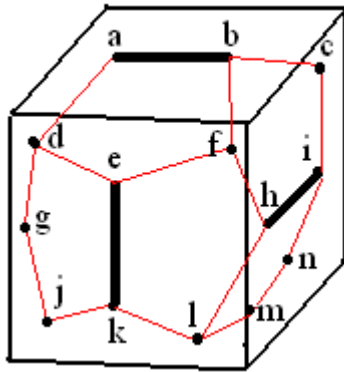


Kristóf Miklós
Mátrixreprezentációk

A Dodekaéder forgáscsoportjának mátrixreprezentációja

Ahhoz, hogy a Pentagondodekaéder forgáscsoportjának mátrixreprezentációját fel tudjuk írni, először is el kell helyeznünk a Dodekaédert a Descartes – féle koordináta-rendszerben. Ennek legjobb módja az, ha a Dodekaédert úgy helyezzük el, hogy hat éle egy kocka hat lapjára essen, és az élek a koordináta – tengelyekkel párhuzamosan helyezkedjenek el. Ezt mutatja az 1. ábra.



1. ábra.

A következő feladat a csúcsok koordinátáinak meghatározása.

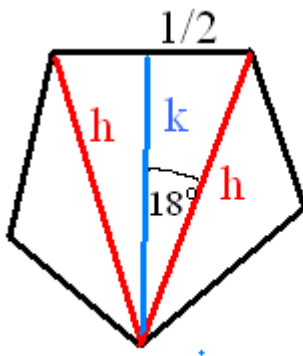
Ehhez válasszuk a Dodekaéder élhosszát 1-nek, azaz pl. az ab távolság = 1.

A koordinátatengelyek legyenek a következők:

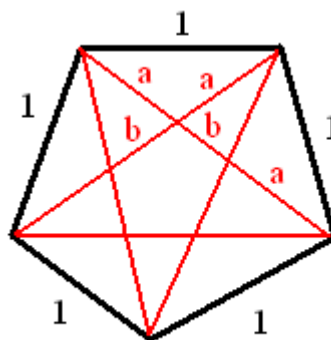
Az x tengely az ih szakasz felező merőlegese, amely a kockalapra is merőleges.
 A $-y$ tengely az ek szakasz felező merőlegese, amely a kockalapra is merőleges.
 A z tengely az ab szakasz felező merőlegese, amely a kockalapra is merőleges.

Kérdés, mekkora a kocka élhossza?

Ennek meghatározásához kell a 2. ábra és a 3. ábra.



2. ábra.



3. ábra.

Láthatjuk, hogy $a + b + a = h$, és $a + b = 1$, tehát $h = 1 + a$.

Hasonló háromszögekből adódóan $a : b = (1 + a) : 1 = 1 + a = h$,

$b = 1 - a$ miatt $a : (1 - a) = 1 + a$, átszorozva $(1 - a)$ -val :

$a = (1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$, azaz $a^2 + a - 1 = 0$, ennek megoldása $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$h = 1 + a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ez éppen az aranymetszés száma. Értéke $h = 1.618033989\dots$

A továbbiakban a h betűvel mindig ezt a számot jelöljük (kivéve amikor a h csúcsot emlegetjük).

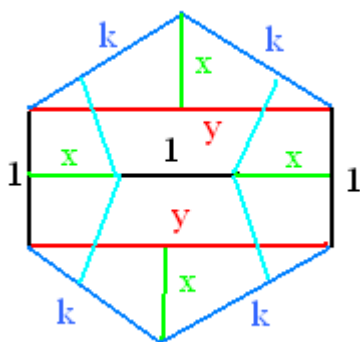
A h szám tulajdonságai a következők:

$$h^2 = 1 + h, h^3 = 1 + 2h, h^4 = 2 + 3h, 1/h = h - 1, 1/h^2 = 2 - h.$$

A k távolság meghatározása:

$$k^2 + 1/4 = h^2 = 1 + h, k^2 = 3/4 + h, k = \sqrt{\frac{3}{4} + h}.$$

Ha a Dodekaédert egy éle felől nézzük, ezt látjuk: (4. ábra)



4. ábra.

$y = 1 + 2x$ lesz a Dodekaédert befoglaló kocka élhossza.

$$(y/2)^2 + x^2 = k^2, \text{ azaz } (1/2 + x)^2 + x^2 = 3/4 + h, \text{ azaz}$$

$$1/4 + 2x^2 + x = 3/4 + h, \text{ tehát } 2x^2 + x - h - 1/2 = 0, \text{ ennek megoldása}$$

$$x = \frac{\sqrt{1+8(h+\frac{1}{2})}-1}{4} = \frac{\sqrt{8h+5}-1}{4} = \frac{1+2h-1}{4} = \frac{h}{2},$$

$$\text{mert } 8h + 5 = (1 + 2h)^2 = 1 + 4h^2 + 4h = 1 + 4 + 4h + 4h,$$

felhasználtuk, hogy $h^2 = 1 + h$.

$$y = 1 + 2x = 1 + h \text{ tehát a kocka élhossza.}$$

Ennek birtokában meg tudjuk adni a kockalapokra eső csúcsok koordinátáit.

$$a = (-1/2, 0, (1+h)/2)$$

$$b = (1/2, 0, (1+h)/2)$$

$$e = (0, -(1+h)/2, 1/2)$$

$$k = (0, -(1+h)/2, -1/2)$$

$$h = ((1+h)/2, -1/2, 0)$$

$$i = ((1+h)/2, 1/2, 0)$$

A nem látható oldalakon levő csúcsok koordinátája hasonló.

A kockacsúcsok irányában levő csúcsok a $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ egységvektorok irányába esnek, hosszuk pedig annyi, amennyi a kockalapokon levő csúcsok

távolsága az origótól, minden csúcs ugyanolyan messze van az origótól.

$$\text{Ez a távolság } z, \text{ és } z^2 = (y/2)^2 + 1/4, \text{ azaz } z^2 = (1+h)^2/4 + 1/4 = (2+3h+1)/4$$

$$\text{azaz } z^2 = 3/4 (1+h), \text{ tehát } z = \frac{\sqrt{3}}{2}h, \text{ ezzel szorozzuk a } \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

egységvektorokat. Kapjuk: $\left(\pm\frac{h}{2}, \pm\frac{h}{2}, \pm\frac{h}{2}\right)$, azaz pl.

$$f = \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

$$c = \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

$$d = \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

$$l = \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} \right)$$

$$n = \left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, -\frac{h}{2} \right).$$

A csúcsok birtokában most már meg tudjuk határozni a forgató mátrixokat.

Azt kell csupán kifejezni, hogy az adott forgató mátrix melyik csúcsot hova viszi. Ezzel egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amit meg tudunk oldani.

Van még egyszerűbb út is azonban.

Ehhez azt kell tudni, hogy a forgató mátrix első oszlopa azt a vektort adja meg, amibe a mátrix az x irányú egységvektort viszi. A mátrix második oszlopa azt a vektort adja meg, amibe a mátrix az y irányú egységvektort viszi. Végül a mátrix harmadik oszlopa azt a vektort adja meg, amibe a mátrix a z irányú egységvektort viszi. Ha tehát ismerjük e vektorokat, akkor oszloponként tudjuk összerakni a mátrixunkat!

Bizonyítás:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

Egyszerűen adhatók meg az x, az y és a z tengely körüli 180°-os forgatások.

Az x tengely körül forgató X mátrix az x tengelyt helyben hagyja, az y –t –y –ra, a z –t pedig –z –re cseréli, ennek mátrixa tehát

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ és}$$

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = \text{Egységmatrix}.$$

A kockacsúcsok körüli 120° -os forgatások mátrixai is egyszerűen adhatók meg. A c csúcs körül forgató C mátrix például az x tengelyt az y tengelybe, az y tengelyt a z tengelybe és a z tengelyt az x tengelybe viszi, mátrixa tehát

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C^2 ugyane csúcs körül forgat csak visszafelé:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

És természetesen $C^3 = \text{Egységmatrix}$.

Hasonlóan adható meg az f csúcs körül forgató F mátrix is:

F az x tengelyt a z tengelybe, az y tengelyt a $-x$ tengelybe és a z tengelyt a $-y$ tengelybe viszi, mátrixa tehát:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

F^2 ugyane csúcs körül forgat csak visszafelé:

$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

És természetesen $F^3 = \text{Egységmatrix}$.

A d, j, l, n csúcsok körüli forgatás hasonlóan adható meg.

Ezzel azonban véget is ért az egyszerűen megadható forgatások sora.

Az a, b csúcsok körüli háromfogású, az ab él körüli kétfogású vagy az abfed lap körüli ötfogású forgatás mátrixának megadása már komolyabb számításokat igényel. Ehhez mindenekelőtt azt kell kiszámolni, hogy az egyes élek felezőpontja hova esik. Mivelhogy az x, y és z tengely is felezőpontra, a hi, az ek és az ab élek felezőpontjára esik. (pontosabban az ek felezőpont a -y-nak felel meg). Az ab él felezőpontja nem más, mint az a és a b csúcs koordinátáinak számtani közepe, azaz $\frac{a+b}{2} = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2} \right)$, ahol $a = (a_1, a_2, a_3)$ az a csúcs koordinátái és $b = (b_1, b_2, b_3)$ a b csúcs koordinátái. Hasonlóan kapjuk meg bármely más él felezőpontját is. A felezőpont ismeretében meghatározhatjuk a felezőpont irányába mutató egységvektort is, ami azért kell, mert az x, y, z irányba mutató egységvektort a forgatómátrix szintén egységvektorba fogja vinni. Az egységvektor kiszámításához meg kell határozni az élközéppontok távolságát az origótól, ez minden csúcsra ugyanannyi lesz, és már kiszámoltuk, ez az $u = \frac{1}{2} + x = \frac{1+h}{2}$ távolság, ami nem más, mint a befoglaló kocka élhosszának fele.

Az egységvektor kiszámítása tehát ez:

$$\frac{a+b}{2u} = \left(\frac{a_1+b_1}{2u}, \frac{a_2+b_2}{2u}, \frac{a_3+b_3}{2u} \right) = \left(\frac{a_1+b_1}{1+h}, \frac{a_2+b_2}{1+h}, \frac{a_3+b_3}{1+h} \right)$$

Ellenőrzésképpen az ab szakaszfelező irányába mutató egységvektor éppen a z irányú egységvektor kell legyen, azaz a (0, 0, 1) egységvektor:

$$a = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1+h}{2} \right) \text{ és } b = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1+h}{2} \right), \text{ tehát}$$

$$\frac{a+b}{2u} = \frac{1}{1+h} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 0+0, \frac{1+h}{2} + \frac{1+h}{2} \right) = (0, 0, 1) \text{ valóban.}$$

Határozzuk meg az ef él irányába mutató egységvektort!

$$e = \left(0, -\frac{1+h}{2}, \frac{1}{2} \right), f = \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right), \text{ tehát}$$

$$\frac{e+f}{2u} = \frac{1}{1+h} \cdot \left(0 + \frac{h}{2}, -\frac{1+h}{2} - \frac{h}{2}, \frac{1}{2} + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{1+h} \cdot \left(\frac{h}{2}, -\frac{1+2h}{2}, \frac{1+h}{2} \right) = \left(\frac{1}{2h}, -\frac{h}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Közben ugye nem felejtettük el a h algebrai tulajdonságait?

$$h^2 = 1 + h, h^3 = 1 + 2h, h^4 = 2 + 3h, 1/h = h - 1, 1/h^2 = 2 - h.$$

A kapott vektor hossza természetesen 1 kell legyen, azaz

$$\left(\frac{1}{2h}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2-h+1+h+1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Most már nekivághatunk a nagy kalandnak, kiszámolhatjuk a csúcsok, élek és lapok körül forgató mátrixokat!

Határozzuk meg például a b csúcs körül az óramutatóval ellentétes irányba forgató mátrixot! Legyen ez a B mátrix!

