

KÉZIKÖNYV

ÉS

OKTATÁSI SEGÉDESZKÖZ

A

„SZÁMTANBÓL“

SZABÁLYOK ÉS PÉLDÁKKAL

A MAGY. KIR.

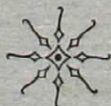
CSENDŐRLEGÉNYSÉG SZÁMÁRA.

KÉRDÉSEKKEL ÖSSZEÁLLITOTTA

BALLÓ LAJOS

M. KIR. CSENDŐRHADNAGY.

MINDEN JOG FENTARTVA.



SZEGED, 1900.

SCHULHOF KÁROLY KÖNYVNYOMDÁJA.

Math P

194 gi



KÉZIKÖNYV

ÉS

OKTATÁSI SEGÉDESZKÖZ

A

„SZÁMTANBÓL“

SZABÁLYOK ÉS PÉLDÁKKAL

A MAGY. KIR.

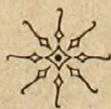
CSENDŐRLEGÉNYSÉG SZÁMÁRA.

KÉRDÉSEKKEL ÖSSZEÁLLÍTOTTA

BALLÓ LAJOS

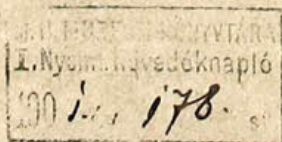
M. KIR. CSENDŐRHADNAGY.

MINDEN JOG FENTARTVA.



SZEGED, 1900.

SCHÜLHOF KÁROLY KÖNYVNYOMDÁJA.



SZÁMTANI SZABÁLYOK

példákkal magyarázva.

I.

Alapműveletek.

Összeadás.

1. *Mit tesz összeadni?*

Összeadni annyit tesz, mint megtudni azt, hogy több adott szám mennyit tesz együttvéve.

2. *Az összeadás eredményét minek nevezzük?*

Az összeadás eredményét: „összegnek” nevezzük.

3. *Mire kell szigorúan vigyázni az összeadásnál?*

Az összeadásnál szigorúan vigyázni kell arra, hogy a számok pontosan egymás alá irassanak; azaz az egyes egyes alá, a tizes tizes alá, a százaz százaz alá s így tovább.

4. *Mi az összeadás jele?*

Az összeadás jele egy álló kis kereszt. (+)

Pl. $132 + 208$ mennyit tesz együttvéve?

$$\begin{array}{r} 132 \\ 208 \\ \hline 340 \end{array}$$

tehát az adott két szám összege 340.

Egy kereskedő elad 3 drb. lovat, az elsőt 435, a másodikat 398 és a harmadikat 379 koronáért, mennyit kapott a három lóért?

435

398

 379

1212

tehát a három darab lóért kapott összesen 1212 koronát.

5. Miként hajtatik végre az összeadás?

A következőképpen: első sorban az adott számok egyesait összeadjuk s ha ezen számok összege nem több, mint kilencz (9), akkor azt (a vonal alá) az egyes alá írjuk. Ha azonban az összeadott számok összértéke (9) kilencznél több, pl. 10, 24, 36, 59 stb. akkor a nyert számok egyes helyén álló számát az ismert módon az egyes alá írjuk, míg a tizes helyén álló számot mint maradékot az adott számok tizeseihez hozzáadjuk.

Igy járunk el a tizesek, százások, ezresek stb. összeadásánál is.

Pl.

8659

 4786

13445

A mint látjuk, az egyes helyén álló 9 és 6-ot összeadtuk s e két szám összértéke 15, melyből az 5-öt mint az egyes helyén álló számot leirtuk, míg az 1-est mint tizes helyen álló számot a tizesekhez (itt az 5 és 8) adtuk s lett belőlük 14, melyből szintén csak a 4-est írtuk le, míg az 1-est átvittük a százásokhoz, a százások helyén 6 és 7 áll, melyekhez a tizesektől maradt egyet (1) ha hozzáadjuk lesz 14, ezen számból a 4-es leírva az (1) mint maradékot átvittük a 8 és 4 mint ezresekhez s így lett a 8 és 4-ből 13, melyet egészen leirtunk.

6. Mi az összeadás ellenpróbája?

Az összeadás ellenpróbája a kivonás.

Pl.

3794

 5364

9158

Hogy összeadásunk helyességéről meggyőződhesünk, a két adott szám összegéből (9158) az egyik adott számot kivonjuk s maradékul a másik adott számot kell hogy találjuk.

Nézzük meg a felvett példánál: az összeg 9158 s ha most ebből az adott számok egyikét, mondjuk 3794-et kivonjuk:

$$\begin{array}{r} 9158 \\ 3794 \\ \hline \end{array}$$

lesz 5364 s ez a maradék, melyet ha megvizsgálunk, úgy találjuk, hogy ez a másik adott szám, tehát összeadásunk helyes.

Ha azonban több összeadandó adott szám van s annak helyességéről akarunk meggyőződni, akkor az adott számok közül egyet kiemelve, a többi összeadjuk s az így nyert összeget az összes adott szám összegéből levonjuk, mely eljárás után maradékként a kiemelt adott számot kell találnunk.

Pl.

$$\begin{array}{r} 6452 \\ 398 \\ 4531 \\ \hline 11381 \end{array}$$

Itt a mint látjuk, három adott számunk van, melyeket összeadva 11381-et találunk.

Ha most az összeg helyességéről meggyőződni akarunk, akkor az adott számok közül egyet — mondjuk jelen esetben a 6452-őt emeljük ki, a másik kettőt — a 398 és 4531-et adjuk össze, lesz:

$$\begin{array}{r} 398 \\ 4531 \\ \hline 4929 \end{array}$$

a most talált összeget (4929) vonjuk le a fentebbi három adott szám összegéből (11381) lesz tehát:

$$\begin{array}{r} 11381 \\ 4929 \\ \hline 6452 \end{array}$$

a mint látjuk a kivonás végrehajtása után az előbbi kiemelt számot vagyis a felvett három szám egyikét találtuk, tehát a fenti összeadásunk helyes.

Az összeadásnak egy másik ellenpróbája is van.

Ezt nagyon helyesen és eredményesen alkalmazzuk akkor, ha több adott szám összeadásának helyességéről akarunk meggyőződni.

Pl.

368942

83246

346821

17539

816548

Ha a fenti adott számok összegének helyességéről akarunk meggyőződni, akkor a felvett számokat tekintet nélkül arra, hogy a tizes, százaz, ezres stb. helyen állanak, mint **egyes** értékű számokat tekintjük s adjuk össze.

Igy:

$$368942 \text{ ezt így írjuk } 3 + 6 + 8 + 9 + 4 + 2 = 32$$

$$83246 \text{ » » » } 8 + 3 + 2 + 4 + 6 = 23$$

$$346821 \text{ » » » } 3 + 4 + 6 + 8 + 2 + 1 = 24$$

$$17539 \text{ » » » } 1 + 7 + 5 + 3 + 9 = 25$$

$$\underline{816548}$$

$$104$$

Most az adott számok összegét is (jelen esetben a 816548 összegét) tekintet nélkül a számok helyi értékére, mint egyes helyen állókat összeadjuk, lesz: $8 + 1 + 6 + 5 + 4 + 8 = 32$.

Ezután mindkettőnél a számokat szintén helyi értéküket nem tekintve a fenti mód szerint adjuk össze mindaddig, a míg csak is egy számot nyerünk, mely ha mind a kettőnél egyenlő, akkor az összeadás helyes.

A fenti egyik szám a 104 a fenti módozat szerint írva $1 + 0 + 4 = 5$.

A másik szám 32, melyet szintén mint fentebb leírva lesz $3 + 2 = 5$.

Végeredményül mindkettőnél 5-öt találtunk, tehát összeadásunk helyes.

Kivonás.

7. Mit tesz kivonni?

Kivonni annyit tesz, mint megtudni azt, hogy két adott szám közül az egyik mennyivel kisebb (vagy nagyobb) a másiknál.

8. Minek nevezzük a kivonás eredményét?

A kivonásnál az eredményt «maradék»-nak vagy «különbség»-nek nevezzük.

9. Mi a kivonás jele?

A kivonás jele egy vízszintes kis vonás (—).

10. Minő számtani kifejezéseket különböztetünk meg a kivonásnál?

A kivonásnál megkülönböztetünk háromfélét:

1. a «kisebbitendő» a melyből kivonunk;
2. a «kivonandót», a melyet a kisebbítendőből kivonunk; és
3. a «maradékot» a melyet a kivonási művelet végrehajtása után nyerünk.

11. Mire kell vigyáznunk a kivonásnál?

A kivonásnál épen úgy, mint az összeadásnál, arra kell vigyázni, hogy a számjegyek pontosan egymás alá irassanak.

12. Miként győződünk meg arról, hogy a kivonás helyes, vagyis mi a kivonás ellenpróbája?

Ha a maradékot (különbséget) a kivonandóval összeadjuk s az egyenlő lesz a kisebbítendővel, akkor a kivonás helyes.

A kivonás ellenpróbája tehát az összeadás.

Pl. 18 mennyivel kisebb 32-nél?

$$\begin{array}{r} 32 \text{ ezt így is írhatjuk: } 32 - 18 = 14 \\ 18 \\ \hline 14 \end{array}$$

Tehát 18 tizenégygyel (14) kisebb 32-nél.

Most győződünk meg a szabály szerint, hogy a számadásunk helyes-e.

A szabály azt mondja, hogy a maradékot (itt a 14) adjuk hozzá a kivonandóhoz (itt a 18) s az a kisebbítendőt adja.

Tehát

$$\begin{array}{r} 14 + 18 \text{ vagy másképen írva} \\ 14 \\ 18 \\ \hline 32 \end{array}$$

Ebből látható, hogy a kivonás helyes.

Egy kereskedő 5 drb sertést ad el 448 koronaért; mennyi pénze marad, ha abból a pénzből 3 drb sertést 185 koronaért vesz?
448 — 185, azaz más alakba írva:

$$\begin{array}{r} 448 \\ 185 \\ \hline 263 \end{array}$$

Tehát még marad 263 koronája.

Szorzás.

13. Mit tesz szorozni?

Szorozni annyit tesz, mint egy adott számot annyiszor venni (tenni) önönmagával összeadandóul, mint azt egy másik adott szám mutatja.

14. A szorzás eredményét hogy nevezzük?

A szorzás eredményét „szorzat”-nak nevezzük.

