

Spenik Sándor

A parciális differenciálegyenletek osztályozása  
(klasszifikációja)

Hiperbolikus egyenletek

*Kárpátaljai Magyar Könyvek*  
**203.**

Készült a Szülőföld Alap támogatásával



© Dr. Spenik Sándor, 2010  
© Intermix Kiadó, 2010

*Ukránból fordította: Szemere Gábor*

Intermix Kiadó  
Felelős kiadó: Dupka György  
Felelős szerkesztő: Kövy Márta

Budapesti képviselet: H-1011 Bp., Hunyadi János u. 5.  
Készült a Borneo Kft.-ben

ISBN 978-963-9814-43-1  
ISSN 1022-0283

UNGVÁRI NEMZETI EGYETEM  
MAGYAR TANNYELVŰ HUMÁN- ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARA

**Dr. Spenik Sándor**

**A parciális differenciálegyenletek osztályozása  
(klasszifikációja)  
Hiperbolikus egyenletek**

Egyetemi jegyzet

Intermix Kiadó

Ungvár – Budapest  
2010

A kiadványt dr. Spenik Sándor,  
az UNE Humán- és Természettudományi Kar  
Fizika és Matematika Tanszék vezető docense állította össze  
a felsőfokú tanintézmények diákjai részére

A tanterv a „Fizika matematikai módszerei” tantárgy tanterve és  
az Állami egyetemek tanterve alapján van összeállítva

A „Fizika matematikai módszerei” tantárgy tanterve  
a fizikai és matematikai tanszék ülésén került megvitatásra

# TARTALOM

## I. FEJEZET

A PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK TÍPUSAI.....	7
§1. A parciális differenciálegyenletek (PDE) elméletének legfontosabb definíciói és fogalmai.....	7
§ 2. A két független változójú másodrendű PDE-k típusai.....	9
§3. A két független változós másodrendű PDE kanonikus alakra hozása.....	12
3.1. Hiperbolikus egyenletek.....	12
3.2. Parabolikus egyenletek.....	14
3.3. Elliptikus egyenletek.....	15
3.4.. A két független változós állandó együtthatójú lineáris másodrendű PDE-k kanonikus alakjai.....	16
§4 A többváltozós kvázilineáris másodrendű PDE-k típusai és kanonikus alakjai.....	19
§5. A magasabbrendű differenciálegyenletek típusai.....	22

## II. FEJEZET

HIPERBOLIKUS EGYENLETEK.....	26
§1 A húr rezgéseinek egyenlete.....	29
§ 2. Hullámfolyamatok két- és háromdimenziós közegben.....	32
2.1. A membrán rezgéseinek egyenlete.....	32
2.2.. A hidrodinamika egyenletei és a hanghullámok terjedése.....	33
2.3 Feladatok a fényelmélet, elektromosság és mágnesség témaköréből...	33

## III. FEJEZET

HULLÁMFOLYAMATOK VÉGTELEN KITERJEDÉSŰ KÖZEGEKBEN..	35
§1. A végtelen húr szabadrezgései. A karakterisztikák módszere (a hullámok terjedésének módszere) .....	36
A Cauchy-féle feladat kezdeti feltételektől való folytonos függésének tétele...	38
A Cauchy-féle feladat megoldásának fizikai interpretációja.....	40
1.1. A kitérési hullám terjedése (megpendített húr).....	41
1.2. Az impulzushullám terjedése (a megütött húr).....	46

## **A „MATEMATIKAI FIZIKA MÓDSZERE” TANTÁRGY CÉLJA**

A „Matematikai fizika módszerei” tárgynak kettős célja van. Elsősorban megalapozza a későbbi „Elektrodinamika”, „Kvantummechanika” és „Statisztikus fizika” tárgyakat, valamint más, különböző tanszékek által oktatott elméleti tárgyakat. Ezért minden témát, mint például a parciális differenciálegyenleteket minden típusát, valamint a speciális függvényeket (Bessel- Csebisev-Hermit-, Legendre- és Lagerr-függvények) ilyen szemszögből tárgyaljuk.

Másodsorban a tárgy tanulmányozása során a diákok számára lehetőség nyílik arra, hogy a matematikai átalakítások terén nagy tapasztalatra tegyenek szert.

A tantárgy tanulmányozása jelentősen hozzájárul az absztrakciós képességek fejlesztéséhez. A húr rezgési egyenletének előállítása során kiemelt hangsúlyt kapnak az egyenlet előállításának feltételei, amelyek egyben a megoldás alkalmazhatóságát korlátozzák. Hasonló előfeltételek még jelentősebben korlátozzák a hővezetés egyenletének alkalmazhatóságát.

A tantárgy előadása során hangsúlyozzuk az ukrán tudósok eredményeit az elméleti fizika és a rokon tudományok terén. M.V. Osztrogradszkij ukrán származású világszerte ismert matematikus a harkovi kormányzóságban született és a harkovi egyetemen tanult, csak azután költözött Szentpétervárra. Itt a későbbiekben a pedagógia intézet igazgatója lett.

A rugalmas pálcák rezgéseinek tanulmányozásakor megemlítjük az egyenlet általánosítását és ezzel együtt a szilárdságtan és annak ismert szakembere, Sz.P. Timosenko.

A reziduumelmélet tanulmányozásakor Szohockij képleteit is alkalmazzuk, aki a kijevi egyetem végzőse volt.

A tanterv két zárthelyi dolgozatot ír elő. A feladatok a csatolt példatárból kerülnek ki (lásd Feladatok a gyakorlati foglalkozásokhoz), de ezeket nem oldjuk meg a gyakorlati foglalkozásokon.

# I. FEJEZET

## A PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK TÍPUSAI

### §1. A parciális differenciálegyenletek (PDE) elméletének legfontosabb definíciói és fogalmai

**Definíció.** Az  $x_1, x_2, \dots, x_m$  független változók, valamint az  $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ismeretlen függvény és annak parciális deriváltjai közötti összefüggést parciális differenciálegyenletnek (PDE) nevezzük.

**Definíció.** A differenciálegyenletet  $n$ -edrendűnek nevezzük, amennyiben tartalmaz legalább egy  $n$ -edrendű parciális deriváltat és nem tartalmaz az  $n$ -ediknél magasabb rendű deriváltat.

Az  $n$ -edrendű egyenlet általános alakja:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = n \quad (\alpha_i - \text{nemnegatív egész számok})$$

$$u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^n u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Jelölje  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  a nemnegatív  $\alpha_i$  koordinátájú egész vektort (multiindex), amelynek hossza  $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$ , legyen továbbá  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , valamint

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Az (1.1) egyenletet a következő alakban írhatjuk fel:

$$F(x, u, \dots, D^\alpha u(x)) = 0.$$

**Definíció** A PDE lineáris, amennyiben az  $F$  az ismeretlen függvényre és annak minden parciális deriváltjára nézve lineáris.

A másodrendű lineáris egyenlet általános alakja

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x). \quad (1.2)$$

**Definíció** Ha az (1.2) egyenletben  $f(x) = 0$ , akkor az egyenlet lineáris és homogén. Amennyiben az  $a_{ij}, b_i, c$  együtthatók állandók, az (1.2) egyenletet állandó együtthatós egyenletnek nevezzük.

**Definíció** A PDE kvázilineáris, amennyiben lineáris a legmagasabbrendű deriváltakra nézve lineáris.

A definíció szerint a másodrendű kvázilineáris egyenlet általános alakja a következő alakban írható fel

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}) u_{x_i x_j} = \Phi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}).$$

Példák. Állapítsák meg, parciális differenciálegyenletek-e az alábbi egyenletek. Amennyiben igen, határozzák meg annak típusát.

$$1. \cos^2(u_{xx} + u_{yy}) + \sin^2(u_{xx} + u_{yy}) = 1.$$

Az egyenlőség azonosság, nem PDE.

$$2. xu_{x^2y}(x, y) + [u_x(x, y)]^0 = f(x, y).$$

Az egyenlőség két független változós harmadrendű kvázilineáris egyenlet.

$$3. yu_{x^2y^2}(x, y) - xu_{x^4}(x, y) = xyu(x, y).$$

Az egyenlőség két független változós lineáris negyedrendű PDE

$$4. \left[ u_{x^3y^2}(x, y) \right]^3 - yu_x = 0.$$

Az egyenlőség két független változós lineáris ötödrendű PDE.

**Definíció** Bármely olyan, az (1.1) egyenlet értelmezési tartományán folytonos és  $n$ -szer differenciálható  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$  függvényt, amely az egyenletbe behelyettesítve azonossággá alakítja azt, az (1.1) egyenlet reguláris megoldásának nevezzük.

A következőkben csak a reguláris megoldásokat vizsgáljuk.

Példa. Vizsgáljuk meg a  $\sum_{i=1}^n (u_{x_i}(x_1, \dots, x_n))^2 = 0$  egyenletet.

Az utóbbi egyenlőség teljesül, amennyiben  $u_{x_i} = 0, i = \overline{1, n}$ , azaz az  $u = \text{const}$  állandó függvény megoldása az egyenletnek.

Beláthatjuk, hogy két folytonos és kétszeresen differenciálható  $\varphi_1(x+y)$  és  $\varphi_2(x-y)$  függvény összege az  $u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0$  differenciálegyenlet megoldása.

Az  $\sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2 + 1 = 0$  egyenletnek nyilvánvalóan nincs megoldása.

Ahogy azt a fenti példákból láthatjuk, a differenciálegyenleteknek végtelen sok megoldása lehet. Amennyiben tehát egy fizikai feladat parciális differenciálegyenlet megoldására vezethető vissza, a folyamat egyértelmű leírása céljából az egyenlethez hozzá kell fűzni valamilyen, a feladat kitűzéséből következő kiegészítő feltételezéseket.



## § 2. A két független változójú másodrendű PDE-k típusai

Tekintsük a két független változójú másodrendű PDE-ket:

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (2.1)$$

A (2.1) alakú differenciálegyenletek három típusba sorolhatók. Az  $(x, y)$  független változókat transzformálva minden ilyen egyenlet a legegyszerűbb, úgynevezett kanonikus alakra hozhatók. Ezért a két független változójú egyenletek tanulmányozását a kanonikus alakú egyenletek vizsgálatával folytatjuk.

A (2.1) egyenlet kanonikus alakra hozása céljából vezessük be az

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y), \quad (2.2)$$

Független változókat, ahol  $\varphi(x, y)$  és  $\psi(x, y)$ , valamint ezek legalább másodrendű parciális deriváltjai folytonos függvények és

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ez esetben nyilvánvalóan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn a megfelelő tartományok  $(x, y)$  és  $(\xi, \eta)$  pontjai között, azaz a (2.2) egyenlőségek  $x$ -et és  $y$ -t a  $\xi$  és  $\eta$  független változók egyértelmű függvényeként határozzák meg:  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ .

Tisztáznunk kell, hogy az  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  függvényeket milyen módon kell megválasztani ahhoz, hogy ezáltal a (2.1) egyenlet egyszerűbb alakú legyen. Hogy ezt megválaszolhassuk, helyettesítsük be a (2.2) független változókat a (2.1) egyenletbe. Ekkor

$$u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = U(\xi, \eta),$$

$$u_x = U_x(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = \varphi_x U_\xi + \psi_x U_\eta,$$

$$u_y = \varphi_y U_\xi + \psi_y U_\eta,$$

$$u_{xx} = \varphi_x^2 U_{\xi\xi} + 2\varphi_x \psi_x U_{\xi\eta} + \psi_x^2 U_{\eta\eta} + \varphi_{xx} U_\xi + \psi_{xx} U_\eta, \quad (2.3)$$

$$u_{yy} = \varphi_y^2 U_{\xi\xi} + 2\varphi_y \psi_y U_{\xi\eta} + \psi_y^2 U_{\eta\eta} + \varphi_{yy} U_\xi + \psi_{yy} U_\eta,$$

$$u_{xy} = \varphi_x \varphi_y U_{\xi\xi} + (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) U_{\xi\eta} + \psi_x \psi_y U_{\eta\eta} + \varphi_{xy} U_\xi + \psi_{xy} U_\eta.$$

Behelyettesítve a deriváltakra kapott (2.3) összefüggéseket a (2.1) egyenletbe

$$\alpha_{11} U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12} U_{\xi\eta} + \alpha_{22} U_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2, \\
\alpha_{12} &= a_{11}\varphi_x\psi_x + a_{12}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + a_{22}\varphi_y\psi_y, \\
\alpha_{22} &= a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Megjegyezzük, hogy amennyiben a (2.1) egyenlet lineáris, úgy a (2.4) is az.

Vizsgáljuk meg az elsőrendű

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \tag{2.6}$$

differentiálegyenletet.

Legyen a  $z = \varphi(x, y)$  függvény ezen egyenlet egy partikuláris megoldása.

Ha ekkor  $\xi$ -t egyenlővé tesszük  $\xi = \varphi(x, y)$ -vel, akkor a (2.5)-ből  $\alpha_{11} \equiv 0$ .

Az új független változó kiválasztása tehát a (2.6) egyenlet integrálásával egyenértékű.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a (2.1) egyenlet együtthatói és a másodrendű parciális deriváltak folytonosak a vizsgált tartományban és nem válnak egyidejűleg egyenlővé nullával. Ekkor, ha  $a_{11} \neq 0$ , a (2.6) egyenletet a következő alakban írhatjuk fel:

$$[a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y][a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y] = 0,$$

Vagy, amennyiben  $a_{22} \neq 0$ ,

$$[a_{22}z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_x][a_{22}z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_x] = 0,$$

Ahol  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ .

Mindkét fenti egyenlet két egyenletre bomlik fel:

$$\begin{aligned}
a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y &= 0, \\
a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y &= 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

vagy

$$\begin{aligned}
a_{22}z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_x &= 0, \\
a_{22}z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_x &= 0.
\end{aligned} \tag{2.7a}$$

Tehát a (2.7) és (2.7a) egyenletek megoldásai lesznek a (2.6) egyenlet megoldásai.

A (2.7) és (2.7a) megoldása céljából írjuk fel a megfelelő közös differenciálegyenletek rendszerét

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{\Delta}},$$

vagy

$$\frac{dy}{a_{22}} = \frac{dx}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dy}{a_{22}} = \frac{dx}{a_{12} - \sqrt{\Delta}},$$

ahonnan

$$a_{11}dy - (a_{12} + \sqrt{\Delta})dx = 0, \quad a_{11}dy - (a_{12} - \sqrt{\Delta})dx = 0, \quad (2.8a)$$

vagy

$$a_{22}dx - (a_{12} + \sqrt{\Delta})dy = 0, \quad a_{22}dx - (a_{12} - \sqrt{\Delta})dy = 0. \quad (2.8b)$$

A (2.8a) és (2.8b) egyenletet egy egyenletként írhatjuk fel

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0, \quad (2.8)$$

Amelyet a (2.1) egyenlet karakterisztikus egyenletének nevezünk.

A közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy ha  $c = \varphi(x, y)$  (2.8a) vagy (2.8b) valamelyikének általános integrálja (vagyis a (2.8) egyenlet általános integrálja), akkor  $z = \varphi(x, y)$  a (2.6) általános integrálja és viszont. Az  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$ -re érvényes korlátozások miatt a (2.8a) és (2.8b) egyenletek együtthatóinak deriváltjai a másodrendű deriváltakig folytonos függvények, tehát léteznek a (2.8) egyenletnek olyan integráljai, amelyek folytonosak és amelyeknek deriváltjai a második deriváltakig folytonosak

**Definíció.** A (2.8) egyenlet megoldásait karakterisztikáknak nevezzük.

A  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  diszkrimináns előjelétől függően a (2.1) differenciálegyenletek alábbi típusait különböztetjük meg.

- 1) A (2.1) egyenletet a D tartományon hiperbolikus, ha  $(x, y) \in D$   $\Delta > 0$ ;
- 2) A (2.1) egyenletet a D tartományon parabolikus, ha  $(x, y) \in D$   $\Delta = 0$ ;
- 3) A (2.1) egyenletet a D tartományon elliptikus, ha  $(x, y) \in D$  és  $\Delta < 0$ .

A (2.8)-ból következik, hogy a hiperbolikus egyenletek két különböző valós karakterisztikasereggel, a parabolikus típus egy valós karakterisztikasereggel, az elliptikus pedig két komplex konjugált karakterisztikasereggel rendelkezik.

Az

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \left[ \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right]^2 \quad (2.9)$$

egyenlőség igaz voltáról közvetlen behelyettesítéssel győződhetünk meg.

Ha  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ , akkor a (2.9)-ből következik, hogy az egyenlet típusa nem változik meg a (2.2) átalakítás során.

Megjegyezzük, hogy ugyanaz az egyenlet különböző tartományon eltérő típusú is lehet.

Példa. Legyen  $u_{xx} + xu_{yy} - 3yu = 0$ :

- a) ha  $x > 0$ ,  $\Delta = -x < 0$ , az egyenlet elliptikus;
- b) ha  $x = 0$ ,  $\Delta = 0$ , az egyenlet parabolikus;
- c) ha  $x < 0$ ,  $\Delta > 0$  az egyenlet hiperbolikus.

### §3. A két független változós másodrendű PDE kanonikus alakra hozása

3.1. Hiperbolikus egyenletek. Hiperbolikus egyenletek esetében a vizsgált tartományban  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  és a (2.8) karakterisztikus egyenlet két különböző  $C_1 = \varphi(x, y), C_2 = \psi(x, y)$  valós karakterisztikaszereggel rendelkezik.

Bebizonyítjuk, hogy ezek függetlenek, azaz  $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0$ . A

$C_1 = \varphi(x, y), C_2 = \psi(x, y)$  általános integrálok a (2.8a) és (2.8b) egyenletek megoldásai, azaz

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}},$$

vagy

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \quad \frac{\psi_y}{\psi_x} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}}.$$

A  $\Delta > 0$  feltételnek megfelelően

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \frac{\psi_x}{\psi_y}, \text{ a\o } \frac{\varphi_y}{\varphi_x} \neq \frac{\psi_y}{\psi_x}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből

$$\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Legyen

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (3.1)$$

Akkor  $\alpha_{11} \equiv 0$  és  $\alpha_{22} \equiv 0$ , a (2.4) egyenletet az alábbi alakban írhatjuk le:

$$U_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}. \quad (3.2)$$

A (3.2) egyenlet a hiperbolikus egyenlet első kanonikus alakja.

Jegyezzük meg, hogy ha  $a_{11}(x, y) = a_{22}(x, y) = 0$ , akkor a (2.1) egyenlet már (3.2) alakú.

Vezessünk be két új független változót a következőképpen

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta. \quad (3.3)$$

Ekkor

$$\begin{vmatrix} \alpha_\xi & \alpha_\eta \\ \beta_\xi & \beta_\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

Az új  $(\alpha, \beta)$  változók bevezetése tehát nem változtatta meg az egyenlet típusát.

Legyen

$$U\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = v(\alpha, \beta).$$

Ekkor:

$$U_{\xi} = v_{\alpha} + v_{\beta}, U_{\eta} = v_{\alpha} - v_{\beta}, U_{\xi\eta} = v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta}.$$

Az így kapott deriváltakat a (3.2) egyenletbe helyettesítve

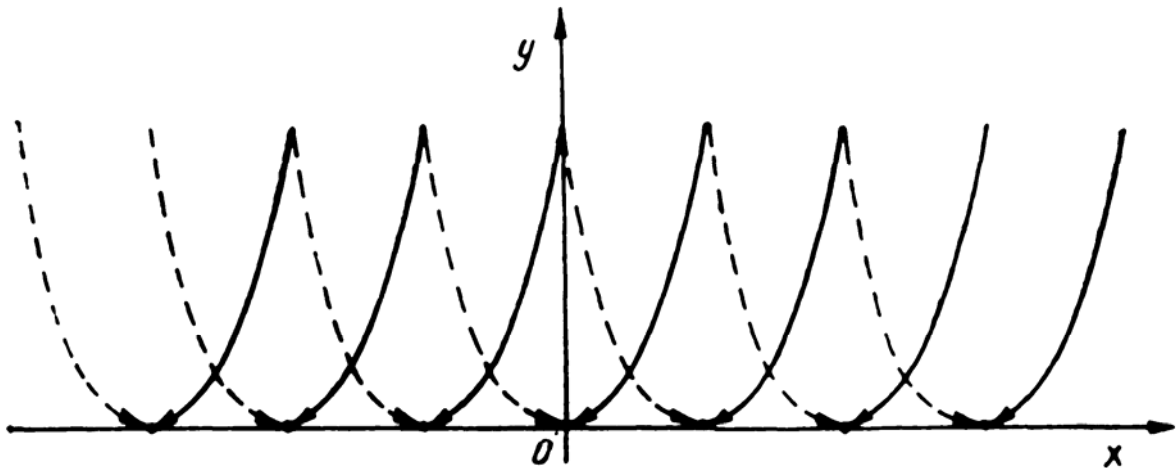
$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, v, v_{\alpha}, v_{\beta}). \quad (3.4)$$

Ez a hiperbolikus egyenlet második kanonikus alakja.

Példa. Határozzák meg a PDE pontos típusát és kanonikus alakját.

$$u_{xx} - yu_{yy} + u(x, y) = 0, y > 0. \quad (3.5)$$

A (3.5) egyenlet két független változós másodrendű PDE. Az egyenlet típusának meghatározásához számítsuk ki a diszkriminánsát  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y > 0$ .



1. ábra

A (3.5) egyenlet tehát hiperbolikus. A megfelelő karakterisztikus egyenlet

$$(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$$

Ahonnan a két valós karakterisztika-sereg (1. ábra)

$$C_1 = x - 2\sqrt{y}, C_2 = x + 2\sqrt{y}.$$

A karakterisztikák az  $y = \frac{1}{4}(x - C)^2$  parabolák jobb és bal ágai.

A parabolák  $Ox$  tengelyhez tartozó csúcsai nem tartoznak a karakterisztikákhoz ( $y > 0$ ).

Végezzük el a független változók következő transzformációját

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \eta = x + 2\sqrt{y},$$

Ekkor

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}(U_\eta - U_\xi), \quad u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

$$u_{yy} = \frac{1}{y}(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) - \frac{1}{2y^{3/2}}(U_\eta - U_\xi).$$

Behelyettesítve a deriváltakat a (3.5) egyenletbe:

$$U_{\xi\eta} = \frac{0,5}{\eta - \xi}(U_\xi - U_\eta) - 0,25U.$$

Elvégezve a (3.3) átalakítást meghatározzuk a (3.5) egyenlet második kanonikus alakját a vizsgált tartományban.

$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} = -\frac{1}{\beta}v_\beta - 0,25v.$$

**3.2. Parabolikus egyenletek.** Parabolikus egyenletek esetében  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  és a megfelelő (2.8) karakterisztikus egyenletnek egy általános integrálja van,  $C_1 = \varphi(x, y)$ . Ekkor a

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

Helyettesítést végezzük, ahol a  $\eta(x, y)$  egy tetszőleges kétszer folytonosan integrálható, a  $\varphi(x, y)$ -től független függvény.

Mivel  $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ , ezért

$$\alpha_{11} = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y\right)^2 = 0.$$

De ekkor

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= a_{11}\varphi_x\eta_x + a_{12}(\varphi_x\eta_y + \varphi_y\eta_x) + a_{22}\varphi_y\eta_y = \\ &= \underbrace{\left(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y\right)}_{=0} \left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0, \end{aligned}$$

tehát a (2.4) egyenlet a következő alakban írható fel

$$U_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{22}}. \quad (3.6)$$

A (3.6) egyenlet a parabolikus egyenletek kanonikus alakja.

Példa. Határozzuk meg a

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x = 0.$$

(3.7)

PDE típusát és hozzuk kanonikus alakra.

Mivel  $\Delta = 1 - 1 = 0$ , tehát a (3.7) egyenlet parabolikus. A megfelelő karakterisztikus egyenletből

$$dy + dx = 0 \Rightarrow C_1 = x + y.$$

Bevezetjük az alábbi új független változókat:

$$\xi = x + y, \eta = y. \quad (3.8)$$

Mivel

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

a (3.8) függvények függetlenek:

$$u_x = U_\xi, u_y = U_\xi + U_\eta, u_{xx} = U_{\xi\xi},$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, u_{xy} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}.$$

Behelyettesítjük a deriváltakat a (3.7) egyenletbe, majd az összevonások után megkapjuk a következő kanonikus alakot

$$U_{\eta\eta}(\xi, \eta) + 3U_\xi = 0.$$

Megjegyezzük, hogy mind a (3.7) egyenlet mind pedig annak kanonikus alakja állandó együtthatójú lineáris homogén egyenletek. Ez a megjegyzés általános érvényű, vagyis ha az egyenlet állandó együtthatójú lineáris és homogén, akkor a kanonikus alak is állandó együtthatójú, lineáris és homogén.

