

# Kalkulus és Maxima

Blahota István

Szerző:

Dr. Blahota István  
főiskolai tanár, NyF

Lektor:

Dr. G. Horváth Ákosné  
tudományos főmunkatárs, BME

Borítóterv:

Fekete Ágnes

Készült a TÁMOP-4.1.2.-08/1/A, „Az Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület alapszakjaihoz” című projekt keretében.

Második, javított kiadás

ISBN: 978-963-08-5197-8



# Előszó

Túlzás nélkül állíthatjuk, számtalan bevezető analízis (kalkulus) könyv jelent meg és kapható ma is hazánkban. Igényes könyvek matematikusoknak, esetleg matematikatanároknak, illetve az úgynevezett alkalmazott matematika könyvei mérnököknek, közgazdászoknak. Nyilván kiváló könyvek – a maguk kategóriájában.

De – akár tetszik nekünk, akár nem – a felsőoktatás nagyon megváltozott az utóbbi évtizedekben. A hallgatók egy jelentős részének nem ezekre a jegyzetekre van szüksége. Egyszerűbb, gyakorlatiasabb, ha úgy tetszik szájbarágósabb munkákra.

Jelen jegyzet ennek a körnek szólna. Leginkább olyan hallgatóknak, akiket a matematika feltehetőleg kevésbé érintett még meg, de szükségük van rá. Például biológia, fizika, környezetismeret BSc hallgatóknak.

A munka alapkonceptiója, hogy lehetőség szerint egyszerű, gyakorlatorientált és önállóan feldolgozható legyen. Éppen ezért matematikai értelemben vett bizonyításokat alig, szemléletes magyarázatokat viszont annál többet tartalmaz.

Igazi újdonsága viszont abban áll, hogy a tárgyalt tananyag a matematikai analízis bevezető fejezeteinek és a komputeralgebra elemeinek sajátos szintézise. Előnye, hogy a függvénytanulással való ismerkedés mellett – mintegy mellékesen – megismerkedhetünk egy ingyenes komputeralgebrai eszköz használatával.

Azt tapasztaltuk, hogy sok hallgató érdeklődését fel lehet kelteni még a viszonylag bonyolultabb matematikai elméletek iránt is, ha látják, hogy számítógép és a megfelelő szoftver segítségével milyen könnyen juthatnak helyes eredményre. Különösen fontosnak tartom, hogy a komputeralgebrával való ismerkedést már korán, egy ilyen bevezető jellegű tárgy kapcsán megtegyék a hallgatók.

Számtalanszor hallható ugyanis, hogy „bárcsak hamarabb tudtam volna erről a szoftverről, mennyivel könnyebb lett volna ez, vagy az a tárgy, mennyivel egyszerűbb lett volna az otthoni készülés, ha ellenőrizhettem volna magam.”

A komputeralgebrai rendszerek használata az oktatásban is világszerte elfogadott gyakorlat. Új tendencia azonban, hogy az utóbbi időkben egyre több figyelem irányul az úgynevezett szabad szoftverek (free software), más néven nyílt forráskódú (open source) szoftverek irányába. Praktikusan az áruk vonzó, hiszen legtöbbször (mint ahogy az az általunk használt szoftver esetében is így van) ingyenesek. Másrészt (és ez a szempont a felsőoktatásban egyáltalán nem elhanyagolható) forráskódjuk nyitott, megismerhető, sőt szabadon módosítható.

A jegyzet a bárki által ingyenesen hozzáférhető nyílt forráskódú Maxima komputeralgebrai rendszer használatát mutatja be az analízis elemeinek megismerése közben. Munkahelyemen, a Nyíregyházi Főiskolán (és számos egyéb oktatási intézményben szerte a világon) évek óta megelégedettséggel használják a Maximát

az oktatásában.

A Maxima egy több évtized óta, a mai napig aktívan fejlesztett szoftver. Mivel parancssoros program, általában együtt használják egy wxMaxima nevű grafikus felülettel, melyet jómagam fordítottam magyar nyelvre. A Maxima így (a kereskedelmi programokat is beleértve) az egyetlen fejlesztés alatt álló komputeralgebrai rendszer, ami rendelkezik magyar nyelvű felhasználói felülettel. A jegyzetben számos Maxima eljárással, függvénnyel is találkozhatunk. Amennyiben ezek a wxMaxima menüjéből is elérhetőek, azokra „wxMaxima tipp”-ként külön utalunk.

## Néhány szó a használt jelölésekről

Használni fogjuk a középiskolában tanult számhalmazokat, nevezetesen – bővülő sorrendben – a természetes, az egész, a racionális és a valós számokat és jelöléseiket. A természetes számokon a pozitív egészeket fogjuk érteni. (Egyes más szerzők a nullát is oda sorolják, a lényeg, hogy következetesek legyünk.) Komplex számokkal, vagy még bővebb számhalmazokkal nem fogunk e jegyzet keretein belül foglalkozni.

Jelölésük, részhalmaz-tartalmazással együtt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

valamint  $x \in A$  jelentése:  $x$  eleme az  $A$  halmaznak. Használni fogjuk továbbá az egzisztenciális és univerzális kvantort, vagyis a „létezik” (más néven „van olyan”) és a „minden” (más néven „tetszőleges”) jeleket:

$$\exists, \forall.$$

# 1. fejezet

## Bevezetés a Maxima használatába

### 1.1. A komputeralgebrai programokról

A komputeralgebrai program (más néven komputeralgebrai rendszer, angolul *computer algebra system*, gyakran használt rövidítéssel CAS) olyan szoftver, amely segítségével matematikai műveleteket hajthatunk végre, de nem csak számokkal, hanem algebrai kifejezésekkel, szimbolikusan is.

A komputeralgebrai programok története (így a ma ismertebbeké is) a személyi számítógépek előtti korba nyúlik vissza. Tudományos kutatóintézetekben, egyetemeken már a Unixos hőskorban is használták ilyen célokra a számítógépeket. Éppen ezért ezek jó része nem szakadt el a parancssori üzemmódtól, a grafikus felület (ha egyáltalán van neki) sokszor csak egy „bőr”, ami megkönnyítheti a használatot, de általában nem sok tartalmi pluszt ad. Az is tipikus, hogy sokuk nem csak DOS-Windows alatt érhető el, hanem Unix-Linux alatt is, hiszen eleve azon indult a fejlesztésük. Megkülönböztetünk általános célú és speciális komputeralgebrai programokat.

Ismertebb általános célú projektek (ABC sorrendben): [Axiom](#), [Derive](#), [Mathematica](#), [Matlab](#), [Maple](#), [Maxima](#), [MuPAD](#), [Octave](#), [REDUCE](#), [Scilab](#).

Néhány speciális projekt: [GAP](#) (csoportelmélet), [KANT/KASH](#) (számelmélet), [Magma](#) (algebra, számelmélet, geometria).

A felsoroltak között találunk kereskedelmi szoftvereket, de ingyeneseket is. Általában elmondható, hogy a kereskedelmi változatok drága (áruk sokszor több ezer dollár), de barátságos grafikus felületű szoftverek, míg az ingyenesek nyílt forráskódúak, de gyakran „fapadosak”, sokszor egyáltalán nincs grafikus felületük. Tudásuk azonban nem mindenben marad el drága társaikétól.

### 1.2. Miért választottam a Maximát?

Jómagam évekig használtam különböző Maple változatokat. Munkahelyem ugyan megvásárolta ezeket elegendő példányban, de hiába is tanítjuk, ha egy átlagos általános- vagy középiskola (a jelenlegi diákunk eljövendő munkahelye) nem tudja finanszírozni az ilyen összegű szoftverbeszerzéseket.

Később kipróbáltam a MuPAD ingyenes és shareware változatait is, de az újabb verziókból már nem készültek ingyenes, úgynevezett „Light” kiszerezések.

Ekkor kezdtem el keresni valamilyen költséghatékony, lehetőleg nyílt forráskódú alternatívát, így találtam meg a Maximát.

```

blahota@aromo: ~
Fájl Szerkesztés Nézet Keresés Terminál Sűgő
Maxima 5.28.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 1.0.55.0.debian
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) sum(1/n^2, n, 1, inf);
      inf
      ====
      \    1
      >  --
      /    2
      ==== n
      n = 1
(%i2) %, simpsum;
      2
      %pi
      ----
      6
(%i3)

```

1.1. ábra. Maxima

A Maxima vállalható kompromisszumnak tűnt, már első látásra is. A projekt honlapjáról sok hasznos leírás tölthető le, köztük a Maxima Manual, angol nyelven. (A Maxima Manual terjedelme 2012-re meghaladta az ezer oldalt, és folyamatosan bővül!) Maga a szoftver is angol nyelvű, bár ez legfeljebb a hibaüzenetek olvasásánál lehet zavaró. Az elérhető leírásokat átfutva nyilvánvalóvá vált számomra, hogy nagy tudású komputeralgebrai rendszerrel állok szemben, ami nagy segítséget nyújthat, leginkább a felsőoktatásban tanuló hallgatónak. Mindezek mellett előfordulhat, hogy nem vált ki teljesen egy professzionális CAS rendszert, de azok tudása jóval meg is haladja a diákok felhasználási szintjét. A tudásbeli különbség a program méretéből is sejthető, hiszen például a Windowsos verzió telepítője – ami járulékos programokat is tartalmaz – mindössze húsz-egynéhány megabájt körül van, ami jócskán eltörpül néhány kereskedelmi program terjedelme mellett. (Természetesen ez az összehasonlítási módszer gyakran félrevezető lehet.)

Viszont semmilyen magyar nyelvű leírást nem találtam hozzá. Ezért gondoltam, hogy hasznos lehet egy ilyen, rövid, kivonatos és bevezető jellegű, de magyar nyelvű leírás elkészítése, mint akár ez is, amely a Maxima bemutatására csak részben koncentrálna. Hangsúlyozom, hogy távolról sem törekedtem teljességre, egy-egy téma kidolgozásánál leginkább praktikussági szempontok vezéreltek. Ha valaki részletesebben meg akarja ismerni a Maxima lehetőségeit, annak ajánlom a fent említett Manuált. Általában elmondható, hogy munkám során igyekeztem bemutatni a Maxima erősségeit, de természetesen a gyengéit is.

A Maximát eredetileg Macsyma néven kezdték el fejleszteni az 1960-as évek vége felé a Massachusetts Institute of Technology munkatársai, Lisp programozási nyelven. A Macsyma korának úttörő programja volt, olyan rendszerek fejlesztését inspirálta, mint a Maple és a Mathematica. 1982-től William Schelter (ő 2001-ig állt a fejlesztések élén) vezetésével Maxima néven fejlődött tovább. A jelenleg elérhető legfrissebb stabil verzió az 5.28.0.

A Maxima futtatható változatai különböző Lisp implementációkkal fordíthatók. Legismertebbek a GCL, a Clisp és az SBCL. Különböző Lisp változatokkal fordítva hasonló kódot kapunk, de természetesen nem pontosan ugyanolyan. Korábban egyértelmű volt a GCL előnye (a hivatalos Windows-os változatok a mai

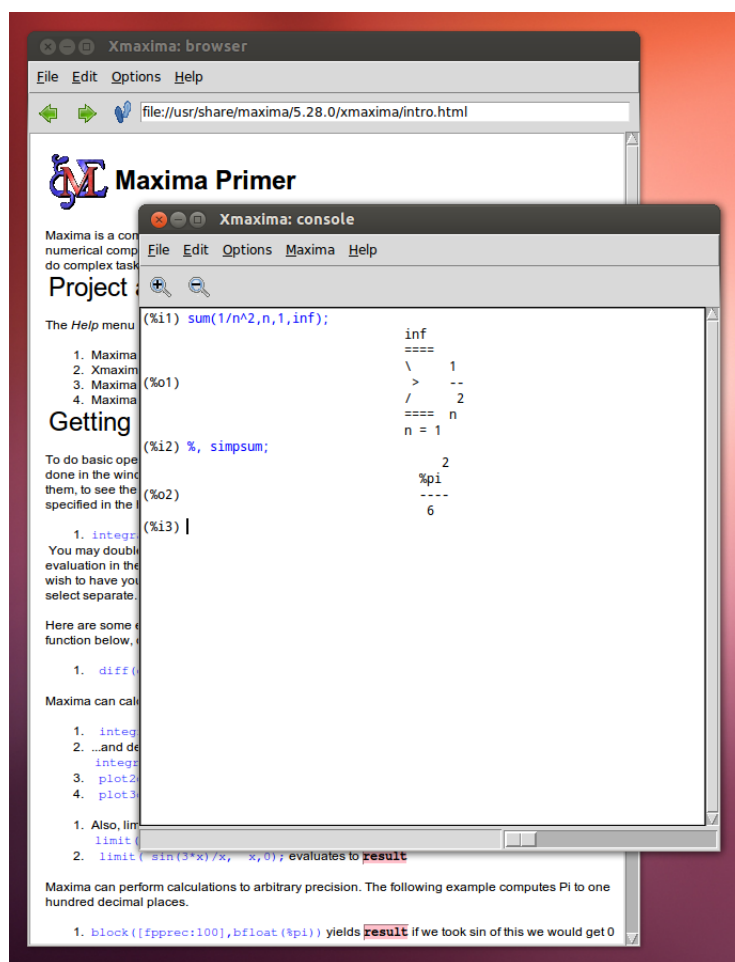
napig azzal készülnek), de mivel régóta nem jelent meg belőle új verzió, egyre nehezebb az újabb Maximákat vele fordítani, így mostanában más implementációk is szerephez jutnak. Gyakorlatilag – a tapasztalatok ezt mutatják – ez a változathoz legfeljebb a hibaüzenetek szintjén jelenthet különbséget.

A Maxima 1998 óta GNU General Public License (GPL) alatt jelenik meg. Ez utóbbi tény felpezsdítette a Maxima és a hozzá kapcsolódó projektek fejlesztését.

Ilyen például a WebMathematics Interactive (WMI) nevű, magyar fejlesztésű, web alapú interaktív matematikai szoftver. Ez egy nyílt forráskódú webes alkalmazás, amely több különböző komputeralgebra rendszert (köztük a Maximát) is képes meghajtani. A program kipróbálható az alábbi címen:

<http://wmi.sf.net/>.

### 1.3. Grafikus felületek



1.2. ábra. Xmaxima

A Maxima egy parancssoros program (lásd az 1.1. ábrát). Ez a tény bárki számára hasznos lehet, például ha valamilyen nagy teljesítményű gépen, távolról bejelentkezve futtatja a szoftvert, ez azonban manapság nem túl gyakori. Bár rendelkezik némi kényelmi szolgáltatással – a korábban beírt parancsok között

a fel és le kurzorvezérlőkkel böngészhetünk – a mai felhasználó sokkal nagyobb kényelemhez van szokva.

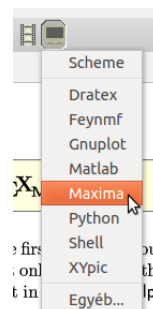
### 1.3.1. Xmaxima

Mivel gyakran találkozhatunk – leginkább a Linuxszal ismerkedők körében – azzal az jelenséggel, hogy ha a felhasználó nem lát grafikus felületet, hajlamos pánikba esni, ezért a fejlesztők jóvoltából a Maximához alaptól tartozik egy Xmaxima (lásd az 1.2. ábrát) nevű (elég kezdetleges és – mi tagadás – meglehetősen kényelmetlen) grafikus felület. Előnyös tulajdonsága, hogy indítás után megnyit egy böngészőablakot, melyben láthatunk egy kivonatos leírást a Maxima néhány alapvető funkciójáról, példákkal, linkekkel.

### 1.3.2. T<sub>E</sub>X<sub>MACS</sub>

Mivel a Maxima nyílt forráskódú program, nincs elvi sem gyakorlati akadály, hogy bárki kiegészítő-szoftvereket készítsen hozzá. A projekt oldalán számos ilyen kezdeményezés honlapját találhatjuk belinkelve. Ezek közül kettőt említenék meg. Az első a T<sub>E</sub>X<sub>MACS</sub>.

A T<sub>E</sub>X<sub>MACS</sub> egy sokoldalú, *wysiwyg* (what you see is what you get) típusú szövegszerkesztő speciális funkciókkal és pluginokkal. Kifejezetten képleteket tartalmazó, matematikai szövegek esetén is hasznos lehet. A T<sub>E</sub>X karaktereit használja, lehetőség van importálni, exportálni L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-be. A mi szempontunkból azért érdekes, mert bár alapvetően nem a Maximához készítették, együtt tud működni vele, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-es karaktereket megjelenítve. Kezelőfelületét több nyelvre lefordították, magyarra is. Az 1.3. ábrán látható, hogyan nyitjuk meg a Maximát T<sub>E</sub>X<sub>MACS</sub>-on belül.

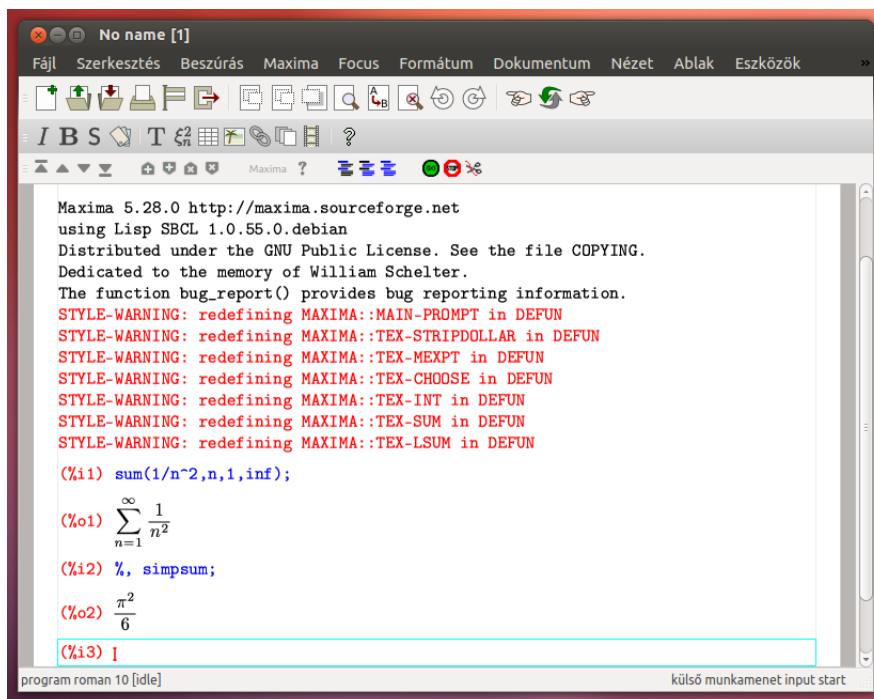


1.3. ábra.

### 1.3.3. wxMaxima

Ennek a szoftvernek egyetlen célja, hogy kényelmes, grafikus kezelőfelületet nyújtson a Maxima használatához (lásd az 1.5. ábrát). Lényegesen felhasználóbarátabb frontend, mint az Xmaxima, vagy akár a T<sub>E</sub>X<sub>MACS</sub>. A gyakrabban használt függvényeknek gombjai vannak, amelyek bekapcsolható paneleken találhatóak, számos további menüből érhető el. A korábban beírt parancsokat szabadon módosíthatjuk, újra végrehajthatjuk. Alapértelmezés szerint a parancsok végrehajtása az aktuális sorra állva a Shift és Enter billentyűk együttes megnyomására történik. Az Enter megnyomása törli a bemenet sorát, így több soros, szerkesztett bemeneteket is készíthetünk. További könnyebbség még, hogy ha kinyitunk egy (bármilyen típusú) zárójelet, a bezárása automatikusan megjelenik. A képernyőn megjelenített munkafolyamatokat képes L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-be, HTML-be exportálni. Gyors és megbízható program. Súgójában megtalálható a teljes Maxima Manual.

Kényelmesebben használható, mint a TeXmacs, én ezt a programot ajánlom a Maximához. A továbbiakban, ha grafikus felületről esik szó, az a wxMaximát fogja jelenteni.

1.4. ábra.  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}_{\text{M}}\text{A}\text{C}\text{S}$ 

A wxMaxima a 0.7.3-as verziótól magyar nyelven is elérhető. A honosítást jómagam végeztem, végzem, ezért ha bármilyen félrefordítást, elírást talál, kérem, írja meg a [blahota@nyf.hu](mailto:blahota@nyf.hu) címre. Köszönöm!

A wxMaxima elérhető legfrissebb változata a 12.09.0.

## 1.4. A telepítés

A Maxima (ahogy legtöbb kiegészítője is) használható Windowson, Mac OS X-en, Linuxon, FreeBSD-n és még ki tudja hány operációs rendszeren. Honlapja:

<http://maxima.sourceforge.net/>,

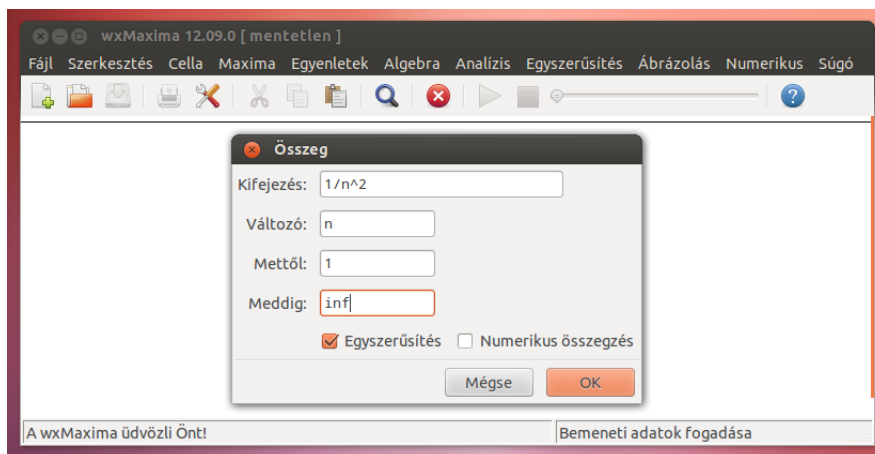
míg a wxMaximáé:

<http://wxmaxima.sourceforge.net/>.

Mindkét szoftvert régóta fejlesztik (a Maximát hosszú évtizedek óta) de ez nem jelenti azt, hogy nem fejlesztik őket ma is aktívan. A wxMaxima verziók megjelenését a Maximáéhoz szokták igazítani. Ez általában évi két kiadást jelent. Leginkább a wxMaximára igaz, hogy gyakran tartalmaz lényeges változásokat, így érdemes mindig a legfrissebbet használni. Fontos tudni, hogy az új wxMaximák általában csak friss Maximákkal tudnak együttműködni, ezért célszerű a két szoftvert egyszerre frissíteni.

### 1.4.1. Telepítés Windows alá

Töltsük le a Maximát honlapjáról és egyszerűen futtassuk le a telepítőt rendszergazdaként. Ez már tartalmazza (és egyúttal felajánlja telepítésre) a wxMaxima



1.5. ábra. wxMaxima

legújabb változatát is.

### 1.4.2. Megjegyzések a Linuxos telepítéshez

A legtöbb disztribúcióban megtaláljuk a Maxima és a wxMaxima csomagjait, legfeljebb nem a legfrissebb verzióból készültek. Jómagam évek óta készítek friss Maxima és wxMaxima csomagokat az éppen aktuális Ubuntu verziókhoz, melyek elérhetőek honlapom Linuxos oldaláról:

<http://www.blahota.hu/linux>.

Igény (vagy szükség) esetén a programokat forrásból is fordíthatjuk, bár ez a függőségek miatt nem mindig egyszerű.

## 1.5. A Maxima, mint számológép

Bár egy komputeralgebrai programnak nem ez a fő erőssége, természetesen használhatjuk mint számológépet.

Tekintsük át először az algebrai műveleteket:

+	összeadás
−	kivonás
*	szorzás
/	osztás
^ vagy **	hatványozás
!	faktoriális
.	mátrix szorzás.

Megjegyzem, hogy azonos típusú mátrixok esetén a \* szorzás a megfelelő helyen lévő elemek összeszorzásával keletkező ugyanilyen típusú mátrixot adja, valamint a négyzetgyökvonásra használható az `sqrt` függvény is.

Számoljuk ki például a

$$(10 \cdot 33^4 + 5)2 - \frac{2}{34} - \sqrt[10]{1024} - 5 \cdot 10! - \sqrt{64}$$

kifejezés értékét. A parancs végét pontosvessző (;) vagy dollárjel (\$) jelzi. Dollárjel használata esetén a parancs végrehajtódik, de kimenete nem jelenik meg. Ha nem a parancssoros Maximát vagy az xMaximát, hanem a wxMaximát használjuk, akkor nem szükséges végjelet írunk, Shift+Enter nyomására végrehajtnak a műveletek (és pontosvessző lesz a sor végén).

Néhol majd olyan hosszú képleteket kell írni, hogy nem férnének ki egy sorban. Ez nem jelent problémát. A wxMaxima támogatja a többsoros bemenetet. Emlékeztetőül: ilyenkor a sorokat Enter billentyű lenyomásával választjuk el egymástól.

A fenti kifejezést beírva ezt fogjuk látni:

```
(%i1) (10*33^4+5)*2-2/34-1024**(1/10)-5*10!-sqrt(64);
```

```
(%o1) 
$$\frac{94765139}{17}$$

```

A sorszámozott (%i1) és (%o1) szimbólumok a bemenet (input) és kimenet (output) jelölései.

Láthatjuk, hogy az eredményt (leegyszerűsített) tört alakban kaptuk meg. Ha a kiszámolt értéket tizedestört alakban akarjuk megkapni, használjuk a float függvényt. Figyeljünk arra, hogy a Maxima megkülönbözteti a kis- és nagybetűket, vagyis jelen esetben a float szigorúan csupa kisbetűvel írandó.

```
(%i2) float((10*33^4+5)*2-2/34-1024**(1/10)-5*10!-sqrt(64));
```

```
(%o2) 5574419.94117647
```

Ez azonban így kényelmetlen. Be kell ugyanis másolni (esetleg gépelni) az előzőleg már beírt képletet. Használhatjuk azonban a % szimbólumot. Ez a legutóbb kiszámolt értéket adja vissza. Próbáljuk ki!

```
(%i3) %;
```

```
(%o3) 5574419.94117647
```

Tehát hasonló helyzetben legközelebb elegendő a float(%) alakot használni. Analóg módon hivatkozhatunk valamely konkrét kimenetre. Ez esetben például ugyanezt a hatást érhetjük el a float(%o1); beírásával.

#### wxMaxima tipp

wxMaximát használva, ha a „Numerikus” menü „Tizedestört” almenüjére kattintunk, azzal előhívjuk a float függvényt, és az rögtön alkalmazásra is kerül.



Láthatjuk továbbá az angol helyesírásban megszokott tizedes pontot a magyar tizedes vessző helyett.



Valójában a wxMaxima alapértelmezés szerint nem mutatja meg az összes jegyet, csak a szám elejét és a végét. Ilyenkor például a [98 digits] rövidítés található a kifejezés közepén, utalva a meg nem jelenített jegyek számára. Ha látni szeretnénk az összes jegyet, át kell állítani a szerkesztő megjelenését `ascii` vagy `none` módba (`xml`-ről) a `set_display('ascii)`, illetve a `set_display('none)` parancs segítségével. Visszaállítás az alapértelmezett módba a `set_display('xml)` hatására történik.

#### wxMaxima tipp

Ha a megjelenítési mód változtatását a wxMaxima kényelmi szolgáltatását használva akarjuk véghezvinni, megtehetjük; a „Maxima” menü, „2d-s megjelenítés változtatása...” almenüre kattintva egy ablakból kiválasztató a kívánt megjelenítési mód.



Hogy a törtek értékes jegyeinek száma éppen mennyire van állítva, az `fpprec`; begépelésével kaphatjuk meg.

```
(%i10) fpprec;
```

```
(%o10) 16
```

Az `fpprec` valójában egy rendszerváltozó, melynek ily módon kiírtuk az értékét. Módosíthatjuk is a következőképpen:

```
(%i11) fpprec:100;
```

```
(%o11) 100
```

#### wxMaxima tipp

Ha a „Numerikus” menü „Pontosság állítása...” almenüjére kattintunk, a felbukkanó ablakban megváltoztathatjuk az aktuális pontosságot.



Mostantól tehát 100 értékes jegyre kapjuk a törtek értékét, normálalakban. Ehhez azonban a `bfloat` függvényt kell használnunk. Például:

```
(%i12) bfloat(%pi);
```

```
(%o12) 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820
```

974944592307816406286208998628034825342117068b0

A szám végén a  $b0$  normálalakra utal, azt jelenti, hogy „szorozva 10 nulladik hatványával, vagyis 1-gyel”.

Általában nincs szükség ilyen pontosságra, térjünk hát vissza az eredeti állapotra.

```
(%i13) fpprec:16;
```

```
(%o13) 16
```

Ha a tizedes törtünk tízmilliónál nagyobb, a program eleve normálalakban (és kissé pontatlanul) jeleníti meg.

```
(%i14) 10000000.1;
```

```
(%o14) 1.0000000099999999 107
```

Csak érintőlegesen említjük meg – nem témája jegyzetünknek –, hogy komplex számokkal is számolhatunk, és kaphatunk is ilyeneket eredményül. Az imaginárius egység jele itt:  $%i$ .

$$\sqrt{-4} + |3 + 4i|$$

```
(%i15) sqrt(-4)+abs(3+4*%i);
```

```
(%o15) 2%i + 5
```

Az `abs` az abszolút érték függvény valós és komplex számokra is használhatjuk. Egész számokat szorzattá alakíthatunk:

```
(%i16) factor(132);
```

```
(%o16) 22 3 11
```

#### wxMaxima tipp

A `factor` függvény az „Egyszerűsítés” menü „Kifejezés faktorizálása” almenüjével hívható elő.



Beépített eljárások használatára találhatunk példákat az `example` segítségével. Hogy melyekre, megláthatjuk ha kiadjuk az `example`; parancsot, ahogy látjuk, paraméter nélkül. Ha így teszünk, láthatjuk a felsorolásban a `factor` szót. Ha többet akarunk például erről a konkrét eljárásról tudni, adjuk ki az `example(factor)`; parancsot!

**wxMaxima tipp**

A wxMaximába az `example` függvény a „Segítség” menü „Példa...” almenüjét használva aktivizálható.



Nézzük tovább a kifejezések átalakítását. Ha az alábbi típusú kifejezéssel próbálkozunk, nem fog történni semmi.

$$(3^{1/2} + 1)^4$$

```
(%i17) (3^(1/2)+1)^4;
```

```
(%o17) (sqrt(3) + 1)^4
```

Kétféle eredményt kaphatunk ugyanis. Egy formálisat (vagyis pontosat), ekkor használjuk például a `ratsimp` függvényt:

```
(%i18) ratsimp(%);
```

```
(%o18) 16sqrt(3) + 28
```

vagy egy tizedes törttel közelítettet, amit a szokott módon kaphatunk meg:

```
(%i19) float(%);
```

```
(%o19) 55.71281292110204
```

**wxMaxima tipp**

A `ratsimp` függvény a wxMaximában az „Egyszerűsítés” menüben a „Kifejezés egyszerűsítése” almenüt előhívva használható.



Végül; természetesen az elvégezhetetlen műveleteket a Maxima sem tudja végrehajtani:

$$\text{ctg } 0$$

```
(%i20) cot(0);
```

The number 0 isn't in the domain of cot

```
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

## 1.6. Változók, függvények, egyenletek

A komputeralgebrai programok igazi ereje szimbolikus számításokban van. Változókat, függvényeket definiálhatunk, számolhatunk velük, akár formálisan is. Lássunk erre néhány elemi példát! (Figyeljünk arra, hogy amint az a függvények esetében, a változókra is igaz, nevezetesen hogy a kis- és nagybetűk megkülönböztettek!)

### 1.6.1. Változók, algebrai kifejezések

A változók értékadása a `:` jellel történik.

```
(%i1) a:2; b:3;
```

```
(%o1) 2
```

```
(%o2) 3
```

Mostantól  $a$  és  $b$  értéke ennyi, amíg mást nem mondunk.

$$a^4 - b^4, ab$$

```
(%i3) a^4-b^4; a*b;
```

```
(%o3) -65
```

```
(%o4) 6
```

Ez a más lehet másik szám, vagy egy `kill`, ami törli a változó értékét.

```
(%i5) kill(a);
```

```
(%o5) done
```

#### wxMaxima tipp

wxMaximán belül a `kill`-t a „Maxima” menüben a „Változó törlése...” almenüre kattintva hozhatjuk elő. Az ilyenkor felbukkanó ablak lehetőséget ad a definiált változók értékének törlésére (alapértelmezés szerint az `a11`, vagyis az összes törlésével), esetleg a törölni kívánt változók felsorolására, azokat vesszővel elválasztva.



Tehát az eredeti kifejezés már nem szám, hanem  $a$  függvénye.

```
(%i6) a^4-b^4;
```

```
(%o6) a4 - 81
```

Emlékszünk a `factor` függvényre? Ezt kifejezésekre is használhatjuk.

```
(%i7) factor(%);
```

```
(%o7) (a - 3)(a + 3)(a2 + 9)
```

A Maxima kiválóan tudja használni a `factor` eljárást, még bonyolult, többváltozós függvények esetén is. Erre láthatunk egy szép példát az 1.6.2 alfejezetben. Saját függvények definíciója a `:=` használatával történik.

```
(%i8) f(a) := a4 - b4;
```

```
(%o8) f(a) := a4 - b4
```

Ne felejtsük el, hogy  $b$  értéke még mindig 3, így  $f$  tényleg egyváltozós függvény. Vajon mennyi az értéke az  $a = 1$  helyen?

```
(%i9) f(1);
```

```
(%o9) -80
```

Töröljük  $b$  értékét is.

```
(%i10) kill(b);
```

```
(%o10) done
```

Az  $f$  függvény még mindig egyváltozós (hisz úgy definiáltuk), de már van egy paramétere, a  $b$ !

```
(%i11) f(1);
```

```
(%o11) 1 - b4
```

Most gondolunk egyet és megváltoztatjuk  $f$ -et, legyen az alábbi két változós függvény:

```
(%i12) f(a,b) := a4 - b4;
```

```
(%o12) f(a,b) := a4 - b4
```

Így tényleg kétváltozós; konkrét értéket kapunk, ha megadjuk első és második változóját.

```
(%i13) f(1,2);
```

(%o13)  $-15$

Persze változók helyébe más változókat is helyettesíthetünk:

$$f(2x, x)$$

(%i14) `f(2*x,x);`

(%o14)  $15x^4$

Definiáljunk egy másik függvényt is:

$$g(a, b) := (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

(%i15) `g(a,b):=(a-b)*(a^2+a*b+b^2);`

(%o15)  $g(a, b) := (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Az `expand` függvényt használva egyszerűbb alakra hozhatjuk.

(%i16) `expand(g(a,b));`

(%o16)  $a^3 - b^3$

#### wxMaxima tipp

A wxMaxima menürendszerében az `expand` függvény az „Egyszerűsítés” menü „Kifejezés felbontása” almenüjeként található meg.



A további átalakításokhoz képezzük  $f$  és  $g$  hányadosát!

$$\frac{f(a, b)}{g(a, b)}$$

(%i17) `f(a,b)/g(a,b);`

(%o17)  $\frac{a^4 - b^4}{(a - b)(b^2 + ab + a^2)}$

Figyeljük meg az `expand`, a `ratsimp` (racionális törtfüggvények egyszerűsítése) és a `factor` függvények hatását!

(%i18) `expand(%);`

(%o18)  $\frac{a^4}{a^3 - b^3} - \frac{b^4}{a^3 - b^3}$

(%i19) `ratsimp(f(a,b)/g(a,b));`

$$(\%o19) \frac{b^3 + ab^2 + a^2b + a^3}{b^2 + ab + a^2}$$

(%i20) `factor(f(a,b)/g(a,b));`

$$(\%o20) \frac{(b+a)(b^2+a^2)}{b^2+ab+a^2}$$

Látni fogjuk később, hogy a `factor` eljárás trigonometrikus kifejezések átalakítására is jól használható.

### 1.6.2. Ramanujan (egyik) sejtése

Ebben a rövid alfejezetben kivételt tettem és nem a matematika alapvető fejezeteiből választottam témát. Tettem ezt a célból, hogy egy viszonylag egyszerűen megérthető, mégis mély matematikai háttérrel bíró téma kapcsán bemutassam a komputeralgebra igazi erejét.

Srinivasa Ramanujan a matematika történetének talán legkülönösebb, legintuitívabb figurája volt. Élete és munkássága regénybe illő, itt egy híres sejtése (jó sok volt neki) miatt említjük meg. A sejtés olyan matematikai állítás, amelyet valaki „megérez” hogy igaz, de nem tudja bizonyítani.

Térjünk akkor rá, mi is volt az a bizonyos sejtés. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$R_k(a, b, c, d) = (a + b + c)^k + (b + c + d)^k + (a - d)^k -$$

$$(a + c + d)^k - (a + b + d)^k - (b - c)^k.$$

Ramanujan azt állította, hogy ha  $ad = bc$ , akkor

$$64R_6(a, b, c, d)R_{10}(a, b, c, d) = 45R_8^2(a, b, c, d).$$

(Egy kicsit gondoljunk ebbe bele. Elképesztő, hogy valaki egy ilyen összefüggést megsejt!) A sejtés igaznak bizonyult. De nézzük meg, hogyan boldogul vele a Maxima!

Hogy kezelni tudja a problémát, át kell fogalmaznunk. Szorzattá fogjuk alakítani a

$$64R_6(a, b, c, d)R_{10}(a, b, c, d) - 45R_8^2(a, b, c, d)$$

kifejezést, és ha tényezők között szerepel az  $ad - bc$  tag, akkor igaz az állítás. E célból először definiáljuk az  $R_k(a, b, c, d)$  függvényt! Előre szólok, hogy a szorzattá alakított kifejezés olyan hosszú lesz, hogy a wxMaxima az alapértelmezett `xml` módban nem tudja megjeleníteni (a hibaüzenet: `<< A kifejezés túl hosszú a megjelenítéshez! >>`). Használjuk most a `none` vagy az `ascii` megjelenítő módot!

