

Hatodik könyv

Definíciók

1. Sokszögek hasonlóak, ha a szögeik egyenként megegyeznek és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak.
 - [2. Alakzatok fordítottan arányosak, ha mind a két alakzatban előfordulnak egyenes és fordított arányok is.]*
 3. Azt mondjuk egy szakasról, hogy folytonos arányban van felosztva, ha a nagyobb szelet úgy aránylik a kisebbhez, mint a teljes szakasz a nagyobb szelethez.*
 4. Egy alakzat magassága a csúcstól az alapjára bocsátott merőleges.
 - [5. Azt mondjuk egy arányról, hogy arányokból tevődik össze, ha ezen arányok nagyságai egymással összeszorozva alkotják.]*
- F.: VI. 23.

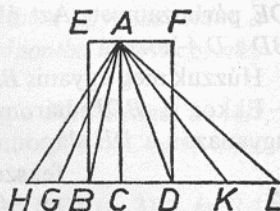
VI. 1. Tétel

Az ugyanazon magasságú háromszögek és paralelogrammák úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.

Legyenek ugyanazon AC magasságú háromszögek ABC és ACD s paralelogrammák EC és CF . Azt állítom, hogy az ABC háromszög az ACD háromszöghöz és az EC paralelogramma a CF paralelogrammához úgy aránylik, mint a BC alap a CD alaphoz.

Hosszabbítsuk meg BD -t mind a két oldalon, a H , illetve L pontig, és vegyünk föl tetszőleges sok a BC alappal egyenlő BG , GH , s a CD alappal egyenlő DK , KL szakaszt (1. 3.), és húzzuk meg AG -t, AH -t, AK -t, AL -t.

Minthogy a BC , BG , GH szakaszok egyenlők egymással, egyenlők az AHG , AGB , ABC háromszögek is egymással (I. 38.). Ahányszorosa tehát a HC alap a BC alapnak, ugyanannyiszorosa az AHC háromszög is az ABC háromszögnek. Ugyanígy ahányszorosa az LC alap a CD alapnak, ugyanannyiszorosa az ALC háromszög is az ACD háromszögnek; s ha egyenlő a HC alap az LC alappal, egyenlő az AHC háromszög is az ACL háromszöggel (I. 38.), s ha nagyobb a HC alap az LC alapnál, az AHC háromszög is nagyobb az ACL háromszögnél, s ha kisebb, kisebb. Van hát négy mennyiség, két alap, BC és CD , s két háromszög, ABC és ACD , s ugyanannyiszorosát vettük a BC alapnak és az ABC háromszögnek, a



HC alapot, illetve az AHC háromszöget, s tetszőleges másik ugyanannyiszorosát a CD alapnak és az ADC háromszögnek, az LC alapot és az ALC háromszöget. Megmutattuk, hogy ha a HC alap nagyobb az LC alapnál, az AHC háromszög is nagyobb az ALC háromszögnél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb. Az ABC háromszög tehát úgy aránylik az ACD háromszöghöz, mint a BC alap a CD alaphoz.

Minthogy az EC paralelogramma kétszerese az ABC háromszögnek és az FC paralelogramma kétszerese az ACD háromszögnek (I. 34. v. 41.), a részek aránya viszont ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), az EC paralelogramma úgy aránylik az FC paralelogrammához, mint az ABC háromszög az ACD háromszöghöz. Miként megmutattuk, az ABC háromszög úgy aránylik az ACD háromszöghöz, mint a BC alap CD -hez, az EC paralelogramma pedig úgy aránylik a CF paralelogrammához, mint az ABC háromszög az ACD háromszöghöz, az EC paralelogramma tehát úgy aránylik a CF paralelogrammához, mint a BC alap a CD alaphoz (V.11.).

Az u. m. h. és p. tehát . . . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 2., 14–15., 19–20., 23., 25.; X. 19–21., 22. L., 23–25., 33., 35., 38., 41., 44., 47., 54. L., 54–55., 57–63., 65., 71–72., 75., 78–79., 81., 84., 91–94., 97., 99–100., 102., 104., 110., 114.; XI. 33–34.; XIII. 1–2.

VI. 2. Tétel

Ha egy háromszög egyik oldalával húzzunk egy párhuzamost, az arányosan osztja a háromszög másik két oldalát; s ha egy háromszög két oldalát arányosan osztjuk, az osztáspontokra illesztett egyenes párhuzamos a háromszög harmadik oldalával.*

Húzzunk ugyanis az ABC háromszög egyik oldalával, BC -vel, egy DE párhuzamost. Azt állítom, hogy CE úgy aránylik EA -hoz, mint BD a DA -hoz.

Húzzuk meg ugyanis BE -t és CD -t.

Ekkor a BDE háromszög egyenlő a CDE háromszöggel, mivel ugyanazon a DE alapon és ugyanazon DE , BC párhuzamosok között fekszenek (I. 37.); s valamely másik mennyiség az ADE háromszög. Egyenlő mennyiségeknek ugyanahhoz a mennyiséghez való aránya viszont ugyanaz (V. 7.), a CDE háromszög tehát úgy aránylik az ADE háromszöghöz, mint a BDE háromszög. De BD úgy aránylik DA -hoz, mint a BDE háromszög ADE -hez, ugyanis mivel ugyanaz a magasságuk, az E -ből AB -re bocsátandó merőleges, úgy aránylanak egymáshoz mint az alapjaik (VI. 1.). Ugyanígy CE úgy aránylik EA -hoz, mint a CDE háromszög ADE -hez; CE úgy aránylik tehát EA -hoz, mint BD a DA -hoz (V. 11.).

Osszuk most arányosan föl az ABC háromszög AB és AC oldalát: CE az EA -hoz, mint BD a DA -hoz, és húzzuk meg DE -t. Azt állítom, hogy DE párhuzamos BC -vel.

Készítsük el ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb. Ekkor minthogy CE úgy aránylik EA -hoz, mint BD a DA -hoz, s a BDE háromszög az ADE háromszöghöz, mint BD a DA -hoz, a CDE háromszög pedig az ADE háromszöghöz, mint CE az EA -hoz (VI. 1.), a CDE háromszög is úgy aránylik az ADE háromszöghöz, mint a BDE háromszög (V. 11.). Mind a két BDE , CDE háromszögnek ugyanaz az aránya ADE -hez, egyenlő tehát a BDE háromszög a CDE háromszöggel (V. 9.); s ugyanazon a DE alapon fekszenek. Az ugyanazon az alapon fekvő egyenlő háromszögek viszont ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek (I. 39.), DE tehát párhuzamos BC -vel.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.
 F.: VI. 3–4., 9–12., 24.; XI. 17., 23.; XII. 13., 17.

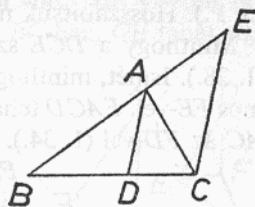
VI. 3. Tétel

Ha egy háromszög egy szögét meglelezzük és a szögfelező szeli az alapot is, az alap szeleteinek aránya ugyanaz, mint a háromszög másik két oldaláé; s ha az alap szeleteinek aránya ugyanaz, mint a háromszög másik két oldaláé, a csúcsból az osztópontba húzott egyenes felezi a szöget.

Legyen ABC egy háromszög, és felezzük meg a BAC szöget az AD egyenessel (I. 9.). Azt állítom, hogy BA úgy aránylik AC -hez, mint BD a CD -hez.

Húzzuk ugyanis C -n át DA -val párhuzamosan CE -t (I. 31.), és BA meghosszabbítása találkozzék vele az E pontban (5. P.).

Mínt hogy a párhuzamos DA , CE egyeneseket metszi AC , az ACE szög egyenlő CAD -vel (I. 29.). A CAD szög viszont feltevés szerint egyenlő BAD -vel, BAD is egyenlő tehát az ACE szöggel. Továbbá, minthogy a párhuzamos DA , CE egyeneseket metszi BAE , a BAD külső szög egyenlő az AEC belső szöggel (I. 29.). Megmutattuk, hogy ACE is egyenlő a BAD szöggel, az ACE szög tehát egyenlő AEC -vel, úgyhogy az AE oldal is egyenlő az AC oldallal (I. 6.). Minthogy a BCE háromszög egyik oldalával, CE -vel, párhuzamosan halad DA , BA úgy aránylik AC -hez, mint BD a CD -hez (VI. 2.).



Arányuljék most BA az AC -hez, mint BD a CD -hez, és húzzuk meg DA -t. Azt állítom, hogy a DA egyenes felezi a BAC szöget.

Készítsük el ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb. Minthogy BA úgy aránylik AC -hez, mint BD a CD -hez és BA úgy aránylik AE -hez, mint BD a CD -hez – a BCE háromszög egyik oldalával, CE -vel párhuzamosan halad ugyanis DA (VI. 2.) –, BA úgy aránylik AE -hez, mint AC -hez (V. 11.). AC tehát egyenlő AE -vel (V. 9.), úgyhogy az AEC szög is egyenlő az ACE szöggel (I. 5.). Az AEC szög viszont egyenlő a BAD külső, ACE pedig a CAD váltószöggel (I. 29.),

BAD is egyenlő tehát a CAD szöggel. A DA egyenes tehát felezi a BAC szöget.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

VI. 4. Tétel

Háromszögeknek, melyek szögei egymással egyenlők, arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, mégpedig az egyenlő szögekkel szemközti oldalak felelnek meg egymásnak.

Legyenek az ABC , DCE háromszögek szögei egyenlők: az ABC szög DCE -vel, BAC a CDE -vel és végül ACB a CED -vel. Azt állítom, hogy az ABC , DCE háromszögeknek arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, mégpedig az egyenlő szögekkel szemközti oldalak felelnek meg egymásnak.

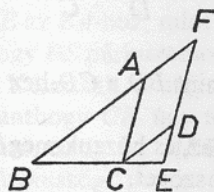
Feküdjék ugyanis BC a CE -vel egy egyenesen (I. 3.). Minthogy az ABC , ACB szögek összege kisebb két derékszögnél (I. 17.), s ACB egyenlő DEC -vel, az ABC , DEC szögek összege kisebb két derékszögnél; a BA , ED egyenesek meghosszabításai tehát találkozni fognak (5. P.). Hosszabítsuk meg őket, és találkozzanak az F pontban.

Minthogy a DCE szög egyenlő ABC -vel, BF párhuzamos CD -vel (I. 28.). Ismét, minthogy az ACB szög egyenlő DEC -vel, AC párhuzamos FE -vel. $FACD$ tehát egy paralelogramma, így FA egyenlő DC -vel, AC az FD -vel (I. 34.). Minthogy az FBE háromszög egyik oldalával,

FE -vel, párhuzamosan halad AC , BC úgy aránylik CE -hez, mint BA az AF -hez (VI. 2.). AF viszont egyenlő CD -vel, BC tehát úgy aránylik CE -hez, mint BA a CD -hez (V. 7., 11.), s fölcserélve CD úgy aránylik CE -hez, mint BA a BC -hez (V. 16.). Ismét, minthogy CD párhuzamos BF -fel, FD úgy aránylik DE -hez, mint BC a CE -hez. FD viszont egyenlő AC -vel, AC tehát úgy aránylik DE -hez, mint BC a CE -hez, s fölcserélve CE úgy ED -hez, mint BC az AC -hez. Mint megmutattuk, DC úgy aránylik CE -hez, mint AB a BC -hez s CE az ED -hez, mint BC a CA -hoz, egyenlő (sok tagon) át tehát CD úgy aránylik DE -hez, mint BA az AC -hez (V. 22.).

Háromszögeknek tehát, ... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 5–8., 18., 20., 24.; XI. 23.; XII. 1., 3.; XIII. 8., 10–11.



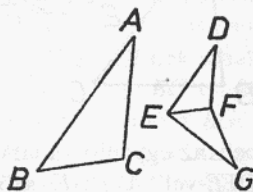
VI. 5. Tétel

Ha két háromszögnek arányosak az oldalaik, egyenlők a háromszögek szögei, mégpedig azok a szögek egyenlők, melyekkel szemben a megfelelő oldalak fekszenek.

Legyen ABC és DEF két háromszög, melyek oldalai arányosak: DE az EF -hez, mint AB a BC -hez, EF az FD -hez, mint BC a CA -hoz, s végül ED DF -hez, mint BA az AC -hez. Azt állítom, hogy az ABC háromszögnek a DEF háromszögével egyenlők a szögei, mégpedig azok a szögek egyenlők, melyekkel szemben a megfelelő oldalak fekszenek, ABC a DEF -fel, BCA az EFD -vel s végül BAC az EDF -fel.

Szerkesszünk az EF egyenesre, a rajta levő E , illetve F ponthoz, egy ABC -vel egyenlő FEG , illetve egy ACB -vel egyenlő EFG szöget (I. 23.). Ekkor a harmadik, A -nál levő szög egyenlő a harmadik, G -nél levő szöggel (I. 32.).

Egyenlők tehát az ABC háromszög szögei EGF -ével. Az ABC , EGF háromszögeknek arányosak tehát az egyenlő szögek melletti oldalaik, mégpedig az egyenlő szögekkel szemközti oldalak felelnek meg egymásnak (VI. 4.): GE az EF -hez, mint AB a BC -hez. DE viszont feltevés szerint úgy aránylik EF -hez, mint AB a BC -hez, GE tehát úgy aránylik EF -hez, mint DE (V. 11.). E két szakasznak, DE -nek és GE -nek tehát ugyanaz az aránya EF -hez: egyenlő tehát DE a GE -vel (V. 9.). Ugyanígy DF is egyenlő GF -fel. Mint-



hogy DE egyenlő EG -vel, EF pedig közös oldal, e két-két oldal, DE , EF és GE , EF egyenlő; és a DF alap egyenlő az FG alappal; a DEF szög tehát egyenlő a GEF szöggel (I. 8.), és a DEF háromszög egyenlő a GEF háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek (I. 4.). Egyenlő tehát a DFE szög is GFE -vel, EDF pedig EGF -fel. Minthogy az FED szög egyenlő GEF -fel, GEF viszont ABC -vel, az ABC szög is egyenlő DEF -fel. Ugyanígy ACB is egyenlő DFE -vel, s végül az A -nál levő szög is a D -nél levő szöggel. Egyenlők tehát az ABC háromszög szögei a DEF háromszögével.

Ha tehát két... Éppen ezt kellett megmutatni.

VI. 6. Tétel

Ha két háromszögnek egy-egy szöge egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak, egyenlők a háromszögek szögei, mégpedig a megfelelő oldalakkal szemközti szögek egyenlők.

Legyen ABC és DEF két háromszög, melynek egy-egy szöge, BAC és EDF egyenlő, és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak: ED a DF -hez, mint BA az AC -hez. Azt állítom, hogy az ABC háromszög szögei egyenlők a DEF háromszögével, mégpedig az ABC szög egyenlő DEF -fel, az ACB szög pedig DFE -vel.

Szerkesszünk ugyanis a DF egyenesre, a rajta levő D , illetve F ponthoz, egy mind a két, BAC , EDF szöggel egyenlő FDG , illetve egy ACB -vel egyenlő DFG szöget (I. 23.). Ekkor a harmadik, B -nél levő szög egyenlő a harmadik, G -nél levő szöggel (I. 32.).

Egyenlők tehát az ABC háromszög szögei a DGF háromszögével. Arányosak tehát: GD a DF -hez, mint BA az AC -hez (VI. 4.). ED viszont feltevés szerint úgy aránylik DF -hez, mint BA az AC -hez; GD tehát úgy aránylik DF -hez, mint ED (V. 11.).

Egyenlő tehát ED a DG -vel (V. 9.); s DF közös oldal; így e két-két oldal, ED , DF és GD , DF egyenlő; s az EDF szög egyenlő a GDF szöggel; az EF alap tehát egyenlő a GF alappal, és a DEF háromszög egyenlő a GDF háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek (I. 4.). Egyenlő tehát a DFG szög DFE -vel, a DGF szög pedig DEF -fel. A DFG szög viszont egyenlő ACB -vel, ACB is egyenlő tehát DFE -vel. BAC pedig feltétel szerint egyenlő EDF -fel, a harmadik, B -nél levő szög is egyenlő tehát a harmadik, E -nél levő szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az ABC háromszög szögei a DEF háromszögével.

Ha tehát két... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 20., 32.; XII. 1., 4., 12.; XIII. 18.

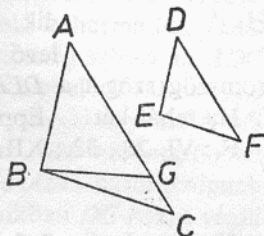
VI. 7. Tétel

Ha két háromszögnek egy-egy szöge egyenlő, egy-egy másik szög körüli oldalak arányosak, a harmadik szögek pedig mindketten egy-

szere vagy kisebbek, vagy nem kisebbek egy derékszögnél, egyenlők a háromszögek szögei, mégpedig az arányos oldalak által közrefogott szögek egyenlők.

Legyen ABC és DEF két háromszög, melynek egy-egy szöge, BAC és EDF egyenlő, egy-egy másik szög, ABC és DEF körüli oldalak arányosak: DE az EF -hez, mint AB a BC -hez, a harmadik, C -nél, illetve F -nél levő szögek pedig mindketten egyszerre először kisebbek egy derékszögnél. Azt állítom, hogy az ABC háromszög szögei egyenlők a DEF háromszögével, mégpedig az ABC szög egyenlő DEF -fel, s a harmadik, C -nél levő szög nyilván egyenlő a harmadik, F -nél levő szöggel.

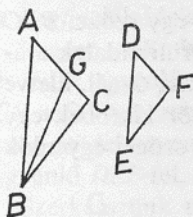
Ha ugyanis az ABC szög nem egyenlő DEF -fel, egyikük nagyobb. Legyen ABC a nagyobb, és szerkesszünk az AB egyenesre, a rajta levő B ponthoz, egy DEF -fel egyenlő ABG szöget (I. 23.).



Mínt hogy az α szög egyenlő δ -val, az ABG szög pedig DEF -fel, a harmadik AGB szög egyenlő a harmadik DFE szöggel (I. 32.). Egyenlők tehát az ABG háromszög szögei a DEF háromszögével. DE tehát úgy aránylik EF -hez, mint AB a BG -hez (VI. 4.). AB viszont feltétel szerint úgy aránylik BC -hez, mint DE az EF -hez; AB -nek tehát mind a két, BC , BG szakaszhoz ugyanaz az aránya (V. 11.); BC tehát egyenlő BG -vel (V. 9.), úgyhogy a C -nél levő szög is egyenlő a BGC szöggel (I. 5.). A C -nél levő szög feltétel szerint kisebb egy derékszögnél, BGC is kisebb tehát egy derékszögnél, úgyhogy az AGB mellékszöge nagyobb egy derékszögnél (I. 13.). Erről megmutattuk, hogy egyenlő az F -nél levő szöggel; az F -nél levő szög is nagyobb tehát egy derékszögnél. Feltétel szerint viszont kisebb egy derékszögnél; ez lehetetlen. Nem igaz tehát, hogy az ABC szög nem egyenlő DEF -fel; egyenlő hát vele. Az A -nál levő szög is egyenlő a D -nél levővel; a harmadik, C -nél levő szög is egyenlő tehát az F -nél levővel (I. 32.). Egyenlők tehát az ABC háromszög szögei a DEF háromszögével.

Másodszorra tegyük föl, hogy mind a két, C -nél, illetve F -nél levő szög nem kisebb egy derékszögnél. Ismét azt állítom, hogy az ABC háromszögnek így is egyenlők a szögei a DEF háromszögével.

Ugyanazt az ábrát elkészítve hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy BC egyenlő BG -vel, úgyhogy a C -nél levő szög is egyenlő a BGC szöggel. A C -nél levő szög nem kisebb egy derékszögnél, a BGC szög sem kisebb tehát egy derékszögnél. Így a BGC háromszög két szögének összege nem kisebb két derékszögnél; ez viszont lehetetlen (I. 17.). Ismét csak nem igaz, hogy az ABC szög nem egyenlő DEF -fel; egyenlő hát vele. Az A -nál levő szög is egyenlő a D -nél levővel, tehát a harmadik, C -nél levő szög egyenlő a harmadik, F -nél levő szöggel (I. 32.). Egyenlők tehát az ABC háromszög szögei a DEF háromszögével.



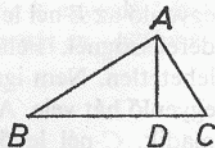
Ha tehát két... Éppen ezt kellett megmutatni,
F.: VI. 20., 32.; XII. 1., 4., 12.; XIII. 18.

VI. 8. Tétel

Ha egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alpra egy merőlegest bocsátunk, a merőleges melletti háromszögek mind a teljes háromszöghöz, mind egymáshoz hasonlóak.

Legyen ABC egy háromszög, melynek BAC szöge derékszög, és bocsássuk A -ból BC -re az AD merőlegest. Azt állítom, hogy mind a két, ABD , ADC háromszög hasonló a teljes ABC háromszöghöz és egymáshoz is.

Mint hogy a BAC szög egyenlő ADB -vel – derékszög ugyanis mind a kettő – és e két háromszögnek, ABC -nek és ABD -nek közös szöge a B -nél levő, a harmadik, ACB szög egyenlő a harmadik, BAD szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az ABC háromszög szögei az ABD háromszögével. Amint tehát az ABC háromszög derékszögével szemközti BC az ABD háromszög derékszögével szemközti BA -hoz, úgy aránylik az ABC háromszög C -nél levő szögével szemközti AC az ABD háromszög egyenlő szögével, BAD -vel szemközti BD -hez, s végül a két háromszög közös szögével szemközti AC az AD -hez (VI. 4.). Az ABC háromszögnek tehát egyenlők a szögei az ABD háromszögével, és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányo-



sak. Hasonló tehát az ABC háromszög az ABD háromszöghöz (VI. 1. D.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az ADC háromszöghöz is hasonló az ABC háromszög; mind a két, ABD , ADC háromszög hasonló tehát a teljes ABC háromszöggel.

Az állítom, hogy egymáshoz is hasonlóak az ABD , ADC háromszögek.

Mínthogy ugyanis a BDA derékszög egyenlő az ADC derékszöggel (4. P.) és – mint megmutattuk – a BAD szög is egyenlő a C -nél levő szöggel, a harmadik, B -nél levő szög is egyenlő a harmadik, DAC szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az ABD háromszögbeli szögei az ADC háromszögeivel. Amint tehát az ABD háromszögbeli BAD szöggel szemközti BD az ADC háromszögbeli, a BAD szöggel egyenlő C -nél levő szöggel szemközti DA -hoz, úgy aránylik az ABD háromszögbeli B -nél levő szöggel szemközti ugyanezen AD az ADC háromszögnek a B -nél levő szöggel egyenlő DAC szögével szemközti DC -hez, s végül BA az AC -hez, melyek a derékszögekkel szemben fekszenek (VI. 4.); hasonló tehát az ABD háromszög az ADC háromszöghöz.

Ha tehát egy... [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: VI. 31.; X. 33. L.; XIII. 15–16., 18.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alapra egy merőlegest bocsátunk, a merőleges középarányosa az alap szeleteinek. Éppen ezt kellett megmutatni. [S végül az alapnak és bármely szeletének középarányosa a szelet melletti oldal.]

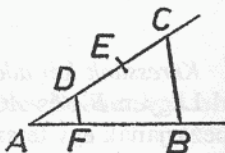
F.: VI. 13.; X. 33. L.; XII. 17.; XIII. 13–16., 18.

VI. 9. Tétel

Vonjunk le adott szakaszból előírt részt!*

Legyen AB az adott szakasz. Az AB szakasz előírt részét kell tehát levonni.

Legyen a harmad előírva. Húzzunk az A pontból egy AB -vel tetszőleges szöget bezáró AC egyenest, vegyünk AC -n egy tetszőleges D pontot, és mérjük föl az AD -vel egyenlő DE -t,



EC -t (I. 3.). Húzzuk meg BC -t és D -n át vele párhuzamosan DF -et (I. 31.).

Mint hogy az ABC háromszög egyik oldalával, BC -vel párhuzamosan halad FD , BF úgy aránylik FA -hoz, mint CD a DA -hoz (VI. 2.). CD kétszerese DA -nak; BF is kétszerese tehát FA -nak; háromszorosa tehát BA az AF -nek.

Az adott AB szakaszból tehát levontuk az előírt harmadrészt, AF -et. Éppen ezt kellett megtenni.

VI. 10. Tétel

Osszunk föl adott fölosztatlan szakaszt adott fölosztott szakaszhoz hasonlóan!

Legyen AB az adott felosztatlan szakasz, AC pedig a – D, E pontokban – fölosztott, és feküdjenek úgy, hogy bezárjanak egy tetszőleges szöveget (I. 2.), húzzuk meg CB -t és D -n, E -n BC -vel párhuzamosan DF -et, EG -t, D -n át AB -vel párhuzamosan DHK -t (I. 31.).

Paralelogramma tehát mind a két, FH , HB idom, így DH egyenlő FG -vel, HK pedig GB -vel (I. 34.). Minthogy a DKC háromszög egyik oldalával, KC -vel párhuzamosan halad HE , KH úgy aránylik HD -hez, mint CE az ED -hez (VI. 2.). KH viszont egyenlő BG -vel, HD pedig GF -fel, BG tehát úgy aránylik GF -hez, mint CE az ED -hez (V. 7., 11.). Ismét, mint hogy az AGE háromszög egyik oldalával, GE -vel párhuzamosan halad FD , GF úgy aránylik FA -hoz, mint ED DA -hoz. Mint megmutattuk, BG úgy aránylik GF -hez, mint CE az ED -hez; tehát: BG a GF -hez, mint CE az ED -hez és GF az FA -hoz, mint ED a DA -hoz.

Az adott felosztatlan szakaszt tehát, AB -t, az adott fölosztott szakaszhoz, AC -hez hasonlóan osztottuk föl. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XIII. 13., 15–16.

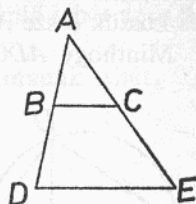
VI. 11. Tétel

Keressünk két adott szakaszhoz harmadik arányost!

Legyen BA és AC az adott [két szakasz], és feküdjenek úgy, hogy bezárjanak egy tetszőleges szöveget (I. 2.). A BA , AC szakaszokhoz kell

tehát harmadik arányost keresni. Hosszabítsuk meg őket a D , illetve E pontig, mérjük föl egy AC -vel egyenlő BD -t (I. 3.), húzzuk meg BC -t és D -n át vele párhuzamosan DE -t (I. 31.).

Míthogy az ADE háromszög egyik oldalával, DE -vel párhuzamosan halad BC , AC úgy aránylik CE -hez, mint AB a BD -hez (VI. 2.). BD viszont egyenlő AC -vel, AC tehát úgy aránylik CE -hez, mint AB az AC -hez (V. 7., 11.).



Két adott szakaszhoz tehát, AB -hez és AC -hez, harmadik arányost találtunk, CE -t. Éppen ezt kellett megtenni.

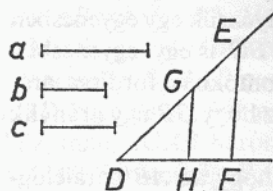
F.: VI. 19., 20. 2. K., 22.; X. 96.

VI. 12. Tétel

Keressünk három adott szakaszhoz negyedik arányost!

Legyen a , b és c a három adott szakasz. Az a , b , c szakaszokhoz kell tehát negyedik arányost keresni.

Vegyünk föl két egyenest, DE -t és DF -et, melyek egy [tetszőleges] EDF szöget zárnak be, mérjük föl egy a -val egyenlő DG -t, egy b -vel egyenlő GE -t s végül egy c -vel egyenlő DH -t (I. 3.), húzzuk meg GH -t és vele párhuzamosan E -n át EF -et (I. 31.).



Míthogy a DEF háromszög egyik oldalával, EF -fel párhuzamosan halad GH , DH úgy aránylik HF -hez, mint DG a GE -hez

(VI. 2.). DG viszont egyenlő a -val, GE a b -vel, DH pedig c -vel; c tehát úgy aránylik HF -hez, mint a a b -hez (V. 7., 11.).

Adott három szakaszhoz, a -hoz, b -hez és c -hez, negyedik arányost találtunk tehát, HF -et. Éppen ezt kellett megtenni.

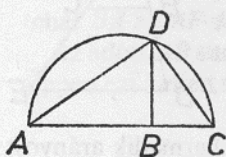
F.: VI. 22–23.; X. 27–28., 31–32., 104.; XI. 27.

VI. 13. Tétel

Keressünk két adott szakaszhoz középarányost!

Legyen AB és BC az adott két szakasz. AB -hez és BC -hez kell tehát középarányost keresni.

Helyezzük őket egy egyenesben el (I. 3.), írjunk AC fölé egy ADC félkört, húzzuk a B pontból az AC szakasszal derékszögben BD -t (I. 11.) és kössük össze AD -t, DC -t.



Mint hogy ADC félkörbeli szög, derékszög (III. 31.). S mint hogy az ADC derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából egy DB merőleges halad az alaphoz, DB középarányosa az alap szeleteinek, AB -nek és BC -nek (VI. 8. K.).

Adott két szakaszhoz, AB -hez és BC -hez középarányost találtunk tehát, DB -t. Éppen ezt kellett megtenni.

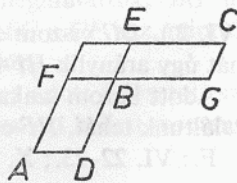
F.: VI. 25.; X. 6. K., 10., 27–28., 31–32.

VI. 14. Tétel

Az egyenlő (területű) és egyenlő szögű paralelogrammáknak fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik; s amely egyenlő szögű paralelogrammáknak fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, azok egyenlő (területű)ek.

Legyenek AB és BC egyenlő (területű) és egyenlő szögű paralelogrammák, melyek B -nél levő szöge egyenlő, és helyezzük egy egyenesben el DB -t és BE -t (I. 3., 31., 23.); ekkor FB és BG is egy egyenesben lesz (I. 14.). Azt állítom, hogy az AB , BC idomoknak fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, azaz hogy GB úgy aránylik BF -hez, mint DB a BE -hez.*

Egészítsük ki az FE paralelogrammát. Mint hogy az AB paralelogramma egyenlő (területű) a BC paralelogrammával, FE pedig egy másik mennyiség, BC úgy aránylik FE -hez, mint AB (V. 7.). Viszont amint AB az FE -hez, úgy aránylik DB a BE -hez és amint BC FE -hez, úgy GB a BF -hez (VI. 1.); amint DB a BE -hez, úgy aránylik tehát GB a BF -hez (V. 11.). Az AB , BC paralelogrammáknak tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik.



Arányuljék most GB a BF -hez, mint DB a BE -hez. Azt állítom, hogy az AB paralelogramma egyenlő (területű) a BC paralelogrammával.

Mint hogy ugyanis GB úgy aránylik BF -hez, mint DB a BE -hez, s az

AB paralelogramma az FE paralelogrammához, mint DB a BE -hez, a BC paralelogramma pedig az FE paralelogrammához, mint GB a BF -hez, BC úgy aránylik FE -hez, mint AB (V. 11.); egyenlő tehát az AB paralelogramma a BC paralelogrammával (V. 9.).

Az egyenlő (területű) és egyenlő szögű paralelogrammák tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 16., 30.; X. 22.; XI. 31., 33., 36.

VI. 15. Tétel

Egyenlő (területű) háromszögeknek, melyeknek egy-egy szögük egyenlő, fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik; s azok a háromszögek, melyeknek egy-egy szöge egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalaik fordítva arányosak, azok egyenlő (területű)ek.

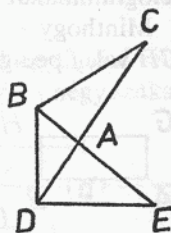
Legyenek ABC és ADE egyenlő (területű) háromszögek, melyeknek egy-egy szöge, BAC és DAE egyenlő. Azt állítom, hogy az ABC , ADE háromszögeknek fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik, azaz hogy EA úgy aránylik AB -hez, mint CA az AD -hez.

Helyezzük őket úgy el, hogy CA egy egyenesen legyen AD -vel (I. 3., 23.). Ekkor EA is egy egyenesen lesz AB -vel (I. 14.). Húzzuk meg BD -t.

Mint hogy az ABC háromszög egyenlő az ADE háromszöggel, BAD pedig egy másik mennyiség, az EAD háromszög úgy aránylik a BAD háromszöghöz, mint a CAB háromszög (V. 7.). Viszont amint a CAB háromszög BAD -hez, úgy aránylik CA az AD -hez és amint EAD a BAD -hez, úgy EA az AB -hez (VI. 1.); amint tehát CA az AD -hez, úgy aránylik EA AB -hez (V. 11.). Az ABC , ADE háromszögeknek tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik.

Legyenek most fordítva arányosak az ABC , ADE háromszögek oldalai, mégpedig EA az AB -hez, mint CA az AD -hez. Azt állítom, hogy az ABC háromszög egyenlő az ADE háromszöggel.

Ismét meghúzva BD -t, mint hogy EA úgy aránylik AB -hez, mint CA az AD -hez, viszont amint CA az AD -hez, úgy az ABC háromszög a BAD háromszöghöz, s amint EA az AB -hez, úgy az EAD háromszög a BAD háromszöghöz (VI. 1.), amint tehát az ABC háromszög, úgy



aránylik az EAD háromszög a BAD háromszöghöz (V. 11.). Mind a két, ABC , EAD háromszögnek tehát ugyanaz az aránya BAD -hez; egyenlő tehát az ABC [háromszög] az EAD háromszöggel (V. 9.).

Egyenlő háromszögeknek tehát, ... Éppen ezt kellett megmutatni.
F.: VI. 19.

VI. 16. Tétel

Ha négy szakasz arányos, akkor a kültagok által közrefogott téglalap egyenlő a beltagok által közrefogott téglalappal; s ha a kültagok által közrefogott téglalap egyenlő a beltagok által közrefogott téglalappal, akkor a négy szakasz arányos.

Legyen négy szakasz, AB , CD , e és f arányos: e az f -hez, mint AB a CD -hez. Azt állítom, hogy az AB és f által közrefogott téglalap egyenlő a CD és e által közrefogott téglalappal.

Emeljünk [ugyanis] az A , C pontokban AB -re, illetve CD -re egy AG , illetve CH merőleget (I. 11.), és mérjük föl egy f -fel egyenlő AG -t és egy e -vel egyenlő CH -t (I. 3.). Egészítsük ki a BG , DH paralelogrammákat (I. 31.).

Minthogy e úgy aránylik f -hez, mint AB a CD -hez, s e egyenlő CH -val, f pedig AG -vel, CH úgy aránylik AG -hez, mint AB a CD -hez (V. 7., 11.). A BC , DH paralelogrammáknak

tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaiuk. Amely egyenlő szögű paralelogrammáknak viszont fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaiuk, azok egyenlők (VI. 14.); egyenlő tehát a BG paralelogramma a DH paralelogrammával. S BG

az AB és f közötti téglalap – egyenlő ugyanis AG az f -fel –, DH pedig a CD és e közötti téglalap – egyenlő ugyanis e a CH -val –, az AB és f által közrefogott téglalap tehát egyenlő a CD és e által közrefogott téglalappal.

Legyen most az AB és f által közrefogott téglalap egyenlő a CD és e által közrefogott téglalappal. Azt állítom, hogy a négy szakasz arányos: e az f -hez, mint AB a CD -hez.

Elkészítve ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb, minthogy az AB és f közötti téglalap egyenlő a CD és e közöttivel, s az AB és f

közötti téglalap BG – egyenlő ugyanis AG az f -fel –, a CD és e közötti pedig DH – egyenlő ugyanis CH az e -vel –, BG egyenlő DH -val. S egyenlő szögűek. Az egyenlő és egyenlő szögű paralelogrammáknak viszont fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik (VI. 14.), CH tehát úgy aránylik AG -hez, mint AB a CD -hez. CH viszont egyenlő e -vel, AG pedig f -fel; e tehát úgy aránylik f -hez, mint AB a CD -hez (V. 7., 11.).

Ha tehát négy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 17.; X. 28., 32., 33. L., 112–113.

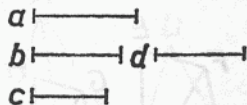
VI. 17. Tétel

Ha három szakasz arányos, akkor a kültagok által közrefogott téglalap egyenlő a beltagra emelt négyzettel; s ha a kültagok által közrefogott téglalap egyenlő a beltagra emelt négyzettel, akkor a három szakasz arányos.

Legyen három szakasz, a , b és c arányos: b a c -hez, mint a a b -hez. Azt állítom, hogy az a és c által közrefogott téglalap egyenlő a b -re emelt négyzettel.

Vegyünk föl egy b -vel egyenlő d -t.

Mínthogy b úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez, s b egyenlő d -vel, d úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez (V. 7., 11.). Ha viszont négy szakasz arányos, akkor a kültagok által közrefogott [téglalap] egyenlő a beltagok által közrefogott téglalappal (VI. 16.). Az a és c közötti téglalap tehát egyenlő a b és d közöttivel. A b és d közötti téglalap viszont a b -re emelt négyzet – egyenlő ugyanis b a d -vel –, az a és c által közrefogott téglalap tehát egyenlő a b -re emelt négyzettel.



Legyen most az a és c közötti téglalap egyenlő a b -re emelt négyzettel. Azt állítom, hogy b úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez.

Elkészítve ugyanis ugyanazt az ábrát, mint az előbb, mínthogy az a és c közötti téglalap egyenlő a b -re emelt négyzettel, a b -re emelt négyzet viszont a b és d közötti téglalap – egyenlő ugyanis b a d -vel –, az a és c közötti téglalap egyenlő a b és d közöttivel. Ha viszont a kültagok közötti téglalap egyenlő a beltagok közöttivel, akkor a négy

szakasz arányos (VI. 16.). d tehát úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez. b viszont egyenlő d -vel; b tehát úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez (V. 7., 11.).

Ha tehát három... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 25., 27–28., 31–32., 33. L., 54., 60., 91., 97–98., 100.; XIII. 1–6., 10., 13.

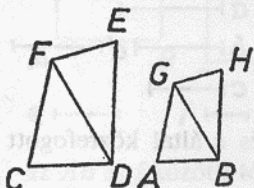
VI. 18. Tétel

Emeljünk adott szakaszra adott sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő sokszöget!

Legyen AB az adott szakasz, CE pedig az adott sokszög. Az AB szakaszra kell tehát a CE sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő sokszöget emelni.

Húzzuk meg DF -et, és szerkesszünk az AB egyenesre, a rajta levő A , illetve B ponthoz egy, a C -nél levő szöggel egyenlő GAB , illetve CDF -fel egyenlő ABG szöget (I. 23.). Ekkor a harmadik, CFD szög egyenlő az AGB szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az FCD háromszög szögei a GAB háromszögéivel. Amint tehát FD a GB -hez, úgy aránylik FC a GA -hoz és CD az AB -hez (VI. 4., V. 16.). Ismét, szerkesszünk a BG egyenesre, a rajta levő B , illetve G ponthoz egy DFE -vel egyenlő BGH , illetve FDE -vel egyenlő GBH szöget. Ekkor a harmadik, E -nél

levő szög egyenlő a harmadik, H -nál levő szöggel; egyenlők tehát az FDE háromszög szögei a GHB háromszögéivel; amint tehát FD a GB -hez, úgy aránylik FE a GH -hoz és ED a HB -hez. Mint megmutattuk, úgy aránylik FC a GA -hoz és CD az AB -hez, mint FD a GB -hez; amint tehát FC az AG -hez, úgy aránylik CD az AB -hez, FE a GH -hoz s vé-



gül ED a HB -hez (V. 11.). Mínthogy a CFD szög egyenlő AGB -vel, DFE pedig BGH -val, a teljes CFE szög egyenlő a teljes AGH -val. Ugyanígy CDE is egyenlő az ABH szöggel. A C -nél levő szög is egyenlő az A -nál levővel, az E -nél levő pedig a H -nál levővel; egyenlők tehát AH szögei CE -ével; s az egyenlő szögek melletti oldalai arányosak; hasonló tehát az AH sokszög a CE sokszöghöz.

Az adott AB szakaszra tehát az adott CE sokszöghöz hasonló és

hasonlóan fekvő sokszöget emeltünk, AH -t. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: VI. 22., 25., 28–29.; XII. 11–12.

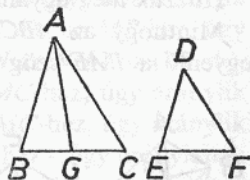
VI. 19. Tétel

Hasonló háromszögek egymással a megfelelő oldalaihoz viszonyítva kétszeres arányban állnak.

Legyenek ABC és DEF hasonló háromszögek, melyek B -nél, illetve E -nél levő szöge egyenlő, és amint AB a BC -hez, úgy aránylik DE EF -hez, úgyhogy BC megfelel EF -nek. Azt állítom, hogy az ABC háromszögnek a DEF háromszöghöz való aránya kétszerese BC -nek EF -hez való arányának.*

Vegyünk ugyanis BC -hez és EF -hez egy BG harmadik arányost, úgyhogy amint BC az EF -hez, úgy arányuljon EF a BG -hez (VI. 11.), és húzzuk meg AG -t.

Minthogy DE úgy aránylik EF -hez, mint AB a BC -hez, felcserélve BC úgy aránylik EF -hez, mint AB a DE -hez (V. 16.). Viszont amint BC az EF -hez, úgy aránylik EF a BG -hez. Amint tehát AB a DE -hez, úgy aránylik EF a BG -hez (V. 11.); az ABG , DEF háromszögeknek tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalai. Azok a háromszögek viszont, melyeknek egy-egy szöge egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalai fordítva arányosak, egyenlő (területű)ek (VI. 15.). Egyenlő (területű) tehát az ABG háromszög a DEF háromszöggel. S minthogy amint BC az EF -hez, úgy aránylik EF a BG -hez, ha viszont három mennyiség arányos, az első a harmadikkal a másodikhoz viszonyítva kétszeres arányban áll, BC tehát BG -vel EF -hez viszonyítva kétszeres arányban áll. Amint viszont BC a BG -hez, úgy aránylik az ABC háromszög az ABG háromszöghöz (VI. 1.); az ABC háromszög is kétszeres arányban áll tehát ABG -vel BC -nek EF -hez való arányához képest. Az ABG háromszög egyenlő (területű) a DEF háromszöggel; az ABC háromszög is kétszeres arányban áll tehát DEF -fel BC -nek EF -fel való arányához képest (V. 7., 11.).



Hasonló háromszögek tehát... [Éppen ezt kellett megmutatni.]
F.: VI. 20.

*Következmény**

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha három szakasz arányos, akkor amint az első a harmadikhoz, úgy aránylik az elsőre emelt alakzat a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzathoz [mint-hogy megmutattuk, hogy amint BC a BG -hez, úgy aránylik az ABC háromszög az ABG háromszöghöz, azaz DEF -hez]. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 22., 25., 31.; X. 6. K., 10., 112.; XIII. 14–16., 18.

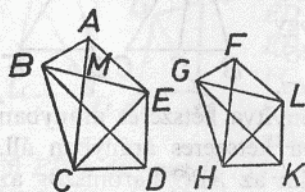
VI. 20. Tétel

A hasonló sokszögek hasonló, ugyanolyan sok és a teljes sokszögekével megegyező arányú háromszögekre esnek szét, s a sokszögek egymással a megfelelő oldalakhoz képest kétszeres arányban állnak.

Legyenek $ABCDE$ és $FGHKL$ hasonló sokszögek, AB és FG pedig megfelelő oldalak. Azt állítom, hogy az $ABCDE$, $FGHKL$ sokszögek hasonló, ugyanolyan sok és a teljes sokszögekével megegyező arányú háromszögekre esnek szét, s az $ABCDE$ sokszög az $FGHKL$ sokszöggel kétszeres arányban áll AB -nek FG -hez való arányához képest.

Húzzuk meg ugyanis BE -t, EC -t, GL -t és LH -t.

Minthogy az $ABCDE$ sokszög hasonló az $FGHKL$ sokszöghöz, egyenlő a BAE szög GFL -lél, s amint BA az AE -hez, úgy aránylik GF az FL -hez. Minthogy ABE és FGL két háromszög, melyben egy-egy szög egyenlő, és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak, egyenlők az ABE háromszög szögei az FGL háromszögével (VI. 6.), úgyhogy hasonló is hozzá (VI. 4., 1. D.), az ABE szög tehát egyenlő FGL -lél. A teljes ABC szög is



egyenlő a teljes FGH szöggel a sokszögek hasonlósága miatt, a maradék EBC szög tehát egyenlő LGH -val. S minthogy az ABE , FGL háromszögek hasonlósága miatt amint EB a BA -hoz, úgy aránylik LG a GF -hez, valamint a sokszögek hasonlósága miatt amint AB

a BC -hez, úgy FG a GH -hoz, így egyenlő (sok tagon) át amint EB a BC -hez, úgy aránylik LG GH -hoz (V. 22.), és az egyenlő EBC , LHG szögek melletti oldalak arányosak, egyenlők tehát az EBC háromszög szögei az LGH háromszögével (VI. 6.), úgyhogy hasonló is az EBC háromszög az LGH háromszöghöz (VI. 4.). Ugyanígy az ECD háromszög is hasonló az LHK háromszöghöz. Az $ABCDE$, $FGHKL$ hasonló sokszögeket tehát hasonló és ugyanolyan sok háromszögre bontottuk.

Azt állítom, hogy megegyező arányúak a teljes sokszögekkel, azaz ennél fogva arányosak a háromszögek, mégpedig ABE , EBC , ECD az előtagok, FGL , LGH és LHK pedig az utótagjaik, s hogy az $ABCDE$ sokszög az $FGHKL$ sokszöggel a megfelelő oldalakhoz, azaz AB -hez és FG -hez képest kétszeres arányban áll.

Húzzuk meg ugyanis AC -t, FH -t.

Minthogy a sokszögek hasonlósága miatt egyenlő az ABC szög FGH -val, s amint AB a BC -hez, úgy aránylik FG a GH -hoz, egyenlők az ABC háromszög szögei az FGH háromszögével (VI. 6.); a BAC szög tehát egyenlő GFH -val, BCA pedig GHF -fel. Minthogy a BAM szög egyenlő GFN -nel és az ABM szög egyenlő FGN -nel, a harmadik, AMB szög is egyenlő a harmadik: FNG szöggel (I. 32.); egyenlők tehát az ABM háromszög szögei az FGN háromszögével. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a BMC háromszögnek is egyenlők a szögei a GNH háromszögével. Arányosak tehát, amint AM az MB -hez, úgy FN az NG -hez és amint BM az MC -hez, úgy GN az NH -hoz (VI. 4.), úgyhogy egyenlő (sok tagon) át amint AM az MC -hez, úgy aránylik FN az NH -hoz (V. 22.). Másrészt amint AM az MC -hez, úgy aránylik az ABM háromszög MBC -hez és AME az EMC -hez – úgy aránylanak ugyanis egymáshoz, mint az alapjaik (VI. 1.). S amint bármelyik előtag az utótagjához, úgy aránylik az előtagok összege az utótagok összegéhez (V. 12.); amint tehát az AMB háromszög BMC -hez, úgy aránylik ABE a CBE -hez. Viszont amint AMB a BMC -hez, úgy aránylik AM az MC -hez, amint tehát AM az MC -hez, úgy aránylik az ABE háromszög az EBC háromszöghöz (V. 11.). Ugyanígy amint FN az NH -hoz, úgy aránylik az FGL háromszög a GLH háromszöghöz. FN úgy aránylik NH -hoz, mint AM az MC -hez, amint tehát az ABE háromszög a BEC háromszöghöz, úgy aránylik az FGL háromszög

a *GLH* háromszöghöz (V. 11.) és fölcerélve, amint az *ABE* háromszög az *FGL* háromszöghöz, úgy a *BEC* háromszög a *GLH* háromszöghöz (V. 16.). Hasonlóképp mutathatnánk meg *BD*-t és *GK*-t meghuzva azt is, hogy amint a *BEC* háromszög az *LGH* háromszöghöz, úgy aránylik az *ECD* háromszög az *LHK* háromszöghöz. S minthogy amint az *ABE* háromszög az *FGL* háromszöghöz, úgy aránylik *EBC* az *LGH*-hoz és *ECD* az *LHK*-hoz, amint bármelyik előtag az utótagjához, úgy aránylik az előtagok összege az utótagok összegéhez (V. 12.); amint tehát az *ABE* háromszög az *FGL* háromszöghöz, úgy aránylik az *ABCDE* sokszög az *FGHKL* sokszöghöz. Az *ABE* háromszög az *FGL* háromszöggel viszont kétszeres arányban áll a megfelelő oldalakhoz, *AB*-hez és *FG*-hez képest – hasonló háromszögek ugyanis a megfelelő oldalaihoz képest kétszeres arányban állnak (VI. 19.). Az *ABCDE* és *FGHKL* sokszögek is kétszeres arányban állnak tehát a megfelelő *AB*, *FG* oldalaikéhoz képest (V. 11.).

A hasonló sokszögek tehát... [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: XII. 1., 8. K.

Következmény

Ugyanígy mutatható meg a [hasonló] négyszögekről is, hogy a megfelelő oldalakhoz képest kétszeres arányban állnak. Ezt megmutattuk a háromszögekről is; úgyhogy általánosságban is a hasonló egyenes vonalú alakzatok egymással a megfelelő oldalakhoz képest kétszeres arányban állnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 9.

(2. Következmény)

[S ha veszünk *AB*-hez és *FG*-hez egy harmadik arányos *o*-t (VI. 11.), akkor *AB* az *o*-val *FG*-hez képest kétszeres arányban áll. Viszont a sokszögek, illetve négyszögek is kétszeres arányban állnak egymással a megfelelő oldalakhoz, azaz *AB*-hez és *FG*-hez képest. Ezt megmutattuk a háromszögekről is (VI. 19.), úgyhogy általánosságban is nyilvánvaló, hogy ha három szakasz arányos, akkor amint az első a harmadikhoz úgy aránylik az elsőre emelt alakzat a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzathoz.]

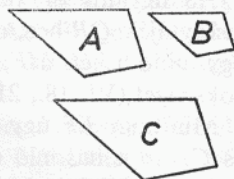
VI. 21. Tétel

Az ugyanazon sokszöghöz hasonló alakzatok egymáshoz is hasonlóak.

Legyen ugyanis mind a két, A , B sokszög hasonló C -hez. Azt állítom, hogy A és B is hasonló.

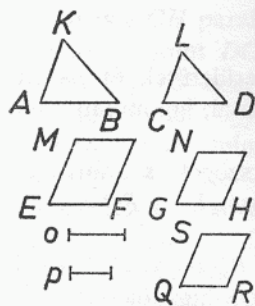
Minthogy ugyanis A hasonló C -hez, egyenlők a szögei az övével és az egyenlő szögek melletti oldalai arányosak. Ismét, minthogy B hasonló C -hez, egyenlők a szögei az övével és az egyenlő szögek melletti oldalai arányosak. Mind a két, A , B alakzat szögei tehát egyenlők és az egyenlő szögek melletti oldalai arányosak az övével [úgyhogy A -nak és B -nek is egyenlők a szögei és az egyenlő szögek melletti oldalai arányosak (V. 11.)]. Hasonló tehát A a B -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 22., 24., 28–29.



VI. 22. Tétel

Ha négy szakasz arányos, akkor a rájuk emelt (kettőnként) hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszögek is arányosak; s ha a négy szakaszra emelt (kettőnként) hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszögek arányosak, akkor maguk a szakaszok is arányosak.



Legyen AB , CD , EF és GH négy arányos szakasz: amint AB a CD -hez, úgy EF a GH -hoz, s emeljük az AB , CD szakaszokra a hasonló és hasonlóan fekvő KAB , LCD sokszögeket, EF -re és GH -ra pedig a hasonló és hasonlóan fekvő MF , NH sokszögeket. Azt állítom, hogy amint KAB az LCD -hez, úgy aránylik MF az NH -hoz.

Vegyünk ugyanis AB -hez és CD -hez egy harmadik arányos o -t, EF -hez és GH -hoz pedig egy harmadik arányos p -t (VI. 11.). Minthogy amint AB a CD -hez, úgy aránylik EF a GH -hoz, s amint CD az o -hoz, úgy GH a p -hez (V. 11.), egyenlő (sok tagon) át amint

AB az o -hoz, úgy aránylik EF a p -hez (V. 22.). Viszont amint AB az o -hoz, úgy aránylik KAB az LCD -hez, s amint EF a p -hez, úgy MF az NH -hoz (VI. 19. K.), amint tehát KAB az LCD -hez, úgy aránylik MF is NH -hoz (V. 11.).

Arányuljék most amint KAB az LCD -hez, úgy MF az NH -hoz. Azt állítom, hogy amint AB a CD -hez, úgy aránylik EF a GH -hoz.

Ha ugyanis EF nem aránylik úgy GH -hoz, mint AB a CD -hez, arányuljék QR -hez, mint AB a CD -hez (VI. 12.), és emeljünk QR -re egy mind a két, MF , NH alakzathoz hasonló és hasonlóan fekvő SR sokszöget (VI. 18., 21.).

Mint hogy EF úgy aránylik QR -hez, mint AB a CD -hez, és AB -re és CD -re a hasonló és hasonlóan fekvő KAB -t és LCD -t emeltük s EF -re és QR -re a hasonló és hasonlóan fekvő MF -et és SR -t, amint KAB az LCD -hez, úgy aránylik MF az SR -hez. Feltevés szerint MF az NH -hoz is úgy aránylik, mint KAB az LCD -hez, amint tehát MF az SR -hez, úgy aránylik MF az NH -hoz (V. 11.). MF -nek tehát mind a két NH , SR mennyiséghez ugyanaz az aránya, egyenlő (területű) tehát NH az SR -rel (V. 9.). De hasonló és hasonlóan fekvő is hozzá, egyenlő tehát a GH szakasz QR -rel (Lemma). S mint hogy EF úgy aránylik QR -hez, mint AB a CD -hez, QR viszont egyenlő GH -val, amint AB a CD -hez, úgy aránylik EF a GH -hoz (V. 7.).

Ha tehát négy szakasz... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 14., 22., 27., 66., 68.; XIII. 15.

Lemma

Azt pedig, hogy ha sokszögek egyenlő (területű)ek és hasonlóak, akkor a megfelelő oldalai egyenlők egymással, így mutathatjuk meg:

Legyenek NH és SR egyenlő és hasonló sokszögek, s arányuljék amint HG a GN -hez, úgy RQ a QS -hez. Azt állítom, hogy RQ egyenlő HG -vel.

Ha ugyanis nem az, egyikük nagyobb. Legyen RQ nagyobb HG -nél. Mint hogy HG úgy aránylik GN -hez, mint RQ a QS -hez, fölcserélve is, amint RQ a HG -hez, úgy QS a GN -hez (V. 16.). QR nagyobb HG -nél, QS is nagyobb tehát GN -nél (V. 14.), úgy hogy RS is nagyobb HN -nél (8. Ax.). Azonban egyenlő is vele; ez viszont nem lehetséges. Nem

igaz tehát, hogy QR nem egyenlő GH -val; egyenlő tehát vele. Éppen ezt kellett megmutatni.

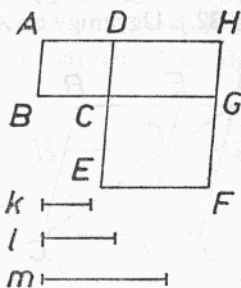
VI. 23. Tétel

Parallelogrammák, melyeknek szögeik egyenlők, az oldalakéiból összetevődő arányban állnak egymással.

Legyenek AC , CF parallelogrammák, melyeknek egyenlők a szögeik, mégpedig legyen a BCD szög egyenlő ECG -vel. Azt állítom, hogy az AC parallelogramma a CF parallelogrammával az oldalakéiból összetevődő arányban áll.

Helyezzük őket úgy el, hogy BC egy egyenesen legyen CG -vel. Ekkor DC is egy egyenesen lesz CE -vel (I. 14.). Egészítsük ki a DG parallelogrammát, vegyünk föl egy k szakaszt, és arányuljék k az l -hez, mint BC a CG -hez és l az m -hez, mint DC a CE -hez (VI. 12.).

k -nak l -hez és l -nek m -hez való aránya tehát azonos az oldalak arányaival: BC -nek a CG -hez és DC -nek a CE -hez való arányával. k -nak m -hez való aránya viszont k -nak l -hez és l -nek m -hez való arányából tevődik össze, úgyhogy k az m -mel az oldalakéiból összetevődő arányban áll. Minthogy az AC parallelogramma úgy aránylik CH -hoz, mint BC a CG -hez (VI. 1.), amint viszont BC a CG -hez, úgy k az l -hez, AC úgy aránylik CH -hoz, mint k az l -hez (V. 11.). Ismét, minthogy a CH parallelogramma úgy aránylik CF -hez, mint DC a CE -hez, amint viszont DC a CE -hez, úgy l az m -hez, a CH parallelogramma úgy aránylik a CF parallelogrammához, mint l az m -hez. Miután megmutattuk, hogy amint k az l -hez, úgy aránylik az AC parallelogramma a CH parallelogrammához s amint l az m -hez, úgy a CH parallelogramma a CF parallelogrammához, egyenlő (sok tagon) át amint k az m -hez, úgy aránylik AC a CF parallelogrammához (V. 22.). k az m -mel az oldalakéiból összetevődő arányban áll, AC és CF is az oldalakéiból összetevődő arányban áll tehát (V. 11.).



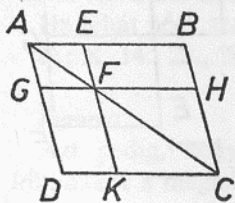
Parallelogrammák tehát, ... Éppen ezt kellett megmutatni.

VI. 24. Tétel

Minden paralelogrammában az átló melletti paralelogrammák hasonlók mind a teljes paralelogrammához, mind egymáshoz.

Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, AC pedig egy átlója, s legyenek az AC melletti paralelogrammák EG és HK . Azt állítom, hogy mind a két, EG , HK paralelogramma hasonló a teljes $ABCD$ -hez és egymáshoz is.

Mínt hogy ugyanis az ABC háromszög egyik oldalával, BC -vel párhuzamosan húztuk EF -et, arányosak: amint BE az EA -hoz, úgy CF az FA -hoz (VI. 2.). Ismét, mínt hogy az ACD háromszög egyik oldalával, CD -vel párhuzamosan húztuk FG -t, arányosak: amint CF az FA -hoz, úgy DG a GA -hoz. De megmutattuk, hogy BE úgy aránylik EA -hoz, mint CF az FA -hoz, amint tehát BE az EA -hoz, úgy DG a GA -hoz (V. 11.), és összetéve, amint BA az AE -hez, úgy DA az AH -hoz (V. 18.), és fölcserélve, amint BA az AD -hez, úgy EA az AG -hez (V. 16.) Az $ABCD$, EG paralelogrammáknak tehát arányosak a közös BAD szög melletti oldalaik. Mínt hogy GF párhuzamos DC -vel, az AFG szög egyenlő DCA -val (I. 29.); s DAC közös szöge a két, ADC , AGF háromszögnek; egyenlők tehát az ADC háromszög szögei AGF -éivel (I. 32.). Ugyanígy az ACB háromszögnek is egyenlők a szögei az AFE



háromszögéivel, s a teljes $ABCD$ paralelogrammának is egyenlők a szögei az EG paralelogrammáéival. Arányosak tehát: amint AD DC -hez, úgy AG a GF -hez, amint DC a CA -hoz, úgy GF az FA -hoz, amint AC a CB -hez, úgy AF az FE -hez, s végül amint CB a BA -hoz, úgy FE az EA -hoz (VI. 4.). Míután megmutattuk, hogy GF úgy aránylik FA -hoz, mint DC a CA -hoz, s AF az FE -hez, mint AC a CB -hez, egyenlő (sok tagon) át GF úgy aránylik FE -hez, mint DC a CB -hez (V. 22.). Az $ABCD$, EG paralelogrammáknak tehát arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik; hasonló tehát az $ABCD$ paralelogramma az EG paralelogrammához. Ugyanígy az $ABCD$ paralelogramma a KH paralelogrammához is hasonló; mind a két, EG , HK paralelogrammához is hasonló; mind a két, EG , HK paralelogramma hasonló tehát $ABCD$ -hez. Az ugyanazon sokszöghöz hasonlóak viszont egymáshoz is

hasonlók (VI. 21.); az EG páralelogramma is hasonló tehát a HK páralelogrammához.

Tehát minden... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 26., 29.

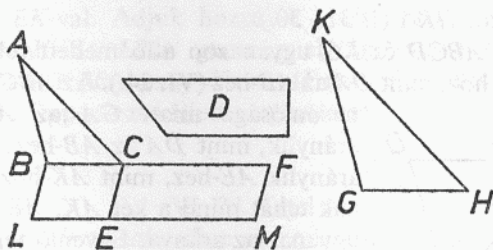
VI. 25. Tétel

Szerkesszünk adott sokszöghöz hasonló és egyúttal egy másik adott sokszöggel egyenlő (területű) alakzatot!

Legyen az adott sokszög, amelyhez hasonlót kell szerkeszteni, ABC , amellyel pedig egyenlőt, D . ABC -hez hasonló s egyúttal D -vel egyenlő alakzatot kell tehát szerkeszteni.

Illesszünk hozzá ugyanis a BC szakaszhoz egy az ABC háromszöggel egyenlő BE páralelogrammát (I. 44.), CE -hez pedig egy D -vel egyenlő és a CBL szöggel egyenlő FCE szögű CM páralelogrammát (I. 45.). Ekkor egy egyenesen lesz BC a CF -fel és LE az EM -mel (I. 29., 14.). Vegyünk BC -hez és CF -hez egy GH középarányost (VI. 13.), és emeljünk GH -ra egy ABC -hez hasonló és hasonlóan fekvő KGH alakzatot (VI. 18.).

