

EUKLIDÉSZ

Elemek



OSZBOLAC 1994

576

EUKLIDÉSZ

Elemek

1. KÖNYV	45
2. KÖNYV	54
3. KÖNYV	100
4. KÖNYV	114
5. KÖNYV	150
6. KÖNYV	160
7. KÖNYV	160
8. KÖNYV	160
9. KÖNYV	160
10. KÖNYV	160
11. KÖNYV	160
12. KÖNYV	160
13. KÖNYV	160
14. KÖNYV	160
15. KÖNYV	160
16. KÖNYV	160
17. KÖNYV	160
18. KÖNYV	160
19. KÖNYV	160
20. KÖNYV	160



FSZEK X/4 könyvtár



0 013500 552313

GONDOLAT • 1983

A mű eredeti címe:

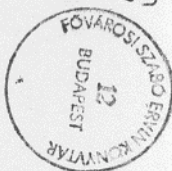
Στοιχεῖα

Fordította és jegyzetekkel ellátta:

MAYER GYULA

A fordítást az eredetivel egybevetette,
Szakmailag ellenőrizte és az előszót írta:

SZABÓ ÁRPÁD



ISBN 963 281 267 0

© Mayer Gyula, 1983. Hungarian translation

Tartalom

ELŐSZÓ	7
ELSŐ KÖNYV	45
MÁSODIK KÖNYV	84
HARMADIK KÖNYV	100
NEGYEDIK KÖNYV	134
ÖTÖDIK KÖNYV	150
HATODIK KÖNYV	172
HETEDIK KÖNYV	206
NYOLCADIK KÖNYV	233
KILENCEDIK KÖNYV	256
TIZEDIK KÖNYV	280
TIZENEGYEDIK KÖNYV	402
TIZENKETTEDIK KÖNYV.	443
TIZENHARMADIK KÖNYV	476
A RÖVIDÍTÉSEK FELOLDÁSA, JELMAGYARÁ- ZAT ÉS ÚTMUTATÓ A KERESÉSHEZ	505
FORDÍTÓI JEGYZETEK	506
BETŰRENDES MUTATÓ	527

Előszó

Euklidész műve, amelynek új magyar fordítását veszi most a kezébe az olvasó, a matematika „klasszikusa”. Mindannak nagy része, amit a középiskolában matematikából – különösen pedig amit mértanból, *geometriából* – tanultunk, megvan már az Elemekben. Sőt, sok helyütt a világon még nem is olyan régen ezt – az Elemeket – tanították az iskolában matematika órán. Alig is van még egy olyan munka, amely a könyvnyomtatás feltalálása óta olyan sok kiadásban látott volna napvilágot, mint Euklidész Elemei. – Ugyanakkor azonban a szerzőről magáról nagyon keveset, majdnem semmit sem tudunk. Kételemek merültek föl egyesekben legutóbb még a név helyesírását illetően is.

Euklidész nevét ugyanis az ókoriak nem egyszerű *i*-vel, hanem *e+i* betűkkel írták, amelyek eredetileg egy ún. kettőshangzót (difton-gust) jelöltek. Ezt az utóbbit *Erasmus* nyomán (1467–1535) régi görög szövegekben *ej*-nek szokták olvasni. Ez a magyarázata annak, miért tettek kísérletet a közelmúltban többen arra, hogy a matematikus nevét is következetesen *Eukleidész*-nek írják. – Nem tartjuk fontosnak ezt a próbálkozást már csak azért sem, mert ennek a matematikusok körében közismert névnek az esetében a legtöbb európai nyelv ragaszkodik az *i* hanghoz. Ezt tette magáévá korábban a magyar nyelvhasználat is. A magyar matematikusok különben is régen hozzászórtak már ahhoz, hogy *Bolyai Jánossal* kapcsolatban „nem euklidészi” geometriáról beszéljenek. Ebben a másik, gyakrabban használt megjelölésben tehát már amúgyis az *i* hangot használjuk. Azonkívül lehetővé teszi a hagyományossá lett majdnem latinos írásmód (*Euklidész*) azt is, hogy megkülönböztessük az ókori mate-

matikust az ugyanolyan nevű, de kevésbé jelentős 4. századi filozófustól (a megarai Eukleidészről), akivel már az ókorban gyakran összetévesztették. (Az összetévesztés egyébként Tiberius császár korától a 16. századig, tehát nem kevesebb mint másfél évezreden keresztül makacsul újra meg újra felbukkant.)

A matematikus *Eukleidész*ről tehát személy szerint úgyszólván semmit sem tudunk. Mindazt, amit mégis elmondhatunk róla, műveiből, főként éppen az *Elemek*ből kell kiolvasnunk. Azt pl., hogy mikor élehetett, ilyen okoskodással szokták megállapítani.

Munkájából azonnal kiderül, hogy ezt csak a *Platón* és *Arisztotelész* után i időben írhatták. Minthogy pedig *Arisztotelész* i. e. 322-ben halt meg, ez máris fontos „terminus post quem”. De az is bizonyos, hogy *Eukleidész* műve megelőzi a két híres ókori matematikust: *Apollónioszt* és *Arkhimédészt*. *Arkhimédész*, aki már idézi *Eukleidész* Elemeit, i. e. 287 és 212 között élt. *Eukleidész* tehát nagyjából i. e. 300 körül írhatta munkáját. – Jól összevág ezzel a datálással az is, amit annál a *Proklosz*nál olvasunk, aki időszámításunk 5. századában élt, és akitől ránk maradt az *euklidészi Elemek* I. könyvéhez írt legjobb ókori kommentár. Van ugyanis *Proklosz* magyarázatai között egy olyan rövid áttekintés a legrégebb görög matematikusokról, amely újkori föltevés szerint még *Arisztotelész* tanítványától, a 4. századi *Eudemosztól* származhat. Ennek a többek által nagyra tartott *eudemoszi* áttekintésnek a gondolatmenete ugyancsak megerősíteni látszik az *Eukleidész* életkorára vonatkozó kronológiai következtetést.

Ugyanígy felelünk arra a kérdésre is: Hol élehetett, vagy hol működött *Eukleidész*? – A híres késő-antik matematikus, *Papposz* – akinek az életkora egyébként szintén meglehetősen bizonytalan (időszámításunk 4. századának a vége, vagy inkább az eleje?) – említi „*Matematikai Gyűjtemény*” című munkájában, hogy a nagy *Apollóniosz* hosszabb ideig együtt volt *Alexandriában* *Eukleidész* tanítványaival. Eszerint tehát *Eukleidész* is *Alexandriában* élt. Vagy csak ott tanított egy darabig? Talán éppen az alexandriai „*Múszeion*” gazdag könyvtára tette volna lehetővé számára nagy műve összeállítását? – Ezek már inkább csak találgatások *Papposz* adata nyomán.

Elmondja még *Papposz*, hogy *Eukleidész* lelkiismeretes, nyíltszívű, barátságos, szerény egyéniség volt. Nem zárkózott el a nála fiatalab-

bak ötletei, okfejtése elől; szívesen meghallgatta, mérlegelte ezeket is. Az pedig soha eszébe nem jutott volna, hogy mások érdemeit, gondolatait úgy tüntesse föl, mintha azok tőle származnának. – Ez az utóbbi megállapítás nyilván azzal függ össze, hogy Euklidésznek az Elemekben túlnyomórészt korábbi matematikusok tételeit, bizonyításait kellett rendszerbe foglalnia. Összeállításának azonban nem az volt a célja, mintha ő mindazt, amit előad, teljes egészében saját műveként akarta volna az olvasó elé tárni – ezt a gondolatot akarja kiemelni Papposz megjegyzése.

Ezzel pedig már ki is merítettük az Euklidészre vonatkozó antik híradásokat. Az a két anekdota, amely ezenkívül még Euklidész nevéhez fűződik, már nem őt magát jellemzi. Inkább az derül ki ezekből, hogyan gondolkoztak a régiek a matematikáról.

Elmondja pl. az előbb már említett Proklosz, hogy egy alkalommal maga Ptolemaiosz király, miután meghallgatta Euklidész egyik matematikai tárgyú előadását, azt kérdezte volna tőle: Miért nem lehet a matematikát *egyszerűbben* tanítani? Euklidész pedig azt felelte volna erre: azért nem, mert a matematikához *nem vezet királyi út.* – A kényelemhez szokott királyt és a szellemi nehézségeket büszke öntudattal vállaló matematikust állítja szembe egymással ez az anekdota, és nem arról a „szerény Euklidészről” beszél, akit Papposz említett.

Még jellemzőbb ennél az a másik rövid elbeszélés, amelyet *Sztoibaios*nál olvasunk, aki nagyjából kortársa volt Proklosznak. Ez a történet meg azt állítja, hogy megkérdezte egyszer valaki Euklidésztől: Aztán mi haszna lesz abból, ha megtanulta a matematika tételeit bizonyításaikkal együtt? Euklidész pedig erre – mondja tovább a folytatás – szólította volna rabszolgáját: Adjon már egy oboloszt a kérdezőnek, *hogy valami haszna is legyen abból, amit tanult.* – Mert antik elgondolás szerint azt, aki elég földhöz ragadt ahhoz, hogy a matematikának (és főként pedig a matematikai *bizonyításnak*) a *hasznát* keresse, ahelyett, hogy belefelejtkeznék a matematikai gondolatok szépségébe – azt csak így lehet kifizetni. – Ez az anekdota is arra vall, milyen szoros szálak fűzik a görög, az euklidészi matematikát az idealista, közelebbről a platóni filozófiához.

Bizonyos, hogy Euklidész messze legfontosabb és legismertebb

műve az *Elemek*. De mielőtt erről beszélnénk, említsük itt meg egyéb, hasonlóképpen matematikai tárgyú munkáit, bár ezeknek egy részéről éppen csak tudunk.

1. A „*Pszeudaria*”-t („Hamis tételek” vagy „Álbizonyítások”) pl. csak címről ismerjük, a munka maga elveszett. Nyilván arról szólhatott: hogyan kerülhetjük el a matematikában a téves gondolatokat, a rossz levezetéseket.

2. A „*Dedomena*” (= „Adott mennyiségek”) című megmaradt munkája azt mutatja be, hogyan számíthatók ki bizonyos adott mennyiségekből más olyanok, amelyek az előbbiekkal összefüggenek ugyan, de közvetlenül nem ismertek. (A modern magyarázók általában *félreértik* ezt a munkát és úgy fogják föl, mintha ez valami „euklidészi algebra” kulcsa lenne.)

3. Egy másik, a *sikidomok felosztásáról* szóló munka csak jóval későbbi arab fordításban maradt ránk.

4. A „*Poriszmoi*” olyan tételeket mutat be, amelyek középhelyet foglalnak el a „*theórémák*” és a „*szerkesztési feladatok*” között.

5. Külön munkája foglalkozott a „*mértani helyekkel*”.

6. Szólt Euklidésznek egy elveszett munkája a „*kúpszeletekről*”. Ami ebben lényeges volt, az feltehetően belekerült *Apollóniosz* hasonló tárgyú munkájának abba a részébe, amely szerencsére fennmaradt. – Említsük itt meg mindjárt azt is, hogy Apollóniosz a kúpszeletek elméletében messze túljutott Euklidész eredményein.

7. Fennmaradt Euklidésznek egy műve a perspektíváról, „*Optika*” címen.

8. A tükörképekkel foglalkozik a „*Katoptrika*”.

9. A régi pythagoreusok zeneelméletét foglalja össze az, amelyiknek latin címe: *Sectio Canonis* (= „A kánon metszése”), és végül

10. elemi asztronómia a „*Phainomena*” című. Az égbolt félgömbjének látszólagos mozgását, a csillagok felkelését-lenyugvását tárgyalja.

Annyi mindenesetre kiderül már ebből a pusztasorsorolásból is: milyen problémakörök foglalkoztatták a görög matematikusokat az i. e. 4. század végén.

De jóval fontosabbnak tartotta ezeknél a műveknél már az ókor Euklidész nagy munkáját, az *Elemeket*. Erről kapta szerzőjük kitün-

tető nevét: *Sztoikheiótész* = „az, aki az Elemeket írta”, minthogy az Elemek neve görögül: *Sztoikheia*.

Csakugyan, jegyezzük meg itt mindjárt: úgy látszik, senki sem írt az egész ókornak Euklidészt követő évszázadaiban még egyszer olyan természetű munkát, mint amilyen Euklidész Elemi. Különösen feltűnő ez azért, mert bár igaz, hogy az egész korábbi, Euklidész előtti görög matematikáról nagyon keveset tudunk, mégis biztos értesülésünk van arról, hogy éppen az Euklidészt megelőző nem egészen 150 év során hárman is kísérleteztek egy-egy olyan jellegű munkával, mint amilyen a mi számunkra Euklidész műve lett. Az egyik az 5. század második felének híres szofistája – és egyben tehetséges matematikusa – a khioszi *Hippokratész* volt. Ő lett az első, Proklosz híradása szerint, aki Elemeket állított össze. Ugyancsak Proklosz említi mint ilyen munkák szerzőit az egyébként ismeretlen *Leónt*, és egy bizonyos magnésziai *Theudioszt*.

Bár ezek a mi számunkra már csak pusztá nevek – *Hippokratész*, *León* és *Theudiosz*, mint az Euklidészéhez hasonló „Elemek” szerzői – hiszen ezekből az összeállításokból semmi sem maradt fenn, sőt, úgy látszik, nem forgott közkézen ennek a háromnak a munkája már az ókorban sem; Prokloszon kívül egy antik szerző sem beszél ezekről a régi Elemekről. De egy bizonyos szempontból talán mégsem lényegtelen az, hogy tudunk Euklidészen kívül még három korábbi kísérletezőről. Ez ugyanis arra mutat, mintha egy bizonyos, történetileg jól körülhatárolható időszakaszban – talán éppen Eukliddésszel zárult ez a kor – különös *aktualitása* lett volna egy ilyen természetű matematikai munka összeállításának.

A következőkben mindenekelőtt megpróbáljuk kideríteni: mi lehetett az *aktualitása* annak, hogy többen is írtak Elemeket a matematika kibontakozásának azon a szakaszán, amelynek záróköve az ókorban, a mi szemünkben, éppen Euklidész nagy műve.

*

[Az Euklidészt magyarázó Proklosz írja a következőt:
„Minthogy azt állítjuk, a matematika feltételekből kiinduló tudomány, amely bizonyos princípiumokból (elvekből) vezeti le következtetéseit

..., annak, aki Elemeket állít össze, külön kell tárgyalnia a tudomány princípiumait (az elveket), és külön azokat a dolgokat, amelyeket az előbbiekből vezet le. A princípiumokról nem kell számot adnia (ezeket nem kell bebizonyítani). De feltétlenül be kell bizonyítani mindazt, amit a princípiumokból következtet...”]

„Princípiumok” vagy „elvek” a neve ebben az idézetben mindannak, amit Euklidész mint definíciókat, posztulátumokat és axiómákat sorol fel. A másik csoport viszont – az, ami a princípiumokból következik – a tételek (= theorémák) és a szerkesztési feladatok összessége. [Nevezhetjük ezt az utóbbi csoportot összefoglaló értelemben egyszerűen „tételek”-nek is, minthogy igazában nincs lényeges különbség tétel és geometriai feladat között. Minden szerkesztési feladat megfogalmazható tétel formájában is.]

Proklosz tehát egyrészt kettéosztja a matematika egészét – princípiumokra és theorémákra – másrészt pedig leszögezi, hogy a matematikus a princípiumokat nem bizonyítja be – ezeket bizonyítás nélkül fogadja el igazaknak. De be kell bizonyítani mindazt, amit a princípiumokból következtet. Más szóval: a matematika olyan bebizonyított állítások (tételek) rendszere, amelyek be-nem-bizonyított (bizonyítás nélkül elfogadott) elvekre (princípiumokra) épülnek.

Valóban jól talál ez a jellemzés mind Euklidész művére, mind pedig az egész matematikára. A kérdés csak az: Hogyan jutottak el a görögök oda, hogy így értsék és így építsék föl a matematika rendszerét – már Euklidész előtt? Mert nyilvánvaló, hogy Proklosznak igaz van. Addig, amíg nem választják szét egyszer s mindenkorra a bizonyítás nélkül elfogadott matematikai elveket és a belőlük levezetett (bebizonyított) tételeket, gondolni sem lehet arra, hogy valaki az Euklidészéhez hasonló Elemeket állítson össze. Valamiképpen érvényesülnie kellett az ilyen megkülönböztetésnek már annak a másik három szerzőnek az esetében is, aki Euklidész előtt az övéhez hasonló feladatra vállalkozott. – De nézzük csak meg közelebbről, mi az értelme egyáltalán az elvek és tételek szétválasztásának.

Ha megelégednénk olyan válasszal, amilyent erre a kérdésre Arisztotelész követői adnának, egyszerűen azt is mondhatnánk: Bizonyítás nélkül igaznak kell elfogadnunk a tételek egy részét (a princípiumokat), mert ha nem tennénk ezt, ha be akarnánk bizonyítani

ezeket is, akkor ez a törekvésünk elkerülhetetlenül *regressus ad infinitum*hoz vezetne.

Bár ez kétségtelenül így van, de magyarázatnak ez talán mégsem elég. Mert ez a megokolás nem hívja fel a figyelmet arra, hogy az előbb feltett kérdés tulajdonképpen *a bizonyítással elérhető evidencia problémájához kapcsolódik*.

Annak a korábbi matematikai ismeretnek, amelyet az ember a mindennapi életben oly gyakori számolások, mérések során szerzett meg, még aligha volt szüksége elméleti bizonyításra. Hiszen gyakorlati, empirikus ismeret volt ez, amelyet maga az empiria, a gyakorlat igazolt.

Ha egyelőre a matematika keretein belül maradunk, és így vizsgáljuk a kérdést, valószínűbb, hogy a bizonyítás szükségességének a gondolata inkább az olyan matematikai természetű megfigyelésekkel kapcsolatban merült föl, amelyeknek helyes vagy helytelen voltáról *pusztán a gyakorlat, az empiria alapján nem lehet dönten*i. Ilyen tapasztalati úton el nem dönthető elemi matematikai megfigyelés pl. a következő kettő.

1. Bizonyos, hogy a görög matematikusokban egyszer föl kellett merülnie a kérdésnek: Tegyük föl, hogy adva egy négyzet, amelynek az oldalát valamilyen mértékszámmal fejeztük ki. Mekkora lesz ennek a négyzetnek az átlója ugyanazokban a mértékegységekben kifejezve, mint amelyeket az oldal megmérésére alkalmaztunk? – Kézenfekvő, hogy egy ilyen kérdésre kezdetben méréssel vagy számítással keresik a választ. Aztán észreveszik, hogy hiába próbálkoznak, nem találnak sem egész-, sem törtszámot, amellyel a négyzet átlóját az oldalhoz tudnák mérni. Azt tapasztalják, hogy a legjobb esetben is csak megközelítik a keresett mértéket. Dehát csakugyan így lesz ez *minden* esetben? – Erre a kérdésre a gyakorlat nem ad megnyugtató választ. Mert a próbálkozás csak azt mutatja, hogy az adott konkrét esetben nem sikerült a kísérlet. De vajon nincs-e mégis a végtelenül sok ki nem próbált eset között olyan is, amely más eredményre vezet? Végtelenül sok esetet nem próbálhatunk ki, a próba mindig csak véges számú lehet.

2. Ugyanígy nem dönthető el empirikusan a következő egyszerű aritmetikai probléma sem. – Könnyű belátni azt, hogy a természetes

számok sora *végtelen*, azaz: *nincs legnagyobb természetes szám*. Mert bármilyen nagy számot veszünk is példaként, mindjárt hozzáadhatunk még 1-et, és ezzel máris túljutottunk azon, amelyet az előbb feltételelesen „legnagyobb számnak” vettünk. De próbáljuk meg most ezt a gondolatmenetet egy kissé érdekesebb formában. – Osszuk a természetes számokat két csoportba. Legyen az egyik csoport azoké a számoké, amelyeknek *nincs valódi osztójuk*, mint 2, 3, 5, 7, ...; ezek az ún. *prímszámok*, amelyek ti. csak önmagukkal és az egységgel oszthatók (ezért mondjuk róluk, hogy „nincs valódi osztójuk”). A másik csoportba pedig tartozzanak azok a számok, amelyeknek *van valódi osztójuk*. Ezek az utóbbiak az *összetett számok*. Ezek ti. felépíthetők mint csupa prímszám szorzatai, összetételei, pl. $6 = 2 \cdot 3$. – Azt már beláttuk az előbb, hogy „nincs legnagyobb természetes szám”, vagyis: a természetes számok sora *végtelen*. De hogy állunk a prímszámokkal? Ezekből is *végtelen* sok volna tán? Vagy van esetleg egy „utolsó”, „legnagyobb prímszám”, és mindaz, ami ezután jön, ami nagyobb ennél, az már csak összetett szám lehetne, amelyet nála kisebb prímszámok szorzataként állíthatnánk elő?

Világos, hogy *ez* a probléma sem dönthető el empirikusan, azzal, hogy egyszerűen hivatkozunk arra, amit tapasztalunk. A tapasztalás helyett ebben az esetben is *elméleti bizonyításhoz* kell folyamodnunk.

Mai történeti tudásunk szerint az elméleti bizonyítás problémája a görögöknél legkorábban nem a matematikában, hanem az ún. eleai filozófiában merült föl az i. e. 5. század első felében. Az eleai iskola képviselői – *Parmenidész*, *Melisszosz* és *Zénón* – azt tanították, hogy a tudás, amelyet érzékszerveink útján nyert tapasztalásból merítünk, azaz: empirikusan szerzünk, megbízhatatlan, félrevezető. Az érzékszervek útján nyert benyomások önmaguknak ellentmondó állításokra vezetnek. Az eleai filozófusok csakugyan ki is tudták mutatni az ellentmondást még az olyan legegyszerűbb állításokban is, amelyeknek helyességét a mindennapi életben rajtuk kívül senki sem merte volna kétségbevonni. Ezzel közvetve arra is rámutattak, hogy hamisnak, tévesnek tekintendő az az állítás, amely ellentmondásra vezet. (*Helyes*, vagy *igaz* csak a megcáfolt állítás *ellenkezője* lehet.)

Úgy látszik, az eleai filozófia képviselői kezdetben beérték a pusztá

cáfolással. A folytonos cáfolgatás azonban könnyen szofisztikába torkollik. Ha minden állításban ki tudjuk mutatni az ellentmondást, akkor ez egyértelmű azzal, hogy „igaz állítás” tán nem is lehetséges.

Volt azonban az eleai filozófia továbbépítésének egy másik lehetősége. Ki lehetett indulni olyan állításokból, amelyeknek igaz voltát minden kétségen felül állónak tartották. Ezeket el lehetett fogadni ellenőrzés *nélkül*. Ezekre építhették a további vizsgálódást, és most már csak azt kellett ellenőrizniök: melyek azok a további állítások, amelyek összhangban vannak a kiindulásul elfogadott, az alapul vett állításokkal.

Így bontakozott ki az eleai filozófia vitáiból az a görög *dialektika*, amelyet különösen *Platón* műveiből ismerünk. Ennek a dialektikának egyik kikristályosodott formája az euklidészi matematika.

Amint látjuk, előfeltétele volt annak, hogy valaki kísérletet tegyen az Euklidészéhez hasonló matematikai Elemek összeállítására, az alábbi három:

1. Mindenekelőtt meg kellett lennie annak az igénynek, hogy a matematikai ismereteket szabatosan megfogalmazott állításokba – *tételekbe* – foglalják, és hogy ezeket a tételeket be is bizonyítsák. (Tételeket ti. a korábbi, a görögség előtti matematika még egyáltalán nem fogalmazott meg.)

2. Rá kellett jönniök arra, hogy a matematikai bizonyítás nem lehet egyszerűen a tapasztalatra, az empiriára való hivatkozás. Éppen ellenkezőleg: annak a matematikusnak, aki Elemeket akart összeállítani, az absztrakciónak olyan fokára kellett emelkednie, amely már *elfordul a közvetlenül, az érzékszervekkel tapasztalható anyagi valóságtól. Az elméleti bizonyítás csak elméleti megfontolásokból indulhat ki.*

3. Ahhoz, hogy valaki összeállítsa a matematikai természetű állításoknak (tételeknek) valamiféle rendszerét, bizonyításaikkal együtt, okvetlenül kísérletet kell tennie arra is, hogy megállapítsa: melyek azok az állítások, amelyeket elfogad bizonyítás nélkül, milyen princípiumokra, elvekre építi rendszerét. – Feltehető, hogy a matematikai princípiumok összeállítását *próbálkozások* előzték meg. Nem valószínű, hogy azokat a matematikai elveket (definíciókat, posztulátumokat és axiómákat), amelyeket Euklidész művében találunk, bárki

már az első próbálkozásra hiánytalanul össze tudta volna állítani. Ezért van az, hogy még *Arisztotelész* is – aki pedig majdnem egy egész évszázaddal később élt, mint az a khioszi *Hippokratész*, aki elsőnek állított össze *Elemeket* – hosszasan értekezik arról, milyenek legyenek a matematika bizonyítás nélkül elfogadott elvei.

Igaz, nem tudjuk, milyen mértékben ismerték föl ezt a három követelményt már Euklidész előtt azok a szerzők, akik éppenúgy, mint ő maga, megpróbálták összeállítani a matematika *Elemeit*, és mennyire tudták ki is elégíteni az ilyen igényeket. Arra sem vállalkozhatunk ebben az összefüggésben, hogy magából Euklidészből mutassuk ki a korábbi *Elemek* nyomait. Elégedjünk meg itt azzal a megállapítással, hogy az euklidészi *Elemek* magas tudományos színvonalra, a bizonyítások szigorúsága, világos, tiszta megfogalmazása, egyszóval: mindaz, ami Euklidészben az évszázadok hosszú során át felülmúlhatatlannak látszott, és amin úgyszólván csak a legújabbkori matematika tudott túlhaladni – mindez megerősíteni látszik az elgondolást, hogy nemcsak az *Elemek* egyes tételei, hanem magának az egész műnek a felépítése is több megelőző kísérlet után érlelődött olyanná, amilyen formában ránk maradt.

Arra a kérdésre tehát, hogy mi lehetett az *aktualitása* annak, hogy már az Euklidészt megelőző másfél évszázad során többen kísérleteztek azzal, hogy matematikai *Elemeket* írjanak, összefoglalóan csak a következőket felelhetjük.

Az eleai filozófusok rájöttek arra, hogy az érzékszervek útján nyert benyomásaink, tapasztalataink *megbízhatatlanok*. Az empiria önmagában nem vezet igazi tudáshoz. Kimutatták azt is, hogy az önmagának *ellentmondó* állítás nem lehet igaz. (Ezzel közvetve az *ellentmondásmentességet* tették meg az igaz állítás kritériumának.) Ilymódon egyrészt fölmerült a *bizonyítás* igénye, másrészt pedig össze kellett állítani (legalább is a matematikában) azoknak a lehetőleg „egyszerű” tételeknek a rendszerét, amelyeket *bizonyítás nélkül* igaznak tarthattak; ezek lettek a matematika elvei, princípiumai.

Bizonyára nem véletlen az, hogy ezek a törekvések éppen abban az időben vezettek egymásután többször is *Elemek* összeállítására, amikor, úgy látszik, az egész görög szellemi életre különben is erősen hatott az eleai filozófia. (Elég lesz itt talán emlékeztetni a „látszat”

és a „valóság” ellentétének problémájára, amely ugyanebben az időben annyira foglalkoztatta az egész görög irodalmat. Igazában ezt a problémát is az eleai tanítás állította az érdeklődés középpontjába.) Nagyjából az i. e. 450-től 300-ig terjedő kor ez.

Befejezésül egészítsük ki ezt a kitérést az Elemek bizonyításformáinak rövid áttekintésével.

Euklidész kétféle bizonyítást ismer. Nyomatékosan fel kell hívnunk e kettő közül a figyelmet arra, amelyiket az 5. századi *Platón* mint a matematikára különösen jellemző bizonyítást emleget. Ez a *reductio ad absurdum*, vagy más néven indirekt bizonyítás.* Ez volt már az eleai filozófusok (*Parmenidész* és *Zénón*) gyakran alkalmazott okoskodása. Ez abból áll, hogy kimutatja: igaznak kell lennie a bizonyításra kiszemelt tételnek, mert ugyanennek az ellenkezője – az állítás tagadása – ellentmondásra vezet, s ezért nem lehetséges.

Pl. az előbb említett két tétel közül az elsőt – azt, hogy a négyzet oldala és átlója *nem összemérhető mennyiségek* – a következő okoskodással bizonyítja be Euklidész (v. ö. az Elemek X. 27. függelékével).

Mindenekelőtt fogalmazzuk meg a bebizonyítandó tétel ellenkezőjét: „a négyzet oldala és átlója *összemérhető*”. (Ezt az utóbbit fogjuk tehát cáfolni.)

A négyzet átlójára és két oldalára érvényes *Pythagorasz* tétele: az átfogó (ebben az esetben az *átló*) négyzete egyenlő a két befogóra (a négyzet oldalaira) emelt négyzetek összegével. Tehát

$$d^2 = 2a^2.$$

Ha d és a összemérhető, akkor ez a két szám relatív prím. (Illetőleg, ha nem relatív prím, akkor addig egyszerűsítjük őket, míg relatív prímeik lesznek.) A felírt képlet arra vall, hogy d^2 páros szám. Mert csak páros szám lehet egyenlő egy másik szám duplájával. Persze, ugyanígy páros szám d is. Mert csak páros számnak a négyzete páros.

* *Pólya Gy.* könyve (A gondolkodás iskolája, Budapest 1957. 199) különbséget tesz a *reductio ad absurdum* (= visszavezetés a képtelenségre) és az *indirekt bizonyítás* között, minthogy az előbbi *cáfol* egy tételt (x), az utóbbi pedig az ellenkező tételt (*non x*) állítja. A két név tehát ugyanazt a valamit két ellentétes oldalról mutatja be: éppen azáltal, hogy „ x ”-et cáfoljuk, bizonyítjuk „*non-x*”-et.

199.392



De éppen ezért *a*-nak páratlannak kell lennie, hiszen megegyeztünk már abban, hogy *d* és *a* relatív prímek.

Ha viszont *d* páros ($d = 2m$), akkor az előbbi képletet így is írhatjuk:

$$(2m)^2 = 2a^2, \text{ vagyis } 4m^2 = 2a^2.$$

Ha most ennek a legutóbbi egyenletnek mindkét oldalát osztjuk 2-vel, akkor azt kapjuk, hogy $2m^2 = a^2$. Ez viszont arra vall, hogy *a* páros szám, mert csak páros szám négyzete lehet egyenlő egy másik számmal a duplájával.

Dehát lehet-e valamely szám egyszerre páros is meg páratlan is – mert az előbb arra az eredményre jutottunk, hogy „*a*-nak páratlannak kell lennie”? – Nyilvánvaló, hogy nem. Okoskodásunk, amely egyébként hibátlan volt, azért vezetett abszurd ellentmondásra, mert kiindulásunk volt téves: az az állítás, hogy „a négyzet oldala és átlója összemérhető”. Miután pedig ezt megcáfoltuk, ez egyszersmind bizonyítás arra is, hogy a tétel ellenkezője igaz: „a négyzet oldala és átlója nem összemérhető”.

Az alapvető, bizonyítás nélkül elfogadott elv, amelynek segítségével sikerült megcáfolnunk bebizonyítandó tételünk ellenkezőjét, mindössze ez volt: „valamely szám nem lehet egyszerre páros is, meg páratlan is”. Ez a princípium pedig nem egyéb, mint a páros és páratlan szám definíciójának más megfogalmazása. – Ezen az elven kívül szükségünk volt még a bizonyításhoz a Pythagorasz-tételre; ezt az adott esetben már előzőleg bebizonyítottuk vettük.

Vegyük észre azt is, hogy a bemutatott bizonyítás nem valamely konkrét négyzeten illusztrálja az átló és az oldal összemérhetetlenségét, hanem érvényes minden négyzetre. Mert bármely négyzet átlóját és oldalát jelölheti *d* és *a* – két mennyiség, amelyet a bizonyítás során „számoknak” gondolunk. Minden négyzet esetében érvényes az átlóra és oldalra a Pythagorasz-tétel. És minden számra érvényes az, hogy vagy páros, vagy páratlan, de nem lehet egyszerre mind a kettő. – Ez a bizonyítás tehát valóban minden, azaz: végtelen sok négyzetre érvényes.

Szinte még elegánsabb ennél az, ahogy Euklidész az előbb példaként említett másik tételt bebizonyítja: a *prímszámok sorozata vég-*

telen.* Ennek a tételnek az indirekt bizonyításához ti. szinte nem is kell egyéb, mint a prímszámnak és az összetett számnak az a két definíciója, amelyre föntebb már utaltunk.** A gondolatmenet nagyjából a következő:

Főállítjuk a bebizonyítandó tételnek ellentmondó állítást: „*Előállítható a prímszámok véges sorozata*”. Erről az állításról kell a bizonyításnak kimutatnia, hogy ez téves, azaz igazában: „*n e m á l l í t h a t ó e l ő a p r í m s z á m o k v é g e s s o r o z a t a*”.

Ha csakugyan előállítható a prímszámok véges sorozata, akkor ez azt jelenti, hogy fölírhatunk – esetleg egy nagyon hosszú sorban – minden prímszámot. Szimbolizálja pl. a következő három betű – a , b és c – a prímszámok egész sorát, mintha ezeken kívül már nem is volna több prímszám.*** Szorozzuk össze ezeket mind, és legyen

$$Q = a \cdot b \cdot c$$

valamilyen összetett szám. Kérdés: Milyen szám lesz akkor

$$(Q + 1) = a \cdot b \cdot c + 1 ?$$

Nilván csak két lehetőségre gondolhatunk: vagy prímszám, vagy összetett szám. Nézzük meg külön-külön, mit jelent e két lehetőség.

1. Ha prímszám $(a \cdot b \cdot c + 1)$, akkor nem igaz az, hogy az előbbi sor a , b , c tartalmaz minden prímszámot. Akármilyen sokat is szimbolizál ez a három betű, van ezeken kívül még több prímszám is, máris találtunk egyet: $(a \cdot b \cdot c + 1)$.

2. De előfordulhat az is hogy $(a \cdot b \cdot c + 1)$ *összetett szám*. [Mielőtt

* Elemek IX. 20. Az eredeti megfogalmazás szerint: „Több prímszám van, mint a prímszámok előállítható sorozata”. Vö. *Pólya Gy.* i. m. 199.

** Euklidész a IX. 20. bizonyításában utal a VII. 36. és VII. 31. tételre is. Ez az utóbbi kettő azonban felfogható úgy is, mint közvetlen következménye az „összetett szám” definíciójának.

*** Jellemző Euklidész tömörségére, hogy az ő bizonyításában csakugyan mindössze három betű szimbolizálja a prímszámok elképzelt „teljes sorát”. Ugyanez modern írásmódban (pl. az említett *Pólya*-könyvben) így néz ki:

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots P$$

ahol P az elképzelt „legnagyobb prímszám”.

tovább vizsgálónánk ezt a lehetőséget, tegyük félre egy pillanatra Euklideszt, és kérdezzük meg, tőle függetlenül: Csakugyan előfordulhat az is, hogy összetett számot kapunk, ha 1-gyel növeljük a prímszámok valamilyen szorzatát? – Hogyne! Vegyük pl. ezt a két prímszámot: 2 és 13. Ezeknek szorzata $2 \cdot 13 = 26$ összetett szám, de ugyancsak összetett szám az 1-gyel nagyobb 27 is.] Ha tehát összetett szám $(Q+1)$, akkor ennek – az összetett szám definíciója értelmében – osztója kell legyen valamely prímszám. De ez az osztó nem lehet egyik sem azok közül a prímszámok közül, amelyeknek szorzata $Q = a \cdot b \cdot c$, mert ha ezek közül bármelyikkel osztjuk is $Q+1$ -et, maradékul 1-et kapunk. Ez azt jelenti: csak olyan prímszám lehet a $Q+1$ összetett szám osztója, amelyet az előbb *kifejeztünk*, amikor azt hittük, hogy a , b és c -vel felsoroltuk a prímszámokat mind. [Ha a előbbi illusztráló példára gondolunk, a $2 \cdot 13 + 1 = 27$ -nek nem osztója a két prímszám, 2 és 13 közül egyik sem, de osztója egy „kifejejtett prímszám”: a 3.]

Látjuk tehát: egyik esetben sem sikerült összeállítanunk a prímszámok teljes (véges) sorozatát, több prímszám van, mint amennyit bármikor is fel tudnánk sorolni: a prímszámok sora végtelen.

Feltűnhet ezen a bizonyításon az is, hogy bár azt állítjuk: több prímszám van, mint amennyit fel tudunk sorolni, és bár a bizonyítás csakugyan abból áll, hogy rámutatunk: a felsoroltakon kívül – bármilyen sokan legyenek is – *lennie kell még legalább egy prímszámnak*, de igazában mégis függőben marad: Melyik hát az a sorozaton túli prímszám, amelyikről beszélünk? Mert ez lehet: $(a \cdot b \cdot c + 1)$, de lehet egy olyan is, amelyikről csak azt tudjuk, hogy *nem a*, *nem b* és *nem c*.

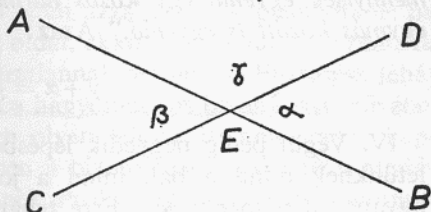
Az Elemek másik bizonyításformája az ún. *szintetikus bizonyítás*. (Görögül *szynthesisz* „összetevés”, „összeállítás” vagy „összerakás”.) Ez abból áll, hogy több alapul vett – bizonyítás nélkül igaznak tartott – állítást (princípiumot) vagy esetleg már korábban bebizonyított, igazolt tételt úgy állítunk össze, hogy magából az összeállításból, a *szintézisből* derüljön ki: a bebizonyítandó tételnek szükségszerűen igaznak kell lennie, mert ez valójában nem is egyéb, mint „következménye” ismert és elfogadott princípiumoknak vagy korábban igazolt tételeknek.

A következőkben bemutatok Euklidész nyomán egy ilyen négy lépésből álló (I–IV.) szintetikus bizonyítást. De mielőtt idézném magát a tételt és bizonyítását, érdemes lesz előrebocsátani itt két megjegyzést. Egyrészt azt, hogy az alább idézendő tétel annyira egyszerű, hogy bizonyítása tulajdonképpen fölösleges. A szemlélet közvetlenül és azonnal igazolja az állítást. Nem valószínű, hogy ezt bárki – aki egyáltalán megértette, hogy miről van szó – valaha is megpróbálta volna kétségbevonni. A bizonyítás tehát ebben az esetben – amint ez egyébként többször előfordul az Elemekben – *öncélű*. Aki ezt megszerkesztette, az nyilván csak azt akarta a bizonyítással illusztrálni: íme, ez a tétel sem egyszerű princípium, hanem *levezetett theóréma*. – Másrészt érdemes lesz felhívni a figyelmet arra is: a bemutatandó szintetikus bizonyítás első lépése máris utalás egy másik, közvetlenül előtte bebizonyított és még egyszerűbb tételre. Csak azért *nem* ezzel a másik tétellel illusztrálom a szintetikus bizonyításformát, mert ez túlságos egyszerűsége miatt már nem is instruktív.

A tétel tehát, amelynek bizonyításáról szó lesz, az Elemek I. könyvének 15. theórémája, így hangzik:

Ha két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők.”

Arról van tehát szó, hogy az AB és a CD egyenesek, amelyek metszik egymást, az α és β csúcsszögeket alkotják; α és β pedig egymás között egyenlők. (Természetesen csúcsszög a másik kettő is; γ és a vele szemben fekvő, amelyet az ábrán nem betűztünk meg. Beszélhetnénk ennek az utóbbi kettőnek az egyenlőségéről is.)



1. ábra

Euklidész, hogy a bizonyítást megkönnyítse, megbetűzi a két egyenes metszéspontját is, amely egyben a keletkező csúcsszögek közös pontja: E . A bizonyítás maga a következő négy lépésből áll.

I. Az AB és az ED egyenesekre pillantunk, és megállapítjuk: a két egymás mellett fekvő szög összege két derékszög: $\gamma + \alpha = 2R$. Éppen ezt mondja ki ti. a korábban bebizonyított I. 13 tétel:

„Ha úgy keletkeznek szögek (γ és α), hogy egy egyenest (AB) állí-

tunk egy egyenesre (ED), akkor vagy két derékszög, vagy (összegeben) két derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek.”

[Közbevetőleg azt is megjegyezhetjük, hogy ez az éppen idézett tétel csak kiegészíti az egyik princípiumot, az I. könyv 10. definícióját: „Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.”]

II. A második lépés csak abban különbözik az elsőttől, hogy most a CD és AE egyenesekre pillantunk, és megállapítjuk, hogy a β és γ szög összege is két derékszög kell legyen: $\beta + \gamma = 2R$. Ezekre is érvényes ti. az előbb idézett tétel, mert most is egy egyenesre (CD) állítottunk egy másik egyenest (AE), és most is két szög keletkezett egymás mellett: β és γ .

III. A harmadik lépés abból áll, hogy észrevevesszük: van két olyan egyenletünk, amelyeknek jobb oldalai azonosak:

$$\begin{array}{l} \gamma + \alpha = 2R \\ \text{és} \quad \beta + \gamma = 2R. \end{array}$$

Ezekre érvényes az Elemek egyik princípiuma, az 1. axióma: „Ha két mennyiség egyenlő egy közös harmadikkal, akkor a két mennyiség egymás között is egyenlő.” Azaz:

$$\gamma + \alpha = \beta + \gamma.$$

IV. Végül pedig negyedik lépésben észrevevesszük, hogy új egyenletünknek mind a bal, mind a jobb oldalán egyformán szerepel ugyanaz a γ mennyiség. Erre tehát alkalmazhatjuk az Elemek egy másik princípiumát, a 3. axiómát: „Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők lesznek.” Vonjuk ki az egyenlet mindkét oldalából γ -t; utána ez marad:

$$\alpha = \beta.$$

Éppen ezt akartuk bebizonyítani: a két csúcsszög, α és β egyenlő.

Látjuk tehát: a szintetikus bizonyítás felépítése abból áll, hogy úgy csoportosítunk, illetőleg alkalmazunk ismert és már igaznak

elfogadott állításokat (princípiumokat vagy már korábban elfogadott tételeket), hogy alkalmazásuk, azaz a velük végzett műveletek közvetlenül vezessenek el a bizonyítandó tételhez.

Ahhoz, hogy a tárgyalt tételt ne egyszerűen csak a szemlélet alapján fogadjuk el igaznak, hanem azt is belássuk, hogy ennek csakugyan szükségszerűen így kell lennie, három másik már korábban ismert tételre kellett gondolnunk. Sőt, a három közül az egyiket egymásután kétszer is alkalmaznunk kellett (lásd az I. és a II. lépést), mert csak így jutottunk közelebb a célul kitűzött bizonyításhoz. Azonkívül nem elég még az sem, hogy egyszerűen csak hivatkozzunk a három fölhasznált tételre. Elengedhetetlen a bizonyításhoz – legalább részben – az alkalmazott tételek főtebb követett sorrendje is. A III. és IV. lépés csak az I. és II. után kerülhet sorra.

Az Elemekben található bizonyítások nagy része feltehetően éppen úgy az Euklidész előtti korból származik, mint a tételek és szerkesztések többsége. Vannak esetek, amelyekben a történeti kutatás konkrétan ki is tudta mutatni a korábbi eredetet. Az egyik főtebb bemutatott bizonyítással kapcsolatban pl. már Arisztotelész elmondja, hogy ezt a négyzetre vonatkozó tételt azzal szokták bizonyítani: ha összemérhető lenne az átló és az oldal, akkor ugyanannak a számnak kellene egyszerre párosnak és páratlannak lennie. — Euklidész tehát ebben az esetben készen vette át a hagyományos bizonyítást művébe.

Vannak viszont az Elemekben olyan tételek is, amelyekkel kapcsolatban az antik források éppen a bizonyítást vagy a tétel általánosítását tulajdonítják Euklidésznek. Proklosz pl. a híres Pythagorasz-tételről mondja őszinte csodálattal, hogy ennek a bizonyítása az Elemekben (I. 47) magától Euklidésztől származnék, és mindjárt hozzáteszi azt is, hogy ugyanennek a tételnek egyik általánosítása a VI. könyben (31.) ugyancsak az Elemek szerzőjének a műve lenne. – Talán nem lesz fölösleges megemlíteni itt mindjárt azt is, hogy a modern kutatás ebben az összefüggésben némi szkepszissel fogadta Proklosz szavait. Egyrészt kétségbevonták, hogy az adott bizonyítás (I. 47) csakugyan Euklidésztől származnék, másrészt viszont – ami a tétel általánosítását illeti a VI. könyvben (31.) – a bizonyítást találták

kissé elnagyoltnak, hiányosnak – egyáltalán nem csatlakozva ezúttal Proklosz lelkesedéséhez.

Né feledkezzünk meg arról sem, hogy azok, akik a legutóbbi évtizedek során behatóbban foglalkoztak az Elemekkel, nem a „nagy matematikust” látták Euklidészben, nem is „rendszerező munkáját” emelték ki, inkább *didaktikai érdemeit* hangsúlyozták. Egyben utaltak ezek a megfigyelők arra, hogy a 13 könyvből álló Elemek színvonal a korántsem mindenütt egységes. Vannak benne egészen kiváló, elsőrangú matematikusra valló részek, de olyanok is, amelyek azt a benyomást keltik a modern olvasóban, mintha az előbbieknél jóval gyengébbek lennének. Ezt azzal magyarázták, hogy azokban a könyvekben, amelyekben Euklidész kiváló matematikus elődök munkásságára támaszkodott, ott az ő színvonal is meglepően magas lett; ahol viszont nem álltak a rendelkezésére ilyen előmunkálatok, ott nem is tudta megközelíteni a különben magas színvonalat.

Tekintsük át ezek után nagy vonásokban az Elemek *első 13 könyvének* a tartalmát. Csak ezek a könyvek származnak ugyanis kétségtelenül magától Euklidésztől. Bár van az Elemek legtöbb fennmaradt kéziratában – a késő-ókorra mennek vissza ezek mind – egy XIV., sőt még egy XV. könyv is. De tudjuk erről a kettőről, hogy ezeket csak utólag csatolták Euklidész munkájához. A XIV. könyv szerzője az alexandriai *Hypsiklész* volt az i. e. 2. században. A XV. könyv pedig még későbbi eredetű, időszámításunk 6. századából való.

Azonnal feltűnik mindenkinek, aki ezt a munkát elfogulatlanul veszi a kezébe, hogy Euklidész túlnyomórészt a *geometriával* foglalkozik; az *aritmetika* ezen belül csak egészen alárendelt szerephez jut, nem is foglalkozik vele több csak az Elemek három könyve: a VII., VIII. és IX. Pedig ez az eljárás egyáltalán nincs összhangban azzal, amit Proklosz az Elemekhez írt kommentárjában, az ún. „második előszóban” kifejt. A magyarázó ugyanis egyértelműen leszögezi: a matematika tudománya két részből áll: aritmetikából és geometriából. Sőt Proklosz nyomatékosan hangsúlyozza: a geometriát pedig csak a *második hely* illeti meg az aritmetika után. A megokolás erre a rangsorolásra kettős:

Egyrészt a számok elvontabbak (absztraktabbak) mint a geometriai idomok. A számok között van olyan *legkisebb*, amelyből minden

további szám felépíthető: az 1. (A görög aritmetika ragaszkodott az 1 oszthatatlanságának a gondolatához. Kisebb szám mint 1 *nincs*. A törteket két-két szám aránya helyettesíti.) De nem így a geometria. A geometriában *nincs legkisebb*; itt megvan a „végtelenül osztható”; ahol pedig ez föllép, ott mindjárt jelentkezik az is, amit a görögök *alogomnak* („ésszel föl nem foghatónak”) neveztek.