**3.3. Elliptikus egyenletek.** Elliptikus egyenletek esetében  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ , és a (2.7) vagy (2.7.a) egyenletek együtthatói komplex számok. Bebizonyítjuk, hogy ezeknek vannak gyökei. E célból bevezetjük a

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + i\omega(x, y). \quad (3.9)$$

függvényt. Ekkor

$$a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} + \sqrt{-\Delta}i)(\zeta_y + i\omega_y) = 0,$$

$$a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} - \sqrt{-\Delta}i)(\zeta_y + i\omega_y) = 0$$

vagy

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y - \sqrt{-\Delta}\omega_y = 0, \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y \pm \sqrt{-\Delta}\zeta_y = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y + \sqrt{-\Delta}\omega_y = 0, \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y - \sqrt{-\Delta}\zeta_y = 0. \end{cases} \quad (3.10a)$$

A (3.10) (3.10.a) egyenletrendszer elsőrendű lineáris homogén PDE-k rendszerei, amelyek együtthatói folytonosan differenciálhatók. Az ilyen egyenleteknek vannak megoldásai és ha a (3.10) egyenlet megoldásai  $\zeta = \zeta(x, y), \omega = \omega(x, y)$ , akkor a (3.10a) megoldásai  $\zeta = \zeta(x, y), \omega = -\omega(x, y)$ . A

(3.9) értelmében a (2.7) megoldásai a  $z(x, y) = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$  függvények, a (2.8a) általános integráljai pedig a  $C_{1,2} = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$ .

Hasonló gondolatmenet a (2.7a) egyenlet esetében is helytállóak. Ha bevezetjük a  $\xi = \zeta(x, y) + i\omega(x, y), \eta = \zeta(x, y) - i\omega(x, y)$  jelölést

$$\alpha_{11} = 0 = a_{11}(\zeta_x + i\omega_x)^2 + 2a_{12}(\zeta_x + i\omega_x)(\zeta_y + i\omega_y) + a_{22}(\zeta_y + i\omega_y)^2, \text{ а отже,}$$

$$(a_{11}\zeta_x^2 + 2a_{12}\zeta_x\zeta_y + a_{22}\zeta_y^2) - (a_{11}\omega_x^2 + 2a_{12}\omega_x\omega_y + a_{22}\omega_y^2) = 0,$$

$$a_{11}\zeta_x\omega_x + a_{12}(\zeta_x\omega_y + \omega_x\zeta_y) + a_{22}\zeta_y\omega_y = 0. \quad (3.11)$$

Bevezetjük az

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = \zeta(x, y), \beta = \frac{\xi - \eta}{2i} = \omega(x, y). \quad (3.12)$$

új független változókat

A (3.12) függvények Jacobi-determinánsa nem nulla (a függvények függetlenek), elvégezve a helyettesítést a (2.1)-be a (3.11) miatt  $\tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{22}, \tilde{\alpha}_{12} = 0$ . Ekkor a (2.4)-ből megkapjuk az elliptikus egyenlet kanonikus alakját.

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = \frac{F(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)}{\alpha_{11}}. \quad (3.13)$$

Példa. Vizsgáljuk meg a (3.5) egyenletet az  $y < 0$  tartományban. Ebben a félsíkban az egyenlet az elliptikus típusúhoz tartozik. A  $(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$  karakterisztikus egyenlet két komplex konjugált karakterisztikája  $C_1 = x - 2\sqrt{-y}i, C_2 = x + 2\sqrt{-y}i$ .

A (3.12) értelmében  $\alpha = x, \beta = 2\sqrt{-y}$ . Ekkor

$$u_x = U_\alpha, u_{xx} = U_{\alpha\alpha}, u_y = -(-y)^{-1/2}U_\beta,$$

$$u_{yy} = (-y)^{-1}U_{\beta\beta} - 1/2(-y)^{-3/2}U_\beta.$$

Behelyettesítve a (3.5)-be a deriváltakat

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} - \frac{1}{\beta}U_\beta + U = 0.$$

**3.4. A két független változós állandó együtthatójú lineáris másodrendű PDE-k kanonikus alakjai.** Vizsgáljuk meg az állandó együtthatójú lineáris PDE-t

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + b_3u = f(x, y). \quad (3.14)$$

A fentebb bizonyítottak értelmében a (3.14) differenciálegyenlet a három ismert kanonikus alak egyikére vezethető vissza

$$U_{\xi\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U = F(\xi, \eta), \quad (\text{hiperbolikus típus}) \quad (3.15)$$

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U = F(\xi, \eta)$$

$$U_{\eta\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U = F(\xi, \eta) \quad (\text{parabolikus típus}), \quad (3.16)$$



$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + c_1 U_\xi + c_2 U_\eta + c_3 U = F(\xi, \eta) \quad (\text{elliptikus típus}), \quad (3.17)$$

ahol  $c_i = \text{const}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

A (3.15) – (3.17) egyenletek további egyszerűsítése céljából vezessünk be a  $U(\xi, \eta)$  helyett egy új,  $v(\xi, \eta)$  függvényt

$$U = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v(\xi, \eta), \quad (3.18)$$

ahol  $\lambda$  és  $\mu$  - tetszőleges állandók. Ekkor

$$U_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\xi + \lambda v),$$

$$U_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\eta + \mu v),$$

$$U_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),$$

$$U_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v),$$

$$U_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v).$$

Behelyettesítve a deriváltakat a (3.17) egyenletbe:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (c_1 + 2\lambda)v_\xi + (c_2 + 2\mu)v_\eta + (\lambda^2 + \mu^2 + c_1\lambda + c_2\mu + c_3)v = e^{-\lambda\xi - \mu\eta} F(\xi, \eta).$$

Válasszuk meg a  $\lambda$  és  $\mu$  állandókat úgy, hogy az utóbbi egyenletben  $v_\xi$  és  $v_\eta$  nullák legyenek. Ekkor

$$c_1 + 2\lambda = 0, \quad c_2 + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c_1}{2}, \quad \mu = -\frac{c_2}{2},$$

azaz

$$\lambda^2 + \mu^2 + c_1\lambda + c_2\mu + c_3 = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{4} - \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + c_3 = c_3 - \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_2^2}{4}.$$

Tehát

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (c_3 - \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_2^2}{4})v = e^{\frac{c_1}{2}\xi + \frac{c_2}{2}\eta} F(\xi, \eta),$$

Hasonló gondolatmenetet követve a (3.15) és (3.16) egyenlet esetében

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi\eta} + \alpha v &= F_1(\xi, \eta) \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \alpha v &= F_1(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (\text{hiperbolikus típus})$$

$$v_{\eta\eta} + c_1 v_\xi = F_1(\xi, \eta) \quad (\text{parabolikus típus}).$$

Példa. Határozzák meg a

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_y - u_x = 0. \quad (3.19)$$

egyenlet kanonikus alakját.

Meghatározzuk az egyenlet típusát

$$\Delta = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$

A vizsgált egyenlet tehát parabolikus.

Ekkor

$$dy^2 + 4dxdy + 4dx^2 = 0 \Rightarrow dy + 2dx = 0 \Rightarrow c_1 = y + 2x.$$

Legyen  $\xi = y + 2x$ ,  $\eta = x$ . Bebizonyítjuk a  $\xi(x, y)$  i  $\eta(x, y)$  függvények függetlenségét

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$u_x = 2U_\xi + U_\eta, u_y = U_\xi, u_{yy} = U_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = 2U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}, u_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

Behelyettesítve a deriváltakat a (3.19) egyenletbe:

$$4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - 8U_{\xi\xi} - 4U_{\xi\eta} + 4U_{\xi\xi} + U_\xi - 2U_\xi + U_\eta = 0,$$

$$U_{\eta\eta} - U_\xi + U_\eta = 0.$$

Bevezetjük az új  $v(\xi, \eta)$  függvényt a (3.18) képlet szerint. Ekkor

$$e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v - v_\xi - \lambda v + v_\eta + \mu v) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{\eta\eta} + (2\mu + 1)v_\eta - v_\xi + (\mu^2 - \lambda + \mu)v = 0.$$

A  $\lambda$  és  $\mu$  állandókat úgy választjuk meg, hogy teljesüljön az alábbi egyenletrendszer

$$\begin{cases} 2\mu + 1 = 0 \\ \mu^2 - \lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Ekkor az utolsó egyenletet így írhatjuk át

$$v_{\eta\eta} - v_\xi = 0,$$

$$v(\xi, \eta) = e^{0,25\xi + 0,5\eta} U(\xi, \eta).$$

*Megjegyzés.* A (2.3) egyenletet gyakran úgy írják fel, hogy a  $U(\xi, \eta)$  helyett a  $u(\xi, \eta)$ -t használják. Ebben az esetben a  $u_\xi$  és  $u_\eta$  szimbólumokat a  $\eta = \text{const}$  és  $\xi = \text{const}$  iránymenti deriváltaként kell értelmezni.

$$u_\xi = \frac{d}{d\xi} (u|_{\eta=\text{const}}), u_\eta = \frac{d}{d\eta} (u|_{\xi=\text{const}}),$$

vagyis mint  $U_\xi$ -t és  $U_\eta$ -t, nem pedig mint az  $u(x, y)$  függvény  $\xi$  és  $\eta$  szerinti parciális deriváltjait, mivel az  $u_\xi$  és az  $u_\eta$  kifejezéseknek nincs értelmük, amíg az új  $\xi$  és  $\eta$  koordináták nincsenek meghatározva.

## §4 A többváltozós kvázilineáris másodrendű PDE-k típusai és kanonikus alakjai

Vizsgáljuk meg a másodrendű kvázilineáris PDE-ket.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f\left(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}\right), \quad (4.1)$$

ahol  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Legyen  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Végezzük el a változók transzformációját az alábbi képletek szerint:

$$\xi_k = \varphi_k(x), \quad k = \overline{1, m}.$$

Fogadjuk el a  $\varphi_k(x)$  függvényeket kétszer folytonosan differenciálhatóknak és függetlenek a vizsgált tartományban. Ekkor

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^m U_{\xi_k} \varphi_{k x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m U_{\xi_k \xi_l} \varphi_{k x_i} \varphi_{l x_j} + \sum_{k=1}^m U_{\xi_k} \varphi_{k x_i x_j}.$$

Bevezetjük  $\alpha_{ik} = \varphi_{k x_i}$ . Ekkor, behelyettesítve a deriváltakat a (4.1)-be

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kl} U_{\xi_k \xi_l} = F\left(\xi, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_m}\right), \quad (4.2)$$

ahol

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}; \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m).$$

Vizsgáljuk meg a következő kvadratikus formát

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (4.3)$$

Amelynek együtthatói valamely  $M(x^0)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  pontban megegyeznek a (4.1) egyenlet együtthatóival.

Vezessük be az új,  $\eta_1, \dots, \eta_m$  változókat az alábbi lineáris átalakítás segítségével

$$y_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}^0 \eta_k. \quad (4.4)$$

Ekkor a kvadratikus forma a következő alakot veszi fel:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

ahol

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^0 \alpha_{ik}^0 \alpha_{jl}^0.$$

A (4.1) egyenlet fő részének együtthatói ekkor a kvadratikussá alakításának megfelelő lineáris átalakítást szenvedik

Az  $\alpha_{ik}^0$  együtthatók megfelelő kiválasztásával a (4.3) kvadratikussá alakított kanonikus alakra hozhatjuk

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \eta_k^2,$$

ahol  $\lambda_k = \pm 1$ -el egyenlő vagy nulla, azaz

$$\bar{a}_{kl}^0 = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \lambda_k, & k = l. \end{cases}$$

Ha tehát az  $\xi_k$  független változókat úgy válasszuk meg, hogy az  $M(x^0)$  pontban teljesüljenek az alábbi egyenlőségek

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ik}^0 \quad (\text{például } \xi_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik}^0 x_i),$$

Akkor a (4.1) egyenlet az  $M(x^0)$  pontban a következő alakot veszi fel

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k U_{\xi_k \xi_k}(\xi) = F(\xi, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_m}). \quad (4.5)$$

A kvadratikussá alakítás tehetetlenségi tétele (Sylvester tétele) értelmében a pozitív, negatív és nullával egyenlő  $\lambda_k$  együtthatók száma invariáns a kvadratikussá alakított kanonikus alakra hozó nemszinguláris lineáris transzformációra nézve.

Ezért a (4.1) egyenlet az  $M(x^0)$  pontban

a) elliptikus, ha a (4.5)-ben  $\lambda_k = 1$  minden  $k = \overline{1, m}$ -re;

b) parabolikus típusú, ha a (4.5)-ben legalább egy  $\lambda_k$  együttható értéke nulla;

c) hiperbolikus típusú, amennyiben valamennyi  $\lambda_k$  értéke nullától eltérő és ezek között legalább egy olyan van, amelynek előjele eltér a (4.5) többi együtthatójának előjelétől

d) ultrahiperbolikus, amennyiben a (4.5) egyenlet valamennyi együtthatója nullától eltérő, de  $r < 1$  együttható pozitív és  $m - r$  negatív. Megjegyezzük, hogy  $m \geq 3$  esetében a (4.1) egyenletet csak az adott pontban lehet kanonikus alakra hozni, mert ahhoz, hogy a (4.1) egyenletet valamely tartományban kanonikus alakra hozzuk, a  $\varphi_k(x)$  függvényeket oly módon kell megválasztani, hogy  $k \neq l$  esetében teljesüljenek a  $\bar{a}_{kl} = 0$  feltételek. Az ilyen feltételek száma  $\frac{m(m-1)}{2}$ , ami meghaladja a  $\varphi_k(x)$  függvények  $m$  számát.

$m=3$  esetében a nemdiagonális elemeket nullává alakíthatjuk, de akkor a diagonális elemek különbözőek lehetnek, ugyanakkor  $\bar{a}_{kk}$  egyenlők kell legyenek  $\lambda_k$ -val.

*Megjegyzés.* Ha a (4.1) egyenlet lineáris és együtthatói állandók, akkor az a teljes értelmezési tartományán a következő kanonikus alakra hozható

$$\sum_{k=1}^m \left( \lambda_k U_{\xi_k \xi_k} + b_k U_{\xi_k} \right) + cU = F_1(\xi). \quad (4.6)$$

Legyenek  $\lambda_k \neq 0$ . Ekkor az alábbi módon bevezetve a  $v(\xi)$  függvényeket

$$U = v \exp \left( -0,5 \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-1} b_k \xi_k \right),$$

a (4.6) egyenlet a következő alakra hozható

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k v_{\xi_k \xi_k} + c_1 v = F_1(\xi) \exp \left( 0,5 \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-1} b_k \xi_k \right).$$

Példa. Határozzák meg a differenciálegyenlet típusát és hozzák kanonikus alakra.

$$u_{x_1 x_1}(x_1, x_2, x_3) + 2u_{x_1 x_2} + 2u_{x_2 x_2} - 2u_{x_2 x_3} + 3u_{x_3} = 0. \quad (4.7)$$

Lagrange módszerével\* meghatározzuk annak a nemszinguláris transzformációnak a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mátrixát, amely kanonikus alakra hozza a

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_2 x_3$$

kvadratikus formát.

Ekkor bevezetve  $\Xi = A^T X$ -t, ahol

\* Л. Я. Окунев. Вища алгебра. К., 1950, стор. 157 - 165

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

a következőt kapjuk:

$$U_{\xi_1 \xi_1} + U_{\xi_2 \xi_2} - U_{\xi_3 \xi_3} + 3U_{\xi_3} = 0.$$

Behelyettesítve

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp \left( \frac{3}{2} \xi_3 \right)$$

végül a következőt kapjuk

$$v_{\xi_1 \xi_1} + v_{\xi_2 \xi_2} - v_{\xi_3 \xi_3} + \frac{9}{4}v = 0.$$

A (4.7) egyenlet tehát hiperbolikus típusú.

## §5. A magasabbrendű differenciálegyenletek típusai

Az §1 jelöléseit alkalmazva vizsgáljuk meg a

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x) D^\alpha U(x) = f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, D^s u(x)), \quad (5.1)$$

differenciálegyenletet, ahol  $|s| < |\alpha|$ .

Amennyiben az  $a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(x)$  együtthatók folytonosak a vizsgált  $D$  tartományban, az (5.1) alakú PDE-k elméletében fontos szerepet játszik a következő,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  valós paramétereket tartalmazó  $n$ -edrendű forma:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x) \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_m^{\alpha_m} \quad (5.2)$$

Amelyet a z (5.1) egyenlet karakterisztikus formájának neveznek.

Az (5.2) forma segítségével az (5.1) PDE-k következő típusait különböztetjük meg.

Az (5.1) egyenlet az  $x^0 \in D$  pontban parabolikus, amennyiben az (5.2) karakterisztikus forma a  $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$   $i = \overline{1, m}$  nemszinguláris affin transzformáció által az  $x^0$  olyan formává alakítható át, amely csak  $l$  ( $0 < l < m$ ) paramétert tartalmaz. Ebben az esetben azt mondják, hogy az (5.2) egyenlet az  $x^0 \in D$  pontban parabolikusan elfajul.

Ha a parabolikus elfajulás nem áll fenn, akkor az (5.1) egyenlet az  $x^0 \in D$  pontban elliptikus, amennyiben az

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0 \quad (5.3)$$

karakterisztikus egyenletnek nincsenek valós gyökei, kivéve  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$  gyököket.

Amennyiben az (5.2) karakterisztikus forma  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  paramétereinek az  $x^0 \in D$  pontban valamely nemszinguláris affin transzformációja eredményeképpen előálló (5.3) transzformált karakterisztikus egyenletében a paraméterek egyikének  $n$  valós gyöke van, akkor az (5.1) egyenlet az  $x^0$  pontban hiperbolikus.

Az (5.1) egyenlet a  $D$  tartományban parabolikus, hiperbolikus vagy elliptikus, ha a tartomány minden pontjában a megadott típusozat tartozik.

Példák. Vizsgáljuk meg a terheletlen lemez kismértékű hajlítási rezgésének egyenletét\*

$$Lu(x, y) \equiv \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (5.4)$$

ahol  $q$ - a lemez felületén egyenletesen eloszló terhelés intenzitása,  $D$  – a lemez hajlítással szemben mutatott merevsége. Ekkor a karakterisztikus forma a következő

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2,$$

az (5.4) egyenlet tehát elliptikus típusú- a vizsgált tartományban.

Általánosan, az

$$\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_k^2} = f(x, u(x), \dots, D^s u(x_s)), \quad |s| \leq 3$$

egyenlet, amelynek karakterisztikus formája

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \right)^2,$$

elliptikus az értelmezési tartományán.

Parabolikus egyenlet például a lemez transzverzális rezgésének egyenlete

\*С.П.Тимошенко. История науки о сопротивлении материалов.М., 1959, стр.147

$$Lu(t, x, y) = \frac{2h\rho}{D} \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial t^2}, \quad (5.5)$$

ahol  $h, \rho$  – állandók. A megfelelő karakterisztikus egyenletet  $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) = 0$  alakban írhatjuk fel, az (5.5) egyenlet tehát parabolikus.

A

$$Lu(t, x, y) - 3 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^2 \partial x^2} - 3 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^4} = f(t, x, y)$$

Differenciálegyenlet hiperbolikus, mivel karakterisztikus formája

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\equiv \lambda_2^4 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^4 - 3\lambda_1^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2\lambda_1^4 = \\ &= (\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1^2), \end{aligned}$$

kielégíti a kívánt feltételeket.

Megjegyezzük, hogy az

$$Lu(t, x, y) - \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^4} = f(t, x, y) \quad (5.6)$$

Egyenlet a fenti típusok egyikéhez sem tartozik. A megfelelő karakterisztikus forma

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - \lambda_1^4$$

alakú, amelynek  $\lambda_1$ -re nézve csak  $\lambda_2$  és  $\lambda_3$  kötött értékei esetében vannak valós gyökei. Az ilyen differenciálegyenletet köztes típusúnak nevezzük.

Példák a) állapítsák meg, hogy az alábbi egyenletet parciális differenciálegyenletek-e és határozzák meg annak pontos típusát.

$$1. \cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0.$$

$$2. x^2 u_{xy^2} - (u_x)^5 - 5u = 0.$$

$$3. \frac{\partial}{\partial x} (xu_{y^2x} - u_y) + 5uu_{x^2} = 0.$$

$$4. \log|u_x u_y| - \log|u_x| - \log|u_y| + 5u - 6 = 0.$$

$$5. \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} u - u_x \sec^2 u - 3u + 2 = 0.$$

$$6. \cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0.$$

$$7. (u_x)^{-1} u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \ln|u_x| + 2u - 5 = 0.$$

$$8. xu_{y^2x} - 5(u_{x^2})^2 + xyu = \ln|x|.$$

$$9. yu_y e^{yu} - \frac{\partial}{\partial y} e^{yu} + 3 = 0.$$

$$10. (\operatorname{sh} x)u_{xy} - xu_{yy} + u_x + \ln(y^2 + 1) = 0$$

b) Állapítsák meg a PDE típusát és hozzák kanonikus alakra az alábbi egyenleteket-

$$1. 4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u^2 = 0.$$

$$2. u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} + (\sin^2 x)u_{yy} - (\operatorname{ctg} x)u_x = 0.$$

$$3. e^y u_{xx} + e^x u_{yy} - 0,5e^y u_x - 0,5e^x u_y = 5xy.$$

$$4. u_{xx} - 2e^{0,5x} u_{xy} - u_y + u_x \cos u = 0.$$

$$5. u_{xx} + 2(\sin y)u_{xy} + (1 + \sin^2 y)u_{yy} - x \ln|y| = 0.$$

$$6. y^2 u_{xx} - 4xyu_{xy} + 4x^2 u_{yy} + 3u_x = 0.$$

$$7. (\operatorname{ctg}^2 x)u_{xx} - 2(\operatorname{ctg} x)u_{xy} + u_{yy} + (\cos ec^2 x)u_y = e^u.$$

$$8. u_{xx} - 2(\cos x)u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$$

$$9. (1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

$$10. (\operatorname{sh} x)u_{xy} - xu_{yy} + u_x + \ln(y^2 + 1) = 0.$$

$$11. u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 3u_y + 0.$$

$$12. 9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 3u_y = 0.$$

$$13. u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 4u.$$

$$14. u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x - u = 0.$$

$$15. u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x = 0.$$

$$16. u_{xy} + u_{yy} + 3u_y - 4u_x = 0.$$

$$17. u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + 5u_y = 0.$$



18.  $u_{xy} + 2u_{xx} - u_x + u_y + 2u = 0.$
19.  $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{xz} + u_x - u_z = 0, \quad u = u(x, y, z).$
20.  $u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_x = 0.$
21.  $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{yz} - u_z + u_y = 0.$
22.  $u_{xx} + 9u_{yy} - 3u_{yz} = 5u_x.$
23.  $2u_{yy} - u_{yz} + u_{xy} - 5u_z = u.$
24.  $2u_{xy} + u_{yz} - 3u_y + u = 0.$
25.  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yz} + 5u_x = 0.$

## II. FEJEZET

### HIPERBOLIKUS EGYENLETEK

#### A HIPERBOLIKUS EGYENLETEKRE VISSZAVEZETHETŐ FELADATOK

Hiperbolikus egyenletekre általában azok a rezgésekkel kapcsolatos fizikai feladatok vezethetők vissza, például a húrok és membránok rezgési, gázok rezgési, elektromágneses rezgések. Ezek legfontosabb jellemzője trejedésük véges sebessége.

**Hiperbolikus egyenletek. Hiperbolikus egyenletekre visszavezethető fizikai feladatok. A peremfeladat kitűzése. A feladat korrektsége. Stabilitás. A haladó hullámok módszere.**

$$U_{xx} + U_{yy} = 0.$$

#### Feladatok:

1. A húr transzverzális rezgései.
2. A pálca longitudinális rezgései.
3. A rezgő húr energiája.
4. Elektromos rezgések a vezetőkben.
5. A membrán transzverzális rezgései.
6. Az akusztika és a hidrodinamika egyenletei.