```
(%i1) R(a,b,c,d,k):=(a+b+c)^k+(b+c+d)^k+(a-d)^k
      -(a+c+d)^k-(a+b+d)^k-(b-c)^k;
```

```
(%o1) R(a,b,c,d,k):=
```

$$(a + b + c)^k + (b + c + d)^k + (a - d)^k - (a + c + d)^k - (a + b + d)^k - (b - c)^k$$

A szorzattá alakításhoz használjuk a jól ismert `factor` eljárást!

```
(%i2) factor(64*R(a,b,c,d,6)*R(a,b,c,d,10)
                                         -45*R(a,b,c,d,8)^2);
```

```
(%o2) 36(ad - bc)(240ad13 - 880bcd12 + ... - 5280a11b2c - 880a12bc)
```

Láthatjuk, hogy szerepel  $ad - bc$  a tagok között, tehát igaz az állítás. Megjegyzem, ezúttal a kapott kifejezés elképesztő mérete miatt nem jelenítettem meg az egész eredményt, hanem a ... szimbólumot használtam. Javaslom, próbáljuk ki magunk is, leginkább a szorzótényezők látványa után értékelhetjük igazából Ramanujan zsenialitását, valamint – és erről se feledkezzünk meg – a Maxima hatékonyságát.

### 1.6.3. Trigonometrikus kifejezések átalakítása

Többféle módon szokott szükség lenni trigonometrikus függvények átalakítására. Némely esetben arra van szükségünk, hogy a rövid, zárt alakot kifejtsük; ekkor javasolt a `trigexpand` függvény használata.

$$\sin 3x$$

```
(%i1) trigexpand(sin(3*x));
```

```
(%o1) 3 cos(x)2 sin(x) - sin(x)3
```

Az így kapott kifejezést egyszerűbb alakba írhatjuk a `trigsimp` függvény segítségével.

```
(%i2) trigsimp(%);
```

```
(%o2) (4 cos(x)2 - 1) sin(x)
```

Megfordítva, ha arra van szükségünk, hogy zárt alakban adjunk meg egy kifejezést, használjuk a `trigreduce`, és ha szükséges a `trigsimp` eljárást.

```
(%i3) trigreduce(%);
```

```
(%o3) 2 (sin(3x)/2 - sin(x)/2) + sin(x)
```

```
(%i4) trigsimp(%);
```

```
(%o4) sin(3x)
```

Trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek átalakítását megkísérelhetjük a fenti módszerekkel is, de van egy speciális függvény pontosan erre a célra: a `trigrat`.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + 1$$

```
(%i5) trigrat(sin(3*x)/sin(x)+1);
```

```
(%o5) 2 cos(2x) + 2
```

Az így kapott kifejezést persze továbbalakíthatjuk a szokott módon.

```
(%i6) trigexpand(%);
```

```
(%o6) 2 (cos(x)^2 - sin(x)^2) + 2
```

```
(%i7) trigsimp(%);
```

```
(%o7) 4 cos(x)^2
```

#### wxMaxima tipp

A `trigexpand`, a `trigsimp`, a `trigreduce` és a `trigrat` eljárások a wxMaxima „Egyszerűsítés” menüje, „Trigonometrikus átalakítás” almenüjében is megtalálhatóak. Ezek rendre a „Trigonometrikus felbontás”, a „Trigonometrikus egyszerűsítés”, a „Trigonometrikus redukálás” és a „Kanonikus alak”.



### 1.6.4. Egyenletek, egyenletrendszerek megoldása

A előzőekben használt eljárások hasznos tulajdonsága, hogy nem csak függvényeket, hanem egyenleteket is jó eséllyel hozhatunk használhatóbb alakra. Az átalakítás hatékonyságát sok esetben növeli, ha az egyenletet először  $f(x) = 0$  alakra hozzuk. Nézzünk erre egy példát!

A célunk az, hogy megoldjuk az (egyáltalán nem triviális)

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x$$

egyenletet.

Az egyenletek, egyenletrendszerek pontos megoldására a Maxima a `solve` eljárást biztosítja. Ez – ahogy ezt majd látni fogjuk – több esetben jól használható, de trigonometrikus egyenletek esetén nem árt, ha egy kicsit „besegítünk” neki. Ugyanis ha minden előkészület nélkül alkalmazzuk,

```
(%i1) solve(sin(x)^4+cos(x)^4=sin(2*x)^4+cos(2*x)^4,x);
```

```
(%o1) [sin(2x) = %i(-cos(2x)^4+sin(x)^4+cos(x)^4)^(1/4),
sin(2x) = -(-cos(2x)^4+sin(x)^4+cos(x)^4)^(1/4),
sin(2x) = -%i(-cos(2x)^4+sin(x)^4+cos(x)^4)^(1/4),
sin(2x) = (-cos(2x)^4+sin(x)^4+cos(x)^4)^(1/4)]
```

láthatjuk, nem igazán ad használható eredményt. Használjuk hát az előző részben tanultakat! Alkalmazzuk a `trigexpand`, a `trigsimp` és a `factor` eljárásokat, ebben a sorrendben.

```
(%i2) trigexpand(sin(x)^4+cos(x)^4-sin(2*x)^4-cos(2*x)^4=0);
```

```
(%o2) -(cos(x)^2-sin(x)^2)^4-16cos(x)^4sin(x)^4+sin(x)^4+cos(x)^4=0
```

```
(%i3) trigsimp(%);
```

```
(%o3) -32cos(x)^8+64cos(x)^6-38cos(x)^4+6cos(x)^2=0
```

```
(%i4) factor(%);
```

```
(%o4) -2(cos(x)-1)cos(x)^2(cos(x)+1)(2cos(x)-1).
```

$$\cdot (2\cos(x)+1)(4\cos(x)^2-3)=0$$

Gyakorlatilag készen vagyunk. A szorzattá alakított kifejezésből könnyedén leolvashatjuk a megoldásokat. Ha még kényelmesebbek vagyunk, most „ráereszthetjük” a `solve` eljárást. Vegyük figyelembe, hogy használata során gyököket veszíthetünk. Jelen példánkban az összes megoldást a megadott szögek és  $\pi$  egész számú többszöröseivel való eltoltjai adják, és nem csak a forgásszögeket.

```
(%i5) solve(%);
```

```
solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.
```

```
(%o5) [x = 5pi/6, x = pi/6, x = 2pi/3, x = pi/3, x = pi, x = pi/2, x = 0]
```

---

**wxMaxima tipp**

A `solve` eljárás a wxMaximában az „Egyenletek” menü „Megoldás...” almenüjével hívható meg.



Természetesen nem csak trigonometrikus egyenleteket oldhatunk meg. Segíthet a `factor` más esetben is, de csak korlátozott mértékben. Például megkaphatjuk az egész megoldást (megoldásokat):

$$x^3 + x + 2 = 0$$

```
(%i6) factor(x^3+x+2);
(%o6) (x + 1)(x^2 - x + 2)
```

de az összes gyök meghatározásához inkább a `solve` hasznosabb.

```
(%i7) solve(x^3+x+2,x);
(%o7) [x = -sqrt(7%i-1)/2, x = sqrt(7%i+1)/2, x = -1]
```

Ha több megoldás van, hivatkozhatunk valamelyik konkrétára. Például az előző feladat harmadik megoldása:

```
(%i8) solve(x^3+x+2,x)[3];
(%o8) x = -1
```

Sajnos (és ez természetes) a `solve` sem mindentudó. Csak azokat az egyenleteket tudja megoldani, amikre megtanították. Például az  $n$ -edfokú egyenletek közül azokkal tud mit kezdeni, amire létezik megoldóképlet, vagyis ha  $n \leq 4$ . Bizonyított ugyanis, hogy ötöd vagy magasabb fokú (algebrai) egyenletnek nem létezik általános megoldóképlete. Így a `solve` nem tudja megoldani például az alábbi egyenletet sem:

$$x^5 + x - 3 = 0$$

```
(%i9) solve(x^5+x-3=0,x);
(%o9) [0 = x^5 + x - 3]
```

Tud megoldani egyenletrendszereket is. Érdekes módon azokat helyből megpróbálja megoldani közelítő módszerekkel is, úgyhogy ezzel a trükkel – egy újabb, triviális egyenletet felvéve – megkaphatjuk az előző egyenlet közelítő megoldásait. Figyeljük meg a szintaktikai különbséget, a szógletes zárójelek használatát.

```
(%i10) solve([x^5+x-3=0,y=1],[x,y]);
(%o10) [[x = 1.132997481108312, y = 1.0],
[x = .8228703381099578%i - 1.041879539612082, y = 1.0],
[x = -.8228703381099578%i - 1.041879539612082, y = 1.0],
[x = 1.129701725095409%i + .4753807566695495, y = 1.0],
```

```
[x = .4753807566695495 - 1.129701725095409%i, y = 1.0]]
```

Azonban nem minden egyenlettel bánhatunk el ily módon. Ha (szerinte) „csúnya” az egyenlet, akkor „feladja”.

```
(%i11) solve([x^5+x-3*sin(x)=0,y=1],[x,y]);
algsys: tried and failed to reduce system to a polynomial in
one variable; give up.
-- an error. To debug this try debugmode(true);
```

De az ilyen esetekben sem maradunk közelítő megoldás nélkül. Ismerkedjünk meg a `find_root` eljárással. Ezzel a módszerrel eleve közelítő megoldást keresünk. Használatához kell találni egy olyan intervallumot, amely végpontjaiban az  $f(x) = 0$  alakban felírt egyenletben szereplő  $f(x)$  függvény különböző előjelű. Jelen esetben például a  $[-3, 2]$  intervallum alkalmas erre a célra.

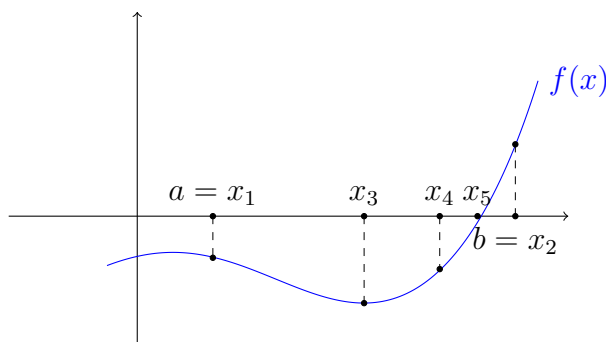
$$x^5 + x - 3 \sin x = 0$$

```
(%i12) find_root(x^5+x-3*sin(x)=0,x,-3,2);
```

```
(%o12) -1.094639593062378
```

Hátránya, hogy csak egy gyököt fog megtalálni, akkor is, ha több megoldás esik a megadott intervallumba. Például az egyenletnek nyilvánvalóan az  $x = 0$  is a feltételeknek megfelelő (triviális) megoldása. Az intervallum ügyesebb megválasztásával persze kezelhetjük az ilyen problémákat. Ehhez segítséget nyújt, ha ábrázoljuk a függvényt (lásd az 1.6.5 alfejezetet).

A Maxima egyenletek közelítő megoldásához használt beépített függvényei több különböző elven is működhetnek. A legegyszerűbb ilyen módszer az intervallumfelezés. Legyen az  $(a, b)$  egy intervallum, amin az  $f(x)$  folytonos függvény (az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egyszer) előjelet vált. Legyen  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_3 = \frac{a+b}{2}$ . Az  $x_4$  értéke legyen az  $(x_1, x_3)$  intervallum felezési pontja, ha ott a függvény előjelet vált, egyébként az  $(x_3, x_2)$  intervallum felezési pontja, és így tovább, mindig azt az intervallumot felezzük, ahol előjelváltás történik. Így generálunk egy  $x_n$  sorozatot (lásd az 1.6. ábrát).



1.6. ábra. Intervallumfelezés

Legyen  $f(x^*) = 0$ . Mivel a sorozat harmadik tagjától az  $(a, b)$  intervallum minden lépésben feleződik, ezért  $|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n-2}}$ . Innen könnyű látni, hogy a sorozat tagjai tetszőleges előre megadott pontossággal megközelíthetik a függvény zérushelyét.

Ha a polinomegyenletünk elvileg már nem megoldható (vagyis nincs megoldóképlet, így a `solve` már nem tudja kezelni), használhatjuk az `allroots`, és ha csak a valós gyököket keressük, a `realroots` eljárást.

$$x^5 - 3x^3 + 1 = 0$$

```
(%i13) allroots(x^5-3*x^3+1=0);
```

```
(%o13) [x = .7418139304867731,
```

```
      x = .5954413282691189%i - .3141413714906349,
```

```
      x = -.5954413282691189%i - .3141413714906349,
```

```
      x = 1.66877759254038, x = -1.782308780045884]
```

```
(%i14) realroots(x^5-3*x^3+1=0);
```

```
(%o14) [x = - $\frac{59804359}{33554432}$ , x =  $\frac{24891145}{33554432}$ , x =  $\frac{55994885}{33554432}$ ]
```

```
(%i15) float(%);
```

```
(%o15) [x = -1.782308787107468, x = .7418139278888702,
```

```
      x = 1.668777614831924]
```

Természetesen az `find_root` eljárással is célt érhattünk volna, bár azzal egyszerre csak egy gyököt kaphatunk meg.

#### wxMaxima tipp

wxMaximát használva a `find_root`, az `allroots` és a `realroots` eljárások az „Egyenletek” menü almenüi, konkrétan a „Megoldás numerikusan...”, a „Polinom gyökei” és a „Polinom valós gyökei” címkék alatt találhatóak.



Megemlítünk még egy más elven alapuló, de a `find_root`-hoz hasonló (sőt, bizonyos esetekben még jobb hatékonyságú) közelítő eljárást, a `newton` elnevezésűt. Használatához először be kell tölteni a `newton` „csomagot”, mivel nem szerepel az alap utasításkészletben. A Newtonról és más hasonló egyenlet megoldást közelítő módszerről az érdeklődők például az alábbi könyvben olvashatnak: [7].

A kifejezés után szereplő -2 egy tipp, annak a közelében „kezd keresni” megoldást. (Valójában a Newton-féle iterációs módszer kiindulási értékét adjuk meg ilyenkor.)

```
(%i16) load(newton)$;
```

```
(%i17) newton(x^5-3*x^3+1,-2);
```

```
(%o17) -1.782308780045884b0
```

Ahogy korábban már láttuk, oldhatunk meg egyenletrendszereket is. Először oldjunk meg lineáris egyenletrendszereket; egy regulárist, és egy olyat, amelyben több ismeretlen van, mint egyenlet.

$$\begin{aligned}x + y &= 0 \\x + y + z &= 3 \\x - 3y &= 4\end{aligned}$$

```
(%i18) solve([x+y=0,x+y+z=3,x-3*y=4],[x,y,z]);
```

```
(%o18) [[x = 1, y = -1, z = 3]]
```

$$\begin{aligned}x + y &= 0 \\x + y + z - v &= 3 \\x - 3y + v &= 4\end{aligned}$$

```
(%i19) solve([x+y=0,x+y+z-v=3,x-3*y+v=4],[x,y,z,v]);
```

```
(%o19) [[x = -%r1-4/4, y = %r1-4/4, z = %r1 + 3, v = %r1]]
```

Láthatjuk, hogy a második esetben is megkaptuk az összes megoldást. A szabad paramétert – ami tetszőleges valós szám lehet – %r1 jelöli.

Persze nem csak lineáris egyenletrendszereket oldhatunk meg. A következő példában egyes változók magasabb hatványokon (is) szerepelnek.

$$\begin{aligned}x + y &= 0 \\x^2 + y + z - v &= 3 \\x - 3y^4 + v &= 4\end{aligned}$$

```
(%i20) solve([x+y=0,x^2+y+z-v=3,x-3*y^4+v=4],[x,y,z,v]); így
```

```
(%o20) [[x = %r2, y = -%r2, z = 3%r2^4 - %r2^2 + 7,
```

```
v = 3%r2^4 - %r2 + 4]]
```

A paraméteres eseteket is hasonló hatékonysággal kezeli. Az alábbi példában a megoldást  $x$ -re keressük, az  $a$  a paraméter. Ne vegyük készpénznek az eredményt; ha  $a = 0$ , akkor nincs megoldás. Általában igaz, hogy matematikai értelemben vett teljes megoldást, diszkussziót hiába várunk.

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} - \frac{\frac{x}{a}}{2\left(\frac{x}{a} + 1\right)} = \frac{7}{20}$$

```
(%i21) solve((1/a-1/x)/(1/a+1/x)-(x/a)/(2*((x/a+1)))=
7/20,x);
```

```
(%o21) [x = 9a]
```

A következő egyenletrendszerben  $x$  és  $y$  ismeretlenek értékeit keressük, ha  $a$  és  $b$  valós paraméter.

$$\begin{aligned}(a+b)x + (a-b)y &= a^2 + b^2 \\ (a-b)x + (a+b)y &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

```
(%i22) solve([(a+b)*x+(a-b)*y=a^2+b^2,(a-b)*x+(a+b)*y=
a^2-b^2],[x,y]);
```

```
(%o22) [[x = (b+a)/2, y = -(b-a)/2]]
```

Valójában csak akkor kapjuk ezt a megoldást, ha  $a \neq 0$  vagy  $b \neq 0$ .

Szükségünk lehet arra, hogy az egyenlet vagy egyenletrendszer megoldásával tovább számoljunk. Ehhez az `ev` függvényt használjuk. Például az alábbi parancs végrehajtása után az  $y^2$  változó értéke az

$$\begin{aligned}2x &= y + 1 \\ xy &= 36\end{aligned}$$

egyenletrendszer második megoldásában  $y$ -ra kapott szám lesz.

```
(%i23) y2:ev(y,solve([2*x=y+1,x*y=36],[x,y])[2]);
```

```
(%o23) 8
```

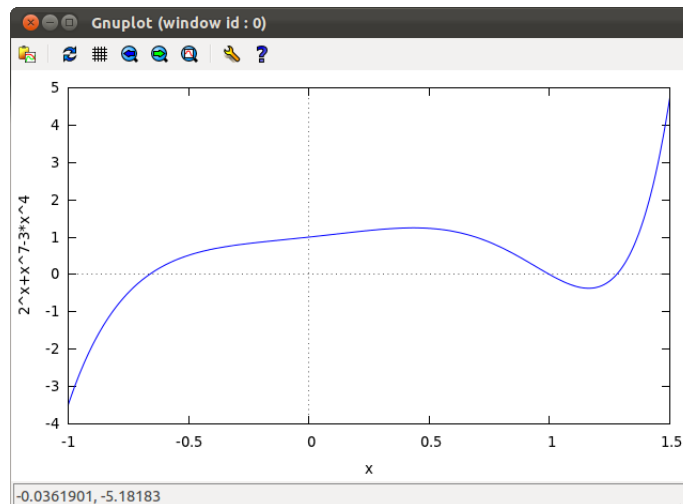
### 1.6.5. Függvények ábrázolása

A Maxima segítségével egy- és kétváltozós függvényeket jeleníthetünk meg. Az előbbieket a `plot2d` vagy a `wxplot2d`, az utóbbiakat a `plot3d` vagy a `wxplot3d` eljárással. Néha csak többszöri próbálgatással kapjuk meg, hogy melyik intervallumon, illetve téglalapon érdemes ábrázolni a függvényt.

$$f(x) = x^7 - 3x^4 + 2^x$$

```
(%i1) plot2d([x^7-3*x^4+2^x],[x,-1,1.5]);
```

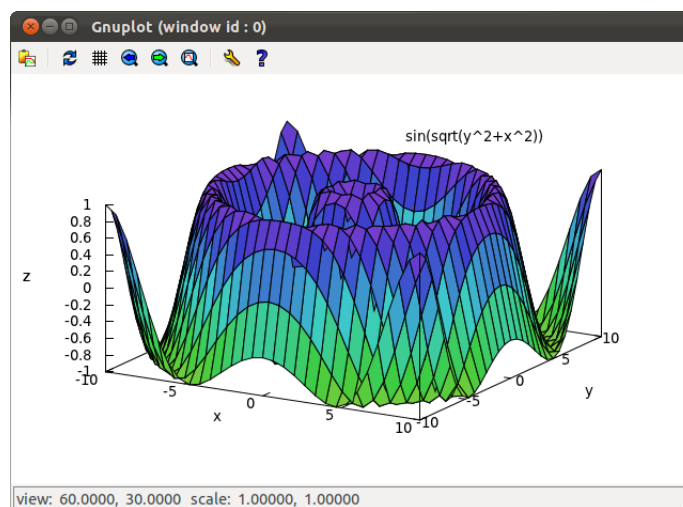
```
(%o1) (Lásd az 1.7. ábrát)
```

1.7. ábra.  $f(x) = x^7 - 3x^4 + 2^x$ 

$$f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$$

```
(%i2) plot3d(sin(sqrt(x^2+y^2)), [x,-10,10], [y,-10,10]);
```

(%o2) (Lásd az 1.8. ábrát)

1.8. ábra.  $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ 

Mindkét típus megjelenítésére több lehetőségünk is van. A Maxima alapértelmezés szerint a gnuplot programot használja. Említésre méltó még az openmath program. Mindkettővel látványos, módosítható grafikonokat kapunk.

$$x^2 - y^2$$

```
(%i3) plot3d(x^2-y^2, [x,-10,10], [y,-10,10],
```

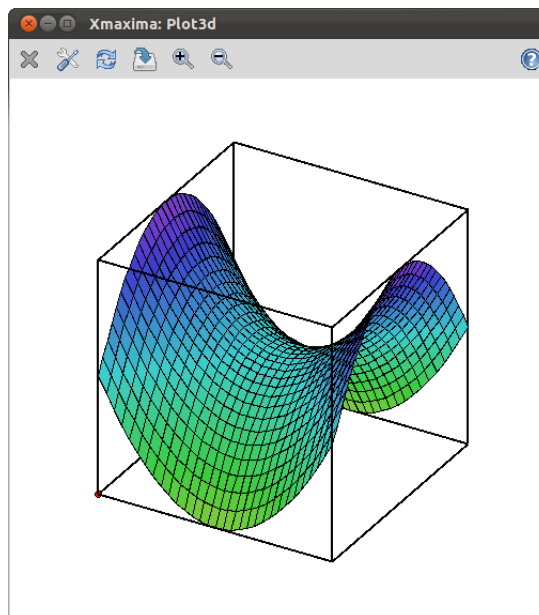
```
[plot_format, openmath]);
```

(%o3) (Lásd az 1.9. ábrát)

### wxMaxima tipp

A wxMaxima az „Ábrázolás” menüben biztosít lehetőséget a függvények megjelenítésére. A „2d-s ábrázolás...” és a „3d-s ábrázolás...” almenük felbukkanó ablakainak argumentumai és opciói magukért beszélnek. Az előbb említett megjelenési módokon kívül hasznos lehet még a „Sorok között” használata, egyébként ez az alapértelmezett formátum.

További lehetőség még wxMaxima alatt az ábrák kép-fájlba mentése. Használatához kattintsunk jobb egérgombbal a keletkezett képre. Több ismert képformátum közül választhatunk.



1.9. ábra.  $f(x, y) = x^2 - y^2$

Az ily módon kapott háromdimenziós grafikonokat az egérrel el is forgathatjuk.

## 1.7. Feladatok

A megoldáshoz – részben, vagy egészben – hívjuk segítségül a Maximát!

1. Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét!

(a)  $\sqrt[4]{\sqrt{2} + 1} \sqrt[8]{3 - 2\sqrt{2}}$

(b)  $9^{\frac{1}{\log_8 3}} + 7^{\frac{2}{\log_6 7}}$

(c)  $\frac{\sqrt{3}}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sin 250^\circ} + \operatorname{ctg} 2025^\circ$

(d)  $32 \left( \frac{\frac{2}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{4}\sqrt{2}}{(\sqrt{8}-\sqrt{2})^4} \right)^2$

(e)  $10^{1-\lg 2} + 3^{\log_9 36} \sqrt{\lg \operatorname{tg} 36^\circ + \lg \operatorname{tg} 54^\circ}$

(f)  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{2011\pi}{4} \right) \right)^{-2}$

2. Hozza egyszerűbb alakra!

(a)  $\left( \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} - \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \right) \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$

(b)  $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}} \left( \frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}} \right)$

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

(a)  $\sin x + \sin 3x + \cos 3x + \cos 5x = \sin 5x + \cos x$

(b)  $\sin^2 x + \sin^2 3x = \sin x \sin 3x$

4. Adja meg az alábbi egyenletrendszerek megoldásait!

(a) 
$$\left. \begin{aligned} x^7 + x - y &= 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

(b) 
$$\left. \begin{aligned} x^3 + x - y + z &= 12 \\ x^2 + y - z &= 2 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

## 2. fejezet

# Sorozatok

### 2.1. Sorozat fogalma, sorozatok megadása

**2.1. Definíció.** Az  $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt (valós szám-)sorozatnak nevezzük.

Ez azt jelenti, hogy a sorozat minden természetes számhoz hozzárendel egy valós számot. (De nem jelenti azt, hogy minden valós szám „képpé válik” vagyis nem biztos, hogy minden valós szám előáll, mint  $a_n$  valamilyen  $n$ -re.) A függvények bevezetéséről a 4. fejezet elején olvashatunk.

Függvények esetén általános az  $f(x), g(x), \dots$  típusú jelölés. Sorozatok esetén gyakrabban használjuk az  $a, b, \dots$  esetleg  $x, y, \dots$  betűket, de a nagyobb eltérés az úgynevezett indexek használatában van. Használatukat az indokolja, hogy bár a sorozatok is függvények, speciális függvények, ezzel a jelöléssel első látásra el tudjuk különíteni őket az általános (nem sorozat) függvényektől.

Egyes szerzők külön jelölést használnak magára a sorozatra:  $\langle a_n \rangle$  és a sorozat  $n$ -edik tagjára:  $a_n$ . Ezen jegyzet során nem éltünk ezzel a lehetőséggel – a Maxima nem különbözteti meg a két objektumot, ezért a jegyzet írása során ehhez igazodtunk –, de azon ritka esetekben, amikor ez zavart okozhatna, fel fogjuk hívni az olvasó figyelmét a helyes értelmezésre.

Megjegyzendő, hogy a sorozat értékészlete lehetne más halmaz is. (Létezik például komplex számsorozat, pontsorozat, stb.) A továbbiakban csak valós számsorozatokkal foglalkozunk, a sorozat szó ezeket fogja jelenteni.

A sorozatokat többféleképpen is megadhatjuk. Leggyakrabban az explicit megadással találkozunk. Például

$$\frac{2n}{n+1}, \quad n^n(3^n - n^2), \quad \cos(n\pi).$$

Maximában explicit sorozatot az alábbi szintaktikát használva adhatunk meg:

```
(%i1) a[n] := 2*n/(n+1);
```

```
(%o1) a_n :=  $\frac{2n}{n+1}$ 
```

Figyeljük meg, hogy a Maxima – mint ahogy sok programozási nyelv is – sorozat definiálására nem az egyenlőségjelet, hanem a kettőspont egyenlőt használja.

Az egyenlőségjel logikai művelet jele, eredménye igaz, vagy hamis. Például a  $2 = 3$  logikai művelet hamis.

Hivatkozhatunk a sorozat valamely konkrét tagjára, lekérdezve ezzel annak értékét (ha van neki):

$$a_{10}$$

```
(%i2) a[10];
```

```
(%o2)  $\frac{20}{11}$ 
```

Ritkábban, de találkozhatunk az úgynevezett rekurzív sorozatdefiniálással. Ebben az esetben megadjuk, hogy a sorozat általános tagja hogyan számolható a kisebb indexű tagokból. Ekkor az első, esetleg első néhány tagját is meg kell adnunk még a sorozatnak.

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = nb_{n-1} \end{cases}$$

Ez a rekurzív sorozat a faktoriálist definiálja, vagyis  $b_n = n!$ . Nagy fontosságú rekurzív sorozat még a Fibonacci sorozat. Mivel ebben az esetben a sorozat tagja az előző két tag összege, két tagot kell megadni, hogy beindulhasson a rekurzió.

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \end{cases}$$

A rekurzív módon megadott sorozatokat sokszor megadhatjuk explicit módon is. Ezek levezetése gyakran bonyolult, mély matematikai módszereket használ, maguk a keletkezett képletek sem mindig túl szépek. Így van ez a Fibonacci sorozat esetében is, ezért inkább egy egyszerűbb példát mutatunk rekurzív és explicit módon is megadott sorozatra. Együttal megtanuljuk a rekurzív sorozatok definiálásának szintaktikáját a Maximában. Tekintsük az alábbi sorozatot:

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_n = 2d_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Ez így néz ki a Maximában:

```
(%i3) d[1]:1; d[n]:=2*d[n-1]+1;
```

```
(%o3) 1
```

```
(%o4)  $d_n := 2d_{n-1} + 1$ 
```

Tehát az első tag (a konstans hozzárendelése) a változók értékadásához hasonlóan a kettősponttal történik.

A sorozat tagjait ebben az esetben is hasonlóan kapjuk.

$$d_{10}$$

```
(%i5) f[10];
```

(%o5) 1023

Ha  $d_n$  sorozat első néhány tagját is kiszámoljuk (1,3,7,15,31,63,127, stb.), megsejthetjük, hogy jelen esetben rekurzív sorozatunk explicit módon is könnyen megadható:  $d_n = 2^n - 1$ . A képlet valóságát teljes indukcióval bizonyíthatjuk:  $n = 1$ -re a képlet helyes eredményt ad, tegyük fel hát, hogy  $n = k$ -ra is rendben van, vagyis  $d_k = 2^k - 1$ . Viszont ekkor a  $d_{k+1} = 2d_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$  egyenlőségek teljesülése miatt a képlet igaz lesz  $n = k + 1$ -re is, ami a bizonyítandónk igazát jelenti.

Sorozatot több sorozatból, esetleg több különböző szabályt keverve is megadhatunk. Például:

$$e_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n < 3 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A sorozat elemei ekkor:

$$1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots$$

Összetett értékadásra Maxima esetében egy `block`-on belül kerülhet sor. A visszatérési értéket a `return` argumentumaként kell megadnunk. Hogy mikor milyen visszatérési értéket kap a `return`, azt példánkban az `if`, `then`, `else` (ha, akkor, egyébként) elemekből álló utasítás határozza meg. Lássuk konkrétan:

```
(%i6) e[n]:=block(if n<3 then return(1) else return(0))$
```

(Emlékeztetőül: ha az utasítást \$ jellel zárjuk, akkor nem jelenik meg a kimenet.) Nézzünk egy összetettebb példát!

$$f_n = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 1, & \text{ha } n \text{ 4-gyel osztva 2 maradékot ad} \\ f_{n-1} - 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nem is olyan egyszerű ellenőrizni, hogy ez egy korrekt definíció-e. De az, a sorozat tagjai pedig:

$$2, 1, 8, 7, 32, 1, 128, 127, 512, 1, 2048, 2047, \dots$$

Az ilyen sorozatok megadása Maximával összetett feladat. Nézzük először részenként.

Az `askinteger(n, odd)` értéke *yes* (igen), ha  $n$  páratlan (odd). Ha páros, *no*-t (nemet) kapunk. Az `askinteger` második argumentumaként használatos még az `even` (páros) is. Például:

```
(%i7) askinteger(21, odd); askinteger(7, even);
```

```
(%o7) yes
```

```
(%o8) no
```

A sorozat az értékét itt is egy `block`-kon belül végrehajtott utasítássorozat eredményeképp kapja meg. Ez esetben ha  $n$  nem páratlan, még egyszer meg kell

vizsgálni, ezért a `block` két, egymásba ágyazott `if`, `then`, `else` szerkezetet fog tartalmazni.

```
(%i9) f[n]:=block(if askinteger(n,odd)=yes
                 then return(2^n)
                 else if askinteger(n/2,odd)=yes
                     then return(1)
                     else return(f[n-1]-1))$
```

A jobb áttekinthetőség kedvéért az Enter gomb lenyomásával több sorra törtük a bemenetet, egymás alá írva az azonos szinten lévő elemeket.

A sorozatokat számos tulajdonság szempontjából vizsgálhatjuk. Nézzük ezeket sorra.

## 2.2. Monotonitás

**2.2. Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot monoton növekvő sorozatnak nevezzük, ha  $a_{n+1} \geq a_n$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén.

**2.3. Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot szigorúan monoton növekvő sorozatnak nevezzük, ha  $a_{n+1} > a_n$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén.

**2.4. Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot monoton csökkenő sorozatnak nevezzük, ha  $a_{n+1} \leq a_n$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén.

**2.5. Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot szigorúan monoton csökkenő sorozatnak nevezzük, ha  $a_{n+1} < a_n$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén.

Természetesen, ha egy sorozat szigorúan monoton növekvő, akkor monoton növekvő is, és ha szigorúan monoton csökkenő, akkor monoton csökkenő is.

Hogyan döntjük el, hogy egy sorozat monoton-e valamilyen értelemben? Nézzünk néhány példát!

Legyen  $a_n = \frac{2n}{n+1}$ . Számoljuk ki a sorozat első néhány tagját, valamint hasonlítsuk őket össze nagyságrendileg:

$$a_1 = 1 < a_2 = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} < a_3 = \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

A könnyebb összehasonlíthatóság érdekében a második és harmadik tagot közös nevezőre hoztuk. Úgy tűnik, a sorozat szigorúan monoton nő. De ezen a ponton ez még csak egy sejtés! A bizonyításhoz vissza kell nyúlnunk a definícióhoz. Megoldjuk az  $a_{n+1} > a_n$  egyenlőtlenséget, és ha azt kapjuk, hogy minden természetes számra teljesül, akkor beláttuk, hogy  $a_n$  szigorúan monoton nő. Nézzük tehát

részletesen:

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &> a_n \\
 \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} &> \frac{2n}{n+1} \\
 \frac{n+1}{n+2} &> \frac{n}{n+1} \\
 (n+1)(n+1) &> n(n+2) \\
 n^2+2n+1 &> n^2+2n \\
 1 &> 0
 \end{aligned}$$

Már  $a_{n+1}$  felírása is problémát szokott okozni. Figyeljünk oda nagyon,  $a_n$ -ben, vagyis  $\frac{2n}{n+1}$ -ben  $n$  minden előfordulását  $n+1$ -re cseréltük. A továbbiakban kihasználtuk, hogy az egyenlőtlenség iránya nem változik, ha mindkét oldalt ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk. Így – mindent összevetve – ekvivalens átalakításokat végeztünk,  $1 > 0$  pedig minden  $n \in \mathbb{N}$ -re (valójában ez esetben  $n$ -től függetlenül) teljesül. Beláttuk tehát, hogy  $a_n = \frac{2n}{n+1}$  sorozat szigorúan monoton növekvő.

Példák:

1. A  $b_n = n^2 - 3n$  sorozat monoton növekvő, de nem szigorúan monoton módon. (A második tagtól kezdve azonban a sorozat növekedése szigorú:  $b_1 = b_2 < b_3 < \dots$ )
2. A  $(-1)^n$  sorozat semmilyen értelemben nem monoton.

Egyszerűbb, racionális törtfüggvényekkel definiált sorozatok monotonitását a Maximával is megvizsgálhatjuk, ha behívjuk az alap utasításkészletbe nem tartozó `solve_rat_ineq` eljárást, ami polinomiális egyenlőtlenségek megoldására szolgál:

```
(%i1) load(solve_rat_ineq)$
```

Legyen először a vizsgált sorozatunk az előzőekben részletesen kielemezett  $a_n = \frac{2n}{n+1}$  sorozat.

