

AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM
MEZŐGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR
Üzemszervezési Szak
Statisztikai Tanszék

GAZDASÁGI MATEMATIKA ÉS SZÁMITÁSTECHNIKA I.

Dr. TÓTH JÓZSEF

G Ö D Ö L L Ö

1975.

AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM
MEZŐGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR
Üzemszervezési Szak
Statisztikai Tanszék

GAZDASÁGI MATEMATIKA ÉS SZÁMITÁSTECHNIKA I.

Dr. TÓTH JÓZSEF

G Ö D Ö L L Ö

1975.

Lektor:

Dr. BACSKAY ZOLTÁN
ny. egyetemi tanár

Dr. CSÁKY CSABA
egyetemi docens

Előszó az internetes kiadáshoz

1958-ban Magyarországon az Agrártudományi Egyetemek közül elsőként szerveztem meg az operációkutatás és számítástechnika mezőgazdasági alkalmazásával kapcsolatos kutatást, majd 1961-ben az oktatást (akkor csak megtűrt fakultatív tantárgyként), s a mai napig foglalkozom a témakörrel, s nyugdíjazásom után is több könyvem jelent meg az interneten.

Egész életemet a matematika, az operációkutatás és a számítástechnika mezőgazdasági alkalmazása oktatásának, elméleti és módszertani, valamint a gyakorlati alkalmazás fejlesztésének szenteltem, s alkotásaimat széles körben alkalmaztam is a gyakorlatban, sőt nem csak Magyarországon, hanem külföldön is. (Nem vagyok matematikus, agrárközgazdászként végeztem.)

Könyveimet (a régebben nyomtatásban megjelenteket is) a Magyar Elektronikus Könyvtárban jelentettem meg. Ezzel is elő kívántam segíteni, hogy minél több egyetemi hallgató, oktató és kutató térítésmentesen hozzájusson az újabb és újabb eredményekhez és az oktatásban használható anyagokhoz.

Több egyetemi jegyzetet is írtam, amelyek nagyjából saját tudományos eredményeimet foglalják össze. Ezekben igyekeztem szisztematikusan, jól tanulható módon leírni az elméleti és módszertani ismereteket, s ahol csak lehetett, törekedtem azokat gazdasági tartalommal megtölteni. Nem tudok arról, hogy bármely agráregyetemen ilyen tananyag a mai napig kiadásra került volna.

Véleményem szerint egyetemi jegyzeteim ma is hasznosak lehetnek az agrár-egyetemi (és más egyetemi) hallgatók, valamint a gyakorlatban dolgozó agrárszakemberek számára, annak ellenére, hogy a mezőgazdaságban jelentős (nem kedvező) változások mentek végbe. Ezért úgy döntöttem, hogy szegényes eszközeim alkalmazásával, sok munkával, ha erőm is megengedi, megkíséreltem ezeknek az egyetemi tananyagoknak a Magyar Elektronikus Könyvtárban történő megjelentetését, hogy azokhoz bárki térítésmentesen hozzáférhessen.

Az alábbi négy kötetet kívánom változatlan formában megjelentetni:

1. Gazdasági matematika és számítástechnika. I. (Első kötet). Gödöllő, 1975
2. Gazdasági matematika és számítástechnika. II. (Második kötet). Gödöllő, 1975
3. A számítástechnika alkalmazása az operatív irányításban. Debrecen, 1987
4. Operációkutatási ismeretek és mezőgazdasági alkalmazásuk. Debrecen, 1988

A Gazdasági matematika és számítástechnika kétkötetes jegyzetem még a Gödöllői Agrártudományi Egyetemen került kiadásra 1975-ben, majd a Debreceni Agrártudományi Egyetemen változatlan formában történt utánnomása. Az akkori gépirással készült jegyzetek eléggé megsárgultak, ezért is az utóbbit adom közre, s az anyagon annyi változtatást eszközöltem, hogy a tartalomjegyzéket, amely akkor a második kötet hátulján szerepelt, az első kötet elejére, közvetlenül az internetes kiadáshoz fűzött előszó után is bemásoltam, hogy az olvasó az első kötet kinyitásakor tájékozódhasson mindkét kötet tartalmáról.

TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
Előszó.....	3
Bevezetés.....	5
1. <u>Fejezet:</u> A gazdasági döntések és modellek. A gazdaságmatematikai módszerek és számítástechnika szerepe a döntések megalapozásában.....	8
1.1. A gazdasági döntések folyamata.....	8
1.2. A modellek.....	10
1.3. A gazdaságmatematikai módszerek és a számítástechnika szerepe a gazdasági döntések megalapozásában.....	12
2. <u>Fejezet:</u> A matematikai programozási modell általános megfogalmazása.....	14
2.1. Az általános matematikai programozási modell.....	14
2.2. A lineáris programozási modell általános megfogalmazása.....	18
2.3. Egyszerű példa a lineáris programozás szemléltetésére.....	20
2.4. A döntési folyamat összehasonlítása.....	31
3. <u>Fejezet:</u> Kétváltozós lineáris programozási modellek. Grafikus lineáris programozás.....	35
4. <u>Fejezet:</u> A grafikus lineáris programozás gyakorlati alkalmazása.....	53
5. <u>Fejezet:</u> A halmazelmélet alapjai.....	64
5.1. A halmaz fogalma.....	64
5.2. Műveletek halmazokkal.....	68
5.2.1. A halmazok egyesítése /uniója/.....	68
5.2.2. A halmazok közös része /metszete/.....	70
5.2.3. A halmazok különbsége.....	73
5.3. Alaphalmaz - Részhalmaz.....	74
6. <u>Fejezet:</u> Lineáris algebra.....	76
6.1. Matrixok.....	76
6.1.1. A matrix fogalma.....	76
6.1.2. Speciálmatrixok.....	78
6.2. Nagyságrendi relációk.....	84
6.3. Műveletek matrixokkal.....	85
6.3.1. Összeadás.....	85
6.3.2. Kivonás.....	87
6.3.3. Matrix szorzása skalárral.....	88
6.3.4. Vektor szorzása vektorral.....	89
6.3.5. Matrix szorzása vektorral.....	94

6.3.6.	Matrix szorzása matrixszal.....	97
6.3.7.	Matrixok hatványozása.....	104
6.3.8.	Műveletek blokkokra bontott matrixokkal....	104
6.3.9.	Vektorok és matrixok lineáris kombináció- ja.....	107
6.4.	További speciális matrixok.....	109
6.5.	Geometriai értelmezés és ábrázolhatóság.....	113
7.	<u>Fejezet:</u> A lineáris tér	119
7.1.	Az n elemű vektorok tere.....	119
7.2.	Az altér fogalma.....	121
7.3.	Vektorok lineáris függetlensége, függősége.....	122
7.4.	A vektorrendszer rangja.....	127
7.5.	Dimenzió és bázis.....	128
7.6.	A matrix rangja.....	131
7.7.	A matrixok faktorizációja.....	132
7.8.	Az elemi bázistranszformáció.....	133
7.9.	A matrix rangjának meghatározása.....	141
7.10.	Bázisfaktorizáció.....	143
7.11.	Kompatibilitás.....	148
8.	<u>Fejezet:</u> Lineáris egyenletrendszerek megoldása és matrixok inverziója.....	150
8.1.	Lineáris egyenletrendszerek.....	150
8.2.	A lineáris egyenletrendszer megoldása.....	151
8.3.	A matrixok inverziója.....	153
8.4.	Lineáris inhomogén reguláris egyenletrendszer meg- oldása.....	162
8.5.	Lineáris inhomogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása.....	166
8.6.	Lineáris homogén reguláris egyenletrendszerek megoldása.....	172
8.7.	Lineáris homogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása.....	174
9.	<u>Fejezet:</u> Lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása..	177
10.	<u>Fejezet:</u> Lineáris programozás.....	187
10.1.	A normálfeladat és megoldása degeneráció nélkül..	187
10.2.	Degeneráció.....	203
10.3.	A programvektor és a kapacitások egyidejű opti- malizálása.....	204
10.4.	Programozás több célfüggvénnyel.....	207
10.5.	Alternatív optimumok.....	212
10.6.	Módosított normálfeladat.....	214
10.7.	A maximálás általános esete.....	221
10.8.	Minimumfeladatok.....	225
10.9.	Dualitás.....	229
10.10.	Duál szimplex módszer.....	236
10.11.	Módosított szimplex módszer.....	240
10.12.	Speciális problémák.....	250

10.12.1.	Tervmódosítás a kapacitásvektor $/b/$ változása miatt.....	252
10.12.2.	Tervmódosítás a célfüggvény változása miatt.....	259
10.12.3.	Tervmódosítás új termék /vagy technológia/ beiktatása miatt.....	262
10.12.4.	Tervmódosítás új feltételek csatolásával.....	264
11.	<u>Fejezet:</u> Szimplex módszerrel megoldható, paraméteres, egészértékű és nemlineáris modellek.....	270
11.1.	Paraméteres lineáris programozási modellek.....	271
11.2.	Egészértékű /integer/ programozás.....	276
11.3.	Nemlineáris programozás.....	284
11.3.1.	Konvex és konkáv programozás.....	287
11.3.2.	Konvex és konkáv programozási feladatok megoldása szakaszonként lineárizált modellel.....	294
11.3.3.	Hiperbolikus programozás.....	298
11.3.4.	A Lagrange-féle multiplikatör-módszer	304
12.	<u>Fejezet:</u> A matematikai programozás alkalmazásának lehetőségei és területei a mezőgazdaságban.....	309
13.	<u>Fejezet:</u> A takarmánygazdálkodás matematikai tervezése.....	313
13.1.	Takarmányadagok tervezése.....	314
13.2.	Komplex takarmányfelhasználási terv készítése..	324
13.3.	A takarmánytermelés matematikai tervezése "globális módszerrel".....	328
13.4.	Az alaptakarmány és pótabrak optimális arányának meghatározása.....	330
13.5.	A takarmánytermelés szakosításának tervezése...	335
14.	<u>Fejezet:</u> Az árunövénytermelés matematikai programozása.....	341
14.1.	Az árunövénytermelés szerkezetének optimalizálása.....	341
14.2.	A szántóföldi növények területi elhelyezésének programozása.....	342
14.3.	Gyümölcs- és szőlőtermelés szerkezetének optimalizálása.....	343
15.	<u>Fejezet:</u> A matematikai programozás alkalmazása az állattenyésztésben.....	345
15.1.	Az állattenyésztés szerkezetének optimalizálása.....	345
15.2.	Az állattenyésztés és a takarmánytermelés szerkezetének egyidejű optimalizálása.....	346

	Oldal
15.3. A tejhozam és a tartási technológia kapcsolatainak vizsgálata.....	348
16. <u>Fejezet:</u> Egyéb részleges feladatok programozása...	349
16.1. A munkaszervezési feladatok programozással...	349
16.2. A géppark optimalizálása.....	349
17. <u>Fejezet:</u> Komplex vállalati tervezés.....	351
17.1. A termelési szerkezet optimalizálása.....	351
17.1.1. A modell változói.....	351
17.1.2. A modell mérlegfeltételei.....	359
17.1.3. A célfüggvény.....	371
17.2. A termelési szerkezet és a termelési források egyidejű optimalizálása.....	371
17.2.1. A modellszerkesztés módszere.....	371
17.2.2. Egy egyszerű példa összehasonlító vizsgálata.....	384
17.3. A termelési szerkezet, a termelési technológiák és a termelési erőforrások egyidejű optimalizálása.....	387
17.3.1. A matematikai modell változói.....	387
17.3.2. A matematikai modell feltételrendszere.....	390
17.3.3. A célfüggvény.....	396
Irodalom.....	398

Készült az Agrártudományi Egyetem Soksorozító Üzemében

F.szerk: dr.Tóth József

Műszaki vezető: Bucherna Nándor

Megrend.sz: DM-646/74 Péld.sz: 610 Soksz.t.sz:RF-358/
75

E L Ő S Z Ó

Célunk, hogy a Gödöllői Agrártudományi Egyetem Mezőgazdaságtudományi Kar Üzemszervezési Szak hallgatói számára egy olyan egységes tananyagot dolgozzunk ki, amely felöleli a legfontosabb gazdaságmatematikai módszereket és számítástechnikai ismereteket, s egyidejűleg áttekinti azok mezőgazdasági alkalmazásának legfontosabb módszertani kérdéseit.

Másrészt törekedtünk arra, hogy munkánk egyidejűleg kézikönyv jellegű is legyen és támpontot nyújtson a végzett hallgatóknak, valamint a mezőgazdaságban dolgozó, gazdaságmatematikai módszereket alkalmazó, vagy aziránt érdeklődő mezőgazdasági szakemberek számára a matematikai alapok és a mezőgazdasági alkalmazás legfontosabb kérdéseiben.

E két célkitűzés egyeztetése nem könnyű feladat és azt aligha sikerül maradéktalanul megoldani. Alapvetőnek a tananyag kialakítását tekintettük. Ennek rendeltük alá az anyag szerkezeti és didaktikai felépítését. Azáltal azonban, hogy a különböző eljárások matematikai alapjainak ismertetését azonnal követi azok mezőgazdasági alkalmazása módszertanának tárgyalása, egyrészt megkönnyítjük az egyetemi hallgatók számára a matematikai alapok elsajátítását és egyidejűleg az alkalmazás módszertanának és eredményességének megismerését, másrészt lehetővé tesszük, hogy a gyakorlatban dolgozó szakemberek a különböző eljárásokhoz tartozó matematikai alapokat és az alkalmazás módszertani ismereteit együtt találják meg, s így egy-egy eljárás iránt érdeklődő szakemberek számára elegendő néhány fejezet át tanulmányozása a szükséges ismeretek elsajátításához.

Arra törekedtünk, hogy a legszükségesebb matematikai alapokat és az alkalmazás módszertani kérdéseit kellő részletességgel, de minél egyszerűbben, a matematikai alapok tárgyalását is mezőgazdasági példákkal illusztrálva írjuk le. Reméljük, hogy tananyagunk tanulmányozása nemcsak az Agrártudományi Egyetem hallgatóinak, hanem a gazdaságmatematikai módszerekkel és számítástechnikával foglalkozó mezőgazdaságban dolgozó szakembereknek is hasznos segítséget tud nyújtani. Azok számára pedig, akik a tárgyalt témakörök iránt mélyebben érdeklődnek, irodalomjegyzékkel kívánunk segítséget nyújtani.

B E V E Z E T É S

A gazdasági kérdések tanulmányozása, a gazdaságirányítás és a gazdasági vezetés, a gazdasági döntésmegalapozás, az információ és információ-feldolgozás célszerű kialakítása, valamint a gazdasági irányításban és a vállalatvezetésben a korszerű modellek és eszközök alkalmazása a szocialista gazdaság fejlődésével mindinkább előtérbe kerül.

Az utóbbi években rohamosan terjed a korszerű matematikai módszerek és a számítástechnika gazdasági alkalmazása. Ez természetes is, hiszen alig van a gazdasági tevékenységnek olyan mozzanata, amely ne lenne szoros kapcsolatban a matematikával.

Egyszerűbb esetekben elegendő lehet a matematika alapműveleteinek felhasználása. Bonyolultabb feladatok során esetleg a legkorszerűbb matematikai eljárásokat kell alkalmaznunk. Sokszor bonyolult, vagy kiterjedt matematikai feldolgozást kell elvégeznünk, s ilyenkor a korszerű elektronikus számítógépek nyújtanak segítséget.

Képzelnék csak magunkat egy mezőgazdasági vállalatvezető helyébe. A vállalatvezetőnek sokszor kell döntenie. Néha a döntés viszonylag egyszerű. Pl. ha arról kell döntenie, hogy egy munka elvégzésére hány gépet állítson be a gazdaságvezető, akkor az elvégzendő munka volumenének, az elvégzéshez rendelkezésre álló időnek és a gépek fajlagos teljesítményének ismeretében a döntéshez csupán egy szorzás és egy osztás műveletére van szüksége. Nehezebb a helyzet, ha egyidejűleg többféle munkát is kell végezni. Ismerjük az egyes munkák elvégzésének optimális idejét, azonban a különböző munkák egymáshoz kapcsolódóak és elvégzésük többféle géppel vagy gépkapcsolattal is lehetséges, de a gépek korlátozott mennyiségben állnak rendelkezésre, stb. Ebben az esetben már számos tényezőt kell a döntéshez mérlegelni, hogy a feladat elvégzését úgy szervezzük meg, hogy valamennyi munkafolyamatot optimális időben, sőt azokat a lehető legkevesebb költséggel végezzük el. Ilyenkor még a gépek meghibásodásának lehetőségére, a különböző gépek teljesítményének összehangolására, a tényleges teljesítménynek a tervtől való eltérésére, időjárási tényezők miatt munkanapok kiesésére, stb. is tekintettel kell lenni. Utóbbi tényezőket azonban nem ismerjük előre, számolnunk kell tehát azzal, hogy bizonytalan körülmények között kell döntést hozni. Ilyen döntések során már a matematikai alapműveletek alkalmazása nem elégséges.

Még bonyolultabb problémával találja magát szemben a vállalatvezető, amikor pl. a vállalat komplex fejlesztési tervét kell elkészítenie. Milyen termékeket termeljen, milyen mennyiségben? Milyen technológiai eljárásokat célszerű alkalmazni? Milyen termelési erőforrásokat kell biztosítani? Milyen ütemezésben kell a fejlesztést végrehajtani? A kérdések megválaszolásánál számos tényezőt kell mérlegelni. Mindenekelőtt olyan fejlesztési tervet kívánunk elkészíteni, amely hosszú távon is

a lehető legjövődélmezőbb gazdálkodást biztosítja. Egyidejűleg azonban számos más objektív és szubjektív tényező hatására is figyelemmel kell lenni. Ilyen pl. a dolgozók szociális és munkakörülményeinek javítása, a szakember-szükséglet és a szükséglet kielégítésének lehetősége, a műszaki fejlődés tendenciája, a tudományok új eredményei, a fogyasztói igények, stb.

Az, hogy érdemes-e valamilyen terméket termelni, illetve, hogy az adott terméket milyen volumenben célszerű termelni - más tényezők mellett - döntően attól függ, hogy az mennyire jövődélmező. Ez viszont függ a fajlagos hozamoktól és az áráktól, valamint a termelési költségek alakulásától. Azonban mind a fajlagos hozamok alakulása, mind pedig a költségek alakulása függ attól, hogy milyen technológiával termeljük az adott terméket, milyen eszközök szükségesek a termeléshez és milyen áron szerezhetjük be ezeket az eszközöket.

Másrészt viszont, hogy milyen technológiát célszerű alkalmazni, az nagymértékben függ attól, hogy milyen eszközök állnak rendelkezésre, vagy szerezhetők be, milyen áron, valamint attól, hogy az adott terméket milyen volumenben termeljük, illetve milyen más termékeket milyen volumenben termelünk még.

Hogy milyen eszközöket kell vagy célszerű a termeléshez biztosítani, az ismét függ attól, hogy milyen termelési szerkezetet valósítunk meg és milyen technológiát alkalmazunk.

A komplex vállalatfejlesztési tervek készítése során felvetődő három alapvető döntési feladat /a termelés szerkezetének, az alkalmazandó technológiáknak, valamint a szükséges termelési forrásoknak a meghatározása/, tehát egymással szoros kapcsolatban és kölcsönhatásban van.

Az egyes döntési feladatok önmagukban is egy összefüggő bonyolult rendszert alkotnak. Valamely termék termelése esetleg más termék termelését is szükségessé teszi, vagy más termék termelését kizárja, esetleg két vagy több termék termelését meghatározott arányban lehet csak megoldani. Valamely gép alkalmazása célszerűvé teszi, vagy kizárja más gépek alkalmazását, két vagy több gép között célszerű mennyiségi viszonyt kell létesíteni. Ha egyik terméknél döntünk, főleg, hogy milyen technológiát alkalmazunk, az kihat arra, hogy milyen technológiát célszerű más termékeknél alkalmazni, stb.

A feladat megoldása során az áraknak is nagy szerepük van. De az árak változnak és különösen távlatilag az árak alakulása tekintetében nagyfokú bizonytalanságban vagyunk. A terméshozamokat sem ismerjük biztosan előre, sem pedig a gépek élettartamát, teljesítményét /ami attól is függ, hogy a munkát melyik táblán végezzük, vagy milyen az időjárás az adott munka elvégzésének idején/, stb.

Nagyfokú bizonytalanság körülményei között kell tehát egy nagyon bonyolult döntési feladatot megoldani. Döntésünk vi-

szont hosszu távon behatárolhatja a vállalat fejlődését és a gazdálkodás eredményességét.

Még bonyolultabb formában jelentkeznek a döntési feladatok magasabb szinteken /népgazdasági, ágazati, területi szinteken/. A népgazdasági szükséglet, valamint a külkereskedelmi lehetőségek felmérése, esetleg befolyásolása, a népgazdasági és a vállalati érdekek összehangolása utján a vállalatok gazdálkodásának célszerű szabályozása és orientálása, a termelés célszerű területi elhelyezésének ösztönzése, stb. igen bonyolult döntési feladatok elé állítja a gazdaságirányítást.

Távolról sem szabad azt gondolnunk, hogy a gazdaságmatematikai módszerek és a számítógépek alkalmazásával egy csapásra megoldjuk ezeket a feladatokat. A gazdaságmatematikai módszerek és a számítógépek eszközként szolgálnak ahhoz, hogy a gazdasági döntéseket egzakt módszerekkel jobban megalapozzuk. A gazdasági problémák sokoldalubb és komplex vizsgálatával, sokféle döntési változat előállításával megalapozottabb döntéseket hozhatunk. A gazdaságmatematikai módszerek és számítógépek azonban csak eszközként szerepelnek a gazdaságvezető kezében, de a döntési feladat megfogalmazása és maga a döntés a gazdaságvezető feladata marad éppugy, mint ahogy a döntési felelősséget is a gazdaságvezetőnek kell vállalnia.

Látni fogjuk azonban, hogy a korszerű gazdaságmatematikai módszerek és számítógépek milyen nagy, semmivel nem pótolható segítséget nyújthatnak a gazdaságvezetőknek mind a gazdaságirányítás, mind pedig a vállalatvezetés szintjén.

1. FEJEZET

A gazdasági döntések és modellek. A gazdaságmatematikai módszerek és számítástechnika szerepe a döntések megalapozásában.

1.1. A gazdasági döntések folyamata

A gazdasági döntések folyamata 5 szakaszra osztható fel:

a./ A döntési feladat felvetődése

A döntési folyamat tulajdonképpen azzal kezdődik, hogy a gazdasági vezető bizonyos információkkal rendelkezik, amelyek alapján döntési feladatok merülnek fel. Pl. a vállalat rendelkezik meghatározott fejlesztési alappal. Dönteni kell arról, hogy azt hogyan használják fel. Lehetséges, hogy adott, eddig alkalmazott technológia alkalmazása a jövőben nem lehetséges /pl. valamely szükséges gép vagy anyag nem szerezhető be, mert gyártását megszüntették/, vagy nem látszik célszerűnek /pl. új, korszerűbb, hatékonyabb eszközök vagy anyagok szerezhetőek be/. Dönteni kell, hogy helyette a jövőben más technológiát kell alkalmazni. Az is lehet, hogy a vállalat nem rendelkezik fejlesztési célkitűzéssel, fejlesztési tervvel. Ki kell dolgozni a vállalatfejlesztési tervet. A terv megvalósítása során azonban kiderülhet, hogy az adott vállalatfejlesztési terv megvalósítása időközben megváltozott feltételek következtében nem volna célszerű. Módosítani kell tehát a vállalatfejlesztési tervet, vagy új tervet kell kidolgozni.

b./ A döntést befolyásoló feltételek és körülmények felmérése

A döntési feladat felvetődése után tájékozódni kell a döntést befolyásoló feltételekről és körülményekről. Ennek során számbavesszük a vállalat mindazon belső és külső feltételeit és körülményeit, amelyek egyáltalán a döntésre valamilyen befolyást gyakorolnak. Vizsgáljuk a gazdaság jelenlegi helyzetét, erőforrásait, azok változtatásának lehetőségeit, a piaci lehetőségeket, az árakat, illetve a piac és az árak változásának lehetőségeit. Informálódunk a népgazdasági igényekről és célkitűzésekről, a gazdasági szabályozókról, illetve azok változásának lehetőségeiről, a partnerekről, stb.

A megszerzett információkat feldolgozzuk és elemezzük, s ennek alapján megvizsgáljuk, hogy a döntési feladat ténylegesen fennáll-e és ha igen, a körülményeket mérlegelve, döntési koncepciókat alakítunk ki.

c./ Döntési koncepciók kialakítása

A döntést befolyásoló feltételek és körülmények elemzése alapján alakítjuk ki a döntési koncepciókat. Pl. a fejlesztésre rendelkezésre álló pénzeszközöket felhasználhatjuk egy új szarvasmarha- vagy sertéstelep létesítésére, vagy a meglévő telepek bővítésére. De felhasználhatjuk a fejlesztési alapot különböző gépek beszerzésére, s ennek alapján lehetőségünk van arra, hogy valamely növény vagy növények termelését bővítsük, vagy azok termelése során alkalmazott technológiát megváltoztassuk. Esetleg a terület egy részét öntözésre rendezhetjük be.

Ha valamilyen állattenyésztési telepet létesítünk, akkor esetleg többféle típusból lehet választani. Ha vállalatfejlesztési tervet készítünk, akkor többféle termék termelésére van lehetőségünk, s azokat bizonyos korlátok között termelhetjük, többféle technológiát alkalmazhatunk a különböző termékek termelésére, stb. A döntés során többféle célt /magasabb jövedelem elérése, a költségek csökkentése, a jövedelmezőség javítása, a munka kulturáltságának javítása, a munka megkönnyítése, stb./ lehet szem előtt tartani. A döntési koncepciók kialakítása nem jelent döntést, csak a döntési lehetőségek és körülmények meghatározását, s a döntés majd a döntés megalapozása után történik meg.

d./ A döntés megalapozása, döntési változatok kidolgozása

Ennek során a döntési koncepciókból kiindulva, elvégezzük a szükséges számításokat, döntési változatokat dolgozunk ki. A döntések megalapozására és a döntési változatok kidolgozására alkalmazzuk a gazdaságmatematikai módszereket és a számítástechnikát, amelyekkel a későbbiekben fogunk részletesen megismerkedni.

e./ Döntés

A döntési változatok összehasonlítása, elemzése és mérlegelése alapján a gazdaságvezetés dönt arról, hogy melyik döntési változatot válassza ki gyakorlati megvalósításra. A döntés tulajdonképpen szelekciót jelent /to select is to reject/, vagyis kiválasztani annyi, mint szelektálni, azaz a döntési lehetőségek összehasonlítása során szelektálunk, elvetjük a kevésbé jó változatokat, s ezáltal kiválasztjuk a legjobbat. A döntéshozatal tehát olyan választási folyamatnak fogható fel, amely a különböző cselekvési lehetőségekre /beleértve a nem cselekvést is/ terjed ki és eredménye a döntés, vagyis valamilyen cselekvési lehetőség melletti elhatározás.

1.2. A modellek

A gazdaságmatematikai módszerek és a számítástechnika alkalmazása leginkább a döntések megalapozásában nyújt segítséget. Ilyenkor a döntésmegalapozás jellemzője, hogy matematikai módszereket használunk fel és a döntésnek valamilyen cél vagy célok szempontjából optimálisnak kell lennie. A gazdasági matematikai módszerek alkalmazása feltételezi, hogy a megoldandó problémát a matematika nyelvén fogalmazzuk meg. Tulajdonképpen a valóság matematikai modelljét készítjük el, s ennek alapján végezzük el vizsgálatainkat. Modellek segítségével azonban általában nem tudjuk a valóságot hűen kifejezni, hanem azt bizonyos szempontból le kell egyszerűsíteni. Sokszor az egyszerűsítést éppen a vizsgálat célja teszi szükségessé, hogy a vizsgálat szempontjából lényegtelen körülményeket kiszűrve, a lényegre irányítsuk a figyelmet. Utóbbi szükségessége különösen elméleti vizsgálatok esetén gyakori. A gyakorlati döntések megalapozása során viszont mindig törekedni kell arra, hogy a modell lehetőleg minél hübb képe legyen a valóságnak. Ha mégis kényszerülünk a valóság leegyszerűsítésére, nagy figyelmet kell fordítani arra, hogy az nem jelentheti a valóság torzítását, mert ekkor vizsgálatunk igen félrevezető lehet.

Általában a modellek három típusát különböztetjük meg:

a./ Képszerű modellek

A képszerű modellek a valóságot képszerűen jelenítik meg, jellemzőjük, hogy statikusak és csak akkor változtathatók meg értelemszerűen, ha az eredeti rendszer is megváltozik. Ilyen képszerű modell a fénykép, a makett, a menetrend, stb.

b./ Analóg modellek

Az analóg modelleket az jellemzi, hogy a megfigyelt valóság és a modell jellemzői között szoros kapcsolat van. Az analóg modellek viszonylag könnyen változtathatók és alkalmasak dinamikus összefüggések vizsgálatára is. Analóg modellek pl. a térképek, a grafikonok, a folyamat-ábrák, a kísérleti állatok és a növények, stb.

c./ Szimbólikus modellek

Szimbólikus modellek esetén a vizsgált folyamat egyes tényezőit és a köztük levő kapcsolatokat matematikai szimbólumokkal fejezzük ki. Ilyen modellek alkalmazása során nem jelent problémát a változások hatásának elemzése.

Arra is lehetőségünk van, hogy kombinált modelleket alkalmazunk. Így pl. a szimulációs modellek /amelyekkel később részletesen megismerkedünk/ részben analóg, részben szimbólikus modellek.

A gazdaságmatematikai módszerek alkalmazása során különösen fontos szerepet játszanak az optimalizálási modellek. E modellek több szempontból osztályozhatók:

Az elemi tevékenységek természete szerint megkülönböztetünk:

a./ Folytonos modelleket, amikor a modellben szereplő elemi tevékenységek mind folytonosak, tehát tört értéket is felvehetnek. Pl. a termelt tejmennyiség lehet 1500 liter, 1501 liter, 1501,5 liter, vagy 1501,75 liter, stb.

Hasonlóképpen a buza átlagtermése hektáronként lehet 25 q, 25,5 q, vagy 25,32 q, stb.

b./ Diszkrét modelleket, amikor a modellben szereplő elemi tevékenységek kizárólag diszkrét tevékenységek lehetnek, tehát csak egész értéket vehetnek fel. Így pl. a munkaező lehet 500 fő, 501 fő, stb., de nem lehet 501,5 fő, vagy 501,22 fő. Hasonlóképpen nem tudunk vásárolni fél vagy negyed traktort, stb.

c./ Vegyes modelleket, amikor a modellben mind folytonos, mind pedig diszkrét tevékenységek szerepelnek. Pl. ha egy vállalatfejlesztési tervet készítünk, a termelt tej-, vagy termékmennyiségek tört értéket is felvehetnek, tehát folytonos tevékenységek lehetnek, de a beszerzendő gépek csak egész értékűek lehetnek.

Általában a gyakorlatban a folytonos modellek vannak jobban elterjedve, mivel azok kezelése matematikai és számítástechnikai szempontból sokkal egyszerűbb. Ha azonban a folytonos modell nem alkalmas a valóság ábrázolására, hanem annak lényeges leegyszerűsítését igényli, - ezért esetleg gyakorlatilag használhatatlan, vagy félrevezető eredményhez vezet, - kénytelenek vagyunk diszkrét vagy vegyes modellt alkalmazni.

A modellek aszerint is osztályozhatók, hogy paramétereik pontosan meghatározható konstansok, vagy olyan véletlentől függő mennyiségek, amelyek értékét csak bizonyos /egynél kisebb/ valószínűséggel tudjuk meghatározni. Ilyen szempontból megkülönböztetünk:

a/ Determinisztikus modelleket, amikor a modell paramétereirei egyértelműen meghatározhatók.

b/ Sztochasztikus modelleket, amikor a modell paramétereirei véletlentől függő mennyiségek.

Akkor is sztochasztikus modellről beszélünk, ha valamely modell paramétereinek csak egy része véletlentől függő mennyiség.

A gazdasági problémák természete általában sztochasztikus jellegű, tehát a gazdasági vizsgálatok során a sztochasztikus modelleknek van prioritásuk. Pl. a mezőgazdaságban nem tudjuk pontosan megadni a várható termésátlagot, a várható teljesítményadatokat és költségadatokat, hanem azok alakulása számos tényezőtől függő valószínűségi változóként tekinthető. A sztochasztikus modellek problémái azonban még távolról sincsenek olyan szinten felderítve, mint a determinisztikus modellek problémái - bár az utóbbi időben a kutatás e téren is nagy lépésekkel halad előre -, ezért a gyakorlatban jelenleg általában a determinisztikus modelleket alkalmazzuk.

Az optimális programok meghatározásánál alkalmazott módszer szerint megkülönböztetünk:

- a/ Statikus és
- b/ dinamikus modelleket.

E megkülönböztetés kizárólag a módszer matematikai struktúrájára vonatkozik és nem a modell közgazdasági tartalmára. Közgazdasági szempontból dinamikus probléma ugyanis vizsgálható statikus módszerrel is és viszont közgazdaságilag statikus probléma vizsgálatánál alkalmazunk dinamikus módszert is.

1.3. A gazdaságmatematikai módszerek és a számítástechnika szerepe a gazdasági döntések megalapozásában

A mezőgazdaságban gyakran merülnek fel olyan döntési feladatok, amelyek megoldása sok, egymással kölcsönös kapcsolatban lévő tényező mérlegelését kívánja meg. Ha pl. el kell dönteni, hogy egy állattenyésztő telepet létesítsünk vagy ne létesítsünk, mérlegelni kell, hogy a különböző megoldási lehetőségek közül melyiket /milyen épületeket és technológiai eljárásokat/ lenne célszerű alkalmazni, hogyan tudjuk biztosítani a szükséges takarmánybázist, milyen hatása van ennek a növénytermelés szerkezetére, a gépsükségletre, stb.stb. Egy konkrét döntési feladat tehát lényegében az egész vállalati gazdálkodásra kihat, hiszen a mezőgazdaságban az egyes ágazatok általában szoros és kölcsönös sokoldalú kapcsolatban vannak egymással.

A gazdaságmatematikai módszerek azonban nemcsak a döntések megalapozása során nyújtanak hathatós segítséget, hanem a gazdasági elemzések során is. Ha multban lejátszódó eseményt vizsgálunk, akkor sem közömbös annak vizsgálata, hogy mi lett volna optimális, mennyire tértünk el attól és miért? Az eltérés milyen hatással volt az eredményre, stb. Másrészt a multban lejátszódó események vizsgálata alapján bizonyos összefüggéseket, törvényszerűségeket tudunk feltárni, tendenciákat tudunk meghatározni, amelyeknek alapján következtethetünk a jövőre, vagy tudunk hozni olyan döntéseket, hogy az adott jelenséget célszerű módon alakíthassuk.

A vizsgálatokat végezhetjük népgazdasági, ágazati-minisztériumi, területi és vállalati szinten. Vizsgálataink felölelhetnek komplex problémákat, vagy részproblémákat, aszerint, hogy mi a célunk.

A gazdaságmatematikai módszerek és számítástechnika helyét és szerepét a mezőgazdaságban tehát röviden úgy határozhatjuk meg, hogy a gazdasági matematikai módszerek és a számítástechnika a mezőgazdaság számos területén és különböző gazdasági szinteken alkalmas multibeli folyamatok vizsgálatára, elméleti vizsgálatok elvégzésére és döntések megalapozására.

A gazdasági életben számos gazdaságmatematikai módszer alkalmazható. Tananyagunkban nem tudunk ezek mindegyikével részletesen foglalkozni, csak azokkal a legfontosabb módszerekkel, amelyek a mezőgazdasági gyakorlatban jelenlegi ismereteink szerint a leginkább alkalmazhatók. Ennek megfelelően foglalkozunk a matematikai programozással, a szállításszervezéssel, a termelési függvényekkel, az ágazati kapcsolatok mérlegével, a hálótervezéssel, a grafikus módszerekkel és a nomogramokkal, valamint a szimulációs módszerekkel. Mindezek mellett megismerkedünk a számítógépekkel, valamint azok programozásának alapjaival is.

2. FEJEZET

A matematikai programozási modell általános megfogalmazása

A gazdaságmatematikai módszerek közül jelenleg a gyakorlatban leginkább a matematikai programozást alkalmazzák. A továbbiakban elsősorban erre irányítjuk a figyelmet. Ebben a fejezetben még csak általánosságban fogalmazzuk meg a matematikai programozási modellt, majd pedig annak speciális típusát, a legegyszerűbb és jelenleg a gyakorlatban leginkább használatos formáját, a lineáris programozást. Egyszerű példát is megvizsgálunk a lineáris programozás alkalmazására, majd röviden - inkább csak vázlatyszerűen - áttekintjük a matematikai programozás gyakorlati alkalmazásának területeit. A következő fejezetben a kétváltozós lineáris programozási modellel és a grafikus lineáris programozással foglalkozunk, majd ezután kerül tárgyalásra a grafikus lineáris programozás mezőgazdasági alkalmazása lehetőségének bemutatása. Mint látni fogjuk, a grafikus lineáris programozás még nem igényel különösebb matematikai felkészültséget és bizonyos feladatok megoldása során hatékony segítséget nyújt az optimum megközelítéséhez.

A matematikai programozás megértéséhez viszont szükséges a matematikai alapok megismerése. Ezért a grafikus programozás tárgyalása után a programozás matematikai alapjaival foglalkozunk. Ezután kerül sor a matematikai programozás gyakorlati alkalmazása módszerének ismertetésére.

2.1. Az általános matematikai programozási modell

Tegyük fel, hogy valamely mezőgazdasági vállalat n -féle tevékenységet folytathat. Egyelőre nem vizsgáljuk e tevékenységek konkrét tartalmát, csak megjegyezzük, hogy a tevékenységek jelenthetik valamely termék termelését, valamilyen szolgáltatás ellátását, beruházási tevékenységet, stb. valamilyen módon folytatva.

A tevékenységek - egyelőre ismeretlen - szintjét jelöljük x_1, x_2, \dots, x_n -nel. Ezek alkotják a matematikai modell változóit. Eszerint x_j jelenti a j -edik tevékenység $/j = 1, 2, \dots, n/$ szintjét. A vállalat a tevékenységeket bizonyos céllal végzi. A cél különböző lehet, pl. minél magasabb jövedelem elérése, az export fokozása, vagy az import csökkentése, stb. Tegyük fel, hogy példánkban a tevékenységek célja minél nagyobb jövedelem elérése. Nyilvánvaló, hogy a megtermelhető vagy realizálható jövedelem függ attól, hogy a vállalat a különböző tevékenységeket milyen szinten és milyen arányban folytatja, azaz ha a megtermelhető vagy realizálható jövedelmet z -vel jelöljük, annak nagysága az x_j változók függvénye, vagyis

$$/2.1./ \quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)/.$$

Az így megfogalmazott függvényt célfüggvénynek nevezzük. Természetesen a vállalat a cél minél jobb megvalósítására törekszik, pl. minél több jövedelem elérésére, vagy minél több exporttermék előállítására, vagy minél kevesebb importanyag felhasználására, stb. Az x_1, x_2, \dots, x_n változók értékeit tehát úgy kell meghatározni, hogy a célfüggvény azok mellett a legnagyobb, vagy a legkisebb értéket vegye fel, vagyis keressük a célfüggvény maximumát vagy minimumát, azaz szélső /extrém/ értékét, azaz

$$/2.2./ \quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{extrém.}$$

A különböző tevékenységek földterületet, munkaerőt, eszközöket és anyagokat igényelnek. A rendelkezésre álló földterületet, munkaerőt, eszközöket és anyagokat általában termelési erőforrásoknak, vagy egyszerűen erőforrásoknak fogjuk nevezni.^{x/} Az erőforrások egy része korlátozott mennyiségben áll rendelkezésre, vagyis azok felhasználható mennyisége adott. Jelöljük az r -edik erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget b_r -rel.

Az erőforrások felhasználására mérlegeket írunk elő. A mérleg egyik oldalán jelöljük az adott erőforrásból a szükségletet, a másik oldalán pedig az abból rendelkezésre álló mennyiséget. Mivel a különböző erőforrásokból felmerülő szükséglet szintén az x_j értékek függvénye, az x_j értékeket úgy kell megválasztani, hogy a mérlegek két oldala között megfelelő, általunk előírt viszony /reláció/ legyen. Előírhatjuk, hogy a mérleg két oldalán levő mennyiségek pontosan megegyezzenek, vagy, hogy az egyik oldalán levő mennyiség nem lehet több, mint a másik oldalon.

Eszerint tehát keressük az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak azokat az értékeit, amelyek mellett a célfüggvény extrém értékét /maximumot vagy minimumot/ vesz fel, azonban az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak ki kell elégíteniük még bizonyos mérlegfeltételeket, amelyeket mérlegegyenletek

$$/2.3./ \quad \phi_r / x_1, x_2, \dots, x_n / = b_r,$$

vagy mérlegegyenlőtlenések

$$/2.4./ \quad \phi_r / x_1, x_2, \dots, x_n / \leq b_r,$$

illetve

$$/2.5./ \quad \phi_r / x_1, x_2, \dots, x_n / \geq b_r$$

alakjában fogalmazhatunk meg.

x/ Egyelőre ezek részletesebb vizsgálatától eltekintünk.

Az így megfogalmazott mérlegegyenleteket, illetve mérlegegyenlőtlenségeket mérlegfeltételeknek, vagy korlátozó feltételeknek szoktuk nevezni.

Az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak ki kell még elégíteniük az un. határfeltételeket¹⁾, vagy nemnegativitási feltételeket, azaz

$$/2.6./ \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

A /2.1./ formulában kizárólag azt fogalmaztuk meg, hogy a célfüggvény értéke /pl. a jövedelem tömege/ a különböző tevékenységek méretétől függ /a különböző termékekből termelt mennyiségektől, a szolgáltatások kiterjedésétől, stb./, s a /2.2./ formula szerint azok szintjét úgy kell megválasztani, hogy a célfüggvény extrém értéket vegyen fel /pl. a lehető legnagyobb jövedelmet érjük el/. E formulában egyelőre még azt sem konkretizáljuk, hogy a célfüggvény értéke /z/ hogyan, milyen formában függ az x_j változóktól.