15. Minő számtani kifejezéseket különböztetünk meg a szorzásnál?

A szorzásnál megkülönböztetünk háromfélét, u. m.:

1. a szorzandót, a melyet meg kell szorozni;
2. a szorzót, melylyel szorozunk; és
3. a szorzatot, melyet a két adott szám összeszorzása után nyerünk.

16. Mi a szorzás jele?

A szorzás jele egy dült kereszt (X).

Pl. 45×3 , vagyis a szabály értelmében a 45-öt háromszor kell tenni önönmagával összeadandóul, így:

$$\begin{array}{r} 45 \\ 45 \\ 45 \\ \hline 135 \end{array}$$

tehát az eredmény, vagyis a szorzat 135.

Ha a 45-öt 3-mal megszorozzuk, szintén a 135-öt kell kapjuk.

$$\begin{array}{r} 45 \times 3 \\ \hline 135 \end{array}$$

tehát a szorzat 135.

17. Hogy történik a szorzás akkor, ha úgy a szorzandóban, mint a szorzóban több szám van?

Ez esetben a szorzást a szorzó egyesével elvégezzük úgy, mintha a mellett több szám nem is volna; azután a szorzó tízes helyén álló számával végezzük el a szorzást, de a szorzat leírásánál arra vigyázunk, hogy egy számmal bennebb, azaz az előbbi szorzat tizedes alá irassék az első szám; azután a szorzó százasként álló számával végezzük a szorzást, éppen úgy, mint az előbb, csak most a szorzat első száma még egygyel bennebb, azaz a százasként alá iratik s így tovább.

Ha azonban a szorzat kétjegyű, akkor az egyes helyen álló számjegyet leírjuk s a tízes helyen állót mint maradékot, a tízes helyen álló számjegy szorzatához adjuk. Így járunk el a tizedesek, százasként, ezresek stb. helyén álló számjegyek szorzásánál is.

Pl.

$$\begin{array}{r} 314 \times 34 \\ \hline 1256 \\ 942 \\ \hline 10676 \end{array}$$

Itt először a 4-es számmal végeztük a szorzást s a szorzatot a vonal alá írtuk, azután a 3-as számmal szoroztuk a 314-et s a szorzatot, a mint lehet látni, egy számmal bennebb írtuk.

Ha megtekintjük a fenti művelet végrehajtását, úgy találjuk, hogy a midőn a szorzó 4-esével a szorzandó 4-esét megszoroztuk, szorzatúl 16-ot találtunk, melyből csak a 6-ost írtuk le a vonal alá szorzatúl; ez azért történt, mert az 1-est mint tízes helyen álló számjegyet maradékként tartottuk vissza s midőn a szorzó 4-esével a szorzandó tízes helyén álló számjegyet (itt az 1-est) megszoroztuk, ahhoz hozzáadtuk s így lett a 4 és 1 szorzatából 5.

Ha a szorzást elvégeztük, akkor az egyes rész szorzatokat úgy a miként egymás alá írtak, az ismert mód szerint összeadjuk s ezt a két adott szám szorzatának nevezzük.

18. Mi a szorzás ellenpróbája?

A szorzás ellenpróbája az osztás.

A szorzásunk helyességéről meggyőződhetünk úgy, hogy a szorzatot az adott szorzóval elosztjuk s ha hányadosul az adott szorzandót találjuk, akkor a szorzásunk helyes.

Pl. Nézzük meg a fenti példát.

Mi a 314-et megszoroztuk 34-gyel s szorzatúl 10676-ot találtunk.

Ha meg akarunk győződni szorzásunk helyességéről, akkor a 10676-ot oszszuk el 34-gyel.

Lesz tehát:

$$\begin{array}{r}
 10676 : 34 = 314 \\
 \hline
 102 \\
 \hline
 \text{" " 47} \\
 \hline
 34 \\
 \hline
 136 \\
 \hline
 136 \\
 \hline
 \text{" " " " }
 \end{array}$$

A mint látjuk, az osztás végrehajtása után hányadosul 314-et, vagyis az adott szorzandót találtuk; tehát szorzásunk helyes volt.

A szorzásnak is van egy más ellenpróbája, melylyel röviden és helyesen kiszámíthatjuk, hogy a szorzatunk helyes-e. Ezt szintén akkor alkalmazhatjuk igen eredményesen, ha úgy a szorzó, mint a szorzandóban több számjegy van.

Pl.

$$\begin{array}{r}
 78964 \times 345 \\
 \hline
 394820 \\
 315856 \\
 236892 \\
 \hline
 27242580
 \end{array}$$

Ha most röviden a szorzat helyességéről meg akarunk győződni, akkor a szorzandóban levő számokat helyi értékükre való tekintet nélkül mint egyeseket összeadjuk; ha ezen összeadásból több számjegy jönne ki egynél, azt ismét a fenti mód szerint összeadjuk s az így nyert számot megszorozzuk a szorzónak a fenti eljárás szerint nyert összegével. Ezen szorzatnak adni kell az eredeti szorzat (27242580) fenti mód szerint kikeresett összegét.

Lássuk tehát a felvett példát:

ez a szorzandó 78964 így írva $7 + 8 + 9 + 6 + 4 = 34$, $3 + 4 = 7$
ez a szorzó 345 így írva $3 + 4 + 5 = 12$, $1 + 2 = 3$

Most a nyert 7 és 3-at összeszorozzuk, lesz belőle $7 \times 3 = 21$,
ezt a fenti mód szerint összeadva $2 + 1 = 3$, adjuk össze szintén a
fenti mód szerint a fő szorzatot (27242580) is, lesz: $2 + 7 + 2 + 4$
 $+ 2 + 5 + 8 + 0 = 30$, a 30-at ismét összeadva lesz $3 + 0 = 3$.

Ha megtekintjük a szorzó és szorzandónak eredményét, vala-
mint a szorzatnak fenti mód szerint kihozott összegét, mindkettőnél
3-at találtunk, tehát a fő szorzásunk helyes.

19. Miként szorzunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel?

10, 100, 1000-el, vagyis oly számmal, melynek első száma 1
s a többi 0, úgy szorozunk, hogy a szorzandóhoz annyi 0-át csa-
tolunk, a hány a szorzóban van.

$$\text{Pl. } 364 \times 10 = 3640$$

azaz a 364-et ha 10-zel meg akarjuk szorozni, akkor a 364 mellé
egy 0-át írunk, így: 3640.

Ha százal kell megszorozni, pl.: 364×100 , akkor két 0-át
írunk melléje, azért, mert a százban (100) két 0 van; lesz tehát az
eredmény. illetve a szorzat 36400.

20. Miként végezzük a szorzást akkor, ha a szorzó olyan szám, hogy abban az egyes, tizes, százaz, ezres stb. helyén 0 áll?

Az esetben a szorzó egész számával elvégezzük a szorzást s
a szorzat végére annyi 0-át írunk, a hány 0 van a szorzóban.

Pl. 235×60 , itt a szorzóban egy 0 van, tehát a 6-al a szor-
zást elvégezzük.

$$\begin{array}{r} 235 \times 60 \\ \hline 1410 \end{array}$$

most a szorzathoz egy 0-át írunk, lesz akkor 14100.

Osztás.

21. Mit tesz osztani?

Osztani annyit tesz, mint megtudni azt, hogy két adott szám közül az egyik hányszor nagyobb (vagy kisebb) a másiknál.

Vagy más szóval: osztani annyit tesz, mint egy adott számot annyi egyenlő részre bontani, a mennyire azt egy másik adott szám mutatja.

22. Mi az osztás jele?

Az osztás jele egy kettős pont (:).

Pl. hányszor nagyobb 12 a 4-nél?

Ez esetben a 12-öt elosztjuk 4 egyenlő részre, vagyis meg-
nézzük, hogy a 4-et a 12-ben hányszor találjuk meg.

$$12 : 4 = 3$$

tehát 12 a 4-nél 3-szor nagyobb, vagyis a 4-et a 12-ben 3-szor találjuk meg.

23. Miről tudjuk meg, hogy az osztásunk helyes, azaz mi az osztás ellenpróbája?

Azt, hogy vajjon az osztásunk helyes-e, megtudjuk, ha az osztót a hányadossal (vagyis azon számmal, melyet az osztás véghezvitele után nyerünk) megszorozzuk. Ha ezen szorzás után olyan számot találunk, mely az osztandóval egyenlő, akkor az osztás helyes.

Pl. az előbbi osztásnál 12-öt osztottunk 4-gyel s hányadosul 3-at nyertünk.

Ha most a 4-et megszorozzuk a 3-mal, 12-öt nyerünk, vagyis olyan számot, mint az osztandó száma.

24. Minő számtani kifejezéseket különböztetünk meg az osztásnál?

Az osztásnál megkülönböztetjük:

1. az osztandót, melyet elosztunk;
2. az osztót, melylyel osztunk; és
3. a hányadost, melyet az osztás végén nyerünk.

Pl. 40 osztandó 8-al:

$$40 : 8 = 5$$

itt az osztandó 40, osztó a 8 és a hányados pedig az 5.

Általános szabály az osztásnál, hogy :

A hányados értéke nem változik, ha úgy az osztót, mint az osztandót egy és ugyanazon számmal megszorozzuk vagy elosztjuk.

12 osztandó 4-el, mi az eredmény, illetve mi a hányados?

$$12 : 4 = 3$$

tehát a hányados 3.

Ha most úgy az osztandót (12), mint az osztót (4) egy és ugyanazon számmal — mondjuk pl. itt 2-vel — megszorozzuk, lássuk mit nyerünk :

$$12 \times 2 = 24$$

$$4 \times 2 = 8$$

Nézzük meg most, hogy ha az osztást elvégezzük, mit nyerünk hányadosul?

$$24 : 8 = 3$$

ehát akár a $12 : 4$, akár ezen két számnak a 2-vel szorzatát vesszük, mindkét esetben hányadosul a 3-at találjuk.

Most egy és ugyanazon számmal oszszuk el.

12 volt az előbbeni osztandó, 4 pedig az előbbeni osztót Oszszuk el mind a kettőt 2-vel.

$$12 : 2 = 6$$

$$4 : 2 = 2$$

most hajtsuk végre az osztást $6 : 2 = 3$.

Azt találjuk, hogy most is hányadosul 3-at nyertünk.

25. 10-zel, 100-zal, 1000-rel stb. hogy osztunk?

10-zel, 100-zal, 1000-rel stb. úgy osztunk, hogy az osztandóból annak egyesétől számítva annyi számjegyet vágunk el, a hány 0 van az osztóban.

