

A HEGEDŰ FIZIKÁJA



BUDAPEST, 2004

A HEGEDŰ FIZIKÁJA

dr. Pongrácz Pál

A HEGEDŰ FIZIKÁJA

tanulmányok

Budapest, 2004

A hegedű analóg statikai vizsgálata – második, javított kiadás
További néhány gondolat „A hegedű analóg statikai vizsgálata”
című tanulmányhoz – második kiadás

A hegedűgerenda mai szemmel – első kiadás

A tanulmányokat szakmailag ellenőrizték:
A hegedű analóg statikai vizsgálata:
dr. Matuscsák Tamás okl. építészmérnök, egyetemi tanár,
Semmelweis Tibor hangszerkészítő-mester
A hegedűgerenda mai szemmel:
ifj. Szabó István mérnök, hangszerésszmester

A rajzokat és ábrákat készítette: **dr. Pongrácz Pál**
A szöveget gondozta: **Újlaki Pongrácz Zsuzsánna**
Tipográfia: **Gödér Hajnal**
Fotó: **TARJÁN-FOTÓ**
Színes nyomás: **Bangó János**

© **dr. Pongrácz Pál, 2004**

Kiadja a Liszt Ferenc Zeneművészeti Egyetem Hangszerésképző Iskolája,
1064 Budapest, Vörösmarty utca 35.
Telefon / fax: 322-0617

Felölös kiadó: **Lendvai Tamás**, a Hangszerésképző Iskola igazgatója
Nyomdai munka és kötés: **Vékes József**

ISBN 963 214 081 8

Tartalom

ELŐSZÓ	7
ÖSSZEFOGLALÁS	9
EINLEITUNG	13
INTRODUCTION	19

I. A HEGEDŰ ANALÓG STATIKAI VIZSGÁLATA 23

1. A hegedűben fellépő hatások 27

1.1. A húrokban lévő feszítőerő 27

1.2. A húrokban keletkezett húzóerő hatására a hegedűtestben kialakuló erők 30

1.3. A nyakban fellépő erők 37

1.4. A korpuszban ható erők 46

1.5. Az eltérő alaphangú húrokban keletkező erők és hatásaik 54

1.6. A korpuszban kimutatható nyíróerők 65

1.7. A lábban kialakuló belső erők 69

1.8. A kulcsok csavaró igénybevétele és a kulcsház hasítószilárdsága 73

1.9. A hegedűtestben a terhelőerők hatására bekövetkező lassú alakváltozás 77

1.10. A hegedű használata közben fellépő külső erőhatások 81

2. Az erő és a hang viszonya 85

2.1. Az erő szerepe a hang keletkezésében 85

2.2. A rezgő húrban kialakuló mechanikai energia 86

2.3. A rezgést keltő erő és a rezgő lemez kapcsolata 90

2.4. A gerenda szerepe a hang kialakulásában 95

Melléklet 109

1. A számítások során alkalmazott hegedűméretek 109

2. A hegedűépítésben használt fafajták átlagos statikai értékei 110

3. A tanulmányban alkalmazott statikai alapfogalmak 111

4. A belső és a külső erőhatások következtében a hegedűtestben leggyakrabban bekövetkező sérülések és okozói 116

II. TOVÁBBI NÉHÁNY GONDOLAT	
„A HEGEDŰ ANALÓG STATIKAI VIZSGÁLATA”	
CÍMŰ TANULMÁNYHOZ	117
III. A HEGEDŰGERENDA MAI SZEMMEL	129
Bevezetés	129
1. A gerenda és a hegedűszerkezet viszonya	133
1.1. <i>A gerenda és a húrnyomás</i>	133
1.2. <i>A gerenda és a mechanikai rezgés</i>	147
2. A gerenda beillesztésének módjai	157
2.1. <i>Befeszítés nélküli gerenda</i>	158
2.2. <i>Két végén befeszített gerenda</i>	163
2.3. <i>Középen befeszített gerenda</i>	164
2.4. <i>A különböző beillesztési módok célszerű alkalmazásai</i>	171
3. Az anyag rugalmassága és fáradása	173
3.1. <i>A faanyag korróziója</i>	173
3.2. <i>A tartós terhelés és a lassú alakváltozás</i>	175
JEGYZETEK	181
IRODALOM	187

ELŐSZÓ

E gyűjteményben megjelenő tanulmányaim a vizsgált témákban következtetéseket fogalmaznak meg. Az előzményeket nem ismerő számára úgy tűnhet, mintha ezek mögött valamiféle módosításra irányuló törekvés, újítiási szándék rejtőzne. Pedig mi sem áll távolabb tőlem, mintsem hogy ezen a művészi tökéletességgel megformált és évszázadokon át tisztelettel óvott hangszeren változtatást javasoljak. Épp az iránta ébredt csodálat keltette fel az érdeklődésemet, s ejtette rabul a térbeli formák kialakításához és az épített szerkezet belső törvényszerűségeihez szokott gondolkodásomat. Az ösztönzött, hogy magyarázatot keressek – a mai műszaki ismeretek alapján – ennek a törékeny szerkezetnek az igénybe vevő hatásokkal szemben megnyilvánuló állóképességére. Innen már csak egy lépés a hegedűszerkezet és a hangja közötti viszony vizsgálata, mivel az épített szerkezet és az erő szimbiózisa a hang és az erő viszonyában is meghatározó.

A kialakult forma tiszteletben tartása mellett azokra az eltérésekre mutattam rá, amelyek a hegedűépítés gyakorlatában a szerkezet és a felhasznált anyagra jellemző szilárdsági értékektől eltérnek, vagy a hangkelte erő hatásával ellentétes irányultságúak, a rezgés intenzitását csökkentik.

Ennyi volt a szándékom csupán. A többi a hegedűépítőkön múlik: a megszokottnál maradnak-e, vagy korszerű ismeretekkel további lehetőségek kihasználására törekszenek. Megelégednek-e azzal, hogy hegedűik hangja idővel „érik be”, vagy a tudományos felismerések segítségével meggyorsítják ezt?

Mindenképpen megköszönöm mindazoknak a segítségét, akik a munkámban támogattak. Köszönetet mondok dr. Matuscsák Tamás építésmérnök egyetemi tanárnak a statika analóg alkalmazásához nyújtott konzultációért. Megköszönöm Semmelweis Tibor hangszerkészítőmesternek *A hegedű analóg statikai vizsgálata* című tanulmányom lektori értékelését és a munkám erkölcsi támogatását, valamint ifj. Szabó István mérnök, hangszerésmesternek *A hegedűgerenda mai szemmel* című érte-

kezésem lektori véleményezését. Köszönöm Szabó István hangszerkészítő-mester baráti segítségét.

Köszönettel tartozom Moser Judith és ifj. Szemmelweisz Tibor hegedűépítő-mestereknek a tanulmánykötet összefoglalásának angol és német nyelvű fordításáért. Külön köszönöm Újlaki Pongrácz Zsuzsanna magyar nyelv és irodalom szakos tanárnak, szakmérnöknek a szöveg gondozásában nyújtott operatív segítségét, és Gödér Hajnalnak a tipográfiai munkákat. Végül elismerésemet fejezem ki, és köszönetet mondok Vékes József szak- és műfordítónak a tanulmánykötet nyomdai munkálataiért, a könyv szép kiállításáért.

Budapest, 2004. január

dr. Pongrácz Pál

ÖSSZEFOGLALÁS

A hegedű létezése óta csodálat övezi. Hangja elbűvöl szinte minden zenekedvelőt, alakja, formarészleteinek finomsága pedig lenyűgözi a térbeli művészet iránt fogékony szemlélőt. Aki mindezeken túl közelebbről ismeri a hegedű szerkezetét, önkéntelenül ámulatba esik, hogy ez a néhány milliméter vastagságú fából készült instrumentum hogyan képes akár évszázadokon keresztül megtartani épségét. S ha még az is ismert előttünk, hogy a négy húr felhangolt állapotban (a húr anyagától függően) 285–295 N (közismertebben 28,5–29,5 kilogrammnyi) húzóerővel terheli a hegedűtestet – amiből a lábon keresztül közel 120 N (12 kg-nyi) nyomóerő nehezedik a vékony tetőlemezre –, még inkább izgalmassá válik a kérdés: hogyan képes ellenállni a hegedű szerkezete a külső erőhatásoknak? Ez ideig alig található szakirodalmi forrás arra, hogy a jórészt tapasztalati úton kialakult konstrukció milyen mértékben alkalmas az elkerülhetetlen terhelő hatások elviselésére. Arról is hiányos információkkal rendelkezünk, hogy a hegedűtestben előforduló meghibásodások, roncsolódások milyen mértékben függnek össze a húrokban lévő feszítőerőkből kialakuló igénybevétellel.

Annyi általánosan ismert, hogy egy szerkezet csak akkor képes tartósan, károsodás nélkül elviselni a terhelést, ha anyagának fizikai jellemzői és méretei alapján a ténylegesnél valamivel nagyobb igénybevételnek is megfelel. A felhangolt húrokban fellépő feszítőerő nagyságából következtetni lehet arra, hogy a hegedűszerkezete jelentős külső erőhatásnak van kitéve, s így a szerkezetet képező egyes elemek méreteinek (keresztmetszet, lemezvastagság, boltozatmagasság) az ebből adódó követelményekhez kell alkalmazkodnia.

A hegedűtestnek azonban nemcsak a külső erőkkal szemben kell ellenálló képességekkel rendelkeznie, hanem (mivel a hang erő hatására jön létre) mint rezonátornak elő kell segítenie a rezgő húrból a hegedűtestre jutó mechanikai rezgések hatásfokának a növekedését is. Ez a követelmény abból adódik, hogy a lábon keresztül a hegedűtestre jutó igen kicsiny pulzáló erők a szerkezeti elemek anyagi részecskéi között mechanikai mozgást, rezgést idéznek elő. Ennek következtében a részecskék kimozdulnak nyugalmi helyzetükből: összenyomódnak, távolodnak egymástól. A részecskék elmozdulása, vagyis a rezgés intenzitása szoros összefüggésben van a mozgást elindító erő nagyságával, az anyag fizikai jellemzőivel és méreteivel.

Sajátos paradoxon adódik ebből. Amíg a hegedűtestnek a külső erőkkel szembeni ellenálló képességét – többek között a viszonylag nagyobb szerkezeti keresztmetszetek segítik elő, a mechanikai rezgést előidéző elenyésző nagyságú hangkeltő erő hatásfokának növelését pedig – a dinamikai összefüggések alapján – szerényebb szerkezeti méretek teszi lehetővé. Márpedig a hegedűtől mindkét feltétel teljesítését elvárjuk: legyen tartósan ellenálló a külső erőhatásokkal szemben, ugyanakkor az igen kicsi hangkeltő erők intenzív mechanikai rezgést kelthessenek benne, azaz legyen könnyen megszólaló, és hangja rendelkezzen nagy vivőképességgel.

Ezekkel a látszólagos ellentmondásokkal foglalkozik *A hegedű analóg statikai vizsgálata* című tanulmány. Bemutatja a hegedűtestre ható külső erők nagyságát, eloszlását és hatását, valamint a szerkezetben létrejövő belső erőket (húzó-, nyomó-, nyíró-, csavaróerőket, hajlítónyomatékokat). Egzakt módon – mechanikai, dinamikai – ismeretek alapján számításokat végez, hogy a jórészt empirikus következtetések felhasználásával – az intuíció hatása alatt – több évszázaddal ezelőtt kialakult szerkezetben valójában milyen és mekkora nagyságú erők lépnek fel. Okozhatnak-e ezek az erők közvetlenül kritikus igénybevételt (roncsolódást), illetve a szerkezeti elemek méret paramétereit milyen arányban felelnek meg a tényleges terhelésnek.

A mai mechanikai-statikai ismeretek birtokában meglepetésként hat, hogy a 16–17. századi hegedűépítő-mesterek – minden valószínűség szerint pusztán tapasztalat alapján – a hegedű szerkezeti-erőtani működését tekintve korukat jóval meghaladó megoldást alakítottak ki. Rendkívüli találékonysággal a tető- és a hátlemez térbeli megformálásával a húrokban fellépő feszítőerőt kihasználták a szerkezet teherbírásának növelésére. Ennek lényege abban áll, hogy minél inkább nő a feszítőerő a húrokban felhangolás közben, a hegedűtestben fellépő belső erők egymásra hatása következtében arányosan csökken – lábon keresztül – a tetőlemezre jutó nyomóerő. A mérnöki gyakorlat jóval később, csak a 20. század közepén kezdte alkalmazni az ún. feszített szerkezeteknél ezt a méretezési elvet. Annyi különbséggel, hogy amíg a mérnöki szerkezetekben a beépítés előtt hozzák létre a terheléssel szemben előnyös feszültséget, a hegedű esetében a felhangolás közben – a terhelés kialakulásával egyidőben – jön létre a kedvező belső erőrendszer.

Ez a bravúros konstrukció részleteiben azonban magában hordozza az intuíció hatását. A számítások azt igazolják, hogy a hegedűtestben bekövetkező főbb szerkezeti meghibásodás közvetlenül vagy közvetve a terhelésből adódó

belső erők hatására jön létre (makk-kiszakadás, tető- és hátlemez-repedés, lemezdeformáció stb.).

Kimutatható, hogy az intuitív gyakorlat főként a tető és a hátlemez vastagságának megválasztása során általában nagyobb lemezvastagságot alkalmaz a biztonsági tényezőkkel megnövelt tényleges igénybevételhez viszonyítva, ugyanakkor más szerkezeti elemek alulméretezettek (felső, alsó tőkék). A statikailag szükséges szerkezeti méretek megnövelése pedig felesleges anyagtöbbletet, további súlyt eredményez, és egyben a hangkeltő erő hatásfokát csökkenti.

Közismert, hogy minden szerkezet terhelés hatására rövid idő alatt megváltoztatja alakját (megnyúlik, összenyomódik, lehajlik). Ezt követően relatív egyensúlyi állapot következik be. A hosszú ideig, tartós terhelésnek kitett szerkezetben azonban további – kismértékű deformáció – ún. lassú alakváltozás folyamatával kell számolni. A hegedű szerkezetében is fellelhető ez a kellemetlen hatás: pl. a nyak dőlésszögének csökkenése, a nyak-tengely kifordulása, a tetőlemez torzulása ennek következtében jön létre. A tartós terhelés alatt lévő szerkezet lassú alakváltozása nem küszöbölhető ki, de a szerkezeti méreteik meghatározásával csökkenthető.

A tanulmány külön fejezetben foglalkozik az erőnek mint a hangkeletkezést előidéző tényezőnek a mechanikai rezgést, mechanikai hullámokat keltő szerepével. Ennek alapján vizsgálja a hegedűtestben fellépő „hangkeltő-erő” hatásfokát meghatározó szerkezeti kapcsolatokat. Mivel a húrok rezgéséből keletkező erők nagysága igen kicsi, és szűk intervallumokban váltakozik, a hegedű szerkezetének ehhez alkalmazkodó kialakításával nyílik lehetőség a hangkeltő erő hatásfokának növelésére, a rezonátor szerepét betöltő hegedűtest működőképességének fokozására.

Számítások azt igazolják, hogy a hagyományos hegedűépítési gyakorlatban elterjedten alkalmazott szerkezeti megoldások közül jó egyenéhány az elvárásokkal szemben ellenkező hatást vált ki: pl. a tető- és a hátlemez vastagságának a domborzat magasságával arányos növelése, a gerenda méretezése és beillesztésének módja.

A *További néhány gondolat „A hegedű analóg statikai vizsgálata”* című tanulmányhoz a hegedűben fellépő mechanikai rezgéskialakulásával és terjedésével foglalkozik. Végigkíséri a hegedű szerkezet anyagi részecskéinek a rezgés következtében létrejövő mozgását. Rámutat az *f*-bevágások kérdésén túl - a méretüktől függő - hangra gyakorolt hatásukra. Magyarázatot keres a

hegedű egyes szerkezeti elemeinek kapcsolata és a mechanikai rezgés terjedésének összefüggéseire.

A tanulmányok között a hegedűgerendának az elemzése részletkérdésnek tűnik. Ám valójában a hegedűépítés gyakorlatában és elméletében ez a kicsiny szerkezeti elem rejti a legtöbb ellentmondást. A mai napig vitatott a gerenda szerepe, alkalmazásának módja. *A hegedűgerenda mai szemmel* című tanulmány ezeket a kérdéseket boncolgatja. A természettudományok, legfőképpen a fizika – mai ismereteinek alkalmazásával keres választ ennek a szerkezeti elemnek a tényleges rendeltetésére, a hegedűhang képzésében betöltött szerepére és az idő függvényében változó működőképességére.

A feltárt egzakt eredmények alapján úgy is fogalmazható, hogy valójában a gerenda a hegedű lelke. Jórészt ettől függ a hangszer hangjának erőssége, tónusa, színe, kiegyenlítetttsége. A léleknek nevezett kiegészítő szerkezeti elem ehhez képest csak „finom hangoló”, amit a hang alakításában, karakterének megformálásában képes elérni, az messze alatta marad a gerenda által nyújtottaknak. Bemutatja a tanulmány a hangszer anyagának, a fának – a mechanikai jellemzőit megváltoztató időfaktor hatását. Összehasonlítást végez a tartós terhelés alatt álló mérnöki faszervezetekben fellépő reológiai hatások és a hegedű szerkezetében bekövetkező fizikai jellemzők között.

Az itt lévő három tanulmány a hegedűt a napjainkban alkalmazott technikai ismeretek alapján mutatja be. A századokkal ezelőtt, empirikus úton kialakított szerkezeteket a mai fizikai ismeretekkel szemlélve von le következtetéseket, s ezek alapján javaslatokat kínál a gyakorlati megoldásokra.

A tanulmányok – ok és okozati összefüggésekkel – igazolják, hogy a belső erők egymásra hatásának felhasználásával befolyásolni lehet a hegedű hangjának alakulását, növelhető hangereje, a hangszer könnyebben szólal meg, finomabban alkalmazkodik a zene dinamikai igényeihez, hatékonyabb hangjának vivőereje és egyben csökkenthető az új hangszer és a már „érett” hangú hegedű közötti hangzásbeli különbség.

A szerző

EINLEITUNG

Seitdem es die Geige gibt erweckt sie Bewunderung. Von ihrem Klang wird fast jeder verzaubert, die Feinheit ihrer Details hingegen überwältigt alle für die räumliche Kunst empfänglichen Betrachter. Wer über all das hinaus die Struktur der Geige kennt verfällt unwillkürlich in Staunen darüber, daß dieses aus nur millimeterstarkem Holz angefertigte Instrument in der Lage ist über Jahrhunderte hin (seine) unversehrt seinen Klang zu bewahren. Wenn man außerdem weiß, daß die vier Saiten im gestimmten Zustand den Geigenkorpus mit einer Zugkraft von 285-295 N, abhängig vom Material der Saiten (entspricht 28,5-29,5 kg) belasten und daß diese Druckkraft die dünne Deckplatte über den Fuß hinweg mit nahezu 120 N (= 12 kg) belastet, so ist die Frage, wie die Geigenstruktur in der Lage ist den äußeren Krafteinwirkungen standzukalten noch aufregender. Bisher finden sich kaum Quellen in der Fachliteratur, die darüber Auskunft geben, in welchem Maß die anhand von Erfahrungen entstandenen Struktur geeignet ist, die unvermeidlichen Belastungen zu tragen. Auch verfügen wir kaum über Informationen darüber, inwieweit die im Geigenkorpus auftretenden Schäden mit den Spannungskräften, die durch die Zugkräfte in den Saiten entstehen, zusammenhängen.

Soviel ist allgemein bekannt, daß eine Konstruktion nur dann in der Lage ist Belastungen dauerhaft und ohne Schaden zu nehmen auszuhalten, wenn diese anhand der physikalischen Eigenschaften und der Maße imstande ist eine höhere als benötigte Beanspruchung zu ertragen. Von der Größe der in den gestimmten Saiten auftretenden Zugkraft kann man darauf schließen, daß der Geigenkörper hohen äußeren Krafteinwirkungen ausgesetzt ist und sich so die Maße der einzelnen Bauteile (Querschnitt, Stärke, Bogenhöhe) den sich daraus ergebenden Anforderungen und damit also den Maßen der einzelnen Bauteile (Querschnitt, Stärke, Bieigungsgrad des Deckblattes) anpassen müssen.

Der Geigenkörper muß aber nicht nur den äußeren Kräften gegenüber standhalten, sondern (da der Klang aufgrund der Wirkung von Kraft entsteht) muß er als Resonanzkasten die Schwingungen der Saiten in gut hörbare Klänge verstärken, sozusagen der Steigerung des

Wirkungsgrads der von der vibrierenden Saite in den Geigenkörper gelangenden mechanischen Vibrationen dienen. Diese Anforderung ergibt sich daraus, daß die nur gering pulsierenden Kräfte, die über den Steg in den Geigenkörper gelangen, zwischen den materiellen Teilchen der Bauteile mechanische Bewegungen, Vibrationen bewirken. Infolge dieser werden die Teilchen aus ihrer Ruhelage geholt: sie werden zusammen gedrückt, entfernen sich voneinander. Die Fortbewegung der Schwingung (oder eben), die Vibrationsintensivität steht mit der Größe der Kraft, die diese Bewegung einleitet, mit den physikalischen Eigenschaften und den Maßen des Materials in engem Zusammenhang.

Daraus ergibt sich ein eigenartiges Paradoxon: Bei allen genannten komplexen Zusammenhängen (solange im Geigenkörper die Kräfteverhältnisse zwischen Struktur und Belastung einander entsprechend ausfallen) lässt sich feststellen, je einfacher ein Instrument aufgebaut ist, umso besser klingt es. Wir erwarten also von der Geige, daß sie beide Bedingungen erfüllt: sie soll dauerhaft den äußeren Kräften widerstehen, dabei aber sollen geringe Klangkräfte intensive mechanische Vibrationen herstellen: sie soll also leicht zum Klingen gebracht werden und der Klang soll über hohe Tragfähigkeit verfügen.

Mit diesen scheinbaren Widersprüchen befaßt sich die Studie „*Analoge statische Untersuchung der Geige*“. Sie zeigt die enorme äußere Kraft, die auf den Geigenkörper einwirkt, sowie die im Geigenkörper entstehenden inneren Kräfte (Zug-, Druck-, Scher-, Drehkraft und Biegemomente). Sie führt auf exakte Weise anhand dynamischer, mechanischer Kenntnisse Berechnungen dazu durch – nutzt dabei intuitiv größtenteils empirische Schlussfolgerungen, was für Kräfte und welcher Größe in der vor mehreren Jahrhunderten entstandenen Struktur wirklich auftreten, sowie ob dieselben eventuell direkt kritische Beanspruchungen (Beschädigungen) verursachen können.

Die Fragestellung der Untersuchung lautet: In welchem Verhältnis genügen die Bemessungsparameter den tatsächlichen Belastungen, können diese Kräfte eventuell direkt kritische Beschädigungen verursachen, beziehungsweise in welchem Verhältnis genügen die Bemessungsparameter der Bauteile den wirklichen Belastungen.

Im Besitz der heutigen mechanisch-statischen Kenntnisse erscheint es schon als Überraschung, daß die Geigenbaumeister des XVI-XVII. Jahrhunderts wahrscheinlich nur aufgrund von Erfahrungen hinsichtlich der strukturellen-dynamischen Funktion eine der damaligen Zeit vorausseilende Lösung fanden. Mit außergewöhnlichem Erfindungsgeist nutzten sie durch die Formgebung von Deck- und Rückenplatte die in den Saiten auftretenden Zugspannungen zur Steigerung der strukturellen Belastung. Die Hauptsache dabei besteht darin, daß die Spannung der Saiten einerseits den Druck durch den Steg auf die Deckplatte bewirkt, andererseits durch den Zug auf die Wölbung der Deckplatte ein Gegendruck entsteht, welche einander in etwa aufheben, auch wenn sich die Spannung der Saiten beim Stimmen verändert, (daß je mehr die Spannkraft in den Saiten während des Stimmens wächst, sinkt parallel zu den im Geigenkörper aufeinander wirkenden inneren Kräften – über den Steg – die auf die Deckplatte wirkende Druckkraft.) In der Ingenieurspraxis wurde viel später, erst in der Mitte des XX. Jahrhunderts, mit der Anwendung dieses Maßprinzips bei den sogenannten gespannten Strukturen begonnen. Mit dem Unterschied, daß – während in den Ingenieurskonstruktionen vor dem Einbau die für die Belastung vorteilhaften Spannungen errichtet wurden – bei der Geige während des Stimmens – gleichzeitig mit dem Entstehen der Spannung – dieses günstige innere System entsteht.

Diese bravouröse Struktur trägt aber in ihren Details eine Intuitionswirkung. Die Berechnungen beweisen, daß die hauptsächlichsten im Geigenkörper auftretenden Fehler direkt oder indirekt durch die Wirkung der inneren Kräfte, die sich aus der Belastung ergeben, zustande kommen (Abreißen des Blättchens, Riss der Deck- und Rückenplatte, Plattendeformation usw.).

Man kann nachweisen, daß die intuitive Praxis vor allem bei der Auswahl der Stärke von Deck- und Rückenplatte im allgemeinen eine stärkere Platte im Verhältnis zu den tatsächlichen Beanspruchungen mit höheren Sicherheitsfaktoren verwendet, andere strukturelle Teile wiederum unterbemessen sind (obere, untere Wurzeln). Durch größer als notwendig minimal statische Maße wird allerdings mehr Material benötigt, es entsteht ein größeres Gewicht und gleichzeitig wird die Effizienz der Klanggebung verringert.

Es ist allgemein bekannt, daß jede Struktur auf die Einwirkung einer Belastung hin in kürzester Zeit ihre Gestalt verändert (sie dehnt sich, wird zusammengedrückt, verbiegt sich). Danach tritt ein relativer Gleichgewichtszustand ein. In einer Konstruktion allerdings, die langanhaltenden Belastungen ausgesetzt ist, muß man mit weiteren kleineren Deformationen, sogenannten langsamen Formveränderungen rechnen. Das ist auch ein in der Geigenstruktur zu beobachtender unangenehmer Vorgang: z. B. die Verringerung des Neigungswinkels des Halses, das Abdrehen der Halsachse, die Deformation der Deckplatte entsteht infolgedessen. Bei einer dauernden Belastungen ausgesetzten Konstruktion können langsame Strukturveränderung nicht ausgeschlossen, mit der Festlegung der strukturellen Maße aber verringert werden.

Die Studie befasst sich in einem besonderen Kapitel mit der Rolle der Kraft, die als klangerzeugender Faktor mechanische Vibrationen, mechanische Wellen entstehen läßt. Auf Grund dessen untersucht sie die strukturellen Zusammenhänge, von denen der Grad der im Geigenkörper „klangerzeugende Kräfte“ bestimmt wird. Die Kraft, die durch die Vibration der Saiten entsteht ist nicht groß und verändert sich in kurzen Intervallen, mit einer sich an die Struktur der Geige anpassenden Gestaltung eröffnet sich die Möglichkeit die Effizienz der klangerzeugenden Kraft zu erhöhen, die Funktionsfähigkeit des die Rolle eines Resonators einnehmenden Geigenkörpers zu steigern.

Berechnungen beweisen, daß es unter den in der traditionellen Geigenbaupraxis verbreitet angewendeten strukturellen Lösungen einige gibt, die entgegen den Erwartungen eine gegenteilige Wirkung verursachen: z.B. parallele Vergrößerung der Stärke von Deck- und Rückenplatte mit der Höhe der Wölbung, Bemessung des Bassstegs und der Anpassungsart.

Die Studie *Einige weitere Gedanken zu der Studie „Analoge statische Untersuchung der Geige“* befasst sich mit der Gestaltung und Ausbreitung der in der Geige auftretenden mechanischen Vibrationen. Sie begleitet die Teilchenbewegungen, die in der Geigenstruktur durch die Vibration entstehen. Sie sucht eine Erklärung für die Zusammenhänge der einzelnen strukturellen Teile der Geige und der Ausbreitung der mechanischen Vibration.

In den Studien scheint die Analyse der Geigenstege eine Detailfrage zu sein. In Praxis und Theorie des Geigenbaus allerdings verbergen sich in diesem kleinen strukturellen Bauteil die meisten Widersprüche. Bis heute ist die Rolle, die Anwendungsart des Balkens umstritten. In der Studie „*Der Geigenbalken aus heutigen Gesichtspunkten*“ befasst sich mit diesen Fragen. Die Naturwissenschaften, hauptsächlich die Physik sucht unter Verwendung der heutigen Erkenntnisse eine Antwort auf die Frage nach der wirklichen Bestimmung dieses Bauteils, nach der Rolle, die sie bei der Bildung des Geigenklanges ausübt und nach der sich mit der Zeit verändernden Funktionsfähigkeit.

Anhand der gefundenen exakten Ergebnisse kann formuliert werden, daß wahrlich der Balken die Seele der Geige ist. Zum Großteil hängt von ihm die Tonstärke des Instruments, der Tonus, die Farbe, die Ausgeglichenheit ab. Die als „Seele“ benannten ergänzenden Strukturteile dahingegen können nur „feine Abstimmung“ in der Tongestaltung, der Charakterformierung erreichen, sie bleiben weit hinter dem zurück, was der Balken erreicht. Die Studie stellt die Wirkung der Zeitfaktoren, von denen die mechanischen Eigenschaften des Geigenmaterials, des Holzes – verändert werden, vor. Sie führt Vergleiche durch zwischen der rheologischen Wirkung in ständigen Belastungen ausgesetzten Baustrukturen (Ingenieurs-konstruktionen) und den in der Geigenstruktur eintretenden physikalischen Eigenschaften.

Diese hier angeführten drei Studien stellen die Geige anhand der heutzutage angewandten technischen Kenntnisse vor. Sie ziehen unter dem Gesichtspunkt des heutigen Wissens Schlüsse aus der vor Jahrhunderten auf empirischem Wege gestalteten Struktur und bieten Vorschläge für praktische Lösungen an.

Die Studien beweisen mit den Zusammenhängen von Ursache und Wirkung, daß man durch die Anwendung der auf einander wirkenden inneren Kräfte die Gestaltung des Geigenklanges beeinflussen, die Klangstärke steigern kann, daß das Instrument leichter zum Klingen gebracht werden, sich noch feiner an die dynamischen Ansprüche der Musik anpassen, die Tragkraft des Klangs effizienter werden und gleichzeitig der Klangunterschied zwischen einem neuen Instrument

und einer Geige mit bereits „ausgereiften“ Klang verringert werden kann.

Der Autor

INTRODUCTION

Since its existence violin has always been admired. Music lovers are charmed by its tone, while the shape, the fine lines of the form fascinate the people sensible to stereoscopic arts. The ones knowing the structure of the violin beyond this are amazed how this instrument of a few millimetre thick wood can uphold its intact character even for centuries. If you are also aware that four tuned strings (depending on the string material) put a tensile load of 285-295 N (or more commonly 28,5 – 29,5 kilograms) on the body of the violin – out of which nearly 120 N (12 kg) pressing force presses the thin upper body through the leg -, the question becomes even more interesting: how can the structure of the violin stand the outside power impulses? So far there is hardly any special literature available how far the construction primarily shaped according to experience is suitable to stand the inevitable pressures. The available information are also incomplete to what extent the defects in the body of the violin are connected to the strain due to the tensile load in the strings.

It is generally known that the structure can only resist any strain durably, if it is capable of standing a bit bigger stain based on the physical features of its material and its size. It can be estimated from the strength of the tensile load in the tuned strings that the structure of the violin is exposed to significant outer power, thus the size of the different structure elements (cross-section, plate thickness, arch height) must be suited to the requirements.

The violin body must stand not only outer strains, but (as the tone is created by the strain) as a resonator it must contribute to the swell of the effect of the mechanical quivering per violin body from the tremulous string. This requirement is the result that the very limited pulsing power on the violin body through the leg creates mechanical motion between the material shreds of the structural elements. Thus the shreds move from their static state: they are pressed, move away. The movement of the shreds, namely the intensity of the quivering is closely linked with the amount of the power creating the movement, with the physical features of the material and with the size.

This gives a very unique paradox. While the resistance of the violin body to the outside strains is given – among others by the fairly big structural cross section, the swell of the effect of the power creating the mechanical quivering, of insignificant amount and creating the tone becomes possible through the

minor sizes. Nevertheless the violin is expected to satisfy both conditions: it must durably stand the outer effects, on the other hand the very tiny tone-creating powers should produce intensive quivering in it, so it can give forth easily and the tone has a big carrying ability.

The study under the title 'The Analogous Static Study of the Violin' is dealing with such apparent contradictions. It describes the amount of the outer powers on the violin body, its distribution and effect, and the internal powers created within the structure (tensile load, pressing force, shearing stress, torsional force, bending strain). It gives calculations in exact way based on – mechanical, dynamic – knowledge, that upon utilizing the mainly empiric conclusions – under the influence of intuition – what and how big strains are actually created in the structure formulated many centuries ago. Can these strains cause directly critical utilization (destruction), and to what extent the size parameters of the structural elements meet the actual load.

Based on today's mechanical-static knowledge it may be a surprise, that the violin makers of the 16th-17th century worked out a solution – most probably simply due to experience, which was well ahead of their age as far as the structural-mechanic operation of the violin was concerned. When forming the cover and back-plate of space with great imagination they used the stretching force created in the strings to increase the supporting strength of the structure. The main point was the more the stretching force increased in the strings upon tuning, the pressing force to the cover plate – through the leg - proportionately decreases due to the inter-effect of the internal strains in the violin body. The engineering practice started to employ this measuring principle at the so-called strained structures much later, only in the middle of the 20th century. The difference was while the favourable strain stress compared to the loading was created before build-in at the architectural structures, in case of the violin the favourable internal strain balance was created during tuning – simultaneously with creating strain.

This brilliant construction, however, carries the effect of intuition in itself. The calculations prove that the main structural defects appearing in the violin body are created directly or indirectly due to the internal strains from loading (string tear, cover- and back-plate cracking, plate deformation, etc.).

It can be proved that the intuitive practice, primarily upon choosing the thickness of the cover- and back-plate decides for a thicker plate compared to the actual utilization increased with the safety elements, while other structural elements are under measured (upper, under blocks). The expansion of the

statically necessary structural elements means surplus material, additional weight and thus decreases the tone-creating power.

It is generally known that all structures change their form within a short period of time under loading (it is extended, presses, bent). Afterwards there will be a relative balanced state. In the long run, however, structures under constant loading undergo a so-called slow process of losing the form – additional small deformation. This unpleasant effect is also present in the violin structure: e.g. the neck angular degree gets smaller, the neck-axis turns, thus the torsion in the cover-plate is the consequence. The slow deformation in the structure under constant pressure cannot be eliminated, but reduced by determining their structural sizes.

The study deals with the role of the power, as a factor creating the tune, producing mechanical quivering, mechanical waves. Based on this it studies the structural relations determining the 'tune-creating' effect created in the violin body. As the amount of the power produced from the string quivering is small, and changes in quick intervals, the opportunity to expand the tune-creating effect, to increase the ability of the violin body to function as a resonator is allowed by choosing the adequate violin structure.

The calculations show that several of the structural solutions widely used in the traditional violin make practice produce the opposite effect: e.g. the thickness of the cover and back-plates are increased proportionately to the lines, the way of measuring and fixing the bass-bar.

The chapter '*Some Further Thoughts*' to the study '*The Analogous Static Study of the Violin*' deals with the forming and transmission of the mechanical quivering in the violin. It follows the movements of the particulars created due to the quivering within the violin structure. Beyond the issue of the *f*-cutting it points out their effect on the tune – depending on the size. It tries to find an explanation to the relation between certain structural elements of the violin and the transmission of the mechanical quivering.

The analysis of the violin bar seems a partial issue in the studies. In fact this tiny structural element hides the most contradictions in the practice and principle of violin making. The role of the bar and the way of its utilization are questioned till today. The study '*The Violin Bar through Today's Eyes*' analyses these issues. It tries to find an answer to the actual role of these structural elements based on the employment of the knowledge of natural sciences, primarily of physics, to the role played in creating the violin tune, and to the operational ability changing with time.

Based on the exact outcomes found it can be also formulated that the soul of the violin is actually the bar. The strength and tone of this music instrument, its balance mainly depends on it. The additional structural element called soul is just a 'fine tuner' compared to this, what it can create in producing the tune, forming the character is well under what the bar can produce. The study also illustrates the effect of the time factor changing the mechanical features of the instrument material, of wood. It gives a comparison between the reologic effects produced in the engineered wood-structures under durable strain and the physical features created in the violin structure.

The three present studies demonstrate the violin based on the technical knowledge used nowadays. They draw conclusions on the structures shaped in empiric way centuries ago looked upon with today's physical knowledge, and thus offer recommendations for practical solutions.

The studies – with cause and effect relations – prove that the creation of the violin tune can be influenced upon utilizing the inter-effect of the internal powers, its tune can be extended, the instrument is easier to give tone, suits finer to the needs of dynamics in music, the transmission force of the tune is stronger and at the same time the difference in tone between the new and old instrument with already 'matured' tone can be decreased.

The Author

*A hegedű készítését meg lehet tanulni
néhány év alatt,
de a hegedűt valójában megismerni –
egy élet is kevés.*

I.

A HEGEDŰ ANALÓG STATIKAI VIZSGÁLATA*

Bevezetés

A hegedűről sok könyv és tanulmány jelent már meg. Szembetűnő, hogy milyen széleskörű nemzetközi irodalommal rendelkezik ez az évszázadokon át megkülönböztetett érdeklődéssel és csodálattal kísért hangszer. Ezeknek a szakmunkáknak egy része a zeneszerszám kialakulásával, történelmi, formai fejlődésével, alkotóinak és koruk szellemi világának kapcsolatával; más része a hegedűépítés technológiájával, a kidolgozás gyakorlati ismereteivel foglalkozik. Nyugtalanítóan nagy számban akad közöttük a korábbi korok hegedűépítésének vélt titkait feltárni szándékozó munka. Kiterjedt azoknak a tanulmányoknak a köre, amelyek a hegedű hangjának sajátosságait, a hangszerben létrejövő mechanikai rezgések hangeffektusainak vizsgálatát tűzi ki célul. Külön csoportba sorolhatók a hegedűnek a zenei világban betöltött szerepét, a hegedűjáték ismereteit boncolgató művek.

E könyvek, tanulmányok szerzői főként a tárgyalt téma művelői, avatott ismerői. A hangszer formai fejlődésével művészettörténész, készítésével hangszerész hegedűépítő, a lakk problémakörével kémikus-vegyésszmérnök, hangjának elemzésével fizikus-akusztikus és a hegedűjá-

* Megjelent 2000. augusztus 5-én a Millenniumi Hegedűkészítő verseny és kiállítás megnyitójára, Esztergomban.

ték kérdéseivel általában zenei képzettségű szerzők foglalkoznak. Akad azonban olyan tanulmány is, amelyet más szakmai világ képviselője, más irányú elméleti, gyakorlati felkészültségű alkotó tár elénk.

A fejlődés során általánosan felismert folyamat, hogy az eltérő empirikus ismeretek egymásra hatása – a különböző tudományterületek átfonódása – lehetőséget teremt az addig kevésbé feltárt összefüggések megvilágítására. Ebből következően hasznos szerepet töltenek be ezek a tanulmányok. Meglepő azonban, hogy a hegedűvel foglalkozó – különböző témaköröket átfogó – kiterjedt szakirodalomban nem található olyan munka, amely a hegedű mechanikai szintézisével foglalkozik, amelyik vizsgálná a hangszerben fellépő erőket, feltárná a hangszerstatikai problémákat, és a hang képződésének dinamikai elemzésére épülne. Tagadhatatlanul akad néhány olyan tanulmány, amely megemlíti statikai viszonyokat, sőt még számszerű értékeket is közöl. Ezek azonban a ténytörűnek tűnő megállapításokon alig jutnak túl, és adósak maradnak az ok és az okozati kapcsolatok és főként az ebből levonható következtetések feltárásával. E tanulmány ennek a kérdéskörnek komplex elemzését tűzte ki célul.

A téma tárgyalásának sorrendjét tekintve a hegedűt előbb nyugalmi helyzetében – felhangolt állapotban – vizsgálja, hogy a húrokban keltett, a kívánt alaphang eléréséhez szükséges feszítőerők milyen további erőket és feszültségeket hoznak létre a hangszer különböző pontjain. Analóg statikai módszerrel megkísérli feltárni azokat a hatásokat és igénybevételeket, amelyekkel szemben a hangszer egyes elemeinek ellenálló képessége alapvetően meghatározza a szerkezet biztonságát. A hatáselemzés során összehasonlítást végez az empirikus következtetések felhasználásával – jórészt az intuíció hatása alatt – kialakult hegedűépítési gyakorlat és az egzakt elmélet között, s kitér azokra az összefüggésekre, technológiai és szerkezet-méretezési kérdésekre, amelyek a hegedűépítés során megfontolást igényelnek.

A tanulmány második részében az erőhatás és a hang keletkezésének viszonyával – pontosabban az anyagban keletkező rezgést, hullámozást előidéző erő és a kialakuló hang közötti összefüggéssel foglalkozik. Minden nap tapasztaljuk, hogy a hang erő hatására jön létre. Amikor leejtünk egy súlyosabb tárgyat, s az a padlóhoz ütközik, csattanást hallunk. Az esőcsepp a nyugvó vízfelülethez csapódva csobban, s ha egy csővön sűrített levegőt áramoltatunk a szabadba, a csőből nagy sebességgel távozó

levegő nekiütközve az álló levegőrészecskének, sustorgó hangot hallat. Tehát az anyag halmazállapotától függetlenül érzékelhető ez a jelenség. A fizikából ismert, hogy az ütközés során az anyag mozgásenergiájával ellentétes hatású erő rezgésbe hozza az anyagot, és elindítja a hang kialakulásának folyamatát. Az is általánosan ismert, hogy egy nehezebb vagy magasabbról leejtett tárgy nagyobb, hangosabb koppanással ütődik a földre, vagy ha az anyag rezgését kiváltó erőhatás gyors, egymás utáni ismétlődését fokozzuk (pl. a váltakozó sebességgel forgó fogaskerékhez rugalmas lemezt érintünk, a forgás sebességétől függően), megváltozik a hang magassága. Egyértelműen következik ebből, hogy a hang keletkezését előidéző erő és a létrejövő hang között összefüggés van.

E tanulmány ezeknek a kapcsolatoknak az elemzésére vállalkozik. Analóg statikai számításokkal kísérli meg kimutatni a hangkeltő erő szerepét, összehasonlítja az erő hatásfokának és a hang keletkezésének viszonyát, végül a levezetett numerikus értékek alapján szembeállítja azokat az ellentmondásokat, amelyek a hegedűépítés gyakorlata és az egzakt elmélet között kimutathatók. Egyben javaslatot tesz a hangkeltő erők hatékonyságának növelése érdekében szóba jöhető szerkesztési, méretezési és technológiai megoldásokra.

Meg kell azonban jegyezni, hogy a téma tárgyalása során nem foglalkozunk az akusztika körébe tartozó ismeretekkel, a hang keletkezésével, terjedésével és észlelésével. Az analóg statikai elemzés csupán a hang keletkezését, kialakulását előidéző erő szerepét vizsgálja anélkül, hogy azt kizárólagos, meghatározó tényezőnek tekintené. Szükséges a továbbiakban, hogy az analóg statikai elemzés következtetései széleskörű akusztikai ismeretek kerüljenek összevetésre. A hegedű fizikája általánosságban – de különösen a tárgyalt témakörben – még számos feltárássra váró komplex problémát tartogat. Indokolt tehát a hegedűt érintő ismeretek integrációja. E tanulmány ebben kíván kezdeményező szerepet betölteni, s rávilágítani azokra a témacsoportokra, amelyek a hegedűről eddig kialakult ismeretek fejlesztése érdekében további kölcsönös együttműködést igényelnek.

Szólni kell még arról, hogy a tanulmány első és második részében – a hegedűépítésben hagyományosan kialakult eljárásokkal szemben – megfogalmazott technológiai és méretezési módosító javaslatok csupán a hangszer szerkezeti megoldásaira vonatkoznak, és nem érintik a tradicionálisan kialakult formai paramétereit. Egyaránt érvényesnek tekinthetők

azonban a vonós hangszerek mindegyikére, amelyeknek szerkezeti felépítése azonos a hegedűével.

1. A hegedűben fellépő erőhatások

1.1. A húrokban lévő feszítőerők

A hegedűtestben felhangolás előtt – nyugalmi állapotban – nincsenek kimutatható erők, mivel a nyak, a kulcsház és a csiga, valamint a tető- és a hátlemezek térbeli kialakítása (boltozat jellegű megformálása) belső feszültségtől mentes anyagból faragással, a felesleges részek eltávolításával készül. Csupán a kávaelemekben lehetnek a hajlítás után elhanyagolható kisebb „látens” erők, de ezek nem keltenek bennük jelentősebb feszültségeket újabb külső hatás nélkül.

Amikor azonban a hegedűt felhangolják, a húrok a feszítőerő következtében megnyúlnak, s bennük a rugalmas alakváltozást előidéző külső erőkkel szemben egyenlő nagyságú belső erők lépnek fel. Ennek egyszerű fizikai magyarázata, hogy a feszítőerő következtében a szilárd anyag kristályrácsaiban lévő részecskék elmozdulnak eredeti egyensúlyi helyzetükből, mialatt a test részecskéi között lévő kohéziós erők a testre ható külső erővel szemben ellentétes irányú belső erőket hoznak létre. Szilárd testek rugalmas alakváltozása során a megnyúlás ($\Delta\ell$) egyenes arányában áll a feszítő (külső) erővel (F), a test eredeti hosszával (ℓ), és fordítottan arányos az anyag rugalmassági modulusával (E) és keresztmetszetének felületével (A). A Hooke-törvény alapján:

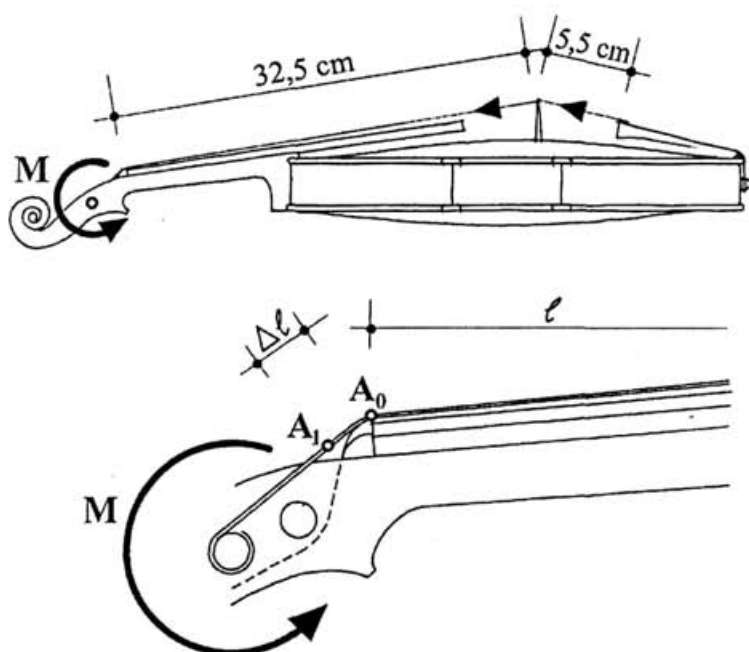
$$\Delta\ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot A}; \text{ ebből: } F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

Tájékozódásunk érdekében nézzük meg, hogy egy homogén keresztmetszetű acél e -húrban 3,0 mm megnyúlást mekkora feszítőerő hoz létre (1. ábra). A húr teljes hossza (ℓ) 38,0 cm (a rezgő húrszakasz 32,5 cm, a láb és a húrtartó közötti rész 5,5 cm). A húr átmérője (d) 0,28 mm. Rugalmassági modulusa (E) $= 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Az előbbi képlet alapján:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell}, \text{ ahol az } A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 0,0615 \text{ mm}^2, \text{ tehát}$$

$$\text{a feszítőerő nagysága: } F = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,0615 \cdot 30}{38,0} = 97,10 \text{ N (9,71 kp).}$$



1. ábra

A feszítőerő hatására a húr A_0 -val jelzett pontja Δl megnyúlás következtében az A_1 pontba kerül

Mi most a teljes húrhosszban fellépő megnyúlás alapján számoltuk ki a feszítőerő nagyságát. Meg kell azonban jegyezni, hogy a két húrszakaszban – a rezgő húr hosszában és a láb mögötti húrszakaszban – a vektorparaméterek különbsége, valamint a lábgerincen fellépő súrlódás miatt (amint a későbbiekben látni fogjuk) a kimutatható feszítőerők nagyságrendileg eltérnek egymástól.

Az előzőekben egy acélhúrbán feltételezett megnyúlás alapján számítottuk ki az alakváltozást előidéző feszítőerőt. Mivel az egyes hűrok (e , a , d , g) anyagukban, keresztmetszetükben és a kívánt alapfrekvencia tekintetében különböznek egymástól, feszítésükhöz szükséges külső erők és a bennük fellépő belső erők is húronként eléterő nagyságúak.

Minden bizonnyal a korábbi időkben alkalmazott bélhűrokban kisebb húzóerő lépett fel, amit még tovább csökkentett a mainál mérsékeltebb nyak-dőlésszög és a korunkban használatos normál a -hanghoz képest alacsonyabb frekvencia.¹

Célszerű áttekinteni a következőkben a húrban az alaphang eléréséhez szükséges frekvencia és feszítőerő közötti összefüggést. Maradjunk továbbra is a homogén anyagú e -húr vizsgálatánál. Mint ismeretes, a húr vastagsága, anyagsűrűsége és a feszítőerő függvényében meghatározott hullámterjedési sebesség $c = f \cdot \lambda$, ahol f az alaphfrekvencia, λ a hullámhossz. A húros hangszerek húrjain kialakuló állóhullámok esetben a két végén rögzített húrban a frekvencia $f = \frac{c}{\lambda}$.

Ismert, hogy az alaprezgésnek két csomópontja van – a húr rögzítési pontjainál –, így $\ell = \frac{\lambda}{2}$, vagyis $\lambda = 2 \cdot \ell$. A húr hosszának (ℓ) a rögzítési pontok közé eső zengő húrszakaszt tekintjük, ami 32,5 cm. Az e -húrban keletkező hullámterjedési sebesség számításához még ismerni kell az alaphfrekvencia nagyságát. Ez a temperált kromatikus skála alapján $e = 659,35$ Hz. Az $f = \frac{c}{\lambda}$ összefüggésből $c = f \cdot \lambda$, miszerint $c = 659,35 \cdot 2 \cdot 0,325 = 42858$ m/sec.

A húrban lévő hullámterjedési sebesség és a feszítőerő közötti viszonyt a $c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ összefüggés fejezi ki, ahol σ az anyagban fellépő feszültség, ami a feszítőerő (F) és az anyag keresztmetszeti felületének (A) hányadosa, vagyis $\sigma = \frac{F}{A}$, ρ pedig az anyag sűrűségi mutatója. Az e -húr keresztmetszeti felületét már számítottuk: $A = 0,0615$ mm², (króm-nikkel acél) anyagának sűrűsége 8,3. A fentiekből következően:

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}; \quad c = \sqrt{\frac{F}{A \cdot \rho}}; \quad c^2 = \frac{F}{A \cdot \rho}; \quad \text{vagyis } F = c^2 \cdot A \cdot \rho,$$

behelyettesítve: $F = 428,582 \cdot 0,0615 \cdot 8,3 = 93,75$ N (9,37 kp), tehát a feltételezett viszonyok között, az e -húrban 93,75 N feszítőerő keletkezik. A számításból érzékelhető, hogy a különböző húrokban anyaguktól, vastagságuktól és a kívánt alaphfrekvenciát biztosító feszítés nagyságától függően eltérő nagyságú erők adódnak, illetve a rugalmas alakváltozás következtében ezekkel egyező belső húzóerők lépnek fel. Az $F = c^2 \cdot A \cdot \rho$ összefüggés szemléletesen igazolja, hogy a kisebb anyag-

sűrűségű és keresztmetszetű húrokban azonos frekvencia mellett csökken a feszítőerő nagysága.

A hegedűtestre ható erők megismeréséhez azonban az alkalmazott húrokban ténylegesen fellépő feszítőerőt kell alapul venni. A 20. század elején használatos húrokban mért feszítőerők nagyságára Otto Möckel *Die Kunst des Geigenbaues* című könyvében² közölt adatokat: *e*-húrban 8,965 kg, *a*-húrban 6,875 kg, *d*-húrban 6,325 kg, *g*-húrban 6,255 kg, Összesen: 28,42 kg.

