

Tizenegyedik könyv

Definíciók

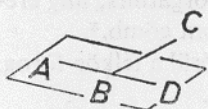
1. Test az, aminek hosszúsága, szélessége és magassága is van.
2. Test vége felület.
3. Egy egyenes merőleges egy síkra, ha valamennyi őt metsző síkbeli egyenesre merőleges.*
4. Két sík merőleges egymásra, ha az egyik síkban a síkok közös részére* bocsátott merőlegesek merőlegesek a másik síkra.
5. Ha egy szakasz külső végpontjából merőleget bocsátunk egy síkra, és a kapott (metszés)pontot összekötjük a szakasz síkbeli végével, akkor a szakasznak a síkhoz való hajlata az összekötő és az eredeti szakasz által közrefogott szög.
6. Két sík hajlata az a hegyesszög, melyet a síkok közös részére ugyanabban a pontban az egyes síkokban állított merőlegesek fognak közre.
7. Azt mondjuk, hogy két sík hasonlóképp hajlik egymáshoz, mint másik kettő, ha a mondott hajlásszögek egyenlők egymással.
8. Síkok párhuzamosak, ha nem találkoznak.
9. Térídomok* hasonlóak, ha ugyanannyi, (páronként) hasonló síkidom fogja őket közre.
10. Térídomok* egyenlők és hasonlóak, ha ugyanannyi, (páronként) egyenlő nagyságú és hasonló síkidom fogja őket közre.
11. A térszög több mint két, egymást metsző és nem ugyanazon a felületen fekvő vonal egymáshoz való hajlata. Másképp: térszög az, amit több mint két, nem egy síkban fekvő közös csúcú síkszög fog közre.

12. Gúla az olyan téridom, melyet egy síkból induló egy pontban találkozó síklapok fognak közre.
13. Hasáb az olyan síklapok által közrefogott téridom, melynek két szemközti lapja egyenlő (területű), hasonló és párhuzamos, a többi pedig paralelogramma.
14. Ha egy félkört rögzített átmérője körül addig forgatunk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, a közrefogott idom gömb.*
15. A gömb tengelye az a rögzített szakasz, mely körül a félkör forog.
16. A gömb középpontja ugyanaz, mint a félköré.
17. A gömbnek átmérője bármely a középponton át haladó és mindkétoldalt a gömb felszínén végződő szakasz.
18. Ha egy derékszögű háromszöget egyik derékszög melletti oldalát rögzítve addig forgatunk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, a közrefogott idom kúp. Ha a rögzített oldal egyenlő a körbeforgatott másik derékszög melletti oldallal, akkor a kúp derékszögű, ha kisebb, akkor tompaszögű, ha pedig nagyobb, akkor hegyes-szögű.*
19. A kúp tengelye a rögzített szakasz, mely körül a háromszög forog.
20. Alapja pedig az a kör, melyet a körbeforgatott oldal súrol.
21. Ha egy téglalapot egyik derékszög melletti oldalát rögzítve addig forgatunk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, a közrefogott idom henger.
22. A henger tengelye a rögzített szakasz, mely körül a téglalap forog.
23. Alapjai pedig azok a körök, melyeket a két, egymással szemközt körbeforgatott oldal súrol.
24. Kúpok és hengerek hasonlóak, ha tengelyeik és alapjaik átmérői arányosak.
25. Kocka a hat egyenlő négyzet által közrefogott téridom.
26. Oktaéder a nyolc egyenlő (területű), egyenlő oldalú háromszög által közrefogott téridom.
27. Ikozaéder a húsz egyenlő, egyenlő oldalú háromszög által közrefogott téridom.
28. Dodekaéder a tizenkettő egyenlő, egyenlő oldalú és szögű ötszög által közrefogott téridom.

XI. 1. Tétel

Nem lehetséges, hogy egy szakasz egy része az alapsíkban, más része pedig egy rá ferde síkban legyen.

Tegyük föl ugyanis, hogy az ABC szakasz egy része, AB , az alapsíkban, más része pedig, BC , egy arra ferde síkban van.



Az AB szakasznak van egy egyenes menti folytatása az alapsíkban. Legyen ez BD . Ekkor az ABC , ABD egyeneseknek közös része AB , ami nem lehetséges, minthogy ha B középponttal és AB sugárral egy kört rajzolunk, abban az átmérők különböző köríveket metszenek ki (I. 17. D.).

Nem lehetséges tehát, hogy egy szakasz egy része az alapsíkban, más része pedig egy arra ferde síkban legyen.

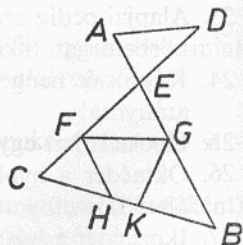
F.: XI. 2., 16.

XI. 2. Tétel

Ha két egyenes metszi egymást, akkor egy síkban fekszenek, és minden háromszög egy síkban fekszik.

Messe ugyanis két egyenes, AB és CD egymást az E pontban. Azt állítom, hogy AB és CD egy síkban fekszenek, és minden háromszög egy síkban fekszik.

Legyen F és G az EC , EB szakaszokon tetszőlegesen választott pont, kössük össze CB -t és FG -t, és húzzunk FH és GK metsző egyeneseket. Először is azt állítom, hogy az ECB háromszög egy síkban fekszik. Ha ugyanis az ECB háromszög FHC vagy GBK része az alapsíkban van, a maradék pedig egy másíkban, akkor az EC , EB szakaszok közül is az egyiknek egy része az alapsíkban, más része pedig egy másíkban van. Ha az ECB háromszög $FCBG$ része fekszik az alapsíkban, a maradék pedig egy másíkban, akkor mind az EC , mind az EB szakasz egy része az alapsíkban, más része pedig egy másíkban van. Erről megmutattuk, hogy nem lehetséges (XI. 1.), az ECB háromszög tehát egy síkban fekszik. Amely síkban fekszik az ECB háromszög, abban fekszik EC és EB is, s



amelyben EC és EB , abban AC és CD is (XI. 1.). Az AB , CD egyenesek tehát egy síkban fekszenek, és minden háromszög egy síkban fekszik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 6., 8., 17.

XI. 3. Tétel

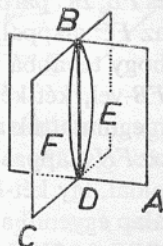
Ha két sík metszi egymást, a közös részük egyenes.

Messe ugyanis egymást két sík, AB és BC , és legyen a DB vonal a közös részük. Azt állítom, hogy a DB vonal egyenes.

Tegyük föl ugyanis, hogy nem, és illesszünk D -re és B -re az AB síkban egy DEB , a BC síkban pedig egy DFB egyenest. Ekkor DEB -nek és DFB -nek ugyanazok a végpontjai, és nyilván területet fognak közre, ami nem lehetséges (9. Ax.). DEB és DFB tehát nem egyenesek. Hasonlóképp mutatható meg, hogy egyetlen más D -re és B -re illesztett vonal sem egyenes, kivéve az AB és BC sík DC közös részét.

Ha tehát két sík metszi egymást, a közös részük egyenes. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 5., 7., 13–14.



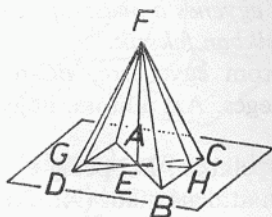
XI. 4. Tétel

Ha két metsző egyenesre a metszéspontjukban merőlegest állítunk, akkor ez a merőleges a két egyenes síkjára is merőleges.

Állítsunk ugyanis két, egymást metsző egyenesre, AB -re és CD -re, az E metszéspontjukban egy EF merőlegest. Azt állítom, hogy EF az AB -n és CD -n átmenő síkra is merőleges.

Messük ki az egymással egyenlő AE , EB , CE , ED szakaszokat,

húzzunk E -n át egy tetszőleges GEH egyenest, kössük össze AD -t és CB -t, és húzzuk meg a tetszőleges F -ből FA -t, FG -t, FD -t, FC -t, FH -t és FB -t. Minthogy e két-két szakasz, AE , ED és CE , EB páronként egyenlő és egyenlő szögeket fognak közre (I. 15.), az AD alap egyenlő a CB alappal és az AED háromszög egyenlő a CEB háromszöggel (I. 4.),



úgyhogy a *DAE* szög is egyenlő az *EBC* szöggel. Az *AEG* szög egyenlő *BEH*-val (I. 15.), két háromszögnek tehát, *AGE*-nek és *BEH*-nak két-két szöge és egy-egy oldala, az egyenlő szögek melletti *AE* és *EB* páronként egyenlő, tehát a többi oldal is páronként egyenlő (I. 26.). *GE* tehát egyenlő *EH*-val, *AG* pedig *BH*-val. Minthogy *AE* egyenlő *EB*-vel, *FE* közös oldal és derékszögeket zár be velük, az *FA* alap egyenlő az *FB* alappal (I. 4.). Ugyanígy *FC* is egyenlő *FD*-vel. Mint-hogy *AD* egyenlő *CB*-vel, *FA* egyenlő *FB*-vel, két-két oldal, *FA*, *AD* és *FB*, *BC* páronként egyenlő. S megmutattuk, hogy az *FD* alapegyenlő az *FC* alappal, az *FAD* szög is egyenlő tehát az *FBC* szöggel. Mint-hogy továbbá megmutattuk, hogy *AG* egyenlő *BH*-val, és *FA* egyenlő *FB*-vel, két-két oldal, *FA*, *AG* és *FB*, *BH* páronként egyenlő. Mint megmutattuk az *FAG* szög egyenlő *FBH*-val, az *FG* alap tehát egyenlő az *FH* alappal (I. 4.). Mint megmutattuk *GE* egyenlő *EH*-val, *EF* közös oldal, így két-két oldal, *GE*, *EF* és *HE*, *EF* páronként egyenlő. Az *FG* alap egyenlő az *FH* alappal, a *GEF* szög tehát egyenlő *HEF*-fel (I. 8.), *GEF* és *HEF* tehát derékszögek (I. 10. D.). *FE* tehát merőleges az *E* ponton át haladó tetszőleges *GH* egyenesre. Hasonlóképp mutat-hatnánk meg, hogy *FE* bármely őt metsző és az alapsíkban fekvő egyenesre merőleges. Egy egyenes viszont merőleges egy síkra, ha valamennyi őt metsző síkbeli egyenesre merőleges (XI. 3. D.), *FE* tehát merőleges az alapsíkra. Az alapsík az *AB* és *CD* egyeneseken átmenő sík, *FE* tehát merőleges az *AB*-n és *CD*-n átmenő síkra.

Ha tehát két metsző egyenesre a metszéspontjukban merőlegest állítunk, akkor ez a merőleges a két egyenes síkjára is merőleges. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 5., 8–9., 11.; XIII. 15.

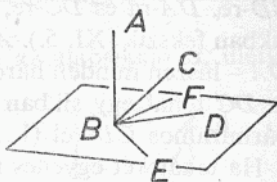
XI. 5. Tétel

Ha három, egy ponton átmenő egyenesre egy egyenes a metszéspontjukban merőleges, akkor a három egyenes egy síkban fekszik.

Legyen ugyanis valamely *AB* egyenes három egyenesre, *BC*-re, *BD*-re és *BE*-re a *B* metszéspontjukban merőleges. Azt állítom, hogy *BC*, *BD* és *BE* egy síkban fekszik.

Tegyük föl ugyanis, hogy *BD* és *BE* az alapsíkban, *BC* pedig egy ferde síkban fekszik. Vegyük az *AB*-n és *BC*-n átmenő síkot (XI. 2.).

Ennek és az alapsíknak a közös része egy egyenes lesz (XI. 3.). Legyen ez BF . Az AB -n és BC -n átmenő egy síkban fekszik tehát e három egyenes, AB , BC és BF . Minthogy AB merőleges BD -re és BE -re, a BD -n és BE -n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.). A BD -n és BE -n átmenő sík az alapsík, úgyhogy AB valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre merőleges (XI. 3. D.). Az alapsíkbeli BF egyenes metszi, az ABF szög tehát derékszög. Feltétel szerint ABC is derékszög, ABF tehát egyenlő az ABC szöggel (4. P.), és egy síkban fekszenek (a szögszárak). Ez nem lehetséges (8. Ax.), a BC egyenes tehát nem egy ferde síkban fekszik, e három egyenes tehát, BC , BD és BE egy síkban fekszik.



Ha tehát három, egy ponton átmenő egyenesre egy egyenes a metszéspontjukban merőleges, akkor a három egyenes egy síkban fekszik. Éppen ezt kellett megmutatni.

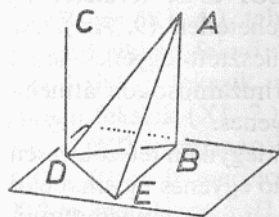
F.: XI. 6.

XI. 6. Tétel

Ha két egyenes merőleges ugyanarra a síkra, akkor az egyenesek párhuzamosak.

Legyen ugyanis két egyenes, AB és CD merőleges az alapsíkra. Azt állítom, hogy AB párhuzamos CD -vel.

Legyenek ugyanis az alapsíkkal való metszéspontjaik B és D , kössük



össze BD -t, emeljünk az alapsíkban BD -re egy DE merőlegest (I. 11.), legyen DE egyenlő AB -vel (I. 3.), és kössük össze BE -t, AE -t és AD -t. Minthogy AB merőleges az alapsíkra, valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre merőleges. AB metszi az alapsíkbeli BD -t és BE -t, ABD és ABE tehát derékszög. Ugyanígy CDB és CDE is derékszög.

Minthogy AB egyenlő DE -vel és BD közös oldal, AB , BD és ED , DB páronként egyenlő; s egyenlő szöget fognak közre, az AD alap tehát egyenlő a BE alappal (I. 4.). Minthogy AB egyenlő DE -vel és AD a

BE -vel, AB , BE és ED , DA páronként egyenlő; s AE közös alapjuk, az ABE szög tehát egyenlő az EDA szöggel (I. 8.). ABE derékszög, tehát EDA is derékszög, ED tehát merőleges DA -ra. BD -re és DC -re is merőleges, ED tehát merőleges három, egy ponton átmenő egyenesre, BD -re, DA -ra és DC -re, a három egyenes tehát, BD , DA és DC egy síkban fekszik (XI. 5.). AB abban a síkban fekszik, amelyikben DB és DA – hiszen minden háromszög egy síkban fekszik (XI. 2.) –, AB , BD és DC tehát egy síkban fekszik. ABD és BDC derékszög, AB tehát párhuzamos CD -vel (I. 28.).

Ha tehát két egyenes merőleges ugyanarra a síkra, akkor az egyenesek párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 9.; XII. 17.; XIII. 16–17.

XI. 7. Tétel

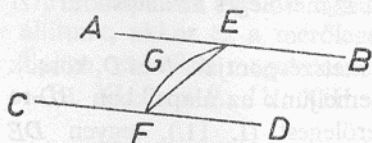
*Ha van két párhuzamos egyenes, és mindegyiken tetszőlegesen veszünk egy pontot, akkor a pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok.**

Legyen AB és CD két párhuzamos egyenes, és vegyünk mindegyiken tetszőlegesen egy-egy pontot, E -t, illetve F -et. Azt állítom, hogy az E , F pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok.

Tegyük föl ugyanis, hogy egy ferde síkban van, mint EGF , és fektessünk EGF -en át síkot. Ennek az alapsíkkal vett metszete egyenes lesz (XI. 3.), ez legyen EF . Ekkor két szakasz, EGF és EF területet fog közre, ami lehetetlen (9. Ax.). Az E -ből F -re illesztett egyenes tehát nem egy ferde síkban fekszik, az AB , CD párhuzamosokon átmenő síkban fekszik tehát az E -ből F -re illesztett egyenes.

Ha tehát van két párhuzamos egyenes, és mindegyiken tetszőlegesen veszünk egy pontot, akkor a pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 8.; XII. 17.

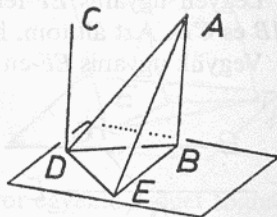


XI. 8. Tétel

Ha van két párhuzamos egyenes, és az egyikük merőleges valamely síkra, akkor a másik is merőleges arra a síkra.

Legyen AB és CD két párhuzamos egyenes, és legyen az egyikük, AB merőleges az alapsíkra. Azt állítom, hogy a másik, CD is merőleges erre a síkra.

Legyen ugyanis AB és CD metszéspontja az alapsíkkal B , illetve D , és húzzuk meg BD -t. AB , CD és BD egy síkban fekszenek (XI. 7.). Emeljünk az alapsíkban BD -re egy DE merőleget (I. 11.), legyen DE egyenlő AB -vel (I. 3.), és húzzuk meg BE -t, AE -t, AD -t. Minthogy AB merőleges az alapsíkra, valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre is merőleges, ABD és ABE tehát derékszög. Minthogy a párhuzamos AB -t és CD -t metszi a BD



egyenés, az ABD , CDB szögek összege két derékszöggel egyenlő (I. 29.). ABD derékszög, tehát CDB is derékszög, CD tehát merőleges BD -re. Minthogy AB egyenlő DE -vel és BD közös oldal, két-két oldal, AB , BD és ED , DB páronként egyenlő; s az ABD szög egyenlő az EDB szöggel – derékszög ugyanis mind a kettő –, az AD alap egyenlő tehát a BE alappal (I. 4.). Minthogy AB egyenlő DE -vel, BE pedig AD -vel, két-két oldal, AB , BE és ED , DA páronként egyenlő; s AE közös alapjuk, az ABE szög tehát egyenlő az EDA szöggel (I. 8.). ABE derékszög, tehát EDA is derékszög, ED tehát merőleges AD -re. DB -re is merőleges, tehát a BD -n és DA -n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.), tehát valamennyi őt metsző, és a BD -n és DA -n átmenő síkban fekvő egyenesre merőleges. DC a BD -n és DA -n átmenő síkban fekszik, minthogy AB és BD a BD -n és DA -n átmenő síkban fekszik (XI. 2.), és amelyik síkban AB és BD , abban fekszik DC is. ED tehát merőleges DC -re, úgyhogy CD is merőleges DE -re. CD a BD -re is merőleges, CD tehát két metsző egyenesre, DE -re és DB -re merőleges a D metszéspontjukban, úgyhogy CD a DE -n és DB -n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.). A DE -n és DB -n átmenő sík az alapsík, CD tehát merőleges az alapsíkra.

Ha tehát van két párhuzamos egyenes, és az egyikük merőleges va-

lamegy síkra, akkor a másik is merőleges arra a síkra. Éppen ezt kellett megmutatni.

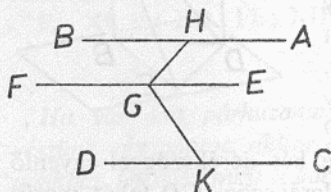
F.: XI. 9., 11–12., 18., 35.

XI. 9. Tétel

Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos és vele nem egy síkban fekvő egyenesek egymással is párhuzamosak.

Legyen ugyanis EF -fel párhuzamos a vele nem egy síkban fekvő AB és CD . Azt állítom, hogy AB párhuzamos CD -vel.

Vegyük ugyanis EF -en a tetszőleges G pontot, és emeljünk belőle az



EF -en és AB -n átmenő síkban egy GH , az FE -n és CD -n átmenő síkban pedig egy GK merőleget (I. 11.). Minthogy EF merőleges GH -ra és GK -ra, a GH -n és GK -n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.). EF párhuzamos AB -vel, tehát AB is merőleges a HG -n és GK -n átmenő síkra (XI. 8.). Ugyanígy CD is merőle-

ges a HG -n és GK -n átmenő síkra, AB és CD tehát mindketten merőlegesek a HG -n és GK -n átmenő síkra, ha viszont két egyenes merőleges ugyanarra a síkra, akkor az egyenesek párhuzamosak (XI. 6.), AB tehát párhuzamos CD -vel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 10., 15., 38.; XII. 17.

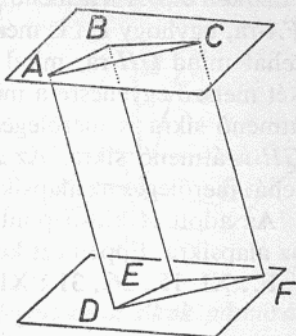
XI. 10. Tétel

Ha két, egymást metsző egyenes párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, akkor egyenlő szöget fognak közre.

Legyen ugyanis két, egymást metsző egyenes, AB és BC párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, DE -vel, illetve EF -fel. Azt állítom, hogy az ABC szög egyenlő DEF -fel.

Messzük ugyanis le az egymással egyenlő BA , BC , ED , EF szakaszokat (I. 3.), és húzzuk meg AD -t, CF -et, BE -t, AC -t és DF -et. Mint-hogy BA egyenlő és párhuzamos ED -vel, AD is párhuzamos és egyenlő

BE -vel (I. 33.). Ugyanígy CF egyenlő és párhuzamos BE -vel, AD és CF tehát mindketten egyenlők és párhuzamosak BE -vel. Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos és vele nem egy síkban fekvő egyenesek viszont egymással is párhuzamosak (XI. 9.), AD tehát párhuzamos CF -fel, és egyenlő vele. AC és DF kötik össze őket, tehát AC is egyenlő és párhuzamos DF -fel (I. 33.). Minthogy két-két oldal, AB , BC és DE , EF páronként egyenlő, és az AC alap egyenlő a DF alappal, az ABC szög egyenlő a DEF szöggel (I. 8.).



Ha tehát két, egymást metsző egyenes párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, akkor egyenlő szöget fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

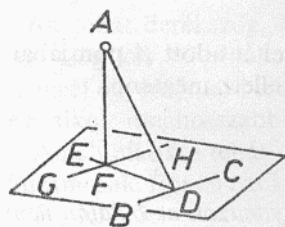
F.: XI. 24.; XII. 3.

XI. 11. Tétel

Bocsássunk adott síkra adott külső pontból merőlegest!

Legyen A az adott külső pont, és az alapsík az adott sík. Az A pontból az alapsíkra kell tehát merőlegest bocsátani.

Vegyünk ugyanis az alapsíkban egy tetszőleges BC egyenest, és bocsássunk az A pontból BC -re egy AD merőlegest (XI. 2., I. 12.). Ha AD az alapsíkra is merőleges, készen vagyunk a feladattal. Ha nem, emeljünk a D pontból az alapsíkban BC -re egy DE merőlegest (I. 11.), bocsássunk A -ból DE -re egy AF merőlegest (XI. 2., I. 12.), és húzzuk F -en át BC -vel párhuzamosan GH -t (I. 31.).



Minthogy BC mind DA -ra, mind DE -re merőleges, az ED -n és DA -n átmenő síkra is merőleges (XI. 4.). GH párhuzamos BC -vel, ha viszont van két párhuzamos egyenes, és az egyikük merőleges valamely síkra, akkor a másik is merőleges arra a síkra (XI. 8.), tehát

GH is merőleges az ED -n és DA -n átmenő síkra, így valamennyi őt metsző, és az ED -n és DA -n átmenő síkban fekvő egyenesre merőleges. Az ED -n és DA -n átmenő síkban fekvő AF metszi, GH tehát merőleges FA -ra, úgyhogy FA is merőleges HG -re. AF a DE -re is merőleges, AF tehát mind GH -ra, mind DE -re merőleges. Ha viszont egy egyenes két metsző egyenesre a metszéspontjukban merőleges, akkor a rajtuk átmenő síkra is merőleges (XI. 4.), FA tehát merőleges az ED -n és GH -n átmenő síkra. Az ED -n és GH -n átmenő sík az alapsík, AF tehát merőleges az alapsíkra.

Az adott A külső pontból tehát egy AF merőleget bocsátottunk az alapsíkra. Éppen ezt kellett megtenni.

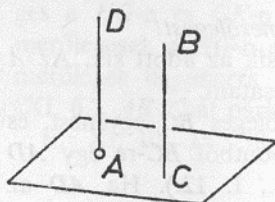
F.: XI. 15., 26., 31.; XII. 17.

XI. 12. Tétel

Állítsunk adott síkra adott pontjában merőleget!

Legyen az alapsík az adott sík és A az adott pontja. Az A pontban az alapsíkra kell tehát merőleget állítani.

Tekintsünk valamely B külső pontot, bocsássunk B -ből az alapsíkra egy BC merőleget (XI. 11.), és húzzuk az A ponton át BC -vel párhuzamosan AD -t (XI. 2., I. 31.).



Mintfogya AD és CB két párhuzamos egyenes, és az egyikük, BC merőleges az alapsíkra, a másik, AD is merőleges az alapsíkra (XI. 8.).

Az adott síkra tehát adott A pontjában egy AD merőleget állítottunk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XI. 23., 26.; XIII. 14.

XI. 13. Tétel

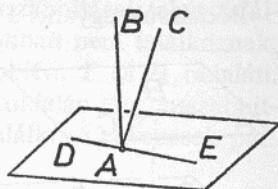
Ugyanarra a síkra ugyanabban a pontban ugyanazon az oldalon nem állítható két (különböző) merőleges.

Tegyük föl ugyanis, hogy ugyanabban az A pontban ugyanazon az oldalon az alapsíkra két egyenes, AB és AC merőleges. Fekteszünk át BA -n és AC -n síkot (XI. 2.). Ennek az alapsíkkal vett metszete egy A -n átmenő egyenes lesz (XI. 3.). Ez legyen DAE . AB , AC és DAE

egy síkban fekszenek. Minthogy CA merőleges az alapra, valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre merőleges. Az alapsíkban fekvő DAE metszi, CAE tehát derékszög. Ugyanígy BAE is derékszög, CAE tehát egyenlő BAE -vel (4. P.). S egy síkban fekszenek, ami lehetetlen (8. Ax.).

Nem állítható tehát ugyanarra a síkra ugyanabban a pontban ugyanazon az oldalon két (különböző) merőleges. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 19.



XI. 14. Tétel

Amely síkokra ugyanaz az egyenes merőleges, azon síkok párhuzamosak.

Legyen ugyanis valamely AB egyenes mind a CD , mind az EF síkra merőleges. Azt állítom, hogy a síkok párhuzamosak.

Ellenkező esetben ugyanis meghosszabbítva találkoznak. Találkoznak: a közös részük egy egyenes lesz (XI. 3.). Legyen ez GH , vegyünk GH -n egy tetszőleges K pontot, és húzzuk meg AK -t, BK -t. Minthogy AB merőleges az EF síkra, az EF sík meghosszabbításában fekvő BK egyenesre is merőleges, ABK tehát derékszög. Ugyanígy BAK is derékszög. Így az ABK háromszög két szögének, ABK -nak és BAK -nak az összege két derékszöggel egyenlő, ami lehetetlen (I. 17.). Nem találkoznak tehát a CD , EF síkok meghosszabbításai, párhuzamosak tehát a CD , EF síkok.

Amely síkokra tehát ugyanaz az egyenes merőleges, azon síkok párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

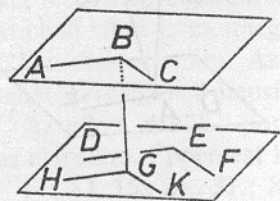
F.: XI. 15.

XI. 15. Tétel

Ha két, egymást metsző egyenes párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, akkor a rajtuk átmenő síkok párhuzamosak,

Legyen ugyanis két, egymást metsző egyenes, AB és BC párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, DE -vel, illetve EF -fel. Azt állítom, hogy az AB -n és BC -n, illetve DE -n és EF -en átmenő síkok nem találkoznak egymással.

Bocsássuk ugyanis a B pontból DE és EF síkjára a BG merőleget (XI. 11.), mely messe a síkot a G pontban, és húzzuk a G ponton át párhuzamosan ED -vel GH -t, EF -fel pedig GK -t (I. 31.). Minthogy BG merőleges DE és EF síkjára, valamennyi őt metsző DE és EF síkjában fekvő egyenesre merőleges. A DE és EF síkjában fekvő GH és GK metszi, tehát mind BGH , mind BGK derékszög. Minthogy BA



párhuzamos GH -val, a GBA , BGH szögek összege két derékszöggel egyenlő (I. 29.). GBA derékszög, tehát GB merőleges BA -ra. Ugyanígy GB a BC -re is merőleges. Minthogy a GB egyenes két, egymást metsző egyenesre, BA -ra és BC -re merőleges, BA és BC síkjára is merőleges (XI. 4.). [BG ugyanígy GH és GK síkjára is merőleges. GH és GK síkja DE és EF síkja, BG tehát merőleges DE és EF síkjára. Megmutattuk, hogy AB és BC síkjára is merőleges.] Amely síkokra viszont ugyanaz az egyenes merőleges, azon síkok párhuzamosak (XI. 14.), AB és BC síkja tehát párhuzamos DE és EF síkjával.

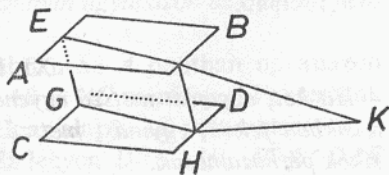
Ha tehát két, egymást metsző egyenes párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, akkor a rajtuk átmenő síkok párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

XI. 16. Tétel

Ha két párhuzamos síkot metsz egy sík, akkor a metszetek párhuzamosak.

Messen ugyanis az $EFGH$ sík két párhuzamos síkot, AB -t és CD -t, és legyen EF , illetve GH a metszet (XI. 3.). Azt állítom, hogy EF párhuzamos GH -val.

Ellenkező esetben ugyanis EF és GH vagy F és H , vagy E és G oldalán találkozik. Hosszab-



bítsuk meg először őket F és H oldalán, és találkozzanak K -ban. Minthogy EFK az AB síkban fekszik, minden EFK -n levő pont az AB síkban fekszik (XI. 1.). K az EFK egyenesen levő pontok egyike, K tehát az AB síkban fekszik. Ugyanígy K a CD síkban is fekszik, az AB , CD síkok meghosszabbításai tehát találkoznak. A párhuzamossági feltétel miatt azonban nem találkoznak, EF és GH tehát nem találkozik meghosszabbítva F és H oldalán. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy E és G oldalán meghosszabbítva sem találkoznak. Az egyik oldalon sem találkozó egyenesek párhuzamosak, EF tehát párhuzamos GH -val.

Ha tehát két párhuzamos síkot metsz egy sík, akkor a metszetek párhuzamosak. Éppen ezt kellett megmutatni.

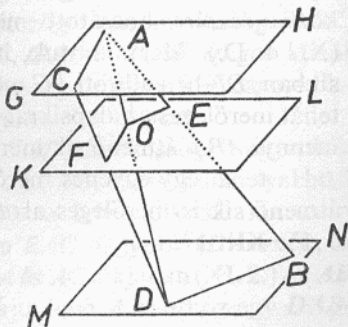
F.: XI. 17., 24.

XI. 17. Tétel

Ha két egyenest párhuzamos síkok metszenek, akkor ugyanazon arányban osztják őket.

Messenek ugyanis a GH , KL , MN párhuzamos síkok két egyenest, AB -t és CD -t az A , E , B , illetve C , F , D pontokban. Azt állítom, hogy AE úgy aránylik EB -hez, mint CF az FD -hez.

Húzzuk meg ugyanis AC -t, BD -t és AD -t, legyen AD -nek a KL síkkal vett metszéspontja O , és húzzuk meg EO -t, OF -et. Minthogy két párhuzamos síkot, KL -t és MN -et metsz az $EBDO$ sík (XI. 2.), a metszetek, EO és BD párhuzamosak (XI. 16.). Ugyanígy, minthogy két párhuzamos síkot, GH -t és KL -et metsz az $AOFC$ sík, a metszetek, AC és OF párhuzamosak. Minthogy az ABD háromszög egyik oldalával, BD -vel párhuzamos EO , AE úgy aránylik EB -hez, mint AO az OD -hez (VI. 2.). Ismét, minthogy az ADC háromszög egyik oldalával, AC -vel párhuzamos OF , AO úgy aránylik OD -hez, mint CF az FD -hez. Megmu-



tattuk, hogy amint AO az OD -hez, úgy aránylik AE az EB -hez, amint tehát AE az EB -hez, úgy CF az FD -hez (V. 11.).

Ha tehát két egyenest párhuzamos síkok metszenek, akkor ugyanazon arányban osztják őket. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 4. L.

XI. 18. Tétel

Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor valamennyi rajta átmenő sík is merőleges arra a síkra.

Legyen ugyanis valamely AB egyenes merőleges az alapsíkra. Azt állítom, hogy valamennyi AB -n átmenő sík is merőleges az alapsíkra.

Fektessünk át ugyanis AB -n egy DE síkot, legyen a DE sík és az alapsík metszete CE (XI. 3.), vegyünk CE -n egy tetszőleges F pontot, és emeljünk a DE síkban CE -re az F pontban egy FG merőleget (I. 11.). Minthogy AB merőleges az alapsíkra, valamennyi őt metsző alapsíkbeli egyenesre merőleges, úgyhogy CE -re is merőleges, ABF tehát derékszög. GFB is derékszög, AB tehát párhuzamos FG -vel (I. 28.). AB merőleges az alapsíkra, tehát FG is merőleges az alapsíkra (XI.

8.). S két sík merőleges egymásra, ha az egyik síkban a síkok közös részére bocsátott merőlegesek merőlegesek a másik síkra (XI. 4. D.). Megmutattuk, hogy a síkok CE közös részére az egyik síkban, DE -ben állított FG merőleges merőleges az alapsíkra, a DE sík tehát merőleges az alapsíkra. Hasonlóképp mutatható meg, hogy valamennyi AB -n átmenő sík merőleges az alapsíkra.

Ha tehát egy egyenes merőleges egy síkra, akkor valamennyi rajta átmenő sík is merőleges arra a síkra. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 17.

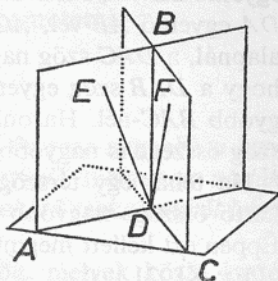
XI. 19. Tétel

Ha két, egymást metsző sík merőleges valamely síkra, akkor a közös részük is merőleges arra a síkra.

Legyen ugyanis két sík, AB és BC merőleges az alapsíkra, és legyen

BD a közös részük (XI. 3.). Azt állítom, hogy BD merőleges az alapsíkra.

Tegyük föl ugyanis hogy nem, és állítsunk az AB síkban az AD egyenesre a D pontban egy DE , a BC síkban pedig CD -re egy DF merőleget (I. 11.). Minthogy az AB sík merőleges az alapsíkra és az AD közös részükre az AB síkban egy DE merőleget emeltünk, DE merőleges az alapsíkra. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy DF is merőleges az alapsíkra. Ugyanabban a D pontban tehát az alapsíkra két (különböző: XI. 4.) egyenes merőleges ugyanazon az oldalon. Ez nem lehetséges (XI. 13.). Nem állítható tehát az alapsíkra a D pontban más merőleges, csak az AB és BC sík közös része, DB .

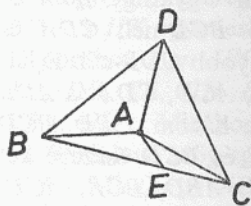


Ha tehát két, egymást metsző sík merőleges valamely síkra, akkor a közös részük is merőleges arra a síkra. Éppen ezt kellett megmutatni.

XI. 20. Tétel

Ha egy térszöget három síkszög fog közre, akkor bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket.

Fogja közre ugyanis az A -nál levő térszöget három síkszög, BAC , CAD és DAB . Azt állítom, hogy a BAC , CAD és DAB szögek közül bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket.



Ha a BAC , CAD , DAB szögek egyenlők egymással, nyilvánvaló, hogy bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál. Ha nem egyenlők, legyen BAC nagyobb (DAB -nél), és szerkesszünk BA és AC síkjában (XI. 2.) az AB egyeneshez, a rajta levő A ponthoz egy DAB -vel egyenlő BAE szöget (I. 23.), legyen AE egyenlő AD -vel, mossa egy E -n át húzott BEC egyenes az AB , AC egyeneseket a B , illetve C pontban, és kössük össze DB -t, DC -t. Minthogy DA egyenlő AE -vel és

AB közös oldal, két-két oldal egyenlő; s a DAB szög egyenlő a BAE szöggel, a DB alap tehát egyenlő a BE alappal (I. 4.). Minthogy BD és DC összege nagyobb BC -nél (I. 20.) s a DB tag, mint megmutattuk, egyenlő BE -vel, a maradék DC nagyobb a maradék EC -nél. Minthogy DA egyenlő AE -vel, AC közös oldal, és a DC alap nagyobb az EC alapnál, a DAC szög nagyobb az EAC szögnél (I. 25.). Megmutattuk, hogy a DAB szög egyenlő BAE -vel, DAB és DAC összege tehát nagyobb BAC -nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a többi két szög összege is nagyobb a harmadiknál.

Ha tehát egy térszöget három síkszög fog közre, akkor bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket. Éppen ezt kellett megmutatni.

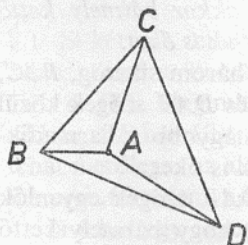
F.: XI. 21.

XI. 21. Tétel

Valamennyi térszöget összegben négy derékszögnél kisebb síkszögek fognak közre.

Fogja közre ugyanis az A -nál levő térszöget a BAC , CAD és DAB síkszög. Azt állítom, hogy BAC , CAD és DAB összege kisebb négy derékszögnél.

Vegyünk ugyanis AB , AC és AD mindegyikén egy tetszőleges B ,



C , illetve D pontot, és kössük össze BC -t, CD -t és DB -t. Minthogy a B -nél levő térszöget három síkszög, CBA , ABD és CBD fogja közre, bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál (XI. 20.), CBA és ABD összege tehát nagyobb CBD -nél. Ugyanígy BCA és ACD összege nagyobb BCD -nél, CDA és ADB összege pedig nagyobb CDB -nél. E hat szög, CBA , ABD , BCA , ACD , CDA és ADB összege tehát nagyobb e három, CBD , BCD és CDB összegénél. E három szög, CBD , BDC és BCD összege két derékszöggel egyenlő (I. 32.), e hat szög, CBA , ABD , BCA , ACD , CDA és ADB összege nagyobb két derékszögnél. Minthogy az ABC , ACD és ADB háromszögek mindegyikének szögösszege két derékszöggel egyenlő, a három háromszög kilenc szöge, CBA , ACB , BAC , ACD , CDA , CAD , ADB , DBA és BAD együtt hat derékszöggel egyen-

lő. E hat tag, ABC , BCA , ACD , CDA , ADB és DBA összege nagyobb két derékszögnél, a maradék három szög tehát, BAC , CAD és DAB , mely közrefogja a térszöget, együtt kisebb négy derékszögnél.

Tehát valamennyi térszöget összegben négy derékszögnél kisebb síkszögek fognak közre. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 18.

XI. 22. Tétel

Ha van három síkszög, melyek közül kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket, és egyenlő szakaszok zárják közre őket, akkor az egyenlő szakaszokat összekötő szakaszból lehet háromszöget szerkeszteni.

Legyen ABC , DEF és GHK három síkszög, melyek közül kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket, ABC meg DEF a GHK -nál, DEF meg GHK az ABC -nél, s végül GHK meg ABC DEF -nél, legyenek egyenlők az AB , BC , DE , EF , GH és HK szakaszok, és kössük össze AC -t, DF -et és GK -t. Azt állítom, hogy AC -vel, DF -fel, illetve GK -val egyenlő szakaszból lehet háromszöget szerkeszteni, azaz hogy AC , DF és GK közül bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál (I. 22.).

Ha az ABC , DEF , GHK szögek egyenlők egymással, nyilvánvaló, hogy AC , DF és GK egyenlő lévén, lehetséges AC -vel, DF -fel, illetve GK -val egyenlő szakaszból háromszöget szerkeszteni (I. 1.). Ellenkező esetben legyenek nem egyenlők, szerkeszszünk a HK egyeneshez, a rajta levő



H ponthoz egy ABC -vel egyenlő KHL szöget (I. 23.), legyen AB , BC , DE , EF , GH és HK egyikével egyenlő HL , és kössük össze KL -t, GL -t. Minthogy két-két oldal, AB , BC és KH , HL egyenlő, s a B -nél levő szög egyenlő KHL -l, az AC alap egyenlő a KL alappal (I. 4.). Minthogy ABC meg GHK nagyobb DEF -nél és ABC egyenlő a KHL szöggel, GHL nagyobb DEF -nél. Minthogy két-két oldal, GH , HL és DE , EF egyenlő, s a GHL szög nagyobb a DEF szögnél, a GL alap nagyobb a DF alapnál (I. 24.). GK meg KL nagyobb GL -nél (I. 20.), GK meg KL tehát annál nagyobb DF -nél. KL egyenlő AC -vel,

AC meg GK tehát nagyobb a harmadik szakasznál, DF -nél. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy AC meg DF is nagyobb GK -nál, és végül DF meg GK AC -nél. Lehetséges tehát AC -vel, DF -fel, illetve GK -val egyenlő szakaszokból háromszöget szerkeszteni. Éppen ezt kellett megmutatni.

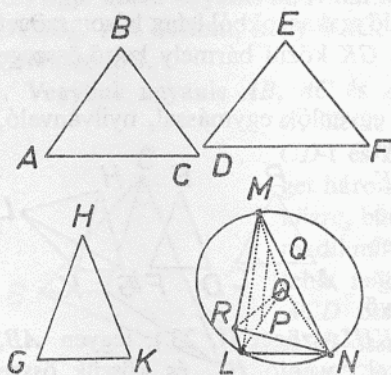
F.: XI. 23.

