

STUDIA PHYSICA SAVARIENSIA

XIII.

Némethné Pap Kornélia

Rátz László tanár úr



Szombathely
2006



Domborműves fehér márványtábla a Budapesti Evangélikus Gimnázium lépcsőházában

NÉMETHNÉ PAP KORNÉLIA
RÁTZ LÁSZLÓ TANÁR ÚR



Rátz László
– Némethné Pap Kornélia rajza –

Némethné Pap Kornélia

Rátz László tanár úr

Kovács László

angol nyelvű tanulmányával



Berzsenyi Dániel
F ő i s k o l a

Szombathely

2006

Készült
az OTKA fizikatörténeti pályázat és
a BDF Tudományos Bizottsága
támogatásával

STUDIA PHYSICA SAVARIENSIA (SPS)

Redigit
Kovács László
Berzsenyi Dániel Főiskola Fizika Tanszék
9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.

TOMUS XIII. NÉMETHNÉ PAP KORNÉLIA: RÁTZ LÁSZLÓ TANÁR ÚR

ISSN 1219-2678
ISBN-10: 963-9531-73-1
ISBN-13: 978-963-9531-73-4

A borító első oldalát díszítő festmény, Kunwald Cézár munkája
a Budapesti Evangélikus (Fasori) Gimnázium dísztermében látható
(Fotó: Németh János)

A hátsó borítót a Rátz Tanár Úr Életműdíj márványhengere díszíti
(A felvételt a díj tulajdonosa, Holics László tanár úr készítette)

Nyomdai előkészítés:
Kerényi DTP & Design Stúdió Bt.

Nyomda:
Balogh és Társa Kft.

*Kovács László Tanár Úrnak,
akitől a legtöbbet tanultam*

*„Azért láttam távolabbra, mint mások,
mert óriások vállán álltam.”*

(Isaac Newton)



Wigner Jenő dolgozószobájában

Tartalom

Előszó.....	8
Bevezető.....	9
Rátz László emlékezete	11
Rátz László élet-története	15
Családja	15
Diákévei	17
Tanári és közéleti tevékenysége.....	25
Élete alkonyán.....	28
Rátz László munkássága.....	32
„egy igaz pedagógus”	32
A matematika tanítás reformere	35
A tehetségek felismerője és gondozója.....	39
Irodalmi működése	50
Rátz László emlékek	51
Irodalom	65
László Kovács: Teacher László Rátz	68
Biographic Chornicle	68
The reformer of mathematics teaching.....	69
The discerner and cultivator of talents.....	71
Függelék.....	75
Melléklet: Rátz László–Mikola Sándor	
Az infinitezimális számítás elemei a középiskolában,	
Franklin Társulat, 1910.....	92
A szerzőről.....	185

Előszó

A Berzsenyi Dániel Főiskola (BDF) Fizika Tanszéke 1983. évi megalakulása óta oktatóinak tudományos kutatómunkájára alapozva nagy gondot fordít a hallgatók szakmódszertani képzésére és fizikatörténeti ismereteik bővítésére. Tanszéki könyvsorozatunk eddigi kötetei jól mutatják ezt.

A legkiválóbb hallgatókat sikerült munkatárssá nevelnünk: közös konferencia-előadások, cikkek és volt hallgatóink önálló kötetei tanúskodnak erről. Zsoldos Tamásné (Bogdán Beáta): Öveges József életútja (Eötvös Loránd Fizikai Társulat, Nagykanizsa, 2004.) és Viola István – Bóka Ferenc: Fizika-technika olvasókönyv tudósokról, feltalálókról, találmányokról 10–16 éves tanulónak (Celldömölk, Módszertani K., 1995.) c. könyvét szerte az országban ismerik, használják mind a diákok, mind pedig tanáraik.

Szép eredményeket értek el egykori tanárjelöltjeink a Magyar Tudománytörténeti Intézet kétfordulós országos pályázatain. A beküldött tanulmányok alapján néhányan meghívást kaptak a szóbeli döntőre, és ott is a legjobbak közé kerültek. 2004-ben Zsoldos Tamásné: Mikola Sándor életútja és munkássága c. munkájáért II. díjat, Némethné Pap Kornélia: Rátz László a fásori evangélikus gimnázium kiváló tanára c. művéért III. díjat kapott. A pályaművek megjelentek a Diákok a tudományos kutatás kapujában (Magyar Tudománytörténeti Intézet, 2004.) című könyvben. A 2006. évi pályázatra Nagy Krisztina küldött be tanulmányt: Simonyi Károly élete és munkássága. Írásművét és szóbeli szereplését III. díjjal jutalmazták.

Jelen kötetünkkel megkezdjük a legjobb fizikatörténeti szakdolgozatok, illetve az erre épülő pályamunkák kibővített, szerkesztett változatainak közreadását. Kérjük, fogadják szeretettel.

Kovács László

Bevezető

Az ember alapvető tulajdonsága a kíváncsiság, a mindig újra való törekvés. A kisgyermekben ösztönösen él a tudás iránti vágy. De az iskolába kerülve, talán a kudarcok hatására ez gyakran eltűnik. Olyan tanítókra volna szükség, akik ébren tartják az érdeklődést; megszerettetik a tudást, megmutatják az odavezető utat; széppé teszik, megkönnyítik a tanulást; megmutatják, hogy tanulni és tudni jó.

Ilyen tanár volt Rátz László, róla szól ez a könyv.

Szerettem volna minél többet megtudni Rátz tanár úrról, az életéről, a személyiségéről. Ehhez nagyon sok segítséget kaptam dr. Kovács László tanár úrtól, amelyet ezúton szeretnék megköszönni. Nagy örömmel kutattam az adatok után levéltárban és az Interneten egyaránt. Kerestem a szülőházát, ami a soproni utcák 1940 körüli átszámozása miatt nem volt egyszerű feladat. Nem tudtak felvilágosítást adni sem a Soproni Műemlék Hivatalban, sem a Levéltárban. Jártam a Polgármesteri Hivatal Műszaki irodájában és a Földhivatalban is, eredménytelenül.

A Műszaki irodában irányítottak Hárs Józsefhez, a Soproni Városszépítő Egyesület munkatársához, akinek Mesélő utcák Sopronban című könyvében találtam meg a megoldást, s akinek ezért szintén köszönettel tartozom.

Köszönet illeti még Szabó Istvánt, a Budapesti Fasori Evangélikus Gimnázium gondnokát és emlékeinek őrzőjét, akinek a régi korok hangulatát idéző birodalma sok értékes kincset rejt az iskola múltjából.

A Rátz-életmű ma is az érdeklődés középpontjában áll itthon és külföldön egyaránt. Sorra érkeznek a kérdések, kérések Spanyolországból, az Amerikai Egyesült Államokból, Kanadából. A nemzetközi érdeklődés kielégítése céljából a szerző és a kiadó engedélyével átveszek néhány összefoglaló fejezetet Kovács László kanadai könyvéből. (László Rátz and John von Neumann. *A Gifted Teacher and his Brilliant Pupil*, University of Manitoba, Faculty of Education Winnipeg, Manitoba, Canada, 2003). A BDF Fizika Tanszéke kérésre megküldi Rátz László három fő művének digitalizált változatát. (Az infinitezimális számítások elemei a középiskolában, Matematikai Gyakorlókönyv I., II.)



A Magyarországért Alapítvány kurátorai úgy határoztak,
hogy jeles Bizottságot kérnek fel arra a célra,
hogy együtt munkálkodva
a Magyar Szellem Láthatatlan Múzeumát létrehozzák.

Ezen szándék tanúságaképpen 2002. március 23-án
a Budapesti Evangélikus Gimnázium dísztermében
a Bizottság kinyilvánítja,
hogy az arra méltó

HITTRICH ÖDÖN, MIKOLA SÁNDOR,
RÁTZ LÁSZLÓ ÉS RENNER JÁNOS

fasori gimnáziumi tanárok,
a nemzet jeles tudósait hivatásukra felkészítő munkássága

MAGYAR ÖRÖKSÉG

amiről ezen oklevél bizonytságot tesz

Hittrich Ödön, Mikola Sándor, Rátz László és Renner János
nevét az Aranykönyv őrzi.

Hittrich Ödön

Mikola Sándor

Rátz László

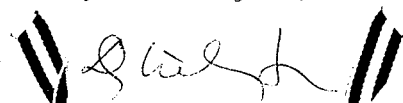
Renner János

Hátori József

elnök

Magyar Örökség Bíráló Bizottság

2002. március 23.



Jakabcsanak
Székelyi István

Székelyi István

Renner János

Rátz László emlékezete

„Sohasem fogom elfelejteni régi tanárait, közöttük Rátz Lászlót, egy igaz pedagógust és melegszívű embert, aki először ébresztette fel bennem tárgyanak, a matematikának szeretetét.”

(így emlékezett rá világhírűvé lett tanítványa, Wigner Jenő [1])



„Tanítványai részéről mindig igazi tisztelet és benső szeretet vette körül. A tisztelet fennkölt gondolkodású kiváló jellemének, szellemi felsőbbségének, lelkes tanári és írói tevékenységének szólt, a szeretet pedig az atyai jóbarátnak, akiben mindenki iránt megértő nemes szív lakozott. Még szorosabbra fűzte a viszonyt tanítványaival a sok együttesen megtett kisebb-nagyobb kirándulás, külföldi tanulmányút, továbbá a zene, amit, mint az Ifjúsági Dal- és Zeneegyesület tanárelnöke, tanítványaival együtt művelt. Az iskolából kikerült növendékei is tisztelettel, szeretettel és őszinte ragaszkodással övezték s nyugalomba vonulása után élete utolsó éveiben nagy öröme telt abban, hogy mint

a «Volt Növendékek Egyesületének» fáradhatatlan ügyvezető alelnöke, egykori növendékével állandó érintkezésben lehetett.”

(egykori életrajzírója, tanártársa, Renner János így írt róla [4])

„Volt tanítványai bizonyóságot tehetnek róla, hogy intézetünkben a matematika¹ régóta nem félelmetes tantárgy, sőt hogy a legszívesebben fogadott és tanult tudományszakok közé tartozik. A legkülönbözőbb képességű és hajlamú gyermeki elméket, melyekből egy-egy osztály rendszeren állani szokott, Rátz László bámulatraméltó ügyességgel tudta egységbe forrasztani, a gyengébbeket támogatni, az ingadozókat bátorítani, az ellanyhulókat korholni, a kiválóbbakat problémák fölvetésével serkenteni, és mégis mindig valamennyinek fi-

1 Az idézeteknél megtartottam az eredeti helyesírást



gyelmét lekötöni és felettük szellemileg uralkodni. Mi kollégái, féltékenység és irigység nélkül, magasabb lelki örömmel szemléltük azt az általános hatást, melyet Rátz László energikus tanári személyisége a tanulók nagy seregére kifejtett. Ez a hatás nem szorítkozott az osztályra és az iskolára, hanem kiterjedt a tanulók egész szellemi világára és most is ott vibrál azoknak lelkében, akik több mint 30 év előtt hagyták itt iskolánkat, de mégis időnként ma is fel szokták őt keresni.”

*(tanártársa, tudóstársa,
Mikola Sándor gondolatai [3])*

„Nagy tudományos felkészültsége, kiváló pedagógiai érzéke, fáradságot nem ismerő kötelességtudása tanítását magas színvonalra emelte. Jól átgondolta minden egyes órájának anyagát; odaadó tanári munkájával, egyéniségének lenyűgöző erejével valósággal magával ragadta tanítványait; tanításának érdekessége és elevensége nem csökkent a haladó idővel; fiatalos hévvel tanított utolsó tanári éveiben is. Nagy tudományos képzettsége mellett le tudott szállni tanítványainak lelkivilágába; mély tudását arra használta fel, hogy bőviből merítve a tanítási anyagot jól megválogassa, s növendékeinek csak az igazán értékeset nyújtsa, azt is olyan alakban, hogy mindenki megértse. A matematikát nem mint elvont elméleti tudományt állította tanítványai elé, hanem lépten-nyomon rámutatott a gyakorlati élettel való szoros kapcsolatára is. Nagy gondot fordított arra, hogy tanítványai önállóan is tudjanak matematikailag gondolkozni; fokozatos és rendszeres előkészítő munkával elérte azt, hogy tanítványai előtt szinte önként tárultak fel a matematika igazságai. Ezzel a tanítási módszerével a sokszor nehéz tárgynak tartott matematikát a kedvvel és érdeklődéssel tanult tantárgyak sorába emelte. Az ő tanítványai nem ismerték a mennyiségtani írásbeli dolgozatok izalmát; mert aki módszeresen felépített előrelátó tanítását figyelemmel hallgatta, – márpedig nem akadt olyan diák, aki óráján nem figyelt volna – az a kitűzött tételeket könnyűszerrel ki is tudta dolgozni. Ügyesen feltett és egymást elég gyorsan követő kérdéseinél majdnem mindig az egész osztály jelentkezett felelésre; nagy tekintélye, a tanulók viselkedését figyelő éles szeme nem engedte az osztálynak ezt a szellemi elevenségét fegyelmetlenségig fájulni. Kiválóan értett az egész osztálynak együttes foglalkoztatásához. Ebben a közvetlen, de a tanárra nézve fárasztó módszerben rejlik tanításának nagy sikere.”

(Renner János [4])

„Rátz László 35 évi tanári munkásság után vonult nyugalomba. Egy negyed század előtt kezdte meg a matematika tanításának azt a módját, amely a múlt évben kiadott állami középiskolai tantervben hivatalos szankciót is kapott. De a matematikai tanítás reformjánál is mélyebb

az a hatás, melyet Rátz László a Középiskolai Matematikai Lapok révén az ország matematikai tanítására gyakorolt. Húsz éven át szerkesztette e lapot minden segítség nélkül, s annak kiadására tetemes összegeket áldozott. Nagy gonddal válogatta meg a folyóirat cikkeit és feladatait, hogy a tanulóknak a matematikai problémák iránt való érdeklődést felkeltse. Nagy tehetségeket fedezett fel, s akik később az egyetemeken és főiskolákon, mint kiváló matematikusok kitűntek, azok majdnem kivétel nélkül az ő lapjának gárdájából kerültek ki. Rátz László igazi tanár volt, aki az iskolának és az iskoláért, a tudománynak és a tudományért dolgozott.”

(Soproni Hírlap, 1930. október 3., péntek [5])

„Mindenfelől általános tisztelet, nagyrabecsülés és szeretet vette körül, az ünnepeletést azonban nemes szerénységgel mindenkor elhárította magától. Jellemének komoly alapvonása mellett gyakran kicsillant szellemes derűs humora is, ami különösen szeretetreméltóvá tette. A kötelességtudást helyezte mindenek fölé, s ezt másoktól is elvárta.”

(így fogalmazott Renner János [4])

„... az igazi tanár nemcsak hivatalnok, aki hivatalos teendőit elvégzi, hanem lekipásztor is, akitől mindenki elvárja, hogy a reábizott lelkekkel törődjék, a kultúra harcosa is, akitől mindenki elvárja, hogy a kulturális haladás érdekében önként és ingyen dolgozzék és végül művész is, aki örökösen gondolatokkal foglalkozik. Rátz László ilyen igazi tanár volt, aki az iskolának és az iskoláért, a tudománynak és a tudományért dolgozott, és akkor is, amikor a norvég fjordokat, a Bernina gleccsereit, vagy az olasz városokat járta, e dolgokon forgatta elméjét.”

(így jellemezte munkáját Mikola Sándor [3])

„A legnagyobb hálát és szeretetet volt tanáraink között Rátz László iránt érezek. Most sokkal mélyebben értem, mint azelőtt, milyen ritka dolog az, hogy valaki lemond egy magasabb állásról – az ő esetében az iskola igazgatóságáról –, és egy szerényebb állást foglal el. Ő szeretett tanítani, szerette látni, mint hatol be a megértés a tanulók tudatába, mint értik meg milyen egyszerű az, hogy az emberi ész képes egy gondolatot a másikhoz fűzni, képes a következtetésekből csodálatos épületet – erős épületet – alkotni. Sok nagy tudós fejezte ki csodálatát ezen képességeinkkel kapcsolatban, de ő szerette a csodát látni és érezni. Nagyobb dolognak tartotta ezt, mint a csodát csupán felismerni. Rátz László – képe az egyetemen a munkaszobámban van – nem csak az iskolában tanított. Neumann Jánosnak, kinek szinte egyedülálló tehetségét csirájában felismerte, magánórákat adott, nekem több ritka érdekességű könyvet adott olvasásra, és ezekből nemcsak matematikát tanultam, de csodálatot is szereztem a következtetések bámulatosan ügyes egymáshozszövése iránt is. Megértettem nagyon korán, hogy ez a matematika lényege, ez a matematikus művészete és kiváltsága.”

(így írt levelében Wigner Jenő 1973-ban Princetontól [2, 6])

„... Ez volt a szép a Fasori Gimnáziumban is: a tanárok érdeklődtek a tanítás iránt. Talán említeném, hogy egy időben az iskola igazgatója visszavonult, és kinevezték helyette a matematika tanárát, Rátz Lászlót igazgatónak. Ő igazgató is volt másfél évig. Másfél év múlva azonban úgy érezte, hogy jobb tanítani, mint igazgatónak lenni. Lemondott az igazgatásról. Olyan ember, mint Rátz László kevés van. ... A Fasori Gimnáziumban többen tanítottak, és mind nagyon szerettek tanítani. Nem annyira talán, mint Rátz László, aki igazán az életét szentelte ennek, és nem is csinált lényegében semmi mást. Neumann Jánosnak magánórákat adott, mert tudta, hogy Neumann János úgyis tudja azt, amit a rendes diákok tanulnak az 5. – 6. osztályban. Nekem könyveket adott, amiből nagyon sokat tanultam. ... Rátz László gyorsan megtanította azoknak, akiket érdekelt a matematika, a differenciálhányadost és alkalmazásait. És sok minden mást. Nagyon érdekelték a diákok; ügyesebbé, matematikusabbá nevelte őket. ... Ez nagyon szép volt. Neumann Jancsi egy osztállyal alattam volt. Három osztállyal előttem matematikából.”

(budapesti beszélgetés diákokkal és Wigner Jenővel [7])

Ha visszamehetnék az időben, szívesen hallgatnám Rátz tanár úr óráit. De ki is volt ő valójában?

Rátz László élet-története

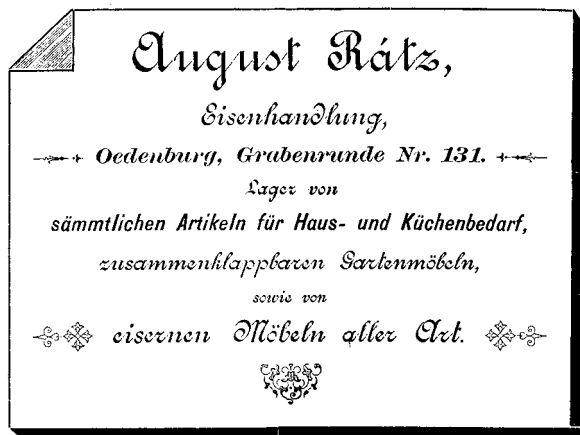
Családja

Sopron az Alpok keleti nyúlványainak számító Soproni hegység és a Fertő-tó mellett húzódó Balfi dombság között, az Ikva-patak völgyében fekszik. A 19. század második felében a megye központja volt, virágzott a kulturális élet, és kezdett kialakulni Sopron iskolaváros jellege. A polgárság többsége a szabadságharc eszméit őrizte, s ez tette lehetővé, hogy a város színházában a szabadságharc emlékét felidéző darabokat láthasson a közönség. Az osztrák származású, de magyar érzelmű színigazgató, *Kottuan Lipót* működése alatt a német színházban állandó magyar társulat is játszott. 1860-ban engedélyezték az evangélikus gimnáziumnak a magyar nyelvű tanítást. 1863-ban a Zeneegyesület megrendezte Magyarország első dalosünnepélyét, 1867-ben megalapították a városi múzeumot. 1869-ben alakult a Soproni Városszépítő Egyesület, amely a város épületeinek gondozását, idegenforgalmának fejlesztését tűzte ki célul, és napjainkban is működik. 1877-ben *Frankenburg Adolf* vezetésével létrejött az Irodalmi és Művészeti kör.

1848-ban a Várkerület 93. szám alatt állt *Rátz J. György* vaskereskedő üzlete és háza. Az épület 1850-ben a 206-os számot kapta, ekkor tulajdonosa már özv. *Rátz Györgyné*. 1869-ben került *Rátz Ágost* birtokába, aki az üzletet valószínűleg már régebb óta vezette.

Ebben az évben lett a ház száma 131. *Rátz Ágost* felesége *Töpler Emma* volt. Első gyermekük 1852. szeptember 21-én született, aki a *Caroline Emma* nevet kapta. Ő 1879. szeptember 25-én, 27 éves korában meghalt. A gyermekek sorában 1854. október 4-én következett *Eduard August*, azaz *Ágost Ede*. 1857. április 1-jén született *Ladislaus Otto*, azaz *László Ottó*, majd 1859. november 13-án *Johannes Georg Karl*, azaz *Károly*.

Ebbe a családba született 1863. április 9-én *Ladislaus Wilhelm*, azaz *Rátz László*. Néhány évvel később, 1869. június 4-én leánytestvér született: *Louise Katharina*, vagyis *Lujza*. (Ezen a napon a házszám még 206 volt.) Mivel Sopron ezidőtájt a német nyelvterülethez tartozott, az anyakönyvi kivonatok mind német nyelvűek [8, 9, 10, 46, 47].



A testvérei közül *Rátz Ágost Ede* vitte tovább édesapjuk vaskereskedését, *Rátz Ottó* később a soproni törvényszék feddhetetlen bírása lett, *Rátz Lujzát* pedig *Töpler Kálmán* soproni polgármester vette feleségül [5, 47, 48].

[illegible]

Rátz László születési anyakönyvi kivonata

Rátz László szülőháza ma a Várkerület 110. számot viseli, és műemléki védeltséget élvez. *Handler Jakab* építette 1814-ben *Tibolth Mihály* számára. Jellege szerint az épület zártosorú, L alakú, udvaros, kétemeletes klasszicista lakóház. Négytengelyes homlokzatát háromrészes főpárkány zárja le. A földszint felett durva, végigfutó övpárkány található. Igen enyhe középrizalit. Az emeleteken oldalt kváderes lizéna, a középső részt három toszkán félpillér fogja össze. A második emeleten az ablakok alatt konzolon könyöklőpárkány, az első emeleten az ablakok alatt magasra vont szemöldökpárkány alatt táblás díszek, a táblás kötények láthatók. A kapu az utolsó tengelyben kosárirves, kváderes, záróköves. Belül a kapualj jobb oldalt árkádszerűen kiképzett; négy csehstüveggel – tudjuk meg az irodalomból [8, 11, 12].

Rátz Ágost 1882. augusztus 14-én meghalt Karlsbadban. 1885-ben az épület tulajdonosai: *Rátz Ágost* (bizonyára az ifjabb), *Rátz Ottó, Károly és László* [9, 47].



Rátz László szülőháza Sopronban



Rátz László szülőházának udvari nézete

A Sopronban 1889-ben megjelent német nyelvű üzleti kalendáriumban a vaskereskedők között fellelhető Rátz Ágost neve a Várkerület 131. alatt. Ebben a könyvben található egy féoldalas hirdetés is, amelyben Rátz Ágost mindenféle, vasból készült konyhai és háztartási szükségleti cikkeket, összecsukható kerti bútorokat kínál. Néhány évvel később, 1893-ban a hasonló évkönyv már magyarul jelent meg. Itt a vaskereskedők között a Várkerület 131. szám alatt *Schleiffier Gusztáv* neve szerepel. 1892. október 4-én Rátz Ágost Ede nős vaskereskedő (felesége *Ullrich Hermína*) 38 éves korában gümőkór miatt meghalt. Feltételezhető, hogy örökösei az üzletet bérbe adták vagy eladták. Az épület tulajdonosai egy 1898-as feljegyzés szerint: Rátz Ottó, Károly, László és Lujza. 1910-ben, az üzlet után, a ház is a Schleiffier család birtokába került, ettől az évtől ugyanis a tulajdonos *Schleiffier Rikárd*, aki talán Gusztáv fia lehetett [9, 25, 26, 48].

A házban ma lakások vannak, a földszinten az utcára nyílik egy írószерület.

Diákévei

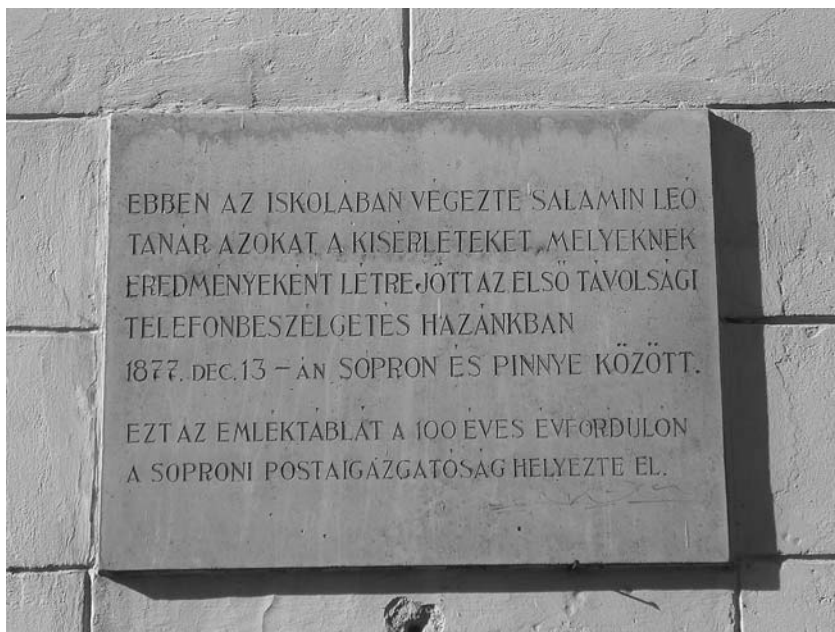
Rátz László az elemi és középiskolát Sopronban végezte [13].

Az elemi iskoláról és a középiskola első két évéről nincsenek adataink.

Rátz László az 1875/76-os tanévben a *soproni magyar királyi állami Főreáltanoda* III. osztályának tanulója volt. Ugyanennek az intézménynek az 1876–77-es értesítőjében már a *sopronyi magyar királyi állami Főreáliskola* elnevezés szerepel. Rátz László itt folytatta tanulmányait a IV., V., VI. és VII. osztályban is az 1879/80-as tanévig. Ebben az időben az iskola igazgatója *Salamin Leo*, akinek emléktáblája az épület falán látható. Az intézmény 1876. január 1-jével került állami kezelésbe. Ismereteim szerint ez volt akkor Sopronban az egyetlen állami iskola. Az államosítással új korszak kezdődött az iskola történetében, melynek legfőbb jellemzője a magyarosodás. Salamin Leo igazgatói kinevezéséig, 1872-ig, a tanítási nyelv majdnem egészen német volt, a tanulók és a tanárok is németül beszéltek egy-

mással. A várostól független, és teljes szervezetű állami intézet tantestületének azonban alkalma nyílt arra, hogy tanítási nyelvvé a magyart tegye, s csak az alsó két osztályban engedélyezték kisegítő tannyelvként a németet használni [50, 51, 52, 53, 54, 55].

„Sopronnak belvárosában, az ódon kinézésű Templom-utczában fekszik az Állami Főreáliskola épülete. Kétemeletes sarokházat képez ott, hol a szűk Iskola-utca nyílik a Templom-utczába. Hosszabbik szárnya 18 ablakkal az Iskola-utczára néz, míg rövidebb főhomlokzata 11 ablakkal a Templom-utca sorában áll; egy ablak jut az eltompított sarokra.



Emléktábla a soproni Széchenyi Gimnázium falán

Szemközt áll vele az Iskola-utczában a Casino-épület hátsó része, elvevén iskolánktól, különösen ennek földszintjétől a világosság nagy részét.

A főreáliskolának két bejárata van. A Templom-utcai homlokzat közepén nyílik a hatalmas kapu által zárható főbejárat; az Iskola-utczában van a keskenyebb mellékbejárat, amelyen a tanuló ifjuság jár ki és be. A kapu fölött jó magasan kicsiny tábla hirdeti, hogy itt van az:

»Áll. Főreáliskola.« – írta *dr. Kárpáti Károly*, az iskola tanára, az intézmény történetéről szóló, a millenium évében kiadott könyvében [50].

Amikor Rátz László itt tanult, az épületen a kath. elemi iskolával osztoztak [50]. Az Állami Főreáliskola, a jelenlegi Széchenyi Gimnázium képe a hátsó borító belső oldalán látható.

Az 1875/76-os tanévben az iskola 30 fős III. osztályának egyik tanulója volt Rátz László. Tanulmányi eredménye „I. rendű”, „ekölcsi viselete”: „példás” (1), szorgalma „kellő” (3).

Tanárai:

Fialovszky Lajos: földrajz

Gombóc Miklós: hittan

Hauser Károly: „szabad kéz rajz”

Moller Ede: magyar nyelv

Molnár József: természettan, osztályfőnök

Rösch Frigyes: számtan

Salamin Leo: francia nyelv

Skoff Béla: mértan

Stuppacher Lajos: német nyelv, szépírás

Ulber Mátyás: történelem [51].

Az 1875. év arról is nevezetes, hogy *Trefort Ágoston* vallás és közokt. miniszter, aki egyben Sopron városának országgyűlési képviselője volt, két ízben is megfordult a városban, ez alkalmakkor tárgyalások folytak az államosításra vonatkozóan. A miniszter 1876-ban és 1878-ban is meglátogatta az iskolát, „mely tulajdonképpen az ő alkotása” (dr. Kárpáti Károly) [50].

A tanév említésre méltó eseményei közé sorolható, hogy az első „érettségi vizsgálat megtartatott”, a hetedik osztályos tanulók részvételével. [50]

Deák Ferenc halála alkalmából a tanári testület ösztöndíjalapot létesített, és 1876 április 23-án Deák-gyászünnepélyt rendezett [50].

Az 1876/77-es tanévben Rátz László a IV. osztály tanulója, a létszám 24 fő.

Tanárai:

Bella Lajos: földrajz

Brunner János lelkész: hittan

Hauser Károly: szabad kéz rajz

Moller Ede: magyar nyelv

Molnár József: természettan, osztályfőnök

Salamin Leo: francia nyelv

Skoff Béla: mértan

Stuppacher Lajos: német nyelv

Ulber Mátyás: történelem

Wallner Ignác: vegytan

Ebben a tanévben fejeződött be a teljesen kiegészített 8 évfolyamos reáliskola újjászervezése [52].

Rátz László az 1877/78-as tanévben V. osztályos volt. Az osztály létszáma 18 fő.

Tanárai:

Molnár József: mennyiségtan, osztályfőnök

Moller Ede: magyar nyelv

Stuppacher Lajos: német nyelv

Salamin Leo: francia nyelv

Bella Lajos: földrajz, történelem

Fialowski Lajos: természetrajz

Skoff Béla: mértan

Wallner Ignác dr.: vegytan

Hauser Károly: szabadkézi rajz

Örömmel fedeztem fel, hogy az iskola értesítőjének jótékonyági rovatában, a főreáliskola segélyegyletének rendes és pártoló tagjai között Rátz Ágost neve is megtalálható [53].

Az 1878/79-es tanévben a 16 fős VI. osztály tanulója.

Tanárai:

Bayer Ferenc dr. pótтанár: német nyelv, a második harmad kezdetétől fogva

Bella Lajos: földrajz, történelem

Fialovszky Lajos dr.: terményrajz

Freitag Győző evangélikus lelkész: ágostai hitvallástan

Hauser Károly: szabadkézi rajz

Kárpáti Károly: magyar nyelv, „tornászat”

Salamin Leo: francia nyelv

Skoff Béla: mértan, mennyiségtan

Stuppacher Lajos: német nyelv

Wallner Ignác dr.: vegytan

Gamauf György pótтанár: történelem, földrajz [54]

Az 1879/80-as tanévben Rátz László VII. osztályos, a létszám ekkor már csak 10 fő.

Tanárai:

Salamin Leo: francia nyelv

Bella Lajos: földrajz, „történet”

Hauser Károly: szabadkézi rajz

Kárpáti Károly dr.: magyar nyelv; szergyakorlatok, csapatgyakorlatok

Molnár József: „phys.”

Skoff Béla: ábr. mértan, mennyiségtan

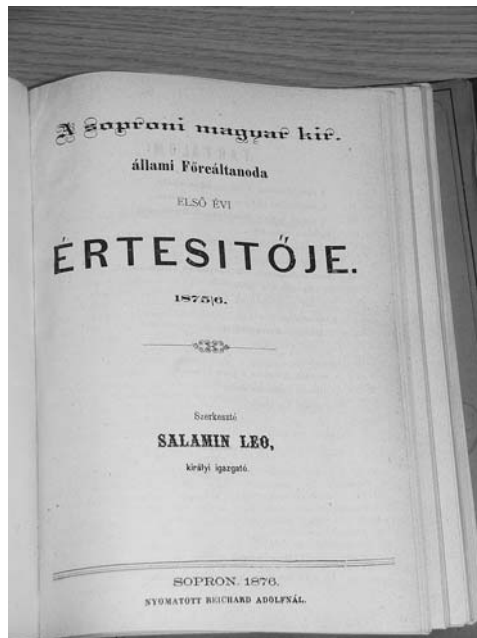
Stuppacher Lajos: német nyelv

Wallner Ignác dr.: vegytan, ásványtan

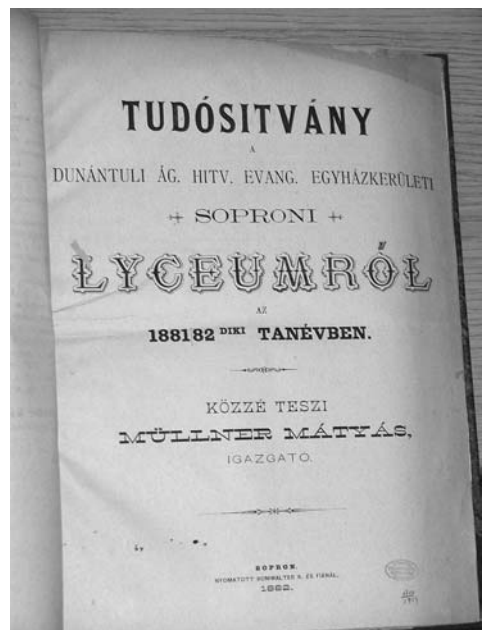
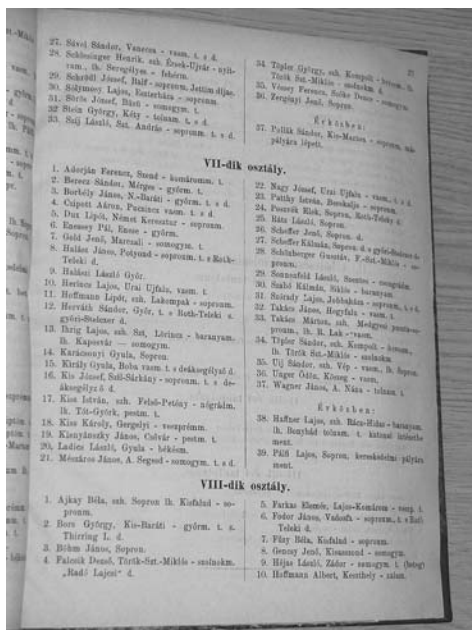
Freitag Viktor evangélikus lelkész: hittan [55]

Az iskolában működő **Berzsenyi-kör** kezdeti szakaszáról így ír dr. Kárpáti Károly:

„Intézetünk ifjúsága már idejekorán lépett az önművelés hálás talajára. A felső osztályok tanulói már 1871/72-ik tanévben alapítottak egyesületet a végből, hogy magukat a magyar és német irányban és szóbeli előadásban minél jobban kiképezzék. Ez volt az első



A soproni magyar királyi állami főreáltanoda értesítője a 1875/76. tanévben



Tudósitvány a dunántúli ágostai hitvallású evangélikus egyházkerületi soproni Lyeumról az 1880/81. és az 1881/82. tanévben

szárnybontás; ez volt nálunk az önképzés első csirája, melyből 2 évvel későbben egy rendes »Önképző-kör« sarjadt ki» [50].

A kör munkásságának kezdeti iránya a költemények szavalásán kívül prózai és verses művek készítése és bírálata. A kör „legmunkásabb” tagjai között szerepel Rátz László neve is [50].

Az értesítőket lapozva megfigyelhető a felsőbb osztályok létszámának nagyarányú csökkenése. Ennek egyik oka lehet:

„A hat-osztályu reáliskola ugyanis a maga tagadhatatlan előnyeivel nagy vonzó erőt gyakorolt az ifjuságra. Mihelyt azonban a 8 osztálylyal beköszönt az érettségi vizsgálat is, egyszerre beáll a különben előrelátott apadás úgy szólván kivétel nélkül minden reáliskolában. Ezt a reactiót megérezte intézetünk is...” (dr. Kárpáti Károly)

Talán hozzájárult ehhez az a tény, hogy, amikor 1875-ben a reáliskolákat 8 osztályúakká alakították, és elrendelték az érettségi vizsgálatot, a tanügyi kormány ezzel az intézkedéssel formailag egyenrangúvá tette a reáliskolákat a gimnáziumokkal, de abiturienteinek (azaz érettségizett diákjainak) nem adta meg a jogot arra, hogy tanulmányaikat a tudományegyetemen is folytathassák [50].

A következő tanévtől Rátz László is másik iskolában folytatta tanulmányait, de ő feltehetően az egyetemi továbbtanulás érdekében, nem pedig az érettségitől való félelem miatt. A gimnázium utolsó két évében a dunántúli ágostai hitvallású evangélikus egyházkerületi soproni Lyceumba járt. Az iskola mai neve: Berzsenyi Dániel Evangélikus Gimnázium (Líceum) [14]. Az épületről korabeli fotó látható a hátsó borító belső oldalán. Érdeemes megfigyelni, hogy az iskola több emeletes épülete, mint a tanítás és a tudomány fellelőjére emelkedik ki a környező kis házak közül.

Az akkori líceumi anyakönyvekben nem szerepel, hogy a tanuló melyik iskolából érkezett oda.

Rátz László elemi iskolája után kutatva átnéztem a Sopronban fellelhető iskolai dokumentumokat. A soproni evangélikus népiskola 1878/79. évi értesítőjében Rátz László neve természetesen nem található meg, viszont a IV. leányosztály (IV. mädchenklasse) tanulója volt, feltehetően testvére, Rátz Louise. A soproni evangélikus elemi „fi- és leány néptanodának” az 1880/81-es tanévről szóló értesítőjében már Rátz Louise neve sem található [14, 15, 16].

Rátz László az 1880/81-es tanévben VII. osztályos volt a soproni lyceumban, 37 tanuló között 25. a névsorban [20].

Úgy gondoljuk, hogy a magasabb színvonalú líceumi oktatás miatt kellett újra a VII. évfolyamra járnia.

Az osztályzatokról szóló tudósítás névsorában a 26. helyen szerepel. „Erkölcse” mindkét félévben jó minősítést kapott. Otthoni étkeztetésben részesült [22].

Rátz László líceumi tanárai:

Fehér Sámuel: történelem

Góbi Imre: magyar nyelv

Király J. P.: német nyelv, latin nyelv

Malatides Sándor: logika

Poszvék Gusztáv: német nyelv

Poszvék Sándor: vallás

Renner János: mennyiségtan, természettan

Thiering Károly: görög nyelv [17].



Góbi Imre



Renner János István

Góbi Imrét 1884-ben a budapesti Fasori Evangélikus Gimnáziumba hívták, és 1896-ban igazgatóvá választották. 1909-ben történt nyugdíjba vonulásakor pedig volt soproni tanítványa, Rátz László került az igazgatói székbe [18].

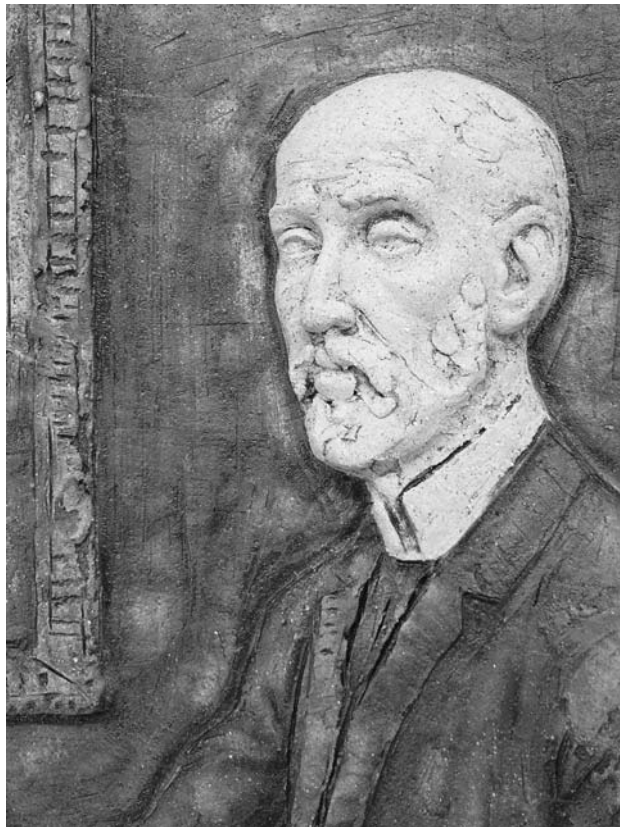
Renner János István, a híres „Nulla bácsi” a lyceum legrettegettebb professzora volt. Egy későbbi tanítványa, *Bruckner Győző dr.* miskolci jogakadémiai dékán, a Magyar Tudományos Akadémia tagja, így jellemezte:

„Mathematikát és fizikát tanított, olyan szeretettel s lelkesedéssel, amilyent ezeknél a szárazaknak gondolt studiumoknál szinte alig lehet elképzelni, de amellet kérlelhetetlen szigorúsággal.

Módszere az indukció ideális megvalósítása volt, kérdésekben tanított, sokratesi módszerrel, s nem egyszer sokratesi iróniával is.

Előtte nem az volt a fontos, hogy a tananyagot előadja s lemorzsolja az órát, hanem, hogy minden egyes tanítvány, még a leggyengébb is, megértse a matematikai axiómákat, fizikai tételeket. Nem tűrhette, hogy egy is értelmetlenül álljon az előadottakkal szemben s inkább lassan haladt, de mindegyiknek jó fundamentumot adott. ... óráin katonás fegyelmet tartott, s síri csendben kellett várnunk rá. ... Nem tarthatott volna azonban köztünk, minden kópéságra hajlandó diáknép közt ekkora fegyelmet, ha erélye mellett nem tudott volna imponálni nekünk nagy szaktudásával. Sok év multán is nem egyikünk álmodta, hogy Nul-

la bácsinál kellett felelnie matematikából s ez mindig legsúlyosabb lidércnyomás volt, mert mindenki tudta, hogy nála csak alapos tudással, igazi készséggel lehet boldogulni. Ezért amellet, hogy féltünk tőle, tiszteltük is, mert igazságos és méltányos volt s amire tanított, az igazán vérré vált bennünk” [19].



Eötvös-dombormű (Barták Csaba alkotása)

Ez a jellemzés nagyon hasonlít ahhoz, ahogyan Rátz Lászlóra emlékeztek tanítványai és tanártársai. Ez bizonyára nem véletlen, hiszen Rátz László azt adta tovább diákjainak, amit ő annak idején tanítómesterétől kapott.

Renner János István fia, *Renner János Lajos* később a budapesti Fasori Gimnáziumban kollégája lett Rátz Lászlónak. Renner János István és Renner János Lajos mindketten Eötvös Loránd tanítványai voltak [18].

Rátz László az 1881/82-es tanév végén érettségizett. A lyceum tudósítványa szerint ekkor 36-an jártak a VIII. osztályba, köztük névsorban a 25. Rátz László. Tanárai voltak ebben az évben:

Góbi Imre: magyar nyelv
Gombóczi Miklós: lélektan, történelem
Király J. P.: német nyelv, latin nyelv
Müllner Mátyás: latin nyelv
Posztyák Gusztáv: német nyelv
Posztyák Sándor: vallás
Renner János: mennyiségtan, természettan
Thiering Károly: görög nyelv [17, 21].

Az erre a tanévre vonatkozó osztályzatokról szóló tudósítás nem található meg a gimnázium könyvtárában.

Renner János hagyatékából származik az 1881/82. évi matematikai érettségi tétel, így valószínűleg ezeket a vizsgakérdéseket dolgozta ki Rátz László is érettségiző diákként. Három feladatot kellett megoldania, amelyből az első egy szöveges feladat a kamatszámítással kapcsolatban, a másodikban arány és földrajzi szélesség szerepel, a harmadik pedig egy trigonometrikus egyenlet [18].

Rátz László 1883–1887 között a budapesti Tudományegyetem hallgatója volt. Tanulmányait megszakítva 1887. október 4-től 1888. augusztus 7-ig a Berolini Egyetemen filozófiát, majd 1888. október 31-től a Strassburgi Egyetemen természettudományt tanult. 1889. szeptemberében tért vissza Budapestre. Ekkortól a budapesti Tudományegyetem Gyakorló Főgimnáziumában egy évet töltött tanárjelöltként. A tanári alap-, szak- és pedagógiai vizsgát Budapesten, az Országos Tanárvizsgáló bizottság előtt tette le. Következő évben szerezte meg matematika – fizika szakos egyetemi oklevelét, amelynek kelte: 1890. november 28. [2, 13, 23, 24].

Tanári és közéleti tevékenysége

1890. szeptember 1-jétől a budapesti ágostai hitvallású Evangélikus Főgimnáziumban helyettes tanárként, majd 1892. szeptember 1-jétől mint rendes tanár működött. Matematikát és rajzoló geometriát (ábrázoló geometriát) tanított [2, 13, 23, 24].

Az iskola ekkor a Sütő utcai épületben működött, 1904-ben költözött a Városligeti fasorban elkészült épületbe [32]. A Fásori Gimnáziumról korabeli fotó látható a hátsó borító belső oldalán.

1909 és 1914 között az iskola igazgatói tisztségét is betöltötte. Abban az időben hat évre választottak igazgatót, de ő csak öt évig látta el ezt a feladatot. Egykori tanítványa, Wigner Jenő így ír erről:

„Góbi Imre gimnáziumigazgató nyugdíjba vonulása után a tantestület Rátz Lászlót jelölte és nevezte ki utódjául. Az igazgatói kinevezéssel feltehetőleg Rátz fizetése is emelke-



A Fasori Evangélikus Gimnázium napjainkban

dett. Az ember általában örül az előléptetésnek, Rátz azonban aggódott, hogy új feladatkörre a matematikatanítás rovására mehet, mert tisztában volt vele, hogy a matematika megszerettetése mekkora energiát igényel.