Az így nyert számokból a jegy előtti a hányados, a jegy utáni a maradék lesz.

Pl.

$$\frac{3645,9}{9} : 10 = 364,59$$

$$\frac{364,59}{59} : 100 = 3,6459$$

$$\frac{36,459}{459} : 1000 = 0,036459$$

Egy kilométerben van ezer méter, mennyi ennek 10-ed, 100-ad, 1000-red része?

$$1000 : 10 = 100$$

$$1000 : 100 = 10$$

$$1000 : 1000 = 1$$

vagyis egy kilométernek

10-ed része 100 méter,

100-ad része 10 méter,

1000-ed része 1 méter.

Oszthatóság.

26. Mit értünk oszthatóság alatt?

Hogy egy rövid pillantással (áttekintéssel) megtudjuk azt, hogy valamely szám osztható-e maradék nélkül, erre az oszthatóság smertető jelei tanítanak meg.

Vegyük elő tehát az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 10 számot s nézzük meg, hogy ezekkel mily számok oszthatók el maradék nélkül.

27. Mely számok oszthatók 1-gyel?

Az 1-gyel:

$$2 : 1 = 2$$

$$3 : 1 = 3$$

tehát 1-gyel minden szám osztható.

28. Mely számok oszthatók 2-vel?

Pl.

$$24 : 2 = 12$$

$$36 : 2 = 18$$

$$70 : 2 = 35$$

$$82 : 2 = 41$$

2-vel azon számok oszthatók, melyekben az egyesek helyén 0, vagy oly szám áll, melyben a 2 maradék nélkül foglaltatik.

Vagyis 2-vel minden páros szám osztható.

29. Mely számok oszthatók 3-mal?

3-mal azon számok oszthatók maradék nélkül, melyekben a számjegyek alaki értékeinek összege 3-mal osztható.

Pl.

$$1. \quad 27 : 3 = 9$$

$$2. \quad 54 : 3 = 18$$

$$3. \quad 561 : 3 = 187$$

$$4. \quad 6531 : 3 = 2177$$

Nézzük meg az elsőnél 27, itt az alaki érték $2 + 7 = 9$ 9 pedig osztható 3-mal;

54; itt az alaki érték $5 + 4 = 9$; a harmadiknál 561, itt az alaki érték $5 + 6 + 1 = 12$; a negyediknél 6531; itt az alaki érték $6 + 5 + 3 + 1 = 15$.

30. Mely számok oszthatók 4-gyel?

4-gyel azon számok oszthatók, melyekben az egyesek és a tizek helyén 0 vagy oly szám áll, melyben a 4 maradék nélkül foglaltatik.

Pl. $27372 : 4$, itt az egyes és tizes helyén 72 áll, 72 pedig 4-gyel maradék nélkül osztható, mert

$$72 : 4 = 18$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 32 \\ \hline 32 \\ \hline \text{" "}\end{array}$$

ehát a 27372 a 4-gyel maradék nélkül tényleg osztható.

31. Mely számok oszthatók 5-tel?

5-tel azon számok oszthatók, melyekben az egyes helyén 5 vagy 0 van.

Pl.

$$\begin{aligned} 10 : 5 &= 2 \\ 25 : 5 &= 5 \\ 230 : 5 &= 46 \\ 6435 : 5 &= 1287 \end{aligned}$$

32. Mely számok oszthatók 6-tal?

6-tal azon számok oszthatók, melyek 2-vel és 3-mal oszthatók. Miért? Mert a 6, a 2 és 3-nak összeszorzásából jön létre; ha tehát azon szám 2-vel és 3-mal külön-külön osztható, úgy a 3 és 2 szorzatával, vagyis a 6-tal is osztható lesz.

Pl.

$$\begin{aligned} 54 : 2 &= 27 \\ 54 : 3 &= 18 \\ 54 : 6 &= 9 \\ \hline 162 : 2 &= 81 \\ 162 : 3 &= 54 \\ 162 : 6 &= 27 \end{aligned}$$

33. Mely számok oszthatók 7-tel?

7-tel csakis saját maga (a 7) s az ő többszöröse osztható maradék nélkül.

Pl.

$$\begin{aligned} 7 : 7 &= 1 \\ 14 : 7 &= 2 \\ 21 : 7 &= 3 \\ 140 : 7 &= 20 \\ 210 : 7 &= 30 \text{ stb.} \end{aligned}$$

34. Mely számok oszthatók 8-csal?

8-csal azon számok oszthatók, melyekben az egyesek, tizedesek és százaskok helyén 0 vagy oly szám van, melyben a 8 maradék nélkül foglaltatik.

Pl.

$$3457,6 : 8 = 72$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \hline " 16 \\ 16 \\ \hline " " \end{array}$$

Látjuk, hogy itt az egyes, tizes és százask helyén 576 áll, melyben a 8 maradék nélkül foglaltatik, miből folyólag a 34576 is osztható 8-csal.

Próbáljuk meg: tehát osszuk el a

$$34,5,7,6 : 8 = 4322$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \hline " 25 \\ 24 \\ \hline " 17 \\ 16 \\ \hline 16 \\ " 16 \\ \hline " " \end{array}$$

Tehát a 34576 a 8-csal maradék nélkül osztható.

35. Mely számok oszthatók 9-czel?

9-czel azok a számok oszthatók, melyekben a számjegyek alaki értékeinek összege 9-czel osztható.

Pl. $76032 = 18$

azaz :

$$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

18 ez az alaki értéke a felvett számnak:
18 osztható 9-czel, ennél fogva a 76032 is osztható lesz 9-czel.

Lássuk :

$$\begin{array}{r}
 76032 : 9 = 8448 \\
 \underline{72} \\
 " 40 \\
 \underline{36} \\
 " 43 \\
 \underline{36} \\
 " 72 \\
 \underline{72} \\
 " "
 \end{array}$$

tehát a 76032 a 9-czel osztható maradék nélkül.

36. Mely számok oszthatók 10-zel, 100-zal, 1000-rel?

10-zel oly számok oszthatók, melyekben az egyesek helyén 0 van.

100-zal oly számok oszthatók, melyekben az egyesek és tizedesek helyén 0 van;

1000-rel oly számok oszthatók, melyekben az egyesek, tizedesek és százask helyén 0 van.

Pl.

$$\begin{array}{r}
 450 : 10 = 45 \\
 \underline{40} \\
 " 50 \\
 \underline{50} \\
 " "
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3200 : 100 = 32 \\
 \underline{300} \\
 " 200 \\
 \underline{200} \\
 " "
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 87000 : 1000 = 87 \\
 \underline{8000} \\
 " 7000 \\
 \underline{7000} \\
 " " " "
 \end{array}$$

II.

Tizedes törtek.

1. *Mi a tört?*

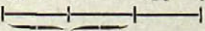
A tört nem egyéb, mint jelölt osztás.

Minden törtszám írását két szám által eszközöljük, a melyeket egy kis vízszintes vonallal (—) választunk el egymástól.

Pl. $\frac{2}{3}$ ez egy tört, melyben a felső számot (2) számlálónak, az alsót (3) nevezőnek mondjuk.

2. *Mi a törtben a nevező s mi a számláló?*

A törtben a nevező megjelöli, hogy egy bizonyos egységet hány részre kell osztani, míg a számláló megmutatja azt, hogy a nevező által szétozott részekből hány részt kell venni.

Pl. Vegyünk elő egy pálczikát s azt törjük el 3 egyenlő részre, így  s a részekből vegyünk el 2 darabot, még marad 1 darab, az elvett részeket így fejezzük ki törttel: $\frac{2}{3}$, vagyis a pálczikának jelzett része.

Ha a törtben a nevező helyén 10, 100, 1000, 10000 stb. áll, akkor a törtet tizedes törtnek nevezzük.

A tizedes törtknél a tizedes pont a fő szerepvivő, mert attól számíttatik az egész és a tizedes számok értéke.

Pl. 389.46, ez egy tizedes tört, melyet így is írhatunk $389\frac{46}{100}$, azaz 389 egész és 46 század rész.

A tizedes pont feltevésére nagy súlyt kell fektetni, mivel a számok értéke tőle számítva balra emelkedik, jobbra csökken.

Pl. 389.46, ezen törtben a pont előtt a 9, az kilencz egyes, a 8, az nyolcz tizes és a 3, az három százast foglal magában, míg a tizedes ponttól jobbra a 4, négy tized, a 6, hat századrészt foglal magában.

Összeadás.

3. *Miként történik a tizedes törtek összeadása?*

A tizedes törtek összeadása éppen úgy történik, mint a közönséges egész számok összeadása.

Azonban a leírásnál arra kell vigyázni, hogy a tizedes pontok egymás alá essenek.

Pl.

$$347\cdot25$$

$$\underline{275\cdot64}$$

$$622\cdot89$$

Az összeadásnál tehát úgy járunk el, hogy a jobbról álló (legkisebb értékű) számjegyet hozzáadjuk a vele egy helyi értékkel bíró számjegyzet s folytatjuk ezen összeadást addig, míg a tizedes pontot elérjük.

Ha a tizedes pontot elértük, akkor azt leírjuk s a maradékot átviszszük az egészekhez.

Pl.

$$3456\cdot983$$

$$\underline{6032\cdot784}$$

$$9489\cdot767$$

Itt láthatjuk, hogy a midőn a tizedes pont után a 9-et és 7-et összeadtuk, az előbbeni maradékkal (1) az kitett 17-et, melyből a 7-et leirtuk s mindjárt a tizedes pontot feltettük, míg a maradékot (1-et) átvittük az egészekhez s így lett a 6 és 2-ből 9.

Kivonás.

4. Miként történik a tizedes törtek kivonása?

A tizedes törtek kivonása éppen úgy történik, mint a közönséges egész számok kivonása azzal a különbséggel, hogy a midőn a kivonással a tizedes pontig értünk, a maradékba is a tizedes pontot felteszszük.

Pl.

$$452\cdot64\text{-ből kivonandó}$$

$$\underline{321\cdot32}$$

$$131\cdot32$$

Tehát a mint látjuk a kivonást éppen úgy, mint az egész számoknál kivonásnál elvégeztük s midőn a 3-at a 6-ból kivontuk, a maradék (3) elejébe is a tizedes pontot feltettük.

A kivonásnál is vigyázni kell arra, hogy a tizedes pontok egymás alá irassanak pontosan, nehogy ezen mulasztás miatt a számadásba hiba csuszszék be.

Szorzás.