Miután amint BC a GH -hoz, úgy aránylik GH a CF -hez, és ha három szakasz arányos, akkor amint az első a harmadikhoz, úgy



aránylik az elsőre emelt alakzat a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzathoz (VI. 19. K.), amint BC a CF -hez, úgy aránylik az ABC háromszög a KGH háromszöghöz. Viszont amint BC a CF -hez, úgy aránylik a BE páralelogramma az EF páralelogrammához (VI. 1.). Amint tehát az ABC háromszög a KGH háromszöghöz, úgy aránylik a BE páralelogramma az EF páralelogrammához

(V. 11.); fölcserélve tehát amint az ABC háromszög a BE paralelogrammához, úgy a KGH háromszög az EF paralelogrammához (V. 16.). Az ABC háromszög egyenlő a BE paralelogrammával, tehát a KGH háromszög is egyenlő az EF paralelogrammával (V. 14.). Az EF paralelogramma viszont egyenlő D -vel; KGH is egyenlő tehát D -vel. S KGH egyúttal ABC -hez is hasonló.

Tehát egy, az adott ABC sokszöghöz hasonló és egyúttal a másik adott D sokszöggel egyenlő KGH alakzatot szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: VI. 28–29.

VI. 26. Tétel

Ha egy paralelogrammából elveszünk egy ahhoz hasonló és hasonlóan fekvő paralelogrammát, melynek van vele közös szöge, akkor a paralelogrammák ugyanazon átló mellett fekszenek.

Vegyük el ugyanis az $ABCD$ paralelogrammából az $ABCD$ -hez hasonló és hasonlóan fekvő AF paralelogrammát, melynek DAB szöge közös vele. Azt állítom, hogy $ABCD$ és AF ugyanazon átló mellett fekszik.

Ellenkező esetben legyen ugyanis AHC az átló, és GF meghosszabbítása messe H -ban, és húzzuk H -n át mind a két, AD , BC oldallal párhuzamosan HK -t (I. 31., 30.).

Mínt hogy $ABCD$ és KG ugyanazon átló mellett fekszik, GA úgy aránylik AK -hoz, mint DA az AB -hez (VI. 24.). Az $ABCD$, EG idomok hasonlósága miatt GA az AE -hez is úgy aránylik, mint DA az AB -hez; GA tehát úgy aránylik AE -hez, mint AK -hoz (V. 11.). GA -nak tehát mind a két AK , AE mennyiséghez ugyanaz az aránya. Egyenlő tehát AE az AK -val (V. 9.), a kisebb a nagyobbal; ez viszont nem lehetséges. Nem igaz tehát, hogy $ABCD$ és AF nem fekszik ugyanazon átló mellett: az $ABCD$ és az AF paralelogramma tehát ugyanazon átló mellett fekszik.

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 27–29.; X. 91., 95–96.

VI. 27. Tétel

Egy szakaszhoz úgy illesztett összes paralelogramma közül, hogy egy, a szakasz felére emelt paralelogrammához hasonló és hasonlóan fekvő paralelogramma maradjon fenn, a szakasz felére illesztett – s a fönnmaradóhoz hasonló – a legnagyobb (területű).

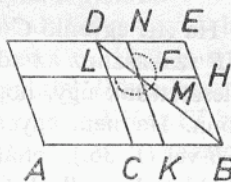
Legyen AB egy szakasz s C a felezőpontja (I. 10.), és illesszünk úgy az AB szakaszhoz egy AD paralelogrammát, hogy az AB szakasz felére, azaz CB -re emelt DB paralelogramma maradjon fenn. Azt állítom, az AB -hez úgy illesztett összes paralelogramma közül, hogy egy DB -hez hasonló és hasonlóan fekvő paralelogramma maradjon fenn, AD a legnagyobb. Illesszük ugyanis úgy az AB szakaszhoz az AF paralelogrammát, hogy a DB -hez hasonló és hasonlóan fekvő FB maradjon fenn. Azt állítom, hogy AD nagyobb AF -nél.

Mint hogy ugyanis a DB paralelogramma hasonló az FB paralelogrammához, ugyanazon átló körül fekszenek (VI. 26.). Húzzuk meg a DB átlójukat, és rajzoljuk meg az ábrát.

Mint hogy CF egyenlő FE -vel (I. 43.), FB pedig közös rész, a teljes CH egyenlő a teljes KE -vel. CH viszont egyenlő CG -vel, mint hogy AC is egyenlő CB -vel (I. 36.). GC is egyenlő tehát EK -val. Adjuk hozzájuk közös résznek CF -et: így a teljes AF egyenlő az LMN gnómónnal, úgy hogy a DB paralelogramma, azaz AD (I. 36.), nagyobb az AF paralelogrammánál.

Tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 28.



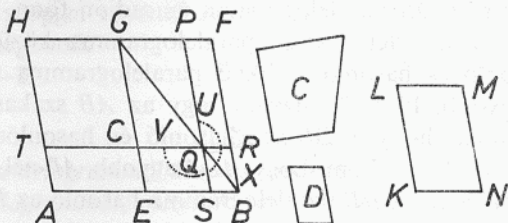
VI. 28. Tétel

Illesszünk úgy adott szakaszhoz egy adott sokszöggel egyenlő paralelogrammát, hogy egy adothoz hasonló paralelogramma maradjon fenn. Szükséges, hogy az adott sokszög [mellyel egyenlőt kell oda illeszteni] ne legyen nagyobb a szakasz felére emelt – s a fönnmaradóhoz hasonló – paralelogrammánál (VI. 27) [vagyis a felére emelt paralelogrammánál, melyhez hasonlóknak kell fönnmaradnia].*

Legyen AB az adott szakasz, s az adott sokszög, amellyel egyenlőt kell AB -hez illeszteni, C – mely nem nagyobb az AB felére emelt, a

fönnmaradóhoz hasonló paralelogrammánál –, amelyhez pedig hasonlóknak kell fönnmaradnia, D . Az adott AB szakaszhoz tehát az adott C sokszöggel egyenlő paralelogrammát kell illeszteni úgy, hogy egy D -hez hasonló paralelogramma maradjon fönn.

Legyen E az AB felezőpontja (I. 10.), emeljünk EB -re egy D -hez hasonló és hasonlóan fekvő $EBFG$ sokszöget (VI. 18.), és egészítsük ki az AG paralelogrammát.



Ha AG egyenlő C -vel, készen vagyunk a feladattal, hiszen az adott AB szakaszhoz az adott C sokszöggel egyenlő AG paralelogrammát illesztettünk úgy, hogy a D -hez hasonló GB paralelogramma maradjon fönn. Ha nem egyenlő, legyen nagyobb HE a C -nél. HE egyenlő GB -vel (I. 36.), tehát GB is nagyobb C -nél. Szerkesszünk egy azon többlettel, mellyel GB nagyobb C -nél, egyenlő és egyúttal D -hez hasonló és hasonlóan fekvő $KLMN$ alakzatot (VI. 25.). D viszont hasonló GB -hez: KM is hasonló tehát GB -hez (VI. 21.). Feleljen meg KL a GE -nek és LM a GF -nek. Minthogy GB egyenlő C meg KM -mel, GB nagyobb KM -nél, így GE nagyobb KL -nél és GF LM -nél. Mérjük föl a KL -lel egyenlő GO -t és az LM -mel egyenlő GP -t (I. 3.), és egészítsük ki az $OGPO$ paralelogrammát. Egyenlő tehát és hasonló $[GQ]$ KM -hez $[KM]$ viszont GB -hez hasonló]. GQ is hasonló tehát GB -hez (VI. 21.), ugyanazon átló mellett fekszik tehát GQ és GB (VI. 26.). Legyen GQB az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát.

Minthogy BG egyenlő C meg KM -mel, s ezek közül KM -mel egyenlő GQ , a maradék UXV gnómón egyenlő a maradék C -vel. Miután PR egyenlő OS -sel (I. 43.), adjuk hozzájuk közös tagnak QB -t, így a teljes PB egyenlő a teljes OB -vel. OB viszont egyenlő TE -vel, minthogy az AE oldal is egyenlő EB -vel (I. 36.), TE is egyenlő tehát PB -vel. Adjuk hozzájuk közös tagnak OS -t, így a teljes TS egyenlő a teljes

VXU gnómókkal. Viszont mint megmutattuk a VXU gnómón egyenlő C -vel, TS is egyenlő tehát C -vel.

Az adott AB szakaszhoz tehát az adott C sokszöggel egyenlő ST paralelogrammát illesztettünk úgy, hogy a D -hez hasonló QB paralelogramma maradjon fönn [mivel QB hasonló GQ -hoz (VI. 24.)] (VI. 21.). Éppen ezt kellett megtenni.

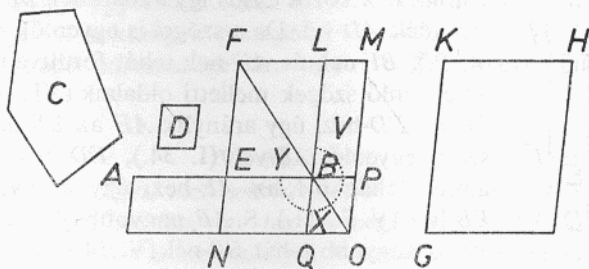
F.: X. 17–18., 33–35., 54–55., 57., 91–96., 98.

VI. 29. Tétel

*Illesszünk adott szakaszhoz adott sokszöggel egyenlő paralelogrammát úgy, hogy egy adothoz hasonló paralelogramma lógjon ki.**

Legyen AB az adott szakasz, s az adott sokszög, amellyel egyenlőt kell AB -hez illeszteni, C , amelyhez pedig hasonlóknak kell kilógnia, D . Az AB szakaszhoz tehát a C sokszöggel egyenlő sokszöget kell illeszteni úgy, hogy egy D -hez hasonló paralelogramma lógjon ki.

Legyen E az AB felezőpontja (I. 10.), emeljünk EB -re egy D -hez hasonló és hasonlóan fekvő BF paralelogrammát (VI. 18.), és szerkesszünk egy BF és C összegével egyenlő és egyúttal D -hez hasonló és hasonlóan fekvő GH alakzatot (VI. 25.). Feleljen meg KH az FL -nek és KH az FE -nek. Minthogy GH nagyobb FB -nél, KH nagyobb



FL -nél és KG az FE -nél. Hosszabbítsuk meg FL -t, FE -t, KH -val legyen egyenlő FLM , KG -vel pedig FEN (I. 3.), és egészítsük ki MN -t. MN tehát mind egyenlő, mind hasonló GH -vel. GH viszont EL -hez hasonló (VI. 21.), MN is hasonló tehát EL -hez, s EL és MN ugyanazon átló mellett fekszik (VI. 26.). Húzzuk meg FO átlójukat, és rajzoljuk meg az ábrát.

Minthogy GH egyenlő EL meg C -vel, GH viszont egyenlő MN -nel, MN is egyenlő EL meg C -vel. Vonjuk le a közös EL -t: így a maradék YXV gnómón egyenlő C -vel. Minthogy AE egyenlő EB -vel, AN is egyenlő NB -vel (I. 36.), azaz LP -vel (I. 43.). Adjuk hozzájuk közös tagnak EO -t: így a teljes AO egyenlő a VXY gnómóonnal. A VXY gnómón viszont egyenlő C -vel, AO is egyenlő tehát C -vel.

Az adott AB szakaszhoz tehát az adott C sokszöggel egyenlő AO paralelogrammát illesztettünk úgy, hogy a D -hez hasonló PQ paralelogramma lóg ki (VI. 21.), mivel EL is hasonló PQ -hoz (VI. 24.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VI. 30.

VI. 30. Tétel

Osszunk föl adott egyenesszakaszt folytonos arányban!

Legyen AB az adott egyenesszakasz. Az AB szakaszt kell tehát folytonos arányban fölosztani.

Emeljünk ugyanis AB -re egy BC négyzetet (I. 46.), és illesszünk AC -hez egy BC -vel egyenlő CD paralelogrammát úgy, hogy egy BC -hez hasonló AD alakzat lógjon ki (VI. 29.).

BC négyzet, tehát AD is az (V. 14.). Miután BC egyenlő CD -vel, vonjuk le a közös CE -t: így a maradék BF egyenlő a maradék AD -vel. De a szögei is egyenlők az övéivel (4. P.), BF -nek és AD -nek tehát fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik (VI. 14.): amint FE az ED -hez, úgy aránylik AE az EB -hez. FE viszont egyenlő AB -vel (I. 34.), ED pedig AE -vel, amint tehát BA az AE -hez, úgy aránylik AE az EB -hez (V. 7., 11.). S AB nagyobb AE -nél (8. Ax.), AE is nagyobb tehát EB -nél (V. 14.).

Az AB szakaszt tehát folytonos arányban osztottuk föl az E pontban, és AE a nagyobb szelete. Éppen ezt kellett megtenni.

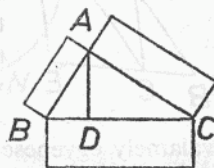
VI. 31. Tétel

*A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemközti oldalra emelt alakzat egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzatok összegével.**

Legyen ABC egy derékszögű háromszög, és benne BAC a derékszög. Azt állítom, hogy a BC -re emelt alakzat egyenlő a BA -ra és AC -re emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzatok összegével.

Húzzuk meg az AD merőleget (I. 11.).

Mínt hogy az ABC derékszögű háromszögben az A -nál levő derékszög csúcsából a BC alapra merőlegesen bocsátottuk AD -t, a merőleges melletti ABD , ADC háromszögek hasonlók mind a teljes ABC háromszöghöz, mind egymáshoz (VI. 8.). Mínt hogy ABC hasonló ABD -hez, amint CB a BA -hoz, úgy aránylik AB a BD -hez. Mínt hogy három szakasz arányos, amint az első a harmadikhoz, úgy aránylik az elsőre emelt alakzat a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett alakzathoz (VI. 20. 2. K.). Amint tehát CB a BD -hez, úgy aránylik a CB -re emelt sokszög a BA -ra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszöghöz. Ugyanígy amint BC a CD -hez, úgy aránylik a BC -re emelt sokszög a CA -ra emelthez, úgy hogy amint BC a BD meg DC -hez, úgy aránylik a BC -re emelt sokszög a BA -ra és AC -re emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszögek összegéhez (V. 24.). BC egyenlő BD meg DC -vel, tehát a BC -re emelt sokszög is egyenlő a BA -ra és AC -re emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett sokszögek összegével (V. 14.).



A derékszögű háromszögekben tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

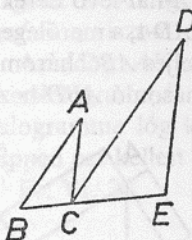
VI. 32. Tétel

Ha két háromszöget, melynek két-két oldala arányos, egy-egy csúcsánál fogva összeillesztünk úgy, hogy a megfelelő oldalai párhuzamosak is legyenek, akkor a háromszögek harmadik oldala egy egyenesen lesz.

Legyen ABC és DCE két háromszög, melynek két-két oldala, BA , AC és DC , DE arányos: amint AB az AC -hez, úgy DC a DE -hez, és AB párhuzamos DC -vel, AC pedig DE -vel. Azt állítom, hogy BC és CE egy egyenesen van.

Mínt hogy ugyanis AB párhuzamos DC -vel, és az AC egyenes metszi őket, a BAC , ACD váltószögek egyenlők egymással (I. 29.).

Ugyanígy a CDE szög is egyenlő ACD -vel, úgyhogy BAC is egyenlő CDE -vel. Minthogy ABC és DCE két háromszög, melynek egy-egy szöge, az A -nál, illetve D -nél levő, egyenlő, és az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak: amint BA az AC -hez, úgy CD a DE -hez, az ABC háromszög szögei egyenlők a DCE háromszögével (VI. 6.), egyenlő tehát az ABC szög DCE -vel. Mint megmutattuk, az ACD szög egyenlő BAC -vel, így a teljes ACE szög egyenlő e két szög, ABC és BAC összegével. Adjuk hozzájuk közös tagnak ACB -t, így ACE meg ACB egyenlő BAC meg ACB meg CBA -val. BAC meg ABC meg ACB viszont két derékszöggel egyenlő (I. 32.), tehát ACE meg ACB is két derékszöggel egyenlő. A valamely egyenesen, AC -n fekvő C pontnál ekkor két egyenes, BC és CE fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő ACE , ACB szögeket alkotnak egymás mellett, BC és CE tehát egy egyenesen van (I. 14.).



Ha tehát két... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 17.

VI. 33. Tétel

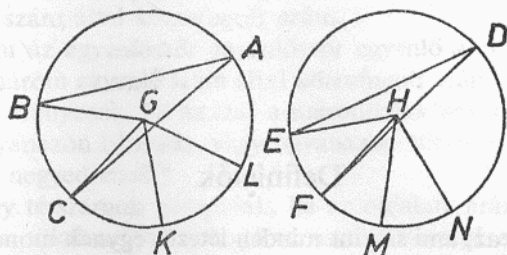
*Egyenlő körökben az ívek és a rajtuk nyugvó szögek aránya ugyanaz, akár középpontiak, akár kerületiek a szögek.**

Legyenek ABC és DEF egyenlő körök, és legyenek bennük középponti szögek – G -nél, illetve H -nál – BGC és EHF , kerületiek pedig BAC , EDF . Azt állítom, hogy amint a BC ív az EF ívhez, úgy aránylik mind a BGC szög EHF -hez, mind BAC az EDF -hez.

Vegyünk föl ugyanis egymás mellett tetszőleges sok, a BC ívvel egyenlő CK , KL , s az EF ívvel egyenlő FM , MN ívet, és húzzuk meg GK -t, GL -t, HM -et, HN -t.

Minthogy a BC , CK , KL ívek egyenlők egymással, a BGC , CGK , KGL szögek is egyenlők egymással (III. 27.), ahányszorososa tehát a BL ív BC -nek, ugyanannyiszorososa a BGL szög is BGC -nek. Ugyanígy ahányszorososa az NE ív EF -nek, ugyanannyiszorososa az NHE szög is EHF -nek. Ha tehát a BL ív egyenlő az EN ívvel, egyenlő a BGL szög is EHN -nel (III. 27.), s ha nagyobb a BL ív az EN ívnél, a BGL

szög is nagyobb EHN -nél, s ha kisebb, kisebb. Van hát négy mennyiség, két ív, BC és EF , s két szög, BGC és EHF , s ugyanannyiszorosát vettük a BC ívnek és a BGC szögnek, a BL ívet, illetve a BGL szöveget, meg az EF ívnek és az EHF szögnek, az EN ívet, illetve az EHN szö-



get. Megmutattuk, hogy ha a BL ív nagyobb az EN ívnél, a BGL szög is nagyobb az EHN szögnél, s ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb. A BGC szög tehát úgy aránylik az EHF szöghöz, mint a BC ív az EF ívhez. Viszont amint a BGC szög EHF -hez, úgy aránylik a BAC szög EDF -hez, mert mind a kettő kétszerese a megfelelő másiknak (III. 20., V. 15.). Amint tehát a BC ív az EF ívhez, úgy aránylik mind a BGC szög EHF -hez, mind BAC az EDF -hez (V. 11.).

Egyenlő körökben tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 8-9.

Hetedik könyv

Definíciók

1. Az egység az, ami szerint minden létezőt egynek mondunk.
2. Szám az egységekből összetevődő sokaság.*
3. Egy kisebb szám egy nagyobbak hányada*, ha osztja a nagyobbat.
4. Törtrésze* pedig, ha nem osztja.
5. Egy nagyobb szám egy kisebbnek többszöröse, ha a kisebb osztja.
6. Páros a kettébontható szám.
7. Páratlan pedig a ketté nem bontható, vagy másképp amelyek egységben különbözik egy páros számtól.
8. Párosszor páros az a szám, amelyik egy páros szám által páros számúan osztható.
9. Párosszor páratlan pedig, amelyik egy páros szám által páratlan számúan osztható.
10. Páratlanszor páros az a szám, amelyik egy páratlan szám által páros számúan osztható.*
11. Páratlanszor páratlan szám pedig az, amelyik egy páratlan szám által páratlan számúan osztható.
12. Prímszám, amelyik csak az egységgel osztható.
13. Számok egymáshoz relatív prímek, ha csak az egység közös osztójuk.
14. Összetett az a szám, amelyiket valamely szám oszt.
15. Számok relatív összetettek, ha valamely szám közös osztójuk.
16. Azt mondjuk, hogy egy számmal megszorunk egy másikat, ha úgy képezzünk egy számot, hogy annyszor adjuk össze a szorzottat, ahány egység van a szorzóban.

17. A két szám összeszorzásakor keletkező számot síkszámnak nevezzük, az összeszorzott számokat pedig az oldalainak.
18. A három szám összeszorzásakor keletkező szám térszám, az összeszorzott számok pedig az oldalai.
19. Négyzetszám az egyenlőszőr egyenlő alakú vagy másképp a két egyenlő szám által közrefogott szám.
20. Köbszám az egyenlőszőr egyenlőszőr egyenlő alakú, vagy másképp a három egyenlő szám által közrefogott szám.
21. Számok arányosak, ha az első a másodiknak ugyanannyiszorosa vagy ugyanazon hányada, vagy ugyanazon törtrésze, mint a harmadik a negyediknek.*
22. Sík- vagy térszámok hasonlóak, ha az oldalai arányosak.
23. Egy szám tökéletes, ha egyenlő az osztói* összegével.

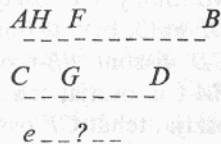
VII. 1. Tétel

*Ha van két nem egyenlő számunk, a kisebbet váltakozva mindig kivonjuk a nagyobból, és a maradék sosem osztja a megelőző számot, míg csak nem az egység a maradék, akkor az eredeti számok relatív prímelek.**

Legyen AB és CD két [nem egyenlő] szám, és a kisebbet váltakozva mindig kivonván a nagyobból a maradék sose ossza a megelőző számot. Azt állítom, hogy AB és CD relatív prímelek, azaz hogy AB -t és CD -t csak az egység osztja.

Ha ugyanis AB és CD nem relatív prím, osztja őket valamely szám. Ossza őket egy e szám. CD ossza BF -et, és legyen a nála kisebb maradék FA , AF ossza DG -t, és legyen a nála kisebb maradék GC , s GC ossza FH -t, és legyen a maradék a HA egység.

Mínt hogy e osztja CD -t, CD pedig osztja BF -et, e is osztja BF -et (3. E.); de a teljes BA -t is osztja, tehát a maradék AF -et is osztja (2. E.). AF viszont DG -t osztja, tehát e is osztja DG -t (3. E.); de a teljes DC -t is osztja, tehát a maradék CG -t is osztja. CG viszont FH -t osztja, tehát e is osztja FH -t (3. E.); de a teljes FA -t is osztja, tehát a maradék AH egységet is osztja (2. E.), noha szám: ez pedig



lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám az AB és CD számokat, AB és CD tehát relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 2.

VII. 2. Tétel

Keressük meg két adott nem relatív prímszám legnagyobb közös osztóját!*

Legyen két adott nem relatív prím szám AB és CD . Az AB , CD számoknak kell tehát megkeresni a legnagyobb közös osztóját.

$A \quad E \quad \quad \quad B$

 $C \quad F \quad \quad \quad D$

 $g \quad ? \quad \quad \quad$

Ha CD osztja AB -t – önmagát szintén osztja –, akkor CD közös osztója CD -nek és AB -nek. És nyilván a legnagyobb, egyetlen CD -nél nagyobb szám sem osztja ugyanis CD -t.

Ha pedig CD nem osztja AB -t, AB és CD közül a kisebbet váltakozva mindig kivonván a nagyobból egy olyan szám lesz a maradék, mely osztja a megelőzőt. Nem az egység lesz ugyanis a maradék, mert ellenkező esetben AB és CD relatív prímek lennének (VII. 1.) feltevésünk ellenére. Szám lesz tehát a maradék, mely osztja a megelőzőt. CD ossza BE -t, és legyen a nála kisebb maradék EA , EA ossza DF -et, és legyen a nála kisebb maradék FC , s CF ossza AE -t. Minthogy CF osztja AE -t, AE pedig osztja DF -et, CF is osztja DF -et (3. E.); de önmagát is osztja, tehát a teljes CD -t is osztja (1. E.). CD viszont BE -t osztja, tehát CF is osztja BE -t (3. E.); másrészt EA -t is osztja, tehát a teljes BA -t is osztja (1. E.). Viszont CD -t is osztja, tehát CF osztja AB -t és CD -t. CF tehát közös osztója AB -nek és CD -nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ha ugyanis CF nem a legnagyobb közös osztója AB -nek és CD -nek, valamely CF -nél nagyobb szám osztja az AB és CD számokat. Ossza őket egy g szám. Minthogy g osztja CD -t, CD pedig osztja BE -t, g is osztja BE -t (3. E.); másrészt a teljes BA -t is osztja, tehát a maradék AE -t is osztja (2. E.). AE viszont DF -et osztja, tehát g is osztja DF -et (3. E.); másrészt a teljes DC -t is osztja, tehát a maradék CF -et is osztja (2. E.), a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik CF -nél nagyobb szám az AB , CD számokat, CF tehát AB -nek

és CD -nek a legnagyobb közös osztója. [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: VII. 3–4.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy szám oszt két számot, akkor a legnagyobb közös osztójukat is osztja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 3.

VII. 3. Tétel

Keressük meg három adott nem relatív prímszám legnagyobb közös osztóját!

Legyen az adott három nem relatív prímszám a , b és c . a -nak, b -nek és c -nek kell tehát megkeresni a legnagyobb közös osztóját.

Vegyük ugyanis kettőnek, a -nak és b -nek a d legnagyobb közös osztóját (VII. 2.). d vagy osztja c -t, vagy nem osztja. Ossza először a -t és b -t is osztja, d tehát osztja a -t, b -t és c -t, d közös osztója a -nak, b -nek és c -nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ha ugyanis d nem a legnagyobb közös osztója a -nak, b -nek és c -nek, valamely d -nél nagyobb szám osztja a -t, b -t és c -t.

| | |
|-----------|-----------|
| a ----- | d -- |
| b ----- | |
| c ----- | e --?-- |

Ossza őket egy e szám. Minthogy e osztja a -t, b -t és c -t, a -t és b -t is osztja, tehát a és b legnagyobb közös osztóját is osztja (VII. 2. K.). a és b legnagyobb közös osztója d , e tehát osztja d -t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik d -nél nagyobb szám az a , b , c számokat, d tehát a -nak, b -nek és c -nek a legnagyobb közös osztója.

Ne ossza most d a c -t. Először is azt állítom, hogy c és d nem relatív prímelek. Minthogy ugyanis a , b , és c nem relatív prímelek, valamely szám osztja őket. Az a -t, b -t és c -t osztó szám az a , b számokat is osztja, és a -nak és b -nek legnagyobb közös osztóját, d -t is osztja (VII. 2. K.), másrészt c -t is osztja, tehát a d , c számokat osztja valamely szám, d és c nem relatív prímelek. Vegyük hát a legnagyobb közös osztójukat, e -t (VII. 2.). Minthogy e osztja d -t, d

pedig osztja a -t és b -t, e is osztja a -t és b -t (3. E.); másrészt c -t is osztja, e tehát osztja az a , b , c számokat, e közös osztója a -nak, b -nek és c -nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ha ugyanis e nem a legnagyobb közös osztója

| | | |
|-----------|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a ----- | d ---- | a -nak, b -nek és c -nek, valamely e -nél nagyobb szám osztja a -t, b -t és c -t. Ossza őket, és nevezzük f -nek. Mint-hogy f osztja a -t, b -t és c -t, |
| b ----- | e --- | |
| c ----- | f --? -- | |

az a , b számokat is osztja, és a -nak és b -nek a legnagyobb közös osztóját is osztja (VII. 2. K.). a -nak és b -nek a legnagyobb közös osztója d , f tehát osztja d -t; másrészt c -t is osztja, f tehát osztja a d , c számokat, és d -nek és c -nek a legnagyobb közös osztóját is osztja (VII. 2. K.). d -nek és c -nek a legnagyobb közös osztója e , f tehát osztja e -t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik e -nél nagyobb szám az a , b , c számokat, e tehát a -nak, b -nek és c -nek a legnagyobb közös osztója. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 33.

VII. 4. Tétel

Bármely két szám közül a kisebb a nagyobbak vagy hányada, vagy törtrésze.

Legyen a és BC két szám, és BC a kisebb. Azt állítom, hogy BC az a -nak vagy hányada, vagy törtrésze.

a és BC ugyanis vagy relatív prímek, vagy nem. Legyenek először a és BC relatív prímek. Ha BC -t földbontjuk a benne levő egységekre, akkor minden BC -ben levő egység egy bizonyos hányada lesz a -nak, úgyhogy BC törtrésze a -nak.

Ne legyenek most a és BC relatív prímek. Ekkor a -----
 BC vagy osztja a -t, vagy nem osztja. Ha BC osztja a -t, BC hányada a -nak. Ha nem, vegyük a -nak és d --
 BC -nek a d legnagyobb közös osztóját (VII. 2.), és bontsuk föl BC -t a d -vel egyenlő BE , EF , FC számokra. Mínthogy d osztja a -t, d hányada a -nak. Másrészt d egyenlő BE , EF , FC mindegyikével, tehát BE , EF és FC mindegyike hányada a -nak, úgyhogy BC törtrésze a -nak.

Bármely két szám közül tehát... Éppen ezt kellett megmutatni.
 F.: VII. 20.

VII. 5. Tétel

*Ha egy szám hányada egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a hányada egy negyediknek, akkor az első és a harmadik összege is ugyanaz a hányada a második és a negyedik összegének, mint az első a másodiknak.**

Legyen ugyanis az a szám hányada BC -nek, és a harmadik szám, d , ugyanaz a hányada a negyedik EF -nek, mint a a BC -nek. Azt állítom, hogy a és d összege is ugyanaz a hányada BC és EF összegének mint a a BC -nek.

Mínt hogy ugyanis amely hányada a a BC -nek, ugyanaz a hányada d az EF -nek, ahány a -val egyenlő szám van BC -ben, annyi d -vel egyenlő szám van EF -ben. Bontsuk föl BC -t az a -val egyenlő BG , GC , EF -et pedig a d -vel egyenlő EH , HF számokra. Ekkor a BG , GC számok



száma egyenlő lesz az EH , HF számok számával. Mínt hogy BG egyenlő a -val, EH pedig d -vel, BG meg EH egyenlő a meg d -vel. Ugyanígy GC meg HF is egyenlő a meg d -vel. Ahány a -val egyenlő szám van tehát BC -ben, annyi a meg d -vel egyenlő van BC meg EF -ben. Ahányszorososa tehát BC az a -nak, annyiszorososa BC és EF összege a és d összegének. Amely hányada tehát a a BC -nek, ugyanaz a hányada a és d összege BC és EF összegének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 6-7., 9-10., 12.

VII. 6. Tétel

Ha egy szám törtrésze egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a törtrésze egy negyediknek, akkor az első és a harmadik összege is ugyanaz a törtrésze a második és a negyedik összegének, mint az első a másodiknak.

Legyen ugyanis az AB szám törtrésze a c számnak, és egy harmadik szám, DE , ugyanaz a törtrésze a negyedik f -nek, mint AB c -nek. Azt állítom, hogy AB és DE összege is ugyanaz a törtrésze c és f összegének, mint AB a c -nek.

Minthogy ugyanis amely törtrésze AB a c -nek, ugyanaz a törtrésze DE az f -nek, ahány hányada van c -nek AB -ben, annyi hányada van f -nek DE -ben. Bontsuk föl AB -t a c -nek AG , GB hányadaira, DE -t pedig az f -nek DH , HE hányadaira.

Ekkor az AG , GB számok száma egyenlő lesz a DH , HE számok számával. Minthogy amely hányada AG a c -nek, ugyanaz a hányada

DH az f -nek, amely hányada AG a c -nek, ugyanaz a hányada AG és DH összege c és f összegének (VII. 5.). Ugyanígy amely hányada GB a c -nek, ugyanaz a hányada GB és HE összege c és f összegének. Amely törtrésze tehát AB a c -nek, ugyanaz a törtrésze AB és DE összege c és f összegének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 9–10., 12.

VII. 7. Tétel

*Ha egy szám egy másiknak ugyanaz a hányada, mint egy kivonandó egy másik kivonandónak, akkor az egyik maradék is ugyanaz a hányada a másik maradéknak, mint az egyik kisebbítendő a másik kisebbítendőnek.**

Legyen ugyanis az AB szám a CD számnak ugyanaz a hányada, mint az AE kivonandó a CF kivonandónak. Azt állítom, hogy az EB maradék is ugyanaz a hányada az FD maradéknak, mint az AB kisebbítendő a CD kisebbítendőnek.

Amely hányada AE a CF -nek, ugyanaz a hányada legyen EB a CG -nek. Minthogy amely hányada AE a CF -nek, ugyanaz a hányada EB a CG -nek, amely hányada AE a CF -

nek, ugyanaz a hányada AB a GF -nek $A E B$
(VII. 5.). Feltétel szerint viszont amely hányada AE a CF -nek, ugyanaz a hányada AB a CD -nek, amely hányada tehát $G C F D$

AB a GF -nek, ugyanaz a hányada CD -nek is; egyenlő tehát GF a CD -vel. Vonjuk le a közös CF -et: így a maradék GC egyenlő a maradék FD -vel. S minthogy amely hányada AE a CF -nek, ugyanaz a hányada EB a GC -nek, GC pedig egyenlő FD -vel, amely hányada AE a CF -nek, ugyanaz a hányada EB az FD -nek. Viszont amely hányada AE a CD -

nek, ugyanaz a hányada AB is CD -nek, tehát az EB maradék is ugyanaz a hányada az FD maradéknak, mint az AB kisebbitendő a CD kisebbitendőnek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 8., 11.

VII. 8. Tétel

Ha egy szám egy másiknak ugyanaz a törtrésze, mint egy kivonandó egy másik kivonandónak, akkor az egyik maradék is ugyanaz a törtrésze a másik maradéknak, mint az egyik kisebbitendő a másik kisebbitendőnek.

Legyen ugyanis az AB szám a CD számnak ugyanaz a törtrésze, mint az AE kivonandó a CF kivonandónak. Azt állítom, hogy az EB maradék is ugyanaz a törtrésze az FD maradéknak, mint az AB kisebbitendő a CD kisebbitendőnek.

Vegyünk föl egy AB -val egyenlő GH -t. Amely törtrésze tehát GH a CD -nek, ugyanaz a törtrésze AE a CF -nek. Bontsuk föl GH -t a CD -nek GK , KH hányadaira, AE -t pedig a CF -nek AL , LE hányadaira. Ekkor a GK , KH számok száma egyenlő lesz az AL , LE számok számával.

Mínt hogy amely hányada GK a CD -nek, ugyanaz a hányada AL a CF -nek, s CD nagyobb CF -nél, GK nagyobb AL -nél. Vegyünk föl egy AL -lel egyenlő GM -et. Amely hányada tehát GK a CD -nek,

ugyanaz a hányada GM a CF -nek, tehát a maradék MK is ugyanaz a hányada a maradék FD -nek, mint a GK kisebbitendő a CD kisebbitendőnek (VII. 7.). Ismét, mínt hogy amely hányada KH a CD -nek, ugyanaz a hányada EL a CF -nek, s CD nagyobb CF -nél, KH nagyobb EL -nél. Vegyünk föl egy EL -lel egyenlő KN -et. Amely hányada tehát KH a CD -nek, ugyanaz a hányada KN a CF -nek, tehát a maradék NH is ugyanaz a hányada a maradék FD -nek, mint a KH kisebbitendő a CD kisebbitendőnek (VII. 7.). Mint megmutattuk, az MK maradék is ugyanaz a hányada az FD maradéknak, mint a GK kisebbitendő a CD kisebbitendőnek, tehát MK és NH összege ugyanaz a törtrésze DF -nek, mint a HG kisebbitendő a CD kisebbitendőnek. MK és NH összege viszont egyenlő EB -vel, HG pedig BA -val, tehát az EB mara-

dék ugyanaz a törtrésze az FD maradéknak, mint az AB kisebbitendő a CD kisebbitendőnek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 11.

VII. 9. Tétel

*Ha egy szám hányada egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a hányada egy negyediknek, akkor fölcserélve is, amely hányada vagy törtrésze az első a harmadiknak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze a második is a negyediknek.**

Legyen ugyanis az a szám hányada BC -nek, és a harmadik szám, d , ugyanaz a hányada a negyedik EF -nek, mint a a BC -nek. Azt állítom, hogy fölcserélve is, amely hányada vagy törtrésze a a d -nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze BC is EF -nek.

Mínthogy ugyanis amely hányada a a BC -nek, ugyanaz a hányada d az EF -nek, ahány a -val egyenlő szám van BC -ben, annyi d -vel egyenlő van EF -ben. Bontsuk föl BC -t az a -val egyenlő BG , GC , EF -et pedig a d -vel egyenlő EH , HF számokra. Ekkor a BG , GC számok száma egyenlő lesz az EH , HF számok számával.

Mínthogy a BG , GC számok egyenlők egymással, az EH , HF számok is egyenlők egymással, és a BG , GC számok száma egyenlő az EH , HF számok számával, így amely hányada vagy törtrésze BG az EH -nak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze a BC összeg az EF összegnek (VII. 5–6.). BG viszont egyenlő a -val, EH pedig d -vel, amely hányada tehát vagy törtrésze a a d -nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze BC az EF -nek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 10.; VIII. 8.

VII. 10. Tétel

Ha egy szám törtrésze egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a törtrésze egy negyediknek, akkor fölcserélve is, amely törtrésze vagy hányada az első a harmadiknak, ugyanaz a törtrésze vagy hányada a második is a negyediknek.

Legyen ugyanis az AB szám törtrésze a c számnak, és egy harmadik szám, DE , ugyanaz a törtrésze a negyedik f -nek. Azt állítom, hogy

fölcserélve is, amely törtrésze vagy hányada AB a DE -nek, ugyanaz a törtrésze vagy hányada c is f -nek.

Mínthogy ugyanis amely törtrésze AB a c -nek, ugyanaz a törtrésze DE az f -nek, ahány hányada van c -nek AB -ben, annyi hányada van f -nek DE -ben. Bontsuk föl AB -t c -nek AG , GB hányadaira, DE -t pedig f -nek DH , HE hányadaira.

Ekkor az AG , GB számok $A \quad G \quad B \quad D \quad H \quad E$
 száma egyenlő lesz a DH , HE

számok számával. Mínthogy c ----- f -----
 amely hányada AG a c -nek,

ugyanaz a hányada DH az f -nek, fölcserélve is, amely hányada vagy törtrésze AG a DG -nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze c is f -nek (VII. 9.). Ugyanígy amely hányada vagy törtrésze GB HE -nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze c is f -nek, úgyhogy amely hányada vagy törtrésze AG a DH -nak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze GB a HE -nek, tehát amely hányada vagy törtrésze AG a DH -nak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze AB is DE -nek (VII. 5-6.). Viszont, mint megmutattuk, amely hányada vagy törtrésze AG a DH -nak, ugyanaz a hányada vagy törtrésze c is f -nek, tehát amely törtrésze vagy hányada AB a DE -nek, ugyanaz a törtrésze vagy hányada c is f -nek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 13.

VII. 11. Tétel

Ha egy kisebbítendő (szám) úgy aránylik egy másik kisebbítendőhöz, mint egy kivonandó egy másik kivonandóhoz akkor az egyik maradék is úgy aránylik a másik maradékhoz, mint az egyik kisebbítendő a másik kisebbítendőhöz.

Arányuljék az AE kivonandó a CF kivonandóhoz, mint az AB kisebbítendő a CD kisebbítendőhöz. Azt állítom, hogy az EB maradék is úgy aránylik az FD maradékhoz, mint az AB kisebbítendő a CD kisebbítendőhöz.

$A \quad E \quad B$

 $C \quad F \quad D$

Mínthogy AE úgy aránylik CF -hez, mint AB a CD -hez, amely hányada vagy törtrésze AB a CD -nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze AE a CF -nek. Az EB

maradék is ugyanaz a hányada vagy törtrésze tehát az FD maradéknak, mint AB a CD -nek (VII. 7–8.). Amint tehát EB az FD -hez, úgy aránylik AB a CD -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 35.

VII. 12. Tétel

Ha valahány szám arányos, akkor az előtagok összege úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármelyik előtag az utótagjához.

Legyen valahány szám, a , b , c és d arányos: c a d -hez, mint a a b -hez.

Azt állítom, hogy a meg c úgy aránylik b meg d -hez, mint a a b -hez.

a -----

b -----

c -----

d -----

Míthogy ugyanis c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, amely hányada vagy törtrésze a a b -nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze c a d -nek. Tehát a és c összege is ugyanaz a hányada vagy törtrésze b és d összegének, mint a a b -nek

(VII. 5–6.). Amint tehát a a b -hez, úgy aránylik a meg c a b meg d -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 15., 20.; IX. 35.

VII. 13. Tétel

Ha négy szám arányos, akkor fölcserélve is arányos lesz.

Legyen négy szám, a , b , c és d arányos: amint a a b -hez, úgy c a d -hez. Azt állítom, hogy fölcserélve is arányosak lesznek: amint a a c -hez, úgy b a d -hez.

Míthogy ugyanis c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, amely hányada vagy törtrésze a a b -nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze c a d -nek. Fölcserélve tehát: amely hányada vagy törtrésze a a c -nek, ugyanaz a hányada vagy törtrésze b a d -nek (VII. 9–10.). Amint tehát a a c -hez, úgy aránylik b a d -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 14., 17., 20.; VIII. 4., 18–20.; IX. 10., 17.

VII. 14. Tétel

*Ha van valahány szám és ugyanannyi másik, hogy kettesével mindig ugyanabban az arányban állnak, akkor egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.**

Legyen a , b és c valahány szám, s d , e , f ugyanannyi másik, hogy kettesével mindig ugyanabban az arányban álljanak: d az e -hez, mint a a b -hez és e az f -hez, mint b a c -hez. Azt állítom, hogy egyenlő (sok tagon) át d úgy aránylik f -hez, mint a a c -hez.

Mínthogy ugyanis amint a a b -hez, úgy aránylik d az e -hez, fölcserélve, amint a a d -hez, úgy b az e -hez (VII. 13.). Ismét, mínthogy amint b a c -hez, úgy aránylik e az f -hez, fölcserélve, amint b az e -hez, úgy c az f -hez. Amint viszont b az e -hez, úgy a a d -hez, amint tehát a a d -hez, úgy c az f -hez, s fölcserélve amint a a c -hez, úgy d az f -hez (VII. 13.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 1., 5–6., 8., 13., 21.; IX. 19., 36.

VII. 15. Tétel

Ha az egység ugyanannyiszor van meg egy számban, mint egy másik szám egy további számban, akkor fölcserélve az egység ugyanannyiszor van meg a harmadik tagban – mely szám –, mint a második tag a negyedikben.

Legyen ugyanis az a egység ugyanannyiszor meg a BC számban, mint egy másik szám, d , egy további számban, EF -ben. Azt állítom, hogy fölcserélve az a egység ugyanannyiszor van meg a d számban, mint BC az EF -ben.

Mínthogy ugyanis az a egység ugyanannyiszor van meg a BC számban, mint d az EF -ben, ahány egység van BC -ben, annyi d -vel egyenlő szám van EF -ben. Bontsuk föl BC -t a benne levő BG , GH , HC egységekre, EF -et pedig a d -vel egyenlő EK , KL , LF számokra. Ekkor a BG , GH , HC egységek száma egyenlő lesz az EK , KL , LF számok számával. Mínthogy a BG , GH , HC egységek egyenlők

egymással, az EK , KL , LF számok is egyenlők egymással, és a BG , GH , HC egységek száma egyenlő az EK , KL , LC számok számával, amint a BG egység az EK számhoz, úgy aránylik a GH egység a KL számhoz és a HC egység az LF számhoz, és amint bármely előtag az utótagjához, úgy az előtagok összege az utótagok összegéhez (VII. 12.): amint tehát a BG egység az EK számhoz, úgy BC az EF -hez. Viszont a BG egység egyenlő az a egységgel, az EK szám pedig a d számmal, BC tehát úgy aránylik EF -hez, mint az a egység a d számhoz. Az a egység tehát ugyanannyiszor van meg a d számban, mint BC az EF -ben. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 16., 21., 24., 33., 37–38.; IX. 11.

VII. 16. Tétel

A két szám összeszorzásakor keletkező számok egyenlők egymással (függetlenül a sorrendtől).

Legyen a és b két szám, és a -val b -t megszorozva keletkezzék c , b -vel a -t megszorozva pedig d . Azt állítom, hogy c egyenlő d -vel.

Mínthogy ugyanis a -val b -t szorozva keletkezett c , b annyszor van meg c -ben, ahány egység van a -ban. Egy e egység szintén annyszor van meg az a számban, ahány egység abban van; az e egység tehát ugyanannyiszor van meg a -ban, mint b a c -ben. Fölcserélve tehát az e egység ugyanannyiszor van meg b -ben, mint a a c -ben (VII. 15.). Ismét, mínthogy b -vel a -t szorozva keletkezett d , a annyszor van meg d -ben, ahány egység van b -ben. Az e egység szintén annyszor van meg b -ben ahány egység abban van; az e egység tehát ugyanannyiszor van meg a b számban, mint a d -ben. Viszont az e egység ugyanannyiszor volt meg b -ben, mint a c -ben; a ugyanannyiszor van meg tehát c -ben és d -ben. c tehát egyenlő d -vel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 18., 34.; VIII. 18.

VII. 17. Tétel

*Ha két számot megszorozunk egy számmal, akkor a keletkező számok aránya ugyanaz, mint a megszorozottaké.**

Keletkezzenek ugyanis a b , c számokat az a számmal megszorozva a d , e számok. Azt állítom, hogy amint b a c -hez, úgy aránylik d az e -hez.

Mínthogy ugyanis b -t a -val szorozva keletkezett d , b annyiszor van meg d -ben, ahány egység van a -ban. Egy f egység az a számban szintén annyiszor van meg, ahány egység a -ban van; az f egység tehát ugyanannyiszor a --- f -
van meg az a számban, mint b a d -ben. b --- d -----
Amint tehát az f egység az a számhoz, úgy aránylik b a d -hez. Ugyanígy amint az f egység az a számhoz, úgy aránylik c az e -hez is; c ----- e -----
amint tehát b a d -hez, úgy c az e -hez. Fölcserélve tehát amint b a c -hez, úgy d az e -hez (VII. 13.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 18-19., 22., 34.; VIII. 2., 5., 10-12., 14-15., 18-21.; IX. 1-2., 4-5.

VII. 18. Tétel

*Ha egy számot megszorozunk két számmal, akkor a keletkezett számok aránya ugyanaz, mint a szorzóké.**

Keletkezzenek ugyanis a c számot az a , b számokkal megszorozva a d , e számok. Azt állítom, hogy amint a a b -hez, úgy aránylik d az e -hez.

a --- b ---
 d ----- Mínthogy c -t a -val szorozva keletkezett d ,
 b --- a -t c -vel szorozva is d keletkezik (VII. 16.).
 e ----- Ugyanígy b -t c -vel szorozva e keletkezik. Így
 c --- az a , b számokat megszorozva a c számmal a d ,
 e számok keletkeznek, amint tehát a a b -hez,
úgy aránylik d az e -hez (VII. 17.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 19.; VIII. 2., 5., 10-12., 14-15., 19-21.; IX. 1-2.

VII. 19. Tétel

*Ha négy szám arányos, akkor az első és a negyedik szorzata egyenlő a második és a harmadik szorzatával; s ha az első és a negyedik szorzata egyenlő a második és a harmadik szorzatával, akkor a négy szám arányos.**

Legyen négy szám, a , b , c és d arányos: amint a a b -hez, úgy c a

d -hez, és a -val d -t szorozva keletkezzék e , b -vel c -t szorozva pedig f . Azt állítom, hogy e egyenlő f -fel.

Keletkezzék ugyanis a -val c -t szorozva g . Minthogy a -val c -t szorozva keletkezett g , d -t szorozva pedig e , az a számmal a két, c , d számot megszorozva keletkezett g és e . Amint tehát c a d -hez, úgy aránylik g az e -hez (VII. 17.).

a -----
 b -----
 c -----
 d -----

e -----
 f -----
 g -----

Amint viszont c a d -hez, úgy aránylik a a b -hez, amint tehát a a b -hez, úgy g az e -hez. Ismét, minthogy a -val c -t szorozva keletkezett g , b -vel c -t szorozva pedig f , a két, a , b számmal valamely c számot szorozva keletkezett g és f .

Amint tehát a a b -hez, úgy aránylik g az f -hez (VII. 18.). Amint viszont a a b -hez, úgy aránylik g az e -hez, amint tehát g az e -hez, úgy g az f -hez. g -nek tehát e -hez és f -hez való aránya ugyanaz, e tehát egyenlő f -fel.

Legyen most e egyenlő f -fel. Azt állítom, hogy amint a a b -hez, úgy aránylik c a d -hez.

Az előbbivel azonos konstrukció révén, minthogy e egyenlő f -fel, amint g az e -hez, úgy aránylik g az f -hez. Viszont amint g az e -hez, úgy aránylik c a d -hez (VII. 17.), amint pedig g az f -hez, úgy a a b -hez (VII. 18.). Amint tehát a a b -hez, úgy c a d -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 24., 30., 33–34.; IX. 12–13., 18., 36.

VII. 20. Tétel

Az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben.

Legyenek ugyanis azon számok közül, melyeknek ugyanaz az aránya, mint a -nak és b -nek, CD , EF a legkisebbek. Azt állítom, hogy CD ugyanannyiszor van meg a -ban, mint EF a b -ben.

CD ugyanis nem törtrésze a -nak. Tegyük fel ugyanis, hogy az. Ekkor EF ugyanaz a törtrésze b -nek, mint CD az a -nak (VII. 13.).

Ahány hányada van tehát a -nak CD -ben, annyi hányada van b -nek EF -ben. Bontsuk föl CD -t a -nak CG , GD , EF -et pedig b -nek EH , HF hányadaira. Ekkor a CG , GD számok száma egyenlő lesz az EH , HF számok számával. Minthogy a CG , GD számok egyenlők egymással, az EH , HF számok egyenlők egymással, és a CG , GD számok száma egyenlő az EH , HF számok számával,

GD úgy aránylik HF -hez, mint a ----- $C \quad G \quad D$
 CG az EH -hoz. Amint tehát bármely előtag az utótagjához, úgy b ----- $E \quad H \quad F$
 aránylik az előtagok összege az utótagok összegéhez (VII. 12.):

amint CG az EH -hoz, úgy CD az EF -hez. CG és EH aránya tehát ugyanaz, mint CD -é és EF -é, ám kisebbek náluk. Ez lehetetlen, mert föltevés szerint CD és EF a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké. CD tehát nem törtrésze a -nak; hányada tehát. EF is ugyanaz a hányada tehát b -nek, mint CD az a -nak; CD tehát ugyanannyiszor van meg a -ban, mint EF a b -ben. Éppen ezt kellett megmutatni.*

F.: VII. 21., 24., 30., 33–34.; VIII. 1., 4., 8., 20–21.; IX. 12., 16–17., 19., 36.

VII. 21. Tétel

A relatív prímelek az ugyanazon arányú számok között legkisebbek.

Legyenek a , b relatív prímszámok. Azt állítom, hogy a és b az ugyanezen arányú számok között legkisebbek.

Ellenkező esetben ugyanis léteznek a -nál és b -nél kisebb, ugyanabban az arányban álló számok mint a és b . Legyenek ezek c és d .

Minthogy az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, a ----- mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg c ----- a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. b ----- 20.), azaz az előtag az előtagban ugyanannyiszor, mint az utótag az utótagban, c ugyanannyiszor van meg a -ban, mint d a b -ben. Legyen e -ben e --- annyi egység, ahányszor megvan c az a -ban. d tehát annyszor van meg b -ben, ahány egység van e -ben. Minthogy c annyszor van meg a -ban, ahány egység van e -ben, e annyszor

van meg a -ban, ahány egység van c -ben (VII. 15.). Ugyanígy e annyiszor van meg b -ben, ahány egység van d -ben. e tehát osztja a relatív prím a -t és b -t; ami lehetetlen. Nincsenek tehát a -nál és b -nél kisebb, ugyanabban az arányban mint a és b álló számok, a és b az ugyanezen arányú számok között legkisebbek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 24., 30., 33–34.; VIII. 1., 8., 21.; IX. 12., 16–17., 19., 36.

VII. 22. Tétel

*Az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek relatív prímeek.**

Legyenek azon számok közül, melyeknek ugyanaz az arányuk, mint nekik, a és b a legkisebbek. Azt állítom, hogy a és b relatív prímeek.

Ha ugyanis nem relatív prímeek, osztja őket valamely szám. Ossa őket egy e szám. Legyen annyi egység d -ben, ahányszor megvan c az a -ban, e -ben pedig, ahányszor megvan c a b -ben.

Mínthogy c annyiszor van meg a -ban, ahány egység van d -ben, c -vel d -t szorozva a keletkezik. Ugyanígy c -vel e -t szorozva b keletkezik. A c számmal a ----- d ----- tehát a két, d , e számot megszorozva a és b keletkezik; a tehát úgy aránylik b -hez, mint d az e -hez (VII. 17.). d -nek és e -nek tehát ugyanaz az aránya, mint a -nak és b -nek, ám kisebbek azoknál; ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám az a , b számokat; a és b relatív prímeek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 2–3.; IX. 15.

VII. 23. Tétel

Ha két szám relatív prím, akkor az egyiküket osztó szám relatív prím a másikhoz.

Legyenek a és b relatív prímszámok, és a -t ossza valamely c szám. Azt állítom, hogy c és b is relatív prímeek.

Ha ugyanis c , b nem relatív prímeek, osztja őket valamely szám. Ossa egy d szám. Mínthogy d osztja c -t, c pedig osztja a -t, d is osztja a -t (3. E.). b -t is a ----- c ----- osztja; d tehát osztja a relatív prím a -t és b -t, b ----- d -----

ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám c -t és b -t; c és b relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 24.

VII. 24. Tétel

Ha két szám relatív prim egy harmadikhoz, akkor a szorzatuk is relatív prim hozzá.

Legyen ugyanis két szám, a és b , relatív prim valamely c számhoz, és a -val b -t szorozva keletkezzék d . Azt állítom, hogy c és d relatív prímek.

Ha ugyanis c és d nem relatív prímek, osztja a c , d számokat valamely szám. Ossa egy e szám. Minthogy c és a relatív prímek, és c -t osztja valamely e szám, a és e relatív prímek (VII. 23.). Legyen annyi egység f -ben, ahányszor megvan e a d -ben; f tehát annyszor van meg d -ben, ahány egység van e -ben (VII. 15.).

e -vel f -et szorozva tehát d keletkezik.

$$a \text{ --- } d \text{ -----}$$

Azonban a -val b -t szorozva is d keletkezik; egyenlő tehát e és f szorzata a és b

$$b \text{ --- } e \text{ -----}$$

szorzatával. Ha viszont a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával, akkor a négy szám arányos (VII. 19.): b tehát úgy aránylik f -hez, mint e az a -hoz. a és e viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek pedig osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. 20.), azaz az előtag az előtagban ugyanannyiszor, mint az utótag a másik utótagban; e tehát osztja b -t. Viszont c -t is osztja; e tehát osztja a relatív prim b -t és c -t, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám a c , d számokat, c és d relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

$$c \text{ ----- } f \text{ --}$$

F.: VII. 25–26.; IX. 15.

VII. 25. Tétel

Ha két szám relatív prim, akkor az egyik négyzete is relatív prim a másikhoz.

Legyen a és b két relatív prímszám, és a -t önmagával szorozva keletkezzék c . Azt állítom, hogy b és c relatív prímek.

Vegyünk ugyanis egy a -val egyenlő d -t. Minthogy a és b relatív prímekek a egyenlő d -vel, d és b is relatív prímekek. Mind a két, d , a szám relatív prím tehát b -hez, d és a szorzata is relatív prím lesz tehát b -hez (VII. 24.). d és a szorzata viszont c ; c és b tehát relatív prímekek. Éppen ezt kellett megmutatni.

a ---- c -----
 b ---- d ----

F.: VII. 27.; IX. 15.

VII. 26. Tétel

Ha két szám egyszerre relatív prím két másik szám bármelyikéhez, akkor a két-két szám szorzata is relatív prím.

Legyen ugyanis két szám, a és b , egyszerre relatív prím két másik szám, c és d bármelyikéhez, és a -val b -t szorozva keletkezzék e , c -vel d -t szorozva pedig f . Azt állítom, hogy e és f relatív prímekek.

Minthogy ugyanis a és b bármelyike relatív prím c -hez, a és b szorzata is relatív prím c -hez (VII.

24.). a és b szorzata viszont e ; e a -- e -----

és c tehát relatív prímekek. Ugyanígy d és e is relatív prímekek. c és d b ----- c ----

mindegyike relatív prím tehát f ----- d ----

e -hez. Tehát c és d szorzata is relatív prím e -hez (VII. 24.). c és d szorzata viszont f . e és f tehát relatív prímekek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 27.

VII. 27. Tétel

Ha két szám relatív prím, és mindkettőt megszorozzuk önmagával, akkor a szorzatok relatív prímekek lesznek, és ha a szorzatokat megszorozzuk az eredeti számokkal, akkor ismét relatív prímekek keletkeznek [és ez mindig (azaz bárhányadik hatvány esetében) így van az utóbbiakkal].

Legyen a és b két relatív prímszám, és a -val önmagát szorozva keletkezzék c , c -t szorozva pedig d , b -vel önmagát szorozva e , e -t szorozva pedig f . Azt állítom, hogy mind c és e , mind d és f relatív prímekek.

Minthogy ugyanis a és b relatív prímekek, és a -t önmagával szorozva keletkezett c , c és b relatív prímekek (VII. 25.). Minthogy c és b relatív prímekek, és b -t önmagával szorozva keletkezett e , c és e relatív prímekek (VII. 25.). Ismét, minthogy a és b relatív prímekek, és b -t önmagával

szorozva keletkezett e , a és e relatív príme. Minthogy két szám, a és c , egyszerre relatív prím két másik szám, b és e bármelyikéhez, a és c szorzata is relatív prím b és e szorzatához (VII. 26.). S a a --- c ----- d __27__
és c szorzata d , b és e szorza- b -- e ----- f -----
ta pedig f . d és f tehát relatív
príme. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 2-3.

VII. 28. Tétel

Ha két szám relatív prím, akkor az összegük relatív prím bármelyik taghoz; s ha az összeg relatív prím az egyik taghoz, akkor az eredeti számok relatív príme.

Adjunk össze ugyanis két relatív prímszámot, AB -t és BC -t. Azt állítom, hogy az AC összeg relatív prím AB , BC bármelyikéhez.

Ha ugyanis CA , AB nem relatív príme, osztja valamely szám a CA , AB számokat. Ossa egy d szám. Minthogy d osztja CA -t és AB -t, a maradék BC -t is osztja (2. E.).
 A B C

 d --
Viszont BA -t is osztja; d tehát osztja a relatív prím AB -t és BC -t, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám a CA , AB számokat, CA és AB relatív príme. Ugyanígy AC és CB is relatív príme, CA tehát AB , BC mind-egyikéhez relatív prím.

Legyenek most CA és AB relatív príme. Azt állítom, hogy AB és BC relatív príme.

Ha ugyanis AB és BC nem relatív príme, osztja valamely szám AB -t és BC -t. Ossa egy d szám. Minthogy d az AB , BC mindegyikét osztja, a teljes CA -t is osztja (1. E.). Viszont AB -t is osztja; d tehát osztja a relatív prím CA -t és AB -t, ami lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám AB -t és BC -t, AB és BC relatív príme. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 15.

VII. 29. Tétel

Bármely prímszám bármely számhoz, melyet nem oszt, relatív prím.

Legyen a prímszám és ne ossza b -t. Azt állítom, hogy b és a relatív príme.

Ha ugyanis b és a nem relatív prímekek, osztja őket valamely szám. Ossza őket c . Minthogy c osztja b -t, a viszont nem osztja b -t, c nem ugyanaz a szám, mint a . Minthogy c osztja b -t és a -t, $a \dots c \dots$ osztja az a prímszámot is, noha nem ugyanaz, mint az; ez viszont lehetetlen. Nem osztja tehát semelyik szám $b \dots$ sem a b , a számokat, a és b relatív prímekek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 30.; IX. 12., 36.

VII. 30. Tétel

Ha két számot megszorozunk egymással, és a szorzatukat osztja valamely prímszám, akkor a tényezők egyikét is osztja.

Keletkezzék ugyanis két számot, a -t és b -t összeszorozva c , és ossza c -t valamely d prímszám. Azt állítom, hogy d osztja a és b egyikét.

Ne ossza ugyanis a -t. d prímszám, tehát a és d relatív prímekek (VII. 29.). Legyen annyi egység e -ben, ahányszor megvan d c -ben. Minthogy d annyiszor van meg c -ben, ahány egység van e -ben, d -vel e -t szorozva c keletkezik. Viszont a -val b -t szorozva is c keletkezik; egyenlő tehát c és d szorzata a és b szorzatával, amint tehát d az a -hoz, úgy aránylik b az e -hez $a \dots b \dots$ (VII. 19.). d és a viszont relatív prímekek, a relatív prímekek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. 20.), azaz az egyik előtag a másik előtagban ugyanannyiszor, mint az egyik utótag a másik utótagban; d tehát osztja b -t. Hasonlóképp mutathatnánk meg azt is, hogy ha b -t nem osztja, akkor a -t osztja. d tehát osztja a és b egyikét. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 14.