Kizárólag e célfüggvény alapján esetleg az mutatkozna célszerűnek, hogy a vállalat csak egyféle tevékenységet folytasson, esetleg minden határon túl növekvő mértékben. Azonban mint arról már szó volt, a különböző tevékenységek erőforrásokat igényelnek, amelyekből korlátozott mennyiségek állnak a vállalat rendelkezésére, behatárolva a különböző tevékenységek lehetséges méreteit. Pl. ha a vállalatnak adott földterület áll rendelkezésére, s azt maradék nélkül fel kell használnia a termelés céljára, ez a területmérleg egyensúlyának biztosítását kívánja meg. A területszükséglet szintén az x_j változóktól függ /valamilyen formában/, s ez képezi a mérleg egyik oldalát / $\Phi_r/x_1, x_2, \dots, x_n/$, s meghatározott mennyiségű terület áll rendelkezésre / $B_r/$, ami a mérleg másik oldalát adja. A mérleg két oldala között meghatározott egyensúlyt kell biztosítani, azaz ha a terület pontos felhasználását kívánjuk, a mérleget mérlegegyenlet alakjában kell megfogalmazni /2.3./.

A munkaerő- és eszközfelhasználásra vonatkozó mérlegeket viszont általában egyenlőtlenség formájában fogalmazzuk meg, vagyis nem írjuk elő, hogy pl. minden hónapban pontosan és maradék nélkül fel kell használnunk a rendelkezésre álló munkaerőt, hanem csak azt kötjük ki, hogy nem használhatunk fel több munkaerőt, mint amennyi rendelkezésre áll, azaz a munkaerő felhasználására egy felső határt, felső korlátot írunk elő, de

x/ Oskar Lange: Optimális döntések. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest. 1966. 51.o.

Lehetővé tesszük, hogy azt ne használjuk fel teljes mértékben.^{x/}

Más esetben - mint később látni fogjuk - előírhatunk alsó korlátot is [2.5./, pl. megkívánhatjuk, hogy bizonyos termékekből, vagy termékcsoportokból legalább egy meghatározott mennyiséget termelni kell.

A [2.6./ formulában előírtuk, hogy az x_j értékek nem lehetnek negatív mennyiségek. A vállalatvezető természetesnek tartja, hogy nem termelhet pl. -100 hektáron búzát vagy kukoricát, vagy nem adhat az állatok elé -10 kg-ot valamely takarmányfélésegből. A matematikában azonban valamely egyenletrendszer vagy egyenlőtlenségrendszer megoldása negatív értéket is eredményezhet, illetve, ha ez nem kívánatos, vagy nem engedhető meg, azt külön feltételként kell előírni.

A mérlegfeltétel-rendszer /mérlegegyenletek és egyenlőtlenségek/, vagy másként a korlátozó feltételek rendszere [2.3./ - [2.5./ / és a határfeltételek [2.6./ általában az x_i változó többféle variációját megengedik, azaz többféle megoldás is lehetséges. Ezek azonban nem feltétlenül egyenértékűek, s célszerű kiválasztani közülük azt, amely bizonyos cél, vagy célok szempontjából leginkább megfelel a gyakorlati megvalósításra. A kiválasztás kritériumát a célfüggvényben fogalmazhatjuk meg.

A gyakorlati alkalmazás során - mint látni fogjuk - nem egyszerű probléma a célfüggvény közgazdasági tartalmának meghatározása.

A matematikai programozás, s ezen belül a célfüggvény általános problémáját igen világosan fejti ki Oskar Lange. A matematikai programozás elméletét a raciónalis cselekvésről szóló általános tudomány részének tekinti, azaz a praxeológiaihoz sorolja.^{xx/}

A gazdasági programozás szempontjából legfontosabb praxeológiai eljárási elvnek a raciónalis gazdálkodás vagy a gazdaságosság elvét tekinti, amelynek két változatát különbözteti meg:

a/ A legnagyobb eredmény elve: ha adott eszközráfordítás mellett a kifizűött cél maximális fokát érjük el.

b/ A legkisebb eszközráfordítás, vagy az eszközökkel való takarékoság elve: ha az adott célt /vagyis a cél előre meghatározott fokát/ a legkisebb eszközráfordítással érjük el.

x/ Mezőgazdasági vállalatoknál általában lehetetlen olyan tervet összeállítani, amely minden hónapban a munkaerő teljes és maradéktalan felhasználását biztosítja. E követelmény modellbe építése megoldhatatlan problémához vezetne.

xx/ Oskar Lange idézett könyve 11-15. o.

A gazdaságosság elvének két változatát Oskar Lange egyenértékűnek tekinti. "Ki lehet mutatni, hogy a racionális gazdálkodás elvének mindkét változata egyenértékű. Lényegében a racionális gazdálkodás elvének második változatát alkalmazva - adott eszközkészlet mellett - végeredményben a cél megvalósításának maximális fokát érjük el. Ha ugyanis kevesebb eszköz-t használunk a cél megvalósítása meghatározott fokának elérésére, vagyis bizonyos mennyiségű eszközt megtakarítunk, akkor azzal a cél megvalósítási fokát megfelelően növelni lehet és ezen az úton elérhetjük annak maximumát."^{x/} Helyteleníteni a gazdaságosság elvének olyan megfogalmazását, amely a cél legnagyobb megvalósítási fokát kívánja elérni a legkisebb eszköz-ráfordítás mellett. Valóban, az utóbbi megfogalmazás ellentmondásos és Oskar Lange elmélete a gazdaságosság elvéről és a két változat egyenértékűségéről előrelépést jelent.

2.2. A lineáris programozási modell általános megfogalmazása

Az előző alfejezetben a matematikai programozási modell általános megfogalmazása során nem adtuk meg konkrétan, hogy a célfüggvény vagy a mérlegfeltételek milyen függvénytípust képviselnek, csupán azt tüntettük fel, hogy itt valamilyen függvénykapcsolat van.

Mind a célfüggvényben, mind a mérlegfeltételekben sokféle függvénytípus szóba jöhet, azonban egy bonyolult függvény-rendszer tartalmazó modell gyakorlati tervezésben való alkalmazásának - legalábbis jelenleg - nincsenek meg a feltételei. Egyszerűségénél, könnyebb kezelhetőségénél és megoldhatóságánál fogva, ma a lineáris programozási modell az, amely a gyakorlatban szélesebb körben alkalmazható és elterjeszhető.

Ha mind a célfüggvény, mind a mérlegfeltételek lineárisak, azaz a

$$/2.7./ \quad z = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \text{extrém}$$

és

$$/2.8./ \quad a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r,$$

illetve

$$/2.9./ \quad a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \leq b_r,$$

$$\text{vagy } /2.10./ \quad a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \geq b_r$$

x/ Oskar Lange idézett könyve 13.o.

formában adottak, vagyis a /2.7./ - /2.10./ a változókat első fokon tartalmazzák, akkor lineáris programozási modelltől beszélünk. Ellenkező esetben nemlineáris programozási modellel állunk szemben.

A lineáris programozás mindenekelőtt azt a feltételezést tartalmazza, hogy a p_j és a_{rj} együtthatók konstans értékek és nem függenek az x_j értékek változásától. A vállalati tervezés szempontjából nézve, ez azt a feltételezést jelenti, hogy adott termékből bármilyen mennyiséget is termelünk, egységnyi termék pl. mindig ugyanannyi jövedelem realizálását teszi lehetővé, a különböző eszközökből és anyagokból egységnyi termék előállításához mindig ugyanannyit használunk fel, illetve egységnyi termék előállítása mindig ugyanannyi munkaerőt, gépi munkát igényel, stb. Indokolt az a nézet, hogy a valóságban a problémák nem ilyen egyszerűek, általában nem lineáris formában jelentkeznek. Ha a gyakorlatban mégis a lineáris programozást alkalmazzuk, akkor tudatában kell lennünk annak, hogy számításaink csak annyiban tükrözik helyesen a valóságot, amennyiben a linearitás - jobb híján - mégis elfogadható. Ha ez nem áll fenn, kénytelenek vagyunk nemlineáris programozási modellt alkalmazni.

Tekintsük az előbbieken megfogalmazott lineáris programozási modellt. Tegyük fel, hogy p_1, p_2, \dots, p_n az első, a második és így tovább, az n -edik termék egységnyi termelése /1 q, 1 ha, stb./ során nyerhető jövedelmet jelenti, míg mint ismeretes, az x_1, x_2, \dots, x_n a különböző termékekből termelendő mennyiségeket szimbolizálják.

Ha az első termék egységnyi mennyisége /1 q, 1 ha termelése/ p_1 mennyiségű jövedelem megtermelését, illetve realizálását teszi lehetővé, s ha az első termékből x_1 mennyiséget állítunk elő, akkor természetesen az első termék termelése során $p_1 x_1$ nagyságu jövedelemre számíthatunk. Ha a szorzatokat valamennyi termékre vonatkozóan képezzük, megkapjuk, hogy a különböző termékek termelése során - adott mennyiségeket termelve - mennyi jövedelem érhető el.

A termékenként nyerhető jövedelmek összege az adott vállalat által elérhető jövedelem tömegét adja, azaz a vállalati összes jövedelem tömege /z/, a /2.1./ szerint

$$/2.11./ \quad z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n,$$

vagy rövidebben felírva

$$/2.12./ \quad z = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

Ha pl. a_{r1} az első termék egységnyi megtermeléséhez szükséges munkanapok számát jelenti az r -edik hónapban és az első termékből x_1 mennyiséget állítunk elő, akkor ehhez nyilvánvalóan az r -edik hónapban $a_{r1}x_1$ munkanapra lesz szükség. Ha e szorzatot minden termékre vonatkozóan elvégezzük, megkapjuk, hogy a különböző termékek tervezett mennyiségének megtermeléséhez az r -edik hónapban hány munkanapra van szükség. Ezek összegezése az adott hónapban a termeléshez szükséges munkanapok összes mennyiségét adja, azaz a /2.9./ formulát felhasználva

$$/2.13./ \quad a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n$$

vagy rövidebben

$$/2.14./ \quad \sum_{j=1}^n a_{rj}x_j.$$

A munkanapszükséglet nem lehet több a rendelkezésre álló, illetve teljesíthető munkanapok számánál, vagyis b_r -nél, azaz

$$/2.15./ \quad \sum_{j=1}^n a_{rj}x_j \leq b_r$$

Hasonló módon fogalmazhatjuk meg a gépmunka-mérlegeket, anyagmérlegeket, stb., amelyek részletesebb tárgyalásától e helyütt eltekintünk.

2.3. Egyszerű példa a lineáris programozás szemléltetésére

A továbbiak során egy nagyon leegyszerűsített feladat alapján vizsgáljuk meg a lineáris programozás alkalmazási lehetőségét, megvilágítva az alkalmazás gazdasági hátterét.

Tételezzük fel, hogy valamely mezőgazdasági vállalat 1000 ha területtel rendelkezik. A rendelkezésre álló területen négyféle árunóvény termelésére van lehetőség, amelyeket jelöljünk az abc kezdő nagybetűivel, tehát A, B, C, D-vel. Rendelkezésre áll a négyféle árunóvény termelésének kidolgozott technológiája, amely tartalmazza azok termelésének jövedelem-számításait is.

A problémát leegyszerűsítjük és feltételezzük, hogy a termeléshez csak munkaerőt használunk fel. /A többi tényező vagy korlátlan mennyiségben áll rendelkezésre, vagy egyszerűen e helyütt vizsgálatuktól eltekintünk./ A munkaerő-felhasználás idényszerűsége azonban szükségessé teszi annak vizsgálatát, hogy az év különböző időszakában hogyan alakul a munkaerő-szükséglet. Etekintetben legalább havi részletezésre van szükség. Az egyszerűség kedvéért példánkban csak két munkacsucs-hónap vizsgálatát végezzük el, azaz csak az I., illetve a II. időszakot különböztetjük meg.

A technológiákból megállapítható, hogy az A termék 1 hektáron való termelése az I. csucsidőszakban 4 munkanapot igényel és 1 hektáron 900 R jövedelem érhető el. Ugyanezen adatok a B termék termelésére vonatkozóan 4, 2, 900, a C termék termelésére vonatkozóan 4, 6 és 1000, illetve a D termék termelésére 2, 10 és 1100. Foglaljuk ezeket az adatokat áttekinthető formában az 1. táblázatba.

1.sz. táblázat

Technológiai adatok

Megnevezés	A	B	C	D
	termékek technológiai és jövedelemadatai 1 ha-ra			
Területszükséglet, ha	1	1	1	1
Munkanapszükséglet az I. csucsidőszakban	1	4	4	2
Munkanapszükséglet a II. csucsidőszakban	4	2	6	10
Jövedelem, R	900	900	1000	1100

Most az a feladat, hogy készítsük el az adott mezőgazdasági vállalat termelési tervét.

Először oldjuk meg a feladatot pusztán logikai kalkuláció alapján, ahogyan azt a jelenlegi gyakorlatban is csinálják. Ennek keretében mindenképp el kell döntenünk, hogy melyik terméket hány hektár területen kívánjuk termelni, azaz az 1000 ha területet elosztjuk a négyféle árunóvény termelésére. Az elosztást azonban - mivel a jövedelem nagysága nem közömbös a vállalat szempontjából - úgy igyekszünk megoldani, hogy az 1000 ha területen minél nagyobb jövedelem elérése váljon lehetővé. Ezért természetesen az egységnyi területen nagyobb jövedelmet adó termék termelését előnyben részesítjük a kevesebb jövedelmet biztosító termékkel szemben.

A táblázatból kitéjük, hogy 1 ha-on legnagyobb jövedelmet a D termék termelése biztosít. Igyekszünk tehát a D terméket minél nagyobb területen, mondjuk 400 ha-on termelni. Az 1 ha-on termelhető jövedelemtömeg szempontjából a második legjobb termék a C termék, termeljük ezt, mondjuk 300 ha-on. Az A és B termék 1 ha-on termelve, azonos tömegű jövedelem elérését teszi lehetővé, azonban az A termék termelése előnyösebbnek látszik, mert kevesebb munkaerő-ráfordítást igényel, ezért, mondjuk az A terméket 200, a B terméket pedig 100 ha-on termeljük. Ezzel az 1000 ha területet a négy növény termelésére elosztottuk a következőképpen:

A termék	200 ha
B termék	100 ha
C termék	300 ha
D termék	400 ha
Összesen:	1000 ha

Egyelőre nem tudjuk, hogy az így meghatározott termelési szerkezet az adott vállalatnál megvalósítható-e vagy sem. Erről csak azután tudunk meggyőződni, ha elkészítjük a különböző mérlegeket, valamint az adott termelési szerkezet alapján várható jövedelemtervet és megvizsgáljuk, hogy a tervezett termelési szerkezet megvalósításához rendelkezünk-e elegendő munkaerővel /gép- és eszközkapacitással, valamint a szükséges anyagokkal/ és az elérhető jövedelmet elfogadhatónak tartjuk-e. E vizsgálathoz tehát el kell készítenünk a különböző mérlegeket és meg kell határoznunk az elérhető vállalati jövedelmet. A mérlegek és jövedelemszámítás elkészítése viszonylag egyszerű, mindössze a technológiai adatokat kell megszorozni a termelési szerkezet adataival és az így kapott szorzatokat kell összegeznünk. A fentiekben meghatározott termelési szerkezet, valamint az 1.sz. táblázatban rögzített technológiai és jövedelmi adatok alapján tehát a következő számításokat kell elvégeznünk:

Területmérés

$$1 \cdot 200 + 1 \cdot 100 + 1 \cdot 300 + 1 \cdot 400 = 1000 \text{ ha,}$$

Munkanap-szükséglet az I. csucsidőszakban

$$1 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 4 \cdot 300 + 2 \cdot 400 = 2600 \text{ munkanap}$$

/2.16./Munkanap-szükséglet a II. csucsidőszakban

$$4 \cdot 200 + 2 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 10 \cdot 400 = 6800 \text{ munkanap}$$

Elérhető jövedelem

$$900 \cdot 200 + 900 \cdot 100 + 1000 \cdot 300 + 1100 \cdot 400 = \\ = 1\ 010\ 000 \text{ R.}$$

Számításaink alapján kitűnik, hogy az adott technológiai adatok alapján a tervezett termelési szerkezet megvalósításához 1000 ha terület, az I. csucsidőszakban 2600 munkanap, a II. csucsidőszakban 6800 munkanap szükséges és az elérhető jövedelem 1 010 000 R. Most azt kell megvizsgáljunk, hogy a 2600, illetve 6800 munkanap biztosítható-e az adott vállalatnál és meg vagyunk-e elégedve az elérhető jövedelemmel. Amennyiben a szükséges munkanap nem áll rendelkezésre, hanem az adott vállalat ennél kevesebb munkaerővel rendelkezik, vagy a jövedelmet kevésnek tartjuk, akkor vagy a technológiát kell megváltoztatni, vagy a termelési szerkezetet, vagy mindkettőt.

Ebben az esetben viszont ismét el kell végeznünk a mérlegszámításokat és újra megvizsgálni, hogy az így előállított tervváltozat kapacitásigényét tudja-e a vállalat biztosítani, illetve az elérhető jövedelem elfogadható-e a vállalat számára. A termelési szerkezet és a technológia változtatását mindaddig kell végeznünk, amíg egy olyan termelési tervhez jutunk, amelyben valamennyi mérlegünk elfogadható eredményt ad és az előállítható jövedelem is elfogadható a vállalat számára.

Egyszerűsített példánkban viszonylag könnyű feladat volna több tervváltozat előállítása és vizsgálata, de képzeljük el egy vállalat komplex tervét, amikor nemcsak négy árunövényt kell figyelembe venni, hanem az összes, az adott vállalat körülményei között termelhető árunövényt, a zöldség-, a szőlő- és a gyümölcsstermelést, a rét- és a legelőgazdálkodást, az állattenyésztést, a takarmánytermelést- és vásárlást, stb. Sőt egy-egy termék termelése többféle technológiai változat szerint is lehetséges. De a munkaerőt sem két időszakban, hanem legalább 12 időszakban /havonként/ vesszük figyelembe. Vizsgálunk kell a gyakorlati tervezés során a traktormérlegeket traktorkategóriánként, vagy típusonként szintén 12-12 időszakot véve alapul. Hasonlóképpen tekintetbe kell venni más gépipunkta mérlegeket is /pl. kombájn, öntözőgép, stb./, anyagmérlegeket is, takarmánymérlegeket is, stb.

Ha összeállítottuk ezeket a mérlegeket, kiderül, hogy egyik-másik mérlegben a szükséglet és a kapacitás nincs összhangban. Most változtatjuk a termelési szerkezetet, vagy a technológiát, vagy mindkettőt, ismét összeállítjuk a mérlegeket, s újra nincs minden mérlegben összhang, sőt lehetséges, hogy azáltal, hogy megteremtettük valamely mérleg összhangját, egy másik mérlegben azt felborítottuk. Nagyon sokszor kellene a tervet át dolgozni, hogy valamennyi mérlegben összhangot teremtsünk. Erre a mezőgazdasági vállalatok vezetőinek aligha van lehetőségük, ezért sok esetben némi javítgatással csak a mérlegek látszólagos összhangját teremtik meg. Mint látni fogjuk, a matematikai programozás egyik fontos előnye éppen az, hogy a modellben figyelembe vett összes mérlegek összhangját biztosítja.

Térjünk most vissza egyszerű példánkhoz. Adjuk meg a logikai kalkulációnak azt az előnyt - bár gyakorlatilag ez így soha nem sikerül -, hogy feltételezzük, olyan tervet sikerült az első lépésben készítenünk, ahol a mérlegek összhangban vannak, mondjuk az I. csúcsideszakban pontosan 2600 munkanap, a II. csúcsideszakban pedig pontosan 6800 munkanap és 1000 ha termőterület áll a vállalat rendelkezésére. A logikai uton összeállított tervet tehát mindenképpen jónak, illetve elfogadhatónak tarthatjuk, hiszen valamennyi mérlegünk összhangját biztosítottuk és a tervezés során nagymértékben érvényesíteni tudtuk azt az elvet is, hogy minél jövedelmezőbb termelési szerkezetet tervezünk meg.

Tegyük fel azonban, hogy a vállalat ennek ellenére szeretne meggyőződni arról, hogy van-e lehetőség az előbbi tervnél jobb, jövedelmezőbb terv összeállítására. A leckét úgy adja fel a programozónak, hogy az adott termeléstehnológiákat véve figyelembe, készítsen egy olyan termelési tervet, amely pontosan 1000 ha terület hasznosítását teszi lehetővé, s az I. csucsidőszak pontosan 2600, a II. csucsidőszak pontosan 6800 munkanap felhasználásával jár, de a lehető legnagyobb jövedelmezőség elérését biztosítja.

A programozó az így megfogalmazott feladatból indul ki. Adottnak tekinti tehát a termeléstehnológiai adatokat, valamint a termelési forrásokra megadott adatokat és keresi azt a termelési szerkezetet, amely 1000 ha terület, 2600, illetve 6800 munkanap felhasználásával a legnagyobb jövedelmet biztosítja. Ennek alapján a /2.16./ formulát úgy alakítja át, hogy az egyes termékek termelésére felhasznált területet ismeretlenként kezeli, vagyis az A termék termelésére fordított területet x_1 -gyel, a B termék termelésére fordított területet x_2 -vel, és így tovább, x_3 -mal, illetve x_4 -gyel jelöli. Ennek megfelelően a /2.16./ formulát a következőképpen alakítjuk át:^{x/}

Területmérés

$$1 x_1 + 1 x_2 + 1 x_3 + 1 x_4 = 1000 \text{ ha}$$

Munkanap-szükségleti mérleg az I. csucsidőszakban

$$1 x_1 + 4 x_2 + 4 x_3 + 2 x_4 = 2600 \text{ munkanap}$$

/2.17./ Munkanap-szükségleti mérleg a II. csucsidőszakban

$$4 x_1 + 2 x_2 + 6 x_3 + 10 x_4 = 6800 \text{ munkanap}$$

Elérhető jövedelem

$$900 x_1 + 900 x_2 + 1000 x_3 + 1100 x_4 = \text{maximum}$$

A /2.17./ formula tehát megfelel a /2.16./ formulának, csak most a termelési szerkezetet egyelőre ismeretlenként kezeljük.

A feladat megoldásához tehát rendelkezünk egy négyismeretlenes 3 egyenlethől álló rendszerrel /később látni fogjuk, hogy nemcsak egyenlettel, hanem leginkább egyenlőtlenséggel

x/ Azokat a konstansokat, amelyeknek értéke 1, természetesen elhagyhatjuk, most a könnyebb követhetőség érdekében tűntettük fel.

dolgozunk/, amelyet úgy kell megoldanunk, hogy közben egy függvény /a célfüggvény/ maximumát keressük.

A /2.17./ feladat adatait foglaljuk táblázatba, ahol a baloldali oszlopban feltüntetjük a sorok megnevezését, majd a további oszlopok az egyes termékek egységnyi mennyiségére /1 ha-on történő termelésére/ vonatkozó értékeket /technológiai koefficienseket és fajlagos jövedelemmutatókat/, illetve az utolsó oszlop a vállalat^{x/} egészére vonatkozó kapacitáskorlátokat tartalmazza. Az x_1, x_2, x_3, x_4 szimbólumokat - amelyek a különböző termékek termelési szintjét jelentik - a fejrovatban emeltük ki /2. sz. táblázat/.

A 2. sz. táblázat tulajdonképpen egy olyan kiinduló tervet reprezentál, amikor még semmit nem termelünk, minden vállalati erőforrást tartalékolunk és a vállalati jövedelem, mint azt az utolsó oszlop célfüggvény-adata mutatja, jelenleg még 0.

2.sz. táblázat

Matematikai modell

Megnevezés	x_1	x_2	x_3	x_4	Vállalat
	termék				
Terület, ha	1	1	1	1	1000
Munkanap az I. csúcsideőszakban	1	4	4	2	2600
Munkanap a II. csúcsideőszakban	4	2	6	10	6800
Jövedelem, R	900	900	1000	1100	0

A továbbiakban lépésről-lépésre újabb tervváltozatokat fogunk előállítani mindaddig, amíg az adott feltételek között legnagyobb jövedelmet biztosító tervhez nem jutunk.

A 2. sz. táblázatból kitűnik, hogy hektáronként a D termék ad legtöbb jövedelmet, tehát természetes, hogy ennek minél nagyobb területen való termelésére törekszünk. Kérdés a-

x/ Az utolsó oszlopban most csak egyszerűen vállalat megnevezést alkalmazunk, mert az adatok az egész vállalatra vonatkoznak, itt még csak a rendelkezésre álló erőforrásokat, a későbbiekben adott termék vagy termékek termelésének területét, s a vállalat várható jövedelmét fogjuk itt megtaglalni.

zonban, hogy a termeléshez szükséges erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiségek /terület, munkaerő/ a D termék termelését hány hektáron teszik lehetővé. Ezt megkapjuk, ha a jobb-
oldali oszlop adatait /a rendelkezésre álló kapacitásokat/ el-
osztjuk a D termék oszlopához tartozó adatokkal /a D termék
fajlagos kapacitásszükségletével/, azaz

1000 :	1 = 1000
2600 :	2 = 1300
6800 :	10 = 680

Mivel egyik erőforrásból sem használhatunk fel többet, mint amennyi rendelkezésünkre áll, nyilvánvalóan a termelést a szűk keresztmetszethez kell igazítanunk, tehát a D terméket legfeljebb 680 ha területen termelhetjük.

A D termék adatait 680-nal szorozva, megkapjuk a D termék 680 ha-on történő termeléséhez szükséges területet és munkanap-szükségletet. Ha az így kiszámított szükségleti adatokat levonjuk a rendelkezésre álló kapacitásokból, megkapjuk azt a területet, illetve munkanap-mennyiségeket, amelyeket nem használunk fel a D termék 680 ha-on történő termelése során. Eszerint az eddig fel nem használt kapacitás a következőképpen alakul:

1000 - 1 . 680 = 1000 - 680 = 320 ha
2600 - 2 . 680 = 2600 - 1360 = 1240 munkanap az I. csucs- időszakban
6800 - 10 . 680 = 6800 - 6800 = 0 munkanap a II. csucs- időszakban

és a megfelelő jövedelem, azaz a célfüggvény megfelelő értéke

0 - 1100 . 680 = - 748 000 R

A D terméket tehát 680 ha-on termelve, a II. csucsidőszakban rendelkezésre álló munkanapot teljesen felhasználtuk, de a területet és az I. csucsidőszakban rendelkezésre álló munkanapok mennyiségét nem használtuk ki teljesen. Az elérhető jövedelem 748 000 R /ez a táblázatban ugyan mínusz előjellel szerepel, amely - mint később látni fogjuk - csupán számítás-technikai okokból adódik, s azt -1-gyel szorozva, pozitív értéket kapunk/.

Most az a kérdés, tudjuk-e hasznosítani a még fel nem használt 320 ha területet és az I. csucsidőszakban még rendelkezésre álló 1240 munkanapot. Kísérreljük meg annak hasznosítását a C termékkel. A C termék azonban a II. csucsidőszakban is igényel munkanapot, így termelése csak akkor válik lehetővé, ha egyidejűleg csökkentjük a D termék termelését, s ezáltal a II. csucsidőszakban munkanapot szabadítunk fel.

A C termék 1 ha-on történő termelése a II. csucsidőszakban 6 munkanapot igényel, a D termék pedig 10 munkanapot. Ahhoz, hogy a C terméket 1 ha-on termelni tudjuk, a D termék területét tehát 6:10 = 0,6 ha-ral csökkenteni kell. Miközben

azonban a D termék termelését 0,6 ha-ral csökkenteni, nemcsak a II. csucsidőszakban szabadítunk fel a termelésből 6 munkanapot, hanem az I. csucsidőszakban is $2 \cdot 0,6 = 1,2$ munkanapot, s egyidejűleg $1 \cdot 0,6 = 0,6$ ha területet is, s ezzel egyidőben elveszítünk $1100 \cdot 0,6 = 660$ R jövedelmet.

Ha mármost a C termék 1 ha-on való termelése igényel 1 ha területet, de ugyanakkor a D termék termelésének csökkentése révén 0,6 ha-t a termelésből felszabadít, a valóságos területigény csak a kettő különbsége, azaz $1 - 0,6 = 0,4$ ha.

Hasonlóképpen a C termék az I. csucsidőszakban 4 munkanapot igényel, de a D termék termelésének csökkentése révén $2 \cdot 0,6 = 1,2$ munkanapot felszabadít, azaz a valóságban $4 - 1,2 = 2,8$ munkanap-igénnyel lép fel. A II. csucsidőszakban a C termék igénye 6 munkanap, de egyúttal $0,6 \cdot 10 = 6$ munkanap felszabadítását is biztosítjuk, azaz a II. csucsidőszakban a munkanap-igény $6 - 6 = 0$.

Végül a C termék 1 ha-on 1000 R jövedelmet ad, de ugyanakkor $1100 \cdot 0,6 = 660$ R jövedelem elvesztését idézi elő, azaz a valóságban csak $1000 - 660 = 340$ R jövedelmet biztosít.

Természetesen a terv javítása nemcsak a C, hanem az A vagy a B termék termelésbe vonásával is elképzelhető, sőt lehet, hogy ez utóbbi még célszerűbb, ezért a C termékhez hasonlóan átalakítjuk az A és B termékhez tartozó adatokat is. Az így előállított adatokat a 3. sz. táblázatba foglaljuk:

3.sz. táblázat

Első tervvariáns

Megnevezés	x_1	x_2	x_3	Vállalat
	termék			
Terület, ha	0,6	0,8	0,4	320
Munkanap az I. csucsidőszakban	0,2	3,6	2,8	1240
x_4 / D termék termelése ha/	0,4	0,2	0,6	680
Jövedelem, R	460	680	340	-74800

A 3. sz. táblázat szintén egy tervváltozatot mutat. A megnevezés oszlopban a II. csucsidőszak már nem található, mivel a II. csucsidőszakban a rendelkezésre álló munkanapot felhasználtuk. Helyette beirtuk a D termék termelését^{x/}, amelynek termelésbe vonása tette szükségessé, illetve lehetővé

x/ / x_4 -et/

a II. csucsidőszakban rendelkezésre álló munkanapok felhasználását. A 3. sz. táblázatba foglalt tervváltozat azt mutatja, hogy amennyiben a D terméket 680 ha-on termeljük, a II. csucsidőszakban rendelkezésre álló munkanapot teljes mértékben felhasználjuk a termelésre, de 320 ha terület és az I. csucsidőszakban 1240 munkanap még kihasználatlanul marad. Ez a termelési terv 748 000 R jövedelem elérését teszi lehetővé. Az x_1 , x_2 és x_3 oszlopokhoz tartozó adatok azt mutatják, hogy az A termék 1 ha-on való termelése 0,4, a B terméké 0,2, a C terméké 0,6 ha-ral teszi szükségessé a D termék termelésének csökkentését, így a valóságban az A termék csak 0,6, a B termék 0,8, a C termék pedig 0,4 ha területet igényel a 320 ha-ból ahhoz, hogy 1 ha-on termelhessük. Hasonlóképpen a D termék termelésének csökkentéséből adódóan módosul az I. csucsidőszakban a munkakétség, valamint az elérhető jövedelem is.

A 3.sz. táblázat utolsó sorából kitűnik, hogy az új helyzetben a B termék ad egységnyi területen a legnagyobb jövedelmet. Újra megkeressük a szűk keresztmetszetet, s az egész táblázatot az előbbi módon átszámítva, új táblázathoz jutunk. /A számítások további bemutatásától eltekintünk, hiszen ezt a későbbiekben részletesen fogjuk tanulni./ A számítások során kapott adatokat a 4. sz. táblázatban foglaljuk össze. Eszerint a D termék termelése 611,11 ha, a B terméké pedig 344,44 ha volt. Ez a termelési szerkezet lehetővé teszi 982 219,20 R jövedelem elérését, s a munkaezőnek mindkét csucsidőszakban történő teljes felhasználását, azonban nem használja fel teljesen a területet, hanem 44,45 ha kihasználatlanul marad.

4.sz. táblázat

Második tervvariáns

Megnevezés	x_1	x_3	Vállalat
	termék		
Terület, ha	0,55	-0,22	44,45
x_2 /B termék termelése, ha/	0,06	0,78	344,44
x_4 /D termék termelése, ha/	0,39	0,44	611,11
Jövedelem, R	422,2	-190,4	-982 219,20

A táblázatból az is kitűnik, hogy az A termék termelése jövedelmező volna, hiszen az új helyzetben ha-onként 412,2 R jövedelemmel kecsegtet. A C termék termelése az új helyzetben veszteséges lenne, amit a célfüggvény koefficiensének negatív előjele mutat.

Megkeressük most az A termékre a szűk keresztmetszetet /ez pontosan a terület lesz/ és az előbbi számításokat megismételve, újabb tervváltozathoz jutunk /5. sz. táblázat/.

5.sz. táblázat

Harmadik tervváriáns

Megnevezés	x ₃			Vállalat
	termék			
x ₁ /A termék termelése, ha/			-0,4	80,82
x ₂ /B termék termelése, ha/			0,8	339,59
x ₄ /D termék termelése, ha/			0,6	579,59
Jövedelem, R			-21,52	-1016 340,00

Az 5. sz. táblázat olyan termelési szerkezetet mutat, amelyben az A terméket 80,82 ha-on, a B terméket 33959 ha-on, a D terméket 579,59 ha-on^{x/} termeljük és az elérhető jövedelem 1 016 340 R. Ezzel optimális megoldáshoz jutottunk, hiszen - mint a táblázatból kitűnik - a C termék termelése nem lenne jövedelmező /negatív előjel/. Könnyen ellenőrizhető a mérlegek elkészítésével, hogy ez a termelési szerkezet is pontosan 2600, illetve 6800 munkanapot igényel és 1000 ha területet használ fel.

Figyelemreméltó, hogy bár a feladat igen egyszerű és a logikai kalkulációval összeállított vetésszerkezet tervezése során is nagy sulyt helyeztünk a minél magasabb jövedelem elérésére, a logikai kalkulációval előállított tervben elért 1 010 000 R jövedelemmel szemben a lineáris programozással összeállított termelési szerkezet 1 016 340 R jövedelem, azaz 6 340 R jövedelemtöbblet elérését teszi lehetővé. /A gyakorlati tervezés során többmillió R jövedelemtöbbletet is el tudunk érni./

Érdekes megfigyelni, hogy a C termék - bár önmagában vizsgálva, a második legjövedelmezőbb termék -, nem szerepel a programozással készített termelési tervben. A gyakorlatban is az a helyzet, hogy gyakran egy termék, amely önmagában /ágazati szinten/ vizsgálva, jövedelmezőbbnek mutatkozik, egyáltalán nem biztos, hogy az egész vállalati komplexumban is jövedelmezőbb, sőt esetleg veszteséges is lehet. /A C termék termelése ugyanis ha-onként 22,32 R-tal csökkentené az elérhető jövedelmet, mint ez az 5. sz. táblázatból kitűnik./

x/ Gyakorlatilag a tizedes számokat egész száma kerekítjük, itt azonban célszerű volt két tizedes pontosságot feltüntetni az ellenőrizhetőség érdekében.

A matematikai programozás alkalmazásának nagy előnye, hogy az egyes ágazatokat nemcsak önmagukban, a vállalat komplexumából kiragadva tudjuk vizsgálni, hanem a vállalatot teljes komplexumában át tudjuk tekinteni. Mint az eddigiekből is kitélt, az optimális tervváltozatot most is több lépésben állítottuk elő, de minden lépésben a modellben levő összes adatot átszámítottuk, egymással kapcsolatba, összefüggésbe hoztuk, s a vállalatot teljes komplexumában vizsgáltuk.

Egyszerű példánkban könnyen megtaláljuk annak az okát is, hogy a C termék, amely önmagában vizsgálva, a második az I ha-on elérhető jövedelem nagyságát illetően, miért veszteséges az egész vállalati komplexumot tekintve, illetve a B termék, amely önmagában vizsgálva, I ha-on a legkevesebb jövedelmet adja, miért foglalja el a második helyet a vállalat teljes komplexumában. Tekintsük meg még egyszer az I.sz. táblázatot. A legjövedelmezőbb a D termék. Munkacsúcsa a II. csúcsideőszakban van. Ugyancsak itt találjuk a munkacsúcsot a C termék esetében is. A II. csúcsideőszakban rendelkezésre álló munkanapokért folyó versenyből természetesen a D termék kerül ki győztesen, mert magasabb jövedelmet biztosít. A C termék termelése csak a D termék termelésének nagyarányú csökkentése útján lenne lehetséges. Ugyanakkor a B termék munkacsúcsa éppen az I. csúcsideőszakban van, azaz a D termékkel jól kiegészítik egymást. Ugyancsak a II. csúcsideőszakban találjuk az A termék munkacsúcsát is.

Az ilyen egyszerű feladatoknál könnyű áttekinteni az adatok kapcsolatát, rámutatva arra, hogy az egyes termékek között hol van összhang, vagy ellentmondás. Egy mezőgazdasági vállalat gyakorlati tervezése során viszont több mint 100 sorból és oszlopból álló modellhez is eljuthatunk. Márpedig kb. 10 000 adat kapcsolatát és összefüggését aligha vagyunk képesek pusztán logikai uton áttekinteni.

A mérlegösszefüggések problémáját más oldalról közelítjük meg, ha a tervet csupán logikai uton állítjuk össze és más oldalról, ha a matematikai tervezés módszerét alkalmazzuk. Ha csupán logikai uton tervezünk, akkor - mint láttuk -, először megtervezük a termelési szerkezetet és a termelési technológiákat, majd kiszámítjuk a mérlegek szükségleti oldalát, végül ezt egybevetjük a rendelkezésre álló kapacitással, azaz forrás oldalal. A valóságban azonban általában a mérlegek forrás oldala a "meghatározott", s olyan termelési szerkezetet kell kialakítani, valamint olyan technológiai eljárásokat célszerű alkalmazni, amelyekben a szükségleti oldala rendelkezésre álló kapacitásnak megfelel és emellett a legnagyobb vállalati jövedelmet biztosítja. A matematikai tervezés alkalmas a probléma ilyen megoldására. /Később látni fogjuk, hogy valójában a termelési erőforrások mennyisége sem meghatározott. A matematikai programozás ekkor is hatékonyan alkalmazható az erőforrás szükségletnek a termelési szerkezettel összehangolt meghatározására. /

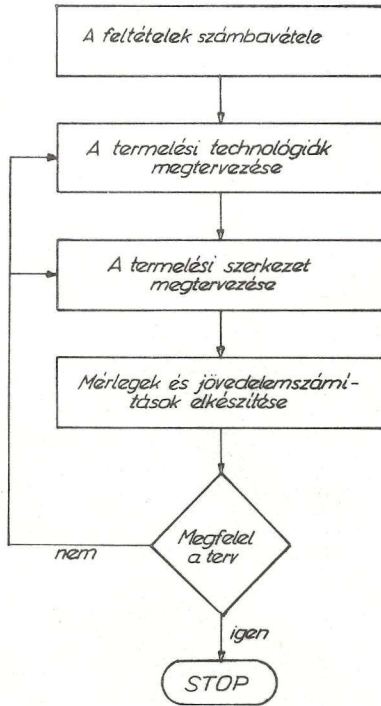
2.4. A döntési folyamat összehasonlítása

Az előbbiek során egyszerű feladatot oldottunk meg, egyrészt a jelenleg széles körben alkalmazott tervezési módszerrel, majd pedig a lineáris programozással. Ennek alapján alkalmunk van arra, hogy a kétféle módszerrel végigvezetett döntési folyamatot ábrázoljuk és összehasonlítsuk.

Induljunk ki először a jelenleg általánosan használatos módszerrel végzett tervezésből. Láttuk, hogy ekkor először számbavesszük a feltételeket, ezután megtervezük a termelési technológiákat, majd pedig a termelési szerkezetet. /Természetesen a sorrend meg is fordítható úgy, hogy először a termelési szerkezetet, majd a technológiákat tervezzük meg./ A következő lépésben a mérleg- és jövedelemvizsgálatokat végezzük el, amikor felvetődik a kérdés, hogy a tervezett termelési szerkezet és termelési technológiák megvalósításához rendelkezünk-e a szükséges kapacitásokkal, vagyis a területmérleg, a munkaerómérlegek, a gép- és az anyagmérlegek, stb. alapján a terv megvalósítható-e és a terv szerint elérhető jövedelem nagysága megfelelő-e számunkra. Ha igen, a termelési folyamat befejeződött /stop/, tehát döntünk a terv elfogadásáról és megvalósításáról. Ha a mérlegek és a jövedelem nem megfelelőek, akkor módosítjuk a termelési szerkezetet, vagy a termelési technológiákat, vagy mindkettőt és ismét elvégezzük a mérleg- és a jövedelemvizsgálatot. A termelési szerkezet, valamint a termelési technológiák változtatását, a mérleg- és a jövedelemvizsgálatokat mindaddig végezzük, vagyis az egész döntési folyamatot mindaddig ismételjük, amíg olyan tervhez nem jutunk, amely mind a mérlegfeltételek, mind a jövedelem szempontjából számunkra elfogadható. Az ilyen módon végzett döntési folyamatot az 1. ábra szemlélteti.

Egy komplex vállalati tervezés esetén, amikor sokféle termelési tevékenységgel és termelési technológiával, valamint sokféle mérleggel kell dolgoznunk, a mérlegszámítások és a jövedelemvizsgálat igen munkaigényes és a folyamat többszöri megismétlésére a mezőgazdasági vállalatok szakembereinek aligha van ideje.