A B az ab élet a bf élbe viszi, az fe élet az fh élbe, és az fh élet az ab élbe viszi. Node azt nézzük meg, hogy hova viszi az x, y, z irányú egységvektort! ezzel megkapjuk a mátrixunk első, második és harmadik oszlopát!

A most következő számításokhoz már nem kevés térlátási képesség kell, nem árt, ha van egy papírból készült Dodekaéder modellünk, amit kedvünkre forgathatunk ide – oda! Jó ha a csúcsait megjelöljük a megfelelő betűkkel!

Az x tengelyt, azaz a hi élet az 1. ábrán már nem látható $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \left(0, \frac{1+h}{2}, \frac{1}{2}\right)$ élbe viszi, az ennek irányába mutató egységvektor $\left(-\frac{1}{2h}, \frac{h}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ez tehát a B mátrix első oszlopa.

Az y tengelyt a $\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \left(-\frac{1+h}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ élbe viszi, melynek egységvektora $\left(-\frac{h}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2h}\right)$, ez lesz a B mátrix második oszlopa.

A z tengelyt (az ab él felezőpontját) az fb él felezőpontjába viszi, azaz a

$$\left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1+h}{2}\right) \text{ élbe, amelynek egységvektora } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2h}, \frac{h}{2}\right).$$

Ez lesz tehát a B mátrix harmadik oszlopa. Ezzel a B mátrix így néz ki:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}. \text{ Ez tehát egy harmadrendű mátrix kell hogy legyen.}$$

Valóban, számoljuk ki B^2 -et!

$$B^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4h^2} - \frac{h^2}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{h}{4} + \frac{1}{4h} & -\frac{1}{4h} + \frac{1}{4} + \frac{h}{4} \\ -\frac{1}{4} - \frac{h}{4} - \frac{1}{4h} & -\frac{h^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4h^2} & \frac{h}{4} + \frac{1}{4h} - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4h} + \frac{1}{4} + \frac{h}{4} & -\frac{h}{4} - \frac{1}{4h} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4h^2} + \frac{h^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{h}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}.$$

Látjuk, hogy B^2 éppen a B transzponáltja.

Ennek így is kell lennie, B ugyanis ortogonális mátrix, amelynek az inverze éppen a transzponáltja lesz. B egységvektort egységvektorba visz. A forgatás ugyanis nem változtatja meg a vektorok hosszát, csak az irányát.

Kiszámolhatjuk, hogy $B \cdot B^2$ éppen az egységmátrix lesz.

Gyakorlásképpen végezzük is el önállóan ezt a számítást!

B a b csúcsot helyben kell hogy hagyja. Valóban,

$$B \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4h} + \frac{1+h}{4} \\ \frac{h}{4} - \frac{h}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1+2h}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix}.$$

Gyakorlásképpen számoljuk ki, hogy a B az a csúcsot az f csúcsba, az f csúcsot a c csúcsba és a c csúcsot az a csúcsba viszi!

Na most a B mátrix birtokában, az X, Y, Z, C, F , stb. forgatások segítségével a Dodekaéder 60 elemű forgáscsoportját, az A_5 alternáló csoportot teljes egészében generálni tudjuk. Két forgatás egymásutánja is forgatás, ezért alkotnak a forgatások csoportot. Tehát az X, Y, Z, C, F , és B mátrixok szorozgatásával megkaphatjuk mind a 60 csoportelemet:

A Dodekaédernek 12 lapja, 20 csúcsa és 30 éle van, ennek megfelelően $12 \cdot 4/2 = 24$ ötfogású forgás, $20 \cdot 2/2 = 20$ háromfogású forgás és $30/2 = 15$ kétfogású forgás van. És természetesen a helybenhagyásnak megfelelő egységmátrix a 60-adik elem. Így $24 + 20 + 15 + 1 = 60$ valóban.

Létezik egy jóval komplikáltabb út is egy ötfogású mátrixelem meghatározásához. Ezt most azért prezentálom, hogy megmutassam, milyen csodálatos dolog a matematika, ahogy a kezdeti káoszból kialakul a rend!

Buktassuk a Dodekaédert az x tengely körül magunk felé úgy, hogy egy lapja éppen az xy síkkal párhuzamos legyen! ezután az xy síkban hajtsunk végre egy 72° -os forgatást az óramutatóval ellentétes irányban, majd az x tengely körül buktassuk vissza ugyanazzal a szöggel! e 3 művelet eredményeképpen egy ötfogású forgatás jön létre.

Milyen szöggel kell a Dodekaédert buktatni? erre felel a 4. ábra. Ott egy olyan derékszögű háromszöget láthatunk, amelynek az átfogója k , a vízszintes befogója $y/2$, a függőleges befogója pedig x hosszúságú. A buktatást tehát olyan α szöggel kell végrehajtani, melyre $\sin \alpha = \frac{x}{k}$, $\cos \alpha = \frac{y}{2k}$. Mivel $x = \frac{h}{2}$,

$$y = 1 + h, \text{ és } k = \sqrt{\frac{3}{4} + h}, \sin \alpha = \frac{h}{2k}, \cos \alpha = \frac{1+h}{2k},$$

számszerűen $\sin \alpha = 0.525731112$, $\alpha = 31.7174744^\circ$.

A forgató mátrixunk így néz ki:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+h}{2k} & -\frac{h}{2k} \\ 0 & \frac{h}{2k} & \frac{1+h}{2k} \end{pmatrix}.$$

A k nem fejezhető ki h – val racionálisan. Na itt jön be a káosz!

A 72° -os forgatáshoz $\sin 72^\circ$ és $\cos 72^\circ$ kell, ezeket a 2. ábrából lehet meghatározni, tudniillik $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{k}{h}$, $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{1}{2h}$.

$$\cos 18^\circ = \frac{k}{h} = \frac{\sqrt{h + \frac{3}{4}}}{h} = \sqrt{\frac{h + \frac{3}{4}}{h^2}} = \sqrt{\left(h + \frac{3}{4}\right)(2-h)} = \sqrt{2h + \frac{3}{2} - 1 - h - \frac{3}{4}h} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h} =$$

$$= \cos 18^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \text{ na ez az az alak amire emlékeztem.}$$

Látjuk, hogy kétszeres gyökvonás van benne, ezen nem lehet segíteni.

Már csak abban a csodában reménykedhetünk, hogy ezek az irracionális kifejezések a végén valahogy eltűnnek.

A 72° -os forgató mátrixunk így fog kinézni:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{k}{h} & 0 \\ \frac{k}{h} & \frac{1}{2h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A buktatás, a 72° -os forgatás és a visszabuktatás így fog kinézni:

$U^{-1} V U$, amely természetesen fordított sorrendben értendő, azaz

először U -val forgatunk, majd V -vel, végül U^{-1} -gyel.

A mátrixszorzás asszociatív, tehát tetszőleges sorrendben szorozhatunk.

Szorozzuk össze először az első kettőt, majd az eredménnyel szorozzuk a harmadikat! Kapjuk:

$$U^{-1}V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{k}{h} & 0 \\ \frac{h}{2} & \frac{h}{4k} & \frac{h}{2k} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4k} & \frac{1+h}{2k} \end{pmatrix}, \quad U^{-1}VU = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{h^3}{8k^2} + \frac{h^2}{4k^2} & -\frac{h^2}{8k^2} + \frac{h^3}{4k^2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{h^2}{8k^2} + \frac{h^3}{4k^2} & \frac{h}{8k^2} + \frac{h^4}{4k^2} \end{pmatrix}.$$

A nevezőkben mindenütt k^2 szerepel, ami már racionális kifejezés!

$k^2 = h + \frac{3}{4}$, mi ennek a reciproka? Mondjuk $a + bh$. Szorozzuk meg vele:

$$(h + \frac{3}{4}) \cdot (a + bh) = 1 \text{ kell legyen.}$$

$$ah + \frac{3}{4}a + b + bh + \frac{3}{4}bh = 1.$$

$$a + b + \frac{3}{4}b = 0, a = -\frac{7}{4}b.$$

$$\frac{3}{4}a + b = 1, \quad \frac{3}{4}(-\frac{7}{4})b + b = 1, \quad (1 - \frac{21}{16})b = 1, \quad b = -\frac{16}{5}.$$

$$\frac{3}{4}a = 1 + \frac{16}{5} = \frac{21}{5}, a = \frac{28}{5}.$$

$$\text{Tehát } \frac{1}{8k^2} = \frac{7}{10} - \frac{4}{10}h, \text{ ezt kell betenni a mátrixunkba:}$$

$$U^{-1}VU = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & (1+2h+2+2h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) & (-1-h+2+4h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) \\ -\frac{1}{2} & (-1-h+2+4h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) & (h+4+6h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) \end{pmatrix}.$$

Végezzük el a kijelölt szorzásokat!

$$(1+2h+2+2h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) = (3+4h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) =$$

$$= \frac{21}{10} - \frac{12}{10}h + \frac{28}{10}h - \frac{16}{10} - \frac{16}{10}h = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

$$(-1-h+2+4h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) = (1+3h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) =$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{4}{10}h + \frac{21}{10}h - \frac{12}{10} - \frac{12}{10}h = -\frac{5}{10} + \frac{5}{10}h = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}h = \frac{1}{2h},$$

$$(h+4+6h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) = (4+7h)\left(\frac{7}{10}-\frac{4}{10}h\right) =$$

$$= \frac{28}{10} + \frac{49}{10}h - \frac{16}{10}h - \frac{28}{10} - \frac{28}{10}h = \frac{5}{10}h = \frac{1}{2}h = \frac{h}{2}.$$

Ezzel a mátrixunk így alakul tehát:

$$U^{-1}VU = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}.$$

Nevezzük ezt a mátrixot P-nek! Ez tehát egy ötödrendű forgatás.

Ellenőrzésképpen számítsuk ki a mátrix determinánsát!

Ennek egynek kell lennie.

$$\begin{aligned} \text{Det } P &= \frac{1}{2h} \left(\frac{h}{4} - \frac{1}{4h^2} \right) + \frac{h}{2} \left(\frac{h^2}{4} + \frac{1}{4h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{8} ((h-1)(h-2+h) + h(1+h+h-1) + 2) = \frac{1}{8} (2+2h-2h-2h+2+2+2h+2) = \frac{8}{8} = 1 \end{aligned}$$

Számoljuk ki P hatványait! Az eredmény:

$$P^2 = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \\ -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \\ \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix},$$

Látjuk, hogy P^4 éppen P transzponáltja, tehát inverze, és nem is csalódunk,

P^4 éppen az egységmátrix lesz. Ezzel igazoltuk, hogy P ötödrendű.

P az a csúcsot a b csúcsba, a b csúcsot a c csúcsba viszi, és az e csúcsot a h csúcsba viszi. ezzel 3 egyenletrendszert kapok, melyből P meghatározható!

Nézzük pl. a $P \cdot a = b$ csúcstranszformációt!

$$P \cdot a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4h} + \frac{1+h}{4} \\ -\frac{h}{4} + \frac{h}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1+2h}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix} = b :$$

$$P \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1+h}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4h} + \frac{1+h}{4} \\ \frac{h}{4} + \frac{h}{4} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1+2h}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix} = c$$

Ebből a következő egyenletrendszer lesz:

$$-\frac{1}{2} \cdot p_{11} + \frac{1+h}{2} \cdot p_{13} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} \cdot p_{11} + \frac{1+h}{2} \cdot p_{13} = \frac{h}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $p_{11} = \frac{1}{2h}$, $p_{13} = \frac{1}{2}$, és tényleg annyi!

Hasonlóképpen lehet a többi mátrixelemet kiszámolni.

A P forgatás az ötszög középpontját fixen hagyja.

