran találkozunk olyan mondatokkal, amelyekben egy kifejezésre még jó néhány szinonimát sorol fel. Hogy egy jelenséget különböző szavakkal lehet megnevezni, Bolyai szerint nem nyelvi gazdagság, hanem szegénység és tökéletlenség:

„Legnagyobb bajom s hátráltatóm pedig azon legcsekélyebb körülmény, hogy némely gondolatot az eddigi nyelvek több, s néha ötvenképp is ki akarnak fejezni – mit csak a gondolatlan nevezhet *nyelv-gaz-*

dagságnak; a belátó s józan okos pedig csak fölösleges, tehát erősen káros és erősen ízetlen tulajdonságnak ismeri el”.

De felfedezte a magyar nyelvben rejlő tökéletes kifejezési lehetőségeket is. Neki is vágott, hogy a magyar nyelvet „tökélyes nyelvvé” formálja, amely az *Üdvtan* megírásához szükséges. Olyan tökéletesé és egyszerűvé, „hogy a nyelvére büszke frank és angol, s más, öröklött hangjaikra féltékeny nemzetek, a miénkben tökélyt és elsőséget találván, az övéiket eldobják, és a miénket veszik be, és magyarok lesznek”. Szinte hangyaszigorommal dolgozott a világnyelvvé tökéletesítendő magyar nyelv szótárán és szó szerkezeti felépítésén. Magyar nyelvű olvasmányai, de főleg apja magyarul írt munkái meggyőzik arról, hogy anyanyelvén is íródhat bármilyen tudományos mű:

„a magyar nyelv (ugyan) úgynevezett műveltségnek, nem sok évi pallérozás után már szinte áll, sőt hiszem, éppen áll a fokán, melyen állnak legműveltebb nyelvek, úgyhogy elméleteket (csak legyenek előbb ilyenek készen) magyarul is kijelenteni és megértetni jelöket, vagyis másokban is oly elméleteket okozni épp úgy lehet, mint más akármely nyelven.”

„Meggyőződése volt – írja Benkő Samu –, hogy a nyelvben matematikai képletekben kifejezhető törvényszerűségek lappanganak, ezeket azonban véleménye szerint a felismerhetetlenségig elváltoztatta a rakoncátlan nyelvfejlődés. Ha lefaragjuk mindazt, ami az eredeti szilárd vázat, nevezetesen a gyökszavak rendszerét eltakarja, máris megvan az alapja a félreérthetetlen, könnyen áttekinthető és hamar megtanulandó egyetemes nyelvnek. Bolyai tehát a modern információelmélettel azonos hipotézisekből indul ki, csakhogy ez utóbbi a nyelv legfejlettebb állapotában fedezte fel és foglalta rendszerbe képletek segítségével a törvényszerűségeket.”

A nyelvet Bolyai jelrendszernek tekinti, és felismeri, hogy a nyelv rendszere a matematika jelrendszeréhez képest sokkal pontatlanabb, többértelmű, és a szabályokhoz való kötődése is laza.

„Miféle logika van abban – kérdezi Bolyai –, hogy amíg a *méz* szóból a *mézes* szót alkotjuk, addig a *réz* szóból a *rezes* lesz? Vagy legyen mind a kettő *mézes*, *rézes*, vagy pedig *mezes*, *rezes*”.

A magyar nyelv megreformálására és a tervezett új, egyetemes nyelv alapjaira vonatkozó nézeteit Bolyai három részben óhajtja közreadni. Az első rész a betűkről és jelekről, a második a gyökszavakról, a harmadik

pedig a nyelvtanról értekeznek. Ennek érdekében sajátos betűtárat szerkeszt, majd a magyar nyelv gyökszavait igyekszik összeszedni. Ebbeli munkáját nagyban befolyásolták és segítették Engel József *A magyar nyelv gyökszavai*, valamint Nagy János *Tiszta magyar gyökök* című dolgozatai, melyek közül az első az Akadémia pályadíját is elnyerte. Mindkettőjüket személyesen is ismerte, sőt Engel József – amint már említettük – az Orbán Rozáliával kötött házasságánál az egyik tanú volt. Sarlócska Ernő szerint „Bolyai megismerkedése Engel Józseffel két, nyelvészeti problémákon rágódó ember egymásra találása is lehetett”.

Számos kézirati oldalt tölt meg gyökszavakkal. Az egybetűsökkal kezdi, majd folytatja a kettő, három stb. betűkből álló gyökszavakkal. E táblázatokat készítve bizakodással írja:

„Itt, Kedves Nemzetem és Emberiség! Más mód nincs, hanem, hogy előbb nyelvünköt úgy fölbontsuk, hasogassuk, hogy – mint az egykori jeruzsálemi templomon mint írják, kő kövön – betű betűn ne maradjon, s csak azután kezdjük újból illő óvatosan és gondosan jó terv szerint fölépíteni vagy egyberakni. Csak egy kis elszánt akarat kell e tárgyra, és azonnal sikerül”.

A nyelvtan kérdéseiben Bolyai az általa elképzelt egyszerűsítő tendenciákat igyekezett érvényre juttatni. Csupán ízelítőül említsünk egy példát, melyből – többek között – kiérződik Bolyainak az a törekvése, „hogy minél kevesebb jeggyel, fáradsággal egyszerűebbül lehessen mind a nyelvben, mind pedig a megnevezettek viszonyairól tanban minél előbb haladni”:

te-nek	<=>	neked	te-ről	<=>	rólad
te-at	<=>	téged	te-ben	<=>	benned
te-től	<=>	tőled	te-be	<=>	beléd
te-vel	<=>	veled	te-ra	<=>	terád
te-an	<=>	rajtad	te-ből	<=>	belőled.

Nyelvészeti vizsgálatai során Bolyai gyakran említi Köteles Sámuel *Közönséges logika* című könyvét, melyben szó esik a gondolat és a nyelv, valamint a grammatika és a logika viszonyairól. Szász Károly, Fogarasi János, Révai Miklós, Gyarmathi Sámuel és még sok más nyelvészettel foglalkozó szerző nevét is megtaláljuk kézirataiban, akiknek munkáit minden bizonnyal tanulmányozta. A nyelv megreformálására irányuló törekvésének egyik mozzanata a sok új műszó és jelölés bevezetése. Ez is megnehezíti Bolyai kéziratainak tanulmányozását azok számára, akiknek ezek még ismeretlenek.

Amint láttuk, Bolyai az *Üdvtan* élére a *Nyelvtudomány*-t szánta, ezzel is kiemelve a *tökéletes* nyelv megalkotásának jelentőségét. „A nyelv törvényszerűségeit fürkésző Bolyai – írja Benkő Samu –, nem figyelt fel arra, hogy a nyelv másképpen engedelmeskedik a logika törvényeinek, mint a matematika. Minden tévedése ellenére nagy jelentőségű tudománytörténeti tényként kell elkönyvelnünk, hogy nálunk ő az első, aki a matematikus tudásával és logikájával próbálta szemügyre venni a nyelvi jelenségeket, és a nyelv törvényeit a geometriában megszokott pontossággal és szabatosággal igyekezett megragadni. Hozzáértéssel és leleménnyel vizsgálta a nyelv és a valóság viszonyát. A nyelvet jelrendszerként kezelte. Meggyőződése volt, hogy a nyelvi törvények képletekbe való rögzítése bizonyos nyelvi feladatok mechanizálási lehetőségeit teremti meg [...] s az információelmélet megsejtése Bolyai János sokoldalú zsenialitásának csak száz esztendővel később megértett bizonyága.”

Úgy gondoljuk, talán nem túlzás, ha a legutóbbi megállapítás kiegészítéseként az információelmélet mellé még a matematikai logikát is megemlítyük. Általában észrevehető, hogy ahol Bolyai valaminek nekifogott, ott mindig valami új, vagy újnak a megsejtése is megjelent.

8. 4. Társadalom és forradalom

Bolyai hátrahagyott kézírataiban nagyon sok utalást és elmélkedést találunk kora társadalmának állapotáról. Életének legjelentősebb történelmi eseménye kétségtelenül az 1848–1849-es forradalom volt, amely nemcsak Magyarországot, hanem szinte egész Európát alaposan felrázta. A társadalmi viszonyokra vonatkozó fejtegetéseit is a forradalom osztja három korszakra: a forradalom előtti, alatti és utáni időszakokkal foglalkozó feljegyzéseire.

Az első korszakban a legjelentősebb a *Tökéletes közállomány* címet viselő kézírata, melyben igen kemény szavakkal bírálja a magyar nemességet, amely inkább saját érdekeit, mint hazája sorsát tartja szem előtt. A siralmas helyzet feltárásával a robbanásszerű változás nagy valószínűségét kívánja ecsetelni. A még nagyobb bajok elkerülése érdekében szorgalmazza a sürgős cselekvést, mert a nép elégedetlenségének fokozatos növekedése lángba boríthatja az egész országot. Arra figyelmeztet, hogy

„nincs semmi veszténivaló idő: hanem lelkesen, haladék nélkül dologhoz kell fogni, s durva (korlátlan) önkényt meggátolni egy *józan, okos, természetes* elvű és ezért *egyedül biztos*, állandó közállomány alapításával”, mert „általában abban a korban élünk, melyben *virrad* az em-

beriség hosszas sötétségbeni mély álomba merülése (álomkórsága, le-targiája) után; a fattyú világosodás helyét az igazi fölvilágosulás kezdi elfoglalni, betölteni; mindenfelé élénkebb a nyüzsgés, ipar, szorgalom, új találmányok nyomának jele”.

Korholja az úrbéri kérdés rendezésében tehetetlen országgyűlést, a döl-yös arisztokráciát, amelyet „a vakság, az orráig látás, a hitvány, gyáva, rosszul értett kapkodott politika” jellemez, és egyik fő célja „az eddigi *nemesi* jogok hiábavaló oltalmazása”.

A *Tökéletes közállomány*-ban Bolyai felveti a katonaság megszünteté-sének a kérdését is. Véleménye szerint vannak, akik erről a kérdésről meg-gondolatlanul vélekednek. Bolyai szerint a hadsereg megszüntetése „a dolgok jeleni állásában”, mind belső, mind külső veszéllyel jár. A belső veszélyt abban látja, hogy fékező erő híján az országban zavargások lép-nének fel, a külső pedig az, hogy a „még haderővel bíró hatalmasságoknak az egész ország a játékává válna”. Ez utóbbi veszély elhárítása érdekében az szükséges, hogy „előre megegyezzenek minden hatalmasságok, hogy bizonyos határidőt téve, a hadi seregüket mind egyszerre töröljék el”.

Benkő Samu szerint Bolyainak az említett kézírata meglepően sok el-lentmondást rejt a társadalom állapotának bírálataiban. Itt is a geométer gondolkodásmódja érvényesül. Mint ahogy az euklideszi axióma tisztá-zásánál is akceptálja annak tagadását, úgy a társadalmi változásoknak is két homlokegyenest ellentétes módját tárgyalja meg:

1. a társadalmi robbanás elkerülése és a boldogság érdekében a hata-lom urai és maga az uralkodó, még ha akarnának sem tehetnének sem-mit, és csak az általa kidolgozott *Üdvtan* terjesztésének titkos szervezésé-vel lehet az épen gondolkodó embereket rávenni a változást szolgáló cselekvésre.

2. az *Üdvtan* olyan világosan kifejti a változás szükségességét, és oly pontosan kijelöli a boldogság felé vezető utat, hogy csupán az uralkodó-val kell megismertetni, aki ennek értékét belátva nyomban minden erőt a benne foglaltak megvalósítására fog mozgósítani. Így épült be a *Tökéletes közállomány* szövegébe egy német nyelvű beadványtervezet az uralko-dóhoz.

Kemény bírálatai és elmarasztaló megjegyzései ellenére Bolyai a reform-kor éveiben még mindig bízik a nemességben. Úgy érzi, hogy ezt a réte-get, értelmi érvekkel, az *Üdvtan* elsajátításával rá lehet venni az okos be-látásra, valamint áldozatok vállalására, „hogy ne legyen majd kénytelen áldozattá válni”. A népet pedig meg kell óvni minden meggondolatlan és elhirtelenkedett cselekvéstől, mert

„csak egyedül csendes, okos (partot mosó, lassú, hatalmas, ellenállhatatlan víz módjára), alapos és átható terv szerint [lehet] kibonyolódni a nagy szövevényből”.

Amint látható, Bolyai az *Üdvtan*-t ajánlja gyógyírként a társadalmi bajok orvoslására.

„A legnagyobb gyönyör – s örömmel nyilvánítom – írja –, hogy vannak sok derék s éppen kolosszális tan s egyéb műveink: ezt el nem ismerni vagy értelmi vakság, azaz tudatlanság, vagy a legnagyobb méltatlanság s hálátlanság volna. A legkevesebb, eddigelé csak ritkábban szállingózó *tani* remekek között, különösen roppant nyomai látszanak a *műiparnak* a Földgömbön”.

Más alkalomkor is dicsérőleg nyilatkozik az ipari haladásról, de csodálatra méltó akkori előrelátással, ennek veszélyeit is észreveszi. Szerinte a hatalmi pozícióval rendelkező kalandorok visszaélései és az emberi önzés szolgálatába állított „műipar” fejlődése azt a veszélyt rejti magában, hogy

„a kétezredik év betelése után az emberi nem póru járhat... rohan tehát, mint állítám az emberi nem, kolosszális és mind sebesülő léptekkel, századunkban végső veszélyére vagy elpusztítására”.

Valljuk be őszintén, megdöbbenő ez a realitással ötvözött jövőbelátás a most idézett sorokban!

Bolyai írásából – amelyekből itt csak ízelítőt adhatunk – az is kiérződik, hogy a társadalmi és a nemzeti ellentétek forradalomhoz vezetnek, ami nemsokára, 1848-ban valóban bekövetkezett.

A forrongó európai helyzet először Franciaországban vezetett nyílt forradalomhoz 1848. február 24-én. A párizsi események hírére március 13-án Bécsben, március 15-én pedig Pesten is kitör a forradalom. Bolyait az események gyors, Európában futótűzként való terjedése lepte meg:

„Hogy folyó év február 24-dikéje óta történni kezdett változások, előbb-hátrább, bekövetkezendenek: azt minden, nem egészen gondolatlan s némi belátásra s ítéletre képes ember nagy hihetőséggel ugyan előre láthatta: de hogy azok éppen ily hamar véletlenül, meglepőleg álljanak elő, azt úgy látszik, senki a Földgömbön, még azok közül is, kik ezen változásokat az idő föltartóztatlan árájától s egy fölősb ∞ hatalomtól vezérlődve s ragadtatva, sürgetődve előidéztek, úgy szólva varázsolták, nem hitte.”

Ugyanakkor felfigyel az ilyenkor leselkedő veszélyekre is, főleg a magyarok közt gyakran jelentkező széthúzásra. Már a szabadságharc legelején attól fél, hogy sokan vannak olyanok,

„kiknek az új rend nem egészen tetszik, kétségen kívül azon okból: mivel azáltal anyagi javuk, jövedelmük, külhatalmuk, befolyásuk, fényük, tekintetük tán némi megcsökkenését képzelik”.

Bölcs meglátást árulnak el a következő sorai is:

„A kígyónak a fejét kell megtörni! S legelőbb – a sok szó, cifránál cifrább, ékeesebbnél ékeesebb szónoklatok, frázisok, flosculusok [virágos beszédek], nagyszerű, erőltetett, feszes pöffedt képek, zaj, lakoma zené s éljenezés, s gyűlés helyett – kinek-kinek magába szállva, meggondolva, *tudnia kell, mit akar és mi a jó? másodszor, hogy azt hogy lehet ki-vinni, el-érni?* Aztán végre: azt *jó elszánttan s erőteljesen ki is vinni és vívni*. Ezt mondtam az 1834-i erdélyi országgyűlés előtt, hozzátevén: hogy mindebből semmit sem reménylek, minek helyes volta be is bizonyította magát, mint sok más politikai jóslásaimé is, például, hogy Jósika Samu¹⁵ hon-áruló lesz”.

Az egyik legfontosabb feladatnak Bolyai a *népnevelést* tartja, és addig is, amíg az új rendszer ezt egységesen és országos szinten megszervezi, a tanult emberek (tanítók, papok, diplomás tisztségviselők, orvosok stb.) azonnal lássanak hozzá a nép felvilágosításához. De ezt tapintatosan és körültekintéssel kell végezni, mert a köznép

„az írás-tudót többnyire úgy nézte mint az ördögöt: melynek tudni illik minden mestersége s így minden tanodák csak az ő megcsalására, rászedésére s álnokul féken tartására és sarcolására vannak intézve. S e szerencsétlen idő-szülte véleményen annyival kevésbé csodálkozom, hogy a nép minden szép, sok, cifra, hízelgő, sima szavak, ígéretetek, lecsillapítások mellett is oly gyakran és hosszasan megcsalódott, vízre vivődött: hogy néha békéürelmét is elvesztette; úgy hogy a kezében lévő aranyat, a szabadság, egyenlőség, testvériség, a világ minden arányának becsesebb arányát sem hitte annak ami, hanem undok salaknak”.

S ezen azért nincs mit csodálkozni, mert „a hatalom, a törvény és a vallás ürügy alatt” szellemi nyomorban tartotta a népet, a forradalom veze-

15 Az erdélyi Habsburg-pártiak vezére, a szabadságharc nyílt ellensége.

tői pedig azt a hibát követik el, hogy nem számolnak ezzel a hosszú idő óta felgyülemlett népi bizalmatlansággal. Elhibázottnak tartja Petőfi Sándor magatartását, mert „minden jó szíve és akarata mellett... a józan politika, taktika és stratégia ellen vétkezve” a márciusi nagy felbuzdulásban meggondolatlanul cselekszik, és ez nem a forradalom ügyét szolgálja, hanem az ellenség malmára hajtja a vizet. Az egyre sűrűsödő ilyen témájú kézírataiból az tűnik ki, hogy Bolyai Széchenyi István eszméit tette magáévá: örömmel szemléli a forradalmi kibontakozást, de a lassúbb, átgondolt lépésekkel vezetett, nagyobb megrázkódtatásokat kikerülő fejlődés híve volt. Írásaiban Széchenyi István neve a dicsérő szavakkal övezve jelenik meg.

A negyvennyolcas események hullámai Jánost más vonatkozásban is elérték. Mint nyugalmazott katonatiszt, felszólítást kapott a hadügyi kormányzattól, hogy lépjen be a fölállítandó honvédseregbe. Dósa Dániel, aki később az 1867-es kiegyezés után Marosvásárhely országgyűlési képviselője lett, nyílt levelet intézett „Bolyai János mérnök-százados honfitárshoz” a kolozsvári *Ellenőr* című újság 1848. augusztus 24-i számában. Ebben többek között ez olvasható:

„Ön haza jött, M. Vásárhelyt világtól elvonulva él zajtalan rejtekében [...] nemzetének neve Önt fel szokta lelkesíteni, Ön imádja nemzetét. Igen, igen! én ezeket mind tudom, és látom, hogy hazámnak Önre, lelkére, szívére szüksége van – és fáj, hogy sehol is nevét a cselekvő harcfiak sorában nem látom [...]. Vesse félre százados úr most a számtant, vesse félre a magyar nyelvtant, függessze szegre hegedűjét, melynek húrjairól oly sok varázshangokat idézett elé, ragadja a kezébe szegen függő szabályját s álljon ki a cselekvés mezejére – Önnek hadminisztériumban vagy seregek élén a helye, nem azon kis zugban, ahol egy elölt lángeszét mindig fájó szívvel néztem én”.