XI. 23. Tétel

Szerkesszünk három síkszögből, melyek közül kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket, térszöget!

Szükséges, hogy a három szög összege négy derékszögnél kisebb legyen. (XI. 21.).

Legyen a három adott síkszög, melyek közül kettő összege nagyobb a harmadiknál, akárhogy választjuk is őket, a három összege pedig kisebb négy derékszögnél, ABC , DEF és GHK . ABC -vel, DEF -fel, illetve GHK -val egyenlő szögekből kell tehát térszöget szerkeszteni.



Messzünk le egyenlő AB , BC , DE , EF , GH és HK szakaszokat (I. 3.) és kössük össze AC -t, DF -et, GK -t. Ekkor lehetséges AC -vel, DF -fel, illetve GK -val egyenlő szakaszokból háromszöget szerkeszteni (XI. 22.). Szerkesszünk egy LMN háromszöget úgy, hogy AC egyenlő LM -mel, DF az MN -nel, s végül GK az NL -lel, írjunk az LMN háromszög köré egy LMN kört (IV. 5.), vegyük a középpontját, O -t, és kössük össze LO -t, MO -t,

NO -t. Azt állítom, hogy AB nagyobb LO -nál. Ellenkező esetben ugyanis AB vagy egyenlő LO -val, vagy kisebb nála. Legyen először egyenlő. Minthogy AB egyenlő LO -val, másrészt AB egyenlő BC -vel és OL egyenlő OM -mel, két-két oldal, AB , BC és LO , OM páronként egyenlő; s feltétel szerint az AC alap egyenlő az LM alappal, az ABC szög tehát egyenlő az LOM szöggel (I. 8.). Ugyanígy a

DEF szög egyenlő *MON*-nel, s *GHK* az *NOL*-lel, e három szög, *ABC*, *DEF* és *GHK* összege tehát egyenlő e másik három, *LOM*, *MON* és *NOL* összegével. *LOM*, *MON* és *NOL* összege viszont négy derékszöggel egyenlő (I. 13.), tehát *ABC*, *DEF* és *GHK* összege is négy derékszöggel egyenlő. A feltétel szerint az összeg kisebb négy derékszögnél. Ez ellentmondás, *AB* tehát nem egyenlő *LO*-val. Azt állítom, hogy *AB* nem is kisebb *LO*-nál. Tegyük föl ugyanis, hogy az, és mérjünk föl egy *AB*-vel egyenlő *OP* és egy *BC*-vel egyenlő *OQ* szakaszt (I. 3.), és kössük össze *PQ*-t. Minthogy *AB* egyenlő *BC*-vel, *OP* is egyenlő *OQ*-val, úgyhogy a maradék *LP* is egyenlő *QM*-mel. *LM* tehát párhuzamos *PQ*-val (VI. 2.), és az *LMO* háromszög szögei egyenlők *PQO*-éivel (I. 29.), amint tehát *OL* az *LM*-hez, úgy aránylik *OP* a *PQ*-hoz (VI. 4.), fölcserélve tehát amint *LO* az *OP*-hez, úgy *LM* a *PQ*-hoz (V. 16.). *LO* nagyobb *OP*-nél, tehát *LM* is nagyobb *PQ*-nál (V. 14.). *LM* feltétel szerint egyenlő *AC*-vel, tehát *AC* is nagyobb *PQ*-nál. Minthogy két-két oldal, *AB*, *BC* és *PO*, *OQ* egyenlő, s az *AC* alap nagyobb a *PQ* alapnál, az *ABC* szög nagyobb a *POQ* szögnél (I. 25.). Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *DEF* szög nagyobb *MON*-nél, *GHK* pedig *NOL*-nél. *ABC*, *DEF* és *GHK* összege tehát nagyobb *LOM*, *MON* és *NOL* összegénél. *ABC*, *DEF* és *GHK* összege feltétel szerint kisebb négy derékszögnél, *LOM*, *MON* és *NOL* összege tehát annál kisebb négy derékszögnél. Viszont egyenlő is, ami ellentmondás. *AB* tehát nem kisebb *LO*-nál. Megmutattuk, hogy nem is egyenlő vele, nagyobb tehát *AB* az *LO*-nál. Állítsunk az *O* pontban az *LMN* kör síkjára egy *OR* merőlegest (XI. 12.), legyen *OR* négyzete azzal egyenlő, amivel *AB* négyzete nagyobb *LO* négyzeténél (L.), és kössük össze *RL*-t, *RM*-et, *RN*-et. Minthogy *RO* merőleges az *LMN* kör síkjára, *LO*, *MO* és *NO* mindegyikére is merőleges. Minthogy *LO* egyenlő *OM*-mel, s *OR* közös oldal és merőleges, az *RL* alap egyenlő az *RM* alappal (I. 4.). Ugyanígy *RN* egyenlő *RL*-lel és *RM*-mel, *RL*, *RM* és *RN* tehát egyenlők egymással. Minthogy feltétel szerint *OR* négyzete azzal egyenlő, amivel *AB* négyzete nagyobb *LO* négyzeténél, *AB* négyzete egyenlő *LO* és *OR* négyzetösszegével. Másrészt *LO* és *OR* négyzetösszegével egyenlő *LR* négyzete (I. 47.) – *LOR* ugyanis derékszög –, *AB* négyzete tehát egyenlő *RL* négyzetével, *AB* tehát egyenlő *RL*-lel. *AB*-vel egyenlő *BC*, *DE*, *EF*, *GH*, illetve

HK , RL -lel pedig egyenlő RM és RN , AB , BC , DE , EF , GH és HK tehát egyenlő RL , RM és RN bármelyikével. Minthogy két-két oldal, LR , RM és AB , BC egyenlő, s feltétel szerint az LM alap egyenlő az AC alappal, az LRM szög egyenlő az ABC szöggel (I. 8.). Ugyanígy az MRN szög egyenlő DEF -fel, LRN pedig GHK -val.

Három síkszögből tehát, LRM -ből, MRN -ből és LRN -ből, melyek egyenlők a három adott szöggel, ABC -vel, DEF -fel, illetve GHK -val, térszöget szerkesztettünk, az R -nél levőt, melyet LRM , MRN és LRN fog közre. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XI. 36.

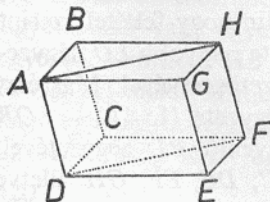
XI. 23. Lemma

Hogy hogyan lehet OR négyzetét azzal egyenlőnek venni, amivel nagyobb AB négyzete LO négyzeténél, így mutatjuk meg: Vegyük az AB , LO szakaszokat, legyen AB a nagyobb, írjunk fölé egy ACB félkört (I. 10.), illesszünk az ACB félkörbe egy, az AB átmérőnél nem nagyobb LO -val egyenlő AC szakaszt (IV. 1.), és húzzuk meg CB -t. Minthogy az ACB szög egy ACB félkörben fekszik, ACB derékszög (III. 31.). AB négyzete tehát egyenlő AC és CB négyzetösszegével (I. 47.), úgyhogy AB négyzete CB négyzetével nagyobb AC négyzeténél. AC egyenlő LO -val, AB négyzete tehát CB négyzetével nagyobb LO négyzeténél. Ha tehát OR -t BC -vel egyenlőnek vesszük (I. 3.), akkor AB négyzete OR négyzetével lesz nagyobb LO négyzeténél. Éppen ez volt a feladat.

XI. 24. Tétel

Ha egy téridomot (hat páronként) párhuzamos lap fog közre, akkor a szemközti lapok egybevágók és paralelogrammák.

Fogják közre ugyanis a $CDHG$ téridomot a (páronként) párhuzamos AC , GF , AH , DF , BF és AE lapok. Azt állítom, hogy a szemközti lapok egybevágók és paralelogrammák.



Minthogy két párhuzamos síkot, BG -t és CE -t metsz az AC sík, a metszetek párhuzamosak (XI. 16.). AB tehát párhuzamos DC -vel. Ismét, minthogy két párhuzamos

síkot, BF -et és AE -t metsz az AC sík, a metszetek párhuzamosak. BC tehát párhuzamos AD -vel. Megmutattuk, hogy AB is párhuzamos DC -vel, AC tehát paralelogramma. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy DF , FG , GB , BF és AE is paralelogramma.

Húzzuk meg AH -t és DF -et. Minthogy AB párhuzamos DC -vel, BH pedig CF -fel, két, egymást metsző egyenes, AB és BH párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel DC -vel és CF -fel, egyenlő szöget fognak tehát közre (XI. 10.), az ABH szög tehát egyenlő DCF -fel. Minthogy két-két oldal, AB , BH és DC , CF egyenlő (I. 34.), s az ABH szög egyenlő DCF -fel, az AH alap egyenlő a DF alappal, és az ABH háromszög egyenlő a DCF háromszöggel (I. 4.). ABH -nak kétszerese a BG paralelogramma, DCF -nek pedig kétszerese a CE paralelogramma (I. 34.), a BG paralelogramma tehát egyenlő a CE paralelogrammával. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy AC is egyenlő GF -fel, AE pedig BF -fel.

Ha tehát egy téridomot (hat páronként) párhuzamos lap fog közre, akkor a szemközti lapok egybevágók és paralelogrammák. Éppen ezt kellett megmutatni.

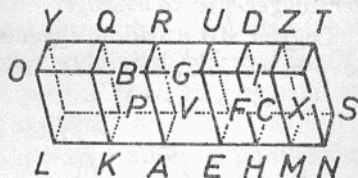
F.: XI. 25., 27–29., 31., 33.; XII. 8.

XI. 25. Tétel

Ha egy paralelepipedont egy (két) szemközti lappal párhuzamos síkkal metszünk, akkor amint az alaplappok, úgy aránylanak a téridomok.*

Messzük el ugyanis az $ABCD$ paralelepipedont a szemközti RA , DH lapokkal párhuzamos FG síkkal. Azt állítom, hogy amint az $AEFV$ alaplapp az $EHCF$ alaplaphoz, úgy aránylik az $ABFU$ téridom az $EGCD$ téridomhoz.

Hosszabbítsuk meg ugyanis AH -t mindkétfelé, legyen AK , KL tetszőleges sok AE -vel egyenlő, HM , MN pedig tetszőleges sok EH -vel egyenlő szakasz, s egészítsük ki az LP , KV , HX , MS paralelogrammákat és az LQ , KR , DM , MT téridomokat. Minthogy az LK , KA , AE szakaszok egyenlők egymással, az LP , KV , AF paralelogrammák egyenlők egymással, és KO , KB , AG is egymással, s végül LY , KQ és



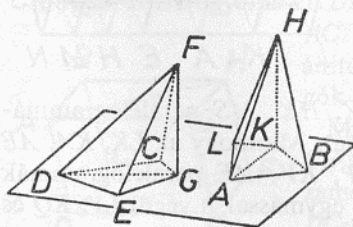
AR is egymással – szemközti lapok ugyanis (XI. 24.). Ugyanígy EC , HX és MS is egyenlők egymással, s HG , HI és IN egyenlők egymással, s végül DH , MZ és NT . Az LQ , KR , AU téridomoknak tehát három-három lapja egyenlő. E három lap viszont egyenlő a szemközti másik hárommal (XI. 24.), e három téridom tehát, LQ , KR és AU egyenlő egymással. Ugyanígy a másik három téridom, ED , DM és MT is egyenlő egymással, ahányszorosa tehát az LF alap az AF alapnak, annyszorosa az LU téridom az AU téridomnak. Ugyanígy ahányszorosa az NF alap az FH alapnak, annyszorosa az NU téridom a HU téridomnak. S ha az LF alap egyenlő az NF alappal, akkor az LU téridom is egyenlő az NU téridommal, s ha az LF alap nagyobb az NF alapnál, akkor az LU téridom is nagyobb az NU téridomnál, s ha kisebb, akkor kisebb. Van tehát négy mennyiség, két alap, AF és FH , s két téridom, AU és UH , vettük ugyanannyiszorosát mind az AF alapnak és az AU téridomnak – ti. az LF alapot és az LU téridomot –, mind a HF alapnak és a HU téridomnak – ti. az NF alapot és az NU téridomot –, és megmutattuk, hogy ha az LF alap nagyobb az FN alapnál, akkor az LU téridom is nagyobb NU -nál, s ha egyenlő, akkor egyenlő, s ha kisebb, akkor kisebb. Az AU téridom tehát úgy aránylik az UH téridomhoz, mint az AF alap az FH alaphoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 31–32., 34.

XI. 26. Tétel

Szerkesszünk adott egyeneshez, rajta levő adott ponthoz, adott térszöggel egyenlő térszöget!

Legyen AB az adott egyenes, A a rajta levő adott pont, a D -nél levő és az EDC , EDF , FDC síkszögek által közrefogott szög pedig az adott térszög. Az AB egyeneshez, a rajta levő adott ponthoz a D -nél levő térszöggel egyenlő térszöget kell tehát szerkeszteni.



Vegyünk DF -en egy tetszőleges F pontot, bocsássunk F -ből ED és DC síkjára egy FG merőleget (XI. 11.), ennek a síkkal való metszés-

pontja legyen G , húzzuk meg DG -t, szerkesszünk az AB egyeneshez, a rajta levő A ponthoz egy EDC -vel egyenlő BAL és egy EDG -vel egyenlő BAK szöget (I. 23.), mérjük föl egy DG -vel egyenlő AK szakaszt (I. 3.), állítsunk BA és AL síkjára K -ban egy KH merőleget (XI. 12.), mérjük rá egy GF -fel egyenlő KH szakaszt, és húzzuk meg HA -t. Azt állítom, hogy az A -nál levő, a BAL , BAH , HAL síkszögek által közrefogott térszög egyenlő a D -nél levő, az EDC , EDF , FDC szögek által közrefogott térszöggel.

Messünk le ugyanis egyenlő AB , DE szakaszokat (I. 3.), és húzzuk meg HB -t, KB -t, FE -t, GE -t. Minthogy FG merőleges az alapsíkra, valamennyi őt metsző és az alapsíkban fekvő egyenesre merőleges, FGD és FGE tehát derékszög. Ugyanígy HKA és HKB is derékszög. Minthogy két-két oldal, KA , AB és GD , DE páronként egyenlő, és egyenlő szöget zárnak be, a KB alap egyenlő a GE alappal (I. 4.). KH és GF is egyenlő, s egyenlő szöget zárnak be, tehát HB és FE is egyenlő (ua.). Ismét, minthogy két-két oldal, AK , KH és DG , GF egyenlő, s derékszöget fognak közre, az AH alap egyenlő az FD alappal. AB és DE is egyenlő, tehát két-két oldal, HA , AB és DF , DE egyenlő. S a HB alap egyenlő az FE alappal, a BAH szög tehát egyenlő az EDF szöggel (I. 8.). Ugyanígy a HAL szög is egyenlő FDC -vel [minthogy ha egyenlő AL , DC szakaszokat metszünk le, és meghúzzuk KL -t, HL -t, GC -t, FC -t, akkor minthogy a teljes BAL szög egyenlő a teljes EDC -vel és belőlük BAK feltétel szerint egyenlő EDG -vel, a maradék KAL egyenlő a maradék GDC -vel. Minthogy két-két oldal, KA , AL és GD , DC egyenlő, s egyenlő szöget zárnak be, a KL alap egyenlő a GC alappal. KH és GF is egyenlő, tehát két-két oldal, LK , KH és CG , GF egyenlő; s egyenlő szöget zárnak be, a HL alap tehát egyenlő az FC alappal. Minthogy két-két oldal HA , AL és FD , DC egyenlő, s a HL alap egyenlő az FC alappal, a HAL szög egyenlő az FDC szöggel]. A BAL és az EDC szög is egyenlő.

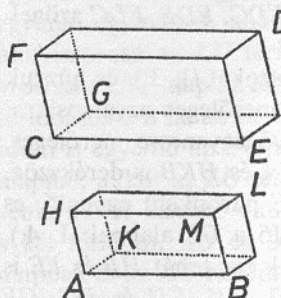
Az adott AB egyeneshez tehát, a rajta levő adott A ponthoz, a D -nél levő adott térszöggel egyenlő térszöget szerkesztettünk. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XI. 27.

XI. 27. Tétel

Emeljünk adott szakaszra adott paralelepipedonhoz hasonló és hasonlóan fekvő paralelepipedont!

Legyen AB az adott szakasz és CD az adott paralelepipedon. Az adott AB szakaszra az adott CD paralelepipedonhoz hasonló és hasonlóan fekvő paralelepipedont kell tehát emelni.



Szerkesszünk az AB egyeneshez, a rajta levő A ponthoz egy, a C -nél levővel egyenlő, a BAH , HAK , KAB síkszögek által közrefogott térszöget úgy, hogy a BAH szög egyenlő legyen ECF -fel, BAK az ECG -vel, KAH pedig GCF -fel (XI. 26.), és arányuljék amint EC a CG -hez, úgy BA az AK -hoz, amint pedig GC a CF -hez, úgy KA az AH -hoz (VI. 12.). Egyenlő sok tagon át tehát amint EC a CF -hez, úgy BA

az AH -hoz (V. 22.). Egészítsük ki a HB paralelogrammát és az AL téridomot.

Mínthogy BA úgy aránylik AK -hoz, mint EC a CG -hez, s így az egyenlő ECG , BAK szögek melletti oldalak arányosak, a GE paralelogramma hasonló a KB paralelogrammához. Ugyanígy a KH paralelogramma is hasonló a GF paralelogrammához, s végül FE HB -hez, a CD téridom három paralelogrammája tehát hasonló az AL téridom három paralelogrammájához. Az egyik három viszont egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal, a másik három pedig egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal (XI. 24.), a teljes CD téridom tehát hasonló a teljes AL téridomhoz.

Az adott AB szakaszra tehát az adott CD paralelepipedonhoz hasonló és hasonlóan fekvő AL paralelepipedont emeltünk. Éppen ezt kellett megtenni.

XI. 28. Tétel

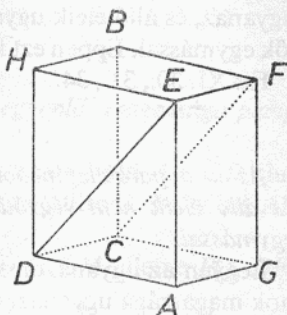
Ha egy sík egy paralelepipedont két szemközti lapjának átlója mentén metsz, akkor a sík felezi a téridomot.

Messe ugyanis a $CDEF$ sík az AB paralelepipedont két szemközti

lapjának átlója, CF és DE mentén. Azt állítom, hogy a $CDEF$ sík felezi az AB téridomot.

Mínthogy ugyanis a CGF háromszög egyenlő a CFB háromszöggel, ADE pedig DEH -val (I. 34.), és a CA paralelogramma egyenlő EB -vel – hiszen szemköztiek –, GE pedig CH -val (XI. 24.), a két háromszög, CGF és ADE , és három paralelogramma, GE , AC és CE által közrefogott hasáb is egyenlő a CFB és DEH háromszögek és a CH , BE , CE paralelogrammák által közrefogott hasábbal, hiszen ugyanannyi és (páronként) egyenlő nagyságú lap fogja őket közre, úgyhogy a $CDEF$ sík felezi az AB téridomot mint egészet. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 39.; XII. 4. L., 8.



XI. 29. Tétel

Azok a paralelepipedonok, melyek alapja és magassága ugyanaz, és álló éleik ugyanazokon az egyeneseken végződnek, egyenlők egymással.

Legyen az ugyanazon AB alapon fekvő CM és CN paralelepipedonok magassága ugyanaz, és végződjenek AF , AG , LM és LN , illetve CD , CE , BH és BK éleik ugyanazon az egyenesen, FN -en, illetve DK -n. Azt állítom, hogy a CM téridom egyenlő a CN téridommal.

Mínthogy CH és CK paralelogramma, CB egyenlő DH -val és EK -val (I. 34.), úgyhogy DH is egyenlő EK -val. Vonjuk le a közös EH -t, ekkor a maradék DE egyenlő a maradék HK -val, úgyhogy a DCE háromszög is egyenlő a HBK háromszöggel (I. 8. és 4.), a DG paralelogramma pedig a HN paralelogrammával (I. 34., 29., 4.). Ugyanígy az AFG

háromszög is egyenlő az MLN háromszöggel. A CF paralelogramma is egyenlő a BM paralelogrammával, CG pedig BN -nel – hiszen szemköztiek (XI. 24.) –, tehát a két háromszög, AFG és DCE , és három paralelogramma, AD , DG és CG által közrefogott hasáb egyen-

lő az MLN és HBK háromszögek és a BM , HN és BN paralelogrammák által közrefogott hasábbal. Adjuk hozzájuk azt a téridomot, melynek alapja az AB paralelogramma, szemközti lapja pedig $GEHM$. Ekkor a teljes CM téridom egyenlő a teljes CN téridommal.

Azok a paralelepipedonok tehát, melyek alapja és magassága ugyanaz, és álló éleik ugyanazokon az egyeneseken végződnek, egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 30., 31., 34.

XI. 30. Tétel

Azok a paralelepipedonok, melyek alapja és magassága ugyanaz, és álló éleik nem végződnek ugyanazokon az egyeneseken, egyenlők egymással.

Legyen az ugyanazon AB alapon fekvő CM és CN paralelepipedonok magassága ugyanaz, és ne végződjenek AF , AG , LM és LN , illetve CD , CE , BH és BK éleik ugyanazon az egyenesen. Azt állítom, hogy a CM téridom egyenlő a CN téridommal.

Hosszabbítsuk meg ugyanis NK -t és DH -t, találkozzanak egymással

R -ben, hosszabbítsuk meg FM -et és GE -t P -ig, illetve Q -ig, és húzzuk meg AO -t, LP -t, CQ -t és BR -t. Ekkor a CM téridom, melynek alapja az $ACBL$ paralelogramma, szemközti lapja pedig $FDHM$, egyenlő a CP téridommal, melynek alapja az $ACBL$ paralelogramma, szemközti lapja pedig $OQRP$, hiszen ugyanazon az $ACBL$ alapon fekszenek, ugyanaz a magasságuk, és álló éleik, AF , AO , LM és LP , illetve

CD , CQ , BH és BR ugyanazon az egyenesen, FP -n, illetve DR -en végződnek (XI. 29.). Másrészt a CP téridom, melynek alapja az $ACBL$ paralelogramma, szemközti lapja pedig $OQRP$, egyenlő a CN téridommal, melynek alapja az $ACBL$ paralelogramma, szemközti lapja pedig $GEKN$, hiszen ismét ugyanazon az $ACBL$ alapon fekszenek, ugyanaz a magasságuk, és álló éleik, AG , AO , CE és CQ , illetve

LN , LP , BK és BR ugyanazon az egyenesen, GQ -n, illetve NR -en végződnek, úgyhogy a CM téridom is egyenlő a CN téridommal.

Azok a paralelepipedonok tehát, melyek alapja és magassága ugyanaz, és álló éleik nem végződnek ugyanazokon az egyeneseken, egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

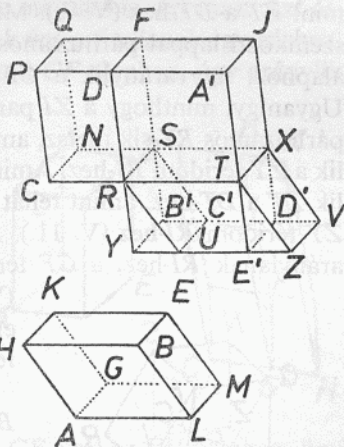
F.: XI. 31., 34.

XI. 31. Tétel

Azok a paralelepipedonok, melyek alapja egyenlő, magassága pedig ugyanaz, egyenlők egymással.

Feküdjenek az AE , CF paralelepipedonok az egyenlő AB , CD alapokon, és legyen ugyanaz a magasságuk. Azt állítom, hogy az AE téridom egyenlő a CF téridommal.

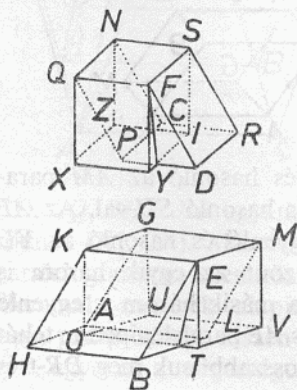
Legyenek először az álló élek, HK , BE , AG és LM , illetve PQ , DF , CO és RS merőlegesek az AB , illetve a CD alapra, legyen RT a CR egyenes menti meghosszabbítása, szerkesszünk az RT egyeneshez, a rajta levő R ponthoz egy ALB -vel egyenlő TRU szöget (I. 23.), mérjünk föl egy AL -lel egyenlő RT és egy LB -vel egyenlő RU szakaszt (I. 3.), és egészítsük ki az RX alapot és az YU téridomot. Minthogy két-két oldal, TR , RU és AL , LB egyenlő, és egyenlő szöveget zárnak be, az RX paralelogramma egyenlő és hasonló a HL paralelogrammával (I. 4., 34.). Ismét, minthogy AL egyenlő RT -vel, LM pedig RS -sel, és derékszöveget zárnak be, az RY paralelogramma egyenlő és hasonló az AM paralelogrammával. Ugyanígy LE is egyenlő és hasonló SU -val. Az AE téridom három paralelogrammája tehát egyenlő és hasonló az YU téridom három paralelogrammájával. Viszont az egyik három is egyenlő a vele szemközti hárommal, meg a másik három is egyenlő a vele szemközti hárommal (XI. 24.), a teljes AE paralelepipedon tehát egyenlő a teljes YU paralelepipedonnal. Hosszabbítsuk meg DR -t és



XU -t, találkozzanak egymással Z -ben, húzzuk T -n át DZ -vel párhuzamosan $A'TE'$ -t (I. 31.), hosszabbítsuk meg PD -t A' -ig, és egészítsük ki a ZY , RI téridomokat. Ekkor a ZY téridom, melynek alapja az RY paralelogramma, szemközti lapja pedig ZD' , egyenlő az YU téridommal, melynek alapja az RY paralelogramma, szemközti lapja pedig UV , hiszen ugyanazon az RY alapon fekszenek, ugyanaz a magasságuk, és álló éleik, RZ , RU , TE' és TX , illetve SB' , SC' , YD' és YV ugyanazon az egyenesen, ZX -en, illetve $B'V$ -n végződnek (XI. 29.). Az YU téridom viszont egyenlő AE -vel, tehát az YZ téridom is egyenlő az AE téridommal. Minthogy az $RUXT$ paralelogramma egyenlő a ZT paralelogrammával – hiszen ugyanazon az RT alapon és ugyanazon RT , ZX párhuzamosok között fekszenek (I. 35.), és $RUXT$ egyenlő CD -vel, minthogy AB -vel is, a ZT paralelogramma is egyenlő CD -vel. DT egy másik síkidom, a CD alap tehát úgy aránylik DT -hez, mint ZT a DT -hez (V. 7.). Minthogy a CI paralelepipedont egy (két) szemközti lappal párhuzamos RF sík metsz, amint a CD alap a DT alaphoz, úgy aránylik a CF téridom az RI téridomhoz (XI. 25.). Ugyanígy, minthogy a ZI paralelepipedont egy szemközti oldalakkal párhuzamos RY sík metsz, amint a ZT alap a TD alaphoz, úgy aránylik a ZY téridom RI -hez. Amint viszont a CD alap DT -hez, úgy aránylik ZT a DT -hez, amint tehát a CF téridom az RI téridomhoz, úgy a ZY téridom RI -hez (V. 11.). A CF és ZY téridomok tehát ugyanúgy aránylanak RI -hez, a CF téridom tehát egyenlő a ZY téridommal

(V. 9.). ZY viszont, mint megmutattuk, egyenlő AE -vel, AE is egyenlő tehát CF -fel. [Éppen ezt kellett megmutatni.]

Ne legyenek most az álló élek, AG , HK , BE és LM , illetve CN , PQ , DF és RS merőlegesek az AB , illetve CD alapra. Ismét azt állítom, hogy az AE téridom egyenlő a CF téridommal. Bocsássuk ugyanis az alapsíkra a K , E , G és M , illetve Q , F , N és S pontból a KO , ET , GU és MV , illetve QX , FY , NZ és SI merőlegeseket (XI. 11.), ezeknek a síkkal való metszéspontja legyen O , T , U és V , illetve X , Y , Z és I , és



húzzuk meg az OT , OU , UV és TV , illetve XY , XZ , ZI és IY szakaszokat. Ekkor a KV téridom egyenlő a QI téridommal, hiszen az egyenlő KM , QS alapokon fekszenek, ugyanaz a magasságuk, és álló éleik merőlegesek az alapra. A KV téridom viszont egyenlő az AE téridommal, QI pedig CF -fel – hiszen alapjuk és magasságuk ugyanaz, és álló éleik nem végződnek ugyanazokon az egyeneseken (XI. 30.) –, az AE téridom is egyenlő tehát a CF téridommal.

Azok a paralelepipedonok tehát, melyek alapja egyenlő, magassága pedig ugyanaz, egyenlők egymással. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 32., 34., 36., 39.

XI. 32. Tétel

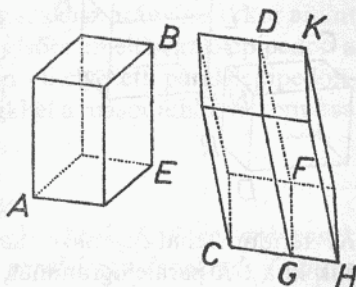
Azok a paralelepipedonok, melyek magassága ugyanaz, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.

Legyen az AB , CD paralelepipedonok magassága ugyanaz. Azt állítom, hogy az AB , CD paralelepipedonok úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik, azaz amint az AE alap a CF alaphoz, úgy aránylik az AB téridom a CD téridomhoz.

Illesszünk ugyanis FG -hez egy AE -vel egyenlő FH paralelogrammát (I. 44.), és egészítsük ki az FH alapú, CD -vel azonos magasságú GK paralelepipedont. Ekkor az AB téridom egyenlő a GK téridommal, hiszen az egyenlő AE , FH alapokon fekszenek és ugyanaz a magasságuk (XI. 31.). Minthogy a CK paralelepipedont metszi a lapokkal szemközti párhuzamos DG sík, amint a CF alap az FH alaphoz, úgy aránylik a CD téridom a DH téridomhoz (XI. 25.). Az FH alap viszont egyenlő az AE alappal, a GK téridom pedig az AB téridommal, amint tehát az AE alap a CF alaphoz, úgy aránylik az AB téridom a CD téridomhoz (V. 7. és 11.).

Azok a paralelepipedonok tehát, melyek magassága ugyanaz, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 33., 34.; XII. 4. L., 10.



XI. 33. Tétel

Hasonló paralelepipedonok egymással a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban (V. 10. D.) állnak.

Legyenek AB és CD hasonló paralelepipedonok, és feleljen meg AE a CF -nek. Azt állítom, hogy az AB téridomnak a CD téridomhoz való aránya háromszoros a AE CF -hez való arányának.

Legyen AE , GE , illetve HE egyenes menti meghosszabbítása EK , EL , illetve EM , mérjük föl egy CF -fel egyenlő EK , egy FN -nel egyenlő EL , s végül egy FR -rel egyenlő EM szakaszt (I. 3.), és egészítsük ki a KL paralelogrammát és a KP téridomot.

Minthogy két-két oldal, KE , EL és CF , FN egyenlő, és a KEL szög egyenlő a CFN szöggel – hiszen az AEG szög egyenlő CFN -nel az AB , CD téridomok hasonlósága miatt – (I. 15.), a KL paralelogramma egyenlő és hasonló a CN paralelogrammával (I. 4., 34.). Ugyanígy a KM paralelogramma is egyenlő és hasonló CR -rel, EP pedig DF -fel. A KP és a CD téridomnak tehát három-három paralelogrammája páronként egyenlő és hasonló. Viszont az egyik három is egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal, meg a másik három is egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal (XI. 24.), a teljes

KP téridom tehát egyenlő és hasonló a teljes CD téridommal. Egészítjük ki a GK paralelogrammát, majd a GK , illetve KL alapú és AB -vel azonos magasságú EO és LQ téridomot. Minthogy az AB , CD téridomok hasonlósága miatt AE úgy aránylik CF -hez, mint EG az FN -hez és EH az FR -hez, s CF egyenlő EK -val, FN az EL -l, FR pedig EM -mel, AE úgy aránylik EK -hoz, mint GE az EL -hez és HE az EM -hez (V. 7., 11.). Amint viszont AE az EK -hoz, úgy aránylik az AG paralelogramma a GK paralelogrammához, amint GE az EL -hez, úgy GK a KL -hez, amint pedig HE az EM -hez, úgy QE a KM -hez (VI. 1.), amint tehát az AG paralelogramma GK -hoz, úgy GK a KL -hez és QE a KM -hez (V. 11.). Amint viszont AG a GK -hoz, úgy az AB téridom az EO tér-

idomhoz, amint GK a KL -hez, úgy az OE téridom a QL téridomhoz, amint pedig QE a KM -hez, úgy a QL téridom a KP téridomhoz (XI. 32.), amint tehát az AB téridom EO -hoz, úgy EO a QL -hez és QL a KP -hez. Ha viszont négy mennyiség folytonosan arányos, akkor az első a negyedikkel a másodikhoz viszonyítva háromszoros arányban áll, az AB téridomnak KP -hez való aránya tehát háromszorosa AB -nek EO -hoz való arányának. Amint viszont AB az EO -hoz, úgy aránylik az AG paralelogramma GK -hoz és az AE szakasz EK -hoz, úgyhogy az AB téridomnak KP -hez való aránya háromszorosa AE -nek EK -hoz való arányának. A KP téridom egyenlő a CD téridommal, az EK szakasz CF -fel, az AB téridomnak a CD téridomhoz való aránya tehát háromszorosa a megfelelő oldalak, AE és CF arányának.

Hasonló paralelepipedonok tehát egymással a megfelelő oldalaikhoz viszonyítva háromszoros arányban állnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 37.; XII. 8.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha négy szakasz arányos, akkor amint az első a negyedikhez, úgy aránylik az elsőre emelt paralelepipedon a másodikra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett paralelepipedonhoz, minthogy az első szakasz a negyedikkel a másodikhoz viszonyítva háromszoros arányban áll.

XI. 34. Tétel

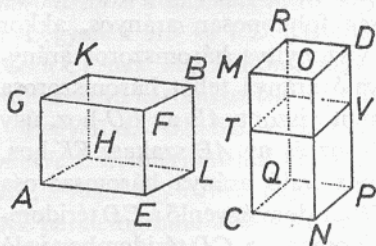
Az egyenlő (térfogatú) paralelepipedonoknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal; s amely paralelepipedonoknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők.

Legyenek AB és CD egyenlő paralelepipedonok. Azt állítom, hogy az AB , CD paralelepipedonoknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal: amint az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik a CD téridom magassága az AB téridom magasságához.

Legyenek ugyanis először az álló élek, AG , EF , LB és HK , illetve CM , NO , PD és QR merőlegesek az alapjukra. Azt állítom, hogy amint az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik CM az AG -hez.

Ha az EH alap egyenlő az NQ alappal és az AB téridom egyenlő

a CD téridommal, akkor CM is egyenlő AG -vel, hiszen a megegyező magasságú paralelepipedonok úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XI. 32.). [Ha ugyanis –



noha az EH , NQ alapok egyenlők – az AG és a CM magasság nem lenne egyenlő, akkor az AB téridom sem lenne egyenlő CD -vel. Feltétel szerint egyenlő vele, nem igaz tehát hogy a CM magasság nem egyenlő az AG magassággal: egyenlő tehát vele.] Ekkor amint az EH alap az NQ alaphoz,

úgy aránylik CM az AG -hez, és nyilvánvaló, hogy az AB , CD paralelepipedonoknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.

Ne legyen most egyenlő az EH alap az NQ alappal, hanem legyen nagyobb EH . Az AB téridom egyenlő a CD téridommal, CM tehát nagyobb AG -nél. [Ellenkező esetben ugyanis az AB , CD téridomok ismét nem lennének egyenlők, feltétel szerint viszont egyenlők.] Mérjünk föl egy AG -vel egyenlő CT szakaszt (I. 3.), és egészítsük ki az NQ alapú, CT magasságú VC paralelepipedont. Minthogy az AB téridom egyenlő a CD téridommal, CV egy további mennyiség, és egyenlő mennyiségeknek ugyanahhoz a mennyiséghez való aránya ugyanaz (V. 7.), az AB téridom úgy aránylik a CV téridomhoz, mint a CD téridom a CV téridomhoz. Amint viszont az AB téridom a CV téridomhoz, úgy aránylik az EH alap az NQ alaphoz – hiszen egyenlő magasságú az AB és a CV téridom – (XI. 32.), amint pedig a CD téridom a CV téridomhoz, úgy az MQ alap a TQ alaphoz és CM a CT -hez (VI. 1.), amint tehát az EH alap az NQ alaphoz, úgy MC a CT -hez (V. 11.). CT egyenlő AG -vel, amint tehát az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik MC az AG -hez. Az AB , CD téridomoknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.

Megfordítva, legyenek most az AB , CD paralelepipedonok alapjai fordítva arányosak a magassággal: arányuljék amint az EH alap az NQ alaphoz, úgy a CD téridom magassága az AB téridom magasságához. Azt állítom, hogy az AB téridom egyenlő a CD téridommal.

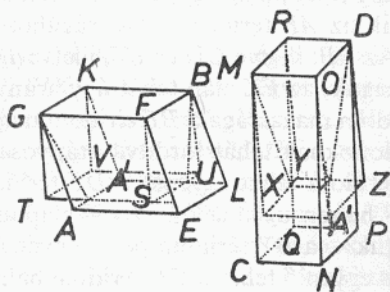
Legyenek az álló élek ismét merőlegesek az alapjukra. Ha az EH

alap egyenlő az NQ alappal és a CD téridom magassága úgy aránylik az AB téridom magasságához, mint az EH alap az NQ alaphoz, akkor a CD téridom magassága is egyenlő az AB téridom magasságával. Az egyenlő alapokon fekvő és azonos magasságú paralelepipedonok viszont egyenlők (XI. 31.), az AB téridom tehát egyenlő a CD téridommal.

Ne legyen most egyenlő az EH alap az NQ alappal, hanem legyen nagyobb EH . Ekkor a CD téridom magassága nagyobb az AB téridom magasságánál, azaz CM az AG -nél. Mérjünk ismét föl egy AG -vel egyenlő CT szakaszt, és hasonlóképp egészítsük ki a CV téridomot. Minthogy MC úgy aránylik AG -hez, mint az EH alap az NQ alaphoz és AG egyenlő CT -vel, CM úgy aránylik CT -hez, mint az EH alap az NQ alaphoz. Amint viszont az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik az AB téridom a CV téridomhoz – egyenlő magasságú ugyanis az AB és a CV téridom – (XI. 32.), amint pedig CM a CT -hez, úgy az MQ alap a QT alaphoz (VI. 1.) és a CD téridom a CV téridomhoz, amint tehát az AB téridom a CV téridomhoz, úgy a CD téridom a CV téridomhoz (V. 11.), AB -nek és CD -nek CV -hez való aránya tehát ugyanaz, az AB téridom tehát egyenlő a CD téridommal (V. 9.). [Éppen ezt kellett megmutatni.]

Ne legyenek most az álló élek, FE , BL , GA és HK , illetve ON , DP , MC és RQ merőlegesek az alapjukra, bocsássunk EH , illetve NQ síkjára az F , G , B és K , illetve O , M , D és R pontból merőlegeseket (XI. 11.), ezeknek a síkokkal való metszéspontjai legyenek S , T , U és V , illetve X , Y , Z és A' , és egészítsük ki az FV , OZ téridomokat. Azt állítom, hogy ha az AB , CD téridomok egyenlők, akkor az alapok ezesetben is fordítva arányosak a magassággal: amint az EH alap az NQ alaphoz, úgy aránylik a CD téridom magassága az AB téridom magasságához.

Minthogy az AB téridom egyenlő a CD téridommal, AB viszont egyenlő BT -vel – hiszen ugyanazon az FK alapon fekszenek és ugyanaz



a magasságuk –, és a CD téridom egyenlő DY -nal – hiszen ismét ugyanazon az alapon fekszenek, RO -n, és ugyanaz a magasságuk (XI. 29–30.) – a BT téridom is egyenlő tehát a DY téridommal. Az FK alap tehát úgy aránylik az OR alaphoz, mint a DY téridom magassága a BT téridom magasságához. Az FK alap egyenlő az EH alappal, az OR alap pedig az NQ alappal, az EH alap tehát úgy aránylik az NQ alaphoz, mint a DY téridom magassága a BT téridom magasságához. A DY , illetve BT és DC , illetve BA téridomoknak ugyanaz a magasságuk, az EH alap tehát úgy aránylik az NQ alaphoz, mint a DC téridom magassága az AB téridom magasságához. Az AB , CD paralelepipedonoknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.

Megfordítva, legyenek most az AB , CD paralelepipedonok alapjai fordítva arányosak a magassággal: arányuljék amint az EH alap az NQ alaphoz, úgy a CD téridom magassága az AB téridom magasságához. Azt állítom, hogy az AB téridom egyenlő a CD téridommal.