Az ötszög középpontját pedig úgy kapom meg, hogy a z irányú egységvektort

– α szöggel buktatom az x tengely körül. Így az ötszög tengelyét a

$p = \left(0, \frac{h}{2k}, \frac{1+h}{2k} \right)$ egységvektor határozza meg. Tehát $P \cdot p = p$ kell legyen.

$$P \cdot p = \left(-\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+h}{2k}, \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2k} + \frac{1}{2h} \cdot \frac{1+h}{2k}, \frac{1}{2h} \cdot \frac{h}{2k} + \frac{h}{2} \cdot \frac{1+h}{2k} \right) = \left(0, \frac{h}{2k}, \frac{1+h}{2k} \right)$$

Valóban a p vektort kaptuk tehát.

Határozzuk meg azt a forgatást, amely az $a - b - f - e - d - a$ csúcsokat

viszi egymásba! Jó, ha kéznél van egy jó papírmódel.

Nevezzük ezt a mátrixot Q -nak! Tehát $Q \cdot a = b$, $Q \cdot b = f$, $Q \cdot f = e$, stb.

Q a hi élet a kl élbe viszi, tehát az x tengelyt az

$$\frac{1}{1+h} \cdot \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{1+h} \cdot \left(0, -\frac{1+h}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2h}, -\frac{h}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

vektorba viszi, ez lesz tehát Q első oszlopa.

Q az ek élet a dg élbe viszi, tehát a $-y$ tengelyt az

$$\frac{1}{1+h} \cdot \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{1+h} \cdot \left(-\frac{1+h}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) = \left(-\frac{h}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

vektorba viszi, tehát ennek -1 - szerese lesz Q második oszlopa.

Q az ab élet a bf élbe viszi, tehát a z tengelyt az

$$\frac{1}{1+h} \cdot \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{1+h} \cdot \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1+h}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2h}, \frac{h}{2} \right)$$

vektorba viszi, ez lesz tehát Q harmadik oszlopa. Kaptuk tehát:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & \frac{h}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{h}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2h} & \frac{h}{2} \end{pmatrix}.$$

Meglévő mátrixaink szorozgatásával pedig a Dodekaéder forgáscsoportjának

mind a 60 elemét megkaphatjuk. Szorgalmi feladat: számoljunk ki minél

többet! Próbáljuk meg feltérképezni a 60 elemű csoportot!

Harmadfokú egyenletek

Sok olyan probléma létezik, amely harmadfokú egyenlethez vezet.

Először vegyünk egy egyszerűbb és ismertebb esetet, a Fibonacci sorozatot!

Ennek Maple 7 programja: (A továbbiakban piros szín = Maple 7 program)

```
f[1]:=1:f[2]:=1:for n from 3 to 30 do f[n]:=f[n-1]+f[n-2] od:  
seq(f[n],n=1..30);
```

```
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,  
1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025,  
121393, 196418, 317811, 514229, 832040
```

Amint látjuk, a Fibonacci sorozat elemeit úgy képezzük, hogy az előző kettőt összeadjuk, pl. $13 = 5 + 8$, $144 = 55 + 89$, stb.

Képezzük két egymást követő elem hányadosát, azaz az $\frac{f[n+1]}{f[n]}$ hányadost!

Kapjuk: $\frac{1}{1}=1$, $\frac{2}{1}=2$, $\frac{3}{2}=1.5$, $\frac{5}{3}=1.66666\dots$, és így tovább haladva kapom az

1, 2, 1.5, 1.6666666, 1.6, 1.625, 1.615384615, 1.619047619, 1.617647059 ...

számsorozatot. Jól látszik hogy ezek a számok mind jobban megközelítenek egy határértéket, ami 1.618033989... Vajon mi ez a szám?

Ha n elég nagy, akkor $\frac{f[n+1]}{f[n]}$ már elég jól megközelíti ezt a számot, pl.

$\frac{832040}{514229}=1.618033989$. Ekkor mondhatom azt, hogy $\frac{f[n+1]}{f[n]} = x$, és

$\frac{f[n-1]}{f[n]} = \frac{1}{x}$. $f[n+1] = f[n] + f[n-1]$, és osszuk ezt el $f[n]$ -nel!

Kapjuk: $x = 1 + \frac{1}{x}$. Szorozzuk meg x -szel: $x^2 = x + 1$, azaz $x^2 - x - 1 = 0$.

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldása: $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ez tehát a titokzatos 1.618033989... jelentése!

Ezt a számot úgy nevezik, hogy aranymetszés. előjön az ötagú csillagnál, és a Pentagondodekaédernél is. A Régiek a szépség megtestesítőjét látták benne. Felbukkan az építészetben, a szobrászatban, sőt a zenében is.

Csináljunk most egy másik sorozatot, ami hasonló a Fibonaccihoz:

```
a[1]:=1:a[2]:=1:a[3]:=1:for n from 4 to 40 do
a[n]:=a[n-2]+a[n-3] od:
seq(a[n],n=1..40);
```

```
1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86,
114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897,
2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252, 13581, 17991, 23833,
31572, 41824
```

Itt nem a két közvetlen megelőzőt adjuk össze, hanem az eggyel előbbieket.

Pl. $28 = 12 + 16$, $86 = 37 + 49$, $114 = 49 + 65$, stb.

Nézzük meg, mi itt az egymást követő számok aránya!

```
seq(evalf(a[n+1]/a[n]),n=1..39);
```

```
1., 1., 2., 1., 1.500000000, 1.333333333, 1.250000000,
1.400000000, 1.285714286, 1.333333333, 1.333333333,
1.312500000, 1.333333333, 1.321428571, 1.324324324,
1.326530612, 1.323076923, 1.325581395, 1.324561404,
1.324503311, 1.325000000, 1.324528302, 1.324786325,
1.324731183, 1.324675325, 1.324754902, 1.324699352,
1.324720670, 1.324723247, 1.324711500, 1.324722139,
1.324716553, 1.324717562, 1.324718956, 1.324717128,
1.324718357, 1.324717915, 1.324717828, 1.324718105
```

Látjuk, hogy itt is van egy határérték, ami 1.324717... körüli.

Vajon hogy kapjuk meg ezt a számot? Legyen most is $\frac{a[n+1]}{a[n]} = x$, és

$$\frac{a[n-1]}{a[n]} = \frac{1}{x}, \text{ valamint } \frac{a[n-2]}{a[n]} = \frac{1}{x^2} !$$

Ekkor az $a[n+1] = a[n-1] + a[n-2]$ egyenletből $a[n]$ -nel való osztás után

$$\text{ez lesz : } x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \text{ amiből } x^2 - \text{tel való szorzás után ez lesz: } x^3 = x + 1.$$

Ez bizony már harmadfokú a javából! Hogyan kell az ilyet megoldani?

Keressük a megoldást összeg alakban: $x = u + v$.

$$\text{Ekkor } x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

$$\text{Legyen } u = \sqrt[3]{a+b}, \text{ és } v = \sqrt[3]{a-b} !$$

$$\text{Ekkor } u^3 + v^3 = a + b + a - b = 2a,$$

$$\text{és } 3uv(u + v) = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2} \cdot (u + v) = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2} \cdot x$$

$$\text{Tehát } x^3 = 2a + 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2} \cdot x \text{ lesz az egyenletünk.}$$

$$\text{Összehasonlítva az eredetivel, azt látjuk, hogy } 2a = 1, \quad 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2} = 1.$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad a^2 - b^2 = \frac{1}{27} = \frac{1}{4} - b^2, \quad b = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{23}{108}}.$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}}. \quad \text{Szép!}$$

$$\text{Kiszámolva } \sqrt{\frac{23}{108}} = 0.461479103, \quad x = 0.986991206 + 0.337726751$$

$$x = 1.324717957. \quad x^3 = 2.324717957 = 1 + x \text{ valóban!}$$

Meg tudtuk tehát oldani a harmadfokú egyenletet, ezzel az egyszerű trükkel!

Általánosabb esetben $x^3 = 3 p x + 2 q$,

akkor is $x = u + v$, $u = \sqrt[3]{a+b}$, és $v = \sqrt[3]{a-b}$, $x^3 = 2 a + 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2} \cdot x$,

amiből $q = a$, $p = \sqrt[3]{a^2 - b^2}$, amiből $b = \sqrt{q^2 - p^3}$, és

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Node mi történik, ha $q^2 - p^3$ negatív? Akkor a gyökkifejezés képzetes lesz, és komplex számból kell köbgyököt vonni! És ha már a komplex számok szóba jöttek, tudjuk hogy a harmadfokú egyenletnek mindig 3 gyöke van, ebből

legalább az egyik valós. Egész pontosan 3 eset van:

Ha a $q^2 - p^3$ pozitív, akkor egy valós és két konjugált komplex gyök van.

Ha a $q^2 - p^3$ negatív, akkor három valós gyök van.

Ha a $q^2 - p^3$ nulla, akkor három valós gyök van, melyből kettő megegyezik.

Próbáljuk most meghatározni, mennyi $\sin(10^\circ)$!

Ha géppel számoljuk ki, akkor $\sin(10^\circ) = 0.173648177\dots$

a 10° a 30° egyharmada, és mint tudjuk, a szögharmadolás éppen azért

nem szerkeszthető meg körzővel és vonalzóval, mert harmadfokú egyenletre

vezet! $\sin(30^\circ) = 0.5$, ha $x = 10^\circ$, akkor $\sin(30^\circ) = \sin(3 x)$.

$$\sin(3 x) = \sin(2 x + x) = \sin(2 x) \cos(x) + \cos(2 x) \sin(x) =$$

$$= 2 \sin(x) \cos(x) \cos(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \sin(x) =$$

$$= 2 \sin(x) \cos^2(x) + (1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)) \sin(x) =$$

$$= \sin(x) (2(1 - \sin^2(x)) + 1 - 2 \sin^2(x)) = \sin(x) (3 - 4 \sin^2(x)).$$

Ha $s = \sin(x)$, akkor $\sin(3x) = 3s - 4s^3 = 0.5$ az egyenletünk.

$$s^3 = \frac{3}{4}s - \frac{1}{8}, p = \frac{1}{4}, q = -\frac{1}{16}, s = \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}}.$$

Láthatjuk, hogy a négyzetgyök alatti kifejezés, tehát a diszkrimináns negatív, ezért 3 valós gyököt kell kapnunk. az ám, de hogy vonunk a komplex számból köbgyököt? Nos, erre van egy módszer.

A komplex számot trigonometrikus alakba írjuk, és ezután már könnyű a dolgunk. Ha a komplex szám trigonometrikus alakja $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$, akkor a z köbgyöke ilyen lesz: $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\alpha}{3}) + i \sin(\frac{\alpha}{3}))$.

Ha tehát a diszkrimináns negatív, akkor az x így néz ki:

$$x = \sqrt[3]{a+ib} + \sqrt[3]{a-ib}.$$

Most azt mutatom meg, hogyha $\sqrt[3]{a+ib} = c+id$, akkor $\sqrt[3]{a-ib} = c-id$!

Valóban, emeljük köbre mindkét kifejezést:

$$a+ib = (c+id)^3 = c^3 - id^3 + 3c^2id - 3cd^2, \text{ innen}$$

$$a = c^3 - 3cd^2, \quad b = 3c^2d - d^3.$$

$$(c-id)^3 = c^3 + id^3 - 3c^2id - 3cd^2, \text{ és ez valóban } a-ib,$$

az előbbi a, b kifejezéssel!

Akkor pedig $x = c+id + c-id = 2c$ lesz az egyik valós gyökünk!

Mi lesz a másik két valós gyök?

Ha a komplex szám trigonometrikus alakja $a+ib = z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$,

akkor a z köbgyöke ilyen lesz: $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}(\cos(\frac{\alpha}{3}) + i \sin(\frac{\alpha}{3})) = c+id$.

Node $\alpha + 360^\circ = \alpha$ és $\alpha + 720^\circ = \alpha$ miatt megoldás lesz a

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} (\cos (\frac{\alpha}{3} + 120^\circ) + i \sin (\frac{\alpha}{3} + 120^\circ)) \text{ és a}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} (\cos (\frac{\alpha}{3} + 240^\circ) + i \sin (\frac{\alpha}{3} + 240^\circ)) \text{ is!}$$

Ez lesz tehát a másik két gyök!