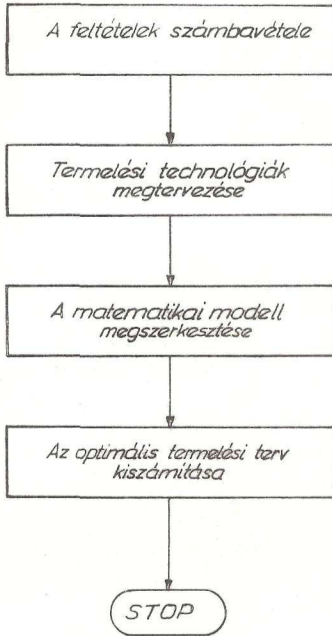
Mint láttuk, másként történik a tervezés, ha azt matematikai programozással végezzük. Az első feladat most is a feltételek számbavétele, majd ezt követi a termelési technológiák megtervezése. Ezután összeállítjuk és megoldjuk a matematikai modellt, amelynek eredményeként olyan termelési szerkezetet kapunk, amely biztosan minden mérlegfeltétel tekintetében kielégíti előírásainkat, s e feltételek mellett a legnagyobb jövedelmet biztosítja. /Természetesen ha egyáltalán lehetséges a feladat megoldása, illetve ha a célfüggvényben a legnagyobb jövedelem biztosítását irtuk elő./



A döntési folyamat vázlatja

1. ábra

Most tehát lényegében nincs szükség mérlegvizsgálatokra, hiszen a mérlegekre előírt feltételek teljesülnek, - ha van a feladatnak megoldása - és nincs szükség jövedelemszámításra sem, hiszen a számítógéptől nyert megoldás az elérhető jövedelmet is tartalmazza, sőt biztos, hogy ez a jövedelem az adott feltételek között /mármint a modellbe beépített feltételek között/ maximális. A matematikai programozással megvalósuló tervezés folyamatát a 2. ábra szemlélteti.



*A döntési folyamat vázlatja
matematikai programozás esetén*

2. ábra

datának kicserélése az új feltételeknek megfelelően, s a modellt újra megoldva, új tervváltozatot kapunk. Másrészt, mint látni fogjuk, a matematikai modellt egy-egy megoldása során is több tervváltozatot nyerhetünk.

Eddig a matematikai programozással végzendő tervezés leg-egyszerűbb esetét, a lineáris programozást tekintettük példaként, s csak az volt a feladat, hogy adott termelési technológiák és adott termelési kapacitások mellett optimalizáljuk a termelési szerkezetet. Később találkozni fogunk olyan problémákkal, amikor a lineáris programozással a termelési szerkezet és a termelési források összefüggő optimumát kell egyidejűleg meghatározni, illetve olyan problémákkal is, amikor a termelési technológiai terveket szintén optimalizáljuk és számítógéppel tervezzük meg egyidejűleg és összefüggésben a termelési

Az eddigiekkel kapcsolatban néhány megjegyzést tehetünk:

Mindkét tervezési módszer vizsgálatánál feltételeztük, hogy csak egy tervváltozatot készítünk. Valójában azonban - mint azt majd a gyakorlati alkalmazás során látni fogjuk -, célszerű többféle tervváltozatot is elkészíteni, s azokat összehasonlítva, a gyakorlati megvalósításra leginkább megfelelő változatot kiválasztani és elfogadni. Ez azzal jár, hogy megvizsgáljuk, van-e lehetőség a feltételek megváltoztatására, vagy számolhatunk-e azok megváltozásával és ha igen, számbavesszük, milyen változtatások, illetve változások lehetségesek. Ezután megnézzük, hogy a feltételek különböző változása esetén milyen tervet lenne célszerű megvalósítani. Az így elkészített tervek összehasonlítása során támpontot kapunk arra vonatkozólag is, hogy a változtatások milyen eredménnyel járhatnak, célszerű-e a változtatásokat végrehajtani, vagy nem, illetve, ha a változások elkerülhetetlenek, mit kell tennünk, hogy alkalmazkodjunk azokhoz.

Mindkét tervezési módszer alkalmas arra, hogy több tervváltozatot állítsunk elő. A matematikai tervezés azonban itt még inkább előnyökkel rendelkezik, hiszen elegendő a modell néhány a-

szerkezet és a termelési források optimumával. Végül foglalkozni fogunk nem-lineáris modellekkel is. Ilyen komplex és bonyolult tervezési feladat megoldása a jelenleg általánosan használt tervezési módszerekkel még nehezebb feladat elé állítana bennünket.

3. FEJEZET

Kétváltozós lineáris programozási modellek. Grafikus lineáris programozás

A 2.3. pontban tulajdonképpen egy egyszerű lineáris programozási feladatot oldottunk meg anélkül, hogy ismernénk a lineáris programozás matematikai alapjait. Ahhoz azonban, hogy ilyen vagy még nagyobb és bonyolultabb többváltozós és több feltételekből álló lineáris programozási feladatokkal megismerkedjünk, el kell sajátítanunk a szükséges matematikai alapokat. Mielőtt a matematikai alapokkal megismerkednénk, egyszerű kétváltozós feladatokkal fogunk foglalkozni.

A kétváltozós feladatok nagyon egyszerűek, s megoldásukhoz elegendők a középiskolai matematikai ismeretek. Másrészt a kétváltozós feladatok lehetővé teszik a lineáris programozás háttérének szemlélését. A 4. fejezetben látni fogjuk azt is, hogy bizonyos körülmények között a kétváltozós lineáris programozási modellek jól alkalmazhatók egyszerűbb gyakorlati feladatok megoldására.

Legyen feladatunk a következő. Meg kell határozni azt az x_1 , x_2 nem-negatív megoldást, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$\begin{array}{r} \text{/3.1./} \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ \hline p = 15x_1 + 20x_2 = \text{maximum} \end{array}$$

A probléma felfogható úgy, hogy egy vállalat kétféle terméket termelhet, s ennek során kétféle termelési erőforrást használ fel. Az első erőforrásból 16 egység áll rendelkezésre, a második erőforrásból pedig 14 egység. Az első termék egy egységének termeléséhez az első termelési erőforrásból 2 egység, a másodikból 3 egység felhasználása szükséges. Ugyanez a második termék termelésénél 4, illetve 2 egység. Az első termék 1 egységének termelése 15 egységnyi jövedelem, a második termék pedig 20 egységnyi jövedelem realizálását teszi lehetővé.

A feladat az, hogy meg kell határozni, hogy a kétféle terméket hány egységben célszerű termelni, úgy, hogy egyik termelési erőforrásból sem lehet többet felhasználni, mint a rendelkezésre álló kapacitás és a lehető legnagyobb /maximális/ jövedelmet érjük el. /Egyszerű példafeladatok esetén általában eltekintünk a konkrét tartalomtól, ezért mind a termelést, mind a jövedelmet és a termelési források kapacitását egységekben adjuk csak meg. Az egységek jelenthetnek 1, 10, 100 vagy 1000 mázsát, hektárt, litert, stb./

Vizsgáljuk meg, hogyan tudjuk a /3.1./-ben megfogalmazott feladatot megoldani. Vegyük először az első feltételt.

$$/3.2./ \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 16$$

Ha a 16 egységnyi kapacitást csupán az első termék termelésére használnánk fel, vagyis a második terméket egyáltalán nem termelnénk, akkor az első termékből $16/2 = 8$ egységet állíthatunk elő. Az első feltétel szerint tehát egy lehetséges megoldás a következő:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8, \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ha viszont csak a második terméket termelnénk, abból $16/4 = 4$ egységet tudnánk előállítani. Ekkor tehát a megoldásunk így alakulna:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= 4. \end{aligned}$$

A /3.2./ feltétel viszont mindazon pontokra teljesül, amelyekre a

$$/3.3./ \quad 2 \cdot x_1 + 4 x_2 = 16,$$

vagy a

$$/3.4./ \quad 2 x_1 + 4 x_2 < 16$$

feltétel teljesül.

A /3.3./ feltétel viszont egy lineáris egyenlet, amelynek grafikus képe egyenes. Grafikus ábrázoláshoz elegendő két pont ismerete, amelyen az egyenes áthalad. Keressük meg most azt a két pontot, ahol az egyenes a koordinátatengelyeket metszi.

Vegyük először azt az esetet, amikor az x_2 koordinátája 0. Ekkor

$$\begin{aligned} /3.5./ \quad 2 x_1 + 4 \cdot 0 &= 16, \\ 2 x_1 &= 16, \\ x_1 &= 8, \end{aligned}$$

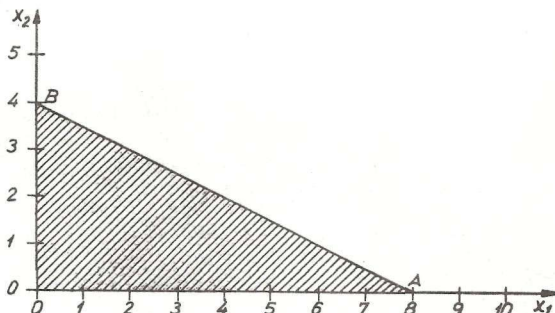
vagyis az $x_1 = 8$ és $x_2 = 0$ pontokat kaptuk, ugyanugy, mint az előbb, amikor csupán logikai mérlegelést végeztünk.

Ha most azt a pontot vesszük, ahol az x_1 koordinátája 0, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} /3.6./ \quad 2 \cdot 0 + 4x_2 &= 16, \\ 4x_2 &= 16, \\ x_2 &= 4, \end{aligned}$$

most tehát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$ pontokat kaptuk, mint az előbbi logikai mérlegelésnél is adódott.

Rajzoljuk meg a koordinátát /mivel az $x_1, x_2 \geq 0$, azaz ezek nem-negatív megoldását fogadjuk csak el, elegendő a koordinátasík pozitív negyedét megrajzolni/ és rajzoljuk meg a koordinátasíkon azt az egyenest, amely az x_1 tengelyt a 8, az x_2 tengelyt a 4 pontban metszi /3.sz. ábrá/.



A $2x_1 + 4x_2 \leq 16$ feltétel nem negatív megoldáshalmaza

3. ábra

Vizsgáljuk meg az így kapott egyenest. Az egyenes bármely pontjához tartozó koordináta-pontok olyan termelési tervet mutatnak, amelyek teljesítik a /3.3./ egyenletet, vagyis amelyek végrehajtásához pontosan a rendelkezésre álló 16 egy-ségnyi termelési forrást kell felhasználni. Az egyenes és a koordinátatengelyek által határolt háromszög pontjai pedig olyan tervekét jelölnék, amelyek a /3.4./ feltételt elégitik ki, vagyis a rendelkezésre álló kapacitást nem használják ki teljes mértékben. Ha tehát a 3.sz. ábrán a OAB által határolt háromszöget tekintjük /beleértve tehát az O,A és B pontokat összekötő egyenes pontjait is/, a háromszög pontjai olyan termelési tervek mutatnak, amelyek a /3.2./ feltételnek megfelelnek.

Az OAB pontok által határolt háromszöghöz tartozó pont-halmaz^{x/} tehát egy megoldáshalmazt is jelent a /3.2./ feltétel-re.

^{x/} A halmazokkal később részletesen foglalkozunk.

Vizsgáljuk meg most a /3.1./ alatti feladat második feltételét, azaz a

$$/3.7./ \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 14$$

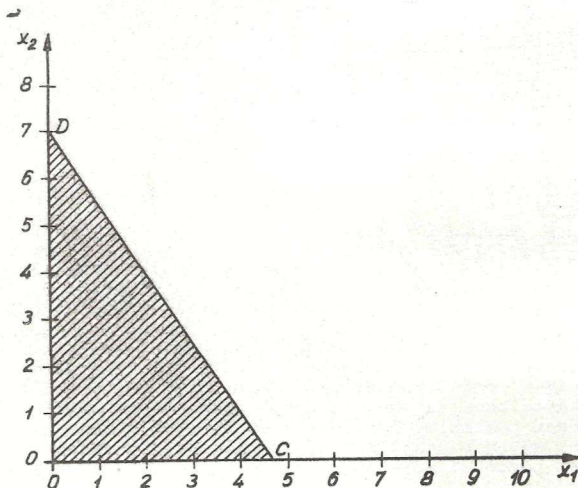
feltételt.

Az előbbiek alapján a feladatot egyenlet formájában megfogalmazva, kapjuk a

$$/3.8./ \quad 3x_1 + 2x_2 = 14$$

lineáris egyenletet, amelynek grafikus képe az x_1 koordinátatengelyt a $14/3 = 4,67$ pontban, az x_2 koordinátatengelyt pedig a $14/2 = 7$ pontban metszi.

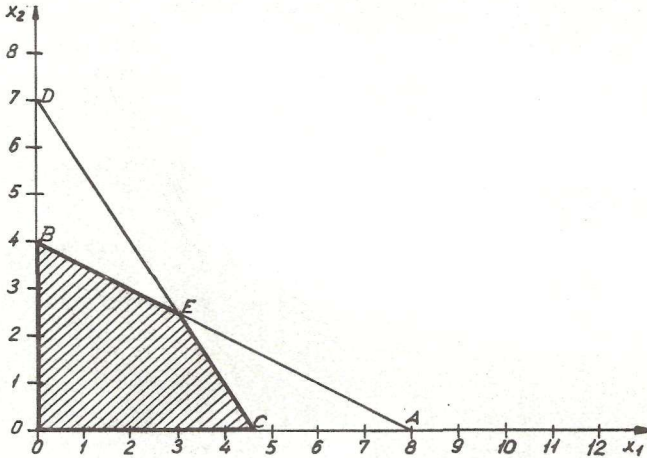
Ezt az egyenest a koordináta-hálózatba berajzolva, ismét egy háromszöget kapunk /4. sz. ábra/.



A $3x_1 + 2x_2 \leq 14$ feltétel nem negatív megoldáshalmaza

4. ábra

Egyszerűen beláthatjuk az előbbiekből alapján azt is, hogy most az OCD pontok által határolt háromszög pontjai adják a /3.5./ feltétel lehetséges megoldásait. Aligha okoz gondot annak megértése, hogy ha mind a /3.2./, mind a /3.7./ feltételt /vagyis a /3.1./ feladat mindkét feltételét/ egyidejűleg kívánjuk kielégíteni, akkor az 5. sz. ábrán besatírozott négyszög területéhez tartozó pontok adnak megoldást, azaz, ahol az előbbi két háromszög metszi egymást /5. sz. ábra/.



A $2x_1 + 4x_2 \leq 16$ $3x_1 + 2x_2 \leq 14$ feltételek nem
negatív megoldáshalmaza

5. ábra

Könnyen belátható az is, hogy amennyiben a vizsgált két feltétel egyenlet formájában volna megadva, azaz a /3.3./ és /3.6./ szerint, akkor kizárólag az E pontban kapnánk megoldást / $x_1 = 3$, $x_2 = 2,5$ /. Jegyezzük ezt jól meg, mert a grafikus lineáris programozás gyakorlati alkalmazása során ez kiemelt jelentőségű.

Vizsgáljuk meg most a célfüggvényt, azaz a

/3.9./ $15x_1 + 20x_2 = \text{maximum}$

függvényt.

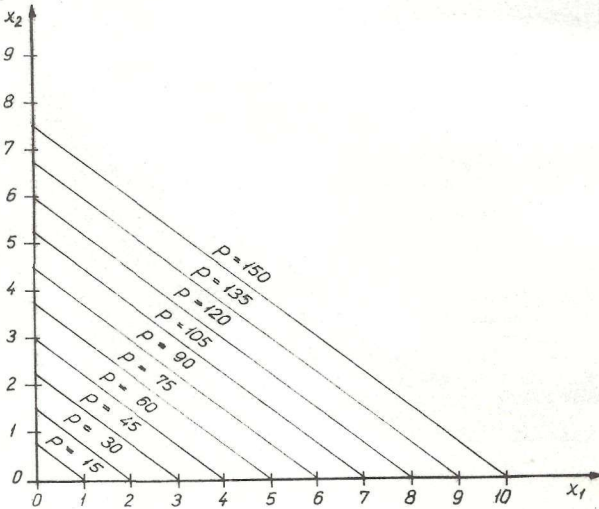
Mennyit kellene az egyes termékekből előállítani, hogy egy egységnyi jövedelmet nyerjünk? Mivel az első termék egységnyi termelése 15 egységnyi jövedelem realizálását teszi lehetővé, egységnyi jövedelemhez akkor jutunk, ha az első termékből 1/15 egységet termelünk. Ugyancsak egy egységnyi jövedelmet nyerünk akkor, ha a második termékből 1/20 egységet állítunk elő. Nyilvánvaló, hogy két egységnyi jövedelem realizálásához az első termékből 2/15, a másodiktól 2/20 egységet kellene termelni és így tovább, p egységnyi jövedelem realizálásához $p/15$, illetve $p/20$ egységnyi termelésre van szükség.

Tegyük fel tehát, hogy p egységnyi jövedelmet kívánunk elérni. Ehhez a /3.9./ alapján a

$$/3.10./ \quad 15x_1 + 20x_2 = p$$

lineáris függvény írható fel, amelynek grafikus képe, mint tudjuk, egyenes és az x_1 tengelyt a $p/15$, az x_2 tengelyt pedig a $p/20$ pontokban metszi.

Különböző p értékekhez tehát egyeneseket szerkeszthetünk, amelyek különböző jövedelemszinteket mutatnak, tehát azokat jövedelemszint-vonalaknak, vagy jövedelem nivóvonalaknak nevezhetjük. A 6. sz. ábrán néhány nivóvonalat rajzoltunk be /6.sz. ábra/.

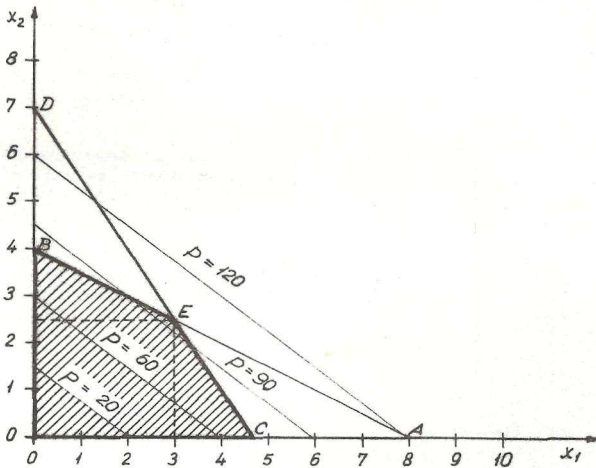


A $p = 15x_1 + 20x_2$ függvényhez tartozó jövedelemszint vonalak

6. ábra

Az 5. és 6. sz. ábrákat összevonva, a 7. sz. ábrához jutunk. Ebből leolvashatjuk, hogy a bevonalkázott terület bármely pontját választva, milyen jövedelemre számíthatunk. Mivel azonban az a feladatunk, hogy azt a pontot /azt a megoldást/ válasszuk ki a lehetséges megoldások közül, amelyikhez a legmagasabb jövedelem tartozik, nyilvánvalóan az E pontot fogjuk választani. Az E ponthoz tartozó megoldás tehát az összes lehetséges megoldások közül a legnagyobb jövedelmet biztosítja, ezért azt optimális megoldásnak nevezzük. A 7.sz. ábrán a megoldást szaggatott vonallal rajzoltuk be. Ez a következő:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3, \\x_2 &= 2,5, \\p &= 95.\end{aligned}$$



A 3.1. alatti feladat megoldása

7. ábra

Tekintsük végig még egyszer a feladat megoldását. A

/3.11./

$$\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ \hline p = 15x_1 + 20x_2 &= \text{maximum}\end{aligned}$$

feladatot oldottuk meg. Első lépésben megkerestük, hogy a

$$/3.12./ \quad 2x_1 + 4x_2 = 16,$$

valamint a

$$/3.13./ \quad 3x_1 + 2x_2 = 14$$

egyenesek grafikus képe hol metszi a koordinátatengelyeket, majd pedig a

$$/3.14./ \quad p = 15x_1 + 20x_2$$

egyenesre vizsgáltuk meg, hogy különböző p értékek esetén hol metszi a koordinátatengelyeket. E metszéspontokra a következőket kaptuk:

x_1	x_2
16/2	16/4
14/3	14/2
$p/15$	$p/20$

Ezután a 7.sz. ábrán megrajzoltuk az egyeneseket úgy, hogy a célfüggvényre különböző p értékekhez tartozó nivóvonalakat rajzoltunk meg. Végül a lehetséges megoldások halmazából azt a pontot választottuk ki, amelyhez a legnagyobb célfüggvényérték tartozik.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = 2,5$ megoldás a /3.1./ alatti feltételeknek eleget tesz és a megoldáshoz a 95 célfüggvényérték tartozik, vagyis

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2,5 &= 16, \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2,5 &= 14, \\ 15 \cdot 3 + 20 \cdot 2,5 &= 95. \end{aligned}$$

Példánkban azt az esetet tekintettük, amikor a felhasználható, termelési források mennyiségeit felülről korlátoztuk /előírtuk, hogy azokból legfeljebb mennyi használható fel/ és a célfüggvény maximumát kerestük. A gazdasági életben azonban másféle feladatokat is meg kell oldanunk. Gondoljunk csak arra, amikor takarmányadagokat állítunk össze. Ebben az esetben az a feladat, hogy olyan takarmányadagot kell megtervezni, amely a különböző táplálóanyagokból legalább az állat szükségletét fedezi, de az adag a lehető legolcsóbb. Vizsgáljunk meg most egy ilyen feladatot.

Tegyük fel, hogy egy olyan pótabrakot kell összeállítanunk, amely egy liter tej termeléséhez elegendő keményítőértéket és fehérjét tartalmaz. Tételezzük fel, hogy egy liter tejhez /adott zsirszázalék mellett/ 0,250 kg keményítőértéket és 0,056 kg fehérjét kell legalább biztosítani és a pótabrakot

két takarmányból; kukoricadarából és buzakorpából kell összeállítani. Tegyük fel, hogy a takarmányok beltartalmi és költségeadatai a következők:

Megnevezés	Kukorica	Korpa
1 kg takarm. kem.é. tartalma	0,726	0,544
1 kg takarm. fehérje tartalma	0,068	0,163
1 kg takarm. költsége R	3,000	2,500

Jelöljük x_1 -gyel a kukorica, x_2 -vel pedig a buzakorpa mennyiségét az adagokban. Feladatunkat tehát a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Keressük azt az x_1, x_2 nem-negatív megoldást / $x_1, x_2 \geq 0$ / amelyek kielégítik a következő feltételeket:

$$\begin{aligned} /3.15./ \quad & 0,726 x_1 + 0,544 x_2 \geq 0,250 \\ & 0,068 x_1 + 0,163 x_2 \geq 0,056 \\ \hline & c = 3 x_1 + 2,5 x_2 = \text{minimális} \end{aligned}$$

Az első lépésben határozzuk meg, hogy a

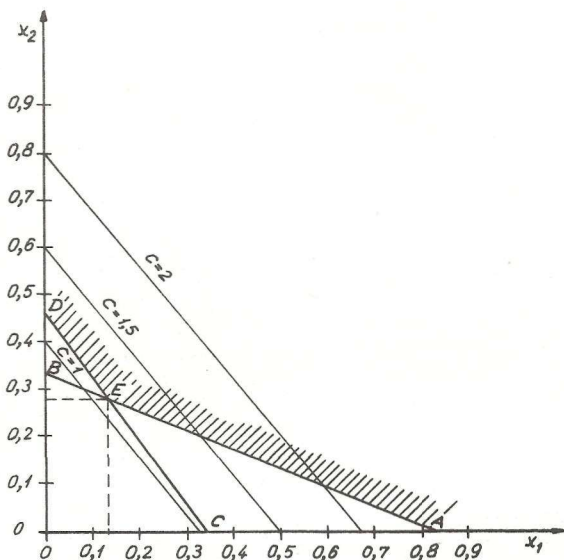
$$\begin{aligned} /3.16./ \quad & 0,726x_1 + 0,544x_2 = 0,250 \\ & 0,068x_1 + 0,163x_2 = 0,056 \\ \hline & 3x_1 + 2,5x_2 = c \end{aligned}$$

lineáris egyenletek grafikus képe hol metszi a koordinátatengelyeket, természetesen különböző c értékeket feltételezve. A következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{0,250}{0,726} &= 0,344 & \frac{0,250}{0,544} &= 0,460 \\ \frac{0,056}{0,068} &= 0,824 & \frac{0,056}{0,163} &= 0,344 \\ \frac{c}{3} & & \frac{c}{2,5} & \end{aligned}$$

Szerkesszük most meg a 7.sz. ábrához hasonlóan a 8.sz. ábrát /a könnyebb áttekinthetőség érdekében a célfüggvény nyílvonalakat csak az 1 R, 1,5 R és 2 R értékeknél rajzoltuk meg/.

Az ábráról a következők olvashatók le: A táplálóanyag-szükségletet az AED pontokat összekötő egyenesek és a koordinátatengelyek által határolt bevonalkázott rész pontjai elégitik ki. Az OAED pontokat összekötő egyenesek által határolt terület pontjai nem jöhetnek szóba, mert az e pontokhoz tartozó takarmányadagok nem biztosítják a táplálóanyag-szükségletet. Nyilvánvaló, hogy most, mivel a legolcsóbb takarmányadag megtervezésére törekszünk, a lehetséges megoldások halmazából azt kell kiválasztani, amelyikhez a legkisebb célfüggvény nívóval tartozik.



A 3.15. alatti feladat megoldása

B. ábra

Ez az E pontban található, s ekkor a következő megoldást kapjuk /8.sz. ábrán szaggatott vonallal berajzolva/:

$$x_1 = 0,123 \text{ kg}$$

$$x_2 = 0,295 \text{ kg}$$

$$c = 1,110 \text{ R}$$

Győződjünk meg behelyettesítéssel arról, hogy a kapott megoldás a feltételeket kielégíti.

A feladatot nagyon leegyszerűsítettük, hiszen mindössze két takarmányból kívántuk a pótabrakot összeállítani. Nem is várhatunk most gyakorlatilag használható eredményt. Később látni fogjuk, hogy - természetesen bonyolultabb vizsgálatokkal - gyakorlatilag használható eredményt lehet a grafikus programozással elérni.

Ismét felhívjuk a figyelmet arra, hogy ha a táplálóanyagokra vonatkozó feltételeket egyetlenllett adtuk volna meg, akkor a feladatra csak egyetlen megoldást kaptunk volna. Ez a megoldás történetesen az E pontban található.

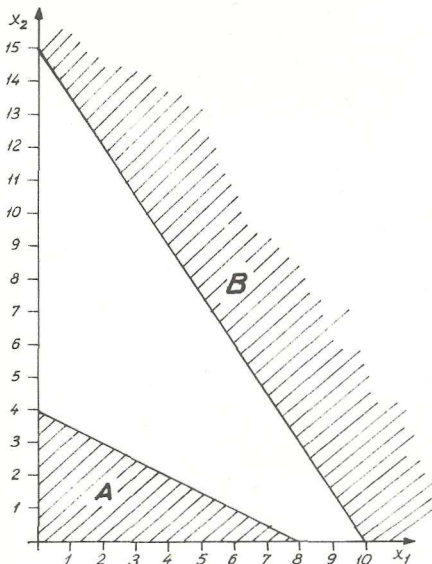
A továbbiakban a rövidebb tárgyalhatóság érdekében nem adjuk meg mindig a feladat lehetséges gyakorlati értelmezését, hiszen azt az előbbiekhöz hasonlóan az olvasó is meg tudja tenni. Ezt esetenként néhány megjegyzéssel elősegítjük.

Vizsgáljunk meg a továbbiakban néhány érdekes esetet a kétváltozós feladatok köréből. Állapodjunk meg abban, hogy a nem-negativitás követelményét mindvégig érvényesnek tekintjük. Ezt a követelményt eleve teljesítjük azáltal, hogy a koordinátáknak csak az első negyedét, vagyis a pozitív negyedét vizsgáljuk.

Legyen feladatunk a következő:

$$\begin{aligned} /3.17./ \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ \hline p = & 15x_1 + 20x_2 = \text{maximum} \end{aligned}$$

Ábrázoljuk a feladatot a 9.sz. ábrán.



A 3. 17. feladat ábrázolása
9. ábra

Az első feltételt az A-val jelzett bevonalkázott terület pontjainak halmaza, a második feltételt pedig a B-vel jelzett bevonalkázott terület pontjainak halmaza elégíti ki. Mivel ezek sehol nem fedik egymást /nem metszik egymást/, nem találhatunk olyan pontot /olyan megoldást/, amely mindkét feltételt egyidejűleg kielégítené. A feladatnak tehát nincs megengedett megoldása, mert nincs olyan nem-negatív számpár, amely mindkét feltételnket egyidejűleg kielégítené. Azt szoktuk mondani, hogy a két feltétel ellentmond egymásnak, a feladat nem oldható meg, vagyis a megoldások halmaza üres halmaz. Ilyen feladatoknál nincs értelme a célfüggvény vizsgálatának sem.

A gyakorlatban is találkozunk olyan esetekkel, amikor az általunk megfogalmazott lineáris programozási feladat ellentmondó feltételeket tartalmaz, tehát a feladat nem oldható meg. Triviális példa erre, ha mondjuk, előírjuk, hogy a lucernaterület legalább 800 hektár legyen, de a pillangósok területe /lucerna, vöröshere, baltacim, stb./ nem haladhatja meg a 700 hektárt. Nyilvánvalóan, mivel a lucerna is pillangós és a pillangósok együttes területe nem haladhatja meg a 700 hektárt, ezért a lucerna területe sem haladhatja meg a 700 hektárt, tehát semmiképpen nem lehet 800 hektár felett. Ilyen triviális hibát csak igen gyakorlatlan programozó követhet el. Sokkal gyakoribban fordul elő olyan hiba, hogy a munkaerőfelhasználást, a gépfelhasználást, stb. felülről korlátozzuk, de bizonyos termékek termelésére alsó területkorlátokat adunk meg, s ezek teljesítését a munkaerő- és gépkapacitások nem teszik lehetővé. Előfordulhat az az eset is, hogy az állatállományra, a takarmánytermelésre, valamint a takarmánymérlegre előírt feltételek tartalmazznak ellentmondást.

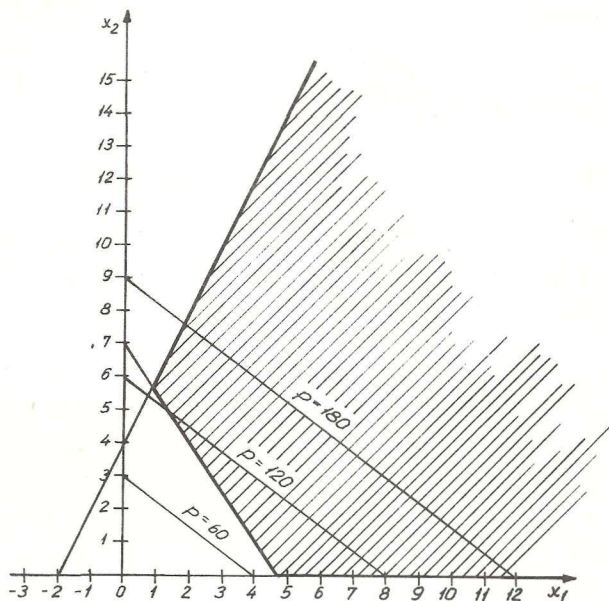
Vegyünk most egy másik példát. Legyen feladatunk a

$$\begin{array}{r} /3.18./ \quad -8x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ \quad \quad \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ \hline p = 15x_1 + 20x_2 = \text{maximum} \end{array}$$

Ábrázoljuk a feladatot a 10. sz. ábrán.

A megoldás lehetséges ponthalmazait a bevonalkázott terület mutatja. A célfüggvény nivóvonalát bármilyen magas értékben is választjuk meg, még mindig a lehetséges megoldások tartományában vagyunk. A feladatban ugyanis az x_1 nincs felülről korlátozva, tehát bármilyen nagy értéket felvehet. Az x_1 értékének növelésével viszont a célfüggvény is állandóan növekszik, tehát a célfüggvény is bármilyen nagy lehet. Ekkor viszont értékei között nincs legnagyobb, s azt mondjuk, hogy a célfüggvénynek nincs felső korlátja, vagyis a megengedett megoldások halmazán nem korlátos.

Hasonló probléma gyakorlati modellezés során is előfordulhat. Képzeljük csak el, hogy valamely állatot kizárólag vásárolt takarmányból kívánjuk tartani és programozással meg akarjuk határozni, hogy hány darab állatot tartunk és mennyi takarmányt vásároljunk, hogy maximális legyen a jövedelmünk. Az egyik változó által /a takarmány által/ táplálóanyagot nyerünk, a másik változó /állattartás/ által táplálóanyagot veszítünk /etetünk fel/, s a kettő között meghatározott viszonyoknak kell fennállni. Ennek megfelelően az egyik változóhoz tartozó táplálóanyagokra vonatkozó koefficienseink pozitív, a másik változónál negatív előjeleűek lesznek. Ha a két



A 3.18. feladat ábrázolása

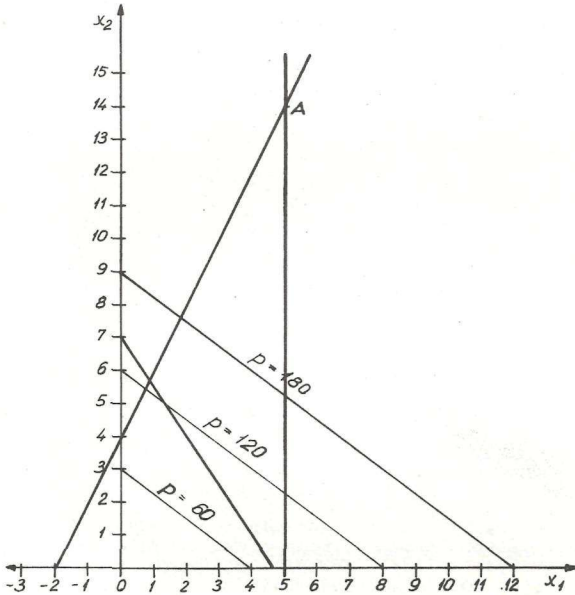
10. ábra

változó célfüggvény koefficienseinek viszonya olyan, hogy érdemes egy állatot tartani, mert annak termelési értéke /az egyéb költségek mellett/ fedezi a takarmány árát, sőt ezen felül mondjuk 1000 R jövedelmet is biztosít, akkor nyilvánvalóan két állatot is érdemes tartani /akkor jövedelmünk 2000 R/, de 10, 100, 1000, stb. állatot is, illetve az állattartás ezen az alapon, ha a modellben munkaerő és egyéb korlátok nem szerepelnek, a végtelenségig kiterjeszhető. A célfüggvénynek tehát most sincs felső korlátja, s a feladatnak nincs optimális megoldása.

Természetesen elképzelhetetlen, hogy egy vállalat az állattartás mértékét minden határon túl kiterjessze, vagyis az előbbi feladat megoldását megkapjuk, ha az állattartás mértékét korlátozzuk. Ha pl. a /3.18./ feladatot kibővítjük az $x_1 \leq 5$ feltétellel, azaz a /3.18./ feladat helyett a

$$\begin{array}{r} /3.19./ \quad -8x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ \quad \quad x_1 \leq 5 \\ \hline p = 15x_1 + 20x_2 = \text{maximum} \end{array}$$

feladat megoldását keressük, akkor már megoldáshoz jutunk /11. sz. ábra/.



A 3.19. feladat megoldása

11. ábra

A /3.19./ feladat megoldását az A pontban kapjuk. Ennek meghatározását és a célfüggvény nivóvonalainak további megrajzolását az olvasóra bizzuk.

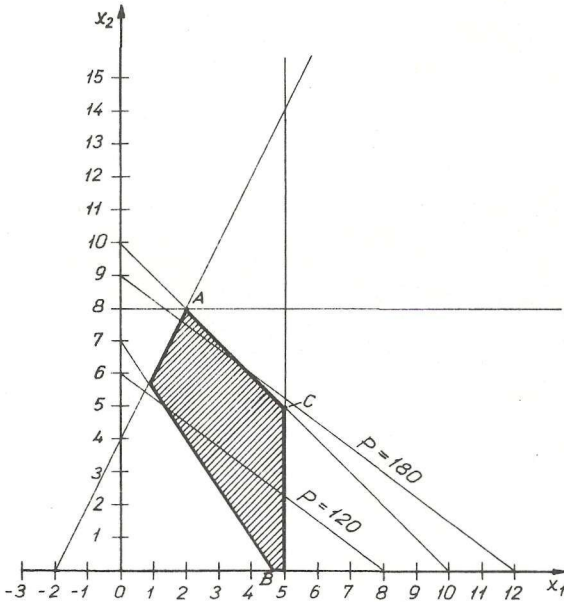
Eddigi példáinkban mindig két egyenlettel vagy egyenlőtlenséggel találkoztunk, kivéve a legutolsó feladatot, amelyben, mint láttuk, 3 egyenlőtlenséggel adtuk meg a feltételeket. Felmerül a kérdés, hogy hány feltétel esetén tudjuk a kétváltozós feladatokat ábrázolni.

Kétváltozós feladatot mindenkor tudunk a koordinátasíkon ábrázolni, függetlenül a feltételek számától. /Háromváltozós feladatokat már csak a térben tudjuk ábrázolni, s háromnál több változós feladatok esetén le kell mondanunk az ábrázolásról./

Vegyük pl. a következő feladatot.

$$\begin{array}{r} /3.20./ \quad -8x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ \quad \quad x_1 \leq 5 \\ \quad \quad \quad x_2 \leq 8 \\ \quad \quad 8x_1 + 8x_2 \leq 80 \\ \hline p = 15x_1 + 20x_2 = \text{maximum} \end{array}$$

Most tehát 5 egyenlőtlenségből álló kétváltozós feladatot kell megoldani, miközben keressük egy függvény maximumát. Ábrázoljuk a feladatot a 12. sz. ábrán.



A 3. 20. feladat ábrázolása

12. ábra

A lehetséges megoldásokat a bevonalkázott sokszög pontjai adják. Azt a pontot, amelyhez a legnagyobb célfüggvény tartozik, A-val jelöltük, ez az optimális megoldás. Könnyen belátható az is, hogy ha a /3.20./ feladatban a célfüggvénynek nem a maximumát, hanem a minimumát keresnénk, a B pont adná a feladat megoldását.

Alakítsuk most át a /3.20./-ban megadott feladatot úgy, hogy az utolsó egyenlőtlenség helyett a

$$/3.21./ \quad 8x_1 + 11x_2 \leq 88$$

feltételt adjuk meg, vagyis

$$\begin{aligned} /3.22./ \quad & -8x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \leq 7 \\ & 8x_1 + 11x_2 \leq 88 \end{aligned}$$

$$p = 15x_1 + 20x_2 = \text{maximum}$$

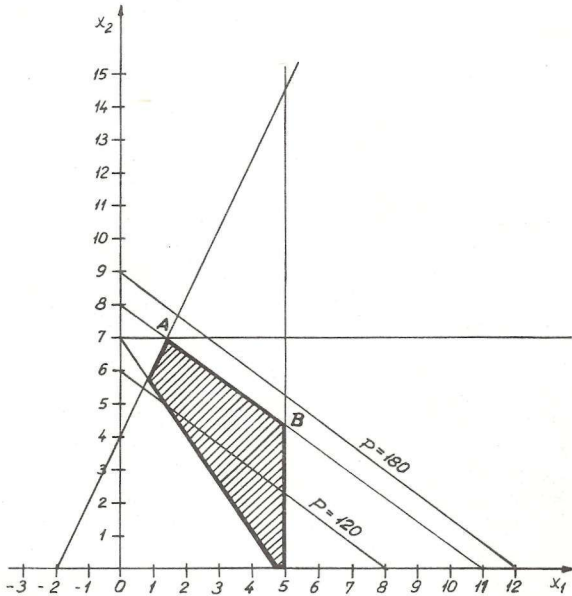
Ábrázoljuk a feladatot a 13. sz. ábrán.

A lehetséges megoldásokat a bevonalkázott terület pontjai adják. Melyik ponthoz tartozik a legmagasabb célfüggvényérték? Észrevesszük, hogy az AB pontokat összekötő egyenes a célfüggvény-nívóvonalakkal párhuzamos. Ez azt jelenti, hogy az A ponthoz is ugyanakkora célfüggvényérték tartozik, mint a B ponthoz, illetve az AB egyenes minden pontjánál ugyanazon célfüggvényértéket kapjuk. Ha tehát maximális jövedelemre törekszünk, akkor az AB pontokat összekötő egyenes bármely pontját választhatjuk, tehát a feladatnak többféle optimális megoldása van. Az AB egyenes pontjait tehát alternatív megoldásokként foghatók fel, s azok - a célfüggvény szempontjából tekintve - egyenértékűek.

Tekintsük még egyszer a célfüggvényt. A

$$/3.23./ \quad p = 15x_1 + 20x_2$$

Függvény azt fejezi ki, hogy pl. az első termék egységnyi termelése 15 egységnyi, a második termék 20 egységnyi jövedelem realizálását teszi lehetővé. A két termék jövedelemaránya tehát 15:20. Eszerint a második termékből ugyanannyi jövedelem realizálásához 15:20 = 0,75-ször annyit kell termelni, mint amennyi ugyanannyi jövedelem realizálásához az első termékből lenne szükséges, vagy másképpen, ahhoz, hogy az első termékből ugyanannyi jövedelmet érjünk el, mint a második termékből, az első terméket 20:15 = 1,33-szoros mennyiségben kell előállítani.



A 3.22. feladat ábrázolása

13. ábra

A jövedelem-nívóvonalait tehát egyszerűen megrajzolhatjuk úgy, hogy az x_1 tengelyen felvett pontokból kiindulva, olyan egyeneseket rajzolunk meg, amelyek az x_2 tengelyt az előbbi pont $0,75$ -szörösénél metszik, illetve az x_2 tengelyen felvett pontokból kiinduló egyenesek az x_1 tengelyt az előbbi érték $1,33$ -szorosánál metszik.