```
(%i2) solve_rat_ineq(a[n+1]>a[n]);
```

```
(%o2) [[n < -2], [n > -1]]
```

A szögletes zárójelen kívüli vessző a logikai „vagy”-ot, az azon belüli a logikai „és”-t jelenti. Az itt kapott megoldást összevetve azzal a ténnyel, hogy  $n$  pozitív egész, azt kapjuk, hogy az egyenlőtlenség  $n$  minden lehetséges értékére fennáll, vagyis a sorozat szigorúan monoton növekvő.

Egyenlőtlenségek megoldására használhatjuk még a `fourier_elim` eljárást, ugyancsak miután behívtuk:

```
(%i3) load(fourier_elim)$
```

(%i4) `fourier_elim([a[n+1] > a[n]], [n]);`

(%o4)  $[-1 < n] \vee [n < -2]$

Az itt bemutatott eljárások távolról sem tudnak minden egyenlőtlenséget megoldani, de egyszerűbb esetekben segítségünkre lehetnek.

## 2.3. Korlátosság

**2.6. Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot felülről korlátosnak nevezzük, ha  $\exists K \in \mathbb{R}$ , melyre  $a_n \leq K$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén. Ekkor  $K$ -t felső korlátnak nevezzük.

Vagyis ha találunk felső korlátot a sorozatnak, az felülről korlátos lesz.

**2.7. Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot alulról korlátosnak nevezzük, ha  $\exists k \in \mathbb{R}$ , melyre  $a_n \geq k$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén. Ekkor  $k$ -t alsó korlátnak nevezzük.

Vagyis ha találunk alsó korlátot a sorozatnak, az alulról korlátos lesz.

**2.8. Definíció.** Az  $a_n$  sorozatot korlátosnak nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

A felső és alsó korlát fogalma nem határoz meg egyértelműen egy számot. Ugyanis ha egy sorozat felülről korlátos és  $K$  felső korlátja, akkor minden  $K$ -nál nagyobb szám is felső korlátja lesz, ha alulról korlátos és  $k$  alsó korlátja, akkor minden  $k$ -nál kisebb szám is alsó korlátja lesz a sorozatnak.

**2.9. Definíció.** Ha  $K$  az  $a_n$  sorozat felső korlátja, de  $\forall K' < K$  nem felső korlátja a sorozatnak (vagyis nincs nála kisebb felső korlát), akkor  $K$ -t pontos felső korlátnak (szuprérumnak) nevezzük.

**2.10. Definíció.** Ha  $k$  az  $a_n$  sorozat alsó korlátja, de  $\forall k' > k$  nem alsó korlátja a sorozatnak (vagyis nincs nála nagyobb alsó korlát), akkor  $k$ -t pontos alsó korlátnak (infimumnak) nevezzük.

A pontos korlátok számolása gyakran nagyon nehéz lehet.

Könnyű viszont kapcsolatot felfedezni a monotonitás és a korlátosság között.

**2.1. Tétel.** Ha egy sorozat monoton (vagy szigorúan monoton) növekvő, akkor alulról korlátos.

Növekvő sorozat pontos alsó korlátja a sorozat első tagja.

Előfordulhat, hogy a sorozat felülről is korlátos, de ezt nem feltétlenül lesz igaz.

**2.2. Tétel.** Ha egy sorozat monoton (vagy szigorúan monoton) csökkenő, akkor felülről korlátos.

Csökkenő sorozat pontos felső korlátja a sorozat első tagja.

Az előző tétel megjegyzéséhez hasonlóan, lehet, hogy alulról is korlátos lesz, de az is lehet, hogy nem.

Ezen tételek megfordítása nem igaz. Se az alulról, se a felülről korlátosságból nem következik automatikusan semmilyen értelemben vett monotonitás.

Példák:

1. Az  $n^2 + 3n$  sorozat alulról korlátos, hiszen minden tagja pozitív, így a 0 alsó korlátja lesz. Másrészt szigorúan monoton növekvő, így tényleg alulról korlátos, pontos alsó korlátja a sorozat első tagja, a 4. Felülről nem korlátos, mert a sorozat tagjai bármilyen nagy számnál nagyobbak lehetnek.
2. A  $(-1)^n$  korlátos, hiszen a  $-1$  jó lesz alsó, az  $1$  felső korlátnak. Nem monoton semmilyen értelemben.
3. Az  $\frac{1}{n}$  sorozat szigorúan monoton csökkenő, így felülről korlátos, pontos felső korlátja az  $1$ . Alulról is korlátos, hiszen minden tagja pozitív. A  $0$  egyben pontos alsó korlátja is lesz. Mivel felülről is, alulról is korlátos, a sorozat korlátos.

Az alsó és felső korláttal rokon fogalom a sorozat maximuma és minimuma.

**2.11. Definíció.** *A sorozat maximumán a legnagyobb tagját, minimumán a legkisebb tagját értjük.*

Minimum és maximum nem mindig létezik, még korlátos sorozatok esetén sem. Például az  $\frac{1}{n}$  sorozatnak bár létezik maximuma, az  $1$ , minimuma nem létezik. Persze ha létezik minimum, az a pontos alsó korlát, ha létezik maximum, az a pontos felső korlát lesz.

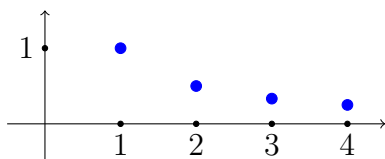
## 2.4. Határérték

### 2.4.1. Alapfogalmak

Tekintsük az  $\frac{1}{n}$  sorozatot. Láttuk, hogy szigorúan monoton csökkenő, de alulról is korlátos, hiszen a sorozat minden tagja nagyobb, mint  $0$ . A  $0$  egyben pontos alsó korlátja is lesz, hiszen ha az  $1$ -et egyre nagyobb számokkal osztjuk, könnyen láthatjuk, hogy a kapott hányados a  $0$ -t tetszőlegesen megközelítheti, így semmilyen  $0$ -nál nagyobb szám alsó korlát nem lehet. A sorozat tagjai „tartanak” a  $0$ -hoz. Ennek a szemléletes fogalomnak a pontos definíciója a következő.

**2.12. Definíció.** *Akkor mondjuk, hogy az  $a_n$  sorozat konvergens, és határértéke az „ $a$ ” szám, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , melyre  $\forall n > n_0$  esetén  $|a_n - a| < \varepsilon$ .*

Elemezzük egy kicsit ezt a definíciót. Az  $|a_n - a| < \varepsilon$  egyenlőtlenség azt jelenti, hogy  $a_n$  és  $a$  távolsága kisebb, mint  $\varepsilon$ , ami pontosan akkor teljesül, ha  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ . Ezt úgy is mondhatjuk, hogy ha  $a_n$  az  $a$   $\varepsilon$  sugarú környezetén belül van.

2.1. ábra. Az  $\frac{1}{n}$  sorozat első néhány tagja

A definíció tehát azt mondja ki, hogy ha találunk olyan  $a$  számot, melyre igaz az, hogy akárhogyan is adom meg egy környezetét, a sorozat tagjai előbb-utóbb, vagyis valamilyen (a definícióban ez  $n_0$ ) indexű tagtól kezdve benne lesznek ebben a környezetben, akkor a sorozatot konvergensnek nevezzük,  $a$ -t pedig a sorozat határértékének.

Más szóhasználattal élve „ $n$  tart végtelenbe esetén az  $a_n$  tart (közelít)  $a$ -hoz”, vagy egyszerűen csak „ $a_n$  tart  $a$ -hoz”.

Jelölés:  $a_n \rightarrow a$  vagy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . A *lim* a latin „limes” (határ) szó rövidítése. Példánkban  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  vagy a másik fajta jelölést használva  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

A definícióban szereplő  $n_0$ -t küszöbindexnek nevezzük. A sorozatok alsó és felső korlátaihoz hasonlóan a küszöbindex fogalma sem egyértelmű; ha  $n_0$  küszöbindex, a definíció értelmében minden nála nagyobb természetes szám is az lesz. Célszerű lenne mindig a legkisebb küszöbindexet meghatározni, de ez gyakran igen nehéz feladat, így bonyolultabb esetekben le is mondunk róla, megelégszünk akármilyen küszöbindex megnevezésével.

Valójában a küszöbindex nem szám, hanem (mint láttuk, többértékű) függvény, hiszen függ  $\varepsilon$  választásától, ezért néha az  $n_0(\varepsilon)$  jelölést is használják rá.

Az  $\frac{1}{n}$  sorozat példáján megnézzünk egy konkrét bizonyítást sorozat konvergenciájára. Lássuk be tehát definíció szerint, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Mivel jelen esetben  $a_n = \frac{1}{n}$  és sejtésünk szerint  $a = 0$ , a definícióban szereplő jelöléssel az  $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ , vagyis az  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel  $n$  és  $\varepsilon$  is pozitív, ez ekvivalens az  $\frac{1}{\varepsilon} < n$  egyenlőtlenséggel. Ez azt jelenti, hogy ekkor lesz az  $a_n$  az  $a$ -nak az  $\varepsilon$  sugarú környezetén belül. Vagyis  $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$  jó választás (ahol  $[x]$  az  $x$  szám egészrészét jelenti).

Konkrétan tehát, ha mondjuk  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ , akkor  $n_0 = 101$  garantáltan megfelelő lesz; vagyis az  $\frac{1}{n}$  sorozat 101-től nagyobb indexű tagjai  $\frac{1}{100}$ -nál közelebb lesznek a határértékhez, a 0-hoz.

Az alábbi tétel szükséges és elégséges feltételt ad valós számsorozat konvergenciájára.

**2.3. Tétel.** *Egy sorozat pontosan akkor konvergens és tart  $a$ -hoz, ha a tetszőleges környezetén kívül csak véges sok eleme van a sorozatnak.*

Példák:

1. A  $2^{-n}$  sorozat hasonlóan viselkedik, mint az  $\frac{1}{n}$  sorozat; szigorúan monoton csökkenő, de minden tagja pozitív, valamint ha  $n$  elég nagy, a 0-t tetszőlegesen megközelítheti, könnyen igazolható, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$ .

2. Nem feltétlenül kell monotonnak lennie a sorozatnak, hogy konvergens legyen; a  $\frac{(-1)^n}{n}$  sorozat semmilyen értelemben véve sem monoton (sőt váltakozó előjelű), de belátható, hogy tart a 0-hoz.
3. Nyilván nem minden sorozat konvergens; a  $(-1)^n$  sorozat például ilyen, hiszen ha bármilyen valós szám körül egy, vagy annál kisebb sugarú környezetet veszünk, rajta kívül garantáltan végtelen sok pont lesz. Nem tart tehát egyetlen valós számhoz sem, vagyis nem konvergens.
4. Ha  $b_n = 0$ , vagyis  $b_n$  a konstans 0 sorozat, nyilván konvergens lesz és tart a 0-hoz, ugyanis  $b_n$ -nek a 0 tetszőleges sugarú környezetén kívül véges sok tagja van (nevezetesen egy sem). Hasonlót mondhatunk tetszőleges konstans sorozatra is, ezért  $\forall b \in \mathbb{R}$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} b = b$ .

A konvergens sorozat definíciójában szerepel a határérték fogalma is. Vajon tudnánk-e olyan fogalmat alkotni a konvergenciára, amelyben nem szerepel az a bizonyos „ $a$ ” szám? Ez a gondolat vezet el az alábbi tételhez.

**2.4. Tétel** (Cauchy-féle konvergencia-kritérium). *Az  $a_n$  sorozat pontosan akkor konvergens, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , melyre  $\forall n, m > n_0$  esetén  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .*

Ez a tétel egy újabb szükséges és elégséges feltételt ad sorozat konvergenciájára. Az igazság az, hogy a sorozatok elméletének általánosabb tárgyalásában, amikor sorozatokon nem valós számsorozatokat értünk, esetleg más távolságfogalmat használunk, csak a tételben szereplő egyik állítás igaz; a konvergens sorozat Cauchy tulajdonságú, de a megfordítás nem mindig igaz. Például, ha sorozat definíciójában a sorozat értékészletéből kivesszük a 0 számot, akkor ebben a rendszerben az  $\frac{1}{n}$  sorozat nem konvergens, de a Cauchy tulajdonsága nyilván megmarad.

Tekintsük most az  $c_n = n$  sorozatot. Nyilván nem tart egyetlen valós számhoz sem, de nem is „ugrál” olyan össze-vissza, mint a nem konvergens  $(-1)^n$  sorozat. „Érezzük”, hogy  $c_n$  „tart a végtelenbe”. A most következő definícióval ennek szellemében egészítjük ki a konvergencia fogalmát.

**2.13. Definíció.** *Akkor mondjuk, hogy az  $a_n$  sorozat tart a végtelenbe, ha  $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , melyre  $\forall n > n_0$  esetén  $a_n > K$ .*

Jelölés:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Hasonlóképpen definiálhatjuk a „mínusz végtelenbe tartás” fogalmát.

**2.14. Definíció.** *Akkor mondjuk, hogy az  $a_n$  sorozat tart a mínusz végtelenbe, ha  $\forall k \in \mathbb{R}$ -hez  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , melyre  $\forall n > n_0$  esetén  $a_n < k$ .*

Jelölés:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

A „végtelen” fogalmát csak olyan szókapcsolatokban használjuk (például valamely sorozat tart a végtelenbe), melyekben szerepét jól meghatározott módon definiáltuk.

A végtelenbe vagy mínusz végtelenbe tartást szokás tágabb értelemben vett konvergenciaként emlegetni.

**2.15. Definíció.** *Ha egy sorozat nem tart semmilyen valós számhoz (nem konvergens szűkebb értelemben) és nem konvergens tágabb értelemben sem, divergensnek nevezzük.*

Meg kell jegyezni, hogy van olyan felépítése a határértékszámítás elméletének, melyben a tágabb értelemben konvergens sorozatokat is divergensnek nevezik. Mindkét felépítésnek vannak előnyei és hátrányai is. Mi tehát a továbbiakban konvergensnek azokat a sorozatokat fogjuk nevezni, amelyek vagy tartanak egy valós számhoz, vagy a plusz, mínusz végtelen valamelyikéhez. Félreértések elkerülése végett – ha szükséges – a valós számhoz tartó sorozatokra a „szűkebb értelemben véve konvergens” kifejezést fogjuk használni.

Maximát jó eredménnyel használhatjuk sorozatok határértékének kiderítésére. Használjuk a `limit` függvényt. A végtelent az `inf`, a mínusz végtelent a `minf` (vagy a `-inf`) jelöli.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1}$$

```
(%i1) limit(2*n/(n+1),n,inf);
```

```
(%o1) 2
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -n - n^2$$

```
(%i2) limit(-n-n**2,n,inf);
```

```
(%o2) -∞
```

#### wxMaxima tipp

A wxMaxima az „Analízis” menü „Határérték számolása...” almenüjében biztosít lehetőséget a `limit` függvény egyszerű használatára.



### 2.4.2. Határértékre vonatkozó elemi tételek

**2.5. Tétel.** *Ha egy sorozat tart a plusz vagy mínusz végtelenbe, nem lehet korlátos.*

Ennek a megfordítása sem igaz; létezik divergens sorozat, mely nem korlátos.

Példák:

1. Ahogy már volt szó róla, az  $n$  sorozat tart a végtelenbe, ráadásul szigorúan monoton növekvő módon.
2. Nyilván a mínusz végtelenbe tart a  $-n$  sorozat, szigorúan monoton csökkenve.
3. A  $(-1)^n n$  nem korlátos, divergens sorozat.

Összetettebb példák bemutatására később kerül sor.

Eddig arról volt szó, hogy létezik, vagy nem létezik egy sorozatnak határértéke. Ha létezik határérték, létezhet több is? Nem.

**2.6. Tétel.** *Ha egy sorozat konvergens, akkor egy határértéke van.*

Hasznos tulajdonság állapítható meg monoton korlátos sorozatokról. Nevezetesen:

**2.7. Tétel.** *Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergál a pontos alsó korlátjához.*

Hasonlóan:

**2.8. Tétel.** *Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergál a pontos felső korlátjához.*

Például az  $\frac{1}{n}$  sorozat monoton csökkenő (valójában még az is igaz, hogy szigorúan monoton csökkenő), alulról korlátos, pontos alsó korlátja a 0, tart is oda.

Talán meglepő lehet, de véges sok (akár nagyon sok) tag megváltoztatása (elhagyása, hozzáírása, kicserélése) nem változtatja meg a sorozatok néhány jellemzőjét, mint például a korlátosságot és a konvergenciát. Ez azt jelenti, hogy ha véges sok tagot megváltoztatunk egy sorozatban, ha korlátos volt, az is marad, ha nem volt korlátos, továbbra sem lesz az, ha divergens volt, továbbra is az lesz, ha konvergált – akármilyen értelemben –, ezután is konvergens lesz, sőt, ugyanoda fog tartani. Például tekintsük az alábbi sorozatot:

$$d_n = \begin{cases} -13, & \text{ha } n \leq 1.000.000 \\ \frac{1}{n} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mindegy, hogy mi történik a sorozattal eleinte (most konkrétan az első egymillió tagja  $-13$ -mal egyenlő), ha a végén úgy is az  $\frac{1}{n}$  fog dominálni, tehát  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Mivel az  $\frac{1}{n}$  sorozat korlátos,  $d_n$  is az lesz, bár alsó korlátja  $-13$ , míg az  $\frac{1}{n}$  sorozaté 0, és a változtatás a monotonitást is „elrontotta”.

Mindebből az következik, hogy sok esetben elegendő, ha bizonyos tulajdonság **majdnem mindig** teljesül, amin azt értjük, hogy legfeljebb véges tagot leszámítva teljesül.

Több sorozat egymáshoz való viszonyát tárgyalják a most következő tételek.

**2.9. Tétel.** *Tegyük fel, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Ha  $a_n \leq b_n$  majdnem mindig, akkor  $a \leq b$ .*

A tételben szereplő  $a$  és  $b$  tetszőleges valós szám, sőt  $\infty$  vagy  $-\infty$  is lehet. Fontos tudni, hogy ha  $a_n < b_n$  teljesül majdnem mindig az előző tételben, akkor abból ugyanúgy csak  $a \leq b$  következik, nem pedig  $a < b$ . Például  $0 < \frac{1}{n}$  fennáll  $\forall n \in \mathbb{N}$ -re, de  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \not< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Ebből a tételből következik az alábbi állítás.

**2.10. Tétel (Rendőr-tétel).** *Tegyük fel, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Ha  $a_n \leq b_n \leq c_n$  majdnem mindig, akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$ .*

Az  $x$  itt is jelölhet tetszőleges valós számot, vagy a  $\infty$ ,  $-\infty$  szimbólumok valamelyikét.

A Rendőr-tétel egy hasznos technikai segédeszközhöz vezet.

**2.11. Tétel.** *Tegyük fel, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  és  $b_n$  korlátos sorozat. Ekkor fennáll  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .*

Vegyük észre, hogy a  $b_n$  sorozattól nem követeltük meg a konvergenciát. Legyen például  $a_n = \frac{1}{n}$  és  $b_n = \sin(n)$ . Nyilván  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  és  $b_n$  korlátos (és mellesleg divergens, de ez most nem érdekes). Ekkor a tétel állítása alapján  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ . Ugyanez a Rendőr-tétel alapján:  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$  és  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$  miatt következik  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ .

## 2.5. Részsorozat

Ismerkedjünk meg a részsorozat fogalmával.

**2.16. Definíció.** *Legyen  $a_n$  tetszőleges sorozat. Akkor mondjuk, hogy a  $b_n$  sorozat az  $a_n$  sorozat részsorozata, ha  $\exists c_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  szigorúan monoton növekvő sorozat, hogy  $b_n = a_{c_n}$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén.*

Példák:

1. Az  $\frac{1}{n}$  sorozatnak az  $\frac{1}{2n-1}$  sorozat részsorozata, hiszen látható, hogy az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

tagok közül ily módon kiválasztottuk a páratlan indexű tagokat:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$$

Ez esetben  $c_n = 2n - 1$ .

2. Ugyanennek az  $\frac{1}{n}$  sorozatnak az  $\frac{1}{3n}$  sorozat egy másik részsorozata. Itt  $c_n = 3n$ , ami azt eredményezi, hogy csak minden harmadik tag maradt meg az eredeti sorozatból.

A fenti példákból kitűnik, hogy a definícióban szereplő  $c_n$  sorozat szigorú monotonitására azért van szükség, hogy az eredeti sorozat legfeljebb olyan értelemben változzon meg, hogy elhagyunk a tagjai közül, de a megmaradók sorrendje ne módosuljon.

Lássunk néhány egyszerű, részsorozatokra vonatkozó tételt.

**2.12. Tétel.** *Egy sorozat pontosan akkor korlátos, ha minden részsorozata korlátos.*

Egy alulról korlátos sorozat alsó korlátja alsó korlátja lesz minden részsorozatának, egy felülről korlátos sorozat felső korlátja felső korlátja lesz minden részsorozatának, de ezek az állítások fordítva nem igazak. Lehet különböző egy sorozat és részsorozatának pontos alsó és pontos felső korlátja, bár ha a sorozat konvergens is, legalább egyik (vagy a pontos alsó, vagy a pontos felső korlátja) meg fog egyezni.

**2.13. Tétel.** *Egy sorozat pontosan akkor monoton valamilyen értelemben, ha minden részsorozata monoton ugyanabban az értelemben.*

**2.14. Tétel.** *Egy sorozat pontosan akkor konvergál valahova, ha minden részsorozata konvergens és ugyanoda konvergálnak.*

Példák:

1. A  $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$  sorozat részsorozata a  $\sin(n\pi) = 0$  (minden második tagot választottuk ki) és a  $\sin\left((4n-3)\frac{\pi}{2}\right) = 1$  (az első, majd minden negyedik tag adja a részsorozatot) valójában konstans sorozat is. Az első sorozat így 0-hoz, a második 1-hez tart. Ebből következik, hogy az eredeti,  $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$  sorozat divergens.
2. Az  $\frac{1}{n^2+1}$  sorozat az  $\frac{1}{n}$  sorozat részsorozata, hiszen a négyzetszám indexű tagok után közvetlenül következő tagokat választottuk ki:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18} \dots$$

Mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$  is fennáll.

**2.15. Tétel** (Bolzano–Weierstrass-tétel). *Korlátos sorozatból mindig kiválasztható valamilyen valós számhoz konvergáló részsorozat.*

**2.16. Tétel.** *Felülről nem korlátos sorozatból mindig kiválasztható végtelenhez konvergáló részsorozat.*

**2.17. Tétel.** *Alulról nem korlátos sorozatból mindig kiválasztható mínusz végtelenhez konvergáló részsorozat.*

Ha a sorozatok eleve konvergenssek a kívánt értelemben, a tételek állításai semmitmondóak. Egyéb esetekre nézzünk néhány példát:

1. A  $(-1)^n$  divergens, de korlátos sorozat részsorozata az azonosan 1 (így 1-hez tartó) sorozat, ami az eredeti sorozat minden második tagját tartalmazza.
2. A  $(-2)^n$  divergens, de sem felülről, sem alulról nem korlátos sorozat részsorozata a  $4^n$  végtelenhez tartó és a  $-2 \cdot 4^{n-1}$  mínusz végtelenhez tartó sorozatok.

## 2.6. Műveletek és határátmenet

Elemi műveleteket használva (összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás) egyszerű sorozatokból összetett sorozatokat képezhetünk. Ha ismerjük az alapul vett egyszerű sorozatok határértékeit, következtethetünk a belőlük képzett kifejezések határértékére a következő állítások segítségével. Lássuk tehát melyek azok az esetek, amikor a művelet és a határátmenet sorrendje garantáltan felcserélhető.

### 2.6.1. Az alapeset

**2.18. Tétel.** *Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  és  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , akkor*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$ ,
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = a - b$ ,
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ ,
5. *ha  $b \neq 0$  és  $\forall n \in \mathbb{N}$ -re  $b_n \neq 0$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ ,*
6. *ha  $a^2 + b^2 \neq 0$  és  $\forall n \in \mathbb{N}$ -re  $a_n > 0$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ .*

Az utolsó két szabálynál feltételekre volt szükség. Bizonyos esetekben ezen feltételek nem teljesülése esetén is létezni fog a kifejezés határértéke, valamint számos szabály érvényben marad akkor is, ha  $a$  vagy  $b$  (esetleg mindkettő) valós szám helyett a  $\infty$ ,  $-\infty$  szimbólumok valamelyike.

### 2.6.2. „Számolás a végtelennel”

A címben szereplő idézőjel nagyon is indokolt. A végtelen ugyanis nem szám, számolni sem lehet vele. Előfordul azonban, hogy számolhatunk végtelenhez tartó sorozatokkal. Igazak ugyanis az alábbi állítások.

**2.19. Tétel.** *Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \in \mathbb{R}$ , valamint  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$ , ahol  $\forall n \in \mathbb{N}$ -re  $d_n > 0$ , akkor*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_n = \infty$ ,
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ ,
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \begin{cases} \infty & , \text{ ha } c > 0 \\ -\infty & , \text{ ha } c < 0 \end{cases}$ ,
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$ ,
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{b_n} = \begin{cases} \infty & , \text{ ha } d > 1 \text{ (ez tartalmazza a } d = \infty \text{ esetet is)} \\ 0 & , \text{ ha } 0 < d < 1 \end{cases}$ .

A tételben szereplő állítások egy részét szokás rövidítve, szimbolikusan is használni, például  $\infty + c = \infty$ ,  $\infty + \infty = \infty$ ,  $\infty \cdot \infty = \infty$ ,  $\frac{c}{\infty} = 0$ ,  $\infty^\infty = \infty$ . Hangsúlyozzuk, ezek csak szimbólumok, a fenti állítások rövidített formái.

### 2.6.3. Határozatlan alakok

A határozatlan alakok a matematikai analízis legkülönösebb, egyben leghasznosabb objektumai. Megértésük nélkül nincs esélyünk akárcsak egy kicsit is elmélyedni a határértékszámítás rejtelmeiben. De nemcsak a konvergens sorozatok elméletében, hanem a differenciál és integrálszámítás megalapozásában is nélkülözhetetlenek.

Lássuk tehát miről is van szó. Az előző paragrafus jelöléseit használva határozatlan alakok a  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $0^0$ ,  $0^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  szimbólumokkal jelölt objektumok. Fontos hangsúlyozni, hogy az itt szereplő 0 és 1 sem számokat, hanem 0-hoz, illetve 1-hez tartó sorozatokat jelöl, ugyanúgy, mint ahogy a  $\infty$  szimbólum  $\infty$ -hez tartó sorozatot.

Hogy miért is nevezzük például a  $\infty - \infty$ -t határozatlan alaknak? Azért, mert csupán abból a tényből, hogy  $a_n \rightarrow \infty$  és  $b_n \rightarrow \infty$ , még semmit nem tudunk mondani az  $a_n - b_n$  sorozat határértékére nézve.

A következő példákban  $a_n \rightarrow \infty$  és  $b_n \rightarrow \infty$ , különbségük határértéke mégis más és más, sőt, az utolsó példában a határérték nem is létezik.

1. Ha  $a_n = 2n$ ,  $b_n = n$ , akkor  $a_n - b_n = n \rightarrow \infty$ ,
2. ha  $a_n = n + c$ ,  $b_n = n$ , akkor  $a_n - b_n = c \rightarrow c$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges,
3. ha  $a_n = n$ ,  $b_n = 2n$ , akkor  $a_n - b_n = -n \rightarrow -\infty$ ,
4. ha  $a_n = n + (-1)^n$ ,  $b_n = n$ , akkor  $a_n - b_n = (-1)^n$  divergens.

Több-kevesebb nehézséggel hasonló példákat lehetne gyártani minden határozatlan alakhoz.

A gyakorlatokon tárgyalt határértékszámítás feladatok általában valamilyen határozatlan alakú kifejezés vizsgálatát igénylik. A megoldás tipikus menete az, hogy átalakítjuk a kifejezést nem határozatlan alakúvá és ekkor a határátmenet és művelet sorrendjét felcserélve könnyedén kikalkuláljuk az eredményt, esetleg a megoldás során felhasználunk más egyéb tételt is.

## 2.7. Néhány nevezetes sorozat konvergenciája

Az alábbi tétel néhány állítását már ismerjük, a többi része is ismert eseteket általánosít.

### 2.20. Tétel.

$$q^n \begin{cases} \rightarrow \infty & , \text{ ha } q > 1 \\ \rightarrow 1 & , \text{ ha } q = 1 \\ \rightarrow 0 & , \text{ ha } -1 < q < 1 \\ \text{divergens és korlátos} & , \text{ ha } q = -1 \\ \text{divergens és nem korlátos} & , \text{ ha } q < -1. \end{cases}$$

Példák:

1.  $\frac{3 \cdot 5^n + (-1)^n}{2^n + 2} = \frac{3 \cdot (\frac{5}{2})^n + (-\frac{1}{2})^n}{1 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^n} \rightarrow \frac{3 \cdot \infty + 0}{1 + 2 \cdot 0} = \infty$
2.  $\frac{3^{n+1} + 2^{2n+3} - 100}{-2^{n-1} - (-2)^n + 2 \cdot 4^n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n} + \frac{2^{2n+3}}{4^n} - \frac{100}{4^n}}{-\frac{2^{n-1}}{4^n} - \frac{(-2)^n}{4^n} + 2} = \frac{3(\frac{3}{4})^n + 8 - 100(\frac{1}{4})^n}{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^n + 2}$   
 $\rightarrow \frac{3 \cdot 0 + 8 - 100 \cdot 0}{-\frac{1}{2} \cdot 0 - 0 + 2} = 4$
3.  $\frac{5^n + (-2)^n + 1}{3^n - 6^n} = \frac{(\frac{5}{6})^n + (-\frac{2}{6})^n + (\frac{1}{6})^n}{(\frac{3}{6})^n - 1} \rightarrow \frac{0 + 0 + 0}{0 - 1} = 0$
4.  $\frac{(-5)^n + (-2)^n}{3^n - 2^n} = \frac{(-\frac{5}{3})^n + (-\frac{2}{3})^n}{1 - (\frac{2}{3})^n}$  divergens, hiszen  $-\frac{5}{3} < -1$  miatt a páros indexű tagok a végtelenbe, a páratlan indexűek a mínusz végtelenbe tartanak.

A megoldások során több korábbi tételt is felhasználtunk. Az eredeti kifejezések többnyire  $\frac{\infty}{\infty}$  típusúak voltak, és addig alakítottuk át őket, amíg meg nem szűntek határozatlan alakúak lenni. Az átalakítás elve az volt, hogy megkerestük a nevező domináns tagját – a legnagyobb alapú exponenciális tagot – és azzal osztottuk be a nevezőt és a számlálót egyaránt. Ily módon nem változott a tört értéke, viszont előtűntek 0-hoz tartó tagok.

**2.21. Tétel.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$ , ahol  $c > 0$  valós szám, és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ .

Az első és utolsó sorozat példa a  $\infty^0$  típusú határozatlan alakra.

Ismert, hogy ha  $\alpha > 0$  és  $a > 1$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$ , mégsem azonos „sebességgel” tartanak a végtelenbe. A polinomiális, az exponenciális és a faktoriális növekedés ütemének minőségi különbségét mutatják az alábbi határértékek.

**2.22. Tétel.** Legyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $a > 1$ . Ekkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$ .

Valójában a második egyenlőtlenség az  $a > 0$  feltétel teljesülésével is fennáll.

A tétel egyszerű következménye, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^\alpha} = \infty$  is teljesül. A feladatok megoldása során gyakran használt szimbolikus  $\frac{1}{\infty} = 0$  azonosság miatt a tétel feltételeiből  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$  is következik.

A könnyebb megjegyezhetőség kedvéért írjuk fel a fenti tényeket az alábbi alakban is. Ha bevezetjük az következő jelölést:  $x_n \ll y_n$  jelentse azt, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \infty$ , az  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $a > 1$  feltételekkel

$$n^\alpha \ll a^n \ll n!$$

A legutóbbi példacsoport megoldási elvét használva:

$$1. \frac{6 \cdot 2^{2n-1} + n^{17} + 1}{4^{n+1} - 13n^2} = \frac{3 + \frac{n^{17}}{4^n} + (\frac{1}{4})^n}{4 - 13\frac{n^2}{4^n}} \rightarrow \frac{3 + 0 + 0}{4 - 13 \cdot 0} = \frac{3}{4}$$

$$2. \frac{3(n+1)! + 2^{3n+1} + 13n^{2,31} - 1}{-2n! + 210^n} = \frac{3(n+1) + 2\frac{8^n}{n!} + 13\frac{n^{2,31}}{n!} - \frac{1}{n!}}{-2 + \frac{210^n}{n!}}$$

$$\rightarrow \frac{3 \cdot \infty + 2 \cdot 0 + 13 \cdot 0 - 0}{-2 + 0} = -\infty.$$

**2.23. Tétel.** Az  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos.

Ebből következik, hogy létezik véges határértéke.

**2.17. Definíció.** Az  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  sorozat határértékét  $e$ -vel jelöljük.

**2.24. Tétel.** Legyen  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges konstans. Ekkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$ .

Most egy  $1^\infty$  típusú határozatlan alakú sorozatra láthattunk példát.

Az  $e$  neve Euler-féle szám. Értéke körülbelül 2,7182, valójában irracionális (nem szakaszos tizedes tört), sőt transzcendens szám, ami azt jelenti, hogy nem áll elő racionális együtthatós polinomegyenlet gyökeként. Az  $e$  a matematikai analízis legfontosabb konstansa, hasonlóan fontos szerepet játszik, mint a geometriában a  $\pi$ , ami mellesleg szintén transzcendens. Gyakran használjuk a  $\ln x = \log_e x$  jelölést. Az  $\ln x$  függvény neve természetes alapú logaritmus függvény.

Az  $e$  (jele a Maximában az %e) alapú exponenciális függvény az  $\exp$ .

$$e^2$$

```
(%i1) float(exp(2)); float(%e^2);
```

```
(%o1) 7.38905609893065
```

```
(%o2) 7.38905609893065
```

A Maximában logaritmusfüggvényből csak a természetes alapú van meg eleve, ez a  $\log$  függvény.

$$\ln e$$

```
(%i3) log(%e);
```

```
(%o3) 1
```

Természetesen lehetőségünk van más alapú logaritmussal is számolni, az ismert „áttérés más alapú logaritmusra” képletet használva.

$$\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2}$$

```
(%i4) float(log(8)/log(2));
```

```
(%o4) 3.0
```

Mivel már tudunk függvényt definiálni, egyszerűen elkészíthetjük a kívánt alapú logaritmusfüggvényt. Lássunk erre egy példát:

$$\log_2 x := \frac{\ln x}{\ln 2}$$

(%i5) `log2(x):=float(log(x)/log(2))$`

$$\log_2 8$$

(%i6) `log2(8);`

(%o6) 3.0

Az  $1^\infty$  típusú határértékeket általában visszavezetjük az  $(1 + \frac{c}{n})^n$  sorozatra.

Példák:

1. Egyszerű számításokkal

$$\left(\frac{2n-4}{2n+1}\right)^{-8n} = \left(1 + \frac{-5}{2n+1}\right)^{(2n+1)\frac{-8n}{2n+1}} = \left(\left(1 + \frac{-5}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{\frac{-8n}{2n+1}}$$

$\rightarrow (e^{-5})^{-4} = e^{20}$ , mivel  $\left(1 + \frac{-5}{2n+1}\right)^{2n+1} \rightarrow e^{-5}$ , hiszen ez a  $\left(1 + \frac{-5}{n}\right)^n$  sorozat egy részsorozata, valamint felhasználtuk, hogy

$$\frac{-8n}{2n+1} = \frac{-8}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow -4.$$

2.  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \geq 2^n \rightarrow \infty$  (felhasználtuk  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  szigorú monoton növekedését), ahonnan a 2.9. Tétel alapján könnyű látni, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \rightarrow \infty.$$

3. Az  $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$  azonosság és az előző példa eredménye miatt

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n^2} \rightarrow 0.$$

A Maxima felismeri az ismertebb nevezetes határértékeket, így az Euler-féle számot is.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(%i7) `limit((1+1/n)^n,n,inf);`

(%o7) %e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-4}{2n+1} \right)^{-8n}$$

(%i8) limit(((2\*n-4)/(2\*n+1))^-8\*n, n, inf);

(%o8) %e<sup>20</sup>

**2.25. Tétel.** Legyen  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$  és  $a_k b_l \neq 0$ . Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^{k-1} + a_{k-1} n^{k-2} + \dots + a_2 n + a_1}{b_l n^{l-1} + b_{l-1} n^{l-2} + \dots + b_2 n + b_1} = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } k < l \\ \frac{a_k}{b_l} & , \text{ ha } k = l \\ \infty & , \text{ ha } k > l \text{ és } a_k b_l > 0 \\ -\infty & , \text{ ha } k > l \text{ és } a_k b_l < 0. \end{cases}$$

Ez a tétel – amely  $\frac{\infty}{\infty}$  típusú sorozatokkal foglalkozik – annyit mond ki, hogy egy polinom/polinom típusú kifejezés határértéke 0, ha a számláló fokszáma kisebb a nevezőjénél, a főegyütthatók hányadosa, ha a számláló és nevező azonos fokú, valamint ha a számláló fokszáma nagyobb a nevezőjénél, akkor végtelen vagy mínusz végtelen aszerint, hogy a főegyütthatók előjele megegyezik, vagy nem.

Példák:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{23} + 22n^7 - 100}{-2n^{22} - 22n^{14} + 3n} = -\infty$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{23} + 22n^7 - 100}{2n^{22} - 22n^{14} + 3n} = \infty$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{23} + 22n^7 - 100}{-2n^{23} - 22n^{14} + 3n} = -\frac{3}{2}$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{23} + 22n^7 - 100}{-2n^{22} - 22n^{24} + 3n} = 0$

Legtöbbször a fentiekhez hasonló, de nem pontosan polinom/polinom törtfüggvény kifejezések határértékének kiszámolása sem reménytelen feladat. Például

$$\frac{3n^{\frac{3}{2}} + 2n^2 + 11}{-2\sqrt[4]{n^7} - \sqrt{4n^4 + 3n}} = \frac{\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}} + 2 + \frac{11}{n^2}}{\frac{-2}{n^{\frac{1}{4}}} - \sqrt{4 + \frac{3}{n^3}}} \rightarrow \frac{0 + 2 + 0}{0 - \sqrt{4 + 0}} = -1. \text{ A számolás elve}$$

itt is az volt, hogy a nevezőben megkerestük a legnagyobb rendű tagot – ez most  $n^2$  volt, hiszen egy negyedfokú tag volt a gyök alatt – és ezzel osztottuk be a számlálót és a nevezőt. Láthatjuk, hogy ilyen típusú kifejezések határértékének kalkulálására is használhatjuk az előző tétel elvét – ez esetben a határérték a főegyütthatók hányadosa lett.