Matematikailag ez azt jelenti, hogy $\sqrt[3]{z}$ mellett megoldás a

$$\sqrt[3]{z} (\cos (120^\circ) + i \sin (120^\circ)) \text{ és a}$$

$$\sqrt[3]{z} (\cos (240^\circ) + i \sin (240^\circ)) \text{ is!}$$

$\cos (120^\circ) + i \sin (120^\circ) = \varepsilon$ és $\cos (240^\circ) + i \sin (240^\circ) = \varepsilon^2$ jelöléssel

a három megoldás így néz ki: $\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{z} \cdot \varepsilon$, és $\sqrt[3]{z} \cdot \varepsilon^2$.

Az ε az úgynevezett harmadik egységgyök, és az alábbi egyenletnek

engedelmeskedik: $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Ha most beírjuk, hogy $\cos (120^\circ) = -\frac{1}{2}$ és $\sin (120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, valamint

$\cos (240^\circ) = -\frac{1}{2}$ és $\sin (240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, akkor kapjuk:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és } \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Láthatjuk, hogy $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$, és $\varepsilon - \varepsilon^2 = i \cdot \sqrt{3}$.

Most azt mutatom meg, hogyha az $x_1 = u + v$ megoldása az

$x^3 = 3 p x + 2 q$ egyenletnek, akkor az $x_2 = \varepsilon \cdot u + \varepsilon^2 \cdot v$ és az $x_3 = \varepsilon^2 \cdot u + \varepsilon \cdot v$

is megoldása lesz ugyanannak az egyenletnek!

$$x_1^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

$$\text{Tehát } x_1^3 = u^3 + v^3 + 3uvx_1.$$

$$\begin{aligned} x_2^3 &= (\varepsilon \cdot u + \varepsilon^2 \cdot v)^3 = \varepsilon^3 \cdot u^3 + \varepsilon^6 \cdot v^3 + 3\varepsilon^4 \cdot u^2v + 3\varepsilon^5 \cdot uv^2 = \\ &= u^3 + v^3 + 3\varepsilon \cdot u^2v + 3\varepsilon^2 \cdot uv^2 = u^3 + v^3 + 3uv(\varepsilon \cdot u + \varepsilon^2 \cdot v). \end{aligned}$$

Figyelembevettük, hogy $\varepsilon^3 = 1$!

$$\text{Tehát } x_2^3 = u^3 + v^3 + 3uvx_2.$$

$$\begin{aligned} x_3^3 &= (\varepsilon^2 \cdot u + \varepsilon \cdot v)^3 = \varepsilon^6 \cdot u^3 + \varepsilon^3 \cdot v^3 + 3\varepsilon^5 \cdot u^2v + 3\varepsilon^4 \cdot uv^2 = \\ &= u^3 + v^3 + 3\varepsilon^2 \cdot u^2v + 3\varepsilon \cdot uv^2 = u^3 + v^3 + 3uv(\varepsilon^2 \cdot u + \varepsilon \cdot v). \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } x_3^3 = u^3 + v^3 + 3uvx_3.$$

Amikor $u = c + id$ és $v = c - id$ volt, akkor az első valós gyök

$$x_1 = c + id + c - id = 2c. \quad \text{Mi a másik két valós gyök?}$$

$$x_2 = \varepsilon \cdot (c + id) + \varepsilon^2 \cdot (c - id) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (c + id) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (c - id):$$

$$x_2 = -c - \sqrt{3} \cdot d, \quad \text{és}$$

$$x_3 = \varepsilon^2 \cdot (c + id) + \varepsilon \cdot (c - id) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (c + id) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (c - id):$$

$$x_3 = -c + \sqrt{3} \cdot d.$$

Most már visszatérhetünk a $\sin(10^\circ)$ meghatározó egyenletéhez!

$$s^3 = \frac{3}{4}s - \frac{1}{8}, p = \frac{1}{4}, q = -\frac{1}{16}, s = \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}}$$

$$s = \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + i\frac{\sqrt{3}}{16}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{16} - i\frac{\sqrt{3}}{16}}.$$

$$r^2 = \frac{1}{256} + \frac{3}{256} = \frac{1}{64}, \quad r = \frac{1}{8}, \quad \sqrt[3]{r} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{16 \cdot r} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = 120^\circ, \quad \frac{\alpha}{3} = 40^\circ.$$

$$c = \sqrt[3]{r} \cdot \cos(40^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \cos(40^\circ), \quad x_1 = 2c = \cos(40^\circ) = 0.766044443 = \sin(50^\circ).$$

Hát ez elég meglepő! Nem $\sin(10^\circ)$ -ot kaptunk, ahogy vártuk!

Node nézzük tovább!

$$d = \sqrt[3]{r} \cdot \sin(40^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sin(40^\circ), \text{ és ezzel}$$

$$x_2 = -c - \sqrt{3} \cdot d = -\frac{1}{2} \cdot \cos(40^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(40^\circ) = -0.93969262 = -\sin(70^\circ)!$$

Ez még mindig nem a várt $\sin(10^\circ)$!

$$x_3 = -c + \sqrt{3} \cdot d = -\frac{1}{2} \cdot \cos(40^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(40^\circ) = 0.173648177 = \sin(10^\circ)!$$

Na végre, csak kijött!

Látjuk, hogy a megoldás nem mindig triviális!

Miért éppen ezek a szögek jöttek ki?

Az volt a kikötésünk, hogy $\sin(3x) = 0.5$ legyen. Milyen szögekre

teljesül ez? $3x = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, 750^\circ, 870^\circ$, stb., ezek harmada:

$x = 10^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 170^\circ, 250^\circ, 290^\circ$, stb., ezek szinusza:

0.173648177, 0.766044443, 0.766044443, 0.173648177, -0.93969262,

-0.93969262, stb., tehát a 3 gyökünk adódik ki így valóban.

Most nézzünk egy olyan esetet, ahol már tudjuk a gyököket!

Legyen az egyenletünk ez: $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$!

Ennek szemmel láthatóan 3 valós gyöke van: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$!

Szorozzuk most össze a 3 zárójeles kifejezést! Kapjuk:

$$x^3 + (-1 - 2 + 3)x^2 + (1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3)x + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0, \text{ azaz}$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Látjuk, hogy az x^2 -es tag együtthatója nulla, megvallom, direkt így vettem fel a 3 gyököt!

Na az ember azt hinné, hogy ilyen egyszerű esetben a megoldás is egyszerű lesz. De mint látni fogjuk, ez nem így van!

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Csak úgy tesztelésképpen $x=1$ - re ez $1 - 7 + 6 = 0$,

$x = 2$ - re ez $8 - 14 + 6 = 0$ és $x = -3$ - ra $-27 + 21 + 6 = 0$ - t ad,

tehát jól írtuk fel az egyenletet. Sosem árt az óvatosság!

$$p = \frac{7}{3}, q = -3,$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + i\frac{10}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{-3 - i\frac{10}{\sqrt{27}}}.$$

Na ez szép, de hogyan végezzük el?

$$r^2 = 9 + \frac{100}{27} = \frac{343}{27}, r = \sqrt{\frac{343}{27}}, \sqrt[3]{r} = \sqrt{\frac{7}{3}}, \cos(\alpha) = -\frac{3}{\sqrt{\frac{343}{27}}} = -0.841697576,$$

$$\alpha = 147.3198161^\circ. \sin(\alpha) = \frac{10}{\sqrt{343}} = 0.539949247.$$

$$x_1 = 2 \cdot c = 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 2 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \cos(49.10660537^\circ) = 2 !$$

Na megvan akkor az egyik gyökünk!

Ebből rögtön kiderül, hogy akkor

$$\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \cos(49.10660537^\circ) = \sqrt{\frac{3}{7}} = 0.65465367 !$$

Akkor pedig $c = 1 !$

$$d = \sqrt[3]{r} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sin(49.10660537^\circ) = \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot 0.755928946 = 1.154700538 .$$

$$x_2 = -c - \sqrt{3} \cdot d = -1 - 1.732050808 \cdot 1.154700538 = -1 - 2 = -3 .$$

$$x_3 = -c + \sqrt{3} \cdot d = -1 + 1.732050808 \cdot 1.154700538 = -1 + 2 = 1 .$$

Hát, előállt a három gyökünk.

$$\sqrt{3} \cdot d = 2 \text{ miatt } d = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ és ebből láthatóan}$$

$$\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{-3+i \cdot \frac{10}{\sqrt{27}}} = 1+i \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = c + i d \text{ lesz a köbgyökvonás eredménye!}$$

Valóban, emeljük köbre ezt a kifejezést:

$$(c + i d)^3 = \left(1 + i \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = 1 + 3 \cdot i \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - 3 \cdot \frac{4}{3} - i \cdot \frac{8}{\sqrt{27}} = -3 + i \cdot \frac{18-8}{\sqrt{27}} = -3 + i \cdot \frac{10}{\sqrt{27}} .$$

Abban a szerencsés helyzetben vagyunk tehát, hogy a komplex számból

köbgyököt tudunk vonni, és az eredményt ki tudtuk fejezni gyökkifejezéssel!

De nem mindig van ez így, a legtöbbször kénytelenek vagyunk a

trigonometrikus alakot használni.

Láttuk, hogy az egyik gyök $2c$, a másik gyök $-c - \sqrt{3} \cdot d$, a harmadik gyök $-c + \sqrt{3} \cdot d$ alakú.

$2c = 2$, $-c - \sqrt{3} \cdot d = -3$, $-c + \sqrt{3} \cdot d = 1$ volt a szereposztás.

Vajon ez az egyetlen lehetséges választás?

Legyen pl. $2c = 1$, $-c - \sqrt{3} \cdot d = 2$! Akkor $c = \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot d = 2$, $d = -\frac{5}{2\sqrt{3}}$.

$-c + \sqrt{3} \cdot d = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{5}{2\sqrt{3}} = -\frac{6}{2} = -3$ lesz! Kijött a harmadik gyök!

Összesen hatféle szerepkiosztás lehetséges, és mind a hat jó!

A gyökök és együtthatók összefüggései:

$x_1 + x_2 + x_3 = 2c - c - \sqrt{3} \cdot d - c + \sqrt{3} \cdot d = 0$, ez a másodfokú tag együtthatója!

$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 =$

$= 2c \cdot (-c - \sqrt{3} \cdot d) + 2c \cdot (-c + \sqrt{3} \cdot d) + (-c - \sqrt{3} \cdot d) \cdot (-c + \sqrt{3} \cdot d) =$

$= -3c^2 - 3d^2 = -3\sqrt[3]{r^2} = -3p$, az elsőfokú tag együtthatója!

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2c \cdot (-c - \sqrt{3} \cdot d) \cdot (-c + \sqrt{3} \cdot d) = 2(c^3 - 3cd^2) =$

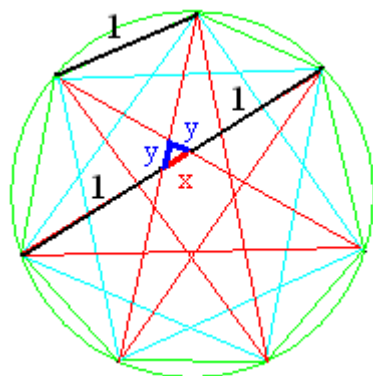
$= 2a = 2q$, a nulladfokú tag együtthatója!

Most nézzünk egy harmadfokú egyenletre vezető példát:

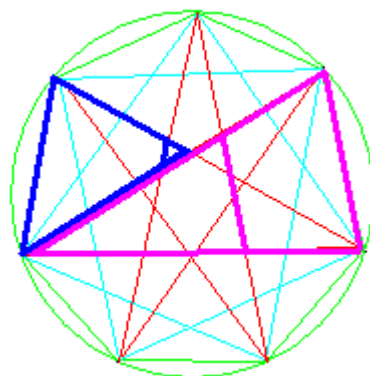
határozzuk meg az egységnyi oldalú hétszög két átlójának a hosszát!