Definíció. Húr alatt olyan rugalmas fonalat értünk, amely olyan folytonos alakváltozásra képes, amely közben nem változik meg a hosszúsága.

A rezgéseket transzverzálisnak tekintjük, ha a húr minden pontja egy síkban mozog, a pontok sebessége pedig merőleges az  $OX$  tengelyre.

A  $\varphi$  és  $U(x, t)$  bármely időpontban meghatározza a húr alakját.

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t),$$

ahol  $f(x, t)$  – a külső erő.

Definíció. A membrán olyan vékony hártya, amely nem fejt ki ellenállást a hajlítással és a nyírással szemben. Érvényes Hooke törvénye.

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + f(x, y, t),$$

ahol  $f(x, y, t)$  – a membrán egységnyi felszínére eső erősűrűség.

Kezdeti- és határfeltételek.

A differenciálegyenleteknek végtelen sok megoldása van. A végeinél rögzített húr  $0 \leq x \leq l$  esetében

$$U(0, t) = 0, U(l, t) = 0.$$

Mivel a rezgések a kezdeti profil és a sebességek kezdeti eloszlásának függvénye

$$\left. \begin{aligned} U(x, t_0) &= \varphi(x) \\ U_t(x, t_0) &= f(x) \end{aligned} \right\}.$$

Fogalmazzuk meg az egyenlet első peremfeltételét: határozzuk meg az  $U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t)$  egyenletet kielégítő  $U(x, t)$  függvényt a  $0 \leq x \leq l, t \geq 0$  tartományban.

A peremfeltételekből

$$U(0, t) = \mu_1(t)$$

$$U(l, t) = \mu_2(t)$$

A kezdeti feltételekből

$$U(x, 0) = \varphi(x)$$

$$U_t(x, 0) = \psi(x)$$

A második peremfeladat

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t)$$

$$U(l, t) = \mu_2(t)$$

$$U_x(0, t) = v(t) \text{ – az ismert erő.}$$

A harmadik peremfeladat

$$U_x(0, t) = h[U(0, t) - \theta(t)] \text{ – rugalmas rögzítés.}$$

A Cauchy-féle feladat

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$U(x, 0) = \varphi(x)$$

$$U_t(x, 0) = \psi(x)$$

Vizsgáljuk meg a következő feladatot

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t)$$

$$U(x, 0) = f(x)$$

$$U_t(x, 0) = F(x)$$

$$U(0, t) = \mu_1(t)$$

$$U(l, t) = \mu_2(t)$$

Ha  $F(x) = 0$ , akkor a feladatot Dirichlet-féle feladatnak nevezzük Ha  $f(x) = 0$ , és  $F(x)$  – tetszőleges, akkor a feladat Neumann-féle feladat.

**Definíció.** Ha a kezdeti- és peremfeltételekben bekövetkező kismértékű változás hatására a megoldás megváltozik, akkor a megoldás instabil, ha nem változik meg, akkor stabil.

Megoldási módszerek:

1. A haladó hullám módszere.
2. A változók szétválasztásának módszere.
3. A Green-függvény módszere.
4. Az elméleti potenciálok módszere.
5. Az integrálegyenletek módszere.

Írjuk fel a  $\Delta$ -t hengerkoordinátákban:

Запишемо  $\Delta$  в циліндричній системі координат:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

– Laplace-féle egyenlet hengerkoordinátákban.

Amennyiben a Laplace-féle egyenlet megoldása gömbi vagy hengeres szimmetriával rendelkezik, akkor  $U(\rho, \varphi, z) = U(\rho)$ . Ez esetben  $U(r, \theta, \varphi) = U(r)$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0 \text{ – gömbi koordinátákban.}$$

Ezt az egyenletet integrálva

$$U = \frac{c_1}{r} + c_2, \text{ ahol } c_1, c_2 \text{ – tetszőleges állandók.}$$

Legyen  $c_1 = 1, c_2 = 0$ . Ekkor  $U_0 = \frac{1}{r}$  a térbeli Laplace-féle egyenlet fundamentális megoldása. Hengerkoordinátákban:  $U = U(\rho)$ ,

$$\frac{d}{d\rho} \rho \frac{dU}{d\rho} = 0.$$

Meghatározzuk a hengerszimmetrikus megoldást.

$$U(\rho) = c_1 \ln \rho + c_2.$$

Ha  $c_1 = -1, c_2 = 0$ , akkor  $U_0 = \ln \frac{1}{\rho}$ . A  $U_0(\rho)$  függvényt a  $\rho$  síkhoz tartozó fundamentális megoldásnak nevezik.

Az  $U_0 = \frac{1}{r}$  az  $r = 0$  pont kivételével mindenütt kielégíti a  $\Delta U = 0$  Laplace-féle egyenletet. Ez a függvény egy állandóban különbözik a pontszerű töltés  $U = \frac{l}{r}$  potenciáljától.

Hasonlóképpen, az  $U = \ln \frac{1}{\rho}$  függvény a  $\rho = 0$  pont kivételével mindenütt kielégíti a Laplace-féle egyenletet és egy állandóban különbözik a feltöltött vékony vezető  $U = 2l_1 \ln \frac{1}{\rho}$  potenciáljától, ahol  $l_1$  a töltéssűrűség.

## A síkon kitűzött első peremfeladat.

Határozzuk meg a következő feltételeket kielégítő  $U$  függvényt:

Необхідно знайти функцію  $U$ , яка задовільняє умовам:

1.  $\Delta U = 0$  A  $C$  kontúrral határolt végtelen  $\Sigma$  tartományban.
2. Az  $U$  függvény mindenütt folytonos, ideértve  $C$  kontúrvonalat is.
3.  $U|_C = \varphi(x, y)$ , ahol  $\varphi(x, y)$  a  $C$ -n meghatározott függvény.
4.  $U(M)$  korlátos a végtelenben, azaz létezik egy olyan  $N$  szám, hogy

$$|U(M)| \leq N.$$

A kétváltozós peremfeladat egyetlen megoldással rendelkezik.

## §1 A húr rezgéseinek egyenlete

**Definíció.** Húrnak azt a szilárd testet nevezzük, amelynek hossza lényegesen meghaladja annak egyéb méreteit.

A húr rezgéseinek folyamatát úgy írhatjuk le, ha megadjuk a húr pontjainak helyzetét az idő függvényében (2. ábra). A húr pontjainak helyzetét ismertnek tekinthetjük, amennyiben ismerjük az elmozdulásvektor

$$U(t, x) = \{u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)\}$$

komponenseit a  $t$  időpontban-

Vizsgáljunk meg egy egyszerűbb feladatot.

- 1) A rezgés az  $xOu$  síkban történik, az  $U(t, x)$  elmozdulás-vektor bármely  $t$  időpontban merőleges az  $Ox$  tengelyre. Ekkor a rezgés folyamatát az  $u(t, x)$  függvénnyel írhatjuk le, amely a húr függőleges irányú elmozdulását mutatja;
- 2) A húr abszolút hajlékony (a húr  $\bar{T}$  feszültsége jelentősen meghaladja annak  $\bar{R}$  ellenállását, azaz a húr csak a nyújtással szemben fejt ki ellenállást, a hajlítással szemben nem), ezért  $|\bar{R}| \approx 0$  feltételezéssel élünk) és rugalmas (azaz teljesül Hooke törvénye, a feszültség arányos a megnyújtással);
- 3) A közeg ellenállása nullával egyenlő és a húr rezgései kicsik, azaz  $\alpha^2(x, t) \approx 0$ , ahol  $\alpha(x, t)$  – a húrhoz az  $x$  pontban húzott érintő és az  $Ox$  tengely közötti hegyesszög.

Ekkor az alábbi sorbafejtésből

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

Következik, hogy  $\sin \alpha \approx \alpha$ . A

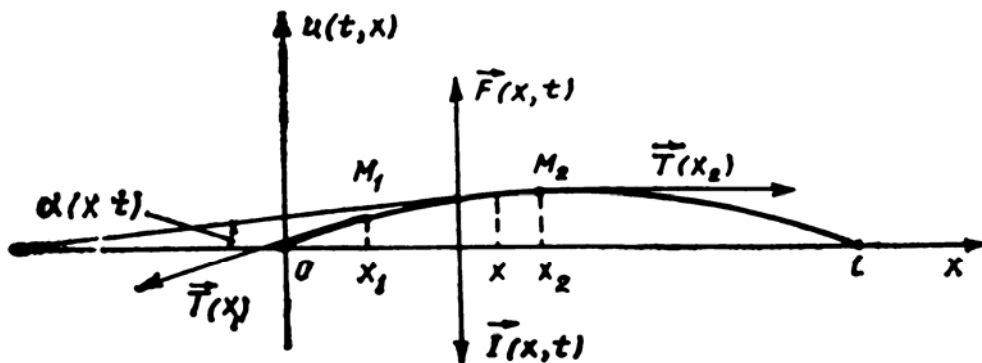
$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

egyenlőségéből pedig  $\cos \alpha = 1$ . Figyelembe véve, hogy  $\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = (1 - \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha = 0$ :

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Tehát

$$\cup M_1 M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx = x_2 - x_1,$$



2. ábra

vagyis a húr hossza a rezgés során nem változik. A 2) és 3) feltétel szerint a  $\vec{T}$  feszültség nem függ a  $t$  időtől. Bebizonyítjuk, hogy feszültség az  $x$ -től sem függ.

Legyen  $\vec{F}(x, t)$  az  $Ou$  irányú, a húr mentén egyenletesen eloszló külső erő és  $\vec{I}(x, t)$  a tehetetlenségi erő.

Vizsgáljuk meg a húr  $(x_1, x_2)$  egy szakaszát. A D'Alembert-elv szerint a húr  $(x_1, x_2)$  szakaszára ható erőknek a megfelelő tengelyre eső vetületeinek összege nulla. Tehát

$$\Pi_{p_{ox}} \vec{F} = \Pi_{p_{ox}} \vec{I} = 0, \quad \Pi_{p_{ox}} \vec{T}(x_1) = -T(x_1) \cos \alpha(x_1, t) \approx -T(x_1),$$

$$\Pi_{p_{ox}} \vec{T}(x_2) = T(x_2) \cos \alpha(x_2, t) \approx T(x_2).$$

Vagyis

$$T(x_2) - T(x_1) = 0 \Rightarrow T(x_2) = T(x_1).$$

Mivel az  $x_1$  és  $x_2$  pontok kiválasztása tetszőleges, az utóbbi egyenlőségből  $T(x) = T = \text{const}$ .

Hogy meghatározhassuk a húr rezgéseit leíró egyenletet, írjuk fel az  $(x_1, x_2)$  szakaszra ható erők  $Ou$  tengelyre eső vetületét:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - T \sin \alpha(x_1) + T \sin \alpha(x_2) = 0,$$

ahol  $\rho(x)$  – a húr lineáris sűrűsége. Mivel

$$T[\sin \alpha(x_2) - \sin \alpha(x_1)] = T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right] = T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

akkor

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

Mivel az integrálás  $x_1$  és  $x_2$  határainak megválasztása tetszőleges

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (1.1)$$

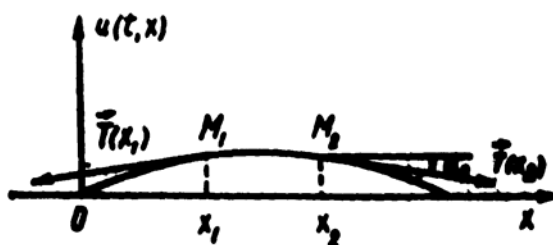
ahol  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ;  $f(t, x) = \frac{F(t, x)}{\rho}$  – a külső erő intenzitása (az erőnek egységnyi hosszúságra eső része).

Amennyiben a húr egynemű, azaz a  $\rho$  állandó, akkor  $a^2 = \text{const}$ .

Az (1.1) egyenlet a húr rezgésének egyenlete.

Amennyiben a külső erő nincs jelen ( $F(t, x) \equiv 0$ ), akkor megkapjuk a húr szabad rezgéseinek egyenletét.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (1.1a)$$



3. ábra

*1. megjegyzés.* Ha a húr  $M_1 M_2$  szakasza úgy helyezkedik el, ahogy a 3. ábrán láthatjuk, akkor  $T_1^x$  és  $T_2^x$   $Ou$  irányba eső vetületei.

$$-T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2). \text{ de most } -\sin \alpha_2 = \text{tg}(180^\circ - \alpha_2) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2},$$

e szerint

$$-T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) = T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right).$$

2. *megjegyzés.* Amennyiben a közegellenállás nem elhanyagolható, hanem egyenesen arányos a sebességgel, az egyenlet így írható fel:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - h u_t + f(x, t), \quad h = \text{const.}$$

## § 2. Hullámfolyamatok két- és háromdimenziós közegben

### 2.1. A membrán rezgéseinek egyenlete.

**Definíció.** A membrán egy szabadon lehajló, rugalmasan kifeszített vékony hártya. Tételezzük fel, hogy a membrán nyugalmi állapotában az  $xOy$  sík valamely  $D$  tartományát foglalja el, ha pedig valamilyen módon kitérítették egyensúlyi helyzetéből, akkor rezgése során minden pontja az  $xOy$  síkra merőlegesen mozog (a membrán transzverzálisan rezeg).

Jelölje  $u(t, x, y)$  a membrán  $(x, y)$  pontjának helyzetét a  $t$  időpontban,  $F(x, y, t)$  pedig az egyenletesen eloszló, egységnyi felületre eső külső erőt, vizsgáljuk meg a membrán kis rezgéseit ( $u, u_x, u_y$  négyzeteit illetve szorzatait elhanyagoljuk). Bizonyítható, hogy a membrán ilyen transzverzális rezgéseit az alábbi differenciálegyenlet írja le:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{F(x, y, t)}{\rho}. \quad (2.1)$$

Ha a membrán egynemű ( $\rho = \text{const}$ ), akkor  $a = \text{const}$ .

Szabadrezgések ( $F(x, y, t) \equiv 0$ ) esetében a membrán rezgéseinek egyenlete homogén

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.2)$$

A  $\square u = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2} u_{tt}$  kifejezést Lorentz-operátornak nevezik.

A Lorentz-operátort alkalmazva a (2.2) egyenletet így írhatjuk fel

$$\square u + \frac{F(x, y, t)}{a^2 \rho} = 0.$$



## 2.2.. A hidrodinamika egyenletei és a hanghullámok terjedése.

A hidrodinamikában a folyadékot vagy gázt folytonos közegnek tekintjük. Ez azt jelenti, hogy a folyadék vagy gáz tetszőleges térfogatelemét olyan nagynak tekintjük, amely nagyon nagyszámú molekulát tartalmaz. Amikor a folyadék valamely elemének elmozdulásáról beszélünk, akkor ezalatt nem az egyes molekulák mozgását értjük, hanem a teljes térfogatelem mozgását, amit a hidrodinamikában pontszerűnek tekintünk.

Tegyük fel, hogy az egynemű gáz (vagy folyadék) valamely tömege egy szilárd edénykében helyezkedik el, amely megadott módon mozog a térben. Tételezzük fel továbbá, hogy a kezdeti időpontban a folyadék részecskéit oly módon kényszerítették mozgásra, hogy bármely következő időpontban a folyadéktömeg bármelyik pontja sebességének  $x, y, z$  irányokba eső  $v_x, v_y, v_z$  vetületei a koordináták valamely  $u(t, x, y, z)$  függvényének a megfelelő koordináták szerinti parciális deriváltjai, vagyis a folyadék  $u(t, x, y, z)$  sebességpotenciállal rendelkező mozgásra van kényszerítve.

A hidrodinamikából ismert a gáz (folyadék) akusztikai egyenlete:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad (2.3)$$

Ahol  $a^2$  valamely, az adott gáz, vagy folyadék fizikai tulajdonságaitól függő állandó.

Megjegyezzük, hogy amennyiben ismeret a sebességpotenciál, a folyadék vagy gáz mozgása teljesen meghatározott. A gáz mozgását akkor tekintjük meghatározottnak, ha bármely  $t$  időpontban és bármely  $(x, y, z)$  pontban ismert a sebességvektor, a  $\rho(x, y, z, t)$  sűrűség és a  $p(x, y, z, t)$  nyomás. De

$$\vec{v} = -\text{grad } u, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{a^2} u_t, \quad p = p_0 + \rho_0 + \rho_0 u_t,$$

ahol  $\rho_0$  i  $p_0$  – a kezdeti sűrűség és nyomás.

## 2.3 Feladatok a fényelmélet, elektromosság és mágnesség témaköréből.

Vezessük be a következő jelöléseket:  $c$  - fénysebesség,  $\varepsilon$  - dielektromos állandó,  $\lambda$  - elektromos vezetőképesség,  $\mu$  - mágneses permeabilitás.

A Maxwell-Hertz elmélet értelmében az elektromos hullámok terjedését az elektromos erő  $u(t, x, y, z)$  vektora jellemzi, amely a következő PDE-t elégíti ki

$$c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = \varepsilon \mu u_{tt} + 4\pi \lambda \mu u_t. \quad (2.4)$$

Bevezetve a következő jelöléseket  $\frac{c^2}{\varepsilon \mu} = a^2$ ,  $\frac{4\pi \lambda}{\varepsilon} = -b$ , az egyenlet az alábbi alakban írható fel

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + bu_t. \quad (2.4a)$$

Mivel a környezet, amelyben a jelenség játszódik, az éter, ahol  $\varepsilon=1, \mu=1, \lambda=0$ , a (2.3) egyenlethez jutunk.

Megjegyezzük, hogy a  $4\pi\lambda\mu u_t$  mennyiséget, amely az elektromos erő időbeli vesztesége, abszorpciónak nevezik.

Az (1.1), (2.1)-(2.4) egyenletek mindegyike hullámegyenlet. Bevezetve a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

Laplace-operátort a hullámegyenleteket így írhatjuk fel:

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.5)$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\tau = at, \quad x_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

A (2.6) átalakítás nonszinguláris, mivel

$$\begin{vmatrix} a, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 0, 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Mivel  $u_{tt} = a^2 u_{\tau\tau}$ , ezért a (2.5) egyenlet így írható fel:

$$u_{\tau\tau}(\tau, x) = \Delta u(\tau, x) + \frac{1}{a^2} \tilde{f}(\tau, x),$$

vagyis a hullámegyenlet hiperbolikus típusú.

A felsorolt példákból következik, hogy a hiperbolikus egyenletek hullámjelenségeket írnak le. Azonban nem minden hullámjelenség írható le hiperbolikus egyenletekkel (például a pálcák transzverzális rezgési nem).

Mivel a parciális differenciálegyenleteknek általában végtelen sok megoldása van, valamely konkrét hullámfolyamat esetében a PDE-hez még kiegészítő feltételeket kell csatolni, amelyeknek az ismeretlen függvény és annak deriváltjai meg kell feleljenek, így módon létrehozható a megfelelő természeti jelenséget egyértelműen leíró matematikai modell.

### III. FEJEZET

## HULLÁMFOLYAMATOK VÉGTELEN KITERJEDÉSŰ KÖZEGEKBEN

Tegyük fel, hogy a vizsgált tartományméretei jelentősen meghaladják annak a tartománynak a méreteit, amelyben a vizsgált jelenség végbemegy. Ekkor azt mondjuk, hogy a jelenség egy végtelen kiterjedésű tartományban megy végbe. Az ilyen szituáció példája lehet, hogy egy elég hosszú húr olyan szakaszának rövid ideig tartó rezgéseit vizsgáljuk, amely elég távol van a húr végpontjaitól.

A húr végei ez esetben nyilvánvalóan semmilyen befolyással nincsenek a vizsgált folyamatra.

A rezgés folyamata ebben az esetben a kiindulási helyzettől és a kezdősebességtől függ. Ilyen módon a következő matematikai feladathoz jutottunk: határozzuk meg a

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad (0.1)$$

egyenlet azon megoldásait a  $B = \{(t, x) | t > 0, x \in E_n\}$  tartományban.

amelyek kielégítik

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in E_n, \quad (0.2)$$

Feltételeket, ahol  $f(t, x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  - adott függvények.

A (0.2) feltételeket kezdeti, vagy peremfeltételeknek, a (0.1), (0.2) feladatot pedig Cauchy-féle feladatnak nevezzük.

Bebizonyítjuk, hogy a Cauchy-féle feladat a végtelen kiterjedésű közegben zajló hullámfolyamat matematikai modellje. E célból bizonyítjuk, hogy

- 1) hogy a Cauchy-féle feladatnak van megoldása és ez a megoldás egyetlen,
- 2) ez a megoldás a kiindulási adatok ( $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  peremfeltételek és a (0.1) egyenlet  $f(t, x)$  jobb oldala) folytonos függvénye, vagyis ha

$u_1(t, x)$ ,  $u_2(t, x)$  az

$$\begin{cases} u_{1_{tt}}(t, x) = a^2 \Delta u_1(t, x) + f_1(t, x), & (t, x) \in B, \\ u_1(0, x) = \varphi_1(x), \quad u_{1_t}(0, x) = \psi_1(x), & x \in E_n, \\ u_{2_{tt}}(t, x) = a^2 \Delta u_2(t, x) + f_2(t, x), & (t, x) \in B, \\ u_2(0, x) = \varphi_2(x), \quad u_{2_t}(0, x) = \psi_2(x), & x \in E_n, \end{cases}$$

egyenlet megoldásai, akkor  $\forall \varepsilon > 0$  i  $t_1 > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$  valamint az  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  egészértékű vektor, az

$$\left| D^k [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] \right| < \delta, \quad \left| D^k [\psi_1(x) - \psi_2(x)] \right| < \delta, x \in E_n,$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad k_i = \overline{0, \alpha_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\left| f_1(t, x) - f_2(t, x) \right| < \delta, \quad (t, x) \in B_1 = \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_1, x \in E_n\},$$

feltételekből következik, hogy a  $B_1$  tartományban teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\left| u_1(t, x) - u_2(t, x) \right| < \varepsilon, \quad (t, x) \in B_1.$$

**Definíció.** Amennyiben a (0.1), (0.2) Cauchy-féle feladatnak egyetlen megoldása van a  $B$  tartományban és ez a megoldás folytonosan függ a kiindulási adatoktól, akkor a feladatot korrektül kitűzöttnek nevezzük.

## §1. A végtelen húr szabadrezgései. A karakterisztikák módszere (a hullámok terjedésének módszere)

Vizsgáljuk meg a következő feladatot: keressük meg az

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (1.1)$$

egyenlet azon megoldásait a  $B = \{(t, x) | t \in (0, +\infty), x \in (-\infty, +\infty)\}$  tartományban amelyek kielégítik az alábbi kezdeti feltételeket

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad (1.2)$$

ahol  $\varphi(x)$  – ismert  $C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $a\psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$  osztályú függvények.

Az (1.1), (1.2) feladat megoldása céljából hozzuk az (1.1) egyenletet kanonikus alakra. Ekkor

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Leftrightarrow (dx - a dt)(dx + a dt) = 0,$$

azaz

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0.$$

Az utóbbi egyenletet integrálva

$$C_1 = x - at, \quad C_2 = x + at.$$

Vezessük be az új független változókat a következőképpen

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at, \quad (1.3)$$

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$u_t = aU_\xi - aU_\eta, \quad u_{tt} = a^2 U_{\xi\eta} - 2a^2 U_{\xi\eta} + a^2 U_{\eta\eta}.$$

Behelyettesítve az (1.1) egyenletbe, az egyenlő tagok összevonása után

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (1.4)$$

Feltételezve, hogy a keresett megoldás létezik, az (1.1) egyenletbe behelyettesítve azt azonossághoz jutunk. Ez esetben az (1.4) kanonikus alak is azonossággá válik. Az (1.4)-et  $\xi$  szerint integrálva

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$

ahol  $f(\eta)$  – tetszőleges függvény. Az utóbbi  $\eta$  -re integrálva

$$U(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Visszaalakítva a kezdeti független változókra az (1.3) alapján

$$U(t, x) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \quad (1.5)$$

ahol  $f_1(\xi)$  i  $f_2(\eta)$  – tetszőleges függvények.

Ha tehát az (1.1) egyenletnek létezik megoldása, akkor az (1.5) alakú.