Egy másik személyes ismerőse, Dobolyi Sándor marosvásárhelyi országgyűlési képviselő Pestről, 1848. augusztus 27-én egyenesen Bolyainak címezi levelét, melyben a következő felkérés található:

„Ha a kedves kapitány úrnak kedve lenne az új katonai rendszer mellett jó feltételek alatt alkalmazást elfogadni, azon esetben méltóztassék az első postával engemet tudósítani”.

A felszólításokra Bolyai több választ fogalmaz, melyeknek nagy része töredékekben maradt meg. Nem tudjuk biztosan, hogy végül is ezek közül letisztázva elküldött-e valamit. A Dobolyi Sándor levelére írt választerve-

zetben „a legnagyobb fájdalommal” kijelenti, hogy két éve annyira beteg, hogy képtelen bármilyen katonai szolgálatot elvállalni. „Különben harcias őseim példájára a tiszta és szent közügyekben felszólítás nélkül is rég a harc- és vér-mezőkre repültem volna” – írja Bolyai.

Nem kibúvó volt ez. Amint az eddigiekből látható volt, Bolyai János valóban beteg. Lelki vívódásának egyik tanúbizonysága az a sok fogalmazványtervezet, amelyeket az említett felszólítások hatására írt. Ezekben többször utal arra, hogy a komoly fizikai megerőltetést igénylő katonai szolgálatra képtelen. Szinte ágyban fekvő beteg, állandó fáradtságra és gyengeségre, kízó álmatlanságra, ízületi bántalmakra, gyakori gyomor-fájdalmakra valamint erős viszketéssel járó bőrbetegségére panaszodik.

1849 júniusában egy hosszabb, *Kossuth Lajoshoz szóló beadványtervezet*-et készít, melyben betegsége ellenére felajánlja, hogy ha esetleg egy olyan beosztást kaphat, amit képes elvégezni, szolgálatra jelentkezne. Például őrnagyi rangban „a kormány mellett, mint álladalmi tanácsnok vagy titkár”.

Megtisztelőnek tartja, hogy a kormányzó elnök úr érdeklődésre méltatta. Őszintén megvallja, hogy ő ugyan a lassú békés fejlődés útját gondolta járhatónak, de ha a történelem a forradalmi út mellett döntött, akkor

„szeretett Nemzetünk és Honunknak jelen szabadság-, igazság- és élet-halál harcában... óhajtom a magyar ügy szerencsés kimenetelét”.

Nem tudjuk, hogy e fogalmazvány letisztázott példányát végül is elküldte-e Kossuth Lajosnak.

Ugyancsak 1849 nyarán belekezd a *Kormánynak, a Magyar Tudós Társaságnak* írt levél megfogalmazásába is, melyben említi, hogy

„elméletem gyümölcseinek közrebocsátásával az Emberiségnek leendő tervezett átadásával, az Emberiségnek használni óhajtok”.

Az osztrák császár kérésére még azon a nyáron végigdübörögnek Magyarország földjén I. Miklós orosz cár hadai, hogy vérbe fojtsák a szabadságharcot. Marosvásárhelytől alig 60 km-re, a Segesvár melletti fehéregyházi csatatéren mártírhalt hal a csupán 27 éves Petőfi Sándor is. Bolyai az alábbi sorokkal állít emléket a forradalom idején megvalósult nemzetközi összefogásnak és a világszabadság ügyéért elesett hősöknek:

„Hála azon fényes elméjű és nemes nagylelkű honfiaknak: kik vezérttek Honunk, s némileg az Emberiség szent ügyét. Hála azon különféle ajkú testvéreinknek, jelesen a bécsi német ajkú és lengyel hősök-

nek, kik magukévá téve a közügyünket, meleg részvéttel viseltettek, s kész elszántsággal segédkezet nyújtottak! Éljen tartósan az *emberi* szövetség!... Áldás és dicsőség az igaz ügyért s egymásért a csatatéren elhullott hősöknek, örök nefejecek nyíljanak az eltaposott s meddővé lett harcmezőn az elhunytak poraiból! Uri módon úrilag estek el.

Suspice viros etsi deciderant, magna volentes – *Seneca*. Azaz: Lásd, tekintsd, tiszteld, méltányold, bár is elestek, a nagyra törőket”.

8.5. A becsület próbaköve

A katasztrófával végződő forradalom Bolyait is megrendítette.

„Előre úgy nyilatkoztam az oroszok berohanása hírére – írja Bolyai –, hogy azt megérném, hogy az oly szép és harcos magyar hadsereg a fegyvert letegye, tán ki nem tudnám lábolni; s valóban egy év alatt sínlettem, s gyászoltam a magyar s vele az ember- Nemzet megbuktát, romlását, pusztulását s halálát; s akkor reményvesztve,... már testileg is készültem sírba szállni”.

Több kéziratában elemzés alá veszi a szabadságharc bukásának okait. Egyik kéziratában például arról szól, hogy a forradalom vezetőinek becsületében és tisztaságában nem lehet kételkedni, de politikai és gyakorlati hozzáértésük kívánnivalót hagy maga után. Hiába az igazságos és jó cél, ha hiányoznak a megvalósításához szükséges eszközök:

„ugyanis tudván azt mind a történezsnet szinte minden lapjából, mind lélek- s embertanilag *előre*: hogy a kormányok ily ügyben egymást a legnagyobb kéz-, hív-, és testvériséggel pártolják egymást, s közelebb-ről az osztrák kormányt, ha önerejével magát meg nem volna képes védeni vagy fönntartani, az orosz azonnal hatalmason támogatandja: nem kis vakmerőség vala oly készületlenül, illő előrei egyetértés, számitás, megfontolás nélkül... a kormánnyal kikötni, szembeszállni”.

Saját magát is hibáztatja, hogy az *Üdvtan* megírásával és kiadásával megkésett, mert ha ez idejében elkészült volna, az események is más irányt vesznek:

„Ha tanom a magyar forradalom előtt bár egy-két évvel világot látott, vagy bár egyszer-kétszer szólhattam volna, reményilem a magyar gyászos forradalom kiütésének eleje vétetik, s a nemzet törekedése egé-

szen más, jó irányt nyert volna. – De hiába! Ez már a körülményeknél fogva így van”.

Az ötvenes években készült beadványtervezetében a császárt akarja megnyerni annak érdekében, hogy az *Üdvtan*-ban kifejtettek alapján vezesse birodalmának népeit, hogy a jövőben a forradalmi megmozdulásokat elkerülje. A forradalom utáni terror és önkényuralom éveiről is ír:

„A lelkületek az osztrák rendszer által annyira elidegenedtek, bizalmat vesztek féltükben egymás iránt, hogy az atya a fiúnak, a fiú az atyának, testvér a testvérnek már többé alig hiszen, félvén az elárulástól... így a sötét századoknak, egyiptomi sötétségnek új rémületes jelenete kezdődik, midőn most már szinte semmit sem szabad tudni, látni, hallani, sőt szinte gondolni is; s az óráját sem tudja senki, mikor motozzák föl lakását, vetik s rabolják, kobozzák iratait s egyéb holmiját bírói zár alá, vonszolják Isten tudja, mi börtönbe, s koncolják szellemileg és anyagilag”.

Ilyen körülmények ellenére is keveredik naivság Bolyai meglátásaiba. Ezek után még mindig azt hiszi, hogy a bécsi udvart az *Üdvtan* tanainak megismertetése után meg lehet nyerni az emberiség általános boldogítása ügyének. Többek között ebbéli reményeitől táplálva ment el a marosvásárhelyi látogatásra érkező erdélyi katonai parancsnokkal és kormányzóval, L. Wohlgemuth altábornaggyal való személyes találkozásra. Erre „tartozás- vagy kénytelen kötelességből” ment el, ám előre felkészült. „200 pengő Rhf. személyes díjpótlékot, álladalmi tanácsnoki címet” valamint őrnagyi rangot szándékozott kérni. Ezenkívül – minden valószínűség szerint – az addig elkészült *Üdvtan* németre fordított részeit is magával vitte. A nyomorúságába belesüllyedt szerencsétlen ember úgy érezte, ha már Gauss az „udvari tanácsos”, Lobacsevszkij pedig „császári valóságos államtanácsos” méltóságát viseli, akkor talán ő is megérdemel egy „álladalmi tanácsnok” címet. Rendkívül alacsony nyugdíján is szeretett volna valamit javítani. Szerencsére a találkozó lefolyását szintén megörökítette kézírataiban, ebből érdemes idéznünk néhány részletet:

„Megjelenve, s kilétemet megmondván, nevem hatására nagyon szüvösön fogadván, azonnal azt kérdezte németül: »ön magyar ügye?!« mire midőn »az vagyok igenis Kegyelmes Úr«-ral feleltem; [Ő] azt viszonzó: »hiszen az semmit sem tesz; bár volnék én is magyar; van a magyar ügyben sok jó is; én bécsi születésű vagyok, de a bécsiek, vagy honombeliek is rosszul viselték magukat«, mire én azt felelém:

»amint többnyire minden dolognak van jó és rossz, világos és árnyék oldala vagy fele, mint a beretva, az avval bänni vagy jánni nem tudó kezében ártalmassá válhatik, úgy igenis a magyar ügyben is kételyen kívül sok jó is van, bár az út és módja a kivitelnek elég szerencsétlen volt; a jövő iránt pedig a Nagyméltóságodhoz hasonló belátás és szelídség mellett a legjobb reményt táplálhatjuk az őket megelőző, vagy nekik példaadó bécsieket követő (szegény) magyarokra nézve is«; mire a kormányzó: »Valamit a főbűnösökre nézve tenni kell, azaz: kénytelen vagyok némi büntetést szabni vagy adni vagy méretni rájuk azonban«. Jelenleg Csík felé szándékszm menni, de rossz az út stb.; azon vigasztaló következtetményt húzván ki beszédéből, hogy nem sokára az egész kereséseknek vagy egy vagy másképpen vége leend. S több efféle körülbelül egy fél órát tartott és csupán kettőnk jelenlétében folytatott párbeszéd vagy beszélgetés után – melyben mondhatom azt: hogy a magyar ügyről többöt és bizalmasban őszintébben vagy nyíltabban szólhattam, mint némely alárendelt tisztnek, sőt némely magyarnak is szólhattam volna –, magán-viszonyaimról, hogyléte mről stb. is méltóztatott tudakozódni, mint a város szelleméről is, mégpedig oly hangon, melyből azonnal észre vettem azt, hogy nyílt alkalmam van titkos kémnek ajánlanom magamat, s terhes házam népét jelen már alig élhető állapotjából jobba helyezni: mire azonban, tántoríthatatlan és széddíthetetlen szilárd jellemmel azt felelém: »Kegyelmes Úr! én részint keveset járok ki, részint kimenve is kevés társalgásom van; csakugyan amennyiben észrevehettem és hitem szerint, úgy látszik, hogy az egész város merő csendben van«; mire aztán többet nem tudakozódott. Végre gondolván azt, hogy ideje lesz elbúcsúzni, azon jó szavakkal bocsáta el: »a legjobbakat kívánom önnek és óhajainak teljesülését«.

Így kérését természetesen számba se vették, hiszen a félreérthetetlen célzások hallatára nem állt kötélnék. Hogy Wohlgemuth „szüvösön” fogadta, az teljesen érthető, hiszen Bolyaiban a császári hadak egy olyan magyar születésű tisztjét látta, aki nem vett részt a forradalmi harcokban. Eből kifolyólag mindjárt azt hitte, hogy spiclijének is megnyerheti.

Az előbbi részletek abból a szempontból is figyelemre méltóak, mert a városnak voltak olyan rosszindulatú polgárai, akik Bolyait kissé különös és visszahúzódo magatartása miatt besúgónak vélték.

Jellemének tisztasága más vonatkozásban is megnyilvánul. Annak ellenére, hogy saját nemzetét nagyon szerette, soha sem ragadtatta magát túlzásokra. A gyűlölség minden fajtája idegen maradt számára. Eszmei törekvéseiben és élete mindennapi gyakorlatában példaadóan meg tudta teremteni a különböző népek és a magyarság békés együttélésének harmóniáját.

9. Morzsák a Bolyai-kultusz történetéből

Atyámnak örök hála, s poraira,
hamvaira is áldás.

Bolyai János

9.1. A Bolyaiak „felfedezése”

A két Bolyai matematikai tevékenysége kezdetben sem bel-, sem külföldön nem keltett számottevő elismerést. Főleg Jánost a megnemértés fájó érzése marcangolta élete végéig. Az már kevésbé ismeretes, hogy kik és mikor kezdték felismerni alkotásának óriási jelentőségét. Sajnos, már mindjárt az elején ki kell jelentenünk: a Bolyaiak „legelső felfedezői” nem magyarok voltak. Tudományos közösségünk csak a külföldi kezdeményezések és értékelések hatására döbbsent rá, hogy komoly mulasztásai és jövőbeli teendői vannak. Találónan jegyzi meg ezzel kapcsolatban Szénássy Barna: „ily módon a mindenekelőtt reánk tartozó munkának csupán folytatói, és nem megindítói voltunk”.

A külföldi irodalomban a két Bolyai nevének első megemléltése Gauss halálával (1855. február 23.) függ össze. Ugyanis az öreg Bolyai Farkas, amikor az újságok révén értesült a szomorú hírről, az évek folyamán általa összegyűjtött és gondosan őrzött Gauss-levelekről említést tett Carl Kreil (1798–1862) bécsi csillagász barátjához írt egyik levelében. Kreil ezt az értesülést azonnal továbbította Sartorius von Waltershausen (1809–1976) göttingai professzornak, aki ekkor Gauss hagyatékát rendezte. Waltershausen nyomban arra kéri Bolyai Farkast, hogy engedje át a göttingai Tudós Társaságnak Gauss hozzá írt leveleit. Farkas nehéz szívvel vált meg a kedves emlékektől, amikor végül is egy Gauss halálára írt latin nyelvű epigramma kíséretében elküldte a leveleket, valamint a tőle kapott emléktárgyakat Göttingába. Ezek között volt az a kis tábla is, amin Gauss a szabályos 17 oldalú sokszög szerkesztését megadta. Köszönet-

ként Bolyai Farkast is megajándékozták a Gauss emlékére készült emlék-érmekkel, mely érmék most is megtekinthetők a marosvásárhelyi Bolyai Múzeumban. Sartorius von Waltershausen *Gauss zum Gedächtnis* [Gauss emlékezete] című munkája egy éven belül meg is jelent, melyben többször olvasható a Bolyai név. Érdekes felidéznünk Gaussnak ebben a munkában megörökített egyik nyilatkozatát:

„Bolyai [Farkas] a legritkább emberek közül való, kiket valaha láttam [...] egyedül ő fogta fel metafizikai eszméimet a matematika felől”.

Gauss matematikai munkásságáról Waltershausen írása keveset mond, de a legkisebb négyzetek elvét, mint egyik legjelentősebb eredményét többször is megemlíti, mely matematikai módszerrel kapcsolatban Gaussnak prioritási vitája volt Lagrange-zsal. Az elsőbbség évtizedeken át eldöntetlen ügyének tisztázására Sartorius von Waltershausen a még élő Bolyai Farkast vélte a legilletékesebb tanúnak: „Gauss ezen fontos felfedezését, melyet már 1795-ben tett, a következő évben közölte barátjával, Bolyai-val, s így ő az egyetlen az élők közül, aki azon időből még tudományos tanúságot tehetne”. Waltershausen (aki máskülönben nem volt matematikus) tanulmánya alkalmas volt arra, hogy fölhívja a matematikusok figyelmét a Bolyai névre, bár egyik Bolyai matematikai tevékenységét sem említi.

A két Bolyai néhány matematikai eredményével érdemben legelőször a német Richard Baltzer (1818–1887) foglalkozott. Baltzer ez irányú tevékenysége azért jelentős, mert a *Die Elemente der Mathematik* (I–II. kötet, 1860, 1862) című munkája több kiadást ért meg, és a 19. század egyik sokat forgatott tankönyve volt.

Kezdetben sok zavart okozott – főként a külföldiek, de még a magyarok számára is –, hogy Bolyai Farkas név nélkül közölte munkáit. Így a külföldiek jó ideig azt sem tudták, hogy a *Tentamen*, a *Kurzer Grundriss* és az *Appendix* szerzője ugyanaz a személy-e vagy sem? Továbbá az is kérdés volt, hogy egy vagy két matematikus Bolyai élt-e? Ezek a kérdések azonban idővel tisztázódtak.

9.2. Schmidt Ferenc és G. J. Hoüel

Az előbbieken említett zavarok tisztázása terén nagyon nagy szolgálatot tett Schmidt Ferenc (1827–1901), a Bolyaiak megismertetésének fáradhatatlan harcosa. Édesapja – aki Temesváron mint ottani építész a vár katonai építési munkáiban is segédkezett, és így ismerte meg az odahelyezett Bolyai Jánost –, sokat mesélt neki róla. A természettudományok fejlődését mindig fi-

gyelemmel kísérő Schmidt Ferenc Európa jelentősebb országaiban kiválasztott egy-egy ismertebb tudóst, akiket arra kért meg, hogy a megjelenő új szakkönyvekről értesítsék őt. Ily módon az idők folyamán meglehetősen gazdag és értékes művekből álló könyvtárat gyűjtött össze. A kiadványokról tájékozódó levelezésében franciaországi partnere 1864-től a bordeaux-i egyetem professzora, Guillaume Jules Hoüel (1823–1886) volt, aki akárcsak R. Baltzer drezdai professzor, élénken érdeklődött a geometria alapjai iránt. Hoüel figyelmét a Bolyaiak munkásságára maga Baltzer hívta fel. Ezután Hoüel, a Schmidt Ferenchez 1867. február 17-én írt levelében élénken érdeklődik Bolyai munkájáról. Schmidt a válaszában közli, hogy két Bolyai van, és az *Appendix* a fiú, Bolyai János munkája. Hoüel csakhamar megszerezte, sőt mi több, gondosan tanulmányozta is a Bolyaiak főbb műveit. Őszintén megírja Schmidtnek a *Tentamen*, valamint az *Appendix* elolvasása utáni véleményét is. A *Tentamen*-ről például a következőket: „Kétségtelen, hogy Wolfgang Bolyai – egyéb adottságai mellett – a közérthetőség képességével nem nagyon rendelkezett. Úgy beszél, mint Pythia, ihletett hangon, sűrűn használ költői gondolatokat, amelyekből nem mindig könnyű világos fogalmakat és tételeket levonni”. Az *Appendix*-ről viszont már másképen vélekedett: „Cet Appendix est un travail de la plus grande valeur” (Ez az *Appendix* egy óriási értékű munka). Szénássy Barna közleményeiből tudjuk, hogy 1867-ben a Schmidtnek írott Hoüel-levelek központi témája az *Appendix* franciára fordítása, valamint Bolyai János életrajzának francia nyelvű közlése. Ez utóbbi megírására maga Hoüel kéri meg Schmidt Ferencet.