A napjainkban alkalmazott húrok közül a Thomastik-gyártmányokban a húrminőség szerint eltérő feszítőerőket mutat ki a cég.

	e			a			d			g			e+a+d+g
	l	k	e	l	k	e	l	k	e	l	k	e	e
Dominant	7,5	7,8	9,1	4,6	5,5	5,9	4,0	4,5	5,5	3,9	4,5	4,9	25,4 kp
Präzision	7,5	7,8	9,1	5,9	6,5	7,5	5,3	5,9	6,7	5,0	5,5	6,2	29,5 kp
Spirocore	7,2	7,5	8,0	5,6	6,0	6,5	4,5	5,0	5,5	4,0	4,6	5,0	25,0 kp
Superflexible	7,3	7,8	8,0	6,0	6,5	7,0	5,0	5,9	6,3	4,8	5,5	5,9	27,2 kp

l = lágy; k = közepes; e = erős

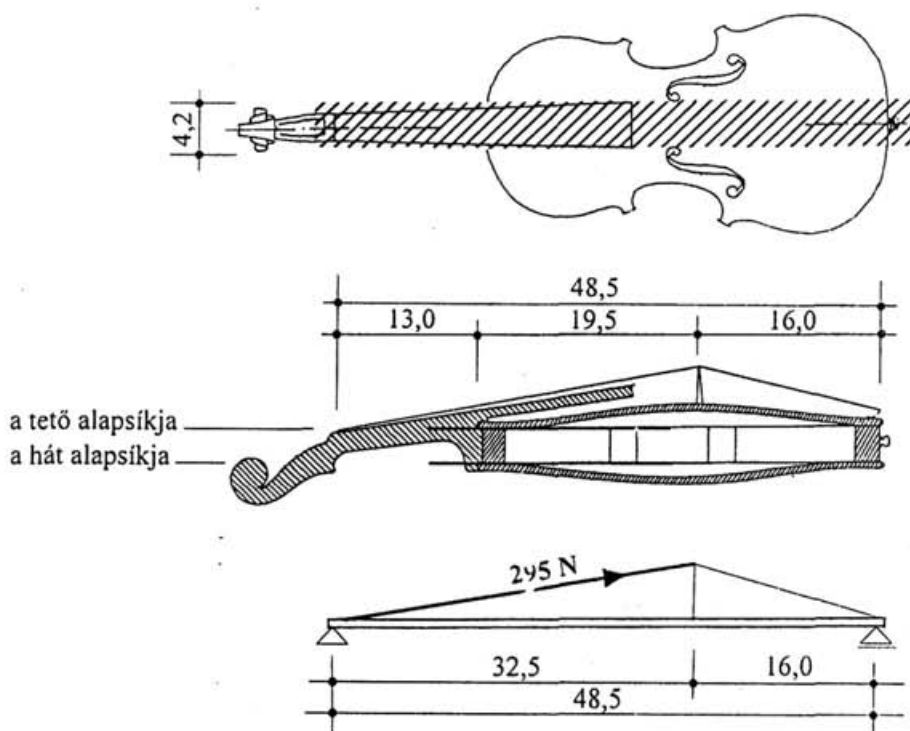
Mivel a hegedű statikai állóképessége az előfordulható igénybevétel alapján közelíthető meg, ezért a további számítások során a legmagasabb mért értéket célszerű alapul venni. A fenti táblázat alapján ilyen a Thomastik – Präzision-húregyüttes, amelynek „erős” fokozata 29,5 kp (295 N) feszítőerővel terheli a hegedűtestet. Az ennél kisebb húr-feszítőerőnek kitett hegedűkben arányosan csökkennek a belső erők és feszültségek, tehát biztonságosabb a szerkezet ellenálló képessége.

1.2. A húrokban keletkezett húzóerők hatására a hegedűtestben kialakuló erők

A húrokban keletkezett feszítőerők a felfekvési pontokon – a felső és az alsó nyergen, valamint a lábon – keresztül különböző nagyságú húzó-, nyomó-, nyíróerőket és -nyomatékokat hoznak létre a hegedűtestben. A kérdés az, hogy mekkorák ezek az erők, hogyan helyezkednek el, és a fellépő feszültségek menny-

nyíval maradnak alatta az anyagra jellemző határértékeknek – más szóval: elég biztonságos-e a hangszer statikai stabilitása.

Számításaink során vizsgáljuk meg, hogy a húrokban a feszítőerőkkel egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú belső húzóerők milyen jellegű és nagyságú erőket hoznak létre a hegedütestben. Mivel azonban a hegedű szerkezete összetett térbeli konstrukció – a két irányban hajlított tető- és hátlemezekben, valamint az íves kávákból csakúgy, mint a mérnöki héjszerkezetekben bonyolult matematikai és statikai számításokkal lehet követni az erők alakulását. Ezért a könnyebb áttekinthetőség érdekében egyszerű – a vizsgálat céljainak megfelelő – statikai modelleket kell a hegedütestből kialakítani. Képzeltben alakítsunk ki a hegedütestből a láb méretével megegyező (4,2 cm) szélességű hosszmetsetet. Az így kialakított metszet analóg tartószerkezetként fogható fel, aminek segítségével megismerhetők a hegedűmetszetben fellépő erők (2. ábra).



2. ábra

Meg kell azonban jegyezni, hogy a hegedütestből az előzőekben kialakított szeleten a tető- és a hátlemez metszete íves vonalú, s ezért a bennük fellépő erők összetett számítás igénylő íves tengelyű tartóként analogizálhatók, így a számítás első szakaszában célszerű további egyeztetést alkalmazni.

Ennek alapján előbb a tető és a hát alapsíkjára vetítjük a húrokban lévő feszítőerőkből képződő metszet irányú erőket, és csak a további számításaink során határozzuk meg a lemezmetsetekben fellépő erőket.

Az előző részben megismertük a zengő húrszakaszban lévő feszítőerők nagyságát. A négy húrban együttesen a legmagasabb értéket alapul véve – hiszen ennek lehet a hegedű kitéve – 295 N (29,5 kp) feszítőerővel célszerű számolni. Ezek az értékek azonban ténylegesen a felső nyereg és a láb közötti húrszakaszban mért feszítőerőket mutatják be. A továbbiakban ki kell számítanunk a húrok teljes hosszában, illetve még a láb és a hátsó nyereg közötti húrszakaszban a láb síkjában és a tetőlemez alapsíkjában fellépő erőket.

A húrok tengelyvonala és a láb síkja az adottságokból egyértelműen meghatározhatók, bár a húrok nem egy síkban helyezkednek el. A felső nyereg és a láb gerinc íves kialakítását követve a *g*- és az *e*-húrok valamivel kisebb szöget zárnak be a tetőlemez alapsíkjával, mint a *d*- és az *a*-húrok. Azonban az egyes húrok és az alapsík által bezárt szögek között olyan kicsiny az eltérés, hogy számításaink során nagyságrendi különbségeket nem eredményeznek, így a négy húr tengelyvonalát egy síkban elhelyezkedőnek tételezhetjük fel. Amíg azonban a húrok felfekvési pontjai a felső nyergén csaknem pontosan egybeesnek a tetőlemez alapsíkjával, a hátsó nyeregnél 0,7 cm-rel e felett helyezkednek el. Mivel ez az adottság befolyásolja a húrok tengelyvonala és az alapsík között, valamint a lábnyereg fölött kialakuló szögek értékét, s ebből következően az erők nagyságát is, ezért a számításaink során ezt nem hagyhatjuk figyelmen kívül (3. ábra).

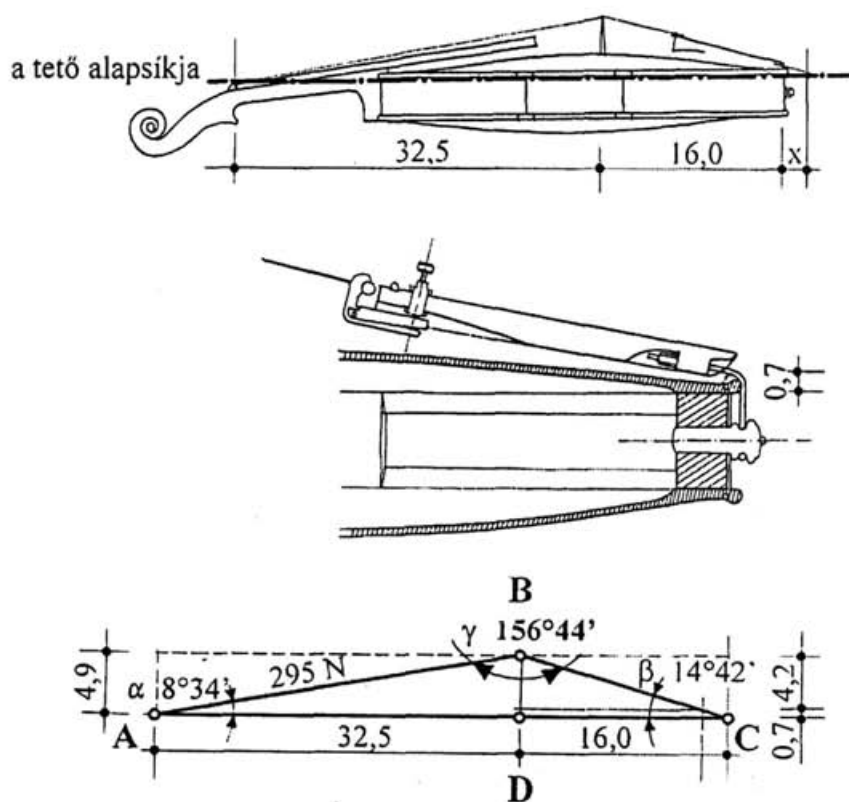
A húrokban lévő feszítőerők, illetve az ezek hatására kialakuló húzóerők a hegedütestre a felfekvési pontokon terhelő erőket adnak át. Az ábrából szembetűnik, hogy két egymáshoz kapcsolódó – *ABD* és a *BCD* pontok által meghatározott – erőháromszögekkel van dolgunk. Ezek segítségével a húrok zengő hosszában már ismert feszítőerők összességéből (295 N) a szögek alapján kiszámíthatók a rövidebb húrszakaszban fellépő húzóerők, valamint a láb és a tető alapsíkjában keletkező erők nagysága.

Mindenekelőtt azonban a hurok felfekvési pontjainál lévő szögek nagyságát kell kiszámítani.

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4,9}{32,5}; 0,1507 = 8^{\circ} 34'$$

$$\beta = \operatorname{tg} \beta = \frac{4,2}{16}; 0,2625 = 14^{\circ} 42'$$

Bár a hurok feszítőerőiből a hegedűtestre ható külső és belső erők számítása során nem lesz szükség a lábgerinc felett kialakuló hűrtengelytörés szögeire, ennek ellenére a teljesség érdekében számítsuk ki ezek nagyságát is: $\gamma = 180^{\circ} - (8^{\circ} 34' + 14^{\circ} 42') = 156^{\circ} 44'$.

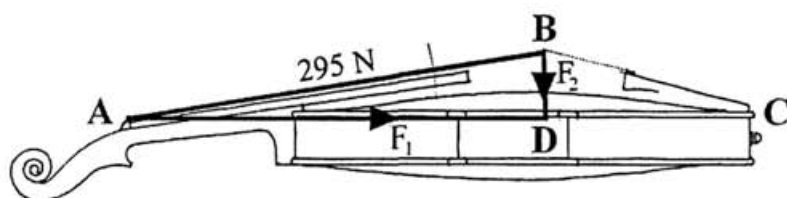


3. ábra

A zengő húrszakaszban az A és a B pontok között a négy húrra ható húzóerők együttes összege 295 N , amivel arányos nagyságú további erők és nyomatékok lépnek fel. A négy húrban lévő húzóerőkből az alapsíkban az A , D pontok között fellépő erő (F) irányát tekintve az A -ból D irányba hat, vagyis nyomóerő (4. ábra):

$$\cos \alpha = \frac{AD}{295} = 0,9888; \quad F_1 = 0,9888 \cdot 295 = 291,69\text{ N}$$

A láb síkjába a B , D pontok között fellépő a tető alapsíkjára merőleges erő: $\sin \alpha = \frac{BD}{295} = 0,1490; \quad F_2 = 0,1490 \cdot 295 = 44,10\text{ N}$



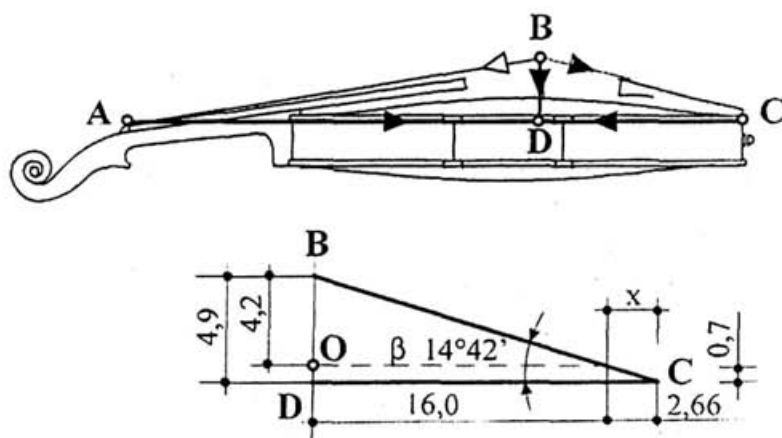
4. ábra

A láb mögötti húrszakaszban fellépő erő nagyságát erőháromszög alapján trigonometriai úton számíthatjuk ki. Már megismertük, hogy a zengő húrszakaszban lévő feszítőerő (295 N) alapsíkban kimutatható komponense $291,69\text{ N}$. Az erőegyensúly fenntartása érdekében a láb mögötti húrszakaszban keletkező feszítőerőnek az alapsíkban képződő komponense ezzel azonos nagyságú, ellentétes irányú erő.

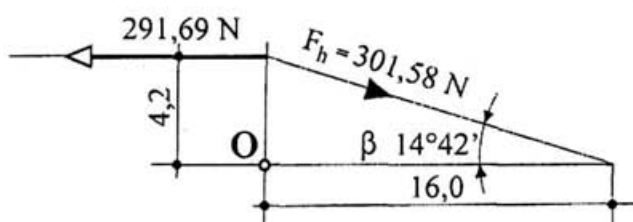
Számításunkban nem okoz zavart, hogy a BCD háromszögben az elméleti alapsík a hátsó nyeregnél megemelt húrtengely következtében $2,66\text{ cm}$ -rel túlnyúlik a hegedütesten (5.a ábra). Az alapsík és a húrtengely által bezárt szög azonban változatlan marad ($14^\circ 42'$). Így ha erőháromszöggént kezeljük a láb mögötti erőrendszert, a BC átfogó képezi a vizsgált húrszakaszt. Ennek DC komponense a zengő húrszakasz alapsíkban képződő vetületével azonos nagyságú ($291,69\text{ N}$).

A láb mögötti húrszakaszban kialakuló feszítőerő nagysága tehát: BC

$$= \frac{291,69}{\cos \beta}; \quad \frac{291,69}{0,9672} = 301,58\text{ N (5. ábra).}$$



5.a ábra



5.b ábra

A továbbiakban a BCD erőháromszögben is megismerhetők a láb síkjában, illetve a tető alapsíkjában fellépő erők.

A láb síkjában a B, D pontok között ható erő:

$$\sin\beta = \frac{BD}{301,58}; \quad 0,2537 \cdot 301,58 = 76,51 \text{ N.}$$

A tető alapsíkjában a D, C pontok között lévő erő:

$$\cos\beta = \frac{DC}{301,58}; \quad 0,9672 \cdot 301,58 = 291,69 \text{ N.}$$

Ezzel valamennyi erő ismertté vált az erőháromszögben. Ha az erők vektorait felrajzoljuk irány és nagyság szerint, szemléletes képet kapunk a hegedűkre ható terhelőerők rendszeréről, ami egyben az előző számítások

ellenőrzésére is szolgálhat. Nevezzük el a zengő húrszakaszban lévő erőt A erőnek, a láb mögötti húrszakaszban fellépő erőt B erőnek (6. ábra).

Tudjuk, hogy az $A = 295 \text{ N}$.

$$A_f = A \cdot \sin 8^\circ 34' = A \cdot 0,1495 = 44,10 \text{ N}$$

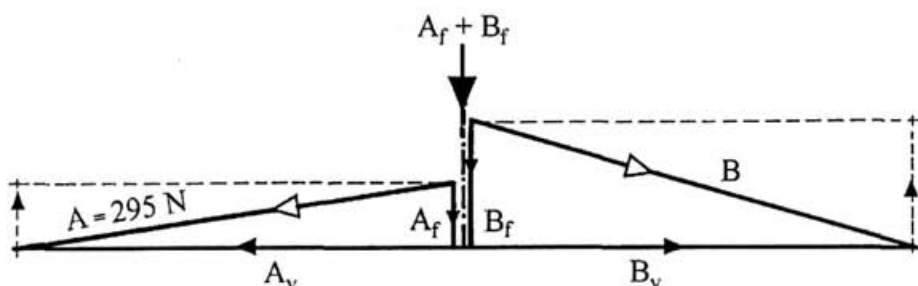
$$A_v = A \cdot \cos 8^\circ 34' = A \cdot 0,9888 = 291,69 \text{ N},$$

mivel az erőegyensúly fennmaradása érdekében $A_v = B_v$.

A B húrvonalban ható erő:

$$291,69 = \cos 14^\circ 42' \cdot B, \text{ ebből } B = \frac{291,69}{0,9672} = 301,58 \text{ N}$$

$$B_f = B \cdot \sin 14^\circ 42' = B \cdot 0,2537 = 76,51 \text{ N}.$$



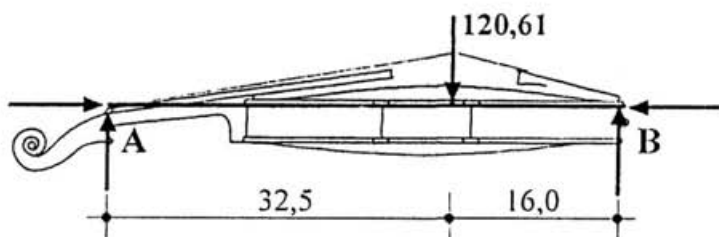
6. ábra

Az előzőekben a hátsó nyereg mögött a húr tengely és az alapsík metszéspontjában kimutatott támaszerő nagyságát (76,51 N) elméleti megközelítés alapján határoztuk meg. A valóságban azonban ez a támaszerő a hátsó nyereg vonalában hat – közelebb a láb síkjába eső terhelő erőhöz –, tehát az előzőhöz képest nagyobb támaszerővel kell számolnunk. Ha azonban a hátsó nyeregnél lévő támaszerő nagysága megváltozik, az erőegyensúly alapján a felső nyeregnél is változik a támaszerő. A tényleges támaszerők nagyságát könnyen meghatározhatjuk a láb síkja és az alapsík metszéspontjára számított nyomaték alapján (7. ábra).

$$B\text{-re felírva: } 120,61 \cdot 16 = A \cdot 48,5; \quad A = 39,79$$

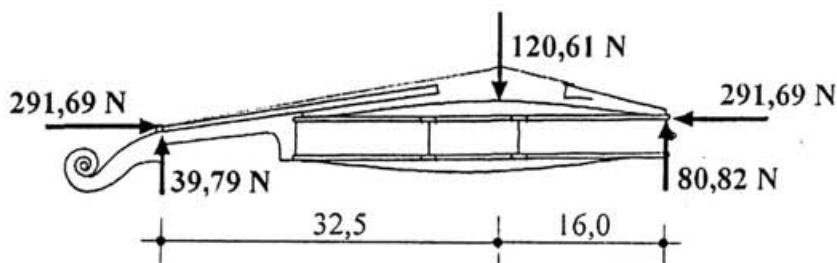
$$A\text{-ra felírva: } 120,61 \cdot 32,5 = B \cdot 48,5 \quad B = 80,82$$

$$\text{együtt:} \quad 120,61$$



7. ábra

A fentiek szerint a hegedűtestre ható külső (terhelő-) erők nagyságát és irányát a vonalas ábrázolásban a 8. ábra mutatja be.

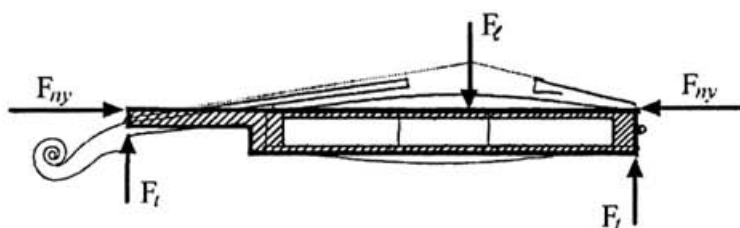


8. ábra

A számításokból látható, hogy a húrok együttes feszítőerői a lábon keresztül $120,61\text{ N}$ nyomóerővel terhelik a tetőlemezt, és ezzel együtt a húrok feszítőerőinek komponensei egyrészt a hossz tengellyel megegyező irányú nyomóerőt gyakorolnak a hegedőtestre, másrészt a felső és az alsó nyergeknél a láb síkjában ható terhelőerővel szemben ellentétes irányú támaszerőket képeznek.

1.3. A nyakban fellépő erők

A számításaink megkönnyítése érdekében a hegedűtestből elméletben kialakított metszet egy változó keresztmetszetű, kéttámaszú tartóként feltételezhető, amelyben a kisebb keresztmetszeti rész – a nyak – tömör, a korpusz-rész doboz-szerkezetként kezelhető (9. ábra).



9. ábra

Az előzőekben végzett számításból megismertük, hogy a nyakra hossz tengelyével azonos irányú nyomóerő és a felső nyeregnél erre merőleges támaszerő hat. A szerkezeti metszetből szembetűnik, hogy a nyak konzolos túlnyúlásként illeszkedik a korpuszhoz, amiből következtetni lehet, hogy a beillesztésnél – a nyak és a korpusz csatlakozásánál – újabb erőhatás: forgatónyomaték is fellép.

Előbb azonban végezzünk rövid számítást a nyakra ható nyomó- és támaszerőből adódó feszültségek meghatározására.

Már ismerjük, hogy a nyakra – csaknem a hossz tengelyével megegyező irányú – 291,69 N nyomóerő hat. Ebből az erőből a nyak legkisebb keresztmetszetében – a felső nyereg közelében – adódó feszültség $\sigma = \frac{F}{A}$,

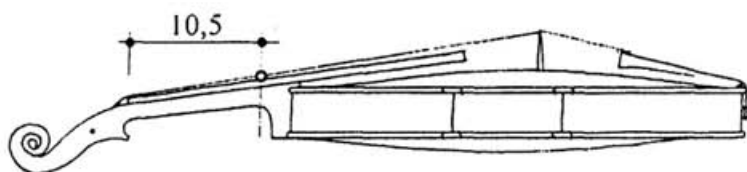
ahol az F a nyomóerővel, az A a nyak keresztmetszetének felületével azonos. A keresztmetszet számításai során a fogólapot célszerű figyelmen kívül hagyni, mert a felragasztásból adódó pontatlanságok téves eredményekre vezethetnek. A félkör alakú nyak sugara ezen a helyen 1,17 cm ($d = 2,34$ cm), keresztmetszeti felülete ezek alapján:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{8} = 2,15 \text{ cm}^2.$$

$$\text{A keletkező feszültség: } \sigma = \frac{291,69}{2,15} = 135,67 \text{ N/cm}^2.$$

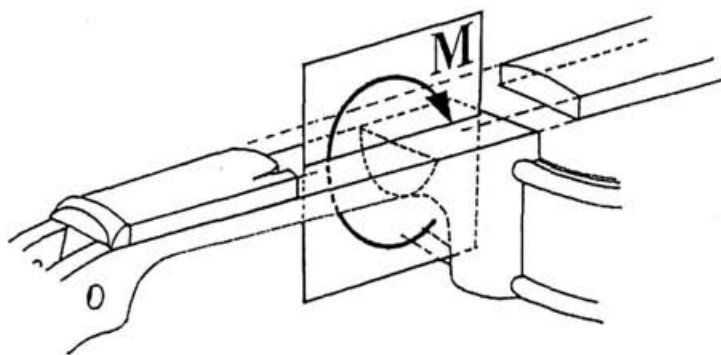
A hegyi juharban (*Acer pseudoplatanus*) a szálirányú legnagyobb nyomószilárdság 4900 N/cm^2 , tehát a ténylegesen fellépő feszültségi érték sokszorosan alacsonyabb a megengedhetőnél.

Vizsgáljuk meg a további számításunk során, hogy a felső nyeregnél fellépő támaszerőből adódó nyomaték milyen nagyságrendű igénybevételt képez a nyak makk felőli részén. Válasszuk ki ezt a pontot (O) a felső nyeregtől 10,5 cm-re, ahol még a nyak keresztmetszete félkör alakú (10. ábra).



10. ábra

A tengelyirányú nyomóerő ezen a metszeten, mivel a nyak keresztmetszeti felülete nagyobb az előbbinél, kisebb feszültséget eredményez. A felső nyeregnél ható támaszerő azonban erre a pontra forgatónyomatékokat képez, tehát ezen a szakaszon a nyak nemcsak nyomásra, hanem hajlításra is igénybe van véve (11. ábra).

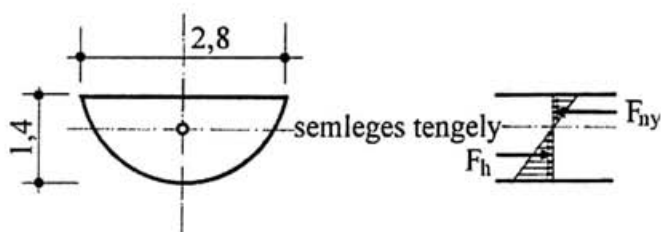


11. ábra

A támaszerő forgatónyomatéka az O pontra: $F_t \cdot \text{cm} = 39,79 \cdot 10,5 = 417,79 \text{ Ncm}$.

Nézzük meg, hogy a számított nyomaték mekkora belső erőket hoz létre, és a tényleges igénybevétel nagysága milyen mértékben közelíti meg az anyagra jellemző megengedhető határértéket.

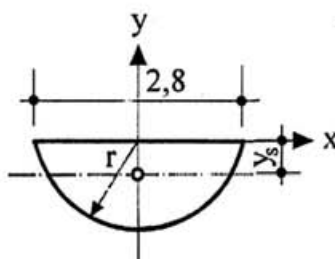
Hajlítás során a hajlítás síkjában az anyag alsó szálaiban húzó-, felső szálaiban pedig nyomóerők lépnek fel (12. ábra).



12. ábra

A belső erők meghatározásához a semleges tengelyt – homogén anyag lévén – a keresztmetszet súlypontjában vehetjük fel. A félkör alakú síkidom súlypontja y_s (13. ábra).

$$y_s = \frac{4r}{3\pi} = 0,59 \text{ cm}$$

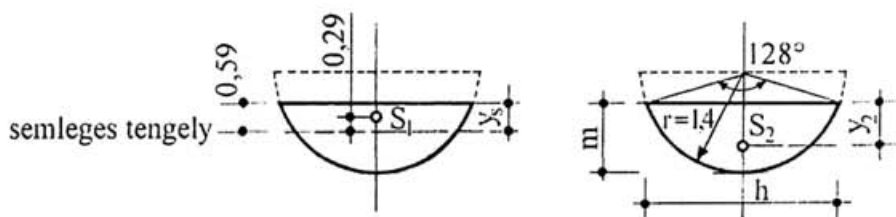


13. ábra

Nagyobb tévedés nélkül kiindulhatunk abból, hogy a forgatónyomatékot ellensúlyozó belső erők a semleges tengely feletti nyomott ív és az alsó húzott ív súlypontjában helyezkednek el. A nyomott ív súlypontja a kis eltéréstől eltekintve téglalapalakú síknak tekinthető, így súlypontja a metszetidom semleges tengely feletti részének felező magasságában vehető fel:

$\frac{0,59}{2} = 0,295 \text{ cm}$, tehát a semleges vonal felett 0,29 cm-re. A sem-

leges tengely alatt – a húzott ívben – a körszelet alakú síkidom súlypontját azonban számítással kell meghatároznunk (14. ábra).



14. ábra

A körcikkben a súlypont (S_2) helye $y_s = \frac{h^3}{12A}$, ahol h a húr hossza, A a körcikk területe. Mindenekelőtt ki kell számolni az m értékét: $m = r - y_s$; $1,4 - 0,59 = 0,81$ cm. $h = 2 \cdot \sqrt{m \cdot (2r - m)} = 2 \cdot \sqrt{0,81 \cdot (2,8 - 0,81)} = 2,54$ cm. A körcikk súlypontjának kiszámításához még ismerni kell a körcikk területét (A). Ezt nagyon egyszerűen meghatározhatjuk, mivel a semleges tengely a félkör alakú metszetidom súlypontján halad keresztül, vagyis a nyomott öv és a húzott öv két egyenlő nagyságú területéből áll. Mivel az egész félkör területe $\frac{d^2 \cdot \pi}{8}$, így a szegmens húzott öv területe $\frac{d^2 \cdot \pi}{16} = 1,54$ cm². Ennek alapján meghatározhatjuk a y_2 értékét:

$$y_2 = \frac{h^3}{12A} = 0,89 \text{ cm.}$$

A körcikkben keresett súlypont a semleges tengely alatt $0,89 - 0,59 = 0,30$ cm-re helyezkedik el.

A belső erők nagyságát a metszetre ható külső forgatónyomatékból számíthatjuk ki: $M_{k(külső)} = M_{b(belső)}$, ahol az $M_k = F_t \cdot 10,5$; $39,79 \cdot 10,5 = 417,79$ cmN; $M_b = F_{ny} \cdot (0,29 + 0,30)$, vagyis ha $M_k = M_b$, akkor $417,79 = F_{ny} \cdot 0,59$, ebből $F_{ny} = 708,12$ N.

A megismert belső erők alapján a vizsgált pontban keletkező hajlítófeszültség (σ_n): $\sigma_n = \frac{F_{ny}}{A}$.

A semleges tengely a metszet felületét két egyenlő nagyságú területre osztja. Ennek figyelembevételével (A):

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{16} = 1,54 \text{ cm}^2.$$

Ezek alapján a felső nyeregnél fellépő támaszerőből adódó forgatónyomaték a nyaktő felőli részen $\sigma = \frac{F_{ny}}{A} \cdot \frac{708,12}{1,54} = 459,82 \text{ N/cm}^2$ feszültséget képez.

Mindjárt hasonlítsuk is össze a számított feszültség értékét az anyagban megengedett hajlítószilárdság határértékével. Hegyi juharban a megengedett hajlítószilárdság 9500 N/cm^2 , vagyis a tényleges feszültség töredéke a határfeszültségnek.

Számításaink igazolják, hogy a húrok feszítőerőitől a nyakban keletkező feszültségek nem okozhatnak az anyagban tartós alakváltozást, jóval a rugalmassági határon belül helyezkednek el.

Nem vizsgáltuk még a kulcsház falában a kulcsok által átadott erőkből keletkező feszültséget. Ennek során válasszuk a legnagyobb húzóerőt viselő kulcs és a kulcsház között kialakuló erőviszonyok elemzését. Tudjuk, hogy az *e*-húrbán lévő feszítőerő $91,0 \text{ N}$. A kulcsszár átmérője $0,7 \text{ cm}$. A kulcsház falának szélessége $0,5 \text{ cm}$. Ezek alapján a kulcsszár $2 \cdot 0,7 \cdot 0,5 = 0,70 \text{ cm}^2$ -nyi felületen adja át a $91,0 \text{ N}$ húzóerőt a kulcsházra. A keletkezett feszültség ezeken a pontokon:

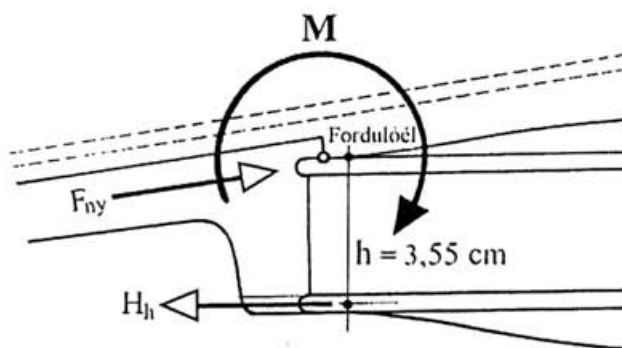
$$\sigma = \frac{91,0}{0,70} = 130,0 \text{ N/cm}^2.$$

Látható, hogy az alkalmazott anyag – a hegyi juhar – a kulcsok által átadott erő-igénybevételeknek is biztonságosan megfelel.

A kulcsház falában esetenként bekövetkező repedések minden esetben idegen, külső erőhatás – pl. a kulcs túlzott befeszítéséből adódó palástnyomás – következtében állhat elő (ld. *A kulcsok csavaró igénybevétele és a kulcsház hasítószilárdsága* című fejezetet).

Megkülönböztetett figyelmet kívánnak azonban a nyaktőnél kialakuló erők, mert ezek közvetlenül hatnak a korpuszban fellépő erőkre, és a gyakori makk-törések is ezekkel függnek össze.

Már ismerjük a nyak hossz tengelyével nagyjából azonos irányú – a tető alapsíkjában fellépő nyomóerőt. Ennek szerepe a hegedütest stabilitását tekintve előnyös, mivel a nyaktőkét a korpuszban erre a célra kialakított fészekbe szorítja. Problémát okoz azonban a felső nyeregnél ható támaszerőnek a nyaktőke és a tetőboltozat érintkező vonalára – a „fordulóélre” – ható nyomatéka (15. ábra).



15. ábra

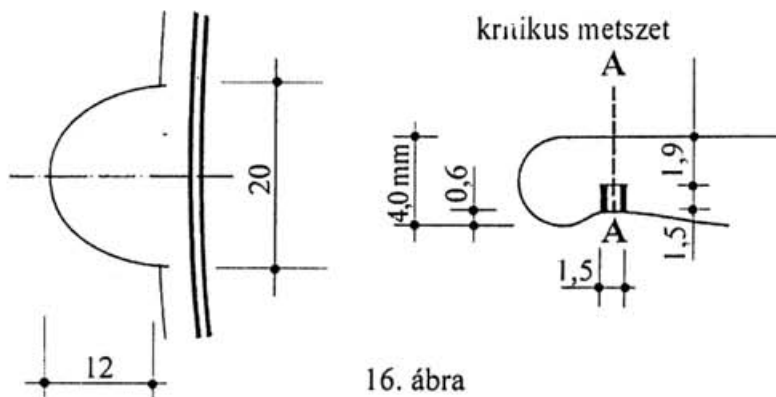
Ez a forgatónyomaték ugyanis a hátlemez síkjában a makkra húzóerőt képez. Ennek nagysága a felső nyeregnél ható támaszerő F_t (39,79 N) és a nyakmenzúra + a nyaktőke beeresztési mélysége által meghatározott távolság ($\ell = 13,00 + 0,35 = 13,35$ cm) szorzata:

$$M_t = 39,79 \cdot 13,35 = 531,20 \text{ cm.}$$

Ebből kiszámítható, hogy a makklemez tengelyvonalában mekkora húzóerő (F_h) lép fel:

$$M_t = M_h; \quad 531,20 = F_h \cdot 3,55; \quad \text{ebből } F_h = \frac{531,20}{3,55} = 531,20 \text{ N cm.}$$

Ez a húzóerő a hát alapsíkjában – mint ahogyan a későbbiekben látni fogjuk – további erőket hoz létre, ezekről majd a korpuszban fellépő erők vizsgálatánál esik szó. A makk terhelhető felületén fellépő feszültség azonban külön figyelmet igényel, mivel igen kis felületen veszi fel a húzóerőből keletkező feszültséget (16. ábra).



16. ábra

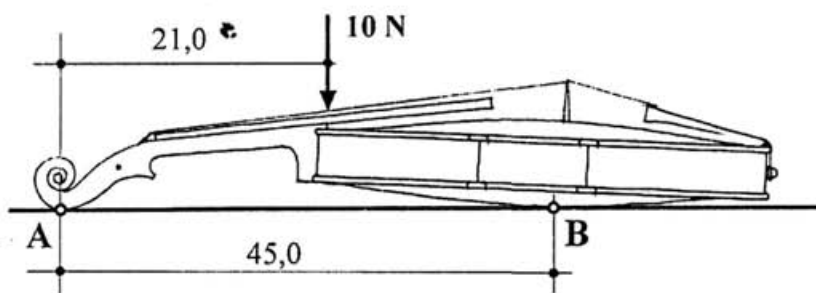
A makk szélessége (2,0 cm) és a berakás miatt a lemez terhelhető metszete legfeljebb 0,4–0,5 cm². Az itt keletkező feszültség:

$$\sigma = \frac{F_h}{A}; \quad \frac{149,63}{0,4} = 374,22 \text{ N/cm}^2$$

A hegyi juhar szakító szilárdsága szálirányban 8200 N/cm². A ténylegesen fellépő feszültség értéke – amint látható – jóval alatta van a megengedhetőnek.

Mivel azonban a juharfának a szálirányai általában nem követik a lemez tengelyvonalát, gyakran előfordul, hogy a leszűkült keresztmetszetben a szálak iránya a makk síkjával nagy szöget zárnak be, ezzel lecsökkentve a terhelhető keresztmetszet teherbírását. Ilyen esetben, amikor a lemez hosszirányára 60°–80°-os szöget bezáró szálirányok adódnak, a jellemző megengedett határérték akár 5 %-ra is csökkenhet.³ Veszélyeztetni még a terhelhető tényleges keresztmetszet nagyságát, ha a berakás árkat készítő véső mélyebben hatol be a hát lemezébe az intarziaszalag mélységénél, ami a terhelhető keresztmetszet csökkenését eredményezi. Olyan esetben, ha a beragasztás nem tökéletes, vagy nedvesség hatására felpuhul, s különösképpen, ha a csigát a támaszerő irányával megegyező külső erőhatás éri, a makk kiszakadása könnyen bekövetkezhet.

Mind e mellett figyelmet érdemel, hogy a hegedűtest ezen a ponton a legérzékenyebb a külső mechanikus hatásokkal szemben. Nézzük csak meg, hogy egy nyugalmi állapotban lévő – sík lapra fektetett – hegedűre a nyaktőke közelében a támaszerőre ellentétes irányú kicsi, mindössze 10 N nagyságú erő mekkora igénybevételt okoz (17. ábra).



17. ábra

A felfekvési pontok (*A* és *B*) között a nyaktőke tájékán a hegedűre ható – feltételezett – 10 N külső (mechanikus hatásból) nyomatókszámítással megtudhatjuk, hogy milyen nagyságú húzóerő növeli még a makk terhelhető kereszt-

metszetére már megismert feszültséget: $A_t = \frac{10 \cdot 24}{45} = 5,33 \text{ N}$.

Ebből a makk síkjában fellépő húzóerő (F_h) nagysága:

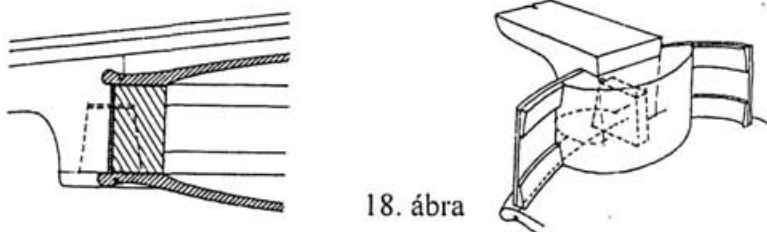
$$F_h = \frac{5,33 \cdot 21}{3,55} = 31,53 \text{ N}.$$

A húrok feszítőerői erre a pontra 149,63 N húzóerőt képeznek. A mechanikus hatással együtt $149,63 + 31,53 = 181,16 \text{ N}$. A makk terhelhető keresztmetszetén kialakuló feszültség ennek alapján:

$$\sigma = \frac{181,16}{0,4} = 452,90 \text{ N/cm}^2.$$

Ha a makk terhelhető keresztmetszetében a szádirány jelentősen megközelíti a merőleges jelleget, ennek következtében a megengedett feszültség az adott érték 5 %-ára mérséklődik, ami egyenlő $410,00 \text{ N/cm}^2$ -rel. Ez az érték alacsonyabb a ténylegesen fellépő igénybevételnél, így a makk kiszakadhat.

Ennek a veszélynek csökkentése érdekében ösztönző technológiai megoldásra készített az angol szakirodalomban publikált⁴ nyaktőke-beillesztési mód. Ha a felső tőkébe 2–3 mm vastag, a hegedű hossz tengelyével megegyező egyenes szádirányú, trapéz alakú keményfa lemez kerül 8–10 mm mély fészekbe beenyvezésre, s ennek azonos méretű beillesztése a nyaktuskóba is biztosított, a nyak és a korpusz kapcsolatának több irányú erősítése növelhető. Így a beillesztés, illetve a beenyvezés során a beragasztott lemez jelentősen megnöveli a beragasztás felületét, és egyben áthidalja az előbbiekben elemzett intarziabevágás után maradó kritikus lemezfelületet, sőt a nyak oldalirányú lassú alakváltozását is nagymértékben csökkenti (18. ábra; ld.: *A hegedűtestben a terhelő erők hatására bekövetkező lassú alakváltozás* című fejezetet).



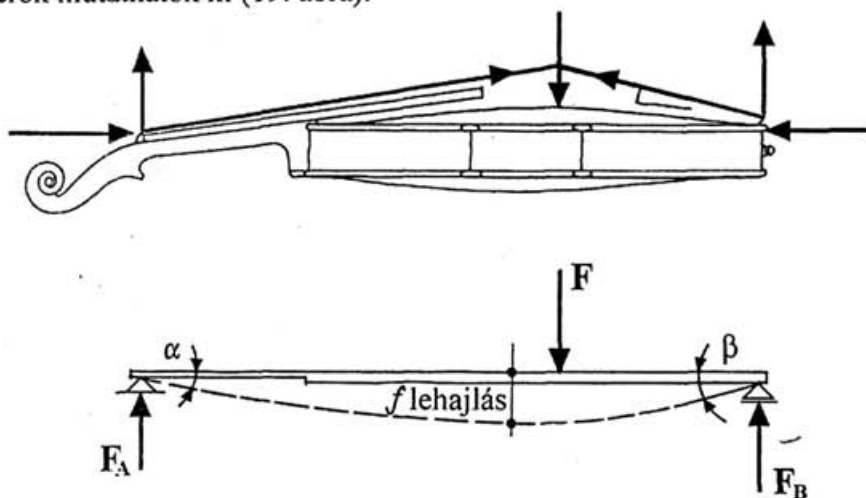
18. ábra

A beépített lemez azon túlmenően, hogy a hajlítónyomaték által igénybevett ragasztott felületet jelentősen megnöveli, mélyen benyúlik a nyaktuskó és a felső tőke anyagába, így a ragasztás felpuhulása – s ebből adódóan a nyak kidőlése – magas páratartalmú levegőben sem következhet be.

1.4. A korpuszban ható erők

A húrokban keltett feszítőerő hatására a hegedűtestben fellépő erőknek egy részét már megismertük. Vizsgáljuk meg a továbbiakban, hogy a láb síkjában ható terhelő, valamint a nyergeknél kialakuló támaszerők milyen és mekkora további erőket hoznak még létre. Számítsuk ki a következőkben a hát alapsíkjában ható erőt, ezt követően pedig a hangszerből vett elméleti hosszmeteszetben – a lemezek tényleges tengelyvonalában keletkező erőket.

Mivel a hegedűtest a tartószerkezetek analógiája alapján változó keresztmetszetű, kéttámaszú tartóként fogható fel, benne a tartókra jellemző erők mutathatók ki (19. ábra).



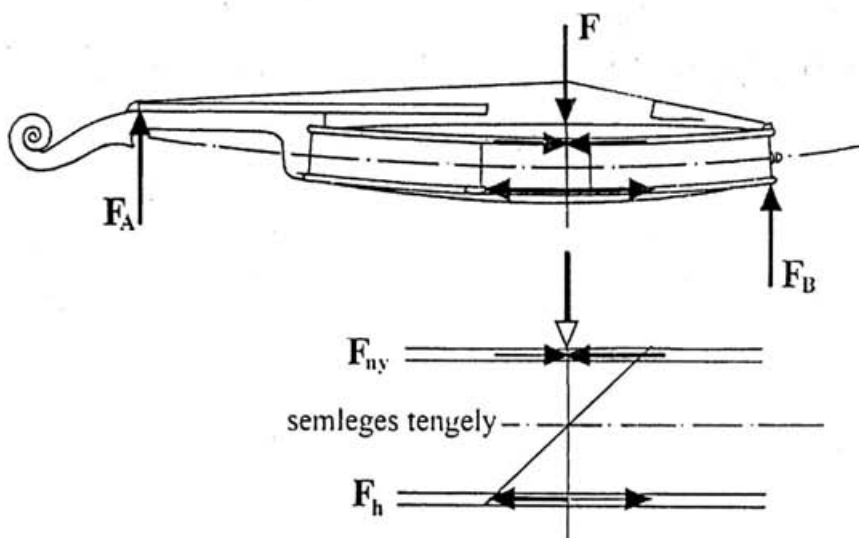
19. ábra

A kéttámaszú tartó a terhelő erők hatására meghajlik, tengelye az alátámasztásoknál szögfordást végez, s a tartó felső szálaiban (nyomott övé-

ben) nyomóerők, az alsó szálaiban (húzott övében) pedig húzóerők keletkeznek.

Ha egy tömör keresztmetszetű tartó homogén anyagból van, semleges tengelye a tartó magasságának felező vonalában helyezkedik el és a belső erők a tartó teljes keresztmetszetén a szélső szálak felé növekvő nagyságban lépnek fel.

A hegedű elméletben kialakított korpuszmetszete olyan tartóként elemezhető, amelynek a metszete nem tömör, úgy is mondhatjuk, dobozszerkezet, így csak a semleges tengelytől legtávolabb lévő szála képesek a belső erő felvételére (20. ábra).



20. ábra

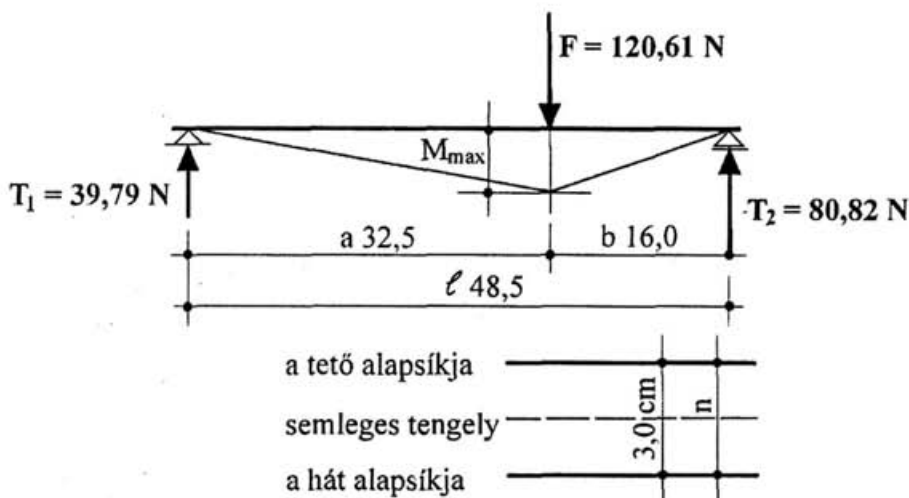
A támaszerők nagyságát már ismerjük – *A húrokban lévő feszítőerő* című fejezetben kiszámítottuk:

$$T_1 = F \cdot \frac{b}{\ell} = 39,79 \text{ N, illetve } T_2 = F \cdot \frac{a}{\ell} = 80,82 \text{ N.}$$

A nyomatéki maximum a terhelő erő hatásvonalában képződik, ennek nagysága:

$$M_{max} = \frac{F \cdot a \cdot b}{\ell} = \frac{120,61 \cdot 32,5 \cdot 16,0}{48,5} = 1293,14 \text{ Ncm}$$

Azt már tisztáztuk, hogy a vizsgált korpuszmetszet alapján az analóg tartó-szerkezetben csak a semleges tengelytől legtávolabbi szálakban alakulhatnak ki a külső erőkkel egyensúlyt képező belső erők. A korpuszmetszetben a tető és a hát alapsíkja képezi ezt az elméleti övet (21. ábra).



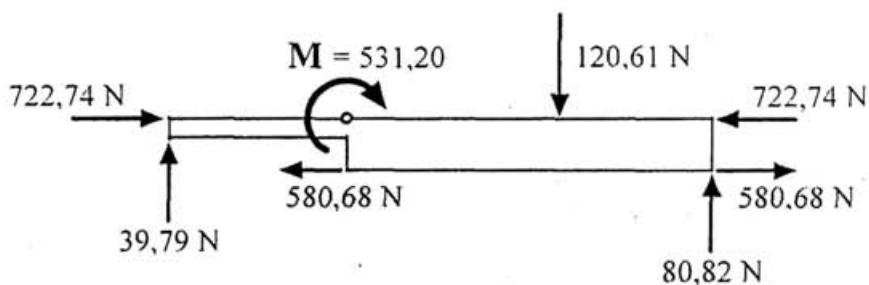
21. ábra

A belső erők kiszámításához abból kell kiindulni, hogy a külső és a belső erőknek egyensúlyban kell lenniük, tehát a belső erők nyomatéka azonos a tartó nyomatéki maximumával:

$$M_{max} = F_{belső} \cdot n, \text{ ebből } F_{belső} = \frac{M_{max}}{n}; \quad \frac{1293,14}{3,0} = 431,05 \text{ N.}$$

Már kiszámítottuk a húrokban lévő feszítőerőkből a tető alapsíkjában képződő nyomóerőt. (291,69 N) Ehhez hozzá kell adni a hajlításból keletkező 431,05 N belső nyomóerőt: $291,69 + 431,05 = 722,74 \text{ N}$.

A nyakban fellépő erők számítása során megismertük, hogy a hátlemez alapsíkjában a felső nyeregnél fellépő támaszerő forgatónyomatékából 149,63 N húzóerő képződik. Ennek alapján a hát alapsíkjában együttesen $149,63 + 431,05 = 580,68 \text{ N}$ húzóerővel kell számolni. Mindezek figyelembevételével a hegedűtestre a következő nagyságú, jellegű és irányú erők hatnak, ezeket a 22. ábra szemlélteti.

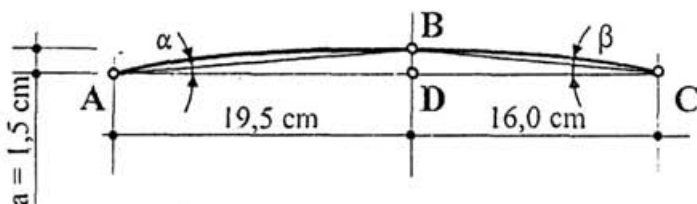


22. ábra

Már szó volt róla, hogy a tető és a hát alapsíkjában kimutatott erők hatásvonalai nem esnek egybe a lemezek tengelyvonalával. Bennünket pedig valójában a lemezek hosszszelvényében fellépő tengelyirányú erők érdekelnek. A felvett korpuszmetszet alapján ezek a lemezek hajlított – íves – tengelyű kéttámaszú tartóként analogizálhatók.

Az íves tengelyű tartók vizsgálata esetünkben újabb akadályt jelent, mivel a bennük fellépő övirányú erők számítása szélesebb körű statikai ismeretet igényel. Így a megközelítés érdekében ismét egyszerűsítésre kényszerülünk.

Az íves tengelyű tartó geometriáját a számítás könnyítése érdekében helyettesítsük két erőháromszöggel. Igaz ugyan, hogy az erőháromszögeknek a befogói kismértékben eltérnek az általuk helyettesített ívszakaszok tengelyvonalától, kezdő- és végpontjai azonban egybeesnek a tetőlemez tengelyével. A közbenső szakaszon pedig olyan kismértékű eltérés adódik, amely a számított erők nagyságrendjében jelentős eltérést nem okoz. Így a fentiek alapján az íves tengelyű tartót tört tengelyű tartóként kezelhetjük (23.a ábra).