Öt év kiváló igazgatói működés után Rátz úgy döntött, hogy az igazgatói feladatkör valóban túl sok energiát von el a tanítástól. Csendben lemondott az igazgatóságról, és ismét teljesen a tanításnak szentelte életét. A testület felhőrdült, hiszen a lemondást legtöbbször presztízsvesztésnek tartották, Rátz tanár urat azonban láthatóan édeskevésbé érdekelte az effajta karrier és az igazgatói címmel járó presztízs.” [27]

Tanártársa, Mikola Sándor így emlékezik:

„Iskolaügyi dolgokban az ő szava már régóta irányadóvá vált. Egészen természetes következménye ennek, hogy annak idején a Góbi Imre nyugalomba vonulásával megüresedett igazgatói tisztségre a tanári kar az iskolai főhatósággal egyetértésben őt választotta meg. Rátz László vállalta is e tisztséget és mindnyájunk osztatlan meglegedésére öt évig viselte is azt. Ekkor azonban lemondott róla és visszatért a tanári katedrára. A tanári kar és az iskolai főhatóság ezt az elhatározását nem tudta megérteni, mert úgy alulról, mint felülről osztatlan bizalom sugárzott feléje. Valószínűleg bántotta őt az az ellentét, amely a lelkes, passzionátus tanár lelki világa és az igazgatói teendőktől elütő természete között fölmerül; az ellentét érzetét nem tudván magából kiküszöbölni, visszatért régi szerelméhez a tanári katedrához. Megszűnt ugyan igazgató lenni, de továbbra is vezetőnk maradt” [3].

Mint a főgimnázium igazgatója tagja volt a Közös Képviselőtestületnek és a Magyar Egyháztanácsnak [13].

Visszalépése után az evangélikus egyház Képviselő Testülete a *főgimnázium tiszteletbeli igazgatója* és a *képviselőtestület örökös tiszteletbeli tagja* címekkel tüntette ki [13].

Utódjaként az intézmény élére Dr. Hittrich Ödön került, aki a következőképpen írt róla: „Mint igazgató az igazgatói irodát újjászervezte s az iskola egész életére kiható figyelemmel iparkodott intézetünk jó hírnevét emelni és erősíteni” [29].

Dr. Hittrich Ödön nagyon tisztelte Rátz Lászlót, akivel baráti viszonyuk ellenére soha sem tegeződtek, Kollega Úrnak szólították egymást. Hittrich egyik unokája Rátz Lászlóhoz járt matematika korrepetálásra, tőle származik az az információ, hogy „Rátz bácsi” a Szív utca elején lakott, a Lövölde tértől a második házban, a 3-as szám alatt, csak néhány sarokra a gimnáziumtól [18].

Nemcsak középiskolás diákjaival törődött, a tudományegyetem pedagógusjelöltjei közül is többen hozzá jártak gyakorlótanításra, s talán őmiatta is választották e nagyszerű hivatást [32].

Tanári munkája mellett Rátz László tagja volt a Képviselőtestületnek, a gazdasági és iskolabizottságnak, az Egyetemes tanügyi bizottságnak és az Esperességi törvényszéknek. 1913-ban a Bánya Kerület bizalmából választott tagja lett az evangélikus Zsinatnak [13].

Az Európában kibontakozó oktatási reformmozgalmak nyomán Magyarországon is szükségessé vált az oktatás korszerűsítése. Az Országos Középiskolai Tanáregyesület 1906. évi rendes közgyűlésén létrehozták a Matematikai Reformbizottságot, amelynek elnöke *Beke Manó* professzor, titkára Mikola Sándor lett, és a tagok között volt Rátz László is [2, 24, 28].

1909-ben a magyar Királyi Vallás- és Közoktatásügyi miniszter kinevezte a matematikai oktatás nemzetközi bizottságába Magyarország egyik képviselőjévé. Ebben a minőségében részt vett a Milánóban, Cambridgeben és Párizsban tartott nemzetközi kongresszusokon [13, 28].

1910-ben a Vallás- és Közoktatásügyi miniszter kinevezte az Országos Tanári Nyugdíjintézetbe bizottsági tagnak [13, 28].

1910-ben a franciaországi Ministère de l'instruction publique et des beaux-arts meg-tisztelte az „Officier d'Académie” címmel [13, 28, 29].

1913-ban a Magyar Pedagógiai Társaság rendes tagjává választotta. Tagja volt az Országos Tanáregyesület választmányának és igazgatóságának, valamint az Evangélikus Tanáregyesületnek [13].

Az 1896. évtől 1914-ig, a háború kitöréséig szerkesztette és kiadta az 1894-ben Arany Dániel által alapított Középiskolai Matematikai Lapokat (KÖMAL) [13, 28].

Az I. világháború alatt a matematika oktatásának reformja megakadt, de a háború után folytatódott. Rátz László ekkor már a Közoktatási Tanács előadó tanácsosaként működött közre az 1924. évi középiskolai matematikai tanterv és a hozzá kapcsolódó utasítások megalkotásában. Az elkészült tanterv végül azt a tanmenetet írta elő a matematikatanárok szá-

mára, amelyet a Fasori Evangélikus Főgimnáziumban a XX. század első éveitől kezdődően Rátz László dolgozott ki [2, 4, 24, 28, 29].

1892-től megszakításokkal 17 éven át az Ifjúsági Dal és Zeneegyesület tanárelnöke volt. Nevéhez fűződik a gazdag könyvtár és kottatár megalapítása. 30 éven keresztül vezette a tanári kar magán-takarékpénztárát, azaz a tanárok anyagi ügyeire jótékony hatást gyakorló Formica nevű takarékegyesületet [28, 29].

Élete alkonyán

1925. szeptember 1-jétől 35 évi tanári munkásság után saját kérelmére nyugdíjazták [23].

Ezután is gyakran „felkereste régi munkahelyét, érdeklődött az iskolai élet minden fontosabb mozzanata iránt s jó tanácsokkal támogatta a fiatalabb kartársakat” – emlékezett rá Renner János.

1923-ban, az iskola fennállásának 100. évfordulója alkalmából a volt növendékek elhatározták, hogy egyesületbe tömörülnek, amelynek célja „a budapesti ágostai hitvallású evangélikus gimnázium évszázados hagyományokon alapuló humanista szellemének, a gimnázium szeretetének, a tagok közötti barátság és összetartás érzésének ápolása, a gimnáziumba járó és onnan főiskolára került ifjúság erkölcsi és anyagi támogatása”. Ennek érdekében az egyesület összejöveteleket, felolvasásokat, előadásokat rendezett, közreműködött az érettségi találkozók szervezésében, alapítványokat, ösztöndíjakat létesített és támogatott, továbbá kedvezményeket nyújtott a gimnázium tanulóinak, és a főiskolára került volt diákoknak [35].



A Grünwald szanatórium Budapesten

„... nyugalomba vonulása után élete utolsó éveiben nagy öröme telt abban, hogy mint a Volt Növendékek Egyesületének fáradszatórtalan ügyvezető alelnöke, egykori növendékeivel állandó érintkezésben lehetett.” – írta róla Renner János [4].

1930. szeptember 30-án, kedden, délután három óra negyvenöt perckor halt meg Budapestén a Grünwald szanatóriumban [23].

A Soproni Hírlap 1930. október 3-i, pénteki száma így ír:

„Rátz László, a budapesti evangélikus főgimnázium volt tanára és igazgatója, városunk szülötte, hosszas és kínos szenvedés után élete 68. évében meghalt. ... Néhány héttel előbb Karlsbadból érkezett haza Budapestre, mikor szélhűdés érte és a Grünwald szanatóriumban áptolták, de nem tudták őt megmenteni az életnek. Holttestét haza hozzák és itt szombatón temetik el az evangélikus temetőben” [5].

A Gimnázium a következő gyászjelentést adta ki:

A BUDAPESTI EVANGÉLIKUS GIMNÁZIUM TANÁRI TESTÜLETE
mély fájdalommal jelenti, hogy egykori nagyérdemű igazgatója és
a Volt Növendékek Egyesületének ügyvivő alelnöke

RÁTZ LÁSZLÓ

a magyarországi evangélikus egyház egyetemes törvényszékének bírāja,
a deákteri testvéregyházak képviselő testületének tagja, az Országos Közoktatási Tanács v. előadó tanácsosa,
a Magyar Paedagogiai Társaság rendes tagja, a Matematikai és Fizikai Társulat választmányi tagja,
a Középiskolai Matematikai Lapok alapítója és húsz éven át szerkesztő-kiadója stb.

szeptember hó 30-ikán, életének 68-ik évében elhunyt.

A boldogult hűlt tetemét október 2-ikán, d. u. 3 órakor a Kerepesi-úti temető halottas csarnokában való megáldás után, október 4-ikén d. u. 3 órakor szülőhelyén, Sopronban kísérik örök nyugvóhelyére.

**Szellemének és áldásos működésének emléke élni fog
iskolánkban, egyházunkban és az egész országban.**

Budapest, 1930. október 1.

Fébbé-nyomda, Budapest.

A Gimnázium 1930/31. évi értesítőjében olvasható:

„Amikor szeptember elején nyaralásból hazajött, útközben agyvérzés érte. Itt a szomszédságunkban levő szanatóriumban, ahová a csapás után még a saját lábán tudott bemenni, heteken keresztül vívódott a halállal. Hűlt tetemét október 2-án a Kerepesi úti temető halottas kamarájában áldotta meg Kemény Lajos lelkész, intézetünk és a Matematikai és Fizikai tár-

sulat nevében iskolánk igazgatója, a Volt Növendékek Egyesületének nevében Pósch Gyula vett tőle búcsút. A tanári kar tíz tagja elkísérte koporsóját szülő helyére, Sopronba, ahol október 4-ikén a családi sírboltban helyeztetett örök nyugvó helyére” [3: 19. oldal].

A Soproni Hírlap október 5-i számában így ír:

„Rátz Lászlónak, a budapesti evangélikus gimnázium neves igazgatójának hült tetemét Budapestről Sopronba szállították s itt tegnap délután az evangélikus temető halottas csarnokából nagy részvét mellett helyezték örök nyugalomra. A gyászoló közönség soraiban ott láttuk Töpler Kálmán kormányfőtanácsos, ny. polgármestert, kinek az elhunyt sógora volt, egész családjával. Megjelent a gyászszertartáson vitéz Simon Elemér főispán, Thurner Mihály polgármester, Schindler András polgármester-helyettes, Heimler Károly főjegyző, Schönberger Gusztáv tisztifőorvos, Pröhle Károly egy. tanár, Sziklai Jenő bencésgimnáziumi igazgató, Hollós János líceumi igazgató és még sokan mások. A halottas csarnokban Budacker Oszkár, a sírnál Ziermann Lajos kormányfőtanácsos, ev. lelkész végezte a gyászszertartást. Ugyanitt Mikola Sándor, a budapesti fasori ev. gimnázium igazgatója magas szárnyalású beszédben búcsúztatta az elhunytat a gimnázium tanári testülete és egykori tanítványai nevében”[30].

Sírja a soproni evangélikus temetőben a bejáratától balra, a fal mellett található az I/3-as kriptában. A családi sírboltban a Rátz és a Benedek család tagjai nyugszanak:

Rátz Auguszt (meghalt 1882-ben, 56 éves korában, Rátz László édesapja)

Rátz Emma (meghalt 1879-ben, 27 éves korában, Rátz László nővére)

Rátz Georg (meghalt 1887-ben, hét órát élt, Rátz László testvérének, Rátz Ágost Edének fia)

Töpler Kálmán (meghalt 1891-ben, 8 napot élt, Rátz Lujza gyermeke)

Rátz Emma (született Töpler, meghalt 1900-ban, 68 éves korában, Rátz László édesanyja)

Dr. Rátz Otto (1857–1914, meghalt 57 éves korában, kir. táblai bíró, Rátz László bátyja)

Rátz Vilma (Dr Rátz Ottoné, szül.: Schmidt Vilma, 1865–1922, meghalt 56 éves korában)

Fiuk: Rátz Gyula (1899–1911)

Rátz László (1963–1930, a Budapesti Evang. Főgimn. volt igazgatója, meghalt 68 évesen)

Ifj. Rátz László (Rátz Otto fia, meghalt 1932-ben 35 éves korában, öngyilkos lett)

Benedek Zoltánné (Rátz Otto lánya, szül.: Rátz Vilma, meghalt 1944-ben, 56 éves korában)

Benedek Zoltán (meghalt 1945-ben 74 éves korában)

Benedek Zalán (meghalt 1997-ben 74 éves korában) [31, 46, 47, 48, 49]

Rátz László tanár úr nőtlen volt, gyermeke nem született.

A Függelékben közreadjuk a Rátz–Benedek családfát.



Rátz László sírja Sopronban

Rátz László munkássága

„egy igaz pedagógus”

A Fasori Evangélikus Gimnáziumba járt egykori diákok itthon és külföldön egyaránt a reál- és humántudományok kiválóságaiként vitték hírét a magas színvonalú magyar oktatásnak. Az iskola sikerének titka nehezen megragadható, de nyilvánvalóan szerepe volt ebben a hagyományoknak, amelyek Schediuson keresztül Pestalozziig vezetnek [2].

A tanítás hatékonyságának legfontosabb tényezője a tudományosan és pedagógiai felkészült tanári kar volt. Hittrich Ödön, az iskola egykori igazgatója így ír erről: „Iskolánk fenntartó hatósága jól tudja, hogy a tanár az iskola lelke, mindig kiváló gondot fordított a tanárok megválasztására. A tanár egyénisége mély hatást gyakorol növendékeire: lelkiismeretes, buzgó tanár emléke feledhetetlen a tanítványok előtt, mert ő adja az igazi útvalót tanítványainak” [2].

A tanárok jelentős része külföldön is folytatott tanulmányokat. Többen tudományos kutatásokat végeztek, részt vettek nemzetközi szervezetek munkájában, hazai és idegen nyelvű folyóiratokban publikáltak. Mindezek mellett a tantestület többsége aktív közéleti szerepet is vállalt [2].



A Fasori Evangélikus Gimnázium udvari nézete napjainkban

Wigner Jenő, akinek véleménye szerint „a Fasori Evangélikus Gimnázium volt Magyarország legjobb iskolája”, így emlékezik: „Ezek a nagy tanáregyenlőségek imádtak tanítani, és rendkívül sikeresen motiválták a diákokat a tanulásra. Nemcsak elkötelezett hivatástudatuk és tényszerű tudásuk volt imponáló: a tudás tiszteletét és szeretetét is sikerült átadniuk” [27].

1940-ben *Vladár Gábor* így jellemezte az iskolát:

„A három elem, ú. m. a tanári kar, a tanulók és a tanítás, illetőleg a tanulás jellegzetességének ismeretében gimnáziumunk állandósági tényezőjét s egyúttal lényegét is úgy határo-



Rátz László

rozhatnám meg, hogy a vallás, a hazaszeretet s a humanizmus jegyében nevel a nemzetnek vallásos, klasszikus műveltségű, hazájukat szerető, egymást megértő, egymás iránt türelmes polgárokat” [40].

Az 1904-ben elkészült fasori épületben szertárak, előadótermek létesítésével a tárgyi feltételek kiváló szintre emelkedtek [34].

A tanulókkal szemben magas tanulmányi követelményeket támasztottak. A fegyelem meglehetősen szigorú és következetes volt [34].

Az iskolát 1952-ben megszüntették, majd 1989. szeptember 2-án indult újra a tanítás a Budapesti Evangélikus Gimnáziumban [34].

A gimnázium szellemiségének egyik meghatározó személyisége Rátz László volt.

Tanárként rendkívüli hatékonyság jellemezte. Eredményességének titka a tanítványok iránti őszinte

szeretet lehetett, ami hasonló magatartást váltott ki. Minden óráját gondosan felépítette, az egész osztályt állandóan foglalkoztatta. Gondot fordított a tehetséges tanítványok kibontakoztatására és a gyengébb tanulók felzárkóztatására egyaránt. A félelem nélküli tanításra törekedett, tanítványai nem ismerték a matematika dolgozatok izgalmát, aki tanítását figyelemmel hallgatta, a kitűzött feladatokat könnyen meg tudta oldani [2, 35].

Wigner Jenő így idézi fel Rátz László emlékét:

„Az Evangélikus Gimnázium számos ragyogó tanára között matematikatanárom, Rátz László volt a legkiválóbb, aki nemcsak a gimnáziumban, hanem az egyházban, a politikai hierarchiában és a vidéki iskolák tanárai közt is nagy tekintélynek örvendett.

Első találkozásunk mély benyomást tett rám. Hastífusz-fertőzést kaptam, és négy hónapot hiányoztam az iskolából. Felépülesem után is borzasztóan gyenge voltam. Mivel nagyon sokat hiányoztam, ősszel vizsgáznom kellett. Rátz tanár úrnál vizsgáztam. A vizsga a

vizsgáztató tanár tetszése szerint alakult: hogy mennyire volt kellemetlen, mindig a tanártól függött. Rátz tanár úrnál kifejezetten kellemes volt vizsgázni. Sokat kérdezett, de kedvesen. Azonnal feltűnt, milyen szenvedélyesen szereti a matematikát.

A Rátz család a 17. században menekült a török hódítás elől Magyarországra. A magas szőke férfi kissé már kopaszodott, talán ezt akarta kompenzálni tekintélyes bajuszával. Körülbelül annyi idős lehetett, mint az apám, de fiatalabbnak látszott. Olyan délcegen járt, mint valami atléta. Az 1890-es évek óta tanított a gimnáziumban.

Rátz tanár úr fényképe ma is előttem van a dolgozószobámban, mert csodálatos tanárnak tartom. Ehhez minden szükséges adottsága megvolt: imádott tanítani, kiválóan tudta a tárgyát és remekül értett ahhoz, hogyan motiválhatja diákjait. Sok kiváló adottságokkal rendelkező tanár volt az iskolában, de egyikük sem tudta úgy elénk tárni tantárgya szépségeit, mint ő” [27].

Emberi kapcsolatai sokoldalúak voltak: kirándulásokat szervezett, részt vett a zenei élet fejlesztésében, tehetséges tanítványaival külön foglalkozott, kollégáinak segített a takarékoskodásban, és minden cselekedetét áthatotta kedves humora [35].

A Fasorban a gimnáziumi élet szerves részét képezték a tanulmányi kirándulások, amelyek az ifjúság kiegyensúlyozott testi nevelését és szellemi fejlődését is szolgálták. Az első nagyobb szabású utazás 1891-ben az Adriához vezetett. Rátz László és Tóth Kálmán, az akkor frissen megválasztott két fiatal tanár szervezésében a Fiume, Pola, Trieszt, Miramare, adelsbergi barlang útvonalat járta be a csoport. Később, Mikola és Rátz tanár urak rendszeresen vitték kirándulni tanítványaikat: 1901-ben harmincnégy tanulóval körbehajózták a Balatont, és ugyanebben az évben egy felsőmagyarországi kirándulást is szerveztek, érintve Kassát, Tornát, a szádellői völgyet, Színt, az aggteleki barlangot, Dobsinát, a sztraczenai völgyben a jégbarlangot, Rozsnyót és Kraszna-Horkát. A hosszabb utak gyakori célja volt az Al-Duna, Fiume, Velence, Trieszt, az Adria. Az iskola rendelkezett egy külön kirándulási alappal, amelyből támogatták a szegény sorsú gyermekek költségeit. Ezeknek a kirándulásoknak a jelentőségét mutatja, hogy Rátz László önéletrajzában is fontosnak tartotta felsorolni azokat a helyeket, amelyeket diákjaival meglátogatott [2, 34, 35].

Az átlagtanár az évek során talán belefárad a munkába, de a tanár-tehetség idősebb korban is szárnyal. Mikola Sándor így jellemezte Rátz Lászlót: „...utolsó matematika óráját egy évvel ezelőtt éppen olyan friss szellemi és testi erővel tartotta, miként első óráit 36 évvel ezelőtt”. Renner János a következőképpen fogalmazott: „Fiatalos hévvvel tanított utolsó tanári éveiben is” [34].

A matematika tanítás reformere

A XIX. század végén a természettudományok oktatását érintő reformmozgalmak bontakoztak ki Európában, amelyek Angliából indultak ki, *Armstrong* és *Perry* nevéhez fűződtek. Franciaországban a századfordulón *Poincaré* és *Langevin* állt az irányzat élére [2, 24, 34].

1905-ben Németországban, a német orvosok és természetvizsgálók meráni közgyűlésén a matematikai reformbizottság kimondta, hogy a természettudományoknak kultúrértékük is van, nemcsak gyakorlati haszonnal bírnak: ezért a nyelvi tudományokkal egyenértékű nevelési eszközként kell tekinteni azokat [2, 24, 34].

Az európai reformtörekvések egyik kezdeményezője és összefogója volt *Felix Klein*, aki különleges figyelemmel fordult a magyar matematikai élet felé. 1905-ben Budapesten tartott előadást. Ő tette Göttingent a magyar matematikusok Mekkájává [2, 24, 34].

Hazánkban a reform *Felix Klein* legjobb magyar tanítványa, *Beke Manó* professzor szervezésében zajlott. *Beke*, *Rados Gusztáv* és *Rátz László* 1909-től részt vettek a nemzeti reformbizottságok munkájában [2, 24, 34].

Az egységes középiskola megvalósításának kérdése már 1893-tól sokat foglalkoztatta a közvéleményt. Tehát ezek a mozgalmak nem a kormányzattól indultak ki, hanem magából a középiskolából eredtek [35].

A legnagyobb hatású volt az a törekvés, amely a matematikai oktatást kívánta megreformálni. Egyes iskolákban ez a változtatás észrevétlenül, a régi formák között is megvalósult anélkül, hogy felülről elrendelték volna [35].

A Fasori Gimnáziumban, talán az országban elsőként, *Rátz László* és *Mikola Sándor* már 1902-ben érezték a változtatás szükségességét, ezért az angol példán felbuzdulva teljes részletességgel kidolgozták a munkáltató matematikatanítás módszereit és tananyagát, és megírták hozzá a megfelelő tankönyveket is. Megállapították, hogy a matematikának is léteznek önkéntelenül szerzett elemei, ezeket kell megerősíteni a tanulóknak. A matematika tanulását át kell szőnie a közvetlen tapasztalatoknak, a méréseknek. Kiemelték a fejszámolás fontosságát és a becslések gyakoroltatását. A középiskolai matematika anyagot megszürték, különválasztották a fogalomalkotás és gondolkodtatás szempontjából lényeges és lényegtelen elemeket. Az előbbiekre nagyobb hangsúlyt fektettek, az utóbbiakat a minimumra szorították vissza, a formális anyagokat ábrázolásokkal és gyakorlati alkalmazásokkal kapcsolták össze. Mindezek segítségével annyi időt nyertek, hogy bevezették a koordináta rendszerekben való ábrázolásokat, az analitikai geometria és az infinitezimális számítások elemeit. A tanítás középpontjába a függvényfogalmat állították [2, 24, 34, 35].

Mivel az infinitezimális számítások újdonságként kerültek a középiskolai tananyagba, ennek tanítási módját több helyen külön is közölték: *Rátz-Mikola: Az infinitezimális számí-*

tás elemei a középiskolában 1910-ben a Budapesti Evangélikus Gimnázium Értesítőjében, valamint ugyanezzel a címmel még ebben az évben könyv alakban², majd 1914-ben bővített kiadásban *A függvények és az infinitézimális számítások elemei* címmel a Franklin Kiadónál [2, 24, 34].

Más szerzővel közösen írt műveknél mindig elgondolkodhatunk azon, hogy a szerzőtársak a munkában milyen arányban vettek részt. Némi eligazítást ad a mű címlapján a szerzők sorrendje. Az egész Rátz- és Mikola-életművet ismerve is azt érezzük, hogy a könyv megalkotásában Rátz László játszotta a jelentősebb szerepet. Rátz matematikus alkat, Mikola fizikus, filozófus volt. Mikola fizikus volta viszont abból a szempontból fontos, hogy nem engedte „túlmatematikázni” a művet, fizikai példák hosszú sorával köti ezt az elvont témát a valósághoz, a tanulók érdeklődéséhez. Ezt már a tartalomjegyzék is jól mutatja. A szigorúan vett matematikai fejezetek mesterien oldják meg a fő fogalmak kialakítását: nem gyötrik a középiskolásokat határértékfeladatokkal, a továbbhaladáshoz nem szükséges fogalmak bevezetésével, bizonyításokkal, hanem rengeteg konkrét számpéldával, sokszor elismételt algoritmussal, sok kidolgozott feladattal, nagyon jól szerkesztett ábrákkal bevésik és alkalmazhatóvá teszik az új ismereteket.

Mikola kicsit nagyvonalú, Rátz viszont precíz matematikus alkat volt. Ezt a tényt az Országos Evangélikus Levéltárban őrzött két kézzel írott tanmenetükkel bizonyítjuk. A katonai szolgálatra behívott tanulók tanfolyamai számára készített Mikola-tanmenet fejlécén csak ez áll: „Tanmenet a fizika és matematika tanításánál”. Ezzel szemben a Rátz László által összeállított tanmenet címe sokkal pontosabban tájékoztat: „A mathematika tanítása a VIII. osztályból bevonuló tanulók részére alakított tanfolyamon 1918. febr. 1-jétől 1918. márc. 14-ig.”. A teljes tanmeneteket faximile formában a Függelékbe tettük.

Az Országos Középiskolai Tanáregyesület 1906. évi rendes közgyűlésén felállították a Matematikai Reformbizottságot, amelynek elnöke Beke Manó, titkára Mikola Sándor lett és a tagok között volt Rátz László is. Ez a bizottság olyan alapos munkát végzett, hogy példaképein is túltett, és elismerten a legeredményesebben dolgozott az európai bizottságok közül. Ezt mutatja az a tény is, hogy az eredményeket magában foglaló könyvet a Teubner kiadó is megjelentette 1911-ben [2, 24, 34].

A matematikatanítás reformjának időszerű kérdéseiről előadásokat tartottak az Országos Középiskolai Tanáregyesület közgyűlésein. A beszámolók anyagát könyv alak-

2 A teljes könyv megtalálható a Mellékletben, illetve – amint azt a Bevezetőben is említettük – CD-n elkérhető a BDF Fizika Tanszékéről.

$$8. \quad y = \sin \frac{x}{a}$$

$$y' = \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{x}{a}.$$

$$9. \quad y = \operatorname{tg}^2 x$$

$$y' = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

10. Szerkesszük meg a következő függvényt:

$$y = \frac{5x}{3x^2 + 12}.$$

A megadott függvény differenciálhányadosa:

$$y' = \frac{5(3x^2 + 12) - 5x \cdot 6x}{(3x^2 + 12)^2} = \frac{-15x^2 + 60}{(3x^2 + 12)^2}$$

$$y' = 0, \text{ ha } x_1 = 2 \text{ és } x_2 = -2.$$

Látjuk, hogy y' nevezője x -nek minden értékénél pozitív; a számláló képe oly parabola, mely az abszcissa tengelyt (-2) -ben és $(+2)$ -ben, az ordináta-tengelyt pedig $y=60$ -ban metszi. Ennélfogva, ha x változik $-\infty$ -tól -2 -ig, y' negatív, a megadott függvény tehát fogy; $x=-2$ -ben eléri minimális értékét. Ha x változik -2 -tól $+2$ -ig, a differenciálhányados pozitív, tehát a függvény nő; $x=2$ -ben eléri maximumát; innen kezdve a differenciálhányados ismét negatív, a függvény tehát fogy. Minthogy függvényünk így is írható:

$$y = \frac{\frac{5}{x}}{3 + \frac{12}{x^2}},$$

kitűnik, hogy $y=0$, ha $x=\pm\infty$.

Függvényünket tehát a következő táblázat alapján könnyen megszerkeszthetjük:

x	$-\infty \dots$	$-6, -4,$	-2	$-1, 0, 1,$	$2, 3, 4,$	$\dots \infty$
y'		negatív	0	pozitív	0	negatív
y	0	fogy $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{12},$	nő $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{5}{12},$	fogy $\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, 0$		

Függvényünk eminens értékei:

$$y_{\min} = f(-2) = -\frac{5}{12}, \quad y_{\max} = f(2) = \frac{5}{12}.$$

Egy jellegzetes oldal a Rátz-Mikola analíziskönyvből

ban is megjelentették: *Beke-Mikola (szerk.): A középiskolai matematika tanítás reformja* címmel Budapesten, 1909-ben a Franklin Kiadónál. Ebben szerepelt Rátz László: *A függvények és az infinitesimális számítás elemeinek tanítása középiskoláinkban* című írása [2, 24, 34].

„A reform elve röviden így fejezhető ki: Legyen a matematika tanítása olyan, hogy a tanulóban kifejlődjék annak tudata, milyen fontos kulturális tényező a matematika. Azt akarjuk, hogy a középiskolából kikerülő tanuló tudományos fokú matematikai iskolázottságot vigyen az életbe; az a reményünk, hogy ily módon a matematikai gondolkodásmód behatol a közéletbe. A tanulónak látnia kell, hogy a matematika mennyi szálal van összekapcsolva a gyakorlati élettel, a tudományokkal és egész világfelfogásunkkal... Meggyőződésünk, hogy a tanítás ily irányú módosítása szükséges ahhoz, hogy a modern kultúra főbb vonásaiban meg legyen érthető. Nem az a célunk, hogy a technikára és egyéb szakiskolákba menő tanuló nagyobb matematikai ismeretanyagot vigyen magával, hanem hogy éppen azok, a kiknek matematikai képzésük a középiskolában befejeződik, oly fogalmat kapjanak a matematikáról, a mely méltó ehhez a nagy tudományhoz.” [2, 24, 34]

Hangsúlyozták, hogy a reform sokkal szélesebb körű annál, hogy csupán a tananyag bővítését jelentené. A gimnázium első osztályától kezdve céltudatosan kell a tanulók szemléletmódját formálni, és fejleszteni függvényszerű gondolkodásukat. „A középiskolai matematikai anyagot úgy kell megszabni, hogy a mai természettudományos felfogás leglényesebb absztrakciói benne helyet találjanak... A tanítás szellemét kell megváltoztatni, nem pedig odabiggyeszteni a tananyag végére a differenciál- és integrálszámítást.” [2, 24, 34]

Úgy gondolták, azt kell elérni, hogy a tanulók a mennyiségi viszonyok mérlegelése alapján a valóság megismerését tűzzék ki célul. Nagyon fontosnak tartották, hogy a tanár világos fogalomalkotásra törekedjen [2, 24, 34].

Rátz László és Mikola Sándor: *Az infinitezimális számítás elemei a középiskolában* című, 1910-ben megjelent könyvük bevezetőjében a következőképpen fogalmaztak: „A matematikát csak az iskolában lehet tanítani. Ez a tanítás se álljon csupán az obligát magyarázásból és bizonyításból, hanem terjeszkedjék ki az új fogalmak és tételek begyakorlására és beemlékelésére, főleg pedig a feladatok megoldására. Otthon, könyvből matematikát tanulni nem lehet. Kezdetől fogva arra kell szoktatni a tanulókat, hogy a matematikát ne csak értsék, hanem hogy dolgozni is tudjanak. A tanultakat általában mindig az egész osztálytól kérdezzük és mindig az egész osztállyal foglalkozunk. Összefüggő egyéni feleleteket csak itt-ott, főleg a felső osztályokban lehet kívánni. A matematikai óra folytonos közös munka legyen, és kezdetől fogva arra kell ügyelni, hogy ebben a közös munkában minden tanuló részt vegyen. Ne legyen megengedve, hogy egyes tanulók külön jegyezzessenek: minden tanulónak mindig ugyanazt kell csinálnia.” [36]

„A számtani oktatásban arra kell törekedni, hogy minden számfogalom nem mint puszta szám, hanem mint különböző mennyiségek képe fejlődjék ki a gyermek lelkében. A definíciókon és bizonyításokon való lovaglás helyett arra kell törekedni, hogy számok a gyermeki lélek szemléletes és intuitív tartalmává váljanak.” [36]

Lényegesnek tartották, hogy a tört élénk és szemléletes fogalmának alapján kell a II. és III. osztályos tananyagot feldolgozni, és a három alsó osztályban is lehet már egyszerű grafikus ábrázolásokat végezni. A IV. osztályos anyaghoz hozzátették a függvények változásának és ábrázolásának tárgyalását. Olyan, a gyakorlati életben is használható grafikonokkal foglalkoztak, mint az idő és valamely értékpapír árfolyama; idő és hőmérséklet; csapadék és légnyomás; kor és halálózási százalék [36].

Az V. osztályban előírt anyaghoz hozzátették a másodfokú függvény változásának leírását és a másodfokú egyenlőtlenségek megoldását. A VI. osztályos tananyagban többletként szerepelt a kamatos kamat- és járadékszámítás, és az előforduló logaritmikus és trigonometrikus függvények ábrázolása. VII. osztályban helyet kaptak az elemző mértan egyszerű feladatai, a koordináta geometria elemei és a differenciálszámítás. A VIII. osztályos anyagba helyezték az integrálszámítás tárgyalását a gömbre vonatkozó számításokkal [36].

Az infinitezimális számítások bevezetése nemcsak a matematika oktatásában jelentett változást, hanem nagyon fontos szerepet kapott a fizikai alapfogalmak (sebesség, gyorsulás, szögsebesség, szöggyorsulás és a potenciál) tanításában is [36].

A gimnáziumban összegyűlt anyagból az 1907/1908. tanév során a matematikatanítás új módszerét szemléltető táblákat, grafikonokat küldtek Londonba egy kiállítás kulturális osztályára [2, 24, 34].

Rátz László és Mikola Sándor kezdeményezését siker koronázta: 1909 novemberében hivatalosan is engedélyezték a matematika oktatásának azon formáját, amit ők a reformtörvényeknek megfelelően dolgoztak ki, és kísérletképpen 1902-től kezdve már a gyakorlatban is alkalmaztak. 1924-ben, az országos tanügyi reform során a hivatalos tantervbe is bekerült a differenciál- és integrálszámítás [2, 24, 34].

A tehetségek felismerője és gondozója

Kivételes emberi tulajdonsággal rendelkeznek azok a tanárok, akik bánni tudnak a náluk tehetségesebb tanítványaikkal. Elismerik, hogy ezek a fiatalok értelmesebbek, mint ők, mégis a nagyobb élettapasztalat és ismeretanyag birtokában szívesen tanítják őket, segítik fejlődésüket. Azért tudják felismerni és támogatni a tehetségeket, mert maguk is tehetségesek [34].

Rátz László nagy tudása és kifinomult érzéke alapján felismerte a tehetséges diákokat, és úgy bánt velük, mintha nem a tanítványai, hanem munkatársai lettek volna. Meghívta őket a szombat délutáni kávéházi beszélgetéseire, amelyeken a gimnáziumi kollégákon kí-

vül egyetemi tanárok is részt vettek. A XX. század elején az iskolákban jellemző volt a komoly fegyelem, a pedagógusokat nemcsak a diákok, hanem az egész társadalom tisztelte. A Neumann Jancsi, a Wigner Jenci pedig együtt kávézik Rátz László tanár úrral, az akadémikus Mikola Sándorral, Beke Manó, Szegő Gábor és Fekete Mihály egyetemi oktatókkal. A fiatal emberek számára rendkívül felemelő érzés lehetett ez az együttlét. Növelte az önbizalmukat, ezáltal segítette tehetségük kibontakozását [34].

Rátz László, amikor úgy érezte, hogy Neumann Jánosnak már nem tud újat mondani, megkérte Fekete Mihályt, Kürschák Józsefet, hogy tanítsák ők Neumannt. Wigner Jenőt pedig meghívta a lakására, ahol érdekes könyveket adott neki kölcsön, és egy következő alkalommal megbeszélték az olvasmányok tartalmát [34].

Wigner Jenő így emlékszik erre az időszakra:

„Rátz mindenkori legkiválóbb tanítványa Neumann János volt, a későbbi nagy matematikus. Jancsi egy évvel alattam járt a gimnáziumba. Valódi csodagyerek volt a matematika terén, ami nem csak rendkívüli tehetséget, hanem odaadó szorgalmat is igényelt. Rátz felismerte Jancsi intelligenciáját és a matematika iránti szenvedélyét, ezért felajánlotta, hogy különórákat ad neki.



Neumann János

Visszatekintve persze nyilvánvaló, hogy Neumann, a század egyik legnagyobb matematikusa már gyermekkorában különleges bánásmódot érdemelt. Próbáljuk azonban Rátz tanár úr szemszögéből megközelíteni a dolgot! Viszonylag kevés tanítvánnyal dolgozik. Az egyik tanítvány messze túlszárnyalja a többi. Nyilvánvalóan zseniális. De természetesen még nem híresség, gondolkodása még gyermeki, szó sincs még publikációkról, eredeti felfedezésekről. Csupán egy meglepően tehetséges tízéves kisfiú, húsz másik, szintén rendkívül értelmes tízéves társaságában, és mindent nagyon gyorsan befogad, ami matematika.

Hogy lehet ebben a koraérett tízéves kisfiúban meglátni a jövő nagy matematikusát? Nehezen. Rátz tanár úrnak azonban rendkívül gyorsan és könnyedén sikerült.

A tanár urat annyira elbűvölte Jancsi tehetsége, hogy a különórákért nem fogadott el óradíjat, pedig Jancsi édesapja, Neumann Miksa, bankár volt...

Max von Neumann, azaz Margittai Neumann Miksa tehát bőkezűen megfizethette volna fia magántanárát. Rátz azonban nem tartott igényt rá, hiszen sokkal árnyaltabban kompenzálta a különleges tehetséggel való foglalkozás, a diszciplinált tréning közös öröme...

Jancsít a tanár úr néhány egyetemi órára is bejuttatta – rajta kívül nemigen volt olyan gimnazista, aki egyetemi órákat látogathatott...

Rátz tanár úr velem is ugyanolyan kedvesen és majdnem ugyanolyan lelkesen foglalkozott, mint Neumann Jancsival. Nekem nem adott különórát, de bennem sem merült fel, hogy különóraakra kellene járnom. Viszont több gondosan kiválasztott könyvet is kölcsönadott nekem, amelyeket mindannyiszor alaposan végigolvastam és igyekeztem jó állapotban visszaszolgáltatni.

Hesse analitikus geometria tankönyve volt az egyik. Egy másik a differenciál- és integrálszámításról szólt – akkor azt hittem, értem, pedig kevésbé értettem. Egy következő Pierre de Fermat, 17. századi francia matematikus kis tételét taglalta...

A tantestületből csupán Rátz tanár úr hívott meg az otthonába. Egyszer-egyszer délutánonként kötetlenül eltöltöttem nála egy-egy órát. Ilyenkor apró ajándékokat vittem neki. Kávégztunk és matematikáról beszélgettünk. Személyes kérdésekről vagy a délutáni látogatások jelentőségéről nem esett szó köztünk. Ezen a téren szavak nélkül is megértettük egymást.” [27]

1893-ban, egy győri főreáliskolai tanár, Arany Dániel úgy döntött, hogy egy középiskolásoknak szóló matematikai újságot alapít, amelynek célját így fogalmazta meg: „tartalomban gazdag példatárat adni tanárok és tanulók kezébe”. A Középiskolai Matematikai Lapok első példánya 1894. január 1-jén jelent meg. A folyóiratot Arany Dániel szerkesztette 1896-ig, amikor Rátz László átvette tőle és folytatta 1914-ig.



Arany Dániel

Megkíséreltük kideríteni: hogyan talált egymásra Arany Dániel és Rátz László. Kerestük levelezésüket iskoláikban: a győri főreáliskola mai utódjában a Révay Gimnáziumban és a budapesti Fasori Gimnáziumban, az Evangélikus Országos Levéltárban, az MTA Kézirattárában, de nem találtunk semmit. Nem tudnak a szerkesztő-váltás technikai hátteréről a folyóiratot ma gondozó Bolyai János Matematikai Társulatban és az Eötvös Loránd Fizikai Társulatban. A folyóirat történetét feldolgozók írásaiból sem ismerhetjük meg pontosan, hogy milyen körülmények közt vette át a lapok szerkesztését Rátz László.

Az 1896. januári szám legvégén jelent meg Arany Dániel búcsúzása, amelyben kifejtette: „Csak is az a remény, hogy a folyóirat fejlődése a főváros szellemi életének árában nagyobb lendületet vesz majd és így hivatását sikeresebben tölti be, készített

arra, hogy vezetésétől megváljak”. Az pedig kézenfekvő volt, hogy az ország legnevesebb matematika tanárát kérték fel a szerkesztésre. Arany Dániel elhatározását megkönnyítette az új szerkesztő „kiváló ügyszeretete és lelkesége”. Ő maga a lap szerkesztésében főmunkatársként a továbbiakban is közreműködött. Ugyanebben a számban jelent meg Rátz László *Olvasóinkhoz* című írása, amelyben átveszi az újság körüli tennivalókat: „A lap ezentul is a matematikai tanítás szolgálatában fog állani, iránya nem változik, célja marad a régi.” [37, 38, 39]

A harmadik évfolyam 6., februári száma még „Győr 1896” felirattal „Szerkesztőség és kiadóhivatal: ARANY DÁNIEL, Győr, főreáliskola.” jelzéssel lát napvilágot. Nem jelent meg márciusi szám. A 7., áprilisi lap fejlécén már ez áll: „Budapest 1896”... Szerkesztőség és kiadóhivatal Hunyadi-tér 11. I. 19.”, és a lap utolsó oldalának alján ez olvasható: „Szerkesztő: RÁTZ LÁSZLÓ. Nyomatott Gross Testvéreknél, Győrött.” [37, 38]

Rátz László sok hasznos újítást vezetett be. Van a 10., júniusi szám végén *összefoglaló, éves tartalomjegyzék* és a harmadik évfolyam 31 algebra és 51 geometria feladata mellett megjelent 8 „Physika”-feladat is. A következő években is jól látható a „Physika” előretörése. *Baumgartner Alajos: A hőmérő története* c. írását a munkába bevont tanártárs, Mikola Sándor cikkei követik: *Mi mindent mutat a hőmérő?* és *Apróságok* címmel többek közt folyadékhártyákkal, kámmal végezhető kísérletekről ír, és 1898. januártól megkezd a *Csillagos ég* rovat szerkesztését, rendszeres közlését minden szám borító lapján.

A kifejezetten érdeklődő tanulóifjúságnak szóló cikkek mellett minden számban megjelentek a következő hónapban beküldendő feladatok, eleinte a hetedik–nyolcadik osztályos gimnazistáknak (17–18 éveseknek) szóló számozott Feladatok, majd 1900 januárjától a 15–16 éves korosztálynak szánt Gyakorlatok. Külön, római számozással jelentek meg az ábrázoló geometriai feladatok. A lapban szereplő példamegoldások a beküldő iskolások dolgozatai alapján készültek. A legjobbak neve megjelent, az eredményeket a tanév végén összesítették, és a diákokat jutalmazták. A folyóiratban meghirdetett verseny – a tanárok közreműködésével – országosan elterjedt [37, 38].

Az 1894-ben Eötvös Loránd által elindított – később az ő nevét viselő – országos matematikaverseny, majd az 1916-ban alapított Károly Iréneusz fizikaverseny győztesei csaknem kivétel nélkül a lap eredményes feladatmegoldói közül kerültek ki.

A természettudományok eredményes műveléséhez nélkülözhetetlen a matematikai gondolkodás, amelyet feladatmegoldásokkal lehet leghatékonyabban fejleszteni. Azért, hogy az érdekes problémák a későbbiekben is hozzáférhetőek legyenek, Rátz László könyv alakban is megjelentette azokat 1904-ben és 1905-ben *Matematikai Gyakorlókönyv 1–2.* címmel a Franklin Társulat gondozásában. Mindkét kötet digitalizált formában, CD-n elkérhető a Berzsényi Dániel Főiskola Fizika Tanszékéről. Az első kötetben az algebrai feladatok és megoldásaik, a másodikban a geometriaiak kaptak helyet. Ez a XX. század első har-

madának egyik legfontosabb példatára, ami azt bizonyítja, hogy az agy pallérozásában helyesen tulajdonítottak fontos szerepet a matematikának. Ezt igazolja, hogy a nemzetközi tudományos életben is helyt álló tanulók közül sokan e feladatok segítségével tettek szert problémamegoldó képességükre. Egyfajta magyar csodáról beszéltek a világban, amikor a nemzetközi hírűvé vált magyar matematikusok, természettudósok és mérnökök kiváló eredményei ismertté váltak. Ezek a sikerek nem kis részben köszönhetőek a Középiskolai Matematikai Lapoknak, a XIX. század utolsó évtizedében megindult tanulmányversenyeknek, a magyarországi tantervi reformoknak, az ezek alapján elkészült kitűnő tankönyveknek, valamint nagymértékben a tanáregyéniségeknek [2, 24, 34].

Rátz László nyugdíjba vonulásakor így jellemezte munkáját Mikola Sándor a gimnázium 1925/26. évi értesítőjében:

„A matematikai tanítás reformjánál is mélyebb az a hatás, melyet Rátz László a Középiskolai Matematikai Lapok révén az ország matematikai tanítására kifejtett. 20 éven át szerkesztette e lapot. Teljesen önzetlenül csinálta, sem állami, sem másféle segítséget sehonnan sem kapott (de nem is kért), sőt a lap kiadására tetemes összegeket is áldozott. A legnagyobb gonddal válogatta meg a kis folyóirat cikkeit és feladatait, hogy a tanulóknak a matematikai problémák iránt való érdeklődést fölkeltse és az igazi matematikai gondolkozási mód magvait elhintse. Még nagyobb gonddal és lelkiismeretséggel olvasta át és bírálta meg az ország minden részéből beérkező megoldásokat. Nagy éleslátással mindenkor fel tudta ismerni az igazi tehetségeket, úgyhogy méltán dicsekedhetnek azzal, hogy mindazok, akik az egyetemeken és a főiskolákon mint kiváló matematikusok kitűntek, majdnem kivétel nélkül az ő lapjának szűkebb gárdájából kerültek ki” [3].

Szavait szeretnénk igazolni azzal, hogy felsorolunk néhány jelentős életpályát befutó, a lap indulásakor, valamint Rátz László szerkesztőségének idején dolgozó egykori megoldót. A rövid életrajzokat, jellemzéseket a budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem *A Műegyetemtől a világhírig* (Németh József, Bp. 2005.) és az Eötvös Társulat jubileumi, 1992. évi kiadványából: Fejezetek a magyar fizika elmúlt 100 esztendejéből (1891–1991), szerk. Kovács László, valamint *Molnár Miklós* közléséből vettük át.

A díszes műegyetemi kiadványban olvashatjuk:

„Apja nyomdokát követte fia, *König Dénes* (1884–1944). Tanulmányait a budapesti Tudományegyetemen kezdte, majd Göttingenben szerzett diplomát. 1911-ben kezdte egyetemünkön oktató munkáját. Tudományos tevékenységében gráfelméleti kutatásai és a később világhírűvé vált magyar gráfelméleti iskola megteremtése a legjelentősebbek.

Pattantyús-Ábrahám Imre (1891–1956) a kohógéptan, a kalorikus és hidrogépek tárgyak előadója. 1934-ben lett a Rimamurányi-Salgótarjáni Vasmű Rt. műszaki tanácsadója, s 1941-ben a győri Magyar Vagon- és Gépgyár igazgatója. 1951-ben a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Általános Géptan Tanszékének professzora.

A Gépészmérnöki Karon tanított az 1920-as években a Bánki örökséget folytató *Schimanek Emil, Hermann Miksa, Pöschl Imre, Liska József, Verebély László, Pattantyús-Á. Géza, Muttnyánszky Ádám, Abody Előd* (sorrend a születési év alapján).