Ha ugyanis elvégezzük ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb, akkor minthogy a CD téridom magassága úgy aránylik az AB téridom magasságához, mint az EH alap az NQ alaphoz és az EH alap egyenlő az FK alappal, NQ pedig OR -rel, a CD téridom magassága úgy aránylik az AB téridom magasságához, mint az FK alap az OR alaphoz. Az AB , illetve CD és BT , illetve DY téridomoknak ugyanaz a magasságuk, az FK alap tehát úgy aránylik az OR alaphoz, mint a DY téridom magassága a BT téridom magasságához, a BT , DY paralelepipedonoknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, a BT téridom tehát egyenlő a DY téridommal. BT viszont egyenlő BA -val – hiszen ugyanazon az FK alapon fekszenek és ugyanaz a magasságuk –, a DY téridom pedig egyenlő a DC téridommal, az AB téridom is egyenlő tehát a CD téridommal. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 9.

XI. 35. Tétel

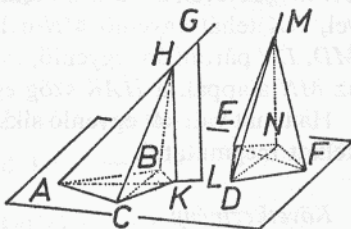
Ha van két egyenlő síkszög, veszünk egy-egy, a csúcson átmenő olyan nem síkbeli egyenest, mely páronként egyenlő szögeket zár be az eredeti szögek száraival, a nem síkbeli egyeneseken veszünk egy-egy tetszőleges pontot, azokból merőlegeseket bocsátunk az eredeti szögek síkjaira, és a síkokkal való metszéspontokból egyeneseket húzunk az

eredeti szögek csúcsaiba, akkor ezek az egyenesek egyenlő szögeket zárnak be a nem síkbeli egyenesekkel.

Legyen BAC és EDF két egyenlő síkszög, vegyünk egy-egy, A -n és D -n átmenő, olyan nem síkbeli egyenest, AG -t és DM -et, mely páronként egyenlő szögeket, MDE -t és GAB -t, illetve MDF -et és GAC -t, zár be (XI. 26.), vegyünk AG -n és DM -en egy-egy tetszőleges pontot, G -t és M -et, bocsássunk G -ből és M -ből egy GL , illetve MN merőlegest BAC , illetve EDF síkjára (XI. 11.), ezeknek a síkokkal való metszéspontjai legyenek N és L , és húzzuk meg LA -t és ND -t. Azt állítom, hogy a GAL szög egyenlő az MDN szöggel.

Mérjük föl egy DM -mel egyenlő AH szakaszt (I. 3.), és húzzunk a H ponton át GL -lel egy HK párhuzamost (I. 31.). GL merőleges BAC

síkjára, HK is merőleges tehát BAC síkjára (XI. 8.). Bocsássuk a K , N pontokból az AB , AC , DF , DE egyenesekre a KC , NF , KB , NE merőlegesseket (I. 12.) és húzzuk meg HC -t, CB -t, MF -et, FE -t. Minthogy HA négyzete egyenlő HK meg KA



négyzetével, KA négyzete pedig egyenlő KC és CA négyzetösszegével (I. 47.), HA négyzete egyenlő HK , KC és CA négyzetösszegével. HK és KC négyzetösszegével egyenlő HC négyzete, HA négyzete tehát egyenlő HC és CA négyzetösszegével, HCA tehát derékszög (I. 48.). Ugyanígy DFM is derékszög, az ACH szög tehát egyenlő DFM -mel. A HAC szög egyenlő MDF -fel, így MDF és HAC két olyan háromszög, melyben két-két szög páronként egyenlő és egy-egy oldal, az egyenlő szögek egyikével szemkötti HA és MD egyenlő, a többi oldal is páronként egyenlő tehát (I. 26.), AC tehát egyenlő DF -fel. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy AB és DE is egyenlő. Minthogy AC egyenlő DF -fel, AB pedig DE -vel, két-két oldal, CA , AB és FD , DE egyenlő. A CAB szög is egyenlő az FDE szöggel, a BC alap tehát egyenlő az EF alappal, és a két háromszög egyenlő és a többi szög is páronként (I. 4.), az ACB szög tehát egyenlő a DFE szöggel. Az ACK derékszög is egyenlő a DFN derékszöggel, a maradék BCK is egyenlő tehát a maradék EFN -

nel. Ugyanígy a $\angle CBK$ szög is egyenlő $\angle FEN$ -nel, így $\angle BCK$ és $\angle EFN$ két olyan háromszög, melyben két-két szög páronként egyenlő és egy-egy oldal, az egyenlő szögek melletti BC és EF egyenlő, a többi oldal is páronként egyenlő tehát (I. 26.), CK tehát egyenlő FN -nel. AC is egyenlő DF -fel, így két-két oldal, AC , CK és DF , FN egyenlő; s derékszöget zárnak be, az AK alap tehát egyenlő a DN alappal (I. 4.). Mint-hogy AH egyenlő DM -mel, AH négyzete is egyenlő DM négyzetével. AH négyzetével viszont egyenlő AK és KH négyzetösszege – hiszen $\angle AKH$ derékszög –, DM négyzetével pedig egyenlő DN és NM négyzetösszege – hiszen $\angle DNM$ derékszög –, AK és KH négyzetösszege tehát egyenlő DN és NM négyzetösszegével. Ebből AK négyzete egyenlő DN négyzetével, a maradék tehát, KH négyzete, egyenlő NM négyzetével, HK tehát egyenlő MN -nel. Minthogy két-két oldal, HA , AK és MD , DN páronként egyenlő, és megmutattuk hogy a HK alap egyenlő az MN alappal, a $\angle HAK$ szög egyenlő az $\angle MDN$ szöggel.

Ha tehát van két egyenlő síkszög... és így tovább a tétel. Éppen ezt kellett megmutatni.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy ha van két egyenlő síkszög, és veszünk a csúcsaiból induló olyan egyenlő, nem síkbeli szakaszokat, melyek páronként egyenlő szögeket zárnak be az eredeti szögek száraival, akkor a szakaszok végpontjából az eredeti szögek síkjára bocsátott merőlegesek egyenlők. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XI. 36.

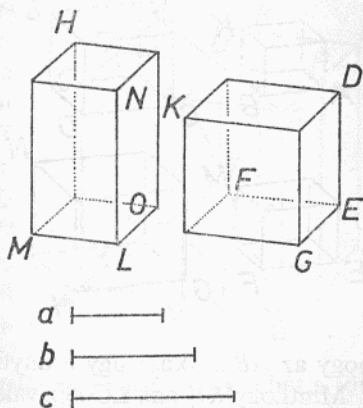
XI. 36. Tétel

Ha három szakasz arányos, akkor a három szakaszból szerkesztett paralelepipedon egyenlő a középső szakaszra emelt egyenlő oldalú és az előbbivel egyenlő szögű paralelepipedonnal.

Legyen a , b és c három arányos szakasz: amint a a b -hez, úgy b a c -hez. Azt állítom, hogy az a -ból, b -ből és c -ből szerkesztett téridom egyenlő a b -re emelt egyenlő oldalú és az előbbivel egyenlő szögű téridommal.

Vegyünk egy E -nél fekvő térszöget, melyet $\angle DEG$, $\angle GEF$ és $\angle FED$ fog közre, mérjünk föl b -vel egyenlő DE , GE és EF szakaszokat (I. 3.), és

egészítsük ki az EK paralelepipedont. Mérjünk föl egy a -val egyenlő LM szakaszt, szerkesszünk az LM egyeneshez, a rajta levő L ponthoz egy, az E -nél fekvővel egyenlő térszöveget, melyet NLO , OLM és MLN fog közre (XI. 26.), s mérjünk föl egy b -vel egyenlő LO és egy c -vel egyenlő LN szakaszt. Minthogy a úgy aránylik b -hez, mint b a c -hez és a egyenlő LM -mel, b LO -val és ED -vel, c pedig LN -nel, LM úgy aránylik EF -hez, mint DE az LN -hez (V. 7.). Az egyenlő NLM , DEF szögek melletti oldalak fordítva arányosak, az MN paralelogramma tehát egyenlő a DF paralelogrammával (VI. 14.). Minthogy két egyenes vonalú síkszög, DEF és NLM egyenlő, LO és EG a csúcaikból induló olyan, egymással egyenlő, nem síkbeli szakaszok, melyek páronként egyenlő szögeket zárnak be az eredeti szögek száraival, a G és O pontból NLM , illetve DEF síkjára bocsátott merőlegesek egyenlők egymással (XI. 35. K.), úgyhogy az LH és az EK téridom magassága ugyanaz. Az egyenlő alapokon fekvő azonos magasságú paralelepipedonok viszont egyenlők egymással (XI. 31.), a HL téridom tehát egyenlő az EK téridommal. LH az a -ból, b -ből és c -ből szerkesztett, EK pedig a b -re emelt téridom, az a -ból, b -ből és c -ből szerkesztett paralelepipedon tehát egyenlő a b -re emelt egyenlő oldalú és az előbbivel egyenlő szögű téridommal. Éppen ezt kellett megmutatni.



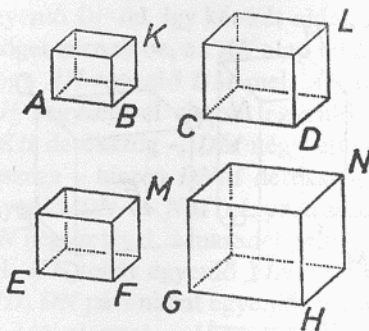
XI. 37. Tétel

Ha négy szakasz arányos, akkor a rájuk emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett paralelepipedonok is arányosak; s ha a négy szakaszra emelt hasonló és hasonlóan elhelyezett paralelepipedonok arányosak, akkor maguk a szakaszok is arányosak.

Legyen AB , CD , EF és GH négy arányos szakasz: amint AB a CD -hez, úgy EF a GH -hoz, s emeljük az AB , CD , EF , GH szakaszokra a

hasonló és hasonlóan fekvő KA , LC , ME , NG paralelepipedonokat. Azt állítom, hogy KA úgy aránylik LC -hez, mint ME az NG -hez.

Minthogy ugyanis a KA paralelepipedon hasonló LC -hez, KA -nak



LC -hez való aránya háromszorosa AB -nek CD -hez való arányának (XI. 33.). Ugyanígy ME -nek NG -hez való aránya is háromszorosa EF -nek GH -hoz való arányának. AB úgy aránylik CD -hez, mint EF a GH -hoz, AK tehát úgy aránylik LC -hez, mint ME az NG -hez (V. 22., 11.).

Arányuljék most az AK téridom úgy az LC téridomhoz, mint az ME téridom NG -hez. Azt állítom,

hogy az AB szakasz úgy aránylik CD -hez, mint EF a GH -hoz.

Minthogy KA -nak LC -hez való aránya ismét háromszorosa AB -nek CD -hez való arányának, és ME -nek NG -hez való aránya is háromszorosa EF -nek GH -hoz való arányának, és KA úgy aránylik LC -hez, mint ME az NG -hez, AB úgy aránylik CD -hez, mint EF a GH -hoz.

Ha tehát négy szakasz arányos... és így tovább a tétel. Éppen ezt kellett megmutatni.

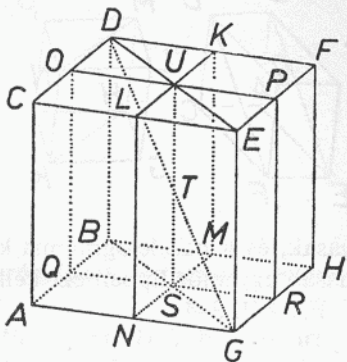
XI. 38. Tétel

Ha egy kocka* két szemközti lapjának oldalait megfelezzük és az osztáspontokon síkokat fektetünk át, akkor a síkok metszete és a kocka átlója felezi egymást.

Felezzük meg ugyanis az AF kocka két szemközti lapjának, CF -nek és AH -nak az oldalait a K , L , M , N , O , Q , P és R pontokban, fektessük át az osztáspontokon a KN és OR síkot, a síkok metszete legyen US (XI. 3.) és az AF kocka átlója DG . Azt állítom, hogy UT egyenlő TS -sel, DT pedig TG -vel.

Húzzuk meg ugyanis DU -t, UE -t, BS -et és SG -t. Minthogy DO párhuzamos PE -vel, a DOU , UPE váltószögek egyenlők egymással (I. 29.). Minthogy DO egyenlő PE -vel, OU pedig UP -vel, és egyenlő szöget fognak közre, a DU alap egyenlő az UE alappal, a DOU háromszög

egyenlő a *PUE* háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő (I. 4.), egyenlő tehát az *ODU* szög a *PUE* szöggel. Ezért *DUE* egyenes (I. 14.). Ugyanígy *BSG* is egyenes és *BS* egyenlő *SG*-vel. Minthogy *CA* párhuzamos és egyenlő *DB*-vel és *CA* az *EG*-vel is egyenlő és párhuzamos (I. 34.), *DB* egyenlő és párhuzamos *EG*-vel (XI. 9.). A *DE* és a *BG* szakasz köti össze őket, *DE* tehát párhuzamos *BG*-vel (I. 33.), az *EDT* szög tehát egyenlő *BGT*-vel – hiszen váltószögek (XI. 7., I. 29.) –, *DTU* pedig egyenlő *GTS*-sel (I. 15.). *DTU* és *GTS* tehát két olyan háromszög, melynek két-két szöge páronként egyenlő, és egy-egy oldala, az egyenlő szögek egyikével szemközti *DU* és *GS* egyenlő – hiszen fele részei *DE*-nek és *BG*-nek –, tehát a többi oldal is páronként egyenlő (I. 26.). *DT* tehát egyenlő *TG*-vel, *UT* pedig *TS*-sel.



Ha tehát egy kocka két szemközti lapjának oldalait megfelezzük és az osztáspontokon síkokat fektetünk át, akkor a síkok metszete és a kocka átlója felezik egymást. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 17.

XI. 39. Tétel

Ha van két (háromoldalú) hasáb, az egyik egy paralelogrammáján fekszik, a másik egy háromszögén, így egyenlő magasak, és a paralelogramma kétszerese a háromszögnek, akkor a két hasáb egyenlő.

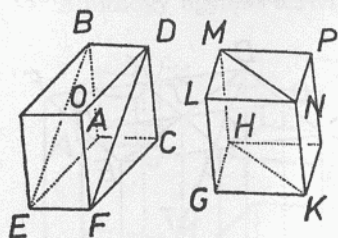
Legyen *ABCDEF* és *GHKLMN* két hasáb, az egyik fekszik az *AF* paralelogrammán, a másik a *GHK* háromszögön, legyenek egyenlő magasak, és legyen az *AF* paralelogramma kétszerese a *GHK* háromszögnek. Azt állítom, hogy az *ABCDEF* hasáb egyenlő a *GHKLMN* hasábbal.

Égészítsük ki ugyanis az *AO*, *GP* téridomokat. Minthogy az *AF* paralelogramma kétszerese a *GHK* háromszögnek és a *HK* paralelogramma is kétszerese a *GHK* háromszögnek (I. 34.), az *AF* paralelog-

ramma egyenlő a HK paralelogrammával. Az egyenlő alapokon fekvő és azonos magasságú paralelepipedonok viszont egyenlők egymással (XI. 31.), az AO téridom tehát egyenlő a GP téridommal. Az AO téridomnak fele része az $ABCDEF$ hasáb, a GP téridomnak fele része a $GHKLMN$ hasáb, az $ABCDEF$ hasáb tehát egyenlő a $GHKLMN$ hasábbal.

Ha tehát van két hasáb, az egyik egy paralelogrammáján fekszik, a másik egy háromszögén, így egyenlő magasság, és a paralelogramma kétszerese a háromszögnek, akkor a két hasáb egyenlő. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 3–4.



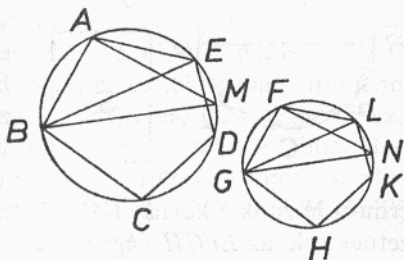
Tizenkettedik könyv

XII. 1. Tétel

A körökbe írt hasonló sokszögek úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérők négyzetei.

Legyenek ABC és FGH körök, $ABCDE$ és $FGHKL$ beléjük írt hasonló sokszögek, és legyenek a körök átmérői BM és GN . Azt állítom, hogy az $ABCDE$ sokszög úgy aránylik az $FGHKL$ sokszöghöz, mint BM négyzete GN négyzetéhez.

Húzzuk meg ugyanis BE -t, AM -et, GL -t és FN -t. Minthogy az $ABCDE$ sokszög hasonló az $FGHKL$ sokszöghöz, a BAE szög egyenlő GFL -l, és BA úgy aránylik AE -hez, mint GF az FL -hez. Így BAE és GFL két olyan háromszög, melynek egy-egy szöge, BAE és GFL egyenlő és az egyenlő szögek melletti oldalaik arányosak, az ABE háromszög szögei tehát egyenlők FGL szögeivel (VI. 6.). Az AEB szög tehát egyenlő az FLG szöggel. AEB viszont egyenlő AMB -vel – hiszen ugyanazon az íven nyugszanak –, FLG pedig FNG -vel (III. 27.), AMB is egyenlő tehát FNG -vel. A BAM derékszög is egyenlő a GFN derékszöggel (III. 31.), tehát a két fennmaradó szög is egyenlő (I. 32.). Egyenlők tehát az ABM háromszög szögei FGN szögeivel, BM tehát úgy aránylik GN -hez, mint BA a GF -hez (VI. 4.). BM -nek GN -hez való arányának kétszerese BM



négyzetének GN négyzetéhez való aránya, BA -nak GF -hez való arányának kétszerese az $ABCDE$ sokszögnek az $FGHKL$ sokszöghöz való aránya (VI. 20.), az $ABCDEF$ sokszög tehát úgy aránylik az $FGHKL$ sokszöghöz, mint BM négyzete GN négyzetéhez (V. 22., 11.).

A körökbe írt hasonló sokszögek tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérők négyzetei. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 2., 11.

XII. 2. Tétel

*A körök (területei) úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérőik négyzetei.**

Legyenek $ABCD$ és $EFGH$ körök, BD és FH átmérőik. Azt állítom, hogy az $ABCD$ kör úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint BD négyzete FH négyzetéhez.

Ha ugyanis az $ABCD$ kör nem úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint BD négyzete FH négyzetéhez, akkor BD négyzete úgy aránylik FH négyzetéhez, mint az $ABCD$ kör valamely, az $EFGH$ körnél kisebb vagy nagyobb idomhoz. Legyen ez először a kisebb S idom. Írjunk be az $EFGH$ körbe egy $EFGH$ négyszetet (IV. 6.). A beírt négyszet nagyobb, mint az $EFGH$ kör fele, mert ha az E, F, G és H ponton át

érintőt húzunk a körhöz (III. 16. K.), akkor a nyert kör köré írt négyszetnek fele az $EFGH$ négyszet, és a körülírt négyszetnél kisebb a kör, úgyhogy a beírt $EFGH$ négyszet nagyobb az $EFGH$ kör felénél. Felezzük meg az EF, FG, GH, HE íveket a K, L, M, N pontokban (III. 30.), és húzzuk meg az $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$ szakaszokat. Ekkor az EKF, FLG, GMH, HNE háromszögek mindegyike nagyobb a megfelelő körszelet felénél, mert ha a K, L, M és N ponton át érintőt húzunk a körhöz és kiegészítjük az EF, FG, GH, HE szakaszokon fekvő paralelogrammákat, akkor az EKF, FLG, GMH, HNE háromszögek mindegyike fele a megfelelő paralelogrammának (I. 41.), a

megfelelő körszelet viszont kisebb a paralelogrammánál, úgyhogy az *EKF*, *FLG*, *GMH*, *HNE* háromszögek mindegyike nagyobb a megfelelő körszelet felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük és mindig így tovább, akkor egyszer olyan körszeletek maradnak, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel az *EFGH* kör nagyobb az *S* idomnál. Megmutattuk ugyanis a tizedik könyv első tételében, hogy ha adva van két nem egyenlő mennyiség, és a nagyobból levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog maradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél. Maradjon hát: legyen az *EFGH* körnek az *EK*, *KF*, *FL*, *LG*, *GM*, *MH*, *HN*, *NE* szakaszon fekvő szeleteinek az összege kisebb annál a többletnél, mellyel az *EFGH* kör nagyobb az *S* idomnál. A maradék *EKFLGMHN* sokszög tehát nagyobb az *S* idomnál. Írjunk az *ABCD* körbe egy, az *EKFLGMHN* sokszöghöz hasonló *AOBPCQDR* sokszöget. Ekkor az *AOBPCQDR* sokszög úgy aránylik az *EKFLGMHN* sokszöghöz, mint *BD* négyzete *FH* négyzetéhez (XII. 1.). *BD* négyzete viszont úgy aránylik *FH* négyzetéhez, mint az *ABCD* kör az *S* idomhoz, az *ABCD* kör tehát úgy az *S* idomhoz, mint az *AOBPCQDR* sokszög az *EKFLGMHN* sokszöghöz (V. 11.), fölcserélve tehát amint az *ABCD* kör a benne levő sokszöghöz, úgy az *S* idom az *EKFLGMHN* sokszöghöz (V. 16.). Az *ABCD* kör nagyobb a beleírt sokszögnél, az *S* idom is nagyobb tehát az *EKFLGMHN* sokszögnél (V. 14.). Viszont kisebb is nála, ami nem lehetséges. Nem aránylik tehát úgy *BD* négyzete *FH* négyzetéhez, mint az *ABCD* kör valamely, az *EFGH* körnél kisebb idomhoz. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy *FH* négyzete nem úgy aránylik *BD* négyzetéhez, mint az *EFGH* kör valamely, az *ABCD* körnél kisebb idomhoz.

Azt állítom, hogy *BD* négyzete nem úgy aránylik *FH* négyzetéhez, mint az *ABCD* kör valamely, az *EFGH* körnél nagyobb idomhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy mint a nagyobb *S* idomhoz. Fordítva tehát amint *FH* négyzete *DB* négyzetéhez, úgy aránylik az *S* idom az *ABCD* körhöz (V. 7. K.). Amint viszont az *S* idom az *ABCD* körhöz, úgy aránylik az *EFGH* kör valamely, az *ABCD* körnél kisebb idomhoz (L.), amint tehát *FH* négyzete *BD* négyzetéhez, úgy az *EFGH* kör valamely, az *ABCD* körnél kisebb idomhoz. Erről megmutattuk, hogy

nem lehetséges, BD négyzete tehát nem úgy aránylik FH négyzetéhez, mint az $ABCD$ kör valamely, az $EFGH$ körnél nagyobb idomhoz. Megmutattuk azt is, hogy kisebbhez sem, BD négyzete tehát úgy aránylik FH négyzetéhez, mint az $ABCD$ kör az $EFGH$ körhöz.

A körök tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérőik négyzetei. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 11.

XII. 2. Lemma

Azt állítom, hogy ha az S idom nagyobb az $EFGH$ körnél, akkor az S idom úgy aránylik az $ABCD$ körhöz, mint az $EFGH$ kör valamely, az $ABCD$ körnél kisebb idomhoz.

Arányuljék ugyanis amint az S idom az $ABCD$ körhöz, úgy az $EFGH$ kör a T idomhoz. Azt állítom, hogy a T idom kisebb az $ABCD$ körnél. Minthogy ugyanis az S idom úgy aránylik az $ABCD$ körhöz, mint az $EFGH$ kör a T idomhoz, fölcserélve az S idom úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint az $ABCD$ kör a T idomhoz (V. 16.). Az S idom nagyobb az $EFGH$ körnél, tehát az $ABCD$ kör is nagyobb a T idomnál (V. 14.), úgyhogy az S idom úgy aránylik az $ABCD$ körhöz, mint az $EFGH$ kör valamely, az $ABCD$ körnél kisebb idomhoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 2., 5., 11., 12., 18.

XII. 3. Tétel

Minden háromszög alapú gúla szétesik két egyenlő, egymáshoz és a teljes gúlához hasonló háromszög alapú gúlára és két egyenlő hasábra. A két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél.

Vegyünk egy gúlát, melynek alapja az ABC háromszög, csúcsa pedig a D pont. Azt állítom, hogy az $ABCD$ gúla szétesik két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló háromszög alapú gúlára és két egyenlő hasábra, s hogy a két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél.

Felezzük ugyanis meg az AB , BC , CA , AD , DB , DC szakaszokat az E , F , G , H , K , illetve L pontban (I. 10.), és húzzuk meg a HE , EG , GH , HK , KL , LH , KF és FG szakaszokat. Minthogy AE egyenlő EB -vel, AH pedig DH -val, EH párhuzamos DB -vel (VI. 2.). Ugyanígy

HK is párhuzamos *AB*-vel. *HEBK* tehát paralelogramma, *HK* tehát egyenlő *EB*-vel (I. 34.). *EB* egyenlő *EA*-val, tehát *AE* egyenlő *HK*-val. *AH* egyenlő *HD*-vel, tehát két-két oldal, *EA*, *AH* és *KH*, *HD* páronként egyenlő, és az *EAH* szög egyenlő a *KHD* szöggel (I. 29.), az *EH* alap tehát egyenlő a *KD* alappal (I. 4.), az *AEH* háromszög tehát egyenlő és hasonló a *HKD* háromszöggel. Ugyanígy az *AHG* háromszög is egyenlő és hasonló a *HLK* háromszöggel. Minthogy két, egymást metsző egyenes, *EH* és *HG* párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, *KD*-vel és *DL*-lel, egyenlő szöget zárnak be (XI. 10.), az *EHG* szög tehát egyenlő a *KDL* szöggel.

Minthogy két-két oldal, EH , HG és KD , DL páronként egyenlő, és az EHG szög egyenlő a KDL szöggel, az EG alap egyenlő a KL alappal, az EHG háromszög tehát egyenlő és hasonló a KDL háromszöggel (I. 4.). Ugyanígy az AEG háromszög is egyenlő és hasonló a HKL háromszöggel. A gúla tehát, melynek alapja az AEG háromszög s csúcsa a H pont, egyenlő és hasonló azzal a gúlával, melynek alapja a HKL háromszög s csúcsa a D pont. Minthogy HK párhuzamos az ADB háromszög egyik oldalával, AB -vel, az ADB háromszög szögei egyenlők DHK szögeivel (I. 29.), és az oldalai arányosak (VI. 4.), az ADB háromszög tehát hasonló a DHK háromszöghöz. Ugyanígy a DBC háromszög is hasonló DKL -hez, ADC pedig DLH -hoz. Minthogy két, egymást metsző egyenes, BA és AC párhuzamos két, nem ugyanabban a síkban fekvő, egymást metsző egyenessel, KH -val és HL -lél, egyenlő szöget zárnak be, a BAC szög tehát egyenlő KHL -lél. BA úgy aránylik AC -hez, mint KH HL -hez (V. 16.), az ABC háromszög tehát hasonló a HKL háromszöghöz (VI. 6.). Az a gúla tehát, melynek alapja az ABC háromszög s csúcsa a D pont, hasonló ahhoz a gúlához, melynek alapja a HKL háromszög s csúcsa a D pont. Arról a gúláról viszont, melynek alapja a HKL háromszög s csúcsa a D pont, megmutattuk, hogy hasonló ahhoz a gúlához, melynek alapja az AEG háromszög s csúcsa a H pont [úgyhogy az a gúla, melynek alapja az ABC háromszög s csúcsa a D pont, hasonló ahhoz a gúlához,

melynek alapja az AEG háromszög s csúcsa a H pont (vö. VI. 21.)). Az $AEGH$ és a $HKLD$ gúla tehát hasonló a teljes $ABCD$ gúlához.

Minthogy BF egyenlő FC -vel, az $EBFG$ paralelogramma kétszerese a GFC háromszögnek (I. 41. és 36.). Minthogy ha van két (háromoldalú) hasáb, az egyik egy paralelogrammáján fekszik, a másik egy háromszögén, így egyenlő magasak, és a paralelogramma kétszerese a háromszögnek, akkor a két hasáb egyenlő (XI. 39.), a BKF , EHG háromszögek és az $EBFG$, $EBKH$, $HKFG$ paralelogrammák által közrefogott hasáb egyenlő a GFC , HKL háromszögek és a $KFCL$, $LCGH$, $HKFG$ paralelogrammák által közrefogott hasábbal. S nyilvánvaló, hogy a két hasáb bármelyike – amelyik az $EBFG$ paralelogrammán fekszik s szemközti éle HK , meg amelyik a GFC háromszögön fekszik s szemközti lapja a HKL háromszög – nagyobb a két gúla bármelyikénél – melyek alapja az AEG , illetve HKL háromszög s csúcsa a H , illetve D pont –, minthogy ha meghúzzuk az EF és EK szakaszt, akkor az a hasáb, mely az $EBFG$ paralelogrammán fekszik s szemközti éle HK , nagyobb annál a gúlánál, melynek alapja az EBF háromszög s csúcsa a K pont, e gúla viszont, melynek alapja az EBF háromszög s csúcsa a K pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az AEG háromszög s csúcsa a H pont – hiszen egyenlő és hasonló lapok fogják őket közre –; úgyhogy az a hasáb, mely az $EBFG$ paralelogrammán fekszik s szemközti éle HK , nagyobb annál a gúlánál, melynek alapja az AEG háromszög s csúcsa a H pont. A hasáb viszont, mely az $EBFG$ paralelogrammán fekszik s szemközti éle HK , egyenlő azzal a hasábbal, melynek alapja a GFC háromszög s szemközti lapja a HKL háromszög, a gúla pedig, melynek alapja az AEG háromszög s csúcsa a H pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja a HKL háromszög s csúcsa a D pont. A mondott két hasáb összege tehát nagyobb a mondott két gúla – melyek alapja az AEG , illetve a HKL háromszög s csúcsa a H , illetve D pont – összegénél.

A teljes gúla tehát, melynek alapja a ABC háromszög s csúcsa a D pont, szételik két, egymással egyenlő [és a teljes gúlához hasonló] gúlára és két egyenlő hasábra; s a két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél. Éppen ezt kellett megmutatni.

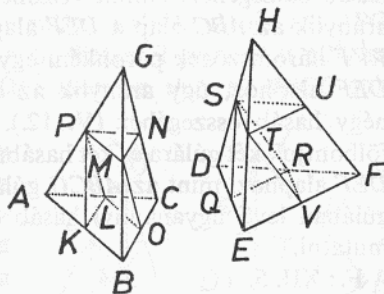
F.: XII. 4–5.

XII. 4. Tétel

Ha van két azonos magasságú háromszög alapú gúla, és mindegyiket fölbontjuk két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló gúlára és két egyenlő hasábra [és a keletkezett gúlákat ugyanígy és így tovább], akkor az egyik gúla alapja úgy aránylik a másik gúla alapjához, mint az egyik gúlában levő valahány hasáb összege a másik gúlában levő ugyanannyi hasáb összegéhez.

Vegyünk ugyanis két azonos magasságú gúlát, melyek alapja az ABC , illetve DEF háromszög s csúcsa a G , illetve H pont, és bontsuk föl mindegyiket két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló gúlára és két egyenlő hasábra [a keletkezett gúlákat ugyanígy fölbontottaknak kell gondolni, és így tovább] (XII. 3.). Azt állítom, hogy az ABC alap úgy aránylik a DEF alaphoz, mint az $ABCG$ gúlában levő valahány hasáb összege a $DEFH$ gúlában levő ugyanannyi hasáb összegéhez.

Mínhogy ugyanis BO egyenlő OC -vel és AL az LC -vel, LO párhuzamos AB -vel (VI. 2.) és az ABC háromszög hasonló az LOC háromszöghöz (I. 29., VI. 4.). Ugyanígy a DEF háromszög is hasonló az RVF háromszöghöz. Mínhogy BC kétszerese CO -nak és EF az FV -nek, BC úgy aránylik CO -hoz, mint EF az FV -hez. ABC és LCO a BC , illetve CO szakaszra emelt hasonló és hasonlóan fekvő sokszögek, DEF és RVF pedig az EF , illetve FV szakaszra emelt hasonló és hasonlóan fekvő sokszögek, az ABC háromszög tehát úgy aránylik az LOC háromszöghöz, mint a DEF háromszög az RVF háromszöghöz (VI. 22.); fölcserélve tehát amint az ABC háromszög a DEF háromszöghöz, úgy LOC az RVF -hez (V. 16.). Amint viszont az LOC háromszög az RVF háromszöghöz, úgy az a hasáb, melynek alapja az LOC háromszög s szemközti lapja PMN , ahhoz a hasábhöz, melynek alapja az RVF háromszög s szemközti lapja STU (L.), amint tehát az ABC háromszög a DEF háromszöghöz, úgy az a hasáb,



melynek alapja az *LOC* háromszög s szemközti lapja *PMN*, ahhoz a hasábhöz, melynek alapja az *RVF* háromszög s szemközti lapja *STU* (V. 11.). Amint viszont a mondott hasábok aránylanak egymáshoz, úgy aránylik az a hasáb, mely a *KBOL* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *PM*, ahhoz a hasábhöz, mely a *QEV*R paralelogrammán fekszik s szemközti éle *ST* (vö. XII. 3., V. 7.), ugyanígy aránylik tehát annak a két hasábnak az összege, mely a *KBOL* paralelogrammán fekszik s szemközti éle *PM* és amelynek alapja *LOC* s szemközti lapja *PMN*, annak a két hasábnak az összegéhez, mely *QEV*R-en fekszik s szemközti éle *ST* és amelynek alapja az *RVF* háromszög s szemközti lapja *STU* (V. 12.). Amint tehát az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy a mondott két hasáb összege a mondott másik két hasáb összegéhez (V. 11.).

Hasonlóképp, ha a *PMNG* és az *STUH* gúlát fölbontjuk két hasábra és két gúlára, akkor a *PMN* alap úgy aránylik az *STU* alaphoz, mint a *PMNG* gúlában levő két hasáb összege az *STUH* gúlában levő két hasáb összegéhez. Amint viszont a *PMN* alap az *STU* alaphoz, úgy aránylik az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, hiszen a *PMN*, *STU* és *LOC*, *RVF* háromszögek páronként egyenlőek. Amint tehát az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy aránylik az egyik négy hasáb összege a másik négy hasáb összegéhez (V. 12.). Hasonlóképp, ha a nyert gúákat fölbontjuk két gúlára és két hasábra, akkor az *ABC* alap úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúlában levő hasábok összege a *DEFH* gúlában levő ugyanannyi hasáb összegéhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 5.

XII. 4. Lemma

Azt pedig, hogy az *LOC* háromszög úgy aránylik az *RVF* háromszöghöz, mint az a hasáb, melynek alapja az *LOC* háromszög s szemközti lapja *PMN*, ahhoz a hasábhöz, melynek alapja *RVF* s szemközti lapja *STU*, így kell megmutatni:

Képzeljük el, hogy ugyanezen az ábrán a *G*, illetve *H* pontból merőlegest bocsátottunk az *ABC*, illetve a *DEF* síkra (XI.11.). Ezek nyilván egyenlők, mert a gúák feltétel szerint egyenlő magasságúak. Mínthogy két egyenest, *GC*-t és a *G*-ből bocsátott merőlegest, a

párhuzamos ABC , PMN síkok metszenek, az egyeneseket ugyanolyan arányban osztják (XI. 17.). GC -t az N pontban felezi a PMN sík, a G -ből az ABC síkra bocsátott merőleget is felezi tehát a PMN sík. Ugyanígy a H -ből a DEF síkra bocsátott merőleget is felezi az STU sík. A G , illetve H pontból az ABC , illetve DEF síkra bocsátott merőlegesek egyenlők, tehát a PMN , illetve STU háromszögtől ABC -ig, illetve DEF -ig vezető merőlegesek is egyenlők. A hasábok tehát, melyek alapja az LOC , illetve az RVF háromszög s szemközti lapja PMN , illetve STU , egyenlő magasságúak, úgyhogy a mondott hasábokból kiegészített paralelepipedonok is egyenlő magasságúak, és úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XI. 32.), tehát a fele részek is, a mondott hasábok (XI. 28.), úgy aránylanak egymáshoz, mint az LOC alap az RVF alaphoz. Éppen ezt kellett megmutatni.

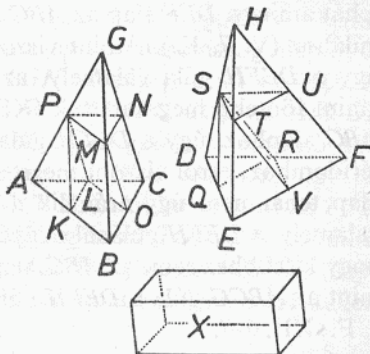
XII. 5. Tétel

Az azonos magasságú háromszög alapú gúlaék úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.

Vegyünk két azonos magasságú gúlát, melyek alapja az ABC , illetve a DEF háromszög s csúcsa a G , illetve H pont. Azt állítom, hogy az ABC alap úgy aránylik a DEF alaphoz, mint az $ABCG$ gúla a $DEFH$ gúlához.

Ha ugyanis az ABC alap nem úgy aránylik a DEF alaphoz, mint az $ABCG$ gúla a $DEFH$ gúlához, akkor az ABC alap úgy aránylik a DEF alaphoz, mint az $ABCG$ gúla valamely, a $DEFH$ gúlánál kisebb vagy nagyobb téridomhoz. Legyen ez először a kisebb X idom. Bontsuk föl a $DEFH$ gúlát két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló gúlára és két egyenlő hasábra. Ekkor a két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél (XII. 3.).

A fölbontás során keletkezett gúlákat ismét bontsuk föl, és így tovább, míg olyan gúlaék nem maradnak a $DEFH$ gúlából, melyek összege kisebb annál a különbségnél,



mellyel a *DEFH* gúla nagyobb az *X* téridomnál (*X*. 1.). Maradjanak meg így egyszerűség kedvéért a *DQRS*, *STUH* gúláak. A maradék tehát, a *DEFH* gúlában levő hasábok összege nagyobb az *X* téridomnál. Bontsuk föl az *ABCG* gúlát is hasonlóképp, ugyanannyi tagra. Ekkor az *ABC* alap úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúlabeli hasábok összege a *DEFH* gúlabeli hasábok összegéhez (*XII*. 4.). Amint viszont az *ABC* alap a *DEF* alaphoz, úgy az *ABCG* gúla az *X* téridomhoz, amint tehát az *ABCG* gúla az *X* téridomhoz, úgy az *ABCG* gúlabeli hasábok összege a *DEFH* gúlabeli hasábok összegéhez (*V*. 11.), fölcserélve tehát amint az *ABCG* gúla a benne levő hasábok összegéhez, úgy az *X* téridom a *DEFH* gúlabeli hasábok összegéhez (*V*. 16.). Az *ABCG* gúla nagyobb a benne levő hasábok összegénél, az *X* téridom is nagyobb tehát a *DEFH* gúlabeli hasábok összegénél (*V*. 14.). Viszont kisebb is, ami nem lehetséges. Az *ABC* alap tehát nem úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla valamely, a *DEFH* gúlánál kisebb téridomhoz. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a *DEF* alap sem úgy aránylik az *ABC* alaphoz, mint a *DEFH* gúla valamely, az *ABCG* gúlánál kisebb téridomhoz.

Azt állítom, hogy az *ABC* alap nem is úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla valamely, a *DEFH* gúlánál nagyobb téridomhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy mint a nagyobb *X* idomhoz. Megfordítva tehát amint a *DEF* alap az *ABC* alaphoz, úgy az *X* téridom az *ABCG* gúlához (*V*. 7. K.). Amint viszont az *X* téridom az *ABCG* gúlához, úgy a *DEFH* gúla valamely, az *ABCG* gúlánál kisebb téridomhoz, amint föntebb megmutattuk (*XII*. 2. L.); amint tehát a *DEF* alap az *ABC* alaphoz, úgy a *DEFH* gúla valamely, az *ABCG* gúlánál kisebb téridomhoz; erről viszont megmutattuk, hogy ellentmondás. Az *ABC* alap tehát nem úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla valamely, a *DEFH* gúlánál nagyobb téridomhoz. Megmutattuk azt is, hogy kisebbhez sem, az *ABC* alap tehát úgy aránylik a *DEF* alaphoz, mint az *ABCG* gúla a *DEFH* gúlához. Éppen ezt kellett megmutatni.

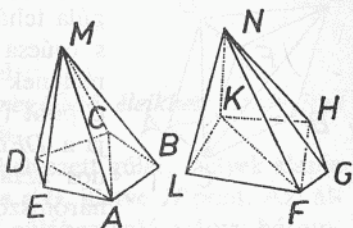
F.: *XII*. 6–7.

XII. 6. Tétel

Az azonos magasságú sokszög alapú gúláak úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.

Vegyünk két azonos magasságú gúlát, melyek alapja az $ABCDE$, illetve az $FGHKL$ sokszög, s csúcsa az M , illetve N pont. Azt állítom, hogy az $ABCDE$ alap úgy aránylik az $FGHKL$ alaphoz, mint az $ABCDEM$ gúla az $FGHKLN$ gúlához.