Érdemes még néhány dolgot megemlíteni a Hoüel-levelekből. Megtudjuk, hogy francia nyelvre fordítja Lobacsevszkij egyik munkáját, majd felhívja Schmidt figyelmét (1867 augusztusában) Bolyai János kéziratos hagyatékára, melyben még bizonyára vannak közlésre méltó, értékes eredeti dolgok. Mivel Hoüel megtudta, hogy a Bolyai-kéziratok a marosvásárhelyi református kollégium birtokában vannak, az akkor még Temesváron élő Schmidt Ferencen kívül Szabó Sámuel (1829–1905) marosvásárhelyi kollégiumi professzort is igyekezett megnyerni a Bolyai-ügynek. Sajnos nem sok sikerrel. Többszöri kérésére, Szabó Sámuel végül is egy nem sokat mondó levéllel válaszol. Elkeseredésében Hoüel Schmidthez fordul:

„Küldje meg nekem, kérem Önt, Bolyai jelenlegi utódjának a nevét: kolléga minőségében fogok neki írni, talán inkább hallgat majd rám, mint az irodalmár Szabó. Írni fogok – ha szükséges – a kollégium igazgatójának, portásának, mindenkinek...”.

De még máshonnan is várja a segítséget:

„Feltétlenül szükséges, hogy a pesti Akadémia segítsen nekünk, és főleg, hogy ne késsünk el, mert a tudomány e területe csakhamar olyan

gyorsan fog fejlődni, hogy Bolyait megelőzik, akkor pedig műve sokat veszít abból a jelentős értékből, amelyet e pillanatban képvisel.”

Mennyi bölcs előrelátást rejt magában Hoüelnek ez a mondata! Ezenkívül kezdettől fogva szilárd meggyőződéssel vallotta, hogy a Bolyai-kultusz ápolása elsődlegesen a magyarok feladata, s ezért fordult bizalommal az elején a magyarországi segítőtársakhoz. Nemes ügybuzgalma addig terjed, hogy már 1867-ben felveti a Gauss–Bolyai-levelezés kiadásának a gondolatát, amely végül is csak 1899-ben valósul meg Schmidt Ferenc és Paul Stäckel szívós utánajárása eredményeként. Marosvásárhelyi csalódása után a következőket írja:

„Kételkedem, hogy Erdély sok olyan jelentős férfiút termelt volna, mint a két Bolyai, és a tudomány szeretetének hiányában a saját nemzetük iránt érzett szeretetnek kellene ösztökélnie a magyarokat a velük való foglalkozásra; ne engedjék, hogy az ő tájaiktól, országuktól idegen emberek törődjenek honfitársaik emlékének híressé tételével.”

Még hangsúlyosabbak lesznek ezek a gondolatok, amikor Hoüel tudomást szerez arról, hogy a marosvásárhelyi református kollégium nemcsak az ő, hanem az *Appendix* olasz fordítójának, Giuseppe Battaglininek (1826–1894) a kérését is válasz nélkül hagyta.

„Fájdalommal látom – írja Hoüel –, hogy Magyarország milyen kevésre értékeli saját tudományos érdemeit... Megértem, hogy Marosvásárhely képviselői – mivel maguk idegenek a tudomány területén – nem sokra becsülik olyan honfitársuk emlékét, aki életét a tudománynak szentelte.” Majd később így folytatja: „A kazáni egyetem megértőbb volt, mint a marosvásárhelyi kollégium. Kérésünkre elküldte Lobacsevszkij közleményeit tudományos társaságunknak, továbbá megköszönték nekem azt a fáradozást, amelyet munkáinak terjesztése körül végeztem, kitüntettek azzal is, hogy tiszteleti taggá választottak, továbbá minden információt megírtak Lobacsevszkijről, amit csak óhajtok”.

Mindenesetre elgondolkodtatóak a művelt francia tudós sorai. S hogy ez nem csak elszigetelt, szubjektív vélemény, kissé elébe vágva a dolgoknak, hallgassuk meg az amerikai George Bruce Halsted (1853–1922) megjegyzését, aki mint az *Appendix* angol nyelvű fordítója, Bolyai iránti tisztelete és megbecsülése jeléül a Föld másik feléről Marosvásárhelyre utazott, és nagy matematikusunk sírját is felkereste:

„Amíg az oroszok Kazánban Lobacsevszkijnek szobrot emeltek, addig a magyarok alig voltak képesek Bolyai János jeltelen sírjára egy egyszerű sírkövet állítani.”

Sajnos ez is jelzi, hogy mennyire valóságghűek voltak annak idején Hoüel megállapításai.

A marosvásárhelyi református kollégiumot ért jogos bíráló hatására

megpróbáltam utánanézni, kik tanítottak abban az időben a kollégiumban, akiknek erkölcsi kötelességük lett volna a francia és olasz érdeklődők leveleire érdemben válaszolni. Az egyik valóban Szabó Sámuel, aki 1855-től 1868-ig működött az iskola természetrajzi katedráján. Ugyanakkor ő tanított ebben az iskolában először magyar irodalomtörténetet.

A matematika és természettudományok tanára viszont Mentovich Ferenc volt, aki 1856-tól egészen 1879-ben bekövetkezett haláláig tanított a kollégiumban, Bolyai Farkas katedráján. Az ősi iskola egyik leghíresebb professzoraként tartják számon, aki nem annyira a matematikai, mint inkább irodalmi és filozófiai munkásságával tűnt ki. Ő indította meg 1858-ban az első, Marosvásárhelyen megjelenő tudományos és szépirodalmi folyóiratot *Marosvásárhelyi Füzetek* címen. Annak idején, mint pályakezdő a nagykorősi református kollégiumban szoros barátságot köt tanártársával, Arany Jánossal, aki úgy tűnik, a költészet iránti érdeklődését is befolyásolta. Bolyai Farkas haláláról és temetéséről a *Kolozsvári Közlöny* 1856. december 3-i számában Mentovich közölt színvonalas tudósítást.

A másik számba jöhető személyiség Koncz József. Kezdetben a kollégium könyvtárának a gondviselője, 1860-tól filológiai segédtanár, majd 1874-től rendes tanár. Ő a szerzője *A marosvásárhelyi Evang. Református Kollégium története* (1557–1896) című vaskos kötetnek, mely ma is az egyik leghasználtabb iskolatörténeti forrásanyag. Ebben a két Bolyaira vonatkozóan is sok, akkoriban újnak számító adatot közöl. Ezek hiteleseknek tekinthetők, hiszen személyesen ismerte mind a két Bolyait. Ő kutatva fel a kollégium könyvtára részére a ma már nevét viselő *Koncz-kódex*-et, melyben egyik híres nyelvemlékünk, a *Marosvásárhelyi Sorok* található. 1856. november 26-án este, a kollégium beosztott felügyelőjeként állt Bolyai Farkas mellett halála pillanatában.

Nehezen feltételezhető, hogy Mentovich Ferenc és Koncz József ne értesültek volna a levelekben érkezett külföldi kérésekről. Az is lehetséges, hogy közös megegyezés alapján Szabó Sámuelre bízta a válaszadás és a Bolyai-kéziratok átnézésének feladatát. Szabó Sámuel mindenestre megpróbált megbirkózni ezzel a feladattal. Schmidt Ferencnek írt egyik levelében közli a két Bolyai műveinek pontos bibliográfiai adatait. Ugyancsak Schmidtnek írt leveleiből tudjuk meg, hogy átlapozta a Bolyai-hagyatékot, „mely – ahogy írja – rendkívül szennyezett és rendezetlen, s emiatt feldolgozásuk nagyon nehéz és rengeteg időt vesz igénybe”. Leveleinek tartalma még arra is rávilágít, hogy 1867. május 29-én a Kolozsváron székelő református egyházi főkonzisztórium foglalkozott a Bolyaiak ügyével és néhány érdekes határozatot hozott. Ezek szerint a főkonzisztórium lépéseket fog tenni a Bolyaiak magánlevelezéseinek egybegyűjtése érdekében, valamint elrendeli a kézirati hagyaték feldolgozá-

sát. A későbbi események alapján ma már tudjuk, hogy ebből a határozatból szinte semmi sem valósult meg, és Szabó Sámuel sem tudott megbirkózni a feladattal.

Ha tárgyilagosak és igazságosak akarunk lenni, akkor a marosvásárhelyi kollégiumot ért szégyenteljes és jogos bíráló alapján az elmarasztalás inkább vonatkozhat Mentovich Ferencre és Koncz Józsefre, mint Szabó Sámuelre, aki mégis csak megpróbált csinálni valamit. De ma már úgy érezzük, hogy a baj valahol máshol keresendő. A sajnálatos valódi helyzetre tapint rá kitűnő érzékkel Szénássy Barna, amikor ezzel kapcsolatban a következőket írja:

„A konzisztórium tehát szép határozatot hozott, de azok végrehajtására akkor hiányoztak az itthoni föltételek. Bármilyen meglepően hangzik, de így van: nem volt olyan magyarországi matematikusunk, aki egyáltalában megértette, értékelte volna az *Appendix*-et, és a kézírásos hagyaték matematikai részét színvonalasan föl tudta volna dolgozni”.

Tehát sajnos, ma már szinte tényként állíthatjuk, hogy az akkori szégyenteljes mulasztásokat valójában nem annyira a *hanyagság*, mint inkább a hozzá nem értésből fakadó *képtelenség* idézte elő, amit a más országokban és környezetben élő tudósok alig tudtak megérteni.

9.3. Az *Appendix* külföldi térhódítása

Hoüel egyik 1867-ben írott leveléből szerezhetünk tudomást arról, hogy Battaglini nápolyi professzor behatóan foglalkozik a nemeuklideszi geometriákkal, és így az *Appendix*-szel is, melynek nagy jelentőségét észrevéve, elhatározta ennek olasz nyelvre való fordítását. „A paralelák igazi elmélete – hála Baltzernek – kezd elterjedni. Az olasz geometerek igen érdeklődnek iránta” – írta ekkor Hoüel. Ami az *Appendix* olasz fordítását illeti, Szénássy Barna, a Hoüel leveleire támaszkodva meglepő megállapítást tesz:

„A Schmidt Ferenc által (németül) írott Bolyai-életrajz némileg késett, megérkezését 1868. január 3-i levelében nyugtázta Hoüel. A gyors megjelenés érdekében azonnal hozzá is kezdett annak francia fordításához [...] Hoüel egyébként Schmidt értekezését igen jónak találta, és megérkezése után azonnal bemutatta a bordeaux-i Akadémia egyik ülésén. Mint írja, a jelenlévők nagy érdeklődéssel fogadták. *Bizonyos, hogy ez volt a két Bolyairól szóló első előadás mind hazánkat, mind külföldet tekintve [...]*. Talán a Schmidt-tanulmány néhány hónapos késésének tudható be, hogy az *Appendix* olasz fordítása hamarabb került ki a nyomdából, mint a francia. Ugyanis Hoüel 1868. május 21-i levelében arról ír, hogy az olasz kiadást már kézhez kapta, de biztosra veszi, hogy a francia

sokkal gondosabb és tetszetősebb lesz. Így – Hoüel levelére támaszkodva – korrigálnunk kell egy sok helyen közölt adatot: az *Appendixnek legelőbb nem a francia, hanem az olasz fordítása jelent meg*; ezt azonban rövid idő múlva követte a francia, valamint Schmidt Ferencnek ehhez csatolt életrajzi írása. A késésnek az is oka volt, hogy a két tanulmány francia nyelvű kefelenyomatának korrekció céljából meg kellett járnia az abban az időben 6-8 hetet igénylő Bordeaux–Temesvár utat.

Hoüel közbenjárására a Schmidt-féle Bolyai életrajz csaknem egyidejűleg németül is megjelent a Grunert-féle *Archiv*-ban, az *Appendix* pedig a Schmidt által írott életrajzzal egybefűzve a párizsi Villars cég gondozásában különlenyomatként is napvilágot látott 300 példányban.”

Ebből a francia kiadványból tiszteletpéldányok is készültek, melyekkel – Hoüel roppant figyelmességének tanújeként – olyanokat ajándékozta meg, akik valamilyen módon hozzájárultak a Bolyaiak munkásságának megismertetéséhez, vagy kötődtek hozzájuk. Tiszteletpéldányt kapott többek között Schmidt Ferenc, Richard Baltzer, Sartorius von Waltershausen, Szabó Sámuel, Bolyai Gergely, a marosvásárhelyi református kollégium stb. Az elmondottak abszolút tisztánlátása érdekében Szénássy Barna összegezte az első *Appendix*-fordítások és a vele párhuzamosan elkészült Schmidt-féle életrajzok nyomdából való kikerülésének időbeli sorrendjét:

- „1. G. Bolyai: *Sulla scienza dello spazio assolutamente vera...* latinból fordította Battaglini, Giornale di Matematica, 6. k. Napoli, 1868; 97–116. oldal.
2. Franz Schmidt: *Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai de Bolya*. Németből fordította Hoüel, Memoires de la Société des sciences..., Bordeaux, 5. k. 1867; 191–205. oldal.
3. J. Bolyai: *La science absolue de l'espace...* Latinból fordította Hoüel, Memoires de la Société des sciences..., Bordeaux, 5. k. 1867; 207–248. oldal.
4. Franz Schmidt: *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Wolfgang und Johannes Bolyai von Bolya*. Grunert Archiv. 28. k. 1867; 217–228. oldal.
5. Angelo Forti: *Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang a Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi*. Bolletino di biografia e di storia delle scienze matematiche e fiziche. Roma 1. k. 1868; 277–299. oldal.

Megjegyzés: a felsorolt írások nyomdából történt kikerülésének dátuma tehát nem mindenütt egyezik meg a közzétéví folyóiratokon feltüntetett évvel.”

Johann Frischauf (1837–1924) nevével Schmidt Ferencen keresztül ismerkedett meg Hoüel. A jeles osztrák matematikus az 1871–1872-es tanévben már kurzusszerű előadást tartott a grazi egyetemen a nem-euklideszi geometriáról, anyagát főleg az *Appendix*-ből merítve. Előadásai 1872-ben Lipcsében könyv alakjában is megjelentek *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai* címmel, melyet nemsokára egy újabb ilyen témájú könyve követett. Számunkra ez azért bír nagy jelentőséggel, mert német nyelven ez volt az első mű, amely az *Appendix*-et ismertté tette a szakemberek részére. Nem hallgathatjuk el, hogy Frischaufot a nem-euklideszi geometriai előadásaiért az osztrák tanügyi hatóságok hevesen támadták, ami egyben azt is bizonyítja, hogy az új eszmék még mindig milyen nagy ellenállásba ütköztek. Ezzel újból igazolást nyert Vekerdi László már említett megállapítása: „Az osztrák birodalomnak nem Bolyai-szerű matematikusokra volt szüksége professzorként”.

Schmidt elküldte Frischauf munkáit Hoüelnek, aki válaszlevelében megköszöni ezeket. Ennek szövege is fényt vet Hoüel önzetlen, tiszta jellemére:

„A magam részéről köszönettel tartozom Önnek; megkaptam a Bolyai-geometriáról szóló két kötetet; ez azt bizonyítja, hogy a mag, amelyet Ön elvetett, csírázni kezd, és az Ön Bolyaiakról szóló írása nem volt hatástalan. Az Ön érdeme, hogy ennek a két jeles férfiúnak a neve Németországban ismertté vált.”

Bolyai János remekművének növekvő hírnevét nagyban felgyorsítja az az esemény, hogy George Bruce Halsted az *Appendix*-et angol nyelvre fordítja, és 1891-ben az Amerikai Egyesült Államokban, Austinban kiadja. A mű komoly sikere mellett tanúskodik az, hogy 1896-ban már a negyedik kiadása jelent meg, és az angol fordításnak az egyik utánnyomását 1895-ben Tokióban is kiadták. A negyedik kiadáshoz írt bevezetőben G. B. Halsted már ismerteti Bolyai János matematikatörténeti jelentőségű, 1823. november 3-án írt temesvári levelét, melyet „csodálatra méltó okmánynak” nevez, az abszolút geometria megalkotójáról pedig így nyilatkozik: „a halhatatlan János a világtörténetben a lángésznek legtokéletesebb megtestesülése”.

Említésre méltó még, hogy Reyes y Prosper tollából Bolyai Farkasról és Jánosról a *Progreso Mat.* (Zaragoza), 1894; 4. számában spanyol nyelven jelent meg egy ismertető.

Bolyai János művének egyre több nyelvre fordítása a 20. században is folytatódik. 1928-ban Belgrádban B. P. Petronević fordításában szerbhorvát nyelven, 1950-ben V. F. Kagan fordításában a Szovjetunióban oroszul, majd 1954-ben Tóth Imre fordításában és a Román Akadémia kiadásában románul is megjelenik az *Appendix*.

9.4. Magyarországi ébredés

A francia- és olaszországi kiadások hatására Magyarországon is kezdik felismerni a „Bolyai-ügy” jelentőségét. A Magyar Tudományos Akadémia egy 1868-ban tartott ülésén Hunyady Jenő (1838–1889) tájékoztatta a tagokat arról, hogy megjelent francia nyelven az *Appendix*, valamint annak bevezetéseként a Schmidt által írott életrajz. Ugyanakkor indítványozta, hogy az Akadémia kérje át Marosvásárhelyről feldolgozás céljából a Bolyai-kéziratokat. E felszólítást követően az Akadémia akkori főtítkára, Arany János 1868. június 15-én levelet írt „A Marosvásárhelyi Ref. Collegium Tisztelt Igazgatóságának”, amelyben „szíves bizalommal felszólítja és kéri az igen tisztelt Főiskolai Igazgatóságot, hogy az összes iratokat átvizsgálásra kikölcsönözni s biztos kéz által az Akadémia kéziratárába juttatni méltóztassék”.

A kérést azonban csak később teljesítették. Az akkori magyar kultusz-miniszter, báró Eötvös József közbelépésére is szükség volt, aki egyben a Magyar Tudományos Akadémia elnöki tisztségét is betöltötte, hogy végül is 1869 decemberében, gróf Teleki Domokos személyes közvetítése útján a Bolyai-hagyaték Pestre érkezzen. Arany János ekkor külön felkéri Hunfalvi Pált, az Akadémia levéltárának akkori kezelőjét, hogy a küldeményt „biztos helyen megőrizni szíveskedjék”.