Pattantyús-Ábrahám Géza (1885–1956) gépészmérnöki diplomájának megszerzése után *Zipernowsky Károly* mellett volt tanársegéd, majd külföldi tanulmányúton gazdagította ismereteit. Visszatérte után *Herrmann Miksa* adjunktusa a Gépelemek Tanszéken. A „Gépelemek”, majd az „Emelőgépek” tárgyak előadója 1926-tól mint helyettes tanár. 1930-ban lett a III. Gép szerkezet-tani (Hidrogépek és Szállítóberendezések), majd 1952-től a Víz-gépek Tanszék professzora, ahol élete végéig dolgozott. Gazdag szakirodalmi munkásságából kiemelendő az „Általános géptan” és „A gépek üzemtana” című munkája, amely 14 kiadást ért meg. A mérnökképzés mellett fontosnak tartotta a mérnöktovábbképzés ügyét is. Ő vetette fel először az 1931-es Országos Mérnökkongresszuson a Mérnöktovábbképző Intézet alapításának gondolatát.”

Az Eötvös Társulat jubileumi kötetéből és Molnár Miklós tanár úr közléséből megtudhatjuk még, hogy *Fejér (Weisz) Lipót* (1880–1959) az Eötvös Egyetem tanszékvezető professzora, a Fourier-sorok tudósa, az egyik legismertebb magyar matematikus a Kolozsvári Egyetemen *Farkas Gyula* mellett, Ógyallán pedig *Kövesligethy Radó* vezetésével dolgozott. Eötvös Loránd javasolta őt Zemplén Győző mellé a Matematikai és Fizikai Társulat titkárának.

Seidner Mihály mérnök doktor (1878–1968) a Ganz Villamossági Rt-nél a gyártásfejlesztés tudományos megalapozója volt.

Visnya Aladár (1878–1959) műegyetemi adjunktus, majd középiskolai tanár, élete végén pedig a kőszegi helytörténeti múzeum igazgatója volt.

Haar Alfréd (1885–1933) *Fejér Lipót*ot és *Riesz Frigyes*t követte *Farkas Gyula* mellett a Kolozsvári Egyetem Matematikai Intézetében.

König Dénes műegyetemi professzorról elmondjuk még, hogy *Beke Manó* és *Szijártó Miklós* tanítványa volt a Minta Gimnáziumban. A Matematikai és Fizikai Társulat egyik megalapítója, matematikus titkára, a Matematikai és Fizikai Lapok – Eötvös Loránddal közös – elindítója. Ő volt a Műegyetemi Lapok egyik szerkesztője. A Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjává választotta.

Riesz Frigyes (1880–1956) 14 éves volt, amikor iskolájában, a győri főreáliskolában *Arany Dániel* elindította a Középiskolai Matematikai Lapokat. Az 1896/97-es évben a Lapokban kitűzött fizika tárgyú feladatok mintamegoldásainak legnagyobb részét *Riesz Frigyes* készítette. Érettségije után még a zürichi műegyetemről is küldött megoldásokat a Lapoknak.

Riesz Marcell (1886–1969) a magyar matematika nagy alakja, *Riesz Frigyes* öccse, a svédországi Lund egyetem professzora, vendégprofesszor volt Chicagóban is.

Kármán Tivadar (1881–1963) néven szerepelt és nyert az 1898-as Eötvös versenyen *Kármán Tódor*, az egyik „világformáló Marslakó”, a Minta Gimnáziumot létrehozó Kármán Mór fia, a XX. század meghatározó jelentőségű fizikus-mérnöke, az aerodinamika atyja: a repülőgépek és rakéták tervezője.

Beck Pált (USA) az Eötvös Társulat tiszteleti tagjává választotta.

Boros János a Szegeden készített kísérleti munkájával Gyulai Zoltánnál doktorált a Debreceni Egyetemen.

Juvancz Iréneus (1882–1950) Eötvös-kollégista, majd a Mintagimnázium tanára, rövid ideig igazgatója volt.

Dr. Lóky Béla (1872–1946) katolikus főgimnáziumi tanár korában is küldött be megoldásokat a Lapnak. Kolozsváron az elsőként készített Röntgen-felvételeket, Debrecenben a piarista gimnázium igazgatójaként felolvasó estéket szervezett a Református Kollégiumban.

Oltay Károly (1881–1955) műegyetemi tanár négyingás abszolút nehézségi gyorsulásméréseiről híres. E méréseket Eötvös Loránd felkérésére végezte.

Szabó József az ELTE Cukor utcai Apáczai Csere János Gyakorló Iskolájának neves fizikatanára.

Haar Alfréd (1885–1933) David Hilbertnél doktorált Göttingenben 1909-ben. Kolozsvári egyetemi tanársága után Szegeden Riesz Frigyessel közösen világhírű matematikai iskolát alapított.

Közreadjuk a „legjobbak”, illetve a „megfejtők” teljes névsorát 1894-től 1905-ig. Megtartottuk a lapokban található írásmódot és dőlt betűvel jelöltük az imént kiemelteket. E könyv olvasói közt bizonyosan többen felfedezik iskolájuk egykori tanárát avagy szüleik mérnök, közgazdász, orvos, gyógyszerész vagy más foglalkozású ismerősét.

Legjobbak 1894–1896

Fazekas (Friedmann) Bernát VII. o., Sátoraljaújhely, a Mat. és Phis. Társulat 1897. évi versenyének nyertese
Fejér (Weisz) Lipót VI. o., Pécs, a Mat. és Phis. Társulat 1897. évi versenyének 2. helyezettje
Grossmann Gusztáv VIII. o., bp-i ág. ev. főgimnázium
Grünhut Béla VII. o., Pécs
Hofbauer Ervin VII. o., bp-i ág. ev. Főgimn.
Jorga Gergely VIII. o., Arad

Kántor Nándor VII. o., bp. ág. ev. Főgimn.
Kugel Sándor VIII. o., Losonc
Meitner Elemér VIII. o., Bp. V. ker. Főreál
Seidner Mihály VIII. o., Losonc, a Mat. és Phis. Társulat első versenyének nyertese (1894)
Sztrapkovits István VIII. o., Pécs
Visnya Aladár VII, VIII. o.-os korában, Pécs, a Mat. és Phis. Társulat 1896. évi versenyének nyertese

Legjobbak 1897–1902

Bartók Imre (fg. VIII. o. Bp.)
Bayer Béla (főgimn. VII., VII. o.-os korában, Losonc)
Czank Károly (főreáliskola, VIII. o., Déva)
Deutsch Imre (fr. VII. o. Bp.)
Deutsch Imre (főreálisk. VII. o., Győr)
Filkorn Jenő (főgymn. VIII. o. Nyitra)
Friedmann Bernát (főgymn. VIII. o., Sátoraljaújhely)

Goldstein Zsigmond (főgymn. VIII. o., Nyíregyháza)
Grünhut Béla (főreálisk. VIII. o. Pécs)
Haar Alfréd (fg. VII. o. Bp.)
Hirschfeld Gyula (főreálisk. VI. o. Pécs)
Hofbauer Ervin (főgymn. VIII. o. Bp., ág. h. ev. Főgymn.)
Kántor Nándor (főgymn. VIII. o., Bp., ág. h. ev. Főgymn.)

Kertész Gusztáv (fr. VII. o. Pécs)
König Dénes (főgymn. VI., VII. o.-os korában, Bp. Gyakorló főgymn.)
 Krisztián György (főreálisk. VIII. o., Pécs)
 Kürti Imre (fg. VII. o. Eger)
 Lukhaub Gyula (főgymn. VIII. o., Szeged)
 Pivnyik István (fg. VIII. o. Nyíregyháza)

Riesz Frigyes (főgymn. VIII. o., Győr)
 Riesz Kornél (fr. VIII. o. Bp.)
Riesz Marcell (fr. VI. o. Győr)
 Szabó István (főreálisk. VII. o., Debrecen)
 Szmodics Hildegárd (főgymn. VII., VIII. o.-os korában Kaposvár)
 Tóbiás J László (főreálisk. VIII. o., Szeged)

A megfejtők névsora 1897–1902

Aczél Ferencz (fg. VIII. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Antal Márkus (bölcshallgató Bp.)
 Appél Sándor (fr. VII. o. Déva)
 Baranyó Ernő (fg. VIII. Szolnok)
 Bartók Imre (fg. VII. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Bayer Béla (fg., VI., VII., VIII. o. Losoncz)
Beck Pál (fg. VII. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Bella István (Liptó-Szt-Péter)
 Bender Ernő (fg. VI. o., Losoncz)
 Benedek Zsolt (fg. VIII. o. Bp., I ker.)
 Blau Arthur (fr. VIII. o. Bp. VI. ker.)
Boros János (fg., VIII. o., Kolozsvár)
 Burján Károly (fg. VIII. o. Kaposvár)
 Csete Ferencz Alberik (fg. VIII. o. Eger)
 Czank Károly (fg., VII., VIII. o., Déva)
 Deutsch Ede (fr. VI. o. Győr)
 Deutsch Imre (fr. VI. o. Győr)
 Deutsch Nándor (fg. VIII. o., Losoncz)
 Devecis Mihály (fr. VIII. o., Bp. VIII. ker.)
 Devecis Del Vecchio Mihály (műgyetemi hallgató, Bp.)
 Dolowschiák Mihály (fg., VIII. o., Győr)
 Dsida Jenő (fr. IV. o. Győr)
 Engel Dávid (fr. VIII. o. Déva)
 Enyedi Béla (fr. VII. o. Bp. V. ker.)
 Erdélyi Imre (fg. VI. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Faith Fülöp (fg. VIII. o. Nyitra)
 Filkorn Jenő (fg., VII., VIII. o., Nyitra)
 Fleischer Ferencz (fr. VI. o. Pécs)
 Földiák András (fr. VI. o. Bp. V. ker.)
 Freibauer Ede (fg. VIII. o. Bp., ág. h. ev. fg., és műgyetemi hallgató Bp.)
 Friedmann Bernát (bölcshallgató, Bp.)
 Goldziher Károly (műgyetemi hallgató, Bp.)
 Groffits Gábor (műgyetemi hallgató, Bp.)
Haar Alfréd (fg. VI. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Harsányi Zoltán (fg. V. o. Eger)
 Hausvater József (Bp.)
 Hendel József (fr. VIII. o. Nagyvárad)
 Hirsch Imre (fg. V. o. Kaposvár)
 Hirsch Jenő (fg. VI. o. Szamosujvár)
 Hirschfeld Gyula (fr. VI. o. Pécs)
 Holzmann József (fr. VIII. o. Bp.)

Izsáky Lajos (fg. VII. o. Szamosujvár)
 Jankovich Sándor (Ludovika-akadémiai növ. Bp.)
Juvancz Irén (fg. VII. o., Nyíregyháza)
 Kamenitzky Miklós (fg. VIII. o. Eperjes)
 Kárf János (fg. VII. o., Sz.-Fehérvár)
Kármán Tivadar (műgyetemi hallgató Bp.)
 Kehrling Károly (fg. VI. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Kelemen Mór (fr. VI. o. Győr)
 Kerekes Tivadar (fr. VII., VIII. o. Déva)
 Kertész Ferencz (fg. VIII. o. Szeged)
 Kertész Gusztáv (fr. VI. o. Pécs)
 Kiss Albert (fg. VIII. o. Bp. ref. fg.)
 Klein Jenő (fg. V. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Kohn Béla (fg. VIII. o. N.-Kanizsa)
 Koós Aladár (műgyetemi hallgató, Bp.)
 Kornis Ferencz (fr., VI., VII. o., Pécs)
 Kornis Ödön (fr. VIII. o., Pécs, és műgyetemi hallgató Bp.)
König Dénes (fg. V., VI., VII. o., Bp., gyak. fg.)
 Krámer Gusztáv (fg. VI. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Krausz Béla (fr. VII., VIII. o., Pécs)
 Krausz Jenő (fr. VIII. o., Sz.-Fehérvár)
 Krisztián György (fr., VII., VIII. o., Pécs)
 Kürti Imre (fg. VI. o. Eger)
 Lázár Lajos (fr. VIII. o. Bp. IV. ker.)
 Ligeti Pál (fg. VI. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Lindtner Mátyás (fg. VIII. o. Lőcse)
Dr. Lóky Béla (főgymn. tanár, Kolozsvár)
 Lukhaub Gyula (fg. VII., VIII. o. Szeged)
 Lupsa György (fr. VIII. o. Déva)
 Mannheim Emil (műgyetemi hallgató Bp.)
 Messik Géza (fr. VII., VIII. o. Bp. VIII. ker.)
 Miletits Ernő (fg. VII. o. Győr)
 Moskovits Zsigmond (fr. VII. o. Bp. VIII. ker.)
 Neidenbach Emil (fg. VI. o. Arad)
Oltay Károly (fg., VIII. o. Bp., II. ker., és műgyetemi hallgató)
 Osztián Kálmán (fg. VI. o. Szamosujvár)
 Papp Ferencz (fr. V., VI. o. Pécs)
 Perl Gyula (fg., VII., o. Győr)
 Petrik Sarolta (Bp. VI. ker. tanítónőképző)
 Pilczér Pál (fg. VIII. o. Kaposvár)

Pintér Miksa (fg. VII. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Póka Gyula (fg. VII., VIII. o. Losoncz)
 Pollák Náthán (fr., VII. o. Pécs)
 Pollák Lajos (fg. VIII. o. Kaposvár)
 Popoviciu Miklós (fg. VI. o. Lugos)
Prohászka János (műgyetemi hallgató, Prága)
 Raab Rezső (fr. VI. o. Győr)
 Ragány Bertalan (fg. VI. o. Eger)
 Rehberger Zoltán (fg. VIII. o. Sz-Fehérvár)
Riesz Frigyes (műgyetemi hallgató, Zürich)
 Riesz Kornél (fr. VII. o. Bp. V. ker.)
Riesz Marcell (fr. V. o. Győr)
 Riesz Sándor (fr. IV. o. Győr)
 Romsauer Etta k. a. (Pozsony)
 Sasvári Géza (fr., VII., VIII. o. Pécs)
 Sasvári József (fr. VII., VIII. o. Pécs)
 Scharff Jenő (fg. VIII. o. Bp. Gyak. fg.)
 Schwarz Gyula (fg. V. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Schwarz Oszkár (fg. V. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Simon Sándor (fr. VII. o. Bp. VI. ker.)
 Simonyi Gyula (fg. V. o. Eger)
 Singer Arnold (fg. VII. o. Losoncz)
 Smodics Kázmér (fg. VIII. o. Veszprém)
 Spiczner Ödön (fr. VIII. o. Bp. VIII. ker.)
 Spitzer Henrik (fr. VIII. o. Győr)

Spitzer Vilmos (fr. VII. o. Pécs)
 Steiner Miksa (fr. VI. o. Pécs)
 Stern Dávid (fr. VI. o. Pécs)
 Stromfeld Ferencz (fg., VI., VII. o. Bp., I. ker.)
 †Szabó István (Debrecen)
Szabó József (fg. VII. o. Kecskemét)
 Szávay Zoltán (fr. V. o. Győr)
 Szibelth Sándor (fg. VI. o. Sz-Fehérvár)
 Szmodics Hildegárd (fg. VII. o. Kaposvár)
 Tézner Ernő (fg. VIII. o. Bp., ág. h. ev. fg.)
 Tóbiás László (fr. VIII. o. Szeged)
 Tóth Balázs (fg. IV. o. Eger)
 Tötössy Géza (Bp.)
 Vajda Ödön (műgyetemi hallgató Bp.)
 Vámosy László (fg. V. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Weber Konrád (fg. VI. o. Pannonhalma)
 Weisz Arthur (fg. VIII. o. Bp. ág. h. ev. fg.)
 Weisz Ármin (keresk. akad. Bp.)
 Weisz József (fg., VIII. o. Bp., ág. h. ev. fg., és műgyetemi hallgató Bp.)
 Wihter Ferencz (fg. VII. o. Bp. II. ker.)
 Wittál Jónás (fr. VII. o. Bp. VI. ker.)
 Wittmann Andor (fr. VII. o. Győr)
 Wohlstein Sándor (fg. VIII. o. Érsekújvár)

A gyakorlatok és feladatok megfajtozói 1903–1905

Ádámffy E., g., VIII. Eger
 Altmann G., g. VI. Eperjes
 Auer Gy., g. V. Bp. V. ker.
 Babocsai Gy., g. VI. Kaposvár
 Bauer J., g. VI. Zenta
 Bánó L. g. VII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Barok L., g. VI. Losoncz
 Bauer E., g. V., VII. Bp. V. ker.
 Bauer I., g. VI. Zenta
 Bayer N., g. VI., VIII. Losoncz
 Bendi K., g. VI. Bp. ág. h. eg. fg.
Beke M., g. VI. Bp., Zöldfa utcai fg.
 Benedikt. F., g. VI. Bp. I. ker.
 Berger J. g. V. Bp. V. ker.
 Berthoty Aranka g. VII. Bp.
 Blum J. r. VII. Bp. V. ker.
 Borota B., g. VI. Szeged
 Breuer P., r. V. Pécs
 Brichla L. g. VIII. Nyitra
 Brósy M., r. VI. Bp.
 Czucz A., g. VIII. Eger
 Csada I., Pápa
 Csink E.
 Cukor G., g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.

Davida L., g. VI. Kolozsvár
 Dénes M., r. V., VII. Bp., V. ker.
 Dévai I., g. VII. Bp. gyak. fg.
 Dévai E., g. VI. Bp. VI. ker.
 Domokos Gy., g. VI. Keszthely
 Dömény I., r. VIII. Bp. V. ker.
 Döri V., r. V. Bp. VI. ker.
 Ehrenfeld N., g. VI., VIII. Nyitra
 Ehrenstein L., g. VI., VIII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Ehrenstein P., g. VII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Ehrenstein S., g. VI. Bp., Zöldfa utcai fg.
 Elischer E., g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.
 Engler J., r. V., VII. Pécs
 Epstein K., r. VII. Bp. V. ker.
 Erdélyi S., g. VIII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Erdős V., r. V., VII. Bp. V. ker.
 Ertler A., g. VIII. Nyitra
 Eugel A., r. V. Pécs
 Faragó K., g. V. Bp. V. ker.
Fekete M., g. VI. Zenta
 Felhőssy J., r. VI. Bp. VIII. ker.
 Fischer M., g. V. Szeged
 Fleischhacker Gy., r. VI. Sopron
 Fodor H., g. VII. Beregszász

Forintos K., g. V. Bp.
 Földes R., r. VII. Bp. V. ker.
 Frank A., g. VII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Frankl F., r. V. Bp. V. ker.
 Freund E., g. VII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Fried E., r. V., VII. Bp. V. ker.
 Friedrich J.
 Fuchs I., g. VIII. Beregszász
 Füstös P., g. VI., VIII. Eger
 Gádor Z., g. VIII. Losonc
 Gallia M., Bp.
 Gesmay L., keresk. II. Bp. II. ker.
 Glasel G., r. VII. Bp. VI. ker.
 Glück J., r. VIII. Debreczen
 Gráf V., g. VII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Grossberger Z., g. VI. Losonc
 Grossmann R., g. VII. Bp. Zöldfa utcai fg.
 Grün E., r. V. Pécs
 Grünhut. P., g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.
 Grünhut F., g. VI. Bp. VIII. ker.
 Grünwald M., g. V. Bp., V. ker.
 Haar A. g. VIII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Hagyó Kovács A., g. V. Eger
 Hainess G., r. VI. Pécs
 Halmi Ö. g. VI. Kolozsvár
 Harsányi Z., g. VII. Eger
 Hay A., r. VI. Pécs
 Heimlich P., r. VII. Bp., VIII. ker.
 Helfgotl Á.,
 Hollop I., r. V. Bp.
 Horti V., r. VII. Kassa
 Horváth L., VII.
 Jánosy Gy., g. VII. Bp. VIII. ker.
 Janosy J., g. VII. Esztergom
 Jármai Z., g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.
 Jeczuskó I., g. VI. Eperjes
 Kelemen E. g. V. Bp., V. ker.
 Kellner S., r. V. Győr
 Kertész G., r. VIII. Pécs
 Kirchknopf. É., g. VI., VIII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Kerner V., g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.
 Kiss E., r. VIII. Bp. VIII. ker.
 Kiss J., Pápa
 Klein G. r. V. Bp., VI. ker.
 Klein Adolf, r. VI. Székesfehérvár
 Klein A., g. VIII. Bp. VII. ker.
 Klein G., r. VII. Bp. VI. ker.
 Koffler B., r. V., VII. Bp. V. ker.
 Kopecky J. Bp.
 Kóritsánczky L., g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.
 Kovács Gy., g. VI., VIII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Kovács E., g. VI. Bp. V. ker.
 Krampera Gy., g. VII. Debreczen
 Krauter F., g. VIII. Lugos
 Koller A., r. V. Bp. VI. ker.
 Kubinyi J., g. VIII. Nagyszombat
 Kussinszky J., g. VI. Pécs
 Kürth H., g. V. Nyitra
 Kürti I., g. VIII. Eger
 Kvassay L., g. V. Bp. gyak. fg.
 Láng. O., r. VII. Bp. V. ker.
 Lendvai D., r. VII. Bp. VI. ker.
 Lengyel K., r. V. Bp. V. ker.
 Lengyel M, r. VII. Pécs
 Lengyel P., r. V. Bp. V. ker.
 Lőwy J., g. VI. Losonc
 Lusztig M., r. V. Pécs
 Magyar A. D., r. VI. Bp. V. ker.
 Márkus E., r. V. Bp. VI. ker.
 Martini J., r. VII. Pozsony
 Merse (Messer) P., r. VIII. Bp. V. ker.
 Miklóssy K., g. VI. Arad
 Morvai O., r. VII. Bp. V. ker.
 Muraraik A. Nagyszombat
 Muttnyánszky Á., g. VI. Bp. II. ker.
 Nendtvich Zsófia, g. VIII. Zöldfa utcai fg.
 Neubauer K., g. VIII. Bp. VII. ker.
 Neumann F., g. VII. Bp. Zöldfa utcai fg.
 Neumann. L., r. V., VIII. Bp. V. ker.
 Neumann Zs, r. VI. Bp. VI. ker.
 Pálos T., g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.
 Pám M., g. VIII. Szarvas
 Pataky T.
 Pattantyús Á. E., g. VII. Bp. II. ker.
 Patz S., g. VIII. Bp.
 Pauli J., g. VII. Nagykikinda
 Paunz A., r. VI. Pécs
 Paunz R., r. V. Pécs
 Pető I., r. VII. Debreczen
 Petrik Sarolta, Bp.
 Pichler S., g. VI., VIII. Bp. VII. ker.
 Picsmann I., r. VII. Bp. BI. Ker.
 Plán J., g. V. Bp. ág. h. ev. fg.
 Polyák S., g. VI. Zenta
 Pözel T., g. VII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Rássy P. g. VIII. Eger
 Révész I., g. VI. Kassa
 Rosenberg E., r. Bp. VI. ker.
 Rosenberg J., g. VIII. Keszthely
 Rosenthal M., r. VI. Pécs
 Róth Zs., r. VII. Bp. VI. ker.
 Ruvald S., r. VIII. Bp. VIII. ker.

Sárközi P., g. VII. Pannonhalma
 Sacher I., g. V. Losonc
 Sárközi P. Pannonhalma
 Schenk. R., r. VII. Bp. VI. ker.
 Schlesinger S., g. VIII. Nyitra
 Schöller I., r. VIII. Bp. V. ker.
 Schnster Gy., r. VII. Bp. VIII. ker.
 Schudich L., g. VI. Eperjes
 Schulhof E., g. VIII. Bp. Zöldfa utcai fg
 Schwarz Gy., g. VII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Schwarz O., g. VII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Schwarz S. Beregszász
 Sebestyén I., g. VI. bp. ág. h. ev. fg.
 Silbermann J., r. VI. Nagyvárád
 Singer D., g. VIII. Lugos
 Singer E.
 Songer Gy., r. VI. Bp. VI. ker.
 Spitzer I. g. V., VII. Bp. V. ker.
 Steiner D., g. VII. Mezőtúr
 Steiner L. r. V. Bp., V. ker.
 Steinitz K., r. VI. Pécs
 Strasser I., g. VIII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Szabó R., g. V. Eger
 Szántó L., r. VII. Pécs
 Szécsi L., g. VI. Szeged
 Székely (Sonnenfeld) I., r. VIII. Bp. V. ker.
 Szekeres K., r. V. Győr
 Szekeres V., r. VIII. Pécs
 Szende Gy., g. VIII. Bp.
 Szenes A. g. VII. Kaposvár

Szilárd V., r. V., VII. Bp. V. ker.
 Szilvay J., g. V. Eperjes
 Szobotha D., g. VII. Esztergom
 Szohel G., r. VI. Győr
 Szohel I., g. VII. Beregszász
 Szőke D., g. VI. Zenta
 Szöllős H., g. VI. Esztergom
 Sztrókay K., g. VII. Szabadka
 Tábori J.
 Tandlich E., r. VII. Körmöcbánya
 Tasch N.
 Teleki S., r. V. Pécs
 Tóth. B., g. VI. Eger
 Ungár E., g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.
 Vámos J., r. VII. Szeged
 Végvári I., g. VIII. Debrecen
 Velics L., g. VIII. Kassa
 Viola R., r. V. Bp. V. ker.
 Virány D., g. VIII. Bp. ág. h. ev. fg.
 Virány E., g. VII. Bp. ág. he. Ev. fg.
 Wáhl V., g. VI. Eger
 Weiss A. Bp.
 Weisz A., r. VI. Kaposvár
 Weisz VI. Győr
 Wellisch D. g. VI. Bp. ág. h. ev. fg.
 Werner M., g. VIII. Besztercebánya
 Winkler J., r. V. Szeged
 Zechmeister L. r. VI. Győr
 Matematikai kör, Bp. V. ker. fg.

Az első világháború időszakában a Középiskolai Matematikai Lapok megszűnt, de 1925-ben *Faragó Andor* szerkesztésében újraindult. Ennek közreadásában Rátz László már nem vett részt, de nagy örömeire szolgált, hogy a folyóirat ismét a matematikaoktatás ügyét támogatta.

A lap ekkor fizikai rovattal bővült, és napjainkban is Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok címmel jelenik meg [2].

„Irodalmi működés”

Szó szerint idézünk a kézzel írt önéletrajzból [14, 15]

1. „Az 1896. évtől a háború kitöréséig (1914) szerkesztettem és kiadtam a Középiskolai Matematikai Lapokat
2. Matematikai Gyakorlókönyv. I. k. Algebra. II. k. Geometria, Budapest, Franklin Társ. 1904.
3. A függvények és az infinitezimális számítás elemei a középiskolában (Mikola Sándorral) I. kiadás 1910., II. kiadás 1914., Budapest, Franklin-Társulat.
4. A függvények és az infinitezimális számítás elemeinek tanítása a középiskolában. „A középiskolai math. tanítás reformja” című könyvben
5. Tankönyv-bírálatok.”

Első gondolatunk az lehet, hogy Rátz László csak a legfontosabbnak tartott írásait sorolta fel. Vizsgálódásaink azonban azt mutatták, hogy ez a feltételezett teljes lista. Nem találtunk ugyanis feljegyzést további írásokról a gimnázium évkönyveiben, a tanárok irodalmi működése rovatban. A Matematikai és Fizikai Lapok 40 éves indexében a kollégák közül Mikola Sándor és Sulek József szerepel csak, Rátz László nevével nem találkozhatunk! Nem találtunk cikket a Természettudományi Közönyben sem.

Pontosítjuk az önéletrajzból vett listát.

1. A Matematikai Gyakorlókönyv, A Középiskolai Matematikai Lapok tíz évfolyamában megjelent feladatok gyűjteménye, II. kötet: Geometria 1905-ben jelent meg.
2. A Rátz-Mikola kalkulus könyv első kiadásának címe: Az infinitezimális számítás elemei a középiskolában (1910).

Ugyanezzel a címmel, ugyanezen évben közzétették művük jelentős részét a Budapesti Evangélikus Gimnázium Évkönyvében is.

Rátz László emlékek

„... Rátz László a tanári hivatást mindig magas eszményi szempontból fogta fel s ez irányította egész életének gazdag és áldásos munkásságát. ... Emléke élni fog tanítványainak, tisztelőinek lelkében!” – így írt Renner János a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1930. évi novemberi számában a Rátz László életművét méltató cikkében [41].

Az 1930/31-es tanévben a fasori gimnáziumban gyűjtést rendeztek Góbi Imre sírkövére és Rátz László emlékének megörökítésére. A tanári karban 250 pengő, az ifjúság körében 769 pengő 68 fillér gyűlt össze. Ebből 320 pengőt utaltak a Volt Növendékek Egyesületének a Rátz László-emlék céljaira.

Rátz László halálának első évfordulóján, 1931. szeptember 30-án az iskola dísztermében a Volt Növendékek Egyesülete emlékünnepet tartott első ügyvezető alelnökének emlékére, és leleplezték az iskola első emeleti fordulójában, a falban elhelyezett *domborműves fehér márványtáblát*. Az ünnep bevezető- és záró-, ének- és zeneszámait a gimnázium dal- és zeneegyesülete szolgáltatta, Peschko Zoltán művészi vezetése mellett. Az emlékbeszédet dr. vitéz Mátyásfalvy Glatz Erich, az egyesület alelnöke mondta kiemelve Rátz László kiválóságait. Remport Elek dr. gimnáziumi tanár „*Rátz László emlékezete*” című költeményét adta elő. Töpler Kálmán dr. a Rátz-család nevében köszönetet mondott az emlékünnepe

rendezéséért. A gimnázium dísztermét teljesen megtöltötte a közönség, ott voltak az iskola és az egyház képviselői, az elhunyt barátai és tisztelői, volt tanítványai és a tanulóifjúság. Az emléktábla Lux Elek szobrászművész alkotása [32, 33].



RÁTZ LÁSZLÓ
1863–1930
GIMNÁZIUMUNK KIVÁLÓ
MATHEMATIKA-TANÁRA
ÉS IGAZGATÓJA
EZ AZ EMLÉKET ÁLLÍTOTTÁK
HÁLÁS TANÍTVÁNYAI ÉS BARÁTAI
LUX E. 1931.

Rátz László emlékezete

*Néha nagy alkotók kilépnek a sorból...
Szemük reávetvén a dús jövőre,
Áhítatos kézzel, építéshez fognak,
Alapokat vetnek, követ raknak kőre.
Buzgó fáradságuk megáldott nyomában
Új reménység háza, szép palota támad...
Nem iskola az még! A lelkes tanítók
Munkája avatja csak fel iskolának.*

*Tanítóké, kik a jövőért élnek
S lelkük drága kincsét tele kézzel osztják,
Akik míg másoknak fáklyákat gyújtanak,
Önmaguk a fénytől boldogan megfosztják.
Míg a padsorok közt csendesen élégnek,
Tűzük mellett ezer más nagyobb láng gerjed,
Az ő szerény csendes munkájuk varázsol
Fényes iskolává minden szürke termet.*

*A tanító csendben, zajtalanul alkot,
Jutalomra nem vár, nem kér dicsőséget,
Rohannak a napok s mire észrevennéd,
A lobogó lélek már hamuvá égett.
S hogyha mégis van, ki messzire világít,
Tudd meg, ott ragyog egy kivételes szellem,
Aki bármennyire homályba rejteznék,
Mégis messze lobog akarata ellen.*

*Rátz László ilyen volt. E drága falak közt
Csendesen, szerényen áldást osztva járván,
Nem csábította őt soha földi hívság,
Nem kapott a fényen, a zajon, a lármán,
Mégis nemcsak a mi kis körünk csodálta,
Hanem messze látszott szellemének fénye,
Szava irányt szabott, mesterének tudta
Egy hatalmas sereg fiatalja véne.*

*Minden tanítónak nagy mestere volt ő,
Pedig igazán a kicsiket szerette.
A számok rejtelmes nagy birodalmába
Kézenfogva őket, játszva elvezette.
Igaz boldogság volt vele együtt menni,
Hiszen a vezető gondosan őrködött,
Hogy a kiűzött célt, az adott problémát
Ne homályosítsák el riasztó ködök.*

*Nagy tanítómester . . . Óh, az ő számára
Nem volt sziklás talaj, csak termékeny róna.
Ő aratni tudott az olyan földön is,
Ahol más talán még vetni sem mert volna.
Lelke tárházából dúsgazdagon tellett
Lelkesedés, jókedv, buzdító szó, munka,
S így nőtt fel a sereg, amely dicsőséget
Hozott a mesterre s gimnáziumunkra.*

*Gyengét kézenfogni, a lassút nógatni,
Nem értett itt nála soha senki jobban,
De többre buzdított, nagyobbra ösztönzött,
Hogyha észrevette: itt egy szikra lobban.
Mikor ránk zúdult a borzalom viharja,
S a világ sarkai szörnyű tűzben égtek,
Jött egy-egy levél a lövészárokmélyből:
A hősök számtani problémákat kértek.*

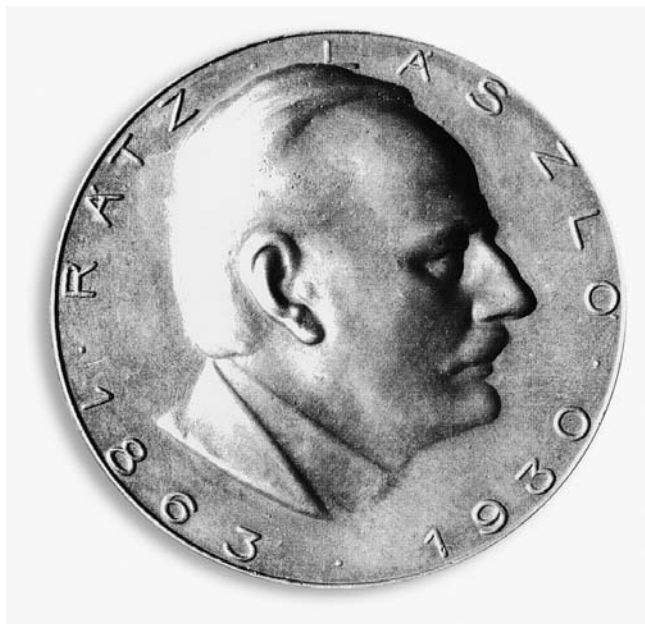
*Családra nem gondolt s mégsem volt egyedi...
Az ő családja volt a legszebb, legnagyobb,
Tartoztak beléje apró kicsi lelkek,
Tartoztak beléje messzire nőtt nagyok.
Hogyha jó szó kellett, szükség volt tanácsra,
Az ő nagy szívéhez, lelkéhez hajoltak,
S járhattak a világ bármelyik vidékén,
Mégis csak, mégis az ő fiai voltak.*

*Szerette a szépet. A zene szépsége
Elűzött lelkéből minden borút, gondot.
Messze vidékeknek örök szép tájain
Lelkesülő szemmel, óh, mennyit bolyongott!
Hogy kirándulásra vigye apró népét,
Óh, milyen szívesen, mily örömmel fáradt,
Lelkéből a jóság, szeretet és jókedv,
Az úton nagybőven mindenkire áradt.*

*Barátnak barát volt igaz értelemben,
Másoknak a terhét vállaira vette,
S míg maga a legjobb tudásával fáradt,
Cserébe sohasem kért semmit helyette.
Bár neki magának gondjai nem voltak,
A küzködővel ő mindig együtt érzett,
S hogyha valakit az élet földre sujtott,
Az ő nemes szíve vele együtt vérzett.*

*Bár ő maga volt a testesült józanság,
Lelke minden szépért, jóért lelkesedett,
S tudott lelkesíteni örök ideálért,
Egy egész kört és a nagy ifjú sereget.
Eltávozott tőlünk, ám nemes alakja
Szemünk előtt mindig fényben ragyogva áll.
Embernek jó ember, férfinak férfi volt,
Tanárnak pedig a legigazibb tanár.*

(tanártársa, Rempört Elek dr. verse [4])



A Rátz László emléklakett

A Volt Növendékek Egyesülete az 1931/32. tanév során a Rátz Lászlónak felállított márvány emlékről tagjai részére művészi kivitelű, 8 cm átmérőjű *plaketteket* készíttetett, vert és öntött minőségben, huszonöt pengő és tizenöt pengő árban. A megrendelt darabokon kívül többet, 25–50 darabot készíttetek, hogy az egyesület tagjai ezután is vehessenek belőle, és hogy jutalmazás céljára is felhasználhassák [33].

Ez a plakett valószínűleg megegyezik a képen látható éremmel, amelyből nem si-

került eredeti példányt találnunk. (Az emléklakett a Magyar Nemzeti Galéria Éremosztályán sem található meg.)

A fotót az Evangélikus arcképcsarnok, szerkesztette Tóth-Szöllős Mihály, Evangélikus sajtóosztály, Budapest, 2002. c. műből vettük át. A Magyar Éremgyűjtők Egyesületétől Szolláth György segítségét kértem az érem felkutatásához. Ő a stílusa alapján azt Telcs Ede vagy Vincze Pál munkájának tulajdonította. Az is elképzelhető azonban, hogy az emléktáblát készítő Lux Elek az alkotóművész.

1939-ben Münnich Aladár egy *ezüstszerleget* ajándékozott a Volt Növendékek Egyesületének azzal a céllal, hogy minden évben Rátz László emlékülést tartsanak, amelyen valaki méltassa Rátz László érdemeit. Erre három alkalommal került sor: rendre *Rakovszky István, dr. Vladár Gábor és Rakovszky Iván* mondtak beszédet [35, 40].

Dr. Vladár Gábor titkos tanácsos az Egyesület 1940. évi rendes közgyűlésén így elevenítette fel Rátz tanár úr emlékét:

„Ő nemcsak képviselője, de megtestesítője is a gimnázium eszméjének. ... a szív tájékán gyújt jóleső érzést, valami olyanféle melegséget, mint ami eltölt akkor, amikor ösztönösen érzed, hogy akivel szemben állasz, jó ember és szeret. Nem fizikai fényt sugároz ez a ragyogás, hanem szeretetet; nem fényt gyújt azon, akire esik, hanem bizalmat, ragaszkodást, viszonszeretetet. Ez a szeretet az, ami ebbe a serlegbe Rátz László nevét véste bele...” [40]. Nincs tudomásunk a serleg mai létezéséről, hollétéről.

A soproni Berzsényi Dániel Evangélikus Gimnáziumban, Rátz László egykori iskolájában, *Pölczmann Róbert* 1989 és 1997 között *Rátz László Matematika versenyt* szervezett. Az iskola tanulói számára havonta érdekes feladatokat tűzött ki, amelyek megoldását hozzá kellett eljuttatni. Rátz tanár úr példája nyomán a kijavított feladatokat, a legjobb megoldásokkal együtt visszajuttatta a diákoknak. A problémák felvetése során ügyelt arra, hogy gondolkodtatóak, de megoldhatóak legyenek. Az eredmények közlése mellett tudománytörténeti érdekességek is helyet kaptak a megoldóknak szánt kiadványban. A versenyek általában 8 fordulósa voltak. A legjobb teljesítményt nyújtó tanulók a tanév végén jutalomban részesültek [42].

1994-ben, Budapesten *utcát* neveztek el Rátz Lászlóról, amely Kelenföldön, a XI. kerületben található [28].



Rátz László utcarészlet és utcanévtábla

A Rátz László utca 4. számú ház, a Weiner Leó Zenei Szakközépiskola falán emléktábla látható.

RÁTZ LÁSZLÓ
1863–1930
MATEMATIKUS
A FASORI EVANGÉLIKUS GIMNÁZIUM
TANÁRA ÉS IGAZGATÓJA
A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK
SZERKESZTŐJE
ÁLLÍTOTTA
BUDAPEST FŐVÁROS XI. KERÜLETI ÖNKORMÁNYZAT
BUDAPESTI EVANGÉLIKUS GIMNÁZIUM
1997.



Rátz László emléktáblája a róla elnevezett utcában

A Bolyai János Matematikai Társulat minden nyáron *Rátz László vándorgyűlést* szervez matematika tanárok részére. Az eseményt minden évben más-más vidéki városban rendezik meg. A rendezvény akkreditált pedagógus-továbbképzés, amelyen többek között módszertani, feladat-megoldási, taneszköz-készítési vagy oktatáspolitikai kérdésekkel kapcsolatos előadások szerepelnek.

A vándorgyűlésen több szekcióban dolgoznak: alsó tagozatos, felső tagozatos, középiskolai és felsőoktatási. Mindegyikben előadásokat hallgathatnak a résztvevők, és feladatmegoldó szemináriumokon is fejleszthetik tudásukat. 2006-ban már a 46. Rátz László vándorgyűlés került megrendezésre [43]. A vándorgyűlésen előadást tartanak a Rátz Tanár Úr Életműdíj legutóbbi kitüntetettjei.

2001. augusztus 29-én a tanévnyitó alkalmával a Budapesti Fasori Evangélikus Gimnázium utcai homlokzatán az iskola három világhírűvé lett növendékének és az őket tanító négy tanárnak emlékét őrző fekete gránittáblát avattak. Az ünnepségen beszédet mondott *Tárnok Dezső*, az intézmény igazgatója, a Köznevelési Minisztérium részéről *Környei László* helyettes államtitkár és a VI. kerület nevében *Farkas György* polgármester [ld. *Fizikai Szemle* 2001/11, 371. oldal, Szabó István cikke].



A 20. SZÁZAD SORSFORDÍTÓ MAGYARJAI KÖZÜL E FALAK KÖZÖTT VÉGEZTÉK
KÖZÉPISKOLAI TANULMÁNYAIKAT

WIGNER JENŐ	NEUMANN JÁNOS	HARSÁNYI JÁNOS
1902–1995	1903–1957	1920–2000
NOBEL-DÍJAS FIZIKUS	VILÁGHÍRŰ MATEMATIKUS	NOBEL DÍJAS KÖZGAZDÁSZ

TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEIKKEL ISKOLÁNKNAK, HAZÁNKNAK HÍRNEVET,
DICSŐSÉGET SZEREZTEK, AZ EMBERISÉG SZÁMÁRA MARADANDÓT ALKOTTAK.

A SZÁZAD OLYAN KIVÁLÓ TANÁREGYÉNISÉGEI OKTATTÁK ŐKET, MINT
HITTRICH ÖDÖN – MIKOLA SÁNDOR – RÁTZ LÁSZLÓ – RENNER JÁNOS
AKIK A TANÍTÁS MELLETT TUDOMÁNYOS KUTATÓMUNKÁT IS VÉGEZTEK.

EMLÉKEZÉSÜL A MILLENNIUM ÉVÉBEN ÁLLÍTOTTA
A BUDAPESTI FASORI EVANGÉLIKUS GIMNÁZIUM TANÁRI KARA ÉS TANULÓI



2002. március 23-án a Budapesti Evangélikus Gimnázium dísztermében a Magyarországiért Alapítvány kuratóriuma által felkért Bizottság kinyilvánította, hogy Hittrich Ödön, Mikola Sándor, Rátz László és Renner János fasori gimnáziumi tanárok, a nemzet jeles tudósait hivatásukra felkészítő munkássága *Magyar Örökség*. A bekeretezett oklevél a gimnázium falán nyert elhelyezést.



A gimnázium második emeleti dísztermének falán látható *Kunwald Cézár Rátz László*-t ábrázoló olajfestménye (címképünk).

Az iskola folyosójának falán helyezték el a gimnázium igazgatóiról Szabó István gondnok által készített tablót. Rátz László fényképe a második sorban a jobb szélén található.



A Fásori Gimnázium igazgatóinak tablója

Az Ericsson Magyarország Kft., a Graphisoft R&D Rt. és a Richter Gedeon Rt. képviselői 2000. december 1-jén ünnepélyes keretek között jelentették be, hogy a három nagyvállalat közös alapítványt hozott létre a Magyar Természettudományos Oktatásért. [45]



A díj márvány hengere

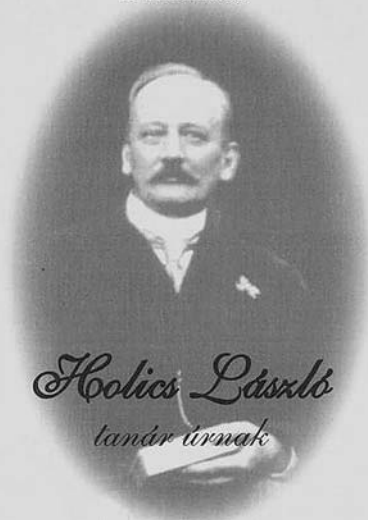
Az alapítvány kuratóriuma évente ítéli oda a *Rátz Tanár Úr Életműdíjat* összesen mintegy 6 millió Ft értékben. Az alapítvány díjazottai azok a középiskolai és általános iskolai tanárok, akik a magyarországi matematika-, fizika-, kémiaoktatás területén kimagasló szerepet töltenek be a tantárgyak népszerűsítésében és a tehetséggondozásban. [45]

Az egyenként 1 millió forint összegű Rátz Tanár Úr Életműdíjat az Alapítvány kuratóriuma 2001. második félévétől kezdve évente ítéli oda két-két matematika-, fizika- és kémiatanárnak. [45]

A díjhoz névreszóló márványhenger és díszes oklevél is jár.


...hogy ne csak a világhírt tudósok, hanem tanáraik nevét is ismerjük...

Rátz Tanár Úr Életműdíj 2001 Fizika



*Elhivatott szakmai és emberi munkájáért,
a jövő tehetségeinek kibontakoztatásáért.*

2001. november 19.


Richter Gedeon Rt.




Graphisoft R&D Rt.


Ericsson Magyarország Kft.

Holics László oklevele

A három nagyvállalat közös kezdeményezésének célja, hogy tisztelettel adózzon azon pedagógusok előtt, akik áldozatos szakmai munkájukkal kiemelkedő eredménnyel képezik a jövő tehetségeit. [45]

A díjra a közoktatás 5–12. évfolyamain matematikát és/vagy fizikát és/vagy kémiát tanító (vagy tanított) aktív tanárok terjeszthetők fel írásban, szakmai és társadalmi szervezetek, az ajánlott tanár tevékenységét jól ismerő kollektívák által. [45]

A felterjesztés feltétele, hogy a jelölt a közoktatás területén – nem szervezői munkakörben – dolgozó, az 5–12. évfolyamokon több éven át kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végzett/végző olyan tanár legyen,

- aki a fenti tantárgyak közül legalább az egyiket több éven át eredményesen tanította, tanítványai a középiskolában vagy a felsőfokú intézményekben sikerrel állják meg a helyüket,
- akinek tanítványai az országos hazai vagy nemzetközi versenyeken a fenti tantárgyak valamelyikében az elsők között szerepeltek vagy többször a döntőbe jutottak,
- aki tevékenységében gondot fordít a hátrányos helyzetű, tehetséges diákok felfedezésére, tudásuk gyarapítására,
- aki jelentős szerepet vállal a fenti három tantárgy valamelyikéhez kapcsolódó országos, regionális vagy iskolai szakmai programok (pl.: versenyek, továbbképzések, tanácskozások) megszervezésében, a program tartalmának felépítésében és kivitelezésében (pl.: előadások tartása, szakanyagok készítése, friss információ továbbítása),
- aki rendszeresen továbbképi magát, tájékozott az adott tudomány területén elért eredményekről, a tantárgy tanításával kapcsolatos aktualitásokról, tapasztalatait megosztja kollégáival,
- szakmai lapokban publikál, könyveket, tankönyveket, tanítási segédleteket írt vagy ír,
- aki a szaktárgyi felkészítés mellett hivatásának tekinti tanítványai nevelését, személyiségük fejlesztését, problémáik megoldásához segítséget nyújt,
- akinek személyisége, szakértelme, egész életvitele példamutató. [45]

A díjakat a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat díjbizottságai, valamint a Magyar Kémikusok Egyesülete ajánlásai alapján a három cég által felkért Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma – melynek elnöke *Dr. Kroó Norbert* professzor, a Magyar Tudományos Akadémia korábbi főtitkára, ma alelnöke – ítéli oda az adott év kitüntetettjeinek. A kuratórium tagjai: *Görög Sándor* professzor, akadémikus, *Lajos Józsefné (Balázs Erzsébet)*, matematika tantárgyi szakértő és *Damjanovich Sándor* professzor, akadémikus [45].