Húzzuk meg ugyanis az AC , AD , FH , FK szakaszokat. Minthogy $ABCM$ és $ACDM$ két egyenlő magasságú háromszög alapú gúla, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 5.), az ABC alap tehát úgy aránylik az ACD alaphoz, mint az $ABCM$ gúla az $ACDM$ gúlához. Összetéve tehát amint az $ABCD$ alap az ACD alaphoz, úgy az $ABCDM$ gúla az $ACDM$ gúlához



(V. 18.). Amint viszont az ACD alap az ADE alaphoz, úgy az $ACDM$ gúla az $ADEM$ gúlához (XII. 5.), egyenlő sok tagon át tehát amint az $ABCD$ alap az ADE alaphoz, úgy az $ABCDM$ gúla az $ADEM$ gúlához (V. 22.). Ismét összetéve, amint az $ABCDE$ alap az ADE alaphoz, úgy az $ABCDEM$ gúla az $ADEM$ gúlához. Hasonlóképp mutatható meg az is, hogy amint az $FGHKL$ alap az FGH alaphoz, úgy az $FGHKLN$ gúla az $FGHN$ gúlához. Minthogy $ADEM$ és $FGHN$ két egyenlő magasságú háromszög alapú gúla, az ADE alap úgy aránylik az FGH alaphoz, mint az $ADEM$ gúla az $FGHN$ gúlához. Amint viszont az ADE alap az $ABCDE$ alaphoz, úgy az $ADEM$ gúla az $ABCDEM$ gúlához, egyenlő sok tagon át tehát amint az $ABCDE$ alap az FGH alaphoz, úgy az $ABCDEM$ gúla az $FGHN$ gúlához (V. 7. K.). Amint viszont az FGH alap az $FGHKL$ alaphoz, úgy az $FGHN$ gúla az $FGHKLN$ gúlához, egyenlő sok tagon át tehát amint az $ABCDE$ alap az $FGHKL$ alaphoz, úgy az $ABCDEM$ gúla az $FGHKLN$ gúlához. Éppen ezt kellett megmutatni.

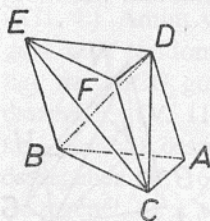
F.: XII. 11.

XII. 7. Tétel

Minden háromszög alapú hasáb szétesik három, egymással egyenlő háromszög alapú gúlára.*

Vegyünk egy hasábot, melynek alapja az ABC háromszög s szemközti lapja DEF . Azt állítom, hogy az $ABCDEF$ hasáb szétesik három, egymással egyenlő háromszög alapú gúlára.

Húzzuk meg ugyanis a BD , EC , CD szakaszokat. Minthogy $ABED$ paralelogramma és BD átlója, az ABD háromszög egyenlő az EBD háromszöggel (I. 34.), a gúla tehát, melynek alapja az ABD háromszög s csúcsa a C pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja a DEB háromszög s csúcsa a C pont (XII. 5.). A gúla viszont, melynek alapja a DEB háromszög s csúcsa a C pont, azonos azzal a gúlával, melynek alapja az EBC háromszög s csúcsa a D pont, hiszen ugyan-



azok a lapok fogják őket közre. Az a gúla tehát, melynek alapja az ABD háromszög s csúcsa a C pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az EBC háromszög s csúcsa a D pont. Ismét, minthogy $FCBE$ paralelogramma és CE átlója, a CEF háromszög egyenlő a CBE háromszöggel, a gúla tehát, melynek alapja a BCE háromszög s csúcsa a D pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az ECF háromszög s csúcsa a D pont. Arról a gúláról, melynek alapja a BCE háromszög s csúcsa a D pont, megmutattuk, hogy egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az ABD háromszög s csúcsa a C pont, az a gúla tehát, melynek alapja a CEF háromszög s csúcsa a D pont, egyenlő azzal a gúlával, melynek alapja az ABD háromszög s csúcsa a C pont. Az $ABCDEF$ hasáb tehát szétesik három, egymással egyenlő háromszög alapú gúlára.

Minthogy az a gúla, melynek alapja az ABD háromszög s csúcsa a C pont, azonos azzal a gúlával, melynek alapja a CAB háromszög s csúcsa a D pont – hiszen ugyanazok a lapok fogják őket közre –, és megmutattuk, hogy az a gúla, melynek alapja az ABC háromszög s csúcsa a C pont, harmadrésze a hasábnak, melynek alapja az ABC háromszög s szemközti lapja DEF , az a gúla is, melynek alapja az ABC háromszög s csúcsa a D pont, harmadrésze a hasábnak, melynek alapja az ABC háromszög s szemközti lapja DEF .

F.: XII. 8.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy minden gúla harmadrésze az ugyanazon az alapon fekvő egyenlő magasságú hasábnak [minthogy ha a gúla alapja valamilyen más sokszög, akkor ilyen a szemközti lap is, és a gúla fölbomlik olyan gúlákra, melyek alap- és fedőlapja háromszög]. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 10.

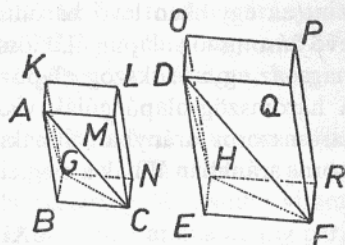
XII. 8. Tétel

Hasonló háromszög alapú gúlák a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban (V. 10. D.) állnak.

Vegyünk két hasonló és hasonlóan elhelyezett gúlát, melyek alapja az ABC , illetve DEF háromszög s csúcsa a G , illetve H pont. Azt állítom, hogy az $ABCG$ gúlának a $DEFH$ gúlához való aránya háromszorosa BC -nek EF -hez való arányának.

Egészítsük ki ugyanis a $BGML$, $EHQP$ paralelepipedonokat.

Minthogy az $ABCG$ gúla hasonló a $DEFH$ gúlához, az ABC szög egyenlő a DEF szöggel, GBC a HEF -fel, ABG pedig DEH -vel, és AB úgy aránylik DE -hez, mint BC az EF -hez és BG az EH -hoz. Minthogy AB úgy aránylik DE -hez, mint BC az EF -hez, így az egyenlő szögek melletti oldalak arányosak, a BM paralelogramma hasonló az



EQ paralelogrammához (I. 34.). Ugyanígy a BN paralelogramma hasonló ER -hez, BK pedig EO -hoz. Hasonló tehát három-három paralelogramma, MB , BK és BN , illetve EQ , EO és ER . MB , BK és BN egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal, EQ , EO és ER pedig egyenlő és hasonló a vele szemközti hárommal (XI. 24.), a $BGML$ és az $EHQP$ téridomot tehát ugyanannyi, (páronként) hasonló lap fogja közre, a $BGML$ téridom tehát hasonló az $EHQP$ téridomhoz. A hasonló paralelepipedonok viszont a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak (XI. 33.), a $BGML$ téridomnak az $EHQP$ téridomhoz való aránya tehát a háromszorosa a megfelelő

élek, BC és EF arányának. Amint viszont a $BGML$ téridom az $EHQP$ téridomhoz, úgy aránylik az $ABCG$ gúla a $DEFH$ gúlához, minthogy a gúla hatodrésze a paralelepipedonnak, mivel a hasáb, mely fele a paralelepipedonnak (XI. 28.), háromszorosa a gúlának (XII. 7., V. 15.). Az $ABCG$ gúlának a $DEFH$ gúlához való aránya tehát háromszorosa BC -nek EF -hez való arányának (V. 11.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 9., 12.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a sokszög alapú hasonló gúlák is a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak. Ha ugyanis fölbontjuk őket a bennük levő háromszög alapú gúlákra, akkor – mivel az alapok hasonló sokszögek lévén hasonló, ugyanolyan sok és a teljes sokszögekével megegyező arányú háromszögekre esnek szét (VI. 20.) – az egyikben levő valamelyik háromszög alapú gúla úgy aránylik a másikban levő megfelelő háromszög alapú gúlához, mint az egyikben levő háromszög alapú gúlák összege a másikban levő háromszög alapú gúlák összegéhez (XII. 5., V. 11–12.), azaz mint maga az egyik sokszög alapú gúla a másik sokszög alapú gúlához. A háromszög alapú gúlák viszont a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak, tehát a sokszög alapúak is háromszoros arányban állnak a megfelelő éleikhez viszonyítva.

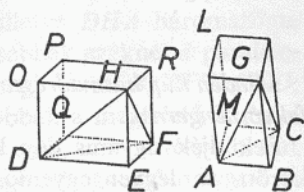
XII. 9. Tétel

Az egyenlő háromszög alapú gúláknak fordítva arányos az alapjuk a magassággal; s amely háromszög alapú gúláknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők.

Vegyünk ugyanis két egyenlő gúlát, melyek alapja az ABC , illetve a DEF háromszög s csúcsa a G , illetve H pont. Azt állítom, hogy az $ABCG$, $DEFH$ gúláknak fordítva arányosak az alapjaik a magassággal: amint az ABC alap a DEF alaphoz, úgy aránylik a $DEFH$ gúla magassága az $ABCG$ gúla magasságához.

Égészítsük ki ugyanis a $BGML$, $EHQP$ paralelepipedonokat. Minthogy az $ABCG$ gúla egyenlő a $DEFH$ gúlával és az $ABCG$ gúlának hatszorosa a $BGML$ téridom, a $DEFH$ gúlának pedig az $EHQP$ tér-

idom (vö. XII. 8.), a $BGML$ téridom egyenlő az $EHQP$ téridommal. Az egyenlő paralelepipedonoknak viszont fordítva arányosak az alapjaik a magassággal (XI. 34.), a BM alap tehát úgy aránylik az EQ alaphoz, mint az $EHQP$ téridom magassága a $BGML$ téridom magasságához. Amint viszont a BM alap az EQ alaphoz, úgy aránylik az ABC háromszög a DEF háromszöghöz (I. 34., V. 15.), amint tehát az ABC háromszög a DEF háromszöghöz, úgy az $EHQP$ téridom magassága a $BGML$ téridom magasságához (V. 11.). Az $EHQP$ téridom magassága ugyanaz, mint a $DEFH$ gúla magassága, a $BGML$ téridom magassága pedig ugyanaz, mint az $ABCG$ gúla magassága, az ABC alap tehát úgy aránylik a DEF alaphoz, mint a $DEFH$ gúla magassága az $ABCG$ gúla magasságához. Az $ABCG$, $DEFH$ gúláknak tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.



Legyenek most az $ABCG$, $DEFH$ gúlák alapjai fordítva arányosak a magassággal: amint az ABC alap a DEF alaphoz, úgy a $DEFH$ gúla magassága az $ABCG$ gúla magasságához. Azt állítom, hogy az $ABCG$ gúla egyenlő a $DEFH$ gúlával.

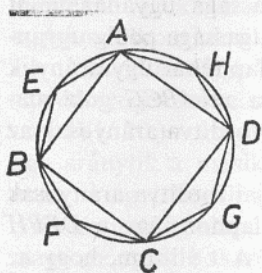
Ha ugyanis elvégezzük ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb, akkor minthogy az ABC alap úgy aránylik a DEF alaphoz, mint a $DEFH$ gúla magassága az $ABCG$ gúla magasságához, amint viszont az ABC alap a DEF alaphoz, úgy a BM paralelogramma az EQ paralelogrammához, a BM paralelogramma úgy aránylik az EQ paralelogrammához, mint a $DEFH$ gúla magassága az $ABCG$ gúla magasságához. A $DEFH$ gúla magassága ugyanaz, mint az $EHQP$ paralelepipedon magassága, az $ABCG$ gúla magassága pedig ugyanaz, mint a $BGML$ paralelepipedon magassága, a BM alap tehát úgy aránylik az EQ alaphoz, mint az $EHQP$ paralelepipedon magassága a $BGML$ paralelepipedon magasságához. Amely paralelepipedonoknak viszont fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők (XI. 34.), a $BGML$ paralelepipedon tehát egyenlő az $EHQP$ paralelepipedonnal. $BGML$ -nek hatodrésze az $ABCG$ gúla, $EHQP$ -nek hatodrésze a $DEFH$ gúla, az $ABCG$ gúla tehát egyenlő a $DEFH$ gúlával.

Az egyenlő háromszög alapú gúlának tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal; s amely háromszög alapú gúlának fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők. Éppen ezt kellett megmutatni.

XII. 10. Tétel

Minden kúp harmadrésze az egyenlő magasságú és ugyanazon alapon fekvő hengernek.

Feküdjék ugyanis egy kúp és egy henger ugyanazon az $ABCD$ körön, és legyen egyenlő a magasságuk. Azt állítom, hogy a kúp harmadrésze a hengernek, azaz hogy a henger háromszorosa a kúpnak.



Ha ugyanis a henger nem háromszorosa a kúpnak, akkor a henger a kúp háromszorosánál vagy nagyobb, vagy kisebb. Legyen először nagyobb a háromszorosánál. Írjunk az $ABCD$ körbe egy $ABCD$ négyzetet (IV. 6.). Ekkor az $ABCD$ négyzet nagyobb az $ABCD$ kör felénél (vö. XII. 2.). Emeljünk az $ABCD$ négyzetre egy, a hengerrel egyenlő magasságú hasábot. Ez a hasáb nagyobb, mint a henger fele, minthogy ha az $ABCD$

kör köré is négyzetet írunk (IV. 7.), akkor az $ABCD$ körbe írt négyzet fele a köréírt négyzetnek, és a rájuk emelt hasábok egyenlő magasságú paralelepipedonok. Az azonos magasságú paralelepipedonok viszont úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XI. 32.), az $ABCD$ négyzetre emelt hasáb tehát fele az $ABCD$ kör köré írt négyzetre emelt hasábnak. A henger kisebb az $ABCD$ kör köré írt négyzetre emelt hasábnál, az $ABCD$ négyzetre emelt, a hengerrel egyenlő magasságú hasáb tehát nagyobb a henger felénél. Felezzük meg az AB , BC , CD , DA íveket az E , F , G , H pontokban (III. 30.), és húzzuk meg az AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA szakaszokat. Ekkor az AEB , BFC , CGD , DHA háromszögek mindegyike nagyobb az $ABCD$ kör megfelelő szeletének felénél, mint föntebb (XII. 2.) megmutattuk. Emeljünk az AEB , BFC , CGD , DHA háromszögek mindegyikére a hengerrel egyenlő magasságú hasábot. Ezen hasábok mindegyike nagyobb a megfelelő hengerszelet felénél,

minthogy ha az E , F , G és H ponton át párhuzamost húzunk AB -vel, BC -vel, CD -vel, illetve DA -val (I. 31.), kiegészítjük az AB , BC , CD , illetve DA melletti paralelogrammát és a hengerrel egyenlő magasságú paralelepipedont emelünk rájuk, akkor ezeknek a paralelepipedonoknak fele az AEB , BFC , CGA , illetve DHA háromszögre emelt hasáb (XI. 28.). A hengerszeletek kisebbek ezeknél a paralelepipedonoknál (III. 3., I. 29., III. 16.), úgyhogy az AEB , BFC , CGD , DHA háromszögekre emelt hasábok nagyobbak a megfelelő hengerszelet felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük, mindegyik háromszögre a hengerrel egyenlő magasságú hasábot emelünk és mindig így tovább, akkor egyszer olyan hengerszeletek maradnak, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel a henger nagyobb a kúp háromszorosánál (X. 1.). Maradjanak hát, és legyenek e szeletek az AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA szakaszokból kaphatóak. Ekkor a maradék hasáb, melynek alapja az $AEBFCGDH$ sokszög és magassága ugyanaz, mint a hengeré, nagyobb a kúp háromszorosánál. Az a hasáb viszont, melynek alapja az $AEBFCGDH$ sokszög és magassága ugyanaz, mint a hengeré, háromszorosa annak a gúlának, melynek alapja az $AEBFCGDH$ sokszög és a csúcsa ugyanaz, mint a kúpé (XII. 7. K.), a gúla tehát, melynek alapja az $AEBFCGDH$ sokszög s csúcsa ugyanaz, mint a kúpé, nagyobb a kúpnál, melynek alapja az $ABCD$ kör. Viszont kisebb is nála – hiszen az tartalmazza, ami ellentmondás. A henger tehát nem nagyobb a kúp háromszorosánál.

Azt állítom, hogy a henger nem is kisebb a kúp háromszorosánál.

Tegyük föl ugyanis, hogy a henger kisebb a kúp háromszorosánál. Megfordítva tehát a kúp nagyobb a henger harmadrésznél. Írjunk az $ABCD$ körbe egy $ABCD$ négyzetet. Az $ABCD$ négyzet nagyobb az $ABCD$ kör felénél. Emeljünk az $ABCD$ négyzetre egy, a kúppal azonos csúcsú gúlát. Ez a gúla nagyobb a kúp felénél, mivel mint föntebb megmutattuk, ha a kör köré négyzetet írunk, akkor az $ABCD$ négyzet fele a kör köré írt négyzetnek, és ha a négyzetekre a kúppal egyenlő magasságú paralelepipedonokat emelünk – hasáboknak is nevezhetjük őket –, akkor az $ABCD$ négyzetre emelt paralelepipedon fele a kör köré írt négyzetre emelt paralelepipedonnak, hiszen úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik, úgyhogy a harmadrészeik is

(V. 15.), az $ABCD$ négyzeten fekvő gúla tehát fele a kör köré írt négyzetre emelt gúlának. A kör köré írt négyzetre emelt gúla nagyobb a kúpnál – hiszen tartalmazza azt –, az a gúla tehát, melynek alapja az $ABCD$ négyzet s csúcsa ugyanaz, mint a kúpé, nagyobb a kúp felénél. Felezzük meg az AB , BC , CD , DA íveket az E , F , G , H pontokban, és húzzuk meg az AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA szakaszokat. Ekkor az AEB , BFC , CGD , DHA háromszögek mindegyike nagyobb az $ABCD$ kör megfelelő szeletének a felénél. Emeljünk az AEB , BFC , CGD , DHA háromszögek mindegyikére a kúppal azonos csúcsú gúlát. Ezen gúlák mindegyike ugyanúgy nagyobb a megfelelő kúpszelet felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük, mindegyik háromszögre a kúppal azonos csúcsú gúlát emelünk, és mindig így tovább, akkor a kúpnak egyszer olyan szeletei maradnak, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel a kúp nagyobb a henger harmadrésznél. Maradjanak hát, és legyenek e szeletek az AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA szakaszokból kaphatók. Ekkor a maradék gúla, melynek alapja az $AEBFCGDH$ sokszög s csúcsa ugyanaz, mint a kúpé, nagyobb a henger harmadrésznél. Az a gúla viszont, melynek alapja az $AEBFCGDH$ sokszög s csúcsa ugyanaz, mint a kúpnak, harmadrésze annak a hasábnak, melynek alapja az $AEBFCGDH$ sokszög s magassága ugyanaz, mint a hengeré, a hasáb tehát, melynek alapja az $AEBFCGDH$ sokszög s magassága ugyanaz, mint a hengeré, nagyobb a hengernél, melynek alapja az $ABCD$ kör. Viszont kisebb is nála – hiszen az tartalmazza –, ami ellentmondás. A henger tehát nem kisebb a kúp háromszorosánál. Megmutattuk, hogy nem is nagyobb a háromszorosánál, a henger tehát háromszorosa a kúpnak, úgyhogy a kúp harmadrésze a hengernek.

Minden kúp harmadrésze tehát az ugyanazon az alapon fekvő egyenlő magasságú hengernek. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 11–12., 14.

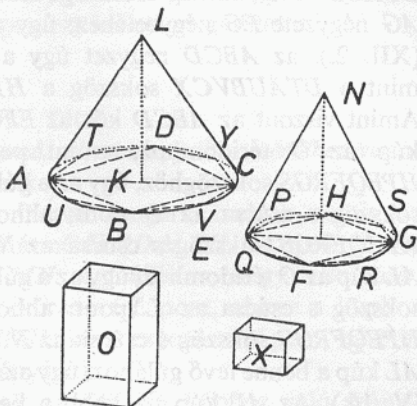
XII. 11. Tétel

Az azonos magasságú kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.

Vegyünk két azonos magasságú kúpot, illetve hengert, melyek

alapjai az $ABCD$ és $EFGH$ körök, tengelyei KL és MN , az alapok átmérői pedig AC és EG . Azt állítom, hogy az $ABCD$ kör úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint az AL kúp az EN kúphoz.

Ellenkező esetben ugyanis az $ABCD$ kör úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint az AL kúp valamely, az EN kúpnál kisebb vagy nagyobb téridomhoz. Legyen ez először a kisebb O idom, és legyen az Y téridom egyenlő azzal a mennyiséggel, amivel az O téridom kisebb az EN kúpnál. Ekkor az EN kúp egyenlő az O és az Y téridom összegével. Írjunk az $EFGH$ körbe egy $EFGH$ négyzetet (IV. 6.). A négyzet tehát nagyobb a kör felénél (vö. XII. 2.). Emeljük az $EFGH$ négyzetre egy, a kúppal egyenlő magasságú gúlát. Ez a gúla tehát nagyobb



a kúp felénél, minthogy ha a kör köré négyzetet írunk (IV. 7.) és rá egy, a kúppal egyenlő magasságú gúlát emelünk, akkor a beírt gúla fele a körülírtnak – hiszen úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 6.) –, és a kúp kisebb a körülírt gúlánál. Felezzük meg az EF , FG , GH , HE íveket a P , Q , R , S pontokban (III. 30.), és húzzuk meg a HP , PE , EQ , QF , FR , RG , GS , SH szakaszokat. A HPE , EQF , FRG , GSH háromszögek mindegyike nagyobb a megfelelő körszelet felénél. Emeljük a HPE , EQF , FRG , GSH háromszögek mindegyikére egy, a kúppal egyenlő magasságú gúlát. Ezeknek a gúláknak mindegyike nagyobb a kúp megfelelő szeletének felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük, mindegyik háromszögre a kúppal egyenlő magasságú gúlát emelünk és mindig így tovább, akkor a kúpnak egyszer olyan szeletei maradnak, melyek összege kisebb az Y téridomnál (X. 1.). Maradjanak hát, és legyenek e szeletek a HPE , EQF , FRG , GSH háromszögeken fekvők. Ekkor a maradék gúla, melynek alapja a $HPEQFRGS$ sokszög s magassága ugyanaz, mint

a kúpé, nagyobb az O téridomnál. Írjunk be az $ABCD$ körbe egy, a $HPEQFRGS$ sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő $DTAUBVCX$ sokszöget és emeljünk rá egy, a kúppal egyenlő magasságú gúlát. Minthogy AC négyzete úgy aránylik EG négyzetéhez, mint a $DTAUBVCX$ sokszög a $HPEQFRGS$ sokszöghöz (XII. 1.) és amint AG négyzete EG négyzetéhez, úgy az $ABCD$ kör az $EFGH$ körhöz (XII. 2.), az $ABCD$ négyzet úgy a aránylik az $EFGH$ négyzethez, mint a $DTAUBVCX$ sokszög a $HPEQFRGS$ sokszöghöz (V. 11.). Amint viszont az $ABCD$ kör az $EFGH$ körhöz, úgy aránylik az AL kúp az O téridomhoz, amint pedig a $DTAUBVCX$ sokszög a $HPEQFRGS$ sokszöghöz, úgy az a gúla, melynek alapja a $DTAUBVCX$ sokszög s csúcsa az L pont, ahhoz a gúlához, melynek alapja a $HPEQFRGS$ sokszög s csúcsa az N pont (XII. 6.), amint tehát az AL kúp az O téridomhoz, úgy az a gúla, melynek alapja a $DTAUBVCX$ sokszög s csúcsa az L pont, ahhoz a gúlához, melynek alapja a $HPEQFRGS$ sokszög s csúcsa az N pont. Fölcserélve tehát amint az AL kúp a benne levő gúlához, úgy az O téridom az EN kúpbeli gúlához (V. 16.). Az AL kúp nagyobb a benne levő gúlánál, az O idom is nagyobb tehát az EN kúpbeli gúlánál (V. 14.). Viszont kisebb is nála, ami ellentmondás. Az $ABCD$ kör tehát nem úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint az AL kúp valamely, az EN kúpnál kisebb téridomhoz. Hasonlóképp mutatható meg az is, hogy az $EFGH$ kör nem úgy aránylik az $ABCD$ körhöz, mint az EN kúp valamely, az AL kúpnál kisebb téridomhoz.

Azt állítom, hogy az $ABCD$ kör nem is úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint az AL kúp valamely, az EN kúpnál nagyobb téridomhoz.

Tegyük föl ugyanis, hogy mint egy nagyobb O idomhoz. Megfordítva tehát amint az $EFGH$ kör az $ABCD$ körhöz, úgy az O téridom az AL kúphoz (V. 7. K.). Amint viszont az O téridom az AL kúphoz, úgy az EN kúp valamely, az AL kúpnál kisebb téridomhoz (XII. 2. L.); amint tehát az $EFGH$ kör az $ABCD$ körhöz, úgy az EN kúp valamely, az AL kúpnál kisebb téridomhoz, amiről megmutattuk, hogy nem lehetséges. Az $ABCD$ kör tehát nem úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint az AL kúp valamely, az EN kúpnál nagyobb téridomhoz. Megmutattuk azt is, hogy mint kisebbhez sem, az $ABCD$ kör tehát úgy aránylik az $EFGH$ körhöz, mint az AL kúp az EN kúphoz.

Amint viszont a kúpok, úgy aránylanak a hengerek egymáshoz, hiszen háromszorosai azoknak (XII. 10., V. 15.), amint tehát az $ABCD$ kör az $EFGH$ körhöz, úgy aránylanak a rajtuk fekvő [a kúpokkal] egyenlő magasságú hengerek.

Az azonos magasságú kúpok és hengerek tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik. Éppen ezt kellett megmutatni.

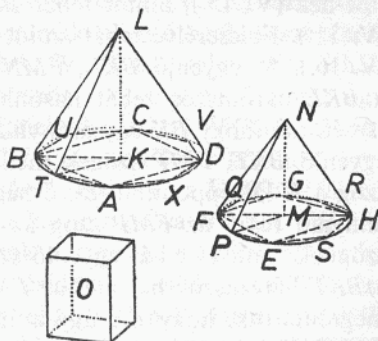
F.: XII. 13–15.

XII. 12. Tétel

Hasonló kúpok és hengerek egymással az alapjaik átmérőihöz viszonyítva háromszoros arányban állnak.

Vegyünk két hasonló kúpot, illetve hengert, melyek alapja az $ABCD$ és az $EFGH$ kör, az alapok átmérői BD és FH , a kúpok, illetve hengerek tengelye pedig KL és MN . Azt állítom, hogy a kúpnak, melynek alapja az $ABCD$ kör s csúcsa az L pont, ahhoz a kúphoz való aránya, melynek alapja az $EFGH$ kör s csúcsa az N pont, háromszorosa BD -nek FH -hoz való arányának.

Ha ugyanis az $ABCDL$ kúpnak az $EFGHN$ kúphoz való aránya nem háromszorosa BD -nek FH -hoz való arányának, akkor ennek az arálynak az $ABCDL$ kúpnak valamely, az $EFGHN$ kúpnál kisebb vagy nagyobb téridomhoz való aránya lesz háromszorosa. E téridom legyen először egy kisebb O . Írjunk az $EFGH$ körbe egy $EFGH$ négyzetet (IV. 6.). Az $EFGH$ négyzet nagyobb a kör felénél (vö. XII. 2.). Emeljünk az $EFGH$ négyzetre egy, a kúppal azonos csúcsú gúlát. Ez a gúla nagyobb a kúp felénél. Felezzük meg az EF , FG , GH , HE íveket a P , Q , R , S pontokban (III. 30.), és húzzuk meg az EP , PF , FQ , QG , GR , RH , HS , SE szakaszokat. Az EPF , FQG , GRH , HSE háromszögek mindegyike nagyobb az $EFGH$ kör megfelelő szeletének felénél. Emeljünk az



EPF, *FQG*, *GRH*, *HSE* háromszögek mindegyikére egy, a kúppal azonos csúcsú gúlát. Ezen gúlák mindegyike nagyobb a kúp megfelelő szeletének felénél. Ha a nyert íveket megfelezzük, az osztáspontokat összekötjük, mindegyik háromszögre a kúppal azonos csúcsú gúlát emelünk és mindig így tovább, akkor a kúpnak egyszer olyan szeletei maradnak, melyek összege kisebb annál a különbségnél, mellyel az *EFGHN* kúp nagyobb az *O* téridomnál (X. 1.). Maradjanak így meg az *EP*, *PF*, *FQ*, *QG*, *GR*, *RH*, *HS*, *SE* szakaszokból kapható szeletek. Ekkor a maradék gúla, melynek alapja az *EPFQGRHS* sokszög s csúcsa az *N* pont, nagyobb az *O* téridomnál. Írjunk az *ABCD* körbe egy, az *EPFQGRHS* sokszöghöz hasonló és hasonlóan fekvő *ATBUCVDX* sokszöget, és emeljünk az *ATBUCVDX* sokszögre egy, a kúppal azonos csúcsú sokszöget. Az *ATBUCVDX* sokszögon fekvő *L* csúcsú gúlát közrefogó háromszögek egyike legyen *LBT*, az *EPFQGRHS* sokszögon fekvő *N* csúcsú gúlát közrefogó háromszögek egyike pedig legyen *NFP*, és húzzuk meg a *KT*, *MP* szakaszokat. Minthogy az *ABCDL* kúp hasonló az *EFGHN* kúphoz, *BD* úgy aránylik *FH*-hoz, mint a *KL* tengely az *MN* tengelyhez. Amint viszont *BD* az *FH*-hoz, úgy aránylik *BK* az *FM*-hez (V. 15.), amint tehát *BK* az *FM*-hez, úgy *KL* az *MN*-hez (V. 11.). Fölcserélve tehát amint *BK* a *KL*-hez, úgy *FM* az *MN*-hez (V. 16.). Az egyenlő *BKL*, *FMN* szögek melletti oldalak arányosak, a *BKL* háromszög tehát hasonló az *FMN* háromszöghöz (VI. 6.). Ismét, minthogy *BK* úgy aránylik *KT*-hez, mint *FM* az *MP*-hez és az egyenlő *BKT*, *FMP* szögek mellett – hiszen ahányad része a *BKT* szög a *K* középpontnál fekvő négy derékszögnek (I. 15. K.), ugyanannyiad része az *FMP* szög az *M* középpontnál levő négy derékszögnek – mivel tehát egyenlő szögek mellett az oldalak arányosak, a *BKT* háromszög hasonló az *FMP* háromszöghöz. Ismét, minthogy megmutattuk, hogy *BK* úgy aránylik *KL*-hez, mint *FM* az *MN*-hez és *BK* egyenlő *KT*-vel, *FM* pedig *PM*-mel, *TK* úgy aránylik *KL*-hez, mint *PM* az *MN*-hez (V. 7.). Az egyenlő *TKL*, *PMN* szögek – derékszögek – melletti oldalak arányosak, az *LKT* háromszög tehát hasonló az *NMP* háromszöghöz. Minthogy az *LKB* és az *NMF* háromszög hasonlósága miatt *LB* úgy aránylik *BK*-hoz, mint *NF* az *FM*-hez, a *BKT* és az *FMP* háromszög hasonlósága miatt pedig *KB* úgy *BT*-hez,

mint MF az FP -hez, egyenlő sok tagon át LB úgy aránylik BT -hez, mint NF az FP -hez (V. 22.). Ismét, minthogy az LTK és az NPM háromszög hasonlósága miatt LT úgy aránylik TK -hoz, mint NP a PM -hez, a TKB és a PMF háromszög hasonlósága miatt pedig KT úgy TB -hez, mint MP a PF -hez, egyenlő sok tagon át LT úgy aránylik TB -hez, mint NP a PF -hez. Megmutattuk, hogy amint TB a BL -hez, úgy PF az FN -hez, egyenlő sok tagon át tehát amint TL az LB -hez, úgy PN az NF -hez. Az LTB , NPF háromszögeknek tehát arányosak az oldalaik, az LTB és az NPF háromszögeknek tehát egyenlők a szögeik (VI. 5.), úgyhogy hasonlók is. A BKT háromszögön fekvő L csúcsú gúla is hasonló tehát az FMP háromszögön fekvő N csúcsú gúlához, hiszen ugyanannyi (páronként) hasonló lap fogja őket közre. Hasonló háromszög alapú gúla vizsont a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak (XII. 8.), a $BKTL$ gúlának az $FMPN$ gúlához való aránya tehát háromszorosa BK -nak FM -hez való arányának. Hasonlóképp, ha összekötjük az A, X, D, V, C, U pontokat a K , az E, S, H, R, G, Q pontokat pedig az M középponttal, és mindegyik háromszögre az illető kúppal azonos csúcsú gúlát emelünk, akkor megmutatható, hogy bármely két megfelelő gúla aránya háromszorosa a megfelelő élek, BK és FM , azaz BD és FH (V. 15.) arányának. Az előtagok összege vizsont úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármelyik előtag az utótagjához (V. 12.), a teljes gúla tehát, melynek alapja az $ATBUCVDX$ sokszög s csúcsa az L pont, úgy aránylik a másik teljes gúlához, melynek alapja az $EPFQGRHS$ sokszög s csúcsa az N pont, mint a $BKTL$ gúla az $FMPN$ gúlához, úgyhogy az $ATBUCVDX$ -en fekvő L csúcsú gúlának az $EPFQGRHS$ -en fekvő N csúcsú gúlához való aránya háromszorosa BD -nek FH -hoz való arányának. Feltétel szerint annak a kúpnak, melynek alapja az $ABCD$ kör s csúcsa az L pont, az O téridomhoz való aránya háromszorosa BD és FH arányának, a kúp tehát, melynek alapja az $ABCD$ kör s csúcsa L , úgy aránylik az Q téridomhoz, mint az $ATBUCVDX$ sokszögön fekvő L csúcsú gúla az $EPFQGRHS$ sokszögön fekvő N csúcsú gúlához. Fölcserélve tehát a kúp, melynek alapja az $ABCD$ kör s csúcsa L , úgy aránylik a benne levő az $ATBUCVDX$ sokszögön fekvő L csúcsú gúlához, mint az O téridom az $EPFQGRHS$ sokszögön fekvő N csúcsú gúlához (V. 16.). A mondott kúp nagyobb a benne

levő gúlánál – hiszen tartalmazza azt –, az O téridom is nagyobb tehát $EPFQGRHS$ sokszögön fekvő N csúcsú gúlánál (V. 14.). Viszont kisebb is nála, ami ellentmondás. Az $ABCD$ körön fekvő L csúcsú kúpnak tehát nem valamely, az $EFGH$ körön fekvő N csúcsú kúpnál kisebb téridomhoz való aránya háromszorosa BD -nek FH -hoz való arányának. Hasonlóképp mutatható meg, hogy az $EFGHN$ kúpnak sem valamely, az $ABCDL$ kúpnál kisebb téridomhoz való aránya háromszorosa FH -nak BD -hez való arányának.

Azt állítom, hogy az $ABCDL$ kúpnak nem is valamely, az $EFGHN$ kúpnál nagyobb téridomhoz való aránya háromszorosa BD -nek FH -hoz való arányának.

Tegyük föl ugyanis, hogy mint egy nagyobb O idomhoz. Megfordítva tehát az O téridomnak az $ABCDL$ kúphoz való aránya háromszorosa FH és BD arányának (V. 7. K.). Amint viszont az O téridom az $ABCDL$ kúphoz, úgy aránylik az $EFGHN$ kúp valamely, az $ABCDL$ kúpnál kisebb téridomhoz (XII. 2. L.). Az $EFGHN$ kúpnak valamely, az $ABCDL$ kúpnál kisebb téridomhoz való aránya tehát háromszorosa FH és BD arányának. Erről megmutattuk, hogy nem lehetséges, az $ABCDL$ kúpnek tehát nem valamely, az $EFGHN$ kúpnál nagyobb téridomhoz való aránya háromszorosa BD és FH arányának. Megmutattuk, hogy nem is egy nagyobbhoz való, az $ABCDL$ kúpnek tehát az $EFGHN$ kúphoz való aránya háromszorosa BD -nek FH -hoz való arányának.

A hengerek úgy aránylanak, mint a kúpok, hiszen a kúppal azonos alapon fekvő és azzal egyenlő magasságú henger háromszorosa a kúpnak (XII. §10.), a hengerek aránya is háromszorosa tehát BD és FH arányának.

Hasonló kúpok és hengerek tehát egymással az alapjaik átmérőihez viszonyítva háromszoros arányban állnak. Éppen ezt kellett megmutatni.

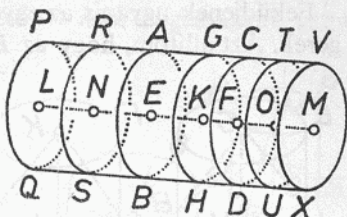
XII. 13. Tétel

Ha egy hengert a szemközti lapokkal párhuzamos síkkal metszünk, akkor a nyert hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint a tengelyeik.

Messzük el ugyanis az AD hengert a szemközti AB , CD lapokkal párhuzamos GH síkkal, és legyen a GH sík és a tengely met-

széspontja K . Azt állítom, hogy a BG henger úgy aránylik a GD hengerhez, mint az EK tengely a KF tengelyhez.

Hosszabbítsuk meg ugyanis az EF tengelyt mindkétfelé, az L , illetve az M pont felé, mérjünk föl tetszőleges sok, az EK tengellyel egyenlő EN , NL és tetszőleges sok, FK -val egyenlő FO , OM szakaszt (I. 3.), és gondoljunk el az LM tengely körül egy PX hengert, melynek alap- és fedőlapja a PQ és a



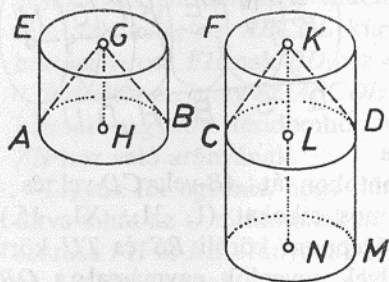
VX kör. Fektessünk az N , O pontokon át AB -vel, CD -vel és a PX henger alaplapjaival párhuzamos síkokat (I. 31., XI. 15.). Ezek messék ki az N , illetve O középpont körüli RS és TU kört. Minthogy az LN , NE , EK tengelyek egyenlők egymással, a QR , RB , BG hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 11.). Az alapjaik egyenlők, tehát a QR , RB , BG hengerek is egyenlők. Minthogy az LN , NE , EK tengelyek egyenlők egymással, a QR , RB , BG hengerek egyenlők egymással, és a tengelyek meg a hengerek száma egyenlő, a QG henger annyszorosa a GB hengernek, mint a KL tengely az EK tengelynek. Ugyanígy az XG henger annyszorosa a GD hengernek, mint az MK tengely a KF tengelynek. Ha a KL tengely egyenlő a KM tengellyel, akkor a QG henger is egyenlő a GX hengerrel, ha az egyik tengely nagyobb a másik tengelynél, akkor az egyik henger is nagyobb a másik hengernél, s ha kisebb, akkor kisebb. Van tehát négy mennyiség, az EK , KF tengelyek és a BG , GD hengerek, ugyanannyiszorosát vettük az EK tengelynek és a BG hengernek – az LK tengelyt és a QG hengert –, illetve a KF tengelynek és a GD hengernek – a KM tengelyt és a GX hengert –, és megmutattuk, hogy ha a KL tengely nagyobb a KM tengelynél, akkor a QG henger is nagyobb a GX tengelynél, ha egyenlő, egyenlő, s ha kisebb, kisebb. Az EK tengely tehát úgy aránylik a KF tengelyhez, mint a BG henger a GD hengerhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 14–15.

XII. 14. Tétel

Az egyenlő alapokon fekvő kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint a magasságaik.

Feküdjének ugyanis az egyenlő AB , CD körökön az EB , FD hengerek. Azt állítom, hogy az EB henger úgy aránylik az FD hengerhez, mint a GH tengely a KL tengelyhez.



Hosszabbítsuk meg ugyanis a KL tengelyt az N pontig, mérjünk föl egy GH -val egyenlő LN szakaszt (I. 3.) és gondoljunk az LN tengely köré egy CM hengert. Minthogy az EB és a CM henger magassága ugyanaz, úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 11.). Az alapok

egyenlők egymással, az EB és a CM henger is egyenlő tehát (V. 14.). Minthogy az FM hengert metszi a szemközti lapokkal párhuzamos CD sík, a CM henger úgy aránylik az FD hengerhez, mint az LN tengely a KL tengelyhez (XII. 13.). A CM henger egyenlő az EB hengerrel, az LN tengely pedig a GH tengellyel, az EB henger tehát úgy aránylik az FD hengerhez, mint a GH tengely a KL tengelyhez (V. 7.). Amint viszont az EB henger az FD hengerhez, úgy aránylik az ABG kúp a CDK kúphoz (XII. 10., V. 15.), amint tehát a GH tengely a KL tengelyhez, úgy az ABG kúp a CDK kúphoz (V. 11.) és az EB henger az FD hengerhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

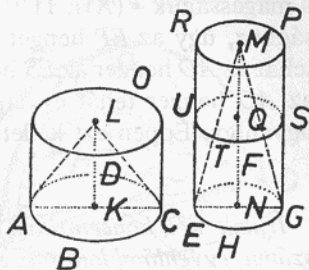
XII. 15. Tétel

Az egyenlő kúpoknak és hengereknek fordítva arányos az alapjuk a magassággal; s amely kúpoknak és hengereknek fordítva arányos az alapja a magassággal, azok egyenlők.