Végül nézzünk két példát kezdetben  $\infty - \infty$  határozatlan alakú kifejezés határértékének számolására.

Az első példában az  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$  azonosságot használjuk, hogy megszabaduljunk a határozatlan alaktól, míg a másodikban közös nevezőre hozunk, így vezetjük vissza kifejezésünket egy  $\frac{\infty}{\infty}$  típusú polinom/polinomra, mely határértékének számolására tételt ismerünk.

$$1. \quad \sqrt{n^2 + 1} - n = (\sqrt{n^2 + 1} - n) \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2. \quad \frac{3n^2}{6n - 1} - \frac{2n^2 + n - 1}{4n + 1} = \frac{-n^2 + 7n - 1}{24n^2 + 2n - 1} \rightarrow -\frac{1}{24}.$$

A 4.5. fejezetben példákat láthatunk az eddig még nem tárgyalt határozatlan alakokra is.

## 2.8. Feladatok

- Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat! Ha konvergens, számolja ki a határértéküket, valamint keressen  $\varepsilon = 0,01$ -hoz küszöbindexet!

$$(a) \quad a_n = \frac{6n - 1}{2n + 3}$$

$$(b) \quad b_n = \frac{2^n - 3}{2^n - 9}$$

$$(c) \quad c_n = \frac{-n^2 - 1}{2n^2 + 3}$$

$$(d) \quad d_n = \frac{n}{n^2 - 2}$$

$$(e) \quad e_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$$

- Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékeit!

$$(a) \quad \frac{2n^2 - 3n^3 + 1}{n^2 + 1}$$

$$(b) \quad \sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}$$

$$(c) \quad \frac{2n^2 - \sqrt[4]{3n^7 + 2n} + \sqrt{n^4 + \pi}}{n^2 + 1}$$

$$(d) \quad \left( \frac{n - 1}{2n + 2} \right)^{2011n}$$

$$(e) \quad \frac{2^{3n+3} + e^{3n+2} + n^{13}2^{n+3}}{8^{n-1} - \pi 5^n}$$

$$(f) \quad \left( \frac{2n + 3}{2n + 2} \right)^{n-17}$$

$$(g) \frac{3n^2 + 1}{2n - 1} + \frac{1 - n^2}{2n - 1}$$

$$(h) \frac{n^2 + \sqrt{n^3 + 2}}{\sqrt[3]{2n^2 + 5\sqrt[3]{n^5}}}$$



## 3. fejezet

# Sorok

### 3.1. Véges és végtelen összegzés, példák

Legyen  $a_n$  tetszőleges sorozat és  $l \leq k$  természetes számok. Az

$$a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{k-1} + a_k$$

összegre a  $\sum_{i=l}^k a_i$  jelölést fogjuk használni.

**3.1. Definíció.** Legyen  $a_n$  tetszőleges sorozat. Az  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$  számot az  $a_n$  sorozat  $n$ -edik részletösszegének,  $S_n$  sorozatot az  $a_n$  sorozat által generált sornak,  $a_n$  számot a sor  $n$ -edik tagjának nevezzük.

Sorozatok véges összegzésére (vagyis az  $n$ -edik részletösszeg kiszámítására is) a Maxima a `sum` eljárást használja. Például

$$1^3 + \cdots + 10^3 = \sum_{i=1}^{10} i^3$$

értéket így kaphatjuk meg:

```
(%i1) sum(i^3,i,1,10);
```

```
(%o1) 3025
```

Komputeralgebrai rendszerünk egészen jól tud (véges) formális összegekkel bántani. Tekintsük az alábbi (látszólag)  $n$ -től függő kifejezést (sorozatot):

$$\frac{\sum_{k=1}^n k^3}{\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2}$$

```
(%i2) sum(k^3,k,1,n)/(sum(k,k,1,n))^2;
```

$$(\%o2) \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2}$$

A `simpsum` eljárást használva az összegeket zárt alakban kapjuk meg. Figyeljünk a szintaktikára; a kifejezés után vessző van!

`(%i3) %, simpsum;`

$$(\%o3) \frac{n^4+2n^3+n^2}{(n^2+n)^2}$$

Aztán némi alakítás után megkapjuk, hogy valójában ez az azonosan 1 sorozat.

**3.2. Definíció.** Legyen  $a_n$  tetszőleges sorozat és  $S_n$  az  $a_n$  sorozat által generált sor. A  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  határértéket – ha létezik – a sor összegének nevezzük. Ha a határérték nem létezik, a sort divergensnek nevezzük.

Jelölés:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . (Ha szükséges, az összegzést természetesen nem csak 1-től, hanem nagyobb természetes számtól is kezdhetjük.)

## 3.2. Feladatok

Példák:

1. Mivel

$$\begin{cases} 1 = 2 - 1 \\ 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} \\ \vdots \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \end{cases},$$

ezért  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 - 0 = 2$ .

2. Vizsgáljuk meg a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  sor, nevezetesen a harmonikus sor összegét. Könnyű látni, hogy

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{10} > \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \\ \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{100} > \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{100} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} \\ \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{1000} > \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{1000} = \frac{900}{1000} = \frac{9}{10} \\ \vdots \end{cases},$$

így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{1000}\right) + \dots > \\ 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \dots = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{9}{10}\right) = 1 + \frac{9}{10} \cdot \infty = \infty, \text{ vagyis}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

3. Mivel  $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , ezért az így kapott „teleszkóp”-összeggel számolva

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ így} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

4. Ha  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} < \infty$ . Ha  $\alpha = 1$ , az úgynevezett kvadrátikus sort kapjuk („bázeli probléma”). Konkrétan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A Maxima elboldogul bizonyos nevezetes sorokkal, a kvadrátikus sorral is.

(%i5) `sum(1/n^2,n,1,inf);`

$$(\%o5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(%i6) `%, simpsum;`

$$(\%o6) \frac{\pi^2}{6}$$

Ha azonban kicsit más formában kapja ugyanazt a feladatot, abba beletörök a bicskájába.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$$

(%i7) `sum(1/(n-1)^2,n,2,inf);`

$$(\%o7) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$$

(%i8) `%, simpsum;`

$$(\%o8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+1}$$

Lám, ezzel az alakkal nem tud mit kezdeni. Általában sajnós elmondható, hogy a Maxima végtelen formális összegzésekben elég gyengén teljesít.

Gyakorlati számításoknál azonban sokszor elegendő a közelítő megoldás. Például nézzük meg, mennyire közelíti az elméleti  $\frac{\pi^2}{6}$ -ot a 100.000-ig tartó összegzés. (Ha nem túl erős gépünk van, először próbálkozzunk kisebb számmal, mert a számolás lehet hogy túl sokáig fog tartani!)

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=2}^{100000} \frac{1}{(n-1)^2} \right|$$

```
(%i9) float(abs(%pi^2/6-sum(1/(n-1)^2, n, 2, 100000)));
```

```
(%o9) 1.0000049999847604 × 10-5
```

Vagyis a kapott eredmény négy tizedesre pontos, ami jónak mondható.

5. Tekintsük a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  sort. Vegyük észre, hogy  $S_{2n-1} = -1$  és  $S_{2n} = 0$ , így  $S_n$  divergens, ami a sor divergenciáját jelenti.

#### wxMaxima tipp

A véges és végtelen sorok összegének számolására alkalmas `sum` eljárás wxMaxima használata esetén az „Analízis” menü „Összeg számítás...” almenüjeként érhető el.



### 3.3. Mértani sor

Középiskolás tanulmányainkból ismerhetjük a mértani sorozatot. Az  $a_n$  sorozatot mértani sorozatnak neveztük, ha szomszédos tagjainak hányadosa állandó, vagyis ha  $\exists q \in \mathbb{R}$ , melyre  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . A  $q$  számot kvóciensnek szokás nevezni. A definíció kizárja az  $a_1 = 0$  és  $q = 0$  esetek mindegyikét, minden más esetben létrejön mértani sorozat, ekkor  $a_n = a_1 q^{n-1}$ . Egyszerű képlet ismert a mértani sorozat  $n$ -edik részletösszegére:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} & , \text{ ha } q \neq 1 \\ na_1 & , \text{ ha } q = 1 \end{cases}$$

Mivel  $-1 < q < 1$  esetén  $q^n \rightarrow 0$ , könnyű látni, hogy igaz az alábbi tétel.

**3.1. Tétel.** Legyen  $a_n = a_1 q^{n-1}$ . Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} & , \text{ ha } -1 < q < 1 \\ \infty & , \text{ ha } q \geq 1 \text{ és } a_1 > 0 \\ -\infty & , \text{ ha } q \geq 1 \text{ és } a_1 < 0 \end{cases} ,$$

míg  $q \leq -1$  esetén a mértani sor divergens.

Példák:

1. Számoljuk ki a  $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{2^{2n-1}}{7 \cdot 5^{n+1}}$  összeget! Mivel  $q = \frac{3 \frac{2^{2n+1}}{7 \cdot 5^{n+2}}}{3 \frac{2^{2n-1}}{7 \cdot 5^{n+1}}} = \frac{4}{5}$ , a sor konvergens. Az  $a_1 = 3 \frac{2^{2 \cdot 1 - 1}}{7 \cdot 5^{1+1}} = \frac{6}{175}$ , így a keresett összeg  $\frac{\frac{6}{175}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{6}{35}$ . Ugyanez Maximával a következőképpen fest.

```
(%i10) sum(3*2^(2*n-1)/(7*5^(n+1)),n,1,inf), simpsum;
```

```
(%o10) 6/35
```

2. Vajon mennyi az  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \cdot (-12)^{n-7}}{3^{2n+1}}$  összeg értéke? Mivel  $q = \frac{9 \cdot (-12)^{n-6}}{3^{2n+3}} = \frac{9 \cdot (-12)^{n-7}}{3^{2n+1}} = -\frac{12}{9} < -1$ , a sor divergens, sorösszegekről nem beszélhetünk. Figyeljük meg, hogy az ilyen esetekben  $a_1$  kiszámolása fölösleges; az első tag nem befolyásolja a divergenciát.

A divergenciáról a Maxima a következőképpen tájékoztat.

```
(%i11) sum((9*(-12)^(n-7))/(3^(2*n+1)),n,1,inf), simpsum;
```

```
sum: sum is divergent.
```

```
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

3. Keressük az  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^n}$  összeg értékét. A sor konvergens, hiszen  $q = \frac{3^n}{5^{n+1}} = \frac{3}{5}$ . Mivel most a sor összegzése az  $a_n$  általános sorozat harmadik tagjával kezdődik,  $a_1$  helyett  $a_3$ -ra lesz szükségünk. Az  $a_3 = \frac{3^{3-1}}{5^3} = \frac{9}{125}$ , így a keresett összeg  $\frac{\frac{9}{125}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{9}{50}$ .

### 3.4. Feltételek sorok konvergenciájára

A sorokkal kapcsolatos legfontosabb kérdések hogy konvergensek-e, és ha igen, véges-e az összeg. Nagyon speciális sorozatok esetén a konkrét összeget is kiszámolhatjuk. Sorok összegének számolása az egyszerű eseteken kívül (teleszkóp összeg, mértani sor) általában igen nehéz feladat, meghaladja jegyzetünk kereteit.

Felmerül a kérdés, mi a szükséges és elégséges feltétele egy sor konvergenciájának, és ha az összeg létezik, mikor lesz véges. Sajnos nincs egyszerű válasz ezekre a kérdésekre. Az egyik irány – a szükséges feltétel – azonban könnyen elintézhető, ugyanis egyszerű megfontolások alapján könnyű látni, hogy igaz az alábbi tétel.

**3.2. Tétel.** *Ha az  $a_n$  sorozat által generált sor konvergens és határértéke véges, akkor  $a_n \rightarrow 0$ .*

Tehát ha a sor általános tagja nem tart 0-hoz, a sorösszeg – még ha létezik is, – véges nem lehet.

Példák:

1. A  $(-1)^n$  sorozat divergens és  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  is az.
2. Tudjuk, hogy  $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ . Viszont  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ , ahonnan  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \infty$  következik. (Az igazoláshoz szükséges a 2.9. Tétel, vagy a később kimondásra kerülő 3.9. Tétel.)

Sajnos a tétel megfordítása nem igaz. Például elég megfontolni, hogy mind a harmonikus, mind a kvadratikussor általános tagja 0-hoz tart, de a harmonikus sor összege végtelen, míg a kvadratikussoré véges.

Speciális, úgynevezett alternáló (váltakozó előjelű sorozatból származó) sorokról szól a következő tétel.

**3.3. Tétel (Leibniz-tétel).** *Ha  $a_n$  monoton csökkenő sorozat és  $a_n \rightarrow 0$ , akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  összeg létezik és véges.*

A tétel feltételeinek teljesülése esetén a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  alakú sorokat **Leibniz-típusú soroknak** nevezzük.

Az alábbi tétel a Leibniz-típusú sorok becslésének fontos eszköze.

**3.4. Tétel.** *Legyen  $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$  egy Leibniz-típusú sor  $n$ -edik részletösszege, valamint  $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$ . Ekkor  $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ .*

Példa:

Tekintsük az  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$  részletösszeget. Adjunk becslést az  $s \approx s_{99}$  közelítés hibájára! Könnyű látni, hogy a részletösszeghez tartozó sor Leibniz-típusú. Az előző tételt használva  $|s - s_{99}| \leq 0,0001$ .

### 3.4.1. Műveletek sorokra

Sorozatokhoz hasonlóan a sorokat is összeadhatjuk, konstanssal szorozhatjuk, az alábbi módon.

**3.5. Tétel.** Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_a$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_b$  és  $s_a, s_b, c \in \mathbb{R}$ , akkor

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot s_a$ ,
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = s_a + s_b$ .

Ha az  $s_a, s_b$  összegekre megengedjük, hogy a  $\infty, -\infty$  szimbólumok valamelyikével legyenek egyenlők, a végtelennel, mint szimbólummal való – sorozatoknál ismertett – számolási elvekkel járhatunk el, különös tekintettel a határozatlan alakokra.

Nagyon oda kell figyelni a végtelen sorokkal való számolások során, mert van néhány tulajdonság, ami a véges összegzésekkel ellentétben nem lesz igaz rájuk.

Ismert, hogy a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  sor divergens. Viszont  $-1 + (1-1) + (1-1) + \dots = -1$ , ami első ránézésre ellentmondásnak tűnik, viszont valójában csak arra példa, hogy végtelen sorokat nem mindig zárójelezhetünk át. Ez meglepő lehet, hiszen véges tag összegzése során bárhogyan is zárójelezünk, az összeg nem változik. Ez a probléma valójában csak divergens soroknál léphet fel, ugyanis igaz az alábbi tétel:

**3.6. Tétel.** Konvergens sort tetszőlegesen át zárójelezhetünk, konvergens marad és az összeg nem változik.

A másik szituáció talán még ennél is különösebb. Az alábbi, úgynevezett Leibniz-sor Leibniz típusú, így a sor összeg ( $s$ -sel jelöltük) létezik és véges.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = s.$$

Mivel  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$ -re, ezért  $s = 1 - \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) \dots > 1 - \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2}$ . Másrészt  $s = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + \dots < 1 + 0 + 0 + \dots = 1$ , tehát a sor összeg  $\frac{1}{2} < s < 1$ . Most adjuk össze  $s$ -et és  $\frac{s}{2}$ -t. Az aláhúzással jelölt tagok kiesnek, a föléhúzással jelölt tagokból kettő van.

$$\begin{aligned} \frac{3s}{2} &= 1 - \frac{1}{\underline{2}} + \frac{1}{\underline{3}} - \frac{\overline{1}}{\underline{4}} + \frac{1}{\underline{5}} - \frac{1}{\underline{6}} + \frac{1}{\underline{7}} - \frac{\overline{1}}{\underline{8}} + \frac{1}{\underline{9}} - \frac{1}{\underline{10}} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{\underline{2}} - \frac{\overline{1}}{\underline{4}} + \frac{1}{\underline{6}} - \frac{\overline{1}}{\underline{8}} + \frac{1}{\underline{10}} \dots \\ &= 1 + \frac{1}{\underline{3}} - 2 \cdot \frac{1}{\underline{4}} + \frac{1}{\underline{5}} + \frac{1}{\underline{7}} - 2 \cdot \frac{1}{\underline{8}} + \frac{1}{\underline{9}} + \frac{1}{\underline{11}} - 2 \cdot \frac{1}{\underline{12}} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{\underline{3}} - \frac{1}{\underline{2}}\right) + \left(\frac{1}{\underline{5}} + \frac{1}{\underline{7}} - \frac{1}{\underline{4}}\right) + \left(\frac{1}{\underline{9}} + \frac{1}{\underline{11}} - \frac{1}{\underline{6}}\right) + \dots \\ &\stackrel{?}{=} s \end{aligned}$$

Az átalakításokat elvégezve végül látható, hogy az eredeti sor átrendezését kapjuk, így az összeg értéke  $s$ . Mi van?! Hiszen innen  $\frac{3s}{2} = s$ , ahonnan  $s = 0$  következik, de ez ellentmond a korábban igazolt  $\frac{1}{2} < s < 1$ -nek! Vajon hol a hiba?

Csak az utolsó lépésben tévedtünk. Azt gondoltuk, hogy ha egy konvergens sor tagjait átrendezzük, az összege változatlan marad. Ez nem mindig igaz, íme a bizonyítás rá. Konkrétan, ebben az esetben a „?” jelekkel megjelölt egyenlőség nem áll fenn. Meglepő, de a végtelen összegzésre nem igaz a véges tag összeadására teljesülő kommutativitás törvénye.

Egyébként belátható, hogy a fentiekben  $s$ -sel jelölt Leibniz-sor összege pontosan  $\ln 2$ .

### 3.4.2. Abszolút és feltételesen konvergens sorok

Ezeket a példákat átnézve különösen fontosnak találhatjuk azokat a sorokat, melyekkel ilyen váratlan kellemetlenségek nem fordulhatnak elő.

**3.3. Definíció.** A  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  sorösszeg létezik és véges.

Nem minden konvergens és véges összegű sor abszolút konvergens, ahogy azt az előzőekben a Leibniz-sor esetén láthattuk is.

**3.4. Definíció.** Ha egy sor nem abszolút konvergens, de a sorösszeg létezik és véges, a sort feltételesen konvergensnek nevezzük.

Tehát a Leibniz-sor feltételesen konvergens.

**3.7. Tétel.** Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is, és összege véges.

**3.8. Tétel.** Ha az abszolút konvergens sor tagjainak sorrendjét megváltoztatjuk, a sor konvergens marad és összege nem változik.

Sőt az is igaz, hogy feltételesen konvergens sorok esetén mindig lehet hasonló anomáliát találni.

Példák:

1. A Leibniz sor feltételesen konvergens, hiszen az összege  $\ln 2$ , de ha általános tagjának abszolút értékét vesszük, az úgy keletkező harmonikus sor csak tágabb értelemben konvergens.
2. Ha  $-1 < q < 1$ , a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$  mértani sor abszolút konvergens.

## 3.5. Pozitív tagú sorok konvergenciakritériumai

Pozitív tagú sorok divergensnek nem lehetnek, a véges vagy végtelen sorösszeg mindenképpen létezik. Ha a sorösszeg véges, nyilvánvaló, hogy pozitív tagú sorok esetén ez automatikusan abszolút konvergenciát is eredményez.

Ebben az alfejezetben néhány jól használható elégséges feltételt találunk arra, hogy mikor lesz véges, mikor pedig végtelen a sorösszeg.

**3.9. Tétel.** (Összehasonlító- vagy majoráns kritérium) Ha  $a_n \geq b_n$  majdnem minden  $n$ -re, akkor

1. ha  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ,
2. ha  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ .

Ha feltesszük, hogy  $0 \leq b_n$  is teljesül majdnem minden  $n$ -re, az is igaz lesz, hogy a tétel első felében  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  valamilyen valós szám (vagyis nem lehet  $-\infty$ ). Ez a rész egyébként annyira „természetes” (valójában a Sorozatok fejezetben lévő 2.9. Tétel egyszerű következménye), hogy a korábbi példák bemutatása során már többször használtuk is.

Példák:

1. Mivel  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ , így  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n} = \infty$ .
2. Korábban beláttuk, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$ . Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

rendezéssel  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$  adódik. Másrészt  $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , így tehát

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Ez összhangban van azzal, hogy a kvadratikus sor összege  $\frac{\pi^2}{6}$ .

**3.10. Tétel** (D’Alembert-féle hányadoskritérium). Ha  $a_n > 0$  majdnem minden  $n$ -re és  $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  esetén,

1. valamint  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ,
2. és ha  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ .

Példák:

1. Véges-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  összeg? Mivel  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1$ , ezért a válasz: igen.

2. Mi a helyzet a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  összeggel? Mivel  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$ , így az összeg végtelen.

Mellesleg ha megvizsgáljuk a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  összeget, azt kapjuk, hogy ez esetben  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ , így ez az összeg véges, amiből  $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$  és mivel a tagok pozitívak,  $\frac{n^n}{n!} \rightarrow \infty$  következik.

3. Vizsgáljuk meg a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$  összeget! Mivel  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \frac{n+1}{5n} \rightarrow \frac{1}{5} < 1$ , ezért a sor összege véges.

Ha egy sor összege a D'Alembert-féle hányadoskritériumot használva végesnek bizonyul, konkrét felső becslést is adhatunk annak számszerű értékére. Járjunk el így ezen példa esetén. Mivel  $\forall n \in \mathbb{N}$ -re  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5n} \leq \frac{2}{5} = q$ , teljesülni fog  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} < \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{3}$ . Ez esetben az alábbi alsó becslés is adja magát:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ , így beláttuk, hogy  $\frac{1}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} < \frac{1}{3}$ .

**3.11. Tétel** (Cauchy-féle gyökkritérium). *Ha  $a_n \geq 0$  teljesül  $\forall n$ -re,*

1. *valamint  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ,*
2. *és ha  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ .*

Valójában ez esetben sem szükséges okvetlenül minden  $a_n$ -nek pozitívnak lenni, véges sok páratlan  $n$ -re itt is kivételt tehetünk (, de csak páratlanokra, hiszen csak ez esetben végezhető el negatív számokra az  $n$ -edik gyökvonás a valós számok körében).

Példák:

1. Az előbb vizsgált  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$  összeg végességét a gyökkritérium is hamar megadja:  $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{5} \rightarrow \frac{1}{5} < 1$ .
2. Lássuk be  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  végességét! Egyszerű számítással kapjuk, hogy  $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 < 1$ , amiből következik a kívánt állítást.

Sem a hányados-, sem a gyökkritérium nem tud mit kezdeni a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$  típusú sorokkal, hiszen ekkor  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \rightarrow 1$  (, bár  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha < 1 \forall n \in \mathbb{N}$ ) és

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} \rightarrow 1$  (, bár  $\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$ ), erre az esetre ugyanis a kritériumok semmit nem mondanak. Sem a hányados-, sem a gyökkritérium nem használható tehát sem a harmonikus sor végtelenségének, sem a kvadratikussor végességének bizonyítására.

### 3.6. Feladatok

1. Mennyivel egyenlők az alábbi sorösszegek?

(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

(b)  $\sum_{n=3}^{\infty} 22 \frac{2^{4n-2}}{3^{2n+7}}$

2. Mennyivel egyenlők az alábbi mértani sorösszegek?

(a)  $\frac{4}{9} - \frac{1}{3} + \dots$

(b)  $\frac{4}{7} - \frac{3}{5} + \dots$

3. Végesek-e az alábbi sorösszegek?

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17n}{31^n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n)!}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + |\sin n|}{n^2}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(30n)!}{2011^n}$



## 4. fejezet

# Függvények

### 4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben a függvények alapvető tulajdonságairól, valamint határértékükről és a folytonosságról lesz szó. Mivel a sorozatok is (és így a sorok is) speciális függvények, tulajdonságaik egyes esetekben hasonlóak a függvények tulajdonságaihoz, azonban itt az általános valós  $\rightarrow$  valós függvényekkel foglalkozunk.

Függvényekkel már korán, az általános iskolában találkozunk olyan megközelítésben, hogy a függvény egy hozzárendelési szabály, egy „szám gép”, amibe ha bedobunk egy számot, kiad egy (általában) másikat. A „gép” fontos tulajdonsága, hogy ha ugyanazt a számot dobjuk be, mindig ugyanazt a számot adja ki, vagyis a hozzárendelés egyértelmű.

A valós függvény tényleges definíciója is ezt az elvet követi.

**4.1. Definíció.** *Tekintsük az  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  halmazt (vagyis azon rendezett számpárok halmazát, melyek mindkét eleme valós). Az  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tetszőleges nemüres részhalmazát (valós) relációnak nevezzük.*

**4.2. Definíció.** *Legyen  $\varrho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  reláció. Ekkor az  $A = \bigcup_{(a,b) \in \varrho} a$  halmazt  $\varrho$  értelmezési tartományának, a  $B = \bigcup_{(a,b) \in \varrho} b$  halmazt pedig  $\varrho$  értékkészletének nevezzük.*

Ekkor valójában  $\varrho \subseteq A \times B$  is teljesül.

**4.3. Definíció.** *Legyen  $\varrho \subseteq A \times B$  reláció. Ha  $\forall (a, b) \in \varrho$  és  $(a, c) \in \varrho$  esetén  $b = c$  teljesül, a relációt függvénynek nevezzük és a  $\varrho : A \rightarrow B$ , valamint  $(x, y) \in \varrho$  esetén a  $\varrho(x) = y$  jelöléseket használjuk.*

A továbbiakban ha függvényről beszélünk, mindig valós függvényre fogunk gondolni.

A sorozatokhoz hasonlóan az  $f(x)$  jelölést egyszerre alkalmazzuk magára a függvényre és a függvény  $x$  helyen vett értékére.

A későbbiekben szükségünk lesz az összetett függvény fogalmára.

**4.4. Definíció.** *Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  és a  $g : B \rightarrow C$  függvényeket. Ekkor az*

$$f(g(x)) = \{(x, z) \mid (x, y) \in A \times B, (y, z) \in B \times C\}$$

*függvényt összetett függvénynek nevezzük.*

A függvények Maximán belüli kezelését az 1.6.1. alfejezetben már megismerhettük. Megadásuk, ha szükséges, – a sorozatok összetett megadásához hasonlóan – történhet block-on belül is.

## 4.2. Függvények monotonitása

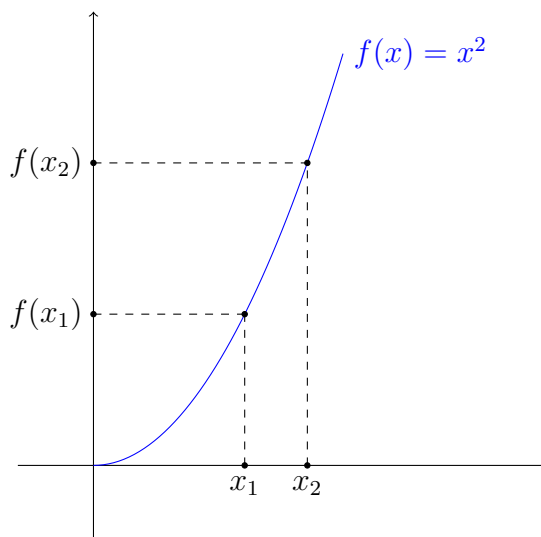
**4.5. Definíció.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvény monoton növekvőnek nevezzük, ha  $f(x_1) \leq f(x_2)$  teljesül  $\forall x_1 < x_2$   $A$ -beli elemre.

**4.6. Definíció.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvény szigorúan monoton növekvőnek nevezzük, ha  $f(x_1) < f(x_2)$  teljesül  $\forall x_1 < x_2$   $A$ -beli elemre.

**4.7. Definíció.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvény monoton csökkenőnek nevezzük, ha  $f(x_1) \geq f(x_2)$  teljesül  $\forall x_1 < x_2$   $A$ -beli elemre.

**4.8. Definíció.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvény szigorúan monoton csökkenőnek nevezzük, ha  $f(x_1) > f(x_2)$  teljesül  $\forall x_1 < x_2$   $A$ -beli elemre.

Ezeket a tulajdonságokat lokálisan ( $A$  valamely részhalmazán) is szokás használni. Például az  $f(x) = x^2$  függvény minden valós számra értelmezett, a negatív számok halmazán szigorúan monoton csökkenő, a pozitív számok halmazán szigorúan monoton növekvő, bár (az eredeti definíciók értelmében) nem monoton semmilyen értelemben sem. (Lásd a 4.1. ábrát.)



4.1. ábra. Az  $x^2$  a pozitív számok halmazán

A sorozatokhoz hasonlóan a függvényekre is igaz, hogy ha szigorúan monoton növekvők, akkor monoton növekvők is, és ha szigorúan monoton csökkenők, akkor monoton csökkenők is.

Általában nem egyszerű egy függvényről eldönteni, hogy monoton-e, és ha igen, akkor milyen értelemben, valamint hol, értelmezési tartományának melyik részhalmazán. Ezzel az 5. fejezetben fogunk foglalkozni, ha megismertük a hozzávaló technikai apparátust.

### 4.3. Függvények korlátossága

**4.9. Definíció.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvényt felülről korlátosnak nevezzük, ha  $\exists K \in \mathbb{R}$ , melyre  $f(x) \leq K$  teljesül  $\forall x \in A$  esetén. Ekkor  $K$ -t felső korlátnak nevezzük.

Vagyis ha találunk felső korlátot a függvénynek, az felülről korlátos lesz.

**4.10. Definíció.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvényt alulról korlátosnak nevezzük, ha  $\exists k \in \mathbb{R}$ , melyre  $k \leq f(x)$  teljesül  $\forall x \in A$  esetén. Ekkor  $k$ -t alsó korlátnak nevezzük.

Vagyis ha találunk alsó korlátot a függvénynek, az alulról korlátos lesz.

**4.11. Definíció.** Az  $f(x)$  függvényt korlátosnak nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

A sorozatoknál tapasztaltak itt is igazak, a felső és alsó korlát fogalma nem határoz meg egyértelműen egy számot. Ugyanis ha egy függvény felülről korlátos és  $K$  felső korlátja, akkor minden  $K$ -nál nagyobb szám is felső korlátja lesz, ha alulról korlátos és  $k$  alsó korlátja, akkor minden  $k$ -nál kisebb szám is alsó korlátja lesz a függvénynek.

**4.12. Definíció.** Ha  $K$  az  $f(x)$  függvény felső korlátja, de  $\forall K' < K$  nem felső korlátja a függvénynek (vagyis nincs nála kisebb felső korlát), akkor  $K$ -t pontos felső korlátnak (szuprémumnak) nevezzük.

**4.13. Definíció.** Ha  $k$  az  $f(x)$  függvény alsó korlátja, de  $\forall k' > k$  nem alsó korlátja a függvénynek (vagyis nincs nála nagyobb alsó korlát), akkor  $k$ -t pontos alsó korlátnak (infimumnak) nevezzük.

**4.14. Definíció.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvény maximum helyén azt az  $x_0 \in A$  számot értjük, melyre  $f(x_0) \geq f(x)$  teljesül  $\forall x \in A$  esetén. Ekkor  $f(x_0)$ -t maximum értéknek nevezzük.

**4.15. Definíció.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvény minimum helyén azt az  $x_0 \in A$  számot értjük, melyre  $f(x_0) \leq f(x)$  teljesül  $\forall x \in A$  esetén. Ekkor  $f(x_0)$ -t minimum értéknek nevezzük.

Minimum és maximum nem mindig létezik, még korlátos függvények esetén sem. Például az  $x : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$  függvénynek bár létezik maximuma, az 1, minimuma nem létezik, bár infimuma a 0. Persze ha létezik minimum, az az infimum, ha létezik maximum, az a szuprémum lesz.

A monotonitáshoz hasonlóan a korlátosság, sőt a minimum és maximum fogalma is értelmezhető lokálisan, az értelmezési tartomány valamely nem üres részhalmazán.

**4.16. Definíció.** Akkor mondjuk, hogy  $x_0 \in A$  az  $f : A \rightarrow B$  függvény lokális minimum helye, ha  $\exists \varepsilon > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A$  esetén  $f(x_0) \leq f(x)$ .

**4.17. Definíció.** Akkor mondjuk, hogy  $x_0 \in A$  az  $f : A \rightarrow B$  függvény lokális maximum helye, ha  $\exists \varepsilon > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A$  esetén  $f(x_0) \geq f(x)$ .

A minimum és maximum megkeresésére az 5. fejezetben találunk majd sok esetben jól használható módszert.

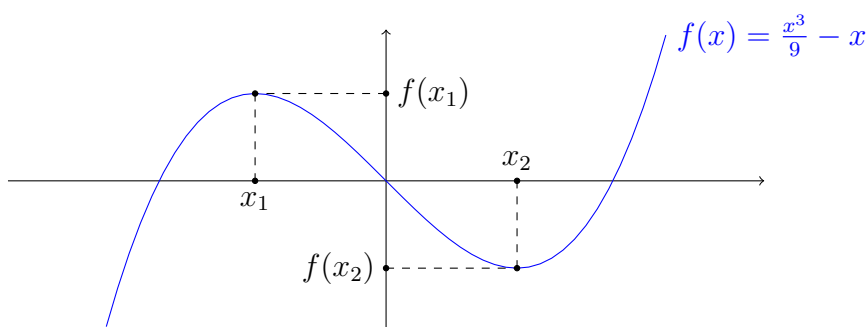
A minimumot és maximumot – a lokális minimumtól és lokális maximumtól való különbségüket hangsúlyozandó – gyakran nevezik globális minimumnak és globális maximumnak.

A maximumot és minimumot együtt szélsőértékeknek nevezzük.

A globális szélsőértékhely természetesen lokális szélsőértékhely is egyben.

Példák:

1. Az  $x^2 + 1$  függvénynek a 0 pontban minimuma van, a minimum érték az 1.
2. A  $-x^2 - 1$  függvénynek a 0 pontban maximuma van, a maximum érték a  $-1$ . Általában is igaz, hogy ha az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek  $x_0 \in A$  pontban szélsőértékhelye van, akkor  $-f(x)$ -nek is az lesz ugyanott, méghozzá ha minimuma volt, ellentettjének (mínusz egyszeresének) maximuma lesz, ha maximuma volt, ellentettjének minimuma lesz, ha lokális volt, lokális, ha globális volt, globális marad a szélsőértékhely. A szélsőérték természetesen az eredeti mínusz egyszerese lesz,  $-f(x_0)$ .
3. Az  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek semmilyen érelemben vett szélsőértéke sincs.
4. A  $\sin x$  függvénynek végtelen sok minimum- és maximumhelye van, hiszen  $\sin \frac{(4k+1)\pi}{2} = 1$  és  $\sin \frac{(4k-1)\pi}{2} = -1 \forall k \in \mathbb{Z}$  esetén, valamint  $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ -re.
5. Az  $\frac{x^3}{9} - x$  függvénynek az  $x_1$  pontban lokális maximuma, az  $x_2$  pontban lokális minimuma van, melyek egyike sem globális szélsőérték (lásd a 4.2. ábrát). Konkrét meghatározásukra az 5. fejezetben kerülhet sor.



4.2. ábra. Az  $\frac{x^3}{9} - x$  lokális szélsőértékei

## 4.4. Konvex és konkáv függvények

**4.18. Definíció.** *Konvexnek nevezünk egy (akárhány dimenziós) ponthalmazt, ha bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja a halmazhoz tartozik. Ha nem konvex, akkor az alakzatot konkávnak nevezzük.*

Függvények esetén is értelmezhetjük ezeket a fogalmakat.

**4.19. Definíció.** *A (valós) függvényt konvexnek nevezünk, ha a függvénygörbe fölötti síktartomány – mint „végtelen”, kétdimenziós alakzat – konvex. Konkáv függvénynek azt a függvényt nevezük, ami értelmezési tartományának egyetlen részalmazán sem konvex, vagy – ami ugyanaz –, ha a függvénygörbe alatti síktartomány konvex.*

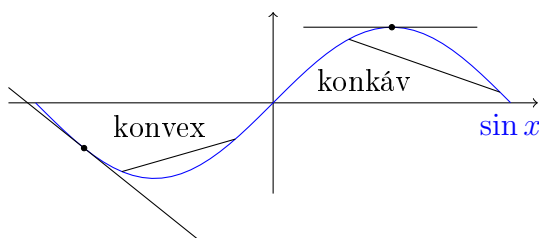
A definíciót ez esetben is megfogalmazhatjuk lokálisan, például konvexnek, konkávnak nevezve valamely függvényt egy intervallumon, félegyenesen, értelmezési tartományának tetszőleges részalmazán.

Más megközelítése is lehetséges a konvex függvény definíciójának. Akkor is konvexnek nevezhetjük a függvényt, ha minden húrja a függvény fölött halad, míg konkáv, ha minden húrja alatta. Ha léteznek a függvény érintői, a konvex függvények lesznek azok, melyek minden érintője a függvény alatt halad, a konkávok melyek minden érintője a függvény fölött.

Lokálisan konvex vagy lokálisan konkáv részekben a húrokat és érintőket is csak ezeken a részalmazatokon kell tekinteni, a lokális halmazon kívül az érintő akár metszheti is a görbét, akár csak a húr.

Példák:

1. Az  $x^2$  függvény (a normál parabola) konvex,
2. a  $-x^2$  függvény konkáv. Általában is igaz, hogy ha  $f(x)$  konvex, akkor  $-f(x)$  konkáv, és fordítva.
3. A  $\sin x$  függvény se nem konvex, se nem konkáv, hiszen vannak konvex és konkáv részei is. Pontosabban a  $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  intervallumok mindegyikén konkáv, míg a  $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  intervallumok mindegyikén konvex. (Lásd a 4.3. ábrát.)



4.3. ábra. Az  $\sin x$  függvény konvex és konkáv részei

## 4.5. Függvényhatárérték

### 4.5.1. A végesben vett függvényhatárérték fogalma

A függvényhatárérték koncepciója nélkülözhetetlen a folytonosság és differenciálszámítás bevezetéséhez, de önmagában, a függvények vizsgálatának részeként is érdekes.

**4.20. Definíció.** Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  függvényt. Legyen  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$  esetén,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , valamint  $x_0 \neq x_n \forall n \in \mathbb{N}$ -re, továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Ha  $\exists c \in \mathbb{R}$ , hogy tetszőleges, az itt felsorolt tulajdonságú  $x_n$  sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ , azt mondjuk, hogy  $a$   $c$  az  $f(x)$  függvény határértéke az  $x_0$  pontban. Jelölés:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ .

Az olyan speciális  $x_0$  pontokban, melyekre nem létezik egyetlen  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \neq x_0$  sorozat sem, hogy  $x_n \rightarrow x_0$ , nem értelmezzük  $f(x)$  határértékét.

Fontos hangsúlyozni, hogy a pont, ahol a függvény határértékét keressük, nem biztos, hogy eleme az értelmezési tartománynak.

A függvényhatárérték fogalmát – a sorozat határérték definíciójához hasonlóan – környezetekkel is értelmezhetjük volna.

**4.1. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $c \in \mathbb{R}$  határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < |x - x_0| < \delta$ , teljesül  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

Sok szerző ezt a tételt használja a függvény határérték definíciójához, ekkor az általunk használt definíció egy szükséges és elégséges feltételt adó tétel, mely az úgynevezett Heine-féle átviteli elvet valósítja meg.

A sorozat határértékéhez hasonlóan itt is beszélhetünk tágabb értelemben vett határértékről, tehát  $c$  lehet a  $\infty$ ,  $-\infty$  szimbólumok valamelyike is.

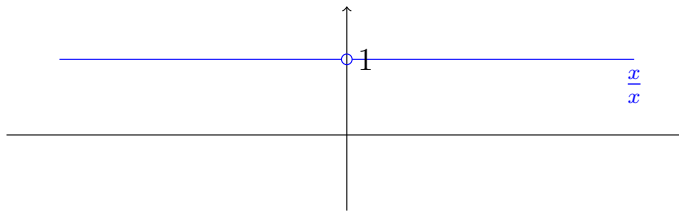
**4.2. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $\infty$  határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall K$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < |x - x_0| < \delta$ , teljesül  $f(x) > K$ .

**4.3. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $-\infty$  határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall k$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < |x - x_0| < \delta$ , teljesül  $f(x) < k$ .

Példák:

1. Legyen  $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ -re. Mivel  $\forall x_n \rightarrow c$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ , a  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  teljesül  $\forall c \in \mathbb{R}$ -re. Vagyis a függvény határértéke minden valós helyen létezik és 0.
2. Legyen  $f(x) = \frac{x}{x}$ . A függvényt úgy is megadhattuk volna, hogy  $f$  értéke legyen mindenütt 1, kivéve a 0 helyet, ahol nincs értelmezve. (Lásd a 4.4. ábrát.) A határértéke viszont létezik a 0-ban, hiszen tetszőleges 0-hoz tartó olyan  $x_n$  sorozat esetén, melynek egyik tagja sem 0, az  $f(x_n)$  azonosan 1, így – mivel a konstans 1 sorozat konvergens és határértéke az 1 szám – fennáll, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

Könnyű látni, hogy más pontokban – tehát az értelmezési tartományának pontjaiban – is létezik a határértéke, és az szintén 1 minden esetben.

4.4. ábra. Az  $\frac{x}{x}$  függvény

3. Legyen  $f$  a Dirichlet-féle függvény, vagyis

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{ egyébként} \end{cases} .$$

Legyen  $r \in \mathbb{Q}$  tetszőleges. Az  $x_n = r + \frac{1}{n}$  sorozat minden tagja racionális és a sorozat tart  $r$ -hez, tehát  $f(x_n) = 0$  azonosan, így  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ . Az  $y_n = r + \frac{\sqrt{2}}{n}$  sorozat minden tagja irracionális és a sorozat tart  $r$ -hez, tehát  $f(y_n) = 1$  azonosan, így  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$ . Vagyis nem létezik az  $f$  határértéke egyetlen racionális pontban sem.

Legyen most  $q \notin \mathbb{Q}$  tetszőleges. Az  $z_n = q + \frac{1}{n}$  sorozat minden tagja irracionális és a sorozat tart  $q$ -hoz, tehát  $f(z_n) = 1$  azonosan, így  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 1$ .

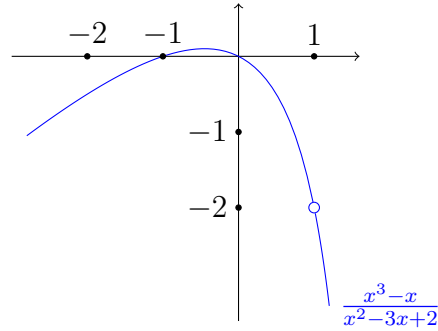
Legyen  $v_n = \frac{[q \cdot 10^n]}{10^n}$ , ahol  $[x]$  az  $x$  szám egész részét jelenti. (Ha például  $q = \sqrt{2}$ , a sorozat tagjai 1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142 és így tovább, tehát a sorozat tagjai a szám egy tizedessel mindig pontosabb racionális közelítései.) Ekkor a sorozat minden tagja racionális és a sorozat tart  $q$ -hoz, tehát  $f(v_n) = 0$  azonosan, így  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = 0$ . Így nem létezik az  $f$  határértéke egyetlen irracionális pontban sem.

Összegezve: az ily módon megadott  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  függvény határértéke sehol nem létezik.

4. Keressük a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2}$  határértéket. Látjuk, hogy az 1 helyen a függvény  $\frac{0}{0}$ , vagyis határozatlan alakú. Polinom/polinom típusú kifejezések esetén ez azt jelenti, hogy a problémát (a határozatlan alakot) okozó taggal egyszerűsíteni lehet. (Ugyan ez volt a helyzet az  $\frac{x}{x}$  függvénnyel.) Ezért nem meglepő, hogy a függvényt átalakíthatjuk, hiszen  $\frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x(x+1)}{x-2}$  és bár a függvény értelmezési tartományába bekerült az 1 pont, a határérték definícióját figyelembe véve ez magát a határértéket, mint számot nem érinti. Tehát  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x - 2}$ . Könnyű látni, hogy ez esetben a számláló 2-höz, a nevező  $-1$ -hez fog tartani, így a keresett határérték a  $-2$  (lásd a 4.5. ábrát).

5. Mivel  $x_n \rightarrow 0$  esetén, amennyiben  $x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ -re,  $\frac{1}{x_n^2} \rightarrow \infty$ , így  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ .

6. Ha  $a_n = \frac{1}{n}$  és  $b_n = -\frac{1}{n}$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , másrészt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ , viszont  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = -\infty$ . Ez azt jelenti, hogy az  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  határérték nem létezik,



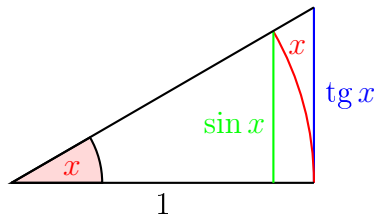
4.5. ábra. Az  $\frac{x^3-x}{x^2-3x+2}$  függvény az 1 pont közelében

hiszen nem igaz az, hogy tetszőleges nem 0 tagú, 0-hoz tartó sorozat esetén a függvénybe írt sorozat konvergens és ugyanoda tart.

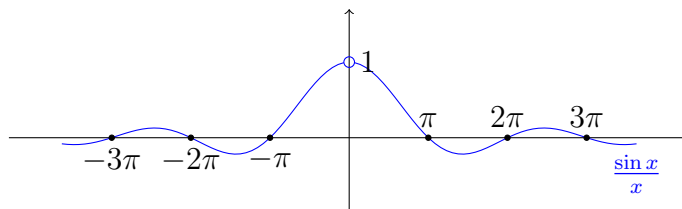
Érdekes nevezetes függvényhatárérték a következő.

**4.4. Tétel.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Mivel a tételnek szép, szemléletes bizonyítása van, az alábbiakban vázoljuk azt. Mivel  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ , elegendő pozitív  $x$ -ekre vizsgálni a függvényt, sőt mivel  $x \rightarrow 0$ -t vizsgáljuk, azt is feltehetjük, hogy  $x$  hegyesszög. A 4.6. ábra alapján nyilvánvaló, hogy  $\sin x < x$ , míg  $x < \operatorname{tg} x$  abból következik, hogy az egység sugarú,  $x$  szöghöz tartozó körívek területe kisebb, mint az 1 és  $\operatorname{tg} x$  befogójú derékszögű háromszögé, hiszen a háromszög tartalmazza a körívet. Az egyenlőtlenségeket  $\sin x$ -szel végigosztva  $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$  adódik, ahonnan  $x \rightarrow 0$  esetén a 2.10. (Rendőr) tétel és a  $\cos x$  függvény folytonossága miatt (erről részletesebben a 4.6. fejezetben olvashat) következik a tétel állítása (ami egyébként már a függvény képéből is sejthető, lásd a 4.7. ábrát).



4.6. ábra. Hegyesszögre  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$



4.7. ábra. A  $\frac{\sin x}{x}$  függvény

Erre a nevezetes határértékre számos további feladatot vezethetünk vissza. (Lásd a 4.5.2. alfejezet példáit.)

### 4.5.2. Függvényhatárérték és műveletek

A 2.6.1. és a 2.6.2. alfejezetben található tételek analógiái, továbbá a határozott alakokról tanultak itt is érvényesek lesznek.

**4.5. Tétel.** *Legyenek  $f, g : A \rightarrow B$  függvények, melyekre  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$  és  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = d$ , valamint  $c, d, \lambda \in \mathbb{R}$ . Ekkor*

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = c + d,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda c,$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = cd,$$

4. ha  $d \neq 0$  és  $\exists \varepsilon$  melyre  $D = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \subseteq A$  esetén  $\forall x \in D$ -re  $g(x) \neq 0$ , akkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$ ,

Példák:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

A nevezőben szereplő határérték kiszámolására a 4.6. alfejezetben visszatérünk. Egyelőre vegyük észre, hogy  $\cos 0 = 1$  és a koszinusz függvény értéke 1-hez közelít, amint az értelmezési tartományában 0-hoz tartunk.

$$2. \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sin(3(x + \pi))}{\sin(2(x + 2\pi))} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sin(3(x + \pi))}{3(x + \pi)} \cdot 3}{\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sin(2(x + \pi))}{2(x + \pi)} \cdot 2} = \frac{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot 3}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot 2} = \frac{3}{2},$$

ahol  $y = 3(x + \pi)$  és  $z = 2(x + \pi)$ . (Valójában az  $y_n = 3(x_n + \pi)$  és  $z_n = 2(x_n + \pi)$  sorozatokat vettük a tetszőleges,  $-\pi$ -től különböző tagú  $x_n \rightarrow -\pi$  sorozat helyett.)

Az összetett függvény határértékére vonatkozik a következő fontos tétel.

**4.6. Tétel.** *Legyenek  $f : A \rightarrow B$  és  $g : B \rightarrow C$  függvények, melyekre  $x \neq x_0$  esetén  $f(x) \neq c$ , ahol  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$  és  $\lim_{y \rightarrow c} g(y) = d$ . Ekkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = d$ .*

### 4.5.3. Jobb és bal oldali függvényhatárérték

**4.21. Definíció.** *Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  függvényt. Legyen  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$  esetén,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , valamint  $x_0 > x_n \forall n \in \mathbb{N}$ -re, továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Ha  $\exists c$ , hogy tetszőleges, az itt felsorolt tulajdonságú  $x_n$  sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ , azt mondjuk, hogy a  $c$  az  $f(x)$  függvény bal oldali határértéke az  $x_0$  pontban. Jelölés:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = c$ .*

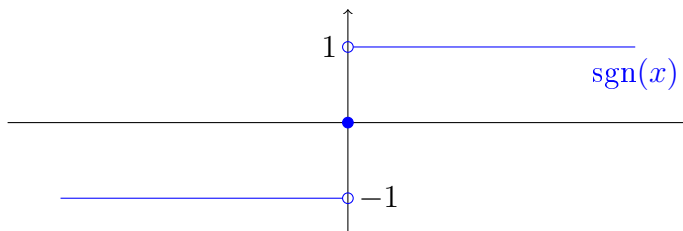
**4.22. Definíció.** Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  függvényt. Legyen  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$  esetén,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , valamint  $x_0 < x_n \forall n \in \mathbb{N}$ -re, továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Ha  $\exists c$ , hogy tetszőleges, az itt felsorolt tulajdonságú  $x_n$  sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ , azt mondjuk, hogy  $c$  az  $f(x)$  függvény jobb oldali határértéke az  $x_0$  pontban. Jelölés:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = c$ .

A korábbiakhoz hasonlóan  $c$  itt is jelölhet valós számot, illetve a  $\infty, -\infty$  szimbólumok valamelyikét.

Legyen

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ ha } x < 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \\ 1 & , \text{ ha } x > 0 \end{cases}$$

az úgynevezett előjel (szignum) függvény. (Lásd a 4.8. ábrát.) Könnyű látni, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$  és  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ , vagyis a féloldali határértékek léteznek a 0-ban, bár nem egyeznek meg.



4.8. ábra. A  $\operatorname{sgn}(x)$  függvény

**4.7. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $c \in \mathbb{R}$  jobb oldali határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < x - x_0 < \delta$ , teljesül  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

**4.8. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $c \in \mathbb{R}$  bal oldali határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < x_0 - x < \delta$ , teljesül  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

**4.9. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $\infty$  jobb oldali határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall K$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < x - x_0 < \delta$ , teljesül  $f(x) > K$ .

**4.10. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $\infty$  bal oldali határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall K$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < x_0 - x < \delta$ , teljesül  $f(x) > K$ .

**4.11. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $-\infty$  jobb oldali határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall k$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < x - x_0 < \delta$ , teljesül  $f(x) < k$ .

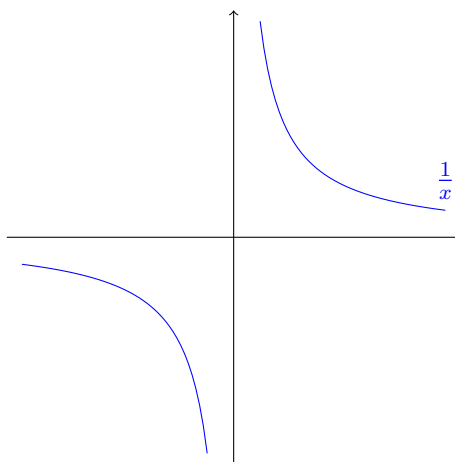
**4.12. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $-\infty$  bal oldali határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban, ha  $\forall k$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $0 < x_0 - x < \delta$ , teljesül  $f(x) < k$ .

**4.13. Tétel.** *Ha egy függvény határértéke létezik egy pontban, akkor ott létezik a jobb és a bal oldali határértéke is, és ez a három szám megegyezik.*

**4.14. Tétel.** *Ha egy függvény jobb és bal oldali határértéke létezik egy pontban és azok megegyeznek, akkor ott létezik határértéke is, és ez a három szám megegyezik.*

**4.15. Tétel.** *Ha egy függvény jobb és bal oldali határértéke létezik egy pontban és azok nem egyeznek meg, akkor ott nem létezik határértéke.*

Erre volt példa (a sgn függvény mellett), hogy nem létezik  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ , hiszen  $\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ . (Lásd a 4.9. ábrát.)



4.9. ábra. Az  $\frac{1}{x}$  függvény

De nem csak a hiperbola, hanem a tangens és kotangens függvényeknek is megvan ez a tulajdonságuk. Például  $\infty = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ , lásd a 4.10. ábrát.

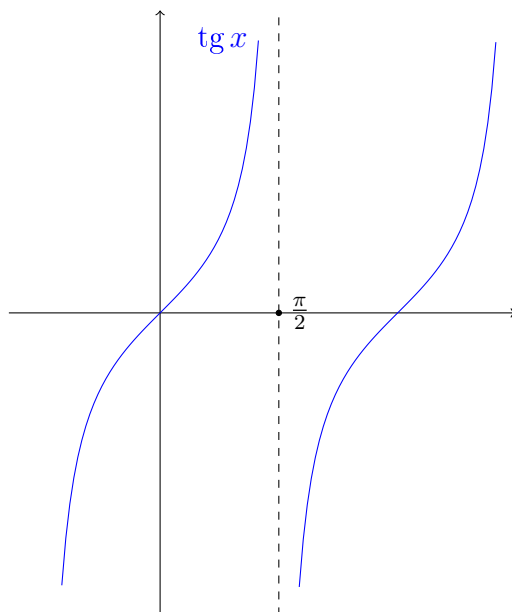
**4.16. Tétel.** *Ha egy függvénynek jobb vagy bal oldali határértéke nem létezik egy pontban, akkor ott nem létezik határértéke sem.*

Látható, hogy féloldali határértékek számolásának egyedül akkor van értelme, ha a határérték a vizsgált pontban nem létezik, vagy csak azt sejtjük, hogy nem létezik és éppen bizonyítani akarjuk.

#### 4.5.4. A függvényhatárérték a végtelenben

A függvényhatárérték definíciójában  $x_0$ -t  $\infty$ -re, vagy  $-\infty$ -re is cserélhetjük. Ekkor a következő definíciókat kapjuk.

**4.23. Definíció.** *Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  függvényt. Legyen  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$  esetén, továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Ha  $\exists c \in \mathbb{R}$ , hogy tetszőleges, az itt felsorolt tulajdonságú  $x_n$  sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ , azt mondjuk, hogy a  $c$  az  $f(x)$  függvény határértéke a  $\infty$ -ben. Jelölés:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ .*

4.10. ábra. A  $\operatorname{tg} x$  függvény a  $\frac{\pi}{2}$  közelében

**4.24. Definíció.** Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  függvényt. Legyen  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$  esetén, továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ . Ha  $\exists c \in \mathbb{R}$ , hogy tetszőleges, az itt felsorolt tulajdonságú  $x_n$  sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ , azt mondjuk, hogy a  $c$  az  $f(x)$  függvény határértéke a  $-\infty$ -ben. Jelölés:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ .

**4.17. Tétel.** Az  $f : [a, \infty) \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $c \in \mathbb{R}$  határértéke az  $\infty$ -ben, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists L$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $x > L$ , teljesül  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

**4.18. Tétel.** Az  $f : (-\infty, a] \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $c \in \mathbb{R}$  határértéke az  $-\infty$ -ben, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists l$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $x < l$ , teljesül  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

A  $c$  ez esetben is tetszőleges valós szám lehet, de a legáltalánosabb esetben lehet akár a  $\infty$ ,  $-\infty$  szimbólumok bármelyike.

**4.19. Tétel.** Az  $f : [a, \infty) \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $\infty$  határértéke az  $\infty$ -ben, ha  $\forall K$ -hoz  $\exists L$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $x > L$ , teljesül  $f(x) > K$ .

**4.20. Tétel.** Az  $f : (-\infty, a] \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $-\infty$  határértéke az  $\infty$ -ben, ha  $\forall k$ -hoz  $\exists L$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $x > L$ , teljesül  $f(x) < k$ .

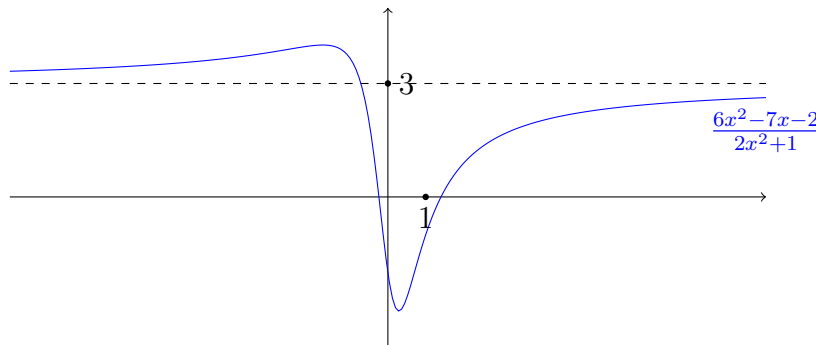
**4.21. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $\infty$  határértéke a  $-\infty$ -ben, ha  $\forall K$ -hoz  $\exists l$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $x < l$ , teljesül  $f(x) > K$ .

**4.22. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek pontosan akkor létezik a  $-\infty$  határértéke a  $-\infty$ -ben, ha  $\forall k$ -hoz  $\exists l$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $x < l$ , teljesül  $f(x) < k$ .

A függvényhatárérték számítása során természetesen felhasználhatjuk a sorozat határértékéről tanultakat, sőt egyes esetekben jó szolgálatot tesznek az ott tanult módszerek is. Vegyük észre továbbá, hogy a függvényhatárértékek és műveletek felcserélésére vonatkozó tételek használhatóak féloldali határértékek, valamint mínusz és plusz végtelenben vett és mínusz és plusz végtelenbe tartó határértékek számolására is.

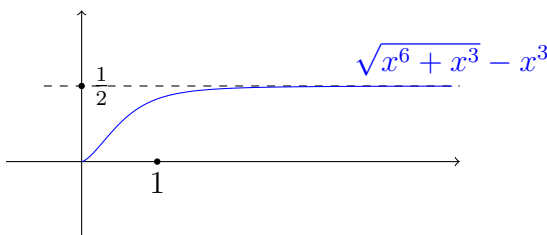
Példák:

- Könnyű látni, hogy  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$  és  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ . (Az  $x \rightarrow \pm c$  jelölést akkor szoktuk használni, ha a konkrét határérték  $x \rightarrow c$  és  $x \rightarrow -c$  esetén is létezik és a határértékek megegyeznek.)
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - 7x - 2}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6 - \frac{7}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{6}{2} = 3$  (lásd a 4.11. ábrát), hiszen  $x_n \rightarrow \infty$  vagy  $x_n \rightarrow -\infty$  esetén  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ .



4.11. ábra. A  $\frac{6x^2 - 7x - 2}{2x^2 + 1}$  függvény

- Keressük a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^6 + x^3} - x^3$  határértéket. Egyszerű számítás mutatja, hogy  $\sqrt{x^6 + x^3} - x^3 = (\sqrt{x^6 + x^3} - x^3) \frac{\sqrt{x^6 + x^3} + x^3}{\sqrt{x^6 + x^3} + x^3} = \frac{x^3}{\sqrt{x^6 + x^3} + x^3} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$ . (Lásd a 4.12. ábrát.)



4.12. ábra. A  $\sqrt{x^6 + x^3} - x^3$  függvény a számegyenes pozitív felén

**4.23. Tétel.** Legyen  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges konstans. Ekkor  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x = e^c$ .

Úgy tűnhet, hogy a sorozat határértéke és a megfelelő függvény határértéke a végtelenben mindig ugyanazt az eredményt adja, tehát ekvivalens fogalmak. Ez nincs így. Figyeljük meg a következő példát! Mivel  $\sin(n\pi) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$  esetén, ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0$ . De mi a helyzet a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x\pi)$  határértékkel? Az bizony nem létezik. Vegyünk ugyanis példának okáért az  $x_n = n$  és az  $y_n = \frac{1}{2} + 2n$  sorozatokat. Nyilván  $x_n \rightarrow \infty$  és  $y_n \rightarrow \infty$ , de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n\pi) = 0$  és  $\sin(y_n\pi) = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$  esetén miatt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(y_n\pi) = 1$ . Ez viszont a függvényhatárérték divergenciáját jelenti.

Tehát a sorozat határértékének létezése nem vonja magával a megfelelő függvény határértékének létezését a végtelenben. Ellenben a másik irányú következtetés igaz.

**4.24. Tétel.** *Ha  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ , akkor  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = c$ .*

A tétel megfordítása nyilvánvalóan nem igaz, erre láttuk az előbbi ellenpéldát. Azonban valamit mégis mondhatunk a másik irányból is.

**4.25. Tétel.** *Ha  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  és  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , akkor a két határérték megegyezik.*

Összetettebb függvényhatárértékek számolására majd egy, az 5. fejezetben tanult eszközt (a L'Hospital-szabályt) használva térünk vissza. Addig is használhatjuk a Maximát.

#### 4.5.5. Függvényhatárérték számolása Maximával

A Maxima jól kezeli a függvények határértékeit. Számítsuk ki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$$

értékét! A szintaktika egyszerű, logikus, mint azt általában is elmondhatjuk.