5. Miként történik a szorzás a tizedes törtekkel?

Akár tizedes törtet szorozunk tizedes törttel, akár tizedes törtet egészszel, vagy egészet tizedes törttel, a szorzást éppen úgy, mint a közönséges egész számok szorzásánál a műveletet végrehajtjuk, de a szorzatban jobbról annyi számot vágunk el a tizedes ponttal tizedesül, a hány tizedes számjegy van a szorzó és szorzandóban együttvéve.

Pl. szorozzunk meg egy tizedes törtet tizedes törttel:

$$\begin{array}{r}
 36\cdot43 \times 6\cdot32 \\
 \hline
 72\ 86 \\
 10\ 92\ 9 \\
 218\ 58 \\
 \hline
 230\ 23\ 76
 \end{array}$$

Tehát a szorzást — a mint látjuk a fenti példában — egyszerűen végrehajtottuk, azonban a szorzatban jobbról balfelé számított négy számjegyet a tizedes ponttal elváltunk azért, mivel a szorzóban 2 és a szorzandóban 2, összesen 4 tizedes számjegy van.

Most szorozzunk meg egy tizedes törtet egészszel:

Pl.

$$\begin{array}{r}
 342\cdot35 \times 24 \\
 \hline
 1369\ 40 \\
 6847\ 0 \\
 \hline
 8216\cdot40
 \end{array}$$

Itt a szorzást egyszerűen végrehajtva, a szorzatból két tizedes számjegyet elváltunk azért, mivel a szorzandóban 2 tizedes van.

Szorozzunk most egészet tizedes törttel:

Pl.

$$\begin{array}{r}
 347 \times 3\cdot32 \\
 \hline
 694 \\
 1041 \\
 1041 \\
 \hline
 1152\cdot04
 \end{array}$$

A mint látjuk, itt is a szorzás egyszerűen végre lett hajtva s

miután a szorzóban két tizedes számjegy van, a szorzatban is két számot tizedesül elvágunk.

6. *Miként szorozunk tizedes törtet 10-zel, 100-zal, 1000-rel?*

10-zel, 100-zal, 1000-rel úgy szorozunk tizedes törtet, hogy a tizedes pontot annyi számmal teszszük jobbra, a hány 0 van a szorzóban.

$$\text{Pl.} \quad 378'496 \times 10 = 3784'96$$

azaz a tizedes pontot egy számjeggyel jobbra tettük, mivel a szorzóban (10) egy 0 van.

$$378'496 \times 100 = 37849'6$$

vagyis a tizedes pontot két számmal tettük jobbra, mivel a szorzóban (100) két 0 van.

$$379'8764 \times 1000 = 379876'4$$

itt, a mint látjuk, a tizedes pontot három számmal tettük jobbra azért, mert a szorzóban (1000) három 0 van.

Ha azonban a szorzandóban kevesebb tizedes számjegy volna, mint a hány nulla (0) van a szorzóban, akkor a még hiányzó számjegyek helyét 0-val pótoljuk.

$$\text{Pl.} \quad 379'87 \times 1000 = 379870$$

A mint látjuk, a szorzandóban (379'87) két tizedes jegy, míg a szorzóban (1000) három 0 van s midőn a szorzást az ismert módon elvégeztük, akkor a szorzat végére egy 0-át irtunk.

Osztás.

7. *Miként történik a tizedes törtek osztása?*

A tizedes törtek osztása különféleképen történik, még pedig attól függ, hogy:

1. tizedes tört osztatik-e tizedes törttel;
2. tizedes tört osztatik-e egész számmal;
3. egész szám osztatik-e tizedes törttel;
4. tizedes tört osztatik-e 10-zel, 100-zal, 1000-rel stb.

Vegyük az első esetet, vagyis nézzük meg, hogy miképen történik a tizedes tört osztása tizedes törttel.

Tegyük fel a szabályt, mely így szól: tizedes törtet tizedes törttel úgy osztunk, hogy a tizedes pont elhagyása által a tizedes számokat egész számokká alakítjuk, még pedig úgy, hogy, ha az egyik vagy másikkban több tizedes jegy volna, akkor a melyikben kevesebb tizedes jegy van, ahhoz annyi 0-át csatolunk, a hány tizedes jeggyel több van a másikkban. Ennek megtörténte után az osztást, mint egész számokkal, az ismert módon végrehajtjuk.

Pl.

$$36\cdot4 : 6\cdot8$$

itt azt látjuk, hogy úgy az osztandóban, mint az osztóban 1—1 tizedes számjegy van.

Ezen esetben az osztást a tizedes pontra való tekintet nélkül végrehajtjuk.

Pl. $36\cdot4 : 6\cdot8$, vagyis elhagyva a tizedes pontokat, lesz

$$\begin{array}{r} 364 : 68 = 5 \\ \underline{340} \\ = 24 \end{array}$$

tehát a hányados 5 s még maradt 24.

Ha most az osztást folytatni akarjuk, akkor az 5 után a tizedes pontot felteszszük azért, mert a 68-at a 24-ben nem találjuk meg. Ez esetben a maradékot 0-val pótoljuk.

Pl. az előbbi osztást folytatva:

$$\begin{array}{r} 364 : 68 = 5\cdot352 \\ \underline{340} \\ = 240 \\ \underline{204} \\ = 360 \\ \underline{340} \\ = 200 \\ \underline{136} \\ = 64 \end{array}$$

tehát elvégezvén az osztást, a hányados $5\cdot352$ s még marad 64.

Ha tizedes törtet osztunk egészszel, az esetben úgy járunk el, hogy az osztást éppen úgy, mint a közöséges számokkal, folytatjuk addig, míg a tizedes pontig érünk s akkor a tizedes pontot felteszszük.

Lássunk egy ilyen osztást:

$$264.72 : 24 = 11.03$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline = 24 \\ 24 \\ \hline = 72 \\ 72 \\ \hline = = \end{array}$$

ha megvizsgáljuk az eljárást, azt tapasztaljuk, hogy 24-gyel először a 26-et osztottuk, melyben megtaláltuk egyszer s még maradt 2, ehhez lehoztuk a 4-et, szintén egyszer találtuk meg, több egész az osztandóban nem lévén, a hányadosba a tizedes pontot tettük s az osztást rendesen folytattuk, azaz a tizedes pont után levő első számot (7-et) lehoztuk, melyben a 24-et 0-szor találtuk meg s ezt a hányadosba is kiírtuk, a 7-hez lehoztuk a 2-t s lett 72, melyben a 24-et 3-szor találtuk meg. Végrehajtván ekként az osztást, hányadosként 11.03-at találtunk.

Hogy vajjon az osztásunk helyes-e, tegyünk egy próbát, vagyis a hányadost (11.03) szorozzuk meg az osztóval (24-gyel) s ha helyes a számításunk, akkor e szorzat az osztandót kell adja.

Pl.

$$\begin{array}{r} 11.03 \times 24 \\ \hline 44.12 \\ 220.6 \\ \hline 264.72 \end{array}$$

tehát látjuk, hogy az osztás helyes volt.

A szabály tehát ez leend: tizedes törtet úgy osztunk egészszel, hogy az egészszel az osztást a tizedes pontig rendesen végezzük s ha azt elértük, akkor a hányadosba is a tizedes pontot felteszszük.

Nézzük most a harmadik esetet, vagyis azt, a midőn egészet kell osztani tizedes törttel.

Tegyük fel előre is azon szabályt, melynek alapján ezen művelet végre lesz hajtva.

Egészet tizedes törttel úgy osztunk, hogy az osztó tizedes törtet a tizedes pont elhagyása által egész számmá alakítjuk s az osztandóhoz annyi 0-át csatolunk, a hány tizedes számjegy van az osztóban, azután az osztást, mint egész számmal, az ismert módon végrehajtjuk.

$$\text{Pl.} \qquad 379 : 45\cdot82$$

itt látjuk, hogy az osztóban (45·82) két tizedes számjegy van, ha ezt a tizedes pont elhagyásával egész számmá alakítjuk, lesz belőle 4582.

A szabály azt mondja, hogy az osztandóhoz annyi 0-át kell csatoljunk, a hány tizedes jegy van az osztóban.

Az osztóban két tizedes számjegy van, tehát az osztandóhoz (379) két 0-át csatolunk s lesz akkor 37900.

Most az osztást az ismert módon végrehajtjuk.

$$\begin{array}{r} \text{Pl.} \qquad 37900 : 4582 = 8 \\ \qquad \quad 36656 \\ \hline \qquad \quad = 1244 \end{array}$$

tehát a hányados 8, és 1244 a maradék.

Hogy az osztásunk helyes-e, megtudjuk, ha a 4582-t megszorozzuk 8-czal s a szorzathoz az 1244 maradékot hozzáadjuk, mivel annak az osztandót (37900) kell adja.

Lássuk tehát:

$$\begin{array}{r} 4582 \times 8 \\ \hline 36656 \quad \text{ez a szorzat, melyhez ha az 1244-et} \\ 1244 \quad \text{hozzáadjuk} \\ \hline \end{array}$$

37900 az eredmény, vagyis az összeg — a mint látjuk — az osztandóval egy és ugyanaz.

Vegyük most a negyedik esetet, vagyis azt, a midőn tizedes törtet kell 10-zel, 100-zal, 1000-rel, 10000-rel osztani.

A szabály így szól: tizedes törtet úgy osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, 10000-rel stb., hogy az osztandóban a tizedes pontot annyi számjeggyel teszszük balra, a hány 0 van az osztóban.

Pl.

$$3686\cdot34 : 10 = 368\cdot634$$

azaz a tizedes pontot egy számmal balra előre tettük.

$$3686\cdot34 : 100 = 36\cdot8634$$

vagyis a tizedes pontot két számmal tettük előre.

Igy folytatjuk 1000-rel, 10000-rel stb.

III.

Közönséges törtek.

1. *Mi a tört?*

A tört nem egyéb, mint jelölt osztás.

Minden törtben megkülönböztetünk két számot, és pedig:

1. a számlálót; s

2. a nevezőt.

A közönséges tört alakja ilyen: $\frac{3}{4}$, vagyis két egymás fölé irt számot egy kis vízszintes vonallal (—) elválasztjuk.

A törtben a felső számot számlálónak s az alsót nevezőnek mondjuk.

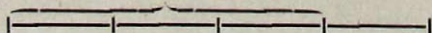
Tekintettel a szabályra, mely azt mondja, hogy: „a tört nem egyéb, mint jelölt osztás“, akkor ezen törtet $\frac{3}{4}$ így is írhatjuk 3 : 4-gyel.