Vegyünk két egyenlő kúpot, illetve hengert, melyek alapjai az $ABCD$, $EFGH$ körök, azok átmérői AC és EG , tengelyeik KL és MN – ezek egyúttal magasságai is a kúpoknak, illetve hengereknek –, és egészítsük ki az AO és az EP hengert. Azt állítom, hogy az AO és az EP hengereknek fordítva arányos az alapjuk a magasság-

gal: amint az $ABCD$ alap az $EFGH$ alaphoz, úgy az MN magasság a KL magassághoz.

Az LK magasság ugyanis vagy egyenlő az MN magassággal, vagy nem. Legyen először egyenlő. Az AO henger is egyenlő az EP hengerrel (XII. 10.), s az azonos magasságú kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik (XII. 11.), az $ABCD$ alap tehát egyenlő az $EFGH$ alappal (V. 14.), úgyhogy fordítva is arányosak: amint az $ABCD$ alap az $EFGH$ alaphoz, úgy az MN magasság a KL magassághoz. Ne legyen most egyenlő az LK magasság MN -nel, ha-



nem legyen nagyobb MN . Vonjunk le az MN magasságból egy KL -lel egyenlő QN szakaszt (I. 3.). Messük el az EP hengert egy, a Q ponton át az $EFGH$ és az RP kör síkjával párhuzamosan fektetett TUS síkkal (I. 31., XI. 15.), és tekintsük az $EFGH$ körön fekvő NQ magasságú ES hengert. Minthogy az AO henger egyenlő az EP hengerrel, az AO henger úgy aránylik az ES hengerhez, mint az EP henger az ES hengerhez (V. 7.). Amint viszont az AO henger az ES hengerhez, úgy az $ABCD$ alap az $EFGH$ alaphoz – hiszen ugyanaz az AO és az ES henger magassága (XII. 11.) –, amint pedig az EP henger az ES hengerhez, úgy az MN magasság a QN magassághoz – hiszen az EP hengert a szemközti lapokkal párhuzamos sík metszi (XII. 13., V. 18.), amint tehát az $ABCD$ alap az $EFGH$ alaphoz, úgy az MN magasság a QN magassághoz (V. 11.). A QN magasság egyenlő a KL magassággal, amint tehát az $ABCD$ alap az $EFGH$ alaphoz, úgy aránylik az MN magasság a KL magassághoz (V. 7.). Az AO , EP hengereknek tehát fordítva arányosak az alapjaik a magassággal.

Legyenek most az AO , EP hengerek alapjai fordítva arányosak a magassággal: amint az $ABCD$ alap az $EFGH$ alaphoz, úgy az MN magasság a KL magassághoz. Azt állítom, hogy az AO henger egyenlő az EP hengerrel.

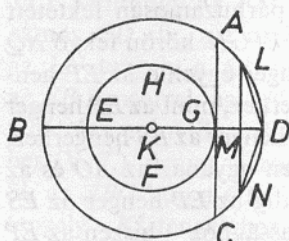
Ha ugyanis elvégezzük ugyanazokat a lépéseket, mint az előbb, akkor minthogy az $ABCD$ alap úgy aránylik az $EFGH$ alaphoz, mint

az MN magasság a KL magassághoz és a KL magasság egyenlő a QN magassággal, az $ABCD$ alap úgy aránylik az $EFGH$ alaphoz, mint az MN magasság a QN magassághoz. Amint viszont az $ABCD$ alap az $EFGH$ alaphoz, úgy az AO henger az ES hengerhez – hiszen ugyanaz a magasságuk – (XII. 11.), amint pedig az MN magasság a QN magassághoz, úgy az EP henger az ES hengerhez (XII. 13., V. 18.), amint tehát az AO henger az ES hengerhez, úgy az EP henger ES -hez (V. 11.), az AO henger tehát egyenlő az EP hengerrel (V. 9.). Kúpok esetén ugyanígy. Éppen ezt kellett megmutatni.

XII. 16. Tétel

Írjunk két koncentrikus kör nagyobbikába egy olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget, mely diszjunkt a kisebb körtől!

Legyen a közös K középpontú adott két kör $ABCD$ és $EFGH$. A nagyobb $ABCD$ körbe tehát egy olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget kell beírni, mely diszjunkt az $EFGH$ körtől.



Húzzunk a K középponton át egy BKD egyenest, húzzuk a G pontból a BD egyenesre merőlegesen GA -t (I. 11.), és hosszabbítsuk meg C -ig. Ekkor AC érinti az $EFGH$ kört (III. 16. K.). Ha a BAD ívet megfelezzük (III. 30.), a felét megfelezzük és mindig így tovább, akkor egyszer egy AD -nél kisebb ívet kapunk (X. 1.). Kapjuk meg így az LD ívet, bocsássunk L -

ből BD -re egy LM merőleget (I. 12.), húzzuk meg N -ig, s kössük össze LD -t és DN -t. Ekkor LD egyenlő DN -nel (III. 3., I. 4.). Mint-hogy LN párhuzamos AC -vel (I. 28.) és AC érinti az $EFGH$ kört, LN nem érinti az $EFGH$ kört, LD és DN tehát annál kevésbé érinti az $EFGH$ kört. Ha mármost az $ABCD$ körre összefüggően LD -vel egyenlő szakaszokat illesztünk (IV. 1.), akkor az $ABCD$ körbe olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget írunk, mely diszjunkt a kisebb körtől, $EFGH$ -től. Éppen ezt kellett megtenni.

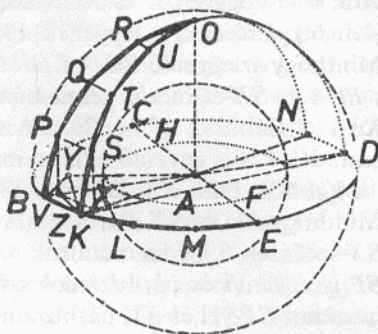
F.: XII. 17.

XII. 17. Tétel

Írjunk két koncentrikus gömb nagyobbikába olyan poliédert, mely diszjunkt a kisebb gömb felületétől!

Gondoljunk el két, közös A középpontú gömböt. A nagyobbik gömbbe tehát olyan poliédert kell írni, mely diszjunkt a kisebb gömb felületétől.

Messzük a gömböket egy, a középponton átmenő síkkal. Ekor a metszetek körök, minthogy a gömb egy félkörnek rögzített átmérője körüli forgatásakor keletkezik, úgyhogy bármilyen helyzetűnek vesszük a félkört, a rajta átfektetett sík a gömb felületét körben metszi.* Nyilvánvaló az is, hogy e kör maximális, minthogy a gömb átmérője, mely nyilván mind a félkörnek, mind a körnek átmérője, nagyobb a kör vagy a gömb bármely húrjánál (XI. 2., III. 15.). Legyen tehát a nagyobb gömbbeli metszet a $BCDE$ kör, a kisebb gömbbeli az FGH kör, húzzuk meg két, egymásra merőleges átmérőjüket, BD -t és CE -t (I. 11.), írjunk két koncentrikus kör, $BCDE$ és FGH nagyobbikába, $BCDE$ -be egy olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget, mely diszjunkt a kisebb körtől, FGH -tól (XII. 16.), ennek a BE negyedbeli oldalai legyenek BK , KL , LM és ME , húzzuk meg KA -t és hosszabbítsuk meg N -ig, emeljünk az A pontban a $BCDE$ kör síkjára egy AO merőlegest (XI. 12.), a gömb felületével való metszete legyen O és fektessünk AO -n és BD -n, illetve KN -en át síkot (XI. 2.). Ezek a mondottak miatt a gömbfelületet maximális körökben metszik. Messék, s a BD , illetve KN átmérőn fekvő félkörök legyenek BOD , illetve KON . Minthogy OA merőleges a $BCDE$ kör síkjára, valamennyi OA -n átmenő sík merőleges a $BCDE$ kör síkjára (XI. 18.), úgyhogy a BOD , KON félkörök is merőlegesek a $BCDE$ kör síkjára. Minthogy a BED , a BOD és a KON félkörök egyenlők – hiszen az egyenlő BD , KN átmérőkön fekszenek –, a BE , BO , KO negyedek is egyenlők egymással. Ahány sokszögoldal van tehát a BE negyedkör-



ben, annyi, a BK , KL , LM és ME szakaszokkal egyenlő oldal fér a BO és a KO negyedbe is (III. 28.). Írjuk be ezeket, legyenek a BP , PQ , QR , RO , KS , ST , TU és UO szakaszok, húzzuk meg SP -t, TQ -t és UR -t, és bocsássunk a P és S pontból a $BCDE$ kör síkjára merőlegeseket (XI. 11.). Ezek a síkok metszeteire, BD -re, illetve KN -re fognak esni, minthogy BOD és KON síkja is merőleges a $BCDE$ kör síkjára (XI. 6.). Essenek, s legyenek PV , illetve SX , és húzzuk meg XV -t. Minthogy az egyenlő BOD , KON félkörökben BP és KS egyenlő húrok, s PV -t és SX -et merőlegesen húztuk, PV egyenlő SX -szel, BV pedig KX -szel (III. 28., 27., I. 26.). A teljes BA egyenlő a teljes KA -val, a maradék VA is egyenlő tehát a maradék XA -val, BV tehát úgy aránylik VA -hoz, mint KX XA -hoz, XV tehát párhuzamos KB -vel (VI. 2.). Minthogy PV és SX merőleges a $BCDE$ kör síkjára, PV párhuzamos SX -szel (XI. 6.). Megmutattuk azt is, hogy egyenlő vele, tehát XV és SP is egyenlő és párhuzamos szakaszok (I. 33.). Minthogy XV párhuzamos SP -vel és XV párhuzamos KB -vel, SP is párhuzamos KB -vel (XI. 9.). BP és KS kötik össze őket, a $KBPS$ négyszög tehát síkbeli, minthogy ha van két párhuzamos egyenes, és mindegyiken tetszőlegesen veszünk egy pontot, akkor a pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok (XI. 7.). Ugyanígy az $SPQT$ és a $TQUR$ négyszög is síkbeli. Az URO háromszög is síkbeli (XI. 2.), ha tehát tekintjük a P , S , Q , T , R , U pontokat A -val összekötő szakaszokat, akkor a BO és a KO ív között egy poliéder áll elő, mely gúlákból tevődik össze, s ezek alapjai a $KBPS$, $SPQT$, $TQUR$ négyszögek, illetve az URO háromszög, csúcsa pedig az A pont. Ha pedig a KL , LM , ME oldalak mindegyikére is elvégezzük ugyanazt a szerkesztést, mint BK -ra meg a többi három negyedkörre is [és a másik félgömbre], akkor egy, a gömbbe beírt poliéder áll elő, mely gúlákból tevődik össze, s ezek alapjai a mondott négyszögek, az URO háromszög, illetve a nekik megfelelők, csúcsa pedig az A pont.

Azt állítom, hogy a mondott poliéder nem érinti a kisebb gömb felületét, melyen az FGH kör fekszik.

Bocsássunk az A pontból a $KBPS$ négyszög síkjára egy AY merőlegest (XI. 11.), a síkkal való metszéspontja legyen Y , és húzzuk meg YB -t, YK -t. Minthogy AY merőleges a $KBPS$ négyszög síkjára, valamennyi öt metsző és a négyszög síkjában fekvő egyenesre merőleges,

AY tehát merőleges BY -ra és YK -ra. Minthogy AB egyenlő AK -val, AB négyzete is egyenlő AK négyzetével. AB négyzetével egyenlő AY és YB négyzetösszege – hiszen az Y -nál levő szög derékszög – (I. 47.), AK négyzetével pedig egyenlő AY és YK négyzetösszege, AY és YB négyzetösszege tehát egyenlő AY és YK négyzetösszegével. Vonjuk le a közös AY négyzetet, ekkor a maradék BY négyzet egyenlő a maradék YK négyzettel, BY tehát egyenlő YK -val. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az Y -t P -vel és S -sel összekötő szakaszok is egyenlők BY -nal és YK -val. Az Y középpontú és az YB , YK távolságok egyikével rajzolt kör tehát a P és az S ponton is átmegy, $KBPS$ tehát húrnégyszög.

Minthogy KB nagyobb XV -nél és XV egyenlő SP -vel, KB nagyobb SP -nél. KB egyenlő KS -sel és BP -vel, tehát KS és BP is nagyobb SP -nél. Minthogy $KBPS$ húrnégyszög, KB , BP és KS egyenlő és PS kisebb náluk, és BY a (négyszög köré írt) kör sugara, KB négyzete több mint kétszerese BY négyzetének (I. 8., 25., II. 12.). Bocsássunk K -ból BV -re egy KZ^{**} merőleget (I. 12.). Minthogy BD kisebb DZ kétszeresénél és a DB és BZ közötti téglalap úgy aránylik a DZ és ZB közöttihez, mint BD a DZ -hez (VI. 1.) – szerkesszük meg a BZ oldalú négyzetet (I. 46.) és egészítsük ki a ZD -n fekvő paralelogrammát –, a DB és BZ közötti téglalap is kisebb a DZ és ZB közötti téglalap kétszeresénél. Húzzuk meg KD -t! A DB és BZ közötti téglalap egyenlő BK négyzetével, a DZ és ZB közötti téglalap pedig egyenlő KZ négyzetével (III. 31., VI. 8. K., 17.), KB négyzete tehát kisebb KZ négyzetének kétszeresénél. Másrészt KB négyzete nagyobb BY négyzetének kétszeresénél, KZ négyzete tehát nagyobb BY négyzeténél. Minthogy BA egyenlő KA -val, BA négyzete egyenlő AK négyzetével. BA négyzetével egyenlő BY és YA négyzetösszege, KA négyzetével pedig egyenlő KZ és ZA négyzetösszege (I. 47.), BY és YA négyzetösszege tehát egyenlő KZ és ZA négyzetösszegével. Ezek közül KZ négyzete nagyobb BY négyzeténél, a maradék ZA négyzet tehát kisebb YA négyzeténél, AY tehát nagyobb AZ -nél, annál inkább nagyobb tehát AY az AG -nél. AY -t a poliéder egyik lapjára bocsátottuk, AG -t pedig a kisebb gömb felületére, úgyhogy a poliéder diszjunkt a kisebb gömb felületétől.

Olyan poliédert írtunk tehát két koncentrikus gömb nagyobbbi-

kába, mely diszjunkt a kisebb gömb felületétől. Éppen ezt kellett megtenni.

F.: XII. 18.

Következmény

Ha a másik gömbbe is beírunk egy, a $BCDE$ gömbbelihez hasonló poliédert, akkor a $BCDE$ gömbbeli poliédernek a másik gömbbe írt poliéderhez való aránya háromszorosa a $BCDE$ gömb átmérőjének a másik gömb átmérőjéhez való arányának. Ha ugyanis a poliédereket fölfontjuk az egyenlő számú, egymásnak megfelelő gúlákra, akkor hasonló gúlákat kapunk. A hasonló gúlákat aránya viszont háromszorosa a megfelelő élek arányának (XII. 8. K.), a $KBPS$ négyszögön fekvő A csúcspontú gúlának a másik gömbbeli megfelelő gúlához való aránya tehát háromszorosa a megfelelő élek, azaz az A középpontú gömb AB sugara és a másik gömb sugara arányának. Hasonlóképp az A középpontú minden egyes gúlának a másik gömbbeli megfelelő gúlához való aránya háromszorosa AB és a másik gömb sugara arányának. Az előtagok összege úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármely előtag az utótagjához (V. 12.), úgyhogy az A középpontú gömbben levő teljes poliédernek a másik gömbben levő teljes poliéderhez való aránya háromszorosa AB és a másik gömb sugara arányának (V. 11.), azaz a BD átmérő és a másik gömb átmérője arányának (V. 15.). Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XII. 18.

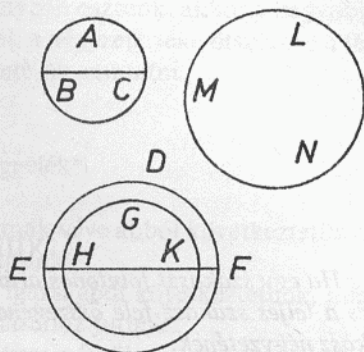
XII. 18. Tétel

A gömbök az átmérőikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak egymással.

Tekintsük az ABC , DEF gömböket és BC , EF átmérőiket. Azt állítom, hogy az ABC gömbnek a DEF gömbhöz való aránya háromszorosa BC és EF arányának.

Ha ugyanis az ABC gömbnek a DEF gömbhöz való aránya nem háromszorosa BC és EF arányának, akkor az ABC gömbnek valamely DEF -nél kisebb vagy nagyobb gömbhöz való aránya háromszorosa BC és EF arányának. Legyen ez először egy kisebb GHK gömb, tekintsük DEF -et és GHK -t koncentrikus gömbökként, írjunk

a nagyobb gömbbe, DEF -be egy a kisebb gömb, GHK felületétől diszjunkt poliédert (XII. 17.), és írjunk az ABC gömbbe is egy, a DEF gömbbeli poliéderhez hasonló poliédert. Ekkor az ABC -beli poliédernek a DEF -beli poliéderhez való aránya háromszorosa BC és EF arányának (XII. 17. K.). Az ABC gömbnek a GHK gömbhöz való aránya is háromszorosa BC és EF arányának, az ABC gömb tehát úgy aránylik a GHK gömbhöz, mint az ABC gömbbeli poliéder a DEF gömbbeli poliéderhez (V. 11.), fölcserélve tehát amint az ABC gömb a beleírt poliéderhez, úgy a GHK gömb a DEF gömbbe írt poliéderhez (V. 16.). Az ABC gömb



nagyobb a beleírt poliédernél, a GHK gömb is nagyobb tehát a DEF gömbbe írt poliédernél (V. 14.). Viszont kisebb is nála, hiszen az tartalmazza. Az ABC gömbnek tehát nem valamely DEF -nél kisebb gömbhöz való aránya háromszorosa a BC és EF átmérők arányának. Hasonlóképp mutatható meg, hogy a DEF gömbnek sem valamely ABC -nél kisebb gömbhöz való aránya háromszorosa EF és BC arányának.

Azt állítom, hogy az ABC gömbnek nem is valamely, a DEF gömbnél nagyobb gömbhöz való aránya háromszorosa BC és EF arányának.

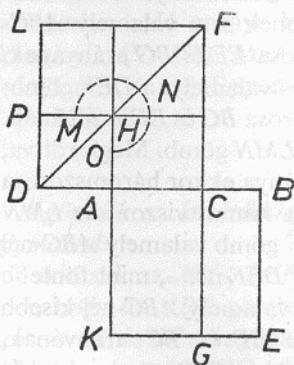
Tegyük föl ugyanis, hogy ilyen a nagyobb LMN gömb. Megfordítva, az LMN gömbnek az ABC gömbhöz való aránya ekkor háromszorosa az EF és a BC átmérő arányának (V. 7. K.). Amint viszont az LMN gömb az ABC gömbhöz, úgy aránylik a DEF gömb valamely ABC -nél kisebb gömbhöz – minthogy LMN nagyobb DEF -nél –, mint föntebb (XII. 2. L.) megmutattuk. A DEF gömbnek valamely ABC -nél kisebb gömbhöz való aránya tehát háromszorosa EF és BC arányának, amiről megmutattuk, hogy nem lehetséges. Az ABC gömbnek tehát nem valamely DEF -nél nagyobb gömbhöz való aránya háromszorosa BC és EF arányának. Megmutattuk, hogy nem is egy kisebbhez való aránya, az ABC gömbnek tehát a DEF gömbhöz való aránya háromszorosa BC és EF arányának. Éppen ezt kellett megmutatni.

Tizenharmadik könyv

XIII. 1. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a fél szakasz négyzetének.

Osszuk föl ugyanis az AB szakaszt folytonos arányban a C pontban (VI. 30.), legyen AC a nagyobb darab, AD az AC egyenes menti meghosszabbítása, és mérjünk rá egy AB felével egyenlő AD szakaszt (I. 10.). Azt állítom, hogy CD négyzete ötszöröse DA négyzetének.



Szerkesszük meg ugyanis az AB és a DC szakaszra az AE , illetve DF négyzetet (I. 46.), rajzoljuk meg a DF négyzetben az ábrát, és hosszabbítsuk meg FC -t G -ig. Minthogy AB -t C folytonos arányban osztja, az AB és BC közötti téglalap egyenlő AC négyzetével (VI. 17.). Az AB és BC közötti téglalap CE , AC négyzete pedig FH , CE tehát egyenlő FH -val. Minthogy BA kétszerese AD -nek és BA egyenlő KA -val, AD pedig AH -val, KA kétszerese AH -nak. Amint viszont KA az AH -hoz, úgy aránylik CK a CH -hoz (VI.

1.), CK tehát kétszerese CH -nak. LH meg HC is kétszerese CH -nak (I. 43.), KC tehát egyenlő LH meg HC -vel. Megmutattuk, hogy CE egyenlő HF -fel, a teljes AE négyzet tehát egyenlő az MNO gnómonnal. Minthogy BA kétszerese AD -nek, BA négyzete négyszerese

AD négyzetének (II. 4.), azaz AE négyszerese DH -nak. AE egyenlő az MNO gnómónnal, az MNO gnómón is négyszerese tehát AP -nek, a teljes DF ötszöröse tehát AP -nek. DF a DC négyzete, AP a DA négyzete, CD négyzete tehát ötszöröse DA négyzetének.

Ha tehát egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a fél szakasz négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 6., 11.

XIII. 8. Függelék*

Mi az analízis és mi a szintézis?

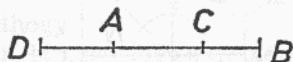
Analízis az, ha az állítást bizonyítottak véve abból következtetünk, míg valamely elfogadott igazsághoz jutunk.

Szintézis az, ha ebből az elfogadott igazságból következtetünk, míg az állítás teljességéhez vagy megragadásához jutunk.

Az első tétel analízise és szintézise ábra nélkül:

Ossza C az AB szakaszt folytonos arányban, legyen AC a nagyobb darab, és mérjük föl egy AB felével egyenlő AD szakaszt. Azt állítom, hogy CD négyzete ötszöröse AD négyzetének.

Minthogy ugyanis CD négyzete ötszöröse DA négyzetének és CD négyzete egyenlő CA és AD négyzeteinek és a CA és AD közötti téglalap kétszeresének az összegével (II. 4.), CA és AD négyzeteinek és a CA és AD közötti téglalap kétszeresének az összege ötszöröse AD négyzetének. Fölbontva tehát, CA négyzetének és a CA és AD közötti téglalap kétszeresének az összege négyszerese AD négyzetének. A CA és AD közötti téglalap kétszeresével viszont egyenlő a BA és AC közötti téglalap – hiszen BA kétszerese AD -nek –, AC négyzetével pedig egyenlő az AB és BC közötti téglalap – hiszen AB -t folytonos arányban osztottuk föl – (VI. 17.), a BA és AC meg az AB és BC közötti téglalap összege tehát négyszerese AD négyzetének. A BA és AC meg az AB és BC közötti téglalap összege viszont AB négyzete (II. 2.), AB négyzete tehát négyszerese AD négyzetének. Valóban az, hiszen AB kétszerese AD -nek.



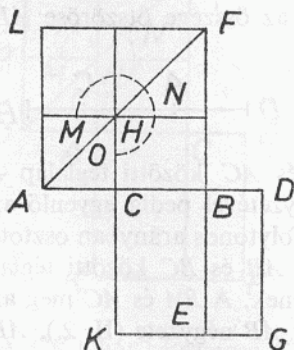
Szintézis

Minthogy AB négyzete négyszerese AD négyzetének és BA négyzete a BA és AC meg az AB és BC közötti téglalap összege, a BA és AC meg az AB és BC közötti téglalap összege négyszerese AD négyzetének. A BA és AC közötti téglalap viszont egyenlő a DA és AC közötti téglalap kétszeresével, az AB és BC közötti téglalap pedig egyenlő AC négyzetével, AC négyzetének és a DA és AC közötti téglalap kétszeresének az összege tehát négyszerese DA négyzetének, úgyhogy DA és AC négyzeteinek és a DA és AC közötti téglalap kétszeresének az összege ötszöröse DA négyzetének. DA és AC négyzeteinek és a DA és AC közötti téglalap kétszeresének az összege CD négyzete, CD négyzete tehát ötszöröse DA négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.

XIII. 2. Tétel

Ha egy szakasz négyzetértéke ötszöröse valamely darabjének, akkor a mondott darab kétszeresét folytonos arányban osztva a nagyobb darab épp az eredeti szakasz másik része.

Legyen ugyanis az AB szakasz négyzetértéke ötszöröse az AC darabjának, és legyen AC kétszerese CD . Azt állítom, hogy CD -t folytonos arányban osztva a nagyobb darab CB .



Szerkesszük meg ugyanis az AB és a CD szakaszra az AF , illetve a CG négyzetet (I. 46.), rajzoljuk meg az AF négyzetben az ábrát, és legyen BE a meghosszabbítás. Minthogy BA négyzete ötszöröse AC négyzetének, AF ötszöröse AH -nak, az MNO gnómón tehát négyszerese AH -nak. Minthogy DC kétszerese CA -nak, négyszerese DC négyzete CA négyzetének (II. 4.), azaz CG az AH -nak. Az MNO gnómónról is megmutattuk, hogy négyszerese AH -nak, az MNO gnómón tehát egyenlő CG -vel. Minthogy DC kétszerese

CA -nak és DC egyenlő CK -val, AC pedig CH -val, [KC is kétszerese CH -nak,] KB is kétszerese tehát BH -nak (VI. 1.). LH és HB összege is

kétszerese HB -nek (I. 43.), KB tehát egyenlő LH meg HB -vel. Megmutattuk azt is, hogy a teljes MNO gnómón egyenlő a teljes CH négyszettel, a maradék HF tehát egyenlő BG -vel. BG a CD és DB közötti téglalap – hiszen CD egyenlő DG -vel –, HF pedig CB négyzete, a CD és DG közötti téglalap tehát egyenlő CB négyzetével, DC tehát úgy aránylik CB -hez, mint CB a BD -hez. DC nagyobb CB -nél, tehát CB is nagyobb BD -nél (V. 14.). A CD szakaszt folytonos arányban osztva a nagyobb darab tehát CB . Éppen ezt kellett megmutatni.

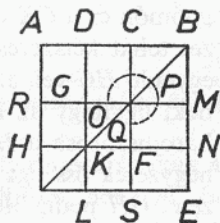
XIII. 3. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a kisebb darab és a nagyobb darab fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a nagyobb szakasz fele négyzetének.

Osszunk föl ugyanis valamely AB szakaszt folytonos arányban a C pontban (VI. 30.), legyen AC a nagyobb darab és AC felezőpontja D (I. 10.). Azt állítom, hogy BD négyzete ötszöröse DC négyzetének.

Szerkesszük meg ugyanis AB -re az AE négyszetet (I. 46.), és rajzoljuk meg ezt a kettőzött ábrát. Minthogy AC kétszerese DC -nek, AC négyzete négyszerese DC négyzetének, azaz RS az FG -nek (II. 4.). Minthogy az AB és BC közötti téglalap egyenlő AC négyzetével (VI. 17.) és az AB és BC közötti téglalap CE , CE egyenlő RS -sel. RS négyszerese FG -nek, tehát CE is négyszerese FG -nek. Továbbá, minthogy AD egyenlő DC -vel, HK is egyenlő KF -fel (I. 34.), úgyhogy a GF négyszet is egyenlő a HL négyszettel. GK tehát egyenlő KL -l, azaz MN az NE -vel, úgyhogy MF is egyenlő FE -vel (I. 36.). MF egyenlő CG -vel (I. 43.), tehát CG is egyenlő FE -vel. Adjuk hozzá mindkettőhöz CN -t, így az OPQ gnómón egyenlő CE -vel. Megmutattuk, hogy CE négyszerese GF -nek, tehát az OPQ gnómón is négyszerese az FG négyzetnek, az OPQ gnómón és az FG négyzet összege tehát ötszöröse FG -nek. Az OPQ gnómón és az FG négyzet összege DN . DN a DB négyzete, GF pedig DC négyzete, DB négyzete tehát ötszöröse DC négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 16.



XIII. 4. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a teljes szakasz és a kisebb darab négyzetösszege háromszorosa a nagyobb darab négyzetének.

Legyen AB egy szakasz, osszuk föl folytonos arányban a C pontban, és legyen AC a nagyobb darab. Azt állítom, hogy AB és BC négyzetösszege háromszorosa CA négyzetének.

Szerkesszük meg ugyanis AB -re az $ADEB$ négyzetet (I. 46.), és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy C folytonos arányban osztja AB -t és AC a nagyobb darab, az AB és BC közötti téglalap egyenlő AC négyzetével (VI. 17.). Az AB és BC közötti téglalap AK , AC négyzete pedig HG , AK tehát egyenlő HG -vel. Minthogy AF egyenlő FE -vel (I. 43.), ha mindkettőhöz hozzáadjuk CK -t, akkor a teljes AK egyenlő a teljes CE -vel, AK meg CE tehát kétszerese AK -nak. AK meg CE az LMN gnómón és a CK négyzet összege, az LMN gnómón meg a CK négyzet tehát kétszerese AK -nak. Viszont megmutattuk azt is, hogy AK egyenlő HG -vel, az LMN gnómón meg [a CK négyzet kétszerese HG -nek, úgyhogy az LMN gnómón meg] a CK , HG négyzetek összege háromszorosa a HG négyzetnek. Az LMN gnómón meg a CK , HG négyzetek összege a teljes AE meg CK , melyek AB , illetve BC négyzete, GH pedig AC négyzete, AB és BC négyzetösszege tehát négy-szerese AC négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.

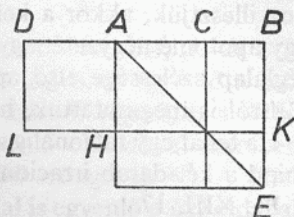
F.: XIII. 17.

XIII. 5. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk és hozzáadunk egy, a nagyobb darabbal egyenlő szakaszt, akkor a teljes szakasz folytonos arányban osztatik, mégpedig az eredeti szakasz a nagyobb darabja.

Osszuk föl ugyanis az AB szakaszt folytonos arányban a C pontban (VI. 30.), legyen AC a nagyobb darab és AC -vel egyenlő AD . Azt állítom, hogy A folytonos arányban osztja a DB szakaszt és a nagyobb darab az eredeti AB szakasz.

Szerkesszük meg ugyanis AB -re az AE négyzetet (I. 46.), és rajzoljuk meg az ábrát. Minthogy C folytonos arányban osztja AB -t, az AB és BC közötti téglalap egyenlő AC négyzetével (VI. 17.). Az AB és BC közötti téglalap CE , AC négyzete pedig CH , CE tehát egyenlő HC -vel. CE -vel viszont egyenlő HE (I. 43.), HC -vel pedig egyenlő DH (I. 36.), DH tehát egyenlő HE -vel. Adjuk hozzá mindkettőhöz HB -t. A teljes DK tehát egyenlő a teljes AE -vel. DK a BD és DA közötti téglalap – hiszen AD egyenlő DL -lel –, AE pedig AB négyzete, a BD és DA közötti téglalap tehát egyenlő AB négyzetével, DB tehát úgy aránylik BA -hoz, mint BA az AD -hez (VI. 17.). DB nagyobb BA -nál, tehát BA is nagyobb AD -nél (V. 14.).



A tehát folytonos arányban osztja DB -t, és AB a nagyobb darab. Éppen ezt kellett megmutatni.

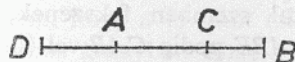
F.: XIII. 17.

XIII. 6. Tétel

*Ha egy racionális szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor mind a két darab irracionális, úgynevezett apotomé.**

Legyen AB egy racionális szakasz, osszuk föl folytonos arányban a C pontban és legyen AC a nagyobb darab. Azt állítom, hogy AC és CB is irracionális, úgynevezett apotomé.

Hosszabbítsuk meg ugyanis BA -t, és mérjük rá egy BA felével (I. 10.) egyenlő AD szakaszt. Minthogy C folytonos arányban osztja AB -t, és a nagyobb darabhoz hozzáadtuk AD -t, ami fele AB -nek, CD négyzete ötszöröse DA négyzetének (XIII. 1.), CD négyzete tehát úgy aránylik DA négyzetéhez, mint szám számhoz, CD négyzete tehát összemérhető DA négyzetével (X. 6.). DA négyzete racionális – hiszen DA racionális, mivel fele a racionális AB -nek –, tehát CD négyzete is racionális, tehát CD is racionális. Minthogy CD négyzete nem úgy aránylik DA négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz (VIII. 24.), CD lineárisan összemérhetetlen DA -val (X. 9.), CD és DA



tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok, AC tehát apotomé (X. 73.). Ismét, minthogy AB -t folytonos arányban osztottuk föl és AC a nagyobb darab, az AB és BC közötti téglalap egyenlő AC négyzetével (VI. 17.), ha tehát az AC apotomé négyzetét az AB racionális-hoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége BC . Ha viszont egy apotomé négyzetét egy racionálishoz illesztjük, akkor a keletkező téglalap szélessége első apotomé (X. 97.), CB tehát első apotomé. CA -ról is megmutattuk, hogy apotomé.

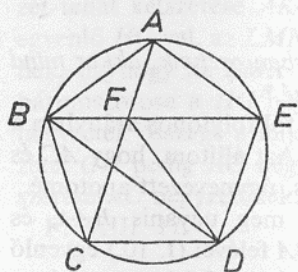
Ha tehát egy racionális szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor mind a két darab irracionális, úgynevezett apotomé.

F.: XIII. 17.

XIII. 7. Tétel

Ha egy egyenlő oldalú ötszög három akár egymás melletti, akár nem egymás melletti szöge egyenlő, akkor az ötszög egyenlő szögű.

Legyen ugyanis az $ABCDE$ egyenlő oldalú ötszögnek először három egymás melletti szöge, az A -nál, a B -nél és a C -nél levő egyenlő egymással. Azt állítom, hogy az $ABCDE$ ötszög egyenlő szögű.



Húzzuk meg ugyanis AC -t, BE -t és FD -t. Minthogy két-két oldal, CB , BA és BA , AE páronként egyenlő, és a CBA szög egyenlő a BAE szöggel, az AC alap egyenlő a BE alappal, az ABC háromszög egyenlő az ABE háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyek az egyenlő oldalakkal szemben fekszenek, BCA a BEA -val, ABE pedig CAB -vel (I. 4.), úgyhogy az AF oldal is egyenlő a BF oldallal (I. 6.). Megmutattuk azt is, hogy a teljes AC egyenlő a teljes BE -vel, tehát a maradék FC is egyenlő a maradék FE -vel. CD egyenlő DE -vel, tehát két-két oldal, FC , CD és FE , ED egyenlő; s az alapjuk, FD , közös, az FCD szög tehát egyenlő az FED szöggel (I. 8.). Megmutattuk, hogy a BCA szög egyenlő AEB -vel, a teljes BCD szög tehát egyenlő a teljes AED szöggel. BCD viszont feltétel szerint egyenlő az A -nál és a B -nél levő szöggel, AED is egyenlő tehát az A -nál és a B -nél levő szöggel. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy

a CDE szög is egyenlő az A -nál, a B -nél és a C -nél levő szöggel, az $ABCDE$ ötszög tehát egyenlő szögű.

Ne egymás melletti szögek legyenek most egyenlők, hanem legyenek egyenlők az A -nál, C -nél, illetve D -nél levő szögek. Azt állítom, hogy az $ABCDE$ ötszög ekkor is egyenlő szögű.

Húzzuk meg ugyanis BD -t. Minthogy két-két oldal, BA , AE és BC , CD egyenlő és egyenlő szöget zárnak be, a BE alap egyenlő a BD alappal, az ABE háromszög egyenlő a BCD háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyek az egyenlő oldalakkal szemben fekszenek, az AEB szög tehát egyenlő a CDB szöggel (I. 4.). A BED szög egyenlő a BDE szöggel, hiszen a BE oldal is egyenlő a BD oldallal (I. 6.), tehát a teljes AED szög egyenlő a teljes CDE szöggel. CDE viszont feltétel szerint egyenlő az A -nál és a C -nél levő szöggel, AED is egyenlő tehát az A -nál és a C -nél levő szöggel. Ugyanígy ABC is egyenlő az A -nál, a C -nél és a D -nél levő szöggel. Egyenlő szögű tehát az $ABCDE$ ötszög. Éppen ezt kellett megmutatni.

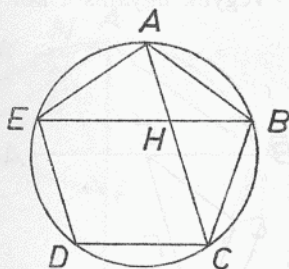
F.: XIII. 17.

XIII. 8. Tétel

Ha egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög két szomszédos szöggel szemközti átlóit meghúzzuk, akkor azok folytonos arányban osztják egymást, és a nagyobb darabjaik egyenlők az ötszög oldalával.

Húzzuk meg ugyanis az $ABCDE$ egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög két szomszédos szöggel szemközti átlóit, AC -t és BE -t, és ezek messék egymást a H pontban. Azt állítom, hogy a H pont mind a kettőt folytonos arányban osztja, és a nagyobb darabjaik egyenlők az ötszög oldalával.

Írjunk ugyanis az $ABCDE$ ötszög köré egy $ABCDE$ kört (IV. 14.). Minthogy két-két oldal, EA , AB és AB , BC egyenlő és egyenlő szögeket zárnak be, a BE alap egyenlő az AC alappal, az ABE háromszög egyenlő az ABC háromszöggel, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyek az egyenlő oldalakkal szemben fekszenek (I. 4.), a BAC szög tehát egyenlő ABE -vel,*



az AHE szög tehát kétszerese BAH -nak (I. 32.). Az EAC szög is kétszerese BAC -nek, minthogy az EDC ív is kétszerese a CB ívnek (III. 28., 27.), a HAE szög tehát egyenlő az AHE szöggel, úgyhogy a HE szakasz is egyenlő EA -val (I. 6.), azaz AB -vel. S minthogy BA egyenlő AE -vel, az ABE szög is egyenlő AEB -vel (I. 5.). ABE -ről viszont megmutattuk, hogy egyenlő BAH -val, tehát a BEA szög is egyenlő BAH -val. Az ABE és az ABH háromszögnek közös az ABE szöge, tehát a fennmaradt szögek, BAE és AHB is egyenlők (I. 32.), az ABE háromszög szögei tehát egyenlők az ABH háromszög szögeivel. EB tehát úgy aránylik BA -hoz, mint AB a BH -hoz (VI. 4.). BA egyenlő EH -val, BE tehát úgy aránylik EH -hoz, mint EH a HB -hez (V. 7., 11.). BE nagyobb EH -nál, EH is nagyobb tehát HB -nél (V. 14.). BE -t tehát folytonos arányban osztja H , és a nagyobb darab, CH , egyenlő az ötszög oldalával. Éppen ezt kellett megmutatni.

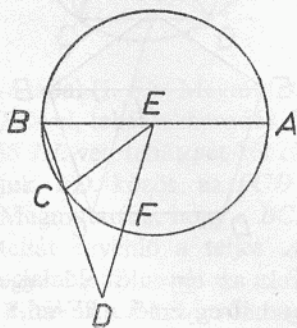
F.: XIII. 11.

XIII. 9. Tétel

Ha az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalát összeadjuk, akkor a teljes szakasz folytonos arányban osztott, és a nagyobb darabja a hatszög oldala.

Legyen ABC egy kör, az ABC körbe beírt tízszög oldala legyen BC (IV. 11., III. 30.), a hatszögé pedig CD (IV. 15.), és ezek feküdjenek egy egyenesen. Azt állítom, hogy a teljes BD szakasz folytonos arányban osztott, és a nagyobb darabja CD .

Vegyük ugyanis a kör E középpontját (III. 1.), húzzuk meg EB -t, EC -t és ED -t, és hosszabbítsuk meg BE -t A -ig. Minthogy BC az egyenlő oldalú tízszög oldala, az ACB ív ötszöröse a BC ívnek (III. 28.), az AC ív tehát négyszerese a CB ívnek. Amint viszont az AC ív a CB ívhez, úgy aránylik az AEC szög a CEB szöghöz (VI. 33.), az AEC szög tehát négyszerese a CEB szögnek. Minthogy az EBC szög egyenlő az ECB szöggel (I. 5.), az AEC szög kétszerese az ECB szögnek (I. 32.). Minthogy az EC szakasz egyenlő



CD -vel – hiszen mind a kettő egyenlő az ABC körbe beírt hatszög oldalával (IV. 15. K.) –, a CED szög is egyenlő a CDE szöggel (I. 5.), az ECB szög tehát kétszerese az EDC szögnek (I. 32.). Megmutattuk, hogy ECB -nek kétszerese az AEC szög, AEC tehát négyszerese az EDC szögnek. Megmutattuk, hogy BEC -nek is négyszerese az AEC szög, EDC tehát egyenlő a BEC szöggel. Két háromszögnek, BEC -nek és BED -nek közös az EBD szöge, tehát a fennmaradt szögek, BED és ECB is egyenlők (I. 32.), az EBD háromszög szögei tehát egyenlők az EBC háromszög szögeivel. DB tehát úgy aránylik BE -hez, mint EB a BC -hez (VI. 4.). EB egyenlő CD -vel, BD tehát úgy aránylik DC -hez, mint DC a CB -hez (V. 7., 11.). BD nagyobb DC -nél, DC is nagyobb tehát CB -nél (V. 14.). A BD szakasz tehát folytonos arányban osztott [C -ben], és a nagyobb darabja DC . Éppen ezt kellett megmutatni.