Másfelől, ha az  $f_1(x + at)$ ,  $f_2(x - at)$  függvények deriváltjaikkal és második deriváltjaikkal együtt folytonosak a vizsgált tartományban, akkor ezek is megoldásai az (1.1) egyenletnek, az (1.5) képlet tehát az egyenlet általános megoldását fejezi ki.

A húr szabadrezgései egyenletének általános megoldását először D’Alambert határozta meg 1747-ben.

Határozzuk meg az  $f_1(x + at)$  és  $f_2(x - at)$  függvényeket oly módon, hogy az kielégítse az (1.5) feltételeket. Ekkor

$$\begin{cases} u(0, x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(0, x) = a[f_1'(x) - f_2'(x)] = \psi(x), \end{cases}$$

A második egyenletet integrálva

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \end{cases}$$

ahol  $x_0$  – tetszőleges pont, azaz

$$f_1(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} C,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{1}{2} C.$$

Az (1.5)-be helyettesítve kapjuk meg a D’Alambert-féle képlet 1748-ben Euler által meghatározott alakja.

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \quad (1.6)$$

Bebizonyítjuk, hogy ha  $\varphi(x) \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ , akkor az (1.6) D’Alambert-féle képlet az 1.1), (2.2) Cauchy-féle feladat megoldás, bizonyítva ezzel a feladat megoldásának létezését.

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{a}{2} [\varphi_\xi(x+at) - \varphi_\eta(x-at)] + \frac{1}{2} [\psi(x+at) + \psi(x-at)], \\ u_{tt} &= \frac{a^2}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x+at) + \varphi_{\eta\eta}(x-at)] + \frac{a}{2} [\psi_\xi(x+at) - \psi_\eta(x-at)], \\ u_x &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi_\eta(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi(x+at) - \psi(x-at)], \\ u_{xx} &= \frac{1}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x+at) + \varphi_{\eta\eta}(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi_\xi(x+at) - \psi_\eta(x-at)] \end{aligned}$$

Behelyettesítve a deriváltakat az (1.1) egyenletbe

$$u_{tt} \equiv a^2 u_{xx},$$

Az (1.6) függvényt az (1.2) kezdeti feltételekbe helyettesítve

$$u(0, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x) + \varphi(x)] + \frac{1}{2a} \int_x^x \psi(z) dz \equiv \varphi(x),$$

$$u_t(0, x) = \frac{a}{2} [\varphi'(x) - \varphi'(x)] + \frac{1}{2} [\psi(x) + \psi(x)] \equiv \psi(x),$$

vagyis az (1.6) az (1.1), (1.2) Cauchy-féle feladat megoldása. Az (1.6) előállításának módjából következik, hogy a megoldás egyetlen.

### A Cauchy-féle feladat kezdeti feltételektől való folytonos függésének tétele.

Legyenek  $u_1(t, x)$  és  $u_2(t, x)$  a Cauchy-féle feladat megoldásai

$$u_{1tt} = a^2 u_{1xx}, \quad u_{2tt} = a^2 u_{2xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_1(0, x) = \varphi_1(x), \quad u_2(0, x) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_{1t}(0, x) = \psi_1(x), \quad u_{2t}(0, x) = \psi_2(x),$$

a  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ . Ekkor  $\forall \varepsilon > 0$  és  $t_1 > 0$ ,  $\exists \delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon, t_1)$ , vagyis amikor  $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$ ,  $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$  és  $x \in (-\infty; +\infty)$ , akkor teljesül az  $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon$  egyenlőtlenség minden  $-\infty < x < +\infty, t \leq t_1$  esetében

Bizonyítás. Az  $u_1(t, x)$  és  $u_2(t, x)$  megoldásokra a D’Alambert-féle képletet alkalmazva

$$\begin{aligned} u_1(t, x) - u_2(t, x) &= \frac{1}{2} [\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)] + \frac{1}{2} [\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)] + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [\psi_1(z) - \psi_2(z)] dz \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
|u_1(t, x) - u_2(t, x)| &\leq \frac{1}{2} |\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| + \\
&+ \frac{1}{2} |\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(z) - \psi_2(z)| dz < \\
&< \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta dz \leq \delta(1 + t_1).
\end{aligned}$$

Ha  $\delta = \varepsilon/(1 + t_1)$ , akkor az

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség minden  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t \leq t_1$ -re teljesül. A tételt bizonyítottuk.

A gyakorlatban a kezdeti feltételeket mérésekkel határozzák meg, ezek természetesen pontatlanok. A most bizonyított tétel azt állítja, hogy a kezdeti feltételek kis eltérései kis mértékben változtatják meg a Cauchy-féle feladat megoldását.

A most bizonyított tétel módot ad a Cauchy-féle feladat megoldására abban az esetben, ha a  $\varphi(x)$  és  $\psi(x)$  függvények nem felelnek meg a  $\varphi \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$  kritériumoknak.

Határozzuk meg az (1.1), (1.2) Cauchy-féle feladat megoldását abban az esetben, ha a  $\varphi(x)$  és  $\psi(x)$  függvények csak valamely véges intervallumokon különböznek nullától, folytonosak, ha  $x \in (-\infty; +\infty)$  és  $\varphi(x)$ -nek léteznek az elsőrendű deriváltjai. Az ilyen függvények egyenletesen approximálhatók a  $\varphi_n(x)$  és  $\psi_n(x)$  differenciálható függvényekkel úgy, hogy

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \varphi(x), \quad \psi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \psi(x).$$

eközben  $\varphi_n(x) \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi_n(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ .

Ha a  $\varphi_n(x)$  és  $\psi_n(x)$  függvényeket fogadjuk el a Cauchy-féle feladat kezdeti feltételeként, akkor ezek egyértelműen meghatározzák a  $u_n(t, x)$ , megoldást, amely D'Alembert-féle képlettel adható meg.

Mérjük fel a megoldások  $u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)$  különbségét. Mivel a  $\{\varphi_n(x)\}$  és  $\{\psi_n(x)\}$  sorozatok egyenletes konvergensek,  $\forall \varepsilon > 0$  és  $t_1 > 0$ ,  $\exists N$ ,  $\forall n > N$  olyan, hogy minden pozitív  $k$  esetében teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n+k}(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + t_1}, \quad |\psi_{n+k}(x) - \psi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + t_1}$$

Minden  $-\infty < x < +\infty$ -re. A bizonyított tétel értelmében minden  $t \leq t_1$  i  $x \in (-\infty; +\infty)$ -re teljesülnek az

$$|u_{n+k}(t, x) - u_n(t, x)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenségek tetszőleges  $n > N$  és pozitív egész  $k$  esetében. Ez azonban azt jelenti, hogy a megoldások  $\{u_n(t, x)\}$  sorozata egyenletesen konvergál valamely  $u(t, x)$  függvényhez  $t_1 \geq t$  és  $x \in (-\infty; +\infty)$  esetében. Ez a függvényt az (1.1), (1.2) Cauchy-féle feladat általánosított megoldásának nevezzük.

Ekkor

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n(x - at) + \varphi_n(x + at)] + \\ + \frac{1}{2a} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-at}^{x+at} \psi_n(z) dz = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

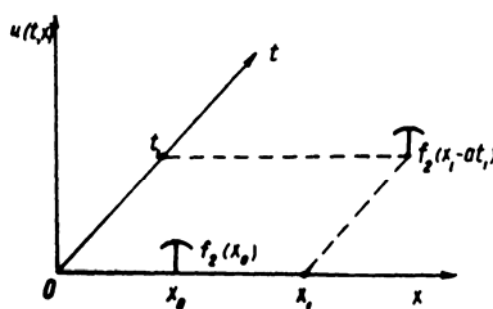
Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben  $u(0, x) = \varphi(x)$ ,  $u_t(0, x) = \psi(x)$ , és a Cauchy-féle feladat általánosított megoldását a D'Alembert-féle képletek adják meg.

Megjegyezzük, hogy a vizsgált feladatot más módszerrel is megoldhattuk volna, amennyiben az általánosított függvényeket ([3], c. 315-334) alkalmazzuk.

Ettől most eltekintünk. A következőkben számunkra nem az lesz a fontos, hogy melyik megoldást állíthatjuk elő a D'Alembert-féle képletekkel. A fontos az a tény, hogy a kezdeti feltételek kis eltérései az előállított megoldásban is kis eltéréseket okoznak.

### A Cauchy-féle feladat megoldásának fizikai interpretációja.

Megadjuk a húr szabadrezgése egyenlete általános megoldásának fizikai értelmezését (4. ábra). E célból vizsgáljuk meg az (1.1) egyenlet  $u = f_2(x - at)$  alakú megoldását. Legyen  $x_0$  egy tetszőleges pont. Tegyük fel, hogy ebből a pontból a  $t = 0$  időpontban  $a$  sebességgel elindul egy megfigyelő az  $Ox$  tengely pozitív irányába. Ekkor a  $t = t_1$  időpontban az  $x_1 = x_0 + at_1$  pontban lesz. A megfigyelő által az  $x_1$  pontban a  $t = t_1$  időpontban mért kitérés  $u = f_2(x_1 - at_1) = f_2(x_0)$  lesz.



A megfigyelőnk tehát bármely tetszőleges időpontban az aktuális tartózkodási helyén a húr ugyanolyan  $f_2(x_0)$  mértékű kitérését fogja tapasztalni.



Ez azt jelenti, hogy a húr kezdeti  $u(x,0)=f_2(x)$  profilja a sebességgel fog mozogni az  $Ox$  tengely pozitív irányába, mintha egy alaktartó szilárd szerkezet volna. Ezért az  $u=f_2(x-at)$  megoldást pozitív irányban haladó hullámnak nevezzük.

Hasonlóképpen adhatjuk meg az  $u=f_1(x+at)$  megoldás interpretációját. Ezt a megoldást negatív irányba haladó hullámnak nevezzük. Ekkor a húr profilja az  $Ox$  tengely negatív irányába halad  $a$  sebességgel.

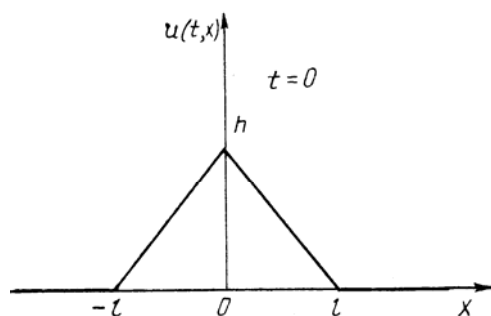
Az (1.1) egyenlet (1.5) megoldása tehát a pozitív és negatív irányban haladó hullámok szuperpozíciója, ezért a megoldás ezen menetét időnként a hullámok terjedésének módszereként említik.

Az (1.1) egyenlet levezetésében bevezettük az  $a=\sqrt{T/\rho}$  jelölést. De ugyanakkor  $a$  a húron haladó hullám sebessége. Ebből pedig az következik, hogy a húron haladó hullám sebessége fordítottan arányos a sűrűség négyzetgyökével és egyenesen arányos a húr feszültségének négyzetgyökével.

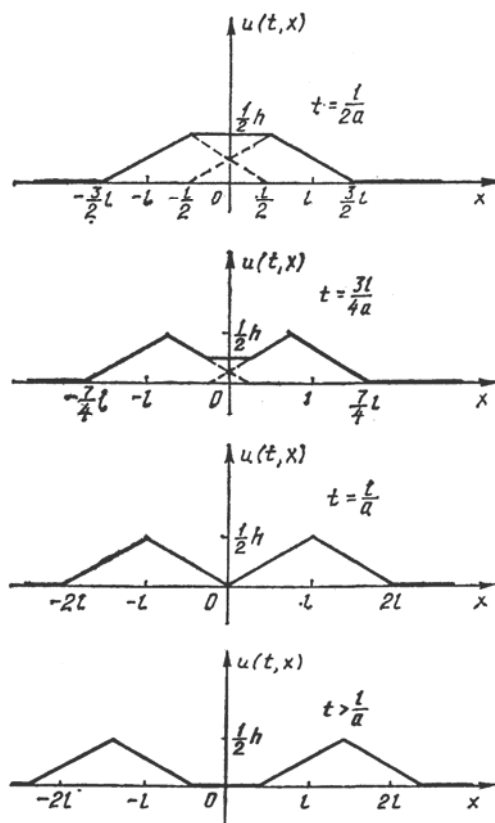
Térjünk át az (1.6) D’Alambert-féle képlet értelmezésére. Külön megvizsgáljuk azt az esetet, amikor a  $(\varphi(x)\equiv 0)$  kezdeti kitérések egyenlők nullával és amikor a  $(\psi(x)\equiv 0)$  kezdősebességek egyenlők nullával. Az általános eset e két részeset szuperpozíciója.

### 1.1. A kitérési hullám terjedése (megpendített húr)

Legyenek a kezdősebességek értékei egyenlők nullával



5. ábra



6. ábra

Akkor az (1.6)-ból

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}. \quad (1.7)$$

A  $\varphi(x)$  függvény ismert, tehát meghatározhatjuk a húr helyzetét bármely  $t$  időpontban

A fentiek értelmében az  $u(t, x)$  rezgések a  $\frac{1}{2}\varphi(x - at)$  pozitív és a  $\frac{1}{2}\varphi(x + at)$  negatív irányú hullámból állnak össze, amelyek  $a$  sebességgel megfelelően jobbra és balra haladnak és a  $t = 0$  időpontban a hullámprofilok egybeesnek.

Tegyük fel, hogy kezdetben csak a húr  $(-l, l)$  szakaszára eső pontokban tér el nullától a kitérés, a fenti szakaszhoz nem tartozó pontokban pedig nulla. Az elmondottak geometriai illusztrációja céljából fogadjuk el, hogy kezdetben a húr alakja a következő volt

$$u(0, x) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < -l, \\ h\left(1 + \frac{x}{l}\right) & \text{ha } -l \leq x \leq 0, \\ h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{ha } 0 < x < l, \\ 0 & \text{ha } x \geq l. \end{cases}$$

A húr profilját különböző időpontokban az 5. és 6. ábra mutatja.

Láthatjuk, hogy ha a húr  $x$  pontja az  $(-l, l)$  ( $x > l$ ) intervallumtól jobbra helyezkedik el, akkor amennyiben  $t < \frac{x-l}{a}$ , nyugalomban van ( $u(t, x) = 0$ ),

vagyis a pontot a hullám még nem érte el. A  $t_1 = \frac{x-l}{a}$  időpontban a húr  $x$  pontja rezgésbe jön (a hullámfront eléri ezt a pontot).

Ahogy a hullám elhagyja a vizsgált pontot, vagyis a  $t_2 = \frac{x+l}{a}$  időpont után ez a pont megint nyugalmi állapotba kerül. Vagyis az  $x$  pont az  $\frac{x-l}{a} < t < \frac{x+l}{a} \Rightarrow -l < x - at < l$  időintervallumban vesz részt a hullámfolyamatban.

Hasonlóképpen, amennyiben a vizsgált pont az  $(-l, l)$  ( $x < -l$ ) intervallumtól balra helyezkedik el, a  $-l < x + at < l$  időintervallumban végez rezgéseket.

Legyen  $0 < x < l$ . Akkor ezen a ponton egyidejűleg a pozitív és a negatív hullám is áthalad. A két hullám elülső frontja a pont előtt helyezkedik el. A negatív irányú hullám hátsó frontja a  $t_1 = \frac{l-x}{a}$ , a pozitív irányú hullám hátsó

frontja pedig a  $t_2 = \frac{l+x}{a}$  időpontban halad át a ponton. Ha  $t > t_2$ , akkor a húr e pontja nyugalomban van, vagyis az  $Ox$  tengelyen helyezkedik el. Hasonlóképpen, a  $0 > x > -l$ -ban a rezgések a  $t = \frac{l-x}{a}$  időpontban érnek véget, amikor a negatív irányban haladó hullám hátsó frontja itt elhalad.

Megállapíthatjuk, hogy miután az adott ponton mindkét hullám áthalad, a pont nyugalomba kerül.

A leírt folyamat jól szemléltethetővé lesz, ha bevezetjük az  $xOt$  fázis\*sík fogalmát (7. ábra). Az  $M(x,t)$  fázissík minden pontja megfelel a húr  $x$  pontjának a  $t$  időpontban ( $t \geq 0$ ). A ( $t=0$ ) esetben a húr pontjainak kezdeti elhelyezkedését kapjuk. A  $t$  egyenes  $t=t_0$  pontja a húr helyzetét mutatja a egy adott időpontban, az  $x$  egyenes  $x=x_0$  pontja pedig a húr adott pontjának helyzetét bármely időpontban.

Szerkesszük meg a fázissíkban a  $x - at = \pm l$ ,  $x + at = \pm l$  karakterisztikákat  $t \geq 0$  esetben. Ekkor a  $t \geq 0$  félsík hat zónára bomlik. Rezgés csak azokban a pontokban és csak azokban az időpontokban történik, amelyek az I, II, III zónákhoz tartoznak. A II zónában csak a pozitív irányú hullám, a III zónában csak a negatív irányú hullám, az I zónában pedig mindkét hullám hat. A IV és V zónákban még nem történt rezgés, mivel ezeket még nem érte el a megfelelő hullámok elülső frontjai, a VI zónában pedig azért nincs rezgés, mert azt a hullámok hátsó frontjai már elhagyták.

- Fázisa (a görög  $\varphi\alpha\sigma\iota\varsigma$  -megjelenés)- a rezgő test állapotát valamely időpontban jellemző mennyiség.

Rögzítve a húr tetszőleges  $x_0$  pontját és felfelé emelkedve az  $x = x_0$  egyenes mentén könnyedén felírhatjuk a  $u(x_0, t)$  függvényt bármely  $t$  időpontban.

Legyen  $x_0 > l$ . Akkor, ha  $0 < t < \frac{x_0 - l}{a}$ , a fázissík pontjai a IV zónához tartoznak és  $u(x_0, t) = 0$ .

Ha  $\frac{x_0 - l}{a} < t < \frac{x_0 + l}{a}$ , akkor a pont a II zónához tartozik (a pozitív irányú hullám zónája)

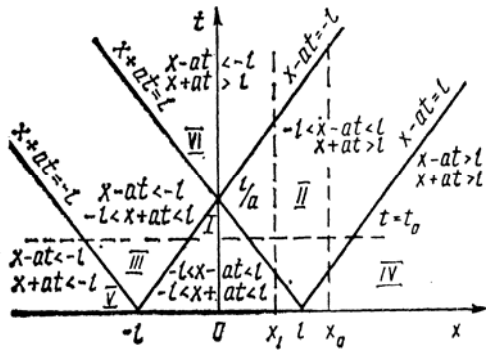
$$u(x_0, t) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 - at).$$

A  $\frac{1}{2} \varphi(x_0 + at)$  összetevő nulla, mivel  $x_0 + at > l$ , és  $x > l$  esetében  $\varphi(x) = 0$ .

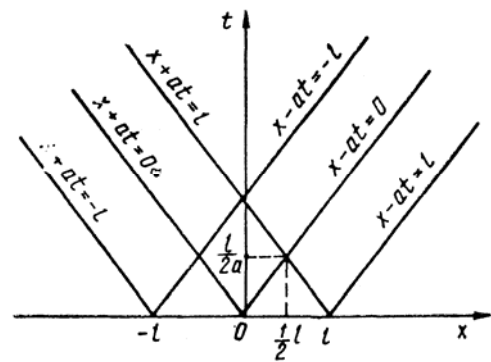
Végül ha  $t > \frac{x_0 + l}{a}$ , a pont a VI zónához tartozik és  $u(x_0, t) = 0$ .

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy amennyiben  $x_1 \in (0, l)$ , akkor

$$u(x_1, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x_1 - at) + \varphi(x_1 + at)}{2} & \text{ha } 0 < t < \frac{l - x_1}{a}, \\ \frac{1}{2}\varphi(x_1 - at) & \text{ha } \frac{l - x_1}{a} \leq t \leq \frac{l + x_1}{a}, \\ 0 & \text{ha } t > \frac{l + x_1}{a}. \end{cases}$$



7. ábra



8. ábra

Érthető, hogy amikor az egyik időpontból a másikba megyünk át, a  $u(x, t)$  függvény folytonos marad.

Hasonlóképpen állíthatjuk elő az  $u(x, t)$  függvényt egy megadott  $t$  időpontban. Ha  $t < l/a$ , a fázissík pontja balról jobbra haladva a V, III, I, II i IV zónákon halad át, ha pedig  $t > l/a$ , akkor az I zóna helyett a VI-en.

Az első esetben ( $t_0 < l/a$ )

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < x < -at_0 - l, \\ \frac{1}{2}\varphi(x + at_0) & \text{ha } -at_0 - l \leq x < at_0 - l, \\ \frac{1}{2}[\varphi(x + at_0) + \varphi(x - at_0)] & \text{ha } at_0 - l \leq x < l - at_0, \\ \frac{1}{2}\varphi(x - at_0) & \text{ha } l - at_0 \leq x < l + at_0, \\ 0 & \text{ha } x \geq l + at_0. \end{cases}$$

Hasonlóképpen írhatjuk fel a  $u(x, t_1)$   $t_1 > l/a$  esetben is.

A fenti gondolatmenet követve írhatjuk fel a  $u(x, t)$  függvényt abban az esetben, ha a  $\varphi(x)$  kezdeti kitérések az 5. ábrának megfelelően vannak megadva.

Mivel ha az  $x + at$  és  $x - at$  argumentumok átmennek a nullán, a függvények megváltoztatják az előjelüket, húzzuk meg a fázissíkon az  $x \pm at = 0$  egyeneseket.

A 88. ábráról láthatjuk, hogy a húr  $\left(0, \frac{1}{2}l\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}l, l\right)$ ,  $(l, +\infty)$  intervallumokhoz tartozó pontjai különbözőképpen járják be a zónákat (a  $\varphi(x)$  függvény páros, ezért csak  $x$  pozitív értékeit vizsgáljuk).

Ekkor, ha a)  $x \in \left(0, \frac{1}{2}l\right)$

$$u(x, t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{ha } 0 \leq t < \frac{x}{a}, \\ h\left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{ha } \frac{x}{a} < t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{ha } \frac{l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{ha } \frac{l+x}{a} < t < +\infty \end{cases}$$

6)  $x \in \left(\frac{1}{2}l, l\right)$

$$u(x, t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{ha } 0 \leq t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{ha } \frac{l-x}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{ha } \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{ha } t > \frac{l+x}{a}; \end{cases}$$

B)  $x > l$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq t < \frac{x-l}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{ha } \frac{x-l}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{ha } \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{ha } t > \frac{l+x}{a}. \end{cases}$$

Ha egy adott időponthoz tartozó hullámformára vagyunk kíváncsiak, akkor az  $u(t, x)$  függvényt  $\left(0, \frac{l}{2a}\right), \left(\frac{l}{2a}, \frac{l}{a}\right), \left(\frac{l}{a}, +\infty\right)$  ( $x \geq 0$ ) időintervallumokban kell meghatározni.

a)  $t \in (0, l/2a)$

$$u(t, x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{ha } 0 \leq x < at, \\ h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{ha } at < x < l - at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x - at}{l}\right) & \text{ha } l - at < x < l + at, \\ 0 & \text{ha } x > l + at; \end{cases}$$

b)  $t \in \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a}\right)$

$$u(t, x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{ha } 0 \leq x < l - at, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x - at}{l}\right) & \text{ha } l - at < x < at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x - at}{l}\right) & \text{ha } at < x < l + at, \\ 0 & \text{ha } x > l + at; \end{cases}$$

c)  $t > l/a$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq x < at - l, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x - at}{l}\right) & \text{ha } at - l < x < at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x - at}{l}\right) & \text{ha } at < x < l + at, \\ 0 & \text{ha } x > l + at. \end{cases}$$

Az  $u(t, x)$  függvény minden esetben folytonos.

Megjegyezzük, hogy a húr grafikusán és analitikusan előállított profiljai megegyeznek egymással.