Abból, hogy a feladat harmadfokú egyenletre vezet, kiderül, hogy a hétszöget nem lehet körzővel és vonalzóval megszerkeszteni!

Tehát jöjjön a szabályos hétszög!



1. ábra



2. ábra

A hétszög oldala 1, a hosszú átló hossza $1 + 1 + x = 2 + x$, vékony piros

vonal, Két hosszú átló által bezárt szög $\varphi = \frac{180^\circ}{7} = 25.71428571^\circ$,

a hétszög két oldala által bezárt szög $5\varphi = \frac{900^\circ}{7} = 128.57142857^\circ$,

a hosszú átló hossza $h = \frac{1}{2\sin(\frac{\varphi}{2})} = 2.246979604 = 2 + x$, ebből

$x = 0.246979604$ adódik.

Ez az x , mint látni fogjuk, egy harmadfokú egyenletnek tesz eleget.

A rövid átló hossza egy koszinusztételből adódik:

$a^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \cos(5\varphi) = 3.246979604$, vegyük észre, hogy ez éppen $x + 3$!

$a = 1.801937736$.

Most nézzük meg, milyen egyenlet határozza meg x -et!

A 2. ábrán látható kék hasonló háromszögekből:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+1}{1}, \text{ amiből } y = \frac{x}{x+1}.$$

A rózsaszín háromszögekből:

$$\frac{1+x+y}{x+2y} = \frac{2+x}{1}, \text{ ebbe betéve } y = t:$$

$$\frac{1+x+\frac{x}{1+x}}{x+2\frac{x}{1+x}} = 2+x, \text{ azaz } \frac{x^2+2x+1+x}{x^2+x+2x} = 2+x, \text{ átszorozva:}$$

$$x^2+3x+1=(2+x)(x^2+3x)=2x^2+6x+x^3+3x^2=x^3+5x^2+6x.$$

Rendezve:

$$x^3+4x^2+3x-1=0.$$

Ez lesz tehát az egyenletünk.

Kellemetlen vonása, hogy van benne x^2 -es tag is.

ennek kiküszöbölésére vezessük be az u új változót! $x = u - \frac{4}{3}.$

$$\left(u - \frac{4}{3}\right)^3 + 4\left(u - \frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(u - \frac{4}{3}\right) - 1 = 0.$$

$$u^3 - 3u^2 \frac{4}{3} + 3u \frac{16}{9} - \frac{64}{27} + 4\left(u^2 + \frac{16}{9} - \frac{8}{3}u\right) + 3\left(u - \frac{4}{3}\right) - 1 = 0.$$

$$u^3 + \frac{16}{3}u - \frac{64}{27} + \frac{64}{9} - \frac{32}{3}u + 3u - 5 = 0.$$

$$u^3 - \frac{7}{3}u - \frac{7}{27} = 0.$$

$$p = \frac{7}{9}, \quad q = \frac{7}{54}, \quad \sqrt{p^2 - q^3} = i \frac{\sqrt{1323}}{54}.$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{7}{54} + i \frac{\sqrt{1323}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{7}{54} - i \frac{\sqrt{1323}}{54}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{2} + i \frac{\sqrt{1323}}{2}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{2} - i \frac{\sqrt{1323}}{2}}.$$

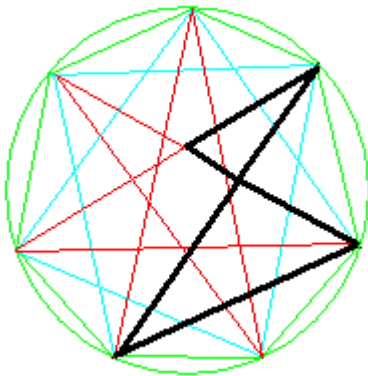
$$r^2 = \frac{49}{4} + \frac{1323}{4} = \frac{1372}{4} = 343, \quad r = \sqrt{343} = 7\sqrt{7}, \quad \sqrt[3]{r} = \sqrt{7}.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{7}{2r} = \frac{7}{14\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = 0.188982236, \quad \alpha = 79.10660535^\circ,$$

$$\frac{\alpha}{3} = 26.36886845^\circ, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 0.895953219,$$

$$u = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 1.580312937, \quad x = u - \frac{4}{3} = 0.246979603.$$

Megkaptuk tehát az x -ünket, ebből $h = 2.246979603$ a hosszú átló.



3. ábra

A rövid átló meghatározásához a 3. ábra két fekete hasonló háromszögét hívjuk segítségül:

$$\frac{a}{1+x+y} = \frac{1}{1-y}, \quad a = \frac{1+x+y}{1-y} = \frac{1+x+\frac{x}{1+x}}{1-\frac{x}{1+x}} = x^2 + 3x + 1 = 1.801937736.$$

x közelítő meghatározása:

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = 0, \text{ most elhanyagoljuk az } x^3 - \text{öt:}$$

$$4x^2 + 3x - 1 = 0, \text{ ennek megoldása } x = \frac{\sqrt{9+4 \cdot 4 \cdot 1} - 3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4} = 0.25,$$

elég jól közelíti az $x = 0.246979603$ -at.

Most azt igazoljuk, hogy $a^2 = x + 3$!

$a = x^2 + 3x + 1$, és $x^3 = 1 - 3x - 4x^2$, ezzel

$$a^2 = (x^2 + 3x + 1)^2 = x^4 + 9x^2 + 1 + 6x^3 + 2x^2 + 6x =$$

$$= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = x(1 - 3x - 4x^2) + 6(1 - 3x - 4x^2) + 11x^2 + 6x + 1 =$$

$$= x - 3x^2 - 4(1 - 3x - 4x^2) + 6(1 - 3x - 4x^2) + 11x^2 + 6x + 1 =$$

$$= x - 3x^2 - 4 + 12x + 16x^2 + 6 - 18x - 24x^2 + 11x^2 + 6x + 1 = 3 + x.$$

Tehát sikerült igazolni az $a^2 = x + 3$ képletet.

Az x egy algebrai szám, ami azt jelenti, hogy gyöke egy véges fokszámú polinomnak. Ha a polinom legmagasabb fokszámú tagjának az együtthatója 1, akkor x -et algebrai egésznek nevezzük.

Az x -ből az alábbi algebrai egészek képezhetők: $z = a + bx + cx^2$, ahol a , b és c egész számok. Ezek az algebrai egészek gyűrűt képeznek az összeadással és a szorzással mint műveletekkel. Ha megengedjük hogy az a , b és c számok racionális számok legyenek, és a gyűrű nullosztómentes, akkor algebrai testet kapunk, amelyben elvégezhető az osztás minden nem nulla számmal. Mi most az algebrai egészek gyűrűjét nézzük meg részletesen. Legelőször is megalkotjuk az algebrai egészek mátrixreprezentációját.

Ezt a következőképpen tehetjük meg: vesszük a z , az $x \cdot z$ és az $x^2 \cdot z$ számokat, és ezek együtthatóiból mint sorokból mátrixot képezünk.

A z -nek megfelelő sorvektor az (a, b, c) sorvektor lesz.

$$x \cdot z = ax + bx^2 + cx^3 = ax + bx^2 + c(1 - 3x - 4x^2) = c + (a - 3c)x + (b - 4c)x^2,$$

ennek megfelelően a mátrix középső sorvektora ez lesz: $(c, a - 3c, b - 4c)$.

$$\begin{aligned}
x^2 \cdot z &= x \cdot (x^2 \cdot z) = cx + (a - 3c)x^2 + (b - 4c)x^3 = \\
&= cx + (a - 3c)x^2 + (b - 4c)(1 - 3x - 4x^2) = \\
&= (b - 4c) + (-3b + 13c)x + (a - 4b + 13c)x^2.
\end{aligned}$$

Ennek megfelelően a mátrix harmadik sorvektora ez lesz:

$$(b - 4c, -3b + 13c, a - 4b + 13c).$$

Így végül ezt a mátrixot kapjuk:

$$a + bx + cx^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a - 3c & b - 4c \\ b - 4c & -3b + 13c & a - 4b + 13c \end{pmatrix}.$$

Ez nem más, mint

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \\ -4 & 13 & 13 \end{pmatrix} = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2.$$

Ha a b melletti mátrixot négyzetre emeljük, a c melletti mátrixot kapjuk,

tehát $x \cdot x = x^2$ igaz rájuk. Ha pedig az x-et az x^2 -tel szorzom, kapom:

$$x \cdot x^2 = x^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 13 & 13 \\ 13 & -43 & -39 \end{pmatrix} = 1 - 3x - 4x^2.$$

Most az x-et reprezentáló mátrix úgy lett konstruálva, hogy kielégíti az

$x^3 = 1 - 3x - 4x^2$ harmadfokú egyenletet. De ennek az egyenletnek

három gyöke van! Most az így kapott mátrix melyik gyököt képviseli?

Hamarosan választ kapunk erre a kérdésre is!

Most bevezetünk egy nagyon fontos fogalmat, a **norma** fogalmát.

A norma nem egyéb, mint a z számot reprezentáló mátrix determinánsa.

A determináns pedig a mátrix 3 sorvektora által kifeszített paralelepipedon térfogata. Ez a térfogat egész szám, mégpedig annyi, ahány egész rácspont esik a paralelepipedon belsejébe, ha a 8 csúcsot egynek vesszük (ezek algebrai szempontból ugyanazt a számot reprezentálják) és ugyancsak egynek vesszük a szemközti oldalakra eső rácspontokat, ha vannak ilyenek.

Ezek a paralelepipedonba eső rácspontok adják a z algebrai egész által létesített maradékosztályt, tehát ha z -vel maradékosan osztok, akkor a lehetséges maradékokat. A determináns tehát nem más, mint a maradékosztály elemeinek a száma. Illetve a determináns abszolút értéke, mert a determináns lehet negatív is, sőt nulla is. Ekkor nullosztóról beszélünk.

Most számoljuk ki ezt a determinánst!

$$\begin{aligned} D &= a(a - 3c)(a - 4b + 13c) - a(b - 4c)(-3b + 13c) - bc(a - 4b + 13c) + \\ &+ b(b - 4c)(b - 4c) + c^2(-3b + 13c) - c(a - 3c)(b - 4c) = \\ &= a^3 - 4a^2b + 13a^2c - 3a^2c + 12abc - 39ac^2 + 3ab^2 - 13abc - 12abc + \\ &+ 52ac^2 - abc + 4b^2c - 13bc^2 + b^3 - 4b^2c - 4b^2c + 16bc^2 - 3bc^2 + 13c^3 - abc + \\ &+ 4ac^2 + 3bc^2 - 12c^3 : \end{aligned}$$

$$D = a^3 + b^3 + c^3 - 4a^2b + 3ab^2 + 10a^2c + 17ac^2 - 4b^2c + 3bc^2 - 15abc$$

Ezt a számot így jelöljük: $D = N(a, b, c)$. Ez a norma tehát.

Most ellenőrzésképpen számoljuk ki néhány z szám normáját!

$$z = 1 + x : N(1 + x) = N(1, 1, 0) = 1 + 1 + 0 - 4 + 3 + 0 + 0 - 0 + 0 - 0 = 1.$$

Ha a norma 1 vagy -1 , akkor a számot gyűrűegységnek nevezzük.

A gyűrűegységek a szorzásra nézve csoportot alkotnak, két gyűrűegység szorzata szintén gyűrűegység. A norma legfontosabb tulajdonsága az, hogy szorzattartó, azaz két szám szorzatának normája = a normák szorzatával!