A Bolyaiakról szóló irodalom nem hangsúlyozta ki eléggé azt a szerepet, melyet Hoüel játszott a szóban forgó hagyaték Pestre küldésében. Ugyanis az *Appendix* francia nyelvű megjelenése után sem lankadt Hoüel Bolyaiak iránti érdeklődése. Figyelmének középpontjában most már a hagyaték földolgozásának ügye, valamint az így feltárt érdekesebb részek francia nyelvű közlésének terve állott. E tényt ismerve elgondolkodhatunk: világviszonylatban mennyivel nőtt volna még Bolyai János tudósi megítélése, ha születésének mostani bicentenáriumaig feltárt, kéziratban maradt eredményei és eredeti gondolatai teljes egészében már annak idején Hoüel rendelkezésére állnak.

Hogy a kéziratok Pestre szállítását Hoüel még hatékonyabban előmozdítsa, felkérte egyik igen rangos levelezőpartnerét, a tudománypártoló olasz Boncompagni herceget is. Ugyanis Schmidt jelezte Hoüelnek, hogy jó lenne Eötvös báró segítségét megnyerni. Hoüel ennek alapján kéri meg Boncompagnit, hogy a Bolyai-ügyben írjon Eötvösnek, mert ahogy ő maga is írta Schmidtnek: „egy herceg aláírása egy miniszter számára többet ér, mint egy olyan egyszerű halandóé, amilyen én vagyok”.

Boncompagni eleget tett Hoüel kérésének, és Eötvös válasza sem késett sokat. Boncompagni elküldte Hoüelnek e válaszlevél azon részé-

nek másolatát, amely a kérésére vonatkozott. Íme néhány sor Eötvös válaszából:

„Megkaptam 1869. július 3-án írott kedves levelét, valamint a Bolyai Jánosra és Bolyai Farkasra vonatkozó publikációkat tartalmazó csomagot. Engedje meg, hogy ezért legszívélyesebb köszönetemet fejezzem ki. Mivel a levele abban a pillanatban érkezett, amikor éppen indulni készültem Erdélybe, úgy gondoltam, hogy elhalasztom a választ addig, amíg közvetlenül is alkalmam lesz meggyőződni a Bolyai-ügy állásáról. Utam folyamán lehetőségem nyílt arra, hogy kutatásokat folytassak ebben a dologban Marosvásárhelyen, valamint a katonai hivatalokban. Az iratok a marosvásárhelyi kollégiumban, valamint egyik tagjánál vannak, aki vállalkozott ezek átvizsgálására”.

Az említett tag több mint valószínű, Szabó Sámuel lehetett.

De Eötvös József ekkor nemcsak Boncompagninak, hanem saját fiának, Eötvös Lorándnak is írt. Érdemes újból felelevenítenünk a már sok helyen idézett sorokat:

„A napokban levelet kaptam a Római Akadémia matematikus osztálya elnökétől, melynek örültem és elszomorodtam egyszerre, s melynek tartalmáról most sem tudom, büszkék legyünk-e reá, vagy piruljunk. Az elnök tudósít, hogy ugyanazon postával Bolyai Jánosnak és Farkasnak Rómában kijött biographiáját küldi... melyhez Bolyai Jánosnak a paralelák teóriájából írt kisebb munkája olasz és francia fordításban csatoltatott. Ez a munka állítólag a római tudósok nézete szerint a legnagyobb, mi a matematika körében a század alatt történt... Boncompagni csak azért fordult hozzám, mert biztos tudomást szerezvén, hogy a két Bolyai írományai Marosvásárhelyen vannak, három év óta mind ő, mind a bordeauxi és a párizsi Akadémiák tízszer írtak a marosvásárhelyi kollégiumhoz, de még választ sem kaphattak, s most – meg lévén győződve, hogy ilyen lángész írományai közt sok becses jegyzet lesz –, azért fordultak hozzám, hogy az írományokra kezemet tegyem, s azoknak érdemes részét vagy az Akadémiánál adjam ki, vagy nekik engedjem át kiadás végett. – És ez az ember soha nem volt akadémikus, Erdélyben félbolondnak tartatott;... s ha örülünk, hogy nagy matematikustadtunk a világnak: lehet-e ez rosszabb bizonyossága barbarizmusunknak?”

Nem kétséges, hogy ez a művelt ember rövid idő alatt felmérte a valós helyzetet. Az idézett szövegrész még azt is sejteti, hogy a több mint egyéves vajúdas után Eötvös József közbelépése nagyban hozzájárult ahhoz, hogy a Bolyai-hagyaték végül is felkerüljön a Magyar Tudományos Akadémiához. Houëlnek az idegesítő huzavona miatti egészséges türelmetlensége Schmidt Ferenchez írt alábbi soraiban jut kifejezésre:

„Határozottan kezdem hinni, hogy a geográfusok tévedtek, amikor Er-

délyt Európába rajzolták; inkább Afrika, vagy Bochara közepén van és egy Livingstone-ra vagy Vámbéryre¹⁶ lenne szükség, hogy fölfedezze. Bizonyos, hogy ha a Bolyai-iratok Japánban vagy Ausztráliában lettek volna, akkor Ön már régen megkapta volna azokat”.

Schmidt Ferenc ugyanis 1869-ben Pestre költözött, ahová a kéziratokat is kérték. A magyar kulturális életet rövidesen komoly veszteség éri: 1871. február 2-án meghal Eötvös József. Hoüel megint közbelép. Újból megkéri Boncompagnit, hogy most az új vallás- és közoktatásügyi miniszterrel is vegye fel a kapcsolatot és nyerje meg a Bolyai-ügynek. Boncompagni ezt is megteszi, és Pauler Tivadar egy rövid, latin nyelven írt válaszában megígéri neki, hogy az Akadémia elé terjeszti az ügyet. Az MTA III. osztályának 1871. október 16-i határozata értelmében megalakult a Bolyai-kéziratok átvizsgálására hivatott négytagú bizottság, melynek elnöke Vész János, s tagjai Hunyady Jenő, König Gyula és Schmidt Ferenc. Hoüel főleg azt tartja megnyugtatónak, hogy König is tagja a bizottságnak, akinek már olvasta egyik tanulmányát, melyben, a nem-euklideszi geometria egy modelljét adja meg. Sajnos König és Hunyady más elfoglaltságuk miatt csak felületesen foglalkoztak a kéziratok átnézésével. Hoüel 1874. december 7-én kelt és Schmidtnek címzett levelében a következőket olvashatjuk:

„Bosszantó, hogy a Bolyai-iratok feldolgozása ilyen kellemetlenül lassan halad. Egy kicsivel több aktivitással ki lehet használni azt a pillanatot, amikor a téma még új, és a feljegyzésekben eddig ismeretlen eredményeket lehet találni. Most sokan dolgoznak már ezen a témán, sokkal átfogóbb a nézőpont, így a Bolyai-iratoknak csak történeti értékük lesz; és bár az érték kétségtelenül nagy a magyar tudomány számára, de idővel csak csökkenni fog, ha sokáig késlekednek. Bizonyos, hogy előnyös lenne, ha a kéziratok kiadásával König helyett Frischaufot bíznák meg”.

1876-tól már ritkulnak a Magyarországra küldött Hoüel-levelek, melyeket végül özvegyen maradt feleségének gyászkeretes levele zár le. Ebben értesíti Schmidt Ferencet, hogy férje 1886. június 11-én meghalt. Ennek a szerény és nagy műveltségű embernek, aki a két magyar tudós nemzetközi megismertetésében óriási szolgálatokat tett, az illetékes magyar szervek egyetlen elismerő hivatalos kitüntetéssel sem fejezték ki hálájukat, amit viszont – amint már láttuk – a kazáni oroszok megtettek. Ugyanez a sajnálatos dolog mondható el George Bruce Halsted esetében is.

A két Bolyai kéziratos hagyatékának feldolgozása vontatottan haladt. A kollégium kérésére, valamint az előzetes megegyezés alapján – néhány

16 Célzás az angol Livingstone Afrika- és a magyar Vámbéry Ármín Közép-Ázsia-kutatókra.

kevés kivételtől eltekintve – az 1869 végén Pestre küldött Bolyai-hagyaték visszakerült Marosvásárhelyre, mely tény a kollégium 1894. július 6-án kelt elismervénye is igazolja.

Schmidt Ferenc az eltelt évek folyamán egyre inkább meggyőződött arról, hogy a kéziratok feldolgozását csakis egy odaadó és főleg kitűnően felkészült szakember tudja elvégezni. Ettől a gondolattól vezérelve kérte meg e feladat elvégzésére Paul Stäckel német matematikust, akivel 1894-ben a természettudósok bécsi gyűlésén találkozott. Stäckel, aki már jóval azelőtt ismerte Bolyai János *Appendix*-ét, engedett a csábításnak. Schmidt ugyanakkor minden segítséget megígért, amit mindvégig teljesített is. Stäckel rendelkezésére bocsátotta a két matematikus addig összegyűjtött életrajzi adatait, valamint a nem német nyelvű kézirati anyagok fordításában nemcsak ő, hanem még gyermekei is segítkeztek. 1898 márciusában, Schmidt kíséretében Stäckel Marosvásárhelyre érkezik, hogy a kéziratokat átnézze és ennek eredményeként a századforduló éveiben egymás után jelennek meg közleményei az Akadémia *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*-jében. Érdemei elismeréseként az MTA 1900. május 4-én Paul Stäckelt külső tagjai közé választotta.

Magyarországon a Bolyaiak eredményei iránti érdeklődés ebben az időben kezd növekedni. Néhány kutatás a régebbi évekre is visszanyúlik, de az általános ilyen irányú tevékenység erre az időszakra esik. Farkas Gyula (1847–1930) még az 1870-es években kezd foglalkozni Bolyai Farkasnak a trinom egyenletekre vonatkozó gyökközelítő eljárásával, az úgynevezett *Bolyai-algoritmussal*, majd később Réthy Mór (1848–1925), a kolozsvári egyetem tanára, szintén Bolyai Farkasnak a *végyszerű terület-egyenlőségre* vonatkozó tételeit igyekszik továbbfejleszteni. Bolyai János eszméinek terjesztésében komoly tevékenységet fejtett ki Vályi Gyula (1855–1913), aki a kolozsvári egyetemen az 1891–1892-es tanévtől kezdve meghirdette a „Bolyai János Appendixéről” elnevezésű kollégiumot. Előadásainak anyaga sokszorosított jegyzetként is megjelent. Így vált Bolyai János szülővárosának egyeteme ebben az időszakban a Bolyai-kultusz első fellelővívőjévé Magyarországon. Ennek hatására Vályi fiatalabb kortársai valamint tanítványai közül többen is eredményesen vettek részt később a két Bolyai megismertetésének munkájában. Elég ha csak Schlesinger Lajos, Király Henrik vagy Dávid Lajos tevékenységére gondolunk. A marosvásárhelyi születésű Vályi Gyula, az akkori századvég egyik legnagyobb magyar matematikusa, tizenkét évig ugyanabban a marosvásárhelyi református kollégiumban diákoskodott, amelynek egykor Bolyai János is tanulója volt.

Habár a kézirati hagyaték földolgozása vontatottan haladt, tudományos körünkben mindinkább megérlelődött a *Tentamen* és az *Appendix*

latin nyelvű, nyomdatechnikailag átjavított kiadásának gondolata. Az előkészítési munkák ez esetben sem mentek valami simán, mivel gyakran anyagi nehézségek és jogi problémák is akadályozták. A kiadási munkálatokba legjelesebb budapesti matematikusok kapcsolódtak be: Réthy Mór, König Gyula, Tötössy Béla, Kürschák József. Az évekig húzódó előkészítés eredményeként végül is 1897-ben König Gyula az Akadémia egyik ülésén bemutatta a *Tentamen* második kiadásának első kötetét. A lassú munkálat folyamatát érzékelteti az a tény is, hogy a *Tentamen* második kötete csak 1904-ben került ki a nyomdából, melyet Réthy Mór mutatott be a tudományos köröknek.

1897-ben azonban történt egy másik fontos esemény is. Az *Appendix*, amely addig az összes számottevő világnyelven olvashatóvá vált, annyi év után végre Bolyai magyar anyanyelvén is megjelent. Az ügy hirtelen buzgalmát mutatja, hogy egyszerre két fordításban is. Az egyik Rados Ignác munkája, mely a *Mathematikai és Fizikai Lapok* 6. kötetében, a másik Suták József fordítása és kommentálása, mely a nyomdai költségek anyagi terheit is viselő Schmidt Ferenc Bolyai-életrajzával kiegészítve könyv alakban jelent meg. Schmidt ezen írásának a végén a következő vallomás olvasható:

„Már az *Appendix* francia fordításakor, 1868-ban az volt a kívánságom, hogy ezt a korszakalkotó munkát magyar nyelven is megjelentessem, hogy a haza egyik legjobb fiának szellemi munkáját itthon is megismerjék és megbecsüljék. A Halsted-féle angol fordítás IV. kiadása után teljesül csak – 30 évi fáradság után – ez a kívánságom. Vajha, Bolyai János a hazában is oly elismerésre találna, mint amilyenben már évek hosszú sora óta az egész világon részesül”.

Ugyancsak Schmidt Ferenc fáradhatatlan közbenjárásának eredményeként jelent meg 1899-ben, egyidejűleg két helyen, Lipcsében és Budapesten, Bolyai Farkas és Carl Friedrich Gauss levelezése. E kiadás előkészítésében hathatós segítséget nyújtott Paul Stäckel és Gruber Nándor.

A magyar nyelvű *Appendix* megjelenésével egy időben látott napvilágot Bedőházi János (1853–1915) *A két Bolyai* című munkája, amely az első róluk szóló monográfiának is tekinthető. A könyv végén a szerző alábbi jegyzete található:

„G. B. Halsted Texasból Austini egyetemi tanár 1896 nyarán látogatta meg Marosvásárhelyt. E munka megírására, amelyre a szerző csekély tudománnyal, de annál nagyobb lelkesültséggel vállalkozott, az impulzust ő adta. Látva az érdekeltséget az idegennél nemzetünk e két nagy tudósa iránt, a kollégium előljárósága mintegy kötelességének tartotta a »Tentamen«-nek a Magyar Tudományos Akadémia által történő kiadása alkalmából e két nagy férfiú életéről, jelleméről, tudományos működésé-

ről a haza közönségének egy népszerűen, minél szélesebb körben olvasható művet adni ki, mely mű megírásával a szerzőt bírta meg”.

A könyv, mely 1897-ben került ki a marosvásárhelyi református kollégium nyomdájából, számos Bolyaival kapcsolatos eseményt és adatot örökített meg az utókor számára. De sajnos – amint már említettük – a könyv nem mentes az akkor még mindig létező alaptalan előítéletektől. A könyv arányai szintén sok kívánnivalót hagynak maguk után: míg Bolyai Farkasról 350 oldalon át értekezik, addig Bolyai Jánosra csak 88 oldal jut.

Az akkori Bolyai-kutatás kétségtelenül a Bolyai-ügynek Schmidt Ferenc által megnyert Paul Stäckel munkájában csúcsonyult ki. A fáradhatatlan német kutató még két alkalommal, 1901. augusztus és 1909. szeptember havában is járt Erdélyben adatot gyűjteni. A feldolgozott anyagot a *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai* című két-kötetes monográfiájában foglalta össze, amely 1913-ban Lipcsében német, majd rá egy évre Budapesten magyar nyelven jelent meg. Amint Stäckel könyvének előszavában is említi, a többéves előkészület fáradásait nagy mértékben enyhítették Kürschák József budapesti és Schlesinger Lajos kolozsvári egyetemi tanárok. Az 1914-es magyar kiadást Radós Ignác fordította és rendezte sajtó alá. A mindmáig legalaposabbnak vélt Bolyai-monográfia szerzője művét nemes gesztussal „Schmidt Ferenc építész, a Bolyaiak ügye fáradhatatlan előharcosa emlékének ajánlja”, aki sajnos már nem érte meg ennek megjelenését. Stäckel e monográfiájának megírásához már felhasználhatta a Szabó Péter (1867–1914) által magyarul közölt, a Bolyaiakról szóló életrajzi tanulmányokat, melyeket számára Fejér Lipót fordított németre, valamint Bedőházi János munkája is rendelkezésére állt.

Szabó Péter budapesti gimnáziumi matematikatanár Szabó Sámuel fia volt, aki apja 1905-ben bekövetkezett halála után, íróasztalának fiókjaiiban számos Bolyai-kéziratot talált. Szerencse, hogy ismerte ezek értékét, melyeket apja minden hátrahagyott nyom nélkül egyszerűen magához vett és hazavitt. Ő viszont, miután áttanulmányozta azokat, azonnal átadta az MTA levéltárának. Ezekre, valamint a bécsi cs. k. hadi levéltárban talált adatokra támaszkodva jelentette meg a *Mathematikai és Fizikai Lapok* 1910 novemberi számában a *Bolyai János ifjúsága* című tanulmányt.

Néhány évtizedes késéssel tehát Magyarországon is kezdtek felismerni Bolyai alkotásának óriási jelentőségét, és igyekeztek bepótolni mindazt, amit egy fél évszázadon át elmulasztottak. Ugyanis az oroszok az 1870-es évektől kezdve többet tettek Lobacsevszkij nemzetközi elismertetése érdekében, mint mi magyarok Bolyai Jánosért. Nagyobb hangsúlyt fektettek Lobacsevszkij műveinek megjelentetésére, Kazánban szobrot állított-

tak neki, emlékére 1895-ben tekintélyes összegű pályadíjat létesítettek. Különös gondot fordítottak arra, hogy az orosz matematikus művei minél több helyen jelenjenek meg külföldön, melynek eredménye az lett, hogy ott is többször kommentálták. Részben ennek is tulajdonítható, hogy amikor 1894-ben a *Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques* (a matematikai tudományok nemzetközi bibliográfiai kongresszusa) Henri Poincaré elnöklete alatt igen alapos kiadványt készített elő, az egyik fejezet címe ez lett volna: *Géométrie de Lobatschewsky*. A magyar szerzők munkáinak számbavételére alakult bizottsági tagok (Rados Gusztáv, Tötössy Béla, Kürschák József, Kopp Lajos) közbenjárására volt szükség, hogy ezt a címet végül is *Géométrie de Bolyai et Lobatschewsky*-re változtassák.

9.5. Centenárium megemlékezések

Bolyai János születésének századik évfordulója közeledtével a magyar tudósszadalom szükségét érezte, hogy erről méltó módon megemlékezzenek. Kolozsvár lévén Bolyai János születési helye, a kolozsvári egyetem tanácsa 1902. november 3-án megtartott ülésén (csodálatos dátumi egybeesés!) a matematika és természettudományi kar javaslata alapján elhatározta, hogy Bolyai János születésének századik évfordulóját megünnepeli. Mivel akkor azt vették tekintetbe, hogy december 15. igen közel van a karácsonyi ünnepekhez, és a távolabbi helyekről érkező meghívottak számára ez némi akadályt jelenthet, elhatározták, hogy éppen egy hónappal később, 1903. január 15-én rendezik meg a centenárium ünnepséget. Ne felejtsük el, annak idején nem volt olyan gyors a közlekedési, mint manapság. Erre az alkalomra az MTA III. osztálya a kolozsvári egyetem rendelkezésére bocsátott a *Tentamen* új kiadásával készült *Appendix*-ből 100 különlenyomati példányt, „hogy mindazon tudományos intézeteknek és tudósoknak kedveskedhessék vele, kiknek ezen emlékűnnep meghívóit és irományait meg fogják küldeni”.