```
(%i18) limit((2^x-1)/sin(x),x,0);
```

```
(%o19) log(2)
```

Ez eddig rendben van. Nézzük a következőt!

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$$

Mit mond ekkor?

```
(%i20) limit(2^(1/x),x,0);
```

```
(%o1) und
```

Ez azt jelenti, hogy a határérték nem létezik, nevezetesen a jobboldali és a baloldali határérték nem egyezik meg. Ilyenkor a féloldali határértékeket persze megkaphatjuk. A baloldalt a minus, a jobboldalt a plus további paraméter használatával.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}}$$

```
(%i21) limit(2^(1/x),x,0,minus);
```

```
(%o21) 0
```

```
(%i22) limit(2^(1/x),x,0,plus);
```

```
(%o12) ∞
```

Aztán előfordulhat, hogy a határérték egyáltalán nem létezik, még az előbbi értelemben sem. Vegyük észre, hogy ilyenkor más az üzenet.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \pi x$$

```
(%i23) limit(sin(x*pi),x,inf);
```

```
(%o23) ind
```

Emlékezzünk vissza, hogy a sorozat határértékének kiszámolása szintaktikailag ugyanúgy, ugyan annak a `limit` függvénynek a segítségével történik, mint a függvényhatárérték a végtelenben kiszámolása. Valójában a Maxima mindig az utóbbit csinálja. Ez általában nem okoz problémát, de az ördög nem alszik. Miről is van szó?

$$a_n = \sin \pi n$$

```
(%i24) a[n]:=sin(n*pi);
```

```
(%o24) a_n := sin(nπ)
```

Ahogy már volt szó róla, a sorozat tagjai mind nullák, így a határértéke is persze 0.

$$a_1, a_2, a_{1000}$$

```
(%i25) a[1]; a[2]; a[1000];
```

```
(%o25) 0
```

```
(%o26) 0
```

```
(%o27) 0
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

```
(%i28) limit(a[n],n,inf);
```

```
(%o28) ind
```

Mi?! Hát ez bizony hibás! Mi történhetett? Csak annyi, hogy amint már említettük, a Maxima valójában függvényhatárértéket számolt, ami tényleg nem létezik, ahogy azt a 4.5.4. alfejezetben már kitárgyaltuk.

Ha ismerünk néhány komputeralgebrai rendszert, akkor tudjuk, hogy vannak olyan feladatok, amelyekkel egyikük-másikuk, esetleg több is közülük nem boldogul. Néha azonban kis trükközéssel célt érhetünk.

Keressük például az alábbi határértéket:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x \sin x}$$

```
(%i29) limit(1/(sin(x)*log(x)),x,0);
```

```
(%o29) infinity
```

Ez, bár a szó végtelent jelent, valami gondot jelez. Ha ugyanis az eredmény végtelen lenne, a  $\infty$  jelet látnánk, esetleg az *inf*-et (megjelenítéstől függően). Próbálkozzunk a függvény reciprokával!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x \sin x$$

```
(%i30) limit(sin(x)*log(x),x,0);
```

```
(%o30) 0
```

Ha azonban a függvény jeltartó módon tart nullához (vagyis létezik a nullának olyan, nullát nem tartalmazó környezete, melyben a függvény nem vált előjelet), a keresett határérték létezik és csak plusz, vagy mínusz végtelen lehet. De mivel ez esetben a függvény negatív a nulla jobb oldali környezetében (csak ott kell nézni, hiszen csak pozitív számokra van értelmezve), ezért az eredeti határérték a mínusz végtelen. Szóval a Maxima tudta az eredményt, csak egy kicsit be kellett neki segíteni.

Valójában elég lett volna, ha eleve jobboldali határértéket kérdezőnk (az  $\ln$  negatívokra nincs is értelmezve).

```
(%i31) limit(1/(sin(x)*log(x)),x,0,plus);
```

```
(%o31) -infinity
```

Az ilyen eseteket természetesen nem lehet előre kiszámítani. A fentiekben csak tippet szerettem volna adni, hogy például milyen úton indulhatunk el, ha nem kapunk eredményt, vagy „gyanús” eredményre jutottunk.

## 4.6. Folytonosság

A folytonosság a matematika egyik legfontosabb fogalma. Magát a „folytonos” szót a hétköznapi életben is használjuk, esetleg „folyamatos” alakban, „szakadás nélküli” értelemben. Már az általános iskolában találkoztunk folytonos függvényekkel, valami olyasmit értve alattunk, hogy olyan függvények, amelyeket „le tudjuk rajzolni anélkül, hogy felemelnénk a ceruzát”. Maga a fogalom annyira

intuitív és szemléletes, hogy sokáig nem is tartották szükségesnek a konkrét definícióalkotást, de ebből később problémák adódtak.

A matematikai fogalom a folytonosságot pontbeli tulajdonságként vezeti be. Ez furcsának tűnhet, hiszen a „folytonosság” pont ellentéte a „diszkrétnek”.

Lássuk a konkrét megközelítést.

### 4.6.1. Folytonosság bevezetése

Mi a pontbeli folytonosság fogalmához a sorozatokon keresztül jutunk.

**4.25. Definíció.** Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  függvényt. Legyen  $x_0, x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$  esetén, továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Ha tetszőleges, itt felsorolt tulajdonságú  $x_n$  sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ , azt mondjuk, hogy az  $f(x)$  függvény folytonos az  $x_0$  pontban.

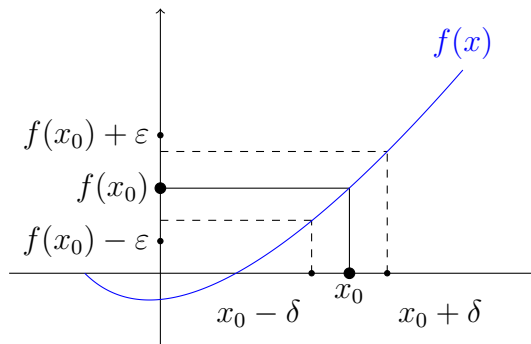
Vagyis egy függvény folytonos értelmezési tartományának valamely pontjában, ha ott létezik a határértéke és a határérték megegyezik az adott helyen vett behelyettesítési értékkel. Vagyis a pontbeli folytonosságnak szükséges feltétele, hogy ott létezzen a függvényhatárérték.

A pontbeli folytonosság fogalma azon a szemléletes tulajdonságon alapul, hogy „elvárjuk” a folytonos függvénytől, hogy értéke ne nagyon változzon, ha az argumentum csak kicsit változik. Meglehetősen természetes tulajdonság ez. Rövid idő (a másodperc tört része) alatt alig változik a közlekedő autó sebessége, még ha éppen fékez, vagy gyorsul is. Ha csak pár centit megyünk arrébb, a levegő hőmérsékletének változását alig érezzük, pedig lehet, hogy egyébként több fok különbség van a lakás távoli pontjai között. A való életben ritka a „szakadás”, ha mégis előfordul, az gyakran valamilyen tragédiát jelent.

Ezt az elvet talán szebben fejezi ki a folytonosság alábbi megközelítése.

**4.26. Tétel.** Az  $f : A \rightarrow B$  függvény pontosan akkor folytonos az  $x_0 \in A$  pontban, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall x \in A$  esetén, melyre  $|x - x_0| < \delta$ , teljesül  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

(Lásd a 4.13. ábrát.)



4.13. ábra. A pontbeli folytonosság környezetes értelmezése

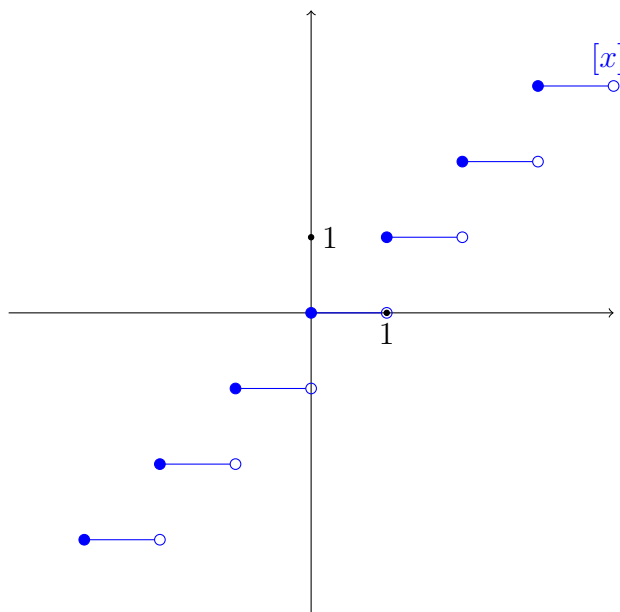
Példák:

1. Az előjel (szignum) függvény (lásd a 4.8. ábrát) nem folytonos a 0 pontban, máshol mindenütt folytonos. A 0-ban határértéke sem létezik (bár jobb oldali és bal oldali határértéke is létezik (1 és  $-1$ ), de azok nem egyeznek meg), így eleve nem lehet ott folytonos.
2. A 4.5.1. alfejezetben bemutatott Dirichlet-függvénynek sehol sem létezik a határértéke, így sehol sem folytonos.
3. A Dirichlet-függvényhez hasonló

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{ egyébként} \end{cases}$$

függvény talán még érdekesebb. A 0-án kívül ez sem folytonos sehol, viszont a 0-ban (egyetlen pontban!) igen. Létezik olyan függvény is, amely mindenütt értelmezett, minden irracionális pontban folytonos, de egyetlen racionális pontban sem az (Riemann-függvény). Bár az ilyen sok helyen szakadó, furcsa függvényből még több is van, mint „rendes”, egész értelmezési tartományán folytonos függvényből, gyakorlati jelentőségük mégsem akkora.

4. Az  $f(x) = [x]$ , az egészrész függvény (lásd a 4.14. ábrát) egyetlen egész helyen sem folytonos, de minden más pontban igen.

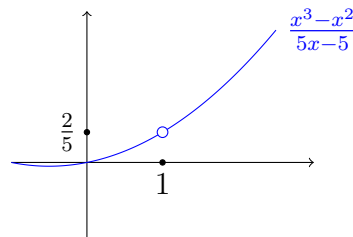


4.14. ábra. Az  $[x]$  függvény

5. A polinomok, exponenciális függvények, a szinusz és koszinusz függvények az egész számegyenesen értelmezett, minden valós helyen folytonos függvények. Így  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{21} + x^3 - 3 = -1$ . Általában fontos hangsúlyozni, hogy ha egy függvény valamely pontban folytonos, akkor ott a határértéke egyszerűen a behelyettesítési érték. A határérték számítás nehezebb részét a határozatlan alakra vezető kifejezések adják.

6. Az  $\frac{x^3-x}{5x-5}$  függvény (lásd a 4.15. ábrát) nincs értelmezve az 1 helyen (így ott nem is folytonos), de határértéke létezik. Mivel  $\frac{x^3-x}{5x-5} = \frac{(x-1)(x^2+x)}{5(x-1)} = \frac{x^2+x}{5}$ , ezért  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2}{5x-5} = \frac{1^2+1}{5} = \frac{2}{5}$ . Ez azt jelenti, hogy ha a függvényt folytonossá akarjuk tenni az 1 pontban is (megszüntetve ezzel szakadását), úgy kell definiálni, hogy

$$f(x) = \frac{x^2+x}{5} = \begin{cases} \frac{2}{5} & , \text{ ha } x = 1 \\ \frac{x^3-x}{5x-5} & \text{ egyébként.} \end{cases}$$



4.15. ábra. Az  $\frac{x^3-x^2}{5x-5}$  függvény

A függvényhatárértéknél tanult 4.5. és 4.6. tétel közvetlen következményeként a folytonosság és a műveletek sorrendje sok esetben felcserélhető.

**4.27. Tétel.** *Legyenek  $f, g : A \rightarrow B$  függvények, melyek folytonosak az  $x_0 \in A$  pontban,  $h : B \rightarrow C$  függvény, mely folytonos az  $f(x_0)$  pontban, valamint  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ekkor*

1.  $f(x) + g(x)$ ,
2.  $\lambda f(x)$ ,
3.  $f(x)g(x)$ ,
4. ha  $\forall x \in A$ -ra  $g(x) \neq 0$ , akkor  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ,
5.  $g(f(x))$

*folytonosak  $x_0$ -ban.*

#### 4.6.2. Folytonosság intervallumon

A továbbiakban  $I$  jelöljön intervallumot.  $I$  lehet zárt, nyílt vagy félig nyílt, félig zárt aszerint, hogy az intervallum végpontjai hozzátartoznak-e a halmazhoz. Speciális esetben  $I$  lehet (zárt vagy nyílt) félegyenes is, esetleg az egész  $\mathbb{R}$ .