Vegyük most szemügyre a 12.sz. ábrát. A legmagasabb jövedelmet akkor érjük el, ha a lehetséges megoldások közül az A ponttal jelölt megoldást választjuk. A jövedelem-nívóvonalak aránya, mint tudjuk, $1:1,33$, vagyis pl. a $p = 180$ nivóvonal az x_2 tengelyt a 9 pontban, az x_1 tengelyt a 12 pontban metszi és $12/9 = 1,33$. Mi történne azonban, ha ez az arány csökkenne, vagyis az egyes termékek ár- illetve jövedelemaránya megváltozna. Ez azt jelenti, hogy az A pont addig és csakis addig biztosíthatja a legnagyobb jövedelmet adó megoldást, ameddig olyan nivóvonalat nem kapunk, amely párhuzamos az AC pontot összekötő egyenessel. Ez történetesen akkor adódik, ha a jövedelemarány $1:1$ lesz. /Természetesen az $1:1$ arány csak

az adott példában ad ilyen eredményt. Most ismét sokféle optimális megoldásunk lenne, amelyek mindegyikéhez ugyanazon célfüggvényérték tartozik. Ha a jövedelemarányt tovább változtatjuk, a C pontban nyerjük a legmagasabb célfüggvényértéket eredményező megoldást. /Az elmondottakat a 12.sz. ábrán könnyen követhetjük./

A fentiek ismerete alkalmat ad további vizsgálatra, illetve megfontolásra. Egyrészt vizsgálhatjuk, hogy a jövedelemarányok milyen változtatása esetén marad egy meghatározott pont továbbra is optimális megoldás, azaz a legnagyobb célfüggvényértéket eredményező megoldás. Vizsgálhatjuk, hogy a célfüggvény milyen arányváltozása esetén terelődik át az optimális megoldás egy másik pontra.

A gazdaságirányítás során tulajdonképpen hasonló problémák vetődnek fel - természetesen sokkal bonyolultabb formában - hiszen felmerül a kérdés, hogy milyen árváltozásokat, vagy a gazdaságirányítási eszközök milyen változtatásait kell véghez vinni ahhoz, hogy a vállalatokat a népgazdasági igényeknek megfelelő termelési szerkezet irányában ösztönözzék. Más esetben vizsgálni kell, hogy az árak milyen változása mellett lehet még arra számítani - feltételezve, hogy a vállalatok optimálisan cselekednek -, hogy a jelenlegi termelési szerkezet nem változik.

Ilyen és hasonló problémák megoldása igen bonyolult feladat és kétváltozós modellekkel erre aligha vállalkozhatunk. A kétváltozós modellek azonban alkalmasak voltak arra, hogy a problémát és a probléma megoldásának lehetőségeit egyszerű példákon keresztül szemlélhessük. Bonyolultabb módszerekkel később ismerkedünk meg.

4. FEJEZET

A grafikus lineáris programozás gyakorlati alkalmazása

Kétváltozós lineáris programozási feladatok, mint azt az előző fejezetben láttuk, függetlenül a feltételek számától és attól, hogy a célfüggvény minimumát vagy maximumát keressük, grafikus módszerrel is megoldhatók. A grafikus módszer alkalmas arra is, hogy többváltozós lineáris programozási feladatokat vizsgáljunk.

A grafikus lineáris programozás nem alkalmas arra, hogy többváltozós feladatok esetén biztosan optimális megoldást találjunk, tehát a grafikus módszer általában nem helyettesíti az analitikus módszert. Egyszerűbb feladatok esetén azonban a grafikus lineáris programozással is lehetőségünk van gyakorlatilag használható és az optimumot megközelítő, de a logikai kalkulációs módszereknél mindenképpen jobb megoldást előállítani.

A grafikus lineáris programozás hátránya, hogy nem biztos, hogy optimális megoldáshoz jutunk. Előnye azonban, hogy nem igényel magasabb matematikai ismereteket, sem pedig nagymennyiségű számolási munkát, így nem szükséges elektronikus számítógép a feladat megoldásához. További előnye a grafikus módszernek, hogy lehetővé teszi sok megoldási változat gyors áttekintését, miközben szemlélni tudjuk a különböző megoldások tartalmi vonatkozásait, mind mezőgazdasági-szakmai, mind pedig közgazdasági vetületét tekintve.

A takarmányadagok összeállítása viszonylag egyszerű feladat. Ilyenkor általában nem kell sok változóval dolgozni, hiszen egy takarmányadagot 3-10-féle takarmányból állítunk össze. Ennélfogva a grafikus lineáris programozás gyakorlati alkalmazását is célszerű a takarmányadagok összeállításán keresztesen bemutatni, megjegyezve természetesen azt, hogy más, hasonlóan egyszerű feladatok is megoldhatók a bemutatásra kerülő eljárással.

Legyen feladatunk az, hogy pótabrak-adagot kell összeállítanunk egy liter tej termelésére. Előírjuk, hogy az adagnak 0,250 kg keményítőértéket és 0,056 kg fehérjét kell tartalmaznia. Az adag összeállításához 5-féle takarmány áll rendelkezésre, amelyek beltartalmi és költségadatait a 6.sz. táblázatban találjuk. A táblázatban az utolsó sorban t-vel jelölve, feltüntettük a különböző takarmányokban található táplálóanyagok arányát, azaz a 1 kg fehérjére jutó keményítőérték-tartalmat is. Ugyanezt a szükségletre vonatkozóan is meghatároztuk /6.sz. táblázat/.

A keményítőérték-fehérje arány a kukoricadara és a buza-dara takarmányokban tágabb, a buzakorpa, az extrahált napraforgódara és a szójadara takarmányokból pedig szűkebb, mint a szükséglet keményítőérték-fehérje aránya. Könnyen belátható, hogy ha kétféle táplálóanyagból a szükségletet pontosan ki akarjuk elégíteni, tehát sem hiányt, sem pedig többletetést nem engedünk meg és a takarmányadagot kétféle takarmányból kívánjuk összeállítani, az csakis akkor lehetséges, ha az egyik takarmányban tágabb, a másik takarmányban szűkebb a vizsgált táplálóanyagok aránya, mint a szükségletben, vagy pedig a táplálóanyag-arány az egyik vagy mindkét takarmányban megegyezik a szükségleti arányokkal.

6.sz. táblázat

Alapadatok pótabrak összeállításához

Megnevezés	Kuko- rica x_1	Buza dara x_2	Buza korpa x_3	Extr. napraf. dara x_4	Szója- dara x_5	1 l.tej tápl.szüks. 0
Keményítő	0,791	0,730	0,474	0,512	0,755	0,250
Fehérje	0,074	0,102	0,116	0,334	0,429	0,056
R/kg	2,00	2,90	2,60	4,95	6,75	0
t	10,7	7,1	4,1	1,5	1,7	4,5

Ha pl. a szükségletben adódó táplálóanyag-arányt t_b -vel, az első takarmányban pedig a táplálóanyag-arányt t_1 -gyel, illetve a második takarmányban levő arányt t_2 -vel jelöljük, akkor a vizsgált két takarmányból a táplálóanyag-szükségletet pontosan fedező takarmányadag akkor és csakis akkor állítható össze, ha a

$$/4.1./ \quad t_1 \leq t_b \leq t_2$$

relációk fennállnak.

Abban a speciális esetben, amikor a két takarmány, valamint a szükséglet táplálóanyag-aránya pontosan megegyezik, vagyis a

$$/4.2./ \quad t_1 = t_b = t_2$$

relációk állnak fenn, akkor az állat táplálóanyag-szükségletét bármelyik takarmánnyal, illetve a két takarmány bármilyen kombinációjával ki lehet elégíteni, vagyis végtelen sok megoldás lehetséges.

Ha azonban a

/4.3./ $t_1 < t_b < t_2$

relációk állnak fenn, akkor a szükségletet a két takarmány meghatározott arányú keverése mellett lehet csak pontosan kielégíteni, vagyis ekkor a feladatnak csak egyféle megoldása van.

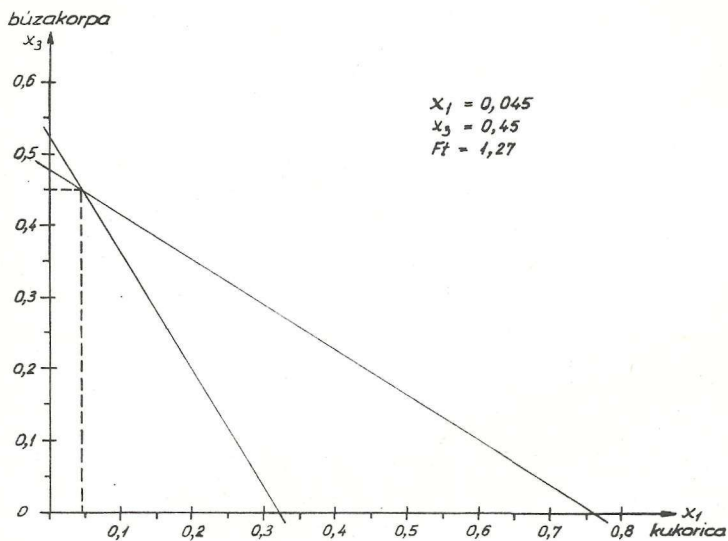
A harmadik fejezetből ismert módon határozzuk most meg a 6.sz. táblázatban feltüntetett takarmányok és táplálóanyag-szükségletek alapján a koordinátatengelyek metszéspontjait /7.sz. táblázat/.

7.sz. táblázat

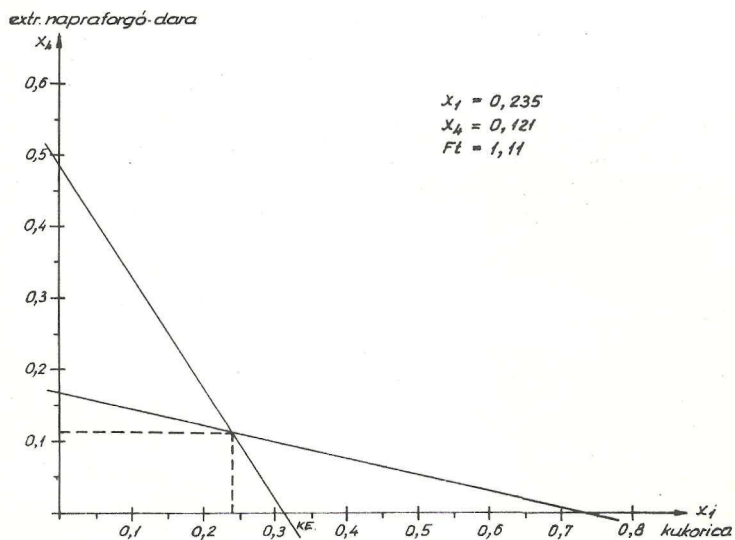
Koordinátatengelyek metszéspontjai a
pótabrak összeállításához

Megnevezés	Kuko- rica	Buza- dara	Buza korpa	Extr. napraf. dara	Szója- dara
Keményítő	0,32	0,34	0,53	0,49	0,33
Fehérje	0,76	0,54	0,48	0,17	0,13

Most grafikus lineáris programozással határozzuk meg, hogy az 1 liter tej termeléséhez szükséges keményítőérték- és fehérjemennyiséget hogyan tudnánk 2-2 takarmányból pontosan kielégíteni, vagyis képezzük az összes lehetséges, 2 takarmányból álló adagvariánsokat. Ezeket az adagvariánsokat alapvariánsok-nak nevezzük /13. sz. ábrák/.

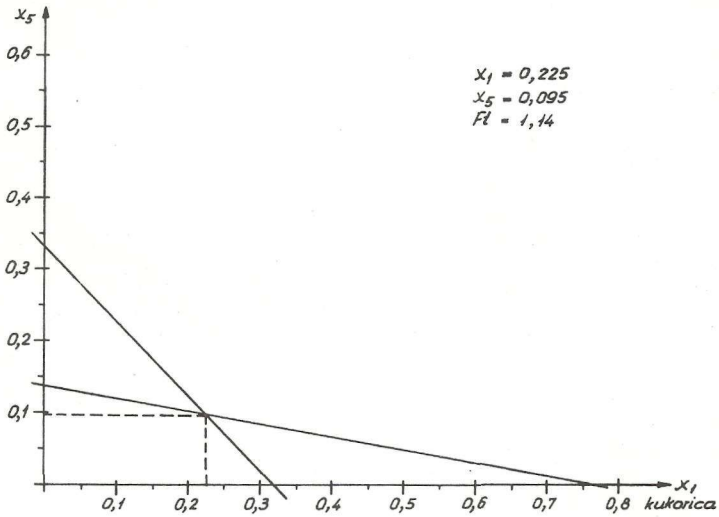


Kukorica-búzakorpa alapvariáns
13/a ábra



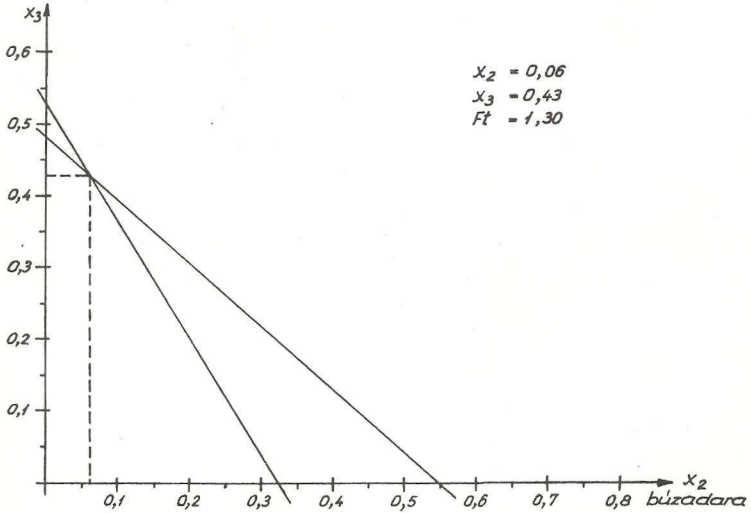
Kukorica - extr. napraforgó-dara alapvariáns
13/b ábra

szójadara



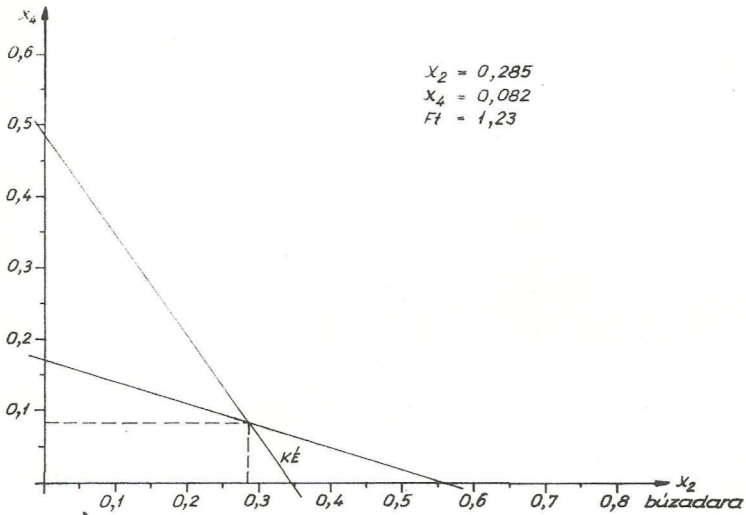
Kukorica - szójadara alapvariáns
13/c. tábla

búzakorpa



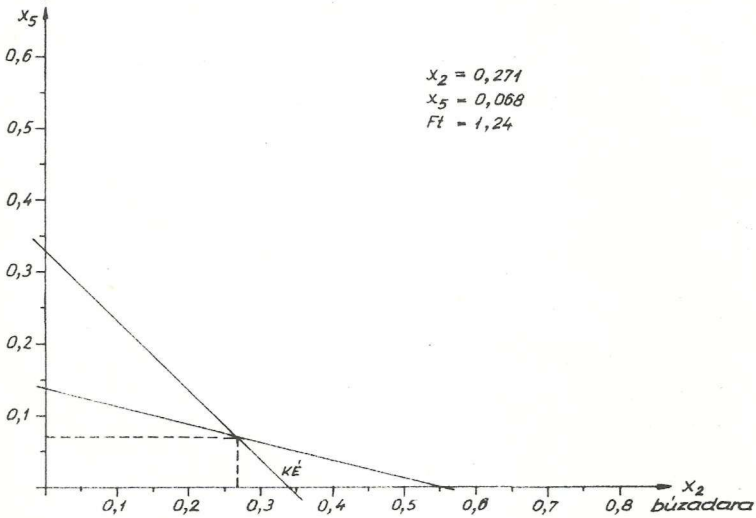
Búzadara - búzakorpa alapvariáns
13/d. tábla

extr. napraforgó dara



Búzadara + extr. napraforgódara alapvariáns
13/e. ábra

szójadara



Búzadara - szójadara alapvariáns
13/f. ábra

Az ábrákra ráirtuk a megoldások eredményeit és az azokhoz tartozó célfüggvényértéket /takarmányköltséget/ is. Természetesen az ábrát mm-papíron célszerű elkészíteni és minél nagyobb ábrát készítünk, annál pontosabban tudjuk a feladatot megoldani. Mi most kis ábrákat használtunk, így a leolvadás pontossága l dkg, s a tized-dkg-okat csak becsléni tudjuk.

Mivel két olyan takarmányunk van, amelyben a táplálóanyagok aránya tágabb és három olyan, amelyben szűkebb, mint a szükségleti arány, ezért összesen hatféle alapvariáns állítható össze. Ezek az alapvariánsok kielégítik ugyan a táplálóanyag-szükségletet, azonban alkalmazásuk gyakorlatilag nem lenne célszerű, mert nem felelnek meg általában az állat élet-tani igényének, hiszen egyrészt csak két takarmányból állnak, másrészt e két takarmány aránya sem mindig megfelelő. Egy dolog azonban máris szembetűnik, az, hogy az alapvariánsok költsége igen eltérő; 1,11 R-től 1,30 R-ig terjed. Legkisebb költséget kapunk az adott példában, ha a kukoricát és az extrahált napraforgódarát keverjük. Ekkor a költség 1,11 R. Viszonylag kevés költséggel tudjuk a szükségletet kielégíteni a kukorica és a szójadara keverésével is; 1,14 R-ért. Ezeknek az adagoknak is megvan azonban az a hibája, hogy csak kétféle takarmányból tevődnek össze.

A 13.sz. ábrákon meghatározott takarmányadagokról tudjuk, hogy azok mindegyike 1 liter tej termeléséhez szükséges keményítőértéket és fehérjét tartalmaz. Nyilvánvalóan, ha pl. két kiválasztott alapvariáns felét vesszük és összeadjuk, akkor ismét olyan adagot kapunk, amelynek keményítőérték-tartalma szintén 0,250 kg, illetve fehérje-tartalma 0,056 kg, vagyis az adag beltartalma ismét pontosan a szükséglettel egyezik meg /természetesen kerekítési, illetve leolvadási hibától eltekintünk/.

Ha tehát pl. a kukorica és extrahált napraforgódara, valamint a kukorica és a szójadara takarmányokat tartalmazó alapvariánsok 50-50 %-át vesszük és összeadjuk, a következő adaghoz jutunk:

kukorica	0,5 . 0,235 + 0,5 . 0,225	= 0,23 kg
extrah. napraforgó	0,5 . 0,121	= 0,06 kg
szójada- ra	0,5 . 0,095	= 0,05 kg
költség	0,5 . 1,11 + 0,5 . 1,14	= 1,13 R

Most tehát olyan pótbrak-adagot állítottunk össze két alapvariáns keverésével, amely három komponensből áll. Természetesen nemcsak két alapvariáns keverhető, hanem több is. Ha pl. a buzadara és buzakorpa, valamint a buzadara és szójadara alapvariánsok 10-10 %-át és a 13. sz. ábrán feltüntetett többi alapvariáns 20-20 %-át vesszük és összeadjuk, akkor a következő pótbrak-adagot kapjuk:

Kukorica	0,111 kg
buzadara	0,090 kg
buzakorpa	0,133 kg
extr.napraf.	0,041 kg
szójadara	0,026 kg
költség	1,20 R

Az alapvariánsok sokféle keverése lehetséges. Egy a fontos, hogy a keveréshez a százalékos arányszámokat - tulajdonképpen viszonzyszám formájában - úgy válasszuk meg, hogy összegük 100 %, illetve viszonzyszám formájában összegük 1 legyen. A statisztikából ismerjük, hogy az ilyen viszonzyszámokat - amelyek összege 1 - megoszlási viszonzyszámoknak nevezzük.

Ha tehát γ_j a j-edik alapvariánshoz rendelt viszonzyszámot, a_j pedig a j-edik alapvariánst jelöli, akkor a keveréseket a

$$/4.4./ \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j a_j$$

formulával határozzuk meg /n-féle alapvariánsból/, ahol azonban

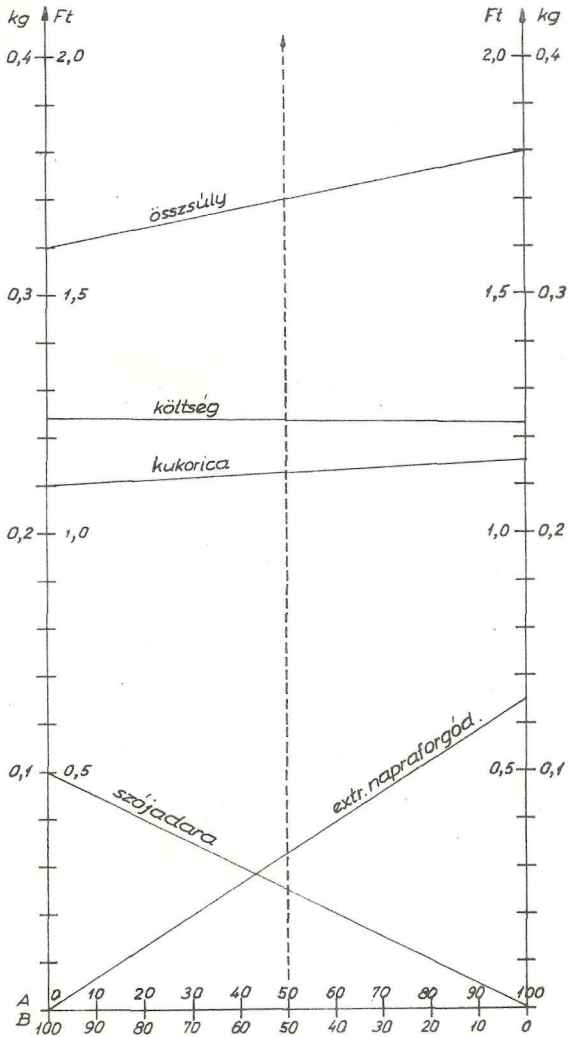
$$/4.5./ \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j = 1.$$

Az alapvariánsok keverésére nagyon sok lehetőség van. Ha két alapvariánst kell kevernünk, a grafikus ábrázolás módját ad arra, hogy anélkül, hogy bármit is számolnunk kellene, az összes keverési lehetőséget gyorsan áttekinthetjük és közben vizsgáljuk annak hatását különböző szempontból.

A 14.sz. ábrán a kukorica és az extrahált napraforgóda-ra /A alapvariáns/, valamint a kukorica és szójadara /B alapvariáns/ keverését mutatjuk be. A vízszintes tengelyen a keverési arányokat ábrázoljuk. Nyilván, ha az A alapvariáns 100 %-át vesszük, a B alapvariáns 0 %-kal szerepel a keverékben. Ha az A alapvariáns 90 %, akkor a B alapvariáns 10 % és így tovább, hiszen mint tudjuk, a keverést úgy kell végeztünk, hogy a két alapvariánsra előírt százalékos arány együttesen 100 % /vagy viszonzyszám formájában 1/ legyen.

Az ábrán két függőleges tengelyt találunk, ugyanolyan skálabeosztással. A skálák egyrészt mennyiségi adatok, másrészt költségadatokat tartalmaznak. Eljárásunk a következő: Meghatározzuk mindkét alapvariánsra vonatkozóan azokat az adatokat /beltartalom, összsúly, költség/, amelyeket vizsgálni kívánunk. Ezután a két alapvariáns adatait bejelöljük a függőleges tengelyen, mégpedig azon az oldalon, amelyen az adott alapvariáns 100 %-os keverési arányát tüntettük fel. Ezek a pontok azt mutatják, hogy ha az adagot csak az egyik alapvariánsból állítanánk össze, mennyi lenne annak beltartalma és költsége. Természetesen, ha valamelyik alapvariáns valamely vizsgált anyagot nem tartalmazza, akkor a 0 pontot jelöljük meg. Ezután a két alapvariánsra a két függőleges tengelyen

megjelölt pontokat a vizsgált mutatóként egy egyenessel kötjük össze /14. sz. ábra/.



Alapvariánsok keverése
14. ábra

A két alapvariáns mutatóit összekötő egyenes kivetítve valamelyik függőleges tengelyre, megmutatja, hogy a különböző keverési arányok mellett azok hogyan alakulnak. Az ábrán azt az esetet jelöltük be szaggatott vonallal, amikor a keverést 50-50 %-os arányban valósítjuk meg. A keverési arányt függőlegesen szaggatott vonallal megrajzolt nyíllal jelöltük, amely egy mozgó skálamutatóként fogható fel, s jobbra-balra mozgatható és segítségével különböző keverési arányokat tudunk vizsgálni. Ennek alapján nemcsak sok keverési arányt tudunk vizsgálni, de azt is látjuk, hogy a mutató jobbra vagy balra való elmozdítása esetén az adag tartalma a különböző anyagokból és takarmányokból, valamint az adag költsége hogyan fog változni, növekszik vagy csökken. /Példánkban csak a takarmánykomponensek mennyiségét, az összsúlyt és költséget vizsgáltuk. Ugyanígy vizsgálhatjuk a szárazanyag, ásványi anyag, stb. tartalmat is./

Ha pl. a két alapvariánst 50-50 %-ban keverjük, az ábrán leolvashatjuk, hogy a következő adaghoz jutunk:

Az adag sulya	0,342 kg
ebből kukorica	0,224 "
extrahált napraforgódara	0,065 "
szójadara	0,052 "
Az adag költsége	1,12 R

Az ábrából azt is látjuk, hogy ha a keverési arány mutatóját jobbra mozdítjuk el, vagyis a keverékben növeljük az A alapvariáns arányát, a B alapvariáns egyidejű csökkentése mellett, akkor növekszik az adagban a kukorica és extrahált napraforgódara mennyisége és az adag összsulya, és csökken a szójadara mennyisége és az adag költsége.

Nyilván az előbbiekhöz hasonlóan, - mint mondtunk - bármely beltartalmi vagy egyéb adatot vizsgálhatunk. A keményítőérték és a fehérje vizsgálatának most nincs jelentősége, hiszen mivel mindkét alapvariáns keményítőértéke és fehérjetartalma zonos, és pedig pontosan a szükségletet fedezi, a két alapvariáns bármilyen keverése esetén is a szükséglettel pontosan megegyező keményítőérték- és fehérjetartalmat nyerjük.

Az alapvariánsok keverését bármely két alapvariánsból elvégezzhetjük az előzőekben ismertetett grafikus módszer szerint. Ennek alapján 3 vagy 4 komponensből álló adagokat nyerhetünk. Ezek is felfoghatók alapvariánsokként, s az ismertetett eljárás alkalmazásával szintén keverhetők egymással, vagy valamely 3 vagy 4 komponensből álló adag keverhető valamely két takarmányból álló alapvariánssal. Ennek alapján viszonylag gyorsan, különösebb számítások nélkül, sokféle alapváltozatot tudunk megvizsgálni és kedvező adagot tudunk azok közül gyakorlati alkalmazásra kiválasztani.

Természetesen az ismertetett eljárás nemcsak pótabrak-adag, hanem bármely takarmányadag összeállítására, vagy mint

már említettük, más, hasonlóan egyszerű feladatok megoldására is alkalmas.

Bizonyos, hogy a grafikus lineáris programozás általában nem versenyezhet a matematikai programozással, mert egyszerűbb bonyolultabb feladatok megoldására nem alkalmas, másrészt nem biztos, mint már említettük, hogy optimális megoldáshoz, pl. a legkevesebb költséggel járó takarmányadaghoz jutunk. Az optimumot azonban kellő gyakorlat és megfelelő állattenyésztési szakértelem esetén megközelíthetjük, illetve a jelenleg általánosan alkalmazott módszerekkel szemben mindenképpen jobb és pontosabb eredményt tudunk elérni és döntéseinket célszerűbben tudjuk megalapozni. Maga az a tény is jelentős, hogy viszonylag gyorsan és sok számolási munka nélkül sokféle megoldási változatot tudunk vizsgálni.

Ugy tűnik azonban, hogy az ismertetett módszer sok rajzolást igényel, hiszen a koordinátatengelyeket és a metszéspontokat összekötő egyeneseket sokszor kell megrajzolni. Ezen is egyszerűen segíthetünk. Egy vaslemez táblára ragaszthatjuk a mm-papírt /kb. 1x1 m-es tábla/ és ezen rajzoljuk meg a koordinátatengelyeket. Ezután mágnesdarabkákhöz 2-2 mágnesdarabkát összekötő hurokat /cérnaszálakat/ ragasztunk különböző hosszúságú cérnaszálakkal. A mágnesdarabkákat úgy tapasztjuk a vástáblára, hogy a hurok pontosan a koordinátatengelyen meghatározott metszéspontokon haladjanak át. Így a koordináta metszéspontokat összekötő egyeneseket nem kell megrajzolni, hanem azokat a hurok helyettesítik.

A különböző hosszúságú hurok alkalmazására azért van szükség, hogy a mágnes tábla bármely pontján tudjuk azokat alkalmazni.

Két ilyen tábla elkészítésére van szükség. Az egyik az alapvariánsok előállítására, a másik az alapvariánsok keverésére szolgál. Az alapvariánsok előállítására szolgáló táblán célszerű a koordinátatengelyeken két skálát készíteni, úgy, hogy az egyik $1 \text{ cm} = 0,1 \text{ kg}$, a másikon $1 \text{ cm} = 1 \text{ kg}$. Az előbbi az abraktakarmányok keverésére alkalmas és pontosabb leolvást tesz lehetővé, az utóbbi pedig a tömegtakarmányok keverésére alkalmas, ahol a pontosság nem vetődik fel olyan szigoruan és a 10 dkg -os pontosság már elegendő. Ilyenformán egy egyszerű, olcsó eszközt alakíthatunk ki takarmánykeverési vagy hasonló problémák megoldására.

5. FEJEZET

A halmazelmélet alapjai

5.1. A halmaz fogalma

Az előző fejezetekben már talákoztunk olyan kifejezésekkel, mint a háromszöghöz tartozó pontok halmaza, a lehetséges megoldások halmaza, a bevonalkázott terület pontjainak halmaza, stb.

A halmaz kifejezéssel a továbbiak során gyakran találkozunk, ezért a gazdasági programozás matematikai alapjainak tárgyalása előtt célszerű a halmazelmélet alapfogalmainak megismé-
rése.

Amikor a háromszöghöz tartozó pontok halmazáról beszélünk, akkor ez alatt azoknak a pontoknak az összességét értjük, amelyek az adott háromszög területén helyezkednek el. A lehetséges megoldások halmazán szintén egy összességet, azaz az összes lehetséges megoldásokat értelméztük. Az összesség fogalmával gyakran találkozunk a mindennapi életben is. Például egy termelőszövetkezet állatállománya az adott termelőszövetkezet állatainak összességét jelenti. Hasonlóképpen összességet jelent egy termelőszövetkezet, vagy állami gazdaság összes földterülete, szántóterülete, dolgozó állománya, gépállománya, valamely raktár anyagkészlete, stb.

A matematikában az összesség helyett a halmaz kifejezést használjuk, például az egész számok halmaza, a páros számok halmaza, a racionális számok halmaza, a 20-nál kisebb pozitív egész számok halmaza, egy szakasz pontjainak halmaza, egy 3 cm átmérőjű kör pontjainak halmaza, a lehetséges megoldások halmaza, stb.

Egy halmazt definiálnak veszünk akkor, ha bármely jelenségről egyértelműen eldönthető, hogy az az illető halmazhoz hozzátartozik, vagy nem tartozik hozzá. Például egy 2 cm sugarú kör pontjainak halmazát vizsgálva, a vizsgálat kiterjedhet azokra a pontokra, amelyek távolsága a középponttól kisebb, mint 2 cm. Ekkor csak a kör területének belső pontjait értjük, s nem tartoznak a halmazhoz a kör kerületén elhelyezkedő pontok. Megfogalmazhatjuk úgy is a feladatot, hogy azokat a pontokat értjük, amelyek távolsága a kör középpontjától mérve nem nagyobb, mint 2 cm. Ekkor a kör kerületének pontjai is a halmazhoz tartoznak. Ha azokat a pontokat vizsgáljuk, amelyek a középponthoz pontosan 2 cm-re helyezkednek el, akkor a halmazhoz csak a kör kerületének pontjai tartoznak.

Ha például azt mondjuk, hogy a Gödöllői Agrártudományi Egyetem Tangazdaságában 1975. I. 1-én 0 órákor meglévő traktorok halmaza, a halmazt egyértelműen definiáltuk. A halmazhoz

csak a Tangazdaságban 1975. I. 1-én 0 óraker meglévő traktorok tartoznak, vagyis nem tartozik a halmazhoz a gazdaság állatállománya, épületállománya, de azok a traktorok sem, amelyeket a gazdaság egy előző időpontban értékesített, vagy egy későbbi időpontban beszerez.

Az elmondottak szerint a halmaz bizonyos szempontból összetartozó dolgok, objektumok, vagy jelenségek összességét jelenti. /Lényegében azonos értelmű ez a statisztikai sokaság, vagy statisztikai tömeg fogalmával./

Azokat a dolgokat, objektumokat, vagy jelenségeket, amelyekből a halmaz felépül, a halmaz elemeinek nevezzük.

A halmazt kétféle módon adhatjuk meg:

- a/ vagy felsoroljuk a halmaz elemelt
- b/ vagy leírjuk azt a közös tulajdonságot, vagy tulajdonságokat, amelyek alapján az elemek halmazt alkotnak.

A halmazt általában latin nagybetűvel, a halmaz elemeit pedig latin kisbetűvel jelöljük.

Azt, hogy a eleme az A halmaznak,

$a \in A$

és hogy b nem eleme az A halmaznak,

$b \notin A$

formában jelöljük. Azt is szokták mondani, hogy az A halmaz tartalmazza a-t és nem tartalmazza b-t.

Ha például azt mondjuk, hogy az A halmaz azoknak az x értékeknek az összessége, amelyek benne vannak a [2; 6] zárt intervallumban, akkor természetes, hogy

$4,6 \in A$

viszont

$6,2 \notin A.$

A halmaz állhat véges és végtelen sok elemből. E szerint megkülönböztetünk:

véges halmazt, amikor a halmaz elemeinek száma véges, pl. egy állami gazdaság dolgozói, egy termelőszövetkezet gépállománya, 20-nál kisebb pozitív egész számok halmaza, stb.;

végtelen halmazt, amikor a halmaz elemszáma végtelen, pl. az egész számok halmaza, a páros számok halmaza, stb.;

üres halmazt, amely olyan halmaz, amelynek egy eleme sincs. Például egy üres raktár készlete, egy olyan gazdaság tehénállománya, amely nem tart tehenet, a boszorkányok halmaza, mivel

boszorkányok nincsenek. Legtöbbször üres halmaz az 5 találatos lottószelvények halmaza is.

A leggyakrabban előforduló halmazokat külön szoktuk jelezni. Így pl.:

N - a természetes számok halmaza, beleértve a nullát is

G - az egészszámok halmaza

R - a valós számok halmaza

R^n - az n dimenziós pontok halmaza

\emptyset - az üres halmaz.

Ha a halmazt elemeinek felsorolásával adjuk meg, a halmaz elemeit kapcsos zárójelbe tesszük. Pl.:

$A = \{-30; -20; 3; 15; 22\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Ugyancsak kapcsos zárójelben lehet a halmazokat megadni, ha elemeinek közös tulajdonságait soroljuk fel. Pl.:

$A = \{\text{egy állami gazdaság dolgozói}\}$

$B = \{\text{egy tsz-ben termelt növények}\}$

$C = \{\text{az összes racionális egész szám}\}$

$D = \{x | 5 \leq x \leq 6\} = x | x \in [5; 6]$

vagyis azoknak az x értékeknek az összessége, amelyek benne vannak az $[5; 6]$ zárt intervallumban

$E = \{\text{a 3-mal osztható számok}\}$

Ugyanazon elem több halmaznak is lehet egyidejűleg eleme.

Pl.:

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ahol az A halmaz a 10-nél kisebb pozitív egész páros számok halmaza, a B halmaz pedig a 10-nél kisebb pozitív egész számok halmaza. A 2, 4, 6, 8 számok mindkét halmazhoz hozzátartoznak. Ugyanúgy például, ha A halmaz egy tsz. férfi dolgozóinak halmaza, B halmaz pedig a 30 éven aluli dolgozók halmaza, akkor a 30 éven aluli férfi dolgozók mind az A , mind a B halmazhoz hozzá tartoznak.

Ha valamely A halmaz minden eleme egyúttal a B halmaznak is eleme, azt mondjuk, hogy A halmaz részhalmaza a B halmaznak. Például, ha A halmaz egy tsz. női dolgozóit, B halmaz pedig az összes dolgozókat jelenti, az A halmaz minden eleme egyúttal B halmaznak is eleme. Ezt a következőképpen jelöljük:

$A \subset B$ $B \supset A$ /olv.: A részhalmaza B -nek/

Ha $A \subset B$, akkor és csak akkor, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$, azaz $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Természetesen egy halmaznak több részhalmaza is lehet. Ha például az A halmaz egy adott tsz. dolgozóit jelenti, a dolgozókat nemek szerint csoportosítva, megkülönböztetjük a férfidolgozók részhalmazát B , és a nődolgozók részhalmazát C . Ekkor természetes, hogy

$$B \subset A$$

$$C \subset A$$

vagyis az A halmaznak két részhalmazát különböztettük meg. Ha a dolgozókat kor szerint, kereset szerint, stb. csoportosítanánk, további részhalmazokat képezhetnénk. /A részhalmazok képezésénél jól tudjuk használni a statisztikai csoportosítással kapcsolatban tanultakat./

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, azaz

$$\emptyset \subset A$$

$$\emptyset \subset B$$

stb,

Minden halmaz önmagának is részhalmaza, azaz

$$A \subset A$$

$A \subset \emptyset$ és az A halmazok az A halmaznak nem valódi részhalmazai. Ha $B \subset A$ és $A \neq B$, akkor B az A halmaznak valódi részhalmaza. /Természetesen most $A \neq \emptyset$./

Egy részhalmaznak is lehet részhalmaza. Például valamely tsz. dolgozóinak a férfidolgozók részhalmazát alkotják, de természetesen a 30 éven aluli, 30-50 év közötti és 50 éven felüli férfidolgozók részhalmazát képezik a férfidolgozók halmazának.

Ha tehát

$$B \subset A$$

$$C \subset B,$$

akkor

$$C \subset B \subset A.$$

Ha

$$C \subset B$$

és

$$B \subset A,$$

akkor természetesen

$$C \subset A,$$

amit a halmazok transzitiv tulajdonságának nevezünk.

Ha egyszerre több elemről állítjuk, hogy azok elemei A halmaznak, azaz

$$a \in A$$

$$b \in A$$

$$c \in A,$$

akkor az ezen elemekből képezett halmaz részhalmaza A halmaznak, azaz

$$\{a, b, c\} \subset A.$$

Két halmazt egyenlőnek mondunk, ha elemeik azonosak, legfeljebb csak sorrendben különböznek egymástól. Ezek szerint tehát:

a/ Minden halmaz egyenlő önmagával

b/ Ha mind az $A \subset B$, mind a $B \subset A$ relációk fennállnak, akkor $A = B$, Ha $A = B$, akkor $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

c/ Ha $A \subset B$, de $A \neq B$, és $A \neq \emptyset$, akkor az A valódi részhalmaza a B halmaznak. Maga az A halmaz és a \emptyset halmaz a B halmaznak nem valódi részhalmaza.

5.2. Műveletek halmazokkal

Halmazokkal a következő műveletek végezhetőek:

egyesítés
közös rész képzés
különbségképzés

E műveletek azonban, mint látni fogjuk, különböznek az aritmetikai műveletektől.

5.2.1. A halmazok egyesítése /uniója/

Az A és B halmaz egyesítésén azt az

$$A \cup B \quad /U = \text{unió}/$$

szimbólummal jelölt halmazt értjük, amely mindazokat az elemeket tartalmazza, amelyek az A és B halmaz közül legalább az egyikhez hozzá tartoznak.

Ilyen például:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad B = \{2, 4, 6\},$$

akkor

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

vagyis

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Az egyesített halmaz tehát mind az A, mind a B elemeit tartalmazza, de csak egyszer.

Képezzük egy tsz. állatállományából a következő halmazokat:

A = {magyartarka tehének 200 db}

B = {3000 l-en felüli magyartarka tehének 120 db}

C = {magyartarka-holstein friz keresztezett tehének 200 db}

D = {3000 l-en felüli magyartarka-holstein friz tehének 180 db}

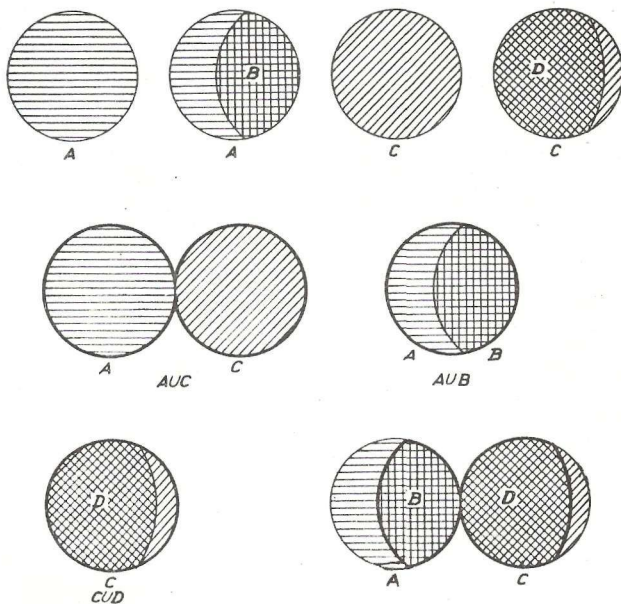
E = {3000 l-en felüli tehének 300 db}

Most

$A \cup C$ - 400 elemű halmaz; $C \cup D$ - 200 elemű halmaz;

$A \cup B$ - 200 elemű halmaz; $E = B \cup D$ - 300 elemű halmaz.

A fenti esetek geometriailag /pl. körökkel/ a következőképpen szemléltethetők /az egyesített halmaz vastagon bekere-
tezve/: /15. sz. ábra/.