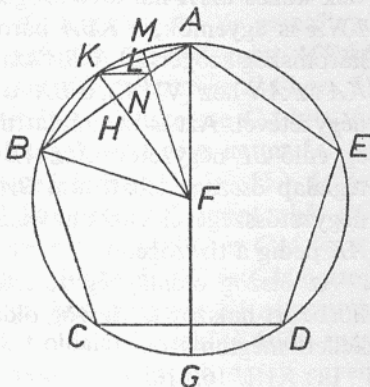
F.: XIII. 16., 18.

XIII. 10. Tétel

Ha egy körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala négyzetértékben egyenlő az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalának összegével.

Legyen $ABCDE$ egy kör, és írjunk az $ABCDE$ körbe egy egyenlő oldalú ötszöget (IV. 11.). Azt állítom, hogy az $ABCDE$ ötszög oldala négyzetértékben egyenlő az $ABCDE$ körbe írt hatszög és tízszög oldalának (négyzet) összegével.

Vegyük ugyanis a kör F középpontját (III. 1.), húzzuk meg AF -et és hosszabbítsuk meg a G pontig, húzzuk meg FB -t, bocsássunk F -ből AB -re egy FH merőlegest (I. 12.) és hosszabbítsuk meg K -ig, húzzuk meg AK -t és KB -t, bocsássunk ismét F -ből AK -ra egy FL merőlegest és hosszabbítsuk meg M -ig, és húzzuk meg KN -t. Minthogy az $ABCG$ ív egyenlő az $AEDG$ ívvel, s ezekből az ABC ív egyenlő AED -vel, a



maradék CG ív egyenlő a maradék GD ívvel. CD az ötszög oldala, CG tehát a tízszög oldala. Minthogy FA egyenlő FB -vel és FH merőleges, az AFK szög egyenlő KFB -vel (I. 5., 32.), úgyhogy az AK ív is egyenlő a KB ívvel (III. 26.), az AB ív tehát kétszerese a BK ívnek, az AK szakasz tehát a tízszög oldala. Ugyanígy az AK ív is kétszerese a KM ívnek. Minthogy az AB ív kétszerese a BK ívnek és a CD ív egyenlő az AB ívvel, a CD ív is kétszerese a BK ívnek. A CD ív a CG ívnek is kétszerese, a CG ív tehát egyenlő a BK ívvel. A BK ív viszont kétszerese a KM ívnek – hiszen KA is az –, a CG ív is kétszerese tehát a KM ívnek. A CB ív is kétszerese a BK ívnek, a CB ív ugyanis egyenlő a BA ívvel. A teljes GB ív is kétszerese tehát a BM ívnek, úgyhogy a GFB szög is kétszerese a BFM szögnek (VI. 33.). A GFB szög az FAB szögnek is kétszerese – hiszen az FAB szög egyenlő az ABF szöggel – (I. 32.), a BFN szög is egyenlő tehát az FAB szöggel. Két háromszögnek, ABF -nek és BFN -nek közös az ABF szöge, tehát a fennmaradt szögek, AFB és BNF is egyenlők (I. 32.), az ABF háromszög szögei tehát egyenlők a BFN háromszög szögeivel. Az AB szakasz tehát úgy aránylik BF -hez, mint FB a BN -hez (VI. 4.), az AB és BN közötti téglalap tehát egyenlő BF négyzetével (VI. 17.). Ismét, minthogy AL egyenlő LK -val és LN merőleges és közös oldal, a KN alap egyenlő az AN alappal (I. 4.) és az LKN szög egyenlő az LAN szöggel. Az LAN szög viszont egyenlő a KBN szöggel (III. 29., I. 5.), az LKN szög is egyenlő tehát a KBN szöggel. Két háromszögnek, AKB -nek és AKN -nek közös az A -nál levő szöge, tehát a fennmaradt szögek, AKB és KNA is egyenlők, a KBA háromszög szögei tehát egyenlők a KNA háromszög szögeivel. A BA szakasz tehát úgy aránylik AK -hoz, mint KA az AN -hez (VI. 4.), a BA és AN közötti téglalap tehát egyenlő AK négyzetével. Azt is megmutattuk, hogy az AB és BN közötti téglalap egyenlő BF négyzetével, az AB és BN közötti és a BA és AN közötti téglalap összege tehát, ami BA négyzete (II. 2.), egyenlő BF és AK négyzetösszegével. S BA az ötszög oldala, BF a hatszögé (IV. 15. K.), AK pedig a tízszögé.

Az ötszög oldala négyzetértékben tehát egyenlő az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalának (négyzet)összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

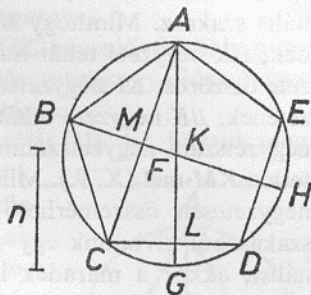
F.: XIII. 16., 18.

XIII. 11. Tétel

Ha egy racionális átmérőjű körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala irracionális, úgynevezett minor.*

Írjunk be ugyanis a racionális átmérőjű $ABCDE$ körbe egy $ABCDE$ egyenlő oldalú ötszöget (IV. 11.). Azt állítom, hogy az $[ABCDE]$ ötszög oldala irracionális, úgynevezett minor.

Vegyük ugyanis a kör F középpontját (III. 1.), húzzuk meg AF -et és FB -t, és hosszabbítsuk meg a G , illetve H pontig, húzzuk meg AC -t, és legyen FK negyedrésze AF -nek (I. 10.). AF racionális, tehát FK is racionális (X. 6.). BF is racionális, a teljes BK is racionális tehát (X. 15.). Minthogy az ACG ív egyenlő az ADG ívvel, s ezekből az ABC ív egyenlő az AED ívvel (III. 28.), a maradék CG ív egyenlő a maradék GD ívvel. Ha meghúzzuk AD -t, akkor az adódik, hogy az L -nél



levő szögek derékszögek (III. 27., I. 32.) és CD kétszerese CL -nek (I. 26.). Ugyanígy az M -nél levő szögek is derékszögek, és AC kétszerese CM -nek. Minthogy tehát az ALC szög egyenlő az AMF szöggel, és két háromszögnek, ACL -nek és AMF -nek közös az LAC szöge, a fennmaradt szögek, ACL és MFA egyenlők (I. 32.), az ACL háromszög szögei tehát egyenlők az AMF háromszög szögeivel, LC tehát úgy aránylik CA -hoz, mint MF az FA -hoz (VI. 4.), és az előtagok kétszeresét véve LC kétszerese úgy aránylik CA -hoz, mint MF kétszerese FA -hoz (V. 24.). Amint viszont MF kétszerese FA -hoz, úgy MF az FA feléhez (V. 15.), amint tehát LC kétszerese CA -hoz, úgy MF az FA feléhez (V. 11.), és az utótagok felét véve amint LC kétszerese CA feléhez, úgy MF az FA negyedrésséhez (V. 16., 15.). LC kétszerese DC , CA fele CM , FA negyedrésze pedig FK , amint tehát DC a CM -hez, úgy MF az FK -hoz, és összetéve amint DC és CM összege CM -hez, úgy MK a KF -hez (V. 18.), amint tehát DC és CM összegének a négyzete CM négyzetéhez, úgy MK négyzete KF négyzetéhez (VI. 22.). S minthogy ha az ötszög két oldalát összekötő átlót, vagyis AC -t, folytonos arányban osztjuk, akkor a nagyobb darab egyenlő

az ötszög oldalával, azaz DC -vel (XIII. 8.), és a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a teljes szakasz fele négyzetének (XIII. 1.), és a teljes AC szakasz fele CM , DC és CM összegének a négyzete ötszöröse CM négyzetének. Megmutattuk viszont, hogy MK négyzete úgy aránylik KF négyzetéhez, mint DC és CM összegének a négyzete CM négyzetéhez, MK négyzete tehát ötszöröse KF négyzetének. KF négyzete racionális, hiszen az átmérő racionális (X. 6., 12.), MK négyzete is racionális tehát, MK tehát racionális szakasz. Minthogy BF négyszerese FK -nak, BK ötszöröse KF -nek, BK négyzete tehát huszonötszöröse KF négyzetének. MK négyzete ötszöröse KF négyzetének, BK négyzete tehát ötszöröse KM négyzetének, BK négyzete tehát nem úgy aránylik KM négyzetéhez, mint négyzetszám négyzetszámhoz (VIII. 24.), BK lineárisan összemérhetetlen KM -mel (X. 9.). Mind a kettő racionális, BK és KM tehát csak négyzetesen összemérhető racionálisok. Ha viszont egy racionális szakaszból kivonunk egy vele csak négyzetesen összemérhető racionális, akkor a maradék irracionális, apotomé (X. 73.). MB tehát apotomé és MK illeszkedik hozzá. Azt is állítom, hogy negyedik. Legyen n négyzete egyenlő azzal, amivel BK négyzete nagyobb KM négyzeténél (X. 14. L.). BK négyzetértéke tehát n -ével nagyobb KM -énél. Minthogy KF összemérhető FB -vel, összetéve KB összemérhető FB -vel (X. 15.). BF összemérhető BH -val, BK is összemérhető tehát BH -val (X. 12.). Minthogy BK négyzete ötszöröse KM négyzetének, BK négyzete úgy aránylik KM négyzetéhez, mint öt az egyhez, fölforgatva tehát BK négyzete úgy aránylik n négyzetéhez, mint öt a négyhez (V. 19. K.), és nem mint négyzetszám négyzetszámhoz (VIII. 24.), BK tehát (lineárisan) összemérhetetlen n -nel (X. 9.), BK négyzetértéke tehát egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb KM -énél. Minthogy tehát a teljes BK szakasz négyzetértéke egy vele összemérhetetlen szakasz négyzetével nagyobb a hozzá illeszkedő KM -énél, és a teljes BK összemérhető az adott racionálissal, BH -val, MB negyedik apotomé. A racionális és negyedik apotomé által közrefogott téglalap viszont irracionális, és a szakasz, melynek négyzetértéke, irracionális, mégpedig minor a neve (X. 94.). A HB és BM közötti téglalap AB négyzetértéke, mivel ha meghúzzuk AH -t, akkor az ABH háromszög szögei egyenlők az ABM háromszög

szögeivel (III. 31., VI. 8.), és HB úgy aránylik BA -hoz, mint AB BM -hez (VI. 4., 17.).

Az ötszög AB oldala tehát irracionális, úgynevezett minor. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 16.

XIII. 12. Tétel

*Ha egy körbe egyenlő oldalú háromszöget írunk, akkor a háromszög oldala négyzetértékben háromszorosa a kör sugarának.**

Legyen ABC egy kör, és írjunk bele egy ABC egyenlő oldalú háromszöget (IV. 2.). Azt állítom, hogy az ABC háromszög egy oldala négyzetértékben háromszorosa az ABC kör sugarának.

Vegyük ugyanis az ABC kör D középpontját (III. 1.), húzzuk meg AD -t, és hosszabbítsuk meg E -ig, és húzzuk meg BE -t. Minthogy az ABC háromszög egyenlő oldalú, a BEC ív harmadrésze az ABC kör kerületének (III. 28.). A BE ív tehát hatodrésze a kör kerületének, BE tehát a (beírt) hatszög oldala, így egyenlő a DE sugárral (IV. 15. K.). Minthogy AE kétszerese DE -nek, AE négyzete négyszerese ED négyzetének (vö. VI. 22.), azaz BE négyzetének. AE négyzete egyenlő AB és BE négyzetösszegével (III. 31., I. 47.), AB és BE négyzetösszege tehát négyszerese BE négyzetének, szétbontva tehát AB négyzete háromszorosa BE négyzetének. BE egyenlő DE -vel, AB négyzete tehát háromszorosa DE négyzetének.

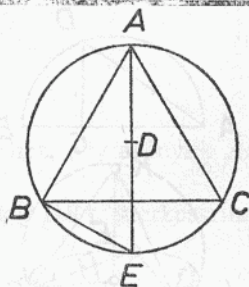
A háromszög oldala tehát négyzetértékben háromszorosa a [kör] sugarának. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 13.

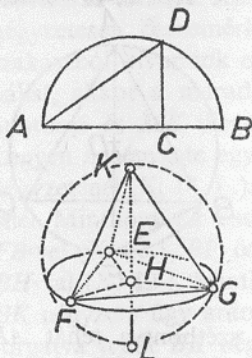
XIII. 13. Tétel

*Szerkesszünk (szabályos) gúlát, vegyük körül adott gömbbel, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben másfélszerese a gúla élének.**

Vegyük az adott gömb AB átmérőjét, osszuk föl úgy a C pontban,



szakasz tehát, KE , KF és KG egyenlő egymással. Minthogy AC kétszerese CB -nek, AB háromszorosa BC -nek. Amint viszont AB a BC -hez, úgy aránylik AD négyzete DC négyzetéhez, amint alant megmutatjuk (L.). AD négyzete tehát háromszorosa DC négyzetének. FE négyzete EH négyzetének szintén háromszorosa (XIII. 12.) és DC egyenlő EH -val, DA is egyenlő tehát EF fel. Megmutattuk, hogy DA egyenlő KE , KF és KG mindegyikével, egyenlő tehát EF , FG és GE mindegyike KE , KF és KG mindegyikével, e négy háromszög tehát, EFG , KEF ,



Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy a gömb átmérője négyzetértékben másfélszerese a gúla élének.

Legyen ugyanis KH egyenes menti meghosszabbítása HL , és mérjünk rá egy CB -vel egyenlő HL szakaszt (I. 3.). Minthogy AC úgy aránylik CD -hez, mint CD a CB -hez (VI. 8. K.) és AC egyenlő KH -val, CD a HE -vel, CB pedig HL -lél, KH úgy aránylik HE -hez, mint EH a HL -hez (V. 7., 11.), a KH és HL közötti téglalap tehát egyenlő EH

négyzetével (VI. 17.). KHE és EHL derékszögek, a KL fölé írt félkör tehát az E ponton is átmegy. Ha tehát a félkört a rögzített KL körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri (XI. 14. D.), akkor az F és a G ponton is átmegy, és a gúlát körülvevük az adott gömbbel. A gömb KL átmérője ugyanis egyenlő az adott gömb AB átmérőjével, minthogy KH egyenlő AC -vel, HL pedig CB -vel.

Azt állítom, hogy a gömb átmérője négyzetértékben másfélszerese a gúla élének.

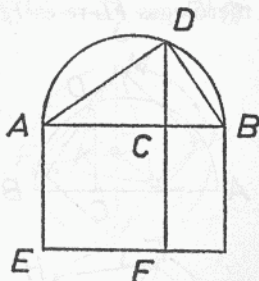
Minthogy ugyanis AC kétszerese CB -nek, AB háromszorosa BC -nek, fölforgatva tehát BA másfélszerese AC -nek. Amint viszont BA az AC -hez, úgy aránylik BA négyzete AD négyzetéhez (VI. 8. K., 20. 2. K.), BA négyzete is másfélszerese tehát AD négyzetének. S BA az adott gömb átmérője, AD pedig egyenlő a gúla élével. A gömb átmérője tehát (négyzetértékben) másfélszerese a gúla élének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 18.

XIII. 13. Lemma

Azt kell megmutatni, hogy amint AB a BC -hez, úgy aránylik AD négyzete DC négyzetéhez.

Vegyük ugyanis a félkör ábráját, húzzuk meg DB -t, szerkesszünk AC -re egy EC négyzetet (I. 46.), és egészítsük ki az FB paralelogrammát. Minthogy a DAB és DAC háromszögek szögeinek egyenlősége (III. 31., I. 32.) miatt BA úgy aránylik AD -hez, mint DA az AC -hez (VI. 4.), a BA és AC közötti téglalap egyenlő AD négyzetével. Minthogy AB úgy aránylik BC -hez, mint EB a BF -hez (VI. 1.), és EB a BA és AC közötti téglalap – hiszen EA egyenlő AC -vel –, BF pedig az AC és CB közötti téglalap, AB úgy aránylik BC -hez, mint a BA és AC közötti téglalap az AC és CB közötti téglalaphoz. A BA és AC közötti téglalap egyenlő AD négyzetével, az AC és CB közötti pedig egyenlő DC négyzetével – hiszen a DC merőleges középarányosa az alap darabjainak, AC -nek és CB -nek, ADB derékszög volta miatt (VI. 8.



K.) – amint tehát AB a BC -hez, úgy aránylik AD négyzete DC négyzetéhez. Éppen ezt kellett megmutatni.

XIII. 15. Tétel

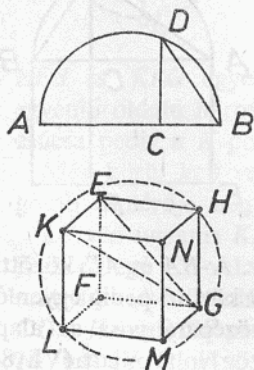
*Szerkesszünk kockát, vegyük körül a gömbbel, amellyel a gúlát is, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének.**

Vegyük az adott gömb AB átmérőjét, osszuk föl úgy a C pontban, hogy AC kétszerese legyen CB -nek (VI. 9.), írjunk AB fölé egy ADB félkört, emeljünk a C pontban AB -re egy CD merőleget (I. 11.), húzzuk meg DB -t, vegyünk egy DB -vel egyenlő oldalú $EFGH$ négyzetet (I. 46.), emeljünk az E, F, G és H pontban merőlegeseket az $EFGH$ négyzet síkjára (XI. 12.), vonjunk le az EK, FL, GM és HN félegyeneseik mindegyikéből egy EF, FG, GH és HE egyikével egyenlő EK, FL, GM , illetve HN szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg KL -t, LM -et, MN -t és NK -t. Szerkesztettünk tehát egy hat egyenlő négyzet által közrefogott FN kockát.

Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének.

Húzzuk meg ugyanis KG -t és EG -t. Minthogy KEG derékszög – mivel KE is merőleges az EG síkra és nyilván az EG egyenesre is –, a KG fölé írt félkör az E ponton is átmegy (III. 31.). Ismét, minthogy GF merőleges FL -re és FE -re, az FK síkra is merőleges (XI. 4.), úgyhogy

ha meghúzzuk FK -t, akkor GF az FK -ra is merőleges lesz, és ezért a GK fölé írt félkör F -en is átmegy. Ugyanígy a kocka többi csúcsán is átmegy. Ha tehát a félkört a rögzített KG körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, akkor a kockát gömbbel vettük körül. Azt állítom, hogy az adattal. Minthogy ugyanis GF egyenlő FE -vel és az F -nél levő szög derékszög, EG négyzete kétszerese EF négyzetének (I. 47.). EF egyenlő EK -val, EG négyzete tehát kétszerese EK négyzetének, úgyhogy GE és EK négyzetösszege, azaz GK négyzete, háromszorosa



EK négyzetének. S minthogy AB háromszorosa BC -nek és amint AB a BC -hez, úgy aránylik AB négyzete BD négyzetéhez (VI. 8. K., 19. K.), AB négyzete háromszorosa BD négyzetének. Megmutattuk, hogy GK négyzete szintén háromszorosa KE négyzetének; és KE egyenlő DB -vel, KG is egyenlő tehát AB -vel. AB az adott gömb átmérője, KG is egyenlő tehát az adott gömb átmérőjével.

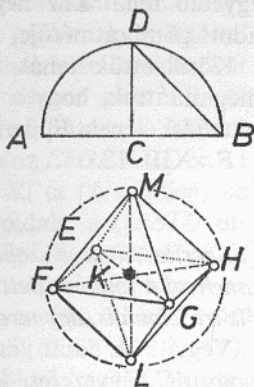
Körülvettük tehát a kockát az adott gömbbel, és egyúttal megmutattuk, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 17–18.

XIII. 14. Tétel

*Szerkesszünk (szabályos) oktaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel az előző testeket is, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben kétszerese az oktaéder élének.**

Vegyük az adott gömb AB átmérőjét, felezzük meg a C pontban (I. 10.), írjunk AB fölé egy ADB félkört, emeljünk C -ben AB -re egy CD merőlegest (I. 11.), húzzuk meg DB -t, vegyünk egy $EFGH$ négyzetet, melynek minden oldala egyenlő DB -vel (I. 46.), húzzuk meg HF -et és EG -t, emeljünk a K pontban az $EFGH$ négyzet síkjára egy KL merőlegest (XI. 12.), ennek a sík másik oldalán való meghosszabbítása legyen KM , vonjunk le a KL és a KM félegyenesből egy EK , FK , GK és HK egyikével egyenlő KL , illetve KM szakaszt (I. 3.), és húzzuk meg az LE , LF , LG , LH , ME , MF , MG , MH szakaszokat. Minthogy KE egyenlő KH -val (IV. 9.) és EKH derékszög, HE négyzete kétszerese EK négyzetének (I. 47.). Ismét, minthogy LK egyenlő KE -vel és LKE derékszög, EL négyzete kétszerese EK négyzetének. Megmutattuk, hogy HE négyzete is kétszerese EK négyzetének, LE négyzete tehát egyenlő EH négyzetével, LE tehát egyenlő EH -val. Ugyanígy LH is egyenlő HE -vel, az LEH háromszög tehát egyenlő oldalú. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy az összes többi háromszög is, melyek-



nek alapjai az $EFGH$ négyzet oldalai, csúcsai pedig az L, M pontok, egyenlő oldalú. Nyolc egyenlő oldalú háromszög által közrefogott oktaédert szerkesztettünk tehát.

Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy a gömb átmérője négyzetértékben kétszerese az oktaéder élének.

Mínthogy LK, KM és KE egyenlő egymással, az LM fölé írt félkör E -n is átmegy. S ugyanígy, ha a félkört a rögzített LM körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, akkor az F , a G és a H ponton is átmegy, és az oktaédert gömbbel vettük körül. Azt állítom, hogy az adottal. Mínthogy ugyanis LK egyenlő KM -mel, KE közös oldal, és egyenlő szögeket zárnak be, az LE alap egyenlő az EM alap-pal (I. 4.). S mínthogy LEM derékszög – hiszen félkörbeli (III. 31.) –, LM négyzete kétszerese LE négyzetének (I. 47.). Ismét, mínthogy AC egyenlő CB -vel, AB kétszerese BC -nek. Amint viszont AB a BC -hez, úgy aránylik AB négyzete BD négyzetéhez (VI. 8. K., 19. K.), AB négyzete tehát kétszerese BD négyzetének. Megmutattuk, hogy LM négyzete kétszerese LE négyzetének, és DB négyzete egyenlő LE négyzetével – hiszen EH -t DB -vel egyenlőnek vettük –, AB négyzete is egyenlő tehát LM négyzetével, AB tehát egyenlő LM -mel. AB az adott gömb átmérője, LM tehát egyenlő az adott gömb átmérőjével.

Körülvettük tehát az oktaédert az adott gömbbel, és egyúttal megmutattuk, hogy a gömb átmérője négyzetértékben kétszerese az oktaéder élének. Éppen ezt kellett megmutatni.

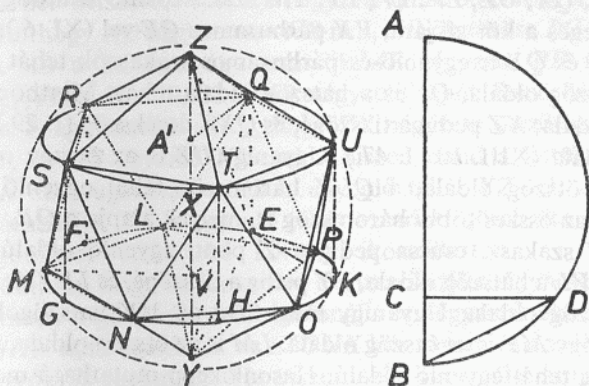
F.: XIII. 18.

XIII. 16. Tétel

*Szerkesszünk (szabályos) ikozaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel a fent említett testeket is, és mutassuk meg, hogy az ikozaéder éle irracionális, úgynevezett minor.**

Vegyük az adott gömb AB átmérőjét, osszuk föl úgy a C pontban, hogy AC négyszerese legyen CB -nek (VI. 9.), írjunk AB fölé egy ADB félkört, emeljünk C -ben AB -re egy CD merőlegest (I. 11.), húzzuk meg DB -t, vegyünk egy $EFGHK$ kört, melynek sugara egyenlő DB -vel, írjunk az $EFGHK$ körbe egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű $EFGHK$ ötszöget (IV. 11.), felezzük meg az EF, FG, GH, HK és KE íveket az L, M, N, O , illetve P pontban (III. 30.), és húzzuk meg az LM, MN ,

NO , OP , PL , EP szakaszokat. Ekkor az $LMNOP$ ötszög is egyenlő oldalú, és EP a tízszög oldala. Emeljük a E , F , G , H és K pontban a kör síkjára az $EFGHK$ kör sugarával egyenlő EQ , FR , GS , HT , illetve KU



merőlegeseket (XI. 12., I. 3.), és húzzuk meg a QR , RS , ST , TU , UQ , QL , LR , RM , MS , SN , NT , TO , OU , UP , PQ szakaszokat. Minthogy EQ és KU merőleges ugyanarra a síkra, EQ párhuzamos KU -val (XI. 6.). Egyenlő is vele, az egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok viszont egyenlők és párhuzamosak (I. 33.), QU tehát egyenlő és párhuzamos EK -val. EK az egyenlő oldalú ötszög oldala, tehát QU is az $EFGHK$ körbe írt egyenlő oldalú ötszög oldala. Ugyanígy QR , RS , ST és TU mindegyike is az $EFGHK$ körbe írt egyenlő oldalú ötszög oldala, a $QRSTU$ ötszög tehát egyenlő oldalú. Minthogy QE a hatszög oldala (IV. 15. K.), EP pedig a tízszögé, és QEP derékszög, QP az ötszög oldala, hiszen az ötszög oldala négyzetértékben egyenlő az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalának (négyzet)összegével (XIII. 10., I. 47.). Ugyanígy PU is az ötszög oldala. QU is az ötszög oldala, a QPU háromszög tehát egyenlő oldalú. Ugyanígy QLR , RMS , SNT és TOU mindegyike egyenlő oldalú háromszög. Minthogy megmutattuk, hogy QL és QP az ötszög oldala, és LP is az ötszög oldala, a QLP háromszög egyenlő oldalú. Ugyanígy az LRM , MSN , NTO , OUP háromszögek mindegyike is egyenlő oldalú. Vegyük az $EFGHK$ kör V középpontját

(III. 1.), emeljünk V -ben a kör síkjára egy VZ merőleget (XI. 12.), legyen VY a másik oldalon való meghosszabbítása, vonjunk le belőle egy VX hatszögoldalt és VY , XZ tízszögoldalakat (I. 3.), és húzzuk meg a QZ , QX , UZ , EV , LV , LY , YM szakaszokat. Minthogy VX és QE merőleges a kör síkjára, VX párhuzamos QE -vel (XI. 6.). Egyenlők is, EV és QX is egyenlő és párhuzamos szakaszok tehát (I. 33.). EV a hatszög oldala, QX is a hatszög oldala tehát. Minthogy QX a hatszög oldala, XZ pedig a tízszögé, és QXZ derékszög (I. 29.), QZ az ötszög oldala (XIII. 10., I. 47.). Ugyanígy UZ is az ötszög oldala.** QU is az ötszög oldala, a QUZ háromszög tehát egyenlő oldalú. Ugyanígy az összes többi háromszög is, melyek alapja a QR , RS , ST , illetve TU szakasz, csúcsa pedig a Z pont, egyenlő oldalú. Ismét, minthogy VL a hatszög oldala, VY pedig a tízszögé, és LVY derékszög, LY az ötszög oldala. Ugyanígy meghúzáva az MV hatszögoldalt azt kapjuk, hogy MY is az ötszög oldala. LM is az ötszög oldala, az LMY háromszög tehát egyenlő oldalú. Hasonlóképp mutatható meg, hogy az összes többi háromszög is, melyek alapja MN , NO , OP , illetve PL csúcsa pedig az Y pont, egyenlő oldalú. Húsz egyenlő oldalú háromszög által közrefogott ikozaédert szerkesztettünk tehát.

Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy az ikozaéder éle irracionális, úgynevezett minor.

Minthogy ugyanis VX a hatszög oldala, XZ pedig a tízszögé, X folytonos arányban osztja VZ -t, és a nagyobb darabja VX (XIII. 9.), ZV tehát úgy aránylik VX -hez, mint VX az XZ -hez. VX egyenlő VE -vel, XZ pedig VY -nal, ZV tehát úgy aránylik VE -hez, mint EV VY -hoz (V. 7., 11.). ZVE és EVY derékszög, ha tehát meghúzzuk az EZ szakaszt, akkor az YEZ , VEZ háromszögek hasonlósága (VI. 6., 4., V. 16.) miatt YEZ derékszög. Ugyanígy minthogy ZV úgy aránylik VX -hez, mint VX az XZ -hez és ZV egyenlő YX -szel, VX pedig XQ -val, YX úgy aránylik XQ -hoz, mint QX az XZ -hez, és ezért ismét ha meghúzzuk QY -t, akkor a Q -nál levő szög derékszög. Az YZ fölé írt félkör tehát Q -n is átmegy, és ha a félkört a rögzített YZ körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetét újra el nem éri, akkor Q -n és az ikozaéder többi csúcán is átmegy, és körülvettük gömbbel az ikozaédert. Azt állítom, hogy az adottal. Legyen ugyanis VX felezőpontja A' (I. 10.). Minthogy a VZ szakaszt X folytonos arányban osztja, és ZX a kisebb

darabja, ZX -nek és a nagyobb darab felének, XA' -nek az összegének a négyzetértéke ötszöröse a nagyobb darab felének a négyzetének (XIII. 3.), ZA' négyzete tehát ötszöröse $A'X$ négyzetének. ZA -nak kétszerese ZY , AX -nek kétszerese VX , ZY négyzete tehát ötszöröse XV négyzetének. Minthogy AC négyszerese CB -nek, AB ötszöröse BC -nek. Amint viszont AB a BC -hez, úgy aránylik AB négyzete BD négyzetéhez (III. 31., VI. 8. K., 19. K.), AB négyzete tehát ötszöröse BD négyzetének. Megmutattuk azt is, hogy ZY négyzete ötszöröse VX négyzetének, és DB egyenlő VX -szel – hiszen mind a kettő egyenlő az $EFGHK$ kör sugarával –, AB is egyenlő tehát YZ -vel. AB az adott gömb átmérője, YZ is egyenlő tehát az adott gömb átmérőjével. Az adott gömbbel vettük tehát körül az ikozaédert.

Azt állítom, hogy az ikozaéder éle irracionális, úgynevezett minor.

Minthogy a gömb átmérője racionális és négyzetértékben ötszöröse az $EFGHK$ kör sugarának, az $EFGHK$ kör sugara racionális, úgyhogy az átmérője is racionális. Ha viszont egy racionális átmérőjű körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala irracionális, úgynevezett minor (XIII. 11.). Az $EFGHK$ ötszög oldala az ikozaéder éle, az ikozaéder éle tehát irracionális, úgynevezett minor.

F.: XIII. 18.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a gömb átmérője négyzetértékben ötszöröse annak a körnek a sugarának, amelyre az ikozaédert emeltük, és hogy a gömb átmérője az ugyanebbe a körbe írt hatszög egy meg a tízszög két oldalának az összege. Éppen ezt kellett megmutatni.

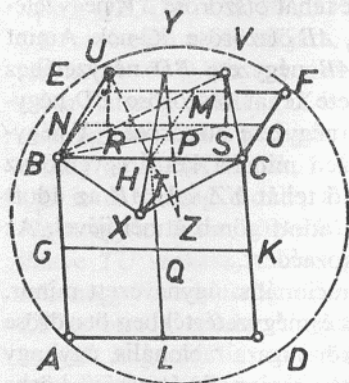
F.: XIII. 18.

XIII. 17. Tétel

*Szerkesszünk (szabályos) dodekaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel a fent említett testeket is, és mutassuk meg, hogy a dodekaéder éle irracionális, úgynevezett apotomé.**

Vegyük a fent említett kocka két, egymásra merőleges lapját, $ABCD$ -t és $CBEF$ -et (XIII. 15.), felezzük meg az AB , BC , CD , DA , EF , EB , FC oldalak mindegyikét a G , H , K , L , M , N , illetve O pontban (I. 10.), húzzuk meg GK -t, HL -t, MH -t és NO -t, ossza NP -t, PO -t és

HQ -t folytonos arányban az R , az S , illetve a T pont (VI. 30.), legyenek RP , PS és TQ a nagyobb darabjaik, emeljük a kocka lapjaira a kocka külső oldalán az RU , SV , TX merőlegeseket (XI. 12.), vegyük



őket RP -vel, PS -sel, illetve TQ -val egyenlőnek (I. 3.), és húzzuk meg az UB , BX , XC , CV , VU szakaszokat. Azt állítom, hogy az $UBXC$ V ötszög egyenlő oldalú, egy síkban fekszik és egyenlő szögű. Húzzuk meg ugyanis RB -t, SB -t és VB -t. Mint-hogy R folytonos arányban osztja NP -t és RP a nagyobb darabja, PN és NR négyzetösszege háromszorosa RP négyzetének (XIII. 4.). PN egyenlő NB -vel, PR pedig RU -val, BN és NR négyzetösszege tehát há-

romszorosa RU négyzetének. BN és NR négyzetösszegével egyenlő BR négyzete (I. 47.), BR négyzete tehát háromszorosa RU négyzetének, úgyhogy BR és RU négyzetösszege négyszerese RU négyzetének. BR és RU négyzetösszegével egyenlő BU négyzete (I. 47.), BU négyzete tehát négyszerese UR négyzetének BU tehát kétszerese RU -nak (vö. VI. 22.). VU is kétszerese UR -nek, minthogy SR is kétszerese PR -nek, azaz RU -nak (XI. 6., I. 33.), BU tehát egyenlő UV -vel. Hasonlóképp mutatható meg, hogy BX , XC és CV mindegyike egyenlő BU -val és UV -vel. A $BUVCX$ ötszög tehát egyenlő oldalú. Azt állítom, hogy egy síkban fekszik. Húzzuk meg ugyanis a P pontból RU -val és SV -vel párhuzamosan a kocka külső oldalán PY -t (I. 31., 30.), és kössük össze YH -t, HX -et. Azt állítom, hogy YHX egyenes. Minthogy ugyanis T folytonos arányban osztja HQ -t és a nagyobb darabja QT , HQ úgy aránylik QT -hez, mint QT a TH -hoz. HQ egyenlő HP -vel, QT pedig TX -szel és PY -nal, HP tehát úgy aránylik PY -hoz, mint XT a TH -hoz. HP párhuzamos TX -szel, mert mind a kettő merőleges a BD síkra (XI. 6.), TH pedig PY -nal, mert mind a kettő merőleges a BF síkra. Ha viszont két háromszöget – YPH -t és HTX -et –, melynek két-két oldala arányos, úgy illesztünk egy csúcsnál össze, hogy a megfelelő oldalaik párhuzamosak is, akkor

a fönymaradó oldalak egy egyenesen fekszenek (VI. 32.), *YH* és *HX* tehát egy egyenesen fekszik. Minden egyenes egy síkban fekszik (XI. 1.), az *UBXCV* ötszög tehát egy síkban fekszik (XI. 2., 7.).

Azt állítom, hogy egyenlő szögű.

Minthogy ugyanis *R* folytonos arányban osztja az *NP* szakaszt, a nagyobb darab *PR*, és *PR* egyenlő *PS*-sel, *P* folytonos arányban osztja *NS*-t és *NP* a nagyobb darabja (XIII. 5.), *NS* és *SP* négyzetösszege tehát háromszorosa *NP* négyzetének (XIII. 4.). *NP* egyenlő *NB*-vel, *PS* pedig *SV*-vel, *NS* és *SV* négyzetösszege tehát háromszorosa *NB* négyzetének, úgyhogy *VS*, *SN* és *NB* négyzetösszege négyszerese *NB* négyzetének. *SN* és *NB* négyzetösszegével egyenlő *SB* négyzete (I. 47.), *BS* és *SV* négyzetösszege tehát, azaz *BV* négyzete – hiszen *VS* derékszög –, négyszerese *NB* négyzetének, *VB* tehát kétszerese *BN*-nek (vö. VI. 22.). *BC* is kétszerese *BN*-nek, *BV* tehát egyenlő *BC*-vel. Minthogy két-két oldal, *BU*, *UV* és *BX*, *XC* egyenlő, és a *BV* alap egyenlő a *BC* alappal, a *BUV* szög egyenlő a *BXC* szöggel (I. 8.). Hasonlóképp mutatható meg, hogy *UVC* és *BXC* is egyenlő szögek, a *BXC*, *BUV*, *UVC* szögek tehát egyenlők egymással. Ha viszont egy egyenlő oldalú ötszög három szöge egyenlő egymással, akkor az ötszög egyenlő szögű (XIII. 7.), a *BUVCX* ötszög tehát egyenlő szögű. Azt is megmutattuk, hogy egyenlő oldalú, a *BUVCX* ötszög tehát egyenlő oldalú és egyenlő szögű, és a kocka egyik élén, *BC*-n fekszik. Ha tehát a kocka mind a tizenkét élére elvégezzük ugyanezt a szerkesztést, akkor egy tizenkét egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög által közrefogott testet kapunk, s ennek a neve dodekaéder.

Még körül kell venni az adott gömbbel, és megmutatni, hogy a dodekaéder éle irracionális, úgynevezett apotomé.

Legyen ugyanis *YZ* az *YP* meghosszabbítása. *PZ* találkozik a kocka átlójával, és felezik egymást, hiszen megmutattuk ezt a tizenegyedik könyv utolsó előtti tételében (XI. 38.). Messék egymást *Z*-ben. Ekkor *Z* a kockát körülvevő gömb középpontja és *ZP* a kocka élének fele. Húzzuk meg *UZ*-t. Minthogy *P* folytonos arányban osztja az *NS* szakaszt és *NP* a nagyobb darabja, *NS* és *SP* négyzetösszege háromszorosa *NP* négyzetének (XIII. 4.). *NS* egyenlő *YZ*-vel, minthogy *NP* is egyenlő *PZ*-vel, *YP* pedig *PS*-sel, és *PS* egyenlő *YU*-val, mint ahogy *RP*-vel is egyenlő. *ZY* és *YU* négyzetösszege tehát háromszorosa

NP négyzetének. *ZY* és *YU* négyzetösszegével viszont egyenlő *UZ* négyzete (I. 47.), *UZ* négyzete tehát háromszorosa *NP* négyzetének. A kockát körülvevő gömb sugara is háromszorosa négyzetértékben a kocka éle felének. Főntebb megmutattuk ugyanis, hogyan kell kockát szerkeszteni, gömbbel körülvenni és megmutatni, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének (XIII. 15.). Amint viszont az egészek, úgy a fele részek: *NP* fele része a kocka élének, *UZ* tehát egyenlő a kockát körülvevő gömb sugarával. *Z* a kockát körülvevő gömb középpontja, az *U* pont tehát a gömb felületén fekszik. Hasonlóképp mutathatnánk meg, hogy a dodekaéder összes többi (tér)szöge is a gömb felületén nyugszik. Körülvettük tehát a dodekaédert az adott gömbbel.

Azt állítom, hogy a dodekaéder éle irracionális, úgynevezett apotomé.

Minthogy ugyanis *NP*-t folytonos arányban osztva a nagyobb darab *RP*, *PO*-t folytonos arányban osztva pedig a nagyobb darab *PS*, a teljes *NO*-t folytonos arányban osztva a nagyobb darab *RS*: minthogy *NP* úgy aránylik *PR*-hez, mint *PR* az *RN*-hez, így a kétszereseik is, a részek aránya ugyanis ugyanaz, mint az ugyanannyiszorosaiké (V. 15.), *NO* tehát úgy aránylik *RS*-hez, mint *RS* az *NR* és *SO* összegéhez. *NO* nagyobb *RS*-nél, *RS* is nagyobb tehát *NR* és *SO* összegénél (V. 14.). *NO* tehát folytonos arányban osztott, és a nagyobb darabja *RS*. *RS* egyenlő *UV*-vel, ha tehát *NO*-t folytonos arányban osztjuk, akkor a nagyobb darab *UV*. Minthogy a gömb átmérője racionális és négyzetértékben háromszorosa a kocka élének (XIII. 15.), *NO*, mint kockaél, racionális. Ha viszont egy racionális szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor mind a két darab irracionális, apotomé (XIII. 6.).

Az *UV* szakasz tehát, mely éle a dodekaédernek, irracionális, apotomé.

F.: XIII. 18.

Következmény

Ebből már nyilvánvaló, hogy a kocka élét folytonos arányban osztva a nagyobb darab a dodekaéder éle. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 18.