23.a ábra

Mindenekelőtt ki kell számítanunk a tört tengelyű tartók és az alapsík között kialakuló szögek nagyságát:

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \frac{1,5}{19,5} = 0,0769 = 4^\circ 30'$$

$$\beta = \operatorname{tg} \beta = \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{1,5}{16} = 0,0937 = 5^\circ 20'$$

Az A - C alapsíkba eső egyenes vonalán 722,74 N nyomóerő hat. Mivel az A , B , C pontokon áthaladó analóg tartótengelyben fellépő erőknek ezt az erőt kell felvennie, a kiinduló pontokon keletkező szögforgás következtében a bennük keletkező erők nagysága megnövekszik. Gondoljunk csak a húrokban keltett feszítőerőkből a tető alapsíkjába és a láb vonalában ható erők számítására. Ott az erőháromszögben az átfogóból számítottuk ki a két befogó vonalába ható erőt, most a nagyobbik befogó felhasználásával határozzuk meg az átfogóval egybeeső erő nagyságát. Mivel az α és β szögek között lévő kicsi különbség miatt lényeges nagyságrendi eltérés nem adódik az AB és a BC átfogókban fellépő erők nagysága között, ezért az egyszerűsítés érdekében feltehetjük, hogy $AB = BC$ -vel. Az AB , illetve BC átfogóban keletkező erők nagysága:

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AB}; \quad \text{ebből } AB = \frac{AD}{\cos \alpha}, \quad \text{vagyis } \frac{772,74}{0,9969} = 775,14 \text{ N.}$$

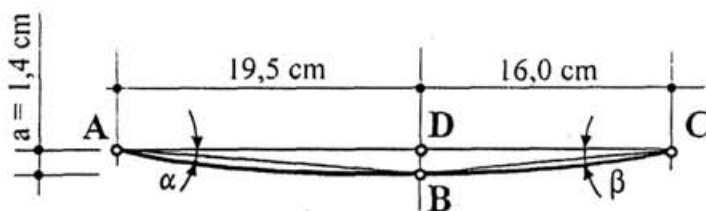
Tehát az analóg tört tengelyű tartóban 775,14 N nyomóerő mutatható ki, ami alig tér el az alapsíkban számított erő nagyságától. Ennek a tört tengelyű analóg tartó tengelyirányú erőjének esetünkben van azonban figyelmet igénylő komponense a B , D pontok között.

Ha az íves tengelyű tartóra tengelyirányú nyomóerő hat, a támaszerők közötti ívszakasz pontjai kitérhetnek eredeti helyzetükből, a vízszinteshez képest megemelkedhetnek. Vizsgáljuk csak meg, hogy milyen nagyságú és irányú erő képződik a B , D pontok között. Az ABC erőháromszögben az A , B pontok között ható nyomóerő:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AB}; \quad \text{ebből } BD = 0,0787 \cdot 775,14 = 61,00 \text{ N.}$$

Ez az erő az íves tengelyű analóg tartóra a két alátámasztási pont között – nagyjából felező távolságra – felfelé irányuló nyomást gyakorol. A korpuszmet-szeten ez a hely csaknem megegyezik a láb síkjában a tetőlemezre ható nyomóerő vonalával. Így a tetőlemezre a húrok feszítőerőiből adódó 120,61 N nyomóerővel szemben ugyancsak a húrok feszítőerőiből képződő hosszirányú nyomóerő ezzel ellentétes hatású 61,00 N erőt hoz létre, ami jelentősen csökkenti a tetőlemezre jutó nyomóerő nagyságát.

Vizsgáljuk most meg azonos metodikával a hátlemezben keletkező erőket (23.b ábra).



23.b ábra

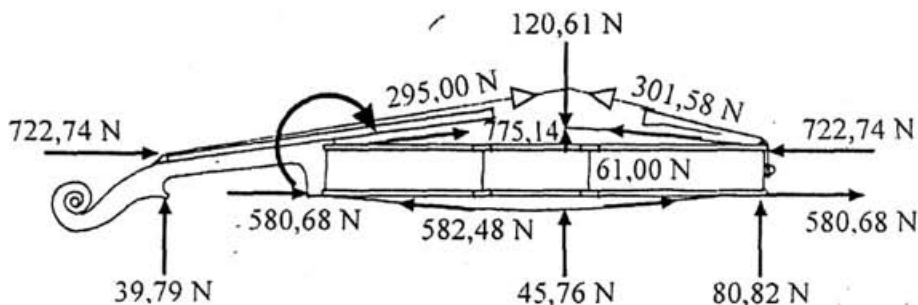
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \frac{1,4}{17,75} = 0,0788 \approx 4^{\circ} 30'$$

$$AB = \cos \alpha = \frac{AD}{AB}; \quad \frac{580,68}{0,9969} = 582,48 \text{ N}$$

$$BD = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD}; \quad 580,68 \cdot 0,0788 = 45,76 \text{ N}$$

Tehát a hátlemez hosszirányában ható húzóerő – a boltozat magasságát csökkenteni törekvő – felfelé irányuló 45,76 N erőt hoz létre.

Most már teljes áttekintést nyertünk, hogy a hegedütestben milyen irányú és nagyságú erők lépnek fel a húrokban előidézett feszítőerők együttes hatása következtében (24. ábra).



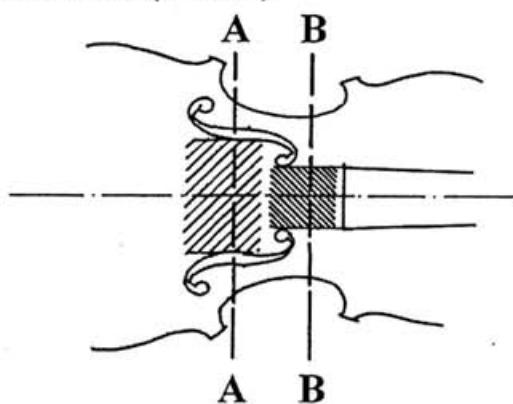
24. ábra

A hegedü szerkezetében az előbbieken megismert erőrendszer statikai szempontból külön figyelmet, mondhatni csodálatot vált ki. Ez az erőjáték ma a korszerű szerkezettervezésben a feszített szerkezetek rendszerében általános. A 16–17. században – a hegedü jelenlegi szerkezetének kialakulása idején – még a

mérnöki alkotások sem ismerték ezt a szerkezeti konstrukciót. Aligha lehet feltételezni, hogy a hegedűépítők egzakt módon alkalmazták volna. Feltehetően a gazdag tapasztalat akkumulációja és a kifinomult intuíció vezette rá őket erre a korukat jóval meghaladó erőtanú konstrukció kialakítására. Bizonyára a statikai elméleti összefüggések ismerete nélkül megalkotott szerkezet sok-sok kísérlet eredménye. Erre utalnak azok a megoldások, amelyeket a statikai ismeretekkel összevetve szembetűnő ellentmondások tárulnak elénk: pl. a tető és a hát boltozatának legmagasabb pontján a lemez vastagságának a növelése, a gerenda beillesztése során – a lábon keresztül a tetőlemezre ható nyomóerő ellensúlyozására – alkalmazott befeszítés, vagy a tőkéhez felhasznált faanyag szálirányának figyelmen kívül hagyása stb.

Az eddigi számításaink alapján megismertük a hegedűtestben fellépő nyomó- és húzóerőket. Most vizsgáljuk meg, hogy az anyagban milyen nagyságú feszültségek alakulnak ki.

Elsőként nézzük meg, hogy a tetőlemezben az f -bevágások közötti boltozatszakaszban mekkora feszültségek keletkeznek. Már szó volt róla, hogy a tetőlemeznek ez a része statikailag a leginkább igénybevett boltozati mező, mivel itt megszűnik az egybefüggő két irányban hajlított lemez oldalirányú alátámasztása (25. ábra).



25. ábra

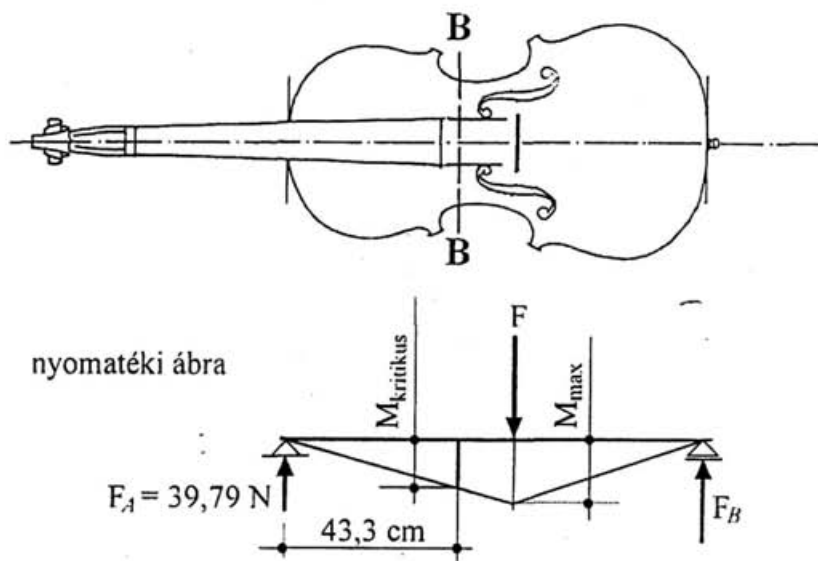
A láb síkjába eső boltozati metszet ($A-A$) vonalában az analóg tartón már számítottuk a nyomatékot ($M_{max} = 1293,14 \text{ Ncm}$) és a tetőlemezben fellépő nyomóerőt ($775,14 \text{ N}$). Ebből az $A-A$ tetőlemez-metszetben keletkező nyomófeszültség:

$$\sigma_A = \frac{P}{F}; \quad \frac{775,14}{7,4 \cdot 0,3} = 349,16 \text{ N/cm}^2.$$

Könnyen felismerhető, hogy az f -bevágások felső szem közötti szakasza ($B-B$ metszet) a legkritikusabb, mivel a lemez-keresztmetszet itt a legkisebb, és a várható fellépő feszültség itt lesz legnagyobb.

Mindenekelőtt számítsuk ki ebben a metszetben lévő nyomóerő nagyságát az ezen a szakaszon fellépő nyomaték felhasználásával (26. ábra): $M = 39,79 \cdot 43,3 = 1722,90 \text{ Ncm}$. A lemezben ható nyomóerő $775,14 \text{ N}$, ennek alapján a $B-B$ metszetben fellépő feszültség:

$$\sigma_B = \frac{775,14}{4,2 \cdot 0,3} = 615,19 \text{ N/cm}^2.$$



26. ábra

A tetőlemezben ebben a metszetben fellépő nyomófeszültség alatta marad a lucfenyőben szálirányban megengedhető maximális 7900 N/cm^2 nyomóerőnek.

Ebből két következtetés vonható le. Az egyik, hogy statikailag indokolatlan a tetőlemez vastagságát a boltozat magasabb részén növelni (3 mm fölé emelni). A másik felismerés, hogy a boltozat „megerősítése” kiegészítő elem beiktatásával szükségtelen, tehát a gerendának nincs statikai szempontból szerepe, még kevésbé a gerenda befeszítésének, amivel a tanulmány második részében részletesen foglalkozunk.

A hátlemezben fellépő feszültségek – bár az előzőekből sejteni lehet – nem közelítik meg a megengedhető értékhatárt, tájékozódás érdekében nézzük meg, milyen nagyságú húzófeszültség lép fel a tetőlemez esetében vizsgált hasonló méretű lemez-szelvényben.

Ha a hátlemezről ugyancsak $4,2 \text{ cm}$ széles lemez-szakaszt vizsgálunk, a maximális negatív nyomaték: $M = 80,82 \cdot 16 = 1293 \text{ Ncm}$. A hátlemezben ható húzóerő nagysága $582,48 \text{ N}$. A max. nyomaték helyén, a láb síkjának vonalában a felvett $4,2 \text{ cm}$ széles hátlemez tartó metszetén:

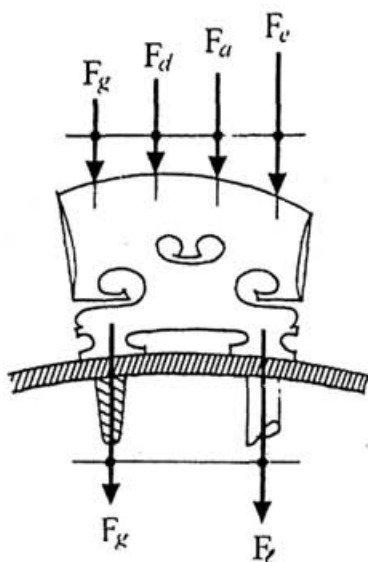
$$\sigma = \frac{582,48}{4,2 \cdot 0,3} = 462,29 \text{ N/cm}^2,$$

ami alacsonyabb érték a tetőlemez hasonló metszetén mért feszültségértéknél. Egyébként is a juharfában szálirányban megengedhető húzószilárdság határértéke 8200 N/cm^2 , ami jóval magasabb a számított tényleges feszültségértéknél. Tehát a hátlemezben a fellépő belső erők nem idéznek elő káros alakváltozást.

1.5. Az eltérő alaphangú húrokban keletkező erők és hatásaik

Az előző számítások során az egyszerűbb áttekintés érdekében a négy húrban – a feszítéssel – létrehozott húzóerőket együttesen kezeltük. A hegedű egyes részeiben fellépő erők és feszültségek vizsgálatához azonban foglalkozni kell a húrokból külön-külön átadódó erők hatásával is. Eddig a láb síkjában egyetlen nyomóerőt vettünk alapul. A valóságban azonban a tetőlemezre ható erők nem egy ponton, hanem a láb két talpfelületén adódnak át, és a húrok anyagától, valamint a bennük lévő feszítőerők kü-

lönbözőségétől függően egymástól eltérő nagyságú nyomóerőket hoznak létre (27. ábra).

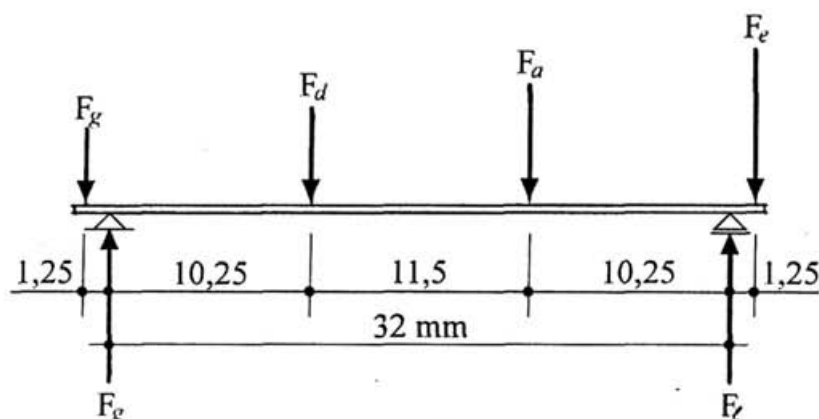


27. ábra

Vizsgáljuk meg mekkorák ezek az erők. A tanulmány elején szó volt a különböző húrokban lévő húzóerők nagyságáról: $e = 9,1$ kp, $a = 7,5$ kp, $d = 6,7$ kp, $g = 6,2$ kp. Ha ezekből – a már ismertetett módon – kiszámítjuk az egyes húrokból a lábra ható erők nagyságát a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} F_e &= 37,31 \text{ N} \\ F_a &= 30,62 \text{ N} \\ F_d &= 27,36 \text{ N} \\ F_g &= 25,32 \text{ N} \\ F_{\Sigma e-g} &= 120,61 \text{ N} \end{aligned}$$

Nézzük meg, hogy mekkora nyomóerők adódnak ebből a gerenda feletti, illetve a lélek felőli lábtalpra. Számításunkat egyszerű nyomatéki egyenlet segítségével végezzük el. Kezeljük a hegedűlábat analóg – több koncentrált erővel terhelt – kéttámaszú tartóként (28. ábra).



28. ábra

Írjuk fel a gerenda felőli támaszerő és a tartó tengelyvonalának metszéspontjára (A) a húr erők nyomatékát (M_A). A nyomatéki egyenlet alapján a húrerők nyomatéka egyenlő a T_L támaszerő A pontra ható nyomatékával: $M_A = -F_g \cdot 1,25 + F_d \cdot 10,25 + F_a \cdot 21,75 + F_e \cdot 33,25 = T_L \cdot 32$; ebből:

$$T_L = \frac{M_A}{32}; \quad \frac{2150,91}{32} = 67,35 \text{ N.}$$

Ugyanúgy írjuk fel a nyomatéki egyenletet a B pontra:

$$M_B = -F_g \cdot 33,25 - F_d \cdot 21,75 - F_a \cdot 10,25 + F_e \cdot 1,25 = T_G \cdot 32; \text{ ebből: } T_G = \frac{1704,12}{32} = 53,25 \text{ N.}$$

Tehát a gerenda feletti lábtalpon keresztül 53,25 N, a lélek felőli lábtalpon át 67,35 N nyomóerő hat a tetőlemezre ($\Sigma = 120,61 \text{ N}$), vagyis a gerenda feletti lábtalpon 14,01 N-nal kisebb nyomóerő terheli a tetőlemezt. Joggal vethető fel a kérdés, ha a gerendának erősítő statikai szerepe lenne, akkor miért a kisebb terhelőerő alatt helyezkedik el?

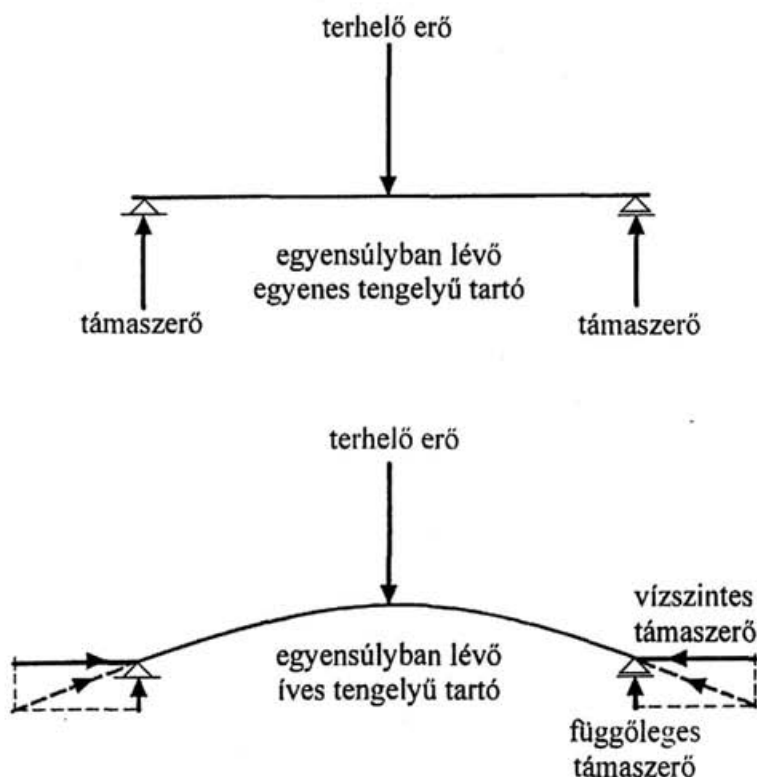
Amit a számítások alapján láttunk, a tetőlemez kritikus metszetében alátámasztás nélkül képes elviselni a keletkezett feszültséget. Számos esetben megtörténik, hogy a lélek „kidől”, és ennek ellenére a lábtalpon átadott nagyobb terhelőerőt a tetőlemez károsodás nélkül viseli. Mindez azt igazolja, hogy a gerendának és a léleknek a hang alakulásában, képzésében van szerepe.

Az eddigi számítási módszerekhez viszonyítva a tető és a hátlemezek összefüggő boltozati szakaszaiban fellépő erők igen bonyolult, a héjszer-

kezetekkel analogizálható térbeli erőrendszer alapján mutathatók ki, illetve a héjszerkezetek számítás elméletével ellenőrizhetők. Ezeknek a szerkezeteknek a sajátossága, hogy a bennük keletkezett erők túlnyomó része nyomóerő, csak abban az esetben jöhet létre hajlítónyomaték, ha a felfekvésüknél a peremtartó nem követi a peremhéz a membrán feszültségi állapotának megfelelő alakváltozását. Két irányban görbült héjaknál a hajlítóerők rendszerint a perem mentére korlátozódnak. A hegedű tető- és hátlemeznél is a kávak és a tető-, illetve hátlemezek érintkezési vonalában, főként a tőkék körül lehet kimutatni nyomatékokat, mivel itt csaknem sarokmerezv csatlakozások alakulnak ki. A hegedű tetőlemeze nem tekinthető homogén héjszerkezetnek, éppen ezért főleg a száiakra merőleges síkban ható hajlítóerőkkel szemben a kicsiny falvastagság miatt hajlítónyomatékokat alig képes felvenni. A hegedű boltozatok héjszerkezete sajátos összetett alakzatú, nem analogizálható az ellipszis vagy az elliptikus paraboloid alaprajzú héjakkal. Mind e mellett a héjak általános hajlításelmélete bonyolult differenciálegyenletekkel követhető. Miután a hegedű szerkezetében legfeljebb a felső és az alsó tőkék zónájában alakulhat ki a lemezekben hajlítónyomaték, ennek vizsgálatát a nagyobb matematikai és statikai ismeretek kényszerű alkalmazásának elkerülése érdekében mellőzzük, és egyszerűbb analóg módszerrel közelítjük meg a téma feltárását.

A könnyebb áttekinthetőség érdekében előbb célszerű megismerni a hajlított (íves) tengelyű tartók jellemzőit. Íves tengelyű tartók esetében az egyenes tengelyű tartókhoz képest – ahogyan a lemezekben fellépő erők számítása során már megismertük – további erők lépnek fel.

Míg az egyenes tengelyű tartókban a terhelő erővel párhuzamos, ellentétes irányú támaszerők keletkeznek, és nem képződik a tartóban rúdirányú derékerő, íves tartók esetében a támaszerők mellett az ív oldalnyomását ellensúlyozó támaszerők is fellépnek (ez a jelenség az építészetben a boltozatok oldalnyomását ellensúlyozó támpillérek alkalmazásában általánosan ismert; 29. ábra).



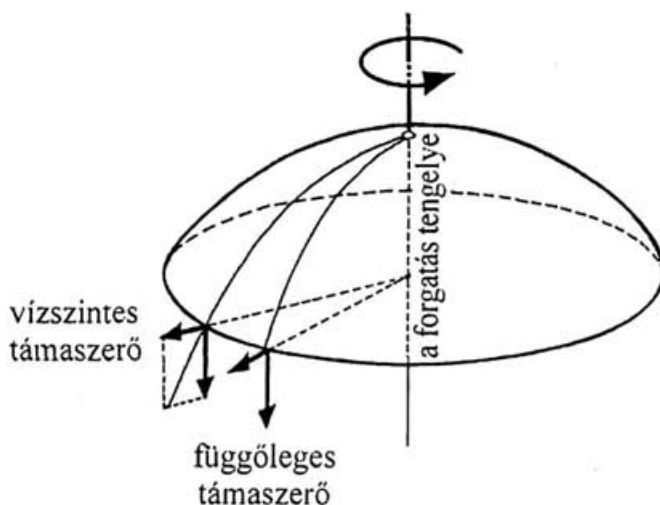
29. ábra

Az íves tartókban jelentősen lecsökken a lehajlás mértéke, vagy egyforma lehajlás mellett nagyobb terhelőerőt képes viselni az íves tengelyű tartó.

A hegedű kialakulásával foglalkozó irodalomból – kultúrtörténeti kutatásokból – tudjuk, hogy a hegedű őse, a fadulon sík tetőlemezzel készült. Bizonyára méretüknél és az alkalmazott húrok anyagától függően a mai hegedűknél kisebb nyomás nehezedett a húrok feszítőerőiből a sík tetőlemezre. Ennek ellenére feltételezhető, hogy a tetőlemez lehajlása gondokat okozhatott. A gyakorlati tapasztalat vezethette az egykori hegedűépítőket arra, hogy a sík tetőlemez vastagságát a húrok alatt növeljék, hiszen ma már egzakt ismeret igazolja, hogy a tartók nagyobb nyomatéknak kitett keresztmetszetének – a tartó inerciájának – növelése nagyobb teherviselést eredményez.

A legnagyobb nyomaték a terhelő erő hatásvonalában alakul ki, csuklós tartók esetében pedig a támaszerőknél nulla. Az is valószínűsíthető, hogy a tetőlemez íves kialakításában szerepet játszhatott – a barokk korban a művészetekben általánosan alkalmazott könnyed, hajlított felületek és vonalak hatása mellett – annak gyakorlati felismerése, hogy az íves felületek terhelhetősége nagyobb a sík felületekhez viszonyítva.

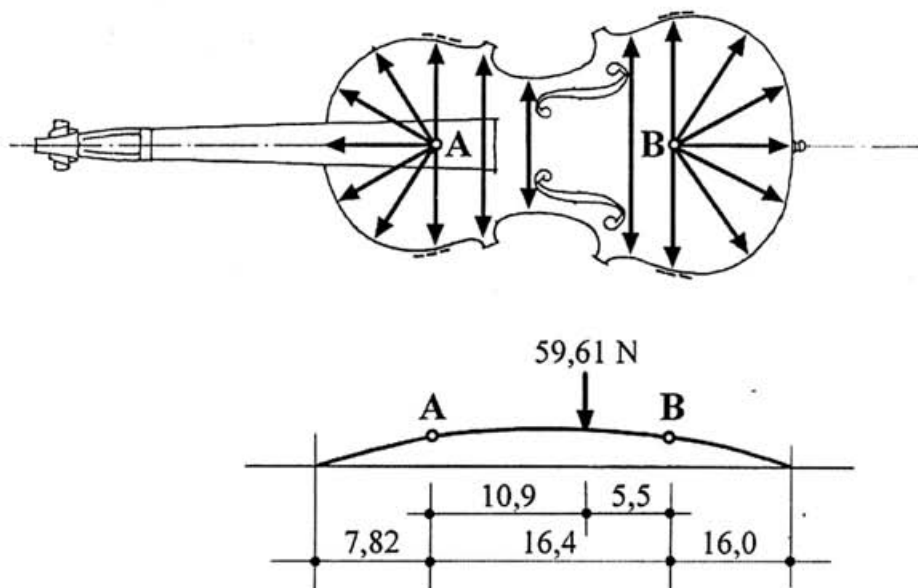
Az íves tengelyű tartók oldalnyomása akkor is érvényesül, ha egy tengely mentén forgásfelületet képezzünk a tartó elméleti tengelyvonalával, vagyis boltozatot hozunk létre. Ez alkalommal az oldalnyomás – ha szabályos gömbcikkelyt alakítunk ki – sugár irányú oldalnyomást kelt, illetve ezzel ellentétes hatású támaszerőket igényel (30. ábra).



30. ábra

Mivel a két irányban hajlított héjszerkezetben fellépő erők kiszámítása bonyolultabb, kíséreljük meg egyszerű modell segítségével megismerni, hogy mekkora nagyságú erők lépnek fel a tetőboltozat lemezében, és ezekből mekkora oldalnyomás hat a kávékra.

Számításainkhoz a tetőboltozatot helyettesítsük a nagy ív és a kis ív geometriai középpontjából sugarasan kiinduló kávaszakaszokra felfekvő rúdszerkezetekkel, amelyekre átadódik a hát síkjában ható nyomóerő (31. ábra).



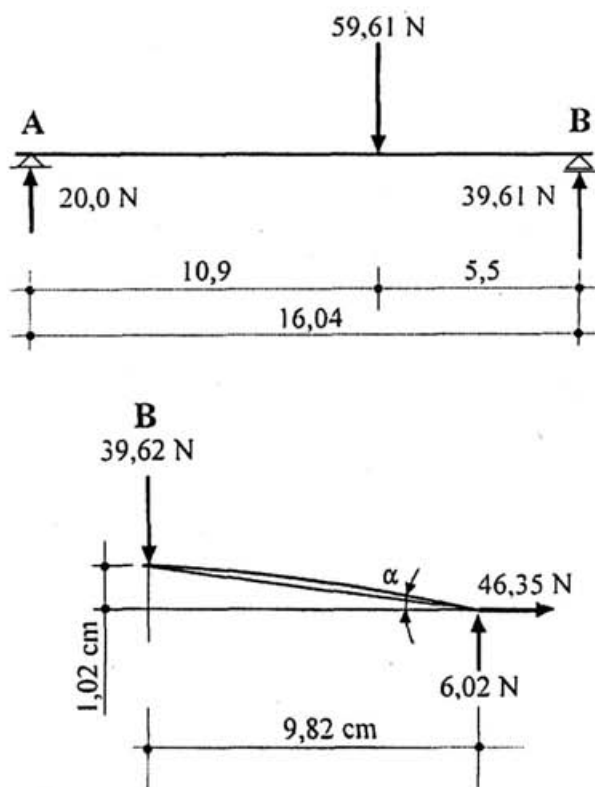
31. ábra

Az A és B pontra jutó nyomóerők nyomatéki egyenlet alapján:

$$M_A = 59,61 \cdot 10,9 - B \cdot 16,40; \text{ ebből } B = \frac{649,75}{16,40} = 39,62 \text{ N}$$

$$M_B = 59,61 \cdot 5,5 + A \cdot 16,40; \text{ így } A = \frac{327,85}{16,40} = 19,99 \text{ N.}$$

A továbbiakban a nagy ívszakaszban fellépő erőket nézzük meg, mivel itt kétszer akkora nyomóerő nehezedik a tetőre, mint a kis-ívben, s így a kritikus feszültségek itt alakulhatnak ki. A B pontba összefutó – a tetőboltozatot megközelítően követő – rudak együttesen viselik az ide jutó terhelőerőt (39,62 N), illetve adják át a kávaszakaszokra. Az analóg szisztémánk szerint ezek a rudak – mint a tetőboltozatban ható erők határvonalai – az alapsíkkal és az arra merőleges alkotóikkal erőháromszöget alkotnak. Ezek után könnyen kiszámíthatjuk, hogy egy-egy rúd milyen nagyságú erővel támaszkodik fel, és milyen nagyságú radiális irányú nyomóerőt gyakorol a kávrá (32. ábra).



32. ábra

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha \frac{1,2}{9,82} = 0,1221 \approx 7^\circ.$$

A B pontban ható nyomóerő (39,62 N) a választott rendszerünkben hét erőháromszög között oszlik meg, tehát egy erőháromszögben 5,66 N erővel kell számolnunk. Az alapsíkban ható nyomóerő ennek alapján

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5,66}{F_r}; \quad \frac{5,66}{0,1221} = 46,35 \text{ N.}$$

A tetőboltozat húrját képező analóg rúdelem

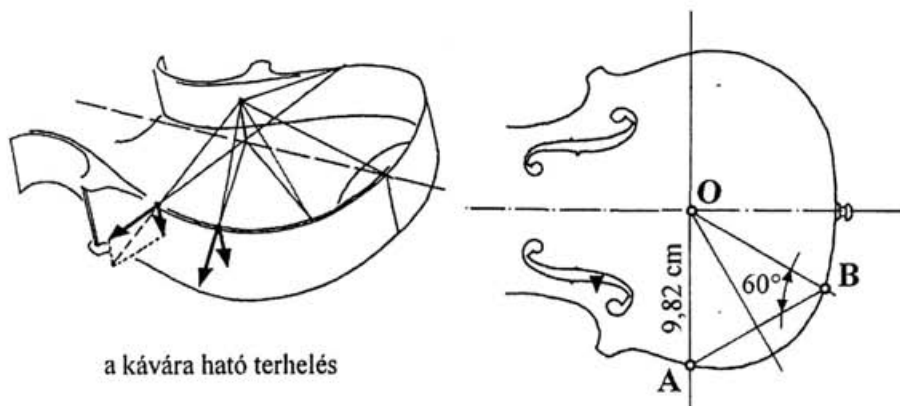
$$\sin \alpha = \frac{5,66}{F_l}; \quad \frac{5,66}{0,1218} = 46,47 \text{ N.}$$

Ebből a rövid számításból megismerhető, hogy a tetőlemezre ható terhelőerők a két irányban hajlított lemezben átadódnak a káva-

szakaszokra, s egyben a kávalemezekre radiális irányú nyomóerőket ébresztenek.

Ezek a radiális irányú erők pedig a kávalemezben húzóerőket hoznak létre, ugyanúgy, mint a folyadékkal telt hordó abroncsaiban a dongákra nehezedő oldalnyomás.

Vizsgáljuk meg, milyen nagyságúak lehetnek ezek az erők. Ismét az erőháromszögek felhasználásával végezzük el a keresett erők számítását (33. ábra).



33. ábra

A radiálisan felvett rudak az O pontban $30-30^\circ$ -os szöget zárnak be. Meg kell azonban jegyezni, hogy hosszuk (az O pont és a káva közötti távolság) nem teljesen egyenlő, mivel a káva íve nem szabályos félkör. Erre tekintettel, hogy a számításunk során minél kisebb pontatlansággal kerüljünk szembe, az O pontot a hátsó nyeregtől ugyanolyan távolságra vettük fel, mint oldalirányban a káva és az O pont közötti méret. Így megközelítően elfogadhatjuk, hogy a két egyforma hosszúságú az O pontban 60° -os szöget bezáró rúd és a kávaív metszéspontjaival meghatározható hosszúságú ív-húr egy egyenlő oldalú háromszöget képez. Ebből két erőháromszög alakítható ki, aminek felhasználásával megismerhetjük a kávalemezben keletkező húzóerőt vagy más néven palást-erőt.

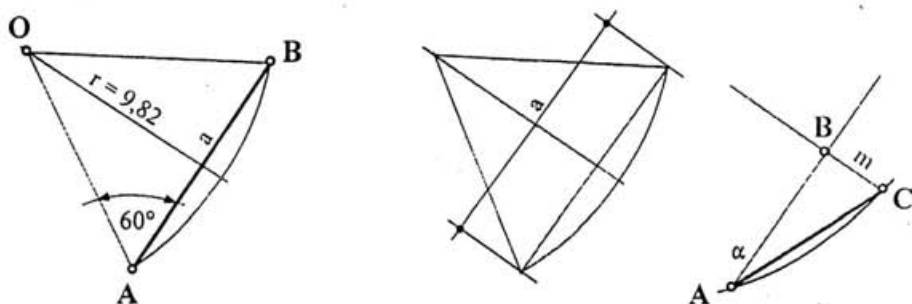
Ebből következően azt kell rögzítenünk, hogy a két erőháromszög húr-irányban eső komponenseinek összege egyenlő a tető alapsíkjában ható

oldalirányú nyomóerő nagyságával (oldalirányú nyomóerő 46,35 N). Már ebből is megállapíthatnánk a kávalemezben fellépő húzóerőt, de a pontosabb eredmény érdekében számítsuk ki a kávaív és a kávaívet analóg helyettesítő befogó hosszát. Az előzőekben alkalmazott módon most is keressük meg az erőháromszöget (34. ábra).

Az A , B , C pontok által meghatározott háromszöget használjuk fel erre a célra. Az A pontban lévő szög: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB}$, ebből AB tudjuk: 4,91 cm. Meg kell ismerni a BC befogó hosszát, ami azonos a körszelet magasságával (m):

$$m = r \cdot \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right); \quad 9,82 \cdot (1 - 0,86603) = 1,32 \text{ cm.}$$

$$\text{Az } \alpha \text{ szög: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB}; \quad \frac{1,32}{4,91} = 0,2688 \approx 15^\circ$$



34. ábra

Már ismerjük, hogy az A , B pontok között – az egyenlő oldalú háromszögből képzett erőháromszögek alapján – az alapsíkban ható oldalirányú nyomóerő fele, $\frac{46,35}{2} = 23,17$ N erő hat. Ebből a vizsgált káva szakaszt analóg helyettesítő A , C pontok közötti erő nagysága: $\cos \alpha = \frac{AB}{AC} = 0,9659$; $\frac{23,17}{AC} = 23,99$ N, vagyis a kávalemezben 23,99 N húzóerő lép fel.

Kérdés, hogy mekkora feszültséget idéz elő ez az erő az érzékeny káva-lemezben. A lemezek keresztmetszete $3,0 \text{ cm} \cdot 0,13 \text{ cm} = 0,39 \text{ cm}^2$:

$$\sigma = \frac{F}{A}; \quad \frac{23,99}{0,39} = 61,51 \text{ N/cm}^2.$$

Ez a feszültségérték – ahogy már szó volt a makk vizsgálatánál – adott esetben kritikus lehet, ha a káva-lemezben a szálak a hosszirányra 90° -ot megközelítő szöget zárnak be.

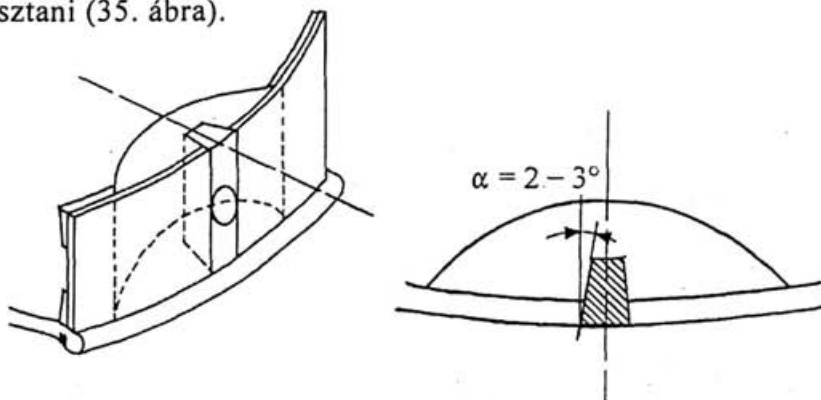
Tény azonban, hogy ez a feszültség a kávékra ragasztott szalagok keresztmetszetének figyelembevételével csökken. A két szalag mintegy $0,2 \text{ cm}^2$ -rel növeli a húzóerő felvételében aktív keresztmetszet nagyságát. Szerepük a káva-lemezben fellépő feszültség felvételében elsősorban abból adódik, hogy a szálirányú szakítószilárdságuk határértéke igen magas. Lucfenyőben (*Picea abies*) a szálirányú szakítószilárdság 9000 N/cm^2 . Mivel a két szalag keresztmetszete együttesen mintegy $0,2 \text{ cm}^2$, a szalagok 1800 N/cm^2 szakítószilárdság felvételére képesek. Ott, ahol a szalagok folytonossága megszakad (pl. a hátsó tőke és a szalagok csatlakozási pontjainál), a káva-lemezben fellépő húzófeszültséget csak a káva keresztmetszete viselheti.

Ha mind e mellett a káva-lemez szálirányai nagymértékben eltérnek a káva hossz tengely irányától, bekövetkezhet a szakadás. A káva-lemez hátsó tőkére ragasztott része helyén marad, és a tőke széleinél – ahol a szalagok nem vesznek részt a palástirányú húzóerő felvételében – a káva-lemez roncsolódik, bereped, vagy teljesen elszakad.⁵

A tetőlemez oldalnyomásához hasonlóan a hátlemez is ad át radiális irányú erőket a kávaívre, ezek nagysága azonban lényegesen kisebb, mivel a hátlemezben kisebb húzó és nyomóerők működnek.

A káva-lemezben előforduló sérülések, roncsolódások áttekintése során szólni kell a lemezben lévő látens erő következtében fellépő hatásról. A káva-lemez a hajlítás során általában maradandó íves alakot vesz fel, ha azonban újabb hőhatás éri, és környezetéből nedvességet vesz fel, a fa molekuláris tulajdonsága következtében eredeti formájának felvételére törekszik. A hátsó tőkénél – játék közben – a test melege és a megnövekedő környezeti páratartalom a látens erőt felszabadítja nyugalmi helyzetéből. Ha mindez a tőke és a káva-lemez közötti ragasztás felpuhulásával párosul, a káva-lemez bütü-illesztése szétnyílik, és a lemezek elválnak a tőkétől.

Ennek elkerülése érdekében célszerű az alsó tőkébe fecskefarukú lapolással néhány milliméter széles trapéz alakú betétet beragasztani (35. ábra).



35. ábra

Így a kávalemezek a ferde élű csatlakozás miatt az előzőekben részletezett kedvezőtlen hatások ellenére sem tudnak a tőkétől elválni. A tőkébe süllyesztett betét beragasztása pedig – a töke belsejében a fa jó hőszigetelő tulajdonsága miatt – a viszonylagosan alacsony hőmérsékleti és pára hatás következtében nem tud felpuhulni, a ragasztás eredeti szilárdságát megtartja. Ha a betét színes keményfából (paliszander, rózsfa, ében) készül, egyben a töke hasítószilárdságát is növeli (ld. *A korpuszban kimutatható nyíróerők* című fejezetet), és esztétikailag a hátsó nyereggel együtt – a praktikus cél mellett – esztétikus hatást is nyújt.

1.6. A korpuszban kimutatható nyíróerők

Az eddig tárgyalt erőknél jóval nagyobb hatásúak a korpuszban fellépő nyíróerők. A tető- és hátlemezben, valamint az alsó tőkében előforduló repedések legtöbb esetben a nagy nyírófeszültségek – a törőfeszültség határát elérő igénybevétel – miatt következnek be.

Vizsgáljuk meg ezekben a nyíróerőknek a kialakulását és hatását. Mindenekelőtt számítsuk ki a gerenda feletti lábtalp és a lélek közelében kialakuló nyíróerő nagyságát. Már ismert, hogy a lábtalpak külön-külön 53,26 N és 67,35 N, együttesen 120,61 N nyomóerővel nehezednek a tetőlemezre. Ezzel szemben a tetőlemezben a húrokból adódó nyomóerő hatására 61,00 N felfelé

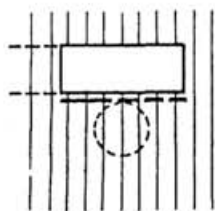
irányuló erő képződik. Ily módon a lemeznek 120,61 N erő helyett ténylegesen $120,61\text{ N} - 61,00\text{ N} = 59,61\text{ N}$ nyomóerőt kell ellensúlyozni. A 120,61 N nyomóerő a két lábtalp között 44,16 % és 55,84 % arányban oszlik meg. Vagyis a lélek felőli lábtalp 67,35 N nyomóerővel nehezedik a tetőlemezre. A lélek tengelyvonalában ezzel az erőhatással szemben fellépő támaszerő nyíró hatást gyakorol a lemezre. A lemezben a nyíróerőnek (τ) közvetlenül kitett felület $0,3\text{ cm} \cdot 0,6\text{ cm} = 0,18\text{ cm}^2$.

A mechanikai igénybevételek között a nyírás olyan esetben lép fel, amikor a szerkezetre ható erők az anyag egymással érintkező felületét egy töréssík mellett elcsúsztatni igyekeznek. A nyíróerők azonban nemcsak nyírófeszültségeket ébresztenek, hanem egyéb: csúsztató-, hajlítófeszültségeket is gerjesztenek. Ezek nagysága azonban a fellépő nyírófeszültséghez viszonyítva kicsi, ezért esetünkben figyelmen kívül hagyhatók.

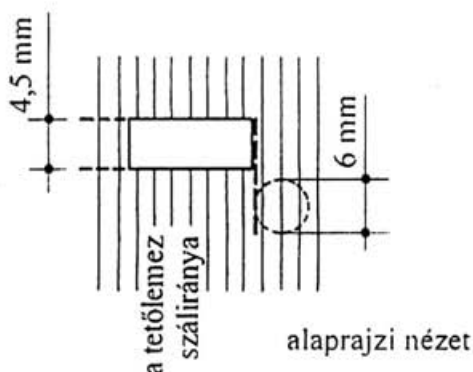
Ennek alapján a nyírófeszültség (τ):

$$\tau_{ny} = \frac{F}{A}; \quad \frac{67,35}{0,18} = 374,16\text{ N/cm}^2.$$

Lucfenyőben a rostokra merőleges síkban a nyírófeszültség átlagos határértéke 670 N/cm^2 . Így, mivel az igénybevétel alapján számított nyírófeszültség a megengedhető értéknek közel 50,0 %-a, a tetőlemez ezen a ponton elég nagy biztonsággal megfelel (36.a ábra). Mivel azonban a lélek gyakran kerül a láb talpvonalán kívül az f -bevágás felé, előfordulhat, hogy a nyírófeszültség a rostokkal párhuzamos lemezmetsetben lép fel (36.b ábra).



36.a ábra



36.b ábra

A nyírófeszültség ez esetben nagyobb felületen oszlik el: $0,3 \cdot 0,6 + 0,45 = 0,30 \text{ cm}^2$, de a nyíróerők nagysága változatlan. Így a keletkező nyírófeszültség:

$$\tau_{ny} = \frac{F}{A}; \quad \frac{65,37}{0,30} = 217,9 \text{ N/cm}^2.$$

Annak ellenére, hogy ilyen lélek-láb konstallációban csökken a nyírófeszültség, a szerkezet állóképessége kritikussá válik. A rostokkal párhuzamos nyírófeszültség határértéke a fenyőfélékben 3-4-szer kisebb a rostokra merőleges megengedhető nyírófeszültség értékénél. Különböző mérések szerint a rostiránnyal párhuzamos elviselhető nyírófeszültség értéke a merőlegesen ható mértékadó feszültség érték ötödére is le-

csökkenhet: $\frac{670}{5} \text{ N/cm}^2 = 134,00 \text{ N/cm}^2$. Ilyen lélek-elhelyezés esetében váratlan, kismértékű külső erő hatására elkerülhetetlen a tetőlemez elrepedése, a „lélekrepedés” kialakulása.

Némi biztonságot jelent a tetőlemez vastagságának növelése a lélek várható elhelyezésének zónájában, megközelítően $2,0 \text{ cm}^2$ átmérőjű körben. Az esetben a kritikus nyírófeszültséget viselő lemez keresztmetszet elérheti $0,42 \text{ cm}^2$ -es nagyságot, aminek következtében a τ értéke jelentősen lecsökken:

$$\tau_{ny} = \frac{65,37}{0,42} = 155,64 \text{ N/cm}^2.$$

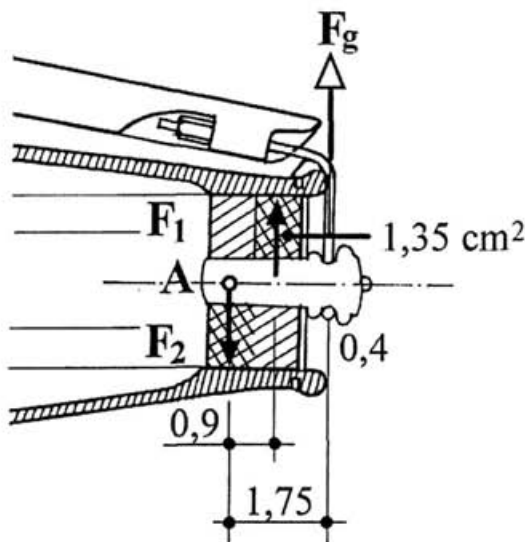
A hegedűépítés gyakorlatában ezzel ellentétben a hátlemez lélektáji vastagságának növelése vált általánossá. Ebben az az ellentmondás, hogy a juharfának még rostokkal párhuzamosan is jóval nagyobb a nyírószilárdsága (lucfenyő $\tau_{max} = 670 \text{ N/cm}^2$, hegyi juhar $\tau_{max} = 900 \text{ N/cm}^2$), és a hátlemezben nem alakul ki lélekben fellépő nyomóerővel szemben koncentrált erő. S ami döntő, ennek következtében a kimutatható nyírófeszültség jóval nagyobb metszetfelületen oszlik meg, mint a tetőlemez-lélek illeszkedésénél. Végeredményben a hátlemezben nem alakulhat ki a tetőlemezben fellépő nagyságú nyírófeszültség.

A lélek körüli tetőlemezen kívül az f -bevágásokból kiindulva következnek be még gyakran a hossz tengellyel párhuzamos irányú lemeztörések. Ezek okozói – a számításaink során alkalmazott f -bevágások közötti lemez-sáv és a hozzá csatlakozó boltozati lemez-szakaszok érintkezési vonalán kialakuló nyírófeszültségek. Mivel ezek minden

esetben rostokkal párhuzamos igénybevételt képeznek, viszonylag már igen kicsiny külső erőhatás előidézhetheti a lemez elnyíródását, repedését. Igen gyakori még az f -bevágások alsó szem-íve és a kis íves káva közötti szakaszon képződő lemezrepedés. Ez azonban kizárólag külső erőhatás következtében lép fel, mivel a korpusznak ezen a pontján nincsenek belső erők.

Szólni kell még az alsó tökében fellépő – gyakran roncsolódást előidéző – hasító feszültségről. Számos esetben tapasztalható, hogy a gomb felett elreped a töke, és felette a tetőlemezben is repedés indul el.

A húrokban keltett feszítőerők együttesen a láb mögötti részen közvetlen a gombra terhelődnek. Ismerjük a húrokban lévő – már kiszámított húzóerőt: 301,58 N, ebből a gombra $F_g = \sin 14^\circ 42' \cdot F$, vagyis $0,2537 \cdot 301,58 = 76,51$ N húzóerő hat (37. ábra).



37. ábra

A gomb tökéen kívüli részére ható 76,51 N húzóerő belső erőpárt hoz létre. Ennek felhasználásával könnyen meghatározhatjuk a töke kritikus metszetében keletkező nyomatéki erő nagyságát. Mivel az A ponton a külső erő és a belső erő nyomatékának egyenlőnek kell lenni, a belső erő nagysága egyszerű nyomatéki egyenlettel meghatározható:

$$M_K = M_B, \text{ azaz } 76,51 \cdot 1,75 = F_I \cdot 0,9, \text{ ebből}$$

$$F_I = \frac{133,89}{0,9} = 148,76 \text{ N.}$$

Ez a belső erő elsődlegesen a tőke gomb felőli felső részén ébreszt hasító feszültséget. Ennek értéke: $\sigma_h = \frac{F}{A}$;

$$\text{vagyis } \frac{148,76}{1,35} = 110,19 \text{ N/cm}^2.$$

Gyenge, lombohullató fában – és a tőkék leggyakrabban ebből készülnek – ha a hasítási sík párhuzamos az évgűrük irányával, a hasítószilárdság $51,0 \text{ N/cm}^2$. Mivel a számított érték ennek több mint kétszerese, szinte törvényszerű a tőke elrepedése. A tőkében bekövetkező roncsolódás csaknem minden esetben repedést okoz a tetőlemezben is, hiszen a tőke anyagának elmozduló részecskéi magukkal ragadják a lemez érintkező részecskéit is.

Az alsó tőke hasító szilárdsággal szembeni ellenállását a szálirány megválasztásával lehet növelni. Gyakorlatban igen sok esetben a tető szálirányával azonos szálirányú tőkék készülnek. Ha a tőkék száliránya a hegedűtest hossz tengelyével közel merőlegesen helyezkedik el, az előző számításból egyszerűen következtethető, hogy nagymértékben megnő a tőke nyírófeszültséggel szembeni ellenállása, s ezzel együtt biztonságosabb a tető lemezének repedés elleni védelme is.

1.7. A lábban kialakuló belső erők

A tartószerkezetek világában külön fejezetet képez az oszlopok és a nyomott falszakaszok vizsgálata: a nyomófeszültségek alakulása, a különböző nyomás során fellépő nyomatékok, valamint a kihajtás ellenőrzése. A hegedű szerkezetében két ilyen elem van: a lélek és a láb. A lélek statikai értelemben oszlopként működik, bár amint láttuk, a tető- és a hátlemezben képződő erők számításánál nem igazolódik, hogy szerepe elsődlegesen a terhek viselésére korlátozódna. Tapasztalható is mindez, hiszen megtörténik, hogy teljes húrnyomás (felhangolt hegedű) esetében kidől a láb, megszűnik az alátámasztás, és ennek ellenére a tetőlemez károsodás nélkül átvészeli ezt az állapotot.

A hegedű hangja azonban „lélek-telenné” válik. Ebből az a következtetés vonható le, hogy döntően a hang kialakulásában játszik szerepet, és ez az érintkező testekben történő rezgéshullámok terjedésének elemzésével bizonyítható is.

Mind e mellett azonban az eddigi számításainkból is szembetűnik, hogy a lélek mint oszlop részt vállal a hegedűtestben létrejövő erők viselésében. A kérdés az, hogy mekkora erők hatnak rá, és milyen mértékben felel meg az igénybevételnek. *A korpuszban ható erők* című fejezetben megismerhettük, hogy a láb 120,61 N nyomóerőt gyakorol a tetőlemezre. Ezzel szemben a tetőlemez a benne fellépő hosszirányú nyomóerő következtében – az íves tengelyű tartókra jellemző módon – 60,00 N ellentétes irányú erővel csökkenti a láb síkjában ható nyomóerőt (120,61 N – 61,00 N = 59,61 N). A tetőlemezre tehát 59,61 N nyomóerő jut. Ezt az igénybevételt a két irányban hajlított lemez még a rugalmasság határán belül elviseli, azonban a hátlemezben fellépő húzóerő keltette a láb irányába ható erő (45,76 N) a lélekben nyomófeszültséget ébreszt.

