

AGRARTUDOMÁNYI EGYETEM  
MEZŐGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR  
Üzemszervezési Szak  
Statisztikai Tanszék

GAZDASÁGI MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKA II.

/Második kötet/

DR. TÓTH JÓZSEF

G Ü D Ö L L Ő  
1975

AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM  
MEZŐGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Üzemszervezési Szak  
Statisztikai Tanszék

GAZDASÁGI MATEMATIKA ÉS SZÁMITÁSTECHNIKA

**II.**

/Második kötet/

DR. TÓTH JÓZSEF

G Ö D Ö L L Ő

1975



## 10. FEJEZET

### Lineáris programozás

A halmazelméleti alapok, a lineáris algebra, a lineáris tér, valamint a lineáris egyenletrendszerek és egyenlőtlenségrendszerek megoldásának ismerete után rendelkezünk azokkal a matematikai alapokkal, amelyek lehetővé teszik a lineáris programozás elsajátítását. Mint látni fogjuk, ennek során lineáris egyenletekből és egyenlőtlenségekből álló feladatokat kell megoldanunk. A megoldást szimplex módszerrel fogjuk elvégezni, amit lényegében az előző fejezetből már ismerünk, sőt azt már kétváltozós feladatokra geometriailag is értelmeztük. Egyszerű megállapítani azt is, hogy a tananyag elején tárgyalt grafikus lineáris programozás is a szimplex módszer felhasználásával történt, amikor is kétváltozós feladat grafikus ábrája alapján a sokszög azon extrémális pontját /csúcspontját/ kerestük, amelyhez egy függvény /a célfüggvény/ extrém értéke /maximuma vagy minimuma/ tartozik.

Ebben a fejezetben már olyan feladatok megoldásával is megismerkedünk, amikor az ismeretlenek és az egyenletek és egyenlőtlenségek száma elvileg korlátlan lehet, gyakorlatilag pedig csak a rendelkezésre álló számítókapacitástól függ.

A lineáris programozás - mint látni fogjuk - jól alkalmazható gazdasági feladatok megoldására. Ez is indokolja, hogy már most a lineáris programozás általános tárgyalását gyakorlati, gazdasági példákkal illusztráljuk, még ha egyelőre kénytelenek vagyunk is azokat lényegesen leegyszerűsíteni. A gazdasági, gyakorlati feladatok ugyanis legtöbbször igen nagyméretű modellel vezetnek. Jelenleg célunk a lineáris programozás általános módszertani megismerése és megértése, amely kisebb modellek alapján könnyebben megvalósítható. Később a gyakorlati alkalmazás módszerének tárgyalása során viszont lehetőségünk lesz arra, hogy a gyakorlati gazdasági feladatokat teljes bonyolultságukban megismerjük.

#### 10.1. A normálfeladat és megoldása degeneráció nélkül

Tegyük fel, hogy egy vállalat árunövénytermelési tervét kell elkészíteni.

Vegyük az egyszerűség kedvéért a 2. fejezet 2.3. pontjából már ismert példát, mert így nem szükséges a feladatot újra részletezni. Csupán emlékeztetőül megjegyezzük, hogy a vállalat számára rendelkezésre áll 1000 ha termőterület, 2600 munkanap az első csucsidőszakban, 6800 munkanap a második csucsidőszakban, a technológiai és a jövedelemadatok pedig a következők:

Technológiai és jövedelemadatok

Megnevezés	A	B	C	D
	Technológiai és jövedelemadatok l na-ra			
Területszükséglet, ha	1	1	1	1
Munkanapszükséglet az I. csucsidőszakban	1	4	4	2
Munkanapszükséglet a II. csucsidőszakban	4	2	6	10
Jövedelem R	900	900	1000	1100

/A, B, C, D - mint tudjuk - a termelhető növények felsorolása/

A termelési tervet /programot/ úgy kell összeállítani, hogy a terület és a munkaerőszükséglet nem haladhatja meg a rendelkezésre álló kapacitást és az elérhető jövedelem a lehető legnagyobb, maximális legyen. /A kapacitás teljes kihasználásához a vállalat nem ragaszkodik, ha az nem lenne jövedelmező./ Természetesen negatív termelés nem folytatható.

A feladat a következő lineáris programozási modellhez vezet:

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1000 \\
 10.1.1. & x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 2600 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10x_4 \leq 6800
 \end{aligned}$$

$$z = 900x_1 + 900x_2 + 1000x_3 + 1100x_4 = \max ,$$

Foglaljuk a feladatot táblázatba, kiemelve az ismeretleneket a táblázat fejrovatába.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
1	1	1	1	1000
1	4	4	2	2600
4	2	6	10	6800
900	900	1000	1100	0

A táblázatban szereplő technológiai adatok /fajlagos kapacitásigények/ matrixa a technológiai matrix /A/. A jobb oldali oszlopban a kapacitásadatokat találjuk, ez tehát a kapacitás vektor, amit jelöljünk b vektorral. Az alsó sorban a jövedelemadatokat találjuk, amelyek azt mutatják, hogy a különböző termékek milyen hatékonyan járulnak hozzá a vállalati jövedelemhez. Nevezzük ezt hatékonysági vektornak és jelöljük p-vel. Végül az  $x_1, x_2, x_3, x_4$  a termelési programot /termelési tervet/ fogja adni, úgy az ezekből képezett x vektort programvektornak fogjuk nevezni.

Ennek alapján a feladatot a következőképpen is felírhatjuk:

$$A x \leq b, \quad x \geq 0, \quad b \geq 0,$$

10.1.2.

$$p^T x = \max.$$

E szerint keressük azt a nemnegatív x vektort, amelyhez a  $p^T x$  célfüggvény maximuma tartozik és amely kielégíti az  $A x \leq b$  feltételeket.

Az  $A x \leq b$  feltételeket kielégítő vektorok az L értelmezési tartományát határozzák meg. Az L elemeit lehetséges megoldásoknak, vagy lehetséges programoknak nevezzük. Az olyan

$$x_0 \in L$$

lehetséges programot, amelyhez a  $p^T x$  célfüggvény maximuma tartozik, optimális megoldásnak vagy optimális programnak nevezük. Ugyanezt jelenti az irodalomban gyakran található

$$10.1.3. \quad \max \{ p^T x \mid x \geq 0, \quad A x \leq b, \quad b \geq 0 \}$$

felírasmód is.

Másrészt a matrix, illetve vektorok általános elemeit kiragadva, a feladat az

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \quad x_j \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

10.1.4.

$$\sum_j p_j x_j = \max \quad \begin{array}{l} / j = 1, 2, \dots, n/ \\ / i = 1, 2, \dots, m/ \end{array}$$

formában is felírható.

Végül írjuk fel szimbólikusan az előbb megszerkesztett táblázatot

	$\bar{x}^T$	
$\underline{u}$	$\bar{A}$	$\underline{b}$
	$\bar{E}^T$	

Ez a szimplex módszer alkalmazása során megszerkesztett első, úgynevezett induló táblázat, ahol  $\underline{u}$ -val azt is jelöltük, hogy a triviális bázisból indulunk ki a megoldás során.

Mielőtt a számszerű példafeladatot megoldanánk, foglaljuk össze a normálfeladat jellemzőit.

A lineáris programozási feladatot normálfeladatnak nevezzük akkor, ha a

- a/ célfüggvény maximumát keressük /maximumfeladat/
- b/ feltételek között kizárólag kisebb egyenlő  $\leq$ /relációk találhatóak.

A megoldáshoz szükséges számítások az előző fejezetekből lényegében már ismertek, ezért azt csak röviden, lépésenként összefoglaljuk, majd a példafeladat megoldását táblázatosan közöljük.

A megoldás lépései:

- 1. lépés: Induló táblázatot szerkesztünk. /Tudjuk, hogy a triviális bázisból indulunk ki, majd ezt rendre kicseréljük /ameddig lehetséges/ az  $\bar{A}$  matrix oszlopvektoraival./
- 2. lépés: Meghatározzuk, hogy melyik oszlopból választunk generáló elemet. Mivel a célfüggvény maximumát keressük, célszerű abból az oszlopból választani generáló elemet, amelyhez a legnagyobb célfüggvényérték tartozik, mert így azt reméljük, hogy kevesebb számítással jutunk el a feladat megoldásához. /Megjegyezzük, hogy ez általában igaz is, de nem mindig./
- 3. lépés: Generáló elemet választunk. Mint tudjuk, generáló elem csak 0-tól különböző szám lehet. Mivel a feladatnak csak nemnegatív megoldását keressük /negatív termelést nem folytattunk/, fontos, hogy a  $\underline{b}$  vektor koordinátái /legalábbis a megoldást adó utolsó táblázatban/ nemnegatívak legyenek. Célszerű ezért generáló elemnek azt a pozitív elemet választani.

tani, amelynél a  $b$  vektor elemeivel alkotott hányados a legkisebb. A generáló elemet tehát úgy választjuk ki, hogy a  $b$  vektorhoz tartozó adatokat osztjuk a generáló oszlop adataival és azt az osztót választjuk generáló elemnek, amelyhez a legkisebb hányados tartozik. Ezt bekeretezzük.

4. lépés: Új táblázatot szerkesztünk, amelyben a generáló elemhez tartozó sor- és oszlopszimbólumokat felcseréljük.
5. lépés: Az új táblázatba a generáló elem helyére beírjuk annak reciprokát.
6. lépés: Az új táblázatba a generáló elem oszlopának adatait megkapjuk, ha az előző táblázat megfelelő adatait szorozzuk a generáló elem reciprokának  $-1$ -szeresével.
7. lépés: Az új táblázatban a generáló elem sorának adatait  $/\delta_j/$  megkapjuk, ha az előző táblázat megfelelő adatait szorozzuk a generáló elem reciprokával /vagy osztjuk a generáló elemmel/.
8. lépés: Az új táblázat többi adatait megkapjuk, ha a régi táblázat megfelelő adataiból levonjuk a régi táblázat generáló elem oszlopában a megfelelő sorban lévő adat, valamint az új táblázatban az adatnak megfelelő oszlopban található  $\delta_j$  szorzatát.

A számításokat táblázatról - táblázatra haladva mindaddig folytatjuk, amíg a célfüggvény sorában /utolsó sor/ pozitív elemet találunk. Ha ilyen nincs, optimális megoldáshoz jutottunk, tehát az utolsó táblázat a feladat megoldását adja. A számításokat szimbólikusan az alábbi táblázatokban mutatjuk be:

	$x_1$	...	$x_j$	...	$x_n$	
$u_1$	$a_{11}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	$b_1$
$u_1$	$a_{21}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$	$b_2$
.	.		.		.	.
.	.		.		.	.
$u_i$	$a_{i1}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$	$b_i$
.	.		.		.	.
.	.		.		.	.
$u_m$	$a_{m1}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	$b_m$
	$p_1$	...	$p_j$	...	$p_n$	$z$

$$P_j > P_1, P_2, \dots, P_n$$

$$\frac{b_i}{a_{ij}} < \frac{b_1}{a_{1j}}, \frac{b_2}{a_{2j}}, \dots, \frac{b_m}{a_{mj}}$$

$$\gamma = \frac{1}{a_{ij}}$$

$$\delta_1 = \frac{a_{i1}}{a_{ij}}, \quad \delta_2 = \frac{a_{i2}}{a_{ij}}, \quad \dots, \quad \delta_n = \frac{b_i}{a_{ij}}$$

/Az induló táblázatban természetesen  $z = 0$ /

	$x_1$	...	$u_i$	...	$x_n$	
$u_1$	$a_{11} - \delta_1 a_{1j}$		$-\gamma a_{1j}$		$a_{1n} - \delta_n a_{1j}$	$b_1 - \delta_0 a_{1j}$
$u_2$	$a_{21} - \delta_1 a_{2j}$		$-\gamma a_{2j}$		$a_{2n} - \delta_n a_{2j}$	$b_2 - \delta_0 a_{2j}$
.	.		.		.	.
.	.		.		.	.
$x_j$	$\delta_1$		$\gamma$		$\delta_n$	$\delta_0$
.	.		.		.	.
.	.		.		.	.
$u_m$	$a_{m1} - \delta_1 a_{mj}$		$-\gamma a_{mj}$		$a_{mn} - \delta_n a_{mj}$	$b_m - \delta_0 a_{mj}$
	$P_1 - \delta_1 P_j$		$-\gamma P_j$		$P_n - \delta_n P_j$	$z - \delta_0 P_j$

Lássuk most példafeladatunk megoldását és a megoldás során kapott táblázatokat.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1	4	4	2	2600
$u_3$	4	2	6	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	6800
$-z$	900	900	1000	1100	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	0,6	0,8	0,4	-0,1	320
$u_2$	0,2	3,6	2,8	-0,2	1240
$x_4$	0,4	0,2	0,6	0,1	680
-z	460	680	340	-110	-748000

	$x_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	0,55	-0,22	-0,22	-0,05	44,45
$x_2$	0,06	0,28	0,78	-0,06	344,44
$x_4$	0,39	-0,06	0,44	0,11	611,11
-z	422,2	-188,9	-190,4	-69,2	-982219,2

	$u_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$x_1$	1,82	-0,4	-0,4	-0,09	80,82
$x_2$	-0,11	0,3	0,8	-0,05	339,59
$x_4$	-0,71	0,1	0,6	0,15	579,59
-z	-767,6	-20,0	-21,52	-32,1	-1016340

A kapott optimális megoldás tehát a következő:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 80,82; & x_2 &= 339,59; & x_3 &= 0; & x_4 &= 579,59 \\
 u_1 &= 0; & u_2 &= 0; & u_3 &= 0; & z &= 1\ 016\ 340
 \end{aligned}$$

vagy másképpen felírva

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 80,82 \\ 339,59 \\ 0 \\ 579,59 \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \underline{0}, \quad z = 1\ 016\ 340$$

Megjegyezzük, hogy a táblázatban a z negatív előjellel szerepel. Ez kizárólag számítástechnikai okokból van így, hogy a célfüggvényérték kiszámítására ne legyen szükség külön eljárásra. Valójában ezt -1-gyel beszorozva, pozitívnak vesszük.

Az utolsó táblázatból leolvasható, milyen termelési program adja a legnagyobb jövedelmet. A 2.3. pontban vizsgáltuk a megoldást és az eredményt gazdasági szempontból is. Tudjuk, hogy a harmadik termék, bár önmagában szemlélve jól jövedelmező, az utolsó táblázat mutatja, hogy a harmadik termék 1 ha-on való termelése 21,52 R jövedelemcsökkenést okozna. Mindhárom termelési erőforrást teljes mértékben felhasználtuk. Az utolsó táblázat utolsó sorából az is megállapítható, hogy amennyiben valamelyik erőforrásból kevesebb állna rendelkezésre egy egységgel, akkor az első erőforrást tekintve, 767,6 R-tal, a második erőforrásnál 20 R-tal, a harmadik erőforrásnál 32,1 R-tal csökkenne a jövedelem. Az erőforrások egy egységgel való növelése viszont ugyanannyi jövedelememelkedéshez vezetne. Ennek alapján a vállalatvezetés dönthet arról is, hogy melyik erőforrásból volna célszerű a kapacitást növelni, vagy csökkenteni. Ha ugyanis valamely erőforrás olcsóbban szerezhető be, mint az egységnyi erőforrás által elérhető jövedelemtöbblet, akkor érdemes ebből a kapacitást növelni. Ellenkező esetben a kapacitás csökkentése célszerű.

Vegyük például az első erőforrást. Ebből célszerű bővíteni a kapacitást, ha beszerzése kevesebbe kerül /egységenként/ 767,6 R- nál. Ha például a piacon az első erőforrást egységenként 600 R-ért lehet beszerezni, célszerű ezt megtenni, mert a 767,6 R jövedelem nemcsak fedezi a költséget, de még 167,6 R jövedelmet is eredményez. A vállalatnak tehát az adott esetben az első erőforrás egy egysége 767,6 R-ot ér /hiszen ennyivel emeli a jövedelmet/, bárhogyan is alakul az adott erőforrás piaci ára. A modellben tehát az erőforrások mintegy felértékelődnek, s ez mutatja, hogy az adott körülmények között - függetlenül a beszerzési ártól, illetve költségektől - mennyit érnek a vállalat számára. A duális változókhoz tartozó célfüggvényértéket /a duális megoldást/ árnyékárnak nevezzük. Az árnyékárral a későbbiek során még gyakran találkozunk.

Végül ellenőrizzük a megoldást azzal, hogy a kapott eredményt behelyettesítjük a 10.1.1. vagy a 10.1.2.-be, azaz:

$$\begin{aligned} 80,82 + 339,59 + 0 + 579,59 &= 1000 \\ 80,82 + 4 \cdot 339,59 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 579,59 &= 259,36 = 2600 \\ 4 \cdot 80,82 + 2 \cdot 339,59 + 6 \cdot 0 + 10 \cdot 579,59 &= 6798,36 = 6800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 900 \cdot 80,82 + 900 \cdot 339,59 + 1000 \cdot 0 + 1100 \cdot 579,59 &= \\ &= 1\ 015\ 918 \approx 1\ 016\ 340 \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80,82 \\ 339,59 \\ 0 \\ 579,59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2600 \\ 6800 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 900, & 900, & 1000, & 1100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80,82 \\ 339,59 \\ 0 \\ 579,59 \end{bmatrix} = 1015\ 918 \approx 1\ 016\ 340$$

A lényegtelen eltérés kerekítésekből adódik. Az adott példa alkalmas volna arra, hogy segítségével különböző problémákat bemutassunk és összefüggésbe hozzuk a gazdasági háttérrel is. A kerekítésekből adódó hibák azonban mindvégig zavarnának bennünket. E hibák azonban csökkenthetők, ha a számadatokat némileg átalakítjuk. Mindössze négy adatot kell megváltoztatnunk és máris nagyobb pontossággal tudunk számolni. Alakítsuk tehát át a feladatot úgy, hogy induló táblázatunk a következő legyen:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	10	6800
-z	900	900	950	1100	0

Ha most az

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$$

logikai uton előállított termelési programot valósítjuk meg, akkor a kapacitásszükséglet

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2600 \\ 6500 \end{bmatrix}$$

és a célfüggvény értéke /a vállalati jövedelem/

$$z = 995\ 000 \text{ Ft.}$$

Tegyük fel azonban, hogy a második csúcsideszakban most is 6800 munkanap áll rendelkezésre, amit a logikai uton készített termelési program nem használ ki.

Oldjuk meg a feladatot

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	10	6800
-z	900	900	950	1100	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
$u_2$	1	4	3	-0,2	1240
$x_4$	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	400	-110	748000

	$x_1$	$u_2$	$x_3$	$u_4$	
$u_1$	0,4	-0,2	-0,10	-0,06	72
$x_2$	0,25	0,25	0,75	-0,05	310
$x_4$	0,35	-0,05	0,35	0,11	618
-z	290	-170	-110	-76	958 800

	$u_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$x_1$	2,5	-0,5	-0,25	-0,15	180
$x_2$	-0,625	0,375	0,81	-0,01	265
$x_4$	-0,875	0,125	0,44	0,16	555
-z	-725	-25	-37,5	-32,5	-1011000

Az optimális megoldás tehát

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 180 \\ 265 \\ 0 \\ 555 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0} \quad z = 1\ 011\ 000$$

Ez a termelési program /behelyettesítéssel ellenőrizzük/ mindhárom erőforráskapacitást teljesen kihasználja és a jövedelemtöbblet 16 000 R.

Az árnyékárak azt mutatják, hogy a földterület növelése hektáronként 725 R-tal, az I. csucsidőszak munkaerőkapacitása munkanaponként 25 R-tal, a II. csucsidőszakban pedig 32,5 R-tal emelné a jövedelmet, viszont a harmadik termék termelése hektáronként 37,5 R-tal csökkentené az elérhető vállalati jövedelmet.

Tegyük fel, hogy ha a vállalat a földterületet nem is képes bővíteni, a nem árunövénytermelő ágazatokban jobb munkaszervezéssel el tudja érni, hogy az I. csucsidőszakban 360 munkanap-kapacitást felszabadít és átirányít az árunövénytermelés területére. Ennek alapján a kapacitás a következőképpen alakul:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2960 \\ 6800 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg most a feladatot:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2960
$u_3$	4	2	5	<span style="border: 1px solid black;">10</span>	6800
-z	900	900	950	1100	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
$u_2$	1	<span style="border: 1px solid black;">4</span>	3	-0,2	1600
$x_4$	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	400	-110	-748000

	$x_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	<span style="border: 1px solid black;">0,40</span>	-0,2	-0,10	-0,06	0
$x_2$	0,25	0,25	0,75	-0,05	400
$x_4$	0,35	-0,05	0,35	0,11	600
-z	290	-170	-110	-76	-1020000

	$u_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$x_1$	2,5	0,5	-0,25	-0,15	0
$x_2$	-0,625	0,375	0,81	-0,01	400
$x_4$	-0,875	0,125	0,44	0,16	600
-z	-725	-25	-37,5	-32,5	-1020000

A megoldás tehát:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0} \quad z = 1\,020\,000$$

Most tehát csak két terméket /az elsőt és a másodikat/ célszerű termelni, az erőforrásokat most is teljesen felhasználjuk és a jövedelem az előző megoldáshoz képest 1 020 000 - 1 011 000 = 9000 R-tal emelkedett. Figyeljük meg, hogy az előbbi megoldásban a második erőforráshoz 25 R árnyékár tartozott. Az erőforrást 360 egységgel bővítettük, s így  $360 \cdot 25 = 9000$  R-tal emelkedett a jövedelem.

Bővítsük még a második erőforrást 40 egységgel, hogy az 3000 munkanap legyen és oldjuk meg a modellt.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	3000
$u_3$	4	2	5	10	6800
-z	900	900	950	1100	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
$u_2$	1	4	3	-0,2	1640
$x_4$	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	400	-110	-748000

	$x_1$	$u_1$	$x_3$	$u_3$	
$x_2$	0,75	1,25	0,625	-0,125	400
$u_2$	-2	-5	0,5	0,30	40
$x_4$	0,25	-0,25	-0,375	0,125	600
-z	-50	-850	-25	-25	-1020000

A megoldás most tehát a következő:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = 1\ 020\ 000$$

A második erőforrás további 40 egységgel való bővítésének tehát nincs jelentősége, azt az adott terület és a II. csucsidőszakban rendelkezésre álló munkaerőkapacitás mellett nem tudjuk felhasználni. Ebből tehát most felesleges kapacitásunk van. A második erőforrásra most nem is kaptunk árnyékárát, viszont jelentősen emelkedett a területnek, mint viszonylag leginkább szűk kapacitásnak az árnyékára.

Tegyük fel, hogy a harmadik termék termelésére nincs is lehetőségünk, vagyis most csak három változó szerepel a feladatban / $x_4$ -et most  $x_3$ -nak vegyük/. A feladat megoldása a következő:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$u_1$	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	2	2600
$u_3$	4	2	10	6800
-z	900	900	1100	0

	$x_1$	$x_2$	$u_3$	
$u_1$	0,6	0,8	-0,1	320
$u_2$	1	4	-0,2	1240
$x_3$	0,4	0,2	0,1	680
-z	460	680	-110	-748000

	$x_1$	$u_2$	$u_3$	
$u_1$	0,4	-0,2	-0,06	72
$x_2$	0,25	0,25	-0,05	310
$x_3$	0,35	-0,05	0,11	618
-z	290	-170	-76	-958800

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_1$	2,5	-0,5	-0,15	180
$x_2$	-0,625	0,375	-0,01	265
$x_3$	-0,875	0,125	0,16	555
-z	-725	-25	-32,5	-1011000

A megoldás tehát

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 180 \\ 265 \\ 555 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0} \quad z = 1\,011\,000$$

A táblázat belsejében az  $\underline{A}$  matrix helyén most annak inverzét találjuk, azaz  $\underline{A}^{-1}$ -t, azaz

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,5 & -0,5 & -0,15 \\ -0,625 & 0,375 & -0,01 \\ -0,875 & 0,125 & 0,16 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1,8 & 4,4 & 2 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,5 & -0,5 & -0,15 \\ -0,625 & 0,375 & -0,01 \\ -0,875 & 0,125 & 0,16 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

/A kerekítésből adódhat kisebb eltérés/

Végül tegyük fel, hogy árvaltozas következtében a harmadik termék fajlagos jövedelme 950 Ft-ról 1000 Ft-ra emelkedik. Oldjuk meg most a feladatot:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	6800
-z	900	900	1000	1100	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
$u_2$	1	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>	3	-0,2	1240
$x_4$	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	450	-110	-748000

	$x_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0,4</span>	-0,2	-0,10	-0,06	72
$x_2$	0,25	0,25	0,75	-0,05	310
$x_4$	0,35	-0,05	0,35	0,11	618
-z	290	-170	-60	-76	-958800

	$u_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$x_1$	2,5	-0,5	-0,25	-0,15	180
$x_2$	-0,625	0,375	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0,81</span>	-0,01	265
$x_4$	-0,875	0,125	0,44	0,16	555
-z	-725	-25	12,50	-32,50	-1011000

	$u_1$	$u_2$	$x_2$	$u_3$	
$x_1$	2,30	-0,38	0,31	-0,153	261,79
$x_3$	-0,77	0,46	1,24	-0,012	327,16
$x_4$	-0,54	-0,08	-0,54	-0,165	411,05
-z	-715,4	-30,8	-15,43	-32,3	-1015089,5

A megoldás

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 261,79 \\ 0 \\ 327,16 \\ 411,05 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0} \quad z = 1\ 015\ 089,5$$

Most az  $x_2$ -t ki kellett cserélni az  $x_3$ -mal. Az  $x_2$  és  $x_3$  változók csereféjét megtakaríthatnánk volna, ha figyelembe vesszük a változók legnagyobb összes hozamát.

Figyeljük meg az indulo táblázatot és számítsuk ki a különböző termékekhez tartozó lehetséges legnagyobb hozamot, úgy, hogy a kapacitásvektor adatait osztjuk a fajlagos szükségleti adatokkal és kiszámítjuk a legkisebb hányadoshoz tartozó célfüggvényértéket. A következőket kapjuk:

Az első termékre:

$$\begin{array}{l} 1000 : 1 = 1000 \\ 2600 : 1,8 = 1444 \\ 6800 : 4 = 1700 \end{array} \quad \text{és } 1000 \cdot 900 = 900\ 000$$

A második termékre:

$$\begin{array}{l} 1000 : 1 = 1000 \\ 2600 : 4,4 = 591 \\ 6800 : 2 = 3400 \end{array} \quad \text{és } 591 \cdot 900 = 531\ 900$$

A harmadik termékre:

$$\begin{array}{l} 1000 : 1 = 1000 \\ 2600 : 4 = 650 \\ 6800 : 5 = 1360 \end{array} \quad \text{és } 650 \cdot 1000 = 650\ 000$$

A negyedik termékre:

$$\begin{array}{l} 1000 : 1 = 1000 \\ 2600 : 2 = 1300 \\ 6800 : 10 = 680 \end{array} \quad \text{és } 680 \cdot 1100 = 748\ 000$$

A második erőforráskapacitás a második és a harmadik termékre vonatkozóan mutatkozott szűknek. /Az első termékénél az első, a negyediknél a harmadik erőforrás volt a szűk kapacitás./ Amikor tehát a második erőforrásnál végezzük a báziscserét, célszerű a második és harmadik termék közül azt választani, amelyhez nagyobb lehetséges jövedelem tartozik. Ez pedig a harmadik termék, amelynél a lehetséges összjövedelem 650 000 R, míg a másodiknál csak 531 900 R-ot kaptunk. A második lépésben tehát  $x_2$  helyett  $x_3$ -at lenne célszerű a bázisba bevonni. Gyakorlásképpen oldjuk meg így is a feladatot.

### 10.2. Degeneráció

A degeneráció problémájával már az előbbieken találkozunk, csak akkor még azt elhallgattuk. Vegyük az előbbiekből már ismert feladatot, amikor induló táblánk a következő volt:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2960
$u_3$	4	2	5	10	6800
-z	900	900	950	1100	0

A második tábla ekkor így alakult:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
$u_2$	1	4	3	-0,2	1600
$x_4$	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	400	-110	-748000

Egyértelmű, hogy a következő lépésben a második terméket kell a programba bevonni, tehát a második oszlopban választunk generáló elemet, hiszen egyértelműen ehhez az oszlophoz tartozik a legnagyobb célfüggvény koefficiens. De a második oszlop hányadik eleme legyen a generáló elem? Tudjuk, hogy a generáló elemet úgy választjuk, hogy az utolsó oszlop elemeit osztjuk a generáló oszlop elemeivel és azt választjuk generáló elemnek, ahol a legkisebb hányadost kapjuk. Végezzük el az osztásokat:

$$320 : 0,8 = 400$$

$$1600 : 4 = 400$$

$$680 : 0,2 = 3400$$

Az első és a második elemmel osztva, azonos /mindkettő-nél legkisebb/ hányadost kapunk. Nem tudunk tehát egyértelműen generáló elemet választani, mert mind az első, mind a második elem egyformán lehet generáló elem. Ilyen esetben tehát, amikor nem tudunk egyértelműen generáló elemet választani, degenerációval állunk szemben. Hogyan járunk el ilyenkor, amikor két/vagy több/ generáló elem-jelöltünk van?

A legegyszerűbb eljárás, ha a generáló elem-jelöltek közül találomra választunk ki egyet generáló elemnek. Ilyenkor viszont előfordulhat, hogy egy táblázat később megismétlődik, sőt ha esetleg ismételten ugyanugy választjuk a generáló elemet, "körben forogunk" és nem jutunk a feladat végére. Célszerűbb úgy eljárni, hogy a generáló elem jelöltekkel balról jobbra haladva, elosztjuk az adott sorban lévő többi technológiai együtthatót. Amely sorban előbb találjuk a legkisebb hányadost, abban választunk generáló elemet. Példánkban tehát az első sort 0,8-del, a második sort 4-gyel végigosztjuk, azaz

Első sor

$$\frac{0,6}{0,8} = 0,75 \quad \frac{0,5}{0,8} = 0,625 \quad \frac{-0,1}{0,8} = -0,125$$

Második sor

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{3}{4} = 0,75 \quad \frac{-0,2}{4} = -0,05$$

Az első hányados az első sorban 0,75, a második sorban 0,25 és mivel  $0,25 < 0,75$ , azért a második sorban választunk generáló elemet. A 10.1. pontban tehát jól választottunk generáló elemet. /A megoldást már ismerjük./

A degeneráció előfordulhat már az induló táblázatban is, vagy bármely más táblázatban. Akkor is degenerációval állunk szemben, ha az induló, vagy bármely más táblázatban a  $b$  vektor elemei között két vagy több nullát találunk. Ilyenkor a szűk keresztmetszetet jelentő hányadosok nullák.

### 10.3. A programvektor és a kapacitások egyidejű optimalizálása

Az eddigiekben a feladatot úgy fogalmaztuk meg, hogy rendelkezésre áll meghatározott erőforráskapacitás, és ehhez kell optimalizálni a termelési szerkezetet. A gyakorlatban azonban általában nem ez a helyzet. Egyes kapacitások ténylegesen meghatározott mennyiségben állnak rendelkezésre, mások viszont változtathatók, ha e változtatás célszerű. Például

lehet, hogy a rendelkezésre álló földterület adott, de gépeket és anyagokat - elvileg - tetszés szerinti mennyiségben beszerezhetünk, vagy szűkíthetjük, illetve bővíthetjük a munkaerőlétszámot, stb.

Vegyük az előbbiekből már ismert feladatot és tételezzük fel, hogy az 1000 ha földterület adva van, azon nem változtathatunk, a munkaerő viszont tetszés szerint változtatható. Tegyük fel, hogy a 2600, illetve 6800 munkanap kapacitás ugy adódott, hogy 100 fő munkaerő állt a vállalat rendelkezésére és az első csúcsidezőszak kb. egy hónapot ölel fel, amely egy hónap alatt egy-egy dolgozó 26 napot dolgozik, míg a második csúcsidezőszak egy háromhónapos periódus, s ez alatt egy dolgozó 68 munkanapot dolgozhat.

Az

$$\begin{aligned}x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1000 \\1,8 x_1 + 4,4 x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 2600 \\4 x_1 + 2 x_2 + 5x_3 + 10x_4 &\leq 6800 \\900x_1 + 900 x_2 + 950 x_3 + 1100 x_4 &= \max.\end{aligned}$$

feladat most tehát a következő:

$$\begin{aligned}x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1000 \\1,8 x_1 + 4,4 x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 26 \cdot 100 \\4 x_1 + 2 x_2 + 5x_3 + 10x_4 &\leq 68 \cdot 100 \\900 x_1 + 900 x_2 + 950x_3 + 1100x_4 &= \max.\end{aligned}$$

Azt mondtuk azonban, hogy most nem 100 fő áll rendelkezésünkre, hanem annyi, amennyi szükséges, illetve amennyi célszerű. Ezt az egyelőre ismeretlen munkaerőszükségletet  $y$ -nal jelölve, a feladat a következő:

$$\begin{aligned}x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1000 \\1,8 x_1 + 4,4 x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 26 y \\4 x_1 + 2 x_2 + 5x_3 + 10x_4 &\leq 68 y \\900 x_1 + 900 x_2 + 950 x_3 + 1100 x_4 &= \max.\end{aligned}$$

Az  $y$  most ugyanúgy ismeretlenként kezelhető, mint az  $x_i$ -k. Hozzuk át tehát azokat együtthatóikkal együtt az egyenlőtlen ségek bal oldalára, azaz

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y \geq 0$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1000 \\ 1,8 x_1 + 4,4 x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 26y &\leq 0 \\ 4 x_1 + 2 x_2 + 5x_3 + 10x_4 - 68y &\leq 0 \end{aligned}$$

$$900 x_1 + 900 x_2 + 950 x_3 + 1100 x_4 = \max.$$

Most még eltekintünk attól, hogy a munkaerőváltóhoz külön célfüggvényértéket rendeljünk, hiszen a különböző termékek jövedelmét úgy számítottuk ki, hogy a munkabéreket is figyelembe vettük. Valójában a munkaerő rendelkezésre állásának is van költsége, de ezzel majd a gyakorlati alkalmazás tárgyalása során foglalkozunk. Oldjuk meg tehát az előbbi feladatot:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$	
$u_1$	1	1	1	1	0	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	-26	0
$u_3$	4	2	5	10	-68	0
-z	900	900	950	1100	0	0

Látjuk, hogy degenerált modellel állunk szemben.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	$y$	
$u_1$	0,6	0,8	0,5	-0,1	6,8	1000
$u_2$	1	4	3	-0,2	-12,4	0
$x_4$	0,4	0,2	0,5	0,1	-6,8	0
-z	460	680	400	-110	7480	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	$u_1$	
$y$	0,09	0,12	0,07	-0,02	0,15	147,059
$u_2$	2,09	5,46	3,91	-0,02	1,82	1823,53
$x_4$	1	1	1	0	1	1000,00
-z	-200	-200	-150	0	-1100	-1100 000

A megoldás tehát:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 1000$$

$$y = 147,06 \approx 147; \quad u_1 = 0; \quad u_2 = 1823,53$$

$$u_3 = 0; \quad z = 1\,100\,000$$

Most tehát mind az 1000 ha-t a negyedik termék termelésére célszerű felhasználni és 147 dolgozóra van szükség. A jövedelem 1 100 000 R. A munkaerőt csak a II. csúsidőszakban használjuk ki, az I. időszakban 1823,53 munkanap kihasználatlanul marad. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy az adott termelési program az I. időszakban 2000, a II. időszakban 10000 munkanapot igényel, s az I. időszakban 3823,3 munkanap áll rendelkezésre /tehát 1823,3 munkanap felesleges/, a II. időszakban pedig 10000 munkanap. Természetesen nem mindig csak egy termék termelése célszerű. Emeljük csak meg a második termékhez tartozó jövedelmet mondjuk 300 R-tal. Máris a következő megoldást kapjuk:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 333,98; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 666,02$$

$$y = 106,98; \quad u = 0; \quad z = 1\,133\,398$$

#### 10.4. Több célfüggvény vizsgálata

Gazdasági feladatok megoldása során általában nem csak egy mutató alapján döntünk. Nem biztos, hogy azt tekintjük a legjobb termelési programnak, amelyhez a legnagyobb jövedelem tartozik. Lehetséges ugyanis, hogy ennek megvalósítása igen nagy beruházást igényel, vagy igen sok importanyag felhasználását teszi szükségessé, stb. De termelődőszövetkezetben a jövedelemnek is két formáját vesszük számba, a bruttó jövedelmet /amikor a tagok munkabérét, illetve részesedését nem számoltuk fel költségként/ és a nettó jövedelmet /amikor a munkaerő költségét is felszámoltuk/.

Hogy a termelési programról dönteni tudjunk, célszerű tehát a modellt több célfüggvénnyel is megoldani. Nyilván a beruházás és az importanyag szempontjából az a termelési program a jó, amelyhez a legkisebb beruházás, illetve importanyag-felhasználás tartozik. Mi azonban a minimum feladatok megoldását még nem ismerjük, egyelőre a maximumfeladatoknál maradunk.

Tegyük fel, hogy eddig a példafeladatokban a nettó jövedelmet vizsgáltuk a célfüggvényben. Meghatározhatjuk az egyes termékekhez tartozó bruttó jövedelmet is, ami legyen a termékek sorrendjében a következő:

$$[1500, 1200, 1800, 1600]$$

Most tehát két célfüggvényt vizsgálhatunk, a nettó jövedelmet  $/z_1/$  és a bruttó jövedelmet  $/z_2/$ , s így feladatunk a következő:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	10	6800
$-z_1$	900	900	950	1100	0
$-z_2$	1500	1200	1800	1600	0

A tanultak alapján nincs akadálya annak, hogy a feladatot előbb az egyik, aztán a másik célfüggvénnyel megoldjuk és a kapott eredményeket összehasonlítsuk. Ha így járul el, akkor ugyanazt a modellt kétszer kell megoldani, bár a számítások egy része /amíg a két célfüggvény szerint számolva a generáló elem azonos/, esetleg csak másolást jelent, mert a két feladatban azonos.

Célszerűbb úgy eljárni, hogy - bár a számításokat az egyik célfüggvény szerint végezzük - mindkét célfüggvényt lépésről-lépésre kiszámítjuk, majd amikor az egyik célfüggvény szerint a feladatot megoldottuk, akkor folytatjuk a számításokat a másik célfüggvény szerint. Ennek az az előnye is megvan, hogy mindkét megoldáshoz mindkét célfüggvényértéket megkapjuk anélkül, hogy a behelyettesítést elvégeznénk. Tehát

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	10	6800
$-z_1$	900	900	950	1100	0
$-z_2$	1500	1200	1800	1600	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
$u_2$	1	4	3	-0,2	1240
$x_4$	0,4	0,2	0,5	0,1	680
$-z_1$	460	680	400	-110	-748000
$-z_2$	860	880	1000	-160	-1088000

	$x_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$u_1$	<u>0,4</u>	-0,2	-0,10	-0,06	72
$x_2$	0,25	0,25	0,75	-0,05	310
$x_4$	0,35	-0,05	0,35	0,11	618
$-z_1$	290	-170	-110	-76	-958800
$-z_2$	640	-220	340	-116	-1360800

	$u_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$x_1$	2,5	-0,5	-0,25	-0,15	180
$x_2$	-0,625	0,375	<u>0,81</u>	-0,01	265
$x_4$	-0,875	0,125	0,44	0,16	555
$-z_1$	-725	-25	-37,5	-32,5	-1011000
$-z_2$	-1600	120	500	-20	-1476000

Az első célfüggvénnyel megoldottuk a feladatot. Folytassuk a megoldást a második célfüggvény szerint,  $x_3$  oszlopában választva generáló elemet.

	$u_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$x_1$					261,79
$x_3$	-0,77	0,46	1,24	-0,012	327,16
$x_4$					411,05
$-z_1$	-753,9	-7,64	46,3	-33,0	-998731,5
$-z_2$	-1214,2	-111,48	-617,3	-13,8	-1639580,2

A feladatot megoldottuk a második célfüggvény szerint is. /Nincs szükség a táblázat többi adatára, mivel a számítást befejeztük, ezért azokat nem is számoltuk ki./

A megoldás tehát a következő:

	Nettó jövedelem szerint	Bruttó jövedelem szerint
$x_1$	180	261,79
$x_2$	265	0
$x_3$	0	327,16
$x_4$	555	411,05
$u_1$	0	0
$u_2$	0	0
$u_3$	0	0
$z_1$	1 011 000	998731,5
$z_2$	1 476 000	1639580,2

Mint látjuk, más az optimum a nettó és más a bruttó jövedelem maximalizálása esetén. A vállalatvezető feladata, hogy döntson, melyik termelési program megvalósítása célszerű. Ha a nettó jövedelem optimumát választjuk, 12 268,5 R nettó jövedelmet nyerünk, de a bruttó jövedelem 163 580,2 R-tal kevesebb lesz. Ellenkező esetben 163 580,2 R bruttó jövedelemtöbbletért elveszítünk 12 268,5 R nettó jövedelmet. Hogy melyik mellett döntünk, az számos tényezőtől függ.

Az sem feltétlenül biztos, hogy az egyik vagy a másik megoldást fogadjuk el. A feltételrendszert ugyanis mindkét megoldás kielégíti, tehát az erőforráskapacitást tekintve, mindkét termelési program megvalósítható. De ha mindkét termelési program felét ~~veszük~~ és összeadjuk, az így kapott

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 220,9 \\ 132,5 \\ 163,6 \\ 483,0 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0}$$

$$z_1 = 1\,004\,865,7$$

$$z_2 = 1\,557\,790,1$$

program is megvalósítható az adott erőforrás kapacitással.

A két programot tehát  $k_1$ ,  $k_2$  szorzóval keverhetjük, azaz

$$k_1 \text{ opt}_I + k_2 \text{ opt}_{II}$$

és

$$k_1 + k_2 = 1$$

és az így kapott termelési programok is megvalósíthatók. Az  $opt_1$  és  $opt_{11}$  programot most tehát alternatív programoknak fogjuk fel és megosztási viszonzyszámok segítségével azokkal újabb termelési programokat nyerhetünk. Ezek egymástól különbözhetnek az erőforrás felhasználásban is /ha azt nem egyformán használják ki/ és a célfüggvény értékét tekintve is, de megvalósítható programok.

Ha a feladatot számítógéppel oldjuk meg, akkor is a megoldást előbb az első célfüggvénnyel nyerjük. Ezután a gépbe tápláljuk a második célfüggvényt és folytatjuk a számítást /mint előbb is/ e szerint a célfüggvény szerint. A számítógép azonban esetleg - ha csak külön programot nem csinálunk ilyen céllal - csak azt a célfüggvényértéket írja ki, amellyel az optimalizálást végeztük. A programok összehasonlítását azonban megkönnyíti, ha minden megoldás során minden célfüggvény értékét ismerjük. Ezt egyszerűen elérhetjük, ha célfüggvény változókat alkalmazunk. Ilyenkor az előbbi célfüggvényeket feltételeként építjük a modellbe és a célfüggvény változó szélső értékét keressük. Feladatunk induló táblája most tehát a következő lesz:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$z_1$	$z_2$	
$u_1$	1	1	1	1	0	0	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	0	0	2600
$u_3$	4	2	5	10	0	0	6800
$u_4$	900	900	950	1100	-1	0	0
$u_5$	1500	1200	1800	1600	0	-1	0
$-z_1$	0	0	0	0	1	0	0
$-z_2$	0	0	0	0	0	1	0

Ez a következőknek felel meg:

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2 \geq 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1000 \\
 & 1,8 x_1 + 4,4 x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 2600 \\
 & 4 x_1 + 2 x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 6800 \\
 & 900 x_1 + 900 x_2 + 950x_3 + 1100x_4 - z_1 \leq 0 \\
 & 1500 x_1 + 1200 x_2 + 1800x_3 + 1600x_4 - z_2 \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \max. \\
 z_2 &= \max.
 \end{aligned}$$

A megoldást most módosítjuk annyiban, hogy az induló táblázatban generáló elemet az első célfüggvényváltozó oszlopában választunk és most nem vagyunk tekintettel az előjelre, azaz a -1-et választjuk. Mivel a hányados 0 lesz, nem áll fenn a veszélye annak, hogy a  $b$  vektor koordinátái között negatív lesz. /A célfüggvény feltételeket beszorozhatnánk -1-gyel, akkor máris pozitív lenne a generáló elemünk. Ekkor viszont a  $\leq$  reláció  $\leq$ -re változna, amivel egyelőre még nem foglalkoztunk./ Az első célfüggvény szerint számolva tehát a második és harmadik táblázat a következőképpen alakul:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$z_1$	$z_2$	
$u_1$	1	1	1	1	0	0	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	0	0	2600
$u_3$	4	2	5	10	0	0	6800
$z_1$	-900	-900	-950	-1100	-1	0	0
$u_5$	1500	1200	1800	1600	0	-1	0
$-z_1$	900	900	950	1100	1	0	0
$-z_2$	0	0	0	0	0	1	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_3$	$z_1$	$z_2$	
$u_1$	0,6	0,8	0,5	-0,1	0	0	320
$u_2$	1	4	3	-0,2	0	0	1240
$x_4$	0,4	0,2	0,5	0,1	0	0	680
$z_1$	-460	-680	-400	110	-1	0	-748000
$u_5$	860	880	1000	-160	0	-1	-1088000
$-z_1$	460	680	400	-110	1	0	-748000
$-z_2$	0	0	0	0	0	1	0

Nem folytatjuk a számításokat, hiszen könnyű belátni, hogy azok az előbbivel megegyeznek. Ha a feladatot az első célfüggvénnyel megoldottuk, a második célfüggvényhez tartozó -1-et választjuk generáló elemnek és folytatjuk a számítást a második célfüggvény szerint. Mint már erről szó volt, ennek az eljárásnak számítógépes megoldásnál lehet jelentősége, ha a megoldásprogram egyidejűleg csak egy célfüggvényt kezel.

#### 10.5. Alternatív optimumok

Tegyük fel, hogy az  $x_3$ -hoz tartozó célfüggvénykoefficiens 950-ről 987,5-re emelkedik, azaz induló táblázatunk a következő:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	10	6800
-z	900	900	987,5	1100	0

Ekkor az optimális táblázat:

	$u_1$	$u_2$	$x_3$	$u_3$	
$x_1$	2,5	-0,5	-0,25	-0,15	180
$x_2$	-0,625	0,375	0,81	-0,01	265
$x_4$	-0,875	0,125	0,44	0,16	555
-z	-725	-25	0	-32,5	-1011000

Optimális megoldáshoz jutottunk tehát. Most azonban a harmadik termék is bevonható a programba, s az így kapott megoldáshoz ugyancsak 1 011 000 R célfüggvényérték tartozik, vagyis

	$u_1$	$u_2$	$x_2$	$u_3$	
$x_1$	2,30	-0,38	0,31	-0,153	261,79
$x_3$	-0,77	0,46	1,24	-0,012	327,16
$x_4$	-0,54	0,08	-0,54	0,165	411,05
-z	-725	-25	0	-32,5	-1011000

Két egyenértékű /optimális/ megoldásunk van tehát, amelyek mindegyike eleget tesz a feltételrendszernek és mindkét termelési programhoz ugyanaz a jövedelemtömeg tartozik, azaz

$$\underline{x} = \begin{matrix} \text{opt}_I \\ \begin{bmatrix} 180,00 \\ 265,00 \\ 0 \\ 555,00 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \times \quad \begin{matrix} \text{opt}_{II} \\ \begin{bmatrix} 261,79 \\ 0 \\ 327,16 \\ 411,05 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\underline{u} = 0 \qquad \underline{u} = 0$$

$z = 1\ 011\ 000\ R$

A két programot, mint alternatív optimumot, most is keverhetjük a  $k_1, k_2 / k_1 + k_2 = 1$  megosztási viszonzyszámok alapján, s könnyen belátható, hogy az így előállított termelési programok egyenértékűek, hozzájuk ugyanazon célfüggvényérték tartozik, tehát azok is optimálisak. Ha tehát egy feladatnak két /vagy több/ optimális megoldása létezik, akkor végtelesen sok optimális megoldása lehetséges.

Ilyen esettel találkoztunk a 3.22. feladatban is, s mint láttuk, a 13. ábrán ilyenkor a célfüggvény-nívóvonalak párhuzamosak két csúcspontot összekötő szakasszal, tehát a szakasz minden pontja egyenértékű.

Hasonló volt az előző pontban tárgyalt probléma is. Ott azonban a kétféle megoldás nem volt egyenértékű, és nem voltak egyenértékűek a keverésükkel előállított termelési programok sem. Az előző pontban kapott megoldások tehát alternatív programok voltak ugyan és eleget tettek a feltételrendszernek, de nem voltak alternatív optimumok, hanem egyik megoldás az egyik célfüggvény szerint, a másik pedig a másik célfüggvény szerint volt optimális és a keverésükkel kapott programok egyik célfüggvény szerint sem voltak optimálisak, hanem a két célfüggvényt figyelembe véve, kompromisszumos megoldást eredményeztek.

#### 10.6. Módosított normálfeladat

Az eddigiek során a feladatot mindig úgy fogalmazzuk meg, hogy a feltételrendszerek között csak  $\leq$  irányú egyenlőtlenségek, azaz kisebb egyenlő, illetve nem nagyobb egyenlőtlenségek voltak. Előfordul azonban olyan feladat is, amelyben a feltételek között egyenletek is vannak.

Maradjunk továbbra is az előbbieken vizsgált gyakorlati feladatnál, azonban tegyük fel, hogy a termelő vállalat már leszerződött a felvásárló vállalattal, hogy az első terméket pontosan 100 ha-on, a harmadik terméket pedig pontosan 50 ha-on termeli és ezekből csak ennyit tudunk értékesíteni, vagy esetleg az első és a harmadik termékek takarmányok és azokból annyit kell pontosan termelni, hogy az állatállomány igényét kielégítsék e takarmányokból és nincs értékesítési lehetőségünk.

Most a feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 1000 \\ 1,8x_1 + 4,4x_2 + 4x_3 + 2x_4 & \leq & 2600 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 & \leq & 6800 \\ x_1 & = & 100 \\ & & x_3 = 50 \\ \hline 900x_1 + 900x_2 + 950x_3 + 1100x_4 & = & \max. \end{array}$$

Most olyan négyismeretlenes feladattal állunk szemben, amelyben három  $\leq$  irányú egyenlőtlenség mellett két egyenletünk is van és a célfüggvény maximumát keressük. A feladatot matrix alakban felírva, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq 0 & \underline{b}_1 &\geq 0 & \underline{b}_2 &\geq 0 \\ A_1 \underline{x} &\leq \underline{b}_1 \\ A_2 \underline{x} &= \underline{b}_2 \\ z &= \underline{p}^T \underline{x} = \max. \end{aligned}$$

Az olyan lineáris programozási maximum feladatot, amelyben  $\leq$  irányú egyenlőtlenségek mellett egyenletek is vannak, módosított normálfeladatnak nevezzük.

Mielőtt a feladatot megoldanánk, nézzük a következő egyszerű, kétismeretlenes egyenletrendszerét:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 19 \\ x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldását az

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3$$

adja, hiszen

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 &= 19 \\ 5 + 2 \cdot 3 &= 11 \end{aligned}$$

Adjuk össze a két egyenletet

$$3x_1 + 5x_2 = 30$$

Az  $x_1 = 5$  és  $x_2 = 3$  megoldás a két egyenlet összeadása után nyert egyenletet is kielégíti, azaz

$$3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 30$$

De könnyen ellenőrizhetjük hogy a megoldás kielégíti az előbbi két egyenlet különbségét, szorzatát, stb. is, ami természetes, hiszen az  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 3$  behelyettesítéssel egyenlőségről van szó. Az egyenleteknek ebből a tulajdonságából következik, hogy a lineáris programozási feladatban előforduló egyenletek összegét képezhetjük, s ezáltal egy olyan feltételt kapunk, amelynek teljesülése esetén teljesülnek azok a feltételek is, amelyekből ezt képeztük. A megoldás során tehát arra kell törekedni, hogy az egyenletek összeadásával nyert feltétel teljesüljön először.

Foglaljuk táblázatba tehát az előbbi feladatot:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	10	6800
* $u_4$	1	0	0	0	100
* $u_5$	0	0	1	0	50
-z	900	900	950	1100	0
*z	1	0	1	0	150

Az így elkészített táblázatban az egyenleteket tartalmazó sorokat \*-gal megjelöltük. A \* $u_4$ , \* $u_5$  szimbólumok tehát arra utalnak, hogy e sorok egyenletek, s elsősorban ezek teljesítésére törekszünk. A táblázat utolsó sorában az egyenleteket tartalmazó sorok /egyenletek/ összegét találjuk és e sort \*z-vel /csillagos z/ jelöltük. E sor maga is lineáris függvény és másodlagos célfüggvénynek nevezzük.

A feladat megoldása során először a másodlagos célfüggvényt kell megoldanunk. Éppen ezért mindaddig, amíg a másodlagos célfüggvényt meg nem oldottuk, a generáló elemet a másodlagos célfüggvény szerint választjuk meg, vagyis abban az oszlopban, amelyben a másodlagos célfüggvény sorában a legnagyobb koefficiens található.

A számításokat táblázatról-táblázatra haladva, ugyanugy végezzük, mint a normál feladatnál tanultuk, mindössze annyi módosítással, hogy ameddig a másodlagos célfüggvény szerint számolunk, a generáló elem oszlopát az új táblázatban üresen hagyjuk, s ezáltal elkerüljük, hogy újra abban az oszlopban válasszunk generáló elemet.

A másodlagos célfüggvényt akkor oldottuk meg, amikor ennek sorában végig 0-t kapunk. Ezután a számításokat az elsődleges célfüggvény szerint folytatjuk, a normál feladatnál tanultak szerint.

Oldjuk meg tehát feladatunkat:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	10	6800
* $u_4$	1	0	0	0	100
* $u_5$	0	0	1	0	50
-z	900	900	950	1100	0
*z	1	0	1	0	150

	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	900
$u_2$	4,4	4	2	2420
$u_3$	2	5	10	6400
$x_1$	0	0	0	100
* $u_5$	0	1	0	50
-z	900	950	1100	-90000
*z	0	1	0	50

	$x_2$	$x_4$	
$u_1$	1	1	850
$u_2$	4,4	2	2220
$u_3$	2	10	6150
$x_1$	0	0	100
$x_3$	0	0	50
-z	900	1100	-137500
*z	0	0	0

A másodlagos célfüggvényt megoldottuk, tehát az elsődleges célfüggvény szerint számolunk tovább, elhagyva a másodlagos célfüggvény sorát.