A halmazok egyesítése

Az egyesítés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a/ $A \cup A = A$ /idempotencia/ /idem = ugyanaz, potencia = képesség, egyenlő tényezők eredménye/
vagyis: bármely halmaz uniója önmagával éppen önmaga;
- b/ $A \cup B = B \cup A$ /kommutativitás/
vagyis: az egyesítés sorrendje felcserélhető;
- c/ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ /asszociativitás/
vagyis: kettőnél több halmaz egyesítése tetszőleges szerinti sorrendben /asszociációban/ végezhető;
- d/ $A \cup \emptyset = A$ azaz: bármely halmaz uniója az üres halmazzal nem változtatja meg a halmazt.

A halmazok unióját szokás a halmazok összegének is nevezni. /Mint láttuk azonban, ez lényegesen különbözik az aritmetikai összegtől./

5.2.2. A halmazok közös része /metszete/

Adott A és B halmazok közös részén azokat az elemeket értjük, amelyek mind az A, mind a B halmaznak elemei, vagyis amelyek mindkét /vagy több/halmaznak elemei.

A közös rész /metszet/ jele: $A \cap B$

P1.: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

vagy a tsz. tehénállományát tekintve, az előbbi példát véve alapul:

$$A \cap B = 120 \text{ elemű halmaz}$$

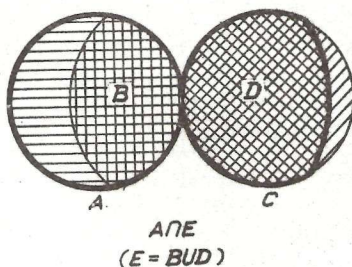
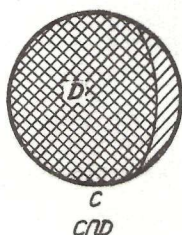
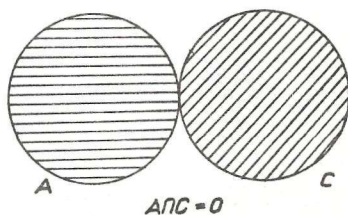
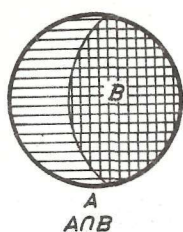
$$A \cap C = 0 \quad \text{"-"}-$$

$$C \cap D = 180 \quad \text{"-"}-$$

$$A \cap E = 120 \quad \text{"-"}-$$

$$C \cap E = 180 \quad \text{"-"}-$$

Geometriailag ábrázolva /a közös rész vastagon bekeretezve/:



Emlékezzünk vissza a grafikus ábrázolás során készített ábrákra. Egy-egy feltétellel a koordináta síkon meghatározunk egy területet, amelynek pontthalmaza olyan megoldásokat ad, amelyek az adott feltételt kielégítik. Több feltételt egyidejűleg azok a megoldások elégítenek ki, amelyeket az egyes feltételek által meghatározott területek metszetén elhelyezkedő pontthalmazok adnak. Ha tehát A halmaz a keményítőérték szükségletet, B halmaz pedig a fehérjesszükségletet kielégítő megoldások halmaza, akkor $A \cap B$ pontthalmaz mind a keményítőérték mind pedig a fehérjesszükségletet kielégítő takarmányanyag alapvariánsokat adja.

A halmazok közös részét, vagy metszetét szokták még a halmazok szorzatának is nevezni.

Azokat a halmazokat, amelyeknek nincs közös részük, azaz ha az

$$A \cap B = \emptyset,$$

diszjunkt halmazoknak nevezzük. Láttuk, hogy előző példánkban az A és C halmazok diszjunkt halmazok /diszjunkt = szétkapcsolt, nincs kapcsolatosság/.

A közös rész képzése a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a/ $A \cap A = A$ /idempotencia/
 b/ $A \cap B = B \cap A$ /kommutativitás/
 c/ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ /asszociativitás/

Az egyesítés és a közös rész képzés műveletét a következő két disztributív törvény kapcsolja össze:

$$I. (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

vagyis: két halmaz uniójának egy harmadikkal alkotott metszete ugyanaz a halmaz, mint a két halmazzal egy harmadikkal külön-külön képezett metszetének uniója. Az előbbi gyakorlati példát véve alapul tehát:

$$A \cap E = 3000 \text{ l-en felüli magyartarka tehének} = 120 \text{ db}$$

$$C \cap E = 3000 \text{ l-en felüli magyartarka holsteini friz keresztezett tehének} = 180 \text{ db}$$

$$(A \cap E) \cup (C \cap E) = \text{a } 3000 \text{ l-en felüli magyartarka és holsteini friz keresztezett tehének} = 300 \text{ db}$$

$$A \cup C = \text{magyartarka és holsteini friz keresztezett tehének} = 400 \text{ db}$$

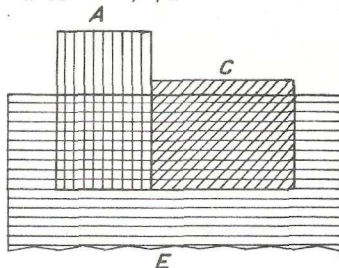
$$(A \cup C) \cap E = 3000 \text{ l-en felüli magyartarka és holsteini friz keresztezett tehének} = 300 \text{ db.}$$





Tehát

$$(A \cup C) \cap E = (A \cap E) \cup (C \cap E)$$

vagyis a tsz-ben lévő, 3000 l-en felüli magyartarka és magyartarka holsteini friz tehének azonosak a 3000 l-en felüli magyartarka és holsteini friz keresztezett tehénekkal.

Geometriailag szemléltetve /feltéve, hogy nemcsak a kétfajta tehén található a tsz-ben/: /17.sz. ábra/



-  Magyartarka tehének
-  Magyartarka holsteini friz keresztezett tehének
-  3000 l-en felüli tehének
-  3000 l-en felüli magyartarka és magyartarka-holsteini friz keresztezett tehének

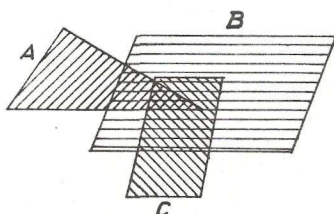
17. ábra

Gyakorlati példa a halmazokkal való műveletekre

II. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

vagyis: két halmaz metszetének egy harmadikkal alkotott uniója ugyanaz, mint a két halmaznak a harmadikkal külön-külön képezett uniójának metszete.

Geometriailag: /18.sz. ábra/



$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

18. ábra

Műveletek halmazokkal

Gyakorlati átgondolását az előbbi példa segítségével könnyen elvégezhetjük.

5.2.3. A halmazok különbsége

Az A és B halmaz különbsége azokat az elemeket tartalmazza, amelyek az A halmaznak elemei, de a B halmaznak nem elemei.

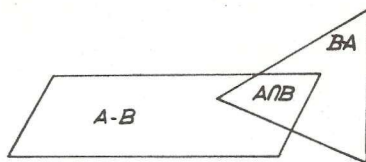
Jelölése: $A \setminus B$

Pl.: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$

Geometriailag: /19.sz. ábra/



19. ábra

A halmazok különbözősége és metszete

Az ábrából leolvashatók még a következők:

a/ $A \setminus B \neq B \setminus A$

vagyis a különbségképzés nem kommutatív

b/ $(A \setminus B) \subset A$

azaz az $A \setminus B$ részhalmaza A-nak

c/ $(B \setminus A) \subset B$

azaz a $B \setminus A$ részhalmaza B-nek

d/ $(A \setminus B) \subset A \cup B$

tehát $A \setminus B$ részhalmaza az A és B uniójának

- e/ $(B \setminus A) \subset A \cup B$ vagyis a $B \setminus A$ részhalmaza az A és B uniójának
- f/ $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ azaz az $A \setminus B$ uniója és az A és B halmaz metszete az A halmazt adja
- g/ $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$ vagyis a $B \setminus A$ uniója és az A és B halmaz metszete a B halmazt adja
- h/ $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$ tehát az A és B különbségének, az A és B közös részének és a B és A különbségének egyesítése egyenlő az A és B uniójával.

Még több más összefüggés is létezik. Így pl. a De Morgan-féle azonosság:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

és a \cup és \cap jelek felcserélhetők, azaz

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

5.3. Alaphalmaz - Részhalmaz

Egy tsz. tagságát csoportosíthatjuk nem, kor, iskolai végzettség, szakképzettség, kereset, stb. szerint.

Ilyenkor a teljes halmazt alaphalmaznak, a csoportokat részalmazoknak nevezzük.

Az alaphalmazt I-vel jelöljük.

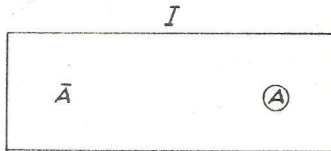
Ha A az alaphalmaz részhalmaza, azaz $A \subset I$, akkor az

$$I \setminus A$$

halmazt az A halmaz kiegészítő /vagy komplementer/ halmazának nevezzük és \bar{A} szimbólummal jelöljük. E szerint:

$$\bar{A} = I \setminus A$$

Ábrázolva: /20. sz. ábra/



20. ábra

Alaphalmaz, részhalmaz, komplementer-halmaz

Az A komplementerének /tehát \bar{A} -nak/ a komplementere $\bar{\bar{A}}$
 Felírhatjuk ezek után a következő tulajdonságokat:

- a/ $\bar{\bar{A}} = A$ azaz az A komplementerének komplementere az A halmaz
- b/ $A \cup \bar{A} = I$ tehát az A és \bar{A} egyesítése az alaphalmaz
- c/ $A \cap \bar{A} = \emptyset$ vagyis az A és \bar{A} közös része \emptyset
- d/ $I = \emptyset$ tehát az I komplementere \emptyset
- e/ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ azaz az A és B uniójának komplementere egyenlő az A és B komplementerének közös részével
- f/ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ vagyis az A és B közös részének komplementere egyenlő a komplementerek uniójával.

A két utóbbi azonosság a De-Morgan-féle azonosságon alapul. Ha ugyanis AC I és BCI, akkor a De-Morgan-féle azonosság alakja a következő:

$$I \setminus (A \cup B) = (I \setminus A) \cap (I \setminus B)$$

és

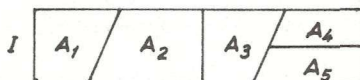
$$I \setminus (A \cap B) = (I \setminus A) \cup (I \setminus B)$$

Megemlítjük még a halmazok teljes rendszerét.

Egy alaphalmaz részhalmazai akkor alkotnak teljes rendszert, ha

- a/ bármely két részhalmaz diszjunkt halmaz és
- b/ a részhalmazok egyesítése az alaphalmazt adja.

Tehát: /21. sz. ábra/



21. ábra

A halmazok teljes rendszere

A továbbiakban általában halmazokkal /matrixokkal, vektorokkal, stb./ foglalkozunk. A halmazokról tanultak alapján már ismerősek lesznek az olyan fogalmak, amelyeket a gazdasági programozásnál fogunk használni. /Pl. A lehetséges programok az L halmaz elemei, $x_0 \in L$, azaz az optimális program eleme az L halmaznak, stb./

6. FEJEZET

Lineáris algebra

A halmazelmélet fontosabb alapfogalmainak ismeretében egy speciális halmazzal, a lineáris térrel ismerkedünk meg. Mint látni fogjuk, elképzelni csak egy, két vagy három dimenziós esetben vagyunk képesek, s a tér elnevezést csak képletes értelemben használjuk. A matematikának azt az ágát, amely a lineáris terek vizsgálatával foglalkozik, lineáris algebrának nevezzük.

Mielőtt megismerkednénk a lineáris tér fogalmával, illetve azzal, hogy milyen feltételeket kell a halmaznak kielégítenie ahhoz, hogy lineáris térről beszéljünk, - néhány új fogalommal és az ezekkel elvégezhető műveletekkel ismerkedünk meg.

6.1. Matrixok

6.1.1. A matrix fogalma

Foglaljuk táblázatba néhány takarmány fajlagos beltartalmi adatait.

Megnevezés	Silóku- korica	Lucerna- széna	Takarmány- répa
Száranyag	0,280	0,840	0,131
Keményítőérték	0,150	0,321	0,081
Pehérje	0,012	0,129	0,006

A konkrét adatok vizsgálata nélkül a következőket tudjuk mondani a táblázatról:

- Háromszor hármes táblázattal állunk szemben, vagyis a táblázatnak három sora és három oszlopa van.
- A táblázat oszlopokra bontható /az oszlopok az egyes takarmányok fajlagos beltartalmi adatait tüntetik fel/.
- A táblázat sorokra bontható, /a sorok egy-egy táplálóanyagra mutatják a különböző takarmányok fajlagos beltartalmi adatait/.
- A táblázatban az adatok rendezettek a sorok, illetve az oszlopok szerint.

Az ilyen táblázatokat a matematikában matrixnak nevezzük. /A statisztikában a statisztikai táblázat elnevezést használják./ A matrix természetesen bármennyi sorból és oszlopból állhat. Általánosan azt mondjuk, hogy m sorból és n oszlopból

áll. E szerint tehát az m sorból és n oszlopból álló számtáblázatot matrixnak nevezünk.

$$A \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

számtáblázat tehát egy 4 . 3-as matrix, vagyis négy sorból és három oszlopból áll. Azt is mondjuk, hogy 4 . 3 típusu /méretű/ matrix. Az m sorból és n oszlopból álló matrix tehát m . n típusu matrix /m és n bármely természetes egész szám lehet/.

Azokat az adatokat, amelyekből a matrix felépül, a matrix elemekinek vagy komponenseinek nevezük. A matrix komponenseit szögletes zárójelbe tesszük.

A matrix komponenseit konkrét számok nélkül általánosan is felírhatjuk. Pl.:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m . n típusu matrix. A komponensek első indexe a sor, a második indexe az oszlop sorszámára utal.

Ha meg akarjuk takarítani az összes komponens felírásával járó fáradtságot és helyigényt, ekkor a matrixot félkövéren szedett latin nagybetűvel, vagy kézírásban aláhuzott /vagy kétszer aláhuzott/ latin nagybetűvel jelöljük.*
Tehát

$$A \text{ vagy } \underline{A} \text{ illetve } \underline{\underline{A}}$$

Ha ilyenkor a matrix típusát is jelölni kívánjuk, a szimbólum alatt előbb a sor, majd az oszlop indexét zárójelbe tesszük. Pl.:

$$\underline{A} \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{A}} \\ /5.3/ \quad \quad \quad /m.n/$$

/ötször hármás vagy m-szer n-es típusu matrix/

Szokás még a matrixot úgy jelölni, hogy általános elemét /i-edik sor és j-edik oszlopban lévő elemét/ szögletes zárójelbe tesszük, azaz

$$\underline{A} = [a_{ij}]$$

* Jelölhetjük a matrixot egyszerűen latin nagybetűvel aláhuzás nélkül is, ha ez nem zavaró, azaz, ha latin nagybetűt csak matrixok jelölésére használunk.

Ha egy matrix sorait és oszlopait felcseréljük, az így nyert matrixot az eredeti matrix transzponáltjának nevezzük.

Például az előbbi takarmány-beltartalmi matrix transzponáltja a következő:

Megnevezés	Száraz- anyag	Keményítő- érték	Fehér- je
Silókukorica	0,280	0,150	0,012
Lucernaszéna	0,840	0,321	0,129
Takarmányrépa	0,131	0,081	0,006

A matrix transzponáltját A^* vagy A^T -vel jelöljük. A matrix transzponálása tehát a sorok és oszlopok felcserélését jelenti, azaz

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a_{ji} \end{bmatrix}$$

6.1.2. Speciális matrixok

a./ Zérusmatrix /nullmatrix/

Olyan matrix, amelynek minden eleme zérus. Jele: 0.

Például:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b./ Négyzetes /kvadratikus/ matrix

Olyan matrix, amelyben a sorok és az oszlopok száma megegyezik. Szokás nevezni $n \cdot n$ típusu, vagy n -ed rendű matrixnak is. Pl.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

A négyzetes matrix a_{ii} alakú elemeit /bal felső saroktól a jobb alsó sarokba húzott átló /un. fődiagonális/ mentén elhelyezkedő elemeit/ diagonális elemeknek nevezzük.

Az előbbi matrix diagonális elemei tehát 3, 5, 4.

c./ Diagonális matrix

Olyan kvadratikus matrix, amelyben a diagonálistól különböző elemek mind zérusak. Pl.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

illetve

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A diagonális matrixokat szokás jelölni a

$$\langle a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \rangle$$

formában is, amikor csak a diagonális elemeket írjuk fel.

d./ Egységmatrix

Olyan diagonális matrix, amelyben minden diagonális elem

1.

Például:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jele: E

e./ Permutáló matrix

Olyan matrix, amelynek sorait vagy oszlopait megfelelően átrendezve, egységmatrixot kapunk. Például:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f./ Háromszögmatrix /trianguláris matrix/

Olyan kvadratikus matrix, amelynek vagy a főátló elemei feletti, vagy az alatti elemei mind zérusak. Az első esetben alsó háromszögmatrixről, a második esetben felső háromszögmatrixről beszélünk, s az ilyen matrixot \triangleleft vagy \triangle szimbólummal jelöljük.

Alsó háromszögmatrix

$$\begin{array}{|c} \triangle \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Felső háromszögmatrix

$$\begin{array}{|c} \triangle \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A diagonális matrixok egyben trianguláris matrixok.

g./ Minormatrix

Egy matrix tetszés szerinti számú sorának és oszlopának elhagyásával nyert matrixot minormatrixnak nevezzük.

Ha adott az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & -7 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 2 & 9 & 4 \\ 6 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrix és ennek második és ötödik oszlopát, valamint első és negyedik sorát elhagyjuk, a maradék minor a következő:

$$\underline{A} \begin{array}{l} 2,3,5 \\ 1,3,4 \end{array} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

A felső indexek azt mutatják, hogy hányadik sorokat, az alsó indexek pedig, hogy hányadik oszlopokat tartottuk meg.

h./ Hipermatrix

Olyan matrix, amelynek elemei maguk is matrixok. Nagyméretű matrixokat, vagy ha gazdasági okokból a matrix egy-egy részét célszerű külön bontani, vízszintes és függőleges egyenesekkel a matrixot blokkokra bontjuk.

Például:

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

ahol:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; & \underline{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \underline{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}; & \underline{A}_{22} &= \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az egyes blokkokat minormatrixoknak, a blokkokra bontást particionálásnak nevezzük.

Ha egy hipermatrixban a diagonális blokkoktól különböző blokkok zérusmatrixok, kvázi diagonális matrixról beszélünk. Például:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \langle \underline{A}_{11}, \underline{A}_{22} \rangle \end{aligned}$$

f./ Vektor

Mondottuk, hogy a matrixok sorokra vagy oszlopokra bonthatók, s így egy számsort vagy számoszlopot kapunk. A matematikában egy számsort vagy számoszlopot vektornak nevezzük. /A statisztika a statisztikai sor elnevezést használja./

Az olyan matrixot tehát, amely egy sorból, vagy egy oszlopból áll, vektornak nevezzük. Az oszlopvektor $m \cdot 1$ típusu, a sorvektor pedig $1 \cdot n$ típusu matrix. E szerint a matrix sorvektorok, vagy oszlopvektorok rendszereként is felfogható.

A vektorokat félkövéren szedett, vagy kézírásban aláhuzott /vagy kétszer aláhuzott/ latin kisbetűvel jelöljük. A sorvektornál a transzponálást is feltüntetjük.

E szerint tehát:

Oszlopvektor:

\underline{a} vagy \underline{a} , illetve \underline{a}

azaz

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}$$

sorvektor:

$$\underline{a}^* \text{ vagy } \underline{a}^T, \text{ illetve } \underline{a}^* \text{ vagy } \underline{a}^T, \text{ illetve} \\ \underline{a}^* \text{ vagy } \underline{a}^T$$

azaz

$$\underline{a}^* = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Jelölhetjük a vektort általános elemének felírásával is.

Pl.:

$$\begin{bmatrix} a_j \end{bmatrix} \quad /j = 1, 2, \dots, n/$$

vagy helytakarékosság céljából a

$$\underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^* = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$$

jelölést is alkalmazhatjuk, amikor az oszlopvektort sorvektor formájában írjuk fel, de a transzponálással jelöljük, hogy az oszlopvektor.

A továbbiakban néhány speciális vektorral is megismerkedünk:

Zérusvektor /nullvektor/:

Olyan vektor, amelynek minden eleme zérus.

Jelölése: $\underline{0}$ vagy $\underline{0}^*$, illetve $\underline{0}^T$

Például:

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \underline{0}^* = [0, 0, 0]$$

A zérusmatrix tehát zérusvektorok rendszereként is fel-fogható.

Egységvektor:

Olyan vektor, amelynek i -edik eleme 1, a többi 0.

Jelölése: \underline{e}_i vagy \underline{e}_i^* , illetve \underline{e}_i^T

Például:

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_3^* = [0, 0, 1, 0]$$

Összegző vektor:

Olyan vektor, amelynek minden eleme 1.

Jele: $\underline{1}$, illetve $\underline{1}^*$ vagy $\underline{1}^T$

Például:

$$\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{1}^* = [1, 1, 1, 1]$$

A vektorfogalom ismerete alapján könnyű belátni, hogy a matrix oszlopvektorok vagy sorvektorok rendszereként is felfogható. Az \underline{A} matrix tehát felírható

oszlopvektorok rendszereként

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n]$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \right]$$

vagy

sorvektorok rendszereként

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \overset{*}{\underline{a}_1} \\ \overset{*}{\underline{a}_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \overset{*}{\underline{a}_m} \end{bmatrix}$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [5, 3, 2] \\ [1, 4, 7] \\ [6, 5, 4] \end{bmatrix}$$

Aligha kell bizonyítani, hogy az egységmatrix egységvektorok rendszereként fogható fel, azaz

$$\underline{E} = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n]$$

és

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^* \\ \underline{e}_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{e}_m^* \end{bmatrix}$$

g./ Skalár:

Olyan matrix, amelynek egy sora és egy oszlopa van, tehát 1 . 1 típusu matrix /vagy olyan vektor, amelynek egy eleme van/.

Ilyenkor nem is használjuk a matrix vagy vektor írásmódot.

6.2. Nagyságrendi relációk

Egy m . n típusu A matrix egyenlő egy m . n típusu B matrix-szal, ha megfelelő elemeik azonosak. Például ha

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

akkor $\underline{A} = \underline{B}$, mert

$$a_{11} = b_{11}, \quad a_{12} = b_{12}, \quad a_{21} = b_{21}, \quad a_{22} = b_{22}.$$

Ugyanígy értelmezzük a vektorok közötti relációkat is, azaz ha

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

akkor $\underline{a} = \underline{b}$.

Az azonos elemek összehasonlítása alapján értelmezzük az alábbi relációkat is:

$$\begin{array}{ll} \underline{A} > \underline{B} & \underline{a} > \underline{b} \\ \underline{A} \geq \underline{B} & \underline{a} \geq \underline{b} \\ \underline{A} < \underline{B} & \underline{a} < \underline{b} \\ \underline{A} \leq \underline{B} & \underline{a} \leq \underline{b} \\ \underline{A} \geq \underline{O} & \underline{a} \geq \underline{O} \end{array}$$

A nagyságrendi relációk természetesen csak azonos típusu /ugyanannyi sort és ugyanannyi oszlopot tartalmazó/ matrixok között értelmezhetők.

6.3. Műveletek matrixokkal

6.3.1. Összeadás

Az összeadást csak azonos típusu matrixokkal tudjuk elvégezni.

Az $\underline{A} = [a_{ij}]$, $\underline{B} = [b_{ij}]$ és $\underline{C} = [c_{ij}]$ $m \cdot n$

típusu matrixok összege alatt az

$$\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = [a_{ij}] + [b_{ij}] + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]$$

ugyancsak $m \cdot n$ típusu matrixot értjük. Az azonos típusu matrixokat tehát úgy adjuk össze, hogy az azonos helyen lévő elemeket összeadjuk.

Például:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ -6 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 6 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 10 \\ 2 & 14 & -7 \\ 2 & 13 & 14 \\ 4 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Természetes, hogy $\underline{A} + \underline{O} = \underline{A}$ és $\underline{O} + \underline{A} = \underline{A}$

Matrixokkal végez műveleteket a gyakorlati szakember is, még ha nincs is tudatában annak, hogy matrixokkal dolgozik.

Például tegyük fel, hogy valamely gazdaság két termelési egysége a felhasznált műtrágyamennyiségekről féleségenként /N, P, K/ kimutatást, táblázatot készít, amelynek oszlopai a különböző növényekre, sorai pedig a műtrágyaféleségekre vonatkoznak. A két termelési egységben összeállított táblázat matrix. Az egész gazdaság műtrágyafelhasználását megkapjuk, ha a két táblázat azonos helyen levő elemeit összeadjuk. Pl.:

$$\underline{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Őszi-} \\ \text{buza} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{kuko-} \\ \text{rica} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{napra-} \\ \text{forgó} \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ P \\ K \end{matrix} & \begin{bmatrix} 800 & 1000 & 500 \\ 700 & 800 & 400 \\ 500 & 600 & 200 \end{bmatrix} \end{matrix} ; \underline{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Őszi-} \\ \text{buza} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{kuko-} \\ \text{rica} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{napra-} \\ \text{forgó} \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ P \\ K \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1000 & 1300 & 0 \\ 800 & 1000 & 0 \\ 600 & 800 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Őszi-} \\ \text{buza} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{kuko-} \\ \text{rica} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{napra-} \\ \text{forgó} \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ P \\ K \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1800 & 2300 & 500 \\ 1500 & 1800 & 400 \\ 1100 & 1400 & 200 \end{bmatrix}$$

A matrixok összeadására érvényes a

$$\begin{array}{l} \text{kommutativitás} \quad \underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} \\ \text{asszociativitás} \quad \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} \end{array}$$

A vektorokra vonatkozóan is érvényesek a matrixokkal kapcsolatban elmondottak, hiszen azok speciális matrixok. Tehát

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_i \\ \vdots \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i + b_i \\ \vdots \\ a_i + b_i \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 2 \\ 4 + -1 \\ 3 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

vagy

$$\underline{a}^* + \underline{b}^* = \begin{bmatrix} a_j \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_j \\ \vdots \\ b_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_j + b_j \\ \vdots \\ a_j + b_j \end{bmatrix}$$

tehát

$$\begin{bmatrix} 5, & 4, & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2, & -1, & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 2, & 4 + -1, & 3 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7, & 3, & 10 \end{bmatrix}$$

és $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
 $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$

vagy $\underline{a}^* + \underline{b}^* = \underline{b}^* + \underline{a}^*$
 $\underline{a}^* + \underline{b}^* + \underline{c}^* = \underline{a}^* + \underline{b}^* + \underline{c}^*$

és természetes, hogy

$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a} \quad \text{és} \quad \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$$

Könnyű belátni, hogy

$$\underline{A} + \underline{B}^* = \underline{A}^* + \underline{B}^*$$

illetve

$$\underline{a} + \underline{b}^* = \underline{a}^* + \underline{b}^*$$

vagyis az összeg transzponáltja egyenlő a tagok transzponáltjainak összegével.

6.3.2. Kivonás

Az összeadáshoz hasonlóan csak azonos típusu matrixok kivonása értelmezhető. A kivonást úgy végezzük, hogy a megfelelő elemeket kivonjuk egymásból, tehát

$$\underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} - b_{ij} \end{bmatrix}$$

vagyis az A matrixhoz hozzáadjuk a B matrix -1 -szeresét, azaz:

$$\underline{A} + /-1/ \underline{B}.$$

Például:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Természetesen

$$\underline{A} - \underline{0} = \underline{A}$$

és

$$\underline{0} - \underline{A} = - \underline{A}$$

A vektorokra, mint egy sor vagy egy oszlopból álló matrixokra is a fenti szabályok érvényesek, vagyis

$$\underline{a} - \underline{b} = [\underline{a}_i] - [\underline{b}_i] = [\underline{a}_i - \underline{b}_i]$$

vagy

$$\underline{a}^* - \underline{b}^* = [\underline{a}_j] - [\underline{b}_j] = [\underline{a}_j - \underline{b}_j]$$

Például:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

vagy

$$\underline{a}^* = [3, 2, 5]; \quad \underline{b}^* = [4, 1, -2]$$
$$\underline{a}^* - \underline{b}^* = [-1, 1, 7]$$

Természetesen

$$\underline{A} - \underline{B} \neq \underline{B} - \underline{A} \quad /kommutativitás/$$

és

$$/ \underline{A} - \underline{B} / - \underline{C} \neq \underline{A} - / \underline{B} - \underline{C} / \quad /asszociativitás/$$

vagy vektorok esetén

$$\underline{a} - \underline{b} \neq \underline{b} - \underline{a}$$

és

$$/ \underline{a} - \underline{b} / - \underline{c} \neq \underline{a} - / \underline{b} - \underline{c} /$$

Aligha kell bizonyítani, hogy a matrixok kivonása a mezőgazdasági gyakorlatban is előfordul.

6.3.3. Matrix szorzása skalárral

Matrixot /vagy vektort/ skalárral úgy szorzunk, hogy a matrix /vektor/ minden elemét megszorozzuk az adott skalárral. Tehát

$$\gamma \underline{A} = \gamma [a_{ij}] = [\gamma a_{ij}]$$

vagy

$$\gamma \underline{a} = \gamma [a_i] = [\gamma a_i]$$

illetve

$$\gamma \underline{a}^* = \gamma [a_j] = [\gamma a_j]$$

Például:

$$3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

vagy

$$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{illetve} \quad 3 [2, 4] = [6, 12]$$

A matrixok skalárral való szorzására érvényes a

kommutativitás $\gamma \underline{A} = \underline{A} \gamma$

asszociativitás $(\gamma_1 \gamma_2) \underline{A} = \gamma_1 (\gamma_2 \underline{A})$

disztributivitás $(\gamma_1 + \gamma_2) \underline{A} = \gamma_1 \underline{A} + \gamma_2 \underline{A}$

illetve

$$\gamma (\underline{A} + \underline{B}) = \gamma \underline{A} + \gamma \underline{B}$$

Matrixok skalárral való szorzása is előfordul a mezőgazdasági gyakorlatban. Például, ha egy táblázat fajlagos adatai /műtrágyafelhasználás, munkaerőfelhasználás, stb./ kh-ra vonatkoznak és azokat ha-ra kell átszámolni, ezt úgy végezzük, hogy a táblázat adatait szorozzuk 1,73-dal.

6.3.4. Vektor szorzása vektorral

A művelet csak akkor értelmezhető, ha a szóban forgó vektor elemszáma azonos. Ha vektort vektorral szorzunk, akkor az egyik vektort sor, a másik vektort oszlopvektorként írjuk fel. Így vektort vektorral két módon szorozhatunk, s e szerint beszélünk skaláris szorzásról és diadikus szorzásról.

a. / Skaláris szorzás

Skaláris szorzásról akkor beszélünk, ha sorvektort szorzunk jobbról oszlopvektorral. Eredményül skalárt kapunk. Tehát:

$$\underline{a}^* \underline{b} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n] = \gamma$$

vagyis a szorzást úgy végezzük, hogy az azonos sorszámú elemeket összeszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk. Például:

$$\begin{bmatrix} 5, & 8, & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 10 + 32 - 3 \end{bmatrix} = 39$$

Tegyük fel, hogy egy termelőszövetkezet egy vizsgált időszak alatt 3 féle terméket értékesít az alábbi mennyiségben és egységárral:

Termék	Értékesített mennyiség	Egységár R/q
A	5 000	300
B	8 000	400
C	15 000	500

Hogy mennyi volt az árbevétele, azt megkapjuk, ha a termékvektort /értékesített mennyiségek vektorát/ jobbról szorozzuk az árvektorral /egységárak vektorával/, azaz:

$$\begin{bmatrix} 5000, & 8000, & 15000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1500000 + 3200\ 000 + 7500\ 000 \end{bmatrix} = 12\ 200\ 000\ R$$

Aligha kell bizonyítani, hogy a mezőgazdaságban ilyen műveletre gyakran kerül sor, s ezen mit sem változtat, hogy a tényezőket vektorként írjuk fel vagy nem.

A skaláris szorzatban a két vektor felcserélhető, ha azokat transzponáljuk, azaz a skaláris szorzás kommutatív jellegű kifejezés. Tehát

$$\underline{a}^* \underline{b} = \underline{b}^* \underline{a}$$

Például az előbbi adatokkal

$$\begin{bmatrix} 300, & 400, & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 000 \\ 8 & 000 \\ 15 & 000 \end{bmatrix} = 12\,200\,000 \text{ Ft.}$$

Egyszerű példák segítségével igazolhatjuk, hogy érvényes a disztributív tulajdonság is:

$$\underline{a}^* / \underline{b} + \underline{c} / = \underline{a}^* \underline{b} + \underline{a}^* \underline{c}$$

és

$$/ \underline{a}^* + \underline{b}^* / \underline{c} = \underline{a}^* \underline{c} + \underline{b}^* \underline{c}$$

A továbbiakban ismerkedjünk meg még néhány speciális esetel.

A $\underline{0}$ vektorral bármely vektort szorozva, eredményül $\underline{0}$ -t kapunk.

Például: $\underline{a}^* \underline{0} = \underline{0}^* \underline{a} = \underline{0}$

azaz $\begin{bmatrix} 5, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$

Ha az \underline{a} vektort az \underline{e}_i egységvektorral szorozzuk, eredményül az \underline{a} vektor i -edik elemét kapjuk.

Például:

$$\underline{a}^* \underline{e}_i = \underline{e}_i^* \underline{a} = \underline{a}_i$$

azaz $\begin{bmatrix} 3, & 2, & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = 2$

Ha egy \underline{a} vektort összegző vektorral szorzunk, akkor eredményül az \underline{a} vektor elemeinek összegét kapjuk.

Például:

$$\underline{a}^* \underline{1} = \underline{1}^* \underline{a} = \sum_{i=1}^n a_i$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 4, & 3, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = 9,$$

vagy

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = 9.$$

b./ Vektorok diadikus szorzata

Vektorok diadikus szorzatáról akkor beszélünk, ha oszlopvektort szorzunk jobbról sorvektorral. Eredményül matrixot kapunk, amelynek annyi sora van, mint ahány eleme van az oszlopvektornak, és annyi oszlopa van, mint ahány eleme van a sorvektornak.

A műveletet a következőképpen végezzük:

$$\underline{a} \underline{b}^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1, & b_2, & \dots, & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} b_1, & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} b_2, & \dots, & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4, & 8, & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} 4, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} 8, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} 5 =$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 40 & 25 \\ 12 & 24 & 15 \\ 8 & 16 & 10 \end{bmatrix}$$

Jegyezzük meg, hogy

$$\underline{a} \underline{b}^* \neq \underline{b} \underline{a}^*$$

Az előbbi példa alapján

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5, & 3, & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 5, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 3, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 40 & 24 & 16 \\ 25 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

vagyis most az előbbi matrix transzponáltját kaptuk. E szerint

$$\underline{a} \underline{b}^* / ^* = \underline{b} \underline{a}^*$$

Természetesen

$$\underline{a} \underline{0}^* = \underline{0} \underline{a}^* = \underline{0}$$

vagyis ha az egyik tényező 0 vektor, eredményül 0-matrixot kapunk.

Ha az a vektort az e_i egységvektorral szorozzuk, olyan matrixot kapunk, amelynek i-edik oszlopvektora maga az a vektor, a többi vektora pedig zérusvektor.

Például:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} [0, 1, 0] = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 0, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 1, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 0 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

vagy

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [4, 8, 5] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} 4, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} 8, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} 5 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ha az a vektort összegző vektorral szorozzuk, olyan matrixot kapunk, amelyben az a vektor annyiszor fordul elő, ahány elemű vektorokat szoroztunk.

Például:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} [1, 1, 1] = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 1, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 1, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} 1 \right] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

vagy

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [4, 8, 5] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 4, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 8, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 5 \right] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

/azaz most az előbbi matrix transzponáltját kaptuk/

A mezőgazdasági gyakorlatban a vektorok diadikus szorzata is előfordul.

Például valamely növénynél megterveztek a műtrágyaszükségletet 1 ha-ra műtrágyaféleségenként, mondjuk, hogy N-ből 326 kg, P-ből 366 kg, K-ből 144 kg természetes egységben. Az adott növényt három táblán termesztjük, amelyek területe 100, 150, 200 ha. Diadikus szorzat alkalmazásával egy olyan táblázatot /matrix/ nyerhetők, amely az egyes műtrágyaféleségekből kiszórandó mennyiségeket tartalmazza táblánként.

Például:

$$\begin{bmatrix} 326 \\ 366 \\ 144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100, 150, 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32\ 600 & 48\ 900 & 65\ 200 \\ 36\ 600 & 54\ 900 & 73\ 200 \\ 14\ 400 & 21\ 600 & 28\ 800 \end{bmatrix}$$

6.3.5. Matrix szorzása vektorral

Matrixot jobbról oszlopvektorral, balról sorvektorral szorozhatunk. Ez következik a matrixok szorzására adott definícióból.

a./ Matrix szorzása jobbról oszlopvektorral

A művelet csak akkor végezhető el, ha a matrix oszlopvektorainak száma és a vektor komponenseinek száma megegyezik.

A műveletet úgy végezzük, hogy a matrix első oszlopvektorát a vektor első elemével, a második oszlopvektorát a vektor második elemével, stb. megszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk. Eredményül vektort kapunk, amelynek annyi eleme van, ahány sora volt a matrixnak. Tehát

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \sum_{j=1}^n \underline{a}_j x_j = \underline{b}$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} 4 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} 5 = \\ = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Matrixnak vektorral való szorzása a mezőgazdaságban igen gyakran fordul elő.

A 6.1.1. alatt egy táblázatot adtunk meg, amely háromféle takarmány beltartalmi adatait tartalmazza. Ha most összeállítunk egy takarmányadagot, amelyben 25 kg siló kukoricát, 3 kg lucernaszénát és 10 kg takarmányszénát kívánunk feleltetni, az adag szárazanyag, keményítőérték és fehérjetartalmát megkapjuk, ha a fajlagos beltartalmi matrixot szorozzuk a takarmányok mennyiségeire vonatkozó vektorral, azaz

$$\begin{bmatrix} 0,280 & 0,840 & 0,131 \\ 0,150 & 0,321 & 0,081 \\ 0,012 & 0,129 & 0,006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,280 \\ 0,150 \\ 0,012 \end{bmatrix} 25 + \begin{bmatrix} 0,840 \\ 0,321 \\ 0,129 \end{bmatrix} 3 + \begin{bmatrix} 0,131 \\ 0,081 \\ 0,006 \end{bmatrix} 10 =$$

$$= \begin{bmatrix} 7,00 \\ 3,75 \\ 0,30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,520 \\ 0,963 \\ 0,387 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,31 \\ 0,81 \\ 0,06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,830 \\ 5,523 \\ 0,747 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Sza.} \\ \text{ké.} \\ \text{fehérje} \end{matrix}$$

b./ Matrix szorzása balról sorvektorral

A művelet csak akkor értelmezhető, ha a matrix sorainak száma és a vektor komponenseinek száma megegyezik. Eredményül sorvektort kapunk.

A művelet elvégzése:

$$\underline{x}^* \underline{A} = [x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_m] = \sum_{i=1}^m x_i \underline{a}_i^* = \underline{b}^*$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 2, & 4, & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 5, & 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2, & 3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3, & 2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 10, & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8, & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15, & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33, & 30 \end{bmatrix}$$

Könnyen észrevehetjük, hogy az előbbi egyszerű példát szerepeltettük most is és a kapott vektor az előbbi vektor transzponáltja. Ennek alapján egyszerű belátni, hogy

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

és

$$\underline{x}^* \underline{A}^* = \underline{b}^*$$

vagyis

$$(\underline{A} \underline{x})^* = \underline{x}^* \underline{A}^*$$

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha egy matrixot egységvektorral, vagy összegző vektorral szorzunk.

Ha az \underline{A} matrixot az \underline{e}_i vagy \underline{e}_i^* egységvektorral szorozzuk meg, akkor eredményül a matrix j -edik oszlopát, vagy i -edik sorát kapjuk.
Például:

$$\underline{A} \underline{e}_i = \underline{a}_j$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagy

$$\underline{e}_i^* \underline{A} = \underline{a}_i^*$$

$$[0, 1, 0] \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [5, 3, 2] 0 + [4, 7, 6] 1 + [3, 1, 2] 0 = [4, 7, 6]$$

Ha az \underline{A} matrixot az $\underline{1}$ vagy $\underline{1}^*$ összegző vektorral szorozzuk meg, akkor olyan vektort kapunk eredményül, amely a matrix oszlopainak vagy sorainak összegét adja.

$$\underline{A} \underline{1} = \sum_{j=1}^n \underline{a}_j$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

vagy

$$\underline{1}^* \underline{A} = \sum_{i=1}^m \underline{a}_i^*$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12, & 11, & 10 \end{bmatrix}$$

6.3.6. Matrix szorzása matrixszal

A művelet csak akkor értelmezhető, ha az első tényező oszlopainak száma és a második tényező sorainak száma megegyezik. Eredményül olyan matrixot kapunk, amelyben a sorok száma megegyezik az első tényező sorainak számával, az oszlopok száma pedig a második tényező oszlopainak számával.

A művelet háromféle módon végezhető el.

a./ A műveletet úgy végezzük, hogy azt matrixnak jobbról oszlopvektorral való szorzatára bontjuk fel.

$$\underline{A} \underline{B} = \left[\underline{A} b_1, \underline{A} b_2, \dots, \underline{A} b_n \right] = \underline{C}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} 3 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} 1, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} 6 + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} -2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} 4, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} 5 + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} 7 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 6 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -14 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 49 \\ 35 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 32 & 50 \\ 29 & 16 & 66 \\ 26 & 26 & 61 \\ 11 & 26 & 25 \end{bmatrix}$$

b./ A műveletet felbontjuk matrixnak balról sorvektorral történő szorzataira

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^* & \underline{B} \\ \underline{a}_2^* & \underline{B} \\ \vdots & \vdots \\ \underline{a}_m^* & \underline{B} \end{bmatrix} = \underline{C}$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5, 3, 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1, 7, 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4, 5, 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2, 1, 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5, 3, 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} +$$

$$+ 2 \begin{bmatrix} 1, 4, 2 \end{bmatrix}, 1 \begin{bmatrix} 2, 6, 5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 3, -2, 7 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1, 4, 2 \end{bmatrix},$$

$$4 \begin{bmatrix} 2, 6, 5 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3, -2, 7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1, 4, 2 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 2, 6, 5 \end{bmatrix} +$$

$$+ 1 \begin{bmatrix} 3, -2, 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1, 4, 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10, 30, 25 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 9, -6, 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2, 8, 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2, 6, 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21, -14, 49 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 6, 24, 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8, 24, 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15, -10, 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3, 12, 6 \end{bmatrix},$$

$$[4, 12, 10] + [3, -2, 7] + [4, 16, 8] = \begin{bmatrix} 21 & 32 & 50 \\ 29 & 16 & 66 \\ 26 & 26 & 61 \\ 11 & 26 & 25 \end{bmatrix}$$

c./ A műveletet felbontjuk vektorok skaláris szorzatára.