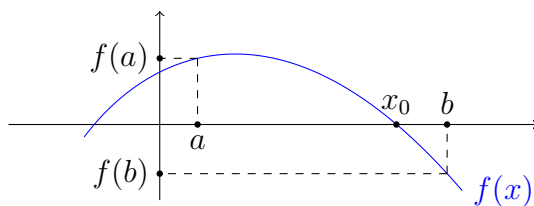
**4.26. Definíció.** *Egy  $f : A \rightarrow B$  függvényt folytonosnak nevezünk a  $I \subseteq A$  intervallumon, ha  $I$  minden pontjában folytonos.*

Óvatosnak kell azonban lennünk a „folytonos függvény” szóhasználatnál. A tangens, kotangens függvények és sok racionális tört függvény is, bár folytonosak értelmezési tartományuk minden pontjában, középiskolában mégsem azt mondtuk róluk, hogy folytonosak, hanem hogy szakadási helyeik vannak. Például az  $f(x) = \frac{1}{x}$  szintén folytonos értelmezési tartományának minden pontjában, azonban azt mondjuk rá, hogy nem folytonos, a 0 pontban szakadása van, hiszen ott nincs értelmezve. Az  $\frac{1}{x}$  középiskolában nem folytonos (mert szakad a 0-ban) a felsőbb matematikában folytonos (mert értelmezési tartományának minden pontjában folytonos). Látjuk, hogy ezen a ponton nem igazán analóg a két szóhasználat. Hogy ezt kikerüljük, ezért nem fogunk folytonos függvényről beszélni, úgy általában, hanem csak valamilyen pontban, vagy intervallumon. Tehát az  $\frac{1}{x}$  függvény folytonos a negatív és folytonos a pozitív számok halmazán, valamint természetesen e két intervallum minden részintervallumán. A valós számok halmazán meg nem folytonos, mert nincs értelmezve a 0-ban.

A továbbiakban kimondunk néhány szemléletes, de nagyon jelentős tételt intervallumon értelmezett folytonos függvényekre.

**4.28. Tétel** (Bolzano-tétel). *Legyen  $f : I \rightarrow B$  folytonos függvény, melyre  $\exists a, b \in I$  és  $a < b$ , hogy  $f(a)f(b) < 0$ . Ekkor  $\exists x_0 \in [a, b]$ , melyre  $f(x_0) = 0$ .*

(Lásd a 4.16 ábrát.)



4.16. ábra. A Bolzano tétel szemléltetése

A tétel azt a szemléletes dolgot állítja, hogy ha egy folytonos függvény előjelet vált egy intervallumon, akkor az intervallum legalább egy pontjában metszeni fogja az  $x$  tengelyt. Például, mivel minden páratlan fokú  $f(x)$  polinomra  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty = -\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  vagy  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty = -\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  teljesül, ezért minden páratlan fokú polinomnak van valós zérushelye.

A Bolzano-tétel következménye az alábbi állítás.

**4.29. Tétel** (Bolzano–Darboux-tétel). *Ha  $f : I \rightarrow B$  folytonos függvény, és valamely  $a, b \in I$  és  $a < b$  pontokra  $f(a) < f(b)$ , akkor  $\forall y_0$ -ra, melyre  $f(a) < y_0 < f(b)$ , ha  $f(a) > f(b)$ , akkor  $\forall y_0$ -ra, melyre  $f(a) > y_0 > f(b)$  teljesül, hogy  $\exists x_0 \in (a, b)$ , melyre  $f(x_0) = y_0$ .*

Vagyis intervallumon folytonos függvény bármely két értéke között minden értéket felvesz.

Fontos függvényosztály a zárt intervallumon értelmezett folytonos függvényeké.

**4.30. Tétel** (Weierstrass-tétel). *Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van minimuma és maximuma.*

Tulajdonképpen arról van szó, hogy korlátos és zárt intervallum folytonos képe (vagyis az intervallum pontjainak képe, mint halmaz) korlátos és zárt intervallum. Zárt intervallum végpontjai pedig valós számok, melyek elemei a halmaznak.

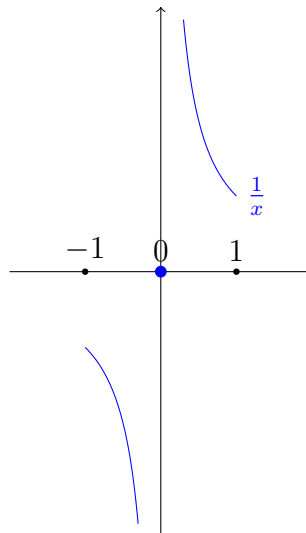
Akárhogyan gyengítem a tétel feltételeit, nem marad igaz.

Példák:

1. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \text{ és } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases} .$$

(Lásd a 4.17. ábrát.) Ekkor  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos és zárt intervallumon értelmezett, de nem folytonos függvény, és nem létezik se a minimuma, se a maximuma.



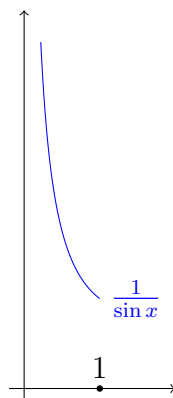
4.17. ábra. Korlátos, zárt intervallumon nem folytonos függvény

2. Legyen  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ ,  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos intervallumon, de nem zárt korlátos intervallumon értelmezett folytonos függvény, és nem létezik a maximuma. (Lásd a 4.18. ábrát.)
3. Az  $f(x) = x$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zárt intervallumon (a számegyenes zárt és nyílt egyszerre), de nem korlátos zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, és nem létezik se a minimuma, se a maximuma.

### 4.6.3. Féloldali folytonosság

A jobb és bal oldali függvényhatárértékhez hasonlóan bevezethetjük a jobb és bal oldali folytonosság fogalmát.

**4.27. Definíció.** Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  függvényt. Legyen  $x_0, x_n \in A$  és  $x_0 \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$  esetén, továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Ha tetszőleges, itt felsorolt tulajdonságú



4.18. ábra. Az  $\frac{1}{\sin x}$  függvény a 0 jobb oldali környezetében

$x_n$  sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ , azt mondjuk, hogy az  $f(x)$  függvény jobbról folytonos az  $x_0$  pontban.

**4.28. Definíció.** Tekintsük az  $f : A \rightarrow B$  függvényt. Legyen  $x_0, x_n \in A$  és  $x_0 \geq x_n \forall n \in \mathbb{N}$  esetén, továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Ha tetszőleges, itt felsorolt tulajdonságú  $x_n$  sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ , azt mondjuk, hogy az  $f(x)$  függvény balról folytonos az  $x_0$  pontban.

A féloldali folytonosságból nyilván következik a féloldali határérték létezése is.

**4.31. Tétel.** Ha egy függvény értelmezési tartományának valamely pontjában balról folytonos, akkor ott létezik a bal oldali határértéke is.

**4.32. Tétel.** Ha egy függvény értelmezési tartományának valamely pontjában jobbról folytonos, akkor ott létezik a jobb oldali határértéke is.

**4.33. Tétel.** Egy függvény értelmezési tartományának valamely pontjában pontosan akkor folytonos, ha ott jobbról és balról folytonos.

Példák:

1. A 4.14. ábrán látható egészrész függvény az egész helyeken balról folytonos, a többi pontban folytonos.
2. A 4.8. ábrán látható előjel függvénynek a 0-ban bár léteznek féloldali határértékei, ott sem jobbról, se balról nem folytonos. Minden más valós helyen folytonos.

## 4.7. Feladatok

1. Számolja ki az alábbi függvényhatárértékeket!

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$

- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 5} (x - 5)3^x$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^3 + 2}{x^2 + 1}$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - x}$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - x}$
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(13x)}{\sin(6x)}$
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(3x) - \sin^2(5x)}{7x^2}$
- (i)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

2. Folytonosak-e az alábbi függvények  $\mathbb{R}$ -en?

- (a)  $f(x) = \begin{cases} 6 & , \text{ ha } x = 1 \\ 0 & , \text{ ha } x = -1 \\ \frac{x^2 - 1}{3x - \sqrt{8x^2 + 1}} & \text{ egyébként} \end{cases}$
- (b)  $g(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x = 0 \text{ vagy } x = \pm 1 \\ e^{\frac{1}{\ln|x|}} & \text{ egyébként} \end{cases}$



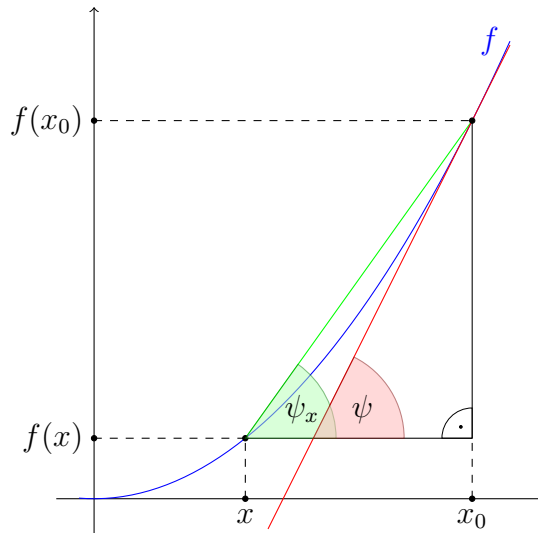
## 5. fejezet

# Differenciálszámítás

### 5.1. Geometriai származtatás, alapfogalmak

A differenciálszámítás alapproblémája egy függvény adott pontjában húzott érintő meredekségének meghatározása.

Tekintsük tehát az  $f(x)$  függvényt. Értelmezési tartományának  $x_0$  pontjában szeretnénk az érintő meredekségét meghatározni, tehát annak az egyenesnek a meredekségét keressük, amely az  $(x_0, f(x_0))$  koordinátájú pontban érinti a függvényt. Először keressük meg egy, a függvény  $x_0$  pontján átmenő húr meredekségét.



5.1. ábra. Húr és érintő

Legyen a húr másik  $f$ -vel közös pontja az  $x$ . Az 5.1. ábra segít az módszer megértésében. A húr meredeksége ekkor  $\operatorname{tg} \psi_x = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ . Ha az  $x$  ponttal közelítünk  $x_0$  felé, a húr közelít az érintőhöz.

**5.1. Definíció.** Tekintsük az  $f : (a, b) \rightarrow C$  függvényt. Legyen  $x_0 \in (a, b)$ . Ha létezik a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  véges határérték, azt mondjuk, hogy az  $f(x)$  függvénynek az  $x_0$  pontban létezik a differenciálhányadosa, annak értéke a határérték, jele  $f'(x_0)$ .

Ha létezik  $f(x)$ -nek  $x_0$  pontban a differenciálhányadosa, az 5.1. ábra jelöléseit használva nyilván  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \psi$ . Tehát az adott pontban kapott differenciálhányados a pontban a függvényhez húzott érintő meredeksége.

Ez azt jelenti, hogy mivel az  $m$  meredekségű,  $(x_0, f(x_0))$  koordinátájú ponton átmenő egyenes egyenlete  $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ , az érintő egyenes egyenlete  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

Példák:

1. Ha  $f(x) = x^2$ , akkor például

a.  $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2$ . Ez esetben az érintő egyenlete tehát  $y = -2(x + 1) + 1$ , vagyis  $y = -2x - 1$ .

b.  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ,

c.  $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$ .

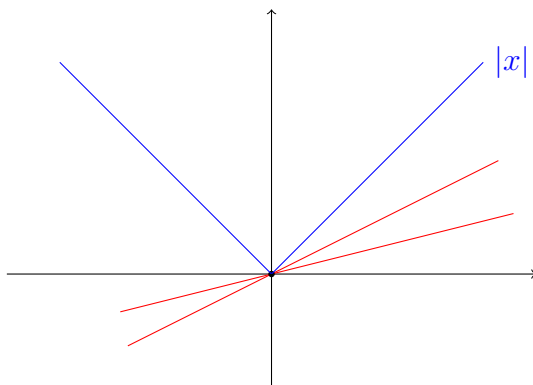
d. Számítsuk ki a differenciálhányadost általánosan, tetszőleges  $x_0$  pontban. Ekkor  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$ , vagyis  $(x^2)' = 2x$ .

2. Természetesen nem mindig létezik differenciálhányados, így érintő sem. Le-

gyen  $f(x) = |x|$  és  $x_0 = 0$ . Mivel  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$

és  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ , a jobb és bal oldali határértékek

léteznek, de nem egyeznek meg. Így a határérték, vagyis a differenciálhányados nem létezik. Geometriailag ez azt jelenti, nem létezik az  $|x|$  függvénynek érintője az origóban. Az origón átmenő egyenesek közül egyik sem lesz „jobban érintőnek való”, mint a másik. Valóban, lásd az 5.2. ábrát.



5.2. ábra. Az  $|x|$  függvénynek nincs érintője az origóban

Mivel sok függvény – mint például az  $x^2$  – esetén, az értelmezési tartomány akár minden pontjában létezik differenciálhányados, így gyakorlatilag egy függvényből

származó – úgynevezett derivált – függvényt kapunk, nevezetesen egy függvényt, ami megadja az eredeti függvény differenciálhányadosainak értékét. Láttuk például, hogy az  $f(x) = x^2$  esetén a deriváltfüggvény minden ponthoz a kétszeresét rendelte.

**5.2. Definíció.** Tekintsük az  $f : (a, b) \rightarrow C$  függvényt. Legyen  $f$  differenciálható az  $(a, b)$  intervallum minden pontjában. Az  $f' : (a, b) \rightarrow C$  függvényt, aminek  $x \in (a, b)$  helyen az értéke az  $f$  függvény differenciálhányadosainak értéke az  $x$  helyen, az  $f$  függvény derivált függvényének, röviden deriváltjának nevezzük.

Szükségünk lesz majd a derivált deriváltjára, esetleg annak is a deriváltjára.

**5.3. Definíció.** Tekintsük az  $f : (a, b) \rightarrow C$  függvényt. Az  $f$  függvény  $n$ -edik deriváltjának az  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$  függvényt nevezzük, ahol  $f^{(0)}$  maga az  $f$  függvény, és az említett deriváltak mind léteznek.

Ha  $n$  nem túl nagy, gyakran azzal egyenlő számú ' jelet használunk, például  $(x^2)^{(3)} = (x^2)^{'''} = (2x)'' = (2)' = 0$ .

## 5.2. Tételek differenciálhányadosra, deriváltra

### 5.2.1. Folytonosság és differenciálhatóság

**5.1. Tétel.** Legyen  $f : (a, b) \rightarrow C$  függvény. Ha  $f$ -nek létezik a differenciálhányadosa az  $x_0 \in (a, b)$  pontban, akkor ott folytonos is.

Nem létezik tehát differenciálhányados szakadási pontban.

A tétel megfordítása nem igaz. Láttuk, hogy az  $|x|$  függvény a 0 helyen folytonos, de nem differenciálható. Az ilyen pontot, amely tehát folytonossági pont, de amelyben a függvény nem differenciálható, **töréspont**nak nevezzük.

Létezik olyan függvény is, amely minden valós számra értelmezett, minden pontban folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható. Ilyen, sehol sem differenciálható folytonos függvényt – melynek tehát minden pontja töréspont – oly módon szoktak konstruálni, hogy előállítanak egy „fűrészfog-szerű” függvényt (jellemzően az  $|x|$  függvényt használva), majd azt – a töréspontokkal együtt – minden határon túl „sűrítik”.

### 5.2.2. Elemi függvények deriváltjai, differenciálási szabályok

**5.2. Tétel.** A hatvány, exponenciális, logaritmus, szinusz, koszinusz, tangens, kotangens függvények értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók, valamint

1.  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , ahol  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

2.  $(a^x)' = a^x \ln a$ , ahol  $a > 0$ ,

3.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ , ahol  $a > 0$  és  $a \neq 1$ ,

$$4. (\sin x)' = \cos x,$$

$$5. (\cos x)' = -\sin x,$$

$$6. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$7. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

**5.3. Tétel.** Ha  $f : (a, b) \rightarrow C$  és  $g : (a, b) \rightarrow D$  függvények differenciálhatóak az  $x_0 \in (a, b)$  pontban és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor

1.  $\lambda f$  is differenciálható az  $x_0 \in (a, b)$  pontban, és

$$(\lambda f(x_0))' = \lambda f'(x_0),$$

2.  $f + g$  is differenciálható az  $x_0 \in (a, b)$  pontban, és

$$((f + g)(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0),$$

3.  $f \cdot g$  is differenciálható az  $x_0 \in (a, b)$  pontban, és

$$((f \cdot g)(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

4.  $g(x_0) \neq 0$  esetén  $\frac{f}{g}$  is differenciálható az  $x_0 \in (a, b)$  pontban, és

$$\left( \left( \frac{f}{g} \right) (x_0) \right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

5. valamint ha  $h : (p, q) \rightarrow E$  differenciálható az  $i(x_0) \in (r, s) \cap (p, q)$  pontban, ahol  $i : (a, b) \rightarrow (r, s)$ , akkor  $h(i)$  is differenciálható az  $x_0 \in (a, b)$  pontban, és

$$((h(i))(x_0))' = h'(i(x_0))i'(x_0).$$

Ismerjük tehát az elemi függvények deriváltjait, valamint mivel vannak szabályaink, hogy hogyan deriváljunk véges lépésben „összerakott” összetett függvényeket, nagyon sok függvényt tudunk deriválni.

Példák:

$$1. (x^2 + 3 \sin x)' = (x^2)' + 3(\sin x)' = 2x + 3 \cos x,$$

$$2. ((\ln x - 2^x) \operatorname{tg} x)' = (\ln x - 2^x)' \operatorname{tg} x + (\ln x - 2^x) (\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{1}{x} - 2^x \ln 2 \right) \cdot \operatorname{tg} x + (\ln x - 2^x) \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$3. (\sin(\sin x))' = \cos(\sin x) \cos x,$$

$$4. \left( \frac{\log_2 x}{x^2 + x + 1} \right)' = \frac{\frac{1}{x \ln 2} (x^2 + x + 1) - (2x + 1) \log_2 x}{(x^2 + x + 1)^2},$$

$$5. \left( \sqrt[3]{\cos(4x3^x) - e^{\frac{\sin x}{x^2+1}}} \right)' = \frac{1}{3} \left( \cos(4x3^x) - e^{\frac{\sin x}{x^2+1}} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left( -\sin(4x3^x)(4 \cdot 3^x + 4x3^x \ln 3) - e^{\frac{\sin x}{x^2+1}} \frac{(\cos x)(x^2 + 1) - (\sin x)2x}{(x^2 + 1)^2} \right).$$

### 5.2.3. Deriválás Maximával

Függvények deriválására a `diff` függvényt használjuk. A szintaktika: melyik függvényt, mi szerint.

$$(\ln x + x^3)'$$

```
(%i1) diff(log(x)+x^3,x);
```

```
(%o1) 3x^2 + 1/x
```

Nem nagyon megyünk bele a kivételekbe, általában csak differenciálható függvényekkel számolunk, bár az  $|x|$  deriváltját (ami pozitív  $x$ -re 1, negatív  $x$ -re -1, nullára meg nincs értelmezve) ügyesen produkálja.

$$(|x|)'$$

```
(%i1) diff(abs(x),x);
```

```
(%o2) x/|x|
```

Ha többször akarunk egy függvényt deriválni, azt is lehet. A következő példa egy negyedik derivált kiszámolása.

$$(\sin(x)e^x)^{(4)}$$

```
(%i3) diff(sin(x)*exp(x),x,4);
```

```
(%o3) -4%e^x sin(x)
```

#### wxMaxima tipp

wxMaximát használva a differenciálszámítás `diff` eljárása az „Analízis” menü „Differenciálás...” almenüjeként vehető igénybe.



A deriváltfüggvénybe való behelyettesítést a `subst` segítségével végezhetjük. A mellékelt példa az  $x^2 + 1$  függvény differenciálhányadosát adja az  $x = 1$  helyen.

$$(x^2 + 1)' \Big|_{x=1}$$

```
(%i7) subst(1,x,diff(x^2+1,x));
```

```
(%o7) 2
```

---

**wxMaxima tipp**


---

A wxMaxima felületén az „Egyszerűsítés” menü „Behelyettesítés...” almenüjét kiválasztva használhatjuk a `subst` eljárást.



Nézzünk erre egy alkalmazást. Ismert, hogy az  $f(x)$  (legalább az  $x_0$  pontban) differenciálható függvény  $x_0$  pontban húzott érintőjének egyenlete:

$$r(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Vagyis:

```
(%i8) r(x):=subst(x0,x,diff(f(x),x))*(x-x0)+f(x0);
```

```
(%o8) r(x) := substitute(x0,x,diff(f(x),x))(x-x0)+f(x0)
```

Ha megadjuk az  $f(x)$  függvényt és az  $x_0$  számot, természetesen konkrétan is megkaphatjuk az érintőegyenest.

```
(%i9) f(x):=x^2+1;
```

```
(%o9) f(x) := x^2 + 1
```

```
(%i10) x0:2;
```

```
(%o10) 2
```

```
(%i11) r(x);
```

```
(%o11) 4(x-2)+5
```

Szebb alakra hozva:

```
(%i12) expand(%);
```

```
(%o12) 4x - 3
```

## 5.3. Alkalmazások

### 5.3.1. L'Hospital-szabály

Az alábbi tétel fontos eszköz függvényhatárértékek számolásában. Azért most tanuljuk, mert használatához szükség van a deriválás ismeretére. A tételt egy viszonylag egyszerű alakban mondjuk ki, azonban a példák során számos további általánosítást is megismerhetjük.

**5.4. Tétel (L'Hospital-szabály).** *Legyen  $f : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow C$  és  $g : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow D$  differenciálható, valamint legyen  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  vagy  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$ . Ha  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  véges, vagy végtelen határérték, és  $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$  esetén  $g(x)g'(x) \neq 0$ , akkor*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Példák, megjegyzések:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2}{1} = \frac{2^0 \ln 2}{1} = \ln 2$$

$$2. \text{ A tétel állítása igaz } x_0 = \pm \infty \text{ esetén is. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x + 4} = \frac{3}{1} = 3.$$

3. A L'Hospital-szabályt többször is használhatjuk egymás után. Ez azt jelenti, hogy ha egyszeri alkalmazásával még mindig határozatlan alakot kapunk, megpróbálhatjuk a kapott határérték kiszámolásához újra használni tételünket.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 8x + 4}{3x^2 + 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x + 8}{6x + 2} = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}$ . Láthattuk, hogy az első két kifejezés  $\frac{0}{0}$  alakú volt a  $-2$  helyen, a határértéket a harmadik kifejezés  $-2$  helyen vett behelyettesítési értéke adta.

4. Nem  $\frac{0}{0}$  vagy  $\frac{\infty}{\infty}$  típusú határozatlan alak esetén gyakran célra vezet az a módszer, hogy először átalakítjuk a kifejezést, és csak ha a kívánt alakú, akkor használjuk a szabályt.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ .

5. Keressük a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$  határértéket. Felhasználva az  $x^x = e^{x \ln x}$  azonosságot, valamint hogy  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$ , adódik a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$  eredmény.

6. Ahogy azt az előző két példában láthattuk, tételünket felhasználhatjuk féloldali határérték számolására is (bár megadott alakjában ez a lehetőség nem szerepel).

7. Nagyon oda kell figyelni a szabály alkalmazására. Az alábbiakban hibás levezetések láthatunk. Mindegyikben az okozta a problémát, hogy nem teljesültek maradéktalanul a tétel feltételei. Ilyenkor természetesen nem szabadna alkalmazni a L'Hospital-szabályt. (A kérdőjellel megjelölt egyenlőségek nem állnak fenn!)

- a. A leggyakoribb hiba, hogy akkor alkalmazzák a szabályt, amikor a kifejezés nem is határozatlan alakú a vizsgált helyen.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x^5 - 2} \stackrel{?}{=}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{5x^4} = \frac{2}{5}$ . Mivel a kérdéses függvény az 1 helyen folytonos, a határ-

érték valójában a behelyettesítési érték.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x^5 - 2} = \frac{0}{-1} = 0$ .

- b. Számoljuk ki a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$  határértéket! A kifejezés  $\frac{\infty}{\infty}$  típusú. A

L'Hospital-szabályt mechanikusan alkalmazva (egyszer), majd a kapott alakot átalakítva azt kapjuk, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{?}{=}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \sin \frac{1}{x}$ . A kapott határérték nem léte-

zik. Azonban arról az esetről, amikor a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  nem létezik, semmit

nem mond a tétel. Ez esetben például létezni fog az eredeti határérték, hiszen  $\frac{\frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 + x \cos \frac{1}{x}$  és  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos \frac{1}{x} = 0$  a 2.11. tétel miatt.

8. Az is előfordulhat, hogy használhatjuk a L'Hospital-szabályt, csak éppen nem jutunk vele közelebb a megoldáshoz. Figyeljük meg a következő példát! Keressük az alábbi határértéket:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . Ha megpróbálkozunk a

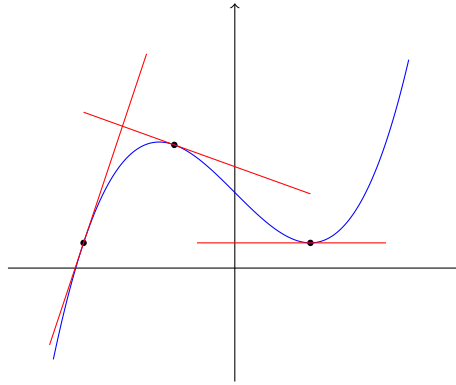
L'Hospital-szabály használatával, a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  határértékhez jutunk, ami ugyanúgy egy  $\frac{\infty}{\infty}$  alakú kifejezés határértéke, mint az eredeti. Figyeljük meg, hogy ha újra alkalmazzuk tételünket, visszakapjuk az eredeti alakot!

Látható tehát, hogy ez esetben lehetséges, de értelmetlen a L'Hospital-szabály használata. A keresett határérték egyébként létezik; a számlálót és a nevezőt is  $e^x$ -szel osztva  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1}{1} = 1$  adódik.

### 5.3.2. Monotonitás és derivált, lokális szélsőértékek

Ha ránézünk egy deriválható függvény képére, rögtön láthatjuk, hogy a monoton növekvő intervallumokon lévő pontjaiban húzott érintő „felfelé”, a monoton csökkenő intervallumokon lévő pontjaiban húzott érintő „lefelé mutat”, a lokális szélsőhelyeken pedig az érintő párhuzamos az  $x$  tengellyel (lásd az 5.3. ábrát).

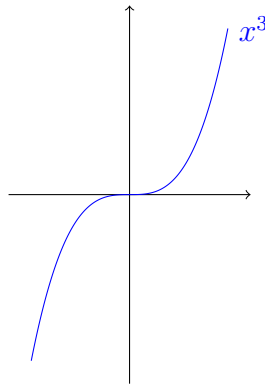
**5.5. Tétel.** *Legyen  $f : A \rightarrow B$  deriválható függvény.*



5.3. ábra. Érintők növekvő és csökkenő részeken, lokális szélsőhelyen

1. Az  $f$  függvény pontosan akkor monoton növekvő a  $D \subseteq A$  intervallumon, ha  $f'(x) \geq 0 \forall x \in D$ -re.
2. Az  $f$  függvény pontosan akkor monoton csökkenő a  $D \subseteq A$  intervallumon, ha  $f'(x) \leq 0 \forall x \in D$ -re.

Fontos megjegyeznünk azonban, hogy nem igaz ezen tételek „szigorú monoton, szigorú egyenlőtlenség” verziója. Nem igaz például, hogy ha egy függvény szigorúan monoton növekvő, akkor  $f'(x) > 0$  mindig igaz lesz. Például ha  $f(x) = x^3$  (lásd az 5.4. ábrát), akkor  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  szigorúan monoton növekvő, de  $f'(x) = 3x^2$  miatt  $f'(0) = 0 \not> 0$ . A másik irányban azonban igaz.

5.4. ábra. Az  $x^3$  függvény

**5.6. Tétel.** Legyen  $f : A \rightarrow B$  deriválható függvény.

1. Ha  $f'(x) > 0 \forall x \in D \subseteq A$ -ra, ahol  $D$  intervallum, akkor az  $f$  függvény szigorúan monoton növekvő  $D$ -n.
2. Ha  $f'(x) < 0 \forall x \in D \subseteq A$ -ra, ahol  $D$  intervallum, akkor az  $f$  függvény szigorúan monoton csökkenő  $D$ -n.

Az 5.3. ábrát szemlélve azt is észrevehetjük, hogy minden pontjában érintővel rendelkező – vagyis deriválható – függvény lokális szélsőérték helyei és azon pontok között, amelyekben az érintő párhuzamos az  $x$  tengellyel, szoros kapcsolat van. Figyelni kell még azonban az értelmezési tartomány végpontjaira is.

**5.7. Tétel.** *Legyen  $f : A \rightarrow B$  deriválható függvény. Ha az  $f$ -nek lokális szélsőérték helye van az  $x_0 \in A$  pontban, akkor  $f'(x_0) = 0$  vagy  $x_0$  az  $A$  intervallum végpontja.*

Ez esetben sem lehet megfordítani a tétel állítását, hiszen láttuk az  $f(x) = x^3$  függvény esetében, hogy a  $f'(0) = 0$ , még sincs szó lokális szélsőérték helyről.

**5.4. Definíció.** *Legyen  $f : A \rightarrow B$  deriválható függvény és legyen  $x_0 \in A$ . Ha  $f'(x_0) = 0$ , az  $x_0$  pontot stacionárius pontnak (vagy stacionárius helynek) nevezük.*

Láttuk tehát, hogy a lokális szélsőérték helyek vagy stacionárius pontban, vagy értelmezési tartomány határán vannak. Mikor lesz egy stacionárius pont szélsőérték hely? Amikor a függvény addig csökken, utána nő, vagy fordítva. Vagyis amikor a derivált ott úgy nulla, hogy a derivált függvény a stacionárius pontban előjelet vált. Tehát a derivált növekedése vagy csökkenése nem „törik meg”, vagyis a derivált a stacionárius pont egy környezetében szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken. Mivel egy differenciálható függvény monotonitásáról annak deriváltja tájékoztat minket, a derivált monotonitásáról annak deriváltja, vagyis az eredeti függvény második deriváltja ad információt.

Nem meglepő tehát a következő tétel, ami segít eldönteni, hogy egy stacionárius pont mikor lokális minimum hely és mikor lokális maximum hely.

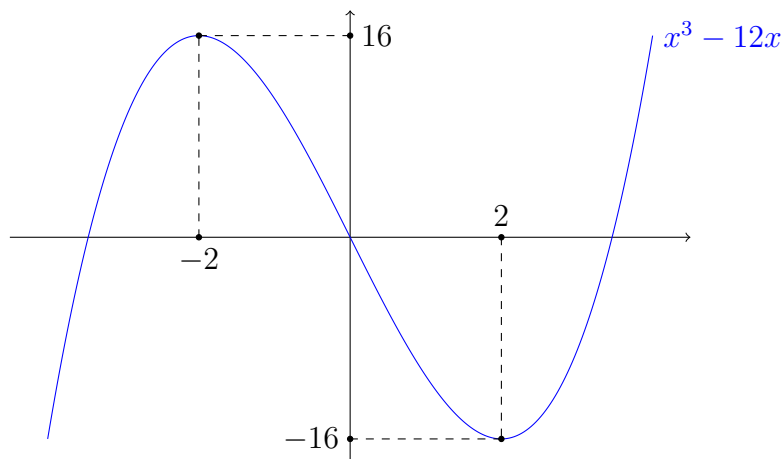
**5.8. Tétel.** *Legyen  $f : A \rightarrow B$  kétszer deriválható függvény (vagyis a deriváltja is legyen deriválható), továbbá legyen  $x_0$  stacionárius pont.*

1. *Ha  $f''(x_0) < 0$ , akkor az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen lokális maximum helye van.*
2. *Ha  $f''(x_0) > 0$ , akkor az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen lokális minimum helye van.*

Példa:

Legyen  $f(x) = x^3 - 12x$  (lásd az 5.5. ábrát). Mely intervallumokon lesz csökkenő, hol növekszik? Mivel  $f'(x) = 3x^2 - 12$ , ott lesz csökkenő, ahol  $3x^2 - 12 \leq 0$ , vagyis ahol  $x^2 \leq 4$ , tehát  $-2 \leq x \leq 2$ . A számegetes többi részén – tehát ha  $x \leq -2$  vagy  $x \geq 2$  teljesül – monoton nő. Mindez azt jelenti, hogy két stacionárius pont van; a 2 és a -2, az előbbi lokális minimum hely, utóbbi lokális maximum hely. Ez egyrészt abból is következik, hogy ha a függvény -2-ig nő, majd utána csökken, a -2 csak lokális maximum hely lehet, illetve ha a függvény 2-ig csökken, majd utána nő, a 2 csak lokális minimum hely lehet, másrészt  $f''(x) = 6x$ , ami pozitív  $x$ -ekre pozitív, negatív  $x$ -ekre negatív.

A minimum érték  $f(2) = -16$ , a maximum érték  $f(-2) = 16$ . Mindkét lokális szélsőérték hely tényleg csak lokális, hiszen a függvény vehet fel -16-nál kisebbet (például  $f(-5) = -65$ ), és 16-nál nagyobbat is (például  $f(5) = 65$ ).

5.5. ábra. Az  $x^3 - 12x$  függvény

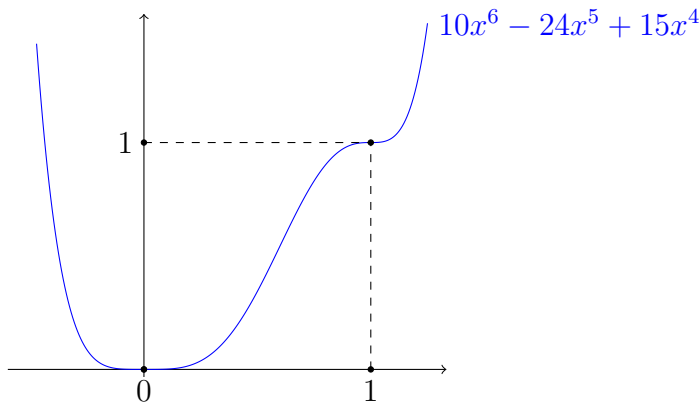
Vegyük észre, hogy a tétel nem mond semmit azon stacionárius helyekről, melyekben a második derivált 0. Ez a gyakorlatban ritkán, de előfordul, lásd az  $x^3$  függvényt (az 5.4. ábrán) az origóban. Az ilyen esetekben segíthet az alábbi szabály.

**5.9. Tétel.** Legyen  $f : A \rightarrow B$   $n$ -szer deriválható függvény, továbbá legyen  $f^{(k)}(x_0) = 0 \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$  esetén.

1. Ha  $n$  páros és  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , akkor az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen lokális maximumhelye van.
2. Ha  $n$  páros és  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , akkor az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen lokális minimumhelye van.
3. Ha  $n$  páratlan és  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , akkor az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen nincs lokális szélsőérték helye.

Példa:

Vizsgáljuk meg az  $f(x) = 10x^6 - 24x^5 + 15x^4$  függvény (lásd az 5.6. ábrát) stacionárius helyeit. Az  $f'(x) = 60x^5 - 120x^4 + 60x^3 = 60x^3(x-1)^2 = 0$  egyenlet két megoldása a 0 és az 1. Mivel  $f''(x) = 300x^4 - 480x^3 + 180x^2 = 60x^2(x-1)(5x-3)$ , ezért a második derivált mindkét stacionárius helyen 0. Tovább kell hát deriválni.  $f^{(3)}(x) = 1200x^3 - 1440x^2 + 360x$ , így  $f^{(3)}(1) = 120 \neq 0$ . Mivel a 3 páratlan szám, az 1 nem szélsőérték hely. Másrészt  $f^{(3)}(0) = 0$ , így a másik stacionárius hely vizsgálata további deriválást igényel.  $f^{(4)}(x) = 3600x^2 - 2880x + 360$ , ami azt jelenti, hogy  $f^{(4)}(0) = 360 > 0$ , így a 0 minimum hely. Jelen esetben könnyű látni, hogy a 0 globális minimumhely is, mert  $10x^6 - 24x^5 + 15x^4 = x^4(10x^2 - 24x + 15)$  miatt  $f(x)$ -et két nem negatív értékű függvény szorzatára bontottuk. Az  $x^4 \geq 0$  nyilvánvaló, míg a  $10x^2 - 24x + 15$  függvény képe egy felfelé nyíló parabola amely  $D = 24^2 - 4 \cdot 10 \cdot 15 = -24 < 0$  miatt nem metszi az  $x$  tengelyt.



5.6. ábra. Az  $10x^6 - 24x^5 + 15x^4$  függvény stacionárius pontjai

### 5.3.3. Konvexitás és a második derivált kapcsolata

A 4.4. alfejezetben bevezettük a konvex és konkáv függvények fogalmát, lokálisan (vagyis intervallumon) is.

Ha szemügyre vesszünk egy konvex és konkáv részekkel is rendelkező függvényt, például az 5.3. ábrán láthatót, észrevehetjük, hogy a konkáv részen csökken az érintő meredeksége, majd ahogy a függvény „átmegy konvexbe”, az érintő meredeksége nőni kezd. Egy függvény növekedési viszonyait a derivált előjele mutatja, az érintő meredekségét pedig ugyancsak a derivált adja, így nem meglepő, hogy a konvex és konkáv részek megtalálásához a derivált deriváltját, vagyis a második deriváltat kell vizsgálni.