Már korábban elhatározták, hogy Bolyai János kolozsvári szülőházát felkutatják. Ennek felderítésében eredményes munkát végzett Schlesinger Lajos, a felső menziségtan professzora, az ünnepi gyűlés vezérszónoka. Az emlékűnnepélyen – a közhivatali méltóságok és nagyszámú érdeklődő mellett – az akkori magyar természettudósok markáns képviselői vettek részt. A megjelent meghívottak között ott volt Eötvös Loránd, Szily Kálmán, Réthy Mór, Kürschák József, Tötössy Béla, Fröchlich Izidor, Beke Manó, hogy csak néhány nevet említsünk. A vendéglátók között pedig Farkas Gyula, Schlesinger Lajos, Vályi Gyula professzorok. Az emlékűn-

nepélyre megérkezett még Budisavljević Emanuel, a bécsi cs. és k. hadmérnöki Akadémia matematikaprofesszora, az ünnepelt fia, Bolyai Dénes, továbbá a marosvásárhelyi református kollégium küldöttsége és számos intézmény képviselője.

A kolozsvári tudományegyetem dísztermében megtartott emlékülés az ifjúsági énekkar fellépésével vette kezdetét. Zenekari kísérettel a – szinte szimbolikus szövegű – „Vajh meddig fogod feledni oh nagy Isten gyermeked?” kezdetű zsoltárt énekelték el. Ezt követte az egyetem rektorának megnyitóbeszéde, majd Schlesinger Lajos szakszerű előadása. Ezután a meghívottak hozzászólásai és üdvözlőbeszédei következtek, melyekre a későbbiekben térünk ki. Az ünnepi összejövetel végén a résztvevők között szétosztották a matematikai és természettudományi kar által külön ez alkalomra összeállított *Emlékkönyv*-et, mely Bolyai János apjához 1823. november 3-án írt levelének hasonmását és latin fordítását, Schlesinger Lajos és Paul Stäckel tanulmányait, valamint az új geometriára vonatkozó 1902-ig megjelent tudományos munkák Roberto Bonola által összeállított címjegyzékét tartalmazta. Ezt követően az ünneplő közönség Bolyai János szülőházához vonult, hogy jelen legyen a ház homlokzatán elhelyezett emléktábla felavatásánál. Szövege a következő:

„Az 1802. év 12. havának 15. napján, itt született Bolyai BOLYAI JÁNOS, a magyar Euklides, Bolyai Bolyai Farkasnak, a Tentamen mély gondolkodás szerzőjének fia. Minek az emlékezetére száz év múltán a Ferencz József Tudományegyetem matematikai és természettudományi kara állítja e követ.”

Tíz nappal később, 1903. január 25-én Marosvásárhelyen ünnepelték Bolyai János születésének századik évfordulóját. Az emlékünnepegy színhelye a református kollégium, melyen Lakatos Sámuel és Bedőházi János emlékeznek az iskola egykori tanulójára, a már világhírnevű nagy matematikusra. Befejezőként a marosvásárhelyi református temetőben koszorút helyeztek el Bolyai János ekkor már emlékkövel megjelölt sírjára.

9.6. A Bolyai-díj

A kolozsvári centenáriumi ünnepségen az egyetem rektorának megnyitóbeszéde és Schlesinger Lajos előadása után Eötvös Loránd üdvözlő szavai következtek. Idézzünk néhány sort a Magyar Tudományos Akadémia akkori elnökének néhány perces nevezetes beszédéből:

„Környezőtől, atyján kívül, meg nem érte, magából és magának alkotta meg Bolyai János a geometriának azt az új világát, amelynek mély-

ségeiben ő s később az ő nyomdokán haladók gazdag kincseket tártak föl a tudománynak.

Elismerésre, jutalomra e hazában nem számíthatott. Nem látta ő, csak elképzelni tudta azt a szebb világot, amelyben őt megérteni tudó emberek is élnek [...].

Nekünk, akik ma, száz évvel az ő születése után itt összegyűltünk, már jobb a sorsunk. Hazánk azóta a tudományos világnak egy évről évre gazdagabb termést ígérő tartománya lett [...]. Ha igazi tudósok és – amint kell – jó magyarok akarunk lenni, úgy a tudomány zászlóját olyan magasra kell emelnünk, hogy azt hazánk határain túl is meglássák és megadhasák neki az illő tiszteletet. Ez a mi eszményünk, ez valósult meg Bolyai alkotásával egyszer; ilyen teljes mértékben talán egyetlenegyszer [...].

Engem a Bolyai tudományában jártasabb társaimmal együtt a Magyar Tudományos Akadémia küldött ide. Nem jöttünk üres kézzel, társam, a főtítkárr, el fogja mondani, mivel járul hozzá az Akadémia ahhoz, hogy ez a mai ünnep a jövőben is emlékezetes maradjon”.

Eötvös Loránd emlékbeszéde után Szily Kálmán, az MTA főtítkára a következő jelentést tette:

„Bolyai János születése századik évfordulójának ünnepléséhez a Magyar Tudományos Akadémia azon határozatával járul hozzá, hogy a halhatatlan tudósnak, valamint az ő mélyen gondolkozó atyjának és a tudományban mesterének emlékére, első ízben 1905-ben és azután minden 5. évben bárhol és bármely nyelven megjelent legkiválóbb matematikai vizsgálat szerzőjét, tekintetbe véve az illetőnek előbbi tudományos működését is, 10 000 korona »Bolyai-jutalom«-mal és éremmel tünteti ki. Az érem egyik oldalát a Magyar Tudományos Akadémia és Budapest képe, másik oldalát magyar felirat díszíti.

Ha meghalt író munkája ítéltetik legjobbnak, az elhunyt örököseinek adatik ki a jutalom.

A jutalom odaítélése évében az MTA III. osztálya legkésőbb márciusi üléséről, két belső és két külső tagból álló bizottságot választ, mely október első felében, Budapesten egybegyűlve határoz. A bizottság saját kebeléből maga választja elnökét, ki a bizottságban szintén szavaz és szavazategyenlőség esetében szavazatával dönt. Ugyancsak a bizottság választja előadóját is, ki a bizottság határozatáról, a díjat odaítélő összes ülés számára, részletesen indokolt jelentést készít.

A bizottsági tagoknak esetleg szóba jöhető dolgozatai mind a bizottságnak határozatából, mind a jelentésből ki vannak zárva.

A külső tagok, kik a tanácskozássra hozzánk fáradnak és néhány napot nálunk töltenek, egyenként 1000 koronában részesülnek. Az előadói jelentés tiszteletdíja 300 korona.

A jelentés az Akadémia *Értesítő*-jében jelenik meg; az MTA gondoskodik azon kívül a jelentésnek külföldön is közzétételéről, s a szövetségben álló Akadémiák számára való megküldéséről.”

Az akkori 10 000 korona reális értékének mostani felbecsülése érdekében Szénássy Barna egy összehasonlítással él: ez az összeg egy akkori átlagkeresetű gyári munkás 14 évi fizetésével volt egyenértékű. A Bolyai-díjjal járó aranyérem értéke 600 korona volt.

A 20. század viharos történelmi eseményei miatt ezt a díjat csak két alkalommal tudták kiosztani, és az eltelt évek távlatából is megítélve a legkompetensebb személyek kapták. 1905-ben, a König Gyula, Rados Gusztáv, Gaston Darboux és Felix Klein összetételű bizottság Henri Poincaré-nak ítélte oda a Bolyai-díjat, míg 1910-ben König Gyula, Rados Gusztáv, Mittag-Leffler és Henri Poincaré ítélete alapján David Hilbertet tüntették ki e díjjal.

Az első világháború kitörése megakadályozta a Bolyai-díj harmadszori kiosztását, majd a háború utáni gazdasági összeomlás és Magyarország trianoni feldarabolása véget vetett e nemes kezdeményezésnek.

Az utóbbi években egyre jobban felerősödött annak a gondolata, hogy ezt a díjat, amely a nem létező matematikai Nobel-díjat is részben helyettesítené, vissza kellene állítani. Nem beszélve arról, hogy ez a díj nagymértékben járul hozzá a Bolyai név fokozottabb nemzetközi megismertetéséhez. Az elmúlt évezred utolsó évében Komjáth Péter a Bolyai-díjról szóló tudósításában már az alábbiakat írhatta:

„Meglepő, örömteli fordulat a magyarországi matematika történetében: poraiból újjáéledt a Magyar Tudományos Akadémia majdnem 100 évvel ezelőtti, a világ legkiválóbb matematikusainak a díja, a Bolyai-díj... A Magyar Tudományos Akadémia 1994-ben döntést hozott a díj felújításáról. Ez tehát független és korábbi az 1997-ben magánvállalkozók által létrehozott, először 1999-ben kiosztott *Bolyai János alkotói díj*-től, attól számos paraméterben különbözik. A jelenlegi Bolyai-díjat minden ötödik évben adományozzák egy, az előző 10 évben megjelent, önálló matematikai eredményeket tartalmazó monográfia szerzőjének, olyan bírálóbizottság döntése alapján, melyben egyenlő számban vesznek részt a Magyar Tudományos Akadémia tagjai és külföldi matematikusok.”

A Bolyai-díj nemzetközi zsűrijét az MTA Matematikai Tudományok Osztálya jelölte ki. A díj szabályzatának megfelelően a zsűri az MTA öt rendes tagjából és öt külföldi matematikusból áll. A díjat továbbra is az ötlet osztható évszámokban osztják ki. A 2000. évi Bolyai János Nemzetközi Matematika díjat odaítélő zsűri összetétele a következő volt; Az Amerikai Egyesült Államokból: Lovász László – aki egyben a zsűri elnöke is, Ciprian Foiaş, Hajnal András, János Kollár, Yacov Pesin; Magyaror-

szágról: Recski András – a zsűri titkára, Daróczy Zoltán, Laczkovich Miklós, Révész Pál, valamint Claus Ringel (Németország) és Andrej Schinzel (Lengyelország).

A zsűri döntése alapján a 2000. évi Bolyai János Nemzetközi Matematika díjat Saharon Shelah, a jeruzsálemi Héber Egyetem professzora kapta meg, *Cardinal Arithmetic* című monográfiájáért.

A díjátadó ünnepséget Győry Kálmán, az Akadémia III. osztályának elnöke nyitotta meg, a díjazott munkásságát pedig Laczkovich Miklós zsűritag méltatta.

A már említett Bolyai János Alkotói díjat, melyet 1999-ben osztottak ki először, Freund Tamás kapta.

9.7. Bolyai-emlékhelyek a nagyvilágban

A tudományos fejlődés eredményeként a nemeuklideszi geometriák idővel teljes létjogosultságot nyertek, mivel beigazolódott, hogy a reális téviszonyok globális vizsgálatát ezek alapján lehet megközelíteni. Ennek következtében e geometriák megalkotói – így a két Bolyai, de főleg János – is a matematika és egyben az egyetemes tudománytörténet kiemelkedő alakjaivá váltak. Természetesen itt azt is meg kell jegyeznünk, hogy a két Bolyai tevékenysége túllépte a nemeuklideszi geometriák vizsgálatainak kereteit. Mivel nagyon sokan tekintik őket a magyar tudománytörténet legelső, nemzetközi mércével is kimagasló személyiségeinek, számos tanintézet és társulat vette fel a Bolyai nevet, köztük a magyarországi Matematikai Társulat is. Neveztek már el Bolyai Jánosról kisbolygót, valamint a Hold egyik krátere is az ő nevét viseli. Megkülönböztetett jelentőséggel bírnak azonban azok a helyek, amelyek valamilyen formában szorosan kapcsolódnak a két Bolyai életéhez, és a hálás utókor gondoskodásának köszönhetően, ezek különböző módon megjelölve, valóságos zarándokhellyé váltak. Úgy gondoljuk, hogy az utazást kedvelő és világot járó olvasó számára hasznos lehet ezek megemlézése.

Kezdjük talán a Bolyai család ősi fészkeének számító Bólyával. Említetjük, hogy a romokban heverő bólyai várkastély eredetileg a Bolyai család tulajdona volt, majd a család elszegényedése miatt mások tulajdonába ment át. Bolyai Gáspár egykori kúriája, ahol Bolyai Farkas is meglátta a napvilágot, ma omladozó, elhagyott épület. De legújabbban Bólyán a római katolikus templom parókiáján létesített emlékszoba és két emléktábla emlékezteti az arra járókat, hogy ez a falu a Bolyai család ősi helye. Az magyar–román–német nyelvű vörösréz táblát Bolyai Farkas halálának 140. évfordulója alkalmából helyezte el a római katolikus templom hom-

lokozatán a Romániai Magyar Demokrata Szövetség szébeni alapszervezete. A parókia épületének homlokzatán pedig egy magyar feliratú fekete márványtáblán az alábbi szöveg olvasható:

„Falunkban született a világhírű matematikus BOLYAI FARKAS 1775. február 9-én; meghalt: 1856. november 20-án Marosvásárhelyen. Emléke legyen áldott!”

Bolyai János kolozsvári szülőházán két emléktábla található. Az első a már említett magyar szövegű, melyet a centenáriumi ünnepségek alkalmával avattak fel. 1952-ben, Bolyai János születésének 150. évfordulóján a Román Akadémia kolozsvári fiókja egy román és magyar nyelvű fehér márványtáblát helyezett el a szülőház falán.

Marosvásárhelyen az ősi Bolyai-házat – amint már említettük – a 20. század elején sajnos lebontották, és ennek helyén új lakóházat építettek, melyen egy nagyobb méretű emléktáblát helyeztek el a következő felirattal:

„E helyen állott az a ház, melyben BOLYAI BOLYAI FARKAS 1804. évtől az 1856. évben bekövetkezett haláláig lakott, s melyben fia BOLYAI BOLYAI JÁNOS gyermek és ifjúkori éveit töltötte. – Az ősi Bolyai házat ez utcanyitása miatt lebontatta s helyébe ez új házat építtette az ev. ref. Kollégium az 1906. évben”.

Ez a ház a minoriták templomával szemben, a mai Köteles Sámuel utcában található.

Ezzel egy időben az akkor Nagyköznek nevezett utcát – ahonnan az ősi ház udvarának valamikori bejárata nyílt – rendezték és ekkor kapta az utca Bolyai Farkas nevét.

Marosvásárhelyen talán a legnevezetesebb hely, ahol a világ minden tájáról érkező Bolyai-tisztelek a kegyeletüket leróják, a két Bolyai síremléke. A múlt század nyolcvanas éveiben Bolyai János sírkövének talapzatára (azért, hogy ne sértsük meg magát a sírkövet) egy réztáblát helyeztünk el a következő felirattal: „Minden idők egyik legnagyobb matematikusa, a nemeuklideszi geometria felfedezője és kidolgozója”.

Az összegyűjtött Bolyai-ereklyékből végül is 1937-ben a marosvásárhelyi református kollégium épületében megnyílt a Bolyai Múzeum. Ezt 1955-ben átköltöztették a Teleki-Téka épületébe, ahol jelenleg is található. A kollégium régi könyveit is átszállították, és ezáltal alakult meg a Teleki-Bolyai Könyvtár, ahol jelenleg a Bolyai-kéziratokat is őrzik.

1956. november 17-én, a Bolyai Farkas halálának 100. évfordulóján szervezett rendezvénysorozat alkalmával – a pillanatnyi politikai helyzetet is kihasználva – az ősi kollégium felveszi a Bolyai Farkas nevet. Ez nagyrészt az akkori igazgató, Kozma Béla merész föllépésének köszönhető. Az iskolát ugyanis nem sokkal azelőtt, egy akkoriban elhunyt kommunista vezetőről nevezték el, akinek abszolút semmi köze vagy kötődé-

se sem volt a kollégiumhoz. Az iskola ezt a „kitüntetést” a diákjainak az országos tantárgyversenyeken elért kitűnő szerepléseiért kapta. Emiatt mondta jóval később többször is Kozma Béla: „A veszélyt és nehézséget nem annyira a Bolyai Farkas név felvétele, hanem a Rangheţ Josif név levétele jelentette”.

1957 szeptemberében, a kollégium fennállásának 400. évfordulóján az iskola 20. század elején épült impozáns épületével szemben leleplezték a két Bolyai szobrát, Csorvássy István és Izsák Márton szobrászművészek alkotását. A szoboregyüttes a város egyik szimbóluma lett. A kollégium épületében, a tanári szoba előtti folyósón két bronztábla hirdeti, hogy Bolyai Farkas professzora, Bolyai János pedig diákja volt ennek az iskolának. A bronztáblák (egy magyar és egy román nyelvű) elhelyezését a Kollégium Öregdiákjainak Baráti Köre kezdeményezte és finanszírozta. 2000 szeptemberében pedig, Bálint István igazgató kezdeményezésének köszönhetően az iskola udvarán felavatták Miholcsa József alkotását, Bolyai Farkas és Bolyai János mellszobraikat.

Kiss Elemér javaslata és utánajárása, valamint Csegzi Sándor alpolgármester és a Marosvásárhelyi Baráti Társaság Bolyai Alapítványa támogatása révén 2000. január 27-én, Bolyai János halálának 140. évfordulóján egy magyar, román és angol nyelvű bronztáblát helyeztek el annak a háznak a falán, amely azon a helyen épült, ahol a nagy matematikus utolsó éveinek lakhelye volt. Ez a ház a mostani Papiu Ilarian és a Körösi Csoma Sándor utcák sarkán található, szemben a római katolikus temető bejáratával.

Nem érdektelen megjegyeznünk még azt, hogy a székely fővárosként elkönyvelt Marosvásárhelyt ma nagyon sokan a Bolyaiak városaként is emlegetik.

Marosvásárhelytől kb. 40 km távolságra található Domáld (Vişoara), ahol ma már csak az Árkosi Benkő Zsuzsanna sírját megjelölő kopjafa emlékezteti az odalátogatókat, hogy ez a falu valamikor a Bolyaiakhoz kötődő igen jelentős helység volt. Az 1. fejezetben már említettük, hogy Bolyai János édesanyjának végső nyughelye Domáldon, a hajdani kisbirtok egyik meredeken kiugró domboldalán van. Az ottani öregek szájhagyománya szerint ezt a helyet valamikor egy korhadó faalkotmány jelölte, mely idővel elkorhadt és eltűnt, és a sírhely a felismerhetetlenségig egybeolvadt a környező füves legelővel. Az 1970-es évek közepén a székelykeresztúri Líceum diákjainak egy csoportja, Illyés Ferenc fizikatanáruk kezdeményezésére, cserefából egy szép kopjafát faragott Benkő Zsuzsanna sírjára, melynek elhelyezésére nem kaptak engedélyt az akkori hivatalos román szervektől. Az engedélyre azért volt szükség, mert a sír nem temetőben van. Többévi sikertelen próbálkozás után, 1981 januárjában a Matematikai Társaság Székelyudvarhelyen megtartott gyűlésén a székelykeresztúriak arra kértek,

hogy mint a Román Matematikai Társaság országos vezetőségének tagja, nem tudnék-e valamit segíteni a kopjafa felállításának ügyében. A bukaresti vezetőségi gyűlésen – kérésemre – pozitívan nyilatkoztak ezzel kapcsolatban, de mivel Domáld Maros megyei helység, szükség volt a „Maros megyei kultúra- és szocialista nevelési bizottság” jóváhagyására. A beadott kéreésre visszautasító válasz érkezett, a következő megokolással:

„Mivel az illető személy [Benkő Zsuzsanna] nem rendelkezik azokkal az érdemekkel, amelyek alapján Domáldon számára egy obeliszket (!) lehetne emelni, nem vagyunk abban a helyzetben, hogy kedvező választ adjunk”.