VII. 31. Tétel

Bármely összetett számot oszt valamely prímszám.

Legyen a egy összetett szám. Azt állítom, hogy a -t osztja valamely prímszám.

Minthogy a összetett szám, osztja valamely szám. Ossza egy b szám. Ha b prím, készen vagyunk a tétellel. Ha összetett, osztja valamely

szám. Ossa egy c szám. Minthogy c osztja b -t, b pedig a -t, c is osztja a -t (3. E.). Ha c prím, kész vagyunk a tétellel. Ha összetett, osztja valamely szám. Folytatva ezt a vizsgálatot találni fogunk egy prímszámot, mely osztja [a megelőző számot, így a -t is osztja (3.E.)]. Ha ugyanis nem találnánk, akkor végtelen sok szám osztaná az a számot, melyek közül a következő mindig kisebb az előzőnél, ami a számok körében lehetetlen. Találni fogunk tehát egy prímszámot, mely osztja a megelőző számot, így a -t is osztja.

Tehát bármely... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 32.; IX. 13., 20.

VII. 32. Tétel

Bármely szám vagy prím, vagy osztja egy prímszám.

Legyen a egy szám. Azt állítom, hogy a vagy prím, vagy osztja valamely prímszám.

a ----- Ha a prím, készen vagyunk a tétellel. Ha összetett, osztja valamely prímszám (VII. 31.).

Tehát bármely szám... Éppen ezt kellett megmutatni.

VII. 33. Tétel

Keressük meg valahány adott számhoz a legkisebbeket, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint ők!

Legyen a valahány adott szám a , b és c . A legkisebb számokat kell tehát megkeresni, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint a , b , és c .

a , b és c ugyanis vagy relatív prímelek, vagy nem. Ha a , b és c relatív prímelek, akkor a legkisebbek az ugyanezen arányú számok között (VII. 21.). Ha nem, vegyük a -nak, b -nek és c -nek a d legnagyobb közös osztóját (VII. 3.), és legyen annyi egység e -ben, f -ben, illetve g -ben, ahányszor megvan d az a -ban, b -ben, illetve c -ben. Ekkor e , f , illetve g annyszor van meg a -ban, b -ben, illetve c -ben, ahány egység van d -ben. e , f , illetve g tehát ugyanannyiszor van meg a -ban, b -ben, illetve c -ben; e , f és g tehát ugyanabban az arányban áll, mint a , b és c . Azt állítom, hogy legkisebbek is. Ha ugyanis e , f és g nem legkisebbek azon számok között, melyeknek aránya ugyanaz, mint a -é, b -é és c -é, akkor vannak

e -nél, f -nél és g -nél kisebb számok, melyek aránya ugyanaz, mint a -é, b -é és c -é. Legyenek ezek h , k és l . Ekkor h ugyanannyiszor van meg a -ban, mint k , illetve l a b -ben, illetve c -ben (VII. 20.). Legyen annyi egység m -ben, ahányszor megvan h az a -ban. Ekkor k , illetve l annyiszor van meg b -ben, illetve c -ben, ahány egység van m -ben. Minthogy h annyiszor van meg a -ban, ahány egység van m -ben, m annyiszor van meg a -ban, ahány egység van h -ban (VII. 15.). Ugyanígy m annyiszor van meg b -ben, illetve c -ben, ahány egység van k -ban, illetve l -ben; m tehát osztja a -t, b -t és c -t. Minthogy h annyiszor van meg a -ban, ahány egység van m -ben, h -val m -et szorozva a -t kapunk. Ugyanígy e -vel d -t szorozva is a -t kapunk. e és d szorzata tehát egyenlő h és m szorzatával. Amint tehát e a h -hoz, úgy aránylik m a d -hez (VII. 19.). e nagyobb h -nál, tehát m is nagyobb d -nél; és osztja a -t, b -t és c -t; ami lehetetlen, feltevés szerint ugyanis d a legnagyobb közös osztója a -nak, b -nek és c -nek. Nem léteznek tehát e -nél, f -nél és g -nél kisebb számok, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint a , b és c . e , f és g tehát a legkisebbek, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint a , b és c . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 34.; VIII. 2-3., 6., 8., 20-21., 26.; IX. 15.

VII. 34. Tétel

*Keressük meg két adott szám legkisebb közös többszörösét!**

Legyen a és b a két adott szám. A legkisebb közös többszörösüket kell tehát megkeresni.

a és b vagy relatív prímek, vagy nem. Legyenek a és b először relatív prímek, és a -val b -t szorozva kapjuk c -t. Ekkor b -vel a -t szorozva is c -t kapjuk (VII. 16.). a és b tehát osztják c -t. Azt állítom, hogy c a legkisebb ilyen. El-
 a --- d -----
 b ---- e ---
 c ----- f ---
 lenkező esetben ugyanis a és b osztanak valamely c -nél kisebb számot. Osszák d -t. Legyen e -ben annyi egység, ahányszor megvan a a d -ben, f -ben pedig annyi egység, ahányszor megvan b a

d-ben. *a*-val *e*-t szorozva, *b*-vel pedig *f*-et szorozva tehát *d*-t kapunk; egyenlő tehát *a* és *e* szorzata *b* és *f* szorzatával. Amint tehát *a* a *b*-hez, úgy aránylik *f* az *e*-hez (VII. 19.). *a* és *b* viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. 20.); *b* tehát osztja *e*-t, az egyik utótag a másik utótagot. Mint-hogy *a*-val *b*-t, illetve *e*-t szorozva *c*-t, illetve *d*-t kapjuk, *c* úgy aránylik *d*-hez, mint *b* az *e*-hez (VII. 17.). *b* osztja *e*-t, tehát *c* is osztja *d*-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztanak tehát *a* és *b* semmilyen *c*-nél kisebb számot; *c* az *a* és *b* legkisebb közös többszöröse.

Né legyenek most *a* és *b* relatív prímek, és vegyük a legkisebb számokat, melyek aránya ugyanaz, mint *a*-é és *b*-é, *f*-et és *e*-t (VII. 33.). Ekkor *a* és *e* szorzata egyenlő *b* és *f* szorzatával (VII. 19.). *a*-val *e*-t szorozva keletkezzék *c*; így *b*-vel *f*-et szorozva is *c*-t kapjuk; *a* és *b* tehát osztja *c*-t. Azt állítom, hogy *c* a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis *a* és *b* osztana valamely *c*-nél kisebb számot.

| | | |
|----------------|---------------|---------------|
| <i>a</i> ----- | <i>f</i> ---- | <i>h</i> -- |
| <i>b</i> ----- | <i>e</i> ---- | <i>g</i> ---- |
| <i>c</i> ----- | | |
| <i>d</i> ----- | | |

Osszák *d*-t. Legyen annyi egység *g*-ben, ahányszor megvan *a* a *d*-ben, *h*-ban pedig annyi, ahányszor megvan *b* a *d*-ben. *a*-val *g*-t szorozva, *b*-vel pedig *h*-t szorozva tehát *d*-t kapunk; egyenlő tehát *a* és *g* szorzata *b* és *h* szorzatával; amint tehát *a* a *b*-hez, úgy aránylik *h* a *g*-hez (VII. 19.). Amint viszont *a* a *b*-hez, úgy aránylik *f* az *e*-hez, amint tehát *f* az *e*-hez, úgy aránylik *h* a *g*-hez. *f* és *e* viszont legkisebbek, a legkisebbek pedig osztják az ugyanebben az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. 20.); *e* tehát osztja *g*-t. Minthogy *a*-val *e*-t, illetve *g*-t szorozva *c*-t, illetve *d*-t kapjuk, amint *e* a *g*-hez, úgy aránylik *c* a *d*-hez (VII. 17.). *e* viszont osztja *g*-t, tehát *c* is osztja *d*-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztanak tehát *a* és *b* semmilyen *c*-nél kisebb számot; *c* az *a* és *b* legkisebb közös többszöröse. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 36.; VIII. 4.

VII. 35. Tétel

Ha két szám oszt valamely számot, akkor a legkisebb közös többszörösük is osztja.

Osszon ugyanis két szám, a és b , valamely CD számot, és legyen e a legkisebb közös többszörösük. Azt állítom, hogy e is osztja CD -t.

Há ugyanis e nem osztja CD -t, ossza e a DF -et és legyen a nála kisebb maradék CF . Minthogy a és b osztja e -t, e pedig osztja DF -et, a és b is osztja DF -et (3. E.). Viszont a teljes CD -t is osztják, tehát a maradék CF -et is osztják (2. E.), mely kisebb, mint e , ami lehetetlen. Nem igaz tehát, hogy e nem osztja CD -t; osztja tehát. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 36.; VIII. 4.

VII. 36. Tétel

Keressük meg három adott szám legkisebb közös többszörösét!

Legyen a , b és c a három adott szám. A legkisebb közös többszörösüket kell tehát megkeresni.

Vegyük ugyanis két szám, a és b legkisebb közös többszörösét (VII. 34.), d -t. c vagy osztja d -t, vagy nem osztja. Ossza először. Másrészt a és b is osztják d -t; a , b és c tehát osztják d -t. Azt állítom, hogy d a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis a , b és c osztnak valamely d -nél kisebb számot. Oszszák e -t. Minthogy a , b és c osztja e -t, a és b is osztja e -t. Tehát a és b legkisebb közös többszöröse is osztja $[e-t]$ (VII. 35.). a és b legkisebb közös többszöröse viszont d ; d tehát osztja e -t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztnak tehát a , b és c semmilyen d -nél kisebb számot; a , b és c legkisebb közös többszöröse d .

Né ossza most c a d -t, és vegyük c és d legkisebb közös többszörösét, e -t (VII. 34.). Minthogy a és b osztja d -t, d pedig osztja e -t, a és b is osztja e -t (3. E.). Viszont c is osztja $[e-t]$, tehát a , b és c osztják e -t. Azt állítom, hogy e a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis a , b és

c osztanak valamely e -nél kisebb számot. Osszák f -et. Minthogy a , b és c osztják f -et, a és b is osztják f -et, tehát a és b legkisebb közös többszöröse is osztja f -et (VII. 35.). a és b legkisebb közös többszöröse viszont d ; d tehát osztja f -et. Másrészt c is osztja f -et, tehát d és c osztják f -et, úgyhogy d és c legkisebb közös többszöröse is osztja f -et (VII. 35.). c és d legkisebb közös többszöröse viszont e ; e tehát osztja f -et, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem osztanak tehát a , b és c semmilyen e -nél kisebb számot; a , b és c legkisebb közös többszöröse e . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 39.

VII. 37. Tétel

Ha egy számnak osztója valamely szám, akkor a számnak, melynek ez osztója, van annyiad része, amennyi az osztó.

Ossza ugyanis az a számot valamely b szám. Azt állítom, hogy a -nak van annyiad része, amennyi b .

Legyen ugyanis annyi egység c -ben, ahányszor megvan b az a -ban. Minthogy b annyiszor van meg a -ban, ahány egység van c -ben, s a d egység annyiszor van meg c -ben, ahány egység van ebben, a d egység ugyanannyiszor van meg c -ben, mint b az a -ban. Fölcserélve tehát a d egység ugyanannyiszor van meg b -ben, mint c az a -ban (VII. 15.); amely hányada tehát a d egység a b számnak, ugyanaz a hányada c az a -nak. A d egység viszont annyiad része b -nek, amennyi b , tehát c az a -nak szintén annyiad része, amennyi b ; tehát c annyiad része a -nak, amennyi b . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 39.

VII. 38. Tétel

Ha egy számnak létezik valamelyik hányada, akkor a számot osztja az a szám, ahányad része a hányad a számnak.

Legyen ugyanis a -nak b valamely hányada, és c az a szám, ahányad része b az a -nak. Azt állítom, hogy c osztja a -t.

Mínthogy ugyanis b annyiad része a -nak, amennyi c , és a d egység is annyiad része c -nek, amennyi c , amely hányada a d egység a c számnak, ugyanaz a hányada b az a -nak; a d egység tehát ugyanannyiszor van meg a c számban, ahány-szor b a c -ben. Fölcserélve tehát, a d egység ugyanannyiszor van meg a b számban, ahány-szor c az a -ban (VII. 15.). c tehát osztja a -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VII. 39.

VII. 39. Tétel

*Keressük meg a legkisebb számot, melynek léteznek adott hányadai!**

Legyenek az adott hányadok a , b és c . A legkisebb számot kell tehát megtalálni, melynek léteznek az a , b , c hányadai.

Legyenek ugyanis d , e illetve f azok a számok, ahányad része a , b , illetve c , és vegyük d , e és f legkisebb közös többszörösét, g -t (VII. 36.).

g -nek tehát léteznek annyiad részei, amennyi d , e , illetve f (VII. 37.). Az annyiad részek viszont, amennyi d , e , illetve f , a , b , illetve c . g -nek tehát léteznek az a , b , c hányadai. Azt állítom, hogy g a legkisebb ilyen. Ellenkező esetben ugyanis létezik valamilyen g -nél kisebb szám, melynek léteznek az a , b , c hányadai. Legyen ez h .

Mínthogy h -nak léteznek az a , b , c hányadai, h -t osztják azok a számok, ahányad részek a , b és c (VII. 38.). Azok a számok viszont, ahányad részek a , b és c , d , e és f . h -t tehát osztja d , e és f , és kisebb g -nél, ami lehetetlen. Nincs tehát semmilyen g -nél kisebb szám, melynek léteznek az a , b , c hányadai. Éppen ezt kellett megmutatni.

| | | |
|-----------|-----------|-------------|
| a --- | b --- | c ---- |
| d ----- | e ----- | f --- |
| g ----- | | h ---?--- |

Nyolcadik könyv

VIII. 1. Tétel

Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat szélső tagjai relatív prímelek, akkor a sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, melyeknek ugyanaz az aránya, mint nekik.

Legyen a, b, c, d egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat, és a szélső tagjaik, a és d , legyenek relatív prímelek. Azt állítom, hogy a, b, c és d a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint nekik.

| | |
|------------|-----------|
| a ----- | e ---- |
| b ----- | f ----- |
| c ----- | g ----- |
| d __27__ | h ----- |

Ellenkező esetben ugyanis legyenek e, f, g és h az a -nál, b -nél, c -nél és d -nél kisebb számok, melyek aránya ugyanaz, mint ezeknek. Mint-hogy az a, b, c, d számok aránya ugyanaz, mint az e, f, g, h számoké, és [az a, b, c, d számok] száma egyenlő [az e, f, g, h számok] számával, egyenlő sok tagon át amint a a d -hez, úgy aránylik e a h -hoz (VII. 14.). a és d viszont relatív prímelek, a relatív prímelek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. 20.), azaz az egyik előtag ugyanannyiszor a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban. Osztja tehát a az e -t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen.

Nem állnak tehát az a, b, c, d számoknál kisebbként az e, f, g, h számok ugyanabban az arányban, mint azok, a, b, c és d a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint nekik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 2., 9.

VIII. 2. Tétel

*Keressük meg tetszőlegesen kijelölt tagszám esetére az adott arány mellett legkisebb tagokból álló mértani sorozatot.**

Legyen a – legkisebb számokkal (VII. 33.) – adott arány a -é b -hez. Tetszőlegesen kijelölt tagszám esetére meg kell tehát keresni az a a b -hez arány mellett legkisebb tagokból álló mértani sorozatot.

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| a --- | b --- | | f ----- |
| c ---- | | | g ----- |
| d ----- | | h ----- | |
| e ----- | k ----- | | |

Legyen a négy tagszámnak kijelölve, és a -val önmagát szorozva keletkezzék c , b -t szorozva pedig d , b -t önmagával szorozva keletkezzék e , a -val c -t, d -t, illetve e -t szorozva f , g , illetve h , végül b -vel e -t szorozva keletkezzék k .

Mint-hogy a -val önmagát szorozva kaptuk c -t, b -t szorozva pedig d -t, c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez (VII. 17.). Ismét, mint-hogy b -t a -val szorozva kaptuk d -t, önmagával szorozva pedig e -t, b -t a -val, illetve b -vel szorozva d -t, illetve e -t kapunk, tehát d úgy aránylik e -hez, mint a a b -hez (VII. 18.). Másrészt c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, tehát amint c a d -hez, úgy aránylik d az e -hez. Mint-hogy a -val c -t, illetve d -t szorozva kapjuk f -et, illetve g -t, f úgy aránylik g -hez, mint c a d -hez (VII. 17.). Viszont a úgy aránylott b -hez, mint c a d -hez, tehát amint a a b -hez, úgy aránylik f a g -hez. Ismét, mint-hogy a -val d -t, illetve e -t szorozva kaptuk g -t, illetve h -t, g úgy aránylik h -hoz, mint d az e -hez (VII. 17.). Másrészt a úgy aránylik b -hez, mint d az e -hez, amint tehát a a b -hez, úgy aránylik g a h -hoz. Mint-hogy e -t a -val, illetve b -vel szorozva kaptuk h -t és k -t, h úgy aránylik

k -hoz, mint a a b -hez (VII. 18.). Másrészt amint a a b -hez, úgy aránylik mind f a g -hez, mind g a h -hoz, amint tehát f a g -hez, úgy mind g a h -hoz, mind h a k -hoz; c, d, e és f, g, h, k mértani sorozat tehát az a a b -hez arányban. Azt állítom, hogy a legkisebb ilyenek. Minthogy ugyanis a és b legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint nekik, az ugyanazon arányú számok között a legkisebbek pedig relatív prímek (VII. 22.), a és b relatív prímek. S a -val, illetve b -vel önmagát szorozva kaptuk c -t és e -t, c -t, illetve e -t szorozva pedig f -et, illetve k -t; c, e és f, k tehát relatív prímek (VII. 27.). Ha viszont egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat szélső tagjai relatív prímek, akkor a sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké (VIII. 1.). c, d, e és f, g, h, k tehát a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint a -é és b -é. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 3., 8., 9., 21., 27.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy háromtagú mértani sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké, akkor a szélső tagok négyzetszámok, négytagú sorozat esetén pedig köbszámok.

F.: VIII. 3., 9., 26–27.; IX. 15.

VIII. 3. Tétel

Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat tagjai legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké, akkor a szélső tagok relatív prímek.

Legyen a, b, c, d egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat, melynek tagjai legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké. Azt állítom, hogy a szélső tagok, a és d , relatív prímek.

Vegyünk ugyanis az a, b, c, d sorozat arányában két legkisebb számot, e -t és f -et (VII. 33.), hármat, g -t, h -t és k -t, és sorban mindig eggyel többet (VIII. 2.), amíg a nyert tagszám egyenlő nem lesz a, b, c, d tagszámával. Vegyük ezeket, és legyenek l, m, n, o .

Minthogy e és f legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké, relatív prímek (VII. 22.). Minthogy e -vel,

illetve f -fel önmagát szorozva kaptuk g -t, illetve k -t, g -t, illetve k -t szorozva pedig l -et, illetve o -t, g , k és l , o is relatív prímek (VII. 27.). Mínthogy a , b , c és d a legkisebbek azon számok között, melyek ará-

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| a ----- | o ----- | | |
| b ----- | | n ----- | |
| c ----- | | | m ----- |
| d ----- | | | l ----- |
| e --- | f --- | g --- | h --- |
| | | | k ----- |

nya ugyanaz, mint az övéké, l , m , n és o is legkisebbek azon számok között, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint a , b , c és d , és a , b , c , d tagszáma egyenlő l , m , n , o tagszámával, a , b , c , d és l , m , n , o tagonként egyenlő; egyenlő tehát a az l -el, d pedig o -val, l és o relatív prímek, tehát a és d is relatív prímek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 6., 8., 21.

VIII. 4. Tétel

Tetszőlegesen sok – legkisebb számokkal – adott arányhoz keressük meg a legkisebb számokat, melyek rendre az adott arányokban állnak.

Legyenek a legkisebb számokkal adott arányok a -é b -hez, c -é d -hez, s végül e -é f -hez. Meg kell tehát keresni a legkisebb számokat, melyek rendre az a a b -hez, c a d -hez s végül e az f -hez arányban állnak.

| | | | |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| a --- | b --- | h --- | n --- |
| c --- | d ----- | g ----- | o --- |
| e --- | f --- | k ----- | m ----- |
| | | l ----- | p ----- |

Vegyük ugyanis b és c legkisebb közös többszörösét, g -t (VII. 34.). Legyen a annyiszor meg h -ban, ahányszor megvan b a g -ben, s legyen annyiszor meg d a k -ban, ahányszor megvan c a g -ben. e vagy osztja

k-t, vagy nem osztja. Ossza először. Legyen annyiszor meg *f* az *l*-ben, ahányszor megvan *e* a *k*-ban. Minthogy *a* ugyanannyiszor van meg *h*-ban, mint *b* a *g*-ben, amint *a* a *b*-hez, úgy aránylik *h* a *g*-hez (VII. 13.). Ugyanígy amint *c* a *d*-hez, úgy aránylik *g* a *k*-hoz, s végül amint *e* az *f*-hez, úgy *k* az *l*-hez. *h*, *g*, *k* és *l* tehát rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez, s végül *e* az *f*-hez arányban állnak. Azt állítom, hogy a legkisebb ilyenek. Ha ugyanis *h*, *g*, *k*, *l* nem a legkisebb számok, melyek rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez, *s* *e* az *f*-hez arányban állnak, legyenek *n*, *o*, *m*, *p* azok. Minthogy *n* úgy aránylik *o*-hoz, mint *a* a *b*-hez, *a* és *b* pedig legkisebbek, a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. 20.), azaz az egyik előtag ugyanannyiszor a másikban, mint az egyik utótag a másik utótagban, *b* tehát osztja *o*-t. Ugyanígy *c* is osztja *o*-t, *b* és *c* tehát osztják *o*-t, tehát *b* és *c* legkisebb közös többszöröse is osztja *o*-t (VII. 35.). *b* és *c* legkisebb közös többszöröse viszont *g*, *g* tehát osztja *o*-t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nincsenek tehát semmilyen, a *h*, *g*, *k*, *l* számoknál kisebb számok rendre az *a* a *b*-hez, *c* a *d*-hez, s végül *e* az *f*-hez arányban.

Ne ossza most *e* a *k*-t. Vegyük *e* és *k* legkisebb közös többszörösét, *m*-et (VII. 34.). Legyen *h*, illetve *g* ugyanannyiszor meg *n*-ben, illetve

| | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| <i>a</i> — | <i>b</i> — | <i>h</i> — | <i>n</i> — | <i>q</i> — |
| | | <i>g</i> — | <i>o</i> — | <i>r</i> — |
| <i>c</i> — | <i>d</i> — | <i>k</i> — | <i>m</i> — | <i>s</i> — |
| <i>e</i> — | <i>f</i> — | <i>p</i> — | <i>t</i> — | |

o-ban, ahányszor megvan *k* az *m*-ben, *s* legyen meg *f* annyiszor *p*-ben, ahányszor megvan *e* az *m*-ben.* Minthogy *h* ugyanannyiszor van meg *n*-ben, mint *g* az *o*-ban, *n* úgy aránylik *o*-hoz, mint *h* a *g*-hez (VII. 13.). Amint viszont *h* a *g*-hez, úgy aránylik *a* a *b*-hez, amint tehát *a* a *b*-hez, úgy aránylik *n* az *o*-hoz. Ugyanígy amint *c* a *d*-hez, úgy *o* az *m*-hez. Másrészt, minthogy *e* ugyanannyiszor van meg *m*-ben, mint *f* a *p*-ben, *m* úgy aránylik *p*-hez, mint *e* az *f*-hez (VII. 13.), *n*, *o*, *m* és *p* tehát

rendre az a a b -hez, c a d -hez, s végül e az f -hez arányban állnak. Azt állítom, hogy a legkisebbek az \overline{ab} , \overline{cd} , \overline{ef} arányokban.** Ellenkező esetben ugyanis léteznének valamely n -nél, o -nál, m -nél és p -nél kisebb számok, melyek rendre az \overline{ab} , \overline{cd} , \overline{ef} arányban állnak. Legyenek ezek q , r , s és t . Minthogy a úgy aránylik b -hez, mint q az r -hez, a és b pedig legkisebbek, a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban (VII. 20.), b tehát osztja r -et. Ugyanígy c is osztja r -et, b és c tehát osztják r -et. b és c legkisebb közös többszöröse is osztja tehát r -et (VII. 35.). b és c legkisebb közös többszöröse viszont g , g tehát osztja r -et. k úgy aránylik s -hez, mint g az r -hez (VII. 13.), k osztja tehát s -et. Viszont e is osztja s -et, e és k tehát osztják s -et. e és k legkisebb közös többszöröse is osztja tehát s -et (VII. 35.). e és k legkisebb közös többszöröse viszont m , m tehát osztja s -et, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nincsenek tehát semmilyen az n , o , m , p számoknál kisebb számok rendre az a a b -hez, c a d -hez, s végül e az f -hez arányban; n , o , m és p tehát a legkisebb számok, melyek rendre az \overline{ab} , \overline{cd} , \overline{ef} arányban állnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 5.; X. 12.

VIII. 5. Tétel

A síkszámok az oldalakéiből összetevődő arányban állnak egymással.

Legyenek a és b síkszámok, s a oldalai legyenek a c , d , b -é pedig az e és f számok. Azt állítom, hogy a a b -vel az oldalakéiből összetevődő arányban áll.

a ----- b -----
 c __ d ----- e ----- f -----
 g ----- h ----- k -----
 l -----

Vegyük ugyanis az adott c az e -hez és d az f -hez arányokhoz a legkisebb szá-

mat, g -t, h -t és k -t, melyek rendre a \overline{ce} , \overline{df} arányokban állnak (VIII. 4.), úgyhogy amint c az e -hez, úgy aránylik g a h -hoz, amint pedig d az f -hez, úgy h a k -hoz. e -t d -vel szorozva keletkezzék l .

Minthogy d -vel c -t szorozva kaptuk a -t, e -t szorozva pedig l -et,

a úgy aránylik l -hez, mint c az e -hez (VII. 17.). Amint viszont c az e -hez, úgy g a h -hoz, amint tehát g a h -hoz, úgy a az l -hez. Másrészt, minthogy e -vel d -t szorozva kaptuk l -et, f -et szorozva pedig b -t (VII. 16.), l úgy aránylik b -hez, mint d az f -hez (VII. 17.). Viszont amint d az f -hez, úgy h a k -hoz, amint tehát h a k -hoz, úgy l a b -hez. Megmutattuk, hogy amint g a h -hoz, úgy a az l -hez, egyenlő sok tagon át tehát amint g a k -hoz, úgy a a b -hez (VII. 14.); g a k -val viszont az oldalakéból összetevődő arányban áll, a és b is az oldalakéból össze-
tevődő arányban áll tehát. Éppen ezt kellett megmutatni.

VIII. 6. Tétel

Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat első tagja nem osztja a másodikat, akkor egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat.

Legyen a, b, c, d, e egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat, és a ne ossza b -t. Azt állítom, hogy egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat.

Hogy a, b, c, d és e rendre nem osztják egymást, az nyilvánvaló, a sem osztja ugyanis b -t. Azt állítom, hogy egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat. Tegyük fel ugyanis, hogy a osztja c -t. Vegyük annyi számhoz, ahányan vannak a ,

b és c , a legkisebbeket f -et, g -t a ---16--- b ---24--- c ---36---
és h -t, melyek ugyanabban az d ---54--- e ---81---
 c (VII. 33.). Minthogy f, g és f ----- g ----- h -----
 h ugyanabban az arányban

állnak, mint a, b és c , és a, b, c tagszáma egyenlő f, g, h tagszámával, egyenlő sok tagon át f úgy aránylik h -hoz, mint a a c -hez (VII. 14.). Minthogy f úgy aránylik g -hez, mint a a b -hez, a nem osztja b -t, f sem osztja g -t. f tehát nem egység, az egység ugyanis minden számot oszt. f és h relatív prímek (VIII. 3.) [nem osztja tehát f a h -t sem]. a úgy aránylik c -hez, mint f a h -hoz, a sem osztja tehát c -t. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 7.

VIII. 7. Tétel

*Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat első tagja osztja az utolsót, akkor a másodikat is osztja.**

Legyen a, b, c, d egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat, és a ossza d -t. Azt állítom, hogy a a b -t is osztja.

a _ _ _ b _ _ _ _ _ c _ _ _ _ _ _ _ _ _
 d _ _ _ _ _ _ _ _ _

Ha ugyanis a nem osztja b -t, akkor egyetlen tag sem oszt semmilyen másikat (VIII. 6.), a viszont osztja d -t. Tehát a a b -t is osztja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 14–15.

VIII. 8. Tétel

Ha két szám közé mértani sorban beilleszthetők számok, akkor bármely két ugyanazon arányú szám közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi az előző számok közé.

Legyenek ugyanis két szám, a és b közé beilleszthetők mértani sorban a c, d számok, és arányulják úgy e az f -hez, mint a a b -hez. Azt állítom, hogy az e, f számok közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi a és b közé.

a _ _ c _ _ _ d _ _ _ _ _
 b _ _ _ _ _ _ _ _ _
 e _ _ _ m _ _ _ _ _ n _ _ _ _ _ _ _ _ _
 f _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
 g _ h _ _ k _ _ _ l _ _ _ _ _

Vegyünk ugyanis azon számok közül, melyek aránya ugyanaz, mint az a, c, d, b számoké, annyi legkisebbet, ahányan vannak a, b, c és d, g, h, k -t és l -et (VIII. 2.). Ekkor a szélső tagjaik, g és l relatív prímek (VIII. 3.). Minthogy a, c, d, b ugyanabban az arányban állnak, mint g, h, k, l , és az a, c, d, b sorozat tagszáma egyenlő a g, h, k, l sorozat tagszámával, egyenlő sok tagon át g úgy aránylik l -hez, mint a a b -hez (VII. 14.). Amint viszont a a b -hez, úgy e az f -hez, amint tehát g az l -hez, úgy e az f -hez. g és l viszont relatív prímek, a relatív príme pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az

ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. 20.), azaz az egyik előtag ugyanannyiszor a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban, g tehát ugyanannyiszor van meg e -ben, mint l az f -ben. Legyen h , illetve k annyiszor meg m -ben, illetve n -ben, ahányszor megvan g az e -ben. Ekkor g , h , k , illetve l ugyanannyiszor van meg e -ben, m -ben, n -ben, illetve f -ben. g , h , k , l és e , m , n , f tehát ugyanabban az arányban állnak (VII. 9.). Másrészt ugyanabban az arányban állnak g , h , k , l és a , c , d , b , tehát a , c , d , b és e , m , n , f is ugyanabban az arányban állnak. a , c , d , b viszont egy mértani sorozat, tehát e , m , n , f is mértani sorozat. Beillesztettünk tehát e és f közé mértani sorban annyi számot, amennyi a és b között van. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 24–25.; IX. 1–6.

VIII. 9. Tétel

Ha két szám relatív prím, és közéjük mértani sorban beilleszthetők számok, akkor bármelyikük és az egység közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi az előző számok közé.

Legyen ugyanis a és b két relatív prímszám, legyenek közéjük mértani sorban beilleszthetők a c , d számok, és vegyük az e egységet. Azt állítom, hogy a és b bármelyike és az egység közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi a és b közé.

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|--|
| a ----- | b ----- | | |
| c ----- | | d ----- | |
| e --- | f -- | g --- | |
| h ---- | k ----- | l ----- | |
| m ----- | p ----- | | |
| n ----- | | o ----- | |

Vegyünk ugyanis az a , c , d , b sorozat arányában két legkisebb számot, f -et és g -t (VII. 33.), hármat, h -t, k -t és l -et, és sorban mindig eggyel többet (VIII. 2.), amíg a nyert tagszám egyenlő nem lesz a , c , d ,

b tagszámával. Vegyük ezeket, és legyenek m, n, o, p . Nyilvánvaló, hogy f -fel önmagát szorozva kapjuk h -t, h -t szorozva pedig m -et, és hogy g -vel önmagát szorozva kapjuk l -et, l -et szorozva pedig o -t (VIII. 2. K.). Minthogy m, n, o, p legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint f -é és g -é, és a, c, d, b is legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint f -é és g -é (VIII. 1.), és m, n, o, p tagszáma egyenlő a, c, d, b tagszámával, m, n, o, p és a, c, d, b tagonként egyenlő, egyenlő tehát m az a -val, p pedig b -vel. Minthogy f -et önmagával szorozva kapjuk h -t, f annyiszor van meg h -ban, ahány egység van f -ben. Továbbá az e egység is annyiszor van meg f -ben, ahány egység van abban; az e egység tehát ugyanannyiszor van meg az f számban, mint f a h -ban. f tehát úgy aránylik h -hoz, mint az e egység az f számhoz. Másrészt, minthogy f -fel h -t szorozva kapjuk m -et, h annyiszor van meg m -ben, ahány egység van f -ben. Viszont az e egység is annyiszor van meg f -ben, ahány egység abban van; az e egység tehát ugyanannyiszor van meg az f számban, mint h az m -ben. h tehát úgy aránylik m -hez, mint az e egység az f számhoz. Megmutattuk, hogy f úgy aránylik h -hoz, mint az e egység az f számhoz; amint tehát az e egység az f számhoz, úgy aránylik f a h -hoz és h az m -hez. m viszont egyenlő a -val; amint tehát az e egység az f számhoz, úgy aránylik f a h -hoz és h az a -hoz. Ugyanígy amint az e egység a g számhoz, úgy g az l -hez és l a b -hez. Beillesztettünk tehát a, b mindegyike és az e egység közé mértani sorban annyi számot, amennyi a és b között volt. Éppen ezt kellett megmutatni.

VIII. 10. Tétel

Ha két szám bármelyike és az egység közé mértani sorban beilleszthetők számok, akkor a két szám közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi bármelyikük és az egység közé.

Legyenek ugyanis két szám, a , illetve b , és a c egység közé mértani sorban beilleszthetők a d, e , illetve f, g számok. Azt állítom, hogy a és b közé is beilleszthető mértani sorban annyi szám, amennyi a és b bármelyike és a c egység közé.

Keletkezzék ugyanis d -vel f -et szorozva h , d -vel, illetve f -fel h -t szorozva pedig k , illetve l .

Minthogy d úgy aránylik e -hez, mint a c egység a d számhoz, c ugyan-

Legyenek a és b négyzetszámok, és a oldala c , b -é pedig d . Azt állítom, hogy a és b között van egy középarányos szám, és a a b -vel kétszeres arányban áll c -nek d -hez való arányához képest.

Keletkezzék ugyanis c -vel d -t szorozva e . Minthogy a négyzetszám és c oldala, c -t önmagával szorozva a -t kapunk. Ugyanígy d -t önmagával szorozva b -t kapjuk. Minthogy a c -vel c -t, illetve d -t szorozva a -t, illetve e -t kapjuk, a úgy aránylik e -hez, mint c d -hez (VII. 17.). Ugyanígy amint c a d -hez, úgy aránylik e a b -hez (VII. 18.). Amint tehát a az e -hez, úgy aránylik e a b -hez. a és b között van tehát egy középarányos szám.

Azt állítom, hogy a a b -vel kétszeres arányban áll c -nek d -hez való arányához képest. Minthogy ugyanis három szám, a , e és b arányos, a a b -vel kétszeres arányban áll a -nak e -hez való arányához képest. Amint viszont a az e -hez, úgy aránylik c a d -hez. a a b -vel kétszeres arányban áll tehát c -nek d -hez való arányához képest. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 13., 15.; X. 9.

VIII. 12. Tétel

*Két köbszám között van két középarányos szám, és a köbszámok egymással az oldalaihoz viszonyítva háromszoros arányban állnak.**

Legyenek a és b köbszámok, és a oldala c , b -é pedig d . Azt állítom, hogy a és b között van két középarányos szám, és a a b -vel háromszoros arányban áll c -nek d -hez való arányához képest.

Keletkezzék ugyanis c -vel önmagát szorozva e , d -t szorozva pedig f , d -t önmagával szorozva g , és c -vel, illetve d -vel f -et szorozva h , illetve k .

Minthogy a köbszám és c egy oldala, és c -t önmagával szorozva e -t kapjuk, c -vel önmagát szorozva e -t kapjuk, e -t szorozva pedig a -t.

a ----- c --- d ---

b -----

e --- f ----- g -----

h ----- k -----

Ugyanígy d -vel önmagát szorozva g -t kapjuk, g -t szorozva pedig b -t. Minthogy c -vel c -t, illetve d -t szorozva e -t, illetve f -et kapjuk, e úgy aránylik f -hez, mint c a d -hez (VII. 17.). Ugyanígy amint c a d -hez, úgy f a g -hez (VII. 18.). Ismét, minthogy c -vel e -t, illetve f -et szorozva a -t, illetve h -t kapjuk, a úgy aránylik h -hoz, mint e az f -hez. Amint viszont e az f -hez, úgy c a d -hez, amint tehát c a d -hez, úgy a a h -hoz. Ismét, minthogy c -vel, illetve d -vel f -et szorozva h -t, illetve k -t kapjuk, h úgy aránylik k -hoz, mint c a d -hez. Ismét, minthogy d -vel f -et, illetve g -t szorozva kapjuk k -t, illetve b -t, k úgy aránylik b -hez, mint f a g -hez. Amint viszont f a g -hez, úgy c a d -hez, amint tehát c a d -hez, úgy mind a a h -hoz, mind h a k -hoz, mind k a b -hez. h és k tehát két középarányos szám a és b között.

Azt állítom, hogy a a b -vel háromszoros arányban áll c -nek d -hez való arányához képest. Minthogy ugyanis négy szám, a , h , k és b arányos, a a b -vel háromszoros arányban áll a -nak h -hoz való arányához képest. Amint viszont a a h -hoz, úgy c a d -hez és a a b -vel háromszoros arányban áll c -nek d -hez való arányához képest. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 13., 15.

VIII. 13. Tétel

Ha egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat minden egyes tagját megszorozzuk önmagával, akkor az így keletkezett számok arányosak lesznek; s ha a kapott számokat megszorozzuk az eredeti számokkal, a keletkező számok ismét arányosak [és ez mindig így van az utóbbiakkal].

Legyen a , b , c egy tetszőleges sok tagú mértani sorozat: amint a a b -hez, úgy b a c -hez, és keletkezzenek a -val, b -vel, illetve c -vel önmagát megszorozva d , e , illetve f , d -t, e -t, illetve f -et szorozva pedig g , h , illetve k . Azt állítom, hogy mind d , e , f , mind g , h , k mértani sorozat.

Keletkezzék ugyanis a -val b -t szorozva l , a -val, illetve b -vel l -et

| | | |
|------------|-------------|-------------|
| a _____ | b _____ | c _____ |
| d __16__ | e __36__ | f __81__ |
| g __64__ | h __216__ | k __729__ |
| l __24__ | m __96__ | n __144__ |
| o __54__ | p __324__ | q __486__ |

szorozva pedig m , illetve n . Ismét, keletkezzék b -vel c -t szorozva o , b -vel, illetve c -vel o -t szorozva pedig p , illetve q .

Az előbbiekhöz hasonlóan bizonyítható, hogy d, l, e és g, m, n, h mértani sorozat az a a b -hez arányban, s, e, o, f és h, p, q, k mértani sorozat a b a c -hez arányban (VIII. 11–12.). b úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez, tehát d, l, e és e, o, f , valamint g, m, n, h és h, p, q, k ugyanabban az arányban állnak. d, l, e tagszáma egyenlő e, o, f tag-számával, g, m, n, h tagszáma pedig egyenlő h, p, q, k tag-számával, egyenlő sok tagon át tehát e úgy aránylik f -hez, mint d az e -hez, h pedig k -hoz, mint g a h -hoz (VII. 14.). Éppen ezt kellett megmutatni.

VIII. 14. Tétel

Ha egy négyzetszám oszt egy másikat, akkor az oldala is osztja a másikat az oldalát; s ha az egyiknek az oldala osztja a másikat az oldalát, akkor az egyik négyzetszám is osztja a másik négyzetszámot.

Legyenek a, b négyzetszámok, c, d az oldalaik, és a ossza b -t. Azt állítom, hogy c is osztja d -t.

Keletkezzék ugyanis c -vel d -t szorozva e . Ekkor a, e, b mértani sorozat a c a d -hez arányban (VIII. 11.). Minthogy a, e, b mértani sorozat, és a osztja b -t, a az e -t is osztja (VIII. 7.). c úgy aránylik d -hez, mint a az e -hez, tehát c is osztja d -t.

Másodszor ossza c a d -t. Azt állítom, hogy a is osztja b -t.

Azonos konstrukcióval hasonlóképp mutathatnánk meg ugyanis, hogy a, e, b mértani sorozat a c a d -hez arányban. Minthogy a úgy aránylik e -hez, mint c a d -hez, és c osztja d -t, a is osztja e -t.

S a, e, b mértani sorozat, tehát a a b -t is osztja (3. E.).

Ha tehát egy... Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 16.

VIII. 15. Tétel

Ha egy köbszám oszt egy másikat, akkor az oldala is osztja a másikat az oldalát; s ha az egyiknek az oldala osztja a másikat az oldalát, akkor az egyik köbszám is osztja a másik köbszámot.

Ossza ugyanis az a köbszám a b köbszámot, és legyen a oldala c , b -é pedig d . Azt állítom, hogy c osztja d -t.

Keletkezzék ugyanis c -t önmagával megszorozva e , d -t önmagával megszorozva g , valamint c -vel d -t szorozva f , c -vel, illetve d -vel f -et szorozva pedig h , illetve k . Nyilvánvaló, hogy e, f, g és a, h, k, b mértani sorozatok a c a d -hez arányban (VIII. 11–12.). Minthogy a, h, k, b mértani sorozat, és a osztja b -t, h -t is osztja (VIII. 7.). S c úgy aránylik d -hez, mint a a h -hoz, tehát c is osztja d -t.

$$\begin{array}{ll} a _ _ 27 _ _ & b _ _ 216 _ _ \\ c _ _ _ _ & d _ _ _ _ _ _ \\ e _ _ 9 _ _ & f _ _ 18 _ _ & g _ _ 36 _ _ \\ h _ _ 54 _ _ & k _ _ 108 _ _ \end{array}$$

Most ossza c a d -t. Azt állítom, hogy a is osztja b -t.

Azonos konstrukcióval hasonlóképp mutathatnánk meg ugyanis, hogy a, h, k, b mértani sorozat a c a d -hez arányban. Minthogy c osztja d -t, és a úgy aránylik h -hoz, mint c a d -hez, a is osztja h -t, úgyszólván b -t is osztja a . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 17.

VIII. 16. Tétel

Ha egy négyzetszám nem oszt egy másik négyzetszámot, akkor az oldala sem osztja a másiknak az oldalát; s ha az egyiknek az oldala nem osztja a másiknak az oldalát, akkor az egyik négyzetszám sem osztja a másikat.

Legyenek a, b négyzetszámok, c, d az oldalaik, és a ne ossza b -t.

Azt állítom, hogy c sem osztja d -t.

$a _ _ _ _$ $c _ _$ Ha ugyanis c osztja d -t, a is osztja b -t
 $b _ _ _ _ _ _ _ _$ $d _ _ _ _$ (VIII. 14.). a viszont nem osztja b -t, tehát c
sem osztja d -t.

Másodszor c ne ossza d -t. Azt állítom, hogy a sem osztja b -t.

Ha ugyanis a osztja b -t, c is osztja d -t (VIII. 14.). c viszont nem osztja d -t, tehát a sem osztja b -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

VIII. 17. Tétel

Ha egy köbszám nem oszt egy másik köbszámot, akkor az oldala sem osztja a másiknak az oldalát; s ha az egyiknek az oldala nem osztja a másiknak az oldalát, akkor az egyik köbszám sem osztja a másikat.

Ne ossza ugyanis az a köbszám a b köbszámot, és legyen a oldala c , b -é pedig d . Azt állítom, hogy c nem osztja d -t.

Ha ugyanis c osztaná d -t, a is osztaná b -t (VIII. 15.). a viszont nem osztja b -t, tehát c sem osztja d -t.

Most c ne ossza d -t. Azt állítom, hogy a sem osztja b -t.

Ha ugyanis a osztaná b -t, c is osztaná d -t (VIII. 15.). c viszont nem osztja d -t, tehát a sem osztja b -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

$$\begin{array}{r} a \text{-----} \qquad \qquad \qquad c \text{--} \quad d \text{---} \\ b \text{-----} \end{array}$$

VIII. 18. Tétel

Két hasonló síkszám között van egy középarányos szám, és a síkszámok egymással a megfelelő oldalaihoz képest kétszeres arányban állnak.

Legyen a és b két hasonló síkszám, és a oldalai legyenek c , d , b -é pedig e , f . Minthogy azok a síkszámok hasonlóak, melyeknek az oldalai arányosak, e úgy aránylik f -hez, mint c a d -hez. Azt állítom, hogy a és b között van egy középarányos szám, és a a b -vel kétszeres arányban áll c -nek e -hez vagy d -nek f -hez való arányához képest, azaz a megfelelő oldalak arányához képest.

$$\begin{array}{r} a \text{-----} \quad b \text{-----} \\ c \text{--} \quad d \text{---} \qquad \qquad e \text{---} \quad f \text{-----} \\ g \text{-----} \end{array}$$

Minthogy amint c a d -hez, úgy aránylik e az f -hez, fölcserélve amint c az e -hez, úgy d az f -hez (VII. 13.). Minthogy a síkszám, és c , d az oldalai, d -vel c -t szorozva a -t kapjuk. Ugyanígy e -vel f -et szorozva b -t kapjuk. Keletkezzék d -vel e -t szorozva g . Minthogy d -vel c -t szorozva a -t kapjuk, e -t szorozva pedig g -t, a úgy aránylik g -hez, mint c az e -hez (VII. 17.). Amint viszont c e -hez úgy d az f -hez, amint tehát d az f -hez, úgy a a g -hez. Ismét, minthogy e -vel d -t szorozva g -t, f -et szorozva (VII. 16.) pedig b -t kapjuk, g úgy aránylik b -hez, mint d az f -hez (VII. 17.). Megmutattuk viszont, hogy amint d az f -hez, úgy a a g -hez, amint tehát a a g -hez, úgy g a b -hez. a , g , b tehát mértani sorozat, a és b között van egy középarányos szám.

Most azt állítom, hogy a a b -vel kétszeres arányban áll a megfelelő oldalak arányához képest, azaz c -nek e -hez vagy d -nek f -hez való arányához képest. Minthogy ugyanis a, g, b mértani sorozat, a a b -vel kétszeres arányban áll g -hez képest. S amint a a g -hez, úgy aránylik mind c az e -hez, mind d az f -hez, tehát a a b -vel kétszeres arányban áll c -nek e -hez vagy d -nek f -hez való arányához képest. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 19., 24., 26.; IX. 1–2.

VIII. 19. Tétel

Két hasonló térszám közé beilleszthető két középarányos szám, és a hasonló térszámok egymással a megfelelő oldalaikhoz képest háromszoros arányban állnak.

Legyen a és b két hasonló térszám, és legyenek a oldalai c, d, e, b -é pedig f, g, h . Minthogy azok a térszámok hasonlók, melyeknek az oldalaik arányosak, f úgy aránylik g -hez, mint c a d -hez, g pedig h -hoz, mint d az e -hez. Azt állítom, hogy a és b közé beilleszthető két középarányos szám, és a a b -vel háromszoros arányban áll c -nek f -hez, d -nek g -hez s végül e -nek h -hoz való arányához képest.

| | | | |
|-------------|-------------|------------|-----------|
| a __30__ | c __ | d __ | e _____ |
| b __240__ | f _____ | g _____ | h _____ |
| k __6__ | m __12__ | l __24__ | |
| n __60__ | o __120__ | | |

Keletkezzék ugyanis c -vel d -t szorozva k , f -fel g -t szorozva pedig l . Minthogy c, d és f, g ugyanabban az arányban állnak, s c és d szorzata k , f -é és g -é pedig l , k és l hasonló síkszámok, tehát k és l között van egy középarányos szám (VIII. 18.). Legyen ez m . m a d és f szorzata, amint az ezelőtti tételben megmutattuk. Minthogy d -vel c -t szorozva k -t kapjuk, f -et szorozva pedig m -et, k úgy aránylik m -hez, mint c az f -hez (VII. 17.). Amint viszont k az m -hez, úgy m az l -hez, k, m, l tehát egy mértani sorozat a c az f -hez arányban. Mivel amint c a d -hez, úgy aránylik f a g -hez, fölcserélve amint c az f -hez, úgy d a g -hez (VII. 13.). Ugyanígy amint d a g -hez, úgy e a h -hoz. k, l, m tehát mértani sorozat

az akár c az f -hez, akár d a g -hez, akár e a h -hoz arányban. Keletkezzék e -vel, illetve h -val m -et szorozva n , illetve o . Minthogy a térszám, melynek c , d és e az oldalai, c és d szorzatát e -vel szorozva a -t kapjuk. c és d szorzata viszont k , tehát e -vel k -t szorozva a -t kapjuk. Ugyanígy h -val l -et szorozva b -t kapjuk. Minthogy e -vel k -t szorozva a -t, m -et szorozva ellenben n -et kapjuk, a úgy aránylik n -hez, mint k az m -hez (VII. 17.). Amint viszont k az m -hez, úgy mind c az f -hez, mind d a g -hez, mind e a h -hoz, amint tehát c az f -hez, d a g -hez és e a h -hoz, úgy a az n -hez. Ismét, minthogy e -vel, illetve h -val m -et szorozva n -et, illetve o -t kapjuk, n úgy aránylik o -hoz, mint e a h -hoz (VII. 18.). Amint viszont e a h -hoz, úgy mind c az f -hez, mind d a g -hez, amint tehát c az f -hez, d a g -hez és e a h -hoz, úgy mind a az n -hez, mind n az o -hoz. Ismét, minthogy h -val m -et szorozva o -t kapjuk, l -et szorozva ellenben b -t, o úgy aránylik b -hez, mint m az l -hez. Amint viszont m az l -hez, úgy mind c az f -hez, mind d a g -hez, mind az e a h -hoz. Amint tehát c az f -hez, d a g -hez és e a h -hoz, úgy nemcsak o a b -hez, hanem a is n -hez és n az o -hoz. a , n , o , b tehát mértani sorozat az oldalak fönt említett arányában.

Azt állítom, hogy a a b -vel háromszoros arányban áll a megfelelő oldalak arányához képest, azaz c -nek f -hez vagy d -nek g -hez vagy e -nek h -hoz való arányához képest. Minthogy ugyanis négy szám, a , n , o és b mértani sorozatot alkot, a a b -vel háromszoros arányban áll a -nak n -hez való arányához képest. Megmutattuk viszont, hogy amint a az n -hez, úgy mind c az f -hez, mind d a g -hez, mind e a h -hoz. a a b -vel tehát háromszoros arányban áll a megfelelő oldalak arányához képest, azaz c -nek f -hez, d -nek g -hez és e -nek h -hoz való arányához képest. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 25., 27.; IX. 4–6.

VIII. 20. Tétel

*Ha két szám közé beilleszthető egy középarányos szám, akkor a számok hasonló síkszámok.**

Legyen ugyanis két szám, a és b közé beilleszthető egy középarányos szám, c . Azt állítom, hogy a és b hasonló síkszámok.

Vegyük a legkisebb számokat, melyek aránya ugyanaz, mint a -é és c -é, d -t és e -t (VII. 33.). Ekkor d ugyanannyiszor van meg a -ban,

mint e a c -ben (VII. 20.). Legyen annyi egység f -ben, ahányszor megvan d az a -ban. Ekkor f -fel d -t szorozva a -t kapjuk, úgyhogy a síkszám, melynek oldalai d és f . Ismét, minthogy d és e a legkisebbek

a ----- b -----
 c -----
 d ---- e --- f ---- g -----

azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint c -é és b -é, d ugyanannyiszor van meg c -ben, mint e a b -ben. Legyen annyi egység g -ben, ahányszor megvan e a b -ben. Ekkor e a b -t a g -beli egységek számaszor osztja, tehát g -vel e -t szorozva b -t kapjuk. b tehát síkszám, melynek oldalai e és g . a és b tehát síkszámok. Azt állítom, hogy hasonlóak. Minthogy ugyanis f -fel d -t szorozva a -t, e -t szorozva pedig c -t kapjuk, amint d az e -hez, úgy aránylik a a c -hez (VII. 17.), azaz c a b -hez. Ismét, minthogy e -vel f -et, illetve g -t szorozva c -t, illetve b -t kapjuk, c úgy aránylik b -hez, mint f a g -hez. Amint viszont c a b -hez, úgy d az e -hez, amint tehát d az e -hez, úgy f a g -hez, és fölcserélve amint d az f -hez, úgy e a g -hez (VII. 13.). a és b tehát hasonló síkszámok, hiszen az oldalaik arányosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F. : VIII. 21–22. ; IX. 2.

VIII. 21. Tétel

*Ha két szám közé beilleszthető két középarányos szám, akkor a számok hasonló térszámok.**

Legyen ugyanis két szám, a és b közé beilleszthető két középarányos szám, c és d . Azt állítom, hogy a és b hasonló térszámok.

Vegyük ugyanis a három legkisebb számot, e -t, f -et és g -t, melyek aránya ugyanaz, mint az a , c , d számoké (VII. 33.). Ekkor a szélső tagok, e és g relatív prímek (VIII. 3.). Minthogy e és g közé beilleszthető egy f középarányos szám, e és g hasonló síkszámok (VIII. 20.).

a __120__ c __180__ d __270__ b __405__
 c ----- f ----- g -----
 h __ k __ n __30__ l __ m __ o __45__

Legyenek e oldalai h és k , g -é pedig l és m . Az előző tételből nyilvánvaló, hogy e, f, g mértani sorozat az akár h az l -hez, akár k az m -hez arányban. Miután e, f, g a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az a, c, d számoké, és e, f, g tagszáma egyenlő a, c, d tagszámával, egyenlő sok tagon át amint e a g -hez, úgy aránylik a a d -hez (VII. 14.). e és g viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanazon arányú számokat, mégpedig a nagyobb ugyanannyiszor van meg a nagyobbban, mint a kisebb a kisebbben (VII. 20.), azaz az egyik előtag ugyanannyiszor a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban; e tehát ugyanannyiszor van meg a -ban, mint g a d -ben. Legyen annyi egység n -ben, ahányszor megvan e az a -ban. n -nel e -t szorozva tehát a -t kapjuk. e viszont h és k szorzata; n -nel megszorozva h és k szorzatát tehát a -t kapjuk. a tehát térszám, és h, k, n az oldalai. Ismét, minthogy e, f, g a legkisebbek azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint a c, d, b számoké, e ugyanannyiszor van meg c -ben, mint g a b -ben. Legyen annyi egység o -ban, ahányszor megvan e a c -ben. Ekkor g az o -beli egységek szerint van meg b -ben, o -val g -t szorozva tehát b -t kapjuk. g viszont l és m szorzata, o -val megszorozva l és m szorzatát tehát b -t kapjuk. b tehát térszám, és l, m, o az oldalai; a és b tehát térszámok.

Azt állítom, hogy hasonlók. Minthogy ugyanis n -nel, illetve o -val e -t szorozva a -t, illetve c -t kapjuk, amint n az o -hoz, úgy aránylik a a c -hez (VII. 18.), azaz e az f -hez. Amint viszont e az f -hez, úgy h az l -hez és k az m -hez, amint tehát h az l -hez, úgy k az m -hez és n az o -hoz. S h, k, n az a oldalai, o, l és m pedig b oldalai. a és b tehát hasonló térszámok. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: VIII. 23.

VIII. 22. Tétel

Ha egy háromtagú mértani sorozat első tagja négyzetszám, akkor a harmadik is négyzetszám.

a ----- Legyen a, b, c egy háromtagú mértani sorozat, és
 b ----- legyen a négyzetszám. Azt állítom, hogy a harmadik
tag, c is négyzetszám.
 c ----- Minthogy ugyanis a és c között van egy b középará-

aránya olyan, mint a c köbszámnak a d köbszámhoz, és legyen a köbszám. Azt állítom, hogy b is köbszám.

Mínthogy ugyanis c és d köbszámok, c és d hasonló térszámok, tehát c és d közé beilleszthető két középarányos szám (VIII. 19.).

Viszont ahány szám c és d közé beilleszthető mértani sorban, annyi az ugyanazon arányú számok közé is beilleszthető (VIII. 8.), úgyhogy a és b közé is beilleszthető két középarányos szám. Legyenek ezek e és f . Mínthogy a , e , f , b egy négytagú mértani sorozat és a köbszám, b is köbszám (VIII. 23.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 10.

VIII. 26. Tétel

Hasonló síkszámok egymáshoz való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz.

Legyenek a és b hasonló síkszámok. Azt állítom, hogy a -nak b -hez való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz.

Mínthogy ugyanis a és b hasonló síkszámok, a és b közé beilleszthető egy középarányos szám (VIII. 18.). Illesszünk be egy c számot, és vegyük a legkisebb számokat, d -t, e -t és f -et, melyek aránya ugyanaz, mint az a , c , b számoké (VII. 33.). Ekkor a szélső tagok négyzetszámok (VIII. 2. K.). Mínthogy a úgy aránylik b -hez, mint d az f -hez, s d és f négyzetszámok, a -nak b -hez való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 10. L.

VIII. 27. Tétel

Hasonló térszámok egymáshoz való aránya olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz.

Legyenek a és b hasonló térszámok. Azt állítom, hogy a -nak b -hez való aránya olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz.

Mint hogy ugyanis a és b hasonló térszámok, a és b közé beilleszthető két középarányos szám (VIII. 19.). Illesszük be c -t és d -t, és vegyük a legkisebb számokat, melyek aránya ugyanaz, mint az a , c , d , b számoké és ugyanannyian vannak, mint ezek, e -t, f -et, g -t és h -t (VII. 33.). Ekkor a szélső tagok köbszámok (VIII. 2. K.). a úgy aránylik b -hez, mint e a h -hoz, a -nak b -hez való aránya tehát olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

$$a _ _ 40 _ _ \quad c _ _ 60 _ _ \quad d _ _ 90 _ _ \quad b _ _ 135 _ _$$

$$e _ _ 8 _ _ \quad f _ _ 12 _ _ \quad g _ _ 18 _ _ \quad h _ _ 27 _ _$$

Kilencedik könyv

IX. 1. Tétel

A két hasonló síkszám összeszorzásakor keletkező szám négyzetszám.

Legyen a és b két hasonló síkszám, és a -val b -t szorozva keletkezzék c . Azt állítom, hogy c négyzetszám.

Keletkezzék ugyanis a -t önmagával szorozva d . Ekkor d négyzetszám. Minthogy a -val önmagát szorozva d -t, b -t szorozva pedig c -t kapjuk, d úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez (VII. 17.).

a és b hasonló síkszámok, beilleszthető közéjük egy középarányos szám (VIII. 18.). Ha a __ 8 __ b __ 18 __
 c __ 144 __ d __ 64 __ vizsont két szám közé mértani sorban beilleszthetők számok, akkor bármely két ugyan-

azon arányú szám közé is beilleszthető annyi szám, amennyi az előző számok közé (VIII. 8.), úgyhogy d és c közé is beilleszthető egy középarányos szám. S d négyzetszám; tehát c is négyzetszám (VIII. 22.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 28. 1. L.

IX. 2. Tétel

Ha két szám összeszorzásakor négyzetszám keletkezik, akkor a számok hasonló síkszámok.

Legyen a és b két szám, és keletkezzék a -val b -t szorozva a c négyzetszám. Azt állítom, hogy a és b hasonló síkszámok.

Keletkezzék ugyanis a -t önmagával szorozva d . Ekkor d négyzetszám. Minthogy a -val a __ 8 __ b __ 18 __
önmagát szorozva d -t, b -t szorozva pedig c -t c __ 144 __ d __ 64 __

kapjuk, d úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez (VII. 17.). Minthogy d négyzetszám, másrészt c is, d és c hasonló síkszámok, d és c közé tehát beilleszthető egy középarányos szám (VIII. 18.). a úgy aránylik b -hez, mint d a c -hez, tehát a és b közé is beilleszthető egy középarányos szám (VIII. 8.). Ha viszont két szám közé beilleszthető egy középarányos szám, akkor a számok hasonló síkszámok (VIII. 20.); a és b tehát hasonló síkszámok. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 29. 1. L.

IX. 3. Tétel

Ha egy köbszámot megszorozunk önmagával, köbszám keletkezik.

Keletkezzék ugyanis az a köbszámot önmagával megszorozva b . Azt állítom, hogy b köbszám.

Vegyük ugyanis a c oldalát, és keletkezzék c -t önmagával szorozva d . Nyilvánvaló, hogy c -vel d -t szorozva a -t kapjuk. Minthogy c -t önmagával szorozva kapjuk d -t, c a benne levő egységek szerint van meg d -ben. Másrészt az egység is az abban levő egységek szerint van meg c -ben, amint tehát a ---8--- b ---64---
az egység c -hez, úgy c a d -hez. Ismét, mint- c --- d -----
hogy c -vel d -t szorozva a -t kapjuk, d a c -ben levő egységek szerint van meg a -ban. Viszont az egység is az abban levő egységek szerint van meg c -ben, tehát amint az egység c -hez, úgy d az a -hoz. Amint viszont az egység c -hez, úgy c a d -hez, amint tehát az egység c -hez, úgy c a d -hez és d az a -hoz. Az egység és az a szám közé tehát két számot illesztettünk mértani sorban, c -t és d -t. Ismét, minthogy a -t önmagával szorozva kapjuk b -t, a a benne levő egységek szerint van meg b -ben. Viszont az egység is az abban levő egységek szerint van meg a -ban, tehát amint az egység a -hoz, úgy a a b -hez. Az egység és a közé viszont beillesztettünk két középarányos számot; a és b közé is beilleszthető tehát két középarányos szám (VIII. 8.). Ha viszont két szám közé beilleszthető két középarányos, és az első szám köbszám, akkor a második is köbszám (VIII. 23.). S a köbszám, tehát b is köbszám. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 4-5., 9.