Bizonyos, hogy Proklosz rangsorolása csakugyan sokkal jobban megfelel a görög tudomány szellemének, mint az, hogy Euklidész első helyre teszi a geometriát, és csak mellékes szerepet biztosít az aritmetikának. Mi lehet ennek a magyarázata? – Bármilyen különös is, de be kell ismernünk: az Euklidésszel foglalkozó modern irodalom nem adott eddig általánosan elfogadott választ arra a kérdésre: miért lett a görög matematika túlnyomórészt geometria?

Aligha lehet igazuk azoknak, akik a geometria előtérbe kerülését a régi görögök *szemléletességre törekvésével* akarták magyarázni. Az euklidészi tudomány igazában nem szemléletes, sőt igyekszik tudatosan háttérbe szorítani a szemléletességet.

Én magam már korábban azzal próbáltam megokolni a geometria túlsúlyba jutását, hogy utaltam arra: minden jel arra mutat, hogy a deduktív görög matematika kibontakozásának korában jóval nehezebb probléma volt a geometria elvi megalapozása, mint az aritmetikáé. Ez már önmagában is fontosabbá tehetette a geometria Elemeinek az összállítását. — Hozzáfűzhetem ehhez most mint további érvet azt a megfigyelést, hogy a pythagoreusok fontos matematikai diszciplínája volt az *asztronómia*. Ez pedig a görögöknél sokkal inkább geometria és nem aritmetika. Ez is hozzájárulhatott ahhoz, hogy elvben ugyan az aritmetikát tartották a matematika első számú részének, de mégis fontosabbnak érezték az Elemekben a geometria kidolgozását.

Az I. könyv a 13 közül az egyik legérdekesebb; nemcsak azért, mert – ami a fölépítést illeti – egyike a legjobban kidolgozottaknak. Szinte káprázik belé a szemünk, amikor észrevesszük: ennek a könyvnek mind a 48 tétele szigorú sorrendben követi egymást, mint mondani szokták: minden tétel vaskövetkezetességgel épül a megelőzőekre, míg el nem éri a tárgyalás az előre kitűzött célt: a 47.-ben a Pythagorasz-

tételt, a 48.-ban pedig ugyanennek a megfordítását: „ha a háromszög egyik oldalára emelt négyzet egyenlő a másik két oldalra emelt négyzetek összegével, akkor *derékszögű* háromszöggel van dolgunk.”

Érdekes ez a könyv azért is, mert itt találjuk, rögtön az elején, a legtöbb matematikai princípiumot. Euklidész három csoportba osztva sorolja föl ezeket: 1. *definíciók*, 2. *posztulátumok* és 3. *axiómák*.

Ami a definíciókat illeti, a mai matematikus nem ért egyet azzal, hogy Euklidész definiál olyan fogalmakat is, mint *pont*, *vonal*, *egyenes* stb. Manapság az ilyen alapvető fogalmakat definíció nélkül használjuk. Sőt, hajlandók lennénk logikai szempontból elhibázottnak tartani az ilyesmire irányuló definíciós kísérletet. Következik ez egyszerűen abból, hogy a mi elgondolásunk másban látja a definíció szerepét, mint amiben ezt Euklidész kortársai látták.

Annak a görög dialektikának, amely az eleai filozófiából bontakozott ki, előírása volt, hogy a vita résztvevőinek mindenekelőtt abban kellett megegyezniük, *amiről* a vita folyt. Olyan erre vonatkozó állításokat kellett keresniük, amelyeket, jóllehet egymással szemben álló résztvevők a vitában, mégis egyformán magukévá tudtak tenni. Ilyen szerepet szánt Euklidész a geometria tárgyalásában a definícióknak.

Vegyük észre azt is, hogy vannak Euklidész definíciói között olyanok, amelyeket később a tételek tárgyalása során soha nem használ. Beszél pl. a 22. definíció *rombuszról*, *romboidról* és *trapézről* anélkül, hogy a tételek később akár csak egyetlen egyszer is ilyen néven említenének valamely paralelogrammát. Logikai szempontból, persze, hiba az ilyen *fölösleges definíció*. De annál tanulságosabb történeti szempontból. Bizonyíték ez egyrészt arra, hogy a korábbi, az Euklidész előtti görög geometria ilyen fogalmakat is használt. Másrészt pedig némi fény derül ebből arra is: hogyan dolgozhatott Euklidész. Nyilván kitette maga elé a korábbi Elemeket – nem tudjuk melyiket, *Hippokratész*, *León* vagy *Theudiosz* munkáját – és amit ezekben használhatónak talált, azt átvette saját összeállításába. A *rombusz*, *romboid* és *trapéz* nevek alighanem ilyen korábbi matematikai munkákból kerültek át hozzá – figyelmetlenségből.

A *posztulátumok* a tárgyalásra kerülő geometriai idomok megszerkeszthetőségét biztosítják, és így a matematikai *egzisztencia* problémájához kapcsolódnak. Megszerkeszthetők a geometriai idomok

azért, mert mint az első két posztulátum kimondja: bármely két pont összeköthető egyenes vonallal, illetőleg bármely adott egyenes tetszés szerint meghosszabbítható. A harmadik posztulátum a tetszőleges sugarú kör megszerkeszthetőségét mondja ki. – Ezek szerint az első három posztulátum lehetővé teszi a vonalzó és a körző használatát. (Csak ez a kettő a geometria klasszikus, megengedett segédeszköze.)

A posztulátum megjelölés latin fordítása a megfelelő görög *aitéma* szakkifejezésnek. A dialektikából, illetőleg az eleai filozófiából származik ez a fajta princípium is. Szó volt már arról, hogy a dialektikus vita résztvevőinek előre meg kellett egyezniük a közösen elfogadott kiinduló tételekben. De előfordulhatott az is, hogy csak az egyik résztvevő *kérte* („követelte”, „posztulálta”) egy-egy elvnek az elfogadását, de nem volt bizonyos az, hogy hozzájárul-e ehhez a másik is. Ilyen *egyoldalúan* követelt kiindulási elv volt a posztulátum. Csakugyan az az első három, amelyre épp az imént utaltunk, a *mozgás* megengedését kívánja. (*Mozgás nélkül* sem egyenes nem húzható, sem kör nem rajzolható.) Az eleai filozófia viszont tagadta a mozgás lehetőségét, és ennek megfelelően a matematikusok igyekeztek kiiktatni a mozgást a geometriából. Minthogy viszont mozgás nélkül nincs geometriai szerkesztés, posztulálni kellett legalább a vonalzó és körző használatának a lehetőségét.

Külön föl kell még hívnunk a figyelmet a híres 5. posztulátumra. (A 4. csak előkészítése ennek az 5.-nek.) Egyesek úgy gondolják, hogy ez a híres *párhuzamossági posztulátum* talán magától Euklidésztől származik. Mint ismeretes, Euklidész után több mint 2000 éven át többször próbát tettek ezzel: hátha nem is posztulátum ez, hanem tétel, amit be is lehetne bizonyítani. Az egyik legelső, aki a vitát eldöntötte, *Bolyai János* volt; ő ti. enélkül a posztulátum nélkül építette föl ún. abszolút geometriáját. Ezzel igaza lett Euklidésznek is – szemben a későbbi, de Bolyai *előtti* kísérletezőkkel: a kérdéses állítás valóban eldönthetetlen posztulátum, és nem tétel.*

* Érdemes lesz itt megemlíteni: ez a párhuzamossági posztulátum több régi Euklidész-kiadásban úgy szerepel mint „*II. axióma*”. Ezért lett *Bolyai János* munkájának címe: „*Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.*”

A princípiumok harmadik csoportja: az *axiómák*. Több Arisztotelész-idézet igazolhatja, hogy korábban csakugyan ezt a megjelölést használták ezekre a bizonyítás nélkül elfogadott elvekre: *axiómata*. A másik név, amelyet ezekre Euklidész szövege használ (*koinai ennoiai*), feltehetően későbbi eredetű, és azzal a felfogással függ össze, amelyet ezekről az elvekről Arisztotelész nyomán vallottak. Arisztotelész ugyanis meg volt győződve róla – amint ezt Proklosz szövege is hangsúlyozza – hogy az axiómák olyan állítások, amelyeknek igaz voltát „józanészű ember nem vonhatja kétségbe”. Magukévá tették ezt a nézetet a későbbi görög matematikusok is.

Több jel arra mutat viszont, hogy korábban – az Euklidész, sőt az Arisztotelész *előtti* időkben – sokan úgy gondolták: *a priori nem dönthető el, igazak-e vagy hamisak az axiómák*. Láttuk már, hogy ezt vallotta Bolyai János a másik princípiumról, a párhuzamossági posztulátumról. És hogy csakugyan így gondolkodtak már az ókorban a princípiumoknak erről a másik csoportjáról is, azt mindjárt illusztrálhatjuk az egyik euklidészi axiómával: „*az egész nagyobb, mint a rész*”. Mai megítélésünk szerint ez az állítás csak az ún. *véges halmazokra* érvényes. Hiszen *végtelen halmaz* éppen az, amelynek *van az egészsel ekvivalens rész-halmaza*, amelyre tehát nem érvényes az idézett axióma. De alighanem így gondolkozott erről a kérdésről már az eleai Zénón is, mert különben nem állíthatta volna föl paradoxonát: „*A fele idő egyenlő a duplájával*.”

A II. könyv jóval rövidebb, mint a megelőző, mindössze 14 tételből áll. Figyelemre méltó ez a könyv történeti szempontból különösen azért, mert ennek a tételeiben ismerte föl több modern kutató az ún. *geometrikus algebrát*. Óvatos megfogalmazásban ez azt jelenti: ezeket a tételeket mi manapság algebrai formában tárgyaljuk. Más kérdés az, hogy vajon csakugyan algebrai problémák adtak-e alkalmat már az ókorban ezeknek a kidolgozására. – Bár a magam részéről *tévesnek* tartom, meg kell itt röviden említenem azt az elterjedt történeti felfogást, amely szerint az Euklidész művében „geometrikus algebra” elnevezett tételek Babilónban eredetileg *tiszta algebra* lettek volna; ezt vették volna át a görögök, már Euklidész előtt, *geometrizált formában*.

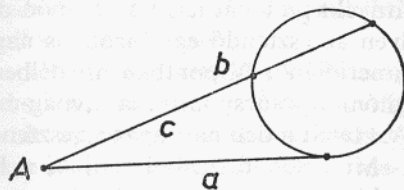
Érdekes, hogy Proklosz egy alkalommal elmondja: mire használták

az ókoriak pl. a II. 10 tételt. (Ezt ti. magunktól aligha találtuk volna ki.) Rájöttek arra – már a Platón *előtti* korban – hogyan szerkeszthetők olyan négyzetek, amelyeknél az *átló* és az *oldal* aránya „megközelíti az összemérhetőséget”. Ha pl. az oldal 5 egység, akkor az átló megközelítően: 7; ha az oldal 12, akkor az átló kb. 17 stb. Mi ezt a fölismerést ma így fogalmazzuk meg: az adott szabály szerint előállított törtek: $7/5$, $17/12$, $41/29$, ... d/a egyre inkább megközelítik a $\sqrt{2}$ értékét. – Ezt a fölismerést igazolták az ókoriak a II. 10 tétellel.

Az Elemek III. és IV. könyve, ha lehet, még szorosabban kapcsolódik egymáshoz, mint a megelőző két könyv. A III. 37, a IV. 16 tételből áll. Az előbbi a körnek néhány alapvető tulajdonságát foglalja tételekbe, a másik pedig a körbe (és a kör köré) írható szabályos sokszögeket – *háromszög*, *négyszög*, *ötszög*, *hatszög* és a körbe írt *tizenötszöget* – tárgyalja. A „kör”, „középpontját”, „átmérőjét” és a „félkör” már bemutatta egy-egy definíció az I. könyv elején, minthogy szükség volt ezekre a fogalmakra már az I. és II. könyv egyik-másik tételében. A III. könyv további, körre vonatkozó 11 definícióval egészíti ki a korábbiakat.

Úgy látszik, a körrel kapcsolatos tételek kidolgozására – azaz gyakorlatilag mindarra, amit a III. és IV. könyv tárgyal – a görög *alkalmazott matematika* egyik ágában, az *asztronómiában* került sor. Kimutatható ez több Euklidész-nél tárgyalt tételről.

Vegyük pl. elsőnek a III. 36. tételt. Ez ti. azt mondja ki – az itt bemutatott 2. ábrán illusztrálva: ha valamely körhöz egy rajta kívüleső A pontból érintőt (lásd az a szakaszt) és szelőt (b) húzunk, akkor az érintő (a) középarányos lesz az egész szelő (b) és a szelőnek a körön kívüleső darabja (c) között. Tehát:



2. ábra

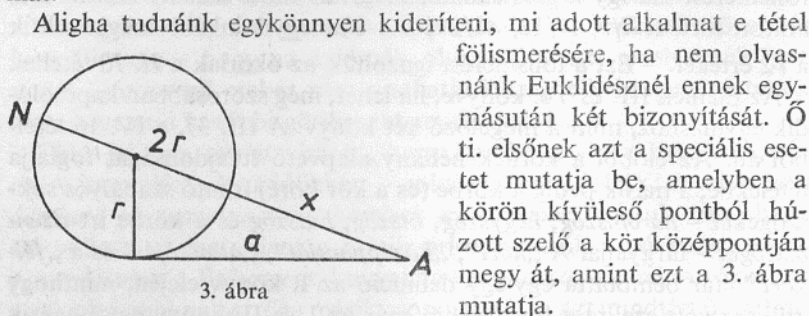
$$b:a = a:c.$$

Igaz, a III. 36. tétel ezt az állítást nem mint arányt, hanem mint egy

téglalapnak és egy négyzetnek az egyenlőségét fogalmazza meg:

$$b \cdot c = a^2.$$

De erre a különös megfogalmazásra csak azért kényszerült az Elemek szerzője, mert az V. könyv előtt nem akarta használni az *arány* fogalmát.



Elég egy pillantást vetnünk erre az ábrára, hogy fölismerjük: ez nem egyéb, mint az a „szimbolikus világkép”, amelyet a hellenisztikus asztronómia és matematikai földrajz olyan gyakran használt az ún. gnómónnal kapcsolatban: r a vízszintes síkban függőlegesen fölállított gnómón, a napóra mutatója; az a szakasz (meghosszabbítva) a dél-északi irányt mutatja, erre a vonalra esik mindig a gnómón déli árnyéka; a tehát lehet a gnómón déli árnyéka valamely megadott helyen az esztendő egy bizonyos napján; a kör maga szimbolikusan a „meridián”, N pontban áll délben a nap; a Föld szimbolikusan a gnómón csúcspontja: a „világ-meridián” körének a középpontja. NA tehát a déli napsugár az esztendő valamely napján.

Mint sok forrásból tudjuk, a hellenisztikus tudomány gondosan számon tartotta városról-városra a gnómónnak és *napéjgyenlőségi déli árnyékának* az arányát. Mert ebből az arányból kiszámítható volt a kérdéses hely földrajzi szélessége, azaz fokokban mért távolsága az Egyenlítőtől. (Csak példaként említem meg, hogy a hellenisztikus irodalom szerint ez az arány Athénben 4:3, Rhodoszban 7:5, Alexandriában 5:3.)

A mérések tehát azt mutatták, hogy városról-városra más a gnómónnak és napéjgyenlőségi déli árnyékának az aránya. De ha valaki erre

a szimbolikus világképre nézett, azonnal megállapíthatta (az Elemek III. 36. tétel értelmében): a déli árnyék (a) – nemcsak napéjegyenlőségkor, hanem bármikor – közeparányos az egész szimbolikus napsugár ($b = NA$) és ennek a meridián körön kívüleső darabja között. (Nota bene: ezt az utóbbi szakaszt megkapták úgy, hogy az egész szimbolikus napsugárból (NA) levonták a gnómón kétszeresét.)

A másik tétel, amelynek az asztronómiában betöltött szerepéhez nem fér kétség, a IV. könyvben az utolsó, a 16., a körbe írt szabályos tizenötszög szerkesztését tárgyalja. A kommentátor *Proklosz* beszél arról, hogy ez azért került bele az Elemekbe, mert nagy hasznát vették a régi asztronómusok: a szabályos tizenötszög oldalával mérték a két pólusnak, az ekliptika és az egyenlítő pólusának egymástól való távolságát. Csakugyan, a szabályos tizenötszög egyik oldalához tartozó középponti szög: 24° . Úgy látszik, ez volt a legrégebb kísérlet az ekliptika ferdeségének a megmérésére. Csak mellékesen említem meg ebben az összefüggésben, hogy a mérést – amint ez kétségtelenül rekonstruálható – ugyanazon a *szimbolikus asztronómiai gnómón-világképen* végezték, amelyre fentebb, a III. 36. tárgyalása során már utaltam. Mai mérés szerint egyébként az ekliptika ferdesége hozzávetőleg: $23^\circ 27'$. Tudjuk azt is (a nagy ókori csillagásznak *Klaudiosz Ptolemaiosznak* a művéből), hogy nem sokkal Euklidész után már *Eratoszthenész* pontosabban megmérte ugyanezt a hajlásszöget, némileg korrigálva a régi mérési eredményt (24°), majd még tovább tökéletesítette ugyanezt a mérést a nikaiai *Hipparkhosz*.

Nem lesz fölösleges utalni ezzel a két utóbbi tétellel kapcsolatban – III. 36 és IV. 16 – arra is, hogy mind a kettő régi pythagoreus eredetű. Azonkívül: feltétlenül szükségük volt az ókori matematikusoknak a két tétel felépítéséhez olyan tételekre is, amelyeket a modern irodalom „geometrikus algebra” néven tart számon. Felmerül itt ti. a gyanú: Vajon nem a korai, Euklidész előtti görög asztronómiában kell-e keresnünk az ún. „geometrikus algebra” eredetét?

Egy ókorból származó iskolai följegyzés, egy ún. *szkholion*, amelynek szerzőjét nem ismerjük, azt állítja: sokan úgy tudják, hogy Euklidész az Elemek V. könyvében Platón fiatalabb kortársának, a híres matematikusnak és csillagásznak, Eudoxosznak az arányelméletét foglalta össze. (A *szkholionok* eredetileg margóra írt rövid följegyzés-

zések voltak, amelyeket egy-egy az iskolában tanított szerzőnek a művéhez fűztek. Később – még az ókorban – fölismerve ezeknek az iskolai följegyzéseknek hasznos voltát, összegyűjtve külön ki is adták közülök egyiket-másikat. Ilyen szkholionból származik tehát az V. könyvre vonatkozó értesülésünk.)

Csakugyan, ha elolvassuk ez előtt a könyv előtt azt a mesterien megfogalmazott 5. definíciót, amely azt határozza meg, hogy *mi az aránypár*, szívesen hitelt adunk az ismeretlen ókori forrásnak. Mert ez a definíció valóban csak olyan nagy matematikustól származhat, aki rájött arra, hogyan lehet új alapokra helyezni az egész korábbi arányelméletet az ún. *összemérhetetlen* (= *inkommenzurábilis*) mennyiségek felfedezése után. Ebből állt Eudoxosz matematikai érdeme. Bizonyos ugyanis, hogy volt a görög matematikának arányelmélete már Eudoxosz előtt. Sőt, meg is maradt számunkra sok minden ebből a régi tanításból – amint erre majd mindjárt kitérünk. Előbb azonban arra hívjuk itt még fel a figyelmet, hogy Euklidész az Elemek első négy könyvébe egyáltalán semmit sem vett be ebből a korábbi, Eudoxosz előtti elméletből. Úgy látszik, ő az arányok tárgyalását mindjárt azon a színvonalon akarta elkezdni, amely az ő idejében a legkorszerűbb volt. Ez történt az V. könyvben.

Dehát hogy van az, hogy Euklidész csak az V. könyvben jut el az arányokhoz? Korábban ez a probléma föl se merült volna nála? – A jelek arra mutatnak, hogy volt az ókoriaknak egy szellemes módszerük arra, hogyan kerüljék meg az arány problémáját. Mielőtt az V. könyvet vennénk a kezünkbe, mutassunk be erre a fent már említett III. 36. tételen kívül még két példát a korábbi könyvekből.

Az Elemek I. könyvének 44. tétele egy olyan feladatnak a megoldását tárgyalja, amely némileg egyszerűsített formában így hangzik: legyen adva egy téglalap, amelynek oldalai b és c ; ezt át kell alakítanunk egy olyan másik vele egyenlő területű téglalappá, amelynek csak a oldalát ismerjük. A feladat tehát képletben:

$$ax = bc.$$

Ugyanez aránypár formájában így írható föl:

$$a:b = c:x.$$

Keressük az aránypár negyedik tagját, x -t. De megoldható ez a feladat – amint ezt az I. 44. tétel mutatja – arányok említése nélkül, pusztán felületek egymás mellé helyezésével is.

Hasonló ehhez annak a feladatnak a megoldása, amelyet – ugyan-csak némileg egyszerűsített formában – a II. 14. tétel szerint így fogalmazhatnánk meg: Hogyan alakítunk át adott téglalapot vele egyenlő területű négyzetté? Ha az adott téglalap két oldala a és b , akkor ez a feladat aránypár formájában így írható föl:

$$a : x = x : b.$$

Keressük a téglalap két oldalának középárányosát.

Jegyezzük meg ezzel a feladattal kapcsolatban azt is: az antik szaknyelv a téglalaphoz négyzetté való átalakítását *tetragónizmosz*-nak, „négyzetesítésnek” nevezte. Arisztotelész pedig több ízben kifejti: a *tetragónizmosz* azért megoldható feladat, mert két mennyiség között mindig van középárányos. Világosan kiderül ebből a megjegyzésből, hogy az ókoriak tisztában voltak vele: a téglalaphoz négyzetté való átalakítása tulajdonképpen a középárányos problémájának a megoldása. – De ugyanígy arányossági problémát tárgyalt a korábban említett másik két tétel is: az I. 44. és a III. 36.

Kérdés mármost: Miért lett az ókoriaknál az eredeti arány-problémából az egyenlő felületek problémája? – A történeti kutatás erre azt a plauzibilis magyarázatot találta: feltehetően azért, mert fölismervén az összemérhetetlen (inkommenzurábilis) mennyiségeket, észrevették azt is, hogy ezzel megalapozatlanná lett egész korábbi arányelméletük. [Gondoljunk pl. a következő esetre. Amikor a középárányost keressük két olyan szám között, amelyeknek szorzata *nem négyzetszám*, akkor tulajdonképpen egy *irracionális számot* keresünk. De kiküszöbölhetjük mind az „*irracionális szám*”, mind pedig az „*arány*” fogalmát, ha ugyanezt a feladatot úgy fogjuk föl, mint valamely téglalap átalakítását vele egyenlő területű négyzetté.]

A történések rekonstrukciója szerint tehát a görög matematika régi arányelmélete – az, amelyet valamikor az 5. század folyamán a pythagoreusok dolgoztak ki, és amely még csak a *számokat* vette figyelembe – válságba jutott akkor, amikor rájöttek az összemérhetetlen mennyiségek létezésére. Ezen a válságon kezdetben úgy próbáltak

úrrá lenni, hogy figyelmen kívül hagyva az *arány* problémáját, a felmerült feladatokat úgy fogalmazták meg, ahogy azt az I. 44., II. 14. és III. 36. tételek példáján láttuk. Ez azonban, úgy látszik, csak átmeneti megoldás volt annak a görög matematikának a kibontakozásában, amelynek záróköve Euklidész Elemei. Az új arányelméletet Eudoxosz teremtette meg, ez pedig az V. könyv 5. definíciójából indult ki.

Csakugyan, elég jól ismerjük azt a régebbi elméletet is, amely megelőzte az Eudoxoszt. Ez még az aránynak abból a meghatározásából indult ki, amelyet a VII. könyv 21. definíciójában olvasunk.

A különös éppen az, hogy Euklidész fölvette művébe ezt a korábbi, pusztán csak a számokra érvényes arányelméletet is, holott ez Eudoxossal már túlhaladottá lett. Hiszen Eudoxosz általánosabb elmélete értelem szerint magába foglalja ezt is.

De éppen azért, mert megvan Euklidész művében egy-egy ilyen tételnek mind a korábbi, mind pedig a későbbi (eudoxoszi) megfogalmazása, érdemes ezeket összehasonlítani egymás között. Aki pl. elolvassa a VII. könyv 11. tételét, és rögtön utána az V. 19.-et, előbb meglepődve tapasztalja, hogy a kettő csaknem szórul-szóra azonos. De ha jobban megnézzük, észrevesszük, hogy a VII. könyv *theorémája* még csak *számokról* beszél, az V. könyvben pedig majdnem ugyanaz *menyiségekről* állapítja meg majdnem „ugyanazt”. – De ugyanígy szorosan összetartoznak a VII. 12. és párja az V. 12.; vagy a VII. 13. és a neki megfelelő V. 16. tétel, és így tovább még több más.

Persze mindezekben az esetekben lényegesen különböznek egymástól a „párhuzamos tételek” bizonyításai. Azokat a bizonyításokat, amelyeket a kérdéses tételek *számokra* érvényes esetében alkalmaztak, nem lehetett mechanikusan „ráhúzni” a tétel általánosabb formájára. Az a körülmény tehát, hogy a két-két tétel megfogalmazása majdnem szórul-szóra azonos, igazában csalóka látszat.

A VI. könyv annak az eudoxoszi arányelméletnek az alkalmazása a planimetriára, amelyet előljáróban az V. könyv alapozott meg. Az arány a geometriában mindenekelőtt az idomok hasonlóságával kapcsolatban jut szerephez; ezért kezdődik a VI. könyv egy olyan definícióval, amely éppen az *egyenesvonalú idomok hasonlóságát* határozza meg.

Érdeemes lesz azonban itt legalább egy példán azt is bemutatni, milyen helyet foglal el ez a VI. könyv a görög geometria történeti kibontakozásában. Vegyük példának ebből a könyvből a 13. tételt, amely azt tárgyalja, hogyan szerkesztjük meg két adott szakasz középarányosát.

Elég egy futó pillantást vetni arra az ábrára, amelyet Euklidész e tételhez csatolt, hogy észrevegyük: ez valahogy nagyon ismerős. Persze, *majdnem* ugyanezt az ábrát látjuk a II. könyv 14. tétele mellett is. Voltaképpen ott is két mennyiség középarányosának a megszerkesztéséről volt szó, csak hogy ott a feladat – amint erre az imént utaltunk már – még olyan megfogalmazásban került elénk: hogyan alakítunk át valamely adott téglalapot vele egyenlő területű négyzetté. Minthogy azonban lényegében ez a feladat mégiscsak a középarányost szerkeszti meg, használhatta Euklidész ebben az esetben is *majdnem* ugyanazt az ábrát, mint amelyik később a VI. 13. tételnél került sorra. Mert csakugyan, gondoljunk arra, hogyan szerkesztjük meg az iskolában még ma is két adott szakasz középarányosát.

Előbb összeadjuk a két szakaszt – amelyek közül az egyik feltétlenül nagyobb, mint a másik* – egy egyenes mentén, majd megfelezzük a két szakasz összegét, és a felező pontból mint középpontból a két szakasz összegének felével félkört rajzolunk. Aztán a félkör átmérőjére – abban a pontban, ahol a két összeadott szakasz érintkezik – *merőleget* emelünk a kör kerületéig. Majd kijelentjük, hogy ez a most emelt *merőleges* a keresett *középarányos*. – Megokoljuk pedig ezt az állításunkat a következőképpen.

Összekötjük a megszerkesztett *merőleges* végpontját a kör kerületén a két adott szakasz egy-egy végpontjával ugyancsak a kör kerületén. Ily módon kapunk (az ismert Thalész-tétel értelmében) egy félkörön nyugvó derékszögű háromszöget. Ezt a derékszögű háromszöget bontja megszerkesztett *merőlegesünk* két kisebb egymás között hasonló derékszögű háromszögre. Maga a *merőleges* – ebben az utóbbi két hasonló derékszögű háromszögben – kettős szerephez jut: egyrészt rövidebb befogója a nagyobb, másrészt hosszabb befogója a kisebb derékszögű háromszögnek. Ennek a kettős szerepnek a következménye az, hogy a szóban forgó *merőleges* középarányos

* Ha ti. a két szakasz egyenlő, akkor „középarányosuk” is egyenlő velük.

a két adott szakasz között. (Minthogy ezek a szakaszok ugyancsak befogói a két hasonló derékszögű háromszögnek.)

Lényegében ezzel a gondolatmenettel okolja meg Euklidész VI. 13. tétele a középarányos szerkesztését. De *egészen más* a szerkesztés megokolása az előbbivel párhuzamos II. 14. tétel esetében. – Mert jól vigyázzunk: az ábra ugyan *majdnem* ugyanaz a két esetben, *de távolról sem ugyanaz a két tétel gondolatmenete*. Figyeljük csak meg a következőket.

Mind a két esetben előbb összeadjuk a két szakaszt – amelyekhez ti. a középarányost szerkesztjük – majd megfelezzük a két szakasz összegét, és a felezőpontból félkört rajzolunk a két szakasz összegének a felével mint sugárral. De *más* a célunk ezzel a félkörrel a VI. 13., és ismét *más* a II. 14. tétel esetében.

A VI. 13. tételhez azért van szükségünk a félkörre, hogy megkapjuk (a Thalész-tétel értelmében) azt a félkörtön nyugvó derékszögű háromszöget, amelyet a kérdéses *merőleges* két kisebb hasonló derékszögű háromszögre bont majd. – A II. 14. tétel szerkesztéséhez viszont azért kell a „*két szakasz összegének a fele*”, mert ez lesz az *átfogója egy derékszögű háromszögnek*. Erre az átfogóra emelünk – gondolatban – egy négyzetet, hogy aztán kivonjuk az *átfogó négyzetéből* az „*egyik befogó négyzetét*”. A Pythagorasz-tétel szerint ennek a kivonásnak az eredménye a „*másik befogó négyzete*” lesz. – Az imént említett „*egyik befogó*” – amelynek négyzetét kivonjuk az átfogó négyzetéből – a II. 14. tétel szerkesztése szerint, a két adott szakasz érintkezési pontjától az összegük felezési pontjáig terjedő szakasz-rész lesz. A „*másik befogó*” szerepe pedig az érintkezési pontba emelt *merőlegesnek* jut. – Már ebből is látható, milyen szellemesen kapcsolja össze a II. 14. tétel bizonyítása egyfelől a Pythagorasz-tételt, másfelől pedig azt a II. 5.-öt,* amelynek lényege abban foglalható össze: ha kivonunk egy nagyobb négyzetből egy kisebb négyzetet, olyan idomot kapunk (egy „*gnómón*” – a szónak abban az értelmében, ahogy ezt az Elemek II. könyve 2. definíciója használja**), amely könnyen átalakítható téglalappá.

* A II. 5. tételt az ún. „geometrikus algebrához” szokták sorolni.

** Vigyázat! Nem cserélendő össze az Elemekben használt „*gnómón*” fogalom a napóra mutatójával, amelyről már szó volt ebben az Előszóban.

Az, aki először jött rá a II. 14. szerkesztésére, a következőképpen fordította visszajára az imént összefoglalt fölismerést. A téglalap két oldala *összegének a feléből* konstruált egy négyzetet. (Ez lett az átfogóra emelt négyzet.) A téglalap két oldala *különbségének a feléből* konstruált egy kisebb négyzetet. (Ez lett az egyik befogóra emelt négyzet.) Amikor pedig kivonta a kisebb négyzetet a nagyobbikból, arra hivatkozott, hogy egyfelől a két négyzet különbsége maga a téglalap, másfelől pedig – a Pythagorasz-tétel értelmében – a különbség a másik befogóra (azaz: arra a bizonyos *merőlegesre*) emelt négyzet. Így lehetett megoldani – az *arány* fogalmának használata nélkül – a téglalap átalakítását vele egyenlő területű négyzetté. A megoldás, persze, mind a két esetben ugyanaz a szakasz volt: az a *merőleges*, amelyet a két adott szakasz összeadásakor keletkező érintkezési pontba emelünk a kör kerületéig.

Még jobban elmélyítheti a középarányosság problémájának történeti megértését – illetőleg konkrétan: az Elemek VI. 13. tétel magyarázatát – ha figyelembe vesszünk néhány olyan kétségtelenül régebbi eredetű tételt, amelyet az Elemek VIII. könyve őrzött meg számunkra. Gondolok itt főként a VIII. könyv olyan tételeire, mint a 11., 12., 18. és 20.

A két első ezek közül csak annyit állapít meg, hogy két négyzetszám között van *egy*, két köbszám között pedig van *két* középarányos. [Illusztrálhatja az előbbi állítást a 4 és a 9 (2^2 és 3^2), amelyek között 6 a középarányos: $4:6 = 6:9$; az utóbbit pedig a 8 és a 27 (2^3 és 3^3), amelyek között 12 és 18 a középarányos: $8:12 = 12:18 = 18:27$.]

Önmagában ez a két tétel még nem túl jelentős. De egyszerre érdekesebb lesz mind a kettő, ha összehasonlítjuk őket a VIII. könyv 18. és 20. tételével. Ez az utóbbi kettő ugyanis azt mondja ki – használva a régi pythagoreus terminológiát: két „hasonló síkszám” között mindig van *egy* középarányos (VIII. 18.), illetőleg: ha van két szám között *egy* középarányos, akkor a két szám „hasonló síkszám” (VIII. 20.). – „Síkszám” a VII. könyv elején megadott terminológia szerint (lásd ezekhez a VII. könyv 16. és 21. definícióját) bármely szám, amelyet felbontottunk két tényező szorzatára. „Hasonló síkszám” pedig az olyan kettő, amelyet ábrázolhatunk mint két egymáshoz hasonló téglalapot; ilyen pl. a 6 és

24, mert $6 = 2 \cdot 3$ illetőleg $24 = 4 \cdot 6$, és $2:3 = 4:6$; vagy 6 és 54, mert $6 = 2 \cdot 3$ illetőleg $54 = 6 \cdot 9$. Ezért 6 és 24 között középarányos a 12, mert $6:12 = 12:24$; vagy 6 és 54 között középarányos a 18, mert $6:18 = 18:54$.

Ez a négy tétel együttesen azt látszik igazolni, hogy volt a görög aritmetika fejlődésében egy korszak, amikor az kötötte le a matematikusok figyelmét: mikor *van*, és mikor *nincs* középarányos két szám között. – Egy magasabb fejlődési fok volt ennél az, amikor rájöttek: ha vonalszakaszokkal ábrázolnak két számot, akkor ezekhez *mindig* megszerkeszthető a középarányos, csak hogy ez az utóbbi nem mindig egész- vagy törtszám. (Tehát a görög aritmetika szerint: néha *nem* szám!) Ezen a fokon azonban inkább még csak megkerülték és nem oldották meg a középarányos problémáját. Ezt a fokot mutatja a II. 14. tétel. – Egy még magasabb fejlődési fok – az eudoxoszi – az volt, amikor a problémát már úgy oldották meg, ahogy azt a VI. 13. tétel tanítja.

Párhuzamba állítottuk tehát a II. 14. és a VI. 13. tételeket. De ugyanígy szoros összefüggés mutatható ki egyfelől a II. 5. és 6., másfelől a VI. 28. és 29. tételek között. Ezeket az utóbbiakat – mind a II., mind a VI. könyvből – az ókori hagyomány úgy tartotta számon mint a „pythagoreus Múza” ajándékait.

A VI. könyvvel átmenetileg félbeszakad a geometria tárgyalása. Anélkül, hogy az eddig előadottakhoz szervesen kapcsolódnék, közbeékelődik a 3 aritmetikai könyv: VII–VIII–IX. Kitűnik ennek a háromnak szorosabb egysége már abból is, hogy Euklidész a VII. könyv elején sorolja föl azt a 23 definíciót, amelyre az aritmetikában szükség lesz. A VIII. és IX. könyv nem vezet be újabb definíciókat. A páros és páratlan elméletére pl. csak a IX. végén függelékszerűen kerül ugyan sor, de ennek a definíciói is már a VII. könyv elején olvashatók.

Szó volt már róla, hogy a VII. és VIII. könyv több tétele korábbi eredetű; nemcsak az Eudoxosz előtti korból származnak ezek, hanem feltehetően megelőzik azokat a geometriai tételeket is, amelyek, mint mondtunk: „megkerülük az összemérhetetlenség problémáját.”

Csakugyan, a történészek az Euklidésznél található egész aritmetikát pythagoreus eredetűnek tartják, azaz: nagyjából a Platón előtti korból származtatják. Hozzátehetjük, hogy Euklidész, úgy látszik,

nem is vette föl művébe az egész akkor ismert pythagoreus aritmetikát. Beszél pl. a kétségtelenül pythagoreus „tökéletes számokról” (olyan számok ezek, amelyek egyenlők saját osztóik összegével pl. $6 = 1 + 2 + 3$, vagy $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$), de nem említi az ugyancsak pythagoreus „barátságos számokat” (ezekre az jellemző, hogy az egyik osztóinak összege a másik szám, és megfordítva; pl. 220 és 284, mert

$$\begin{aligned} 220 \text{ osztói: } 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 &= 284, \text{ és} \\ 284 \text{ osztói: } 1 + 2 + 4 + 71 + 142 &= 220). \end{aligned}$$

De ugyanígy nincs szó Euklidésznél a pythagoreus sokszög-számokról, a különféle számsorokról és összegezésükről; nem olvassuk nála, hogy 1-től fölfelé a páratlan számok összege mindig négyzetszám, és hogy ezért két egymást követő négyzetszám különbsége mindig páratlan szám; stb., kimaradt művéből sok más érdekes aritmetikai megfigyelése a pythagoreusoknak, ami mind már régen megvolt.

Általános jellemzésül elmondhatjuk az euklidészi aritmetikáról, hogy ez csak az egész számokkal foglalkozik; az 1-et mint minden szám alkotó elemét *nem* tekinti számnak; ismeri a prímszám-összetett szám, páros-páratlan, négyzet- és köbszám, osztó, közös osztó, többszörös, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös stb. fogalmát.

A IX. könyv végén 16 tétel (21–36.) – amelyeknek archaikus jellege szembeötlő – a páros és páratlan elmélete. Érdekesesek ezek nemcsak azért, mert *egyrészt* a „tökéletes számokról” szóló tételben (IX. 36.), *másrészt* a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenségének a kimutatásában (X. könyv 27. függelék) kulminálnak, hanem azért is, mert a szerencsés véletlen lehetővé tette datálásukat: *i. e. 500 körül*. (A szicíliai kómikus költő, *Epikharmosz* egyik töredéke félreérthetetlenül céloz ezekre a tételekre.) Jelenleg ez – a páros és páratlan elmélete – a görög matematika legrégibb ismert tételesorozata.]

Az *Elemek* 13 könyve között legterjedelmesebb a X. könyv; nem kevesebb mint 115 tételből és 4 előrebecsátott definícióból áll. De ez egyszerűs mind a legkevésbé olvasott és a *legnehezebb* könyv is. Így nyilatkozott erről már a 13. században az itáliai *Fibonacci* (Leonardo Pisano, 1180–1250), a 16. század végén a németalföldi *Simon Stevens* (1548–1620), és azóta még sokan mások, akik egyáltalán megkísérelték, hogy elmélyedjenek a matematikai irracionalitásoknak ebben az

impozáns antik elméletében. Általában magasztalni szokták ennek a könyvnek „szigorú, logikus felépítését”, rendkívül „tömör és rövid bizonyításait”, amelyek – kevés kivételtől eltekintve – a modern igényeket is kielégítik. De bármilyen egyöntetű tisztelettel, elismeréssel beszélnek is erről a könyvről, részletes, meggyőző történeti elemzése a modern irodalomból eddig nem ismeretes.

El szokták mondani ezzel kapcsolatban, hogy amiképpen az Elemek V. könyvében *Eudoxosz* eredményeit foglalta össze Euklidész, ugyanúgy ez a X. könyv tulajdonképpen *Theaitétosz* műve lenne. – Csakugyan van nyoma annak, hogy megpróbálták ennek a könyvnek egyes tételeit már az ókorban annak az egyébként nem ismert és fiatalon elhunyt matematikusnak tulajdonítani, akinek nevét Platón egyik dialógusa, a „*Theaitétosz*” viseli. Úgy látszik, ez a dialógus már az ókorban nagy hatással volt azokra, akiket érdekelt a matematika. Az újkorban is, egészen a legutóbbi időkig, ki akarták olvasni ebből a dialógusból a „történeti Theaitétosznak” egy matematikai felfedezését. Ez mindenesetre tévedés. Platón dialógusában ilyesmiről *nincs szó*. – Ugyanígy bizonyos az is, hogy az a szkholion, amely az Elemek X. 9. tételét Platónra hivatkozva Theaitétosznak tulajdonítja, *egyszerűen téved*. Platón szövege nem erősíti meg állítását. – Éppen azért, mert ebben a két részletkérdésben nyilvánvaló a tévedés, függőben kell maradnia annak a másik, általánosabb érdekű kérdésnek: Csakugyan Theaitétosz-e a X. könyv szerzője. Azoknak az érveknek alapján, amelyekre eddig hivatkozni szoktak, ez a kérdés aligha dönthető el. Az mindenesetre bizonyos, hogy a X. könyv szerzője kiváló matematikus volt.

Nem vállalkozhatunk itt e könyv tételeinek összefoglalására, inkább csak a keretét vázoljuk. A matematikai irracionalitás antik elmélete a szakaszok összemérhetőségének vagy összemérhetetlenségének (kommenzurabilitás-inkommenzurabilitás) a kérdéséből indult ki. Összemérhető vagy összemérhetetlen két szakasz aszerint, hogy *van-e* közös mértékük vagy *nincs*. (Ha *nincs* valamely szakasznak közös mértéke egy másikhoz viszonyítva, akkor mi erre azt mondjuk, hogy ennek a hosszúsága csak *irracionális* számmal fejezhető ki.) Lehet azonban valamely szakasz *„hosszúsága szerint összemérhetetlen”*, de *„összemérhető a rá emelt négyzet szerint”*; pl. a négyzet átlója

összemérhetetlen az oldallal „hosszúság szerint”, de összemérhető ugyanazzal a rá emelt „négyzet szerint”, minthogy az átló négyzete éppen kétszer akkora, mint az oldal négyzete. – Rövid jellemzésül megjegyezhetjük: a X. könyv összesen *tizenötféle* szakaszt különböztet meg; ezek közül racionális *kettő*, és irracionális *tizenhárom*. – Ami pedig a tételek fölhasználását illeti, Euklidész a X. könyv tételeit csak a XIII. könyvben, a szabályos testekkel kapcsolatban alkalmazza.

A görög *geometria* szó – amelyet magyarra *mértan*nak szoktunk fordítani – eredetileg *földmérést* jelent. Ennek megfelelően a matematikának ez az ága korábban *síkmértan* („planimetria”) volt. Csak később épülhetett erre a *testmértan*, a *sztereometria*. Ezzel az utóbbival foglalkozik az Elemek utolsó három könyve, a XI., XII. és XIII.

Kimutatható a görögök érdeklődése a sztereometria problémái iránt már az 5. századból. *Plutarkhosz* említi pl. *Démokritosz* következő problémáját. Vegyük egy kúpnak, amelynek egyenes az alkotója, az alapkörrel párhuzamos metszetét. Ez a metszet az eredeti kúp két részre bontja: egy felső kisebb kúpra, és egy alsó csonkakúpra. Egy-egy körlap mind a csonkakúp fedőlapja, mind pedig a kisebb kúp alapja. Kérdés: Vajon a két kör egyenlő-e, vagy nagyobb-e a csonkakúp fedőlapja? Mert nyilvánvaló, hogy végtelen sok ilyen metszet lehetséges; a két kör egymáshoz való viszonya pedig mindig ugyanaz kell legyen. – Ha egyenlő a két kör, akkor nem kúppal, hanem hengerrel van dolgunk. Ha viszont nagyobb a csonkakúp fedőlapja (kisebb a felső, a kisebb kúp alapja), akkor az eredeti kúp alkotója nem egyenes, hanem a kúp alapjától a csúcsa felé vezető lépcsősor.

Sztereometriai probléma megoldását készítette elő *Hippokratész*-nek az a találó javaslata, hogy a kocka megduplázásához meg kellene találnunk a módját annak, hogyan iktatunk *két középarányost* a kocka éle és ugyanennek a mennyiségnek a kétszerese közé. Meg is oldotta ezt a problémát – bár *nem* klasszikus módon, azaz *nem* „csak vonalzó és körző használatával” – valamivel később Hippokratész után, *Arkhytasz*.

A felsorolt három adat tehát – *Démokritosz* problémája, *Hippokra-*

tész javaslata, és *Arkhytasz* említett megoldása – mind arra vall, hogy a sztereometria Euklidész korában már elég régi tudomány volt.

Ennek ellenére több jele van annak, hogy abban az időben, amikor sor került az Elemek összeállítására, *a sztereometria még nem volt olyan érett tudomány, mint a planimetria*. Illusztrálhatjuk ezt pl. a következő megfigyeléssel.

Euklidész a síkmértant – mint láttuk már – 5 posztulátummal vezette be. Igazában szüksége lett volna ezekhez hasonló más posztulátumokra a sztereometriában is. A XI. könyv elején azonban nincs egy posztulátum sem, csak 28 új definíció. De ha jobban megnézzük ennek a XI. könyvnek első három tételét, nem lesz nehéz rájönnünk, hogy ezeknek a bizonyításai – az igazat megvallva – *nem sokat érnek*. Amint erre már többen utaltak: ez a három „tétel” valójában inkább három posztulátum lehetne, amelyet jobb lett volna bizonyítási kísérlet nélkül elvként elfogadtatni. Hogy erre csakugyan megvolt a lehetőség, azt mutatja az eudoxoszi V. könyv példája. Bár itt sincs posztulátum, de van ennek a könyvnek a definíciói között egy olyan, amely minden további nélkül lehetne posztulátum is: a *negyedik*,* ezt nevezték el a 19. században nem éppen találó névvel „*arkhimédészi alaptörvénynek*”.

Rövid összefoglalásként elmondhatjuk: a XI. könyv 39 tétele bevezetés a testmértanba. A tételek itt is bizonyos, didaktikai szempontból „emelkedőnek” nevezhető sorrendben követik egymást. A térben elhelyezett egyenesek és síkok viszonylag „egyszerűbb” problémáitól lépésről-lépésre jutunk el a testszögeken keresztül a prizmákhoz, a paralelepipedonhoz és a kockához. Általában azzal jellemezhető a XI. könyv, hogy ebben – a párhuzamosságtól eltekintve – még csak olyan sztereometriai kérdésekről van szó, amelyek tárgyalhatók a *végtelen* problémájának érintése nélkül. Éppen ebben különbözik ez a könyv az utána következő XII.-tól.

A XII. könyv feltűnő vonása, hogy alkalmazza az ún. *exhaustio módszerét*, pl. a 2., 3., 4., 5., a 10., 11., 12. tételben – és egy kissé más

* Igazában nincs lényeges különbség *definíció*, *posztulátum* és *axióma* között. E nevek ma már szinte tetszés szerint fölcserélhetők. A megkülönböztetés csak *történeti* szempontból lehet érdekes.

formában a 16–18. tételekben. *Arkhimédész* a forrásunk arra, hogy ez a módszer *Eudoxosztól* származik. Röviden az *exhaustio*-t (= „kimerítés”) – amelynek elnevezése erősen félrevezető, mert tulajdonképpen nem „kimerítésről”, hanem éppen ellenkezőleg valami *kimeríthetetlennek* a megközelítéséről van szó – a következőképpen jellemezhetjük. Vegyük példának a kör területét. Ezt úgy közelítjük meg, hogy mind nagyobb oldalszámú szabályos sokszöget írunk a körbe; bár ezeknek a területe mindig *kisebb* lesz, mint a kör területe, de minél nagyobb a sokszög oldalszáma, annál inkább megközelíti a sokszög területe a kör területét – szinte úgy mondhatnánk: „*ahulról*”. Ha ugyanakkor szabályos sokszögeket írunk a kör köré kívülről, ezekkel is megközelítjük a kör területét „*felülről*”. Mert a kör köré írt szabályos sokszögek területe mindig *nagyobb* lesz ugyan a kör területénél, de minél nagyobb ezeknek a sokszögeknek az oldalszáma, annál közelebb jutunk a kör területéhez. Így aztán a két határ közé szorítva annyira közel juthatunk a kör területéhez, amennyire csak akarunk – bár tudjuk, hogy *magát a kör-területet mégsem érjük el soha, de ott van ez feltétlenül valahol a két közelítő határ között*. – Ezt a módszert alkalmazza tehát a XII. könyv a felületek és köbtartalmak kiszámítására. – Amikor, persze, Euklidész térfogat-kiszámításairól beszélünk, ne gondoljunk konkrét mérésekre, számokkal való operációkra. Euklidésznél inkább csak olyan térfogat-megállapító tételeket találunk, mint a XII. 10.: „*Minden kúp harmadrésze az egyenlő magasságú és ugyanazon alapon álló hengernek*.” Stb.