Nézzük meg, milyen nagyságú ez a feszültség: $\sigma_r = \frac{F}{A}$

a lélek átmérője: $d = 0,6 \text{ cm}$;

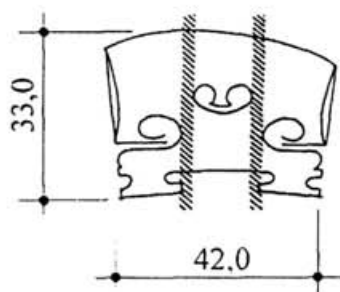
$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}; \quad \frac{0,36 \cdot 3,14}{4} = \frac{1,13}{4} = 0,28 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_r = \frac{45,76}{0,28} = 163,43 \text{ N/cm}^2$$

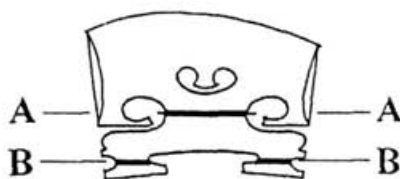
Lucfenyőben szálirányban a legkisebb megengedhető nyomószilárdság határértéke 3500 N/cm^2 , vagyis jóval felette van a tényleges értéknek.

A teljesség érdekében meg kell jegyezni, hogy – a lélek és a lemezek ferde síkú csatlakozása miatt – a nyomóerő iránya nem esik egybe a lélek tengelyével, aminek következtében külpontos nyomás jön létre, s ezzel együtt hajlító nyomaték is fellép. Ennek nagysága azonban elenyészően kicsi, így esetünkben elhanyagolható.

Sokkal izgalmasabb azonban a láb, annál is inkább, mivel a húrok-ból adódó nyomóerő következtében gyakran elgörbül, kihajlik.



38.a ábra



38.b ábra

Vizsgáljuk meg a láb síkjában ható nyomóerő hatásait. A láb statikailag alátámasztást szolgáló lemez: mérnöki nyelven terhelést hordó falszakasz. Formája miatt egészen sajátos, mert átmenő függőleges metszete (a gerinctől a talp vonaláig) változatos figurális kimetszések miatt jóformán nincs. Tehát olyan szerkezet (38.a ábra), amely egyenes vonal mentén nem közvetít nyomóerőt, hanem ehhez minden szelvényben társul valamilyen nagyságú nyomaték. A láblemezben a legnagyobb nyomófeszültség a két oldalsó bevágás közötti egységes keresztmetszetben (A–A) és a két talp-nyak keresztmetszetében képződik (B–B, B–B) (38.b ábra).

Az A–A metszetben fellépő feszültség: $\sigma = \frac{F}{A}$,

F = a négy húrból a lábra jutó nyomóerő 120,61 N,

A = a keresztmetszet felülete $1,7 \text{ cm} \cdot 0,35 \text{ cm} = 0,59 \text{ cm}^2$,

$$\sigma = \frac{120,61}{0,59} = 204,42 \text{ N/cm}^2.$$

Hegyi juharban a legkisebb megengedhető nyomószilárdság 3100 N/cm^2 .

A két talp-nyakban eltérő nagyságú feszültségek adódnak, mivel a terhelő erők megoszlása a húrokban lévő különböző értékű feszítőerők szerint alakul. Már kiszámítottuk, hogy a gerenda felőli lábtalpra 53,25 N, a lélek felőli lábtalpra 67,35 N nyomóerő hat. Ennek alapján a gerenda felőli lábtalp-nyakban fellépő feszültség:

$$\sigma_g = \frac{F_g}{A}; \quad \frac{53,26}{0,20} = 266,30 \text{ N/cm}^2.$$

$$\text{A lélek felőli lábtalp-nyakban: } \sigma_h = \frac{F_t}{A}; \quad \frac{67,35}{0,20} = 336,75 \text{ N/cm}^2.$$

A számítás szerint még a legkisebb összefüggő lábnyak-keresztmetszetben képződő nyomófeszültség sem közelíti meg a megengedhető határértéket, tehát a láb a nyomóerő igénybevételének megfelelően.

Nyomóerővel terhelt lemeznél kritikus lehet a kihajlás. Karcsú szerkezetek nyomó-igénybevételekor a feszültség növekedése során felléphet a kihajlás. Minden olyan esetben számolni lehet ezzel a jelenséggel, ha a kihajlási hossz (ℓ) és a legkisebb keresztmetszet (A) hányadosa nagyobb 12-nél. Esetünkben a láb magassága 3,3 cm, a két talp-

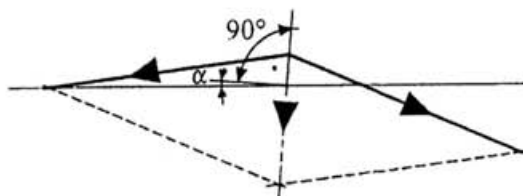
nyak keresztmetszete $A = 0,40 \text{ cm}^2$, tehát az $\frac{\ell}{A}; \frac{3,3}{0,40} = 8,25$, vagyis

kisebb, mint 12, így kihajlás a tényleges karcsúsági tényező miatt nem következhet be.

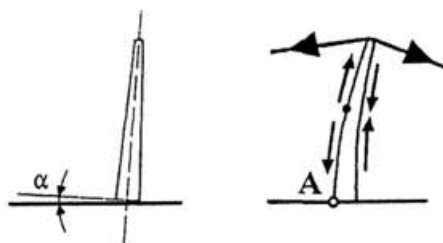
A meglepő, hogy a láb mégis gyakran meggömbül, látszólag kihajlik a terhelés hatására. Ennek az oka azonban másban kereshető. A hangszerészek és a zenészek a láb síkját nem merőlegesre állítják be a tető érintősíkjára, hanem a lábnyereg a húrtartó irányba $1-2^\circ$ -kal hátra dől. Ezt azzal indokolják, hogy az időszakonként szükséges hangolás során a láb felső része a fogólap irányába elmozdul, ami a rezgő húrszakasz megrövidülésével jár. Ez a tény tagadhatatlan, mivel a húr feszítésével a megnyúlás következtében elmozduló részecskék – leszámítva a csúszásból adódó csökkenést – magukkal ragadják a láb koronavonalát.

A láb hátrafelé döntésének azonban főként statikai szerepe van. Vizsgálataink során már megismertük, hogy a láb és a húrtartó közötti húrszakaszban nagyobb húzóerő keletkezik, mint a rezgő húrszakaszban, s így a két erő eredője nem merőleges a tetőlemezre. Erről egyszerűen meggyőződhetünk, ha a két ismert erő eredőjét szerkesztéssel meghatározzuk (39.a ábra).

Ha a lábtalp tetőlemezzel érintkező síkja merőleges a láb síkjára, a lábtalp húrtartó felőli része fekszik fel a tetőlemezre. Ennek következtében a nyomóerő lényegesen kisebb felületen adódik át. Tehát megnő a nyomófeszültség, és a láb kihajlását előidéző nyomaték fellépésével kell számolni, aminek következménye, hogy a láb síkja elgömbül, deformálódik.



39.a 'bra



39.b ábra

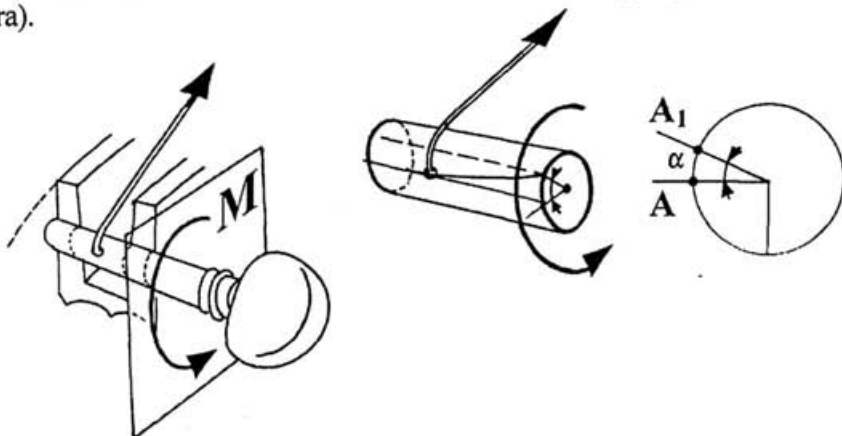
Tekintsük át ezt a folyamatot, hogyan alakulnak az erőviszonyok, amikor a lábtalp kialakítása merőleges a láb síkjára pontosabban a láb-lemez tengelyvonalára. A láb síkjában ható nyomóerő az A pontra – a felfekvő talpélre – nyomatékot képez: $M_A = 120,61 \cdot 0,22 = 26,53 \text{ N cm}$. Ez a nyomaték a láb húrtartó felőli síkjában nyomóerőt, a fogólap felőli láb-síkban húzóerőt ébreszt, mivel a lábtalp a tetősíkra teljes felületével felfeküdni igyekszik (39.b ábra).

Könnyen felismerhetően érvényesül a hajlításra jellemző erőjáték, aminek következtében a láb lemezzé torzul, meghajlik. Ennek elkerülésére a láb talplemezét a láb síkjának hátradöntésével megegyező szögben célszerű a lábsík tengelyvonalára kialakítani.

1.8. A kulcsok csavaró igénybevétele és a kulcsház hasítószilárdsága

A húrokban az alaprezonancia eléréséhez szükséges feszítőerőt a kulcsok csavarása révén lehet biztosítani. Ez a művelet a kulcsszárban csavarónyomatékot képez, aminek nagysága függ a húrban fellépő feszítő-

erőtől és a kulcsszár átmérőjétől. A rugalmas anyagú körszimmetrikus keresztmetszetű rudak tiszta csavarása közben a rúd tengelyére merőleges síkban ható forgatónyomaték a rúd keresztmetszeteiben szögforgást idéz elő (40. ábra).



40. ábra

A szögforgás arányos a τ feszültséggel. Mivel a legnagyobb feszítőerő az e -húrbán képződik, a legnagyobb csavarónyomaték az e -kulcsban jön létre. Ennek nagysága: $M_{cs} = 91,00 \cdot 0,4 = 36,4 \text{ Ncm}$.

A keresztmetszetben ébredő legnagyobb csavaró feszültség

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{I_{polaris}} \cdot r,$$

ahol M_{cs} a fellépő csavarónyomaték, az $I_{polaris}$ a csavart keresztmetszet poláris inercianyomatékából számított keresztmetszeti tényező:

$$I_{polaris} = \frac{\pi \cdot r^4}{2}; \quad \frac{3,14 \cdot (0,4)^4}{2} = 0,040.$$

$$\text{Ezek ismeretében } \tau_{max} = \frac{36,4}{0,04} \cdot 0,4 = 364,0 \text{ N/cm}^2.$$

Az egzotikus fák szilárdsági értékeit bemutató hazai táblázatok nem tartalmazzák sem az indiai, sem a nyugat-afrikai ébenfa csavarási szilárdságának mért értékeit. Csak viszonyítani tudunk.

Az afrikai vasfa (*Cophira procera*) térfogatsúlya megközelíti az ébenfa térfogatsúlyát, egyéb jellemzői is csaknem hasonlóak, csavarószil-

lárdsága 1800 N/cm^2 .⁶ Az ébenfa csavarószilárdsága is e körüli érték lehet. Mivel a számított csavarófeszültség többszörösen alacsonyabb értékű, a kulcsokban fellépő csavarónyomaték – a tapasztalatok is igazolják – roncsolódást nem okoz. A ritkán előforduló kulcsfej-, illetve kulcsnyak-törések a kúpos kulcsszár beszorulásának, beragadásának a következményei.

Általános még a paliszander fából készült kulcsok használata. Ez a fa már lényegesen kisebb szilárdsági értékekkel rendelkezik. Térfogat súlya, nyomószilárdsága, Brinell-keménységi foka alatta van az előbb összehasonlított egzotikus fák értékeinél. Ebből is adódik, hogy tapasztalat szerint a paliszander fából készült kulcsok esetében előfordul a fára jellemző határértéket meghaladó csavaró feszültségre utaló roncsolódás.

A kulcsszárban fellépő csavarónyomaték megismerésén túl még érdemes foglalkozni a kulcsház statikai problémáival. Gyakran megtörténik, hogy a kulcs „megszalad” – leenged a húr –, ha pedig a szükségesnél erősebben beszorítják a kúpos furatba, repedést okoz a kulcsház falában.

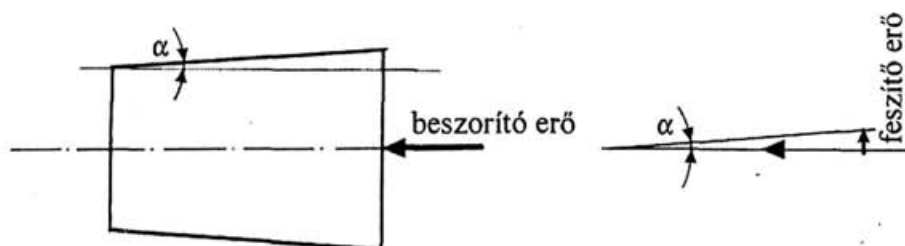
Mivel a felhangolt húrban fellépő feszítőerővel szemben a kulcspalást és a kulcslyuk érintkező felülete között képződő tapadási súrlódás biztosítja a stabilitást, mindenekelőtt át kell tekintenünk a kulcs elfordulását előidéző erő és a súrlódásból adódó erők közötti összefüggést.

Tudjuk, hogy két egymáson csúszó felület között súrlódás jön létre, ami a súrlódást okozó erővel ellentétes irányú súrlódási erőt eredményez. A súrlódási erő (F_s) egyenesen arányos az érintkező felületek anyagi minőségi jellemzővel, súrlódási együtthatójával (μ)⁷ és a két felületet egymáshoz nyomó erővel (F_{ny}): $F_s = \mu \cdot F_{ny}$.

A kulcs elfordulása – a palást felületen fellépő csúszás – a húrban keltett feszítőerő hatására következik be. Ez a feszítőerő pl. az *e*-húrbán – ismerjük – $91,0 \text{ N}$ húzóerőt gyakorol a kulcs és a kulcsház érintkező felületeire. A csúszást előidéző húzóerő tehát azonos nagyságú a húrbán lévő feszítőerővel.

Abból a követelményből kiindulva, hogy a kulcs elfordulása ne következhesen be, egyértelműen következik, hogy a csúszást akadályozó súrlódási erőnek nagyobbnak kell lenni a kulcsra ható feszítőerőnél ($F_s > F_f$).

A súrlódó felületekre ható nyomóerő a vizsgált esetben a kúpos kiképzésű kulcsszár beszorításával jön létre. Kialakulása egyszerű erőháromszög segítségével elméletileg könnyen követhető. A kúpos kulcsszárat beszorító erő (F_{sz}) felbontható a kúpos felület alkotójával megegyező és a beszorító erő tengelyvonalára merőleges irányú komponens erőkre (41. ábra).



41. ábra

Az erőháromszög alapján $F_{nyomó} = \operatorname{tg} \alpha \cdot F_{beszorító}$.

A kúpos felületű kulcs beszorításából a kulcslyuk palástjára radiálisan ható nyomóerők ún. palástfeszültséget hoznak létre. Eddigi számításainkból már ismerjük, hogy a palástfeszültség $\sigma_p = \frac{F}{A}$, vagyis a keletkező palástfeszültség függ a nyomóerőtől, és fordítottan arányos a palástfelületével.

Miközben a súrlódási erő alakulásának elemzése során a súrlódó felületekre ható nyomóerőt vizsgáljuk – amit a palástfeszültség növelésével tudunk fokozni –, egyben vizsgálni kell a palástfeszültséggel összefüggő hasítószilárdságot is, mivel a kúpos kulcsszár beszorításával a kulcsház falában hasító igénybevétel is jelentkezik.

A szilárd anyagban fellépő hasítószilárdság $\sigma_h = \frac{F_{\max}}{A}$ (a palástfeszültség is $\sigma_p = \frac{F}{A}$!). Ily módon a súrlódó felületekre ható nyomóerő és a kulcsház falában előállható hasítóerő között közvetlen összefüggés mutatható ki. Képletesen úgy is kifejezhető, hogy a súrlódási erőt meghatározó ΣF_{ny} erő semmivel sem lehet nagyobb a palástfeszültségben fellépő $F_{\max}$ -nál.

A súrlódó felületek összenyomását képező F_{ny} erő és a palástfeszültségben szereplő F erő alapján, mivel $\sigma_p = \frac{F}{A}$, s ebből $F = \sigma_p \cdot A$ súrlódási erő képlete $F_s = \mu \sigma_p \cdot A$.

Ebből az összefüggésből látható, hogy a kulcs elfordulását akadályozó súrlódási erőt a súrlódási felület nagysága jelentősen befolyásolja, vagyis a kulcsház falvastagsága és a súrlódási erő között közvetlen hatás mutatható ki.

Mindemellett a kulcsház falvastagságát a homlokrészen praktikus és esztétikai okokból nem kívánatos növelni. E helyett az előzőekben részletezett okok miatt a kulcsház falát a fenék felé – a kulcslyukak tájékán – célszerű vastagítani, hogy a súrlódási erő a kulcs kisebb befedésével a kulcsház falában fellépő hasítószilárdság határértékének megközelítése nélkül elérhető legyen.

1.9. A hegedűtestben a terhelhető erők hatására bekövetkező lassú alakváltozás

A hegedűre ható erők által okozott következmények számbavétele során említést kell tenni a hegedűtestben végbemenő lassú alakváltozásról is. Minden erőhatásnak kitett szerkezetben a terhelés alakváltozást idéz elő. Tudjuk, hogy az erő hatására az anyag megnyúlik, összenyomódik, meghajlik. A rugalmassági határon belül bekövetkező alakváltozás azonban megszűnik, ha a szerkezet mentesül a terhelő erő hatása alól. Részben vagy egészében visszanyeri eredeti alakját, maradandó alakváltozást nem szenved. Minden alakváltozás azonban egy múló és egy maradandó részből áll. Úgy is mondhatjuk, hogy minden alakváltozás az igénybevétel mértékétől és a szerkezet anyagára jellemző rugalmassági tényezőtől függően tartalmaz elenyészően kicsiny vagy már kimutatható maradandó eltérést – a szerkezet eredeti állapotához képest. A hosszú időn át ható tartós terhelés növeli az anyag maradandó alakváltozását.

Megfigyelhető ez a jelenség új hegedűk esetében. A húrokat „gyakrabban” kell felhangolni, s ennek nemcsak az oka, hogy a változó hőmérséklet hatására megnyúlnak, hanem főként az a tény, hogy a hegedű szerkezetében lassú alakváltozás megy végbe. A hegedűtestben működő belső erők (húzó-,

nyomó-, hajlítóerők) az anyag molekuláinak térbeli helyzetét, kohéziós erőviszonyait átrendezik, ami alakváltozást idéz elő (a tetőlemez hosszirányban összenyomódik, a hátlemez megnyúlik, a boltozatok magassága csökken, az illesztési pontok elmozdulnak eredeti helyzetükből).

Ez az alakváltozás a valóságban alig érzékelhető, legfeljebb a felület kisebb torzulásából – a boltozat egyenletességének módosulásából – a káva dőlésszögeinek elferdüléséből érhető tetten. Nagyobb gondot a hegedű esztétikai jellegének megítélésében és használatában nem okoz.

Jóval jelentősebbek azonban azok az alakváltozások, amelyek formai módosulással járnak, és a hegedű használata során funkcionálisan is zavaróan hatnak: pl. a nyak dőlésszögének csökkenése, vagy a nyak és fogólap tengelyirányból történő eltérése. Más esetben kiváltképpen esztétikailag zavaróak: pl. a lélek felőli f -bevágás torzulása, a boltozat deformálódása.

Mindezek a kellemetlenséggel járó alakváltozások közvetetten a tartós külső erőhatást és ennek nyomán keletkező belső erők, valamint a környezeti jellemzők változásainak (hő-, páratartalom ingadozás) következményei. Nézzük meg, hogy a kiváltó ok (a húrokban lévő feszítőerők) és a következmény között milyen összefüggés van.

A nyakban fellépő – a hegedűtestre merőleges síkban ható – forgatónyomatékról már szó esett. Kiszámítottuk, hogy a négy húrban lévő együttes feszítőerő a felső nyeregnél 39,79 N támaszerőt hoz létre. A felső nyereg és a nyaktőke fordulóele között 13,65 cm távolság van. Ennek alapján a fogólapra merőleges síkban állandó nyomaték hat, aminek a nagysága $M = 39,79 \cdot 13,65 = 543,13 \text{ Ncm}$.

A tartós igénybevétel hatására bekövetkező lassú alakváltozás a nyak eredetileg beállított dőlésszögét csökkenti, és a fogólap láb felőli része közelebb kerül a tetőlemez érintősíkjához. Csökken a húrokból a láb síkjára ható erő, aminek a hang keletkezésében mutatható ki kedvezőtlen hatása (ld. *A rezgést keltő erő és a rezgő lemez kapcsolata* című fejezetet).

Ezt az előre látható következményt a nyak dőlésszögének beállításakor egyszerűen nagyobb dőlésszög alkalmazásával kívánják a legtöbb esetben elkerülni. Ez azonban a kezdeti a lassú alakváltozás előtti szakaszban a szükségeshez képest nagyobb lábmagasságot igényel a vele járó kellemetlenséggel.

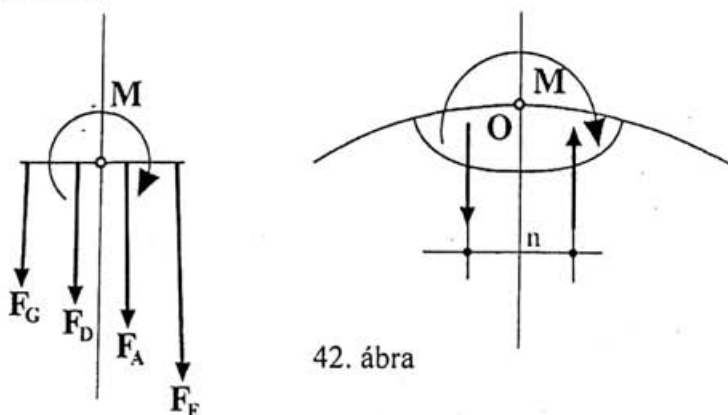
Hatékonyabb technológiai megoldás a nyaktőke és a felső nyereg kapcsolatának erősítése – *A nyakban fellépő erők* című fejezetben tárgyalta – kapcsoló trapéz alakú lemez alkalmazásával. Ez a nyaktőke-rögzítési mód nemcsak a makk kiszakadása ellen nyújt védelmet, hanem egyben a nyak szögforgását is akadályozza.

A húrok aszimmetrikus paramétereiből következő – a tetőlemez alapsíkjára vetített – forgónyomaték már kellemetlenebb, nehezebben korrigálható alakváltozást okoz. A *g*-, *d*-húrokban és az *a*-, *e*-húrokban lévő feszítőerők közötti különbség elég jelentős (*g*: 62 N, *d*: 67 N – Σ = 129 N; *a*: 75 N, *e*: 91 N – Σ = 166 N). Ezeknek a tetősíkból kimutatható komponensei: *g* = 61,88 N, *d* = 62,58 N, *a* = 68,02 N, *e* = 88,70 N. Ha a nyaktő forgóértékének és a hegedűtest tengelyének metszéspontjára kimutatjuk a keletkező nyomatékokat, szembetűnő különbséget kapunk. A *g*- és *d*-húrból számítható nyomaték M_{g-d} :

$$M_{g-d} = 61,88 \cdot 1,2 + 62,58 \cdot 0,4 = 99,28 \text{ Ncm}$$

$$M_{a-e} = 68,02 \cdot 0,4 + 88,70 \cdot 1,2 = 133,64 \text{ Ncm}$$

Tehát az *a*- és az *e*-húrok felőli nyakrészt 34,36 Ncm-rel nagyobb nyomaték terheli. Úgy is felfogható, hogy ez a 34,36 Ncm állandóan ható forgatónyomaték a nyak tengelyét a korpusz tengelyvonalától elfordítani törekszik, és a lassú alakváltozás során a nyak elferdülését okozza. Ennek csökkentése a szerkezet forgatónyomatékkal szembeni ellenállásának növelésével lehetséges. Ha a felső tőke hosszát 0,4–0,5 cm-rel megnöveljük, a belső erők nagyobb külső erőhatással szemben képesek a szerkezetet egyensúlyban tartani (42. ábra). (Egyes technológiai, méretezési leírások a felső tőke méreteit nagyobb értékben is határozták meg: felső tőke 50/15 cm, alsó tőke 45/14 cm.)



42. ábra

Ezen az ábrán könnyen követhető, hogy a forgatónyomatékok ellensúlyozó első erőpár akkor képes nagyobb hatást gyakorolni, ha az n erőkar megnövekszik. Mivel az erőpárt alkotó erők a két részre bontható – megközelítően háromszög alakú – tökemetszet súlypontjában hatnak, az n növelése a töke hossz méretének növelésével érhető el.

A hegedűépítés gyakorlatában és az ezzel foglalkozó irodalomban gyakran találni olyan állásfoglalást, hogy a fogólap elferdülésével már a nyak beillesztésénél figyelemmel kell lenni. Ezzel számolva a nyak tengelyét a korpusz hossz tengelyétől az órajárás irányával ellentétes irányba célszerű kismértékben elfordítani „az e -húr húzásának ellensúlyozására”. Ez azonban aligha tekinthető megoldásnak, mivel már az új hangszerek esetében is a hangszer tengelyvonalától eltérő fogólap beállításával kell számolni. Alig több ez annál, minthogy az idő múlásával bekövetkező kellemetlen helyzetet tudatosan – idő előtt – létrehozzuk.

A maradandó lassú alakváltozás bekövetkezését azonban ezzel nem zárhatjuk ki. Egyrészt, mert az anyag fizikai tulajdonságaiból fakad, másrészt pedig egyéb tényezők is közrejátszanak: pl. a hegedűtestet érő hatások, hő- és páratartalom-ingadozás stb.

Az alakváltozások között említésre került a lélek felőli f -bevágás körüli deformáció. Ez főként a lélekben felfelé irányuló nyomóerő – ami eseténként a túlzott befeszítéssel még fokozásra is kerül –, valamint a saroktökre és a kávéra ható ellenirányú boltozati nyomás következménye. A boltozat torzulásának mértéke az előidéző erők nagyságától, a tetőlemez anyag jellemzőitől és a boltozat emelkedési szögétől függ. Azonos nagyságú erőhatás esetén, sűrűbb rostozatú tetőlemez torzulása kisebb, mint a szélesebb pásztázattal rendelkező anyag esetében.

Növeli még ennek mértékét az a gyakran bekövetkező körülmény, hogy a g - és a d -húrok hangjának javítása érdekében a lélek helyét az f -bevágáshoz közelebb választják meg. Ez esetben, mivel a tetőlemez folytonossága az f -bevágás miatt nem érvényesül, a szerkezeti héjakra jellemző erőátadási folyamat megszakad, a láb felőli, alátámasztás nélküli lemez-szakasz kiemelkedik a boltozatból. Bár ennek a hangra alig, vagy egyáltalán nincs hatása azonban esztétikailag kellemetlen torzulást eredményez. Kizárni, megakadályozni azonban nem lehet, csak mértékét csökkenteni a lélek elhelyezésével.

1.10. A hegedű használata közben fellépő külső erőhatások

Eddig a húrokban lévő feszítőerők – a felhangolt hangszerben állandóan ható passzív erők – által keltett különböző hatásokat vizsgáltuk. Nem esett szó a használat közben, a zenélés során ható természetes erőkről, amelyek megkerülhetetlenül szerepet játszanak az előző fejezetekben megismert erők alakulásában. A továbbiakban sem foglalkozunk azonban a használatától független külső erőhatásokkal, amelyek esetenként érhetik a hangszert, bár nagyságuktól, ismétlődésük gyakoriságától függően ezek képezik a legnagyobb igénybevételt, és a legtöbb törés, roncsolódás közvetlen okozói. Mivel ezek konkrét előfordulások csak egyedi esetvizsgálattal lehet őket feltárni, illetve a következményeket kiváltó hatásokat elemezni.

Játék közben a hegedűtest statikailag ugyanolyan igénybevételnek van kitéve, mint egy koncentrált erővel excentrikusan terhelt kéttámaszú tartó, tehát az eddigiekben alkalmazott módon analogizálható. Könnyen belátható ez az állítás: mivel a játékos a vonóval nyomást gyakorol a húrra (F_v), miközben a hegedűtest hátsó íve felfekszik a vállára (T_v), bal keze pedig alátámasztja a nyakrészt (T_n).

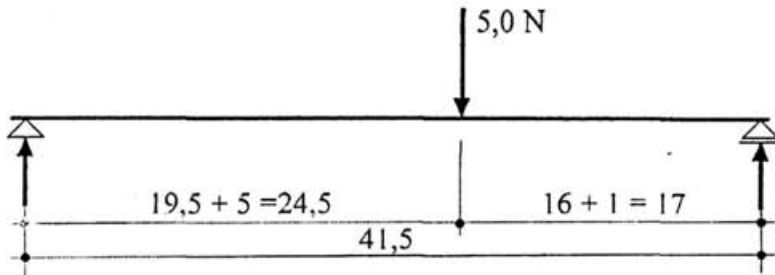
Ebben az egyszerűnek látszó összefüggésben a legproblematisabb kérdés, hogy a vonónyomás milyen nagyságú erőt jelent. Ha ezt meg lehet határozni, akkor már könnyen kiszámíthatók a támaszerők, illetve az ezekből következő belső erők.

A vonó nyomása nagyon sok tényezőtől függ. Befolyásolja a vonó tömege (55–66 g), rugalmassági tényezője (Young-modulusa), a vonószőr feszítettsége, a játékos temperamentuma és az előadásra kerülő műben meghatározott artikuláció. Nagy teremben vagy szabadtéren nagyobb hangerőre van szükség. Az pedig – szinte ösztönösen – ismert a játékosok körében, hogy a húr annál nagyobb amplitúdóval rezeg, annál hangosabban szól, minél közelebb helyezkedik a vonó a lábhoz, minél nagyobb a vonósebesség és minél nagyobb a vonónyomás (F_v). Annak ellenére, hogy az előadóművészek általában jobban kedvelik a jó vivőerejű, nagy és tiszta zengésű hangot eredményező nyomásarányos, hosszú, gyors vonókezelést, mint a kemény, ütésszerű vonójátékot, esetenként elkerülhetetlen, hogy a kápa közeli vonószakasszal nagyobb nyo-

móerőt kell gyakorolni a tapadási ponton. Ennek nagysága – mérés alapján – elérheti a 4,0–6,0 N erő-t.

Nézzük meg ezek után mekkora támaszerők képződnek (43. ábra).

$$T_v = \frac{5,0 \cdot 17}{41,5} = 2,05 \text{ N} \qquad T_{ny} = \frac{5,0 \cdot 24,5}{41,5} = 2,91 \text{ N}$$



43. ábra

Tehát a hegedütestre játék közben a passzív erőkkel együtt – az aktív erőkkel megnövekedve (120,61 N + 5,0 N =) 125,61 N nyomóerő, (80,82 N + 2,95 N =) 83,77 N álltartó felőli és (44,10 N + 2,05 N =) 46,15 N nyak felőli támaszerők alakulnak ki. Mivel ezek az aktív erők a passzív erőknek 4,0–4,5 %-át teszik ki, a belső (főként a húzó- és nyomó-) erőket lényegesen nem befolyásolják.

Valamivel nagyobb a hatásuk a forgatónyomatékok és a nyíróerők nagyságrendjére, de ezek sem mutathatók ki numerikusan, hogy a hegedű anyagára jellemző megengedhető határfeszültségeket túllépő hatást váltanának ki. A ritkán előforduló túl erős vonónyomás esetében legfeljebb a húr pattan el, – mert a megnyúlás következtében hirtelen megnövekedő húzóerő a szakítószilárdságot meghaladó feszültséget hoz létre a húrban.

Inkább figyelmet érdemelnek az aktív erők gyakori fellépéséből adódó következmények, amelyek elsősorban a hegedűben végbemenő lassú alakváltozás folyamatát serkentik. Ezek elsősorban a nyak dőlésszögének csökkenése és a fogólap tengelyének elferdülése. *A hegedütestben a terhelő erők hatására bekövetkező lassú alakváltozás* című fejezetben erről az elkerülhetetlen tényről beszéltünk, és analóg bizonyí-

tottuk és a huzamos ideig állandó terhelésnek kitett tartószerkezetekben végbemenő lassú alakváltozással. A szerkezetek világában az is ismert jelenség, hogy a dinamikus hatások ezt a változást serkentik, és a terhelő erőkkel arányos alakváltozás kialakulása rövidebb idő alatt következik be. Itt pedig erről van szó: vagyis a játék közben ismétlődő aktív erőhatások dinamikus igénybevételként lépnek fel. Ennek következtében rövidebb idő alatt következik be a hegedűtest lassú alakváltozása, amiből az említett nyak-dőlésszög csökkenés a fogólap leferdülés már zavarokat okoz.

Az aktív erők hatásvizsgálatában figyelmet érdemel, melyet a bal kéz okoz a nyaktőkére. Ennek a forgatónyomatéknak a számszerű nagysága éppúgy nehezen határozható meg, mint a vonónyomásból adódó terhelőerő. Függ a játékos kezétől – kisebb kéz nehezebben éri el a húrokon a legfelső lefogási pontokat, s bár ilyenkor a hüvelykujj csupán az újheggyel támasztja alá a nyakat, de a támasztást biztosítani kell – és így is létrejön valamilyen nagyságú minimális forgatónyomaték. A passzív erőkből a nyak fordulólélére 530,52 Ncm forgatónyomatékot számoltunk ki. Ebből a nyakra ható húzóerő – kedvezőtlen anyag jellemzők mellett – láttuk, kritikus hatást gyakorolhat. Nem valószínűsíthető, hogy az aktív erőhatásból képződő forgatónyomaték alacsony nagyságrendje miatt ezt előreláthatóan egyértelműsíti. Ismereteim szerint az irodalom sehol sem tart nyilván olyan esetet, hogy játék közben kifordult volna a nyak makkszakadással. Az M_A forgatónyomaték, ami a legfelső fekvésekben történő játék közben alakul ki, minden valószínűség szerint az állandóan ható forgatónyomatéknak elenyésző töredéke. Említése csupán azért indokolt, mert a gyakori előfordulás dinamikus igénybevételt jelent, és hozzájárul a lassú alakváltozás dőlésszög csökkenést eredményező folyamatához.

Az előzőekben végzett számítások azt igazolják, hogy a hegedű empirikus úton kialakított szerkezete megfelel a rendeltetésből adódó külső terhelés (húr-feszítőerők) hatására létrejövő belső erők okozta igénybevételnek. A szerkezeti keresztmetszetekben fellépő feszültségek kisebbek a felhasznált anyagra jellemző határfeszültségeknél. Tehát a korszerű szerkezet-méretezési elmélet is alátámasztja a tapasztalat alapján létrehozott konstrukció alkalmasságát. Csupán két csomópontban mutatható ki kritikus jellemző. Egyik a makk teherviselő képessége – amire a gyakorlat is rámutat, hiszen gyakran szakad ki a makk –, a má-

sik az alsó tőkében a gomb hasító hatására bekövetkező törés – ami legtöbbször a tetőlemezben is repedést indít el. Ezek előfordulása azonban inkább technológiai okokra vezethető vissza. A makk kiszakadása, ahogyan a számítás során kimutattuk akkor következik be, ha a berakásárok vágásakor a hátlemezben a teherviselő keresztmetszet a határfezsültségben megengedhető méret alá süllyed. Ezért helyes, ha a makk alatt a berakás-árkot sekélyebb mélységig vágják ki. A szakirodalomban is találni utalást erre. Otto Möckel *A hegedűkészítés művészete* című könyvében írja, hogy Amati ezen az intarziaszakaszon csak bekarcolta a berakás vonalát a keresztmetszet csökkentésének elkerülése érdekében.

Az alsó tőke roncsolódása – repedése – a gomb hasító hatására csak akkor következik be, ha a tőke évgyűrűinek iránya megegyezik a gomb hossz-tengelyével. Mivel az évgyűrűk a lazább szerkezetű korai – vagy tavaszi – pászta puhább, kisebb az ellenállása a hasítóigénybevétellel szemben, mint a cellulózban gazdagabb késői – vagy őszi – pásztáéval. Így a két pászta keménysége és anyagsűrűsége – egyben szilárdsági jellemzőiben igen nagy különbség mutatható ki. Ha a tőke száliránya a gomb tengelyére merőleges vagy szöget zár be jóval nagyobb hasítóigénybevételre képes. Mind emellett a tetőlemez is hatásosabban védi a gomb tengelyvonalára merőleges szálirányú tőke beépítése. A tapasztalat is azt igazolja, hogy azokban a hegedűben jön létre az alsó tőke repedése, ahol a tőke száliránya és a gomb tengelyvonala egyezik.

Röviden összegezhetjük, hogy a hegedű kialakult szerkezete a célszerűen alkalmazott technológiai megoldásokkal statikailag megfelel a rendeltetésszerű igénybevételnek.

2. Az erő és a hang viszonya

2.1. Az erő szerepe a hang keletkezésében

Ebben a fejezetben a hegedűhang és a hangkeltő erő – másként a hegedűtest és a benne keletkező rezgést előidéző erő – viszonyával foglalkozunk. Vizsgálódásaink során megmaradunk a statika-analógia kerete között, és nem térünk ki az akusztika körébe tartozó folyamatok elemzésére: a hang kialakulására, terjedésére és észlelésére. Kizárólag a rezgést elindító erő keletkezésének és hatásfokának folyamatát kívánjuk áttekinteni. Megmaradunk az erő és az energia mozgáskörében. Nem foglalkozunk az anyagban kialakuló hullámokkal, mindez kívül esik az általunk választott körön. A modern fizikában a kvantummechanika kutatja az anyaghullámokat. Ebből csak annyit veszünk át, hogy az anyaghullámok frekvenciája az energiával, hullámhossza pedig az impulzussal arányos.

Abból indulunk ki, hogy a hang erő hatására jön létre, úgy is mondhatjuk, nincs hang erőhatás nélkül. Minden mechanikai mozgás sajátosságában hirtelen bekövetkező változás – a mozgást előidéző erővel ellentétes irányú erő fellépése – hanghatással jár. A fizikából jól ismert, hogy az ütköző testek mozgásenergiájának egy része hanggá, más része hővé alakul. Szinte hétköznapi tapasztalat számunkra, hogy az anyag rezgését erőhatás idézi elő. A harang rezgését, zengését a falának ütköző harangnyelv indítja el. De klasszikus példája ennek a hangszóró vagy a telefonkagyló membránjának a működése. A hangszóró elektromágnesében gyorsan változó különböző nagyságú húzóerők hatására a membránlemez az erők nagyságától, gyakoriságától függően rezgő mozgást végez, vagyis a pulzáló erőhatás és a rezgés, a hullámzás között szoros kapcsolat áll fenn.

Megfigyelhetjük, hogy a hullámzást előidéző erő a hullámokban „továbbél”. A víz felszínén előidézett hullámokon „lovagoló” úszó fadarab felemelkedő-süllyedő mozgása a hullámokból adódó erőhatás következménye.

A rezgést előidéző erő az anyag részecskéit kimozdítja nyugalmi állapotukból, fizikai értelemben munkát végez, aminek mérhető nagysága az erő és az erő irányában eső elmozdulás szorzata. A mozgásból eredő munkavégző

képesség pedig a mozgó részecske kinetikus energiája. Ebben az összefüggő egységben az energia – munka = erő · elmozdulás folyamatban érvényesül az energia-megmaradás törvénye. Tehát a hullámzást előidéző bevitt erő, illetve a kialakult energia különböző módon továbbél. A membránlemezre szórt homokszemcsék a lemez rezgéséből adódó lökőerők következtében kimozdulnak nyugalmi helyzetükből, és önálló mozgásra kényszerülnek, átadva a mozgási energiájuk egy részét a velük érintkező levegőrészecskéknak. Ugyanez a folyamat követhető a víz felszínén létrehozott hullámokon himbálódzó test mozgásában is. A hullámzás során kitérő vízmolekulák mozgási energiájuk hat a velük érintkező testtel és ebből az energiából ható erő képes az úszó testre a gravitációval ellentétes irányú erő érvényesítésére.

Vajon ez a megállapítás igaz lehet-e hangszer esetében? Ha egy gongra ráütünk, az ütés erejétől, helyétől és az ütőeszköz anyagától függően hangot hallunk. Ez esetben a hangot keltő erőhatás közvetlen a rezgésbe kerülő testet éri, és a hang keletkezése végül is a rezgő test elemeinek mechanikai energiája révén jön létre. Húros hangszerek esetében mindamellett, hogy a húr rezgésbe hozása indítja el a hang kialakulását, valójában a rezgő húrral közvetlen, szilárd kapcsolatban lévő, a húrral együtt rezegni képes rezonátortestben alakul ki. Végeredményben ebben a folyamatban transzláció következik be, aminek a hang észlelési szakaszában érvényesül a jelentősége, amikor a hegedűtest a húr által keltett gyengén hallható hangot felerősíti.

A rezgést megindító erő a kifeszített húrt éri – a létrejövő mozgás-energia erőhatás formájában tovább adódik a rezonáló szerepét betöltő testre, annak rezgésre érzékeny lemezére, így közvetetten a rezonátor erő hatására képes hang keltésére.

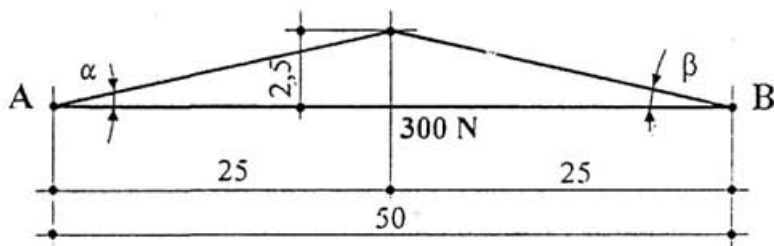
Vizsgáljuk meg mindenekelőtt a következő fejezetben, hogyan keletkezik a hangszer húrjában a hangkeltő erő.

2.2. A rezgő húrban kialakuló mechanikai energia

Mikor egy kifeszített húrt megpendítünk ujjunkkal, egyik pontját kitérítjük eredeti helyzetéből, valójában egy külső erővel adott hosszának növelésére kényszerítjük, s ezzel fokozzuk a benne lévő feszítőerőt. Ugyanezt a folyamatot idézi elő a hegedű húrjában a vonó mozgása révén keletkező súrlódó erő. A tekerőlant forgó kerekéhez érintkező húr a

súrlódóerő hatására kitér eredeti helyzetéből, s amikor ennek következtében a megnyúlt húrban nagyobb lesz a feszítőerő a kerék forgás síkjában ható súrlódó erőnél, a húr visszapattan eredeti helyzetébe, sőt tehetetlensége révén az ellenkező irányba kilendül. Ez a jelenség a súrlódó erőt létrehozó mozgás folyamatában mindaddig ismétlődik, amíg a mozgásenergia meg nem szűnik.

A kifeszített húrban mechanikai hatással – külső erővel – gerjesztett további elemi nagyságú feszítőerő (ΔF) újabb terhelő erőket ad át a húr alátámasztási pontjaira. Nézzük meg egy analóg példán, hogy egy 50 cm hosszúságú kifeszített húrban, amiben 300 N feszítőerőt ébresztünk, milyen és mekkora további erők keletkeznek, ha a húrt hosszának középvonalában 2,5 cm-re kitérítjük, megpendítjük. Ez alkalommal – a számításaink során – már többször alkalmazott erőháromszög segítségével végezzük el a vizsgálatot (44. ábra).



44. ábra

A kifeszített húr tengelyében fellépő erő a kifeszítés nagyságától, illetve az A és B pontokban lévő szögek függvényében változik. A szögek nagysága $(\alpha = \beta) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2,5}{25} = 0,1000 \approx 5^\circ 40'$. A kilendített húrban

fellépő húzóerő (F_k): $F_k = \cos \alpha = \frac{300}{0,9951} = 301,47$ N. Tehát a 300 N

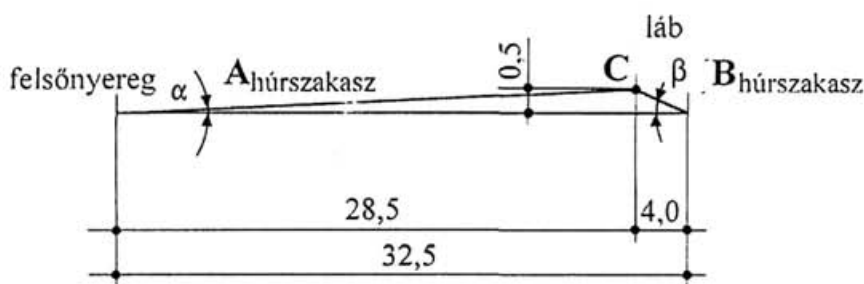
feszítőerővel rendelkező húrban a kilendített helyzetben 1,47 N ΔF erővel nagyobb feszítőerő keletkezik. Természetesen az A , illetve a B pontban ható, az eredeti feszítőerővel egyensúlyt tartó befogó erők is ezzel a ΔF erővel tovább növekszenek.

Nézzük meg ennek a folyamatnak az alakulását hegedűhúrbán (45. ábra).

Vizsgáljuk meg először a húr megnyúlását és benne a megnyúlással arányos húzóerő növekedésének nagyságát. Ha a húr C pontját a láb előtt 4,0 cm-re kilendítjük 0,5 cm-rel a megnyúlás nagysága ($\Delta \ell$) a zengő húrhosszban keletkező két háromszög-alapján kiszámítható.

$$\text{Az } \alpha \text{ szög: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,5}{28,5} = 0,0175 \approx 1^\circ 00',$$

$$\beta \text{ szög: } \operatorname{tg} \beta = \frac{0,5}{4,0} = 0,1250 \approx 7^\circ 10'.$$



45. ábra

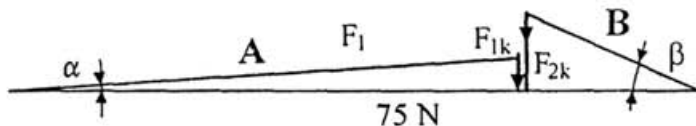
$$\text{A B húrszakasz hossza: } B = \frac{4,0}{\cos \beta}; \quad \frac{4,0}{0,9921} = 4,032 \text{ cm, vagyis a ki-}$$

lendített húr megnyúlása ($\Delta \ell$) $0,005 + 0,032 = 0,037$ cm, a nyugalomban lévő húr hossza 32,50 cm, a megnyúlt húr hossza 32,537 cm.

A teljesség érdekében meg kell jegyezni, hogy a zengő húrszakaszban megnövekedett feszítőerő a láb és a húrtartó közötti húrból is megnyúlást okoz. Ez azonban a lábgerincen kialakuló súrlódás csökkenő hatása, valamint a húrszakasz hosszának rövideége miatt igen alacsony értékű, ezért hatásától eltekinthetünk.

Nézzük most meg, hogy a bekövetkezett megnyúlás milyen nagyságú húzóerő növekedést okoz a megpendített húrból, s ebből milyen nagyságú további erő adódik át a felső nyereg, illetve a láb húr-alátámasztási pontján.

Válasszuk vizsgálatunkhoz a hegedű a -húrját, amiben – tudjuk, hogy az alaphang elérése érdekében – 75 N feszítőerővel kell számolni (46. ábra).



46. ábra

Az A erőháromszögben a kilendített húrszakaszban fellépő (F_1) erő:

$$F_1 = \frac{75}{\cos \alpha}; \quad \frac{75}{0,9998} = 75,01 \text{ N, ebből a kilendítési pontban fellépő}$$

komponens erő nagysága (F_{1k}): $F_{1k} = F_1 \cdot \sin \alpha$; $75,01 \cdot 0,01745 = 1,31 \text{ N}$.

A B erőháromszögben a kilendített húrszakaszban fellépő (F_2) erő

$$F_2 = \frac{75}{\cos \beta}; \quad \frac{75}{0,9921} = 75,60 \text{ N, ebből a kilendített pontban fellépő kompo-}$$

nens erő nagysága (F_{2k}): $F_{2k} = F_2 \cdot \sin \beta$; $75,60 \cdot 0,1247 = 9,43 \text{ N}$. Tehát a megnyúlásból adódó megnövekedett feszítőerő $1,31 + 9,43 = 10,74 \text{ N}$ terhelőerőt ad át a nyeregbe és a lábra. Meg kell jegyezni, hogy ez a feszítőerő a már ismert korpuszra ható és húzó erőket is növeli.

Ha az előzőekben számított $10,740 \text{ N}$ erő megoszlását meg akarjuk ismerni – a felső nyereg és a láb között – egyszerű nyomatéki egyenlettel meghatározhatjuk (bár az előbbi számításához alkalmazott erőháromszögben ezt már kimutattuk). A felső nyeregbe ható többlet erő (F_{ny}):

$$F_{ny} \cdot 32,5 = 10,74 \cdot 4,0; \quad F_{ny} = \frac{10,74 \cdot 4,0}{32,5} = 1,32 \text{ N,}$$

$$F_l \cdot 32,5 = 10,74 \cdot 28,5; \quad F_l = \frac{10,74 \cdot 28,5}{32,5} = 9,42 \text{ N.}$$

Tehát a húr megpendítése során – a felvett paraméterek alapján – a lábra $9,42 \text{ N}$ nyomóerő hat.

Tapasztalatból tudjuk, hogy a kilendített húr visszatér eredeti helyzetébe, majd az alaphelyzetéhez képest az ellenkező irányba kilendül. Miközben az alaphelyzetbe kerül, megszűnik a benne keletkezett ΔF feszítőerő, és a felfekvési pontokon sem hatnak az elemi nagyságú támaszerők. A rezgés törvénye alapján az ellenkező irányba kilendülő húrban azonban ismét fellép a hossz növekedéssel együtt járó ΔF feszítőerő. Mivel azonban az átlendülés során a húr veszít mozgásenergiájá-

ból, csökken a kilengés nagysága, rövidebb lesz a megnyúlása, és ennek arányában mérséklődik a ΔF feszítőerő nagysága.

Ez a folyamat a húr nyugalmi állapotának eléréséig gyengülő intenzitással ismétlődik, s végül a pulzáló ΔF erő nagysága 0-ra csökken.

Az előzőekben egy megpendített húr esetében vizsgáltuk a keletkező elemi nagyságú erőket. Vonóval csaknem azonos folyamat játszódik le, a vonómozgás következtében létrejövő súrlódóerő – ahogyan erről már szó volt – éppúgy kilendíti a megfeszített húrt eredeti állapotából, és létrehozza a belső elemi erőket. A vonómozgás során fellépő tapadó, fékező hatásokkal nem foglalkozunk, mivel ezek már a rezgés folyamatának elemzését képezik. A továbbiakban pedig a húrokban kialakuló – a hang keletkezésében szerepet játszó – elemi erőket kívánjuk megvizsgálni.

2.3. A rezgést keltő erő és a rezgő lemez kapcsolata

A továbbiakban nézzük meg, hogy a rezgő húr által keltett erő (ΔF) és a hegedű tetőlemeze között milyen kapcsolat jön létre, illetve a hangkeltő erő és a hangszer rezonátorként működő részei milyen viszonyba kerülnek egymással. Tudjuk, hogy a rezgésbe hozott húr önmagában is kelt hangot, de ennek felerősítése már külön szerkezetnek – a hangszer korpuszának – a feladata.

Vizsgálatunkhoz alkalmas a fülhallgató- vagy hangszóró-membrán működésének áttekintése. A fülhallgató elektromágnesében a hangfrekvenciális feszültség ingadozása különböző nagyságú húzóerőt gyakorol a membránlemezre, aminek következtében a lemez részecskéi kimozdulnak nyugalmi állapotukból, a lemez rezgésbe jön és hanghullámokat gerjeszt.

Ha elméletben kívágnak egy elemi szélességű szeletet ($\Delta \ell$) a membránlemezről, s ezt a szerkezeti részt úgy tekinthetjük, mint egy kéttámaszú tartót, amit a fesztáv felezőpontjában ΔF nagyságú koncentrált erő terhel, kész a vizsgálati modell. Vagyis a ΔF erő – az elektromágnesben fellépő húzóerő hatására az analóg tartó – a membránlemez lehajlik, a támaszpontokon lehajlás következtében tengelye szögforgást végez (47. ábra).