IX. 4. Tétel

Ha egy köbszámot megszorozunk egy másik köbszámmal, köbszám keletkezik.

Keletkezzék ugyanis az a köbszámmal a b köbszámot megszorozva c . Azt állítom, hogy c köbszám.

Keletkezzék ugyanis a -t önmagával szorozva d . Ekkor d köbszám (IX. 3.). Minthogy a -val önmagát szorozva d -t, b -t szorozva pedig c -t kapjuk, d úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez (VII. 17.). Minthogy a és b köbszámok, a és b hasonló térszámok, tehát a és b közé beilleszthető két középarányos szám (VIII. 19.), úgyhogy d és c közé is beilleszthető két középarányos szám (VIII. 8.). S d köbszám, tehát c is köbszám (VIII. 23.). Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 5. Tétel

Ha egy köbszámmal megszorozva egy számot köbszám keletkezik, akkor a megszorozott szám is köbszám.

Keletkezzék ugyanis az a köbszámmal a b számot megszorozva c köbszám. Azt állítom, hogy b köbszám.

Keletkezzék ugyanis a -t önmagával szorozva d . Ekkor d köbszám (IX. 3.). Minthogy a -val önmagát szorozva d -t, b -t szorozva pedig c -t kapjuk, d úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez (VII. 17.). Minthogy d és c köbszámok, a --8-- b --27-- hasonló térszámok, tehát d és c közé beilleszthető két középarányos szám (VIII. 19.). a úgy aránylik b -hez, mint d a c -hez, tehát a és b közé is beilleszthető két középarányos szám (VIII. 8.). S a köbszám, köbszám tehát b is. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 6. Tétel

Ha egy számot önmagával megszorozva köbszám keletkezik, akkor maga a szám is köbszám.

Keletkezzék ugyanis az a számot önmagával megszorozva b köbszám. Azt állítom, hogy a is köbszám.

Keletkezzék ugyanis a -val b -t megszorozva c . Minthogy a -val ön-

magát szorozva kapjuk b -t, b -t szorozva pedig c -t, c köbszám. Mint-hogy a -t önmagával szorozva kapjuk b -t, a a benne levő egységek sze-rint van meg b -ben. Másrészt az egység is az abban levő egységek szerint van meg a -ban, amint tehát az egység a -hoz, úgy a a b -hez. Minthogy a -val b -t szorozva c -t kapjuk, b az a -ban levő egységek szerint van meg c -ben. Viszont az egység a -ban szintén az abban levő egységek szerint van meg, amint tehát az egység a -hoz, úgy b a c -hez. Minthogy b és c köbszámok, hasonló térszámok, tehát b és c között van két középarányos szám (VIII. 19.). a úgy aránylik b -hez, mint b a c -hez, tehát a és b között is van két középarányos szám (VIII. 8.). S b köbszám, tehát a is köbszám (VIII. 23.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 10.

IX. 7. Tétel

Ha egy összetett számmal megszorunk egy másik számot, akkor térszám keletkezik.

Keletkezzék ugyanis az a összetett számmal a b számot megszorozva c . Azt állítom, hogy c térszám.

Minthogy ugyanis a összetett, osztja valamely szám. Ossa d , és legyen annyi egység e -ben, ahányszor megvan d az a -ban. Minthogy d az e -ben levő egységek szerint osztja a -t, e -vel d -t szorozva a -t kapjuk. S minthogy a -val b -t szorozva c -t kapjuk, a viszont d és e szorzata, d és e szorzatá-val b -t szorozva c -t kapjuk. c tehát térszám, és d , e , b az oldalai. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 8. Tétel

Ha van egy egységgel kezdődő valahány tagú mértani sorozat, akkor az egységtől számított harmadik tag és az egy tag kihagyásával következők négyzetszámok, a negyedik tag és az összes két tag kihagyásával következő köbszám, a hetedik pedig és az öt tag kihagyásával következők egyszerre köb- és négyzetszámok.

Alkosson valahány szám, a , b , c , d , e és f az egységgel kezdődően mértani sorozatot. Azt állítom, hogy az egységtől számított harmadik

tag, b , és az összes egy tag kihagyásával következő négyzetszám, a negyedik tag, c , és az összes két tag kihagyásával következő köbszám, a hetedik tag pedig, f , és az összes öt tag kihagyásával következő egyszerre köb- és négyzetszám.

Mivel amint az egység a -hoz, úgy aránylik a a b -hez, az egység ugyanannyiszor van meg a -ban, mint a a b -ben. Az egység az a számban az abban levő egységek szerint van meg, tehát a a b -ben szintén az a -ban levő egységek szerint van meg. a -val önmagát szorozva tehát

| | | |
|-----------|------------|------------------------------------------------------|
| a __ | d __16__ | b -t kapjuk; b négyzetszám. Minthogy b , c , |
| b _____ | e __32__ | d mértani sorozat, s b négyzetszám, d is |
| c _____ | f __64__ | négyzetszám (VIII. 22.). Ugyanígy f is |
| | | négyzetszám. Hasonlóképp mutathatnánk |
| | | meg, hogy az összes egy tag kihagyásával |
| | | következő is négyzetszám.* Azt is állítom, |

hogy az egységtől számított negyedik tag, c , és az összes két tag kihagyásával következő köbszám. Minthogy ugyanis amint az egység a -hoz, úgy aránylik b a c -hez, az egység ugyanannyiszor van meg az a számban, mint b a c -ben. Az egység viszont a -ban az a -ban levő egységek szerint van meg, tehát b a c -ben szintén az a -ban levő egységek szerint van meg, a -val b -t szorozva tehát c -t kapjuk. Minthogy a -val önmagát szorozva kapjuk b -t, b -t szorozva pedig c -t, c köbszám. Minthogy c , d , e , f mértani sorozat, és c köbszám, f is köbszám (VIII. 23.). Megmutattuk azt is, hogy négyzetszám; az egységtől számított hetedik tag tehát mind köbszám, mind négyzetszám. Hasonlóképp mutatható meg, hogy az összes öt tag kihagyásával következő is mind köbszám, mind négyzetszám.* Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 9–10., 12–13.

IX. 9. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, és az egység utáni tag négyzetszám, akkor az összes többi tag is négyzetszám; s ha az egység utáni tag köbszám, akkor az összes többi tag is köbszám.

Alkosson az egységgel kezdődően valahány szám, a , b , c , d , e és f mértani sorozatot, és legyen az egység utáni tag, a , négyzetszám. Azt állítom, hogy az összes többi tag is négyzetszám.

Hogy az egységtől számított harmadik tag, b , és az összes egy tag kihagyásával következő négyzetszám, már megmutattuk (IX. 8.). Azt állítom, hogy az összes többi is négyzetszám. Minthogy ugyanis a, b, c mértani sorozat, és a négyzetszám, c is négyzetszám (VIII. 22.). Ismét, minthogy a, b, c, d mértani sorozat, s b négyzetszám, d is négyzetszám.** Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az összes többi tag is négyzetszám.*

Legyen most a köbszám. Azt állítom, hogy az összes többi tag is köbszám.

Hogy az egységtől számított negyedik tag, c , és az összes két tag kihagyásával következő köbszám, már megmutattuk (IX. 8.). Azt állítom, hogy az összes többi is köbszám. Minthogy ugyanis amint az egység a -hoz, úgy aránylik a a b -hez, az egység ugyanannyiszor van meg a -ban, mint a a b -ben. Az egység viszont a -ban az abban levő egységek szerint van meg, a a b -ben tehát szintén az önmagában levő egységek szerint van meg, a -t önmagával szorozva tehát b -t kapjuk. S a köbszám. Ha viszont egy köbszámot megszorunk önmagával, köbszám keletkezik (IX. 3.), b is köbszám tehát. Minthogy négy szám, a, b, c és d mértani sorozatot alkot, és a köbszám, d is köbszám (VIII. 23.). Ugyanígy e is köbszám, és hasonlóképp az összes többi tag is köbszám.* Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 10. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, és az egység utáni tag nem négyzetszám, akkor egyetlen másik tag sem négyzetszám, kivéve az egységtől számított harmadikat és az összes egy tag kihagyásával következőt; s ha az egység utáni tag nem köbszám, akkor egyetlen másik tag sem köbszám, kivéve az egységtől számított negyediket és az összes két tag kihagyásával következőt.

Alkosson az egységgel kezdődően valahány szám, a, b, c, d, e és f mértani sorozatot, és az egység utáni tag, a , ne legyen négyzetszám. Azt állítom, hogy egyetlen másik tag sem négyzetszám, kivéve az egységtől számított harmadikat [és az egy tag kihagyásával következőket].

Tegyük fel ugyanis, hogy c négyzetszám. b is négyzetszám (IX. 8.), b -nek és c -nek egymáshoz való aránya tehát olyan, mint egy négyzet-számnak egy másik négyzetszámhoz. a úgy aránylik b -hez, mint b a c -hez, tehát a -nak és b -nek egymáshoz való aránya olyan, mint egy négyzetszámnak egy másik négyzetszámhoz, úgyhogy a és b hasonló síkszámok. S b négyzetszám, négyzetszám tehát a is, aminek az ellenkezőjét tettük föl. c tehát nem négyzet-szám. Hasonlóképpen mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik tag sem négyzetszám, kivéve az egységtől számított harmadikat és az egy tag kihagyásával következőket.

Ne legyen most a köbszám. Azt állítom, hogy egyetlen másik tag sem köbszám, kivéve az egységtől számított negyediket és a két tag kihagyásával következőket.

Tegyük föl ugyanis, hogy d köbszám. c is köbszám, ugyanis az egységtől számított negyedik tag (IX. 8.). b úgy aránylik c -hez, mint c a d -hez, b -nek c -hez való aránya tehát olyan, mint egy köbszámnak egy másik köbszámhoz. S c köbszám, b is köbszám tehát (VIII. 25.). Minthogy a úgy aránylik b -hez, mint az egység a -hoz, és az egység a -ban az abban levő egységek szerint van meg, a a b -ben szintén az önmagában levő egységek szerint van meg; a -val önmagát szorozva tehát a b köbszámot kapjuk. Ha viszont egy számot önmagával megszorozva köbszám keletkezik, akkor maga a szám is köbszám (IX. 6.), tehát a is köbszám, aminek az ellenkezőjét tettük föl. d tehát nem köbszám. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy egyetlen másik tag sem köbszám, kivéve az egységtől számított negyediket és a két tag kihagyásával következőket. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 11. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, akkor egy kisebb tag egy nagyobbban valamely, a sorozatban előforduló szám szerint van meg.

Alkosson az a egységgel kezdődően valahány szám, b , c , d és e mértani sorozatot. Azt állítom, hogy a b , c , d és e tagok legkisebbike, b , c és d valamelyike szerint van meg e -ben.

Minthogy ugyanis d úgy aránylik e -hez, mint az a egység b -hez, az a egység ugyanannyiszor van meg a b számban, mint d az e -ben; fölcserélve tehát az a egység ugyanannyiszor van meg d -ben, mint b az e -ben (VII. 15.). Az a egység viszont az abban levő egységek szerint van meg d -ben, tehát b az e -ben szintén a d -ben levő egységek szerint van meg, úgyhogy a kisebb tag, b , a nagyobb tagban, e -ben, valamely, a sorozatban előforduló szám szerint van meg.

F.: IX. 12–13.

Következmény

És nyilvánvaló, hogy ahányadik helyen van az osztó az egységtől, ugyanannyiadik helyen van a hányados az osztott számtól visszafelé számítva. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 12. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, akkor ugyanazok a prímekek az egység melletti tagot is osztják, amelyek az utolsót.

Alkosson az egységgel kezdődően valahány szám, a , b , c és d mértani sorozatot. Azt állítom, hogy ugyanazon prímekek a -t is osztják, amelyek d -t.

$$\begin{array}{cccc}
 a_{--}6_{--} & b_{--}36_{--} & c_{--}216_{--} & d_{--}1296_{--} \\
 e_{--} & f_{--}432_{--} & g_{--}72_{--} & h_{--}12_{--}
 \end{array}$$

Ossza ugyanis d -t valamely e prím. Azt állítom, hogy e osztja a -t. Ellenkező esetben ugyanis: e prím, és bármely prímszám bármely számhoz, melyet nem oszt, relatív prím (VII. 29.), e és a tehát relatív prímekek. Miután e osztja d -t, legyen meg f -szer benne. e -vel f -et szorozva tehát d -t kapjuk. Ismét, minthogy a a c -ben levő egységek számaszor van meg d -ben (IX. 11.), a -val c -t szorozva d -t kapjuk. Viszont e -vel f -et szorozva is d -t kapjuk, tehát a és c szorzata egyenlő e és f szorzatával. f tehát úgy aránylik c -hez, mint a az e -hez (VII. 19.). a és e viszont relatív prímekek, a relatív prímekek pedig legkisebbek (VII. 21.),

a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban; e tehát osztja c -t. Legyen meg benne g -szer; e -vel g -t szorozva tehát c -t kapjuk. Az előző tétel szerint viszont a -val b -t szorozva is c -t kapjuk, a és b szorzata tehát egyenlő e és g szorzatával. g tehát úgy aránylik b -hez, mint a az e -hez (VII. 19.). a és e viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban; e tehát osztja b -t. Legyen meg benne h -szor. e -vel h -t szorozva tehát b -t kapjuk. Másrészt a -t önmagával szorozva is b -t kapjuk (IX. 8.), tehát e és h szorzata egyenlő a négyzetével, a tehát úgy aránylik h -hoz, mint e az a -hoz (VII. 19.). a és e viszont relatív prímek, a relatív prímek pedig legkisebbek, a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másikban, mint az egyik utótag a másik utótagban; e tehát osztja a -t, az egyik előtag a másik előtagot. Viszont nem is osztja; ami lehetetlen. e és a tehát nem relatív prímek. Relatív összetettek tehát. A relatív összetett számokat viszont osztja valamely [prím] szám. Minthogy e a feltétel szerint prím, a prímet pedig más szám nem osztja, csak önmaga, e osztja az a , e számokat, úgyhogy e osztja a -t. [d -t is osztja, tehát e osztja az a , d számokat.] Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy ugyanazon prímek a -t is osztják, amelyek d -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 13.

IX. 13. Tétel

Ha az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, és az egység utáni szám prím, akkor a legnagyobb tagot egyetlen [más] szám sem osztja, kivéve a sorozatban előfordulókat.

Alkosson az egységgel kezdődően valahány szám, a , b , c és d mértani sorozatot, és az egység utáni tag, a , legyen prím. Azt állítom, hogy legnagyobbikukat, d -t, egyetlen más szám sem osztja, csak a , b és c .

Tegyük föl ugyanis, hogy e osztja, és e nem azonos az a , b , c számok egyikével sem. Nyilvánvaló, hogy e nem prímszám. Ha ugyanis

e prím lenne és osztaná *d*-t, *a*-t is osztaná (IX. 12.), mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. *e* tehát nem prím. Összetett tehát. Viszont bármely összetett számot oszt valamely prímszám (VII. 31.), *e*-t tehát osztja valamely prímszám. Azt állítom, hogy egyetlen más prím sem osztja, csak *a*. Ha ugyanis egy másik osztaná *e*-t, *e* pedig osztaná *d*-t,

$$\begin{array}{cccc} a___ & b__9__ & c__27__ & d__81__ \\ e__?__ & f__? & g__?__ & h__?__ \end{array}$$

ez a szám is osztaná *d*-t, úgyhogy *a*-t is osztaná (IX. 2.), mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. *a* osztja tehát *e*-t. Miután *e* osztja *d*-t, legyen meg benne *f*-szer. Azt állítom, hogy *f* nem azonos az *a*, *b*, *c* számok egyikével sem. Ha ugyanis *f* azonos lenne az *a*, *b*, *c* számok egyikével és *e*-szer lenne meg *d*-ben, az *a*, *b*, *c* számok egyike is *e*-szer lenne meg *d*-ben. Azonban az *a*, *b*, *c* számok egyike az *a*, *b*, *c* számok valamelyikésszer van meg *d*-ben (IX. 11.), *e* tehát azonos lenne az *a*, *b*, *c* számok valamelyikével, aminek az ellenkezőjét tettük föl. *f* tehát nem azonos az *a*, *b*, *c* számok egyikével sem. Hasonlóképp mutatható meg, hogy *a* osztja *f*-et, megmutatván, hogy *f* sem prímszám. Ha ugyanis az lenne és osztaná *d*-t, *a*-t is osztaná, mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. *f* tehát nem prím; összetett szám tehát. Viszont bármely összetett számot oszt valamely prímszám, *f*-et tehát osztja valamely prímszám. Azt állítom, hogy más prím nem osztja, csak *a*. Ha ugyanis valamely másik prím osztaná *f*-et, *f* pedig *d*-t, ez a szám is osztaná *d*-t, úgyhogy *a*-t is osztaná, mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. *a* tehát osztja *f*-et. Minthogy *e* a *d*-ben *f*-szer van meg, *e*-vel *f*-et szorozva *d*-t kapjuk. Másrészt *a*-val *c*-t szorozva is *d*-t kapjuk (IX. 11.); *a* és *c* szorzata tehát egyenlő *e* és *f* szorzatával. *f* tehát úgy aránylik *c*-hez, mint *a* az *e*-hez (VII. 19.). *a* viszont osztja *e*-t, tehát *f* is osztja *c*-t. Legyen meg benne *g*-szer. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *g* nem azonos az *a*, *b* számok egyikével sem, és hogy *a* osztja. Minthogy *f* *c*-ben *g*-szer van meg, *f*-fel *g*-t szorozva *c*-t kapjuk. Másrészt *a*-val *b*-t szorozva is *c*-t kapjuk; *a* és *b* szorzata tehát egyenlő *f* és *g* szorzatával. *g* tehát úgy aránylik *b*-hez, mint *a* az *f*-hez. *a* viszont osztja *f*-et, tehát *g* is osztja *b*-t. Legyen meg benne *h*-szor. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *h* nem azonos *a*-val. Mint-

hogy g a b -ben h -szor van meg, g -vel h -t szorozva b -t kapjuk. Másrészt a -t önmagával szorozva is b -t kapjuk (IX. 8.), h és g szorzata tehát egyenlő a négyzetével. a tehát úgy aránylik g -hez, mint h az a -hoz. a viszont osztja g -t, tehát h is osztja a -t, mely prím és nem azonos vele, ami lehetetlen. Nem osztja tehát a legnagyobb tagot, d -t, más szám, csak a , b és c . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 32., 36.

IX. 14. Tétel

Prímszámok legkisebb közös többszörösét egyetlen más prímszám sem osztja, csak amelyek eredetileg is osztják.

Legyen ugyanis a a b , c , d prímszámok legkisebb közös többszöröse. Azt állítom, hogy a -t egyetlen más prímszám sem osztja, csak b , c és d .

Tegyük fel ugyanis, hogy osztja az e prímszám, és e nem azonos a b , c , d számok egyikével sem. Miután e osztja a -t, legyen meg benne f -szer. e -vel f -et szorozva tehát a -t kapjuk. S a -t osztják a b , c , d prímszámok. Ha viszont két számat megszorozunk egymással, és a szorzatukat osztja valamely prímszám, akkor a tényezők egyikét is osztja (VII. 30.); b , c és d tehát osztják e és f egyikét. e -t nem osztják, mert e prím és nem azonos a b , c , d számok egyikével sem. f -et osztják tehát, mely kisebb a -nál, ami lehetetlen, a ugyanis feltétel szerint b , c és d legkisebb közös többszöröse. Nem osztja tehát a -t más prímszám, csak b , c és d . Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 15. Tétel

Ha mértani sorban álló három szám legkisebb azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké, akkor bármely kettő összege relatív prím a harmadikhoz.

Legyen három mértani sorban álló szám, a , b és c , legkisebb azon számok között, melyek aránya ugyanaz, mint az övéké. Azt állítom, hogy az a , b , c számok közül bármely kettőnek az összege relatív prím a harmadikhoz, a meg b a c -hez, b meg c az a -hoz, végül a meg c a b -hez.

Vegyünk ugyanis két legkisebb számat, DE -t és EF -et, melyek aránya

ugyanaz, mint az a , b , c számoké (VII. 33.). Nyilvánvaló, hogy DE -vel önmagát szorozva a -t kapjuk, EF -et szorozva b -t kapjuk, s végül EF -et önmagával szorozva c -t kapjuk (VIII. 2.). Minthogy DE és EF legkisebbek, relatív prímek (VII. 22.). Ha viszont két szám relatív prím, akkor az összegük relatív prím bármelyik taghoz (VII. 28.); DF is relatív prím tehát DE -hez és EF -hez. Másrészt DE is relatív

$$\begin{array}{r} a \text{ ---- } b \text{ ----- } c \text{ -----} \\ D E F \\ \text{-----} \end{array}$$

prím EF -hez, tehát DF és DE relatív prímek EF -hez. Ha viszont két szám relatív prím egy harmadikhoz, akkor a szorzatuk is relatív prím hozzá (VII. 24.), úgyhogy FD és DE szorzata relatív prím EF -hez, úgyhogy FD és DE szorzata EF négyzetéhez is relatív prím [ha ugyanis két szám relatív prím, akkor az egyik négyzete is relatív prím a másikhoz (VII. 25.)]. FD és DE szorzata azonban DE négyzetének meg DE és EF szorzatának az összege (II. 3.), tehát DE négyzetének meg DE és EF szorzatának összege relatív prím EF négyzetéhez. S DE négyzete a , DE és EF szorzata b , EF négyzete pedig c , tehát a és b összege relatív prím c -hez. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy b és c összege is relatív prím a -hoz. Azt állítom, hogy a és c összege is relatív prím b -hez. Minthogy ugyanis DF relatív prím DE és EF bármelyikéhez, DF négyzete relatív prím DE és EF szorzatához (VII. 24–25.). DF négyzetével azonban egyenlő DE és EF négyzeteinek meg DE és EF kétszeres szorzatának az összege (II. 4.), tehát DE és EF négyzeteinek meg DE és EF kétszeres szorzatának összege relatív prím DE és EF szorzatához. Szétbontván, DE és EF négyzeteinek meg DE és EF egyszeres szorzatának összege relatív prím DE és EF szorzatához. Újra szétbontván DE és EF négyzetösszege relatív prím DE és EF szorzatához. S DE négyzete a , DE és EF szorzata b , EF négyzete pedig c . a és c összege tehát relatív prím b -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 16. Tétel

Ha két szám relatív prím, akkor nem lehetséges, hogy amint az első szám a másodikhoz, úgy arányulják a második valamely harmadikhoz.

Legyen ugyanis két szám, a és b , relatív prím. Azt állítom, hogy

nem lehetséges, hogy amint a a b -hez, úgy arányuljék b valamely harmadik számhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy b úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez. a és b relatív prímekek, a relatív prímekek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban; osztja tehát a a b -t, az egyik előtag a másikat. De önmagát is osztja: a tehát osztja az a , b relatív prímekeket, ami lehetetlen. Nem aránylik tehát úgy b a c -hez, mint a a b -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 18.

IX. 17. Tétel

Ha valahány szám mértani sorozatot alkot, és a szélső tagok relatív prímekek, akkor nem lehetséges, hogy amint az első tag a másodikhoz, úgy arányuljék az utolsó valamely másik számhoz.

Alkosson valahány szám, a , b , c és d mértani sorozatot, és legyenek a szélső tagok, a és d relatív prímekek. Azt állítom, hogy nem lehetséges, hogy amint a a b -hez, úgy arányuljék d valamely másik számhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy d úgy aránylik e -hez, mint a a b -hez. Fölcserélve tehát amint a a d -hez, úgy b az e -hez (VII. 13.). a és d viszont relatív prímekek, a relatív prímekek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat, mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másikban, mint az egyik utótag a másik utótagban (VII. 20.), a tehát osztja b -t. b úgy aránylik c -hez, mint a a b -hez, tehát b is osztja c -t, úgyhogy a is osztja c -t. Minthogy c úgy aránylik d -hez, mint b a c -hez, és b osztja c -t, c is osztja d -t. a azonban osztotta c -t, úgyhogy a a d -t is osztja. Viszont önmagát is osztja, a tehát osztja az a , d relatív prímszámokat, ami lehetetlen. Nem aránylik tehát úgy d valamely másik számhoz, mint a a b -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 19.

IX. 18. Tétel

Két adott szám esetén vizsgáljuk meg, lehetséges-e hozzájuk harmadik arányost találni!

Legyen a és b a két adott szám, és kelljen azt megvizsgálni, lehetséges-e hozzájuk harmadik arányost találni.

a és b vagy relatív prímek, vagy nem. A relatív prímek esetére megmutattuk, hogy nem lehet hozzájuk harmadik arányost találni (IX. 16.).

Most a és b ne legyenek relatív prímek, és b -t önmagával szorozva keletkezzék c . Mármost a vagy osztja c -t, vagy nem osztja. Legyen meg először benne, mégpedig d -szer. a -val d -t szorozva tehát c -t kapjuk. Másrészt b -t önmagával szorozva is c -t kapjuk, tehát a és d szorzata egyenlő b négyzetével. b tehát úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez (VII. 19.): az a , b számokhoz tehát harmadik arányost találtunk, d -t.

Ne ossza most a a c -t. Azt állítom, hogy az a , b számokhoz nem lehet harmadik arányost találni. Tegyük föl ugyanis, hogy lehet, és legyen d az. Ekkor a és d szorzata egyenlő b négyzetével (VII. 19.). b négyzete viszont c , tehát a és d szorzata egyenlő c -vel, úgyhogy a -val d -t szorozva c -t kapjuk, a tehát c -ben megvan d -szer. Azonban a föltétel szerint nem osztja: ez ellentmondás. Nem lehet tehát az a , b számokhoz harmadik arányost találni, ha a nem osztja c -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 19. Tétel

Három adott szám esetén vizsgáljuk meg, lehetséges-e hozzájuk negyedik arányost találni!

Legyen a , b és c a három adott szám, és kelljen megvizsgálni, hogy lehetséges-e hozzájuk negyedik arányost találni.

a ----- b ----- c -----
 d __30__ e -----

Ekkor vagy nem alkotnak mértani sorozatot, és a szélső tagok nem relatív prímek, vagy mértani sorozatot alkotnak, és a szélső tagok nem relatív prímek, vagy sem nem alkotnak mértani sorozatot, sem a szél-

ső tagok nem relatív prímekek, vagy mind mértani sorozatot alkotnak, mind a szélső tagok relatív prímekek.

Arra az esetre, ha a , b és c mértani sorozatot alkot, és a szélső tagok relatív prímekek, már megmutattuk, hogy nem lehetséges hozzájuk negyedik arányos számot találni (IX. 17.).

Ne alkossanak most a , b és c mértani sorozatot, ám a szélső tagok legyenek ismét relatív prímekek. Azt állítom, hogy ekkor sem lehet hozzájuk negyedik arányost találni.* Tegyük föl ugyanis, hogy lehet, és legyen d az, úgyszólván amint a a b -hez, úgy arányuljék c a d -hez, és amint b a c -hez, úgy d az e -hez. Mivel amint a a b -hez, úgy aránylik c a d -hez, amint pedig b a c -hez, úgy d az e -hez, egyenlő sok tagon át amint a a c -hez, úgy c az e -hez (VII. 14.). a és c viszont relatív prímekek, a relatív prímekek pedig legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban. Osztja tehát a a c -t, az egyik előtag a másik előtagot. De önmagát is osztja: a tehát osztja a -t és c -t, melyek relatív prímekek, ami lehetetlen. Nem lehet tehát az a , b , c számokhoz negyedik arányost találni.

Alkossanak most ismét mértani sorozatot a , b és c , s a és c ne legyenek relatív prímekek. Azt állítom, hogy lehetséges hozzájuk negyedik arányost találni. Keletkezzék ugyanis b -vel c -t szorozva d . Ekkor a vagy osztja d -t, vagy nem osztja. Legyen meg először benne, mégpedig e -szer. a -val e -t szorozva tehát d -t kapjuk. Másrészt b -vel c -t szorozva is d -t kapjuk, tehát a és e szorzata egyenlő b és c szorzatával. c tehát úgy aránylik e -hez, mint a a b -hez (VII. 19.): az a , b , c számokhoz tehát negyedik arányost találtunk, e -t. Ne ossza most a a d -t. Azt állítom, hogy nem lehet az a , b , c számokhoz negyedik arányost találni. Tegyük ugyanis föl, hogy lehet, és legyen e az. Ekkor a és e szorzata egyenlő b és c szorzatával (VII. 19.). b és c szorzata viszont d , tehát a és e szorzata is egyenlő d -vel. a -val e -t szorozva tehát d -t kapjuk. a tehát megvan d -ben e -szer, úgyszólván a osztja d -t. Azonban nem is osztja, ami ellentmondás. Nem lehet tehát az a , b , c számokhoz negyedik arányost találni, ha a nem osztja d -t.

Most pedig az a , b , c számok se mértani sorozatot ne alkossanak, se a szélső tagok ne legyenek relatív prímekek, és b -vel c -t szorozva

keletkezzék d . Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy ha a osztja d -t, lehet hozzájuk negyedik arányost találni, ha pedig nem osztja, nem lehet. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 20. Tétel

Prímszámból prímszámok bármely adott sokaságánál több van.

Legyenek az adott prímszámok a , b és c . Azt állítom, hogy több prímszám van, mint a , b és c .

Vegyük ugyanis a , b és c legkisebb közös többszörösét (VII. 36.), legyen ez DE , és adjuk hozzá DE -hez a DF egységet. Ekkor EF vagy prím, vagy nem. Legyen először prím. Találtunk tehát az a , b , c számoknál több prímet, a -t, b -t, c -t és EF -et.

a --- b ----- c -----

Ne legyen most EF prím. Ekkor osztja valamely prímszám (VII. 31.).

E --- 105 --- DF g ---

Ossza a g prím. Azt állítom, hogy

g az a , b és c egyikével sem azonos. Tegyük föl ugyanis, hogy az a , b és c osztják DE -t, tehát g is osztja DE -t. Viszont EF -et is osztja, tehát a maradék DF egységet is osztja g (2. E.), noha szám, ami ellentmondás. g tehát nem azonos az a , b , c számok egyikével sem. S feltétel szerint prím, tehát találtunk az adott a , b , c prímeknél több prímet, a -t, b -t, c -t és g -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 21. Tétel

*Bárhány páros számot adunk össze, az összeg páros.**

Adjunk össze ugyanis valahány páros számot, AB -t, BC -t, CD -t és DE -t. Azt állítom, hogy az AE összeg páros.

A B C D E

Minthogy ugyanis AB , BC , CD és DE mindegyike páros, van fele része, úgyhogy az AE összegnek is van fele része. Páros pedig a ketté bontható szám: AE tehát páros. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 22–23., 28.

IX. 22. Tétel

Ha összeadunk valahány páratlan számot, melyek páros sokan vannak, akkor az összeg páros.

Adjunk össze ugyanis valahány páratlan számot, melyek páros sokan vannak, AB -t, BC -t, CD -t és DE -t. Azt állítom, hogy az AE összeg páros.

Minthogy ugyanis AB , BC , CD és DE mindegyike páratlan, ha mindegyikből kivonunk egy egységet, akkor minden maradék páros lesz, úgylgy azok összege is páros lesz (IX. 21.). Másrészt az egységek száma is páros, tehát az AE összeg is páros (IX. 21.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 23.

IX. 23. Tétel

Ha összeadunk valahány páratlan számot, melyek páratlan sokan vannak, akkor az összeg is páratlan lesz.

Adjunk össze ugyanis valahány páratlan számot, melyek páratlan sokan vannak, AB -t, BC -t és CD -t. Azt állítom, hogy az AD összeg páratlan.

Vonjuk ki CD -ből a DE egységet. Ekkor a CE maradék páros. Viszont AC is páros (IX. 22.), tehát az AE összeg is páros (IX. 21.). S DE egy egység, tehát AD páratlan. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 29–30.; X. 27. Függelék

IX. 24. Tétel

Ha egy páros számból párosat vonunk ki, a maradék páros.

Vonjuk ugyanis ki az AB páros számból a páros BC -t. Azt állítom, hogy a CA maradék páros.

Minthogy ugyanis AB páros, van fele része. Ugyanígy BC -nek is van fele része, úgylgy a maradék [CA -nak] is [van fele része, tehát] AC páros. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 25–27., X. 29. 1. L.

IX. 25. Tétel

Ha egy páros számból páratlant vonunk ki, a maradék páratlan.

Vonjuk ugyanis ki az AB páros számból a páratlan BC -t. Azt állítom, hogy a CA maradék páratlan.

Vonjuk ugyanis ki BC -ből a CD egységet. Ekkor DB páros. Viszont AB is páros, tehát az AD maradék is páros (IX. 24.). S CD egység, tehát CA páratlan. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 26. Tétel

Ha egy páratlan számból páratlant vonunk ki, a maradék páros.

Vonjuk ugyanis ki az AB páratlan számból a páratlan BC -t. Azt állítom, hogy a CA maradék páros.

Miután ugyanis AB páratlan, levonva a BD egysé- $A \quad C \quad DB$
get a maradék AD páros. Ugyanígy CD is páros, úgy-
hogy a CA maradék is páros (IX. 24.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 29. 1. L.

IX. 27. Tétel

Ha egy páratlan számból párosat vonunk ki, a maradék páratlan.

Vonjuk ugyanis ki az AB páratlan számból a páros BC -t. Azt állítom, hogy a CA maradék páratlan.

$AD \quad C \quad B$ Vonjuk ki az AD egységet. Ekkor DB páros. Vi-
szont BC is páros, tehát a CD maradék is páros (IX.
24.). CA tehát páratlan. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 28. Tétel

Ha egy páratlan számmal megszorozunk egy párosat, a szorzat páros lesz.

Keletkezzék ugyanis a páros b -t az a páratlan számmal megszorozva c . Azt állítom, hogy c páros.

Minthogy ugyanis a -val b -t szorozva kaptuk c -t, $c \quad a \quad \text{---} \quad b \quad \text{--}$
annyi b -vel egyenlő számból tevődik össze, ahány egy- $c \quad \text{-----}$
ség van a -ban. S b páros, tehát c páros számokból te-
vődik össze. Bárhány páros számot adunk viszont össze, az összeg
páros (IX. 21.), tehát c páros. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 31.

IX. 29. Tétel

Ha egy páratlan számmal megszorozunk egy páratlant, a szorzat páratlan lesz.

Keletkezzék ugyanis az a páratlan számmal megszorozva a páratlan b -t c . Azt állítom, hogy c páratlan.

Minthogy ugyanis a -val b -t szorozva kaptuk a --- b ----- c -t, c annyi b -vel egyenlő számból tevődik össze, ahány egység van a -ban. S a és b mindegyike páratlan, c tehát páratlan számokból tevődik össze, melyek páratlan sokan vannak, úgyhogy c páratlan (IX. 23.). Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 30. Tétel

Ha egy páratlan szám oszt egy párosat, akkor a felét is osztja.

Ossza ugyanis az a páratlan szám a páros b -t. Azt állítom, hogy a felét is osztja.

Miután ugyanis a osztja b -t, legyen meg benne c -szer. Azt állítom, hogy c nem páratlan. Tegyük föl ugyanis, hogy az. Minthogy a a b -ben c -szer van meg, a -val c -t szorozva b -t kapjuk. b tehát páratlan számokból tevődik össze, a --- c -----
melyek páratlan sokan vannak. b tehát páratlan b -----
(IX. 23.), ami ellentmondás, mert feltétel szerint páros. c tehát nem páratlan; páros tehát c , úgyhogy a a b -ben párosszor van meg. Ezért aztán a felét is osztja. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 31.

IX. 31. Tétel

*Ha egy páratlan szám relatív prím valamely számhoz, akkor a kétszereséhez is relatív prím.**

Legyen ugyanis az a páratlan szám valamely számhoz, b -hez relatív prím, és legyen b kétszerese c . Azt állítom, hogy a --- b ---
 a relatív prím c -hez [is].
 c ----- d --- Ha ugyanis [a és c] nem relatív prímelek, osztja őket valamely szám. Ossza, s legyen d az. a páratlan, tehát d is páratlan (IX. 28.). Minthogy a páratlan d osztja c -t, és c páros, c -nek a felét is osztja [d] (IX. 30.). c fele viszont b , tehát d osztja b -t. Másrészt a -t is osztja. d tehát osztja a relatív prím a -t és b -t, ami lehetetlen. Nem igaz tehát, hogy a nem relatív prím c -hez. a és c tehát relatív prímelek. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 32. Tétel

A diádból kétszerézéssel nyert összes szám csak párosszor páros alakban áll elő.*

Kapjuk ugyanis az a diádból kétszerézéssel a tetszőleges sok b , c , d számot. Azt állítom, hogy a b , c , d számok csak párosszor páros alakban állnak elő.

Hogy [a , b , c , d számok] mindegyike előáll párosszor páros alakban, az nyilvánvaló, hiszen a diádból kétszerézéssel kaptuk őket. Azt állítom, hogy csak ilyen alakban állnak elő. Vegyünk ugyanis egy egységet.

Minthogy ekkor az egységgel kezdődően valahány szám mértani sorozatot alkot, és az egység utáni szám, a , prím, az a , b , c , d számok legnagyobbikát, d -t, egyetlen más szám sem osztja, kivéve a -t, b -t és c -t (IX. 13.). S a , b és c mindegyike páros, tehát d csak párosszor páros alakban áll elő. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy b és c mindkettő [szintén] csak párosszor páros alakban állnak elő. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 33. Tétel

Ha egy szám fele páratlan, akkor a szám csak párosszor páratlan alakban áll elő.

Legyen ugyanis az a szám fele páratlan. Azt állítom, hogy a csak párosszor páratlan alakban áll elő.

Hogy párosszor páratlan alakban előáll, az nyilvánvaló, hiszen a fele, mely páratlan, párosszor van meg benne. Most azt állítom, hogy csak ilyen alakban áll elő. Ha ugyanis a előállna párosszor páros alakban, akkor egy páros szám páros számszor lenne meg benne, úgyhogy a felét is osztaná egy páros szám, noha az páratlan, ami ellentmondás. a tehát csak párosszor páratlan alakban áll elő. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 34. Tétel

Ha egy szám sem nem a diádból kétszerézéssel nyertek közül való, sem a fele nem páratlan, akkor mind párosszor páros, mind párosszor páratlan alakban előáll.

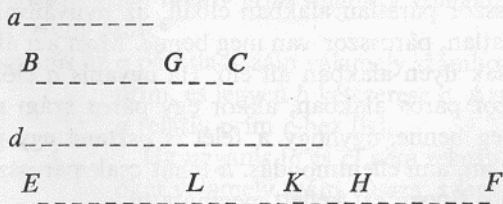
Ne legyen ugyanis az a szám sem a diádból kétszerezéssel nyertek közül való, sem a fele ne legyen páratlan. Azt állítom, hogy a mind párosszor páros, mind párosszor páratlan alakban előáll.

Hogy a párosszor páros alakban előáll, az nyilvánvaló, hiszen a fele nem páratlan. Most azt állítom, hogy párosszor páratlan alakban is előáll. Ha ugyanis a -t megfelezzük és a felét megfelezzük és így tovább, valamely páratlan számhoz jutunk, mely páros számszor van meg a -ban. Ellenkező esetben ugyanis a diádhöz jutnánk, és a a diádból kétszerezéssel nyertek közül való lenne, aminek az ellenkezőjét tettük föl, úgyhogy a előáll párosszor páratlan alakban. Megmutattuk, hogy párosszor páros alakban is előáll. a tehát mind párosszor páros, mind párosszor páratlan alakban előáll. Éppen ezt kellett megmutatni.

IX. 35. Tétel

*Ha valahány szám mértani sorozatot alkot, és mind a második, mind az utolsó tagból az elsővel egyenlő számot vonunk ki, akkor amint a második tag maradéka az első taghoz, úgy aránylik az utolsó maradéka az előtte álló tag összegéhez.**

Alkosson valahány szám, a , BC , d és EF – kezdve a legkisebbel, a -val – mértani sorozatot, és vonjuk ki BC -ből és EF -ből az a -val egyenlő BG -t, illetve FH -t. Azt állítom, hogy amint GC az a -hoz, úgy aránylik EH az a meg BC meg d -hez.



Vegyünk ugyanis egy BC -vel egyenlő FK -t és egy d -vel egyenlő FL -t. Minthogy FK egyenlő BC -vel, s ezekből FH egyenlő BG -vel, a maradék HK egyenlő a maradék GC -vel. Mivel amint EF a d -hez, úgy aránylik d a BC -hez, és BC az a -hoz, és d egyenlő FL -l, BC az

FK-val, a pedig FH-val, amint EF az FL-hez, úgy aránylik LF az FK-hoz és FK az FH-hoz. Széjbontván, amint EL az FL-hez, úgy LK az FK-hoz és KH az FH-hoz (VII. 11., 13.). Amint tehát az egyik előtag az utótagjához, úgy aránylik az előtagok összege az utótagok összegéhez (VII. 12.), amint tehát KH az FH-hoz, úgy EL meg LK meg KH az LF meg FK meg HF-hez. KH viszont egyenlő CG-vel, FH az a-val, LF meg FK meg HF pedig d meg BC meg a-val, amint tehát CG az a-hoz, úgy aránylik EH a d meg BC meg a-hoz. Amint tehát a második tag maradéka az elsőhöz, úgy aránylik az utolsó tag maradéka az előtte álló tagok összegéhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: IX. 36.

IX. 36. Tétel

Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban* képzünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prim nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz.**

Képezzünk ugyanis az egységtől kezdve kétszeres arányban egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prim nem lesz, a, b, c, d -t, legyen e egyenlő az összeggel, és keletkezzék e -vel d -t szorozva FG . Azt állítom, hogy FG tökéletes szám.

$$\begin{array}{cccc}
 a_{--} & b_{----} & c_{-----} & d_{--16--} \\
 e_{--31--} & F_{--31--} & O_{--465--} & G \\
 \\
 H_{--31--} & N_{--31--} & K_{--124--} & m_{--248--} \\
 p_{--?--} & q_{--?--} & &
 \end{array}$$

Vegyünk ugyanis kétszeres arányban e -vel kezdve annyi számot e -t, HK -t, l -et és m -et, ahányan vannak a, b, c és d . Ekkor egyenlő sok tagon át e úgy aránylik m -hez, mint a a d -hez (VII. 14.). e és d szorzata tehát egyenlő a és m szorzatával (VII. 19.). e és d szorzata FG , tehát a és m szorzata egyenlő FG -vel. a -val m -et szorozva tehát FG -t kapjuk, m tehát megvan FG -ben az a -ban levő egységek szerint. a diád, tehát FG kétszerese m -nek. Viszont m, l, HK és e is rendre egymás két-

szeresei, tehát e , HK , l , m és FG mértani sorozatot alkot a kétszeres arányban. Vonjuk ki a második tagból, HK -ből és az utolsóból, FG -ből, az elsővel, e -vel egyenlő HN -t, illetve FO -t. Ekkor amint a második tag maradéka az elsőhöz, úgy aránylik az utolsó tag maradéka az előtte álló tagok összegéhez (IX. 35.), tehát amint NK az e -hez, úgy OG az m meg l meg KH meg e -hez. NK egyenlő e -vel, tehát OG is egyenlő m meg l meg HK meg e -vel. Másrészt FO is egyenlő e -vel, e pedig a meg b meg c meg d meg az egységgel. A teljes FG tehát egyenlő e meg HK meg l meg m meg a meg b meg c meg d meg az egységgel; és ezek osztják. Azt is állítom, hogy FG -t egyetlen más szám sem osztja, csak a , b , c , d , e , HK , l , m és az egység. Tegyük föl ugyanis, hogy FG -t osztja valamely p szám, és p nem azonos az a , b , c , d , e , HK , l , m számok egyikével sem. Legyen annyi egység q -ban, ahányszor megvan p az FG -ben. Ekkor q -val p -t szorozva FG -t kapjuk. Viszont e -vel d -t szorozva is FG -t kapjuk, tehát p úgy aránylik d -hez, mint e a q -hoz (VII. 19.). Mínt hogy az egységgel kezdődően a , b , c és d mértani sorozatot alkotnak, d -t egyetlen más szám sem osztja, csak a , b és c (IX. 13.). Föltettük, hogy p nem azonos a , b , c egyikével sem, tehát p nem osztja d -t. Viszont e úgy aránylik q -hoz, mint p a d -hez, tehát e sem osztja q -t. e prímszám, bármely prímszám viszont bármely számhoz, melyet nem oszt, relatív prím (VII. 29.). e és q tehát relatív prímekek. A relatív prímekek viszont legkisebbek (VII. 21.), a legkisebbek pedig osztják az ugyanabban az arányban álló számokat (VII. 20.), mégpedig az egyik előtag ugyanannyiszor van meg a másik előtagban, mint az egyik utótag a másik utótagban. S p úgy aránylik d -hez, mint e a q -hoz, tehát e ugyanannyiszor van meg p -ben, mint q a d -ben. d -t viszont egyetlen más szám sem osztja, csak a , b és c , tehát q azonos a , b és c egyikével. Legyen b -vel azonos. Vegyünk e -vel kezdődően annyi tagot, e -t, HK -t és l -et, ahányan vannak b , c , d , e , HK , l és b , c , d ugyanabban az arányban állnak, tehát egyenlő sok tagon át e úgy aránylik l -hez, mint b a d -hez (VII. 14.). b és l szorzata tehát egyenlő d és e szorzatával (VII. 19.). d és e szorzata viszont egyenlő p és q szorzatával, tehát p és q szorzata is egyenlő b és l szorzatával. l tehát úgy aránylik p -hez, mint q a b -hez (VII. 19.). q azonos b -vel, tehát l is azonos p -vel, ami lehetetlen, mivel föltettük, hogy p nem azonos az adott számok egyikével sem. Nem osztja tehát FG -t egyetlen szám sem,

csak a, b, c, d, e, HK, l, m és az egység. Megmutattuk, hogy FG egyenlő a meg b meg c meg d meg e meg HK meg l meg m meg az egységgel. Egy szám viszont tökéletes, ha egyenlő az osztói összegével: FG tehát tökéletes szám. Éppen ezt kellett megmutatni.

Tizedik könyv

Definíciók

1. Mennyiségeket összemérhetőeknek mondunk, ha ugyanazon mértékkel mérhetőek, összemérhetetleneknek pedig, ha nem található hozzájuk közös mérték.
2. Szakaszok négyzetesen összemérhetőek, ha a négyzeteik ugyanazon idommal mérhetőek, összemérhetetleneknek pedig, ha a négyzeteikhez nem található idom, mely közös mérték lenne.*
3. Ezek alapján megmutatjuk, hogy adott szakasszal végtelen sok összemérhető és – akár csak lineárisan, akár négyzetesen is – összemérhetetlen szakasz létezik (vö. X. 10.)*. Nevezzük az adott szakaszt racionálisnak, és a vele – akár lineárisan és négyzetesen, akár csak négyzetesen – összemérhető szakaszokat racionálisoknak, a vele összemérhetetleneket pedig irracionálisoknak.**
4. És nevezzük az adott szakasz négyzetét racionálisnak, és az azzal összemérhető felületeket racionálisoknak, az azzal összemérhetetleneket pedig irracionálisoknak, és az őket előállító szakaszokat – ti. ha a felületek négyzetek, magukat az oldalakat, ha pedig valamely más sokszögek, a velük egyenlő négyzeteket fölrajzoló szakaszokat* – irracionálisoknak.

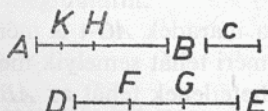
X. 1. Tétel

Ha adva van két nem egyenlő mennyiség, és a nagyobból levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy

olyan mennyiség fog megmaradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.

Legyen AB és c két nem egyenlő mennyiség, és közülük AB a nagyobb. Azt állítom, hogy ha AB -ből levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.

c valamely többszöröse ugyanis nagyobb lesz AB -nél (vö. V. 4. D.). Többszörözzük, és legyen DE a c -nek többszöröse és AB -nél nagyobb, bontsuk föl DE -t a c -vel egyenlő DF , FG , GE mennyiségekre, vonjuk le AB -ből a felénél nagyobb BH -t, AH -ből a felénél nagyobb HK -t, és így tovább, míg az AB -beli osztályok száma egyenlő nem lesz a DE -beliekével.



Legyen az AK , KH , HB osztályok száma egyenlő a DF , FG , GE osztályokéval. Minthogy DE nagyobb AB -nél, és DE -ből a felénél kisebb EG -t, AB -ből pedig a felénél nagyobb BH -t vontuk le, a GD maradék nagyobb a HA maradéknál. Minthogy GD nagyobb HA -nál, és GD -ből a felét, GF -et, HA -ból pedig a felénél nagyobb HK -t vontuk le, a DF maradék nagyobb az AK maradéknál. DF viszont egyenlő c -vel, tehát c is nagyobb AK -nál. AK tehát kisebb c -nél.

Az AB mennyiségből tehát egy olyan AK mennyiség marad meg, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél, c -nél. Éppen ezt kellett megmutatni. – Hasonló a bizonyítás, ha a fele részeket vonjuk le.

F.: X. 2.; XII. 2., 5., 10., 12., 16.

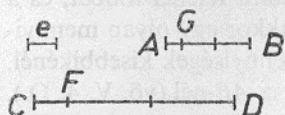
X. 2. Tétel

Ha van két nem egyenlő mennyiség, a kisebbet váltakozva mindig kivonjuk a nagyobból, és a maradék sosem méri az előzőt, akkor a mennyiségek összemérhetetlenek.

Legyen AB és CD két nem egyenlő mennyiség, AB a kisebb, és a kisebbet váltakozva mindig kivonván a nagyobból, a maradék sosem mérje az előzőt. Azt állítom, hogy az AB , CD mennyiségek összemérhetetlenek.

Ha ugyanis összemérhető, méri őket valamely mennyiség. Mérje őket egy e mennyiség. AB mérje FD -t, és legyen a nála kisebb maradék

CF , CF mérje BG -t és legyen a nála kisebb maradék AG , és így tovább, amíg egy olyan mennyiség nem marad, mely kisebb e -nél (X. 1.). Történt légyen ez meg, és legyen AG az e -nél kisebb maradék. Minthogy



e mérí AB -t, AB viszont mérí DF -et, e is mérí FD -t (3. E.). Másrészt a teljes CD -t is mérí, tehát a maradék CF -et is mérí (2. E.). CF viszont mérí BG -t, tehát e is mérí BG -t. Másrészt a teljes AB -t is mérí, tehát

a maradék AG -t is mérí, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem mérí tehát semelyik mennyiség az AB , CD mennyiségeket: összemérhetetlenek tehát az AB , CD mennyiségek.

Ha tehát van két nem egyenlő mennyiség... s a többi.

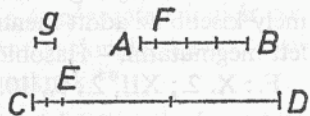
F.: X. 3. v.ö. II. 9.*

X. 3. Tétel

Keressük meg két adott összemérhető mennyiség legnagyobb közös mértékét!

Legyen az adott két összemérhető mennyiség AB és CD , s közülük AB a kisebb. Az AB , CD mennyiségeknek kell tehát megkeresni a legnagyobb közös mértékét.

Az AB mennyiség vagy mérí CD -t, vagy nem. Ha mérí – önmagát szintén mérí – akkor AB közös mértéke AB -nek és CD -nek. És nyilván a legnagyobb, AB -nél nagyobb mennyiség ugyanis nem osztja AB -t.



Ne mérje most AB a CD -t. Ekkor a kisebbet váltakozva mindig kivonva a nagyobból a maradék egyszer mérni fogja az előzőt, mivel AB és CD nem összemérhetetlen (X. 2.). AB mérje ED -t, és legyen a nála kisebb maradék EC , EC mérje FB -t, és legyen a nála kisebb maradék AF , s AF mérje CE -t.

Minthogy AF mérí CE -t, CE viszont mérí FB -t, AF is mérí FB -t (3. E.). Másrészt önmagát is mérí, tehát a teljes AB -t is mérí AF . Viszont AB mérí DE -t, tehát AF is mérí ED -t. Másrészt CE -t is mérí, tehát a teljes CD -t is mérí: AF tehát közös mértéke AB -nek és CD -nek. Azt állítom, hogy a legnagyobb. Ellenkező esetben ugyanis létezik egy AF -nél nagyobb mennyiség, mely mérí AB -t és CD -t.

ez g . Minthogy g méri AB -t, AB pedig méri ED -t, g is méri ED -t. Másrészt a teljes CD -t is méri, g tehát méri a maradék CE -t. CE viszont méri FB -t, tehát g is méri FB -t. Másrészt a teljes AB -t is méri, így a maradék AF -et is méri, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem méri tehát semelyik AF -nél nagyobb mennyiség AB -t és CD -t: AF tehát AB -nek és CD -nek a legnagyobb közös mértéke.

Megtaláltuk tehát két adott összemérhető mennyiség, AB és CD legnagyobb közös mértékét. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 4.

Következmény

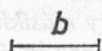
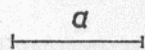
Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy mennyiség mér két mennyiséget, akkor a legnagyobb közös mértéküket is méri.

F.: X. 4.

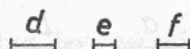
X. 4. Tétel

Keressük meg három adott összemérhető mennyiség legnagyobb közös mértékét!

Legyen az adott három összemérhető mennyiség a , b és c . a -nak, b -nek és c -nek kell tehát megkeresni a legnagyobb közös mértékét.



Vegyük ugyanis kettőnek, a -nak és b -nek a legnagyobb közös mértékét (X. 3.). Ez legyen d . d vagy méri c -t, vagy nem [méri].



Mérje először. Minthogy d méri c -t, és méri a -t és b -t is, d méri a -t, b -t és c -t. d tehát közös mértéke a -nak, b -nek és c -nek. S nyilvánvaló az is, hogy a legnagyobb, d -nél nagyobb mennyiség ugyanis nem méri a -t és b -t.

Ne mérje most d a c -t. Azt állítom először is, hogy c és d összemérhető. Minthogy ugyanis a , b és c összemérhető, méri őket valamely mennyiség, mely nyilván a -t és b -t is méri, úgyhogy a és b legnagyobb közös mértékét, d -t is méri (X. 3. K.). Másrészt c -t is méri, úgyhogy az említett mennyiség méri c -t és d -t: összemérhető tehát c és d . Vegyük hát a legnagyobb közös mértéküket (X. 3.). Ez legyen e . Minthogy e méri d -t, d ellenben méri a -t és b -t, e is méri a -t és b -t. Viszont c -t is méri, tehát e méri a -t, b -t és c -t: e közös mértéke a -nak, b -nek és c -nek. Azt állítom, hogy e a legnagyobb. Ellenkező esetben ugyanis legyen

f valamely e -nél nagyobb mennyiség, mely méri a -t, b -t és c -t. Minthogy f méri a -t, b -t és c -t, a -t és b -t is méri, meg a és b legnagyobb közös mértékét is méri. a és b legnagyobb közös mértéke viszont d , f tehát méri d -t. Másrészt c -t is méri, tehát f méri c -t és d -t, tehát c és d legnagyobb közös mértékét is méri f . Ez viszont e , tehát f méri e -t, a nagyobb a kisebbet, ami lehetetlen. Nem méri tehát semelyik e -nél nagyobb mennyiség a -t, b -t és c -t: e tehát a legnagyobb közös mértéke a -nak, b -nek és c -nek, ha d nem méri c -t, ha pedig méri, maga c .

Megtaláltuk tehát három adott összemérhető mennyiség legnagyobb közös mértékét. [Éppen ezt kellett megmutatni.]

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha egy mennyiség mér három mennyiséget, akkor a legnagyobb közös mértéküket is méri.

Hasonlóképp nyerhető több mennyiség esetén is a legnagyobb közös mérték, és a következmény is igaz marad.

X. 5. Tétel

*Összemérhető mennyiségek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy szám egy másikhoz.**

Legyenek a és b összemérhető mennyiségek. Azt állítom, hogy a úgy aránylik b -hez, mint egy szám egy másikhoz.

Minthogy ugyanis a és b összemérhető, méri őket valamely mennyiség. Mérje egy c mennyiség. Legyen annyi egység d -ben, ahányszor megvan c az a -ban, s annyi egység legyen e -ben, ahányszor megvan c a b -ben.

Minthogy c a d -beli egységek számaszor van meg a -ban, s az egység d -ben szintén az abban levő egységek számaszor van meg, az egység ugyanannyiszor van meg a d számban, mint a c mennyiség a -ban. Amint tehát c az a -hoz, úgy aránylik az egység d -hez, s fordítva, amint a a c -hez, úgy d az egységhez (V. 7. K.). Ismét, minthogy c az e -beli egységek számaszor van meg b -ben, s az egység e -ben szintén az abban levő egységek számaszor van meg, az egység ugyanannyiszor van meg e -ben, mint c a b -ben. Amint tehát c a b -hez, úgy aránylik az egység e -hez. Megmutattuk, hogy amint a a c -hez, úgy aránylik d az

egységhez, egyenlő sok tagon át tehát amint a a b -hez, úgy aránylik a d szám e -hez (V. 22.).

Az a , b összemérhető mennyiségek tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint a d szám az e számhoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 8–9., 11–12.

X. 6. Tétel

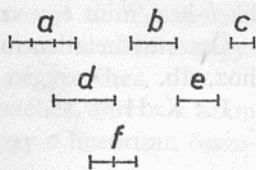
Ha két mennyiség úgy aránylik egymáshoz, mint egy szám egy másikhoz, akkor összemérhetőek a mennyiségek.

Arányuljék ugyanis úgy egymáshoz két mennyiség, a és b , mint a d szám az e számhoz. Azt állítom, hogy összemérhetőek az a , b mennyiségek.

Ahány egység van d -ben, annyi egyenlő részre bontsuk föl a -t*, és az egyikükkel legyen egyenlő c , és ahány egység van e -ben, annyi c -vel egyenlő mennyiségből álljon f .

Mínthogy tehát a -ban annyi c -vel egyenlő mennyiség van, ahány egység van d -ben, c ugyanaz a hányada a -nak, mint az egység d -nek.

Az egység osztja a d számot, tehát c méri a -t. Mínthogy az egység úgy aránylik d -hez, mint c az a -hoz, fordítva d úgy aránylik az egységhez, mint a a c -hez (V. 7. K.). Ismét, mínthogy f -ben annyi c -vel egyenlő mennyiség van, ahány egység e -ben, az egység úgy aránylik e -hez, mint c az f -hez. Megmutat-



tuk, hogy d úgy aránylik az egységhez, mint a a c -hez, így egyenlő sok tagon át d úgy aránylik e -hez, mint a az f -hez (V. 22.). Amint viszont d az e -hez, úgy aránylik a a b -hez, a tehát úgy aránylik f -hez, mint b -hez (V. 11.). a -nak tehát b , f mindegyikéhez ugyanaz az aránya, b tehát egyenlő f -fel (V. 9.). c viszont méri f -et, tehát b -t is méri. Másrészt a -t is méri; c tehát méri a -t és b -t: a és b összemérhető.

Ha tehát két mennyiség úgy aránylik egymáshoz... s a többi.

F.: X. 7., 9., 9. K., 11–12., 18., 26., 29., 34., 36., 38–40., 44., 48–55., 57., 75., 85–87., 89–90.; XIII. 6.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha van két szám, d és e , és egy szakasz, a , akkor elérhető, hogy a szakasz úgy arányuljék egy másik szakasz-

hoz, mint a d szám az e számhoz. Ha pedig vesszük a és f középarányosát (VI. 13.), b -t, akkor amint a az f -hez, úgy aránylik a négyzete b négyzetéhez, azaz amint az első szakasz a harmadikhoz, úgy az első emelt (sokszög) a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezkedő (sokszög)höz (VI. 19. K.). Amint viszont a az f -hez, úgy aránylik d szám az e számhoz. Elértük tehát, hogy amint a d szám az e számhoz, úgy aránylik a négyzete b négyzetéhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 10., 29–30., 48–53., 86–88.

X. 7. Tétel

Összemérhetetlen mennyiségek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint egy szám egy másikhoz.

Legyenek a és b összemérhetetlen mennyiségek. Azt állítom, hogy a nem úgy aránylik b -hez, mint egy szám egy másikhoz.

Ha ugyanis a úgy aránylik b -hez, mint egy szám egy másikhoz, akkor a összemérhető b -vel (X. 6.). De nem az, tehát a nem úgy aránylik b -hez, mint egy szám egy másikhoz.

Összemérhetetlen mennyiségek tehát nem úgy aránylanak egymáshoz, stb.

F.: X. 11.

X. 8. Tétel

Ha két mennyiség nem úgy aránylik egymáshoz, mint egy szám egy másikhoz, akkor összemérhetetlenek a mennyiségek.

Ne arányuljék ugyanis egymáshoz két mennyiség, a és b úgy, mint egy szám egy másikhoz. Azt állítom, hogy az a és b mennyiség összemérhetetlen.

Ha ugyanis összemérhetők, a úgy aránylik b -hez, mint egy szám egy másikhoz (X. 5.). De nem úgy aránylik, tehát az a és b mennyiség összemérhetetlen.

F.: X. 11.