	$x_2$	$u_3$	
$u_1$	0,8	-0,1	235
$u_2$	4,0	-0,2	990
$x_4$	0,2	0,1	615
$x_1$	0	0	100
$x_3$	0	0	50
-z	680	-110	-814000

	$u_2$	$u_3$	
$u_1$	-0,20	-0,06	37,0
$x_2$	0,25	-0,05	247,5
$x_4$	-0,05	0,11	565,5
$x_1$	0	0	100
$x_3$	0	0	50
-z	-170	-76	-982 300

A feladatot tehát megoldottuk. A megoldás:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 100, & x_2 &= 247,5, & x_3 &= 50, & x_4 &= 565,5 \\
 u_1 &= 37, & u_2 &= 0, & u_3 &= 0, & u_4 &= 0, \\
 u_5 &= 0, & z &= 982\ 300
 \end{aligned}$$

Az  $x_1$ ,  $x_3$ -ra előírt egyenleteket teljesítettük. Az erőforrások egyikét, a területet most nem használtuk fel teljesen. Az elérhető jövedelem 982 300 Ft. Azáltal tehát, hogy a vállalat előzőleg - mielőtt annak célszerűségéről számítások útján meggyőződött volna - leszerződött az első és a harmadik termék 100 ill. 50 ha-on való termelésére, elveszített 28 700 Ft jövedelmet. /Láttuk, hogy előzőleg a feladat 1 011 000 Ft jövedelemhez vezetett./ Sőt az adott feltételek között a terület egy részét /37 ha-t/ nem is tudja kihasználni. Irjuk csak elő gyakorlásként, hogy a területet teljesen fel kell használni, vagyis az első sort is egyenletként kell venni. A feladatot nem fogjuk tudni megoldani! Az adott körülmények között - erről is könnyen meggyőződhetünk - a terület csak akkor használható ki, ha a második erőforrást 185 egységgel bővítjük.

Az előbb tárgyalt eljárásnak, amikor másodlagos célfüggvény szerint haladva az új táblázatban a generáló elem oszlopát üresen hagyjuk, megvan az a hátránya, hogy az eddig kicserélt duális változókra nem kapunk árnyékárát. Ezt elkerülhetjük, ha megállapodunk abban, hogy a már kicserélt csillagos duális változókat még egyszer nem visszük vissza a bázisba, vagyis csillagos változókhoz tartozó oszlopokban nem választunk generáló elemet. Ebben az esetben tehát nem szükséges ezen oszlopok üresen hagyása. Az előbbi feladat számításai tehát most a következőket adják:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	1	1	1	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	2600
$u_3$	4	2	5	10	6800
* $u_4$	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	0	0	0	100
* $u_5$	0	0	1	0	50
-z	900	900	950	1100	0
*z	-1	0	1	0	150

	* $u_4$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	-1	1	1	1	900
$u_2$	-1,8	4,4	4	2	2420
$u_3$	-4	2	5	10	6400
$x_1$	1	0	0	0	100
* $u_5$	0	0	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	0	50
-z	-900	900	950	1100	-90000
*z	-1	0	1	0	50

	* $u_4$	$x_2$	* $u_5$	$x_4$	
$u_1$	-1	1	-1	1	850
$u_2$	-1,8	4,4	-4	2	2220
$u_3$	-4	2	-5	<span style="border: 1px solid black;">10</span>	6150
$x_1$	1	0	0	0	100
$x_3$	0	0	1	0	50
-z	-900	900	-950	1100	-137500
*z	-1	0	-1	0	0

Most a másodlagos célfüggvény megoldását az mutatja, hogy az utolsó sorban nincs pozitív elem, minden csillagos változót kicseréltünk a bázisból és a  $\underline{b}$  vektorhoz a másodlagos célfüggvény sorában 0 tartozik. A másodlagos célfüggvény sorát most elhagyjuk, s folytatjuk a számolást az elsődleges célfüggvény szerint:

	$*u_4$	$x_2$	$*u_5$	$u_3$	
$u_1$	-0,6	0,8	-0,5	-0,1	235
$u_2$	-1,0	4,0	-3,0	-0,2	990
$x_4$	-0,4	0,2	-0,5	0,1	615
$x_1$	1	0	0	0	100
$x_3$	0	0	1	0	50
-z	-460	680	-400	-120	-814000

	$*u_4$	$u_2$	$*u_5$	$u_3$	
$u_1$	-0,4	-0,20	0,10	-0,06	37,0
$x_2$	-0,25	0,25	-0,75	-0,05	247,5
$x_4$	-0,35	-0,05	-0,35	0,11	565,5
$x_1$	1	0	0	0	100,0
$x_3$	0	0	1	0	50,0
-z	-290	-170	110	-76	-982300

Most a feladat megoldása az árnyékárakat is mutatja. Hogyan értékelhetjük ezeket.

Az első feltételhez nem tartozik árnyékár, hiszen  $u_1$ -et ki sem cseréltük a bázisból. A meglévő kapacitást sem tudtuk tehát kihasználni, így bővítésének számunkra - az adott feladat, illetve adott körülmények között - nincs jelentősége, vagyis a kapacitásbővítésnek számunkra nincs "értéke".

A második erőforrást kihasználtuk. Ha egy egységet megtakarítanánk, ezáltal 170 R-ot veszítenénk, illetve a kapacitás egységnyi bővítése 170 R jövedelem-emelkedést eredményezne. Hasonló a helyzet a harmadik erőforrásnál 76 R erejéig.

Az  $u_4$ -hez - 290 árnyékár tartozik. Ha tehát a szerződést nem 100 ha-ra kötötték volna, hanem kevesebbre, akkor annyiszor 290 R-tal csökkenne a jövedelmünk, ahány ha-ral kevesebbre szólna a szerződésünk, illetve, ha a szerződött terület bővíthető, e bővítés ha-onként 290 R-tal emelhetné a vállalati jövedelmet.

Az  $u_5$ -höz viszont pozitív árnyékár tartozik. Most tehát az előbbivel ellenkező hatást tapasztalunk, vagyis a szerződött terület csökkentése által növekedne, -s kiterjesztése által csökkenne a jövedelem ha-onként 110 R-tal.

A 10.2. - 10.5. pontban tárgyaltak tehát a degeneráció, a programvektor és a kapacitások egyidejű optimalizálása, a több célfüggvényrel való számolás és az alternatív optimumok problémája - természetesen a módosított normál feladatra, sőt a következőkben tárgyalandó általános esetre és minimum feladatokra is érvényesek. A 9. fejezetben tanultak alapján könnyen belátható az is, hogy a módosított normál feladat és az általános eset is visszavezethető normál feladatra.

### 10.7. A maximálás általános esete

Az előbbi megoldást értékelve, tegyük fel, hogy a következőképpen okoskodunk: A két termék területére már leszerződünk. A harmadik növényre megkötött szerződés változtatására nincs lehetőségünk, mert a partner ragaszkodik a megkötött szerződéshez és felbontásához, vagy a terület csökkentéséhez nem járul hozzá, de a terület növelését sem akarja, bár ezt mi sem erőltetjük, hiszen a számítások szerint ez nem volna célszerű. Az a partner viszont, amellyel az első termékre szerződünk, szívesen kötne szerződést további területre is. /Vagy ha két takarmánynövényről van szó és feltesszük, hogy az első eladásra is termelhetjük, tehát annak területét növelhetjük, hasonló helyzetben vagyunk./

Ennek az okoskodásnak az a következménye, hogy megkísérljük a modellt úgy megoldani, hogy az első termékre nem egyenletet, hanem alsó korlátot / $\leq$  relációt/ adunk meg. Mivel ugyanis az előbbi megoldásnál az  $u_4$ -hez tartozó árnyékár azt mutatta, hogy célszerű volna a korlát tágitása /vagyis nagyobb területen való termelés/, azt reméljük, hogy ezáltal erőforrásbővítés nélkül nagyobb jövedelmet érünk el. Sőt ragaszkodunk ahhoz is, hogy a területet teljes mértékben kihasználjuk, s az első termék területének kiterjesztésével reményünk van erre is.

Ennek alapján feladatunk a következő:

$$\begin{array}{rcll} x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 & \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1000 & \\ 1,8x_1 + 4,4x_2 + 4x_3 + 2x_4 & \leq & 2600 & \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 & \leq & 6800 & \\ x_1 & \leq & 100 & \\ & & x_3 & = 50 \\ \hline 900x_1 + 900x_2 + 950x_3 + 1100x_4 & = & \max. & \end{array}$$

Olyan maximumfeladattal állunk tehát szemben, amelyben a feltételek között mind  $\leq$ , mind  $\geq$  relációju egyenlőtlenségek, mind pedig egyenlet  $=$  is található. Ez a maximálás általános esete. Matrix alakban az általános eset tehát

$$x \geq 0, \quad b_1 \geq 0, \quad b_2 \geq 0, \quad b_3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} A_1 x &\leq b_1 \\ A_2 x &= b_2 \\ A_3 x &\geq b_3 \\ p^T x &= \max. \end{aligned}$$

Az  $\geq$  irányú egyenlőtlenséget többletváltozó bevezetésével egyenletté alakíthatjuk, s ezáltal módosított normálfeladatot kapunk, azaz feladatunk:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4, v_1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1000 \\ 1,8 x_1 + 4,4 x_2 + 4 x_3 + 2 x_4 &\leq 2600 \\ 4 x_1 + 2 x_2 + 5 x_3 + 10 x_4 &\leq 6800 \\ x_1 - v_1 &= 100 \\ & \quad \quad \quad x_3 = 50 \\ \hline 900 x_1 + 900 x_2 + 950 x_3 + 1100 x_4 &= \max. \end{aligned}$$

Most tehát a feladatot, mint módosított normál feladatot oldjuk meg, amit már ismerünk. Oldjuk meg tehát a feladatot:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$v_1$	
* $u_1$	1	1	1	1	0	1000
$u_2$	1,8	4,4	4	2	0	2600
$u_3$	4	2	5	10	0	6800
* $u_4$	1	0	0	0	-1	100
* $u_5$	0	0	1	0	0	50
-z	900	900	950	1100	0	0
*z	2	1	2	1	-1	1150

	$*u_4$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$v_1$	
$u_1$	-1	1	1	1	1	900
$u_2$	-1,8	4,4	4	2	1,8	2 420
$u_3$	-4	2	5	10	4	6 400
$x_1$	1	0	0	0	-1	100
$*u_5$	0	0	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	0	0	50
-z	-900	900	950	1100	900	-90 000
$*z$	-1	0	1	0	1	1 050

	$*u_4$	$x_2$	$*u_5$	$x_4$	$v_1$	
$*u_1$	-1	1	-1	1	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	850
$u_2$	-1,8	4,4	-4	2	1,8	2 220
$u_3$	-4	2	-5	10	4	6 150
$x_1$	1	0	0	0	-1	100
$x_3$	0	0	1	0	0	50
-z	-900	900	-950	1100	900	-137 500
$*z$	-1	0	-1	0	1	850

	$*u_4$	$x_2$	$*u_5$	$x_4$	$*u_1$	
$v_1$	-1	1	-1	1	1	850
$u_2$	0	2,6	-2,2	0,2	-1,8	690
$u_3$	0	-2	-1	<span style="border: 1px solid black;">6</span>	-4	2 750
$x_1$	0	1	1	1	1	950
$x_3$	0	0	1	0	0	50
-z	0	0	-50	200	-900	-902 500
$*z$	0	-1	0	-1	-1	0

A másodlagos célfüggvényt elhagyjuk és folytatjuk a számítást az elsődleges célfüggvény szerint.

	*u <sub>4</sub>	x <sub>2</sub>	*u <sub>5</sub>	u <sub>3</sub>	*u <sub>1</sub>	
v <sub>1</sub>	-1	1,33	-0,83	-0,17	1,67	391,67
u <sub>2</sub>	0	2,66	-1,87	-0,34	-1,67	598,33
x <sub>4</sub>	0	-0,33	-0,17	0,17	-0,67	458,33
x <sub>1</sub>	0	1,33	1,17	-0,17	1,67	491,67
x <sub>3</sub>	0	0	1	0	0	50
-z	0	66,67	-16,67	-33,33	-766,67	-994166,67

	*u <sub>4</sub>	u <sub>2</sub>	*u <sub>5</sub>	u <sub>3</sub>	*u <sub>1</sub>	
v <sub>1</sub>	-1	-0,50	0,10	0	2,50	92,50
x <sub>2</sub>	0	0,38	-0,70	-0,13	-0,63	224,94
x <sub>4</sub>	0	0,12	0,40	0,13	-0,87	532,56
x <sub>1</sub>	0	-0,50	2,10	0	2,50	192,50
x <sub>3</sub>	0	0	1	0	0	50,00
-z	0	-25,06	30,20	-24,81	-724,8	-1009163,1

A megoldás tehát:

$$x_1 = 192,50$$

$$x_2 = 224,94$$

$$x_3 = 50,00$$

$$x_4 = 532,56$$

$$v_1 = 92,50$$

$$u = 0$$

$$z = 1\ 009\ 163,1$$

Most tehát minden erőforrást kihasználunk. /A területet is! / Az első termék termelését 92,5 ha-ral kell bővíteni, azaz az előbbi 100 ha helyett 192,5 ha-on kell termelni. /A v<sub>1</sub> a többletet mutatja. / Természetesen, ennek megfelelően a többi termék termelésének terjedelme is változik. A jövedelem 1009 163 R, vagyis az előbbihez képest 26 863 R-tal emelkedett. /Ez kerekítési hibáktól eltekintve, 290 · 92,50 = 26 825-nek felel meg. /

### 10.8. Minimumfeladatok

Az eddigiek során kizárólag olyan matematikai programozási feladatok megoldásával foglalkoztunk, amikor a célfüggvény maximumát kerestük. Már említettük azonban, hogy a gazdasági feladatok optimalizálásánál különböző hatékonysági mutatókat vizsgálhatunk, különböző célfüggvényekkel dolgozhatunk. Gyakran olyan feladatokat kell megoldanunk, amikor a célfüggvénynek nem a maximumát, hanem éppen hogy a minimumát keressük és azt a programot tekintjük optimálisnak, amelynél a célfüggvény minimumát kapjuk. Például célunk lehet olyan termelési program kidolgozása, amely minimális beruházást igényel, vagy amely minimális termelési költséget, vagy minimális importanyag felhasználást, stb. kíván. Később foglalkozni fogunk a takarmányadagok összeállításával. Ekkor az lesz a feladatunk, hogy minimális költségű takarmányadagot tervezzünk, vagy olyan takarmánytermelési szerkezetet tervezzünk meg, amely az adott állatállomány eltartását minimális területen, vagy minimális termelési költséggel teszi lehetővé.

A továbbiakban tehát minimumfeladatokkal fogunk foglalkozni. A minimumfeladatok megoldása - mint látni fogjuk - egyáltalán nem fog nehézséget jelenteni számunkra. A maximumfeladatok megoldására már megismert módszer ugyanis alkalmas minimumfeladat megoldására is, mivel minden minimumfeladat visszavezethető maximumfeladatra.

A középiskolai tanulmányokból is ismeretes, hogy egy függvény minimumhelye azonos ellentétjének maximumhelyével. Ábrázoljuk csak az

$$y_1 = 5 + 3x + 0,5 x^2$$

másodfoku, majd az

$$y_2 = -5 - 3x - 0,5 x^2$$

másodfoku függvényt.

Az  $y_1$  minimumhelye ( $x_0 = -3$ ) és az  $y_2$  maximumhelye ( $x_0 = -3$ ) egybeesik.

Az  $y_1$  függvény minimuma egybeesik az  $y_2 = -y_1$  függvény maximumával, azaz

$$y_{1\min} = 3\frac{1}{2}; \quad y_{2\max} = -3\frac{1}{2},$$

azaz mivel

$$y_2 = -y_1, \quad \text{azért} \quad -y_{1\max} = 3\frac{1}{2}.$$

Hasonlóképpen a

$$z_1 = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

függvény minimuma ott van, ahol a

$$z_2 = -5x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

függvény maximuma található, azaz

$$\min f / x /$$

ott van, ahol

$$\max [- f / x /]$$

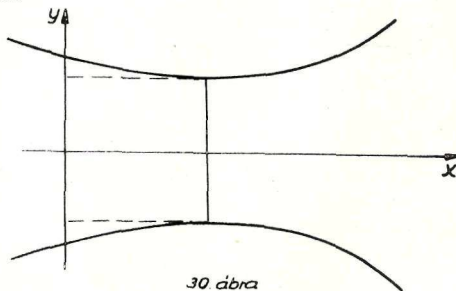
található, továbbá

$$\min . f / x / = \max [-f / x /]$$

az alábbi ábra szerint:

$$\min f / x / = f / x_0 /$$

$$\max - f / x / = f / x_0 /$$



30 ábra  
Függvény minimuma és -1-szeresének maximuma

Az elmondottak alapján tehát az

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{b} \geq \underline{0}$$

$$\underline{A}_1 \underline{x} \leq \underline{b}_1$$

$$\underline{A}_2 \underline{x} = \underline{b}_2$$

$$\underline{A}_3 \underline{x} \geq \underline{b}_3$$

$$\underline{c}^T \underline{x} = \min.$$

feladat az

$$\underline{x} \geq 0 \quad \underline{b} \geq 0$$

$$A_1 \underline{x} \leq \underline{b}_1$$

$$A_2 \underline{x} = \underline{b}_2$$

$$A_3 \underline{x} \geq \underline{b}_3$$

$$-c^T \underline{x} = \max.$$

feladatra vezethető vissza. A minimum feladatot tehát a cél-függvény -1-gyel történő beszorzásával maximumfeladattá alakítjuk át és éppen úgy végezzük a számításokat, mintha maximumfeladattal állnánk szembe.

A továbbiakban gyakorlati példán keresztül mutatjuk be a minimumfeladat megoldását. Tegyük fel, hogy egy liter tej termeléséhez elegendő táplálóanyagot tartalmazó pőtabrak keveréket kívánunk összeállítani, amely 250 g keményítőértéket és 56 g fehérjét tartalmaz. Tételezzük fel, hogy a keverék összeállításához háromféle abraktakarmány áll rendelkezésünkre, amelyek beltartalma és költségadatai a következők:

Megnevezés	1 kg takarmányban van g		1 kg takar- mány költ- sége F
	keményítőérték	fehérje	
Kukorica	791	74	2,00
Extrahált nap- raforgódara	512	334	4,95
Szójadara	755	429	6,75

Követelményünk a keverékekkel szemben egyelőre csak az, hogy legalább 250 g keményítőértéket és legalább 56 g fehérjét tartalmazzon és költsége a minimális legyen. Ennek alapján a feladat a következőképpen fogalmazható meg:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$791 x_1 + 512 x_2 + 755 x_3 \geq 250$$

$$74 x_1 + 334 x_2 + 429 x_3 \geq 56$$

$$2 x_1 + 4,95 x_2 + 6,75 x_3 = \text{minimum!}$$

ahol

- $x_1$  a kukorica
- $x_2$  az extr. napraforgó dara
- $x_3$  a szójadara egyelőre ismeretlen mennyiségét mutatja a keverékben.

A célfüggvényt  $-1$ -gyel szorozva, a feladatot maximum-feladattá alakítjuk,  $v_1$  és  $v_2$  bevezetésével pedig a  $\leq$  feltételeket, mint ismeretes, egyenletté alakítjuk át, azaz

$$x_1, x_2, x_3, v_1, v_2 \geq 0$$

$$791x_1 + 512x_2 + 755x_3 - v_1 = 250$$

$$74x_1 + 334x_2 + 429x_3 - v_2 = 56$$

$$-2x_1 - 4,95x_2 - 6,75x_3 = \text{maximum!}$$

A feladat megoldását a már ismert számítástechnikát alkalmazva, a következő táblázatokból követhetjük nyomon:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$v_1$	$v_2$	
* $u_1$	791	512	755	-1	0	250
* $u_2$	74	334	429	0	-1	56
z	-2,00	-4,95	-6,75	0	0	0
*z	865	846	1184	-1	-1	306

	$x_1$	$x_2$	$v_1$	$v_2$	
* $u_1$	660,77	-75,81	-1	1,76	151,445
$x_3$	0,17	0,78	0	-0,002	0,1305
z	-0,84	-0,31	0	-0,016	0,88
*z	660,77	-75,81	-1	1,76	151,445

	$x_2$	$v_1$	$v_2$	
$x_1$	-0,115	-0,002	0,003	0,229
$x_3$	0,80	0,0	0,003	0,092
z	-0,41	-0,001	-0,014	1,073
*z	0	0	0	0

A feladatot tehát megoldottuk. A kapott takarmánykeverék a következő:

kukorica	$x_1 = 0,229$ kg
extr.napraf.	$x_2 = 0$
szójadara	$x_3 = 0,092$ kg
költség	$= 1,073$ Ft

Ellenőrizzük az eredményt:

$$\begin{aligned} 791 \cdot 0,229 + 755 \cdot 0,092 &= 250,6 \approx 250 \\ 74 \cdot 0,229 + 429 \cdot 0,092 &= 56,4 \approx 56 \\ 2 \cdot 0,229 + 6,75 \cdot 0,092 &= 1,079 \approx 1,073 \end{aligned}$$

A jelentéktelen eltérés kerekítésből adódott, hiszen kézi számítással csak igen korlátozott tizedes pontossáig tudunk számolni.

Természetesen a modellben előírhattunk volna az extra-hált napraforgó mennyiségére is egy alsó korlátot, hogy legalább meghatározott mennyiségben jelen kell lennie a keverékben. De előírhattunk volna a kukorica, vagy a szójadara mennyiségére is felső korlátot, stb. E kérdésekkel később részletesen fogunk foglalkozni.

#### 10.9. Dualitás

Az eddigiekben láttuk, hogy a lineáris programozási feladatok megoldása során az árnyékárak a termelési erőforrások bizonyos gazdasági felértékelését teszik lehetővé. Láttuk azt is, hogy az árnyékáraknak milyen nagy jelentőségük van a gazdasági értékelés során, segítségükkel az erőforrásokat - az adott feltételek között - felértékelhetjük, s dönthetünk arról, melyik erőforráskapacitás bővítése a hatékonyabb.

Láttuk, hogy az

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b} \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{p}^T \underline{x} = \max.$$

normál feladat az ugynevezett hiányváltozók /segédváltozók/ bevezetésével az

$$\underline{u} + \underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad \underline{x} \geq \underline{0} \quad \underline{u} \geq \underline{0}$$

$$\underline{p}^T \underline{x} = \max.$$

formában is felírható, ahol az  $\underline{u}$  vektor komponensei a duális változók, míg az  $\underline{x}$  vektor komponensei a primál változók.

Minden lineáris programozási feladathoz megadható egy vele szoros kapcsolatban lévő másik lineáris programozási fel-

dat is, amelyet az eredeti /ugynevezett primál/ feladat duáljának /duális feladatnak/ nevezzük. A duál feladat változói éppen az  $\underline{u}$  vektor komponensei, azaz a duális változók.

Az

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b} \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{p}^T \underline{x} = \max.$$

primális feladathoz tehát az

$$\underline{A}^T \underline{u} = \underline{p}$$

$$\underline{b}^T \underline{u} = \min.$$

duális feladat tartozik.

A dualitás könnyebb megértése céljából induljunk ki egy leegyszerűsített gyakorlati feladatból. Tegyük fel, hogy egy vállalat háromféle anyag felhasználásával háromféle terméket állít elő. Az első anyagból 70, a másodikból 55, a harmadikból 60 egység áll rendelkezésre. A fajlagos anyagszükséglet és a fajlagos jövedelem ismeretében felírhatunk egy lineáris programozási modellt, feladatul tűzve ki olyan termelési szerkezet meghatározását, amely a legnagyobb jövedelmet biztosítja és egyik anyagból sem igényel többet, mint a rendelkezésre álló kapacitás. Legyen modellünk a következő:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 70$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 55$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 60$$

$$70x_1 + 80x_2 + 50x_3 = \max!$$

Mint látjuk, a feladat induló táblája szimbólikusan a

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
	$\underline{p}^T$	

formában is felírható. Oldjuk meg a feladatot.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$u_1$	1	2	2	70
$u_2$	3	1	1	55
$u_3$	1	<u>2</u>	1	60
-z	70	<u>80</u>	50	0

	$x_1$	$u_3$	$x_3$	
$u_1$	0	-1	1	10
$u_2$	<u>2,5</u>	-0,5	0,5	25
$x_2$	0,5	0,5	0,5	30
-z	<u>30</u>	-40	10	-2400

	$u_2$	$u_3$	$x_3$	
$u_1$	0	-1	<u>1</u>	10
$x_1$	0,4	-0,2	0,2	10
$x_2$	-0,2	0,6	0,4	25
-z	-12	-36	4	-2700

	$u_2$	$u_3$	$u_1$	
$x_3$	0	-1	1	10
$x_1$	0,4	0	-0,2	8
$x_2$	-0,2	1	-0,4	21
-z	-12	-32	-4	-2740

A megoldás tehát:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$z = 2740$$

Az előbb megoldott feladatot primál feladatnak nevezzük. Ezután azonban fogalmazzuk meg a feladat duálját, azaz a duál feladatot. Ez a következő:

$$\begin{array}{r}
 u_1, u_2, u_3 \geq 0 \\
 u_1 + 3u_2 + u_3 \leq 70 \\
 2u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 80 \\
 2u_1 + u_2 + u_3 \leq 50 \\
 \hline
 70u_1 + 55u_2 + 60u_3 = \min!
 \end{array}$$

amelyhez szimbolikusan felírva a

	$\underline{u}^T$	
$\underline{x}$	$\underline{A}^T$	$\underline{p}$
	$\underline{b}^T$	0

induló tábla tartozik. Mint látjuk, a feladatban az oszlopok és a sorok szerepét felcseréltük, a  $\leq$  relációk helyett  $\geq$  relációkat írtunk és a célfüggvényt maximálás helyett minimáljuk.

Oldjuk meg a feladatot

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_1$	1	3	1	70
$x_2$	2	1	<span style="border: 1px solid black;">2</span>	80
$x_3$	2	1	1	50
z	-70	-55	-60	0

	$u_1$	$u_2$	$x_2$	
$x_1$	0	<span style="border: 1px solid black;">2,5</span>	-0,5	30
$u_3$	1	0,5	0,5	40
$x_3$	1	0,5	-0,5	10
z	-10	-25	30	2400

	$u_1$	$x_1$	$x_2$	
$u_2$	0	0,4	-0,2	12
$u_3$	1	-0,2	0,6	36
$x_3$	1	-0,2	-0,4	4
$z$	-10	10	25	2700

	$x_3$	$x_1$	$x_2$	
$u_2$	0	0,4	-0,2	12
$u_3$	-1	0	1,0	32
$u_1$	1	-0,2	-0,4	4
$z$	10	8	21	2740

A megoldás tehát

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 32 \end{bmatrix} \quad z = 2\,740$$

Hasonlítsuk össze a két feladatot és azok megoldását:

Primál feladat

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 70 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 55 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 60 \end{aligned}$$

$$70x_1 + 80x_2 + 50x_3 = \max!$$

Duális feladat

$$\begin{aligned} u_1, u_2, u_3 &\geq 0 \\ u_1 + 3u_2 + u_3 &\geq 70 \\ 2u_1 + u_2 + 2u_3 &\geq 80 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 &\geq 50 \end{aligned}$$

$$70u_1 + 55u_2 + 60u_3 = \min!$$

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
	$\underline{p}^T$	0

	$\underline{u}^T$	
$\underline{x}$	$\underline{A}^T$	$\underline{p}$
	$\underline{b}^T$	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$u_1$	1	2	2	70
$u_2$	3	1	1	55
$u_3$	1	2	1	60
-z	70	80	50	0

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_1$	1	3	1	70
$x_2$	2	1	2	80
$x_3$	2	1	1	50
z	-70	-55	-60	0

	$x_1$	$u_3$	$x_3$	
$u_1$	0	-1	1	10
$u_2$	2,5	-0,5	0,5	25
$x_2$	0,5	0,5	0,5	30
-z	30	-40	10	-2400

	$u_1$	$u_2$	$x_2$	
$x_1$	0	2,5	-0,5	30
$u_3$	1	0,5	0,5	40
$x_3$	1	0,5	-0,5	10
z	-10	-25	30	2400

	$u_2$	$u_3$	$x_3$	
$u_1$	0	-1	1	10
$x_1$	0,4	-0,2	0,2	10
$x_2$	-0,2	0,6	0,4	25
-z	-12	-36	4	-2700

	$u_1$	$x_1$	$x_2$	
$u_2$	0	0,4	-0,2	12
$u_3$	1	-0,2	0,6	36
$x_3$	1	-0,2	-0,4	4
z	-10	10	25	2700

	$u_2$	$u_3$	$u_1$	
$x_3$	0	-1	1	10
$x_1$	0,4	0	-0,2	8
$x_2$	-0,2	1	-0,4	21
-z	-12	-32	-4	-2740

	$x_3$	$x_1$	$x_2$	
$u_2$	0	0,4	-0,2	12
$u_3$	-1	0	1	32
$u_1$	1	-0,2	-0,4	4
z	10	8	21	2740

A két optimális tábla összehasonlításából könnyen észrevehetjük, hogy ha a primál feladatot megoldottuk, ennek optimális táblázatából a duális megoldás, illetve a duális feladat optimális táblázatából a primál feladat megoldása leolvasható. Mindössze a sorok és oszlopok szerepét kell felcserélni és közben a primál feladat optimális táblázatának utolsó sorát, illetve a duális feladat optimális táblázatának utolsó oszlopát -1-gyel beszorozni.

Az optimális megoldás tehát:

a primál feladatnál

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a duál feladatnál

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$z = 2740$$

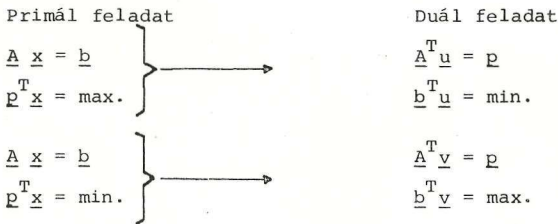
$$z = 2740$$

A célfüggvény értéke tehát a két feladatban azonos, azaz

$$\underline{p}^T \underline{x}_{opt.} = \underline{b}^T \underline{u}_{opt.} = 2740$$

A primál feladatban a célfüggvény maximumát kerestük, míg a duál feladatban minimumát. Ez általában is igaz, azaz ha a primál feladat maximumfeladat, akkor a duál feladat minimumfeladat, és fordítva, ha a primál feladat minimumfeladat, akkor a hozzá tartozó duál feladat maximumfeladat. A dualitás tehát szimmetrikus fogalom.

E szerint tehát a maximumfeladat duálja minimumfeladat és fordítva:



Ebből könnyen észrevehetjük, hogy előbbi esetben a hiányváltozók  $\underline{u}$ , utóbbi esetben a többletváltozók  $\underline{v}$  a duális változók. Ha a feladatban egyenletek is szerepelnek, akkor vagy két egyenlőtlenséggel felírva a feltételt, nyerjük a megfelelő duális változókat, vagy pedig megtartjuk az egyenletet, de a hozzá tartozó duálváltozót csillaggal jelöljük /mesterséges hiányváltozó/, amelyet a duális feladatban kötelező a bázisba bevonni. Az ilyen csillagos /mesterséges hiányváltozó/ hiányváltozókra nem kötjük ki a nemnegativitást.

A duális feladat duálja maga a primál feladat. E szerint minden feladat duáljának duálja.

A lineáris programozási feladatok duális /kettős/ természetűek, mint láttuk, jól hasznosítható a gyakorlatban. Ezt mondja ki a dualitás tétel: Ha a primál és duál feladatok közül valamelyiknek van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor a másiknak is van megengedett megoldása és véges optimuma, és a két feladat optimális célfüggvényértéke egyenlő. A tétel bizonyításától eltekintünk.

A duális megoldást, mint ismeretes, árnyékárnak is nevezzük, mert mintegy felértékeljük az erőforrásokat. Ugy is értelmezhetjük a duális feladatot, hogy minden termelési folyamatot hoz létre, mintegy felértékelődnek a termelési források. Feltehetjük a kérdést, hogy az előbbi vállalat számára mennyit

érnek a különböző anyagok. Nyilván annyit, amennyivel segítségükkel képesek vagyunk emelni a vállalati jövedelmet. Legfeljebb ennyit hajlandó a vállalat fizetni ezen anyagokért, hiszen ha azok ennél többbe kerülnének, már veszteséges volna felhasználásuk.

10.10. Duál szimplex módszer

Induljunk ki az

$$\begin{array}{r} x_1, x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ \hline 8x_1 + 4x_2 = \min. \end{array}$$

minimumfeladatból. Ennek megoldása /a tanultak alapján könnyen ellenőrizhetjük/

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad z = 40$$

A feladat duálja

$$\begin{array}{r} v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0 \\ 4v_1 + 2v_2 + 2v_3 \leq 8 \\ v_1 + v_2 + v_4 \leq 4 \\ \hline 16v_1 + 10v_2 + 6v_3 + 4v_4 = \max. \end{array}$$

Oldjuk meg a duális feladatot!

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	
$x_1$	4	2	2	0	8
$x_2$	1	1	0	1	4
-z	16	10	6	4	0

	$x_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	
$v_1$	0,25	0,5	0,5	0	2
$x_2$	-0,25	0,5	-0,5	1	2
-z	-4	2	-2	4	-32

	$x_1$	$x_2$	$v_3$	$v_4$	
$v_1$	0,5	-1	1	-1	0
$v_2$	-0,5	2	-1	2	4
-z	-3	-4	0	0	-40

A megoldás tehát

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad z = 40$$

Most azonban a  $v_3$  és  $v_4$  oszlopokban az utolsó sorban 0 van, tehát a számítást folytathatjuk azok bevonásával. Ha a  $v_3$ -at vonjuk be a bázisba, generáló elemként az első elemet választhatjuk, a hányados így 0, vagyis a megoldás nem változik. Eltérő megoldáshoz jutunk azonban, ha  $v_4$ -et vonjuk be a bázisba, amikor is a következő táblázathoz jutunk:

	$x_1$	$x_2$	$v_3$	$v_2$	
$v_1$	0,25	0	0,5	0,5	2
$v_4$	-0,25	1	-0,5	0,5	2
-z	-3	-4	0	0	-40

Most tehát a megoldás

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad z = 40$$

A duál feladatnak tehát két optimális megoldása van. A primál feladatnak csak egyféle megoldása van. Ez abból is kitűnik, hogy a duál feladat két optimális táblázatában a primálváltozókhoz ugyanakkora értékek tartoznak.

A feladatot tehát megoldhatjuk primál feladatként és megoldhatjuk duálpárjának megoldásával. A továbbiakban egy újabb lehetőséggel, a duál szimplex módszerrel ismerkedünk meg.

Az

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, & x_2 & \geq 0 \\
 4x_1 + & x_2 & \geq 16 \\
 2x_1 + & x_2 & \geq 10 \\
 2x_1 & & \geq 6 \\
 & x_2 & \geq 4 \\
 \hline
 8x_1 + & 4x_2 & = \min.
 \end{array}$$

feladatot normál feladattá alakíthatjuk. Ekkor a következőket nyerjük:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, & x_2 & \geq 0 \\
 -4x_1 - & x_2 & \leq -16 \\
 -2x_1 - & x_2 & \leq -10 \\
 -2x_1 & & \leq -6 \\
 & x_2 & \leq -4 \\
 \hline
 -8x_1 - & 4x_2 & = \max.
 \end{array}$$

Most tehát normál feladattal állunk szemben. Ezt a feladatot most úgy oldjuk meg, hogy a generáló elemet nem egy oszlopvektorban keressük a

$$\min \left( \frac{b_j}{a_{1j}} \right); \quad a_{1j} \geq 0$$

hanem egy sörvektorban a

$$\min \left( \frac{-c_j}{a_{1j}} \right); \quad a_{1j} < 0$$

alapján generáló elem tehát most csak negatív elem lehet. A számítások egyébként megegyeznek az eddig tanultakkal. Oldjuk meg tehát a feladatot:

	$x_1$	$x_2$	
$v_1$	-4	-1	-16
$v_2$	-2	-1	-10
$v_3$	-2	0	-6
$v_4$	0	-1	-4
$-z$	-8	-4	0

A -b oszlopban most kikeressük a legkisebb elemet. Ez történetesen a -16. Most ebben a sorban lévő elemekkel /-4, -1/ képezzük a  $-c^T$  elemeivel a következő hányadosokat:

$$\frac{-8}{-4} = 2; \quad \frac{-4}{-1} = 4$$

Azt az osztót választjuk generáló elemnek, amelynél a legkisebb hányadost kaptuk /-4-et/. Elvégezzük a báziscserét a primál szimplex módszerrel tanultak alapján és a következő táblázatot kapjuk:

	$v_1$	$x_2$	
$x_1$	-0,25	0,25	4
$v_2$	-0,5	-0,5	-2
$v_3$	-0,5	0,5	2
$v_4$	0	-1	-4
$z$	-2	-2	32

Folytatjuk a számítást az előbbieket szerint és a következő táblázathoz jutunk:

	$v_1$	$v_4$	
$x_1$	-0,25	0,25	3
$v_2$	-0,5	-0,5	0
$v_3$	-0,5	0,5	0
$x_2$	0	-1	4
$z$	-2	-2	40

Megoldottuk tehát a feladatot.

A primál feladat megoldása:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad z = 40$$

A duál feladat egyik optimális megoldása

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad z = 40$$

Mivel a  $\underline{b}$  vektorban a  $v_2$  és  $v_3$ -hoz nulla tartozik, a számítás folytatható és megkapjuk a duális feladat másik optimális megoldását, mint azt már láttuk.

Természetesen, ha a duál feladatnak több alternatív megoldása van, akkor ezek konvex lineáris kombinációi adják az összes megoldást, azaz

$$k_1 \underline{u}_{opt_1} + k_2 \underline{u}_{opt_2} + \dots + k_n \underline{u}_{opt_n}$$

ahol

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1 \text{ és } k_i \geq 0 \quad /i = 1, 2, \dots, n/$$

Megjegyezzük, hogy a duál szimplex módszernél is találkozhatunk degenerációval, vagy lehetséges, hogy a feladat nem oldható meg, azaz ugyanazon problémákkal találkozhatunk, mint a primál szimplex módszerrel kapcsolatban tanultuk.

### 10.11. Módosított szimplex módszer

Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\begin{array}{r} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \quad \quad 2x_5 + x_6 \leq 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + \quad \quad \quad x_4 \leq 16 \end{array}$$

$$10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 = \max.$$

Oldjuk meg primál szimplex módszerrel:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$u_1$	1	1	1	1	1	1	9
$u_2$	2	4	2	0	2	1	18
$u_3$	4	2	0	1	0	0	16
-z	10	12	5	5	6	2	0

	$x_1$	$u_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$u_1$	0,5	-0,25	0,5	1	0,5	0,75	4,5
$x_2$	0,5	0,25	0,5	0	0,5	0,25	4,5
$u_3$	3	-0,5	-1	1	-1	-0,5	7
-z	4	-3	-1	5	0	-1	-54

	$x_1$	$u_2$	$x_3$	$u_1$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	0,5	-0,25	0,5	1	0,5	0,75	4,5
$x_2$	0,5	0,25	0,5	0	0,5	0,25	4,5
$u_3$	2,5	-0,25	-1,5	-1	-1,5	-1,25	2,5
-z	1,5	-1,75	-3,5	-5	-2,5	-4,75	-76,5

	$u_3$	$u_2$	$x_3$	$u_1$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	-0,2	-0,2	0,8	1,2	0,8	1	4
$x_2$	-0,2	0,3	0,8	0,2	0,8	0,5	4
$x_1$	0,4	-0,1	-0,6	-0,4	-0,6	-0,5	1
-z	-0,6	-1,6	-2,6	-4,4	-1,6	-4,0	-78

Bár viszonylag nagyon egyszerű feladatot oldottunk meg, mégis elég sokat kellett számolnunk. Könnyen észrevevesszük azt is, hogy sok fölösleges számolást végeztünk, hiszen a bázisba csak a változók felét vonhattuk be. Ha előre tudtuk volna, hogy az  $x_3$ ,  $x_5$  és  $x_6$  változók nem vonhatók be a bázisba, azok oszlopaiban nem végeztük volna el a számításokat, hiszen e számításokra nincs szükségünk. Csakhogy ez - különösen nagyobb, bonyolultabb feladatoknál - nem látható előre.

Azt tudjuk, hogy a bázisba legfeljebb annyi változó vonható be, ahány sor van a feladatban és a többi változóhoz tartozó oszlopban felesleges számításokat végeztünk minden lépésben. Felmerül a kérdés, hogyan lehetne a felesleges számításokat elkerülni? Erre a módosított szimplex módszer alkalmazása nyújt lehetőséget.

Az előbbi feladat a hiányváltozók bevezetésével a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u_1, u_2, u_3 \geq 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + u_1 = 9 \\
 & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 + x_6 + u_2 = 18 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_4 + u_3 = 16 \\
 \hline
 & 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = \max.
 \end{aligned}$$

Írjuk fel ennek alapján az induló szimplex táblázatot:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$u_1$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	9
$u_2$	2	4	2	0	2	1	0	1	0	18
$u_3$	4	2	0	1	0	0	0	0	1	16
-z	10	12	5	5	6	2	0	0	0	0

Az induló tábla szimbólikusan felírható a következők szerint:

$$\begin{array}{c|cc|c}
 & \underline{x}^T & \underline{u}^T & \\
 \hline
 \underline{u} & \underline{A} & \underline{E} & \underline{b} \\
 \hline
 & \underline{p}^T & \underline{0}^T & 
 \end{array}$$

Hajtsuk most végre az adott példafeladaton az első báziscserét, azaz végezzük el az  $x_2$  és az  $u_2$  cseréjét, de úgy, hogy csak az  $\underline{E}$ -nek az új bázisra vonatkozó koordinátáit számítsuk ki. Közben az oszlopszimbólumokat meghagyhatjuk, csak a sorok szimbólumait alakítsuk úgy át, hogy jelöljük az  $x_2$ -nek a bázisba történt bevonását. A következő táblázatot kapjuk:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$u_1$							1	-0,25	0	
$x_2$							0	0,25	0	
$u_3$							0	-0,5	1	
-z										

Az  $\underline{E}$ -nek az új bázisra vonatkozó koordinátáit igen egyszerű volt kiszámítani, hiszen mindössze egy oszlopot kellett változtatnunk.

Jelöljük most a kapott matrixot

$$D_1^{-1} \text{ szimbólummal.}$$

Az előbb általánosan felírt

$$L_0 = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{E} & \underline{b} \\ \underline{p}^T & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

matrix vektorrendszerének bázisa

$$B_0 = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ha az első bázistranszformáció esetén a

$$B_1 = \begin{bmatrix} \underline{D}_1 & \underline{0} \\ \underline{d}_1^T & 1 \end{bmatrix}$$

bázishoz jutunk /ahol  $\underline{d}_1^T$ -t úgy kapjuk, hogy az  $\underline{u}^T$  transzformált oszlopában a  $\underline{p}^T$ -beli elemet beiktatjuk, vagyis a példa feladatban  $x_2$  és az  $\underline{u}_2$  cseréje esetén az  $\underline{u}_2$ -höz tartozó célfüggvény koefficiens 12 lesz, vagyis a  $\underline{D}_1^T$ -hez  $\underline{0}^T = [0, 0, 0]$  helyett a  $\underline{d}_1^T = [0, 12, 0]$  célfüggvényt tartozik/, akkor az  $L_0$  oszlopvektorainak az új bázisra vonatkozó koordinátáit az

$$L_1 = B_1^{-1} L_0$$

adja.

A  $B_1^{-1}$ -et a  $B_1$  invertálásával nyerjük

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D}_1^{-1} & \underline{0} \\ -\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

tehát

$$L_1 = \begin{bmatrix} \underline{D}_1^{-1} & \underline{0} \\ -\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{E} & \underline{b} \\ \underline{p}^T & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{D}_1^{-1} \underline{A} & \underline{D}_1^{-1} \underline{E} & \underline{D}_1^{-1} \underline{b} \\ \underline{p}^T - \left( \underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} \right) \underline{A} & - \left( \underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} \right) \underline{E} & - \left( \underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} \right) \underline{b} \end{bmatrix}$$

Ha tehát a  $\underline{D}_1^{-1}$ -et és a  $\underline{d}_1^T$ -et meghatározzuk, megkapjuk a második szimplex tábla valamennyi vektorának koordinátáit az új bázisra vonatkozólag.

Példa feladatunkban

$$\underline{D}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{d}_1^T = [0, 12, 0]$$

Végezzük el az  $L_1$ -hez szükséges számításokat:

$$\begin{aligned} \underline{D}_1^{-1} \underline{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,75 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ellenőrizhetjük az előbbi számítás második táblája alapján, hogy ugyanazon eredményhez jutottunk. /Ha a feladatot  $\underline{E}$  mátrixszal bővítettük volna, az  $x_2$  oszlopában, mint tudjuk  $[0, 1 0]^T$ -t kapunk, az  $u_2$  oszlop pedig az  $\underline{E}$  második oszlopába kerül./

A  $\underline{D}_1^{-1}$  ismert.

$$\underline{D}_1^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}^T - \left( \underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} \right) \underline{A} = [10, 12, 5, 5, 6, 2] - \left( [0, 12, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [0, 3, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [6, 12, 6, 0, 6, 3] = \\ &= [4, 0, -1, 5, 0, -1] \end{aligned}$$

$\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1}$  értékét az előbb már ki kellett számolnunk, azaz

$$\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} = [0, 12, 0] \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} = [0, 3, 0]$$

s végül

$$-\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} \underline{b} = [0, -12, 0] \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} =$$

$$= [0, -3, 0] \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = -54$$

Az adatokat táblázatba foglalva tehát a következőkben kapjuk az új táblázatot:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$u_1$	0,5	0	0,5	1	0,5	0,75	1	-0,25	0	4,5
$u_2$	0,5	1	0,5	0	0,5	0,25	0	0,25	0	4,5
$x_2$	3	0	-1	1	-1	-0,5	0	0,5	1	7
-z	4	0	-1	5	0	-1	0	-3	0	-54

Most az  $x_4$  oszlopából választunk generáló elemet, a szokásos módon.

Ha így folytatnánk, nem nyernénk semmit, hiszen most is minden oszlop adatait kiszámoltuk. Ezt elkerülvén, a következőképpen járunk el:

Az előbbi számításokból nem végezzük el a  $\underline{D}_1^{-1} \underline{A}$  kiszámítását. Ekkor a következő táblázathoz jutunk:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$u_1$							1	-0,25	0	4,5
$u_2$							0	0,25	0	4,5
$x_2$							0	0,5	1	7
-z	4	0	-1	5	0	-1	0	-3	0	-54

A táblázatból eldönthető, hogy most az  $x_4$  oszlopában kell generáló elemet választani. Elegendő tehát csak az  $x_4$  oszlopát kiszámítani ahhoz, hogy generáló elemet választhassunk. Az  $x_4$  oszlophoz tartozó elemeket a

$$\underline{D}_1^{-1} \underline{a}_4$$

formula alapján kapjuk meg, azaz

$$\underline{D}_1^{-1} \underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Most tehát ezt az oszlopot a táblázatba beírva, a következőket kapjuk:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$u_1$				1			1	-0,25	0	4,5
$u_2$				0			0	0,25	0	4,5
$x_2$				1			0	0,5	1	7
-z	4	0	-1	5	0	-1	0	-3	0	-54

Most a szokásos módon kiválasztjuk a generáló elemet. Ennek segítségével újra elvégezzük a transzformációt és kapjuk, hogy

$$L_2 = \begin{bmatrix} \underline{D}_2^{-1} \underline{A} & & \underline{D}_2^{-1} & \underline{D}_2^{-1} \underline{b} \\ \underline{p}^T - \left( \underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} \right) \underline{A} - \left( \underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} \right) & & - \left( \underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} \underline{b} \right) \end{bmatrix}$$

tehát kiszámítjuk  $\underline{D}_2^{-1}$ -et

	$x_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
	1	1	-0,25	0
	0	0	0,25	0
	1	0	-0,5	1

	$x_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
		1	-0,25	0
		0	0,25	0
		-1	-0,25	1

azaz

$$\underline{D}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

Most aztán

$$\underline{D}_2^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

Mivel

$$\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} = [5, 12, 0] \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} = [5, 1,75, 0]$$

így

$$-\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} = [-5, -1,75, 0]$$

és

$$\begin{aligned} -(\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} \underline{b}) &= -\left([5, 12, 0] \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix}\right) = \\ &= -\left([5, 1,75, 0] \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix}\right) = -76,5 \end{aligned}$$

s végül:

$$\begin{aligned} \underline{p}^T - (\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1}) \underline{A} &= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - \\ &= [5, 1,75, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [8,5, 12, 8,5, 5, 8,5, 6,75] = \\ &= [1,5, 0, -3,5, 0, -2,5, -4,75] \end{aligned}$$

Ebből máris eldönthetjük, hogy a következő lépéshez az első oszlopban kell generáló elemet választani, hiszen itt találjuk a célfüggvény sorában a legnagyobb pozitív számot /itt más pozitív célfüggvénykoefficiens már nincs is/.

Ki kell tehát számitanunk az első oszlophoz tartozó adatokat, azaz

$$D_2^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

Most már megszerkeszthetjük az előbb kiszámított adatokból az új táblázatot, azaz:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$	0,5						1	-0,25	0	4,5
$x_2$	0,5						0	0,25	0	4,5
$u_3$	<u>2,5</u>						-1	-0,25	1	2,5
-z	1,5	0	-3,5	0	-2,5	-4,75	-5	-1,75	0	-76,5

Az  $x_1$  oszlopában generáló elemet választunk, 2,5-et és folytatjuk a számításokat.

Számítsuk ki tehát először  $D_3^{-1}$ -et

	$u_1$	$u_2$	$u_3$
	1,2	-0,2	-0,2
	0,2	0,3	-0,2
	-0,4	-0,1	0,4

A

$$d_3^T = [5, 12, 10]$$

és mint az előzőekből következtethető

$$L_3 = \begin{bmatrix} D_3^{-1} A & D_3^{-1} & D_3^{-1} b \\ p^T - \left( d_3^T D_3^{-1} \right) A & -d_3^T D_3^{-1} & -\left( d_3^T D_3^{-1} b \right) \end{bmatrix}$$

A

$$\begin{aligned}
 \underline{p}^T - \left( \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{A} &= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - \\
 - \left[ \begin{array}{c} [5, 12, 10] \\ \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array} \right] & \\
 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - \\
 - [4,4, 1,6, 0,6] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \\
 = [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [10, 12, 7,6, 5, 7,6, 6] &= \\
 = [0, 0, -2,6, 0, -1,6, -4] &
 \end{aligned}$$

már mutatja, hogy a következő táblázat célfüggvény sorában már nem találunk pozitív elemet, tehát optimális táblázathoz jutottunk.

Az optimális táblázathoz tartozó koordináták most

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a célfüggvényérték

$$- \left( \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \underline{b} \right) = [4,4, 1,6, 0,6] \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = -78$$

Mivel optimális táblázathoz jutottunk, a táblázat további részének kiszámítása szükségtelen, bár célszerű az árnyéklárak meghatározása is, azaz

$$- \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1}$$

amit azonban már ismerünk az előbbiből, mindössze előjelet kell változtatni, azaz

$$-\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} = \begin{bmatrix} -4,4, & -1,6, & -0,6 \end{bmatrix}$$

A feladatot tehát megoldottuk, az optimális tábla

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$										4
$x_2$										4
$x_1$										1
$-z$	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-78

vagyis az optimális megoldás

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1, & 4, & 0, & 4, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = 78$$

A módosított szimplex módszer alkalmazásának akkor van nagyobb jelentősége, ha az oszlopok száma több, mint a sorok száma. Ilyenkor lényegesen kevesebb számolás szükséges a feladat megoldásához.

#### 10.12. Speciális problémák

A módosított szimplex módszer alkalmazása során a  $\underline{D}_1^{-1}$ ,  $\underline{D}_2^{-1}$ , ...,  $\underline{D}_s^{-1}$  matrixokat határoztuk meg és segítségükkel a

$$\underline{D}_1^{-1} \underline{b}, \quad \underline{D}_2^{-1} \underline{b}, \quad \dots, \quad \underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

alapján előállítottuk a megengedett megoldásokat, valamint a

$$-\left(\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1}\right) \underline{b}, \quad -\left(\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1}\right) \underline{b}, \quad \dots, \quad -\left(\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1}\right) \underline{b}$$

alapján a célfüggvény sorát.

Ha az  $s+1$ -edik táblázatban az optimális megoldást kapjuk, akkor a

$$\underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

szorzat a primál feladat megoldását adja és a célfüggvény maximuma

$$-\left(\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1}\right) \underline{b}$$

Tegyük fel, hogy a lineáris programozás alkalmazásával gyakorlatban készítünk vállalati tervet. Egyrészt a tervezés folyamata is időt vesz igénybe és lehetséges, hogy mire a terv elkészül, megváltoznak a feltételek. Másrészt, ha fejlesztési tervet készítünk, annak megvalósítása éveket vesz igénybe. Ilyenkor különösen nagy a valószínűsége annak, hogy változnak a feltételek. A feltételek változása egyben kétségteljesen teszi, hogy a lineáris programozással előállított terv továbbra is optimális-e, célszerű-e annak megvalósítása, vagy pedig a tervet át kell dolgozni. Legtöbbször az utóbbi áll fenn. Át kell dolgozni a tervet.

A terv átdolgozása, mint látni fogjuk, ha lineáris programozással terveztünk, viszonylag egyszerű. Módosítjuk a modell megfelelő adatait és a feladatot újra megoldjuk. Felmerül azonban a kérdés, hogy szükség van-e arra, hogy a számításokat előlről kezdve végig megismételjük. Látni fogjuk, hogy a módosított szimplex módszer alkalmazásával ez elkerülhető.