Végül a XIII. könyvben Euklidész több olyan tétel után, amely az aranymetszéssel foglalkozik, áttér az öt szabályos test tárgyalására. – Ami az aranymetszésre vonatkozó tételeket illeti, ezeknek legalább egy része, úgy látszik, valami olyan *húrtáblázatot* készített elő, amilyent tulajdonképpen csak jóval későbbi korból, az időszámításunk 2. századában élő csillagásznak, *Klaudiosz Ptolemaiosznak* a művéből ismerünk. A történeti kutatás eddig kevés figyelemre méltatta azt a kérdést: mennyiben készíti elő már Euklidész az asztronómia húrtáblázatát, ezt az „ókori trigonometriát”.

Az öt szabályos test: a tetraéder, hexaéder (kocka), oktaéder, pentagondódekaéder és ikosaéder. – Tárgyalásuknál Euklidész mindig egy adott gömbből, illetőleg a gömb átmérőjéből indul ki.

Amiképpen a IV. könyv a szabályos sokszögeket egy körbe írta, úgy írja a XIII. könyv a szabályos testeket egy adott átmérőjű gömbbe. Kiszámítja aztán Euklidész minden szabályos test élének és a köréje írt gömb átmérőjének az arányát.

A későbbi ókor a szabályos testeket „platóni testek” néven tartotta számon, minthogy beszél ezekről Platón a „Timaios” című dialógusban. Bizonyos azonban, hogy ezeknek a szabályos testeknek egy része tudományos vizsgálódások tárgya volt (különösen a pythagoreusok körében) már jóval a Platón előtti korban.

Egyébként az egész XIII. könyv olyan önmagában is kerek, zárt egész, hogy voltak modern kutatók, akik feltették: eredetileg ez Euklidész önálló műve lett volna, amelyet talán csak utólag csatolt az Elemekhez. Mások viszont azt emelték ki: mintha éppen a szabályos testek tárgyalása lett volna az egész euklidészi Elemek végső célja.

IRODALOM

További tájékoztatásul Euklidészről és az antik matematikáról megemlítem itt az alábbiakat:

Szabó Árpád: A görög matematika kibontakozása (Gyorsuló Idő sorozat) Budapest, 1978.

Szabó Árpád: Anfänge der griechischen Mathematik, Budapest 1969, és ua. angolul: The Beginnings of Greek Mathematics, Budapest, 1978.

T. L. Heath: The thirteen books of Euclid's Elements. I—II—III. (second edition, 1925; Dover Publication)

A. Frajese — L. Maccioni: Gli Elementi di Euclide, Torino, 1970 (olasz fordítás és magyarázatok)

B. L. v. d. Waerden: Egy tudomány ébredése. Gondolat, Budapest, 1977.

Szabó Árpád

Első könyv

Definíciók

1. Pont az, aminek nincs része.*
2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.
3. A vonal végei pontok.
4. Egyenes vonal* az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.
5. Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.
6. A felület végei (=szélei) vonalak.
7. Síkfelület* az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.
8. A síkszög két olyan egysíkbeli vonal egymáshoz való hajlása, amelyek metszik egymást, és nem fekszenek egy egyenesen.
9. Ha a szöget közrefogó vonalak egyenesek, egyenes vonalúnak nevezzük a szöget.*
10. Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.
11. Tompaszög az, amelyik nagyobb a derékszögnél.
12. Hegyesszög pedig, amelyik kisebb a derékszögnél.
13. Határ az, ami vége valaminek.
14. Alakzat az, amit egy vagy több határ vesz körül.
15. A kör síkbeli alakzat, amelyet egy vonal vesz körül [ezt nevezzük körvonalnak] úgy, hogy az e vonal és egy, az alakzat belsejében fekvő pont közé eső szakaszok egyenlők egymással.
16. Ezt a pontot a kör középpontjának nevezzük.

17. A körnek átmérője bármely, a középponton át haladó egyenes vonal, amely mindkétoldalt a kör területén végződik. Az ilyen egyenes félbevágja a kört.
18. A félkör olyan alakzat, amelyet egy átmérő és az általa kimetszett körív vesz körül. (A félkör középpontja ugyanaz a pont, mint amelyik a köré is.)*
19. Egyenes vonalú alakzatok (azaz sokszögek)* azok, amelyeket egyenes vonalak vesznek körül, háromoldalúak, amelyeket három, négyoldalúak, amelyeket négy, sokoldalúak pedig, amelyeket négynél több egyenes vesz körül.
20. A háromoldalú alakzatok közül egyenlő oldalú háromszög az, amelynek három egyenlő oldala van, egyenlő szárú, amelynek csak két egyenlő oldala van, ferde pedig, amelynek három nem egyenlő oldala van.
21. Továbbá a háromoldalú alakzatok közül derékszögű háromszög az, amelynek van derékszöge, tompaszögű, amelynek van tompaszöge, hegyesszögű pedig, amelynek három hegyesszöge van.
22. A négyoldalú alakzatok közül négyzet az, amelyik egyenlő oldalú és derékszögű, téglalap, amelyik derékszögű, de nem egyenlő oldalú, rombusz, amelyik egyenlő oldalú, de nem derékszögű, rombold, amelynek a szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, de sem nem egyenlő oldalú, sem nem derékszögű. A többi négyoldalú neve legyen trapéz.*
23. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkétoldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.

Posztulátumok

1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.
F.: I. 1-2., 5-7., 9., 12.; III. 11.
2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.
F.: I. 2., 5., 16., 21.

3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.
F.: I. 1-3., 12.; II. 14.
4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.*
F.: I. 14-5., 47.; II. 9-10.; III. 1. 3-4., 19., 32.; IV. 4.; VI. 8., 30.
5. És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.
F.: I. 29., 44.; II. 10.; IV. 4-5.; VI. 3-4.

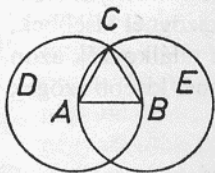
Axiómák

1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.
F.: I. 1-3., 13-5., 26., 28-30., 35-6., 39-41., 44-6., 48.; II. 4-6., 8-11.; III. 5-6., 22., 25., 27., 31-7.; IV. 3-5.
2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.
F.: I. 13., 29., 32., 34-5., 43., 45., 47-48.; II. 5-8., 10., 12-3.; III. 8., 15., 22., 31-2., 35-6.
3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.
F.: I. 2., 5., 14-5., 28., 35., 43., 46.; II. 9-11., 14.; III. 14., 26., 28., 32., 35-6.; IV. 3.; V. 5-6.
4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.*
F.: I. 17., 21.; II. 10.; V. 25.
5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.
F.: I. 14-5., 41-2., 47.; II. 8.; IV. 12.
6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.
F. I. 37-8.; II. 9-10.; III. 14., 21., 27.; IV. 8-9., 12.
7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.
F.: I. 4., 8.
8. Az egész nagyobb a résznél.
F.: I. 6-7., 14., 16., 18., 20., 24., 26., 39-40., 44.; II. 10.; III. 1-2., 4-6., 8., 11., 13., 16., 18-9., 27., 31.; VI. 30.; XI. 5.
9. Két egyenes vonal nem fog közre területet.*
F.: I. 4.; XI. 3., 7.

I. 1. Tétel

*Állítsunk adott véges egyenesszakasz fölé egyenlő oldalú háromszöget!**

Legyen AB az adott véges egyenesszakasz. Az AB véges egyenesszakasz fölé kell tehát egyenlő oldalú háromszöget állítani.



Legyen BCD az A középpontú, AB távolsággal rajzolt kör (3. P.), továbbá ACE a B középpontú, BA távolsággal rajzolt kör, és a C pontból, amelyben metszik egymást a körök, illesszük az A , B pontokra a CA , CB egyeneseket (1. P.).

Minthogy az A pont középpontja a CDB körnek, AC egyenlő AB -vel, továbbá, minthogy a B pont középpontja a CAE körnek, BC egyenlő BA -val. De megmutattuk, hogy CA is egyenlő AB -vel, tehát CA és CB mindketten egyenlők AB -vel. Amik viszont ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők, tehát CA is egyenlő CB -vel (1. Ax.), így CA , AB és BC mindhárman egyenlők egymással.

Tehát az ABC háromszög egyenlő oldalú, és az adott AB véges egyenesszakasz fölé állítottuk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 2., 9–11.

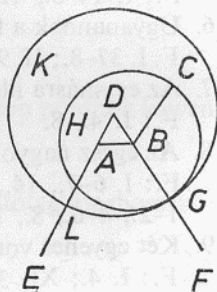
I. 2. Tétel

Helyezzünk el adott ponthoz adott szakasszal egyenlő szakaszt!

Legyen A az adott pont, BC pedig az adott szakasz. Az A ponthoz az adott BC szakasszal egyenlő szakaszt kell tehát elhelyezni.

Illesszük az A pontból a B pontra az AB szakaszt (1. P.), és állítsuk fölé a DAB egyenlő oldalú háromszöget (I. 1.), és legyenek AE , BF a DA , DB egyenesszakaszok egyenes menti meghosszabbításai (2. P.), és legyen CGH a B középpontú, BC távolsággal rajzolt kör (3. P.), továbbá GKL a D középpontú, DG távolsággal rajzolt kör.

Minthogy a B pont középpontja a CGH körnek, BC egyenlő BG -vel.* Továbbá, minthogy a D pont középpontja a GKL körnek, DL egyenlő



DG -vel. Ezekből DA egyenlő DB -vel, tehát a maradék AL egyenlő a maradék BG -vel (3. Ax.). De megmutattuk, hogy BC is egyenlő BG -vel, tehát AL és BC mindketten egyenlők BG -vel. Amik viszont ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők, tehát AL is egyenlő BC -vel (1. Ax.).

Tehát az adott A ponthoz az adott BC szakasszal egyenlő AL szakasz fekszik. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 3.; VI. 10–11.

I. 3. Tétel

*Vonjunk ki két adott, nem egyenlő egyenes-szakasz közül a nagyobbikból egy, a kisebbel egyenlő szakaszt!**

Legyen AB és c a két adott, nem egyenlő szakasz, s legyen közülük AB a nagyobb. A nagyobb AB -ből kell tehát egy a kisebb c -vel egyenlő szakaszt kivonni.

Feküdjék az A pontnál a c szakasszal egyenlő AD (I. 2.), és legyen DEF az A középpontú, AD távolsággal rajzolt kör (3. P.).

Minthogy az A pont középpontja a DEF körnek, AE egyenlő AD -vel. De c is egyenlő AD -vel. Tehát AE és c mindketten egyenlők AD -vel, úgyhogy AE is egyenlő c -vel (1. Ax.).

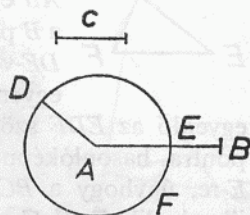
Tehát a két adott AB és c szakasz közül a nagyobbikból, AB -ből kivontuk a kisebb c -vel egyenlő AE -t. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 5–6., 9., 11., 16., 18., 20., 22., 24., 26., 46., 48.; II. 1., 8–11.; 14.; III. 15.; IV. 1.; VI. 1., 4., 9., 11–6., 28–9.; X. 17.; XII. 15.; XIII. 14–15.

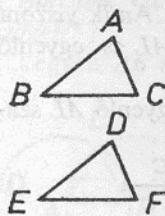
I. 4. Tétel

Ha két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő, és egy-egy szöge is egyenlő, az, amelyet az egyenlő oldalak fognak közre, akkor az alapok is egyenlők, és a háromszögek is egyenlők, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek.*

Legyen ABC és DEF két háromszög, melyeknek két-két oldala, AB , AC és DE , DF páronként egyenlő, AB a DE -vel, AC pedig a DF -fel, és a BAC szög egyenlő az EDF szöggel. Azt állítom, hogy a BC



alap is egyenlő az EF alappal, és az ABC háromszög egyenlő a DEF háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, az ABC a DEF , az ACB pedig a DFE szöggel.



Ha ugyanis az ABC háromszöget a DEF háromszögre illesztjük** úgy, hogy az A pontot a D pontra, az AB egyenest pedig a DE egyenesre helyezzük, akkor a B pont is illeszkedni fog E -re, minthogy AB egyenlő DE -vel; de ha AB illeszkedik DE -re, akkor az AC egyenes is illeszkedik DF -re, minthogy a BAC szög egyenlő az EDF szöggel, úgyhogy a C pont is illeszkedni fog az F pontra, hasonlóképp mivel AC egyenlő DF -fel. De B is illeszkedik E -re, úgyhogy a BC alap illeszkedik az EF alapra. Ha ugyanis B illeszkedik E -re, C pedig F -re, de a BC alap nem illeszkedik EF -re, akkor két egyenes vonal területet fog közre; ami nem lehetséges (9. Ax.). Tehát illeszkedik a BC alap EF -re, és egyenlő vele, és a többi szög is illeszkedik a többi szögre, úgyhogy az egész ABC háromszög illeszkedik az egész DEF háromszögre, és egyenlő vele, és egyenlő ABC a DEF -fel, ACB pedig DFE -vel (7. Ax.).

Ha tehát két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő, és egy-egy szöge is egyenlő, az, amelyet az egyenlő oldalak fognak közre, akkor az alapok is egyenlők, és a háromszögek is egyenlők, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyek az egyenlő oldalakkal szemben fekszenek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 5–6., 10., 16., 24–6., 33–5., 47.; III. 7–8., 17., 25–6., 29–30., 33.; IV. 5–6., 13.; VI. 5–6.; XI. 4., 6., 8., 20., 22–4., 26., 29., 35., 38.; XII. 3., 16.; XIII. 7–8., 10–1., 13–4.

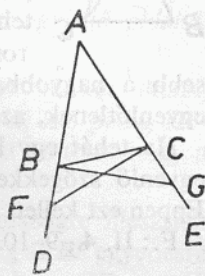
I. 5. Tétel

Az egyenlő szárú háromszögeknek az alapon fekvő szögei egyenlők egymással, és ha meghosszabbítjuk az egyenlő oldalakat, akkor az alap alatt egymással egyenlő szögek keletkeznek.

Legyen ABC egyenlő szárú háromszög, melynek AB oldala egyenlő az AC oldallal, és legyenek BD , CE az AB , AC szakaszok egyenes menti meghosszabbításai (2. P.). Azt állítom, hogy az ABC szög egyenlő az ACB , a CBD pedig a BCE szöggel.

Legyen ugyanis F a BD egy tetszőlegesen kiválasztott pontja, és vonjuk le a nagyobb AE -ből a kisebb AF -fel egyenlő AG -t (I. 3.), és húzzuk meg az FC és GB szakaszokat (I. P.).

Mínthogy AF egyenlő AG -vel, AB pedig AC -vel, e két-két oldal, FA , AC és GA , AB páronként egyenlő; és ugyanazt az FAG szöget zárják be; az FC alap tehát egyenlő a GB alappal, és az AFC háromszög egyenlő az AGB háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, ACF az ABG -vel, AFC pedig az AGB -vel (I. 4.). És minthogy a teljes AF egyenlő a teljes AG -vel, s ezekből AB egyenlő AC -vel, a maradék BF egyenlő a maradék CG -vel (3. Ax.). De megmutattuk azt is, hogy FC egyenlő GB -vel, tehát e két-két oldal, BF , FC és CG , GB páronként egyenlő; és a BFC szög egyenlő CGB -vel, és a BC közös alapjuk, tehát a BFC háromszög is egyenlő a CGB háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, tehát FBC egyenlő a GCB , BCF pedig a CBG szöggel (I. 4.). Minthogy megmutattuk, hogy a teljes ABG szög egyenlő a teljes ACF szöggel, s ezekből a CBG szög egyenlő BCF -fel, így a maradék ABC szög egyenlő a maradék ACB -vel (3. Ax.); és az ABC háromszög alapján fekszenek. Megmutattuk azt is, hogy az FBC szög egyenlő GCB -vel; és ezek meg az alap alatt vannak.



Az egyenlő szárú háromszögeknek tehát az alapon fekvő szögei egyenlők egymással, és ha meghosszabbítjuk az egyenlő oldalakat, akkor az alap alatt egymással egyenlő szögek keletkeznek. Éppen ezt kellett megmutatni.

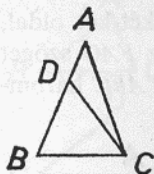
F.: I. 7., 18–20., 24., II. 4., 9–10.; III. 2–3., 16., 20., 31.; IV. 10., 15.; VI. 3., 7.; XIII. 7–10.

I. 6. Tétel

Ha egy háromszög két szöge egyenlő egymással, akkor az egyenlő szögekkel szemben fekvő oldalak is egyenlők egymással.

Legyen az ABC háromszög ABC szöge egyenlő az ACB szöggel. Azt állítom, hogy az AB oldal is egyenlő az AC oldallal.

Ha ugyanis AB nem egyenlő AC -vel, akkor egyikük nagyobb. Legyen AB a nagyobb, és vonjuk le a nagyobb AB -ből a kisebb AC -vel egyenlő DB -t (I. 3.), és húzzuk meg a DC egyenest (I. P.).



Minthogy DB egyenlő AC -vel, BC pedig közös oldal, így a két-két oldal, DB , BC és AC , CB egymással páronként egyenlő, és a DBC szög egyenlő ACB -vel; tehát a DC alap egyenlő az AB alappal, és a DBC háromszög egyenlő az ACB háromszöggel (I. 4.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); de ez lehetetlen, tehát AB és AC nem egyenlőtlenek, azaz egyenlők.

Ha tehát egy háromszög két szöge egyenlő egymással, akkor az egyenlő szögekkel szemben fekvő oldalak is egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 4., 9–10.; III. 25., IV. 9–10.; VI. 3., XIII. 7–8.

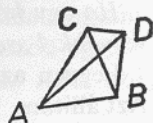
I. 7. Tétel

Ugyanarra az egyenesre nem lehet adott két szakasszal páronként egyenlő másik két szakaszt állítani úgy, hogy más ponton találkozzanak, de ugyanazon az oldalon fekjűdjenek, és ugyanazok a pontok legyenek a végeik, mint az előző szakaszoknak.

Tegyük föl ugyanis, hogy lehetséges, és álljon ugyanazon az AB egyenesen másik két, adott két szakasszal, AC -vel és CB -vel páronként egyenlő AD és DB úgy, hogy más pontban találkozzanak: míg az előzők C -ben, ezek D -ben, de ugyanazon az oldalon fekjűdjenek, és ugyanazok a pontok legyenek a végeik, azaz CA legyen egyenlő DA -val, és ugyanaz az A legyen a vége, s CB a DB -vel, és ugyanaz a B legyen a vége; és húzzuk meg a CD -t (I. P.).

Minthogy AC egyenlő AD -vel, az ACD szög is egyenlő ADC -vel (I. 5.); tehát az ADC szög nagyobb DCB -nél (8. Ax.); így még inkább nagyobb* a CDB szög DCB -nél (8. Ax.). Hasonlóképp, minthogy CB egyenlő DB -vel, a CDB szög is egyenlő DCB -vel (I. 5.). De azt is megmutattuk, hogy nagyobb is nála; ez viszont lehetetlen.

Tehát nem lehet ugyanarra az egyenesre, adott két szakasszal páronként egyenlő másik két szakaszt állí-



tani úgy, hogy más pontban találkozzanak, de ugyanazon az oldalon fekszenek és ugyanazok a pontok legyenek a végeik, mint az előző szakaszoknak. Éppen ezt kellett megmutatni.

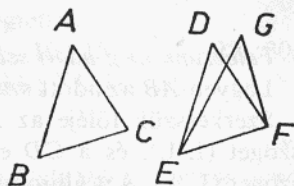
F.: I. 8.

I. 8. tétel

Ha két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő, és alapjuk egyenlő, akkor a szögeik is egyenlők, amelyeket az egyenlő oldalak zárnak be.

Legyen ABC és DEF két háromszög, melyeknek két-két oldala, AB , AC és DE , DF páronként egyenlő, AB a DE -vel, AC pedig DF -fel; és legyen a BC alap egyenlő az EF alappal. Azt állítom, hogy a BAC szög is egyenlő az EDF szöggel.

Ha ugyanis az ABC háromszöget a DEF háromszögre illesztjük úgy, hogy a B pontot az E pontra, a BC egyenest pedig az EF egyenesre helyezzük, akkor a C pont is illeszkedni fog F -re, minthogy BC egyenlő EF -fel; de ha BC illeszkedik EF -re, akkor a BA , CA szakaszok is illeszkednek ED -re és DF -re. Ha ugyanis a BC alap illeszkedik az EF alapra, de a BA és AC oldalak nem illeszkednek ED -re és DF -re, hanem eltérnek tőlük, mint EG és GF , akkor ugyanazon az egyenesen adott két szakasszal páronként egyenlő másik két szakasz áll úgy, hogy más pontban találkozzanak, de ugyanazon az oldalon fekszenek és ugyanazok a pontok a végeik. Így azonban nem állhatnak (I. 7.); tehát nem igaz, hogy, noha a BC alap illeszkedik az EF alapra, a BA , AC oldalak nem illeszkednek ED -re és DF -re. Tehát illeszkednek; úgyhogy a BAC szög is illeszkedik az EDF szögre, és egyenlő vele (7. Ax.).



Ha tehát két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő és alapjuk egyenlő, akkor a szögeik is egyenlők, amelyeket az egyenlő oldalak zárnak be. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 9., 11–2., 23., 48.; III. 1., 3., 9., 28., 37.; IV. 9., 12.; VI. 5.; XI. 4., 6., 8., 10., 23., 29., 35.; XIII. 7., 17., 18. L.

I. 9. Tétel

Felezzünk meg adott egyenes vonalú szöget!

Legyen BAC az adott egyenes vonalú szög. Ezt kell megfeleztetni. Legyen D az AB tetszőlegesen választott pontja; vonjuk le AC -ből az AD -vel egyenlő AE -t (I. 3.), és húzzuk meg DE -t (I. P.); legyen DEF a DE -vel szerkesztett egyenlő oldalú háromszög (I. 1.); húzzuk meg AF -et. Azt állítom, hogy az AF egyenes felezi a BAC szöget.



Minthogy ugyanis AD egyenlő AE -vel, AF pedig közös (oldal), e kettő-kettő, DA , AF és EA , AF páronként egyenlő. És egyenlő a DF alap az EF alappal; tehát a DAF szög egyenlő az EAF szöggel (I. 8.).

Tehát az AF egyenes felezi az adott BAC egyenes vonalú szöget. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 10.; IV. 4., 11., 13–4., VI. 3.

I. 10. Tétel

Felezzünk meg adott szakaszt!

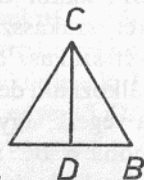
Legyen AB az adott szakasz. Az AB szakaszt kell feleznünk.

Szerkesszük fölője az ABC egyenlő oldalú háromszöget (I. 1.), és a CD egyenes felezze meg az ACB szöget (I. 9.). Azt állítom, hogy a D pont felezi az AB szakaszt.

Minthogy ugyanis AC egyenlő CB -vel, CD pedig közös (oldal), e kettő-kettő, AC , CD és BC , CD páronként egyenlő; és egyenlő az ACD szög a BCD szöggel; az AD alap egyenlő tehát a BD alappal (I. 4.).

D tehát felezi az adott AB szakaszt. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 11–2., 16., 42., II. 6., 9–11., 14.; III. 1., 9–10., 14–5., 25., 30., 33., IV. 5., 8., VI. 27–9., X. 17., 33–5., 60. L., 60., 100.; XIII. 1.



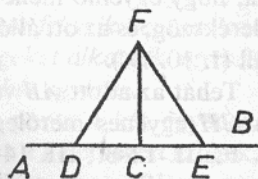
I. 11. Tétel

*Húzzunk adott egyeneshez, adott pontjából derékszögben egyenest!**

Legyen AB az adott egyenes, C pedig a rajta adott pont. A C pontból kell egyenest húznunk az AB egyeneshez derékszögben.

Legyen D az AC tetszőlegesen választott pontja, és legyen rajta (az AC egyenesen) a CD -vel egyenlő CE (I. 3.); álljon DE fölött az FDE egyenlő oldalú háromszög (I. 1.), és húzzuk meg FC -t. Azt állítom, hogy az adott AB egyeneshez adott C pontjából derékszögben húztuk az FC egyenest.

Minthogy ugyanis DC egyenlő CE -vel, CF pedig közös (oldal), e kettő-kettő, DC , CE és EC , CF páronként egyenlő; és egyenlő a DF alap az FE alappal; tehát a DCF szög egyenlő az ECF szöggel (I. 8.); és ezek mellékszögek. De ha egy egyenesre egy egyenest úgy állítunk, hogy egyenlő mellékszögek keletkezzenek, akkor a két egyenlő szög derékszög (I. 10. D.), tehát DCF és FCE derékszögek.



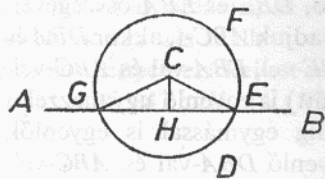
Tehát a CF egyenes az adott AB egyeneshez derékszögben áll a rajta adott C pontból. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 13., 46., 48.; II. 1., 9–10.; III. 1., 10., 15–7., 19., 25., 30., 32–4.; IV. 2–3., 5–7.; VI. 13., 16., 31.; X. 33.; XI. 11., 19.

I. 12. Tétel

Bocsássunk adott végtelen egyenesre rajta kívül adott pontból merőleges egyenest!

Legyen AB az adott végtelen egyenes, C pedig a rajta kívül adott pont. Az adott AB végtelen egyenesre kell a rajta kívül adott C pontból merőleges egyenest bocsátani.



Legyen D az AB egyenes másik oldalán tetszőlegesen választott pont, és EFG a C középpontú, CD távolsággal rajzolt kör (3. P.), és H az EG egyenes felezőpontja (I. 10.), és húzzuk meg a CG , HC és CE egyeneseket (1. P.). Azt állítom, hogy az adott AB végtelen egyenesre a CH egyenes merőlegesen van húzva a rajta kívül adott C pontból.

Mínthogy ugyanis GH egyenlő HE -vel, HC pedig közös (oldal), e kettő-kettő, GH , HC és EH , HC páronként egyenlő; és egyenlő a CG alap a CE alappal; a CHG szög tehát egyenlő az EHC szöggel (I. 8.). És mellékszögek. De ha egy egyenesre egy egyenest úgy állítunk rá, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az ott álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll (I. 10. D.).

Tehát az adott AB végtelen egyenesre a rajta kívül adott C pontból a CH egyenes merőlegesen van húzva. Éppen ezt kellett megtenni. F.: II. 12-3.; III. 14-6., 18., 35-6.; IV. 4., 13.; XI. 11.

I. 13. Tétel

Ha úgy keletkeznek szögek, hogy egy egyenest állítunk egy egyenesre, akkor vagy két derékszög, vagy (összegben) két derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek.

Álljon ugyanis az AB egyenes a CD egyenesen, és legyenek CBA és ABD a keletkezett szögek. Azt állítom a CBA és ABD szögekről, hogy vagy mindkettő derékszög, vagy két derékszöggel egyenlők.

Mert ha a CBA szög egyenlő ABD -vel, akkor mindkettő derékszög (I. 10. D.). Ha pedig nem, akkor legyen BE a B pontból a CD egyeneshez derékszögben húzott egyenes (I. 11.); tehát CBE és EBD mindkettő derékszög; s minthogy a CBE szög egyenlő e kettő, CBA és ABE összegével, ha közös (tagnak) hozzájuk adjuk EBD -t,* akkor CBE és EBD (összegben) egyenlő lesz e hárommal, CBA -val, ABE -vel és EBD -vel (2. Ax.). Hasonlóképpen, minthogy a DBA szög egyenlő e kettő, DBE és EBA összegével, ha közös (tagnak) hozzájuk adjuk ABC -t, akkor DBA és ABC (együtt) egyenlő lesz e hárommal, DBE -vel, EBA -val és ABC -vel. De megmutattuk, hogy CBE és EBD (együtt) is egyenlő ugyanezzel a hárommal, az ugyanazzal egyenlők pedig egymással is egyenlők (1. Ax.), tehát CBE és EBD (együtt) is egyenlő DBA -val és ABC -vel. De CBE és EBD mindkettő derékszög, tehát a DBA és ABC szögek (összege) két derékszöggel egyenlő.

Ha tehát úgy keletkeznek szögek, hogy egy egyenest állítunk egy

egyenesre, akkor vagy két derékszög, vagy (együtt) két derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 14–5., 17., 28–9., 32.; III. 32.; IV. 3., 15.; VI. 7.

I. 14. Tétel

Ha valamely egyenesen levő pontnál két egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett, akkor (ugyanazon az) egyenesen van a két egyenes.

Feküdjék ugyanis az AB egyenesen levő B pontnál két egyenes, BC és BD nem ugyanazon az oldalon, és legyenek a keletkezett szögek, ABC és ABD , két derékszöggel egyenlők. Azt állítom, hogy BD ugyanazon az egyenesen van, mint CB .

Ha ugyanis BD nincs egy egyenesen BC -vel, legyen BE egy egyenesen CB -vel.

Minthogy tehát AB a CBE egyenesen áll, az ABC és ABE szögek két derékszöggel egyenlők (I. 13.). De ABC és ABD is két derékszöggel egyenlők (együtt), tehát CBA és ABE (együtt) egyenlő CBA -val és ABD -vel (együtt) (4. P., 1. és 5. Ax.). Vonjuk le a közös CBA -t, így a maradék ABE egyenlő a maradék ABD -vel (3. Ax.), a kisebb a nagyobb (8. Ax.), de ez nem lehetséges. Tehát BE nincs ugyanazon az egyenesen, mint CB . Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egyetlen más egyenes sem (sincs ugyanazon az egyenesen, mint CB), csak BD , tehát CB ugyanazon az egyenesen van, mint BD .

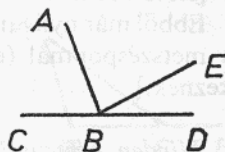
Ha tehát valamely egyenesen levő pontnál két egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és (együtt) két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett, akkor ugyanazon az egyenesen van a két egyenes. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 45., 47.; III. 14.; VI. 14–5., 23., 25., 32.; X. 25.; XI. 38.

I. 15. Tétel

Ha két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők.

Messe ugyanis egymást e két egyenes, AB és CD , az E pontban. Azt állítom, hogy az AEC szög egyenlő DEB -vel, a CEB pedig AED -vel.



Minthogy ugyanis az AE egyenes a CD egyenesen áll, és CEA , AED a keletkezett szögek, így a AED , CEA szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 13.). Hasonlóképp, minthogy a DE egyenes az AB egyenesen áll, és AED , DEB a keletkezett szögek, így az AED , DEB szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 13.). De megmutattuk, hogy a CEA , AED szögek is (együtt) két derékszöggel egyenlők; tehát CEA és AED (együtt) egyenlő AED -vel és DEB -vel (4. P., 1. és 5. Ax.). Vonjuk le a közös AED -t, így a maradék CEA egyenlő a maradék DEB -vel (3. Ax.). Hasonlóképp mutatható meg, hogy CEB és DEA is egyenlők.

Ha tehát két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 16., 28–9., 44.; II. 10.; III. 25.; IV. 15.; XI. 4., 33., 38.

[Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha két* egyenes metszi egymást, akkor a metszéspontnál (együtt) négy derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek.]

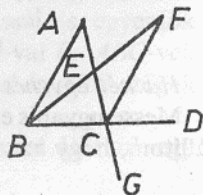
I. 16. Tétel

Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög nagyobb mind a két szemközti belső szögnél.

Legyen ABC egy háromszög, és legyen az egyik oldala, BC , a D pontig meghosszabbítva. Azt állítom, hogy ACD külső szög nagyobb mind a két szemközti belső szögnél, CBA -nál és BAC -nél.

Legyen E az AC felezőpontja (I. 10.), és húzzuk meg BE -t, majd hosszabbítsuk meg egyenes mentén F -ig, és helyezzük el a BE -vel egyenlő EF -et (I. 3.), és húzzuk meg FC -t, és hosszabbítsuk meg AC -t G -ig.

Minthogy AE egyenlő EC -vel, BE pedig EF -fel, e kettő-kettő, AE , EB és CE , EF páronként egyenlő; és az AEB szög egyenlő FEC -vel, mert csúcsszögek (I. 15.); tehát az AB alap egyenlő az FC alappal, és az ABE háromszög egyenlő az FEC háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő,



amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek (I. 4.); tehát egyenlő a BAE szög ECF -fel. ECD pedig nagyobb ECF -nél (8. Ax.), tehát ACD nagyobb BAE -nél. A BC szakasz megfelezése után hasonlóképp mutatható meg az is, hogy a BCG szög, azaz ACD (I. 15.) nagyobb ABC -nél is.

Minden háromszögben tehát az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög nagyobb mind a két szemközti belső szögnél. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 17–8., 21., 26–7.; III. 2., 23.

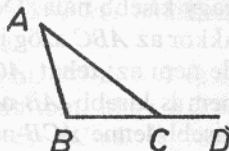
I. 17. Tétel

Minden háromszögben két szög (együtt) kisebb két derékszögnél, bárhogy is választjuk őket.

Legyen ABC egy háromszög. Azt állítom, hogy az ABC háromszögben két szög kisebb két derékszögnél, bárhogy is választjuk őket.

Legyen ugyanis BC a D -ig meghosszabbítva.

És minthogy ACD külső szöge az ABC háromszögnek, nagyobb a szemközti ABC belső szögnél (I. 16.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az ACB szöveget, így az ACD és ACB szögek (együtt) nagyobbak, mint ABC és BCA (együtt) (4. Ax.). De az ACD és ACB szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 13.), tehát ABC és ACB kisebbek két derékszögnél. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a BAC és ACB szögek is kisebbek két derékszögnél, meg a CAB és ABC szögek is.



Minden háromszögben tehát két szög (együtt) kisebb két derékszögnél, bárhogy is választjuk őket. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 16., 31.; VI. 4., 7.; XI. 14.

I. 18. Tétel

Minden háromszögben a nagyobb oldal nagyobb szöggel szemben fekszik.

Legyen ugyanis ABC egy háromszög, melyben az AC oldal nagyobb AB -nél. Azt állítom, hogy az ABC szög is nagyobb a BCA szögnél.

Minthogy ugyanis AC nagyobb AB -nél, helyezzük el az AB -vel egyenlő AD -t (I. 3.), és húzzuk meg BD -t.

Minthogy $\angle ADB$ külső szöge a $\triangle BCD$ háromszögnek, nagyobb a szemközti $\angle DCB$ belső szögnél (I. 16.). Viszont az $\angle ADB$ szög egyenlő $\angle ABD$ -vel, minthogy az AB oldal is egyenlő az AD oldallal (I. 5.); tehát az $\angle ABD$ szög is nagyobb $\angle ACB$ -nél; tehát annál inkább nagyobb az $\angle ABC$ szög $\angle ACB$ -nél (8. Ax.).

Minden háromszögben tehát a nagyobb oldal nagyobb szöggel szemben fekszik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 19.

I. 19. Tétel

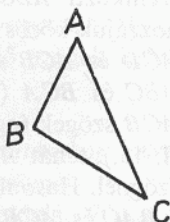
Minden háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.

Legyen ABC egy háromszög, melyben az $\angle ABC$ szög nagyobb a $\angle BCA$ szögnél. Azt állítom, hogy az AC oldal is nagyobb az AB oldalnál.

Ha ugyanis nem, akkor AC vagy egyenlő AB -vel, vagy kisebb nála. De AC nem egyenlő AB -vel, mert akkor az $\angle ABC$ szög is egyenlő lenne $\angle ACB$ -vel (I. 5.); de nem az; tehát AC nem egyenlő AB -vel. De AC nem is kisebb AB -nél, mert akkor az $\angle ABC$ szög is kisebb lenne $\angle ACB$ -nél (I. 18.); de nem az; tehát AC nem kisebb AB -nél. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele. Tehát AC nagyobb AB -nél.

Minden háromszögben tehát a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 20., 24., III. 2., 16., 18.



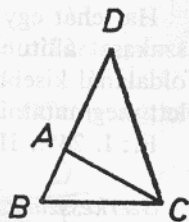
I. 20. Tétel

Minden háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket.

Legyen ugyanis ABC egy háromszög. Azt állítom, hogy az ABC háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket, BA és AC (együtt) nagyobb BC -nél, AB meg BC az AC -nél, BC meg CA pedig nagyobb AB -nél.

Hosszabbítsuk meg ugyanis BA -t a D pontig, és legyen AD egyenlő a CA -val (I. 3.); húzzuk meg DC -t.

Minthogy tehát DA egyenlő AC -vel, az ADC szög is egyenlő az ACD szöggel (I. 5.); a BCD szög nagyobb tehát az ACD szögnél (8. Ax.); minthogy pedig DCB egy háromszög, melyben a BCD szög nagyobb BDC -nél, és a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik, így DB nagyobb BC -nél (I. 19.). DA pedig egyenlő AC -vel; tehát BA és AC (együtt) nagyobb BC -nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy AB és BC is nagyobb CA -nál, BC és CA pedig AB -nél.



Tehát minden háromszögben két oldal nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket. Éppen ezt kellett megmutatni.

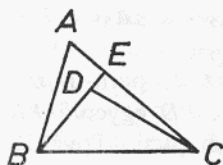
F.: I. 21–2.; III. 7–8., 11–2., 15.; XI. 20., 22.

I. 21. Tétel

Ha egy háromszög egyik oldalára a végpontjaiban belül két szakaszt állítunk, akkor az álló szakaszok a háromszög másik két oldalánál (együtt) kisebbek, de nagyobb szöget fognak közre.

Álljon ugyanis az ABC háromszög egyik oldalán, BC -n, a B és C végpontokon belül két szakasz, BD és DC . Azt állítom, hogy BD és DC a háromszög másik két oldalánál, BA -nál és AC -nél (együtt) kisebbek, de a BAC szögnél nagyobb BDC szöget fogják közre.

Legyen ugyanis BD az E -ig meghosszabbítva. És minthogy minden háromszögben két oldal (összege) nagyobb a harmadiknál, az ABE háromszög két oldala, AB és AE (összegben) nagyobb BE -nél (I. 20.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) EC -t, így BA és AC (együtt) nagyobbak, mint BE és EC (4. Ax.). Hasonlóképp, minthogy a CED háromszög két oldala, CE és ED , nagyobb CD -nél, adjuk hozzájuk közös (tagnak) DB -t, így CE és EB nagyobbak, mint CD és DB . De megmutattuk, hogy BA és AC nagyobbak, mint BE és EC , tehát BA és AC annál inkább nagyobbak, mint BD és DC .



Továbbá, minthogy minden háromszögben a külső szög nagyobb a

szemközti belső szögnél, így a CDE háromszög BDC külső szöge nagyobb CED -nél (I. 16.). Ugyanezért az ABE háromszög CEB külső szöge is nagyobb BAC -nél. De megmutattuk, hogy a BDC szög nagyobb CEB -nél, tehát a BDC szög annál inkább nagyobb BAC -nél.

Ha tehát egy háromszög egyik oldalára a végpontjaiban belül két szakaszt állítunk, akkor az álló szakaszok a háromszög másik két oldalánál kisebbek, de nagyobb szöget fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 24*, III. 8.

I. 22. Tétel

Szerkesszünk háromszöget három szakaszból, melyek három adott szakasszal egyenlők! Szükséges, hogy két szakasz (együtt) nagyobb legyen a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket [mert minden háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket (I. 20.)].

Legyen a , b és c a három adott szakasz, és legyen közülük kettő (együtt) a harmadiknál nagyobb, akárhogy is választjuk őket, a meg b a c -nél, a meg c a b -nél és végül b meg c az a -nál. Tehát a -val, b -vel és c -vel egyenlő szakaszokból kell háromszöget szerkesztenünk.

Vegyünk egy DE (fél)egyenes, melynek D legyen a végpontja, E felé pedig legyen végtelen, és mérjük rá az a -val egyenlő DF -et, a b -vel egyenlő FG -t és a c -vel egyenlő GH -t (I. 3.), és legyen DKL az F középpontú, FD távolsággal rajzolt kör, továbbá KLH a G középpontú, GH távolsággal rajzolt kör, és húzzuk meg KF -et és KG -t. Állítom, hogy a -val, b -vel és c -vel egyenlő három szakaszból van szerkesztve a KFG háromszög.

Mínthogy ugyanis az F pont középpontja a DKL körnek, FD egyenlő FK -val. De FD egyenlő a -val, tehát KF is egyenlő a -val. Továbbá, minthogy a G pont középpontja az LKH körnek, GH egyenlő GK -val. De GH egyenlő c -vel, tehát KG is egyenlő c -vel. De FG is egyenlő b -vel, e három szakasz tehát, KF , FG és GK egyenlő e hárommal, a -val, b -vel és c -vel.

Három szakaszból tehát, KF -ből, FG -ből, és GK -ből, melyek egyenlők a három adott a , b és c szakasszal, háromszöget szerkesztettünk, KFG -t. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 23.

I. 23. Tétel

Szerkesszünk adott egyenesre, egy rajta levő ponthoz, adott egyenes vonalú szöggel egyenlő egyenes vonalú szöget.

Legyen AB az adott egyenes, A a rajta levő pont, DCE pedig az adott egyenes vonalú szög. Az adott AB egyenesre kell tehát a rajta levő A ponthoz az adott DCE egyenes vonalú szöggel egyenlő egyenes vonalú szöget szerkeszteni.

Legyen D és E egy-egy, a CD és CE egyeneseken tetszőlegesen választott pont, és húzzuk meg DE -t, és legyen AFG az e három szakasszal, CD -vel, DE -vel és CE -vel egyenlő három szakaszból szerkesztett háromszög (I. 22.), úgyhogy CD egyenlő AF -fel, CE az AG -vel és DE is FG -vel.

Minthogy tehát e két-két (oldal), DC , CE és FA , AG páronként egyenlő, és a DE alap is egyenlő az FG alappal, így a DCE szög egyenlő az FAG szöggel (I. 8.).

Az adott AB egyenesre tehát, a rajta levő A ponthoz, az adott DCE egyenes vonalú szöggel egyenlő FAG egyenes vonalú szöget szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

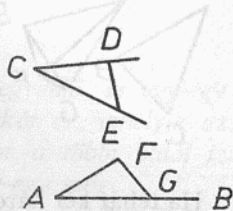
F.: I. 24., 31., 42.; III. 7-8., 25., 27., 33-4.; IV. 2-3.; VI. 5-7., 14-5., 18.; XI. 26., 31.

I. 24. Tétel

Ha két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, de az egyenlő oldalak által közrefogott szög nagyobb az egyikben, mint a másikban, akkor az egyiknek az alapja szintén nagyobb a másik alapjánál.

Legyen ABC és DEF két háromszög, amelyeknek két-két oldala, AB , AC és DE , DF páronként egyenlő, AB a DE -vel, AC pedig DF -fel, és legyen az A -nál levő szög nagyobb a D -nél levő szögnél. Azt állítom, hogy a BC alap szintén nagyobb az EF alapnál.

Minthogy ugyanis a BAC szög nagyobb az EDF szögnél, szerkesztünk a DE egyenesre, a rajta levő D ponthoz, a BAC szöggel



egyenlő EDG szöget (I. 23.), és helyezzünk el egy mind AC -vel, mind DF -fel egyenlő DG szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg EG -t és FG -t.

Minthogy tehát AB egyenlő DE -vel, AC pedig DG -vel, e két-két (oldal), BA , AC és ED , DG páronként egyenlő; és a BAC szög is egyenlő EDG -vel, tehát a BC alap egyenlő az EG alappal (I. 4.). Továbbá, minthogy DF egyenlő DG -vel, a DGF szög is egyenlő DFG -vel (I. 5.), a DFG szög tehát nagyobb EGF -nél (8. Ax.), még inkább nagyobb tehát az EFG szög EGF -nél (8. Ax.). És minthogy EGF egy háromszög, melyben az EFG szög nagyobb EGF -nél, a nagyobb szöggel szemben pedig nagyobb oldal fekszik, az EG oldal is nagyobb EF -nél (I. 19.). EG viszont egyenlő BC -vel, tehát BC is nagyobb EF -nél.*

Ha tehát két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, de az egyenlő oldalak által közrefogott szög nagyobb az egyikben, mint a másikban, akkor az egyiknek az alapja szintén nagyobb a másik alapjánál. Éppen ezt kellett megmutatni.

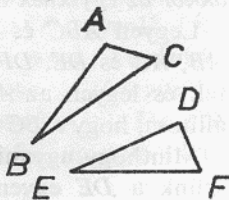
F.: I. 25.; III. 7-8., 15.; XI. 22.

I. 25. Tétel

Ha két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, az egyik alapja viszont nagyobb a másik alapjánál, akkor az egyenlő oldalak által közrefogott szög is nagyobb abban a háromszögben, amelynek alapja nagyobb, mint a másikban.

Legyen ABC és DEF két háromszög, amelynek két-két oldala, AB , AC és DE , DF páronként egyenlő, AB a DE -vel, AC pedig DF -fel, a BC alap viszont legyen nagyobb az EF alapnál. Azt állítom, hogy a BAC szög is nagyobb az EDF szögnél.

Ha ugyanis nem, akkor vagy egyenlő vele, vagy kisebb nála. De a BAC szög nem egyenlő EDF szöggel, mert akkor a BC alap is egyenlő lenne az EF alappal (I. 4.). De nem az, tehát a BAC szög nem egyenlő az EDF szöggel. De a BAC szög nem is kisebb az EDF szögnél, mert



akkor a BC alap is kisebb lenne az EF alapnál (I. 24.). De nem az, tehát a BAC szög nem kisebb az EDF szögnél. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele, tehát a BAC szög nagyobb az EDF szögnél.

Ha tehát két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, az egyik alapja viszont nagyobb a másik alapjánál, akkor az egyenlő oldalak által közrefogott szög is nagyobb abban a háromszögben, amelynek alapja nagyobb, mint a másikban. Éppen ezt kellett megmutatni.

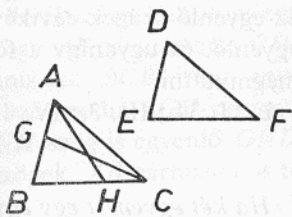
F.: XI. 20., 23.

I. 26. Tétel

Ha két háromszögben két-két szög páronként egyenlő, és egy-egy oldal is, akár az egyenlő szögek melletti oldal, akár az, amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik, akkor a többi oldal is páronként egyenlő, és ugyanígy a fennmaradó egy-egy szög.

Legyen ABC és DEF két háromszög, melyeknek két-két szöge, ABC , BCA és DEF , EFD páronként egyenlő, az ABC szög a DEF szöggel, a BCA szög pedig az EFD szöggel. Legyen még egy-egy oldaluk is egyenlő, először az egyenlő szögek melletti BC és EF . Azt állítom, hogy a többi oldal is páronként egyenlő, AB a DE -vel, AC pedig DF -fel, és a fennmaradó egy-egy szög is, BAC és EDF .