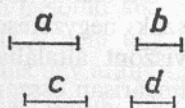
X. 9. Tétel

A lineárisan összemérhető szakaszokra emelt négyzetek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy másikhoz; és az oly négyzeteknek, melyek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám

egy másikhoz, lineárisan összemérhetők az oldalaik. A lineárisan összemérhetetlen szakaszokra emelt négyzetek viszont nem úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy másikhoz; és az oly négyzeteknek, melyek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy másikhoz, az oldalaik sem lineárisan összemérhetők.

Legyen ugyanis a és b lineárisan összemérhető. Azt állítom, hogy a négyzete úgy aránylik b négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy másikhoz.

Mínthogy ugyanis a lineárisan összemérhető b -vel, a úgy aránylik b -hez, mint egy szám egy másikhoz (X. 5.). Arányuljék úgy, mint c a d -hez. Mínthogy amint a a b -hez, úgy aránylik c a d -hez, és a -nak b -hez való arányának kétszerese a négyzetének b négyzetéhez való aránya – hasonló sokszögek ugyanis egymással a megfelelő oldalakhoz képest kétszeres arányban állnak (VI. 20. 1. K.) –, c -nek d -hez való arányának pedig kétszerese c négyzetének d négyzetéhez való aránya – két négyzetszám között ugyanis van egy középarányos szám, és a négyzetszámok egymással az oldalaikhoz képest kétszeres arányban állnak (VIII. 11.) –, amint tehát a négyzete b négyzetéhez, úgy aránylik c négyzete d négyzetéhez.



Arányuljék most amint a négyzete b négyzetéhez, úgy a szám négyzete a d szám négyzetéhez. Azt állítom, hogy a lineárisan összemérhető b -vel.

Mínthogy ugyanis amint a négyzete b négyzetéhez, úgy aránylik c négyzete d négyzetéhez, és a négyzetének b négyzetéhez való aránya kétszerese a -nak b -hez való arányának, c négyzetének d négyzetéhez való aránya pedig kétszerese c -nek d -hez való arányának, amint a a b -hez, úgy aránylik c a d -hez. a tehát úgy aránylik b -hez, mint a c szám a d számhoz; lineárisan összemérhető tehát a a b -vel (X. 6.).

Legyen most a lineárisan összemérhetetlen b -vel. Azt állítom, hogy a négyzete nem úgy aránylik b négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz.

Ha ugyanis a négyzete úgy aránylik b négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, akkor a összemérhető b -vel. De nem az, a négyzete tehát nem úgy aránylik b négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz.

Ha ugyanis a négyzete úgy aránylik b négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, akkor a összemérhető b -vel. De nem az, a négyzete tehát nem úgy aránylik b négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz.

Megfordítva, most ne arányulják úgy a négyzete b négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz. Azt állítom, hogy a lineárisan összemérhetetlen b -vel.

Ha ugyanis a összemérhető b -vel, a négyzete úgy aránylik b négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz. De nem úgy aránylik, tehát a nem mérhető össze lineárisan b -vel.

Tehát a lineárisan összemérhető . . . stb.

F.: X. 10., 29–30., 48–53., 85–90., 114.; XIII. 6., 11.

Következmény

S a bizonyítottakból világos, hogy a lineárisan összemérhető szakaszok négyzetesen is összemérhetőek, a négyzetesen összemérhetőek viszont általában nem mérhetőek össze lineárisan is [minthogy a lineárisan összemérhető szakaszokra emelt négyzetek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, s mennyiségek, melyek úgy aránylanak, mint egy szám egy másikhoz, összemérhetőek (X. 6.); úgyhogy a lineárisan összemérhető szakaszok nemcsak lineárisan, hanem négyzetesen is összemérhetőek.

Másrészt, minthogy amely négyzetek úgy aránylanak egymáshoz, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, mint megmutattuk, lineárisan összemérhetőek, és négyzetesen is összemérhetőek, mivel úgy aránylanak, mint egy szám egy számhoz, így amely négyzetek nem úgy aránylanak, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, hanem csak mint egy szám egy számhoz, maguk ugyan négyzetesen összemérhetőek, de lineárisan nem; úgyhogy a lineárisan összemérhető négyzetek négyzetesen is összemérhetőek, a négyzetesen összemérhetőek viszont általában nem mérhetőek össze lineárisan is, hacsak nem úgy aránylanak, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz.

Azt állítom, hogy a lineárisan összemérhetetlen szakaszok általában nem négyzetesen is összemérhetetlenek, minthogy előfordulhat, hogy a négyzetesen összemérhető szakaszok nem úgy aránylanak, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, és ezért – noha négyzetesen összemérhetőek – lineárisan összemérhetetlenek; úgyhogy a lineárisan összemérhetetlen szakaszok általában nem négyzetesen is összemérhetetlenek, hanem – noha lineárisan összemérhetetlenek – négyzetesen lehetnek mind összemérhetetlenek, mind összemérhetőek.

A négyzetesen összemérhetetlen szakaszok viszont mind lineárisan is összemérhetetlenek; ha ugyanis lineárisan összemérhetőek, akkor négyzetesen is összemérhetőek. De feltevés szerint összemérhetetlenek, ami ellentmondás. A négyzetesen összemérhetetlen szakaszok tehát lineárisan is összemérhetetlenek.

F.: X. 19. L.

X. 10. Lemma

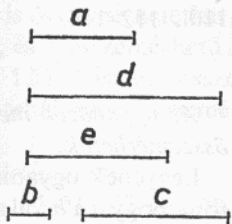
Megmutattuk az aritmetikai könyvekben, hogy hasonló síkszámok úgy aránylanak egymáshoz, mint két négyzetszám (VIII. 26.), és hogyha két szám úgy aránylik egymáshoz, mint két négyzetszám, akkor hasonló síkszámok.* S ebből világos, hogy nem hasonló síkszámok – azaz amelyeknek nem arányosak az oldalaik – nem úgy aránylanak egymáshoz, mint két négyzetszám. Ha ugyanis úgy aránylanak, akkor hasonló síkszámok, aminek az ellenkezőjét tettük föl. A nem hasonló síkszámok tehát nem úgy aránylanak egymáshoz, mint két négyzetszám.

X. 10. Tétel

Adott szakaszhoz keressünk két másikat, melyek egyike csak lineárisan, másika négyzetesen is összemérhetetlen vele!

Legyen a az adott szakasz. Két szakaszt kell tehát keresni, melyek egyike csak lineárisan, másika négyzetesen is összemérhetetlen a -val.

Vegyünk ugyanis két számot b -t és c -t, melyek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint két négyzetszám, azaz nem hasonló síkszámok (L.), és arányulják amint b a c -hez, úgy a négyzete d négyzetéhez – ezt el tudjuk érni (X. 6. K.). Ekkor a négyzete összemérhető d négyzetével (X. 6.). Minthogy b nem úgy aránylik c -hez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, a négyzete sem úgy aránylik d négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy négyzetszámhoz, tehát a lineárisan összemérhetetlen d -vel (X. 9.). Vegyük a és d középarányosát, e -t (VI. 13.). Ekkor amint a a d -hez, úgy aránylik a négyzete e négyzetéhez (VI. 19. K.). a lineárisan összemérhetetlen d -vel, tehát a négyzete is összemérhetetlen e négyzetével (X. 11.), tehát a négyzetesen összemérhetetlen e -vel.



Találtunk tehát az adott a szakaszhoz két szakaszt, melyek egyike, d , csak lineárisan, másika, e , négyzetesen és nyilván lineárisan is összemérhetetlen vele. [Éppen ezt kellett megmutatni.]

F.: X. 27–28.

X. 11. Tétel

Ha négy mennyiség arányos, és az első összemérhető a másodikkal, akkor a harmadik is összemérhető a negyedikkel; és ha az első összemérhetetlen a másodikkal, akkor a harmadik is összemérhetetlen a negyedikkel.

Legyen a , b , c és d négy arányos mennyiség: amint a a b -hez, úgy c a d -hez, és legyen a összemérhető b -vel. Azt állítom, hogy c is összemérhető d -vel.

Minthogy ugyanis a összemérhető b -vel, a úgy aránylik b -hez, mint egy szám egy számhoz (X. 5.). c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, tehát c szintén úgy aránylik d -hez, mint egy szám egy számhoz (V. 11.); c tehát összemérhető d -vel (X. 6.).

Ne legyen most a összemérhető b -vel. Azt állítom, hogy c sem összemérhető d -vel. Minthogy ugyanis a összemérhetetlen b -vel, a nem úgy aránylik b -hez, mint egy szám egy számhoz (X. 7.), c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, tehát c a d -hez szintén nem úgy aránylik, mint egy szám egy számhoz (V.11.); c tehát összemérhetetlen d -vel (X. 8.).

Ha tehát négy mennyiség arányos . . . stb.

F.: X. 10., 12., 14., 19–20., 22–24., 26–28., 31–35., 38., 41., 44., 47., 54–55., 57–63., 65–68., 71–73., 75., 78., 81., 84., 91–94., 97., 99–105., 110., 112–114.

X. 12. Tétel

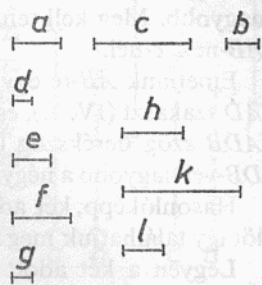
Az ugyanazon mennyiséggel összemérhető mennyiségek egymással is összemérhetők.

Legyenek ugyanis a és b mindketten összemérhetők c -vel. Azt állítom, hogy a a b -vel szintén összemérhető.

Minthogy ugyanis a összemérhető c -vel, a úgy aránylik c -hez, mint egy szám egy számhoz (X. 5.). Arányuljék mint d az e -hez. Ismét, minthogy c összemérhető b -vel, c úgy aránylik b -hez, mint egy

szám egy számhoz. Arányuljék mint f a g -hez, és vegyünk e valahány adott arányhoz, d -nek e -hez és f -nek g -hez való arányához, számokat, melyek rendre az adott arányokban állnak, h -t, k -t és l -et, úgyhogy amint d az e -hez, úgy h a k -hoz, amint pedig f a g -hez, úgy k az l -hez (VIII. 4.).

Minthogy amint a a c -hez, úgy aránylik d az e -hez, amint pedig d az e -hez, úgy h a k -hoz, h úgy aránylik k -hoz, mint a a c -hez (V. 11.). Ismét, minthogy amint c a b -hez, úgy aránylik f a g -hez, amint pedig f a g -hez, úgy k az l -hez, k úgy aránylik l -hez, mint c a b -hez. Másrészt h úgy aránylik k -hoz, mint a a c -hez, egyenlő sok tagon át tehát h úgy aránylik l -hez, mint a a b -hez (V. 22.). a tehát úgy aránylik b -hez, mint a h szám az l számhoz; a tehát összemérhető b -vel (X. 6.).



Az ugyanazon a mennyiséggel összemérhető mennyiségek tehát egymással is összemérhetők. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 13., 17., 19., 22., 54., 58., 66., 69., 91., 103., 111–114.

X. 13. Tétel

Ha két mennyiség összemérhető, és az egyikük összemérhetetlen valamely mennyiséggel, akkor a másik is összemérhetetlen ugyanezzel a mennyiséggel.

Legyen a és b két összemérhető mennyiség, és legyen az egyikük, a , összemérhetetlen valamely harmadik c mennyiséggel. Azt állítom, hogy a másik mennyiség, b is összemérhetetlen c -vel. Ha ugyanis b összemérhető c -vel, és a összemérhető b -vel, akkor a is összemérhető c -vel (X. 12.). Viszont összemérhetetlen is vele, ami lehetetlen. b tehát nem összemérhető c -vel: összemérhetetlen tehát.

Ha tehát két mennyiség összemérhető... stb.

F.: X. 18., 21., 22–23., 26., 35–36., 38., 44., 54–61., 63–64., 66., 68., 75., 81., 92–93., 99., 103–105., 108–109., 111., 113.

X. 14. Lemma

Két adott nem egyenlő szakaszhoz keressük meg, mennyivel nagyobb a négyzetértéke a nagyobbak a kisebbnél.

Legyen a két adott nem egyenlő szakasz AB és c , és közülük AB a nagyobb. Meg kell tehát keresni, mennyivel nagyobb a négyzetértéke AB -nek c -nél.

Emeljünk AB -re egy ADB félkört, illesszünk bele egy c -vel egyenlő AD szakaszt (IV. 1.), és húzzuk meg DB -t. Ekkor nyilvánvaló, hogy az ADB szög derékszög (III. 31.), és hogy AB -nek AD -nél, azaz c -nél DB -vel nagyobb a négyzetértéke (I. 47.).

Hasonlóképp, két adott szakaszhoz összegükkel négyzetesen egyenlőt így találhatjuk meg:

Legyen a két adott szakasz AD és DB , és kelljen megkeresni az összegükkel négyzetesen egyenlő szakaszt. Helyezzük őket úgy el, hogy AD és DB derékszöget fogjon közre, és húzzuk meg AB -t. Ismét nyilvánvaló, hogy AD és DB négyzetesen vett összege AB . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 14., 48., 85–90., XIII. 11.

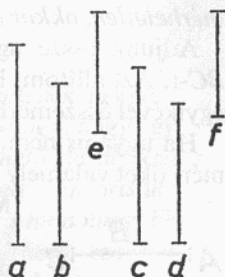
X. 14. Tétel

*Ha négy szakasz arányos, és az első négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a másodikénál, akkor a harmadik négyzetértéke is egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a negyedikénél. S ha az első négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a másodikénál, akkor a harmadik négyzetértéke is egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a negyedikénél.**

Legyen a , b , c és d négy arányos szakasz: amint a a b -hez, úgy c a d -hez, és legyen a négyzetértéke e négyzetével nagyobb b -énél, c négyzetértéke pedig f négyzetével nagyobb d -énél (L.). Azt állítom, hogy ha a összemérhető e -vel, akkor c is összemérhető f -fel, ha pedig a összemérhető e -vel, akkor c is összemérhető f -fel.

Mint hogy ugyanis amint a a b -hez, úgy aránylik c a d -hez, amint a négyzete b négyzetéhez, úgy aránylik c négyzete d négyzetéhez (VI. 22.). a négyzetével viszont egyenlő e és b négyzetösszege, c -ével pedig d és f négyzetösszege. Amint tehát e és b négyzetösszege b négyzetéhez, úgy

aránylik d és f négyzetösszege d négyzetéhez. Szétbontva tehát, amint e négyzete b négyzetéhez, úgy f négyzete d négyzetéhez (V. 17.); amint tehát e a b -hez, úgy f a d -hez (VI. 22.); invertálva tehát amint b az e -hez, úgy d az f -hez (V. 7. K.). Másrészt amint a a b -hez, úgy c a d -hez, egyenlő sok tagon át tehát amint a az e -hez, úgy c az f -hez (V. 22.). Ha tehát a összemérhető e -vel, c is összemérhető f -fel, ha pedig a összemérhetetlen e -vel, c is összemérhetetlen f -fel (X. 11.).



Ha tehát... stb.

F.: X. 31–32., 66., 103., 112–113.

X. 15. Tétel

Ha összeadunk két összemérhető mennyiséget, akkor az összeg mindkettőjünkkel összemérhető; s ha az összeg egyikükkel összemérhető, akkor a tagok is összemérhetők.

Adjunk össze ugyanis két összemérhető mennyiséget, AB -t és BC -t. Azt állítom, hogy az AC összeg az AB , BC mennyiségek mindegyikével összemérhető.

Mínthogy ugyanis az AB , BC mennyiségek összemérhetők, méri őket valamely mennyiség. Mérje egy d mennyiség. Mínthogy d méri az AB , BC mennyiségeket, az AC összeget is méri (1. E.). Viszont AB -t és BC -t is méri; d tehát méri AB -t, BC -t és AC -t: összemérhető tehát AC az AB , BC mennyiségek mindegyikével.

Legyen most AC összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy AB és BC is összemérhetők.

Mínthogy ugyanis az AC , AB mennyiségek összemérhetők, méri őket valamely mennyiség. Mérje egy d mennyiség. Mínthogy d méri a CA , AB mennyiségeket, a maradék BC -t is méri (2. E.). Viszont AB -t is méri; d tehát méri AB -t és BC -t: összemérhetők tehát az AB , BC mennyiségek.

Ha tehát összeadunk két... stb.

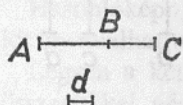
F.: X. 17., 26., 36., 38., 54–55., 60–62., 73., 75., 91–93., 98–99., 111–113.

X. 16. Tétel

Ha összeadunk két összemérhetetlen mennyiséget, akkor az összeg mindkettejükkel összemérhetetlen; s ha az összeg egyikükkel összemérhetetlen, akkor a tagok is összemérhetetlenek.

Adjunk össze ugyanis két összemérhetetlen mennyiséget, AB -t és BC -t. Azt állítom, hogy az AC összeg az AB , BC mennyiségek mindegyikével összemérhetetlen.

Ha ugyanis nem összemérhetetlenek a CA , AB mennyiségek, akkor méri őket valamely mennyiség. Tegyük föl, hogy méri egy d mennyiség.



Mínt hogy d méri a CA , AB mennyiségeket, a maradék BC -t is méri. Viszont AB -t is méri; d tehát méri AB -t és BC -t: összemérhető tehát AB és BC .

Feltétel szerint viszont összemérhetetlenek is, ami lehetetlen. Nem méri tehát semmilyen mennyiség a CA , AB mennyiségeket: CA és AB összemérhetetlenek. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy AC és CB is összemérhetetlenek. AC tehát összemérhetetlen az AB , BC mennyiségek mindegyikével.

Legyen most AC összemérhetetlen az AB , BC mennyiségek egyikével, méghozzá először AB -vel. Azt állítom, hogy az AB , BC mennyiségek is összemérhetetlenek.

Ha ugyanis összemérhető, méri őket valamely mennyiség. Mérje egy d mennyiség. Mínt hogy d méri az AB , BC mennyiségeket, az AC összeget is méri. Viszont AB -t is méri; d tehát méri CA -t és AB -t: összemérhető tehát CA és AB . Feltétel szerint viszont összemérhetetlenek is, ami lehetetlen. Nem méri tehát semmilyen mennyiség az AB , BC mennyiségeket: AB és BC összemérhetetlenek.

Ha tehát összeadunk két... stb.

F.: X. 18., 26., 36–37., 39–40., 73–74., 76–77.

X. 17. Lemma

Ha egy szakaszhoz úgy illesztünk egy paralelogrammát, hogy egy négyzet marad fenn, akkor az odaillesztett paralelogramma egyenlő a szakasznak az illesztés révén keletkezett szeletei közötti téglalappal.

Illesszünk ugyanis úgy az AB szakaszhoz egy AD paralelogrammát, hogy egy DB négyzet maradjon fenn. Azt állítom, hogy AD egyenlő az AC és CB közötti téglalappal.

Ez eleve nyilvánvaló: minthogy ugyanis DB négyzet, DC egyenlő CB -vel, és AD az AC és CD , azaz AC és CB közötti téglalap.

Ha tehát egy szakaszhoz... stb.

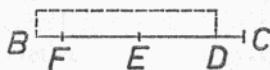
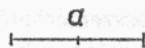
F.: X. 17–18.

X. 17. Tétel

Ha van két nem egyenlő szakasz, és a kisebb négyzetének negyed-részevel egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fenn, és e szakasz lineárisan összemérhető darabokra bomlik, akkor a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél; s ha a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél, és a kisebb négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fenn, akkor e szakasz lineárisan összemérhető darabokra bomlik.*

Legyen a és BC két nem egyenlő szakasz, közülük BC a nagyobb, és illesszünk a kisebb a négyzetének negyedével, azaz a felének négyzetével egyenlő paralelogrammát BC -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.). Legyen az odaillesztett alakzat a BD és DC közötti téglalap (L.), és BD lineárisan összemérhető DC -vel. Azt állítom, hogy BC négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a -énál.

Legyen ugyanis BC felezőpontja E (I. 10.), és mérjünk föl egy DE -vel egyenlő EF -et (I. 3.). Ekkor a maradék DC egyenlő BF -fel. Mint-hogy a BC szakaszt kettéosztottuk egyenlő részekre az E és nem egyenlőkre a D pontban, a BD és DC közötti téglalapnak és ED négyzetének az összege egyenlő EC négyzetével (II. 5.), szintúgy a négyszeresek: a BD és DC közötti téglalap négyszerese meg DE négyzete négyszerese egyenlő EC négyzetének négyszeresével. Viszont a BD és DC közötti téglalap négyszeresével egyenlő a négyzete, DE négyzetének négyszeresével egyenlő DF négyzete – DF ugyanis kétszerese DE -nek –, EC négyzetének négyszeresével pedig egyenlő BC négyzete – ismét mert BC kétszerese CE -nek. a és DF négyzetösszege tehát egyenlő BC négyzetével, úgyhogy BC négyzete DF négyzetével nagyobb a négyzeténél,



BC négyzetértéke tehát DF -fel nagyobb a -énál. Azt kell még megmutatni, hogy BC összemérhető DF -fel. Minthogy BD lineárisan összemérhető DC -vel, BC is lineárisan összemérhető CD -vel (X. 15.). Másrészt CD lineárisan összemérhető CD és BF összegével, mert CD egyenlő BF -fel. BC is lineárisan összemérhető tehát BF és CD összegével (X. 12.), úgyhogy az FD maradék is lineárisan összemérhető BC -vel: BC négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a -énál.

Legyen most BC négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a -énál, és illesszünk egy a négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát BC -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn. Legyen az odaillesztett alakzat a BD és DC közötti téglalap. Azt kell megmutatni, hogy BD lineárisan összemérhető DC -vel.

Az előbbiekkal azonos lépésekkel hasonlóképp mutatható meg, hogy BC négyzetértéke FD négyzetével nagyobb a -énál. BC négyzetértéke viszont egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a -énál, tehát BC lineárisan összemérhető FD -vel, úgyhogy a maradék BF meg DC összeggel is lineárisan összemérhető BC (X. 15.). BF és DC összege viszont [lineárisan] összemérhető DC -vel (X. 6.), úgyhogy BC is lineárisan összemérhető CD -vel (X. 12.), és szétbontva BD lineárisan összemérhető DC -vel (X. 15.).

Ha tehát van két nem egyenlő szakasz... stb.

F.: X. 54–55., 60–62., 91–93., 97–98.

X. 18. Tétel

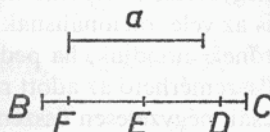
*Ha van két nem egyenlő szakasz, és a kisebb négyzetének negyed-részeivel egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fenn, és e szakasz [lineárisan] összemérhetetlen darabokra bomlik, akkor a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél; s ha a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél, és a kisebb négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fenn, akkor a szakasz [lineárisan] összemérhetetlen darabokra bomlik.**

Legyen a és BC két nem egyenlő szakasz, közülük BC a nagyobb, és illesszünk egy, a kisebb a négyzetének negyedével egyenlő paralelog-

rammát BC -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fön (VI. 28.). Legyen az odaillesztett alakzat a BD és DC közötti téglalap (X. 17. L.), és BD lineárisan összemérhetetlen DC -vel. Azt állítom, hogy BC négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a -énál.

Az előző tételbeliekkel azonos lépések során hasonlóképp mutatható meg, hogy BC négyzetértéke FD négyzetével nagyobb a -énál.

Azt kell megmutatni, hogy BC lineárisan összemérhetetlen DF -fel. Minthogy BD lineárisan összemérhetetlen DC -vel, BC is lineárisan összemérhetetlen CD -vel (X. 16.). DC viszont összemérhető BF és DC összegével (X. 6.), tehát BC a BF és DC összegével



is összemérhetetlen (X. 13.), úgyhogy a maradék FD -vel is lineárisan összemérhetetlen BC (X. 16.). S BC négyzetértéke FD négyzetével nagyobb a -énál: BC négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a -énál.

Megfordítva, legyen most BC négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a -énál, és illesszünk egy a négyzetének negyedével egyenlő paralelogrammát BC -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fön. Legyen az odaillesztett alakzat a BD és DC közötti téglalap. Azt kell megmutatni, hogy BD lineárisan összemérhetetlen DC -vel.

Az előbbiekkal azonos lépések során hasonlóképp mutatható meg, hogy BC négyzetértéke FD négyzetével nagyobb a -énál. BC négyzetértéke viszont egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a -énál, tehát BC lineárisan összemérhetetlen FD -vel, úgyhogy a maradék BF meg DC összeggel is összemérhetetlen BC (X. 16.). BF és DC összege viszont lineárisan összemérhető DC -vel (X. 6.), tehát BC DC -vel is lineárisan összemérhetetlen (X. 13.), úgyhogy szétbontva BD lineárisan összemérhetetlen DC -vel (X. 16.).

Ha tehát van két nem egyenlő... stb.

F.: X. 33–34., 57–58., 63–65., 94–96., 100–102.

X. 19. Lemma

Miután megmutattuk, hogy a lineárisan összemérhető szakaszok négyzetesen is összemérhetők, a négyzetesen összemérhetők viszont

általában nem mérhető össze lineárisan is, hanem lineárisan lehetnek mind összemérhetőek, mind összemérhetetlenek (X. 9. K.), nyilvánvaló, hogy ha valamely szakasz az adott racionálissal lineárisan összemérhető, akkor racionálisnak és azzal nemcsak lineárisan, hanem négyzetesen is összemérhetőnek mondjuk, minthogy a lineárisan összemérhető szakaszok négyzetesen is azok; ha pedig valamely szakasz négyzetesen összemérhető az adott racionálissal, akkor ha lineárisan is az vele, racionálisnak és azzal lineárisan és négyzetesen összemérhetőnek mondjuk, ha pedig valamely szakasz – noha ismét négyzetesen összemérhető az adott racionálissal – lineárisan összemérhetetlen vele, csak négyzetesen összemérhető racionálisnak mondjuk.

X. 19. Tétel

Lineárisan összemérhető és a főt említett módok valamelyikén racionális szakaszok által közrefogott téglalap racionális.

Fogják ugyanis közre a lineárisan összemérhető AB , BC racionális szakaszok az AC téglalapot. Azt állítom, hogy AC racionális.

Emeljük ugyanis AB -re az AD négyzetet. Ekkor AD racionális. Minthogy AB lineárisan összemérhető BC -vel és AB egyenlő BD -vel, BD lineárisan összemérhető BC -vel. S amint BD a BC -hez, úgy aránylik DA az AC -hez (VI. 1.). DA tehát összemérhető AC -vel (X. 11.). DA viszont racionális, tehát AC is racionális (X. 12.).

Tehát lineárisan összemérhető és... stb.
F.: X. 25., 54–55., 57., 71., 91–92., 94.

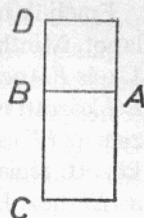
X. 20. Tétel

Ha egy racionális szakaszhoz racionális felületet illesztünk, a szélessége racionális lesz és lineárisan összemérhető azzal a szakasszal, amely mellé helyeztük.

Illesszük ugyanis az – ismét a főt említett módok valamelyikén – racionális AB szakaszhoz az AC racionális felületet, melynek legyen BC a szélessége. Azt állítom, hogy BC racionális és lineárisan összemérhető BA -val.

Emeljük ugyanis AB -re az AD négyzetet. Ekkor AD racionális.

AC is racionális, tehát DA összemérhető AC -vel (X. 12.). Amint DA az AC -hez, úgy aránylik DB a BC -hez (VI. 1.), tehát DB is összemérhető BC -vel (X. 11.). DB viszont egyenlő BA -val, tehát AB is összemérhető BC -vel. AB viszont racionális, tehát BC is racionális és lineárisan összemérhető AB -vel.



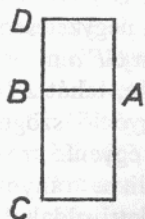
Ha tehát egy racionális szakaszhoz racionális... stb.

F.: X. 26., 38., 60–61., 63–64., 75., 78., 97., 100–101., 108., 112–113., 115.

X. 21. Tétel

Csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszok által közrefogott téglalap irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális, mégpedig nevezük mediálisnak.*

Fogják ugyanis közre a csak négyzetesen összemérhető AB , BC racionális szakaszok az AC téglalapot. Azt állítom, hogy AC irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális, mégpedig nevezük mediálisnak.



Emeljük ugyanis AB -re az AD négyzetet. Ekkor AD racionális. Minthogy AB lineárisan összemérhetetlen BC -vel – feltettük ugyanis, hogy csak négyzetesen összemérhetőek –, és AB egyenlő BD -vel, DB is lineárisan összemérhetetlen BC -vel. S amint DB BC -hez, úgy aránylik AD az AC -hez (VI. 1.), DA tehát összemérhetetlen AC -vel (X. 11.). DA viszont racionális, tehát AC irracionális (X. 13.), úgyhogy a szakasz, melynek négyzetértéke AC [azaz melynek négyzete egyenlő AC -vel], szintén irracionális, mégpedig nevezük mediálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 22–23., 25., 27–28., 31–33., 55–61., 79., 81., 91., 93., 96–97.

X. 22. Lemma

Ha van két szakasz, akkor amint az első a másodikhoz, úgy aránylik az első négyzete a két szakasz közötti téglalaphoz.

Legyen FE és EG két szakasz. Azt állítom, hogy amint FE az EG -hez, úgy aránylik FE négyzete az FE és EG közötti téglalaphoz.

Emeljük ugyanis FE -re a DF négyzetet, és egészítsük ki a GD téglalapot. Minthogy amint FE az EG -hez, úgy aránylik FD a DG -hez (VI. 1.), és FD az FE négyzete, DG pedig a DE és EG közötti, azaz az FE és EG közötti téglalap, amint tehát FE az EG -hez, úgy aránylik FE négyzete az FE és EG közötti téglalaphoz. Hasonlóképp amint a GE és EF közötti téglalap EF négyzetéhez, azaz amint GD az FD -hez, úgy GE az EF -hez. Éppen ezt kellett megmutatni.

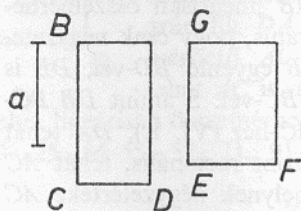
F.: X. 22., 26., 31–32., 35–36., 38., 44., 47., 60., 62., 67., 71., 73., 97., 102., 104.

X. 22. Tétel

Ha egy mediális négyzetét racionális szakaszhoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége racionális lesz és lineárisan összemérhetően azzal a szakasszal, amely mellé helyeztük.

Legyen ugyanis a egy mediális, CB egy racionális, és illesszük BC -hez az a négyzetével egyenlő BD téglalapot (I. 44.), melynek legyen CD a szélessége. Azt állítom, hogy CD racionális és lineárisan összemérhetően CB -vel.

Minthogy ugyanis a mediális, a négyzetértéke egy csak négyzetesen összemérhető racionálisok által közrefogott idom. Legyen GF a négyzetértéke. BD is négyzetértéke, tehát BD egyenlő GF -fel. Másrészt egyenlő szögű is vele, viszont az egyenlő és egyenlő szögű paralelogrammáknak fordítva arányosak az egyenlő szögek melletti oldalaik (VI. 14.), amint tehát BC az EG -hez, úgy aránylik EF a CD -hez, így amint BC négyzete EG négyzetéhez, úgy EF négyzete CD négyzetéhez (VI. 22.). CB négyzete összemérhető EG négyzetével – racionális ugyanis mindkét szakasz –, tehát EF négyzete szintén összemérhető CD négyzetével (X. 11.). EF négyzete racionális, tehát CD négyzete is racionális (X. 12.), így CD racionális. Minthogy EF lineárisan összemérhetően EG -vel ugyanis csak négyzetesen összemérhetőek – és amint EF az EG -hez, úgy aránylik EF négyzete az FE és EG közötti téglalaphoz (L.), EF négyzete összemérhetően az FE és EG közötti téglalappal (X. 11.). EF négyzetével viszont összemérhető CD négy-



zete – a szakaszok ugyanis négyzetértékben racionálisok –, az FE és EG közötti téglalappal pedig összemérhető a DC és CB közötti téglalap – egyenlők ugyanis a négyzetével, tehát CD négyzete összemérhető a DC és CB közötti téglalappal (X. 13.). Amint viszont CD négyzete a DC és CB közötti téglalaphoz, úgy aránylik DC a CB -hez (L.), DC tehát lineárisan összemérhető CB -vel (X. 11.). CD tehát racionális és lineárisan összemérhető CB -vel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 23., 25–26., 38., 41., 44., 47., 61–65., 72., 75., 78., 81., 84., 97., 99–102., 108., 110–111.

X. 23. Tétel

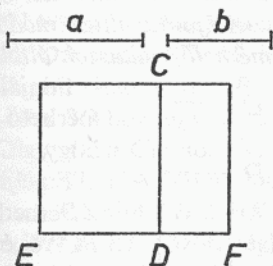
Mediálissal összemérhető szakasz mediális.*

Legyen a mediális és b az a -val összemérhető. Azt állítom, hogy b is mediális.

Vegyünk ugyanis egy CD racionális, és illesszük CD -hez az a négyzetével egyenlő CE téglalapot, melynek legyen ED a szélessége. Ekkor ED racionális és lineárisan összemérhető CD -vel (X. 22.). Illesszük még CD -hez a b négyzetével egyenlő CF téglalapot (I. 44.), melynek legyen DF a szélessége. Minthogy a összemérhető b -vel, a négyzete is összemérhető b négyzetével. a négyzetével viszont egyenlő EC , b -ével pedig egyenlő CF , tehát EC összemérhető CF -fel. S amint EC a CF -hez, úgy aránylik ED DF -hez (VI. 1.), ED tehát lineárisan összemérhető DF -fel (X. 11.).

ED racionális és lineárisan összemérhető DC -vel, tehát DF is racionális és lineárisan összemérhető DC -vel (X. 13.). CD és DF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Az a szakasz viszont, melynek négyzetértéke egy csak négyzetesen összemérhető szakaszok közötti téglalap, mediális, tehát az a szakasz, melynek négyzetértéke a CD és DF közötti téglalap, mediális. b -nek négyzetértéke a CD és DF közötti téglalap, b tehát mediális.

F.: X. 27–28., 31–32., 67., 97., 104.



Következmény

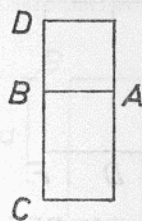
Ebből már nyilvánvaló, hogy mediális idommal összemérhető idom mediális. [Ugyanis olyan szakaszok négyzetértékei, melyek négyzetesen összemérhetők és egyikük mediális, úgyhogy a másik is mediális.]

F.: X. 24., 33., 39., 61–62., 67–69., 75., 81., 98–99., 104–105.

Következésképpen járunk el, ha ugyanúgy, mint a racionálisok esetében (X. 19. L.), a mediálissal lineárisan összemérhető szakaszt mediálisnak és azzal nemcsak lineárisan, hanem négyzetesen is összemérhetőnek mondjuk, minthogy általánosságban a lineárisan összemérhető szakaszok négyzetesen is azok; ha pedig valamely szakasz négyzetesen összemérhető a mediálissal, akkor ha lineárisan is az vele, mediálisoknak és lineárisan és négyzetesen összemérhetőeknek mondjuk őket, ha pedig csak négyzetesen, akkor csak négyzetesen összemérhető mediálisoknak mondjuk őket.

X. 24. Tétel

A [főnt említett módok valamelyikén] mediális és lineárisan összemérhető szakaszok által közrefogott téglalap mediális.*



Fogják ugyanis közre az AB , BC lineárisan összemérhető mediálisok az AC téglalapot. Azt állítom, hogy AC mediális.

Emeljük ugyanis AB -re az AD négyzetet. Ekkor AD mediális. Minthogy AB lineárisan összemérhető BC -vel és AB egyenlő BD -vel, DB is lineárisan összemérhető BC -vel, úgyhogy DA is összemérhető AC -vel (VI. 1., X. 11.). DA viszont mediális, tehát AC is mediális (X. 23. K.). Éppen ezt kellett megmutatni.

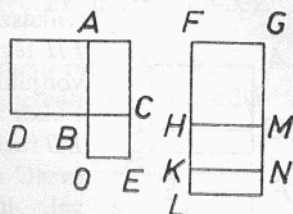
F.: X. 80.

X. 25. Tétel

*Csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok által közrefogott téglalap vagy racionális, vagy mediális.**

Fogják közre ugyanis az AB , BC csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok az AC téglalapot. Azt állítom, hogy AC vagy racionális, vagy mediális.

Emeljük ugyanis AB -re és BC -re az AD , illetve BE négyzetet. Ekkor mind AD , mind BE mediális. Vegyünk egy FG racionálist, és illesszük FG -hez az AD -vel egyenlő GH téglalapot, melynek legyen FH a szélessége, illesszük HM -hez az AC -vel egyenlő MK téglalapot, melynek legyen HK a szélessége, és végül hasonlóképp illesszük KN -hez a BE -vel egyenlő NL -t, melynek legyen KL a szélessége (I. 44.). Ekkor FH , HK és KL egy egyenesen van. Minthogy AD és BE mindketten mediálisok, és AD egyenlő GH -val, BE pedig NL -lél, GH és NL is mindketten mediálisok. És a racionális FG mellé illesztettük őket: FH és KL tehát mindketten racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek FG -vel (X. 22.). Minthogy AD összemérhető BE -vel, GH is összemérhető NL -lél. S amint GH az NL -hez, úgy aránylik FH a KL -hez (VI. 1.), FH tehát lineárisan összemérhető KL -lél (X. 11.). FH és KL tehát lineárisan összemérhető racionálisok, tehát az FH és KL közötti téglalap racionális (X. 19.). Minthogy DB egyenlő BA -val, OB pedig BC -vel, amint DB a BC -hez, úgy aránylik AB a BO -hoz. Amint viszont DB a BC -hez, úgy aránylik DA az AC -hez, amint pedig AB a BO -hoz, úgy AC a CO -hoz (VI. 1.), amint tehát DA az AC -hez, úgy AC a CO -hoz (V. 11.). AD egyenlő GH -val, AC az MK -val, CO pedig NL -lél, tehát amint GH az MK -hoz, úgy aránylik MK az NL -hez, tehát amint FH a HK -hoz, úgy HK a KL -hez (VI. 1., V. 11.), tehát az FH és KL közötti téglalap egyenlő HK négyzetével (VI. 17.). Az FH és KL közötti téglalap viszont racionális, tehát HK négyzete is racionális, tehát HK racionális. S ha lineárisan összemérhető FG -vel, akkor HN racionális (X. 19.), ha pedig lineárisan összemérhetetlen FG -vel, akkor KH és HM csak négyzetesen összemérhető racionálisok, így HN mediális. HN tehát vagy racionális, vagy mediális. HN viszont egyenlő AC -vel, tehát AC vagy racionális, vagy mediális.

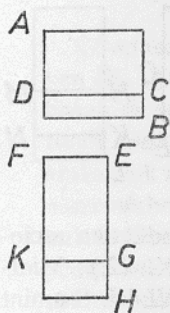


Tehát csak négyzetesen összemérhető mediális... stb.

X. 26. Tétel

Két mediális felület különbsége nem lehet racionális.

Tegyük föl ugyanis, hogy az AB mediális felület a DB racionális felülettel nagyobb az AC mediálisnál, vegyünk egy EF racionális szakaszt, és illesszünk EF -hez egy AB -vel egyenlő FH téglalapot, melynek legyen EH a szélessége, és vonjunk le belőle egy AC -vel egyenlő FG -t (I. 44.). Ekkor a maradék BD egyenlő a maradék KH -val. DB racionális, tehát KH is racionális. Minthogy AB és AC mindketten mediálisok, és AB egyenlő FH -val, AC pedig FG -vel, FH és FG is mindketten mediálisok. S a racionális EF szakasz mellé illesztettük őket, tehát HE és EG mindketten racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek EF -fel (X. 22.). Minthogy DB racionális és egyenlő KH -val, KH is racionális. S a racionális EF mellé illesztettük, tehát



GH racionális és lineárisan összemérhető EF -fel (X. 20.). Másrészt EG racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel, tehát EG lineárisan összemérhetetlen GH -val (X. 13.). EG négyzete úgy aránylik az EG és GH közötti téglalaphoz, mint EG a GH -hoz (X. 22. L.), tehát EG négyzete összemérhetetlen az EG és GH közötti téglalappal (X. 11.). Másrészt EG négyzetével összemérhető EG és GH négyzeteinek összege – ugyanis mind a kettő racionális felület (X. 15.) –, az EG és GH közötti téglalappal pedig összemérhető a kétszer vett EG és GH közötti téglalap – a kétszerese ugyanis (X. 6.) –, tehát EG és GH négyzetösszege összemérhetetlen a kétszer vett EG és GH közötti téglalappal (X. 13.), így EG és GH négyzeteinek meg a kétszer vett EG és GH közötti téglalappal az összege, ami EH négyzete (II. 4.), összemérhetetlen EG és GH négyzetösszegével (X. 16.). EG és GH négyzetösszege viszont racionális, tehát EH négyzete irracionális (X. 13.), tehát az EG szakasz irracionális. Másrészt racionális is, ami lehetetlen.

Két mediális felület különbsége tehát nem lehet racionális. Éppen ezt kellett megmutatni.

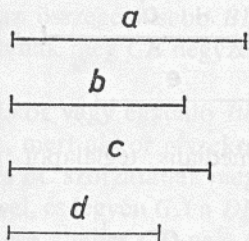
F.: X. 42–43., 45–46., 79–80., 82.

X. 27. Tétel

Keressünk olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszokat, melyek racionális téglalapot fognak közre!

Legyen a és b két, csak négyzetesen összemérhető racionális (X. 10.), vegyük a c középarányosukat (VI. 13.), és arányulják amint a a b -hez, úgy c a d -hez (VI. 12.).*

Mínthogy a és b csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az a és b közötti téglalap, azaz c négyzete (VI. 17.), mediális. c tehát mediális szakasz. Mínthogy c úgy aránylik d -hez, mint a a b -hez, és a meg b csak négyzetesen összemérhető, c és d is csak négyzetesen összemérhető (X. 11., VI. 22.). S c mediális, tehát d is mediális (X. 23.). c és d tehát csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok. Azt állítom, hogy racionális téglalapot fognak közre. Mínthogy ugyanis amint a a b -hez, úgy aránylik c a d -hez, fölcserélve amint a a c -hez, úgy aránylik b a d -hez (V. 16.). Amint viszont a a c -hez, úgy c a b -hez, amint tehát c a b -hez, úgy b a d -hez (V. 11.), tehát a c és d közötti téglalap egyenlő b négyzetével (VI. 17.). b négyzete viszont racionális, tehát a c és d közötti téglalap is racionális.



Találtunk tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszokat, melyek racionális téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 37.

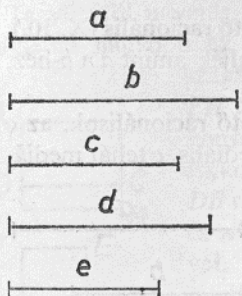
X. 28. Tétel

Keressünk olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszokat, melyek mediális téglalapot fognak közre!

Legyen a , b és c [három] (páronként) csak négyzetesen összemérhető racionális (X. 10.), vegyük a és b középarányosát, d -t (VI. 13.), és arányuljon amint b a c -hez, úgy d az e -hez (VI. 12.).*

Mínthogy a és b csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az a és b közötti téglalap, azaz d négyzete (VI. 17.), mediális. d tehát mediális szakasz. Mínthogy b és c csak négyzetesen összemérhető, és d úgy aránylik e -hez, mint b a c -hez, d és e is csak négyzetesen összemérhető

(X. 11., VI. 22.). d mediális, tehát e is mediális (X. 23.). d és e tehát csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok. Azt állítom, hogy



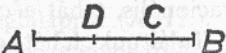
mediális téglalapot fognak közre. Minthogy ugyanis amint b a c -hez, úgy aránylik d az e -hez, fölcserélve amint b a d -hez, úgy c az e -hez (V. 16.). Amint viszont b a d -hez, úgy d az a -hoz (V. 7. K.), amint tehát d az a -hoz, úgy c az e -hez (V. 11.), tehát az a és c közötti téglalap egyenlő a d és e közöttivel (VI. 16.). Az a és c közötti téglalap viszont mediális, tehát a d és e közötti is mediális.

Találtunk tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszokat, melyek mediális téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 29. 1. Lemma

Keressünk két olyan négyzetszámot, melyek összege is négyzetszám!

Vegyünk két számot, AB -t és BC -t, melyek legyenek egyszerre vagy párosak, vagy páratlanok. Minthogy akár páros számból párosat, akár páratlanból páratlant vonunk le, a maradék páros (IX. 24., 26.), az AC maradék páros.

Legyen D az AC felezőpontja. Legyenek még A  B és BC vagy hasonló síkszámok, vagy négyzetszámok – melyek maguk is hasonló síkszámok. Ekkor AB és BC szorzatának meg CD négyzetének az összege egyenlő BD négyzetével (vö. II. 6.). S AB és BC szorzata négyzetszám, mert mint megmutattuk, ha két hasonló síkszámot szorzunk össze, négyzetszámot kapunk (IX. 1.). Találtunk tehát két olyan négyzetszámot, AB és BC szorzatát meg CD négyzetét, melyek összeadva BD négyzetét adják.

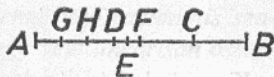
És nyilvánvaló, hogy találtunk két olyan négyzetszámot, BD négyzetét és CD négyzetét, melyek különbsége, AB és BC szorzata, négyzetszám, ha AB és BC hasonló síkszámok. Ha pedig nem hasonló síkszámok, akkor találtunk két olyan négyzetszámot, BD négyzetét és DC négyzetét, melyek különbsége, AB és BC szorzata, nem négyzetszám (IX. 2.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 29., 48–53., 85–87., 89–90.

X. 29. 2. Lemma

Keressünk két olyan négyzetszámot, melyek összege nem négyzet-szám!

Legyen ugyanis – mint fentebb – AB és BC szorzata négyzetszám, CA páros, és CA felezőpontja D . Ekkor nyilván AB és BC szorzatának meg CD négyzetének az összege egyenlő BD négyzetével.



Vonjunk le (CD -ből) egy DE egységet. Ekkor AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege kisebb BD négyzeténél. Azt állítom, hogy AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege nem négyzetszám.

Ha ugyanis föltesszük, hogy négyzetszám, akkor vagy egyenlő BE négyzetével, vagy kisebb nála, de nem nagyobb, mert akkor részekre oszlana az egység. Tegyük föl először, hogy AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege egyenlő BE négyzetével, és legyen GA a DE egység kétszerese. Minthogy a teljes AC kétszerese a teljes CD -nek, s ezekből AG kétszerese DE -nek, a maradék GC is kétszerese a maradék EC -nek. E tehát felezi GC -t. GB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege tehát egyenlő BE négyzetével (II. 6.). Másrészt feltétel szerint AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege is egyenlő BE négyzetével, tehát GB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege egyenlő AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összegével, s ha levonjuk a közös CE négyzetet, következik, hogy AB egyenlő GB -vel, ami ellentmondás. Nem egyenlő tehát AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege BE négyzetével. Azt állítom, hogy nem is kisebb BE négyzeténél. Tegyük föl ugyanis, hogy az, legyen BF négyzetével egyenlő, és DF -nek kétszerese HA . Ismét következik, hogy HC kétszerese CF -nek, úgyhogy F a CH felezőpontja, és így HB és BC szorzatának meg FC négyzetének az összege egyenlő BF -fel (II. 6.). Feltétel szerint AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege is egyenlő BF négyzetével, úgyhogy HB és BC szorzatának meg CF négyzetének az összege egyenlő AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összegével, ami ellentmondás. AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege tehát nem egyenlő BE négyzeténél kisebb számmal. Megmutattuk, hogy [magával] BE négyzetével sem egyenlő. AB és BC szorzatának meg CE négyzetének az összege

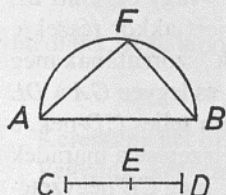
tehát nem négyzetszám. [Noha még többféle módon is elő lehet állítani fönti tulajdonságú számokat, elégedjünk meg az elmondottakkal, nehogy túlzott hosszadalmasságunkkal tovább nyújtsuk a tárgyalást.] Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 30., 87., 89–90.

X. 29. Tétel

*Keressünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, melyek közül a nagyobb négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél!**

Vegyünk ugyanis valamely AB racionális szakaszt, két olyan négyzet-számot, CD -t és DE -t, melyek különbsége, CE , nem négyzetszám (I. L.), emeljünk AB -re egy AFB félkört, arányuljon úgy BA négyzete AF négyzetéhez, mint DC a CE -hez (X. 6. K.), és húzzuk meg FB -t.



Mínthogy DC úgy aránylik CE -hez, mint BA négyzete AF négyzetéhez, BA négyzete úgy aránylik AF -éhez, mint egy szám, DC , egy másik számhoz, CE -hez; BA négyzete tehát összemérhető AF négyzetével (X. 6.). AB négyzete racionális, tehát AF négyzete is racionális (X. 12.), így AF is racionális. Mínthogy DC nem úgy aránylik CE -hez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz (VIII. 24.), BA négyzete sem úgy aránylik AF négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz, tehát AB lineárisan összemérhetetlen AF -fel (X. 9.): BA és AF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Mínthogy amint DC a CE -hez, úgy aránylik BA négyzete AF négyzetéhez, fölforgatva amint CD a DE -hez, úgy AB négyzete BF négyzetéhez (V. 19. K., III. 31., I. 47.). CD viszont úgy aránylik DE -hez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz, tehát AB négyzete is úgy aránylik BF négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz, AB tehát lineárisan összemérhető BF -fel (X. 9.). S AB négyzete egyenlő AF és FB négyzetösszegével, tehát AB négyzetértéke a vele összemérhető BF -fel nagyobb AF -énél.

Találtunk tehát két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, BA -t és AF -et, melyek közül a nagyobb, AB négyzetértéke

egy vele lineárisan összemérhető szakasz, BF négyzetével nagyobb AF -énél. Éppen ezt kellett megmutatni.

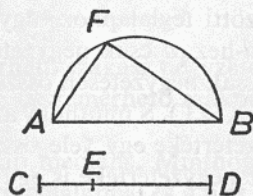
F.: X. 31–32.

X. 30. Tétel

Keressünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, melyek közül a nagyobb négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél!

Vegyünk ugyanis egy AB racionális szakaszt, két olyan négyzet-számot, CE -t és ED -t, melyek összege, CD , nem négyzetszám (X. 29. 2. L.), emeljünk AB -re egy AFB félkört, arányuljék úgy BA négyzete AF négyzetéhez, mint DC a CE -hez (X. 6. K.), és húzzuk meg FB -t.

Az előző tételhez hasonlóan bizonyíthatnánk, hogy BA és AF csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Minthogy BA négyzete úgy aránylik AF négyzetéhez, mint DC a CE -hez, fölforgatva amint CD a DE -hez, úgy AB négyzete BF négyzetéhez (V. 19. K., III. 31., I. 47.). CD viszont nem úgy aránylik DE -hez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz (VIII. 24.), tehát AB négyzete sem úgy aránylik BF négyzetéhez, mint egy négyzetszám egy másik négyzetszámhoz, AB tehát lineárisan összemérhetetlen BF -fel (X. 9.). S AB négyzetértéke a vele összemérhetetlen FB négyzetével nagyobb AF -énél.



AB és AF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és AB négyzetértéke a vele lineárisan összemérhetetlen FB négyzetével nagyobb AF -énél. Éppen ezt kellett megmutatni.

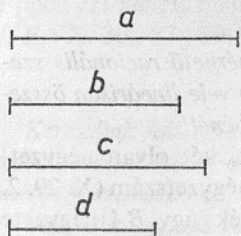
F.: X. 31., 33.

X. 31. Tétel

Keressünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, melyek racionális téglalapot fognak közre, és a nagyobb négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél!

Vegyünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, a -t és b -t, melyek közül a nagyobb a négyzetértéke egy vele lineárisan

risan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebb b -énél (X. 29.). Az a és b közötti téglalappal legyen egyenlő c négyzete (II. 14.). Az a és b közötti téglalap mediális, tehát c négyzete is mediális,



tehát a c szakasz is mediális. b négyzetével legyen egyenlő a c és d közötti téglalap (VI. 11., 17.). b négyzete racionális, tehát a c és d közötti téglalap is racionális. Mivel amint a a b -hez, úgy aránylik az a és b közötti téglalap b négyzetéhez (X. 22. L.), és az a és b közötti téglalappal egyenlő c négyzete, b négyzetével pedig egyenlő a c és d közötti téglalap, amint a a b -hez, úgy aránylik c négyzete

a c és d közötti téglalaphoz. Amint viszont c négyzete a c és d közötti téglalaphoz, úgy c a d -hez (ua.), amint tehát a a b -hez, úgy c a d -hez. a csak négyzetesen összemérhető b -vel, tehát c a d -vel szintén csak négyzetesen összemérhető (X. 11.). c mediális, tehát d is mediális (X. 23.). S minthogy amint a a b -hez, úgy aránylik c a d -hez, és a négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb b -énél, c négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb d -énél (X. 14.).

Találtunk tehát két, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, c -t és d -t, melyek racionális téglalapot fognak közre, és c négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb d -énél.

Hasonló a bizonyítás az összemérhetetlen szakasz négyzetének esetére, azaz amikor a négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb b -énél (X. 30.).

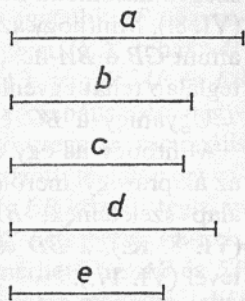
F.: X. 34.

X. 32. Tétel

Keressünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, melyek mediális téglalapot fognak közre, és a nagyobb négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél!

Vegyünk három olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, a -t, b -t és c -t, hogy a négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb c -énél (X. 29.), és legyen az a és b közötti téglalappal egyenlő d négyzete (II. 14.). d négyzete tehát mediális, így

d is mediális (X. 21.). Másrészt, legyen a b és c közötti téglalappal egyenlő a d és e közötti téglalap (I. 41. és 44.). Mivel amint az a és b közötti téglalap a b és c közötti téglalaphoz, úgy aránylik a a c -hez (VI. 1.), és az a és b közötti téglalappal egyenlő d négyzete, a b és c közötti téglalappal pedig egyenlő a d és e közötti téglalap, amint a a c -hez, úgy aránylik d négyzete a d és e közötti téglalaphoz. Amint viszont d négyzete a d és e közötti téglalaphoz, úgy d az e -hez (X. 22. L.), amint tehát a a c -hez, úgy d az e -hez. a [csak] négyzetesen összemérhető c -vel, tehát d az e -vel szintén csak négyzetesen összemérhető (X. 11.). d mediális, tehát e is mediális (X. 23.). Mivel amint a a c -hez, úgy aránylik d az e -hez, és a négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb c -énél, d négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb e -énél (X. 14.).



Azt is állítom, hogy a d és e közötti téglalap mediális. Minthogy a b és c közötti téglalap egyenlő a d és e közötti téglalappal és a b és c közötti téglalap mediális [$- b$ és c ugyanis csak négyzetesen összemérhető racionálisok $-$] (X. 21.), a d és e közötti téglalap is mediális.

Találtunk tehát két, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, d -t és e -t, hogy a nagyobb négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél.

Ismét hasonló a bizonyítás az összemérhetetlen szakasz négyzetének esetére, azaz amikor a négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb c -énél (X. 30.).

F.: X. 35.

X. 33. Lemma

Legyen ABC egy derékszögű háromszög, melynek A -nál levő szöge derékszög, és húzzuk meg az AD merőleget. Azt állítom, hogy a CB és BD közötti téglalap egyenlő BA négyzetével, a BC és CD közötti téglalap egyenlő CA négyzetével, a BD és DC közötti egyenlő AD négyzetével, és végül a BC és AD közötti egyenlő a BA és AC közötti téglalappal.

Először is, hogy a CB és BD közötti téglalap egyenlő BA négyzetével.

Mínhogy ugyanis egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alapra egy AD merőleget bocsátottunk, az ABD , ADC háromszögek hasonlóak mind a teljes ABC háromszöghöz, mind egymáshoz (VI. 8.). Mínhogy az ABC háromszög hasonló az ABD háromszöghöz, amint CB a BA -hoz, úgy aránylik BA a BD -hez, a CB és BD közötti téglalap tehát egyenlő AB négyzetével (VI. 17.).

Ugyanígy a BC és CD közötti téglalap egyenlő AC négyzetével.

Mínhogy ha egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az alapra egy merőleget bocsátunk, a merőleges középarányosa az alap szeleteinek, BD úgy aránylik DA -hoz, mint AD a DC -hez (VI. 8. K.), a BD és DC közötti téglalap tehát egyenlő DA négyzetével (VI. 17.).

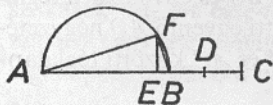
Azt is állítom, hogy a BC és AD közötti téglalap egyenlő a BA és AC közöttivel. Mínhogy ugyanis – mint láttuk – az ABC háromszög hasonló ABD -hez, BC úgy aránylik CA -hoz, mint BA az AD -hez. [Ha viszont négy szakasz arányos, akkor a kültagok közötti téglalap egyenlő a beltágok közöttivel], a BC és AD közötti téglalap tehát egyenlő a BA és AC közöttivel (VI. 16.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 33–35.

X. 33. Tétel

Keressünk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege racionális, és mediális téglalapot fognak közre!

Vegyünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt, AB -t és BC -t, melyek közül a nagyobb AB négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebb BC -énél (X. 30.), legyen BC felezőpontja D (I. 10.), illesszünk úgy AB -hez egy BD vagy DC négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az AE és EB közötti téglalap –, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.), írjunk AB fölé egy AFB félkört, emeljünk AB -re egy EF merőleget (I. 11.), és húzzuk meg AF -et és FB -t.



Mínhogy AB és BC két, nem egyenlő szakasz, AB négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb BC -énél, BC négyzetének negyedével, azaz

BC felének négyzetével egyenlő paralelogrammát illesztettünk AB -hez úgy, hogy egy négyzet maradt fenn, és az AE és EB közötti téglalapot kaptuk, AE összemérhetetlen EB -vel (X. 18.). Amint AE az EB -hez, úgy aránylik a BA és AE közötti téglalap az AB és BE közöttihez (VI. 1.), a BA és AE közötti téglalap egyenlő AF négyzetével, az AB és BE közötti pedig BF négyzetével (L.), tehát AF négyzete összemérhetetlen FB négyzetével (X. 11.), vagyis AF és FB négyzetesen összemérhetetlenek. Minthogy AB racionális, AB négyzete is racionális, úgyhogy AF és FB négyzetösszege is racionális (III. 31., I. 47.). Továbbá minthogy az AE és EB közötti téglalap egyenlő EF négyzetével (L.), és feltétel szerint az AE és EB közötti téglalap egyenlő BD négyzetével, FE egyenlő BD -vel, BC kétszerese FE -nek, úgyhogy az AB és BC közötti téglalap is összemérhető az AB és EF közöttivel (VI. 1., X. 6.). Az AB és BC közötti téglalap mediális, tehát az AB és EF közötti is mediális (X. 23. K.). Az AB és EF közötti téglalap egyenlő az AF és FB közöttivel (L.), tehát az AF és FB közötti téglalap is mediális. Azt is megmutattuk, hogy a négyzetösszegük racionális.

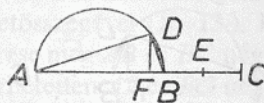
Találtunk tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, AF -et és FB -t, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 39., 76.

X. 34. Tétel

Keressünk két olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege mediális, és racionális téglalapot fognak közre!

Vegyünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, AB -t és BC -t, melyek racionális téglalapot fognak közre, és AB négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb BC -énél (X. 31.), írjunk AB fölé egy ADB félkört (I. 10.), legyen BC felezőpontja E (ua.), és illesszünk úgy AB -hez egy BE négyzetével egyenlő paralelogrammát – az AF és FB közöttit –, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.). Ekkor AF lineárisan összemérhetetlen FB -vel



(X. 18.). Emeljünk AB -re F -ben egy FD merőlegest (I. 11.) és húzzuk meg AD -t, DB -t.

Mínthogy AF összemérhetetlen FB -vel, a BA és AF közötti téglalap is összemérhetetlen az AB és BF közöttivel (VI. 1., X. 11.). A BA és AF közötti téglalap viszont egyenlő AD négyzetével, az AB és BF közötti pedig DB négyzetével (X. 33. L.), tehát AD négyzete is összemérhetetlen DB négyzetével. Mínthogy AB négyzete mediális, AD és DB négyzetösszege is mediális (III. 31., I. 47.). Mínthogy BC kétszerese DF -nek, az AB és BC közötti téglalap is kétszerese az AB és FD közöttinek. Az AB és BC közötti téglalap racionális, tehát az AB és FD közötti is racionális (X. 6., 12.). Az AB és FD közötti téglalap viszont egyenlő az AD és DB közöttivel (X. 33. L.), úgyhogy az AD és DB közötti téglalap is racionális.

Találtunk tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, AD -t és DB -t, melyek négyzetösszege mediális, és racionális téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 40., 77.

X. 35. Tétel

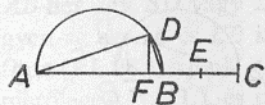
Keressünk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyeknek mind négyzetösszege mediális, mind mediális – és a négyzetösszeggel összemérhetetlen – téglalapot fognak közre!

Vegyünk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, AB -t és BC -t, melyek mediális téglalapot fognak közre, és AB négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb BC -énél (X. 32.), írjunk AB fölé egy ADB félkört (I. 10.) és így tovább, mint az előző tételben.