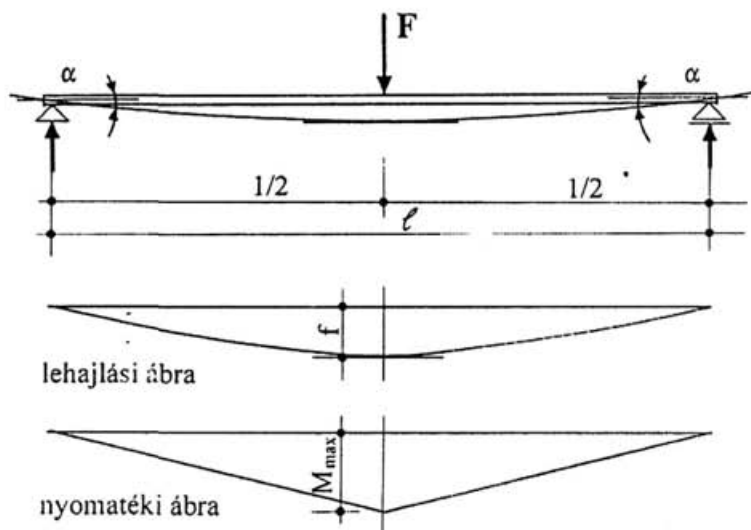
Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó esetében a lehajlást (f) a tartóra ható (F) erő nagysága, a tartó hossza (ℓ), valamint a tartó anyagának rugalmassági modulusa (E) és inerciája (I) határozza meg:

$$f = \frac{F \cdot \ell^3}{48EI}.$$

Szimmetrikus terhelés esetén a szögforgás mindkét alátámasztási ponton azonos:

$$\alpha = \beta = \frac{F \cdot \ell^2}{16EI}.$$

A lehajlás mértékét bemutató összefüggésből látható, hogy egyazon feszítávval, azonos rugalmassági modullal és inercianyomatóékkal rendelkező tartók esetében a lehajlás a terhelő erő nagyságától függ. Következtetésként: ha a membránlemezre a hangfrekvenciális feszültség ingadozás nagyobb húzóerőt gyakorol, nagyobb a lemez részecskéinek kimozdulása, nagyobb lesz a lemez lehajlása. Megfigyelhető, hogy a működő membránlemezre szórt homokszemcsék magasra „ugrálnak”, ha erősödik a hang. Ennek oka nyilvánvaló: az elektromágnesben a hang erősségével arányos húzóerő nagyobb lehajlást idéz elő, s az erő nagyságának változása után az előbbi helyzetébe visszatérő lemez rugalmasan ütközik a homokszemcsékkel, és a lehajlás mértékének függvényében ellöki azokat.



47. ábra

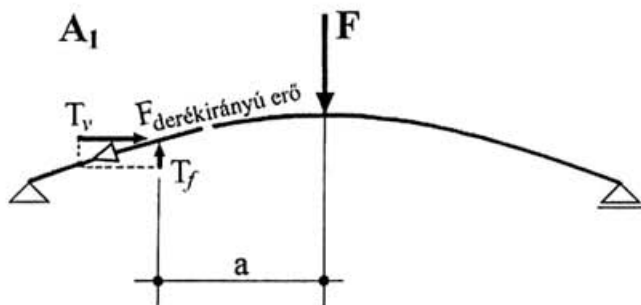
Gondolom, nem tűnik eretnekségnek, ha összehasonlítjuk a hegedűtetőlemez és a membránlemez működésének elvét.

Az előző fejezetben megismertük azokat a Δ -nagyságú erőket, amelyek a húr rezgése során hatnak a lábra, illetve a hangszertestre. Ebből – a membrán hasonlat alapján – következtetni lehet arra, hogy ezek a változó nagyságú ΔF erők úgy hatnak a tetőlemezre, mint az elektromágneses hangfrekvencionális erő ingadozása a membránlemezre, vagyis – bizonyos értelemben – lehajlást idéz elő.

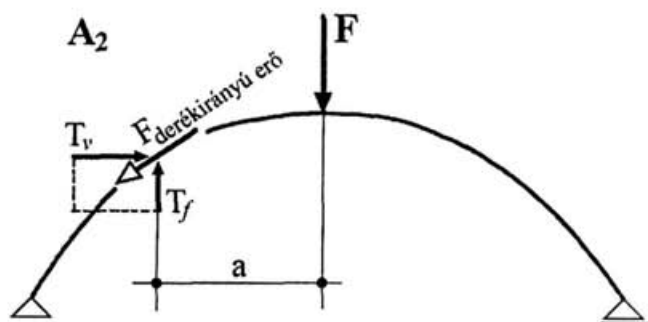
Csakhogy a hegedűtető nem sík, hanem kétirányban hajlított lemez, s a benne létrejövő lehajlás bonyolultabb összefüggés alapján lehetséges. A tetőlemez mindkét irányú metszete íves tengelyű tartóként analógizálható. Az íves tengelyű tartók esetében a fellépő oldalnyomás következtében pedig lecsökken a lehajlás. Nagyobb ív mellett fel sem lép.

Az egyenes tengelyű tartók támaszerői párhuzamosak a terhelő erő határvonalával. A tartószerkezet anyagi pontjainak elmozdulását a rá ható külső erők közvetlenül nem befolyásolják. Ellenben az íves tengelyű tartók esetében már fellépnek a terhelő erő hatásvonalától eltérő irányú erők is. Megjelennek a tengelyirányú erők, mint ahogy ezzel *A korpuszban ható erők* című fejezetben már foglalkoztunk.

A fellépő tengelyirányú erők a tartó ívének függvényében befolyásolják a lehajlás mértékét. Alacsony ív esetében kevésbé, nagyobb indulási szöget bezáró – magasabb ívű – szerkezetben csökkenti a lehajlás nagyságát. Ezt az összefüggést szemléletesen igazolhatja két vektorábra, amelyet két különböző íves tartó azonos pontjain szerkesztettünk meg (48.a és b ábra).



48.a ábra



48.b ábra

A 48.a ábrán az A_1 pontban ható tengelyirányú támaszerő függőleges komponense ugyanolyan nagyságú terhelő erő mellett kisebb, mint a 48.b ábrán – jóval nagyobb ívű tartó esetében – az A_2 pontban látható tengelyirányú erő függőleges komponense. A két függőleges komponens erő iránya pedig a kisebb, velük párhuzamos ellenirányú támaszerők esetében képesek nagyobb lehajlást előidézni.

A magasabb boltozatú hegedűk esetében a gyakran előforduló gyengébb hangerősség – a hang átütő erejének, vivőképességének hiánya legtöbb esetben erre vezethető vissza.

A lehajlás mértékét az előbbieken tárgyalt erőhatások mellett jelentősen befolyásolja a hajlításnak kitett szerkezet anyagának tehetetlenségi nyomatéka (I). Nézzük csak meg a már ismert összefüggést:

$$f = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I}, \text{ ahol } I = \frac{a \cdot b^3}{12},$$

ebből a b a tartó metszetének a magassága.

Ha a hegedű tetőlemezéből egy hosszirányú $\Delta \ell$ szélességű metszetet mint tartószerkezetet vizsgálunk, szembetűnik, hogy a lemez vastagsága miként befolyásolja a lehajlás mértékét. A $\Delta \ell$ szélességű tetőlemez inercianyomatéka:

$$I = \frac{\Delta \ell \cdot b^3}{12}.$$

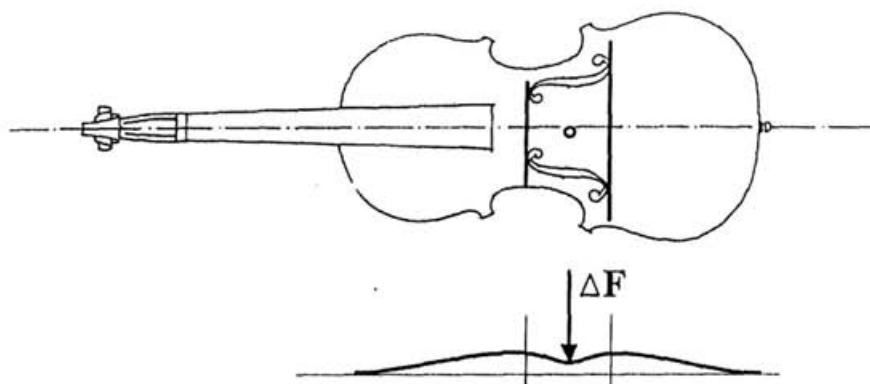
Látható ebből, hogy a lemez vastagságának mérete jelentősen érinti a lehajlás nagyságát. Vagyis a lemezvastagság kis arányú növelése érzékenyen csökkenti a lemez-lehajlást, és egyben fékezi a rezgés kialakulását.

A hegedűépítéssel foglalkozó szakirodalom többségében az szerepel – és a gyakorlat is túlnyomó részben azt követi –, hogy „ott kell a lemezt legvastagabbra hagyni, ahol a boltozat a legmagasabb”. Ezzel ellentétben a hegedűépítés klasszikusai, Stradivari, Guarneri gyakran alkalmazott „vékony” tetőlemezt. Simone F. Sacconi *Stradivari „titkai”* című munkájában írja: „a tető egyformán 2,4 mm, csak az f körül 2,7, a léleknél 2,2”. Erdélyi Sándor *A hegedű* című könyvében Nemessányi Sámuel munkájáról szólva írja, hogy hegedűi „általában könnyen megszólalóak, a különböző fekvésben kiegyenlítettek, vivőképességük nagy, hangszínük jó minőségű, árnyalt”, ... „a vékonyan tartott tető majdnem minden esetben a láb alatti részen a legvékonyabb (2,2–2,5 mm)”.⁸

A hangkeltő erő hatásfokának érvényesülése szempontjából figyelemkeltő ez a megállapítás. Abból kell kiindulni, hogy a lemez lehajlását – rezgését elindító – erő a lábon keresztül hat a lemezre. Ha ezen a ponton a hatásfoka lefékeződik, a további lemez-szakaszokra a rezgést csak töredékében képes továbbítani.

Igen sok esetben – az irodalomban, a gyakorlati érvelésekben – az f -bevágások jelentőségét, fontosságát a dobozhang megszüntetése, a korpuszban keletkező levegőben terjedő hanghullámok szabad áramlásának elősegítése érdekében tartják szükségszerűnek. Ha azonban a hegedűtestben lejátszódó mechanikai hatásokat vizsgáljuk, nem hagyható figyelmen kívül a hang keletkezésében – a hangkeltő erő hatásfokának érvényesülésében – betöltött szerepe.

Már szó esett arról, hogy az íves tartók esetében – a tartó ívétől függően – változik a lehajlás mértéke. Ebből következik, ha az f -bevágások hiányában a láb alatti boltozat pereme felfeküdne a kis-ívekre, éppen az erőhatás alatti boltozati szakasz lehajlása lényegesen lecsökkenne. Miután az f -bevágások teljes hosszában a láb alatti lemez-szakasz a két-két f -szem közötti lemez-szakaszon támaszkodik fel szabadon, mintegy kéttámaszú lemeztartó működik. Hozzáteve, hogy a felfekvési vonalakon éppen azokhoz a lemez-szakaszokhoz csatlakozik, amelyekre a lehajlást továbbítani kell (49. ábra).



49. ábra

Ily módon az f -bevágások közötti lemez-szakasz a lehajlást előidéző ΔF erőt az oldalirányú kiboltozottság fékező hatása nélkül képes átadni.

A láb alatti lemezmező lehajlása pedig, amit az eddigi számításaink is igazolnak, nagyobb lemezvastagság mellett csökken, a rezgést keltő erő hatásfoka redukálódik.

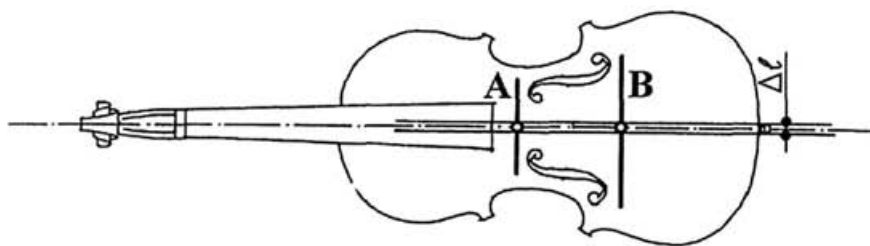
2.4. A gerenda szerepe a hang kialakulásában

A tanulmány első részében a számítások alapján megismertük, hogy a gerendának szükségszerűen nincs statikai szerepe. Valójában részt vesz a korpuszra ható erők elosztásában, de nélküle a hegedű szerkezete marandó alakváltozás nélkül képes elviselni a terhelő erőket. A feltárt összefüggések alapján nyilvánvalóvá vált, hogy rendeltetését a hangkeltő erők továbbításában kell keresnünk.

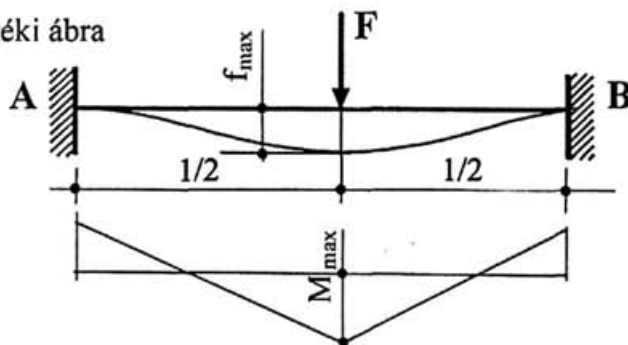
Az előző fejezetben szó volt arról, hogy az f -bevágások közötti lemez-szakasz a lábon keresztül a tetőre ható ΔF hangkeltő erő által keltett rezgést a felső és az alsó ívek boltmezőire továbbítja. Ez az oldalirányú kiboltozás nélküli lemez-szakasz mint kéttámaszú tartó önmagában könnyen lehajlik, nagyobb fékezőhatás nélkül képes rezegni. A rendkívül kicsiny inercianyomatéka miatt azonban a lehajlás kiegészítő szerkezeti elem nélkül csak korlátozottan adná tovább.

Vizsgáljuk meg, hogy alakul itt a hangkeltő erő hatása. Ha a korpusz hossz tengelyével párhuzamosan felvesszünk egy $\Delta \ell$ szélességű metszetet, és úgy tekintjük, mint két végén befogott íves tengelyű tartót, az f -bevágások felső és alsó pontjait érintő haránt irányú boltozati metszetek közbenső alátámasztásokat képeznek.

Ha a ΔF (hangkeltő) terhelőerőből az A , illetve a B pontban keletkező támaszerők kisebbek, mint amit a boltozati metszetek – mint íves tengelyű tartók – alakváltozás nélkül elviselni képesek, a csatlakozási pontokon nem képződik lehajlás. Ebből adódóan az f -bevágások közötti $\Delta \ell$ metszet szintén két végén befogott tartóként működik. Ilyen szerkezet esetében a befogási helyeken nem jön létre szögforgás, azonban a támaszerőkön kívül nyomatékok alakulnak ki a tartó végeken (50. ábra).



nyomatéki ábra



50. ábra

$$\text{Az } A \text{ támaszerő } \frac{\Delta F \cdot b^2}{\ell^2} \cdot \left(1 + \frac{2a}{\ell}\right), B \text{ támaszerő } \frac{\Delta F \cdot a^2}{\ell^2} \cdot \left(1 + \frac{2b}{\ell}\right).$$

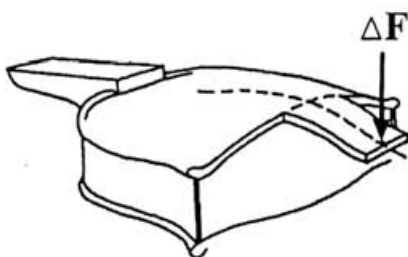
Mivel az $A < B$ -nél, a B támaszerő lesz a nagyobb. Ez az összefüggés azért jelentős a hangképző erők eloszlásában, mert a nagyobb tető – a nagyobb felületű rezgőmező, a B támaszerő felőli oldalon helyezkedik el. Ugyanígy a nagyobb nyomaték is a B pontban képződik:

$$M_A = \Delta F \cdot a \cdot \frac{b^2}{\ell^2} \quad M_B = \Delta F \cdot b \cdot \frac{a^2}{\ell^2}.$$

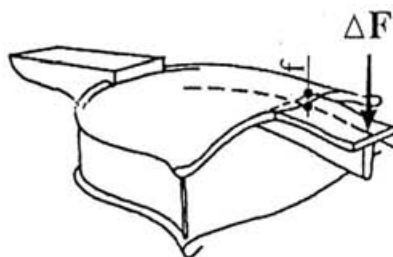
A lehajlást kifejező képlet: $f = \frac{\Delta F \cdot \ell^3}{3EI} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{\ell^3 \cdot \ell^3}$, amiből jól érzékelhető, hogy az inercia (I) nagysága jelentősen befolyásolja a lemez lehajlásának mértékét.

Az f -bevágások közötti lemez-szelet inerciaértéke: $I = \frac{a \cdot b^3}{12}$, ahol a a lemez-szelet szélességével ($\Delta \ell$), b a lemez vastagságával (0,3 cm) azonos.

A gerenda nélküli lemez-szakasz lehajlását az 51.a ábra, a gerendával együtt épített lemez lehajlását az 51.b ábra szemlélteti.



51.a ábra

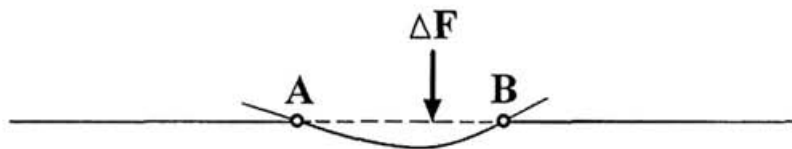


51.b ábra

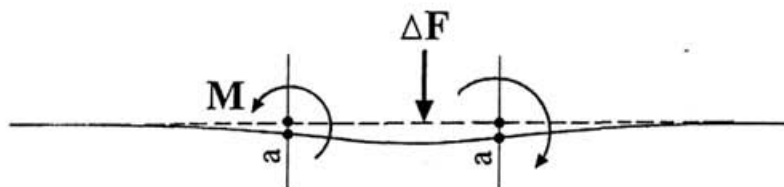
A lehajlás, illetve a rezgés átvitelének növelése az összefüggő tetőlemez szakaszokra nagyobb inercianyomatéki értékkel rendelkező kiegészítő elemmel érhető el. Ennek a szerkezetnek, a gerendának az erőtan hatásmechanizmusa összetett statikai számítással követhető. Ennek elkerülése érdekében egyszerű logikai következtetéssel tárjuk fel a szerepét.

Válasszunk olyan – a korpusz hossz tengelyével megegyező – a két végén befogott egyenes tengelyű tartót, amelynek középső szakaszában (az

f -bevágás közötti lemez-szakasznak megfelelő hosszban) csuklós rúdkapcsolat biztosítja a folyamatosságot (52. ábra).



52. ábra



53. ábra

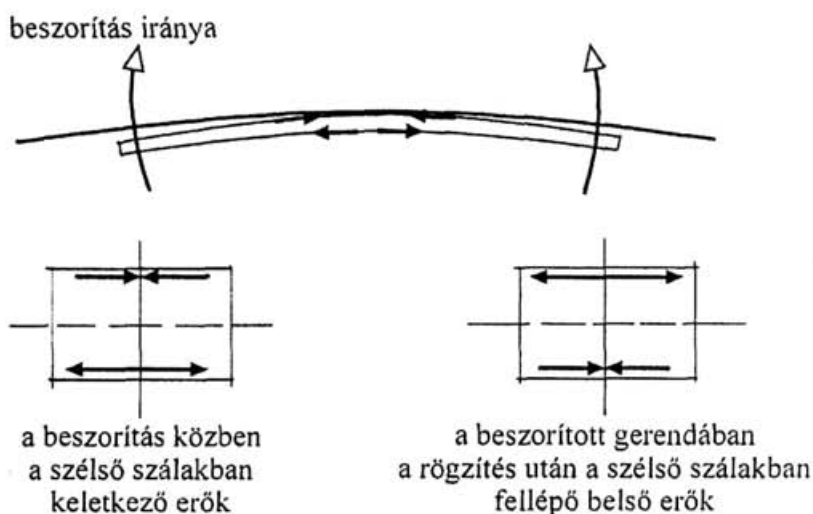
Az A és a B pontban, a csuklóban a középső rúd tengelye a terhelő ΔF erő hatására szögforgást végez és lehajlik.

Ha a tartó alsó síkjához egy vele csaknem azonos hosszúságú kiegészítő elemet rögzítünk, a csuklók kiiktatásra kerülnek, és a lehajlás a befogási helyeket megközelíti (53. ábra). Ez az ábra jól szemlélteti, hogy az A és B pontok (a csukló pontjai) a nagyobb inercianyomatókkal rendelkező, s ennek következtében kisebb, de lényegesen hosszabb szakaszon lehajlást végző kiegészítő elem hatására a lehajlással elmozdulnak. Vagyis az analóg következtetés igazolja, hogy a középső lemez-szakasról a gerenda segítségével átkerül a lehajlás, illetve a rezgés a tetőlemez csatlakozó szakaszaira.

A továbbiakban nézzük meg a hangkeltő erők alakulását a gerenda beillesztésével, helyének meghatározásával és méretezésével összefüggésben. A hegedű építésével foglalkozó irodalomban gyakran találkozunk olyan leírással és a gyakorlatban is elterjedt, hogy a gerendát a beillesztés során „be kell feszíteni, hogy a húrok nyomásával szemben kellőképpen ellenállhasson... a gerendát valamivel hajlottabb felfekvési ívvel készítjük, mint amilyen a tető belső része. Erre a célra a gerenda végeinél 1-2 mm billenés elégséges.”⁹

E szerint a gerendában – már a beillesztés során – belső erőket hozunk létre. A befeszítés következtében az alsó szálakban húzás, a felső szálakban nyomóerők keletkeznek.

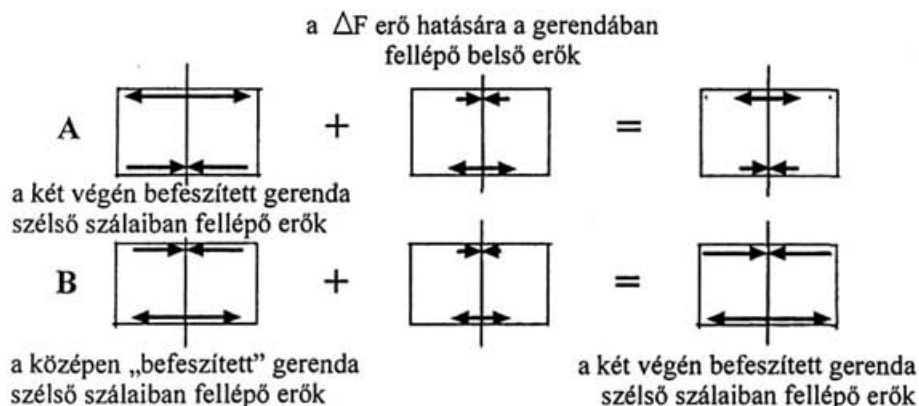
A beragasztás után az anyagra kényszerített alakváltozás egyensúlyi állapot elérésére törekvő belső erőket hoz létre. A meghajlított gerenda eredeti alakjának visszaállítására törekszik, s ennek következtében alsó szálaiban nyomó, felső szálaiban húzóerők lépnek fel (54. ábra).



54. ábra

A koncentrált erővel terhelt tartóban keletkező belső erőket már ismerjük ez esetben a lehajlás következtében az alsó szálakban húzás, a felső szálakban nyomás alakul ki. Tehát az előzővel szemben éppen ellentétes irányú belső erőkkel kell számolnunk.

Márpedig a gerenda befeszítésével és a tetőlemezre ható terhelő erő hatására kialakuló lehajlásból adódó belső erők összegeződnek (55. ábra).



55. ábra

A gerenda befeszítéséből – nem kell bizonyítani – lényegesen nagyobb belső erők keletkeznek, mint az igen kicsiny ΔF hangkeltő terhelőerők okozta lehajlásból, ezért végső fokon a gerenda befeszítésével lecsökkent a belső erők nagysága, ami kisebb lehajlást tesz lehetővé, gyengül a lemez rezgése, a hang kialakulását előidéző ΔF erő hatásfoka leromlik. A lemez nagyobb mértékű lehajlásához, a lemez nagyobb amplitúdójú rezgéséhez nagyobb ΔF erőre lenne szükség. A vonóval pedig csak behatárolt nagyság között tudjuk a húr rezgését – a húrban a ΔF erő kialakulásához szükséges feszítőerőt – fokozni. Végeredményben a létrehozható ΔF erő hatásfokát a gerenda befeszítésével lerontjuk.

A mérnöki gyakorlatban akkor alkalmaznak a tartógerenda alsó öv-részában előre „bevitt” húzóerőt, amikor kisebb lehajlás mellett nagyobb teher hordására tervezik a szerkezetet.

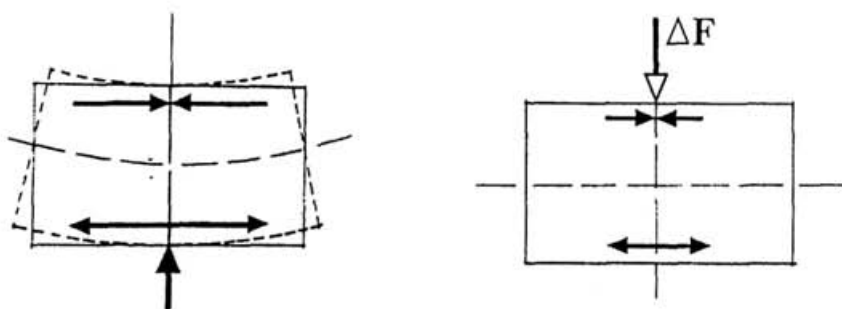
Ilyen esetben alkalmazzák az ún. „előfeszítést”, amikor a tartógerenda alsó öv-részában a betonozás előtt igen nagy erővel kifeszített betonacélokat építenek be. A gerenda alsó övében az előfeszítéssel létrehozott nyomóerő jelentősen csökkenti a terhelésből előálló húzóerőt, aminek következtében a gerenda lehajlásának fokozódása nélkül növelhető a terhelő erő nagysága. Tehát ugyanakkora terhelő erő mellett csökken a tartó lehajlása. Ez a felismerés, az előfeszítés a mérnöki gyakorlatban jelentős előnyökkel jár – a hegedűépítésben, a gerenda befeszítése a leírt módon a hangképzésben kifejezetten káros.

Ha azonban a tartószerkezetekben kedvező eredményt nyújtó „előfeszítés” elvét követve a gerenda behelyezése során a lehajlás megkönnyítését elősegítő belső erők kialakulását biztosítjuk, a hangkeltő ΔF erő hatásfoka kimutathatóan növekszik. Ez pedig úgy érhető el, ha a gerenda befeszítése nem a gerendavégeken, hanem a gerenda középtáján történik (56. ábra).



56. ábra

Ebben az esetben a gerendában a befeszítő külső erő hatására a felső övben húzó-, az alsóban nyomóerők jönnek létre. A külső erő megszűnése után – az alakváltozást követő egyensúlyi helyzet elérése érdekében – ezeknek a belső erőknek az iránya megváltozik, a felső övben nyomó-, az alsó övben húzóerők alakulnak ki. Ez az erőrendszer – az erők irányát tekintve – teljesen azonos a hajlításra igénybe vett tartók metszetében létrejövő belső erőkkel (57. ábra).



57. ábra

Az eddigiekből már ismert, hogy a gerendában a befeszítés során keltett belső erők és a terhelő ΔF erő hatására létrejövő belső erők matematikai összege fejt ki hatást a szerkezetre. A gerenda befeszítése, mint tudjuk – a jelentékeny inercianyomaték miatt – jóval nagyobb nagyságú belső erőket eredményez, mint amelyek a ΔF erőből adódnak. Az ezzel a metodikával kialakított belső erőviszonyok következtében a gerenda (s vele a tetőlemez) kisebb ΔF erő hatására könnyebben lehajlik, érzékenyebbé válik, s ezzel együtt növekszik a lemez rezgésének amplitúdója, javul a hangkeltő ΔF erő hatásfoka.

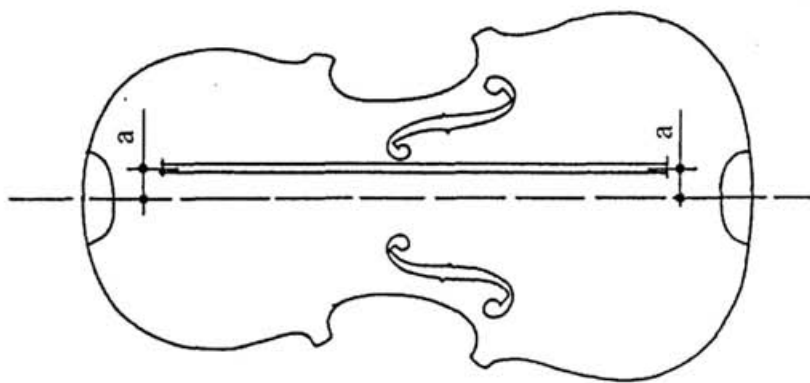
A gerenda merevségének – a lehajlással szembeni ellenállásának – csökkentése annál is inkább előnyös, mivel a tetőlemez kiboltozottsága amúgy is fékezi a lehajlás mértékét.

Végeredményben a gerenda befeszítése a hangkeltő erő szabaddabb érvényesülése érdekében kedvező lehetőséget nyújt, csak az eddigiekben alkalmazott „megvédéssel” szemben éppen ellentétes értelmű és irányú belső erők létrehozását igényli. Formai kialakítását tekintve az ilyen gerenda a tetőlemez konkáv felületéhez csaknem sík illesztési lappal csatlakozik.

A gerenda beillesztéséhez hasonlóan figyelmet érdemel helyének megválasztása is. A hegedűépítés gyakorlatában a gerenda vége az alsó boltmezőben a tető tengelyvonalától 19 mm-re, a felső boltmezőben 12 mm-re kerül elhelyezésre. Ennek következtében a felső boltmező középpontjához közelebb az alsó boltmező középpontjából távolabb fekszik fel a tetőlemezre. Elgondolkodtató, hogy a kisebb felületű felső mező csaknem a középpontjában kapja a gerenda által továbbított rezgést keltő erőket, ugyanakkor a nagyobb felületű alsó boltmezőre pedig tangenciálisan jut el ez a hatás. (A felső boltmező felülete a formától függően 196–199 cm², az alsó lemezmező felülete 210–220 cm²). Már szó volt róla, hogy a membránlemezre ható rezgéskeltő erő hatásfoka akkor nagyobb, ha az erő a rezgő lemezfelület középpontjában hat. Nincs ez másként a hangszerek rezgő lemezének esetében sem. Filián József írja egyik cikkében „a rendszer maximális amplitúdóval csak akkor tud rezegni, ha a gerjesztő erő támadáspontja a rendszer súlypontjában van. Maximális amplitúdó nélkül pedig nincs maximális rezonancia”.¹⁰

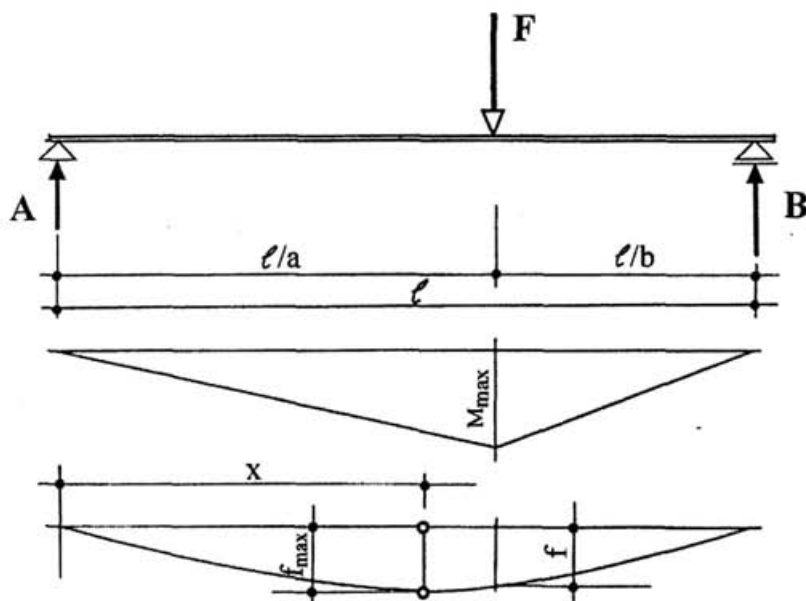
Mindenképpen mértékadónak kell elfogadni a gerendának a láb alatt lehetséges optimális helyzetét, ami a láb baloldali talpközépvonalába esik. A ΔF hangkeltő erő egyik komponense ugyanis itt adódik át a tetőlemezre. Ezen a helyen a gerenda tengelyvonala 15 mm-re helyezkedik el a tetőlemez tengelyvonalától. Ha az alsó tetőlemez középvonalából ugyanilyen távolságra kerül a gerenda tengelye, akkor a nagyobb felületű tetőlemez-szakasz intenzívebb rezgését segíti elő. A nagyobb felületű lemez pedig nagyobb felületen érintkezik a levegővel, illetve nagyobb felületen képes a rezgést a levegőnek átadni (58. ábra).

Érdemes még említést tenni a hegedűgerenda formai kialakítása és a szerkezet mechanikai hatása, illetve az e téren folyó hegedűépítés gyakorlata és az egzakt ismeretek összefüggéséről. A hegedűépítők a gerenda legnagyobb keresztmetszetét – a legmagasabb szakaszát – közvetlenül a láb alatt alakítják ki (kortól, mestertől függően más-más méretekben).



58. ábra

Ha az analóg tartószerkezetben fellépő hatásokat áttekintjük, a viszonyítás kézenfekvő eredményre vezet. Egy koncentrált erővel, excentrikusan terhelt kéttámaszú tartó lehajlását vizsgálva azonnal szembeötlő, hogy a legnagyobb lehajlás nem a terhelő erő alatt – a terhelő erő vonalában – következik be, hanem attól a nagyobb fesztávszakasz irányába eltolódik (59. ábra).



59. ábra

A lehajlás a terhelő erő hatásvonalában (f): $f = \frac{F \cdot \ell^3}{3EI} \cdot \frac{a^2 + b^2}{\ell^4}$.

A legnagyobb lehajlás ($f_{\max}$): $f_{\max} = f \cdot \frac{\ell + b}{3b} \sqrt{\frac{b + b}{3a}}$.

A legnagyobb lehajlás helye (x): $x = a \sqrt{\frac{\ell + b}{3a}}$.

Végezzünk el egy konkrét számítást. Vegyük az analóg tartó hosszát a gerenda hosszával azonos méretűnek (27,5 cm), a terhelő ΔF erő nagyságát 3,0 N-nak. A gerenda szélessége 0,5 cm, átlagos magassága 0,7 cm.

Inercianyomatéka (I): $\frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{0,5 \cdot (0,7)^3}{12} = 0,0143$, rugalmassági modu-

lusa (E): 110 000 kp/cm², lehajlása (f): $\frac{\Delta F \cdot \ell^3}{3EI} \cdot \frac{a^2 + b^2}{\ell^4}$;

$$\frac{3 \cdot 20796,87}{3110000 \cdot 0,0143} \cdot \frac{385,89}{571914,06} = \frac{62300,62}{9570} \cdot \frac{385,89}{571914,06}$$

$$6,52 - 0,00067 = 0,0044.$$

$$\text{A legnagyobb lehajlás } (f_{\max}): f \cdot \frac{\ell + b}{3b} \cdot \sqrt{\frac{\ell + b}{3a}};$$

$$0,0044 \cdot \frac{39,28}{35,34} \cdot \sqrt{\frac{39,28}{47,16}}; 0,0044 \cdot 1,111 \cdot 0,913 = 0,0047$$

A legnagyobb lehajlás helye ($a-x$):

$$x = a \cdot \sqrt{\frac{\ell + b}{3a}}; 15,72 \cdot \sqrt{\frac{27,5 + 11,78}{47,16}}; 15,72 \cdot 0,913 = 14,35 \text{ cm}$$

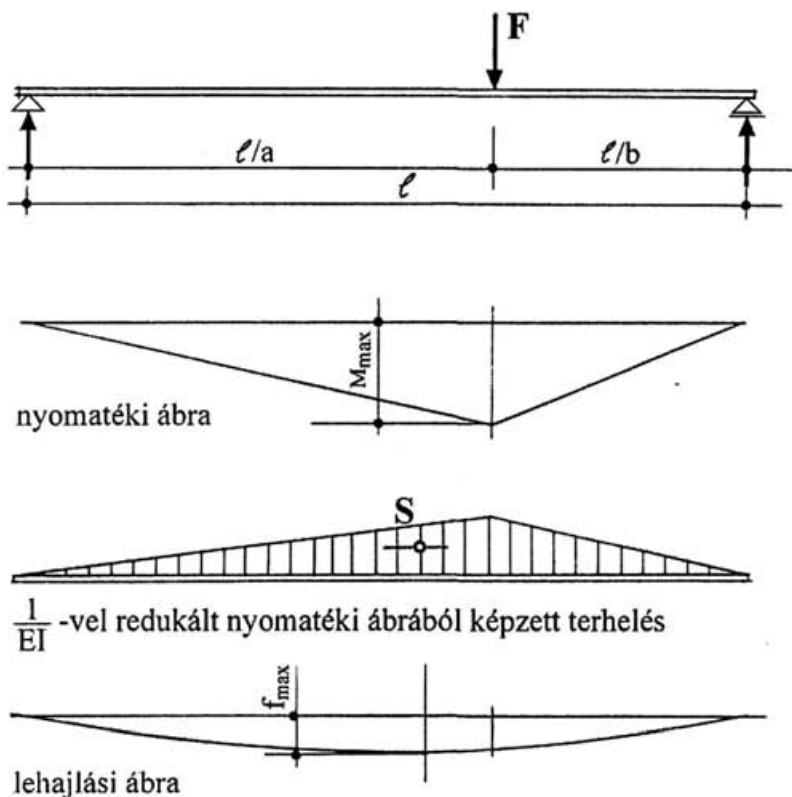
$$(a-x) = 15,72 - 14,35 = 1,37 \text{ cm.}$$

Tehát a gerenda legnagyobb lehajlása a láb előtt, illetve a ΔF terhelő erő hatásvonala előtt 1,37 cm-re alakul ki. Az előzőekben már megállapítottuk, hogy ott a legnagyobb a rezgés amplitúdója, ahol a lehajlás maximuma képződik. Éppen ezért a gerenda magassági méretét ott célszerű a legnagyobbra venni, ahol a lehajlás maximuma kialakul. Ez a kiegészítő elem akkor képes kedvező hatásokkal közreműködni a rezgéskeltő erők továbbításában, amikor a legnagyobb inerciájú metszete egybeesik a legnagyobb lehajlás helyével.

A másik következtetés, ami ebből az összefüggésből levonható, hogy a lehajlás eloszlása és a gerenda magassági méretének változása arányban áll egymással. A gerenda végénél, ahol a lehajlás nulla, a gerenda kimutatható inercianyomatékkal nem rendelkezik, tehát a magassági mérete a technikai minimumra csökkenhet. Ez a kimutatható összefüggés nem igazolja a gyakorlatban általában követett megoldást, miszerint a gerenda láb alatti része hosszabb szakaszon egyforma magassággal készül.

Nyomon követhető ez az összefüggés, ha egy excentrikusan terhelt kéttámaszú tartó lehajlás görbáját vizsgáljuk. Mivel ennek számítása magasabb fokú matematikai műveletekkel oldható meg, az egyszerűsítés módjaként terheljük meg a tartót az eredeti terhelésből származó nyoma-

tékok $\frac{1}{EI}$ -szeresével (redukált nyomatékkal) (60. ábra).



60. ábra

Ebből a redukált nyomatéki terhelésből ábrázolható a lehajlás görbéje. Az előbbieken részletezett viszonyok alapján a gerenda magassági méreteit ennek a görbének megfelelő arányban célszerű meghatározni.

Világosan érzékelhető a 60. ábrán, hogy a gerenda legnagyobb magasságát a lehajlás maximumában előnyös kialakítani. A végeken pedig, mivel nyomaték nem lép fel, s így lehajlással sem kell számolni, indifferens a gerenda magassága. Ettől a gyakorlat meglepő módon eltér. Vardon Géza idézett, technológiai jelentőségű könyvében arról ír, hogy a gerenda vastagsága 5–6 mm, magassága a lábnál 11–12 mm, onnan lefe-

lé és felfelé homorúan alacsonyított, a végei 5–6 mm magasak. Otto Möckel kiterjedten köztisztelőben álló, *A hegedűépítés művészete* című munkájában sablon alapján kialakított gerenda alkalmazását hangsúlyozza.

Nem szükséges részletes számítással igazolni, hogy a gerenda ívének – ezzel a végek felé csökkenő magassági méreteinek „sablonos” meghatározása véletlenszerű egybeesést eredményezhet a tetőlemez vastagsága és a gerenda keresztmetszet-változásának kölcsönhatásából következő lehajlás mértékének létrejöttében, másként fogalmazva: mechanikai mozgásból adódó kedvező amplitúdó kialakulásában.

A 60. ábra nyomatéki rajzán látható, hogy a gerenda legmagasabb keresztmetszete és a gerenda végei között lineárisan csökken a fellépő nyomaték. Ebből az következne, hogy ha a tetőlemez gerenda feletti hosszszelvénye egyenes vonalú lenne, a gerenda magasságának egyenletes csökkenését igényelné. Mivel a tetőlemez a gerenda fölött enyhén ívelt, a tetőlemez ívének és a gerenda – Vadon Géza által említett „homorú alacsonyításból” kialakuló íve között lineárisan csökkenő különbségnek kell adódnia. Így ha kiszámítjuk a tetőlemez boltozottságának mértékéből, a lemez vastagsági méretéből s az anyagra jellemző mechanikai értékekből adódó lehajlás nagyságát, meghatározható a gerenda legnagyobb magassága, további számítással – illetve grafikai úton szerkesztéssel – megismerhetők a gerenda ívelésének koordinátái, vagyis a csökkenő magassági méretek egymáshoz viszonyított elhelyezkedése.

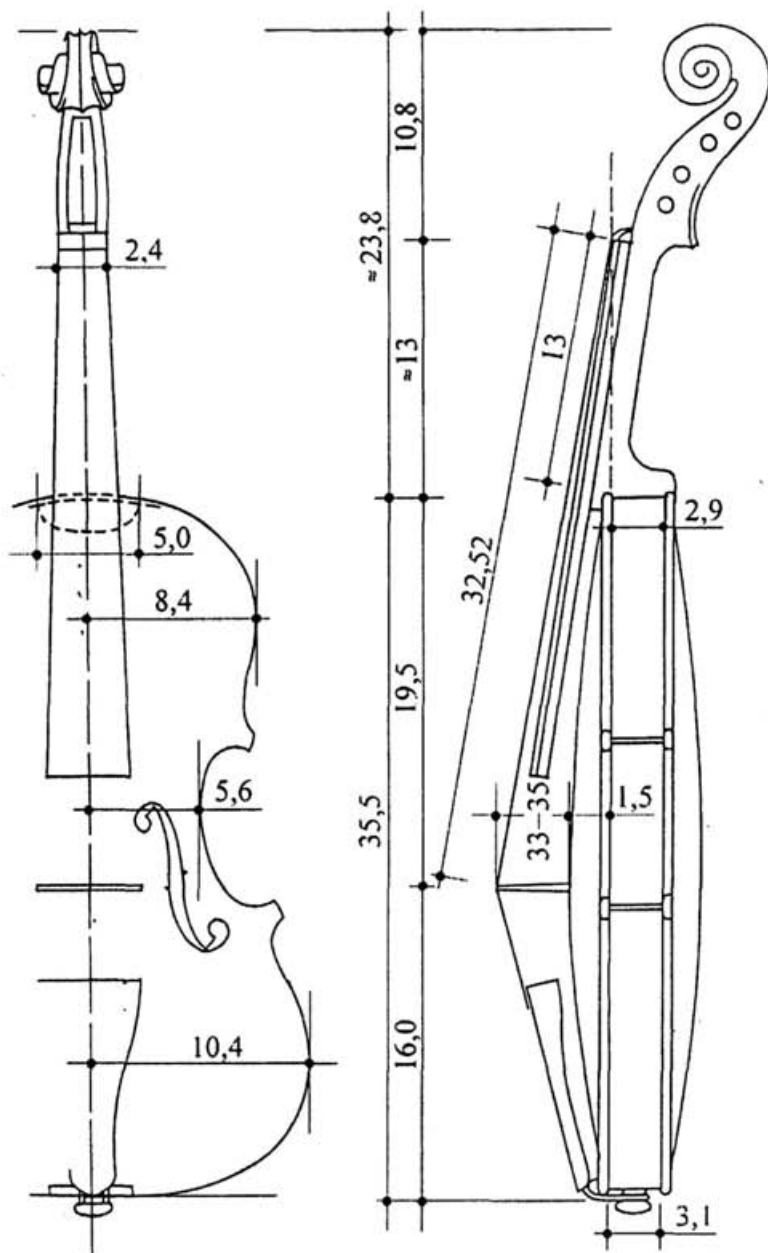
Igen sok értekezés, tanulmány boncolgatta már a hegedű hangjának sajátosságait, meghatározóit. Csaknem egységes álláspontot foglalnak el abban a kérdésben, hogy a hegedű hangját számos tényező befolyásolja, a felhasznált anyag mechanikai, akusztikai jellemzői, a méretezés, a megmunkálás pontossága, a kidolgozott anyag impregnálása, a lakk stb. Közömbös nézet alakult ki abban is, hogy két azonos (egyforma) hangú hegedűt teljesen megegyező méretezéssel és technológiával sem lehet készíteni. A hangszer anyagában, az anyag szerkezetében lévő különbség – mint minden szerves anyagban – jelentősen befolyásolja annak minden fizikai tulajdonságát. A hegedűépítésben közismert, hogy még azonos rönkből sem lehet két ugyanúgy szóló hegedűt készíteni. Általában abban is közel állnak a nézetek, hogy az új hangszer hangzása

acélosabb, nyersebb, az öregeké – amelyeken már sokat játszottak – kifinomultabbak, bársonyosabbak, melegebben szólnak.

Vitathatatlan, hogy ezeket a méreteket évszázadok tapasztalata alakította ki. Ezek a felismerések a hegedűépítésben alkalmazott elvek, módszerek következményei, ok és okozati összefüggésben állnak. Érzékelhető befolyást ezekre csak egzakt módszerek gyakorolhatnak.

Ebben a fejezetben megkíséreltük bemutatni, hogy a gerenda behelyezésének módja, helyének megválasztása és keresztmetszeti méreteinek meghatározása elősegíti a rezgés kibontakozását – a hegedű hangjának alakulását –, különösen új hangszerek esetében. Mivel a taglalt összefüggések következtében elérhető, hogy az anyagban kisebb erő hatására létrejöhessen a rezgés és a belső erők egymásra hatásának tudatos felhasználása révén növelhető a rezgés amplitúdója, a hangszer könnyebben szólal meg, finomabban alkalmazkodik a dinamikai igényekhez, kiegyenlítettebbé válik, és egyben csökkenti a már „érett” hangú hegedűk és az új hangszer hangja közötti különbséget.

1. melléklet:
A számítások során alkalmazott hegedűméretek



2. melléklet:

**A hegedűépítésben használt fafajták
átlagos statikai értékei**

fafaj megnevezése		Lucfenyő (Picea abies)	Vörösfenyő (Larix decidua)	Juhar (Acer pseudo-platan)	Senegál ébenfa (Dalbergia melanox)	Paliszander (Dalbergia nigra)
térfogatsúly N/m ³		4700	5900	6300	12300	8800
szakítószilárdság N/cm ²	II	9000	10700	8200	-	11900
	⊥	270	230	-	-	-
nyomószilárdság N/cm ²	II	4300	4700	4900	7300	6400
	⊥	580	600	-	-	-
hajlítószilárdság N/cm ²		6600	9600	9500	-	10200
nyírószilárdság N/cm ²		670	900	900	-	1750*(II)
csavarószilárdság N/cm ²		900	1300	2600	-	-
hasítási ellenállás N/cm ²	érintő	34	-	160*	-	162
	sugár	25	34	100	-	89
Brinell-keménység N/mm ²	bütü	32	48	62	175	92
	oldal	12	19	27	98	58
rugalmassági modulus (E)* N/cm ²		730 000	630 000	640 000		
		1 100 000	1 380 000	940 000	-	1 250 000
		2 140 000	2 000 000	1 520 000		

Megjegyzés: A táblázatban szereplő értékeket dr. Lugosi Armand: *Faipari kézikönyv. Fontosabb európai fajok átlagos szilárdsági értékei, valamint az iparilag hasznosított egzofajták szilárdsági adatai* című táblázat ismerteti. Az egyes fafajták rugalmassági modulusát (E) és a *-gal jelzett értékeket Kovács Illés: *Faanyagismeret-tan* című könyve tartalmazza.