XIII. 18. Tétel

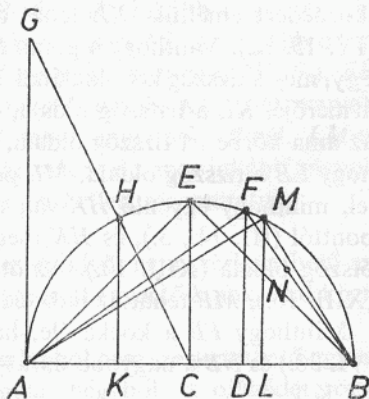
*Állítsuk elő az öt test élet, és hasonlítsuk össze egymással!**

Vegyük az adott gömb AB átmérőjét, osszuk föl C -ben úgy, hogy AC egyenlő legyen CB -vel, D -ben pedig úgy, hogy AD kétszerese legyen DB -nek (VI. 9.), írjunk AB fölé egy AEB félkört, emeljünk C -ben és D -ben AB -re egy CE , illetve DF merőlegest (I. 11.), és húzzuk meg AF -et, FB -t és EB -t. Minthogy AD kétszerese DB -nek, AB háromszorosa BD -nek. Fölforgatva tehát BA másfélszerese AD -nek. Amint viszont BA az AD -hez, úgy aránylik BA négyzete AF négyzetéhez – hiszen egyenlők az AFB háromszög szögei az AFD háromszög szögeivel (III. 31., VI. 8. K., 19. K.) –, BA négyzete tehát másfélszerese AF négyzetének. A gömb átmérője a gúla élének négyzetértékben szintén másfélszerese (XIII. 13.), és AB a gömb átmérője, AF tehát egyenlő a gúla élével.

Ismét, minthogy AD kétszerese DB -nek, AB háromszorosa BD -nek. Amint viszont AB a BD -hez, úgy aránylik AB négyzete BF négyzetéhez, AB négyzete tehát háromszorosa BF négyzetének. A gömb átmérője négyzetértékben szintén háromszorosa a kocka élének (XIII. 15.), és AB a gömb átmérője, BF tehát a kocka éle.

Minthogy AC egyenlő CB -vel, AB kétszerese BC -nek. Amint viszont AB a BC -hez, úgy aránylik AB négyzete BE négyzetéhez, AB négyzete tehát kétszerese BE négyzetének. A gömb átmérője négyzetértékben szintén kétszerese az oktaéder élének (XIII. 14.), és AB az adott gömb átmérője, BE tehát az oktaéder éle.

Emeljünk most az A pontban az AB egyenesre egy AG merőlegest, mérjük rá az AB -vel egyenlő AG szakaszt, húzzuk meg GC -t, és bocsássuk H -ből AB -re a HK merőlegest (I. 12.). Minthogy GA kétszerese AC -nek – hiszen GA egyenlő AB -vel – és GA úgy aránylik AC -hez, mint HK a KC -hez (VI. 4.), HK kétszerese KC -nek. HK négyzete tehát



négyszerese KC négyzetének (vö. VI. 22.), HK és KC négyzetösszege tehát, ami HC négyzete (I. 47.), ötszöröse KC négyzetének. HC egyenlő CB -vel, BC négyzete tehát ötszöröse CK négyzetének. Mint-hogy AB kétszerese CB -nek és ezekből AD kétszerese DB -nek, a mara-dék BD kétszerese a maradék DC -nek (V. 19.). BC tehát három-szorosa CD -nek, BC négyzete tehát kilencszerese CD négyzetének. BC négyzete ötszöröse CK négyzetének, CK négyzete tehát nagyobb CD négyzeténél, CK tehát nagyobb CD -nél. Mérjük föl a CK -val egyenlő CL -t, emeljük L -ben AB -re az LM merőleget, és húzzuk meg MB -t. Minthogy BC négyzete ötszöröse CK négyzetének, és BC -nek kétszerese AB , CK -nak pedig kétszerese KL , AB négyzete ötszöröse KL négyzetének. A gömb átmérője négyzetértékben szintén ötszöröse azon kör sugarának, melyre az ikozaédert emeltük (XIII. 16. K.), és AB a gömb átmérője, KL tehát annak a körnek a sugara, melyre az ikozaédert emeltük, KL tehát a mondott körbe írt hatszög oldala (IV. 15. K.). Minthogy a gömb átmérője a mondott körbe írt hatszög egy, meg a tízszög két oldalának az összege (XIII. 16. K.) és AB a gömb átmérője, KL a hatszög oldala, AK pedig egyenlő LB -vel, AK és LB az ama körbe írt tízszög oldala, melyre az ikozaédert emeltük. Mint-hogy LB a tízszög oldala, ML pedig a hatszögé – hiszen egyenlő KL -lel, minthogy egyenlő HK -val, mert egyenlő távol vannak a közép-ponttól (III. 14., 3.), és HK meg KL is kétszerese KC -nek –, MB az ötszög oldala (XIII. 10.). Az ötszög oldala viszont az ikozaéder éle (XIII. 16.), MB tehát az ikozaéder éle.

Minthogy FB a kocka éle, ha N -ben folytonos arányban osztjuk (VI. 30.) és NB a nagyobb darabja, akkor NB a dodekaéder éle (XIII. 17. K.).

Minthogy megmutattuk, hogy a gömb átmérője az AF gúlaélnak négyzetértékben másfélszerese, a BE oktaéderélnak négyzetértékben kétszerese, az FB kockaélnak pedig négyzetértékben háromszorosa, amiből a gömb átmérője négyzetértékben hat egység, abból a gúla éle négy, az oktaéder éle három, a kocka éle pedig két egység. A gúla éle tehát négyzetértékben az oktaéder élének négyharmada, a kocka élé-nek kétszerese, az oktaéder éle pedig a kockáénak másfélszerese. A há-rom test említett élei tehát – ti. a gúláé, az oktaéderé és a kockáé – racionális arányban állnak egymással. A többi kettő viszont, ti. az

íkozaéderé és a dodekaéderé, sem egymással (X. 6., 105., 11. K.), sem az előbb említettekkel nem áll racionális arányban, hiszen irracionálisok, az egyik minor (XIII. 16.), a másik apotomé (XIII. 17.).

Hogy az *MB* ikozaéderél nagyobb az *NB* dodekaéderénél, így mutatható meg:

Mínthogy az *FDB* háromszög szögei egyenlők az *FAB* háromszög szögeivel, *DB* úgy aránylik *BF*-hez, mint *BF* a *BA*-hoz (VI. 8.). Mínthogy három szakasz arányos, az első úgy aránylik a harmadikhoz, mint az első négyzete a második négyzetéhez (VI. 20. 2. K.), *DB* tehát úgy aránylik *BA*-hoz, mint *DB* négyzete *BF* négyzetéhez, megfordítva tehát *AB* úgy aránylik *BD*-hez, mint *FB* négyzete *BD* négyzetéhez (V. 7. K.). *AB* háromszorosa *BD*-nek, *FB* négyzete is háromszorosa tehát *BD* négyzetének. *AD* négyzete négyszerese *DB* négyzetének – hiszen *AD* kétszerese *DB*-nek –, *AD* négyzete tehát nagyobb *FB* négyzeténél, *AD* tehát nagyobb *FB*-nél, még inkább nagyobb tehát *AL* az *FB*-nél. *AL*-t folytonos arányban osztva *KL* a nagyobb darab, mínthogy *LK* a hatszög oldala, *KA* pedig a tízszögé (XIII. 9.), *FB*-t folytonos arányban osztva *NB* a nagyobb darab, *KL* tehát nagyobb *NB*-nél. *KL* egyenlő *LM*-mel, *LM* tehát nagyobb *NB*-nél. *LM*-nél nagyobb *MB* (I. 19.), *MB* tehát, az ikozaéder éle, még inkább nagyobb *NB*-nél, a dodekaéder élénél. Éppen ezt kellett megmutatni.

Azt állítom, hogy az említett öt testen kívül nem szerkeszthető más egyenlő oldalú, egyenlő szögű és egymással egyenlő lapok által közrefogott test.

Két háromszögből vagy egyáltalán lapból nem szerkeszthető ugyanis térszög. Három háromszögből a gúla, négyből az oktaéder, ötből pedig az ikozaéder térszöge szerkeszthető. Hat, egy ponthoz (mint közös csúcshoz) szerkesztett egyenlő oldalú és egyenlő szögű háromszögből nem lesz térszög, hiszen mivel az egyenlő oldalú háromszög egy szöge kétharmad derékszög, a hat négy derékszöggel egyenlő, ami nem lehetséges, mert valamennyi térszöget összegben négy derékszögnél kisebb szögek fognak közre (XI. 21.). Ugyanígy hatnál több (ilyen) síkszögből sem szerkeszthető térszög. Három négyzet a kocka térszögét fogja közre. Négyből nem lehet, mert ismét négy derékszög az összeg. Az egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszögekből: háromból

a dodekaéder térszöge szerkeszthető, négyből viszont nem lehet, hiszen mivel az egyenlő oldalú ötszög egy szöge egy egész egyötöd derékszög, a négy nagyobb négy derékszögnél, ami nem lehetséges. Ugyanezen ellentmondás miatt más sokszögek sem fognak közre térszöget. Éppen ezt kellett megmutatni.

XIII. 18. Lemma

Hogy pedig az egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög egy szöge egy egész egyötöd derékszög, azt így kell megmutatni:

Legyen ugyanis $ABCDE$ egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög, írjunk köré egy $ABCDE$ kört (IV. 14.), vegyük az F középpontját, és húzzuk meg az FA , FB , FC , FD , FE szakaszokat. Ezek felezik az ötszög A -nál, B -nél, C -nél, D -nél, illetve E -nél levő szögét (I. 8.). Minthogy az F -nél levő öt szög összege négy derékszöggel egyenlő (vö. I. 15. K.) és egyenlők, az egyikük, pl. AFB , egyötöd híján egy derékszög. A másik kettő, FAB és ABF összege tehát egy egész egyötöd derékszög (I. 32.). FAB egyenlő FBC -vel, az ötszög teljes ABC szöge tehát egy egész egyötöd derékszög. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 18.

A rövidítések feloldása, jelmagyarázat és útmutató a kereséshez

- D. jelentése: definíció (például: III. 6. D. a harmadik könyv 6. definíciója); a definíciók helyéről l. a Fordítói jegyzeteket, az 509. oldalon.
- P. jelentése: posztulátum (például: 5. P. az ötödik posztulátum); posztulátumok csak az I. könyvben fordulnak elő.
- Ax. jelentése: axióma (például: 6. Ax. a hatodik axióma); axiómák csak az I. könyvben fordulnak elő.
- L. jelentése: lemma (például X. 54. L. a X. 54. Tétel előtti lemma; X. 29. 2. L. a X. 29. Tétel előtti második lemma; a többi — VI., XI—XIII. — könyvben a lemmák az illető tétel *után* állnak).
- K. jelentése: következmény (például: I. 15. K. az I. 15. Tételből folyó következmény, VI. 20. 2. K. a VI. 20. Tételből adódó második következmény).
- F. jelentése: felhasználás (például a II. 6. Tétel utáni II. 11; III. 36.; X. 28. 1—2. L. felsorolás azt jelenti, hogy a II. 6. Tétel felhasználatik ezeknek a tételeknek, ill. lemmáknak a bizonyításában); a felhasználásokra nézve l. még a Fordítói jegyzeteket, az 510. oldalon.
- * jelentése: az állításhoz vagy kifejezéshez fordítói jegyzet tartozik (ha egy tételhez több megjegyzés is fűződik, akkor szerepel a ** jel is). Ha a csillag számmal való hivatkozás után áll (például: II. 9.*), akkor ez magát a jegyzetet jelöli.

()

< > jelentésüket l. a Fordítói jegyzetekben, az 509. oldalon.

[]

A tételszámozás rendjéről és a definíciók elhelyezéséről, valamint a rendhagyó esetekről l. a Fordítói jegyzeteket, az 509. oldalon.

Fordítói jegyzetek

Az Elemek hagyományozása. A mű a görög világban igen kedvelt felsőoktatási tankönyv volt, annyira, hogy a korábban írt hasonló tárgyú könyveket ki is szorította a használatból. Érthető, hogy időnként némileg átdolgozott kiadásai jelentek meg. Tudjuk, hogy 60 körül (?) Hérón, 370 körül pedig alexandriai Theón gondozott egy-egy új kiadást. A fennmaradt görög kéziratok mind 700 után íródtak, és a Theón-kiadás szövegét tartalmazzák, kivéve egyetlenegy, mely egy személyhez nem köthető előző változatot tartalmaz. Az Euklidész szövegén végrehajtott módosítások között nyilván vannak, amelyek matematikai szempontból javítottak rajta, de gyakran megtörtént, hogy Euklidész által joggal triviálisnak tartott állítások bizonyítását pótolták pl. lemmák formájában. Több kommentár is született, de görögül Proklosznak (412–485) az első könyvhöz írt kommentárján kívül csupán névtelen, a kéziratlapok szélére írt magyarázatok (szkholionok) maradtak fenn.

A rómaiak nem tanúsítottak nagy érdeklődést és tehetséget a matematika iránt. A korábbi időkben az Elemek fordításának csupán néhány részlete ismert. Fennmaradt még egy rövid töredék, mely esetleg Marcus Terentius Varrótól (i. e. 116–27) származik. Az ókor vége felé, 505 körül, Anicius Manlius Severinus Boethius (480 k.–524) készített egy latin fordítást, azonban ebből is csak töredékek maradtak ránk (az első öt könyv definíciói, az első négy könyv tételei, és I. 1–3. bizonyítása, illetve szerkesztése). Ennél több valószínűleg már a IX–X. században sem volt meg a fordításból.

Behatóan foglalkoztak viszont a görög matematikusok munkáival, köztük az Elemekkel is, a (szír és) arab tudósok. Először Haddzsáds fordította le 810 körül, majd még ugyanebben a században készült (szírből?) egy másik fordítás, melyet Szábit ibn Kurra (megh. 901) dolgozott át. Az arabok az Elemekhez írt görög kommentárokat is lefordították, és ezeket fölhasználva

maguk is magyarázták a művet. Papposznak (300 k.) a X. könyvhöz írt kommentárja csak arab fordításban (X. század első negyede) maradt fenn, s megőrzött Hérón, Szimplikiosz (VI. század első fele) és egy bizonyos Aganis vagy Agafius (= ? Agapiosz) kommentárjából néhány gondolatot an-Nairízié (megh. 922 k.), melynek arabul csak az első hat könyvre vonatkozó részei maradtak fenn.

Boethius elveszett Geometriáját aurillaci Gerbert bencés szerzetes, a későbbi II. Szilveszter pápa († 1003)* igyekezett pótolni. Írása az európai tudománynak abban a korszakában a legmagasabb színvonalú volt. Forrásul — műve ránk maradt első fejezetei alapján ítélve — valószínűleg csak az akkor rendelkezésre álló latin nyelvű munkák szolgáltak, noha Gerbert 967—970 között Spanyolországban járt, és arab tudósoktól is tanult. A XII. században viszont már nagyon sokat merítettek az európaiak arab forrásokból, s az említett különböző arab Elemek-fordításokból legalább három latin átültetés készült: bathi Adelardé, cremonai Gherardóé, és karinthisi Hermanné. Gherardo többek között an-Nairízi — latinosan Anaritius — kommentárját is lefordította, s az első tíz könyvre vonatkozó részek fenn is maradtak. Novarai Campano a XIII. század közepén Adelard szövege alapján készítette el a maga átdolgozását, s az övé terjedt el a következő századokban a legjobban, az Elemek első nyomtatott kiadása (Velence, 1482) is ezt tartalmazza. A XV. században a görög szöveg ismerete is kezdett szélesebb körűvé válni, s nem sokára nyomtatásban is megjelent (Velence, 1505) Bartholomeo Zamberti (1472—megh. 1539 után) immár eredetiből készült fordítása. Magát a görög szöveget először Melanchthon egyik barátja, Simon Grynaeus (1493—1541) adta ki (Basel, 1533), aki 1521—22 körül járt és tanított Budán is. Az Elemeket nyilván Magyarországon is ismerték a középkorban, ha nem is sokan. Tudni lehet pl., hogy a Boethius-fordítás törmelékeinek egyik kézirata a XV. században a domonkosok budai kolostoráé volt. A mű (legalábbis a könnyebben emészthető részek) a legtöbb egyetemen tananyag volt. Rendkívüli elterjedtségét mutatja, hogy — még ha talán túlzás is az a közkeletű állítás, hogy a Biblia után a második legtöbb kiadást érte meg — 150 év alatt, 1482-től 1632-ig, több mint 150-szer adták ki, a latinon és arabon (1594) kívül beleértve a német (1532 stb.), olasz (1543), francia (1564), angol (1570), spanyol (1576), kínai (1595) és holland (1606) nyelvű fordításokat és átdolgozásokat is. Magyarul először Apáczai Csere János, a gyulafehérvári református kollégium tanára szólaltatott meg néhány részletet Euklidészből 1655-ben megjelent Enciklopédiájában. E mű

* Ő küldte Szt. Istvánnak a koronát.

geometriai részének forrása egy párizsi egyetemi tanár latin nyelvű tankönyve volt. Apáczai írása valószínűleg nem vitte sokkal előbbre a geometria ügyét hazánkban.

Az 1599-ben megjelent nemzetközi érvényű jezsuita tanügyi szabályzat is előírta — az 1548 óta kialakult gyakorlatnak megfelelően — az Elemek tanulmányozását az akadémiák hallgatói számára. 1581-ben Báthory István lengyel király és erdélyi fejedelem egyetemet alapított Kolozsvárott, de az a jezsuiták többszöri kiűzése miatt nem működött folyamatosan. Pázmány Péter 1635-ben megalapította a nagyszombati egyetemet. Magyarországon itt jelent meg az első geometriai tárgyú könyv, egy szögfüggvény-táblázat* (1694). Különbön a hazai egyetemeken és akadémiákon külföldi tankönyveket használtak. Tosch Károly (1687—1737), aki Nagyszombatban is adott elő matematikát, grazi tartózkodása idején (1730) adta ki rövid kivonatát Euklidészből. Az első hazai geometriai tankönyv a kolozsvári jezsuita akadémia kiadásában jelent meg. Jánosi Miklós** (1700—1741) rendezte sajtó alá 1737-ben J. Gooden (1670—1730) angol jezsuita trigonometriai tankönyvét (Liège, 1704), mely függelékben a szükséges elemi geometriai tudnivalókat is közölte Euklidész nyomán.*** A következő évben ismét Grazban jelenik meg magyar vonatkozású geometria-tankönyv, Ignace Gaston Pardies (1636—1673) francia jezsuitáé. E mű eredetileg franciául íródott (megj. Párizs, 1671), de a szerző halála után lefordították latin (Jena, 1684, 1685 és 1693), holland (1690) és angol (1746) nyelvre is. A grazi latin kiadás gondozója Faludi Ferenc (1704—1779) volt, aki nálunk magyar nyelvű költeményei révén ismert, és 1746—47-ben a Pázmány alapította egyetemen is professzorkodott. Ugyanezt a művet 1749-ben a kolozsvári akadémia is kiadta, Pongrácz Istvánnak, a hasonló nevű kassai vértanú rendtársának a gondozásában. Négy évvel később a kassai egyetem is megjelentetett geometria-tankönyvet, André Tacquet (1612—1660) S. J. joggal kedvelt, legalább tíz kiadást^o megért munkáját, mely az Elemek első négy könyvét tartalmazza kisebb módosításokkal és gondolatébresztően összeállított magyarázatokkal. Még 1746-ban Cörver Elek, a pesti piarista akadémia tanára is írt tankönyvet, mely az Elemekből csak a szerkesztési feladatokat tartalmazza, valamint pl. területszámításokat. Makó Pál (1724—1793) S. J.

* $6'$ -enként közli a $\sin$, tg és $\secans$ függvény értékét 10^{-5} pontossággal. A háromszög-számítások elméleti indoklásában természetesen Euklidész tételeire hivatkozik.

** Ő készítette az akadémia csillagvizsgálójának első terveit.

*** Egy másik függelék: hétjegyű függvénytábla ($\sin$, tg , $\lg \sin$, $\lg \operatorname{tg}$, $\lg \operatorname{stb.}$).

^o Az első: Antwerpen, 1654.

1763-óta Bécsben tanított, tankönyvei is itt jelentek meg (1764-től), de ezeket Nagyszombatban is használták. A Pázmány-Egyetem Budára költözése után, 1777-ben, ő lett a bölcsészeti kar igazgatója, s a következő évben Budán is megjelent két matematika-tankönyve. A század legjelentősebb magyar matematikusa, Segner János András (1704–1777) már 1732-ben elhagyta az országot, Németországban jelentek meg könyvei, előbb latinul, majd — fia fordításában — németül is. Az ő előszavával jelent meg először (1773-ban) a legtöbbször kinyomtatott német *Elemek*-fordítás. Ebben a korban a geometria-tankönyvek már egyre jobban elszakadtak az antik előképtől.

Magyarra először Brassai Sámuel (1797–1897) fordította le az *Elemeket* (1865)*, másodszor Baumgartner Alajos (1865–1930), de csak az első hat könyvet (Középisk. Mat. Lapok, 1903–05).

Jelen fordítás a kiváló dán filológus, J. L. Heiberg (1854–1928)** által gondozott görög szöveg (Lipcse, 1883–88) újabb lenyomata (uo. 1969–77) alapján készült.

Az ábrák nem a görög kiadás, hanem a Clemens Thaer német fordításában (Lipcse, 1933–37) levők alapján készültek, így elmaradtak az általa nem hiteleseknek tartott tételek és lemmák ábrái.

Nem tartalmazza a fordítás azon részeket (kettő kivételével), melyeket Heiberg a kötetek végén, függelékként helyezett el, mert későbbi betoldásoknak ítélte őket. Ezek túlnyomórészt egy-egy tétel másfajta bizonyítását adják.

A tételek a számozás sorrendjében követik egymást, a definíciók pedig az illető könyv elején vannak, kivéve a XIII. 15–14. tételeket (492–94. o.), a X. könyv definícióinak második (325. o.) és harmadik (363. o.) csoportját, továbbá a X. 27. (400. o.) és XIII. 8. (477. o.) számú függelékeket.

A fordításban három fajta zárójelet alkalmaztam. Ami szögletes zárójelben van, az a görög kéziratokban ugyanott áll, de Euklidész utáni betoldásnak ítélnélhető. Hegyes zárójelek között olyan szavak állnak, melyek a kéziratokban nincsenek ott, de föltételezhető, hogy Euklidész szándéka szerint ott kellene állniuk. Végül minden, ami kerek zárójelben áll, csupán a könynyebb megértést segítő fordítói kiegészítés vagy magyarázat, mint pl. a korábbi tételekre számmal való hivatkozások. Maga Euklidész a fölhasznált tétel szövegét szokta idézni, csak X. 10. L.-ben, XII. 2.-ben és XIII.

* Ami a szomszéd népeket illeti, pl. az első lengyel fordítás 1807-ben jelent meg (I–VI., XI–XII. könyv).

** Ugyancsak ő adta ki pl. Arkhimédész, Apollóniosz és Ptolemaiosz műveit, de az általa igen becsült Kierkegaard műveinek kritikai kiadásában is részt vállalt.

17.-ben utal a tétel helyére. Szintén fordítói kiegészítés, hogy a posztulátumok, axiómák és tételek után F. jelzi az Elemek-beli fölhasználásukat (a 44. o.-on idézett olasz munka nyomán, néhány módosítással). Ezekből a legegyszerűbb állításoknál csupán válogatást adunk.

Euklidész a bizonyítás után többnyire megismétli a tételt. Ezt az ismétlést az V–XI. könyvben lerövidítettem. A többi helyen (X–XI. könyv) az eredeti szöveg is rövidít.

A jegyzetekben dőlt betűkkel szedett szavak címszavak a mutatóban.

I. 1. D. Vö. a 8. axiómával.

I. 4. D. Egyenes vonal: a továbbiakban a görögben röviden csak „egyenes” (eutheia), de ez a szó bármilyen összefüggő lineáris alakzatot jelölhet, s így gyakran „szakasz”-nak fordítom. Euklidész csak különösen fontos esetben írja körül a szakasz (2. P., I. 1. és 10.) és a félegyenes (I. 22.) fogalmát. E definíció értelme homályos; Proklosz szerint az, amit Arkhimédész posztulál egyik művében, ti. hogy a két pontot összekötő vonalak közül az egyenes a legrövidebb.

I. 7. D. Síkfelület: a továbbiakban röviden csak „sík”. A definíció Proklosz szerint szintén a minimalitásra utal.

I. 9. D. Görög felfogás szerint szöget különböző görbék is közrezárhatnak, mint pl. III. 7. D. értelmében.

I. 18. D. A hegyes zárójelben levő szavak csak Proklosznál olvashatók. A 18. D. után a kódexekben a III. 6. D. is ott áll.

I. 19. D. A „sokszög” jelentésű szavak közül az Elemekben régies a „sokoldalú”, újabb az „egyenes vonalú”, és úgy látszik, még későbbi réteghez tartozik a „sokszögű” (polygónon) kifejezés. Szintén elavult a „háromoldalú”, de a „négyoldalú” megmaradt, mert „négyszögű” (tetragónon) jelentése „négyzet”-té szűkült.

I. 22. D. Lásd a 26. o.-t. A *paralelogramma* csak I. 34.-ben bukkan föl.

4. P. A geometria Hilbert-féle fölépítése I. 4.-et axiómának veszi, s ekkor a 4. P. könnyen bizonyítható (mint azt Proklosz is teszi). Az Elemekben viszont 4. P.-ra már itt szükség van ahhoz, hogy értelmes legyen az 5. P.-ban a „két derékszögnél kisebb” kifejezés, és a továbbiakban ahhoz, hogy a derékszög (R) a szögmérés alapja lehessen (nemcsak a $2R = 180^\circ$ esetben): pl. $\frac{1}{2} R = 45^\circ$ (II. 9.), $\frac{2}{3} R = 60^\circ$ (IV. 15.), $1\frac{1}{5} R = 108^\circ$ (XIII. 18. és XIII. 18. L.).

4. Ax. Ez után a legtöbb kódexben még egy axióma áll: „Ha nem egyen-

lőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok nem egyenlők.”, és az 5. P. az utolsó axiómaként szerepel (lásd a 27. o. lábjegyzetét).

9. Ax. Más szóval az 1–2. P.-beli egyenesek unicitását mondja ki.

I. 1. A szerkesztési feladatok a kérdéses alakzat egzisztenciáját is hivatva vannak biztosítani.

I. 2. G értelemszerűen éppen BF és a CGH kör metszéspontja.

I. 3. Adott szakasznak tetszőleges félegyenesre való fölmérhetőségét biztosítja. Néhány I. 3.-at használó tételben (pl. I. 5., 9., 11., 16., 18., 20.) eléggene helyette a 3. P., a fogalmazás azonban erre a tételre utal. Másrészt, külön bizonyítás nélkül használja térbeli általánosítását is (XI. 6.).

I. 4.* Az *egyenlő* (iszosz) szó a görögben nemcsak szakaszok és szögek, hanem területek és térfogatok egyenlőségének jelölésére is használatos. Az egybevágóság fogalmát — a *hasonlóság* bevezetése után — az „egyenlő és hasonló” kifejezés írja körül, így átalakítva idézi I. 4.-et XII. 3.-ban. Ez a szóhasználat föltételezi azt a tételt, hogy hasonló síkidomok és testek pontosan akkor egyenlő (mértékű)ek, ha a megfelelő szakaszok egyenlők. Euklidész talán a 7. és 8. Ax.-ból találta ezt könnyen levezethetőnek. Négyzetekre már I. 48.-ban használja. A VI. 22. L. valószínűleg még Theón előtti betoldás.

** E tétel csupán a 7. Ax.-ba implikált mozgítás (méghezzá ellenkező körüljárású háromszögek esetében térbeli mozgítás) segítségével igazolható. Ha a mozgathatóságot pontosan meg akarnánk határozni vagy el akarnánk kerülni, akkor föl kellene vennünk az I. 3. és 23.-beli alakzatok egzisztenciáját és I. 4.-et kongruencia-axiómákként, amint azt Hilbert tette. I. 5. bizonyításában láthatólag Euklidész is tartózkodik a mozgástól.

I. 7. Szó szerint „sokkal nagyobb” — mindig ezt a kifejezést találjuk, ha a *transzitivitásból* következik egy egyenlőtlenség.

I. 11. Euklidész itt nem használja a „*merőleges*” (kathetosz) szót: annak eredeti jelentése „lebocsátott”.

I. 13. Vagyis adjuk a $\widehat{CBE} = \widehat{CBA} + \widehat{ABE}$ egyenlet mindkét oldalához hozzá $\widehat{EBD}$ -t.

I. 15. K. Némely kódexben tetszőleges sok egyenesre mondatik ki az állítás. Ez kell XIII. 18. L.-ben.

I. 24. Euklidész a bizonyítás egy részét gyakran az olvasóra hagyja. Ha $EFGD$ konkáv, akkor I. 21. miatt $DF + FE < DG + GE$, tehát $FG < GE$.

I. 26. A tételnek ez a második fele I. 32.-ből rögtön következne. Euklidész nyilván el akarta kerülni, hogy az 5. P.-ra ott is támaszkodjék, ahol ez nem feltétlenül szükséges, vagyis abszolút geometriai szemlélete volt.

I. 29. Ezzel a tétellel kezdődik meg a nem abszolút geometriai része az első könyvnek.

I. 32. $\widehat{ACD} = \widehat{CAB} + \widehat{ABC}$, $2R = \widehat{ACD} + \widehat{BCA} = \widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}$.
A levezetéseket szöveges formában roppant nehéz követni, célszerű tehát az olvasás során modern formulákra átírni.

I. 33. Ugyanis AD és BC szintén összekötik őket, de nem az ugyanazon az oldalon levő végpontokat. Különbözik annyi az abszolút geometriában is igaz, hogy egy $ACDB$ (konvex) négyszög szemközti szögei pontosan akkor egyenlők, ha a szemközti oldalai azok, és az ilyen négyszöget bármely átlója két egybevágó háromszögre bontja.

I. 34. „Párhuzamos vonalú” görögül parallelogrammon: e szót külön definíció nélkül alkalmazza Euklész.

I. 35. * Értsd: adjuk mindkettőhöz hozzá DE -t.

** Értsd: az AE összeg.

I. 40. Valószínűleg az egész tétel csupán Theón előtti okoskodó betoldás. Az ábrán BC és CE egy egyenes két érintkező szakasza kell legyen.

I. 43. * A paralelogrammák röviden csak két szemközti csúcscsal jelölhetnek.

** Magyarul „töltelék”. A II. 2. D.-ban mint a gnómón alkotórészei szerepelnek.

I. 44. * Hozzáillesztés görögül parabolé, a tétel tehát a parabolikus területillesztést tárgyalja. Magyarozatát Proklosz így kezdi: „Mint Eudémosz nyomán mondják, a pythagoreusok műzsájának régi leleményei ezek, a területek paraboléja, hyperboléja (illesztés többlettel — VI. 29.) és ellipszisz (illesztés hiánnyal — VI. 28.). Az újabb szerzők (ti. Apollóniosz óta) innen kölcsönözve az elnevezéseket, átvitték azokat az úgynevezett kúpszeletekre, s ezek közül is az egyiket parabolénak, a másikat hyperbolénak, a harmadikat pedig ellipszisznek nevezték el, míg ama régi, isteni férfiak ezen elnevezések jelentését idomoknak meghatározott szakaszhoz való síkbeli illesztésében látták.” Apollóniosz azért vette át az elnevezéseket, mert a kúpszeletek — természetesen szintén területegyenlőséget kimondó — egyenlete kapcsolatba hozható az I. 44. és VI. 28–29. tételekben megkövetelt területegyenlőséggel.

** Most már megvannak az eszközök a paralelogramma mozgathatóságához.

I. 45. A négynél több oldalú sokszög esete ugyanígy (szigorúan véve teljes indukcióval) intézhető el. Ez a tétel és I. 41. biztosítja, hogy I. 44. háromszög helyett bármely sokszögre alkalmazható legyen.

II. 2. D. Az I. 43. ábrán levő helyzetet föltételezi a definíció. Ezen gnómón vagy a *HKEBCD* vagy az *FDABGK* konkáv hatszög. A gnómón eredetileg két közös csúcsú négyzet különbsége — ekkor hasonlít a csillagászati gnómónhoz, mely merőleges a horizontra —, majd általánosabban két hasonló paralelogrammáé (VI. 24.). Az ábrákon (II. 5. stb.) 270° -os szaggatott körív jelöli, a körívet pedig három betű.

II. 1. Algebrailag: $a(\sum b_i) = \sum ab_i$. Ez a tétel az Elemekben fölösleges, II. 2–3. általánosítása, valószínűleg még Theón előtti betoldás.

II. 2. $AB = AC + CB$ esetén $AB^2 = AB \cdot AC + AB \cdot CB$. Már I. 47.-ben is fölhasználtatik.

II. 3. $AB = AC + CB$ esetén $AB \cdot CB = AC \cdot CB + CB^2$
A második könyv némely tételének (3–4., 6., 8.*) számokra érvényes megfelelőjét is használni látszik Euklidész, anélkül, hogy bizonyította volna azokat. Bizonyításuk számológavicsok (pszéphosz) kirakásával könnyen elvégezhető. Az V. könyv némely tételét később szintén hallgatólagosan alkalmazza számokra.

II. 4. $(AC + CB)^2 = AC^2 + CB^2 + 2 AC \cdot CB$
Az utóbbi három tétel a felületdarabokkal végzett műveletek legegyszerűbb eseteit tárgyalja. Attól persze, hogy a II. könyvben műveletek végeztenek, e könyv nem válik algebrává, hacsak nem akarja valaki a II. 12–14., III. 35–36., IV. 10. tételeket is algebraiaknak nevezni.

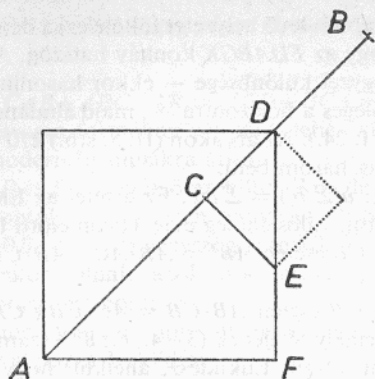
II. 5. $AB = 2 AC = AD + DB \Rightarrow AD \cdot DB + CD^2 = AC^2$ ($CD = AC - DB$)
Alighanem II. 14. lemmájaként született.

II. 6. $AB = 2 AC \Rightarrow (AB + BD) \cdot BD + AC^2 = (AC + BD)^2$
Alighanem II. 11. lemmájaként született.

II. 7. $AB = AC + CB$ esetén $AB^2 + CB^2 = 2 AB \cdot BC + AC^2$

II. 8. $AB = AC + CB$ esetén $4 AB \cdot BC + AC^2 = (AB + BC)^2$
Nyilván XIII. 1–5. testvére, és az $AB \cdot BC = AC^2$ esetre alkalmazták, vagyis amikor a szakasz az *aranymetszés* szerint van fölosztva. Ekkor $5 AC^2 = (AB + BC)^2$, tehát $(AB + BC)^2 : AC^2 = 5 : 1$, amiből könnyen ellentmondásra lehet jutni X. 15., 9. és VIII. 24. révén, ha indirekte fölteszük, hogy valamelyik két szakasz összemérhető. XIII. 6. sokkalta mélyebb apparátussal tárgyalja az aranymetszés irracionalitását, így II. 8.-ra ott már nincs szükség.

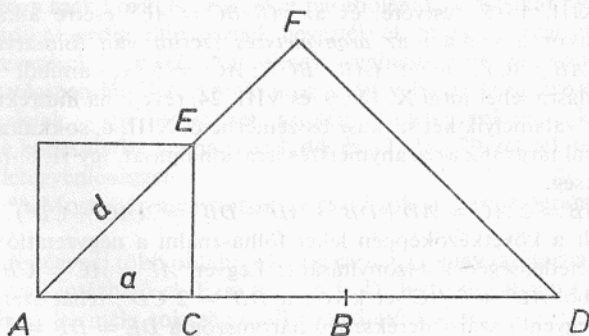
II. 9. $AB = 2 AC = AD + DB \Rightarrow AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$
Ezt a tételt a következőképpen lehet fölhasználni a négyzetátló és -oldal összemérhetetlenségének bizonyítására: Legyen $AF = AC = CB$. A főnti azonosságból $AD^2 = 2 AC^2$ -et kivonva $DB^2 = 2 CD^2$, tehát szerkeszthető egy *DCE* egyenlő szárú derékszögű háromszög a $DE = DB = 2 AF - AD$



átfogóval és a $CD = AD - AF$ befogókkal, és ez az eljárás a végtelenségig folytatható, X. 2.-ből tehát következik, hogy a négyzet oldala és átlója összemérhetetlen. Hasonló regressziós bizonyítása az aranymetszés irracionálisának még könnyebben adható, s valószínűleg ilyen úton ismerték föl először. Az Elemekben viszont már csak számelméleti eszközökkel végzett irracionális-bizonyításokat őrzött meg Euklidész.

II. 10. $AB = 2 AC$ esetén $AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$

Az előző tételhez képest csupán a D pont helyzete változott meg. Ez azt eredményezi, hogy segítségével a négyzetoldalnak és -átlóknak nem csökkenő, hanem növekvő sorozata állítható elő. Legyen ti. $d = AE = BD$ és $a = AC = CB = EF$. A fenti azonosságból $DB^2 = 2 AC^2$ -et kivonva $AD^2 = 2 CD^2 = 2 AF^2$, azaz $(2a + d)^2 = 2(a + d)^2$. Ez a levezetés megvan Proklosznál. Szám-



példákat felsorolva bemutatja a hasonló eljárást (egész) számok esetében is, ahol az ún. oldal- és átlószámokra (28–29. o.) $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$ érhető el (az első érték lehet $a_1 = d_1 = 1$, és indukcióval $d_{n+1} = 2a_n + d_n$, $a_{n+1} = a_n + d_n$ számokra $d_{n+1}^2 = 2a_{n+1}^2 \mp 1$). $\frac{d_n}{a_n} = \sqrt{2 \pm \frac{1}{a_n^2}}$ növekvő n -re egyre jobban közelíti $\sqrt{2}$ -t.

II. 11. Ennek a tételnek a segítségével már az arány fogalmának bevezetése előtt elvégezhető az *arany metszés* és a szabályos ötszög szerkesztése.

$$\text{II. 12. } BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 AC \cdot AD, \quad AD = AB \cdot \cos \widehat{DAB}$$

$$\text{II. 13. } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 BC \cdot BD, \quad BD = AB \cdot \cos \widehat{ABC}$$

Ez a két tétel a Pythagorasz-tétel általánosítása, és a cosinus-tétel őse. Már egy régi szkholion is fölhívja a figyelmet arra, amit persze Euklidész is tudott, hogy II. 13.-ban elég, ha $\widehat{ABC}$ hegyesszög.

II. 14. A sokszög „négy szögesítése”. EH a BD téglalap két oldalának középarányosa.

III. 1. D. Hogy az egyenlő körök területe egyenlő, arra nincs szükség az Elemekben; belátható mozgatással vagy XII. 2.-ből.

III. 2. D. Azaz a metszetük nem $\emptyset$.

III. 4. D. Húr görögül szintén csak *eutheia*: „egyenes” (egy körben), vö. I. 4. D*.

III. 7. D. Ehelyett ma — elkerülve a görbe szárú szög fogalmát — *érintő-szárú kerületi szög*ről beszélünk. A görög felfogás, mint I. 9. D.-ből látszik, megenged görbe szárú szögeket. Ezek egyenlők a metszéspontbeli érintők szögével.

III. 8. D. Azaz a körszelet alapjának nevezett húron nyugvó *kerületi szög*. Vö. 11. D.

III. 9. D. Vonatkozik a kerületi és a középponti szögekre is.

III. 10. D. Euklidész csak itt említi a *körcikket*.

III. 11. D. Föltételezi III. 21.-et. A *hasonlóságról* általános meghatározást természetesen nem találhatunk az Elemekben.

III. 1. Ennek a könyvnek az elején (mint az elsőén) szintén hosszabb sorozat abszolút geometriai tétel van (1–19.).

III. 1. K. E mondat magára a tételre vonatkozik.

III. 12. E tételre szükség a továbbiakban nincs, s an-Nairizi szerint Hérón kiegészítése.

III. 14. Ez a tétel is abszolút, a nem abszolút geometriai I. 47.-re csupán azért van szüksége Euklidésznek, mert a háromszögek két-két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlőségét megkívánó egybevágósági kritériumát (de vö. VI. 7.) nem vette föl.

III. 17. Az AE -re Thalész-kört emelő egyszerűbb, de nem abszolút geometriai szerkesztést Dedomena c. művében említi Euklidész.

III. 20.* A harmadik könyv első nem abszolút tétele : az 5. P. nélkül csak $\widehat{2BAC} \cong \widehat{BEC}$ állítható.

** Ti. BDC . Szokatlan kifejezés, talán az egész bekezdés későbbi (Hérón) betoldás.

III. 21. Vagyis az ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek.

III. 30. $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ közvetlenül az I. 10. D. szerint.

III. 35. Ha $F \in BD$, akkor ez közvetlenül következik II. 5.-ből.

IV. 4. Ez mégis abszolút geometriai tétel, mert (többek között a Pasch-axiómára támaszkodva) belátható, hogy a szögfelező metszi a szemközti oldalt, tehát a két szögfelező metszi egymást (a háromszög belsejében). IV. 5.-ben viszont a két oldalflező merőleges a hiperbolikus geometriában nem föltétlenül metszi egymást.