Ha ugyanis AB nem egyenlő DE -vel, akkor egyikük nagyobb. Legyen AB a nagyobb, és mérjünk föl egy DE -vel egyenlő BG szakaszt (I. 3.) és húzzuk meg GC -t. Minthogy tehát BG egyenlő DE -vel, BC pedig EF -fel, e két-két (oldal), BG , BC és DE , EF páronként egyenlő. És egyenlő a GBC szög a DEF szöggel, tehát a GC alap egyenlő a DF alappal, és a GBC háromszög egyenlő a DEF háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, a GCB szög egyenlő tehát DFE -vel (I. 4.). De föltettük, hogy a DFE szög egyenlő BCA -val, tehát a BCG szög is egyenlő a BCA szöggel (1. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.), ez viszont nem lehetséges. Tehát AB és DE nem egyenlőtlenek, azaz egyenlők. De BC is egyenlő EF -fel, tehát e két-két (oldal), AB , BC és DE , EF páronként egyenlő.



És az ABC szög is egyenlő a DEF szöggel, tehát az AC alap egyenlő a DF alappal, és a fennmaradó BAC szög egyenlő a fennmaradó EDF szöggel (I. 4.).

Most pedig legyenek az egyenlő szögekkel szemközt fekvő oldalak egyenlők, például AB és DE . Ismét azt állítom, hogy a többi oldal is páronként egyenlő, AC a DF -fel, BC pedig EF -fel, és ugyanígy a fennmaradó egy-egy szög is, BAC és EDF .*

Ha ugyanis BC nem egyenlő EF -fel, akkor egyikük nagyobb. Ha ez lehetséges, legyen BC a nagyobb, és mérjünk föl egy EF -fel egyenlő BH szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg AH -t. Minthogy BH egyenlő EF -fel, AB pedig DE -vel, e két-két (oldal), AB , BH és DE , EF páronként egyenlő. És egyenlő szögeket fognak közre, tehát az AH alap egyenlő a DF alappal, és az ABH háromszög egyenlő a DEF háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek, egyenlő tehát a BHA szög EFD -vel (I. 4.). De EFD egyenlő BCA -val, így az AHC háromszög BHA külső szöge egyenlő a szemközti BCA belső szöggel (I. Ax.), ez viszont nem lehetséges (I. 16.). Tehát nem igaz, hogy BC és EF nem egyenlők, azaz egyenlők. De AB is egyenlő DE -vel, így e két-két (oldal), AB , BC és DE , EF páronként egyenlő. És egyenlő szögeket fognak közre, tehát az AC alap egyenlő a DF alappal, és az ABC háromszög egyenlő a DEF háromszöggel, és ugyanígy a fennmaradó BAC szög egyenlő a fennmaradó EDF szöggel (I. 4.).

Ha tehát két háromszögben két-két szög páronként, és egy-egy oldal egyenlő, akár az egyenlő szögek melletti oldal, akár az, amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik, akkor a többi oldal is egyenlő, és ugyanígy a fennmaradó egy-egy szög. Éppen ezt kellett megmutatni.

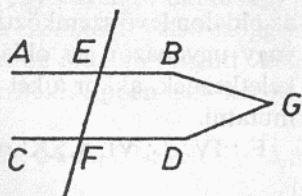
F.: I. 34.; III. 3.; IV. 4., 12–3.; XI. 4., 35., 38.; XII. 7.; XIII. 11.

I. 27. Tétel

Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy egymás között egyenlő váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos egymással.

Messen ugyanis két egyenest, AB -t és CD -t egy EF egyenes úgy, hogy a keletkezett AEF és EFD váltószögek egymás között egyenlők legyenek. Azt állítom, hogy AB párhuzamos CD -vel.

Ha ugyanis nem, akkor az AB és CD egyenesek meghosszabbítva találkoznak vagy a B és D , vagy az A és C pontok oldalán. Legyenek meghosszabbítva, és találkozzanak B és D oldalán a G pontban. Ekkor a GEF háromszög AEF külső szöge egyenlő a szemközti EFG belső szöggel, ez viszont nem lehetséges (I. 16.), nem találkozik tehát az AB és a CD egyenes B és D oldalán. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az A és C pontok oldalán sem érhetnek össze. De az egyik oldalon sem találkozó egyenesek párhuzamosak (I. 23. D.), tehát AB párhuzamos CD -vel.



Ha tehát két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy egymás között egyenlő váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 28., 30–1., 33.

I. 28. Tétel

Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.

Messen ugyanis két egyenest, AB -t és CD -t, egy EF egyenes úgy, hogy a szemközti GHD belső szöggel egyenlő EGB külső szög keletkezzék, vagy az ugyanazon az oldalon keletkező BGH és GHD belső

szögek (együtt) két derékszöggel legyenek egyenlők. Azt állítom, hogy AB párhuzamos CD -vel.

Mint hogy ugyanis az EGB szög egyenlő GHD -vel, az EGB szög pedig AGH -val egyenlő (I. 15.), így az AGH szög is egyenlő GHD -vel (I. Ax.). És váltószögek, AB párhuzamos tehát CD -vel (I. 27.).

Másrészt, minthogy BGH és GHD (együtt) két derékszöggel egyenlő, és AGH meg BGH is két derékszöggel egyenlő (I. 13.), AGH meg BGH egyenlő BGH meg GHD -vel (I. Ax.). Vonjuk le a közös BGH -t, így a maradék

AGH egyenlő a maradék GHD -vel (3. Ax.). És váltószögek, AB párhuzamos tehát CD -vel (I. 27.).

Ha tehát két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos. Éppen ezt kellett megmutatni.

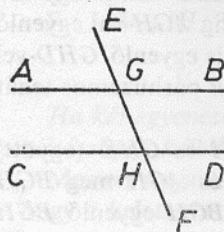
F.: IV. 7.; VI. 4.; XI. 6., 18.

I. 29. Tétel

*Ha párhuzamos egyeneseket metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon (együtt) két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek.**

Messe ugyanis a párhuzamos AB , CD egyeneseket egy EF egyenes. Azt állítom, hogy az AGH , GHD váltószögek egyenlők, és az EGB külső szög egyenlő a szemközti GHD belső szöggel, és az ugyanazon az oldalon levő BGH , GHD belső szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők.

Ha ugyanis az AGH szög nem egyenlő GHD -vel, egyikük nagyobb. Legyen AGH a nagyobb. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) BGH -t; így AGH és BGH (együtt) nagyobb, mint BGH és GHD (2. Ax.). Azonban AGH és BGH (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 13.), tehát BGH és GHD (együtt) kisebbek, mint két derékszög. De a két derékszögnél kisebb szögek felől végtelenül meghosszabbított egyenesek találkoznak (5. P.); AB és CD tehát végtelenül meghosszabbítva találkozni fognak. De nem érnek össze, mivel föltettük,



hogy párhuzamosak (I. 23. D.); nem igaz tehát, hogy AGH és GHD nem egyenlők, egyenlők tehát. Azonban az AGH szög egyenlő EGB -vel (I. 15.); tehát az EGB szög is egyenlő GHD -vel (I. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) BGH -t; így EGB és BGH (együtt) egyenlő BGH -val és GHD -vel (2. Ax.). Azonban EGB és BGH (együtt) két derékszöggel egyenlő

(I. 13.); tehát BGH és GHD is két derékszöggel egyenlők (I. Ax.).

Ha tehát párhuzamos egyeneseket metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon (együtt) két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 30., 32–5., 44–6.; II. 4., 9–10.; VI. 3., 24–5., 32.; XI. 8., 15., 38.; XII. 3–4.

I. 30. Tétel

Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek egymással is párhuzamosak.

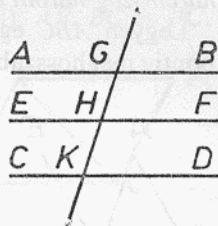
AB és CD legyenek mind a ketten párhuzamosak EF -fel. Azt állítom, hogy AB is párhuzamos CD -vel.

Messe őket ugyanis a GK egyenes.

Minthogy a GK egyenes a párhuzamos AB és EF egyeneseket metszi, az AGK szög egyenlő GKF -fel (I. 29.). Hasonlóképp, minthogy a GK egyenes a párhuzamos EF és CD egyeneseket metszi, a GKF szög egyenlő GKD -vel (I. 29.). De megmutattuk, hogy az AGK szög is egyenlő GKF -fel. Az AGK szög is egyenlő tehát GKD -vel (I. Ax.); és váltószögek. AB párhuzamos tehát CD -vel (I. 27.).

[Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek tehát egymással is párhuzamosak.] Éppen ezt kellett megmutatni.

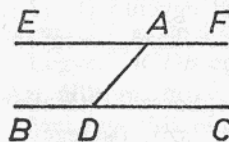
F.: I. 44–5., 47., II. 2–8.; IV. 7–8.; VI. 26.; XII. 17.



I. 31. Tétel

Húzzunk adott ponton át adott egyenessel párhuzamos egyenest!

Legyen A az adott pont, BC pedig az adott egyenes. Az A ponton át kell tehát a BC egyenessel párhuzamos egyenest húzni.



Legyen D a BC egyenes egy tetszőlegesen választott pontja, és húzzuk meg AD -t; és szerkesszünk az AD egyeneshez a rajta levő A ponthoz egy, az ADC szöggel egyenlő DAE szöget

(I. 23.), és legyen $\overline{EA}$ egyenes menti meghosszabbítása az $\overline{AF}$ egyenes.

Minthogy e két egyenest, BC -t és EF -et, az AD egyenes úgy metszi, hogy a keletkezett DAE és ADC váltószögek egyenlők, az EAF egyenes párhuzamos BC -vel (I. 27.).

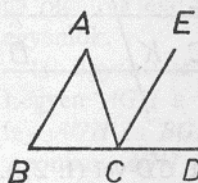
Az adott A ponton át tehát az adott BC egyenessel párhuzamos EAF egyenest húztunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 32., 37–40., 42., 44., 46–7., II. 1–10.; IV. 8.; VI. 3., 9–12., 14., 16., 26.; X. 60., 91., 97.; XI. 11–2.

I. 32. Tétel

Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög egyenlő a két szemközti belső szög összegével, és a háromszög három belső szöge (együtt) két derékszöggel egyenlő.

Legyen ABC egy háromszög, és legyen az egyik oldala, BC , a D pontig meghosszabbítva. Azt állítom, hogy az ACD külső szög egyenlő



a két szemközti belső szög, CAB és ABC összegével, és a háromszög három belső szöge, ABC , BCA és CAB (együtt) két derékszöggel egyenlő.

Húzzuk meg ugyanis a C ponton át az AB egyenessel párhuzamos CE egyenest (I. 31.).

Minthogy AB párhuzamos CE -vel, és metszi őket AC , a CAB és ACE váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Továbbá, minthogy AB párhuzamos CE -vel, és metszi őket a BD egyenes, az ECD külső szög egyenlő a szemközti ABC belső szöggel (I. 29.). De megmutattuk azt is, hogy az ACE szög egyenlő CAB -vel. Tehát a teljes ACD szög egyenlő a két szemközti belső szög, CAB és ABC összegével (2. Ax.).*

Adjuk hozzájuk közös (tagnak) BCA -t; így ACD és BCA (együtt) egyenlő e három szöggel, ABC -vel, BCA -val és CAB -vel (2. Ax.). Azonban ACD és BCA (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 13.); tehát az ABC , BCA és CAB szögek is (együtt) két derékszöggel egyenlők (1. Ax.).

Minden háromszögben tehát az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög egyenlő a két szemközti belső szög összegével,

és a háromszög három belső szöge (együtt) két derékszöggel egyenlő. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 9–10.; III. 20., 22., 31–2.; IV. 2–3., 10., 15.; VI. 5–8., 18., 20., 24., 32.; XI. 21.; XIII. 8–11., 18. L.

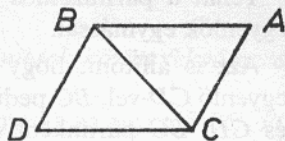
I. 33. Tétel

Az egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok maguk is egyenlők és párhuzamosak.

Legyenek AB és CD egyenlők és párhuzamosak, és kössék össze őket ugyanazon az oldalon* az AC , BD szakaszok. Azt állítom, hogy AC és BD is egyenlők és párhuzamosak.

Húzzuk meg BC -t.

Minthogy AB párhuzamos CD -vel, és BC metszi őket, az ABC , BCD váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). És minthogy AB egyenlő CD -vel, BC pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), AB , BC és BC , CD (páronként) egyenlő; és egyenlő az ABC szög a BCD szöggel; tehát az AC alap egyenlő a BD alappal, és az ABC háromszög egyenlő a BCD háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek; egyenlő tehát az ACB szög CBD -vel (I. 4.). És minthogy e két szakaszt, AC -t és BD -t, a BC szakasz úgy metszi, hogy a keletkezett váltószögek egyenlők, AC párhuzamos BD -vel (I. 27.). De azt is megmutattuk, hogy egyenlő vele.



Az egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok tehát maguk is egyenlők és párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

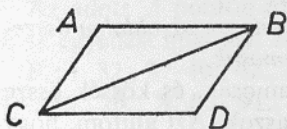
F.: I. 36., 45.; XI. 10., 38.; XII. 17.; XIII. 16.

I. 34. Tétel

A párhuzamos vonalú idomok szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, és az átló felezi őket.*

Legyen $ACDB$ egy párhuzamos vonalú idom, BC pedig egy átlója. Azt állítom, hogy az $ACDB$ paralelogramma szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, és a BC átló felezi.

Minthogy ugyanis AB párhuzamos CD -vel, és a BC egyenes metszi őket, az ABC , BCD váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Hasonlóképp, minthogy AC párhuzamos BD -vel, és BC metszi őket, az ACB , CBD váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Így ABC és BCD két olyan háromszög, melyeknek két-két szöge, ABC , ACB és BCD , CBD



páronként egyenlő, és egy-egy oldaluk is egyenlő, az egyenlő szögek közötti közös BC ; tehát a többi oldal is páronként egyenlő, és a fennmaradó egy-egy szög is (I. 26.); egyenlő tehát az AB oldal CD -vel, az AC (oldal) pedig BD -vel, és még egyenlő a BAC szög is CDB -vel. És minthogy az ABC szög egyenlő BCD -vel, a CBD szög pedig ACB -vel, így a teljes ABD szög egyenlő a teljes ACD szöggel (2. Ax.). De megmutattuk azt is, hogy a BAC szög egyenlő CDB -vel.

Tehát a párhuzamos vonalú idomok szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással.

Azt is állítom, hogy az átló felezi őket. Minthogy ugyanis AB egyenlő CD -vel, BC pedig közös (oldal), így a két-két (oldal), AB , BC és CD , BC páronként egyenlő; és egyenlő az ABC szög BCD -vel (I. 29.). Tehát az AC alap egyenlő BD -vel, és az ABC háromszög egyenlő a BCD háromszöggel (I. 4.).

A BC átló tehát felezi az $ABCD$ paralelogrammát. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 35–8., 41., 43., 45–6.; II. 1., 4., 7–10.; IV. 7–8.; VI. 4., 10.; X. 54. L.; XI. 24., 28–9., 39.; XII. 2., 7., 9.

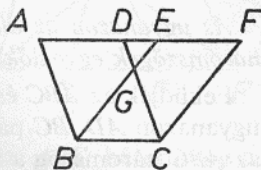
I. 35. Tétel

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák egyenlők egymással.

Feküdjék az $ABCD$ és az $EBCF$ paralelogramma ugyanazon a BC alapon és ugyanazon AF , BC párhuzamosok között. Azt állítom, hogy az $ABCD$ paralelogramma egyenlő $EBCF$ -fel.

Minthogy ugyanis $ABCD$ paralelogramma, AD egyenlő BC -vel (I. 34.). Ugyanígy EF is egyenlő BC -vel, úgyhogy AD is egyenlő EF -fel

(1. Ax.); és DE közös*; a teljes AE ** tehát egyenlő a teljes DF -fel (2. Ax.). De AB is egyenlő DC -vel (I. 34.), így e két-két (oldal), AE , AB és DF , DC páronként egyenlő; és az FDC külső szög egyenlő az EAB belső szöggel (I. 29.), tehát az EB alap egyenlő az FC alappal, és az EAB háromszög egyenlő az FDC háromszöggel (I. 4.). Vonjuk le a közös DGE (háromszöget); így a maradék $ABGD$ trapéz egyenlő a maradék $EGCF$ trapézzal (3. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a GBC háromszöget; így a teljes $ABCD$ paralelogramma egyenlő a teljes $EBCF$ paralelogrammával (2. Ax.).



Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 36-7.; XI. 31.

I. 36. Tétel

Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák egyenlők egymással.

Feküdjenek az $ABCD$, $EFGH$ paralelogrammák az egyenlő BC , FG alapokon és ugyanazon AH , BG párhuzamosok között. Azt állítom, hogy az $ABCD$ paralelogramma egyenlő az $EFGH$ paralelogrammával.

Húzzuk meg ugyanis BE -t és CH -t.

És minthogy BC egyenlő FG -vel, FG pedig EH -vel egyenlő (I. 34.), így BC is egyenlő EH -vel (1. Ax.). De párhuzamosak is. És EB meg HC köti össze őket; az egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok egyenlők és párhuzamosak (I. 33.) [tehát BE és CH is egyenlő és párhuzamos]. Tehát $EBCH$ paralelogramma. És egyenlő $ABCD$ -vel, ugyanis ugyanaz a BC egyenes az alapja és ugyanazon BC , AH párhuzamosok között fekszik, mint ez (I. 35.). Ugyan-így $EFGH$ is egyenlő ugyanezzel az $EBCH$ paralelogrammával (I. 35.), úgyhogy az $ABCD$ paralelogramma is egyenlő $EFGH$ -val (1. Ax.).

Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő

paralelogrammák tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 38.; II. 5–6., 8.; VI. 28–9.; XI. 25., 29.

I. 37. Tétel

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással.

Feküdjék az ABC és a DBC háromszög ugyanazon a BC alapon és ugyanazon AD , BC párhuzamosok között. Azt állítom, hogy egyenlő az ABC háromszög a DBC háromszöggel.

Hosszabbítsuk meg AD -t mind a két oldalon, E -ig, illetve F -ig, és a B ponton át húzzuk meg a CA -val párhuzamos BE egyenest, C -n át pedig a BD -vel párhuzamos CF -et (I. 31.).

Tehát mind a két idom, $EBCA$ és $DBCF$ paralelogramma; és egyenlők, ugyanis ugyanazon a BC alapon fekszenek és ugyanazon BC , EF párhuzamosok között (I. 35.); és az $EBCA$ paralelogrammának fele az ABC háromszög, az AB átló ugyanis felezi a paralelogrammát (I. 34.); a $DBCF$ paralelogrammának pedig fele része a DBC háromszög, ugyanis a DC átló felezi ezt (a másik paralelogrammát). De egyenlőknek a fele részei egyenlők egymással (6. Ax.). Egyenlő tehát az ABC háromszög a DBC háromszöggel.

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 39., 41.

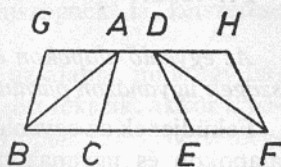
I. 38. Tétel

Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással.

Feküdjének az ABC , DEF háromszögek az egyenlő BC , EF alapokon és ugyanazon BF , AD párhuzamosok között. Azt állítom, hogy az ABC háromszög egyenlő a DEF háromszöggel.

Hosszabbítsuk meg ugyanis AD -t mindkétoldalt, G -ig, illetve H -ig, és a B ponton át húzzunk egy CA -val párhuzamos BG egyenest, az F -en át pedig egy DE -vel párhuzamos FH -t (I. 31.).

Tehát $GBCA$ és $DEFH$ mind a ketten paralelogrammák; és $GBCA$ egyenlő $DEFH$ -val, ugyanis az egyenlő BC, EF alapokon és ugyanazon BF, GH párhuzamosok között fekszenek (I. 36.). És a $GBCA$ paralelogrammának fele része az ABC háromszög, az AB átló ugyanis felezi (I. 34.); a $DEFH$ paralelogrammának pedig fele része a DEF háromszög, ugyanis (ezt meg) a DF átló felezi (I. 34.); de egyenlőknek a fele részei egyenlők egymással* (6. Ax.), egyenlő tehát az ABC háromszög a DEF háromszöggel.



Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 40., 42.; VI. 1-2.

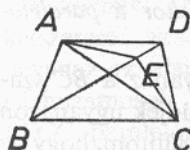
I. 39. Tétel

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek.

Feküdjenek az egyenlő ABC, DBC háromszögek ugyanazon a BC alapon, és annak ugyanazon az oldalán. Azt állítom, hogy ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek. Húzzuk meg ugyanis AD -t. Azt állítom, hogy AD párhuzamos BC -vel.

Ha ugyanis nem az, akkor húzzunk az A ponton át egy, a BC egyenessel párhuzamos AE -t (I. 31.), és húzzuk meg EC -t. Az ABC háromszög egyenlő tehát az EBC háromszöggel, mert ugyanazon a BC alapon fekszik, mint az, és ugyanazon párhuzamosok között (I. 37.). De az ABC háromszög egyenlő DBC -vel, tehát a DBC háromszög is egyenlő EBC -vel (1. Ax.), a nagyobb a kisebbel (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges, tehát AE nem párhuzamos BC -vel. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik egyenes sem (párhuzamos BC -vel), csak AD ; AD tehát párhuzamos BC -vel.

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő



háromszögek tehát ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 2.

I. 40. Tétel

*Az egyenlő alapokon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek.**

Feküdjenek az egyenlő ABC , CDE háromszögek az egyenlő BC , CE alapokon és ugyanazon az oldalon. Azt állítom, hogy ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek.

Húzzuk meg ugyanis AD -t. Azt állítom, hogy AD párhuzamos BE -vel.

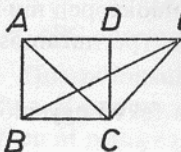
Ha ugyanis nem az, akkor húzzunk az A -n át egy BE -vel párhuzamos AF -et (I. 31.), és húzzuk meg FE -t. Az ABC háromszög egyenlő tehát az FCE háromszöggel, mert az egyenlő BC , CE alapokon fekszenek és ugyanazon BE , AF párhuzamosok között (I. 38.). De az ABC háromszög egyenlő a DCE háromszöggel, tehát a DCE háromszög is egyenlő az FCE háromszöggel (1. Ax.), a nagyobb a kisebbel (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges, tehát AF nem párhuzamos BE -vel. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik egyenes sem (párhuzamos BE -vel), kivéve AD -t; AD tehát párhuzamos BE -vel.

Az egyenlő alapokon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek tehát ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek. Éppen ezt kellett megmutatni.

I. 41. Tétel

Ha egy paralelogrammának ugyanaz az alapja, mint egy háromszögnek, és ugyanazon párhuzamosok között fekszik, akkor a paralelogramma kétszerese a háromszögnek.

Legyen ugyanis az $ABCD$ paralelogrammának ugyanaz a BC szakasz az alapja, mint az EBC háromszögnek, és feküdjék ugyanazon BC , AE párhuzamosok között. Azt állítom, hogy az $ABCD$ paralelogramma kétszerese az EBC háromszögnek.



Húzzuk meg ugyanis AC -t.

Ekkor az ABC háromszög egyenlő az EBC háromszöggel, mert ugyanazon a BC alapon fekszik,

mint amaz, és ugyanazon BC , AE párhuzamosok között (I. 37.). Azonban az $ABCD$ paralelogramma kétszerese az ABC háromszögnek, ugyanis az AC átló felezi (a paralelogrammát) (I. 34.); úgyhogy az $ABCD$ paralelogramma az EBC háromszögnek is kétszerese (5. és 1. Ax.).

Ha tehát egy paralelogrammának ugyanaz az alapja, mint egy háromszögnek, és ugyanazon párhuzamosok között fekszik, akkor a paralelogramma kétszerese a háromszögnek. Éppen ezt kellett megmutatni.

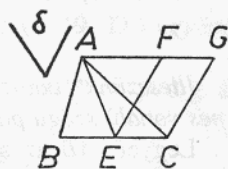
F.: I. 42., 47.; VI. 1.; X. 20. stb.; XII. 3.

I. 42. Tétel

Szerkesszünk adott háromszöggel egyenlő adott egyenes vonalú szögű paralelogrammát!

Legyen ABC az adott háromszög, δ pedig az adott egyenes vonalú szög. Az ABC háromszöggel egyenlő δ egyenes vonalú szögű paralelogrammát kell tehát szerkeszteni.

Legyen E a BC felezőpontja (I. 10.), és húzzuk meg AE -t, és szerkesszünk az EC egyenesre, a rajta levő E ponthoz egy δ -val egyenlő CEF szöget (I. 23.), és húzzunk A -n át egy EC -vel párhuzamos AG -t, C -n át pedig egy EF -fel párhuzamos CG -t (I. 31.); $FECG$ tehát paralelogramma. És minthogy BE egyenlő EC -vel, az ABE háromszög is egyenlő az AEC háromszöggel, ugyanis az egyenlő BE , EC alapokon fekszenek, és ugyanazon BC , AG párhuzamosok között (I. 38.); kétszerese tehát az ABC háromszög az AEC háromszögnek. De az $FECG$ paralelogramma is kétszerese az AEC háromszögnek, ugyanis ugyanaz az alapja, mint annak, és ugyanazon párhuzamosok között fekszik, mint az (I. 41.); egyenlő tehát az $FECG$ paralelogramma az ABC háromszöggel (5. Ax.). És a CEF szöge egyenlő az adott δ -val.



Tehát az adott ABC háromszöggel egyenlő és δ -val egyenlő CEF szögű $FECG$ paralelogrammát szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

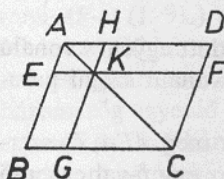
F.: I. 44-5.

I. 43. Tétel

Minden paralelogrammában az átló körülötti paralelogrammák paraplérómái egyenlők egymással.

Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, AC pedig egyik átlója, és AC körül feküdjenek az EH , FG^* paralelogrammák, és legyenek BK , KD az úgynevezett „paraplérómák”^{***}. Azt állítom, hogy a BK parapléróma egyenlő a KD paraplérómával.

Mint hogy ugyanis $ABCD$ paralelogramma, AC pedig átlója, az ABC háromszög egyenlő az ACD háromszöggel (I. 34.). Hasonlóképp, minthogy EH is paralelogramma, AK pedig átlója, az AEK háromszög egyenlő az AHK háromszöggel (I. 34.). Ugyanígy a KFC háromszög is egyenlő a KGC háromszöggel. Minthogy tehát az AEK



$hármszög$ az AHK $hármszöggel$ egyenlő, KFC pedig KGC -vel, az AEK meg a KGC $hármszög$ összege egyenlő az AHK meg a KFC $hármszög$ összegével (2. Ax.). De a teljes ABC $hármszög$ is egyenlő a teljes ADC $hármszöggel$; a maradék BK parapléróma tehát egyenlő a maradék KD paraplérómával (3. Ax.).

Tehát minden párhuzamos vonalú idomban az átló körülötti paralelogrammák paraplérómái egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

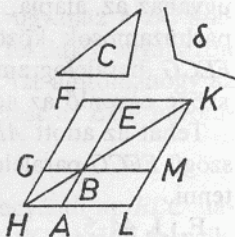
F.: I. 44.; II. 4-8.; VI. 27-9.; X. 54., 91.; XIII. 1-5.

I. 44. Tétel

Illesszünk adott szakaszhoz adott háromszöggel egyenlő, adott egyenes vonalú szögű paralelogrammát!*

Legyen AB az adott szakasz, C az adott háromszög, δ pedig az adott egyenes vonalú szög. Az adott AB szakaszhoz kell tehát az adott C háromszöggel egyenlő és δ -val egyenlő szögű paralelogrammát hozzáilleszteni.

Szerkesszünk egy, a C háromszöggel egyenlő és a δ -val egyenlő EBG szögű $BEFG$ paralelogrammát (I. 42.), és úgy helyezzük el, hogy BE ugyanazon az egyenesen legyen, mint AB ,** és



hosszabbítsuk meg FG -t H -ig, és A -n át a BG , EF egyenesekkel párhuzamosan húzzuk AH -t (I. 31.), és húzzuk meg HB -t. És mint hogy a párhuzamos AH -t és EF -et metszette át HF , így az AHF , HFE szögek összege két derékszöggel egyenlő (I. 29.). Tehát BHG és GFE ($\equiv HFE$) összege kisebb, mint két derékszög (8. Ax.); de az (együtt) két derékszögnél kisebb szögek irányába végtelenül meghosszabbított egyenesek találkoznak (5. P.), tehát HB és EF meghosszabbítva találkozni fognak. Legyenek meghosszabbítva, és találkozzanak K -ban, és a K ponton át az EA , FH egyenesekkel párhuzamosan húzzuk KL -t (I. 30., 31.), és hosszabbítsuk meg HA -t és BG -t az L , illetve M pontig.

$HLKF$ tehát paralelogramma, HK pedig egy átlója, és AG , ME a HK melletti paralelogrammák, LB és BF pedig az úgynevezett paralelómák; LB egyenlő tehát BF -fel (I. 43.). De BF a C háromszöggel egyenlő, tehát LB is egyenlő C -vel (1. Ax.). És minthogy a GBE szög egyenlő ABM -mel (I. 15.), másrészt a GBE szög δ -val egyenlő, az ABM szög is egyenlő a δ szöggel (1. Ax.).

Tehát az adott AB szakaszhoz az adott C háromszöggel egyenlő és δ szöggel egyenlő ABM szögű paralelogrammát illesztettük. Éppen ezt kellett megtenni.

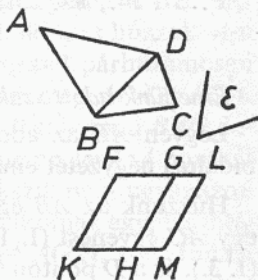
F.: I. 45.; VI. 25.; X. 20., 22–3., 25–6., 38., 41., 44., stb.

I. 45. Tétel

Szerkesszünk adott egyenes vonalú (alakzattal) (I. 19. D.) egyenlő és adott egyenes vonalú szögű paralelogrammát!

Legyen $ABCD$ az adott egyenes vonalú (alakzat),* ε pedig az adott egyenes vonalú szög. Tehát az $ABCD$ egyenes vonalú (alakzattal) egyenlő és adott ε szögű paralelogrammát kell szerkeszteni.

Húzzuk meg DB -t, és szerkesszünk egy az ABD háromszöggel egyenlő és ε -nal egyenlő HKF szögű paralelogrammát (I. 42.), és illesszünk a GH egyeneshez egy, a DBC háromszöggel egyenlő és ε -nal egyenlő GHM szögű GM paralelogrammát (I. 44.).



És minthogy az ε szög a HKF , GHM szögek mindegyikével egyenlő, a HKF szög is egyenlő a GHM szöggel (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) KHG -t, így az FKH , KHG szögek (együtt) a KHG , GHM szögek összegével egyenlők (2. Ax.). Azonban FKH és KHG (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 29.), tehát KHG és GHM is (együtt) két derékszöggel egyenlő (1. Ax.). Így a GH egyenesen levő H pontnál két egyenes, KH és HM fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett, tehát KH ugyanazon az egyenesen van, mint HM (I. 14.); és minthogy a párhuzamos KM -et és FG -t metszi a GH egyenes, a GHM , HGF váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a HGL szöget, így az MHG , HGL szögek (együtt) a HGF , HGL szögekkel egyenlők (2. Ax.). Azonban az MHG , HGL szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 29.), tehát HGF meg HGL is (együtt) két derékszöggel egyenlő (1. Ax.); FG tehát ugyanazon az egyenesen van, mint GL (I. 14.). És minthogy FK egyenlő és párhuzamos is GH -val (I. 34.), HG viszont ML -lel (egyenlő és párhuzamos is) (I. 34.), így FK is ML -lel egyenlő és párhuzamos is (1. Ax., I. 30.); s a KM , FL szakaszok kötik össze őket, KM és FL is egyenlők és párhuzamosak tehát (I. 33.), $KFLM$ tehát paralelogramma. És minthogy az ABD háromszög egyenlő az FH paralelogrammával, DBC pedig GM -mel, így a teljes $ABCD$ egyenes vonalú (alakzat) egyenlő a teljes $KFLM$ paralelogrammával (2. Ax.).

Tehát az adott $ABCD$ egyenes vonalú (alakzattal) egyenlő és adott ε -nal egyenlő FKM szögű $KFLM$ paralelogrammát szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: II. 14.; VI. 25.; X. 20., 41., 47., 78., 81., 84.

I. 46. Tétel

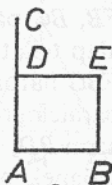
Emeljük adott szakaszra (mint oldalra) négyzetet!

Legyen AB az adott szakasz. Az AB szakaszra kell tehát (mint oldalra) négyzetet emelni.

Húzzunk az AB egyeneshez derékszögben a rajta levő A pontból egy AC egyenest (I. 11.), és mérjük föl rá egy AB -vel egyenlő AD -t (I. 3.), és a D ponton át húzzunk egy AB -vel párhuzamos DE egyenest

(I. 31.), a B ponton át pedig húzzunk egy AD -vel párhuzamos BE egyenest (I. 31.).

$ADEB$ tehát paralelogramma; AB egyenlő tehát DE -vel, AD pedig BE -vel (I. 34.). De AB egyenlő AD -vel, e négy szakasz tehát, AB , AD , DE és BE egyenlő egymással (I. Ax.); az $ADEB$ paralelogramma tehát egyenlő oldalú. Azt állítom, hogy derékszögű is. Minthogy ugyanis a párhuzamos AB -t és DE -t metszi az AD egyenes, így a BAD , ADE szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 29.). De BAD derékszög; derékszög tehát ADE is (3. Ax.). A párhuzamos vonalú idomok szemközti oldalai és szögei viszont egyenlők egymással (I. 34.); derékszög tehát mind a két szemközti ABE , BED szög is; $ADEB$ tehát derékszögű. De megmutattuk azt is, hogy egyenlő oldalú.



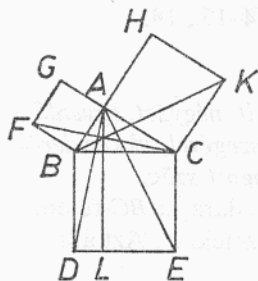
Négyzet tehát (I. 22. D.); és az AB szakaszra emeltük (mint oldalra). Éppen ezt kellett megtenni.

F.: I. 47.; II. 2–8., 11., 14.; VI. 30.; X. 19–21., 22. L., stb.

I. 47. Tétel

A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemközti oldalra emelt négyzet egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegével.

Legyen ABC egy derékszögű háromszög, és benne BAC a derékszög. Azt állítom, hogy a BC oldalú négyzet egyenlő a BA meg az AC oldalú négyzet összegével.



Legyen ugyanis $BDEC$ a BC oldallal szerkesztett négyzet, GB , HC pedig a BA , AC oldalra emelt négyzet (I. 46.), és húzzuk A -n át a BD és a CE egyenesel párhuzamosan AL -t (I. 30., 31.), és húzzuk meg AD -t és FC -t.

Minthogy pedig mind BAC , mind BAG derékszög, így a BA egyenesen levő A pontnál két AC , AG egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett; tehát AC ugyanazon az egyenesen van, mint AG (I. 14.). Éppen

ezért BA is ugyanazon az egyenesen van, mint AH . Minthogy pedig a DBC szög egyenlő FBA -val – derékszög ugyanis mind a kettő (4. P.) –, adjuk hozzájuk közös (tagnak) az ABC szöget; így a teljes DBA szög egyenlő a teljes FBC -vel (2. Ax.). És minthogy DB egyenlő BC -vel, FB pedig BA -val, (I. 22. D.), e két-két (oldal), DB , BA és FB , BC páronként egyenlő; és a DBA szög egyenlő FBC -vel; az AD alap tehát egyenlő az FC alappal, és az ABD háromszög egyenlő az FBC háromszöggel (I. 4.); és az ABD háromszögnek kétszerese a BL paralelogramma, mert ugyanaz a BD szakasz az alapjuk és ugyanazon BD , AL párhuzamosok között fekszenek (I. 41.); az FBC háromszögnek pedig kétszerese a GB négyzet, mert ismét ugyanaz az FB szakasz az alapjuk és ugyanazon FB , GC párhuzamosok között fekszenek (I. 41.). Egyenlőknek a kétszeresei pedig egyenlők egymással (5. Ax.); egyenlő tehát a BL paralelogramma a GB négyzettel. Hasonlóképp mutatható meg AE -t és BK -t meghúzva az is, hogy a CL paralelogramma egyenlő a HC négyzettel. A teljes $BDEC$ négyzet tehát egyenlő e két négyzettel, GB -vel meg HC -vel (2. Ax.). És a $BDEC$ négyzetet a BC , a GB , HC négyzeteket pedig a BA , AC oldalra emeltük. A BC oldalú négyzet tehát egyenlő a BA meg az AC oldalú négyzetekkel.

A derékszögű háromszögekben tehát a derékszöggel szemközti oldalra emelt négyzet egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: I. 48.; II. 9–14.; III. 14., 35–36.; IV. 12.; X. 14. L., 29., 30., 33–35.; XI. 23., 23. L., 35.; XII. 17.; XIII. 12, 14–15., 18.

I. 48. Tétel

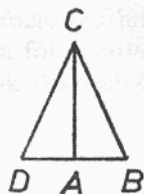
Ha egy háromszögben az egyik oldalra emelt négyzet egyenlő a háromszög másik két oldalára emelt négyzetek összegével, akkor derékszög a háromszög másik két oldala által közrefogott szög.

Legyen ugyanis az ABC háromszög egyik oldalára, a BC -re emelt négyzet egyenlő a BA , AC oldalakra emelt négyzetekkel. Azt állítom, hogy BAC derékszög.

Húzzuk ugyanis az A pontból az AC egyenessel derékszögben AD -t (I. 11.), és mérjük föl rá a BA -val egyenlő AD -t (I. 3.), és húzzuk meg DC -t.

Minthogy AB -vel AD egyenlő, az AD oldalú négyzet is egyenlő az

AB oldalú négyzettel. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az AC oldalú négyzetet, így az AD , AC oldalú négyzetek (együtt) egyenlők a BA , AC oldalú négyzetekkel (2. Ax.). Azonban az AD meg az AC oldalú négyzettel egyenlő a DC oldalú, DAC ugyanis derékszög (I. 47.), a BA meg az AC oldalú négyzettel pedig a feltétel szerint egyenlő a BC oldalú; tehát a DC oldalú négyzet egyenlő a BC oldalúval (1. Ax.), úgyhogy a DC oldal is egyenlő BC -vel. És minthogy AD egyenlő BA -val, AC pedig közös (oldal), e két-két (oldal), AD , AC és BA , AC egyenlő; és a DC alap egyenlő a BC alappal; a DAC szög tehát egyenlő a BAC szöggel (I. 8.). DAC viszont derékszög, derékszög tehát BAC is.



Ha tehát egy háromszögben az egyik oldalra emelt négyzet egyenlő a háromszög másik két oldalára emelt négyzetek összegével, akkor derékszög a háromszög másik két oldala által közrefogott szög. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 35.

Második könyv

Definíciók

1. A derékszögű paralelogrammokról (azaz a téglalapokról) azt mondjuk, hogy a derékszöget közrefogó két (oldal)szakasz közrefogja őket.
2. Nevezzük gnómonnak minden paralelogrammában az átló körülbírt bármelyik paralelogrammát a két paraplóromával együtt.*

II. 1. Tétel

*Ha van két szakasz, és az egyiküket valahány részre osztjuk, akkor a két szakasz által közrefogott téglalap egyenlő a fölosztatlan szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok összegével.**

Legyen a és BC két szakasz, és osszuk föl BC -t találomra a D és E pontokban. Azt állítom, hogy az a és BC által közrefogott téglalap egyenlő az a és BD meg az a és DE meg az a és EC által közrefogott téglalapokkal.

Húzzuk a B pontból BC -vel derékszögben BF -et (I. 11.), és mérjük rá az a -val egyenlő BG -t (I. 3.), és húzzuk G -n át BC -vel párhuzamosan a GH , D -n, E -n és C -n át pedig BG -vel párhuzamosan a DK , EL és CH egyeneseket (I. 31.).

Egyenlő hát BH a BK -val, DL -lél meg EH -val. És BH az a és BC közötti téglalap, mert BG és BC fogja közre, BG pedig egyenlő a -val; s BK az a és BD közötti téglalap, mert BG és BD fogja közre, BG

pedig egyenlő a -val, s DL az a és DE közötti téglalap, mert DK , azaz BG , egyenlő a -val (I. 34.). És végül EH hasonlóképp az a és EC közötti téglalap, az a és BC közötti téglalap tehát egyenlő az a és BD meg az a és DE meg az a és EC közötti téglalapokkal.

Ha tehát van két szakasz és az egyiküket valahány részre osztjuk, akkor a két szakasz által közrefogott téglalap egyenlő a fölösztatlan szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

II. 2. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok (együtt) egyenlők a teljes szakaszra emelt négyzettel.**

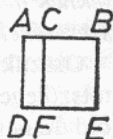
Osszuk ugyanis ketté az AB szakaszt a tetszőleges C pontban. Azt állítom, hogy az AB és BC által közrefogott téglalap meg az AB és AC által közrefogott téglalap (együtt) egyenlő az AB -re emelt négyzettel.

Legyen ugyanis $ADEB$ az AB oldalú négyzet (I. 46.), és húzzuk a C ponton át az AD és a BE egyenessel párhuzamosan CF -et (I. 31. és 30.).

Egyenlő hát AE az AF -fel meg CE -vel. És AE az AB oldalú négyzet, AF az AB és AC által közrefogott téglalap, mert AD és AC fogja közre, AD pedig egyenlő AB -vel, s CE az AB és BC közötti téglalap, mert BE egyenlő AB -vel. Az AB és AC meg az AB és BC közötti téglalapok tehát (együtt) egyenlők az AB oldalú négyzettel.

Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok (együtt) egyenlők a teljes szakaszra emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 8. Függelék, 10.

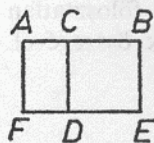


II. 3. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz meg az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő a két rész által közrefogott téglalap és az említett részre emelt négyzet összegével.**

Összuk ugyanis az AB szakaszt ketté a tetszőleges C pontban. Azt állítom, hogy az AB és BC által közrefogott téglalap egyenlő az AC és BC által közrefogott téglalap meg a BC oldalú négyzet összegével.

Legyen ugyanis $CDEB$ a BC oldalú négyzet (I. 46.), és hosszabbítsuk meg ED -t F -ig, és húzzuk A -n át AF -et a DC és a BE egyenessel párhuzamosan (I. 31. és 30.).



Egyenlő hát AE az AD -vel és CE -vel, és AE az AB és BC által közrefogott téglalap, mert AB és BE fogja közre, BE pedig egyenlő BC -vel; s AD az AC és BC közötti téglalap, mert DC egyenlő BC -vel; DB pedig a BC oldalú négyzet. Az AB és BC által közrefogott téglalap tehát egyenlő az AC és BC által közrefogott téglalap meg a BC oldalú négyzet összegével.

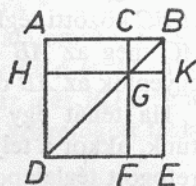
Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz meg az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő a két rész által közrefogott téglalap és az említett részre emelt négyzet összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 15.

II. 4. Tétel

Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra emelt négyzet egyenlő az egyes részekkel szerkesztett négyzeteknek meg a két rész által közrefogott téglalap kétszeresének az összegével.*

Összuk ugyanis az AB egyenesszakaszt ketté a tetszőleges C pontban. Azt állítom, hogy az AB oldalú négyzet egyenlő az AC meg CB oldalú négyzetekkel meg az AC és CB által közrefogott téglalap kétszeresével.



Legyen ugyanis $ADEB$ az AB oldalra emelt négyzet (I. 46.), és húzzuk meg BD -t, és húzzuk C -n át az AD és az EB egyenessel párhuzamosan CF -et, G -n át pedig az AB és a DE egyenessel párhuzamosan HK -t (I. 31. és 30.).

És minthogy párhuzamos CF az AD -vel, és BD metszi őket, a CGB külső szög egyenlő a szemközi ADB belső szöggel (I. 29.). Azonban az ADB szög ABD -vel egyenlő, minthogy az AB oldal is egyenlő AD -

vel (I. 5.); a CGB szög is egyenlő tehát $GBC (= ABD)$ -vel (I. Ax.), úgyhogy a CB oldal is egyenlő a CG oldallal (I. 6.). De CB GK -val egyenlő, CG pedig KB -vel (I. 34.), GK is egyenlő tehát KB -vel (I. Ax.); $CGKB$ tehát egyenlő oldalú. Azt állítom, hogy derékszögű is. Mint-hogy ugyanis CG párhuzamos KB -vel [és a CB egyenes metszi őket], a KBC és a GCB szög (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 29.). KBC viszont derékszög, derékszög tehát BCG is, úgyhogy a szem-közi CGK , GKB szögek is derékszögek (I. 34.). $CGKB$ tehát derék-szögű. De megmutattuk azt is, hogy egyenlő oldalú; négyzet tehát, mégpedig a CB oldalú. Ugyanezért HF is négyzet, és oldala HG , azaz AC (I. 34.). HF és CK tehát az AC és CB oldalú négyzetek. Minthogy pedig AG egyenlő GE -vel (I. 43.), és AG az AC és CB közötti téglalap – egyenlő ugyanis GC a CB -vel –, így GE egyenlő az AC és CB közötti téglalappal. AG és GE tehát (együtt) egyenlők az AC és CB közötti téglalap kétszeresével. Viszont HF és CK az AC , illetve CB oldalú négyzetek, tehát e négy idom, HF , CK , AG és GE (együtt) egyenlő az AC meg CB oldalú négyzetekkel meg az AC és CB által közrefogott téglalap kétszeresével. Azonban HF , CK , AG és GE (együtt) a teljes $ADEB$, s ez az AB oldalú négyzet. Az AB oldalú négyzet tehát egyenlő az AC meg CB oldalú négyzetekkel meg az AC és CB által közrefogott téglalap kétszeresével.

Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra emelt négyzet egyenlő az egyes részekkel szerkesztett négyzeteknek meg a két rész által közrefogott téglalap kétszeresének az összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 12.; IX. 15.; X. 26., 36–39., 41–42., 44., 47., 60.; XIII. 8. Függelék, 2–3.

[Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a négyzetekben az átló körülötti paralelogrammák négyzetek.]

II. 5. Tétel

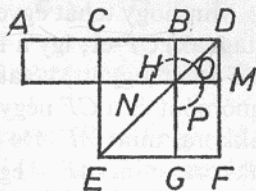
*Ha egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részei által közrefogott téglalap meg az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzet együtt egyenlő a szakasz felére emelt négyzettel.**

emelt négyzet együtt egyenlő a vonal feléből és a hozzáadandóból összeálló szakaszra emelt négyzettel.*

Felezzünk meg ugyanis valamely AB szakaszt a C pontban (I. 10.), és adjunk hozzá vele egy egyenesben valamely BD szakaszt. Azt állítom, hogy az AD és DB által közrefogott téglalap meg a CB oldalú négyzet együtt egyenlő a CD oldalú négyzettel.

Legyen ugyanis $CEFD$ a CD oldallal szerkesztett négyzet (I. 46.), és húzzuk meg DE -t, és húzzuk a B ponton át az EC és a DF egyenesével párhuzamosan BG -t, a H ponton át pedig az AB és az EF egyenesével párhuzamosan KM -et, és végül húzzuk A -n át a CL és a DM egyenesével párhuzamosan AK -t (I. 31. és 30.).

Minthogy tehát AC egyenlő CB -vel, AL is egyenlő CH -val (I. 36.). CH azonban egyenlő HF -fel (I. 43), AL is egyenlő tehát HF -fel (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) CM -et, így a teljes AM egyenlő az NOP gnómónnal. AM azonban az AD és DB közötti téglalap, mert DM egyenlő DB -vel; az NOP gnómón is egyenlő tehát az AD és DB által közrefogott téglalappal. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a CB oldalú négyzettel egyenlő LG -t, így az AD és DB által közrefogott téglalap meg a CB oldalú négyzet együtt egyenlő az NOP gnómónnal és LG -vel (2. Ax.). Az NOP gnómón és LG viszont (együtt) a teljes $CEFD$ négyzet, s ennek oldala CD . Az AD és DB által közrefogott téglalap meg a CB oldalú négyzet együtt egyenlő a CD oldalú négyzettel.