Mínthogy AF lineárisan összemérhetetlen FB -vel, AD négyzetesen

összemérhetetlen DB -vel (vö. X. 34.). Mínthogy AB négyzete mediális, AD és DB négyzetösszege is mediális (III. 31., I. 47.). Mínthogy az AF és FB közötti téglalap egyenlő BE és DF bármelyikének négyzetével, BE

egyenlő DF -fel, BC tehát kétszerese FD -nek, úgyhogy az AB és BC közötti téglalap is kétszerese az AB és FD közöttinek. Az AB és BC közötti téglalap viszont mediális, tehát az AB és FD közötti is mediális



(X. 6., 23. K.). Ez egyenlő az AD és DB közötti téglalappal (X. 33. L.), tehát az AD és DB közötti téglalap is mediális. Minthogy AB lineárisan összemérhetetlen BC -vel, CB viszont összemérhető BE -vel, AB lineárisan összemérhetetlen BE -vel (X. 13.), úgyhogy AB négyzete is összemérhetetlen az AB és BE közötti téglalappal (X. 22. L., 11.). AB négyzetével viszont egyenlő AD és DB négyzetösszege, az AB és BE közötti téglalappal pedig egyenlő az AB és FD közötti, azaz az AD és DB közötti téglalap, tehát AD és DB négyzetösszege összemérhetetlen az AD és DB közötti téglalappal.

Találtunk tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, AD -t és DB -t, melyeknek mind négyzetösszege mediális, mind mediális – és a négyzetösszeggel összemérhetetlen – téglalapot fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

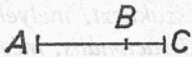
F.: X. 41., 78.

X. 36. Tétel

*Ha két, csak négyzetesen összemérhető racionális szakaszt összeadunk, az összeg irracionális, mégpedig nevezzük binomiálisnak.**

Adjunk össze ugyanis két, csak négyzetesen összemérhető racionális, AB -t és BC -t. Azt állítom, hogy az összeg, AC , irracionális.

Minthogy ugyanis AB lineárisan összemérhetetlen BC -vel – hiszen csak négyzetesen összemérhető

tők – és amint AB a BC -hez, úgy aránylik az AB  AC és BC közötti téglalap BC négyzetéhez (X. 22. L.),

az AB és BC közötti téglalap összemérhetetlen BC négyzetével (X. 11.). Az AB és BC közötti téglalappal viszont összemérhető az AB és BC közötti téglalap kétszerese (X. 6.), BC négyzetével pedig összemérhető AB és BC négyzetösszege – hiszen AB és BC csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 15.) –, tehát az AB és BC közötti téglalap kétszerese összemérhetetlen AB és BC négyzetösszegével (X. 13.). És összetéve, az AB és BC közötti téglalap kétszerese meg AB és BC négyzetösszege, azaz AC négyzete (II. 4.), összemérhetetlen AB és BC négyzetösszegével (X. 16.). AB és BC négyzetösszege viszont racionális, AC négyzete tehát irracionális (X. 13.), úgyhogy AC is irracionális, mégpedig nevezzük binomiálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 38., 41–42., 44., 47–53., 60–61., 64., 66., 71–72., 112–113.

X. 37. Tétel

Ha két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt összeadunk, melyek racionális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük első bimedialisnak.*

Adjunk össze ugyanis két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, AB -t és BC -t, melyek racionális téglalapot fognak közre (X. 27.). Azt állítom, hogy az összeg, AC , irracionális.

Mínthogy ugyanis AB lineárisan összemérhetetlen BC -vel, AB és BC négyzetösszege is összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (vö. X. 36.). És összetéve, AB és BC négyzetösszege meg az AB és BC közötti téglalap kétszerese, ami AC négyzete (II. 4.), összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalappal (X. 16., 6., 13.). Az AB és BC közötti téglalap viszont racionális – hiszen föltettük, hogy AB és BC racionális téglalapot fog közre –, AC négyzete tehát irracionális (X. 13.), AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük első bimedialisnak.

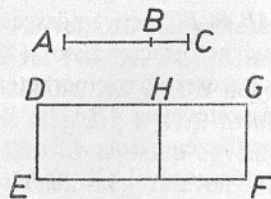
F.: X. 43., 55., 61., 67.

X. 38. Tétel

Ha összeadunk két olyan csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, melyek mediális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük második bimedialisnak.*

Adjunk össze ugyanis két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, AB -t és BC -t, melyek mediális téglalapot fognak közre (X. 28.). Azt állítom, hogy AC irracionális.

Vegyük ugyanis a DE racionális, és illesszünk DE -hez egy AC négyzetével egyenlő DG szélességű DF téglalapot (I. 41. 44.). Mínthogy AC négyzete egyenlő AB és BC négyzetösszegével meg az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (II. 4.), ha DE -hez AB és BC négyzetösszegével egyenlő EH téglalapot illesztünk, akkor a maradék HF



egyenlő az AB és BC közötti téglalap kétszeresével. Mínthogy AB és BC mediálisok, AB és BC négyzetösszege is mediális (X. 15., 23. K.).

Feltétel szerint az AB és BC közötti téglalap kétszerese is mediális (X. 6., 23. K.). AB és BC négyzetösszegével egyenlő EH , az AB és BC közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő FH , EH és FH tehát mediális idomok. S a DE racionálishoz vannak illesztve, DH és HG tehát racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek DE -vel (X. 22.). Minthogy AB lineárisan összemérhetetlen BC -vel és amint AB a BC -hez, úgy aránylik AB négyzete az AB és BC közötti téglalaphoz (X. 22. L.), AB négyzete összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalappal (X. 11.). AB négyzetével viszont összemérhető AB és BC négyzetösszege (X. 15.), az AB és BC közötti téglalappal pedig összemérhető az AB és BC közötti téglalap kétszerese (X. 6.), AB és BC négyzetösszege tehát összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). AB és BC négyzetösszegével viszont egyenlő EH , az AB és BC közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő HF , EH tehát összemérhetetlen HF -fel, úgyhogy DH is lineárisan összemérhetetlen HG -vel (VI. 1., X. 11.). DH és HG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, úgyhogy DG irracionális (X. 36.). DE racionális, az irracionális és racionális szakasz által közrefogott téglalap pedig irracionális (X. 20.), DF tehát irracionális idom, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális. DF az AC négyzetértéke, AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük második bimedialisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

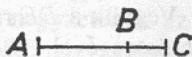
F.: X. 44., 67.

X. 39. Tétel

*Ha összeadunk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük maiornak.**

Adjunk össze ugyanis két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, AB -t és BC -t, melyek kielégítik a feltételeket (X. 33.). Azt állítom, hogy AC irracionális.

Minthogy ugyanis az AB és BC közötti téglalap mediális, az AB és BC közötti téglalap kétszerese is mediális (X. 6., 23. K.). AB és BC négyzetösszege viszont racionális, az AB és BC közötti téglalap kétszerese tehát összemérhetetlen AB és BC négyzetösszegével (X. 13.), úgyhogy AB



és BC négyzetösszege meg az AB és BC közötti téglalap kétszerese, ami AC négyzete (II. 4.), szintén összemérhetetlen AB és BC négyzetösszegével (X. 16.). [AB és BC négyzetösszege viszont racionális] AC négyzete tehát irracionális (X. 13.), úgyhogy AC is irracionális, mégpedig nevezzük maiornak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 45., 57., 63., 68.

X. 40. Tétel

*Ha összeadunk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege mediális és racionális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben racionális plusz mediálisnak.**

Adjunk össze ugyanis két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, AB -t és BC -t, melyek kielégítik a feltételeket (X. 34.). Azt állítom, hogy AC irracionális.

Míthogy ugyanis AB és BC négyzetösszege mediális, az AB és BC közötti téglalap kétszerese pedig racionális (X. 6., 12.), AB és BC négyzetösszege összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 13.), úgyhogy AC négyzete is összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 16.). Az AB és BC közötti téglalap kétszerese viszont racionális, AC négyzete tehát irracionális (X. 13.), AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben racionális plusz mediálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 46., 64., 69.

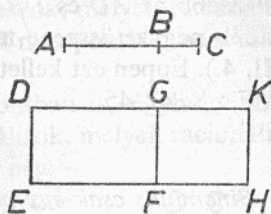
X. 41. Tétel

*Ha összeadunk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyeknek mind négyzetösszege mediális, mind mediális – és a négyzetösszeggel összemérhetetlen – téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben két mediális összegének.**

Adjunk össze ugyanis két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, AB -t és BC -t, melyek kielégítik a feltételeket (X. 35.). Azt állítom, hogy AC irracionális.

Vegyük a DE racionálíst, és illesszünk DE -hez egy AB és BC négyzetösszegével egyenlő DF és egy, az AB és BC közötti téglalap két-

szeresével egyenlő GH téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a teljes DH egyenlő AC négyzetével (II. 4.). Minthogy AB és BC négyzetösszege mediális és egyenlő DF -fel, DF is mediális. S a DE racionálishoz illesztettük, DG tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen DE -vel (X. 22.). Ugyanígy GK is racionális és lineárisan összemérhetetlen GF -fel, azaz DE -vel. Minthogy AB és BC négyzetösszege összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 6., 13.), DF összemérhetetlen GH -val, úgyhogy DG is összemérhetetlen GK -val (VI. 1., X. 11.). S racionálisok, DG és GK tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, DK tehát irracionális, ún. binomiális (X. 36.). DE racionális, DH tehát irracionális (X. 20.), és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális. HD az AC négyzetértéke, AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben két mediális összegének. Éppen ezt kellett megmutatni.



F.: X. 47., 59., 65., 70.

X. 42. Lemma

Hogy pedig a nevezett irracionálisok egyértelműen esnek szét olyan szakaszok összegére, melyek teljesítik a feltételeket, eme lemmáska előrebecsátása után mutatjuk meg:

Vegyünk egy AB szakaszt, osszuk föl nem egyenlő részekre a C, D pontokban, és tegyük föl, hogy AC nagyobb DB -nél. Azt állítom, hogy AC és CB négyzetösszege nagyobb AD és DB négyzetösszegénél.

Legyen ugyanis AB felezőpontja E (I. 10.). Minthogy AC nagyobb DB -nél, ha levonjuk a közös DC -t, akkor a maradék AD nagyobb a maradék CB -nél. AE egyenlő EB -vel, DE tehát kisebb EC -nél, a C, D pontok tehát nincsenek egyforma távol a felezőponttól. Minthogy az AC és CB közötti téglalaprak és EC négyzetének az összege egyenlő EB négyzetével (II. 5.), és az AD és DB közötti téglalaprak és DE négyzetének az összege szintén egyenlő EB négyzetével, az AC és CB közötti téglalaprak és EC négyzetének az összege egyenlő az AD és DB közötti téglalaprak és DE négyzetének

az összegével. A tagok közül DE négyzete kisebb EC négyzeténél, a maradék AC és CB közötti téglalap tehát kisebb az AD és DB közötti téglalagnál, úgyhogy az AC és CB közötti téglalap kétszerese is kisebb az AD és DB közötti téglalap kétszeresénél. AC és CB maradék négyzetösszege tehát nagyobb AD és DB négyzetösszegénél (II. 4.). Éppen ezt kellett megmutatni.

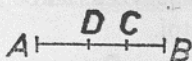
F.: X. 42-45.

X. 42. Tétel

Binomiális csak egy pontban esik szét a különböző tagokra.

Legyen AB egy binomiális, mely a C pontban esik szét a különböző tagokra. Ekkor AC és CB csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Azt állítom, hogy AB más pontban nem esik szét két, csak négyzetesen összemérhető racionális összegére.

Tegyük föl ugyanis, hogy szétesik a D pontban is, úgyhogy AD és DB is csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Nyilvánvaló, hogy AC nem ugyanaz, mint DB . Tegyük föl ugyanis, hogy az. Ekkor AD is ugyanaz, mint CB és AC úgy aránylik CB -hez,



mint BD a DA -hoz, és AB a C -beli fölosztással megegyezőleg bomlik föl D -ben, aminek az ellenkezőjét tettük föl. AC tehát nem ugyanaz, mint DB . Ezért a C , D pontok nincsenek egyforma távol a felezőponttól. Amennyivel különbözik tehát AC és CB négyzetösszege AD és DB négyzetösszegétől, annyival különbözik az AD és DB közötti téglalap kétszerese is az AC és CB közötti téglalap kétszeresétől, mivel mind AC és CB négyzetösszege meg az AC és CB közötti téglalap kétszerese, mind AD és DB négyzetösszege meg az AD és DB közötti téglalap kétszerese egyenlő AB négyzetével (II. 4.). AC és CB négyzetösszege viszont racionális felülettel különbözik AD és DB négyzetösszegétől – hiszen mindketten racionálisok –, az AD és DB közötti téglalap kétszerese is racionális felülettel különbözik tehát az AC és CB közötti téglalap kétszeresétől, noha mediálisok (X. 6., 22. K.), ami ellentmondás, mert két mediális felület különbsége nem lehet racionális (X. 26.).

Binomiális tehát nem esik szét különböző pontokban; csak egy pontban tehát. Éppen ezt kellett megmutatni.

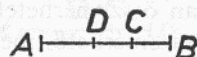
F. X. 44., 47.

X. 43. Tétel

Első bimedialis csak egy pontban esik szét.

Essék szét az AB első bimedialis a C pontban, úgyhogy AC és CB csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok, melyek racionális téglalapot fognak közre. Azt állítom, hogy AB más pontban nem esik szét.

Tegyük föl ugyanis, hogy szétesik a D pontban is, úgyhogy AD és DB is csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek racionális téglalapot fognak közre. Minthogy AC és CB négyzetösszege annyival különbözik AD és DB négyzetösszegétől, amennyivel az AD és DB közötti téglalap kétszerese az AC és CB közötti téglalap kétszeresétől, és az AD és DB közötti téglalap kétszerese racionális felülettel különbözik az AC és CB közötti téglalap kétszeresétől – hiszen mindketten racionálisok (X. 6., 12.) –, AC és CB négyzetösszege is racionális felülettel különbözik tehát AD és DB négyzetösszegétől, noha mediálisok (X. 15., 23. K.), ami ellentmondás (X. 26.).

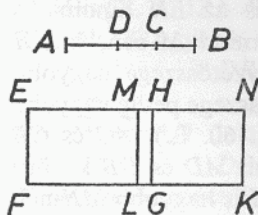


Első bimedialis tehát nem esik szét tagokra különböző pontokban; tehát csak egy pontban. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 44. Tétel

Második bimedialis csak egy pontban esik szét.

Essék szét az AB második bimedialis a C pontban, úgyhogy AC és CB csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok, melyek mediális téglalapot fognak közre (X. 38.). Nyilvánvaló, hogy C nem a felezőpont, mivel a szakaszok nem lineárisan összemérhetőek. Azt állítom, hogy AB más pontban nem esik szét.



Tegyük föl ugyanis, hogy szétesik a D pontban is, úgyhogy AC nem ugyanaz, mint DB , hanem például AC nagyobb. Világos, hogy ekkor – mint fent megmutattuk – AD és DB négyzetösszege kisebb AC és CB négyzetösszegénél (X. 42. L.), s AD és DB csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek mediális téglalapot fognak közre. Vegyük az EF racionális, illesszünk EF -hez egy AB négyzetével egyen-

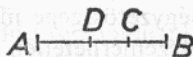
lő EK téglalapot, és vonjuk le az AC és CB négyzetösszegével egyenlő EG téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék HK egyenlő az AC és CB közötti téglalap kétszeresével (II. 4.). Ismét, vonjunk le egy AD és DB négyzetösszegével, mely mint megmutattuk, kisebb AC és CB négyzetösszegénél, egyenlő EL téglalapot. Ekkor a maradék MK egyenlő az AD és DB közötti téglalap kétszeresével. Minthogy AC és CB négyzetösszege mediális (X. 15., 23. K.), EG [is] mediális. S az EF racionális mellé illesztettük, EH tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel (X. 22.). Ugyanígy HN is racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel. Minthogy AC és CB csak négyzetesen összemérhető mediálisok, AC lineárisan összemérhetetlen CB -vel. AC négyzete úgy aránylik az AC és CB közötti téglalaphoz, mint AC a CB -hez (X. 22. L.), AC négyzete tehát összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalappal (X. 11.). AC négyzetével viszont összemérhető AC és CB négyzetösszege – hiszen AC és CB négyzetesen összemérhetőek (X. 15.) –, az AC és CB közötti téglalappal pedig összemérhető az AC és CB közötti téglalap kétszerese (X. 6.), AC és CB négyzetösszege tehát összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). AC és CB négyzetösszegével viszont egyenlő EG , az AC és CB közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő HK , EG tehát összemérhetetlen HK -val, úgyhogy EH is lineárisan összemérhetetlen HN -nel (VI. 1., X. 11.). S racionálisok, EH és HN tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Ha viszont két, csak négyzetesen összemérhető racionálist összeadunk, az összeg irracionális, ún. binomiális (X. 36.), EN tehát egy binomiális, mely a H pontban esik szét. Ugyanígy mutatható meg, hogy EM és MN is csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és az EN binomiális különböző pontokban esik szét, mind H -ban, mind M -ben, és EH nem ugyanaz, mint MN , mert AC és CB négyzetösszege nagyobb AD és DB négyzetösszegénél, AD és DB négyzetösszege pedig nagyobb az AD és DB közötti téglalap kétszeresénél (X. 60. L.), AC és CB négyzetösszege, azaz EG , annál nagyobb tehát az AD és DB közötti téglalap kétszeresénél, azaz MK -nál, úgyhogy EH is nagyobb MN -nél. EH tehát nem ugyanaz, mint MN . Éppen ezt kellett bizonyítani (X. 42.).

X. 45. Tétel

Maiores csak ugyanabban a pontban esik szét.

Essék szét az AB maior a C pontban, úgyhogy AC és CB négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, AC és CB négyzetösszege racionális, és az AC és CB közötti téglalap mediális (X. 39.). Azt állítom, hogy AB más pontban nem esik szét.

Tegyük föl ugyanis, hogy a D pontban is szétesik, úgyhogy AD és DB négyzetesen összemérhetetlenek, AD és DB négyzetösszege racionális, az általuk közrefogott téglalap pedig mediális. Minthogy az AD és DB közötti téglalap kétszerese annyival különbözik az AC és CB közötti téglalap kétszeresétől, amennyivel AC és CB négyzetösszege AD és DB négyzetösszegétől (II. 4.), és AC és CB négyzetösszege racionális felülettel különbözik AD és DB négyzetösszegétől – hiszen mindketten racionálisok –, az AD és DB közötti téglalap kétszerese is racionális felülettel különbözik az AC és CB közötti téglalap kétszeresétől, noha mediálisok (X. 6., 23. K.), ami ellentmondás (X. 26.). Maiores tehát nem esik szét különböző pontokban; tehát csak ugyanabban. Éppen ezt kellett megmutatni.

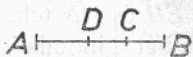


X. 46. Tétel

Négyzetértékben racionális plusz mediális szakasz csak egy pontban esik szét.

Essék szét a négyzetértékben racionális plusz mediális AB a C pontban, úgyhogy AC és CB négyzetesen összemérhetetlenek, AC és CB négyzetösszege mediális, az AC és CB közötti téglalap kétszerese racionális (X. 6., 12.). Azt állítom, hogy AB más pontban nem esik szét.

Tegyük föl ugyanis, hogy szétesik a D pontban is, úgyhogy AD és DB is négyzetesen összemérhetetlenek, AD és DB négyzetösszege mediális, az AD és DB közötti téglalap kétszerese pedig racionális. Minthogy AD és DB négyzetösszege annyival különbözik AC és CB négyzetösszegétől, amennyivel az AC és CB közötti téglalap kétszerese különbözik az AD és DB közötti téglalap kétszeresétől, és az AC és CB közötti téglalap kétszerese racionális felülettel különbözik az AD és DB közötti téglalap kétszeresétől, AD és DB négyzet-



összege is racionális felülettel különbözik AC és CB négyzetösszegétől, noha mediálisok, ami ellentmondás (X. 26.). Nem esik szét tehát négyzetértékben racionális plusz mediális szakasz különböző pontokban; tehát csak egy pontban esik szét. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 47. Tétel

Négyzetértékben két mediális összege csak egy pontban esik szét.

Essék szét egy négyzetértékben két mediális összege, AB , a C pontban, úgyhogy AC és CB négyzetesen összemérhetetlenek, AC és CB négyzetösszege mediális, az AC és CB közötti téglalap mediális és összemérhetetlen a négyzetösszegükkel (X. 41.). Azt állítom, hogy AB a feltételek mellett más pontban nem esik szét.

Tegyük föl ugyanis, hogy D -ben is szétesik, úgyhogy AC nyilván ismét nem ugyanaz, mint DB , hanem például legyen AC a nagyobb, vegyük az EF racionális, és illesszünk EF mellé egy AC és CB négyzetösszegével egyenlő EG s egy, az AC és CB közötti téglalap kétszeresével egyenlő HK téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a teljes EK egyenlő AB négyzetével (II. 4.). Ismét, illesszünk EF mellé egy AD és DB négyzetösszegével egyenlő EL téglalapot. Ekkor a maradék, az AD és DB közötti téglalap kétszerese, egyenlő az MK maradékkal. Mint-hogy AC és CB négyzetösszege föltevés szerint mediális, EG is mediális. S az EF racionális mellé illesztettük, HE tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel (X. 22.). Ugyanígy HN is racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel. Minthogy AC és CB négyzetösszege összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalap kétszeresével (X. 6., 13.), EG is összemérhetetlen GN -nel, úgyhogy EH is összemérhetetlen HN -nel (VI. 1., X. 11.). S racionálisok, EH és HN tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EN tehát binomiális, mely szétesik H -ban. Hasonlóképp mutathatjuk meg, hogy M -ben is szétesik. EH nem ugyanaz, mint MN (X. 60. L.), a binomiális tehát különböző pontokban esik szét, ami ellentmondás (X. 42.). Nem esik tehát szét négyzetértékben két mediális összege különböző pontokban; tehát csak egy [pontban] esik szét.

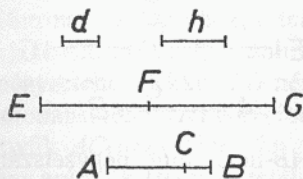
Definíciók. Második rész

- 2.1. Legyen adva a racionális és egy tagjaira bontott binomiális, melynek nagyobbik tagjának négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél. Ha a nagyobbik tag lineárisan összemérhető az adott racionálissal, nevezzük [az összeget] első binomiálisnak.
- 2.2. Ha a kisebb tag lineárisan összemérhető az adott racionálissal, nevezzük (az összeget) második binomiálisnak.
- 2.3. Ha egyik tag sem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, nevezzük harmadik binomiálisnak.
- 2.4. Legyen most a nagyobb tag négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb [a kisebbénél]. Ha a nagyobbik tag lineárisan összemérhető az adott racionálissal, nevezzük (az összeget) negyedik binomiálisnak.
- 2.5. Ha a kisebb, ötödiknek.
- 2.6. Ha pedig egyik sem, hatodiknak.

X. 48. Tétel

*Keressünk első binomiális!**

Vegyünk két számot, AC -t és CB -t, melyek összege, AB , BC -hez úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, CA -hoz viszont nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, vegyünk egy d racionális, és legyen EF lineárisan összemérhető d -vel. Ekkor EF is racionális (X. 9. K., 12.). Arányuljék amint a BA szám AC -hez, úgy EF négyzete FG négyzetéhez (X. 6. K.). AB úgy aránylik AC -hez, mint szám számhoz, EF négyzete tehát szintén úgy aránylik FG négyzetéhez, mint szám számhoz, úgyhogy EF négyzete összemérhető FG négyzetével (X. 6.). EF racionális, tehát FG is racionális (X. 12.). Minthogy BA nem úgy aránylik AC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, EF négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, EF tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel (X. 9.). EF



és FG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EG tehát binomiális.

Azt állítom, hogy első.

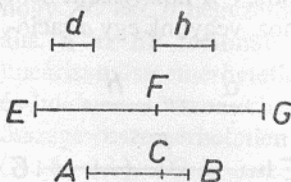
Mínthogy ugyanis EF négyzete úgy aránylik FG négyzetéhez, mint a BA szám AC -hez, és BA nagyobb AC -nél, EF négyzete is nagyobb FG négyzeténél (V. 14.). Legyen EF négyzetével egyenlő FG és h négyzetösszege (X. 14. L.). Mínthogy EF négyzete úgy aránylik FG négyzetéhez, mint BA az AC -hez, fölforgatva EF négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint AB a BC -hez (V. 19. K.). AB viszont úgy aránylik BC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát EF négyzete szintén úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. EF tehát lineárisan összemérhető h -val (X. 9.), EF négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FG -énél. S EF és FG racionálisok, és EF lineárisan összemérhető d -vel.

EG tehát első binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 49. Tétel

*Keressünk második binomiális!**

Vegyünk két számot, AC -t és CB -t, melyek összege, AB , BC -hez úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, AC -hez viszont nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, vegyünk föl egy d



racionális, és legyen EF lineárisan összemérhető d -vel. Ekkor EF racionális. Arányulják amint a CA szám AB -hez, úgy EF négyzete FG négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor EF négyzete összemérhető FG négyzetével (X. 6.), tehát FG is racionális (X. 12.).

Mínthogy a CA szám nem úgy aránylik AB -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, EF négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, EF tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel (X. 9.). EF és FG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EG tehát binomiális.

Azt kell még megmutatni, hogy másodikik.

Mínthogy ugyanis fordítva GF négyzete úgy aránylik FE négyzetéhez, mint a BA szám AC -hez, és BA nagyobb AC -nél, GF négyzete [is]

nagyobb FE négyzeténél (V. 14.). Legyen GF négyzetével egyenlő $E\bar{F}$ és h négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva FG négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint AB a BC -hez (V. 19. K.). AB viszont úgy aránylik BC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát FG négyzete is úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. FG tehát lineárisan összemérhető h -val (X. 9.), úgyhogy FG négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FE -énél. S FG és FE csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és a kisebb tag, EF , lineárisan összemérhető a fölvetett racionálissal, d -vel.

EG tehát második binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

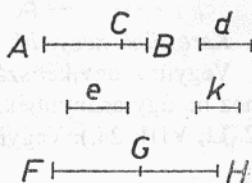
X. 50. Tétel

*Keressünk harmadik binomiális!**

Vegyünk két számot, AC -t és CB -t, melyek összege, AB , BC -hez úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, AC -hez viszont nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, vegyünk valamely másik nem négyzetszámot, d -t, mely sem BA -hoz, sem AC -hez nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz, vegyünk föl valamely e racionális, és arányuljék amint d az AB -hez, úgy e négyzete FG négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor e négyzete összemérhető FG négyzetével (X. 6.). e racionális, tehát FG is racionális. Minthogy d nem úgy aránylik AB -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, e négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, e tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel (X. 9.). Ismét, arányuljék amint a BA szám AC -hez, úgy FG négyzete GH négyzetéhez. Ekkor FG négyzete összemérhető GH négyzetével. FG racionális, tehát GH is racionális (X. 12.). Minthogy BA nem úgy aránylik AC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG négyzete sem úgy aránylik HG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhetetlen GH -val. FG és GH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, FH tehát binomiális.

Azt állítom még, hogy harmadik.

Minthogy ugyanis d úgy aránylik AB -hez, mint e négyzete FG négy-



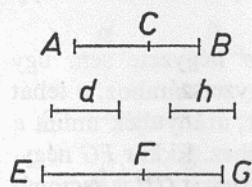
zetéhez, és BA az AC -hez, mint FG négyzete GH négyzetéhez, egyenlő sok tagon át d úgy aránylik AC -hez, mint e négyzete GH négyzetéhez (V. 22.). d viszont nem úgy aránylik AC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát e négyzete sem úgy aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, e tehát lineárisan összemérhetetlen GH -val. Minthogy FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BA az AC -hez, FG négyzete nagyobb, mint GH négyzete (V. 14.). Legyen FG négyzetével egyenlő GH és k négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva FG négyzete úgy aránylik k négyzetéhez, mint AB a BC -hez (V. 19. K.). AB viszont úgy aránylik BC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát FG négyzete is úgy aránylik k négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. FG tehát lineárisan összemérhető k -val. FG négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GH -énál. S FG és GH csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és egyikük sem lineárisan összemérhető e -vel.

GH tehát harmadik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X 51. Tétel

*Keressünk negyedik binomiális!**

Vegyünk úgy két számot, AC -t és CB -t, hogy AB se BC -hez, se AC -hez ne úgy arányuljék, mint négyzetszám négyzetszámhoz (pl. X. 29. 2. L., VIII. 24.). Vegyünk föl egy d racionális, és legyen EF lineárisan



összemérhető d -vel. Ekkor EF is racionális. Arányuljék amint a BA szám AC -hez, úgy EF négyzete FG négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor EF négyzete összemérhető FG négyzetével (X. 6.), tehát FG is racionális (X. 12.). Minthogy BA nem úgy aránylik AC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, EF négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, EF tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel (X. 9.). EF és FG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, úgyhogy EG binomiális.

Azt állítom még, hogy negyedik.

Minthogy ugyanis EF négyzete úgy aránylik FG négyzetéhez, mint BA az AC -hez [és BA nagyobb AC -nél], EF négyzete nagyobb FG

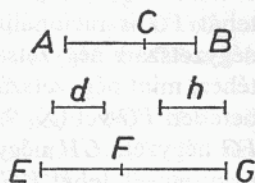
négyzeténél (V. 14.). Legyen EF négyzetével egyenlő FG és h négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva EF négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint az AB szám BC -hez (V. 19. K.). AB viszont nem úgy aránylik BC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát EF négyzete sem úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. EF tehát lineárisan összemérhetetlen h -val (X. 9.). EF négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb GF -énél. S EF és FG csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és EF lineárisan összemérhető d -vel.

EG tehát negyedik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 52. Tétel

*Keressünk ötödik binomiális!**

Vegyünk úgy két számot, AC -t és CB -t, hogy AB egyikőjükhöz se arányuljék úgy, mint négyzetszám négyzetszámhoz (pl. X. 29. 2. L., VIII. 24.). Vegyünk föl valamilyen d racionális szakaszt, és legyen EF [lineárisan] összemérhető d -vel. Ekkor EF is racionális. Arányuljék amint CA az AB -hez, úgy EF négyzete FG négyzetéhez (X. 6. K.). CA nem úgy aránylik AB -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát EF négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. EF és FG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 12., 9.). EG tehát binomiális.



Azt állítom még, hogy ötödik.

Minthogy ugyanis EF négyzete úgy aránylik FG négyzetéhez, mint CA az AB -hez, fordítva FG négyzete úgy aránylik FE négyzetéhez, mint BA az AC -hez (V. 7. K.), GF négyzete tehát nagyobb FE négyzeténél (V. 14.). Legyen GF négyzetével egyenlő EF és h négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva GF négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint az AB szám BC -hez (V. 19. K.). AB viszont nem úgy aránylik BC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát FG négyzete sem úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. FG tehát lineárisan összemérhetetlen h -val, úgyhogy FG négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FE -énél. S GF és FE csak

négyzetesen összemérhető racionálisok, és a kisebb tag, EF , lineárisan összemérhető a fölvett racionálissal, d -vel.

EG tehát ötödik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 53. Tétel

*Keressünk hatodik binomiális!**

Vegyünk úgy két számot, AC -t és CB -t, hogy AB egyikőjükhöz se arányuljék úgy, mint négyzetszám négyzetszámhoz (pl. X. 29. 2. L., VIII. 24.). Legyen d egy másik szám, mely nem négyzetszám és sem BA -hoz, sem AC -hez nem úgy aránylik, mint négyzetszám négyzetszámhoz (ua.). Vegyünk föl valamilyen e racionális szakaszt, és arányuljék amint d az AB -hez, úgy e négyzete FG négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor e négyzete összemérhető FG négyzetével (X. 6.). e racionális,

tehát FG is racionális. Minthogy d nem úgy aránylik AB -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, e négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, e tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel (X. 9.). Ismét, arányuljék amint BA az AC -hez, úgy FG négyzete GH négyzetéhez. Ekkor FG négyzete összemérhető HG négyzetével, tehát HG négyzete racionális (X. 12.), tehát HG racionális. Minthogy BA nem úgy aránylik AC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG négyzete sem úgy aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhetetlen GH -val. FG és GH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, FH tehát binomiális.

Azt kell még megmutatni, hogy hatodik.

Minthogy ugyanis e négyzete úgy aránylik FG négyzetéhez, mint d az AB -hez és FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BA AC -hez, egyenlő sok tagon át e négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint d az AC -hez (V. 22.). d viszont nem úgy aránylik AC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát e négyzete sem úgy aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, e tehát lineárisan összemérhetetlen GH -val. Megmutattuk, hogy FG -vel is összemérhetetlen, tehát mind FG , mind GH lineárisan összemérhetetlen e -vel.

Mínthogy FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BA az AC -hez, FG négyzete nagyobb GH négyzeténél (V. 14.). Legyen FG négyzetével egyenlő GH és k négyzetösszege (X. 14. L.). Fölforgatva tehát FG négyzete úgy aránylik k négyzetéhez, mint AB a BC -hez (V. 19. K.). AB viszont nem úgy aránylik BC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, úgyhogy FG négyzete sem úgy aránylik k négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz. FG tehát lineárisan összemérhetetlen k -val, FG négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb GH -énál. S FG és GH csak négyzetesen összemérhető racionálisok, és egyikőjük sem lineárisan összemérhető a fölvetett racionálissal, e -vel.

FH tehát hatodik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 54. Lemma

Legyen AB és BC két négyzet, melyek úgy vannak elhelyezve, hogy DB egy egyenesen van BE -vel. Ekkor FB és BG is egy egyenesen van. Egészítsük ki az AC paralelogrammát. Azt állítom, hogy AC négyzet, AB -nek és BC -nek középarányosa DG , s végül AC -nek és CB -nek középarányosa DC .

Mínthogy ugyanis DB egyenlő BF -fel, BE pedig BG -vel a teljes DE egyenlő a teljes FG -vel. DE viszont egyenlő AH és KC , FG pedig AK és HC bármelyikével (I. 34.), tehát AH és KC bármelyike egyenlő AK és HC bármelyikével. Az AC paralelogramma tehát egyenlő oldalú; s derékszögű, AC tehát négyzet. Mínthogy DB úgy aránylik BE -hez, mint FB a BG -hez, AB a DG -hez, mint FB a BG -hez és DG a BC -hez, mint DB a BE -hez (VI. 1.), AB úgy aránylik DG -hez, mint DG a BC -hez (V. 11.). DG tehát középarányosa AB -nek és BC -nek.

Még azt állítom, hogy DC középarányosa AC -nek és CB -nek.

Mínthogy ugyanis AD úgy aránylik DK -hoz, mint KG a GC -hez – hiszen páronként egyenlők (V. 7.) –, összetéve AK úgy aránylik KD -hez, mint KC a CG -hez (V. 18.). Amint viszont AK a KD -hez, úgy AC a CD -hez, amint pedig KC a CG -hez, úgy DC a CB -hez, amint tehát AC a DC -hez, úgy DC a BC -hez. DC tehát középarányosa AC -nek és CB -nek. Ezt volt feladatunk megmutatni.

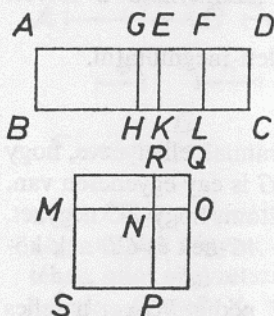
F.: X. 54–55., 60., 92.

X. 54. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy első binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. binomiális.*

Fogja ugyanis közre az AC idomot az AB racionális és az AD első binomiális. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke AC , irracionális, ún. binomiális.

Miután AD első binomiális, essék hát szét E -ben a tagjaira, és legyen AE a nagyobb tag. Nyilvánvaló, hogy AE és ED csak négyzetesen



összemérhető racionálisok, AE négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb ED -énél és AE lineárisan összemérhető az adott AB racionálissal. Legyen F ED felezőpontja (I. 10.). Minthogy AE négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb ED -énél, ha a kisebb tag négyzetének negyedével, azaz EF négyzetével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobb AE -hez úgy, hogy egy négyzet marad fenn, akkor (AE) összemérhető darabokra bomlik (X. 17.).

Illesszük tehát AE -hez az EF négyzetével egyenlő AG és GE közötti téglalapot (VI. 28.). Ekkor AG lineárisan összemérhető EG -vel. Húzzuk meg G -n, E -n, illetve F -en át AB -vel és CD -vel párhuzamosan GH -t, EK -t, illetve FL -t (I. 31.), szerkesszünk egy, az AH paralelogrammával egyenlő SN és egy GK -val egyenlő NQ négyzetet (II. 14.), és helyezzük őket úgy el, hogy MN egy egyenesen legyen NO -val. Ekkor RN is egy egyenesen van NP -vel. Egészítsük ki az SQ paralelogrammát. Ekkor SQ négyzet (L.). Minthogy az AG és GE közötti téglalap egyenlő EF négyzetével, AG úgy aránylik EF -hez, mint FE az EG -hez (VI. 17.), AH tehát úgy aránylik EL -hez, mint EL a KG -hez (VI. 1.), EL tehát középarányosa AH -nak és GK -nak. AH viszont egyenlő SN -nel, GK pedig egyenlő NQ -val, SN -nek és NQ -nak tehát középarányosa EL . Ugyanazon SN -nek és NQ -nak MR is középarányosa (L.), EL tehát egyenlő MR -rel, úgyszólván PO -val is egyenlő (I. 43.). AH meg GK

egyenlő SN meg NQ -val, a teljes AC tehát egyenlő a teljes SQ -val, azaz MO négyzetével. AC tehát MO négyzetértéke.

Azt állítom, hogy MO binomiális.

Minthogy ugyanis AG összemérhető GE -vel, AE az AG és GE bármelyikével összemérhető (X. 15.). AE feltétel szerint összemérhető AB -vel, tehát AG és GE összemérhető AB -vel (X. 12.). AB racionális, tehát AG és GE racionális, tehát AH és GK racionális (X. 19.), és AH összemérhető GK -val. AH egyenlő SN -nel, GK pedig NQ -val, tehát SN és NQ , azaz MN négyzete és NO négyzete, racionálisok és összemérhetőek. Minthogy AE lineárisan összemérhetetlen ED -vel, AE összemérhető AG -vel, DE összemérhető EF -fel, AG összemérhetetlen EF -fel (X. 13.), úgyhogy AH is összemérhetetlen EL -lél (VI. 1., X. 11.). AH egyenlő SN -nel, EL pedig MR -rel, tehát SN is összemérhetetlen MR -rel. PN úgy aránylik NR -hez, mint SN az MR -hez, tehát PN összemérhetetlen NR -rel. PN egyenlő MN -nel, NR pedig NO -val, tehát MN összemérhetetlen NO -val. MN négyzete összemérhető NO négyzetével, és mindkettő racionális, MN és NO tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok.

MO tehát binomiális, és négyzetértéke AC . Éppen ezt kellett megmutatni.

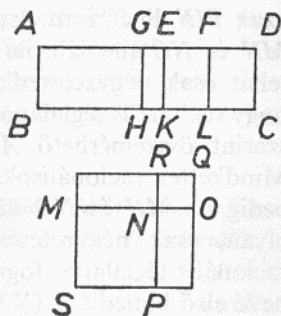
F.: X. 58., 71.

X. 55. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy második binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. első bimedialis.

Fogja ugyanis közre az $ABCD$ idomot az AB racionális és az AD második binomiális. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke AC , irracionális, ún. első bimedialis.

AD második binomiális, essék hát szét úgy E -ben a tagjaira, hogy AE legyen a nagyobb tag. AE és ED tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, AE négyzetértéke egy vele összemérhető szá-



kasz négyzetével nagyobb ED -énél, és a kisebb tag, ED , lineárisan összemérhető AB -vel. Legyen F az ED felezőpontja (I. 10.), és illesztjük úgy AE -hez az EF négyzetével egyenlő AGE paralelogrammát, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.). Ekkor AG lineárisan összemérhető GE -vel (X. 17.). Húzzuk meg G -n, E -n, illetve F -en át AB -vel és CD -vel párhuzamosan GH -t, EK -t, illetve FL -t (I. 31.), szerkesszünk egy, az AH paralelogrammával egyenlő SN és egy GK -val egyenlő NQ négyzetet (II. 14.), és helyezzük őket úgy el, hogy MN egy egyenesen legyen NO -val. Ekkor RN is egy egyenesen van NP -vel (I. 14.). Egészítsük ki az SQ négyzetet. Az előbb bizonyítottakból világos, hogy MR középarányosa SN -nek és NQ -nak, és egyenlő EL -lél, és hogy az AC idom MO négyzetértéke. Azt kell még megmutatni, hogy MO első bimedialis. Minthogy AE lineárisan összemérhetetlen ED -vel és ED összemérhető AB -vel, AE összemérhetetlen AB -vel (X. 13.). Minthogy AG összemérhető EG -vel, AE az AG és GE bármelyikével összemérhető (X. 15.). AE viszont lineárisan összemérhetetlen AB -vel, tehát AG és GE összemérhetetlenek AB -vel (X. 13.). BA , AG és GE tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, úgyhogy mind AH , mind GK mediális, úgyhogy mind SN , mind NQ mediális. Tehát az MN , NO szakaszok is mediálisok. Minthogy AG lineárisan összemérhető GE -vel, AH is összemérhető GK -val (VI. 1., X. 11.), azaz SN az NQ -val, azaz MN négyzete NO négyzetével [úgyhogy MN és NO négyzetesen összemérhető]. Minthogy AE lineárisan összemérhetetlen ED -vel, AE összemérhető AG -vel és ED összemérhető EF -fel, AG összemérhetetlen EF -fel, úgyhogy AH is összemérhetetlen EL -lél, azaz SN az MR -rel, azaz PN az NR -rel, azaz MN lineárisan összemérhetetlen NO -val. Megmutattuk, hogy MN és NO mediálisok és négyzetesen összemérhető, MN és NO tehát csak négyzetesen összemérhető mediálisok. Még azt állítom, hogy racionális téglalapot fognak közre. Minthogy ugyanis DE feltétel szerint összemérhető AB -vel és EF -fel, EF összemérhető EK -val. Mindketten racionálisok, tehát EL , azaz MR , racionális (X. 19.). MR pedig az MN és NO közötti téglalap. Ha viszont összeadunk két olyan, csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszt, melyek racionális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, és a neve első bimedialis (X. 37.).

MO tehát első bimedialis. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 71.

X. 56. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy harmadik binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. második bimedialis.

Fogja ugyanis közre az $ABCD$ idomot az AB racionális és az AD harmadik binomiális, mely E -ben szétesik a tagjaira, melyek közül AE a nagyobb. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke AC , irracionális, ún. második bimedialis.

Végezzük el ugyanazokat a konstrukciókat, mint az előbb. Mint-hogy AD harmadik binomiális, AE és ED csak négyzetesen összemérhető racionálisok, AE négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb ED -énél és sem AE , sem ED nem lineárisan összemérhető AB -vel. Az előbbiekhöz hasonlóan mutathatjuk meg, hogy MO négyzetértéke AC és MN , NO csak négyzetesen összemérhető mediálisok (vö. X. 54–55.), úgyhogy MO bimedialis.

Azt kell még megmutatni, hogy második.

Mint-hogy DE lineárisan összemérhető AB -vel, azaz EK -val, és DE összemérhető EF -fel, EF lineárisan összemérhető EK -val (X. 13.). S racionálisok, FE és EK tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Mediális tehát EL , azaz MR , s MN és NO fogja közre, az MN és NO közötti téglalap tehát mediális.

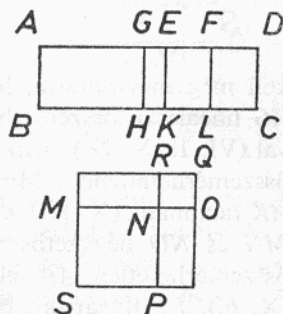
MO tehát második bimedialis. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 72.

X. 57. Tétel

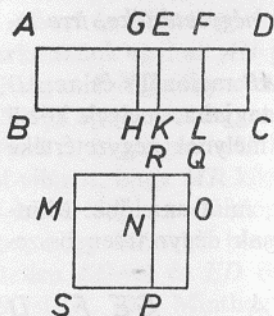
Ha egy idomot egy racionális és egy negyedik binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. maior.

Fogja ugyanis közre az AC idomot az AB racionális és az AD



negyedik binomiális, mely E -ben szétesik a tagjaira, melyek közül AE a nagyobb. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke AC , irracionális, ún. maior.

Mínthogy ugyanis AD negyedik binomiális, AE és ED csak négyzetesen összemérhető racionálisok, AE négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb ED -énél, és AE lineárisan összemérhető AB -vel. Legyen DE felezőpontja F , és illesszünk AE -hez egy EF négyzetével egyenlő paralelogrammát, az AG és GE közöttit (VI. 28.). Ekkor AG lineárisan összemérhetetlen GE -vel (X. 18.). Húzzuk meg AB -vel párhuzamosan GH -t, EK -t, FL -t és így tovább, mint az előző tételben. Világos, hogy az AC idom MO négyzetértéke. Azt



kell még megmutatni, hogy MO irracionális, ún. maior. Mínthogy AG lineárisan összemérhetetlen EG -vel, AH is összemérhetetlen GK -vel (VI. 1., X. 11.), azaz SN az NQ -val. MN és NO tehát négyzetesen összemérhetetlenek. Mínthogy AE lineárisan összemérhető AB -vel, AK racionális (X. 19.), s egyenlő MN és NO négyzetösszegével, tehát MN és NO négyzetösszege is racionális. Mínthogy DE lineárisan összemérhetetlen AB -vel, azaz EK -val, és DE összemérhető EF -fel (X. 6.), EF lineárisan összemérhetetlen EK -val (X. 13.). EK és EF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, mediális tehát LE , azaz MR . S MN és NO fogja közre; az MN és NO közötti téglalap tehát mediális. MN és NO négyzetösszege racionális, és MN , NO négyzetesen összemérhetetlenek. Ha viszont összeadunk két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre, akkor az összeg irracionális, mégpedig maior a neve (X. 39.).

MO tehát irracionális, ún. maior, és négyzetértéke az AC idom. Éppen ezt kellett megmutatni.

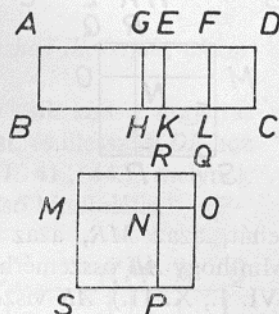
F.: X. 71.

X. 58. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy ötödik binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. négyzetértékben racionális plusz mediális.

Fogja ugyanis közre az AC idomot az AB racionális és az AD ötödik binomiális, mely E -ben úgy esik szét a tagjaira, hogy AE a nagyobb tag. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke AC , irracionális, ún. négyzetértékben racionális plusz mediális.

Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előbbi bizonyításban. Világos, hogy az AC idom MO négyzetértéke. Azt kell még megmutatni, hogy MO négyzetértékben racionális plusz mediális. Minthogy ugyanis AG összemérhetetlen GE -vel (X. 18.), AH is összemérhetetlen HE -vel (VI. 1., X. 11.), azaz MN négyzete NO négyzetével. MN és NO tehát négyzetesen összemérhetetlenek. Minthogy AD ötödik binomiális és ED a kisebb szelete, ED lineárisan összemérhető AB -vel. AE



összemérhetetlen ED -vel, tehát AB is lineárisan összemérhető AE -vel (X. 13.). BA és AE csak négyzetesen összemérhető racionálisok, AK tehát, azaz MN és NO négyzetösszege, mediális. Minthogy DE lineárisan összemérhető AB -vel, azaz EK -val, és DE összemérhető EF -fel (X. 6.), EF is összemérhető EK -val (X. 12.). EK racionális, tehát racionális EL is (X. 19.), azaz MR , azaz az MN és NO közötti téglalap. MN és NO tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakasz, melyek négyzetösszege mediális és racionális téglalapot fognak közre.

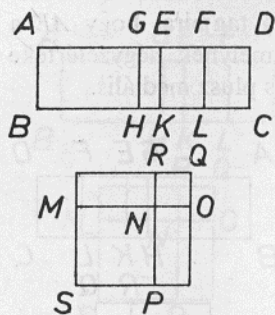
MO tehát négyzetértékben racionális plusz mediális, és négyzetértéke az AC idom. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 59., 71.

X. 59. Tétel

Ha egy idomot egy racionális és egy hatodik binomiális szakasz fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. négyzetértékben két mediális összege.

Fogja ugyanis közre az $ABCD$ idomot az AB racionális és az AD hatodik binomiális, mely E -ben úgy esik szét a tagjaira, hogy AE a nagyobb tag. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke AC , irracionális, ún. négyzetértékben két mediális összege.



Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előző bizonyításban. Világos, hogy az AC idom MO négyzetértéke, és MN négyzetesen összemérhető NO -val. Minthogy EA lineárisan összemérhető AB -vel, EA és AB csak négyzetesen összemérhető racionálisok, AK tehát, azaz MN és NO négyzetösszege, mediális. Ismét, minthogy ED lineárisan összemérhető AB -vel, FE is összemérhető EK -vel (X. 6., 13.), FE és EK tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EL tehát, azaz MR , azaz az MN és NO közötti téglalap, mediális. Minthogy AE összemérhető EF -fel, AK is összemérhető EL -l (VI. 1., X. 11.). AK viszont MN és NO négyzetösszege, EL pedig az MN és NO közötti téglalap, MN és NO négyzetösszege tehát összemérhető az MN és NO közötti téglalappal. S mindkét idom mediális, és MN , NO négyzetesen összemérhetőnek.

MO tehát négyzetértékben két mediális összege, és négyzetértéke AC . Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 72.

X. 60. Lemma

Ha egy egyenesszakaszt nem egyenlő részekre osztunk, akkor a nem egyenlő részek négyzetösszege nagyobb a nem egyenlő részek által közrefogott téglalap kétszeresénél.

Legyen AB egy szakasz, osszuk nem egyenlő részekre C -ben, és legyen AC a nagyobb. Azt állítom, hogy AC és CB négyzetösszege nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél.

Legyen ugyanis AB felezőpontja D (I. 10.). Minthogy így egy egyenesszakaszt egyenlő részekre osztottunk D -ben és nem egyenlőkre C -ben, az AC és CB közötti téglalagnak és CD négyzetének az összege

egyenlő AD négyzetével (II. 5.), úgyhogy az AC és CB közötti téglalap kisebb AD négyzeténél, tehát az AC és CB közötti téglalap kétszerese kisebb, mint AD négyzetének a kétszerese. AC és CB négyzetösszege viszont egyenlő AD és DC négyzetösszegének a kétszeresével (II. 9.), tehát AC és CB négyzetösszege nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél. Éppen ezt kellett megmutatni.]

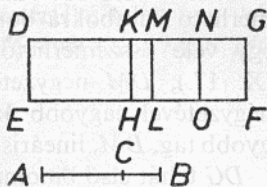
F.: X. 44., 47., 60–61.

X. 60. Tétel

Ha egy binomiális négyzetét racionális szakaszhoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége első binomiális lesz.

Legyen AB egy binomiális, mely C -ben úgy esik szét a tagjaira, hogy AC a nagyobb tag, vegyük a DE racionálist, és illesszük DE -hez az AB négyzetével egyenlő $DEFG$ téglalapot (I. 41., 44.), melynek legyen DG a szélessége. Azt állítom, hogy DG első binomiális.

Illesszük ugyanis DE -hez az AC négyzetével egyenlő DH -t és a BC négyzetével egyenlő KL -t. Ekkor a maradék, az AC és CB közötti téglalap kétszerese, egyenlő MF -fel (II. 4.). Legyen MG felezőpontja N , és húzzuk ML -lel és GF -fel párhuzamosan NO -t (I. 31.). MO és NF tehát egyenlő az AC és CB közötti téglalap egyszerűsével.



Mint ahogy AB binomiális, mely C -ben szétesik a tagjaira, AC és CB csak négyzetesen összemérhető racionálisok. AC és CB négyzete tehát racionális és összemérhető, úgyhogy AC és CB négyzetösszege is [összemérhető AC és CB négyzetével (X. 15.), AC és CB négyzetösszege tehát racionális (X. 12.)]. S egyenlő DL -lel, DL tehát racionális. S a DE racionális mellé illesztettük, DM tehát racionális és lineárisan összemérhető DE -vel (X. 20.). Másrészt, minthogy AC és CB csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az AC és CB közötti téglalap kétszerese, azaz MF , mediális (X. 6., 23. K.). S a racionális ML -hez illesztettük, MG tehát racionális és lineárisan összemérhető ML -lel, azaz DE -vel (X. 22.). MD is racionális, és lineárisan összemérhető DE -vel, DM tehát lineárisan összemérhető MG -vel

(X. 13.). S racionálisok, DM és MG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, DG tehát binomiális.

Azt kell még megmutatni, hogy első.

Minthogy AC és CB négyzetének középarányosa az AC és CB közötti téglalap (X. 54. L.), DH -nak és KL -nek is középarányosa MO . Amint tehát DH az MO -hoz, úgy aránylik MO a KL -hez, azaz amint DK az MN -hez, úgy MN az NK -hoz (VI. 1.), a DK és KM közötti téglalap tehát egyenlő MN négyzetével (VI. 17.). Minthogy AC négyzete összemérhető CB négyzetével, DH is összemérhető KL -lel, úgyhogy DK is összemérhető KM -mel (VI. 1., X. 11.). Minthogy AC és CB négyzetösszege nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél (L.), DL is nagyobb MF -nél, úgyhogy DM is nagyobb MG -nél (VI. 1., V. 14.). S a DK és KM közötti téglalap egyenlő MN négyzetével, azaz MG négyzetének negyedével, és DK összemérhető KM -mel. Ha viszont van két nem egyenlő szakasz és a kisebb négyzetének negyedrésszével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn, és e szakasz lineárisan összemérhető darabokra bomlik, akkor a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél (X. 17.), DM négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb MG -énél. S DM és MG racionálisok, és a nagyobb tag, DM , lineárisan összemérhető a fölvett racionálissal, DE -vel.

DG tehát első binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 72., 111.

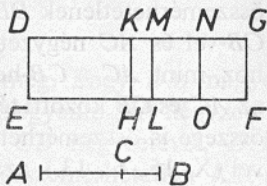
X. 61. Tétel

Ha egy első bimedialis négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége második binomiális lesz.

Essék szét az AB első bimedialis C -ben a mediálisokra, melyek közül AC a nagyobb, vegyük a DE racionálist, és illesszük DE -hez az AB négyzetével egyenlő DG szélességű DF paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy DG második binomiális.

Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb. Minthogy AB első bimedialis, mely C -ben szétesik, AC és CB olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek racionális téglalapot fognak közre, úgyhogy AC és CB négyzetösszege is mediális

(X. 15., 23. K.), tehát DL mediális. S a DE racionális mellett fekszik, MD tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen DE -vel (X. 22.). Másrészt, minthogy az AC és CB közötti téglalap kétszerese racionális (X. 6., 12.), MF is racionális. S a racionális ML mellett fekszik, MG is racionális tehát és lineárisan összemérhető ML -lel (X. 20.), azaz DE -vel, DM tehát lineárisan összemérhetetlen MG -vel (X. 13.). S racionálisok, DM és MG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. DG tehát binomiális.



Azt kell még megmutatni, hogy második.

Minthogy ugyanis AC és CB négyzetösszege nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél (X. 60. L.), DL is nagyobb MF -nél, úgyhogy DM is MG -nél (VI. 1., V. 14.). Minthogy AC négyzete összemérhető CB négyzetével, DH is összemérhető KL -lel, úgyhogy DK is összemérhető KM -mel (VI. 1., X. 11.). S a DK és KM közötti téglalap egyenlő MN négyzetével, DM négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb MG -énél (X. 17.). S MG lineárisan összemérhető DE -vel.

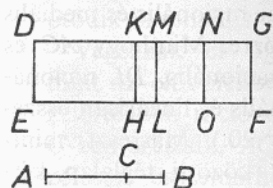
DG tehát második binomiális.

F.: X. 62., 72.

X. 62. Tétel

Ha egy második bimedialis négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége harmadik binomiális lesz.

Legyen AB egy második bimedialis, mely C -ben úgy esik szét, hogy AC a nagyobb szelete, legyen DE a racionális, és illesszük DE -hez az AB négyzetével egyenlő DG szélességű DF paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy DG harmadik binomiális.



Végezzük el ugyanis ugyanazokat a lépéseket, mint az előbbi bizonyításban. Mint-hogy AB második bimedialis, mely szétesik C -ben, AC és CB olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek mediális téglalapot fognak közre, úgyhogy AC és CB négyzetösszege is mediális (X. 15., 23. K.).

S egyenlő DL -lel, tehát DL is mediális. S a racionális DE mellett fekszik, tehát MD is racionális és lineárisan összemérhetetlen DE -vel (X. 22.). Ugyanígy MG is racionális és lineárisan összemérhetetlen ML -lel, azaz DE -vel. DM és MG tehát racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek DE -vel. Minthogy AC lineárisan összemérhetetlen CB -vel és AC négyzete úgy aránylik az AC és CB közötti téglalaphoz, mint AC a CB -hez (X. 22. L.), AC négyzete is összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalappal (X. 11.), úgyhogy AC és CB négyzetösszege is összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalap kétszeresével (X. 15., 6., 13.), azaz DL az MF -fel, úgyhogy DM is összemérhetetlen MG -vel (VI., 1., X. 11.). S racionálisok, DG tehát binomiális.

Azt kell még megmutatni, hogy harmadik.

Az előzőekhez hasonlóan láthatjuk be, hogy DM nagyobb MG -nél és DK összemérhető KM -mel. A DK és KM közötti téglalap egyenlő MN négyzetével, DM négyzetértéke tehát egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb MG -énél (X. 17.). S sem DM , sem MG nem lineárisan összemérhető DE -vel.

DG tehát harmadik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

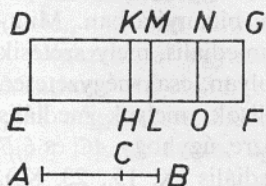
F.: X. 72.

X. 63. Tétel

*Ha egy maior négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége negyedik binomiális lesz.**

Legyen AB egy maior, mely úgy esik szét C -ben, hogy AC nagyobb CB -nél, legyen DE a racionális, és illesszük DE -hez az AB négyzetével egyenlő DG szélességű DF paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy DG negyedik binomiális.

Végezzük el ugyanis ugyanazokat a lépéseket, mint az előbbi bizonyításban. Minthogy AB maior, mely szétesik C -ben, AC és CB két olyan összemérhetetlen szakasz, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre. Minthogy AC és CB négyzetösszege racionális, DL racionális, DM tehát racionális és lineárisan összemérhető DE -vel (X. 20.). Másrészt, mint ahogy az AC és CB közötti téglalap két-



szere, azaz MF , mediális (X. 6., 23. K.) és a racionális ML mellett fekszik, MG is racionális és lineárisan összemérhetetlen DE -vel (X. 22.), tehát DM is lineárisan összemérhetetlen MG -vel (X. 13.). DM és MG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, DG tehát binomiális.

Azt kell még megmutatni, hogy negyedik.

Az előzőekhez hasonlóan mutathatjuk meg, hogy DM nagyobb MG -nél és hogy a DK és KM közötti téglalap egyenlő MN négyzetével. Minthogy AC négyzete összemérhetetlen CB négyzetével, DH is összemérhetetlen KL -lel, úgyhogy DK is összemérhetetlen KM -mel (VI. 1., X. 11.). Ha viszont van két nem egyenlő szakasz, és a kisebb négyzetének negyedrésszével egyenlő paralelogrammát illesztünk a nagyobbhoz úgy, hogy egy négyzet marad fenn, és e szakasz összemérhetetlen darabokra bomlik, akkor a nagyobb szakasz négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a kisebbénél (X. 18.), DM négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb MG -énél. S DM és MG csak négyzetesen összemérhető racionálisok és DM összemérhető az adott racionálissal, DE -vel.

DG tehát negyedik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

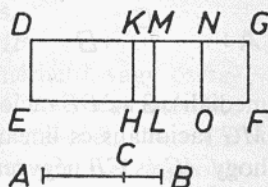
F.: X. 73.

X. 64. Tétel

*Ha egy négyzetértékben racionális plusz mediális négyzetét a racionálissal illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége ötödik binomiális lesz.**

Legyen AB négyzetértékben racionális plusz mediális, mely C -ben úgy esik szét, hogy AC a nagyobb, vegyük a DE racionálissal, és illesztjük DE -hez az AB négyzetével egyenlő DG szélességű DF paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy DG ötödik binomiális.

Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előbbieken. Minthogy AB négyzetértékben racionális plusz mediális, mely C -ben szételik, AC és CB két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakasz, melyek



négyzetösszege mediális, és racionális téglalapot fognak közre. Minthogy AC és CB négyzetösszege mediális, DL mediális, úgyhogy DM racionális és lineárisan összemérhetetlen DE -vel (X. 22.). Másrészt, minthogy az AC és CB közötti téglalap kétszerese, azaz MF , racionális (X. 6., 12.), MG racionális és összemérhető DE -vel (X. 20.). DM tehát összemérhetetlen MG -vel (X. 13.), DM és MG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, DG tehát binomiális.

Azt állítom még, hogy ötödik.