**1.2. Az impulzushullám terjedése (a megütött húr).** Legyenek e húr pontjainak kezdeti kitérései nullával egyenlők. Ebben az esetben azt mondják, hogy a húrban impulzushullám terjed. Ha az (1.6)-ban  $\varphi(x) = 0$ , akkor

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz = \Phi(x+at) - \Phi(x-at), \quad (1.8)$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz.$$

Láthatjuk, hogy a megoldás most is az pozitív irányú  $\Phi(x-at)$  és a negatív irányú  $\Phi(x+at)$  hullámokból tevődik össze. A kezdeti időpontban

$$u(0, x) = \Phi(x+a \cdot 0) - \Phi(x-a \cdot 0) = 0.$$

A hullámfolyamat grafikus ábrázolás céljából tegyük fel, hogy

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < x < -l, \\ v_0 & \text{ha } -l < x < l, \\ 0 & \text{ha } x > l. \end{cases}$$

A  $\Phi(x)$  a következő értékeket veszi fel

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x v_0 dx = \frac{v_0 x}{2a}, \quad -l \leq x \leq l,$$

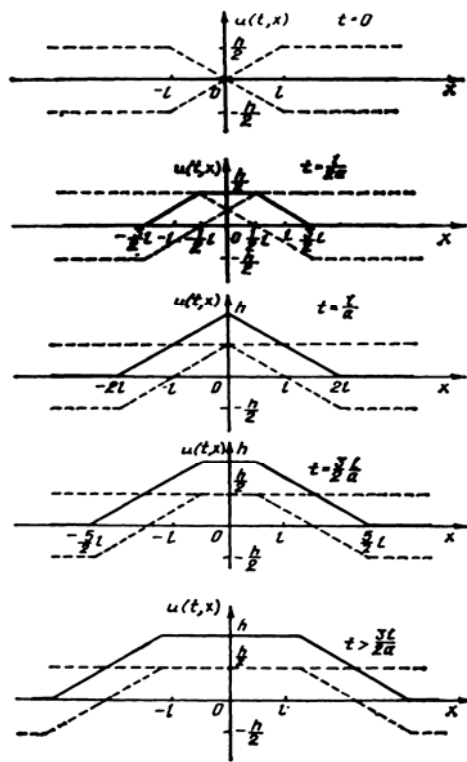
$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^l v_0 dx = \frac{v_0 l}{2a}, \quad x > l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{-l} v_0 dx = -\frac{v_0 l}{2a}, \quad x < -l.$$

Bevezetve a  $h = \frac{v_0 l}{a}$  ábrázoljuk a húr profilját különböző időpontokban

(9. ábra).

Tartozzon a húr pontja a  $(-l, l)$  intervallumhoz, azaz legyen  $x > l$ . A  $t = 0$  kezdeti időpontban az  $(x-at, x+at)$  integrálási intervallum az  $x$  ponttól indul el, majd pedig a sebességgel terjed. Ha  $t < \frac{x-l}{a}$ , akkor nincs közös pontja a  $(-l, l)$  intervallummal, az (1.8) képlet szerint  $u(x, t) = 0$ , vagyis az  $x$  pont nyugalomban van. A  $t = \frac{x-l}{a}$  időponttól kezdve az  $(x-at, x+at)$  folyamatosan rácsúszik az  $(-l, l)$ -re, ahol a  $\psi(x)$  eltér a nullától ( $\psi = v_0$ ), és az  $x$  pont rezgésbe jön. Ha  $t > \frac{x+l}{a}$ , a  $(x-at, x+at)$  intervallum teljesen lefedti a  $(-l, l)$ -t és az integrálás  $(x-at, x+at)$  intervalluma  $(-l, l)$  lesz, mivel ezen kívül  $\psi(x) = 0$ . Ekkor, ha  $t > \frac{x+l}{a}$ ,  $u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-l}^l \psi(x) dx = \frac{lv_0}{a}$ . Hasonlóképpen járhatunk el, ha a pont az  $(-l, l)$ -től balra található,



9. ábra



**УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ГУМАНІТАРНО-ПРИРОДНИЧИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
З УГОРСЬКОЮ МОВОЮ ВИКЛАДАННЯ  
ФАХОВИХ ДИСЦИПЛІН**

**др. Шпеник Олександр Оттович**

**Класифікація рівнянь в частинних похідних.  
Рівняння гіперболічного виду.**

Egyetemi jegyzet

Видавництво Intermix

Ужгород – Будапешт  
2010

**Видання склав**  
**др. Шпеник Олександр Оттович,**  
**доцент кафедри фізики та математики**  
**гуманітарно-природничого факультету з угорською мовою**  
**викладання фахових дисциплін УжНУ**  
**для студентів вищих учбових закладів**

Робоча програма складена на підставі програм дисциплін  
“Методи математичної фізики” та Державної програми  
університетів.

Робоча програма з курсу “Методи математичної фізики”  
обговорена на засіданні кафедри теоретичної фізики

## **Мета курсу «МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ»**

Мета курсу «МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ» є подвійною. З одного боку курс є підготовчим для наступних загальних курсів, таких як «Електродинаміка», «Квантова механіка», «Статистична фізика», та теоретичних спецкурсів на різних кафедрах. Тому всі теми, такі як різні види рівнянь в частинних похідних, спеціальні функції ( функції Бесселя, Чебишева-Ерміта, Лежандра, Лагерра) викладаються саме з цих позицій.

З другого боку, даний курс є полігоном для того, щоб розвинути у студентів навички до різного роду математичних перетворень і операцій.

В курсі підкреслюються також загально-пізнавальні абстракції. Наприклад, підкреслюється, що при одержанні рівнянь коливання струни робляться різні припущення , які обмежують застосовність цього рівняння. Такого роду підхід робить рівняння теплопроводності ще більш обмеженим.

Важливим елементом у викладанні курсу є підкреслення ролі українських вчених , їх вклад у розвиток споріднених наук. Так, всесвітньо відомий математик М.В. Остроградський є українцем за походженням, народився у колишній Харківській губернії, вчився у Харківському університеті , лише згодом переїхав у Петербург. Де закінчив свою кар'єру директором вищого навчального закладу - Педагогічного інституту,

У зв'язку з рівнянням коливання стержня згадується узагальнення на коливання балки, а відтак - опір матеріалів і його славетний спеціаліст -С.П. Тимошенко . При використанні теорії лишків використовується формула Сохоцького -випускника Київського університету .

Навчальним планом передбачено проведення 2 контрольних робіт. Завдання для цих робіт беруться з переліку задач (Див. Перелік завдань до практичних занять ), але вони на практичних заняттях не розв'язувались, отже мають оригінальний характер.



## РОЗДІЛ I

### КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ.....5

§1. Основні поняття та визначення теорії ДРЧП.....	5
§ 2. Класифікація ДРЧП 2-го порядку від двох незалежних змінних.....	7
§3. Зведення до канонічного вигляду ДРЧП 2-го порядку від двох незалежних змінних.....	11
3.1.. Рівняння гіперболічного типу.....	11
3.2. Рівняння параболічного типу.....	14
3.3. Рівняння еліптичного типу.....	15
3.4. Канонічні форми лінійних ДРЧП 2-го порядку від двох незалежних змінних із сталими коефіцієнтами.....	16
§4. Класифікація та зведення до канонічного вигляду Квазілінійних ДРЧП 2-го порядку з багатьма незалежними змінними.....	18
§5.Класифікація диференціальних рівнянь вищого порядку.....	22

## РОЗДІЛ II

### РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ.....26

### ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ.....26

§1. Рівняння коливання струни.....	29
§ 2. Хвильові процеси у двох- та тривимірному середовищі.....	33
2.1. Рівняння коливання мембрани.....	33
2.2.. Рівняння гідродинаміки і поширення звукових хвиль.....	33
2.3. Задачі теорії світла, електрики і магнетизму.....	34

## РОЗДІЛ III

### ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ.....36

§1. Вільні коливання нескінченної струни. Метод характеристик (Метод поширення хвиль).....	37
Теорема про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних.....	39
Фізична інтерпретація розв'язку задачі Коші.....	41
1.1.. Поширення хвиль відхилення.....	42
1.2. Поширення хвиль імпульсу.....	48

## РОЗДІЛ I

### КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

#### §1. Основні поняття та визначення теорії ДРЧП

**Означення.** Співвідношення між незалежними змінними  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , невідомою функцією  $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$  та її частинними похідними називається ДРЧП.

**Означення.** Диференціальне рівняння називається рівнянням  $n$ -го порядку, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну  $n$ -го порядку і не містить похідних більш високого порядку.

У загальному випадку рівняння  $n$ -го порядку має вигляд

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = n \quad (\alpha_i - \text{цілі невід'ємні числа})$$

$$u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^n u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Користуючись позначеннями:  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  - цілочисловий вектор (мультиіндекс) з невід'ємними координатами  $\alpha_i$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \quad (\text{довжина мультиіндексу})$$

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$F(x, u, \dots, D^\alpha u(x)) = 0.$$

**Означення.** ДРЧП називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і всіх її частинних похідних.

Лінійне рівняння 2-го порядку має вигляд

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x). \quad (1.2)$$

**Означення.** Якщо у рівнянні (1.2)  $f(x) = 0$ , то це рівняння називається лінійним однорідним. Якщо коефіцієнти  $a_{ij}, b_i, c$  є сталими, то рівняння (1.2) називається лінійним рівнянням з сталими коефіцієнтами.

**Означення.** ДРЧП називається квазілінійним, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Згідно з визначенням, квазілінійне диференціальне рівняння 2-го порядку записується у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}) u_{x_i x_j} = \Phi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}).$$

**П р и к л а д и.** З'ясувати, чи є наведені нижче рівності ДРЧП, дати повне їх визначення:

$$1. \cos^2(u_{xx} + u_{yy}) + \sin^2(u_{xx} + u_{yy}) = 1.$$

Дана рівність є тотожністю, вона не є ДРЧП.

$$2. x u_{x^2 y}(x, y) + [u_x(x, y)]^0 = f(x, y).$$

Дана рівність є квазілінійним рівнянням 3-го порядку від двох незалежних змінних.

$$3. u u_{x^2 y^2}(x, y) - x u_{x^4}(x, y) = x u u(x, y).$$

Наведена рівність є лінійним однорідним рівнянням 4-го порядку від двох незалежних змінних.

$$4. \left[ u_{x^3 y^2}(x, y) \right]^3 - u u_x = 0.$$

Остання рівність є нелінійним ДРЧП 5-го порядку від двох незалежних змінних.

**Означення.** Всяка  $n$  разів неперервно-диференційовна в області задання рівняння (1.1) функція  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , яка, будучи підставлена в дане рівняння замість невідомої функції і її частинних похідних, перетворює його в тотожність за незалежними змінними, називається регулярним розв'язком рівняння (1.1)

Надалі розглядатимемо тільки регулярні розв'язки.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{i=1}^n (u_{x_i}(x_1, \dots, x_n))^2 = 0.$$

Остання рівність виконується, якщо  $u_{x_i} = 0, i = \overline{1, n}$ , тобто  $u = \text{const}$  є розв'язком даного рівняння.

Легко бачити, що сума довільних два рази неперервно-диференційовних функцій  $\varphi_1(x+y)$  і  $\varphi_2(x-y)$  є розв'язком диференціального рівняння  $u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0$ .

Очевидно, рівняння  $\sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2 + 1 = 0$  розв'язку не має.

Як впливає із наведених прикладів, диференціальні рівняння можуть мати нескінченну множину розв'язків. Тому, коли фізична задача зводиться до ДРЧП, для однозначного описання розглядуваного процесу необхідно до рівняння приєднати деякі додаткові умови, які впливають з постановки задачі.

## § 2. Класифікація ДРЧП 2-го порядку від двох незалежних змінних

Розглянемо квазілінійне ДРЧП 2-го порядку від двох незалежних змінних

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (2.1)$$

Усі диференціальні рівняння вигляду (2.1) можуть бути розділені на три основні типи. В кожному із них за допомогою заміни незалежних змінних  $(x, y)$  рівняння (2.1) зводиться до найпростішого-канонічного вигляду. Тому при вивченні рівнянь з двома незалежними змінними обмежимося надалі дослідженням їх канонічних форм.

Для зведення рівняння (2.1) до простішого вигляду введемо нові незалежні змінні:

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y), \quad (2.2)$$

де  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  є неперервними функціями разом з частинними похідними до 2-го порядку включно, а

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Очевидно, що тоді підстановка (2.2) здійснює взаємно однозначну відповідність між точками  $(x, y)$  і  $(\xi, \eta)$  відповідних областей, тобто із (2.2)  $x$  та  $y$  визначаються як однозначні функції незалежних змінних  $\xi$  і  $\eta$ :  $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ .

Виникає питання, як вибрати функції  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ , щоб рівняння (2.1) звелось до більш простого вигляду? Для того, щоб дати відповідь на поставлене питання, вводимо нові незалежні змінні (2.2) в рівняння (2.1). Маємо

$$\begin{aligned} u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) &= U(\xi, \eta), \\ u_x &= U_x(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = \varphi_x U_\xi + \psi_x U_\eta, \\ u_y &= \varphi_y U_\xi + \psi_y U_\eta, \\ u_{xx} &= \varphi_x^2 U_{\xi\xi} + 2\varphi_x \psi_x U_{\xi\eta} + \psi_x^2 U_{\eta\eta} + \varphi_{xx} U_\xi + \psi_{xx} U_\eta, \end{aligned} \quad (2.3)$$



$$u_{yy} = \varphi_y^2 U_{\xi\xi} + 2\varphi_y \psi_y U_{\eta\xi} + \psi_y^2 U_{\eta\eta} + \varphi_{yy} U_{\xi} + \psi_{yy} U_{\eta},$$

$$u_{xy} = \varphi_x \varphi_y U_{\xi\xi} + (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) U_{\xi\eta} + \psi_x \psi_y U_{\eta\eta} + \varphi_{xy} U_{\xi} + \psi_{xy} U_{\eta}.$$

Підставляючи знайдені похідні (2.3) в (2.1), одержуємо

$$\alpha_{11} U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12} U_{\xi\eta} + \alpha_{22} U_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, U, U_{\xi}, U_{\eta}), \quad (2.4)$$

$$\alpha_{11} = a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2,$$

$$\alpha_{12} = a_{11} \varphi_x \psi_x + a_{12} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + a_{22} \varphi_y \psi_y, \quad (2.5)$$

$$\alpha_{22} = a_{11} \psi_x^2 + 2a_{12} \psi_x \psi_y + a_{22} \psi_y^2.$$

Відзначимо, що за умови лінійності (2.1) рівняння (2.4) також було б лінійним.

Розглянемо ДРЧП 1-го порядку

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \quad (2.6)$$

Нехай  $z = \varphi(x, y)$  – деякий частинний розв'язок цього рівняння. Тоді, поклавши  $\xi = \varphi(x, y)$ , одержимо із (2.5), що  $\alpha_{11} \equiv 0$ .

Таким чином, задача про вибір нових незалежних змінних зводиться до інтегрування рівняння (2.6).

Надалі будемо вважати, що коефіцієнти рівняння (2.1) є неперервними функціями разом з частинними похідними до 2-го порядку включно в розглядуваній області і не перетворюються одночасно в нуль. Тоді, якщо  $a_{11} \neq 0$ , рівняння (2.6) можна подати у вигляді

$$\left[ a_{11} z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta}) z_y \right] \left[ a_{11} z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta}) z_y \right] = 0,$$

або, якщо  $a_{22} \neq 0$ ,

$$\left[ a_{22} z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta}) z_x \right] \left[ a_{22} z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta}) z_x \right] = 0,$$

де  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ .

Кожне із наведених рівнянь розпадається на два:

$$a_{11} z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta}) z_y = 0, \quad (2.7)$$

$$a_{11} z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta}) z_y = 0,$$

або

$$a_{22} z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta}) z_x = 0, \quad (2.7a)$$

$$a_{22} z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta}) z_x = 0.$$

Таким чином, розв'язки кожного із рівнянь (2.7) або (2.7a) будуть розв'язками рівняння (2.6).

Для інтегрування рівнянь (2.7) або (2.7a) складаємо відповідну їм систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{\Delta}},$$

або

$$\frac{dy}{a_{22}} = \frac{dx}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dy}{a_{22}} = \frac{dx}{a_{12} - \sqrt{\Delta}},$$

звідки одержуємо

$$a_{11}dy - (a_{12} + \sqrt{\Delta})dx = 0, \quad a_{11}dy - (a_{12} - \sqrt{\Delta})dx = 0, \quad (2.8a)$$

або

$$a_{22}dx - (a_{12} + \sqrt{\Delta})dy = 0, \quad a_{22}dx - (a_{12} - \sqrt{\Delta})dy = 0. \quad (2.8б)$$

Рівняння (2.8б) або (2.8a) можна записати у вигляді одного рівняння

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0, \quad (2.8)$$

яке називається характеристичним для рівняння (2.1).

Із курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо, що якщо  $c = \varphi(x, y)$  є загальним інтегралом одного із диференціальних рівнянь (2.8a) або (2.8б) (тобто деяким загальним інтегралом (2.8)), то  $z = \varphi(x, y)$  є розв'язком рівняння (2.6), і навпаки. В силу накладених на  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  умов коефіцієнти рівнянь (2.8a) або (2.8б) мають неперервні похідні до 2-го порядку включно, а отже, існують загальні інтеграли рівняння (2.8), неперервні разом з похідними до 2-го порядку включно.

**Означення.** Розв'язки рівняння (2.8) називаються характеристиками.

В залежності від знаку дискримінанту  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  вводять наступну класифікацію диференціальних рівнянь (2.1):

- 1) рівняння (2.1) в області  $D$  називається рівнянням гіперболічного типу, якщо при  $(x, y) \in D$   $\Delta > 0$ ;
- 2) рівняння (2.1) в  $D$  називається рівнянням параболічного типу, якщо при  $(x, y) \in D$   $\Delta = 0$ ;
- 3) рівняння (2.1) при  $(x, y) \in D$  називається рівнянням еліптичного типу, якщо  $\Delta < 0$ .

Із (2.8) випливає, що у випадку рівнянь гіперболічного типу маємо дві

дійсні різні сім'ї характеристик, параболічного типу – одну дійсну сім'ю характеристик, еліптичного – дві комплексно спряжені сім'ї.

Безпосередньою підстановкою легко переконатись в справедливості рівності

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \left[ \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right]^2. \quad (2.9)$$

Якщо  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ , то із (2.9) випливає інваріантність типу рівняння при перетворенні незалежних змінних (2.2).

Відзначимо, що одне і те ж рівняння в різних областях може належати різним типам.

П р и к л а д. Маємо  $u_{xx} + xu_{yy} - 3yu = 0$ :

а) при  $x > 0$ ,  $\Delta = -x < 0$  рівняння належить до еліптичного типу;

б) якщо  $x = 0$ ,  $\Delta = 0$ , рівняння є параболічного типу;

в) при  $x < 0$ ,  $\Delta > 0$  маємо рівняння гіперболічного типу.

### §3. Зведення до канонічного вигляду ДРЧП 2-го порядку від двох незалежних змінних

3.1. Рівняння гіперболічного типу. У випадку рівнянь гіперболічного типу  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  в розглядуваній області і характеристичне рівняння (2.8) має дві дійсні різні сім'ї характеристик  $C_1 = \varphi(x, y), C_2 = \psi(x, y)$ .

Покажемо, що вони є незалежними, тобто  $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0$ . Дійсно, загальні інтеграли  $C_1 = \varphi(x, y), C_2 = \psi(x, y)$  є розв'язками рівнянь (2.8а) або (2.8б), тобто

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}},$$

або

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \quad \frac{\psi_y}{\psi_x} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}}.$$

Згідно з умовою  $\Delta > 0$ , а значить,

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \frac{\psi_x}{\psi_y}, \quad \text{або} \quad \frac{\varphi_y}{\varphi_x} \neq \frac{\psi_y}{\psi_x}.$$

Із останніх нерівностей маємо

$$\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

що і потрібно було показати.

Покладемо

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (3.1)$$

Тоді  $\alpha_{11} \equiv 0$  і  $\alpha_{22} \equiv 0$ , а рівняння (2.4) запишеться у вигляді

$$U_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) є першою канонічною формою рівнянь гіперболічного типу.

Зауважимо, що, якщо  $a_{11}(x, y) = a_{22}(x, y) = 0$ , то рівняння (2.1) уже має вигляд (3.2).

Введемо нові незалежні змінні за формулами

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta. \quad (3.3)$$

Маємо

$$\begin{vmatrix} \alpha_\xi & \alpha_\eta \\ \beta_\xi & \beta_\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

а отже, після введення нових змінних  $(\alpha, \beta)$  тип рівняння не зміниться.

Поклавши

$$U\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = v(\alpha, \beta).$$

Дістанемо:

$$U_\xi = v_\alpha + v_\beta, \quad U_\eta = v_\alpha - v_\beta, \quad U_{\xi\eta} = v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (3.2), одержимо

$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, v, v_\alpha, v_\beta). \quad (3.4)$$

Це – друга канонічна форма рівнянь гіперболічного типу.

**П р и к л а д.** Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП

$$u_{xx} - u u_{yy} + u(x, y) = 0, \quad y > 0. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.5) є лінійним однорідним ДРЧП 2-го порядку з двома незалежними змінними. Для визначення його типу складаємо дискримінант

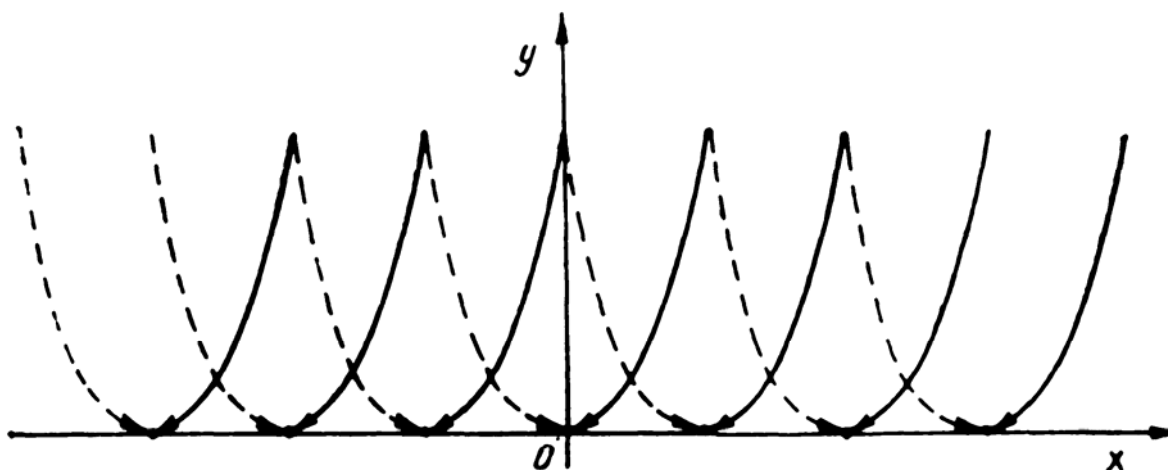


Рис.1

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y > 0.$$

Отже, (3.5) є рівнянням гіперболічного типу. Із відповідного характеристичного рівняння

$$(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$$

знаходимо дві дійсні різні сім'ї характеристик (рис.1):

$$C_1 = x - 2\sqrt{y}, C_2 = x + 2\sqrt{y}.$$

Характеристиками є праві і ліві вітки сім'ї парабол  $y = \frac{1}{4}(x - C)^2$ .

Вершини парабол, які лежать на осі  $Ox$ , не належать характеристикам ( $y > 0$ ).

Вводимо заміну незалежних змінних

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \eta = x + 2\sqrt{y},$$

Тоді

$$u_x = U_\xi + U_\eta, u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}(U_\eta - U_\xi), u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

$$u_{yy} = \frac{1}{y}(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) - \frac{1}{2y^{3/2}}(U_\eta - U_\xi).$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (3.5), одержимо

$$U_{\xi\eta} = \frac{0,5}{\eta - \xi}(U_\xi - U_\eta) - 0,25U.$$

Зведемо рівняння (3.5) до другої канонічної форми в розглядуваній області. Для цього використаємо підстановку (3.3). Матимемо

$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} = -\frac{1}{\beta}v_{\beta} - 0,25v.$$

**3.2. Рівняння параболічного типу.** Для рівнянь параболічного типу  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  і відповідне характеристичне рівняння (2.8) має один загальний інтеграл  $C_1 = \varphi(x, y)$ . Покладемо в цьому випадку

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \eta(x, y),$$

де  $\eta(x, y)$  – довільна два рази неперервно диференційовна функція, незалежна від  $\varphi(x, y)$ .