Beadványunkban azt kértük, hogy Benkő Zsuzsanna sírjára egy *kopjafát* és nem egy *kőből készült obeliszket* állítsunk. A visszautasítók véleménye szerint semmi érdeme sincs annak az asszonynak, aki a Kárpát-medence minden idők egyik legnagyobb tudósát szülte. A valódi ok azonban természetesen más: a román vezetés akkoriban is mindent megtett, hogy megakadályozza Erdélyben az összes olyan lépéseket és intézkedéseket, amelyek a magyar történelmi és kulturális múlt emlékeztetésére és ápolására történnek.

A tiltó válasz ellenére Benkő Zsuzsanna halálának 160. évfordulóján, 1981 szeptemberében a saját kezdeményezésemre és felelősségemre a kopjafát felállítottuk. Jóleső érzés volt, amikor Magyarországról még azon az őszőn megérkezett Czapáry Endre és megajándékozott azzal a xiladekor nevű tartósítószerrel, mellyel a kopjafát kétszer is lefestettük. Szerencsés helyénél fogva a kopjafával megjelölt síremlék a kis falu minden pontjáról gyönyörűen látható. A kopjafába vésett betűk az alábbi feliratot őrzik: „BOLYAI FARKASNÉ, BENKŐ ZSUZSÁNNÁ 1780–1821”.

1993. június 11-én Göttingában a Kurze Strasse 2. szám alatt Bolyai Farkas-emléktáblát lepleztek le azon az épületen, amely most annak a háznak a helyén áll, amelyben valamikor Bolyai Farkas diákként lakott kvártélyban. Az emléktáblán egy egyszerű szöveg található: „BOLYAI FARKAS matematikus 1796–1799”. Ezzel kapcsolatban tudni kell, hogy a híressé vált diákok szállását megörökítő minden emléktábla ilyen, a városi vezetőség előírása alapján. Ennek felavatásán jelen volt Rainer Kallmann Göttinga főpolgármestere, Manfred Siebert a göttingai Gauss Társaság elnöke valamint azok a magyar személyiségek, akiknek az emléktábla köszönhető: Futaky István göttingai professzor, Kálmán Attila, a magyar Művelődési Minisztérium államtitkára, Császár Ákos akadémikus, Kalász Márton, a stuttgarti magyar Kultúrcentrum igazgatója, Homoki Géza, a magyar nagykövetség kultúrattaséja és még más résztvevők.

Futaky István avatóbeszédében elmondta, hogy e hely pontos megállapításában Gaussnak az a levele segített, melyet Farkasnak 1808. május

20-án írt. Ebben Gauss ezt írja: „Én itt Göttingában ugyanabban a házban lakom a 15. szám alatt, majdnem szemben azzal a házzal, ahol Te laktál egykor.” És ami fontos, Gauss egy kis rajzot készített a Kurze Strasseról, megjelölve a házakat is.

Néhány hónappal később, 1993. november 3-án, a „temesvári sorok” keltezésének 170. évfordulóján Toró Tibornak köszönhetően ötnyelvű (román, magyar, német, angol, szerb) emléktáblát lepleztek le Temesváron. A táblát annak az egykor tiszti lakásként szolgált épületnek az oldalán helyezték el, amelyben Bolyai János megírta azóta híressé vált levelét. Ezzel egy időben sikerült azt az utcát, amelyben ez a ház található, Bolyai Jánosról elnevezni, valamint a temesvári Tudományegyetem udvarán a nagy matematikus mellszobrát felállítani.

1994 májusában – Kálmán Attila közbelépésének köszönhetően – Lembergben avattak fel egy 100×160 cm méretű márványtáblát az egyetem homlokzatán. A táblán az alábbi magyar és ukrán nyelvű szöveg olvasható: „E városban dolgozott 1831–1832-ben BOLYAI JÁNOS (1802–1860), a magyar matematika legnagyobb alakja”. A Fáskerti István által tervezett márványtáblán Bolyai János arcképének sikerült domborműve található, melyet Gáti Gábor alkotott a marosvásárhelyi Kultúrpalota homlokzatán található domborműről készült fénykép alapján.

Ács Tibor ezredes javaslatára a budapesti Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola 1996. október 11-én Bolyai János-emléktáblát helyeztetett el az annak idején a bécsi Hadmérnöki Akadémiához tartozó Szent Kereszt helyőrségi templomban. A magyar és német nyelvű emléktáblát a budapesti Főiskolán tanító Farkas Tivadar dandártábornok és Ernst König, az osztrák Honvédelmi Akadémia parancsnoka leplezték le. Az ünnepi beszédet Rudolf Hecht udvari tanácsos tartotta, Ács Tibor pedig köszönetet mondott az osztrák hatóságoknak azért, hogy a nagy matematikus tisztelére Bécsben is emléktáblát avathattak.

Nem kétséges, hogy az elkövetkező években a megjelölt emlékhelyek száma tovább gyarapodik, valóra váltva Bolyai Farkas fiának tartott egyik tanóráján elhangzott mondását: „kinek a paralelák megoldása sikerülni fog, annak halandók örök emléket állítsatok”.

9.8. A Bolyai-portré problémája

Az eddigi kutatások eredményeként szinte biztosra vehető, hogy legnagyobb matematikusunkról, Bolyai Jánosról az utókor számára nem maradt semmilyen hiteles arckép. Az első erre vonatkozó nyilatkozat magától Bolyai Jánostól ered. A ránk maradt kézírataiban – többek között – azt

is kifejtette, hogy távol áll tőle minden hiúság és külső dicsőségre való vágyakozás, és emiatt még a képét is megsemmisítette.

„Egész katonai ingénieurs-hadnagyi teljes parádében levett melyképemet is bizonyos atyámtoli méltatlanság s arra következett méltatlankodás következtében összeszaggattam; annyira nem vágytam az afféle, mások által vadásztatni szokott külső halhatatlanságra, minden affélet semminek nézván”.

Ezt megerősítik János öccsének, Bolyai Gergelynek Szabó Sámuelhez 1867. április 20-án írt sorai:

„Jánosnak a képe nincs meg, pedig mint főhadnagy nagyba, olajba le volt véve ganz parádében, hanem az öreggel egykor veszekedve haragjában kardjával a rámából oly szépen kikanyarította, hogy csak rá-mája maradt”.

Az utóbbi időkben újból felvetődött a Bolyai-portré problémája, mellyel kapcsolatban a magyarországi *Élet és Tudomány*, a romániai *Korunk*, *A Hét*, valamint több más újság és folyóirat hasábjain számos cikk jelent meg. Ezen írások megjelenésének fő indítókai annak idején az volt, hogy több matematikátörténeti műben és lexikonban, a Bolyaiakról szóló tanulmányokban, sőt még bélyegeken is megjelent Bolyai János arcképe, melyet Linzdorf Károly rajzáról sokszorosítottak, mivel ennek alsó részén egy háromsoros kézzel írott és készítőjének aláírását is tartalmazó szöveg szerepel: „Rajzoltam, az egyetlen megmaradt Bolyai János arcképnek, Adler Mór (1826–1902) óbudai festőművész által, 1864-ben készített – eredeti után – festménye alapján. Linzdorf Károly.”

Benkő Samu ezzel kapcsolatban (*Korunk*, 1965/7–8) többek között az alábbiakat írja: „Arról a képről, melyet néhány évvel ezelőtt sokszorosítva is kiadtak, s melyet a romániai és magyarországi posta emlékbélyegén egyaránt láthattunk, csak azt tudjuk, hogy hitelességének semmi bizonyítéka nincs, s hármas átvételre utaló felírása is inkább gyanút kelt, mintsem hitelt érdemel. Az egyetlen róla készült festményt önkézeivel megsemmisítette meg.”

A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára által kiadott Bolyai-gyűjtemény katalógusának tanúsága szerint a Bolyai János-arckép e rajzolt változatának eredetije Végh Attila, Bolyai János egyik dédunokája tulajdonában van (Fráter Jánosné: *A Bolyai-gyűjtemény*, MTA könyvtára, Budapest, 1968). Itt is hasonló megjegyzés olvasható: „Valószínűleg egy elképzelt alakról készített kép, mert Bolyai Jánosról nem maradt fenn hiteles arckép”.

Az előbbi konklúziók ismeretében Toró Tibor később (*A Hét*, 1982/38) újból felveti a portréval kapcsolatos kérdéseket: „annak reményében, hogy azok a Bolyai János-arckép hitelességi kérdésében esetleg újabb kutatásokra ösztönöznek”. Toró Tibor abból indul ki, hogy Jánosnak az általa megsemmisített képén kívül volt még egy korábbi arcképe is, az úgynevezett „bécsi kép”. Ugyanis már említettük Bolyai Farkas 1821. szeptember 10-én kelt levelét, melyet a Bécsben tanuló fiának írt, és melyben e sorok is olvashatók: „Ott ebédeltünk a vízesésnél a kőasztalon; kivettem a te bécsi képedet is, hogy hárman legyünk”.

Ez a kép nyilván nem lehetett a „hadnagyi parádében levett” kép, mivel János csak a katonai Akadémia elvégzése után, 1823 szeptemberében kapta meg az alhadnagyi rangot. „Ilyen formán gondolom – írja Toró Tibor –, van valamelyes alapunk arra, hogy feltételezzük: az a kép, amelyről Adler Mór 1864-ben másolatot készített, s amely után az említett harmadik változatot rajzolták, nem más, mint a Bolyai-levelekben annyit említett »bécsi kép«. Természetesen nem az én feladatomban – szakmám szerint nem is lehet az –, hogy a kép eredetiségét megállapítsam és hitelességét igazoljam. Csupán annyit szerettem volna, hogy a kérdésre, melynek megoldása talán nem lehetetlen, újfent felhívjam a szakmabeliek figyelmét [...] mivel ez a »bécsi kép« már 1821-ben kész volt, mindenképpen csak egy 19 évesnél nem idősebb, tehát egy ifjú Bolyai Jánost ábrázolhatott. Ilyen szempontból a Linzdorf Károly által készített Bolyai-rajz, vagy az Adler Mór által festett Bolyai-arckép kiállja a próbát, mivel megfelel a »bécsi kép« által megkövetelt életkori feltételeknek [...]. Ma azonban az idevágó kutatások igénybe vehetik a tudomány újabb eszközeit. Utalunk itt a modern antropológia módszereire. Mindezeket felhasználva felette fontos lenne megvizsgálni Bolyai Farkas meglévő koponyáját és János koponyacsontjának töredékét.”

Sarlóska Ernő, majd Nagy Ferenc utánajárása újból megerősítette Benkő Samu régebbi utalását (*A Hét*, 1983/21), mely szerint az Adler Mór festményén látható személy *nem Bolyai Jánost ábrázolja*, s ehhez a véleményhez nagy számban még mások is csatlakoztak. Ebben a reményvesztő helyzetben megnyugtató kiútként felvetik az egyedüli megmaradt lehetőséget:

„*Mit tegyünk*, ha nagy elődünkről nem maradt ránk olyan arckép, amelyre tisztelettel és szeretettel nézni vágyunk? Erre a kérdésre mi azt tartjuk követendőnek, amit Benkő Samu javasolt. *Egy Bolyaihoz méltó művészi alkotást*, amit a teremtő képzelet alkotott, s amely a Bolyai-kutatás eredményeire, a *tények talajára támaszkodik*.”

A tudományosan megalapozott, művészileg megformált és emberileg megnyerő arcképhez támpontokat adnak szülei arcképe, a koponyacsont-

tok javasolt vizsgálata, Bolyai János útlevelében és másutt található személyleírásainak szintetizálása és minden más hasznosítható forrás. Például Klapka György honvédtábornok képe, mert a Bolyaiakat jól ismerő kortárs Koncz József szerint, a nagy tudósunk arcához hasonlított.”

Ami a koponyacsontok javasolt vizsgálatát illeti, el kell fogadnunk Hints Elek megállapítását (melyet *A Hét* 1983/14. számában ifj. Hints Miklós közöl):

„Bolyai János megmaradt kis koponyarészéből megállapítható, hogy koponyája nagyobb és szélesebb volt mint apjáé, de oly kevés rész maradt meg belőle, hogy abból János koponyáját rekonstruálni még nagy hiábaforrás mellett sem lehet.”

Ennek helyességéről valóban bárki meggyőződhet, aki a marosvásárhelyi Bolyai Múzeumban őrzött megmaradt koponyacsontokat megtekinti.

Az eddig tárgyaltakból tehát leszűrhetjük a következőket: a Bolyai Jánosról készült két kép közül – melyeknek valamikori létezéséről írásos dokumentumok tanúskodnak – egy sem őrződött meg napjainkig; a fiatalabb kori „bécsi kép” minden valószínűség szerint elkallódott (Bolyai Gergely 1867-ben már nem talált bátyjáról semmiféle képet), a másikat pedig maga János szabdalta szét kardjával, az Adler Mór által megfestett személy pedig nem Bolyai János. Vajon ezek után végleg le kell mondanunk arról, hogy nagy tudósunk legalább megközelítő képmását magunk előtt láthassuk?

Talán mégis van remény. Kezdjük azzal, hogy az 1911–13. években épült marosvásárhelyi kultúrpalota homlokzatát több, művészi kivitelezési dombormű, bronzrelief és mozaikkép díszíti. A feliratok már kissé elmosódtak, de egy kevés igyekezettel ki lehet olvasni őket. A Tükörterem ablakai felett hat, egymást követő dombormű található, melyek Marosvásárhely egykori szellemi nagyjait ábrázolják. Balról jobbra haladva a következőket: Dósa Elek, Teleki Sámuel, Bolyai Farkas, Bolyai János, Mentovich Ferenc, Petelei István. Bolyai Jánost leszámítva, a többi öt személy mindegyikéről maradt ránk hiteles kép. Ezeket a domborműveket és a nekik megfelelő képeket összehasonlítva, nagyon nagy megegyezést észlelünk. Meggyőződéssel állíthatjuk, hogy a domborművek – elenyészően kis hibával – nagy elődeink hű képmásai. Ez a tény már szolgáltat reális alapot arra a merész kijelentésre, miszerint *mind a hat dombormű az ábrázolt személyek sikerült képmása.*

Tény, hogy ezután bárki felteheti a jogos kérdést: mire alapozzuk ezt az állítást, hiszen a domborműveket készítő szobrászművész, Sidló Ferenc (1882–1953) nem támaszkodhatott Bolyai János hiteles arcképére, mint a másik öt személy esetében?

A válasz megadásához tekintetbe kell venni a rendelkezésünkre álló

hiteles adatokat és az ebből származó következtetéseket. Ezek közül egyik a már említett Koncz József azon határozott állítása, hogy Klapka György (1820–1892) honvédtábornok nagyon hasonlított kiváló matematikusunkra. Klapka Györgyről több hiteles kép is fennmaradt. A másik pedig Bolyai János fia, Bolyai Dénes, aki többször is hangoztatta, hogy sokban megőrizte apja arcvonásait. Klapka György valamennyi képe, melyeket sikerült megszerezniem, bajuszt és szakállt viselő személyt ábrázol. Ugyanez mondható el Bolyai Dénes fennmaradt képeiről is. Két arc hasonlósága többek között akkor feltűnő – főleg első látásra –, ha mindkettő borotvált, vagy mindkettőnek hasonló a bajusz- és szakállvisellete. A Bolyai János nevével jelzett domborművön is egy bajuszos-szakállas arcot látunk, akárcsak a Klapka György vagy Bolyai Dénes képein. Mi több, egymás mellé téve a szóban forgó domborműről készült felvételt és Klapka György és Bolyai Dénes képeit, a feltűnő hasonlóságot azonnal észrevehetjük! Írásos dokumentumok bizonyítják, hogy Bolyai János idősebb korában bajuszt és szakállt viselt, mivel állítólag ebben is különbözni akart apjától, aki élete végéig mindig frissen borotvált arcú ember volt. No persze azt sem szabad elfelejtenünk, hogy a 19. század közepe táján divattá vált a szakállviselés.

Ezek lennének a létező tények és tárgyak, valamint az elfogadható megokolásokkal alátámasztott feltételezések, amelyek reális támpontot nyújtanak egy elfogadható és amennyire lehet, valósághű Bolyai János-kép rekonstruálásához. Ennek reményében kerestem fel az 1980-as évek közepén Zsigmond Attila festőművészt – aki kitűnő portréfestő, és Jánosról már azelőtt is készített néhány arcképrajzot –, és átadtam neki Klapka György, Bolyai Dénes, Bolyai Farkas, Benkő Zsuzsanna valamint a marosvásárhelyi kultúrpalota említett domborművének fényképeit. Ezeken kívül megemlítettem, hogy Bolyai János haja sötétbarna, szeme pedig sötétkék volt, és arra kértem, hogy próbálja meg ezek alapján rekonstruálni nagy matematikusunk arcképét. A siker reményét fokozta még az a tudat, hogy a festőművész számára nem volt ismeretlen Bolyai János élettörténete.

Az évek teltek és Zsigmond Attila nem jelentkezett a megbeszélte anyaggal, majd egy idő után szomorúan értesültem haláláról. A felesége, aki ezután a hagyatékát rendezte, idővel, egy borítékot (melyben az annak idején átadott fényképek voltak) és egy számomra még ismeretlen rajzpapír tekercset juttatott el hozzám. Kibontva a rajzlapot, az első pillanatban szinte önfeledten éreztem: ez Bolyai János!

Ennyit a könyv elején látható Bolyai-portré keletkezésének történetéhez.

10. A Bolyaiak és a szépirodalom

Éva nélkül pusztá volt a Paradicsom,
de vele elveszett.