Hasonlóképp mutatható meg, hogy a DK és KM közötti téglalap egyenlő MN négyzetével, és DK lineárisan összemérhetetlen KM -mel, DM négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb MG -énél (X. 18.). S DM és MG csak négyzetesen összemérhető [racionálisok], és a kisebb MG lineárisan összemérhető DE -vel.

DG tehát ötödik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

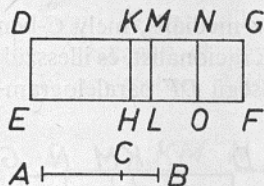
F.: X. 72.

X. 65. Tétel

*Ha egy négyzetértékben két mediális összegének négyzetét a racionáliszhoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége hatodik binomiális lesz.**

Legyen AB négyzetértékben két mediális összege, mely szétesik C -ben, legyen DE a racionális, és illesszük DE -hez az AB négyzetével egyenlő DG szélességű DF paralelogrammát (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy DG hatodik binomiális.

Végezzük el ugyanis ugyanazokat a lépéseket, mint fentebb. Minthogy AB négyzetértékben két mediális összege és C -ben esik szét, AC és CB olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyeknek mind a négyzetösszege mediális, mind mediális téglalapot fognak közre és négyzetösszegük összemérhetetlen az általuk közrefogott téglalappal, úgyhogy a fentebb bizonyítottak szerint mind DL , mind MF



mediális. S az DE racionális mellett fekszenek, tehát mind DM , mind MG racionális és lineárisan összemérhetetlen DE -vel (X. 22.). Minthogy AC és CB négyzetösszege összmérhetetlen az AC és CB közötti

tégialap kétszeresével (X. 6., 13.), DL összemérhetetlen MF -fel, tehát DM is összemérhetetlen MG -vel (VI. 1., X. 11.), DM és MG tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, tehát DG binomiális.

Azt állítom még, hogy hatodik.

Ismét hasonlóan mutathatjuk meg, hogy a DK és KM közötti tégialap egyenlő MN négyzetével, és hogy DK lineárisan összemérhetetlen KM -mel, és ugyanúgy DM négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb MG -énél (X. 18.). S sem DM , sem MG nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, DE -vel.

DG tehát hatodik binomiális. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 72.

X. 66. Tétel

*Binomiálissal lineárisan összemérhető szakasz maga is binomiális, mégpedig ugyanannyiadik.**

Legyen AB binomiális, és legyen CD lineárisan összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy CD binomiális, mégpedig ugyanannyiadik, mint AB .

AB binomiális, essék hát szét E -ben a tagjaira, és legyen AE a nagyobb tag. AE és EB tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok.

Arányulják amint AB a CD -hez, úgy AE a

CF -hez (VI. 12.). Ekkor a maradék EB úgy

aránylik a maradék FD -hez, mint AB a CD -

hez (V. 16., 19. K.). AB lineárisan össze-

mérhető CD -vel, tehát AE is összemérhető

CF -fel, EB pedig FD -vel (X. 11.). AE és EB

racionálisok, tehát CF és FD is racionálisok (X. 12.). [Minthogy] AE

úgy aránylik CF -hez, mint EB az FD -hez (V. 11.), fölcserélve AE úgy

aránylik EB -hez, mint CF az FD -hez (V. 16.). AE és EB csak négyzete-

sen összemérhetőek, tehát CF és FD is csak négyzetesen összemérhe-

tők (X. 11.). S racionálisok, CD tehát binomiális.

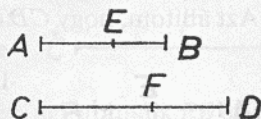
Azt állítom még, hogy ugyanannyiadik, mint AB .

AE négyzetértéke ugyanis egy vele vagy összemérhető, vagy össze-

mérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb EB -énél. Ha AE négyzetértéke

egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb EB -énél, akkor CF

négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb

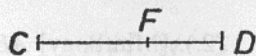
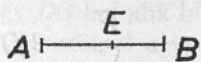


FD -énél (X. 14.). S ha AE összemérhető a fölvevett racionálissal, akkor CF is összemérhető vele (X. 12.), és ezért mind AB , mind CD első, azaz ugyanannyiadik binomiális. Ha EB összemérhető az adott racionálissal, akkor FD is összemérhető vele, és ezért ismét ugyanannyiadik, mint AB , hiszen mindketten második binomiálisok. Ha AE és EB egyike sem összemérhető az adott racionálissal, akkor CF és FD sem összemérhető vele (X. 13.), és mindkettő harmadik.* Ha AE négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb EB -énél, akkor CF négyzetértéke is egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FD -énél (X. 14.). S ha AE összemérhető az adott racionálissal, akkor CF is összemérhető vele, és mindkettő negyedik. Ha viszont EB , akkor FD is, és mindkettő ötödik. Ha pedig AE és EB egyike sem, akkor CF és FD sem összemérhető az adott racionálissal, és mindkettő hatodik, úgyhogy binomiálissal lineárisan összemérhető szakasz binomiális, mégpedig ugyanannyiadik. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 67. Tétel

*Bimediálissal lineárisan összemérhető szakasz maga is bimediális, mégpedig ugyanannyiadik.**

Legyen AB bimediális, és legyen CD lineárisan összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy CD bimediális, mégpedig ugyanannyiadik, mint AB .



AB bimediális, essék hát szét E -ben a mediálisokra. AE és EB tehát csak négyzetesen összemérhető mediálisok. Arányulják amint AB a CD -hez, úgy AE a CF -hez (VI. 12.). Ekkor a maradék EB úgy aránylik a maradék FD -hez, mint AB a CD -hez (X. 16., 19. K.).

AB lineárisan összemérhető CD -vel, tehát AE , illetve EB is összemérhető CF -fel, illetve FD -vel (X. 11.). AE és EB mediálisok, tehát CF és FD is mediálisok (X. 23.). Minthogy CF úgy aránylik FD -hez, mint AE az EB -hez (V. 11., 16.), és AE meg EB csak négyzetesen összemérhetőek, CF és FD is csak négyzetesen összemérhetőek (X. 11.). Megmutattuk azt is, hogy mediálisok, CD tehát bimediális.

Azt állítom még, hogy ugyanannyiadik, mint AB .

Minthogy AE úgy aránylik EB -hez, mint CF az FD -hez, AE négyzete

úgy aránylik az AE és EB közötti téglalaphoz, mint CF négyzete a CF és FD közötti téglalaphoz (X. 22. L.), fölcserélve tehát AE négyzete úgy aránylik CF négyzetéhez, mint az AE és EB közötti téglalap a CF és FD közöttihez (V. 16.). AE négyzete összemérhető CF négyzetével, tehát az AE és EB közötti téglalap is összemérhető a CF és FD közöttivel (X. 11.). Ha tehát az AE és EB közötti téglalap racionális, akkor a CF és FD közötti is racionális (X. 12.) [és ezért a szakasz első bimedialis], ha pedig mediális, akkor mediális (X. 23. K.), és mindkét szakasz második.

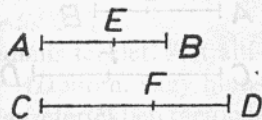
És ezért CD ugyanannyiadik, mint AB . Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 68. Tétel

Maiorral összemérhető szakasz maga is maior.

Legyen AB maior és legyen CD összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy CD maior.

Essék szét AB az E -ben. AE és EB tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fognak közre. Hajtsuk végre az előbbiekkal azonos lépéseket. Mivel AE a CF -hez és EB az FD -hez úgy aránylik, mint AB a CD -hez, AE úgy aránylik CF -hez, mint EB az FD -hez (V. 11.). AB összemérhető CD -vel, tehát AE , illetve EB is összemérhető CF -fel, illetve FD -vel (X. 11.). Mivel amint AE a CF -hez, úgy aránylik EB az FD -hez, és fölcserélve amint AE az EB -hez, úgy CF az FD -hez (V. 16.), összetéve amint AB a BE -hez, úgy CD a DF -hez (V. 18.), amint tehát AB négyzete BE négyzetéhez, úgy CD négyzete DF négyzetéhez (VI. 22.). Hasonlóképp mutathatjuk meg azt is, hogy amint AB négyzete AE négyzetéhez, úgy aránylik CD négyzete CF négyzetéhez. Amint tehát AB négyzete AE és EB négyzetösszegéhez, úgy CD négyzete CF és FD négyzetösszegéhez (V. 7. K., 24.), fölcserélve tehát amint AB négyzete CD négyzetéhez, úgy AE és EB négyzetösszege CF és FD négyzetösszegéhez (V. 16.). AB négyzete összemérhető CD négyzetével, tehát AE és EB négyzetösszege is összemérhető CF és FD négyzetösszegével (X. 11.). AE és EB négyzetösszege racionális, tehát CF és FD négyzet-



összege is racionális (X. 12.). Hasonlóképp az AE és EB közötti téglalap kétszerese is összemérhető a CF és FD közötti kétszeresével (V. 16., 19. K., II. 4.). Az AE és EB közötti téglalap mediális (X. 6., 23. K.), tehát a CF és FD közötti téglalap kétszerese is mediális. CF és FD tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális és az általuk közrefogott téglalap kétszerese mediális. A CD összeg tehát irracionális, ún. maior.

Maiorral összemérhető szakasz tehát maior. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 69. Tétel

Négyzetértékben racionális plusz mediális szakasszal összemérhető szakasz [maga is] négyzetértékben racionális plusz mediális.

Legyen AB négyzetértékben racionális plusz mediális, és legyen CD összemérhető AB -vel. Azt kell megmutatni, hogy CD is négyzetértékben racionális plusz mediális.

Essék szét AB az E -ben a szakaszaira. AE és EB tehát két olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakasz, melyek négyzetösszege mediális és racionális téglalapot fognak közre. Végezzük el ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb. Ekkor hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy CF és FD is négyzetesen összemérhetetlenek, és összemérhető AE és EB négyzetösszege CF és FD négyzetösszegével, az AE és EB közötti téglalap pedig a CF és FD közötti téglalappal, úgyhogy CF és FD négyzetösszege is mediális (X. 23. K.), a CF és FD közötti téglalap pedig racionális (X. 12.).

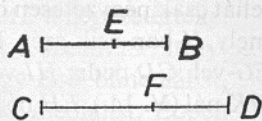
CD tehát négyzetértékben racionális plusz mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 70. Tétel

Négyzetértékben két mediális összegével összemérhető szakasz négyzetértékben két mediális összege.

Legyen AB négyzetértékben két mediális összege, és CD összemérhető AB -vel. Azt kell megmutatni, hogy CD is négyzetértékben két mediális összege.

AB négyzetértékben két mediális összege, essék hát szét E -ben. AE és EB tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyeknek mind a négyzetösszege mediális, mind mediális téglalapot fognak közre, és AE és EB négyzetösszege összemérhetetlen az AE és EB közötti téglalappal. Hajtsuk végre ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb. Ekkor hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy CF és FD is négyzetesen összemérhetetlenek, és összemérhető AE és EB négyzetösszege CF és FD négyzetösszegével, az AE és EB közötti téglalap pedig a CF és FD közötti téglalappal, úgyhogy CF és FD négyzetösszege is mediális, és a CF és FD közötti téglalap mediális (X. 23. K.), és CF és FD négyzetösszege összemérhetetlen a CF és FD közötti téglalappal (X. 13.).



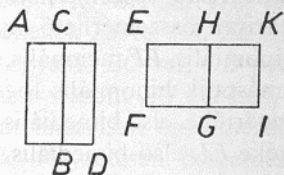
CD tehát négyzetértékben két mediális összege. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 71. Tétel

Ha egy racionális és egy mediális területet összeadunk, négyféle irracionális kaphatunk: vagy binomiális, vagy első bimedialis, vagy maior, vagy négyzetértékben racionális plusz mediális.

Legyen AB egy racionális, CD pedig egy mediális terület. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az AD idom, vagy binomiális, vagy első bimedialis, vagy maior, vagy négyzetértékben racionális plusz mediális.

AB ugyanis vagy nagyobb CD -nél, vagy kisebb nála. Legyen először nagyobb. Vegyük az EF racionális, és illesszük EF -hez az AB -vel egyenlő EH szélességű EG -t és a DC -vel egyenlő HK szélességű HI -t (I. 41., 44.). Minthogy AB racionális és egyenlő EG -vel, EG is racionális. Az EF [racionális]hoz illesztve szélessége EH , EH tehát racionális és lineárisan összemérhető EF -fel (X. 20.). Ismét, minthogy CD mediális és egyenlő HI -vel, HI is mediális. Az EF racionálishoz illesztve szélessége HK , HK tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel



(X. 22.). Minthogy CD mediális, AB pedig racionális, AB összemérhetetlen CD -vel, úgyhogy EG is összemérhetetlen HI -vel. Amint viszont EG a HI -hez, úgy aránylik EH a HK -hoz (VI. 1.), tehát EH is lineárisan összemérhetetlen HK -val (X. 11.). Mind a kettő racionális, EH és HK tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EK tehát binomiális, mely H -ban esik szét. Minthogy AB nagyobb CD -nél és AB egyenlő EG -vel, CD pedig HI -vel, EG is nagyobb HI -nél, tehát EH is nagyobb HK -nál (V. 14.). EH négyzetértéke tehát egy vele lineárisan vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb HK -énál. Legyen először egy vele összemérhető négyzetével nagyobb. A nagyobb tag, HE , összemérhető az adott racionálissal, EF -fel, EK tehát első binomiális. EF racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy első binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, binomiális (X. 54.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke EI , binomiális, úgyhogy az is binomiális, melynek AD a négyzetértéke. Most pedig legyen EH négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb HK -énál. A nagyobb tag, EH , lineárisan összemérhető az adott racionálissal, EF -fel, EK tehát negyedik binomiális. EF racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy negyedik binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, irracionális, ún. maior (X. 57.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke EI , maior, úgyhogy az is maior, melynek AD a négyzetértéke.

Most pedig legyen AB kisebb CD -nél. EG is kisebb tehát HI -nél, úgyhogy EH is kisebb HK -nál (VI. 1., V. 14.). HK négyzetértéke egy vele vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb EH -énál. Legyen először egy vele lineárisan összemérhető négyzetével nagyobb. A kisebb tag, EH , lineárisan összemérhető az adott racionálissal, EF -fel, EK tehát második binomiális. EF racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy második binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, első bimedialis (X. 55.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke EI , első bimedialis, úgyhogy az is első bimedialis, melynek AD a négyzetértéke. Most pedig legyen HK négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb HE -énél. A kisebb tag, EH , összemérhető az adott racionálissal, EF -fel, EK tehát ötödik binomiális. EF racionális, ha

viszont egy idomot egy racionális és egy ötödik binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, négyzetértékben racionális plusz mediális (X. 58.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke EI , négyzetértékben racionális plusz mediális, úgyhogy az is négyzetértékben racionális plusz mediális, melynek AD a négyzetértéke.

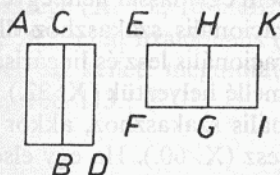
Ha tehát egy racionális és egy mediális területet összeadunk, négyféle irracionálíst kaphatunk: vagy binomiálíst, vagy első bimedialíst, vagy maiort, vagy négyzetértékben racionális plusz mediálíst. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 72. Tétel

Ha két, egymással összemérhetetlen mediális területet összeadunk, a maradék két irracionálíst kapjuk: vagy második bimedialíst, vagy négyzetértékben két mediális összegét.

Adjunk össze ugyanis két, egymással összemérhetetlen mediálíst, AB -t és CD -t. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az AD idom, vagy második bimedialís, vagy négyzetértékben két mediális összege.

AB ugyanis vagy nagyobb CD -nél, vagy kisebb nála. Legyen először például AB nagyobb CD -nél, vegyünk az EF racionálíst, és illesszünk EF -hez egy AB -vel egyenlő EH szélességű EG és egy CD -vel egyenlő HK szélességű HI téglalapot (I. 41., 44.). Minthogy AB és CD mediálisok, EG és HI is mediálisok. Az FE racionálishoz illesztve szélességük EH , illetve HK , EH és HK tehát racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek EF -fel (X. 22.). Minthogy AB összemérhetetlen CD -vel és AB egyenlő EG -vel, CD pedig HI -vel, EG is összemérhetetlen HI -vel. Amint viszont EG HI -hez, úgy aránylik EH a HK -hoz (VI. 1.), EH tehát lineárisan összemérhetetlen HK -val (X. 11.). EH és HK tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EK tehát binomiális. EH négyzetértéke egy vele vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb HK -énál (V. 14.). Legyen először egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb. Sem EH , sem HK nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, EF -fel,



EK tehát harmadik binomiális. *EF* racionális, ha viszont egy idomot egy racionális és egy harmadik binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, második bimedialis (X. 56.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke *EI*, azaz *AD*, második bimedialis. Legyen most *EH* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb *HK*-énál. Mind *EH*, mind *HK* lineárisan összemérhetetlen *EF*-fel, *EK* tehát hatodik binomiális. Ha viszont egy idomot egy racionális és egy hatodik binomiális fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, négyzetértékben két mediális összege (X. 59.), úgyhogy az a szakasz is négyzetértékben két mediális összege, melynek négyzetértéke az *AD* idom.

[Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy ha *AB* kisebb *CD*-nél, a szakasz, melynek négyzetértéke az *AD* idom, akkor is vagy második bimedialis, vagy négyzetértékben két mediális összege.]

Ha tehát két, egymással összemérhetetlen mediális területet összeadunk, a maradék két irracionálist kapjuk: vagy második bimedialist, vagy négyzetértékben két mediális összegét.

A binomiális és az azutáni irracionális szakaszok sem a mediállissal, sem egymással nem egyeznek meg. Ha ugyanis egy mediális négyzetét racionális szakaszhoz illesztjük, akkor a keletkező idom szélessége racionális lesz és lineárisan összemérhetetlen azzal a szakasszal, amely mellé helyeztük (X. 22.). Ha egy binomiális négyzetét illesztjük racionális szakaszhoz, akkor a keletkező idom szélessége első binomiális lesz (X. 60.). Ha egy első bimedialis négyzetét illesztjük a racionális-hoz, akkor a keletkező idom szélessége második binomiális lesz (X. 61.). Ha egy második bimedialis négyzetét illesztjük a racionális-hoz, akkor a keletkező idom szélessége harmadik binomiális lesz (X. 62.). Ha egy maior négyzetét illesztjük a racionális-hoz, akkor a keletkező idom szélessége negyedik binomiális lesz (X. 63.). Ha egy négyzetértékben racionális plusz mediális négyzetét illesztjük a racionális-hoz, akkor a keletkező idom szélessége ötödik binomiális lesz (X. 64.). Ha pedig egy négyzetértékben két mediális összegének négyzetét illesztjük a racionális-hoz, akkor a keletkező idom szélessége hatodik binomiális lesz (X. 65.). Ezek a mondott szélességek mind az elsőtől, mind egymástól különböznek, az elsőtől, mivel racionális,

egymástól pedig, mivel nem ugyanannyiadíkok,* úgyhogy maguk az irracionális szakaszok is különböznek egymástól.

X. 73. Tétel

*Ha egy racionális szakaszból kivonunk egy vele csak négyzetesen összemérhető racionálist, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük apotoména.**

Vonjuk ki ugyanis az AB racionálisból a vele csak négyzetesen összemérhető BC racionálist. Azt állítom, hogy a maradék AC irracionális, ún. apotomé.

Minthogy ugyanis AB lineárisan összemérhetetlen BC -vel és AB négyzete úgy aránylik az AB és BC közötti téglalaphoz, mint AB BC -hez (X. 22. L.), AB négyzete összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalappal (X. 11.). AB négyzetével összemérhető AB és BC négyzetösszege (X. 15.), az AB és BC közötti téglalappal pedig összemérhető az AB és BC közötti téglalap kétszerese (X. 6.). Minthogy AB és BC négyzetösszege egyenlő az AB és BC közötti téglalap kétszeresének és CA négyzetének az összegével (II. 7.), a maradék AC négyzettel összemérhetetlen AB és BC négyzetösszege (X. 13., 16.). AB és BC négyzetösszege racionális (X. 15., 12.), AC tehát irracionális (X. 13.), mégpedig nevezzük apotoména. Éppen ezt kellett megmutatni.

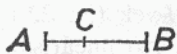
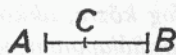
F.: X. 75., 78–79., 81., 84–87., 89–102., 108–113.; XIII. 11.

X. 74. Tétel

Ha egy mediális szakaszból kivonunk egy vele csak négyzetesen összemérhető mediálist, mely a teljes szakasszal racionális téglalapot fog közre, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük első mediálapotoména.

Vonjuk ki ugyanis az AB mediálisból a BC mediálist, mely csak négyzetesen összemérhető AB -vel és AB -vel racionális téglalapot fog közre (X. 27. vagy 31.). Azt állítom, hogy a maradék AC irracionális, mégpedig nevezzük első mediálapotoména.

Minthogy ugyanis AB és BC mediálisok, AB és BC négyzetösszege is mediális (X. 15., 23. K.). Az AB és BC közötti téglalap kétszerese



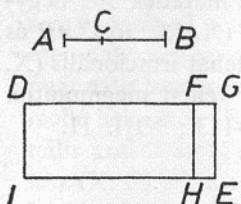
racionális (X. 6., 12.), tehát AB és BC négyzetösszege összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 13.), tehát a maradék AC négyzettel összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszerese (II. 7.), minthogy ha az összeg egyikükkel összemérhetetlen, akkor a tagok is összemérhetetlenek (X. 16.). Az AB és BC közötti téglalap racionális, AC négyzete tehát irracionális (X. 13.), AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük első mediálapotoméának.

F.: X. 80., 92., 98., 104.

X. 75. Tétel

Ha egy mediális szakaszból kivonunk egy vele csak négyzetesen összemérhető mediálist, mely a teljes szakasszal mediális téglalapot fog közre, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük második mediálapotoméának.

Vonjuk ki ugyanis az AB mediálisból a CB mediálist, mely csak négyzetesen összemérhető a teljes AB -vel és a teljes AB -vel mediális téglalapot fog közre (X. 28. vagy 32.). Azt állítom, hogy a maradék AC irracionális, mégpedig nevezzük második mediálapotoméának.



Vegyük ugyanis a DI racionális, és illesztünk DI -hez egy AB és BC négyzetösszegével egyenlő DG szélességű DE , és egy, az AB és BC közötti téglalap kétszeresével egyenlő DF szélességű DH téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék FE egyenlő AC négyzetével (II. 7.). Minthogy AB , illetve BC négyzete mediálisok és összemérhetők, DE is mediális (X. 15., 23. K.). A DI racionálishoz illesztve DG a szélessége, DG tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen DI -vel (X. 22.). Ismét, minthogy az AB és BC közötti téglalap mediális, az AB és BC közötti téglalap kétszerese is mediális (X. 6., 23. K.); s egyenlő DH -val, tehát DH is mediális. A DI racionálishoz illesztve DF a szélessége, DF tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen DI -vel (X. 22.). Minthogy AB és BC csak négyzetesen összemérhetők, AB lineárisan összemérhetetlen BC -vel, tehát AB négyzete is összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalappal (X. 22. L., 11.). AB négyzetével viszont összemérhető AB és BC négyzetösszege (X. 15.), az AB és BC közötti

téglalappal pedig összemérhető az AB és BC közötti téglalap kétszerese (X. 6.), az AB és BC közötti téglalap kétszerese tehát összemérhetetlen AB és BC négyzetösszegével (X. 13.). AB és BC négyzetösszegével egyenlő DE , az AB és BC közötti téglalap kétszeresével pedig DH , DE tehát összemérhetetlen DH -val. Amint viszont DE a DH -hoz, úgy aránylik GD a DF -hez (VI. 1.), GD tehát összemérhetetlen DF -fel (X. 11.). Mindketten racionálisok, GD és DF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, FD tehát apotomé. DI racionális, a racionális és irracionális (X. 73.) szakasz által közrefogott téglalap viszont irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális (X. 20.). FE az AC négyzetértéke, AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük második mediálapotomének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 81., 93., 99., 104.

X. 76. Tétel

Ha egy szakaszból kivonunk egy vele négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melynek a teljes szakasszal vett négyzetösszege racionális és mediális téglalapot fog közre vele, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük minornak.

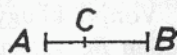
Vonjuk ki ugyanis az AB szakaszból a vele négyzetesen összemérhetetlen BC szakaszt, mely teljesíti a feltételeket (X. 33.). Azt állítom, hogy a maradék AC irracionális, ún. minor.

Mínthogy ugyanis AB és BC négyzetösszege racionális, az AB és BC közötti téglalap kétszerese viszont irracionális (X. 6., 13.), AB és BC négyzetösszege összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 13.), és fölforgatva, a maradék AC négyzettel (II. 7.) összemérhetetlen AB és BC négyzetösszege (X. 16.). AB és BC négyzetösszege racionális, AC négyzete tehát irracionális (X. 13.), AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük minornak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 82., 94., 100., 105.; XIII. 11.

X. 77. Tétel

Ha egy szakaszból kivonunk egy vele négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melynek a teljes szakasszal vett négyzetösszege mediális



és a vele közrefogott téglalap kétszerese racionális, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben mediális mínusz racionálisnak.

Vonjuk ki ugyanis az AB szakaszból a vele négyzetesen összemérhetetlen BC szakaszt, mely teljesíti a feltételeket (X. 34.). Azt állítom, hogy a maradék AC irracionális, neve mint fönt.

Minthogy ugyanis AB és BC négyzetösszege mediális, az AB és BC közötti téglalap kétszerese viszont irracionális, AB és BC négyzetösszege összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 13.), tehát a maradék AC négyzet (II. 7.) is összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével (X. 16.). Az AB és BC közötti téglalap kétszerese racionális, AC négyzete tehát irracionális (X. 13.), AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben mediális mínusz racionálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

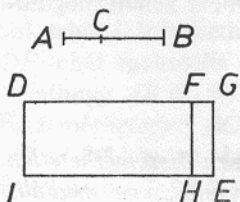
F.: X. 83., 95., 101., 106., 108.

X. 78. Tétel

Ha egy szakaszból kivonunk egy vele négyzetesen összemérhetetlen szakaszt, melynek mind a teljes szakasszal vett négyzetösszege mediális, mind a vele közrefogott téglalap kétszerese mediális, és a négyzetösszegük összemérhetetlen az általuk közrefogott téglalap kétszeresével, akkor a maradék irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben mediális mínusz mediálisnak.

Vonjuk ki ugyanis az AB szakaszból a vele négyzetesen összemérhetetlen BC szakaszt, mely teljesíti a feltételeket (X. 35.). Azt állítom, hogy a maradék AC irracionális, ún. négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Vegyük ugyanis a DI racionális, illesszünk DI -hez egy AB és BC négyzetösszegével egyenlő DG szélességű DE téglalapot, és vonjunk le belőle egy, az AB és BC közötti téglalap kétszeresével egyenlő [DF szélességű] DH téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék FE egyenlő AC négyzetével (II. 7.), úgyhogy FE AC négyzetérték e. Minthogy AB és BC négyzetösszege



mediális és egyenlő DE -vel, DE mediális. A DI racionálisához illesztve DG a szélessége, DG tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen DI -vel (X. 22.). Ismét, minthogy az AB és BC közötti téglalap kétszerese mediális és egyenlő DH -val, DH mediális. A DI racionálisához illesztve DF a szélessége, tehát DF is racionális és lineárisan összemérhetetlen DI -vel (X. 22.). Minthogy AB és BC négyzetösszege összemérhetetlen az AB és BC közötti téglalap kétszeresével, DE is összemérhetetlen DH -val. Amint viszont DE DH -hoz, úgy aránylik DG a DF -hez (VI. 1.), DG tehát összemérhetetlen DF -fel (X. 11.). Mindketten racionálisok, GD és DF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, FG tehát apotomé. FH racionális, a racionális és apotomé által közrefogott téglalap viszont irracionális (X. 73., 20.), és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális. FE az AC négyzetértéke, AC tehát irracionális, mégpedig nevezzük négyzetértékben mediális mínusz mediálisnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

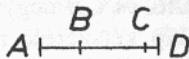
F.: X. 84., 96., 102., 107.

X. 79. Tétel

Apotoméhoz [csak] egy olyan racionális szakasz illik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel.

Legyen AB egy apotomé, és illeszkedjék hozzá BC . AC és CB tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 12.). Azt állítom, hogy AB -hez nem illeszkedik más olyan racionális szakasz, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel.

Tegyük föl ugyanis, hogy illeszkedik egy BD . AD és DB tehát szintén csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Minthogy AD és DB négyzetösszege annnyival nagyobb az AD és DB közötti téglalap kétszeresénél, amennyivel AC és CB négyzetösszege az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél – hiszen mind a kettő ugyanazzal az AB négyzettel nagyobb (II. 7.) –, fölcserélve tehát, AD és DB négyzetösszege annnyival nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, amennyivel az AD és DB közötti téglalap kétszerese az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél. AD és DB négyzetösszege racionális területtel nagyobb AC és CB négyzetösszegénél – hiszen mind a kettő racionális (X. 15., 12.) –,



tehát az AD és DB közötti téglalap kétszerese is racionális területtel nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél, ami lehetetlen, hiszen mind a kettő mediális (X. 6., 23. K.) és két mediális felület különbsége nem lehet racionális (X. 26.). AB -hez tehát nem illeszkedik más olyan racionális, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel.

Apotoméhoz tehát egyetlenegy olyan racionális illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 81., 84.

X. 80. Tétel

Első mediálapotoméhoz csak egy olyan mediális szakasz illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és racionális téglalapot fog közre vele.

Legyen ugyanis AB egy első mediálapotomé, és illeszkedjék AB -hez BC . AC és CB tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok (X. 23.), melyek racionális téglalapot fognak közre. Azt állítom, hogy AB -hez nem illeszkedik más olyan mediális, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és racionális téglalapot fog közre vele.

Tegyük föl ugyanis, hogy DB is illeszkedik hozzá. AD és DB tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok (ua.), melyek racionális téglalapot fognak közre. Minthogy AD és DB négyzetösszege annyival nagyobb az AD és DB közötti téglalap kétszeresénél, amennyivel AC és CB négyzetösszege az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél – hiszen [ismét] ugyanazzal az AB négyzettel nagyobbak (II. 7.) –, fölcserélve tehát, AD és DB négyzetösszege annyival nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, amennyivel az AD és DB közötti téglalap kétszerese nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél. Az AD és DB közötti téglalap kétszerese racionális területtel nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél – hiszen mind a kettő racionális (X. 6., 12.) –, tehát AD és DB négyzetösszege is racionális területtel nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, ami lehetetlen, hiszen mind a kettő mediális (X. 15., 23. K.), és két mediális felület különbsége nem lehet racionális (X. 26.).

Első mediálapotoméhoz tehát csak egy olyan mediális szakasz

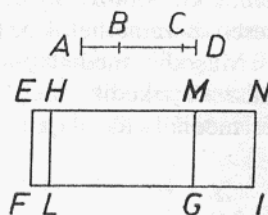
illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és racionális téglalapot fog közre vele. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 81. Tétel

Második mediálapotoméhoz csak egy olyan mediális szakasz illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és mediális téglalapot fog közre vele.

Legyen AB egy második mediálapotomé, és illeszkedjék AB -hez BC . AC és CB tehát olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok (X. 23.), melyek mediális téglalapot fognak közre. Azt állítom, hogy AB -hez nem illeszkedik más olyan mediális, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel, és mediális téglalapot fog közre vele.

Tegyük föl ugyanis, hogy BD is így illeszkedik hozzá. AD és DB tehát szintén olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok (ua.), melyek mediális téglalapot fognak közre. Vegyük az EF racionálist, illesszünk EF -hez egy AC és CB négyzetösszegével egyenlő EM szélességű EG téglalapot, és vonjunk le belőle egy, az AC és CB közötti



téglalap kétszeresével egyenlő HM szélességű HG téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék EL egyenlő AB négyzetével (II. 7.), úgyhogy EL az AB négyzetértéke. Ismét, illesszünk EF -hez egy AD és DB négyzetösszegével egyenlő EN szélességű EI téglalapot. EL egyenlő AB négyzetével, tehát a maradék HI egyenlő az AD és DB közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Minthogy AC és CB mediálisok, AC és CB négyzetösszege is mediális (X. 15., 23. K.), s egyenlő EG -vel, tehát EG is mediális. Az EF racionálishoz illesztve szélessége EM , EM tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel (X. 22.). Ismét, minthogy az AC és CB közötti téglalap mediális, az AC és CB közötti téglalap kétszerese is mediális (X. 6., 23. K.), s egyenlő HG -vel, tehát HG is mediális. Az EF racionális mellé illesztve szélessége HM , HM tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel (X. 22.). Minthogy AC és CB csak négyzetesen összemérhetőek, AC lineárisan összemérhetetlen CB -vel. Amint viszont AC a CB -hez, úgy aránylik AC négyzete az AC és CB közötti téglalaphoz (X. 22. L.), AC négyzete

tehát összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalappal (X. 11.). AC négyzetével összemérhető AC és CB négyzetösszege (X. 15.), az AC és CB közötti téglalappal pedig összemérhető az AC és CB közötti téglalap kétszerese (X. 6.), AC és CB négyzetösszege tehát összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). AC és CB négyzetösszegével egyenlő EG , az AC és CB közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő GH , EG tehát összemérhetetlen HG -vel. Amint viszont EG a HG -hez, úgy aránylik EM a HM -hez (VI. 1.), EM tehát lineárisan összemérhetetlen MH -val (X. 11.). Mindkettő racionális, EM és MH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EH tehát apotomé és HM illeszkedik hozzá. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy HN is illeszkedik hozzá. Egy apotoméhoz tehát különböző olyan szakaszok illeszkednek, melyek csak négyzetesen összemérhetők az összeggel, ami lehetetlen (X. 79.).

Második mediálapotoméhoz tehát csak egy olyan mediális szakasz illeszkedik, mely csak négyzetesen összemérhető az összeggel és mediális téglalapot fog közre vele. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 82. Tétel

Minorhoz csak egy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel és az összeggel vett négyzetösszege racionális, a vele közrefogott téglalap kétszerese pedig mediális.

Legyen AB egy minor, és illeszkedjék AB -hez BC . AC és CB tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese pedig mediális. Azt állítom, hogy AB -hez nem illeszkedik más, e feltételeket teljesítő szakasz.

Tegyük föl ugyanis, hogy illeszkedik egy BD . AD és DB tehát szintén olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek teljesítik a

főntieket. Minthogy AD és DB négyzetösszege annyival nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, amennyivel az AD és DB közötti téglalap kétszerese nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél (II. 7.) és AD és DB négyzetösszege racionális területtel nagyobb AC és CB négyzetösszegénél – hiszen mind a kettő racionális –, tehát az AD és DB közötti téglalap kétszerese is racionális területtel

nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél, ami lehetetlen (X. 26.), mert mind a kettő mediális.

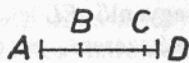
Minorhoz tehát csak egy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel és a vele vett négyzetösszege racionális, a vele közrefogott téglalap kétszerese pedig mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 83. Tétel

Négyzetértékben mediális mínusz racionálishoz csak egy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel és az összeggel vett négyzetösszege mediális, a vele közrefogott téglalap kétszerese pedig racionális.

Legyen AB egy négyzetértékben mediális mínusz racionális, és illeszkedik AB -hez BC . AC és CB tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek teljesítik a feltételeket. Azt állítom, hogy AB -hez másik ugyanezeket a feltételeket kielégítő szakasz nem illeszkedik.

Tegyük föl ugyanis, hogy illeszkedik egy BD . AD és DB tehát szintén olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek kielégítik a feltételeket. Minthogy – az előbbiek mintájára – AD és DB négyzetösszege annyival nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, amennyivel az AD és DB közötti téglalap kétszerese nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél (II. 7.), és az AD és DB közötti téglalap kétszerese racionális területtel nagyobb az AC és CB közötti téglalap kétszeresénél – hiszen mind a kettő racionális –, tehát AD és DB négyzetösszege szintén racionális területtel nagyobb AC és CB négyzetösszegénél, ami lehetetlen (X. 26.), mert mind a kettő mediális. Nem illeszkedik tehát AB -hez más olyan szakasz, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel és az összeggel kielégíti a fentieket. Csak egy illeszkedik tehát. Éppen ezt kellett megmutatni.

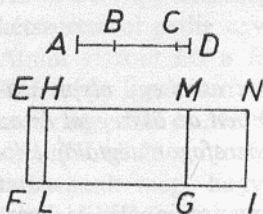


X. 84. Tétel

Négyzetértékben mediális mínusz mediálishoz egyetlenegy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen összemérhetetlen az összeggel, és mind az összeggel vett négyzetösszege, mind az azzal közrefogott téglalap kétszerese mediális, és összemérhetetlen a négyzetösszeggel.

Legyen AB egy négyzetértékben mediális mínusz mediális, és illeszkedik hozzá BC . AC és CB tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek kielégítik a föntieket. Azt állítom, hogy AB -hez nem illeszkedik más, a föntieket kielégítő szakasz.

Tegyük föl ugyanis, hogy illeszkedik egy BD , úgyhogy AD és DB



is olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy mind AD és DB négyzetösszege, mind az AD és DB közötti téglalap kétszerese mediális, és AD és DB négyzetösszege összemérhetetlen az AD és DB közötti téglalap kétszeresével. Vegyük az EF racionálist, és illesszünk EF -hez egy AC és CB négyzetösszegével egyenlő EM szélességű EG és egy, az AC és CB közötti téglalap kétszeresével egyenlő HM szélességű HG téglalapot (I. 41., 44.). Ekkor a maradék AB négyzet egyenlő EL -l (II. 7.), EL tehát AB négyzetértéke. Ismét, illesszünk EF -hez egy AD és DB négyzetösszegével egyenlő EN szélességű EI téglalapot. AB négyzete egyenlő EL -l, tehát a maradék, az AD és DB közötti téglalap kétszerese, egyenlő HI -vel. Minthogy AC és CB négyzetösszege mediális és egyenlő EG -vel, EG is mediális. Az EF racionálishoz illesztve szélessége EM , EM tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel (X. 22.). Ismét, minthogy az AC és CB közötti téglalap kétszerese mediális és egyenlő HG -vel, HG is mediális. Az EF racionálishoz illesztve szélessége HM , HM tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen EF -fel. Minthogy AC és CB négyzetösszege összemérhetetlen az AC és CB közötti téglalap kétszeresével, EG is összemérhetetlen HG -vel, tehát EM lineárisan összemérhetetlen MH -val (VI. 1., X. 11.). Mind a kettő racionális, EM és MH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EH tehát apotomé és HM illeszkedik hozzá. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy EH ismét apotomé és HN illeszkedik hozzá. Egy apotoméhoz tehát különböző olyan racionálisok illeszkednek, melyek csak négyzetesen összemérhetők az összeggel, amiről kimutattuk, hogy lehetetlen (X. 79.). AB -hez tehát nem illeszkedik másik szakasz.

AB -hez tehát csak egy olyan szakasz illeszkedik, mely négyzetesen

összemérhetetlen az összeggel, mind az összeggel vett négyzetösszegé, mind az azzal közrefogott téglalap kétszerese mediális, és a négyzetösszeg összemérhetetlen a téglalap kétszeresével. Éppen ezt kellett megmutatni.

Definíciók. Harmadik rész

- 3.1. Legyen adva a racionális és egy apotomé. Ha a teljes szakasz négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb az (apotoméhoz) illeszkedő szakaszénál, és a teljes szakasz lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor első apotoméről beszélünk.
- 3.2. Ha az illeszkedő szakasz lineárisan összemérhető az adott racionálissal, és a teljes szakasz négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő szakaszénál, akkor második apotoméről beszélünk.
- 3.3. Ha egyik sem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, és a teljes szakasz négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő szakaszénál, akkor harmadik apotoméről beszélünk.
- 3.4. Másrészt, ha a teljes szakasz négyzetértéke egy vele [lineárisan] összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő szakaszénál, akkor ha a teljes szakasz lineárisan összemérhető az adott racionálissal, negyedik apotoméről beszélünk.
- 3.5. Ha az illeszkedő szakasz, ötödikről.
- 3.6. Ha pedig egyik sem, hatodikról.

X. 85. Tétel

Keressünk első apotomé!

Vegyük az a racionális, és legyen BG lineárisan összemérhető a -val. Tehát BG is racionális. Vegyünk két négyzetszámot, DE -t és EF -et, melyek különbsége, FD , nem négyzetszám (X. 29. 1. L.). ED tehát nem úgy aránylik DF -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz (VIII. 24.). Arányuljék amint ED a DF -hez, úgy BG négyzete GC négyzeté-

hez (X. 6. K.). BG négyzete tehát összemérhető GC négyzetével (X. 6.). BG négyzete racionális, tehát GC négyzete is racionális (X. 12.), tehát

GC is racionális. Minthogy ED nem úgy aránylik DF -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG négyzete sem úgy aránylik GC négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG tehát lineárisan összemérhetetlen GC -vel (X. 9.). Mind a kettő racionális, BG és GC tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, BC tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy első.

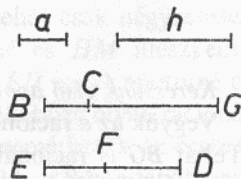
Legyen ugyanis h négyzete az, amivel BG négyzete nagyobb GC négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy BG négyzete úgy aránylik GC négyzetéhez, mint ED az FD -hez, fölforgatva GB négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint DE az EF -hez (V. 19. K.). DE úgy aránylik EF -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz – hiszen mind a kettő négyzetszám –, tehát GB négyzete is úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG tehát lineárisan összemérhető h -val (X. 9.). BG négyzetértéke h négyzetével nagyobb GC -énél, BG négyzetértéke tehát egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GC -énél. A teljes szakasz, BG , lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a -val, BC tehát első apotomé.

Találtunk tehát első apotomét, BC -t. Éppen ezt kellett keresni.

X. 86. Tétel

Keressünk második apotomét!

Vegyük az a racionálist és az a -val lineárisan összemérhető GC -t. GC tehát racionális. Vegyünk két négyzetszámot, DE -t és EF -et, melyek különbsége, DF , ne legyen négyzetszám (X. 29. 1. L.). Arányuljék amint FD a DE -hez, úgy CG négyzete GB négyzetéhez (X. 6. K.). CG négyzete tehát összemérhető GB négyzetével (X. 6.). GC négyzete racionális, tehát GB négyzete is racionális (X. 12.), tehát BG racionális. Minthogy GC négyzete nem úgy aránylik GB négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, CG lineárisan összemérhetetlen GB -vel (X. 9.). Mind a kettő



racionális, CG és GB tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, BC tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy második.

Legyen ugyanis h négyzete az, amivel BG négyzete nagyobb GC négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy az ED szám úgy aránylik a DF számhoz, mint BG négyzete GC négyzetéhez, fölforgatva DE úgy aránylik EF -hez, mint BG négyzete h négyzetéhez (V. 19. K.). Mind DE , mind EF négyzetszám, BG négyzete tehát úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG tehát lineárisan összemérhető h -val (X. 9.). BG négyzetértéke h négyzetével nagyobb GC -énél, és az illeszkedő szakasz, CG , összemérhető az adott a racionálissal, BC tehát második apotomé.

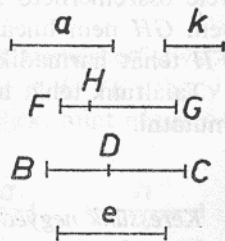
Találtunk tehát második apotomét, BC -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 87. Tétel

Keressünk harmadik apotomét!

Vegyük az a racionálíst, és vegyünk három számot, e -t, BC -t és CD -t, melyek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint négyzetszám négyzetszámhoz, CB viszont úgy aránylik BD -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz (X. 29. 1. L., VIII. 24.), és arányulják amint e a BC -hez, úgy a négyzete FG négyzetéhez, amint pedig BC a CD -hez, úgy FG négyzete GH négyzetéhez (X. 6. K.). Minthogy a négyzete úgy aránylik FG négyzetéhez, mint e a BC -hez, a négyzete összemérhető FG négyzetével (X. 6.).

a négyzete racionális, tehát FG négyzete is racionális, tehát FG racionális. Minthogy e nem úgy aránylik BC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, a négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, a tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel (X. 9.). Ismét, minthogy FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BC a CD -hez, FG négyzete összemérhető GH négyzetével. FG négyzete racionális, tehát GH négyzete is racionális (X. 12.), tehát GH racionális. Minthogy BC nem úgy aránylik CD -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG négyzete sem úgy



aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhetetlen GH -val. Mind a kettő racionális, FG és GH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, FH tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy harmadik.

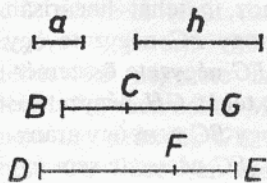
Mivel amint e a BC -hez, úgy aránylik a négyzete FG négyzetéhez, amint pedig BC a CD -hez, úgy FG négyzete HG négyzetéhez, egyenlő sok tagon át tehát amint e a CD -hez, úgy a négyzete HG négyzetéhez (V. 22.). e nem úgy aránylik CD -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát a négyzete sem úgy aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, a tehát lineárisan összemérhetetlen GH -val (X. 9.). Tehát sem FG , sem GH nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a -val. Legyen k négyzete az, amivel FG négyzete nagyobb GH négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BC a CD -hez, fölforgatva FG négyzete úgy aránylik k négyzetéhez, mint BC a BD -hez (V. 19. K.). BC viszont úgy aránylik BD -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát FG négyzete is úgy aránylik k négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhető k -val (X. 9.), és FG négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GH -énál. Sem FG , sem GH nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a -val, FH tehát harmadik apotomé.

Találtunk tehát harmadik apotomét, FH -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 88. Tétel

Keressünk negyedik apotomét!

Vegyük az a racionális és a -val lineárisan összemérhető BG -t. BG tehát racionális. Vegyünk úgy két számot, DF -et és FE -t, hogy a DE összeg sem DF -hez, sem EF -hez ne úgy arányuljék, mint négyzetszám négyzetszámhoz. Arányuljék amint DE az EF -hez, úgy BG négyzete GC négyzetéhez (X. 6. K.). BG négyzete tehát összemérhető GC négyzetével (X. 6.). BG négyzete racionális, tehát GC négyzete is racionális (X. 12.), tehát GC



racionális. Minthogy DE nem úgy aránylik EF -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG négyzete sem úgy aránylik GC négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG tehát lineárisan összemérhetetlen GC -vel (X. 9.). Mind a kettő racionális, BG és GC tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, BC tehát apotomé.

[Azt is állítom, hogy negyedik.]

Legyen ugyanis h négyzete az, amivel BG négyzete nagyobb GC négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy BG négyzete úgy aránylik GC négyzetéhez, mint DE az EF -hez, fölforgatva GB négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint ED a DF -hez (V. 19. K.). ED nem úgy aránylik DF -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát GB négyzete sem úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG tehát lineárisan összemérhetetlen h -val (X. 9.). BG négyzetértéke h négyzetével nagyobb GC -énél, BG négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb GC -énél. A teljes BG lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a -val, BC tehát negyedik apotomé.

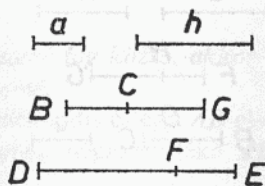
Találtunk tehát negyedik apotomét. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 89. Tétel

Keressünk ötödik apotomét!

Vegyük az a racionális, és legyen CG lineárisan összemérhető a -val. CG tehát racionális. Vegyünk úgy két számot, DF -et és FE -t, hogy ismét DE sem DF -hez, sem FE -hez ne úgy arányuljék, mint négyzetszám négyzetszámhoz, és arányuljék amint FE az ED -hez, úgy CG négyzete GB négyzetéhez (X. 6. K.). Ekkor GB négyzete is racionális (X. 6., 12.), tehát GB is racionális. Minthogy BG négyzete úgy aránylik GC négyzetéhez, mint DE az EF -hez, és DE nem úgy aránylik EF -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG négyzete sem úgy aránylik GC négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG tehát lineárisan összemérhetetlen GC -vel (X. 9.). Mind a kettő racionális, BG és GC tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, BC tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy ötödik.



Legyen ugyanis h négyzete az, amivel BG négyzete nagyobb GC négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy DE úgy aránylik EF -hez, mint BG négyzete GC négyzetéhez, fölforgatva BG négyzete úgy aránylik h négyzetéhez, mint ED a DF -hez (V. 19. K.). ED nem úgy aránylik DF -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát BG négyzete sem úgy aránylik h négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, BG tehát lineárisan összemérhetetlen h -val (X. 9.). BG négyzetértéke h négyzetével nagyobb GC -énél, GB négyzetértéke tehát egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb GC -énél. Az illeszkedő CG lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a -val, BC tehát ötödik apotomé.

Találtunk tehát ötödik apotomét, BC -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

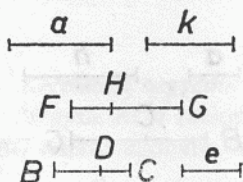
X. 90. Tétel

Keressünk hatodik apotomét!

Vegyük az a racionálíst és három számot, e -t, BC -t és CD -t, melyek nem úgy aránylanak egymáshoz, mint négyzetszám négyzetszámhoz, továbbá CB a BD -hez sem úgy arányulják, mint négyzetszám négyzetszámhoz. Arányulják amint e a BC -hez, úgy a négyzete FG négyzetéhez, amint pedig BC a CD -hez, úgy FG négyzete GH négyzetéhez (X. 6. K.).

Minthogy a négyzete úgy aránylik FG négyzetéhez, mint e a BC -hez, a négyzete összemérhető FG négyzetével (X. 6.). a négyzete racionális, tehát FG négyzete is racionális, tehát FG is racionális. Minthogy e nem úgy aránylik BC -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, a négyzete sem úgy aránylik FG négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, a tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel (X. 9.).

Ismét, minthogy FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BC a CD -hez, FG négyzete összemérhető GH négyzetével. FG négyzete racionális, tehát GH négyzete is racionális (X. 12.), tehát GH is racionális. Minthogy BC nem úgy aránylik CD -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG négyzete sem úgy aránylik GH négyzetéhez, mint négy-



zetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhetetlen GH -val. Mind a kettő racionális, FG és GH tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, FH tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy hatodik.

Mivel amint e a BC -hez, úgy aránylik a négyzete FG négyzetéhez, amint pedig BC a CD -hez, úgy FG négyzete GH négyzetéhez, egyenlő sok tagon át tehát amint e a CD -hez, úgy a négyzete GH négyzetéhez (V. 22.). e nem úgy aránylik CD -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát a négyzete sem úgy aránylik GH négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, a tehát lineárisan összemérhetetlen GH -val (X. 9.). Tehát sem FG , sem GH nem lineárisan összemérhető az a racionálissal. Legyen k négyzete az, amivel FG négyzete nagyobb GH négyzeténél (X. 14. L.). Minthogy FG négyzete úgy aránylik GH négyzetéhez, mint BC a CD -hez, fölforgatva FG négyzete úgy aránylik k négyzetéhez, mint CB a BD -hez (V. 19. K.). CB viszont nem úgy aránylik BD -hez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, tehát FG négyzete sem úgy aránylik k négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz, FG tehát lineárisan összemérhetetlen k -val (X. 9.). FG négyzetértéke k négyzetével nagyobb GH -énál, FG négyzetértéke tehát egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb GH -énál. Sem FG , sem GH nem lineárisan összemérhető az adott racionálissal, a -val, FH tehát hatodik apotomé.

Találtunk tehát hatodik apotomét, FH -t. Éppen ezt kellett megmutatni.

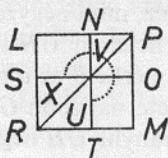
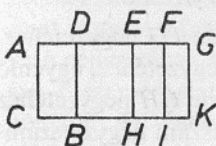
X. 91. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy első apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, apotomé.

Fogja ugyanis közre az AB idomot az AC racionális és egy AD első apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke AB , apotomé.

Miután AD első apotomé, illeszkedjék hát hozzá DG . Ekkor AG és GD csak négyzetesen összemérhető racionálisok, a teljes AG összemérhető az adott racionálissal, AC -vel, és AG négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GD -énél, ha tehát DG négyzetének negyedrésszével egyenlő paralelogrammát illesz-

tünk AG -hez úgy, hogy egy négyzet marad fenn, akkor AG összemérhető darabokra bomlik (X. 17.). Legyen E a DG felezőpontja (I. 10.), és illesszünk AG -hez egy EG négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az AF és FG közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.). AF tehát összemérhető FG -vel. Húzzuk meg az E , F , illetve G pontokon át AC -vel párhuzamosan EH -t, FI -t, illetve GK -t (I. 31.).



Minthogy AF lineárisan összemérhető FG -vel, AG lineárisan összemérhető mind AF -fel, mind FG -vel (X. 15.). AG összemérhető AC -vel, tehát mind AF , mind FG lineárisan összemérhető AC -vel (X. 12.). AC racionális, tehát mind AF , mind FG racionális, úgyhogy mind AI , mind FK racionális (X. 19.). Minthogy DE lineárisan összemérhető EG -vel, DG is lineárisan összemérhető DE -vel és EG -vel (X. 15.). DG racionális és lineárisan összemérhetetlen AC -vel (X. 13.), DE és EG tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen AC -vel (X. 12–13.), DH és EK tehát mediális.

Vegyünk egy AI -vel egyenlő LM négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy FK -val egyenlő NO négyzetet, hogy az LPM szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az LM , NO négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen PR az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy az AF és FG közötti téglalap egyenlő EG négyzetével, AF úgy aránylik EG -hez, mint EG az FG -hez (VI. 17.). Amint viszont AF az EG -hez, úgy aránylik AI az EK -hoz, amint pedig EG az FG -hez, úgy EK a KF -hez (VI. 1.), AI -nek és KF -nek tehát középarányosa EK (V. 11.). LM -nek és NO -nak MN a középarányosa – mint fentebb megmutattuk (X. 54. L.) –, AI egyenlő az LM négyzettel és KF egyenlő NO -val, MN tehát egyenlő EK -val. EK egyenlő DH -val, MN pedig egyenlő LO -val (I. 43.), DK tehát egyenlő az UVX gnómón és NO összegével. AK egyenlő az LM , NO négyzetek összegével, az AB különbség tehát egyenlő ST -vel. ST az LN négyzete, LN négyzete tehát egyenlő AB -vel, azaz AB az LN négyzetértéke.

Azt állítom, hogy LN apotomé.

Minthogy AI és FK racionális és egyenlő LM -mel, illetve NO -val, LM és NO , azaz LP , illetve PN négyzete racionális, tehát LP és PN is racionális. Másrészt, minthogy DH mediális és egyenlő LO -val, LO is mediális. Minthogy LO mediális NO pedig racionális, LO összemérhetetlen NO -val (X. 13.). LP úgy aránylik PN -hez, mint LO az NO -hoz (VI. 1.), LP tehát lineárisan összemérhetetlen PN -nel (X. 11.). Mind a kettő racionális, LP és PN tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, LN tehát apotomé. S négyzetértéke az AB idom, a szakasz tehát, melynek négyzetértéke az AB idom, apotomé.

Ha tehát egy idomot egy racionális... stb.

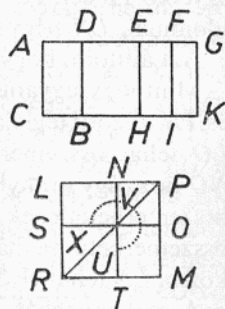
F.: X. 108.

X. 92. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy második apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, első mediálapotomé.

Fogja közre ugyanis az AB idomot az AC racionális és egy AD második apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az AB idom, első mediálapotomé.

Illeszkedjék ugyanis AD -hez DG . Ekkor AG és GD csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az illeszkedő DG összemérhető az adott AC racionálissal, és a teljes AG négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GD -énél. Minthogy AG négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GD -énél, ha GD négyzetének negyedrészeivel egyenlő paralelogrammát illesztünk AG -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn, akkor AG összemérhető darabokra bomlik (X. 17.). Legyen E a DG felezőpontja (I. 10.), és illesszünk AG -hez egy EG négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az AF és FG közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.). AF tehát lineárisan összemérhető FG -vel és AG lineárisan összemérhető AF -fel és FG -vel (X. 15.). AG racionális és lineárisan összemérhetetlen AC -vel (X. 13.), AF és FG tehát szintén racionális és lineárisan összemérhetetlen AC -vel (ua.), AI és FK tehát mediális. Másrészt, minthogy DE összemérhető EG -



vel, DG is összemérhető DE -vel és EG -vel (X. 15.). DG lineárisan összemérhető AC -vel, [DE és EG tehát racionális és lineárisan összemérhető AC -vel (X. 12.)] DH és EK tehát racionális (X. 19.).

Szerkesszünk egy AI -vel egyenlő LM négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy FK -val egyenlő NO négyzetet, hogy az LPM szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az LM , NO négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen PR az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy AI és FK mediális és egyenlő LP , illetve PN négyzetével, LP és PN négyzete is mediális, tehát LP és PN is mediálisok és négyzetesen összemérhetőek (VI. 1., X. 11.). Minthogy az AF és FG közötti téglalap egyenlő EG négyzetével, AF úgy aránylik EG -hez, mint EG az FG -hez (VI. 17.). Amint viszont AF az EG -hez, úgy aránylik AI az EK -hoz, amint pedig EG az FG -hez, úgy EK az FK -hoz (VI. 1.), AI -nek és FK -nak tehát középarányosa EK (V. 11.). Az LM , NO négyzeteknek középarányosa MN (X. 54. L.), AI egyenlő MN -nel és FK az NO -val, tehát MN is egyenlő EK -val. EK -val egyenlő DH , MN -nel pedig egyenlő LO (I. 43.), a teljes DK tehát egyenlő az UVX gnómón és NO összegével. Minthogy a teljes AK egyenlő LM és NO összegével s ebből DK egyenlő az UVX gnómón és NO összegével, a maradék AB egyenlő TS -sel. TS az LN négyzete, LN négyzete tehát egyenlő az AB idommal, LN négyzetértéke tehát az AB idom.

Azt állítom, hogy LN első mediálapotomé.

Minthogy ugyanis EK racionális és egyenlő LO -val, LO , azaz az LP és PN közötti téglalap racionális. NO -ról megmutattuk, hogy mediális, LO tehát összemérhetetlen NO -val (X. 13.). Amint viszont LO az NO -hoz, úgy aránylik LP a PN -hez (VI. 1.), LP és PN tehát lineárisan összemérhetetlenek (X. 11.). LP és PN tehát olyan csak négyzetesen összemérhető mediális szakaszok, melyek racionális téglalapot fognak közre, LN tehát első mediálapotomé, s négyzetértéke az AB idom.

A szakasz tehát, melynek az AB idom négyzetértéke, első mediálapotomé. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 109., 114.

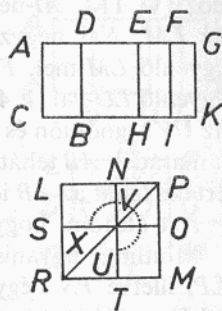
X. 93. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy harmadik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, második mediálapotomé.

Fogja ugyanis közre az AB idomot az AC racionális és egy AD harmadik apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az AB idom, második mediálapotomé.

Illeszkedjék ugyanis AD -hez DG . Ekkor AG és GD csak négyzetesen összemérhető racionálisok, sem AG , sem GD nem lineárisan összemérhető az adott AC racionálissal, és a teljes AG négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő DG -énél. Minthogy AG négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GD -énél, ha DG négyzetének negyedrésszével egyenlő paralelogrammát illesztünk AG -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn, akkor AG összemérhető darabokra fog bomlani (X. 17.). Legyen hát E a DG felezőpontja (I. 10.) és illesszünk AG -hez egy EG négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az AF és FG közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.). Húzzuk az E , F , illetve G pontokon át AC -vel párhuzamosan EH -t, FI -t, illetve GK -t (I. 31.). AF és FG tehát összemérhetőek, tehát AI is összemérhető FK -val (VI. 1., X. 11.). Minthogy AF és FG lineárisan összemérhetőek, AG lineárisan összemérhető AF -fel és FG -vel (X. 15.). AG racionális és lineárisan összemérhetetlen AC -vel, úgyhogy AF és FG is az (X. 13.). AI és FK tehát mediális. Másrészt, minthogy DE lineárisan összemérhető EG -vel, DG is lineárisan összemérhető DE -vel és EG -vel (X. 15.). GD racionális és lineárisan összemérhetetlen AC -vel, DE és EG is racionális tehát és lineárisan összemérhetetlen AC -vel, DH és EK tehát mediális. Minthogy AG és GD csak négyzetesen összemérhető, AG lineárisan összemérhetetlen GD -vel. AG lineárisan összemérhető AF -fel, DG pedig EG -vel, AF tehát lineárisan összemérhetetlen EG -vel (X. 13.). Amint viszont AF az EG -hez, úgy aránylik AI az EK -hoz (VI. 1.), AI tehát összemérhetetlen EK -val (X. 11.).

Szerkesszünk hát egy AI -vel egyenlő LM négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy FK -val egyenlő NO négyzetet, hogy az egyik szöge közös legyen LM -mel (II. 14.). Ekkor LM és NO ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen PR egy átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát.