Természetesen beszélhetünk konvexitásról differenciálhatóság nélkül is, de ha a függvényünk „élég szép” (jelen esetben ez azt jelenti, hogy legalább kétszer deriválható), egyszerű szükséges és elégséges feltételt találhatunk ezen tulajdonság teljesülésére.

**5.10. Tétel.** *Legyen  $f : A \rightarrow B$  kétszer deriválható függvény.*

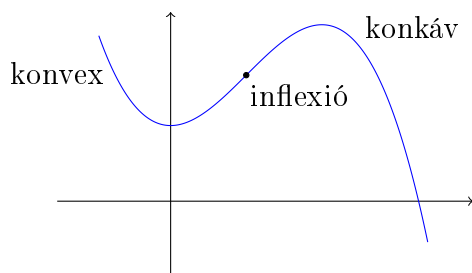
1. *Az  $f$  pontosan akkor konvex a  $C \subseteq A$  intervallumon ha  $f''(x) \geq 0$  teljesül  $\forall x \in C$ -re,*
2. *az  $f$  pontosan akkor konkáv a  $C \subseteq A$  intervallumon ha  $f''(x) \leq 0$  teljesül  $\forall x \in C$ -re.*

Ha egy intervallumon folytonos függvénynek van konvex és konkáv része is, szükségszerűen lesz olyan pontja, amely konvex és konkáv rész határán van, ahol a függvény „átmegy konvexből konkávba” vagy éppen fordítva. Az ilyen tulajdonságú pontokról lesz szó az alfejezet további részében.

**5.5. Definíció.** *Legyen  $f : A \rightarrow B$  függvény, amely konvex a  $(c, d) \subset A$  és konkáv a  $(d, e) \subset A$  intervallumban, vagy fordítva, konkáv a  $(c, d) \subset A$  és konvex a  $(d, e) \subset A$  intervallumban. Ekkor a  $d \in A$  pontot inflexiós pontnak nevezzük.*

(Lásd az 5.7. ábrát.) Az 5.10. tétel miatt nem meglepő az alábbi állítás.

**5.11. Tétel.** *Legyen  $f : A \rightarrow B$  kétszer deriválható függvény, melynek második deriváltja folytonos. Ha az  $x_0 \in A$  az  $f$  függvény inflexiós pontja, akkor  $f''(x_0) = 0$ .*



5.7. ábra. Konvex és konkáv részt is tartalmazó függvény

A tétel megfordítása nem igaz. Ha  $f''(x_0) = 0$ , az  $x_0 \in A$  nem biztos, hogy inflexiós pontja az  $f : A \rightarrow B$  függvénynek. Erre láttunk példát az  $f(x) = 10x^6 - 24x^5 + 15x^4$  esetén (lásd az 5.6. ábrát). Ott az  $x_0 = 0$  pontban a második derivált 0 volt, mégsem volt inflexió, hanem minimumhely. Mi kell tehát ahhoz, hogy az  $x_0$ , melyre  $f''(x_0) = 0$ , inflexiós pont legyen? Az 5.10. tételből ez is következik.

**5.12. Tétel.** *Legyen  $f : A \rightarrow B$  kétszer deriválható függvény, melynek második deriváltja folytonos. Az  $x_0 \in A$  pontosan akkor inflexiós pontja az  $f$  függvénynek, ha  $f''(x_0) = 0$  és  $\exists \varepsilon > 0$  úgy, hogy  $f''(x) \leq 0$  teljesül  $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \subset A$  és  $f''(x) \geq 0$  teljesül  $\forall (x_0, x_0 + \varepsilon) \subset A$  esetén, vagy fordítva,  $f''(x) \geq 0$  teljesül  $\forall (x_0 - \varepsilon, x_0) \subset A$  és  $f''(x) \leq 0$  teljesül  $\forall (x_0, x_0 + \varepsilon) \subset A$  intervallumon.*

Példák:

1. Az  $f(x) = x^2$  függvény (a normál parabola) második deriváltja mindenütt 2, így az egész értelmezési tartományában – a számegyenesen – konvex. Így nincs inflexiós pontja.
2. Legyen  $f(x) = x^3$  (lásd az 5.4. ábrát). Ekkor  $f''(x) = 6x$ , vagyis a 0-ban a második derivált 0 és előjelet is vált, hiszen a  $6x$  függvény értéke negatív lesz negatív  $x$ -ekre, pozitív lesz pozitív  $x$ -ekre. Ez azt jelenti, hogy az  $x^3$  negatív számokra konkáv, pozitív számokra konvex, a 0-ban pedig inflexiós pontja van.

### 5.3.4. Teljes függvényvizsgálat

Ha középiskolás ismereteinket kibővítjük a differenciálszámítás alkalmazásairól itt szerzett ismeretekkel, sok függvényt alaposan megvizsgálhatunk.

A teljes függvényvizsgálat szokásos részei a következők: értelmezési tartomány, tengelymetszetek, pozitivitási intervallumok meghatározása, paritás, periodicitás, folytonosság vizsgálata, ahol nem folytonos, illetve az értelmezési tartomány határain a függvény határértékének kiszámolása, aszimptoták (egyenesek, melyekhez tart a vizsgált függvény), monotonitási intervallumok, szélsőérték helyek meghatározása, a függvény menetének vizsgálata (hol konvex, hol konkáv), inflexiós pont meghatározása, a függvény grafikonjának megrajzolása és végül az értékkészlet megadása.

A lépések sorrendje nincs kőbe vésve, esetleg néhányat ki is kell hagynunk, mert kellő ismeretek hiányában nem tudjuk a megfelelő számítást elvégezni.

Példák:

1. Vizsgáljuk meg az  $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2}{24}$  függvényt! Értelmezési tartománya  $\mathbb{R}$ .

A  $0 = \frac{x^3 - 6x^2}{24} = \frac{x^2(x - 6)}{24}$  egyenlet megoldása az  $x_1 = 0$  és az  $x_2 = 6$ , ezek a függvény zérushelyei. A függvény az  $y$  tengelyt az  $f(0) = 0$  helyen metszi. Mivel  $x^2(x - 6)$  pontosan akkor pozitív, ha  $x > 6$ , ez a félegyenes a függvény pozitivitási intervalluma. Minden más esetben negatív az  $x = 0$  kivételével. Mivel  $-\frac{5}{24} = f(1) \neq f(-1) = -\frac{7}{24}$  és az sem igaz, hogy  $f(1) \neq -f(-1)$ , a függvény se nem páros, se nem páratlan. (Páros egy függvény, ha  $f(x) = f(-x)$ , páratlan, ha  $f(x) = -f(-x)$  értelmezési tartományának minden  $x$  elemére. Jelen esetben mindkét tulajdonság teljesülésére ellenpéldát adtunk.) A függvény nem periodikus. (Ismertebb periodikus függvények a trigonometrikus és tört rész függvények.) Folytonos az egész számegyenesen. A függvény határértéke az értelmezési tartomány határain  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{24} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(x - 6) = \infty$  ( $\infty \cdot \infty = \infty$  miatt) és  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{24} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(x - 6) = -\infty$ , ezért se (globális) minimuma, se (globális) maximuma nem lesz. Aszimptotája (olyan egyenes, amihez a függvény tart) nincs, sőt az is világos, hogy az értékkészlet az egész  $\mathbb{R}$  lesz.

A továbbiakhoz deriváljuk a függvényt. Mivel  $f'(x) = \frac{1}{24}(3x^2 - 12x) = \frac{1}{8}x(x - 4)$ , a monotonitás vizsgálatához az alábbi táblázatot készíthetjük.

$x$	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

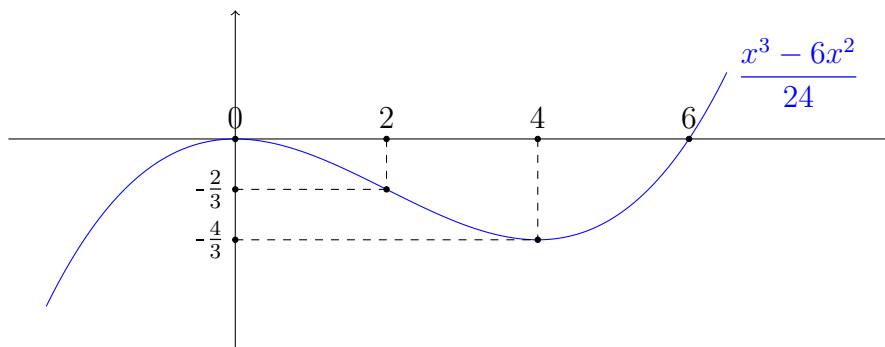
A táblázat harmadik sora tartalmazza a derivált vizsgálatából a függvényre levont következtetéseket, nevezetesen a függvény monoton nő negatív és 4-nél nagyobb  $x$ -ekre, valamint csökken 0 és 4 között. A lokális minimum helyen a függvény értéke  $f(4) = -\frac{4}{3}$ , míg a lokális maximum helyen a függvény értéke  $f(0) = 0$ .

A második derivált előjelének vizsgálatát is egy táblázatban foglaljuk össze. Mivel  $f''(x) = \frac{1}{4}(x - 2)$ , ez esetben egyszerű dolgunk van, a táblázat önmagáért beszél.

$x$	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inflexió	konvex

Az inflexiós pontban a függvény értéke  $f(2) = -\frac{2}{3}$ . Ennyi információ birtokában a függvényt akár kézzel is felvázolhatjuk. (A pontos grafikon az 5.8. ábrán látható.)

2. Legyen  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ . A függvény a 0-ban nincs értelmezve, minden máshol folytonos, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Az  $x$  tengelyt a  $-1$

5.8. ábra. Az  $\frac{x^3 - 6x^2}{24}$  függvény

helyen metszi. Deriváltja  $\frac{x^3 - 2}{x^3}$ , így egy stacionárius pontja van, a  $\sqrt[3]{2}$ .

$x$	$x < 0$	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$x = \sqrt[3]{2}$	$x > \sqrt[3]{2}$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	↗	↘	lok. min.	↗

A táblázatból leolvasható, hogy ebben a pontban lokális minimum van. Határértékei az értelmezési tartomány határain  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \frac{1}{x^2} = \pm\infty$ , valamint  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x + \frac{1}{x^2} = \infty$ . Ez utóbbi azt jelenti, hogy a függvénynek az  $y$  tengely függőleges aszimptotája. Mivel  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , ezért az  $y = x$  egyenes az  $f$  függvény ferde aszimptotája lesz a végtelenben és a mínusz végtelenben (az aszimptota az 5.9. ábrán  $f(x)$  függvénnyel együtt látható). Második deriváltja  $\frac{6}{x^4} > 0$ , így a két részre szakított függvény mindkét részén konvex.

$x$	$x < 0$	$x > 0$
$f''(x)$	+	+
$f(x)$	konvex	konvex

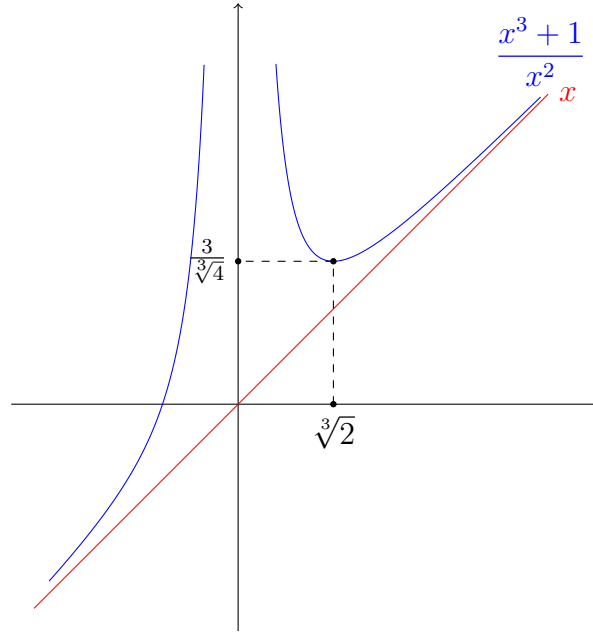
A grafikont felrajzolva könnyű látni, hogy az értékkészlet a valós számok halmaza. (Lásd az 5.9. ábrát.)

### 5.3.5. Taylor-polinom

**5.6. Definíció.** Legyen az  $f : (c, d) \rightarrow B$  függvény az  $a \in (c, d)$  pontban  $n$ -szer differenciálható. Az  $f$  függvény „ $a$ ” pont körül vett  $n$ -edfokú Taylor-polinomján az alábbi függvényt értjük

$$T_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Az  $n$ -edfokú Taylor-polinom egy legfeljebb  $n$ -edfokú polinom.



5.9. ábra. Az  $\frac{x^3 + 1}{x^2}$  függvény és jellemzői

**5.13. Tétel** (Lagrange-féle maradéktag). *Legyen  $f : (c, d) \rightarrow B$   $n+1$ -szer deriválható függvény és legyen  $T_n(x, a)$  az  $f$  függvény  $a \in (c, d)$  pont körül vett  $n$ -edfokú Taylor-polinomja. Ekkor*

$$f(x) - T_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

ahol  $x \leq \xi \leq a$  vagy  $a \leq \xi \leq x$ .

Példa:

Legyen  $f(x) = \sin x$  és  $a = 0$ . Mivel a  $\sin x$   $n$ -edik deriváltjaiból képezett függvénysorozat periodikus (4 periódussal):  $f^{(0)}(x) = \sin x$ ,  $f^{(1)}(x) = \cos x$ ,  $f^{(2)}(x) = -\sin x$ ,  $f^{(3)}(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$ ,  $f^{(5)}(x) = \cos x$ ,  $f^{(6)}(x) = -\sin x$ ,  $f^{(7)}(x) = -\cos x, \dots$ , ezen függvények  $a = 0$  helyen vett értékeiből képzett sorozat is az lesz:  $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots$ . Így a Taylor-polinom egyszerűen felírható, akár nagy  $n$ -ekre is. Legyen most  $n = 6$ . Ekkor  $T_6(x, 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ .

Adjunk becslést a maradéktagra! Az 5.13. Tétel alapján  $\sin x - T_6(x, 0) = \frac{-\cos \xi}{7!} x^7$ . Ha  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , ennek abszolút értékét felülről becsülhetjük  $\frac{(\frac{\pi}{2})^7}{7!} < 0,0047$ -tel. Mivel a  $\sin x$  függvény tetszőleges helyen vett értékét megkaphatjuk, ha ismerjük a függvényt a  $[0, \frac{\pi}{2}]$  intervallum elemeire, a szinusz tetszőleges értékét legalább két tizedes jegyre pontosan becsülni tudjuk az  $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$  függvény felhasználásával.

## 5.10. ábra. A szinusz és Taylor közelítése a 0 körül

Ha a Taylor-polinomot nagyobb  $n$ -re számítjuk ki, pontosabb becslést is kaphatunk. Nem lebecsülendő tény továbbá, hogy míg a szinusz geometriai származtatású, közelítő függvényének értékeit csupán a négy alapművelet használatával megkaphatjuk.

Megjegyzendő, hogy a közelítés nem egyenletes olyan értelemben, hogy a Taylor-polinom pontos  $a$ -ban, vagyis ami körül felírtuk, míg  $a$ -tól távolodva a függvény és a polinom eltérése jelentősen nőhet.

## 5.3.6. Taylor-polinomok Maximával

A Maxima beépített `taylor` eljárását használva egyszerűen kapjuk meg a kívánt közelítést; az alábbi példában a  $\sin x$  függvény  $x$  változója szerinti, 0 pont körül vett legfeljebb 12-edfokú Taylor polinomját láthatjuk.

```
(%i1) taylor(sin(x),x,0,12);
```

```
(%o1)/T/  $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800} + \dots$ 
```

---

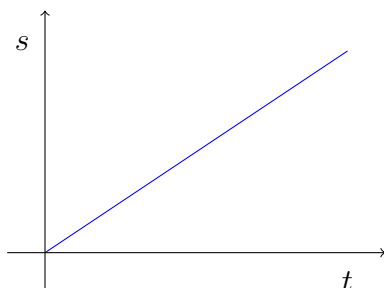
**wxMaxima tipp**

A wxMaximában ezt a lehetőséget az „Analízis” menü „Taylor- és hatványsor...” almenüjében találjuk.



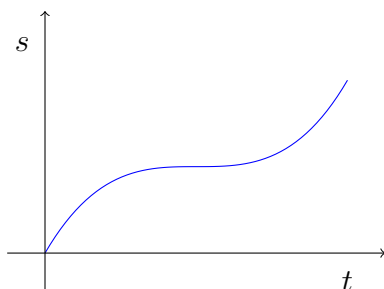
### 5.3.7. Deriválás, mint a folyamatok leírásának eszköze

Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a sebesség ( $v$ ), az elmozdulás ( $s$ ) és az idő ( $t$ ) közti kapcsolat  $v = \frac{s}{t}$ . Ha az elmozdulást az idő függvényében ábrázoljuk, láthatjuk, hogy a sebesség a függvény meredeksége (lásd az 5.11. ábrát).



5.11. ábra. Egyenletes elmozdulás az idő függvényében

Nem meglepő tehát, hogy általános esetben – nem feltétlenül egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén – is igaz az, hogy a sebesség a függvény érintőjének meredeksége, viszont a meredekség pontonként más és más lehet (lásd az 5.12. ábrát). Ez azt jelenti, hogy  $v(t) = s'(t)$ . Hasonlóan, egyenes vonalú egyenletesen



5.12. ábra. Nem egyenletes elmozdulás az idő függvényében

gyorsuló mozgás esetén a gyorsulás ( $a$ ), a sebesség ( $v$ ) és az idő ( $t$ ) közti kapcsolat  $a = \frac{v}{t}$ . Analóg módon, nem egyenletes mozgás esetén  $a(t) = v'(t)$ .

Míndezek jelentősége túlnő a konkrét fizikai interpretáción, hiszen sebesség bármilyen folyamat változási gyorsaságát jelentheti; lehet az infláció növekedésének sebessége, az oldandó anyag oldódásának sebessége az oldószerben, az internetes letöltés sebessége, és így tovább.

## 5.4. Feladatok

1. Deriválja az alábbi függvényeket!

(a)  $-\operatorname{ctg}(\log_2(x^{-0,23})3^{e^x}) - e^{2011}$

(b)  $\frac{(x^3 + 1)^2 \sin(3x)}{x^4 + 4\operatorname{tg}(\sin x)}$

(c) 
$$\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\cos x)}$$

(d) 
$$x^2 2^x \sin^2(2x)$$

2. Számolja ki az alábbi függvényhatárértékeket!

(a) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

(b) 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

(c) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3^x - 1}$$

(d) 
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\ln(x + 1))$$

(e) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

3. Hol monoton növekvők, csökkenők az alábbi függvények? Mik a szélsőérték helyeik? Hol konvexek, konkávok? Hol vannak az inflexiós pontjaik? Mik a határértékeik az értelmezési tartományaik határain?

(a) 
$$f(x) = 4x^7 - 7x^4 + 3$$

(b) 
$$g(x) = x \ln^2(x) + x$$

(c) 
$$h(x) = \frac{x}{x^3 - 2}$$



## 6. fejezet

# Integrálszámítás

Az integrálszámítás bevezetése két szálon fut. Egyrészt beszélünk határozott, másrészt határozatlan integrálról. A két elméletet a Newton–Leibniz-formula kapcsolja majd össze.

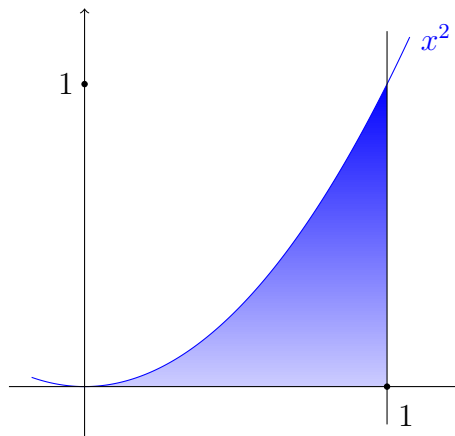
### 6.1. Határozott integrál

A határozott integrál bevezetésének motivációja a függvénygörbe alatti terület meghatározása. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az integrál sok más dologra is jó lesz, mint ennek a pusztán geometriai problémának a tárgyalása, de addig is lássuk az alapszituációt.

Eddigi tanulmányaink során területet akkor tudtunk számolni, ha a síkbeli alakzatot szakaszok vagy körívek (esetleg mindkét típusból valamennyi) határolták. Nyilván szükség lehet más görbék által határolt síkrészek területének kiszámolására is.

#### 6.1.1. Példa, alapfogalmak

Példaként számoljunk ki egy konkrét függvény, az  $f(x) = x^2$  görbéje, az  $x$  tengely és az  $y = 1$  egyenes által határolt rész területét. (Lásd a 6.1. ábrát.) Osszuk



6.1. ábra. A síkrész, melynek területét keressük

fel a  $[0, 1]$  intervallumot diszjunkt részekre. Az egyszerűség kedvéért legyenek a részek egyforma hosszúak, ez  $n$  rész esetén most  $\frac{1}{n}$  hosszú intervallumokat jelent. Ezen intervallumok legyenek az egyik oldalai azoknak a téglalapoknak, melyek a függvényt alulról, illetve felülről érintik, vagyis a téglalapok függőleges oldalainak hossza a függvény adott intervallumon vett minimuma, illetve maximuma.

Mivel  $f(x) = x^2$  szigorúan monoton nő a  $[0, 1]$  intervallumon, a minimumokat az intervallumok alsó, a maximumokat az intervallumok felső végpontjai adják. Ekkor  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$  (ami a görbét alulról érintő téglalapok területének összegéből

képzett sorozat) lesz az alsó, az  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2$  (ami a görbét felülről érintő téglalapok területének összegéből képzett sorozat) lesz a felső közelítő összegek egy-egy sorozata. Ismert összefüggés, hogy  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , így egyszerű számítás adja, hogy az alsó  $\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$ , a felső összeg pedig  $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$ .

Mivel az alsó összeg mindig kevesebb, a felső mindig nagyobb, mint a görbe alatti terület, valamint határértékeikre ugyanazt a számot kaptuk, úgy tűnik logikusnak, ha ezt a közös értéket tekintjük keresett területnek.

Általánosan a következőképpen járunk el.

**6.1. Definíció.** Tekintsük az  $[a, b]$  intervallumot. Az  $a = z^{(0)} < \dots < z^{(n)} = b$  véges tagból álló sorozatot az  $[a, b]$  intervallum egy  $z$  beosztásának nevezzük.

Az  $n + 1$  tagból álló beosztás  $n$  részre osztja az intervallumot.

**6.2. Definíció.** Legyen  $z$  az  $[a, b]$  intervallum egy beosztása. Ekkor a  $z$  beosztás finomságának a  $\max_{k \in \{1, \dots, n\}} (z^{(k)} - z^{(k-1)})$  számot nevezzük, és  $\delta_z$ -vel jelöljük.

Esetünkben egy  $z_n$  beosztássorozatot generáltunk, ahol  $\delta_{z_n} = \frac{1}{n}$ . Látható, hogy finomságsorozatunk 0-hoz tart.

A továbbiakban feltesszük  $f$  folytonosságát. Valójában elég lenne feltenni, hogy  $f$  korlátos, de akkor a következő definícióban szereplő minimumok és maximumok nem biztos, hogy léteznének, és akkor általánosabb fogalmat kellene helyettük használni (infimum, szuprémum). A gyakorlatban legtöbbször úgymint folytonos, vagy szakaszonként folytonos függvényekkel foglalkozunk.

**6.3. Definíció.** Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  folytonos függvény. Legyen  $z$  az  $[a, b]$  intervallum egy beosztása.

$A \sum_{k=1}^n (z^{(k)} - z^{(k-1)}) \min_{x \in [z^{(k-1)}, z^{(k)}]} f(x)$  számot az  $f$  függvény  $z$  beosztáshoz tartozó alsó,

$a \sum_{k=1}^n (z^{(k)} - z^{(k-1)}) \max_{x \in [z^{(k-1)}, z^{(k)}]} f(x)$  számot az  $f$  függvény  $z$  beosztáshoz tartozó felső

integrálközelítő összegének nevezzük és  $\underline{I}_z$ -vel, illetve  $\overline{I}_z$ -vel jelöljük.

Tulajdonképpen az intervallumokon felvett függvényértékek minimumát, illetve maximumát szoroztuk az intervallumok hosszával, így a görbét alulról, illetve felülről érintő téglalapok területének összegét kaptuk. A minimum és a maximum a 4.30. tétel miatt mindig létezni fog.

**6.1. Tétel.** *Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  folytonos függvény. Legyen  $z_n$  az  $[a, b]$  intervallum beosztássorozata, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{z_n} = 0$ . Ekkor  $\exists I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{I_{z_n}}$ .*

A tételből látható, hogy nem szükséges megvizsgálnunk minden megfelelő beosztássorozatot; elegendő ha egy esetben sikerül az alsó vagy felső integrálközelítő összeg sorozat határértékét kiszámolni.

**6.4. Definíció.** *Az  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{I_{z_n}}$  számot az  $f$  folytonos függvény  $[a, b]$  intervallumon vett határozott (Riemann) integráljának nevezzük. Jelölés:  $I = \int_a^b f(x) dx$ .*

Konkrét példánk eredménye új jelölésünkkel tehát:  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ .

Az alsó integrálközelítő összegek számítása során keletkező téglalapokat a 6.2. ábra illusztrálja.

### 6.2. ábra. Alsó integrálközelítő összegek sorozata

Könnyű látni, hogy már kicsit is bonyolultabb függvény esetén az ilyen – definíció szerinti – számolás komoly nehézségekbe ütközhet. Más módszer után kell hát néznünk. Előtte azonban ismerjünk meg néhány hasznos tételt.

#### 6.1.2. Egyszerű tételek a határozott integrálra

**6.2. Tétel.** *Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  folytonos függvény és legyen  $\gamma \in (a, b)$ . Ekkor*

$$\int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**6.3. Tétel.** Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  folytonos függvény és  $m \leq f(x) \leq M$  teljesül  $\forall x \in [a, b]$  esetén. Ekkor  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

**6.4. Tétel.** Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  folytonos függvény és legyen  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ , ahol  $x \in (a, b]$ . Ekkor  $G$  deriválható, és  $G'(x) = f(x)$  teljesül  $\forall x \in (a, b]$  esetén.

A tételben szereplő  $G$  függvényt integrálfüggvény néven szokták emlegetni.

## 6.2. Határozatlan integrál

A legutóbbi tétel már sejteti, hogy fontos kapcsolat lesz a differenciál és integrálszámítás között. Először azonban meg kell ismerkednünk a határozatlan integrál fogalmával.

### 6.2.1. Bevezetés

**6.5. Definíció.** Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  függvény. Ha  $F'(x) = f(x)$  teljesül  $\forall x \in [a, b]$  esetén, az  $F$  függvényt az  $f$  függvény primitív függvényének nevezzük.

Példák:

1. Mivel  $(\sin x)' = \cos x$ , ez azt jelenti, hogy  $\cos x$  primitív függvénye a  $\sin x$ .
2. De  $(3 + \sin x)' = \cos x$  is igaz, így a  $\cos x$  függvénynek primitív függvénye a  $3 + \sin x$  is.

Könnyű látni, hogy ha  $F(x)$  primitív függvénye a  $f(x)$  függvénynek, akkor  $\forall c \in \mathbb{R}$  esetén  $F(x) + c$  is primitív függvénye  $f(x)$ -nek. Belátható, hogy más primitív függvénye nincs intervallumon értelmezett  $f(x)$ -nek. Más típusú értelmezési tartománnyal rendelkező függvények primitív függvényei nem feltétlenül csak konstanssal térnek el egymástól; olyan függvényekkel nem foglalkozunk.

Felmerül továbbá a kérdés, mindig létezik-e egy intervallumon értelmezett függvénynek primitív függvénye. Sajnos nem, viszont igaz az alábbi tétel.

**6.5. Tétel.** Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  folytonos függvény. Ekkor létezik primitív függvénye.

**6.6. Definíció.** Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  függvény. Ha  $F'(x) = f(x)$  teljesül  $\forall x \in [a, b]$  esetén, az  $F(x) + c$  függvények összességét az  $f$  függvény határozatlan integráljának nevezzük. Jelölés:  $\int f(x) dx = F(x) + c$ .

### 6.2.2. Alapintegrálok, elemi tételek

Szeretnénk minél több függvény határozatlan integrálját megkapni. Ehhez először nézzük néhány alapfüggvény határozatlan integrálját. Ezek a szabályok könnyedén ellenőrizhetők deriválással.

**6.6. Tétel** (Alapintegrálok).

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ ha } \alpha \neq -1,$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c,$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \text{ ha } 0 < a \neq 1,$$

$$4. \int e^x dx = e^x + c,$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$7. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c,$$

$$9. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + c,$$

$$10. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + c.$$

**6.7. Tétel** (Integrálási szabályok). *Ha az alábbi határozatlan integrálok léteznek a vizsgált intervallumon, akkor*

$$1. \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$2. \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx,$$

$$3. \int f'(x) f^\alpha(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \text{ ha } \alpha \neq -1,$$

$$4. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

Példák:

$$1. \int 3 \sin x \cos^3 x + 5x^3 dx = 3 \int \sin x \cos^3 x dx + 5 \int x^3 dx = -3 \frac{\cos^4 x}{4} + 5 \frac{x^4}{4} + c.$$

Az összeg integrálját szétírtuk integrálok összegére, a konstansokat kiemeltük az integráljelek elé, majd az első tagra alkalmaztuk az  $f'f^\alpha$  típusnál tanultakat. A második tag (az  $x^3$ ) alapintegrál.

2.  $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c$ . A megfelelő konstans kiemelése után  $f'/f$  típusú integrált kaptunk.

**6.8. Tétel** (Lineáris helyettesítés). Ha  $\int f(x) dx = F(x) + c$ , akkor  $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  és  $\forall b \in \mathbb{R}$  esetén  $\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ .

Példa:

$$\int \sqrt[3]{2x+4} dx = \frac{(2x+4)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3(2x+4)^{\frac{4}{3}}}{8} + c.$$

**6.9. Tétel** (Parciális integrálás). Ha  $f, g : (a, b) \rightarrow C$  differenciálhatóak és az alábbi határozatlan integrálok léteznek  $(a, b)$ -n, akkor

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Ez a formula akkor hasznos, ha a bal oldalon lévő függvény integrálja helyett valamiért jobban boldogulunk a jobb oldalon keletkezett integrállal. Jól használható a parciális integrálás a polinomszor trigonometrikus, polinomszor exponenciális, trigonometrikusszor exponenciális függvények határozatlan integráljának kiszámolására.

Példák:

- $\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c$ ,
- Ha a polinom  $n$ -ed fokú, a parciális integrálást  $n$ -szer kell alkalmazni.

$$\begin{aligned} \int (2x^2 - 3x - 1)2^{3x+7} dx &= \\ (2x^2 - 3x - 1) \frac{2^{3x+7}}{3 \ln 2} - \int (4x - 3) \frac{2^{3x+7}}{3 \ln 2} dx &= \\ (2x^2 - 3x - 1) \frac{2^{3x+7}}{3 \ln 2} - \left( (4x - 3) \frac{2^{3x+7}}{(3 \ln 2)^2} - \int 4 \frac{2^{3x+7}}{(3 \ln 2)^2} dx \right) &= \\ (2x^2 - 3x - 1) \frac{2^{3x+7}}{3 \ln 2} - \left( (4x - 3) \frac{2^{3x+7}}{(3 \ln 2)^2} - 4 \frac{2^{3x+7}}{(3 \ln 2)^3} \right) + c. \end{aligned}$$

Az eljárás során figyelni kell arra, hogy „jobbra haladva” mindig a polinomot deriváljuk, így annak fokszáma minden lépésben eggyel csökken.

- $\int \ln x dx = \int 1 \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + c$ .

Sajnos szorzat, hányados vagy összetett függvény határozatlan integráljának kiszámolására semmilyen általános formula nincs. Ez nagyon megnehezítheti az integrálást. Míg egy átlagos, elemi függvényekből az alpműveletek segítségével

véges lépésben képzett függvény deriválása csupán gyakorlat (és idő) kérdése, addig határozatlan integráljának meghatározása nagyon bonyolult lehet, legtöbbször egyedi trükköket igényel, vagy akár klasszikus értelemben nem is megoldható.

Például az  $e^{-x^2}$  függvénynek létezik a határozatlan integrálja, de nincs elemi függvényekkel kifejezhető primitív függvénye.

## 6.3. Newton–Leibniz-formula

A határozott integrál jól alkalmazható függvénygörbe alatti terület számítására. Azt is láttuk azonban, hogy a definíció szerinti számolás csak nagyon egyszerű esetekben lehetséges komoly nehézségek nélkül. A következő tétel a határozott integrál számolását a határozatlan integrállal való számolásra vezeti vissza.

### 6.3.1. A tétel

**6.10. Tétel** (Newton–Leibniz-formula). *Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  folytonos függvény és jelölje  $F$  az  $f$  primitív függvényét. Ekkor*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Az  $F(b) - F(a)$  különbségre használatos még az  $[F(x)]_a^b$  jelölés.

Példák:

1.  $\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$ , ahogyan azt a definíció szerinti számolással is megkaptuk.

2.  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = [\ln |\ln x|]_e^{e^2} = \ln |\ln e^2| - \ln |\ln e| = \ln 2$ , hiszen az integrál  $f'/f$  típusú volt.

### 6.3.2. Impropius integrál

Határozott integrálokból képzett sorozatok határértékének segítségével értelmezhetjük egyes nem korlátos függvények határozott integrálját, korlátos függvények határozott integrálját nem korlátos intervallumon, esetleg nem korlátos függvények határozott integrálját nem korlátos intervallumon.

Az ilyen integrálokat nevezzük összefoglaló néven impropius integrálnak.

Lássuk először a korlátos intervallumon nem korlátos függvények esetét.

**6.7. Definíció.** *Legyen  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  nem korlátos, folytonos függvény és  $a < \gamma < b$ . Legyen ekkor*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\gamma \rightarrow b^-} \int_a^\gamma f(x) dx$$

határérték, ha létezik.

**6.8. Definíció.** Legyen  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nem korlátos, folytonos függvény és  $a < \gamma < b$ . Legyen ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\gamma \rightarrow a^+} \int_{\gamma}^b f(x) dx$$

határérték, ha létezik.

Példák:

$$1. \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_{0^+}^1 = \ln 1 - \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \ln |\gamma| = 0 - (-\infty) = \infty.$$

$$2. \int_{-9}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = [-2\sqrt{-x}]_{-9}^{0^-} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^-} -2\sqrt{-x} - (-2\sqrt{-(-9)}) = 6.$$

Következzenek a nem korlátos intervallumon korlátos függvények határozott integráljának definíciói.

**6.9. Definíció.** Legyen  $f : [a, \infty) \rightarrow B$  korlátos, folytonos függvény és  $a < \gamma$ . Legyen ekkor

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_a^{\gamma} f(x) dx$$

határérték, ha létezik.

**6.10. Definíció.** Legyen  $f : (-\infty, b] \rightarrow B$  korlátos, folytonos függvény és  $\gamma < b$ . Legyen ekkor

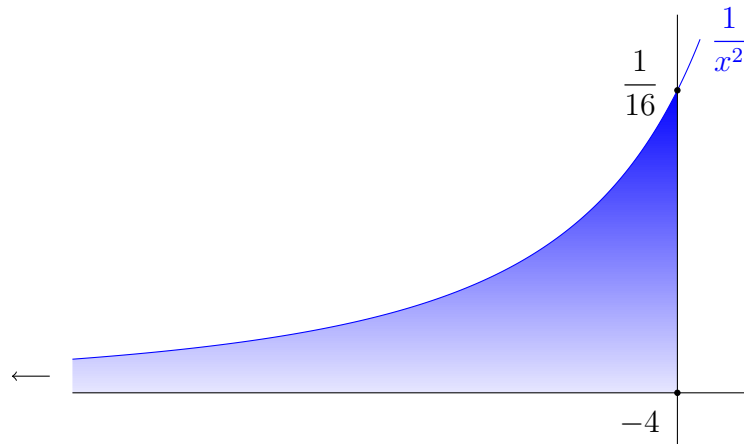
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \int_{\gamma}^b f(x) dx$$

határérték, ha létezik.