Mielőtt az ezzel kapcsolatos számítástechnikai eljárásokat megismernénk, vizsgáljuk meg, hogyan jelentkezhet a modellben a feltételek megváltozása.

Mindenekelőtt megváltozhatnak az erőforráskapacitások. Különösen a fejlesztési tervek megvalósítása során az előirányozottnál nagyobb beruházási lehetőségek adódhatnak, korszerűbb, nagyobb teljesítményű gépeket szerezhetünk be, változhat a munkaerőkapacitás, stb.

Lehetséges az is, hogy felmerül egy új termék termelésének lehetősége, és el kell dönteni, célszerű-e annak termelése és ha igen, akkor milyen mennyiségben és hogyan kell ennek érdekében a termelés szerkezetét megváltoztatni. Ilyenkor a modellbe új változót kell beépíteni. Ehhez hasonló probléma, ha valamely termék termelésére új termeléstehnológiát dolgoznak ki és el kell dönteni, hogy a régi vagy az új technológiát célszerű alkalmazni és ha az új technológiát alkalmazzuk, hogyan kell a termelés szerkezetét megváltoztatni.

Végül lehetséges, hogy a modellbe új feltételeket kell beépíteni. Például a megváltozott piaci /értékesítési vagy beszerzési/ feltételeknek megfelelően korlátozni kell néhány termék termelését, anyagfelhasználását, stb.

E változások jelentkezhetnek külön-külön és egyidejűleg és a már elkészített terv jelentős megváltoztatását tehetik szükségessé. Ugyanezen problémák merülnek fel tervváriánsok kiszámításakor is.

A vállalatvezetők sokszor panaszkodnak, hogy hiába terveznek, a tervet nem lehet megvalósítani, mert a gazdasági feltételek igen gyakran változnak. Ez valóban igaz, különösen a mezőgazdaságban. Oktalanság volna azonban olyan igényvel fellépni, hogy a gazdasági feltételek hosszúvidőn kereszt-

túl ne változzanak meg. Ez a gazdasági élet megmerevítését, a gazdasági fejlődés megállítását jelentené, ami - csak azért, hogy az egyszer elkészített tervet /minden számadatát illetően/ teljesíteni tudjuk - aligha volna kívánatos.

A gazdasági élet szerencsére állandóan változik, fejlődik, sőt mondhatjuk, gyorsuló ütemben fejlődik, és a vállalatvezetés feladata, hogy az állandóan változó feltételeknek megfelelően jól működjön a vállalat. Ez pedig azzal a követelménnyel jár együtt, hogy alkalmazkodni kell a változó feltételekhez, s a tervet szükség szerint kell módosítani, átdolgozni. Ebből következik, hogy a tervezést nem szabad egyszeri aktusként felfogni, hanem az egy permanens folyamat, tehát a tervet állandóan a változó gazdasági feltételekhez igazodva karban kell tartani.

A terv átdolgozása, ha matematikai programozással tervezzük, sokkal egyszerűbb és gyorsabb, mint ha hagyományos módszereket alkalmazunk. A következőkben megismerkedünk azokkal az eljárásokkal, amelyek segítségével a számítások teljes megismétlése nélkül lehet a tervet átdolgozni, optimalizálni.

#### 10.12.1. Tervmódosítás a kapacitásvektor $\underline{b}$ változása miatt

Induljunk ki a 10.11.-ben megismert példából, azaz az

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \leq & 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & & & & + 2x_5 + x_6 & \leq & 18 \\ 4x_1 + 2x_2 & & & + x_4 & & & \leq & 16 \\ \hline 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 & = & \max. \end{array}$$

Ismerjük, hogy ennek megoldása

$$\underline{x}_{opt} = [1, 4, 0, 4, 0, 0]$$

Tegyük fel azonban, hogy időközben módosult a termelőkapacitás, azaz a  $\underline{b}$  vektor. Mondjuk, hogy a  $\underline{b}$  vektor minden eleme 50 %-kal bővült, tehát az új  $\underline{b}$  vektor, azaz  $\underline{b}'$  a következő:

$$\underline{b}' = 1,5 \underline{b} = 1,5 \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,5 \\ 27,0 \\ 24,0 \end{bmatrix}$$

Kérdés, hogy most mi volna a feladat optimális megoldása.

Az 10.11.-ből már ismerjük a  $D_3^{-1}$ -et, amikor az utolsó /optimális/ táblázathoz jutottunk.

$$D_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Azt is tudjuk, hogy

$$d_3^T = [5, 12, 10]$$

Az új  $b$  vektor ismeretében most az új optimális megoldást egyszerűen ki tudjuk számítani, azaz

$$\underline{x}'_{\text{opt}} = D_3^{-1} \underline{b}' = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,5 \\ 27,0 \\ 24,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

Könnyű észrevenni, hogy mivel a kapacitásvektor minden eleme 1,5-szörösére változott, az új megoldás is az előbbinek 1,5-szöröse, azaz

$$\underline{x}'_{\text{opt}} = 1,5 \underline{x}_{\text{opt}} = 1,5 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

Ha tehát a  $b$  vektor komponenseit  $k$ -szorosára változtatjuk, akkor - amennyiben  $b$ -vel volt optimális megoldás - a  $k$   $b$ -hez tartozó optimális megoldás  $k$   $x_{\text{opt}}$ . Ez nyilvánvaló, mert  $k$ -val szorozni annyit jelentett, hogy az  $A \underline{x} \leq b$  egyenlőtlenségrendszer szoroztuk  $k$ -val / $k > 0$ /, vagyis  $Ak \underline{x} \leq kb$ .

Az új optimumhoz tartozó célfüggvényérték

$$\begin{aligned} - \left( d_3^T D_3^{-1} \right) \underline{b} &= - [5, 12, 10] \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,5 \\ 27,0 \\ 24,0 \end{bmatrix} = \\ &= [4,4, 1,6, 0,6] \begin{bmatrix} 13,5 \\ 27,0 \\ 24,0 \end{bmatrix} = -117 \end{aligned}$$

ami az előbbinek szintén 1,5-szöröse, azaz  $1,5 \cdot (-78) = -117$ .

Ha tehát a  $\underline{b}$  vektor minden eleme egyforma arányban,  $k$ -szorosára változik, az új optimumot megkapjuk, ha az előbbi  $k$ -val szorozzuk.

Más a helyzet, ha a  $\underline{b}$  vektor elemei különböző arányban változnak. /A gyakorlatban általában ez a helyzet./

Tegyük fel, hogy most a feladatban a  $\underline{b}$  vektor a következőképpen módosul:

$$\underline{b}' = [9, 22, 18]$$

Kiindulunk az ismert

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$x_4$							1,2	-0,2	-0,2
$x_2$							0,2	0,3	-0,2
$x_1$							-0,4	-0,1	0,4

táblázatból és folytatjuk a számítást:

$$\underline{x}'_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 4,8 \\ 1,4 \end{bmatrix}$$

és a célfüggvény értéke

$$-\left(\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1}\right) \underline{b} = - \begin{bmatrix} 4,4 & 1,6 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 18 \end{bmatrix} = -85,6$$

A táblázat többi értéke nem függ a  $\underline{b}'$  értékétől, tehát a  $\underline{b}'$  vektorhoz tartozó új táblázatunk a következő lesz:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$							1,2	-0,2	-0,2	2,8
$x_2$							0,2	0,3	-0,2	4,8
$x_1$							-0,4	-0,1	0,4	1,4
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-85,6

A megoldás strukturája nem változott, azaz a  $\underline{b}'$ -hez tartozó megoldásban ugyanazon  $x_i$  értékek fordulnak elő, mint a  $\underline{b}$ -hez tartozó megoldásban, csupán az  $x_j$  értékek nagysága változott meg.

Ha ugyanis

$$\underline{D}_S^{-1} \underline{b}' \geq \underline{0}$$

akkor a megoldás strukturája nem változik. Ha azonban

$$\underline{D}_S^{-1} \underline{b}' \not\geq \underline{0}$$

a megoldás strukturája is változik.

Tegyük fel most, hogy a módosult  $\underline{b}$  vektor a következő:

$$\underline{b}' = [9, 22, 14]^T$$

Ekkor

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{b}' = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,6 \\ 5,6 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

Most tehát

$$\underline{D}_S^{-1} \underline{b}' \not\geq \underline{0}$$

vagyis az  $\underline{x}$  vektor komponensei között negatív is van, tehát a számítást folytatni kell, mégpedig a módosított duál szimplex módszerrel.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$							1,2	-0,2	-0,2	3,6
$x_2$							0,2	0,3	-0,2	5,6
$x_1$							-0,4	-0,1	0,4	-0,2
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-83,2

$$-\left( \underline{a}_3^T \underline{D}_3^{-1} \underline{b} \right) = - \left[ 4,4, \quad 1,6, \quad 0,6 \right] \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} = -83,2$$

A  $\underline{b}$  vektor legkisebb komponense a  $-0,2$  az  $x_1$  sorában van, tehát ebben a sorban keresünk generáló elemet. A sor elemeit megkapjuk:

ha az  $\underline{A}$  matrix új elemeit meghatározzuk, azaz

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{A} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,8 & 1 & 0,8 & 1 \\ 0 & 1 & 0,8 & 0 & 0,8 & 0,5 \\ 1 & 0 & -0,6 & 0 & -0,6 & -0,5 \end{bmatrix}$$

Most tehát táblázatunk a következőképpen alakul:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$	0	0	0,8	1	0,8	1	1,2	-0,2	-0,2	3,6
$x_2$	0	1	0,8	0	0,8	0,5	0,2	0,3	-0,2	5,6
$x_1$	1	0	-0,6	0	-0,6	-0,5	-0,4	-0,1	0,4	-0,2
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-83,2

Generáló elemet választunk:

$$\frac{-2,6}{-0,6} = 4,33; \quad \frac{-1,6}{-0,6} = 2,67; \quad \frac{-4}{-0,5} = 8$$

generáló elemünk tehát a -0,6 lesz, az  $x_5$ -höz tartozó oszlopban. /Meggjegyezzük, hogy elegendő lett volna az  $\underline{A}$  matrix új elemeit csak az  $x_1$ -hez tartozó sor és  $x_5$ -höz tartozó oszlopban meghatározni./

Folytatjuk tehát a számítást és meghatározzuk  $\underline{D}_4^{-1}$  matrixot.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$x_4$	0,67	0,33	0,33
$x_2$	-0,33	0,17	0,33
$x_5$	0,67	0,17	-0,67

tehát

$$\underline{D}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,67 & 0,17 & -0,67 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{d}_4^T = [5, 12, 6]$$

Innen:

$$L_4 = \begin{bmatrix} \underline{D}_4^{-1} \underline{A} & \underline{D}_4^{-1} & \underline{D}_4^{-1} \underline{b} \\ \underline{p}^T - (\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1}) \underline{A} & -\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} & -(\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1}) \underline{b} \end{bmatrix}$$

alapján kiszámítjuk az új megoldást, az ahhoz tartozó célfüggvényértéket és az új táblázat célfüggvény sorát, azaz

$$\underline{D}_4^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 0,66 & -0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,66 & 0,17 & -0,66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,33 \\ 5,33 \\ 0,33 \end{bmatrix}$$

/Meggjegyezzük, hogy  $\underline{D}_4^{-1}$  kerekített adatokat tartalmaz, ezt a számítások során igyekeztünk kiszűrni./

A célfüggvényérték számítása:

$$\underline{p}^T - \underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} \underline{A} = [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [5, 12, 6]$$

$$= \begin{bmatrix} 0,66 & -0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,66 & 0,17 & -0,66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [-2,67, 0, -1, 0,0,-2,67]$$

Ebből látható, hogy a számítást befejeztük, mert a célfüggvény sorában nincs negatív elem.

A célfüggvény értéke

$$-(\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} \underline{b}) = -[5, 12, 6] \begin{bmatrix} 0,66 & -0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,66 & 0,16 & -0,66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} =$$

$$= 82,67$$

Az utolsó szimplex táblázatunk tehát

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$							0,66	-0,33	0,33	3,33
$x_2$							-0,33	0,17	0,33	5,33
$x_5$							0,66	0,17	-0,66	0,33
$-z$	-2,67	0	-1	0	0	-2,67	-3,33	-1,33	-1,66	-82,67

mivel

$$\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} = [5, 12, 6] \begin{bmatrix} 0,66 & -0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,66 & 0,17 & -0,66 \end{bmatrix} =$$

$$= [-3,33, -1,33, -1,66]$$

A feladatot tehát megoldottuk. A megoldás:

$$\underline{x} = [0, 5,33, 0, 3,33, 0,33, 0]$$

és

$$z = 82,67$$

Ellenőrizzük:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5,33 \\ 0 \\ 3,33 \\ 0,33 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,99 \\ 21,98 \\ 13,99 \end{bmatrix}$$

és

$$[10, 12, 5, 5, 6, 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 5,33 \\ 0 \\ 3,33 \\ 0,33 \\ 0 \end{bmatrix} = 82,59 \approx 82,67$$

Az elmondottakat felhasználhatjuk természetesen akkor is, ha egy adott feladatot több  $\underline{b}$  vektorral kell megoldani.

10.12.2. Tervmódosítás a célfüggvény változása miatt:

Az előbbiek ismeretében már nem nehéz megoldani a feladatot, ha megváltozik a célfüggvény, vagy ha több célfüggvény-nyel kell a feladatot vizsgálni.

Ha a  $\underline{p}^T$  vektor  $\underline{p}'^T$ -re változik, akkor változik a  $\underline{d}_S^T$  is, és ennek következtében mindazon vektorokat át kell számolni, amelyek alakításában a  $\underline{d}_S^T$  szerepet játszik. Ezek a következők:

$$-\left(\underline{d}_S^T \underline{D}_S^{-1}\right)$$

$$-\left(\underline{d}_S^T \underline{D}_S^{-1}\right) \underline{b}$$

és

$$\underline{p}^T - \left(\underline{d}_S^T \underline{D}_S^{-1}\right) \underline{A}$$

Nem változik a

$$\underline{D}_S^{-1} \underline{A}$$

$$\underline{D}_S^{-1} \underline{b}$$

és az előző számításokból ismert a

$$\underline{D}_S^{-1}$$

Ha a célfüggvény minden adata arányosan, mondjuk  $k$ -szorosára változik, akkor az  $\underline{x}_{\text{opt}}$  nem változik meg, csak a hozzá tartozó célfüggvényérték, tehát elegendő, ha azt  $k$ -szorosára változtatjuk. Ha tehát

$$\underline{p}'^T = k \underline{p}^T$$

akkor

$$\underline{x}'_{\text{opt.}} = \underline{x}_{\text{opt.}},$$

vagyis az optimális megoldás nem változik és

$$z' = k z.$$

Ha azonban a célfüggvény komponensei különböző arányban változnak meg, akkor a  $\underline{d}_3^T$  által érintett vektorokat az új célfüggvénynek megfelelően átszámítjuk. Ha az így nyert táblázathoz tartozó célfüggvényt sorban nincs pozitív elem, máris optimális táblázathoz jutottunk. Ha viszont a célfüggvény sorában pozitív elemet találunk, folytatni kell a számításokat a primál szimplex módszerrel mindaddig, amíg optimális táblázathoz jutunk.

Tegyük fel, hogy a 10.11.-ben megoldott feladat célfüggvénye megváltozik, mivel az ötödik termék ára emelkedett és így a jövedelem 6 egységről 8 egységre emelkedett. Most tehát a

$$\underline{p}^T = [10, 12, 5, 5, 6, 2]$$

helyett a

$$\underline{p}'^T = [10, 12, 5, 5, 8, 2]$$

célfüggvénnyel kell dolgoznunk.

Ismeretes, hogy

$$\underline{D}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{d}_3^T = [5, 12, 10]$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} -\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} &= - [5, 12, 10] \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} = \\ &= - [4,4, 1,6, 0,6] \end{aligned}$$

$$-\left(\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1}\right) \underline{b} = [4,4, 1,6, 0,6] \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = -78$$

vagyis mivel a változás olyan terméknél következett be, amely még nem szerepel a bázisban, ezek az eredmények az előző táb-

lázathoz képest nem változtak. Ha természetesen olyan változóhoz tartozó célfüggvényérték változik meg, amely a bázisban van, akkor a

$$\underline{d}_3^T$$

változása miatt a

$$- \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1}$$

és a

$$- \left( \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{b}$$

is megváltozik.

Természetesen a

$$\underline{P}^T - \left( \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{A}$$

megváltozik akkor is, ha a célfüggvénykoefficiens változása olyan termékénél következik be, amely nem került be a bázisba, hiszen a  $\underline{P}^T$  változik, vagyis:

$$\underline{P}^T - \left( \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{A} = \begin{bmatrix} 10, & 12, & 5, & 5, & 8, & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4, & 4, & 1, & 6, & 0, & 6 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -2, & 6, & 0, & 0, & 4, & -4 \end{bmatrix}$$

A szimplex tábla tehát a következő:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$							1,2	-0,2	-0,2	4
$x_2$							0,2	0,3	-0,2	4
$x_1$							-0,4	-0,1	0,4	1
-z	0	0	-2,6	0	0,4	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-78

A táblázatból kitűnik, hogy az  $x_5$ -höz pozitív célfüggvényérték tartozik, tehát folytatni kell a számítást a primál szimplex módszerrel. Ehhez előbb az  $x_5$ -höz tartozó oszlop adatait kell meghatározni, azaz

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{a}_5 = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,8 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

vagyis kapjuk a következő táblázatot:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$					0,8		1,2	-0,2	-0,2	4
$x_2$					0,8		0,2	0,3	-0,2	4
$x_1$					-0,6		-0,4	-0,1	0,4	1
-z	0	0	-2,6	0	0,4	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-78

Meghatározzuk a generáló elemet:

$$\frac{4}{0,8} = 5 \quad \frac{4}{0,8} = 5$$

Mivel a hányadosok azonosak, degenerációval állunk szemben. A számításokat a primál szimplex módszerrel folytatva, az alábbi megoldáshoz jutunk.

$$\underline{x} = [4, 0, 0, 0, 5, 0]^T$$

$$z = 80$$

### 10.12.3. Tervmódosítás új termék /vagy technológia/ beiktatása miatt

Vegyük ismét a 10.11.-ben megismert feladatot, azaz

$$\begin{array}{r} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 + x_6 \leq 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 16 \\ \hline 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 = \max. \end{array}$$

Mint tudjuk, ennek megoldása

$$\underline{x} = [1, 4, 0, 4, 0, 0]$$

és

$$z = 78$$

az optimális megoldást szolgáltatató szimplex tábla pedig, mint ismeretes, a következő volt:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$							1,2	-0,2	-0,2	4
$x_2$							0,2	0,3	-0,2	4
$x_1$							-0,4	-0,1	0,4	1
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-78

Tegyük fel, hogy időközben felmerült két új termék termelésének lehetősége, ezért a feladatot újabb két változóval kell kibővíteni:  $y_1$  és  $y_2$ -vel és így a feladat az alábbi-ra módosul:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + y_1 + y_2 &\leq 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 + x_6 + 4y_1 + y_2 &\leq 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 + 2y_1 + 2y_2 &\leq 16 \end{aligned}$$

$$10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 7y_1 + 8y_2 = \max.$$

Ez a feladat matrix alakban a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} & \underline{y} &\geq \underline{0} \\ \underline{A}_1 \underline{x} + \underline{A}_2 \underline{y} &\leq \underline{b} \\ \underline{P}_1^T \underline{x} + \underline{P}_2^T \underline{y} &= \max. \end{aligned}$$

Az eredeti feladat optimális táblázatát ismerjük. Ezt most ki kell bővíteni a két új változóval, és első lépésben azt kell megvizsgálni, hogy a  $\underline{P}_2^T$  elemei között az optimális táblázatban található-e pozitív koefficiens, vagyis

$$\underline{P}_2 - \left( \underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} \right) \underline{A}_2 = [7, 8] - [5, 12, 10].$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 7, & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,4, & 1,6, & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 7, & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12, & 7,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5, & 0,8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Az  $y_2$ -höz tartozó célfüggvénykoefficiens tehát pozitív, ezért a számítást folytatni kell. Meg kell tehát határozni az  $y_2$ -höz tartozó oszlop elemeit, azaz

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{a}_8 = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,1 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

Ennek alapján a következő szimplex táblázat állítható össze:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$y_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_4$								0,6	1,2	-0,2	-0,2	4
$x_2$								0,1	0,2	0,3	-0,2	4
$x_1$								0,3	-0,4	-0,1	0,4	1
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-5	0,8	-4,4	-1,6	-0,6	-78

Az  $y_2$  oszlopában generáló elemet választunk:

$$\frac{4}{0,6} = 6,67; \quad \frac{4}{0,1} = 40; \quad \frac{1}{0,3} = 3,33$$

Tehát a 0,3 lesz a generáló elem. Most meghatározzuk  $D_4^{-1}$ -et, majd az újabb táblázathoz tartozó célfüggvényértékeket, megoldásvektort, stb. és a számításokat a már ismert módon mindaddig folytatjuk, amíg optimális megoldáshoz nem jutunk.

#### 10.12.4. Tervmódosítás új feltételek csatolásával

Új feltételek csatolása azt jelenti, hogy az eredeti

$$\underline{x} \equiv \underline{0}$$

$$\underline{A}_1 \underline{x} \leq \underline{b}_1$$

$$\underline{p}^T \underline{x} = \max.$$

feladatot bővítjük újabb

$$\underline{A}_2 \underline{x} = \underline{b}_2$$

$$(\leq, \geq)$$

feltételekkel.

Eddigi ismereteink alapján nem lesz nehéz megérteni, hogy az eredeti feladat optimális megoldására nyert optimális táblázat most is felhasználható a bővített feladat megoldásához.

Most azonban a feltételek számának növekedése megnöveli a bázis méretét és az eddigi

$$\underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

bázis helyett az új bázis

$$\underline{B}'_0 = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{E}_2 & \underline{0} \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ha az  $s$ -edik lépésben kaptuk az eredeti feladat optimális megoldást, akkor az új feladat szerinti bázis a következő:

$$\underline{B}'_s = \begin{bmatrix} \underline{D}_s & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{D}'_s & \underline{E}_2 & \underline{0} \\ \underline{d}_s^T & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek inverze:

$$\underline{B}'_s^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D}_s^{-1} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{D}'_s \underline{D}_s^{-1} & \underline{E}_2 & \underline{0} \\ -\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Az eredeti feladat optimális táblájából tehát  $D^{-1}$  felhasználható és előállítható a bővített feladat  $s$ -edik bázisának inverze.

A bővített tábla felírása után el tudjuk dönteni, hogy az eredeti megoldás optimális-e, vagy folytatni kell a számításokat. Ha a bővített táblában a  $b_2$  vektor koordinátái mind pozitívak, akkor a bővített feladat optimális megoldása megegyezik az eredeti feladat optimális megoldásával, tehát a számítás nem kell folytatni. Ha a  $b_2$  vektor koordinátái között negatív is található, folytatni kell a számítást a duál szimplex módszerrel. Ugyancsak folytatni kell a számítást, ha a csatolt feltételek között egyenlet is van, mivel ennek teljesülni kell.

Legyen feladatunk a következő:

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \\
 x_1 & & & & - x_5 & \leq & 20 \\
 x_1 & & + x_3 & & & \leq & 30 \\
 x_1 + x_2 & & & + x_4 & & \leq & 10 \\
 & x_2 - x_3 - x_4 & + & x_5 & & \leq & 0 \\
 \hline
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & \max.
 \end{array}$$

A feladat megoldását az alábbi optimális táblázat szolgáltatja:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	
$u_1$						1	1	1	1	60
$x_3$						0	1	0	0	30
$x_4$						0	0	1	0	10
$x_5$						0	1	1	1	40
$-z$	-16	-12	0	0	0	0	-8	-9	-5	-330

Bővítsük a feladatot az

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_1 & & + x_3 & & - x_5 & = & 6 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \geq & & & & & 40
 \end{array}$$

feltételek csatolásával.

A feltételek számának növekedésével természetesen a bázis méretei megnövekednek, vagyis az induló táblához tartozó bázis

$$\underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{O} & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{E}_2 & \underline{O} \\ \underline{O}^T & \underline{O}^T & \underline{1} \end{bmatrix}$$

Az s-edik lépéshez /amely az eredeti feladat megoldását szolgálja/ tartozó bázis

$$\underline{B}_s = \begin{bmatrix} \underline{D}_s & \underline{O} & \underline{O} \\ \underline{D}'_s \underline{D} & \underline{E}_2 & \underline{O} \\ \underline{d}_s^T & \underline{O}^T & \underline{1} \end{bmatrix}$$

Ennek inverze

$$\underline{B}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D}_s^{-1} & \underline{O} & \underline{O} \\ -\underline{D}'_s \underline{D}_s^{-1} & \underline{E}_2 & \underline{O} \\ -\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} & \underline{O}^T & \underline{1} \end{bmatrix}$$

$\underline{D}_s^{-1}$  az alapeladat optimális táblájából ismert, a  $-\underline{D}'_s \underline{D}_s^{-1}$  szorzat előállítható, így a bővített feladat s-edik bázisának inverze már adott. A bővített feladatot felírva megvizsgálhatjuk az optimalitás feltételeit.

Mivel az alapeladat optimális táblájában a

$$\underline{p}^T + \left( -\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1}, \underline{O}^T \right) \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix} = \underline{p}^T - \underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} \underline{A}$$

és a

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_s^{-1} & \underline{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

szerepelnek, csupán a

$$\begin{bmatrix} -\underline{D}'_s \underline{D}_s^{-1} & \underline{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \underline{b}_2 - \underline{D}'_s \underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

vektort kell megvizsgálni. Ha e vektornak minden eleme pozitív, akkor a bővített feladat optimuma megegyezik az alapfeladat optimumával. Ellenkező esetben folytatni kell a számítást a duál szimplex módszerrel. Ugyancsak folytatni kell a számítást, ha a bővítésként csatolt feltételek között egyenlet is szerepel.

Vizsgáljuk meg tehát az előbb megadott bővített feladat megoldását:

$$-\underline{D}'_s \underline{D}_s^{-1} = \begin{bmatrix} u_1 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 - \underline{D}'_s \underline{D}_s^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 40 \end{bmatrix}$$

A bővített feladathoz tartozó táblázat tehát az s-edik lépésben a következő:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	
$u_1$						1	1	1	1	0	0	60
$x_3$						0	1	0	0	0	0	30
$x_4$						0	0	1	0	0	0	10
$x_5$						0	1	1	1	0	0	40
* $u_5$	2	2	0	0	0	0	0	1	<u>1</u>	1	0	16
$u_6$						0	2	2	1	0	1	40
	-16	-12	0	0	0	0	-8	-9	-5	0	0	-330

Mivel a bővitményben egyenlet van, a számítást folytatni kell, s az  $*u_5$  sorból választunk generáló elemet, amelynek elemeit a táblázatba beirtuk. Ezt a

$$\underline{t}_j \quad \underline{A}$$

formulával oldottuk meg, ahol  $\underline{t}_j$  a  $D_s^{-1}$  matrixnak azt a sorát jelöli, amelyből a generáló elemet választjuk /most az  $*u_5$  sorban/, vagyis generáló elemet választunk és folytatjuk a számítást, s a következő lépésben optimális megoldáshoz jutunk, amelyhez a következő táblázat tartozik:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	
$u_1$						1	1	0	0	-1	0	44
$x_3$						0	1	0	0	0	0	30
$x_4$						0	0	1	0	0	0	10
$x_5$						0	1	0	0	-1	0	24
$u_4$						0	0	1	1	1	0	16
$u_6$						0	2	1	0	-1	1	24
-z	-6	-2	0	0	0	0	-8	-4	0	5	0	-250

## 11. FEJEZET

### Szimplex módszerrel megoldható, paraméteres, egészértékű és nemlineáris modellek

A matematikai programozási modellt általános formában /mint azzal már a 2. fejezetben találkoztunk/, a következő összevont formában fogalmazhatjuk meg:

$$\begin{aligned} z &= f(\underline{x}) = \text{extrém} \\ \phi_i(\underline{x}) &\leq b_i \quad (=, \geq) \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy ha az  $f(\underline{x})$  és  $\phi_i(\underline{x})$  lineáris formák, akkor lineáris programozással állunk szemben. A 10. fejezetben láttuk, hogy a lineáris programozási feladat a szimplex módszerek valamelyikével megoldható, ha van a feladatnak megoldása.

A gazdasági gyakorlatban elsősorban a lineáris programozási modellek kerülnek alkalmazásra, mivel viszonylag egyszerűek, könnyen kezelhetők. A linearitás feltételezése viszont a valóság lényeges egyszerűsítéséhez vezethet, hiszen a gazdasági problémák legtöbbször nem lineárisak. Valójában a gazdasági jelenségek ha nem is lineárisak, lineáris modellekkel is jól vizsgálhatók, jól közelíthetők és a lineáris modellek nem okoznak jelentősebb problémákat. Sok esetben viszont a lineáris modellek a valóság lényeges egyszerűsítését kívánják meg, ezért kénytelenek vagyunk más megoldásokhoz folyamodni.

Ebben a fejezetben a paraméteres programozással, az egészértékű programozással és a nemlineáris programozás néhány esetével fogunk foglalkozni. Az ismertetésre kerülő modellek, mint látni fogjuk, szintén megoldhatók szimplex módszerrel.

A mezőgazdasági mérnöknek nem lehet feladata, hogy matematikai programozási modelleket kézi számítással oldjon meg, eltekintve egészen egyszerű, kisebb lineáris programozási modellektől /pl. takarmányadag modellek/, amelyek viszonylag rövid idő alatt asztali számítógépekkel is megoldhatók. Különösen nem kerül sor arra, hogy bonyolultabb, egészértékű, vagy nemlineáris modelleket oldjon meg egyszerűbb eszközökkel. Ma már elérhetőek számára a nagyteljesítményű számítógépek is, amelyekkel olcsóbban és rövidebb idő alatt tud még egyszerűbb feladatokat is megoldani, illetve bonyolultabb, nagyobb feladatok megoldása ezek nélkül elképzelhetetlen.

A számítógépek programozása sem az agrármérnök feladata. Legtöbb számítóközpont megfelelő programkönyvtárral, te-

hát az agrármérnökök által összeállított modellek megoldására kész programokkal rendelkezik, vagy ha ilyen kész program nincs, akkor is célszerűbb azt kellő gyakorlattal rendelkező programozóval elkészíttetni, hiszen a programtól nagymértékben függ a feladat megoldásához szükséges gépidő, ami meghatározza a gépköltséget.

A modellek megválasztása, a gazdasági modell megszerkesztése, a feladat megfogalmazása viszont mindenképpen az agrármérnök feladata kell hogy legyen. Ennélfogva a figyelmet e kérdésekre kívánjuk irányítani, amihez viszont az eddig tanultak jó alapot nyújtanak. A számítástechnikai kérdéseket tehát a továbbiakban legfeljebb csak igen röviden tárgyaljuk. Részletesebb tárgyalásukra a rendelkezésre álló oktatási keretek sem adnak alkalmat. A számítástechnikai kérdések iránt érdeklődők számára az eddigi ismeretek alapot adnak arra, hogy azt szakkönyvekből elsajátítsák.

### 11.1. Paraméteres lineáris programozási modellek

Paraméteresnek nevezzük azokat a lineáris modelleket, amelyekben az  $A$ ,  $b$  vagy  $c^T$  elemei között függvények is szerepelnek. Ha ezek a függvények egyváltozósak és a változók első fokúak, a modellt egyparaméteres lineáris modellnek nevezzük. Hasonló értelemben beszélhetünk többparaméteres és nemlineáris modellekről.

Attól függően, hogy a modellben az  $A$ ,  $b$  vagy  $c^T$  elemei között szerepelnek függvények, a paraméteres modellek három esetét különböztetjük meg:

#### 1. Paraméteres primál célfüggvény esete

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ A x &\leq b \\ (p^T + p', t) x &= \text{extrém} \\ \alpha &\leq t \leq \beta \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy a primál célfüggvény elemei függvényeként vannak megadva. Mint ismeretes, a primális célfüggvény különböző közgazdasági tartalommal bírhat. Lehet célunk a jövedelem maximalizálása, a gépfelhasználásnak, a földterület felhasználásának /pl. takarmánytermelés programozásánál/ minimalizálása, stb. Azonban a fajlagos jövedelem változhat az árak változásának, a termelés méretének, vagy a költség-tényezőknek, stb. a függvényében. Hasonlóképpen a termelési költség és a beruházások, gép és a földterület felhasználása is függ más tényezőktől, mely függvényeket megadva, paraméteres feladathoz jutunk.

Másrészt, ha egy feladatot adott célfüggvény mellett megoldunk, felmerül a kérdés, hogy mi történik, ha a fajlagos hatékonyságok /célfüggvény koefficiensei/ megváltoznak. Milyen változás mellett nem változik az optimális megoldás, illetve a célfüggvény koefficiensek milyen változása esetén kell a megoldást /tervet, illetve programot/ módosítani, új optimumot keresni. Hasonló kérdésről van szó, amikor a maximális jövedelemre törekszünk, de tekintetbe vesszük a bizonytalansági tényezőt.

Ilyen és hasonló problémák megoldására alkalmas a modell paraméteres primál célfüggvény alkalmazása esetén.

## 2. Paraméteres technológiai matrix esete

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ (\underline{A} + \underline{A}'t) \underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{p}^T \underline{x} &= \text{extrém} \\ \alpha &\leq t \leq \beta \end{aligned}$$

Most tehát az  $\underline{A}$  technológiai matrix parametrikus. Válójában a fajlagos munkaerőszükséglet, a fajlagos gép- és anyagszükséglet, stb. is változhat, illetve függvényként adható meg. Milyen hatása van e változásoknak, meddig /milyen változások mellett/ marad egy optimális megoldás továbbra is optimális? A modellt ilyen problémák vizsgálatához nyújt segítséget.

## 3. Parametrikus duál célfüggvény esete

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} + \underline{b}'t \\ \underline{p}^T \underline{x} &= \text{extrém} \end{aligned}$$

Most a  $\underline{b}$  vektor paraméteres /a feladat duáljában, mint tudjuk, ez lesz a célfüggvény/. A mezőgazdasági gyakorlatban is például valamely tehén napi táplálóanyagszükséglete függ a tejhozamtól. Változik a munkaerőkapacitás, az öntözhető terület, a piacon értékesíthető termékmennyiség, stb. Milyen hatása van e változásoknak? Az ilyen jellegű problémák a duál célfüggvény parametrizálásával vizsgálhatók.

Mi azzal az esettel, amikor az  $\underline{A}$  technológiai matrix parametrikus, nem foglalkozunk. Ugyancsak nem foglalkozunk a nemlineáris paraméteres modellekkel és a többparaméteres modellekkel.

A paraméteres modelleket jellemzi, hogy általában egy-nél több optimális megoldásuk van a paraméter értelmezési tartományá felett. Az optimális megoldások a paraméter függvényei.

A paraméteres modellek megoldását - ha a primál célfüggvény paraméteres -, az alábbi lépésekben végezzük:

1. Előállítjuk a primálfeladat egy lehetséges bázismegoldását /primál vagy duál szimplex módszerrel/.

2. Tudjuk, hogy optimális megoldáshoz akkor jutottunk, ha a primál célfüggvény elemei nempozitívak /kivételt képeznek az  $*u$  elemei/: Ez csak akkor teljesül - mivel a primál célsor elemei lineáris függvények -, ha van olyan  $[t_0, t_1]$  intervallum, amely felett az összes függvények nempozitívak. Ekkor leolvasható a modell optimális megoldása:

$$\underline{x}_0^1(t); \quad \underline{u}_0^{1T}(t); \quad z_0^1(t); \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

ha a  $[t_0, t_1]$  intervallum része az  $[\alpha, \beta]$  intervallumnak.

3. Ha az optimalitás kritériumai nem teljesülnek, akkor újabb transzformációt, vagy transzformációkat végzünk, természetesen a  $\underline{b}$  vektorra a szűk keresztmetszetet véve figyelembe.

4. Ha egy  $[t_0, t_1]$  karakterisztikus intervallumot meghatározunk, már egyszerű feladat a továbbiak meghatározása. Az vizsgáljuk, hogy a  $t > t_1$  vagy  $t < t_0$  paraméterértékek mellett a célsor aktuális elemei közül melyik válik pozitívá a  $t$  legkisebb megváltoztatására  $[\min. (t - t_1)]$ .

Ennek a célelemnek oszlopvektorát transzformálva, az 1. fenntartása mellett vagy teljesedik 2. és akkor újabb optimális megoldást nyerünk;

$$\underline{x}_0^2(t); \quad \underline{u}_0^{2T}(t); \quad z_0^2(t); \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

vagy a 3. szerint eljárva jutunk el az optimumhoz, feltéve, hogy a  $[t_1, t_2]$  intervallum része az  $[\alpha, \beta]$  intervallumnak és a célfüggvény korlátos.

Az eljárást a 4. szerint ismételve folytatjuk, amíg az  $[\alpha, \beta]$  intervallum minden pontját be nem soroltuk valamely karakterisztikus intervallumba, vagy meg nem állapítottuk, hogy a feladatnak nincs optimális megoldása.

Legyen feladatunk az

$$\begin{array}{r} x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ \hline (4+t) + (2+3t) = \max \end{array}$$

$$-3 < t < 5$$

Elkészítjük az induló táblát:

	$x_1$	$x_2$	
$u_1$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	1	8
$u_2$	1	2	13
$-z$	$4+t$	$2+3t$	0

Az induló táblázatból a számítás csak akkor indítható, ha a célfüggvény együtthatói között pozitív is van, tehát

vagy  $4+t > 0$ , azaz  $t > -4$ ;

vagy  $2+3t > 0$ , azaz  $t > -\frac{2}{3}$ .

Válasszunk generáló elemet az  $x_1$ -hez tartozó oszlopban és végezzük el a transzformálást.

	$u_1$	$x_2$	
$x_1$	1	1	8
$u_2$	-1	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	5
$-z$	$-4-t$	$-2+2t$	$-32-8t$

$$t \geq -4; \quad t \leq 1$$

vagyis az adott megoldás optimális, ha  $-4 \leq t \leq 1$

	$u_1$	$u_2$	
$x_1$	2	-1	3
$x_2$	-1	1	5
$-z$	$-6+t$	$2-2t$	$-22-18t$

$$t \leq 6; \quad t \geq 1$$

vagyis az adott megoldás optimalis, ha  $1 \leq t \leq 6$

A feladat megoldásai tehát a következők:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{\text{opt.}}^1 &= [8, 0]; & z &= (-32 - 8t) \\ & & & -4 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_{\text{opt.}}^2 &= [3, 5]; & z &= (-22 - 18t) \\ & & & 1 \leq t \leq 6 \end{aligned}$$

Ezzel a két karakterisztikus intervallummal a  $[-3, 5]$  intervallumot teljesen lefedtük.

A megoldások tehát nem változnak a karakterisztikus intervallumon belül. A célérték viszont egy intervallumon belül lineáris függvénye  $t$ -nek. Ugyancsak egy intervallumon belül is lineáris függvénye  $t$ -nek a duálpár optimális megoldása. Példánkban:

$$\begin{aligned} \underline{u}^{(1)} &= [4 + t, 0] \\ \underline{u}^{(2)} &= [6 - t, -2 + 2t] \end{aligned}$$

Eddigi ismereteink alapján egyszerűen belátjuk azt is, hogy az

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} + \underline{b}'t \\ \underline{p}^T \underline{x} &= \text{extrém} \end{aligned}$$

feladat megoldását, /amikor a duál célfüggvény parametrikus/, duálpárjának megoldásával nyerjük, azaz

$$\begin{aligned} \underline{u} &\geq \underline{0} \\ \underline{A}^T \underline{u} &\leq \underline{p} \\ (\underline{b} + \underline{b}'t) \underline{u} &= \text{min.} \end{aligned}$$

ami viszont maximum feladatként írható fel, azaz

$$\begin{aligned} \underline{u} &\geq \underline{0} \\ -\underline{A}^T \underline{u} &\leq -\underline{p} \end{aligned}$$

$$(-\underline{b} - \underline{b}'t) \underline{u} = \text{max.}$$

amelyet az eddig tanultak felhasználásával már meg tudunk oldani.

## 11.2. Egészértékű /integer/ programozás

A gazdasági jelenségek lehetnek folytonos és diszkrét jellegűek. Az eddigiekben ismertetésre került programozási modellekben a változókra vonatkozólag kizárólag az volt a kikötésünk, hogy azok csak nemnegatív értéket vehetnek fel. Ennélfogva megengedtük, hogy a változók nemnegatív tört értékeket is felvegyenek, vagyis azokat folytonos változóknak tekintettük. A gazdasági programozás során azonban nem mindig engedhető meg a változók folytonos értéke, hanem gyakran az is kívánalomként merül fel, hogy a változók csak egész értéket vehetnek fel.

Gondoljunk csak arra, amikor a termelési szerkezetet és a termelési forrásokat egyidejűleg, egymással szoros kapcsolatban kívánjuk optimalizálni. Ilyenkor a gépsükségletet /gépparkot/ is optimalizáljuk. Nem javasolhatjuk azonban, hogy a vállalat valamely géptípusból például 22,35 db-ot szerezzen be, hanem vagy 22 vagy 23 darab gép beszerzését javasolhatjuk. A megoldásként kapott eredmény utólagos fel- vagy lefelé történő kerekítése jelentősen ronthatja az eredményt. Megoldhatjuk azonban a feladatot, ha eleve előírjuk, hogy ezek a változók kizárólag egész értéket vehetnek fel. Ilyenkor az optimumot eleve úgy állítjuk elő, hogy ennek az előírásnak eleget teszünk.

Hasonlóképpen merülhet fel, hogy az állattenyésztési változókra előírjuk az egészértékűséget. A korszerű állattenyésztési telepek ugyanis meghatározott méretekre készülnek. Ha ezek között választhatunk, akkor előírjuk, hogy azok valamelyiket létesíthetjük, vagy nem létesíthetjük, de létesítésük esetén azokat az adott méret szerint kell megépíteni. Ilyenkor általában a változó értéke csak 0 vagy 1 lehet, azaz 0 - 1 értékű változóról van szó.

Ha a modellben szereplő valamennyi változóra előírjuk az egészértékűséget, akkor tiszta esetről, vagyis tiszta diszkrét feladatról beszélünk, ha viszont csak a változók egy része egészértékű, akkor a feladatot vegyes feladatnak, vagy vegyes egészértékű feladatnak nevezzük.

A tiszta diszkrét feladatot

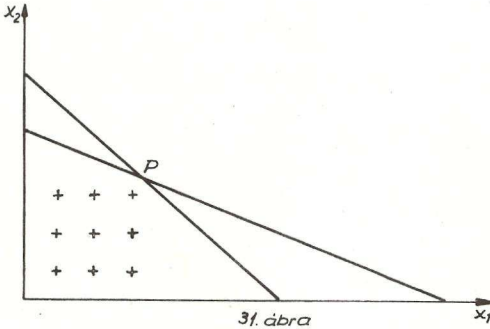
$$\max \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{I}_n^+, \mathbf{A} \mathbf{y} \leq \mathbf{b} \right\}$$

formában, a vegyes egészértékű feladatot pedig a

$$\max \left\{ \mathbf{p}_1^T \mathbf{x} + \mathbf{p}_2^T \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{I}_{n_1}^+, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{n_2}^+, \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y} \leq \mathbf{b} \right\}$$

általános formában írhatjuk le. /Természetesen max. helyett min. is szerepelhet, ha minimumfeladatról van szó, illetve mint tudjuk, a minimumfeladat átalakítható maximumfeladattá./

Az első esetben a lehetséges megoldások halmazát  $I$  az  $n$  dimenziós euklidészi tér nem negatív rácspontjaiból konstruált  $\underline{y}$  vektorok adják, azaz azok a pontok, amelyekhez a változók egész értékű koordinátái tartoznak, és természetesen kielégítik az  $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$  feltételeket és a célfüggvényre vonatkozó előírásunkat, az alábbi ábra szerint:



3f. ábra  
Egészértékű megoldások (rácspontok)

Az ábrán megfigyelhetjük, hogy ha  $P$  a folytonos modell optimális megoldása, nem optimális megoldása viszont az egészértékű modellnek, mert nem rácsponthoz, azaz a  $P$  ponthoz a változók nem egészértéke tartozik. Olyan megoldást kell tehát keresnünk, amelyben a változók egészértékűsége teljesül, de természetesen a lehetséges legnagyobb

/maximum/ célfüggvényérték mellett.

A második esetben vegyes egészértékű feladatról van szó. Most a lehetséges megoldások  $L$  halmazát az  $n_1$  dimenziós euklidészi tér azon nem-negatív  $\underline{x}$  vektoraiból, és az  $n_2$  dimenziós euklidészi tér azon nem-negatív  $\underline{y}$  rácspontjaiból konstruált  $(\underline{x}, \underline{y})$  vektorpárok alkotják, amelyek kielégítik az  $\underline{A}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \underline{b}$  relációkat. Ezen az  $L$  halmazon keressük a maximumát az adott  $f(\underline{x}, \underline{y})$  célfüggvénynek, amelyről feltesszük, hogy korlátos az  $L$  felett.

Az egészértékű feladatot megfogalmazhatjuk egyszerűen úgy is, hogy az

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{p}^T \underline{x} &= \max \end{aligned}$$

feladatot adjuk meg, de előírjuk, hogy az  $\underline{x}$  vektor egészértékű koordinátáira kell a feladatot megoldani. Az  $x_i$  változók egészértékűségét  $[x_i]$  szimbólummal jelöljük. /Használó értelemben járunk el vegyes feladat esetén, amikor a változóknak csak egy részére írjuk elő az egészértékűséget. A továbbiakban általában csak a tiszta esettel foglalkozunk, hiszen ennek ismeretében a vegyes feladat is megoldható./

Hogyan oldjuk meg a feladatot? A megoldás többféle módszerrel is lehetséges. Arra nincs lehetőségünk, hogy valamilyeni módszerrel részletesebben foglalkozzunk.

Ha az előbbi ábrát tekintjük, látjuk, hogy a folytonos megoldás optimuma  $P$  nem rácspont. A halmazt szűkíteni kell. Ezt úgy végezzük, hogy alkalmas módon megválasztott új korlátozó feltételek bevezetésével az eredeti halmazból lemetszünk egy bizonyos részt. E metszéseket mindaddig folytatjuk, amíg egészértékű megoldáshoz nem jutunk. Ezt az eljárást metszési módszernek nevezik, amelyet Gomory dolgozott ki.

A feladatot gyakorlatilag úgy oldjuk meg, hogy az egészértékű megoldás érdekében a feladathoz egy segédfüggvényt csatolunk, azaz

$$z = \sum (x_j - [x_j]) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

és az optimális megoldást az  $[x_j]$  értékekre a

$$z = \sum (x_j - [x_j]) = \min.$$

feltételes szélső értékkel keressük.

A feladat megoldását szimplex módszerrel a Gomory által kidolgozott eljárás szerint egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be.

Legyen feladatunk a következő:

$$\begin{array}{rcll} \underline{x} \geq \underline{0} & \text{és} & [x_j] & \\ x_1 & & + 2x_4 & \leq 16 \\ & 2x_2 - x_3 & + 3x_4 & \leq 20 \\ x_1 & & + 4x_3 & + x_4 \leq 8 \\ \hline 3x_1 + x_2 + x_3 & + 5x_4 & & = \max. \end{array}$$

Tudjuk, hogy  $[x_j]$  az  $x_j$  változó egészértékét jelöli. /A megoldásra a Gomory-féle eljárást fogjuk alkalmazni, előtte azonban néhány fogalmat kell megismernünk/:

Egészrész függvény /entier-függvény/ /ejtsd: antyie-függvény/. Valamely valós szám egész részén azt az  $[a]$  szimbólummal jelölt /antyie "a"/ maximális nagyságu számot értjük, amely eleget tesz az

$$[a] \leq a$$

kikötésnek is.

P1.:

$$\begin{aligned}
[5] &= 5 \\
[-4] &= -4 \\
[0,2] &= 0 \\
[-0,2] &= -1 \\
[4/3] &= 1 \\
[-4/3] &= -2
\end{aligned}$$

Az "a" valós szám tört részén az

$$a - [a]$$

kifejezés által definiált számot értjük.

Ha az így nyert tört részt "t"-vel jelöljük, erre nézve az adott definíció alapján feltétlenül teljesül a

$$0 \leq t < 1$$

reláció.

Most bevezetjük a Gomory-féle metszet fogalmát.

Az adott

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n \leq b$$

egyenlőtlenséghez rendelt Gomory-féle metszeten a

$$t_1 y_1 + t_2 y_2 + \dots + t_n y_n \geq t$$

egyenlőtlenséget értjük, amelyekben a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  nem-negatív skalárok, az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  együtthatók tört részeit ( $a - [a]$ ) jelentik, a  $t$  pedig a  $b$  tört részét ( $b - [b]$ ).

Oldjuk meg tehát az előbbi feladatot.

A feladatot első lépésben /szokás mondani I. interáció-nak is/ megoldjuk folytonos modellként, a következők szerint:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$u_1$	1	0	0	2	16
$u_2$	0	2	-1	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	20
$u_3$	1	0	4	1	8
-z	3	1	1	5	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_2$	
$u_1$	-1	-4/3	-2/3	-2/3	8/3
$x_4$	0	2/3	-1/3	1/3	20/3
$u_3$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	-2/3	13/3	-1/3	4/3
$-z$	3	-7/3	8/3	-5/3	-100/3

	$u_3$	$x_2$	$x_3$	$u_2$	
$u_1$	-1	-2/3	-11/3	-1/3	4/3
$x_4$	0	2/3	-1/3	1/3	20/3
$x_1$	1	-2/3	13/3	-1/3	4/3
$-z$	-3	-1/3	-31/3	-2/3	$-37 \frac{1}{3}$

Amennyiben most  $x_1$ -nek nem kellene egészértékűnek lenni, megkaptuk volna az optimális megoldást. Ugyancsak optimális lenne a megoldásunk, ha minden  $x_i$  érték egészértékű volna. Mivel azonban  $x_1$  és  $x_4$  nem egészértékű, folytatni kell a számolást.

Tekintsük először az  $x_1$  változót.

Képezzük az  $x_1$ -hez rendelt Gomory-féle feltételt az utolsó simplex táblázat  $x_1$ -hez tartozó sorából, azaz

$$(1 - [1]) u_3 + \left(-\frac{2}{3} - \left[\frac{2}{3}\right]\right) x_2 + \left(\frac{13}{3} - \left[\frac{13}{3}\right]\right) x_3 + \left(-\frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{3}\right]\right) u_2 \geq \frac{4}{3} - \left[\frac{4}{3}\right]$$

azaz az  $x_1$  sorban lévő együtthatók és egészértékeik közötti különbségnek a hozzájuk tartozó változókkal alkotott szorzatát képezzük, majd ezek összegét, és azt keressük, hogy e ségedcélfüggvény értéke ne haladja meg az  $x_i - [x_i]$  értékeket.

/Vagyis tulajdonképpen a  $z' = \Sigma(x_i - [x_i]) = \min.$  feltételes szélső értékkel keressük az optimális megoldást./

Igy tehát kapjuk, hogy

$$(1 - 1) u_3 + \left(-\frac{2}{3} + 1\right) x_2 + \left(\frac{13}{3} - 4\right) x_3 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right) u_2 \geq \frac{4}{3} - 1$$

vagyis

$$0 \cdot u_3 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 + \frac{2}{3} u_2 \geq \frac{1}{3}$$

ezt -1-gyel beszorozva, a reláció iránya megváltoztatható, tehát

$$0 \cdot u_3 - \frac{1}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 - \frac{2}{3} u_2 \leq -\frac{1}{3}$$

Az utolsó szimplex táblázatba iktassunk be egy sort, -jelöljük ezt  $\xi_1$ -gyel /kszi/. Tehát

	$u_3$	$x_2$	$x_3$	$u_2$	b
$u_1$	-1	-2/3	-11/3	-1/3	4/3
$x_4$	0	2/3	-1/3	1/3	20/3
$x_1$	1	-2/3	13/3	-1/3	4/3
$\xi_1$	0	-1/3	-1/3	-2/3	-1/3
-z	-3	-1/3	-31/3	-2/3	-37 $\frac{1}{3}$

A duál szimplex módszerrel számolunk tovább. Következő táblázatunk:

	$u_3$	$\xi_1$	$x_3$	$x_2$	b
$u_1$	-1	-2	-3	1	2
$x_4$	0	2	-1	-1	6
$x_1$	1	-2	5	1	2
$x_2$	0	-3	1	2	1
-z	-3	-1	-10	0	-37

Tehát optimális táblázathoz jutottunk, a feladatot megoldottuk. A megoldás a táblázatból leolvasható. Látjuk, hogy a változókra egészértékű megoldást nyertünk.

Természetesen, a Gomory-féle eljárást mindaddig folytatjuk, ameddig az egészértékűség feltétele nem teljesül /ha van egyáltalán megoldás/.

#### Megjegyzés:

A probléma bonyolultabb vegyes feladat esetén. Általában a duális szimplex módszert célszerű alkalmazni. A Gomory-féle metszési módszer gyakorlati alkalmazásánál számítástechnikai nehézségek léphetnek fel, s nagyméretű feladatok megoldásánál kerekítési hibák miatt igen megbízhatatlan eredményre vezethet. Ezért az utóbbi időkben előtérbe kerültek a kombinatorikus módszerek. Ezeknél döntő szerepet játszanak bizonyos kombinatorikus megfontolások.

Néhány szót a kombinatorikus módszerekről:

Előnyük:

a/ Nemcsak lineáris típusu feladatok megoldására alkalmasak, hanem egyéb, nemfolytonos problémák megoldására is.

b/ Kerekitési hibákra nem reagálnak olyan érzékenyen, mint a metszési módszer.

c/ A kombinatorikus módszerek előnyei leginkább a 0 - 1 értékű változókkal való számolásnál domborodnak ki. Ez nem jelent lényeges megszorítást, hiszen bármely diszkrét változó vizsgálata visszavezethető 0 - 1 értékű változókra, pl. géptechnológia 1, 2, 3, 4, stb. változatban, illetve a változók száma csökkenthető, ha azt a bináris számrendszerben írjuk fel.