Egészítsük tehát a szabályt s mondjuk ki, hogy: „a tört nem egyéb, mint jelölt osztás, melyben a számláló az osztandó s a nevező az osztó.“

2. *Mi a törtben a nevező s mi a számláló?*

A nevező megnevezi (mutatja), hogy valamely egységet hány egyenlő részre kell osztani, míg a számláló megmutatja azt, hogy a nevező által szétosztott egység részeiből, hány részt kell venni.

Pl. Vegyünk elő egy kis pálczát s ezt vágjuk 4 egyenlő részre



ha most a felvett tört ($\frac{3}{4}$) értékét a pálczikán akarjuk megtudni, hogy mennyi, a szabályhoz fordulunk, a mely azt mondja, hogy

a nevező (itt a 4) megnevezi, hogy egy bizonyos egységet hány egyenlő részre kell osztani; tehát itt a $\frac{3}{4}$ -ben a pálczát 4 részre kell osztani; a számláló pedig azt mutatja meg, hogy a nevező által elosztott egység részeiből hány részecskét kell venni, jelen esetben 3-at, mert a számláló 3.

Tehát a kis pálczának $\frac{3}{4}$ része a rajzban összekapcsolt három rész.

3. *Hányféle törtet különböztetünk meg?*

Megkülönböztetünk háromféle törtet és pedig:

1. tiszta törtet;
2. hamis vagy áltörtet; és
3. vegyes törtet.

4. *Milyen a tiszta tört?*

Tisztának mondjuk a törtet, ha abban a nevező nagyobb (vagyis a nevező több egységet foglal magában), mint a számláló.

Pl. $\frac{5}{7}$ ez tiszta tört, mivel a számláló kisebb a nevezőnél (vagyis a nevező nagyobb, mint a számláló.)

Tekintettel pedig arra, hogy a tört nem egyéb, mint jelölt osztás, ha a műveletet (az osztást) végrehajtjuk, akkor a nevezőt nem találjuk meg a számlálóban, tehát a törtben egész nem foglaltatik.

5. *Milyen a hamis (ál) tört?*

Ha a törtben a számláló nagyobb, mint a nevező, akkor a törtet hamisnak (álnak) nevezzük.

Pl. $\frac{12}{4}$ ez hamis tört; mert ha az osztási műveletet végrehajtjuk, azt fogjuk látni, hogy ez a tört egészeket is foglal magában.

$$\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$$

==

6. *Milyen a vegyes tört?*

Ha a tört mellett egészek is vannak, azt a törtet vegyes törtnek nevezzük.

Pl. $23 \frac{5}{6}$, azaz itt a 23 egész s az $\frac{5}{6}$ egy tiszta tört, de mert a 23 és az $\frac{5}{6}$ egy helyre tartozik, együttvéve $23 \frac{5}{6}$ egy vegyes törtet képez.

Ezen törtet átváltoztathatjuk egy törtté, vagyis, hogy abban egészek ne legyenek, még pedig úgy, hogy a nevezővel megszorozzuk az egészet s a számlálót a szorzathoz adjuk, melyből lesz az új számláló, míg az új nevező értékváltozás nélkül lesz a régi nevező.

Pl. a felvett $23 \frac{5}{6}$ vegyes törtet változtassuk át közönséges törtté.

$23 \frac{5}{6}$ itt a 23-at megszorozzuk 6-tal (a nevezővel) s lesz

$$\underline{23 \times 6}$$

138 ez lesz a szorzat, melyhez

5 a számlálót (az 5-öt) hozzáadjuk

143 s lesz az új számláló 143, míg a nevezőt változtatlanul alájírnjuk, így: $\frac{143}{6}$.

Ha most meg akarjuk tudni, hogy vajon az összeöntés által a vegyes tört értéke nem változott-e, a nevezővel oszszuk el a számlálót.

$$\begin{array}{r} \frac{143}{6} = 143 : 6 = 23 \frac{5}{6} \\ \underline{12} \\ = 23 \\ \underline{18} \\ = 5 \end{array}$$

Mondjuk ki tehát szabályul, hogy „a tört értéke nem változik, ha mind a számlálót, mind a nevezőt egy és ugyanazon számmal megszorozzuk, vagy egy és ugyanazon számmal elosztjuk.”

A fenti példát ha megtekintjük, ezen szabály igazságáról meggyőződünk meg.

Ugyanis, ha a 23 egésznek nevezőjéül egy 1-et teszünk.

Pl. $\frac{23}{1}$ ez még a tört értékén nem változtat, mivel tudjuk, hogy az egy sem nem oszt, sem nem szoroz.

Ennélfogva a 6-tal a $\frac{23}{1}$ törtnek mind a számlálót (23-at), mind a nevezőjét (1-et) megszorozva, lesz belőle $\frac{138}{6}$, ha most a számláléhoz a régi számlálót (az 5-öt) hozzáadjuk, lesz $\frac{143}{6}$.

Hogy a fenti szabály igazságáról még jobban meggyőződjünk, tegyük fel az alábbi példát s először szorozzuk meg, később osztjuk el.

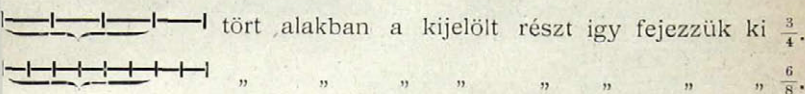
Pl. $\frac{3}{4}$ ezt szorozzuk meg 2-vel

$$\text{lesz } \frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{8}$$

tehát a 2-vel mind a számlálót (3) mind a nevezőt (4) megszoroztuk s szorzatúl $\frac{6}{8}$ találtunk.

Hogy pedig ezen szorzás által a tört értéke nem változott, vegyünk elő két egyforma hosszúságu pálczikát, az elsőt törjük el 4 felé, a másikat 8 felé? az elsőből vegyünk 3, míg a másodikból 6 részt.

Pl.



Ha a pálczikákon a kijelölt részeket összehasonlítjuk, azt találjuk, hogy mindkettőben a kijelölt rész egy hosszúságu, vagyis ha valamely egészet 4 részre osztunk s abból 3 részt veszünk, éppen annyit találunk, mintha az egészet 8 részre osztva, a részekből 6-ot elveszünk.

Ha most $\frac{6}{8}$ -ad törtnek mind a számlálóját, mind a nevezőjét elosztjuk 2-vel, $\frac{3}{4}$ -et találunk, vagyis a felvett törtet, melynek értékét már a pálczikán megismertük.

Összeadás.

7. Miként lehet törtet törttel összeadni?

Törtet törttel csakis akkor adhatunk össze, ha valamennyi törtnek egy és ugyanazon szám a nevezője.

Pl. $\frac{2}{4} + \frac{3}{4}$ ez a két tört összeadható, mivel mind a kettőnek nevezője 4-es.

Ha az összeadandó törtnek nevezői egyformák, akkor a számlálókat összeadjuk s egyik nevezőt változtatlanul aláírjuk.

Nézzük a fenti példát $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, tehát itt a két számlálót a 2 és 3-at) összeadtuk s lett belőle 5, ezután az egyik nevezőt a mi itt a 4-es) változtatlanul aláírtuk s lett belőle $\frac{5}{4}$.

8. Miként járunk el akkor, ha több összeadandó törtnek nevezője nem egyenlő?

Ha a nevezők nem egyenlők, akkor közös nevezőt keresünk törteknek.

Hogy miként keressünk a törteknek közös nevezőt, lássuk a következő példát részletesen kidolgozva:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = ?$$

Itt fel van véve négy tört, melyek mindenkének a nevezője különböző.

Most egy oly számot kell keresnünk, melyben a felvett törtek nevezői külön-külön, maradék nélkül megtalálhatók.

Ezt a számot pedig könnyen megtalálhatjuk, ha a nevezőket összeszorozzuk.

Pl.

$$4 \times 6 \times 5 \times 3 =$$

tehát $4 \times 6 = 24$, most a 24-et szorozzuk meg az 5-tel, lesz $24 \times 5 = 120$, ezt pedig megszorozzuk a 3-mal s lesz $120 \times 3 = 360$; tehát a 360 szám az, melyet a felvett törtek nevezőivel (a 4, 6, 5 és 3-mal) maradék nélkül el lehet osztani.

Miután pedig tudjuk azt, hogy nagy számmal az egyes műveletek végrehajtása nehezebb, mint kisebbel, ez esetben úgy segítünk magunkon, hogy a már felvett nevezőket kisebbítjük, hogy így azoknak a szorzata is kisebb legyen.

A nevezők kisebbítése a következőképpen történik.

Legyen itt is a felvett négy tört:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = ?$$

A nevezőket külön-külön megnézzük s ha azok között van olyan, mely a másik nevezőben maradék nélkül található, azt kihuzzuk, mivel ha annak többszöröse valamely számban megtalálható maradék nélkül, úgy az is megtalálható.

Pl. írjuk le a fenti törtek nevezőit:

4, 6, 5, 3, itt látjuk, hogy a 3 a 6-ban maradék nélkül megtalálható, a 3-at tehát áthuzzuk, mert a mit mi 6-tal el tudunk osztani, azt 3-mal is eloszthatjuk.

Lesz tehát:

4, 6, 5, most megnézzük, hogy a felvett s a 3-as kihuzásával maradt nevezőket valamely számmal maradék nélkül nem oszthatjuk-e?

$$\begin{array}{c|c} 2 & 4, 6, 5 \\ & 2, 3, 5 \end{array}$$

Itt a 4-et és 6-ot 2-vel lehet osztani, tehát a fenti alakban a nevezőket egymástól vesszővel elválasztva leírjuk, baloldalon egy függőleges vonalat húzva, azt a számot, a melylyel rövidíteni akarunk (jelen esetben a 2), a vonalon kívül a nevezőkkel egy sorba kiírjuk. Most a 2-t megkerestük a 4-esben s abban 2-szer találtuk maradék nélkül; azt a számot, a hányszor megtaláltuk, alája írjuk; a 6-ban megtaláltuk a 2-öt 3-szor s így a 3-ast a 6 alá írtuk, míg a 2-öt az 5-ben maradék nélkül nem találtuk meg, így azt újból leírtuk.

Most, miután a legutolsó számokat tovább rövidíteni nem lehet, azokat és a vonalon kívül levő számot (a 2-t) összeszorozzuk s lesz akkor

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

Ha most ezen utóbbi számot, a 60 és az előbbi 360 összehasonlítjuk, azt fogjuk látni, hogy ez utóbbi 6-szor nagyobb az előbbinél, tehát a szorzási és osztási műveletet is hatszor nehezebben lehet végrehajtani.