Bolyai Farkas

A magyar társadalmi életben a két Bolyai megjelenése nem tartozott a mindennapi események közé. És valljuk be őszintén azt is, hogy kiemelkedő világhírű tudósokkal sem bővelkedtünk az ők korukig. Az inkább irodalmat és költészetet pártoló magyarországi közfelfogás kevés megbecsülést biztosított a tudományos kutatóknak. Amikor a matematikus Bolyai Farkas belátta, hogy a párhuzamosok rejtélyének tisztázására tett erőfeszítéseit nem koronázta siker, az irodalmi alkotásban keresett vigasztalást. Bolyai János – apjával ellentétben – már kevésbé érdeklődött az irodalom iránt. A kollégium tantervében szereplő költészet erőltetett tanítása, valamint megkülönböztetett pártolása éppen hogy ellenérzést váltott ki benne. A félreértések elkerülése végett szükségesnek tartjuk megjegyezni, hogy Bolyai János nem volt irodalomellenes, de az szerfelett bosszantotta, hogy hazájában az irodalmat – és főleg a költészetet – helyezik előtérbe, míg a tudományok művelése iránt nagyfokú érdektelenség mutatkozott. Ő, aki tisztában volt alkotásának értékével, szomorúan tapasztalta, hogy annyi elismerésben sem részesül, mint egy középszerű költő első verseivel. Az elfogultságtól nem mentes Bedőházi János említ könyvében egy jellemző történetet.

Bolyai János naponta meglátogatta haldokló édesapját. A halála előtti napon, november 19-én, az apja mellé beosztott szolgálatos diák egy verseskötetet olvasott. János meglátva ezt megkérdezte: „Valami új poéta?” – Az, százados úr – felelte a diák. Bolyai tovább kérdezte: „Írt-e ez valami olyat, ami már százszor meg ne lett volna írva?”

Azt, hogy Bolyai János nem viseltetett ellenszenvvel az irodalom iránt, a nyelv megreformálására tett erőfeszítései is igazolják. Igaz, eb-

ben elsősorban a matematikai szigorral megkövetelt pontos és egyértelmű kifejezések megalkotására törekedett. János színdarabírói képességeiről képet ad az a dialógus, melyet Benkő Samu közölt a *Tökéletes közállomány* című kéziratából. Az erdélyi drámai feszültséget Bolyai egy idős és egy fiatal földműves közötti dialógussal érzékelteti, melyből kiérződik a kitörni készülő parasztfelkelés. Benkő Samu szerint „Bolyai ebben a rövid lélegzetű kis munkában a *Bánk bán* és *Az ember tragédiája* közé eső évtizedek meg nem született magyar drámájának egész statikai rendszerét felvázolta”.

A magyar tudományos élet égboltján üstökösként megjelent zseniális matematikus feszültségekkel teli és meg nem értéssel, méltatlan viszonyulásokkal tarkított tragikus életpályája, számos író és költőt késztetett alkotásra. A környezetéből magasan kiemelkedő lángész és az őt körülvevő félanalfabéta cinikus közeg drámai ellentéte csábító téma a tollforgatók számára. Vonzóerejét a két Bolyai világhírneve még tovább növeli.

De sajnálattal kell megállapítanunk, hogy szép számmal vannak „művek”, melyek szerzői az „írói szabadsággal” visszaélve, öncélú szenzációhajhászásuk érdekében valótlan, káros, sőt becsületsértő állításokat tesznek, ezáltal tudománytörténetünk e két kiemelkedő személyiségéről egy teljesen torz képet tárnak az olvasók elé. Mivel ezeknek a műveknek az olvasótábora távolról sem marad el a hiteles dokumentumok alapján megírt munkák tanulmányozóitól, a köztudatban általában a hamis Bolyai-portré honosodik meg. Állításunk alátámasztására ragadjunk ki egy példát. Álljon itt Tabéry Géza Bolyai Jánosról írt *Szarvasbika* (Kolozsvár, 1925.) című regénye. Ezzel kapcsolatos mondanivalónkat Sarlóska Ernő *Az igazság igájában* című tanulmányában kifejtett gondolatokra támaszkodva adjuk közre.

„Tabéry Géza »mélypszichológiával« megírt könyve a Bolyaiakról, a *Szarvasbika* háromszor is kiadásra került! Legutóbb 1969-ben jelent meg Bukarestben az Irodalmi Könyvkiadó gondozásában.

A múzsa csókjától látnoki találékonyságra hevült Tabéry Lembergben lépteti föl Bolyai Jánost mint »párbajhóst«. Az »írói szabadság« szerint a hírhedt Bolyai-párviadalokra egy Chopin-est alkalmával kirobbant társadalmi ellentét szolgáltat okot. És Bolyai János (közli a szent igazat Tabéry ihletet pillanatában), miután a hangversenyen testületileg provokálta a lovastiszteket, Chopinhez és Bemhez fordult, hogy vállalják mellette a szekundás szerepét. A két lengyel kapva-kapott János ajánlatán”.

„Csakhogy Tabéry ötleteivel ellentétben – jegyzi meg továbbá Sarlóska Ernő – Bolyai János sem Bem tábornokhoz, a magyar szabadságharc

egyik hőiséhez, sem Chopin világhírű zeneszerzőhöz nem fordulhatott kérelmével, mivel velük Lembergben nem találkozhatott. Ugyanis kimutatott tény, hogy János rövid ott tartózkodása idején egyikük sem járt Lembergben. És az, hogy hogyan támadhatott egy társadalmi zűrzavar a Chopin-esten Bolyai személyisége körül éppen Lembergben, ez egy másik különös kérdés.”

De van más is, ami észrevételre tarthat számot. Tabéry szerint Bolyai egyedül érkezik a párviadal színhelyére. „Érdekfeszítő regényében” sem Bem, sem Chopin nem tartják meg ígéretüket. Bem a párbajra kitűzött nap hajnalán, Bolyai lován (!) Lengyelországba szökik és csatlakozik a forradalomhoz. A párbajsegédek hiánya persze nem lesz akadálya a „lovagias” mérkőzésnek. Bolyai öntelten hártja el a szokatlan helyzet feletti tanakodást: „Egyik segédem a hegedű, másik a kardom az oldalamon”. És mindjárt készülődésbe kezd. Hóna alól előkerül a hegedű. Neki támaszkodik egy széles törzsű nyírfának, térdei közé szorítja hangszerét, s teljes odaadással kezdi felhangolni. „Mindegyik mérkőzés után szükségem lesz egy kis felfrissülésre – jelenti ki Bolyai János –. Az urak elismerik, hogy egyfolytában tizenegy párbaj szokatlan dolog. Ne csodálják, hogy előálltam egy nem mindennapi ötlettel. Minden újabb elintézés előtt egy-egy hegedűszóló nem túlzott követelés.”

És kezdődik a viadal. „Egy ellenfél kidől, hegedűszó. Kard elé áll a másik. Feszült izgalom. Egy kard belehull a fűbe. Egy arc szederjessé vált. És bántón, kegyetlenül a hátralevő bajtársak csúfságára, s mit sem törődve, hogy a haldokló számára utolsó földi dallamok, hegedülte János a többiek megdöbbenésére:

Búsul a lengyel hona állapotján,
Mert Ponyatowszky nincs a csatáján”.

Vajon milyen képet alkot Bolyairól e regény olvasója? – Nem kétséges, hogy ilyen hazug koholmányok alapján az a kegyetlen rosszlelkű ember elevenedik meg előtte, aki az általa leszúrt, haldokló tisztársa fülébe vigyorgó arccal cincogja hegedűjével az általa még felfogható utolsó hangfoszlányokat. A valós kép érdekében emlékezzünk csak vissza, hogy mit írt Bolyai János a párbajokról.

Nincs szándékunkban „népszerűsíteni” az ilyen művek állításait, de meg kellett említenünk, mivel sajnos ezek is hozzátartoznak a két évszázados Bolyai-képhez.

Lambrecht Miklós, miután elmereng azon, hogy világhírű szellemóriásokról is lehet értékes életregényeket írni, és példaként említi Meres-

kovszkij *Leonardo da Vinci* című alkotását, indoklást próbál adni a Bolyaiakról szóló addigi irodalmi alkotásokról:

„A tényektől eltérő képalkotásra, jellemábrázolásra azt hiszem, találhatunk magyarázatot. Nemigen akad olyan regényíró, aki Bolyai János geometriáját és annak hagyományostól eltérő jelentőségét megértené és azt beépíteni tudná regénye vázába. Így nem közelíthetve meg az alkotáslélektan mélyebb régióit, marad számára a fantáziát élénkítőbb, felszínen érvényesülő (vagy képzelt) tulajdonságok dramatizálása. Ördöghegedűs párbajhős, »vadházasságban« élő mogorva vadóc, apjára kardot rántó fiú kétségtelenül regényesebb alak, mint a párhuzamosokra vonatkozó, több mint kétezer éves problémán töprengő mérnökkari tisztt.”

Kristóf György (1878–1965) kolozsvári irodalomtörténész szerint Tóth Béla (1857–1907) tette közzé elsőként anekdota formájában a két Bolyai-ról szóló legendákat a *Magyar Anekdota* 2. kötetében. Mivel ezek később többségükben koholtak és valótlanak bizonyultak, a későbbi Bolyai-portrék kialakulására káros hatással voltak. Ugyanis nagy a valószínűsége annak, hogy ezek az anekdoták „hitelesítették” a Bolyaiakról szóló regények jellegzetesen ismétlődő motívumait.

Molter Károly az 1930-as évek elején két karcolatban állít emléket a Bolyaiaknak.

Barabás Gyula viszont két regényt is ír a Bolyaiakról. Az első az 1936-ban Budapesten megjelent *Domáldi jegenyék*. Amint a szerző ennek bevezetőjében említi, az készítette a Bolyaiak iránti érdeklődésre és a regény megírására, hogy nyolcéves korában, amikor egyszer dédnagyanyja meglátta őt a kollégium kertjéből lopott almákkal, botját felemelve azzal ijesztette meg, hogy ha ez még egyszer előfordul, akkor a kertben tanyázó Bolyai-kísértetek fogják megfogni. Másik regénye, a *Köd a Maroson* 1940-ben látott napvilágot. Barabás Gyula érdekéért felhozhatjuk, hogy ő már igyekezett a Bolyaiakról keringő alaptalan mendemondákat ellenőrizni, habár ez neki sem sikerült mindig.

Makkai Sándor a *Mi Ernyeiek* című munkájában, mely szintén 1940-ben jelent meg Budapesten, mellékalakokként elevenednek meg a Bolyaiak.

1955-ben újabb regény jelenik meg a két Bolyai életéről *A vásárhelyi remete* címmel Aba Iván tollából.

Bolyai Farkas születésének kétszázadik évfordulójára született Száva Istvánnak az *Apa és fia* című regénye.

A drámaírók figyelmét sem kerülte el a két Bolyai alakja. Konfliktusoktól nem mentes életük, János szokatlanul új eszméi, melyek a meg nem értés kérlelhetetlen gránitfalaiba ütköznek, Gauss kétes tartalmú levele,

viaskodás a szegénységgel, betegséggel, elmaradottsággal, megannyi tény és lehetőség egy drámai mű megírására. Itt sem közömbös, hogy a szerző milyen mértékben támaszkodik a hiteles adatokra vagy a valótlan pletykákra és anekdotákra.

Tabéry Géza a már említett regénye, a *Szarvasbika* előtt, *Kolozsvári bál* címen színdarabot is írt, melyet 1920-ban Kolozsváron és Nagyváradon adtak elő.

Kristóf György pozitívan nyilatkozott Miklós Jenő *A Bolyaiak* című háromfelvonásos drámájáról, melynek magva – az 1935. évi Vojnits-díjról szóló akadémiai jelentés szerint – a méltatlan viszonyok közé került lángész tragikuma, a nagy lélek felmorzsolódása a kicsinyes környezetben. Nyomatásban nem jelent meg, de állítólag 1935 őszén a budapesti Nemzeti Színház ezzel a darabbal nyitotta meg előadásait. Komoly előre lépést jelentett Németh László *A két Bolyai* (1960) című drámája. Azt, hogy a jeles író egy hitelesebb Bolyai-portré megalkotására törekedett, bizonyítja az a tény is, hogy Benkő Samu 1968-ban megjelent *Bolyai János vallomásai* című könyvéről azt nyilatkozta, hogy ha ezt tíz évvel korábban olvashatta volna, akkor színművét másképpen írja meg.

Figyelmet érdemel Kocsis István *Bolyai János estéje* című monodráma (1970).

Legutóbb 2000-ben, Marosvásárhelyen jelent meg egy újabb színmű Buksa Éva tollából, melynek címe *A matézis fáklója*.

Először a költők igyekeztek irodalmi emléket állítani a Bolyaiaknak. Örömmel állapíthatjuk meg, hogy igen tekintélyes azon tollforgatóknak a száma, akik versben óhajtották kifejezni hódolatukat nagy tudósaink iránt, és ezek között szép számban találunk olyan költeményeket, amelyeknek irodalmi értéke elvitathatatlan. Lemondva annak igényéről, hogy minden alkotót és költeményt számba vegyünk, említsünk meg néhány szerzőt, esetenként nevük után zárójelbe téve egy-egy jelentősebb alkotásuk címét. A versek nagy része Bolyai Jánosról szól, de akadnak olyanok is, amelyek az apához kapcsolódnak.

1911-ben a Fogarason tanároskodó Babits Mihály *Bolyai* szonettje ma is az egyik legtöbbet szavalt vagy idézett alkotás. 1918-ban Migray József közli *Bolyai titka* című, Jánosról szóló versét, és ugyanabban az évben Emőd Tamás *Bolyai* című költeménye lát napvilágot a *Pesti Hegedű*-ben.

1928-ban Hangay Sándor a *Gradus ad Parnassum* című költeményével emlékezik meg a Bolyaiakról a *Jövőnk* hasábjain.

A 20. század második felében főleg az erdélyi költők veszik lantjukra a Bolyaiakat: Szilágyi Domokos (*Két Ovidius*); Székely János (*Bolyai hagyatéka* – szonett-koszorú); Saszet Géza (*Párhuzamosok*); Szemlér Ferenc (*Farkas*); Kiss Jenő (*A fiúhoz az apáért*); Horváth Imre (*Számok szivárvá-*

nyán); Tóth István (*A Bolyaiak*); Szőcs Kálmán (*Bolyai*); Lászlóffy Aladár (*Bolyai hegedűje*); Fábián Sándor (*Szigeteltség*), csak néhány példa az egyre több ilyen témájú alkotásokra.

A temesvári Mandics György és M. Veres Zsuzsanna *Bolyai János jegyzeteiből* (1979) című verseskötete érdemel még külön említést, költeményeik Bolyai János kézirati hagyatékára támaszkodva íródtak.

Tudománytörténetünkben még megközelítőleg sem találunk olyan tudóst, akiről annyi irodalmi alkotás született volna, mint Bolyai Jánosról és részben az apáról Bolyai Farkasról.

Függelék

IRODALOM

- [1] Abafáy Gusztáv: *Bolyai János, a filozófus*. Korunk, Kolozsvár, 1960.
- [2] Alexits György: *Bolyai János világa*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.
- [3] Bedőházi János: *A két Bolyai*. Marosvásárhely, 1897.
- [4] Benkő András: *A Bolyaiak zeneelmélete*. Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1975.
- [5] Benkő Samu: *Bolyai János vallomásai*. Irodalmi Könyvkiadó, Bukarest, 1968.
- [6] Benkő Samu: *Sorsformáló értelem*. Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1971.
- [7] Benkő Samu: *Nyelv és matematika*. Korunk, Kolozsvár, 1960.
- [8] Bitay László: *Matematika történeti mozaik*. Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1960.
- [9] *Bolyai Jánosra emlékezzünk születésének 175. évfordulóján* (Összeállította és szerkesztette Staar Gyula). TIT, Budapest, 1978.
- [10] *Bolyai emlékfűzet* (A *Kilátó* különszáma Bolyai János halálának 125. évfordulóján; összeállította és szerkesztette Staar Gyula). TIT, Budapest, 1985.
- [11] Bolyai János: *Appendix, a Tér tudománya* (Szerkesztette, bevezetéssel, magyarázatokkal, kiegészítésekkel ellátta Kárteszti Ferenc). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.
- [12] *Bolyai János élete és műve* (Tanulmánykötet Bolyai János születésének 150. évfordulója alkalmából, a kolozsvári Bolyai Tudományegyetem gondozásában). Tudományos Könyvkiadó, Bukarest, 1953.
- [13] *Bolyai levelek* (Válogatta és jegyzetekkel ellátta Benkő Samu). Téka sorozat, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1975.
- [14] *Bolyai*. Biográfia, Bibliotéka, Bibliográfia. (Szerkesztette Nagy Ferenc). Better; Püski, Budapest.
- [15] Bretter György: *A felőrlődés logikája. Párbeszéd a jelennel* című tanulmánykötet. Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1973.
- [16] H. S. Coxeter: *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [17] Császár Ákos: *Bolyai János és Gauss*. A [9] kötetben, 11–23.
- [18] Dávid Lajos: *A két Bolyai élete és munkássága*. Gondolat, Budapest, 1979.
- [19] Dávid Lajos: *Bolyai geometria az Appendix alapján*. Kolozsvár, 1944.
- [20] Dobó Andor: *Euklidész hatása a tudomány fejlődésére*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [21] Dobó Andor–Szénássy Barna: *A Bolyai-féle paralelák létezéséről*. A [10] kötetben, 44–54.
- [22] Euklidész: *Elemek*. Gondolat, Budapest, 1983.

- [23] Fráter Jánosné: *Bolyai Farkas könyvtára*. Az MTA III. osztályának közleményei, Budapest, 1969. 19.
- [24] Gábos Zoltán: *Az elméleti fizika alapjai*. Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1982.
- [25] *Igaz szó* (Bolyai emlékszám). Marosvásárhely, 1975. 3.
- [26] V. F. Kagan: *A nemeuklideszi geometriák felépítése Lobacsevszkijnél, Gaussnál és Bolyainál*. A [12] kötetben.
- [27] Kálmán Attila: *Nemeuklideszi geometriák elemei*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [28] Kiss Elemér: *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratok hagyatékából*. Akadémiai és Typotex kiadó, Budapest, 1999.
- [29] Kiss Elemér: Fermat's theorem in Janos Bolyai's manuscripts. *Math. Pannonica*, Miskolc, 1995. 6/2.
- [30] Kiss Elemér: *Bolyai János vizsgálatai a $4m+1$ alakú prímszámok két négyzet összegére való felbontásáról*. Polygon, VI. kötet, 2. sz. Szeged, 1996.
- [31] Kiss Elemér: Notes on János Bolyai's Researches in Number Theory. *Historia Mathematica*, (1999) 26, 68–76.
- [32] Kiss Elemér: Új Bolyai zárandokhely Marosvásárhelyen. *Természet Világa*, 131. évf. 4 sz.
- [33] Koncz József: *A marosvásárhelyi Evang. Ref. Kollégium története*. Marosvásárhely, 1896.
- [34] Kristóf György: *A két Bolyai alakja szépirodalmunkban*. Kolozsvár, 1947.
- [35] Lambrecht Miklós: *Bolyai János mint regényhős*. A [9] kötetben, 56–60.
- [36] N. Lobacevschi: *Cercetări geometrice cu privire la teoria numerelor paralele*. Editura Academiei, București, 1952.
- [37] Neumann–Salló–Toró: *A semmiből egy új világot teremtettem*. Facla Könyvkiadó, Temesvár, 1974.
- [38] Sain Márton: *Nincs királyi út! – Matematikátörténet*. Gondolat, Budapest, 1986.
- [39] Sain Márton: *Egy új világ teremtése*. A [10] kötetben, 21–34.
- [40] Sarlóska Ernő: *Bolyai János házassága a köztudatban és a dokumentumokban*. A MTA Könyvtárának közleménye, Budapest, 1961. 2.
- [41] Sarlóska Ernő: *Bolyai János a katona*. Az MTA közleményei, Budapest, 1965. XV. kötet, 4. sz.
- [42] Sarlóska Ernő: *Az igazság igájában – Bolyai János a gondolkodó*. A [9] kötetben, 41–55.
- [43] P. Stäckel: *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai*. I–II. kötet. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1914.
- [44] P. Stäckel: *A képzetes számok elmélete a Bolyai János hátrahagyott irataiban*. Math. és Term. Tud. Értesítő, Budapest, 1899. XVII. k.
- [45] P. Stäckel: *A nemeuklideszi geometria története Bolyai János hátrahagyott irataiban*. Math. és Term. Tud. Értesítő, Budapest, 1900. XVIII. k.
- [46] P. Stäckel: *Vizsgálatok az abszolút geometria köréből Bolyai János hátrahagyott irataiban*. Math. és Term. Tud. Értesítő, Budapest, 1902. XX. k.
- [47] P. Stäckel: *Bolyai János térelmélete*. Math. és Term. Tud. Értesítő, Budapest, 1903. XXI. k.
- [48] P. Stäckel–Kürschák J.: *Bolyai János észrevételei Lobacsevszkij Miklósnak a paralelakra vonatkozó vizsgálataira*. Math. és Term. Tud. Értesítő, Budapest, 1902. XX. k.
- [49] D. Struik: *A matematika rövid története*. Gondolat, Budapest, 1958.