Оскільки  $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ , то

$$\alpha_{11} = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y\right)^2 = 0.$$

Але тоді

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= a_{11}\varphi_x\eta_x + a_{12}(\varphi_x\eta_y + \varphi_y\eta_x) + a_{22}\varphi_y\eta_y = \\ &= \left(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0, \end{aligned}$$

отже, рівняння (2.4) запишеться у вигляді

$$U_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \frac{F(\xi, \eta, U, U_{\xi}, U_{\eta})}{\alpha_{22}}. \quad (3.6)$$

Рівняння (3.6) є канонічною формою рівнянь параболічного типу.

**П р и к л а д.** Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x = 0. \quad (3.7)$$

Маємо  $\Delta = 1 - 1 = 0$ , отже, рівняння (3.7) – параболічного типу. Із відповідного характеристичного рівняння знаходимо

$$dy + dx = 0 \Rightarrow C_1 = x + y.$$

Вводимо нові незалежні змінні:

$$\xi = x + y, \eta = y. \quad (3.8)$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то функції (3.8) незалежні:

$$u_x = U_{\xi}, u_y = U_{\xi} + U_{\eta}, u_{xx} = U_{\xi\xi},$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, u_{xy} = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні у рівняння (3.7) і звівши відповідні члени, одержимо канонічну форму

$$U_{\eta\eta}(\xi, \eta) + 3U_{\xi} = 0.$$

Відзначимо, що як рівняння (3.7), так і його канонічна форма є лінійними однорідними ДРЧП зі сталими коефіцієнтами. Останнє зауваження справедливе і у загальному випадку: якщо вихідне рівняння є лінійним зі сталими коефіцієнтами, то і його канонічна форма також буде лінійним ДРЧП зі сталими коефіцієнтами.

**3.3. Рівняння еліптичного типу.** У випадку рівнянь еліптичного типу  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  і рівняння (2.7) або (2.7а) мають комплексні коефіцієнти. Покажемо, що вони мають розв'язки. Для цього введемо нову функцію

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + i\omega(x, y). \quad (3.9)$$

Маємо

$$\begin{aligned} a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} + \sqrt{-\Delta}i)(\zeta_y + i\omega_y) &= 0, \\ a_{11}(\zeta_x + i\omega_x) + (a_{12} - \sqrt{-\Delta}i)(\zeta_y + i\omega_y) &= 0 \end{aligned}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y - \sqrt{-\Delta}\omega_y = 0, \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y \pm \sqrt{-\Delta}\zeta_y = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y + \sqrt{-\Delta}\omega_y = 0, \\ a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y - \sqrt{-\Delta}\zeta_y = 0. \end{cases} \quad (3.10a)$$

Системи (3.10), (3.10а) є системами лінійних однорідних ДРЧП 1-го порядку з неперервно диференційовними коефіцієнтами. Такі системи мають розв'язки, причому якщо розв'язком системи (3.10) є функції  $\zeta = \zeta(x, y), \omega = \omega(x, y)$ , то розв'язком системи (3.10а) будуть функції  $\zeta = \zeta(x, y), \omega = -\omega(x, y)$ . В силу (3.9) розв'язками рівнянь (2.7) будуть функції  $z(x, y) = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$ , а загальними інтегралами рівнянь (2.8а) будуть вирази  $C_{1,2} = \zeta(x, y) \pm i\omega(x, y)$ .

Аналогічні міркування справедливі і для рівнянь (2.7а). Якщо покласти  $\xi = \zeta(x, y) + i\omega(x, y), \eta = \zeta(x, y) - i\omega(x, y)$ , тоді

$$a_{11} = 0 = a_{11}(\zeta_x + i\omega_x)^2 + 2a_{12}(\zeta_x + i\omega_x)(\zeta_y + i\omega_y) + a_{22}(\zeta_y + i\omega_y)^2, \text{ а отже,}$$

$$(a_{11}\zeta_x^2 + 2a_{12}\zeta_x\zeta_y + a_{22}\zeta_y^2) - (a_{11}\omega_x^2 + 2a_{12}\omega_x\omega_y + a_{22}\omega_y^2) = 0,$$

$$a_{11}\zeta_x\omega_x + a_{12}(\zeta_x\omega_y + \omega_x\zeta_y) + a_{22}\zeta_y\omega_y = 0. \quad (3.11)$$

Введемо нові незалежні змінні за формулами

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = \zeta(x, y), \beta = \frac{\xi - \eta}{2i} = \omega(x, y). \quad (3.12)$$

Якобіан функцій (3.12) відмінний від нуля (функції незалежні), а результат підстановки їх в рівняння (2.1) в силу (3.11) дає  $\tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{22}$ ,  $\tilde{\alpha}_{12} = 0$ . Тоді з (2.4) одержуємо канонічну форму рівнянь еліптичного типу

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = \frac{F(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)}{\alpha_{11}}. \quad (3.13)$$

**П р и к л а д.** Розглянемо рівняння (3.5) в області  $y < 0$ . В цій півплощині воно належить до еліптичного типу. Характеристичне рівняння  $(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$  дає дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик:  $C_1 = x - 2\sqrt{-y}i$ ,  $C_2 = x + 2\sqrt{-y}i$ .

Покладемо згідно з (3.12)  $\alpha = x$ ,  $\beta = 2\sqrt{-y}$ . Тоді

$$u_x = U_\alpha, \quad u_{xx} = U_{\alpha\alpha}, \quad u_y = -(-y)^{-1/2}U_\beta, \\ u_{yy} = (-y)^{-1}U_{\beta\beta} - 1/2(-y)^{-3/2}U_\beta.$$

Підставивши знайдені похідні в (3.5), матимемо

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} - \frac{1}{\beta}U_\beta + U = 0.$$

**3.4. Канонічні форми лінійних ДРЧП 2-го порядку від двох незалежних змінних із сталими коефіцієнтами.** Розглянемо лінійне ДРЧП із сталими коефіцієнтами

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + b_3u = f(x, y). \quad (3.14)$$

Згідно з доведеним вище, в залежності від типу диференціального рівняння (3.14) воно зводиться до однієї з канонічних форм:

$$U_{\xi\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U = F(\xi, \eta), \quad (\text{гіперболічний тип}) \quad (3.15)$$

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U = F(\xi, \eta) \quad (\text{параболічний тип}), \quad (3.16)$$

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + c_1U_\xi + c_2U_\eta + c_3U = F(\xi, \eta) \quad (\text{еліптичний тип}), \quad (3.17)$$

де  $c_i = \text{const}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Для подальшого спрощення рівнянь (3.15) – (3.17) введемо замість  $U(\xi, \eta)$  нову функцію  $v(\xi, \eta)$

$$U = e^{\lambda\xi + \mu\eta}v(\xi, \eta), \quad (3.18)$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  - довільні сталі. Тоді

$$U_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_\xi + \lambda v),$$

$$U_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_\eta + \mu v),$$



$$\begin{aligned}
U_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_{\xi} + \lambda^2 v), \\
U_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_{\eta} + \mu^2 v), \\
U_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_{\eta} + \mu v_{\xi} + \lambda\mu v).
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні, наприклад, в рівняння (3.17), отримаємо

$$\begin{aligned}
&v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (c_1 + 2\lambda)v_{\xi} + (c_2 + 2\mu)v_{\eta} + (\lambda^2 + \mu^2 + \\
&+ c_1\lambda + c_2\mu + c_3)v = e^{-\lambda\xi-\mu\eta} F(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Виберемо довільні сталі  $\lambda$  і  $\mu$  так, щоб в останньому рівнянні коефіцієнти при  $v_{\xi}$  і  $v_{\eta}$  були рівні нулю. Тоді матимемо

$$c_1 + 2\lambda = 0, \quad c_2 + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c_1}{2}, \quad \mu = -\frac{c_2}{2},$$

а значить,

$$\lambda^2 + \mu^2 + c_1\lambda + c_2\mu + c_3 = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{4} - \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + c_3 = c_3 - \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_2^2}{4}.$$

Таким чином,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (c_3 - \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_2^2}{4})v = e^{\frac{c_1\xi+c_2\eta}{2}} F(\xi, \eta),$$

Проводячи аналогічні міркування і відносно рівнянь (3.15) та (3.16), одержимо

$$\left. \begin{aligned}
v_{\xi\eta} + \alpha v &= F_1(\xi, \eta) \\
v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \alpha v &= F_1(\xi, \eta),
\end{aligned} \right\} \text{ (гіперболічний тип)}$$

$$v_{\eta\eta} + c_1 v_{\xi} = F_1(\xi, \eta) \quad \text{(параболічний тип)}.$$

**П р и к л а д.** Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_y - u_x = 0. \quad (3.19)$$

Визначаємо тип :

$$\Delta = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$

Отже, задане рівняння є параболічного типу. Маємо

$$dy^2 + 4dx dy + 4dx^2 = 0 \Rightarrow dy + 2dx = 0 \Rightarrow c_1 = y + 2x.$$

Покладемо  $\xi = y + 2x$ ,  $\eta = x$ . Покажемо, що функції  $\xi(x, y)$  і  $\eta(x, y)$  є незалежними:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$u_x = 2U_\xi + U_\eta, u_y = U_\xi, u_{yy} = U_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = 2U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}, u_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

Підставляємо знайдені похідні в рівняння (3.19):

$$4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - 8U_{\xi\xi} - 4U_{\xi\eta} + 4U_{\xi\xi} + U_\xi - 2U_\xi + U_\eta = 0,$$

$$U_{\eta\eta} - U_\xi + U_\eta = 0.$$

Вводимо нову невідому функцію  $v(\xi, \eta)$  за формулою (3.18). Одержимо

$$e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v - v_\xi - \lambda v + v_\eta + \mu v) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{\eta\eta} + (2\mu + 1)v_\eta - v_\xi + (\mu^2 - \lambda + \mu)v = 0.$$

Виберемо довільні сталі  $\lambda$  і  $\mu$  так, щоб

$$\begin{cases} 2\mu + 1 = 0 \\ \mu^2 - \lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді

$$v_{\eta\eta} - v_\xi = 0,$$

$$v(\xi, \eta) = e^{0,25\xi + 0,5\eta} U(\xi, \eta).$$

*Зауваження.* Часто формули (2.3) записують, замінюючи  $U(\xi, \eta)$  на  $u(\xi, \eta)$ . Однак при цьому символи  $u_\xi$  та  $u_\eta$  в правій частині (2.3) потрібно розуміти як похідні вздовж ліній відповідно  $\eta = \text{const}$  і  $\xi = \text{const}$ :

$$u_\xi = \frac{d}{d\xi} (u|_{\eta=\text{const}}), u_\eta = \frac{d}{d\eta} (u|_{\xi=\text{const}}),$$

тобто як  $U_\xi$  і  $U_\eta$ , а не як частинні похідні по  $\xi$  або  $\eta$  від функції  $u(x, y)$ , оскільки вирази  $u_\xi$  та  $u_\eta$  не мають змісту, поки не вибрана інша координата  $\xi$  або  $\eta$ .

#### **§4. Класифікація та зведення до канонічного вигляду квазілінійних ДРЧП 2-го порядку з багатьма незалежними змінними.**

Розглянемо квазілінійне ДРЧП 2-го порядку

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f\left(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}\right), \quad (4.1)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Вважаємо, що  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Введемо нові незалежні змінні  $\xi_k$  за формулами

$$\xi_k = \varphi_k(x), \quad k = \overline{1, m}.$$

Вважаємо, що функції  $\varphi_k(x)$  є два рази неперервно диференційовними і незалежними в розглядуваній області. Маємо

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^m U_{\xi_k} \varphi_{k_{x_i}}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m U_{\xi_k \xi_l} \varphi_{k_{x_i}} \varphi_{l_{x_j}} + \sum_{k=1}^m U_{\xi_k} \varphi_{k_{x_i x_j}}.$$

Позначимо  $\alpha_{ik} = \varphi_{k_{x_i}}$ . Тоді, підставивши знайдені похідні в рівняння (4.1), одержимо

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kl} U_{\xi_k \xi_l} = F\left(\xi, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_m}\right), \quad (4.2)$$

де

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}; \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m).$$

Розглянемо квадратичну форму

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (4.3)$$

коефіцієнти якої збігаються з коефіцієнтами рівняння (4.1) в деякій точці  $M(x^0)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ .

Введемо нові змінні  $\eta_1, \dots, \eta_m$  за допомогою неособливого лінійного перетворення

$$y_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}^0 \eta_k. \quad (4.4)$$

Тоді одержимо для квадратичної форми

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

де

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^0 \alpha_{ik}^0 \alpha_{jl}^0.$$

Таким чином, коефіцієнти головної частини рівняння (4.1) змінюються аналогічно коефіцієнтам квадратичної форми за лінійним перетворенням (4.4).

Відповідним вибором коефіцієнтів  $\alpha_{ik}^0$  в (4.4) квадратичну форму (4.3) можна звести до канонічного вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \eta_k^2,$$

де  $\lambda_k$  рівні  $\pm 1$  або нулю, тобто

$$\bar{a}_{kl}^0 = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \lambda_k, & k = l. \end{cases}$$

Отже, якщо нові незалежні змінні  $\xi_k$  вибрати таким чином, щоб в точці  $M(x^0)$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ik}^0 \text{ (наприклад, } \xi_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik}^0 x_i \text{ ) ,}$$

то рівняння (4.1) в точці  $M(x^0)$  зводиться до рівняння вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k U_{\xi_k \xi_k}(\xi) = F(\xi, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_m}). \quad (4.5)$$

Згідно з законом інерції для квадратичних форм число додатних, рівних нулю, і від'ємних коефіцієнтів  $\lambda_k$  інваріантно відносно неособливого лінійного перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду.

В зв'язку з цим рівняння (4.1) в точці  $M(x^0)$  називають рівнянням:

- а) **еліптичного типу**, якщо в (4.5)  $\lambda_k = 1$  для всіх  $k = \overline{1, m}$ ;
- б) **параболічного типу**, якщо хоча б один із коефіцієнтів  $\lambda_k$  в (4.5) рівний нулю;
- в) **гіперболічного типу**, якщо всі коефіцієнти  $\lambda_k$  відмінні від нуля, але серед них є один коефіцієнт із знаком, супротивним знакам інших коефіцієнтів рівняння (4.5);
- г) **ультрагіперболічного типу**, якщо в (4.5) всі коефіцієнти відмінні від нуля, але  $r < m$  коефіцієнтів є додатніми, а  $m - r$  — від'ємними. Зауважимо, що у випадку  $m \geq 3$  рівняння (4.1) можна звести до канонічного вигляду тільки в заданій точці. Дійсно, для зведення рівняння (4.1) до канонічного вигляду у деякій області нам необхідно функції  $\varphi_k(x)$  вибрати таким чином, щоб виконувались умови  $\bar{a}_{kl} = 0$  при  $k \neq l$ . Число цих умов рівне  $\frac{m(m-1)}{2}$ , що більше числа  $m$  функцій  $\varphi_k(x)$ , які ми вибираємо. При  $m = 3$  недіагональні елементи ми могли б перетворити в нуль, але тоді діагональні елементи могли б бути різними, а  $\bar{a}_{kk}$  повинні бути рівними  $\lambda_k$ .

*Зауваження.* Якщо рівняння (4.1) є лінійним із сталими коефіцієнтами, тоді воно зводиться до канонічної форми у всій області визначення рівняння і має вигляд

$$\sum_{k=1}^m \left( \lambda_k U_{\xi_k \xi_k} + b_k U_{\xi_k} \right) + cU = F_1(\xi). \quad (4.6)$$

Нехай всі  $\lambda_k \neq 0$ . Тоді, ввівши нову невідому функцію  $v(\xi)$  за формулою

$$U = v \exp \left( -0,5 \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-1} b_k \xi_k \right),$$

рівняння (4.6) зведеться до вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k v_{\xi_k \xi_k} + c_1 v = F_1(\xi) \exp(0,5 \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-1} b_k \xi_k).$$

**П р и к л а д.** Визначити тип та звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння

$$u_{x_1 x_1}(x_1, x_2, x_3) + 2u_{x_1 x_2} + 2u_{x_2 x_2} - 2u_{x_2 x_3} + 3u_{x_3} = 0. \quad (4.7)$$

Методом Лагранжа\* знаходимо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невиродженого перетворення, яке зводить відповідну квадратичну форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_2 x_3$$

до канонічного вигляду.

Тоді, поклавши  $\Xi = A^T X$ , де

---

\* Л. Я. Окунів. Вища алгебра. К., 1950, стор. 157 - 165

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

одержимо

$$U_{\xi_1 \xi_1} + U_{\xi_2 \xi_2} - U_{\xi_3 \xi_3} + 3U_{\xi_3} = 0.$$

Підстановка

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp\left(\frac{3}{2} \xi_3\right)$$

остаточно дає

$$v_{\xi_1 \xi_1} + v_{\xi_2 \xi_2} - v_{\xi_3 \xi_3} + \frac{9}{4}v = 0.$$

Таким чином, рівняння (4.7) є рівнянням гіперболічного типу.

## §5. Класифікація диференціальних рівнянь вищого порядку.

Використовуючи позначення §1 розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x) D^\alpha U(x) = f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, D^s u(x)), \quad (5.1)$$

де  $|s| < |\alpha|$ .

При умові неперервності коефіцієнтів  $a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(x)$  в розглядуваній області  $D$ , важливу роль в теорії ДРЧП вигляду (5.1) відіграє форма порядку  $n$ :

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x) \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_m^{\alpha_m} \quad (5.2)$$

відносно дійсних параметрів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , яка називається характеристичною формою, що відповідає рівнянню (5.1).

При допомозі форми (5.2) вводять наступну класифікацію ДРЧП (5.1).

Рівняння (5.1) в точці  $x^0 \in D$  називається рівнянням параболічного типу, якщо при допомозі неособливого афінного перетворення параметрів  $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , характеристична форма (5.2) в точці  $x^0$  зводиться до форми, яка містить тільки  $l$ ,  $0 < l < m$  параметрів  $\mu_i$ . В цьому випадку говорять іще, що рівняння (5.2) в точці  $x^0 \in D$  параболічно вироджується.

Якщо параболічне виродження відсутнє, то рівняння (5.1) в точці  $x^0 \in D$  називається еліптичним, якщо характеристичне рівняння:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0 \quad (5.3)$$

не має дійсних коренів, крім  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Якщо ж після деякого неособливого афінного перетворення параметрів  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  характеристичної форми (5.2) в точці  $x^0 \in D$  для одного із них при довільних дійсних значеннях всіх інших одержується рівно  $n$  дійсних коренів (не обов'язково простих) перетвореного

характеристичного рівняння (5.3), то рівняння (5.1) в точці  $x^0$  називається гіперболічним.

Рівняння (5.1) в області  $D$  називається параболічним, еліптичним або гіперболічним, якщо воно належить відповідно одному і тому ж типу у всіх її точках.

**П р и к л а д и.** Розглянемо рівняння малих прогинів поперечно навантаженої пластинки \*

$$Lu(x, y) \equiv \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (5.4)$$

де  $q$  – інтенсивність рівномірно розподіленого по поверхні пластинки навантаження,  $D$  – жорсткість пластинки при згині. Відповідна характеристична форма матиме вигляд

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2,$$

а, отже, рівняння (5.4) є еліптичним в розглядуваній області.

В загальному випадку рівняння

$$\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_k^2} = f(x, u(x), \dots, D^s u(x_s)), \quad |s| \leq 3,$$

має характеристичну форму

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \right)^2,$$

і є еліптичним в області його задання.

Прикладом параболічного рівняння може бути так зване рівняння поперечних коливань пластинки

\*С.П.Тимошенко. История науки о сопротивлении материалов.М., 1959, стр.147

$$Lu(t, x, y) = \frac{2h\rho}{D} \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial t^2}, \quad (5.5)$$

де  $h, \rho$  – сталі. Дійсно, відповідне характеристичне рівняння запишеться у вигляді  $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) = 0$  і, отже, рівняння (5.5) є параболічним.

Диференціальне рівняння

$$Lu(t, x, y) - 3 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^2 \partial x^2} - 3 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^4} = f(t, x, y)$$

в області його задання є гіперболічним, оскільки його характеристична форма

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\equiv \lambda_2^4 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^4 - 3\lambda_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2\lambda_1^4 = \\ &= (\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1^2),\end{aligned}$$

очевидно, задовольняє всім відповідним умовам.

Відмітимо однак, що рівняння

$$Lu(t, x, y) - \frac{\partial^4 u(t, x, y)}{\partial t^4} = f(t, x, y) \quad (5.6)$$

не належить жодному із вище приведених типів. Дійсно, відповідна характеристична форма має вигляд

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - \lambda_1^4$$

і вона має тільки два дійсних корені відносно  $\lambda_1$  при фіксованих  $\lambda_2, \lambda_3$ . В такому випадку будемо говорити, що ДРЧП належить до проміжкового типу.

**П р и к л а д и:** а) з'ясувати, чи є наведені нижче рівності ДРЧП і дати повне їх визначення:

1.  $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0$ .
2.  $x^2 u_{xy^2} - (u_x)^5 - 5u = 0$ .
3.  $\frac{\partial}{\partial x}(xu_{y^2x} - u_y) + 5uu_{x^2} = 0$ .
4.  $\log|u_x u_y| - \log|u_x| - \log|u_y| + 5u - 6 = 0$ .
5.  $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} u - u_x \sec^2 u - 3u + 2 = 0$ .
6.  $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0$ .
7.  $(u_x)^{-1} u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \ln|u_x| + 2u - 5 = 0$ .
8.  $xu_{y^2x} - 5(u_x)^2 + xyu = \ln|x|$ .
9.  $yu_y e^{yu} - \frac{\partial}{\partial y} e^{yu} + 3 = 0$ .
10.  $(\operatorname{sh} x)u_{xy} - xu_{yy} + u_x + \ln(y^2 + 1) = 0$

б) дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:

1.  $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u^2 = 0$ .
2.  $u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} + (\sin^2 x)u_{yy} - (\operatorname{ctg} x)u_x = 0$ .
3.  $e^y u_{xx} + e^x u_{yy} - 0,5e^y u_x - 0,5e^x u_y = 5xy$ .
4.  $u_{xx} - 2e^{0,5x} u_{xy} - u_y + u_x \cos u = 0$ .
5.  $u_{xx} + 2(\sin y)u_{xy} + (1 + \sin^2 y)u_{yy} - x \ln|y| = 0$ .
6.  $y^2 u_{xx} - 4xyu_{xy} + 4x^2 u_{yy} + 3u_x = 0$ .
7.  $(\operatorname{ctg}^2 x)u_{xx} - 2(\operatorname{ctg} x)u_{xy} + u_{yy} + (\operatorname{cosec}^2 x)u_y = e^u$ .
8.  $u_{xx} - 2(\cos x)u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$ .
9.  $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ .



10.  $(\operatorname{sh} x)u_{xy} - xu_{yy} + u_x + \ln(y^2 + 1) = 0.$
11.  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0.$
12.  $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 3u_y = 0.$
13.  $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 4u.$
14.  $u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x - u = 0.$
15.  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x = 0.$
16.  $u_{xy} + u_{yy} + 3u_y - 4u_x = 0.$
17.  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + 5u_y = 0.$
18.  $u_{xy} + 2u_{xx} - u_x + u_y + 2u = 0.$
19.  $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{xz} + u_x - u_z = 0, u = u(x, y, z).$
20.  $u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_x = 0.$
21.  $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{yz} - u_z + u_y = 0.$
22.  $u_{xx} + 9u_{yy} - 3u_{yz} = 5u_x.$
23.  $2u_{yy} - u_{yz} + u_{xy} - 5u_z = u.$
24.  $2u_{xy} + u_{yz} - 3u_y + u = 0.$
25.  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yz} + 5u_x = 0.$

## РОЗДІЛ II

### РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

#### ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

До рівнянь гіперболічного типу найбільш часто приводять фізичні задачі, пов'язані з процесами коливання, наприклад задача про коливання струни, мембрани, газу, електромагнітних коливань тощо. Характерною особливістю цих процесів є скінчена швидкість їх поширення.