Ennek belátásához elég azt tudni, hogy a determináns maga is szorzattartó!

$$w = 1 + x^2 : N(1 + x^2) = N(1, 0, 1) = 1 + 0 + 1 - 0 + 0 + 10 + 17 - 0 + 0 - 0 = 29$$

Mennyi $N(z \cdot w)$? A várt eredmény $N(z) \cdot N(w) = 1 \cdot 29 = 29$ kell legyen.

$$z \cdot w = (1 + x)(1 + x^2) = 1 + x + x^2 + x^3 = 1 + x + x^2 + 1 - 3x - 4x^2 = 2 - 2x - 3x^2$$

$$z \cdot w = (2, -2, -3).$$

$$N(2, -2, -3) = 8 - 8 - 27 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 3 + 17 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 4 \cdot 3 -$$

$$- 3 \cdot 2 \cdot 9 - 15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 8 - 8 - 27 + 32 + 24 - 120 + 306 + 48 - 54 - 180 = 29.$$

$$D = a^3 + b^3 + c^3 - 4a^2b + 3ab^2 + 10a^2c + 17ac^2 - 4b^2c + 3bc^2 - 15abc$$

tehát jónak tűnik. Bevallom, mikor ezt kiszámoltam, először egy számolási

hiba miatt $N(1, -2, -3)$ -at számoltam, ami 13-nak adódott, sehogy se értettem,

miért nem stimmel az eredmény. Ezért fontos az ellenőrzés!

Miután megismerkedtünk a normával, számoljuk ki a már ismert

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0 \text{ egyenletünk gyökei} \text{ reprezentáló mátrixot!}$$

Itt $x^3 = 7x - 6$. Meg fogunk lepődni az eredményen, és új felismerésekre jutunk!

$z = a + bx + cx^2$, ennek megfelelően a mátrix első sora (a, b, c) lesz.

$$x \cdot z = ax + bx^2 + cx^3 = ax + bx^2 + c(7x - 6) = -6c + (a + 7c)x + bx^2,$$

ennek megfelelően a mátrix második sora $(-6c, a + 7c, b)$ lesz,

$$x^2 \cdot z = x \cdot (x \cdot z) = x \cdot (-6c + (a + 7c)x + bx^2) = -6cx + (a + 7c)x^2 + bx^3 =$$

$$= -6cx + (a + 7c)x^2 + b(7x - 6) = -6b + (-6c + 7b)x + (a + 7c)x^2,$$

ennek megfelelően a mátrix 3. sora $(-6b, -6c + 7b, a + 7c)$ lesz.

A mátrixunk tehát:

$$z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -6c & a+7c & b \\ -6b & -6c+7b & a+7c \end{pmatrix}.$$

Innen látható, hogy

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Az is látható, hogy $\det x = -6$, $\det x^2 = 36$.

Egyszerű számolás meggyőz arról, hogy $x \cdot x^2 = x^3 = 7x - 6$ teljesül.

Mennyi a z mátrix determinánsa?

$$N(a, b, c) = D = a(a + 7c)(a + 7c) - ab(-6c + 7b) + 6bc(a + 7c) - 6b^3 -$$

$$- 6c^2(-6c + 7b) + 6bc(a + 7c) =$$

$$= a^3 + 49ac^2 + 14a^2c + 6abc - 7ab^2 + 6abc + 42bc^2 - 6b^3 + 36c^3 -$$

$$- 42bc^2 + 6abc + 42bc^2 :$$

$$N(a, b, c) = a^3 - 6b^3 + 36c^3 - 7ab^2 + 49ac^2 + 14a^2c + 42bc^2 + 18abc .$$

Vegyünk néhány konkrét példát!

$$N(1, 1, 1) = 1 - 6 + 36 - 7 + 49 + 14 + 42 + 18 = 147 = 3 \cdot 7 \cdot 7.$$

Nemsokára látni fogjuk, hogy ennek a szorzatrabontásnak jelentősége van!

$$N(1, 1, 0) = 1 - 6 + 0 - 7 + 0 + 0 + 0 + 0 = -12 = 2 \cdot 3 \cdot (-2).$$

$$N(0, 1, 1) = 0 - 6 + 36 - 0 + 0 + 0 + 42 + 0 = 72 = 2 \cdot 6 \cdot 6.$$

$$(1, 1, 0)^2 = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 = (1, 2, 1).$$

Mivel $N(1, 1, 0) = -12$ volt, $N(1, 2, 1) = 144$ kell hogy legyen.

$$N(1, 2, 1) = 1 - 6 \cdot 8 + 36 - 7 \cdot 4 + 49 + 14 + 42 \cdot 2 + 18 \cdot 2 = 144, \text{ oké!}$$

$$N(1, -1, 0) = 1 + 6 - 7 = 0, \text{ hoppá, itt nullosztók is vannak!}$$

$$(1, 1, 0) \cdot (1, -1, 0) = (1 + x) \cdot (1 - x) = 1 - x^2 = (1, 0, -1),$$

$$N(1, 0, 1) = 0 \text{ kell tehát legyen!}$$

$$N(1, 0, 1) = 1 - 36 + 49 - 14 = 0, \text{ valóban!}$$

Amikor $N(1 - x) = 0$ volt, akkor az x úgy viselkedett, mintha $x = 1$ lenne!

És most idézzük emlékezetünkbe az $x^3 = 7x - 6$ egyenlet gyökeit:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3 !$$

Vajon ha az x úgy viselkedik, mint a 2, vagy a -3 , akkor is 0 lesz a norma?

$$N(2 - x) = N(2, -1, 0) = 8 + 6 - 7 \cdot 2 = 0 \text{ valóban!}$$

$$N(3 + x) = N(3, 1, 0) = 27 - 6 - 7 \cdot 3 = 0 ! \text{ reményeinkben nem csalódtunk!}$$

$z = a + bx + cx^2$ mi lesz, ha $x = 1$, $x = 2$ vagy $x = -3$? Nem más, mint

$$z_1 = a + b + c, \quad z_2 = a + 2b + 4c, \text{ és } z_3 = a - 3b + 9c !$$

Lehet, hogy a norma ebből a 3 faktorból tevődik össze? Nézzük meg!

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= (a + b + c) \cdot (a + 2b + 4c) \cdot (a - 3b + 9c) = \\
&= (a^2 + 2ab + 4ac + ab + 2b^2 + 4bc + ac + 2bc + 4c^2) \cdot (a - 3b + 9c) = \\
&= (a^2 + 3ab + 5ac + 2b^2 + 6bc + 4c^2) \cdot (a - 3b + 9c) = \\
&= a^3 + 3a^2b + 5a^2c + 2ab^2 + 6abc + 4ac^2 - 3a^2b - 9ab^2 - 15abc - \\
&- 6b^3 - 18b^2c - 12bc^2 + 9a^2c + 27abc + 45ac^2 + 18b^2c + 54bc^2 + 36c^3 = \\
&= a^3 + 14a^2c - 7ab^2 + 18abc + 49ac^2 - 6b^3 + 42bc^2 + 36c^3 = N(a, b, c) !
\end{aligned}$$

Látjuk, a sorrendtől eltekintve ugyanazt kaptuk valóban!

Ezzel egy nagy felismerésre jutottunk:

A normakifejezés általános alakja:

$$N(a, b, c) = (a + bx_1 + cx_1^2)(a + bx_2 + cx_2^2)(a + bx_3 + cx_3^2) !$$

A $z_1 = a + bx_1 + cx_1^2$ algebrai egész konjugáltjainak nevezzük a

$z_2 = a + bx_2 + cx_2^2$ algebrai egészt és a $z_3 = a + bx_3 + cx_3^2$ algebrai egészt,

ahol x_1, x_2 , és x_3 ugyanannak az egyenletnek a gyökei.

Ha a fenti normakifejezést összeszorozzuk, ilyen tagokat kapunk:

a^3 , $b^3(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$, $ab^2(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3)$, $a^2b(x_1 + x_2 + x_3)$, és itt

rögtön felismerhetjük a gyökök és együtthatók összefüggéseit!

Ha $x^3 + px^2 + qx + s = 0$ az egyenletünk, és ezt ilyen alakban írjuk:

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, akkor azt látjuk, hogy

x^2 együtthatója $-(x_1 + x_2 + x_3) = p$,

x együtthatója $(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) = q$, és

a nulladfokú tag $-x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = s$ lesz, azaz nálunk $x^3 - 7x + 6 = 0$ miatt

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$, mert nincs másodfokú tag, ezért az a^2b együtthatója a normában

nulla lesz, és láthatjuk, hogy tényleg nincs benne $a^2b - s$ tag!

Az ab^2 -es tag együtthatója $(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) = q = -7$, és tényleg az!

A b^2c együtthatója $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = s \cdot p$

azaz 0, mert nálunk $p = 0$, és láthatjuk, hogy tényleg nincs b^2c a normában!

A bc^2 együtthatója $(x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3) =$

$= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) = -s \cdot q = 6 \cdot 7 = 42$, és tényleg annyi!

Vannak olyan tagok, amiket egyenlőre nem tudunk értelmezni:

Az abc együtthatója $(x_1 \cdot x_2^2 + x_1 \cdot x_3^2 + x_2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_3 + x_2^2 \cdot x_3)$,

ezt most nem tudjuk a gyökök és együtthatók összefüggéseivel megadni.

Az ac^2 együtthatója $(x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 + x_2^2 \cdot x_3^2)$, ezt se tudjuk megadni.

Csináljunk egy trükköt: ha valami nulla, akkor a négyzete is nulla!

Tehát ha $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, akkor $(x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2 = 0$!

Kifejtve: $(x^2 + x_1^2 - 2xx_1)(x^2 + x_2^2 - 2xx_2)(x^2 + x_3^2 - 2xx_3) = 0$.

Most ha összeszorozzuk, akkor pl. az x^4 együtthatója

$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3)$ lesz!

$(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) = q = -7$, és ha az egyenletet négyzetre emelem:

$(x^3 - 7x + 6)^2 = x^6 + 49x^2 + 36 - 14x^4 + 12x^3 - 84x$,

az x^4 -es tag együtthatója $-14 = (x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 + x_2^2 \cdot x_3^2) - 28$ tehát,

tehát $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 14$ kell legyen. Ez, ha megnézzük, az $a^2c - s$ tag

együtthatója, és az valóban 14!

A gyökökből képzett szimmetrikus polinomokkal tehát ki tudjuk fejezni a normát! A Galois–elmélet éppen a szimmetrikus polinomokra épül. Most kivételesen ismerjük magukat a gyököket is, és azokkal közvetlenül is ki tudjuk számolni a szimmetrikus hatványösszegeket:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3, \text{ ezekkel}$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1 + 4 + 9 = 14,$$

$$(x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 + x_2^2 \cdot x_3^2) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 49,$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36.$$

Ezekkel meg tudjuk adni azt az egyenletet, amelynek a gyökei x_1^2, x_2^2, x_3^2 !

Ez az egyenlet így áll elő: $(x - x_1^2) \cdot (x - x_2^2) \cdot (x - x_3^2) = 0$, azaz

$$x^3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot x^2 + (x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 + x_2^2 \cdot x_3^2) \cdot x - x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 = 0$$

ebből $x^3 - 14 \cdot x^2 + 49 \cdot x - 36 = 0$ adódik.

Az x -et és az x^2 -et reprezentáló mátrixokból is megkapjuk az egyenletet:

A mátrix karakterisztikus egyenlete így néz ki: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$, ahol

λ a sajátérték, és E a harmadrendű egységmátrix.

Tegyük az A helyébe az x mátrixot:

$$\det(x - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 7 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda - 6 = 0, \text{ tehát } \lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0!$$

Most már választ tudunk adni arra a kérdésre, hogy melyik gyököt képviseli az x mátrix: mind a hármat! Láttuk, hogy a norma kifejezésében mind a 3 gyök szerepel! Tehát az x mátrix úgy viselkedik, mint a 3 gyök együttese!

$$\det(x^2 - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -6 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & -6 & 7-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot (7-\lambda)^2 + 36 = 0, \text{ tehát}$$

$$-\lambda^3 + 14 \cdot \lambda^2 - 49 \cdot \lambda + 36 = 0, \text{ azaz } \lambda^3 - 14 \cdot \lambda^2 + 49 \cdot \lambda - 36 = 0.$$

Megkaptuk tehát az egyenletünket.