Azért választották Rátz Lászlót, a Fasori Evangélikus Gimnázium legendás hírvéleményezőjét az életműdíj névadójául, hogy ne csak a világhírvéleményező tudósok neve és teljesítménye, hanem tanáraiké is közismertté váljék.

A díjakat első alkalommal 2001. november 19-én ünnepélyes külsőségek közt a Thália Színházban osztották ki. A díszhelyen Rátz László tanítványának, Wigner Jenőnek leánya, Márta, és unokája, Mária ült. Az ünnepélyt *Vizy E. Szilveszter*, az MTA elnöke nyitotta meg, majd Kroó Norbert, a díjat odaítélő zsűri elnöke, továbbá az alapító vállalatok vezetői mondtak beszédet.

Felsoroljuk a díjazottakat, és biztatjuk olvasóinkat, hogy tanulmányozzák a méltatásokat az Életműdíj honlapján [45]. Tesszük ezt abban a titkolt reményben, hogy a kiváló tanárok példája hatni fog a pályakezdő pedagógusokra. Szívünk mélyén azonban érezzük, tudjuk, hogy a legtehetségesebb és legszorgalmasabb fiatal tanárok sem tudnak manapság olyan eredményeket felmutatni, mint a Rátz Tanár Úr Életműdíj nyertesei. Nem engedi ezt a mai társadalom, nem teszi ezt lehetővé az iskolák mai helyzete, a diákok meglazult fegyelme, lecsökkent szorgalma és a korábbiakhoz képest alacsonyabb szintű mentális képessége.

2001

Matematikai díj:

Dr. Urbán János, Kőváry Károly (1923–2003)

Fizikai díj:

Szucsán András, Holics László

Kémiai díj:

Hobinka Ildikó, Dr. Várnai György

2002

Matematikai díj:

Reiman István, Pálmay Lóránt

Fizikai díj:

Dr. Kopcsa József, Nagy Márton

Kémiai díj:

Szabó Lászlóné, Dr. Harka Katalin

2003. október 16-án a Budapesti Fasori Evangélikus Gimnázium legendás hírv tanára, Rátz László születésének 140. évfordulója alkalmából az Ericsson Magyarország Kft., a Graphisoft Rt. és a Richter Gedeon Rt. Alapítványa a Magyar Természettudományos Oktatásért az Oktatási Minisztérium képviselőjével, az iskola tanáraival és diákjaival együtt emlékezett meg a névadójáról. A Budapesti Fasori Evangélikus Gimnáziumban megrendezett ünnepségen a gimnázium növendékei versekkel és rövid színi előadással tisztelegtek a gimnázium egykori tanára előtt. Az eseményen beszédet mondott Kroó Norbert, az Alapítvány kuratóriumának elnöke [45].

2003. november 18-án este a Thália Színházban adták át harmadszor a Rátz László Életműdíjakat.

Matematikai díj:

Czapáry Endre, Rábai Imre

Fizikai díj:

Kovács Mihály (1916–2006), Dr. Wiedemann László

Kémiai díj:

Dr. Kovácsné dr. Csányi Csilla, Dr. Velkey László

2004

Matematikai díj:

Reményi Gusztávné (1922–2006), Rácz János (1919–2005)

Fizikai díj:

Sebestyén Zoltán, Dr. Zátanyi Sándor

Kémiai díj:

Dr. Kecskés Andrásné, Villányi Attila

2005-től a díjazottak köre a biológia tanárokkal bővült. Az ünnepélyes díjátadásra november 8-án került sor a Thália Színházban.

Matematikai díj:

Némethy Katalin, Herczeg János

Fizikai díj:

Dr. Jurisits József, Rónaszéki László (1931–2006)

Kémiai díj:

Dr. Tóth Zoltán, Hajnisné Anda Éva

Biológiai díj:

Bognár József, Mezeiné dr. Kopasz Mária

2006-ban a díjakat a Magyar Tudományos Akadémia kupola termében adták át.

Matematikai díj:

Thiry Imréné, Dr. Pintér Ferenc

Fizikai díj:

Dr. Zsudel László, Dr. Lang Jánosné

Kémiai díj:

Dr. Balázs Lórántné, Dr. Irlanda Dezső

Biológiai díj:

Dr. Árendás Veronika, Dr. Rékási József

A jó pedagógus tanítványai szívében, és azok tudásában, eredményeiben él tovább. Rácz László szellemisége, a matematika iránti szeretete így benne rejlik Neumann János és Wigner Jenő tudományos felfedezéseiben, Szegő Gábor, Pólya György munkásságában és a Középiskolai Matematikai Lapok valamennyi egykori lelkes megoldójának életművében.

Irodalom

1. L. Eisenbud, G. T. Harvey, E. P. Wigner: Az atommag szerkezete, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969.
2. Dobos Krisztina – Gazda István – Kovács László: A fasori csoda (Rátz László – Mikola Sándor – Wigner Jenő – Neumann János), Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum, Mesterek és tanítványok sorozat
3. A budapesti Ág. Hitv. Evang. Főgimnázium értesítője az 1925/26. iskolai évről, közlése: Dr. Hittrich Ödön igazgató, Budapest, 1926., (ifj. Kellner Ernő könyvnyomdája, V., Csáky-utca 10.) VII Vilma királynő-út 17–21.
4. A budapesti Ág. H. Evangélikus Gimnázium értesítője az 1930/31. iskolai évről, közlése: Mikola Sándor igazgató, Budapest, 1931., VII. Vilma királynő-út 17–21.
5. Soproni Hírlap, 1930. október 3. péntek, 4. oldal, a Napi Hírek között
6. KöMal – Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 100 éve született Wigner Jenő (2002. november 17.), (100 éve született Wigner Jenő.htm)
7. ... az ember érzi, hogy fontos dolgokat még nem tud (Beszélgetés Wigner Jenővel a József Attila Gimnáziumban), Fizikai Szemle, 1988/5.
8. Thirring Gusztáv: Adatok a száz év előtti Sopronból és 1848. évi népességéről. Egy elfelejtett régi magyar népösszeírás végrehajtása és eredményei. Sajtó alá rendezte és kiegészítette: Thirring Lajos, Sopron, 1957., Soproni Szemle (a Soproni Szemle kiadványainak új sorozata: 1. szám, Soproni Levéltár)
9. Dr. Thirring Gusztáv, Sopron szabad királyi város díszpolgára: Sopron házai és háztulajdonosai 1734-től 1939-ig, Sopron szabad királyi város kiadása, Sopron, Székely és társa könyvnyomdája, 1941. (Soproni Levéltár)
10. Soproni Levéltár, születési anyakönyvek: 1857., 1859., 1863., 1869.
11. Hárs József: Mesélő utcák Sopronban, Sopron Megyei Jogú Város (Balf, Brennbergbánya és Görbehalom, Kőhidtelep, Tómalom), Történeti utcajegyzék, 2003.
12. Műemléki Hivatal Sopron (file://E:\belv\varkerulettxt.html)
13. Rátz László kézzel írott önéletrajza (1920.)
14. Dunántúli Ágostai Hitvallású Evangélikus Egyházkerületi Soproni Lyceum anyakönyve (a soproni Berzsényi Dániel Evangélikus Gimnázium (Líceum) könyvtára)
15. Soproni evangélikus népiskola 1878/79. évi értesítője (Soproni Levéltár)
16. Soproni evangélikus elemi fi- és leány néptanodának értesítője az 1880/81-es tanévről, (Soproni Levéltár)
17. Kézírtos közlés a soproni Berzsényi Dániel Evangélikus Gimnázium (Líceum) könyvtárából

18. Szabó István a budapesti Fasori Evangélikus Gimnázium gondnokának gyűjtéséből
19. Sopron vármegye című újság, 1931. május 29. péntek (Szabó István a budapesti Fasori Evangélikus gimnázium gondnokának gyűjtéséből)
20. Tudósítvány a dunántúli ágostai hitvallású evangélikus egyházkerületi soproni Lyceumról az 1880/81diki tanévben, közzé teszi: Müllner Mátyás igazgató, Sopron, nyomtatott Romwalter Károlynál, 1881. (a soproni Berzsényi Dániel Evangélikus Gimnázium /Líceum/ könyvtára)
21. Tudósítvány a dunántúli ágostai hitvallású evangélikus egyházkerületi soproni Lyceumról az 1881/82diki tanévben, közzé teszi: Müllner Mátyás igazgató, Sopron, nyomtatott Romwalter K. és Fiánál, 1882. (a soproni Berzsényi Dániel Evangélikus Gimnázium /Líceum/ könyvtára)
22. Tudósítás a soproni ágostai hitvallású evangélikus egyházkerületi Lyceumban tanuló ifjúságról az 1880/81. Tanév I.–II. felében, hetedik osztály, (a soproni Berzsényi Dániel Evangélikus Gimnázium /Líceum/ könyvtára)
23. Magyarországi Evangélikus Egyház, Evangélikus Országos Levéltár (EOL), Budapesti (Fasori) Evangélikus Gimnázium, 107. csomó, 4. köteg, tanári fizetések kimutatása
24. Kovács László: Wigner Jenő és tanárai Savaria University Press, Szombathely, 2001.
25. Oedenburger Comitats-Kalender auf das Gemeinjahr 1889. Druck und Verlag von Carl Litfaß in Oedenburg, (Soproni Levéltár)
26. Litfass sopronmegyei naptára az 1893. közönséges évre. Közhasznú üzleti és útbaigazító naptár mindenki számára. Hatodik évfolyam. Nyomtatja és kiadja Litfass Károly Sopronban, Várkerület 72. szám alatt. (Soproni Levéltár)
27. Wigner Jenő emlékiratai Andrew Szanton lejegyzésében, Kairosz Kiadó, 2002. (72–80. oldal)
28. Evangélikus arcképcsarnok, szerkesztette Tóth-Szöllős Mihály Evangélikus Sajtóosztály, Budapest, 2002.
29. A budapesti ágostai hitvallású Evangélikus Főgimnázium első száz esztendejének története, írta: Dr. Hittrich Ödön a főgimnázium rendes tanára és e. i. igazgatója, Budapest, 1923.
30. Soproni Hírlap, 1930. október 5. vasárnap
31. A soproni Evangélikus Egyház temetési főkönyve (Szabó István gyűjtése)
32. Evangélikus Élet, országos evangélikus hetilap internetes honlapja, 2003/49, Az evangélikus oktatás nagykövete (Rátz tanár úr emlékezete) című cikk, írta: Dr. Németh József, www.evelet.hu:8080/ujzagok/evelet/ujzagok/evelet/archivum/2003/49
33. A budapesti Ág. H. Evangélikus Gimnázium értesítője az 1931/32. iskolai évről, közléteszi: Mikola Sándor igazgató Budapest, 1932., VII. Vilma királynő-út 17–21.
34. Kovács László: Neumann János és magyar tanárai, Szombathely, 2003.
35. Gyapay Gábor: A Budapesti Evangélikus Gimnázium, (Iskolák a múltból sorozat), Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

36. Mikola Sándor-Rátz László: Az infinitezimális számítás elemei a középiskolában, Budapest, 1910. (a könyv bevezetője)
37. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok internetes honlapja: www.komal.hu/info/miazakomal.h.shtml
38. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok digitális archívuma az interneten: www.sulinet.hu/komal/
39. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok digitális archívuma az interneten: www.sulinet.hu/komal/ 1896. januári szám
40. A budapesti Ág. H. Evangélikus Gimnázium évkönyve az intézet fennállásának 118. évéről, 1940/41., nyomtatott Garas József Könyvnyomdájában, Cegléd (63–66. oldal, dr. Vladár Gábor által elmondott serlegbeszéd)
41. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok digitális archívuma az interneten: www.sulinet.hu/komal/ 1930. novemberi szám
42. Internetes honlap: www.sopron.hu/intranet/iskolak/berzsenyi/archiv/hratz2.htm kiegészítve Pölczmann Róbert személyes közléseivel.
43. A Bolyai János Matematikai Társulat internetes honlapja: www.bolyai.hu
44. Fizikai Szemle 2001/11, 371. oldal, Szabó István cikke
45. A Rátz Tanár Úr Életműdíj internetes honlapja: www.ratztanarurdij.hu
46. Soproni Evangélikus Levéltár, Keresztelési anyakönyv XI. kötet 1850–1868.
47. Soproni Evangélikus Levéltár, Halotti anyakönyv IX. kötet, 1875–1887.
48. Soproni Evangélikus Levéltár, Halotti anyakönyv X. kötet, 1888–1899.
49. Soproni Evangélikus Levéltár, Keresztelési anyakönyv XIII. kötet 1878–1891.
50. Dr. Kárpáti Károly, a soproni állami Főreáliskola r. tanára: A soproni magy. kir. állami Főreáliskola története (a vallás és közoktatási magy. kir. minister és a soproni áll. Főreáliskolai tanártestület megbízásából, nemzetünk milleneumára), Sopron
51. A soproni magyar kir. állami Főreáltanoda első évi értesítője 1875/6., szerkeszté Salamin Leo, királyi igazgató, Sopron, 1876., nyomtatott Reichard Adolfnál
52. A sopronyi magyar kir. állami Főreáliskola II-ik évi értesítője 1876/7., szerkeszté Salamin Leo, kir. igazgató, Soprony, nyomtatott Reichard Adolfnál, 1877.
53. A sopronyi magyar kir. állami Főreáliskola 3-ik évi értesítője 1877/8., közli: Salamin Leo, kir. igazgató, Soprony, nyomtatott Reichard és Litfassnál.
54. A sopronyi magyar kir. állami Főreáliskola 4-ik évi értesítője 1878/9., közli: Salamin Leo, kir. igazgató, Soprony, nyomtatott Reichard és Litfassnál, 1879.
55. A sopronyi magyar kir. állami Főreáliskola 5-ik évi értesítője 1879/80., közli: Salamin Leo, kir. igazgató, Soprony, nyomtatott Reichard & Litfassnál, 1880.
56. Czellár Katalin: Sopron (Panoráma, Magyar városok sorozat)

László Kovács: Teacher László Rátz

Biographic Chronicle

László Rátz was born on 9 April 1863 in Sopron to Ágost Rátz, an ironmonger, and Emma Töpler. The forebears of the Rátz family emigrated to Hungary from Turkey in the seventeenth century.

In 1882 he graduated from the Sopron Lutheran Liceum, which he had attended for the previous two years. At that time he resided at 131 Várkerület. His teacher of Hungarian was *Imre Góbi*, under whose directorship Rátz later taught in Budapest. His teacher of mathematics and physics was *János Renner senior*.

From 1883 to 1887, Rátz studied at the Budapest University of Arts and Sciences. From 4 October 1887 to 7 August 1888, he studied philosophy at the University of Berlin, after which he enrolled as a student of natural history at the University of Strassburg on 31 October of the same year.

From September 1889 Rátz served as teacher-in-training at the Main Gymnasium attached to the Budapest University of Arts and Sciences.

On 28 November 1890 Rátz was awarded a university diploma in physics and mathematics.

On 1 September 1890, Rátz commenced his duties as an assistant teacher at the Budapest Lutheran Gymnasium, where two years later he received a permanent appointment. Rátz retained his teaching position at the Lutheran Gymnasium until his retirement in 1925.

Between 1909 and 1914 Rátz served as director of the Lutheran Gymnasium. After resigning from this position, he received the title of honorary director and was named a permanent honorary member of the school's representative body.

Rátz died at the Grünwald Sanatorium in Budapest on 30 September 1930 and was buried on 4 October in Sopron. His grave in the Lutheran Cemetery can be found next to the wall to the left of the entrance.



As executive advisor to the National Public Education Council, Rátz helped to prepare the mathematics curriculum of 1924 and instructions for its implementation. During his career he served for seventeen years as teacher-president of the Song and Music Union and for thirty years as director of the *Formica* Teachers' Saving Society. He was a member of the National Teachers Pension Fund, and during his retirement he was managing director of the Lutheran Gymnasium Alumni Association.

On 18 November 1930, Sándor Mikola, at that time director of the Lutheran Gymnasium, announced at a meeting of the faculty that the Lutheran Gymnasium Alumni Association "had initiated a large-scale campaign to immortalise the memory of László Rátz". In the year following his death, Rátz was commemorated at the dedication of a large marble plaque bearing his likeness in relief. The work of sculptor Elek Lux, it was hung in the school's stairwell. In 1939, Aladár Münnich donated a silver chalice to the Lutheran Gymnasium Alumni Association with the goal of honoring Rátz's memory at an annual *László Rátz Memorial Assembly*.

László Rátz was an active participant in the life of the Lutheran community as well; a member of various church committees, he also served as a deacon and general presbyter.

Rátz's most noteworthy scholarly endeavors included his leading role in the implementation of reforms in secondary-school mathematics education (1905–1914) and his editorship (as successor to Dániel Arany) of the *Középiskolai Matematikai Lapok* (*Journal of Secondary-School Mathematics*) from 1896 to 1914. Certain of those mathematics problems and their solutions which had appeared in that journal were thematically organised and published separately by Rátz under the title *Matematikai Gyakorlókönyv 1-2* (*Mathematics Practice Book 1-2*), which appeared in two installments in 1904 and 1905.

The reformer of mathematics teaching

The various European reforms in mathematics teaching commenced in England (1884 *Armstrong*, 1901 *Perry*). In early twentieth-century France *Poincaré* and *Langevin* led the reform movement.

As for Germany, at the Congress of German Physicians and Nature-researchers in 1905, the Mathematics Reform Committee announced that the natural sciences have a cultural value apart from their practical applications, and, for this reason, their teaching should be placed on an equal footing with that of the philological disciplines. Worthy of special note is *Felix Klein*, professor at Göttingen University and an initiator and organiser of European reforms. Klein devoted special attention to the state of Hungarian mathematics. In 1905 he lectured in Budapest and over the course of the following decades converted Göttingen into something of a Mecca for Hungarian mathematicians.

Reforms in Hungary began with the efforts of Professor *Manó Beke*, a student of Klein's. At the annual meeting of the National Association of Secondary School Teachers in 1906, a Mathematics Reform Committee was created, with Beke as president, Sándor Mikola secretary, and László Rátz among the members. So thorough was the work of this committee that its results surpassed those of the committees elsewhere in Europe upon which it had been modelled, as was widely acknowledged both home and abroad. Testament to the quality of the Hungarian committee's activities was the appearance of its results in a book published by Teubner in 1911. Beginning in 1909, Beke, together with Rátz and *Gusztáv Rados*, represented Hungary on the International Reform Committee. László Rátz participated in congresses organised in Milano, Cambridge and Paris, and in 1910 was named "Officer d'Académie", a noteworthy French honor.

Even before the formation of the Hungarian committee, Rátz and Mikola had sensed the need for a change, and, inspired by the example of the English, they worked up a complete and highly detailed set of workable techniques and materials for the teaching of mathematics. They concluded that mathematics embraces a number of spontaneously acquired elements, which must be reinforced in the pupil. The study of mathematics must be interwoven with immediate experience. They stressed the importance of mental calculation and the practice of estimating. From their set of new materials and techniques they drew, by way of example, those sections devoted to the teaching of infinitesimal calculus and presented them in a number of publications: Rátz-Mikola, "Az infinitezimális számítás elemei a középiskolában" (Infinitesimal calculus in the secondary school), an article which appeared in the 1910 Annual Report of the Lutheran Gymnasium; in a book bearing the same title and appearing in the same year; and in a more sizeable volume entitled *Functions and the elements of infinitesimal calculus* [A függvények és az infinitezimális számítások elemei], published by Franklin Publishers in 1914.

The most pressing questions connected with the reform of mathematics teaching were addressed in lectures at Congresses of the National Association of Secondary School Teachers. The material of these lectures soon found their way into a book edited by Beke and Mikola under the title *The reform of mathematics teaching in the secondary school* [A középiskolai matematikai tanítás reformja, Budapest, Franklin 1909]. Included in that book was an article by Rátz entitled "The teaching of functions and the elements of infinitesimal calculus in our secondary schools" [A függvények és az infinitezimális számítás elemeinek tanítása középiskoláinkban], in which he delivered the following summation:

"The principle behind the reform can be briefly expressed as follows: Let the teaching of mathematics be such as to develop in the pupil an awareness of the cultural importance of mathematics. We want the graduates of our secondary institutions to take something of

their mathematical training into their adult lives. It is our hope that in such a way “the practice of thinking mathematically” will have an impact on public life. Our pupils must realise how great is the number of branches of mathematics which are related to practical life, the sciences and our general view of the world in its entirety. ... It is our conviction that teaching modified to this end is necessary in order to grasp the principal features of modern culture. It is not our goal to provide pupils bound for further technical and other specialised training with more mathematical knowledge; instead, we aim to equip precisely those pupils whose training in mathematics will come to an end upon their graduation from secondary school with an understanding of mathematics which is worthy of so great a science.”

Beke, Mikola, Rátz and their collaborators took pains to point out that the reform was much more than a matter of expanding the content of the mathematics curriculum. They emphasised that the teaching of infinitesimal calculus must be centered upon the notion of functions. From the first form on, instruction should endeavor to shape the pupils’ mode of reasoning and develop in them the capacity to think in terms of functions. “The content of mathematics instruction at the secondary level should be so prescribed as to include a place for the most essential notions of contemporary natural science”. “We must transform the spirit of instruction, rather than simply tack on differential and integral calculus at the end of the curriculum”.

Pupils, they explained, must be able to reach a deeper understanding of reality through consideration of quantitative relations. In this respect, it was essential that the teacher strive to elucidate the instructional material with utmost clarity, as exemplified in their remarks on the teaching of the second and third forms: “... the content must be taught on the basis of a clear and vivid notion of the fraction”.

In the course of the 1907–08 school year, the gymnasium, already equipped with a rich store of materials, sent to the cultural section of an exhibition in London a collection of tables and diagrams demonstrating the new method of mathematics teaching.

These multifaceted, courageous and pathbreaking initiatives were crowned with success in November 1909 when the Lutheran Gymnasium was officially sanctioned to employ the new method of mathematics instruction in accordance with the stipulations of Rátz and Mikola, who, in fact, had been employing it on an experimental basis since 1902. In the course of the national educational reform of 1924, differential and integral calculus were introduced into the curriculum.

The discerner and cultivator of talents

As was mentioned above, a rare and special human quality distinguishes those teachers capable of working with pupils more talented than themselves. Fully aware of the greater intelligence of their younger charges, they still assist them by drawing upon a greater

experience of life and broader range of acquired knowledge. But over and above this noble quality, they are able to recognise and support the talented because they themselves are talented. As Loránd Eötvös remarked: “scholarly instruction takes place when, and only when, scholars themselves teach. Independence of thought can be acquired only from that teacher who himself is able to think independently, and precisely independence of thought is most necessary to the scholar”(Az egyetem feladatáról [The task of the university]. Rectoral inauguration speech at Budapest University of Arts and Sciences, 1891).

In the eyes of society early twentieth-century a successful secondary-school teacher was also a successful researcher. One hundred years later we must realise that alongside such notions as a *musical gift* and *literary talent*, a new and analogous expression must find its place in the public consciousness: *teaching ability* or a *talent for teaching*. The ability to *kindle a love* of one’s subject in students, the genuine *recognition* of a students’ achievements, *praise* – and on the basis of these virtues, the *nurturing of self-confidence* and the *entrustment* of newer and more challenging tasks. Such are the apparently simple items in the repertoire of the successful teacher. However, such qualities emerge from the depths of the personality and are just as genetically coded as a talent for mathematics or music. And we can safely assume that, like musical talent, the enthusiasm and love – both of his subject and of his students – so characteristic of genuine teachers will not always be found among us.

The mediocre teacher grows weary in the face of much work and becomes indifferent, whereas a talent for teaching displays itself even into old age. Many recall the spellbinding lectures delivered by József Öveges, Miklós Vermes, Károly Jeges when they were already past the age of seventy. In 1926 Sándor Mikola said of László Rátz the teacher that “he conducted his last mathematics lesson a year ago with just as much freshness of spirit and body as he did 36 years ago”.

A teacher should be cheerful and warmhearted! Admissions examinations should be designed to bar rigid, heartless, humorless and unimaginative people from entering the teaching profession. *Humor* is a very important matter. Characterising László Rátz, János Renner remarked, “Though an essentially serious man, he often sparkled with a witty and cheerful humor which especially endeared us to him”.

By virtue of his great knowledge and refinement of feeling, László Rátz discerned the talents in his pupils and subsequently nurtured them as if they were his *colleagues* and *collaborators*. On Saturdays he invited them to coffeehouses for discussions in which, alongside teachers of the gymnasium, university colleagues also took part. The reader should bear in mind that such meetings took place at the beginning of the twentieth century, when the utmost discipline prevailed in the schools and teachers had the respect not only of their students but, as the author has mentioned, of society as a whole. Nonetheless, the adolescents János Neumann and Jenő Wigner took coffee together with their teacher László Rátz, the

academician Sándor Mikola, and such university teachers as *Manó Beke*, *Gábor Szegő* and *Mihály Fekete*. It was also an honour for the secondary-school teachers that, as Wigner later pointed out in a letter “they were not isolated from the grandest edifice of the sciences: the university ... – such a state of affairs, unfortunately, is unheard of in America, at least so far as Princeton is concerned”. It is not difficult to imagine the extraordinary degree to which contact with such a community lifted the spirits of the young pupils at the Lutheran Gymnasium. It fostered their self-confidence and furthered the development of their talents.

When Rátz eventually came to feel that he had no more to teach Neumann, he asked *Mihály Fekete* and *József Kürschák* to take him on as a student. Wigner, on the other hand, Rátz invited to his lodgings, where the teacher passed on to his pupil books “of rare value”, which Wigner then read and discussed with Rátz at their next meeting.

It is possible to develop the capacity for mathematical thought so indispensable for fruitful work in the natural sciences. Rátz regularly placed elaborate mathematical problems in the monthly *Journal of Secondary-School Mathematics*, the pupils’ solutions of which he would then analyse and evaluate. The most interesting of such problems Rátz then published in book form, so as to make them available in subsequent school years. Upon Rátz’s retirement, Sándor Mikola praised Rátz’s work in the following glowing terms:

“Even more profound than that of the reform in mathematics teaching was the impact which László Rátz’s work in connection with the *Journal of Secondary-School Mathematics* had on the teaching of mathematics in our country. He edited the journal for twenty years, and did so with the utmost selflessness, receiving no support from the state or any other source (not that he asked for it) and, indeed, contributing substantial amounts of his own money to ensure the journal’s publication. With the greatest of care he solicited for publication in the modest periodical articles and problems which would sow the seeds of mathematical thought in the pupils. With even greater care and conscientiousness he read through and evaluated solutions to the published problems sent in from all parts of the country. His acute perceptiveness consistently enabled him to recognise true abilities, I can deservedly boast on his part that those who excelled as mathematicians in college or university, with almost no exceptions, emerged from the modest ranks of his journal’s readership.” (Annual Report of the Lutheran Gymnasium, 1925–26).

During his tenure as a professor at Princeton University Jenő Wigner counted among his favorite pastime the solving of Rátz’s secondary-school mathematics problems. In the course of a television interview, the reporter remarked that problems designed for secondary school pupils should not present a challenge for a Nobel laureate, Wigner replied: “If you please, a person’s talents do not improve. Many would say actually decline with age.”



Tanári kirándulás (Teachers' Excursion)

A kép 1892-ben vagy 1894-ben készült.

Baloldalon áll a széket fogva **Ráth Arnold**. Jobb kezével a székre támaszkodik, azon ül fekete kalapban **Bőhm Károly**. A mellette ülő ismeretlen, akinek balján ül **Petz Gedeon**.

Petz Gedeon mögött fehér bajusszal fekete kalapban áll **Weber Rudolf**. Petz Gedeon balján csokornyakkendőben **Tóth Kálmán** ül. Tóth Kálmán és az ismeretlen hölgy mögött feketében áll fekete bajusszal **Ulbrich Sándor**.

Az ismeretlen hölgy mellett ül **Ráth László**, akitől balra a második **Batizfalvy István**.
(Szabó István közlése.)

Függelék

Rátz László és a Fasori Gimnázium jellemzésére közreadunk egy dokumentumot: Rátz László 1920-ban írt önéletrajzát. Elgondolkodtató, hogy Rátz szükségesnek tartotta pontosan felsorolni azokat a helyeket, ahova diákjait kirándulni vitte.

Rátz László

Születtem 1863. április hó 9.-én Sopronban. Az elemi és középiskolát Sopronban, egyetemi tanulmányaimat Budapesten, Berlinben és Strassburgban végeztem. A tanári alapszak- és pädagógiai vizsgálatot Budapesten az Orsz. Tanárvizsgáló bizottság előtt tettem. Egyetemi tanulmányaim befejezése után mint tanárjelölt egy évet töltöttem a Tanárképző intézet Gyakorló főgimnáziumában. 1890. szept. elseje óta a budapesti ág. h. ev. főgimnáziumban mint helyettes tanár, 1892. szept. elseje óta pedig mint rendes tanár működöm. Tanítottam a matematikát és rajzoló geometriát. Rendes tanári foglalkozásomon kívül 15 évig vezettem a Dal- és zeneegyesületet és kb 20 évig a Tanári egyesületet. Ismételten rendeztem tanulóinkkal nagyobb kirándulásokat. Meglátogattuk Szegedet, Temesvárt, Herkulesfürdőt, az Al-Dunát, a Dobsinai jégbarlangot, a Baradlát, Rozsnyót, Selmechányát, Körmöcbányát, Salgótarjánt, Kassát, Adriát, a Balatont stb., továbbá Fiumét, Pulát, Triesztet, Adelsberget, Velencét, Firenzét és Pisát.

1909. szept. elsejétől 1914. aug. 31.-ig főgimnáziumunk igazgatója voltam. Visszalépésem után egyházunk Képviselőtestülete főgimnáziumunk tiszteletbeli igazgatójának és a Képviselő testület örökös tiszteletbeli tagjának választott meg.

Irodalmi működés

- 1. Az 1896. évtől a háború kitöréséig szerkesztettem és kiadtam a Középiskolai Matematikai Lapokat.*
- 2. Matematikai Gyakorlókönyv. I. K. Algebra. II. K. Geometria. Budapest. Franklin-Társ. 1904.*
- 3. A függvények és az infinitezimális számítás elemei a középiskolában (Mikola Sándorral) I. Kiadás 1910. II. Kiadás 1914. Budapest, Franklin-Társulat.*
- 4. A függvények és az infinitezimális számítás elemeinek tanítása a középiskolában. „A Középiskolai math. tanítás reformja” című könyvben.*
- 5. Tankönyv-bírálatok.*

Egyházi szereplés

Mint a főgimnázium igazgatója tagja voltam a Közös Képviselőtestületnek és a magyar egyháztanácsnak. Jelenleg tagja vagyok a Képviselőtestületnek, a gazdasági és iskolabizottságnak, az Egyetemes tanügyi bizottságnak és az Esperességi törvényszéknek. 1913-ban a Bánya Kerület bizalmából választott tagja voltam az evang. zsinatnak.

Közéleti és tudományos szereplés.

1. *1909-ben a magy. Kir. vallás. és Közoktatásiügyi miniszter kinevezett a matematikai oktatás nemzetközi bizottságába Magyarország egyik képviselőjévé. Mint ilyen részt vettem a Milanóban, Cambridgeben és Párizsban tartott nemzetközi kongresszusokon.*
2. *1910-ben a vall. és közokt. miniszter kinevezett az Országos Tanári Nyugdíjintézetbe bizottsági tagnak.*
3. *1910-ben a franciaországi Ministère l'instruction publique et des beauxarts megítisztelt az „Officier d'Academie” címmel.*
4. *1913-ban a Magyar Pädagógiai Társaság rendes tagjává választott.*
5. *Tagja voltam az Orsz. Tanáregyesület választmányának és igazgatóságának, az Evang. tanáregyesületnek stb.*

Budapest, 1920. szeptember hó. 25.



„Nulla bácsi”.

Eredeti egyéniség volt a maga kissé szigorubb, rideg modorával osztályfőnökünk, Renner János, Nulla bácsi. Ő volt a maga idejében a lyceum legrettegettebb professzora. Matematikát és fizikát tanított, olyan szeretettel és lelkesedéssel, amilyent ezeknél a szárazáknak gondolt studiumoknál szinte alig lehet elképzelni, de amellettt kérlelhetetlen szigorúsággal. Módszere az indukció — ideális megvalósítása volt, kérdésekben tanított, sokratesi módszerrel s nem egyszer sokratesi iróniával is. Előtte nem az volt a fontos, hogy a tananyagot előadja s lemorzsolja az órát, hanem, hogy minden egyes tanítvány, még a leggyengébb is, megértse a matematikai axiómákat, fizikai tételeket. Nem tűrhette, hogy egy is értelmetlenül álljon az előadottakkal szemben s inkább lassan haladt, de mindegyiknek jó fundamentumot adott. Alakját bizonyos misztikum vette körül, már csak azért is, mert állandóan fekete keztyűben járt, csak az egyik ujjhegye kandikált ki a megkurtított keztyűüjjéből. A diákfantázia valami Hatvani professzor alakjából vett vonásokkal ruházta fel őt s szinte felsőbb lénynek tekintettük, akiről legendák keringtek. Nem engedte közel magához a konfidenciára hajlamos diáknépet; óráin katonás fegyelmet tartott s siri csendben kellett várunk reá. Emlékszem, hogy egy véletlenül leejtett ceruza felvevéséhez még a VIII. osztályban is külön engedélyt kellett kérnünk és minden ilyen fegyelmezetlenséget szuró pillantással utasított rendre. Nem tarthatott volna azonban köztünk, minden kópéságra hajlandó diáknép közt ekkora fegyelmet, ha erélye mellett nem tudott volna imponálni nekünk nagy szak tudásával. Sok év múltán is nem egyikünk álmodta, hogy Nulla bácsinál kellett felelnie matematikából s ez mindig legsúlyosabb lidércnyomás volt, mert mindenki tudta, hogy nála csak alapos tudással, igazi készütséggel lehet boldogulni. Ezért amellettt, hogy féltünk tőle, tiszteltük is, mert igazságos és méltányos volt s amire tanított, az igazán vérré vált bennünk.

(Vége következik.)

Ver. Ang. 18⁸⁴/22

1. Ang höjden på alla dea fixa höjden (A: 3/4 y = 8000
 f. t. A. höj 10 höjerna med, så nyssig höjden
 öfver 4125 f. t., B. höj 10 höjerna med 4590 f. t.
 Menigheten höjden till minsta?

A. f. x, B. f. y;

$$\text{Angesigge } 1 \text{ till } \frac{4125-x}{10}$$

$$\text{A. " " " " } \frac{4590-y}{8}$$

$$\text{A. f. } \frac{4125-x}{10} : \frac{4590-y}{8} = x : y; \quad \therefore x+y = 8000;$$

$$\frac{4125y - xy}{10y} = \frac{4590x - xy}{8y}$$

$$4.4125y - xy = 5.4590x - 5xy$$

$$16500y + xy = 22950x; \quad y = 8000 - x$$

$$16500(8000 - x) + 8000x - x^2 = 22950x$$

$$132000000 - 16500x + 8000x - x^2 - 22950x = 0;$$

$$132000000 - 31450x - x^2 = 0;$$

$$x^2 + 31450x = 132000000.$$

$$x_1 = -15725 + \sqrt{15725^2 + 132000000};$$

$$x_1 = -15725 + \sqrt{379245625}$$

$$x_1 = -15725 + 19475;$$

$$x_1 = 3750.$$

$$\text{A. f. y. t. } \frac{3750}{4250} \text{ f. t.}$$

$$\text{B. " " } \frac{4250}{4250} \text{ f. t.}$$

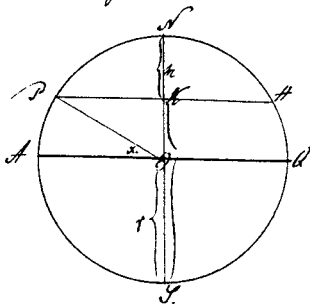
$$\begin{array}{r} 16500 \\ 22950 \\ \hline 39450 \\ 8000 \\ \hline 31450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15725^2 : \\ 1^2 = 1. \\ 2.15 = 10. \\ 5^2 = 25. \\ 2.15 \cdot 5 = 210. \\ 4^2 = 49. \\ 2.15 \cdot 2 = 628. \\ 1^2 = 4. \\ 2.15 \cdot 2.5 = 15420. \\ 5^2 = 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15725^2 = 247245625 \\ 132000000 \\ \hline 379245625 = 19475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19475 : 2 = 9737.5 \\ 1824.586 \\ 29856 : 384 \\ 19472.5 : 3845 \\ \hline 40000 \end{array} \quad \begin{array}{l} y_1 = 8000 - 3750 = \\ y_1 = 4250 \end{array}$$

2.) Melyik egyenes földrajzi szélesség alatt felel meg a fent
 leírtaknak? Melynek síkja földünk tengelyét 4:5 viszony
 szerint osztja?



A szélesség = x ; a tengely szög sugar (kiegész) = m ;
 akkor a mérték $(r + r \sin x)$; de $m = (r - r \sin x)$;

$$\text{Mely } (r - r \sin x) : (r + r \sin x) = 4:5;$$

$$(1 - \sin x) : (1 + \sin x) = 4:5;$$

$$4 + 4 \sin x = 5 - 5 \sin x;$$

$$9 \sin x = 1; \sin x = 1/9;$$

$$\log \sin x = \log 1 - \log 9;$$

$$\log 1 = 10.000000 - 10$$

$$\log 9 = 0.954243$$

$$\log \sin x = 9.045757 - 10$$

$$\begin{array}{r} 9.045757 - 10 \\ 48915 \dots \dots \dots 6^\circ 22' \\ \hline 86200: 1885 = 45 \\ 10800 \\ \hline 1345 \dots \end{array}$$

$$x = 6^\circ 22' 45'';$$

$6^\circ 22' 45''$ -yi szélesség alatt.

3.) Háromszög" egyenlet megoldando:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{6}x = \frac{5}{6}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{5}{6}:$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x (1 - \sin^2 x) + \sin^2 x = \frac{5}{6} \cdot \cos^2 x$$

$$\cos^4 x - \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + 1 - \cos^2 x = \frac{5}{6} \cos^2 x$$

$$\cos^4 x - \cos^2 x + \cos^4 x + 1 - \cos^2 x = \frac{5}{6} \cos^2 x$$

$$2 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = \frac{5}{6} \cos^2 x$$

$$2 \cos^4 x - 2 \cdot \frac{5}{6} \cos^2 x = -1;$$

$$\cos^4 x - \frac{5}{6} \cos^2 x = -\frac{1}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{18}{24} \pm \sqrt{\frac{289}{576} - \frac{1}{2}}$$

$$\cos^2 x = \frac{18}{24} \pm \sqrt{\frac{548 - 576}{2 \cdot 576}}$$

$$\cos^2 x = \frac{18}{24} \pm \sqrt{\frac{1}{576}}$$

$$1.) \begin{cases} \cos^2 x = \frac{18}{24} + \frac{1}{24} = \frac{19}{24} \\ \cos^2 x = \frac{3}{4}; \quad \cos x = \frac{1}{2} \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$x_1 = 30^\circ$$

$$2.) \begin{cases} \cos^2 x = \frac{18}{24} - \frac{1}{24} = \frac{17}{24} \\ \cos^2 x = \frac{2}{3}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{6} \end{cases}$$

$$x_2 = 35^\circ 16' 8''$$

Renner János

Az 1881/82. évi matematikai érettségi tétel, amit valószínűleg Rátz László is kidolgozott.

Renner János tanár úr mintamegoldása



GIMNÁZIUMI BIZONYÍTVÁNY.

Farkas Aurél, íg. ev. vallású,
született az 1895. évben *Magyarharizsán* mint a
budapesti ág. hitv. ev. főgimnázium *hatodik* osztályának *rendes*
tanulója az 1911/1912. iskolai évben *elégséges* bizonyítványt érdemelt.

Vallás	jó
Magyar nyelv	elégséges
Latin nyelv	elégséges
Görög nyelv
Görög nyelvet helyettesítő
	irod. olv.	jó
	rajz	jó
Német nyelv	elégséges
Történelem	jó
Földrajz	jó
Mennyiség
Mértani rajz
Természet
Természetrajz	elégséges
Bölcsélet
Egészség
Testgyakorlat	jó
Széprírás
Ének
Írásbeli dolgozatainak külső alakja	rendes
Az elmulasztott órák száma
	igazolt:	18
	igazolatlan:
Magaviselet	jó

A tanári testület záró értekezletének ítélete: felsőbb osztályba fellephet.

Kelt Budapesten, 1912. évi *június* hó *20*-ik napján.

Rátz László
igazgató



Dr. Tóth Miklós
osztály-tanár.

Az érdemjegyek fokozata:

Magaviselet: jó, szabályos, kevésbé szabályos, rossz.
Időmenetel: jó, elégséges, elégtelen.
Írásbeli dolgozatok külső alakja: szép, rendes, nem elég
rendes, rendezetlen.

Farkas Aurél - igazgató

Egy gimnáziumi bizonyítvány fénymásolata Rátz László igazgató aláírásával

Tanmenet a fizika és matematika tanításánál,

Rendelkezésre áll a fizika számára heti 6 óra a matematika számára heti 3 óra összesen heti 9 óra és a tanfolyam ideje alatt 54 óra. Ebben az időben az anyagot következőképpen osztom be:

- 1.-4. óra folyadékok statikája
- 5.-8. óra légnyomások statikája
- 9. óra folyadékok és légnyomások dinamikája
- 10. óra hajósebesség tűneményei
- 11. óra ismétlés
- 12.-22. óra hangtan
- 23. óra ismétlés
- 24.-40. óra fénytán
- 42.-43. óra ismétlés
- 44.-45. óra a függvények maximumának és minimumának kiszámítása
sára vonatkozó feladatok ismétlése.
- 46.-47. óra területszámítás integrállal
- 48.-50. óra köbtartalom számítás integrállal
- 51.-54. óra a VIII. oszt. matematikai anyag átismétlése

Mikola Sándor
a fizika és matematika tanára

A matematika tanítása a VIII. osztályból
bevonuló tanulók részére alakított tanfolyamon:
1918. február 1. - 1918. március 14.-ig.

A tanítás tárgya: A főgimnáziumban tanult matematikai anyag önéfoglaló ötkisimittlinc a részletek és példák kidolgozásánál mellőzésével.

Az órák száma: 17.

A tananyag egyes főbb részeire fordított órák száma:

Algebra, gyökényvázis és logaritmusok:	2 óra
Exponenciák	1 "
Algebra és Képzett Képzett	2 "
Trigonometria	3 "
Stereometria	2 "
Elemi mértan	2 "
Differenciál számítás	2 "
Integrál számítás	2 "
Kapcsolatok és binomikus tétel	1 "
Összesen	<hr/> 17 óra.

Budapest, 1918. február hó 1.

Rátz László

Bucsuzásul.

Ide a tova három esztendeje annak, hogy a **Középiskolai Matematikai Lapok** megalapításának eszméje bennem megérlelődött. Az eszmének festet adott **Gross Gusztáv** urnak áldozatkészsége, ki egy mutatóványszámnak kellő számú példányban való elkészítésére a nagyon is kétséges siker reményében vállalkozott. S íme a várva várt siker bár lassú, de biztos lépésekkel megjött. Az olvasóknak eleinte csak kicsi, de annál lelkesebb gárdája sorakozott a lap körül, melynek jellegje volt felkelteni és ápolni a középiskolai matematikai tanulmányok iránti érdeklődést az ifjúság kebelében az iskola falain kívül is.

De nemcsak az ifjúság karo'ta fel az új folyóiratot — serény tevékenységet fejtván ki a kiűzött feladatok megoldása körül — de a magyar tanárság és a magyar középiskola is meghozta áldozatát, — támogatása által biztosítván a folyóirat fennállhatását.

Eme ifjúságtól és tanároktól, valamint a magyar középiskolák vezetőitől bucsuzom a mai napon, midőn folyóiratomat utódom, **Rácz László**, budapesti főgymnáziumi tanár ur szakavatott vezetésére bízom.

Csakis az a remény, hogy a folyóirat fejlődése a főváros szellemi életének árában nagyobb lendületet vesz majd és így hivatását sikeresebben tölti be, készítetett arra, hogy vezetésétől megváljak.

Igaz, hogy az elhatározásomat a folyóirat új vezetőjének kiváló ügyszeretete és lelkesége tetemesen könnyebbé tette.

Végre az új szerkesztő ama megtisztelő bizalma, melylyel a folyóirat további szerkesztésében való részvételre — egyszerű közkatónaként — felszólított, arra késztet hogy a szives olvasónak istenhozzádót csak a viszontlátás reményében mondjak.

Győrött, 1896. márczius hó 15-én.

Arany Dániel

áll. főreálisk. tanár.

Arany Dániel átadja a lap szerkesztését Rácz Lászlónak

Olvasóinkhoz!

Midőn a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztését átveszem, nem tartom szükségesnek, hogy részletes programot adjak. A lap ezentul is a matematikai tanítás szolgálatában fog állani, iránya nem változik, célja marad a régi.

Jól ismerem vállalkozásaimnak nehézségeit, de elhátározásomat megkönnyítette azon kedvező körülmény, hogy a lap lelkes alapítója s eddigi buzgó szerkesztője Arany Dániel ur ezentul is megmarad főmunkatársnak. Tudását s bő tapasztalatait a legnagyobb készséggel bocsátja a lap rendelkezésére.

A kedvező ílelet, melylyel a hazai sajtó a Középiskolai Matematikai Lapokat fogadta, mutatja hogy a magyar középiskolának e közlönyre szüksége van. Feladatát azonban csak úgy fogja sikeresen megoldhatni, ha minél szélesebb körökben terjed el s támogatói nem csak olvassák, de egyuttal írják is a lapot. Ez okból tiszteletteljesen felkérem t. szaktársaimat, főkép pedig a lap eddigi munkatársait, hogy engem nehéz munkámban támogassanak s közleményeikkel a Középiskolai Matematikai Lapokat felkerezni sziveskedjenek.

Budapest, 1896. márczius hó 15-én.

Rátz László

főgymnásiumi tanár.

Rátz László átveszi a lap szerkesztését Arany Dánieltől



A Budapesti Evangélikus (Fasori) Gimnázium napórája (Fotó: Vajda Ferenc)

Kántor Sándorné: A lap első megoldóiról

Az Arany Dániel által alapított lap megoldói között számos kiváló tudós matematikus, fizikus nevét olvashatjuk, pl. Fejér (Weisz) Lipót, Fekete Mihály, Haar Alfréd, Kármán Tivadar, Lukács Ferenc, Mikola Sándor, Radó Tibor, Riesz Frigyes, Riesz Marcel, Sidon Simon, Szegő Gábor, Zemplén Győző stb.

A versenyzők Arad, Budapest, Debrecen, Déva, Gilád, Győr, Kaposvár, Kisújszállás, Kolozsvár, Losonc, Nagyenyed, Nyíregyháza, Nyitra, Pécs, Pozsony, Sátoraljaújhely, Székelyudvarhelyről küldték be a megoldásaikat.

Az egyéni feladatmegoldók mellett egy-egy iskolából egy teljes osztály tanulói is küldtek be megoldást, pl. a budapesti ág. ev. főgimnáziumból, az V. ker. főreáliskolából, a debreceni, a győri főreáliskolából.