**Рівняння гіперболічного типу. Фізичні задачі, які приводять до рівнянь гіперболічного типу. Постановка крайових задач. Коректність задачі. Стійкість. Метод розповсюджених хвиль.**

$$U_{xx} + U_{yy} = 0.$$

#### **Задачі:**

1. Коливання поперечної струни.
2. Повздовнє коливання стержня.
3. Енергія коливання струни.
4. Електричне коливання в проводах.
5. Поперечне коливання мембрани.
6. Рн. акустики та гідродинаміки.

Означення. Під **струною** ми розуміємо таку пружну нитку, яка неперервно познає зміни своєї форми, що не пов'язано із зміною її довжини.

Коливання будемо вважати поперечними, коли всі точки струни рухаються в одній площі і швидкість їх перпендикулярна до осі  $OX$ .

В кожний момент часу  $\varphi$ ,  $U(x, t)$  задає форму струни

$$U_{tt} = a^2 U_{xt} + f(x, t),$$

де  $f(x, t)$  – зовнішня сила.

Означення. **Мембраною** називається плоска плівка, яка не противиться згибу та здвигу. Діє сила Гука

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + f(x, y, t),$$

де  $f(x, y, t)$  – густина сили на одиницю маси мембрани.

Граничні та початкові умови.

Диференціальні рівняння мають нескінчену кількість розв'язків. Приклад коливання струни з закріпленими краями  $0 \leq x \leq l$  точками  $U(0,t) = 0, U(l,t) = 0$ .

Так як коливання залежить від початкової форми та розподілу швидкостей, то

$$\left. \begin{aligned} U(x, t_0) &= \varphi(x) \\ U_t(x, t_0) &= f(x) \end{aligned} \right\}.$$

Сформулюємо першу крайову задачу для рівняння: знайти функцію  $U(x,t)$ , задану в областях  $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ , яка задовільняє рівнянню

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t)$$

для  $0 < x < l, t > 0$ .

З крайових умов

$$U(0,t) = \mu_1(t)$$

$$U(l,t) = \mu_2(t)$$

та початковими умовами

$$U(x,0) = \varphi(x)$$

$$U_t(x,0) = \psi(x)$$

Друга крайова задача:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t)$$

$$U(l,t) = \mu_2(t)$$

$$U_x(0,t) = \nu(t) \text{ — задана сила.}$$

Третя крайова задача:

$$U_x(0,t) = h[U(0,t) - \theta(t)] \text{ — пружне закріплення.}$$

Задача Коші:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$U(x,0) = \varphi(x)$$

$$U_t(x,0) = \psi(x)$$

Розглянемо задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t)$$

$$U(x, 0) = f(x)$$

$$U_t(x, 0) = F(x)$$

$$U(0, t) = \mu_1(t)$$

$$U(l, t) = \mu_2(t)$$

Якщо  $F(x) = 0$ , тоді задача називається задачею Діріхле. Коли  $f(x) = 0$ , а  $F(x)$  – довільне, то задача називається задачею Неймана.

Означення. Якщо при невеликих змінах початкових та крайових умов розв'язок змінюється, то задача називається нестійкою, якщо розв'язок не змінюється, то задача називається стійкою.

Методи розв'язання:

1. Метод поширення хвиль.
  2. Відокремлення змінних.
  3. Метод Функції Гріна.
  4. Метод теоретичного потенціалу.
  5. Метод інтегральних рівнянь.
- Запишемо  $\Delta$  в циліндричній системі координат:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

– рівняння Лапласа в циліндричній системі координат.

Якщо розв'язок рівняння Лапласа має сферичну або циліндричну симетрію, тоді  $U(\rho, \varphi, z) = U(\rho)$ . В цьому випадку маємо  $U(r, \theta, \varphi) = U(r)$ .

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0 \text{ – в сферичній системі координат.}$$

Інтегруємо це рівняння. Отримаємо

$$U = \frac{c_1}{r} + c_2, \text{ де } c_1, c_2 \text{ – довільні сталі.}$$

Нехай  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ . Тоді  $U_0 = \frac{1}{r}$  називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа в просторі. В циліндричній системі координат маємо:  $U = U(\rho)$ ,

$$\frac{d}{d\rho} \rho \frac{dU}{d\rho} = 0.$$

Знайдемо рішення, яке має циліндричну кругову симетрію.

$$U(\rho) = c_1 \ln \rho + c_2.$$

Якщо  $c_1 = -1, c_2 = 0$ , то  $U_0 = \ln \frac{1}{\rho}$ . Функцію  $U_0(\rho)$  називають фундаментальним рзв'язком на площині  $\rho$ .

Функція  $U_0 = \frac{1}{r}$  задовільняє рівняння Лапласа  $\Delta U = 0$  всюди, крім точки  $r = 0$ . Вона з точністю до сталої співпадає з полем точкового заряду  $U = \frac{l}{r}$ .

Так само функція  $U = \ln \frac{1}{\rho}$  задовільняє рівняння Лапласа всюди, крім  $\rho = 0$ , з точністю до сталої співпадає з полем зарядженої лінії

$$U = 2l_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

де  $l_1$  – густина заряду.

### Перша зовнішня задача на площині.

Необхідно знайти функцію  $U$ , яка задовільняє умовам:

1.  $\Delta U = 0$  в нескінченій області  $\Sigma$ , яка обмежена контуром  $C$ .
2. Функція  $U$  всюди неперервна включаючи контур  $C$ .
3.  $U|_C = \varphi(x, y)$ , де  $\varphi(x, y)$  – задана на  $C$ .
4.  $U(M)$  обмежена в нескінченості, тобто існує таке число  $N$ , що  $|U(M)| \leq N$ .

Зовн. пр. задача для двох змінних має єдиний розв'язок.

## §1. Рівняння коливання струни

**Означення.** Струною називають тверде тіло, довжина якого значно перевищує інші його розміри.

Описання процесу коливання струни може бути проведено за допомогою задання положення точок струни в різні моменти часу (рис. 2). Для визначення положення струни в момент часу  $t$  достатньо задати компоненти вектора зміщення

$$U(t, x) = \{u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)\}$$

Розглянемо більш просту задачу. Нехай:

- 1) коливання здійснюються в одній площині  $xOy$  і вектор зміщення  $U(t, x)$  є перпендикулярним до  $Ox$  в довільний момент часу  $t$ .

- Тоді процес коливання можна описати однією функцією  $u(t, x)$ , яка характеризує вертикальне зміщення струни;
- 2) струна абсолютно гнучка (сила натягу  $\bar{T}$  значно перевищує силу опору струни  $\bar{R}$  і тому вважаємо, що  $|\bar{R}| \approx 0$ ) і пружна (підкорюється закону Гука: сила натягу прямо пропорційна видовженню);
- 3) сили опору навколишнього середовища рівні нулю і коливання струни малі, тобто  $\alpha^2(x, t) \approx 0$ , де  $\alpha(x, t)$  – гострий кут між дотичною до профілю струни в точці  $x$  в момент часу  $t$  і віссю  $Ox$ .

Тоді з розкладу

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

випливає, що  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Із рівності

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

маємо  $\cos \alpha = 1$ . Беручи до уваги, що  $\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = (1 - \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha = 0$ , одержуємо

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Таким чином,

$$\cup M_1 M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx = x_2 - x_1,$$

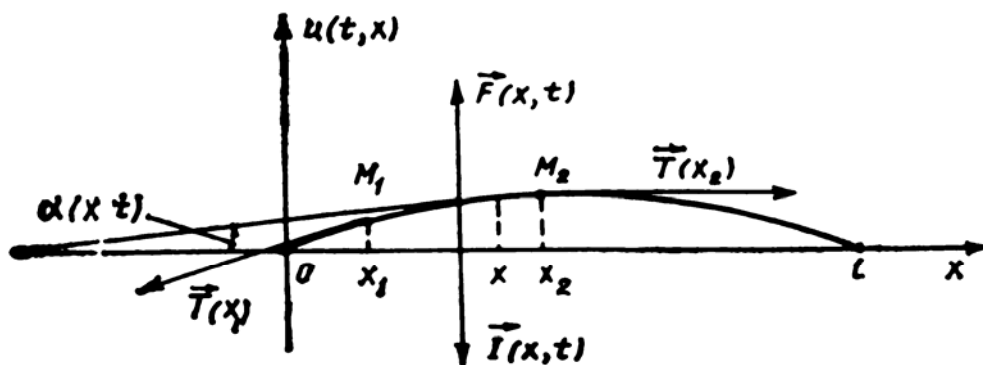


Рис. 2

а значить, довжина струни в процесі коливання не змінюється. В силу припущень 2) і 3) сила натягу  $\vec{T}$  не залежить від часу  $t$ . Покажемо, що вона не залежить і від  $x$ .

Нехай  $\vec{F}(x, t)$  – зовнішня сила, паралельна осі  $Ou$ , рівномірно розподілена вздовж струни і розрахована на одиницю довжини,  $\vec{I}(x, t)$  – сила інерції.

Розглянемо проміжок струни  $(x_1, x_2)$ . Внаслідок принципу Д'Аламбера сума проекцій всіх сил, що діють на проміжок струни  $(x_1, x_2)$ , відповідну вісь координат рівна нулю. Маємо

$$\text{Пр}_{ox} \vec{F} = \text{Пр}_{ox} \vec{I} = 0, \quad \text{Пр}_{ox} \vec{T}(x_1) = -T(x_1) \cos \alpha(x_1, t) \approx -T(x_1),$$

$$\text{Пр}_{ox} \vec{T}(x_2) = T(x_2) \cos \alpha(x_2, t) \approx T(x_2).$$

Отже,

$$T(x_2) - T(x_1) = 0 \Rightarrow T(x_2) = T(x_1).$$

В силу довільності точок  $x_1$  і  $x_2$  із останньої рівності випливає, що  $T(x) = T = \text{const}$ .

Для виводу рівняння, яке описує процес коливання струни, знайдемо суму проекцій всіх сил, які діють на проміжку  $(x_1, x_2)$ , на вісь  $Ou$ . Маємо

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - T \sin \alpha(x_1) + T \sin \alpha(x_2) = 0,$$

де  $\rho(x)$  – лінійна густина струни. Оскільки

$$T[\sin \alpha(x_2) - \sin \alpha(x_1)] = T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right] = T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

то

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

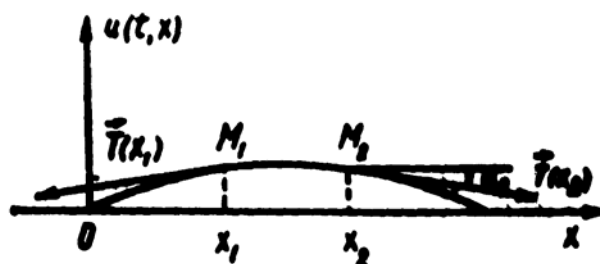


Рис. 3.

В силу довільності меж інтегрування  $x_1$  і  $x_2$  з останньої рівності одержуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (1.1)$$

де  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ;  $f(t, x) = \frac{F(t, x)}{\rho}$  – інтенсивність зовнішньої сили (щільність сили, віднесена до одиниці маси).

Якщо струна однорідна, то  $\rho$  є сталою, а отже,  $a^2 = \text{const}$ .

Рівняння (1.1) називається рівнянням коливання струни.

Якщо зовнішня сила відсутня ( $\check{F}(t, x) \equiv 0$ ), то приходимо до рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (1.1a)$$

*Зауваження 1.* Якщо проміжок струни  $M_1 M_2$  розміщений, як вказано на рис. 3, то сума проекцій  $\check{T}_1$  і  $\check{T}_2$  на вісь  $Ou$  буде рівна

$$-T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2). \text{ Але зараз } -\sin \alpha_2 = \text{tg}(180^\circ - \alpha_2) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2},$$

а, отже, маємо

$$-T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) = T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right).$$

*Зауваження 2.* Якщо струна коливається в середовищі з опором, пропорціональним швидкості, то її рівняння запишеться у вигляді  $u_{tt} = a^2 u_{xx} - h u_t + f(x, t)$ ,  $h = \text{const}$ .



## § 2. Хвильові процеси у двох- та тривимірному середовищі

### 2.1. Рівняння коливання мембрани.

**Означення.** Мембраною називається пружна натягнута плівка, яка вільно прогинається. Нехай в стані спокою мембрана займає деяку область  $D$  в площині  $xOy$ , а після виводиться якимось чином із стану спокою і починає коливатись так, що всі її точки рухаються перпендикулярно площині  $xOy$  (поперечні коливання мембрани).

Позначаючи через  $u(t, x, y)$  положення точки мембрани  $(x, y)$  в момент часу  $t$ , через  $F(x, y, t)$  – рівномірно розподілену зовнішню силу, розраховану на одиницю площини, і розглядаючи надалі тільки малі коливання мембрани (квадратами  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  і їх добутками нехтуємо), можна показати, що диференціальне рівняння таких поперечних коливань мембрани набуде вигляду

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{F(x, y, t)}{\rho}. \quad (2.1)$$

Якщо мембрана однорідна ( $\rho = \text{const}$ ), то  $a = \text{const}$ .

У випадку вільних коливань ( $F(x, y, t) \equiv 0$ ) рівняння мембрани є однорідним:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.2)$$

Вираз  $\square u = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2}u_{tt}$  називається оператором Лоренца.

Використовуючи оператор Лоренца, рівняння (2.2) запишемо у вигляді

$$\square u + \frac{F(x, y, t)}{a^2 \rho} = 0.$$

### 2.2. Рівняння гідродинаміки і поширення звукових хвиль.

В гідродинаміці рідину або газ розглядають як суцільне середовище. Це означає, що довільний малий елемент об'єму рідини або газу вважається настільки великим, що містить дуже велике число молекул. Якщо, наприклад, говорять про переміщення деякої частинки рідини, то при цьому йдеться не про переміщення окремої молекули, а про переміщення цілого елемента об'єму, який містить багато молекул, але розглядається в гідродинаміці як точка.

Припустимо, що однорідна маса газу (або рідини) міститься в середині твердої посудини, яка рухається заданим чином в просторі. Нехай в початковий момент часу частинкам рідини надано деякий рух такий, що при майбутньому русі рідкої маси проекції  $v_x, v_y, v_z$  швидкості кожної її

точки на прямокутні осі координат  $x, y, z$  виявляються частинними похідними по відповідних координатах деякої функції  $u(t, x, y, z)$ , тобто рідина одержує рух з потенціалом швидкостей  $u(t, x, y, z)$ .

В гідродинаміці виводиться так зване рівняння газу (або рідини), акустики:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad (2.3)$$

де  $a^2$  є деяка стала, яка залежить від фізичних властивостей даного газу (рідини).

Відзначимо, що за відомого потенціалу швидкостей процес руху рідини або газу повністю визначений. Дійсно, процес руху газу вважається визначеним, якщо відомі вектор швидкості  $\vec{v}$  в кожній точці  $(x, y, z)$  в момент часу  $t$ , густина  $\rho(x, y, z, t)$  і тиск  $p(x, y, z, t)$ . Але

$$\vec{v} = -\text{grad } u, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{a^2} u_t, \quad p = p_0 + \rho_0 u_t,$$

де  $\rho_0$  і  $p_0$  – відповідно початкові густина і тиск.

### 2.3. Задачі теорії світла, електрики і магнетизму.

Позначимо:  $c$  – швидкість світла;  $\varepsilon$  – діелектрична стала;  $\lambda$  – коефіцієнт електропровідності;  $\mu$  – коефіцієнт електричної проникливості.

Закон поширення електричних хвиль в заданому середовищі за теорією Герца-Максвелла характеризується вектором  $u(t, x, y, z)$  електричних сил, який повинен задовольняти наступному ДРЧП:

$$c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = \varepsilon \mu u_{tt} + 4\pi \lambda \mu u_t. \quad (2.4)$$

Якщо покласти  $\frac{c^2}{\varepsilon \mu} = a^2$ ,  $\frac{4\pi \lambda}{\varepsilon} = -b$ , то одержимо

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + b u_t. \quad (2.4a)$$

Оскільки середовище, в якому проходить процес, є вільний ефір, то  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 0$ , і ми приходимо до рівняння (2.3).

Відзначимо, що величина  $4\pi \lambda \mu u_t$  характеризує втрату електричних сил з плином часу, або так звану абсорбцію.

Усі наведені рівняння (1.1), (2.1)-(2.4) називаються хвильовими. Ввівши в розгляд оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

хвильові рівняння можна записати у вигляді

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.5)$$

Введемо нові незалежні змінні

$$\tau = at, \quad x_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

Підстановка (2.6) є неособливою, тому що

$$\begin{vmatrix} a, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 0, 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Маємо  $u_{tt} = a^2 u_{\tau\tau}$ , тому рівняння (2.5) запишеться у вигляді

$$u_{\tau\tau}(\tau, x) = \Delta u(\tau, x) + \frac{1}{a^2} \tilde{f}(\tau, x),$$

тобто хвильові рівняння є гіперболічного типу.

Із наведених прикладів випливає, що рівняння гіперболічного типу описують хвильові процеси. Але не всякий хвильовий процес описується рівнянням гіперболічного типу (прикладом може служити процес поперечних коливань стержня).

В зв'язку з тим, що ДРЧП мають, взагалі кажучи, нескінченну кількість розв'язків, то для однозначної характеристики того чи іншого хвильового процесу потрібно до рівняння приєднати деякі додаткові умови, які накладаються на невідому функцію та її похідні, тобто скласти математичну модель, яка б однозначно описувала відповідне явище природи.

## РОЗДІЛ ІІІ

### ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Нехай розміри розглядуваної області значно перевищують масштаби досліджуваного явища. Тоді говорять, що відповідне явище відбувається в необмеженій області. Прикладом такої ситуації може бути процес коливання деякого проміжку досить довгої струни, який знаходиться на достатньо великій відстані від її кінців, за невеликий відрізок часу.

Очевидно, що тоді умови на кінцях струни не впливатимуть на цей процес.

В цьому випадку хід хвильового процесу залежатиме від його початкового стану та початкових швидкостей. Таким чином, приходимо до математичної задачі: в області  $B = \{(t, x) | t > 0, x \in E_n\}$  знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad (0.1)$$

який задовольняє умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in E_n, \quad (0.2)$$

де  $f(t, x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  - задані функції.

Умови (0.2) називаються початковими умовами, а задача (0.1), (0.2) – задачею Коші.

Покажемо, що задача Коші (0.1), (0.2) є математичною моделлю хвильового процесу в необмеженій області. З цією метою доведемо:

1) існування та єдиність розв'язку задачу Коші;

2) його неперервну залежність від вихідних даних (початкових умов  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ , та правої частина  $f(t, x)$  рівняння (0.1)), тобто, якщо  $u_1(t, x)$ ,  $u_2(t, x)$  є розв'язками відповідно задач

$$\begin{cases} u_{1_{tt}}(t, x) = a^2 \Delta u_1(t, x) + f_1(t, x), & (t, x) \in B, \\ u_1(0, x) = \varphi_1(x), \quad u_{1_t}(0, x) = \psi_1(x), & x \in E_n, \\ u_{2_{tt}}(t, x) = a^2 \Delta u_2(t, x) + f_2(t, x), & (t, x) \in B, \\ u_2(0, x) = \varphi_2(x), \quad u_{2_t}(0, x) = \psi_2(x), & x \in E_n, \end{cases}$$

то  $\forall \varepsilon > 0$  і  $t_1 > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$  і цілочисловий вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , що з умов

$$\begin{aligned} & \left| D^k [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] \right| < \delta, \quad \left| D^k [\psi_1(x) - \psi_2(x)] \right| < \delta, x \in E_n, \\ & k = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad k_i = \overline{0, \alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}, \\ & \left| f_1(t, x) - f_2(t, x) \right| < \delta, \quad (t, x) \in B_1 = \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_1, x \in E_n\} \end{aligned}$$

впливає справедливості в області  $B_1$  нерівності

$$\left| u_1(t, x) - u_2(t, x) \right| < \varepsilon, \quad (t, x) \in B_1.$$

**Означення.** Якщо задача Коші (0.1), (0.2) в області  $B$  має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від вихідних даних, то вона називається коректно поставленою.

## §1. Вільні коливання нескінченної струни. Метод характеристик (Метод поширення хвиль)

Розглянемо задачу: в області  $B = \{(t, x) | t \in (0, +\infty), x \in (-\infty, +\infty)\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (1.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad (1.2)$$

де  $\varphi(x)$  – задана функція класу  $C^2(-\infty, +\infty)$ ,  $a\psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ .

Для розв'язання задачі (1.1), (1.2) зведемо рівняння (1.1) до канонічного вигляду. Маємо

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Leftrightarrow (dx - a dt)(dx + a dt) = 0,$$

тобто

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0.$$

Інтегруючи останні рівняння, одержуємо

$$C_1 = x - at, \quad C_2 = x + at.$$

Вводимо нові незалежні змінні:

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at, \quad (1.3)$$

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$u_t = aU_\xi - aU_\eta, \quad u_{tt} = a^2 U_{\xi\eta} - 2a^2 U_{\xi\eta} + a^2 U_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1.1) і звівши подібні члени, матимемо

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (1.4)$$

Якщо припустити, що шуканий розв'язок існує, то, підставивши його в рівняння (1.1), одержимо тотожність. Але тоді і канонічна форма (1.4) також буде тотожністю. Інтегруючи (1.4) по  $\xi$ , одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$

де  $f(\eta)$  – довільна функція. Інтегруючи останню тотожність по  $\eta$ , одержуємо

$$U(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Повертаючись до старих незалежних змінних, згідно (1.3), матимемо

$$U(t, x) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \quad (1.5)$$

де  $f_1(\xi)$  і  $f_2(\eta)$  – довільні функції.

Таким чином, якщо припустити існування розв'язку рівняння (1.1), то він повинен мати вигляд (1.5).

З іншого боку, якщо функції  $f_1(x + at)$ ,  $f_2(x - at)$  є неперервними разом з похідними до 2-го порядку включно в розглядуваній області, то тоді вони є розв'язками рівняння (1.1) а отже, формула (1.5) дає загальний розв'язок цього рівняння.

Загальний розв'язок рівняння вільних коливань струни вперше одержав Ж.Д'Аламбер в 1747 р.

Визначимо функції  $f_1(x + at)$  і  $f_2(x - at)$  таким чином, щоб розв'язок (1.5) задовольняв початкові умови (1.2). Маємо

$$\begin{cases} u(0, x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(0, x) = a[f_1'(x) - f_2'(x)] = \psi(x), \end{cases}$$

або, проінтегрувавши друге рівняння, одержимо

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \end{cases}$$

де  $x_0$  – фіксована точка, тобто

$$f_1(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} C,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{1}{2} C.$$

Підставивши знайдені функції в (1.5), приходимо до формули Д'Аламбера

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \quad (1.6)$$

яку в 1748 р. одержав Л.Ейлер.

Покажемо, що якщо  $\varphi(x) \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ , то формула Д'Аламбера (1.6) є розв'язком задачі Коші (1.1), (2.2) і цим самим доведемо його існування.

Маємо

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{a}{2} [\varphi_\xi(x+at) - \varphi_\eta(x-at)] + \frac{1}{2} [\psi(x+at) + \psi(x-at)], \\ u_{tt} &= \frac{a^2}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x+at) + \varphi_{\eta\eta}(x-at)] + \frac{a}{2} [\psi_\xi(x+at) - \psi_\eta(x-at)], \\ u_x &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi(x+at) - \psi(x-at)], \\ u_{xx} &= \frac{1}{2} [\varphi_{\xi\xi}(x+at) + \varphi_{\eta\eta}(x-at)] + \frac{1}{2a} [\psi_\xi(x+at) - \psi_\eta(x-at)]. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (1.1), одержимо

$$u_{tt} \equiv a^2 u_{xx},$$

а підстановка функції (1.6) в початкові умови (1.2) дає

$$u(0, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x) + \varphi(x)] + \frac{1}{2a} \int_x^x \psi(z) dz \equiv \varphi(x),$$

$$u_t(0, x) = \frac{a}{2} [\varphi'(x) - \varphi'(x)] + \frac{1}{2} [\psi(x) + \psi(x)] \equiv \psi(x),$$

тобто (1.6) є розв'язком задачі Коші (1.1), (1.2). Із побудови розв'язку (1.6) випливає, що він єдиний.