Most írjuk fel a normát a szimmetrikus polinomokkal!

$$\begin{aligned} N(a, b, c) &= (a + bx_1 + cx_1^2)(a + bx_2 + cx_2^2)(a + bx_3 + cx_3^2) = \\ &= a^3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot b^3 + x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot c^3 + a^2 b \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + \\ &+ ab^2 \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) + a^2 c \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \\ &+ ac^2 \cdot (x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 + x_2^2 \cdot x_3^2) + b^2 c \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3) + \\ &+ bc^2 \cdot (x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3) + \\ &+ abc \cdot (x_1 \cdot x_2^2 + x_1 \cdot x_3^2 + x_2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_3 + x_2^2 \cdot x_3). \end{aligned}$$

Ha $x^3 + px^2 + qx + s = 0$ az egyenletünk, akkor $(x^3 + px^2 + qx + s)^2 = 0$,
azaz $x^6 + p^2x^4 + q^2x^2 + s^2 + 2px^5 + 2qx^4 + 2sx^3 + 2pqx^3 + 2psx^2 + 2qxs = 0$,
rendezve:

$$x^6 + 2px^5 + (p^2 + 2q)x^4 + (2s + 2pq)x^3 + (2ps + q^2)x^2 + 2qxs + s^2 = 0.$$

$$(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 = 0:$$

$$(x^2 + x_1^2 - 2xx_1)(x^2 + x_2^2 - 2xx_2)(x^2 + x_3^2 - 2xx_3) = 0. \quad \text{Kifejtve:}$$

$$\begin{aligned} &x^6 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x^5 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3)x^4 - \\ &- (2(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2) + 8x_1x_2x_3)x^3 + \\ &+ (x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 4(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3))x^2 - \\ &- 2(x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3)x + x_1^2x_2^2x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Összehasonlítva az együtthatókat, ezt kapjuk:

$p = -(x_1 + x_2 + x_3)$, ezt eddig is tudtuk.

$$p^2 + 2q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4q,$$

amiből $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 2q$. Nálunk ez 14.

$$2s + 2pq = -2(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2) - 8x_1x_2x_3, \text{ ebből}$$

$$x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 = 3s - pq, \text{ nálunk } 18.$$

$$\text{Valóban, } 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 18.$$

$$2ps + q^2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 4(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3), \text{ azaz}$$

$$2ps + q^2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 4ps, \text{ ebből}$$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = q^2 - 2ps, \text{ nálunk } 49.$$

$$2qs = -2(x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3), \text{ ez is trivialis.}$$

$$s^2 = x_1^2x_2^2x_3^2, \text{ ez is trivialis.}$$

Megkaptuk tehát a minket érdeklő szimmetrikus hatványösszegeket.

Ha tehát $z = a + bx + cx^2$, és x kielégíti az $x^3 + px^2 + qx + s = 0$ egyenletet,

$$\text{akkor } N(z) = N(a, b, c) = a^3 - s \cdot b^3 + s^2 \cdot c^3 - p \cdot a^2b + q \cdot ab^2 + (p^2 - 2q) \cdot a^2c + \\ + (q^2 - 2ps) \cdot ac^2 + ps \cdot b^2c - qs \cdot bc^2 + (3s - pq) \cdot abc \text{ lesz a norma.}$$

Legyen most $x^3 = 1 - 3x - 4x^2$ az egyenletünk. Mint láttuk, a norma ekkor

$$N = a^3 + b^3 + c^3 - 4a^2b + 3ab^2 + 10a^2c + 17ac^2 - 4b^2c + 3bc^2 - 15abc.$$

Ellenőrizzük a képletünket!

$$p = 4, q = 3, s = -1, \text{ tehát}$$

$$N = a^3 + b^3 + c^3 - 4a^2b + 3ab^2 + (16 - 6)a^2c + (9 + 8)ac^2 - 4b^2c + \\ + 3bc^2 + (-3 - 12)abc, \text{ és tényleg stimmel!}$$

Mint látjuk, a képleteink akkor is stimmelnek, ha a gyökök irracionálisak.

Akkor is stimmelnek, ha komplex gyökök is vannak!

Térjünk vissza a bevezetőben említett sorozathoz!

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86,
114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897,
2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252, 13581, 17991, 23833,
31572, 41824

Ennél két szomszédos szám hányadosa ahhoz az x számhoz tart, amely kielégíti

az $x^3 - x - 1 = 0$ egyenletet. $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}} = 1.324717957\dots$

Ez egy valós gyök, és mellette még van két konjugált komplex gyök is.

Mennyi itt a $z = a + bx + cx^2$ szám normája?

$p = 0, q = -1, s = -1$, tehát

$$N = a^3 - s \cdot b^3 + s^2 \cdot c^3 - p \cdot a^2b + q \cdot ab^2 + (p^2 - 2q) \cdot a^2c +$$

$$+ (q^2 - 2ps) \cdot ac^2 + ps \cdot b^2c - qs \cdot bc^2 + (3s - pq) \cdot abc :$$

$$N = a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 + 2a^2c + ac^2 - bc^2 - 3abc ,$$

nézzük meg, jól számoltunk – e?

$$N(1, 1, 0) = 1 + 1 - 1 = 1, \text{ na, találtunk egy egységet!}$$

$$(1, 1, 0)^2 = (1, 2, 1),$$

$$N(1, 2, 1) = 1 + 8 + 1 - 4 + 2 + 1 - 2 - 6 = 1, \text{ ez tehát rendben van.}$$

Az egység minden hatványa egység, ezért ebben a gyűrűben végtelen sok egység van! Nézzük meg az egység hatványait!

$$(1, 1, 0)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 2 + 4x + 3x^2 = (2, 4, 3)$$

$$(1, 1, 0)^4 = 2 + 4x + 3x^2 + 2x + 4x^2 + 3x^3 = (5, 7, 7)$$

$$(1, 1, 0)^5 = (5, 7, 7) + (0, 5, 7) + (7, 7, 0) = (12, 19, 14)$$

$$(1, 1, 0)^6 = (12, 19, 14) + (0, 12, 19) + (14, 14, 0) = (26, 45, 33)$$

$$N(26, 45, 33) = 17576 + 91125 + 35937 - 26 \cdot 2025 + 2 \cdot 676 \cdot 33 + 26 \cdot 1089 - \\ - 45 \cdot 1089 - 3 \cdot 26 \cdot 45 \cdot 33 = 83, \text{ ennek 1-nek kéne lennie!}$$

$$N = a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 + 2a^2c + ac^2 - bc^2 - 3abc,$$

$$N(5, 7, 7) = 125 + 343 + 343 - 5 \cdot 49 + 2 \cdot 25 \cdot 7 + 5 \cdot 49 - 7 \cdot 49 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 83$$

tehát már itt hiba van!

$$(1, 1, 0)^4 = 2 + 4x + 3x^2 + 2x + 4x^2 + 3x^3 = (5, 9, 7) !!!$$

$$N(5, 9, 7) = 125 + 729 + 343 - 5 \cdot 81 + 2 \cdot 25 \cdot 7 + 5 \cdot 49 - 9 \cdot 49 - 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 7 = 1.$$

Szándékosan hagytam benne ezt a hibát, hogy prezentáljam, hogyan szokott az ember téveszteni, és hogyan tudja a hibát lebuktatni!

Az elvárásom az volt, hogy az (a, b, c) számban az a helyén álló szám éppen a sorozatunk eleme legyen, és a 26 kilógott, itt fogtam gyanút!

$$(1, 1, 0)^5 = (5, 9, 7) + (0, 5, 9) + (7, 7, 0) = (12, 21, 16)$$

$$(1, 1, 0)^6 = (12, 21, 16) + (0, 12, 21) + (16, 16, 0) = (28, 49, 37)$$

$$(1, 1, 0)^7 = (28, 49, 37) + (0, 28, 49) + (37, 37, 0) = (65, 114, 86)$$

Látjuk, hogy az algebrai számunk első tagja, az a az alábbi sorozatot

alkotja: 1, 1, 2, 5, 12, 28, 65, ... = a[-1], a[2], a[5], a[8], a[11], a[14], a[17], ...

itt feltettük, hogy a[0] = 0, és így a[-1] = 1.

Az algebrai szám második tagja, a b szintén egy sorozatot alkot:

1, 2, 4, 9, 21, 49, 114, ... itt $114 = 2 \cdot 49 + 2 \cdot 9 - 2$, $49 = 2 \cdot 21 + 2 \cdot 4 - 1$,

azt várjuk, hogy ez a sorozat is engedelmeskedik valami szabálynak.

Sorozatokkal kezdtük ezt a cikket, és sorozatokkal fejezzük is be.

Ha jobban érdekelnek a sorozatok, a Sloane katalógusban több mint százezret találhatsz. Írd be a Google-ba azt hogy sloane's on-line, és az első találatot vedd.

Itt a keresőbe be lehet írni egy számsorozat első néhány tagját, és kiadja hogy van – e ilyen a katalógusban. Ha nincs, és tudod, hogyan kell generálni, akkor beírhatod mint új sorozatot, és ha elfogadják, akkor a te neveden fut!

Ha beírod a Sloane keresőjébe azt hogy kristmiki, kiadja az én sorozataimat.

Hát már több mint százat írtam be!

Vannak harmadfokú sorozatok is, azaz olyan sorozatok, amelyeknél a két egymást követő elem hányadosa egy harmadfokú egyenletnek engedelmeskedő számhoz tart. Néhány példa ilyenre:

```
a[1]:=1:a[2]:=1:a[3]:=1:for n from 4 to 30 do
a[n]:=a[n-1]+a[n-3] od:
seq(a[n],n=1..30);
```

```
1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277,
406, 595, 872, 1278, 1873, 2745, 4023, 5896, 8641, 12664,
18560, 27201, 39865
```

```
a[1]:=1:a[2]:=1:a[3]:=1:for n from 4 to 30 do
a[n]:=a[n-1]+2*a[n-3] od:
seq(a[n],n=1..30);
```

```
1, 1, 1, 3, 5, 7, 13, 23, 37, 63, 109, 183, 309, 527, 893,
1511, 2565, 4351, 7373, 12503, 21205, 35951, 60957, 103367,
175269, 297183, 503917, 854455, 1448821, 2456655
```

```
a[1]:=1:a[2]:=1:a[3]:=1:for n from 4 to 30 do
a[n]:=a[n-2]+2*a[n-3] od:
seq(a[n],n=1..30);
```

```
1, 1, 1, 3, 3, 5, 9, 11, 19, 29, 41, 67, 99, 149, 233, 347,
531, 813, 1225, 1875, 2851, 4325, 6601, 10027, 15251, 23229,
35305, 53731, 81763, 124341
```

Most jövök csak rá, hogy egy kicsit figyelmetlen voltam. Az algebrai szám második eleme által alkotott 1, 2, 4, 9, 21, 49, 114, ... sorozat nem egyéb, mint $a[1], a[4], a[7], a[10], a[13], a[16], a[19], \dots$! És a harmadik elem által alkotott 0, 1, 3, 7, 16, 37, 86, 200, ... sorozat nem egyéb, mint $a[0], a[3], a[6], a[9], \dots$! Itt $a[0] = 0$ választással éltünk.

De adjuk meg a sorozatot így:

```
a[1]:=1:a[2]:=0:a[3]:=0:for n from 4 to 40 do
a[n]:=a[n-2]+a[n-3] od:
seq(a[n],n=1..40);
```

```
1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28,
37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081,
1432, 1897, 2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252
```

Ekkor mondhatjuk:

$$(1 + x)^n = (1, 1, 0)^n = a[3n + 1] + a[3n + 3] \cdot x + a[3n + 2] \cdot x^2, n = 0, 1, 2, \dots$$

Így valóban az alábbi hatványsort kapjuk:

$$(1, 1, 0)^0 = (1, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0)^1 = (1, 1, 0)$$

$$(1, 1, 0)^2 = (1, 2, 1)$$

$$(1, 1, 0)^3 = (2, 4, 3)$$

$$(1, 1, 0)^4 = (5, 9, 7)$$

Na, most az a kérdés, hogy akkor az x egyenletének 3 gyökével létre lehet hozni magát a sorozatot is? A válasz az, hogy igen!