Legyen feladat a következő: /Hátizsák probléma/

Egy gyalogturázó n különböző tárgyból kívánja felszerelését kiválasztani, úgy, hogy a lehető legnagyobb értéket vihesse magával. Korlátozó feltétel csupán az összsúly /amit képes elvinni/.

A tárgyak nem darabolhatók.

Feladat

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \geq 0 \quad y_j = [y_j]$$

$$\text{Súly } 16y_1 + 15y_2 + 13y_3 + 9y_4 + 5y_5 \leq 25 \text{ kg}$$

---

$$\text{Érték } 20y_1 + 15y_2 + 8y_3 + 10y_4 + 8y_5 \longrightarrow \text{max.}$$

A feladat értelmében /lexikografikus sorrendben felírva/ az alábbi lehetőségek adódnak /az ötféle változó közül melyik szerepel vagy nem szerepel a csomagban/:

[00000]	(0)	[10000]	(20)
[00001]	(8)	[10001]	(28)
[00010]	(10)	[10010]	(30)
[00011]	(18)	[10011]	
[00100]	(8)	[10100]	
[00101]	(16)	[10101]	
[00110]	(18)	[10110]	
[00111]		[10111]	
[01000]	(15)	[11000]	
[01001]	(23)	[11001]	
[01010]	(25)	[11010]	

[01011]	[11011]
[01100]	[11100]
[01101]	[11101]
[01110]	[11110]
[01111]	[11111]

Az elfogadható megoldásokat /amelyek a súlykorlátnak eleget tesznek/ aláhúztuk, s kiszámítottuk és mellé irtuk a hozzá tartozó célfüggvény értékeket.

#### Tehát

Összesen 32 féle megoldás közül 13 féle megoldást találunk, amely a feltételeknek /súlykorlátnak/ eleget tesz.

A legnagyobb célfüggvény érték 30 az 1,0,0,1,0 vektornál található, tehát az első és negyedik tárgyat célszerű a háttizsákba pakolni, így a súly  $16 + 9 = 25$  kg és az elszállítható érték

$$20 + 10 = 30$$

Ez az eljárás azonban a gyakorlatban nem alkalmazható. Ugyanis, ha a változók száma 50 /s ez 0 - 1 értékű feladatoknál nem is nagy feladat/, az összes lehetőségek száma  $10^{15}$ , ami már igen nagy szám. Ha egy nagyteljesítményű számolóberendezés másodpercenként 1000 megoldást tudna számbavenni, akkor is több, mint 25 000 évig tartana a vizsgálat.

Ezért közvetett leszámplálást szoktak alkalmazni. Itt a lexikografikus eljárás helyett egy irányított gráf, pontosabban egy irányított fa segítségével végezzük el a rendezést. Ez lehetővé tesz alkalmas kitérőket, leágaztatásokat.

A módszer továbbfejlesztéseként tekinthető a szétválasztás és korlátozás módszere. /Ezeket Kerekó B. Optimumszámítás c. könyvében /Közg. és Jogi Könyvkiadó, 1972./ az érdeklődők megtalálják./

Vegyes feladatok megoldhatók particionálással is, amelyről a fenti könyvből szintén tájékozódhatunk.

Gyakorlati számítások során, ha vegyes feladattal állunk szemben, és az egészértékű változók száma nem nagy, vagy tiszta egészértékű feladatnál nem nagyszámú változó esetén alkalmazható a következő megoldás:

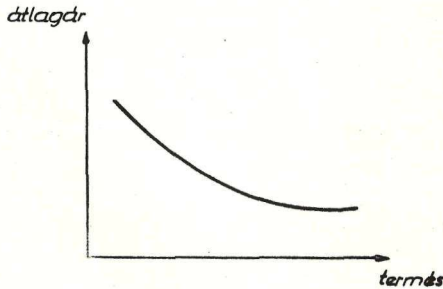
a/ Megoldjuk a feladatot folytonos problémaként

b/ A kapott eredmény környékén egészértékű megoldásozrotat számolunk. Ilyenkor a változók egészértékűségét egyetlen letekekkel írjuk elő a folytonos megoldás környékén. Ezt az eljárást általában akkor célszerű alkalmazni, ha az adott számítógéphez egészértékű megoldásprogrammal még nem rendelkezünk.

### 11.3. Nemlineáris programozás

Eddigi vizsgálataink során mind a feltételeket, mind pedig a célfüggvényt lineáris formában adtuk meg, vagyis azzal a feltételezéssel éltünk, hogy mind a feltételek, mind a célfüggvény a változók lineáris függvénye. A lineáris kapcsolatok feltételezése viszont már önmagában is a valóságos gazdasági problémák leegyszerűsítését jelenti. A gazdasági problémák általában sokkal bonyolultabbak és gyakran nem tudjuk azokat lineáris modellel jellemezni.

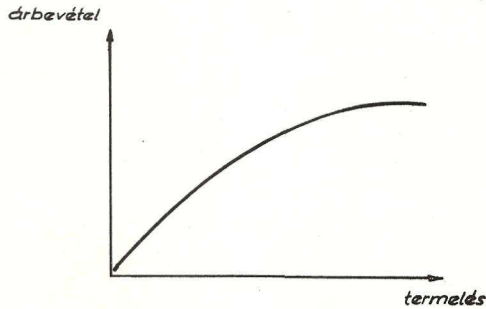
Gondoljunk csak egyes termékek árának alakulására. A primőr zöldségfélék ára kezdetben, - amikor még azokból kevés található a piacon - igen magas, majd később - ahogyan a piaci kínálat növekszik - egyre csökken. A paradicsom ára kezdetben - amikor még csak üvegházi paradicsom található a piacon - 80-100 Ft is lehet kilogrammonként, majd az árak állandó csökkenése tapasztalható /esetenként lehetséges természetesen hullámvás is/, s végül 2-5 Ft-ra is lecsökken, függően a terméstől. Később - szezon végén - újabb emelkedés tapasztalható. Ha például a paradicsom - vagy hasonló termékek - évi ártermelését és átlagárát összehasonlítanánk, azt tapasztalnánk, hogy az átlagár nagymértékben függ a termelt mennyiségtől; amikor kevesebb terem, akkor drágább, bővebb termés esetén olcsóbb. Az éveket a termésmennyiség szerint sorba rendezve, tendenciájában az alábbi összefüggést figyelhetnénk meg /32. ábra/.



32. ábra

Az áralakulás lehetséges tendenciája

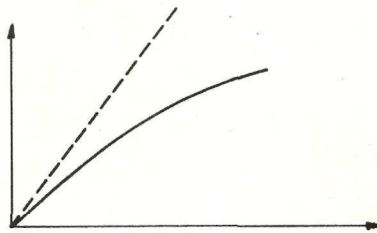
Az egységár /vagy átlagár/ csökkenése következtében nyilvánvaló, hogy a paradicsomtermelésből eredő árbevétel sem arányos a termeléssel, vagyis a termésmennyiség és az árbevétel között nem lineáris a kapcsolat, hanem csökkenő, ugynevezett depresszív összefüggés a jellemző, amit a 33. ábra szemléltet:



33. ábra

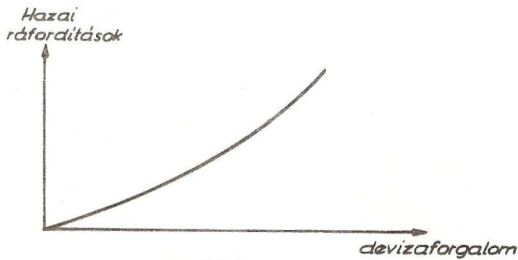
Az árbevétel lehetséges tendenciája

De a termelési költségek sem arányosan változnak a termelt termékmennyiséggel. Például amíg nem szükséges új beruházás, addig a termelés mennyiségének növekedésével a termésméret növekmény költsége csökkenő, ezért az összes költség növekedése lassabb ütemű a termelés növekedésénél, azaz ilyenkor költségdegresszióval találkozunk, a 34. ábra szerint.



34. ábra  
Költségdegresszió

Előfordulhat ennek az ellenkezője is. Ha például az export növelésére törekszünk - éppen a kínálat növekedésének hatásaként előálló árcsökkenés miatt - a devizaszerzés növekedése a hazai ráfordítás gyorsuló növekedését igényli a 35. ábra szerint:



35. ábra  
Növekvő költségek

Nem nehéz belátni, hogy az árbevétel és a költségfüggvény, valamint más tényezők hatásaként a termelés és a jövedelem között sem lineáris a kapcsolat. De a munkerőfelhasználás, a gépfelhasználás és az anyagfelhasználás sem arányos a termelés volumenével. E kérdésekről később - a termelési függvények megismerésekor - részletesebben lesz szó.

A gazdasági vizsgálatok során tehát általában nemlineáris összefüggésekkel állunk szemben.

Ha a matematikai programozást az

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1 / \underline{x} / \leq 0 \\ \phi_2 / \underline{x} / \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \phi_m / \underline{x} / \leq 0 \end{array} \right\} ; \quad f / \underline{x} / = \max.$$

általános formában fogalmazzuk meg, ez a felírásmód már nem jelent semmi megszorítást. Mivel nem adtuk meg a konkrét függvényt, csak a függvénykapcsolatot jeleztük, ez a modell éppúgy jelenthet lineáris programozási modellt, mint valamilyen nemlineáris programozási modellt.

Ez a formula lényegében azonos a 2.1. pontban adott megfogalmazással, hiszen a jobb oldalon esetleg fellépő nemzérus konstansokat beleolvaszthatjuk az  $\phi_i$  függvényekbe, egy  $\phi_i / \underline{x} / \neq 0$  feltételt helyettesíthetők egy  $\phi_i / \underline{x} / \leq 0$  és  $-\phi_i / \underline{x} / \leq 0$  feltétel párral, és -1-gyel történő szorzás az  $\phi_i / \underline{x} / \geq 0$ , illetve  $f / \underline{x} / = \min.$  alakú feltételt  $-\phi_i / \underline{x} / \leq 0$ , illetve  $f / \underline{x} / = \max.$  alakú feltételbe viszi át, az  $\underline{x} \geq 0$  feltételek viszont beleérthetők az  $\phi_i / \underline{x} / \leq 0$  feltételek közé.

Mielőtt néhány nemlineáris programozási feladatot konkrétan megismerünk, az előbbieket ellenére is célszerű kiemelni a lineáris programozás jelentőségét a következők miatt:

- a/ Elméletileg a lineáris programozás van leginkább kidolgozva.
- b/ A különféle nemlineáris programozási feladatok megoldására kidolgozott módszerek legtöbbje valamilyen formában szintén a lineáris programozást használja.
- c/ Elméleti kidolgozása és egyszerű kezelhetősége miatt a gyakorlatban leginkább a lineáris programozás kerül alkalmazásra.

### 11.3.1. Konvex és konkáv programozás

Emlékezzünk, hogy a 6.3.9. pontban a vektorok és mátrixok lineáris kombinációival kapcsolatban azt mondtuk, hogy ha a skalárszorozók összege egy, akkor konvex lineáris kombinációról beszélünk.

Az  $x_1 \in E_n$  és  $x_2 \in E_n$  pontok által meghatározott szakaszon tehát azt az  $\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2$  szimbólummal jelölt szakaszt értjük, amely tartalmazza az  $x_1$  és az  $x_2$  összes konvex lineáris kombinációt. Ezt szimbólikusan a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2 = \{ x \mid x = k_1 x_1 + k_2 x_2, k_1 \geq 0$$

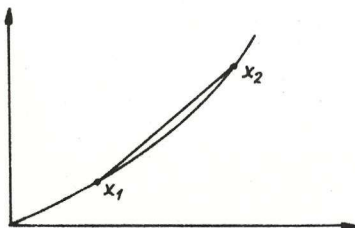
$$k_2 \geq 0, k_1 + k_2 = 1 \} .$$

Egy  $f(x)$  függvényt konvexnek nevezünk, ha tetszőleges  $x_1$  és  $x_2$  esetén

$$\frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{2} \leq \frac{f\left(\frac{x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_2}{2}\right)}{2}$$

teljesül.

Ez egydimenziós függvény esetén azt jelenti, hogy a függvénynek megfelelő görbe két tetszőleges pontját összekötő egyenes szakasz felező pontja a görbe felett van, mint ezt a 36. ábra szemlélteti.



36. ábra  
Konvex függvény

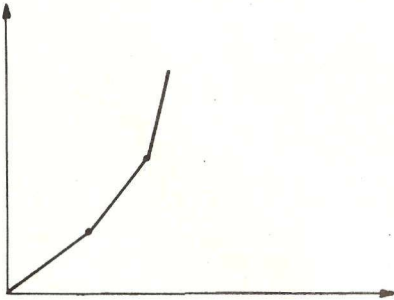
Természetesen ugyanez igaz a két tetszőleges pontot összekötő teljes szakaszra is /ami az ábrából is látható/.

Ha a függvény bármely két pontját véve fel, mindig a

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{2} < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

szigorú egyenlőtlenség érvényesül, szigorúan konvex függvényről beszélünk. Ugyanakkor a 37. ábrán látható szakaszonként lineáris függvény konvex, de nem szigorúan konvex, hiszen a függvényen olyan pontok is felvehetők, ahol a

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

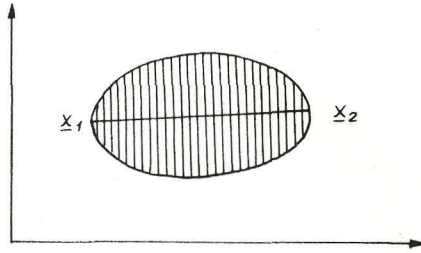


37. ábra  
Szakaszonként lineáris függvény

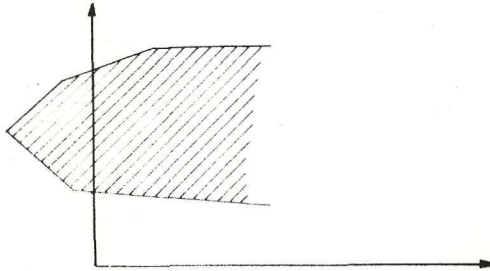
Egy függvény /szigorúan/ konkáv, ha negatívja /szigorúan/ konvex. A lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv.

Az  $\phi_i(x) \leq 0$  feltételekben szereplő  $\phi_i(x)$  függvényekről konvex, vagy konkáv programozási feladat esetében feltételezzük, hogy konvex függvények. Ez a feltevés biztosítja, hogy a lehetséges programok  $K$  halmaza konvex halmaz. Ez elsősorban a matematikai kezelhetőség érdekében fontos, de gyakorlati szempontból nem jelent megszorítást. Ha az  $\phi_i(x)$  függvények lineárisak, abban az esetben a lehetséges programok halmaza konvex poliédrikus halmaz, ami kétváltozós esetben sokszöget jelent /lásd a 3. fejezet 12-13. ábráit/.

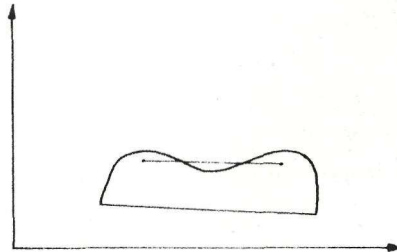
A 38-40. ábrák a korlátos, a nem korlátos konvex, valamint a nemkonvex halmazokra mutatnak be példát.



38. ábra  
Korlátos konvex halmaz



39. ábra  
Nem korlátos konvex halmaz



40. ábra  
Nemkonvex halmaz

A lehetséges programok halmazának konvexitására vonatkozó állítás könnyen belátható. Ha ugyanis  $x_1$  és  $x_2$ -re

$$\phi_1/x_1/ \leq 0, \quad \phi_2/x_1/ \leq 0, \quad \dots, \quad \phi_m/x_1/ \leq 0$$

és a

$$\phi_1/x_2/ \leq 0, \quad \phi_2/x_2/ \leq 0, \quad \dots, \quad \phi_m/x_2/ \leq 0$$

teljesül, akkor

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \text{ -re az } \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$$

függvények konvexitása folytán

$$\phi_i \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \frac{\phi_i x_1 + \phi_i x_2}{2} \leq \frac{0 + 0}{2} = 0$$

vagyis az  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  is lehetséges program.

Konvex programozási feladatban az  $f/x/$  célfüggvény konvex, vagyis feladat a konvex függvény maximalizálása, amivel viszont egyenértékű a konkáv függvény minimalizálása. Hasonlóképpen konkáv feladatban konkáv célfüggvényt maximalizálunk, vagy ezzel egyenértékű a konvex célfüggvény minimalizálása.

Amikor lineáris programozási feladatot szimplex módszerrel oldunk meg, úgy járunk el, hogy a feltételek által meghatározott konvex poliéder szomszédos csúcspontjain haladunk végig oly módon, hogy mindig a célfüggvény szempontjából jobb, szomszédos csúcsot keressük. Ha ilyet már nem találunk, az adott csúcsponthoz tartozó program optimális program. /A lehetséges programok között nem találunk olyat, amely a kérdéses programnál jobb volna a célfüggvény szempontjából./ Az optimum tehát lineáris programozás esetén mindig csúcspontban van, mégpedig olyan csúcspontban, amelynél a szomszédos csúcspontok a célfüggvény szempontjából nem jobbak. Ebben az esetben tehát az a program, amely környezetéhez képest optimális /lokális optimum/, az összes lehetséges programok között is optimális /globális optimum/. Elegendő volt tehát az optimum keresése során a poliéder határán maradni.

Általános esetben konvex halmazoknál csúcspont helyett extrémális pontokat vizsgálunk. A konvex halmaz extrémális pontján értjük az olyan pontot, amely nem belső pontja egyetlen, a halmaz pontjaiból álló szakasznak sem. Ilyenek a konvex sokszög csúcspontjai, a kör kerületi pontjai, stb.

Egy adott konvex halmaz tetszőleges pontja előállítható extrémális pontjainak konvex lineáris kombinációjaként. E szerint egy tetszőleges  $x$  ponthoz felvehető olyan  $x_1, x_2, \dots, x_p$  extrémális pontok és nemnegatív  $k_1, k_2, \dots, k_p$  ( $k_1 + k_2 + \dots + k_p = 1$ ) skalárok, hogy

$$\underline{x} = k_1 \underline{x}_1 + k_2 \underline{x}_2 + \dots + k_p \underline{x}_p$$

teljesüljön. Például a 38. ábrán.

$$\underline{x} = \frac{1}{2} \underline{x}_1 + \frac{1}{2} \underline{x}_2$$

Egyszerűen lehet bizonyítani azt is, hogy a konvex  $f/\underline{x}$  célfüggvény esetén az optimum extrémális pontban is elérhető. Ha ugyanis  $\underline{x}$  optimális program,  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_p$  a lehetséges programok konvex halmazának extrémális pontjai és  $k_1, k_2, \dots, k_p$  nemnegatív skalárok, akkor

$$\underline{x} = k_1 \underline{x}_1 + k_2 \underline{x}_2 + \dots + k_p \underline{x}_p$$

és

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = 1$$

és a konvexitás definíciójából adódik, hogy

$$f/\underline{x} = f/k_1 \underline{x}_1 + k_2 \underline{x}_2 + \dots + k_p \underline{x}_p \leq k_1 f/\underline{x}_1 + k_2 f/\underline{x}_2 + \dots + k_p f/\underline{x}_p$$

azaz nemcsak a görbe két tetszőleges pontja által meghatározott szakasz, hanem a görbe tetszőleges pontjai által meghatározott sokszög is teljes egészében a görbe felett fekszik.

Ha viszont az  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_p$  extrémális pontoknak megfelelő célfüggvényértékek kisebbek lennének, mint  $f/\underline{x}$ , vagyis  $f/\underline{x}_1 < f/\underline{x}, f/\underline{x}_2 < f/\underline{x}, \dots, f/\underline{x}_p < f/\underline{x}$ , akkor az előbbi egyenlőtlenségből következne, hogy

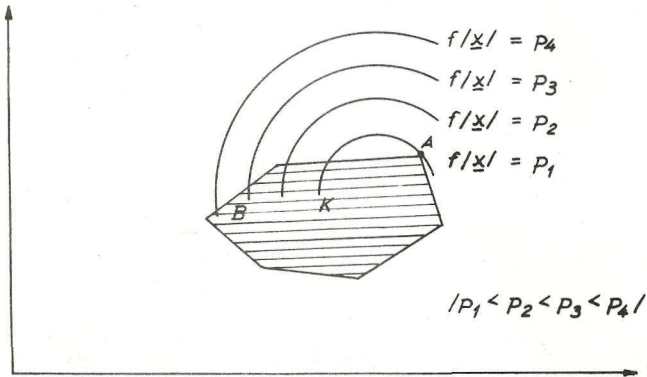
$$f/\underline{x} < k_1 f/\underline{x}_1 + k_2 f/\underline{x}_2 + \dots + k_p f/\underline{x}_p <$$

$$< k_1 f/\underline{x} + k_2 f/\underline{x} + \dots + k_p f/\underline{x} = f/\underline{x}$$

ami ellentmondás.

Hasonló okoskodással lehet belátni, hogy konkáv célfüggvény esetén a lokális optimumot szolgáltató program egyszerűen globális optimum is /és szigorúan konkáv célfüggvény esetén csak egy optimális program létezik/.

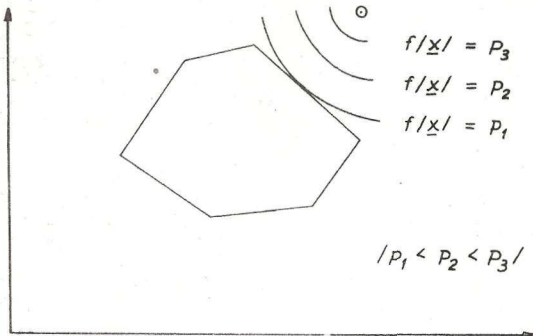
A 41. ábrán  $K$  konvex sokszög adja a lehetséges programok halmazát, s keressük az  $f(x)$  konvex függvény maximumát adó programot. A célfüggvény nívóvonalait megrajzolva, látjuk, hogy az  $A$  pontban egy lokális optimummal rendelkezünk, /a lokális optimum nem feltétlenül jelent globális optimumot/, azonban a globális optimumot a  $B$  pontban találjuk /41. ábra/.



41. ábra

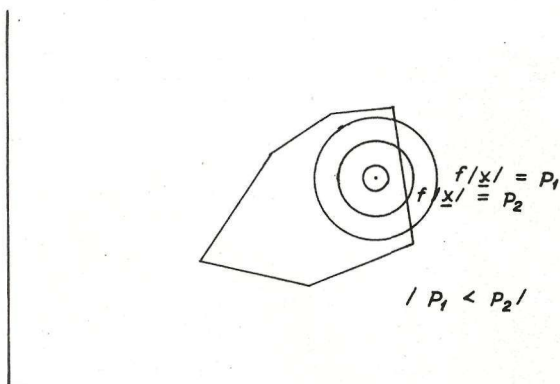
Konvex programozás

A 42. és 43. ábra a konkáv maximalizálás két esetét mutatja be. Egyik esetben a célfüggvény abszolút maximumát /ha semmilyen korlátozó feltétel nem volna/ a lehetséges programok halmazán kívül találjuk. Ekkor az optimum a lehetséges programokat tartalmazó konvex sokszög határán van, ha nem is feltétlenül csúcspontban. A másik esetben a célfüggvény abszolút maximumát belső pontban találjuk. Ilyenkor az optimum is belső pontban van.



42. ábra

Konkáv programozás



43. ábra

Konkv programozás

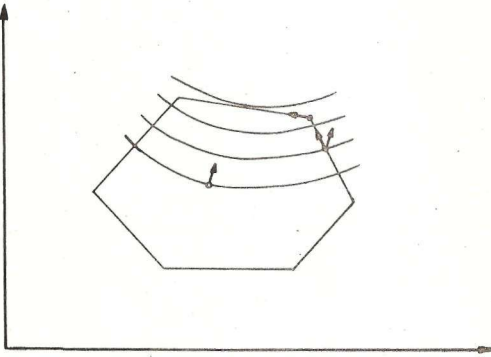
A gyakorlatban általában lineáris feltételek mellett konvex célfüggvény maximalizálására, vagy konkv célfüggvény minimalizálására kerül sor.

Ilyen feladatok megoldásának egzakt módszere, amikor meghatározzuk a lineáris feltételek által meghatározott konvex poliéder összes csúcspontjait, majd kiszámítva az ezekhez tartozó célfüggvényértékeket, kiválasztjuk azt a csúcspontot, amelyhez a legnagyobb célfüggvényérték tartozik. Ez lesz az optimális program. Mivel azonban viszonylag kevés feltétel mellett is nagyon sok a csúcspontok száma, ez az eljárás nehézkes.

A gyakorlatban inkább azt az eljárást követik, hogy véletlenszerűen választanak egy csúcspontot. Az ehhez tartozó szimplex táblázat alapján transzformációkat végeznek /hasonlóan, mint a lineáris programozásnál, áttérés szomszédos csúcstra/, mindaddig, amíg a célfüggvény értéke javítható. Így egy lokális optimumhoz jutunk. Ezt a folyamatot többször megismételve, a kapott lokális optimumok közül kiválasztjuk a legjobbat, s ezt a programot optimálisnak fogadjuk el. Hogy a folyamatot hányszor ismételjük meg, az függ a feltételek és a változók számától.

A konkv maximalizálási feladatra kidolgozott általános módszerek általában megközelítő módszerek. /Kivéve a kvadratikusság esetén, amelyre véges eljárások is vannak./ E módszerek egy részénél egy lehetséges programból indulunk ki, majd keresünk egy olyan irányt, amely mentén haladva a program javítható, azaz a célfüggvény értéke növelhető. Egy ilyen irány mentén addig a pontig megyünk, ameddig

a célfüggvény értéke növekszik, vagy amelyen túl elhagynánk a lehetséges programok halmazát. Ebből a pontból ismét keresünk egy olyan irányt, amely irányban haladva a célfüggvény növelhető. Ezt addig folytatjuk, amíg találunk olyan irányt, amely mentén a célfüggvény értéke növelhető. Ha ilyen nincs, az adott pont optimális megoldás. A továbbhaladás irányának meghatározása vagy egy lineáris programozási feladat megoldását igényli, vagy alkalmas szimplex táblából olvasható le. A módszert a hatékony irányok módszerének nevezik. Szemléltetését a 43. ábrán mutatjuk be.



43. ábra

Hatékony irányok módszere

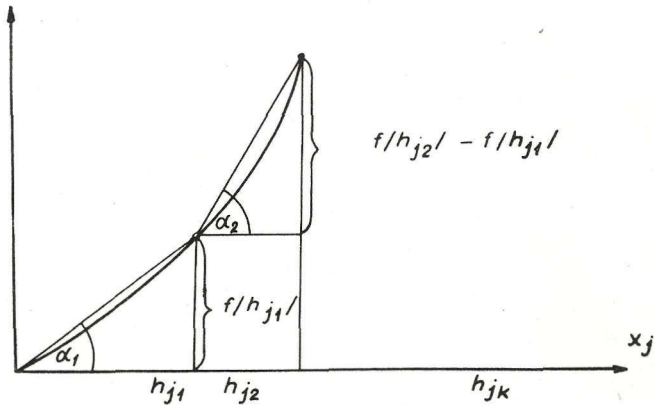
11.3.2. Konvex és konkáv programozási feladatok megoldása szakaszonként linearizált móddal

Olyan programozási feladatok esetén, amikor a feltételek lineárisak, de a célfüggvény konvex, vagy konkáv, egyszerűen tudunk közelítően kielégítő megoldást nyerni a következő eljárással:

Helyettesítsük az  $f_j/x_j$  konvex /vagy konkáv/ függvényt egy hur poligonjával. E poligon minden szakaszához bevezetünk egy-egy új változót, amikor is az  $f_j$  függvény a következő formát nyeri:

$$f_j \approx \begin{cases} m_{j1}x_{j1}, & \text{ha } 0 \leq x_j \leq h_{j1}, \text{ ahol } m_{j1} = \frac{f/h_{j1}}{h_{j1}} = \text{tg } \alpha_1, \\ m_{j1}h_{j1} + m_{j2}x_{j2}, & \text{ha } h_{j1} \leq x_j \leq h_{j2}, \text{ ahol } m_{j2} = \frac{f/h_{j2} - f/h_{j1}}{h_{j2} - h_{j1}}, \\ \vdots \\ m_{j1}h_{j1} + m_{j2}h_{j2} + \dots + m_{jk}x_{jk}, & \text{ha } h_{j,k-1} \leq x_j \leq h_{jk}, \end{cases}$$

Szemléletesen mutatja ezt a 44. ábra.



44. ábra

Szakaszonként linearizált konvex függvény

Természetesen

$$m_{j1} \leq m_{j2} \leq \dots \leq m_{jk}, \text{ ha } f_j/x_j \text{ konvex függvény}$$

/alulról konvex függvény/ és

$$m_{j1} \geq m_{j2} \geq \dots \geq m_{jk}, \text{ ha } f_j/x_j \text{ konkáv függvény}$$

/felülről konvex/.

Az

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$$

$$\sum_{j=1}^n f_j/x_j = \text{extrém}$$

feladatban most az  $x_j$  változó az  $x_{j1} + x_{j2} + \dots + x_{jk}$  szakasz-  
 változók összegével helyettesíthető, az  $f_j/x_j$  célfüggvény  
 pedig az  $m_{j1}x_{j1} + m_{j2}x_{j2} + \dots + m_{jk}x_{jk}$  összeggel, hiszen ha  
 az  $x_j$  változó bekerül az optimális programba, akkor vagy  
 $x_j = h_{j1}$ , s akkor  $x_j = x_{j1}$ , vagy  $h_{j1} \leq x_j = h_{j2}$ , s akkor

$x_j = h_{j1} + x_{j2}$ , és így tovább, s ekkor a célfüggvény értéke  $m_{j1}x_{j1}$ , illetve  $m_{j1}h_{j1} + m_{j2}x_{j2}$ , stb.

A feladat így lineáris programozási feladattá alakul át, amelyet a szimplex módszer valamelyikével meg tudunk oldani, s ezáltal az eredeti feladat egy közelítő megoldását kapjuk.

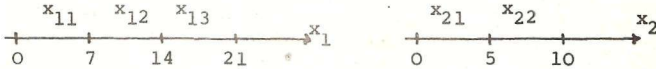
Példaként tekintsünk két egyszerű feladatot:

Legyen feladatunk az

$$\begin{aligned} x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 21 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 40 \\ \hline 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 &= \min. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg először a feladat értelmezési tartományát. A  $2x_1 + 4x_2 = 40$  feltételből következik, hogy ha  $x_2=0$ , akkor  $x_1 \leq 20$  és ha  $x_1=0$ , akkor  $x_2 \leq 10$  és az  $x \geq 0$  miatt  $0 \leq x_1 \leq 20$  és  $0 \leq x_2 \leq 10$ .

Az értelmezési tartományokat bontsuk fel 3, illetve 2 szakaszra a következők szerint:



A  $3x_1^2$  és az  $x_2^2 + 2x_2$  konvex függvények, amelyek meredeksége az  $x_1$  és  $x_2$  részinterváljaiban a következő:

$x_1$	0	7	14	21	$x_2$	0	5	10
$f/x_1/$	0	147	588	1323	$f/x_2/$	0	35	120
m		21	63	105	m		6	17

Most a feladat közelítő megoldásához a következő lineáris programozási feladatot adhatjuk meg:

$$\begin{array}{r} x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22} \geq 0 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 3x_{22} \geq 21 \\ 2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 4x_{22} \geq 40 \\ x_{1i} = 7, \quad i = 1, 2, 3; \quad x_{2i} \leq 5, \quad i = 1, 2 \\ \hline 21x_{11} + 63x_{12} + 205x_{13} + 6x_{21} + 17x_{22} = \min. \end{array}$$

A feladatot szimplex módszerrel most már meg tudjuk oldani, hiszen lineáris programozási feladattal állunk szemben. Nyilvánvaló, hogy a megoldást

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22}$$

adja.

Hasonlóképpen járunk el konkáv feladat megoldása során is. Természetesen a szakaszoknak nem kell feltétlenül azonosnak lenniük.

Megjegyezzük, hogy mezőgazdasági feladatok során a változóknak szakaszváltozókra történő felbontását gyakran célszerű alkalmazni. Ilyenkor nem is mindig egy ismert nemlineáris célfüggvényből indulunk ki, hiszen azt sokszor nem is ismerjük. A felbontás lényege és eredménye azonban lényegében ugyanaz, mint amikor egy ismert nemlineáris célfüggvénnyel dolgozunk. Tegyük fel, hogy  $x_1$  valamely növény, pl. buza termelését jelentse. Tételezzük fel, hogy a buza összes területére felső korlátot irunk elő, mondjuk 1 200 ha-ban. Ha csak 800 ha buzát termelnénk, akkor azt a legjobb talajon termelhetnénk. Az ezen felüli termelést azonban kevésbé jó talajon tudjuk csak biztosítani. Máris két szakaszváltozóra kell bontanunk  $x_1$ -et. De lehetséges, hogy a 800 ha-on belül csak 600 ha területre elegendő vetőmaggal rendelkezünk a legbővebben termő fajtából. Ekkor már három szakaszváltozóra van szükségünk. További bontás válhat szükségessé a műtrágyaigény biztosítása, a gépesítés megoldása, öntözött vagy száraz termelés, stb. szempontjából. E megbontás szerint természetesen más lesz az egyes szakaszváltozókhoz tartozó célfüggvénykoefficiens is, azaz az adott növénynél nemlineáris célfüggvénnyel dolgozunk, de szakaszonként linearizált megközelítéssel oldjuk meg a feladatot.

Ilyen esetben természetesen eltérő lesz szakaszonként a munkaerőszükséglet, gépszükséglet, stb. is, azaz a feltételrendszer sem lineáris, de szakaszonként linearizált megközelítéssel oldjuk meg. Mint látjuk, a feladat ilyen megközelítése gyakorlatilag igen hasznos, és mivel számítástechnikailag nem jelent különösebb problémát, igen jól alkalmazható a mezőgazdaságban.

### 11.3.3. Hiperbolikus programozás

Hiperbolikus programozásról beszélünk akkor, ha lineáris feltételrendszer /egyenletek és egyenlőtlenségek nemnegatív megoldásait tartalmazó L halmaz felett olyan racionális törtfüggvény maximumát keressük, amelyben mind a számláló, mind a nevező legfeljebb lineáris. A hiperbolikus programozás általánosan a következők szerint fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} \underline{x} & \geq \underline{0} \\ \text{A } \underline{x} & \leq \underline{b} \\ z & = \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \max. \end{aligned}$$

ahol az  $f(\underline{x})$  és  $g(\underline{x})$  legfeljebb első foku polinomok; azaz legfeljebb lineáris függvények. Ha történetesen a  $g(\underline{x})$  nulladfoku, akkor lineáris feladatról van szó. Ha az  $f(\underline{x})$  nulladfoku, akkor az  $\frac{1}{g(\underline{x})}$  függvény adódik, viszont az  $\frac{1}{g(\underline{x})} =$

maximumot a  $g(\underline{x}) = \min.$  kielégíti, tehát a probléma ilyenkor is visszavezethető közönséges lineáris programozásra.

Az  $f(\underline{x})$  és  $g(\underline{x})$  függvényeket részletesen felírva, a következő általános formát kapjuk:

$$z = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - p_0}{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n - c_0} = \frac{\underline{p}^T \underline{x} - p_0}{\underline{c}^T \underline{x} - c_0}$$

Tulajdonképpen a probléma több célfüggvény szerinti optimalizálást jelent, hiszen a feladatban két célfüggvényünk van /mégpedig két lineáris célfüggvény/, s azt kívánjuk biztosítani, hogy hányadosuk a lehető legnagyobb értéket /maximumot/ vegye fel.

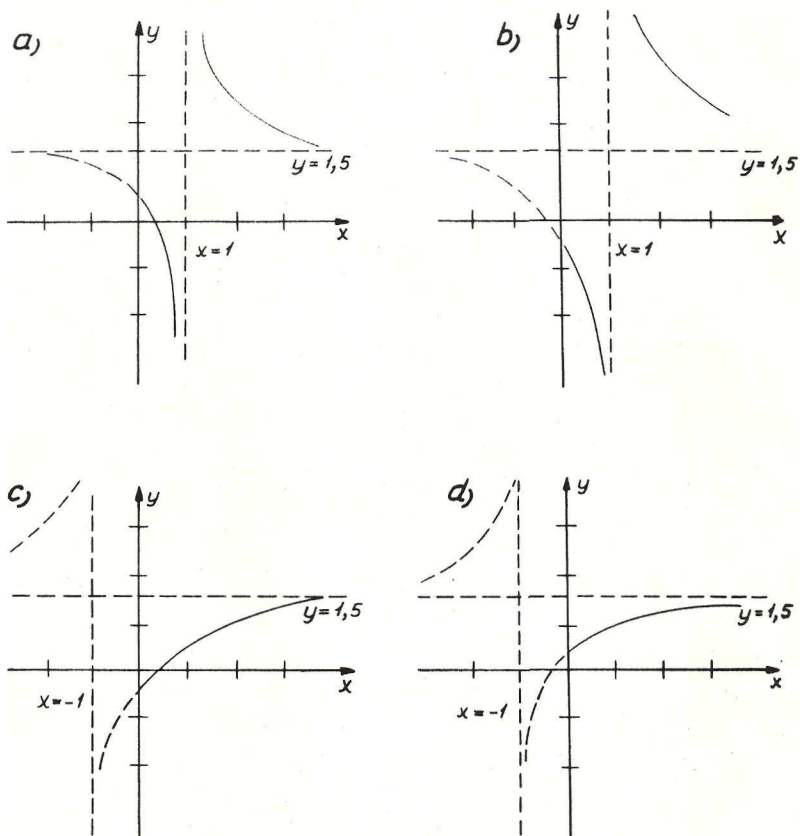
A hiperbolikus elnevezést az indokolja, hogy az egyváltozós

$$y = \frac{p x - p_0}{c x - c_0}$$

lineáris törtfüggvény képe az  $(x, y)$  síkon hiperbola. Szemléltetésképpen néhány függvény grafikus ábráit mutatjuk be /45. ábra/.

$$a/ \quad y = \frac{3x - 1}{2x - 2}; \quad /x \neq 1/ \qquad b/ \quad y = \frac{3x + 1}{2x - 2}; \quad /x \neq 1/$$

$$c/ \quad y = \frac{3x - 1}{3x + 2}; \quad /x \neq -1/ \qquad d/ \quad y = \frac{3x + 1}{2x + 2}; \quad /x \neq -1/$$



45. ábra

Hiperbolikus függvények

A hiperbolikus programozás alkalmazására sokszor van szükség gyakorlati gazdasági számítások során. A mezőgazdasági vállalatok a lehető legnagyobb jövedelem elérésére törek-  
szenek, de nem mindegy az sem, hogy ehhez milyen áron jutnak. Lehet, hogy a maximális jövedelemtömeg elérése igen sok élömunka-ráfordítást vagy jelentős beruházást igényelne. Nem-csak a jövedelem tömege az irányadó, hanem azt is vizsgálni

kell, hogy milyen a jövedelem és a költségráfordítás viszonya, azaz egy forint költségre mennyi jövedelem jut, illetve az előbbieket véve alapul, egy forint beruházással, egy forint munkaráfordítással, egy dolgozóval, stb. mennyi jövedelem érhető el, stb. Általában is a mezőgazdasági vállalatok /és más vállalatok/ tevékenysége nem itélhető meg egyetlen gazdasági mutató alapján, illetve a vállalat nem egyetlen mutató alakulását veszi figyelembe, hanem több mutató egyidejű vizsgálataira van szükség. Ez egyben azt is jelenti, hogy a gyakorlati tervezés /döntésmegalapozás/ során általában több célfüggvényrel kell dolgoznunk, és azok abszolút értéke mellett sok esetben arányukra /viszonyukra/ is tekintettel kell lenni.

A gyakorlatban előforduló hiperbolikus programozási feladatok /amikor is a lehetséges megoldások halmaza korlátos, tehát a halmaz konvex poliéder, és amelyeknél a tört nevezője a lehetséges megoldások tartományában nem zérus/, szimplex módszerrel megoldhatók. /A megoldás módszerét Martos Béla magyar matematikus dolgozta ki./

Az

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ \underline{a} x &\leq \underline{b} \\ z &= \frac{E^T x - p_0}{\underline{c}^T x - c_0} = \max. \end{aligned}$$

hiperbolikus feladat induló tábláját ugyanugy szerkesztjük meg, mint lineáris programozási feladat esetén, csak most a táblázatban két célfüggvény sor szerepel, az első a célfüggvény számlálóját, a másik a nevezőjét tartalmazza. A  $p_0$ , illetve  $c_0$  értéket a számláló, illetve nevező sorába írjuk, az erőforráskapacitást tartalmazó oszlopba, azaz mintha ezek erőforrások lennének.

Természetesen, ha a feltételek között egyenletek /csillagos sorok/ vannak, most is képeznünk kell a másodlagos célfüggvényt, s először e szerint végezzük a számolást, s csak ennek megoldása után a hiperbolikus célfüggvény szerint.

Az induló táblázatba még egy sort kell beépíteni a következők szerint:

$$t^T = p_0 \underline{c}^T - c_0 E^T$$

A  $t^T$  koordinátáit a formula alapján minden szimplex táblázatban ki kell számítani. A szimplex módszert alkalmazva, a számításokat mindaddig kell folytatni, amig  $t_j > 0$ , azaz amig a  $t^T$  vektorban pozitív elemet találunk. A generáló elemet általában abban az oszlopban választjuk, amelyben a  $t^T$  koordinátája a legnagyobb.

Oldjuk meg az

$$\begin{array}{r}
 x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\
 x_1 + x_3 = 8 \\
 x_2 + x_3 = 5 \\
 \hline
 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2 \\
 \hline
 x_1 + 2x_2 + x_3 + 3 = \max.
 \end{array}$$

hiperbolikus programozási feladatot.

Induló táblázatunk a következő:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$u_1$	1	1	1	12
$*u_2$	1	0	1	8
$*u_3$	0	1	1	5
$p$	2	4	3	2
$c$	1	2	1	-3
$*z$	1	1	2	13

A célfüggvény felfogható mondjuk úgy, hogy a számlálóban a termelési érték, a nevezőben a termelési költség található, tehát a feladat az 1 R termelési költséggel elérhető termelési érték maximalizálása. A célfüggvény számlálójában a konstans tag lehet például a gazdasági általános költség - ami adott és nem függ /legalábbis jelentősen/ a termelés szerkezetétől. A célfüggvény nevezőjében lévő konstans pedig felfogható szintén egy fix költségként, mondjuk, hogy a termékek értékesítéséből adódó költségként. /Megjegyezzük, hogy a  $p$  és  $c$  lehet nulla is egy feladatban. Ilyenkor ezek helyén az induló táblában 0 szerepel, de a számítások során a 0 helyére valamilyen 0-tól különböző számot fogunk kapni./

Mivel módosított normál feladattal állunk szemben, másodlagos célfüggvényt képeztünk / $*z$ /, s először e szerint végezzük a számítást. Ilyenkor a  $t^T$  koordinátáinak kiszámítására nincs szükségünk, csak majd amikor már a másodlagos célfüggvényt megoldottuk és a számítást  $t^T$  szerint kell végeznünk.

Az előbbi induló táblázatból a harmadik sor harmadik oszlopában választva generáló elemet, a következő táblázat-hoz jutunk:

	$x_1$	$x_2$	$*u_3$	
$u_1$	1	0	-1	7
$*u_2$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	-1	-1	3
$x_3$	0	1	1	5
p	2	1	-3	-13
c	1	1	-1	-8
$*z$	1	-1	-2	3

Mivel továbbra is a másodlagos célfüggvényt szerint kell számolni, a  $\underline{t}^T$  koordinátáit most nem szükséges meghatározni. A második sor második oszlopából választva generáló elemet, a következő a táblázatunk:

	$*u_2$	$x_2$	$*u_3$	
$u_1$	-1	1	0	4
$x_1$	1	-1	-1	3
$x_3$	0	1	1	5
p	-2	3	-1	-19
c	-1	2	0	-11
$*z$	-1	0	-1	0

A másodlagos célfüggvényt megoldottuk, hiszen a másodlagos célfüggvény sorában a csillagos  $u_1$ -khez tartozó oszlopokat kivéve minden oszlopban nullát találtunk. Meg kell tehát határozni a  $\underline{t}^T$  koordinátáit:

$$\begin{aligned} \underline{t}^T &= p_0 \underline{c}^T - c_0 p^T = -19 [-1, 2, 0] - (-11) [-2, 3, -1] = \\ &= [19, -38, 0] - [22, -33, 11] = [-3, -5, -11] \end{aligned}$$

Az előbbi táblázatban tehát a  $\underline{t}^T$  koordinátáit beírva, a következőt kapjuk:

	$*u_2$	$x_2$	$*u_3$	
$u_1$	-1	1	0	4
$x_1$	1	-1	-1	3
$x_3$	0	1	1	5
$p$	-2	3	-1	-19
$c$	-1	2	0	-11
$t$	-3	-5	-11	$\frac{19}{11} = 1,78$

Mivel a  $t^T$  koordinátái között pozitív elem már nincs, máris optimális megoldáshoz jutottunk /ha volna pozitív koordinátánk, folytatnánk a számítást, e szerint választva generáló elemet/. Az optimális megoldás:

$$\underline{x} = [3, 0, 5]^T \quad \underline{u} = [4, 0, 0]^T$$

Leolvasható a táblázatból az is, hogy e termelési program megvalósítása esetén a termelési érték 19 egység, a termelési költség 11 egység és 1 forint termelési költséggel 1,78 forint termelési érték állítható elő. Leolvasható továbbá, hogy a második termék termelése esetén egy termékegység 3 R-tal emelné a termelési értéket, de egyidejűleg a termelési költség is emelkedne 2 R-tal. Mivel itt a termelési érték és a költség hányadosa  $3/2 = 1,5$ ; ez rontaná az előbbi 1,78-as arányt, azaz a hiperbolikus célfüggvény értékét. Ugyancsak leolvashatjuk, hogy a második erőforrás egy egységének megtakarítása 2 R-tal csökkentené a termelési értéket és 1 R-tal a termelési költséget. Mivel itt az arány  $2/1 = 2$ , ez is rontaná a célfüggvényen. Sőt a harmadik erőforrás megtakarítása a költség csökkentése nélkül csökkentené a termelési értéket, ami még kedvezőtlenebb.

A célfüggvény számlálóját és nevezőjét fel is cserélhetjük volna. Ekkor az egységnyi termelési érték előállításának költségét /költségszintet/ kapjuk. Nyilván most nem a célfüggvény maximalizálása, hanem éppen minimalizálása lenne érdeke a vállalatnak. /Ugyanígy lehet célunk az egységnyi jövedelem előállítására felhasználandó termelési költség, vagy munkaerő, vagy munkabér, vagy beruházás, vagy import anyag, stb., stb./

Eddigi ismereteink alapján azonban nem jelent problémát számunkra az ilyen feladat megoldása sem, hiszen a

$$\frac{c^T \underline{x} - c_0}{p^T \underline{x} - p_0} = \min.$$

helyett a  $-1$ -gyel szorzott célfüggvény maximumát kereshetjük, azaz

$$\frac{c^T x - c_0}{-p^T x + p_0}$$

vagyis  $-1$ -gyel a nevezőt szorozzuk meg.

Természetesen hiperbolikus célfüggvény esetén is /de hasonlóképpen a konvex, vagy konkáv célfüggvény esetén is/ felmerül a termelési szerkezet és a termelési források egyidejű optimalizálásának kérdése, illetve a programvektor és kapacitások optimalizálásának problémája. Ilyen esetben viszont ismét követelmény a gépek egészértékűsége, vagyis hiperbolikus vagy konvex, illetve konkáv vegyes egészértékű feladathoz jutunk. E problémák részletesebb kifejtése azonban meghaladja tananyagunk kereteit.

### 11.3.4. A Langrange-féle multiplikátor-módszer

Tananyagunk nem teszi lehetővé, hogy a nemlineáris programozási feladatok valamennyi megoldási módszerével foglalkozunk, de ha csak röviden érintőlegesen is, szükséges megemlékeznünk a Langrange-féle multiplikátor-módszerről.

Gyakran merülnek fel ugyanis a gyakorlati gazdasági feladatok között olyanok, amelyek megoldásánál ez a módszer hatékonyan alkalmazható.

A Langrange-módszer jól alkalmazható olyan feltételes szélsőérték-feladatok megoldására, amikor a feltételek egyenletekkel vannak megadva. Ez azt jelenti, hogy keressük az  $f(x) / x \in E_n$  függvény szélső értékét /maximumát, vagy minimumát/, a  $\phi_k(x) = 0 / k = 1, 2, \dots, m, m \leq n$  feltételek mellett.

Már ismerjük, hogy a feltételi egyenlet jobb oldalán esetleg előforduló nemzérus értékek az  $\phi_k(x)$  függvényekbe beolvaszthatók. A feladatban azt is jelöltük, hogy a feltételek száma nem nagyobb, mint a változók száma  $m \leq n$ , mert egyébként nincs feltétlenül biztosítva az egyenletek megoldhatósága.

Ha a lehetséges megoldások

$H = \{x \mid \phi_k(x) = 0, k = 1, 2, \dots, m\}$  halmazát tekintjük, a feladat úgy is megfogalmazható, hogy keressük az  $f(x)$  függvény maximumát /vagy minimumát/ a  $H$  halmazon.

Feltesszük, hogy

a/ az  $f/x/$  és  $\phi_k/x/$   $/k= 1, 2, \dots, m/$  függvényeknek léteznek parciális deriváltjai a  $H$  halmazon, és hogy

b/ a  $\phi_k/x/ = 0$   $/k = 1, 2, \dots, m/$  egyenletekből  $n-m$  számú változó egyenértelműen kifejezhető.

E feltételek mellett tekintsük az

$$F/x/ = f/x/ + \sum_{k=1}^m \lambda_k \phi_k/x/$$

függvényt, ahol  $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$  egyelőre ismeretlen konstans vektor.

Az  $f/x/$  függvény feltételes szélsőérték helyei ekkor kielégítik az

$$\frac{\delta F}{\delta x_i} = 0, \phi_k/x/ = 0 \quad /i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, m/$$

$n+m$  egyenletből álló egyenletrendszer.

A  $\lambda_k$  konstansokat Langrange multiplikátornak nevezzük. Az egyenletrendszer  $x$ -re és  $\lambda$ -ra történő megoldása szolgáltatja a keresett stacionárius helyeket /ahol a függvény deriváltja 0-val egyenlő/ és az ismeretlen  $\lambda$  vektort. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha az

$$\frac{\delta F}{\delta x_i} = 0$$

-nak nincsen megoldása, akkor az  $f/x/$ -nek nincsen szélső értéke a  $\phi_k/x/ = 0$  feltételek mellett.

Tekintsünk példaként egy műtrágya-elosztási feladatot. /Lásd Szép Jenő: Analízis. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1972./ Tegyük fel, hogy egy termelősövetkezet három tábláján /A, B, C/ a talajtól függően más-más keverékműtrágyát használ. A terméshozam és a műtrágyafelhasználás között természetesen kapcsolat van /a terméshozam függ a műtrágyafelhasználástól és pedig nemlineáris formában/, s e függvénykapcsolatokat jelöljük rendre  $f_1/x_1/$ ,  $f_2/x_2/$ ,  $f_3/x_3/$  függvényekkel. Tegyük fel, hogy az A, B, C táblák nagyságát rendre a, b, c-vel jelöljük.

A három tábla együttes hozamát ekkor a

$$f/x_1, x_2, x_3/ = a f_1/x_1/ + b f_2/x_2/ + c f_3/x_3/$$

függvény reprezentálja.

Az  $f_1/x_1/$ ,  $f_2/x_2/$ ,  $f_3/x_3/$  függvények ismeretében az  $f/x_1, x_2, x_3/$  függvény maximumá kiszámítható. Ez feltétel nélküli maximum, hiszen egyelőre csak egy függvény szélső értékét kerestük, feltétel /feltételek/ nélkül.

Tegyük fel most, hogy a műtrágya beszerzésére korlátozott pénzüsszeggel rendelkezünk. Jelöljük ezt az összeget  $s$ -sel. Legyen  $t_1, t_2, t_3$  rendre az A, B, C táblán használt keverékműtrágya egységára. Ennek alapján az

$$a t_1 x_1 + b t_2 x_2 + c t_3 x_3 = s$$

feltétel adható meg.

Ha e feltételek mellett határozzuk meg az  $f/x_1, x_2, x_3/$  függvény maximumát, már feltételes szélsőérték-problémáé ol-  
dunk meg.

Legyen feladatunkban

$$f_1/x_1/ = 4 + 3x_1 - 2x_1^2,$$

$$f_2/x_2/ = 4 + 5x_2 - x_2^2,$$

$$f_3/x_3/ = 2 + 6x_3 - 3x_3^2,$$

és legyenek a táblanagyságok a következők:

$$a = 500 \text{ ha}$$

$$b = 200 \text{ ha}$$

$$c = 100 \text{ ha}$$

Tegyük fel, hogy 20 000 R áll rendelkezésünkre műtrágya beszerzésére és az A táblán használandó keverék egységára 40, ugyanez a B táblát tekintve 30, a C tábla vonatkozásában pedig 20.