IV. 5. Értelemszerűen a háromszög legnagyobb szögének csúcsát kell A -val jelölni.

IV. 12. Mint III. 14.-ben, ismét a megfelelő kongruencia-tétel hiánya miatt szükséges e körülményes eljárás.

V. 1–2. D. Ti. maradék nélkül osztja, azaz a nagyobb a kisebbnek egész-számú többszöröse. Vö. VII. 3. és 5. D.

V. 3. D. Vagyis egyenlő dimenziójú.

V. 4. D. Euklidész — ellentétben Arkhimédesszel — nem mondja ki követelményként, hogy egynemű mennyiségek kielégítik ezt a föltételt, de (többnyire hallgatólagosan, X. 1.-ben ki is mondva) mégis él vele.

V. 5. D. A további jegyzetekben $i, j, k, m, n \in \mathbb{N}$ természetes egészek, q, r, s stb. $\in \mathbb{Q}$ pozitív törtek, a, b, c stb. pedig mennyiségek (kivéve ha az eredeti jelölést követjük).

$a : b = c : d$, ha $\forall m, n \in \mathbb{N}$ -re $(ma > nb \Leftrightarrow mc > nd)$ és $(ma = nb \Leftrightarrow mc = nd)$ és $(ma < nb \Leftrightarrow mc < nd)$. Azt, hogy $ma > nb$ és $m'a < n'b$ valóban fenn álljon bizonyos egészekre, az előző definíció biztosítja. Modernizálva, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ha $\forall q \in \mathbb{Q}$ -ra q egyszerre vagy kisebb, vagy egyenlő vagy nagyobb mindkettőnél, vagyis az irracionális számokat meghatározza a náluk kisebb (vagy nagyobb) racionálisok halmaza.

V. 7. D. $c : d < a : b$, ha $\exists m, n \in \mathbb{N}$: $ma > nb$ és $mc \leq nd$, azaz ha $\exists q \in \mathbb{Q}$: $\frac{c}{d} \leq q < \frac{a}{b}$.

V. 8. D. Egyes kéziratokban az arányosság (analógia) meghatározása is olvasható, vagy a 3. D. után „Az arányosság az arányok azonossága.”, vagy a 8. D. előtt „Az arányosság az arányok hasonlósága.” alakban.

V. 9. D. Ha $a : b = b : c$, akkor $a : c$ kétszeres arány (logosz) $a : b$ -hez képest; a 2 : 1 arány neve viszont kétszeres arányosság (analógia; pl. IX. 36.).

V. 10. D. Ha $a : b = b : c = c : d$, akkor $a : d$ háromszoros arány $a : b$ -hez képest. Az arány négyzetének vagy köbének fogalma idegen ettől a felépítéstől.

V. 12. D. Az $a : b = c : d$ -hez tartozó fölcserélt arány $a : c = b : d$, vagyis a beltagokat kell fölcserélni. Szükséges, hogy mind a négy mennyiség egyenmű legyen.

V. 13. D. $a : b \rightarrow b : a$

V. 14. D. $a : b \rightarrow (a+b) : b$ (vagyis $\frac{a}{b} + 1$)

V. 15. D. $a : b \rightarrow (a-b) : b$ (vagyis $\frac{a}{b} - 1$)

V. 16. D. $a : b \rightarrow a : (a-b)$

V. 17. D. Más kifejezéssel: egyenlő sok tagon át való arányok $a_i : a_{i+1} = b_i : b_{i+1}$, $1 \leq i < n$ esetén az $a_1 : a_n = b_1 : b_n$ arányok (V. 22.). Ekkor különben $a_1 : a_n = \prod_{i=1}^{n-1} (a_i : a_{i+1})$.

V. 18. D. $\left. \begin{array}{l} a : b = a' : b' \\ b : c = c' : a' \end{array} \right\} \Rightarrow a : c = c' : b' \text{ (V. 23.)}$

V. 1. AB = ne, CD = nf, ... $\Rightarrow$ AB + CD + ... = n(e + f + ...)

** Szó szerint sokasága (modernizálva számossága) nem azonos a (természetes) szám (arithmosz) szóval.

- V. 2. $\left. \begin{array}{l} \text{IN} \ni (AB : c) = DE : f \\ \text{IN} \ni (BG : c) = EH : f \end{array} \right\} \Rightarrow \text{IN} \ni [(AB+BG) : c] = (DE+EH) : f$
- V. 3. $\left. \begin{array}{l} \text{IN} \ni (a : b) = c : d \\ \text{IN} \ni (EF : a) = GH : c \end{array} \right\} \Rightarrow \text{IN} \ni (EF : b) = GH : d$
- V. 4. $a : b = c : d, k = \frac{e}{a} = \frac{f}{c}, m = \frac{g}{b} = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{k}{m} (a : b) = e : g =$
 $= f : h = \frac{k}{m} (c : d)$
- V. 5. $\text{IN} \ni (AB : CD) = AE : CF \Rightarrow (AB-AE) : (CD-CF) = AB : CD$
 ** A 6. Ax. általánosításából következhetne.
- V. 6. $\left. \begin{array}{l} \text{IN} \ni (AB : e) = CD : f \\ \text{IN} \ni (AG : e) = CH : f \end{array} \right\} \Rightarrow \text{IN} \ni [(AB-AG) : e] = (CD-CH) : f$
 ** Az 5. Ax. általánosításából következhetne. Vö. VII. 1.*-ben az V. 9.-ről mondottakkal.
- V. 7. K. Theón a 4. tétel után helyezte el.
- V. 12. $a : b = c : d = e : f = \dots \Rightarrow a : b = (a+c+e+\dots) : (b+d+f+\dots)$
- V. 15. $c : f : \dots = kc : kf : \dots$
- V. 17. $AB : BE = CD : DF \Rightarrow (AB-BE) : BE = (CD-DF) : DF$
- V. 18. Az előbbi megfordítása.
- V. 19. $AB : CD = AE : CF \Rightarrow (AB-BE) : (CD-CF) = AB : CD$
- V. 19. K. Az $(AB : BE = CD : FD \Rightarrow AB : AE = CD : CF)$ implikációt kell bizonyítani. V. 16. miatt $AB : CD = BE : FD \Rightarrow AB : CD = AE : CF$ (V. 19.) $\Rightarrow AB : AE = CD : CF$.
- V. 20. $a : b : c = d : e : f$ és $a > c \Rightarrow d > f$ stb.
- V. 21. $a : b = e : f, b : c = d : e$ és $a > c \Rightarrow d > f$ stb.
- V. 22. $a : b : c = d : e : f \Rightarrow a : c = d : f$
- Indukcióval bizonyítható tetszőleges tagszámra.
- V. 23. $a : b = e : f$ és $b : c = d : e \Rightarrow a : c = d : f$
- V. 24. $\left. \begin{array}{l} AB : c = DE : f \\ BG : c = EH : f \end{array} \right\} \Rightarrow (AB+BG) : c = (DE+EH) : f$
- V. 25. $CD = e$ esetén azt kapjuk, hogy a számtani közép nagyobb a mértaninál.

VI. 2. D. A definíció szövege homályos. Feltehető értelmé kiviláglik a *fordított arányosságot* kimondó tételekből.

VI. 3. D. Ez az *aranymetszés*.

VI. 5. D. Szintén szokatlan fogalmazású. Vö. *arányok szorzata*.

VI. 2. Az abszolút geometriában is igaz pl., hogy a háromszög középvonala párhuzamos (I. 23. D. értelmében) a megfelelő alappal, s az alap felező merőlegese reá is merőleges.

VI. 9. Rész vagy hányad az $\frac{1}{n}$ -ed rész.

VI. 14. $DB : BE = a : a' = b' : b = GB : BF$

VI. 19. $t(ABC) : t(DEF) = (AB : DE)^2$

VI. 19. K. A 19. és 20. tétel következményei felcserélődötteknek tűnnek. Lehetséges, hogy a szöveg eredeti állapotában a sorrend VI. 19., VI. 20. K., VI. 19. K. volt — így logikus —, és csak egy későbbi átdolgozó illesztette be 20. K. bizonyítását, azaz a 20. tételt. A zavart Theón úgy simította el, hogy a 19. K.-ben alakzat helyett csak háromszögről beszél, és pótlólag beillesztette az általános 20. 2. K.-t.

VI. 28–29. Területillesztéseket tárgyalnak.

VI. 31. A Pythagorasz-tétel általánosítása négyzet helyett tetszőleges alakzatra (eidosz), mely szón azonban itt nyilván csak sokszöget kell érteni (vö. XI. 9. D.). Ugyan definiálva van már a körszeletek hasonlósága is, de ezek esetében a bizonyításhoz XII. 2.-n kívül VI. 33. Theón-féle kiegészítésére is szükség van.

VI. 33. Theón kiegészítette e tételt azzal, hogy a szögek és ívek aránya egyenlő a körcikk arányával is. Ebből, és Arkhimédésznek abból a tételéből, hogy „minden kör egyenlő azzal a derékszögű háromszöggel, melynek egyik befogója a kör sugarával egyenlő, a másik pedig a kerületével”, következik, hogy a körcikk területe $\frac{ir}{2}$, amint azt pl. Hérón is közli egyik művében.

VII. 2. D. Arisztotelész is említi a Metafizikában, hogy az egység nem szám, itt azonban ez a (főlegesen bonyolító) megkülönböztetés nem mindenütt vitetik következetesen végig.

VII. 3. D. Szó szerint „része”, vö. V. 1. D.

VII. 4. D. Szó szerint „részei”, azaz $\frac{k}{n}$ -ed része, ahol $(k, n) = 1$.

VII. 10. D. Valószínűleg betoldás a Nikomakhosz-féle osztályozás nyomán. Vö. VII. 16. és IX. 33.

VII. 21. D. Ha a 2–5. D.-kat szigorúan venné, nem lenne arány sem 1 : 1, sem pl. 3 : 2.

VII. 23. D. Az osztók („részek”) közé értendő 1, de maga a szám nem.

VII. 1. A VII–IX. könyvben Euklidész a számokat szakaszokkal ábrázolja, Thaer ezek helyett a négyet pl. négy vonalkával (számolóka-
vics helyett) szemlélteti, s ha túl sok vonalkát kellene rajzolni, arab számmal
jelzi számukat. Euklidész nyilván tudatosan választotta a kevésbé szemléle-
tes, de általános ábrázolásmódot. Előre tudott, hogy a tétel föl az oszthatóság
három elemi tulajdonsága:

1. E. $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b+c$
2. E. $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid c-b$ ($c > b$)
3. E. $a \mid b$ és $b \mid c \Rightarrow a \mid c$,

valamint V. 7., 9. (pl. VII. 19.) és 11. (pl. VII. 14.) aritmetikai megfelelője.

VII. 2. Az algoritmus valószínűleg századokkal korábbi Euklidészé.

$$\text{VII. 5. } \text{IN} \ni \frac{BC}{a} = \frac{EF}{d} \Rightarrow \frac{BC+EF}{a+d} = \frac{BC}{a} \quad \text{Vö. V. 2. és 12., VII. 6. és 12.}$$

$$\text{VII. 7. } \text{IN} \ni \frac{CD}{AB} = \frac{CF}{AE} \Rightarrow \frac{CD-CF}{AB-AE} = \frac{CD}{AB} \quad \text{Vö. V. 5. és 19., VII. 8. és 11.}$$

VII. 9. $a : BC = d : EF \Rightarrow a : d = BC : EF$ Vö. V. 16. és VII. 10., 13.
és 15.

VII. 14. Lásd V. 17. D.*

VII. 17–18. Vö. V. 15. és VI. 1.

VII. 19. Vö. VI. 16–17.

VII. 20. E tétel után Theón beszúrta V. 23. aritmetikai változatát.

VII. 22. V. 14. aritmetikai megfelelőjéből következne, hogy a legkiseb-
bek egyértelműek, tehát VII. 21. miatt relatív prímek.

VII. 34. A konstrukció $c = [a, b] = ab : (a, b)$.

VII. 39. Olyan számot kell találni, melynek — a tétel jelöléseivel — léte-
zik $\frac{1}{d}, \frac{1}{e}, \frac{1}{f}$ stb. hányada.

VIII. 2. A háromtagú sorozat a^2, ab, b^2 , a négytagú a^3, a^2b, ab^2, b^3 stb.

VIII. 4.* A keresett számok tehát $n = \frac{ac}{bd} m, o = \frac{c}{d} m, m = \left[e, \frac{d}{c} [b, c] \right]$,
 $p = \frac{f}{e} m$.

** Az ab jel, a modern $a : b$ megfelelője, a zeneelméletből származik, ahol a és b a zenei intervallum („szakasz”) két végpontja.

VIII. 7. $a_1 = a \mid aq^{n-1}$ azaz $q^{n-1} \in \text{IN} \Rightarrow \frac{b}{a} = q \in \text{IN}$

VIII. 11–12. Független általánosításuk VIII. 18–19.
Vö. VII. 21. D* Nem használja e tételeket IX. 2., 5. és 6.-ban.

VIII. 20. A talált fölbontás $a = \frac{a}{(a, c)} \cdot (a, c)$, illetve $b = \frac{b}{(b, c)} \cdot (b, c)$,
ahol $\frac{a}{(a, c)} : \frac{b}{(b, c)} = \frac{a(b, c)}{b(a, c)} = \frac{(ab, ac)}{(ab, bc)} = \frac{(c^2, ac)}{(c^2, bc)} = \frac{c(a, c)}{c(b, c)} = (a, c) : (b, c)$.

VIII. 21. A konstruált fölbontás: $a = \frac{a}{(a, c)} \cdot \frac{(a, c)}{(a, c, d)} \cdot (a, c, d)$,
 $b = \frac{b}{(b, d)} \cdot \frac{(b, d)}{(b, c, d)} \cdot (b, c, d) = \frac{d}{(c, d)} \cdot \frac{(c, d)}{(a, c, d)} \cdot \frac{b}{d} (a, c, d)$.

VIII. 22–23. Ilyen tételt Euklidész nem bizonyított, de könnyen belátható.

IX. 8–9. * Világos példái a teljes indukció alkalmazásának. Szintén szükség lenne teljes indukcióra V. 22. és VII. 14. bizonyításához.

** E mondat vagy törlendő, vagy „Ismét, minthogy c, d, e mértani sorozat, s c négyzetszám, e is négyzetszám.”-ra javítandó.

IX. 19. Ez az állítás téves (pl. $3 : 6 = 7 : 14$; – az $a \nmid b$ pótfeltétellel viszont már igaz lenne), bizonyításában e létezésének föltételezése a hiba. Ezt természetesen régen észrevették, és a kódexekben különféle módon gyógyították. Talán Euklidész szövegének okoskodó kiegészítése során keletkezett a hiba, s Euklidész a $\sqcap (a, b, c)$ mértani sorozat és $(a, c) = 1$ esetet egységesen tárgyalta: $\exists$ negyedik arányos $\Leftrightarrow a \mid bc$.

IX. 21–36. Lásd a 39. o.-t. Ezen igen régi tételek bizonyítását Euklidész itt-ott (IX. 32., IX. 35–36.) feltehetőleg modernizálta.

IX. 31. VII. 24. speciális esete.

IX. 32. A kettő kitüntetett helyzetének a számelméletben külön elnevezés felel meg: amint az egy mellett van egység (monasz), úgy a kettő mellett is van „kettőség” (dyasz). Neoplatónikus matematikusok szerint még a kettő sem szám, hanem csak a három az első szám.

IX. 35. Ha $(a_i)_{i=1}^n$ a sorozat, akkor $(a_2 - a_1) : a_1 = (a_n - a_1) : (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, vagyis $s_{n-1} = \frac{a_1(a_n - a_1)}{a_2 - a_1} = \frac{a_n - a_1}{q - 1}$, $q = \frac{a_i}{a_{i-1}}$

IX. 36. * Lásd V. 9. D.*

** $2^{n+1} - 1$ prim $\Rightarrow 2^n(2^{n+1} - 1)$ tökéletes. A görögök négy tökéletes számot ismertek ($n = 1, 2, 4, 6$), és tudták, hogy 6-ra vagy 8-ra végződnek. Helyesen először Regiomontanus határozta meg az ötödiket ($n = 12$), ma két tucat ismeretes. Euler bebizonyította, hogy IX. 36. a páros tökéletes

számokat kimeríti, de ma sem tudjuk, létezik-e páratlan tökéletes szám (több persze lehet egy páratlan szám osztóinak összege is magánál a számnál, pl. 315 osztóinak összege 325).

X. 2. D. A jegyzetekben áttekinthetőség kedvéért algebrai formulákat is alkalmazunk a tételek és definíciók átírására. Bevezetünk néhány újabb jelölést: $\text{IH}^n = \{h^n : h \in \text{IH}\}$, $\sqrt[n]{\text{IH}} = \{\sqrt[n]{h} : h \in \text{IH}\}$, $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}^2$. $\sqrt[n]{\mathcal{Q}}$ nyilván részcsoportja az (algebrai) számok multiplikatív csoportjának. A szakaszok négyzetes összemérhetősége ekvivalenciareláció, átvive a mérőszámaikra: kongruencia-reláció, és maga $\sqrt{\mathcal{Q}}$.

X. 3. D. * Sokkal erősebb állítást mond majd ki X. 115.

** Lásd a X. 19. Lemmát is.

X. 4. D. Az illető sokszöggel egyenlő területű négyzet oldalát II. 14. alapján lehet megkapni.

X. 5. A bizonyítás a VII. 21. D.-n alapszik, anélkül, hogy (pl. VI. 16. és VII. 19. segítségével) explicite megteremtette volna Euklidész az V. és a VII. könyv arányelmélete közötti kapcsolatot. A X. könyvben vegyes (mennyiségek — számok) aránypárokra is szabadon alkalmazza az V. (és VII.) könyv tételeit.

X. 6. Ha a szakasz — mint a K.-ben — akkor a szerkesztés VI. 9. segítségével elvégezhető.

X. 10. L. Ezt nem mondta ki sehol, de IX. 10.-ben is használja. Rögtön következik a VIII. 11., 8. és 20. tételekből.

X. 14. $a : b = c : d$ esetén $(a : \sqrt{a^2 - b^2} \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow c : \sqrt{c^2 - d^2} \in \mathcal{Q})$

X. 17. $\left(a < BC \text{ és } BD \cdot DC = \frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow (BD : DC \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow BC : \sqrt{BC^2 - a^2} \in \mathcal{Q},$
ahol $\sqrt{BC^2 - a^2} = BD - DC = FD)$

X. 18. Közvetlenül következik X. 17.-ből.

X. 21. Maga a tétel közvetlenül következik X. 20.-ból. Mediális szakasz mérőszáma $\sqrt[4]{q}$, mediális területé pedig $\sqrt{q}$, ahol $q \in \mathcal{Q}'$.

X. 23. Elegendő a négyzetes összemérhetőség. Ha az összemérhető mediálisokat nem lényegesen különbözőknek tekintjük, fölvethető a kérdés, melyek a lényegesen különböző mediálisok, azaz mik $\sqrt[4]{\mathcal{Q}}/\sqrt{\mathcal{Q}}$ elemei. Válasz: minden osztály reprezentálható $\sqrt[4]{m}$ alakú elemmel, és $\left\{m = \prod_{k=1}^n p_{i_k} : k, n,\right.$

$i_k \in \mathbb{N}$ és $p_i, i \in \mathbb{N}$ az összes különböző prím } a (nem egység) osztályok teljes reprezentáns-rendszerét szolgáltatja.

X. 24. A szögletes zárójelbe tett szavak értelemzavaróak.

X. 25. Pl. $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = 2, \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{6}.$

X. 27. $c = \sqrt{ab}, d = b \sqrt{\frac{b}{a}}, cd = b^2 \in \mathbb{Q}$

A konstrukció kimeríti az összes ilyen mediális-párt.

X. 28. $d = \sqrt{ab}, e = c \sqrt{\frac{a}{b}}, de = ac \in \sqrt{\mathbb{Q}}.$ E konstrukció szintén kimerítő.

X. 29–35. A X. 39–41. és 76–78. tételek számára hivatottak az egzisztenciát biztosítani.

X. 36. Pl. $1 + \sqrt{2}.$ Az összes lényegesen különböző binomiális megadja a $\{k + m\sqrt{n}: (k, m) = 1, 1 < n \text{ négyzetmentes, és valamely } p | n\text{-re } p \nmid k\}$ reprezentánsrendszer.

X. 37. Pl. $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}.$ Az összes lényegesen különböző első bimedialist megadja az $\{a + a^3: a \text{ mediális}\}$ reprezentánsrendszer.

X. 38. Pl. $\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{12}.$

X. 39. $AB^2 + BC^2 = q, (AB \cdot BC)^2 = r \in \mathbb{Q}'$ esetén $AB^2,$ illetve $BC^2 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - r}.$ Pl. $q = 6, r = 2, AC = \sqrt{3 + \sqrt{7}} + \sqrt{3 - \sqrt{7}}. \left(\frac{q^2}{4} - r \notin \mathbb{Q}^2\right)$

X. 40. Ha $(AB^2 + BC^2)^2 = q \in \mathbb{Q}', AB \cdot BC = r,$ akkor $AB^2,$ illetve $BC^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{q} + \sqrt{q - 4r^2}).$ Pl. $q = 20, r = 2, AC = \sqrt{\sqrt{5} + 1} + \sqrt{\sqrt{5} - 1}.$

Ez az elnevezés nem zárja ki, hogy más irracionálisok négyzetértéke is lehet racionális plusz mediális — lásd X. 71. —, hanem arra utal, hogy a most tárgyalt forma a nem speciális.

X. 41. Ha $(AB^2 + BC^2)^2 = q \in \mathbb{Q}', (AB \cdot BC)^2 = r \in \mathbb{Q}',$ akkor $AB^2,$ illetve $BC^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{q} \pm \sqrt{q - 4r}).$ Pl. $q = 40, r = 8, AC = \sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{2}}.$

X. 48. $AC : CB = k^2 : m^2, \frac{AB}{AC} \notin \mathbb{Q}^2, EF \in \mathbb{Q}$ feltételekkel $EG = EF + FG = EF \left(1 + \sqrt{\frac{AC}{AB}}\right).$ Ha $(k, m) = (AC, AB) = 1,$ akkor $AB = k^2,$

$BC = m^2$, $AC = k^2 - m^2 \notin \mathbb{Q}^2$. A X. 54–65. tételek föltárják a binomiális alfajai és a mediális utáni hat irracionális-főfajta kapcsolatát. A binomiálisok alfajaira a X. 36–41.*-beli számpéldákhoz rendelendő példákat hozom, vagyis az ottani kifejezések négyzetét. Első binomiális tehát pl. $3 + \sqrt{3}$.

X. 49. AC, AB, EF ua., $EG = EF \left(1 + \sqrt{\frac{AB}{AC}} \right)$, pl. $4 + \sqrt{18}$.

X. 50. AC, AB, EF ua., $d \in \mathbb{N}^2$, $\frac{d}{AB}, \frac{d}{AC} \notin \mathbb{Q}^2$, $FH = e \left(\sqrt{\frac{AB}{d}} + \sqrt{\frac{AC}{d}} \right)$; pl. $\sqrt{27} + \sqrt{24}$.

X. 51. $\frac{AB}{BC}$ és $\frac{AB}{AC} \notin \mathbb{Q}^2$, $EF \in \mathbb{Q}$, $EG = EF \left(1 + \sqrt{\frac{AC}{AB}} \right)$, pl. $6 + \sqrt{8}$.

X. 52. AC, AB, EF ua., $EG = EF \left(1 + \sqrt{\frac{AC}{AB}} \right)$, pl. $4 + \sqrt{20}$.

X. 53. AC és AB ua., $d \in \mathbb{N}^2$, $\frac{d}{AB}$ és $\frac{d}{AC} \notin \mathbb{Q}^2$, $e \in \mathbb{Q}$, $FH = e \left(\sqrt{\frac{AB}{d}} + \sqrt{\frac{AC}{d}} \right)$, pl. $\sqrt{40} + \sqrt{32}$.

X. 54–65. E tételek tartalma a

$$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}{2}}$$

formulával algebraizálható, de az Elemekben az összes aleset gondosan részleteztetik, ti. hogy mikor lehet kevesebb gyökjellel kijönni.

X. 63. Itt pl. X. 39.* jelöléseivel $AC^2 = q + 2\sqrt{r}$, számpélda a X. 51.*-ben.

X. 64. X. 40.* jelöléseivel $AC^2 = 2r + \sqrt{q}$, példa X. 52.*-ben.

X. 65. X. 41.* jelöléseivel $AC^2 = \sqrt{q} + 2\sqrt{r}$, példa X. 53.*-ben.

X. 66. Vö. X. 23. Az irracionálisok főfajtái invariánsak a négyzetes összemérhetőséggel, vagyis algebrailag a $\sqrt{\mathbb{Q}}$ -beli elemmel való szorzással szemben. Csupán a binomiális (és majd az apotomé) alfajainál kell lineáris összemérhetőségre szorítkozni.

X. 67. A lineáris összemérhetőség megkövetelése fölösleges, talán egy átdolgozó követte el, aki nem volt teljesen tisztában a főfajták (ilyen az első és a második bimedialis is) és az alfajták (első – hatodik binomiális) közötti különbséggel.

X. 72. X. 42. és a X. 2.1–6. D.-k miatt.

X. 73–110. Megfelelnek a 36–72. tételeknek, a megfelelő helyen mindeütt összeadás helyett kivonás irandó.

X. 112–114. $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot q(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = q(a-b)$ ($q \in \mathbb{Q}$)
binomiális apotomé racionális
négyzete

X. 115. $a = \sqrt[4]{q}$, $c = \sqrt[8]{q}$, $d = \sqrt[16]{q}$ stb.

X. 27. Függ. Vö. 17–18., 39. o. és II. 9.*

XI. 3. D. E definíció értelmes volta XI. 4.-ben bizonyíttatik.

XI. 4. D. Két sík metszete XI. 3. szerint egyenes.

XI. 9–10. D. Téridomon (konvex) poliéder (e szót használja is majd XII. 17–18.-ban, jelentése „sokülőkéjű”) értendő. Pl. XIII. 18. is egyszerűen csak az öt testről beszél.

XI. 14. D. Egy szkholion szerint „a keletkezését határozta meg a gömbnek, ugyanis a továbbiakban erre van szüksége; Theodosziosz megadja a meghatározását”.

XI. 18. D. Ennek a kúpszeletek tanában van jelentősége. Ha ti. valamely alkotóra merőleges metszetekre szorítkozunk, akkor az ellipszis hegyesszögű kúp metszete stb. Apollóniosz előtt éppen ezeket a terminusokat használták ellipszis stb. helyett.

XI. 7. A következő tétel már nem abszolút: a térgeometria fölépítése, axiomatizálása láthatólag nem ért el olyan szintet, mint a síkgeometriáé (vö. Platón, Az állam, 528). Abszolút tétel még pl. 11–14., 16., 18–19., de ezek közül is 11–12. és 18. bizonyítása már nem abszolút.

XI. 25. A paralelepipedont éppúgy nem definiálja Euklidész, mint a paralelogrammát.

XI. 38. Theón paralelepipedonra általánosította.

XII. 2. Szimplikiosz (Eudémosz nyomán) arról tudósít, hogy már a khioszi Hippokratész is bizonyította e tételt.

XII. 7. Arkhimédész szerint „azokban a tételekben — melyeknek először Eudoxosz találta meg a bizonyítását —, hogy a kúp harmadrésze a hengernek, a gúla pedig a hasábnak, ha ugyanaz az alapjuk és egyenlő a magasságuk, nem csekély része volt Démokritosznak, aki a fönti idomokról — bizonyítás nélkül — elsőként mondta ki e tételt”.

XII. 17.* „Theodosziosz Szphairika c. művében általánosabban azt is megmutatja, hogy ha a metsző sík nem megy át a gömb középpontján, a metszet akkor is kör.” (szkholion).

Betűrendes mutató

Számok ha döltek, akkor az előszó oldalaira utalnak, különben a tételekre. A csillag az illető tételhez fűzött jegyzetre utal. Olyan modern fogalmakat is fölvevünk, melyeknek az antik esetleg csak távoli előde vagy rokona. Összetett kifejezések nem föltétlenül az első tag alatt találhatók.

- Abszolút geometria 27, I. 26.*, 29.*, 33.*, III. 1.*, IV. 4.*, VI. 2.*, XI. 7.*
 alakzat, síkbeli I. 14. D.
 alapvonal, háromszögé I. 4–6., 8., 24.
 –, körszeleté III. 8. D.
 –, paralelogrammáé I. 35–36., 41.
 alaplap, hasábé XII. 7.
 –, gúláé XII. 3–9.
 –, hengeré XI. 23. D.
 –, kúpé XI. 20. D.
 –, paralelepipedoné XI. 25., 29–32., 34.
 analízis XIII. 8. Függelék
 apotomé X. 73., 79., 91., 97., 103., 108., 111–114., XIII. 6., 17.
 –, első X. 3.1. D., 85., 91., 97.
 –, második X. 3.2. D., 86., 92., 98.
 –, harmadik X. 3.3. D., 87., 93., 99.
 –, negyedik X. 3.4. D., 88., 94., 100.
 –, ötödik X. 3.5. D., 89., 95., 101.
 –, hatodik X. 3.6. D., 90., 96., 102.
 arány, mennyiségeké V. 3. D., 5. D.
 –, számoké VII. 21. D.
 –, egyenlőség révén való vagy egyenlő sok tagon át V. 17. D., 20–23., VII. 14.
 –, fölcserélt V. 12. D., 16., VII. 13., 15.
 –, fölforgatása V. 16. D., 19. K.
 –, folytonos I. aranymetszés
 –, fordított vagy invertált V. 13. D., 7. K.
 –, háromszoros V. 10. D., VIII. 12., 19., XII. 8., 12., 17. K., 18.
 –, kereszteződő V. 18. D., 21., 23., VII. 20.*
 –, kétszeres V. 9. D., VI. 19–20., VIII. 11., 18.

- , összetétele V. 14. D., 18.
- , szétbontása V. 15. D., 17.
- -ok szorzata V. 17. D.*, VI. 5. D., 23., VIII. 4–5.
- aranymetszés II. 8.*, 11., VI. 3. D., 30., XIII. 1–6., 8–9.
- arányos, harmadik, szám IX. 16., 18.
- , –, szakasz VI. 11.
- , negyedik, szám IX. 19.
- , –, szakasz I. 44., VI. 12.
- , sokadik, szám IX. 17.
- arányosság V. 8. D.
- , fordított VI. 2. D., 14–15., XI. 34., XII. 9., 15.
- Arkhimédész-féle axióma 42, V. 4. D
- átló, paralelogrammáé I. 34., 43., XI. 28.
- , kockáé XI. 38.
- , ötszögé XIII. 8.
- átmérő, gömbé XI. 17. D.
- , köré I. 17. D.
- bimediális, első X. 37., 43., 55., 61., 67., 71., 111. K.
- , második X. 38., 44., 56., 62., 67., 72., 111. K.
- binomiális X. 36., 42., 54., 60., 66., 71., 111–114.
- , első X. 2.1. D., 48., 54., 60.
- , második X. 2.2. D., 49., 55., 61.
- , harmadik X. 2.3. D., 50., 56., 62.
- , negyedik X. 2.4. D., 51., 57., 63.
- , ötödik X. 2.5. D., 52., 58., 64.
- , hatodik X. 2.6. D., 53., 59., 65.
- cosinus-tétel II. 12–13.
- Dedekind-szeletek V. 5. D.
- derékszög I. 10. D., 4. P., 11., III. 1., 3.
- diád IX. 32.
- dodekaéder XI. 28. D., XIII. 17–18.
- egybevágóság, háromszögeké I. 4., 8., 26., III. 14.*
- , köröké III. 1. D.
- , körszeleteké III. 24.
- , paralelogrammáké XI. 31., 33.
- , poliédereké XI. 10. D., 33.
- , sokszögeké XI. 13. D.
- egyenes I. 4. D., 1–2. P., XI. 1.
- egyenestvonalú síkidom I. 19. D.
- szög I. 9. D.
- egyenlőség 1–7. Ax.
- , köröké III. 1. D., 26., 28–29.
- , mértéké I. 4.*
- egység VII. 1. D.
- érintő, köré III. 2. D., 17–19., 36–37.
- körök III. 3. D., 11–13.
- euklidészi algoritmus VII. 1–3., X. 2–4.
- félkör I. 18. D.
- felület I. 5–6. D., XI. 2. D.
- főkör, gömbi XII. 17.
- gnómón 30, 36, II. 2. D., 5–8., VI. 27–29., X. 91–96., XIII. 1–4.
- gömb XI. 14–17. D., XII. 17–18., XIII. 13–18.
- gúla XI. 12. D., XII. 3–9, XIII. 13., 18.
- hányad VII. 3. D.
- háromszög I. 20–21. D.

háromszög-egyenlőtlenség I. 20., XI. 20.
 hasáb XI. 13. D., 39., XII. 3–4., 7–7. K.
 hasonlóság, arányoké V. 8. D.*
 –, gúlaké XII. 8.
 –, háromszögeké VI. 4–8., 19–20., XII. 12.
 –, hengereké és kúpoké XI. 24. D., XII. 12.
 –, körszeleteké III. 11. D., 24.
 –, paralelepipedonoké XI. 27., 33., 37.
 –, poliédereké XI. 9. D.
 –, sokszögeké VI. 1. D., 18...31., XII. 12.
 – l. még síkszám, térszám
 határ I. 13–14. D., l. még vég
 hatvány, ponté, körre vonatkozó III. 35–37.
 hegyesszög I. 12. D.
 henger XI. 21–23. D., XII. 10–15.
 húr III. 4. D.*
 húrnégyszög III. 22.
 ikozaéder XI. 27. D., XIII. 16., 18.
 indukció, teljes II. 9.*, V. 22.*, IX. 8–9.*
 irracionális X. 3–4. D.
 irracionalitás-bizonyítás, Euklidész előtti II. 9.*, X. 27. Függelék
 kocka XI. 25. D., 38., XIII. 15., 17. K., 18.
 kommutativitás, számok szorzásáé VII. 16.
 kör I. 15. D., 3. P.
 – cikk III. 10. D., VI. 33.*

– szelet III. 6–8. és 11. D., 21., 24.
 –, beírt IV. 5. D., 4., 8., 13.
 –, körülírt IV. 6. D., 5., 9., 14.
 –, területe XII. 2.
 középáramyos, szám VIII. 11–12., 18–21. l. még mértani sorozat
 –, szakasz II. 14., VI. 13.
 középpont, félköré I. 18. D.
 –, gömbé XI. 16. D.
 –, köré I. 16. D.
 kúp XI. 18–20. D., XII. 10–12., 14–15.

látókör szerkesztése III. 33.

magasság, síkban VI. 4. D., 1.
 –, térben XI. 29–32., XII. 4–6., 9–11.
 maior X. 39., 45., 57., 63., 68., 71., 111. K.
 mediálapotomé, első X. 74., 80., 92., 98., 104., 109., 111. K.
 –, második X. 75., 81., 93., 99., 104., 110., 111. K.
 mediális X. 21–28., 31–35., 71–72., 74–78., 80–84., 108–111. K., 115.
 merőleges egyenes I. 10. D., 11–12., XI. 3. D., XI. 11–12.
 –, síkok XI. 4. D., 18–19.
 mértani sorozat VIII. 1–3., 6–10., 13., 22–23., IX. 8–13., 15., 17., 32., 35–36.
 mérték X. 1–2. D., 3–4. l. még osztó
 minor X. 76., 82., 94., 100., 105., 108., 111. K., XIII. 11., 16.
 mozgató 7. Ax., I. 2–4., 8., 23., 44., III. 24., VI. 4.
 négyszög I. 22. D.
 négyzet I. 22. D., 46.

négyzetértékben két mediális összege
X. 41., 47., 59., 65., 70., 72., 111.
K.

- mediális mínusz racionális X. 77.,
83., 95., 101., 106., 109., 111. K.
 - mediális mínusz mediális X. 78.,
84., 96., 102., 107., 110., 111. K.
 - racionális plusz mediális X. 40.,
46., 58., 64., 69., 71., 111. K.
- négyzetesítés, sokszögé 33, II. 14.

oktaéder XI. 26. D., XIII. 14., 18.
osztó VII. 3. D. l. még hányad, rész,
mérték
-, legnagyobb közös VII. 2-3.

összemérhetetlenség X. 1-4. D.
összemérhetőség X. 1. D.
-, szakaszoké, lineáris X. 3. D.
-, -, négyzetes X. 2. D.

paralelepipedon XI. 24-25., 27-34.,
36-38.

paralelogramma I. 34-36., 41-45.,
VI. 1., XI. 24.

parapleróma I. 43-44., II. 2. D.
l. még I. 43. F.

párhuzamos egyenesek I. 23. D.,
27., 29.

- síkok XI. 8. D., 14-17.

- szelők tétele VI. 2., 32., XI. 17.

párhuzamossági axióma 27, 5. P.
poliéder XI. 9-10. D., XII. 17-18.

-, szabályos XI. 25-28. D., XIII.
13-18.

pont I. 1. és 3. D.
prim VII. 12. D., 29-32., IX. 12-14.,
20.

-ek, relativ VII. 13. D., 1-3.,
21-29., IX. 15-17., 31.

Pythagoras-tétel I. 47.

- általánosítása II. 12-13., VI. 31.

- megfordítása I. 48.

pythagorasz számhármaskok X. 29.
1. L.

racionális X. 3-4. D., 19. L.

rész V. 1. D., 15., VI. 9., VII. 3-4. D.
romboid és rombusz 26, I. 22. D.

sík I. 7. D.

síkszám VII. 17. D.

-ok, hasonló VII. 22. D., VIII. 18.,
20., 26., IX. 1-2.

sokszög I. 19. D., 45., II. 14.

-, beírt IV. 3. D., 2., 6., 11., 15-16.

-, körülírt IV. 4. D., 3., 7., 12.

-, szabályos I. 1., IV. 6-16., XII.
10., XIII. 7-18.

sorozat, mértani VIII. 1-3., 6-10.,
13., 22-23., IX. 8-13., 15., 17.,
35-36., l. még középarányos

szám, összetett VII. 14. D.

-, páratlan VII. 7. D., IX. 22...33.

-, páratlanszor páratlan VII. 11. D.

-, páratlanszor páros VII. 10. D.

-, páros VII. 6. D., IX. 21...34.

-, párosszor páratlan VII. 9. D., IX.
33-34.

-, párosszor páros VII. 8. D., IX.
32., 34.

-, négyzet- VII. 19. D., VIII. 2. K.,
11...26., IX. 1-2, 8-10., X. 9-10.
L.

-, köb- VII. 20. D., VIII. 2. K.,
12...27., IX. 3-6., 8-10.

-, tökéletes VII. 23. D., IX. 36.
 -, l. még prím, középarányos, sík-
 szám, térszám
 szintézis 20–23, XIII. 8. Függelék
 szög, belső I. 16., 32.
 -, csúcs- I. 15.
 -, egyállású XI. 10.
 -, egyenes és síké XI. 5. D.
 -, egyenes vonalú és nem egyenes
 vonalú I. 9. D.
 -, kerületi III. 8. D., 20–21.
 -, -, érintőszárú III. 7. D., 16.,
 31–32.
 -, középponti III. 20.
 -, külső I. 16., 32.
 -, sík- I. 8. D.
 -, síkoké XI. 6. D.
 -, tér- XI. 11. D., 20–21., 23., 26.
 -, váltó I. 27., 29.
 -, l. még hegyesszög, derékszög,
 tompaszög

távolság, ponté egyenestől
 III. 4–5. D.

téglalap I. 22. D., II. 1. D.
 tengely, gömbé XI. 15. D.
 -, hengeré XI. 22. D.

-, kúpé XI. 19. D.
 térszám VII. 18. D., IX. 7.
 -, -ok, hasonló VII. 22. D., VIII.
 19., 21., 27.
 területillesztés, elliptikus VI. 29.
 -, hiperbolikus VI. 27–28.
 -, parabolikus I. 44.
 test XI. 1. D.
 Thalész-tétel III. 31.
 tompaszög I. 11. D.
 többszörös V. 2. D., VII. 5. D.
 -, legkisebb közös VII. 34–36., IX.
 14.
 törtrész VII. 4. D.
 tranzitivitás, egyenlőségé 1. Ax.
 -, arányok egyenlőségé V. 11.
 -, hasonlóságé VI. 21.
 -, oszthatóságé VII. 1.* (3. E.)
 -, összemérhetőségé X. 12.
 -, kisebb relációé, szögek között
 I. 7.
 -, párhuzamosságé I. 30., XI. 9.
 trapéz I. 22. D., 35.
 vég I. 3., 6. és 13. D., 7., III. 8. D.,
 XI. 2. D., 3.
 vonal I. 2–4., 6. és 13. D., XI. 11. D.

A védőborító- és kötésterv Kónya Katalin munkája

A kiadásért felel a Gondolat Könyvkiadó igazgatója



82/1323 Franklin Nyomda, Budapest, 1983

Felelős vezető: Mátyás Miklós igazgató

Felelős szerkesztő: Seres Iván

Műszaki vezető: Gonda Pál

Műszaki szerkesztő: Gut Ferenc

Megjelent 33,25 (A/5) ív terjedelemben,
az MSZ 5601-59 és 5602-55 szabvány szerint