3. melléklet:

A tanulmányban alkalmazott statikai alapfogalmak

aktív erő – (külső erő) a szerkezetre ható külső terhelőerők, amelyek valamilyen erőhatást fejtenek ki a szerkezet egyes pontjaira

alakváltozás – a testek külső erő hatására alakváltozást szenvednek. Az erő nagyságától és az anyag tulajdonságaitól függően megváltozik a méretük, térfogatuk, esetenként az alakjuk is (összenyomódnak, megnyúlnak, meghajlanak, elcsavarodnak). Egy szilárd test alakváltozása az anyagra jellemző határig (rugalmassági határ) arányos a testre ható erővel.

anyagjellemzők – olyan mérőszámok – számszerűsített mutatók –, amelyekből az anyagnak a terhelés során bekövetkező viselkedésére lehet következtetni (pl. rugalmassági modulus, szilárdság stb.)

befogás – két test – szerkezet – (befogó és befogott) között kialakított kényszerkapcsolat, amely kizárja, hogy a befogott szerkezet csatlakozó része a másikhoz képest elmozduljon

belső erő (passzív erő) – a testre ható külső erők hatásával szemben az anyagban fellépő erő

csavarófeszültség – csavaróerő hatására az anyag keresztmetszetén ébredő feszültség

csuklós alátámasztás – erő hatásának kitett szerkezet kapcsolata más szerkezettel, amikor a csatlakozási ponton a szerkezetek egymáshoz képest nem tudnak elmozdulni, csupán tengelyük iránya változhat

elemi metszet vagy erő – differenciálisan kicsiny méretű vagy mértékű metszet, illetve erő

eredő (vektor) – az erő nagyságát és irányát vektormennyiségnek nevezzük. Valamilyen lépték arányában nyíllal ábrázolva kapjuk a vektort, más néven az erőt. A vektor többnyire egymásra merőleges alkotókra (komponensekre) bontható. Az alkotók (komponensek) együttes hatása azonos az eredő (vektor) hatásával.

erő – a test állapotában, helyzetében, alakjában változást okozó vagy arra törekvő hatás, amely a testet összenyomja, megnyújtja, hajlítja, nyírja, csavarja. A fizikában a test mozgásváltozásához szükséges tényező:

$$\left(F = kg \cdot \frac{m}{\text{sec}^2} \right)$$

Az erő vektormennyiség, van nagysága (pl. 20 kp, 200 N), hatásvonala (az a vonal, amely mentén az erő hat), iránya (amerre az erő hatása irányul), támadáspontja (az a pont, ahol a testre hat). 1 kp = 9,806 N; 1 kp $\approx$ 10 N, 1 dyn = 10^{-5} N.

erőpár – két egyenlő nagyságú, nem egy egyenesbe eső, egymással párhuzamos ellentétes irányú, egy síkban ható erők együttese

feszültség – szilárd és rugalmas testekben külső erőhatás reakciójaként fellépő keresztmetszeti felületre ható belső erő és a terület hányadosa, jele: σ , mértékegysége: N/cm², N/mm².

forgatónyomaték – (nyomaték) egy síkban ható két ellentétes irányú erőnek hatásvonalukon kívül lévő pontra gyakorolt hatása. Forgatónyomatékokat képez egy erőpár vagy egyetlen erő egy rajta kívülálló pontra. $M = F \cdot n$ (erő $\cdot$ az erő és a pont közötti távolsággal, az erő karjával).

hajlítás – a keresztmetszet síkjára merőleges síkban működő erőpár – vagy két-két különböző hatásvonalban elhelyezkedő ellentétes irányú erő – által létrehozott igénybevétel

héjszerkezet – sík vagy több irányban hajlított lemez-szerkezet, amelynek a vastagsága az oldalirányú méreteihez képest rendkívül kicsiny

húzás – a keresztmetszetre ható húzóerő által létrehozott igénybevétel, aminek során az anyagban az erő irányával párhuzamos szálak megnyúlnak

igénybevétel – a testre, illetve a szerkezetre terhelő külső erők hatása (húzás, nyomás, nyírás, csavarás, hajlítás)

inercianyomaték – tehetetlenségi nyomaték valamely síkidomnak az x , y koordinátarendszer x tengelyére számított másodrendű nyomatéka

koncentrált erő – adott támadáspontban működő meghatározott nagyságú erő

külső erő – a testre, a szerkezetre ható – kialakulását tekintve tőle független erő

lehajlás – hajlítással igénybe vett tartó pontjainak függőleges, illetve a külső erő hatásával ellentétes irányú elmozdulása.

maradandó alakváltozás – a terhelés megszűnése után észlelhető alakváltozás

nyírás – a szerkezet egy adott keresztmetszetén létrejövő feszültségek eredőinek a keresztmetszet síkjába eső alkotói által előidézett igénybevétel

nyomás – olyan igénybevétel, amikor az erő a test részecskéit egymáshoz közelíteni kényszeríti

nyomaték – ld. forgatónyomaték

nyúlás – megnyúlás az összenyomódás ellentéte, erő hatására a test eredeti hosszának megváltozása. Jele $\Delta \ell$;

$$\Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot A}.$$

radiális erő (sugárirányú erő) – poláris koordinátarendszerben a rádiusvektor irányába eső erő

rugalmassági modulus (Young-modulus) – egyszerű húzásra igénybevett anyagban (rúdban, húrban) az arányossági határon belül a feszültség és a fajlagos nyúlás hányadosa.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

stabilitás – (állékonyság) a szerkezet állapotának jellemzője, olyan körülmény, amelyben a terhelőerők hatására a szerkezet nem mozdul el, illetve az igénybevételnek ellenáll

statika a testek, szerkezetek nyugalmi állapotával, az erők egyensúlyával, illetve az egyensúly feltételeivel, okaival foglalkozó ismeretek összessége

súlypont – geometriai alakzatokban, síkidomokban, felületeken, testekben ható súlyerők erőközéppontja

szilárdság – valamely test vagy tartó szilárdsága az a feszültségi érték, amelynél, illetve aminek átlépése után az anyagban roncsolódás (szakítás, törés) következik be. Lehet nyomó-, húzó-, hajlító-, nyíró-, csavarószilárdság

szögforgás (szögváltozás) – terhelő erő hatására a tartószerkezet hossz-tengelyének szög-nagysággal kifejezhető eltérése a terhelés előtti helyzetétől, illetve a terhelő erők hatására az anyagon belül elmozduló egy síkban elhelyezkedő részecskék síkjai között fellépő szögeltérés (pl. hajlításra igénybe vett szerkezet keresztmetszeteinek szög változása a terhelőerők hatása alatt).

tartó – olyan szerkezet, amely a rá ható erők (terhelőerők) hatására a szilárd testek alakváltozásai folytán létrejövő kisebb mozgásoktól eltekintve helyzetét nem változtatja

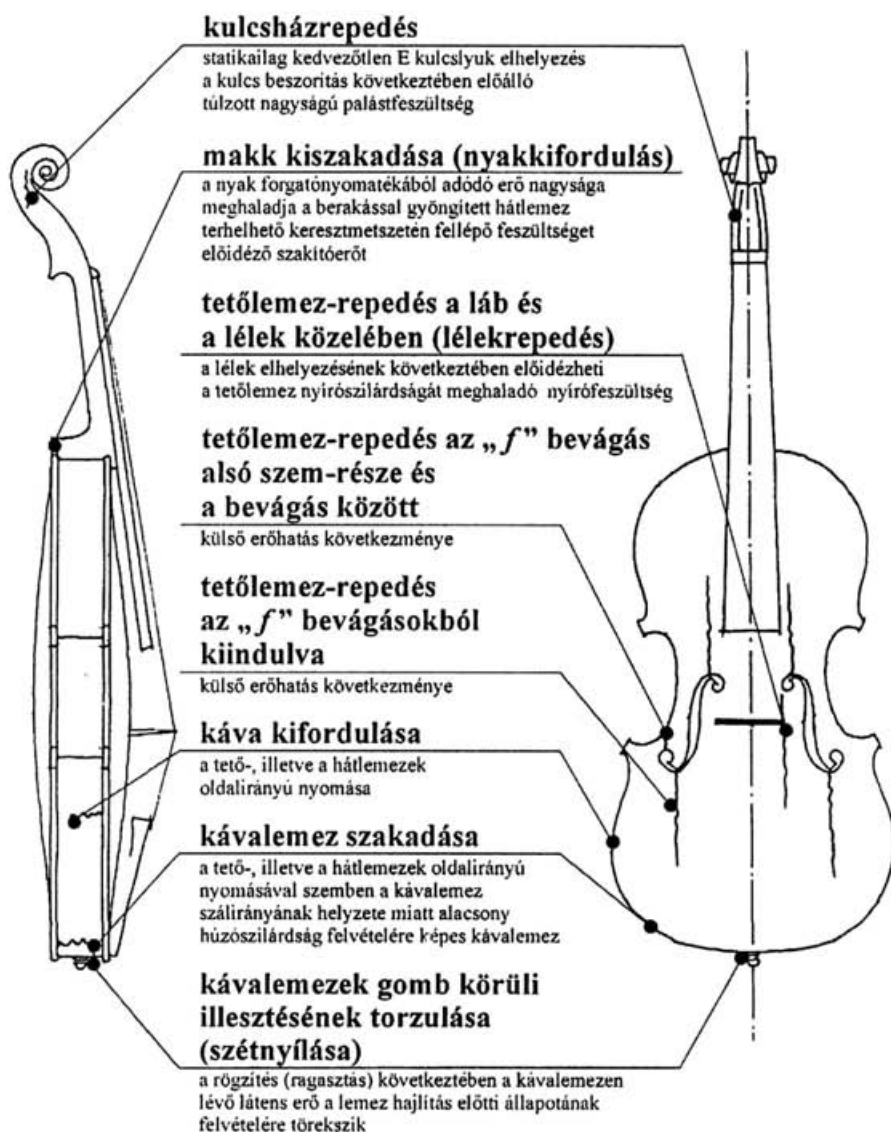
támaszerő – a szerkezetre ható külső hatásával szemben fellépő külső erők, amelyek a szerkezet elmozdulását, helyzetének megváltoztatását megakadályozzák

tehetetlenségi nyomaték – ld. inercianyomaték

vektor háromszög (erőháromszög) – a vektor és a vektorkomponensek ábrázolása, illetve a közöttük lévő trigonometrikus összefüggés

4. melléklet:

A belső és a külső erőhatások következtében a hegedűtestben leggyakrabban bekövetkező sérülések és okozói



II.

TOVÁBBI NÉHÁNY GONDOLAT „A HEGEDŰ ANALÓG STATIKAI VIZSGÁLATA” CÍMŰ TANULMÁNYHOZ *

A hegedű statikáját vizsgáló tanulmányom a hegedűtestben fellépő erők egyensúlyi vizsgálatán túl külön foglalkozik az erő és a hang viszonyával. Abból az axiómából indul ki, hogy a hang erő hatására jön létre, s ezt dinamikai összefüggések, illetve a rugalmas anyagban periodikus erőhatások következtében létrejövő mechanikai mozgások (rezgések) elemzésével mutatja be.

Ismert tény, hogy külső erő hatására a rugalmas testben a részecskék elmozdulnak egyensúlyi helyzetükből, és ezzel egyidőben az anyagban az eredeti állapot visszaállítására törekvő belső erők lépnek fel. Nyomóerő hatására a rugalmas anyag összenyomódik, hossza megrövidül, keresztirányú méretei megnövekednek és térfogata csökken: húzásra megnyúlik, keresztirányban összehúzódik, ugyanakkor térfogata megnövekszik. Hajlítás hatására a deformálódó test homorú oldal felőli részecskéi összenyomódnak, a domború oldal felőli anyagi pontok egymástól távolodnak. Rugalmas anyagban a külső erő hatására bekövetkező deformáció mértéke, a molekulák elmozdulása arányban áll az azt előidéző erő nagyságával. Ha azonban az alakváltozást okozó külső erőhatás megszűnik, az elmozdult részecskék visszakerülnek eredeti helyzetükbe.

A sűrűn ismétlődő – pulzáló jellegű – külső erőhatás a rugalmas anyag részecskéit periodikus helyzetváltoztatásra kényszeríti, vagyis az anyagban mechanikai rezgést hoz létre. Ez esetben is fennáll az előzőekben megfogalmazott összefüggés, miszerint az ismétlődő külső erőhatás következtében kialakuló mechanikai rez-

* Megjelent a Hangszer Világ XI. évf. 1. számában 2001-ben.

gés intenzitása az előidéző erő nagyságának függvénye: vagyis minél nagyobb a külső erő, annál nagyobb az anyagi részecskék elmozdulása. Nem hagyható azonban figyelmen kívül, hogy az anyagi részecskék elmozdulását ezen túlmenően jelentősen befolyásolja az adott anyagra jellemző rugalmassági tényező, a szerkezet méretei, hossza, keresztmetszetének felülete, valamint – hajlítás esetén – a keresztmetszetből számítható inercianyomaték.

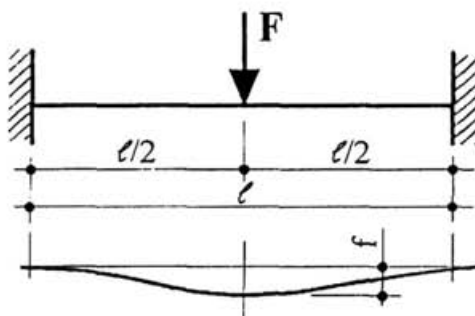
A hegedűtestben létrejövő mechanikai rezgést előidéző pulzáló erő nagysága szűk határok között változik, igen kis intervallumban mozog. A hegedűtestnek mint rezonátornak éppen az a feladata, hogy a rezgő húrokból a lábön keresztül átadódó igen kicsiny erő hatására létrejövő mechanikai rezgést felerősítse, intenzitását növelje.

Vizsgálódásunk során nem véletlenül fogalmazódik meg az a kérdés, hogy a főként tapasztalati úton kialakult – a hegedűépítés gyakorlatában megszokott – szerkezetméretezés optimális lehetőséget biztosít-e a rezgést elindító erőnek a fizikailag lehetséges maximális intenzitású rezgés keltésére.

Nézzük meg mindenekelőtt, hogyan, milyen összefüggések alapján érvényesül a tetőlemezre jutó rezgést keltő erő mechanikai hatása.

Nem kell külön bizonyítani, hogy a tetőlemezben kialakuló rezgés elsősorban az f -nyílások közötti lemez-szakaszban képződik, ott, ahol a láb a húrokból kiinduló mechanikai mozgást a tetőlemezre átadja. A tetőlemeznek ez a szakasza az f -nyílások miatt nem tekinthető peremre támaszkodó lemezboltozatnak, sokkal inkább hasonlítható egy analóg, két végén befogott, koncentrált erővel terhelt, kéttámaszú tartóhoz. Igaz ugyan, hogy ez a lemez-szakasz valójában egy két irányban hajlított lemez, mivel azonban a metszetívek magassága igen kicsi, ezért a jelenlegi vizsgálatunknál ettől eltekinthetünk.

A további egyszerűsítés érdekében vegyünk fel egy elemi ($\Delta\ell$) szélességű metszetet a korpusz tengelyében, az f -bevágások teljes hosszában. Az így kapott, két végén befogott, analóg tartó lehajlásának vizsgálata alapul szolgál a bevágások közötti lemez-szakasz hosszának (vagyis az f -bevágások magasságának) és a lemezben kialakuló mechanikai rezgés intenzitásának viszonyítására (61. ábra).



61. ábra

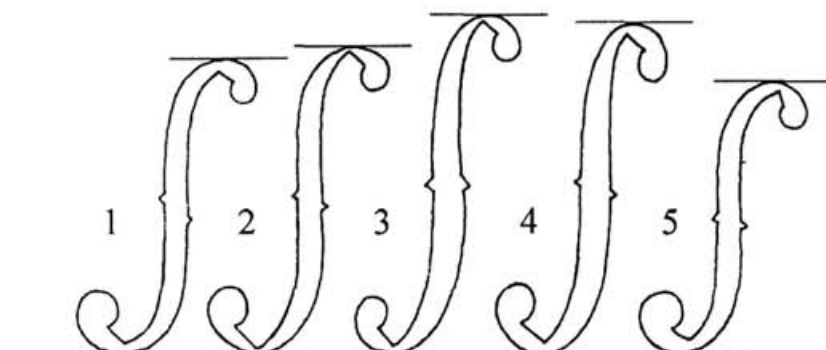
Két végén befogott, szimmetrikus, koncentrált erővel terhelt, analóg tartó lehajlása (f)

A két végén befogott, ℓ hosszúságú, koncentrált erővel, szimmetrikusan terhelt tartó esetében a lehajlás (f): $f = \frac{F \cdot \ell^3}{192EI}$, ahol F a terhelő erő, E rugalmassági modulus, I a keresztmetszet inercianyomatéka, ℓ a fesztávolság.

A fenti összefüggésből érzékelhető, ha növekszik a tartó fesztávolsága (ℓ) – vagyis az f -bevágások magassága –, azonos terhelő erő és azonos lemezvastagság mellett nagyobb behajlás következik be, azaz nagyobb lesz az anyag részecskéinek elmozdulása. Ebből adódóan – a gerenda közvetítésével – növekszik a tetőlemez felső és alsó boltozatára átadódó mechanikai rezgés is.

Merészség lenne azonban azt a következtetést levonni, hogy az f -bevágások magassága korlátlanul növelhető. Egyrészt, mert ha a bevágás jelentősen behatolna az alsó tetőlemezbe, az érzékenyen csökkentené az összefüggő boltozott lemez-szakaszban kialakuló mechanikai rezgés terjedését. Másrészt a hivatkozott tanulmányomban már állást foglaltam, hogy az egzakt ismeretek alapján felvetett módosító javaslataim nem érintik a hegedű történelmileg kialakult formai jellemzőit.

Szerencsés lehetőség adódik az *f*-bevágások magasságának megválasztására anélkül, hogy a már ismert formai adottságoktól eltérnénk. Köztudott, hogy a hegedűépítés korábbi mesterei, a különböző hegedűépítő iskolák nemcsak formailag, hanem magassági méretükben is jelentősen eltérő *f*-bevágásokat alkalmaztak (62. ábra).



62. ábra

Jellegzetes *f*-bevágásformák
és hosszméreteik korábbi mesterek hangszerein:

1. N. Amati: 6,7 cm,
2. A. Stradivari: 6,6–6,8 cm,
3. G. P. Maggini: 7,6–7,8 cm,
4. Guarneri del Gesu: 7,6–7,7 cm,
5. J. Stainer: 6,6 cm

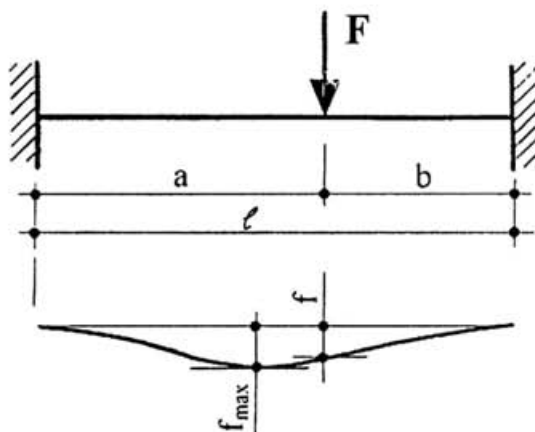
Ennek alapján lehetőség kínálkozik a hegedűépítésben már ismert nagyobb magasságú *f*-bevágások alkalmazására.

Külön érdemes vizsgálni az *f*-bevágások és a tetőlemezre jutó rezgést keltő erő támadáspontjának – másként fogalmazva az *f*-bevágások és a láb – egymáshoz viszonyított helyzetét. Az *f*-bevágások alsó ívei az alsó saroktőkék szomszédságában helyezkednek el, s ennek következtében a tetőlemez alsó boltozott szakasza egységes felületként a kávékra támaszkodik fel. Ennek megtartása mellett az *f*-bevágások magasságát a *C*-ívek között a tetőlemez felső boltozott szakasza irányában célszerű növelni. A megnövelt magasságú *f*-bevágások felső íve még így is jóval

a felső saroktőkék alatt marad, nem bontja meg a tetőlemez felső, összefüggő szakaszának mechanikai rezgését.

Mivel a korpuszmenzúra meghatározza a láb helyét, a láb tengelyéhez viszonyítva növelhető az f -bevágások láb feletti magassága. Ebből következik, hogy az előbbieken bemutatott, szimmetrikusan terhelt, analóg tartó csupán érzékelteti a fesztáv (ℓ) és a behajlás – az anyagi részecskék elmozdulásának – összefüggését. A pontos meghatározásához egy excentrikus terhelésű, analóg tartó elemzése segíthet (63. ábra). A lehajlás mértéke (f) befogott kéttámaszú, excentrikusan terhelt tartó

esetében: $f = \frac{F \cdot \ell^3}{3EI} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{\ell^3 \cdot \ell^3}$.



63. ábra

Két végén befogott, excentrikusan terhelt tartó lehajlása

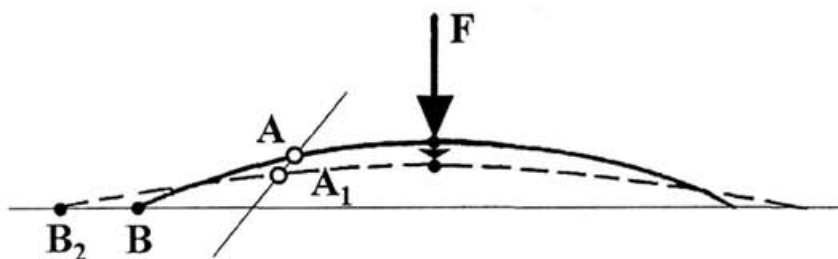
A lehajlás maximuma ($f_{\max}$): $f_{\max} = \frac{2 \cdot F \cdot \ell^3}{3EI} \cdot \frac{a^3 \cdot b^2}{\ell^2 \cdot \ell^2} \cdot \left(\frac{\ell}{\ell + 2a} \right)^2$.

Ezekből az összefüggésekből kiolvasható, hogy az a növelésével az F erő nagyságának és az anyag jellemzőinek változatlanul hagyása mellett nagyobb a lehajlás és a lehajlás maximuma eltolódik az erő támaszpontjától.

Ezzel azonban egy adott erő hatására létrejövő mechanikai elmozdulás intenzitásának alakulását ismerhettük meg. Esetünkben viszont nem egyszerű, egyirányú elmozdulásról, hanem sűrűn ismétlődő, egymással ellentétes irányú mechanikai mozgásról van szó, ami rezgő mozgást idéz elő. Szilárd testekben a rezgőmozgások a molekulák közötti kölcsönhatás következtében átadódnak a szomszédos részecskéknak, és ez a továbbterjedő rezgőmozgás a közegben mechanikai hullámokat hoz létre.

Ha az anyagi részecskék elmozdulását akarjuk áttekinteni, segítségünkre lehet egy íves tengelyű, kéttámaszú analóg tartó. Ezt az elméleti modellt is az f -bevágások közötti mező tengelyvonalában felvett met-szettel alakíthatjuk ki.

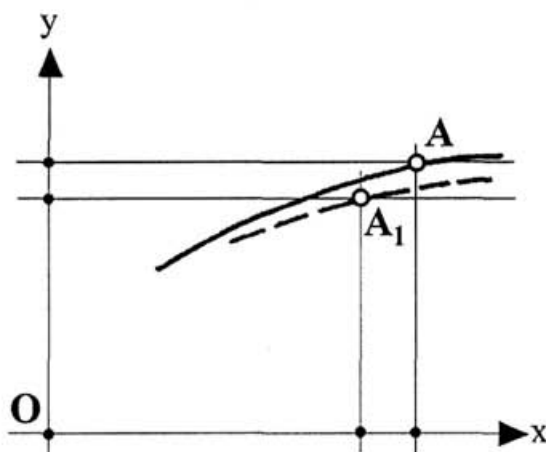
Az íves tengelyű tartóra ható terhelőerő (F) a tengelyív magasságát csökkenti, és a tartó végpontjainak egymástól való távolságát növeli (64. ábra).



64. ábra
Íves tengelyű tartó elmozdulása terhelés hatására

Még szemléletesebb képet kapunk az anyagi részecskék elmozdulásáról, ha ezt a helyzetváltozást koordináta-rendszerben vizsgáljuk (65. ábra). Az F erő hatására elmozduló anyagi pontnak az x tengellyel párhuzamos mozgás-iránya merőleges az erő hatásvonalára, és csaknem megegyezik az anyagban keletkező hullám haladási irányával, míg a y tengellyel párhuzamos elmozdulás arra merőleges. Ebből következtethető, hogy a periodikusan elmozduló részecskék között lévő kölcsönhatás létrehoz az anyagban a hullámterjedés irányával megegyező (longitudinális) és arra merőleges (transzverzális) hul-

lámokat. Végso következtetésként megfogalmazható, hogy ha növekszik a mechanikai rezgés (vagyis a mechanikai hullám intenzitása), a tetőlemezben mindkét hullámtípus erősödik.



65. ábra

Nézzük meg a továbbiakban, hogy a tetőlemezben keletkező mechanikai rezgések hogyan adódnak át a hátlemezre. A jelenlegi ismeretek szerint a rezgés közvetítésében a kávak, tőkék, a lécek és a hegedűtestben lévő légoszlop játszik szerepet. Bennünket azonban az anyagon belüli rezgésátadás érdekel. Így most figyelmen kívül kell hagyni a levegőoszlopot, hiszen más anyag lévén tulajdonképpen közvetítő szerepet tölt be. Hasonlóan a lélek közreműködésétől is eltekinthetünk – noha jelentős szerepe van a rezgés anyagon belüli eloszlásának a hegedűhang alakulásának befolyásolásában – de a lélek közvetítése nélkül is létezik rezgésátadás a közvetlenül érintkező (ráadásul összeragasztott) részek között.

Az anyagon belüli rezgés átadódását a hegedűtest alsó – legszélesebb – részén felvett metszet segítségével elemezhetjük (66. ábra). Ebben a metszetben a tető és a hátlemez közel 3,0–3,2 mm széles felfekvéssel illeszkedik a kávához.



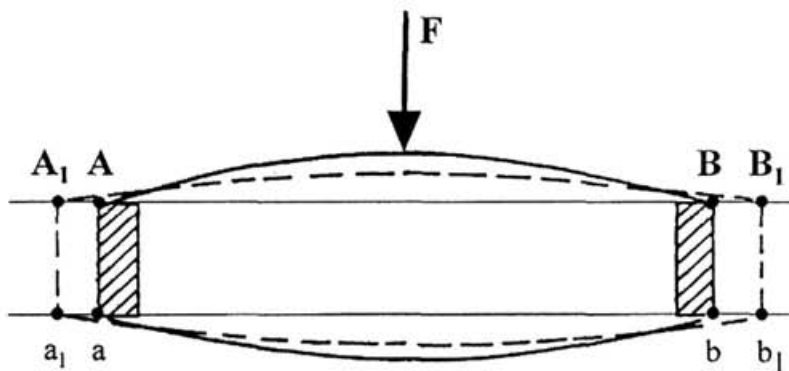
66. ábra

A hegedűtest alsó, legszélesebb részén felvett metszet

A mechanikai rezgést előidéző pulzáló erő a lemezben – a gerenda közreműködésével – erre a metszetszakaszra is rezgést keltő erőt ad át. Ha ezt a metszetet analóg keretszerkezetnek tekintjük, a terhelő erő (F) hatására a tetőlemez metszetszaktárcsájában az anyagi részecskék ugyanúgy elmozdulnak, mint az f -bevágások közötti lemez-szakaszban, vagyis a terhelt ívtartó magassága csökken, a tetőlemez szélső pontjai egymástól távolodnak, s ezzel együtt a kávak tetőlemezzel érintkező pontjai kitérnek eredeti helyzetükből. Mivel a tető- és a hátlemezek kis felületen csatlakoznak egymáshoz, sarokmerevség híján a csomópontban szögforgás jön létre. Így a hátlemez-metszet szélső pontjai nem mozdulnak ki eredeti helyzetükből, vagyis ezekre a pontokra már nem, vagy csak igen kis mértékben (a ragasztott csatlakozási felület következtében) adódik át a mechanikai rezgés.

Más a helyzet a hegedűtest hosszmetaszetében kimutatható belső erők, illetve mechanikai mozgások eloszlásában, ugyanis a felső és az alsó töké sarokmerev kapcsolatot képeznek a lemezek között. Ebből adódóan a terhelőerő hatására az íves tetőlemez végpontjai együtt mozdulnak el a hátlemez legszélső pontjaival, ami egyben a hátlemez ívének csökkenését is eredményezi (67. ábra).

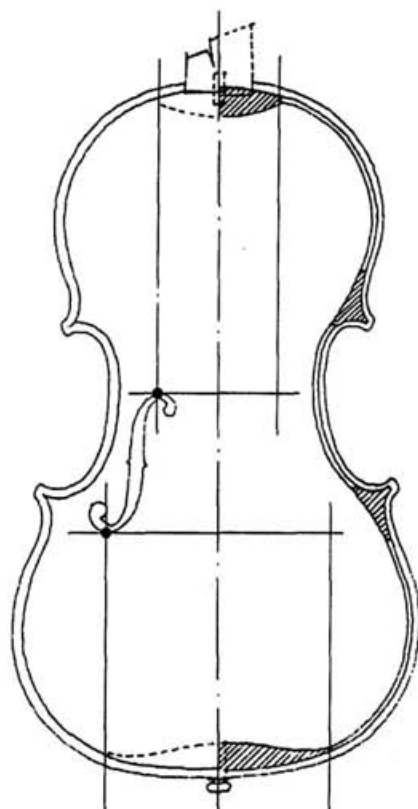
Így a hátlemez részecskéinek elmozdulása – az energiavesztésből adódó csökkentő tényezőt leszámítva – csaknem azonos a tetőlemezben bekövetkező mozgással.



67. ábra

A sarokmerevség következtében a tetőlemez B pontjával együtt mozdul el a hátlemez b pontja is, és a hátlemez jelzett pontja a_1 helyzetbe kerül

Mivel azonban a hegedűépítés során általában mintegy 4,8 – legfeljebb 5,0 cm hosszú felső és alsó tökéket építenek be, a lemezek közötti sarokmerev csatlakozás csupán erre a szakaszra korlátozódik. Ha ezzel szemben az alsó töke hosszát az f -bevágások alsó ívét érintő egyenes segítségével meghatározható érintő pontok közötti távolság alapján választjuk meg, a sarokmerev csatlakozás hossza 11–11,5 cm-re növelhető, ami jelentősen fokozza a tetőlemezről a hátlemezre jutó mechanikai rezgés átadódását. A felső tökehosszának növelését tanulmányomnak *A hegedűtestben a terhelőerők hatására bekövetkező lassú alakváltozás* című fejezetében már indokoltam. Mind e mellett a sarokmerevség kiterjesztése érdekében a felső töke hosszát is célszerű az előbbieken részletezettek alapján kb. 5,8–6,0 cm-ben meghatározni (68. ábra).



68. ábra
A felső és az alsó tőkék hosszának meghatározása

Minden bizonnyal a hegedűtestben létrejövő mechanikai rezgés szabadabb kibontakozása és terjedésének elősegítése figyelmet érdemlő hangzásbeli sajátosságokat eredményez. Mint látható volt, adott nagyságrendű erő esetében is növelni lehet a mechanikai rezgés intenzitását, amiből következik, hogy kisebb erő is hatékony rezgést indíthat el, könnyebben szólal meg a hangszer. A rezgés intenzitásának növelése pedig fokozza a hang vivőerejét, és elősegíti a felhangok kiegyenlítettbb érvényesülését – különösen a rezgéssel szemben még ellenállóbb új hangszer esetében.





III.

A HEGEDŰGERENDA MAI SZEMMEL

Bevezetés

Nincs a hegedűnek még egy olyan szerkezeti eleme, amelynek a rendeltetését annyiféle – többször egymásnak ellentmondó – érveléssel próbálták eddig megmagyarázni, mint a gerenda. Szinte valamennyi, a hegedű technikai, technológiai kérdéseivel foglalkozó szakirodalmi munka kísérletet tesz erre. Számos hegedűépítő, zenész, hangszer-akusztikus vállalkozott arra, hogy különböző aspektusú tanulmányokban feltárja ennek a rejtélyesnek tűnő kiegészítő szerkezetnek a szerepét. Az is figyelemre méltó, hogy nincs a hegedűnek még egy olyan eleme, amelyik a hangszer kialakulása óta olyan karakterisztikus (méretbeli, formai, szerkezet-kapcsolati) változáson ment volna keresztül, mint éppen a gerenda. S mindemellett a fejlődéssel velejáró szükségszerű módosításokon túl a hegedűnek ez a kicsiny szerkezete volt kitéve a hegedűhang javítását célzó legkülönbözőbb spekulatív, tudománytalan kísérletezésnek. Több esetben elszenvedője a már szabadalmi szintre emelkedett – de rég feledésbe ment – egykor szenzációként napvilágot látott sikertelen „felfedezésnek”, mint pl. a francia diszkantgerenda, vagy a nálunk üzleti fogásként megjelent „hangfokozó gerenda”. Apian-Bennewitz *A hegedű* című könyvében¹¹ fél tucat különféle gerendaszerkezetet mutat be, nem kevesebbet sorol fel Otto Möckel *A hegedűépítés művészete* című művének *Módosító kísérletek a vonós hangszereknél* fejezetében. Bár ezek is – számos más hasonló kísérlettel együtt, mint az alkimistáknak a legtöbb erőlködése az aranycsinálásra – az eredménytelenség homályába veszttek. „A gerenda eleinte – írja tovább – még parányian kicsi, vékony és rövid volt, mígnem lassanként a szerzett tapasztalatok alapján elnyerte a mai formáját.” Ám sokat sejtetően megjegyzi ugyanott, hogy „a gerenda elhelyezésére, vastagságára, magasságára, hosszára és feszítőerejére vonatkozóan a szakemberek

között eltérő vélemények alakultak ki”. Karl Fuhr *A hegedű akusztikai rejtélyei* című munkájának *A basszusgerenda* fejezetében írja: „Mivel a tapasztalat azt mutatja, hogy az új gerenda behelyezésével gyarapodott a régi hegedű hangja, ezért számos hegedűépítő nagyság erős gerendát alkalmazott. A hang ezáltal károsult – különösen a g-húron, ... mivel a tetőlemez bal oldala, amelynek a jóval nagyobb kitérés (amplitúdó) megtételére kell képesnek lenni – mint a jobb oldalnak – az erős gerenda merevsége akadályozta abban.”

Mindennek ellenére azonban még ma sem tekinthető meggyőzően feltártnak, hiteles mérésekkel bizonyítottan a gerenda valós szerepe. A gondot azonban nem a terminológiai definiálatlansága okozza, hanem a szakirodalomban és a hegedűépítés gyakorlatában egyaránt meglévő sok – több esetben ellentmondásos – álláspont a gerenda szerepének megítélésében.

Nézzünk ezek közül néhányat:

1. A szakirodalom számos helyen rögzíti, hogy a 17–18. század fordulóján a hegedű hangterjedelmének jobb kihasználása, a virtuózabb zenei törekvések elősegítése érdekében átépítették a vonós hangszereket: megnövelték a nyak hosszúságát és dőlésszögét. Az ebből adódó húrnyomás-többlet ellensúlyozására a korábban alkalmazott kis méretű gerendák helyett nagyobb, „erősebb” gerendák építésére tértek át.

De vajon a zengő húroknak alig 1 cm-t kitevő meghosszabbítása és a nyak dőlésszögének néhány fokkal történő megnövelése eredményezhetett-e akkora mértékű húrnyomás-növekedést, amely a gerenda tömegének csaknem megkétszerezését igényelte? Különösen, ha figyelembe vesszük, hogy ez idő tájt a húrok anyaga nem változott, s a hangolás sem emelkedett mértékadóan, így ezekből többlet-nyomóerő nem léphetett fel.

2. A gerenda és a tetőlemez kapcsolatára ez ideig három egymástól eltérő beillesztési mód alakult ki. Hogy ezek közül melyik felel meg legjobban a célnak – vagy egyáltalán alkalmas-e mindhárom mód –, az empirikus gyakorlati ismeretek alapján megoszlanak a vélemények. A szakirodalom pedig félígazságokkal argumentálva ítéli meg annak függvényében, hogy mit tekint a gerenda tényleges funkciójának. Így a gyakorlatban egyaránt alkalmazzák:

- a tetőlemez belső felületéhez (homorulatához) teljes hosszában pontosan illeszkedő ívelésű gerendabehelyezést,
- a gerenda két végénél a tetőlemeztől 1-2 mm-rel elmaradó – közepső szakaszán a tetőlemezzel érintkező – ívelésű, és a beenyvezés során a végein a tetőlemezhez befeszített gerendát,
- s végül azt a módszert, amikor a gerenda két vége érinti a tetőlemezt, és a közepső szakaszán 1-2 mm távolságban követi annak belső ívét, és a beenyvezéskor középpütt befeszítéssel illeszkedik a tetőlemezhez.

Ezeket összehasonlítva elkerülhetetlenül felébred bennünk a kétely: hogy a teljesen más – egymással szögesen ellentétes hatású – belső erőrendszert ébresztő megoldások egyenértékűek lennének? A kérdés nem más, minthogy a szubjektíven megítélt, empirikus eredmények ismeretén kívül milyen egzakt érvek sorolhatók fel egyik vagy másik megoldás igazolására. Milyen mértékben lehetséges a műszaki-technikai ismeretek alkalmazásával meghatározni a gerendának a mechanikai rezgés továbbításában betöltött szerepét?

3. Nem sok szó esik ugyan arról – a szakirodalomban alig találkozni vele –, hogy míg a hegedű élettartama (a kedvezőtlen külső káros hatások következményeit leszámítva) igen hosszú időt, évszázadokat ívelhet át, a gerendát (főleg a szóló és a zenekari hangszerekben) általában 20–25 évenként cserélni kell. Ennek szükségességéről szükséztlenül csak annyit lehet tudni – s erről az elméleti elemzések sem mondanak többet –, „hogy a gerenda elfáradt, új, rugalmas gerendára van szükség”.

Vajon a korszerű műszaki tudomány nyújt-e lehetőséget e jelenség fizikai értelmezésére, és nyomon lehet-e követni az anyagban végbemelő változást az idő függvényében? Lehet-e magyarázatot találni arra, hogy az állandó igénybevétel során ezek a folyamatok miként befolyásolják a gerenda anyagának mechanikai adottságait? S valójában mi okozza az anyag fáradását: csak az idő múlásával az anyag elkerülhetetlen „elöregedése” vagy egyéb mechanikai eredetű okok is közrejátszanak?

A hegedűirodalom nem foglalkozik ezeknek a műszaki jellegű kérdéseknek a fizikai magyarázatával. Keressünk akkor analóg – összehasonlítási – lehetőséget a hegedűépítésben és a mérnöki szerkezetekben egyaránt alkalmazott anyag vizsgálata során megismert hatások alapján.

A technikai (műszaki) tudományok felgyorsult fejlődése alkalmat kínál erre, ha a jellegében rokon szerkezetekben az igénybevétel, illetve az időfaktor hatására végbemenő folyamatokat összehasonlítjuk. Álláspontom szerint nem zárható ki a hegedűépítésben annak közvetlen felhasználhatósága, amit a mérnöki szerkezetek korszerű elmélete és gyakorlata elért.

Vizsgáljuk meg egyenként e témaköröket, és kíséreljük meg mai ismereteinkkel – ok és okozati összefüggések alapján – megtalálni az egzakt magyarázatot ezekre a kérdésekre.

1. A gerenda és a hegedűszerkezet viszonya

1.1. A gerenda és a húrnyomás

Megközelítően a 17–18. század fordulójáig a hegedű nyaka és a menzúrája rövidebb volt a mainál. A húrok a láb felett tompább szöveget zártak be, a láb alacsonyabb, a fogólap lényegesen rövidebb volt. A „nyak-fogólap síkja egy egyenesbe esett a tető síkjával”.¹² Az ekkori mélyebb (biztos adattal nem igazolható) hangolás mellett és a felsorolt adottságok következtében rövidebb zengő húrok miatt kisebb nyomás nehezedett a tetőre.

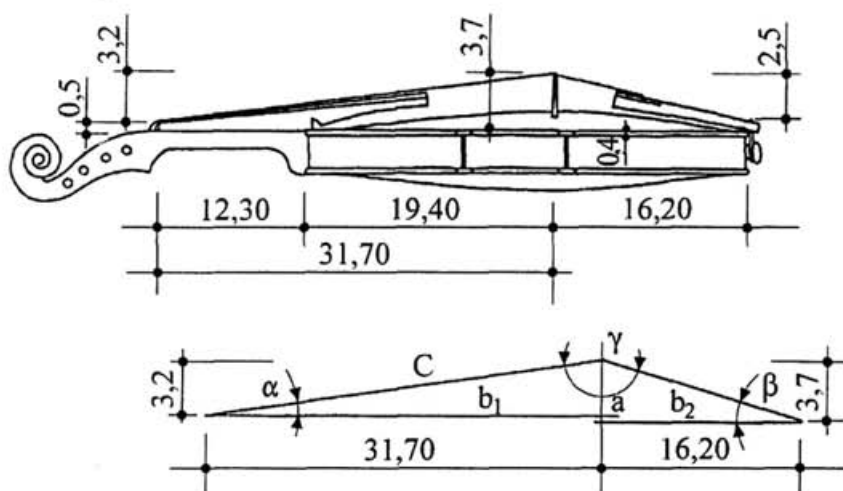
Az ez idő tájt kialakuló zenei irányzat – a szóló-hegedűszonáta és a hegedűverseny elterjedése – virtuózabb játéktechnikára alkalmasabb, nagyobb teljesítményt nyújtó hangszert igényelt. A korabeli hegedűművészek: Corelli, Torelli, Veracini, Vivaldi, Albiononi¹³ művei még ma is komoly követelmény elé állítják a hegedűsöket.

A korpuszra a korábbinál nagyobb dőlésszögű és valamivel hosszabb nyakat illesztettek. A fogólap egy negyedével megnyúlt, a láb magasabb, a gerenda hosszabb, szélesebb és erősebb lett.¹⁴ Az új hangszereket pedig már jórészt ezeknek az elvárásoknak megfelelően építették. A nagyobb nyak-dőlésszög, a megnövelt zengő húr hossza, a nyak- és a korpuszmenzúrák kedvezőbb arányainak kialakítása következtében a tetőre jutó nyomóerő is nagyobb lett.

Tanulságos lenne összehasonlítani a két, eltérő paraméterekkel rendelkező hegedűn a tetőre jutó nyomóerő nagyságát, és megvizsgálni, hogy ténylegesen mennyivel növekedett az előzőekben felsorolt változtatás után. Bár mindenképpen nehezíti ezt, hogy ez időben a hegedűk méretei eltérőek voltak, míg a klasszikus itáliai hegedűépítő-mesterek, köztük Stradivari és mások is különböző korpuszhosszúságú hegedűket készítettek. De a menzúra-méretek: a nyak- és a testmenzúra aránya sem volt egységes. Az akkori bélhúrok vastagsági méretei és anyagsűrűségi jellemzője nem ismert. A későbbi leírások pedig – jórészt hiányosságaik miatt – nem nyújtanak elégséges és hiteles adatokat, a pontos számításhoz. Annak előrebocsátásával, hogy ezek a számításainkban kisebb-nagyobb

pontatlanságot eredményezhetnek, mégis kíséreljük meg a tetőre jutó nyomóerő nagyságát meghatározni egy ún. barokk hegedűn, amely a 17. században alkalmazott, feltételezett méretekkkel készült. Válasszunk egy 36,6 cm testhosszúságú, 12,30 cm nyakmenzúrája, 19,40 cm korpuszmenzúrájú, 2,5 cm lábmagassággal rendelkező hegedűt.¹⁵

Mindenekelőtt meg kell ismerni a számításokhoz szükséges további méreteket, és meghatározni a húrok tengelyvonala és a tetőlemez alapsíkja között kialakult szögek nagyságát (69. ábra). Alapsíknak válasszunk a tetőlemez kávékkal érintkező síkját. Ettől a síktól viszonyítva határozzuk meg a méreteket.



69. ábra
Barokk hegedű és a meghatározó méretei

A tető boltozatának a magassága 1,6 cm (mivel a barokk hegedűnél a nyakszár síkja megegyezik a tetőperem felső szintjével, a szögek kiszámításához a peremvastagságot figyelembe kell venni). Legelőbb számítsuk ki a húrok és a vezérsík között lévő szögeket:

$$\alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b_1} : \frac{3,2}{31,7} = 0,10094 = 5^\circ 46',$$

$$\beta: \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b_2} : \frac{3,7}{16,2} = 0,22839 = 12^\circ 52'.$$

A láb feletti γ szög: $179^\circ 60' - (5^\circ 46' + 12^\circ 52') = 161^\circ 22'.$

A további számításokhoz ismerni kell az ezekből a méretekből meghatározható zengőhúr hosszát (c): $c = \sqrt{31,70^2 + 3,2^2} = 31,86 \text{ cm}.$

Ezek alapján határozzuk meg a húrokban fellépő feszítőerőt. Igaz, hogy a 17–18. század fordulóján alkalmazott bélhúrok vastagsági méreteit nem ismerjük, de a későbbi időből már rendelkezünk adatokkal. Apian-Bennewitz hegedűről írott könyvében a húrok fejezetében felsorolja az egyes húrok átmérőjét: $e = 0,5 \text{ mm}$, $a = 0,75 \text{ mm}$, $d = 1,125 \text{ mm}$. A g -húr átmérőjét $1,0 \text{ mm}$ -re veszi. Feltehetően ez a méret fémszállal fonott húrra vonatkozik. Hivatkozik is rá, hogy ekkor már alkalmaztak a g -húron fém fonatot.¹⁶

Ugyanitt magyarázatát adja annak, hogy a húrok vastagsága a rezgésszámokkal függött össze: „Mivel a hegedű minden húrja azonos hosszúságú, és azonos erősséggel feszülnek meg, ezért annál vastagabbak legyenek, minél mélyebb hangot adnak”,... „Egy fémszállal átszőtt mély húrnak nagyobb tömörséget és súlyt adtak és ezzel megkerülték a különben szükséges vastagságot”.

Mivel minket a húrban fellépő tényleges feszítőerő nagysága érdekel, el kell tekintenünk a fémszállal bevont g -húr alkalmazásától, mert adatok hiányában ez további nehézséget okoz. Írja is Apian-Bennewitz: „Nagyobb nehézséggel jár, ha a vastagságokat a beszótt és nem beszótt húrokhoz akarjuk meghatározni, mert ezeknél az alsó rétegek vastagsága, az átszővés abszolút súlya vagy a drót vastagsága és ez utóbbinak az ezüst, réz stb. anyaga, tehát a specifikus súlyuk bír nagyobb jelentőséggel.”¹⁷

Ezért számításaink során maradjunk a tiszta bélhúrok paramétereinek alkalmazásánál. Abból kiindulva, hogy a 3. Mersenni szabály alapján a bélhúrok átmérőjének egymáshoz való viszonyát két szomszédos kvintbe hangolt húr esetében 3:2 arányban határozták meg, kiszámíthatjuk a sorozathoz tartozó csupasz bélhúr vastagságát. Ennek alapján a g tiszta bélhúr átmérője:

$$g = \frac{1,125 \cdot 3}{2} = 1,68 \text{ mm}.$$

Mivel ismerjük a zengő húrok hosszát és az egyes húrok átmérőjét, a rezgő húrok frekvenciáját (Hz) meghatározó alapképletből

$(f = \frac{1}{2\ell} \cdot \sqrt{\frac{F}{\varphi \cdot q}})$ kiszámíthatók a húrokban fellépő feszítőerők.

A képletben f az alaprezgés frekvenciája (Hz), ℓ a húr hossza, F a feszítőerő, φ a húr anyagának sűrűsége, q a húr keresztmetszetének felülete.

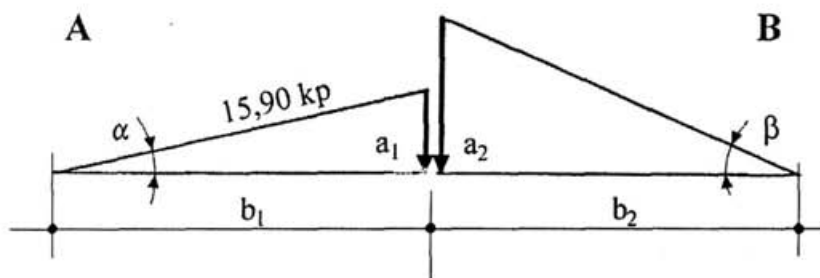
A 18. század elején még nem volt egységesen elfogadott alaphangolás, erre csak 1788-ban került sor, amikor elhatározták, hogy az a -hang alaprezgése 409 Hz legyen. Fogadjuk el ezt az értéket számításunk alapjául. Eszerint az egyes húrok alaprezgése:

$e = 612,75$ Hz, $a = 409,00$ Hz, $d = 272,99$ Hz és $g = 182,22$ Hz.

Az anyagsűrűség jellemzője nagy valószínűség szerint – bár igen különböző technológiával készültek a húrok – megfelel, vagy legalábbis jól megközelíti a bélhúrokra ma ismert anyagsűrűségi mutatót ($1,33 \text{ kp/dm}^3$).

Számításainkhoz tegyük alkalmassá az alapképletet, emeljük ki az F erőt: $F = 4 \cdot \ell^2 \cdot f^2 \cdot \varphi \cdot q$. Ennek alapján az egyes húrokban fellépő feszítőerő: $e = 3,97 \text{ kp}$, $a = 3,98 \text{ kp}$, $d = 3,99 \text{ kp}$, $g = 3,96 \text{ kp}$. Együtt $15,90 \text{ kp}$ ($159,0 \text{ N}$).¹⁸

A következő lépésben két erőháromszög segítségével – amit az alapsík, a felső nyereg, láb és az alsónyereg mentén ható erők alakítanak ki – megállapíthatjuk a húrokban fellépő feszítőerőkből a tetőlemezre jutó nyomóerő nagyságát (70. ábra).



70. ábra
Erőháromszögek a húrnyomás kiszámításához

Előbb számítsuk ki az A erőháromszög b_1 befogójára jutó erőt. Mivel a B erőháromszög b_2 befogóján is azonos nagyságú erő lép fel, a β szög segítségével meghatározhatjuk – ebből a háromszögből – a láb síkjába jutó nyomóerőt ($b_1=b_2$):

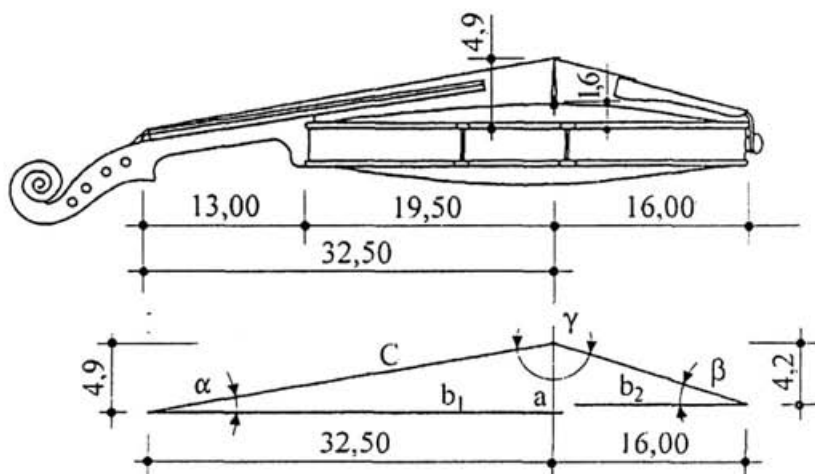
$$b_1 : \cos \alpha = \frac{b_1}{c} : 0,9949 \cdot 15,90 = 15,82 \text{ kp}$$

$$a_1 : \sin \alpha = \frac{a_1}{c} : 0,1009 \cdot 15,90 = 1,60 \text{ kp}$$

$$a_2 : \tan \beta = \frac{a_1}{b_2} : 0,2284 \cdot 15,82 = 3,61 \text{ kp.}$$

A két erőháromszögben az $a_1 + a_2$ síkban $1,60 + 3,61 = 5,21$ kp húrnymás mutatható ki. Tehát a barokk hegedűn a felvett paraméterek alapján 5,21 kp (52,10 N) húrnymás lépett fel.

Ezek után – ugyanezzel a számítási móddal nézzük meg, hogy mekkora nyomóerő képződik a nyak méretének, hajlásszögének és a zengő húr hosszának megnövelését követően. Válasszunk egy 18. század elején – az olasz klasszikus hegedűépítők által kialakított hegedűméretekkel készült hegedűt: hossza 35,5 cm, nyakmenzúrája 13,0 cm, korpuszmenzúrája 19,5 cm, lábmagassága 3,3 cm (71. ábra).



71. ábra

Átépített hegedű és meghatározó méretei

Ez esetben is a húrokban fellépő feszítőerők meghatározásához szükséges erőháromszögek legfontosabb adatait számítsuk ki előbb:

$$\alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1}{b_1} = \frac{4,9}{32,5} = 0,15076 = 8^\circ 34',$$

$$\beta: \operatorname{tg} \beta = \frac{a_2}{b_2} = \frac{4,2}{16} = 0,26250 = 14^\circ 42',$$

$$\gamma: 179^\circ 60' - (8^\circ 34' + 14^\circ 42') = 156^\circ 44'.$$

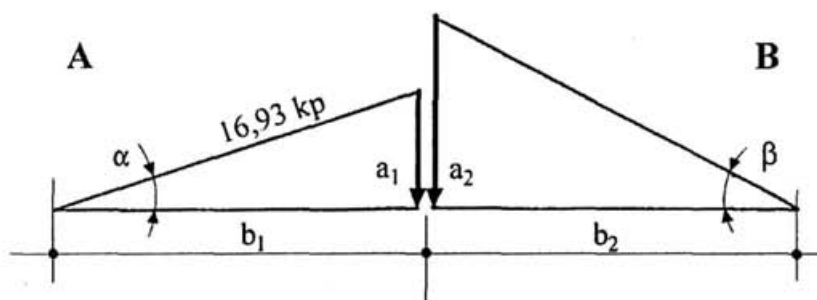
A zengő húr hossza (c): $c = \sqrt{(32,50^2) + (4,9^2)} = 32,86 \text{ cm}.$

Az egyes húrokban fellépő feszítőerők az előbbieken alkalmazott húrátmérőkkel számolva:

$$e = 4,23 \text{ kp}, a = 4,23 \text{ kp}, d = 4,25 \text{ kp}, g = 4,22 \text{ kp}.$$

Együtt 16,93 kp (169,3 N).¹⁹

Az erőháromszögekből határozzuk meg a húrnymást (72. ábra).



72. ábra

Erőháromszögek a húrnymás kiszámításához

$$b_1 = b_2 : \cos \alpha = \frac{b_1}{c} : 0,9888 \cdot 16,93 = 16,74 \text{ kp},$$

$$a_1 : \sin \alpha = \frac{a_1}{c} : 0,1489 \cdot 16,93 = 2,52 \text{ kp},$$

$$a_2 : \operatorname{tg} \beta = \frac{a_2}{b_2} : 0,2623 \cdot 16,74 = 4,39 \text{ kp}.$$

A láb síkjában ($a_1 + a_2$) 2,52 kp + 4,39 kp, összesen 6,91 kp (69,1 N) nyomóerő, illetve húrnymás nehezedik a tetőlemezre.

Így most már összehasonlíthatjuk: a barokk hegedűn 5,21 kp, a technikailag módosított hegedűn 6,91 kp húrnnyomás adódik. A nyomóerő növekedésének a nagysága 1,7 kp (32,6 %).