Mínthogy az AF és FG közötti téglalap egyenlő EG négyzetével, AF úgy aránylik EG -hez, mint EG az FG -hez (VI. 17.). Amint viszont AF az EG -hez, úgy aránylik AI az EK -hoz, amint pedig EG az FG -hez, úgy EK az FK -hoz (VI. 1.), amint tehát AI az EK -hoz, úgy EK az FK -hoz (V. 11.), AI -nek és FK -nak tehát középarányosa EK . Másrészt az LM , NO négyzeteknek középarányosa MN (X. 54. L.) és AI egyenlő LM -mel, FK pedig NO -val, EK tehát egyenlő MN -nel. MN egyenlő LO -val (I. 43.), EK egyenlő DH -val, a teljes DK tehát egyenlő az UVX gnómón és NO összegével. AK egyenlő LM és NO összegével, a maradék AB tehát egyenlő ST -vel, azaz LN négyzetével, LN négyzetértéke tehát az AB idom.

Azt állítom, hogy LN második mediálapotomé.

Mínthogy ugyanis megmutattuk, hogy AI és FK mediális és egyenlő LP , illetve PN négyzetével, LP és PN négyzete mediális, LP és PN tehát mediális. Mínthogy AI összemérhető FK -val (VI. 1., X. 11.), LP négyzete is összemérhető PN négyzetével. Viszont, mínthogy megmutattuk, hogy AI összemérhetetlen EK -val, LM is összemérhetetlen MN -nel, azaz LP négyzete az LP és PN közötti téglalappal, úgyhogy LP is összemérhetetlen PN -nel (X. 22. L., 11.), LP és PN tehát csak négyzetesen összemérhető mediálisok.

Azt is állítom, hogy mediális területet fognak közre.

Mínthogy ugyanis megmutattuk, hogy EK mediális és egyenlő az LP és PN közötti téglalappal, az LP és PN közötti téglalap is mediális, úgyhogy LP és PN olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek mediális téglalapot fognak közre, LN tehát második mediálapotomé; s négyzetértéke az AB idom.

A szakasz tehát, melynek négyzetértéke az AB idom, második mediálapotomé. Éppen ezt kellett megmutatni.

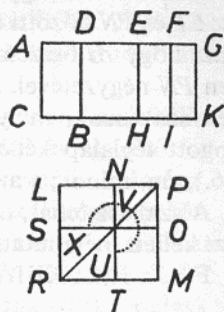
F.: X. 110.

X. 94. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy negyedik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, minor.

Fogja közre ugyanis az AB idomot az AC racionális és egy AD negyedik apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az AB idom, minor.

Illeszkedjék ugyanis AD -hez DG . Ekkor AG és GD csak négyzetesen összemérhető racionálisok, AG lineárisan összemérhető az adott AC racionálissal és a teljes AG négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő DG -énél. Minthogy AG négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb GD -énél, ha DG négyzetének negyedrésszével egyenlő paralelogrammát illesztünk AG -hez úgy, hogy egy négyzet marad fenn, akkor AG összemérhetetlen darabokra fog bomlani (X. 18.). Legyen hát E a DG felezőpontja (I. 10.), és illesszünk AG -hez egy EG négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az AF és FG közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.).



AF tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel. Húzzuk E -n, F -en, illetve G -n át AC -vel és BD -vel párhuzamosan EH -t, FI -t, illetve GK -t (I. 31.). Minthogy AG racionális és lineárisan összemérhető AC -vel, a teljes AK is racionális (X. 19.). Másrészt, minthogy DG lineárisan összemérhetetlen AC -vel és mind a kettő racionális, DK mediális. Továbbá, minthogy AF lineárisan összemérhetetlen FG -vel, AI is összemérhetetlen FK -val (VI. 1., X. 11.). Szerkesszünk egy AI -vel egyenlő LM négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy FK -val egyenlő NO négyzetet, hogy az LPM szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az LM , NO négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen PR az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy az AF és FG közötti téglalap egyenlő EG négyzetével, AF úgy aránylik EG -hez, mint EG az FG -hez (VI. 17.). Amint viszont AF az EG -hez, úgy aránylik AI az EK -hoz, amint pedig EG az FG -hez, úgy EK az FK -hoz (VI. 1.), AI -nek és FK -nak tehát középarányosa EK . Az LM , NO négyzeteknek középarányosa MN (X. 54. L.) és AI egyenlő LM -mel, FK pedig NO -val, EK tehát egyenlő MN -nel. EK egyenlő DH -val, MN egyenlő LO -val (I. 43.), a teljes DK tehát egyenlő az UVX gnómón és NO összegével. Minthogy a teljes AK egyenlő az LM , NO négyzetek összegével, s ebből DK egyenlő az UVX gnómón és az NO négyzet összegével, a maradék AB egyenlő ST -vel, azaz LN négyzetével, LN négyzetértéke tehát az AB idom.

Azt állítom, hogy LN irracionális, ún. minor.

Mínthogy ugyanis AK racionális és egyenlő LP és PN négyzetösszegevel, LP és PN négyzetösszege racionális. Másrészt, mínthogy DK mediális és DK egyenlő az LP és PN közötti téglalap kétszeresével, az LP és PN közötti téglalap kétszerese mediális. Mínthogy megmutattuk, hogy AI összemérhetetlen FK -val, LP négyzete is összemérhetetlen PN négyzetével. LP és PN tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese pedig mediális, LN tehát irracionális (X. 76.), ún. minor; s az AB idom a négyzetértéke.

A szakasz tehát, melynek négyzetértéke az AB idom, minor. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 108.; XIII. 11.

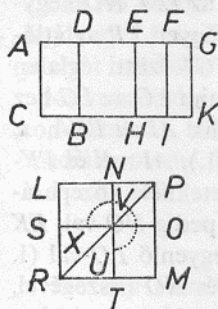
X. 95. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy ötödik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Fogja közre ugyanis az AB idomot az AC racionális és egy AD ötödik apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az AB idom, négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Illeszkedjék ugyanis AD -hez DG . Ekkor AG és GD csak négyzetesen összemérhető racionálisok, az illeszkedő GD lineárisan összemérhető az adott AC racionálissal és a teljes AG négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb az illeszkedő DG -énél. Ha tehát DG négyzetének negyedrésszével egyenlő paralelogrammát illesztünk AG -hez úgy, hogy egy négyzet marad fenn, akkor AG összemérhetetlen darabokra fog bomlani (X. 18.). Legyen hát E a DG felezőpontja (I. 10.) és illesszünk AG -hez egy EG négyzetével egyenlő paralelogrammát –

legyen ez az AF és FG közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.). AF tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel. Mínthogy AG lineárisan összemérhetetlen CA -val és mind a kettő



racionális, AK mediális. Másrészt, minthogy DG racionális és lineárisan összemérhető AC -vel, DK racionális (X. 19.). Szerkesszünk egy AI -vel egyenlő LM négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy FK -val egyenlő NO négyzetet, hogy az LPM szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az LM , NO négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen PR az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. Hasonlóképp mutatható meg, hogy LN négyzetértéke az AB idom.

Azt állítom, hogy LN négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Minthogy ugyanis megmutattuk, hogy AK mediális és egyenlő LP és PN négyzetösszegével, LP és PN négyzetösszege mediális. Másrészt, minthogy DK racionális és egyenlő az LP és PN közötti téglalap kétszeresével, ez is racionális. S minthogy AI összemérhetetlen FK -val (VI. 1., X. 11.), LP négyzete is összemérhetetlen PN négyzetével. LP és PN tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese pedig racionális, az LN maradék tehát irracionális (X. 77.), ún. négyzetértékben mediális mínusz racionális; s négyzetértéke az AB idom.

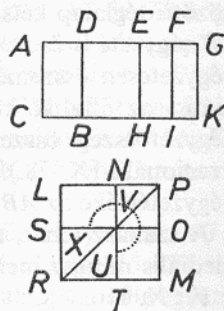
A szakasz tehát, melynek négyzetértéke az AB idom, négyzetértékben mediális mínusz racionális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 96. Tétel

Ha egy idomot a racionális és egy hatodik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Fogja közre ugyanis az AB idomot az AC racionális és egy AD hatodik apotomé. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke az AB idom, négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Illeszkedjék ugyanis AD -hez DG . Ekkor AG és GD csak négyzetesen összemérhető racionálisok, egyikőjük sem lineárisan összemérhető az adott AC racionálissal és a teljes AG négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb DG -énél. Minthogy AG négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz



négyzetével nagyobb GD -énél, ha DG négyzetének negyedrésszével egyenlő paralelogrammát illesztünk AG -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn, akkor AG összemérhetetlen darabokra fog bomlani (X. 18.). Legyen hát E a DG felezőpontja (I. 10.), és illesszünk AG -hez egy EG négyzetével egyenlő paralelogrammát – legyen ez az AF és FG közötti – úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn (VI. 28.). AF tehát lineárisan összemérhetetlen FG -vel. Amint viszont AF az FG -hez, úgy aránylik AI az FK -hoz (VI. 1.), AI tehát összemérhetetlen FK -val (X. 11.). Minthogy AG és AC csak négyzetesen összemérhető racionálisok, AK mediális. Ismét, minthogy AC és DG racionálisok és lineárisan összemérhetetlenek, DK is mediális. Minthogy AG és GD csak négyzetesen összemérhető, AG lineárisan összemérhetetlen GD -vel. Amint viszont AG a GD -hez, úgy aránylik AK a KD -hez (VI. 1.), AK tehát összemérhetetlen KD -vel (X. 11.). Szerkesszünk egy AI -vel egyenlő LM négyzetet, és vonjunk le belőle úgy egy FK -val egyenlő NO -t, hogy egy szögük közös legyen (II. 14.). Ekkor az LM , NO négyzetek ugyanazon átló mellett fekszenek (VI. 26.). Legyen PR az átlójuk, és rajzoljuk meg az ábrát. A fentebbiekhez hasonlóan mutatható meg, hogy LN négyzetértéke az AB idom.

Azt állítom, hogy LN négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Minthogy ugyanis megmutattuk, hogy AK mediális és egyenlő LP és PN négyzetösszegével, LP és PN négyzetösszege mediális. Ismét minthogy megmutattuk, hogy DK mediális és egyenlő az LP és PN közötti téglalap kétszeresével, az LP és PN közötti téglalap kétszerese is mediális. S minthogy megmutattuk, hogy AK összemérhetetlen DK -val, LP és PN négyzetösszege is összemérhetetlen az LP és PN közötti téglalap kétszeresével. Minthogy AI összemérhetetlen FK -val, LP négyzete is összemérhetetlen PN négyzetével. LP és PN tehát olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese is mediális, és a négyzetösszeg összemérhetetlen a téglalap kétszeresével. LN tehát irracionális (X. 78.), ún. négyzetértékben mediális mínusz mediális; s négyzetértéke az AB idom.

A szakasz tehát, melynek négyzetértéke az idom, négyzetértékben mediális mínusz mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 110.

X. 97. Tétel

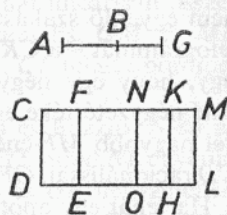
Ha egy apotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége első apotomé lesz.

Legyen AB egy apotomé, CD a racionális, és illesszünk CD -hez egy AB négyzetével egyenlő CF szélességű CE téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy CF első apotomé.

Illeszkedjék ugyanis AB -hez BG . Ekkor AG és GB csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Illesszünk CD -hez egy AG négyzetével egyenlő CH és egy BG négyzetével egyenlő KL téglalapot (ua.). Ekkor a teljes CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével, s ebből CE egyenlő AB négyzetével, a maradék FL tehát egyenlő az AG és GB közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Legyen N az FM felezőpontja (I. 10.) és húzzuk meg N -en át CD -vel párhuzamosan NO -t (I. 31.). Ekkor FO és LN egyenlő az AG és GB közötti téglalappal. Minthogy AG és GB négyzetösszege racionális (X. 15., 12.) és AG és GB négyzetösszegével egyenlő DM , DM racionális. A CD racionálisához illesztve CM a szélessége, CM tehát racionális és lineárisan összemérhető CD -vel (X. 20.). Másrészt, minthogy az AG és GB közötti téglalap kétszerese mediális és az AG és GB közötti téglalap kétszeresével egyenlő FL , FL mediális. A CD racionálisához illesztve szélessége FM , FM tehát racionális és lineárisan összemérhető CD -vel (X. 22.). Minthogy AG és GB négyzetösszege racionális, az AG és GB közötti téglalap kétszerese pedig mediális, AG és GB négyzetösszege összemérhető az AG és GB közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). AG és GB négyzetösszegével egyenlő CL , az AG és GB közötti téglalap kétszeresével egyenlő FL , DM tehát összemérhető FL -l. Amint viszont DM az FL -hez, úgy aránylik CM az FM -hez (VI. 1.), CM tehát lineárisan összemérhető FM -mel (X. 11.). Mind a kettő racionális, CM és FM tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, CF tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy első.

Minthogy ugyanis AG és GB négyzetének középarányosa az AG és GB közötti téglalap (X. 54. L.), és AG négyzetével egyenlő CH , BG négyzetével egyenlő KL , az AG és GB közötti téglalappal pedig egyenlő



NL , CH -nak és KL -nek középarányosa NL , CH tehát úgy aránylik NL -hez, mint NL a KL -hez. Amint viszont CH az NL -hez, úgy aránylik CK az NM -hez, amint pedig NL a KL -hez, úgy NM a KM -hez (VI. 1.), a CK és KM közötti téglalap tehát egyenlő NM négyzetével (V. 11., VI. 17.), azaz FM négyzetének negyedrésszével. Minthogy AG négyzete összemérhető GB négyzetével, CH is összemérhető KL -l. Amint viszont CH a KL -hez, úgy aránylik CK a KM -hez (VI. 1.), CK tehát összemérhető KM -mel (X. 11.). Minthogy CM és MF két nem egyenlő szakasz, FM négyzetének negyedrésszével egyenlő paralelogrammát – a CK és KM közötti téglalapot – illesztettünk CM -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn, és CK összemérhető KM -mel, CM négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb MF -énél (X. 17.). CM lineárisan összemérhető az adott CD racionálissal, CF tehát első apotomé.

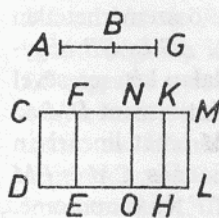
Ha tehát egy apotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége első apotomé lesz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 111., 111. K.; XIII. 6.

X. 98. Tétel

Ha egy első mediálapotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége második apotomé lesz.

Legyen AB egy első mediálapotomé, CD a racionális, és illesszünk CD -hez egy AB négyzetével egyenlő CF szélességű CE téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy CF második apotomé.



Illeszkedjék ugyanis AB -hez BG . Ekkor AG és GB olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek racionális téglalapot fognak közre. Illesszünk CD -hez egy AG négyzetével egyenlő CK szélességű CH és egy GB négyzetével egyenlő KM szélességű KL téglalapot (ua.). Ekkor a teljes CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével, tehát CL is mediális (X. 15., 23. K.). A CD racionálishoz illetve szélessége CM , CM tehát racionális és lineárisan összemérhető CD -vel (X. 22.). Minthogy CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével és ebből

AB négyzete egyenlő *CE*-vel, a maradék, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese (II. 7.), egyenlő *FL*-lel. Az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese racionális (X. 6., 12.), *FL* tehát racionális. Az *FE* racionálishoz illesztve szélessége *FM*, tehát *FM* is racionális és lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 20.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetösszege, azaz *CL*, mediális és az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese, azaz *FL*, racionális, *CL* összemérhetetlen *FL*-lel (X. 13.). Amint viszont *CL* az *FL*-hez, úgy aránylik *CM* az *FM*-hez (VI. 1.), *CM* tehát lineárisan összemérhetetlen *FM*-mel (X. 11.). Mind a kettő racionális, *CM* és *MF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *CF* tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy második.

Legyen ugyanis *N* az *FM* felezőpontja (I. 10.) és húzzuk *N*-en át *CD*-vel párhuzamosan *NO*-t (I. 31.). Ekkor mind *FO*, mind *NL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalappal. Minthogy *AG* és *GB* négyzetének középarányosa az *AG* és *GB* közötti téglalap (X. 54. L.), *AG* négyzete egyenlő *CH*-val, az *AG* és *GB* közötti téglalap *NL*-lel, *BG* négyzete pedig *KL*-lel, így *CH*-nak és *KL*-nek középarányosa *NL*, amint tehát *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *NL* a *KL*-hez. Amint viszont *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *CK* az *NM*-hez, amint pedig *NL* a *KL*-hez, úgy *NM* az *MK*-hoz (VI. 1.), amint tehát *CK* az *NM*-hez, úgy *NM* a *KM*-hez (V. 11.), a *CK* és *KM* közötti téglalap tehát egyenlő *NM* négyzetével (VI. 17.), azaz *FM* négyzetének negyedrésszével. [Minthogy *AG* négyzete összemérhető *BG* négyzetével, *CH* is összemérhető *KL*-lel, azaz *CK* a *KM*-mel (VI. 1., X. 11.).] Minthogy *CM* és *MF* két, nem egyenlő szakasz, *FM* négyzetének negyedrésszével egyenlő téglalapot – a *CK* és *KM* közöttit – illesztettünk a nagyobb *CM*-hez úgy, hogy egy négyzet maradt fenn és *CM* összemérhető darabokra bomlik, *CM* négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhető szakasz négyzetével nagyobb *MF*-énél (X. 17.). Az illeszkedő *FM* lineárisan összemérhető az adott *CD* racionálissal, *CF* tehát második apotomé.

Ha tehát egy első mediálapotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége második apotomé lesz. Éppen ezt kellett megmutatni.

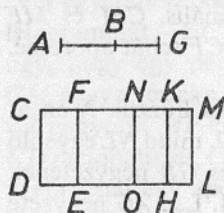
F.: X. 111. K.

X. 99. Tétel

Ha egy második mediálapotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége harmadik apotomé lesz.

Legyen AB egy második mediálapotomé, CD a racionális, és illesszünk CD -hez egy AB négyzetével egyenlő CF szélességű CE téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy CF harmadik apotomé.

Illeszkedjék ugyanis AB -hez BG . Ekkor AG és GB olyan, csak négyzetesen összemérhető mediálisok, melyek mediális téglalapot fognak közre. Illesszünk CD -hez egy AG négyzetével egyenlő CK szélességű CH és KH -hoz egy BG négyzetével egyenlő KM szélességű KL téglalapot (ua.). Ekkor a teljes CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével [és AG és GB négyzetösszege mediális (X. 15., 23. K.)], tehát CL is mediális. A CD racionálishoz illesztve szélessége CM , CM tehát



racionális és lineárisan összemérhetetlen CD -vel (X. 22.). Minthogy a teljes CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével, s ebből CE egyenlő AB négyzetével, a maradék LF egyenlő az AG és GB közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Legyen N az FM felezőpontja (I. 10.), és húzzuk CD -vel párhuzamosan NO -t (I. 31.). Ekkor mind FO , mind NL egyenlő az AG és GB közötti téglalappal. Az AG és GB közötti téglalap mediális, tehát FL is mediális. Az EF racionálishoz illesztve szélessége FM , FM tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen CD -vel (X. 22.). Minthogy AG és GB csak négyzetesen összemérhető, AG lineárisan összemérhetetlen GB -vel, tehát AG négyzete is összemérhetetlen az AG és GB közötti téglalappal (X. 22. L., 11.). AG négyzetével összemérhető AG és GB négyzetösszege (X. 15.), az AG és GB közötti téglalappal pedig összemérhető az AG és GB közötti téglalap kétszerese (X. 6.), AG és GB négyzetösszege tehát összemérhetetlen az AG és GB közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). AG és GB négyzetösszegével egyenlő CL , az AG és GB közötti téglalap kétszeresével pedig FL , CL tehát összemérhetetlen FL -lel. Amint viszont CL az FL -hez, úgy aránylik CM az FM -hez (VI. 1.), CM tehát lineárisan összemérhetetlen FM -mel (X. 11.). Mind a kettő racionális, CM és MF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, CF tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy harmadik.

Mínthogy ugyanis AG négyzete összemérhető GB négyzetével, CH is összemérhető KL -l, úgyhogy CK is KM -mel (ua.). Mínthogy AG és GB négyzetének középarányosa az AG és GB közötti téglalap (X. 54. L.), AG négyzetével egyenlő CH , GB négyzetével egyenlő KL , az AG és GB közötti téglalappal pedig egyenlő NL , CH -nak és KL -nek közép-arányosa NL , amint tehát CH az NL -hez, úgy aránylik NL a KL -hez. Amint viszont CH az NL -hez, úgy aránylik CK az NM -hez, amint pedig NL a KL -hez, úgy NM a KM -hez (VI. 1.), amint tehát CK az MN -hez, úgy MN a KM -hez (V. 11.), a CK és KM közötti téglalap tehát egyenlő [MN négyzetével (V. 17.), azaz] FM négyzetének negyed-részeivel. Mínthogy CM és MF két nem egyenlő szakasz, FM négyzetének negyedrésszeivel egyenlő téglalapot illesztettünk CM -hez úgy, hogy egy négyzet maradt fenn és CM összemérhető darabokra bomlik, CM négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb MF -énél (X. 17.). Sem CM , sem MF nem lineárisan összemérhető az adott CD racionálissal, CF tehát harmadik apotomé.

Ha tehát egy második mediálapotomé négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége harmadik apotomé lesz. Éppen ezt kellett megmutatni.

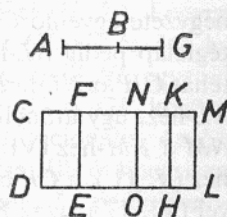
F.: X. 111. K.

X. 100. Tétel

Ha egy minor négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége negyedik apotomé lesz.

Legyen AB egy minor, CD a racionális, és illesszünk CD -hez egy AB négyzetével egyenlő CF szélességű CE téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy CF negyedik apotomé.

Illeszkedjék ugyanis AB -hez BG . Ekkor AG és GB olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy AG és GB négyzetösszege racionális, az AG és GB közötti téglalap kétszerese pedig mediális. Illesszünk CD -hez egy AG négyzetével egyenlő CK szélességű CH és egy BG négyzetével egyenlő KM szélességű KL téglalapot (ua.). Ekkor a teljes



CL egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével. *AG* és *GB* négyzetösszege racionális, tehát *CL* is racionális. A *CD* racionálishoz illetve szélessége *CM*, *CM* tehát racionális és lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 20.). Minthogy a teljes *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, és ebből *CE* egyenlő *AB* négyzetével, a maradék *FL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Legyen *N* az *FM* felezőpontja (I. 10.) és húzzuk *N*-en át *CD*-vel és *ML*-lel párhuzamosan *NO*-t (I. 31.). Ekkor mind *FO*, mind *NL* egyenlő az *AG* és *GB* közötti téglalappal. Minthogy az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese mediális és egyenlő *FL*-lel, *FL* is mediális. Az *FE* racionálishoz illetve szélessége *FM*, *FM* tehát racionális és lineárisan összemérhető *CD*-vel (X. 22.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetösszege racionális, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszerese pedig mediális, *AG* és *GB* négyzetösszege összemérhető az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével (X. 13.). *CL* egyenlő *AG* és *GB* négyzetösszegével, az *AG* és *GB* közötti téglalap kétszeresével pedig egyenlő *FL*, *CL* tehát összemérhető *FL*-lel. Amint viszont *CL* az *FL*-hez, úgy aránylik *CM* az *MF*-hez (VI. 1.), *CM* tehát lineárisan összemérhető *MF*-vel (X. 11.). Mind a kettő racionális, *CM* és *MF* tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, *CF* tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy negyedik.

Minthogy ugyanis *AG* és *GB* négyzetesen összemérhetőnek, *AG* négyzete is összemérhető *GB* négyzetével. *AG* négyzetével egyenlő *CH*, *GB* négyzetével egyenlő *KL*, *CH* tehát összemérhető *KL*-lel. Amint viszont *CH* a *KL*-hez, úgy aránylik *CK* a *KM*-hez, *CK* tehát lineárisan összemérhető *KM*-mel (ua.). Minthogy *AG* és *GB* négyzetének középarányosa az *AG* és *GB* közötti téglalap (X. 54. L.), *AG* négyzete egyenlő *CH*-vel, *GB* négyzete *KL*-lel, az *AG* és *GB* közötti téglalap pedig *NL*-lel, *CH*-nak és *KL*-nek középarányosa *NL*, amint tehát *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *NL* a *KL*-hez. Amint viszont *CH* az *NL*-hez, úgy aránylik *CK* az *NM*-hez, amint pedig *NL* a *KL*-hez, úgy *NM* a *KM*-hez (VI. 1.), amint tehát *CK* az *NM*-hez, úgy *MN* a *KM*-hez (V. 11.), a *CK* és *KM* közötti téglalap tehát egyenlő *MN* négyzetével (VI. 17.), azaz *FM* négyzetének negyedrésszével. Minthogy *CM* és *MF* két, nem egyenlő szakasz, *MF* négyzetének negyedrésszével egyenlő téglalapot – a *CK* és *KM* közöttit – illesztettünk *CM*-hez úgy, hogy egy

négyzet maradt fenn és CM összemérhetetlen darabokra bomlik, CM négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb MF -énél (X. 18.). A teljes CM lineárisan összemérhető az adott CD racionálissal, CF tehát negyedik apotomé.

Ha tehát egy minor négyzetét... stb.

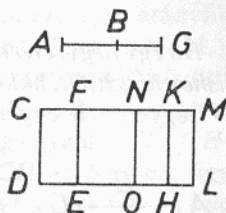
F.: X. 111. K.

X. 101. Tétel

Ha egy négyzetértékben mediális mínusz racionális négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége ötödik apotomé.

Legyen AB egy négyzetértékben mediális mínusz racionális, CD a racionális, és illesszünk CD -hez egy AB négyzetével egyenlő CF szélességű CE téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy CF ötödik apotomé.

Illeszkedjék ugyanis AB -hez BG . Ekkor AG és GB olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap kétszerese pedig racionális. Illesszünk CD -hez egy AG négyzetével egyenlő CH és egy GB négyzetével egyenlő KL téglalapot (ua.). Ekkor a teljes CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével. AG és GB négyzetösszege mediális, tehát CL mediális. A CD racionálishoz illesztve szélessége CM , CM tehát racionális és összemérhetetlen CD -vel (X. 22.). Minthogy a teljes CL egyenlő AG és GB



négyzetösszegével, s belőle CE egyenlő AB négyzetével, a maradék FL egyenlő az AG és GB közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Legyen N az FM felezőpontja (I. 10.) és húzzuk N -en át CD -vel és ML -lel párhuzamosan NO -t (I. 30–31.). Ekkor mind FO , mind NL egyenlő az AG és GB közötti téglalappal. Minthogy az AG és GB közötti téglalap kétszerese racionális és egyenlő FL -lel, FL racionális. Az EF racionálishoz illesztve szélessége FM , FM tehát racionális és lineárisan összemérhető CD -vel (X. 20.). Minthogy CL mediális, FL pedig racionális, CL összemérhetetlen FL -lel (X. 21., 13.). Amint viszont CL az FL -hez, úgy aránylik CM az MF -hez (VI. 1.), CM tehát lineárisan

összemérhetetlen MF -fel (X. 11.). Mind a kettő racionális, CM és MF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, CF tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy ötödik.

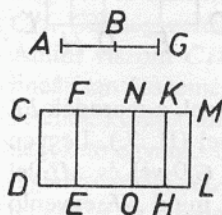
Hasonlóképp mutatható meg, hogy a CK és KM közötti téglalap egyenlő NM négyzetével, azaz FM négyzetének negyedrészeivel. Minthogy AG négyzete összemérhetetlen GB négyzetével, AG négyzete egyenlő CH -val és GB négyzete KL -lel, CH összemérhetetlen KL -lel. Amint viszont CH a KL -hez, úgy aránylik CK a KM -hez (VI. 1.), CK tehát lineárisan összemérhetetlen KM -mel (X. 11.). Minthogy CM és MF két, nem egyenlő szakasz, FM négyzetének negyedrészeivel egyenlő téglalapot illesztünk CM -hez úgy, hogy egy négyzet maradjon fenn és CM összemérhetetlen darabokra bomlik, CM négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb MF -énél (X. 18.). Az illeszkedő FM összemérhető az adott CD racionálissal, CF tehát ötödik apotomé. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 111. K.

X. 102. Tétel

Ha egy négyzetértékben mediális mínusz mediális négyzetét a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége hatodik apotomé.

Legyen AB egy négyzetértékben mediális mínusz mediális, CD a racionális, és illesszünk CD -hez egy AB négyzetével egyenlő CF szélességű CE téglalapot (I. 41., 44.). Azt állítom, hogy CF hatodik apotomé.



Illeszkedjék ugyanis AB -hez BG . Ekkor AG és GB olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy a négyzetösszegük mediális, az AG és GB közötti téglalap kétszerese mediális, és AG és GB négyzetösszege összemérhetetlen az AG és GB közötti téglalap kétszeresével.

Illesszünk CD -hez egy AG négyzetével egyenlő CK szélességű CH és egy BG négyzetével egyenlő KL téglalapot (ua.). Ekkor a teljes CL egyenlő AG és GB négyzetösszegével, tehát CL is mediális. A CD racionálishoz illesztve szélessége CM , CM tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen CD -vel (X. 22.). Minthogy CL egyenlő AG és GB

négyzetösszegével, s belőle CE egyenlő AB négyzetével, a maradék FL egyenlő az AG és GB közötti téglalap kétszeresével (II. 7.). Az AG és GB közötti téglalap kétszerese mediális, tehát FL is mediális. Az FE racionálishoz illesztve szélessége FM , FM tehát racionális és lineárisan összemérhetetlen CD -vel (X. 22.). Minthogy AG és GB négyzetösszege összemérhetetlen az AG és GB közötti téglalappal, és AG és GB négyzetösszegével egyenlő CL , az AG és GB közötti téglalap kétszeresével pedig FL , CL összemérhetetlen FL -lel. Amint viszont CL az FL -hez, úgy aránylik CM az MF -hez (VI.1.), CM tehát lineárisan összemérhetetlen MF -fel (X. 11.). Mind a kettő racionális, CM és MF tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, CF tehát apotomé.

Azt is állítom, hogy hatodik.

Minthogy ugyanis FL egyenlő az AG és GB közötti téglalap kétszeresével, legyen hát FM felezőpontja N (I. 10.) és húzzuk N -en át CD -vel párhuzamosan NO -t (I. 31.). Ekkor mind FO , mind NL egyenlő az AG és GB közötti téglalappal. Minthogy AG és GB négyzetesen összemérhetetlenek, AG négyzete összemérhetetlen GB négyzetével. AG négyzetével egyenlő CH , GB négyzetével egyenlő KL , CH tehát összemérhetetlen KL -lel. Amint viszont CH KL -hez, úgy aránylik CK a KM -hez (VI. 1.), CK tehát összemérhetetlen KM -mel (X. 11.). Minthogy AG és GB négyzetének középarányosa az AG és GB közötti téglalap (X. 54. L.), AG négyzetével egyenlő CH , GB négyzetével egyenlő KL , az AG és GB közötti téglalappal pedig egyenlő NL , CH -nak és KL -nek középarányosa NL , amint tehát CH az NL -hez, úgy aránylik NL a KL -hez. És ugyanúgy CM négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb MF -énél, és egyikőjük sem összemérhető az adott CD racionálissal, CF tehát hatodik apotomé. Éppen ezt kellett megmutatni.

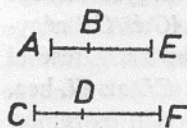
F.: X. 111. K.

X. 103. Tétel

Apotoméval lineárisan összemérhető szakasz apotomé, mégpedig ugyanannyiadik.

Legyen AB egy apotomé, és legyen CD lineárisan összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy CD is apotomé, mégpedig ugyanannyiadik, mint AB .

AB apotomé, illeszkedjék hát hozzá BE . Ekkor AE és EB csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Legyen BE -nek DF -hez való aránya ugyanaz, mint AB -é CD -hez (VI.12.). Amint egy-egy tag, úgy aránylanak az összegek (V. 12.), AE tehát szintén úgy aránylik CF -hez, mint AB a CD -hez. AB lineárisan összemérhető CD -vel, tehát AE is összemérhető CF -fel, BE pedig DF -fel (X. 11.). AE és EB csak négyzetesen összemérhető racionálisok, tehát CF és FD is csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 12–13.). [CD tehát apotomé.



Azt is állítom, hogy ugyanannyiadik, mint AB].

Mivel AE úgy aránylik CF -hez, mint BE a DF -hez (V. 11.), fölcserélve AE úgy aránylik EB -hez, mint CF a FD -hez (V. 16.). AE négyzetértéke egy vele vagy összemérhető, vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb EB -énél. Ha AE négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb EB -énél, akkor CF négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FD -énél (X. 14.). S ha AE lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor CF is (X. 12.), ha EB , akkor DF is, ha pedig sem AE , sem EB , akkor sem CF , sem FD (X. 13.). Ha AE négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb $[EB$ -énél], akkor CF négyzetértéke is egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FD -énél (X. 14.). Ha AE lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor CF is, ha BE , akkor DF is, ha pedig sem AE , sem EB , akkor sem CF , sem FD .

CD tehát apotomé, mégpedig ugyanannyiadik, mint AB . Éppen ezt kellett megmutatni.

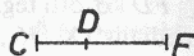
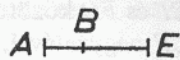
X. 104. Tétel

Mediálapotoméval összemérhető szakasz mediálapotomé, mégpedig ugyanannyiadik.

Legyen AB egy mediálapotomé, és legyen CD lineárisan összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy CD mediálapotomé, mégpedig ugyanannyiadik, mint AB .

AB mediálapotomé, legyen hát a hozzá illeszkedő szakasz EB . Ekkor AE és EB csak négyzetesen összemérhető mediálisok. Arányul-

jék amint AB a CD -hez, úgy BE a DF -hez (VI. 12.). AE is összemérhető tehát CF -fel, BE pedig DF -fel (V. 12., X. 11.). AE és EB csak négyzetesen összemérhető mediálisok, tehát CF és FD is csak négyzetesen összemérhető mediálisok (X. 12–13., 23.), CD tehát mediálapotomé.



Azt is állítom, hogy ugyanannyiadik, mint AB .

Mivel amint AE az EB -hez, úgy aránylik CF az FD -hez (V. 11., 16.), amint viszont AE az EB -hez, úgy AE négyzete az AE és EB közötti téglalaphoz, amint pedig CF az FD -hez, úgy CF négyzete a CF és FD közötti téglalaphoz (X. 22. L.), amint tehát AE négyzete az AE és EB közötti téglalaphoz, úgy CF négyzete a CF és FD közötti téglalaphoz (V. 11.), és fölcserélve amint AE négyzete CF négyzetéhez, úgy az AE és EB közötti téglalap a CF és FD közötti téglalaphoz (V. 16.). AE négyzete összemérhető CF négyzetével, tehát az AE és EB közötti téglalap is összemérhető a CF és FD közötti téglalappal (X. 11.). Ha tehát az AE és EB közötti téglalap racionális, akkor a CF és FD közötti is racionális, ha pedig az AE és EB közötti téglalap mediális, akkor a CF és FD közötti is mediális (X. 23. K.).

CD tehát mediálapotomé, mégpedig ugyanannyiadik, mint AB . Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 105. Tétel

Minorral összemérhető szakasz minor.

Legyen ugyanis AB egy minor és CD összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy CD is minor.

Járjunk el ugyanúgy. Minthogy AE és EB négyzetesen összemérhetetlenek, CF és FD is négyzetesen összemérhetetlenek (X. 13.). Mivel amint AE az EB -hez, úgy aránylik CF az FD -hez (V. 11–12., 16.), CF négyzete úgy aránylik FD négyzetéhez, mint AE négyzete EB négyzetéhez (VI. 22.). Összetéve tehát amint AE és EB négyzetösszege EB négyzetéhez, úgy CF és FD négyzetösszege FD négyzetéhez (V. 18.) [és fölcserélve (V.16.)]. BE négyzete viszont összemérhető DF négyzetével, tehát AE és EB négyzetösszege is összemérhető CF és FD négyzet-

összegével (X. 11.). AE és EB négyzetösszege racionális, tehát CF és FD négyzetösszege is racionális (X. 12.). Ismét, mivel amint AE négyzete az AE és EB közötti téglalaphoz, úgy aránylik CF négyzete a CF és FD közötti téglalaphoz (X. 22. L.), és AE négyzete összemérhető CF négyzetével, az AE és EB közötti téglalap is összemérhető a CF és FD közötti téglalappal (V. 16., X. 11.). Az AE és EB közötti téglalap mediális (X. 76., D.), tehát a CF és FD közötti téglalap is mediális (X. 23. K.), CF és FD tehát olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, melyek négyzetösszege racionális, az általuk közrefogott téglalap pedig mediális.

CD tehát minor. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 106. Tétel

Négyzetértékben mediális mínusz racionálissal összemérhető szakasz négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Legyen AB egy négyzetértékben mediális mínusz racionális, és CD összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy CD is négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Legyen ugyanis BE az AB -hez illeszkedő szakasz. Ekkor AE és EB olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy AE és EB négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap pedig racionális. Végezzük el ugyanazokat a lépéseket. Az előzőekhez hasonlóan mutatható meg, hogy CF és FD aránya ugyanaz, mint AE -é és EB -é, és összemérhető AE és EB négyzetösszege CF és FD négyzetösszegével, az AE és EB közötti téglalap pedig a CF és FD közöttivel, úgyhogy CF és FD is olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy CF és FD négyzetösszege mediális, az általuk közrefogott téglalap pedig racionális.

CD tehát négyzetértékben mediális mínusz racionális. Éppen ezt kellett megmutatni.

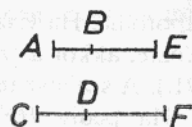
X. 107. Tétel

Négyzetértékben mediális mínusz mediálissal összemérhető szakasz maga is négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Legyen AB egy négyzetértékben mediális mínusz mediális, és legyen

CD összemérhető AB -vel. Azt állítom, hogy CD is négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Legyen ugyanis BE az AB -hez illeszkedő szakasz, és végezzük el ugyanazokat a lépéseket. Ekkor AE és EB olyan négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy mind a négyzetösszegük, mind az általuk közrefogott téglalap mediális, és a négyzetösszegük összemérhetetlen az általuk közrefogott téglalappal. S mint megmutattuk, AE és EB összemérhető CF -fel, illetve FD -vel, AE és EB négyzetösszege CF és FD négyzetösszegével, az AE és EB közötti téglalap pedig a CF és FD közöttivel, tehát CF és FD is olyan, négyzetesen összemérhetetlen szakaszok, hogy mind a négyzetösszegük, mind az általuk közrefogott téglalap mediális, és a négyzetösszegük összemérhetetlen az általuk közrefogott téglalappal.



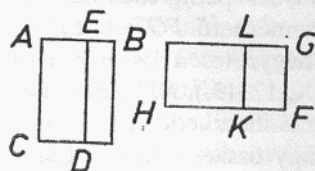
CD tehát négyzetértékben mediális mínusz mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 108. Tétel

Ha egy racionálisból egy mediális területet vonunk ki, akkor a szakasz, melynek négyzetértéke a maradék, két irracionális egyike: vagy apotomé, vagy minor.

Vonjuk ki ugyanis a BC racionálisból a BD mediális. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke a maradék EC , két irracionális egyike: vagy apotomé, vagy minor.

Vegyük ugyanis az FG racionális, és illesszünk FG -hez egy BC -vel egyenlő GH , majd vonjunk ki ebből egy DB -vel egyenlő GK téglalapot (I. 44.). Ekkor a maradék EC egyenlő LH -val. Mínthogy BC racionális, BD mediális, BC egyenlő GH -val és BD a GK -val, GH racionális, GK pedig mediális. Az FG racionálishoz illesztettük őket, tehát FH racionálisan és lineárisan összemérhető FG -vel (X. 20.), FK pedig racionális és lineárisan összemérhetetlen FG -vel (X. 22.) FH tehát lineárisan összemérhetetlen FK -val (X. 13.). FH és FK tehát csak négyzetesen



összemérhető (X. 12.), KH tehát apotomé és KF a hozzá illeszkedő szakasz. Ekkor HF négyzetértéke vagy egy összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FK -énál, vagy sem.

Legyen először egy összemérhető négyzetével nagyobb. A teljes HF lineárisan összemérhető az adott FG racionálissal, KH tehát első apotomé. Ha viszont egy idomot a racionális és egy első apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, apotomé (X. 91.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke LH , azaz EC , apotomé.

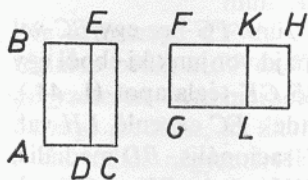
Ha pedig HF négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FK -énál, akkor mivel a teljes FH lineárisan összemérhető az adott FG racionálissal, KH negyedik apotomé. Ha viszont egy idomot a racionális és egy negyedik apotomé fog közre, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, minor (X. 94.). Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 109. Tétel

Ha mediálisból racionális területet vonunk ki, másik két irracionális kapunk: vagy első mediálapotomé, vagy négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Vonjuk ki ugyanis a BC mediálisból a BD racionális. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke a maradék EC , két irracionális egyike: vagy első mediálapotomé, vagy négyzetértékben mediális mínusz racionális.

Vegyük ugyanis az FG racionális, és illesszünk hozzá hasonlóképp



téglalapokat. Ekkor az előbbieik szerint FH racionális és lineárisan összemérhető FG -vel, KF pedig racionális és lineárisan összemérhető FG -vel, FH és FK tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok (X. 12–13.), KH tehát apotomé, és a hozzá illeszkedő szakasz FK .

HF négyzetértéke egy vele összemérhető vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FK -énál.

Ha HF négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FK -énál, akkor mivel az illeszkedő FK lineárisan összemérhető az adott FG racionálissal, KH második apotomé. FG racionális,

úgyhogy a szakasz, melynek négyzetértéke LH , azaz EC , első mediálapotomé (X. 92.).

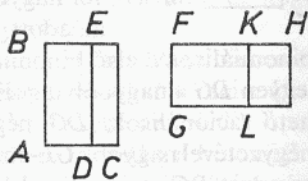
Ha pedig HF négyzetértéke egy összemérhetetlen szakasz négyzetértékével nagyobb FK -énál, akkor mivel az illeszkedő FK lineárisan összemérhető az adott FG racionálissal, KH ötödik apotomé, úgyhogy a szakasz, melynek négyzetértéke EC , négyzetértékben mediális mínusz racionális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 110. Tétel

Ha mediálisból vele összemérhetetlen mediális területet vonunk ki, a maradék két irracionálisot kapjuk: vagy második mediálapotomé, vagy négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Vonjunk ki ugyanis, miként az előző ábrákon, egy BC mediálisból egy vele összemérhetetlen BD mediális. Azt állítom, hogy a szakasz, melynek négyzetértéke EC , két irracionális egyike: vagy második mediálapotomé, vagy négyzetértékben mediális mínusz mediális.

Mint-hogy ugyanis BC és BD mediális, és BC összemérhetetlen BD -vel, az előbbiek szerint FH és FK racionális és lineárisan összemérhetetlen FG -vel. Mint-hogy összemérhetetlen BC a BD -vel, azaz GH a GK -val, HF is összemérhetetlen FK -val (VI. 1., X. 11.), FH és FK



tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, KH tehát apotomé és FK a hozzá illeszkedő szakasz. FH négyzetértéke egy vele összemérhető vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FK -énál.

Ha FH négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FK -énál, akkor mivel sem FH , sem FK nem lineárisan összemérhető az adott FG racionálissal, KH harmadik apotomé. KL racionális. A racionális és egy harmadik apotomé által közrefogott téglalap viszont irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális, mégpedig második mediálapotomé a neve (X. 93.), úgyhogy a szakasz, melynek négyzetértéke LH , azaz EC , második mediálapotomé.

Ha pedig FH négyzetértéke egy vele lineárisan összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FK -énál, akkor mivel sem HF , sem FK nem lineárisan összemérhető FG -vel, KH hatodik apotomé. A szakasz

viszont, melynek négyzetértéke egy, a racionális és egy hatodik apotomé által közrefogott téglalap, négyzetértékben mediális mínusz mediális (X. 96.). A szakasz tehát, melynek négyzetértéke LH , azaz EC , négyzetértékben mediális mínusz mediális. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 111. Tétel

Apotomé nem egyezik meg egy binomiállissal.

Legyen AB egy apotomé. Azt állítom, hogy AB nem egyezik meg semmilyen binomiállissal.

Tegyük föl ugyanis, hogy megegyezik. Vegyük a DC racionálist, és illesszünk CD -hez egy AB négyzetével egyenlő DE szélességű CE téglalapot (I. 44.). Mínthogy AB apotomé, DE első apotomé (X. 97.). Legyen EF a hozzá illeszkedő szakasz. Ekkor DF és FE csak négyzetesen összemérhető racionálisok, DF négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FE -énél és DF lineárisan összemérhető az adott DC racionálissal. Másrészt, mínthogy AB binomiális, DE első binomiális (X. 60.). Essék szét G -ben a tagjaira, és legyen DG a nagyobb tag. Ekkor DG és GE csak négyzetesen összemérhető racionálisok, DG négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb GE -énél, és a nagyobb DG lineárisan összemérhető az adott DC racionálissal. DF is lineárisan összemérhető tehát DG -vel (X. 12.), tehát a maradék GF is lineárisan összemérhető DF -fel (X. 15.). [Mínthogy DF összemérhető GF -fel és DF racionális, GF is racionális. Mínthogy DF lineárisan összemérhető GF -fel és] DF lineárisan összemérhető EF -fel, FG is lineárisan összemérhető EF -fel (X. 13.). GF és FE tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EG tehát apotomé. Viszont racionális is. Ez nem lehetséges (X. 73.).

Apotomé tehát nem egyezik meg egy binomiállissal. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 111. K.

Következmény

Az apotomé és az utána következő irracionálisok sem a mediállissal, sem egymással nem egyeznek meg.

Ha ugyanis egy mediális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége racionális és lineárisan összemérhetetlen azzal a szakasszal, amely mellé helyeztük (X. 22.), ha egy apotomé négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége első apotomé (X. 97.), ha egy első mediálapotomé négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége második apotomé (X. 98.), ha egy második mediálapotomé négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége harmadik apotomé (X. 99.), ha egy minor négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége negyedik apotomé (X. 100.), ha egy négyzetértékben mediális mínusz racionális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége ötödik apotomé (X. 101.), ha pedig egy négyzetértékben mediális mínusz mediális négyzetét illesztjük a racionálishoz, akkor a keletkező téglalap szélessége hatodik apotomé (X. 102.). Minthogy a mondott szélességek különböznek mind az elsőtől, mind egymástól – az elsőtől, mivel az racionális, egymástól, mivel ugyanannyiadikak –, nyilvánvaló, hogy maguk az irracionálisok is különböznek egymástól.

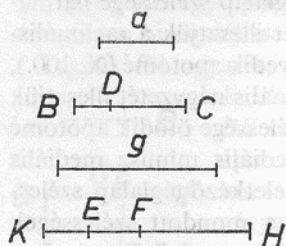
Minthogy megmutattuk, hogy apotomé nem egyezik meg binomiállissal (X. 111.), és ha az apotomé utáni irracionálisokat a racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége annyiadik apotomé, ahányadik az illető irracionális a sorban, ha pedig a binomiális utániakat, akkor annyiadik binomiális, ahányadik az illető irracionális a sorban, különbözőek az apotomé utáni és különbözőek a binomiális utáni irracionálisok, úgymint összesen 13 tagú az irracionálisok sora:

- mediális,
- binomiális,
- első bimedialis,
- második bimedialis,
- maior,
- négyzetértékben racionális plusz mediális,
- négyzetértékben két mediális összege,
- apotomé,
- első mediálapotomé,
- második mediálapotomé,

minor,
négyzetértékben mediális mínusz racionális,
négyzetértékben mediális mínusz mediális.

X. 112. Tétel

Ha egy racionális négyzetét binomiálshoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége apotomé, s ennek tagjai összemérhetők a binomiális tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, és a keletkező apotomé ugyanannyiadik, mint a binomiális.*



Legyen a egy racionális BC pedig egy binomiális. Ennek nagyobb tagja legyen DC , és legyen a négyzetével egyenlő a BC és EF közötti téglalap (I. 44.). Azt állítom, hogy EF apotomé, a tagjai összemérhetők CD -vel, illetve DB -vel és ugyanabban az

arányban állnak, és EF ugyanannyiadik, mint BC .

Legyen ugyanis ismét a négyzetével egyenlő a BD és g közötti téglalap. Minthogy a BC és EF közötti téglalap egyenlő a BD és g közöttivel, CB úgy aránylik BD -hez, mint g az EF -hez (VI. 16.). CB nagyobb BD -nél, tehát g is nagyobb EF -nél (V. 16., 14.). Legyen EH egyenlő g -vel. Ekkor amint CB a BD -hez, úgy aránylik HE az EF -hez (V. 7., 11.), szétbontva tehát amint CD a BD -hez, úgy HF az FE -hez (V. 17.). Arányulják amint HF az FE -hez, úgy FK a KE -hez (VI. 11. $HF - FE : FE = FE : KE$, V. 18.). Ekkor a teljes HK úgy aránylik a teljes KF -hez, mint FK a KE -hez, az előtagok összege ugyanis úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármely előtag az utótagjához (V. 12.). Amint viszont FK a KE -hez, úgy aránylik CD a DB -hez (V. 11.), amint tehát HK a KF -hez, úgy CD a DB -hez (ua.). CD négyzete összemérhető DB négyzetével, tehát HK négyzete is összemérhető KF négyzetével (VI. 22., X. 11.). Amint HK négyzete KF négyzetéhez, úgy aránylik HK a KE -hez, minthogy e három szakasz, HK , KF és KE arányos (VI. 19. K.), HK tehát lineárisan összemérhető KE -vel, úgyhogy HE is lineárisan összemérhető EK -val (X. 15.). Minthogy a négyzete egyenlő az EH és BD közötti téglalappal és a négyzete racionális, az EH és BD közötti téglalap is racionális. A racionális

BD -hez illesztettük, EH tehát racionális és lineárisan összemérhető BD -vel (X. 20.), úgyhogy a vele összemérhető EK is racionális és lineárisan összemérhető BD -vel (X. 12.). Mivel amint CD a DB -hez, úgy aránylik FK a KE -hez, s CD és DB csak négyzetesen összemérhető, FK és KE is csak négyzetesen összemérhető (X. 11.). KE racionális, tehát FK is racionális. FK és KE tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, EF tehát apotomé.

CD négyzetértéke egy vele összemérhető vagy összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb DB -énél.

Ha CD négyzetértéke egy [vele] összemérhető szakasz négyzetével nagyobb DB -énél, akkor FK négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb KE -énél (X. 14.). Ha CD lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor FK is, ha BD , akkor KE is, ha pedig sem CD , sem DB , akkor sem FK , sem KE (V. 16., X. 12–13.).

Ha pedig CD négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb DB -énél, akkor FK négyzetértéke is egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb KE -énél (X. 14.). Ha CD lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor FK is, ha BD , akkor KE is, ha pedig sem CD , sem BD , akkor sem FK , sem KE , úgyhogy FE apotomé, a tagjai, FK és KE összemérhetőek a binomiális tagjaival, CD -vel, illetve DB -vel és ugyanabban az arányban állnak, és FE ugyanannyiadik, mint BC .

Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: X. 114.

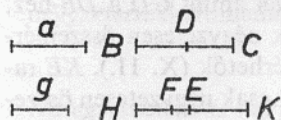
X. 113. Tétel

Ha egy racionális négyzetét apotoméhoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége binomiális, ennek tagjai összemérhetőek az apotomé tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, és a keletkező binomiális ugyanannyiadik, mint az apotomé.

Legyen a egy racionális BD pedig egy apotomé, és legyen a négyzetével egyenlő a BD és KH közötti téglalap (I. 44.), úgyhogy az a racionális négyzetének szélessége a BD apotoméhoz illesztve KH . Azt állítom, hogy KH binomiális, a tagjai összemérhetőek BD tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, és végül KH ugyanannyiadik, mint BD .

Legyen DC a BD -hez illeszkedő szakasz. Ekkor BC és CD csak

négyszetesen összemérhető racionálisok. Legyen a BC és g közötti téglalap is egyenlő a négyzetével (ua.). a négyzete racionális, tehát a BC



és g közötti téglalap is racionális. A BC racionális mellett fekszik, g tehát racionális és lineárisan összemérhető BC -vel (X. 20.). Minthogy a BC és g közötti téglalap egyenlő a BD és KH közöttivel, CB úgy

aránylik BD -hez, mint KH a g -hez (VI. 16.). BC nagyobb BD -nél, tehát KH is nagyobb g -nél (V. 16., 14.). Legyen KE egyenlő g -vel. Ekkor KE lineárisan összemérhető BC -vel. Mivel amint CB a BD -hez, úgy aránylik HK a KE -hez, fölforgatva amint BC a CD -hez, úgy KH a HE -hez (V. 19. K.). Arányulják amint KH a HE -hez, úgy HF az FE -hez (VI. 10.). Ekkor a maradék KF úgy aránylik FH -hoz, mint KH a HE -hez (V. 19.), azaz mint BC a CD -hez (V. 11.). BC és CD csak négyszetesen összemérhetőek, tehát KF és FH is csak négyszetesen összemérhetőek (X. 11., VI. 22.). Mivel amint KH a HE -hez, úgy aránylik KF az FH -hoz, és amint KH a HE -hez, úgy HF az FE -hez, amint tehát KF az FH -hoz, úgy HF az FE -hez (V. 11.), úgyhogy amint az első szakasz a harmadikhoz, úgy az első négyzete a második négyzetéhez (VI. 20. 2. K.), amint tehát KF az FE -hez, úgy KF négyzete FH négyzetéhez. KF négyzete összemérhető FH négyzetével – KF és FH ugyanis négyszetesen összemérhetőek –, KF tehát lineárisan összemérhető FE -vel (X. 11.), úgyhogy KE -vel is lineárisan összemérhető KF (X. 15.). KE racionális és lineárisan összemérhető BC -vel, tehát KF is racionális és lineárisan összemérhető BC -vel (X. 12.). Mivel BC úgy aránylik CD -hez, mint KF az FH -hoz, fölcserélve BC úgy aránylik KF -hez, mint DC az FH -hoz (V. 16.). BC összemérhető KF -fel, tehát FH is lineárisan összemérhető CD -vel (X. 11.). BC és CD csak négyszetesen összemérhető racionálisok, tehát KF és FH is csak négyszetesen összemérhető racionálisok, KH tehát binomiális.

Ha BC négyzetértéke egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb CD -énél, akkor KF négyzetértéke is egy vele összemérhető szakasz négyzetével nagyobb FH -énál (X. 14.). Ha BC lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor KF is, ha CD lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor FH is, ha pedig sem BC , sem CD , akkor sem KF , sem FH (X. 12–13.).

Ha BC négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb CD -énél, akkor KF négyzetértéke is egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb FH -énél (X. 14.). Ha BC lineárisan összemérhető az adott racionálissal, akkor KF is, ha CD , akkor FH is, ha pedig sem BC , sem CD , akkor sem KF , sem FH (X. 12–13.).

KH tehát binomiális, tagjai, KF és FH összemérhetők az apotomé tagjaival, BC -vel, illetve CD -vel és ugyanabban az arányban állnak, és végül KH ugyanannyiadjik, mint BC . Éppen ezt kellett megmutatni.

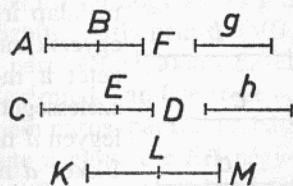
X. 114. Tétel

Ha egy idomot egy apotomé és egy binomiális fog közre, és ennek tagjai összemérhetők az apotomé tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, racionális.

Fogja közre ugyanis az AB és CD közötti idomot az AB apotomé és a CD binomiális, ennek nagyobb tagja legyen CE , és legyenek a binomiális tagjai, CE és ED , összemérhetők az apotomé tagjaival, AF -fel és FB -vel és álljanak ugyanabban az arányban. Legyen a szakasz, melynek négyzetértéke az AB és CD közötti téglalap, g . Azt állítom, hogy g racionális.

Vegyük a h racionálist, és illesszünk CD -hez egy h négyzetével egyenlő KL szélességű téglalapot (I. 44.).

Ekkor KL apotomé, a tagjai – legyenek ezek KM és ML – összemérhetők a binomiális tagjaival, CE -vel, illetve ED -vel és ugyanabban az arányban állnak (X. 112.). CE és ED viszont összemérhetők AF -fel, illetve FB -vel, és ugyanabban az arányban állnak, amint tehát AF az FB -hez, úgy



aránylik KM az ML -hez (V. 11.). Fölcserélve tehát amint AF a KM -hez, úgy BF az LM -hez (V. 16.), a maradék AB tehát úgy aránylik a maradék KL -hez, mint AF a KM -hez (V. 19.). AF összemérhető KM -mel (X. 12.), AB is összemérhető tehát KL -lel (X. 11.). Amint AB a KL -hez, úgy aránylik a CD és AB közötti téglalap a CD és KL közöttihez (VI. 1.), a CD és AB közötti téglalap tehát összemérhető a CD és KL közöttivel (X. 11.). A CD és KL közötti téglalap egyenlő h négyzetével, a CD és AB közötti téglalap tehát összemérhető h négy-

zetével. A CD és AB közötti téglalappal egyenlő g négyzete, g négyzete tehát összemérhető h négyzetével. h négyzete racionális, g négyzete is racionális tehát, g tehát racionális. S négyzetértéke a CD és AB közötti téglalap.

Ha tehát egy idomot egy apotomé és egy binomiális fog köze, és ennek tagjai összemérhetőek az apotomé tagjaival és ugyanabban az arányban állnak, akkor a szakasz, melynek az idom négyzetértéke, racionális.

Következmény

Ézáltal is nyilvánvaló lett számunkra, hogy irracionális szakaszok közrefoghatnak racionális idomot. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 115. Tétel

*Egy mediálisból végtelen sok irracionálist kapunk, és egyik sem egyezik meg semelyik korábbival.**

Legyen a egy mediális. Azt állítom, hogy a -ból végtelen sok irracionálist kapunk, és egyik sem egyezik meg semelyik korábbival.

Vegyük a b racionálist, és legyen a b és a közötti téglalappal egyenlő c négyzete (II. 14.). Ekkor c irracionális, mert irracionális (X. 21.) és racionális szakasz által közrefogott téglalap irracionális (X. 20.), és egyik korábbival sem egyezik meg, mert egyetlen korábbi irracionális négyzetét a racionálishoz illesztve sem kapunk mediális szélességet (X. 22., 60–65., 97–102., 111. K.). Ismét, legyen d négyzete egyenlő a b és c közötti téglalappal. Ekkor d négyzete irracionális, d tehát irracionális, és egyik korábbival sem egyezik meg, mert egyetlen korábbi irracionális négyzetét a racionálishoz illesztve sem kapjuk c -t szélességként. Ha ezt a sort a végtelenségig hasonlóképp folytatjuk, nyilvánvaló, hogy egy mediálisból végtelen sok irracionálist kapunk, és egyik sem egyezik meg semelyik korábbival. Éppen ezt kellett megmutatni.

X. 27. Függelék

*Mutassuk meg, hogy a négyzetekben az átló lineárisan összemérhetően az oldallal!**

Legyen $ABCD$ egy négyzet és AC egy átlója. Azt állítom, hogy CA lineárisan összemérhetetlen AB -vel.

Tegyük föl ugyanis, hogy összemérhető. Azt állítom, hogy ugyanaz a szám párosnak és páratlannak fog mutatkozni. Nyilvánvaló, hogy AC négyzete kétszerese AB négyzetének (I. 47.). Minthogy CA összemérhető AB -vel, CA úgy aránylik AB -hez, mint szám számhoz (X. 5.). Arányuljanak mint EF a g -hez, és legyenek EF és g a legkisebb számok, melyek ugyanabban az arányban állnak, mint ők (VII. 33.). Ekkor EF nem egység. Ha ugyanis EF egység, úgy aránylik g -hez, mint AC az AB -hez és AC nagyobb AB -nél, akkor EF is nagyobb a g számnál (V. 14.), ami ellentmondás. EF tehát nem egység, szám tehát. Mivel amint CA az AB -hez, úgy aránylik EF a g -hez, amint CA négyzete AB négyzetéhez, úgy aránylik EF négyzete g négyzetéhez (vö. VI. 20. K., VIII. 11.). CA négyzete kétszerese AB négyzetének, tehát EF négyzete is kétszerese g négyzetének, EF négyzete tehát páros, úgyhogy maga EF is páros, ha ugyanis páratlan lenne, akkor a négyzete is páratlan lenne, minthogy ha összeadunk valahány páratlan számot, melyek páratlan sokan vannak, akkor az összeg páratlan (IX. 23.), EF tehát páros. Felezzük meg H -ban. Minthogy EF és g a legkisebbek az ugyanezen arányú számok között, relatív prímek (VII. 22.). EF páros, g tehát páratlan. Ha ugyanis páros lenne, akkor EF -et és g -t osztaná a diád – hiszen minden páros számnak van fele része –, noha relatív prímek, ami lehetetlen. g tehát nem páros, páratlan tehát. Minthogy EF kétszerese EH -nak, EF négyzete négyszerese EH négyzetének. EF négyzete kétszerese g négyzetének, g négyzete tehát kétszerese EH négyzetének, g négyzete tehát páros. Ekkor a mondottak miatt g páros. Viszont páratlan is, ami lehetetlen. CA tehát nem lineárisan összemérhető AB -vel. Éppen ezt kellett megmutatni.