Ennek alapján feltételi egyenletünk

$$40 \cdot 500 x_1 + 30 \cdot 200 x_2 + 20 \cdot 100 x_3 = 20 000,$$

ami egyszerűsítés után implicit alakban

$$g/x_1, x_2, x_3/ = 10 x_1 + 3x_2 + x_3 - 10 = 0$$

E feltétel melletti szélső érték kiszámítására a Langrange-féle multiplikátor-módszert használva, képeznünk kell az

$$\begin{aligned} F/x_1, x_2, x_3/ &= f/x_1, x_2, x_3/ + \lambda g/x_1, x_2, x_3/ = \\ &= 500(4 + 3x_1 - 2x_1^2) + 200(4 + 5x_2 - x_2^2) + 100(2 + 6x_3 - 3x_3^2) + \\ &+ \lambda(10x_1 + 3x_2 + x_3 - 10) \end{aligned}$$

függvényt. A megoldandó egyenletrendszer

$$\frac{\delta F}{\delta x_1} = 500 / 3 - 4 x_1 / + 10\lambda = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_2} = 200 / 5 - 2 x_2 / + 3\lambda = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_3} = 100 / 6 - 6 x_3 / + \lambda = 0$$

$$10 x_1 + 3 x_2 + x_3 - 10 = 0$$

E négy egyenlet megoldásából kapjuk, hogy

$$x_1 = 0,345; \quad x_2 = 1,885; \quad x_3 = 0,865$$

a feladat optimális megoldása. Ha a feladatot feltétel nélkül oldottuk volna meg, az

$$x_1 = 0,75; \quad x_2 = 2,5; \quad x_3 = 1$$

mütrágya normákat kaptuk volna. Ekkor viszont

$$\begin{aligned} & 40 \cdot 500 \cdot 0,75 + 30 \cdot 200 \cdot 2,5 + 20 \cdot 100 \cdot 1 = \\ & = 15\,000 + 15\,000 + 2\,000 = 32\,000 \text{ R-ot} \end{aligned}$$

kellett volna felhasználni mütrágya beszerzésre. Mivel azonban 20 000 R állt rendelkezésünkre, az

$$x_1 = 0,345; \quad x_2 = 1,885; \quad x_3 = 0,865$$

alapján

$$\begin{aligned} & 40 \cdot 500 \cdot 0,345 + 30 \cdot 200 \cdot 1,885 + 20 \cdot 100 \cdot 0,865 = \\ & = 6\,900 + 11\,310 + 1\,730 = 19\,940 \approx 20\,000 \text{ R-ra} \end{aligned}$$

volt szükség /az eltérés kerekítésekből adódik/. A megoldás szerint az A táblán  $0,345 \cdot 500 = 162,5$  q, a B táblán  $1,885 \cdot 200 = 377$  q és a C táblán  $0,865 \cdot 100 = 86,5$  q mütrágya használandó fel.

Természetesen a példában keverékmütrágyát tekintettünk. A probléma lényegén azonban az sem változtat, ha a N, P, K mütrágyákat a vállalat keveri, vagy ha féleségenként szórja ki a táblákra. E mütrágyák arányát /a talajnak megfelelően/ meghatározhatjuk.

Az  $f_1/x_1/$  függvények alapján meghatározhatjuk a várható terméshozamot is táblánként és összesen. Ez példánkban a következő:

$$\begin{aligned} f_1/x_1/ &= 4 + 3x_1 - 2x_1^2 = 4 + 3 \cdot 0,345 - 2 \cdot 0,345^2 = \\ &= 4 + 1,035 - 0,238 = 4,797 \text{ q/ha, illetve} \end{aligned}$$

500 ha-on 2 398,5 q

$$\begin{aligned} f_2/x_2/ &= 4 + 5x_2 - x_2^2 = 4 + 5 \cdot 1,885 - 1,885^2 = \\ &= 4 + 9,425 - 3,553 = 9,872 \text{ q/ha, illetve} \end{aligned}$$

200 ha-on 1 974,4 q

$$\begin{aligned} f_3/x_3/ &= 2 + 6x_3 - 3x_3^2 = 2 + 6 \cdot 0,865 - 3 \cdot 0,865^2 = \\ &= 2 + 5,19 - 2,24 = 4,95 \text{ q/ha, illetve} \end{aligned}$$

100 ha-on 495 q, vagyis az összes termés:

$$2 \ 398,5 + 1 \ 974,4 + 495 = 4 \ 867,9 \text{ q.}$$

Természetesen ilyen jellegű problémák megoldásához ismerni kell az  $f_1/x_1/$  függvényeket. E tekintetben jól felhasználhatjuk a regressziós analízist, illetve a termelési függvényeket. Ezekkel később fogunk foglalkozni.

A matematikai programozás legfontosabb kérdéseinek áttekintése után röviden foglalkozunk a gyakorlati alkalmazás módszertanával. Nem foglalkoztunk a dinamikus és a sztochasztikus programozással, valamint a bizonytalanság, illetve a véletlenek kezelésének különböző módjaival. E kérdések tárgyalása gazdaságilag igen fontos és hasznos volna, azonban meghaladja tananyagunk kereteit. Elsajátításukat a szakirodalom tanulmányozására, esetleg speciális kollégiumokra bizzuk.

## 12. FEJEZET

### A matematikai programozás alkalmazásának lehetőségei és területei a mezőgazdaságban

A matematikai programozás alkalmazásának lehetőségei a mezőgazdaságban is mindinkább adottak és valószínűleg a jövőben még inkább számíthatunk a lehetőségek szélesedésére.

Egyrészt a tudományos kutatás gyorsuló ütemű előrehaladásával egyre inkább a mezőgazdasági bonyolult valóság jobb megközelítését eredményező matematikai modellek állnak rendelkezésünkre, s mind kevésbé kényszerülünk a problémák egyszerűsítésére, így egyre realisabb eredményeket érhetünk el.

Másrészt a számítástechnikai eszközök tökéletesedése és gyorsütemű elterjedése következtében mindinkább meglesz a lehetőség arra, hogy a mezőgazdasági vállalatok számára a számítógépek könnyen elérhetőek legyenek.

Végül a szakemberek képzése is gyors ütemben igazodik a korszerű követelményekhez és egyre több olyan mezőgazdász áll majd rendelkezésre, aki meg tudja találni, keresni, és meg is tudja fogalmazni azokat a feladatokat, ahol a korszerű matematikai módszerek és elektronikus számítógépek hatékonyan felhasználhatók.

A korszerű matematikai módszerek mezőgazdasági alkalmazásának lehetőségeit még a közelmúltban is sokan kétségbe vonták, vagy tagadták. Kétkelőők ma is vannak, de mind kevesebben. Kezdetben volt is alapja a kétkedésnek, mert egyrészt a gyakorlati alkalmazás módszertani kérdései sem voltak kellőképpen kidolgozva, másrészt a matematikai és számítástechnikai feltételek sem álltak rendelkezésre a mai szinten. A valóság tulzott egyszerűsítésével készült modellek esetenként olyan eredményekhez vezettek, amelyek a gyakorló gazda számára elfogadhatatlanok voltak. Egyre kevésbé kényszerülünk azonban a vizsgált problémák ilyen nagyfokú egyszerűsítésére, ami lehetővé teszi, hogy gyakorlatilag jól hasznosítható eredményeket nyerjünk matematikai programozással. Természetesen az sem jó, ha ellenkező hibába esünk és túl bonyolult, nagy modelleket próbálunk alkalmazni ott, ahol arra nincsen szükség. Semmiképpen nem arra kell törekedni, hogy minél nagyobb és minél bonyolultabb modelleket szerkesztünk - hiszen azok ugyanugy megvalósíthatatlan eredményre vezethetnek, mint a tulzottan egyszerűsített modellek -, hanem arra, hogy olyan, de csakis olyan nagy és bonyolult modellekkel dolgozzunk, amilyenekkel az adott probléma megoldható és gyakorlatilag is használható eredményre vezet.

A korszerű matematikai módszerek és számítógépek mezőgazdasági gyakorlati alkalmazása lehetőségének tagadása éppúgy nem helyénvaló, mint az, ha e módszereket csodászernek tekintjük, amelyekkel mindent megoldhatunk. Nincs itt szó

csodaszerről, csak egy olyan eszközzéről, amely - ha jól alkalmazzuk - lehetővé teszi a mezőgazdasági döntések jobb megalapozását, a gazdálkodás hatékonyságának javítását. A korszerű matematikai eszközök alkalmazásának kérdését tehát megillető helyére kell tenni. Elismerjük, hogy a korszerű matematikai eszközök hatékonyan alkalmazhatók a mezőgazdaságban, de csak akkor, ha azokat célszerűen, felelősséggel alkalmazzuk. A gazdaságvezetők továbbra is felelősek a döntésekért, azok végrehajtásáért, de a döntések megalapozásáért is, amelynek során azonban a korszerű matematikai módszerekben hatékony eszközre találhatnak.

A matematikai programozás alkalmazása - éppúgy, mint általában az operációkutatási módszerek alkalmazása - széleskörű ismeretet kíván, illetve különböző szakemberek együttműködését igényli. Pl. a mezőgazdaságban a növénytermesztő, az állattenyésztő, a növényvédő, az állatorvos, az üzemszervező, a matematikus, stb. együttműködését kell megvalósítani ahhoz, hogy a korszerű matematikai módszereket hatékonyan tudjuk felhasználni gyakorlati problémák megoldására.

A matematikai programozás a mezőgazdaságban számos területen alkalmazható. A teljesség igénye nélkül tekintsük át röviden ezeket a területeket.

Mindenekelőtt különbséget kell tennünk aszerint, hogy a matematikai programozást elméleti vizsgálatokra, vagy gyakorlati vizsgálatokra alkalmazzuk.

Elméleti vizsgálatok során célunk valamilyen tudományos feladat megoldása. Vizsgálhatjuk pl., hogy egy elfogadott, vagy vitatott elméleti megállapítás egzakt módszerekkel bizonyítható-e? Vizsgálhatjuk, hogy valamely elfogadott törvényszerűség valóban olyan módon jut-e érvényre, mint azt eddig feltételeztük, vagy esetleg más formában, illetve a különböző feltételek milyen hatással vannak az adott törvényszerűség érvényesülésére. Megkísérelhetjük valamilyen összefüggés vagy törvényszerűség felderítését.

Elméleti vizsgálatok során megengedhetők, sőt esetleg szükségesegek is lehetnek lényeges egyszerűsítések, hogy a zavaró mellékhatásokat kiküszöbölve, a vizsgálat céljából lényeges kérdésekre irányítsuk a figyelmet.

Gyakorlati vizsgálatok során viszont éppen azért, mert egy adott konkrét problémát kell megoldanunk, arra kell törekedni, hogy ha kényeserülünk is egyszerűsítésekre, azok ne legyenek a probléma vizsgálata szempontjából lényegesegek, mert akkor esetleg a kapott eredmény is félrevezető lehet. Most tehát törekedni kell arra, hogy a valóságot a maga bonyolultságában és komplex összefüggéseiben fejezzük ki.

A gyakorlati alkalmazás irányulhat multbeli folyamatok vizsgálatára, vagy jövőbeni döntések megalapozására.

A multbeli helyzet vizsgálata során általában biztos adatokkal, tényleges adatokkal dolgozunk /eltekintve nyilvántartási és mérési hibáktól/. Célunk lehet annak vizsgálata, hogy hogyan lehetett volna valamilyen gazdasági feladatot jobban, célszerűbben megoldani, illetve mennyire térünk el ettől a gyakorlatban.

A jövőbeni döntések megalapozása során viszont a jövőbeni helyzetet vizsgáljuk, a jövőre vonatkozó döntést vagy tervet alapozzuk meg. Ilyenkor általában a jövőre tervezett adatokkal dolgozunk és a jövőben fennálló vagy biztosítható feltételeket vesszük alapul. A jövőt azonban nem lehet biztosan előre látni és adataink sokszor nagyfokú bizonytalansággal rendelkeznek. Ilyenkor különösen nagy jelentősége van annak, hogy többféle döntési változatot megvizsgáljunk és számításba vegyük a bizonytalanságból eredő problémákat is.

Az elméleti és a gyakorlati vizsgálatok merev szétválasztása természetesen éppúgy nem lehetséges, mint a multbeli helyzet vizsgálatának és a döntések megalapozásának merev szétválasztása. Ha elméleti vizsgálatokat végzünk, akkor is eljuthatunk gyakorlati megállapításokhoz, vagy intézkedésekhez, éppúgy, mint ahogyan gyakorlati vizsgálatok során is adódhatnak elméleti következtetések. De ha a multbeli helyzetet vizsgáljuk, akkor is nyerhetünk olyan eredményeket, amelyek során valamilyen döntést hozunk a jövőre, vagy viszont, a jövőbeli döntések megalapozása során is eljuthatunk olyan megállapításokhoz, hogy a multban ezt vagy azt a gazdasági feladatot másképpen kellett volna megoldani.

Az alkalmazási szinteket tekintve, megkülönböztethetünk:

- népgazdasági szintű alkalmazásokat,
- ágazati szintű alkalmazásokat,
- területi /megyei, járási, termőterületi, stb./ szintű alkalmazásokat,
- vállalati alkalmazásokat.

Valamennyi szinten alkalmazhatjuk a matematikai programozást komplex vizsgálatokra, vagy komplex döntések megalapozására, vagy részleges feladatok megoldására, attól függően, hogy az adott szinthez tartozó teljes komplexumot átfogva végezzük a vizsgálatot, vagy annak csak valamely részterületét tekintjük. Ez az elhatárolás természetesen szintén csak viszonylagos. Ha pl. egy vállalati szintű komplex vizsgálatot végzünk, akkor sem terjedhet ki a figyelmünk minden apró részletre. Viszont ha pl. egy vállalat takarmánygazdálkodását kívánjuk vizsgálni, akkor az egész vállalat szempontjából részleges vizsgálatot végzünk ugyan, de a takarmánygazdálkodás vizsgálatát teljes komplexumában átfoghatjuk.

A továbbiakban - támaszkodva a matematikai programozás elméleti alapjainak, valamint általános módszertani kérdéseinek ismeretére - a gyakorlati mezőgazdasági alkalmazások módszertani kérdéseivel foglalkozunk. Hangsúlyozzuk, hogy nem

konkrét vizsgálatok elvégzése, bemutatása, vagy konkrét gyakorlati feladatok megoldása a célunk, hanem a figyelmet elsősorban az alkalmazás módszertani kérdéseire összpontosítjuk. Ennek során részletesebben is áttekintjük a mezőgazdasági alkalmazások legfontosabb területeit, az ott felmerülő legfontosabb problémákat és azok megoldásának modellszerkesztési, módszertani kérdéseit, illetve lehetőségeit. Ezáltal alapot kapunk gyakorlati mezőgazdasági modellek összeállításához, valamint a matematikai programozást felhasználó szaktergyak ismeretanyagának elsajátításához.

Tananyagunk nem teszi lehetővé a mezőgazdasági gyakorlati alkalmazások teljes vertikumának áttekintését. Különbben is még számos olyan lehetőség kínálkozik a mezőgazdaságban a matematikai programozás alkalmazására, amelyet a tudományos kutatás még nem derített fel, illetve amelynek módszertani kérdései még nincsenek kimunkálva. Az irodalomjegyzékben felsorolt szakirodalom néhány témakörben részletesebb ismeretek megszerzését teszi lehetővé.

Az alkalmazás módszertani kérdéseinek tárgyalása során általában nem teszünk különbséget elméleti vagy gyakorlati célú vizsgálatok, illetve multbeli helyzet vizsgálata, vagy jövőbeli döntések megalapozására irányuló vizsgálatok között. Alapvetően a gyakorlati vizsgálat és a jövőbeni döntésmegalapozás, tervezés szemszögéből nézve foglalkozunk az alkalmazás módszertani kérdéseivel, hiszen ennek ismeretében elméleti vizsgálatok, vagy multbeli elemzések elvégzése sem okoz majd különösebb gondot.

Döntően mezőgazdasági vállalati alkalmazásokkal fogunk foglalkozni, de esetenként túllépjük a vállalati kereteket, vagy utalunk más szinteken lehetséges alkalmazásokra is. Ezek részletes kifejtése azonban meghaladja tananyagunk kereteit.

Először részleges feladatokkal foglalkozunk, egy-egy főágazat /pl. takarmánygazdálkodás, árunövénytermelés, állattenyésztés/, vagy egyéb részleges feladat /pl. munkaszervezési feladat, technológiai folyamatok/ problémakörét tekintjük át, majd kiterjesztjük vizsgálatainkat a vállalat egészére.

Figyelmünket elsősorban a jelenlegi gyakorlatban leginkább alkalmazható lineáris programozásra fordítjuk, rámutatva természetesen a nemlineáris és egészértékű, stb. programozás alkalmazásának lehetőségeire és problémáira is. Tananyagunk keretei nem teszik lehetővé, hogy az érzékenységi vizsgálatokkal, a bizonytalansági problémákkal és számos más kérdéssel foglalkozzunk. Ezek elsajátítását speciális kollégiumokra és az irodalom tanulmányozására bizzuk.

### 13. FEJEZET

#### A takarmánygazdálkodás matematikai tervezése

Gazdasági állataink takarmányszükségleteinek kielégítése jelentős termőterület, munka, eszköz és költségigénnyel jár együtt. Ennek ellenére nagymennyiségű takarmányimportra szorulunk.

A népesség számának növekedése, az életszínvonal emelkedése és a táplálkozási igényeknek az állati fehérjék irányában történő eltolódása, az exportlehetőségek kihasználása, a jövőben szükségessé teszi az állatállomány növelését és az állati termékek termelésének fokozását, ami a takarmányigény jelentős növekedésével jár.

A megnövekedett takarmányszükséglet kielégítését nem alapozhatjuk a takarmánytermő terület kiterjesztésére, sem pedig a takarmányimport jelentős fokozására, hanem a növekvő takarmányszükségletet a jelenlegi, vagy még ennél is kisebb területen kell kielégíteni, a takarmányimport jelentős növelése nélkül, vagy a takarmányimport egyidejű csökkentése mellett. Nem kevésbé fontos természetesen az állati termékek önköltségének csökkentése sem, amely az állattartás egyéb költségeinek csökkentése mellett, a költségek nagyobb részét kitevő takarmányköltségek csökkentését is megkívánja.

A feladat megoldásában a termésátlagoknak a fejlett agrotechnikai módszerek, a helyes talajerő-gazdálkodás, az öntözött területek kiterjesztése, bőven termő fajták kinemesítése, stb. utján történő növelésén és az önköltség csökkentésén, valamint a takarmányok helyes és veszteségmentes tárolásán és a takarmányfelhasználás hatékonyságának korszerű állattenyésztési és tartási módszerek alkalmazásával és megfelelő fajták biztosításával történő emelésén kívül nagy jelentőségű a takarmánygazdálkodás tervezésének és szervezésének javítása.

A takarmánygazdálkodás ésszerű megszervezése magában foglalja a takarmánytermelés és a takarmányfelhasználás célszerű megszervezését. A takarmánytermelés és a takarmányfelhasználás egymással szoros kapcsolatban van. A takarmányfelhasználás gazdaságossága nagymértékben függ a takarmánytermelés gazdaságosságától, és viszont, a takarmánytermelés gazdaságossága a takarmányfelhasználás gazdaságosságában reálizálódik.

A takarmánygazdálkodás hatékonyságának fokozása terén még jelentős tartalékokkal rendelkezünk, mind a termelés /fajta, technológia, termelési szerkezet, termelésszervezés/, mind a felhasználás /takarmányadagok és takarmányfelhasználás célszerű tervezése/ területén. A tartalékok kihasználására - mint látni fogjuk - jól alkalmazható a matematikai programozás.

### 13.1. Takarmányadagok tervezése

A takarmányadagot jelenleg a gyakorlatban úgy tervezik, hogy a rendelkezésre álló takarmányokból összeállítanak egy adagot, majd a takarmányok fajlagos táplálóanyagtartalmának ismeretében kiszámítják, hogy az adag mennyit tartalmaz a különböző táplálóanyagokból. Ezt aztán egybevetik az állat normatív szükséglettel adataival, s ha az adag tartalma a normatív szükséglettől jelentősen eltér, változtatják az adagban a különböző takarmányok mennyiségét mindaddig, amíg az adag tartalma a normatív szükséglettel adatokat meg nem közelelteti.

Az így összeállított adag táplálóanyagtartalma - annak ellenére, hogy több változat előállítására utján nyertük -, általában csak megközelíti az állat normatív szükségletét, nem esik azzal egybe, esetleg egyik táplálóanyagból többletet tartalmaz, egy másiktól pedig nem fedezi az állat szükségletét. Ez viszont mind a termelésre, mind az állat szervezetére káros hatással lehet. Másrészt a takarmányadag ilyen módon történő tervezése során nem tudjuk megfelelően figyelembe venni a gazdaságosságot sem.

A takarmányadagok tervezésekor a valóságban úgy vetődik fel a probléma, hogy ismerjük az állat normatív táplálóanyag szükségletét, valamint a takarmányok fajlagos beltartalmi adatait. Meg kell határozni, hogy milyen mennyiséget kell etetni a különböző takarmányokból, hogy a különböző táplálóanyagokból biztosítsuk a normatív szükségletet, mégpedig minél kevesebb költséggel. A probléma matematikai programozással megoldható. A legegyszerűbben a lineáris programozást alkalmazhatjuk, amelynek módszertani problémáit a következőkben vizsgáljuk meg.

Tegyük fel, hogy valamely állat napi takarmányadagját kívánjuk megtervezni lineáris programozással. Ismeretes az állat faja, fajtája, kora, testsúlya és termelése, amelyek alapján - szabványtáblázatból - meghatározzuk annak napi szükségletét a különféle táplálóanyagokból. Tegyük fel, hogy az illető állatnak  $m$ -féle táplálóanyagra van szüksége, amelyekből az  $l$  napra szükséges mennyiségeket jelöljük  $b_1, b_2, \dots, b_m$ -mel.

A takarmányadagot  $n$ -féle takarmányból kívánjuk összeállítani. A különféle takarmányoknak az adagban szereplő, egyelőre ismeretlen mennyiségeit jelöljük  $x_1, x_2, \dots, x_n$ -nel. Ismeretes a különböző takarmányok beltartalma is. Jelöljük a  $j$ -edik takarmányfajta  $i$ -edik táplálóanyag-mennyiségét  $a_{ij}$ -vel  $i=1, 2, \dots, m$  és  $j=1, 2, \dots, n$ . Az állat biológiai igényeinek és a különböző takarmányok biológiai hatásának ismeretében megállapíthatjuk az egyes takarmányok feletethető mennyiségét, illetve az adott állatnak a különböző takarmányok vagy takarmánycsoportok iránti igényeit. Jelöljük ezeket  $q_1, q_2, \dots, q_n$ -nel. Ismerjük még az egyes takarmányok etetésének ráfordítási igényét,

pl. költs. igényét. Jelöljük az egyes takarmányok egységnyi feletetésének költségét /pl. piaci árát/  $p_1, p_2, \dots, p_n$ -nel.

Most az a feladat, hogy olyan takarmányadagot állítsunk össze, amely fedezi az adott állat napi szükségletét a különböző táplálóanyagokból, élettanilag megfelel az állat igényeinek és a lehető leggazdaságosabb /pl. a lehető legkevesebb költséggel jár/.

Fogalmazzuk meg először az állat táplálóanyag-igényének kielégítésére vonatkozó mérlegfeltételeket. Az állat igénye az egyes táplálóanyagok iránt különbözőképpen adható meg. Követelményünk lehet, hogy a takarmányadag az  $i$ -edik táplálóanyagból pontosan meghatározott mennyiséget tartalmazzon. Ez esetben az  $i$ -edik táplálóanyagra vonatkozó mérlegfeltételünk a

$$/13.1./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

formában fogalmazható meg. Így pl. előírhatjuk, hogy az adagban pontosan az állat normatív szükségletének megfelelő mennyiségű keményítőértéket vagy fehérjét kell adni. Ilyen szigorú mérlegfeltételt azonban ritkán lehet indokoltan alkalmazni, mivel nem mindig teljesíthető, vagy teljesítése nem mindig gazdaságos. Éppen ezért a táplálóanyagokra vonatkozó mérlegfeltételeket leggyakrabban úgy fogalmazzuk meg, hogy a takarmányadag valamely táplálóanyagból legalább vagy legfeljebb milyen mennyiséget tartalmazzon, azaz:

$$/13.2./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$$

illetve

$$/13.3./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

A /13.2./ feltétel szerint az  $i$ -edik táplálóanyagra alsó korlátot írunk elő, vagyis megszabtuk, hogy abból legalább milyen mennyiséget kell tartalmaznia a takarmányadagnak. A /13.2./ feltételt alkalmazhatjuk a keményítőértékre, fehérjére, aminosavakra és vitaminokra, stb., vagyis mindazon anyagokra, melyekből az állatnak egy bizonyos mennyiséget legalább meg kell kapnia /alsó korlát/, de azt túllépve, káros hatástól nem kell tartanunk. /A túlzott fehérjeetetésnek is lehet káros hatása, de ettől a programozás során aligha kell tartanunk, mivel a fehérjegyazdag takarmányok drágák, s a célfüggvény legtöbbször nem engedi, hogy az adag fehérjetartalma a szükségletet nagymértékben meghaladja./

A /13.3./ feltétel szerint azt írjuk elő, hogy a takarmányadag az illető táplálóanyagból legfeljebb milyen mennyiséget tartalmazhat. Ez történik olyan anyagok esetében, amelyek egy bizonyos határon túl pl. mérgező hatásúak, így korlátozott mennyiségben adagolhatók, illetve etetésük elhagyása nem hátrányos.

Gyakran szükséges alkalmazni a mérlegfeltételek egy másik típusát is, amikor az adag valamely táplálóanyag-tartalmára vonatkozóan egy intervallumot írunk elő. Így például az állat szárazanyag-igényét a takarmányszükségleti előírások nem meghatározott mennyiségben írják elő, hanem egy alsó és felső érték által meghatározott intervallumban. /pl.: egy 600 kg-os tehén napi szárazanyag-szükséglete 12-18 kg./ E szerint a takarmányadag szárazanyag-tartalma az adott intervallumon belül bármilyen értéket felvehet. Ha pl. az r-edik táplálóanyagból a takarmányadag tartalmára vonatkozóan egy intervallumot adunk meg, akkor az adag tartalma az r-edik táplálóanyagból  $b_r$  egyelőre ismeretlen, de nem lehet kevesebb egy alsó határnál, jelöljük ezt  $b_{r0}$ -val, illetve nem lehet több egy felső határnál, amit jelöljünk  $b_r^0$ -val. /Az alsó o-index az intervallum alsó, a felső o-index az intervallum felső értékét jelöli./ Ez esetben követelményünk:

$$/13.4./ \quad b_{r0} \leq b_r \leq b_r^0,$$

és mivel

$$/13.5./ \quad \sum_{j=1}^n a_{rj} x_j = b_r,$$

ezért a /13.4./ az alábbi két feltételre bontható fel:

$$/13.6./ \quad \sum_{j=1}^n a_{rj} x_j \geq b_{r0},$$

$$/13.7./ \quad \sum_{j=1}^n a_{rj} x_j \leq b_r^0,$$

A /13.4./ feltétel szerint természetesen nemcsak az adag szárazanyag-tartalma adható meg, hanem pl. egyes állatoknál a keményítőérték-szükséglet is ilyen formában van előírva. Általában a /13.4./ feltételt alkalmazzuk az olyan esetekben, amikor valamely táplálóanyagból az adott állat számára egy bizonyos mennyiséget feltétlenül biztosítani kell, ez azonban túl is léphető, de csak egy adott határig. /Esetenként a fehérjeszükségletet is így kell előírni./

A takarmányadagok programozása során az a speciális eset is előfordul, amikor a takarmányadag tartalmára valamely anyagból nem abszolút mennyiséget írunk elő, hanem annak egy másik anyaghoz való viszonyát. Ilyen követelményt támaszthatunk például az adag mész- és foszfortartalmára. Ez esetben általában a foszfor iránti abszolút igény mellett megadjuk a mész-foszfor arányát is. E tekintetben szintén előírhatunk kötött viszonyt /egyenletet/, illetve alsó és felső korlátot. Ha például most az  $i$ -edik és a  $k$ -edik anyag arányát szabjuk meg, előírhatjuk, hogy az adag tartalma az  $i$ -edik anyagból pontosan a  $k$ -edik anyag  $\gamma$ -szorosával legyen egyenlő /ahol  $\gamma$  egy arányszám, mely megmutatja, hogy a  $b_i$  hányszorosa legyen a  $b_k$ -nak/, vagyis

$$/13.8./ \quad b_i = \gamma b_k.$$

Megszabhatjuk az illető két anyag arányát úgy is, hogy az  $i$ -edik anyag legfeljebb vagy legalább  $\gamma$ -szorosra legyen a  $k$ -edik anyagnak, azaz

$$/13.9./ \quad b_i \leq \gamma b_k,$$

illetve

$$/13.10./ \quad b_i \geq \gamma b_k.$$

Tekintve, hogy

$$/13.11./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

és

$$/13.12./ \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = b_k,$$

á /13.8./ a következőképpen fogalmazható meg:

$$/13.13./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \gamma \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j,$$

és ebből

$$/13.14./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n (\gamma_{kj}) x_j,$$

az egyenletet egy oldalra átrendezve kapjuk, hogy

$$/13.15./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n (\gamma_{kj}) x_j = 0,$$

ami viszont a következő egyszerű alakra hozható:

$$/13.16./ \quad \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \gamma_{kj}) x_j = 0.$$

A fenti módon járhatunk el a /13.9./ és /13.10./ formulák tekintetében is, ahol egyenlet helyett egyenlőtlenségeket találunk.

A takarmányok táplálóanyag-tartalmára vonatkozó szabványtáblázatokban az egyes takarmányokra nem a mézst tartalmat, hanem csak a mézsfelésleg-, illetve mézshiány-adatokat találjuk meg, azaz az  $a_{ij} - \gamma_{kj}$  kifejezések már kiszámolva, táblázatba foglalva válnak meg. Ez egyszerűvé teszi a /13.16./ alkalmazását.

Ezzel lényegében áttekintettük azokat a lehetséges mérlegfeltétel-típusokat, amelyekkel a takarmányadagok programozása során a táplálóanyag-szükségletet előírhatjuk. Természetesen a mérlegfeltételek kielégítésére gyári készítmények is figyelembe vehetők.

A rendelkezésre álló takarmányok azonban - amint ismeretes - különböző jellegűek és biológiai hatásuk is eltérő. E tekintetben a takarmányok különbözőképpen csoportosíthatók. Megkülönböztetünk koncentrált takarmányokat és kevésbé koncentrált, tömegtakarmányokat. A tömegtakarmányok is lehetnek pl. zöldtakarmányok, szálas takarmányok és lédús takarmányok. Forrás tekintetében megkülönböztetünk saját termelésű és vásárolt takarmányokat. A saját termelésű takarmányok ismét lehetnek főtermékek, melléktermékek és másodvetésű termékek, vagy más szempontból piaci forgalomban szerepeltethető vagy piaci forgalomban nem levő takarmányok. /Piaci forgalomban nem levő takarmányokon értem azokat a takarmányokat, amelyek kis táplálóanyag-koncentrációjuk és nehéz szállíthatóságuk miatt piaci forgalomban általában nem, vagy csak ritkán szerepelnek./

Bizonyos takarmányok tartalmazhatnak mérgező anyagokat, mások lehetnek dugító vagy hashajtó hatásúak, stb. Mindezeket figyelembe kell venni a takarmányadagok összeállításánál. Az adagban a különböző takarmányok olyan mennyiségben, illet-

letve arányban legyenek, hogy az megfeleljen az állat biológiai igényeinek.

A matematikai modell összeállításakor a különféle takarmányok mennyiségeire és arányaira vonatkozó, az állat életteni igényeit kielégítő feltételeket is előre meg kell szabni és azokat a modellbe beépíteni. Az ilyen célú mérlegfeltételeket az alábbiak szerint adhatjuk meg.

Előírhatjuk valamely takarmányból vagy takarmánycsoportból az adagban maximálisan lehetséges mennyiséget /felső korlátot/. Ha például a j-edik takarmány legfeljebb  $q_j$  mennyiségben szerepelhet az adagban, akkor

$$/13.17./ \quad x_j \leq q_j,$$

illetve ha a j-edik, j+1-edik és így tovább, j+r-edik takarmányok együttes mennyisége nem lehet több az adagban, mint  $q_r$ , akkor az

$$/13.18./ \quad x_j + x_{j+1} + x_{j+2} + \dots + x_{j+r} \leq q_r$$

feltételt építjük be a modellbe.

Hasonlóképpen előírhatunk alsó korlátot is az adott takarmányra vagy takarmányokra, az egyenlőtlenség irányának megváltoztatásával, vagy megfogalmazhatjuk a feltételeket egyenlet formájában is.

Például dugító vagy hashajtó hatású takarmányokra felső korlátot írunk elő, az étletlenül jó hatást kifejtő takarmányokra pedig alsó korlátot. Bizonyos gazdasági indokok alapján is előírhatunk a különböző takarmányokra alsó vagy felső korlátot, vagy egyenletet.

A takarmányok vagy takarmánycsoportok adagban szereplő mennyiségeire vonatkozó feltételeket úgy is megszabhatjuk, hogy ezek tartalmát valamely táplálóanyagból bizonyos mennyiségben írjuk elő alsó vagy felső korlátként, vagy esetleg egyenlőséggel. Így pl. megszabhatjuk, hogy a k-adik takarmány az adagban az i-edik táplálóanyag-szükségletnek legfeljebb hányad részét adhatja, illetve legalább hányad részét kell, hogy adja. Például:

$$/13.19./ \quad a_{ik} x_k \leq \beta b_i$$

ahol  $\beta$  kifejezi, hogy a k-adik takarmány az i-edik táplálóanyag hányad részét adhatja ( $0 \leq \beta \leq 1$ ).

A /13.19./ feltételt kiterjesztve a  $k, k+1, \dots, k+r$ -edik takarmányokra, kapjuk a

$$/13.20./ \quad a_{ik}x_k + a_{i(k+1)}x_{k+1} + \dots + a_{i(k+r)}x_{k+r} \leq \beta b_i$$

formulát.

A takarmányoknak az adagban szereplő mennyiségeire viszonylagos korlátokat is adhatunk. Például meghatározhatjuk, hogy  $j$ -edik takarmány az  $r$ -edik takarmánynak legalább  $\mu$ -szoros legyen, vagyis

$$/13.21./ \quad x_j \geq \mu x_r$$

A /13.21./-et egy oldalra rendezve kapjuk, hogy

$$/13.22./ \quad x_j - \mu x_r \geq 0$$

Természetesen a /13.21./ fordított egyenlőtlenség vagy egyenlet alakjában is megfogalmazható, illetve több takarmányra is kiterjeszthető.

Végül a takarmányok mennyiségeire és arányaira vonatkozó feltételeket úgy is megszabhatjuk, hogy azok az adagban egy meghatározott intervallumban bármilyen értéket felvehetnek. Ha például előírjuk, hogy a  $k$ -edik takarmány az adagban legalább  $q_{r0}$  és legfeljebb  $q_r^0$  mennyiség között lehetséges, akkor feltételünk

$$/13.23./ \quad q_{r0} \leq x_k \leq q_r^0,$$

s ezt két feltételre bontva kapjuk, hogy

$$/13.24./ \quad x_k \geq q_{r0}$$

és

$$/13.25./ \quad x_k \leq q_r^0.$$

A /13.23./ természetesen több takarmányra is kiterjeszthető.

Míg a táplálóanyag-igényekre vonatkozó feltételek általában szabvány-táblázatban adottak, a takarmányok mennyiségeire és arányaira nincsenek ilyen szabványok. Szakkönyvekben találunk ugyan utalásokat az egyes takarmányokból etetendő kívánatos mennyiségekre /alsó vagy felső korlátokra, vagy in-

tervallumokra/, ezek azonban nagymértékben függenek attól, hogy milyen más takarmányok vannak az adagban. Más lesz például a lucernából etethető mennyiség, ha az adagban egyéb szálas takarmányokat is etetünk. Hasonlóképpen másként alakul az etethető takarmányrépa mennyisége, ha egyidejűleg rüpszetelet is etetünk, vagy ha az utóbbit nem etetjük. Az sem mindig elegendő, ha az azonos típusú takarmányokat együttesen korlátozzuk.

A takarmányok mennyiségeit, illetve arányait meghatározó feltételek számszerűsítését, a biológiai igények mellett, bizonyos gazdasági követelmények is befolyásolják. Ha például valamely takarmányból kevés van, akkor az abból etethető mennyiség felső határát kénytelenek vagyunk a biológiailag etethető felső határ alatt megszabni. Ha azonban bőven van olyan takarmány, amely piaci forgalomba nem kerül /nem adható el/, vagyis az abból fel nem etetett mennyiség tönkremegy, akkor a biológiailag etethető mennyiség határát igyekszünk a lehetséges legmagasabb értékben megadni.

Saját termelésű takarmányoknál azokra, amelyekből viszonylag nagy mennyiség áll rendelkezésre és piaci forgalomban nem szerepeltethetők, az élettanilag megengedhető legnagyobb mennyiségben felső korlátot szabunk meg, de emellett beiktatunk egy indokolt alsó korlátot is. Azokat, amelyekből kevés van és nem vásárolhatók, az 1 napra jutó mennyiségben korlátozzuk. Azokat a saját termelésű takarmányokat, amelyek piaci forgalomban szerepelnek /eladhatók és vásárolhatók/, a biológiai igény alapján korlátozzuk.

A piaci forgalomban szereplő, nem saját termésű takarmányokat, ha azok korlátlanul beszerezhetők, a biológiai igény szerint korlátozzuk. Ha azonban beszerzésük korlátozott, akkor a feltételek meghatározásánál ezt is figyelembe kell venni.

A kérdés további részletezése nélkül is nyilvánvaló, hogy a takarmányadagok matematikai programjának összeállításakor a legnehezebb és legtöbb szakértelmet kívánó probléma éppen a takarmánymennyiségekre, illetve arányokra vonatkozó feltételek helyes meghatározása. A kérdés megoldása nagy szakmai felkészültséget és az üzem körülményeinek alapos ismeretét igényli.

A takarmányadagok programozása során a mérlegfeltételek helyes meghatározásához az elmondottak értelmében a következő általános elveket kell szem előtt tartani:

a/ A mérlegfeltételek biztosítsák az állat táplálékanyagigényének és a takarmányok mennyiségeire és arányaira vonatkozó - szakmailag helyes - igényeinek kielégítését.

b/ A mérlegfeltételek feleljenek meg az üzem gazdasági adottságainak.

c/ A mérlegfeltételek ne legyenek egymásnak ellentmondók /ez esetben ugyanis a program megoldhatatlan/.

d/ Ha az a/ és b/ pontban említettek egymásnak ellentmondó feltételekhez vezetnek, a mérlegfeltételeket alapos szakmai és gazdaságossági mérlegeléssel kialakított kompromisszum alapján kell megszabni.

e/ Lehetőleg tartózkodjunk túl sok és szorosra szabott mérlegfeltétel alkalmazásától /ez ugyanis nagymértékben kihat a takarmányadagok gazdaságosságára/, de ez nem mehet a szakmai célszerűség rovására. A lineáris programozás lehetőséget ad annak vizsgálatára is, hogy az egyes korlátozó feltételek változtatása milyen hatással van az adag gazdaságosságára. Célszerű lehet esetleg ennek vizsgálata is.

f/ A mérlegfeltételek meghatározásánál valamennyi állatcsoportra gondoljunk.

g/ A takarmányadagok összeállítás, programozása során a mérlegfeltételek kialakításában közömbös, hogy melléktermék, másodtermék, vásárolt takarmány, takarmánykeverék, stb. szerepel-e az adagban. Itt tehát kizárólag az általános elvet kell alkalmazni. A takarmánytermelési tervnek takarmányadagok alapján történő összeállításakor kérdésekre is tekintettel kell lenni.

Az eddigiekben megfogalmazott mérlegfeltételeken kívül teljesülniük kell az

$$/13.26./ \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

határfeltételeknek, azaz az adagban negatív takarmánymennyiségek nem szerepelhetnek.

Ezzel megfogalmaztuk a takarmányadagok programozása során előforduló feltételtípusokat.

A lineáris programozásnak azonban akkor van igazi értelme, ha a fentiekben vázolt /13.1. - 13.26./ feltételek nem határozzák meg egyértelműen a takarmányadagokat, hanem azok több adagvariánssal kielégíthetők. Ebben az esetben a lineáris programozás módját ad arra, hogy a lehetséges variánsok közül a számunkra leggazdaságosabbat válasszuk ki.

A matematikai programozás során fontos feladat annak eldöntése, hogy mit tekintünk a gazdaságosság kritériumának, azaz mi legyen a célfüggvény közgazdasági tartalma.

A takarmányadagoknak tényleges adatok alapján történő tervezése esetén legcélszerűbb, ha a célfüggvény közgazdasági tartalma a piaci ár. Természetesen a piaci árhoz az üzemet terhelő szállítási költséget, vagy feldolgozási, előkészítési költséget is hozzá kell számítani.

Jelöljük a j-edik takarmány piaci árát /beleszámítva a szállítási költséget és esetleg a feldolgozási költséget is/  $p_j$ -vel. A takarmányadag összeállításakor az a követelményünk, hogy a /13.1./-/13.25./ mérlegfeltételeket és a /13.26./ hártárfeltételeket kielégítsük, de a takarmányadag piaci ára a lehető legkisebb legyen, azaz a célfüggvényünk minimális értéket vegyen fel:

$$\text{/13.27./} \quad P = \sum_{j=1}^n p_j x_j \longrightarrow \min.$$

ahol P az adagban szereplő takarmányok árösszege.

A fentiekben megfogalmazott célfüggvénnyel kapcsolatban azonban néhány megjegyzést kell tenni. Bizonyos saját termelésű takarmányok nem szerepelnek piaci forgalomban, így nincs tényleges áruk. Ezek célfüggvény-koefficiense lehet valamilyen névleges ár /pl. elszámoló ár/ vagy termelési költség, illetve a programozás szempontjából esetleg nulla. Mivel ezek a takarmányok nem adhatók el, fel nem használásuk esetén tönkremennek, arra törekszünk, hogy a rendelkezésre álló mennyiséget ezekből teljesen felhasználjuk. Ha ezek a célfüggvényben o koefficienset kapnak, akkor a mérlegfeltételek adta keretek között minél nagyobb mértékben szerepelni fognak az adagban.

Természetesen a takarmányadagot a takarmányozási napok számával szorozva, megkapjuk az adott állatcsoport takarmány-szükségleti, illetve takarmányfelhasználási tervét egy vizsgált időszakra vonatkozólag.

A fentiekben részletesen kifejtett feladat összevontan a következő formában fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} \text{/13.28./} \quad & x \geq 0 \\ & A_1 x \geq b \\ & A_2 x \geq d \\ & P = p^T x \longrightarrow \min. \end{aligned}$$

Ha feladatunk a takarmánytermelés megtervezése, akkor is eljárhatunk úgy, hogy egy évre előre megtervezzük a takarmányadagokat, s ezeket a takarmánynapokkal szorozva és állatcsoportonként összesítve, a takarmány-szükségletl tervet kapjuk. Ilyenkor egyrészt a célfüggvény nem a piaci ár, hanem a termelési költség vagy /és/ a termeléshez szükséges terület. Másrészt az adagok mérlegfeltételeinek kialakítása során tekintettel kell lenni a termelési arányok /különösen kettős termelés vagy melléktermék esetén/, valamint munkaerő- és gépszük-

letre. Emiatt esetleg az adagok többszöri kiszámítására lehet szükség, változtatva közben a növényekre, illetve növényaranyokra vonatkozó korlátokat. Ha a modellekben vásárolandó takarmányok is szerepelnek és a célfüggvényben a terület minimalizálását irtuk elő, a vásárolandó takarmányok árait területre kell átszámítani. Ehhez alapul szolgálhat valamely árúnövény jövedelem adata, amelyet a takarmányvásárlás által megakarítható területen termelünk.

A vázolt módszer értelemszerűen takarmánykeverő üzemekben is alkalmazható, takarmánykeverékek összeállításának optimalizálására.

### 13.2. Komplex takarmányfelhasználási terv készítése

Ha egy hosszabb időszak takarmányfelhasználási tervét kívánjuk elkészíteni, mindenekelőtt el kell készítenünk egy olyan takarmányfelhasználási diagramot, amely takarmányozási állatcsoportonként ábrázolja, hogy az etethető takarmányok az időszakon belül mikor állnak rendelkezésre. Ennek alapján az egész időszakot olyan időszakokra tudjuk felosztani, amelyekben ugyanazon takarmányok etethetők az egyes állatcsoportokkal. Minden állatcsoportnál annyi takarmányadagot kell összeállítani, ahány ilyen időszakasunk van.

Az egyes időszakaszokra összeállított takarmányadagokat a takarmányozási napok számával szorozva állatcsoportonként megkapjuk az adott időszakasz takarmányfelhasználási tervét. Az időszakaszok takarmányfelhasználási terveinek összeadása egy-egy állatcsoportra az egész időszak takarmányfelhasználási tervét adja, s ha természetesen az állatcsoportok takarmányfelhasználási tervét összegezzük, megkapjuk az egész választási takarmányfelhasználási tervet a teljes időszakra.

Az így kapott terv alapján egyeztetni tudjuk a különböző takarmányokból rendelkezésre álló készletet és a szükségletet, s elkészíthetjük a takarmányvásárlási és takarmányeladási tervet, számolva egy biztonsági tartalékkal is.

Problémát okozhat, hogy vannak olyan takarmányok, amelyek piaci forgalomban nem szerepelnek. Ha az ilyen takarmányoknál a szükséglet meghaladja a rendelkezésre álló mennyiséget, a hiányt nem tudjuk vásárlásból fedezni. Ha a rendelkezésre álló mennyiség több, mint a szükséglet, a felesleget nem tudjuk értékesíteni, az veszendőbe megy, holott más takarmányozás mellett az is felhasználható volna, s ezáltal csökkene a takarmányvásárlás mennyisége. A probléma azonban megoldható, ha a takarmányadagokat az egész üzemre vonatkozólag egyidejűleg, egy modellben tervezzük meg egy adott időszakra.

Ha a takarmányadagokat az egész üzemre vonatkozóan kívánjuk egy adott időszakra összeállítani, akkor a feladat a következőképpen fogalmazható meg:

Meg kell tervezni a takarmányozást egy T időszakra, amelyet azonban  $t_1^k, t_2^k, \dots, t_n^k$  időszakaszokra bontunk fel / $k = 1, 2, \dots, N$ / annak megfelelően, hogy az adott T időszakban hányféle takarmányadagot kell összeállítanunk a k-adik állatcsoportnál. Legyen N-féle takarmányozási állatcsoport. Jelöljük a k-adik állatcsoport takarmányozási napjainak számát az r-edik időszakban /vagyis  $t_r^k$  napjainak számát/  $s^{kr}$ -rel / $r = 1, 2, \dots, z_k$ /. A takarmányadagok összeállításához n-féle takarmány áll rendelkezésünkre. Jelöljük a k-adik állatnál l takarmányozási napra j-edik takarmányból adandó, egyelőre ismeretlen mennyiségeket az r-edik időszakaszban  $x_j^{kr}$ -rel / $j = 1, 2, \dots, n$ /. Ismeretes, hogy az egyes takarmányok korlátozott vagy korlátlan mértékben piaci forgalomban szerepelnek, mások viszont nem. Bizonyos takarmányok a k-adik állatcsoporttal az egész T időszakban etethetők, mások csak ennek egy részében. Most az a feladat, hogy összeállítsuk valamenynyi állatcsoport takarmányadagját a  $t_r^k$  időszakaszokra úgy, hogy a piaci forgalomban nem szereplő takarmányokat a felhasználásra alkalmas időszakaszokban teljes mértékben felelessük, de a különféle állatcsoportok, illetve időszakaszok között úgy osszuk el, hogy az a leggazdaságosabb és egyben a T időszak takarmányköltsége a gazdaságban a lehető legkisebb legyen.

Az előző pontban megfogalmaztuk az egyedi takarmányadagok modelljét. Most azonban  $\sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{z_k} t_r^k$  modellt veszünk fi-

gyelembbe, s ezeket egymással is összekapcsoljuk. Ha a /13.28./ összevont formulát alkalmazva a k-adik állatcsoport takarmányadagjának modelljét az r-edik takarmányozási időszakaszban a

$$\begin{aligned} /13.29./ \quad & \underline{x}^{kr} \geq \underline{0} \\ & \underline{A}_1^{kr} \underline{x}^{kr} \geq \underline{b}^{kr} \\ & \underline{A}_2^{kr} \underline{x}^{kr} \leq \underline{d}^{kr} \end{aligned}$$

formulával jelöljük, ahol  $\underline{b}^{kr}$  és  $\underline{d}^{kr}$  kizárólag az élettani igényeket veszi tekintetbe, akkor az N-féle takarmányozási állatcsoportra  $\sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{z_k} t_r^k$  modellből álló rendszer vizsgálata válik szükségessé. Ezeket azonban össze kell kapcsolni a

$$/13.30./ \quad \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{z_k} s^{kr} x_j^{kr} = d_i$$

feltételrendszerrel, ahol  $d_i$  a piaci forgalomban nem szereplő saját termelésű takarmányok rendelkezésre álló mennyiségeit kifejező i-edik feltétel, amely szerint a j-edik takarmányból rendelkezésre álló mennyiségeket az r-edik időszakaszokban

pontosan fel kell használni. Azoknál az állatcsoportoknál, illetve takarmányozási időszakaszokban, amelyekben a  $j$ -edik takarmány nem etethető, az  $x_j^{kr} = 0$ .

A /13.29./, /13.30./ mérlegfeltételek és a

$$/13.31./ \quad x_j^{kr} \geq 0$$

határfeltételek mellett keressük a

$$/13.32./ \quad \begin{array}{cccc} N & z & n & \\ \Sigma & \Sigma^k & \Sigma & s^{kr} \quad p_j^{kr} \quad x_j^{kr} \\ k=1 & r=1 & j=1 & \end{array}$$

célfüggvény minimumát, ahol a  $p_j^{kr}$  a  $k$ -adik állatcsoporttal az  $r$ -edik időszakaszban etetett  $j$ -edik takarmány egységnyi mennyiségének piaci ára. /A szállítási és feldolgozási költség itt is beszámítható./

A modellt a /13.33./ alatt vázlatosan megtaláljuk /327. oldal./

Természetesen valamennyi  $x_j^{kr}$ -re fennállnak az

$$/13.34./ \quad x_j^{kr} \geq 0$$

határfeltételek, és mindazokra a részmodellekre, amelyekben a  $j$ -edik takarmány nem etethető, az  $x_j^{kr} = 0$ .

A modell megoldása lehetővé teszi a piaci forgalomban nem szereplő takarmányok felhasználását, megmutatja, hogy azokat hogyan kell elosztani a különböző állatcsoportok és takarmányozási időszakok között, valamint, hogy mely takarmányokból mennyit kell vásárolni, illetve eladni.

A modell, értelemszerűen használva, alkalmazható a takarmánytermelés tervezésére is. Most azonban nem a piaci forgalomban nem szereplő takarmányok érdekesek számunkra, hanem az, hogy a munkaerő és gépkapacitás, a rendelkezésre álló terület és a takarmányok termelési arányai kedvezően alakuljanak. A takarmánydag modelleket tehát most a területmérleg, munkaerő és gépmérlegek, valamint a termelési arányokra előírt követelmények kapcsolják össze. Ezekről a takarmánytermelés globális tervezése tárgyalásánál lesz szó, de értelemszerűen a fentiekben ismertetett modellnél is alkalmazhatók.

/13.33./

$\underline{A}_1^{11} \underline{x}^{11}$									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{b}^{11}$
$\underline{A}_1^{11} \underline{x}^{11}$									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{g}^{11}$
$\underline{A}_2^{12} \underline{x}^{12}$									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{b}^{12}$
$\underline{A}_2^{12} \underline{x}^{12}$									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{g}^{12}$
									...	
									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{b}^{1z}$
									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{g}^{1z}$
									...	
									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{b}^{N1}$
									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{g}^{N1}$
									...	
									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{b}^{Nz}$
									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{g}^{Nz}$
$\underline{s}^{11} \underline{x}^{11}$									$\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$	$\underline{d}$
$+ s^{12} \underline{x}^{12} +$									$=$	
$\underline{s}^{11} \underline{x}^{11} \underline{x}^{12} +$									$\rightarrow$	min.

### 13.3. A takarmánytermelés matematikai tervezése "globális módszerrel"

A takarmánytermelés részletes - takarmányadagokig részletezett - tervezése igen munkaigényes. Bizonyos azonban, hogy a termelés nem teljesen a terv szerint fog alakulni, más átlaghozamokat és más takarmánykészletet kapunk ténylegesen, mint amit terveztünk. E szerint viszont újra meg kell tervezni a takarmányadagokat a felhasználás céljára, vagyis el kell készíteni a tényleges adatok alapján a takarmányfelhasználási tervet. Kérdés tehát, hogy célszerű-e a takarmánytermelési tervet sok munkával és költséggel adag-részletesséig megtervezni, vagy csak nagy vonalakban, "globálisan" tervezzük a termelést, majd pedig részletesen a felhasználást. A továbbiakban ilyen nagyvonalakban történő tervezés módszerével ismerkedünk meg. /Erre a nagyvonaluságra utalunk a "globális" elnevezéssel./ Ez az eljárás egyszerű, gyors, kis modellekkel megoldható, olcsó és gyakorlatilag használható eredményt ad.

A globális tervezés során az állományváltozási terv és az állati termékek termelési terve alapján meghatározzuk az egész állomány évi szükségletét a különböző táplálóanyagokból. Ezzel egyidejűleg szakmailag célszerű kívánalmakat /alsó és felső korlátokat /adunk meg a különböző takarmánycsoportokra /abrak, zöld, szálas, stb./ vagy takarmányokra.

A feltétlen takarmányok /rét, legelő, melléktermékek/, valamint egyértelműen vásárlásból beszerzendő takarmányok /pl. tápok/ számbavétele után, azok beltartalmi értékeit levonva a szükségletből, megkapjuk a programozással tervezendő szükségletet. Természetesen megfelelően módosítjuk a takarmánycsoportokra, illetve takarmányokra vonatkozó előírásokat is. Jelöljük most a programozással tervezendő táplálóanyagmennyiségeket  $b_i$ -vel / $i$  az  $i$ -edik táplálóanyagra utal/, a takarmánycsoportok, illetve takarmányokra előírt  $i$ -edik korlátot pedig  $q_i$ -vel.

Számbavesszük a termelhető takarmányokat /és vásárolható takarmányokat/ és elkészítjük azok technológiai tervét. A technológiai tervek egységnyi termelés /pl. 1 vagy 100 ha termelés/ fajlagos adatait is tartalmazza, pl. átlagtermés, fajlagos táplálóanyagtermelés, munkaerőráfordítás, a különböző eszközök iránti fajlagos igény /természetesen a munkaerő és eszközigényt időszakonkénti bontásban, havi vagy esetleg dekábontásban/, a fajlagos költségráfordítást, stb.