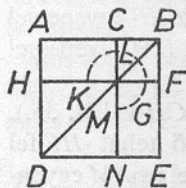
Ha tehát egy egyenesszakaszt megfelezzünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összege és a hozzáadandó által közrefogott téglalap meg a vonal felére emelt négyzet együtt egyenlő a vonal feléből és a hozzáadandóból összeálló szakaszra emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: II. 11.; III. 36.; X. 29. 1-2. L.

II. 7. Tétel

Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra és az egyik részre emelt két négyzet együttvéve egyenlő a teljes szakasz és az említett része által közrefogott téglalap kétszeresének és a másik részre emelt négyzetnek az összegével.*

Osszunk ugyanis valamely AB szakaszt ketté a tetszőleges C pontban. Azt állítom, hogy az AB és BC oldalú négyzet (együtt) egyenlő az AB és BC által közrefogott téglalap kétszeresének és a CA oldalú négyzetnek az összegével.



Legyen ugyanis $ADEB$ az AB oldallal rajzolt négyzet (I. 46.), és rajzoljuk meg a szokott ábrát (mint II. 4-6.-ban, azaz húzzuk meg a BD átlót és C -n át az AD -vel és BE -vel párhuzamos CN -et, H -n át pedig az AB -vel és DE -vel párhuzamos HF -et (I. 31., 30. és 34.).

Minthogy tehát egyenlő AG a GE -vel (I. 43.), adjuk hozzájuk közös (tagnak) CF -et; így a teljes AF egyenlő a teljes CE -vel (2. Ax.); AF és CE tehát (együtt) kétakkora, mint AC . AF és CE viszont kiadja a KLM gnómont és a CF négyzetet, a KLM gnómón és CF tehát (együtt) kétakkora, mint AC . De az AB és BC közötti téglalap kétszerese is kétakkora, mint AC – egyenlő ugyanis BF a BC -vel –, a KLM gnómón és a CF négyzet tehát egyenlő az AB és BC közötti téglalap kétszeresével. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) DG -t – ez az AC oldalú négyzet –, így a KLM gnómón és a BG , DG négyzetek (együtt) egyenlők az AB és BC által közrefogott téglalap kétszeresének és az AC oldalú négyzetnek az összegével. A KLM gnómón és a BG , DG négyzetek viszont kiadják a teljes $ADEB$ -t és CF -et, s ezek az AB és BC oldalú négyzetek. Az AB és BC oldalú négyzetek tehát (együtt) egyenlők az AB és BC által közrefogott téglalap kétszeresének és a CA oldalú négyzetnek az összegével.

Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra és az egyik részére emelt két négyzet együttvéve egyenlő a teljes szakasz és az említett része által közrefogott téglalap kétszeresének és a másik részre emelt négyzetnek az összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

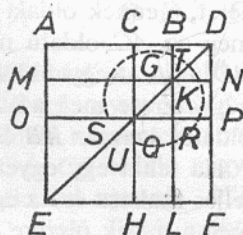
F.: II. 13.; X. 73-84., 97-102.

II. 8. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap négyszerese meg a másik részére emelt négyzet együtt egyenlő a teljes szakasz és az előbb említett rész összegére emelt négyzettel.**

Osszunk ugyanis valamely AB szakaszt ketté a tetszőleges C pontban. Azt állítom, hogy az AB és BC által közrefogott téglalap négyszerese meg az AC oldalú négyzet együtt egyenlő az AB és BC összegére emelt négyzettel.

Legyen ugyanis BD [az AB] egyenes menti meghosszabbítása, és mérjük föl a BC -vel egyenlő BD -t (I. 3.), és legyen $AEFD$ az AD -re emelt négyzet (I. 46.), és vázoljuk fel megkettőzve a szokott ábrát (azaz húzzuk meg a DE átlót és C -n, illetve B -n át az AE -vel és DF -fel párhuzamos CH -t, illetve BL -t, K -n, illetve Q -n át pedig az AD -vel és EF -fel párhuzamos MN -et és OP -t (I. 31. és 30.).



Minthogy tehát egyenlő BC a BD -vel, BC viszont GK -val egyenlő, BD pedig KN -nel (I. 34.), így GK egyenlő KN -nel (I. Ax.). Ugyanezért QR is egyenlő RP -vel. S minthogy egyenlő BC a BD -vel, GK pedig KN -nel, így CK is egyenlő KD -vel, GR pedig RN -nel (I. 36.). CK viszont RN -nel egyenlő – paraplérómái ugyanis a CP paralelogrammának (I. 43.) –, KD is egyenlő tehát GR -rel. E négy (idom) tehát, KD , CK , GR és RN egyenlő egymással. E négy tehát (együtt) négyakkora, mint CK . Ismét, minthogy egyenlő BC a BD -vel, BD viszont BK -val, azaz CG -vel egyenlő, BC pedig GK -val, azaz GQ -val egyenlő, így CG is egyenlő GQ -val. S minthogy egyenlő CG a GQ -val, QR pedig RP -vel, szintén egyenlő AG az MQ -val, QL pedig RF -fel (I. 36.). MQ viszont QL -l egyenlő – paraplérómái ugyanis az ML paralelogrammának (I. 43.) –, AG is egyenlő tehát RF -fel. E négy (idom) tehát, AG , MQ , QL és RF egyenlő egymással. E négy tehát (együtt) négyakkora, mint AG . De megmutattuk azt is, hogy e négy, CK , KD , GR és RN négyakkora, mint CK . E nyolc (idom) tehát, amely kiadja az STU gnómónt, négyakkora, mint AK . S minthogy AK az AB és BD

közötti téglalap – egyenlő ugyanis BK a BD -vel –, így az AB és BD közötti téglalap négyszerese négyakkora, mint AK . De megmutattuk azt is, hogy az STU gnómón négyakkora, mint AK . Az AB és BD közötti téglalap négyszerese tehát egyenlő az STU gnómónnal (1. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az AC oldalú négyzettel egyenlő OH -t, így az AB és BD által közrefogott téglalap négyszerese meg az AC oldalú négyzet együtt egyenlő az STU gnómónnal és OH -val (2. Ax.). Az STU gnómón és OH viszont kiadja a teljes $AEFD$ négyzetet, s ennek oldala AD . Az AB és BD közötti téglalap négyszerese meg az AC oldalú négyzet tehát egyenlő az AD oldalú négyzettel. BD viszont egyenlő BC -vel, az AB és BC által közrefogott téglalap négyszerese meg az AC oldalú négyzet tehát együtt egyenlő az AD oldalú, azaz az AB és BC összegével rajzolt négyzettel.

Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyik része által közrefogott téglalap négyszerese meg a másik részére emelt négyzet együtt egyenlő a teljes szakasz és az előbb említett rész összegére emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

II. 9. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részeire emelt négyzetek (együtt) kétakkorák, mint a szakasz felére és az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzetek.**

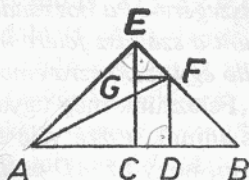
Osszunk ugyanis valamely AB szakaszt ketté egyenlő részekre a C (I. 10.), egyenlőtlenekre pedig a D pontban. Azt állítom, hogy az AD és DB oldalú négyzetek (együtt) kétakkorák, mint az AC és CD oldalú négyzetek.

Húzzuk meg ugyanis C -ből AB -hez derékszögben CE -t (I. 11.), és legyen CE az AC és a CB szakasszal egyenlő (I. 3. és 1. Ax.), és húzzuk meg EA -t, EB -t, és húzzuk meg D -ből CE -vel párhuzamosan DF -et, F -ből pedig AB -vel párhuzamosan FG -t (I. 31.), és húzzuk meg AF -et. Minthogy egyenlő AC a CE -vel, egyenlő az EAC szög is az AEC szöggel (I. 5.). S minthogy derékszög a C -nél levő szög, a két másik szög, EAC és AEC (együtt) egy derékszöggel egyenlő (I. 32. és 3. Ax.) és egyenlők, egy fél derékszög tehát mind a kettő, az AEC és az EAC szög. Ugyanezért mind a két CEB , EBC szög is egy fél derékszög. A teljes

AEB szög tehát derékszög. S minthogy $GEF (= CEB)$ egy fél derékszög, EGF pedig derékszög – egyenlő ugyanis a szemközti ECB belső szöggel (I. 29.) –, így a harmadik szög, EFG , egy fél derékszög (I. 32.); egyenlő tehát a GEF szög EFG -vel (4. P. és 6. Ax.), úgyhogy az EG oldal is egyenlő GF -fel (I. 6.). Hasonlóképpen, minthogy a B -nél levő szög egy fél derékszög, EDB pedig derékszög – ismét egyenlő ugyanis a szemközti ECB belső szöggel (I. 29.) –, így a harmadik szög, BCD , egy fél derékszög (I. 32.); egyenlő tehát a B -nél levő szög DFB -vel, úgyhogy az FD oldal is egyenlő a DB oldallal (I. 6.). S minthogy egyenlő AC a CE -vel, egyenlő az AC oldalú négyzet is a CE oldalúval, az AC és CE oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az AC oldalú. Az AC és CE oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az EA oldalú – derékszög ugyanis ACE (I. 47.) –, így az EA oldalú kétakkora, mint az AC oldalú. Ismét, minthogy egyenlő EG a GF -fel, egyenlő az EG oldalú négyzet is a GF oldalúval, az EG és GF oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint a GF oldalú négyzet. Az EG és GF oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az EF oldalú négyzet (I. 47.), az EF oldalú négyzet tehát kétakkora, mint a GF oldalú. De GF egyenlő CD -vel (I. 34.), az EF oldalú négyzet tehát kétakkora, mint a CD oldalú. Viszont az EA oldalú négyzet is kétakkora, mint az AC oldalú, az EA és EF oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az AC és CD oldalú négyzetek. Az EA és EF oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az AF oldalú – derékszög ugyanis AEF (I. 47.) –, az AF oldalú négyzet tehát kétakkora, mint az AC és CD oldalúak. Az AF oldalúval viszont egyenlők az AD és DF oldalúak – derékszög ugyanis a D -nél levő szög (I. 47.) –, az AD és DF oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az AC és CD oldalúak. De DF egyenlő DB -vel, az AD és DB oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az AC és CD oldalú négyzetek.

Ha tehát egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részeire emelt négyzetek (együtt) kétakkorák, mint a szakasz felére és az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzetek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 60. L.

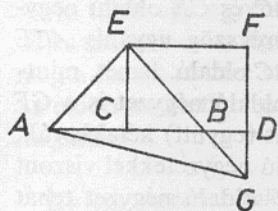


II. 10. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt megfelelünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összegére és a hozzáadandóra emelt két négyzet együttvéve kétakkora, mint a szakasz felére meg a szakasz feléből és a hozzáadandóból összeálló egy szakaszra emelt négyzetek.**

Felezzünk meg ugyanis valamely AB szakaszt a C pontban (I. 10.), és adjunk hozzá vele egy egyenesben valamely BD szakaszt. Azt állítom, hogy az AD és DB oldalú négyzetek (együtt) kétakkorák, mint az AC és CD oldalú négyzetek.

Húzzuk ugyanis C -ből AB -vel derékszögben CE -t (I. 11.), és legyen az AC és a CB szakasszal egyenlő (I. 3. és 1. Ax.), és húzzuk meg



EA -t és EB -t, és húzzuk E -n át AD -vel párhuzamosan EF -et, D -n át pedig CE -vel párhuzamosan FD -t (I. 31.). S minthogy a párhuzamos CE , FD egyeneseket metszi valamely EF egyenes, a CEF , EFD szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 29.), az FEB , EFD szögek tehát (együtt) kisebbek két derékszögnél (8. és 4. Ax.). De a két derékszögnél kisebb szögek felől meghosszabb-

bított egyenesek találkoznak (5. P.), EB és FD tehát meghosszabbítva találkozni fog a B és D pontok oldalán. Legyenek meghosszabbítva és találkozzanak G -ben, és húzzuk meg AG -t.

S minthogy egyenlő AC a CE -vel, egyenlő az EAC szög is AEC -vel (I. 5.); és derékszög a C -nél levő szög, egy fél derékszög tehát mind a két EAC , AEC szög (I. 32., 3. és 6. Ax.). Ugyanezért mind a két CEB , EBC szög is egy-egy fél derékszög, derékszög ugyanis AEB . S minthogy EBC egy fél derékszög, egy fél derékszög DBG is (I. 15.). De BDG is derékszög – egyenlő ugyanis DCE -vel, mert váltószögek (I. 29.) –, a maradék DGB tehát egy fél derékszög (I. 32.). A DGB szög tehát egyenlő DBG -vel (4. P. és 6. Ax.), úgyhogy a BD oldal is egyenlő a GD oldallal (I. 6.). Ismét, minthogy EGF ($= DGB$) egy fél derékszög, az F -nél levő szög pedig derékszög – egyenlő ugyanis a szemköztí C -nél levő szöggel (I. 34.) –, így a maradék FEG egy fél derékszög, egyenlő tehát az EGF szög FEG -vel, úgyhogy a GF oldal

is egyenlő az EF oldallal (I. 6.). S minthogy [egyenlő EC az AC -vel], egyenlő az EC oldalú négyzet [is] az AC oldalúval, így a CE és AC oldalú négyzetek (együtt) kétakkorák, mint az AC oldalú. A CE és AC oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az EA oldalú (I. 47.), az EA oldalú négyzet tehát kétakkora, mint az AC oldalú (I. Ax.). Ismét, minthogy egyenlő GF az EF -fel, egyenlő a GF oldalú négyzet is az FE oldalúval, a GF és EF oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az EF oldalú. A GF és EF oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az EG oldalú (I. 47.), az EG oldalú tehát kétakkora, mint az EF oldalú. EF viszont egyenlő CD -vel (I. 34.), az EG oldalú négyzet tehát kétakkora, mint a CD oldalú. Megmutattuk azt is, hogy az EA oldalú kétakkora, mint az AC oldalú, az AE és EG oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az AC és CD oldalúak (2. Ax.). Az AE és EG oldalú négyzetekkel viszont egyenlő az AG oldalú négyzet (I. 47.), az AG oldalú tehát kétakkora, mint az AC és CD oldalúak. Az AG oldalúval viszont egyenlők az AD és DG oldalúak (I. 47.), tehát az AD és DH oldalú négyzetek (együtt) kétakkorák, mint az AC és CD oldalú négyzetek. DG viszont egyenlő DB -vel, az AD és DB oldalú négyzetek tehát (együtt) kétakkorák, mint az AC és CD oldalúak.

Ha tehát egy egyenesszakaszt megfelezzünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összegére és a hozzáadandóra emelt két négyzet együttevő kétakkora, mint a szakasz felére és a szakasz feléből meg a hozzáadandóból összeálló egy szakaszra emelt négyzetek. Éppen ezt kellett megmutatni.

II. 11. Tétel

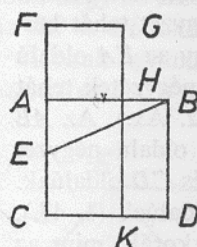
*Osszunk úgy ketté egy adott szakaszt, hogy a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő legyen a másik részre emelt négyzettel!**

Legyen AB az adott szakasz. Az AB -t kell tehát úgy kettéosztani, hogy a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő legyen a másik részre emelt négyzettel.

Legyen ugyanis $ABDC$ az AB oldallal szerkesztett négyzet (I. 46.), és legyen E az AC felezőpontja (I. 10.), és húzzuk meg BE -t, és hosz-

szabbitsuk meg AC -t az F pontig; mérjük föl a BE -vel egyenlő EF -et (I. 3.), és legyen FH az AF oldalal szerkesztett négyzet (I. 46.), és hosszabbitsuk meg GH -t K -ig. Azt állítom, hogy H úgy osztja ketté AB -t, hogy az AB és BH által közrefogott téglalap egyenlő az AH oldalú négyzettel.

Minthogy ugyanis AC -t megfeleztük E -ben, és hozzáadtuk AF -et, így a CF és AF által közrefogott téglalap meg az AE oldalú négyzet együtt egyenlő az EF oldalú négyzettel (II. 6.). EF viszont egyenlő



EB -vel, tehát a CF és AF közötti téglalap meg az AE oldalú négyzet együtt egyenlő az EB oldalú négyzettel. De az EB oldalú négyzettel egyenlő az AB és AE oldalú négyzetek összege – derékszög ugyanis az A -nál levő szög (I. 47.) –, a CF és AF által közrefogott téglalap meg az AE oldalú négyzet tehát együtt egyenlő az AB és AE oldalú négyzetekkel (1. Ax.). Vonjuk le a közös AE oldalú négyzetet, így megmarad CF és AF által közrefogott téglalap egyenlő az AB oldalú négyzettel (3.

Ax.). S a CF és AF közötti téglalap FK , mert egyenlő AF az FG -vel, az AB oldalú négyzet pedig AD , tehát FK egyenlő AD -vel. Vonjuk le a közös AK -t, így a maradék FH egyenlő HD -vel (3. Ax.). S HD az AB és BH közötti téglalap, mert egyenlő AB a BD -vel, FH pedig az AH oldalú négyzet, az AB és BH által közrefogott téglalap tehát egyenlő az AH oldalú négyzettel.

Az adott AB szakaszt tehát úgy osztottuk ketté a H pontban, hogy az AB és BH által közrefogott téglalap egyenlő az AH oldalú négyzettel. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 10.

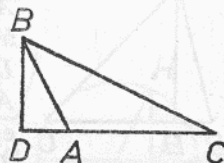
II. 12. Tétel

*A tompaszögű háromszögekben a tompaszöggel szemközti oldalra emelt négyzet nagyobb a tompaszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegénél, mégpedig annak a téglalapnak a kétszeresével, amelyet a tompaszög melletti egyik oldal és a szemközti csúsból az erre bocsátott merőleges talppontja és a tompaszög csúcsa közötti – külső – szakasz fog közre.**

Legyen ABC egy tompaszögű háromszög, melynek BAC a tompa-

szöge, és bocsássunk a B pontból CA meghosszabbítására egy BD merőleget (I. 12.). Azt állítom, hogy a BC oldalú négyzet nagyobb a BA és CA oldalú négyzeteknél, mégpedig a CA és AD által közrefogott téglalap kétszeresével.

Mínthogy ugyanis a CD szakasz ketté van osztva a tetszőleges A pontban, így a CD oldalú négyzet egyenlő a CA és AD oldalú négyzetekkel és a CA és AD által közrefogott téglalap kétszeresével (II. 4.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) a BD oldalú négyzetet, így a CD és BD oldalú négyzetek (együtt) egyenlők a CA , AD , és BD oldalú négyzetekkel és a CA és AD közötti téglalap kétszeresével (2. Ax.). Azonban a CD és BD oldalú négyzetekkel egyenlő a BC oldalú – derékszög ugyanis a D -nél levő szög (I. 47.) –, az AD és BD oldalúakkal pedig egyenlő a BA oldalú (I. 47.), a BC oldalú négyzet tehát egyenlő a CA és BA oldalú négyzetekkel és a CA és AD közötti téglalap kétszeresével, úgyhogy a BC oldalú négyzet a CA és BA oldalú négyzeteknél nagyobb, mégpedig a CA és AD által közrefogott téglalap kétszeresével.



A tompaszögű háromszögekben tehát a tompaszöggel szemközi oldalra emelt négyzet nagyobb a tompaszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegénél, mégpedig annak a téglalapnak a kétszeresével, amelyet a tompaszög melletti egyik oldal és az erre bocsátott merőleges talppontja és a tompaszög csúcsa közötti – külső – szakasz fog közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 17.

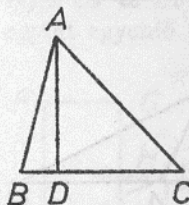
II. 13. Tétel

*A hegyesszögű háromszögekben az (egyik) hegyesszöggel szemközi oldalra emelt négyzet kisebb a hegyesszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegénél, mégpedig (kisebb) annak a téglalapnak a kétszeresével, amelyet a hegyesszög melletti egyik oldal és a (szemközi csúcsból) az erre bocsátott merőleges talppontja és a hegyesszög csúcsa közötti – belső – szakasz fog közre.**

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek B -nél levő szöge hegyesszög, és bocsássunk az A pontból BC -re egy AD merő-

legest (I. 12.). Azt állítom, hogy az AC oldalú négyzet kisebb a BC és BA oldalú négyzetek összegénél, mégpedig a BC és BD által közrefogott téglalap kétszeresével.

Minthogy ugyanis a BC szakasz ketté van osztva a tetszőleges D pontban, így a BC és BD oldalú négyzetek (együtt) egyenlők a BC és BD által közrefogott téglalap kétszeresének és a DC oldalú négyzetnek az összegével (II. 7.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az AD oldalú négyzetet, így a BC , BD és AD oldalú négyzetek (együtt) egyenlők a BC és BD által közrefogott téglalap kétszeresének és az AD , DC oldalú négyzeteknek az összegével (2. Ax.). Azonban a BD és AD oldalú négyzetek összegével egyenlő a BA oldalú négyzet – derékszög ugyanis a D -nél levő szög (I. 47.) –, az AD és DC oldalú



négyzetek összegével pedig egyenlő az AC oldalú (I. 47.), a BC és BA oldalú négyzetek tehát (együtt) egyenlők az AC oldalú négyzetnek és a BC és BD közötti téglalap kétszeresének az összegével, úgyhogy az AC oldalú négyzet önmagában kisebb a BC és BA oldalú négyzeteknél, mégpedig a BC és BD által közrefogott téglalap kétszeresével.

A hegyesszögű háromszögekben tehát a hegyesszöggel szemkötti oldalra emelt négyzet kisebb a hegyesszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegénél, mégpedig annak a téglalapnak a kétszeresével, amelyet a hegyesszög melletti egyik oldal és az erre bocsátott merőleges talppontja és a hegyesszög csúcsa közötti – belső – szakasz fog közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

II. 14. Tétel

*Szerkesszünk adott egyenes vonalú idommal (I. 19. D.) egyenlő négyzetet!**

Legyen A az adott egyenes vonalú idom. Az A egyenes vonalú idommal kell tehát egyenlő négyzetet szerkeszteni.

Szerkesszünk ugyanis egy, az A egyenes vonalú idommal egyenlő BD derékszögű paralelogrammát (azaz téglalapot; I. 45.). Ha egyenlő BE az ED -vel, készen vagyunk a feladattal, ugyanis megszerkesztettük az A egyenes vonalú idommal egyenlő BD négyzetet; ha pedig nem,

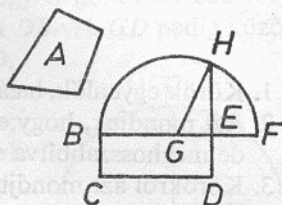
akkor BE és ED egyike nagyobb. Legyen BE a nagyobb, és hosszabbítsuk meg F -ig, és mérjük föl az ED -vel egyenlő EF -et (I. 3.), és legyen G a BF felezőpontja (I. 10.), BHF pedig a G középpontú és a GB , GF távolságok egyikével rajzolt félkör (3. P.), és hosszabbítsuk meg ED -t H -ig, és húzzuk meg GH -t.

Mínthogy tehát a BF szakasz ketté van osztva egyenlő részekre a G , nem egyenlőkre pedig az E pontban, így a BE és EF által közrefogott téglalap meg az EG oldalú négyzet együtt egyenlő a GF oldalú négyzettel (II. 5.). GF viszont egyenlő GH -val, a BE és EF közötti téglalap meg az EG oldalú négyzet tehát együtt egyenlő a GH oldalú négyzettel. A GH oldalú négyzettel viszont egyenlők a HE és EG oldalú négyzetek (I. 47.), a BE és EF közötti téglalap meg az EG oldalú négyzet tehát együtt egyenlő a HE és EG oldalú négyzetekkel.

Vonjuk le a közös EG oldalú négyzetet, így a megmaradó BE és EF közötti téglalap egyenlő a HE oldalú négyzettel (3. Ax.). Azonban a BE és EF közötti téglalap BD , mert EF egyenlő ED -vel. A BD paralelogramma tehát egyenlő a HE oldalú négyzettel. Egyenlő viszont BD az A egyenes vonalú idommal, az A egyenes vonalú idom is egyenlő tehát a HE oldallal szerkesztendő négyzettel.

Megadtunk tehát egy, az adott A egyenes vonalú idommal egyenlő, HE oldallal szerkesztendő négyzetet. Éppen ezt kell megtenni.

F.: X. 54–55., 91., 95–96.



Harmadik könyv

Definíciók

1. Körök egyenlők, ha átmérőik egyenlők vagy a sugaraik egyenlők.*
2. Azt mondjuk, hogy egy egyenes érint egy kört, ha metszi* a kört, de meghosszabbítva sem szeli át.
3. Körökről azt mondjuk, hogy érintik egymást, ha metszik, de nem szelik át egymást.
4. Egy kör húrjairól* akkor mondjuk, hogy egyenlő távol vannak a középponttól, ha a középpontból rájuk bocsátott merőlegesek (I. 12.) egyenlők.
5. Hogy távolabb van (a középponttól), azt arról mondjuk, amelyikhez a nagyobb (azaz hosszabb) merőleges vezet.
6. Az egy egyenes (húr) és (a hozzá tartozó) körív által közrefogott alakzat körszelet.
7. A körszelet szöge az egyenes és a körív által közrefogott szög.*
8. Ha egy körszelethez tartozó íven választunk egy pontot, és belőle a körszelet alapegyenesének végpontjaiba egyeneseket húzunk, akkor a meghúzott egyenesek által közrefogott szög körszeletbeli szög.*
9. Ha egy szög szárai kimetszenek egy körívet, akkor azt mondjuk, hogy a szög ezen (ti. a köríven) nyugszik.*
10. Ha egy körben fölveszünk egy középponti szöget, akkor a szög szárai és az általuk kimetszett körív által közrefogott alakzat körcikk.*
11. Körszeletek hasonlóak, ha egyenlő szögeket fogadnak be, vagy (más kifejezéssel) ha a bennük levő szögek (8. D.) egyenlők egymással.*

III. 1. Tétel

*Keressük meg adott kör(vonal) középpontját!**

Legyen ABC az adott kör. Az ABC körnek kell tehát megkeresni a középpontját.

Húzzuk meg egy tetszőleges AB szelőjét (azaz húrt), ennek legyen D a felezőpontja (I. 10.); emeljük D -ből AB -re a DC merőleget (I. 11.), és hosszabbítsuk meg E -ig, és legyen CE felezőpontja F (I. 10.). Azt állítom, hogy F középpontja az ABC körnek.

Ha ugyanis nem az, akkor tegyük föl, hogy G az, és húzzuk meg GA -t, GD -t és GB -t. Minthogy egyenlő AD a DB -vel, GD pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), AD , GD és GD , DB páronként egyenlő; és a GA alap egyenlő a GB alappal – sugarak ugyanis (I. 15. D.) –; az ADG szög tehát egyenlő a GDB szöggel (I. 8.). De ha egy egyenesre egy egyenest állítunk úgy, hogy egymással egyenlő mellékszögek keletkezzenek, akkor a két egyenlő szög derékszög (I. 10. D.), derékszög tehát a GDB szög. Viszont FDB is derékszög, egyenlő tehát az FDB szög GDB -vel (4. P.), a nagyobb a kisebbel (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. G tehát nem középpontja az ABC körnek. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egyetlen más pont sem, kivéve F -et.

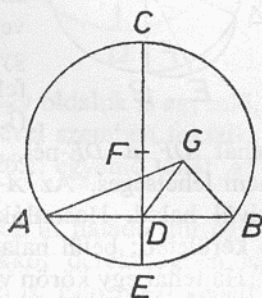
Az F pont tehát középpontja az ABC körnek.

F.: III. 2-4., 7-8., 11-14., 17., 21., 28-29., 31., 35-37.; IV. 2., stb.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy körben valamely húr egy másikat derékszögben felez, akkor a felező húron van a kör középpontja. Éppen ezt kellett megtenni.*

F.: III. 9-10.

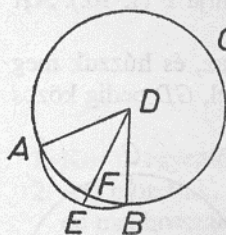


III. 2. Tétel

Ha egy körön választunk két tetszőleges pontot, akkor a pontokra illeszkedő szakasz a körön belül halad.

Legyen ABC egy kör, és A, B a kerületén tetszőlegesen választott pontok. Azt állítom, hogy az A -ból B -be vezető szakasz a körön belül halad.

Tegyük föl ugyanis, hogy ellenkezőleg, a körön kívül halad, mint AEB , és vegyük föl az ABC kör középpontját (III. 1.) – ez legyen D –, s húzzuk meg DA -t, DB -t és a (kört) metsző DFE -t. Minthogy tehát egyenlő DA a DB -vel (I. 15. D.), egyenlő a DAE



C szög is a DBE szöggel (I. 5.); s minthogy a DAE háromszögnek meg van hosszabbítva az egyik oldala, AEB , így a DEB szög nagyobb a DAE szögnél (I. 16.). Egyenlő viszont DAE a DBE -vel; nagyobb tehát a DEB szög DBE -nél. A nagyobb szöggel szemben viszont nagyobb oldal fekszik, nagyobb tehát a DB oldal a DE oldalnál (I. 19.). DB viszont egyenlő DF -fel, nagyobb

tehát DF a DE -nél, a kisebb a nagyobb nál (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Az A -ból B -be vezető szakasz tehát nem a körön kívül halad. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy nem is magán a kerületen; belül halad tehát.

Ha tehát egy körön választunk két tetszőleges pontot, akkor a pontokra illeszkedő szakasz a körön belül halad. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 13., 16. K.

III. 3. Tétel

Ha egy körben valamely, a középponton át haladó húr egy nem a középponton át haladó húrt felez, akkor derékszögben is metszi; és ha derékszögben metszi, akkor felezi is.

Legyen ABC egy kör, és benne valamely, a középponton át haladó CD húr felezzon az F pontban egy, nem a középponton át haladó AB húrt. Azt állítom, hogy derékszögben is metszi.

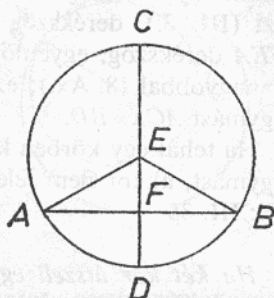
Vegyük föl ugyanis az ABC kör középpontját (III. 1.) – ez legyen E –, és húzzuk meg EA -t, EB -t.

Minthogy egyenlő EA az EB -vel, FE pedig közös (oldal), így két-két (oldal) egyenlő. És az EA alap egyenlő az EB alappal; az AFE szög tehát egyenlő BFE szöggel (I. 8.). De ha egy egyenesre egy egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkezzenek, akkor a két

egyenlő szög derékszög (I. 10. D.); derékszög tehát mindkét szög, AFE és BFE . A középponton át haladó CD tehát, amely felezi a nem a középponton át haladó AB -t, derékszögben is metszi azt.

Másrészt, merte CD az AB -t derékszögben. Azt állítom, hogy felezi is, azaz hogy egyenlő AF az FB -vel.

Készítsük el ugyanazt az ábrát, mint az előbb. Ekkor, minthogy egyenlő EA az EB -vel, egyenlő az EAF szög is EBF -fel (I. 5.). De egyenlő az AFE derékszög is a BFE derékszöggel (4. P.), EAF és EFB tehát olyan két háromszög, melynek két-két szöge (páronként) egyenlő, és egy-egy oldaluk is egyenlő, a közös EF , amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik; tehát a többi oldal is (páronként) egyenlő (I. 26.); egyenlő tehát AF az FB -vel.



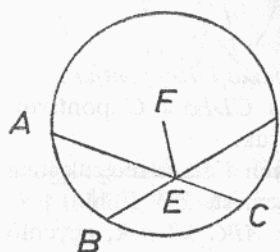
Ha tehát egy körben valamely, a középponton át haladó húr egy, nem a középponton át haladó húr felez, akkor derékszögben is metszi; és ha derékszögben metszi, akkor felezi is. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 4., 14., 35–36.; XII. 16.

III. 4. Tétel

Ha egy körben két, nem a középponton át haladó húr metszi egymást, akkor nem felezik egymást.

Legyen $ABCD$ egy kör, és merte benne egymást két, nem a középponton át haladó húr, AC és BD , az E pontban. Azt állítom, hogy nem felezik egymást.



Tegyük föl ugyanis, hogy felezik egymást, és így egyenlő AE az EC -vel, BE pedig ED -vel, és vegyük föl az $ABCD$ kör középpontját (III. 1.) – ez legyen F –, és húzzuk meg FE -t.

Minthogy tehát valamely, a középponton

át haladó FE húr egy nem a középponton át haladó AC húrt felez, így derékszögben is metszi (III. 3.), derékszög tehát FEA . Ismét, minthogy valamely FE húr egy BD húrt felez, derékszögben is metszi (III. 3.), derékszög tehát FEB . De megmutattuk azt is, hogy FEA derékszög, egyenlő tehát FEA az FEB szöggel (4. P.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Nem felezik tehát egymást AC és BD .

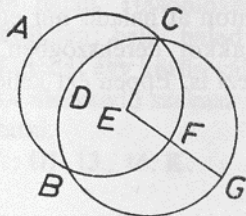
Ha tehát egy körben két, nem a középponton át haladó húr metszi egymást, akkor nem felezik egymást. Éppen ezt kellett megmutatni. F.: III. 35

III. 5. Tétel

Ha két kör átszeli egymást, akkor nem ugyanaz a középpontjuk.

Szelve át ugyanis egymást két kör, ABC és CDG , a B , C pontokban. Azt állítom, hogy nem ugyanaz a középpontjuk.

Tegyük föl ugyanis, hogy ugyanaz – ez legyen E –, és húzzuk meg EC -t, és a (kört) metsző tetszőleges EFG egyenest.



Minthogy az E pont középpontja az ABC körnek, egyenlő EC az EF -fel (I. 15. D.). Ismét, minthogy az E pont középpontja a CDG körnek, egyenlő EC az EG -vel (ua.). De megmutattuk, hogy EC az EF -fel is egyenlő; EF is egyenlő tehát EG -vel (1. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Az E pont tehát nem (közös) közép-

pontja az ABC , CDG köröknek.

Ha tehát két kör átszeli egymást, akkor nem ugyanaz a középpontjuk. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 10.

III. 6. Tétel

Ha két kör érinti egymást, akkor nem ugyanaz a középpontjuk.

Érintse egymást ugyanis két kör, ABC és CDE , a C pontban. Azt állítom, hogy nem ugyanaz a középpontjuk.

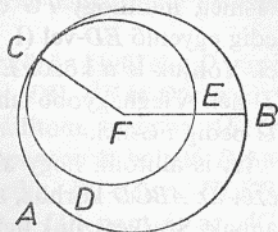
Tegyük föl ugyanis, hogy ugyanaz – ez legyen F –, és húzzuk meg FC -t és a tetszőleges (a kört) metsző FEB egyenest.

Minthogy tehát az F pont középpontja az ABC körnek, egyenlő

FC az FB -vel (I. 15. D.). Ugyanígy minthogy az F pont középpontja a CDE körnek, egyenlő FC az FE -vel. De megmutattuk, hogy FC az FB -vel is egyenlő; FE is egyenlő tehát FB -vel (1. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Az F pont tehát nem (közös) középpontja az ABC , CDE köröknek.

Ha tehát két kör érinti egymást, akkor nem ugyanaz a középpontjuk. Éppen ezt kellett megmutatni.

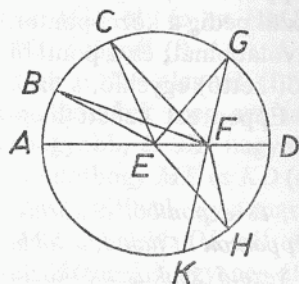
F.: III. 11., 13.



III. 7. Tétel

Ha egy kör átmérőjén választunk egy pontot, amely nem középpontja a körnek, és e pontból a körhöz szakaszokat húzunk, akkor a legnagyobb az a szakasz lesz, amelyiken a középpont van; a legrövidebb az (átmérő) maradék része, a többi szakasz közül pedig a középponton áthaladóhoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál; és a pontból a körhöz vezető szakaszok közül csak kettő (-kettő) egyenlő, s ezek a legrövidebb szakasz két oldalán vannak.

Legyen $ABCD$ egy kör, AD pedig egy átmérője, és válasszunk AD -n egy F pontot, amely nem középpontja a körnek, a kör középpontja pedig legyen E (III. 1.), és húzzunk F -ből az $ABCD$ körhöz valamely FB , FC , FG szakaszokat. Azt állítom, hogy FA a legnagyobb, FD a legkisebb, a többiek közül pedig FB nagyobb FC -nél, FC pedig FG -nél.



Húzzuk meg ugyanis BE -t, CE -t és GE -t.

Minthogy minden háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál (I. 20.), így BE és EF (együtt) nagyobb FB -nél. AE viszont egyenlő BE -vel (I. 15. D.), [BE és EF tehát (együtt) egyenlő FA -val;] nagyobb tehát FA az FB -nél. Ismét, mint-hogy egyenlő BE a CE -vel (ua.), EF pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), BE , EF és CE , EF (páronként) egyenlő. De még a BEF

szög is nagyobb a CEF szögénél (8. Ax.); az FB alap tehát nagyobb az FC alapnál (I. 24.). Ugyanezért FC is nagyobb FG -nél.

Ismét, minthogy FG és EF (együtt) nagyobb GE -nél (I. 20.), GE pedig egyenlő ED -vel (I. 15. D.), így FG és EF (együtt) nagyobb ED -nél. Vonjuk le a közös EF -et; így a maradék FG nagyobb a maradék FD -nél. A legnagyobb tehát FA , a legkisebb FD , s FB nagyobb FC -nél, FC pedig FG -nél.

Azt is állítom, hogy az F pontból csak két(-két) egyenlő szakasz vezet az $ABCD$ körhöz, s ezek a legrövidebb szakasz, FD két oldalán vannak. Szerkesszünk ugyanis az EF egyenesre, a rajta levő E ponthoz a GEF szöggel egyenlő FEH szöget (I. 23.), és húzzuk meg FH -t.

Minthogy tehát egyenlő GE az EH -val (I. 15. D.), EF pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), GE , EF és EH , EF (páronként) egyenlő; és a GEF szög egyenlő az FEH szöggel; az FG alap tehát egyenlő az FH alappal (I. 4.). Azt állítom, hogy más FG -vel egyenlő szakasz nem vezet a körhöz az F pontból. Tegyük föl ugyanis, hogy vezet, FK . Minthogy FK egyenlő FG -vel, FH azonban FG -vel egyenlő, így FK is egyenlő FH -val, (azaz) a középponton át haladóhoz közelebbi egyenlő a távolabbival; ez viszont nem lehetséges. Csak egy szakasz (vezet) tehát (mind a két oldalon a körhöz).

Ha tehát egy kör átmérőjén választunk egy pontot, amely nem középpontja a körnek, és e pontból a körhöz szakaszokat húzunk, akkor legnagyobb az a szakasz lesz, amelyiken a középpont van, a legrövidebb az (átmérő) maradék része, a többi szakasz közül pedig a középponton át haladóhoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál; és a pontból a körhöz vezető szakaszok közül csak kettő(-kettő) egyenlő, s ezek a legrövidebb szakasz két oldalán vannak. Éppen ezt kellett megmutatni.

III. 8. Tétel

Ha egy körön kívül választunk egy pontot, és e pontból a körhöz szakaszokat húzunk úgy, hogy egyikük a középponton át halad, a többi pedig tetszőlegesen, akkor a homorú ívhez vezető szakaszok közül a legnagyobb a középponton át haladó, és a többi szakasz közül a középponton át haladóhoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál, a domború ívhez vezető szakaszok közül pedig a pont és az átmérő közötti

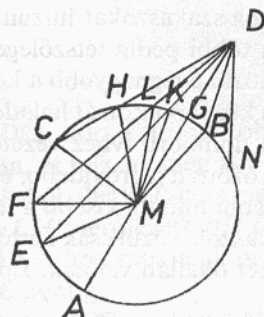
a legrövidebb, és a többi szakasz közül a legrövidebbhez közelebbi mindig kisebb a távolabbinál; és a pontból a körhöz vezető szakaszok közül csak kettő(-kettő) egyenlő, s ezek a legrövidebb szakasz két oldalán vannak.

Legyen ABC egy kör, és válasszunk az ABC körön kívül egy D pontot, és húzzunk belőle (a körhöz) valamely DA , DE , DF és DC szakaszokat. DA haladjon a középponton át. Azt állítom, hogy az $AEFC$ homorú ívhez vezető szakaszok közül a középponton át haladó DA a legnagyobb, és DE nagyobb DF -nél, DF pedig DC -nél, a $HLKG$ domború ívhez vezető szakaszok közül viszont a (D) pont és az AG átmérő közötti DG a legkisebb, és a legkisebb szakaszhoz, DG -hez közelebbi mindig kisebb a távolabbinál, DK a DL -nél, DL pedig DH -nél.

Vegyük föl ugyanis az ABC kör középpontját (III. 1.) – ez legyen M –, és húzzuk meg ME -t, MF -et, MC -t, MK -t, ML -et és MH -t.

Minthogy egyenlő AM az EM -mel, adjuk hozzájuk közös (tagnak) MD -t, így DA egyenlő ME -vel meg MD -vel (2. Ax.). De ME és MD (együtt) nagyobb DE -nél (I. 20.), DA is nagyobb tehát DE -nél. Ismét, minthogy egyenlő ME az MF -fel, MD pedig közös (darab), így ME és MD (együtt) egyenlő MF -fel meg MD -vel; és az EMD szög nagyobb az FMD szögnél (8. Ax.). A DE alap tehát nagyobb a DF alapnál (I. 24.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy DF nagyobb DC -nél; DA tehát a legnagyobb, és DE nagyobb DF -nél, DF pedig DC -nél.

S minthogy MK és KD (együtt) nagyobb MD -nél (I. 20.), MG pedig egyenlő MK -val, így a maradék KD nagyobb a maradék GD -nél, úgyhogy GD kisebb DK -nál; s minthogy az MLD háromszög egyik oldalán, MD -n, két egyenes áll, MK és KD , (a háromszögon) belül, így MK és DK (együtt) kisebb, mint ML és LD (I. 21.); egyenlő viszont MK az ML -el, így a maradék DK kisebb a maradék DL -nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy DL kisebb DH -nél; DG tehát a legkisebb, és DK kisebb DL -nél, DL pedig DH -nél.



Azt is állítom, hogy a D pontból csak két (-két) egyenlő szakasz vezet a körhöz, s ezek a legkisebb szakasz, DG , két oldalán vannak. Szerkesszünk az MD egyenesre, a rajta levő M ponthoz, a KMD szöggel egyenlő DMB szöget (I. 23.), és húzzuk meg DB -t. Minthogy egyenlő MK az MB -vel, MD pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), KM , MD és BM , MD páronként egyenlő; és a KMD szög egyenlő a BMD szöggel, a DK alap tehát egyenlő a DB alappal (I. 4.). Azt állítom, hogy más DK -val egyenlő szakasz nem vezet a körhöz a D pontból. Tegyük föl ugyanis, hogy vezet, DN . Minthogy tehát DK a DN -nel egyenlő, azonban DK a DB -vel egyenlő, DB is egyenlő DN -nel, (azaz) a legkisebb szakaszhoz, DG -hez közelebbi egyenlő a távolabbival; erről viszont megmutattuk, hogy nem lehetséges. Nem vezet tehát több egyenlő szakasz az ABC körhöz a D pontból, mint kettő, mégpedig a legkisebb szakasz, DG két oldalán.

Ha tehát egy körön kívül választunk egy pontot, és e pontból a körhöz szakaszokat húzunk úgy, hogy egyikük a középponton át halad, a többi pedig tetszőlegesen, akkor a homorú ívhez vezető szakaszok közül a legnagyobb a középponton át haladó, és a többi szakasz közül a középponton át haladóhoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál, a domború ívhez vezető szakaszok közül pedig a pont és az átmérő közötti a legrövidebb, és a többi szakasz közül a legrövidebbhez közelebbi mindig kisebb a távolabbinál; és a pontból a körhöz vezető szakaszok közül csak kettő (-kettő) egyenlő, s ezek a legrövidebb szakasz két oldalán vannak. Éppen ezt kellett megmutatni.

III. 9. Tétel

Ha egy körön belül választunk egy pontot, és e pontból a körhöz több mint két egyenlő szakasz vezet, akkor a választott pont a kör középpontja.

Legyen ABC egy kör, D ezen belül egy pont, és vezessen D -ből több mint két egyenlő szakasz az ABC körhöz, DA , DB és DC . Azt állítom, hogy a D pont az ABC kör középpontja.

Húzzuk meg ugyanis AB -t, BC -t, és legyen E , ill. F a felezőpontjuk (I. 10.), és húzzuk meg ED -t, FD -t, majd hosszabbítsuk meg őket a G , K , H , L pontokig.

Minthogy tehát egyenlő AE az EB -vel, ED pedig közös (oldal), így e

két-két (oldal), AE , ED és BE , ED (páronként) egyenlő; és a DA alap egyenlő a DB alappal; így az AED szög egyenlő a BED szöggel (I. 8.). Derékszög tehát mind a két szög, AED és BED (I. 10. D.), GK tehát derékszögben felezi AB -t. Minthogy, ha egy körben valamely húr egy hűrt derékszögben felez, akkor a felező húron van a kör középpontja (III. 1. K.), így GK -n van a kör középpontja. Ugyanezért HL -en is rajta van az ABC kör középpontja. És a GK , HL egyeneseknek nincs más közös pontja, csak D , a D pont tehát középpontja az ABC körnek.

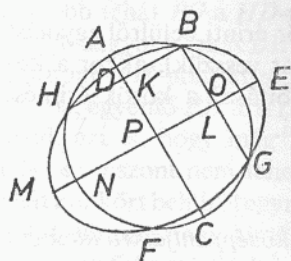
Ha tehát egy körön belül választunk egy pontot, és e pontból a körhöz több mint két egyenlő szakasz vezet, akkor a választott pont a kör középpontja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 25.

III. 10. Tétel

Kör kört nem szel át több mint két pontban.

Tegyük föl ugyanis, hogy az ABC kör a DEF kört kettőnél több pontban szeli át, B -ben, G -ben, F -ben és H -ban, és húzzuk meg BH -t, BG -t, s legyen K , L a felezőpontjuk (I. 10.), és K -ből, illetve L -ből emeljük egy-egy KC , LM merőleget BH -ra, illetve BG -re (I. 11), és hosszabbítsuk meg őket az A , illetve E pontig.



Minthogy tehát az ABC körben valamely AC húr egy BH hűrt derékszögben felez, így AC -n van az ABC kör középpontja (III. 1. K.). Ismét, minthogy ugyanabban az ABC körben valamely NO húr egy BG hűrt derékszögben felez, így NO -n van az ABC kör középpontja (ua.). De

megmutattuk, hogy AC -n is rajta van, és az AC , NO egyenesek semmilyen más pontban nem találkoznak, csak P -ben; a P pont tehát középpontja az ABC körnek. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy P a DEF körnek is középpontja; az egymást átszelő két körnek

tehát, ABC -nek és DEF -nek ugyanaz a P a középpontja; ez viszont nem lehetséges (III. 5.).

Nem szel át tehát kör kört több mint két pontban. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 24.

III. 11. Tétel

Ha két kör belülről érinti egymást és középpontjaikat vesszük, akkor a középpontjaikra illesztett szakasz meghosszabbítása a körök érintési pontjába vezet.

Érintse ugyanis egymást belülről két kör, ABC és ADE az A pontban, és vegyük az ABC körnek az F , az ADE körnek pedig a G középpontját (III. 1.). Azt állítom, hogy a G -ből F -re illesztett szakasz (III. 6., 1. P.) meghosszabbítása A -ba vezet.