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^* b_1, \underline{a}_1^* b_2, \dots, \underline{a}_1^* b_n \\ \underline{a}_2^* b_1, \underline{a}_2^* b_2, \dots, \underline{a}_2^* b_n \\ \vdots \\ \underline{a}_m^* b_1, \underline{a}_m^* b_2, \dots, \underline{a}_m^* b_n \end{bmatrix}$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5, 3, 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5, 3, 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5, 3, 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1, 7, 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, 7, 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, 7, 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4, 5, 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4, 5, 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4, 5, 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 32 & 50 \\ 29 & 16 & 66 \\ 26 & 26 & 61 \\ 11 & 26 & 25 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{A} \underline{B}$ szorzat általában nem rendelkezik a kommutatív tulajdonsággal, vagyis általában

$$\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}$$

Lehetséges, hogy az $\underline{A} \underline{B}$ értelmezhető, de a $\underline{B} \underline{A}$ nem is értelmezhető. Például:

$$\text{ha } \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és } \underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

értelmezhető, hiszen az első matrix oszlopainak száma és a második tényező sorainak száma megegyezik, de a

$$\underline{B} \underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nem értelmezhető, mert az első matrix oszlopainak és a második matrix sorainak száma eltérő.

Tekintsünk két négyzetes matrixot, vagyis

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Most mind az $\underline{A} \underline{B}$, mind a $\underline{B} \underline{A}$ szorzat értelmezhető. Végezzük el a műveleteket:

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 18 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} \underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 28 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

tehát

$$\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}$$

Vannak speciális esetek, amikor a tényezők felcserélése nem változtatja meg az eredményt.

Például:

$$\underline{A} \underline{E} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{E} \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Könnyen belátható az is, hogy

$$\underline{A} \underline{0} = \underline{0} \underline{A} = \underline{0}$$

Ha az \underline{A} és \underline{B} diagonális matrixok, akkor szorzatuk a következő:

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

vagy másképpen

$$\langle a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \rangle \langle b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn} \rangle = \\ = \langle a_{11} b_{11}, a_{22} b_{22}, \dots, a_{nn} b_{nn} \rangle$$

vagyis két vagy több diagonális matrix szorzata olyan diagonális matrix, amelynek diagonális elemei a tényező matrixok megegyező helyen lévő diagonális elemeinek szorzata.

Például, ha:

$$\underline{A} = \langle 4, 5, 3 \rangle \quad \text{és} \quad \underline{B} = \langle 2, 3, 6 \rangle,$$

akkor

$$\underline{A} \underline{B} = \langle 4, 5, 3 \rangle \langle 2, 3, 6 \rangle = \\ = \langle 4 \cdot 2, 5 \cdot 3, 3 \cdot 6 \rangle = \langle 8, 15, 18 \rangle$$

és ilyenkor

$$\underline{A} \underline{B} = \underline{B} \underline{A}$$

Például:

$$\underline{B} \underline{A} = \langle 2, 3, 6 \rangle \langle 4, 5, 3 \rangle = \langle 8, 15, 18 \rangle$$

A diagonális matrixok szorzatából következik, hogy egy diagonális matrix m -edik hatványa / m nemnegatív egész szám/ olyan diagonális matrix, amelynek diagonális elemei az eredeti matrix elemeinek m -edik hatványai.

Ha tehát

$$\underline{A} = \langle a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn} \rangle$$

akkor

$$\underline{A}^m = \langle a_{11}^m, a_{12}^m, \dots, a_{nn}^m \rangle$$

Például:

$$\underline{A} = \langle 3, 4, 2 \rangle$$

$$\underline{A}^3 = \langle 27, 64, 8 \rangle$$

Felsorolunk még néhány speciális szorzatot:

Ha egy matrixot jobbról szorzunk egy diagonális matrixszal, akkor elég a szorzandó oszlopait a megfelelő diagonális elemmel megszorozni.

Ha balról szorzunk diagonális matrixszal, akkor a matrix sorait szorozzuk a megfelelő diagonális elemmel.

Ha alsó vagy felső háromszögmatrixokat szorzunk össze, eredményül azonos típusu háromszögmatrixot kapunk.

Egy matrixot jobbról, illetve balról szorozva permutáló matrixszal, csak a sor-, illetve oszlopvektorok sorrendje változik meg.

A matrixok szorzásánál is érvényes az
asszociativitás $/ \underline{A} \underline{B} / \underline{C} = \underline{A} / \underline{B} \underline{C} /,$

valamint a

disztributivitás $\underline{A} / \underline{B} + \underline{C} / = \underline{A} \underline{B} + \underline{A} \underline{C}$

és $/ \underline{A} + \underline{B} / \underline{C} = \underline{A} \underline{C} + \underline{B} \underline{C}$

A matrixszorzat transzponáltja

Egy szorzat transzponáltját megkapjuk, ha a tényezőket felcseréljük és mindkét tényezőt transzponáljuk.

Általában érvényes, hogy

$$/\underline{A} \underline{B}/^* = \underline{B}^* \underline{A}^*$$

vagyis a szorzat transzponáltja egyenlő a felcserélt tényezők transzponáltjának szorzatával.

Hasonlóképpen

$$/\underline{A} \underline{B} \underline{C}/^* = \underline{C}^* \underline{B}^* \underline{A}^*$$

Például:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} [2, 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [2, 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [6, 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [6, 5] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 21 & 10 \end{bmatrix}$$

Természetesen

$$/\underline{A} \underline{B}/^* = \begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad \underline{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^* \underline{A}^* = \begin{bmatrix} [2, 6] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [2, 6] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [4, 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [4, 5] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Tehát valóban

$$/\underline{A} \underline{B}/^* = \underline{B}^* \underline{A}^*$$

6.3.7. Matrixok hatványozása

Hatványozni csak négyzetes matrixokat lehet, a következők szerint:

$$\begin{aligned} \underline{A}^0 &= \underline{E} \\ \underline{A}^1 &= \underline{A} \\ \underline{A}^2 &= \underline{A} \underline{A} \\ \underline{A}^3 &= \underline{A}^2 \underline{A} = \underline{A} \underline{A} \underline{A} \\ \underline{A}^4 &= \underline{A}^3 \underline{A} = \underline{A} \underline{A} \underline{A} \underline{A} \end{aligned}$$

Természetesen

$$\underline{A}^p \underline{A}^q = \underline{A}^q \underline{A}^p$$

6.3.8. Műveletek blokkokra bontott matrixokkal

A matrix műveletekkel kapcsolatban megismert szabályok érvényesek akkor is, ha a műveleteket blokkokra bontott matrixokkal végezzük. Ha tehát a hipermatrixokat alkalmas módon particionálással blokkokra bontjuk, úgy hogy a blokkok között a műveletek elvégezhetőek legyenek, akkor

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} + \underline{B}_{11} & \underline{A}_{12} + \underline{B}_{12} \\ \underline{A}_{21} + \underline{B}_{21} & \underline{A}_{22} + \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} \underline{B}_{11} + \underline{A}_{12} \underline{B}_{21} & \underline{A}_{11} \underline{B}_{12} + \underline{A}_{12} \underline{B}_{22} \\ \underline{A}_{21} \underline{B}_{11} + \underline{A}_{22} \underline{B}_{21} & \underline{A}_{21} \underline{B}_{12} + \underline{A}_{22} \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Ha például

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 6 \end{array} \right]; \quad \underline{B} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

akkor

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

vagy a műveleteket blokkokra elvégezve

$$\underline{A}_{11} + \underline{B}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{12} + \underline{B}_{12} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{21} + \underline{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{22} + \underline{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} + \underline{B}_{11} & \underline{A}_{12} + \underline{B}_{12} \\ \underline{A}_{21} + \underline{B}_{21} & \underline{A}_{22} + \underline{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Szorozzuk össze a két matrixot

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 16 & 6 & -2 & -4 \\ 14 & 9 & 3 & 0 & 1 \\ 14 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & 12 \\ 16 & -9 & -5 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Végezzük el a szorzást blokkokra bontott matrixszal

$$\underline{A}_{11} \underline{B}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 10 \\ 5 & 12 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{12} \underline{B}_{21} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 9 & -3 & -1 \\ 12 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{11} \underline{B}_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{12} \underline{B}_{22} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{21} \underline{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -2 & -3 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{22} \underline{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 18 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{21} \underline{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{22} \underline{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

Végezzük el az összeadásokat és állítsuk össze az eredménymatrixot, vagyis

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} \underline{B}_{11} + \underline{A}_{12} \underline{B}_{21} & \underline{A}_{11} \underline{B}_{12} + \underline{A}_{12} \underline{B}_{22} \\ \underline{A}_{21} \underline{B}_{11} + \underline{A}_{22} \underline{B}_{21} & \underline{A}_{21} \underline{B}_{12} + \underline{A}_{22} \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Példánkban tehát

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 18 & 10 \\ 5 & 12 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 9 & -3 & -1 \\ 12 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -2 & -3 & -13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 18 & -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 6 & -2 & -4 \\ 14 & 9 & 3 & 0 & 1 \\ 14 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & 12 \\ 16 & -9 & -5 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Természetesen a blokkok közötti műveletek csak komformobilis blokkokkal végezhetők.

6.3.9. Vektorok és matrixok lineáris kombinációja

A k_1, k_2, \dots, k_p skalárokról és az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ "n" komponensű vektorokból alkotott $k_1 \underline{a}_1 + k_2 \underline{a}_2 + \dots + k_p \underline{a}_p$ kifejezést a vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

Kikötésünk csupán annyi, hogy "p" természetes szám legyen. E szerint a

$$k \underline{a}$$

is lineáris kombináció. Ez a legegyszerűbb lineáris kombináció, amikor egy vektort szorzunk meg skalárral. Ilyen formán viszont egy vektor is felfogható lineáris kombinációként, hiszen ha $k = 1$, akkor

$$1 \underline{a} = \underline{a}$$

A skalárszorozók előjele szerint beszélünk pozitív, negatív, nempozitív és nemnegatív lineáris kombinációkról. Azokat a nemnegatív lineáris kombinációkat, amelyekben a skalárszorozók összege 1, azaz

$$\sum_{i=1}^p k_i = 1$$

konvex lineáris kombinációnak nevezzük. Például:

$$k_1 = 0,3 \quad k_2 = 0,4 \quad k_3 = 0,3$$

és

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0,3 + 0,4 + 0,3 = 1$$

Lineáris kombinációval találkozunk akkor is, amikor matricot vektorral szorzunk. A

$$\underline{A} \underline{x} \text{ vagy } \underline{y}^* \underline{A}$$

szorzat ugyanis nem más, mint a matrix vektorainak és a vektor komponenseinek lineáris kombinációja, hiszen mint ismeretes,

$$\underline{A} \underline{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

illetve

$$\underline{y}^* \underline{A} = y_1 a_1^* + y_2 a_2^* + \dots + y_m a_m^*$$

Ilyen jellegű feladatok megoldására gyakran kerül sor a mezőgazdaságban. Például amikor takarmányadagot állítunk össze, a beltartalmi táblázatot /matrixot/ szorozzuk a takarmányadaggal /vektorral/ és megkapjuk az adag beltartalmi értékeit. Hasonlóképpen, amikor munkaerőmérlegeket, vagy gépi munkamérlegeket készítünk, a különböző termékek fajlagos munkaerő, vagy gépi munkaigényét tartalmazó táblázatot /matrixot/ szorozzuk a termelési szerkezet vektorával, s megkapjuk, hogy az adott termelési szerkezet megvalósítása havonként mennyi munkanap, illetve gépi műszakszükséglettel jár.

A vektorok lineáris kombinációjához hasonlóan értelmezzük a matrixok lineáris kombinációját.

Ha az $m \cdot n$ típusu

$$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_p$$

matrixok és a

$$k_1, k_2, \dots, k_p$$

skalárokból alkotott

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_p A_p$$

kifejezést tekintjük, matrixok lineáris kombinációját állítottuk elő.

Ha \underline{A} kvadratikus matrix, akkor az

$$f(\underline{A}) = k_0 \underline{A}^0 + k_1 \underline{A}^1 + k_2 \underline{A}^2 + \dots + k_m \underline{A}^m$$

lineáris kombinációt az \underline{A} matrix m -ed fokú polinomjának nevez-zük, ahol $k_0, k_1, k_2, \dots, k_m$ skalárok és

$$k_m \neq 0$$

Például az

$$f(\underline{A}) = 8 \underline{A}^0 - 6 \underline{A} + \underline{A}^2$$

az \underline{A} matrix másodfokú polinomja.

A lineáris kombinációt természetesen csak azonos elem-számu vektorok, illetve azonos típusu matrixokkal alkothatunk.

Tekintve, hogy skalárok bármely valós értéket felvehet-nek, az összes lineáris kombinációk halmaza végtelen halmaz.

6.4. További speciális matrixok

Nilpotens matrix

Ha van olyan $m > 0$ egész számu kitevő, hogy

$$\underline{A}^m = 0,$$

az adott matrixot nilpotens matrixnak nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hányadik hatvány ad zérusmatrixot, ha

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^2 = \underline{A} \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 38 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^3 = \underline{A}^2 \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 38 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^4 = \underline{A}^3 \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát az adott példában

$$\underline{A}^4 = \underline{0}$$

Aszimptotikusan nilpotens matrix

Ha valamely $\underline{A} \geq \underline{0}$ matrixra fennáll az

$$\underline{1}^* \underline{A} < \underline{1}^*$$

reláció, vagyis ha a matrix elemeinek összege minden oszlopban 1-nél kisebb, az adott matrixot aszimptotikusan nilpotens matrixnak nevezzük.

Ez azt is jelenti, hogy pozitív egész számú m kitevő növelésével az \underline{A}^m hatvány a zérusmatrixhoz közeledik.

Legyen adva az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$$

matrix. Képezzük az $\underline{1}^* \underline{A}$ szorzatot, azaz

$$\underline{1}^* \underline{A} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7, & 0,8, & 0,8 \end{bmatrix}$$

tehát tennáll, hogy

$$\underline{1}^* \underline{A} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}$$

Most képezzük az \underline{A} matrix hatványait

$$\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,29 & 0,30 \\ 0,11 & 0,16 & 0,11 \\ 0,14 & 0,16 & 0,16 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,29 & 0,30 \\ 0,11 & 0,16 & 0,11 \\ 0,14 & 0,16 & 0,16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,197 & 0,228 & 0,226 \\ 0,082 & 0,103 & 0,098 \\ 0,104 & 0,122 & 0,120 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy $\underline{A} < \underline{A}^2 < \underline{A}^3 \dots$. Ellenőrizhetjük, hogy a hatványkitevő további növelése esetén matrixunk a zérusmatrixhoz közeledik.

Minkowski - Leontief-féle matrix

Ha \underline{A} aszimptotikusan nilpotens matrix, akkor az

$$\underline{E} - \underline{A}$$

matrix Minkowski - Leontief-féle matrix. Az ilyen matrix diagonális elemei pozitívek, a többi elem pedig nem pozitív. Például:

$$\underline{E} - \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,3 \\ -0,2 & -0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Szinmetrikus matrix

Az olyan kvadratikus matrix, amelynek elemei a fődiagonálisra szinmetrikusak.

Ilyen például az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ha \underline{A} szimmetrikus matrix, akkor

$$\underline{A}^* = \underline{A}$$

Ahhoz, hogy két matrix egyenlő legyen, azonos típusuaknak kell lenniük. Ebből következik, hogy szimmetrikus matrixokat csak kvadratikus matrixok között találunk.

Egy kvadratikus matrixot ferdén szimmetrikusnak, vagy antiszimmetrikusnak nevezünk, ha érvényes az

$$\underline{A} = -\underline{A}^*$$

reláció.

Sztochasztikus matrix

Ha \underline{A} nemnegatív, tehát

$$\underline{A} \geq \underline{0}$$

és eleget tesz az

$$\underline{A} \underline{1} = \underline{1}$$

követelménynek, akkor azt sztochasztikus matrixnak nevezzük. Például:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

sztochasztikus matrix, hiszen

$$\underline{A} \underline{1} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóképpen

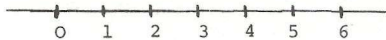
$$\underline{A} \underline{1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.5. Geometriai értelmezés és ábrázolhatóság

Az 1 elemű vektorok, vagyis a skalárok számegegyenesen ábrázolhatók. Vegyünk fel a számegegyenesen egy tetszőleges 0 kezdőpontot. Válasszunk egy egységnyi szakaszt a 0 ponttól kiindulva jobbra /ez megállapodás/ mérjük fel a számegegyenesre. A szakasz végpontjához egy egyelemű egységvektort rendelünk, vagyis 1-et, tehát

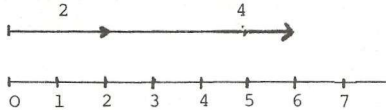
$$\underline{e}_0 = [1] = 1$$

Ezt a szakaszt ismételten felmérve a számegegyenesen, a kapott végpontokhoz írjuk a természetes számokat /skalárokat, egyelemű vektorokat/.



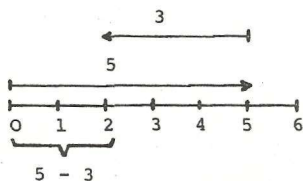
A természetes számokat így kétféle módon szemléltethetjük. Egyrészt a számegegyenes meghatározott pontjaival, másrészt azokkal az egyenes szakaszokkal, amelyek kezdőpontja 0, végpontja pedig az a pont, amelyhez a megfelelő szám van írva.

A számegegyenesen szemléltethetjük a természetes számokkal végzett műveleteket is. Például $2 + 4$ -et a számegegyenesen úgy szemléltetjük, hogy a 0 pontból kiindulva felmérjük a 2-nek megfelelő szakaszt, majd ennek végpontjából a 4-et reprezentáló szakaszt.

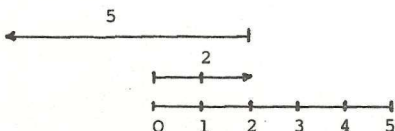


A második szakasz végpontja adja az eredményt.

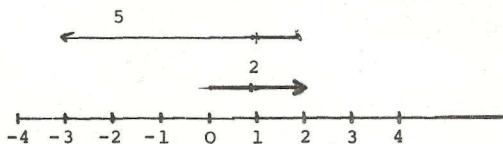
Könnyű belátni, hogy az összeadással ellentétes műveletet a kivonást úgy végezzük, hogy a kisebbítendő a 0 kezdőponttól kiindulva felmérjük a számegegyenesre, s ennek végpontjából kiindulva, ellenkező irányban felmérjük a számegegyenesre a kivonandót reprezentáló szakaszt, melynek végpontjában kapjuk az eredményt. Például $5 - 3$ a következő:



Ha a kivonandó nagyobb a kisebbítendőnél, az eredmény a 0 ponttól balra esik. Pl. $2 - 5$



Az eredményt csak akkor tudjuk leolvasni, ha a számegyenesest a 0 ponttól balra meghosszabbítjuk, s erre az oldalra is ismételten felmérjük az egységnyi szakaszt. Az így kapott pontokhoz a $-1, -2, -3, \dots$ számokat rendeljük. Most már ábrázolni tudjuk a $2 - 5$ műveletet:



Az így elkészített számegyenesen az összes természetes számok ábrázolhatók és a számegyenes pontjai és a természetes számok között kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létesíthető, vagyis minden természetes számnak megfelel a számegyenes egy és csakis egy pontja, illetve a számegyenes mindegyik pontjának megfelel egy és csakis egy természetes szám.

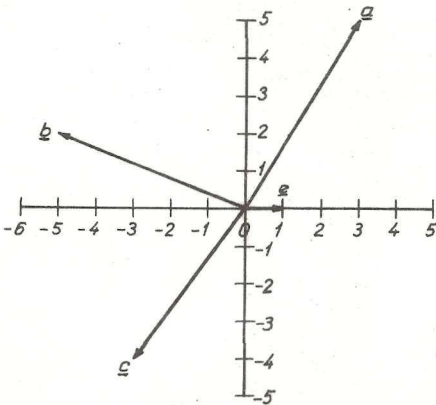
Azt sem nehéz megérteni, hogy ha \underline{e}_0 egyelemű egységvektor, azaz

$$\underline{e}_0 = [1]$$

ennek nyújtásával, zsugorításával bejárhatjuk az egész számegyenesest. Ha ugyanis $\underline{e}_0 = [1]$ és ezt k szorzásra nyújtjuk, akkor a k megfelelő megválasztásával a számegyenes bármely pontját megkaphatjuk /bármely természetes számot/. Ha például $k = 3$, akkor $k\underline{e}_0 = 3 \cdot 1 = 3$. Ha $k = -0,75$, akkor $k\underline{e}_0 = -0,75 \cdot 1 = -0,75$. és így tovább.

Felvehetünk a számegyenesen bármely más egyelemű vektort is és ezzel is bejárhatjuk a számegyenest. Ha pl. $\underline{a} = [5]$ és $k = 2$, akkor $k \underline{a} = 2 \cdot 5 = 10$. Ha $k = -0,5$, akkor $k \underline{a} = -0,5 \cdot 5 = -2,5$, stb. Ha $\underline{b} = -3$ és $k = 2$, akkor $k \underline{b} = 2 / -3/ = -6$, vagy $k = -3$ esetén $k \underline{b} = -3 / -3/ = 9$, stb.

Hasonlóképpen egyértelmű és kölcsönös megfeleltetés létesíthető a kételemű vektorok és a sík pontjai között. Ezt derékszögű /vagy ferdeszögű/ koordináta-rendszerben tudjuk ábrázolni. Ábrázoljunk néhány kételemű vektort:



$$\begin{aligned} \underline{a}^T &= [3, 5] \\ \underline{b}^T &= [-5, 2] \\ \underline{c}^T &= [-3, -4] \\ \underline{e}_1^T &= [1, 0] \end{aligned}$$

22. ábra

Kételemű vektorok ábrázolása

Nem nehéz belátni, hogy az $\underline{e}_1^T = [1, 0]$ és $\underline{e}_2^T = [0, 1]$ kételemű egységvektorok nyújtásával, zsugorításával, és összeadásukkal, bejárhatjuk a koordináta síkot. De bejárhatnánk a síkot bármely más nem egy egyenesbe eső kételemű vektorral is, ha azokat k_1 -, illetve k_2 -szeresükre nyújtjuk, illetve zsugorítjuk, összeadjuk, vagy kivonjuk. Ha például $k_1 = 2$ és $k_2 = 3$, akkor

$$k_1 \underline{e}_1^T + k_2 \underline{e}_2^T = 2 [1, 0] + 3 [0, 1] = [2, 3]$$

vagy ha

$$\underline{a}_1^T = [2, 3] \quad \text{és} \quad \underline{a}_2^T = [4, 2]$$

akkor

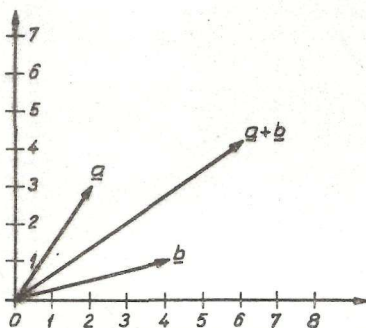
$$2 \underline{a}_1^T + 3 \underline{a}_2^T = 2 [2, 3] + 3 [4, 2] = [16, 12]$$

A háromelemű vektorokat három tengelyű térbeli koordináta-rendszerben tudjuk ábrázolni, s kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létezik a tér pontjai és a háromelemű vektorok között. A háromelemű egységvektorok, vagy bármely nem egysíkba eső háromelemű vektorok nyújtásával illetve zsugorításával és összeadásával bejárhatjuk a háromdimenziós teret.

A négy és ennél több komponensű vektorokat nem tudjuk ábrázolni. A geometriai ábrázolhatóság azonban nem feltétele a vektorok létezésének és annak, hogy azokkal műveleteket tudjunk végezni. Az n komponensű vektorokat úgy foghatjuk fel - az előbbi egyszerű és ábrázolható esetekből általánosítva -, mint n dimenziós térben ábrázolható vektorokat.

Háromnál nem több komponensű vektorokkal végzett műveletek is szemléltethetők. Az egyszerűség kedvéért válasszuk a kételemű vektorokat.

Ábrázoljuk az $\underline{a} + \underline{b}$ műveletet, ha $\underline{a} = [2, 3]^T$ és $\underline{b} = [4, 1]$ akkor $\underline{a} + \underline{b} = [6, 4]$ /23. ábra/



23. ábra

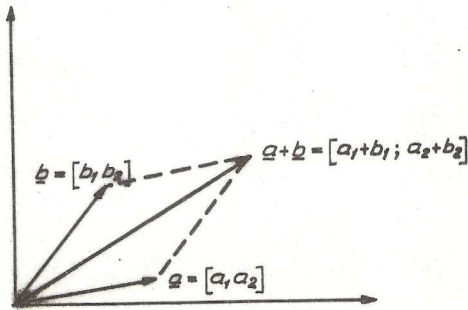
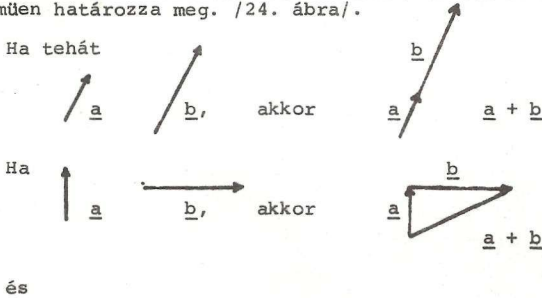
Vektorok összeadása

Az \underline{a} és \underline{b} vektor összegét a következő módon definiáljuk:

Vegyük fel a \underline{b} -t úgy, hogy kezdőpontja az \underline{a} végpontjával azonos legyen. Az \underline{a} kezdőpontjából a \underline{b} végpontjába vezető vektort az \underline{a} és \underline{b} vektorok összegének mondjuk és $\underline{a} + \underline{b}$ -vel jelöljük.

Az összeget eredőnek, az összeg tagjait összetevőnek és a vektorok definíció szerinti elhelyezését a vektorok egymáshoz fűzésének mondjuk.

A vektorokat hosszuk és irányuk szabja meg, s párhuzamosan eltolhatók. A vektorok szabad eltolhatóságából következik, hogy az összegre adott definíciónk a két vektor összegét egyértelműen határozza meg. /24. ábra/.



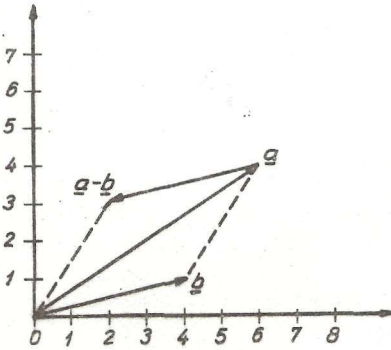
24. ábra
Vektorok összeadása

Az ábrából az is látható /és a vektorok szabad eltolhatóságából következik/, hogy az összeadandó vektorokkal, mint oldalakkal /esetleg elfajuló/ paralellogrammát szerkeszthetünk. Ebből az is kitűnik, hogy az összegvektor nem függ az összeadandók sorrendjének megválasztásától, tehát

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

vagyis mindegy, hogy a \underline{b} -t illesztjük az \underline{a} végpontjához, vagy az \underline{a} -t a \underline{b} végpontjához, ugyanazt az eredményt kapjuk.

Az összeadás alapján nem nehéz ábrázolni a vektorok különbségét sem. Legyen $\underline{a} = [6, 4]^T$ és $\underline{b} = [4, 1]$. Ábrázoljuk az adott vektorokat és az $\underline{a} - \underline{b}$ különbséget /25. ábra/.



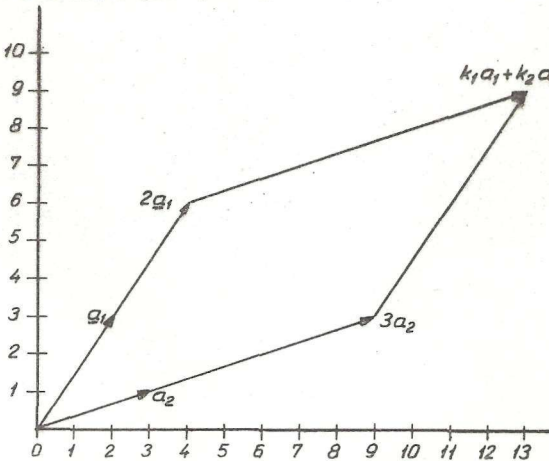
25. ábra

Vektorok különbsége

Ábrázoljuk még az $\underline{a}_1 = [2, 3]$; $\underline{a}_2 = [3, 1]$ vektorok, valamint a $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ skalárok

$$k_1 \underline{a}_1 + k_2 \underline{a}_2$$

lineáris kombinációját. /27. ábra/

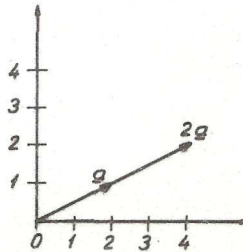


27. ábra

Lineáris kombináció

A kivonást most úgy végeztük, hogy az \underline{a} végpontjához illesztettük a \underline{b} vektort ellenkező irányban.

Végül ábrázoljuk a vektorok skalárral való szorzását. Legyen $\underline{a} = [2, 1]$; $k = 2$ és ábrázoljuk a $k \underline{a}$ szorzatot /26. ábra/



26. ábra

Vektor szorzása skalárral

7. FEJEZET

A lineáris tér

7.1. Az n elemű vektorok tere

A 6.5-ben láttuk, hogy az egyelemű vektorokkal leírhatjuk a teljes számegyenest. A számegyenest tehát az egyelemű vektorok térének nevezhetjük. Igaz a tér most egy egyenes, de mi a továbbiakban a tér kifejezést fogjuk használni, ha az azonos elemszámú vektorok összességéről van szó. A kételemű vektorok tere a sík, a háromelemű vektorok tere a háromdimenziós tér, az n elemű vektorok tere ezek szerint az n dimenziós tér. Az n bármely természetes egész szám lehet. Ha történetesen $n=1$, akkor az egyelemű vektorok terét, vagyis a számegyenest kapjuk a térfogalom általánosításaként.

Az összes n elemű vektorok egy halmazt alkotnak. Legyen ez a halmaz az L halmaz. Ha e halmazt L_n -nel jelöljük, akkor azt is feltűntettük, hogy elemei n komponensű vektorok /tudjuk, hogy n bármely természetes egész szám lehet!/.

Az L_n halmazt lineáris térnek nevezzük, ha elemei a következő feltételeket teljesítik:

a./ Az L_n elemeire nézve értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás művelete.

Ha

$$\underline{a} \in L_n \text{ és } \underline{b} \in L_n,$$

akkor

$$\underline{a} + \underline{b} \in L_n$$

és ha

$$\underline{a} \in L_n, \text{ és } x \text{ skalár, akkor}$$

$$\underline{a} \times x \in L_n$$

/vagyis, ha \underline{a} és \underline{b} eleme az n dimenziós lineáris térnek, akkor $\underline{a} + \underline{b}$ is eleme az n dimenziós lineáris térnek, illetve az \underline{a} /vagy \underline{b} / és valamely x skalár szorzata is eleme az n dimenziós lineáris térnek/.

A 6. fejezetből már ismerjük, hogy az n elemű vektorokat összeadva eredményül szintén n elemű vektort kapunk, illetve az n elemű vektorokat skalárral szorozva, szintén n elemű vektort kapunk, tehát az n elemű vektorokra az összeadás és a skalárral való szorzás művelete értelmezve van, s az eredményül kapott vektor szintén n elemű, tehát eleme az L_n -nek.

b./ Az előbbi két műveletre érvényes a kommutativitás, az asszociativitás és a disztributivitás törvénye.

Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen kiválasztott vektorokra, ha azok elemei a halmaznak, azaz ha \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} $\in L_n$ érvényesek a 6. fejezetben megismert törvények, azaz

$$\left. \begin{array}{l} \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \\ \underline{xa} = \underline{ax} \end{array} \right\} \text{kommutativitás}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \\ \underline{xy} \underline{a} = x \underline{ya} \end{array} \right\} \text{asszociativitás}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x + y} \underline{a} = x \underline{a} + y \underline{a} \\ x \underline{a + b} = x \underline{a} + x \underline{b} \end{array} \right\} \text{disztributivitás}$$

c./ Az L_n -nek a zérus eleme, a halmaz bármely eleméhez \underline{a} -va, azt változatlanul hagyja, vagyis ha

$$\underline{a} \in L_n$$

akkor

$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$$

Ezt a 6.3.1.-ből már ismerjük.

d./ Ha az $\underline{a} \in L_n$ halmaznak, akkor igaz, hogy

$$1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$$

Mivel egy vektor komponensei bármely lehetséges értéket felvehetnek, az L_n végtelen halmaz.

A fentiekben megfogalmazott négy feltétel teljesülése esetén tehát a halmazt lineáris térnek nevezzük. Természetesen e feltételeket nemcsak a vektorok, de a matrixok is teljesítik, tehát nemcsak a vektorokkal, de a matrixokkal kapcsolatban is beszélhetünk lineáris térről.

Magát a lineáris teret nehéz elképzelni, a szemléltetés azonban - elemi geometriai értelemben - nem lényeges kelléke a lineáris tér fogalmának. A tér kifejezés tehát lényegében átvitt értelmű, hasonlóan a valószínűségszámításban használt eseménytér kifejezéshez. A 6.5.-ben azonban láttuk, hogy a há-

romnál nem több elemű vektorok tere geometriailag is reprezentálható. Az L_1 lineáris tér mint tudjuk, nem más, mint a valós számok halmaza.

7.2. Az altér fogalma

Az L_n lineáris téren belül mindig létezik olyan részhalmaz, amely a lineáris térrel szemben támasztott négy követelményt kielégíti. Ez a részhalmaz az L_n altere.

Ha az L_n térből kiválasztjuk az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$$

vektorokat, akkor e vektorok összes lehetséges

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k$$

lineáris kombinációi /ahol x_1, x_2, \dots, x_k valós számok/ az n elemű vektorok végtelen halmazát jelentik. Ezt a halmazt L'_n -nel jelöljük, és az L_n alterének nevezzük. Az L'_n tartalmazza a zérusvektort is, hiszen ha $x_1 = \dots = x_k = 0$, akkor

$$\underline{a}_1 0 + \underline{a}_2 0 + \dots + \underline{a}_k 0 = \underline{0}$$

Ez a zérusvektor triviális előállításának módja.

Természetesen az L'_n altér részhalmaza az L_n lineáris térnek, azaz

$$L'_n \in L_n$$

Ha

$$L'_n \in L_n, \text{ de } L'_n \neq L_n \text{ és } L'_n \neq \emptyset$$

/ahol \emptyset az egyetlen nullvektorból álló zérusaltér/, akkor az L'_n -t az L_n valódi alterének nevezzük. A zérusaltér és maga az L_n lineáris tér nem valódi altér. Az L'_n altér önmaga is lineáris tér.

Egy $p \cdot q$ típusú A matrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációi az L_p lineáris tér alterét állítják elő, míg sorvektorainak összes lineáris kombinációi az L_q lineáris alterét. Beszélünk tehát az oszlopvektorok, illetve a sorvektorok által generált altérről. Az előbbit az A matrix oszlopvektorterének, az utóbbit pedig az A matrix sorvektorterének nevezzük.

Ha például

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

akkor az

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok oszlopvektorteret, a

$$\underline{b}_1^* = [3, 5, 2, 1]$$

$$\underline{b}_2^* = [1, 0, 7, 5]$$

$$\underline{b}_3^* = [2, 3, 6, 1]$$

vektorok pedig sorvektorteret alkotnak.

7.3. Vektorok lineáris függetlensége, függősége

A 6. fejezetből ismeretes, hogy az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$$

n elemű vektorok és az

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

skalárokból /tetszőlegesen megválasztott valós számok/ képezett

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k$$

kifejezés által meghatározott vektort az adott vektorok lineáris kombinációjának nevezzük. Mivel

$$0 \underline{a}_1 + 0 \underline{a}_2 + \dots + 0 \underline{a}_k = \underline{0}$$

természetes, hogy az összes lehetséges lineáris kombinációk között a zérusvektor mindig szerepel. Ez azt is jelenti, hogy az

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k = \underline{0}$$

vektoregyenletnek mindig van megoldása. Az

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$$

megoldást, - tehát amikor a skalárszorzók mindegyike zérus - triviális megoldásnak nevezzük.

Ezzel kapcsolatban megismerünk egy fontos definíciót.

Ha az

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k = \underline{0}$$

egyenletnek csakis triviális megoldása létezik, akkor az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$$

vektorokat lineárisan független vektoroknak nevezzük. Ellenkező esetben lineárisan függő vektorokról beszélünk. Szokás azt is mondani, hogy az adott vektorok lineárisan független /vagy lineárisan függő/ rendszert alkotnak.

Legyenek adva az

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektorok. Vizsgáljuk meg, hogy az adott vektorok lineárisan függetlenek-e?

Képezzük az adott vektorokból az

$$x \underline{a} + y \underline{b} + z \underline{c} = \underline{0}$$

kifejezést, illetve részletesen felírva az

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formát. Ez a vektoregyenlet egyértelmű a következő egyenlet-rendszerrel:

$$2x - y = 0$$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

$$x - y + 3z = 0$$

Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk, hogy $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, azaz a három vektor lineárisan független.

Ugyancsak lineárisan független rendszert alkotnak az

$$\underline{e}_1 = [1, 0, 0]^*$$

$$\underline{e}_2 = [0, 1, 0]^*$$

$$\underline{e}_3 = [0, 0, 1]^*$$

vektorok, mert a $\underline{0}$ vektort csak triviális módon képesek előállítani, vagyis

$$0 \underline{e}_1 + 0 \underline{e}_2 + 0 \underline{e}_3 = \underline{0}$$

Nézzük meg, hogy lineárisan független rendszert alkotnak-e az

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

vektorok. Vegyük e vektorok

$$2 \underline{a} - 3 \underline{b} - 4 \underline{c} + \underline{d}$$

lineáris kombinációját:

$$\begin{aligned} & 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vagyis a $\underline{0}$ vektor nem csak triviális módon állítható elő, hiszen azt a $2 \underline{a} - 3 \underline{b} - 4 \underline{c} + \underline{d}$ formában is elő tudtuk állítani, amikor a skalárszorzők nem mindegyike zérus, sőt az adott esetben zérus skalárszorzőnk nincs is. Az adott vektorok tehát lineárisan függő rendszert alkotnak.

A lineárisan független illetve függő vektorokkal kapcsolatban megismerünk néhány egyszerű tételt:

a./ Lineárisan független vektorok között a zérusvektor nem szerepelhet. A zérusvektor ugyanis nem nulla skalárral szorozva is zérusvektort ad eredményül. Ekkor a zérusvektor olyan lineáris kombinációval is előállítható, ahol nem mindegyik skalárszorító egyenlő nullával.

b./ Lineárisan független vektorok bármilyen nem üres részhalmaza ugyancsak lineárisan független rendszert alkot. Ha tehát n lineárisan független vektor közül elvesszük k vektort, ahol $k < n$, akkor mind a kiválasztott k vektor, mind a visszamaradó $n-k$ vektor lineárisan független rendszert alkot.

Tegyük fel, hogy $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek. Hagyjuk el az \underline{a}_1 vektort. A maradék $\underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n$ vektorok is lineárisan függetlenek kell, hogy legyenek. Ellenkező esetben ugyanis az \underline{a}_1 vektor hozzáírásával adnának csak zérusvektort, ha annak együtthatója $x_1 \neq 0$. Mivel azonban az adott vektorok \underline{a}_1 -től \underline{a}_n -ig függetlenek, így $x_1 = 0$, tehát azt a rendszerhez hozzáírva

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

Ez viszont, ha a maradék nem lenne lineárisan független, ellentmondáshoz vezetne.

Például

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha az adott lineárisan független vektorok közül, bármely vektort /vektorokat/ elhagyjuk, a maradék vektorok szintén lineárisan függetlenek. Például a

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

csak zérus skalárszorítókkal vezet zérusvektorhoz.

c./ Lineárisan függő vektorok közül legalább az egyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

Vegyük az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ lineárisan függő vektorokat. Ez azt jelenti, hogy az

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k = \underline{0}$$

kifejezésben nullától eltérő együttható is van. Tegyük fel, hogy $x_1 \neq 0$. Ekkor azonban

$$\underline{a}_1 - \frac{x_2}{x_1} \underline{a}_2 - \frac{x_3}{x_1} \underline{a}_3 - \dots - \frac{x_k}{x_1} \underline{a}_k$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$y_2 = -\frac{x_2}{x_1}, \quad y_3 = -\frac{x_3}{x_1}, \quad \dots, \quad y_k = -\frac{x_k}{x_1}$$

és akkor

$$\underline{a}_1 = y_2 \underline{a}_2 + y_3 \underline{a}_3 + \dots + y_k \underline{a}_k$$

tehát az \underline{a}_1 vektort kifejeztük a többi lineáris kombinációjaként.

Legyenek adva az

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

vektorok. Mivel

$$2 \underline{a} - 3 \underline{b} - 4 \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$$

az adott vektorok lineárisan függő vektorok, s közülük legalább egy vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Válasszuk a többi által kifejezendőnek a \underline{b} vektort:

$$-3 \underline{b} = -2 \underline{a} + 4 \underline{c} - \underline{d}$$

és

$$\underline{b} = \frac{2}{3} \underline{a} - \frac{4}{3} \underline{c} + \frac{1}{3} \underline{d}$$

vagyis

$$\underline{b} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 4 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{6}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{12}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{9}{3} \\ \frac{6}{3} \\ -\frac{6}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

tehát eredményül ténylegesen a \underline{b} -t kaptuk.

d./ Ha az adott n elemű vektorok közül az egyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, akkor az adott vektorok lineárisan függő vektorok.