Az első 3 évfolyam legeredményesebb megoldói a következők voltak:

1894. *Seidner Mihály* VIII. o., Losonc, a Matematikai és Fizikai Társulat első versenyének nyertese (1894).

Kugel Sándor VIII. o., Losonc, *Jorga Gergely* VIII. o. Arad, *Sztrapkovits István* VIII. o., Sátoraljaújhely.

1895. *Visnya Aladár* VII. o., Pécs

Meitner Elemér VIII. o., Bp. V. ker. Főreál,

Fejér (Weisz) Lipót VI. o., Pécs, a Matematikai és Fizikai Társulat 1897. évi versenyének 2. helyezette, *Grossmann Gusztáv* VIII. o., bp-i ág. ev. főgimnázium.

1896. *Visnya Aladár* VIII. o., Pécs, a Matematikai és Fizikai Társulat 1896. évi versenyének nyertese

Fazekas (Friedmann) Bernát VII. o., Sátoraljaújhely, a Matematikai és Fizikai Társulat 1897. évi versenyének nyertese, *Grünhut Béla* VII. o., Pécs, *Hofbauer Ervin* VII. o., bp-i ág. ev. főgimnázium, *Kántor Nándor* VII. o., Bp. ág. ev. főgimnázium

– *Seidner Mihály* tanára *Winter József* volt, az ő tanítványai közül többen is értek el a későbbiekben helyezést.

– *Visnya Aladár* tanára *Maksay Zsigmond* volt. Tanítványai közül *Fejér (Weisz) Lipót* 1897-ben 2. helyezett, *Kornis Ödön* (1899) I. helyezett az Eötvös-versenyen.

Annak öröme, hogy Eötvös Loránd a társulat elnöke lett az ország vallás és közoktatási minisztere 1894-ben a Matematikai és Fizikai Társulat életrehívta a matematikai tanulóversenyeket (először Matematikai és Fizikai Társulat versenye, majd Eötvös-verseny né-

ven, a fizika versenyt Károly Ireneusz alapította 1916-ban. A 2. világháború után az Eötvös-verseny kettéválik Kürschák József matematika verseny és Eötvös Loránd fizika versenyre).

A Középiskolai Matematikai Lapok feladatainak megoldása és a matematikai tanlóversenyen való eredményes szereplés egymással szoros összefüggésben volt, ritka az olyan versenyhelyezett, aki ne lett volna a Lapok eredményes feladatmegoldója.

König Dénes (társulati titkár) szavai szerint a Középiskolai Matematikai Lapok „a tehetségesek középiskolai matematikai oktatását nagy mértékben előbbre vitték, és mindenkor valósággal előkészítették a talajt a mi tanulóversenyeink számára”.

A Matematikai és Fizikai Társulat első versenyén a díjakat *Eötvös Loránd*, a Társulat elnöke a következő szavak kíséretében adta át: „Önök a hallott bírálati jelentés szerint a társulat matematikai versenyén a feladatok helyes megoldásával jelét adták önálló felfogásuknak, a matematikának művelésére való rátermettségüknek, és kiemelkednek pályázó társaik felett.

A kitűzött díjakat a társulat színe előtt íme fogadják nyilvánosan, fogadják egyszerűs mind a társulat köszönetét törekvésükért azzal a reménységgel kapcsolatban, hogy a megkezdett jó úton haladván, tovább fogják fejleszteni tehetségeiket, és hazai tudományosságunknak majdan díszévé fognak válni. Nehéz út áll még Önök előtt, sok munka és küzdelem, de csakis az így szerzett győzelem az, melynek igaz értéke van.

Önök most hálával gondolnak azokra az intézetekre, hol tanulmányaikat elvégezték, és hálás szívvel gondolnak szeretet tanáraikra, kik Önöket tanították, kiknek ezen szép sikerüket köszönhetik. Írják meg nekik, hogy mily sikert köszönnek az ő fáradozásuknak, köszönjék meg nekik kitűnő tanításukat, és írják meg nekik, hogy én magam, valamint a Matematikai és Fizikai Társulat üdvözlétét és köszönetét küldöm nekik”.

Eötvös Loránd útmutatásait követve hogyan váltották be a hozzájuk fűzött reményeket a lap első kiemelkedő feladatmegoldói, az első versenyhelyezettek? Közülük néhányat mutatunk most be.

Seidner Mihály (1875–1968) A Középiskola befejezése után a budapesti műszaki egyetemen tanult, majd a charltonburgi műszaki egyetemen folytatta tanulmányait, ahol doktori diplomát nyert. 1903-ban tért haza, ettől kezdve a Ganz Villamossági Rt.-nél dolgozott, a technológia és gyártásfejlesztés tudományos megalapozásához kapcsolódó feladatokkal foglalkozott. Legnagyobb jelentőségű találmánya a villamosgépek folyadékűtésére vonatkozott, ezt felhasználták a Kandó Kálmán által kidolgozott és szabadalmaztatott első fázisváltós mozdonyoknál. 1953-ban elnyerte a műszaki tudományok doktora fokozatot, 1960-ban az MTA levelező tagjává választotta.

Visnya Aladár (1878–1959) 1896-ban érettségizett, és egyetemi hallgatóként megnyerte a matematika versenyt, ami számára az Eötvös Kollégiumba való felvételt is jelentette. (Az Eötvös József Kollégium a tanári pályára készülő ifjak részére létesített intézmény volt. Otthona az egyetemi hallgatóknak, tudós tanárok vezetésével, jó segédeszközökkel felszerelve készülhettek jövőendő hivatásukra. Neves tudósok raja került ki a kollégium falai közül.) Visnya Aladár

1900–1902 között Rados Gusztáv mellett műegyetemi adjunktus. 1902-től 1909-ig a nagyvárad-i főreáliskola tanára. Az 1907–8 tanévben Göttingenbe ment ki tanulmányútra. 1909-től áthelyezik a budapesti VI. ker. Mária Terézia leánygimnáziumba. 1914–20 között Sopronban élt. 1921-ben (a proletárdiktatúra alatti magatartása miatt) 43 évesen nyugdíjazták. 1927-től ismét tanít a kőszegi Gyurác Ferenc evangélikus leánylíceumban. 1933 szeptemberétől megbízzák a kőszegi helytörténeti múzeum vezetésével, és ezt a tisztséget 1951 végéig megtartotta.

Fejér Lipót (1880–1959) messze kiemelkedett Maksay Zsigmond tanítványai közül. Élete döntő fordulatát az 1897. évi Eötvös-verseny 2. díjának elnyerése hozta meg, ekkor döntötte el, hogy átiratkozik a gépészmérnöki karról matematikusnak.

A verseny 2. feladata a következő volt:

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} < \frac{1}{4},$$

ha A, B és C egy tetszőleges háromszög szögei.

Beke Manó a következő értékelést adta Fejér Lipót megoldására:

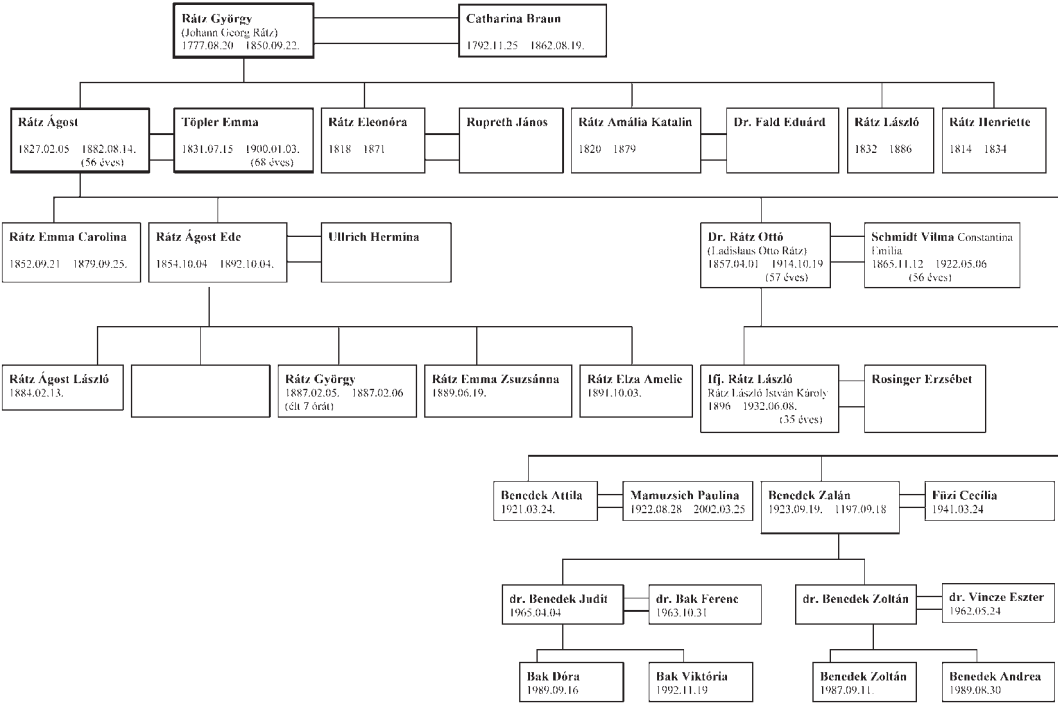
„A második feladat megoldásában a háromszögbe és a háromszög köré írt körök sugarai és e körök centrális távolságai között fennálló összefüggés segítségével még többet is bizonyított, mint amennyit a feladat megoldása megkövetel.” (A feladat megoldása megtalálható: Matematikai versenytételek 4. kiadás 1987. 47–48. o.)

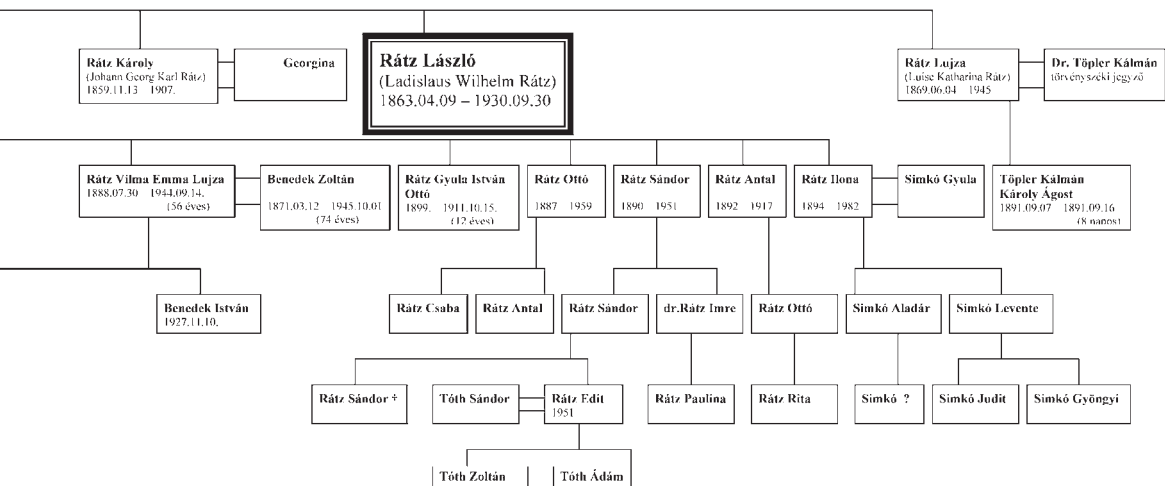
Fejér Lipót középiskolás korában szorgalmas megoldója volt a Középiskolai Matematikai Lapoknak. Egyetemista korában feladatokat javasolt, cikket is írt. Tanulmányait a budapesti műszaki egyetemen kezdte, majd a berlini, göttingai, párizsi egyetemeken folytatta. Már egyetemi éveiben elkezd foglalkozni a Fourier-sorokkal, és 1909-ben a Fourier-sorokkal kapcsolatos egyik eredménye világszerte ismertté tette.

A kolozsvári egyetemen kezd el tanítani, majd a budapesti Tudományegyetemre kerül. A 2. világháború üldöztetései őt is sújtották. A háború után visszakerült egyetemi katedrájára. Tudományos munkásságáért Kossuth díjban részesült. 70. születésnapja alkalmából az Eötvös Loránd Tudományegyetem díszdoktorrá avatta.

Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, Jubileumi szám a lap alapításának 100. évfordulójára, 1993/10 43. évfolyam 1993. december

Rátz László családfája





A családfát levéltári adatok alapján és a család ma élő tagjainak segítségével
Némethné Pap Kornélia készítette

Melléklet

Közreadjuk a teljes Rátz–Mikola analízis könyvet az 1910. évi kiadás alapján.

EGYETEMSI MUSEUMI GYÜJTEMÉNY

AZ
INFINITEZIMÁLIS SZÁMITÁSOK
ELEMEI
A KÖZÉPISKOLÁBAN.

IRTÁK

RÁTZ LÁSZLÓ és MIKOLA SÁNDOR



BUDAPEST
FRANKLIN-TÁRSULAT
MAGYAR IROD. INTÉZET ÉS KÖNYVNYOMDA

1910

*E munka egy része a budapesti ág. hitv. evang. főgimnázium
1909, 1910-ik évi értesítőjében jelent meg először.*

BEVEZETÉS.

Négy éve annak, hogy dr. Beke Manó, egyetemi tanár vezetése alatt egy bizottság foglalkozik a középiskolai matematikai oktatás reformjának kérdéseivel. A bizottság munkásságának eredményei könyvalakban is megjelentek; ezek és a bizottság üléseiről szóló jelentések élénk érdeklődést keltettek. E bizottság működésével párhuzamosan, de attól teljesen függetlenül és jóval annak megalakulása előtt elhatároztuk, hogy matematikai oktatásunkat úgy rendezzük be, ahogyan azt a modern nagy pedagógiai és kulturális eszmeáramlatok ismerete alapján helyesnek és keresztülvihetőnek tartottuk. Amikor erre az elhatározásra jutottunk, jól tudtuk, hogy bármilyen reform megvalósításához általános nagy elvek hangoztatása nem elegendő, hanem hogy igazán hasznos munkát akkor fogunk végezni, ha honi viszonyainkat mérlegelve és iskolánk javát szem előtt tartva a reform részletes kidolgozását is megkezdjük.

Ebben a munkában sok mindenre kellett tekintettel lennünk. Feltételül tűztük ki magunknak, hogy a hivatalos tanterv anyagát a reform-elvek dacára betartjuk. Ezenkívül folyton szemeink előtt lebegett az a gondolat, hogy a túlterhelés vádjának még a lehetőségét is el kell kerülnünk. Próbálgatva, változtatva és javítva, különböző képességű osztályokon kitapasztalva immár bizonyos megállapodott tanmenethez jutottunk, amely véleményünk szerint — ha nem is minden részletében — de főbb vonásaiban egyezik azzal a tanmenettel, amely Beke és a reformbizottság szemei előtt lebegett. Azt gondoltuk, hogy nemcsak tanítványainknak, hanem a hasonló kérdésekkel foglalkozó tanártársainknak is szolgálatot teszünk, ha tanmenetünket, módszerünket és tanításunk anyagát leírjuk.

Azok az irányelvek, amelyek a reform részleteinek kidolgozásában vezettek, az említett munkában bőségesen és hosszasan ki vannak fejtve, itt csak néhány gondolat felsorolására szorítkozunk. Erős a meggyőződésünk, hogy a középiskola nem zárkozhatik el a tudomány vívmányaitól. Ha azt akarjuk, hogy a középiskola az úgynevezett általános műveltség terjesztője legyen, akkor arra is kell törekednünk, hogy a középiskolában tanított dolgok hozzásimuljanak ahhoz, amit a korszellem és az uralkodó világfelfogás az általános műveltség elemeinek tart. A mai kort jellemzik: a természettudományok alapelveinek általános térfoglalása, a formalizmus elvetése és az egyéni munka értékének felismerése.

Minden művelt ember, aki a természettudományok szellemébe be akar hatolni és alapelveit meg akarja érteni: minduntalan érzi matematikai képzettségének hiányos voltát. Zavartodottan és boszankodva veszi észre, hogy lelkéből oly elemek, absztrakciók, képek és igazságok hiányoznak, amelyeket a természettudomány folyton használ. A középiskolákban eddig taníttatni szokott matematikai anyag a mai természettudományi világfelfogás kialakításához nemcsak nem elegendő, hanem azzal semmiféle összefüggésben sincs. Mintha holt teher volna, amelynek az ember egyéb lelki tartalmához semmi köze. Ép azért meggyőződésünk, hogy a középiskolai matematikai anyagot úgy kell megszabni, hogy a mai természettudományi világfelfogás leglényegesebb absztrakciói benne helyet találjanak. Szükséges tehát, hogy a függvényekre vonatkozó egyszerű szemléletes tárgyalások, a határátmenet fogalma, a végtelen kicsinyekkel való számítások elemei a középiskolai tananyagban helyet találjanak.

A tanterv és az utasítások betűihez való ragaszkodásban nincsen üdv. A hosszú időközön át szigorúan betartott tanterv, tanmenet vagy módszer sohasem válhatik az iskola javára. Korunk felismerte, hogy a fejlődés lehetőségének első feltétele a formalizmus elvetése és a sablón kerülése. A sablón nem él, hanem öl. Legyen az iskola élő szervezet és mint ilyen bírjon az élő szervezetek legjellemzőbb sajátágaival. Fejlődjön tehát évről-évre és vesse le magáról mindazokat az akadályokat, amelyek fejlődését akadályozzák. Egyik év tananyaga se legyen teljesen hasonló a másikéhoz. Amint változik az ifjúság, vál-

tozik a világfelfogás, fejlődik a tudomány, épúgy kell változnia a tanításnak is. Aki megállapodik, máris hátramarad, mert a kor előre halad.

De bírnia kell a középiskolának az élőszervezetek másik jellemző tulajdonságával is: az individualizmussal. Hosszú idő-kön keresztül az volt a jelszó: meg kell teremteni az egységes középiskolát, anélkül persze, hogy e jelszó jelentését és értékét megvizsgálták volna. A mai általános világfelfogás e jelszónak nem kedvez, sőt épen ellenkező eredményre jut. Az egységben magában semmi üdv sincs, ellenben az egységre való törekvés sokszor meggátolja az individuális munkák kifejlődésének lehetőségét. A külföldi államokban lefolyó nagy iskolaügyi reformokat jellemzi az egységes középiskola gondolatának teljes elvetése, új és nagyon változatos iskolatípusok felállítása és a tantervi előírásoknak minimumra való leszállítása. E külföldi áramlatok mihozzánk is el fognak jutni, csak hogy — mint minden téren — itt is jóval később. Különben is lehetetlen, hogy kiszakítsuk magunkat a nagy európai kulturális intézmények formáinak sorozatából. Az egységre való szorítással ne pazaroljuk el erőinket és pusztá sablónok fenntartásának erőltetésével ne vegyük el a munkára hajlandó egyének munkakedvét. A közérdek akkor nyer legtöbbet, ha minden egyén és minden individuális intézmény teljesen szabadon fejtheti ki a maga munkaképességét. Igazán kívánatos volna, hogy a különböző középiskolák az egység chimerájától szabadulva, egymással versenyezve és vetélkedve próbálják meghonosítani az elérhető relative legjobbat.

Sajnos, hogy mindaz, ami nálunk az utóbbi időkben történt, az egységre való törekvés terméketlen mezején folyt le. Még azok a középiskolák is, amelyek igen becses jogokkal és szabadságokkal rendelkeztek, mindezekről fokenként lemondtak, és még abban is utánózták az egységes állami iskolatípust, aminek helytelensége egészen nyilvánvaló volt. Az iskolák egyéniségét nemcsak külső eszközökkel, hanem mélyebbre járó intézményekkel, tantervi szabadságokkal, sajátos tanítási módszerekkel is fejleszteni kell. A külföldi reformmozgalmak irányai és a régi magyar iskolai tradíciók egyformán arra utalnak, hogy az iskoláknak és az egyes tantestületeknek szélesebb körű autonómiát kell adni.

Az a tanmenet, amelyet a matematika tanításában követünk, a mi egyéniségünkhöz, tanulmányainkhoz és iskolánk állapotához van szabva. Ne gondolja senki, hogy ezt a tanmenetet mi minden iskolában pontosan végrehajtandónak tartjuk. Mi csak példát akartunk mutatni arra, hogy a reform szelleme szerint miként lehet az anyagot feldolgozni. Meggyőződésünkkel egyenes ellentétben áll olyan tanmenet, amely mindenkit kötelez. Nincs a világon értéktelenebb és eredménytelenebb dolog annál, amikor a tanár köteleztetik meggyőződésével ellenkező dolgok tanítására.

A módszerre és a tanmenetre még néhány részletes megjegyzést teszünk. A matematikát csak az iskolában lehet tanítani. Ez a tanítás se álljon csupán az obligát magyarázásból és bizonyításból, hanem terjeszkedjék ki az új fogalmak és tételek begyakorlására és beemlékezésére, főleg pedig a feladatok megoldására. Otthon, könyvből matematikát tanulni nem lehet. Kezdetől fogva arra kell szoktatni a tanulókat, hogy a matematikát ne csak értsék, hanem hogy dolgozni is tudjanak. A tanultakat általában mindig az egész osztálytól kérdezzük és mindig az egész osztállyal foglalkozunk. Összefüggő egyéni feleleteket csak itt-ott, főleg a felső osztályokban lehet kívánni. A matematikai óra folytonos közös munka legyen, és kezdetől fogva arra kell ügyelni, hogy ebben a közös munkában minden tanuló részt vegyen. Ne legyen megengedve, hogy egyes tanulók külön jegyezgessenek: minden tanulónak mindig ugyanazt kell csinálnia. Ezek már régi, jólismert módszertani elvek, de itt ismételni kellett, mert ezeknek követésén múlik, hogy a reform szerint való tanítás sikerül-e vagy sem.

Az alsó osztályok tananyagát illetőleg hivatkozunk többször említett könyvünkre, amelyben a gyakorlati irányú tanítás részletesen le van írva. Itt csak néhány főbb megjegyzésre szorítkozunk. A számtani oktatásban arra kell törekedni, hogy minden számfogalom nem mint puszta szám, hanem mint különböző mennyiségek képe fejlődjék ki a gyermek lelkében. A definíciókon és bizonyításokon való lovaglás helyett arra kell törekedni, hogy a számok a gyermeki lélek szemléletes és intuitív tartalmává váljanak. Különösen áll ez a tört fogalomra. Meggyőződésünk, hogy a hármas szabály helyett a tört élénk és szemléletes fogalmának alapján kell a II. és III. osztálybeli

tananyagot elvégezni. Már a három alsó osztályban is lehet egyszerű grafikus ábrázolásokat adni. A harmadik osztályban az egész eladdig tanult anyagot betűszámokkal össze lehet foglalni sőt az egyszerűbb betűszám-tani műveleteket is el lehet végezni.

A IV.-ik osztályban a szokott anyaghoz hozzávesszük a függvények változásának és ábrázolásának rendes tárgyalását. Gyakorlati grafikonok: idő és valamely értékpapír árfolyama, idő, hőmérséklet, csapadék és légnyomás, kor és halálozási százalék. A tanulók önmunkássága alapján megszerkeszthető grafikonok: tőke és kamat, jövedelem és adó, grafikus menetrend, háromszög területe és magassága (állandó alap mellett), négyzet oldala és átlója, négyzet oldala és területe, különböző rendszerű hőmérők. $y = ax + b$ és $Ax + By = C$ alakú egyenletek és összehasonlítás kedvéért néhány magasabb fokú egyenlet és függvény ábrázolása. Egyenesek metszéspontjainak kiszámítása; két ismeretlenű, elsőfokú egyenletek grafikus megoldása. Az elsőfokú függvény változásának leírása, elsőfokú egyenlőtlenségek megoldása.

Az V. osztályban az előírt anyaghoz hozzávesszük a másodfokú függvény változásának és a másodfokú egyenlőtlenségek megoldásának tárgyalását. Hozzávesszük az $x^2 + y^2 = r^2$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $y = \frac{a}{x}$ alakú egyenletek ábrázolását, a görbék tulajdonságainak az algebrai alakból való kitalálását (szimmetria viszonyok, egyenesekkel való metszések stb.)

A VI. osztályban az előírt anyaghoz hozzávesszük a kamatos-kamat- és járadékszámítást, esetleg a kombinatorika elemeit is és az előforduló logaritmikus, és trigonometrikus függvényeket ábrázoljuk és változásukat leírjuk, e közben sokat gyakoroljuk a szögek abszolút mérését. Ábrázolunk komplikáltabb függvényeket is ($y = a \sin x + b \cos x$, $y = ax + b \sin x$ stb. alakokat). A folytonos kamatozás problémájának felvetésével bevezethetjük az e -t is.

A VII. osztályban az elemző mértan egyszerű feladatait tárgyaljuk. A legfontosabb koordináta-rendszerek, két pontnak egymástól való távolsága, e távolság középpontjának koordinátái, a háromszög területe, az egyenes egyenlete, két adott ponton

átmenő egyenes egyenlete, két egyenes metszési pontjának koordinátái, két egyenestől bezárt szög kiszámítása, a párhuzamosság és merőlegesség feltételei, a kúpszeletek legegységű egyenletei, egyszerűbb mértani helyek. Ezután áttérünk a differenciálszámítás elemeinek tárgyalására olyan módon, amint az a következő fejezetben részletesen és kimerítően le van írva. A VII. osztályban elvégezzük még a gömbi trigonometriának előírt részét és a stereometria legfontosabb tételeit a gömbre vonatkozó számítások nélkül. A hasáb és a gúla köbtartalmának meghatározásánál használjuk Cavalieri elvét.

A VIII. osztályba kerülnének az integrálszámítás elemei, a gömbre vonatkozó számításokkal, miként az lejjebb részletesen és kimerítően le van írva.

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy az anyagot másképen is lehet elrendezni. Az egész tanítás jelentékenyen könnyebbé válik, ha a fizika és matematika egy kézben van, mert ez esetben a fizikai számításokat is könnyen el lehet végezni.

A differenciál- és integrálszámítás elemeinek tanításában azt az egész anyagot, amelyet alább közlünk, nem kívánjuk egész terjedelmében tanítani. Több részletkérdést dolgoztunk ki, hogy ezekből az osztály állapota és egyéb körülmények szerint választani lehessen.

Budapest, 1910 július.

Rátz László. Mikola Sándor.

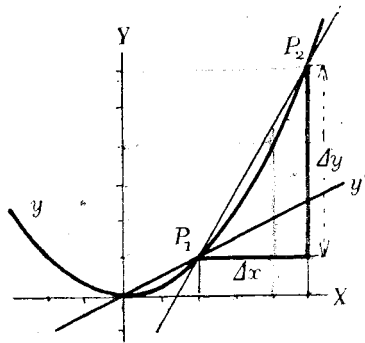
A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ELEMEL.

I. A differenciálhányados fogalmának bevezetése és alkalmazása a függvények változásának leírására.

A parabola részletes tárgyalásával kapcsolatban feladatunk a parabola egyes pontjaiban az érintőnek megszerkesztése és az érintő egyenletének felállítása. Tudjuk már, hogy az egy ponton átmenő egyenes egyenlete

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

ha tehát meg tudjuk határozni a parabolának egy tetszőszerinti pontjában rajzolható érintő iránytényezőjét, akkor mindkét feladatunk könnyen megoldható. Lássunk először egy egyszerű példát. Rajzoljuk meg azt a parabolát, melynek egyenlete $y = \frac{1}{4}x^2$ és határozzuk meg a $P_1(2, 1)$ pontban rajzolható érintő iránytényezőjét. Eljárásunk az, hogy először a P_1 és egy tetszőszerinti P_2 ponton át rajzolható szelő iránytényezőjét, vagy emelkedését határozzuk meg, azután a P_2 pontot mindjobban közelítjük a P_1 ponthoz, miáltal a szelő iránya is mindjobban megegyezik a P_1 pontban rajzolható érintő irányával. Ha a P_2 pont végtelen közel jut a P_1 ponthoz, akkor a szelő iránytényezője egyúttal az érintő iránytényezője.



1. ábra.

Ha a tetszőszerint választott P_2 pont abszcissája 4, akkor a hozzá tartozó függvényérték $f(4)=4$, a $P_1 P_2$ szelő iránytényezője pedig

$$(f(4) - f(2)) : 2 = (4 - 1) : 2 = \frac{3}{2}.$$

Ha a metszéspontok ordinátáinak különbségét Δy -nal, a

megfelelő abszcissák különbségét pedig Δx -szel jelöljük, akkor a $P_1 P_2$ szelő iránytényezője, vagy emelkedése

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Közelítsük már most a P_2 pontot a P_1 ponthoz, úgy hogy az abszcissák különbsége egymásután $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ legyen, akkor

$$(f(3) - f(2)) : 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}, \quad \text{tehát } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{4},$$

$$(f(\frac{5}{2}) - f(2)) : \frac{1}{2} = \frac{9}{16} : \frac{1}{2} = \frac{9}{8}, \quad \text{" } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{8},$$

$$(f(2\cdot1) - f(2)) : 0\cdot1 = \frac{41}{400} : \frac{1}{10} = \frac{41}{40}, \quad \text{" } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{40},$$

$$(f(2\cdot01) - f(2)) : 0\cdot01 = \frac{401}{40000} : \frac{1}{100} = \frac{401}{4001}, \quad \text{" } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{4001},$$

$$(f(2\cdot001) - f(2)) : 0\cdot001 = \frac{4001}{4000}, \quad \text{" } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{4000}.$$

Látjuk, hogy minél jobban közeledik a P_2 pont a P_1 ponthoz, annál jobban közelíti meg az iránytényező az 1-et. Tegyük fel már most, hogy a P_2 pont abszcissája egy végtelen kis h mennyiséggel nagyobb a P_1 pont abszcissájánál, ekkor

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{4}(4+4h+h^2) - \frac{1}{4} \cdot 4}{h} = 1 + \frac{1}{4}h.$$

Minél jobban közeledik P_2 pont P_1 -hez, annál kisebb lesz $\frac{1}{4}h$, ha P_2 pont P_1 -be esik, akkor $\frac{1}{4}h = 0$ s így

$$\lim_{\Delta x=h=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

A P_1 pontban tehát egyszerűen úgy rajzoljuk meg az érintőt, hogy P_1 -en át olyan egyenest rajzolunk, mely az abszcissa tengely pozitív irányával 45° -ú szöget zár be, mert hiszen

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

Hogy eljárásunkat általánosítsuk, válasszunk a görbén olyan tetszésszerű pontot, melynek koordinátái x és y ; ekkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2}{h} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h$$

s így

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}x,$$

Ha $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ helyett y' -t vagy $f'(x)$ -et írunk, akkor tehát pl.

$$\begin{array}{c|cccccc} x & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ \hline y' & 0, & \frac{1}{2}, & 1, & 1.5, & 2, & 2.5 \end{array}.$$

Ezek alapján az érintő a görbe bármely pontjában egyszerűen megszerkeszthető.

Ha a megadott függvény (2. ábra.)

$$y = x^2 - 8x + 7,$$

akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - 8(x+h) + 7 - (x^2 - 8x + 7)}{h} = 2x - 8 + h$$

és

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 8.$$

Ennélfogva az érintő irányítványozójának néhány értéke:

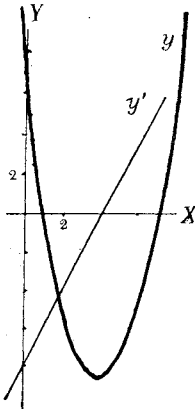
$$\begin{array}{c|cccccc} x & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \hline y' & -8, & -6, & -4, & -2, & 0, & 2, & 4 \end{array}.$$

Legyen továbbá (3. ábra.)

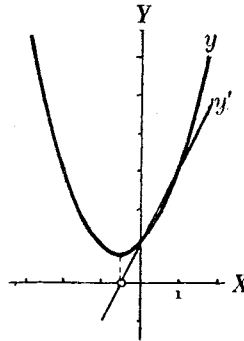
$$y = x^2 + x + 1,$$

ekkor

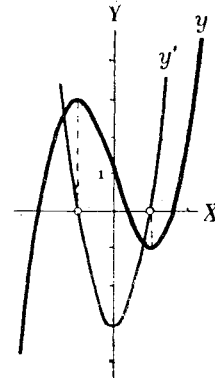
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 1.$$



2. ábra.



3. ábra.



4. ábra.

Végül szerkesszük meg az (4. ábra.)

$$y = x^3 - 3x + 1$$

görbét és számítsuk ki az egyes pontokban rajzolható érintők emelkedését

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x+h)^3 - 3(x+h) + 1 - (x^3 - 3x + 1)}{h} = \\ &= 3x^2 - 3 + 3xh + h^2 \end{aligned}$$

tehát

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 3.$$

Hogy a görbét megszerkeszthessük, írjuk az egyenletét ilyen alakban

$$y = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right).$$

Látjuk, hogy $y = \pm \infty$, ha $x = \pm \infty$. A görbe egyes pontjainak koordinátái

x	$-\infty, \dots$	$-3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	$4 \dots +\infty$
y	$-\infty, \dots$	$-17,$	$-1,$	$3,$	$1,$	$-1,$	$3,$	$53 \dots +\infty$

A görbe egyes pontjaiban rajzolható érintő emelkedése adja egyúttal a görbe emelkedését is. A

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

kifejezést nevezzük a függvény differenciálhányadosának s így jelöljük

$$y', \text{ vagy } f'(x), \text{ vagy } \frac{dy}{dx}, \text{ vagy } \frac{d}{dx}(f(x)).$$

Az eddigiek alapján látjuk, hogy az y függvénynek x szerint vett differenciálhányadosa, a görbe megfelelő pontjához tartozó érintő emelkedése, vagyis annak a szögnek tangense, melyet a görbe megfelelő pontjában rajzolt érintő az abszcissa tengely pozitív irányával bezár.

Látjuk, hogy ha a függvény másodfokú, vagy harmadfokú, akkor annak differenciálhányadosa x -nek első, illetőleg másodfokú függvénye. Ábráinkon egyúttal megrajzoltuk a differenciálhányados képét is. A rajzból kitűnik, hogy a differenciálhánya

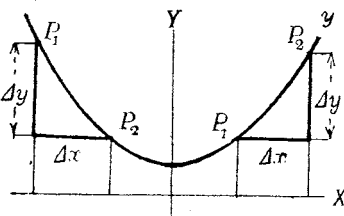
dos képe x -nek ama értékénél metszi az abszcissa-tengelyt, melynél az eredeti függvénynek eminens értéke van; továbbá, hogy a differenciálhányados pozitív, ha az eredeti függvény növekedik s hogy a differenciálhányados negatív, ha az eredeti függvény fogy. Ha a függvény eleinte fogy s azután növekedik, akkor azt mondjuk, hogy minimumon halad át; ha pedig a függvény eleinte növekedik s azután fogy, akkor maximumon halad át. Az első esetben a differenciálhányados eleinte negatív s azután lesz pozitívvá, a második esetben pedig a differenciálhányados először pozitív s azután lesz negatívvá.

Legyen $y=f(x)$ egy tetszőszerinti függvénye x -nek s vizsgáljuk meg a megfelelő görbének azt a részét, melyben az emelkedik. Ha az x tengelyen pozitív irányban haladunk, akkor, mint ezt az ábra mutatja, P_2 -ben a függvény értéke nagyobb,

mint P_1 -ben. Ennélfogva Δy pozitív s így $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is pozitív, tehát $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ is pozitív, esetleg nulla, mert egy pozitív változónak határa 0 is lehet. Ha a görbe esik, akkor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negatív s így y' is negatív, esetleg nulla. Mondhatjuk tehát: *ha a függvény növekszik, akkor y' pozitív, esetleg 0; ha a függvény fogy, y' negatív, esetleg 0.*

Viszont: *ha a differenciálhányados x -nek egy bizonyos intervallumában pozitív, akkor abban az intervallumban a görbe emelkedik, a függvény növekedik; ha pedig a differenciálhányados negatív, akkor x -nek megfelelő értékeinél a görbe esik, a függvény fogy.*

Ha a függvény eminens értéken halad át, akkor a differenciálhányados nullává lesz s azután előjelét megváltoztatja. Vi-



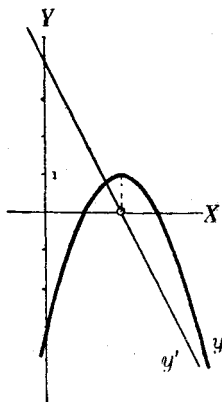
5. ábra.

szont ha a differenciálhányados x -nek egy bizonyos értékénél nullává lesz, akkor a függvénynek lehet eminens értéke. Maximuma van a függvénynek, ha a differenciálhányados pozitívból lesz negatívvá; minimuma van a függvénynek, ha a differenciálhányados negatívból lesz pozitívvá.

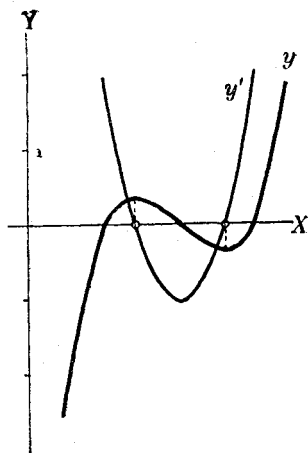
Lássuk már most, hogy hogyan alkalmazhatjuk e tetteleket egyes függvények képeinek megszerkesztésére.

1. Legyen (6. ábra.)

$$\begin{aligned}
 y &= -x^2 + 4x - 3. \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-(x+h)^2 + 4(x+h) - 3 - (-x^2 + 4x - 3)}{h} = \\
 &= \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 4x + 4h - 3 + x^2 - 4x + 3}{h} = \\
 &= \frac{-2xh - h^2 + 4h}{h} = -2x + 4 - h. \\
 y' &= -2x + 4.
 \end{aligned}$$



6. ábra.



7. ábra.

Először megrajzoljuk a differenciáhányados képét, mely olyan egyenes, mely az X tengelyt 2-ben, az Y tengelyt 4-ben metszi; $-2x+4$, tehát $x=2$ -ig pozitív, azután negatív. A függvény tehát $x=-\infty$ -tól $x=2$ -ig növekszik, $x=2$ -től $x=\infty$ -ig fogy. Maximumát tehát akkor veszi fel, ha $x=2$. Az X tengelyt $x_1=1$ és $x_2=3$ -ban, az Y tengelyt $y=-3$ -ban metszi.

$$\begin{aligned}
 2. \quad y &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) \\
 y' &= 3x^2 - 12x + 11.
 \end{aligned}$$

A differenciáhányados képe olyan parabola, mely az X tengelyt $2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$ -ban metszi és minimuma van. A diff. hányados $x=2-\frac{1}{3}\sqrt{3}=1.4$ -ig pozitív, azután negatív; $x=2+\frac{1}{3}\sqrt{3}=2.6$ -

ben nulla, azután ismét pozitív. Ennélfogva a görbe $x=2-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ -ig emelkedik, itt eléri maximális értékét, azután esik $x=2+\frac{1}{3}\sqrt{3}$ -ig itt felveszi minimális értékét s azután ismét emelkedik. A függvény nulla, ha $x_1=1, x_2=2, x_3=3$. (7. ábra).

Maximális értéke:

$$y_{\max} = f(2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}) = \\ = (1 - \frac{1}{3}\sqrt{3})(-\frac{1}{3}\sqrt{3})(-1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{3} = 0.4.$$

Minimális értéke:

$$y_{\min} = f(2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}) = \\ = (1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot (-1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{3} = -0.4.$$

A függvény változását a következő táblázat mutatja:

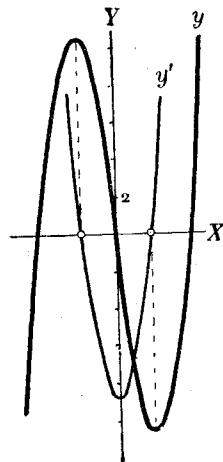
x	$-\infty$	nő	1, $2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$,	nő	2 ... $2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$,	nő	3, nő	$-\infty$
y'		pozitív	0	, neg.	-1, neg.	0	pozitív	
y	$-\infty$	nő	0, nő $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, fogy	0, fogy	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$, nő	0	nő	∞

3. $y = x^3 - 9x; y' = 3x^2 - 9.$

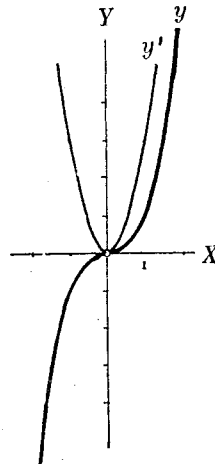
$$y' = 0, \text{ ha } x_1 = \sqrt{3} \text{ és } x_2 = -\sqrt{3}$$

A táblázat, melynek alapján a rajzot (8. ábra) elkészíthetjük:

x	$-\infty$	nő	-3	nő	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	3	∞
y'		pozitív			0 neg	0	pozitív		
y	$-\infty$	nő	0	nő+6	$\sqrt{3}$ fogy	0 fogy	-6	$\sqrt{3}$ nő	0 nő ∞



8. ábra.



9. ábra.

4. $y = x^3. \quad y' = 3x^2.$

A differenciálhányados x -nek minden értékénél pozitív, ennél fogva a függvény $x = -\infty$ -től $+\infty$ -ig nő. Eminens értéke a függvénynek nincs, mert a differenciálhányados előjelét nem változtatja meg. (9. ábra.)

5. Legyen

$$y = ax + b.$$

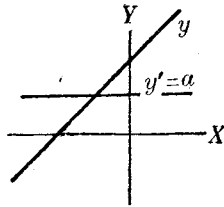
Ekkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = a,$$

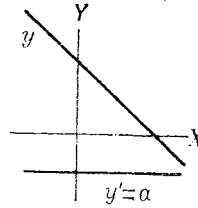
tehát

$$y' = a.$$

Ha $a > 0$, akkor a differenciálhányados képe oly egyenes, mely párhuzamos az abszcissa-tengellyel s az ordináta-tengelyt



10. ábra.



11. ábra.

a távolságban metszi. A differenciálhányados tehát mindig pozitív s így a függvény mindig nő: $-\infty$ -től $+\infty$ -ig változik. Megegyezik ez a már régebben tanultakkal, mert ha $a = \operatorname{tg} \alpha > 0$, akkor a hegyes szög. (10. ábra.)

Ha $a < 0$, akkor a differenciálhányados mindig negatív s így a függvény mindig fogy: $+\infty$ -től $-\infty$ -ig változik. Az elemző mértanban ugyanezt láttuk, mert ha $a = \operatorname{tg} \alpha < 0$, akkor a tompaszög. (11. ábra.)

6. Legyen

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} = \\ &= \frac{2axh + bh + h^2}{h} = 2ax + b + h \end{aligned}$$

s így

$$y' = 2ax + b.$$

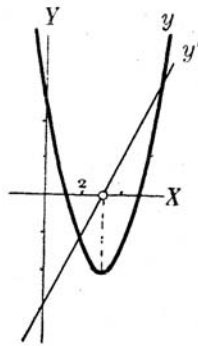
A differenciálhányados akkor 0, ha

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

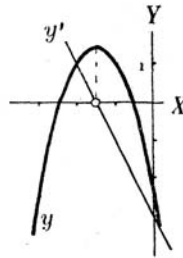
Ekkor

$$y = a \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ha $a > 0$, akkor a differenciálhányados olyan egyenes, mely a pozitív abszcissa-tengellyel hegyesszöget zár be s azt $x = -\frac{b}{2a}$ -ban metszi. A megadott függvény tehát először fogy,



12. ábra.



13. ábra.

minimális értéket vesz fel s azután nő. Minimális értékét akkor veszi fel, ha $x = -\frac{b}{2a}$ s ekkor (12. ábra.)

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ha $a < 0$, akkor a differenciálhányados képe olyan egyenes, mely a pozitív abszcissa-tengellyel tompaszöget zár be. A függvény $-\infty$ -tól egy bizonyos maximális értékig nő s azután $-\infty$ -ig fogy. A maximális értéket akkor veszi fel, ha $x = -\frac{b}{2a}$ és

$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}. \quad (13. \text{ ábra.})$$

Látjuk tehát, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek akkor van *eminens* értéke, ha $x = -\frac{b}{2a}$. Az *eminens* érték

pedig

$$\frac{4ac - b^2}{4a}$$

Minimuma van a függvénynek, ha $a > 0$, maximuma van a függvénynek, ha $a < 0$.

7. Legyen

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Ekkor

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Ha $a > 0$, a differenciálhányados képe olyan parabola, melynek minimális értéke van. A függvény tehát általában $-\infty$ -tól egy bizonyos maximális értékig nő, azután egy bizonyos minimális értékig fogy s ezután $+\infty$ -ig nő. Ha a differenciálhányados minimuma pozitív, tehát a differenciálhányados x -nek minden értékénél pozitív, akkor a függvény mindig nő, tehát eminens értéke nincs.

Ha $a < 0$, a differenciálhányados képe olyan parabola, melynek maximális értéke van. A függvény $+\infty$ -tól minimális értékig fogy, azután a maximális értékig nő s ezután $-\infty$ -ig fogy. Ha a differenciálhányados mindig negatív, akkor a függvény állandóan fogy. A megfelelő rajzok ezek alapján könnyen elkészíthetők.

II. Egyszerűbb függvények differenciálása.

Eddigi példáink mutatják, hogy egy megadott $y = f(x)$ függvény differenciálhányadosának kiszámításánál a következőképpen járunk el:

1. A független változót, x -et megnövesztjük h -val.
2. Kiszámítjuk az y függvény megfelelő növekményét:

$$\Delta y = f(x + h) - f(x).$$

3. y növekményét osztjuk x -nek növekményével: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
4. A $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hányadost egyszerűsítjük h -val.

5. Keressük a hányados határértékét:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Láttuk már, hogy ha a függvény:

$$ax+b, ax^2+bx+c, ax^3+bx^2+cx+d,$$

akkor a differenciálhányados:

$$a, 2ax+b, 3ax^2+2bx+c.$$

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy a többtagú differenciálhányadosa egyenlő az egyes tagok differenciálhányadosainak összegével. Az egyes tagok differenciálhányadosait úgy kapjuk meg, hogy minden tag együtthatóját megszorozzuk az ugyanazon tagban előforduló változó kitevőjével s a változó új kitevőjéül a régiek eggyel kisebbített értékét írjuk. Az állandó tag differenciálhányadosa egyenlő nullával. Határozzuk meg ezek után még néhány egyszerű függvény differenciálhányadosát.

1. Ha $y=x^n$ hatványmennyiség differenciálhányadosát akarjuk meghatározni, akkor — ha n pozitív egész szám — így járhatunk el:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x}.$$

Ismeretes, hogy

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} &= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} \cdot x + (x+h)^{n-3} x^2 + \dots + \\ &+ (x+h)^2 \cdot x^{n-3} + (x+h) \cdot x^{n-2} + x^{n-1}. \end{aligned}$$

Ha most áttérünk a határra, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + \dots + \\ &+ x^2 \cdot x^{n-3} + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

s így

$$y' = nx^{n-1}.$$

2.

$$y = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) : h = \frac{x - x - h}{x(x+h) \cdot h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = \frac{-1}{x(x+h)}.$$

Ennélfogva

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Minthogy a differenciálhányados x -nek minden értékénél negatív, azért a megadott függvény állandóan fogy, a megfelelő görbe állandóan esik.