Ez az egy harmadával megnövekedett húrnnyomás még meggyőzőnek tűnne a tetőlemez gyámolítását illetően, de beleütközünk néhány ellentmondásba. Tudvalevő, hogy pl. Stradivari tetőlemezeit viszonylag vékonyra hagyta. A lemez vastagsága a teljes felületen 2,6–2,8 mm-t vagy annál kevesebbet tett ki, s mind e mellett még a későbbi időkben is kisméretű gerendákat alkalmazott az új követelményeknek megfelelően épült hegedűiben. „Stradivari még megelégedett 24 cm-es gerendával. Sőt Bagatella kisebbre, csak a testhossz felére, tehát pontosan 18 cm-re vette a gerenda hosszát.”²⁰ Sacconi leírásából tudjuk, hogy Stradivari gerendája „a hangszer hosszától függött, és mintegy 50 mm-re ért el a felső, illetve az alsó szegélyig”. „Gerendáinak szélessége 5 mm volt, s mintegy 6-7 mm középmagasságról a végeknél 1-1,5 mm magasságra mentek le.”²¹ Ez a ma használatos, illetve a sokszor hivatkozott „megerősített” gerenda térfogatának éppen a fele, a régi kis gerenda mintegy 5,1 cm³, a mai nagyjából 10,31 cm³.

A vékony tető és a kisméretű gerenda ezek szerint elviselte a megnövekedett húrnnyomást. Egyébként is a gerendát csak a baloldali lábtalpon közvetített nyomóerő terhelte, a jobboldali láb-talp alatt csupán a mérsékelt vastagságú tetőlemez állt ellen a többlet-terhelésnek. Mivel a lélek többször kidőlhett, a tetőlemez gyámolítás nélkül maradt. Ekkor még ugyan egyforma nagyságú nyomóerőt közvetítettek a lábtalpnak, mivel mindegyik húrbán egyazon nagyságú feszítőerőt alkalmaztak. A terhelés eloszlásában ugyan nem érvényesült a mai hegedűkben ismert aszimmetria, de az anyagon belül – a belső erők kialakulásában – igen. Ennek ellenére nem található olyan feljegyzés, irodalmi említés, hogy a húrnnyomás növekedésének ellensúlyozására a tetőlemez vastagságának növelése is szükségessé vált volna.

Hogy valójában mikor került sor a 17–18. század fordulója táján alkalmazott gerendák nagyobbra cserélésére nem lehet e műszaki kérdésekkel foglalkozó tanulmány feladata. Minden ismert adat arra mutat, hogy jóval később, a barokk hegedűkön végrehajtott technikai változtatás után. Erre nemcsak abból lehet következtetni, hogy a klasszikus itáliai mesterek még a 18. században szélteben-hosszában alkalmaztak kisméretű gerendákat, hanem néhány irodalmi adat is erre utal. Karl

Fuhr írja: „tanulságos Stradivari *Betts* hegedűjének parányi gerendája, amelyet Vuillaume 1859-ben eltávolított és Hill könyvének 192-193. oldalán egy mai gerenda mellett látható.”²² Nem hagyható figyelmen kívül, hogy a húnyomás növekedését – nagyobb arányú kialakulását – a hegedűn végrehajtott technikai változtatásokon kívül egyéb tényező is befolyásolta. Minden bizonnyal feltűnt, hogy a húr-erő kiszámításához alkalmazott képletünkben a húrokban fellépő feszítőerő nagysága (F) az alaphangolás értékének a négyzetten lévő szorzatával növekszik: $F = 4 \cdot \ell^2 \cdot f^2 \cdot \varphi \cdot q$.

Az alaphangolás emelésére – egyben egységesítésére a 19–20. században többször sor került. Eddig számításaink során 409 Hz alaphanggal számoltunk. A 19. század közepén az a -hang rezgésszámát 435 Hz-ben határozta meg a párizsi konferencia.²³

Nézzük meg, hogy a 409 Hz-ről 435 Hz-re megemelt a -alaphang mekkora húnyomás-növekedést okozott. Mivel az alaphang emeléséből adódó húnyomás növekedését akarjuk megismerni, fogadjuk el, hogy a húrok változatlanul csupasz bélhúrok, és az előzőekkel lehetséges összehasonlítás érdekében azonos vastagságúak. Ismert, hogy ez időben a húrok vastagsági méretében már történt változás. Apian-Bennewitz írja, hogy Drezdában az előző számításaink során alkalmazott hűrvastagságokhoz képest nagyobb hűrvastagságot követeltek meg: $e = 0,6 - 0,76$ mm, $a = 0,775 - 0,9$ mm, $d = 1,05 - 1,0$ mm és a $g = 0,85 - 0,975$ mm (ami feltehetően fonat nélküli tiszta bélhúrra vonatkozik).²⁴

Az előzőekben rögzítettek szerint a húrokban fellépő feszítőerők: $e = 4,79$ kp, $a = 4,79$ kp, $d = 4,81$ kp, $g = 4,77$ kp. Együtt 19,16 kp (191,6 N). Ebből az együttes feszítőerőből 7,81 kp (78,1 N) nyomóerő adódik a tetőlemezre. Az átépített hegedű esetében 6,91 kp húnyomást számítottunk ki. Ehhez viszonyítva az alaphangolás emelkedéséből további 0,90 kp (9,0 N) nyomóerő keletkezik, ámde közel másfél évszázaddal később. E témakörben is zavar fedezhető fel a szakirodalomban. Számos szerző a barokk hegedű átépítését követően – a gerenda megerősítését – a magasabb hangolásból adódó húnyomás növekedésével indokolta. Niederheitmann írja: „... mert a Diapason fokozatos növelése és a magasabb hangolás miatti növekvő húnyomással a tető ellenállása már nem volt elegendő”.²⁵ Márpedig ahogyan követhető, az alaphangolás emelése a 17–18. század fordulóján történt átépítés után jóval később fejtette ki húnyomóerő-növelő hatását. S ha még figye-

lembe vesszük, hogy a 20. században még tovább emelkedett a normál α -hang rezgésszáma (1939-től 440 Hz-re nőtt), ez a növekedés további 0,25 kp (2,5 N) húnyomást eredményezett. Együttesen a több lépcsőben történt alaphang-emelés 1,15 kp (11,5 N) húnyomás-növekedéshez vezetett. Végül is a barokk hegedű átépítése során keletkezett 1,70 kp-dal nagyobb húnyomást csaknem megközelítette az alaphang emelkedéséből következő többlet-nyomóerő.

További markáns húnyomás-növekedés a fémhúrok alkalmazásával következett be. Otto Möckel 1930-ban kiadott könyvében²⁶ a húrokban fellépő feszítőerőt $e = 8,965$ kp, $a = 6,875$ kp, $d = 6,325$ kp, $g = 6,255$ kp, összesen 28,42 kp-ban határozta meg. Ezekből a feszítőerőkből 11,60 kp (116,0 N) nyomóerő hat a tetőlemezre. A napjainkban használatos erős kategóriájú fémhúrok esetében ez a húnyomás elérheti a 12,00 kp (120,0 N).

Meg kell azonban jegyezni, hogy a korszerű húrgyártás a különböző új anyagok felhasználása mellett törekszik a húrokon fellépő nyomóerő csökkentésére. Szenteljünk rövid pillantást a mai húrokból adódó húnyomás-értékek alakulására. Nézzük meg a PIRASTRO: Eudoxa, Chromonor és Chorda (bélhúr), a THOMASTIK: Dominant és a Präzision, valamint a D'ADDARIO: Helicore és a Prelude (közepes fokozatú) húrok jellemző adatait.²⁷

	kp				Σ	húnyo- más
	e	a	d	g		
Eudoxa	7,50	5,10	3,60	3,85	20,05	8,18
Chromonor	7,90	5,85	4,90	4,55	23,20	9,47
Chorda	5,90	4,55	3,75	3,60	17,80	7,26
Dominant	7,80	5,50	4,50	4,50	22,30	9,10
Präzision	7,80	6,50	5,90	5,50	25,70	10,50
Helicore	8,43	5,76	5,21	4,62	24,02	9,81
Prelude	8,43	5,94	5,30	5,17	24,84	10,14

Számításaink során a barokk hegedűtestre 5,21 kp húnyomást ismertünk meg. A lényegében ugyanolyan méretekkkel rendelkező hegedű-korpuszra ma esetenként 12,00 kp terhelőerő hat. Nem kerülhető meg a kérdés: valójában mekkora nyomóerőt képes elviselni a hegedű tetőlap-

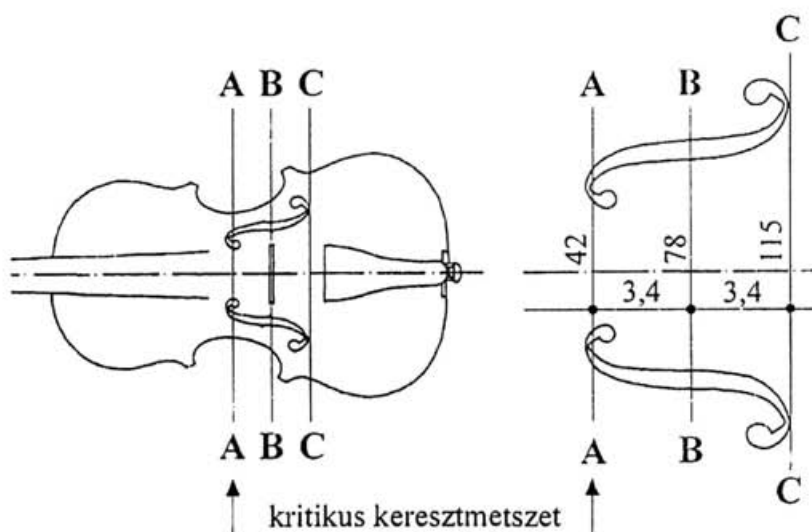
ja? Az erőhatások irányát követve könnyű megállapítani, hogy a húrok-
ból kiinduló terhelőerőt elsődlegesen a térbelileg hajlított lemeztető vi-
seli. A boltozatok pedig lényegesen nagyobb külső erővel szemben ké-
pesek ellenállni, mint a sík lemezek. Gasparo del Salo, Amati, Guarneri,
Stradivari zsenialitását növeli, hogy empirikus úton felismerték a hege-
dűtest boltozatos szerkezetének előnyeit. Az építészetben már jóval
előbb – több évszázaddal korábban – alkalmazták a boltozatokat na-
gyobb teherbírású szerkezetek megépítéséhez, illetve nagyobb fesztávok
áthidalására. Napjainkban pedig a nagyméretű lemez-szerkezetek ki-
emelkedő helyet foglalnak el a térlefedésben. Nemcsak formailag nyúj-
tanak impozáns választékot, hanem a hártavékony – viszonylagosan
kevés anyagot igénylő térbeli szerkezetek rendkívül nagy terhek viselé-
sére is alkalmasak.

Valójában a hegedű is épített szerkezet, olyan konstrukció, amely-
nek minden szerkezeti eleme kiemelkedően nagy erő viselésére képes
tömegével arányosan.

Csodálatot kiváltóan érezték rá a hegedű megalkotói ennek a szer-
kezeti megoldásnak az előnyére. Mindez annál is inkább ámulatot kelt,
mivel a hegedűboltozat térbeli kialakításához, a lemeztavastagság mérete-
zéséhez nem rendelkezhetek mechanikai-statikai ismeretekkel, ami
nélkül pl. a modern héjszerkezetek tervezése lehetetlen.

Miután az eddigiek ismeretében mindinkább érdekel bennünket,
hogyan tud ellenállni a külső erőhatásoknak, és mekkora belső erők ébrednek benne, kíséreljük meg megvizsgálni a
matematikai bonyodalmakat megkerülve.

Számításainkhoz válasszunk egy egyenletesen 2,7 mm vastagságú
tetőlemezt, és nézzük meg, hogy a húrnyomás milyen nagyságú belső
erőket és feszültségeket hoz benne létre, s végül milyen mértékben felel
meg a külső terhelésből fellépő igénybevételnek (73. ábra).

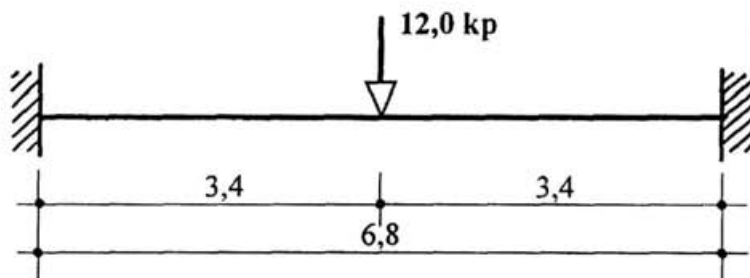


73. ábra

Az f -nyílások közötti lemez-szakaszban fellépő feszültségek számításához szükséges méretek

Vizsgáljuk meg a tetőlemez középső, az f -bevágások közötti szakaszát, amely csupán az alsó és a felső tetőívvel képez folyamatos egységet, de nem támaszkodik fel a kávékra. Ebből következően közvetlenül viseli a rá nehezedő húrnymást. Ez a lemez-szakasz hosszirányban alig érzékelhető, keresztirányban pedig kis mértékű, mintegy 1-2 mm-es ívelésű boltozottsággal rendelkezik. Ha nagyon pontosak akarnánk lenni, akkor tekintetbe kellene venni, hogy a kiválasztott modell két irányban hajlított lemez. Viszont ez esetben a létrejövő belső erők számítása komplikált matematikai műveleteket igényelne. Mivel azonban a vizsgált lemez-szakasz boltozottsága igen kicsi, nagyobb pontatlanság nélkül megközelítően valós eredményekre jutunk akkor is, ha teljesen sík lemezként kezeljük.

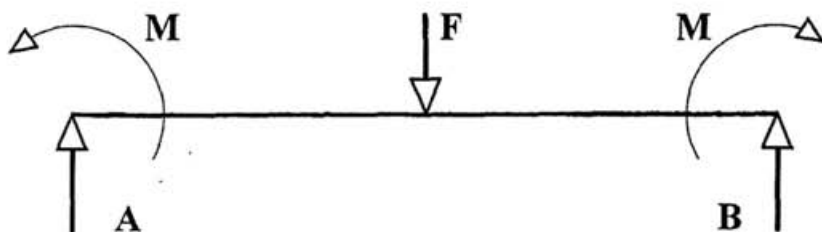
Ha ezen a lemez-szakaszon felveszünk egy kisebb metszetet, ez a szerkezeti rész – analóg módon – hasonlítható egy koncentrált erővel terhelt, két végén befogott sík lemeztartóhoz (74. ábra).



74. ábra

Az f -nyílások között felvett hosszmetset analóg tartó modellje

Ez a lemeztartónak tekintett modell az f -bevágások felső és alsó íveit összekötő érintővonal mentén a lemez folytonosságát megtartva feltámaszkodik a tetőlemez felső és az alsó szakaszára. Ezen a vonalon a terheléssel ellentétes irányú támaszerők, nyíróerők és a lehajlás következtében nyomatéki erők lépnek fel (75. ábra).



75. ábra

Az analóg tartón fellépő erők

A támaszerők nagysága (A) (B): $A = B = \frac{F}{2} = 6,00 \text{ kp (60,0 N)}$.

Az A és a C lemez-keresztmetszetekben a terhelőerő és a támaszerők hatására létrejövő nyíróerők (τ) különös figyelmet érdemelnek,

hiszen a lemez vastagsága csak 2,7 mm, a lemezre ható erők pedig jelentős nagyságúak (12,00 kp terhelőerő, 6,00 kp támaszerők).

A számításba jöhető nyíróerők közül a legkritikusabb az f -nyílások felső szemei közötti 42 mm széles lemez-szakaszon, illetve a láb vonalában léphet fel. $\tau = \frac{F}{q}$, ahol F a felületre ható erő, q a tartó keresztmetszete:

$$\tau_A = \frac{60,0}{1134} = 0,53 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_B = \frac{120,0}{2106} = 0,57 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_c = \frac{60,0}{3105} = 0,19 \text{ N/mm}^2.$$

A nyírószilárdság határértéke lucfenyőben $0,70 \text{ N/cm}^2$, tehát jóval nagyobb, ami a húnyomásból a tetőlemez vizsgált pontjain keletkezik. Ebből következően a tetőlemez a benne ébredő nyíróerőkkel szemben biztonságosan megfelel.

A lemezre merőleges erőkből adódó nyírófeszültségen kívül a terhelő és a támaszerőkből fellépő forgatónyomatékok okoznak még – főleg az alacsony, illetve vékony – tartószerkezetben gondokat.

A lemez-szakaszok érintkezési vonalában – a támaszerők és a terhelő támadáspontjában – a keletkező nyomatéki erők:

$$M_{max} = \frac{F \cdot \ell}{8}, \quad M_{max} = \frac{120,0}{8} \cdot 6,8 = 102,00 \text{ Nmm}.$$

Ebből a felvett – különböző vizsgált keresztmetszetekben (A , B , C) adódó nyomatéki feszültségek a tartólemez alsó és felső szálaiban:

$\sigma = \frac{M}{I} \cdot e$, ahol M a vizsgált pontban jelentkező nyomaték, I a keresztmetszet inercianyomatéka, e a szélső szál távolsága a semleges tengelytől.

$$\sigma_A = \frac{102,00}{68,89} \cdot 1,35 = 2,00 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{102,00}{127,93} \cdot 1,35 = 1,76 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{102,00}{188,62} \cdot 1,35 = 0,73 \text{ N/mm}^2$$

Lucfenyőben a megengedhető hajlítószilárdság 66 N/mm^2 . A számított – tényleges – hajlítószilárdság a vizsgált keresztmetszetekben a

semleges tengelytől legtávolabb lévő szálaiban is sokszorosan a határérték alatt marad.²⁸

Vizsgáljuk meg a húrnymás hatására kialakuló lehajlás mértékét a láb alatti lemez-szakaszban (f): $f = \frac{F \cdot \ell^3}{192 \cdot I \cdot E}$, ahol F a terhelő erő, ℓ a tartólemez fesztávja, I a keresztmetszet inercianyomatéka, E rugalmasági modulus (lucfenyőnél 110 000):

$$f = \frac{120,00 \cdot (6,8)^3}{192 \cdot 127,94 \cdot 110000} = 0,014 \text{ mm.}$$

Számításainkat gerenda nélküli lemez-szakaszra végeztük el. Eddig csak gyanítottuk, hogy a húrnymás növekedése és a gerenda statikai célú megerősítése között nincs közvetlen összefüggés. Most már ki is mondhatjuk, hogy a gerendának nincsen szükségszerű statikai szerepe. A tetőlemez önmaga – gerenda nélkül – biztonsággal képes elviselni a reá ható húrnymást.²⁹

Ily módon az a nézet, hogy a gerendát statikai okból építették be a hangszerbe, kétségbe vonható. A szakirodalomban mégis igen sokan kardoskodnak a mellett, hogy a gerenda a hosszabb zengő húrok, a magasabb láb és a magasabb, hangolás következtében megnövekedett húrnymás miatt igen fontos feladatot lát el a hegedűtetőre jutó teher viselésében. Karl Fuhr azt írja, hogy „egy erősre kidolgozott tető sem lenne elég tartós a gerenda nélkül.”³⁰ Vadon Géza pedig a d - és a g -húr nyomásával szemben látja fontosnak a gerenda szerepét.³¹ Pap János még karakterisztikusabban fogalmaz: „Mind a gerenda, mind a lélek statikai okból került a hangszerbe beépítésre.”³²

A számítások eredményének gyakorlati ellenőrzésére a szokásos méretekkel építettem egy 4/4-es, egyenletesen 2,7 mm tetőlemez vastagságú gerenda nélküli hegedűt. A gerenda és – lélek nélkül – felhangolt hegedű Eudoxa-húrokkal 8,19 kp húrnymás alatt a számításoknak megfelelően igazolta a húrnymással szembeni állóképességet. A felhangolt hegedűn közvetlenül a láb síkja előtt mért lehajlás 0,2 mm volt, a lélek behelyezése után – változatlanul gerenda nélkül – ez az érték 0,08 mm-re csökkent.

Összegezhetjük, hogy a gerendának tulajdonított szerep a tetőlemez megerősítésében a hegedűnek valamikor a 17–18. század fordulóján végrehajtott átépítését követően nem igazolható. A szá-

mítás eredménye és a gyakorlatban ellenőrzött – modell – kísérlet után nem maradhat kétely, hogy a gerenda nem tölt be nélkülözhetetlen statikai funkciót. A teljesség érdekében azonban szólni kell arról, hogy a tetőlemez és a gerenda viszonya mégsem egyszerűsíthető le ilyen sommásan. Mivel a gerenda végeredményben merev, összetett szerkezeti kapcsolatba kerül a tetőlemezzel, nem szabadulhat a lemezben fellépő belső erők hatása alól. A teherviselésben a tetőlemezzel együtt kényszerül részt venni. Olyan kapcsolat ez, mint egy teret záró lemezfödém alá a teret kettéosztó, térelhatároló fal épül. A megterhelt födémlemez lehajlása során „felfekszik” a térelhatároló falra, ami ebből következően alátámasztó elemként is működik, és ennek folytán terhet is visel, bár eredeti rendeltetése a tér kettéosztása. Ilyen összefüggés alapján kényszerül a gerenda részt venni a tetőlemezben fellépő erők megosztott viselésében: így benne létrejönnek mindazok a húzó-, nyomó-, nyíró-, hajlítóerők, amelyek a húrnyomásból a tetőlemezre jutnak. De azok is, amelyek a húr rezgéséből adódnak (a mechanikai rezgést keltő ΔF erők). Ami a húrnyomásból fellépő erők megosztott viseléséből adódik a mechanikai rezgések szempontjából nem okoz kedvezőtlen hatást, az azonban a hangkeltő ΔF erők hatásfokát már igen érzékenyen csökkentheti.

Ebből következően a gerenda kissé anakronisztikus módon vesz részt a hegedű működésében, mert a belső erők megosztott viselkedésében – amire nincs szükség – részt vesz, a mechanikai rezgés erősítésében – amiben döntő szerep hárul rá – bizonyos esetekben negatív hatást gyakorol.

1.2. A gerenda és a mechanikai rezgés

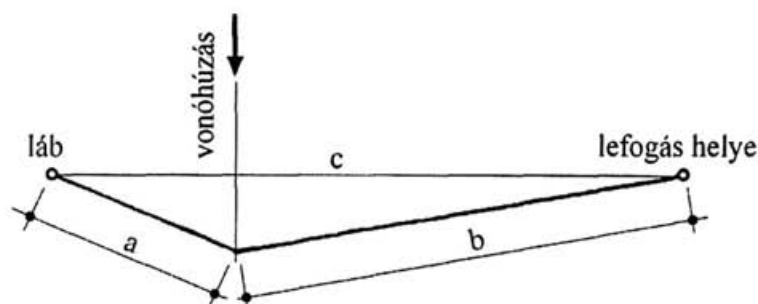
Mivel a gerendának nincs indokolt statikai szerepe, még inkább megerősödött a tetőlemez-részek közötti mechanikai rezgést transzportáló funkciója. Erről nagyon sok szó esik az irodalomban. „A gerenda egyesíti az f -nyílások által teremtetett két rezgésterületet..., ismét akusztikai egységgé egyesíti.”³³ Még pontosabban, ahogy Pap János akusztikus fogalmazza meg: „a gerenda tulajdonképpen arra szolgál,

hogy a teljes tető C_4 modulusnál egy felületként rezegjen, hogy ne alakulhasson ki akusztikai rövidzár.”³⁴

Ezek az állítások kétségtől evidensek, mivel a rezgő húrból kiinduló rezgésimpulzusok a korpuszon előbb a tetőlemez középső szakaszát érik, ami önálló mozgásra (rezgésre) képes. A rezgés továbbjutását a teljes tetőfelületre – megosztottsága miatt – külön erre a célra alkalmas szerkezeti elemmel elő kell segíteni.

Vizsgáljuk meg, hogyan működik a gerenda az anyagon belüli mechanikai rezgés továbbításában, a különböző paraméterekkel rendelkező tetőfelületek akusztikai kapcsolatának erősítésében.

A hegedű megszólaltatásakor a húr részecskéi kitérnek nyugalmi helyzetükből, ebből következően megnő a húr hossza és benne a feszítőerő (76. ábra).

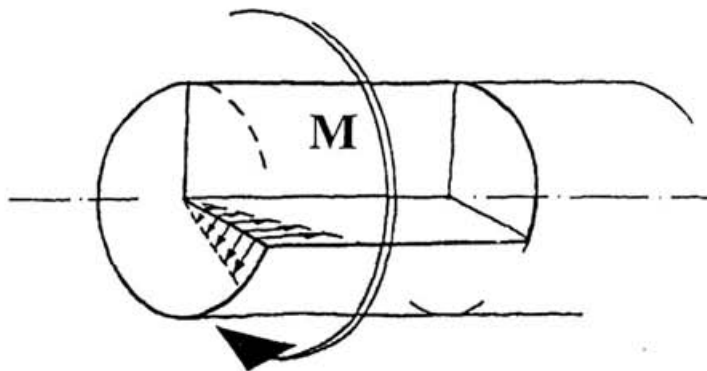


76. ábra

A kilendülő húr hosszának megnövekedése: $(a + b) > c$

A húr hosszának növekedése vele arányos nagyságú ΔF feszítőerőt hoz létre (Hooke-törvény). Vonóval rezgésbe hozott húrból a hossz-növekedésből képződő erőn kívül még további feszítőerő is fellép. Ha egy rudat – húrt – érintőleges erővel megcsavarunk, akkor abban körös-körül nyíróerő keletkezik. A nyírás egyenértékű a tengellyel 45° -os szöget bezáró húzás és nyomás kombinációjával. A hosszirányra merőleges síkban működő csavarónyomaték hatására keletkező (τ) nyírófeszültségek a

keresztmetszet síkjában és a hossz-, illetve tengelyirányban képződnek (77. ábra).



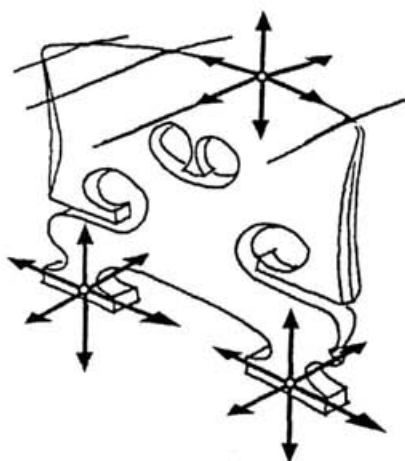
77. ábra

A húrban csavarónyomaték hatására létrejövő nyíróerők

Ezek a tengelyirányú erők egyben növelik a húr kilendítésével együtt járó megnyúlásból adódó erőt. A nyíróerőből adódó tengelyirányú erő (feszítőerő) nagyságrendben jóval kisebb a húr megnyúlásából létrejövő feszítőerőnél.

A mechanikus hatásra kilendülő húr anyagi részecskéinek pulzáló mozgása következtében kialakuló ΔF erő mindannyiszor ismétlődik, ahányszor a húr átlendül a rezgés legszélső helyzetébe. Vagyis a húr anyagi részecskéi két szélső helyzet között kialakuló pályán periodikusan mozognak – mechanikai rezgést végeznek.

A húr mechanikai rezgésétől a lábgerincre háromirányú, illetve a pulzáló mozgásból következően ezekkel ellentétes irányú erőket is figyelembe véve hatirányú erőcsoport képződik. Ezek az erők jutnak a lábtalpakon keresztül a tetőlemezre (78. ábra).



78. ábra
A húr rezgőmozgásából a lábra ható erő

Ezek az egymásra 90° -os szöget bezáró erők a láb talpfelülete és a tetőlemez között mozgást gerjesztenek, csúszósúrlódást hoznak létre. A súrlódás nagysága arányos azzal az erővel, amellyel az érintkező felületek egymáshoz nyomódnak. Ez azonos a húrnyomással és a ΔF erővel. A tetőlemez felülete a talpak alatt a súrlódóerő hatására az idő függvényében benyomódik, s mivel a súrlódás két egymáson mozgó felület között lép fel, a benyomódás hossz- és szélességi mérete nagyobb a láb talpfelületénél.

A láb síkjában a tetőlemezre jutó merőleges erők a tetőlemezben transzverzális rezgést, a lemez síkjával megegyező másik két erő longitudinális rezgést indítanak el.

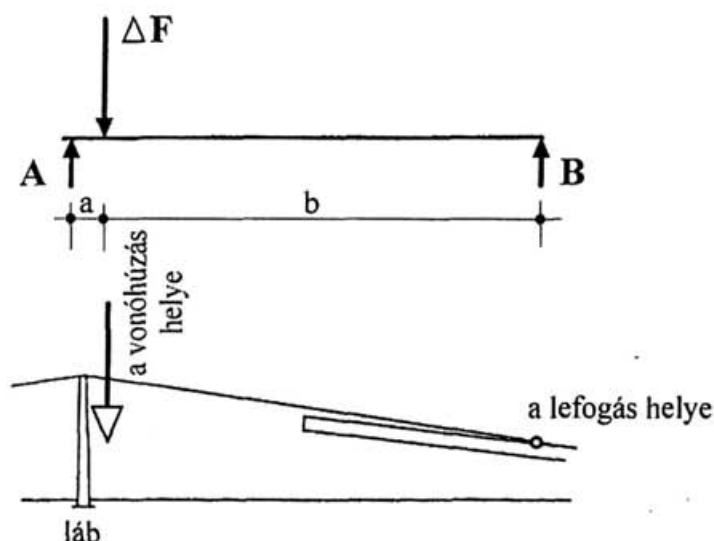
Tudvalevő, hogy az egyszerűen kifeszített húr rezgései közül a transzverzális rezgések képesek legintenzívebben a hang gerjesztésére, a longitudinális elmozdulások alig. Ezt az összehasonlítást Apian-Bennewitz úgy fogalmazta meg: „a transzverzális rezgések a zenei világban viszonylag nagyobb érdeklődésre számíthatnak. ... A hosszirányú rezgéseket a zenében nem, vagy csak kis mértékben lehet kihasználni.”³⁵ Ennek az oka igen egyszerű. A transzverzálisan rezgő tetőlemez kilendülő anyagi részecskéi a velük nagy felületen érintkező levegőrészecskéikkel történő frontális ütközéssel adják át a rezgő-mozgást. A longitu-

dinális irányú mozgó részecskék csupán súrlódás útján – lényegesen kisebb hatásfokkal – továbbítják a rezgőmozgást. Abban, hogy ez a mechanizmus az anyagi részecskék világában miként történik, itt most komplikált lenne elmélyülni, annál is inkább, mivel szilárd test és gáznemű anyag részecskéinek egymásra ható mozgásáról van szó. Egyszerűbb, bár csak következtetésekre nyújt lehetőséget, ha két szilárd testnek a mechanikában ismert találkozását vesszük alapul. Ütközés esetében – mondja a mechanika – a rövid ütközési időnek következményeként nagy erőhatások lépnek fel az ütközésben résztvevő testek között. Súrlódás esetében az egymással érintkező testeknek csupán az érintkező felülete mentén történő viszonylagos elmozdulásról beszélünk.

A húrban keletkező mechanikai rezgés útját végigkísértük a tetőlemezig, illetve megismertük a tetőlemez anyagi részecskéinek mozgásirányait. Hogy a húrban létrehozott ΔF pulzáló erő nem más, mint mechanikai rezgés, annak bizonyítására egyszerű folyamat ad alkalmat. Minden hegedűjátékos tudja, hogy ha a lábhoz közelebb húzza meg a húrt a vonóval, hangosabban szól a hegedű, mintha a fogólaphoz közelebb hozza mozgásba, pedig a felfekvés közvetlen szomszédságában kisebb kitérésre lehet kényszeríteni, mint a szabadon zengő húrhossz középtáján. A kisebb húrmegnyúlásból következő kisebb ΔF erő ellenére mégis hangosabban szól a hangszer. Ennek oka, hogy a lábhoz közeli vonóhúzás a húr megnyúlásából adódó Δ feszítőerő helyett a vonóhúzással terhelt húrszakasz láb felett képződő támaszerőjét továbbítja a tetőlemezre. Ez pedig helyzetéből adódóan nagyobb – a húr rugalmassága miatt veszteséggel – a lábra jutó hossznövekedésből képződő erőnél. Gondoljunk csak a gyakran alkalmazott analóg-tartó példánkra. Ha egy kéttámaszú tartón a terhelőerő az egyik támaszerő közvetlen közelében hat, akkor a támaszerő csaknem azonos nagyságú a terhelőerővel (79. ábra).

$$A = \frac{\Delta F \cdot b}{\ell},$$

$$B = \frac{\Delta F \cdot a}{\ell}$$



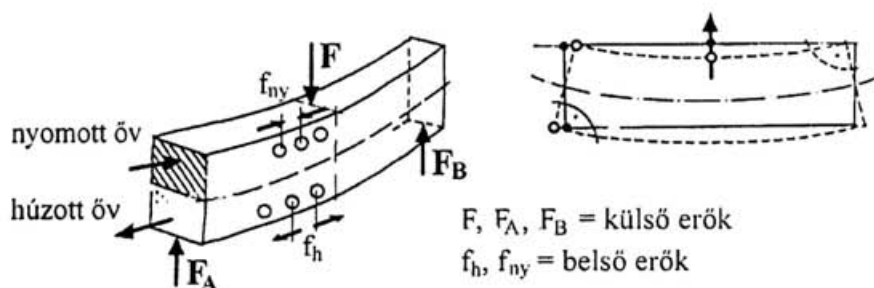
79. ábra

A vonóhúzás helyének és a támaszerők nagyságának összefüggése

Mivel az a távolság tört része a b -nek, az A erő nagysága alig kisebb a terhelőerőnél (ΔF), vagyis a vonóhúzásból (vonónyomásból) adódó pulzáló ΔF erő azonos a mechanikai rezgéssel.

A továbbiakban tekintsük át a mechanikai rezgés kialakulását és terjedését a tetőlemezben és a gerendának e folyamatban betöltött szerepét.

Induljunk ki abból, hogy ha egy gerendát meghajlítunk, a gerendának a hajlítás irányába eső oldalán a szélső szálakban nyomóerők, az ellentétes oldalon húzóerők lépnek fel. Ez egyben azt is jelenti, hogy a nyomott oldalon az anyag részecskéi összenyomódnak, a húzott oldalon pedig egymástól távolabbra kerülnek (80. ábra).

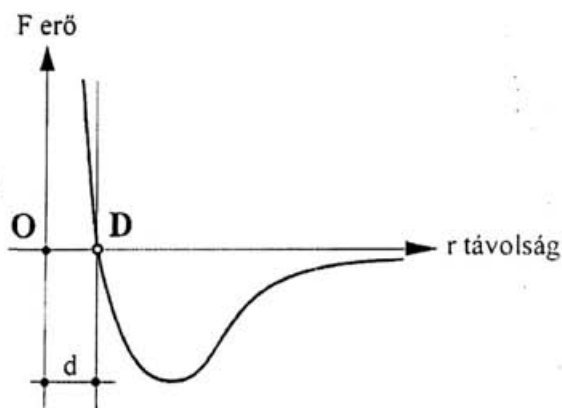


80. ábra
Hajlított gerendában fellépő belső erők

Az elemi részecskének az elmozdulását okozó külső erőkkel szemben az anyag molekulái³⁶ között lévő „molekuláris erők” lépnek működésbe. Ha a külső erőhatás nagy, a molekulák elmozdulása is nagy, illetve a külső erők csökkenésével a molekulák közötti elmozdulás is mérséklődik.

A molekuláris erőket nem lehet a klasszikus fizika elméletével megmagyarázni. Ehhez a kvantum-mechanikára van szükség.

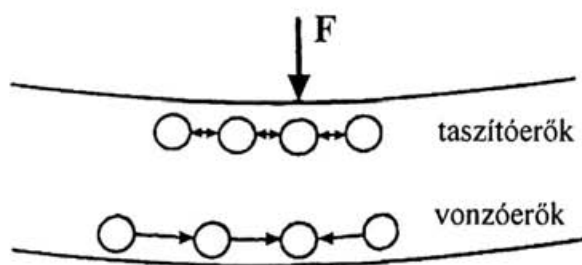
A szilárd anyagok atomjait a köztük lévő vonzerő tartja össze. Ha az atomok túl közel kerülnek egymáshoz, közöttük taszítóerő lép fel, ha pedig valamilyen kényszer hatására eltávolodnak egymástól, vonzerő képződik közöttük. Az atomok között ható erőt a 81. ábrán lehet megközelítően érzékelni. Az ábra két atom között ható F erőt mutat be r távolság függvényében.



81. ábra
A külső erőhatás és a molekulák mozgása

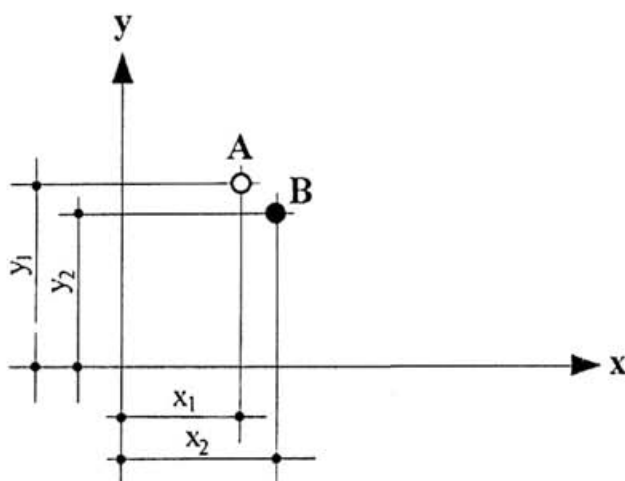
Az r tengelyen a D pontban – ahol a görbe a tengely metszi – az erő (F) zérus, vagyis ebben a pontban az erők (külső-belső) egyensúlyban vannak, és a molekulák egymástól d távolságra helyezkednek el. Ha a molekulákat a d távolságnál közelebb kényszerítjük egymáshoz – pl. a gerenda hajlításakor a hajlítás irányába eső szélső szálakban –, akkor taszítják egymást. Ez olvasható le a 81. ábra r tengely feletti szakaszáról, ahol a molekulák d távolságnál közelebb kerülnek egymáshoz. Ha a molekulákat széjjelhúzzuk, közöttük vonzás lép fel, mint a hajlított gerenda alsó szálaiban: az ábrán is követhetjük, hogy a molekulák egymástól való távolsága nagyobb a d távolságnál.³⁷

Ez a folyamat játszódik le a hegedűgerendában hajlításakor. Az elemi részecskék a nyomott övben az anyag nyugalmi állapotában – a rájuk jellemző távolságnál közelebb kerülnek egymáshoz, közöttük taszítóerő, míg a húzott övben eltávolodva egymástól vonzás (húzóerő) lép fel (82. ábra).



82. ábra
Molekuláris erők a hajlított szerkezetben

A hajlítóerő hatására a molekulák a gerendában kétirányú helyváltoztatásra kényszerülnek. Egyszer a hajlítás síkjába eső irányú mozgást végeznek, ugyanakkor a közöttük lévő távolság változása miatt oldalirányban is elmozdulnak (83. ábra).



83. ábra

A molekulák mozgásirányai hajlított szerkezetben

A koordináta-rendszerben ábrázolt molekula nyugalmi helyzetét (A) y_1 , x_1 értékek jellemzik. A lehajlás következtében a B pontban megváltoznak a helyzetparaméterek (y_2 , x_2). Ezek az elmozdulások egybevetethetők a mechanikai rezgésirányokkal: az y tengellyel közel párhuzamos elmozdulás a transzverzális rezgéssel, az x tengellyel egyirányban történő mozgás a longitudinális rezgésiránnyal azonosítható.

A tetőlemezre jutó merőleges irányú pulzáló erők egymás után ismétlődő lehajlásokat idéznek elő a tetőlemezben és a gerendában. A lehajlás zavarokat kelt a nyugalmi állapotban lévő anyagrészecskék között, és kilendíti őket egyensúlyi állapotukból. A mozgást elindító ΔF erő támadáspontjától – ahol a lehajlás, illetve a transzverzális irányú rezgés a legintenzívebb – távolabb lévő közeгрészecskék is kimozdulnak eredeti helyzetükből. Ez a deformáció végigfut a gerenda teljes hosszán – érintve az egyes tetőszakaszokat. A lehajlás során a gerenda alsó és felső szálaiban hosszváltozás is történik, aminek következtében az anyagrészecskék a gerenda tengelyének irányában is elmozdulnak. A rezgés előrehaladásával mindig újabb és újabb közeгрészecskék jönnek mozgásba, ami egyben azt is jelenti, hogy a mozgás terjedésével együtt energia is terjed a közegben. Mivel a rezgés energiája (E) egyenesen arányos a test tömegével, az amplitúdó és a frekvencia négyzetével ($E =$

$2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot v^2 \cdot q^2)^{38}$, a rezgést továbbító szerkezeti elem tömegének (m) igen jelentős szerepe van. Ebből következtethető, hogy a barokk, illetve a régi kisebb tömegű gerendák eredendően gyengébb hatásfokkal továbbíthatták a rezgésenergiát, szemben a később csaknem megkétszerezett tömegű gerendákkal. Erre utal Karl Fuhr is: „Mivel a tapasztalat azt mutatja, hogy az új gerenda beillesztésével gyarapodott a régi hegedű hangja...”³⁹

Végül is az elméleti elemzések és a gyakorlati tények is azt mutatják, hogy a gerendának a húrok mechanikai rezgésének felerősítésében és továbbításában van döntő szerepe. Végletesen úgy is fogalmazhatjuk, hogy a hegedű gerenda nélkül erőtanilag tartósan egyensúlyban lévő szerkezet, de a hegedű gerenda nélkül elveszti hangjának zenei értékét. Tehát nem állhatunk messze az igazságtól, ha azt mondjuk, hogy a gerendának egyértelműen akusztikai szerepe van. Nélküle a hegedű nem nyújtja azt a zenei hatást, amire ebben a szerkezeti szimbiózisban képes.

2. A gerenda beillesztésének a módjai

Abból a tévhitből kiindulva, hogy a gerendának elsődleges szerepe van a tetőre jutó húrnymás viselésében, szükségesnek vélték a megerősítését, méretének, tömegének megnövelését. Sőt ennek folyamán nemcsak erősebb (nagyobb) gerenda behelyezésének igénye merült fel, hanem a gerendában már a rögzítés előtt keltett feszültséggel fokozni kívánták a tetőlemez megerősítését. „A gerenda mindkét végét jobban kell hajlítani, vagyis kiicelni, mint a tetőt. A gerendának felenyvezésekor a tető boltozatához kell illeni. Ezzel a tető bal oldalát fölfelé tereli, a húrnymásnak nagyobb ellenállást adva a jobboldallal szemben, amelynek a lélek adja a támasztékot”.⁴⁰ Mintegy száz évvel később írja Vadon Géza, „hogy a húrok nyomásának kellőképpen ellenállhasson, kis feszültséget adnak a gerendának. Erre a célra a gerenda végeinél 1-2 mm billenés elégséges. ... Ha a tetőt és egy ilyen fajta gerendát felenyveztünk, akkor az utóbbi a fent említett módon hat és a tetőnek egy a húrokkal és a húrláb hatásától független saját feszítést ad”.⁴¹

Ennek a megállapításnak, hogy a tetőnek „független, saját feszítést ad”, erőtani szempontból többirányú kedvezőtlen következménye jöhet létre. Külön téma lenne annak vizsgálata, hogy a befeszítést mióta alkalmazza a hegedűépítés, mikor kezdenek a gerendának „saját” feszítést adni. Alkalmazták-e már a 17–18. század fordulója tájékán vagy csak később. Igen figyelemre méltó Karl Fuhr közlése, amikor arról ír, hogy „a feszítés a klasszikus periódus hegedűinél sokkal kisebb volt, csekélyebb volt, mint manapság.”⁴² Mivel azonban nem a technológiai történelmi folyamat vizsgálata a célunk, vissza kell tértünk a gerenda mechanikai rezgést elősegítő szerepének elemzésére.

Nagyon zavaró és a szakmai egzaktuság hitelét rontja, hogy a befeszítésről vallott nézetek és a gyakorlat évszázadokon át megoszlott. Voltak és vannak, akik szükségesnek tartják, s vannak, akik nem. „Ha ez nem történik így – írja Niederheitmann –, akkor a gyenge hegedűknél könnyen található egy torzió, egy ficamodás és az eredeti boltozati árnyokban, amely a tető szabad rezgését megrövidíti.”⁴³ Max Möckel ellenkező íveléssel feltételez befeszítést. Úgy véli, hogy a régi itáliaiak a gerendavégeket hozzásimulva hagyták, és középen hagytak részt a tető-

lemez és a gerenda között, amit a beenyvezéskor befeszítettek.⁴⁴ Tóth János egyik tanulmányában határozottan ellenzi, hogy „sokan a hanggerendát befeszítik, azt gondolván, hogy a hegedű hangját megjavítja vagy legalább is erősíti... Ez a befeszítés helytelen, mert a szabad rezgésben gátolja a fedelet”.⁴⁵

A mai gyakorlat is ezt a három módszert követi. Bármennyire is meglepő, de több évszázad alatt nem alakult ki egyértelműen, hogy valójában melyik beillesztés felel meg legjobban a gerenda akusztikai rendeltetésének. Pedig a hegedű szinte minden más szerkezeti elemét tökéletes pontossággal határozta meg az empirikus gyakorlat.

Nézzük meg, hogy a tudományos ismeretek segítségével közelebb lehet-e jutni a gerenda tényleges működésének megismeréséhez, illetve lehetséges-e a mechanikai rezgést erősítő szerepének növelése.

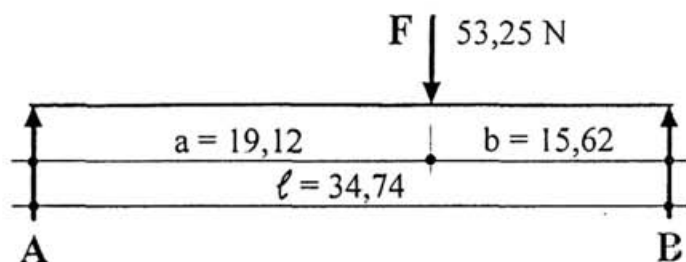
2.1. Befeszítés nélküli gerenda

Vizsgáljuk meg előbb, hogy a tető homorú felületéhez pontosan illesztett gerendában milyen és hozzávetőlegesen mekkora belső erők keletkeznek. Az előzőekben megismertek alapján tisztában vagyunk azzal, hogy a hegedű felhangolása előtt a gerendában – s ugyanígy a tetőlemezben – nincsenek belső erők⁴⁶, az anyagot alkotó elemi részecskéket semmiféle erő nem kényszeríti kimozdulni eredeti helyzetükből, vagyis nyugalmi állapotban vannak.

A húrok felhangolását követően a húrnyomás – a lábtalpakon keresztül – két koncentrált nyomóerőt ad át a tetőlemezre. Mindkét erő – eltérő mértékben – a tetőlemezben és a gerendában deformációt okoz. Az erők megoszlásának aránya a boltozott tetőlemez és a gerenda között rendkívül összetett matematikai és statikai számítással mutatható ki. Esetünkben ettől tekintsünk el, mivel a térbeli lemez-szerkezetekben fellépő erők számítása még a mérnöki szerkezetek esetében is igen bonyolult. Ráadásul összetett szerkezettel van dolgunk: egy térbeli lemez-szerkezettel s vele egységet képező mereven kapcsolódó gerenda elemmel.

Az érzékelhetőség szintjéig elégséges, ha csak a gerendában ébredő belső erőkkel és azok hatásával foglalkozunk. Annál is inkább elfogadhatónak tekinthetjük ezt, mivel a boltozott tetőlemezben fellépő erők

csökkentik a gerendában keletkező belső erők nagyságát. Ennek megismerésére vegyünk fel a gerenda szélességével (5 mm) megegyező, vele egy szerkezeti elemet képező szeletet a tetőlemez teljes hosszában. Az így kapott modellt tekintjük egy központi erővel aszimmetrikusan terhelt kéttámaszú analóg tartónak (84. ábra).



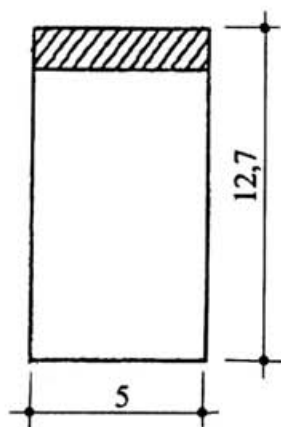
84. ábra

Analóg tartó a gerenda lehajlásának vizsgálatához

A legnagyobb belső erők a terhelőerő vonalában (a láb síkjában) a lehajlás maximumában alakulnak ki (M_{max}):

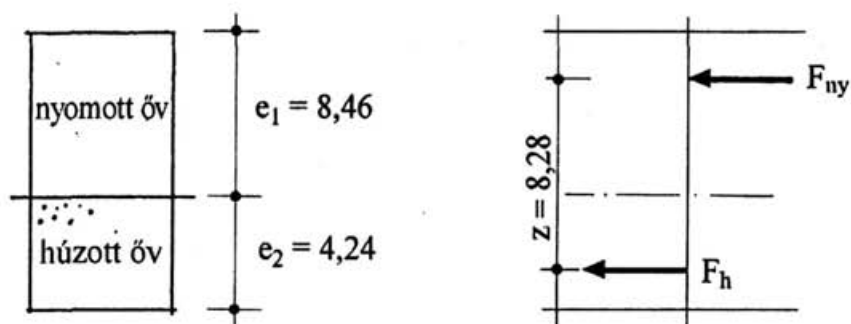
$$M_{max} = \frac{F \cdot a \cdot b}{\ell} = \frac{53,25 \cdot 19,12 \cdot 15,62}{34,74} = 45,77 \text{ Ncm.}$$

A gerenda keresztmetszete ezen a helyen $5 \cdot (10 + 2,7) \text{ mm}$: a tiszta gerendametszet és a vele merev szerkezeti egységet képező tetőlemez-szelet (85. ábra). Mindkét szerkezeti elembe – a tetőlemezbe és a gerendába – a tavaszi pászták iránya megegyező, ezért a bennük lehetséges határfeszültségek elméletileg azonos nagyságúak. Így az összetett keresztmetszetre számíthatjuk az inercianyomatékot.



85. ábra
A gerenda keresztmetszete
a vele mereven összekapcsolódó tetőlemez-metszettel

Mivel a lucfenyőben a szakítószilárdság csaknem kétszerese a nyomószilárdságnak (erről már volt szó az előző fejezetben), a keresztmetszet semleges tengelye a húzóerők irányába tolódik el (86. ábra).



86. ábra
A hajlított gerendában kialakuló belső erők

A belső erők nagysága ($F_{ny}=F_h$) kiszámítható a nyomatéki maximumból (M_{max}), mivel $M_{max} = F_{ny} \cdot z$, $F_{ny} = \frac{M_{max}}{z} = \frac{45,77}{8,28} = 5,52 \text{ N}$.

A gerenda nyomott övének szélső szálaiban fellépő feszültség:

$$\sigma_{ny} = \frac{M_{max}}{I} \cdot e_1 = \frac{45,77}{853,49} \cdot 8,46 = 0,45 \text{ N/mm}^2,$$

a legelső – húzott – szálaiban lévő feszültség:

$$\sigma_h = \frac{M_{max}}{I} \cdot e_2 = \frac{45,77}{853,49} \cdot 4,24 = 0,23 \text{ N/mm}^2.$$

Ezek az erők nagyságrendileg töredékei a megengedhető feszültségeknek, ezért a szilárdság szempontjából indifferensek. Pusztán azért érdekesek számunkra, mert a felhangolt hegedűben – gerendában – állandóan jelen vannak, s mindaddig léteznek, amíg a húrnyomás meg nem szűnik. Tehát ezekkel a belső erőkkel a gerenda működésének vizsgálatakor számolni kell.