**Теорема про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних.** Нехай  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$  є розв'язком задачі Коші:

$$u_{1tt} = a^2 u_{1xx}, \quad u_{2tt} = a^2 u_{2xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_1(0, x) = \varphi_1(x), \quad u_2(0, x) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_{1t}(0, x) = \psi_1(x), \quad u_{2t}(0, x) = \psi_2(x),$$

а  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0$  і

$t_1 > 0$ ,  $\exists \delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon, t_1)$ , що, як тільки

$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta, |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$  при  $x \in (-\infty; +\infty)$ , то справедлива

нерівність  $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon$  для  $-\infty < x < +\infty, t \leq t_1$ .

**Д о в е д е н н я.** Використовуючи формулу Д'Аламбера (1.6) для розв'язків  $u_1(t, x)$  і  $u_2(t, x)$ , одержуємо

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)] + \frac{1}{2} [\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)] + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [\psi_1(z) - \psi_2(z)] dz$$

Тоді

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \frac{1}{2} |\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| + \\ + \frac{1}{2} |\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(z) - \psi_2(z)| dz < \\ < \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta dz \leq \delta(1 + t_1).$$

Якщо взяти  $\delta = \varepsilon / (1 + t_1)$ , то нерівність

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon$$

буде виконуватись для всіх  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t \leq t_1$ , і теорема доведена.

На практиці початкові значення одержують із досліду внаслідок вимірів, і, природно, що вони не є точними. Доведена теорема стверджує, що невеликі похибки в початкових умовах задачі Коші приводять до незначних змін в її розв'язку.

Доведена теорема вказує також на один із шляхів побудови розв'язку задачі Коші, коли початкові функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  не задовольняють умови  $\varphi \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ .

Дійсно, нехай потрібно знайти розв'язок задачі Коші (1.1), (1.2), де функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  відмінні від нуля тільки на скінчених відрізках, неперервні при  $x \in (-\infty; +\infty)$ , а функція  $\varphi(x)$  має похідну 1-го порядку. Ці функції можна рівномірно апроксимувати диференційовними функціями  $\varphi_n(x)$  і  $\psi_n(x)$  так, що

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \varphi(x), \quad \psi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \psi(x).$$

причому  $\varphi_n(x) \in C^2(-\infty; +\infty)$ ,  $\psi_n(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ .

Якщо за початкові умови в задачі Коші взяти функції  $\varphi_n(x)$  і  $\psi_n(x)$ , то вони визначають єдиний розв'язок  $u_n(t, x)$ , який дається формулою Д'Аламбера.

Оцінимо різницю розв'язків  $u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)$ . В силу рівномірної збіжності послідовностей  $\{\varphi_n(x)\}$  і  $\{\psi_n(x)\}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  і



$t_1 > 0, \exists N, \forall n > N$  і додатних  $k$  виконуються нерівності

$$\left| \varphi_n(x) - \varphi_{n+k}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{1+t_1}, \quad \left| \psi_{n+k}(x) - \psi_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{1+t_1}$$

для всіх  $-\infty < x < +\infty$ . Згідно з доведеною теоремою для всіх  $t \leq t_1$  і  $x \in (-\infty; +\infty)$  будуть також виконуватись нерівності

$$\left| u_{n+k}(t, x) - u_n(t, x) \right| < \varepsilon$$

для довільних  $n > N$  і цілих додатних  $k$ . Але це означає, що послідовність розв'язків  $\{u_n(t, x)\}$  рівномірно збігається до деякої функції  $u(t, x)$  при  $t_1 \geq t$  і  $x \in (-\infty; +\infty)$ . Ця функція називається *узагальненим розв'язком* задачі Коші (1.1), (1.2).

При цьому

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n(x - at) + \varphi_n(x + at)] + \\ + \frac{1}{2a} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-at}^{x+at} \psi_n(z) dz = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

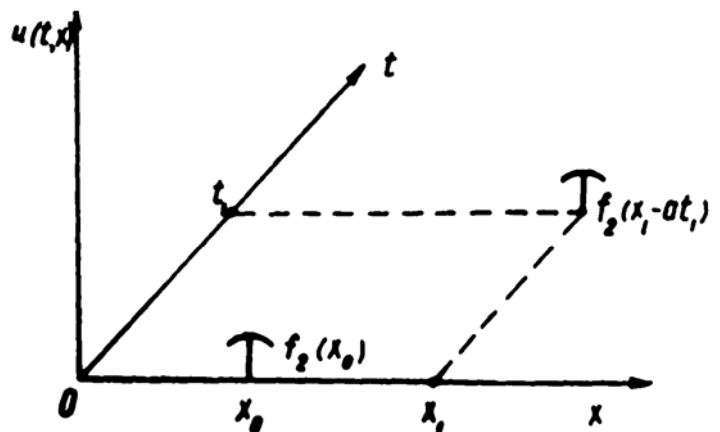
Очевидно, в цьому випадку  $u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x)$ , а, отже, і узагальнений розв'язок задачі Коші дається формулою Д'Аламбера.

Зауважимо, що розглянуту задачу можна б розв'язати і іншим шляхом, якщо скористатися узагальненими функціями і їх згортками (див., наприклад, [3], с. 315-334).

Але ми на цьому зупинятись не будемо. Надалі для нас важливо буде не те, який із розв'язків дається формулою Д'Аламбера. Важливим є той факт, що малі відхилення в початкових умовах викликають малі відхилення одержаного розв'язку від істинного.

**Фізична інтерпретація розв'язку задачі Коші.** Дамо спочатку фізичну інтерпретацію загального розв'язку рівняння вільних коливань струни (рис.4). Для цього розглянемо розв'язок рівняння (1.1) вигляду  $u = f_2(x - at)$ . Нехай  $x_0$  — деяка точка. Припустимо, що з цієї точки в додатному напрямку осі  $Ox$  в момент часу  $t = 0$  починає рухатись спостерігач зі швидкістю  $a$ . В момент часу  $t = t_1$  він буде знаходитись в точці  $x_1 = x_0 + at_1$ . Величина відхилення, яку спостерігач буде бачити в точці  $x_1$  в момент часу  $t = t_1$ , буде рівна  $u = f_2(x_1 - at_1) = f_2(x_0)$ .

Таким чином, спостерігач в довільний момент часу буде



бачити в точці, де він знаходитиметься, одну і ту ж величину відхилення, рівну  $f_2(x_0)$ .

Отже, початковий профіль  $u(x,0)=f_2(x)$ , буде рухатись зі швидкістю  $a$  в додатному напрямку осі  $Ox$  як жорстка система, не змінюючи форми.

Внаслідок цього розв'язок  $u=f_2(x-at)$  називають прямою біжучою хвилею.

Аналогічно можна інтерпретувати розв'язок  $u=f_1(x+at)$ . Він називається зворотною біжучою хвилею. При цьому профіль струни рухається як жорстка система у від'ємному напрямку осі  $Ox$  із швидкістю  $a$ .

Таким чином, загальний розв'язок (1.5) рівняння (1.1) представляється у вигляді суперпозиції (накладання) прямої та зворотної біжучих хвиль, а тому метод його знаходження іноді називають методом поширення хвиль.

При виводі рівняння (1.1) ми поклали  $a=\sqrt{T/\rho}$ . Але  $a$  є швидкістю поширення хвиль по струні. В силу цього можемо зробити висновок: швидкість поширення хвиль по струні обернено пропорційна квадратному кореню від густини і прямо пропорційна квадратному кореню від натягу струни.

Перейдемо до фізичної інтерпретації формули Д'Аламбера (1.6) і розглянемо окремо випадки, коли початкові відхилення рівні нулю ( $\varphi(x)\equiv 0$ ) і коли початкові швидкості рівні нулю ( $\psi(x)\equiv 0$ ). Загальний випадок буде суперпозицією обох випадків.

**1.1.. Поширення хвиль відхилення.** Нехай початкові швидкості рівні нулю. Тоді із (1.6) одержимо

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}. \quad (1.7)$$

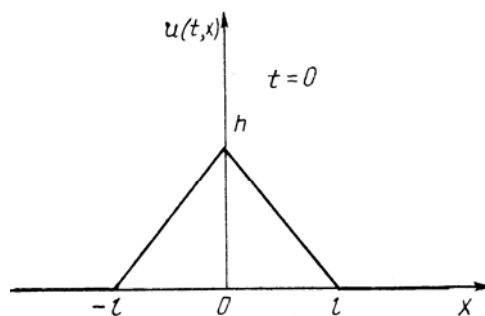


Рис. 5

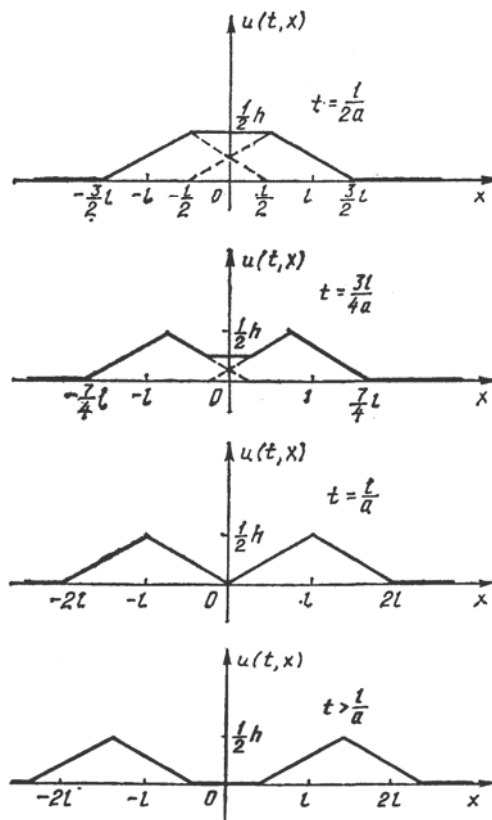


Рис. 6

Функція  $\varphi(x)$  відома, а отже, можемо обчислити положення струни в довільний момент часу  $t$ .

Згідно з сказаним вище, коливання  $u(t, x)$  складаються із прямої  $\frac{1}{2}\varphi(x - at)$  і зворотної  $\frac{1}{2}\varphi(x + at)$  хвиль, які поширюються відповідно вправо і вліво зі швидкістю  $a$ , а в початковий момент часу  $t = 0$  профілі обох хвиль збігаються.

Припустимо, що початкові відхилення точок струни відмінні від нуля тільки на проміжку  $(-l, l)$ , а поза проміжком рівні нулю. Для геометричної ілюстрації наступних наших міркувань вважатимемо, що в початковий момент часу струна мала вигляд

$$u(0, x) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -l, \\ h\left(1 + \frac{x}{l}\right) & \text{при } -l \leq x \leq 0, \\ h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{при } x \geq l. \end{cases}$$

Зобразимо графічно профілі струни в різні моменти часу (рис.5, 6).

Бачимо, що якщо точка струни  $x$  знаходиться правіше проміжку  $(-l, l)$  ( $x > l$ ), то при  $t < \frac{x-l}{a}$  вона є в стані спокою ( $u(t, x) = 0$ ), тобто до

точки  $x$  хвиля ще не дійшла. З моменту часу  $t_1 = \frac{x-l}{a}$  точка струни  $x$  почне коливатися (момент проходження переднього фронту прямої хвилі).

Як тільки хвиля пройде через розглядувану точку, то, починаючи з моменту  $t_2 = \frac{x+l}{a}$ , ця точка знову буде знаходитися в стані спокою ( $t_2$  –

момент проходження заднього фронту прямої хвилі). Таким чином, точка  $x$  бере участь у хвильовому процесі при  $\frac{x-l}{a} < t < \frac{x+l}{a} \Rightarrow -l < x - at < l$ .

Аналогічні міркування приводять нас до висновку: якщо точка знаходиться лівіше проміжку  $(-l, l)$  ( $x < -l$ ), то вона коливається при  $-l < x + at < l$ .

Нехай  $0 < x < l$ . Тоді через точку проходить уже як пряма, так і зворотна хвиля. Передній фронт обох хвиль розміщений перед точкою.

Задній фронт зворотної хвилі пройде через точку в момент  $t_1 = \frac{l-x}{a}$ , а

задній фронт прямої хвилі – в момент  $t_2 = \frac{l+x}{a}$ . При  $t > t_2$  точка струни

буде знаходитися в стані спокою, тобто лежатиме на осі  $Ox$ . Аналогічно, якщо  $0 > x > -l$ , то коливання закінчатимуться при  $t = \frac{l-x}{a}$ , тобто коли через

точку пройде задній фронт зворотної хвилі.

Таким чином, в кожній точці струни після проходження обох хвиль настає спокій.

Хороше наочне зображення описаного процесу можна одержати, якщо ввести фазову\* площину  $xOt$  (рис.7). Кожна точка  $M(x, t)$  фазової площини (при  $t \geq 0$ ) відповідає точці струни з абсцисою  $x$  в момент часу  $t$ . В частинному випадку точки осі абсцис ( $t = 0$ ) відповідають точкам струни в початковий момент часу. Точкам на прямій  $t = t_0$  відповідає положення точок струни у фіксований момент часу  $t = t_0$ , а точкам на прямій  $x = x_0$  – положення фіксованої точки  $x_0$  в різні моменти часу.

Побудуємо на фазовій площині характеристики  $x - at = \pm l$ ,  $x + at = \pm l$  при  $t \geq 0$ . При цьому півплощина  $t \geq 0$  розбивається на шість частин. Коливання проходять тільки в тих точках і в ті моменти часу, які відповідають зонам I, II, III. В зоні II діє тільки пряма хвиля, в зоні III – тільки зворотна, а в зоні I – і пряма і зворотна хвилі. В точках, які

відповідають зонам IV і V, коливання ще не відбуваються, тому що до них ще не дійшли передні фронти відповідно прямої та зворотної хвиль, а в точках, які відповідають зоні VI, коливання уже немає, тому що через них уже пройшли задні фронти прямої та зворотної хвиль.

---

\* Фаза (від грец. *φασις* -поява)- величина, що характеризує стан коливального процесу в якийсь момент.

Зафіксувавши довільну точку  $x_0$  струни і піднімаючись вгору по прямій  $x = x_0$ , легко записати вирази для функції  $u(x_0, t)$  в довільний момент часу  $t$ .

Нехай  $x_0 > l$ . Тоді при  $0 < t < \frac{x_0 - l}{a}$  точка фазової площини знаходиться в зоні IV і  $u(x_0, t) = 0$ .

Якщо  $\frac{x_0 - l}{a} < t < \frac{x_0 + l}{a}$ , то точка попадає в зону II (зону дії прямої хвилі) і

$$u(x_0, t) = \frac{1}{2} \varphi(x_0 - at).$$

Другий доданок  $\frac{1}{2} \varphi(x_0 + at)$  рівний нулю, тому що аргумент  $x_0 + at > l$ , а  $\varphi(x) = 0$  при  $x > l$ . Нарешті, при  $t > \frac{x_0 + l}{a}$  точка належить зоні VI і знову  $u(x_0, t) = 0$ .

Легко перевірити, що якщо точка  $x_1 \in (0, l)$ , то

$$u(x_1, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x_1 - at) + \varphi(x_1 + at)}{2} & \text{при } 0 < t < \frac{l - x_1}{a}, \\ \frac{1}{2} \varphi(x_1 - at) & \text{при } \frac{l - x_1}{a} \leq t \leq \frac{l + x_1}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l + x_1}{a}. \end{cases}$$

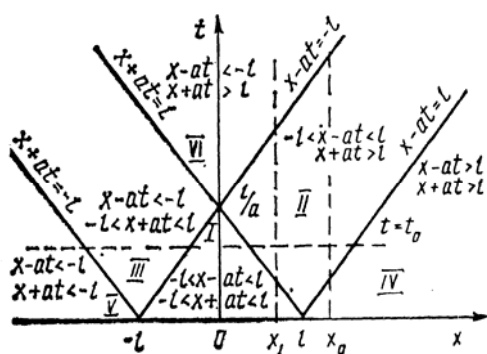


Рис.7

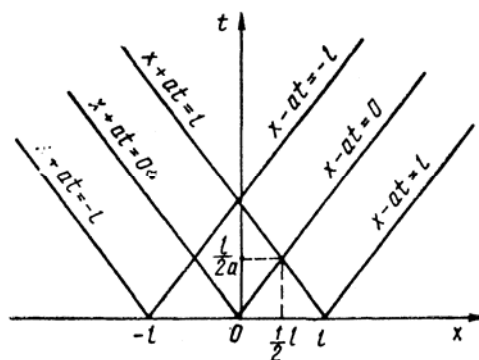


Рис.8

Зрозуміло, що при переході від одного проміжку часу  $t$  до іншого, функція  $u(x, t)$  залишається неперервною.

Аналогічно можна одержати вирази для функції  $u(x, t)$  при фіксованих значеннях  $t$ . При  $t < l/a$  точка фазової площини при русі зліва направо перетинає послідовно зони V, III, I, II і IV, а при  $t > l/a$  замість I-ї зони вона перетне VI-у.

В першому випадку ( $t_0 < l/a$ ) одержимо

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -at_0 - l, \\ \frac{1}{2}\varphi(x + at_0) & \text{при } -at_0 - l \leq x < at_0 - l, \\ \frac{1}{2}[\varphi(x + at_0) + \varphi(x - at_0)] & \text{при } at_0 - l \leq x < l - at_0, \\ \frac{1}{2}\varphi(x - at_0) & \text{при } l - at_0 \leq x < l + at_0, \\ 0 & \text{при } x \geq l + at_0. \end{cases}$$

Аналогічно можна записати вираз  $u(x, t_1)$  при  $t_1 > l/a$ .

Користуючись вище приведеними міркуваннями, запишемо вирази для відхилення  $u(x, t)$ , коли початкові відхилення  $\varphi(x)$  задані рис.5.

У зв'язку з тим, що при переході аргументів  $x + at$  і  $x - at$  через нуль функції змінюють свої вирази, проведемо на фазовій площині додатково прямі  $x \pm at = 0$ .

Із рис.8 видно, що точки струни, які лежать в проміжках  $\left(0, \frac{1}{2}l\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}l, l\right)$ ,  $(l, +\infty)$ , по-різному переходять із зони в зону (функція  $\varphi(x)$  парна і тому ми розглядаємо тільки додатні значення  $x$ ).

Маємо: а)  $x \in \left(0, \frac{1}{2}l\right)$

$$u(x,t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 \leq t < \frac{x}{a}, \\ h\left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{l+x}{a} < t < +\infty \end{cases}$$

б)  $x \in \left(\frac{1}{2}l, l\right)$

$$u(x,t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 \leq t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{l-x}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l+x}{a}; \end{cases}$$

в)  $x > l$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \frac{x-l}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x-l}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{l}\right) & \text{при } \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l+x}{a}. \end{cases}$$

Якщо ми хочемо отримати форму хвилі у фіксований момент часу, то повинні виписати значення функції  $u(t, x)$  для трьох проміжків часу:

$$\left(0, \frac{l}{2a}\right), \left(\frac{l}{2a}, \frac{l}{a}\right), \left(\frac{l}{a}, +\infty\right) \quad (x \geq 0).$$

а)  $t \in (0, l/2a)$

$$u(t,x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{при } 0 \leq x < at, \\ h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } at < x < l - at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x - at}{l}\right) & \text{при } l - at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at; \end{cases}$$

$$\text{б) } t \in \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a}\right)$$

$$u(t,x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{at}{l}\right) & \text{при } 0 \leq x < l - at, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x - at}{l}\right) & \text{при } l - at < x < at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x - at}{l}\right) & \text{при } at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at; \end{cases}$$

$$\text{в) } t > l/a$$

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < at - l, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x - at}{l}\right) & \text{при } at - l < x < at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x - at}{l}\right) & \text{при } at < x < l + at, \\ 0 & \text{при } x > l + at. \end{cases}$$

У всіх випадках функція  $u(t,x)$  неперервна.

Відзначимо, що форми профілю струни, побудовані графічно і у вигляді останніх аналітичних виразів, збігаються.

**1.2. Поширення хвиль імпульсу.** Нехай початкові зміщення точок струни рівні нулю і струна коливається за рахунок початкової швидкості. В цьому випадку говорять, що по струні поширюються хвилі імпульсу. Покладаючи в (1.6)  $\varphi(x) = 0$ , одержимо

$$u(t,x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz = \Phi(x+at) - \Phi(x-at), \quad (1.8)$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz.$$



Як бачимо, і в цьому випадку розв'язок  $u(t, x)$  складається із прямої  $-\Phi(x - at)$  і зворотної  $\Phi(x + at)$  хвиль. В початковий момент часу маємо

$$u(0, x) = \Phi(x + a \cdot 0) - \Phi(x - a \cdot 0) = 0.$$

Для графічного зображення хвильового процесу покладемо

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -l, \\ v_0 & \text{при } -l < x < l, \\ 0 & \text{при } x > l. \end{cases}$$

Функція  $\Phi(x)$  прийматиме наступні значення:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x v_0 dx = \frac{v_0 x}{2a}, \quad -l \leq x \leq l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^l v_0 dx = \frac{v_0 l}{2a}, \quad x > l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{-l} v_0 dx = -\frac{v_0 l}{2a}, \quad x < -l.$$

Позначимо через  $h = \frac{v_0 l}{a}$  і зобразимо графічно профіль струни в різні моменти часу (рис.9).

Нехай деяка точка  $x$  струни знаходиться правіше проміжку  $(-l, l)$ , тобто  $x > l$ . В початковий момент часу  $t = 0$  проміжок інтегрування  $(x - at, x + at)$  вироджується в точку  $x$ , а потім, при збільшенні, він розширюється зі швидкістю  $a$ . При  $t < \frac{x-l}{a}$  він не матиме спільних точок з  $(-l, l)$ , функція  $\psi(x)$  в ньому рівна нулю і формула (1.8) дасть  $u(x, t) = 0$ , тобто точка  $x$  знаходиться в стані спокою. Починаючи з моменту часу

$$t = \frac{x-l}{a}, \text{ проміжок } (x - at, x + at) \text{ налягатиме}$$

на  $(-l, l)$ , в якому  $\psi(x)$  відмінна від нуля ( $\psi = v_0$ ), і точка  $x$  почне

коливатись. При  $t > \frac{x+l}{a}$  проміжок  $(x - at, x + at)$  буде повністю

покривати інтервал  $(-l, l)$  і інтегрування по  $(x - at, x + at)$  буде зводитись до інтегрування по  $(-l, l)$ , тому що ззовні його  $\psi(x) = 0$ .

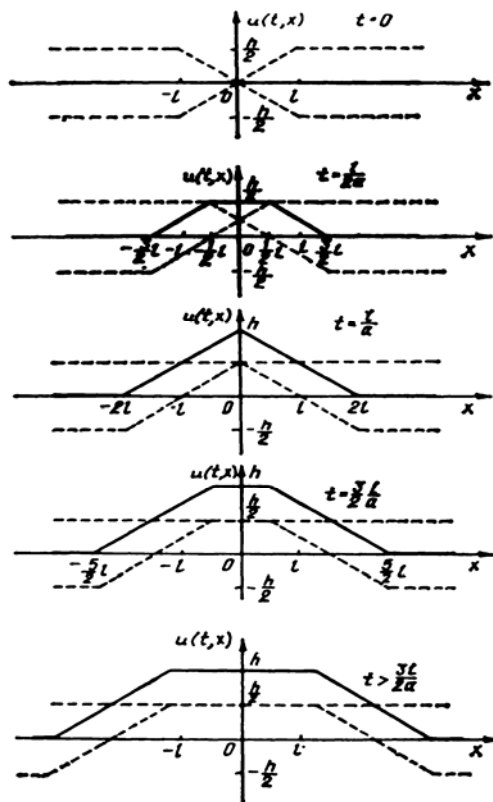


Рис. 9

Тоді при  $t > \frac{x+l}{a}$ ,  $u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{-l}^l \psi(x) dx = \frac{lv_0}{a}$ . Аналогічні міркування можна навести і для точок, які знаходяться зліва від проміжку  $(-l, l)$ , коли  $x \in (-l, l)$ .

### **Список використаної літератури/ Irodalomjegyzék/**

1. А. Тихонов, А. Самарский “Уравнения математической физики”
2. П. Арманович, В. Левин “Методы математической физики”
3. Р. Уолкер, Дж. Метьюз “Математические методы физики”
4. В. Николенко “Уравнения математической физики”
5. Б. Будаков, А. Самарский, А. Тихонов “Сборник задач по математической физике”
6. В. Лендзел, М. Гайсак «Теория спеціальних функцій»
7. В. Маринець «Методи математичної фізики»