Tegyük föl ugyanis, hogy nem, és haladjon mint FGH , és húzzuk meg AF -et, AG -t. Minthogy tehát AG és GF (együtt) nagyobb AF -nél (I. 20.), azaz FH -nál, vonjuk le a közös GF -et, így a maradék AG nagyobb a maradék GH -nál. AG viszont egyenlő GD -vel, GD is nagyobb tehát GH -nál, a kisebb a nagyobb nál (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Az F -ből G -re illesztett egyenes tehát nem máshol halad; így az A érintési ponton át halad.

Ha tehát két kör érinti belülről egymást [és középpontjaikat vesszük], akkor a középpontjaikra illesztett szakasz [meghosszabbítása] a körök érintési pontjába vezet. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 13.

III. 12. Tétel

*Ha két kör kívülről érinti egymást, akkor a középpontjaikra illesztett egyenes az érintési pontjukon át halad.**

Érintse ugyanis egymást kívülről két kör, ABC és ADE az A pontban, és vegyük föl az ABC körnek az F , az ADE körnek pedig a G középpontját (III. 1.). Azt állítom, hogy az F -ből G -re illesztett egyenes az A érintési ponton át halad,

Tegyük föl ugyanis, hogy nem, és haladjon mint $FCDG$, és húzzuk meg AF -et, AG -t.

Minthogy tehát az F pont középpontja az ABC körnek, egyenlő AF az FC -vel. Ismét, minthogy a G pont középpontja az ADE körnek, egyenlő AG a GD -vel. De megmutattuk azt is, hogy AF egyenlő FC -vel, így AF és AG (együtt) egyenlő FC -vel meg GD -vel, úgyhogy a teljes FG nagyobb, mint FC meg GD . Azonban kisebb is (I. 20.); ez viszont nem lehetséges. Nem igaz tehát, hogy az F -ből G -re illesztett egyenes nem halad át az A érintési ponton; áthalad tehát rajta.

Ha tehát két kör kívülről érinti egymást, akkor a középpontjaikra illesztett egyenes az érintési pontjukon át halad. Éppen ezt kellett megmutatni.

III. 13. Tétel

Kör kört nem érint egynél több pontban, akár belülről, akár kívülről érinti.

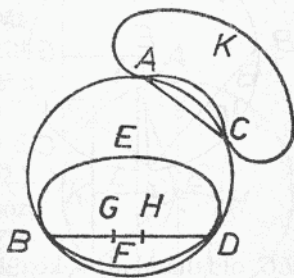
Tegyük föl ugyanis először, hogy az $ABCD$ kör az $EBFD$ kört belülről több mint egy pontban érinti, D -ben és B -ben.

Vegyük az $ABCD$ körnek a G , az $EBFD$ körnek pedig a H középpontját (III. 1.). A G -ből H -ra illesztett egyenes tehát a B és D pontokba vezet (III. 11.). Haladjon mint $BGHD$ (III. 6.). Minthogy a G pont középpontja az $ABCD$ körnek, egyenlő BG a GD -vel, nagyobb tehát BG a HD -nél (8. Ax.), még inkább nagyobb tehát BH a HD -nél. Ismét, minthogy a H pont középpontja az $EBFD$ körnek, egyenlő BH a HD -vel. De megmutattuk azt is, hogy még inkább nagyobb nála; ez viszont nem lehetséges, nem érint tehát kör kört belülről egynél több pontban.

Azt állítom, hogy kívülről sem.

Tegyük föl ugyanis, hogy az ACK kör az $ABCD$ kört kívülről egynél több pontban érinti, A -ban és C -ben, és húzzuk meg AC -t.

Minthogy tehát mind a két $ABCD$, ACK körvonalon tetszőlegesen választottunk két pontot, A -t és C -t, így a pontokra illesztett egyenes mind a két körön belül halad (III. 2.). Azonban az $ABCD$ körön belül



halad, az ACK körön viszont kívül; de ez lehetetlen, nem érint tehát kör kört kívülről egynél több pontban. És megmutattuk, hogy belülről sem.

Nem érint tehát kör kört egynél több pontban, akár belülről, akár kívülről érinti. Éppen ezt kellett megmutatni.

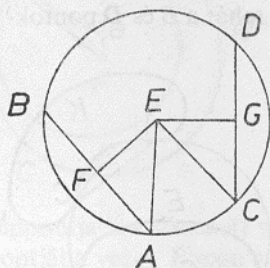
III. 14. Tétel

*Egy körben az egyenlő húrok egyenlő távol vannak a középponttól, és a középponttól egyenlő távol levő húrok egyenlők egymással.**

Legyen $ABCD$ valamely kör, és ebben legyenek AB és DC egyenlő húrok. Azt állítom, hogy AB és CD egyenlő távol vannak a középponttól.

Vegyük ugyanis az $ABCD$ kör középpontját (III. 1.) – ez legyen E –, és bocsássuk E -ből AB -re, illetve CD -re az EF , EG merőlegeseket (I. 12.), és húzzuk meg AE -t, EC -t.

Minthogy tehát valamely, a középponton átmenő húr, EF , egy, nem a középponton át haladó AB húr derékszögben metsz, felezi is azt (III. 3.). Egyenlő tehát AF az FB -vel, AB tehát kétszerese AF -nek.



Ugyanezért CD is kétszerese CG -nek; és AB egyenlő CD -vel, egyenlő tehát AF is CG -vel (6. Ax.). És minthogy egyenlő AE az EC -vel, egyenlő az AE oldalú négyzet is az EL oldalúval. Azonban az AE oldalú négyzettel egyenlő az AF és EF oldalúak összege – derékszög ugyanis az F -nél levő szög (I. 47.) –, az EC oldalúval pedig egyenlő az EG és GC oldalúak összege – derékszög ugyanis a G -nél levő szög (ua.) –, az AF és FE oldalú négyzetek tehát (együtt) egyenlők a CG és

EG oldalúakkal, s közülük az AF oldalú egyenlő a CG oldalúval – egyenlő ugyanis AF a CG -vel –, így a maradék EF oldalú négyzet egyenlő az EG oldalúval (3. Ax.), egyenlő tehát EF az EG -vel. De azt mondjuk, hogy húrok egy körben egyenlő távol vannak a középponttól, ha a középpontból rájuk bocsátott merőlegesek egyenlők (III. 4. D.), AB és CD tehát egyenlő távol vannak a középponttól.

Most pedig legyenek az AB , CD húrok egyenlő távol a középpont-

tól, azaz legyen egyenlő EF az EG -vel. Azt állítom, hogy AB is egyenlő CD -vel.

Készítsük el ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb. Ekkor hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy AB az AF -nek, CD pedig CG -nek a kétszerese. S minthogy egyenlő AE az EC -vel, egyenlő az AE oldalú négyzet az EC oldalával. Azonban az AE oldalú négyzettel egyenlő az EF és AF oldalúak összege, az EC oldalával pedig az EG és CG oldalúak összege (I. 47.). Az EF és AF oldalú négyzetek tehát (együtt) egyenlők az EG meg a CG oldalúakkal (1. Ax.), s közülük az EF oldalú négyzet egyenlő az EG oldalával – egyenlő ugyanis EF az EG -vel –, a maradék AF oldalú négyzet tehát egyenlő a CG oldalával (3. Ax.); egyenlő tehát AF a CG -vel; és AF -nek kétszerese AB , CG -nek kétszerese CD , egyenlő tehát AB a CD -vel (5. Ax.).

Egy körben tehát az egyenlő húrok egyenlő távol vannak a középponttól, és a középponttól egyenlő távol levő húrok egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

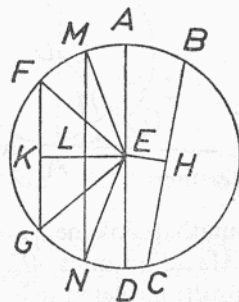
F.: III. 15.

III. 15. Tétel

Egy körben a legnagyobb húr az átmérő, a többi húr közül pedig a középponthoz közelebbi mindig nagyobb a távolabbinál.

Legyen $ABCD$ valamely kör és AD az egyik átmérője, E pedig a középpontja, és BC legyen közelebb az AD átmérőhöz, FG pedig távolabb tőle. Azt állítom, hogy AD a legnagyobb, és BC nagyobb FG -nél.

Bocsássuk ugyanis az E pontból BC -re és FG -re az EH , illetve EK merőlegeseket (I. 12.). És minthogy BC közelebb van a középponthoz, FG pedig távolabb van tőle, EK nagyobb EH -nél (III. 5. D.). Mérjük föl (EK -ra) az EH -vel egyenlő EL -t (I. 3.), és L -ből emeljünk EK -ra egy LM merőlegest (I. 11.), hosszabbítsuk meg N -ig, és húzzuk meg ME -t, EN -t, FE -t és EG -t.



Minthogy egyenlő EH az EL -lel, BC is egyenlő MN -nel (III. 14.). Ismét, minthogy egyenlő AE az ME -vel, ED pedig EN -nel, így AD egyenlő ME -vel meg EN -nel (2. Ax.). Azonban ME és EN (együtt)

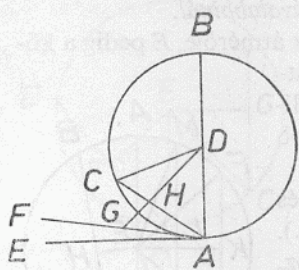
nagyobb MN -nél (I. 20.) [AD is nagyobb tehát MN -nél], MN pedig egyenlő BC -vel; AD tehát nagyobb BC -nél. És minthogy e két-két (oldal), ME , EN és FE , EG (páronként) egyenlő, és az MEN szög nagyobb az FEG szögnél, így az MN alap nagyobb az FG alapjánál (I. 24.). Azonban megmutattuk, hogy MN egyenlő BC -vel [BC is nagyobb tehát FG -nél]. A legnagyobb tehát az AD átmérő, és BC nagyobb FG -nél.

Valamely körben tehát a legnagyobb húr az átmérő, a többi húr közül pedig mindig a középponthoz közelebbi nagyobb a távolabbinál. Éppen ezt kellett megmutatni.

III. 16. Tétel

Egy kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön kívül halad, és az egyenes és a körív közötti területen nem halad más egyenes, és a félkör szöge minden egyenes vonalú hegyesszögnél nagyobb, a pót-szöge pedig kisebb.

Legyen ABC a D középpont és az AB átmérő körülötti kör. Azt állítom, hogy az AB -re az A végpontjában emelt merőleges (I. 11.) a körön kívül halad. Tegyük föl ugyanis, hogy nem, és haladjon belül, mint CA , és húzzuk meg DC -t.



Mínthogy egyenlő DA a DC -vel, a DAC szög is egyenlő az ACD szöggel (I. 5.). DAC viszont derékszög, derékszög tehát ACD is; így az ACD háromszög két szöge, DAC és ACD (együtt) két derékszöggel egyenlő; ez viszont nem lehetséges (I. 17.). Az A pontból AB -re emelt merőleges tehát nem a körön belül halad. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy nem is a körvonalon halad; kívül halad tehát.

Haladjon mint AE . Azt állítom, hogy az AE egyenes és a CHA ív közötti területen más egyenes nem halad.

Tegyük föl ugyanis, hogy halad, FA , és bocsássuk a D pontból FA -ra a DG merőleget (I. 12.). Mínthogy AGD derékszög, DAG pedig kisebb egy derékszögnél, így DA nagyobb DG -nél (I. 19.). DA viszont egyenlő DH -val; nagyobb tehát DH a DG -nél, a kisebb a nagyobb nál (8. Ax.);

ez viszont nem lehetséges. Az egyenes és a körív közötti területen tehát nem halad más egyenes.

Azt is állítom, hogy a félkör szöge, melyet az AB egyenes és a CHA ív fog közre (III. 7. D.), minden egyenes vonalú hegyesszögnél nagyobb, a pótiszöge pedig, melyet a CHA ív és az AE egyenes fog közre, minden egyenes vonalú hegyesszögnél kisebb.

Ha ugyanis léteznék egy olyan egyenes vonalú szög, amely nagyobb az AB egyenes és a CHA körív által közrefogott szögnél, de kisebb a CHA körív és az AE egyenes által közrefogott szögnél, akkor a CHA körív és az AE egyenes közötti területen egy olyan egyenes haladna, mely egy, az AB egyenes és a CHA ív által közrefogott szögnél nagyobb, de a CHA ív és az AE egyenes által közrefogott szögnél kisebb egyenes vonalú szöget alkotna. De ilyen egyenes nem haladhat; nem létezik tehát sem az AB egyenes és a CHA körív által közrefogott szögnél nagyobb, sem a CHA ív és az AE egyenes által közrefogott szögnél kisebb egyenes vonalú hegyesszög.

F.: IV. 4., 8., 13.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges érinti a kört [és hogy egy egyenes egy kört csak egy pontban érint, minthogy megmutattuk azt is, hogy a vele két pontban találkozó egyenes a belsejében halad (III. 2.)].

Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 17., 33., 37.; IV. 2-3., 7., 12.; XII. 16.

III. 17. Tétel

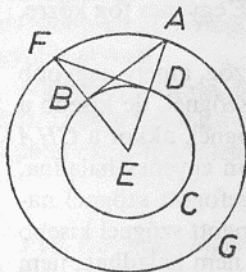
Húzzunk adott pontból adott körhöz érintő egyenest!

Legyen A az adott pont, BCD pedig az adott kör. Az A pontból kell tehát a BCD körhöz érintő egyenest húzni.

Vegyük föl a kör E középpontját (III. 1.), és húzzuk meg AE -t, és legyen AFG az E középpontú, AE távolsággal rajzolt kör, és D -ből emeljük AE -re a DF merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg EF -et, AB -t. Azt állítom, hogy az A pontból húzott AB egyenes érintője a BCD körnek.*

Minthogy ugyanis E középpontja a BCD és az AFG körnek, egyenlő AE az EF -fel, ED pedig EB -vel; így e két-két (oldal), AE , EB és EF ,

ED (páronként) egyenlő; és ugyanazt az E -nél levő (AEF) szöget fogják közre; a DF alap tehát egyenlő az AB alappal, és a DEF háromszög egyenlő az EBA háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő (I. 4.); egyenlő tehát az EDF szög EBA -val. EDF viszont derékszög, derékszög tehát EBA is. És EB egy sugár; de a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges érinti a kört (III. 16. K.), AB tehát érinti a BCD kört.



Az adott A pontból tehát az adott BCD körhöz egy AB érintő egyenest húztunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: III. 37.

III. 18. Tétel

Ha egy kört érint valamely egyenes, és a középpontból az érintési pontra egy egyenest illesztünk, akkor ez az egyenes merőleges lesz az érintőre.

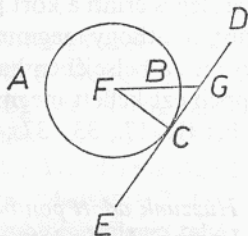
Érintse ugyanis valamely DE egyenes az ABC kört a C pontban, vegyük föl az ABC kör F középpontját (III. 1.), és illesszük F -ből C -re FC -t. Azt állítom, hogy FC merőleges DE -re.

Tegyük föl ugyanis, hogy nem az, és bocsássuk az F pontból DE -re az FG merőleget (I. 12.).

Minthogy tehát FGC derékszög, így FCG hegyesszög. A nagyobb szöggel szemben viszont nagyobb oldal fekszik (I. 19.), nagyobb tehát FC az FG -nél. De FC egyenlő FB -vel, nagyobb tehát FB is FG -nél, a kisebb a nagyobb nál (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. FG tehát nem merőleges DE -re. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egyetlen más egyenes sem, kivéve FC -t; FC merőleges tehát DE -re.

Ha tehát egy kört érint valamely egyenes, és a középpontból az érintési pontra egy egyenest illesztünk, akkor az az egyenes merőleges lesz az érintőre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 19., 36–37.; IV. 7.

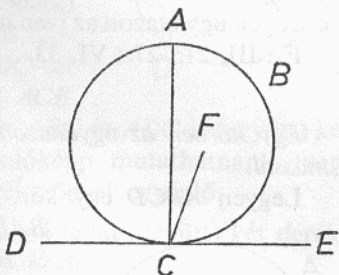


III. 19. Tétel

Ha valamely egyenes érint egy kört, és az érintési pontban egy merőleget emelünk az érintőre, akkor ezen a merőlegesen lesz a kör középpontja.

Érintse ugyanis valamely DE egyenes az ABC kört a C pontban, és emeljünk C -ben DE -re egy CA merőleget (I. 11.). Azt állítom, hogy a kör középpontja CA -n van.

Tegyük föl ugyanis, hogy nincs rajta a középpont; legyen ez (a középpont) F , és húzzuk meg CF -et. Minthogy valamely DE egyenes érint egy ABC kört, és FC összeköti a középpontot és az érintési pontot, így FC merőleges DE -re (III. 18.), FCE tehát derékszög. Viszont ACE is derékszög, egyenlő tehát az FCE szög ACE -vel (4. P.), a kisebb a nagyobb (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. F tehát nem középpontja az ABC körnek. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik AC -n kívül levő pont sem.

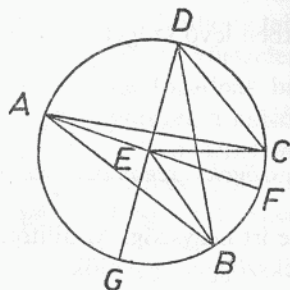


Ha tehát valamely egyenes érint egy kört, és az érintési pontban egy merőleget emelünk az érintőre, akkor ezen a merőlegesen lesz a kör középpontja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 32.

III. 20. Tétel

*Egy körben a középponti szög kétakkora, mint a kerületi, ha e szögek ugyanazon az íven nyugszanak.**



Legyen ABC valamely kör, s ennek BEC egy középponti, BAC pedig egy kerületi szöge, s nyugodjanak e szögek ugyanazon a BC íven. Azt állítom, hogy a BEC szög kétakkora, mint BAC .

Húzzuk meg ugyanis AE -t, és hosszabítsuk meg F -ig.

Minthogy tehát AE egyenlő EB -vel, egyenlő az EAB szög is EBA -val (I. 5.); az

$\widehat{EAB}$ és $\widehat{EBA}$ szögek tehát (együtt) kétakkorák, mint $\widehat{EAB}$. A $\widehat{BEF}$ szög viszont egyenlő $\widehat{EAB}$ -vel meg $\widehat{EBA}$ -val (I. 32.); $\widehat{BEF}$ is kétakkora tehát, mint $\widehat{EAB}$. Ugyanezért az $\widehat{FEC}$ szög is kétakkora, mint $\widehat{EAC}$. A teljes $\widehat{BEC}$ szög tehát kétakkora, mint a teljes $\widehat{BAC}$ szög.

Legyen ismét egy töröttvonalunk,** és legyen $\widehat{BDC}$ egy másik szög. Húzzuk meg DE -t, és hosszabbítsuk meg G -ig. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a $\widehat{GEC}$ szög kétakkora, mint $\widehat{EDC}$, s ezekből a $\widehat{GEB}$ szög kétakkora, mint $\widehat{EDB}$; a maradék $\widehat{BEC}$ szög tehát kétakkora, mint $\widehat{BDC}$.

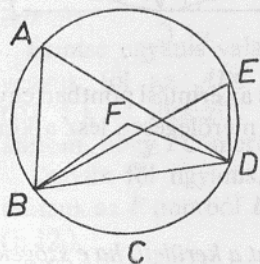
Egy körben tehát a középponti szög kétakkora, mint a kerületi, ha e szögek ugyanazon az íven nyugszanak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 21., 27.; VI. 33.

III. 21. Tétel

Egy körben az ugyanazon körszeletben levő szögek egyenlők egymással.*

Legyen $ABCD$ egy kör, és legyenek ugyanabban a szeletében a $\widehat{BAD}$, $\widehat{BED}$ szögek. Azt állítom, hogy a $\widehat{BAD}$ és $\widehat{BED}$ szögek egyenlők egymással.



Vegyük ugyanis az $ABCD$ kör középpontját (III. 1.), legyen ez F , és húzzuk meg BF -et, FD -t.

Mínthogy $\widehat{BFD}$ középponti szög, $\widehat{BAD}$ pedig kerületi szög, és ugyanazon a BD íven nyugszanak, így a $\widehat{BFD}$ szög kétakkora, mint $\widehat{BAD}$ (III. 20.). Ugyanezért $\widehat{BED}$ -nek is kétszerese a $\widehat{BFD}$ szög, egyenlő tehát a $\widehat{BAD}$ szög $\widehat{BED}$ -vel (6. Ax.).

Egy körben tehát az ugyanazon körszeletben levő szögek egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 22.

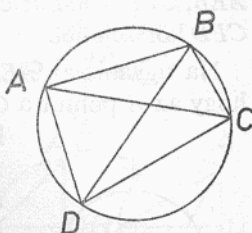
III. 22. Tétel

A körbe írt négyszögek (azaz a húrnégyszögek) szemközti szögei (együtt) két derékszöggel egyenlők.

Legyen $ABCD$ egy kör, és $ABCD$ egy bele írt négyszög. Az állítom, hogy a szemközti szögei (együtt) két derékszöggel egyenlők.

Húzzuk meg AC -t és BD -t.

Minthogy minden háromszög három szöge (együtt) két derékszöggel egyenlő (I. 32.), így az ABC háromszög három szöge, CAB , ABC és BCA (együtt) két derékszöggel egyenlő. Viszont a CAB szög egyenlő BDC -vel – ugyanis ugyanabban a $BADC$ körszeletben vannak (III. 21.) –, az ACB szög pedig ADB -vel – ugyanis ugyanabban az $ADCB$ körszeletben vannak (ua.) –; a teljes ADC szög tehát egyenlő BAC -vel meg ACB -vel (2. Ax.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az ABC szöget, így az ABC , BAC , ACB szögek (együtt) egyenlők ABC -vel meg ADC -vel (2. Ax.). Azonban ABC , BAC és ACB (együtt) két derékszöggel egyenlő, tehát ABC és ADC is (együtt) két derékszöggel egyenlő (1. Ax.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy BAD és DCA is (együtt) két derékszöggel egyenlő.



A körbe írt négyszögek szemközti szögei tehát (együtt) két derékszöggel egyenlők. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 31–32.

III. 23. Tétel

Ugyanarra a szakaszra nem lehet két hasonló, de nem egyenlő körszeletet szerkeszteni ugyanazon az oldalon.

Tegyük föl ugyanis, hogy lehetséges, és legyen ugyanarra az AB egyenesre két hasonló, de nem egyenlő körszelet, ACB és ADB szerkesztve ugyanazon az oldalon, és húzzuk meg rajtuk át ACD -t, és húzzuk meg CB -t, DB -t.



Minthogy tehát az ACB körszelet hasonló az ADB körszeletéhez, körszeletek viszont akkor hasonlóak, ha egyenlő szögeket fogadnak be (III. 11. D.), így az ACB szög egyenlő az ADB szöggel, a külső a belsővel; ez viszont nem lehetséges (I. 16.).

Nem lehet tehát ugyanarra a szakaszra két hasonló, de nem egyenlő körszeletet szerkeszteni ugyanazon az oldalon. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 24.

III. 24. Tétel

Az egyenlő szakaszokon nyugvó hasonló körszeletek egyenlők egymással.

Nyugodjanak ugyanis az egyenlő AB , CD egyeneseken a hasonló AEB , CFD körszeletek. Azt állítom, hogy egyenlő az AEB körszelet a CFD körszelettel.

Ha ugyanis az AEB körszeletet a CFD körszeletre illesztjük úgy, hogy az A pontot a C pontra, az AB egyenest pedig a CD egyenesre helyezzük, akkor a B pont is illeszkedni fog D -re, minthogy AB egyenlő CD -vel. De ha AB illeszkedik CD -re, akkor az AEB körszelet is illeszkedik CFD -re. Ha ugyanis az AB egyenes illeszkedik CD -re, az AEB körszelet viszont nem illeszkedik CFD -re, akkor vagy azon belül halad, vagy kívül, vagy eltér tőle, mint CGD , és egy kör egy másikat kettőnél több pontban szel át; ez viszont nem lehetséges (III. 23. és 10.). Tehát nem igaz, hogy – noha az AB egyenes illeszkedik CD -re – az AEB körszelet nem illeszkedik CFD -re. Illeszkedik tehát rá, és egyenlő vele.

Az egyenlő szakaszokon nyugvó hasonló körszeletek tehát egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 26.

III. 25. Tétel

Adott körszelethez rajzoljuk meg a kört, amelynek szelete!

Legyen ABC az adott körszelet. Az ABC körszelethez kell tehát megrajzolni azt a kört, amelynek szelete.

Legyen D az AC felezőpontja (I. 10.), és a D pontban emeljük AC -re a DB merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg AB -t. Az ABD szög tehát vagy nagyobb BAD -nél, vagy egyenlő vele, vagy kisebb nála.

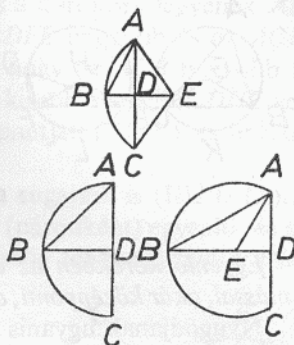
Legyen először nagyobb nála, és szerkesszünk az AB egyenesre, a rajta levő A ponthoz, egy ABD -vel egyenlő BAE szöget (I. 23.), és hosszabbítsuk meg DB -t E -ig, és húzzuk meg EC -t. Minthogy tehát az ABE szög egyenlő a BAE szöggel, egyenlő az EB szakasz is EA -val (I. 6.). És minthogy egyenlő AD DC -vel, DE pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), AD , DE és DC , DE páronként egyenlő.

És az ADE szög egyenlő a CDE szöggel – derékszög ugyanis mind a kettő (I. 15. és 1. Ax.) –, az EA alap tehát egyenlő az EC alappal (I. 4.). De megmutattuk, hogy EA az EB -vel egyenlő, tehát EB is egyenlő EC -vel. Tehát e három (szakasz), EA , EB és EC egyenlő egymással (1. Ax.), így az E középpontú, és az EA , EB , EC távolságok egyikével rajzolt kör a többi ponton is át fog menni, és (az adott kör-szelethez) lesz hozzárajzolva (III. 9.). Az adott körszelethez tehát megrajzoltuk a kört. És az ABC körszelet nyilván kisebb a félkörnél, minthogy az E középpont rajta kívül található.

Hasonlóképp, ha az ABD szög egyenlő BAD -vel, akkor, minthogy AD egyenlő lesz mind a két BD és DC (szakasszal), így e három (szakasz), AD , BD és DC egyenlő (I. 6.) egymással, és D középpontja a kiegészített körnek, és ABC nyilván félkör.

Ha pedig az ABD szög kisebb BAD -nél, és az AB egyenesre, a rajta levő A ponthoz, egy ABD -vel egyenlő szöget szerkesztünk (I. 23.), akkor a DB egyenesen az ABC körszeletben belülré fog esni a középpont, és az ABC körszelet nyilván nagyobb lesz a félkörnél.

Adott körszelethez megrajzoltuk tehát a kört. Éppen ezt kellett megtenni.



III. 26. Tétel

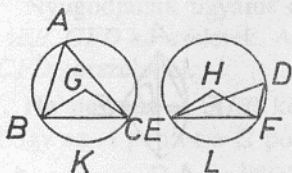
Egyenlő körökben az egyenlő szögek egyenlő íveken nyugszanak, akár középponti, akár kerületi szögek.

Legyenek ABC , DEF egyenlő körök, és legyenek bennük BGC , EHF egyenlő középponti, BAC és EDF pedig egyenlő kerületi szögek. Azt állítom, hogy a BKC ív egyenlő az ELF ívvel.

Húzzuk meg ugyanis BC -t és EF -et.

Minthogy az ABC , DEF körök egyenlők, egyenlők a sugaraik; így e két-két (oldal), BG , GC és EH , HF (páronként) egyenlő; és a G -nél levő szög egyenlő a H -nál levővel, a BC alap tehát egyenlő az EF alappal (I. 4.). És minthogy egyenlő az A -nál levő szög a D -nél levővel, a BAC körszelet hasonló az EDF körszelethez; és egyenlő

szakaszokon nyugszanak; az egyenlő szakaszokon nyugvó hasonló körszeletek viszont egyenlők egymással (III. 24.), egyenlő tehát a BAC körszelet EDF -fel. De a teljes ABC kör is egyenlő a teljes DEF körrel, így a maradék BKC ív egyenlő az ELF ívvel (3. Ax.).



Egyenlő körökben tehát az egyenlő szögek egyenlő íveken nyugszanak, akár középponti, akár kerületi szögek. Éppen ezt kellett megmutatni.

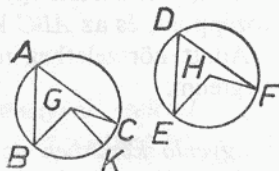
F.: III. 27–28.; IV. 11., 15.; XIII. 10.

III. 27. Tétel

Egyenlő körökben az egyenlő íveken nyugvó szögek egyenlők egymással, akár középponti, akár kerületi szögek.

Nyugodjanak ugyanis az egyenlő ABC , DEF körökben az egyenlő BC , EF íveken a G , H középpontoknál a BGC , EHF középponti és a BAC , EDF kerületi szögek. Azt állítom, hogy a BGC szög egyenlő az EHF , a BAC szög pedig az EDF szöggel.

Ha ugyanis a BGC szög nem egyenlő EHF -fel, akkor egyikük nagyobb. Legyen BGC a nagyobb szög, és szerkesszünk a BG egyenesre, a rajta levő G ponthoz, egy EHF -fel egyenlő BGK szöget (I. 23.). Az egyenlő szögek viszont egyenlő íveken nyugszanak, ha (mindketten) középponti szögek (III. 26.), egyenlő tehát a BK ív az EF ívvel. Azonban EF egyenlő BC -vel, tehát BK is egyenlő BC -vel (1. Ax.), a kisebb a nagyobbal (8. Ax.); ez viszont nem lehetséges. Nem igaz tehát, hogy a BGC szög nem egyenlő EHF -fel; egyenlő hát. És BGC -nek fele része az A -nál levő szög, EHF -nek pedig fele része a D -nél levő szög (III. 20.); egyenlő hát az A -nál levő szög is a D -nél levővel (6. Ax.).



Egyenlő körökben az egyenlő íveken nyugvó szögek tehát egyenlők egymással, akár középponti, akár kerületi szögek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 29.; IV. 11–12., 15.; VI. 33.; XII. 1., 17.; XIII. 11.

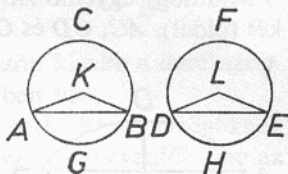
III. 28. Tétel

Egyenlő körökben az egyenlő húrokhoz egyenlő ívek tartoznak, mégpedig a nagyobb ív egyenlő a (másik kör) nagyobb ívével, a kisebb ív pedig a (másik kör) kisebb ívével.

Legyenek ABC , DEF egyenlő körök, és a köröknek legyenek AB , DE egyenlő húrjaik, melyekhez az ACB , DFE nagyobb és az AGB , DHE kisebb ívek tartoznak. Azt állítom, hogy az ACB nagyobb ív egyenlő a DFE nagyobb ível, az AGB kisebb ív pedig DHE -vel.

Vegyük föl ugyanis a körök K , L középpontjait (III. 1.), és húzzuk meg AK -t, KB -t, DL -t és LE -t.

Minthogy a körök egyenlők, egyenlők a sugaraik is (III. 1. D.), e két-két (szakasz) tehát, AK , KB és DL , LE (páronként) egyenlő; és az AB alap egyenlő a DE alappal; az AKB szög tehát egyenlő a DLE szöggel (I. 8.). Az egyenlő szögek viszont egyenlő íveken nyugszanak, ha (mindketten) középponti szögek (III. 26.), egyenlő hát az AGB ív a DHE ívvel. De a teljes ABC kör is egyenlő a teljes DEF körrel, a maradék ACB ív is egyenlő tehát a maradék DFE ívvel (3. Ax.).



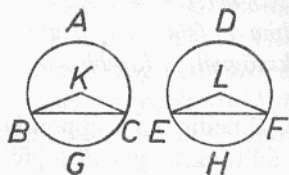
Egyenlő körökben tehát az egyenlő húrokhoz egyenlő ívek tartoznak, mégpedig a nagyobb ív a nagyobb ívvel, a kisebb ív pedig a kisebb ívvel egyenlő. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 30.; IV. 12.; XII. 17.; XIII. 8.

III. 29. Tétel

Egyenlő körökben az egyenlő ívekhez egyenlő húrok tartoznak.

Legyenek ABC , DEF egyenlő körök, és messyük ki belőlük az egyenlő BGC , EHF íveket, és húzzuk meg a BC , EF egyeneseket. Azt állítom, hogy BC egyenlő EF -fel.



Vegyük föl ugyanis a körök középpontját (III. 1.) – ez legyen K ill. L –, és húzzuk meg BK -t, KC -t, EL -t és LF -et.

Minthogy egyenlő a BGC ív az EHF

ívvel, egyenlő a BKC szög is az ELF szöggel (III. 27.). S minthogy egyenlők az ABC , DEF körök, egyenlők a sugaraik is (III. 1. D.); e két-két (szakasz) tehát, BK , KC és EL , LF egyenlő; és egyenlő szögeket fognak közre; a BC alap tehát egyenlő az EF alappal (I. 4.).

Egyenlő körökben tehát az egyenlő ívekhez egyenlő húrok tartoznak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IV. 11., 15.; XIII. 10.

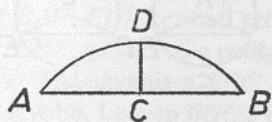
III. 30. Tétel

Felezzünk meg adott körívet!

Legyen ADB az adott körív. Az ADB ívet kell tehát megfeleztetni.

Húzzuk meg AB -t, legyen C a felezőpontja (I. 10.), emeljünk a C pontból AB -re egy CD merőleget, és húzzuk meg AD -t, DB -t.

Minthogy egyenlő AC a CB -vel, CD pedig közös (oldal), így e két-két (oldal), AC , CD és CB , CD (páronként) egyenlő; és az ACD szög egyenlő a BCD szöggel – derékszög ugyanis mind a kettő (4. P.)* –, az AD alap tehát egyenlő a DB alappal (I. 4.). Az egyenlő húrokhoz viszont egyenlő ívek tartoznak, mégpedig a nagyobb ív egyenlő a nagyobb ívvel, a kisebb ív pedig a kisebb ívvel (III.



28.); és mind a két AD , DB ív kisebb a félkörnél, egyenlő tehát az AD ív a DB ívvel.

Megfeleztük tehát az adott ívet a D pontban. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 16.

III. 31. Tétel

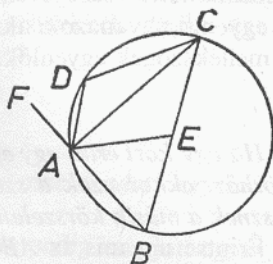
Egy körben a félkörbeli szög (III. 8. D.) derékszög, az (ennél) nagyobb körszeletben levő szög kisebb a derékszögnél, a kisebb szeletben levő szög pedig nagyobb a derékszögnél; továbbá a (félkörnél) nagyobb körszelet szöge (III. 7. D.) nagyobb a derékszögnél, a kisebb szelet pedig kisebb a derékszögnél.

Legyen $ABCD$ egy kör, BC egy átmérője, E pedig a középpontja, és húzzuk meg BA -t, AC -t, AD -t, DC -t. Azt állítom, hogy a BAC félkörbeli BAC szög derékszög, a félkörnél nagyobb ABC körszeletben

levő ABC szög kisebb a derékszögnél, a félkörnél kisebb ADC körseletben levő ADC szög pedig nagyobb a derékszögnél.

Húzzuk meg AE -t, és hosszabbítsuk meg BA -t F -ig.

Minthogy BE egyenlő AE -vel, egyenlő az ABE szög is BAE -vel (I. 5.). Ismét, minthogy CE egyenlő AE -vel, egyenlő az ACE szög is CAE -vel (ua.); a teljes BAC szög tehát egyenlő e két szöggel, ABC -vel meg ACB -vel (2. Ax.). De az ABC háromszög FAC külső szöge is egyenlő e két szöggel, ABC -vel meg ACB -vel (I. 32.), egyenlő tehát a BAC szög is az FAC szöggel (1. Ax.); derékszög tehát mind a kettő (I. 10. D.); a BAC félkörbeli BAC szög tehát derékszög.



Minthogy az ABC háromszög két szöge, ABC és BAC (együtt) két derékszögnél kisebb (I. 17.), BAC pedig derékszög, így az ABC szög kisebb a derékszögnél – és a félkörnél nagyobb ABC körszeletben van.

Minthogy $ABCD$ egy körbe írt négyszög, a körbe írt négyszögeknek viszont a szemkölti szögei (együtt) két derékszöggel egyenlők [így az ABC , ADC szögek (együtt) két derékszöggel egyenlők (III. 22.)]; és az ABC szög derékszögnél kisebb; a maradék ADC szög tehát derékszögnél nagyobb – és a félkörnél kisebb ADC körszeletben van.

Azt is állítom, hogy a (félkörnél) nagyobb körszelet szöge, amelyet az ABC ív és az AC egyenes fog közre, derékszögnél nagyobb, a kisebb körszelet szöge pedig, amelyet az ADC ív és az AC egyenes fog közre, derékszögnél kisebb. Ez minden további nélkül nyilvánvaló. Minthogy ugyanis a BA és AC egyenesek szöge derékszög, így az ABC ív és az AC egyenes által közrefogott szög derékszögnél nagyobb (8. Ax.). Ismét, minthogy az AC és AF egyenesek szöge derékszög, így a CA egyenes és az ADC ív által közrefogott szög derékszögnél kisebb.

Egy körben tehát a félkörbeli szög derékszög, a nagyobb körszeletben levő szög derékszögnél kisebb, a kisebbben levő szög pedig derékszögnél nagyobb; továbbá a nagyobb körszelet szöge derékszögnél nagyobb, a kisebb körszeleté pedig derékszögnél kisebb. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 32–33.; IV. 6.; VI. 13.; X. 13. L., 29., 30., 33–35.; XI. 23. L.; XII. 1., 17.; XIII. 12., 14., 16.

[Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy háromszög egyik szöge egyenlő a másik kettő összegével, akkor e szög derékszög, mivel a külső szöge is egyenlő ugyanazoknak a szögeknek az összegével (I. 32.); ha pedig a mellékszögek egyenlők, akkor derékszögek (I. 10. D.).]

III. 32. Tétel

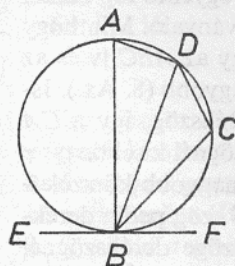
Ha egy kört érint egy egyenes, és az érintési pontból szelőt húzunk a körhöz, akkor azok a szögek, amelyeket az érintővel alkot, egyenlők lesznek a másik körszeletben levő szögekkel.

Érintse ugyanis az $ABCD$ kört valamely EF egyenes a B pontban, és húzzunk a B pontból egy BD szelőt az $ABCD$ körhöz. Azt állítom, hogy azok a szögek, amelyeket BD alkot az EF érintővel, egyenlők a másik körszeletben levő szögekkel, azaz hogy az FBD szög egyenlő a BAD körszeletben szerkesztendő szöggel, az EBD szög pedig egyenlő a DCB körszeletben szerkesztendő szöggel.

Emeljük ugyanis a B pontból EF -re a BA merőleget (I. 11.), és legyen C a BD íven tetszőlegesen választott pont, és húzzuk meg AD -t, DC -t, CB -t.

Mínthogy valamely EF egyenes érinti a B pontban az $ABCD$ kört, és az érintési pontból BA -t az érintőre merőlegesen emeltük, így BA -n van az $ABCD$ kör középpontja (III. 19.). BA tehát átmérője az $ABCD$ körnek; az ADB szög tehát, minthogy félkörbeli, derékszög (III. 31.).

A többi két szög tehát, BAD és ABD (együtt) egy derékszöggel egyenlő (I. 32.). De ABF is derékszög, az ABF szög tehát egyenlő BAD -vel meg ABD -vel (4. P. és 1. Ax.). Vonjuk le a közös ABD szöget; így a maradék DBF szög egyenlő a másik körszeletben levő BAD szöggel (3. Ax.). S minthogy $ABCD$ körbe írt négyszög, a szemközi szögei (együtt) két derékszöggel egyenlők (III. 22.). De a DBF , DBE szögek is (együtt) két derékszöggel egyenlők (I. 13.),



ly adott egyen

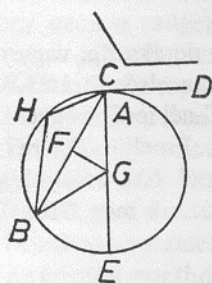
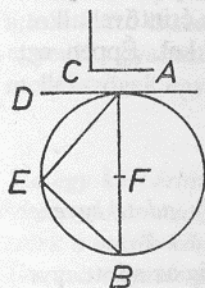
ig az adott egy
olyan körszelet
y derékszög, va
az első ábrán

C-nél levő szög
s. Emeljük DA -
a (I. 10.), emelj
úzzuk meg GB

lő a C -nél levő
(1. Ax.).

Az adott AB egyenes fölé tehát olyan AEB körszeletet írtunk, mely az adott C -nél levő szöggel egyenlő AEB szöget fogad be.

Legyen most derékszög a C -nél levő szög, és kelljen ismét az AB egyenes fölé olyan körszeletet írni, mely a C -nél levő derékszöggel egyenlő szöget fogad be. Szerkesszünk – amint a második ábrán történt – egy, a C -nél levő derékszöggel egyenlő BAD szöget (I. 23. v. 11.), és legyen F az AB felezőpontja (I. 10.), AEB pedig az F középpontú, az AF , FB távolságok egyikével rajzolt kör.



Érinti tehát az AD egyenes az ABE kört, mivel az A -nál levő szög derékszög (III. 16. K.). És egyenlő a BAD szög az AEB körszeletben levő szöggel – derékszög ugyanis ez is, mivel félkörbeli (III. 31.). Azonban a BAD szög egyenlő a C -nél levő szöggel is. Az AEB körszeletbeli szög is egyenlő tehát a C -nél levővel (I. Ax.).

Legyen végül a C -nél levő szög tompaszög, és – amint a harmadik ábrán történt – szerkesszünk az AB egyenesre, az A ponthoz egy vele egyenlő BAD szöget (I. 23.), és emeljük AD -re az AE merőleget (I. 11.), és ismét legyen F az AB felezőpontja (I. 10.), és emeljük AB -re az FG merőleget (I. 11.), és húzzuk meg GB -t.

Mínthogy ismét egyenlő AF az FB -vel, és FG közös (oldal), így e két-két (oldal), AF , FG és FB , FG egyenlő; és az AFG szög egyenlő a BFG szöggel; az AG alap tehát egyenlő a BG alappal (I. 4.). A G középpontú, AG távolsággal rajzolt kör tehát B -n is át fog haladni. Haladjon mint AEB . Mínthogy AD az AE átmérőre merőleges a végpontjában, így AD érinti az AEB kört (III. 16. K.). És AB -t az A érintési pontból húztuk; a BAD szög tehát egyenlő a másik körszeletben, AHB -ben szerkesztendő szöggel (III. 32.). De a BAD szög egyenlő a C -nél levő szöggel. Az AHB körszeletben levő szög is egyenlő tehát a C -nél levővel (I. Ax.).

Az adott AB egyenes fölé tehát olyan körszeletet írtunk, AHB -t,

amely a C -nél levő szöggel egyenlő szöget fogad be. Éppen ezt kellett megtenni.

III. 34. Tétel

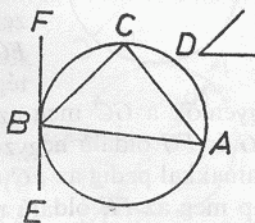
Vegyünk el adott körből adott egyenes vonalú szöget befogadó kör-szeletet!

Legyen ABC az adott kör, a D -nél levő szög pedig az adott egyenes vonalú szög. Az ABC körből kell tehát az adott D -nél levő szöggel egyenlő egyenes vonalú szöget befogadó kör-szeletet elvenni.

Húzzuk meg a B ponton át az ABC kör EF érintőjét (III. 1., I. 11. és III. 16. K.), és szerkesszük az FB egyenesre, a rajta levő B ponthoz a D -nél levő szöggel egyenlő FBC szöget (I. 23.).

Minthogy tehát valamely EF egyenes érinti az ABC kört, és BC -t a B érintési pontból húztuk, így az FBC szög egyenlő a másik kör-szeletben, BAC -ben szerkesztendő szöggel (III. 32.). De FBC egyenlő a D -nél levő szöggel; a BAC kör-szeletben levő szög is egyenlő tehát a D -nél levővel (I. Ax.).

Az adott ABC körből tehát elvettünk egy olyan BAC kör-szeletet, mely az adott D -nél levő egyenes vonalú szöggel egyenlő szöget fogad be. Éppen ezt kellett megtenni.



III. 35. Tétel

Ha egy körben két húr metszi egymást, akkor az egyiknek a részei által közrefogott téglalap egyenlő a másiknak a részei által közrefogott téglalappal.

Messe ugyanis egymást az $ABCD$ körben két húr, AC és BD , az E pontban. Azt állítom, hogy az AE és EC által közrefogott téglalap egyenlő a DE és EB által közrefogott téglalappal.

Ha AC és BD a középponton át halad, úgy hogy E középpontja az $ABCD$ körnek, akkor nyilvánvaló, hogy – mivel AE , EC , DE és EB egyenlők – az AE és EC közötti téglalap is egyenlő a DE és EB közötti téglalappal.

Ne haladjon most AC és BD a középponton át, és vegyük föl az $ABCD$ kör középpontját (III. 1.) – ez legyen F –, és bocsássuk AC -re,

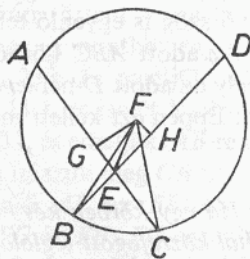
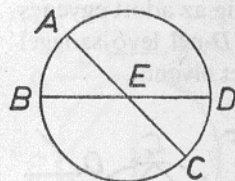
illetve BD -re az FG , FH merőlegeseket (I. 12.), és húzzuk meg FB -t, FC -t és FE -t.

Minthogy valamely a középponton át haladó FG egyenes egy nem a középponton át haladó AC húr derékszögben metsz, felezi is (III. 3.); egyenlő tehát AG a GC -vel. Minthogy az AC húr ketté van osztva egyenlő részekre a G , és nem egyenlőkre (III. 4.) az E pontban, így az AE és EC által közrefogott téglalap meg az EG oldalú négyzet együtt egyenlő a GC oldalú négyzettel (II. 5.). Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az FG oldalú négyzetet; így az AE és EC közötti téglalap meg az EG , FG oldalú négyzetek együtt

egyenlők a GC meg az FG oldalú négyzetekkel (2. Ax.). Viszont az EG és FG oldalú négyzetekkel egyenlő az FE oldalú, a GC és FG oldalúakkal pedig az FC oldalú (I. 47.); így az AE és EC közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet együtt egyenlő az FC oldalú négyzettel. De FC egyenlő FB -vel; az AE és EC közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet együtt egyenlő az FB oldalú négyzettel. Ugyanezért a DE és EB közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet is egyenlő együtt az FB oldalú négyzettel.* Megmutattuk, hogy az AE és EC közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet is együtt egyenlő az FB oldalú négyzettel; így az AE és EC közötti téglalap meg az FE oldalú négyzet együtt egyenlő a DE és EB közötti téglalap és az FE oldalú négyzet összegével (1. Ax.). Vonjuk le

a közös FE oldalú négyzetet; így a maradék AE és EC által közrefogott téglalap egyenlő a DE és EB által közrefogott téglalappal (3. Ax.).

Ha tehát egy körben két húr metszi egymást, akkor az egyiknek a részei által közrefogott téglalap egyenlő a másiknak a részei által közrefogott téglalappal. Éppen ezt kellett megmutatni.