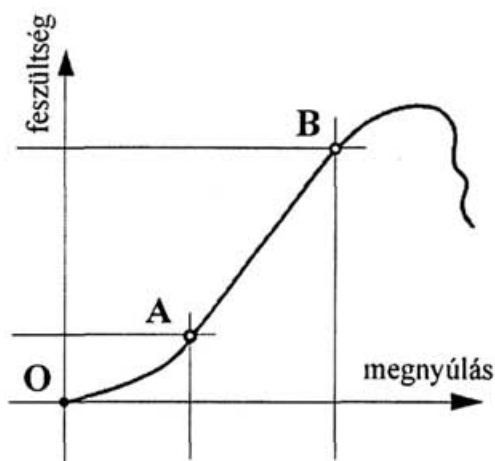
A hegedű megszólaltatásakor a rezgő húr gyorsan változó irányú – pulzáló – nyomóerőt ad át a tetőlemeznek, illetve vele együtt a gerendának. Ezek az igen kicsiny (ΔF) erők éppúgy lehajlásokat idéznek elő a gerendában, mint a tartós terhelés. Csakúgy ezek a ΔF erők a pillanat egyik töredékében valóban növelik a gerenda lehajlását, a másikkban csökkentik, ahogy a pulzáló erők iránya változik. Amikor a ΔF erő a tetőre merőleges irányú, növeli a gerenda lehajlását, és a benne lévő belső erők is növekszenek. Az ΔF erő megszűnésével a húrnyomás által keletkezett belső erők maradnak, és a gerenda lehajlása csökken. A két különböző forrásból ébredő belső erők a pulzáló ΔF erő pozitív, illetve negatív hatása szerint szuperponálódnak.

A húrnyomásból keletkező belső erőket jó-rossz megközelítéssel meg tudjuk határozni. A ΔF erő nagysága igen sok tényező függvénye (vonónyomás, vonósebesség, a vonószőr állapota, a vonóhúzás helye, játék dinamikája stb.) Nagyságát csak kísérleti úton, gyakori értékek átlagolásával lenne lehetséges meghatározni, azonban numerikus értékével elméleti fejtegetésünkben alig jutnánk tovább.

Az mindenesetre nyilvánvaló, hogy minél nagyobb a ΔF erő, annál nagyobb a gerenda lehajlása, a tetőlemez mechanikai rezgése, s a rezgés

amplitúdója. Nem hagyható figyelmen kívül azonban, hogy a ΔF erő nagyságát véges határok korlátozzák, és a létrehozható mechanikai rezgést a tetőlemez és a gerenda inerciája és a faanyag molekuláris jellemzője határozza meg.

Általában az anyagban deformációt okozó erő nagysága és a részecskék elmozdulása között egyenes arány áll fenn: ilyen pl. az acél. Ha egy acélszálban húzóerőt hozunk létre, hatására az indulás pillanatától a feszültség növekedésének kezdetén az erő nagyságával arányos megnyúlás következik be. Fában azonban nem ilyen összefüggés mutatható ki az erő és a megnyúlás között. Faanyagban fellépő megnyúlás (a molekulák egymáshoz viszonyított távolodása) a benne keletkezett feszültség kezdeti szakaszában nem lineáris. A terhelés hatására a kezdeti szakaszban aránylag kis feszültségnövekedés mellett viszonylag nagy fajlagos alakváltozás – megnyúlás – megy végbe (OA). A feszültség további növelésével lineárisan rugalmas szakasz következik (AB). A lineáris szakaszra a Hooke-törvény vonatkozik: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, ahol σ a feszültség, $E = \tan \beta$ az anyag rugalmassági modulusa (Young-modulus), ε a relatív megnyúlás. Ezt követően a feszültség és az alakváltozás között képlékeny jellegű viszony alakul ki, a molekuláris kötések meghibásodása lép fel (87. ábra).⁴⁷



87. ábra

A fában fellépő feszültség és a megnyúlás összefüggése

Ebből a feszültség és megnyúlás összefüggését bemutató jelleggörbéből az derül ki, ha a gerendában a lehajlást előidéző erökhöz, illetve az azokból fellépő feszültségekhez fajlagosan nagyobb – nem lineárisan növekvő – megnyúlás tartozik, akkor a viszonylag kicsiny ΔF erő nagyobb lehajlást képes létrehozni. Ha azonban a húrnymásból adódó lehajlás és a tetőboltozat még magas rugalmassági tényezője miatt a megnyúlás a jelleggörbén ábrázolt lineáris szakaszba kerül, a lehajlást növelő ΔF erő már csak az erő nagyságával egyenesen arányos lehajlást idézhet elő. Így a molekulák a feszültség növekedésével az egyenes arányú megnyúlás kerete között tudnak csak elmozdulni.

Eddig a hegedű működéséből adódó két természetes eredetű erőről beszéltünk, amelyek megjelennek a gerendában: egyik a húrnymásból adódik, a másik a húr rezgése következtében lép fel. A két erő között igen nagy a nagyságrendi különbség, és a mechanikai jellemzőik is homlokegyenest eltérőek. A húrnymásból keletkező erők nem bontják meg a terhelés után keletkezett erőrendszer egyensúlyát, a hegedűtest fellépésük után is nyugalmi helyzetben marad. A húr rezgéséből adódó belső erők a ΔF nyomóerő ritmikus változása következtében az anyagban – az anyagi részecskék között – mozgást hoznak létre. S ennek a mozgásnak az intenzitásától függ a gerenda anyagi részecskéinek mechanikai rezgést transzportáló hatásfoka.

2.2. Két végén befestített gerenda

A továbbiakban nézzük meg – a gerenda rögzítése előtt – külön beavatkozással, a hegedűszerkezet természetes működésétől független idegen eredetű, kényszerhatás következtében fellépő belső erők viselkedését. Ezek közül is elsőként a két végén befestített gerendában fellépő erők hatását tekintsük át.

Ha a gerenda íve középen fekszik fel a tetőlemez belső felületére, és a két végén hozzáhajlítjuk, benne a hajlításra igénybe vett anyagra jellemző molekuláris átrendeződés következik be. A hajlítás irányába eső szélső szálakban a molekulák összenyomódnak, az ellentétes oldalon eltávolodnak egymástól. A befestítő erő megszűnése – a két szerkezeti elem egymáshoz rögzítése – után ez a státusz megváltozik. A gerenda

alsó részében a kényszer hatására egymástól eltávolodott molekulák eredeti helyük elfoglalására törekcszenek. Így a gerenda alsó szálaiban nyomóerők, felső szálaiban húzóerők lépnek fel. Ez az erőpárkonstelláció pedig teljesen megegyezik a fölfelé görbített gerendában keletkezett erőpárral. Vagyis a gerenda a tetőlemezt alulról felfelé irányuló erővel emeli, ami éppen ellentétes irányú a ΔF erővel, és csökkenti annak hatásfokát. Tudott dolog, hogy az építészetben a földéngerenda lehajlásának csökkentése érdekében a vasbeton gerendákba előre-feszített acélhuzalokat helyeznek el. Így a gerenda nagyobb teher alatt kisebb mértékben hajlik le. A hegedű szerkezete ezzel ellentétben akkor működik kedvezően, ha a korlátozott nagyságú ΔF erő hatására minél nagyobb mértékű a gerenda lehajlása.

Nézzük meg egyszerű logikai úton, hogy milyen különbség adódik az eddig vizsgált két különböző beillesztési mód hatásában. Abból kell kiindulni, hogy a húrok felhangolása előtt a szerkezetre nem hat erő, tehát nem lép fel a szerkezetben feszültség. A húrnyomás kialakulása után a tetőlemezben és a gerendában keletkező belső erők a láb síkjában vele azonos nagyságú, ellentétes irányú erőt hoznak létre. A húrnyomás megszűnésével megszűnnek a lehajlás során keletkezett belső erők, és a szerkezetben ismét előáll a feszültségmentes állapot.

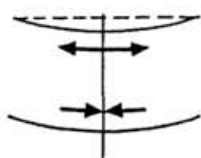
A két végén befeszített gerenda esetén a húrnyomással ellentétes irányú (támasz-) erő két forrásból jön létre: mindenekelőtt a befeszítéssel bevitt belső erőkből és a húrnyomásból létrejött lehajlás során képződő belső erőkből. A két erő szuperponálódása révén jön létre a húrnyomással ellentétes irányú erő. Ha ebben az esetben megszűnik a húrnyomás, a szerkezet nem marad feszültségmentes, tovább is megmarad a gerendában a befeszítésből adódó hajlítófeszültség.

2.3. Középen befeszített gerenda

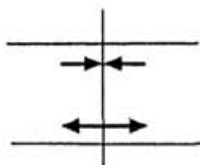
A szakirodalomban több helyen lehet olvasni a középen befeszített gerendáról, a gyakorlatban azonban meglepő módon ritkábban fordul elő. Ez esetben a gerenda két vége fekszik fel a tetőlemez ívéhez és a középső részén marad 1-2 mm-nyi rés, amit a beenyvezés során befeszítenek. A befeszítéskor a gerendában a hajlítás irányával megegyező ol-

dalon nyomóerők, a vele átellenbeli övben húzóerők keletkeznek. Rögzítés után az elmozdult anyagi részecskék ez esetben is az eredeti helyzetükbe kívánnak visszatérni. Így a gerenda alsó szálaiban húzóerő, felső részén nyomóerők lépnek fel. A belső erőknek ez az elrendeződése megegyezik a ΔF erők által előidézett lehajlás során keletkező belső erőkkel (88. ábra).

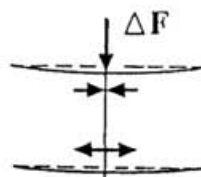
befeszítésből fellépő erők



A beillesztés pillanatában a gerendában kialakuló belső erők



A rögzítés után létrejövő belső erők

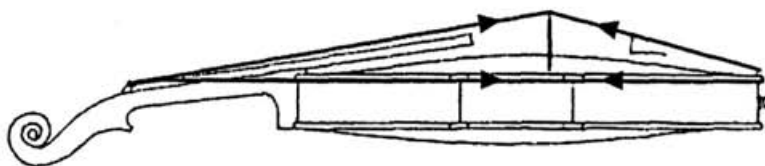


ΔF erő hatására a lehajlás során kialakuló belső erők

88. ábra

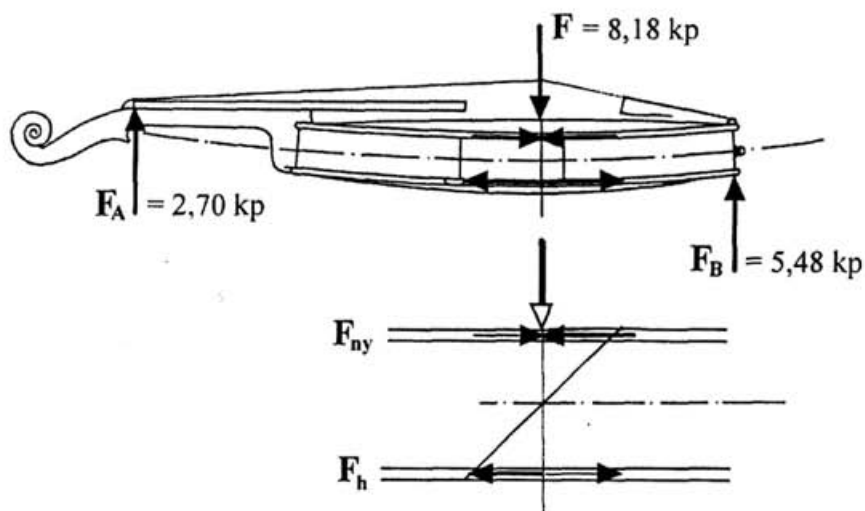
A gerenda befeszítésével kialakított belső erők matematikailag összegeződnek a ΔF erő által előidézett lehajlás okozta belső erőkkel – mivel hatásirányuk megegyezik –, így a gerenda nagyobb lehajlásra képes, hatékonyabb mechanikai rezgés jön létre, és nő a transzverzális rezgés amplitúdója.

A különböző forrásból eredő erők nagyságrendjének érzékelése érdekében nézzük meg, milyen erők hatnak a hegedűtestben az egymástól eltérő gerenda behelyezések esetében. Következésképpen abból kell kiindulni, hogy a lánynak a húrnymással szemben azonos nagyságú, de ellentétes irányú támaszerőt kell közvetítenie. A húrnymás kialakulását már ismerjük. De hogyan alakul ki a korpuszban képződő, vele ellentétes irányú támaszerő?



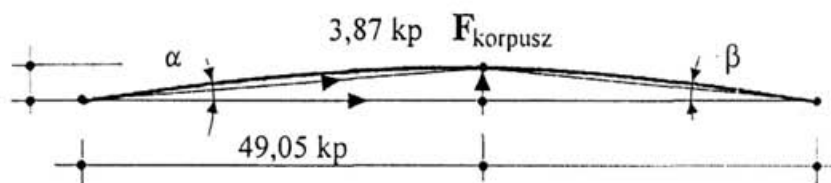
89. ábra
A húrfeszítésből fellépő erők

Válasszunk ehhez a vizsgálódáshoz – a konkrét viszonyok értelmezéséhez egy 4/4-es méretű, Eudoxa-húrokkal felszerelt hegedűt. A húrok együttesen 20,05 kp (200,5 N) feszítőerővel terhelik a hegedűt. Ebből 8,18 kp (81,8 N) húrnyomás képződik. A húrokban lévő feszítőerők a tető alapsíkjában 19,82 kp (198,2 N) nyomóerőt hoznak létre (89. ábra). A tetőre ható húrnyomás pedig a felső nyereg és a gomb vonalában 2,70 kp, illetve 5,48 kp támaszerőt kelt (90. ábra).



90. ábra
A húrnyomásból képződő „támaszerők”

A húrnyomásból és a vele ellentétes irányú két támaszerőből a hegedütestre 87,70 cmkp hajlítónyomaték lép fel. A kialakult hajlítónyomaték a tetőlemez vezérsíkjában 29,23 kp (292,3 N) nyomóerőt hoz létre. A húrokban lévő feszítőerőkből adódó – az előbbieken kimutatott 19,82 kp nyomóerő, valamint a hajlítónyomatékból képződő 29,23 kp nyomóerő összegződik. Így a tető vezérsíkjában 49,05 kp (490,5 N) nyomóerő lép fel. Ez a tetőboltozatot hosszirányban összenyomó erőhatás a boltozatra alulról felfelé irányuló erővel a húrnyomással ellentétes irányú hatást gyakorol. Két erőháromszög segítségével kimutatható a korpuszban ható nyomóerőből képződő felfelé irányuló erők (F_k) nagysága 3,87 kp (38,7 N) (91. ábra).

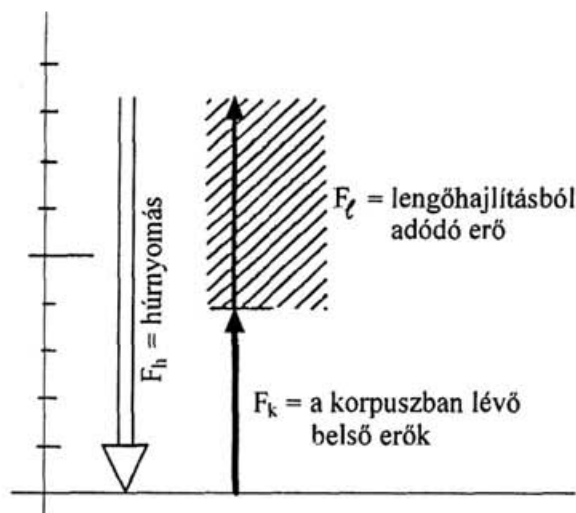


91. ábra

A tetőboltozat hosszmeteszetében képződő erők

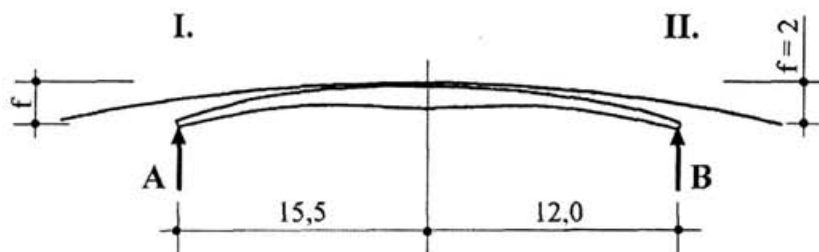
Ezzel megismertük a húrnyomással szemben ható egyik erőt, s egyben következtethetünk arra is, hogy a nagysága a húrokban lévő feszítőerő függvénye, de mindenképpen kisebb, mint a húrnyomás (a számított húrnyomás 8,18 kp, a korpuszban képződő belső erő eredője 3,78 kp). Az erőegyensúly érdekében szükséges még hiányzó erőt: $8,18 \text{ kp} - 3,78 \text{ kp} = 4,40 \text{ kp}$ (44,0 N) – a szerkezet – a fedéllemez és a gerenda együttesen lengőhajlítással biztosítja. Vagyis a külső terhelő erővel szemben még hiányzó 4,40 kp támaszerő a terhelés hatására az anyagban kialakuló belső erők – molekuláris erők – működése révén jön létre. (ld. *A gerenda és a mechanikai rezgés* című fejezetet). Ha ezeket az erőhatásokat léptékhelyes grafikonon ábrázoljuk, tágabb összefüggések feltárására is

mód nyílik (92. ábra). Ezek az erők kizárólag a hegedű felhangolása után jönnek létre.



92. ábra

Ha a gerenda beillesztésekor – a hegedű működésétől független külső erőhatás révén – befeszítéssel külön erő kerül a szerkezetbe, a húrnymással szemben további erővel kell számolni. Vizsgáljuk meg példánkon, hogy a gerenda befeszítése mekkora nagyságú erőt eredményez. A két végén befeszített gerendát analóg hasonlíthatjuk egy két végén koncentrált erővel terhelt iker konzolos tartóhoz (93. ábra). A befeszítés nagysága 2 mm, ami az analóg tartó esetében a lehajlással előidéző erő pedig a konzol támaszerőivel azonos.



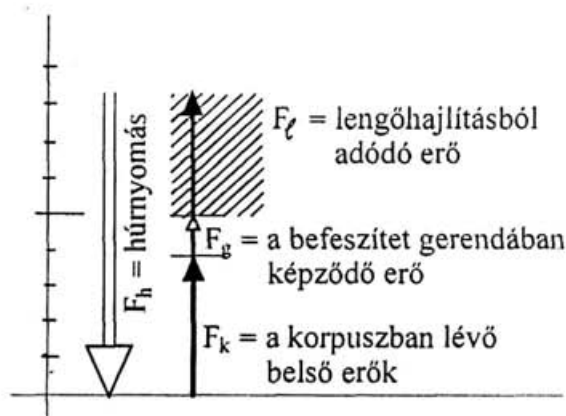
93. ábra

A lehajlás: $f = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I}$, ahol F a lehajlást előidéző erő (A , illetve

B), ℓ a fesztáv, E a rugalmassági modulus és I a gerenda keresztmetszetének inercianyomatéka (mivel a gerenda változó keresztmetszetű, a magassági méret átlagát vesszük az inercianyomaték kiszámításához). A számítás eredménye: az I. konzol befeszítéséhez 0,28 kp, a rövidebb, II. konzol befeszítéséhez 0,61 kp erő szükséges. Ez a két befeszítéshez keltett erő együttesen képezi az ikerkonzolok támaszerőit: 0,89 kp, ami azonos a gerendában képződő, felfelé irányuló nyomóerővel.

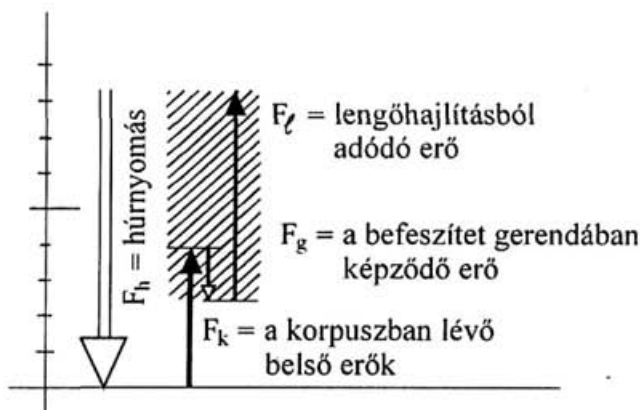
A középen befeszített gerenda esetében ugyanígy mutathatjuk ki a lefelé irányuló erőt abból kiindulva, hogy a konzolos tartóként vizsgált szerkezetben a lehajlások egy pontba esnek.

Ha grafikonon ábrázoljuk a befeszített gerendák esetében képződő erőket és a láb síkjába eső többi erőt, szembetűnik, hogy a lengőhajlításból létrejövő erő a két végén befeszített gerendánál kis tartományra szűkül, a középen befeszített gerendánál pedig széles intervallumot fog át (94.a és b ábra).



94.a ábra

Az erők összetétele két végén befeszített gerenda esetében



94.b ábra

Az erők összetétele a középen befeszített gerenda esetében

Ez a tagoltság abból adódik, hogy a húrnyomással szemben – az egyensúly fenntartása érdekében – létrejövő ellentétes irányú támaszerő három erőforrásból alakul ki. A korpuszban képződő ellenirányú erő a húrok feszítőerőinek a függvénye, tehát konstansan egyirányú, a befeszítés módjából adódó erők pedig hatásirányuk szerint érvényesülnek, vagyis szuperponálódnak.

E rövid levezetésből érzékelhető, hogy az igen kicsiny ΔF mechanikai rezgést indító erő a tágabb lengőhajlítást nyújtó esetben képes az anyag részecskéi között intenzívebb mozgást kelteni, nagyobb mechanikai rezgést elindítani.

Együtt szemlélve a három beillesztési mód következményeit:

- Az illesztéssel behelyezett gerenda esetén a lábon keresztül ható húrnyomás (F) egyenlő a tetőboltozat és a gerenda lehajlásából képződő ellentétes irányú támaszerővel (F_l): $F = F_l$. A húrnyomás megszűnésével a hegedű szerkezete feszültségmentes állapotba kerül.
- A két végén befeszített gerenda felfelé irányuló konstans erő (f) hoz létre, ami a szuperponálódás révén kiegészíti a tetőlemez és az együttműködésből keletkező húrnyomással szembeni erőt (F_l): $F = F_l + f$. A húrnyomás megszűnése után a befeszí-

tésből képződő erő a szerkezetben továbbra is feszültséget tart fenn.

- A középén befeszített gerenda a támaszerőt (F_l) biztosító tetőboltozat és gerenda-együttes teherviselő képességét intenzívebben igénybe veszi, mivel a befeszítéssel létrehozott erő a húrnyomást növeli meg. A húrnyomás megszüntetése után a befeszítéssel keltett erő továbbra is feszültséget gerjeszt a hegedűszerkezetében.

2.4.A különböző beillesztési módok célszerű alkalmazásai

Az előző elemzésekből jól érzékelhető, hogy a különböző gerenda-beillesztési módok egymástól nemcsak eltérő, hanem egymással szöges ellentétben más hatást gyakorolhatnak a tetőlemez mechanikai rezgésének kialakulására. Az is megfigyelhető, hogy ezek a hatások a közeg állapotával – amiben a különböző erőhatások lejátsszódnak – szorosan összefüggnek.

Ezek ismeretében választ adhatunk további kérdéseinkre, hogy melyik gerenda-beillesztési mód a leghatékonyabb. Mindenesetre a meghatározó tényező változatlanul az lehet, hogy melyik gerenda-beillesztési mód és közeg-állapot biztosítja együttesen a ΔF erő hatására létrejövő mechanikai rezgés amplitúdójának lehetséges legmagasabb értékének elérését.

A tető belső boltozatához pontosan illeszkedő gerenda lehajlása egyenes arányban áll a húrnyomás és a ΔF erő nagyságával, valamint a tetőlemez és a gerendák anyagának mechanikai jellemzőivel. Erős, a korrózió gyengítő hatásától még mentes anyagú közegben a ΔF erőnek meg kell küzdenie az anyag egészséges rugalmasságával. A befeszítés nélküli – pontosan illesztett – gerenda alkalmazása előnyösebb a már kevésbé fiatal, de az eredendő szilárdsági jellemzőit még jórészt őrző szerkezetbe. Új hegedűbe történő behelyezése után tudomásul kell venni, hogy az anyag kezdeti merevsége egy ideig fékezi a lehajlást, a mechanikai rezgés továbbításában szükséges intenzitásának kibontakozását.

Jogosan merülhet fel a kérdés: „mit jelent az, hogy már kevésbé fiatal” – hány éves? Erre konkrét időt meghatározni nem lehet, mivel a fa

anyagának szilárdsági és mechanikai jellemzőinek alakulását igen sok tényező befolyásolja: az anyag sejtszerkezeti felépítése, a környezeti hatás stb. Ennek eldöntése a hegedű anyagának állapota alapján lehetséges. Egy bizonyos, hogy új hangszerbe történő alkalmazás során egy ideig számolni kell fékezettebb mechanikai rezgés kialakulásával.

A két végén befeszített – ΔF erővel ellentétes irányú erőt létrehozó gerenda új, az anyag mechanikai jellemzőit maradéktalanul viselő hegedűszerkezetben csökkenti a lehajlás mértékét, rontja a mechanikai rezgés intenzitását. Öreg hegedűkben, ahol az anyag rugalmassága nagymértékben lecsökkent, – az évgyűrűk kései pásztáiban a parafásodás jelei mutatkoznak, és a tavaszi pászták cellulóztartalmuk megváltozása miatt rideggé, törékennyé válnak, hatékonyabb a tetőlemez rugalmasságát gyámolító előfeszítéssel behelyezett (két végén befeszített) gerenda alkalmazása.

S végül a középen befeszített gerenda hatásából következik, hogy a nagy rugalmassággal rendelkező – a lassú alakváltozás hatásától lényegében még nem érintett – anyagú új, illetve fiatal hangszerben képes leghatékonyabban kifejteni mechanikai rezgést erősítő szerepét. Ebben az esetben a befeszítéssel kialakított, s a ΔF erő hatásirányával megegyező erő hatékonyan növeli a tetőlemez-gerenda lehajlását a rezgés intenzitásának emelését.

A gerenda befeszítési módjának meghatározása során többször szóba került a hegedű anyagának jellemzője, az anyag rugalmasságának foka. Olyan konstelláció ez, amikor ennek függvényében határozható meg az alkalmazható beillesztési mód. Tehát nem lehet kizárni egyik vagy másik befeszítési módot sem. Szükséges azonban a szerkezeti elemek mechanikai, szilárdsági adottságainak egybevetése. A gerenda, amely kizárólag minden esetben rugalmassága teljében lévő anyagból készül, a hegedű anyagának állapotát figyelembe vevő beillesztési mód megválasztásával képes kedvező hatásokkal működni.

Ebben a kapcsolatban megnövekszik az egyes szerkezeti elemek fizikai tulajdonságainak fontossága, főként az anyag rugalmassági jellemzői. A következő fejezetben az anyagnak ezzel a fizikai tulajdonságaival foglalkozunk, és az ebből adódó következményeket kíséreljük meg bemutatni a hegedűgerendán.

3. Az anyag rugalmassága és fáradása

Zenészek és hangszerészek körében közismert, hogy az öreg – főként a koncert, illetve zenekari szólóhegedűkben legalább 25–30 évenként cserélni kell a gerendát, mert a hegedű hangja gyengül, elveszti hangjának csillogását, „elfáradt a gerenda”. „Minden Stradivari hegedűben idővel ismét fel kell újítani a gerendát” – írja Sacconi *Stradivari „titkai”* című könyvében.⁴⁸ Ez esetben nem valamiféle technikai változás, a hegedűn végrehajtott módosítás, hanem az idő múlásával az anyagban végbemenő irreverzibilis folyamat a jelenség okozója. De lényegében milyen változás következik be az anyagban az idő függvényében? Mi lehet a fáradás tényleges oka?

3.1. A faanyag korróziója

A fának mint szerves anyagnak véges élettartama van, és létezése alatt az anyagban végbemenő folyamat megváltoztatja korábbi mechanikai és szilárd-sági jellemzőit. Annak ellenére, hogy a faanyag korróziós tulajdonságai jók – néhány adottsága még a vasét is felülmúlja –, a környezeti tényezők: a levegő, fény, víz, a különböző vegyi eredetű anyagok (lúgok, savak, sóoldatok) korróziós folyamatot indítanak el benne. A levegő oxigénje elsősorban a színét változtatja meg. Felszíni rétege előbb megbarnul, később a világos színű fák elszürkülnek, a sötétebb színűek pedig meghalványulnak. Ennek a kezdeti szakasza – jóllehet, ez a korróziós folyamatban meghatározó szerepet játszó időnek szinte kimutathatatlan töredéke – a hegedűkészítésben a szerkezet építése során még kedvező is lehet a fa alapszíneinek megváltoztatásában. Jól ismert technológiai folyamat, hogy számos mester „napoztatta” a hegedűket lakkozás előtt.

A korrózió negatív hatása főként abban nyilvánul meg, hogy az oxigén megtámadja a sejtfalakat felépítő cellulózt, és csökkenti a sejtfalak szívósságát. A cellulózról tudjuk, hogy a növények szilárd, teherviselő vázát alkotja, vízben, savakban és lúgokban nem oldódik. Az oxigén – amittől megóvni nem lehet – az idő függvényében gyengíti a teherviselő képességét. Az ibolyántúli sugarak – hosszabb időn át – a cel-

lulóztartalom állagát támadják meg, hatásukra a farostok rideggé, törékennyé válnak, és a fa rugalmassága csökken. A korrózió hatására a faanyag szilárdsági, mechanikai tulajdonságai vesztenek kezdeti értékeikből. A mérnöki faszervezetek tervezése és megfigyelése, illetve a végzett laboratóriumi vizsgálatok azt mutatják, hogy a szilárdsági jellemzők leginkább a nedvességtartalom és a sugárzás hatására változnak. Tévedés azt hinni, hogy a hegedű szerkezetében – a „száraz fában” – nincs jelen víz. A nedvesség a fa természetes alkotóeleme, egy része a sejttöregekben, más része a sejtfalakban vegyileg kötött víz formájában létezik. A szobaszáraz fában is nettó 6,1–12 %, bruttó 5,6–10,5 % nedvességtartalom mutatható ki.⁴⁹

A leggondosabban védett, környezeti hatásoktól óvott, használatban lévő hangszer a hosszú élettartam alatt igen sok kisebb-nagyobb légköri – környezeti – hatás éri (hőmérsékletkülönbség, fény, sugárzás, páratartalom-változás, a levegőben lévő kémiai eredetű szennyeződések: gőzök, gázok füst stb.), amelyek a fa természetes tartósságát, ezen belül szilárdsági jellemzőit, rugalmasságát csökkentik.

A környezeti hatás következtében lezajló korrózió mellett mechanikai eredetű tényezők is gyengítik a faanyag rugalmasságát. A sokszor változó terhelési impulzus kifárasztja az anyagban tartósan meglévő molekuláris erőket. (Egy drótszál gyakori intenzív hajlítgatása végül is töréshez vezet, a molekulák közötti erők rendszerének teljes felborulása miatt.) Mérnöki faszervezetnél a kifáradást ott veszik figyelembe, ahol a számított feszültségek ismétlődése a szerkezet élettartama alatt eléri a 100.000 ciklust. Egyszerű lengőhajlításra igénybe vett gerenda – hibátlan, egyenes szálú fa – statikus szilárdságát 100 %-osnak véve $2 \cdot 10^6$ számú terhelési ciklus után a gerenda szilárdsági indexe 60 %-ra csökken. A hegedűgerendának a mozgása – a húr rezgéséből adódó ΔF erő hatására létrejövő lehajlása, majd visszatérése nyugalmi helyzetébe és újbóli ellentétes irányú kilendülése – között mérhető nagyságrend nincs. Elsősorban azért, mert az anyag molekuláinak mozgását előidéző erők között összehasonlíthatatlanul kicsiny nagyságrendi különbség van, más okból pedig a terhelési ciklus sem vethető össze. A folyamat azonban mindkét esetben azonos, vagy legalább is közel azonos. Fizikai értelemben a hegedűgerenda anyagának fáradásához hozzájárul az anyag statikai jellemzőit megváltoztató, matematikailag kimutathatatlan számú igénybevételi ciklus is.

3.2. A tartós terhelés és a lassú alakváltozás

Az anyag fáradásának a korrózió és a belső kohéziós erőt csökkentő igénybevételen kívül további okai is vannak. Tudjuk, hogy minden terhelés az anyagban a terheléssel egyidőben alakváltozást idéz elő: az anyag összenyomódik, megnyúlik, meghajlik. Fából készült teherviselő szerkezetekben a terhelés pillanatában létrejövő kezdeti rugalmas alakváltozást változatlan terhelés mellett további, időben elhúzódó ún. lassú alakváltozás követi. Hajlításra igénybe vett szerkezeteknél a terheléskor keletkezett lehajlást további lehajlás követi. Rugalmas anyagban a rugalmassági határig történő alakváltozás a terhelés hatására azonnal kialakul (pl. az acélhúr a kifeszítéssel egyidőben megnyúlik a változatlan feszítőerő mellett, megnövekedett hosszát tartósan megtartja). Lineáris rugalmasság esetén a feszültségek és az alakváltozások közötti kapcsolat nem függ az időtől, reverzibilis folyamatot tükröz.

A mémöki gyakorlatban az utóbbi évtizedekben nagy számban épültek különböző korszerű (csavarozott, ragasztott) technológiával nagyméretű fa-szerkezetek. Mivel a fa anizotrop anyag benne a feszültség-elosztási rendszert térfogatváltozáson kívül mindig torzulások, alakváltozások kísérik. Ezek megismerésére, az anyagban végbemenő folyamat feltárására nagy figyelmet fordított a műszaki tudomány. Ennek vizsgálatára a múlt század második felében új tudományág bontakozott ki: a reológia. A reológia a mechanikának önállóvá vált ága, a deformálható testek alakváltozásával foglalkozik, a terhelés hatására létrejövő feszültségek és az alakváltozások időbeli alakulását vizsgálja.⁵⁰

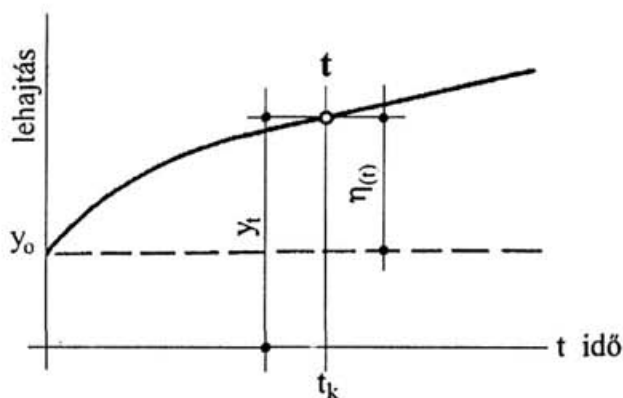
Amikor a hegedűgerenda mechanikai tulajdonságait kutatjuk az idő függvényében, nem tűnik reménytelennek, hogy analóg módon – összehasonlításra, netán azonos folyamat felismerésére nyílik lehetőség a fából készült nagy szerkezetek vizsgálata során megismert fizikai folyamatok, illetve a hegedűgerendában időben lezajló mechanikai változások között.

A fa nem ideálisan rugalmas anyag. Benne a terhelés hatására további lassú alakváltozás – ahogyan a reológiában megfogalmazást nyert – ún. kúszás tapasztalható, vagyis a szerkezet deformációja a tartós terhelés alatt az idő függvényében folyamatosan növekszik. Ennek oka, hogy az anyag belső súrlódása – a terhelés hatására az anyagi részecskék

között újabb egyensúlyi állapot kialakulása – nem a terhelés kezdetével indul, hanem az időben később jön létre. A deformáció alatt az anyag hosszúkas makromolekulái a tartós belső erők hatására kimozdulnak egyensúlyi helyzetükből, és a molekulák közötti belső erők újabb átrendeződését indítják el.

A kúszás három szakaszból tevődik össze. Az intenzív szakaszban az alakváltozás sebességi értékei a legmagasabbak: ez mintegy 3–5 napig tart. A második szakaszban az alakváltozási sebesség egyenletessé válik, a deformáció lineárisan növekszik az idő függvényében. Ez a szakasz a fellépő feszültségtől és a fa fizikai jellemzőitől függően eltarthat 5–30 évig. A harmadik szakaszban a kúszás gyakorlatilag megáll, illetve olyan kismértékű, hogy figyelmen kívül hagyható.⁵¹

A lassú alakváltozás mértéke a reológia segítségével meghatározható. A deformáció és az idő kapcsolata kétdimenziós rendszerben választott t időpontban az n kúszási tényezővel fejezhető ki (95. ábra).



95. ábra
Kúszásgörbe

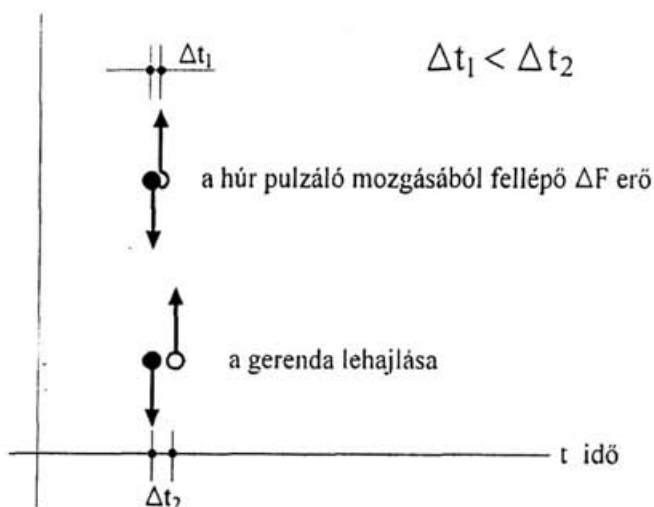
A kúszási tényező: $n = \frac{y_t - y_0}{y_0} \cdot 100 \%$, a teljes változás t időpontban:

$$y_t = y_0 [1 + 0,01 n(t)].$$

A kúszás mértékét elsősorban a tartós feszültség nagysága határozza meg, azonban már kis feszültséggel is bekövetkezhet, és évekig eltarthat. A terhelés megszűnése után a kezdeti rugalmas deformáció teljesen megszűnik, az időben elhúzódó lassú alakváltozásnak – a kúszásnak – mintegy fele késleltetve szűnik meg.

A magasépítésben alkalmazott fászerkezetek állandó tartós terhelése általában statikus, vagyis bennük nyugalomban lévő erőrendszer alakul ki. Ilyennek tekinthetjük a felhangolt hegedűben a húrnymásból adódó terhelést. A mérnöki szerkezeteket érő igénybevételt – a statikus terhelés mellett – további időszakos, egyben dinamikus terhelés egészíti ki, pl. széllekedések. A hegedű gerendájára pedig a húr rezgéséből eredő, pulzáló ΔF erő hat. Ezek az erők mindkét esetben szuperponálódnak, és eredőjük hat a teherviselő szerkezetre.

Terhelés alatt a kúszás szakaszában lévő gerenda – a pulzáló erők hatásának csökkenő periódusában – késve tér vissza nyugalmi állapotába, vagyis a deformáció késve szűnik meg. Az anyagi részecskék mozgásának ez az időbeli eltolódása a mechanikai rezgés amplitúdóját csökkenti (96. ábra).

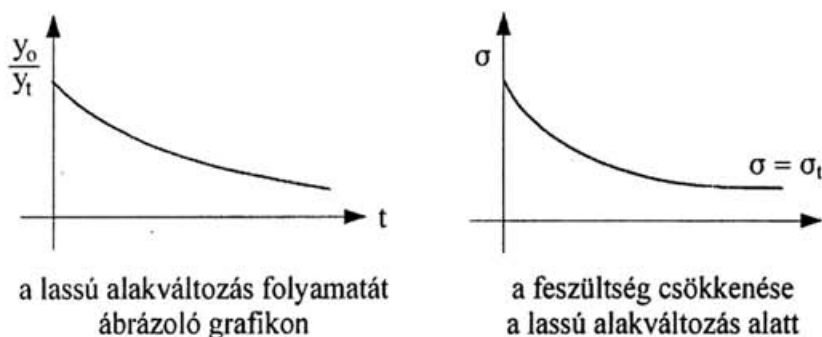


96. ábra

A ΔF erő impulzusa és a molekulák mechanikai rezgésfázisa

Ennek következményeként a gerenda gyengülő hatásfokkal tudja el-
látni feladatát. Minél előrehaladottabb a lassú alakváltozás folyamata –
vagyis minél nagyobb a fában bekövetkezett kúszás –, annál lassúbb a
terhelés hatására elmozdult molekulák visszatérése kiinduló helyzetük-
be. Az anyagban bekövetkezett mechanikai változás a részecskék moz-
gásának „fáradását” idézi elő az erő hatására, a részecskék elmozdulása
időben később következik be.

A mérnöki faszerkezeteken végzett megfigyelések számunkra még
egy igen figyelemreméltó tulajdonságát tárták fel a fának, ami a jelenle-
gi vizsgálatunk szempontjából az első pillanatban nem is tűnik lényeg-
esnek. A nagy szerkezetekben kimutatható, hogy a tartós feszültség
esetében az idő függvényében csökken a kezdeti feszültség, relaxáció
következik be. A kialakuló feszültségesés néhány hónap alatt elérheti a
kezdeti alakváltozást okozó feszültség 60–70 %-át. Ennek az oka a ter-
helés hatására létrejövő lassú alakváltozás, az anyag molekulái között
bekövetkezett kúszás. Az állandó terhelés mellett a feszültség és az idő
közötti kapcsolatot bemutató görbe csaknem a kúszásgörbe tükörképe
(97. ábra).⁵²



97. ábra

Mivel a kúszás mértékét elsősorban a tartós feszültség nagysága ha-
tározza meg, s a nagyobb kúszás pedig a feszültség csökkenését ered-
ményezi, egy véges iterációs folyamat adódik. Ez azonban leáll a késlel-
tetett mozgású anyagi részecskék egyensúlyi állapotának kialakulása
után.

A hegedű szerkezetében azonban – mivel a húrokban lévő feszítőerők, illetve az ebből adódó feszültségeknek – állandónak kell lenni, mert csökkenése esetén megváltozik a húr rezgésszáma – relaxáció nem léphet fel. Állandó alaprezgéshez (Hz) állandó nagyságú feszítőerő tartozik:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \ell} \cdot \sqrt{\frac{F}{\varphi \cdot q}}, \text{ ahol } f \text{ az alaphang rezgésszáma, } F \text{ a húrban lévő feszítő-}$$

erő, φ az anyag sűrűségi mutatója, q a keresztmetszet felülete.

Mivel a hegedűszerkezetben, illetve a gerendában nem léphet fel relaxáció, a benne lévő lassú alakváltozás (kúszás folyamata) valamivel élénkebb, mint a feszültség és a lassú alakváltozás szabad egymásra hatását követő szerkezetben.

Mérnöki faszerkezetekben a tapasztalatok alapján a kúszás második szakaszában, amikor az alakváltozási sebesség állandóvá válik, és a deformációk lineáris növekedést mutatnak az idő függvényében a feszültségesés relaxáció mellett 30 évig eltarthat. Nem lehet meglepő, hogy a hegedűgerendában, ahol nem léphet fel feszültségesés – hiszen a húrnymomás állandó –, nem érvényesülhet a két jelenség közötti egymásra hatás, így ez a folyamat lerövidül. Ennek alapján érthető, hogy 25 év körüli idő elteltével szükségeszerű a gerenda cseréje.

Végül is megállapítható, hogy a tapasztalati úton kialakult gyakorlat, miszerint a hegedűgerendát 25–30 évenként újból és újból cserélni kell, tudományos ismeretekkel igazolható. Egyben bizonyítható az is, hogy a különböző tudományterületeken kialakult ismeretek egymásra hatása élénkítője lehet egy-egy sajátos szakmai terület fejlődésének.

Lábjegyzetek

1. Az elfogadott normál α -hang rezgésszáma 1788-ban 409 Hz (párizsi hangolás), 1858-ban a párizsi konferencián hivatalosan elfogadott érték 435 Hz volt, 1939-től nemzetközi megállapodás alapján 440 Hz. Darvas Gábor: Zenei ABC. Zeneműkiadó. Budapest, 1963. 9. oldal
2. Otto Möckel: Die Kunst des Geigenbaues. Verlag von Bernh. Friedr. Voigt. Leipzig, 1930.
3. Faipari táblázatok nem adják meg a juharfában (*Acer pseudoplatan*) a szálirányra merőleges szakítószilárdságot, de a hozzá hasonló térfogatsúlyú szil- (*Ulmus scabra*), tölgy- (*Quercus robur*) és égerfának (*Alorus glutinosa*) a szállal párhuzamos szakítószilárdságát ismertetik.

	térfogatsúly	párhuzamos szakító- szilárdság	merőleges szakító- szilárdság
szil (hegyi)	6800 N/m ³	8000 N/cm ²	400 N/cm ²
tölgy (kocsányos)	6900 N/m ³	9000 N/cm ²	400 N/cm ²
éger (mézgás)	5400 N/m ³	9400 N/cm ²	300 N/cm ²

4. George Buchaman: The Making of Stringed Instruments. A. Workshop Guide. B. T. Batsford. Ltd. London, 1989. 113-115. oldal
5. Az idevágó szakirodalom a csaknem teljesen párhuzamos szálú lombos fák esetében (szil, tölgy, éger) a szálra merőleges szakítószilárdságot 200–400 N/cm² értékben határozza meg. Ez az érték rendszertelen szálirányú fában – hegyi juhar esetében – jelentősen, akár 5 %-ára csökkenhet.

6.

	térfogat- súly N/m ³	nyomó- szilárdság II.	Brinell-keménység N/cm ²	
			oldal	bütü
senegál ébenfa	12300	7300	98	175
afrikai vasfa	10700	9600	90	130
paliszander	8800	6400	56	92

7. A szakirodalom a μ -t fa és fa között száraz állapotban idegen anyag-
gal történő felületi kezelés nélkül 0,4–0,6 értékek között határozza
meg.
8. Erdélyi Sándor: A hegedű. MTA Zenetudományi Intézet. Budapest,
1982. 96. oldal
9. Vadon Géza: Hangszerész (vonós) szakismeretek szakmunkásképző
iskolák számára. 2. kiadás. Budapest, 1987. 53. oldal
10. Filián József: Vonós hangszerek készítésének problémái. Hangszer
Világ VII. évf. 4. szám 1996. 12. oldal
11. P. O. Apian-Bennwitz: Die Geige. 2. kiadás. Verlag von Bernh.
Friedr. Voigt. Leipzig, 1920. Magyar fordítás (A hegedű): Vékes Jó-
zsef.
12. Szemmelweis Tibor: Nyakaszegetten, mégsem veszi el a fejét.
Néhány gondolat a vonóshangszerek nyakállásáról és ennek szerepé-
ről a hangképzésben. Hangszer Világ IV. évf. 1. szám. 1994. 11. ol-
dal
13. Szabolcsi Bence: A zene története rövid összefoglalásban. Kultúra
Világa. Budapest, 585. oldal
14. John Henry van der Meer: Musikinstrumente. München, 1983. 115.
oldal

15. adatforrás: Simone F. Sacconi barokk hegedűmásolata Stradivari 1702-ben készített *De Fontana* hegedűjéről
16. P. O. Apian-Bennwitz: i. m. magyar fordítás 103. oldal: „I Rousseau francia hegedűművész 1687-ben megjelent *Traite de la viole* című könyvében írja: „az 1675-ös év körül az althegeďűre egy ezüsttel átszőtt hűrt helyeztem fel”.
17. u. o. magyar fordítás 104. oldal
18. A húrokban fellépő feszítőerő nagyságát kp-ban adjuk meg, mivel az 1980-ig megjelenő dokumentumok is ezt használják, és a hűrgyártók ismertetőiben a mai napig is kp-ban vagy lb-ben (pound-ban) határozzák meg az egyes húrok jellemző paramétereit.
19. Szembeötlő, hogy a barokk hegedűn – de még az átépített hegedűn is – az egyes húrokban fellépő feszítőerők nagysága csaknem azonos. Ennek az a magyarázata, hogy ez időben szükségesnek tartották, hogy „a húrok azonos hosszúságúak legyenek és azonos erővel feszüljenek meg...”. P. O. Apian-Bennwitz: i. m. magyar fordítás 103. oldal
20. Karl Fuhr: Die akustischen Rätsel der Geige. Verlag Carl Merseburger, Leipzig, 1926. Magyar fordítás (A hegedű akusztikai rejtélyei): Vékes József. Budapest, 2002. 54. oldal
21. Simone F. Sacconi: Die „Geheimnisse” Stradivaris. Verlag Erwin Bochinsky, Frankfurt a. M., 1976. Magyar fordítás (Stradivari „titkai”): Vékes József. Budapest, 1995.
22. Karl Fuhr: i.m. magyar fordítás 54. oldal
23. P. O. Apian-Bennwitz: i.m. magyar fordítás 17. oldal: „Franciaországban, Moniteuban 1859. febr. 25-től elrendelték, hogy az egyszer megűtött *a*-hangnak 435 rezgést kell egy másodperc alatt felvennie”.
24. u. o. magyar fordítás, 106. oldal

25. Friedrich Niederheitmann: Cremona. 8. kiadás. Verlag Friedrich Hofmeister, Frankfurt a. M., 1956. Magyar fordítás (Cremona. Az olasz hegedűkészítő-mesterek és hangszereik karakterisztikája): Vékes József. Budapest, 1990. 20. oldal
26. Otto Möckel: Die Kunst des Geigenbaues. Leipzig, 1930. 133. oldal
27. A húrok adatainak rendelkezésemre bocsátásáért köszönetet mondok Adrian Müller technikai igazgatónak (PIRASTRO), az Akkord Music Hangszerkereskedelmi és Szolgáltató Kft.-nek, Bogschütz István hangszerézmesternek, Juharos László úrnak (THOMASTIK) és Szabó Attila cégvezetőnek, a D'Addario magyarországi képviselője vezetőjének.
28. A fenyőfának a nyomószilárdsága kisebb, mint a szakítószilárdsága, ezért a semleges tengely a szakítószilárdságot viselő belső erők irányába tolódik el. Lucfenyőben a szakítószilárdság 90 N/mm^2 , a nyomószilárdság 43 N/mm^2 . Számításunk során a semleges tengelyt – az egyszerűség érdekében – a tartólemez középvonalában vettük fel, mert a tényleges szilárdsági értékek nagyságrendileg jóval alacsonyabban, mint a megengedett szilárdsági értékek.
29. Számításunkhoz a mai fémhúrok húrnymását (12,00 kp) vettük alapul, szemben a 18. század elején átépített hegedűk 6,91 kp-os húrnymásával.
30. Karl Fuhr: i. m. magyar fordítás 55. oldal
31. Vadon Géza: Hangszerész (vonós) szakmai ismeretek a szakmunkásképző iskolák számára. Budapest, 1994. 52. oldal
32. Pap János: A hangszerakusztika alapjai. Budapest, 1994. 123. oldal
33. Karl Fuhr: i. m. magyar fordítás 55. oldal
34. Pap János: i. m. 123. oldal
35. P. O. Apian-Bennewitz: i. m. magyar fordítás 30-31. oldal

36. A molekula az anyagnak az a legkisebb része, amely az adott anyag tulajdonságait viseli, önállóan is létezik és egészként mozog, kémiai kötéssel összekapcsolt atomokból áll.
37. R. P. Feynman – R. B. Leighton – M. Sands: Mai fizika. Az erő jellemzői. Molekuláris erők. Budapest, 1970. 156. oldal
38. ahol m a test tömege, v a rezgés terjedési sebessége, q a keresztmetszet felülete
39. Karl Fuhr: i. m. magyar fordítás 54. oldal
40. Friedrich Niederheitmann: i. m. magyar fordítás 21. oldal
41. Vadon Géza: i. m. 53. oldal
42. Karl Fuhr: i. m. magyar fordítás 54. oldal: Bagatella igényelte ezt a befejezést, erre hivatkozik Max Möckel *Das konstruktions Geheimnis der alten italienischen Meister* című könyvében (Berlin, 1925.)
43. Friedrich Niederheitmann: i. m. magyar fordítás 21. oldal
44. Karl Fuhr: i. m. 54. oldal és a 34. lapalji jegyzet
45. Tóth János: A modern és a régi olasz hegedűk problémái. Budapest, 1926. 11. oldal
46. A behelyezett lélekben a felhangolás előtt létezhet minimális nyomóerő, miután a tető- és a hátlemez közé kerül enyhe beszorítással, ennek azonban vizsgálataink szempontjából nincs jelentősége.
47. Rónai Ferenc – Somfalvi György: Tartó faszerkezetek. Budapest, 1982. 104. oldal
48. Simone F. Sacconi: i. m. magyar fordítás 119. oldal
49. Rónai Ferenc – Somfalvi György: i. m.

50. Mózes Gyula – Vámos Endre: Reológia és reometria. Budapest, 1968. 56. oldal

51. Mózes Gyula – Vámos Endre: i. m. 58. oldal

52. Mózes Gyula – Vámos Endre: i. m. 59. oldal