Ez a most kihozott 60 szám az összes számok között a legkisebb, melyben a felvett törtek nevezői (4, 6, 5, 3) maradék nélkül megtalálhatók, ugyanezért tehát ezt a számot „legkisebb közös többes“-nek, vagyis a törteknél „közös nevező“-nek nevezzük.

9. *Mi is tehát a legkisebb közös többes vagy közös nevező?*

A legkisebb közös többes az a legkisebb szám, melyet a felvett számok mindegyikével maradék nélkül el lehet osztani.

Folytassuk most a felvett törteknek összeadását.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$$

Miután ezen törteknek egy közös nevezőt kerestünk ki (60), tegyük tehát ezen számot azon szabály értelmében mindenik tört nevezőjéül, hogy „a tört értéke nem változik, ha mind a nevezőt, mind a számlálót egy és ugyanazon számmal megszorozzuk“.

Tehát vegyük az első törtet, $\frac{3}{4}$ -et.

Ha én a 4-es helyett 60-at írok, akkor a 4-es 15-tel lett megszorozva; hogy tehát a tört értéke ne változzék, a számlálót is meg kell szorozni 15-tel s lesz akkor 45, vagyis tört alakban $\frac{45}{60}$.

A $\frac{45}{60}$ éppen annyi értékű, mint a $\frac{3}{4}$.

Vegyük a második törtet: $\frac{5}{6}$, itt a nevező a 60-as 10-zel lett megszorozva, hogy az új nevezőt, a 60-at adta, tehát a számlálót (5) is 10-zel kell megszorozzuk, hogy a tört értéke ne változzék s lesz akkor $\frac{50}{60}$.

A harmadik törtben ($\frac{4}{5}$) a nevező 12-vel lett megszorozva, hogy a 60-at adta, tehát a 4-et mint számlálót is 12-vel kell megszorozni, hogy a tört értéke ne változzék, lesz tehát $\frac{48}{60}$.

A negyedik törtben a nevező (3) 20-szal lett megszorozva, hogy a 60-at adta, tehát a 2-öt is, mint a 3-asnak számlálóját, szintén 20-szal kell megszorozni, hogy a tört értéke ne változzék; lesz tehát $\frac{40}{60}$.

Most az így összeállított új törteteket írjuk le összeadandóul.

A $\frac{3}{4}$ helyett $\frac{45}{60}$, az $\frac{5}{6}$ helyett $\frac{50}{60}$, a $\frac{4}{5}$ helyett $\frac{48}{60}$ és a $\frac{2}{3}$ helyett $\frac{40}{60}$.

Lesz tehát

$$\frac{45}{60} + \frac{50}{60} + \frac{48}{60} + \frac{40}{60} = ?$$

Ha ezt a négy törtet megvizsgáljuk, azt látjuk, hogy mind a négy törtnek egy nevezője van, tehát akkor írhatjuk a fenti törtet így is:

$$\frac{45 + 50 + 48 + 40}{60} = ?$$

vagyis az összes számlálónak egy nevezőt írunk.

Most a számlálókat összeadjuk szabályszerűen s a nevezőt aláírjuk.

45

50

48

40

183 ez az új számláló, melyet így

írunk le: $\frac{183}{60}$.

Ha most megvizsgáljuk ezen új törtet, azt találjuk, hogy ez egy áltört, melyben egészek is foglaltatnak.

Az egészeket pedig úgy keressük ki, hogy a nevezővel osztjuk a számlálót.

Lesz tehát:

$$\begin{array}{r} 183 : 60 = 3\frac{3}{60} \\ \underline{180} \\ = 3 \end{array}$$

vagyis ezen áltörtben van 3 egész és még megmarad $\frac{3}{60}$.

A törtek összeadásánál még egy másik alakot is ismerünk, a mely az eljárásban is különbözik, de az eredményben nem.

Pl. a felvett törteknél

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{4}{6} - \frac{2}{3}$$

a felvett törtek közös nevezőjéül az előbbi mód szerint kikeresve itt is a 60 lesz.

Ezt ilyen alakba írjuk

	60	
$\frac{3}{4}$	15	45
$\frac{5}{6}$	10	50
$\frac{4}{6}$	12	48
$\frac{2}{3}$	20	40
	183	

vagyis a 60-at mint közös nevezőt a felső vízszintes vonalra irtuk, azután a felvett törteket — a mint látjuk — a függőleges vonaltól balra. Ezután a felső ($\frac{3}{4}$) tört nevezőjével (4) elosztottuk a 60-at mint közös nevezőt s a talált számot (15) a tört ($\frac{3}{4}$) után a függőleges vonal mellé irtuk, most a talált számot (15) a tört számlálójával (3) megszoroztuk s az így nyert szorzatot (45) a függőleges vonaltól jobbra velük egy vonalba irtuk. Így jártunk el a többi törteknél is. Midőn pedig e műveletet valamennyi törttel elvégeztük, a függőleges vonaltól jobbra eső számokat összeadtuk s ez 183-at vagyis az új számlálót eredményezte, mely alá 60-at mint közös nevezőt írva lesz $\frac{183}{60}$ vagyis ugyanaz, melyet az első módozat szerint a művelet végrehajtása után találtunk.

Kivonás.

10. Miként vonhatunk ki törtet törtből?

Törtet törtből csak akkor vonhatunk ki, ha ugy a kisebbibbendőnek, mint a kivonandónak egy és ugyanazon szám a nevezője.

Pl. $\frac{8}{6} - \frac{6}{6} = ?$ ezt ki lehet vonni, mivel mindkettőnek 6 a nevezője.

Ha a nevezők egyenlők, akkor a számlálót a számlálóból kivonjuk s a maradékot új számlálónak írva, az egyik nevezőt változtatlanul aláírjuk.

Lesz tehát a fenti példánál $\frac{8}{5} - \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$, azaz a 6-ot kivontuk a 8-ból, maradt 2, ezt a 2-öt írtuk a maradék számlálójául s az 5-öt, mint régi nevezőt írtuk alá nevezőül.

Ha a nevezők nem egyenlők, akkor első sorban közös nevezőre hozzuk, vagyis kikeressük — az ismert mód szerint — a legkisebb közös többszöröst, illetve közös nevezőt.

Pl.

$$\frac{24}{8} - \frac{16}{22} = ?$$

2	8, 22
	4, 11

$2 \times 4 \times 11 = 88$, ez a közös nevező.

$$\frac{24}{8} - \frac{16}{22} = \frac{264}{88} - \frac{64}{88} = ?$$

$$\frac{264 - 64}{88} = \frac{200}{88} \text{ ez egy áltört,}$$

melyben egészek is vannak.

Az egészeket kikeresve

$$200 : 88 = 2 \frac{24}{88}$$

176
24

Tehát, ha $\frac{24}{8}$ -ből $\frac{16}{22}$ -et kivonunk, marad még $2\frac{24}{88}$.

Ha nekünk a számolás végén nagy törtünk van, akkor azt azon szabály értelmében, hogy »a tört értéke nem változik, ha mind a számlálót mind a nevezőt egy és ugyanazon számmal osztjuk«, kisebbítjük.

Jelen esetben a $\frac{24}{88}$ -at lehet kisebbíteni 8-czal, vagyis mind a számlálót, mind a nevezőt elosztjuk 8-czal, lesz tehát:

$$24 : 8 = 3$$

$$88 : 8 = 11 \text{ vagyis, ha a 8-czal mind a}$$

számlálót, mind a nevezőt osztjuk, akkor egy új törtet nyerünk, a mi jelen esetben $\frac{3}{11}$. A kivonásunknál tehát a maradék $2\frac{3}{11}$.

A kivonásnál is éppen úgy mint az összeadásnál van egy másik alak, a mely az eredményt nem befolyásolja.

Pl. a felvett törtnél

$$\frac{24}{8} - \frac{16}{22}$$

A közös nevezőt az ismert mód szerint kikeresve 88-at találunk,

$$\begin{array}{r|l} 88 & \\ \hline \frac{24}{8} & 11 \quad 264 \text{ ez a kisebbítendő.} \\ \frac{16}{22} & 4 \quad 64 \text{ ez a kivonandó.} \\ \hline & 200 \end{array}$$

Végrehajtván a műveletet, maradéku 200-at találtunk, mely alá mint új számláló alá a közös nevezőt (88) írva lesz $\frac{200}{88}$, vagy ugyanazon tört mint a másik módozat szerinti kivonásnál.

Ha egy egészből kell törtet kivonni, úgy járunk el, hogy az egésznek nevezőjéül egy 1-est teszünk s azután az ismert módon kisebbítendő és kivonandónak kikeressük a közös nevezőjét, tovább pedig úgy járunk el, mint a törtet törtből ismert mód szerint, azaz a számlálót a számlálóból kivonjuk, a maradék lesz az új számláló s a közös nevezőt változtatlanul aláírjuk a maradék nevezőjének.

Törtből egészset úgy vonunk ki, hogy az egészet kivonjuk a tört számlálójából s a maradékot írjuk új számlálónak, míg a kisebbítendő nevezőjét változtatlanul írjuk új nevezőnek.

Pl.

$$\frac{38}{4} - 6 = \frac{32}{4}$$

Itt a 6-ot kivontuk a 38-ból s lett belőle 32 a maradék, melyet írtunk új számlálónak, míg a 4-est, mint a kisebbítendő nevezőjét változtatlanul írtuk új nevezőnek,

Szorzás.

11. Miként szorozunk törtet törttel?

Törtet törttel úgy szorozunk, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel megszorozzuk, előbbi szorzat lesz az új számláló, az utóbbi az új nevező.

Pl.

$$\frac{4}{6} \times \frac{8}{7} = \frac{32}{42}$$

Ha megvizsgáljuk ez utóbbi törtet ($\frac{32}{42}$), azt találjuk, hogy a 32-tőt, mint új számlálót, a 4 és 8-nak, mint régi számlálónak szorzata adta, míg a 42-tőt, mint új nevezőt, a 6 és 7 régi nevezők szorzata eredményezte.

12. Miként szorozunk egészet törttel és törtet egészszel?

Törtet egészszel és egészet törttel úgy szorozunk, hogy az egészet a tört számlálójával megszorozzuk s ez lesz a szorzat számlálója, a tört nevezőjét pedig változatlanul a szorzat nevezőjéül írjuk.