Legyen adva, hogy

$$\underline{a}_1 = x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3 + \dots + x_k \underline{a}_k$$

és innen

$$1 \underline{a}_1 - x_2 \underline{a}_2 - x_3 \underline{a}_3 - \dots - x_k \underline{a}_k = \underline{0}$$

A bal oldal olyan lineáris kombináció, ahol nem minden skalárszorító nulla, ugyanis $x_1 = 1$, tehát az adott vektorok lineárisan függő vektorok.

7.4. A vektorrendszer rangja

A vektorok halmazt alkotnak. Az azonos számú elemet /koordinátát/ tartalmazó vektorok véges halmaza vektorrendszert alkot. Ezzel kapcsolatban fontos szerepe van a rang definíciójának.

Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszer rangja r , ha kiválasztható belőle egy r lineárisan független vektort tartalmazó részhalmaz, de bármely r -nél több vektorból álló részhalmaza már lineárisan függő rendszert alkot. A vektorrendszer rangján tehát a vektorrendszerben felvehető lineárisan független vektorok maximális számát értjük. Ha tehát egy vektorrendszer rangja pl. 6, az azt jelenti, hogy az adott vektorrendszerben 6 lineárisan független vektor vehető fel, s ehhez a vektorrendszer bármely vektorát hozzávéve, már 6 + 1 vektor lineárisan függő lesz. A rangot r -rel jelöljük, miszerint r vektor lineárisan független, $r + 1$ vektor már lineárisan függő.

A vektorrendszer rangjával kapcsolatban bizonyítás nélkül lássunk néhány tételt:

a./ Ha a vektorrendszer rangja r , akkor a vektorrendszer bármely vektora egyértelműen előállítható a rendszerből tetszőlegesen kiválasztott r darab lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként. /Az egyértelműség azt jelenti, hogy a kiválasztott lineárisan független vektoroknak csak egyetlen olyan lineáris kombinációjuk van, amely a kérdéses vektort előállítja./

b./ Ha egy vektorrendszerből olyan vektort veszünk el, amely kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja változatlan marad.

c./ Ha egy vektorrendszerhez olyan vektort csatolunk, amely kifejezhető az eredeti vektorok lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja ugyancsak változatlan marad.

d./ Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszer vektorai mind előállíthatók a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_p$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszer rangja legfeljebb p .

7.5. Dimenzió és bázis

A lineáris teret nem a ranggal, hanem a dimenzióval jellemezzük. A dimenziót hasonlóképpen definiáljuk, mint a vektorrendszer rangját.

Az L lineáris teret n dimenziósnek mondjuk, ha az L -ben található n lineárisan független vektor, de bárhogyan is választunk ki az L -ből $n + 1$ vektort, azok mindig lineárisan függő rendszert alkotnak.

Az n elemű vektorok tere n dimenziós, ami szerint n elemű vektorok között n lineárisan független vektort vehetünk fel. Ilyenek például az n elemű egységvektorok:

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= [1, 0, \dots, 0]^* \\ \underline{e}_2 &= [0, 1, \dots, 0]^* \\ &\vdots \\ \underline{e}_n &= [0, 0, \dots, 1]^* \end{aligned}$$

n -nél több lineárisan független vektort viszont az n elemű vektorok között nem lehet felvenni.

Az n dimenziós lineáris teret L_n -nel jelöljük. Bárhogyan is veszünk fel az L_n -ben n lineárisan független vektort, azok bázisát alkotják az L_n -nek. A bázis alapvető tulajdonsága, hogy a tér bármely vektora kifejezhető a bázis vektorainak /az úgynevezett bázisvektoroknak/ lineáris kombinációjaként, mégpedig egyértelműen.

Ha tehát a

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$$

vektorok az L_n egyik bázisát alkotják és a \underline{c} vektor is eleme az L_n -nek, akkor található olyan

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

skalárok, amelyekre nézve teljesül a

$$\underline{c} = c_1 \underline{b}_1 + c_2 \underline{b}_2 + \dots + c_n \underline{b}_n$$

egyenlőség, s ezek a skalárok egyértelműen meghatározottak.

A c_1, c_2, \dots, c_n skalárokat a \underline{c} vektor koordinátáinak, mégpedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Bázist alkotnak az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ egységvektorok is, amit triviális bázisnak nevezünk, mivelⁿ a koordináták ebben a bázisban minden külön számítás nélkül rendelkezésünkre állanak. Ezek a koordináták ugyanis nem mások, mint a kérdéses vektor komponensei. Az

$$\underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^n$$

vektornak az

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$$

bázisra vonatkozó koordinátái tehát az

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

skalárok. E megállapítás egyértelmű és könnyen ellenőrizhető az

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n = \underline{E} \underline{a}$$

összefüggéssel.

Az L_n lineáris térnek mindig van olyan részhalmaza, amely önmagában véve is lineáris térnek tekinthető. Az ilyen részhalmazt, mint tudjuk, az L_n alterének nevezzük.

Az L_n adott

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$$

vektorainak összes lehetséges lineáris kombinációi, azaz az

$$\underline{s} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k$$

alakban felírható vektorok például mindig alteret alkotnak $/x_1, x_2, \dots, x_k$ tetszőleges valós számok/.

Bebizonyítható, hogy a definiált vektorok halmaza eleget tesz a lineáris térrel szemben támasztott követelményeknek.

Ha bevezetjük az

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n]$$

és

$$\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^*$$

jelöléseket, az előbbi \underline{s} vektor az

$$\underline{s} = \underline{A} \underline{x}$$

alakban is felírható, ahol \underline{A} egy $n \cdot k$ típusú matrix, \underline{x} pedig egy tetszés szerinti k elemű vektor. Az összes lehetséges \underline{s} vektorok által meghatározott alteret az \underline{A} oszlopvektorai által generált altérnek nevezzük. Jelöljük ezt az alteret L' -lel. Azt pedig, hogy ez az L' az \underline{A} oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítható \underline{s} vektorok halmaza, a következőképpen szimbolizáljuk:

$$L' = \{ \underline{s} \mid \underline{s} = \underline{A} \underline{x} \}$$

Az L' feltétlenül részhalmaza L_n -nek, azaz

$$L' \in L_n$$

Az L' dimenziója megegyezik az \underline{A} oszlopvektoraiból alkotott /tehát a generáló vektorokból alkotott/ vektorrendszer rangjával, ami természetesen nem lehet nagyobb n -nél. Ha az L' dimenziója történetesen valamely n -nél kisebb természetes szám, akkor az L' halmazt az L_n valódi alterének nevezzük. Ha az L' dimenziója n , akkor

$$L' = L_n$$

vagyis az L' nem valódi alteret alkot. Mint már ismerjük, altérről beszélünk akkor is, ha

$$\underline{A} = \underline{0}$$

vagyis amikor L' egyetlen elemből áll, a zérusvektorból.

Ezt az esetet az

$$L' = \{ \underline{0} \}$$

szimbólummal jelöljük. Ez a zérusaltér, amely ugyancsak nem valódi altér.

7.6. A matrix rangja

Minden matrixszal kapcsolatban beszélhetünk két speciális altérről, mégpedig az oszlopvektortérről és a sorvektortérről. A sorvektortér és az oszlopvektortér dimenziója, vagy ami ugyanaz, a sorvektortér és az oszlopvektortér rangja bármely matrixra nézve megegyezik. Ezt a közös számot nevezzük a matrix rangjának és jelöljük r/A -val.

E szerint tehát valamely A matrix rangján az oszlopvektoraiból, illetve sorvektoraiból alkotott vektorrendszer rangját értjük.

A matrix rangjának meghatározására a későbbiekben egy jól kezelhető számítási eljárást mutatunk be, az un. elemi bázistranzformációt. Előbb azonban még megismerkedünk néhány kérdéssel a matrixok rangjával kapcsolatban.

A rang ismeretében a kvadratikus matrixokat két csoportba sorolhatjuk, mégpedig a szinguláris és a nem-szinguláris matrixok csoportjába. Ha egy kvadratikus matrix rangja kisebb, mint rendje /oszlopainak, illetve sorainak száma/, akkor a matrixot szingulárisnak, ellenkező esetben nem-szingulárisnak nevezzük. A nem-szinguláris matrixnak tehát mind az oszlopvektorai, mind a sorvektorai lineárisan független rendszert alkotnak. A szinguláris matrixoknál ezzel szemben mind az oszlopvektorok, mind a sorvektorok rendszere lineárisan függő.

A matrixok rangjával kapcsolatban gyakran támaszkodhatunk az alábbi megállapításokra:

a./ Egy matrix rangja nem lehet nagyobb sem oszlopainak, sem pedig sorainak számánál. Egy 5×3 típusu matrix rangja legfeljebb 3.

b./ A diagonális matrixok rangja megegyezik a zérustól különböző diagonális elemek számával. Az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

matrix rangja 3.

Egy diagonális matrix tehát csak akkor nem-szinguláris, ha a diagonális elemek között nem szerepel nulla.

c./ A kvazidiagonális matrixok rangja egyenlő a diagonális blokkok rangjának összegével.

d./ Egy trianguláris matrix akkor és csak akkor szinguláris, ha diagonális elemei között 0 is található.

e./ Az összeg rangja nem lehet nagyobb a tagok rangjának összegénél, azaz

$$r / \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \dots + \underline{A}_k / \leq r / \underline{A}_1 / + r / \underline{A}_2 / + \dots + r / \underline{A}_k /$$

f./ A szorzat rangja nem lehet nagyobb egyik tényező rangjánál sem, azaz

$$r / \underline{A}_1 \underline{A}_2 \dots \underline{A}_k / \leq \min \left[r / \underline{A}_1 / \right]$$

g./ Ha a $p \cdot r$ típusu \underline{A} matrix rangja r és az $r \cdot q$ típusu \underline{B} matrix rangja ugyancsak r , akkor az $\underline{A} \underline{B}$ szorzat rangja is r , vagyis ha

$$r / \underline{A} / = r / \underline{B} / = r$$

$$/p \cdot r / \quad /r \cdot q /$$

akkor

$$r / \underline{A} \underline{B} / = r .$$

7.7. A matrixok faktorizációja

Ha valamely adott matrixot fel tudunk írni az

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2$$

összefüggésnek megfelelően két matrix szorzataként, akkor az \underline{A} matrix egy faktorizációja áll előttünk. /Természetesen a faktorizációnál több tényező is számbajöhet, mi azonban csak a két tényezőre való felbontásra fordítjuk a figyelmünket./

Bárhogy is történjen egy matrix faktorizálása, a tényezők rangja nem lehet kisebb, mint az adott matrix rangja. Ebből az következik, hogy az ilyen felbontásban az első tényező oszlopvektorainak száma, illetve a második tényező sorvektorainak száma legalább annyi, mint az adott matrix rangja. Ha az első tényező oszlopvektorainak száma és ugyanakkor a második tényező sorvektorainak száma is megegyezik az eredeti matrix rangjával, akkor minimális felbontásról beszélünk.

Az \underline{A} minimális felbontása az

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2$$
$$/p.q/ \quad /p.r/ \quad /r.q/$$

egyenlőséggel szimbolizálható, ahol

$$r = r \ / \underline{A}/$$

A minimális felbontásnak a következő tulajdonságai vannak:

a./

$$r \ / \underline{A}_1/ = r \ / \underline{A}_2/ = r \ / \underline{A}/$$

Ez azt is jelenti, hogy mind az \underline{A}_1 oszlopvektorai, mind az \underline{A}_2 sorvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

b./ Az \underline{A}_1 oszlopvektorai bázisát alkotják az \underline{A} oszlopvektorterének, az \underline{A}_2 sorvektorai pedig bázisát alkotják az \underline{A} sorvektorterének.

c./ Az \underline{A}_2 oszlopvektorainak komponensei az \underline{A} matrix oszlopvektorainak az \underline{A}_1 által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátái, az \underline{A}_1 sorvektorainak komponensei pedig az \underline{A} sorvektorainak az \underline{A}_2 által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátái.

A minimális felbontást bázisfaktorizációnak is szoktuk nevezni. A bázisfaktorizáció igen jól használható a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál.

7.8. Az elemi bázistranszformáció

Amikor az L_3 egy adott bázisából egy másik bázisba térünk át, bázistranszformációról beszélünk. A bázistranszformáció legegyszerűbb esete az, amikor az adott bázisnak csak az egyik vektorát cseréljük ki. Ez az elemi bázistranszformáció, vagy röviden elemi transzformáció.

Legyenek az L_3 lineáris tér bázisvektorai a következők:

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Mivel az

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \underline{a}_3 x_3 = \underline{0}$$

Csak akkor áll fenn, ha

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok lineárisan független vektorok, tehát az L_3 lineáris térnek bázisát alkotják.

Válasszunk egy tetszőleges $\underline{c} \in L_3$ vektort, ahol $\underline{c} \neq \underline{0}$ és cseréljük ki ezzel az előbbi vektorok valamelyikét /pl. \underline{a}_1 -et/ úgy, hogy a

$$\underline{c}, \underline{a}_2, \underline{a}_3$$

vektorok is bázist alkossanak.

Mivel az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok lineárisan független vektorok, tehát L_3 bázisát alkotják, a \underline{c} vektor / $\underline{c} \in L_3$ / kifejezhető az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\underline{c} = c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3$$

Mivel $\underline{c} \neq \underline{0}$, a \underline{c} vektornak legalább egy nullától különböző komponense van. Tegyük fel, hogy $c_1 \neq 0$. Ekkor viszont \underline{a}_1 kifejezhető a $\underline{c}, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{c_1} \underline{c} - \frac{c_2}{c_1} \underline{a}_2 - \frac{c_3}{c_1} \underline{a}_3$$

Tegyük fel, hogy \underline{x} az L_3 lineáris tér egy tetszőleges vektora, amely kifejezhető az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként, vagyis

$$\underline{x} = \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \underline{a}_3 x_3$$

Írjunk most \underline{a}_1 helyébe az előbbi kifejezést, tehát

$$\underline{x} = \left(\frac{1}{c_1} \underline{c} - \frac{c_2}{c_1} \underline{a}_2 - \frac{c_3}{c_1} \underline{a}_3 \right) x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \underline{a}_3 x_3$$

és innen:

$$\underline{x} = \frac{x_1}{c_1} \underline{c} + \left(x_2 - \frac{x_1}{c_1} c_2 \right) \underline{a}_2 + \left(x_3 - \frac{x_1}{c_1} c_3 \right) \underline{a}_3$$

Most tehát megkaptuk a tetszőleges \underline{x} vektor koordinátáit a $\underline{c}, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ bázisvektorokra. Természetesen az \underline{a}_2 vagy \underline{a}_3 vektorokat ugyanígy kicserélhetjük volna a \underline{c} vektórral. Másrészt a bázistranszformációt nemcsak $c_1 \neq 0$, de $c_2 \neq 0$, vagy $c_3 \neq 0$ esetén is végrehajthattuk volna, vagyis annyi különböző módon, ahány 0-tól különböző koordinátája van a \underline{c} vektornak az adott bázisra vonatkozóan.

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet az elemi bázistranszformációt elvégezni.

Az n dimenziós \underline{c} vektor felírható a

$$\underline{c} = c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 + \dots + c_n \underline{e}_n$$

formában, ahol a c_i -k az egységvektorok által meghatározott bázisra vonatkozó koordináták. Ha $\underline{c} \neq \underline{0}$, akkor a c_1 skalárok között van nullától különböző is. Tegyük fel, hogy $c_1 \neq 0$. Ekkor viszont \underline{e}_1 kifejezhető az előbbi egyenlethől, azaz

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{c_1} \underline{c} - \frac{c_2}{c_1} \underline{e}_2 - \dots - \frac{c_n}{c_1} \underline{e}_n$$

A \underline{c} , \underline{e}_2 , ..., \underline{e}_n vektorrendszer lineárisan független rendszert alkot. Ugyanis, ha az

$$x_1 \underline{c} + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n = \underline{0}$$

egyenletnek lenne a triviálisától különböző megoldása is, akkor a \underline{c} vektort az \underline{e}_2 , ..., \underline{e}_n vektorok lineáris kombinációjaként is elő lehetne állítani, ami viszont ellentétben áll a $c_1 \neq 0$ feltétellel.

Az előbbiekből következik, hogy ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ egy tetszőleges bázis, akkor annak feltétele, hogy az \underline{a}_1 bázisvektort kicserélhessük n dimenziós tér tetszőleges \underline{c} vektorával, az, hogy a \underline{c} vektor i -edik komponense nullától különböző legyen.

Hogyan alakulnak a vektorok koordinátái, ha egyik bázisból a másikba térünk át? Legyenek \underline{x} vektor $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ bázisra vonatkozó koordinátái x_1, x_2, \dots, x_n . E szerint tehát

$$\underline{x} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n$$

Tegyük fel, hogy \underline{c} vektor ennek a lineáris térnek egy tetszőleges nullától különböző vektora, azaz $\underline{c} \neq \underline{0}$. A \underline{c} vektor felírható a bázisvektorok segítségével, azaz

$$\underline{c} = c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \dots + c_k \underline{a}_k + \dots + c_n \underline{a}_n$$

ahol c_i a \underline{c} vektornak a bázisra vonatkozó koordinátái. Mivel $\underline{c} \neq \underline{0}$, így a c_i között van legalább egy, amely nem nulla. Legyen ez a c_k . Ebben az esetben a bázisvektorok közül az \underline{a}_k vektor kicserélhető a \underline{c} vektorral, vagyis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{c}, \dots, \underline{a}_n$ vektorok szintén bázisát alkotják a lineáris térnek, ugyanis ezek lineárisan független vektorok. A vektorcseré feltétele, hogy a \underline{c} vektornak az \underline{a}_k -ra vonatkozó koordinátá-

ja $c_k \neq 0$ legyen. Mivel $c_k \neq 0$, a \underline{c} vektorra felírt lineáris kombinációból \underline{a}_k vektort kifejezhetjük, azaz

$$\underline{a}_k = -\frac{1}{c_k} c_1 \underline{a}_1 - \frac{1}{c_k} c_2 \underline{a}_2 - \dots + \frac{1}{c_k} \underline{c} - \dots - \frac{1}{c_k} c_n \underline{a}_n$$

Most az \underline{a}_k értékét az \underline{x} vektorra felírt egyenletbe behelyettesítve kápjuk, hogy

$$\underline{x} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \left[-\frac{1}{c_k} c_1 \underline{a}_1 - \frac{1}{c_k} c_2 \underline{a}_2 - \dots + \frac{1}{c_k} \underline{c} - \dots - \frac{1}{c_k} c_n \underline{a}_n \right] + \dots + x_n \underline{a}_n$$

és szorzás, összevonás után

$$\underline{x} = \left[x_1 - \frac{x_k}{c_k} c_1 \right] \underline{a}_1 + \left[x_2 - \frac{x_k}{c_k} c_2 \right] \underline{a}_2 + \dots + \frac{x_k}{c_k} \underline{c} + \dots + \left[x_n - \frac{x_k}{c_k} c_n \right] \underline{a}_n$$

vagyis az egyenlet jobb oldalán zárójelben lévő együtthatók /skalárok/ adják az \underline{x} vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit.

Ha bevezetjük az

$$\frac{x_k}{c_k} = \delta$$

jelölést, az előbbieket egyszerűbben felírhatók a

$$\underline{x} = /x_1 - \delta c_1/ \underline{a}_1 + /x_2 - \delta c_2/ \underline{a}_2 + \dots + \delta \underline{c} + \dots + /x_n - \delta c_n/ \underline{a}_n$$

formában. Az elmondottakat a következő táblázatos formában tudjuk szemléltetni:

I.			II.		
Régi bázis	\underline{c}	Tetszőleges \underline{x} régi koord.	Új bázis	\underline{e}	Tetszőleges \underline{x} új koord.
\underline{a}_1	c_1	x_1	\underline{a}_1	0	$x_1 - \delta c_1$
\underline{a}_2	c_2	x_2	\underline{a}_2	0	$x_2 - \delta c_2$
⋮			⋮		
$\leftarrow \underline{a}_k$	$\boxed{c_k} \neq 0$	x_k	$\rightarrow \underline{c}$	1	$x_k - \delta c_k$
⋮			⋮		
\underline{a}_n	c_n	x_n	\underline{a}_n	0	$x_n - \delta c_n$

Látjuk, hogy mivel \underline{c} vektort bevontuk a bázisba az \underline{a}_k vektor helyett, megváltoztak a \underline{c} vektor koordinátái, vagyis a régi koordináták helyére az \underline{e}_k egységvektor koordinátái léptek. Ugyanis a \underline{c} vektort az \underline{u}_j bázis vektorából a

$$\underline{c} = 0 \underline{a}_1 + 0 \underline{a}_2 + \dots + 0 \underline{a}_{k-1} + 1 \underline{c} + 0 \underline{a}_{k+1} + 0 \underline{a}_n$$

formában tudjuk előállítani. Az I. táblázat tehát a \underline{c} , \underline{x} vektoroknak a régi bázisra vonatkozó koordinátáit, a II. táblázat pedig az új bázisra vonatkozó koordinátáit tünteti fel.

A c_k koordinátát, amely jelzi, hogy a \underline{c} vektort melyik bázisvektor helyére vonták be, generáló elemnek nevezzük. Ez csak nullától különböző koordináta lehet. A generáló elemet /kitüntetett szerepét hangsúlyozva/ a táblázatban bekereteztük.

Az elemi bázistranszformáció során az \underline{x} vektor új koordinátáit két lépésben számítjuk ki.

Az első lépésben a generáló elemmel elosztjuk az \underline{x} vektor megfelelő koordinátáját. Az így nyert hányadost δ -vel jelöltük.

A következő lépésben meghatározzuk az \underline{x} vektor többi koordinátáit, úgy, hogy a régi koordinátákból rendre levonjuk az új bázisvektor régi koordinátáinak δ -szorosát. /Természetesen, ha $\delta=0$, vagy ha az új bázisnak a megfelelő régi koordinátája 0, az \underline{x} koordinátái nem változnak meg./

A gyakorlatban mindig az egységvektorok által meghatározott bázisból, az ugynevezett triviális bázisból indulunk ki, s ennek vektorait lépésről lépésre cseréljük ki alkalmasan megválasztott új vektorokkal. Legyenek adva az

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \\ 19 \end{bmatrix}$$

vektorok és legyen

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3$$

Cseréljük ki az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisvektorok valamelyikét és számítsuk ki az \underline{a}_1 vektorok új koordinátáit. Vonjuk be a bázisba második az \underline{a}_1 vektort és legyen a generáló elem az \underline{a}_1 vektor második koordinátája /a táblázatban bekereteztük/.

Az \underline{a}_2 vektor új koordinátái $x_k - \delta c_k$ alapján a következők:

$$\left(\delta = \frac{1}{2} = 0,5 \right)$$

$$2 - 0,5 \cdot 3 = 0,5,$$

$$2 - 0,5 \cdot 4 = 0.$$

ugyanígy az \underline{a}_3 koordinátái $\left(\delta = \frac{4}{2} = 2 \right)$

$$1 - 2 \cdot 3 = -5,$$

$$3 - 2 \cdot 4 = -5$$

és a \underline{b} vektornál $\left(\delta = \frac{17}{2} = 8,5 \right)$

$$11 - 8,5 \cdot 3 = -14,5$$

$$19 - 8,5 \cdot 4 = -15,0$$

Foglaljuk az adatokat táblázatba /nyíllal jelöljük a báziscserét!/:

	I.				II.				
Régi bázis	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	Új bázis	\underline{e}_2	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}
\underline{e}_1	3	2	1	11	\underline{e}_1	0	0,5	-5	-14,5
$\leftarrow \underline{e}_2$	2	1	4	17	$\rightarrow \underline{a}_1$	1	0,5	2	8,5
\underline{e}_3	4	2	3	19	\underline{e}_3	0	0	-5	-15,0

Bevonhatunk a bázisba egy másik vektort is. Mindegy, hogy melyiket, de célszerű lehet úgy választani, hogy kedvező legyen a generáló elem, hogy egyszerűbben tudjunk számolni. Vonjuk be a bázisba \underline{a}_3 -at és válasszuk generáló elemnek annak harmadik koordinátáját.

II					III				
Régi bázis	\underline{e}_2	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	Uj bázis	\underline{e}_2	\underline{a}_2	\underline{e}_3	\underline{b}
\underline{e}_1	0	0,5	-5	-14,5	\underline{e}_1	0	0,5	0	0,5
\underline{a}_1	1	0,5	2	8,5	\underline{a}_1	1	0,5	0	2,5
$\leftarrow \underline{e}_3$	0	0	-5	-15,0	$\Rightarrow \underline{a}_3$	0	0	1	3

Megfigyelhetjük, hogy mivel \underline{a}_2 -nél $\delta = \frac{0}{-5} = 0$, az \underline{a}_2 koordinátái nem változtak.

Bevonhatjuk a bázisba \underline{a}_2 -t is. Válasszúk generáló elemül ennek első koordinátáját. Ekkör a következőt kapjuk:

III					IV				
Régi bázis	\underline{e}_2	\underline{a}_2	\underline{e}_3	\underline{b}	Uj bázis	\underline{e}_2	\underline{e}_1	\underline{e}_3	\underline{b}
$\leftarrow \underline{e}_1$	0	0,5	0	0,5	$\Rightarrow \underline{a}_2$	0	1	0	1
\underline{a}_1	1	0,5	0	2,5	\underline{a}_1	1	0	0	2
\underline{a}_3	0	0	1	3	\underline{a}_3	0	0	1	3

A \underline{b} oszlopában találjuk a \underline{b} vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit, amikor is mindhárom egységvektort ki-cseréltük az \underline{a}_i vektorokkal. A kapott koordináták a

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3$$

lineáris kombináció x_1 , x_2 , x_3 skalárjai és mint a táblázatból látjuk, $x_1=2$, $x_2=1$ és $x_3=3$. /Vigyázni kell a skalárok sorrendjére. Az \underline{a}_1 -nek megfelelő sorban lévő koordináta az x_1 skalár, az \underline{a}_2 sorában található az x_2 skalár és \underline{a}_3 sorában az x_3 skalár. E szerint

$$\underline{b} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \\ 19 \end{bmatrix}$$

A triviális bázis szerint

$$\underline{b} = 11 \underline{e}_1 + 17 \underline{e}_2 + 19 \underline{e}_3$$

vagyis

$$\begin{aligned} \underline{b} &= 11 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 17 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 19 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \\ 19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Könnyen észrevehetjük, hogy a táblázat belsejében permutáló matrixot kaptunk, melyet átrendezve, egységmatrixhoz jutunk.

Az egységvektoroknak pillanatnyilag semmi szerepük nincs, ezért azokat elhagyhatjuk. Ennek alapján a számításokat egyszerűsíthetjük. Ilyenkor a táblázatokat nem ismételjük, hanem egymás mellé írjuk.

	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_2	\underline{b}	\underline{b}
$\Rightarrow \underline{a}_2$	3	2	1	11	0,5	-5	-14,5	0,5	0,5	1
$\rightarrow \underline{a}_1$	2	1	4	17	0,5	2	8,5	0,5	2,5	2
$\Rightarrow \underline{a}_3$	4	2	3	19	0	-5	-15,0	0	3	3

Kevesebb munkával ugyanazon eredményhez jutottunk.

Megjegyezzük még a következőket:

A vektorok bevonásának sorrendje közömbös.

Egy $m \cdot n$ típusu matrix esetén /mint tudjuk, m a sorok száma, n pedig az oszlopok száma/:

ha $m < n$, nem tudunk minden oszlopot a bázisba bevonni, csak legfeljebb m oszlopot

ha $m = n$, akkor annyi /de legfeljebb m számú/ oszlop vonható a bázisba, ahányszor sikerül a szabad sorokban zérustól különböző generáló elemet választani

ha $m > n$, akkor nem tudunk minden sorba új vektort bevonni, mert nincs elegendő oszlopvektorunk.

7.9. A matrix rangjának meghatározása

A bázistranszformáció megismerése után egyszerűen jutunk el a matrix rangjának meghatározásához.

Egy matrix rangját úgy határozzuk meg, hogy a triviális bázis bázisvektorai helyébe az adott matrixnak annyi oszlopvektorát vonjuk be, amennyit csak lehet. Az utolsó bázis új bázisvektorainak száma lesz a matrix rangja.

Vegyük például az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3]$$

matrixot és határozzuk meg rangját.

Kiindulunk a

Bázis	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3
\underline{e}_1	2	4	1
\underline{e}_2	2	1	4
\underline{e}_3	4	2	3

táblázatból, majd először az \underline{a}_1 , majd az \underline{a}_2 , stb. vektorokat vonjuk be a bázisba mindaddig, amíg újabb vektor bevonására lehetőségünk van. Ahány vektort tudunk a bázisba bevonni a triviális bázisvektorok helyére, annyi az adott matrix rangja. Végezzük el a báziscseréket az előző pontban az elemi bázistranszformációval kapcsolatban megismert számítási eljárás szerint.

Bázis	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3
\underline{e}_1	2	4	1
\underline{e}_2	2	1	4
\underline{e}_3	4	2	3

Bázis	\underline{e}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3
\underline{a}_1	1	2	0,5
\underline{e}_2	0	-3	3
\underline{e}_3	0	-6	1

Bázis	e_1	e_2	a_3
a_1	1	0	2,5
a_2	0	1	-1
e_3	0	0	-5

Bázis	e_1	e_2	e_3
a_1	1	0	0
a_2	0	1	0
a_3	0	0	1

Mindhárom oszlopvektort be tudtuk vonni a bázisba, tehát az adott matrix rangja

$$r / \underline{A} / = 3$$

A számításokat most is célszerű az egységvektorok elhagyásával, leegyszerűsített módon elvégezni, azaz

	a_1	a_2	a_3	a_2	a_3	a_3
a_1 e_1	2	4	1	2	0,5	2,5
a_2 e_2	2	1	4	-3	3	-1
a_3 e_3	4	2	3	-6	1	-5

Határozzuk meg az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

matrix rangját.

	a_1	a_2	a_3	a_2	a_3	a_3
a_1 e_1	1	3	1	3	1	-2
a_2 e_2	4	6	-2	-6	-6	1
e_3	0	1	1	1	1	0
e_4	2	2	-2	-4	-4	0

Az \underline{a}_3 vektort már nem tudjuk a bázisba bevinni, mert az \underline{e}_3 és az \underline{e}_4 -re vonatkozó koordinátája nulla, márpedig mint tudjuk 0-át nem választhatunk generáló elemnek, tehát $r/s/= 2$.

Határozzuk meg még az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

matrix rangját.

	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{a}_1	1	2	1	-1	2	2	1	-1	2	-1	-1	0	$-\frac{7}{4}$	1
\underline{a}_2	2	3	1	-2	3	-1	1	0	-1	1	0	1	$\frac{3}{4}$	0
\underline{a}_3	1	1	-4	2	-3	-1	-5	3	-5	-4	3	-4	$-\frac{3}{4}$	1
	1	2	5	-4	6	0	4	-3	4	4	-3	4	0	0

Az \underline{a}_4 és \underline{a}_5 vektorokat nem tudjuk a bázisba bevinni az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok mellé, tehát a matrix rangja

$$r / \underline{A} / = 3$$

7.10. Bázisfaktorizáció

A 7.7. pontból ismerjük, hogy a matrixokat tényezőkre, matrixok szorzatára tudjuk bontani. Mondottuk, hogy a minimális felbontást bázisfaktorizációnak nevezzük. Az előbbi pontban megismert számítások alapján könnyen elvégezhetjük a bázisfaktorizációt is.

Vegyük az előbb már megismert

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

matrixot. Végezzük el e matrix rangjának meghatározását egyszerűsítés nélkül.

Bázis	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{e}_1	1	2	1	-1	2
\underline{e}_2	2	3	1	-2	3
\underline{e}_3	1	1	-4	2	-3
\underline{e}_4	1	2	5	-4	6

Bázis	\underline{e}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{a}_1	1	2	1	-1	2
\underline{e}_2	0	-1	-1	0	-1
\underline{e}_3	0	-1	-5	3	-5
\underline{e}_4	0	0	4	-3	4

Bázis	\underline{e}_1	\underline{e}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{a}_1	1	0	-1	-1	0
\underline{a}_2	0	1	1	0	1
\underline{e}_3	0	0	-4	3	-4
\underline{e}_4	0	0	4	-3	4

Bázis	\underline{e}_1	\underline{e}_2	\underline{e}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{a}_1	1	0	0	$-\frac{7}{4}$	1
\underline{a}_2	0	1	0	$\frac{3}{4}$	0
\underline{a}_3	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	1
\underline{e}_4	0	0	0	0	0

Írjuk fel a bázisba bevont vektorokból az \underline{A}_1 matrixot

$$\underline{A}_1 = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Az utolsó táblázat alapján felírhatjuk az

$$\underline{E}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

r oszlopvektorból álló egységmatrixot, valamint a be nem vont vektoroknak a leköttött sorokra vonatkozó új koordinátái alapján a

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} = [\underline{d}_1, \underline{d}_2]$$

matrixot.

Tudjuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ lineárisan független vektorok bázisát alkotják az a oszlopvektorok által generált altérnek. Az \underline{A} matrix minden oszlopa felírható tehát az \underline{A}_1 vektorainak $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ lineáris kombinációjaként, azaz

$$\underline{a}_1 = \underline{A}_1 \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_2 = \underline{A}_1 \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_3 = \underline{A}_1 \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_4 = \underline{A}_1 \underline{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_5 = \underline{A}_1 \underline{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

vagyis ennek alapján az \underline{A} matrix a következők szerint írható fel:

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5]$$

azaz

$$\underline{A} = [\underline{A}_1 \underline{e}_1, \underline{A}_1 \underline{e}_2, \underline{A}_1 \underline{e}_3, \underline{A}_1 \underline{d}_1, \underline{A}_1 \underline{d}_2]$$

és \underline{A}_1 -et kiemelve

$$\underline{A} = \underline{A}_1 [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{d}_1, \underline{d}_2]$$

vagy másként

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_R & \underline{D} \end{bmatrix}$$

vagyis

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Készítsük el még egyszer az előbbi matrix bázisfaktori-
zációját, de úgy, hogy a vektorokat ne sorba vonjuk be. Al-
kalmazhatjuk az egyszerűsített eljárást is, de tudjuk, hogy
a bázisba bevont vektor helyén egységvektorok szerepelnek, a-
melyeket az adott \underline{a}_i vektorral kicseréltünk.

	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5	\underline{a}_2	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{a}_1	1	2	1	-1	2	2	1	-1	2	1	-1	1
\underline{a}_3	2	3	1	-2	3	-1	-1	0	-1	1	0	1
	1	1	-4	2	-3	-1	-5	3	-5	4	3	0
	1	2	5	4	6	0	4	3	4	-4	3	0

	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{a}_1	$-\frac{7}{4}$	1
\underline{a}_3	$-\frac{3}{4}$	1
\underline{a}_2	$\frac{3}{4}$	0
	0	0

Most tehát

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_2, \underline{a}_4, \underline{a}_5] \quad [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{d}_4, \underline{d}_5]$$

vagyis

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Vigyázni kell természetesen a vektorok sorrendjére. Az oszlopvektorok eredeti sorrendjét megkapjuk, ha a második és a harmadik oszlopot felcseréljük.

7.11. Kompatibilitás

Ha az L_n lineáris tér egy tetszőleges \underline{b} vektora előállítható az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, azt mondjuk, hogy a \underline{b} vektor kompatibilis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok által generált altérre nézve, vagy másképp, a \underline{b} vektor benne fekszik az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok által generált altérben. /A kompatibilitás latin szó, összeférhetőséget jelent./

Ha viszont a \underline{b} vektor nem fejezhető ki az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, azt mondjuk, hogy a \underline{b} vektor inkompatibilis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok által generált altérre nézve.

A bázistranszformáció ismeretében a kompatibilitás problémája egyszerűen eldönthető. Kiindulunk a triviális bázisból és az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorokból annyit veszünk be ebbe a bázisba, amennyit csak lehetséges. A bevont vektorok a kérdéses lineáris térnek bázisát alkotják, s a számításokból leolvasható, hogy a \underline{b} vektor kifejezhető-e az adott bázis segítségével vagy nem.

Legyen adva az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrix és vizsgáljuk meg, hogy a

$$\underline{b} = [11, 19, 12]^T$$

vektor kompatibilis-e az \underline{A} matrix oszlopvektorterében.

A bázistranszformáció során megismerteket alkalmazva, az \underline{a}_1 vektorokat rendre bevonjuk a bázisba, azaz

Bázis	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_1	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{b}
$\underline{a}_2 \underline{e}_1$	2	1	4	11	2	4	11	-2	1	3
$\underline{a}_1 \underline{e}_2$	3	4	1	19	-5	-15	-25	3	5	2
$\underline{a}_3 \underline{e}_3$	1	2	4	12	-3	-4	-10	5	5	1

Mivel a számítások szerint

$$\underline{b} = 2 \underline{a}_1 + 3 \underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

vagyis a \underline{b} vektor kifejezhető az adott bázisvektorok lineáris kombinációjaként, a \underline{b} vektor kompatibilis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok által generált altérre nézve. Ez azt is jelenti, hogy az \underline{A} matrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek és hogy $r/\underline{A} = 3$.

Csökkentsük most a \underline{b} vektor harmadik elemét 5-tel, vagyis vizsgáljuk meg, hogy a

$$\underline{b} = [11, 19, 7]^T$$

vektor kompatibilis-e az \underline{A} matrix oszlopvektorterében.

Bázis	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_1	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_3	\underline{b}
\underline{a}_2 \underline{e}_1	2	1	4	11	2	4	11	-2	1
\underline{a}_1 \underline{e}_2	3	4	1	19	-5	-15	-25	3	5
\underline{e}_3	1	2	4	7	-3	-4	-15	5	0

A \underline{b} vektor most is kompatibilis az \underline{A} matrix oszlopvektorterére nézve. Most azonban a \underline{b} vektor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ vektorral is kifejezhető.

$$\underline{b} = 5 \underline{a}_1 + \underline{a}_2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Felírható még egyenletrendszerünk az

$$\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \dots + \underline{a}_nx_n = \underline{b}$$

vektoregyenletként is.

Abban az esetben, ha $n = m$, vagyis ha az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, azaz ha az \underline{A} matrix /ugynevezett együtthatómatrix/ kvadratikus, akkor az egyenletrendszer reguláris; ellenkező esetben irreguláris.

Ha a b_1, b_2, \dots, b_m mindegyike nulla, vagyis $\underline{b} = \underline{0}$, akkor az egyenletrendszert homogénnek, ha pedig a $b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$ közül legalább egy nem nulla, vagyis $\underline{b} \neq \underline{0}$, az egyenletrendszert inhomogénnek nevezzük.

8.2. A lineáris egyenletrendszer megoldása

Vizsgáljuk meg először a lineáris egyenletrendszer megoldását általánosan. Egy lineáris egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni mindazokat az \underline{x} vektorokat, amelyek kielégítik az $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ összefüggést. A megoldás szükséges és elégséges feltétele, hogy a \underline{b} vektor benne fekjűdjék az \underline{A} matrix oszlopvektorterében, vagyis hogy a \underline{b} vektor kompatibilis legyen az \underline{A} matrix oszlopvektorterére nézve.

A matrix faktorizációjánál láttuk, hogy az \underline{A} matrix felbontható az \underline{A}_1 matrix, valamint az $\left[\underline{E}_r, \underline{D} \right]$ matrix szorzatára, azaz

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \left[\underline{E}_r, \underline{D} \right]$$

és tudjuk, hogy az \underline{A}_1 a bázisba bevont vektorokból alkotott matrix, az \underline{E}_r az r számú kicserélt vektor helyébe kerülő egységvektorokból alkotott egységmatrix, \underline{D} pedig a báziscserébe be nem vont vektorok új koordinátáiból alkotott matrix, amely vektoroknál csak a felhasznált sorok koordinátáit vesszük figyelembe.

Tegyük fel, hogy az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszerrel az \underline{b} vektor kompatibilis az \underline{A} oszlopvektor-terére nézve, azaz az egyenletrendszer megoldható. Legyen az \underline{A} matrix rangja r , azaz $r/\underline{A}/ = r$. Ekkor viszont az \underline{A} matrix faktorizálható az

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \left[\underline{E}_r, \underline{D} \right]$$

összefüggés alapján, amiből viszont az következik, hogy

$$\underline{b} = \underline{A}_1 \underline{d}$$

ahol a \underline{d} komponensei a \underline{b} vektornak az \underline{A}_1 matrix által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazzák.

Ha ugyanis \underline{b} kompatibilis, akkor felírható r számú lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként, vagyis felírható az \underline{A}_1 matrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, hiszen mint tudjuk, az \underline{A}_1 éppen r lineárisan független oszlopvektorból áll.

A fentiek alapján az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

összefüggés kifejezhető az

$$\underline{A}_1 \left[\underline{E}_r, \underline{D} \right] \underline{x} = \underline{b}$$

és az

$$\underline{A}_1 \underline{d} = \underline{b}$$

formulával, vagyis

$$\underline{A}_1 \left[\underline{E}_r, \underline{D} \right] \underline{x} = \underline{A}_1 \underline{d} = \underline{b}$$

Ez csak akkor teljesül, ha

$$\left[\underline{E}_r, \underline{D} \right] \underline{x} = \underline{d}$$

Képezzük most az \underline{x} vektornak az A matrix lineáris független oszlopvektoraira vonatkozó koordinátáiból - vagyis az első r komponenséből - az $\underline{x}_r = [x_1, x_2, \dots, x_r]^T$ vektort, azaz az ugynevezett kötött ismeretlenek vektorát, a többi $n - r = s$ komponensből pedig az $\underline{x}_s = [x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n]$ vektort, azaz a szabad ismeretlenek vektorát.