A modell változói most a különböző takarmányok termelését /vásárlását/ jelentik. A modell mérlegfeltételei egyrészt a táplálóanyag, másrészt a takarmány-arányokra vonatkozó kívánalmakat határozzák meg, értelemszerűen alkalmazva a /13.1./-/13.26./ feltételeket. Ezek kialakítása során nem csak az állatok élettani igényeit vesszük figyelembe, hanem egyéb vállalati követelményeket is, ha azok a termelés lehetséges arányaira hatással vannak.

A modellbe beépítjük a munkaerőmérlegeket

$$/13.34./ \quad \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j = S_i$$

ahol

$m_{ij}$  - a j-edik takarmánynövény termelésének fajlagos munkaerőigénye az i-edik időszakban

$S_i$  - az i-edik időszakban a takarmánytermelésre rendelkezésre álló munkaerőkapacitás.

Ugyancsak szerepeltetjük a modellben a gépi munka mérlegeket, egyéb eszközmérlegeket, esetleg anyagfelhasználási mérlegeket:

$$/13.35./ \quad \sum_{j=1}^n g_{ij}^h x_j = d_i^h$$

illetve

$$/13.36./ \quad \sum_{j=1}^n s_j^h x_j = c^h$$

ahol

$g_{ij}^h$  - a j-edik takarmánytermelési ágazat fajlagos igénye a h-adik eszköz iránt az i-edik időszakban

$s_j^h$  - a h-adik anyagféleség iránti fajlagos igény

$d_i^h$  - a h-adik eszközből rendelkezésre álló kapacitás az i-edik időszakban

$c^h$  - a h-adik anyagból megengedett felhasználás.  
/Az anyagszámítások természetes, vagy értékmérlegek lehetnek. Utóbbi esetben több anyag is egy feltételbe vonható össze, ha csak azok beszerzésére rendelkezésre álló pénzmennyiség korlátozott, s ezen belül a különböző anyagok mennyisége tetszős szerinti./

Természetesen a nemnegativitás feltételei most is érvényesek, azaz

$$/13.37./ \quad x_j \geq 0.$$

A célfüggvény

$$/13.38./ \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j = \min.$$

ahol

$c_j$  - a fajlagos termelési költség, vagy termőterület igény lehet.

Ha vásárolt takarmány is szerepel a modellben, az ezekhez tartozó célfüggvénykoefficiens a piaci ár lehet.

Problémaként jelentkezhet most is, ha a célfüggvényben a terület minimalizálása szerepel, viszont a modellben takarmányvásárlási változó is van. Utóbbinak nincs termőterület igénye. A piaci ár azonban átszámítható területkoefficiensre. Az átszámításnál most is azt vesszük alapul, hogy ha takarmányt vásárolunk, azáltal kevesebb területet kell felhasználni a takarmánytermelésre. Az így felszabadított területen árúnövényt termelhetünk, s ezáltal jövedelmet érünk el. Ki tudjuk számítani, hogy a megtakarított területen termelendő árúnövényt milyen nagyságu területen kell termelni, hogy annyi jövedelmet nyerjünk, mint a vásárolt takarmány piaci ára. Ezt a területigényt szerepeltetjük tehát a vásárolt takarmánynál a célfüggvényben.

Ha a célfüggvényben a termelési költség minimalizálását írjuk elő, a modellbe célszerű területkorlátot is szerepeltetni, meghatározva a takarmánytermelésre felhasználható terület felső határát, azaz

$$/13.39./ \quad \sum_{j=1}^n f_j x_j \leq F$$

ahol

$f_j$  - a fajlagos területigény

$F$  - a takarmánytermelésre felhasználható terület felső határa.

Ha a célfüggvényben a területfelhasználást minimalizálunk, ilyen feltételre nincs szükség, hiszen eredményül a minimális területet nyerjük. Ilyenkor esetleg a termelési költségre írhatunk elő felső korlátot.

13.4. Az alaptakarmány és pótabrak optimális arányának meghatározása

Ha az egy helyen /egy csoportban, vagy istállóban/ tartott tehének tejtermelése nagymértékben differenciált, egyseges takarmányozásuk a következő problémákat veti fel. Ha az

adagot a legmagasabb termelésű egyed igényéhez alakítjuk, a tehének nagyobbik része érdemen felül kap takarmányt, ami takarmány és egyidejűleg költségpazarlással jár együtt. Ha a takarmánynormát ennél alacsonyabbra szállítjuk, a tehének egy része most is érdemen felül kap takarmányt, más része pedig nem kapja meg a szükségletet. Az ilyen megoldások nemcsak a költséget növelik, de a termelésre és az állat szervezetre is károsak lehetnek.

Tulzott követelmény volna az egyedi etetés is, hiszen a takarmányok kiporciózása igen fáradságos és költséges volna, legalábbis a jelenlegi takarmányozási és technikai szinten.

A gyakorlatban alkalmaznak egy közbeeső megoldást, amikor a napi takarmányadag két részből tevődik össze: egy tömegtakarmányokból álló /vagy döntően tömegtakarmányokból álló/ alaptakarmányból és koncentrált takarmányokból álló pótabrakból. Az alaptakarmányt az életfenntartáshoz, és bizonyos mennyiségű tej termeléséhez elegendő táplálóanyag biztosításához állítjuk össze, a pótabrak egy liter tej termeléséhez elegendő táplálóanyagot tartalmaz. Az alaptakarmányt minden tehén megkapja, függetlenül a termeléstől. Pótabrakot viszont csak azok a tehének kapnak, amelyek tejtermelése meghaladja azt a mennyiséget, amelyre az alaptakarmány képesít, mégpedig a többlettermeléssel arányosan. Takarmánypazarlás természetesen most is van, hiszen a tehének egy része anyai tejet sem ad egy adott időszakban, amennyire az alaptakarmány képesítené. Kérdés, hogy hány liter tejet volna célszerű az alaptakarmányt adott állatállománynál összeállítani, hogy a takarmányozás összes költsége minimális legyen?

A probléma a következőképpen oldható meg.

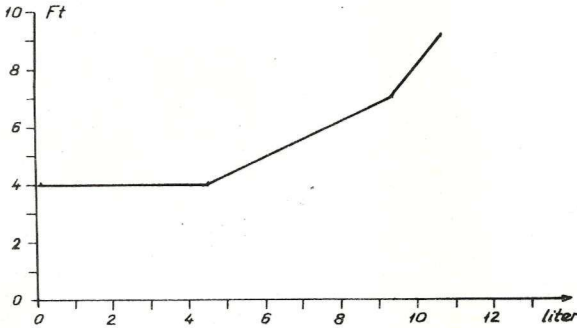
Összeállítunk egy paraméteres alaptakarmány modellt.

$$\begin{aligned} /13.40./ \quad & \underline{x}' \geq \underline{0} \\ & \underline{A}'_1 \underline{x}' \leq \underline{b}' + v \underline{z}' \\ & \underline{A}'_2 \underline{x}' \leq \underline{d}' + v \underline{d}' \\ & P' = \underline{p}'^T \underline{x}' = \min. \end{aligned}$$

ahol a vessző arra utal, hogy alaptakarmány modelltől van szó. Megkülönböztetésül a pótabrak modellt két vesszővel fogjuk jelezni.

A feltételek és a célfüggvény a szokásostól annyiban tér el, hogy a  $\underline{b}$  és  $\underline{q}$  vektor paraméteres és  $\underline{b}$  és  $\underline{q}$  kizárólag az életfenntartás igényeit,  $\underline{z}$  és  $\underline{d}$  az egy liter tej termelésére vonatkozó igényeket jelenti /táplálóanyag, illetve biológiai igények/ és  $v$  azt fejezi ki, hogy az alaptakarmányt hány liter tejet állítjuk össze.

Érdekes, hogy ha a modell  $v = 0, 1, \dots, V$  értékek mellett megoldjuk, az alaptakarmány költsége  $|P'|$  egyre gyorsuló ütemben növekszik, a 46. ábra szerint.



46. ábra

*Az alaptakarmányköltségek változása a tej-  
mennyiség függvényében*

A költség ilyen alakulásának oka a következő:

- a/ Az életfenntartó szükséglet keményítő érték fehérje aránya tágabb, a tejtermelés szűkebb. Az alaptakarmányban a tejtermelés növekedése tehát a fehérje arány növekedésével jár együtt, ami miatt az adagban a drágább fehérjetakarmányok mennyisége növekszik.
- b/ Az adag szárazanyagtartalma felülről korlátozott. A tejtermelés növekedésével fokozódó táplálóanyagszükséglet kielégítése tehát csak a drágább, koncentráltabb takarmányok arányának növekedésével oldható meg.

Össze kell állítani egy pótbrak modellt is, azaz

/13.41./

$$\begin{aligned} \underline{x}'' &\geq \underline{0} \\ \underline{A}_1'' \underline{x}'' &\leq \underline{b}'' \\ \underline{A}_2'' \underline{x}'' &\leq \underline{q}'' \\ P'' &= \underline{P}''^T \underline{x}'' = \min. \end{aligned}$$

ami egyszerű lineáris programozási feladat.

Ha egy adott tehen napi termelése  $V$  liter tej, és az alaptakarmányt  $v$  liter, a pótabrakot pedig  $l$  liter tejjel állítottuk össze, akkor a pótabrakot nyilván  $V-v$  literre kell adni, s ennek megfelelően a pótabrak költsége

$$/13.42./ \quad P'' \cdot /V - v/$$

formulával határozható meg. Ha  $v$  növekszik, akkor  $V-v$  csökken, vagyis a  $P'' \cdot /V-v/$  egy csökkenő lineáris függvény, ha ezt  $v$  növekedése szerint ábrázoljuk. Így lineáris szakaszokból álló monoton növekvő konvex  $p'_v$  függvénnyel /46. ábra/ és egy lineáris, monoton csökkenő  $p''_v$   $/V-v/$  függvénnyel dolgozhatunk. Kérdés, hogy milyen  $v$  érték mellett lesz az összes költség, vagyis

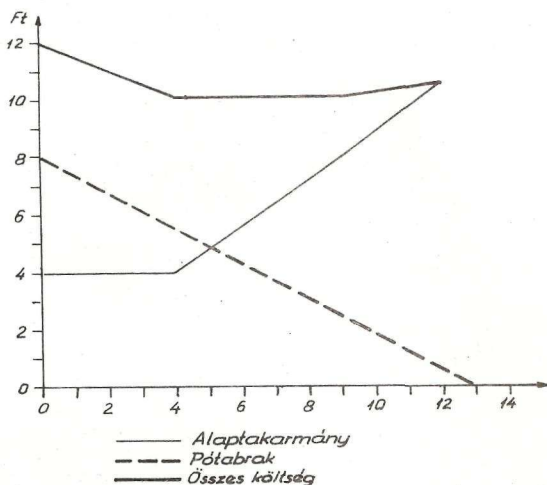
$$/13.43./ \quad P'_v + P'' \cdot /V-v/$$

minimális  $/0 \leq v \leq V/$ .

Legyen  $\Delta p'_v = p'_v - p'_{v-1}$  ( $v > 0$ ) a költségekbe beállított változás, amelyet az alaptakarmányban figyelembe vett tej egységnyi változása idéz elő az alaptakarmány költségében. A  $v$  növekedéssel a  $\Delta p'_v$  növekvő. Az optimális  $v$  értéket ott kapjuk, ahol az alaptakarmány költségének növekedése még nem haladja meg az  $l$  liter tej termeléséhez szükséges abraktakarmány költségét, de  $e$   $v$  értéknek további egységnyi növekedésekor már meghaladja. Tehát annál a legnagyobb  $v$ -nél kapjuk az optimumot, ahol a  $\Delta p'_v \geq p''$  még teljesül. Ha ilyen  $v$  nincs, akkor  $v = 0$  választandó.

A  $p'_v$ ,  $p''$  és  $p'' \cdot /V-v/$  függvényeket szemlélteti a 47. ábra.

Az előbbieken ismertetett módszer azonban csak egy adott tehenre érvényes optimális  $v$  érték meghatározását teszi lehetővé. Ha egy egész állományt vizsgálunk, egyáltalán nem biztos, hogy az egyedi optimum az egész állományra is optimális lesz. A tehenek egy része ugyanis ennél kevesebb tejet termel, így ezek érdemen felül kapnak alaptakarmányt. Amennyiben a tehenek nagyobb része az egyedi optimális  $v$  érték alatt termel, úgy igen nagy takarmánypazarlást okozna, ha továbbra is az egyedileg meghatározott optimális  $v$  értékhez ragaszkodnánk és minden tehen erre a tejmenyiségre kapna alaptakarmányt. Ezért egy új, az egész állomány tekintetében optimális  $v'$  értéket kell megállapítani. /Az egész állományra optimális  $v$  értéket megkülönböztetésül vesszövel jelöljük./ Hogy ez az új, az egész állomány tekintetében optimális  $v'$  mennyivel tér el az egyedileg megállapított optimális  $v$  értéktől, attól függ, hogy milyen az állomány tejhozam szerinti megoszlása.



47. ábra

*Az alaptakarmány, pótabrak és az összes takarmányköltség változása v függvényében*

Ha a tehénállomány minden tagjának tejhozama magasabb, mint az egyedileg megállapított optimális  $v$  érték, akkor az egész állomány tekintetében optimális  $v'$  érték megegyezik az egyedileg megállapított optimális  $v$  értékkel. Ez a legegyszerűbb eset, amikor is az egész állomány az egyedileg megállapított optimális  $v$  liter tej termeléséhez kap egyöntetűen alaptakarmányt, s az ezen felül termelt tejre pedig egyedileg pótabrakot.

Ha azonban a tehénállomány egy része az egyedileg meghatározott optimális  $v$  értéknél kevesebb tejet termel /esetleg az egész állomány ennél kisebb tejhozamu egyedekből áll/, új, az egész állományra optimális  $v$  értéket kell meghatározni.

Ha  $f_i$  jelenti a  $V_i$  liter tejet adó tehének számát ( $i = 1, \dots, K$ ), akkor a /13.43./ képletet az egész állományra kiterjesztve, a következő formulával határozható meg az egész állomány napi takarmányköltsége:

$$/13.44./ \quad \left( \sum_{i=1}^K f_i \right) \cdot p'_v + p'' \sum f_i \cdot |V_i - v'| ,$$

ahol bármely  $v'$  esetén  $E'$  olyan  $i$ -kre történő összegezést jelent, amely  $i$ -khez tartozó  $V_i$ -kre  $v' \geq V_i$ . A feladat szerint már csak az, hogy megkeressük azt a  $v'$  értéket, melynél a /13.44./ formulával megfogalmazott takarmányköltség minimális lesz.

A  $v'$  értéke a gyakorlatban a következőktől függ: Milyen takarmányok állnak rendelkezésre? Milyen a takarmányok árára? Milyen az állomány tejhozam szerinti összetétele? Mivel a tényezők gazdaságonként eltérők, általánosan érvényes  $v'$  értéket megadni lehetetlen, de az ismertetett módszert alkalmazva, a  $v'$  értékét minden konkrét esetben meg tudjuk határozni.

### 13.5. A takarmánytermelés szakosításának tervezése

A mezőgazdasági termelés fejlődése általában a szakosodás irányába halad. Ez a folyamat a szocialista mezőgazdaságban is megtalálható, amelynek folytán szocialista nagyüzemeink termelési erőforrásaikat kevesebb, de az üzem feltételei között eredményesebben termelhető termékek előállítására koncentrálnak.

A mezőgazdasági termelés speciálizálódása azonban nem jelentheti a mezőgazdasági üzemek termelésének egyoldalúvá fejlesztését. A mezőgazdasági termék és a mezőgazdasági termelés jellege, az üzemágak kapcsolata és kölcsönhatása, stb. feltétlenül megkíván a mezőgazdaságban bizonyos komplexitást is.

A specializáció a mezőgazdaságban nem lehet öncélú, a termelőerőktől és termelési viszonyoktól, valamint az egyéb konkrét körülményektől elvonatkoztatott.

A termelés szakosításának megvalósítása sok elméleti, tervezési, módszertani és gyakorlati probléma tisztázását és megoldását kívánja meg.

A szakosítással kapcsolatos tervezési módszerek kidolgozásakor mindenképp azt kell figyelembe venni, hogy a szakosítás nem lehet ötlepszerű és nem alapozódhat szubjektív megítélésekre. Mély elemzőmunkát, a termékek mennyisége, minősége és választéka iránti igényeknek és az egyes üzemek adottságainak alapos felmérését kívánja meg. Olyan tervek kialakítására van szükség, amelyek az üzemek adottságait a legjobban kihasználják, a termékek mennyisége és választéka iránt mutakozó igényeket a lehető legkevesebb ráfordítással a lehető legjobban kielégítik. Másrészt a szakosítás során feltétlenül a vállalat teljes komplexumát figyelembe kell venni.

A takarmánytermelést vizsgálva, nem feltétlenül szükséges, hogy minden mezőgazdasági vállalat termelje meg teljes takarmány szükségletét. Elképzelhető, hogy a vállalatok csak néhány - az adott körülmények között legeredményesebben termelhető - takarmánynövényt termelnek és a takarmányválaszté-

kot a piaci forgalmon keresztül, vagy egymás közötti termék-cserével bővítik. Különösen jó lehetőséget teremthet a takarmánytermelés szakosítására, ha a termelőszövetkezetek közös vállalkozást hoznak létre, nagyobb állattenyésztési egységek kialakítására, amelynek takarmánybázisát viszont döntően a társult termelőszövetkezetek biztosítják.

A takarmánytermelés szakosítása matematikai tervezésének módszerét a következőkben tekintjük át vázlatosan.

Mindenekelőtt fel kell mérni a szakosításba bevont üzemek állatállományát, illetve annak várható alakulását, majd ennek alapján az üzemek takarmányszükségletét. A takarmányszükségletek meghatározása egyrészt a különböző táplálóanyagokból való szükségletek felmérését jelenti, majd pedig annak kidolgozását, hogy az állatállomány élettani igényei, esetleg a feltétlenül szükséges üzemi arányok vagy egyéb indokok alapján a különböző takarmányok, illetve takarmánycsoportok mennyiségei és arányai tekintetében milyen követelményeket kell támasztanunk. Az így meghatározott szükségletet módosítjuk a nem takarmánytermelésből adódó melléktermékek és a takarmányvásárlás előírányzataival, illetve a takarmányvásárlást a programba beépítve, a megoldás eredményeként is megkaphatjuk. /A takarmányeladásoktól az egyszerűség kedvéért eltekintünk és feltételezzük, hogy azt az árunövénytermeléssel együtt tervezzük meg./

A takarmányszükséglet meghatározása után számbavesszük az egyes üzemekben termelhető takarmánynövényeket /ha a takarmányvásárlásokat is programozzuk, akkor a vásárolható takarmányokat is/. Felmérjük az üzemek termelési adottságait, kidolgozzuk a különböző takarmánynövények termelési technológiáit, várható hozamait és költségeit.

Ezután következik a matematikai modell összeállítása. Ez több módon is történhet.

Legegyszerűbb a modell összeállítása és megoldása, ha a szakosított takarmánytermelési tervet két lépésben készítjük el. Ebben az esetben először a takarmányokat két csoportba osztjuk, tömegtakarmányokra és abraktakarmányokra.

A tömegtakarmányok szakosított termelése - tekintve, hogy azok igen szállításiigényes terimés takarmányok, üzemek közötti nagy tömegben való szállításuk nagyon költséges - általában nem célszerű, ezért a tömegtakarmányokat minden gazdaság lehetőleg termelje meg a saját részére.

Az abraktakarmányok könnyen és viszonylag olcsón szállíthatók, ezért, amennyiben a szakosítással járó előnyök felülmúlják a szakosításból következő hátrányokat, indokolt lehet azok szakosított termelése.

A takarmányok két csoportra osztása után a takarmányszükségletet üzemenként megosztjuk aszerint, hogy abból mennyit kell saját termelésű tömegtakarmányokkal és meny-

nyit abraktakarmányo. -al fedezni. Ennek meghatározásában jelentős szerepe van a szubjektív megítélésnek, ami különböző hibák forrása lehet. A szubjektív tényezőt itt teljesen nem lehet kizárni, de alapos közgazdasági elemzéssel, illetve a modell megoldása során az árnyékárak elemzéséből kiinduló modositásokkal csökkenthetjük a szubjektív megítélés hatását.

Az elmondottak szerint kidolgozott alapadatokból most már felépíthetjük a matematikai modelleket.

Először összeállítunk minden gazdaságra egy modellt, amely kizárólag a tömegtakarmányok termelésére vonatkozik. Ezek szerint a tömegtakarmányok termelésére annyi modellünk lesz, ahány üzemet a szakosítás során figyelembe veszünk. E modellek mérlegfeltételei azt szabják meg, hogy minden üzemben legalább annyit kell megtermelni tömegtakarmányokkal a különböző táplálóanyagokból, amennyit az üzemre az összes táplálóanyag-szükségletnek tömegtakarmányokra és abraktakarmányokra való bontásakor a tömegtakarmányokra előirtunk. Ugyancsak beépítjük a különböző tömegtakarmányok mennyiségeire és arányaira vonatkozó, az állatállomány élettani igényei, - esetleg egyéb - szempontjából szükséges mérlegfeltételeket /13.1./ - /13.25./. Célfüggvényünk, tekintve, hogy termelési terv készítéséről van szó, általában a terület vagy költségigény /esetleg a kető együttes/ minimalizálása lesz.

A tanultak szerint építhetjük be a modellbe /lásd "globális" módszer/ a munkaerőre és a termelési eszközökre vonatkozó feltételeket. Lényegében tehát a tömegtakarmányok termelését vállalatonként a "globális" módszert alkalmazva tervezük meg.

Mint hogy az abraktakarmányok termelését szakosítva kívánjuk megoldani, az erre vonatkozó modellt nem gazdaságonként, hanem az összes gazdaságot egy modellbe foglalva össze, építjük fel.

Tegyük fel, hogy a tervezésbe  $N$  gazdaságot vontunk be és  $n$ -féle abraktakarmányt veszünk figyelembe. Jelölje  $x_j^k$  / $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, N$ / a  $k$ -adik gazdaságban termelendő /vagy vásárolandó/  $j$ -edik abraktakarmány mennyiségét.

Jelölje  $b_i^k$  az  $i$ -edik táplálóanyagból a  $k$ -adik gazdaságban szükséges mennyiséget, amelyet abraktakarmányokkal kívánunk kielégíteni. /Ezt azonban bármely gazdaság megtermelheti./

Jelölje  $a_{ij}^k$  a  $k$ -adik gazdaságban termelt  $j$ -edik takarmányféléseleg egységnyi mennyiségében található  $i$ -edik táplálóanyag-mennyiséget.

Mivel  $b_i^k$  az  $i$ -edik táplálóanyagból a  $k$ -adik gazdaságban szükséges mennyiség, így természetes az, hogy az összes gazdaságban az  $i$ -edik táplálóanyagból együttesen szükséges mennyiség,  $b_i$  a

$$/13.45./ \quad \sum_{k=1}^N b_i^k = L_i$$

formulával adható meg.

Az  $i$ -edik táplálóanyagra vonatkozó mérlegfeltételünk tehát

$$/13.46./ \quad \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n a_{ij}^k x_j^k \geq b_i,$$

amely meghatározza, hogy az összes gazdaságban termelt abrak-takarmányok legalább a szükségletet fedezzék az  $i$ -edik táplálóanyagból. /Hasonlóképpen szerepelhet a /13.46./-ban egyenlet, vagy felső korlát is./

A táplálóanyagok között adott üzemben meghatározott arányoknak kell lenni. Az összes üzemek arányainak átlaga, amely az üzemek együttes táplálóanyag-szükségletében fejeződik ki, eltér az egyes üzemek arányaitól, ezért nem biztos, hogy az átlagos arány megfelel az egyes üzemekben szükséges arányoknak. Az üzemenkénti táplálóanyag-arányokat mérlegfeltételekben kell előírni.

Ha  $b_i^k$  a  $k$ -adik üzemben az  $i$ -edik táplálóanyagból adódó szükségletét jelenti,  $x_j^{rk}$  pedig az  $r$ -edik üzem által a  $k$ -adik üzem részére termelt  $j$ -edik abrak-takarmányfelét, úgy a  $k$ -adik üzemben az  $i$ -edik táplálóanyag-szükségletre vonatkozó mérlegfeltételünk a

$$/13.47./ \quad \sum_{r=1}^N \sum_{j=1}^n a_{ij}^r x_j^{rk} \geq b_i^k$$

formulával fejezhető ki /mint az első összegezésből látható, a  $k$ -adik üzem önmagának is termel takarmányt/.

Mivel a /13.45./ szerint  $b_i$  a  $b_i^k$ -k összegezéséből adódik, ezért a /13.47./ feltétel beépítése a modellbe szükségtelessé teszi a /13.46./ mérlegfeltételt.

A /13.47./ formulához hasonlóan építjük be a különböző takarmányok mennyiségeire és arányaira vonatkozó mérlegfeltételeket is, a /13.1./-/13.25./ formulák felhasználásával. E tekintetben olyan szigorú megkötéseket is tehetünk, hogy előírjuk valamennyi abrak-takarmányból az egyes üzemekben pontosan szükséges mennyiségeket. Ekkor azonban a /13.47./ mérlegfeltételeket elhagyjuk, mert nincs gyakorlati értelme, illetve esetleg megoldhatatlan ellentmondást okozhat a modellben.

Igen fontos még, hogy a modellbe megfelelő mérlegfeltételeket építsünk be a takarmányarányokra vonatkozólag ne csak a felhasználást illetően /k-adik gazdaság a j-edik takarmányból legfeljebb vagy legalább milyen mennyiséget használhat fel/, hanem a termelést illetően is. Ha ugyanis ezt nem tesszük, akkor előfordulhat, hogy egyes gazdaságok csak egyféle abraktakarmányt termelnek, ami vagy megengedhető, vagy nem. Ha az egyféle abraktakarmányra való szakosodás nem kívánatos, úgy elő kell írni, hogy az egyes gazdaságok különböző takarmányokból legfeljebb mennyit termelhetnek, illetve legalább mennyit kell hogy termeljenek. Esetleg megszabhatjuk bizonyos takarmányok egymáshoz való arányát is.

A termelési arányokra vonatkozó feltételek helyes meg szabása esetleg nélkülözhetővé teszi a munkaerőre és termelési eszközökre vonatkozó mérlegfeltételeknek a modellbe való beépítését is. Ha azonban ezekre is szükség van, a tanulatokat értelemszerűen itt is alkalmazzuk. Ezek beépítése esetleg szükségtelenné teszi a termelési arányokra vonatkozó előírásokat.

Az így felépített modell megoldása - a terület minimalizálása esetén is - azt eredményezhetné, hogy egy-egy gazdaság az abraktakarmány-termelésre rendelkezésre álló területnél több területet igényelne. Ennek megakadályozására a modellben mérlegfeltételekkel elő kell írni, hogy a gazdaságok abraktakarmányok termelésére csak az e célra fordítható területet használhatják fel.

Az abraktakarmányok szakosított modelljében célfüggvényünk általában a terület vagy a költség minimalizálása. Az utóbbi esetben nemcsak a termelési költséget, hanem a szakosításból adódó szállítási költséget is figyelembe kell venni. Ez azt jelenti, hogy ha az r-edik üzem saját részére termeli meg az illető takarmányt, ott a célfüggvény-koefficiens a termelési költség és a raktárba szállítás költsége, ha azonban azt a k-adik gazdaság részére termeli, úgy a termelési költséghez a k-adik gazdaságba szállítás költségét is hozzáadjuk. A valóságban azonban, ha az r-edik gazdaság valamilyen takarmányt termel a k-adik gazdaság számára, akkor a k-adik gazdaság egy másik takarmányt termelhet az r-edik gazdaság számára. Ebben az esetben viszont a szállítójárművek oda- és visszafelé történő szállítanak, vagyis a szállítási költség megoszlik a két takarmány között. Ennek figyelembevételével azonban nehézkes, így a szállítási költségeket viszontszállítások nélkül tudjuk csak elszámolni. Ez esetben bizonyos mértékig a szakosított program a valóságosnál költségesebbnek látszik, ami viszont a szakosítás mértékére fékezően hat. Az is lehetséges, hogy egy bizonyos viszontszállítást eleve feltételezzünk - ennek mérve a valóságban plusz-minusz irányban elterjedhet -, vagy a programot előbb viszontszállítás nélkül oldjuk meg, majd a megoldás alapján a célfüggvény-koefficienseket módosítjuk a megoldás eredményeként kapott viszontszállítások figyelembevételével, s a számítást újra megismételjük.

Ha célfüggvényünk a terület minimalizálása, akkor a szakosításból eredő szállítási költségeket terület-koefficiensre számíthatjuk át.

Az üzemenkénti tömegtakarmány-termelés és szakosított abraktakarmány-termelés egy modellbe is összefoglalható. Ebben az esetben az üzemenkénti táplálóanyag-szükségletet nem osztjuk szét előre tömegtakarmányokból és abraktakarmányokból fedezendő szükségletre, hanem az elosztást bizonyos élettanilag megengedhető rugalmas határok között a program megoldására bizzuk.

Ekkor a modell felépítése a következők szerint történhet: Összeállítunk minden gazdaságra egy teljes takarmánytermelési modellt, de úgy, hogy abban az abraktakarmány-változók más gazdaságok által az illető gazdaság számára történő termelést is magukban foglalják. Ezeket a modelleket átlós irányban /a fő diagonál mentén/ egy modellbe foglaljuk. E modelleket összekapcsoljuk a gazdaságokban meglévő takarmánytermő területre, esetleg munkaerőre, termelési eszközökre, stb., vagy a termelési arányokra vonatkozó mérlegfeltételekkel. A célfüggvénnyel kapcsolatban az előbbieken elmondottak az irányadók.

Az így elkészített, az egész takarmánytermelést átfogó modell pontosabb eredmény elérését teszi lehetővé, de nagyobb terjedelmű.

## 14. FEJEZET

### Az árunövénytermelés matematikai programozása

#### 14.1. Az árunövénytermelés szerkezetének optimalizálása

Ha egy mezőgazdasági vállalat állattenyésztése és az ennek megfelelő takarmánytermelése, valamint gyümölcs- és szőlőtermelése kialakult, stabilizálódott, aligha kerülhet sor ezen ágazatok szerkezetének évenkénti változtatására. Ezek az ágazatok ugyanis éppen azért, mert jelentős beruházást kötnék le - illetve a takarmánytermelés szorosan kapcsolódik a beruházásigényes állattenyésztéshez - nagyfokú stabilitást igényelnek. Ugyanakkor az árunövények vetésszerkezete szükség szerint, illetve a piaci viszonyok és egyéb tényezők alakulásának megfelelően, rugalmasan, akár évenként is változtatható. E változtatások megalapozására alkalmazható a matematikai programozás.

A feladat megoldása során számbavesszük, hogy az egyéb ágazatok igényeinek kielégítése után mennyi termőterület áll rendelkezésre az árunövények termeléséhez. Ugyancsak számbavesszük az árunövénytermeléshez rendelkezésre álló munkaerő és eszközkapacitást /természetesen most is időszakonként/ és egyéb feltételeket /anyagfelhasználási korlátok, értékesítési lehetőségek, vagy kötelezettségek, stb./. A következő lépésben kidolgozzuk az árunövények termelési technológiáját, illetve lehetséges technológiai változatait, ha többféle technológiai megoldás is lehetséges.

A modell felépítése értelemszerűen megegyezik a takarmánytermelés "globális" módszerrel történő tervezésével kapcsolatban ismertetett modellel. Természetesen most nincs táplálóanyagokra vonatkozó mérlegfeltételünk. A modell változót az árunövények, illetve azok technológiai változatai képezik. A modell mérlegfeltételei a munkaerő és gépi munkamérlegek, esetleg anyagmérlegek, a termelési arányok és a piaci viszonyokat kifejező feltételek.

A célfüggvény közgazdasági tartalma általában a bruttó v. nettó jövedelem. Természetesen lehet más célfüggvény is, vagy egyidejűleg többféle célfüggvényt is alkalmazhatunk.

Problémát jelent egyrészt az, ha az erőforráskapacitások bővíthetők és feladatunk az is, hogy a bővítés mikéntjét programozással határozzuk meg. Ilyenkor a modellben erőforrásváltozókat is alkalmazni kell. Ezzel részletesebben foglalkozunk majd a komplex vállalati tervezés tárgyalása során.

Másrészt az is problémát okoz, hogy hogyan határozzuk meg a különböző árunövények termeléséhez a gépek fajlagos amortizációs költségét. E kérdéssel is a komplex vállalati tervezés tárgyalása során fogunk foglalkozni.

Az árunövénytermelés a szántóföldi zöldségtermelést is magában foglalhatja. Ilyenkor azonban tekintettel kell lenni a melegágyak, a fóliahajtatás, stb. szükségletére, illetve hasznosítására is. Ilyenkor a modell ilyen jellegű változókat is tartalmaz, s a feltételek meghatározása alkalmával biztosítani kell ezek kapcsolatát a zöldségtermelési változókkal.

Még bonyolultabb a probléma, ha bulgár-kertészeti termelést kívánánk optimalizálni. Ilyen kertészetben ugyanis a terület többszöri kihasználása, köztes termesztés, stb. problémák is előfordulnak. Ilyenkor a különböző termékek termelési arányait számos feltétel modellbe építésével kell biztosítani, és természetesen most is kapcsolatot kell teremteni a melegágyhasznosítás, üvegház vagy fólia, stb., valamint a különböző termékek szabadföldi termelése között.

#### 14.2. A szántóföldi növények területi elhelyezésének programozása

A probléma természetesen nemcsak az árunövénytermeléssel, de a takarmánytermeléssel is, azaz az egész szántóföldi növénytermeléssel kapcsolatos. Ugyancsak felmerülhet országos problémaként is általában a termelés területi elhelyezésének kérdése. Utóbbival azonban nem foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy valamely mezőgazdasági vállalat területe és természetesen ezen belül a szántóterület több összefüggő határrészre osztható fel úgy, hogy az egyes határrészek talajtípus, elhelyezkedés, stb. tekintetében különböznek egymástól. Valamennyi határrészre ki akarunk alakítani egy termelési szerkezetet, amely a vetésváltás szempontjából is kedvező.

Tételezzük fel, hogy a vállalat rendelkezik egy termelési tervvel, de szeretné az egyes növényeket ahatárrészen célszerűen elhelyezni, mondjuk úgy, hogy a szállítási igény és a szállítási költség a lehető legkevesebb legyen.

A határrészek táblákra vannak osztva. Feltételezzük, hogy a növények azon a határrészen, amelyen termesztjük, tábláról-táblára kerülve - vetésforgóban - körforgást végeznek. Szállítási igény merül fel egyrészt a táblára /szervestrágya, műtrágya, stb./, másrészt a tábláról a tárolóhelyre, állattenyésztési telepre, vasutállomásra, stb. E helyek egy-egy határrésztől mért távolsága különböző. Ki tudjuk számítani, hogy a különböző növényeket a különböző határrészekben, vagy táblákon termelve, mekkora szállítási igény jelentkezik. Ha

vizsgálatunk nem egy évre vonatkozik, hanem egy körforgás időszakára, akkor elegendő lehet egy-egy határrész átlagos szállítási távolságaival dolgoznunk, mivel ez idő alatt valamennyi növény valamennyi táblán termelésre kerül.

A modellt úgy építjük fel, hogy a modell változói egy-egy növény termelését reprezentálják, a különböző határrészeket /vagy táblákon/ termelve. A feltételrendszerben előírjuk, hogy az előírányzott vetéstervet, vagy termelési volumeneket biztosítani kell, másrészt a különböző növények termőterületére, illetve termelési arányaira ésszerű feltételeket építünk a modellbe, hogy a megfelelő vetésváltást határrészenként is biztosítsuk.

A célfüggvény közgazdasági tartalma lehet a szállítási volumen, a szállítási költség, a szállítóeszköz-szükséglet, stb. minimalizálása.

Ha a termelési terv nem eleve meghatározott, akkor célszerű a termelési szerkezet és a termelés területi elhelyezésének egyidejű optimalizálása. Ilyenkor a célfüggvény közgazdasági tartalma lehet a jövedelem /de természetesen más közgazdasági mutató is/ maximalizálása. A jövedelem természetesen függ a növények területi elhelyezésétől, hiszen e szerint eltérő lehet azok átlaghozama és a termelési költség, beleértve természetesen a szállítási költségeket is.

A modell változóit vonatkozhatnak területegységre /l, illetve 100 ha-ra/, vagy táblanagyságokra is. Utóbbi esetben, ha azt kívánjuk, hogy egy táblán csak egy növény termelésére kerüljön sor, alkalmazzuk az egészértékű programozást.

Valójában a növények területi és talajtipusok szerinti elhelyezésének kérdése a komplex vállalati tervezés során is felmerül.

#### 14.3. Gyümölcs- és szőlőtermelés szerkezetének optimalizálása

A gyümölcs- és szőlőtermelés /ültetvények/ szerkezetének /faj és fajta szerinti összetételének/ optimalizálása felvet néhány problémát, amelyek a szántóföldi árunövénytermelés optimalizálásakor nem merülnek fel. Célszerű azokat, ha röviden is, megemlíteni.

Egyrészt a gyümölcsfajok és fajták érési ideje eltérő és erre tekintettel kell lenni a termelési arányokra vonatkozó feltételek meghatározásánál. Jelentős problémához vezethet ugyanis, ha a gyümölcsszüretet nem tudjuk optimális időben elvégezni.

Másrészt a gyümölcs- és szőlőfélésegek hosszabb idő alatt fordulnak termőre. Ha a termelés periódusa ennél rövidebb időre szól, a még termőre nem forduló gyümölcsfélése-

gek nem versenyképesek a beállt gyümölcsösökkel. Célszerű ezért a modellben valamennyi gyümölcsféléseget átlagos terméshozammal /termőrefordulás után/ számbavenni. Még célszerűbb ilyen vonatkozásban dinamizált modellek alkalmazása.

Végül megjegyezzük még, hogy különösen a gyümölcs- és szőlőtermelés programozásánál nem mindig elegendő a munkaerő és gépmérlegek havonkénti bontásban történő vizsgálata. /Természetesen ez a probléma más növényeknél is felvetődhet./ Egyes feladatokat /pl. permetezés/ néhány nap leforgása alatt meg kell oldani. Az ilyen feladatokra vonatkozó mérlegeket vagy külön kezdve, rövidebb időszakra vonatkoztatva kell a modellbe beépíteni, vagy pedig a havi mérlegekben a normatív adatokat úgy alakítani, hogy azzal a rendelkezésre álló rövidebb időszakot kifejezzük. Például, ha a permetezést három nap alatt kell elvégezni és az adott hónapban aledolgozható munkanapok száma 24 nap, havi mérlegek alkalmazása esetén a modell megoldása nyolcszorta kevesebb permetezőgép-szükségletet mutatna. Ha a permetezésre háromnapos mérleget építünk a modellbe, az előbbinél nyolcszorta több permetezőgépre lesz szükségünk, és ez lesz a valóságos gépszükséglet. Ugyanezt a gépszükségletet nyerjük akkor is, ha havi permetezés napi teljesítményét a tényleges teljesítmény egynyolcadában határozzuk meg.

## 15. FEJEZET

### A matematikai programozás alkalmazása az állattenyésztésben

#### 15.1. Az állattenyésztés szerkezetének optimalizálása

Az állattenyésztés szerkezetének önmagában történő optimalizálása a gyakorlatban általában nem célszerű. Igaz, hogy általában ugyanezt lehet mondani a többi főágazattal kapcsolatban is. Arra kell inkább törekedni, hogy az egész vállalatot komplex módon átfojva alkalmazzuk a matematikai programozást. Kivételt képezhet ez alól a takarmányfelhasználás témaköre, illetve éves tervezés során a szántóföldi árúnövénytermelés és takarmánytermelés tervezése. A főágazatok önmagában történő programozását mégis célszerű - ha csak igen röviden, általánosságban is - megismerni, egyrészt, mert ritkán - esetleg elemzések és tudományos vizsgálatok során - ilyen problémák is felmerülhetnek, másrészt, mert az ezzel kapcsolatban ismertettek bizonyos mértékig alapul szolgálnak a komplex vállalati tervezés során is.

Most azt feltételezzük, hogy a többi ágazatok, így a takarmánytermelés és vásárlás is már megtervezésre kerültek, csupán az állattenyésztés szerkezetét kell optimalizálnunk.

A modell változói állattartási változók, mégpedig takarmányozási csoportonként megbontva, esetleg többféle tartási technológiával tervezve. A mérlegfeltételek egyrészt a táplálóanyagmérlegeket és a takarmány, illetve takarmánycsoportok /abrák, szálás, stb./ iránti igényeket tartalmazzák, korlátként alkalmazva a takarmánytermelés és takarmányvásárlás által biztosított lehetőségeket. Ugyancsak feltételeket írunk elő a férőhelykapacitásokra állatcsoportonként. Ennél tekintettel vagyunk arra is, ha pl. ugyanazt az istállót többféle állatcsoport is hasznosíthatja. Ilyenkor közös férőhelyfel-tételt alkalmazhatunk, vagy a férőhelyek átcsoportosítására külön változók modellbe-építése szolgálhat. Ha a férőhely beruházásból bővíthető, azt szintén egy-egy változó /új beruházási változó/ modellbe építésével oldhatjuk meg.

A modellben olyan feltételeket is szerepeltetni kell, amelyek az egyes állatfajokon /fajtákon/ belüli arányokat meghatározzák. Így például a tehénlétszámtól függ a borjulétszám, a növendékek létszáma, stb., azaz ezek között megfelelő arányoknak kell lenni. Ha azonban egyes állatcsoportok létszáma vásárlással bővíthető, be kell építeni a modellbe a vásárolt alapanyagra is változókat. Hasonlóan merülhet fel valamely állatcsoport létszámcsökkentésének lehetősége, értékesítési változóknak a modellbe építésével.

Tovább bővíthető a modell a munkaerő és eszközmérlegekkel, stb.

A célfüggvény a jövedelem, állóeszközszükséglet, állóeszközki költség, stb. lehet.

Ha a fajon /fajtán/ belüli összetétel szigorúan adott, akkor a modell egyszerűsíthető, ha a változók 100 anyára és teljes szaporulatára vonatkoznak. Ilyenkor nincs szükség arra, hogy takarmányozási állatcsoportok szerint részletezzük a változókat, hiszen a mérlegfeltételekben ugyanis kötött arányokat írunk elő. Ilyen aggregálással /összevonással/ mind a változók, mind a mérlegfeltételek száma nagymértékben csökkenthető. Természetesen most is lehetőség van arra, hogy pl. vásárolt alapanyagra alapozott hízalás lehetőségét, stb. megteremtsük a modellben, s ezáltal az állatcsoportok kötött arányát feloldjuk. Másrészt egy-egy állatfajra /fajtára/ többféle változat is kidolgozható, eltérő belső összetételt és eltérő tartási technológiákat tervezve.

#### 15.2. Az állattenyésztés és a takarmánytermelés szerkezetének egyidejű optimalizálása

A probléma önállóan is jelentkezhethet, még távlati tervezés során is. Elvileg az is elképzelhető, hogy egy mezőgazdasági vállalat távlatilag kizárólag állattenyésztésre és takarmánytermelésre kíván berendezkedni. De lehet, hogy valamely vállalat a terület egy részén kíván erre irányt venni, azaz egy bizonyos mennyiségű területen.

Ilyenkor az állattenyésztési és takarmánytermelési /itt általában a globális módszer alkalmazása célszerű/ modellt egy modellbe kell összevonni. A modell feltételeinek egy része csak egyik főágazatra vonatkozik /pl. a területfelhasználás a takarmánytermelésre, a férőhelykapacitás az állattenyésztésre/, más feltételek mindkét ágazatot érintik /munkaerő és eszközmérlegek/. A takarmánymérlegeket viszont úgy kell a feltételrendszerbe beépíteni, hogy a termelés és a szükséglet célszerű viszonyban legyenek.

Ha például

- $a_{ij}$  - a j-edik tevékenység által szolgáltatott fajlagos hozam az i-edik táplálóanyagból,
- $a'_{ij}$  - a j-edik állattenyésztési tevékenység fajlagos igénye az i-edik táplálóanyagból és
- $x_j$  - a j-edik takarmányt szolgáltató tevékenység /termelés, vásárlás/,
- $x'_j$  - pedig a j-edik takarmányt igénylő tevékenység /állattenyésztés vagy takarmányeladás/,

akkor feltételünk:

$$/15.1./ \quad \sum_j a_{ij} x_j \geq \sum_j a'_{ij} x'_j,$$

vagyis legalább annyi takarmányt kell termelni /és vásárolni,/ amennyi fedezi az állattenyésztés /és eladás/ igényét a különböző táplálóanyagokból. /Hasonlóképpen írjuk elő a takarmányok és a takarmánycsoportokra vonatkozó feltételeket./

A /15.1./ természetesen egy oldalra rendezendő, azaz a

$$/15.2./ \quad \sum_j a_{ij} x_j - \sum_j a'_{ij} x'_j \geq 0$$

feltétel kerül a modellbe. Ez a feltétel -1-gyel beszorozható és akkor a

$$/15.3./ \quad - \sum_j a_{ij} x_j + \sum_j a'_{ij} x'_j \leq 0$$

feltételt kapjuk.

E feltételekből kiolvasható, hogy a táplálóanyag és takarmánycsoport /életteni igények/ feltételeket úgy határozzuk meg, hogy a fajlagos adatok az egyik főágazatnál pozitív, a másiknál negatív előjellel szerepelnek.

Az ilyen modellben a célfüggvény lehet a bruttó v. nettó jövedelem /vagy természetesen más közgazdasági mutató is/. Ha célfüggvényünk a jövedelem, akkor célszerű úgy eljárni, hogy a takarmányt szolgáltató tevékenységeknél azok költségeit szerepeltetjük negatív előjellel, míg az állattenyésztési tevékenységnél a takarmányköltség nélkül számított jövedelmet, pozitív előjellel. Azt ugyanis nem tudjuk előre, hogy az állattenyésztésben milyen takarmányköltségek merülnek fel, hiszen ez éppen a takarmánytermelés szerkezetétől függ, ami viszont az állattenyésztés szerkezetének függvénye. Az állattenyésztési /illetve tartási/ ágazatoknak viszont takarmányvonzatuk van, de viselniük kell annak költségvonzatát is. A modellben ilymódon megteremtődnek az egyes főágazatokon belüli, de egymással kölcsönhatásban lévő versenyzés lehetőségei is.

Eredményként olyan szerkezetet nyerünk, amely a két ágazat együttes jövedelmének maximumát biztosítja. Igaz, hogy az egyes főágazatok önállósága feloldódik összefüggésükben.

A modellbe beépíthetünk egy változót a "terület értéklésére" is. Ez a változó egy egységvektor, amelyben 1-es található a területre vonatkozó feltétel sorában, a többi adata pedig zérus. Ugyanakkor ehhez a változóhoz egy pozitív

célfüggvény együtthatót rendelünk, alapul véve, hogy ha a terület egy részét árunóvény termelés céljára hasznosítanánk, hány R jövedelmet érnének el 1 ha-on. Ez mintegy "értéket" ad a területnek és ha a területet, vagy annak egy részét célszerűbb árunóvénytermelésre felhasználni, ennek a változónak a modellbe építésével erre a lehetőséget is megteremtettük.

### 15.3. A tejhozam és a tartási technológia kapcsolatának vizsgálata

Röviden, inkább csak az érdeklődés felkeltése és gondolatébresztés céljából említjük meg ezt a problémát, s a részletesebb ismeretek megszerzését a szakirodalom olvasására bizzuk.

Tegyük fel, hogy egy gazdaságban többféle tartási technológia alkalmazása lehetséges, mert különböző /és különböző berendezésű/ istállók állnak rendelkezésre, különböző lehet a munkaszervezés, a bérezés, a takarmányozás, az alaptakarmány szintje, stb. A teheneket a tejtermelésük szerint, több csoportra oszthatjuk és kidolgozzuk tartási technológiájukat, s az ehhez tartozó költség- és jövedelemadatokat, különböző tartási viszonyokra. Kérdés, hogy az adott lehetőségek mellett a különböző tejhozamu teheneket melyik istállóban, milyen tartási technológia esetén tartva, volna az egész tehenészet jövedelme a legnagyobb.

A modell változóit a különböző tejhozamu tehencsoportok képezik, a különböző istállóban és tartási körülmények között. A feltételrendszerben meghatározzuk az egyes istállótípusok kapacitáskorlátjait, az egyes tejhozam szerinti csoportok létszámát. E feltételek egyenlet, vagy felső korlátként építhetők a modellbe. /Utóbbi esetben nem ragaszkodunk a férőhelyek kihasználásához, sem pedig az adott állatlétszámhoz, vagyis a tehenek egy részének kiselejtezését is lehetővé tesszük./

Eredményül tájékoztatást kapunk arról, hogy az adott körülmények között milyen kapcsolat van a tartási technológia és a tejhozam között, azaz melyik tartási technológia milyen tejhozam mellett a legjobb.

## 16. FEJEZET

### Egyéb részleges feladatok programozása

Ebben a fejezetben néhány egyéb programozási feladat vázlatos megemlítésére szorítkozunk. Nem foglalkozunk itt a szállításszervezéssel, mivel tananyagunk második részében ezzel részletesen, külön fejezetben fogunk megismerkedni.

#### 16.1. Munkaszervezési feladatok programozása

Tegyük fel, hogy el kell készítenünk egy évre, vagy rövidebb időszakra /pl. kampányfeladatra/ a munkaszervezés tervét. Mindenekelőtt meghatározzuk, hogy milyen munkafeladatot, milyen volumenben kell ellátni. A munkafeladatok az időszakon belül, - az időszakot több időszakaszra felbontva - különböző időszakaszokban végezhető el, különbözőképpen, pl. különböző erő- és munkagépkapcsolatokkal. A modell változói a különböző munkaműveletek elvégzését jelentik, különböző időszakaszokban, különböző módon /különböző erő- és munkagépkapcsolattal/ végezve.

A modell mérlegfeltételeiben előírjuk egyrészt, hogy minden munkafeladatot el kell végezni. Másrészt a munkák között bizonyos összhangot kell teremteni. Ha például valamely munkát az első időszakaszban végezzük, akkor egy másik kapcsolódó munkát is el kell végezni ugyanabban az időszakaszban, vagy a másik munka csak a következő időszakaszban végezhető el, de ott feltétlenül el kell végezni, stb.

A modell feltételrendszerében elő kell írni a munkaműveletek és a gépkapacitások kapcsolatát is. Egy időszakaszban sem igényelhetünk több gépet a különböző gépekből, mint a rendelkezésre álló kapacitás.

A célfüggvényben előírhatjuk a költségek minimalizálását. Ebben azt is kifejezésre lehet juttatni, hogy ha valamely munkát nem optimális időben végzünk el, hanem később, akkor a termék egy része elvesz. E veszteséget szintén költségként számíthatjuk fel.

A megoldás eredményeként megkapjuk, hogy a különböző munkákat melyik időszakaszban célszerű elvégezni. Munkaszervezési feladatokkal a hálótervezés tárgyalása során fogunk részletesebben foglalkozni.

#### 16.2. A géppark optimalizálása

Ha az előbbi modellben a gépkapacitást nem tekintjük adottnak, hanem célunk az optimális géppark meghatározása is, akkor gépváltozók alkalmazásával módunkban áll a géppark optimalizálása is. Ilyenkor a munkaműveleti változók és gépvál-

tozók kapcsolatát kell a modellben megteremteni. Ha a munkaműveleti változók fajlagos gépigényét / $i$  . gépi műszak igényét/  $g_{ij}^h$ -vel, a gépek fajlagos műszaktelejesítményét pedig  $q_{ih}$ -val  $i, j$  jelöljük az  $i$ -edik időszakban / $j$  a  $j$ -edik munkaműveletre,  $h$  a  $h$ -adik gépre utal/, akkor a feladat a

$$/16.1./ \quad \sum_j g_{ij}^h x_{ij} \leq q_{ih} x_h$$

formulával fogalmazható meg, amelyet egy oldalra rendezve,

$$/16.2./ \quad \sum_j g_{ij}^h x_j - q_{ih} x_h \leq 0$$

formát kapjuk, ahol

$x_{ij}$  - a  $j$ -edik műveletből  $i$ -edik időszakaszban elvégzendő mennyiség,

$x_h$  - a  $h$ -adik gépből szükséges mennyiség.

Ilyenkor az  $x_h$ -ra az egészértékűséget kell előírni és a feladat vegyes egészértékű programozással oldható meg.

A célfüggvényben most is előírhatjuk a feladat megoldásának költségminimalizálását, a minimális állóeszközszükségletet, stb. Természetesen a különböző gépek lehetséges darabszámát is korlátozhatjuk.

A problémával még találkozunk a komplex modell tárgyalása során is.

## 17. FEJEZET

### Komplex vállalati tervezés

A komplex vállalati tervezés tárgyalása során három alapvető modellel fogunk megismerkedni aszerint, hogy a három alapvető döntési feladat közül melyiket, illetve melyeket oldjuk meg programozással. Természetesen ezeken kívül más - részletesebb, vagy összevontabb, további problémákat felölelő - programozási modelleket is készíthetünk. Tananyagunk távolról sem teszi lehetővé az összes lehetséges modellek megismerését, vagy valamennyi felmerülő probléma kifejtését, inkább az alapelvek megismerésére és megfelelő szemlélet kialakítására törekedhetünk.

#### 17.1. A termelési szerkezet optimalizálása

Feltételezzük, hogy a termelési erőforrások /a föld, a munkaerő, a termelési eszközök/ adottak, és adva vannak - legfeljebb néhány változatban - az alkalmazható termelési technológiák is, s feladatunk csupán a termelés szerkezetének optimalizálása, illetve ezzel egyidejűleg néhány technológia közül a legjobbnak látszó megoldás kiválasztása.