- [50] Szabó Péter: *Bolyai János ifjúsága*. Math. és Fiz. Lapok, Budapest, 1910.
- [51] Szász Pál: *Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
- [52] Szénássy Barna: *A magyarországi matematika története*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
- [53] Szénássy Barna: Adalékok a két Bolyai felfedezésének történetéhez. *Matematikai Lapok*, Budapest, 1977–1981. 29. évf. 1–3. sz.
- [54] Szénássy Barna: Megjegyzések Gauss nemeuklideszi geometriai eredményeihez. *Matematikai Lapok*, Budapest, 1980. 28. évf. 1–3. sz.
- [55] Torpai Imre: *Bolya monográfiája*. Impress Kiadó, Marosvásárhely, 1998.
- [56] Tóth Imre: *A Bolyai geometria filozófiai vonatkozásai*. A [12] kötetben, 259–336.
- [57] Tóth Imre: A nemeuklideszi geometria filozófiai jelentősége. *Korunk, Kolozsvár*, 1960.
- [58] Vekerdi László: A Bolyai kutatás változásai. *Természet Világa*, 112. évf. 2. sz.
- [59] Vekerdi László: A Bolyai kutatás változásai In: *(A magyar matematika történetéből. Összeállította Gazda István)*. Piliscsaba, 2000.
- [60] Vofkori József: *Bolyai János betegsége*. (kézirat) Székelyudvarhely, 1985.
- [61] G. Vrănceanu: *A Riemann-féle geometria*. A [12] kötetben.
- [62] Weszely Tibor: *Bolyai Farkas a matematikus*. Tudományos Könyvkiadó, Bukarest, 1974.
- [63] Weszely Tibor: *A Bolyai–Lobacsevszkij geometria modelljei*. Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1975.
- [64] Weszely Tibor: *Bolyai János matematikai munkássága*. Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1981.
- [65] Weszely Tibor: Bolyai János kéziratban hátrahagyott matematikai munkáiról. *Matematikai Lapok*, Budapest, 1981–83. 31. évf. 1–3. szám.
- [66] Weszely Tibor: *Egy felfedezés következményei*. A [25] emlékszámában.
- [67] Weszely Tibor: A fény útja a világűrben. *Természet Világa*, Budapest, 1996. 127. évf. 4. szám.
- [68] Weszely Tibor: Gondoljuk tovább (Bolyai-kép). *A Hét*, 1983/26.

NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

- Aba Iván 219
 Abafáy Gusztáv 172, 174
 Abel, Niels 159
 abszolút geometria 61, 77, 78, 98,
 103, 141, 149, 164
 abszolút tételek 58, 84
 Ács Tibor 211
 Adams, J. C. 126
 Adler Mór 212–214
 alapfogalom 61, 153
 Alexits György 29, 114, 150
 Alhazen (Hasszán ibn al Haitham)
 53, 54
 Anaritius (Hatim An-Nairizi) 53
 antieuklidikus rendszer 70
 antitézis 86
 anyagtenzor 122
Appendix 9, 13, 71, 76–101, 194–203
 Arany János 193, 197
 Arisztotelész 52
 axiómarendszer 51, 59, 60, 73–76,
 104, 105

 Babits Mihály 220
 Bálint István 209
 Baltzer, Richard 190, 191, 194
 Barabás Gyula 219
 Bartels, Johann Christian 134–135
 Battaglini, Giuseppe 192, 194, 195
 Bedőházi János 22, 28, 44, 45, 47,
 202, 204, 216
 Beke Manó 203
 Beltrami, Eugenio 55, 104, 119
 Bem József 217, 218
 Benkő András 175
 Benkő József 19
 Benkő Samu 45, 92, 112, 115, 121,
 169, 170, 176, 178, 180, 181, 212,
 213, 215, 217, 220
 Benkő Zsuzsanna 19, 33, 209, 210
 Bernoulli, Johann 56
 Bessel, F. M. 90, 132
 Bethlen Brigitta 15
 Bodor Pál 33, 34, 36, 39, 72
 Bolyai Ákos 15
 Bolyai Amália 44
 Bolyai Antal 15, 42
 Bolyai Dénes 44, 45, 48, 204, 215
 Bolyai Farkas 14–24, 26–30, 34, 36,
 38, 40, 42, 44, 46, 48, 49, 52, 54,
 56, 57, 61–63, 67, 68, 71, 72, 74,
 81, 86, 89, 97, 100, 101, 109, 121,
 126, 127, 129, 130, 132, 133,
 135–137, 141, 145, 149, 151, 152,
 157–160, 162, 175, 189, 190, 196,
 198, 201, 202, 207–210, 214–216
 Bolyai Gáspár 15, 16, 207
 Bolyai Gergely 17, 42, 46, 212, 214
 Bolyai Zsigmond 15
 Bolyai-algoritmus 200
 Bolyai-díj 204–207
 Boncompagni herceg 197–199
 Bonifác (IX.) pápa 11
 Bonola, Roberto 120, 204
 Borelli, Giovanni A. 56
 Brassai Sámuel 97, 98
 Bretter György 14
 Bricard 158
 Budisavljevič, Emanuel 204
 Buée 146
 Buksa Éva 220
 Burton, D. M. 135

- Cardano, Girolamo 158
 Cayley, Arthur 104, 105
 Ceresz 23
 Chopin, Fr. 217, 218
 Clavius (Christoph Schlüssel) 54, 55
 Comte, Auguste 173
 Couchy, Augustin 150
 Crommelin 125
 Czapáry Endre 210

 Császár Ákos 210
 Csegzi Sándor 209
 Cselényi Béla 29
 Csorvássy István 209

 Darboux, Gaston 206
 Daróczy Zoltán 207
 Dávid Lajos 14, 39, 72, 169, 200
 Davidson 125
 Dedekind, Richard 118
 definíció 51, 60
 Dehn, Max 158
 divergens egyenes 76
 Dobó Andor 125
 Dobolyi Sándor 184
 Dósa Dániel 184
 Dósa Elek 214
 Döttler 26
 Drobesch, M. W. 147
 Dzsauhari, Szaid 53

 Eckwehr, Johann Wolter von 39, 141
 Eddington, A. 125
 Efimov, N. V. 136
 egyenlő hajlású szelő 78
 Einstein, Albert 107, 118, 121–125
Elemek 49–53
 ellentmondás-mentesség 60, 74, 101–107
 elliptikus geometria 81, 118, 119
 elliptikus pontok 119
 elpattanás 66, 67, 74, 75
 Emőd Tamás 220
 Engel József 45, 179
 Engel, Friedrich 134
 Eötvös József 197–199
 Eötvös Loránd 198, 203–205
Észrevételek 107–116
 Ettingshausen, Andreas von 93

 Euklidész 26, 28, 49, 50, 52, 53, 58, 60, 67, 74, 85, 86, 95, 113, 117, 134
 Euler, Leonard 26, 28, 155
 evoluta 83
 evolvens 83

 F felület 79, 84, 101, 104
 Fábián Sándor 221
 Farkas Gyula 48, 200, 203
 Farkas Tivadar 211
 Fáskesti István 211
 Fejér Lipót 202
 Fermat, P. 123
 Fermat-tétel 161
 Ferrari, Ludovico 158
 Ferro, Scipione del 158
 Finsler, P. 120
 Fogarasi János 179
 Foiaş, Ciprian 206
 Forti, Angelo 195
 főkonvizisztórium 193
 főkör 84, 115
 Fráter Jánosné 212
 Freund Tamás 207
 Frischauf, Johann 196, 199
 Fröhlich Izidor 203
 Futaky István 210

 Galois, Evariste 142, 159
 Gáti Gábor 211
 Gauss, Carl Friedrich 17, 18, 20, 23–25, 27–30, 40, 57, 67, 68, 71, 86, 88–94, 96–97, 100, 107–109, 111–113, 117–118, 125, 127–137, 148, 157, 160, 162, 187, 189, 190, 201, 211
 Gauss-féle görbület 79, 119
 Geminosz 52
 geodetikus vonalak 119, 123
 Gergely pápa (XIII.) 13
 Gerling, Christian 92, 130, 132
 Giordano, Vitale 56
 Gödel, Kurt 72, 74, 104–105
 Gödel-tétel 73, 74
 gömbi trigonometria 81, 95, 102, 103, 144
 görbület 83, 119–125
 görbületi paraméter 80, 85, 121, 122, 138

- gravitáció 107, 121–123
 gravitációs hullámok 107
 Gray 21
 Greisinger, Gustav Adolf 93, 94, 96
 Gruber Nándor 201

 Gyarmathi Sámuel 179
 Győry Kálmán 207

 Habsburg János főherceg 169
 Hajnal András 206
 Halsted, George Bruce 192, 196, 199, 201
 Hamilton, W. R. 149
 Hangay Sándor 220
 Hecht, Rudolf 211
 Helmholtz, Hermann 97, 98
 Heltai Gáspár 13
 Hermite, Charles 85
 Hilbert, David 60, 61, 104, 206
 Hints Elek 48, 214
 Hints Miklós 214
 hiperbolikus pontok 119
 hiperciklus 81
 hiperszféra 81, 83, 89, 101
 Hippokratész 50
 homeomorf poliéderek 155, 156
 Homoki Géza 210
 Honterus, Johann 13
 Horváth Imre 220
 Hoüel, Guillaume Jules 190–197, 199
 Hunfalvi Pál 197
 Hunyady Jenő 197, 199

 Illyés Ferenc 209
 Infeld, L. 122
 izogonális pontok 78
 Izsák Márton 209

 Jakab Lajos 141
 János Zsigmond 12
 Jeans, James 160
 Jósika Samu 183

 Kagan, Veniamin Fedorovics 85, 110, 112, 114, 115, 133, 135, 137, 139, 140, 196
 Kalász Márton 210
 Kallmann, Rainer 210
 Kálmán Attila 210
 Kant, Immanuel 97, 98, 117, 127, 165, 166
 Karsten 32
 Kästner, A. G. 56
 Kemény Miklós 30, 31
 Kemény Simon 16
 Kemény Simon, ifj. 16
 Kendeffy Ádám 31
 Kerekes Ferenc 146, 147
 Kibédi-Orbán Rozália 42, 44, 45
 Király Henrik 200
 Kis József 45
 Kiss Elemér 43–47, 137, 151, 159, 161, 162, 209
 Kiss Jenő 220
 Klapka György 214, 215
 Klein, Felix 104, 105, 134, 135, 206
 Klügel, G. S. 56
 Kocsis István 220
 Kollár János 206
 Komjáth Péter 206
 komplex számok 143–151
 Koncz József 193, 194, 214
 Koncz-kódex 193
 Kopp Lajos 203
 koresspondeáló pontok 78
 Kossuth Lajos 185
 Kotzebue, A. 17
 König Gyula 199, 201, 206
 König, Ernst 211
 kör négyszögesítése 85, 138
 Köteles Sámuel 164, 179
 Krause 97, 98
 Kreil, Carl 189
 Kristóf György 219, 220
 Kutuzov, B. V. 136
 Kürschák József 110, 201–203

 La Croix 32
 Laczkovich Miklós 207
 Lagrange, J. L. 126, 159
 Lambert, Johann Heinrich 56, 130, 132, 134, 143
 Lambrecht Miklós 218
 lapszög 78, 114, 115
 Lászlóffy Aladár 221
 Le Verrier, U. 126
 Legendre, Adrien M. 56, 57, 95

- Leibniz, W. G. 126, 141
 Lindemann, Ferdinand 85
 Linzdorf Károly 212, 213
 Littrow, Joseph 113
 Lobacsevszkij, Nyikolaj 85, 86, 91,
 109–115, 118–120, 127, 128,
 133–139, 141, 143, 187, 192, 202
 Lovász László 206
 Lutter Nándor 97

 Makkai Sándor 219
 Malézieu, N. de 56
 Mandics György 221
 Mascheroni, L. 154
 Mátyás király 11, 13
 Mátyus István 13
 Meiseler 36
 Mentovich Ferenc 107, 108, 193, 194,
 214
 metrika 83, 118, 123, 124, 137
 Metternich, M. 128
 Mígray József 220
 Miholcsa József 209
 Miklós (I.) cár 185
 Miklós Jenő 220
 Mikó Imre 98
 Milton 21
 Minding, Adolf 119
 Mittag-Leffler 206
 modell (módszer) 80, 104, 105
 Molter Károly 219
 Mourey 146

 Nagy Ferenc 213
 Nagy János 179
 napfogyatkozás 124, 125
 Naszir-Eddin at Tuszi 54, 55
 nemszám 156
 Németh László 175, 220
 Newton, Isaac 67, 117, 123, 126, 127,
 141

 Oláh-Gál Róbert 14
 Olbers, Wilhelm 130
 Omar Khajjam 54, 55
 Orbán (V.) pápa 11

 parabolikus geometria 119
 paralel szög 70
 paralelák 52–55
 párhuzamossági szög 77, 81, 82, 84,
 121, 138, 140
 Pasquich János 32
 Pauler Tivadar 199
 Pávai-Vajna Krisztina 15
 perihélium 123
 Pesin, Yacov 206
 Petelei István 214
 Péterfi Károly 47
 Péterfi Pál 43
 Petőfi Sándor 184, 185
 Petronevič, B. P. 196
 Piazzí 23
 Poincaré, Henri 99, 104, 105, 203, 206
 Pope 21
 Poszeidóniosz 52, 53
 posztulátum 50–52
 Priessnitz, Vinzens 43
 primerfogalom 61
 prímszám 151, 161, 162
 Proklosz 53
 Prosper, Reyes y 196
 pszeudoszféra 119
 Ptolemaiosz 52, 53

 Rados Gusztáv 203, 206
 Rados Ignác 201
Raumlehre 152–156
 Recski András 207
 relativitáselmélet 118, 121, 122
 Réthy Mór 201, 203
 Révai Miklós 179
 Révész Pál 207
 Riemann, Bernhard 118
 Ringel, Claus 207
 Ruffini, Paolo 158, 159

 Saccheri, Girolamo 55, 61
 Sarlóska Ernő 169, 179, 213, 217
 Saszet Géza 220
 Schiller, F. 21
 Schinzel, Andrej 207
 Schlesinger Lajos 29, 70, 92, 93, 200,
 202–204
 Schmidt Antal 37
 Schmidt Ferenc 37, 143, 190–202
 Schumacher, H. 128, 132
 Schwab, J. Ch. 128

- Schweikart, F. K. 127
 Seneca 176
 Seyffer, F. K. 17, 18
 Shelah, Saharon 207
 Sidló Ferenc 214
 Siebert, Manfred 210
 Somorjai-Nagy Teréz 38
 Spinoza B. 168
 S-rendszer 73–76, 82, 101–107
 Staar Gyula 10
 Stäckel, Paul 43, 56, 61, 90, 92, 100, 105, 109, 110, 114, 128, 132, 147, 148, 154, 156, 169, 192, 200–202, 204
 Suták József 201
 Szabó Árpád 50
 Szabó János 45
 Szabó Péter 202
 Szabó Sámuel 191, 193–195, 198, 212
 számelmélet 160–163
 Szarvadi Tibor 121
 Szász Károly 36, 65, 66, 74, 109, 179
 Száva István 219
 Széchenyi István 37, 184
 Székely János 220
 Szemlér Ferenc 220
 Szénássy Barna 94, 105, 128, 131, 147, 149, 191, 194, 206
 Szentágothai János 9
 Szilágyi Domokos 220
 Szilágyi József 26
 Szily Kálmán 35, 203, 205
 szintézis 86
 szinusz-tétel 102
 Szőcs Kálmán 221
 Szóts Júlia 46
 szuperpárhuzamos 76
 Tabéry Géza 217, 218, 220
 Tartaglia (Niccolo Fontana) 158
 Taurinus, F. A. 131
 távolságvonal 53, 55, 57, 62
 Teleki Domokos 197
 Teleki Elek 36
 Teleki Sámuel 214
Tentamen 21, 73, 91, 97, 100, 112, 113, 137, 90, 191, 201
 tenzor 118, 120, 122
 tetraéder 100, 101, 105, 144, 160
 Thomson 21
 Titchmarsh, E. C. 143
 topológia 118, 155, 156
 Tordai Zádor 121
 Toró Tibor 120–122, 211, 213
 Tóth Béla 219
 Tóth Imre 164, 196
 Tóth István 221
 Tötössy Béla 201, 203
 traktrix 119
 uniformis felület 79–81, 101
Üdvtan 9, 169–181, 186–187
 Vajda Dániel 26
 Vályi Gyula 98, 200, 203
 Vega 26, 28
 Végh Attila 212
 végszerű terület egyenlőség 22, 156–158, 200
 Vekerdi László 41, 196
 Veres Zsuzsanna 221
 Vész János 199
 Vitéz János 11
 Vofkori József 43
 vöröseltolódás 123
 Vrăncianu, George 118
 Wallis, John 55
 Waltershausen, Sartorius von 129, 132, 134, 189, 190
 Warren 146
 Wilson, J. 162
 Wilson-tétel 162
 Wohlgemuth, L. 187, 188
 Zénón 52
 Zeyk József 87, 88
 Zimmer, A. 40
 Zitta 41
 Zsigmond Attila 215
 Zsigmond király 11
 Σ -rendszer 73–76, 79–81, 84, 101, 104–107