De a megadott függvény és ennek differenciálhányadosa így is írható:

$$y = x^{-1}, \quad y' = -1 \cdot x^{-2}.$$

S így látjuk, hogy a negatív kitevőjű hatványmennyiség differenciálhányadosát is úgy számítjuk ki, hogy a hatványmennyiség együtthatóját szorozzuk a kitevővel, új kitevőül pedig írjuk az eggyel kisebbített régét. E tételt bizonyítás nélkül *elfogadjuk* általánosan.

Tehát pl.

$$y = \frac{a}{x^4} = ax^{-4},$$

$$y' = -4ax^{-5} = -\frac{4a}{x^5}.$$

$$3. \quad y = \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Másrészt

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

S így ismét arról győződünk meg, hogy ez esetben is úgy járhatunk el a differenciálhányados kiszámításánál, mintha a kitevő pozitív egész szám volna. Ismét *elfogadjuk* e tételt általános érvényűnek. Pl.

$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

4.

$$y = \sin x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Ha h kisebbedik a $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tört értéke közeledik a $\frac{0}{0}$ felé.

Hogy e tört határértékét meghatározhassuk, a következőképpen járunk el:

Rajzoljunk körívet, melynek sugara $OC = OE = 1$.

OC -re C -ben merőlegest emelünk, mely OE -t B -ben metszi. Nyilvánvaló, hogy az OCE háromszög területe kisebb, mint az OCE köríkk területe, ez pedig kisebb, mint az OCB háromszög területe. Ha a CE ív hossza z , akkor COE szög mértékszám z és

az OCE háromszög területe: $\frac{\sin z}{2}$

az OCE köríkk " $\frac{z}{2}$

az OCB háromszög " $\frac{\operatorname{tg} z}{2}$.

Tehát

$$\frac{\sin z}{2} < \frac{z}{2} < \frac{\operatorname{tg} z}{2}$$

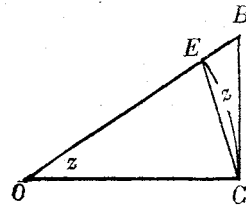
vagy

$$1 < \frac{z}{\sin z} < \frac{1}{\cos z}.$$

Ha pedig egy növekedő számsorozat tagjainak reciprok értékeit vesszük, akkor ezek fogyó számsorozatot alkotnak. Ennélfogva

$$1 > \frac{\sin z}{z} > \cos z.$$

Minél jobban kisebbedik z , annál jobban közeledik $\cos z$ értéke az 1-hez s így $\frac{\sin z}{z}$ is mindjobban közeledik 1-hez. A z -t oly kicsinynek választhatjuk, hogy $\frac{\sin z}{z}$ tetszőleges kevéssel



14. ábra.

különbözzék az 1-től. Ennélfogva mondhatjuk, ha $z=0$, akkor

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Így tehát

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$

Ha tehát

$$y = \sin x, \text{ akkor}$$

$$y' = \cos x.$$

5.

$$y = \cos x$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-2 \sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= -\sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}. \end{aligned}$$

$$y' = -\sin x.$$

A $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvények differenciálhányadosait később fogjuk kiszámítani.

III. A függvények maximális és minimális értékeinek meghatározása.

A függvények eminens értékeinek meghatározásával foglalkoztunk már. Láttuk, hogy a függvénynek csak akkor lehet eminens értéke, ha x -nek megfelelő értékénél a differenciálhányados nullává lesz és azután előjelét megváltoztatja. A differenciálhányados képéből azután megszerkesztettük magát a függvényt. Ez az eljárás azonban gyakran nehézkes és hosszadalmas, miért is a következőkben egyszerűbb eljárással fogunk megismerkedni. Hogy az eredeti görbe tulajdonságaival jobban megismerkedjünk, nemcsak a differenciálhányadosát fogjuk megszerkeszteni, hanem ezt a differenciálhányadost — mely szintén x -nek függvénye — újból differenciáljuk, miáltal az úgy-

nevezett második differenciálhányadost kapjuk s ennek a képét szintén megrajzoljuk. Legyen pl. a megadott függvény

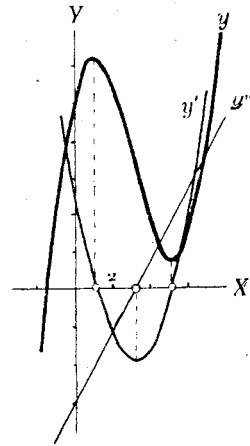
$$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10,$$

első differenciálhányadosa:

$$\frac{dy}{dx} = y' = x^2 - 6x + 5,$$

második differenciálhányadosa:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 2x - 6.$$



15. ábra.

Szerkesszük meg az első differenciálhányadost, az eredeti függvényt és a második differenciálhányadost.

Ábránkból láthatjuk, hogy ha a függvény maximális értéket vesz fel, akkor a függvény görbéje először emelkedik, azután esik; a differenciálhányados pozitívból lesz negatívvá, a differenciálhányados görbéje x -nek megfelelő értékénél esik s így a második differenciálhányadosnak e helyen negatívnak kell lennie. Ha pedig a függvény minimális értéket vesz fel, akkor a függvényt ábrázoló görbe először esik, azután emelkedik; a differenciálhányados negatívból lesz pozitívvá, a differenciálhányadost ábrázoló görbe x -nek megfelelő értékénél emelkedik s így a második differenciálhányadosnak e helyen pozitívnak kell lennie. Mondhatjuk tehát:

1. A függvény x -nek ama értékénél veszi fel a maximális értékét, melynél az első differenciálhányados nullával egyenlő és egyúttal a második differenciálhányados negatív.

2. A függvény x -nek ama értékénél veszi fel minimális értékét, melynél az első differenciálhányados nullával egyenlő és egyúttal a második differenciálhányados pozitív.

Megtörténhetik azonban, hogy x -nek egy bizonyos értékénél úgy az első, mint a második differenciálhányados is eltűnik. Ez esetben az eddigiek alapján nem dönthetjük el, hogy a függvénynek e helyen van-e eminens értéke. Példáinkban ilyen esettel nem fogunk találkozni.

Ezek alapján lássunk ismét néhány példát.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & y = x^2 + x + 1. \\
 & y' = 2x + 1. \\
 & y' = 0, \text{ ha } x = -\frac{1}{2} \\
 & y'' = 2 > 0, \text{ tehát a függvénynek minimuma van:} \\
 & y_{\min} = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & y = -\frac{x^2}{3} + 2x + \frac{7}{3} \\
 & y' = -\frac{2}{3}x + 2 \\
 & y' = 0, \text{ ha } x = 3 \\
 & y'' = -\frac{2}{3} < 0, \text{ a függvénynek maximuma van:} \\
 & y_{\max} = f(3) = -3 + 6 + \frac{7}{3} = 5\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & y = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1 \\
 & y' = 6x^2 + 10x + 4 \\
 & y' = 0, \text{ ha } x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -1 \\
 & y'' = 12x + 10. \\
 & \text{Ha } x_1 = -\frac{2}{3}, y'' = -8 + 10 > 0, \\
 & \text{ha } x = -1, y'' = -12 + 10 < 0, \text{ tehát} \\
 & y_{\max} = f(-1) = -2 + 5 - 4 + 1 = 0 \\
 & y_{\min} = f(-\frac{2}{3}) = -\frac{16}{27} + \frac{20}{9} - \frac{8}{9} + \frac{27}{27} = -\frac{1}{27}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & y = x^4 - 8x^2 + 6 \\
 & y' = 4x^3 - 16x \\
 & y' = 0, \text{ ha } x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2. \\
 & y'' = 12x^2 - 16. \\
 & \text{Ha } x_1 = 0, \text{ akkor } y'' = -16 < 0, \\
 & \quad \text{" } x_2 = 2, \quad \text{" } y'' = 32 > 0 \\
 & \quad \text{" } x_3 = -2, \quad \text{" } y'' = 32 > 0.
 \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}
 y_{\max} &= f(0) = 6 \\
 y_{\min} &= f(2) = -10 \text{ és } f(-2) = -10.
 \end{aligned}$$

Határozzuk meg még a görbe metszéspontjait az abszcissa tengelyen:

$$\begin{aligned}
 x^4 - 8x^2 + 6 &= 0 \\
 x^2 &= 4 \pm \sqrt{10} \text{ és } x = \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}
 \end{aligned}$$

tehát

$$x_1 = 2.7, \quad x_2 = -2.7, \quad x_3 = 0.9, \quad x_4 = -0.9.$$

Ezek alapján a rajz könnyen elkészíthető.

5. Bontsuk fel az a számot két részre úgy, hogy a részek szorzata a lehető legnagyobb legyen.

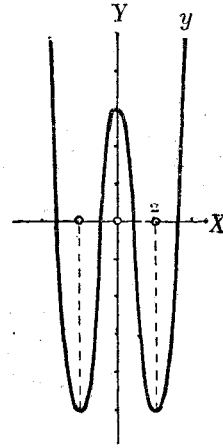
Legyen az egyik rész x , akkor a másik rész $a-x$ és a szorzat

$$y = x(a-x) = -x^2 + ax$$

$$y' = -2x + a$$

$$y' = 0, \text{ ha } x = \frac{a}{2}$$

$$y'' = -2 < 0,$$



16. ábra.

tehát a függvény eminens értéke csakugyan maximum. Az egyik

keresett rész $\frac{a}{2}$, a másik szintén $\frac{a}{2}$.

6. Adott egyenlőoldalú háromszögbe rajzoljunk minimális területű egyenlőoldalú háromszöget.

Ha az A_1 , B_1 , és C_1 pontok az ABC egyenlőoldalú háromszög oldalait egyenlő arányban osztják, akkor az $A_1B_1C_1$ háromszög is egyenlőoldalú, mert

$$A_1BC_1 \triangle \cong B_1CA_1 \triangle \cong C_1AB_1 \triangle.$$

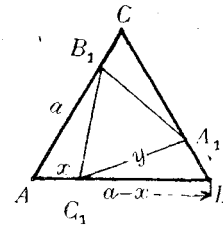
Legyen

$$AB = a, \quad AC_1 = x \quad \text{és} \quad A_1C_1 = y; \quad \text{ekkor}$$

$$y^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x) \cos 60^\circ$$

$$y^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 - ax + x^2$$

$$y^2 = 3x^2 - 3ax + a^2.$$



17. ábra.

Tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög területe:

$$t = (3x^2 - 3ax + a^2) \frac{\sqrt{3}}{4},$$

t akkor minimális, ha a zárójelben levő kifejezés minimális.

E kifejezés pedig akkor minimális, ha

$$6x - 3a = 0, \text{ vagyis ha}$$

$$x = \frac{a}{2}.$$

Hogy tehát minimális területű háromszöget kapjunk, az ABC háromszög oldalait meg kell feleznünk. A beírt háromszög területe

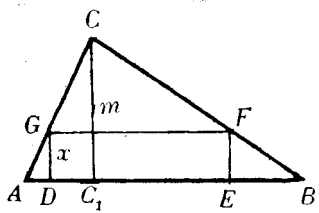
$$t = \frac{a^2}{16} \sqrt{3},$$

az eredeti háromszög területének negyedrésze.

7. Adott háromszögbe írjunk eminens területű téglalapot, melynek alapja a háromszög alapjába esik.

Legyen a keresett téglalap magassága x , a háromszög alapja a , magassága m . A téglalap területe:

$$y = DE \cdot x.$$



18. ábra.

Hogy a terület csakis x -nek legyen a függvénye, DE -t x -szel és a háromszög adataival fejezzük ki.

Hasonló háromszögekből:

$$GF : m - x = a : m,$$

miből

$$GF = DE = \frac{a(m-x)}{m}.$$

Így tehát

$$y = \frac{a}{m} (m-x)x = \frac{a}{m} (mx - x^2)$$

$$y' = \frac{a}{m} (m - 2x)$$

$$y' = 0, \text{ ha } m - 2x = 0, \text{ vagyis ha } x = \frac{m}{2}.$$

$$y'' = -\frac{2a}{m} < 0, \text{ a függvénynek maximuma van.}$$

A keresett téglalap magassága tehát a háromszög magasságának fele. A területe

$$y = \frac{a}{m} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} = \frac{am}{4},$$

a háromszög területének fele.

8. Négyzet alakú papírlapból maximális térfogatú, nyitott dobozt akarunk készíteni.

Legyen a négyzet egyik oldala a . Hogy dobozt készíthessünk, a négyzet sarkaiból kis négyzeteket vágunk el; a megmaradt téglalapok lesznek a doboz oldallapjai. Ha az elvágott négyzetek egy-egy oldala x , akkor a doboz alaplajának egy-egy oldala $(a-2x)$, a doboz magassága x . Ennélfogva a doboz köbtartalma

$$V = y = (a-2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3.$$

$$y' = 12x^2 - 8ax + a^2.$$

$$y'' = 24x - 8a.$$

$$y' = 0, \text{ ha } x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24},$$

tehát

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_2 = \frac{a}{6}.$$

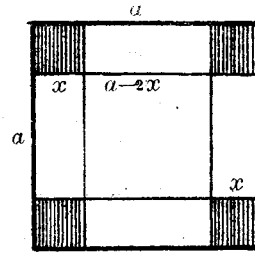
$$\text{Ha } x_1 = \frac{a}{2}, \text{ akkor } y'' = 4a > 0,$$

$$\text{" } x_2 = \frac{a}{6}, \quad \text{" } y'' = -4a < 0.$$

Így tehát

$$y_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = 0,$$

$$y_{\max} = f\left(\frac{a}{6}\right) = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{4a^3}{54} = \frac{2}{27} a^3.$$



19. ábra.

9. 1 literes, adott falvastagságú, henger alakú bádgedényt akarunk készíteni. Milyeneknek kell az edény méreteinek lenniök, hogy a lehető legkevesebb bádogra legyen szükségünk?

Ha a henger alajának sugara x , a henger magassága m , akkor a felszín:

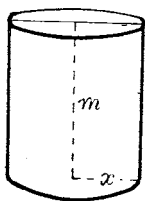
$$F = y = x^2 \pi + 2x \pi m, \dots \dots \dots 1)$$

továbbá a feladat értelmében

$$x^2 \pi m = 1 \dots \dots \dots 2)$$

miből

$$m = \frac{1}{x^2 \pi}$$



20. ábra.

mit 1)-be téve, ered

$$y = x^2\pi + \frac{2}{x}$$

$$y' = 2x\pi - \frac{2}{x^2}$$

$$y'' = 2\pi + \frac{4}{x^3}$$

$$y' = 0, \text{ ha } x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}.$$

ekkor

$$y'' = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0,$$

Függvényünknek tehát minimuma van, melyet akkor vesz fel, ha

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}.$$

A henger magassága ekkor

$$m = \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = x = 6.83 \text{ cm.}$$

A felszín tehát akkor a lehető legkisebb, ha a henger magassága egyenlő az alapkör sugarával.

10. Az egyenlő felszínű hengerek közül melyiknek a térfogata a legnagyobb?

Legyen az alapkör sugara ismét x , a henger magassága m .

Ekkor:

$$v = y = x^2\pi m \dots \quad 1)$$

és

$$2x^2\pi + 2x\pi m = c, \dots \quad 2)$$

hol c tetszőszerinti állandót jelent.

2)-ből

$$m = \frac{c - 2x^2\pi}{2x\pi}$$

mit 1)-be téve:

$$y = \frac{x^2\pi(c - 2x^2\pi)}{2x\pi} = \frac{c}{2}x - x^3\pi$$

$$y' = \frac{c}{2} - 3x^2\pi$$

$$y'' = -6x\pi.$$

$$y' = 0, \text{ ha } x = \sqrt{\frac{c}{6\pi}}.$$

Minthogy $y'' < 0$, függvényünknek maximuma van, melyet akkor vesz fel, ha $x = \sqrt{\frac{c}{6\pi}}$; ekkor

$$m = \frac{c - \frac{c}{3}}{2\pi \sqrt{\frac{c}{6\pi}}} = \frac{c \sqrt{6\pi}}{3\pi \sqrt{c}} = \sqrt{\frac{6\pi c^2}{9\pi^2 c}} = 2 \sqrt{\frac{c}{6\pi}} = 2x.$$

A térfogat tehát akkor maximális, ha a henger alapjának átmérője egyenlő a henger magasságával.

IV. Összetett függvények differenciálása.

A következőkben még néhány gyakrabban előforduló függvényalak differenciálásával foglalkozunk.

Legyen például $y = x \sin x$.

Látjuk, hogy ez esetben a megadott függvény két egyszerű függvény szorzata. Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x) \sin(x + \Delta x) - x \sin x = \\ &= x [\sin(x + \Delta x) - \sin x] + \Delta x \sin(x + \Delta x) \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2x \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} + \sin(x + \Delta x) = \\ &= x \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} + \sin(x + \Delta x) \end{aligned}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x \cos x + \sin x.$$

Lássuk, hogy kell eljárunk, ha a megadott függvény két tetszőesszerinti, egyszerű függvény szorzata. Legyen

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x) \quad \text{és} \quad y = uv.$$

Ha x -et megnövesztjük Δx -szel, akkor u -ból $u + \Delta u$, v -ből $v + \Delta v$, y -ből $y + \Delta y$ lesz. Tehát

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Ha $\Delta x=0$, akkor

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = u'$$

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\phi(x+\Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} = v'$$

$$\lim_{\Delta x=0} \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} = 0$$

s így

$$y' = vu' + uv'.$$

A szorzat differenciálhányadosa tehát annyi, mint az első tényező szorozva a második tényező differenciálhányadosával, hozzáadva a második tényezőnek az első tényező differenciálhányadosával való szorzatát. A *hányados* differenciálhányadosának kiszámításánál így járunk el:

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{\Delta x(v + \Delta v)v} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Példák:

1. $y = (a+bx)(c+dx)$
 $y' = (a+bx) \cdot d + b(c+dx) = ad + bc + 2b dx.$
2. $y = x \sqrt{x}$
 $y' = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{x\sqrt{x}}{2x} + \sqrt{x} = \frac{3}{2} \sqrt{x}.$
3. $y = x \sin x$
 $y' = x \cos x + \sin x.$
4. $y = \sin x \cos x$
 $y' = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos 2x.$

$$5. \quad y = x^n \sin x \\ y' = x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x.$$

$$6. \quad y = \frac{ax+b}{c+dx} \\ y' = \frac{(c+dx)a - (ax+b)d}{(c+dx)^2} = \frac{ac-bd}{(c+dx)^2}.$$

$$7. \quad y = \frac{a+bx}{x^2} \\ y' = \frac{bx^2 - 2(a+bx)x}{x^4} = -\frac{2ax+bx^2}{x^4} = -\frac{2a+bx}{x^3}.$$

$$8. \quad y = \frac{x}{1+x} \\ y' = \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

$$9. \quad y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

$$10. \quad y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \\ y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

Sokszor a megadott függvény egy függvény függvénye. Pl.

$$1. \quad y = \sin 5x.$$

Eddigi eljárásunkat alkalmazva:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin 5(x+h) - \sin 5x}{h} = \frac{2 \cos \left(5x + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2}}{h} = \\ &= 5 \cos 5\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{5h}{2}}{\frac{5h}{2}}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cos 5x.$$

2. Legyen általánosan

$$y = f(\varphi(x)).$$

Ha $\varphi(x)$ helyébe z -t teszünk, akkor

$$y = f(z).$$

Így tehát

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta x} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

$$\text{De } \lim_{\Delta z=0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dy}{dz}$$

$$\lim_{\Delta z=0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx}$$

s így

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Eme szabályt alkalmazva könnyen differenciálhatók a következő függvények:

$$3. \quad y = (a + bx + cx^2)^2,$$

ha

$$a + bx + cx^2 = z,$$

akkor

$$y = z^2,$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} = 2z \cdot (b + 2cx) = 2(a + bx + cx^2)(b + 2cx).$$

$$4. \quad y = (ax + b)^3 \\ y' = 3(ax + b)^2 \cdot a = 3a(ax + b)^2.$$

$$5. \quad y = \left(\frac{a + bx}{c - dx} \right)^2 \\ y' = 2 \cdot \frac{a + bx}{c - dx} \cdot \frac{(c - dx) \cdot b + (a + bx)d}{(c - dx)^2} = \\ = \frac{2(a + bx)(bc + ad)}{(c - dx)^3}.$$

$$6. \quad y = \sin^2 x \\ y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

$$7. \quad y = \cos^3 x \\ y' = 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3 \sin x \cos^2 x.$$

$$8. \quad y = \sin \frac{x}{a}$$

$$y' = \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{x}{a}.$$

$$9. \quad y = \operatorname{tg}^2 x$$

$$y' = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

10. Szerkesszük meg a következő függvényt:

$$y = \frac{5x}{3x^2 + 12}.$$

A megadott függvény differenciálhányadosa:

$$y' = \frac{5(3x^2 + 12) - 5x \cdot 6x}{(3x^2 + 12)^2} = \frac{-15x^2 + 60}{(3x^2 + 12)^2}$$

$$y' = 0, \text{ ha } x_1 = 2 \text{ és } x_2 = -2.$$

Látjuk, hogy y' nevezője x -nek minden értékénél pozitív; a számláló képe oly parabola, mely az abszcissa tengelyt (-2) -ben és $(+2)$ -ben, az ordináta-tengelyt pedig $y=60$ -ban metszi. Ennélfogva, ha x változik $-\infty$ -tól -2 -ig, y' negatív, a megadott függvény tehát fogy; $x=-2$ -ben eléri minimális értékét. Ha x változik -2 -től $+2$ -ig, a differenciálhányados pozitív, tehát a függvény nő; $x=2$ -ben eléri maximumát; innen kezdve a differenciálhányados ismét negatív, a függvény tehát fogy. Minthogy függvényünk így is írható:

$$y = \frac{\frac{5}{x}}{3 + \frac{12}{x^2}},$$

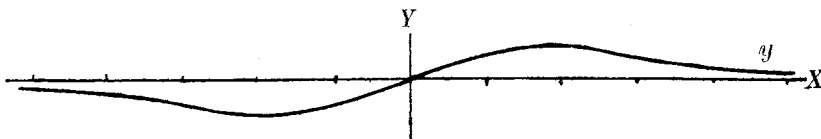
kitűnik, hogy $y=0$, ha $x=\pm\infty$.

Függvényünket tehát a következő táblázat alapján könnyen megszerkeszthetjük:

x	$-\infty \dots$	$-6,$	$-4,$	-2	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$\dots \infty$			
y'		negatív			0			pozitív			0	negatív		
y	0	fogy	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{3},$	$-\frac{5}{12},$	nő	$-\frac{1}{3},$	$0,$	$\frac{1}{3},$	$\frac{5}{12},$	fogy	$\frac{5}{12},$	$\frac{1}{3}$	0

Függvényünk eminens értékei:

$$y_{\min} = f(-2) = -\frac{5}{12}, \quad y_{\max} = f(2) = \frac{5}{12}.$$



21. ábra.

11. Szerkesszük meg a következő függvényt:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x - 14}$$

A függvény differenciálhányadosa:

$$y' = \frac{9x^2 - 34x + 41}{(x^2 + 5x - 14)^2}$$

y' nevezője x -nek minden értékénél pozitív; minthogy

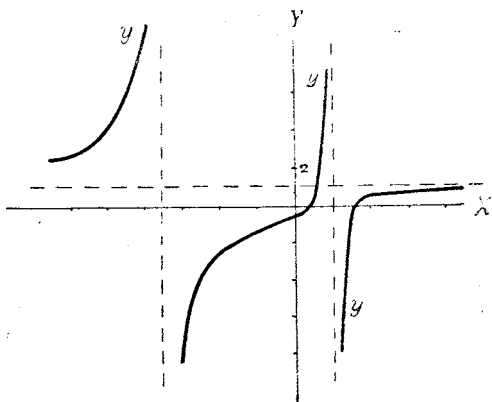
$$34^2 < 4 \cdot 9 \cdot 41,$$

azért a számláló is állandóan pozitív. A differenciálhányados tehát x -nek minden értékénél pozitív s így a megadott függvény állandóan nő.

$$y = 0, \text{ ha } x_1 = 1 \text{ és } x_2 = 3.$$

Ha $x = \pm \infty$, akkor $y = 1$, mert a függvény is írható:

$$y = \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{5}{x} - \frac{14}{x^2}}.$$



22. ábra.

Az $y = 1$ tehát a görbe egyik aszimptotája.

Ha $x_3 = 2$, vagy $x_4 = -7$, akkor $y = \infty$, tehát az $x = 2$ és $x = -7$ egyenesek szintén aszimptotái a görbének.

Ha tehát x változik $-\infty$ -tól -7 -ig, akkor

a függvény változik 1 -től $+\infty$ -ig; ha x nő 2 -ig, a függvény

$-\infty$ -től nő $+\infty$ -ig; ha x nő $+\infty$ -ig, a görbe nő $-\infty$ -től 1-ig. E változásokat mutatja a következő táblázat:

x	$-\infty \dots -7$	$-7 \dots$	$0 \dots$	$1 \dots$	2	$2 \dots$	$3 \dots \infty$
y'	mindig			pozitív			
y	1 nő ∞	$-\infty$ nő $-\frac{3}{14}$	nő 0,	nő ∞	$-\infty$ nő 0	nő ∞	

12. A gömbbe írható hengerek közül melyiknek a térfogata a lehető legnagyobb?

Legyen R a gömb sugara, $2x$ a henger magassága, y a henger alapjának sugara.

Ekkor

$$V = y^2 \pi \cdot 2x$$

és

$$y^2 = R^2 - x^2$$

tehát

$$V = 2\pi (R^2 x - x^3).$$

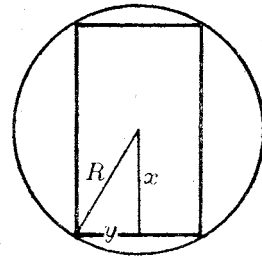
Ennélfogva

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi (R^2 - 3x^2).$$

A differenciálhányados akkor egyenlő zérussal, ha

$$x = \pm R \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Az alsó előjel a feladat természeténél fogva nem használható.



23. ábra.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -12x\pi.$$

Látjuk, hogy a második differenciálhányados x -nek minden pozitív értékénél negatív s így a függvényünk akkor veszi fel *maximális* értékét, ha

$$x = R \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ekkor

$$y = R \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tehát a maximális térfogat:

$$V = \frac{2}{3} R^2 \cdot \pi \cdot 2 R \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

A gömb térfogata tehát úgy aránylik a maximális henger térfogatához mint

$$\frac{4}{3} R^3 \pi : \frac{4}{3 \sqrt{3}} R^3 \pi$$

vagy

$$\sqrt{3} : 1.$$

13. Négy egyenlő hosszú deszkából maximális térfogatú csatornát akarunk készíteni. A deszkák közül kettőnek függőleges helyzetűnek kell lennie. Mekkora szöget kell a harmadik és negyedik deszkának egymással bezárnia?

A csatorna keresztmetszetét ábránk mutatja. A csatorna térfogata akkor lesz maximális, ha a keresztmetszet területe maximális.

Legyen a egy deszkának hossza, akkor a keresztmetszet területe :

$$l = 2a^2 \sin \alpha + \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha.$$

A megvizsgálandó függvény tehát

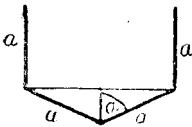
$$y = 2 \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

α szerint differenciálva :

$$y' = 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$$

$$y'' = -(2 \sin \alpha + 2 \sin 2\alpha).$$

Határozzuk meg α ama értékét, melynél $y' = 0$.



24. ábra.

$$2 \cos \alpha + \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$$

$$2 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}).$$

Az alsó előjel nem használható, mert $\cos \alpha$ nem lehet kisebb mint -1 . Így tehát

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) = 0.366.$$

Miből α -nak használható értéke

$$\alpha = 68^\circ 30'.$$

α eme értékénél y'' negatív s így a keresztmetszet területe akkor *maximális*, ha

$$2\alpha = 137^\circ.$$

V. A kúpszeletek érintőinek egyenletei.

Tárgyalásaink kezdetén láttuk már, hogy a parabola (x_1, y_1) pontján át rajzolható érintőjének egyenlete

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1) \quad a)$$

Ez az egyenlet egyúttal egy tetszőszerinti $y = f(x)$ kúpszelet érintőjének egyenlete, ha x_1 és y_1 az érintési pont koordinátái és $\frac{dy}{dx}$ a megadott kúpszelet érintőjének iránytényezője az érintési pontban.

Így a kör egyenlete

$$x^2 + y^2 = r^2$$

miből

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

tehát

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

A kör érintőjének egyenletét tehát megkapjuk, ha $a)$ -ban $\frac{dy}{dx}$ helyébe $-\frac{x_1}{y_1}$ -et helyettesítünk:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

vagy

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

de

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

s így a kör érintőjének egyenlete:

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

Az ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

miből

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{-2xb}{2a\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Az ellipszis érintőjének egyenlete tehát

$$y-y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

vagy

$$a^2yy_1 - a^2y_1^2 = -b^2xx_1 + b^2x_1^2$$

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2.$$

Osszunk a^2b^2 -tel, akkor lesz

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

vagy végül

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Hasonlóképen a *hyperbola érintőjének* egyenlete:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

A parabola egyenlete

$$y = \sqrt{2px}.$$

Ennélfogva

$$y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}.$$

Az érintő egyenlete

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$$

$$yy_1 = px - px_1 + 2px_1$$

$$yy_1 = px + px_1.$$

Vagy végül

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Ezt az egyenletet felhasználhatjuk az érintő egyszerű megszerkesztésére. Keressük evégből ama pont koordinátáit, melyben a parabola (x_1, y_1) pontjában rajzolható érintő az ab-

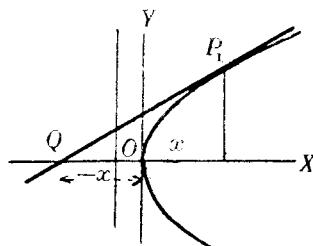
scissa tengelyt metszi. E pont ordinátája $y=0$, ennél fogva

$$p(x+x_1)=0,$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$x = -x_1.$$

Ennél fogva a $P_1(x_1, y_1)$ pont abszcissáját a rendszer O kezdőpontjától az abszcissa-tengely negatív irányában felmérjük s megkapjuk Q pontot. P_1Q a parabola érintője.



25. ábra.

A TERÜLET, FELSZÍN ÉS KÖBTARTALOM SZÁMÍTÁSA AZ INTEGRÁL SEGÍTSÉGÉVEL.

I. Bevezetés.

A legtöbb gyakorlati feladat megoldásánál nem diszkrét, különálló számadatokat, hanem függvényeket keresünk. Így például a különböző idomok területei mint megfelelő távolságok függvényei állíthatók elő. A négyzet területe $y = x^2$, az egyenlő-oldalú háromszög területe $y = \frac{x^2}{4} \sqrt{3}$, az n oldalú szabályos sokszög területe $y = n \cdot \frac{x^2}{4} \cotg \frac{180}{n}$, ahol mindenütt x az illető szabályos idom oldalának hosszát jelenti. Hasonlóképen a kör területe $y = \pi \cdot x^2$, ahol x a kör sugara. Ugyanígy van a köbtartalom számításnál is. A fizikában is arra törekszünk, hogy bizonyos mennyiségeket előállítsunk, mint mások függvényét. Így például a szabadon eső test útja $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, a c sebességgel függőlegesen felfelé hajított test útja $s = ct - \frac{g}{2} t^2$, a harmonikus mozgást végző pont útja $s = a \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} \right)$, ahol mindenütt t a folytonosan változó időt jelenti.

A legtöbb gyakorlati feladat akkor van megoldva, ha a keresett mennyiség matematikai alakban mint valamely — a feladat természete szerint más és más — független változó függvénye elő van állítva.

Ily függvények keresése nem mindig könnyű munka. Néha könnyebb megtalálni az ismeretlen függvénynek a differenciálhányadosát, mint magát a függvényt és a következőkben épen ilyen feladatokról lesz szó. Az ilyen feladatok teljes megoldásához tehát szükségünk lesz oly eljárásra, amelynek segítségével az adott differenciálhányadosból ki lehet találni az eredeti

függvényt. Ezt a számítási eljárást integrálszámításnak, és a keresett függvényt *integrálnak* szokás nevezni. Legyen $f(x)$ egy adott függvény, akkor x -re vonatkozó integrálja

$$\int f(x) \cdot dx = F(x).$$

Az \int jel és az az írásmód, hogy az integráljel alatt a függvénynek és dx -nek szorzata van, a történeti fejlődés folyamán alakult ki így, amiről később lesz szó.

Az integrálszámítás tehát a differenciálás fordítottja és így ennek is mint minden fordított műveletnek helyességét a megfelelő direkt művelettel igazoljuk.

$$\int x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4}; \text{ mert } \frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4} \right) = x^3,$$

$$\int (3 - 9x^2) dx = 3x - x^3; \text{ mert } \frac{d}{dx} (3x - x^3) = 3 - 9x^2,$$

$$\int \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}; \quad \text{mert } \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Látjuk egyszersmind azt is, hogy ha *csak* a differenciálhányados van megadva, akkor az integrál nincs teljesen meghatározva. Így például $x^3 \cdot dx$ -nek integrálja nemcsak $\frac{x^4}{4}$, hanem minden más függvény, amely ebből egy tetszésszerűen állandó számnak hozzáadása által keletkezik, így tehát

$$\int x^3 \cdot dx = \text{lehet } \frac{x^4}{4}, \frac{x^4}{3} + 1, \frac{x^4}{2} + 1000, \frac{x^4}{1} - \pi \text{ stb.,}$$

általában

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

ahol C bárminő állandó szám.

Az integrálszámításnak igen komplikált formulái vannak, mi azonban — feladataink megoldása céljából — ilyenekre reá nem szorulunk és minden *integrált egyszerűen próbálgatás útján találunk ki*. Differenciálással mindig meggyőződhetünk arról, hogy jó úton járunk-e.

Néhány igen egyszerű szabályt mégis célszerű megtartani.

1. *Numerikus együttható mindig az integráljel elé tehető.*

Például

$$\int 2 \cdot x^3 \cdot dx = 2 \cdot \int x^3 dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4};$$

mert

$$\frac{d}{dx} \left(2 \cdot \frac{x^3}{3} \right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = 2 \cdot x^2;$$

$$\int \pi \cdot \cos x \cdot dx = \pi \int \cos x \cdot dx = \pi \cdot \sin x;$$

mert

$$\frac{d}{dx} (\pi \cdot \sin x) = \pi \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) = \pi \cdot \cos x.$$

2. Összeget tagonként lehet integrálni. Például

$$\begin{aligned} \int (3 + 5x - x^5) dx &= \int 3 \cdot dx + \int 5 \cdot x \cdot dx - \int x^5 \cdot dx = \\ &= 3 \cdot x + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}; \end{aligned}$$

mert

$$\frac{d}{dx} \left(3x + 5 \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right) = 3 + 5x - x^5.$$

3. Tartsuk meg a következő egyszerű integrálformulákat:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

ahol n bárminő szám lehet -1 -et kivéve

$$\int \sin x dx = -\cos x,$$

$$\int \cos x dx = \sin x.$$

II. Területszámítás.

Meg kell határozni azt a területet, amelyet az

$$y = f(x)$$

görbevonallal, továbbá az x tengely és oly két szélső ordinata zár be, amelyek az $x=a$ megadott és az $x=x$ tetszőszerinti abszcissákhoz tartoznak (26. ábra). Ezt a területet sokszor egyszerűen a görbe alatt fekvő területnek fogjuk nevezni.

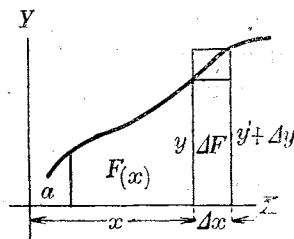
Mindenekelőtt könnyű belátni, hogy az ilyen módon meghatározott terület maga is a végső abszcissának, az x -nek valamilyen függvénye. Ha ugyanis az x -nek különböző értékeket tulajdonítunk, akkor minden egyes ilyen értéknek megfelel egy területérték, amelyet közelítőleg úgy is lehetne megkapni, hogy

a milliméterpapirosra rajzolt ábrán a négyzetmilliméterek számát egyszerűen megolvassuk.

Kérdés, hogy ez a terület az x -nek minő függvénye? Meg fogjuk mutatni, hogy ennek a területfüggvénynek differenciálhányadosa ismeretes, mert ez maga a görbe függvénye, az $f(x)$.

Válasszunk egy közbeeső x abszcissát és növeljük meg Δx -szel, akkor az eredeti terület is megnövekszik ΔF -fel.

Ez a növekedés két határ közé szorítható, mert nagyobb mint az alacsonyabb téglalap és kisebb mint a magasabb téglalap területe (1. ábra), vagyis



26. ábra.

$$y \cdot \Delta x < \Delta F < (y + \Delta y) \Delta x,$$

amiből

$$y < \frac{\Delta F}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Ha a Δx a 0 felé konvergál, akkor a felső és alsó határ összeesik és így

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = y,$$

vagyis

$$\frac{dF}{dx} = y = f(x),$$

tehát

$$F = \int y \cdot dx + C = \int f(x) \cdot dx + C.$$

Az $y = f(x)$ görbe alatt fekvő terület oly függvénnyel fejezhető ki, amelynek differenciálhányadosa maga a görbe függvénye; a területfüggvény tehát a görbe függvényének integrálja.

A határozatlan C állandó minden tényleges feladatnál a kezdő feltételekből könnyen kiszámítható. Hogyan, megmutatja a következő példa.

Határozzuk meg az $y = x^3$ görbe alatt fekvő területnek azt a részét, amely az $x = 1$ abszcissától az $x = x$ abszcissáig terjed. Akkor

$$t = \int x^2 \cdot dx,$$

$$t = \frac{x^3}{3} + C.$$

Ez a terület az x értékétől függ; amint az x az 1 felé közeledik, a sáv keskenyebb és keskenyebb lesz, úgy hogy végül, amikor $x=1$ vagyis, amikor a végső és a kezdő ordináták összeesnek, a területnek 0-vá kell válnia, tehát

$$0 = \frac{1}{3} + C, \quad C = -\frac{1}{3}.$$

A végleg meghatározott területfüggvény tehát

$$t_{(1, x)} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Ha $x=2$ cm, akkor

$$t_{(1, 2)} = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3} \text{ cm}^2.$$

Ha $x=3$ cm, akkor

$$t_{(1, 3)} = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ cm}^2.$$

Ugyanezeket az értékeket egyszerűbben és általánosabban úgy is megkaphatjuk, ha az integrálba a végső és a kezdő abszcissát — *a felső és az alsó határokat* — helyettesítjük és az így nyert értékeket egymásból kivonjuk. Ezeket a határokat, miként az a következőkben látható, az integrál jeléhez oda is írjuk. Tehát

$$t_{(1, 2)} = \int_1^2 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 2\frac{1}{3} \text{ cm}^2,$$

$$t_{(1, 3)} = \int_1^3 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ cm}^2.$$

Ha a határok $x=a$ és $x=b$, akkor

$$t_{(a, b)} = \int_a^b x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Amint ebben az egy példában jártunk el, ugyanígy járhatunk el minden más esetben.

Az $y=f(x)$ görbe alatt fekvő területet úgy kapjuk meg, hogy megkeressük a görbe függvényének x -re vonatkozó inte-

grálját, ebbe a felső és alsó határ értékét behelyettesítjük és az így nyert értékeket egymásból kivonjuk.

*Feladatok.** 1. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x^2} + 1$ görbe alatt fekvő területnek azt a részét, amely $x = \frac{1}{2}$ -től $x = 2$ -ig terjed.

$$\begin{aligned} t_{(\frac{1}{2}, 2)} &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{x} + x \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \\ &= \left[-\frac{1}{2} + 2 \right] - \left[-\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right] = 3. \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az $y = \frac{a}{x^2}$ görbe alatt fekvő területnek azt a részét, amely $x = x_1$ -től $x = x_2$ -ig terjed

$$\begin{aligned} t &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{a}{x^2} dx = a \int_{x_1}^{x_2} x^{-2} \cdot dx = a \left[-x^{-1} \right]_{x_1}^{x_2}, \\ t &= a \left\{ -x_2^{-1} - (-x_1^{-1}) \right\} = a \left\{ -\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} \right\}. \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg az $y = x^2 - 4x + 6$ görbe alatt fekvő területnek azt a részét, amely x_1 -től x_2 -ig terjed

$$\begin{aligned} t &= \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - 4x + 6) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x \right]_{x_1}^{x_2}, \\ t &= \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) - 2(x_2^2 - x_1^2) + 6(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Ha például $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$, akkor $t = 13\frac{1}{3}$.

4. Határozzuk meg a sinusvonal egy hulláma és az abszcissatengely között fekvő területet.

$$\begin{aligned} y &= \sin x, \quad x_1 = 0 \quad \text{és} \quad x_2 = \pi. \\ t &= \int_0^\pi \sin x \cdot dx = [-\cos x]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2. \end{aligned}$$

5. Határozzuk meg $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ görbevonallal alatti területet 0 és $\frac{\pi}{2}$ határok között.

* A feladatban szereplő összes görbét a tanulók rajzolják meg.

$$t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

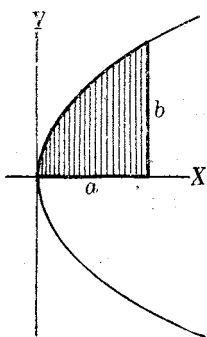
6. *A parabola területe.* A parabola legegyszerűbb egyenlete $y^2 = 2px$ vagy $y = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x}$. A határok 0 és a . A 27. ábrából látható sraffozott terület

$$t = \int_0^a \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \sqrt{2p} \cdot \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a,$$

$$t = \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot \sqrt{a} \cdot a.$$

Ha a végső ordinátát b -vel jelöljük, akkor $b^2 = 2p \cdot a$ vagy $b = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{a}$, tehát

$$t = \frac{2}{3} a \cdot b. *$$



27. ábra.

A görbe és az ordinatatengely között fekvő területrész meghatározása. A bevezetésben levő minden megfontolás érvényben marad azzal a különbséggel, hogy most y a független változó és x a függvény, tehát a terület lesz

$$t = \int_{y_1}^{y_2} f(y) \cdot dy = \int_{y_1}^{y_2} x \cdot dy.$$

Feladatok. 1. Ha a megelőző feladatban szereplő parabolát 90° -kal elforgatjuk, úgy hogy szimmetriatengelye az y tengellyel esik össze, akkor az egyenlete lesz

$$y = \frac{1}{2p} x^2, \text{ vagy } x^2 = 2py, \text{ vagy } x = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{y}.$$

A kérdéses területet most is kiszámíthatjuk. A határok $y_1 = 0$ és $y_2 = a$

$$t = \int_0^a \sqrt{2p} \cdot \sqrt{y} \cdot dy = \sqrt{2p} \int_0^a y^{\frac{1}{2}} dy = \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^a,$$

$$t = \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot \sqrt{a} \cdot a = \frac{2}{3} a \cdot b.$$

* Erősebb osztályban az ellipszis területét is lehet tárgyalni, természetesen csak úgy, hogy x és y helyett új változót vezetünk be. Lásd: *Nernst u. Schönflies: Einführung in die math. Behandlung der Naturwissenschaften.*

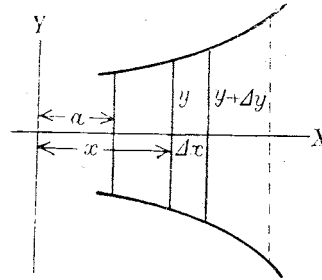
2. Határozzuk meg azt a területet, amelyet az $y=x^3+1$ görbe vonal az ordinatatengellyel bezár, határok $y_1=1$ és $y_2=4$. Az egyenletből $x=\sqrt[3]{y-1}$, tehát

$$t = \int_1^4 \sqrt[3]{y-1} \cdot dy = \int_1^4 (y-1)^{\frac{1}{3}} \cdot dy = \left[\frac{3}{4} (y-1)^{\frac{4}{3}} \right]_1^4 = \frac{3}{4} 3^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{27}.$$

III. Forgási testek köbtartalma.

Ha az $y=f(x)$ görbének az $x=a$ és az $x=x$ által meghatározott íve az abszcissatengely körül forog, forgási test keletkezik. Határozzuk meg a köbtartalmát. (28. ábra).

Ismét könnyű belátni, hogy az ilyen módon meghatározott térfogat a végső abszcissának függvénye. A kérdés csak az, minő függvénye? Meg fogjuk mutatni, hogy ennek az ismeretlen szerkezetű függvénynek differenciálhányadosa a forgó görbének függvényéből könnyen előállítható.



28. ábra.

Válasszunk egy közbeeső x abszcissát és növeljük meg Δx -szel, akkor az eredeti térfogat is megnövekszik ΔV -vel.

Ez a növekedés két határ közé szorítható. Tudniillik csónkakúpnak tekinthető, amelynek köbtartalma oly két henger közé esik, amelyek a csónkakúp alap- és fedőlapja fölé emelhetők és magasságban egyeznek. Tehát

$$y^2 \cdot \pi \cdot \Delta x < \Delta V < (y + \Delta y)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x,$$

amiből

$$y^2 \pi < \frac{\Delta V}{\Delta x} < (y + \Delta y)^2 \cdot \pi.$$

Ha Δx a 0 felé konvergál, akkor a felső és alsó határ egymás felé közeledik és a végső esetben összeesik és így

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = y^2 \cdot \pi,$$

vagyis

$$\frac{dV}{dx} = y^2 \cdot \pi,$$

tehát

$$V = \int y^2 \pi \cdot dx + C = \int [f(x)]^2 \pi \cdot dx + C.$$

Az állandó meghatározására ismét ugyanazok a meggon-
dolások érvényesek, mint a területszámításnál és ugyanahhoz
az eredményhez is vezetnek. Úgy, hogy a végső eredményt itt
is a következőképen jelölhetjük:

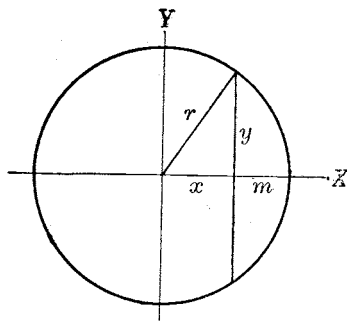
$$V_{(a, x)} = \int_a^x y^2 \cdot \pi \cdot dx.$$

Az $y=f(x)$ görbevonaltól x tengely körül való forgásánál
keletkező test köbtartalmát úgy kapjuk meg, hogy $y^2 \pi$ -nek
megkeressük x -re vonatkozó integrálját, ebbe a felső és az
alsó határ értékét helyettesítjük és az így nyert értékeket egy-
másból kivonjuk.

Ha a görbe nem az x , hanem az y tengely körül forog
teljesen hasonló eredményre jutunk, a különbség csak az lesz,
hogy az y és az x szerepet cserélnek. Tehát az így keletkezett
test köbtartalma

$$V'_{(a, y)} = \int_a^y x^2 \cdot \pi \cdot dy.$$

1. A gömb és részeinek köbtartalma (29. ábra). A gömb egy
körnek az átmérő körül való forgásából keletkezik. Egyszerűség



29. ábra.

kedvéért vegyük fel, hogy a kör és a
gömb középpontja összeesik a koor-
dinátarendszer kezdőpontjával. Ez
esetben a forgó görbe egyenlete

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

ahol r a kör (illetőleg gömb) sugara.
Ebből

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Ha a gömbszelet köbtartalmát
keressük, amelynek magassága m ,
akkor

$$V = \pi \int_{r-m}^r y^2 \cdot dx = \pi \int_{r-m}^r (r^2 - x^2) \cdot dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-m}^r.$$

$$V = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(r^2 (r-m) - \frac{(r-m)^3}{3} \right) \right],$$

$$V = \frac{\pi}{3} (3r-m) m^2.$$

Ha az *egész gömb* köbtartalmát keressük, akkor ebben az eredményben $m=2r$ -et helyettesítünk, vagy pedig az eredeti integrál határait $-r$ és $+r$ -nek vesszük, az eredmény

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

A *gömbréteg* (korong) köbtartalmát úgy kapjuk meg, hogy azt két gömbszelet különbségének tekintjük és akkor a megfelelő képletet is származtathatjuk, ahogy az a tankönyvekben meg van írva. Numerikus számok esetében sokkal célszerűbb közvetlen integrációt alkalmazni

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2) \cdot dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2},$$

ahol x_1 -et és x_2 -t a gömbréteg körlapjainak sugarából és magasságából ki lehet számítani.