E szerint az \underline{x} vektort a következőképpen particionáltuk:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_s \end{bmatrix}$$

Ekkor viszont az

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{d}$$

felírható az

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_s \end{bmatrix} = \underline{E}_r \underline{x}_r + \underline{D} \underline{x}_s = \underline{x}_r + \underline{D} \underline{x}_s = \underline{d}$$

formában, ami szerint viszont

$$\underline{x}_r = \underline{d} - \underline{D} \underline{x}_s$$

s ezt a formát az egyenletrendszer általános megoldásának szokás nevezni. Ebben az \underline{x}_r komponensei a kötött ismeretlenek, az \underline{x}_s komponensei tehát a szabad ismeretlenek. A kötött ismeretlenek száma megegyezik a matrix rangjával, a szabad ismeretlenek száma pedig az egyenletrendszer szabadságfokát adja és ez az ismeretlenek számának és a rangnak a különbségével egyenlő:

$$s = n - r$$

A szabad ismeretlenek - azaz az \underline{x}_s vektor - tetszőlegesen választható, a kötött ismeretlenek \underline{x}_r vektor - viszont függ attól, hogy a szabad ismeretlenek értékét hogyan választjuk meg.

Az egyenletrendszer megoldása tehát numerikus szempontból csupán a \underline{D} és a \underline{d} konkrét meghatározását jelenti, ami a 7.11. pont alapján könnyen elvégezhető.

8.3. A matrixok inverziója

Ismeretes előttünk, hogy az

$$y = a x$$

egyenletből az x kifejezhető az

$$x = \frac{y}{a}$$

formában. Ez viszont egyenértékű az

$$x = y \cdot \frac{1}{a}$$

kifejezéssel, vagyis mindegy, ha "a"-val osztunk, vagy annak reciprokával szorzunk.

Ismeretes az is, hogy ha valamely számot reciprokával megszorozunk, eredményül 1-et kapunk, azaz

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Az $\frac{1}{a}$ számot az "a" inverzének is nevezik és jelölésére használjuk az a^{-1} szimbólumot is.

Kvadratikus matrixok esetén is beszélhetünk inverzről, és azt /ha létezik/ az

$$\underline{A}^{-1}$$

szimbólummal jelöljük. Ha az \underline{A} matrixot inverzével szorozzuk, egységmatrixot kapunk eredményül, azaz

$$\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{E}$$

vagyis négyzetes \underline{A} matrix inverzén egy olyan n-edrendű matrixot értünk, amelynek az \underline{A} -val alkotott szorzata az n-ed rendű egységmatrixot adja.

Ha az \underline{A} kvadratikus matrix és van inverze, akkor az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenlet az inverzmatrix ismeretében az

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

formában is felírható. Az inverz matrix tehát felhasználható lineáris egyenletrendszerek megoldására, ezért mielőtt az egyenletrendszerek megoldását számszerű példák segítségével is bemutatjuk, célszerű megismerkedni a matrixok invertálásával.

Tekintsük az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{E}$$

speciális matrixegyenletet, amit részletesebben felírva kapjuk, noqy

$$\left[\underline{A} \ x_1, \underline{A} \ x_2, \dots, \underline{A} \ x_n \right] = \left[e_1, e_2, \dots, e_n \right]$$

A két matrix akkor egyenlő, ha elemei rendre megegyeznek, vagyis a következő egyenletrendszert kapjuk

$$\begin{aligned} \underline{A} \ x_1 &= e_1 \\ \underline{A} \ x_2 &= e_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \underline{A} \ x_n &= e_n \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mindegyik egyenlete n ismeretlent tartalmaz, az együtthatómatrix viszont minden egyenletben ugyanaz. Az egyenletrendszer csak akkor oldható meg, ha az egységvektorok mindegyike benne van az \underline{A} matrix oszlopvektorterében, azaz, ha az egységvektorok kompatibilisak az \underline{A} oszlopvektorterére nézve. Ez viszont csak akkor teljesül, ha az \underline{A} matrix rangja megegyezik rendjével, $r/A/ = r$, azaz ha a matrix nem-szinguláris. Egy kvadratikus matrix tehát csak akkor invertálható, ha nem-szinguláris. Singuláris matrixnak nincs inverze.

Az inverz matrix numerikus meghatározása az

$$\underline{A} \ \underline{X} = \underline{E} \quad \text{vagy} \quad \underline{Y} \ \underline{A} = \underline{E}$$

matrixegyenlet megoldását jelenti. Az első esetben a matrix jobboldali, a második esetben a matrix baloldali inverzéről beszélünk.

Szorozzuk meg azonban az

$$\underline{Y} \ \underline{A} = \underline{E}$$

matrixegyenletet az \underline{X} matrixszal jobbról, azaz

$$\underline{Y} \ \underline{A} \ \underline{X} = \underline{E} \ \underline{X}$$

Azonban

$$\underline{E} \ \underline{X} = \underline{X}$$

és

$$\underline{A} \ \underline{X} = \underline{E}$$

amiből következik, hogy

$$\underline{Y} \ \underline{E} = \underline{X}$$

azonban mivel

$$\underline{Y} \underline{E} = \underline{Y},$$

ezért

$$\underline{X} = \underline{Y},$$

azaz a matrix inverzének meghatározása egyértelmű, vagyis akár a jobboldali, akár a baloldali inverzét számítjuk ki a matrixnak, ugyanazon inverzmatrixot kapjuk.

A bázistranszformáció ismeretében az inverz numerikus meghatározása már igen egyszerű. Induljunk ki az

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{E}$$

matrixegyenlethez, amelyből kaptuk az

$$\underline{A} x_1 = e_1$$

$$\underline{A} x_2 = e_2$$

.

.

$$\underline{A} x_n = e_n$$

egyenletrendszer, amelyet meg kell oldanunk, és a megoldásul szolgáló \underline{X} matrixot az \underline{A} jobboldali inverzének nevezzük. Meg kell tehát keresni az \underline{E} egységmatrix oszlopvektorainak az \underline{A} matrix által meghatározott, bázisra vonatkozó koordinátáit. Mivel az \underline{A} matrix közös és csak a jobboldali egységvektorok különbözők, az egyenletrendszer egy táblázatba foglalva egyszerre oldjuk meg. Nem kell ugyanis mást tennünk, mint bázistranszformációval felcserélni az \underline{A} és \underline{E} matrixok szerepét. Technikailag ezt úgy végezzük, hogy egy táblázatba az \underline{A} matrix mellé felírjuk az e_1 egységvektorokat, azaz az \underline{E} egységmatrixot, és az \underline{A} oszlopvektorait elemi bázistranszformációval rendre bevonjuk a bázisba, s minden transzformációnál kiszámítjuk az \underline{E} oszlopvektorainak koordinátáit a megváltozott bázisra vonatkozóan.

Határozzuk meg tehát az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

matrix inverzét. Foglaljuk táblázatba az \underline{A} matrixot és írjuk mellé az \underline{E} egységmatrixot. /Az x_i értékeket kiemeltük a fejrovatba./

x_1	x_2	x_3			
1	2	1	1	0	0
2	5	3	0	1	0
1	3	3	0	0	1

Vonjuk be rendre a bázisba az \underline{A} matrix oszlopvektorait

	x_1	x_2	x_3				x_2	x_3				x_3						
x_1	1	2	1	1	0	0	2	1	1	0	0	-1	5	-2	0	6	-3	1
x_2	2	5	3	0	1	0	1	1	-2	1	0	1	-2	1	0	-3	2	-1
x_3	1	3	3	0	0	1	1	2	-1	0	1	1	1	-1	1	1	-1	1

Tehát

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A számítások helyességét ellenőrizzük az

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{E}$$

alapján.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A számításokat egyszerűbben végezhetjük el, ha a következőképpen járunk el. Felírjuk a következő táblázatot:

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	2	1
u_2	2	5	3
u_3	1	3	3

Ebben a táblázatban az x_1, x_2, x_3 szimbólumok az un. primál változókat, az u_1, u_2, u_3 szimbólumok pedig az un. duális változókat jelentik. A primálváltozókhöz az A matrix oszlopvektorait, a duális változókhöz pedig az E egységmatrix oszlopvektorait rendeljük. Az A matrix invertálása felfogható úgy, hogy megkeressük az E egységmatrix oszlopvektorainak az A oszlopvektorai által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátáit. Ez azt jelenti, hogy fel kell cserélni primál változók és a duális változók szerepét.

A számításokat a következőképpen végezzük:

- a./ Generáló elemet választunk a_1 /A generáló elem választásnál a sorrend, - hogy melyik oszlopból és sorból választjuk - lényegtelen, a számítások végrehajtása után azonban vissza kell térni a helyes sorrendhez. Tudjuk azt is, hogy a generáló elem nem lehet nulla./ Uj táblázatot szerkesztünk, amelynek adatait a következőképpen határozzuk meg:
- b./ A generáló elem helyébe beírjuk annak reciprokát.
Vagyis $\frac{1}{a_1}$
- c./ A generáló elemnek megfelelő oszlop többi adatát megkapjuk, ha az előző táblázat megfelelő adatait szorozzuk a generáló elem reciprokának "-1"-szeresével / - γ -val/
- d./ A többi adatot az elemi bázistranszformációval kapcsolatban tanultak szerint számítjuk ki.

Az előbbi példánk tehát a következő számításokhoz vezet:

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	2	1
u_2	2	5	3
u_3	1	3	3

	u_1	x_2	x_3
x_1	1	2	1
u_2	-2	1	1
u_3	-1	1	2

	u_1	u_2	x_3
x_1	5	-2	-1
x_2	-2	1	1
u_3	1	-1	1

	u_1	u_2	u_3
x_1	6	-3	1
x_2	-3	2	-1
x_3	1	-1	1

Tehát

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vegyük az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszert és legyen \underline{A} az előbbi háromszor hármes matrix, \underline{b} pedig a következő:

$$\underline{b} = [13, 32, 23]^T$$

Keressük azt az \underline{x} vektort, amely kielégíti az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszert, vagyis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

és mivel ismerjük, hogy

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{b} = [13, 32, 23]$$

az \underline{x} vektort a következőképpen kapjuk meg:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} 13 + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} 32 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} 23 =$$
$$= \begin{bmatrix} 78 \\ -39 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -96 \\ 64 \\ -32 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 23 \\ -23 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzük, hogy $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

tehát az egyenletrendszert valóban megoldottuk.

Végül invertáljuk az előbbi matrixot úgy, hogy a generáló elemet más sorrendben választjuk meg, majd az eredményt rendezzük előbb a sorok, majd az oszlopok szerint.

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	2	1
u_2	2	5	3
u_3	1	3	3

	u_1	x_2	x_3
x_1	1	2	1
u_2	-2	1	1
u_3	-1	1	2

	u_1	x_2	u_2
x_1	3	1	-1
x_3	-2	1	1
u_3	3	-1	-2

	u_1	u_3	u_2
x_1	6	1	-3
x_3	1	1	1
x_2	-3	-1	2

Rendezzük a sorokat x_2 és x_3 felcserélésével:

	u_1	u_3	u_2
x_1	6	1	-3
x_2	-3	-1	2
x_3	1	1	1

Most rendezzük az oszlopokat az u_2 és u_3 felcserélésével:

	u_1	u_2	u_3
x_1	6	-3	1
x_2	-3	2	-1
x_3	1	1	1

Mint látjuk, eredményül az inverz matrixot kaptuk ugyan-
gy, mint előbb.

A továbbiakban tekintsük meg numerikus példák alapján a
lineáris egyenletrendszerek megoldását.

8.4. Lineáris inhomogén reguláris egyenletrendszer megoldása

Ha az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

lineáris egyenletrendszerben az \underline{A} matrix kvadrátikus és nem-szinguláris, akkor az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni azt az \underline{x} vektort, amely az adott egyenletrendszert kielégíti. Mint tudjuk, a megoldás szükséges és elégséges feltétele, hogy a \underline{b} vektor benne fekjűdjék az \underline{A} matrix oszlopvektorterében, azaz hogy a \underline{b} vektor kifejezhető legyen az \underline{A} matrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, vagyis

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$$

A \underline{b} vektornak az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátái éppen \underline{a} -kerésett ismeretleneket adják.

Legyen feladatunk az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 28 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 17 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása.

Azt, hogy a \underline{b} vektor benne fekszik-e az \underline{A} matrix oszlopvektorterében, a bázistranszformáció során megismert eljárással állapítjuk meg, azaz

	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{b}
$x_1 e_1$	1	1	1	11	1	1	11	3	17	5
$x_2 e_2$	2	1	4	28	-1	2	6	-2	-6	2
$x_3 e_3$	1	3	1	15	2	0	4	4	16	4

Tehát a \underline{b} vektor benne fekszik az \underline{A} oszlopvektorterében és

$$\underline{b} = 5\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + 4\underline{a}_3$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix}$$

vagyis az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4$$

A matrixok faktorizációja alapján - mint tudjuk - az \underline{A} matrixot az

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \left[\underline{E}_r, \underline{D} \right]$$

formában is felírhatjuk. Most azonban $\underline{D} = \underline{O}$, vagyis

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{A}_1 \left[\underline{E}_r, \underline{D} \right] \underline{x} = \underline{A}_1 \underline{d} = \underline{b}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Mivel nincs olyan vektorunk, amelyet ne vontunk volna be a bázisba, a faktorizációnak az adott esetben nincs jelentősége.

Számítsuk most ki az \underline{A} matrix inverzét:

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	1	1
u_2	2	1	4
u_3	1	3	1

	u_1	u_2	u_3
x_1	1	1	1
x_2	-2	-1	2
x_3	-1	2	0

	u_1	u_2	x_3
x_1	-1	1	3
x_2	2	-1	-2
u_3	-5	2	4

	u_1	u_2	u_3
x_1	2,75	-0,5	-0,75
x_2	-0,50	0	0,50
x_3	-1,25	0,5	0,25

Most az \underline{A} inverzének ismeretében az egyenletrendszer az

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

alapján is megoldható, azaz

$$\begin{bmatrix} 2,75 & -0,5 & -0,75 \\ -0,50 & 0 & 0,50 \\ -1,25 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2,75 \\ -0,50 \\ -1,25 \end{bmatrix} 11 + \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} 28 + \begin{bmatrix} -0,75 \\ 0,50 \\ 0,25 \end{bmatrix} 15 =$$

$$\begin{bmatrix} 30,25 \\ -5,50 \\ -13,75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11,25 \\ 7,50 \\ 3,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a megoldás tehát most is

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4$$

Oldjuk meg most a következő egyenletrendszert, ahol - mint látni fogjuk - az \underline{A} kvadratikus matrix szinguláris.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 18 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Végezzük el a számításokat:

\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_3	\underline{b}
1	2	1	11	2	1	11	3	3
2	3	3	18	-1	1	-4	-1	4
2	1	5	10	-3	3	-12	0	0

Az \underline{a}_3 most nem vonható be a bázisba és

$$\underline{b} = 3\underline{a}_1 + 4\underline{a}_2$$

vagyis az \underline{A} matrix oszlopvektorterében az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ oszlopvektorok bázist alkotnak, viszont az \underline{a}_3 vektorral már lineárisan függő rendszert kapunk. Valóban az \underline{a}_3 vektor lineárisan függ az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ vektoroktól, kifejezhető azok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\underline{a}_3 = 3\underline{a}_1 - \underline{a}_2$$

tenát

$$\underline{a}_3 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Az adott egyenletrendszerben csak két független egyenletünk van - amint majd erre még visszatérünk - három ismeretlennel, tehát az egyenletek és az ismeretlenek száma nem egyezik meg. Ez viszont azt is jelenti, hogy $r(A) = 2$, vagyis a matrix rangja és rendje nem egyezik meg, tehát az \underline{A} matrix szinguláris. Tudjuk viszont, hogy a szinguláris matrixoknak nincs inverzük, tehát most az inverz nem használható az egyenletrendszer megoldására.

A faktorizáció alapján viszont most a következőket írhatjuk fel:

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_1 & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{b} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_1 & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{A}_1 \underline{d}$$

vagyis

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix}$$

8.5. Lineáris inhomogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 17 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert és oldjuk meg.

	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{b}	\underline{a}_1	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{b}	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{b}
1	1	1	1	1	5	1	1	1	5	-1	-2	3
2	2	3	4	5	12	1	2	3	2	2	3	2
3	3	4	5	6	17	1	2	3	2	0	0	0

A \underline{b} vektor tehát kompatibilis az \underline{a}_1 , \underline{a}_2 oszlopvektorok által generált altérre nézve. Ugyanakkor az \underline{a}_3 és \underline{a}_4 vektorok az \underline{a}_1 , \underline{a}_2 vektoroktól függenek, ugyanis

$$\underline{a}_3 = (-1)\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{a}_4 = (-2)\underline{a}_1 + 3\underline{a}_2 = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

És aztl is jelenti, hogy csak két független egyenletünk van, a harmadik a két első egyenlet következménye.

Batározzuk meg az \underline{A} transzponáltjának rangját, mert így hamarabb fogjuk az is kiderülni, hogy a két egyenlet milyen lineáris kombinációjával lehet a harmadikat előállítani.

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

határozzuk meg ennek rangját

\underline{b}_1	\underline{b}_2	\underline{b}_3	\underline{b}_2	\underline{b}_3	\underline{b}_3
1	2	3	2	3	1
1	3	4	1	1	1
1	4	5	2	2	0
1	5	6	3	3	0

tehát $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 = \underline{b}_3$ azaz

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

vagyis a harmadik egyenlet az első két egyenlet összege.

Mivel az \underline{A} matrix oszlopvektorai közül csak két lineárisan független vektor választható, $r/A/ = 2$.

Faktorizáljuk az együttható matrixot, azaz

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esmerjük, hogy az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

összetűgés felírható az

$$\underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{A}_1 \underline{d} = \underline{b}$$

formában, ami csak akkor áll fenn, ha

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{d}$$

és ahol a \underline{d} vektor a \underline{b} vektornak az \underline{A} , matrix által meghatározott koordinátáit tartalmazza, példánkban

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bontsuk az \underline{x} vektort két komponensre, az \underline{x}_r kötött ismeretlenek vektorára és az \underline{x}_s szabad ismeretlenek vektorára, vagyis

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_r & \underline{x}_s \end{bmatrix}^T$$

és akkor

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_s \end{bmatrix} = \underline{d}$$

vagyis

$$\underline{x}_r + \underline{D} \underline{x}_s = \underline{d}$$

amiből

$$\underline{x}_r = \underline{d} - \underline{D} \underline{x}_s,$$

ezzel megkaptuk az egyenletrendszer általános megoldását.

Tudjuk, hogy

$$s = n - r$$

az egyenletrendszer szabadságfoka.

Az \underline{x}_s vektor komponenseit tetszés szerint megválasztva, partikuláris megoldásokhoz jutunk.

Példánkban

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

tehát

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

Legyen az \underline{x}_s vektorunk egy zérusvektor, tehát

$$\underline{x}_s = \begin{bmatrix} 0_r & 0 \end{bmatrix}^T$$

amikor is

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} 3, 2 \end{bmatrix}^T$$

és

$$\underline{x} = [3, 2, 0, 0]$$

Ha viszont

$$\underline{x}_S = [1, 1]^T$$

akkor

$$\underline{x}_T = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

vagyis

$$\underline{x} = [6, -3, 1, 1]$$

Ellenőrizzük, hogy az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

most is teljesül, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Alakítsuk át az előbbi egyenletrendszerünket úgy, hogy a harmadik egyenlet jobb oldalára 17 helyett írjunk 15-öt, és próbáljuk megoldani.

\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{b}	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{b}	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{b}
1	1	1	1	5	1	1	1	5	-1	-2	1
2	3	4	5	12	1	2	3	2	2	3	2
3	4	5	6	15	1	2	3	0	0	0	-2

A feladatot nem tudjuk megoldani, a \underline{b} vektor nincs benne az \underline{A} matrix oszlopvektorterében, hiszen

$$\underline{b} = \underline{a}_1 + 2 \underline{a}_2 - 2 \underline{a}_3$$

Mivel két linearisan független oszlopvektort tudunk kiválasztani, tehát $r/A = 2$, arra gondolunk, hogy valamelyik egyenlet a másik kettő következménye. Az \underline{A} matrix transzponáltjának rangját már az előbb meghatároztuk, s ebből kiderült, hogy a harmadik egyenlet az első két egyenlet összege. Ellenőrizhetjük, hogy ez az egyenletrendszer bal oldalára vonatkozóan

igaz, azonban a jobb oldalra nem áll fenn, hiszen $5 + 12 = 17$, de egyenletrendszerünkben itt csak 15 található. Most tehát a harmadik egyenlet nem következménye az első kettőnek, illetve csak a bal oldal következmény, a jobb oldal viszont nem, tehát az egyenletrendszer ellentmondásos és nincs megoldása. Nem biztos tehát, hogy egy egyenletrendszernek van megoldása, ha az ismeretlenek száma nagyobb, mint az egyenletek száma. A megoldhatóság feltétele, hogy az A matrix rangja megegyezzen az $[A \ b]$ rangjával, vagyis

$$r \ /A/ = r \ /A, \ b/$$

Legyen adva egy olyan lineáris egyenletrendszer, amelyben az egyenletek száma több, mint az ismeretlenek száma $m > n$. Vegyük például az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 19 \\ 4x_1 + 7x_2 &= 26 \end{aligned}$$

egyenletrendszert és vizsgáljuk meg, megoldható-e?

\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{b}	\underline{a}_2	\underline{b}	\underline{b}
1	2	7	2	7	3
2	3	12	-1	-2	2
3	5	19	-1	-2	0
4	7	26	-1	-2	0

A megoldás tehát $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, vagyis

$$\underline{b} = 3 \underline{a}_1 + 2 \underline{a}_2$$

tehát a \underline{b} vektor kompatibilis az \underline{A} oszlopvektorterére nézve, és

$$r \ /A/ = 2$$

A harmadik és a negyedik egyenlet tehát az első két egyenlet következménye, s kifejezhető azok lineáris kombinációjaként.

Állapítsuk meg az \underline{A} transzponáltjának rangját

\underline{b}_1	\underline{b}_2	\underline{b}_3	\underline{b}_4	\underline{b}_2	\underline{b}_3	\underline{b}_4	\underline{b}_3	\underline{b}_4
1	2	3	4	2	3	4	1	2
2	3	5	7	-1	-1	-1	1	1

azaz

$$\underline{b}_3 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$$

$$\underline{b}_4 = 2\underline{b}_1 + \underline{b}_2$$

vagyis a harmadik egyenletet megkapjuk, ha az első és második egyenletet összeadjuk, a negyedik egyenletet pedig akkor kapjuk meg, ha a második egyenlethez hozzáadjuk az első egyenlet kétszeresét.

Legyen most adva a következő egyenletrendszer

$$x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 8$$

$$3x_1 + 4x_2 + 17x_3 = 14$$

$$4x_1 + 6x_2 + 24x_3 = 20$$

Vizsgáljuk a \underline{b} vektor kompatibilitását.

\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{b}	\underline{a}_3	\underline{b}
1	2	7	6	2	7	6	3	2
2	2	10	8	-2	-4	-4	2	2
3	4	17	14	-2	-4	-4	0	0
4	6	24	20	-2	-4	-4	0	0

Az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0$$

Az eddig tanultak alapján könnyen rájövünk, hogy az \underline{a}_3 vektor lineárisan függ az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ vektoroktól a

$$3 \underline{a}_1 + 2 \underline{a}_2$$

formában. Látjuk azt is, hogy a harmadik és a negyedik egyenlet következménye az első és a második egyenletnek.

Az egyenletrendszer többi megoldását az

$$\underline{x}_1 = \underline{d} + D \underline{x}_g$$

alapján állítjuk elő.

8.6. Lineáris homogén reguláris egyenletrendszerek megoldása

Az előbbieken inhomogén egyenletrendszerekkel foglalkoztunk. A továbbiakban vizsgáljuk a homogén egyenletrendszereket, amikor is - mint tudjuk - $\underline{b} = \underline{0}$, vagyis

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$$

A homogén egyenletrendszernek mindig van megoldása, mivel $\underline{b} = \underline{0}$ és a zérusvektor minden altérnek eleme, tehát a $\underline{0}$ vektor kompatibilis az \underline{A} oszlopvektorterére nézve. Az $\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszert az $\underline{x} = \underline{0}$ vektor feltétlen kielégíti, hiszen $\underline{A} \underline{0} = \underline{0}$. Az $\underline{x} = \underline{0}$ megoldást triviális megoldásnak nevezzük.

Ha \underline{A} kvadratikusan invertálható és nem-szinguláris /tehát rangja és rendje megegyezik/, akkor az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$$

megoldásaként kapjuk, hogy

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{0} = \underline{0}$$

vagyis triviális megoldáshoz jutunk. Ilyen esetben nincs is más megoldás.

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

A tanultak alapján ellenőrizhetjük, hogy a $r/\underline{A}/ = 3$ vagyis az \underline{A} matrix nem-szinguláris, rangja és rendje megegyezik.

Határozzuk meg az \underline{A} inverzét. Kapjuk, hogy

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4,6 & 1,4 & 0,8 \\ 0,6 & -0,4 & 0,2 \\ 0,8 & -0,2 & -0,4 \end{bmatrix}$$

A megoldás tehát

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{0} = \begin{bmatrix} 4,6 & 1,4 & 0,8 \\ 0,6 & -0,4 & 0,2 \\ 0,8 & -0,2 & -0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vagyis a megoldás csakis

$$\underline{x} = \underline{0}$$

lehet.

Legyen most egy olyan példánk, amikor az A matrix szinguláris, azaz rangja kisebb, mint rendje. /Mint tudjuk, az ilyen matrixnak nincs inverze./

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + 8x_3 = 0$$

A triviális megoldás természetesen most is létezik, de mint látni fogjuk, létezik más megoldás is.

Határozzuk meg most a matrix rangját.

\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_3
$\boxed{2}$	2	4	1	2	3
2	5	1	$\boxed{3}$	-3	-1
3	1	8	-2	2	0

Tehát

$$r/A/ = 2$$

vagyis a matrix szinguláris és

$$\underline{a}_3 = 3 \underline{a}_1 - \underline{a}_2$$

Az egyenletrendszer általános megoldása, mint tudjuk

$$\underline{x}_r = \underline{d} - \underline{D} \underline{x}_s$$

ahol a \underline{d} a \underline{b} vektornak az \underline{A}_1 matrix által meghatározott koordinátáit tartalmazza. Mivel azonban $\underline{b} = \underline{0}$, így $\underline{d} = \underline{0}$, elegendő tehát a \underline{D} -t megállapítani.

Példánkban

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tehát

$$\underline{x}_r = -D \underline{x}_s = - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

azaz példánkban

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

Most ha $x_3 = 1$, akkor

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagyis az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

valóban

$$(-3) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha $x_3 = 2$,

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vagyis $x_1 = -6$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$

azaz

$$(-6) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az x_3 értékét tehát tetszőlegesen felvehetjük, s ettől függően az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

8.7. Lineáris homogén és reguláris egyenletrendszerek megoldása

Ha az

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszer homogén $/b = 0/$ és irreguláris, vagyis az egyenletek száma $/m/$ és az ismeretlenek száma $/n/$ nem egyezik meg, tehát $m < n$ vagy $m > n$, az egyenletrendszernek mindig van a triviális megoldáson kívül más megoldása is.

Tudjuk, hogy homogén egyenletrendszerben

$$\underline{d} = \underline{0}$$

így

$$\underline{x}_r = - \underline{D} \underline{x}_s$$

Legyen feladatunk az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2,5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása, ahol $m < n$.

Határozzuk meg \underline{D} -t

\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_4
1	2	1	3	2	1	3	2	-2	2
2	2	3	1	-2	1	-5	-0,5	2,5	1,5
1	3	2	2,5	1	1	+0,5	1,5	-3,0	-2

A megoldás tehát

$$\underline{x}_r = - \underline{D} \underline{x}_s = - \begin{bmatrix} 2 \\ 1,5 \\ -2 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

Ha például $x_4 = 3$

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 3 = \begin{bmatrix} -6 \\ -4,5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

vagyis

$$x_1 = -6, \quad x_2 = -4,5, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 3$$

ellenőrizzük

$$(-6) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 4,5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Legyen most feladatunk az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása, ahol $m > n$.

Határozzuk meg a D -t

\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_3
1	2	1	2	1	5/3
2	1	3	-3	1	-1/3
5	4	7	-6	2	0
4	5	5	-3	1	0

és

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

és ha $x_3 = 2$

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

vagyis $x_1 = -\frac{10}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 2$

Ellenőrizzük:

$$-\frac{10}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ -\frac{20}{3} \\ -50 \\ -40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{3} \\ \frac{18}{3} \\ \frac{42}{3} \\ \frac{30}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. FEJEZET

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása

A gazdasági számítások során, mint látni fogjuk, igen nagy szerepük van az egyenlőtlenségrendszereknek. A lineáris egyenlőtlenségrendszerek általános alakja

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

amit összevontan az

$$\underline{A} x \leq \underline{b}$$

formában írunk fel.

Gyakran vizsgáljuk valamely kiválasztott egyenlőtlenséget. Vegyük például a rendszer i -edik egyenlőtlenségét, azaz

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

amit összevontan a

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

formában is jelölhetünk.

Előfordul, hogy a rendszerben nem csak \leq irányu, hanem \geq irányu relációk is találhatóak. Tegyük fel, hogy az i -edik egyenlőtlenség \geq irányu, vagyis

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$$

Ez viszont könnyen \leq alakra hozható, csupán -1 -gyel kell beszoroznunk, vagyis a

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq -b_i$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq -b_i$$

egyenlőtlenséggel.

Lehetséges az is, hogy a rendszerben egyenlet is szerepel. Tegyük fel, hogy

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$$

Minden egyenlet helyettesíthető azonban vele egyenértékű két egyenlőtlenséggel, vagyis

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$$

esetén

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$$

Az elmondottakból belátható, hogy mind az egyenletek, mind az \geq irányú egyenlőtlenségek a

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

normál alakra hozhatók.

A gazdasági számítások során csak a nemnegatív megoldásokat keressük, azaz amikor $\underline{x} \geq 0$ és általában a feladatokban $\underline{b} \geq 0$, ezért mi az ún. normál egyenlőtlenségrendszerekkel, vagy röviden normálrendszerekkel fogunk foglalkozni, azaz

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0, \quad \underline{b} \geq 0$$

$\underline{A} \geq$ relációjú egyenlőtlenségek esetén általában nem -lyel való szorzást, hanem más eljárást fogunk követni.

Nemcsak egyenlet alakítható át egyenlőtlenséggé /amikor az egyenletet két azonos értékű, ellentétes irányú egyenlőtlenséggel helyettesítjük, / hanem az egyenlőtlenségek is átalakíthatók egyenletekké.

Az

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű a

$$\sum_j a_{ij} x_j + u_i = b_i$$

egyenlet, ahol u_i -t hiányváltozonak nevezzük és azt mutatja, hogy a bal oldal mennyivel kevesebb, mint a jobb oldal. /Mennyi hiányzik a bal oldalról, hogy az egyenlő legyen a jobb oldallal./ Ennek alapján az

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$$

helyett az

$$\underline{A} \underline{x} + \underline{u} = \underline{b} \quad \underline{u} \geq \underline{0}$$

feladatot oldhatjuk meg, ahol \underline{u} vektor a $\underline{b} - \underline{A} \underline{x}$ különbséget jelenti.

Hasonlóképpen a

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű a

$$\sum_j a_{ij} x_j - v_i = b_i$$

egyenlet, ahol v_i -t többletváltozonak nevezzük és mutatja, hogy a bal oldal mennyivel nagyobb, mint a jobb oldal /mennyi a többletünk/. Ennek alapján az

$$\underline{A} \underline{x} \geq \underline{b}$$

helyett az

$$\underline{A} \underline{x} - \underline{v} = \underline{b} \quad \underline{v} \geq \underline{0}$$

feladatot oldhatjuk meg.

Annak jelölésére, hogy a feladatban mind a \leq , mind a \geq irányú egyenlőtlenség, sőt az egyenlet \neq is előfordul, alkalmazzuk az

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$$

formát, amely egyenértékű az

$$\underline{A} \underline{x} + \underline{u} - \underline{v} = \underline{b}$$

feladattal, ahol az \underline{u} és \underline{v} vektorok az $\underline{A} \underline{x} - \underline{b}$ különbségét jelentik.

Az egyenlőtlenségrendszer kielégítő \underline{x} vektorok halmazát a lehetséges megoldások halmazának nevezzük és L -l jelöljük. Ha az L halmaz nem üres, akkor az egyenlőtlenségrendszer konzisztensnek, ellenkező esetben inkonzisztensnek nevezzük.

Legyen adva az

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\2x_1 + 3x_2 &\leq 17 \\4x_1 + 3x_2 &\leq 30\end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszer, s feladat ennek megoldása. A hiányváltozók bevezetésével a feladat felírható az

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + u_1 &= 10 \\2x_1 + 3x_2 + u_2 &= 17 \\4x_1 + 3x_2 + u_3 &= 30\end{aligned}$$

formában.

Ha a lehetséges megoldások halmazából az $\underline{x} = [0, 0]^T$ vektort vesszük, akkor $u_1 = 10, u_2 = 17, u_3 = 30$. Ha az $\underline{x} = [1, 1]^T$ vektort választjuk, akkor $u_1 = 7, u_2 = 12, u_3 = 23$, az $\underline{x} = [2, 1]^T$ esetében $u_1 = 6, u_2 = 10, u_3 = 19$, stb.

Az \underline{x} vektort a megoldás primál részének, vagy primális megoldásnak, az \underline{u} vektort a megoldás duális részének, vagy duális megoldásnak nevezzük.

Foglaljuk a feladatot táblázatba, kiemelve a változókat a fejrovatba.

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	\underline{b}
1	2	1	0	0	10
2	3	0	1	0	17
4	3	0	0	1	30

Látjuk, hogy az \underline{x} vektorhoz az \underline{A} együtthatómatrix, az \underline{u} vektorhoz pedig az \underline{E} egységmatrix tartozik. A feladat megoldását az ismert módszerekkel kapjuk.

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	\underline{b}
1	2	1	0	0	10
2	3	0	1	0	17
4	3	0	0	1	30

	x_2	u_1	u_2	u_3	\underline{b}
x_1	2	1	0	0	10
	$\boxed{-1}$	-2	1	0	-3
	-5	-4	0	1	-10

	u_1	u_2	u_3	\underline{b}
x_1	3	-2	0	4
x_2	-2	1	0	3
	-14	5	$\boxed{1}$	5

	u_1	u_2	\underline{b}
x_1	3	-2	4
x_2	-2	1	3
u_3	-14	5	5

Tehát

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 5.$$

A számítás, mint tudjuk, az \underline{E} elhagyásával egyszerűsítve is elvégezhető, azaz

	x_1	x_2	\underline{b}	x_2	\underline{b}	\underline{b}
$x_1 \quad u_1$	$\boxed{1}$	2	10	2	10	4
$x_2 \quad u_2$	2	3	17	$\boxed{-1}$	-3	3
u_3	4	3	30	-5	-10	5

A megoldás most is

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 5.$$

Az első /induló/

	x_1	x_2	\underline{b}
u_1	1	2	10
u_2	2	3	17
u_3	4	3	30

táblázat is egyféle megoldást mutat, mégpedig az $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 10$, $u_2 = 17$, $u_3 = 30$ megoldást. Ez a triviális bázismegoldás. Az u komponenseit bázisváltozóknak is szoktuk nevezni, míg az x komponensei a szabad változók. Az

$$\underline{A} \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$$

triviális megoldása

$$\underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{u} = \underline{b}$$

Mint mondtuk, a gazdasági számítások során követelményünk az is, hogy az egyenletrendszer nemnegatív megoldásait állítsuk elő. Ezt a követelményt teljesítjük, ha az utolsó táblázatban a \underline{b} vektor koordinátái nemnegatívak. Célszerű arra törekedni, hogy a számítások során a \underline{b} vektor koordinátái között egyik táblázatban se szerepeljen negatív érték. Ezt elérhetjük akkor, ha a generáló elemet úgy választjuk meg minden lépésben, hogy a

$$\frac{b_1}{a_{1j}}, \quad \frac{b_2}{a_{2j}}, \quad \text{stb.}$$

hányadosok közül a legkisebbnél választunk generáló elemet.

Vegyük az alábbi feladatot

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 25 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 12 \end{aligned}$$

Oldjuk meg az egyenlőtlenségrendszert.

	x_1	x_2	x_3	\underline{b}	
u_1	1	2	4	13	$18 : 1 = 18$
u_2	2	3	5	25	$25 : 2 = 12,5$
u_3	1	1	3	12	$12 : 1 = 12$

Ha tehát az első oszlopból választunk generáló elemet, célszerű annak harmadik elemét választani, mert ekkor kaptuk a legkisebb hányadost. Elvégezve ennek alapján a transzformációt, a következő táblázatot kapjuk:

	u_3	x_2	x_3	\underline{b}
u_1	-1	1	1	1
u_2	-2	1	-1	1
x_1	1	1	3	12

Válasszuk most a második oszlopból generáló elemet.
A következő táblázatunk

	u_3	u_2	x_3	\underline{b}
u_1	-3	-1	0	0
x_2	-2	1	-1	1
x_1	3	-1	4	11

A megoldás $x_1 = 11$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $u_1 = 0$,

$$u_2 = 0, u_3 = 0$$

A

	x_1	x_2	...	x_n	
u_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
u_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
.
.
u_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

táblázatot vagy matrix alakban felírva az

$$\begin{array}{c|c|c} & \underline{x}^T & \\ \hline \underline{u} & \underline{A} & \underline{b} \end{array}$$

táblázatot szimplex táblázatnak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy ha \underline{A} kvadratikus és nonszinguláris, akkor az \underline{x} vektor az ismert bázistranszformáció által kicserélhető az \underline{u} bázisvektorral. Ha \underline{A} nem kvadratikus és rangja r , akkor átrendezéssel elérhető, hogy \underline{A}_r az első r sorban és r oszlopban helyezkedjen el, s ezzel az \underline{x}_r kicserélhető az \underline{u}_r változókkal.

A lineáris programozási feladatok megoldása során mi a szimplex módszert fogjuk alkalmazni. Kiindulunk a

$$\begin{array}{c|c|c} & \underline{x}^T & \\ \hline \underline{u} & \underline{A} & \underline{b} \end{array}$$

szimplex táblázatból és vigyázva, hogy a \underline{b} vektornak csak nem-negatív koordinátái legyenek, bázistranszformációkat hajtunk végre. Az eljárást grafikusan is szemléltethetjük kétváltozós feladatok esetén.

Oldjuk meg az

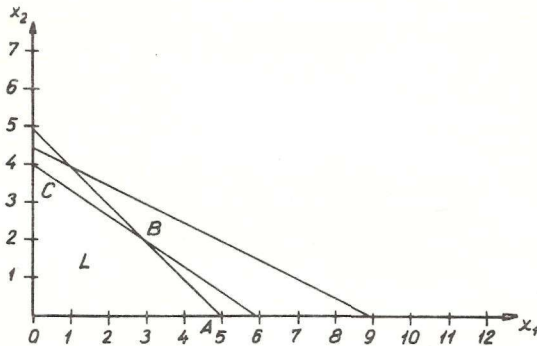
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 5 \\2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\x_1 + 2x_2 &\leq 9\end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszer.

	x_1	x_2	\underline{b}
u_1	1	1	5
u_2	2	3	12
u_3	1	2	9

	u_1	x_2	
x_1	1	1	5
u_2	-2	1	2
u_3	-1	1	4

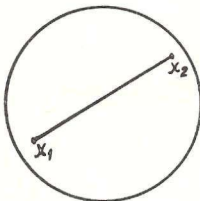
	u_1	u_2	
x_1	3	-1	3
x_2	-2	1	2
u_3	1	-1	2



28. ábra

A megoldások L halmaza

A megoldások L halmazát az OABC pontokat összekötő vonalak által határolt négyszög pontjai alkotják. A OABC négyszög egy konvex poliéder. Az L halmazt konvex halmaznak nevezzük, ha e halmaz bármely két pontjával együtt az azokat a pontokat összekötő szakaszt is tartalmazza /28-29. ábra/.



29. ábra

Konvex halmaz

A poliéder sokszögű testet jelent. Konvex poliéder a négyszög, a kocka, a háromszög, de egy szakasz is. A konvex poliéderek zárt és konvex halmazok. A korlátos konvex poliédereket konvex politópoknak nevezzük. Így a konvex politóp az előbbi ábránkban az OABC négyszög is.

A lehetséges megoldások L halmazát azok az \underline{x} vektorok adják, amelyek az adott egyenlőtlenségrendszeret kielégítik, azaz $\underline{x} \in L$. Az L extremális pontjának nevezzük azt az $\underline{x} \in L$ vektort, amely nem belső pontja egyetlen olyan szakasznak sem, amely benne van az L halmazban. A OABC négyszög O, A, B, C pontjai tehát extremális pontok /csúcspontok/. Olvassuk le ábránkon az extremális pontokhoz tartozó koordinátákat.

Az O ponthoz a triviális megoldás tartozik, vagyis

$$\underline{x} = \underline{0} \text{ és ekkor } \underline{u} = \underline{b}$$

Az A ponthoz tartozó koordináták

$$\underline{x} = [5, 0]^T, \text{ ekkor } \underline{u} = [0, 2, 4]^T$$

A B ponthoz tartozó koordináták

$$\underline{x} = [3, 2], \quad \text{ekkor} \quad \underline{u} = [0, 0, 2]$$

A C ponthoz tartozó koordináták

$$\underline{x} = [0, 4], \quad \text{ekkor} \quad \underline{u} = [1, 0, 1]$$

Az olyan konvex politópot, amelynek eggyel több csucsa /extremális pontja/ van, mint amennyi dimenziója, szimplexnek nevezzük. A konvex poliéderek között a legegyszerűbb alakzat a szimplex. E szerint tehát az n dimenziós szimplex olyan konvex poliéder, amelynek n + 1 extremális pontja van.

Nulldimenziós szimplex a pont.

Egydimenziós szimplex a szakasz.

Kétdimenziós szimplexek a háromszögek.

Háromdimenziós szimplexek a tetraéder.

A háromnál több dimenziós szimplexeknek nincs már külön nevük.

Utánhuzás változatlan formában

Készült a
DEBRECENI AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM
Sokszorosító Üzemében
188 oldal. 408 példány.

57 / 79

Fk. Dr. Tóth József Fv. Molnár Ferenc

I.-II. kötet Önköltségi ár: 82.- Ft.
Társintézm. ár: 50.50
Hallgatói ár: 20.50