Pl.

$$6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$
$$\frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4}$$

vagyis, mint látjuk, az első törtnél a 6-ost, mint egészet, megszoroztuk a 4-gyel, mint a tört számlálójával s az 5-öst, mint nevezőt, változatlanul a szorzat nevezőjéül írtuk s lett a szorzat eredménye $\frac{24}{5}$.

A második példánál a 7 egészszel megszoroztuk a tört számlálóját, a 3-as, lett belőle 21, ezt írtuk a szorzat számlálójául, míg a tört nevezőjét, a 4-est írtuk nevezőnek s így lett a szorzat $\frac{21}{4}$.

Osztás.

13. Miként osztunk törtet törttel?

Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztó nevezőjével megszorozzuk az osztandó számlálóját s a szorzatot írjuk a hányados számlálójául; ezután az osztó számlálójával megszorozzuk az osztandó nevezőjét s ezen szorzatot írjuk a hányados nevezőjéül.

Ezen szabályt rövidebben így is mondjuk:

Törtet törttel úgy osztunk, hogy keresztbe szorozzuk, még pedig az osztó nevezőjével az osztandó számlálóját s ebből lesz a számláló, azután az osztó számlálójával megszorozzuk az osztandó nevezőjét s ebből lesz az új nevező.

Pl.

$$\frac{4}{9} : \frac{7}{9} = \frac{36}{42}$$

Ha ezen példában az eredményt (hányadost) $\frac{36}{42}$ megvizsgáljuk, a szabályt levonhatjuk belőle, mert a 36-ot, mint számlálót, az osztó nevezőjének (itt a 9-es) és az osztandó számlálójának (4-es) a szorzata eredményezte, míg a 42-t, mint új nevezőt, az osztó számlálójának (a 7-es) és az osztandó nevezőjének (a 6-os) a szorzata adta.

14. Miként osztunk törtet egészszel?

Törtet egészszel úgy osztunk, hogy a tört számlálóját változtatlanul írjuk a hányados számlálójául, míg az egészszel a tört nevezőjét megszorozva, ezen szorzatot írjuk a hányados nevezőjéül.

Pl.

$\frac{5}{7} : 6 = \frac{5}{42}$, tehát itt az 5-öst, mint a tört számlálóját, változtatlanul aláírtuk a hányados számlálójául, míg a tört nevezőjét az egészszel (a 6-tal) megszorozva írtuk a hányados nevezőjéül.

15. Miként osztunk egészet törttel?

Égészet törttel úgy osztunk, hogy a tört nevezőjével megszorozzuk az egészet, mely szorzatból lesz a hányados számlálója, míg a tört számlálóját változtatlanul a hányados nevezőjéül írjuk.

Pl.

$8 : \frac{3}{5} = \frac{40}{3}$, tehát, a mint látjuk, a hányadosnál a 40-est, mint számlálót, az 5 és a 8 szorzata eredményezte, míg a nevezőt a tört számlálójának változtatlan aláírása adta.

IV.

Hármasszabály.

1. *Hányféle hármasszabályt ismerünk?*

Kétféle hármasszabályt ismerünk, még pedig egyszerű és összetett hármasszabályt.

2. *Melyik az egyszerű s melyik az összetett hármasszabály?*

Egyszerűnek mondjuk a hármasszabályt akkor, midőn az ismeretlen (keresendő) szám kikeresése csak egy körülménytől függ.

Pl.

Ha 8 munkás bizonyos idő alatt 72 koronát keres, akkor 15 munkás ugyanannyi idő alatt mennyit keres?

Itt az ismeretlen kikeresése csakis a munkások számától függ.

Foglalkozzunk tehát az egyszerű hármasszabálylyal s ismerjük meg azon eljárást, melylyel a feladatokat megfejtethetjük.

Ha a feladatot megkaptuk, azt az egynemű mennyiségekre való tekintettel a következő alakban írjuk le.

Vegyük például a következő feladatot s fejtsük meg a hármasszabály szerint.

Ha 8 munkás bizonyos idő alatt 72 koronát keres, vajjon 15 munkás ugyanazon idő alatt mennyit keres?

Ezen feladatot hármasszabály szerint így írjuk le:

$$\begin{array}{rcl} 8 & \text{munkás} & 72 \text{ korona} \\ 15 & " & x \end{array}$$

vagyis az egynemű mennyiségeket egymás alá írjuk.

E példában a 8 és 15 szám a munkásokat jelöli, míg a 72 és az x a koronát.

Az x az ismeretlen, tehát ezt kell megkeresni.

Hogy az ismeretlent az ismert adatok segítségével megkeressük, azokat arányba kell telyük.

Az arány alakja ez:

$1 : 1 = 1 : 1$, azaz: az egyet osztva egygyel, egyenlő egyet osztva egygyel.

A felvett példát így írjuk arányba:

$$x : 72 = 15 : 8$$

Az arány felállításánál mindig szem előtt tartandó, hogy az arány első tagja mindig az ismeretlen legyen, melyhez a vele egyenmű mennyiséget viszonyítjuk.

A felvett példában x -et viszonyítottuk a vele egyenmű mennyiséghez, a 72-höz.

Most a másik mennyiséget arányba hozzuk az első mennyiséghez.

Hogy ezt tehessük, egy kérdést teszünk fel.

A jelen esetben azt kérdezzük, hogy vajon 15 munkás többet keres-e egy és ugyanazon idő alatt, mint 8 munkás? Meg van a felelet, még pedig az, hogy „többet keres.”

Ennélfogva ezen felvett példát a hármasszabály alakja szerint írva, így kérdezzük:

8 m. 72 k.

15 m. x k.

Az x -szel, vagyis az ismeretlennel nem egyenmű s nem egy sorban levő számtól megyünk az x -szel egy sorban levő számig s megnézzük, hogy melyik a nagyobb.

Tehát itt a 8 munkástól megyünk a 15 munkáshoz s így viszonyítunk:

Minél több a munkás, annál több a keresmény. Tehát egyenes az arány.

Ha az arány egyenes, akkor az arányban az egyenlőség jele ($=$) után írjuk az ismeretlennel egy sorban levő mennyiséget, jelen esetben a 15-öt, azután az ezzel egyenműt viszonyba írjuk.

Tehát lesz:

x : (ugy viszonylik a vele egyenműhöz) $72 =$ (miképen) 15 :
(viszonylik a vele egyenműhöz a) 8-hoz.

Számmal írva:

$$x : 72 = 15 : 8$$

Az arányban megkülönböztetünk előarányt és utóarányt.

Az egyenlőség ($=$) jele előtti részt előaránynak, az $=$ jel utáni részt utóaránynak nevezzük.

Az arányt akkor mondjuk helyesnek, ha abban az előarány-nál látható osztási műveletet végrehajtva, a hányados egyenlő lesz az utóarány-nál jelzett osztási művelet végrehajtása után nyert hányadossal.

Az arányban az egyenlőség jele mellett levő két számot az arány „belsőtagjainak“, a külsőket „külsőtagoknak“ nevezzük.

A helyes arányban a két belsőtag szorzatának egyenlőnek kell lennie a két külsőtag szorzatával. Ebből folyólag az ismeretlen külsőtagot megtaláljuk, ha a két belsőtag szorzatát elosztjuk az ismert külsőtaggal.

Tehát itt

$$\begin{array}{r} 72 \times 15 \\ \hline 360 \\ 72 \\ \hline \end{array}$$

1080 ezt elosztjuk 8-csal, lesz tehát

$$\begin{array}{r} 1080 : 8 = 135 \\ \hline 8 \\ \hline 28 \\ 24 \\ \hline = 40 \\ 40 \\ \hline = = \end{array}$$

Tehát az ismeretlennek az értéke 135, azaz: míg 8 munkás 72 koronát keres, addig 15 munkás 135 koronát fog keresni.

Tegyük be a szabályba az ismeretlen helyett a talált 135-öt.

$$135 : 72 = 15 : 8$$

Azt mondtuk ugyanis, hogy az előarány és utóarányban a jelzett osztást végrehajtva, az osztat, vagyis a hányados mindkettőnél egyenlő kell legyen, hogy az arányt helyesnek mondjuk.

Végezzük el tehát a két osztást.

$$\begin{array}{r} 135 : 72 = 1 \frac{63}{72} \\ \hline 72 \\ \hline 63 \end{array}$$

ezt a törtet szabályszerűen kisebbíteni lehet, tehát kisebbítjük, még pedig 9-czel. Lesz tehát a 63 számlálóból, ha 9-czel elosztjuk 7 s

a 72, mint nevezőből 8, tehát a fenti tört, ha annak mind a számlálóját, mind a nevezőjét 9-czel osztjuk, lesz belőle $\frac{7}{8}$, vagyis a $135 : 72 = 1\frac{7}{8}$.

Oszzuk el most a 15-öt a 8-czal:

$$\begin{array}{r} 15 : 8 = 1\frac{7}{8} \\ \underline{8} \\ 7 \end{array}$$

vagyis az utóarányban a műveletet végrehajtva, a hányados $1\frac{7}{8}$.

Ha most megvizsgáljuk, a $135 : 72$ -vel és a $15 : 8$ -czal, azt találjuk, hogy az előbbinél ($135 : 72$) a hányados $1\frac{7}{8}$ s az utóbbinál ($15 : 8$) szintén $1\frac{7}{8}$, vagyis a hányadosok (ezt számtani kifejezéssel „kitevő“-nek nevezzük) egyenlők, tehát az arányunk és az ismeretlen értéke is helyes.

Az összetett hármasszabály alakja ez:

Pl.

Ha 8 munkás 4 nap alatt 72 koronát keres, mennyit fog keresni 15 munkás 10 nap alatt?

Felállítva:

$$\begin{array}{ll} 8 \text{ m. } 4 \text{ n. } 72 \text{ kor.} \\ 15 \text{ m. } 10 \text{ n. } x \text{ kor.} \end{array}$$

$$x : 72 = 15 : 8$$

$$x : 72 = 10 : 4$$

Ezt a két viszonyt így írhatjuk:

$$x : 72 = \left\{ \begin{array}{l} 15 : 8 \\ 10 : 4 \end{array} \right.$$

Ha most a beltágok szorzatát elosztjuk a kültágok szorzatával, megtaláljuk az ismeretlen kültág értékét.