2. A *forgásbeli paraboloid köbtartalma*. Ha a 30. ábrában feltüntetett parabola (egyenlete $y^2 = 2p \cdot x$) az x tengely körül forog, forgásbeli paraboloid keletkezik, amelynek köbtartalma

$$V = \pi \int_0^a y^2 \cdot dx = \pi \int_0^a 2p \cdot x \cdot dx = \pi \cdot 2p \int_0^a x dx,$$

$$V = \pi \cdot 2p \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \pi \cdot 2p \frac{a^2}{2},$$

$$V = \pi \cdot p \cdot a^2.$$

Minthogy $b^2 = 2p \cdot a$, amiből $p = \frac{b^2}{2a}$, egyszersmind

$$V = \frac{1}{2} \pi b^2 a.$$

Ha a parabola az y tengely körül forog a 31. ábrában feltüntetett orsószerű test keletkezik, köbtartalma

$$V = \pi \int_{-b}^b x^2 \cdot dy,$$

minthogy a parabola egyenletéből $x^2 = \frac{y^4}{4 \cdot p^2}$

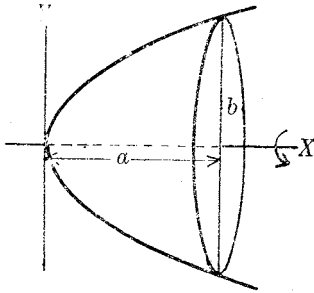
$$V = \pi \int_{-b}^b \frac{y^4}{4p^2} \cdot dy = \frac{\pi}{4p^2} \int_{-b}^b y^4 dy = \frac{\pi}{4p^2} \left[\frac{y^5}{5} \right]_{-b}^b,$$

$$V = \frac{\pi}{4p^2} \left[\frac{b^5}{5} + \frac{b^5}{5} \right] = \frac{2\pi b^5}{4p^2 \cdot 5}$$

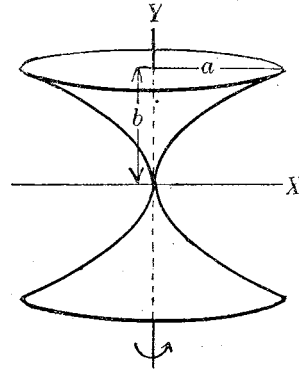
azonban ismét a parabola egyenletéből

$$4p^2 = \frac{b^4}{a^2} \quad \text{és} \quad \frac{1}{4p^2} = \frac{a^2}{b^4},$$

$$V = \frac{2\pi \cdot a^2 \cdot b}{5}.$$



30. ábra.



31. ábra.

3. *Forgásbeli ellipszoid köbtartalma.* A forgó görbe az ellipszis. Egyenlete

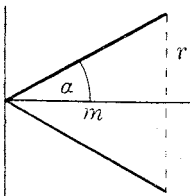
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{amiből} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Ha ez a görbe az a tengely körül forog

$$V = \pi \int_{-a}^{+a} y^2 \cdot dx = \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \cdot dx,$$

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a},$$

$$V = \frac{4}{3} \pi b^2 a.$$



32. ábra.

Ha az ellipszis a b tengely körül forog

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 \cdot b.$$

4. *Egyenes kúp köbtartalma.* (32. ábra.)

A forgó görbe a kezdőponton átmenő egyenes, amelynek egyenlete $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$

$$V = \pi \int_0^m y^2 \cdot dx = \pi \int_0^m x^2 \cdot (\operatorname{tg} \alpha)^2 \cdot dx = \pi (\operatorname{tg} \alpha)^2 \int_0^m x^2 \cdot dx,$$

$$V = \pi (\operatorname{tg} \alpha)^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^m = \pi (\operatorname{tg} \alpha)^2 \frac{m^3}{3}.$$

Minthogy az ábra szerint $r = m \operatorname{tg} \alpha$, amiből

$$(\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{r^2}{m^2},$$

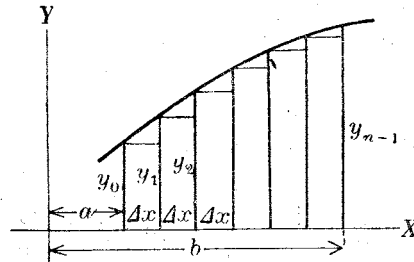
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot m.$$

Ezt az eredményt *Cavalieri* elvének alkalmazásával tetszés-szerinti kúpra, sőt a gúlára is ki lehet terjeszteni.

IV. Az integrálszámítás alaptétele.

Eddigélé a feladatokat oly módon oldottuk meg, hogy az ismeretlen szerkezetű függvénynek megkerestük a differenciálhányadosát és azután ezt integrálva megkaptuk az eredeti függvényt. A gyors alkalmazhatóság kedvéért az integrálnak újabb formális jelentést adunk, amely azonban lényegében nem különbözik a megelőzőtől.

Az eddig megoldott feladatok azt mutatják, hogy az integrál lényegében végtelen



33. ábra.

sok végtelen kicsiny tag összegét jelenti. Így például a görbe alatt fekvő területet a következő eljárásokkal is megkaphatjuk (33. ábra). A két szélső abszcissa (a és b) különbségét osszuk fel n egyenlő részre és minden osztási pontban emeljünk ordinátákat. Készítsünk téglalapokat, amelyeknek magasságaik mindig a baloldali ordináták. E téglalapok összege *közelítőleg* megadja a görbe alatt fekvő területet; a *megközelítés* annál nagyobb, minél több részre osztottuk fel az intervallumot. Szemléletünk és gondolkodásunk egyformán annak a felvételére kényszerít, hogy ha n minden határon túl nő, akkor a szóban forgó terület pontosan is megkapjuk. Ha tehát a téglalapok függőleges

oldalai sorban: $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ és a vízszintes oldal pedig Δx , akkor a terület

$$T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x\},$$

vagy rövidebben

$$T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum y \cdot \Delta x.$$

Mint hogy ugyanerről a területről már is megmutattuk, hogy egy integrállal egyenlő, ennél fogva

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum y \cdot \Delta x = \int_a^b y \cdot dx.$$

Világos az is, hogy a baloldali ordinata helyett a jobboldali vagy akármelyik közbeeső ordinátát is választhattuk volna, sőt az sem szükséges, hogy a téglalapok vízszintes oldalai mind egyenlők legyenek. A feltétel csak az, hogy ezek a Δx -ek a 0 felé konvergáljanak, ha a tagok száma minden határon túl nő.

A nyert egyenletnek a területszámítás problémáján messze túlmenő fontossága van. Azt az utat, amelyen idáig jutottunk úgy tekinthetjük, mint esetlegességet. A magas csúcsról nemcsak azt az utat láthatni, amelyiken tényleg a csúcsra jutottunk, hanem a többi lehetséges utakat is mind. A területszámítás az esetleges út, a nyert egyenlet a magas csúcs. Ehhez az egyenlethez még sok egyéb úton is eljuthattunk volna. Ha valaki köhidat akar építeni, akkor az egész hídnak vázát megcsinálja fából és erre rakja a nagy kőkövöket. Amint a híd fel van építve, a faállványt el lehet venni: a köhid nem dől össze, hanem áll sziklaszilárdan. A köhid a lényeges, a faállvány az esetleges. Hasonló helyzetben vagyunk a jelen esetben. A területszámítás a faállvány, a nyert egyenlet a köhid, amely akkor is megáll, ha a területszámítás faállványát el is vesszük alóla.

A gyakorlati életben igen sokszor kell a megelőzőhöz hasonló összegek határértékét kiszámítani. Mint hogy a tagok számának minden határon túl való növekedésével minden egyes tag a 0-hoz közeledik, azért azt is szokás mondani, hogy végtelen sok végtelen kicsiny tag összegének kiszámításáról van szó.

Az $f(x) \cdot \Delta x$ alakú végtelen sok végtelen kicsiny tag összege egy határhoz közeledik, amelyet úgy lehet megkapni,

hogy az $f(x)$ függvényt a és b határok között integráljuk, tehát

$$\lim_{\Delta x=0} \Sigma f(x) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

A matematikának vannak módjai és tételei, amelyek segítségével e tételt formálisan és lényegesen is jobban lehet bizonyítani, azonban a mi céljainknak a megelőző szemléletes bizonyítás teljesen elegendő. Mondanunk sem kell, hogy az $f(x)$ függvénynek bizonyos feltételeket kell teljesítenie. Így például a görbéjének folytonos vonallal kell meghúzzhatónak lennie, azonkívül a mondott határokon belül végtelenbe menő ágakkal sem bírhat.

Látjuk immár az integráljel keletkezését is. Az \int jel hosszúra nyújtott S betű, amely összeget (summa) akar jelezni.

Könnyű belátni, hogy az $y=f(x)$ görbe forgásánál keletkező test köbtartalmát, végtelen sok végtelen kis magasságú henger összege gyanánt foghatjuk fel, tehát

$$V = \lim_{\Delta x=0} \Sigma \pi y^2 \Delta x,$$

ami alaptételünk szerint egyenlő $\int_a^x \pi \cdot y^2 \cdot dx$ -szel és tényleg erre az eredményre jutottunk föntebb.

V. A gömb és részeinek felszíne.

Az egész gömb felületét egymáshoz közel eső párhuzamos körökkel végtelen sok végtelenül keskeny gömbövre bontjuk fel (34. ábra). Egy-egy ilyen gömböv területe ΔF csak igen kis mértékben különbözik oly téglalap területétől, amelynek alapja akkora, mint a gömböv kerülete $2\rho\pi$, magassága pedig akkora, mint a gömböv szélességéhez tartozó ív $r\Delta\varphi$. (Ha a szög abszolút mértékben van megadva, akkor az ív hossza = a szög mérőszáma szorozva a sugárral.) Tehát

$$\Delta F = 2\rho\pi \cdot r\Delta\varphi,$$

vagy mivel

$$\rho = r \cos \varphi,$$

$$\Delta F = 2\pi r^2 \cos \varphi \Delta\varphi.$$

Tehát

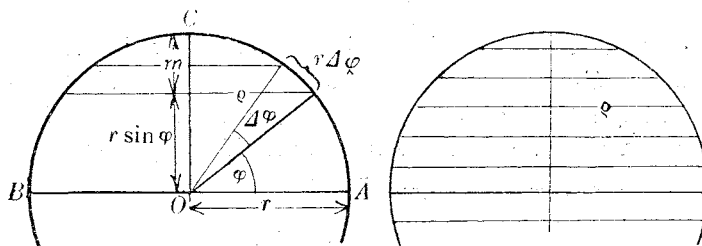
$$F = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \sum 2\pi r^2 \cos \varphi \cdot \Delta\varphi = \int_a^b 2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi.$$

A gömbcsüveg felszínénél az alsó határ $a = \varphi$, felső határ $b = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, tehát

$$F = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi = 2\pi r^2 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2\pi r^2 [\sin \varphi]_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}},$$

$$F = 2\pi r^2 [1 - \sin \varphi] = 2\pi r [r - r \sin \varphi],$$

$$F = 2\pi r \cdot m.$$



34. ábra.

A gömböv felszíne mint két gömbcsüveg felszínének különbsége adódik, tehát

$$F = 2\pi r m_1 - 2\pi r m_2 = 2\pi r (m_1 - m_2),$$

$$F = 2\pi r \cdot M,$$

ahol M a gömböv magassága. Ugyanerre az eredményre direkt integrációval is rájuthatunk.

A gömb felszíne

FIZIKAI SZÁMÍTÁSOK AZ INTEGRÁL SEGÍTSÉGÉVEL.*

I. Súlypontszámítások.

A súlypont a test minden egyes tömegelemére ható párhuzamos erők rezultánsának támadó pontja, különösen pedig a test súlyának a támadó pontja. Az egyirányú párhuzamos erők rezultánsa mindig a komponens erők egyszerű összegével egyenlő, tehát a súlypontba a test tömegét egyesítve gondolhatjuk. Így kapjuk a súlypont kiszámítására szóló szabályt: *a súlypontba egyesítve gondolt egész tömeg statikai momentuma egyenlő az egyes tömegelemek statikai momentumainak összegével.* Valamely tömegelem statikai momentuma a tömeg szorozva a *karjával*, vagyis valamely tengelytől vagy siktól való távolsággal (35. ábra). Tehát

$$M \cdot x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_k x_k = \Sigma m x,$$

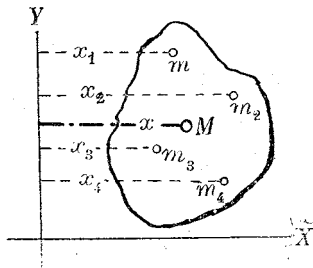
ahol

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = \Sigma m,$$

tehát

$$x = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}.$$

Ezek az összegeзések integrállal számíthatók ki, ha oly testek súlypontját keressük, amelyekben az anyageloszlás folytonos, vagyis amelyek nem diszkrét darabokból állanak. Síkszerű vagy lemez-szerű testeknél két-, háromdimenziós testeknél három koordi-



35. ábra.

* Hangsúlyozzuk, hogy az itt következő fizikai számításokat nem kívánjuk minden iskolában és minden osztállyal elvégeztetni. Jó osztály mellett és ha a fizika és matematika egy kézben van, ezeknek elvégzése semmi nehézséggel nem jár és úgy a matematikai, mint a fizikai tanítás javára válik. Ez esetben a számító fizika egyéb feladatainak a kidolgozása is módosul.

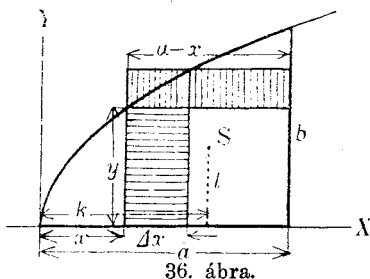
nátára van szükség, tehát az előbbeni egyenletet is kétszer, illetőleg háromszor kell alkalmazni. Mi csak oly testek súlypontjával fogunk foglalkozni, amelyek homogének. Ilyen esetben a tömeg a vonalmenti, a felületi vagy a közönséges sűrűség segítségével fejezhető ki. A vonalmenti sűrűség jelenti a vonalszerű test 1 centiméterének tömegét, a felületi sűrűség jelenti a lemezszerű test 1 négyzetcentiméterének tömegét, a közönséges sűrűség jelenti a test 1 köbcéntiméterének tömegét.

Minden esetben úgy fogunk eljárni, hogy először kiszámítjuk az illető test egy vonalelemét, egy területelemét vagy egy térfogatelemét. Ezt az elemet úgy választjuk, hogy minden pontjának karja a határ esetben ugyanaz legyen. Az elemet azután megszorozzuk a sűrűséggel és a karjával. Így megkapjuk a tömegelem statikai momentumát. Ezt összegezzük az egész testre. A sűrűségeket mindig σ -val fogjuk jelölni.

1. *Parabolaszelet súlypontja.* (36. ábra.) Először az y tengelyre, azután pedig az x tengelyre vonatkoztatjuk a statikai momentumokat.

A görbe egyenlete $y^2 = 2p \cdot x$ vagy $y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$,
 felületelem $y \Delta x$,
 tömegelem $\sigma y \Delta x$,
 tömegelem karja x ,
 tömegelem statikai momentuma az y tengelyre $\sigma y x \Delta x$,
 az egész test statikai momentuma az y tengelyre $M_y = \lim \Sigma \sigma y x \Delta x = \int_0^a \sigma y x dx$,

$$M_y = \sigma \sqrt{2p} \cdot \int_0^a x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \sigma \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}}.$$



Az egész test tömegét úgy kapjuk meg, hogy a területet a felületi sűrűséggel szorozzuk. A területre egy előbb már levezetett képletet is lehetne alkalmazni, de újból is kiszámíthatjuk. Az egész test tömege

$$M = \lim \Sigma \sigma y \Delta x = \int_0^a \sigma y dx = \sigma \cdot \sqrt{2p} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx = \sigma \cdot \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}},$$

$$k = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{5} a.$$

Az x tengelyre vonatkoztatva a

területelem	$(a-x) \Delta y,$
tömegelem	$\sigma (a-x) \Delta y,$
tömegelem statikai momentuma az	
x tengelyre	$\sigma (a-x) y \Delta y,$
az egész test statikai momentuma	
az x tengelyre	$M_x = \lim \Sigma \sigma (a-x) y \Delta y =$
	$= \int_0^b \sigma (a-x) y dy,$

$$M_x = \int_0^b \sigma (a-x) y dy = \sigma \int_0^b \left(ay - \frac{y^3}{2p} \right) dy = \sigma \left[\frac{1}{2} ab^2 - \frac{1}{8p} \cdot b^4 \right].$$

Ha ebben és az egész test tömegének fentebbi kifejezésében

$a = \frac{b^2}{2p}$ helyettesítést végzünk, lesz

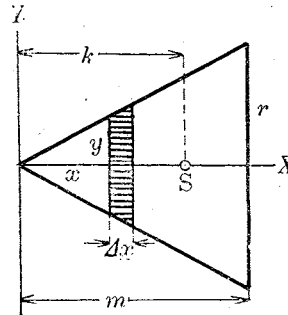
$$M_x = \sigma \frac{b^4}{8p}, \quad M = \sigma \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3}{p}$$

és így

$$l = \frac{M_x}{M} = \frac{3}{8} b.$$

2. Egyenes kúp súlypontja. (37. ábra.)

Mint hogy a szimmetria viszonyok folytán a súlypont csak a kúp magasságában lehet, elegendő, ha a súlypontnak a kúp csúcspontjától való távolságát számítjuk ki.



37. ábra.

Tömegelem	$\sigma \cdot y^2 \pi \cdot \Delta x,$
karja	$x,$
tömegelem statikai momentuma	$\sigma x \cdot y^2 \pi \Delta x,$
az egész test statikai momentuma	$M_y = \int_0^m \sigma x y^2 \pi dx.$

Mint hogy $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$, ahol α az a szög, amelyet az alkotó a magassággal bezár, lesz

$$M_y = \sigma \pi (\operatorname{tg} \alpha)^2 \int_0^m x^3 \cdot dx = \sigma \pi \cdot (\operatorname{tg} \alpha)^2 \frac{m^4}{4},$$

vagy mivel $r = m \operatorname{tg} \alpha$,

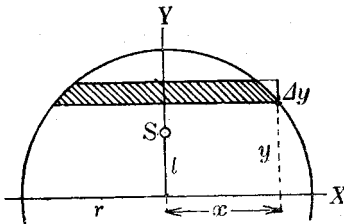
$$M_y = \sigma \pi r^2 \cdot \frac{m^2}{4}.$$

A test tömege $M = \sigma \frac{1}{3} r^2 \pi m$

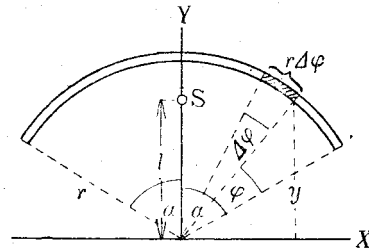
$$k = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{4} m.$$

3. *Félkörterület súlypontja.* (38. ábra.) A szimmetria viszonyok folytán ismét csak az l távolságot kell kiszámítani. Az egész test statikai momentuma az x tengelyre

$$M_x = \int_0^r \sigma 2x \cdot y \cdot dy.$$



38. ábra.



39. ábra.

A kör egyenlete $x^2 + y^2 = r^2$, amiből $x = (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$M_x = \sigma \int_0^r (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y \cdot dy = \sigma \left[-\frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r.$$

(Hogy a zárójelben lévő függvény az integrál, arról differenciálással könnyen meggyőződhetünk, el nem felejtve, hogy függvény függvényét differenciáljuk). Ha a felső határt helyettesítjük 0-t kapunk, tehát

$$M_x = \sigma \cdot \frac{2}{3} \cdot r^3,$$

$$l = \frac{M_x}{M} = \frac{\sigma \cdot \frac{2}{3} \cdot r^3}{\sigma \frac{1}{2} r^2 \pi} = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot r.$$

4. *Félgömb súlypontja.* (38. ábra.)

Térfogatelem (egy kis henger) $x^2 \cdot \pi \Delta y$,

kar y ,

tömegelem statikai momentuma ... $\sigma \cdot \pi \cdot x^2 \cdot y \cdot \Delta y$,

az egész test statikai momentuma ... $M_x = \int_0^r \sigma \cdot \pi x^2 y \cdot dy$.

Tekintetbe véve $x^2 = r^2 - y^2$

$$M_x = \sigma \cdot \pi \int_0^r (r^2 y - y^3) dy = \sigma \pi \frac{r^4}{4},$$

$$l = \frac{M_x}{M} = \frac{\sigma \pi \frac{r^4}{4}}{\sigma \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = \frac{3}{8} \cdot r.$$

5. *Körív súlypontja.* (39. ábra.) A súlypont a szimmetria viszonyok miatt csak a szögfelezőben fekszik. Az egész ívet felosztjuk apró ívelemekre.

Ívelem ... $r \Delta \varphi$,

tömegelem ... $\sigma r \Delta \varphi$,

karja ... $y = r \cos(\alpha - \varphi)$,

tömegelem statikai momentuma ... $\sigma r^2 \cos(\alpha - \varphi) \Delta \varphi$,

az egész ív statikai momentuma ... $M_x = \int_0^{2\alpha} \sigma r^2 \cos(\alpha - \varphi) d\varphi$.

$$M_x = \sigma r^2 \int_0^{2\alpha} \cos(\alpha - \varphi) d\varphi = \sigma r^2 [-\sin(\alpha - \varphi)]_0^{2\alpha} = \sigma r^2 2 \sin \alpha.$$

Az egész test tömege $M = \sigma \cdot r \cdot 2\alpha$

$$l = \frac{M_x}{M} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot r.$$

Félkörív esetében, amikor $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $l = \frac{2r}{\pi}$.

6. *Forgásbeli paraboloid súlypontja.* (30. ábra.) A súlypont a paraboloid forgási tengelyén fekszik.

Az egész test statikai momentuma a csúcsponton átmenő és a tengelyre merőlegesen álló síkra

$$M_y = \sigma \pi \int_0^a xy^2 dx = \sigma \pi 2p \int_0^a x^2 dx = \sigma \pi \cdot 2p \cdot \frac{1}{3} a^3,$$

Az egész test tömege:

$$M = \sigma \pi \int_0^a y^2 dx = \sigma \pi 2p \int_0^a x dx = \sigma \pi \cdot 2p \cdot \frac{1}{2} a^2,$$

$$k = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{3} a.$$

II. Tétlenségi momentum.

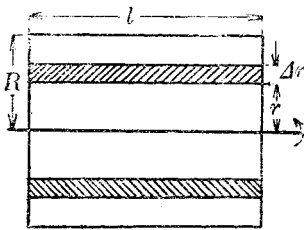
A forgó mozgásoknál lép fel a tétlenségi momentum, amely itt teljesen olyan szerepet játszik, mint a haladó mozgásoknál a tömeg. Ha egy nagyon kicsiny kiterjedésű testrészecskének a forgási tengelyből való távolsága r és tömege m , akkor tétlenségi momentuma $m \cdot r^2$. Ha a test több ilyen diszkrét anyagi pontból áll, akkor minden egyes pontra vonatkozólag kell e szorzatokat alkotni és azután összegüket képezni, vagyis ez esetben az illető tengelyre vonatkoztatott tétlenségi momentum

$$\Sigma mr^2.$$

Folytonos anyagi eloszlással bíró testet igen sok igen kicsiny tömegelemre képzeljük felbontva; egy-egy tömegelemnél, Δm -nél ügyelünk arra, hogy minden pontjának a tengelytől való távolsága ugyanaz legyen (r). Ezeknek összegét képezzük és áttérünk a határértékre, tehát a tétlenségi momentum

$$I = \lim \Sigma r^2 \Delta m = \int_a^b r^2 \cdot dm.$$

Ismét csak homogén testek tétlenségi momentumát számítjuk, amikor is a tömeget megkapjuk, ha a vonalelemet, terület-elemet vagy térfogatelemet a vonalmenti, a felületi vagy a közönséges sűrűséggel szorozzuk.



40. ábra.

1. Henger tétlenségi momentuma a tengelyére vonatkozólag. (40. ábra.) Térfogatelem Δr falvastagsággal bíró hengergyűrű, amelyet alkotója mentén felvágva és síkba kiterjesztve gondolunk, úgy hogy nagyon vékony lap keletkezik, amelynek köbtartalma keveset különbözik

$$2\pi r l \cdot \Delta r\text{-től.}$$

E tömegelem minden pontjának a tengelytől való távolsága keveset különbözik r -től, tehát a térfogatelem tétlenségi momentuma

$$\sigma \cdot 2\pi r \cdot l \cdot r^2 \cdot \Delta r.$$

Az egész test tétlenségi momentuma

$$I = \lim \Sigma \sigma \cdot 2\pi l \cdot r^2 \Delta r = \int_0^R \sigma 2\pi l r^2 dr,$$

$$I = \sigma 2\pi l \int_0^R r^3 dr = \sigma 2\pi l \frac{R^4}{4}.$$

A henger tömege $M = \sigma \cdot R^2 \pi \cdot l$, tehát

$$I = \frac{1}{2} MR^2.$$

Üres henger tétlenségi momentumának a számítása teljesen azonos, csak az integrál határai most: R_1 és R_2 , a külső és belső sugár, tehát

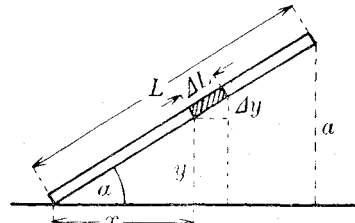
$$I = \sigma \cdot 2\pi \cdot l \cdot \frac{1}{4} \{R_1^4 - R_2^4\} = \sigma \cdot 2\pi l \cdot \frac{1}{4} \cdot \{R_1^2 - R_2^2\} \{R_1^2 + R_2^2\},$$

$$\{R_1^2 - R_2^2\} \pi \cdot l \cdot \sigma = M \text{ a test tömege, tehát}$$

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 - R_2^2).$$

Ez az eredmény egyaránt érvényes köralakú lapokra, körgyűrűkre, csövekre.

2. *Egyenes rúd tétlenségi momentuma.* (41. ábra.) L hosszúságú rúd a forgási tengellyel α szöget zár be. Az egész rudat felosztjuk ΔL elemekre.



41. ábra.

$$\text{Tömegelem} \dots \dots \dots \sigma \cdot \Delta L = \sigma \frac{\Delta y}{\sin \alpha},$$

tömegelem tétlenségi

$$\text{momentuma} \dots \dots \dots \sigma y^2 \frac{\Delta y}{\sin \alpha},$$

az egész test tétlenségi

$$\text{momentuma} \dots \dots \dots I = \lim \Sigma \sigma y^2 \frac{\Delta y}{\sin \alpha} = \int_0^a \sigma y^2 \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot dy.$$

$$I = \sigma \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \int_0^a y^2 dy = \sigma \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3,$$

$$a = L \sin \alpha \text{ és } \sigma L = M,$$

$$I = \frac{1}{3} \sigma L \cdot (L \sin \alpha)^2 = \frac{1}{3} M \cdot (L \sin \alpha)^2,$$

Ha a rúd merőleges a tengelyre $\alpha = \frac{\pi}{2}$ és $I = \frac{1}{3} ML^2$.

Abban az esetben, mikor a forgási tengely a rúd középpontján megy keresztül, a számítási menet ugyanaz, a határok azonban $-\frac{a}{2}$ és $+\frac{a}{2}$, az eredmény: $\frac{1}{12} \cdot M(L \sin \alpha)^2$, illetőleg $\frac{1}{12} ML^2$.

3. *Téglalap tétlenségi momentuma.* (42. ábra.) 1. A forgási tengely a b oldal.

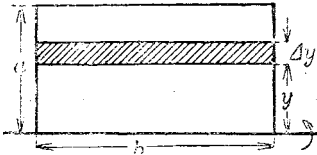
$$I = \int_0^a \sigma b y^2 dy = \sigma \cdot b \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 = \frac{1}{3} Ma^2.$$

2. Forgási tengely az a oldal $I = \frac{1}{3} Mb^2$.

3. Forgási tengely b -vel párhuzamos középvonal $I = \frac{1}{12} Ma^2$.

4. Forgási tengely a -val párhuzamos középvonal $I = \frac{1}{12} Mb^2$.

4. *Gömb tétlenségi momentuma.* Osszuk fel a gömböt



42. ábra.

párhuzamos síkokkal igen vékony szeletekre. Egy-egy ilyen szelet hengernek tekinthető, amelynek sugara ρ változó; vastagsága Δx . Az 1. pont alatt megmutattuk, hogy a henger tétlenségi momentuma a geometriai tengelyére $\frac{1}{2} MR^2$, ahol M

jelenti a henger tömegét, R pedig a sugarát, tehát a tömeg-elem (a henger) tétlenségi momentuma $\frac{1}{2} \sigma \rho^2 \pi \cdot \Delta x \cdot \rho^2$, az egész gömb tétlenségi momentuma

$$I = \lim \sum \frac{1}{2} \sigma \rho^2 \pi \Delta x \cdot \rho^2 = \int_{-r}^{+r} \frac{1}{2} \sigma \pi \rho^4 dx,$$

azonban $\rho^2 = r^2 - x^2$, tehát

$$I = \frac{1}{2} \sigma \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \sigma \pi \cdot \int_{-r}^{+r} (r^4 - 2r^2 x^2 + x^4) dx,$$

$$I = \frac{1}{2} \sigma \pi \left[r^4 x - \frac{2r^2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_{-r}^{+r} = \sigma \pi \cdot \frac{8}{15} r^5 = \frac{2}{5} Mr^2.$$

AZ INFINITEZIMÁLIS SZÁMÍTÁSOK ALKALMAZÁSA A FIZIKAI ALAPFOGALMAK TANÍTÁSÁBAN.

I. Az infinitezimális számítások és a természetről való fel- fogásunk.

A differenciál- és integrálszámítások egyik felfedezője *Newton* volt (élt: 1642 - 1713). Már az 1665-ik esztendőben foglalkozott az idetartozó gondolatokkal és bizonyos definíciókat megállapított és számítási eljárásokat alkalmazott. Azonban mindezekből ő maga semmit sem közölt és csak halála után váltak ismeretessé. Főcéljának fizikai kérdések megoldását tekintette. Ismeretes, hogy mai természetfölfogásunk alapfogalmait: a tér, az idő, a tömeg, a tétlenség, a gyorsulás, az erő fogalmait és egymáshoz való viszonyukat ő állapította meg először. Egy nagy természetfilozófiát alkotott, amelyben a föl-sorolt fogalmak és a reájuk vonatkozó törvények voltak arra hivatva, hogy a mindenségben lefolyó minden tüneményt megmagyarázzanak. Nem véletlen dolog, hogy egyszersmind ő az infinitezimális számítások felfedezője. A Newton-féle természetfilozófiának, tehát a *mostan uralkodó természetfölfogásnak is elengedhetetlen feltétele az infinitezimális mennyiségekre vonatkozó gondolkodási sémák ismerete.*

Hogy maga Newton az infinitezimális számításokra vonatkozó felfedezést nem közölte, ellenben a fizikára vonatkozó minden kutatását részletesen megírta, azt mutatja, hogy csak ez utóbbiakat tartotta értékeseknek. Az utána következő kor egészen a mai napig más véleményen volt: fizikai és matematikai felfedezéseit, fogalmait és megállapodásait egyformán értékelte; sőt míg a fizikai gondolkodási módjának a Faraday-féle természetfölfogásban hatalmas versenytársa támadt; addig matematikai gondolkodási módja mint kivétel nélkül általánosan elfogadott tan majd minden természettudományban uralkodóvá vált.

Véleményünk az, hogy a Newton-féle természetfölfogás és a Newton-féle matematikai fölfogás annyira összetartoznak, hogy egyiket a másik nélkül lehetetlen megérteni. Nem képzelhető oly elme, amely az infinitezimális gondolkodási mód nagy absztrakcióit a Newton-féle természetfilozófia képei nélkül föl tudná fogni. Viszont éppannyira, sőt még nagyobb mértékben áll a következő tétel: a fizika minden alapfogalmának helyes megalkotásához az infinitezimális mennyiségekre vonatkozó ismeretek elengedhetlenül szükségesek. Az elmúlt évszázad az infinitezimális számításokat mint «felsőbb matematikát» elkülönítette s oly szentélynek tartotta, ahová csak a legbeavatottabbak tehetik be lábukat, ellenben a Newton-féle fizikát alapfogalmaival együtt a középiskolába, sőt az elemi iskolába is bevitte és a legszélesebb körben terjesztette. Így történt, hogy a fizika legfontosabb alapfogalmainak megállapítása sok kinnal járt.

A Newton-féle természetfölfogás egyik jellemző oldala, hogy a természeti jelenségeket úgy tekinti, mint a testek tulajdonságainak és állapotainak szakadatlan változását. Tekintsünk akár egy bolygóra, amikor a Nap körül kering, akár a levegőre, mikor a hanghullámokat tovább szállítja, akár az ætherre mikor a közelben elektromos áram kering; mindenütt az egyik állapot következménye a megelőzőnek és szülője a következőnek. Mi a jelenségekről alkotott eme fölfogásunkat aztán mindig «elemeire» bontjuk, hogy ami ott «folytonosan» megy végbe, azt apró lépésekkel és lépcsőfokokkal — successiv ugrásokkal — előállítsuk. Az a fölfogásunk, hogy pl. a szabadon eső test sebessége «folytonosan» változik, azonban hogy ezt a mozgást és a sebességet el tudjuk képzelni, az egészet felbontjuk apró időközökre és a mozgást minden ilyen közben közelítőleg egyenletesnek tartjuk. Ezt a «folytonosan» növekvő sebességet is egy «folytonosan» működő erőnek tulajdonítjuk. Ismét úgy képzeljük, mintha a testet minden kis időközben az erő egy pillanatig meglökné. A körben mozgó testről pedig azt tanítjuk, hogy sebességének iránya folytonosan változik; ezt is úgy képzeljük, hogy a test igen kis távolsággal megy előre az érintő irányában aztán ugyancsak igen kis távolsággal befelé a középpont felé és így tovább.

Az a fölfogásunk, hogy ezek az infinitezimális lépések a folytonos valóságot mint ideált megközelítik.

A Newton-féle természetfölfogást jellemzi még a relativitás. A mennyiségek önmagukban sem nem nagyok, sem nem kicsinyek, csak akkor válnak ilyenekké, ha összehasonlítjuk őket. Azt képzeljük tehát, hogy minden dolgot annyiszor oszthatunk és annyiszor rakhatunk össze, ahányszor tetszik. Lefelé menve nincs legkisebb, felfelé menve sincs legnagyobb. Minden élő lény igen nagy a benne képzelt atómokhoz képest. viszont igen kicsiny a Földhöz képest. A Föld kicsiny a Naphoz képest és ez igen kicsiny a tejút-rendszerhez képest és így tovább. Így tehát különböző rendű nagyokról és kicsinyekről beszélhetünk. A háromszög területét párhuzamos egyenesekkel felbonthatjuk tetszésszerűen kis derékszögű sávokra. Ezeknek összege megadhatja az egész háromszöget oly pontossággal, amilyennek akarjuk, pedig tudjuk, hogy jobbra-balra kis há-háromszögek maradnak, amelyek nem tartoznak a derékszögű sávokhoz. Ezek másodrendű kicsinyek az elsőrendű kicsiny sávokhoz képest.

A végtelen kicsiny mennyiségekre vonatkozó gondolati sémák a természetről alkotott képzeleteinkkel annyira össze vannak forrva, hogy elválasztásuk csak zavart és kételkedést okoz. Ép azért meggyőződésünk és tapasztalatunk is az, hogy a fizika tanítása *igen jelentékeny mértékben könnyebbé és egyszersmind mélyebbé válik*, ha azt az infinitezimális számítások néhány igen egyszerű és hamar megérthető fogalmával és eljárásával összekapcsoljuk. Az alább következő tárgyalások a kérdést nem akarják kimeríteni, ép azért csak néhány főbb eset kerül bemutatásra.

II. Az anyagi pont mozgása.

1. *A sebesség és a gyorsulás.* A mozgó test *sebessége* oly fogalom, amelynek tartalma és jelentése még a tudományosan nem képzett ember előtt is egészen világosnak látszik, pedig e fogalom meghatározása az infinitezimális alapfogalmak nélkül alig lehetséges. A sebesség fogalma az egyenes vonalú egyenletes mozgásból származik. Ilyen mozgást végez a test, ha bármilyen kicsiny, de egyenlő időközökben egyenlő utakat tesz meg, vagyis ha az út (s) az idővel (t -vel) arányos, tehát annak elsőfokú (lineáris) függvénye.

$$s = c \cdot t, \text{ ahol } c \text{ állandó.}$$

Az ilyen mozgást épen az jellemzi, hogy az útnak és az időnek hányadosa állandó, az időtől független. Ezt a jellemző, állandó hányadost nevezzük *sebességnek*. Az egyenes vonalú egyenletes mozgásnál tehát a sebesség az útnak és időnek hányadosa, vagy népszerűen a másodpercenként megtett út.

A sebesség fogalmát használjuk oly mozgásoknál is, ahol a meghatározása már nem ilyen egyszerű. Így például, azt mondjuk, hogy a vonat sebessége nő, a mikor a nyílt pálya felé tart és csökken, mikor az állomáshoz közeledik. A függőlegesen lefelé eső test sebessége folyton nő, ellenben a fölfelé hajtotté folyton fogy. Mikor az inga a középső helyzete felé tart, sebessége nagyobbodik, ellenkező irányú mozgásánál kisebbedik. Mindenki érti, mit akarunk ezekkel a kitételekkel mondani, pedig e változó sebességű mozgásoknál a sebesség meghatározását nem ismeri.

A feladat tehát a következő: *mit jelent a sebesség a változó sebességű mozgásnál és hogyan kell azt meghatározni?*

Természet fölfogásunk az, hogy a sebesség *folytonosan* és nem *ugrásszerűleg* változik; az infinitezimális alapfogalmak módját adnak arra, hogy ezt a folytonos változást képzeinkkel előállítsuk. Ha ugyanis nagyon kis Δt időközöt képzelünk, akkor a hozzátartozó út Δs is nagyon kicsiny. Kétségtelen, hogy még ebben a kicsiny időközben is a sebesség folyton változik, úgy hogy a végső részében kissé más értékű, mint a kezdő részben, azonban az eltérés elhanyagolható. Ez időelemen belől tehát a mozgást egyenletesnek tekinthetjük és így a sebesség közelítő értéke $= \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Rendes gondolkodási menetünk azt követeli, hogy a sebesség pontos értékét úgy kapjuk meg, ha ennek a hányadosnak a határértékét vesszük. *A sebesség az útnövekmény és az idő-növekmény hányadosának határértéke, ha az idő-növekmény a 0 felé konvergál, vagyis a sebesség az útnak időszerint vett első differenciálhányadosa.*

Például a szabadon eső test útja a tapasztalat szerint az időnek (t -nek) négyzetes függvénye:

$$s = \frac{g}{2} t^2,$$

ahol g állandó, amelynek értéke Budapesten 9·81, ha a hosszú-

ságot méterrel, az időt pedig másodperccel mérjük. A sebesség folyton növekszik, tehát az időnek függvénye; kérdés, minő függvénye? Az előbbi megállapítás szerint az időt megnöveljük Δt -vel, kiszámítjuk az útnak új értékét, kivonjuk belőle a régi út értékét, így megkapjuk az útnövekményt.

$$\Delta s = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2 = gt \cdot \Delta t + \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$$

és a sebesség a t sec végső pillanatában

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + \frac{g}{2} \Delta t \right)$$

$$v = gt.$$

A szabadon eső test sebessége tehát az időnek elsőfokú (lineáris) függvénye, ami azt jelenti, hogy az idővel arányosan változik. Az ilyen mozgást *egyenletesen gyorsuló mozgásnak* nevezzük. Általában ilyen mozgást végez a test, ha a sebesség növekedése bármilyen kicsiny időközökben ugyanakkora. Az egyenletesen gyorsuló mozgást az jellemzi, hogy az útnak és az időnek hányadosa állandó, az időtől független. Ezt a jellemző állandó hányadost nevezzük *gyorsulásnak*.

A gyorsulás fogalmát használjuk oly mozgásoknál is, ahol a meghatározása nem ily egyszerű. Így például az inga mozgásnál a gyorsulás nem állandó, hanem maga is az időnek függvénye. Ily mozgások számára, a gyorsulás általános definícióját teljesen olyan módon adjuk meg, mint a sebességét. A gyorsulás jelenti a sebességnövekmény és az időnövekmény hányadosának határértékét, ha az időnövekmény a 0 felé konvergál, vagyis a gyorsulás a sebességnek időszerinti első és az útnak időszerinti második differenciáhányadosa.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

A szabad esésnél a gyorsulás $a = g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

2. A függőleges lefelé hajítás. Ha c kezdő sebességgel függőlegesen lefelé hajítunk egy testet, akkor a mozgások egymástól való függetlenségének elve folytán mindegyik mozgás

érvényesül és a rezultans elmozdulás összetevődik a c sebességű egyenletes mozgásból és a szabadesésből,

$$\begin{array}{llll} \text{az út} & \text{mint az idő függvénye} & s = ct + \frac{g}{2} t^2 \\ \text{a sebesség} & \text{« « « «} & v = \frac{ds}{dt} = c + gt \\ \text{a gyorsulás} & \text{« « « «} & a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g. \end{array}$$

3, *A függőleges fölfelé hajtás.* Ha c kezdő sebességgel függőlegesen felfelé hajtunk egy testet, akkor a megelőző okok folytán

$$\begin{aligned} s &= ct - \frac{g}{2} t^2, \\ v &= \frac{ds}{dt} = c - gt, \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -g. \end{aligned}$$

A legnagyobb hajtás magasság feltétele az, hogy az első differenciálhányados egyenlő legyen nullával, amiből

$$c - gt_m = 0; \quad t_m = \frac{c}{g}; \quad s_m = \frac{c^2}{2g}.$$

4. *Az egyenletesen gyorsuló mozgás általános tárgyalása.* Egyenletesen gyorsuló az olyan mozgás, amelynek gyorsulása állandó, ennélfogva

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{d^2s}{dt^2} = a, \text{ tehát} \\ v &= \frac{ds}{dt} = \int_0^t a \cdot dt + C = a \cdot t + C. \end{aligned}$$

Az integrálás állandóját a C -t abból a feltételből lehet meghatározni, hogy az időszámítás kezdetén, vagyis $t=0$ esetében minő kezdő sebessége volt a mozgó testnek, legyen ez $=v_0$ tehát

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= v = at + v_0, \text{ és így} \\ s &= \int_0^t v dt = \int_0^t (at + v_0) dt = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + A. \end{aligned}$$

Az integrálás állandóját az A -t abból a feltételből határozzuk meg, hogy az időszámítás kezdetén, vagyis a $t=0$ esetében milyen messze volt a mozgó test az útszámítás kezdőpontjától (a koordináta-rendszer kezdőpontjától) legyen ez $= s_0$. akkor

$$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0.$$

Az egyenletesen gyorsuló mozgás tehát meg van határozva, ha ismerjük a gyorsulását a -t, a kezdő sebességét v_0 -t és a kezdő helyzetét s_0 -t. A legtermészetesebb, ha az s_0 -t 0-nak vesszük.

5. *A vízszintes hajítás.* Ha c kezdő sebességgel vízszintes irányban elhajítunk vagy kilövünk egy testet, akkor a mozgások függetlenségének elve folytán mindegyik mozgás létrejön: a c sebességű vízszintes egyenletes mozgás és a függőleges szabad esés. Legyen a koordináta-rendszer kezdő pontja a kezdő helyzet, az abscissa tengely vízszintes és pozitív a lövés irányában, az ordináta tengely függőleges és pozitív lefelé, akkor t sec múlva a pont koordinátái

$$x = ct$$

$$y = \frac{g}{2} t^2.$$

Ha az első egyenletből a t -t kiszámítjuk és a másodikba helyettesítjük, kapjuk a pálya egyenletét:

$$y = \frac{g}{2 \cdot c^2} \cdot x^2;$$

ez lefelé nyíló parabola, amelynek tengelye az ordináta tengely és csúcspontja a kezdő pont.

6. *Függőleges felfelé hajítás vízszintesen mozgó testről.* Ha v_0 állandó sebességgel mozgó hajón egy labdát függőlegesen felfelé dobunk c kezdő sebességgel, minő mozgást végez a labda a nyugvó partokhoz képest? A mozgások függetlenségének elve ismét érvényesül és mindkét mozgás létrejön: egy vízszintes egyenletes mozgás és egy függőleges felfelé hajítás, amely maga is két mozgás összetétele. Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontja a kezdő helyzet, az abscissa-tengely vízszintes és pozitív a hajó mozgásának irányában, az ordináta tengely függőleges és pozitív fölfelé, akkor t sec múlva a mozgó labda koordinátái

$$x = v_0 t$$

$$y = ct - \frac{g}{2} t^2.$$

Ha az első egyenletből a t -t kiszámítjuk és a másodikba helyettesítjük, kapjuk a pálya egyenletét

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{c}{v_0} x,$$

oly parabola, amely lefelé nyílik és átmegy a kezdőponton, csúcspontjának koordinátái $\left(\frac{dy}{dx} = 0 \text{ feltételből}\right)$

$$x_1 = \frac{v_0 \cdot c}{g}$$

$$y_1 = \frac{c^2}{2g}.$$

7. *A ferde hajítás.* Ha c kezdő sebességgel elhajítunk vagy kilövünk egy testet oly irányban, amely a vízszintessel α szöget zár be, minő mozgást végez? Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontja a kezdőhelyzet, az abszcissa-tengely vízszintes és pozitív a hajítás vízszintes vetületének irányában, az ordináta-tengely függőleges és pozitív felfelé. A c kezdő sebességet felbontjuk egy vízszintes és egy függőleges komponensre, amaz: $c \cos \alpha$, emez pedig $c \sin \alpha$. A mozgást úgy tekintjük, mint három mozgás összetételét: az egyik $c \cos \alpha$ kezdő sebességgel bíró vízszintes egyenletes, a másik $c \sin \alpha$ kezdő sebességgel bíró függőlegesen felfelé irányuló egyenletes és a harmadik a szabad esés. t sec múlva a mozgó test koordinátái

$$x = c \cos \alpha \cdot t$$

$$y = c \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2.$$

A pálya egyenlete

$$y = -\frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x,$$

oly parabola, amely lefelé nyílik, átmegy a kezdőponton, csúcspontjának koordinátái $\left(\frac{dy}{dx} = 0 \text{ feltételből}\right)$

$$x_1 = \frac{c^2 \sin 2a}{2g}$$

$$y_1 = \frac{c^2 \sin^2 a}{2g}.$$

Ezekből következik a hajtási távolság és magasság és ezeknek maximuma változó a mellett.