Példák:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^{\infty} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \ln |\gamma| - \ln 1 = \infty - 0 = \infty.$$

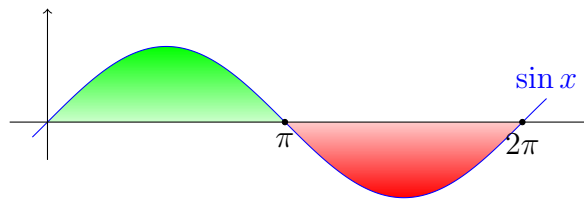
$$2. \int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{-4} = -\frac{1}{-4} - \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}. \text{ (Lásd a 6.3. ábrát.)}$$



6.3. ábra. Az  $\frac{1}{x^2}$  függvény alatti terület a  $(-\infty, -4]$  félegyenesen

### 6.3.3. Területszámítás

Ki akarjuk számolni, hogy a  $\sin x$  függvény és az  $x$  tengely mekkora területű részt zár közre a  $[0, 2\pi]$  intervallumon. Általános esetben, amikor egy integrálható függvény és az  $x$  tengely által közrezárt területet akarjuk kiszámolni, szükség van a függvény zérushelyeire, hiszen ilyenkor két zérushely között integrálunk. A zérushelyek a szinusz függvény esetén ( $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) közismertek. A kiszámolandó terület a 6.4. ábrán látható két rész területének összege. Ismert, hogy  $\sin x$  szimmetrikus (többek között) a  $(0, \pi)$  koordinátájú pontra, így a keresett terület a  $\sin x$  függvény és az  $x$  tengely által a  $[0, \pi]$  intervallumon közre zárt rész területének kétszerese lesz. Mivel  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) =$



6.4. ábra. A szinusz függvény 0 és  $2\pi$  között

2, a keresett terület 4 lesz. Most számoljuk ki az integrál értékét a  $[0, 2\pi]$  intervallu-

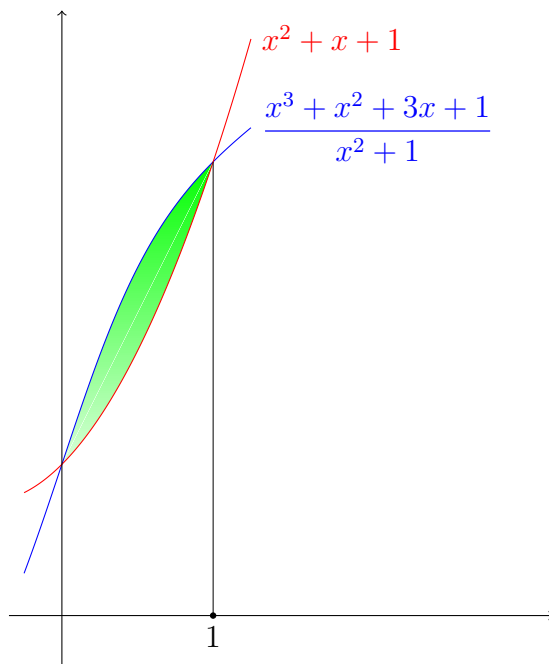
mon:  $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$ . Ez hogy lehet? Úgy, hogy az integrál a függvénygörbe alatti előjeles terület, vagyis ha a vizsgált rész az  $x$  tengely alatt van, nem a területét, hanem annak  $-1$ -szeresét kapjuk.

Valóban,  $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -1 - (-(-1)) = -2$ , ami megfelel a 6.2. Tétel elvárásának.

Mi a helyzet két általános (integrálható) függvény által közbezárt területtel?

Először meg kell keresnünk metszéspontjaikat, majd köztük kell integrálni a függvényeket. A közbezárt terület a „felső” függvény alatti területből kivont „alsó” függvény alatti terület lesz. A 6.7. Tétel 1. részének kivonásra vonatkozó fele miatt a keresett terület a függvények különbségének integrálja lesz.

Bonyolíthatja a helyzetet, ha a két függvénynek több metszéspontja is van. Ekkor a szomszédos zérushelyek közötti darabokat kell figyelnünk.



6.5. ábra. Az  $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$  és az  $x^2 + x + 1$  függvények közötti terület

Konkrét példánkban keressük az  $\frac{x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$  és az  $x^2 + x + 1$  függvények közötti terület. Az  $\frac{x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} = x^2 + x + 1$  egyenletet rendezve az  $x^4 + x^2 - 2x = x(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$  egyenletre jutunk, melynek két valós gyöke van, a 0 és az 1. A szituációt lásd a 6.5. ábrán. A két függvény különbségére  $\frac{x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} - (x^2 + x + 1) = \frac{-x^4 - x^2 + 2x}{x^2 + 1} = -x^2 + \frac{2x}{x^2 + 1}$  adódik, ezért a keresett terület  $\int_0^1 -x^2 + \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \ln|x^2 + 1| \right]_0^1 = -\frac{1^3}{3} + \ln|1^2 + 1| - \left( -\frac{0^3}{3} + \ln|0^2 + 1| \right) = -\frac{1}{3} + \ln 2 \approx 0,3598$  lesz.

### 6.3.4. Forgástest térfogata

Az integrálszámítás számos egyéb alkalmazásai közül egyet mutatnánk be, a forgástest térfogatának kiszámítását. Forgástestet szemléletesen úgy származtathatunk, hogy egy  $f : A \rightarrow B$  egyváltozós függvényt „megforgatjuk” síkjának valamely egyenesre körül. (Valójában nem minden forgástestet lehet így módon – függvény forgatásával – előállítani.)

**6.11. Tétel.** Legyen  $f : [a, b] \rightarrow B$  folytonos függvény, ahol  $B \subset [0, \infty)$ . Legyen a forgástengely az  $x$  tengely, ekkor a keletkező forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Példánkban az  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  függvényt – aminek képe egy egység sugarú félkör – forgatjuk az  $x$  tengely körül (lásd a 6.6. ábrát).

6.6. ábra. A  $\sqrt{1-x^2}$  függvény forgatása az  $x$  tengely körül

A keletkezett egység sugarú gömb térfogata:

$$V = \pi \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = \pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \pi \left( 1 - \frac{1^3}{3} - \left( -1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Könnyű látni, hogy ha az  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  függvényt forgatjuk meg az  $x$  tengely körül, ahol  $r > 0$  paraméter, a keletkezett  $r$  sugarú gömb térfogata  $V = \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \frac{4r^3\pi}{3}$ , ami a gömb ismert térfogatképlete.

## 6.4. Integrálás Maximával

Láttuk a korábbiakban, hogy csak bizonyos típusokba tartozó függvényeknek tudjuk megkeresni a primitív függvényét. A főbb típusokat a Maxima is ismeri. Ilyenek az  $f'/f$ , az  $f'f^\alpha$  (ahol  $\alpha \neq -1$ ), a parciális integrálással megoldható feladatok, vagy ismertebb helyettesítési trükkökkel kiszámolható integrálok.

A szintaktika – ahogyan már megszokhattuk – tiszta, világos logikájú. Nézzünk egy példát! Számoljuk ki:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx$$

```
(%i1) integrate(sqrt(x)/(x+2*sqrt(x)), x);
```

```
(%o1) 2 (\sqrt{x} - 2 \log(\sqrt{x} + 2))
```

Hát igen, a „+c”. Az hiányzik.

A határozott integrált sem túl meglepően kapjuk.

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

(%i2) `integrate(exp(1/x)/x^2,x,1,2);`

(%o2)  $e - \sqrt{e}$

Előfordulhat, hogy a Maxima nem tud mit kezdeni a függvényünkkel. Amint láthattuk, ez sokszor nem a Maxima hiányossága.

$$\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx$$

(%i3) `integrate(sin(1/x)/x,x);`

(%o3)  $\int \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} dx$

Természetesen ilyenkor határozott integrált sem kaphatunk, legalábbis a szokott módon.

$$\int_1^2 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx$$

(%i4) `integrate(sin(1/x)/x,x,1,2);`

(%o4)  $\int_1^2 \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} dx$

De nem kell megijedni, ilyenkor is eredményre juthatunk. Erre való (például) a `romberg` függvény, mely egy ismert közelítő eljárással számol határozott integrált.

(%i5) `romberg(sin(1/x)/x,x,1,2);`

(%o5) .4529753189474722

Számolhatunk improprius integrált is, feltéve ha létezik.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

(%i6) `integrate(1/x^2,x,1,inf);`

(%o6) 1

Mi a helyzet a következő integrállal?

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

```
(%i7) integrate(1/x,x,1,inf);
defint: integral is divergent.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Igazából az integrál ennél a példánál – ahogy azt korábban láttuk is – végtelennel egyenlő.

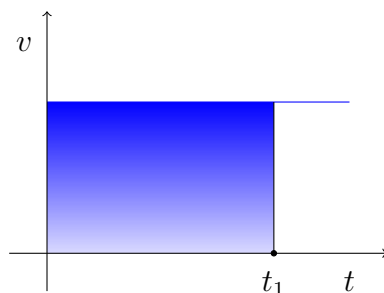
### wxMaxima tipp

A határozatlan és a határozott integrál számolására is alkalmas `integrate` eljárás – nem meglepő módon – a wxMaxima „Analízis” menüjének „Integrálás...” almenüjében kapott helyett. Az itt felbukkanó ablakban van lehetőségünk a `romberg` közelítő módszer kiválasztására is.



## 6.5. Folyamatok leírása és az integrálás

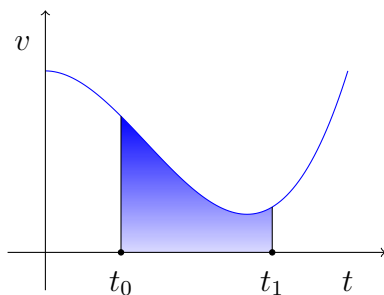
Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén az elmozdulás ( $s$ ), a sebesség ( $v$ ) és az idő ( $t$ ) közti kapcsolat  $s = vt$ . Ilyenkor a sebesség az idő függvényében állandó. Láthatjuk, hogy a kezdeti állapottól ( $t = 0$ ) a végállapotig ( $t_1$ ) az elmozdulás a függvény alatt 0 és  $t_1$  között keletkezett téglalap területe (lásd a 6.7. ábrát).



6.7. ábra. Egyenletes sebesség az idő függvényében

Általános esetben – nem feltétlenül egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén – az elmozdulás  $t_0$  és  $t_1$  időpillanatok között a függvénygörbe alatti terület lesz,

(lásd a 6.8. ábrát), ami azt jelenti, hogy  $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dy$ .



6.8. ábra. Nem egyenletes sebesség az idő függvényében

## 6.6. Feladatok

1. Számolja ki az alábbi függvények határozatlan integrálját!

- (a)  $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$
- (b)  $xe^{2x}$
- (c)  $\frac{6x^2 + 8}{x^3 + 4x}$
- (d)  $(e^x + x)(2e^x + x^2)^6$
- (e)  $\frac{6x^2}{7x^3} + \ln(2x + 1)$

2. Számolja ki az alábbi határozott integrálokat!

- (a)  $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\sqrt{x^3} dx$
- (b)  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x} dx$
- (c)  $\int_0^{\pi} x \sin(2x) dx$
- (d)  $\int_0^{\pi} (3x + \cos x) \left(x^2 + \frac{2}{3} \sin x\right)^7 dx$
- (e)  $\int_2^3 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(\sqrt[3]{x})^5} + \operatorname{tg}(-x + 3\pi) dx$

3. Számítsa ki az alábbi függvények által határolt idomok területét!

- (a)  $x^2 - 5x + 3$ ,  $-x^2 + x - 1$
- (b)  $\sqrt{x}$ ,  $\frac{x}{2-x}$

## 7. fejezet

# Differenciálegyenletek

### 7.1. Bevezetés

Amikor eddigi tanulmányaink során egyenlettel találkoztunk, az ismeretlen valamilyen szám volt. De lehet ismeretlen függvény is.

Az ebben a fejezetben szereplő függvényekről feltételezzük, hogy valamely intervallumon (esetleg intervallumok véges unióján) értelmezett valós értékű függvények.

**7.1. Definíció.** *Az olyan egyenleteket, melyekben az ismeretlen a függvény, függvényegyenleteknek nevezzük.*

**7.2. Definíció.** *Ha az ismeretlen függvénynek a deriváltja is szerepel a függvényegyenletben, differenciálegyenletről beszélünk.*

Példa:

Egy egyszerű differenciálegyenlet például az  $f'(x) = 1$  függvényegyenlet. Az összes megoldást ez esetben az 1 integrálásával kapjuk, ez az  $f(x) = x + c$  „függvénysereg”, hiszen  $c$  tetszőleges valós szám lehet.

**7.3. Definíció.** *Ha a differenciálegyenletben szereplő ismeretlen függvény egy változós (ahogy az ebben a jegyzetben tárgyalt függvények is), közönséges differenciálegyenletről beszélünk.*

**7.4. Definíció.**  *$n$ -edrendűnek nevezzük a differenciálegyenletet, ha a benne szereplő ismeretlen függvénynek legfeljebb az  $n$ -edik deriváltja szerepel az egyenletben.*

Példa:

Az  $f'''(x) = 0$  például egy harmadrendű differenciálegyenlet. Könnyű látni – a 0-t háromszor integrálva –, hogy az összes megoldás az összes  $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$  alakú függvény, ahol  $c_1, c_2, c_3$  konstansok tetszőleges valós számok.

A megoldások legtöbb esetben tartalmaznak legalább egy tetszőleges konstanst. Ez a differenciálegyenlet általános megoldása. Ha adott valahol az ismeretlen függvény, esetleg – magasabb rendű differenciálegyenlet esetén – annak valahányadik

deriváltjának vagy deriváltjainak értéke, kezdetiérték-problémáról beszélünk. Ilyen esetben a megoldó függvény sok esetben egy konkrét – úgynevezett partikuláris – megoldás (a függvénysereg helyett).

Példa:

Az általános megoldásból könnyű látni, hogy a  $f'(x) = 1$ ,  $f(0) = 2$  kezdetiérték-probléma egyetlen partikuláris megoldása az  $f(x) = x + 2$  függvény.

Közönséges differenciálegyenletek esetén gyakran szokás az ismeretlen függvényt  $y$ -nal jelölni, tehát például az  $f'(x) = 1$  jelölés helyett inkább az  $y'(x) = 1$ , vagy még rövidebben az  $y' = 1$  jelölést használják.

A továbbiakban kizárólag elsőrendű, közönséges differenciálegyenlettel foglalkozunk, azok közül is csak néhány nagyon speciális típussal.

## 7.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet

**7.5. Definíció.** *A differenciálegyenletet akkor nevezzük szétválasztható változójúnak – más néven szeparábilisnek –, ha felírható  $y' = f(x)g(y)$  alakban, ahol az  $y$  az ismeretlen függvény és  $x$  a változója.*

### 7.2.1. Ekvivalens integrálegyenlet

Amennyiben  $g \neq 0$ , a szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása egyet jelent az  $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$  úgynevezett ekvivalens integrálegyenlet megoldásával. A kapott megoldás helyességét természetesen az eredeti egyenletbe való visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

Példa:

Oldjuk meg a  $xy' = 7y^2$ ,  $y(1) = 2$  kezdetiérték-problémát. Az egyenlettel ekvivalens integrálegyenlet ekkor  $\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{7}{x} dx$  alakú. Az integrálásokat elvégezve a  $-\frac{1}{y} = 7 \ln|x| + c$  egyenletet kapjuk. Innen  $y$ -t kifejezve  $y = \frac{-1}{7 \ln|x| + c}$  adódik általános megoldásnak. Mivel  $\frac{-1}{7 \ln|1| + c} = 2$ ,  $c$ -re  $-\frac{1}{2}$ -et kapunk, így a kezdetiérték-probléma partikuláris megoldása  $y = \frac{1}{1 - 14 \ln|x|}$ .

## 7.3. Szöveges feladat

Differenciálegyenleteteket számtalan gyakorlati probléma – például geometriai, fizikai, közgazdaságtani – megoldása során kaphatunk.

Példa:

A jégkorong mozgása lassul a jég ellenállásának hatására, amely egyenesen arányos a korong sebességével. A korong kezdősebessége  $5\frac{m}{s}$ , sebessége  $2s$  múlva  $3\frac{m}{s}$  lesz. Mikorra csökken a sebesség  $1\frac{m}{s}$ -ra? Mekkora utat tud megállásáig a korong megtenni?

A differenciálegyenlet a következő:  $v'(t) = kv(t)$ , ahol  $k$  arányossági tényező. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet. Ennek ugyan megoldása lenne a  $v = 0$  függvény, de az eredeti kezdetiérték-problémának már nem, így nyugodtan feltehetjük, hogy  $v \neq 0$ . Így a differenciálegyenlettel ekvivalens integrálegyenlet az alábbi:  $\int \frac{1}{v} dv = \int k dt$ , ahonnan  $\ln|v| = kt + c$ . Innen az egyenlet általános megoldása  $v(t) = e^{kt+c}$  (hiszen  $v(t) \geq 0$  miatt az abszolút érték jel elhagyható), egyelőre ismeretlen arányossági tényezővel.

Mivel  $v(0) = 5$ , így  $e^c = 5$ , tehát  $v(t) = 5e^{kt}$ . Másrészt  $3 = v(2) = 5e^{2k}$ , ahonnan  $e^k = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ , vagyis  $v(t) = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{2}}$  az egyenlet partikuláris megoldása.

A keresett időt az  $5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{2}} = 1$  egyenletet megoldva kapjuk, ami  $t = \frac{\ln 0,04}{\ln 0,6} \approx 6,30(s)$ .

A megtett utat az alábbi (improprius) integrál szolgáltatja:

$$\int_0^{\infty} v(t) dt = \int_0^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{2}} dt = 5 \left[ \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{2}}}{\frac{1}{2} \ln 0,6} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{10}{\ln 0,6} \approx 19,58(m)$$

## 7.4. Lineáris differenciálegyenlet

**7.6. Definíció.** Az  $y' = f(x)y + g(x)$  alakú differenciálegyenletet (közönséges, elsőrendű) lineáris differenciálegyenletnek nevezzük, ahol  $y$  az ismeretlen,  $x$  változós függvény.

Általában feltételezzük az  $f$  és  $g$  függvények folytonosságát.

**7.7. Definíció.** Tekintsük az  $y' = f(x)y + g(x)$  alakú lineáris differenciálegyenletet. Ha a  $g$  függvény azonosan  $0$ , homogén lineáris differenciálegyenletről beszélünk, minden más esetben az egyenlet inhomogén.

Könnyű látni, hogy a homogén lineáris differenciálegyenlet szétválasztható változójú.

### 7.4.1. Konstans variálása

Inhomogén lineáris közönséges elsőrendű differenciálegyenletek megoldását az úgynevezett „konstans variálása” nevű módszerrel mutatjuk be, egy konkrét példán.

Az egyenlet megoldása a homogenizált egyenlet ( $y' = f(x)y$ ) általános megoldásának és az eredeti inhomogén egyenlet ( $y' = f(x)y + g(x)$ ) egy konkrét, tetszőleges konstans nem tartalmazó, más néven partikuláris megoldásának összege lesz.

Példa:

Oldjuk meg az  $y'x + y = \cos x$  differenciálegyenletet!

Ha az egyenletet az  $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\cos x}{x}$  alakra rendezzük, látható hogy inhomogén lineáris differenciálegyenletről van szó.

Első lépésben oldjuk meg az  $Y' = -\frac{1}{x}Y$ , úgynevezett homogenizált változatot, tehát az eredeti egyenletből  $g(x)$  elhagyásával keletkező szétválasztható változójú differenciálegyenlet, ahol  $Y$  függvénye  $x$ -nek. Látható, hogy az  $Y = 0$  függvény megoldása lesz ennek az egyenletnek. Tegyük fel most, hogy  $Y \neq 0$ . Az ekvivalens integrálegyenlet ekkor:  $\int \frac{1}{Y} dY = -\int \frac{1}{x} dx$ . Mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy  $\ln |Y| = -\ln |x| + c$ , ahonnan  $e^c = |xY|$  adódik. Mivel  $e^c$  tetszőleges pozitív szám lehet, az abszolút értéket elhagyva kapjuk, hogy  $xY$  tetszőleges pozitív vagy negatív szám lehet. De mivel  $Y = 0$  is megoldás, a homogenizált egyenlet összes megoldása a  $C = xY$ , vagyis  $Y = \frac{C}{x}$  alakba írható, ahol  $C \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

A konstans variálása azt jelenti, hogy az eredeti egyenlet egy partikuláris megoldását ilyenkor a (homogenizált megoldásból eredő)  $Y_0 = \frac{C(x)}{x}$  alakban keressük (ahol  $Y_0$  is  $x$  függvénye.). Ez a megoldás második lépése. Behelyettesítünk tehát az eredeti egyenletbe:  $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' x + \frac{C(x)}{x} = \cos x$ . Végezzük el a deriválást, majd a kapott kifejezésből fejezzük ki  $C'(x)$ -et. Fontos megjegyezni, hogy  $C(x)$  minden inhomogén egyenlet esetén ki fog esni a számolás során. Tehát  $\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} x + \frac{C(x)}{x} = \cos x$ , ahonnan  $C'(x) = \cos x$ . Innen a  $C(x)$ -et integrálással kapjuk meg. Jelen esetben ez  $\int \cos x dx = \sin x$ . Ezúttal egy konkrét függvényre van szükségünk, ezért hagytuk el a  $+c$ -t a határozatlan integrálás „végéről”. Mindezeket összegezve az eredeti egyenlet egy partikuláris megoldása tehát  $Y_0 = \frac{\sin x}{x}$ .

Utolsó lépésben megadjuk az egyenlet összes megoldását. Ez a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összege, vagyis  $y = Y + Y_0 = \frac{C + \sin x}{x}$ , ahol  $C$  tetszőleges valós szám lehet.

## 7.5. Differenciálegyenletek megoldása Maximával

Szeparábilis és lineáris közönséges differenciálegyenletet a Maxima az `ode2` függvény segítségével old meg. Példánkban legyen a megoldandó egyenlet a következő:

$$y' + xy = x^3$$

(%i1) `ode2('diff(y,x)+x*y=x^3, y, x);`

$$(\%o1) \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \frac{(2x^2 - 4) e^{\frac{x^2}{2}}}{2} + \%c \right)$$

A kapott kifejezést természetesen egyszerűbb alakra is hozhatjuk.

(%i2) `expand(%);`

$$(\%o2) \quad y = \%c e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$$

Amennyiben az elsőrendű, közönséges differenciálegyenletet egyben kezdetiérték-probléma is, hívjuk meg a `ic1` eljárást az `ode2` függvény használata után. Tehát az előző egyenlet megoldása az  $y(0) = 1$  feltétel mellett a következő:

(%i3) `ic1(%o2, x=0, y=1);`

$$(\%o3) \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left( (x^2 - 2) e^{\frac{x^2}{2}} + 3 \right)$$

Ez egyszerűbb alakra hozva:

(%i4) `expand(%);`

$$(\%o4) \quad y = 3 e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$$

#### wxMaxima tipp

wxMaxima használatakor az `ode2` és az `ic1` eljárásokat is az „Egyenletek” menüben találjuk. Előbbit a „Differenciálegyenlet megoldása...”, utóbbit a „Kezdetiérték-probléma (1)...” almenü kiválasztásával érhetjük el.



## 7.6. Feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

(a)  $(1 + \sin x)y' = y \cos x$

(b)  $x^2y' - xy = -1$

2. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!

(a)  $3y^2 = \frac{2x}{(x^2 + 1)y'}$ ,  $y(0) = 0$

(b)  $(x + 1)y' = (x + 1)^2 + y$ ,  $y(1) = 4$



## 8. fejezet

# Feladatok megoldása, végeredmények

### 8.1. Bevezetés a Maxima használatába

- 1
  - 100
  - 5
  - $\frac{121}{4}$
  - 5
  - 4
- $\frac{b^2 - a^2}{b}$
  - 1
- $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  - $k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $x = 0, y = 1$
  - $x = 2, y = t, z = t + 2$ , ahol  $t \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

### 8.2. Sorozatok

- szigorúan monoton nő,  $1 \leq a_n < 3, a_n \rightarrow 3, n_0 = 498$
  - nem monoton,  $-5 \leq a_n \leq \frac{13}{7}, b_n \rightarrow 1, n_0 = 9$
  - szigorúan monoton csökken,  $-\frac{1}{2} < c_n \leq -\frac{2}{5}, c_n \rightarrow -\frac{1}{2}, n_0 = 4$
  - nem monoton,  $-1 \leq d_n \leq 1, d_n \rightarrow 0, n_0 = 100$
  - szigorúan monoton nő,  $-1 \leq e_n < 0, e_n \rightarrow 0, n_0 = 50$
- $-\infty$

- (b) 0
- (c) 3
- (d) 0
- (e) 64
- (f)  $e^{\frac{1}{2}}$
- (g)  $\infty$
- (h) 1

### 8.3. Sorok

1. (a)  $\frac{4}{15}$   
(b)  $\infty$
2. (a)  $\frac{16}{63}$   
(b) az összeg nem létezik (divergens sor)
3. (a) igen  
(b) igen  
(c) nem  
(d) nem

### 8.4. Függvények

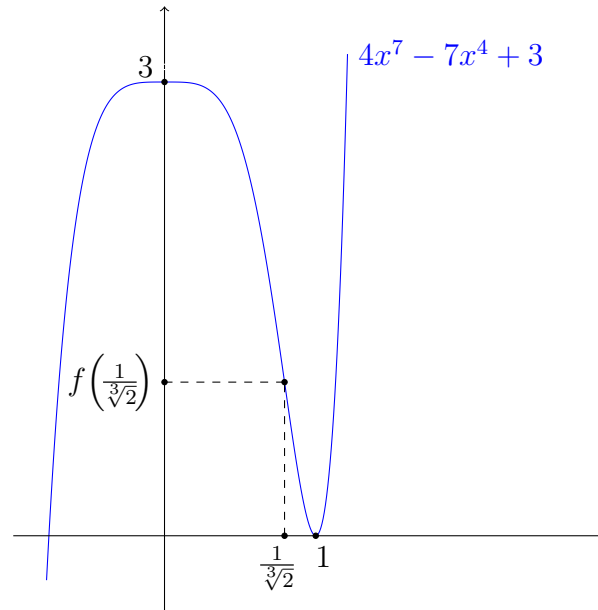
1. (a)  $e - 1$   
(b) 2  
(c) 0  
(d) 0  
(e)  $\frac{5}{2}$   
(f) 0  
(g)  $\frac{13}{6}$   
(h)  $-\frac{16}{7}$   
(i) 0
2. (a) igen  
(b) igen

## 8.5. Differenciálszámítás

1. (a)  $\frac{1}{\sin^2(\log_2(x^{-0,23})3^{e^x})}$ .  
 $\left(\frac{1}{x^{-0,23} \ln 2}(-0,23)x^{-1,23}3^{e^x} + \log_2(x^{-0,23})3^{e^x} \ln 3 \cdot e^x\right)$
  - (b)  $\frac{(2(x^3 + 1)3x^2 \sin(3x) + (x^3 + 1)^2 \cos(3x)3)(x^4 + 4\text{tg}(\sin x))}{(x^4 + 4\text{tg}(\sin x))^2}$  —  
 $\frac{(x^3 + 1)^2 \sin(3x) \left(4x^3 + \frac{4 \cos x}{\cos^2(\sin x)}\right)}{(x^4 + 4\text{tg}(\sin x))^2}$
  - (c)  $\frac{\cos(\sin(\sin x)) \cos(\sin x) \cos x \cos(\cos x)}{\cos^2(\cos x)}$  —  
 $\frac{\sin(\sin(\sin x)) \sin(\cos x) \sin x}{\cos^2(\cos x)}$
  - (d)  $2x2^x \sin^2(2x) + x^2(2^x \ln(2) \sin^2(2x) + 2^x 2 \cos(2x) \sin(2x)2)$
2. (a) 1  
 (b)  $\infty$   
 (c)  $\frac{1}{\ln 3}$   
 (d) 0  
 (e) 0
  3. (a) Monoton növekvő, ha  $x < 0$ , vagy ha  $x > 1$ , köztük csökken, lokális minimuma van az 1 helyen, lokális maximuma van a 0 helyen. Globális szélsőérték helyei nincsenek. Konvex, ha  $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ , konkáv egyébként, inflexiós pont az  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ . (Lásd a 8.1. ábrát.)
  - (b) Ahol értelmezve van (vagyis ha  $x > 0$ ) ott mindenütt monoton növekvő. Sem lokális, sem globális szélsőérték helyei sincsenek. Konvex, ha  $x > \frac{1}{e}$  egyébként konkáv, inflexiós pont az  $\frac{1}{e}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ . (Lásd a 8.2. ábrát.)
  - (c) Monoton növekvő ha  $x < -1$ , csökken ha  $-1 < x < 1$  vagy ha  $x > 1$ , lokális maximuma van a  $-1$  helyen. Egyéb szélsőérték helyei nincsenek. Konvex, ha  $x < -\sqrt[3]{4}$ , vagy ha  $x > \sqrt[3]{2}$ , konkáv e két érték között, inflexiós pontja a  $-\sqrt[3]{4}$  helyen van.  $\lim_{x \rightarrow (\sqrt[3]{2})^\pm} h(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$ . (Lásd a 8.3. ábrát.)

## 8.6. Integrálszámítás

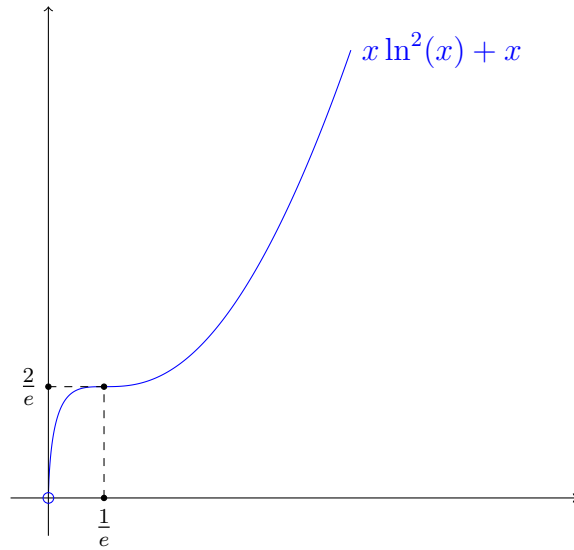
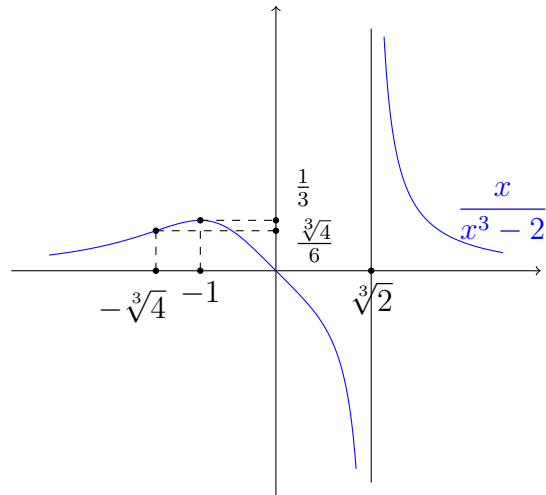
1. (a)  $\frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13} + c$

8.1. ábra. Az  $f(x) = 4x^7 - 7x^4 + 3$  függvény

- (b)  $x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$
- (c)  $2 \ln |x^3 + 4x| + c$
- (d)  $\frac{(2e^x + x^2)^7}{14} + c$
- (e)  $\frac{6}{7} \ln |x| + x \ln(2x + 1) - x + \frac{\ln |2x + 1|}{2} + c$
2. (a)  $\frac{6}{19}$
- (b)  $-\ln \left( \frac{3}{4} \right)$
- (c)  $-\frac{\pi}{2}$
- (d)  $\frac{3\pi^{16}}{16}$
- (e)  $\ln \left| \frac{3 \cos 3}{2 \cos 2} \right|$
3. (a)  $\frac{1}{3}$
- (b)  $\frac{5}{3} - 2 \ln 2$

## 8.7. Differenciálegyenletek

1. (a)  $c(1 + \sin x)$

8.2. ábra. A  $g(x) = x \ln^2(x) + x$  függvény8.3. ábra. A  $h(x) = \frac{x}{x^3 - 2}$  függvény

- (b)  $\frac{1}{2x} + cx$
2. (a)  $\sqrt[3]{\ln(x^2 + 1)}$   
 (b)  $(x + 1)^2$



# Irodalomjegyzék

- [1] Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2007.
- [2] Bárczy Barnabás: Integrálszámítás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2006.
- [3] Kántor Sándor: Analízis I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.
- [4] Lajkó Károly: Gazdasági Matematika I.,  
<http://www.math.klte.hu/~lajko/jegyzet/gazdmat1.pdf>
- [5] Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [6] Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2008.
- [7] Szidarovszky Ferenc: Bevezetés a numerikus módszerekbe, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [8] Urbán János: Határérték-számítás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2006.



# Tartalomjegyzék

<b>Előszó</b>	<b>1</b>
Néhány szó a használt jelölésekről . . . . .	2
<b>1. Bevezetés a Maxima használatába</b>	<b>3</b>
1.1. A komputeralgebrai programokról . . . . .	3
1.2. Miért választottam a Maximát? . . . . .	3
1.3. Grafikus felületek . . . . .	5
1.3.1. Xmaxima . . . . .	6
1.3.2. $\text{\TeX}$ MACS . . . . .	6
1.3.3. wxMaxima . . . . .	6
1.4. A telepítés . . . . .	7
1.4.1. Telepítés Windows alá . . . . .	7
1.4.2. Megjegyzések a Linuxos telepítéshez . . . . .	8
1.5. A Maxima, mint számológép . . . . .	8
1.6. Változók, függvények, egyenletek . . . . .	14
1.6.1. Változók, algebrai kifejezések . . . . .	14
1.6.2. Ramanujan (egyik) sejtése . . . . .	17
1.6.3. Trigonometrikus kifejezések átalakítása . . . . .	18
1.6.4. Egyenletek, egyenletrendszerek megoldása . . . . .	19
1.6.5. Függvények ábrázolása . . . . .	25
1.7. Feladatok . . . . .	27
<b>2. Sorozatok</b>	<b>29</b>
2.1. Sorozat fogalma, sorozatok megadása . . . . .	29
2.2. Monotonitás . . . . .	32
2.3. Korlátosság . . . . .	34
2.4. Határérték . . . . .	35
2.4.1. Alapfogalmak . . . . .	35
2.4.2. Határértékre vonatkozó elemi tételek . . . . .	38
2.5. Részsorozat . . . . .	40
2.6. Műveletek és határátmenet . . . . .	41
2.6.1. Az alapeset . . . . .	42
2.6.2. „Számolás a végtelennel” . . . . .	42
2.6.3. Határozatlan alakok . . . . .	43
2.7. Néhány nevezetes sorozat konvergenciája . . . . .	43
2.8. Feladatok . . . . .	48

<b>3. Sorok</b>	<b>51</b>
3.1. Véges és végtelen összegzés, példák	51
3.2. Feladatok	52
3.3. Mértani sor	54
3.4. Feltételek sorok konvergenciájára	56
3.4.1. Műveletek sorokra	57
3.4.2. Abszolút és feltételesen konvergens sorok	58
3.5. Pozitív tagú sorok konvergenciakritériumai	58
3.6. Feladatok	61
<b>4. Függvények</b>	<b>63</b>
4.1. Bevezetés	63
4.2. Függvények monotonitása	64
4.3. Függvények korlátossága	65
4.4. Konvex és konkáv függvények	66
4.5. Függvényhatárérték	67
4.5.1. A végesben vett függvényhatárérték fogalma	67
4.5.2. Függvényhatárérték és műveletek	71
4.5.3. Jobb és bal oldali függvényhatárérték	71
4.5.4. A függvényhatárérték a végtelenben	73
4.5.5. Függvényhatárérték számolása Maximával	76
4.6. Folytonosság	78
4.6.1. Folytonosság bevezetése	79
4.6.2. Folytonosság intervallumon	81
4.6.3. Féloldali folytonosság	83
4.7. Feladatok	84
<b>5. Differenciálszámítás</b>	<b>87</b>
5.1. Geometriai származtatás, alapfogalmak	87
5.2. Tételek differenciálhányadosra, deriváltra	89
5.2.1. Folytonosság és differenciálhatóság	89
5.2.2. Elemi függvények deriváltjai, differenciálási szabályok	89
5.2.3. Deriválás Maximával	91
5.3. Alkalmazások	93
5.3.1. L'Hospital-szabály	93
5.3.2. Monotonitás és derivált, lokális szélsőértékek	94
5.3.3. Konvexitás és a második derivált kapcsolata	98
5.3.4. Teljes függvényvizsgálat	99
5.3.5. Taylor-polinom	101
5.3.6. Taylor-polinomok Maximával	103
5.3.7. Deriválás, mint a folyamatok leírásának eszköze	104
5.4. Feladatok	104
<b>6. Integrálszámítás</b>	<b>107</b>
6.1. Határozott integrál	107
6.1.1. Példa, alapfogalmak	107
6.1.2. Egyszerű tételek a határozott integrálra	109
6.2. Határozatlan integrál	110

6.2.1. Bevezetés . . . . .	110
6.2.2. Alapintegrálok, elemi tételek . . . . .	111
6.3. Newton–Leibniz-formula . . . . .	113
6.3.1. A tétel . . . . .	113
6.3.2. Improprius integrál . . . . .	113
6.3.3. Területszámítás . . . . .	115
6.3.4. Forgástest térfogata . . . . .	116
6.4. Integrálás Maximával . . . . .	117
6.5. Folyamatok leírása és az integrálás . . . . .	119
6.6. Feladatok . . . . .	120
<b>7. Differenciálegyenletek . . . . .</b>	<b>121</b>
7.1. Bevezetés . . . . .	121
7.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet . . . . .	122
7.2.1. Ekvivalens integrálegyenlet . . . . .	122
7.3. Szöveges feladat . . . . .	122
7.4. Lineáris differenciálegyenlet . . . . .	123
7.4.1. Konstans variálása . . . . .	123
7.5. Differenciálegyenletek megoldása Maximával . . . . .	124
7.6. Feladatok . . . . .	125
<b>8. Feladatok megoldása, végeredmények . . . . .</b>	<b>127</b>
8.1. Bevezetés a Maxima használatába . . . . .	127
8.2. Sorozatok . . . . .	127
8.3. Sorok . . . . .	128
8.4. Függvények . . . . .	128
8.5. Differenciálszámítás . . . . .	129
8.6. Integrálszámítás . . . . .	129
8.7. Differenciálegyenletek . . . . .	130