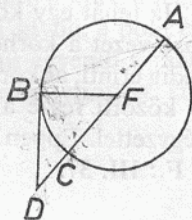
III. 36. Tétel

Ha egy körön kívül fölveszünk egy pontot, és abból két szakasz vezet a körhöz, amelyek közül az egyik átszeli a kört, a másik pedig érinti,

akkor a teljes szelő és a körön kívüli, a pont és a domború ív közötti része által közrefogott téglalap egyenlő az érintővel szerkesztett négyszettel.

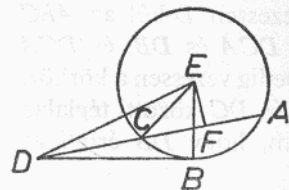
Vegyünk föl ugyanis az ABC körön kívül egy D pontot, és vezessen D -ből a körhöz két szakasz, DCA és DB , és DCA szelje át a kört, BD pedig érintse. Azt állítom, hogy a DA és DC által közrefogott téglalap egyenlő a BD oldalú négyszettel.

CA vagy a középponton át halad, vagy nem. Haladjon először a középponton át, és legyen F az ABC kör középpontja, és húzzuk meg FB -t; derékszög tehát az FBD szög (III. 18.). Mint-hogy F felezi a CA egyenest, és ehhez hozzáadódik DC , így a DA és DC közötti téglalap meg az FC oldalú négyszet együtt egyenlő az FD oldalú négyszettel (II. 6.). Az FD oldalú négyszettel viszont egyenlő az FB és BD oldalú négyszetek összege (I. 47.), így a DA és DC közötti téglalap meg az FB oldalú négyszet együtt egyenlő az FB és BD oldalú négyszetek összegével (1. Ax.). Vonjuk le a közös FB oldalú négyszetet; így a maradék DA és DC közötti téglalap egyenlő a BD érintővel szerkesztett négyszettel (3. Ax.).



Most ne az ABC kör középpontján át haladjon DCA , és vegyünk föl a középpontot, E -t (III. 1.), és bocsássuk E -ből CA -ra az EF merőlegest (I. 12.), és húzzuk meg EB -t, EC -t, ED -t. Derékszög tehát az EBD szög (III. 18.). És minthogy valamely, a középponton át haladó EF szakasz

egy, nem a középponton át haladó CA szakaszt derékszögben metsz, felezi is azt (III. 3.); AF tehát egyenlő FC -vel. Mint-hogy az F pont felezi a CA szakaszt, és ehhez hozzáadódik DC , így a DA és DC közötti téglalap meg az FC oldalú négyszet együtt egyenlő az FD oldalú négyszettel (II. 6.). Adjuk hozzájuk közös tagnak az



EF oldalú négyszetet; így a DA és DC közötti téglalap meg az FC és EF oldalú négyszetek együtt egyenlők az FD és EF oldalú négyszetek összegével (2. Ax.). Az FC és EF oldalú négyszetek összegével viszont egyenlő az EC oldalú négyszet – derékszög ugyanis EFC (I. 47.) –; az FD és EF

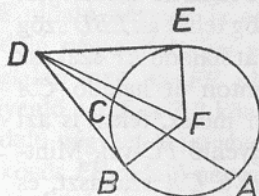
oldalúak összegével pedig egyenlő az ED oldalú (ua.), így a DA és DC közötti téglalap meg az EC oldalú négyzet együtt egyenlő az ED oldalú négyzettel. EC viszont egyenlő EB -vel, tehát a DA és DC közötti téglalap meg az EB oldalú négyzet együtt egyenlő az ED oldalú négyzettel. Az ED oldalú négyzettel viszont egyenlő az EB és BD oldalú négyzetek összege – derékszög ugyanis az EBD szög (I. 47.) –, tehát a DA és DC közötti téglalap meg az EB oldalú négyzet együtt egyenlő az EB és BD oldalú négyzetek összegével (1. Ax.). Vonjuk le a közös EB oldalú négyzetet; így a maradék DA és DC közötti téglalap egyenlő a BD oldalú négyzettel (3. Ax.).

Ha tehát egy körön kívül fölveszünk egy pontot, és abból két szakasz vezet a körhöz, amelyek közül az egyik átszeli a kört, a másik pedig érinti, akkor a teljes szelő és a körön kívüli, a pont és a domború ív közötti része által közrefogott téglalap egyenlő az érintőre emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: III. 37.

III. 37. Tétel

Ha egy körön kívül fölveszünk egy pontot, és a pontból két szakasz vezet a körhöz, amelyek közül az egyik átszeli a kört, a másik pedig a körhöz vezet, és a teljes szelő és a körön kívüli, a pont és a domború ív közötti része által közrefogott téglalap egyenlő a másik szakaszra emelt négyzettel, akkor a másik szakasz érinti a kört.



Vegyünk föl ugyanis az ABC körön kívül egy D pontot, és vezessen D -ből az ABC körhöz két szakasz, DCA és DB , és DCA szelje át a kört, DB pedig vezessen a körhöz. Legyen pedig az AD és DC közötti téglalap egyenlő a DB oldalú négyzettel. Azt állítom, hogy DB érinti az ABC kört.

Húzzuk meg ugyanis az ABC kör DE érintőjét (III. 17.), vegyük föl a kör középpontját – ez legyen F (III. 1.) –, és húzzuk meg FE -t, FB -t és FD -t.

FED tehát derékszög (III. 18.). Minthogy DE érinti az ABC kört, DCA pedig átszeli, így az AD és DC közötti téglalap egyenlő a DE

oldalú négyzettel (III. 36.). Viszont az AD és DC közötti téglalap a DB oldalú négyzettel is egyenlő volt, a DE oldalú négyzet tehát egyenlő a DB oldalú négyzettel (1. Ax.); egyenlő hát DE a DB -vel. De FE is egyenlő FB -vel, így e két-két oldal, DE , FE és DB , FB egyenlő; és közös az FD alapjuk, a DEF szög tehát egyenlő a DBF szöggel (I. 8.). DEF viszont derékszög, derékszög tehát DBF is. És FB meghosszabbítása egy átmérő, a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges pedig érinti a kört (III. 16. K.), DB tehát érinti az ABC kört. Hasonló a bizonyítás akkor is, ha a középpont az AC egyenesen fekszik.

Ha tehát egy körön kívül fölveszünk egy pontot, és a pontból két szakasz vezet a körhöz, amelyek közül az egyik átszeli a kört, a másik pedig a körhöz vezet, és a teljes szelő és a körön kívüli, a pont és a domború ív közötti része által közrefogott téglalap egyenlő a másik szakaszra emelt négyzettel, akkor a másik egyenes érinti a kört. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IV. 10.

Negyedik könyv

Definíciók

1. Azt mondjuk, hogy valamely egyenes vonalú alakzat be van írva egy másik egyenes vonalú alakzatba, ha a beírt alakzat minden szöge annak az alakzatnak egy-egy oldalát érinti, melybe beírtuk.
2. Hasonlóképp azt mondjuk, hogy valamely alakzatot egy másik alakzat köré írtunk, ha a köréírt alakzat minden oldalán rajta van annak az alakzatnak egy-egy szöge, amely köré írtuk.
3. Azt mondjuk, hogy egy egyenes vonalú alakzatot beírtunk egy körbe, ha a beírt alakzat minden szöge a körvonalon van.
4. Azt mondjuk, hogy egy egyenes vonalú alakzatot kör köré írtunk, ha a köréírt alakzat minden oldala érinti a körvonalat.
5. Hasonlóképp azt mondjuk, hogy egy kört beírtunk egy alakzatba, ha a körvonal ennek minden egyes oldalát érinti.
6. Azt mondjuk, hogy egy kört egy alakzat köré írtunk, ha ennek minden egyes szöge a körvonalon van.
7. Azt mondjuk, hogy egy szakaszt ráillesztettünk egy körre, ha a végpontjai a körvonalon vannak.

IV. 1. Tétel

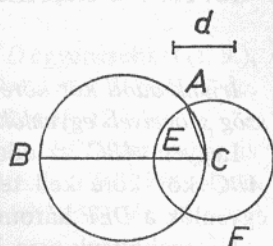
Illesszünk adott körre egy adott, a kör átmérőjénél nem nagyobb szakasszal egyenlő szakaszt!

Legyen ABC az adott kör, d pedig az adott, a kör átmérőjénél nem nagyobb szakasz. Az ABC körre kell tehát a d szakasszal egyenlő szakaszt illeszteni.

Húzzuk meg az ABC kör egy BC átmérőjét (III. 1.). Ha BC egyenlő d -vel, kész vagyunk a feladattal, mert ráillesztettük az ABC körre a d -vel egyenlő BC szakaszt. Ha pedig BC nagyobb d -nél, mérjük föl rá a d -vel egyenlő CE -t (I. 3.), és legyen EAF a C középpontú, CE távolsággal rajzolt kör; húzzuk meg CA -t.

Mínthogy a C pont középpontja az EAF körnek, CA egyenlő CE -vel. Azonban CE egyenlő d -vel; d is egyenlő tehát CA -val.

Az adott ABC körre tehát ráillesztettük az adott d szakasszal egyenlő CA -t. Éppen ezt kellett megtenni.



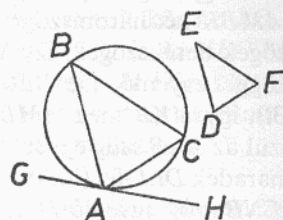
F.: IV. 10., 16.; X. 14. L.; XI. 23. L.; XII. 16.

IV. 2. Tétel

Írjunk adott körbe háromszöget, melynek szögei egyenlők egy adott háromszög szögeivel!

Legyen ABC az adott kör, DEF pedig az adott háromszög. Az ABC körbe tehát olyan háromszöget kell írni, melynek szögei egyenlők a DEF háromszög szögeivel.

Húzzuk meg az ABC kör A -n átmenő GH érintőjét (III. 1., I. 11., III. 16. K.), és szerkesszünk az AH egyenesre, a rajta levő A ponthoz egy DEF -fel egyenlő HAC szöget (I. 23.), az AG egyenesre pedig a rajta levő A ponthoz egy DFE -vel egyenlő GAB szöget, és húzzuk meg BC -t.



Mínthogy az AH egyenes érinti az ABC kört, és az A érintési pontból húztunk a körhöz egy AC szelőt, így a HAC szög egyenlő a másik körszeletben levő ABC szöggel (III. 32.). Azonban HAC egyenlő a DEF szöggel; az ABC szög is egyenlő tehát DEF -fel (I. Ax.). Ugyanígy ACB is egyenlő a DFE szöggel, és a maradék BAC szög is egyenlő EDF -fel (I. 32.). [A DEF háromszög szögeivel egyenlő szögei vannak tehát az ABC háromszögnek, és az ABC körbe írtuk bele.]

Az adott körbe tehát háromszöget írtunk, melynek szögei egyenlők egy adott háromszög szögeivel. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 11., 16.; XIII. 12., 13.

IV. 3. Tétel

Írjunk adott kör köré háromszöget, melynek szögei egy adott háromszög szögeivel egyenlők!

Legyen ABC az adott kör, DEF pedig az adott háromszög. Az ABC kör köré kell tehát olyan háromszöget írni, melynek szögei egyenlők a DEF háromszög szögeivel.

Hosszabbítsuk meg EF -et mind a két oldalon, a G , illetve H pontig, és vegyük föl az ABC kör K középpontját (III. 1.), húzzunk meg egy tetszőleges KB szelőt, és szerkesszünk a KB egyenesre, a rajta levő K ponthoz, egy DEG -vel egyenlő BKA szöget és egy DFH -val egyenlő BKC szöget (I. 23.), és húzzuk meg az A, B, C pontokon átmenő LAM , MBN , NCL érintőket (I. 11., III. 16. K.).

Mínthogy az LM, MN, NL egyenesek érintik az A, B, C pontokban az ABC kört, és a KA, KB, KC egyeneseket a K középpontból húztuk az A, B, C pontokba, így az A, B és C pontoknál levő szögek derékszögek (III. 18.). És minthogy az $AMBK$ négyszög négy szöge együtt négy derékszöggel egyenlő – ti. mivel $AMBK$ két háromszögre vágható szét (I. 32.) –, és a KAM, KBM szögek derékszögek, így a többi szög, AKB és AMB együtt két derékszöggel egyenlő. De DEG meg DEF is két derékszöggel egyenlő (I. 13.), így AKB meg AMB egyenlő DEG meg DEF -fel (1. Ax.). Ezek közül az AKB szög egyenlő DEG -vel, így a maradék AMB szög egyenlő a maradék DEF -fel (3. Ax.). Hasonlóképp mutatható meg az is, hogy az LNB szög egyenlő DFE -vel; a maradék MLN szög is egyenlő tehát a [maradék] EDF szöggel. A DEF háromszögeivel egyenlő szögei vannak tehát az LMN háromszögnek, és az ABC háromszög köré írtuk.

Az adott kör köré tehát háromszöget írtunk, melynek szögei egyenlők egy adott háromszög szögeivel. Éppen ezt kellett megtenni.

IV. 4. Tétel

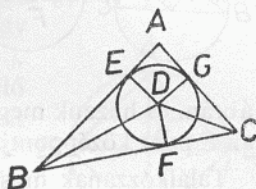
Írjunk adott háromszögbe kört!

Legyen ABC az adott háromszög. Az ABC háromszögbe kell tehát kört írni.

Felezzük meg az ABC , ACB szögeket a BD , CD egyenesekkel (I. 9.), legyen ezek metszéspontja D (I. 32., 5. P.),* és bocsássuk D -ből AB -re, BC -re, illetve CA -ra a DE , DF , DG merőlegeseket (I. 12.).

Minthogy az ABD szög egyenlő CBD -vel, és a BED derékszög is egyenlő a BFD derékszöggel (4. P.), így EBD és FBD két olyan háromszög, melyben páronként egyenlő két-két szög és egy-egy oldal, a közös BD , amelyek az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik; tehát a többi oldal is páronként egyenlő (I. 26.); egyenlő tehát DE a DF -fel. Ugyanígy DG is egyenlő DF -fel. E három szakasz tehát, DE , DF és DG , egymással egyenlő (1. Ax.). A D középpontú és a DE , DF , DG távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és érinti az AB , BC , CA egyeneseket, mivel az E , F , G pontoknál levő szögek derékszögek. Ha ugyanis átszelné őket, akkor a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön belül haladna; erről viszont megmutattuk, hogy lehetetlen (III. 16.); nem szeli tehát át a D középpontú és a DE , DF , DG távolságok egyikével rajzolt kör az AB , BC , CA egyeneseket; érinti tehát őket (vö. III. 2. D.), és az ABC háromszögbe beírt kör lesz (IV. 5. D.). Írjuk is be mint az FGE kört.

Beírtuk tehát az adott ABC háromszögbe az FGE kört. Éppen ezt kellett megtenni.



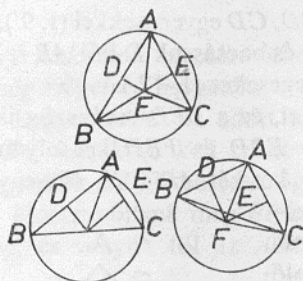
IV. 5. Tétel

Írjunk adott háromszög köré kört!

Legyen ABC az adott háromszög. Az adott ABC háromszög köré kell (tehát) kört írni.

Legyenek D , E az AB , AC szakaszok felezőpontjai (I. 10.), és emeljük a D , E pontokból AB -re, illetve AC -re a DF , EF merőlegeseket (I. 11.). Ezek vagy az ABC háromszögön belül, vagy a BC szakaszon, vagy BC -n kívül találkozni fognak (5. P.).*

Találkozzanak először belül, az F pontban, és húzzuk meg FB -t, FC -t, FA -t. Minthogy AD egyenlő DB -vel, DF pedig közös (oldal) és merőleges (az előbbiekre), így az AF alap egyenlő az FB alappal



(I. 4.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy FC is egyenlő FA -val; úgyhogy FB is egyenlő FC -vel (I. Ax.). E három szakasz tehát, FA , FB és FC egyenlő egymással. Az F középpontú és az FA , FB , FC távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és az ABC háromszög köré írt kör lesz. Írjuk is köré mint az ABC kört.

Találkozzanak most DF és EF a BC szakaszon az F pontban, mint a második ábrán, és húzzuk meg AF -et. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az F pont középpontja az ABC háromszög köré írt körnek.

Találkozzanak most DF és EF az ABC háromszögön kívül az F pontban, mint a harmadik ábrán, és húzzuk meg AF -et, BF -et, CF -et. Minthogy ismét egyenlő AD a DB -vel, DF pedig közös (oldal) és merőleges (az előbbiekre), így az AF alap egyenlő a BF alappal (I. 4.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy CF is egyenlő AF -fel; úgyhogy BF is egyenlő CF -vel (I. Ax.). Az F középpontú és az FA , FB , FC távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és az ABC háromszög köré írt kör lesz.

Az adott háromszög köré tehát kört írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 10.; XI. 23.

[Következmény]

Nyilvánvaló az is, hogy ha a kör középpontja a háromszög belséjébe esik, akkor a BAC szög félkörnél nagyobb szöletben lévén kisebb egy derékszögnél; és ha a BC szakaszra esik a középpont, akkor a BAC szög félkörben lévén derékszög; ha pedig a kör középpontja a háromszögön kívülre esik, akkor a BAC szög félkörnél kisebb szöletben lévén nagyobb egy derékszögnél (III. 31.). [Úgyhogy ha az adott

szög derékszögnél kisebb, akkor DF és EF a háromszög belsejében találkoznak, ha derékszög, akkor BC -n, ha pedig derékszögnél nagyobb, akkor BC -n kívül. Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: IV. 10.

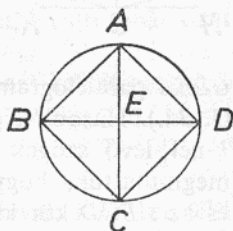
IV. 6. Tétel

Írjunk adott körbe négyzetet!

Legyen $ABCD$ az adott kör. Az $ABCD$ körbe kell tehát négyzetet írni.

Húzzuk meg az $ABCD$ kör két egymásra merőleges átmérőjét, AC -t és BD -t (III. 1., I. 11.), és húzzuk meg AB -t, BC -t, CD -t, DA -t.

Minthogy BE egyenlő ED -vel – E ugyanis középpont –, EA pedig közös (oldal) és merőleges (az előbbiekre), így az AB alap egyenlő az AD alappal (I. 4.). Ugyanígy mind a két BC , CD oldal egyenlő AB és AD bármelyikével; egyenlő oldalú tehát az $ABCD$ négyszög. Azt állítom, hogy derékszögű is. Minthogy ugyanis a BD szakasz átmérője az $ABCD$ körnek, BAD félkör; derékszög tehát a BAD szög (III. 31.). Ugyanígy az ABC , BCD , CDA szögek mindegyike is derékszög; derékszögű tehát az $ABCD$ négyszög. Viszont megmutattuk azt is, hogy egyenlő oldalú; négyzet tehát. És az $ABCD$ körbe írtuk bele.



Az adott körbe tehát beírtuk az $ABCD$ négyzetet. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XII. 2., 10–12.

IV. 7. Tétel

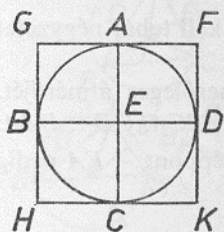
Írjunk adott kör köré négyzetet!

Legyen $ABCD$ az adott kör. Az $ABCD$ kör köré kell tehát négyzetet írni.

Húzzuk meg az $ABCD$ kör két egymásra merőleges átmérőjét, AC -t és BD -t (III. 1., I. 11.), és az A , B , C és D pontokon át húzzuk meg az $ABCD$ kör FG , GH , HK és KF érintőit (I. 11., III. 16. K.).

Minthogy tehát FG érinti az $ABCD$ kört, és az EA egyenest az E középpontból az A érintési pontra illesztettük, így az A -nál levő

szögek derékszögek (III. 18.). Ugyanígy a B -nél, C -nél és D -nél levő szögek is derékszögek. Minthogy az AEB szög derékszög, és EBG is derékszög, így GH párhuzamos AC -vel (I. 28.). Ugyanígy FK -val is párhuzamos AC , úgyhogy GH is párhuzamos FK -val (I. 30.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy mind a két GF , HK



egyenes párhuzamos BED -vel. Paralelogrammák tehát a GK , GC , AK , FB és BK alakzatok, így egyenlő GF a HK -val, GH pedig FK -val (I. 34.). Minthogy AC egyenlő BD -vel, valamint AC egyenlő mind a két GH , FK , BD pedig mind a két GF , HK szakasszal, [és így GH és FK mindketten egyenlők mind a két GF , HK szakasszal,] így egyenlő oldalú az $FGHK$ négyszög. Azt állítom, hogy derékszögű is. Minthogy ugyanis $GBEA$ paralelogramma, és AEB derékszög, így AGB is derékszög (I. 34.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a H -nál, K -nál és F -nél levő szögek is derékszögek. Derékszögű tehát $FGHK$. De megmutattuk, hogy egyenlő oldalú is; négyzet tehát (I. 22. D.), és az $ABCD$ kör köré írtuk.

Az adott kör köré tehát négyzetet írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XII. 10–11.

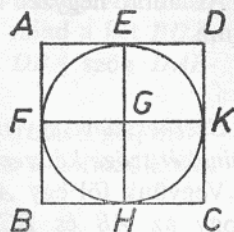
IV. 8. Tétel

Írjunk adott négyzetbe kört!

Legyen $ABCD$ az adott négyzet. Az $ABCD$ négyzetbe kell tehát kört írni.

Legyen E és F az AD , illetve AB felezőpontja (I. 10.), és húzzuk E -n át mind a két AB , CD egyenessel párhuzamosan EH -t (I. 31., 30.), F -en át pedig húzzuk mind a két AD , BC egyenessel párhuzamosan FK -t. Paralelogramma tehát az AK , KB , AH , HD , AG , GC , BG és GD alakzatok mindegyike, és a szemközti oldalai nyilván egyenlők (I. 34.). Minthogy AD egyenlő AB -vel, és AD -nek fele része AE , AB -nek pedig fele része AF , így AE is egyenlő AF -fel (6. Ax.), úgyhogy a szemközti oldalak is egyenlők, egyenlő tehát FG is GE -vel. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy GH és GK is mindketten egyenlők

mind a két FG , GE szakasszal; e négy szakasz tehát, GE , FG , GH és GK egymással egyenlő. A G középpontú és a GE , GF , GH és GK távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és érinteni fogja az AB , BC , CD és AD egyeneseket, mivel az E -nél, F -nél, H -nál és K -nál levő szögek derékszögek. Ha ugyanis a kör átszelné az AB , BC , CD , AD egyeneseket, akkor a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön belül haladna; erről viszont megmutattuk, hogy nem lehetséges (III. 16.). A G középpontú és a GE , GF , GH , GK távolságok egyikével rajzolt kör tehát nem szeli át az AB , BC , CD , AD egyeneseket. Érinti tehát őket, és az $ABCD$ körbe lesz beírva.



Az adott négyzetbe tehát kört írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

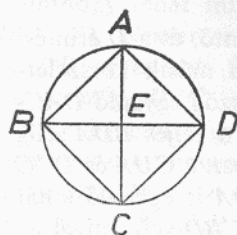
IV. 9. Tétel

Írjunk adott négyzet köré kört!

Legyen $ABCD$ az adott négyzet. Az $ABCD$ négyzet köré kell tehát kört írni.

Húzzuk meg AC -t, BD -t, és messék egymást E -ben.

Minthogy DA egyenlő AB -vel, AC pedig közös (oldal), e két-két oldal, DA , AC és AB , AC páronként egyenlő; és a DC alap egyenlő a BC alappal; a DAC szög tehát egyenlő a BAC szöggel (I. 8.); AC tehát felezi a DAB szöget. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az ABC , BCD , CDA szögek mindegyikét is felezik az AC , BD egyenesek. Minthogy a DAB szög egyenlő ABC -vel, és DAB -nek fele része az EAB szög, ABC -nek pedig fele része az EBA szög, így az EAB szög is egyenlő EBA -val (6. Ax.), úgyhogy az EA oldal is egyenlő az EB oldallal (I. 6.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az EA , EB szakaszok mindketten egyenlők EC és ED mind egyikével. E négy szakasz tehát, EA , EB , EC és ED egyenlő egymással. Az E középpontú és az EA , EB , EC , ED távolságok egyiké-



vel rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és az $ABCD$ négyzet köré lesz írva. Írjuk is köré mint az $ABCD$ kört.

Az adott négyzet köré tehát kört írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

IV. 10. Tétel

Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, melynek az alapon fekvő mindkét szöge kétszerese a harmadiknak!

Vegyünk föl egy AB szakaszt, és osszuk úgy ketté a C pontban, hogy az AB és BC által közrefogott téglalap egyenlő legyen a CA oldalú négyzettel (II. 11.); és legyen BDE az A középpontú, AB távolsággal rajzolt kör, és illesszünk a BDE körre egy, a BDE kör átmérőjénél nem nagyobb AC szakasszal egyenlő BD szakaszt (IV. 1.); húzzuk meg AD -t, DC -t, és írjuk az ACD háromszög köré az ACD kört (IV. 5.).

Mínthogy az AB és BC közötti téglalap egyenlő az AC oldalú négyzettel, AC viszont egyenlő BD -vel, így az AB és BC közötti téglalap egyenlő a BD oldalú négyzettel. Mínthogy az ACD körön kívül fölvettünk egy B pontot, és B -ből két szakasz vezet az ACD körhöz, BA és BD , amelyek közül az egyik átszeli, a másik pedig a körhöz vezet, és az AB és BC közötti téglalap egyenlő a BD oldalú négyzettel, így BD érinti az ACD kört (III. 37.).

Mínthogy tehát BD érintő, és a D érintési pontból húztuk DC -t, így a BDC szög egyenlő a másik körszeletben levő DAC szöggel (III. 32.). Miután a BDC szög egyenlő DAC -vel, adjuk hozzájuk közös (tagnak) CDA -t; így a teljes BDA szög egyenlő e kettő, CDA és DAC összegével. Azonban a CDA és DAC összegével egyenlő a BCD külső szög (I. 32.); BDA is egyenlő tehát a BCD szöggel. Viszont a BDA szög egyenlő CBD -vel, mivel az AD oldal is egyenlő AB -vel (I. 5.); úgyhogy a $DBA (= CBD)$ szög is egyenlő BCD -vel. E három szög tehát, BDA , DBA , BCD egyenlő egymással. És mínthogy a DBC szög egyenlő BCD -vel, a BD oldal is egyenlő a DC oldallal (I. 6.). BD viszont feltétel szerint egyenlő

AC -vel, AC is egyenlő tehát DC -vel; úgyhogy a CDA szög is egyenlő DAC -vel (I. 5.); CDA és DAC együtt tehát kétszerese a DAC szögnek. A BCD szög viszont egyenlő CDA meg DAC összegével; BCD is kétszerese tehát a CAD szögnek. BCD egyenlő mind a két BDA , DBA szöggel; kétszerese tehát mind a két BDA , DBA szög DAB -nek.

Megszerkesztettük tehát az ABD egyenlő szárú háromszöget, melynek mind a két a DB alapon fekvő szöge kétszerese a harmadiknak. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 11.

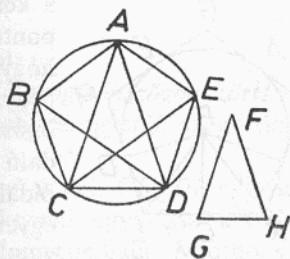
IV. 11. Tétel

Írjunk adott körbe egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget!

Legyen $ABCDE$ az adott kör. Az $ABCDE$ körbe kell tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget írni.

Vegyünk föl egy FGH egyenlő szárú háromszöget, melynek mind a két, G -nél és H -nál fekvő szöge kétszerese az F -nél fekvőnek (IV. 10.), és írjunk az $ABCDE$ körbe egy ACD háromszöget, melynek szögei egyenlők az FGH háromszög szögeivel úgy, hogy az F -nél levő szög egyenlő legyen a CAD , a két G -nél és H -nál fekvő szög pedig egyenlő legyen a két, ACD , CDA szöggel (IV. 2.). Kétszerese tehát mind a két, ACD , CDA szög CAD -nek. Felezzük meg a két ACD , CDA szöget a két, CE , DB egyenessel (I. 9.), és húzzuk meg AB -t, BC -t, $[CD$ -t,] DE -t és EA -t.

Mínthogy tehát mind a két, ACD , CDA szög kétszerese CAD -nek, és a CE , DB egyenesek felezik őket, így ezen öt szög, DAC , ACE , ECD , CDB és BDA egyenlő egymással. Egyenlő szögek viszont egyenlő íveken nyugszanak (III. 26.), ezen öt körív tehát, AB , BC , CD , DE és EA egyenlő egymással. Egyenlő ívekhez viszont egyenlő húrok tartoznak (III. 29.), ezen öt szakasz tehát, AB , BC , CD , DE és EA egyenlő egymással; egyenlő oldalú tehát az $ABCDE$ ötszög. Azt állítom, hogy egyenlő szögű is. Mínthogy ugyanis az AB ív egyenlő a DE ívvel,



adjuk hozzájuk közös tagnak a BCD ívet; így a teljes $ABCD$ ív egyenlő a teljes $EDCB$ ívvel. És az AED szög az $ABCD$ íven nyugszik, a BAE szög pedig az $EDCB$ íven; a BAE szög is egyenlő tehát AED -vel (III. 27.). Ugyanígy az ABC , BCD , CDE szögek mindegyike is egyenlő mind a két, BAE , AED szöggel; egyenlő szögű tehát az $ABCDE$ ötszög. De megmutattuk azt is, hogy egyenlő oldalú.

Beírtunk tehát egy adott körbe egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: IV. 12., 16.; XIII. 16.

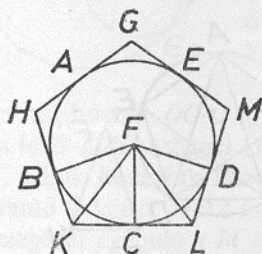
IV. 12. Tétel

Írjunk adott kör köré egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget!

Legyen $ABCDE$ az adott kör. Az $ABCDE$ kör köré kell (tehát) egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget írni.

Tekintsük az A , B , C , D és E pontokat a beírt ötszög szögpontjainak (IV. 11.), úgyhogy legyenek egyenlők az AB , BC , CD , DE és EA körívek. Húzzuk meg a kör A -n, B -n, C -n, D -n és E -n átmenő GH , HK , KL , LM és MG érintőit (III. 1., I. 11., III. 16. K.), és vegyük föl az $ABCDE$ kör F középpontját (III. 1.), és húzzuk meg FB -t, FK -t, FC -t, FL -t, FD -t.

Minthogy a KL egyenes érinti az $ABCDE$ kört a C pontban, és FC -t az F középpontból illesztettük a C érintési pontra, így FC merőleges KL -re (III. 18.); derékszög tehát mind a két C -nél levő szög. Ugyanígy a B és D pontoknál levő szögek is derékszögek. Minthogy az FCK szög derékszög, az FK oldalú négyzet egyenlő az FC , CK oldalú négyzetek összegével (I. 47.). Ugyanígy az FB és BK oldalú négyzetek összegével is egyenlő az FK oldalú, úgyhogy az FC , CK oldalú négyzetek egyenlők az FB , BK oldalúak összegével. Közülük az FC oldalú egyenlő az FB oldalúval, a maradék CK oldalú tehát egyenlő a BK oldalúval. Egyenlő tehát BK a CK -val.* Minthogy FB egyenlő FC -vel, és FK közös (oldal), így e két-két oldal, FB , FK és FC , FK (páronként) egyenlő, a BFK szög tehát egyenlő KFC -vel, a BKF szög pedig FKC -vel (I. 8.);



kétszerese tehát a *BFC* szög *KFC*-nek, a *BKC* szög pedig *FKC*-nek. Ugyanígy a *CFD* szög is kétszerese *CFL*-nek, a *DLC* szög pedig *FLC*-nek. S minthogy a *BC* ív egyenlő a *CD* ívvel, egyenlő a *BFC* szög is a *CFD* szöggel (III. 27.). S a *BFC* szög kétszerese a *KFC*, a *DFC* szög pedig az *LFC* szögnek; egyenlő tehát a *KFC* és az *LFC* szög is (6. Ax.). Egyenlő még az *FCK* szög is *FCL*-lel, így *FKC* és *FLC* két olyan háromszög, melyben páronként egyenlő két-két szög és egy-egy oldal, a közös *FC*; tehát a többi oldal is páronként egyenlő és a harmadik szög is (I. 26.); egyenlő tehát a *KC* szakasz *CL*-lel, az *FKC* szög pedig *FLC*-vel. Minthogy *KC* egyenlő *CL*-lel, kétszerese *KL* a *KC*-nek. Ugyanígy mutathatnánk meg, hogy *HK* is kétszerese *BK*-nak. S *BK* egyenlő *KC*-vel, *HK* is egyenlő tehát *KL*-lel (5. Ax.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy a *HG*, *GM*, *ML* szakaszok mindegyike egyenlő mind a két, *HK*, *KL* szakasszal; egyenlő oldalú tehát a *GHKLM* ötszög. Azt állítom, hogy egyenlő szögű is. Minthogy ugyanis az *FKC* szög egyenlő *FLC*-vel, és megmutattuk, hogy *FKC*-nek kétszerese a *HKL*, *FLC*-nek pedig a *KLM* szög, így a *HKL* szög is egyenlő *KLM*-mel (5. Ax.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy a *KHG*, *HGM*, *GML* szögek mindegyike egyenlő mind a két, *HKL*, *KLM* szöggel; ezen öt szög tehát, *GHK*, *HKL*, *KLM*, *LMG* és *MGH* egyenlő egymással. Egyenlő szögű tehát a *GHKLM* ötszög. De megmutattuk, hogy egyenlő oldalú is, és az *ABCDE* kör köré írtuk.

⟨Az adott kör köré tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszöget írtunk.⟩ Éppen ezt kellett megtenni.

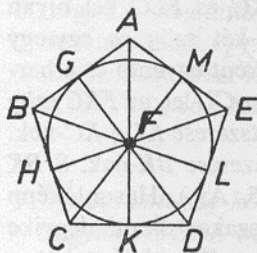
IV. 13. Tétel

Írjunk adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszögbe kört!

Legyen *ABCDE* az adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög. Az *ABCDE* ötszögbe kell tehát kört írni.

Felezzük meg a két, *BCD*, *CDE* szöget a két, *CF*, *DF* egyenessel (I. 9.), és az *F* pontból, amelyben találkoznak egymással a *CF*, *DF* egyenesek, húzzuk meg az *FB*, *FA*, *FE* egyeneseket. Minthogy *BC* egyenlő *CD*-vel, *CF* pedig közös oldal, így e két-két oldal, *BC*, *CF* és *CD*, *CF* (páronként) egyenlő; és a *BCF* szög egyenlő a *DCF* szöggel; így a *BF* alap egyenlő a *DF* alappal, és a *BCF* háromszög egyenlő a *DCF* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel

szemben az egyenlő oldalak fekszenek (I. 4.); egyenlő tehát a CBF szög CDF -fel. Minthogy a CDE szög kétszerese CDF -nek, és a CDE szög egyenlő ABC -vel, a CDF szög pedig CBF -fel, az ABC szög is kétszerese CBF -nek; egyenlő tehát az ABC szög CBF -fel. Az ABC



szöget tehát felezi a BF egyenes. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy a két BAE , AED szöget felezi a két FA , FE egyenes. Bocssassuk az F pontból az AB , BC , CD , DE , illetve EA egyenesekre az FG , FH , FK , FL , FM merőlegeseket (I. 12.). Minthogy a HCF szög egyenlő a KCF szöggel, és az FHC derékszög egyenlő az FKC [derék]szöggel, így FHC és FKC két olyan háromszög, melyben páronként egyenlő két-két szög és egy-egy oldal, a közös FC , mely az egyenlő szögek egyikével

szemben fekszik; tehát a többi oldal is páronként egyenlő (I. 26.); egyenlő tehát az FH merőleges az FK merőlegessel. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy az FL , FM , FG szakaszok mindegyike egyenlő mind a két, FH , FK szakasszal; ezen öt szakasz tehát, FG , FH , FK , FL és FM egyenlő egymással. Az F középpontú és az FG , FH , FK , FL , FM távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni, és érinti az AB , BC , CD , DE , EA egyeneseket, mivel a G , H , K , L és M pontoknál levő szögek derékszögek. Ha ugyanis nem érintené, hanem átszelné őket, akkor az adódnék, hogy a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön belül halad; erről viszont megmutattuk, hogy képtelenség (III. 16.). Nem szeli át tehát az F középpontú és az FG , FH , FK , FL és FM távolságok egyikével rajzolt kör az AB , BC , CD , DE , EA egyeneseket; érinti tehát őket. Rajzoljuk is meg mint a $GHKLM$ kört.

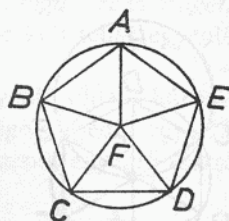
Az adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszögbe tehát kört írtunk bele. Éppen ezt kellett megtenni.

IV. 14. Tétel

Írjunk adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög köré kört!

Legyen $ABCDE$ az adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög. Az $ABCDE$ ötszög köré kell tehát kört írni.

Felezzük meg a két, BCD , CDE szöget a két CF , DF egyenessel (I. 9.), és az F pontból, melyben találkoznak az egyenesek, illesszük a B , A , E pontokra az FB , FA , FE egyeneseket. Az előző tételhez hasonlóan mutathatnánk meg, hogy a CBA , BAE , AED szögeket szintén felezik az FB , FA , FE egyenesek. S minthogy a BCD szög egyenlő CDE -vel és BCD -nek fele az FCD szög, CDE -nek pedig fele a CDF szög, az FCD szög is egyenlő CDF -fel; úgyhogy az FC oldal is egyenlő az FD oldallal (I. 6.). Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy az FB , FA , FE szakaszok mindegyike egyenlő mind a két, FC , FD szakasszal. Ezen öt szakasz tehát, FA , FB , FC , FD és FE egymással egyenlő. Az F középpontú és az FA , FB , FC , FD , FE távolságok egyikével rajzolt kör tehát a többi ponton is át fog menni és köréírt kör lesz. Írjuk is köré, és ez legyen az $ABCDE$ kör.



Az adott egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög köré tehát kört írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XIII. 8., 18. L.

IV. 15. Tétel

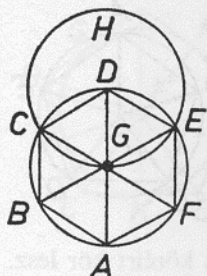
Írjunk adott körbe egyenlő oldalú és egyenlő szögű hatszöget!

Legyen $ABCDEF$ az adott kör. Az $ABCDEF$ körbe kell tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű hatszöget írni.

Húzzuk meg az $ABCDEF$ kör AD átmérőjét, és vegyük föl a kör G középpontját (III. 1.), és legyen $EGCH$ a D középpontú, DG távolsággal rajzolt kör, s húzzuk meg az EG , CG egyeneseket, és hosszabbítsuk meg őket a B , F pontokig, és húzzuk meg az AB , BC , CD , DE , EF , FA egyeneseket. Azt állítom, hogy az $ABCDEF$ hatszög egyenlő oldalú és egyenlő szögű.

Minthogy a G pont középpontja a $ABCDEF$ körnek, egyenlő GE GD -vel. Ismét, minthogy a D pont középpontja a GCH körnek, egyenlő DE a DG -vel. De megmutattuk, hogy GE egyenlő GD -vel: GE is egyenlő tehát DE -vel. Egyenlő oldalú tehát az EGD háromszög, és a három szöge, EGD , GDE és DEG egyenlő egymással, minthogy az egyenlő szárú háromszögeknek az alapon fekvő szögei egyenlők

egymással (I. 5.). A háromszög három szöge együtt két derékszöggel egyenlő (I. 32.), az EGD szög tehát harmadrésze két derékszögnek. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy DGC is harmadrésze két derékszögnek. Minthogy a CG egyenes az EB egyenesen állván egymás mellett együtt két derékszöggel egyenlő szögeket alkot, EGC -t és



CGB -t (I. 13.), így a maradék CGB szög is harmadrésze két derékszögnek. Az EGD , DGC , CGB szögek tehát egyenlők egymással, úgyhogy a csúcsszögeik, BGA , AGF és FGE is egyenlők [az EGD , DGC , CGB szögekkel]. E hat szög tehát, EGD , DGC , CGB , BGA , AGF és FGE egyenlő egymással. Egyenlő szögek viszont egyenlő íveken nyugszanak (III. 26.), e hat körív tehát, AB , BC , CD , DE , EF és FA egyenlő egymással. Egyenlő ívekhez viszont egyenlő húrok tartoznak (III. 29.), a hat húr tehát egyenlő

egymással és az $ABCDEF$ hatszög egyenlő oldalú. Azt állítom, hogy egyenlő szögű is. Valóban, az FA körív egyenlő az ED körívvel. Adjuk hozzájuk közös (tagnak) az $ABCD$ ívet, így a teljes $FABCD$ ív egyenlő a teljes $EDCBA$ ívvel. Az $FABCD$ íven az FED szög nyugszik, az $EDCBA$ íven pedig az AF szög, egyenlő tehát az AFE szög DEF -fel (III. 27.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az $ABCDEF$ hatszög többi szöge is egyenként egyenlő mind a két, AFE , FED szöggel; egyenlő szögű tehát az $ABCDEF$ hatszög. De megmutattuk, hogy egyenlő oldalú is, és az $ABCDEF$ körbe írtuk bele.

Az adott körbe tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű hatszöget írtunk. Éppen ezt kellett megtenni.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a hatszög oldala egyenlő a kör sugarával.

Az ötszög esetéhez hasonlóan, ha a körön levő osztáspontokon át érintőket húzunk a körhöz, akkor – az ötszögnél mondottak mintájára (IV. 12.) – a kör köré írt egyenlő oldalú és egyenlő szögű hatszög keletkezik. Végül hasonlóképp, mint az ötszög esetében, adott hat-

szögbe, illetve köréje kört írhatunk (IV. 13–14.). Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XIII. 9., 10., 12., 16., 18.

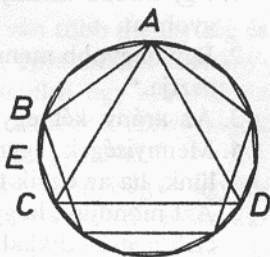
IV. 16. Tétel

Írjunk adott körbe egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszöget!

Legyen $ABCD$ az adott kör. Az $ABCD$ körbe kell tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszöget írni.

Rajzoljuk meg az $ABCD$ körben a beleírt egyenlő oldalú háromszögnek egy AC , a beleírt egyenlő oldalú ötszögnek pedig egy AB oldalát (IV. 2., 11.). Ha az $ABCD$ körvonalat tizenöt egyenlő részre osztjuk, ezek közül az ABC ív harmadrésze lévén a körvonalnak, öt részt tesz ki, az AB ív pedig, ötödrésze lévén a körvonalnak, három részt; a maradék BC ív tehát két egyenlő részt tesz ki. Legyen E a BC ív felezőpontja (III. 30.): így mind a két, BE , EC ív tizenötödrésze az $ABCD$ körvonalnak.

Ha tehát meghúzzuk a BE , EC szakaszokat, és az $ABCD$ körben folytatólagosan fölmérünk ezekkel egyenlő húrokat (IV. 1.), megkapjuk a körbe írt egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszöget. Éppen ezt kellett megtenni.



Az ötszög esetéhez hasonlóan, ha a körön levő osztáspontokon át érintőket húzunk a körhöz, akkor a kör köré írt egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszög keletkezik (IV. 12.). Végül hasonló megfontolások alapján, mint az ötszögnél, adott tizenötszögbe, illetve köréje kört írhatunk (IV. 12., 13.). Éppen ezt kellett megtenni.

Ötödik könyv

Definíciók

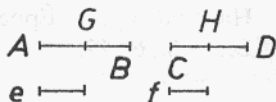
1. Egy kisebb mennyiség egy nagyobbnek része, ha osztja* a nagyobbat.
2. Egy nagyobb mennyiség egy kisebbnek többszöröse, ha a kisebb osztja.*
3. Az arány két egynemű* mennyiség nagyságbeli viszonya.
4. Mennyiségek egymáshoz viszonyított arányáról akkor beszélünk, ha az egyik többszöröse meghaladhatja a másikat (V. 10.).*
5. Azt mondjuk, hogy mennyiségek ugyanazon arányban állnak, az első a másodikkal és a harmadik a negyedikkel, ha az elsőnek és a harmadiknak ugyanannyiszorosai a második és a negyedik ugyanannyiszorosainál, bárhányszoros is a többszörözés, páronként vagy egyszerre nagyobbak, vagy egyszerre egyenlők, vagy egyszerre kisebbek megfelelően párosítva őket.*
6. Az ugyanazon arányú mennyiségeket arányosoknak nevezzük.
7. Ha az ugyanannyiszorosok közül az első mennyiség egy többszöröse nagyobb a második egy többszörösénél, a harmadiké viszont nem nagyobb a negyedikénél, akkor azt mondjuk, hogy az első és a második mennyiség aránya nagyobb, mint a harmadiké és a negyediké.*
8. Arányosság legkevesebb három tag esetén állhat fenn.*
9. Ha három mennyiség arányos, azt mondjuk, hogy az első a harmadikkal a másodikhoz viszonyítva kétszeres arányban áll.*
10. Ha négy mennyiség arányos, azt mondjuk, hogy az első a negyedikkel a másodikhoz viszonyítva háromszoros arányban (XI. 33.) áll, és így tovább mindig aszerint, hogy milyen az arányosság.*

11. Megfelelő mennyiségeknek mondjuk külön-külön az előtagokat és az utótagokat.
12. Felcserélt arány az előtagnak előtaghoz és utótagnak utótaghoz való viszonyítása.*
13. Fordított arány az utótagnak előtagként az előtaghoz mint utótaghoz való viszonyítása.*
14. Az arány összetétele az elő- és utótag összegének ugyanazon utótaghoz való viszonyítása.*
15. Az arány szétbontása a többletnek, mellyel az előtag több az utótagnál, ugyanazon utótaghoz való viszonyítása.*
16. Az arány fölforgatása az előtagnak a többletkez való viszonyítása, mellyel az előtag több az utótagnál.*
17. Egyenlőség révén való arány áll fenn, ha van több mennyiség és ugyanannyi másik, hogy kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, s ekkor az első csoportban az első úgy aránylik az utolsóhoz, mint a másodikban; másképp szólva: a szélső tagok egymáshoz való viszonyítása a középsők kihagyásával.*
18. Keresztvezető az arányosság, ha van három mennyiség és ugyanannyi másik, és történetesen az első csoportban az első a másodikhoz úgy aránylik, mint a második csoportban, és az első csoportban a második a harmadikhoz úgy aránylik, mint a másodikban a harmadik az elsőhöz.*

V. 1. Tétel

*Ha valahány mennyiség ugyanannyi másikkal páronként ugyanannyiszorosa, akkor annyszorosa lesz az első mennyiségek összege a másikkal összegének, ahányszorosa az egyik első mennyiség egy (megfelelő) másikkal.**

Legyenek AB és CD a valahány mennyiség, mely ugyanannyi másik mennyiségnek, e -nek és f -nek páronként ugyanannyiszorosa. Azt állítom, hogy ahányszorosa AB az e -nek, annyszorosa AB meg CD az e meg f -nek. Minthogy ugyanis ugyanannyiszorosa AB az e -nek, mint CD az f -nek, ahány e -vel egyenlő mennyiség van AB -ben, annyi f -fel egyenlő van CD -ben. Osszuk föl AB -t az e -vel egyenlő AG , GB , CD -t pedig az f -fel



egyenlő CH , HD mennyiségekre; ekkor az AG , GB mennyiségek száma** egyenlő lesz a CH , HD mennyiségek számával. S minthogy AG egyenlő e -vel, CH pedig f -fel, egyenlő AG az e -vel és AG meg CH az e meg f -fel. Ugyanígy egyenlő GB az e -vel és GB meg HD az e meg f -fel. Ahány e -vel egyenlő mennyiség van tehát AB -ben, annyi e meg f -fel egyenlő van AB meg CD -ben; ahányszorosa tehát AB az e -nek, annyszorosa lesz AB meg CD is az e meg f -nek.