8. *Egyszerű harmonikus mozgás.* Az egyszerű harmonikus mozgást a szokásnak megfelelően úgy definiáljuk, mint körpályán állandó sebességgel keringő pont mozgásának az átmérőre való vetületét. Legyen a körpálya sugara: a , a keringési idő: T , legyen továbbá az egyszerű harmonikus mozgást végző pontnak t időpillanatban a nyugalmi helyzettől való távolsága x , sebessége v , gyorsulása a , akkor az ismeretes elemi megfontolások alapján

$$\text{út} \quad x = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right),$$

$$\text{sebesség} \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{2a\pi}{T} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right)$$

$$\text{gyorsulás} \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4a\pi^2}{T^2} \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x.$$

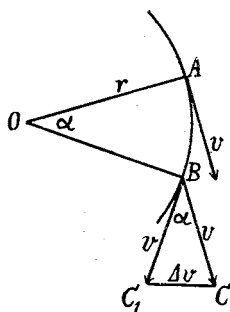
Látjuk, hogy a gyorsulás minden helyen a nyugalmi helyzettől való távolsággal arányos. A mozgás második törvénye szerint az erő a gyorsulás és a mozgó tömeg szorzata, tehát a mozgást létrehozó erő is a nyugalmi helyzettől való távolsággal arányos. Azt is látjuk, hogy a gyorsulás mindig ellenkező előjelű, mint az x és így mindig a nyugalmi helyzet felé irányul. *Egyszerű harmonikus mozgást csak oly erő hozhat létre, amely a nyugalmi helyzettől való kitéréssel arányos és mindig a nyugalmi helyzet felé irányul.* Ilyen erők a rugalmas erők (ut tensio sic vis), tehát emez erők harmonikus mozgást létesítenek.

9. *A centripetális gyorsulás.* Azok a levezetések, amelyekkel a középiskolai fizikai tankönyvek a centripetális gyorsulás kifejezését származtatják, nehézkesek és mégsem kielégítőek.¹ Az

¹ Az úgynevezett «elemi» levezetések ismertetését és kritikáját lásd Poske: Die Zentrifugalkraft (Abh. zur Didaktik u. Philosophie der Naturwiss. B. II.)

infinitesimális számítások elemei egyszerű és precíz levezetést engednek meg. Minden sebességváltozás létrejöttét úgy képzelhetjük, hogy a meglevő sebességhez mint vektorhoz újabb sebességvektor járul hozzá, s a kettőből a vektorok összeadásának elve alapján megszerkeszthető a rezultans. Ez az elv akkor is érvényes, amikor a sebességnek csak az iránya változik.

r sugarú körpályán (43. ábra) mozog egy pont v állandó sebességgel, ennél fogva a sebességnek csak az iránya változik. Úgy képzelhetjük, hogy a létező érintőmenti sebességhez minden pillanatban hozzájárul egy a középpont felé tartó sebességnövekmény. Van tehát centripetális gyorsulás, amely e sebesség-



43. ábra.

növekmény és az időnövekmény hányadosának határértéke. Végezzon a pont Δt idő alatt $v\Delta t = AB$ utat. Az A pontban lévő sebességet irány és nagyság szerint vigyük át a B pontba (BC), akkor látjuk, hogy ehhez még $CC_1 = \Delta v$ sebességnek kell hozzájárulnia, hogy a B pontban lévő sebességet, a BC_1 -et irány szerint megkapjuk. A Δv , a rajz alapján v sugarú körívnek tekinthető, amelyhez tartozó szög α , tehát

$$\Delta v = v \cdot \alpha.$$

Az α ugyanakkora, mint az AB ívhez tartozó középponti szög, tehát az abszolút egységek szerint mérve

$$\alpha = \frac{v \Delta t}{r}$$

$$\Delta v = \frac{v^2 \Delta t}{r}$$

és így a centripetális gyorsulás:

$$a_c = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$

A körpályán való egyenletes keringés a pálya minden pontjában úgy tekinthető, mint két mozgás rezultánsa; az egyik mozgás egyenletes vonalú egyenletes az érintő irányában, a másik egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló a sugar irányában.

A centripetális gyorsulás föntebbi értéke akkor is érvényes, ha a keringés nem egyenletes és ha nem körpályán, hanem más görbe vonalon megy végbe. Ez esetben az r helyébe az illető pontban uralkodó görbületi sugár teendő.

III. A forgó mozgás.

1. *A szögsebesség és a szöggyorsulás.* Ha a test valamely fix tengely körül forog, akkor minden pontja körpályát ír le. A tengelytől ugyanazon távolságban fekvő pontok lineáris sebessége ugyanaz, a különböző távolságban fekvő pontok sebessége a tengelytől való távolsággal arányos. *Minden pontnak a tengelytől való távolsága egyenlő időközökben egyenlő szöggel fordul el.* Ez a szögelfordulás tehát valamennyi pontra ugyanaz s így az egész test mozgására jellemző. A szögelfordulást abszolút egységekben mérjük, vagyis a szög mérőszáma (ϑ) a száraz közé rajzolt ívnek (s) és a sugárnak (r) hányadosa, egyszerűség kedvéért mindjárt azt az ívet vesszük, amelyet a pont mozgás közben leír

$$\vartheta = \frac{s}{r}.$$

Célszerű a szögsebesség és a szöggyorsulás fogalmát behozni. A szögsebesség általánosan jelenti a szögnövekmény és időnövekmény hányadosának határértékét, ha az utóbbi a 0 felé konvergál, vagyis jelenti a szögnek időszerinti differenciálhányadosát, tehát azt mutatja, hogy a szög az idő folyamán mily gyorsan változik.

A szögsebesség

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{s}{r} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

A $\frac{ds}{dt}$ pedig nem egyéb, mint a tekintetbe vett pontnak lineáris sebessége v és így

$$\omega = \frac{1}{r} \cdot v \text{ vagy } v = r \cdot \omega,$$

a forgó test bármely pontjának sebességét úgy kapom meg, hogy a test szögsebességét a tengelytől való távolsággal szorzom.

Egyenletes forgást végez a test, ha a szögsebesség állandó, így tehát a szög elfordulás

$$\vartheta = \omega t$$

az idővel arányos. Ez esetben természetesen a szögsebességet úgy is lehet definiálni, mint a szög és az idő hányadosát, vagy mint a másodpercenként megtett szögelfordulást.

A szöggyorsulás jelenti a szögsebesség-növekmény és az időnövekmény hányadosának határértékét, ha az utóbbi a 0 felé konvergál, vagyis jelenti a szögsebességnek időszerinti első vagy a szögnek időszerinti második differenciálhányadosát, tehát azt mutatja, hogy a szögsebesség az idő folyamán mily gyorsan változik.

A szöggyorsulás

$$\gamma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2s}{dt^2}.$$

A $\frac{d^2s}{dt^2}$ pedig nem egyéb, mint a tekintetbe vett pontnak vonalmenti gyorsulása a és így

$$\gamma = \frac{1}{r} \cdot a \text{ vagy } a = r \cdot \gamma,$$

a forgótest bármely pontjának vonalmenti gyorsulását megkapom, ha a test szöggyorsulását a tengelytől való távolsággal szorzom.

2. A forgótest kinetikus energiája. Legyen a forgó test szögsebessége bizonyos időpillanatban ω , a különböző pontoknak a tengelytől való távolsága: r_1, r_2, r_3, \dots ; tömege: m_1, m_2, m_3, \dots ; sebessége: v_1, v_2, v_3, \dots akkor $v_1 = r_1\omega$; $v_2 = r_2\omega$; $v_3 = r_3\omega, \dots$ A kinetikus energia pedig az egyes pontok kinetikus energiáinak összege.

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots = \Sigma \frac{1}{2} m v^2$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2 + \dots$$

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots] = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I.$$

A $\Sigma m r^2 = I$ összeget az illető tengelyre vonatkozó tétlenségi (inertia) momentumnak szokás nevezni.

3. A forgó mozgás alaptétele. Ha fix tengellyel bíró testre

erő vagy erőpár működik, forgó mozgás jön létre. Az erő a test szögsebességét növeli, vagyis szöggyorsulást teremt. A kérdés az, hogy a szöggyorsulás mitől függ? Ez összefüggés levezetésénél az energia megmaradásának elvére fogunk hivatkozni, amely szerint az erő munkája egyenlő a kinetikus energia növekedésével.

Legyen a forgó test szögsebessége ω , tétlenségi momentuma I , kinetikus energiája: $\frac{1}{2} I \omega^2$. Működjék most a tengelytől r távolságban lévő pontra Δt ideig p erő az r távolságra merőleges irányban és növelje meg az eredeti szögsebességet $\Delta \omega$ -val, és végezzen a Δt idő alatt az erő támadó pontja Δs útát. Ez a kis ívelem úgy tekinthető mintha egészen az erő irányába esnék.

A kinetikus energia növekménye = az erő munkája

$$\frac{1}{2} I (\omega + \Delta \omega)^2 - \frac{1}{2} I \omega^2 = p \Delta s$$

$$I \omega \Delta \omega + \frac{1}{2} I \Delta \omega^2 = p \Delta s$$

$$I \omega \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = p \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} - \frac{1}{2} I \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \cdot \Delta \omega$$

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{p \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} - \frac{1}{2} I \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \cdot \Delta \omega}{I \omega}$$

Ha Δt a 0 felé konvergál, akkor $\Delta \omega$ is a 0 felé konvergál, a $\frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ határértéke a szöggyorsulást, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ határértéke pedig a pont lineáris sebességét: $v = r\omega$ -t jelenti. A jobboldal számlálójának második tagja nullává válik, így tehát

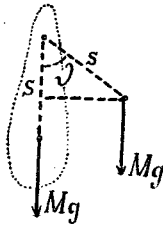
$$r = \frac{d\omega}{dt} = \frac{pv}{I\omega} = \frac{pr\omega}{I\omega} = \frac{pr}{I}.$$

A szöggyorsulás az erő forgató momentumával egyenesen, a tétlenségi momentummal pedig fordítva arányos. Tudjuk, hogy a haladó mozgásnál a vonalmenti gyorsulás az erővel egyenesen, a tömeggel pedig fordítva arányos. Látjuk a teljes analógiát: ami a haladó mozgásnál az erő, az itt a forgató-momentum, ami ott a tömeg, az itt a tétlenségi momentum.

4. Az *ingamozgás*. Ingának nevezhetünk minden testet, amely úgy van felfüggesztve, hogy egy tengely vagy egy pont körül foroghat, súlypontja a tengely alá esik és állandó erő

hatása alatt áll. Ha a test tömege M , a szabadesés gyorsulása g , akkor a test súlya Mg s ennek támadó pontja a súlypontban van. Rendes körülmények között a súlypont a felfüggesztési pont alatt van, az erőnek nincs karja, nincs forgató momentum: a test nyugszik. Ha valami zavaró erő a testet egyensúlyi helyzetéből kimozdítja, akkor a súlypont már nincs a felfüggesztési pont alatt, az erőnek karja lesz és forgató momentum keletkezik, amely a testet visszaforgatja az egyensúly helyzet felé. Azonban a nyert kinetikus energiánál fogva túlmegy rajta: elenkező irányú forgató momentum keletkezik, amely a kinetikus energiát elfogyasztja és ismét egyensúly helyzet felé viszi.

Legyen a súlypont távolsága a felfüggesztési ponttól s (44. ábra) és legyen bizonyos pillanatban a szögelfordulás ϑ , akkor az erő karja: $s \sin \vartheta$ és a forgató momentum: $Mgs \sin \vartheta$, tehát a megelőző tétel szerint a szöggyorsulás



44. ábra.

$$\gamma = - \frac{Mgs}{I} \sin \vartheta,$$

(a negatív előjelet kell használni, mert e gyorsulás mindig ellenkező irányú, mint a mozgás).

Vegyük tekintetbe az ingának oly pontját, amelynek a tengelytől való távolsága l , akkor e pont lineáris gyorsulását megkapjuk, ha a szöggyorsulást szorozzuk a tengelytől való távolsággal, tehát

$$a = l \cdot \gamma = - \frac{Mgs}{I} l \sin \vartheta.$$

Ha a ϑ szög nem igen nagy, akkor a $\sin \vartheta$ helyett egyszerűen a ϑ értékét tehetjük és $l \cdot \vartheta = x$ pedig jelenti a tekintetbe vett pont útját,

$$a = - \frac{Mgs}{I} \cdot x.$$

A gyorsulás a nyugalmi helyzettől való távolsággal arányos, tehát amint azt az I. 8. pont alatt bebizonyítottuk a pont csak egyszerű harmonikus mozgást végezhet. *Ha az inga kilengései nem igen nagyok, akkor egyes pontjai egyszerű harmonikus mozgást végeznek.* Az ott kapott gyorsulási értéknek egyeznie

kell az itt levővel, tehát

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x = \frac{Mgs}{I} x,$$

ebből az inga lengési ideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgs}}.$$

Az úgynevezett matematikai inga súlyos golyó, amely oly fonálra van felfüggesztve, amelynek súlyát el lehet hanyagolni. Ez esetben $I = Ml^2$, és $s = l$, ha l jelenti a fonál hosszúságát, tehát

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

A lengési időnek emez képletei természetesen csak közelítőleg igazak, de fizikai szempontból teljesen pontos eredményt adnak, ha a kilengés néhány foknál nem nagyobb.

Egészen hasonló módon kapjuk a *torziós* mérleg lengési idejét

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}},$$

ahol $f = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau r^4}{l}$, τ jelenti a torzió coefficientst, r a drót sugarát és l a hosszát, továbbá a vízszintes síkban lengő mágnesüstű lengési idejét

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{H \cdot \mu}},$$

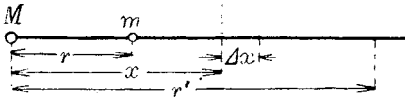
ahol H a földmágnességnek horizontális intenzitása, μ pedig a mágnesüstű mágneses momentuma.

IV. A potenciál.

1. *A potenciál fogalmának bevezetése.* A potenciál a Newton felfogásán alapuló elméleti fizikának igen nevezetes fogalma, amely a természeti jelenségek áttekintését lényegesen megkönnyíti. Ez a fogalom kitűnően illusztrálja azt a módszert, hogyan lehet a végtelen kicsinyekkel való számításokat — úgy a differenciá-

lást, mint az integrálást — a természeti viszonyokra alkalmazni. Megmutatja egyszersmind azt a sajátos eljárást, a hogyan a fizikusok a természeti hatásokat elemeikre bontják, illetőleg ilyenekre felbontva képzelik és ahogyan aztán ilyen elemi hatások összegezéséből (integrálásából) a véges hatást megkapják. Ép azért a potenciálra vonatkozó ismeretek elemeit itt bemutatjuk.

Legyen a térben két anyagi pont, tömegeik M és m , a köztük lévő távolság r (45. ábra). E két pont között vonzó erő működik, a mely Newton általános tömegvonzási tétele szerint a két tömeggel egyenes, a távolság négyzetével pedig fordított arányban van. Mekkora az a munka, a melyet a vonzó erő ellen végzünk, a mikor az m tömeget r távolságból r' távolságba visszük? A munka az erő szorozva az úttal (ha az erő iránya és az út iránya, miként a jelen esetben, összeesik). Azonban a



45. ábra.

számítást így közvetlenül elvégezni nem lehet, mert az erő pontról-pontra kisebbedik.

Ennélfogva az egész $r-r'$ távolságot felosztjuk igen kicsiny út-elemekre, mindegyikre kiszámítjuk a munkát és ezeket összegezzük. Egy közbeeső x távolságban:

$$\text{az erő} \dots \dots \dots f \frac{M \cdot m}{x^2}; (f \text{ gravitációs állandó})$$

$$\text{útelem} \dots \dots \dots \Delta x$$

$$\text{munkaelem} \dots \dots \dots f \frac{M \cdot m}{x^2} \Delta x$$

$$\text{az egész munka } L = \lim. \sum f \frac{M \cdot m}{x^2} \Delta x = \int_r^{r'} f \frac{Mm}{x^2} dx$$

$$L = f \cdot M \cdot m \cdot \int_r^{r'} x^{-2} dx = f \cdot M \cdot m \left[-x^{-1} \right]_r^{r'} = f \cdot M \cdot m \left[-\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} \right]$$

$$L = f \cdot M \cdot m \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right].$$

Legyen a térben két anyagi pont: M (gramm) és 1 gramm a köztük lévő távolság legyen r . Mekkora munkát kell végezni,

ha az 1 grammnyi tömeget a vonzó erővel szemben az r távolságból a végtelenségig eltávolítjuk? Az előbbi feladatból nyerjük a megoldást, ha $m = 1$ -et és $r' = \infty$ -t helyettesítünk:

$$V = f \frac{M}{r}.$$

Ezt a V munkát nevezzük az M vonzó tömeg által az r távolságban létesített *gravitációs potenciálnak*. *Valamely vonzó tömeg által a tér valamely pontjában létesített gravitációs potenciál jelenti azt a munkát, amelyet a gravitációs erő ellen végezni kell, ha az 1 grammnyi tömeget a mondott távolságból a végtelenségig eltávolítunk; vagy előjelet nem tekintve, azt a munkát, amelyet a gravitációs erők végeznek, ha az 1 grammnyi tömeget a végtelenségből az illető pontba hozzák.*

Hasonlóképen definiálható és levezethető a mágneses és az elektrosztatikai potenciál. A különbséget csak az okozza, hogy a két fajta mágneses polusok és a kétnemű elektromos töltések miatt vonzó és taszító erők is felléphetnek és így a potenciál pozitív és negatív is lehet. Ha a tér valamely pontjában M mennyiségű mágnesség van, akkor a tőle r távolságnyra fekvő pontokban

$$V = \frac{M}{r} \text{ potenciált}$$

létesít, ami itt azt a munkát jelenti, amelyet végzünk, amidőn a $+1$ mennyiségű mágnességet a végtelenségből az r távolságba hozzuk.

Ha viszont a tér valamely pontjában E mennyiségű elektromosság van, akkor a tőle r távolságnyra fekvő pontokban

$$V = \frac{E}{r} \text{ potenciált}$$

létesít, ami itt szintén azt a munkát jelenti, amelyet végzünk, amidőn a $+1$ mennyiségű elektromos töltést a végtelenségből az r távolságba hozzuk.

Hogy most nem a végtelenbe való kivitelt, hanem a végtelenből való behozatalt használjuk a definícióban, azért van, hogy a taszító erő esetében a potenciál pozitív legyen. De ez lényegbe nem vág. Meg kell továbbá említeni, hogy itt az f

faktor azért maradhat el, mert az «elektromosság» és «mágnesség» egységét úgy állapíthatjuk meg, — illetőleg úgy szokás megállapítani — hogy ez az arányossági faktor 1 legyen.

A megelőző definíciókban úgy képzeltük, hogy a ható tömegeket egyenes vonalban vittük ki a végtelenbe, vagy egyenes vonalban hoztuk onnét be. A tapasztalat azt mutatja, hogy úgy a tömegvonzás, mint a mágneses és elektromos erők esetében a munka független az úttól és csak a kezdő és végső pontok helyzetétől függ. Ennélfogva bármicsoda görbevonalú út mellett is ugyanaz lesz a munka.

Ha a ható tömeg nem egy, hanem több anyagi pontból áll, akkor mindegyik létesíti a maga potenciálját a tekintetbe vett pontban. Ez esetben az illető pontban a potenciál:

$$V = f \left[\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} + \frac{M_3}{r_3} + \dots \right] = f \cdot \sum \frac{M}{r},$$

ahol $M_1, M_2, M_3 \dots$ jelentik a ható pontok tömegét, $r_1, r_2, r_3 \dots$ pedig a tekintetbe vett ponttól való távolságait.

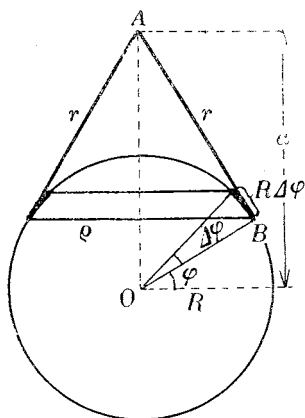
Ha folytonos anyag-eloszlással bíró testről van szó, akkor az egész testet felosztjuk tömegelemekre, ezeknek potenciáljait összegezzük és az összegnek határértékét vesszük. Világos, hogy ebből ismét integrál lesz:

$$V = f \cdot \sum \frac{\Delta m}{r} = f \cdot \int_a^b \frac{dm}{r},$$

ahol a tömegelemet és a határokat úgy kell megállapítani, hogy az egész test minden eleme tekintetbe jöhessen.

A mágnességnél és elektromosságnál f faktor elmarad és egyszerűség kedvéért a következő feladatokban a gravitációs potenciál számításánál is elhagyjuk.

2. *Gömbhéj és gömb potenciálja valamely kívül fekvő pontban* (46. ábra). Legyen az A pont távolság a gömbhéj középpontjától a , a felületi sűrűség (cm^2 -enkénti grammok száma)



46. ábra.

σ ; a gömbhéjat először igen vékonynak képzeljük. Az egész gömbhéjat oly *elemekre* osztjuk, amelyek minden pontjának távolsága az A ponttól ugyanaz. Ilyen elemek igen kis magasságú gömbövek. Legyen egy ilyennek sugara $\rho = R \cos \varphi$. Kiterjesztve területe nagyon kevésbé különbözik oly téglalap területétől, amelynek hosszúsága $2\rho\pi$, magassága $R\Delta\varphi$.

felületelem	$2\rho\pi R\Delta\varphi = 2R^2\pi \cos \varphi \Delta\varphi$
tömegelem	$\sigma \cdot 2R^2\pi \cos \varphi \cdot \Delta\varphi$
tömegelem potenciálja A pontban	$\frac{\sigma \cdot 2R^2\pi \cos \varphi \Delta\varphi}{r}$

az egész gömbhéj potenciálja A pontban :

$$V = \lim. \sum \frac{\sigma 2R^2\pi \cos \varphi \Delta\varphi}{r} = 2R^2\pi\sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{r} \dots$$

Az $\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{r}$ -ben két változó van: φ és r ; az egyiket ki kell a másikkal fejezni. Az AOB háromszögben a cosinus tétel szerint

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + R^2 - 2aR \cos(90 - \varphi) \\ r^2 &= a^2 + R^2 - 2aR \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ha ezt az egyenletet φ szerint differenciáljuk újból helyes egyenletet kapunk, a és R állandók.

$$2r \frac{dr}{d\varphi} = -2aR \cos \varphi,$$

vagy

$$2rdr = -2aR \cos \varphi d\varphi,$$

amiből

$$\frac{\cos \varphi d\varphi}{r} = -\frac{dr}{aR}.$$

Az új változó tehát r ; az ábrából látjuk, hogy amikor $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, akkor $r_1 = a + R$, és ha $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, akkor $r_2 = a - R$, tehát az új alsó határ: $a + R$, a felső határ: $a - R$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{r} = \int_{a+R}^{a-R} \left(-\frac{dr}{aR} \right) = -\frac{1}{aR} \int_{a+R}^{a-R} dr = -\frac{1}{aR} \left[r \right]_{a+R}^{a-R}$$

$$= -\frac{1}{aR}[-2R] = \frac{2}{a}$$

$$V = \frac{4R^2\pi \cdot \sigma}{a} = \frac{M}{a},$$

mert $4R^2\pi$ a gömb felszíne.

Homogén gömbhéjtól valamely külső pontban létesített potenciál egyenlő értékű azzal, amely keletkezik, ha az egész gömbhéj tömegét a középpontban összesűrítjük.

Ez a tétel a véges falvastagságú homogén gömbhéjra és a telt gömbre is érvényes. Bontsuk fel ugyanis e testeket igen sok, igen vékony koncentrikus gömbhéjakra, akkor mindegyiknek a tömegét a középpontba egyesítve gondolhatjuk és az így egy pontba egyesített egész tömegnek számíthatjuk a potenciálját.

3. *Gömbhéj potenciálja valamely belül fekvő pontban.* Ha az A pont a gömbhéjon belül fekszik, amikor is $a < R$, akkor az előbbi megfontolások érvényesek maradnak egészen a határok megállapításáig. Ebben az esetben az alsó határ ugyanis $r_1 = a + R$ és a felső határ $r_2 = R - a$, a miről az olvasó meggyőződhetik, ha magának az esetet megrajzolja. — Tehát

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{r} = -\frac{1}{aR} \int_{a+R}^{R-a} dr = \frac{2}{R}$$

$$V_1 = \frac{4R^2\pi\sigma}{R} = \frac{M}{R}.$$

Homogén gömbhéjtól egy belső pontban létesített potenciál egyenértékű azzal, amely keletkezik, ha az egész gömbhéj tömegét a középpontban összesűrítjük és az így nyert egyetlen anyagi pontnak valamely a felületen fekvő pontra vonatkozó potenciálját számítjuk. Akárhonnan van az A pont a gömbhéjon belül a potenciál ugyanaz marad. Világos, hogy ez a tétel véges falvastagságú homogén gömbhéjra is érvényes.

4. *Aquipotenciális vagy nivófelületek.* A gömbhéj és a gömb potenciálját kiszámítottuk, hasonlóképen lehet eljárni más testekkel is, a számítás azonban nagyon komplikálttá válhatik; mindazonáltal azt képzelhetjük, hogy bármilyen testtől létesített potenciált valami módon meg lehet határozni. Ez a potenciál minden esetben jelenteni fogja azt a munkát, a melyet

végezni kell, ha az 1 gramm tömegét az illető helyről a végtelenbe kivisszük (elektromosság esetében a $+1$ elektromosságot a végtelenségből az illető helyre hozzuk).

A testet körülvevő tér minden pontjában a potenciálnak van valamilyen értéke. Az *aequipotenciális vagy nivófelület összekapcsolja mindazokat a pontokat, amelyekben a potenciál értéke ugyanaz*. Az æquipotenciális felület egyenlete

$$V = C \text{ (állandó),}$$

amint a C állandónak más és más értéket tulajdonítunk, más és más nivófelületet kapunk. Ennélfogva a testet a nivófelületek egész sorozata veszi körül. Minthogy pedig minden irányban mehetünk ki a végtelenbe, kell hogy mindegyik nivófelület zárt felület legyen.

Pont, gömb vagy gömbhéj esetében a nivófelület egyenlete

$$\frac{M}{r} = \text{állandó,}$$

ami csak úgy lehetséges, ha $r = \text{állandó}$, vagyis a nivófelületek koncentrikus gömbfelületek. Ha a térben van két anyagi pont, vagy két gömb, amelyeknek tömegeik M_1 és M_2 , akkor a nivófelületek egyenlete

$$\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} = C,$$

ahol C tetszésszerűen állandó r_1 és r_2 pedig a nivófelület bármely pontjának távolságai az adott pontoktól vagy a gömbök középpontjaitól, r_1 és r_2 tehát változók és úgy tekinthetők, mint a pontok bipoláris koordinátái. Ha a tömegek egyenlők, akkor

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{állandó,}$$

ha

$$M_1 = 2M_2,$$

akkor

$$\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{állandó.}$$

Ha e nivófelületeket oly síkkal metszük, amely az adott pontokon átmegy, akkor görbevonalakot kapunk, amelyeket könnyű megszerkeszteni. A megszerkesztés céljából az állandó

számára bizonyos értéket választunk, azután az r_1 -nek egy se-reg értéket adunk, a hozzátartozó r_2 értékeit kiszámítjuk. Egy-egy értékpár pontot határoz meg, amelyet az adott pontokból körző segítségével megrajzolhatunk.

Két különmemű, de ugyanakkora töltésű elektromozott golyó körül a nivófelületek egyenlete:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{állandó}.$$

5. *A munka és a potenciál.* Legyen a térben egy ható test, a mely maga körül a tér minden pontjában potenciált létesít, mekkora az a munka, amelyet végzünk, amikor m tömeget a tér egyik pontjából a másikba visszük? Ha a tér ama két pontjában az adott testtől létesített potenciál értékei: V_1 és V_2 , akkor a keresett munka:

$$L = m(V_1 - V_2).$$

A munkát megkapjuk, ha a mozgó tömeget a kezdő és végső pontokban lévő potenciálok különbségével szorozzuk.

Nincs tehát munkavégzés, amikor a tömeg valamely nivófelület mentén mozog.

6. *A potenciál és az erő.* A munka az erő útírányába eső komponensének és az útnak szorzata. Minthogy nincs munkavégzés, amikor a tömeg valamely nivófelület mentén mozog, ennél fogva az erőnek a nivófelület irányában nem is lehet komponense: *az erő a nivófelületekre mindenütt merőleges.*

Ha oly görbevonalat szerkesztünk, amelyek a nivófelületekre mindenütt merőlegesek, akkor megkapjuk az *erővonalakat*. Az erővonalakhoz húzott érintő megmutatja az illető érintési pontban az erő irányát.

A potenciál értéke nemcsak az erő irányát, hanem az erő nagyságát is meghatározza. Létesítsen valamely test a tér két pontjában, amelyek Δr távolságnyra vannak egymástól V és $V + \Delta V$ potenciálokat. Mozogjon ~~valamely~~ m tömegű test a tér egyik pontjából a másikba, akkor az előbbiek szerint a munka $m\Delta V$ és ez két határ közé szorítható,

$$P \cdot \Delta r < m\Delta V < P' \Delta r,$$

ahol P és P' jelentik az erő nagyságát a Δr távolság két végén

$$P < m \frac{\Delta V}{\Delta r} < P'.$$

Ha áttérünk a határra, vagyis ha Δr a 0 felé konvergál, akkor a két határ összeesik, így

$$\dot{P} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} m \frac{\Delta V}{\Delta r}.$$

$$P = m \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Ennek a két egyenletnek igen nagy értéke van, mert segítségével az erőt meg lehet határozni. Tegyük fel, hogy a nívófelületeknek és a síknak metszetei, «a *nívóvonalak*» meg vannak rajzolva, akkor a tér bármely pontjában az egységnyi tömegre működő erő nagyságát *közelítőleg* úgy határozzuk meg, hogy választunk egy szomszédos pontot, meghatározzuk a két pont potenciálkülönbségét és ezt elosztjuk a köztük lévő távolsággal. Ha a potenciál meg van adva, mint a koordináták függvénye, akkor valamelyik koordináta szerint differenciáljuk és akkor megkapjuk az illető koordináta irányában az egységnyi tömegre működő erőt.

7. *Gömbök és gömbhéjak vonzása.* Megmutattuk, hogy az M tömegű homogén gömbhéj vagy gömb potenciálja valamely kívül fekvő pontban,

$$V = \frac{M}{a},$$

ahol a a pont távolsága a gömb középpontjától.

Ha ebben a kívül fekvő pontban m tömeg van, akkor a köztük működő vonzó erő

$$P = m \frac{dV}{da} = m \frac{d}{da} (Ma^{-1}) = -\frac{mM}{a^2},$$

(a negatív jel abból származik, mert a taszító erő van pozitívnek véve). *Homogén gömbhéjnak vagy gömbnek vonzását kívül fekvő pontokra úgy vehetjük számításba, hogy az egész tömeget a középpontba egyesítve gondoljuk.*

Megmutattuk továbbá, hogy az M tömegű homogén görhéj potenciálja valamely belül fekvő pontban

$$V = \frac{M}{R},$$

ahol R a gömbhéj külső sugara. Ez a kifejezés állandó, teljesen független az illető belső pont helyétől, ennél fogva a differenciál hányadosa $= 0$. *Homogén gömbhéj vonzása belül fekvő pontokra és testekre egyenlő 0-val.* Ha tehát Földünk homogén gömbhéj volna, akkor a belső üregben lévő testeknek nem volna súlyuk.

Ennek a tételnek a következménye az, hogy a nehézségi erő a Föld felületén a legnagyobb. Ha kifelé távozzunk a világűr felé, akkor a nehézségi erő a távolság négyzetével fordítva arányosan változik, vagyis kétszeres távolságban már négyszeresen kisebb lesz és így tovább. Viszont ha befelé megyünk a Föld belseje felé, a nehézségi erő ekkor is fogy. Ennek belátása céljából kövessük figyelemmel a következő okoskodást. Ha a Föld belsejébe lyukat fúrunk, úgy hogy a középponttól már csak s távolságra leszünk, akkor e helyen az m tömegre működő nehézségi erőt két részből állíthatjuk elő: az egyik rész a belső s sugarú teljes gömb nek a vonzása, a másik rész pedig a külső gömbhéj vonzása. Ez utóbbi az előbbiek szerint $= 0$ -val, marad a belső teljes gömb vonzása, amely úgy számítható ki, hogy egész tömegét a középpontba összesűrítve gondoljuk és úgy vesszük számításba. Tehát:

$$P = \frac{m \cdot \frac{4}{3}s^3 \pi \cdot \sigma}{s^2} = \left(\frac{4}{3}m \cdot \pi \cdot \sigma\right) \cdot s$$

ahol σ a Föld középsűrűségét jelenti. Látjuk, hogy *a nehézségi erő a Föld belsejében egyszerűen a középponttól való távolsággal arányos.* Magában a középpontban tehát tényleg egyenlő 0-val.

FELADATOK.

Ábrázoljuk a következő függvényeket és vizsgáljuk meg a szélső értékeiket és változásukat:

- | | |
|---|--|
| 1. $y = 3x^2 - 2x^3$ | 2. $y = x^3 - 2x^2 - x + 3$ |
| 3. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ | 4. $\frac{y}{6} = \frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{2}$ |
| 5. $10y = x^3 - 12x + 9$ | 6. $y = x^4 - 6x^2 + 8$ |
| 7. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + \frac{9}{4}$ | 8. $4y = x^4 - 6x^2 + 8$ |
| 9. $\frac{y}{x} = 4 - x^2$ | 10. $\frac{y}{x^2} = 3 - x$ |
| 11. $y^2 = x^2 + x^3$ | 12. $yx^2 = 4 + 2x^2$ |
| 13. $y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$ | 14. $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$ |
| 15. $y = -\frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$ | 16. $y = x - \frac{x^3}{3!}$ |
| 17. $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ | 18. $y = 1 - \frac{y^2}{2!}$ |
| 19. $y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ | 20. $y = x + \cos x$ |
| 21. $y = x + \sin x$ | 22. $y = x + \sin 2x$ |
| 23. $y = x - 2 \sin 2x$ | 24. $y = \frac{x}{2} + \sin x$ |
| 25. $y = \frac{1}{2}x - 1 + \sin x$ | 26. $y = x^2 + \sin x$ |
| 27. $y = \sin x + \cos x$ | 28. $y = \sin x - \cos x$ |
| 29. $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ | 30. $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ |

31. Körbe írható egyenlőszárú háromszögek és téglalapok közül melyiknek területe és melyiknek kerülete a legnagyobb?

32. Félkörbe írható téglalapok és csúcson álló egyenlőszárú háromszögek közül, melyiknek területe és melyiknek kerülete a legnagyobb?

33. Gömbbe írható hengerek közül, melyiknek felszíne, melyiknek köbtartalma és melyiknek palástja a legnagyobb?

34. Gömbbe írható kúpok közül, melyiknek köbtartalma, melyiknek palástja a legnagyobb?

35. A félgömbbe írható csúcson álló kúp köbtartalma és palástja mikor a legnagyobb?

36. A félgömbbe írunk egy hengert és föléje egy kúpot. E kettős test köbtartalma mikor a legnagyobb?

37. Téglalap alakú papírlapból maximális térfogatú nyitott dobozt kell készíteni. (A téglalap oldalai $a = 12$, $b = 8$.)

38. Melyik az egyenes kúpba írható legnagyobb köbtartalmú henger?

39. Forgásbeli ellipszoidba írható hengerek közül melyiknek köbtartalma és melyiknek palástja a legnagyobb?

40. Forgásbeli paraboloidszeletbe, melynek magassága a , legnagyobb köbtartalmú henger irandó.

41. A síkon van két pont A és B , A pont távolsága egy faltól a , B ponté b . Mindkét pont a falnak ugyanazon oldalán fekszik. Az a feladat, hogy A pontból a falat érintve a B pontba kell menni. Melyik út lesz a legrövidebb? (A helyes megoldás a visszaverődés törvényét adja.)

42. Két mező van, amelyeket egyenes vonalú határ választ el egymástól. Az egyik mezőben van A pont, távolsága az elválasztó egyenestől a , a másik mezőben van B pont, távolsága az elválasztó egyenestől b . A pontból B pontba kell jutni a lehető legrövidebb idő alatt. Milyen úton kell menni, ha az első mezőben a haladási sebesség $v_1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, a másik mezőben $v_2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$? (A helyes megoldás a fénytörés törvényét adja.)

43. Rajzoljuk meg az $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ kört. Mely pontokban metszi a koordináta tengelyeket, melyekben az $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ egyenest? Határozzuk meg ezekben a pontokban húzható érintők egyenleteit.

44. $x^2 + y^2 = 25$ körnek $x = 4$ által meghatározott két pontjához két érintő tartozik. Állítsuk fel egyenleteiket és mutassuk meg, hogy az x tengelyen metszik egymást.

45. Mely pontokban érintik az $(5, -3)$ pontból húzható érintők $x^2 + y^2 = 16$ kört?

46. Állítsuk fel $y = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ parabolának $x = 4$ által meghatározott pontjaihoz húzott érintők egyenleteit.

47. Állítsuk fel $y^2 = 2px$ parabola $x = a$ által meghatározott pontjához húzott érintő egyenletét. Az érintőre az érintési pontban emelt egyenest *normális*-nak nevezzük. Mi ennek egyenlete?

48. Mely pontban érinti $4x + 5y = 25$ egyenes az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszist?

49. Két kör egyenletei:

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \text{ és } x^2 + y^2 = 50;$$

mely pontokban metszik egymást? Határozzuk meg a metszési pontokban húzott érintők egyenleteit.

50. Az $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ ellipszis és az $x^2 + y^2 = 52$ kör egymást négy pontban metszik. Határozzuk meg a metszési pontok koordinátáit és az ezekben az egyes görbevonalakhoz húzott érintők egyenleteit.

51. Mekkora területet zár be az x tengely és az

$$y = -x^2 + 4x - 3 \text{ görbe.}$$

52. Az x tengely az $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ görbéből két szeletet vág le, mekkora ezeknek területe?

53. Rajzoljuk meg az $y^2 = 4(x-1)$ parabolát és az

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

egyenest. Mely pontokban metszik egymást? Határozzuk meg azt a területet, amelyet e vonalak egymással bezárnak.

54. Mely pontokban metszik egymást $y = x^2 - 2x - 3$ parabola és $y = x - 1$ egyenes. Mekkora a levágott szelet területe?

55. Mely pontokban metszi $y = x$ egyenes az $y = x + \cos x$ görbét. Határozzuk meg annak a szeletnek a területét, amelyet az egyenes és a görbevonallal két szomszédos metszéspontok között fekvő részei határolnak.

56. Rajzoljuk meg az $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ kört. A koordináta tengelyek e kört négy részre osztják, mekkorák e területek?

57. Az $y = \frac{1}{x^2}$ görbének az $x_1 = \frac{1}{2}$ -től $x_2 = 2$ terjedő íve az x tengely körül forog, mekkora a keletkező forgási test köbtartalma?

58. Az $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ görbének az $x_1 = 0$ -tól $x_2 = 5$ -ig terjedő íve az x tengely körül forog, mekkora a keletkező test köbtartalma?

59. Ha az előbbi feladatban szereplő ív az y tengely körül forog, mekkora a keletkező test köbtartalma?

60. Ha az $y^2 = x - 1$ parabola $x_1 = 1$ és $x_2 = 6$ által meghatározott íve az x tengely körül forog, mekkora a keletkező test köbtartalma?

61. Rajzoljuk meg az $(x-2)^2 + y^2 = 25$ kört. Ha e kör az x tengely körül forog, az y tengely a keletkező gömböt két szeletre osztja. Számítsuk ki e szeletek köbtartalmát és a süvegek felszínét.

62. Az $y = \frac{1}{x^2} + 2$ görbe $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$ -hez tartozó íve az x tengely körül forog, mekkora a keletkező test köbtartalma.

63. Rajzoljuk meg az $y^2 = 4x$ parabolát és az $y = \frac{3}{4}x$ egyenest. Határozzuk meg azt a területet, amelyet e vonalak egymással bezárnak. Határozzuk meg annak a forgási testnek köbtartalmát, amely keletkezik, ha e vonalaktól bezárt terület az x tengely körül forog.

64. Mekkora annak a forgási testnek köbtartalma, amely keletkezik, ha az $y^2 = 4(x-1)$ parabola és az $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ egyenes által bezárt terület az x tengely körül forog?

65. Határozzuk meg a félellipszis területének súlypontját.

$$\left(\text{Eredmény: } y_0 = \frac{4a}{3\pi} \text{ vagy } x_0 = \frac{4b}{3\pi} \right)$$

66. Határozzuk meg oly gömbszelet súlypontját, melynél a gömb sugara 5, a szelet alapkörének sugara 3.

67. Határozzuk meg a félgömbfelület súlypontját. (Felület-elem egy kis gömbövé épügy, mint a felszín meghatározásánál, ezt szorozni kell $r \sin \varphi$ -vel [34. ábra.]).

68. Határozzuk meg a háromszögterület tétlenségi momentumát a csúcson keresztül menő és az alappal párhuzamos tengelyre. Eredmény $I = M \frac{h^2}{2}$, ahol M a tömeget, h a magasságot jelenti.

69. Határozzuk meg az egyenes kúp tétlenségi momentumát a forgási tengelyre vonatkozólag. (A meghatározás épügy megy, mint a gömbnél. Eredmény $I = \frac{3}{10} M r^2$, ahol M a tömeget, r az alapkör sugarát jelenti.)

TARTALOMJEGYZÉK.

Bevezetés	III
-----------------	-----

A differenciálszámítás elemei.

I. A differenciálhányados fogalmának bevezetése és alkalmazása a függvények változásának leírására.....	1
II. Egyszerűbb függvények differenciálása.....	10
III. A függvények maximális és minimális értékeinek meghatározása.....	14
IV. Összetett függvények differenciálása	21
V. A kúpszeletek érintőinek egyenletei	29

A terület, felszín és köbtartalom számítása az integrál segítségével.

I. Bevezetés. Az integrálás mint a differenciálás fordított művelete	32
II. Területszámítás	34
III. Forgási testek köbtartalma.....	39
IV. Az integrálszámítás alaptétele	43
V. A gömb és részeinek felszíne	45

Fizikai számítások az integrál segítségével.

I. Súlypontszámítások	47
II. Térlenségi momentum	52

Az infinitezimális számítások alkalmazása a fizikai alapgalmak tanításában.

I. Az infinitezimális számítások és a természetről való felfogásunk	55
II. Az anyagi pont mozgása. 1. A sebesség és gyorsulás. 2. A függőleges lefelé hajtás. 3. A függőleges fölfelé hajtás. 4. Az egyenletesen gyorsuló mozgás általános tárgyalása. 5. A vízszintes hajtás. 6. A függőleges felfelé hajtás vízszintesen mozgó testről. 7. A ferde hajtás. 8. Egyszerű harmonikus mozgás. 9. A centripetális gyorsulás	57
III. A forgó mozgás. 1. A szögsebesség és a szöggyorsulás. 2. A forgótest kinetikus energiája. 3. A forgómozgás alaptétele. 4. Az ingamozgás	65
IV. A potenciál. 1. A potenciál fogalmának bevezetése. 2. Gömbháj és gömb potenciálja valamely kívül fekvő pontban. 3. Gömbháj potenciálja valamely belül fekvő pontban. 4. Aequipotenciális vagy nivőfelületek. 5. A munka és a potenciál. 6. A potenciál és az erő. 7. Gömbök és gömbhajak vonzása	69
Feladatok	79

A szerzőről

Némethné Pap Kornélia

1973. március 6-án született Nagykanizsán. A Batthyányi Lajos Gimnáziumban érettségizett 1991-ben. 1995-ben kapott matematika-kémia szakos tanári diplomát Szombathelyen a Berzsényi Dániel Tanárképző Főiskolán. 2001 és 2004 között ugyanitt elvégezte a fizika szakot. Szakdolgozatát tudomány történetből írta, Rátz Lászlóról, a budapesti fasori gimnázium híres tanáráról. Szép eredményeket ért el a Magyar Tudománytörténeti Intézet kétfordulós országos pályázatán 2004-ben: *Rátz László a fasori evangélikus gimnázium kiváló tanára c. művéért* III. díjat kapott. A pályamű megjelent a *Diákok a tudományos kutatás kapujában* (Magyar Tudománytörténeti Intézet, 2004.) című könyvben. Tanulmányainak befejezése után Kovács László nemzetközi fizikatörténeti kutatócsoportjának tagjaként tovább folytatta Rátz László életművének feldolgozását. Ennek eredménye ez a könyv.



1995-től 2006-ig az újudvari Móra Ferenc Általános Iskolában tanított matematikát, kémiát, majd fizikát és számítástechnikát is. A 2006/2007-es tanévtől kezdve a Csapi Általános Iskolában és Szakiskolában dolgozik. Ezt az iskolát és a hozzá csatlakozó kollégiumot elsősorban a hátrányos helyzetű fiatalok számára hozták létre.

A tanárnőt a természettudományok tanításán kívül rendkívül érdekli azok története is, ezenkívül szívesen foglalkozik az amerikai őslakosság múltbéli és jelenlegi életével. Szépirodalmi sikerei is vannak: jelent már meg novellája *A magunk keservén* c. antológiában (Debrecen, 1995.) és az Amatőr Költők és Írók Szövetségének egy másik kiadványában is.

STUDIA PHYSICA SAVARIENSIA (SPS)

Redigit: Kovács László

TOMUS I.

HISTORY OF SCIENCE IN TEACHING PHYSICS

1995

TOMUS II.

JÁTEKOS, GONDOLKODTATÓ FIZIKAOKTATÁS

1996

TOMUS III.

FIZIKAI ÉS INFORMATIKAI NAPOK

1996

TOMUS IV.

F. S. WAGNER: WIGNER JENŐ, AZ ATOMKOR EGYIK MEGALAPÍTÓJA

1998

TOMUS V.

ABONYI IVÁN: SZILÁRD LEÓ 1898–1964

2000

TOMUS VI.

KOVÁCS LÁSZLÓ: HEVESY GYÖRGY 1885–1966

2000

TOMUS VII.

L. KOVÁCS – L. KOVÁCS JR.: GEORGE DE HEVESY 1885–1966

2000

TOMUS VIII.

LÁSZLÓ KOVÁCS: EÖTVÖS LORÁND, A TUDÓS-TANÁR – LORÁND EÖTVÖS,
SCIENTIST-TEACHER

2001

TOMUS IX.

LÁSZLÓ KOVÁCS: EUGENE P. WIGNER AND HIS HUNGARIAN TEACHERS

2002

TOMUS X.

KOVÁCS LÁSZLÓ: NEUMANN JÁNOS ÉS MAGYAR TANÁRAI

2003

TOMUS XI.

LÁSZLÓ KOVÁCS (ED): ZEMPLÉN THE SCIENTIST AND THE TEACHER

2004

TOMUS XII.

HARGITTAI ISTVÁN: TELLER EDE TRAGÉDIÁJA

2004

A tanítás palotái



Rátz László soproni iskolái

A magyar királyi állami Főreáltanoda

Az ágostai hitvallású evangélikus Lyceum



Rátz tanár úr munkahelye: a budapesti Fásori Gimnázium 1905-ben

RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ
2001

HOLICS LÁSZLÓ