Először számoljuk ki a sorozat generátorfüggvényét!

A generátorfüggvény: $g(x) = a[0] + a[1] \cdot x + a[2] \cdot x^2 + a[3] \cdot x^3 + a[4] \cdot x^4 + \dots$

Mennyi $a[0]$? Nos, $a[0] + a[1] = a[3]$, azaz $a[0] + 1 = 0$, tehát $a[0] = -1$.

$$\begin{aligned} g(x) + x \cdot g(x) &= a[0] + (a[0] + a[1]) \cdot x + (a[1] + a[2]) \cdot x^2 + (a[2] + a[3]) \cdot x^3 + \dots = \\ &= a[0] + a[3] \cdot x + a[4] \cdot x^2 + a[5] \cdot x^3 + a[6] \cdot x^4 + \dots = \frac{g(x) - a[0] - a[1] \cdot x}{x^2} + a[0], \end{aligned}$$

$$g(x) \cdot (x^3 + x^2 - 1) = 1 - x - x^2, \text{ innen } g(x) = \frac{1 - x - x^2}{-1 + x^2 + x^3}.$$

Most ezt leteszteljük a Maple 7 programmal:

```
restart:
G(x):=(1-x-x^2)/(-1+x^2+x^3):
f[0]:=G(x):
for n from 1 to 30 do f[n]:=diff(f[n-1],x) od:
x:=0:
seq(f[n]/n!,n=0..30);

-1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21,
28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616
```

Nagyon jó, megkaptuk a sorozatunkat, még $a[0]$ is megvan az elején!

A sorozat így szerepel a Sloane katalógusban:

A000931 Padovan sequence: $a(n) = a(n-2) + a(n-3)$.
(Formerly M0284 N0102)

1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897, 2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252, 13581, 17991, 23833, 31572, 41824, 55405, 73396, 97229, 128801, 170625

FORMULA G.f.: $(1-x^2)/(1-x^2-x^3)$.

$a(n)$ is asymptotic to $r^n / (2 \cdot r + 3)$ where $r = 1.3247179572447\dots$, the real root of $x^3 = x + 1$. - DELEHAM Philippe (kolotoko(AT)wanadoo.fr), Jan 13 2004

$a(n)^2 + a(n+2)^2 + a(n+6)^2 = a(n+1)^2 + a(n+3)^2 + a(n+4)^2 + a(n+5)^2$
(Barniville, Question 16884, Ed. Times 1911).

$a(n)$ = central and lower right terms in the $(n-3)$ -th power of the 3×3 matrix $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. E.g. $a(13) = 7$. $M^{10} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$.

- Gary W. Adamson (qntmpkt(AT)yahoogroups.com), Feb 01 2004

G.f.: $1/(1-x^3-x^5-x^7-x^9-\dots)$ - Jon Perry (perry(AT)globalnet.co.uk), Jul 04 2004

$a(n+4) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \text{binomial}(\lfloor (n+k-2)/3 \rfloor, k)$.

- Paul Barry (pbarry(AT)wit.ie), Jul 06 2004

$a(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{binomial}(k, n-2k)$ - Paul Barry (pbarry(AT)wit.ie), Sep 17 2004

$a(n+3)$ is diagonal sum of A026729 (as a number triangle), with formula $a(n+3) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+i} C(n-k, i) C(i+k, i-k)$

- Paul Barry (pbarry(AT)wit.ie), Sep 23 2004

$a(n) = a(n-1) + a(n-5) = A003520(n-4) + A003520(n-13) = A003520(n-3) - A003520(n-9)$.

- Henry Bottomley (se16(AT)btinternet.com), Jan 30 2005

$a(n+3) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C((n-k)/2, k) (1 + (-1)^{(n-k))/2}$;

- Paul Barry (pbarry(AT)wit.ie), Sep 09 2005

The sequence $1/(1-x^2-x^3) (a(n+3))$ is given by the diagonal sums of the Riordan array $(1/(1-x^3), x/(1-x^3))$. The row sums are A000930.

- Paul Barry (pbarry(AT)wit.ie), Feb 25 2005

$a(n) = A023434(n-7) + 1$ for $n \geq 7$. - David Callan (callan(AT)stat.wisc.edu), Jul 14 2006

$a(n+5)$ corresponds to the diagonal sums of A030528. The binomial transform of $a(n+5)$ is A052921.

$a(n+5) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-k+i} C(n-k, i) C(i+k+1, 2k+1)$

- Paul Barry (pbarry(AT)wit.ie), Jun 21 2004

$r^{n-1} = (1/r) * a(n) + r * a(n+1) + a(n+2)$; where $r = 1.32471\dots$ is the real root of $x^3 - x - 1 = 0$. Example: $r^8 = (1/r) * a(9) + r * a(10) + a(11) = (1/r) * 2 + r * 3 + 4 = 9.483909\dots$ - Gary W. Adamson (qntmpkt(AT)yahoo.com), Oct 22 2006

$a(n) = (r^n)/(2r+3) + (s^n)/(2s+3) + (t^n)/(2t+3)$ where r, s, t are the three roots of x^3-x-1 in any order. - Keith Schneider (schneidk(AT)email.unc.edu), Sep 07 2007

EXAMPLE When run backwards gives $(-1)^n \cdot A050935(n)$.

MAPLE A000931 := proc(n) option remember; if n = 0 then 1 elif n <= 2 then 0 else A000931(n-2)+A000931(n-3); fi; end;

A000931:=- (1+z)/(-1+z**2+z**3);
[Conjectured by S. Plouffe in his 1992 dissertation.]

MATHEMATICA
CoefficientList[Series[(1 - x^2)/(1 - x^2 - x^3), {x, 0, 50}], x]

$a[0] = 1; a[1] = a[2] = 0; a[n_]:=a[n] = a[n-2] + a[n-3];$ Table[a[n], {n, 0, 51}] (from Robert G. Wilson v (rgwv(at)rgwv.com), May 04 2006)

Na, ez van a Sloane katalógusban, sok érdekeset tudhatunk meg belőle.

Külön kiemelem a mátrixra vonatkozó megjegyzést:

$a(n)$ = central and lower right terms in the $(n-3)$ -th power of the 3×3 matrix $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. E.g. $a(13) = 7$. $M^{10} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$.

Itt a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix van emlegetve, ami nem egyéb, mint az $x^3 = 1 + x$

egyenletet kielégítő gyökököt reprezentáló mátrix. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Most legyen x_1, x_2, x_3 az $x^3 = 1 + x$ egyenlet 3 gyöke! (kettő konjugált komplex)

Nézzük, milyen sorozatot kapunk az $a[n] = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ hatványösszegekből!

$a[0] = 1 + 1 + 1 = 3, a[1] = x_1 + x_2 + x_3 = 0$, mert nincs másodfokú tag.

$$\begin{aligned}
a[2] &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (u + v)^2 + (\varepsilon \cdot u + \varepsilon^2 \cdot v)^2 + (\varepsilon^2 \cdot u + \varepsilon \cdot v)^2 = \\
&= u^2 + v^2 + 2 \cdot u \cdot v + \varepsilon^2 \cdot u^2 + \varepsilon^4 \cdot v^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot u \cdot \varepsilon^2 \cdot v + \varepsilon^4 \cdot u^2 + \varepsilon^2 \cdot v^2 + 2 \cdot \varepsilon^2 \cdot u \cdot \varepsilon \cdot v = \\
&= u^2 + v^2 + 2 \cdot u \cdot v + \varepsilon^2 \cdot u^2 + \varepsilon \cdot v^2 + 2 \cdot u \cdot v + \varepsilon \cdot u^2 + \varepsilon^2 \cdot v^2 + 2 \cdot u \cdot v = 6 \cdot u \cdot v = 2,
\end{aligned}$$

mert $\varepsilon^3 = 1$, $3 \cdot u \cdot v = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2} = 1$ a megoldóképlet alapján.

Tehát a sorozatunk így indul: 3, 0, 2, ...

sejtésünk az, hogy így fog folytatódni: $a[n] = a[n-2] + a[n-3]$,

tehát a sorozatunk: 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, ...

Figyeljük meg, hogy az $a[n] = a[n-1] + a[n-5]$ szabály is teljesül!

Rákerestem a Sloane katalógusban:

A001608 Perrin (or Ondrej Such) sequence: $a(n) = a(n-2) + a(n-3)$.
(Formerly M0429 N0163)

3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644, 853, 1130, 1497, 1983, 2627, 3480, 4610, 6107, 8090, 10717, 14197, 18807, 24914, 33004, 43721, 57918, 76725, 101639, 134643, 178364, 236282, 313007

Asymptotically, $a(n) \sim r^n$, with $r=1.3247179572447...$ the inverse of the real root of $1-x^2-x^3=0$

FORMULA G.f.: $(3 - x^2)/(1 - x^2 - x^3)$.

$a(n)=r_1^n+r_2^n+r_3^n$ where r_1, r_2, r_3 are three roots of $x^3-x-1=0$.

$a(n-1)+a(n)+a(n+1)=a(n+4)$, $a(n)-a(n-1)=a(n-5)$. - Jon Perry
(perry(AT)globalnet.co.uk), Jun 05 2003

$a(n)$ = the trace of M^n where M = the 3 X 3 matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. $a(n) = 2 \cdot A000931(n+3) + A000931(n)$

E.g. $a(10) = 17 = (3 + 7 + 7) = \text{trace of } M^{10}$. - Gary W. Adamson
(qntmpkt(AT)yahoo.com), Feb 01 2004

MAPLE A001608:=-z*(2+3*z)/(-1+z**2+z**3);
[Conjectured by S. Plouffe in his 1992 dissertation.]

PROGRAM (PARI) a(n)=if(n<0, 0, polsym(x^3-x-1, n)[n+1])

A kékkel kiemelt két sor utal arra, hogy $a[n] = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, illetve a már említett reprezentáló mátrix spúrja, azaz a főátlóban levő elemek összege.

Végül rákerestem arra a szóra hogy Tribonacci sequence. Ez jött be:

A000073 Tribonacci numbers: $a(n) = a(n-1) + a(n-2) + a(n-3)$.
(Formerly M1074 N0406)

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, 66012, 121415, 223317, 410744, 755476, 1389537, 2555757, 4700770, 8646064, 15902591, 29249425, 53798080, 98950096, 181997601, 334745777

A000213 Tribonacci numbers: $a(n) = a(n-1) + a(n-2) + a(n-3)$.
(Formerly M2454 N0975)

1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, 2209, 4063, 7473, 13745, 25281, 46499, 85525, 157305, 289329, 532159, 978793, 1800281, 3311233, 6090307, 11201821, 20603361, 37895489, 69700671, 128199521, 235795681, 433695873

$a(n)/a(n-1)$ tends to the tribonacci constant, 1.839286755...; an eigenvalue of M and a root of $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. - Gary W. Adamson

MAPLE K:=(1-z^2)/(1-z-z^2-z^3):
Kser:=series(K, z=0, 45): seq((coeff(Kser, z, n)), n= 0..34);
- Zerinvary Lajos (zerinvarylajos(AT)yahoo.com), Nov 08 2007

Látjuk, hogy ez is harmadfokú sorozat. Tehát a témánkba vág.

Felbukkan Zerinvary Lajos neve is, akit évekkel ezelőtt én segitettem, azóta szorgalmasan ontja a sorozatokat.

Na, hát ennyit akartam elmondani, köszönöm hogy elolvastátok.