Mivel a mezőgazdasági alkalmazások tárgyalása során a fő figyelmet a komplex modellekre kívánjuk fordítani és a termelési szerkezet optimalizálására szolgáló modellel - mint a lineáris programozás mezőgazdasági alkalmazásának klasszikus esetét - alapmodellnek fogjuk tekinteni /esetenként "klasszikus modellnek" is fogjuk nevezni/, amelynek továbbfejlesztését jelentik a későbbiekben tárgyalásra kerülő modellek, ezért a továbbiakban részletesebben vizsgáljuk a modell változóit és feltételrendszerét.

##### 17.1.1. A modell változói

A vállalat különböző növényeket termelhet, különböző állati termékeket állíthat elő, különböző szolgáltatásokat teljesíthet, adávételi és hitelművelési, valamint beruházási tevékenységeket, stb. folytathat. Mindezeket összefoglalóan tevékenységeknek fogjuk nevezni. Valamennyi tevékenység többféle módon bonyolítható le, s a lebonnyolítás módjától függően más-más lesz az adott tevékenység munka- és eszközigenye, hozama, stb.

Valamely tevékenység adott módon történő lefolytatása a matematikai modellel változóját képezi. A modellel egy-egy változója azonban jelenthet egészen egyszerű tevékenységet is, pl. műtrágya adott módon történő kiszórása, vagy valamely munkaművelet, illetve munkafolyamat adott módon történő elvégzése, vagy jelenthet egy komplexebb tevékenységet, mint

pl. a buza vagy valamely más növény termelését valamilyen technológiai rendszerben, vagy pl. a tehentartást valamilyen adott technológiai rendszerben, stb. Még komplexebb tevékenységről is lehet szó, pl. a szarvasmarhatartás adott technológiai rendszerben. Ennek alapján megkülönböztethetünk egyszerű tevékenységeket, s ennek megfelelően egyszerű változókat /egy munkafolyamat vagy esetleg munkaművelet adott módon történő elvégzése/, és aggregált tevékenységeket vagy aggregált változókat /valamely növény termelése, vagy állat, illetve állatfaj tartása adott technológiai rendszerben/.

A matematikai modellnek egyszerűbb tevékenységi szintre, illetve egyszerű változókra való lebontása igen nagy modellhez vezet, ezért a gyakorlatban inkább aggregált változókkal kisebb modellek összeállítására törekednek. Az aggregálás szintje, illetve célszerűsége mindig az adott feltételektől függ, s erről annyit lehet általánosságban mondani, hogy a modell terjedelmének csökkentése érdekében célszerű lehet minden olyan aggregálás, ami a modell megoldásának eredményét nem befolyásolja - vagy jelentős mértékben nem befolyásolja. Nem szabad azonban aggregálni, ha az a megoldás szempontjából olyan eredményhez vezethet, amely félrevezető vagy gyakorlatilag hibás, elfogadhatatlan eredményt ad, illetve az eredményt nagymértékben befolyásolja. Minél magasabb szintű aggregáláshoz folyamodunk általában, annál kevesebb információt nyerünk a modell megoldása során. Ha az aggregálás olyan értékes információk elvesztésével járhat, amelyek előreláthatólag többet érnek számunkra, mint a kevésbé aggregált modell alkalmazásából adódó munka- és költségtöbblet, akkor az aggregálást nem szabad elvégezni. Az aggregálás mértékének eldöntésénél is egy egyszerű optimumra kell tehát törekedni, figyelembe véve a munka- és költségtöbbletet, s a velük nyerhető információ-többletet.

A jelenlegi gyakorlat általában azt az elvet követi, hogy a szántóföldi növénytermelésben /és hasonlóképpen a gyümölcs- és szőlőtermelésben, valamint a rét- és legelőgazdálkodásban/ egy-egy változóval egy-egy növény adott technológiai rendszerben történő termelését képviselteti. Az egyes munkafolyamatok elvégzésében mutatkozó eltéréseket, a talaj-típus hatását, az öntözéses vagy száraz termesztés közötti különbséget azáltal közelíti meg, hogy az adott termék termelésére többféle technológiai rendszert dolgoz ki, s ezek mindegyikét külön változóval reprezentálja. Az állattenyésztésben pedig jelenleg vagy egy állatfajt /meghatározott összetételben és termelési irányban/, vagy egy állatcsoportot /pl. tehén, borjunevelés, hizómarha, stb./ képviselőt egy-egy változóval, illetve eltérő technológiai rendszer vizsgálata esetén annyi változóval, ahányféle technológiai rendszert figyelembe kívánnak venni. Hasonló elvek szerint szokás eljárni a többi tevékenységnél is.

A legtöbbször azonban az ily módon felépített modell sem nélkülözi az egyszerű /elemi/ tevékenységeket képviselő változókat. Például legtöbbször bekerülnek a modellbe olyan tevékenységek, illetve változók, mint valamilyen termék eladása vagy beszerzése /pl. takarmányvásárlás/, vagy olyan tevékenység, mint a szervezestrágyázás vagy a háztáji állattárlomány számára takarmányjuttatás, esetleg kukoricaszár-szecc-kázás a talajra, vagy a silózás, stb. Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy általában minden matematikai modell vegyes /egyszerű és aggregált/ változókra épül fel. Sok esetben olyan megoldást is alkalmazunk, amikor egy aggregált tevékenységet és egy egyszerű - más jellegű - tevékenységet /pl. termelői és piaci tevékenységet/ aggregálunk. Például olyan árunövény termelését, amikor kizárólag árutermelésről van szó, célszerűtlen lenne az értékesítési tevékenységtől elszakítani, ezért az azt reprezentáló változó az adott termék termelését és értékesítését egyaránt magában foglalhatja.

A fenti elvek szerint felépített matematikai modell változót többféleképpen lehet rendszerezni. Mi a továbbiakban a következőkben ismertetett csoportosítást, illetve rendszerezést alkalmazzuk.

#### 1. Szántóföldi növénytermelési és értékesítési tevékenységek

Ide soroljuk mindazon szántóföldi növénytermelési tevékenységeket, amelyeket kizárólag vagy döntően árulással és értékesítés céljából folytatunk, s amelyek termékének legfeljebb csak kis részét vagy a melléktermékét használjuk fel más /pl. takarmányozási/ célra. Ezek változói mind a termelési, mind az értékesítési tevékenységet /aggregáltan/ képviselik, mégpedig annyi változóval, ahányféle technológiai rendszer szerint termelhető az adott termék. /A technológiai rendszerek eltérhetnek a talajtípus, az átlaghozam, s ennek megfelelően a műtrágyafelhasználás, stb., a különböző munkák elvégzésének módja szerint, és annak alapján, hogy öntözéses vagy száraz termelésről van szó, stb./ Amennyiben azonban az értékesítés többféle helyen és módon lehetséges, s e tekintetben döntési szabadsággal rendelkezünk, és a döntést matematikai programozással kívánjuk megalapozni, akkor az értékesítési tevékenységet célszerű a termelési tevékenységtől elválasztva, külön változókkal reprezentálni, annyi változóval, ahányféle értékesítési lehetőségünk adódik.

Másrészt, ha az adott termék egy részét takarmányként is hasznosíthatjuk, s az áruként és takarmányként történő felhasználás arányának eldöntését is matematikai programozással kívánjuk megalapozni - vagy esetleg egyiket vagy másikat határozottan előírjuk mennyiségileg - nem szükséges a termelést két olyan változóval reprezentálnunk, amelyek közül az egyik az árutermelést és értékesítést, a másik a takarmánytermelést és felhasználást képviseli. Ha ugyanis azt tennénk, akkor valamennyi technológiai rendszer szerinti változatot

két változóval kellene reprezentálni, vagyis a változók számát megdupláznánk. Elegendő, ha csupán a tervezett technológiai rendszerek szerinti árutermelési és értékesítési aggregált változókat, valamint még egy olyan változót építünk be a modellbe, amely a megtermelt termék egy részét árutermékből a takarmányozás céljára csoportosítja át. Ez esetben nem kell tekintettel lenni arra, hogy a számba vett terméket melyik technológiai rendszerrel termeltük meg - ha többféle technológiai rendszert alkalmazunk. Magán a terméken ugyanis - általában - nem vehető észre, hogy milyen technológiával állították elő. /Ha mégis, akkor nem kerülhetjük el a modell változóinak bizonyos mérvű szaporítását./

Ha az adott árunövény melléktermékét takarmányként hasznosíthatjuk, akkor célszerű egy változót a melléktermék takarmánykénti hasznosítására a modellbe beépíteni. Amennyiben a melléktermék hasznosítása többféle módon is lehetséges, s ennek eldöntését is a matematikai modellre bizzuk /pl. többféle képpen feldolgozva állíthatjuk elő takarmányként, vagy takarmányozásra és eladásra is felhasználható, vagy takarmányként és trágyaként hasznosítható/, akkor a melléktermék hasznosítását annyi változóval reprezentáljuk, ahányféleképpen az adott melléktermék felhasználható.

Előfordulhat az az eset, hogy ugyanazon a területen egy évben kétféle, egy korán és egy későn betakarítható árunövény termelése lehetséges. Ha a korán lekerülő árunövény után csak egyféle árunövény termelhető, és ragaszkodunk ahhoz, hogy a két árunövény területe azonos legyen, a kétféle tevékenység egy aggregált változóval képviseltethető. Ha azonban kizárólag az a kívánalmunk, hogy a második árunövény területe nem lehet nagyobb, mint az első területe - de kisebb lehet -, két változóval kell dolgoznunk. Hasonló módon vetődik fel a probléma több korai vagy késői árunövény esetében, ha azok arányai nem egyértelműen meghatározottak.

## 2. Szántóföldi takarmánytermelési tevékenységek

Ebbe a csoportba soroljuk mindazokat a szántóföldi növénytermelési tevékenységeket, amelyek célja az adott vállalat saját állatállománya /termelőszövetkezetben a háztáji állomány takarmányükségletének egy részét is figyelembe véve/ számára takarmányt előállítani. E tevékenységeket technológiai rendszerként egy-egy változóval képviseltetjük.

Ha e takarmányok egy része értékesítésre kerülhet, akkor egy értékesítési változó beépítésével az átcsoportosítás megoldható. Ezzel kapcsolatban - más oldalról - ugyanazon elveket alkalmazzuk, mint amikor az árunövények termelésének egy részét takarmány céljára használhatjuk fel. Kettős természetű esetén is az árunövény-termeléssel kapcsolatban elmondottak az irányadók. A kifejtettekhez e helyütt elegendő annyit hozzáfűzni, hogy ilyen formán az áru- és takarmánytermelés is kombinálható /pl. korai árunövény után takarmány vagy korai takarmánynövény után árunövény termelhető/.

Itt kell felvetni az évelő növények kezelésének problémáját. Köztudott, hogy egyes - különösen a takarmány - növények egyszeri telepítéssel több évig is termést adnak, s a termelés szinten tartása érdekében az új telepítésű és a régi telepítésű terület között megfelelő arányt kell biztosítani. Ha pl. a lucernát 4 éves korban törjük fel és "szinten" kívánjuk tartani, ez feltételezi, hogy a terület 25 %-át minden évben feltörjük, és ugyanannyi területen mindig újra lucernát telepítünk. Az összes lucernaterület 25 %-a lesz tehát mindig elsőéves, 25 %-a másod-, 25 %-a harmad- és 25 %-a negyedéves lucerna. Ilyenkor nem feltétlenül szükséges külön változóval képviseltetni az első-, a másod-, a harmad- és a negyedéves lucernát - hacsak azt a technológiai megfontolások külön nem indokolják-, hanem célszerű azokat egyetlen aggregált változóba összevonni.

Bonyolítja a helyzetet, ha lucernamag-termeléssel is foglalkozik a vállalat. Amennyiben a lucernamagfogyás arányát egyértelműen meghatározzuk, akkor az aggregált változóba az is egyszerűen beépíthető. Ha azonban a magtermelés arányának eldöntéséhez a matematikai programozást kívánjuk igénybe venni, külön változóként kell e tevékenységet szerepeltetni, természetesen biztosítva az egész lucernatermő területtel való megfelelő arányát.

### 3. Zöldségtermelési és értékesítési tevékenységek

Ebbe a csoportba azokat a zöldségtermelési tevékenységeket sorolhatjuk, amelyeket kifejezetten a kertészeti üzemág keretében folytattunk. Kezelésükkel kapcsolatban lényegében ugyanazokat lehet elmondani, amiket az árunövény-termeléssel kapcsolatban elmondottunk. Itt azonban gyakrabban fordul elő, hogy ugyanazon területen egy évben két vagy több terméket állítunk elő. E termékek közötti kapcsolatokra természetesen tekintettel kell lennünk. Általában az árunövény-termeléssel kapcsolatban elmondottak a zöldségtermelésben bonyolultabb formában jelentkeznek. Másrészt a zöldségtermelési változók meghatározásakor figyelemmel kell lenni a melegágyszükségletre és az üvegházi, valamint a fólia alatti termelésre. A melegági termelést célszerű lenne az adott termék termelési változójával aggregáltan kezelni. Ez megoldható, ha a melegágiban csak egy adott termék palántáit neveljük. Sokszor azonban külön változó vagy változók modellbe építése szükséges, különösen, ha az adott melegági területen többféle palántát nevelünk egymás után. Az üvegházi termelés, amennyiben szerkezetét meghatározottnak tekintjük, egyetlen aggregált változót képezhet, ellenkező esetben termékenként /esetleg termékcsoportonként aggregált/ külön változók modellbe építése válik szükségessé. Hasonló a helyzet a fólia alatti termelés tekintetében is.

### 4. Szőlő- és gyümölcs-termelési tevékenységek

E csoportba olyan több éves kulturák tartoznak, amelyek telepítése általában jelentős beruházást igényel. Jellemzőjük, hogy általában a telepítés után néhány év múlva fordulnak ter-

mőre, kezdetben viszonylag alacsonyabb, majd növekvő hozamokkal, s egy idő után hozamuk csökken. Termőterületük évenkénti nagymértékű változtatása általában nem célszerű.

A vállalatok a szőlő- és a gyümölcsstermelés nagyságának és összetételének kialakítását általában nem bízzák a matematikai programozásra /statikus modellben való kezelésük egyébként is elég matematikus/, hanem az már vagy kialakult, s ebben az állapotban kívánják megtartani, vagy azon változtatni kívánnak, de erről a lineáris programozás nélkül döntenek. Ilyen esetben a szőlő- és gyümölcsstermelést adottságként kell tekintenünk, és egy aggregált változóként vagy - fajonként, illetve fajtánként megbontva - több változóként építjük be a matematikai modellbe. A modell terjedelmének csökkentése érdekében célszerű az aggregált változó alkalmazása.

Ha mégis a lineáris programozást kívánjuk igénybe venni a szőlő- és gyümölcsstermelés nagyságára és összetételére vonatkozó döntések megalapozásához, akkor aggregálás nélkül a gyümölcsfajokat, illetve esetleg fajtákat külön változóként kell tekintenünk. Problémát jelent azonban, hogy a szőlő- és gyümölcsstermelés technológiáját milyen állapotra dolgozzuk ki. Ha ugyanis valamilyen gyümölcsöst csak ezután telepítünk, a terv megvalósítása időszakában az esetleg még nem fog termőre fordulni, ezért valószínűleg a modell megoldása során kiderülne, hogy "telepítése nem célszerű".

Statisztikus modellben az látszik helyesnek, ha a szőlő- és gyümölcsstermelésre egy átlagos termést figyelembe véve, dolgozzuk ki a technológiát. Ez ugyan nem ad pontos eredményt, de elfogadhatót. Minden esetre a probléma megnyugtató megoldása csak dinamikus programozási modellben képzelhető el. E nehézségek is indokolhatják, hogy a vállalati tevékenységnek e részterületét adottságként /meglévő vagy hagyományos módon tervezett/ fogjuk fel. A szőlő- és gyümölcsstermelés technológiájának tervezéséről és a matematikai modellben /aggregált változóként/ való beépítéséről ez utóbbi esetben sem mondhatunk le, tekintve, hogy e tevékenységek munkaerő-, gép- stb. szükséglete más tevékenységek célszerű terjedelmére is kihat. Ez esetben is helyes azonban a technológiát termőre fordult gyümölcsösre, illetve szőlőre kidolgozni, átlagos termést véve alapul.

#### 5. Rét- és legelőgazdálkodási tevékenységek

Ha a tevékenységek adottságként tekinthetők meghatározott technológiai rendszer szerinti összetételben, akkor egyetlen aggregált változó is képviselheti azokat a matematikai modellben. Ha méretük és technológiai rendszer szerinti összetételük is döntés tárgya, akkor a technológiai változatok szerint egy-egy változót kell a modellbe beépíteni. E változók kezelése azonos a kizárólag takarmány céljából termelt szántóföldi növények kezelésével.

## 6. Állattenyésztési tevékenységek

E tevékenységekhez sorolom mind az állattenyésztési, mind az állattartási tevékenységeket. Amennyiben egy-egy állatfajon belül meghatározott összetételt irunk elő, célszerű egy-egy állatfajt egy aggregált változóval képviseltetni. Természetesen, ha az adott állatfaj tartása többféle technológiai rendszerben is elképzelhető, és a megvalósítandó technológiai rendszer főlötti döntést is a programozással kívánjuk megalapozni, minden technológiai rendszert külön változóval reprezentálunk. Ez esetben az adott állatfajt annyi változó képviseli, ahányféle technológiai rendszerben elképzelhető a tartása. Ha ezen állatfajra két- vagy többféle termelési irány is megvalósítható - amelyek természetesen a fajon belül más-más összetételt irnak elő -, akkor egy-egy termelési irányt egy-egy változóval reprezentálunk, illetve különböző technológiai rendszerek esetén annyi változóval, ahányféle technológiai rendszert a szóban forgó termelési irány esetén elképzelünk. Ez esetben is beépíthetünk a modellbe olyan változókat, amelyek vásárolt alapanyag-ra épülnek, s függetlenek az előbbi fajon belüli összetételtől /pl. vásárolt alapanyagból állathizlalás/.

Részletesebb az eljárás, ha fajon belül állatcsoportokat képezünk, s azokat egy-egy változóval /illetve annyival, ahányféle technológiai rendszerben az adott állatcsoport tartható/ reprezentáljuk. Ennek akkor van jelentősége, ha a fajon belüli összetétel nagyrészt tetszés szerint változtatható, s az állatok különböző korban eladhatók vagy vásárolhatók, különböző céllal nevelhetők vagy tarthatók. E részletesebb eljáráshoz folyamodunk akkor is, ha a takarmánytermelést és vásárlást részletesen kívánjuk megtervezni, esetleg egészen a takarmányadagokig.

Annak szükségessége, hogy ilyen részletes modellel dolgozzunk - különösen távlati tervezés során - ritkán merül fel és célszerű azt elkerülni, mert nagymértékben megnöveli a matematikai modell méretét. Helyesebb ezért az aggregált változókat alkalmazni -, természetesen a technológiai rendszerek alapján szükséges változatokkal.

## 7. Segédüzemi tevékenységek

Ide soroljuk a szolgáltató üzemi tevékenységeket /traktörüzem, fogatüzem, esetleg "munkaerő-szolgáltató üzem"/ a "munkaerő-szolgáltató üzem" kifejezést képletesen használjuk, tulajdonképpen a vállalat munkaügyi tevékenységét értjük alatta, /kombájnüzem és egyéb gépüzemek/ és a javító üzemi tevékenységeket. A javító üzemeket általában /meglévő vagy tervezett szinten/ adottságként kezeljük. Ez esetben ezeket a tevékenységeket egyetlen aggregált változóval is képviseltethetjük /természetesen az egyes konkrét tevékenységek részletes kidolgoása után végezzük el az aggregálást/, vagy programozáson kívüli szférának tekintjük, s a matematikai modellben nem szerepeltetjük.

A különböző gépeket a klasszikus lineáris programozási modellben általában adottságként vesszük figyelembe, és ott ezek csak mint termelési korlátok szerepelnek. Célszerű a traktorüzemet legalább traktorkategóriánként számításba venni, az egyéb gépeket pedig általában géptípusonként. Természetesen csak a nagygépekre érdemes tekintettel lenni, hiszen ha minden kisméretű eszközt figyelembe kívánánk venni, az a modell nagy méretéhez és a probléma elaprózásához vezethetne, ami - különösen távlati tervezés során - nem biztos, hogy célszerű. Klasszikus programozású modellben a munkaerőt és a lőfogatókat is - ha ezzel számolunk - adottnak tekintjük, és korlátozó tényezőként vesszük figyelembe. Később látni fogjuk, hogy e tevékenységeket /tehát a munkaerőt, a gépeket/ másként is kezelhetjük.

#### 8. Kiegészítő tevékenységek

Ide az ipari és feldolgozóipari tevékenységeket soroljuk. A kimondottan ipari, a mezőgazdasági termeléstől független tevékenységet általában programozási szférán kívüli tevékenységként kezeljük /az ipari üzem tevékenysége természetesen külön is programozható. Ez esetben az adott ipari üzem mint iparvállalatot is tekinthetjük/, s a matematikai programozástól függetlenül tervezzük meg, így azokat a matematikai modellben nem, vagy csak egy aggregált változóként, összevontan, adottságként szerepeltetjük. Nem kizárt azonban az sem, hogy ezeket a tevékenységeket - különösen, ha súlyuk a vállalati jövedelem szempontjából jelentős - a matematikai modellben tevékenységenként külön változókkal képviseltessük.

A mezőgazdasági termeléshez szorosan kapcsolódó, s azzal mennyiségi viszonyban levő tevékenységeket viszont mindenképpen beépítjük a modellbe, hiszen ezeknek a termeléssel való kapcsolatát is meg kell teremteni. Például, ha saját termelésű lucernára szárítóüzemet létesítünk, a termelés és a szárítóüzem kapacitása között összhangot célszerű teremteni. Ugyanígy célszerű általában eljárni, ha a szárítóüzem kapacitásának kihasználására /vagy más feldolgozó üzem kapacitásának kihasználására/ más vállalatotól is vásárolhatunk alapanyagot. Ez esetben a feldolgozóüzem kapacitása, valamint a saját termelés és alapanyagvásárlás /amit külön változó reprezentál/ között kell az összhangot biztosítani.

#### 9. Piaci /értékesítési és beszerzési/ tevékenységek

Az értékesítési tevékenységeket általában az árutermelési tevékenységekkel aggregáltan, egy változóként építjük a modellbe. Legfeljebb olyan esetben kell ezeket külön változóként szerepeltetni, amikor - amint az árúnyóvány-termelési tevékenységeknél erről már szó volt - többféle értékesítési lehetőség közül kell választanunk, vagy amikor - mint a takarmánytermelési tevékenységeknél láttuk - valamely takarmány egy részének értékesítését is lehetővé kívánjuk tenni.

A beszerzési tevékenységek azonban a matematikai programozás során gyakran merülnek fel, és sokszor jelentős szerephez is jutnak. A beszerzések egy részét nem kezeljük külön változóként, mert a beszerzett javak mennyisége a technológiákban jut kifejezésre /pl. műtrágyák, vegyszerek, stb./, s a megvalósításra tervezett technológiai rendszer és termelési szerkezet által egyértelműen meghatározottak.

A beszerzési változók nagy része a takarmányvásárlási tevékenységek köréből kerül ki. Ezekkel kapcsolatban célszerű azt az eljárást követni, hogy ha valamely takarmányból a felhasználandó mennyiség adott technológiai rendszerben egyértelműen meghatározott, akkor azt a technológiában kell egyértelműen megtervezni. Ha azonban valamely takarmány felhasználása a technológiában nem egyértelműen kerül eldöntésre, hanem az változhat - legalábbis egy meghatározott intervallumon belül - akkor célszerű az illető takarmány beszerzését egy változóval a modellben képviseltetni, s a beszerzés pontos mennyiségét a matematikai programozás során meghatározni.

Hasonlóképpen járunk el más - ugyanilyen módon nem egyértelműen eldöntött - anyagok esetén is.

#### 10. Egyéb tevékenységek

E csoportban foglalhatók össze mindazon tevékenységek, amelyek az előbbi csoportosításokból kimaradtak. Ezek igen különbözőek lehetnek mind jellegük, mind kezelésük módja tekintetében. Ilyenek pl.: a háztáji gazdaságok részére nyújtandó szolgáltatások, a háztáji gazdaság részére biztosítandó takarmány, a tevékenységek átcsoportosítását biztosító változók, a munkák átcsoportosítására szolgáló változók, a beruházási hitel felvételét és más pénzügyi műveletek végrehajtását reprezentáló változók, stb. E tevékenységek egy része - meghatározott terjedelem esetén - aggregálható. Az egyéb tevékenységek szükségessége, jellege és kezelésének módja mindig a konkrét helyzettől függ.

#### 17.1.2. A modell mérlegfeltételei

A mezőgazdasági vállalatok tervezésénél a termelési források felhasználása mérlegszerűségének, valamint a vállalat belső szükségszerű összefüggéseinek és külső kapcsolatainak biztosítása céljából sok mérlegfeltételt kell a modellbe beépíteni. A mérlegfeltételek számát megsokszorozhatja, hogy a mezőgazdaságban figyelembe kell venni a termelés időnszerűségét. A munkaerő és a gépek felhasználására pl. ipari üzemek nagy többségében - mivel a munkafolyamat és a termelési folyamat egybeesik, s az időnszerűség nem merül fel - elegendő lehet csak egy mérlegfeltételnek a matematikai modellbe való beépítése. A mezőgazdaságban azonban legalább havonta egy ilyen mérlegfeltétel modellbe építése szükséges, ami a munkaerő- és gépmérleg meg többszöröződésével jár együtt.

Sokszor felvetik annak szükségszerűségét is, hogy a munkaerő- és gépmérlegeket illetően dekádönként lenne célszerű a mérlegfeltételeket megbontani. Ez azonban egyrészt nagymértékben megnövelné a modell méretét, másrészt - távlati tervezés esetén különösen - ilyen részletes tervezés nem szükséges és nem is célszerű. Az időjárás ugyanis nagymértékben befolyásolja a munka elvégzésének idejét. Ha az elvégzendő munkákat dekádönként tervezzük, egészen bizonyos, hogy az adott munkát a valóságban nem mindig a tervezett időszakban fogjuk elvégezni, attól esetleg lényegesen el kell térni. Havi bontás esetén az adott hónapban tervezett munkák sorrendjének átcsoportosítása lehetséges, s így a terv és a megvalósítás közelebb kerül egymáshoz. A tervezés nem jelenti egyben a terv megvalósítását is. A megvalósításnak kell bizonyos rugalmassággal rendelkeznie.

A mezőgazdasági vállalatok matematikai tervezése során általában alkalmazásra kerülő mérlegfeltételeket a továbbiakban célszerűen csoportosítva fogjuk megvizsgálni.

### 1./ A földterület-felhasználás mérlegfeltételei

/Természetesen mindig a termőföldre gondolunk, ha a rövidség kedvéért a föld vagy a földterület kifejezést használjuk is./

A földterület általában adott mennyiségben áll a mezőgazdasági vállalatok rendelkezésére. Középtávu vagy hosszú távu tervezés esetén természetesen figyelemmel kell lenni a terület várható változására. Ez bekövetkezhet utak megszüntetése, új utak vagy csatornák, továbbá állattenyésztési telepek vagy lakótelepek létesítése, stb. miatt. E változások számításba vételével nyerjük a tervezésben figyelembe veendő "rendelkezésre álló területet". Ha a terület maradéktalan felhasználását követeljük meg, az azt jelenti, hogy csak olyan termelési szerkezet fogadható el, amelyben a területszükséglet pontosan megegyezik a rendelkezésre álló területtel. Ha  $x_j$ -vel jelöljük a  $j$ -edik változót és  $f_j$ -vel a  $j$ -edik változó fajlagos területigényét,  $F$ -fel pedig a rendelkezésre álló területet, akkor a területfelhasználás mérlegfeltételét a

$$\begin{aligned} /17.1./ \quad & \sum_{j=1}^n f_j x_j = F \end{aligned}$$

formulával fogalmazzuk meg.

A /17.1./ formula kifejezi, hogy a területfelhasználásnak pontosan egyeznie kell a rendelkezésre álló földterülettel. Hazánkban általában a földterület felhasználására egyenlőséget írunk elő, tehát a rendelkezésre álló földterület teljes felhasználását kívánjuk meg. Előfordulhat azonban, hogy a teljes felhasználásra nem törekedünk, tehát megengedjük azt

is, hogy a terület egy része kihasználatlanul maradjon. Ez esetben formulánk a következőképpen módosul:

$$/17.2./ \quad \sum_{j=1}^n f_j x_j \leq F.$$

Itt tehát a földterület felhasználását kizárólag felülről korlátoztuk, azaz a felhasznált terület nem lehet nagyobb, mint amennyi rendelkezésre áll, de kisebb lehet.

Ha a földterület nem egynemű, hanem a vállalat különböző talajtípusokkal rendelkezik - általában ez a helyzet -, és az egyes talajtípusok területe meghatározott, nem elegendő egy összevont - általános - földfelhasználási mérlegfeltétel modellbe építése, hanem azt talajtípusonként bontva kell megadni. Eszerint az  $i$ -edik talajtípusból rendelkezésre álló területre a

$$/17.3./ \quad \sum_{j=1}^n f_j^i x_j^i = F^i$$

mérlegfeltételt adjuk meg, ahol  $i$  az  $i$ -edik talajtípusra utal.

Természetesen annyi ilyen mérlegfeltétel szerepel a modellben, ahány talajtípus az adott vállalat feltételei között rendelkezésre áll. /Meg kell jegyeznünk, hogy nem a foltokban előforduló talajtípusokról van itt szó, hiszen ezek megkülönböztetésének nem volna értelme, hanem az összefüggő táblák, határrészek szerinti különbözőséget vesszük csak figyelembe. Így egy-egy vállalat modelljében általában 1-4 féle talajtípus adódik./

Ha a területfelhasználási mérlegfeltételeket talajtípusonként építettük a modellbe, akkor az általános területfelhasználási mérleg elhagyható, mert nincs jelentősége.

Előfordulhat, hogy valamely átmeneti /kevert/ talajtípus gyakorlatilag mind az egyik, mind a másik talajtípushoz is sorolható /pl. vályogtalaj, homokos vályogtalaj és homoktalaj/. Ezt külön talajtípusonként kezelni - a terület elaproszását elkerülendő - nem célszerű. Ekkor oly módon járhatunk el, hogy az egyes talajtípusok rendelkezésre álló területét korlátok közé szorítjuk. Az alsó korlát az adott talajtípusból rendelkezésre álló terület, pl.  $F^i$ , a felső korlát az átmeneti talajtípussal növelt terület  $F^{i0}$ , Ez esetben teljesülnie kell az

$$/17.4./ \quad F^i \leq \sum_{j=1}^n f_j^i x_j^i \leq F^{i0}$$

egyenlőtlenségnek, ami két mérlegfeltételre bontva a

$$/17.5./ \quad \sum_{j=1}^n f_j^i x_j^i \geq F_o^i$$

és

$$/17.6./ \quad \sum_{j=1}^n f_j^i x_j^i \leq F^{i0}$$

feltételekre vezet.

Ebben az esetben azonban az általános földfelhasználás-  
ra vonatkozó mérlegfeltétel modellbe építése is szükséges.

A probléma ilyen megfogalmazása lehetővé teszi, hogy  
az átmeneti talajtypust bármely lehetséges talajtypushoz so-  
rolhatjuk, de a területmérlegek egyensúlyát minden vonatkozás-  
ban biztosítjuk. Ez az eljárás akkor alkalmazható, ha csak  
egyféle átmeneti talajtypus áll rendelkezésre.

Amennyiben két vagy többféle átmeneti talajtypusunk van,  
s azt több talajtypus szerint kell elosztani, akkor a problé-  
ma bonyolódik, s többféle területmérleg kidolgozása szüksé-  
ges. A fenti elvek ez esetben is alkalmazhatók, azonban az  
általános területfelhasználási mérlegfeltétel helyett olyan  
mérlegek modellbe építése szükséges, amelyek az adott talaj-  
typusok és a hozzájuk elosztható átmeneti talajtypusok együt-  
tes területét szabályozzák.

Az utóbbi esetben ugy is eljárhatunk, hogy csak az elha-  
tárolható talajtypusokra adunk mérlegfeltételeket, s az átme-  
neti típusokra a modellbe változókat építünk be, amelyek az  
egyes talajtypusok területét változtathatják. Ez esetben vi-  
szont e változókat kell az adott átmeneti talajtypus szintjén  
korlátozni.

Meg kell még jegyezni, hogy amennyiben a matematikai  
programozás során eldöntendő kérdés az is, vajon létesítsünk-  
e vagy sem egy új állattenyésztő vagy állattartó telepet, ak-  
kor annak telephelyével kapcsolatos területigény az adott  
változónál figyelembe vehető.

A /17.1./-/17.6./ alatt megfogalmazott mérlegfeltételek  
a terület felhasználásának, illetve kihasználásának feltéte-  
leit csak általában fogalmazzák meg. Sok esetben további elő-  
írások is szükségesek.

Lehetséges, hogy valamely tevékenység vagy tevékenység-  
csoport által felhasználandó területet egyértelműen előírjuk.  
Pl.:

$$/17.7./ \quad f_j x_j = \gamma F$$

illetve

$$/17.8./ \quad f_j x_j + f_{j+1} x_{j+1} + \dots + f_n x_n = \gamma F$$

Máskor az adott tevékenység vagy tevékenységcsoport által felhasználható területre alsó és felső korlátot adunk meg:

$$/17.9./ \quad \gamma_o F \leq f_j x_j \leq \gamma^o F$$

illetve

$$/17.10./ \quad \gamma_o F = f_j x_j + f_{j+1} x_{j+1} + \dots + f_n x_n \leq \gamma^o F$$

ahol  $\gamma$  egy szorzószám, amellyel  $F$  értékét szorozva, annak egy meghatározott részét /százalékát/ kapjuk, azt a területnagyságot, amelyet az adott tevékenység vagy tevékenységcsoport felhasználhat. Intervallum esetén  $\gamma_o$  az alsó,  $\gamma^o$  a felső százalékarányt jelenti, azaz legalább és legfeljebb hány %-át /milyen nagyságu területét/ veheti igénybe az összes területnek az adott tevékenység vagy tevékenységcsoport.

Más esetben két tevékenység vagy tevékenységcsoport által felhasznált terület valamilyen arányát kell előírniuk. /Például az új vetésű lucerna a régi vetésű - álló - lucerna meghatározott százalékát - pl. 1/3-át - kell hogy képviselje./

Ilyen esetekben a

$$/17.11./ \quad \gamma f_j x_j = f_k x_k$$

formulát alkalmazzuk és természetesen, megfelelő átrendezéssel kapjuk a

$$/17.12./ \quad \gamma f_j x_j - f_k x_k = 0$$

formulát, amely előírja, hogy ak-adik tevékenység által felhasznált terület a j-edik tevékenység területének pontosan  $\gamma$ -szorososa legyen. Az egyenlet helyett esetenként egyenlőtlenségeket is alkalmazhatunk.

A /17.7./-/17.12./ feltételek alkalmasak bizonyos vetés-szerkezeti arányok előírására, adottságok figyelembevételére /pl. rét, legelő, gyümölcsös, szőlő vagy más tevékenység terü-

letének meghatározott terjedelemben való rögzítésére/, de alkalmasak a külső körülmények /pl. piaci lehetőségek/ figyelembevételére is. /Pl. valamely növényből csak egy meghatározott területen folytatott termelésre kötnek a vállalattal szerződést, stb./.

Ha a modellben figyelembe vett tevékenységek egységeként az egységnyi földterületet /1 hektár/ alkalmazzuk, akkor az f<sub>i</sub> értékek l-gyel egyenlők. Ez a területre vonatkozó mérlegfeltételek egyszerűségét biztosítja. Ha tehát lehetséges, a külső körülményekhez való alkalmazkodást /piaci feltételeket/ célszerű területkorlátokkal beépíteni a modellbe.

Végül megjegyezzük, hogy a programozási szférán kívüleső tevékenységek területigényével - ha ilyen van - a rendelkezésre álló területet helyesbitjük.

## 2. A munkaerő-felhasználás mérlegfeltételei

Klasszikus lineáris programozási modellben a munkaerőt meghatározottnak tekintjük. A meghatározást azonban igen gondosan kell végezni, figyelembe véve az előregedést, az iparba történő átáramlást, a fiatalok munkába állításának lehetőségeit, az időszakonként munkába vonhatók létszámát, stb. Az így meghatározott, tehát várhatóan rendelkezésre álló munkaerő-létszámából le kell vonni a vezetés és az adminisztráció, valamint a programozási szférába nem tartozó tevékenységekhez szükséges munkaerő mennyiségét.

A tervezés kezdeti szakaszában nem tudjuk bizonyosan, hogy mikor adódik a munkacsucs. Az időszakosan munkába bevonható munkaerőt itt még úgy célszerű kezelni, hogy az az év bármely szakaszában munkába állítható, ha szükség van rá, természetesen a valóságban akkor főgjük ezeket a dolgozókat a munkába bevonni, amikor a munkacsucs szükségessé teszi. /Kivételt képez az olyan munkaerő, amelynek igénybevétele csak az év meghatározott időszakában lehetséges, pl. iskolás gyerekek./

A munkaerőmérleget időszakonként /általában havonként/ bontva építjük a modellbe, azaz a

$$\text{/17.13./} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

formában, ahol:

$a_{ij}$  a j-edik tevékenység fajlagos munkaidőigényét /általában munkanapban/ jelenti az i-edik időszakban /általában az i-edik hónapban/;

$b_i$  az  $i$ -edik időszakban /hónapban/ előreláthatólag ledolgozható munkanapok számát adja.

Felmerül az a probléma, hogy a havonként ledolgozható munkanapok száma más a növénytermesztésben dolgozók és más az állattenyésztésben, traktorüzemben, stb. dolgozók esetén.

Pontos megoldást e tekintetben az adna, ha külön munkaerőmérleget dolgoznánk ki a növénytermesztésre, az állattenyésztésre, stb., és az egyes ágazatokban a dolgozókra munkaerő-átcsoportosító változókat építenénk a modellbe. Ez azonban a modellt nagymértékben bonyolíthatja és méretét igen megnövelheti. Általában inkább a hibalehetőséggel számolunk, s azt legfeljebb némi korrekció alkalmazásával csökkentjük. /Pl. az egyes változók munkaerő-szükségletét a ledolgozható munkanapok alapján korrigáljuk, s a modellben így szerepeltetjük, vagy a ledolgozható munkanapok számát korrigáljuk bizonyos mértékig./

Problémaként merül fel a munkanap hossza is. Ez azonban, ha a technológiák kidolgozása során munkanapban tervezünk, kiküszöbölhető, hiszen minden tevékenység technológiájának tervezésekor a munkanap adott időszakban és munkafolyamatban gyakorlatilag lehetséges hosszával /pl. 8 vagy 10 órával/ számolhatunk, s a teljesítményt ennek alapján határozzuk meg. Ezt a megoldást célszerű lehet alkalmazni.

### 3. Gépfelhasználási mérlegfeltételek

A gépmérlegeket géptípusonként, illetve gépkategóriánként és időszakonként dolgozzuk ki /általában szintén havi bontásban/ és építjük be a modellbe, a munkaerőhöz hasonlóan, azaz

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}^h x_j \leq d_i^h,$$

ahol:

- $g_{ij}^h$  - a  $j$ -edik tevékenység fajlagos gépimunka-igénye műszaknapokban a  $h$ -edik géptípus iránt az  $i$ -edik időszakban;
- $d_i^h$  - a  $h$ -edik géptípus által az  $i$ -edik időszakban teljesíthető műszaknapok száma, vagyis a rendelkezésre álló kapacitás.

A modellben általában csak a nagygépekre vagyunk tekintettel. Nagy modellhez vezetne, ha valamennyi gépre mérlegfeltételeket íránk elő, a legnagyobbtól a legkisebbig. Célszerű ezért csak a nagy gépekre tekintettel lenni /traktor, önjáró betakarítógépek/, s a kis értékű gépekre nem indokolt mérlegfeltételeket beépíteni a modellbe. A megoldás elemzése során azonban ezekre is figyelemmel lehetünk, s kedvezőtlen alakulásuk esetén a földfelhasználási vagy más mérlegek célszerű változtatásával kedvezőtlen alakulásuk kiküszöbölhető.

A traktormunkák kezelésével kapcsolatban általában felmerül az a probléma, hogy ugyanaz a munka különböző traktor-kategóriába tartozó, illetve különböző típusu traktorokkal is elvégezhető. Lehetséges, hogy valamely munkát célszerű volna egyik traktortípussal végezni, de annak kapacitása elégtelennek bizonyul, s akadályozná egy jól jövedelmező tevékenység kiterjesztését. Az adott munka azonban egy másik szabad kapacitással rendelkező traktortípussal is elvégezhető, bár nagyobb költséggel. Lehetséges, hogy egy jól jövedelmező tevékenység kiterjesztése még akkor is célszerű, ha a munkák egy részét költségesebb géppel végezzük. A probléma a géptípusok kapacitását átcsoportosító változók modellbe építésével megoldható.

Másrészt a gépi munkák kezelése során felmerül a kettős vagy a nyújtott műszak lehetősége. Mivel azonban a munkák egy része kettős műszakban is elvégezhető, más részük azonban nem, a probléma megoldása nem egyszerű. Gyakorlatilag elfogadható megoldást kapunk, ha a gépek kapacitását bizonyos mértékig nyújtott műszakban tervezzük. Olyan hosszú műszakkal számolhatunk, amilyen - becslésünk szerint -, az adott időszakban végzendő munkákat figyelembe véve, reálisnak mutatkozik. Természetesen egy-egy gépi számítás elemzésének eredményeképpen a modell adatait, célfüggvényét és feltételrendszerét többször is változtathatjuk. Esetleg arról is szó lehet, hogy a munkák egy részét az agrotechnikailag optimális időn kívül kell elvégezni.

A géppark bővítésére és összetételének javítására a klasszikus lineáris programozási modellben is van lehetőség, ugynevezett gépbeszerzési /új beruházási/ változók modellbe építésével. E probléma megnyugtató megoldása azonban célrealisztikus modellünkben inkább lehetővé válik, ezért e kérdésrel később foglalkozunk.

#### 4. Anyagfelhasználási mérlegfeltételek

A technológiai tervekben tevékenységenként megtervezzük a különböző anyagok felhasználását, egységnyi termék termeléséhez. A modellben egy-egy anyagra /természetesen egységben vagy pénzürtékben/ csak akkor célszerű külön mérleget szerepeltetni, ha nem szerezhető be kellő mennyiségben. Azon anyagok esetében, amelyek beszerzése, s így felhasználása nem kor-

látozott, illetve csak együttes beszerzésüket korlátozza a vállalat rendelkezésére álló pénzkeret, célszerű lehet ugy eljárni, hogy összességükre egy aggregált pénzfelhasználási mérleget állítsunk össze.

Az előbbi esetben a

$$/17.15./ \quad \sum_{j=1}^n s_j^n x_j \leq \xi^h,$$

az utóbbi esetben pedig a

$$/17.16./ \quad \sum_{j=1}^n t_j x_j \leq c$$

mérleget alkalmazhatjuk, ahol:

$S^h$  - a j-edik tevékenység egysége által igényelt h-adik anyag;

$\xi^h$  - a h-adik anyagból felhasználható mennyiség;

$t_j$  - a j-edik tevékenység egysége által igényelt - az aggregált mérlegben figyelembe vett anyagokból adódó - anyagköltség;

$c$  - az aggregált mérlegben szereplő anyagok beszerzésére felhasználható pénzkeret.

A /17.16./ formula alkalmazása esetén a különböző anyagokból felhasználandó mennyiségek a technológiai tervek és termelési szerkezet alapján meghatározhatók.

##### 5. Takarmány mérlegfeltételek

A takarmánymérlegek modellbe építésével célunk a takarmánytermesztés, a takarmányvásárlás és a takarmányeladás, valamint az állattenyésztés takarmányigénye közötti összhang megteremtése. /A takarmány mérlegfeltételeket fontosságuknál fogva külön, a többi anyagmérlegetől elkülönítve tartom célszerűnek tárgyalni./

Az állattenyésztési technológiák kidolgozása során adott állatcsoport számára a szükséges táplálóanyag-mennyiségeket is - általában az évi szükségletet - megtervezzük. Ugyancsak itt tervezzük meg az adott állatfaj biológiai igényét, figyelembe véve azt, hogy legalább, illetve legfeljebb mennyi abrakot, szálas- zöld- és lédús takarmányt, valamint takarmány-

szalmát fogyaszthat az év folyamán az adott állatfaj, illetve állatcsoport. Esetenként egyes takarmányokra is előírunk mennyiségi korlátokat. Általában célszerűnek látszik - és ez gyakorlatilag lehetséges és szükséges is - mind a táplálóanyagokra, mind az egyes takarmányokra, illetve takarmánycsoportokra a szükségletet intervallumban megadni. Ez elősegíti a megoldás rugalmasságát, és általában elkerülhetővé teszi, hogy elmentmondásos, ezért megoldhatatlan modellt állítsunk össze, s egyben a takarmányok közötti verseny lehetőségét is megteremtí, illetve kiszélesíti.

Az állattenyésztési technológiák tervezése során célszerű azokat a vásárlásból tervezett takarmányokat, amelyek felhasználandó mennyiségét pontosan előírjuk, a technológiában rögzített értékekkel megtervezni. E takarmányok mennyiségeit - illetve táplálóanyag-tartalmukat - a szükségletből levonva, kapjuk a programozási szférában biztosítandó táplálóanyag- és takarmánymennyiségeket. Ez elkerülhetővé teszi, hogy e takarmányokat külön változóként beépítsük a modellbe.

Másrészt a növénytermesztési technológiában, valamint a piaci tevékenységek tervében megtervezzük az árunövények és takarmánynövények termelése során nyerhető takarmányokat és azok táplálóanyag-tartalmát, a rét és a legelő takarmány- és táplálóanyag-hozamát, s a piaci tevékenységek által nyerhető /vagy eladásra kerülő/ takarmányokat és ezek táplálóanyag-tartalmát.

A mérlegfeltételeket úgy kell a modellbe beépíteni, hogy az összes takarmánytermelés és takarmányvásárlás, levonva ebből a takarmányeladást, annyi takarmányt, illetve a különböző táplálóanyagokból olyan mennyiséget biztosítson, amely legalább az állattenyésztés alsó intervallumban meghatározott szükségletét fedezi, de nem haladja meg a szükséglet felső intervallumát.

Ha

$x^t$  jelenti a  $j$ -edik takarmányt adó változó terjedelmét,

$x_j^t$ , a  $j$ -edik takarmányt igénylő változó terjedelmét /Az  $x_i^t$  és  $x_j^t$  szimbólumok esetén a  $t$ , illetve  $t'$  valójában nem indexek, hanem kizárólag a tevékenység jellegét /takarmányt adó vagy igénylő/ jelölik./,

$q_{ij}$ , illetve  $q'_{ij}$  egységnyi  $j$ -edik tevékenység által nyerhető, illetve az által igényelt  $i$ -edik táplálóanyagot vagy takarmányt, illetve

$q'_{ij0}$  a  $j$ -edik takarmányt vagy táplálóanyagot igénylő változó által az  $i$ -edik takarmány vagy táplálóanyag iránti igény alsó határát,  $s$

$q_{ij}^0$  a felső határát jelenti,

a mérlegfeltételeket a következők szerint fogalmazhatjuk meg:

$$/17.17./ \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j^t \geq \sum_{j=1}^n q'_{ij_0} x_j^{t'}$$

és

$$/17.18./ \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j^t \leq \sum_{j=1}^n q'_{ij}{}^o x_j^{t'}$$

Mint a formulákból kitűnik, a /17.17./ azt írja elő, hogy a termelés és vásárlás legalább az eladást és a szükséglet alsó határát biztosítsa, illetve a /17.18./ szerint a termelés és vásárlás legfeljebb az eladást és az állattenyésztés által felhasználható legnagyobb mennyiséget biztosítsa a különböző táplálóanyagokból, takarmányokból, illetve takarmánycsoportokból.

Az előbbi formulákat átrendezve, kapjuk a

$$/17.19./ \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j^t - \sum_{j=1}^n q'_{ij_0} x_j^{t'} \geq 0,$$

illetve a

$$/17.20./ \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j^t - \sum_{j=1}^n q'_{ij}{}^o x_j^{t'} \leq 0$$

formulákat.

## 6. Férőhely- és tárolóhely mérlegfeltételek

Az állattenyésztés és az állattartás méretét megszabja a rendelkezésre álló férőhely. A termékek és anyagok, valamint a gépek tárolásának is vannak épület- és tárolóhelyigényei. A matematikai modellben fontos lehet annak előírása, hogy a különböző épületek, férőhelyek és tárolóhelyek iránti igény ne haladja meg az adott épületből rendelkezésre álló kapacitást. A férőhely- és tárolóhely mérlegfeltételeket úgy kell megszerkeszteni, hogy azokban kifejezésre juttassuk: egy adott tárolóhely többféle termék tárolására is alkalmas, a termékek azonos vagy eltérő időben veszik igénybe a tárolóhelyet, illetve az adott típusu tárolóhelyet. Másrészt az

adásvételi lehetőségeket is kifejezésre kell juttatnunk a feltételekben, pl. mikor célszerű vagy szükségszerű a termékeket eladni, vagy a különböző anyagokat megvásárolni? Helyesnek látszik az azonos típusú tárolóhelyekre időszakonkénti mérlegfeltételt beépíteni a modellbe. Speciális tárolóhelyekre - amelyeket általában csak egyféle termék vagy anyag tárolására használunk - egyedi mérlegek építhetők a modellbe. Hasonlóképpen az állattenyésztésben, illetve az állattartásban a férőhely-ellátottságra vonatkozó mérlegfeltételek lehetnek egyediek /legtöbbször ez szükséges/ vagy csoportosak.

Természetesen, ha a férőhely, tárolóhely adott, úgy azt az adott szinten általában felső korlátként tekintjük. Ha a férőhely és tárolóhely bővíthető, azt külön változó /új beruházási változó/ modellbe építésével oldjuk meg. Általában a gépekre vonatkozó mérlegfeltételekkel azonos elvek alapján lehet a mérlegfeltételeket megszerkeszteni.

#### 7. Egyéb mérlegfeltételek

E csoportba sorolok minden olyan mérlegfeltételt, amely az eddigiekben még nem szerepelt. Ezen belül is több csoportot lehetne megkülönböztetni, pl. piaci feltételeket tükröző mérlegfeltételeket, belső vállalati arányok biztosítását célzó feltételeket, továbbá olyan feltételeket, mint az öntözőviz-kapacitás vagy az öntözhető terület korlátozottságát kifejező feltételeket, bizonyos szintű foglalkoztatottságot vagy munkabért, illetve részesedést előíró feltételeket, stb.

A piaci helyzet figyelembevételét általában az adott termékek termőterületére előírt alsó vagy felső, esetleg alsó és felső korlátok modellbe építésével is megoldhatjuk /17.7./- /17.10./. Ha ez lehetséges, alkalmazása egyszerűségénél fogva célszerű. Szükség esetén azonban a termelendő mennyiségre is előírhatunk korlátokat a /17.7./- /17.10./ formulák értelemszerű felhasználásával. Ugyanígy járhatunk el a belső vállalati arányok biztosítását célzó mérlegfeltételek kidolgozása során.

Ha a vállalatnál öntözési termelés is folyik, korlátozott lehet az öntözésre berendezett terület vagy az öntözőviz-mennyiség. Az előbbi esetben szintén a /17.7./- /17.10./ feltételek alkalmazhatók, természetesen talajtípusonként véve figyelembe az öntözésre berendezett területet. Az öntözőviz korlátozott rendelkezésre állása esetén viszont az anyagmérlegeknél elmondottak /17.15./ célszerű alkalmazása ad megoldást. Ez esetben azonban szükségessé válhat, hogy az öntözési igény különböző időszakaira /pl. hónapokra/ külön mérlegfeltételeket is beépítsünk a modellbe.

Az egyes változókhoz tartozó technológiai lapokon kidolgozzuk a munkaerő-szükségletet, illetve részesedési terv. Szükséges lehet ezekre vonatkozólag is alsó vagy felső korlátok

beépítése a modellbe. Hasonlóképpen szükségessé válhat beruházási vagy hitelfelvételi korlátok, stb. kidolgozása is. /Ezekről később még részletesebben lesz szó./

### 17.1.3. A célfüggvény

A mérlegfeltételek a változók értékeit bizonyos határok között korlátozzák, azaz előírják a lehetséges tervváltozatok halmazát. E halmaz azonban még igen sok tervváltozatot tartalmaz. A célfüggvényben fogalmazzuk meg, hogy e sokféle tervváltozat, mint lehetőség közül hogyan, milyen céllal /vagy célokkal/ válasszunk ki egyet vagy többet, amelyet optimálisnak tekintünk. A célfüggvénynek tehát kitüntetett szerepe van a modellben, ezért annak tartalmát nagyon gondosan kell meghatározni.

A célfüggvény közgazdasági tartalmának eldöntése igen bonyolult kérdés, és többoldalu vizsgálatot igényel, ezért annak tárgyalását későbbre halasztjuk, s itt csak a matematikai megfogalmazását adjuk.

Ha  $p_j$ -vel jelöljük a  $j$ -edik tevékenységgel elérhető fajlagos jövedelmet, akkor a célfüggvény a

$$\text{/17.21./} \quad \sum_{j=1}^n p_j x_j \longrightarrow \text{extrém}$$

formulával határozható meg. Keressük tehát az adott függvény szélső értékét /maximumát vagy pl. költségfüggvény esetén minimumát/.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy a célfüggvénnyel kapcsolatban nemcsak az jelent problémát, hogy annak közgazdasági tartalmát célszerűen határozzuk meg. Adott közgazdasági tartalmat tekintve is többféleképpen, más-más szemléletmóddal alakítható ki a célfüggvény. A klasszikus lineáris programozási modell - mint látni fogjuk - éppen a célfüggvény szemléletbeli hibája miatt alkalmatlan a mezőgazdaságban a gyakorlati döntések megalapozására. A 17.2. pontban ismertetésre kerülő modell leglényegesebb vonása éppen az, hogy a célfüggvény reális kezelését biztosítja.