Lesz tehát:

$$\begin{array}{r} 72 \times 15 \\ \hline 360 \\ 72 \\ \hline \end{array}$$

10800 ezt megszorozzuk 10-zel, lesz belőle 108000, a 108000-at elosztjuk a kültágok szorzatával, a mi nem más, mint

$$8 \times 4 = 32$$

tehát: $10800 : 32 = 337 \frac{16}{32}$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \hline 120 \\ 96 \\ \hline 240 \\ 224 \\ \hline =16 \end{array}$$

Az x (ismeretlen) értéke $337 \frac{16}{32}$ korona.

A $\frac{16}{32}$ rövidítve 16-tal, lesz $\frac{1}{2}$.

Lesz tehát az x értéke $337 \frac{1}{2}$ korona.

Ha ilyen kérdés tételnek fel:

Ha 8 munkás egy bizonyos munkát 10 nap alatt végez el, hány nap alatt végzi el ugyanazt a munkát 15 munkás?

8 m. 10 n.

15 m. x n.

Arányba írva lesz

$$x : 10 = 8 : 15$$

Itt az x -szel nem egy sorban levőt írjuk beltagnak, azért, mert a munkás és az idő között fordított arány van, azaz: minél több a munkás, annál kevesebb időre van szükség, hogy egy és ugyanazon munka elvégeztessék.

A két beltág szorzatát elosztjuk a kültaggal, lesz az eredmény $10 \times 8 = 80$ ezt most elosztjuk az ismert kültaggal (15-tel), lesz

$$\begin{array}{r} 80 : 15 = 5 \frac{5}{15} = 5 \frac{1}{3} \\ 75 \\ \hline =5 \end{array}$$

Tehát az x értéke $5 \frac{1}{3}$, vagyis, a mely munkát 8 munkás 10 nap alatt végez el, azt 15 munkás $5 \frac{1}{3}$ nap alatt elvégzi.

Az arány felállításánál tehát jól meg kell nézni, hogy a két mennyiség között minő a viszony, fordított vagy egyenes? Ezt a természetes gondolkodás útján tudjuk megítélni, még pedig annál gyorsabban s könnyebben, minél többet gyakoroljuk benne magunkat.

V.

Kamatszámítás.

1. Mit értünk kamatszámítás alatt?

Kamatszámítás alatt értjük azon számtani eljárást, melylyel gyümölcsözésre befektetett pénzünknek évi jövedelmét megtudhatjuk.

A kamatszámításnál a gyakorlati életben a százalékot, vagyis a száztóli jövedelmet szokás alapul venni. Ez alatt azt kell érteni, hogy akármily nagy legyen a befektetett összeg, először azt számítjuk ki, hogy 100 korona egy (1) év alatt mennyit jövedelmez s azután a befektetett összeget összehasonlítjuk a 100-zal, hogy vajjon a befektetett összeg nagyobb-e vagy kisebb-e a 100-nál. Most az összehasonlításnál kiszámítjuk, hogy a betett összeg hány-szor nagyobb vagy hány-szor kisebb a 100-nál; azért, mivel a betett összeg is annyszor többet, illetve annyszor kevesebbet fog (jövedelmezni) kamatozni.

Pl.

Mondjuk azt, hogy 100 korona egy (1) év alatt 5 koronát (jövedelmez) kamatoz.

Ha most azt akarjuk megtudni, hogy vajjon 400 korona szintén egy (1) év alatt mennyit kamatoz, akkor ki kell számítani azt, hogy 100 hány-szor foglaltatik a 400-ban.

Erre könnyen felelünk, mert a 400-ban a 100-at megtaláljuk 4-szer. Tehát ha a 100 korona egy (1) év alatt 5 koronát kamatoz, akkor a 400 korona, a mely 4-szer több, mint a 100, szintén 4-szer többet fog kamatozni. Ennélfogva a 100 korona évi kamatját (jelenleg 5) megszorozzuk 4-gyel s lesz belőle $5 \times 4 = 20$

Tehát a míg 100 korona egy (1) év alatt 5 koronát kamatoz, addig 400 korona ugyancsak egy (1) év alatt 20 koronát fog kamatozni.

Tekintettel pedig arra, hogy a befektetett tőke nem mindig akkora, mely a 100-nak egész számokban kifejezhető többszörösét, illetve hányadát képezné, ugyanezért az ily tőke kamatjának értékét a hármasszabály segítségével számítjuk ki.

A gyakorlati életből átvéve jelöljük a befektetett tőkét T-vel, azt az időt, mely alatt a tőke (T) kamatoz i-vel, a kamatot pedig, melyet a tőke (T) a felvett idő (i) alatt (jövedelmez) kamatoz, k-val.

Visszavezetve számításunkat az előbb kifejtett példára, tudjuk, hogy alapúl a 100-at vesszük, mely egy (1) év alatt bizonyos meghatározott összeget kamatoz (jövedelmez).

A mit a 100 egy (1) év alatt kamatoz, jelöljük sz $\%$ -szel

Tehát

a tőkét jelöljük T-vel, az időt, melyben a T kamatoz, i-vel, a kamatot, melyben a T i idő alatt kamatoz, k-vel.

Ennélfogva ha 100 Kor. tőke 1 év alatt sz $\%$ kamatoz, akkor T Kor. tőke i év alatt k kamatoz.

A kamatszámításnál a 100 és 1 mindig adva kell hogy legyen, mert ez képezi az alapot, tehát mi vagy a (T) tőkét, vagy az (i) időt, melyen a tőke (T) kamatoz, vagy a kamatot (k) kell keresnünk, melyet a tőke (T) egy bizonyos idő (i) alatt kamatoz, vagy a százalékokat.

Tehát vagy a tőkét	T	
" az időt	i	
" a kamatot	k	kell kiszámítanunk.

Vegyük egyenként.

1. Keressük a tőkét (T)

A tőkét megtaláljuk, ha a százat a tőke kamatljával és az 1-gyel megszorozzuk s az így nyert szorzatot a százalék és idő szorzatával elosztjuk.

Pl.

Mekkora az a tőke, a mely 4 százalékos kamattal 5 év alatt 800 koronát kamatoz (jövedelmez)?

Itt a T-t kell keresni, a többi mind adva van.

A 100 és 1 mindig adva van.

az sz $\%$	= 4
az i	= 5
a k	= 800

Hármas szabály alakba felállítva lesz

100 Kor.	1 év	4 $\%$
T	5 "	800

$$T : 100 = \begin{cases} 800 : 4 \\ 1 : 5 \end{cases}$$

A mint látjuk, arányba állítottuk s úgy találtuk, hogy a (T) tőke a kamattal egyenes, míg az idővel fordított arányban áll.

És ez természetes, mert minél nagyobb a tőke, annál nagyobb ugyanazon időre a kamat is, de megfordítva áll az idővel, mert minél nagyobb a tőke, annál kevesebb idő kell, hogy ugyanazon kamatot jövedelmezze.

Fejtsük meg a fenti példát.

A mint a hármasszabálynál láttuk az arányban levő ismeretlen kültagot — jelenleg a T. — megtaláljuk, ha a beltagok (itt a 100, 800 és 1) szorzatát elosztjuk az ismert kültagok (itt a 4 és 5) szorzatával.

$800 \times 100 = 80000$ ezt megszorozva 1-gyel lesz 80000, ezt most elosztjuk a $4 \times 5 = 20$ -szal

$$\begin{array}{r} 80000 : 20 = 4000 \\ \hline 80 \\ \hline \text{''''} \end{array}$$

Tehát a T értéke 4000 korona.

2. Keressük az időt.

Pl. Ha 100 korona 1 év alatt 4⁰/₀-ot kamatoz, vajjon 4000 korona mennyi idő alatt jövedelmez 800 koronát.

Az időt (i) megtaláljuk, ha a kamatot a 100-zal s ezen szorzatot az 1-gyel megszorozzuk és az így nyert szorzatot a tőke és a százalék szorzatával elosztjuk.

Állítsuk fel a hármasszabály alakját.

$$\begin{array}{lcl} 100 \text{ korona} & 1 \text{ év} & 4\frac{0}{0} \\ 4000 & \ll & i \ll 800 \text{ itt az } i \text{ az ismeretlen} \end{array}$$

$$i : 1 = \left\{ \begin{array}{l} 800 : 4 \\ 100 : 4000 \end{array} \right.$$

A mint látjuk az idő a kamattal egyenes, míg a tőkével és a sz. ⁰/₀-kal fordított arányban áll, mert minél több az idő, annál több egy és ugyanazon tőkének kamatja is, míg minél kevesebb az idő, annál nagyobb százalékra kell kiadni a tőkét, hogy egy és ugyanazon kamatot jövedelmezze.

Hajtsuk végre a műveletet az ismert mód szerint t. i. a beltagok szorzatát osszuk el a kültagok szorzatával.

Lesz :

$800 \times 100 = 80000$ ezt megszorozzuk 1-gyel,
lesz 80000 ezt osztjuk el a $4000 \times 4 = 16000$

$$\begin{array}{r} 80000 : 16000 = 5 \\ \hline 80000 \\ \hline \text{''''''''} \end{array}$$

Tehát az i értékét 5 vagyis 4000 korona 4% kamattal 5 év alatt kamatoz 800 koronát.

3. Keressük a kamatot.

Pl.

4000 korona 4% kamattal 5 év alatt mennyit kamatoz?

A kamatot megtaláljuk, ha a százalékot a tőke és az idővel megszorozva, ezen szorzatot az 1 és a 100 szorzatával elosztjuk.

Hármasszabály alakba felállítva.

$$\begin{array}{l} 100 \text{ k. } 1 \text{ év } 4\% \\ 4000 \text{ « } 5 \text{ « k. itt az ismeretlen a k.} \end{array}$$

Arányba téve

$$k : 4 = \left\{ \begin{array}{l} 4000 : 100 \\ 5 : 1 \end{array} \right.$$

Vagyis mint látjuk a kamat a százalékhoz, a tőkéhez és az időhöz egyenes arányban áll, mert minél nagyobb a kamat, annál nagyobbak kell a tőkének lenni, hogy egy bizonyos idő alatt, meghatározott kamatot jövedelmezzen s minél nagyobb a kamat, annál több idő szükséges egy és ugyanazon tőkének jövedelmezésére.

Fejtsük meg a fenti példát az ismert mód szerint.

Lesz

$4000 \times 4 = 16000$, ez szorozva 5-tel $= 80000$, 80000 osztva a 100-zal

tehát

$$\begin{array}{r} 80000 : 100 = 800 \\ \hline 800 \\ \hline \text{''''} \end{array}$$