Ha tehát valahány... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 5., 8., 12.

V. 2. Tétel

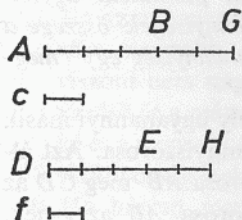
*Ha egy első mennyiség egy másodiknak ugyanannyiszorosa, mint egy harmadik egy negyediknek, és egy ötödik a másodiknak ugyanannyiszorosa, mint egy hatodik a negyediknek, akkor az első és az ötödik összege ugyanannyiszorosa lesz a másodiknak, mint a harmadik meg a hatodik a negyediknek.**

Legyen ugyanis az első mennyiség, AB a másodiknak, c -nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik, DE , a negyediknek, f -nek, és legyen az ötödik BG a második c -nek ugyanannyiszorosa, mint a hatodik EH a negyedik f -nek. Azt állítom, hogy az első és az ötödik összege, AG , a második c -nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik meg a hatodik, DH , a negyedik f -nek.

Minthogy ugyanis ugyanannyiszorosa AB a c -nek, mint DE az f -nek, ahány c -vel egyenlő mennyiség van AB -ben, annyi f -fel egyenlő van DE -ben. S ugyanígy ahány c -vel egyenlő mennyiség van BG -ben, annyi f -fel egyenlő van EH -ban. Ahány c -vel egyenlő mennyiség van tehát a teljes AG -ben, annyi f -fel egyenlő van a teljes DH -ban; ahányszorosa tehát AG a c -nek, annyszorosa lesz DH is f -nek. Az első és az ötödik összege, AG , ugyanannyiszorosa lesz tehát a második c -nek, mint a harmadik meg a hatodik, DH , a negyedik f -nek.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 3., 6., 17.

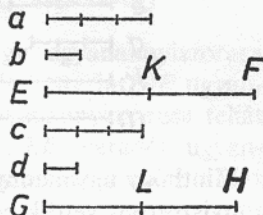


V. 3. Tétel

Ha egy első mennyiség egy másodiknak ugyanannyiszorosa, mint egy harmadik egy negyediknek, és vesszük ugyanannyiszorosát az elsőnek és a harmadiknak, akkor a fölvett mennyiségek is egyenlőség révén (V. 17. D.) külön-külön ugyanannyiszorosai az egyik a másodiknak a másik pedig a negyediknek.*

Legyen ugyanis az a első mennyiség a második b -nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik c a negyedik d -nek, és vegyük a -nak és c -nek ugyanannyiszorosát, EF -et és GH -t. Azt állítom, hogy EF ugyanannyiszorosa b -nek, mint GH a d -nek.

Minthogy ugyanis ugyanannyiszorosa EF az a -nak, mint GH a c -nek, ahány a -val egyenlő mennyiség van EF -ben, annyi c -vel egyenlő van GH -ban. Osszuk föl EF -et az a -val egyenlő EK , KF , GH -t pedig a c -vel egyenlő GL , LH mennyiségekre. Ekkor az EK , KF mennyiségek száma* egyenlő lesz a GL , LH mennyiségek számával. S minthogy ugyanannyiszorosa a a b -nek, mint c a d -nek, s EK egyenlő a -val, GL pedig c -vel, így ugyanannyiszorosa EK a b -nek, mint GL a d -nek. Ugyanígy ugyanannyiszorosa KF a b -nek, mint LH a d -nek. Minthogy tehát az EK első mennyiség a második b -nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik GL a negyedik d -nek, és az ötödik KF a második b -nek ugyanannyiszorosa, mint a hatodik LH a negyedik d -nek, így az első és az ötödik összege, EF , a második b -nek ugyanannyiszorosa, mint a harmadik meg a hatodik, GH , a negyedik d -nek (V. 2.).



Ha tehát egy első mennyiség egy másodiknak ugyanannyiszorosa, mint egy harmadik egy negyediknek, és vesszük az elsőnek és a harmadiknak ugyanannyiszorosát, akkor... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 4.

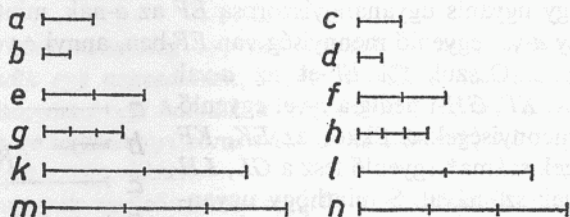
V. 4. Tétel

Ha egy első mennyiség egy másodikhoz ugyanúgy aránylik, mint egy harmadik egy negyedikhez, akkor – bárhányszoros is a többszörözés –

az első és a harmadik ugyanannyiszorosa is ugyanúgy aránylik a második és a negyedik ugyanannyiszorosához, megfelelően párosítva őket.*

Legyen ugyanis az a első mennyiségnek a második b -hez való aránya ugyanaz, mint a harmadik c -é a negyedik d -hez, és vegyük a -nak és c -nek ugyanannyiszorosát, e -t és f -et, b -nek és d -nek pedig egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosát, g -t és h -t. Azt állítom, hogy f úgy aránylik h -hoz, mint e a g -hez.

Vegyük ugyanis e és f egy k és l ugyanannyiszorosát, g -nek és h -nak pedig egy tetszőleges másik m , illetve n ugyanannyiszorosát.



Mínthogy ugyanannyiszorosa e az a -nak, mint f a c -nek, és ugyanannyiszorosát vettük e -nek és f -nek, k -t, illetve l -et, így ugyanannyiszorosa k az a -nak, mint l a c -nek (V. 3.). Ugyanígy m ugyanannyiszorosa b -nek, mint n a d -nek. Mínthogy c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, és vettük a -nak és c -nek k , illetve l , b -nek és d -nek pedig egy tetszőleges másik m , illetve n ugyanannyiszorosát, így ha k nagyobb m -nél, akkor l is nagyobb n -nél, ha egyenlő vele, ez is egyenlő, ha kisebb, ez is kisebb. S k , illetve l az e -nek és f -nek ugyanannyiszorosa, m illetve n pedig g -nek és h -nak egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; f tehát úgy aránylik h -hoz, mint e a g -hez (V. 5. D.).

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 22.

V. 5. Tétel

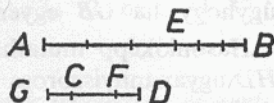
Ha egy mennyiség ugyanannyiszorosa egy másiknak, mint az egyik kivonandó a másik kivonandónak, akkor az egyik maradék is ugyanannyiszorosa lesz a másik maradéknak, ahányszorosa az egész mennyiség az egész másiknak.*

Legyen ugyanis az AB mennyiség ugyanannyiszorosa a CD mennyiségnek, mint az AE kivonandó a CF kivonandónak. Azt állítom, hogy az EB maradék is ugyanannyiszorosa lesz az FD maradéknak, ahányszorosa az egész AB az egész CD -nek.

Legyen ugyanis EB annyszorosa GC -nek, ahányszorosa AE a CF -nek.

Minthogy ugyanannyiszorosa AE a CF -nek, mint EB a GC -nek, így AB ugyanannyiszorosa GF -nek, mint AE a CF -nek (V. 1.). A feltétel szerint AE ugyanannyiszorosa CF -nek, mint AB a CD -nek. Ugyanannyiszorosa tehát AB a GF -nek és CD -nek; így egyenlő GF a CD -vel.** Vonjuk

le a közös CF részt, ekkor a maradék GC egyenlő a maradék FD -vel. Minthogy ugyanannyiszorosa AE a CF -nek, mint EB a GC -nek, GC pedig egyenlő FD -vel, így ugyanannyiszorosa AE a CF -nek, mint EB az FD -nek. A feltétel szerint AE ugyanannyiszorosa CF -nek, mint AB a CD -nek; ugyanannyiszorosa tehát EB az FD -nek, mint AB a CD -nek, azaz az EB maradék ugyanannyiszorosa lesz az FD maradéknak, ahányszorosa az egész AB az egész CD -nek.



Ha tehát egy ... Éppen ezt kellett megmutatni.

V. 6. Tétel

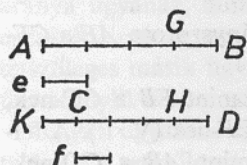
Ha két mennyiség két másiknak ugyanannyiszorosa, és valamely kivonandók e másik mennyiségeknek ugyanannyiszorosai, akkor a maradékok is vagy egyenlők e másik mennyiségekkel, vagy ugyanannyiszorosai.*

Legyen ugyanis két mennyiség, AB és CD , két másiknak e -nek és f -nek ugyanannyiszorosa, és legyenek az AG , CH kivonandók ezen e , illetve f mennyiségeknek ugyanannyiszorosai. Azt állítom, hogy a GB , HD maradékok is vagy egyenlők e -vel, illetve f -fel, vagy ugyanannyiszorosai.

Legyen ugyanis először GB egyenlő e -vel. Azt állítom, hogy HD is egyenlő f -fel.

Vegyük föl az f -fel egyenlő CK -t. Minthogy ugyanannyiszorosa AG az e -nek, mint CH az f -nek, és GB egyenlő e -vel, KC pedig f -fel,

így AB ugyanannyiszorosa e -nek, mint KH az f -nek (V. 2.). AB viszont feltétel szerint ugyanannyiszorosa e -nek, mint CD az f -nek; ugyanannyiszorosa tehát KH az f -nek, mint CD az f -nek. Minthogy



KH és CD ugyanannyiszorosa f -nek, így KH egyenlő CD -vel.** Vonjuk le a közös CH -t; így a maradék KC egyenlő a maradék HD -vel. De f egyenlő KC -vel, HD is egyenlő tehát f -fel. Vonjuk le a közös CH -t; így a maradék KC egyenlő a maradék HD -vel. De f egyenlő KC -vel, tehát HD is egyenlő f -fel,

úgyhogy ha GB egyenlő e -vel, akkor HD is egyenlő f -fel.

Hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy ha GB többszöröse e -nek, HD ugyanannyiszorosa lesz f -nek.

Ha tehát két ... Éppen ezt kellett megmutatni.

V. 7. Tétel

Egyenlő mennyiségeknek ugyanahhoz a mennyiséghez és ugyanazon mennyiségeknek egyenlőkhöz való aránya ugyanaz.

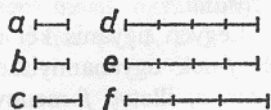
Legyenek a és b egyenlő mennyiségek és c egy tetszőleges harmadik mennyiség. Azt állítom, hogy a -nak és b -nek c -hez való aránya ugyanaz, szintűgy c -é a -hoz és b -hez.

Vegyük ugyanis a -nak és b -nek d , illetve e ugyanannyiszorosát, s c -nek egy tetszőleges másik f többszörösét.

Minthogy d ugyanannyiszorosa a -nak, mint e a b -nek, a pedig egyenlő b -vel, így d is egyenlő e -vel. f egy tetszőleges másik mennyiség, ha tehát d nagyobb f -nél, e is nagyobb f -nél, ha egyenlő vele, ez is egyenlő, s ha kisebb nála, ez is kisebb. S d és e az a -nak és b -nek ugyanannyiszorosai, f pedig c -nek egy tetszőleges másik többszöröse; úgy aránylik tehát b a c -hez, ahogyan a (V. 5. D.).

Azt állítom, hogy c -nek a -hoz és b -hez való aránya is ugyanaz.

Az előbbivel azonos konstrukció által hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy d egyenlő e -vel. f egy másik mennyiség, ha tehát f nagyobb d -nél, akkor e -nél is, ha egyenlő vele, akkor e -vel is egyenlő, és ha



kisebb nála, akkor e -nél is kisebb. S f a c -nek egy többszöröse, d és e pedig a -nak és b -nek egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; úgy aránylik tehát c a b -hez, ahogyan a -hoz (V. 5. D.).

Egyenlő mennyiségeknek tehát ugyanahhoz ...

F.: V. 10., 15., 20–21., 25.; VI. 2., 4., 10–12., 14–17., 19., 30., 54. L.; XI. 31., 34.; XII. 15.

Következmény*

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha mennyiségek arányosak, akkor fordítva is arányosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 20–21., 24.; VI. 31.; X. 5–6., 14., 28., 43., 52., 68.; XI. 32.; XII. 2., 5., 12., 18.

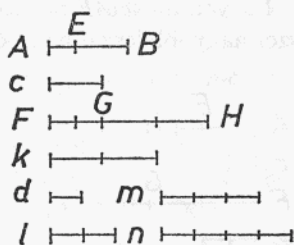
V. 8. Tétel

Nem egyenlő mennyiségek közül a nagyobbak ugyanazon mennyiséghez való aránya nagyobb, mint a kisebbé. Ugyanannak a mennyiségnek a kisebbhez való aránya nagyobb, mint a nagyobbhoz való aránya.

Legyenek AB és c nem egyenlő mennyiségek, és legyen AB a nagyobb, s d egy tetszőleges másik mennyiség. Azt állítom, hogy AB -nek d -hez való aránya nagyobb, mint c -é, és d -nek c -hez való aránya nagyobb, mint AB -hez való aránya.

Minthogy AB nagyobb c -nél, vegyünk egy c -vel egyenlő BE -t. Az AE , EB mennyiségek kisebbike többszörözve egyszer nagyobb lesz d -nél (V. 4. D.). Legyen először AE kisebb EB -nél, többszörözzük AE -t, és legyen FG egy d -nél nagyobb többszöröse, és ahányszorosa FG az AE -nek, annyszorosa legyen GH is EB -nek, k pedig c -nek; és vegyünk a d -nek l kétszeresét, m háromszorosát és így tovább, mindig eggyel többet, amíg egy olyan többszöröshöz nem jutunk d -nek, mely elsőként nagyobb k -nál. Vegyük föl ezt az n -et, mely legyen négyszerese d -nek és elsőként nagyobb k -nál.

Minthogy k először n -nél kisebb, így k az m -nél nem kisebb. S minthogy FG ugyanannyiszorosa AE -nek, mint GH az EB -nek, ugyanannyiszorosa FG az AE -nek, mint FH az AB -nek (V. 1.). FG

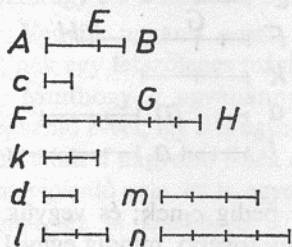


viszont ugyanannyiszorosa AE -nek, mint k a c -nek; ugyanannyiszorosa tehát FH az AB -nek, mint k a c -nek. FH és k tehát AB -nek, illetve c -nek ugyanannyiszorosa. Továbbá, minthogy GH ugyanannyiszorosa EB -nek, mint k a c -nek, s EB egyenlő c -vel, GH is egyenlő k -val. k viszont nem kisebb m -nél, GH sem kisebb tehát m -nél. FG nagyobb d -nél, a teljes FH tehát nagyobb d és m összegénél. d és m összege viszont egyenlő n -nel, minthogy m háromszorosa d -nek, m és d összege pedig négyszerese, s n is négyszerese d -nek; m és d összege tehát egyenlő n -nel. FH viszont nagyobb m meg d -nél, FH tehát nagyobb n -nél; de k nem nagyobb n -nél. S FH és k az AB -nek, illetve c -nek ugyanannyiszorosa, n pedig d egy másik tetszőleges többszöröse; AB -nek d -hez való aránya tehát nagyobb, mint c -é (V. 7. D.).

Azt is állítom, hogy d -nek c -hez való aránya nagyobb, mint AB -hez való aránya.

Az előbbivel azonos konstrukció által hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy n nagyobb k -nál, de nem nagyobb FH -nál. S n a d -nek egy többszöröse, FH és k pedig AB -nek, illetve c -nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosai. d -nek c -hez való aránya tehát nagyobb, mint AB -hez való aránya.

Legyen most AE nagyobb EB -nél. A kisebb EB többszörözve egyszer nagyobb lesz d -nél. Többszörözzük, és legyen GH a d -nél nagyobb



többszöröse EB -nek; s ahányszorosa GH az EB -nek, annyiszorosa legyen FG is AE -nek, k pedig c -nek. Hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy FH és k ugyanannyiszorosa AB -nek, illetve c -nek. Vegyük hasonlóképp d -nek azt az n többszörösét, mely elsőként nagyobb FG -nél; úgyhogy FG ismét nem kisebb m -nél. GH nagyobb d -nél, a teljes FH tehát nagyobb d meg m -nél, azaz n -nél. k viszont nem nagyobb

n -nél, minthogy a GH -nál, azaz k -nál nagyobb FG sem nagyobb n -nél. A fentiek mintájára, ugyanúgy fejezzük be a bizonyítást.

Nem egyenlő mennyiségek közül tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 9–10., 14., 20–21.

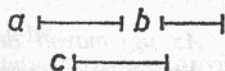
V. 9. Tétel

Mennyiségek, melyeknek ugyanahhoz a mennyiséghez való arányuk ugyanaz, egyenlők; s azok a mennyiségek, melyekhez ugyanannak a mennyiségnek ugyanaz az aránya, egyenlők.

Legyen ugyanis a -nak és b -nek c -hez való aránya ugyanaz. Azt állítom, hogy a egyenlő b -vel.

Ha ugyanis nem egyenlő, akkor a -nak és b -nek c -hez való aránya nem volna ugyanaz (V. 8.); de ugyanaz, egyenlő tehát a a b -vel.

Legyen most c -nek a -hoz és b -hez való aránya ugyanaz. Azt állítom, hogy a egyenlő b -vel.



Ha ugyanis nem egyenlő, akkor c -nek a -hoz és b -hez való aránya nem volna ugyanaz (V. 8.); de ugyanaz, egyenlő tehát a a b -vel.

Mennyiségek tehát, ... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 2-3., 5-7., 14-15., 20-22., 26.; X. 6., 31., 34.; XII. 15.

V. 10. Tétel

Ha mennyiségeknek egy adott mennyiséghez való aránya létezik, akkor közülük nagyobb az, amelyiknek ehhez való aránya nagyobb; amelyikhez való aránya pedig az adott mennyiségnek nagyobb, az kisebb.

Legyen ugyanis a -nak c -hez való aránya nagyobb, mint b -é. Azt állítom, hogy a nagyobb b -nél.

Ellenkező esetben ugyanis vagy egyenlő a a b -vel, vagy kisebb nála. Egyenlőnek nem egyenlő a a b -vel, mert akkor a -nak és b -nek c -hez való aránya ugyanaz volna (V. 7.). De nem az, a a b -nél, mert akkor a -nak c -hez való aránya kisebb volna, mint b -é (V. 8.). De nem az, nem kisebb tehát a a b -nél. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele; nagyobb tehát a a b -nél.

Legyen most c -nek b -hez való aránya nagyobb, mint a -hoz való aránya. Azt állítom, hogy b kisebb a -nál.

Ellenkező esetben ugyanis vagy egyenlő vele, vagy nagyobb nála. Egyenlőnek nem egyenlő b az a -val, mert akkor c -nek a -hoz és b -hez

való aránya ugyanaz volna (V. 7.). De nem az, nem egyenlő tehát a a b -vel. Nem is nagyobb b az a -nál, mert akkor c -nek b -hez való aránya kisebb volna, mint a -hoz való aránya (V. 8.). De nem az, nem nagyobb tehát b az a -nál. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele; kisebb tehát b az a -nál.

Ha tehát ... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 14., 20–21.

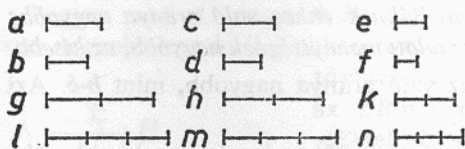
V. 11. Tétel

Az ugyanazon aránnyal azonos arányok egymással is azonosak.

Arányuljék ugyanis úgy c a d -hez, mint a a b -hez, és e az f -hez, mint c a d -hez. Azt állítom, hogy e úgy aránylik f -hez, mint a a b -hez.

Vegyük ugyanis a , c és e valamely g , h , illetve k ugyanannyiszorosát, és b -nek, d -nek és f -nek egy tetszőleges másik l , m , illetve n ugyanannyiszorosát.

Minthogy c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, és ugyanannyiszorosát vettük a -nak és c -nek, g -t, illetve h -t, b -nek és d -nek pedig egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosát, l -et, illetve m -et, így ha g



nagyobb l -nél, akkor h is nagyobb m -nél, és ha egyenlő vele, h is egyenlő, és ha kisebb, akkor h is kisebb. Ismét, minthogy e úgy aránylik f -hez, mint c a d -hez, és ugyanannyiszor-

osát vettük c -nek és e -nek, h -t, illetve k -t, d -nek és f -nek pedig egy tetszőleges másik ugyanannyiszorosát, m -et, illetve n -et, így ha h nagyobb m -nél, akkor k is nagyobb n -nél, ha egyenlő, k is egyenlő, és ha kisebb, k is kisebb. De ha h nagyobb m -nél, akkor g is nagyobb l -nél, és ha egyenlő, g is egyenlő, és ha kisebb, g is kisebb; úgyhogy ha g nagyobb l -nél, akkor k is nagyobb n -nél, és ha egyenlő, k is egyenlő, és ha kisebb, k is kisebb. S g és h az a -nak és e -nek ugyanannyiszorosa, l és n pedig b -nek, illetve f -nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; e tehát úgy aránylik f -hez, mint a a b -hez.

Az ugyanazon aránnyal azonos arányok tehát ... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 16., 18–21., 23., 25.; VI. 1–7., 10–12., 14–20., 22–26., 30., 33.; X. 6., 12., 25., 27–28., 32., 54. L., 66–68., 91–92., 98., 100., 102–103.; XI. 17., 31.; XII. 11., 15.

V. 12. Tétel

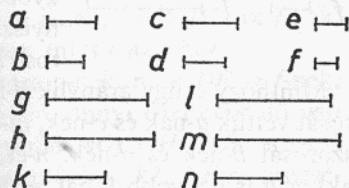
*Ha valahány mennyiség arányos, akkor az előtagok összege úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármelyik előtag az utótagjához.**

Legyen valahány mennyiség, a , b , c , d , e és f arányos: c a d -hez és e az f -hez úgy arányulják, mint a a b -hez. Azt állítom, hogy a meg c meg e úgy aránylik b meg d meg f -hez, mint a a b -hez.

Vegyük ugyanis a -nak, c -nek és e -nek g , h , illetve k ugyanannyiszorosát, b -nek, d -nek és f -nek pedig tetszőleges másik l , m , illetve n ugyanannyiszorosát.

Mínthogy c a d -hez és e az f -hez úgy aránylik, mint a a b -hez, és ugyanannyiszorosát vettük a -nak, c -nek és e -nek, g -t, h -t, illetve k -t, s tetszőleges másik ugyanannyiszorosát b -nek, d -nek és f -nek, l -et, m -et, illetve n -et, így ha g nagyobb l -nél, akkor h is nagyobb m -nél és k az n -nél, és ha egyenlő, ezek is egyenlők, és ha kisebb, ezek is kisebbek, úgyhogy ha g nagyobb l -nél, akkor g meg h meg k is nagyobb l meg m meg n -nél, és ha egyenlő, ez is egyenlő, és ha kisebb, ez is kisebb.

S g , és g meg h meg k az a -nak, illetve a meg c meg e -nek ugyanannyiszorosa, minthogy ha valahány mennyiség ugyanannyi másikkal páronként ugyanannyiszorosa, akkor annyszorosa lesz az első mennyiségek összege a másikkal összegének, ahányszorosa az egyik első mennyiség egy (megfelelő) másikkal (V. 1.). Ugyanígy l , és l meg m meg n is ugyanannyiszorosa b -nek, illetve b meg d meg f -nek; a meg c meg e tehát úgy aránylik b meg d meg f -hez, mint a a b -hez.



S g , és g meg h meg k az a -nak, illetve a meg c meg e -nek ugyanannyiszorosa, minthogy ha valahány mennyiség ugyanannyi másikkal páronként ugyanannyiszorosa, akkor annyszorosa lesz az első mennyiségek összege a másikkal összegének, ahányszorosa az egyik első mennyiség egy (megfelelő) másikkal (V. 1.). Ugyanígy l , és l meg m meg n is ugyanannyiszorosa b -nek, illetve b meg d meg f -nek; a meg c meg e tehát úgy aránylik b meg d meg f -hez, mint a a b -hez.

Ha tehát valahány... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 15.; VI. 20.; X. 103–105., 112.; XII. 4., 8. K., 12., 17. K.

V. 13. Tétel

Ha egy első mennyiségnek egy másodikhoz való aránya ugyanaz, mint

egy harmadiké egy negyedikhez, a harmadiknak a negyedikhez való aránya viszont nagyobb, mint egy ötödiké egy hatodikhoz, akkor az elsőnek a másodikhoz való aránya is nagyobb, mint az ötödiké a hatodikhoz.

Legyen ugyanis az első mennyiségnek, a -nak, a második b -hez való aránya ugyanaz, mint a harmadik c -é a negyedik d -hez, a harmadik c -nek a negyedik d -hez való aránya viszont legyen nagyobb, mint az ötödik e -é a hatodik f -hez. Azt állítom, hogy az első a -nak a második b -hez való aránya is nagyobb, mint az ötödik e -é a hatodik f -hez.

Miután létezik c -nek és e -nek olyan ugyanannyszorosa, és d -nek és f -nek olyan tetszőleges másik ugyanannyszorosa, hogy c többszöröse d többszörösénél nagyobb, e többszöröse viszont nem nagyobb f többszörösénél (V. 7. D.), vegyünk ilyeneket: legyen c -nek és f -nek ugyanannyszorosa g , illetve h , d -nek és f -nek pedig tetszőleges másik ugyanannyszorosa k , illetve l úgy, hogy g legyen nagyobb k -nál, de h ne legyen nagyobb l -nél. Ahányszorosa g a c -nek, annyszorosa legyen m is a -nak, s ahányszorosa k a d -nek, annyszorosa n is b -nek.

Minthogy c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, és ugyanannyszorosát vettük a -nak és c -nek, m -et és g -t, s valamely másik ugyanannyszorosát b -nek és d -nek, n -et, illetve k -t, így ha m nagyobb n -nél, akkor g is nagyobb k -nál, és ha egyenlő, ez is egyenlő, és ha kisebb, ez is kisebb. g nagyobb k -nál, m is nagyobb tehát n -nél. h viszont nem nagyobb l -nél. m és h ugyanannyszorosa a -nak, illetve e -nek, n és l valamely másik ugyanannyszorosa b -nek, illetve d -nek; a -nak b -hez való aránya tehát nagyobb, mint e -é f -hez.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 14., 20–21.

V. 14. Tétel

Ha egy első mennyiségnek egy másodikhoz való aránya ugyanaz, mint egy harmadiké egy negyedikhez, s az első mennyiség nagyobb a harmadiknál, akkor a második is nagyobb a negyediknél, s ha egyenlő, ez is egyenlő, s ha kisebb, ez is kisebb.

Legyen ugyanis az első mennyiségnek, a -nak a második b -hez való aránya ugyanaz, mint a harmadik c -é a negyedik d -hez, s legyen a nagyobb c -nél. Azt állítom, hogy b is nagyobb d -nél.

Mínthogy ugyanis a nagyobb c -nél, b pedig valamely másik mennyiség, így a -nak b -hez való aránya nagyobb mint c -é (V. 8.). c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, c -nek d -hez való aránya is nagyobb tehát, mint c -é b -hez (V. 13.). $a \longmapsto c$
Az viszont, amelyikhez való aránya ugyanannak $b \longmapsto d$
a mennyiségnek nagyobb, az kisebb (V. 10.);
kisebb tehát d a b -nél, úgyhogy b nagyobb d -nél.

Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha a egyenlő c -vel, akkor b is egyenlő d -vel, s ha a kisebb c -nél, akkor b is kisebb d -nél.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

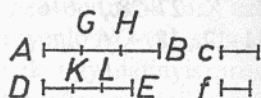
F.: V. 16., 18.; VI. 22. L., 25., 30-31.; XII. 2. K., 5., 11., 18.; XIII. 2., 5., 9., 17.

V. 15. Tétel

*A részek aránya páronként ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké.**

Legyen ugyanis AB ugyanannyiszorosa c -nek, mint DE az f -nek. Azt állítom, hogy AB úgy aránylik DE -hez, mint c az f -hez.

Mínthogy ugyanis AB ugyanannyiszorosa c -nek, mint DE az f -nek, ahány c -vel egyenlő mennyiség van AB -ben, annyi f -fel egyenlő van DE -ben is. Osszuk föl AB -t a c -vel egyenlő AG , GH , HB , a DE -t pedig az f -fel egyenlő DK , KL , LE mennyiségekre. Ekkor az AG , GH , HB mennyiségek száma egyenlő lesz a DK , KL , LE mennyiségek számával. Mínthogy AG , GH és HB egyenlők egymással, s DK , KL és LE is egyenlő egymással, így GH úgy aránylik



KL -hez és HB az LE -hez, mint AG a DK -hoz (V. 7., 11.). Az előtagok összege tehát úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint az egyik előtag az utótagjához (V. 12.); AB tehát úgy aránylik DE -hez, mint AG DK -hoz. AG viszont egyenlő c -vel, s DK az f -fel; AB tehát úgy aránylik DE -hez, mint c az f -hez (V. 7., 11.).

A részek aránya tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 16., 23.; VI. 1., 33.; XIII. 17.

V. 16. Tétel

Ha négy mennyiség arányos, akkor fölcserélve is arányos lesz.

Legyen négy mennyiség, a , b , c és d arányos: amint a a b -hez, úgy c a d -hez. Azt állítom, hogy fölcserélve is arányosak lesznek: amint a a c -hez, úgy b a d -hez.

Vegyük ugyanis a -nak és b -nek e , illetve f , c -nek és d -nek pedig tetszőleges másik g , illetve h ugyanannyiszorosát.

Minthogy e ugyanannyiszorosa a -nak, mint f a b -nek, s a részek aránya ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), e úgy aránylik f -hez, mint a a b -hez. c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, e tehát úgy aránylik f -hez, mint c a d -hez (V. 11.). Továbbá, minthogy g és h ugyanannyiszorosa c -nek, illetve d -nek, g úgy aránylik h -hoz, mint c a d -hez (V. 15.). e úgy aránylik f -hez, mint c a d -hez, g tehát úgy aránylik h -hoz, mint e az f -hez (V. 11.). Ha viszont négy mennyiség arányos, s az első mennyiség nagyobb a harmadiknál, akkor a második is nagyobb a negyediknél, s ha egyenlő, ez is egyenlő, s ha kisebb, ez is kisebb (V. 14.).^f Ha tehát e nagyobb g -nél, f is nagyobb h -nál, s ha egyenlő, ez is egyenlő, s ha kisebb, ez is kisebb. S e és f az a -nak, illetve b -nek ugyanannyiszorosa és g , h a c -nek, illetve d -nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; b tehát úgy aránylik d -hez, mint a a c -hez.

Ha tehát négy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 19., 23.; VI. 4., 19–20., 22. L. 24–25.; X. 27–28., 66–68., 103–105., 113–114.; XI. 23.; XII. 2., 2. K., 4–5., 11–12., 18.

V. 17. Tétel

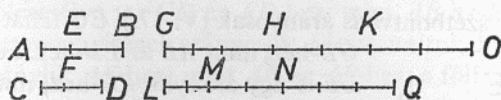
*Ha összetett mennyiségek arányosak, akkor szétbontva is arányosak.**

Legyenek az AB , BE , CD , DF összetett mennyiségek arányosak, CD a DF -hez, mint AB a BE -hez. Azt állítom, hogy szétbontva is arányosak, CF a DF -hez, mint AE az EB -hez.

Vegyük ugyanis AE -nek, BE -nek, CF -nek és DF -nek GH , HK , LM , illetve MN , BE -nek és DF -nek pedig tetszőleges másik KO , NQ ugyanannyiszorosát.

Minthogy GH ugyanannyiszorosa AE -nek, mint HK a BE -nek, GH

ugyanannyiszorosa AE -nek, mint GK az AB -nek (V. 1.). GH ugyanannyiszorosa AE -nek, mint LM a CF -nek, GK tehát ugyanannyiszorosa AB -nek, mint LM a CF -nek. Ismét, minthogy LM ugyanannyiszorosa CF -nek, mint MN a DF -nek, LM ugyanannyiszorosa CF -nek, mint



LN a CD -nek (V. 1.). LM ugyanannyiszorosa volt CF -nek, mint GK az AB -nek, GK tehát ugyanannyiszorosa AB -nek, mint LN a CD -nek. GK , LN tehát ugyanannyiszorosa AB -nek, illetve CD -nek. Továbbá, minthogy HK ugyanannyiszorosa BE -nek, mint MN a DF -nek, s KO is ugyanannyiszorosa BE -nek, mint NQ a DF -nek, a HO összeg is ugyanannyiszorosa BE -nek, mint MQ a DF -nek (V. 2.). Minthogy CD úgy aránylik DF -hez, mint AB a BE -hez, és vettük AB -nek és CD -nek GK , illetve LN , BE -nek és DF -nek pedig HO , illetve MQ ugyanannyiszorosát, ha GK nagyobb HO -nál, akkor LN is nagyobb MQ -nál, és ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb. Legyen most GK nagyobb HO -nál. Levonva a közös HK -t, GH is nagyobb KO -nál. De ha GK nagyobb HO -nál, akkor LN is nagyobb MQ -nál; nagyobb tehát LN az MQ -nál. Levonva a közös MN -et, LM is nagyobb NQ -nál, úgyhogy ha GH nagyobb KO -nál, akkor LM is nagyobb NQ -nál. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha GH egyenlő KO -val, akkor LM is egyenlő NQ -val, s ha kisebb, kisebb. S GH , LM az AE -nek, illetve CF -nek ugyanannyiszorosa, KO és NQ pedig BE -nek, illetve DF -nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosa; CF tehát úgy aránylik DF -hez, mint AE a BE -hez.

Ha tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 18–19.; X. 14., 112.

V. 18. Tétel

*Ha szétbontott mennyiségek arányosak, akkor összetéve is arányosak.**

Legyenek az AE , EB , CF , FD szétbontott mennyiségek arányosak, CF az FD -hez, mint AE az EB -hez. Azt állítom, hogy összetéve is arányosak, CD az FD -hez, mint AB az EB -hez.

Ha ugyanis CD nem úgy aránylik FD -hez, mint AB az EB -hez, akkor CD egy FD -nél kisebb vagy nagyobb mennyiséghez aránylik úgy, mint AB az EB -hez.

Legyen ez a mennyiség először egy kisebb GD . Minthogy CD úgy aránylik GD -hez, mint AB az EB -hez, összetett mennyiségek arányosak, úgyhogy szétbontva is arányosak (V. 17.). CG tehát úgy aránylik GD -hez, mint AE az EB -hez. Feltevés szerint CF is úgy aránylik FD -hez, mint AE az EB -hez, CF tehát úgy aránylik FD -hez, mint CG a GD -hez (V. 11.). De a CG első mennyiség nagyobb a harmadik CF -nél, a második GD is nagyobb tehát a negyedik FD -nél (V. 14.). Azonban kisebb is nála, s ez lehetetlen, CD tehát nem aránylik úgy egy FD -nél kisebb mennyiséghez, mint AB EB -hez. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egy nagyobbhoz sem; magához FD -hez aránylik tehát így.

Ha tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

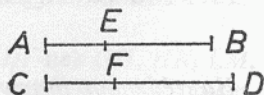
F.: V. 24.; VI. 24.; X. 54. L., 68., 105.; XII. 6.; XIII. 11.

V. 19. Tétel

*Ha egy kisebbbítendő úgy aránylik egy másik kisebbbítendőhöz, mint egy kivonandó egy másik kivonandóhoz, akkor az egyik maradék is úgy aránylik a másik maradékhoz, mint az egyik kisebbbítendő a másik kisebbbítendőhöz.**

Arányuljék ugyanis az AE kivonandó a CF kivonandóhoz, mint az AB kisebbbítendő a CD kisebbbítendőhöz. Azt állítom, hogy az EB maradék is úgy aránylik az FD maradékhoz, mint az AB kisebbbítendő a CD kisebbbítendőhöz.

Minthogy ugyanis AE úgy aránylik CF -hez, mint AB a CD -hez, fölcserélve is CD úgy aránylik CF -hez, mint AB az AE -hez (V. 16.). S minthogy így összetett mennyiségek arányosak, szétbontva is arányosak (V. 17.): FD a CF -hez, mint EB az AE -hez; s fölcserélve is: AE a CF -hez, mint EB az ED -hez (V. 16.). Az AB kisebbbítendő viszont feltevés szerint úgy aránylik a CD kisebbbítendőhöz, mint AE a CF -hez.



Az EB maradék is úgy aránylik tehát az FD maradékhoz, mint az AB kisebbitendő a CD kisebbitendőhöz (V. 11.).

Ha tehát... [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: V. 25.; X. 66–67., 113–114.

[Mínthogy megmutattuk, hogy EB úgy aránylik FD -hez, mint AB CD -hez, fölcserélve is: CD az FD -hez, mint AB az EB -hez (V. 16.). Így összetett mennyiségek arányosak. Megmutattuk, hogy ugyanakkor AB úgy aránylik AE -hez, mint AB az AE -hez; s fölforgatva vannak.]

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha összetett mennyiségek arányosak, akkor fölforgatva is arányosak.* Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 29–30., 48–52., 85–90., 113.

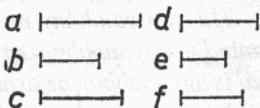
V. 20. Tétel

*Ha van három mennyiség és ugyanannyi másik, melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, s egyenlő (sok tagon) át az első nagyobb a harmadiknál, akkor a negyedik is nagyobb a hatodiknál, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb.**

Legyen a, b és c három mennyiség, s, d, e, f ugyanannyi másik, melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, d az e -hez, mint a a b -hez és e az f -hez, mint b a c -hez, s egyenlő (sok tagon) át legyen a nagyobb c -nél. Azt állítom, hogy d is nagyobb f -nél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb.

Mínthogy a nagyobb c -nél, b pedig valamely másik mennyiség, s a nagyobbknak ugyanazon mennyiséghez való aránya nagyobb, mint a kisebbé (V. 8.), a -nak b -hez való aránya nagyobb, mint c -é. Viszont d úgy aránylik e -hez, mint a a b -hez, f pedig – invertálva (V. 7. K.) – e -hez, mint c a b -hez, d -nek e -hez való aránya is nagyobb tehát, mint f -é (V. 13.) e -hez.

Ha viszont mennyiségeknek egy adott mennyiséghez való aránya létezik, akkor közülük nagyobb az, amelyiknek ehhez való aránya nagyobb (V. 10.); d tehát nagyobb f -nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha a egyenlő c -vel, d is egyenlő f -fel (V. 7., 7. K., 11., 9.), s ha kisebb, kisebb.



Ha tehát van... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 22.

V. 21. Tétel

*Ha van három mennyiség és ugyanannyi másik, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak, s egyenlő (sok tagon) át az első nagyobb a harmadiknál, akkor a negyedik is nagyobb a hatodiknál, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb.**

Legyen a, b és c három mennyiség, s, d, e, f ugyanannyi másik, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak, e az f -hez, mint a a b -hez, d pedig e -hez, mint b c -hez, s egyenlő (sok tagon) át legyen a nagyobb c -nél. Azt állítom, hogy d is nagyobb f -nél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb.

Mínthogy a nagyobb c -nél, b pedig valamely másik mennyiség, a -nak b -hez való aránya nagyobb, mint c -é (V. 8.). Viszont e úgy aránylik f -hez, mint a a b -hez, invertálva (V. 7. K.) pedig d -hez, mint c a b -hez, e -nek f -hez való aránya is nagyobb tehát, mint e -é d -hez (V. 13.). Az viszont, amelyikhez való aránya ugyanannak a mennyiségnek nagyobb, kisebb (V. 10.); kisebb tehát f a d -nél, s nagyobb d az f -nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha a egyenlő c -vel, d is egyenlő f -fel (V. 7., 11., 9.), s ha kisebb, kisebb.

Ha tehát van... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 23.

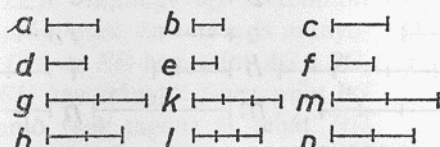
V. 22. Tétel

*Ha van valahány mennyiség és ugyanannyi másik, melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, akkor egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.**

Legyen a, b és c valahány mennyiség, s, d, e, f ugyanannyi másik, melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, d az e -hez, mint a a b -hez és e az f -hez, mint b a c -hez. Azt állítom, hogy egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.

Vegyük ugyanis a -nak és d -nek g, h , b -nek és e -nek tetszőleges másik k, l , végül c -nek és f -nek tetszőleges másik m, n ugyanannyiszorosát.

Mínthogy d úgy aránylik e -hez, mint a a b -hez, és ugyanannyiszorosát vettük a -nak és d -nek, g -t, illetve h -t, s tetszőleges másik ugyanannyiszorosát b -nek és e -nek, k -t, illetve l -et, h úgy aránylik l -hez, mint g a k -hoz (V. 4.). Ugyanígy l úgy aránylik n -hez, mint k az m -hez. Mínthogy g , k és m három mennyiség és h , l , n ugyanannyi másik,



melyek kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, ha egyenlő (sok tagon) át g nagyobb m -nél, h is nagyobb n -nél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb (V. 20). S g és h az a -nak és d -nek, m és n pedig c -nek és f -nek tetszőleges másik ugyanannyiszorosa, d tehát úgy aránylik f -hez, mint a a c -hez.

Ha tehát van... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: V. 24.; VI. 4., 20., 22–24.; X. 5–6., 12., 14., 50., 53., 87., 90.; XI. 27.; XII. 6., 12.

V. 23. Tétel

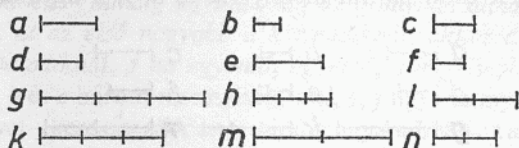
*Ha van három mennyiség és ugyanannyi másik, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak, akkor egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.**

Legyen a , b és c három mennyiség, s , d , e , f ugyanannyi másik, melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak, e az f -hez, mint a a b -hez, d az e -hez, mint b a c -hez. Azt állítom, hogy d úgy aránylik f -hez, mint a a c -hez.

Vegyük a -nak, b -nek és d -nek g , h , k , c -nek, e -nek és f -nek pedig tetszőleges másik l , m , n ugyanannyiszorosát.

Mínthogy g és h az a -nak, illetve b -nek ugyanannyiszorosa, a részek aránya viszont ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), g úgy aránylik h -hoz, mint a a b -hez. Ugyanígy m úgy aránylik n -hez, mint e az f -hez. e úgy aránylik f -hez, mint a a b -hez, m tehát úgy aránylik n -hez, mint g a h -hoz (V. 11.). Mínthogy d úgy aránylik e -hez, mint b a c -hez, felcserélve c úgy aránylik e -hez, mint b a d -hez (V. 16.).

Mínthogy h és k a b -nek, illetve d -nek ugyanannyiszorosa, a részek aránya viszont ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), h úgy aránylik k -hoz, mint b a d -hez. De c úgy aránylik e -hez, mint b a d -hez, c tehát úgy aránylik e -hez, mint h a k -hoz (V. 11.). Ismét, mint-



hogy l és m a c -nek, illetve e -nek ugyanannyiszorosa, l úgy aránylik m -hez, mint c az e -hez (V.15.). De h úgy aránylik k -hoz, mint c az e -hez, l tehát úgy aránylik m -hez, mint h a k -hoz (V.11.), és fölcserélve k úgy aránylik m -hez, mint h az l -hez (V. 16.). Megmutattuk azt is, hogy m úgy aránylik n -hez, mint g a h -hoz. Mínthogy így van három mennyiség, g , h , l , s ugyanannyi másik, k , m , n , melyek kettesével – kereszteződően – mindig ugyanabban az arányban állnak egyenlő (sok tagon) át, ha g nagyobb l -nél, k is nagyobb n -nél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb (V. 21.). S g és k az a -nak, illetve d -nek, l és n pedig c -nek, illetve f -nek ugyanannyiszorosa, d tehát úgy aránylik f -hez, mint a a c -hez.

Ha tehát van. . . Éppen ezt kellett megmutatni.

V. 24. Tétel

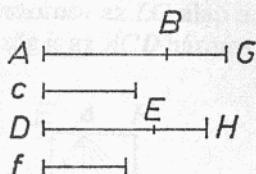
*Ha egy első mennyiségnek egy másodikhoz ugyanaz az aránya, mint egy harmadiknak egy negyedikhez, és egy ötödiknek is ugyanaz az aránya a másodikhoz, mint egy hatodiknak a negyedikhez, akkor az első és ötödik összege is ugyanúgy aránylik a másodikhoz, mint a harmadik és hatodik összege a negyedikhez.**

Legyen ugyanis az első mennyiségnek, AB -nek, a másodikhoz, c -hez való aránya ugyanaz, mint a harmadiké, DE -é, a negyedikhez, f -hez, s az ötödiknek, BG -nek, a második c -hez való aránya is legyen ugyanaz, mint a hatodiké, EH -é, a negyedik f -hez. Azt állítom, hogy az első és az ötödik AG összege is ugyanúgy aránylik a második c -hez, mint a harmadik és a hatodik DH összege a negyedik f -hez.

Minthogy ugyanis EH úgy aránylik f -hez, mint BG a c -hez, invertálva f úgy aránylik EH -hoz, mint c a BG -hez (V. 7. K.). Minthogy DE úgy aránylik f -hez, mint AB a c -hez és f az EH -hoz, mint c a BG -hez, egyenlő (sok tagon) át DE úgy aránylik EH -hoz, mint AB a BG -hez (V. 22.). Minthogy így szétbontott mennyiségek arányosak, összetéve is arányosak (V. 18.): DH az EH -hoz, mint AG a BG -hez. Viszont EH úgy aránylik f -hez, mint BG a c -hez, egyenlő (sok tagon) át tehát DH úgy aránylik f -hez, mint AG a c -hez (V. 22.).

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 31.; X. 68.



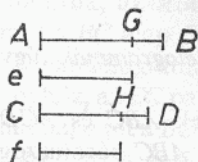
V. 25. Tétel

*Ha négy mennyiség arányos, akkor a legnagyobb és a legkisebb összege nagyobb, mint a maradék kettőé.**

Legyen négy mennyiség, AB , CD , e és f arányos, e az f -hez, mint AB a CD -hez, és legyen AB közülük a legnagyobb, f pedig a legkisebb. Azt állítom, hogy AB meg f nagyobb, mint CD meg e .

Vegyünk föl egy e -vel egyenlő AG -t és egy f -fel egyenlő CH -t (V.14. $\Rightarrow CD > f$, ha $AB > e$)

Minthogy e úgy aránylik f -hez, mint AB a CD -hez, és e egyenlő AG -vel, f pedig CH -val, AG úgy aránylik CH -hoz, mint AB a CD -hez (V. 7., 11.).* Minthogy az AG kivonandó úgy aránylik a CH kivonandóhoz, mint az AB kisebbítendő a CD kisebbítendőhöz, a GB maradék is úgy aránylik a HD maradékhoz, mint az AB kisebbítendő a CD kisebbítendőhöz (V. 19.). AB nagyobb CD -nél, GB is nagyobb tehát HD -nál (V. 16., 14.). Minthogy AG egyenlő e -vel, f pedig CH -val, AG meg f egyenlő CH meg f -fel. Minthogy ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők (4. Ax.), ha GB -hez hozzáadjuk AG meg f -et, HD -hez pedig CH meg e -t, lévén GB és HD nem egyenlő, s GB a nagyobb, következik, hogy AB meg f nagyobb, mint CD meg e .



Ha tehát négy... Éppen ezt kellett megmutatni.