## 17.2. A termelési szerkezet és a termelési források egyidejű optimalizálása

### 17.2.1. A modellszerkesztés módszere

A modell módszertani kérdéseinek kifejtése előtt a termelési költségek két típusát kell megismernünk:

A költségek egy része a teljesítménnyel, vagy a termelés volumenével arányosan változó, proporcionális költség, más része a teljesítménytől /legalábbis nagyrészt/ független fix költség. Például egy traktor akkor fogyaszt üzemanyagot, ha üzemeltetjük, mégpedig - mondhatjuk - az üzemeltetéssel arányos mértékben. Ha azonban a traktort nem használjuk, az akkor is amortizálódik, s a jelenlegi költségszámítás szerint, az amortizációs költség a traktor felhasználásától, illetve kihasználtságától független, egy időszakra /1 évre/ meghatározott fix költség.

Valójában a változó költségek sem arányosan változnak a teljesítménnyel, illetve a termelés volumenével, de lineáris modellben kénytelenek vagyunk a proporcionális változás feltételezésére.

A további tárgyalás során tehát feltételezni fogjuk a változó, illetve proporcionális, valamint az állandó, vagy fix költségek szétválasztását.

A termelési források egy részét - különösen közép- vagy hosszú távu tervezés során - nem tekinthetjük adottnak. Viszonylag tág határok között változtatható az ipari anyagok felhasználása /műtrágya, vegyszer, stb./, de pl. 3-5 év alatt a géppark is jelentősen változhat. A gépek egy része például időközben amortizálódik. Kérdés, vajon az amortizáció során felhalmozódott pénzeszközökből ugyanolyan gépet célszerű-e beszerezni vagy esetleg másfélét, illetve a fejlesztési alapot hogyan helyes felhasználni, célszerű-e beruházási hitelt felvenni, s ha igen, azt milyen gépek beszerzésére kell fordítani, vagy milyen célra kell felhasználni, stb. Hosszabb távu tervezés során esetleg a jelenlegi gépek teljes elhasználódásával számolhatunk, s ennek alapján a pénzeszközök adta lehetőségek korlátai között igen sokféle összetételű géppark alakítható ki, illetve a termelési eszközök egészen különböző összetétele valósítható meg.

A klasszikus lineáris programozási modellben azonban - mint láttuk - rögzített kapacitásvektorral, azaz előre meghatározott kapacitásokkal dolgozunk. Márpedig nem helyes egy gépparkot a termelési szerkezettől függetlenül kialakítani, illetve a termelési eszközöket és a változtatható termelési tényezőket adott összetételben és mennyiségben a termelési szerkezettől függetlenül előírni, s ehhez az - optimálisnak egyáltalán nem mondható - előíráshoz optimalizálni a termelési szerkezetet.

Elvileg-, de bizonyos korlátok között gyakorlatilag is - a vállalatvezetés úgy veheti fel a kérdést, hogy hajlandó változtatni a gépparkot és más termelési tényezőket bármilyen mértékben, ha az jövedelmező, hajlandó a rendelkezésre álló pénzeszközöket olyan beszerzésekre fordítani, ami a magasabb jövedelem eléréséhez a legcélszerűbb, sőt lehetősége és hajlandósága van hitelfelvétellel is, ha az jövedelmezőnek lát-

szik, de kéri, hogy alapozzuk meg erre vonatkozó döntését.

E megalapozás azáltal lehetséges, ha a termelési szerkezetet és a termelési források optimumát együttesen, összefüggésükben, egyidejűleg határozzuk meg.

Vezessük be pl. az  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ , és  $\delta_j$  változókat, ahol  $\alpha_j$  a j-edik talajtípusból igénybe vett  $j$  területet,  $\beta_j$  a j-edik munkaező-csoportból igénybe vett létszámot és  $\delta_j$  a j-edik termelési eszközből /föld kivételével/ igénybe vett mennyiséget jelenti. E változók szükség szerint bonthatók, pl. jelölhetik valamely meglévő termelési eszköz felhasználását, a meglévő termelési eszközök eladását, illetve új beszerzésből származó termelési eszköz felhasználását. Továbbá, ha lehetőségünk van bankbetét létesítésére és bankhitel felvételére - közép- vagy hosszú távon erre általában lehetőségünk van -, akkor betéti és hitelfelvételi változó modellbe építése is szükségessé válhat, s ezek a lejárat ideje /s ennek megfelelően a kamatláb magassága/ szerint is megbonthatók.

A mérlegfeltételek megfogalmazása s a célfüggvény felépítése - a gazdasági szemléletmódot tekintve - lényegesen különbözik a klasszikus lineáris programozási modellel kapcsolatban elmondottaktól.

A területmérleget a

$$\begin{array}{l} /17.22./ \\ \sum_{j=1}^n f_j x_j = F \end{array}$$

formulával szemben, ha lehetőségünk van a földterület tetszés szerinti változtatására /adásvételére, cseréjére, stb./, a

$$\begin{array}{l} /17.23./ \\ \sum_{j=1}^n f_j x_j = \alpha \end{array}$$

formulával adhatjuk meg, amelyet átrendezve kapjuk a

$$\begin{array}{l} /17.24./ \\ \sum_{j=1}^n f_j x_j - \alpha = 0 \end{array}$$

formulát, ahol az  $\alpha$  változó /ugyanugy, mint az  $x_j$ -k/ és a területszükségletet mutatja. Konkrét értékének meghatározását a matematikai modell megoldásával kapjuk.

A /17.23./ és a /17.24./ formulában tehát nem irtuk elő a rendelkezésre álló földterületet, csak azt, hogy a felhasználás és rendelkezésre állás egyensúlyát biztosítani kell. Itt a  $\leq$  és  $\geq$  relációk alkalmazásának nincs jelentősége.

Amennyiben a termelőszövetkezetben többféle talajtípus van, s azok mindegyikének területe tetszés szerint változtatható, a formulákat talajtípusonként kell megadni. Ez esetben az általános talajfelhasználási mérleg elhagyható.

Ha a terület változtatása lehetséges, de csak korlátozott keretek között, mondjuk  $[\alpha_0, \alpha^0]$  intervallumon belül, akkor az  $\alpha$  változót korlátoznunk kell, azaz fenn kell állnia a

$$/17.25./ \quad \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha^0$$

feltételnek.

A kifejtett eljárás akkor alkalmazható, ha a területfelhasználás nem jár költséggel, vagy ha a már meglévő terület felhasználása, eladása vagy új terület beszerzése esetén is azonos költségkihatással számolhatunk területegységre vonatkoztatva. Egyrészt ezek eltérése, másrészt beruházási eszközök lekötése, illetve felszabadításának figyelembevétele miatt azonban célszerűbb általában a

$$/17.26./ \quad \sum_{j=1}^n f_j x_j = F + \alpha_v - \alpha_e$$

vagy a

$$/17.27./ \quad \sum_{j=1}^n f_j x_j = \alpha_f + \alpha_v - \alpha_e$$

formulát alkalmazni, ahol

$F$  = a jelenleg meglévő terület;  
 $\alpha_v$  = a vásárolt terület;  
 $\alpha_e$  = az eladott terület;  
 $\alpha_f$  = a meglévő területből történő felhasználás.

A formulákat átrendezve, kapjuk a

$$/17.28./ \quad \sum_{j=1}^n f_j x_j - \alpha_v + \alpha_e = F,$$

illetve a

$$/17.29./ \quad \sum_{j=1}^n f_j x_j - \alpha_f - \alpha_v + \alpha_e = 0$$

formulákat, és természetesen

$$/17.30./ \quad \alpha_f + \alpha_e = F.$$

Az  $\alpha_f$ ,  $\alpha_v$ ,  $\alpha_e$  változóknál figyelembe vesszük a beruházási mérlegnél a beruházási eszközök lekötését, illetve felzabadoztatását, a célfüggvényben pedig a földdel kapcsolatos költségeket. Az utóbbit célszerű lehet a fix és proporcionális költségek szerint megbontani, amikor is a proporcionális költségeket a földterületet igénylő tevékenységekre, a fix költségeket pedig az  $\alpha$  változókra terheljük.

De az eljárás felhasználható olyankor is, amikor célunk annak vizsgálata, hogy a művelési ág változtatásának /pl. erdő telepítésnek/ milyen gazdasági hatása van.

A munkaerőforrás másként jelentkezik a termelőszövetkezetekben, és másként az állami vállalatoknál. Az állami vállalatoknál a munkaerő-létszám elvileg tetszés szerint változtatható, illetve a távlati tervezés során tetszés szerint változtathatónak tekinthető gyakorlatilag is. /A tetszés szerinti változtathatóság természetesen itt és máshol is, azt jelenti, hogy a termelés gyakorlatilag lehetséges bármely szerkezete esetén a munkaerő-szükséglet kielégíthető./ Általában az állami mezőgazdasági vállalatok /állami gazdaságok/ alkalmaznak állandó munkaerőt, amelyet egész évben foglalkoztatnak, és időszakai munkaerőt is, amelyek viszont csak az év meghatározott - hosszabb-rövidebb - időszakában állnak a vállalattal munkaviszonyban. Az időszakai munkaerővel különböző időtartamokra lehet szerződést kötni aszerint, hogy számukra mikor tud a vállalat munkát biztosítani. Így pl. alkalmazhatók 8 hónapra, 6 hónapra, 3 hónapra, stb. szerződötetett dolgozók. Az egyes csoportokban dolgozók más-más költségigénnyel lépnek fel. Ha a proporcionális költségek azonosak is /a teljesítmény vagy órabér azonosnak vehető bármely állandó vagy időszakai csoportba tartozó dolgozó végén is az adott munkát/, a fix költségek eltérőek. Az állandó dolgozóknak ugyanis esetleg összkomfortos lakást kell adni, az időszakai dolgozók számára viszont szálláshely biztosítása is elegendő lehet a munkásszálláson, vagy esetleg még munkásszállásra sincs szükség, hanem a környező településekről kell őket naponta a gazdaságba és vissza, a lakóhelyükre szállítani.

Másrészt, bár a termelőszövetkezetekben a munkaerő-létszám adottságként fogható fel, a távlati tervezés során annak bizonyos változtatása is lehetséges, illetve bizonyos korlátok között - ha szűk intervallumban is - tetszés szerint változtatható. Például az iparba áramlást vagy visszaáramlást milyen

mértékben célszerű lehetővé tenni vagy ösztönözni? Elméleti vizsgálatok során is szükség lehet arra, hogy feltételezzük a munkaerő tetszés szerinti változtatásának lehetőségét a termelőségvetkezeti modellben.

Ha a munkaerőt adottnak tekintjük, akkor, mint láttuk, a

$$/17.31./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

formula alkalmazható.

A /17.31./ formulában, mint ismeretes,  $b_i$  az  $i$ -edik hónapban rendelkezésre álló munkanapok mennyiségét jelenti. Márpedig, ha  $b'_i$  -vel jelöljük az  $i$ -edik hónapban az egy munkaerő által ledolgozható napok számát, és  $\beta$ -val a rendelkezésre álló munkaerő-létszámot, akkor

$$/17.32./ \quad b_i = b'_i \beta ,$$

s ezt a /17.31./-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$/17.33./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b'_i \beta .$$

Itt  $\beta$ -t már változónak tekintjük s konkrét értékét a modell megoldása útján kapjuk.

A /17.33./ formulát átrendezve, kapjuk a

$$/17.34./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b'_i \beta \leq 0$$

kifejezést. Ennek beépítése a modellbe nem jelent problémát.

A /17.34./ formulában nem bontottuk meg a munkaerőt állandó dolgozókra és időszakai dolgozók csoportjaira. Legtöbbször felmerül azonban ennek szükségessége. Ez esetben  $\beta_j$ -vel jelöljük a  $j$ -edik dolgozócsoporthat és  $b'_{ij}$ -vel a  $j$ -edik dolgozócsoporthatban az egy fő által ledolgozható munkanapok számát az  $i$ -edik időszakban, s ekkor a problémát a következőképpen

fogalmazhatjuk meg:

$$/17.35./ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n b'_{ij} \beta_j \leq 0.$$

A modell megoldásával megkapjuk a  $\beta_j$  értékeket, azaz hogy az egyes időszakokra hány dolgozót célszerű szerződetni ahhoz, hogy a munkaerő-szükséglet ne haladja meg a munkaerőkapacitást.

Természetes, ha a  $\beta_j$  változók nem vehetnek fel tetszés szerinti értéket, csak egy meghatározott intervallumon /pl.

$[\beta_{j_0}, \beta_j^0]$  belül mozoghatnak, szükségeses a

$$\beta_{j_0} \leq \beta_j \leq \beta_j^0$$

feltételek modellbe építése is.

A gépkorlátokat a /17.1./ pontban a

$$/17.36./ \quad \sum_{j=1}^n g_{ij}^h x_j^h \leq d_i^h$$

feltétellel fogalmaztuk meg. Mint ismeretes, itt a  $d_i^h$  a h-adik géptípus által i-edik hónapban ledolgozható munkanapok /műszakok/ számát jelenti. Ha azonban  $\delta_h$ -val jelöljük a h-adik géptípusból rendelkezésre álló darabszámot; s  $d_i^h$  azt jelöli, hogy egy darab gép a h-adik géptípusból az i-edik hónapban hány műszakot teljesíthet, akkor

$$/17.37./ \quad d_i^h = d_i^h \delta_h,$$

amit a /17.36./ formulába behelyettesítve kapjuk, hogy

$$/17.38./ \quad \sum_{j=1}^n g_{ij}^h x_j^h \leq d_i^h \delta_h.$$

E formulában a  $\delta_h$  változó, amelynek konkrét értékét a modell megoldása után nyerjük.

A /17.38./-ban tehát a rendelkezésre álló gépszámot nem irtuk elő, hanem változónak tekintettük. Követelményünk csupán annyi, hogy a h-adik géptípusból rendelkezésre álló kapacitás nem lehet kevesebb, mint a szükséglet.

Természetesen a /17.38./ formulát is átrendezve építjük be a matematikai modellbe, a

$$\text{/17.39./} \quad \sum_{j=1}^n g_{ij}^h x_j^h - d_i^h \delta_h \leq 0$$

formában.

Ha a h-adik típusba tartozó gépek száma csak egy meghatározott  $[\delta_{h0}, \delta_h^0]$  intervallumban változhat, akkor a

$$\text{/17.40./} \quad \delta_{h0} \leq \delta_h \leq \delta_h^0,$$

mérlegfeltétel modellbe építése is szükségessé válik.

Az állóeszközök azonban beruházási igényt támasztanak, s a beruházás lehetősége általában - még hitelfelvétel esetén is - korlátozott, ezért célszerű azokra beruházási korlátot előírni.

Tegyük fel, hogy a h-adik állóeszközből egy egység által igényelt beruházási összeget /forintban/  $r_h$ -val jelöljük és a h-adik állóeszköz igényt  $\delta_h$ -val. /itt  $\delta_h$  nemcsak a gépek számát, de bármely állóeszköz számát jelentheti./ Eszerint a h-adik állóeszközből a beruházás költségigénye

$$\text{/17.41./} \quad r_h \cdot \delta_h$$

Ha most  $g_{ij}^h$  azt jelenti, hogy a j-edik termék egységnyi termelése mekkora fajlagos kapacitást igényel az i-edik hónapban a h-adik állóeszközből, akkor a

$$\text{/17.42./} \quad \sum_{j=1}^n g_{ij}^h x_j^h - d_i^h \delta_h \leq 0$$

mellett a

$$\text{/17.43./} \quad \sum_{h=1}^m r_h \delta_h \leq R$$

méglegfeltételt is a modellbe kell építeni, amely szerint a beruházási igény nem lehet nagyobb, mint a beruházásra rendelkezésre álló keret. /R a rendelkezésre álló beruházási keret összegét szimbolizálja./

Ha az R beruházási összeg távlati tervezés esetén előre meghatározható vagy megközelítőleg megbecsülhető, de az bankbetéttel szűkíthető, vagy hitelfelvételtel bővíthető és  $v'$  a bankbetét,  $v''$  pedig a hitelfelvétel nagyságát fejezi ki, akkor a /17.43./ formulát átalakítva kapjuk a

$$/17.44./ \quad \sum_{h=1}^m r_h \delta_h \leq R - v' + v''$$

kifejezést, amely szerint a beruházási igény nem haladhatja meg a bankbetéttel és hitelfelvétellel módosított rendelkezésre álló összeget. Itt a  $v'$  és  $v''$  változók, s célfüggvény koeficiensük a kamatot vagy egyéb, a hitelfelvétellel járó költségeket, illetve bankbetét létesítésével kapcsolatos nyereséget fejezik ki.

A  $v'$  és  $v''$  változókat átrendezve, a

$$/17.45./ \quad \sum_{h=1}^m r_h \delta_h + v' - v'' \leq R$$

kifejezést nyerjük, és ha a hitelfelvétel vagy betét korlátozott, a

$$/17.46./ \quad v'_0 \leq v' \leq v'^0,$$

$$/17.47./ \quad v''_0 \leq v'' \leq v''^0$$

mérlegfeltételeket építjük be a modellbe.

A beruházási mérlegfeltételek természetesen csak az új beruházásokra vonatkoznak. Ha az állóeszköz-változókat nem bontjuk meg régi és új beruházási változókra, akkor a régi beruházásokat felértékeljük, s az R-be beleszámítjuk. Ilyenkor további feltételeket is a modellbe kell építeni a különböző állóeszközökre, ami a modellt bonyolultabbá teszi.

A klasszikus lineáris programozási modellhez képest lényegesen módosul a célfüggvény.

A technológiai változatok és a talajtipusok megkülönböztetése nélkül vezessük be a következő jelöléseket:

$T_j$  azt a számot jelenti, amely megmutatja, hogy a  $j$ -edik tevékenység egy egysége mekkora /hány forint/ termelési értéket eredményez;

$C_{aj}$  a  $j$ -edik tevékenység fajlagos anyagköltsége /műtrágya, vetőmag, vegyszer, stb./, a tevékenység által igénybe vett gépek üzemanyagköltsége nélkül;

$C_{új}$  a  $j$ -edik tevékenység esetén felmerülő fajlagos üzemanyagköltség, amely a gépimunka-igény alapján tervezhető meg;

$C_{gj}^h$  a  $h$ -adik állóeszköz /pl. gép/ amortizációs és javítási /azaz fix/ költségéből a  $j$ -edik tevékenység egységére jutó költség /esetleg kamatigény és eszközlekötés figyelembevételével/;

$C_{ej}$  a  $j$ -edik tevékenységnél felmerülő fajlagos egyéb költség;

$C_{mj}$  a  $j$ -edik tevékenységnél felmerülő fajlagos munkabérek költség.

A  $T_j$  értéke a termelés /vagy szolgáltatás/ mennyiségének és egységárának ismeretében könnyen meghatározható. A költségeket a jelzett költségcsoportonként a technológiák kidolgozása során - viszonylag egyszerűen - meghatározzuk, kivéve a  $C_{gj}^h$ -val szimbolizált költségcsoportot.

Hogyan lehet a több tevékenység által hasznosított állóeszközök fix költségeit egységnyi tevékenységre meghatározni akkor, amikor még nem ismerjük a termelési szerkezetet? Pl. a traktorok amortizációs költségét időarányosan számoljuk el, tehát egy évre adottnak tekintjük. Az, hogy egy műszakra mennyi amortizációs költség jut, nagymértékben függ attól, hogy az adott traktor az év során hány műszakot teljesít, ami viszont a termelési szerkezet függvénye. Ha pl. egy traktor évi amortizációs költsége 20 000 R, a traktor az év során csak 100 műszakot üzemel, egy műszakra 200 R amortizációs költség jut. 200 műszakos teljesítménynél már csak 100 R, 300 műszak teljesítménynél pedig csak 66 R az egy műszakra jutó amortizációs költség.

A mezőgazdaságban a klasszikus lineáris programozási modellt alkalmazva átlagos /feltételezett/ traktorkihasználással számolhatunk, s ennek alapján határozzuk meg az egy műszakra jutó fix költséget. Ha azonban a valóságban a gépek kihasználása jobb lesz, az egy műszakra eső fix költség is kevesebb lesz, vagyis modellünk a gépi munkát kevésbé igényelő tevékenységeknek kedvezett. Alacsonyabb kihasználás esetén a helyzet fordított. A klasszikus modellben alkalmazott célfüggvény, amelyet példánk alapján a

$$/17.48./ \quad \sum_j (T_j - C_{aj} - C_{új} - C_{ej} - C_{mj} - \sum_h C_{gj}^h) x_j \rightarrow \max.$$

formában fogalmazhatjuk meg, nem fejezi ki a reális helyzetet, mert ha a  $C_{gh}^h$ -t átlagos gépkihhasználást feltételezve állapítjuk meg, a  $g_j^h$  tényleges költségektől eltérő képet kapunk.

A termelési szerkezet és források egyidejű optimalizálása során a célfüggvény a következő /egyszerűsített/ formában adható meg:

/17.49./

$$\sum_j \left( T_j - C_{aj} - C_{uj} - C_{ej} - C_{mj} - \sum_h \frac{C_{gh}^h \delta_h}{\underline{1}^* \underline{z}_j^h \underline{x}} \right) x_j \rightarrow \max.$$

ahol:

$\underline{z}_j^h$  a h-adik állóeszközre vonatkozó technológiai mátrix;

$\underline{z}_j^h$  a Z mátrix j-edik oszlopvektora;

$\underline{1}^*$  összegző sorvektor.

A  $C_{gh}^h$  itt ugyancsak a h-adik állóeszköznek /kihasználástól függetlenül/ fix költségét szimbolizálja, de most nem a tevékenység egységre /pl. egy műszakra/, hanem egységnyi állóeszközre /pl. egy traktorra/ vonatkoztatva.

A fix költségeket itt nem osztottuk fel egy becsült kihasználás mellett egységnyi teljesítményre /pl. egy műszakra/, hanem a felosztás követelményét a modellbe építettük be. Így a fix költségek felosztása nem a termelési szerkezettől független, hanem a termelési szerkezettel, s ennek alapján a gépek kihasználásával összefüggésben történik meg. A modell megoldása során a fix költségek felosztása minden lépésben megtörténik, s a megoldás további lépéseiben a fix költségek alakulását és az állóeszközöknek az adott lépésben történt kihasználását, s ennek alapján az egységnyi teljesítményre jutó fix költségeket mérlegeljük. Ha ugyanis  $\underline{x}$  vektor a modell megoldása során kapott optimális termelési szerkezetet szimbolizálja, s  $\underline{z}_j^h$  matrix a h-adik állóeszközre vonatkozó technológiai mátrix, akkor a  $\underline{z}_j^h \underline{x}$  szorzat egy oszlopvektort eredményez, amely az adott termelési tervben a h-adik állóeszköz-kapacitás iránti szükségletet fejezi ki az év különböző időszakában /pl. a h-adik gép iránti igényt havonként, műszaknapokban/. A havonkénti igényt összegezve, az évi műszakszükségletet kapjuk. A havi adatok összegezését itt az összegző sorvektorral balról történő szorzással szimbolizáljuk. A  $\underline{1}^* \underline{z}_j^h \underline{x}$  tehát az adott  $\underline{x}$  vektorral szimbolizált termelési tervben a h-adik állóeszköz iránti évi összes teljesítményigényt fejezi ki.

Ha a h-adik állóeszközből az adott termelési terv szükségletét  $\delta_h$  darabbal tudjuk kielégíteni, és egy darab h-adik

állószerkező  $C_g^h$  fix költséggel jár, akkor a  $\delta_h$  darab fix költsége  $C_g^h \cdot \delta_h$  szorzattal nyerhető.

Természetesen, ha a h-adik állószerkező évi összes fix költségét  $/C_g^h \delta_h/$  osztjuk az adott állószerkező évi összes teljesítményével  $/1 * Z^h x/$ , megkapjuk, hogy az adott termelési tervben tervezhető teljesítménykihasználás esetén mennyi fix költség jut egy teljesítményegységre.

Mivel a  $Z_j^h$  vektor a  $Z^h$  mátrix j-edik oszlopvektora, s azt mutatja, hogy a j-edik tevékenység egy egysége a h-adik gép teljesítményéből hány egységnyit igényel /pl. hány műszak munkát igényel havonként valamely traktortípustól/, a  $Z_j^h$  vektor adatainak összege /balról/összegző sorvektorral/ szorozva/ a j-edik tevékenység évi igényét adja meg a h-adik géptípus teljesítménye iránt. Ezt az egy műszakra jutó fix költséggel szorozva, megkapjuk, hogy a j-edik tevékenység egy egységére - az adott termelési szerkezet és az adott állószerkező-ellátottság mellett - mennyi fix költség jut. Ez a j-edik tevékenység mennyiségével  $/x_j/$  szorozva, adja a j-edik tevékenység tervezett mennyiségére jutó fix költséget a h-adik állószerkezőből. Amennyiben előzőleg h-ra összegeztünk, akkor pedig az összes állószerkező fix költségét nyertük.

Ez esetben tehát a fix költségek kezelése reálissá válik, annak tevékenységekre történő elosztása a matematikai modell megoldása során történik. A megoldás folyamán megfelelő mérlegelés válik lehetővé a tevékenységek között. Pl. valamely állattenyésztési vagy tartási tevékenység jövedelmezőségének eldöntésénél mérlegre kerül egyik oldalon az adott állattenyésztési tevékenységgel elérhető termelési érték, a másik oldalon pedig a takarmányvásárlás költsége, az adott állattenyésztési tevékenységre közvetlenül ráterhelhető költség, az állat eltartására tervezett saját takarmánytermelésnél felmerülő, a takarmánytermelésre közvetlenül ráterhelhető költség, valamint az, hogy mind az állattenyésztés, mind a takarmánytermelés állószerkezőket /pl. gépeket is/ igényel, s ezek igénybevétele arányában viselni kell fix költségeiket.

A /17.49./ formulában nettó jövedelem típusu célfüggvényt foglaltunk meg, amely a munkabér jellegű költségeket  $/C_{mj}/$  is tartalmazza. Ha ezt a formulából elhagyjuk, bruttó jövedelem jellegű célfüggvényt kapunk.

A /17.49./ formula egyszerűsíthető, ha a proporcionális költségeket összevonva egy szimbólummal jelöljük, azaz

$$/17.50; / \quad C_j^{\text{vált.}} = C_{aj} + C_{uj} + C_{ej} + C_{mj},$$

s ennek alapján a célfüggvény

$$/17.51./ \quad \sum_j \left( T_j - C_j^{\text{vált.}} - \sum_h \frac{C_g^h \delta_h}{\underline{1}^* \underline{z}^h \underline{x}} \cdot \underline{1}^* \underline{z}_j^h \right) x_j,$$

ami viszont egyenértékű a

$$/17.52./ \quad \sum_j \left( T_j - C_j^{\text{vált.}} \right) x_j - \sum_h \frac{C_g^h \delta_h}{\underline{1}^* \underline{z}^h \underline{x}} \cdot \underline{1}^* \underline{z}_j^h \underline{x}$$

formulával, s ezt egyszerűsítve a

$$/17.53./ \quad \sum_j \left( T_j - C_j^{\text{vált.}} \right) x_j - \sum_h C_g^h \delta_h$$

egyszerű lineáris célfüggvényekhez jutunk.

A /17.53./-ből következik, hogy az  $x_j$ -vel szimbolizált tevékenységek célfüggvény-koefficienseit a technológiák kidolgozása során úgy számítjuk ki, hogy a termelési értékből levonjuk mindazon költségeket, amelyek az adott tevékenységre közvetlenül ráterhelhetők /műtrágya, vegyszer, vetőmag, stb./ és az állóeszközökkel kapcsolatos proporcionális /igénybevétel-től függő/ költségeket. Az állóeszköz, illetve szolgáltató tevékenységek /munkaerő is/ célfüggvény-koefficiensei viszont az egységnyi állóeszköz /vagy pl. munkaerő/ fix költségét tartalmazzák. Végeredményben tehát a bonyolult probléma a matematikai modellben igen egyszerű módon jelenik meg.

A célfüggvény eddigiekben alkalmazott megfogalmazásában a halmozott bruttó és halmozott nettó jövedelem maximálisát irtuk elő. Ennek kiküszöbölése érdekében célszerűbb a célfüggvényben a termelési érték / $T_j$ / helyett a végtermék értékét /jelöljük  $A_j$ -vel/ alkalmazni, azaz a /17.53./ helyett a

$$/17.54./ \quad \sum_j \left( V_j - C_j^{\text{vált.}} \right) x_j - \sum_h C_g^h \delta_h$$

vagy a

$$/17.55./ \quad \sum_j \left( A_j - C_j^{\text{vált.}} \right) x_j - \sum_h C_g^h \delta_h$$

formulát alkalmazni. Ez lehetővé teszi a vállalaton belüli termékfelhasználásból adódó halmozódások kiküszöbölését.

Az ismertetett modellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a termelési forrásváltozók egy részére /gépekre, épületekre/ az egészértékűséget kell előírni, vagyis vegyes egészértékű programozást kell alkalmaznunk.

17.2.2. Egy egyszerű példa összehasonlító vizsgálata

Legyen modellünk a következő:

8. táblázat

Egyszerű példa

Megnevezés	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\delta_1$	$\delta_2$	Reláció	b
Terület	1	1	1	1	0	0	=	100
Gép I. 1.időszak	2	3	3	2	-20	0	$\leq$	0
Gép I. 2.időszak	4	2	1	5	-30	0	$\leq$	0
Gép II. 1.időszak	1	2	2	2	0	-20	$\leq$	0
Gép II. 2.időszak	3	1	2	4	0	-30	$\leq$	0
	1500	1300	100	1700	-5000	-6000		max

A modell egy olyan F nagyságu területen gazdálkodó termelőszövetkezetet reprezentál, amely az egyszerűség kedvéért csak négyféle tevékenységet folytat. Az egyszerűség kedvéért az F nagyságu területet 100 %-nak vettük, illetve az  $x_1$  változókkal a terület 1 %-át reprezentáltuk. Így a modell megoldásával a termelési szerkezetet /százalékos összetételt/ nyerjük. Eltekintettünk a munkaerő, anyag, stb. mérlegek vizsgálatától, s figyelmünket kizárólag a gépfelhasználás vizsgálatára irányítjuk.

Tegyük fel, hogy a vállalat csak kétféle géptípust használ /gép I. és gép II./, s a gépfelhasználást csak két időszak szerinti bontásban vizsgáljuk, vagy csak a két csucsidőszakot /csucshónapot/ vesszük figyelembe. A feladatból kitűnik az egyes termékeknek az egyes géptípusok iránti fajlagos igénye a vizsgált időszakokban /műszaknapokban/, valamint az is, hogy mindkét gép az első időszakban /vagy az első csucshónapban/ 20, a másodikban 30 műszak teljesítésére képes. A táblázat utolsó sora a célfüggvény-koefficienseket /jövedelmet/ mutatja. Az egyes termékeknel azonban csak a közvetlenül ágazatra terhelhető költségeket vettük figyelembe a jövedelemszámítás során, s eltekintettünk a gépek amortizációs és javítási költségeitől. Ez utóbbiakat, azaz a fix költségeket, a gépekre terheljük. Ezek képezik - természetesen negatív előjelekkel - a gépek célfüggvény-koefficienseit. Amint a táblázatból kitűnik, az első gépnek a vizsgált időszakokra - a vizsgált két csucshónapra - vonatkoztatott amortizációs és javítási költsége 5000 R, a másodiké 6000 R.

A modellnek egy lehetséges megoldása a következő:

Vetésszerkezet:	$x_1 = 30 \%$
	$x_2 = 20 \%$
	$x_3 = 10 \%$
	$x_4 = 40 \%$
Összesen:	<u>100 %</u>

Géppark:	$\delta_1 = 13$ db
	$\delta_2 = 10$ db

Ez esetben a célfüggvény 24 000 R.

A fenti termelési szerkezet gépmérlege a következőket mutatja:

Az első gép iránti igény az első időszakban /vagy csúcshónapban/ 230 műszaknap, 13 db gép esetén rendelkezésre áll 260 műszaknap, felesleges 30 műszaknap, a második időszakban /csúcshónapban/ a szükséglet 370 műszak, rendelkezésre áll 390 műszak, felesleges 20 műszak.

A második gép iránt az első időszakban a szükséglet 170 műszaknap, rendelkezésre áll 10 gép esetén 200 műszaknap, felesleg 30 műszaknap, a második időszakban pedig szükséges 290 műszaknap, rendelkezésre áll 300 műszaknap, felesleges 10 műszaknap.

A taláalomra összeállított termelési szerkezet tehát 13, illetve 10 gépet igényel. A gépeket az egyik időszakban sem használjuk ki teljesen, s a jövedelem 24 000 R.

Második lépésben oldjuk meg a feladatot úgy, hogy a modellből a gépváltozókat / $\delta_1$  és  $\delta_2$ / kiiktatjuk, s az előbbi, taláalomra történt megoldásban szereplő 13, illetve 10 gépet feltételezve, a  $b$  vektorba 260, 390, 200 és 300 műszakkapacitást írunk be, s a gépek fix költségét általános költségként kezelve, utólag számoljuk el.

Harmadik lépésben ugyanezt a modellt oldjuk meg úgy is, hogy a fix költségeket is beépítjük a célfüggvénybe, 50 műszakos kihasználást feltételezve. Így az első gépnél 100 R, a másodiknál 120 R fix költség számítható egy műszakra.

Végül oldjuk meg a modellt a táblázatban foglaltak szerint, amikor is a termelési szerkezetet és a gépparkot egyidejűleg optimalizáljuk.

A négyféle megoldást foglaljuk táblázatba.

9. táblázat

A négyféle tervváltozat összehasonlítása

Megnevezés	I.	II.	III.	IV.
	tervváltozat			
$x_1$	30	0	40	71,43
$x_2$	20	36,7	60	28,57
$x_3$	10	0	0	0
$x_4$	40	63,3	0	0
$\delta_1$	13	13	13	11,43
$\delta_2$	10	10	8,67	8,10
Jövedelem, R	24 000	30 333	21 000	38 571
Jövedelem 100, illetve 120 R műszakköltséggel számolva			43 200	38 536

A 9. táblázatból - ahol a III. és IV. tervváltozatoknál azt a célfüggvényértéket is közöljük, amelyet úgy kaptunk, hogy a gép I.-nél 100 R, a gép II.-énél 120 R amortizációs költséget számoltunk egy műszakra - kitűnik, hogy a klasszikus modell /III. változat/ igen magas jövedelemmel kecsegtet, pedig valójában a legkisebb jövedelem elérését teszi lehetővé. Alkalmazása csak olyan elszámolási rendszerben volna célszerű, amelyben a gépek amortizációját nem évekre, hanem műszakteljesítésre vagy teljesítményre számolják. Az amortizáció időarányos elszámolása esetén viszont /ahogy ez jelenleg történik/ a klasszikus programozási modell nagyon is félrevezető.

Érdekes, hogy valamennyi tervváltozatban más termelési szerkezetet kapunk. Még a III. és a IV. változat is - amely ugyanazon két termék termelését irányozza elő - homlokegyenest eltérő arányokat javasol.

Példánk egyszerű adatokra épül ugyan, de nagyon alkalmas arra, hogy összehasonlítást tegyünk a különböző módokon felépített modellek alkalmazásának eredményessége között.

17.3. A termelési szerkezet, a termelési technológiák és a termelési erőforrások egyidejű optimalizálása

Az előbbieken ismertetett módszertani megoldás a három alapvető döntési feladat közül kettőnek, a termelési szerkezetnek és a termelési erőforrásoknak az egyidejű optimalizálását tette lehetővé. Ugyanakkor a különböző termékek előállításához alkalmazható termelési technológiák közül csak néhányat tudtunk vizsgálni, s ezek közül választhattunk. Márpedig a különböző termékek termelése igen sokféle technológiai megoldással képzelhető el. Ugyanis az egyes munkafolyamatokat különböző módon, különböző erő- és munkagépekkel, illetve ezek különböző kapcsolatával végeztjük el és ilyenformán számtalan kombináció elképzelhető. Egyáltalán nem biztos, hogy az adott modellben vizsgált néhány technológiai változat között az optimális változat is megtalálható.

Másrészt az optimális technológia kölcsönös kapcsolatban van a termelés szerkezetével és az erőforrásokkal, ezért azoktól függetlenül lehetetlen az optimális technológiát meghatározni.

Végül az előbbieken ismertetett modellek komplex technológiák előzetes megtervezését teszik szükségessé, ami igen sok manuális munkát igényel és nagy szakértelmet kíván. Felmerül a kérdés, nem lehetne-e ezt a munkát számítógéppel elvégezni.

A továbbiakban ismertetésre kerülő módszertani megoldásban lehetővé válik a három alapvető feladat egyidejű megoldása, optimalizálása, s egyben a termelési technológiák előzetes megtervezésétől is mentesülünk. A továbbiakban e modell rövid ismertetését adjuk.

17.3.1. A matematikai modell változói

A matematikai modell változóit a következő alapvető csoportokra bonthatjuk.

- a/ Termelési és szolgáltatási változók
- b/ Piaci tevékenységi változók
- c/ Munkaművelési változók
- d/ Erőgép változók

e/ Munkagép változók  
f/ Munkaerő változók  
g/ Egyéb változók.

Az egyes csoportok még tovább bonthatók.

A termelési és szolgáltatási változók például a következő csoportokat foglalják magukba:

Szántóföldi árunövénytermesztési változók.  
Szántóföldi takarmánytermesztési változók.  
Zöldségtermesztési és értékesítési változók.  
Szőlő- és gyümölcsstermesztési és értékesítési változók.  
Rét- és legelőgazdálkodási változók.  
Állattenyésztési és tartási, és értékesítési változók.  
Szolgáltatási tevékenységi változók.  
Kiegészítő tevékenységi változók.

Olyan esetben, amikor a termelés egyértelműen vagy döntően a piaci értékesítést szolgálja, a termelési és értékesítési tevékenységet aggregáljuk. Ennek megfelelően a piaci tevékenységeket nagyrészt a beszerzési tevékenységek adják, illetve sokszor kerül sor külön értékesítési tevékenységekre is, ha például valamely árunövény különböző feltételek mellett értékesíthető, stb.

A piaci tevékenységek tehát csoportosíthatók aszerint, hogy beszerzési vagy értékesítési tevékenységről van szó, illetve például olyan alapon is, hogy takarmányanyagok, vagy milyen más anyagok beszerzését tettük a modellben lehetővé.

A munkaműveleti változók szintén különbözőképpen csoportosíthatók. Például funkciójuk szerint /talajelőkészítés, vetés, növényápolás, stb./, ezen belül a konkrét művelet megnevezése szerint, pl. szántás, tárcsázás, kultivátorozás, stb. és az alkalmazott erő- vagy munkagép szerint.

Az erőgép változók csoportosíthatók aszerint, hogy traktorok, teherautók, önjáró betakarítógépek, növényvédő repülőgép vagy helikopter, stb., de például a traktorok tovább csoportosíthatók aszerint, hogy milyen traktorkategóriába tartoznak vagy általában a különböző erőgépek típusuk szerint.

A munkagépek megint csak csoportosíthatók funkciójuk szerint, pl. talajművelő gépek, vetőgépek, stb. és típusuk szerint.

Az egyéb változók igen sokfélék lehetnek, pl. beruházási hitelfelvételi változók, bankhitel létesítési /bankbetéti/ változók, átcsoportosító változók, pl. takarmányt áru-termékeknek, vagy áru-terméket takarmánynak, vagy terület, munka, stb. átcsoportosítását lehetővé tevő változók.

A változókra a következő jelöléseket vezetjük be:

Jelöljük  $x$ -szel a termelési, szolgáltatási változókat, a piaci tevékenységi és egyéb változókat,  $v$ -vel a munkaműveleti változókat,  $g$ -vel az erőgép változókat és  $z$ -vel a munkagép változókat,  $y$ -nal a munkaerő változókat. Annak jelölésére, hogy a felsorolás szerinti sorrendben hányadik változóról van szó, a változóhoz a jobb alsó sarokhoz irt indexet alkalmazunk, tehát  $x_j$  jelöli a termelési, szolgáltatási, piaci tevékenységi és egyéb változók közül a  $j$ -ediket,  $v_k$  a  $k$ -adik munkaműveleti,  $g_h$  a  $h$ -adik erőgép,  $z_r$  az  $r$ -edik munkagép változót,  $y_j$ -vel a  $j$ -edik munkaerő változót. Ha a változók szabatosabb meghatározása kívánatos, akkor a jobb alsó vagy a jobb felső sarokba irt további index-jelöléseket alkalmazunk, pl.  $x_{jt}^e$  jelentheti, hogy a  $j$ -edik termelési tevékenységet a  $t$ -edik talajtipuson az  $e$ -edik termelési célra milyen szinten /pl. hány hektáron/ végezzük. Ilyen esetben mindig megadjuk az alkalmazott indexek gazdasági tartalmát.

A fentiekben vázolt jelölési mód további tárgyalási célunknak megfelel és lehetővé teszi, hogy a modellt egyszerűsítve bemutassuk.

17.3.2. A matematikai modell feltételrendszere

Tételezzük fel, hogy a vizsgált vállalat  $F$  nagyságu területtel rendelkezik, és a  $j$ -edik termelési tevékenység fajlagos területigénye  $f_j$ . A modellben előírjuk, hogy a vállalat a termelésre az  $F$  nagyságu területet maradéktalanul használja fel, azaz

$$/17.56./ \quad \sum_j f_j x_j = F$$

Természetesen, ha a vállalat területe nem egynemű, hanem nagyobb összefüggő területen különböző talajtipusokkal rendelkezik, akkor a területfelhasználási mérleget a modellbe talajtipusonként megbontva kell beépiteni, vagyis

$$/17.57./ \quad \sum_j f_j^t x_j^t = F^t$$

ahol a  $t$  a  $t$ -edik talajtipusra utal.

A vállalati belső arányok célszerű kialakításának biztosítása érdekében egyes termékek termelésére alsó vagy felső korlátot, vagy alsó és felső korlátot írunk elő, azaz

$$/17.58./ \quad x_j \geq Q_{j0}$$

$$/17.59./ \quad x_j \leq Q_j^0$$

$$/17.60./ \quad Q_{j0} \leq x_j \leq Q_j^0$$

ahol

$Q_{j0}$  = a  $j$ -edik termék termelésének alsó korlátja,

$Q_j^0$  = a  $j$ -edik termék termelésének felső korlátja.

A /17.58./ - /17.60./ feltételek természetesen úgy is megfogalmazhatók, hogy a  $j$ -edik termék területére alsó vagy felső, illetve alsó és felső területkorlátot írunk elő

$$/17.61./ \quad f_j x_j \leq F_{j0}$$

$$/17.62./ \quad f_j x_j \geq F_j^0$$

$$/17.63./ \quad F_{j0} \leq f_j x_j \leq F_j^0$$

ahol

$F_j^0$  az alsó és  $F_j^1$  a felső területkorlát, vagy előírjuk, hogy a  $j$ -edik termék  $F_j^0$  termelésére az összterület bizonyos /pl.  $\gamma$ / %-át használhatjuk fel, vagy kell felhasználni, vagy adott %-os határok között kell a  $j$ -edik termék termőterületének lenni, tehát

$$/17.64./ \quad f_j x_j \leq \gamma_0 F$$

$$/17.65./ \quad f_j x_j \geq \gamma^0 F$$

$$/17.66./ \quad \gamma_0 F \leq f_j x_j \leq \gamma^0 F$$

A probléma természetesen több termék együttes kezelésének korlátozására is kiterjed, illetve korlátozhatjuk az egyes termékek vagy több termék együttes termelését talajtípusonként is.

Más esetben az egyes termelési /szolgáltatási, piaci és egyéb/ tevékenységek megfelelő arányát, vagy például adott termék különböző célra történő termelése között a megfelelő arányokat kell biztosítani. Előírhatjuk például, hogy a  $j$ -edik és a  $h$ -adik tevékenység között megfelelő arányt kell biztosítani, azaz

$$/17.67./ \quad x_j = \beta x_h$$

vagy

$$/17.68./ \quad f_j x_j = \beta f_h x_h$$

ahol  $\beta$  arányszám, amely meghatározza, hogy a  $j$ -edik tevékenység szintje hányszorosa legyen a  $h$ -adik tevékenység szintjének. /Például az újtelepülési és álló lucerna termelése vagy területe között milyen arányt kell biztosítani./ Több termékre kiterjesztve a problémát, kapjuk, hogy

$$/17.69./ \quad x_j + x_{j+1} + \dots + x_{j+k} = \beta x_h$$

illetve

$$/17.70./ \quad f_j x_j + f_{j+1} x_{j+1} + \dots + f_{j+k} x_{j+k} = \beta f_h x_h$$

Ilyenképpen lehet például előírni azt a követelményt, hogy a lucernaszéna, a szenázs és a lucernaliszt termelése megegyezzen az új és álló lucernaterület által megtermelhető összes lucernamennyiséggel.

Természetesen a /17.67./ - /17.70./ formulák egyenlőtlenség / $\geq$ ,  $\leq$ / formájában is megfogalmazhatók.

Biztosítani kell a modellben a takarmánymérleget is. Eszerint a takarmánytermelés és takarmányvásárlás által biztosítandó mennyiség a különböző táplálóanyagokból és a különböző takarmányfélésegekből és takarmánycsoportokból /száranyag, keményítőérték, fehérje, abrak, szálas, zöld, stb./, levonva ebből a takarmányeladást, biztosítsa az állattenyésztés /és háztájinak juttatandó takarmány/ szükségletét.

Eszerint tehát

$$/17.71./ \quad \sum_j a_{fj} x_j - \sum_j a'_{fj} x'_{fj} \geq 0$$

ahol

$a_{fj}$  a j-edik takarmányt biztosító /termelési vagy vásárlási/ tevékenység fajlagos táplálóanyag vagy takarmánytartalma az f-edik táplálóanyagot vagy takarmányféléseget, illetve takarmánycsoportot tekintve.

$a'_{fj}$  az előbbivel egyezően a takarmány igénylő változóra vonatkozik, amit  $a'$  alkalmazásával jelölünk. Hasonló értelemben jelöljük  $x'$ -vel / $x'$ / a takarmányt vagy táplálóanyagot igénylő termelési, szolgáltatási /pl. háztáji számára takarmányjuttatás/, illetve piaci /takarmányértékesítési/ változót.

$\Sigma$  A /17.71./ formulában természetesen fordított reláció / $\leq$ / is lehetséges, ha azt írjuk elő, hogy a termelés nem haladhatja meg az állattenyésztés és a takarmányeladás igényét. Másrészt a termelésre egy alsó és felső szükségleti határ, intervallum is előírható, például

$$/17.72./ \quad \sum_j a'_{fj0} x'_j \leq \sum_j a_{fj} x_j \leq \sum_j a'_{fj0} x'_j$$

A jobb alsó sarokba irt  $0$  a feletethető és eladható mennyiség alsó határát, a felső sarokba irt  $0$  pedig a feletethető és értékesíthető mennyiség felső határát írja elő az f-edik táplálóanyagból vagy takarmányból,  $s$  a termelésnek az így meghatározott intervallumon belül kell lenni.

E helyütt nincs lehetőség a takarmánymérlegek további részletesebb kifejtésére, és nem foglalkozhatunk sok más problémával /anyagmérlegek, öntözőviz felhasználás mérlegfel-tétele, stb./, amelyekről azonban a hivatkozott irodalmak részletesebb tájékoztatást nyújtanak. A továbbiakban fordít-suk figyelmünket a termelési folyamat során elvégzendő munka-folyamatok vizsgálatára.

Az egyes termékek termelése különböző munkafolyamatok, munkaműveletek elvégzését igényli. E munkaműveleteket külön-böző erő- és munkagépkapcsolatokkal lehet elvégezni. Termé-szetes, hogy ha

$$m_{kj}^{gh} z_r\text{-rel}$$

a j-edik termelési, szolgáltatási, piaci vagy egyéb tevékeny-ség fajlagos igényét jelöljük a k-adik munkaművelet iránt, amelyet a h-adik erőgép és r-edik munkagép /tehát  $g_h, z_r$ / kapcsolásával végzünk, akkor fenn kell állni a

$$/17.73./ \quad \sum_j m_{kj}^{gh} z_r x_j = \sum_k v_k^{gh} z_r$$

feltételnek,

ahol

$v_k^{gh} z_r$  a k-adik munkaműveletből elvégzendő mennyiség  
a  $g_h z_r$  erő- és munkagépkapcsolattal végezve.

A /17.73./ formula szerint az adott munkaműveletből a különböző gépkapcsolásokkal elvégzendő mennyiség meg kell hogy egyezzen az aziránt mutatókozó szükséglettel, amely az egyelőre ismeretlen termelési szerkezetből adódik. A /17.73./ formulában, mint tudjuk,

$$v_k^{gh} z_r$$

szintén /egyelőre ismeretlen/ változó, amelynek konkrét érté-ke a termelési szerkezettől függ, s az optimalizálás során kerül meghatározásra.

Természetesen a formula átrendezve a

$$/17.74./ \quad \sum_j m_{kj}^{gh} z_r x_j - \sum_k v_k^{gh} z_r = 0$$

formában kerül a modellbe.

E munkákat azonban meghatározott időszakokban kell elvégezni, és egyáltalán nem közömbös, hogy ezeket mikor végezzük. A /17.74./ formulát tehát meghatározott időszakok szerinti bontásban kell a modellbe beépíteni, azaz

$$/17.75./ \quad \sum_j m_{kji}^{g_h} z_r x_j - \sum_k v_{ki}^{g_h} z_r = 0,$$

ahol  $i$  az  $i$ -edik időszakra utal.

Felvetődik a kérdés, hogy milyen időszakokat vegyünk figyelembe a különböző munkák elvégzésénél. Alkalmazhatunk e tekintetben heti, dekad vagy havi bontást. Célszerű lehet egyes időszakokkal is dolgozni, azaz egyes munkáknál - amelyeket hosszú ideig, 1-2 hónapig végezhetünk - alkalmazhatjuk a havi bontást, más munkáknál a dekad, esetleg 3-5 napos időszakok szerinti vizsgálatot. Az természetes, hogy az  $i$  csak azokra az időszakokra terjed ki, amelyek az adott munkavégzésre alkalmasak.

Követelményünk, hogy a különböző erőgépekből és munkagépekből az optimális termelési szerkezet és optimális termelési technológia szerint igényelt mennyiségek álljanak rendelkezésre. Ha

$$r_{ki}^{g_h} z_r \text{ -rel}$$

jelöljük a  $h$ -adik erőgéppel szemben jelentkező fajlagos munkaráfordítási igényt, ha a  $k$ -adik munkaműveletet, az  $i$ -edik időszakban  $g_h$  z gépkapcsolattal végezzük /például a munka elvégzéséhez szükséges műszakok számát/, és  $b_{hi}$ -vel a  $h$ -adik erőgép fajlagos teljesítményét az  $i$ -edik időszakban, akkor az erőgépekre vonatkozó feltételünk a

$$/17.76./ \quad \sum_k r_{ki}^{g_h} z_r v_{ki}^{g_h} z_r \leq b_{hi} g_h$$

formulában fogalmazható meg, amit átrendezve, kapjuk a

$$/17.77./ \quad \sum_k r_{ki}^{g_h} z_r v_{ki}^{g_h} z_r - b_{hi} g_h \leq 0$$

formulát. Ezek szerint az  $i$ -edik időszakban a  $h$ -adik erőgép kapacitása nem lehet kisebb, mint a szükséglet. Mint ismeretes,  $g_h$  a  $h$ -adik erőgépből szükséges mennyiség.

Hasonlóképpen fogalmazzuk meg a munkagépszükségleti feltételeket is. Ha  $d_{ri}$ -vel jelöljük az  $r$ -edik munkagép fajlagos kapacitását /pl. az elvégezhető műszakok számát/ az  $i$ -edik időszakban, akkor a

$$/17.78./ \quad \sum_k r_{ki} z_r^{g_h} v_{ki} z_r^{g_h} \leq d_{ri} z_r,$$

illetve átrendezve a

$$/17.79./ \quad \sum_k r_{ik} z_r^{g_h} v_{ik} z_r^{g_h} - d_{ri} z_r \leq 0$$

feltételeket építhetjük a modellbe, amely szerint az  $i$ -edik időszakban az  $r$ -edik munkagép kapacitása nem lehet kisebb, mint az aziránt felmerülő szükséglet. /Tudjuk, hogy  $z_r$  a  $z_r$ -edik munkagépből szükséges mennyiség./

Felmerülnek nyilvánvalóan olyan kívánalmak, hogy például valamely munkaművelet, valamely erőgép vagy munkagép között meghatározott arányoknak kell fennállni, illetve azokat alulról vagy felülről, vagy intervallumban kell korlátozni, stb. Természetes például, hogy adott időszakban valamely termékől pontosan annyit kell beszállítani a raktárba, az átvevő vagy tárolóhelyre, mint amennyit betakarítunk az adott időszakban. Vagy például két- vagy hárommenetes betakarítási munkák esetén az egyes műveleteket mennyiségileg össze kell hangolni, stb. E feladatok megoldására a

$$/17.80./ \quad v_{ki} z_r^{g_h} = \xi v_{hi} z_z^{g_h}$$

$$/17.81./ \quad z_r = \xi z_h$$

$$/17.82./ \quad g_h = \xi g_k$$

tipusu feltételeket, vagy például a

$$/17.83./ \quad z_{ro} \leq z_r \leq z_r^o,$$

illetve a

$$/17.84./ \quad g_{ro} \leq g_r \leq g_r^o$$

tipusu feltételeket építhetjük a modellbe, ahol  $\xi$  arányszám, amely kifejezi, hogy a  $k$ -adik és  $h$ -adik munkaművelet, erőgép, vagy munkagép között milyen relációnak kell lenni.

Be kell építeni a modellbe a munkaerőmérlegeket, természetesen szintén időszakonként megbontva. Munkaerőszükség-

let felmerülhet bármely termelési, szolgáltatási, piaci tevékenységnél, bármely munkaműveletnél, vagy a gépváltozóknál is. Ha az  $i$ -edik időszakban a  $j$ -edik termelő, szolgáltató, piaci és egyéb tevékenységnél felmerülő fajlagos munkaerőigényt  $p_{ij}$ -vel, az  $i$ -edik időszakban a  $k$ -adik munkaművelet elvégzése során felmerülő munkaerőigényt  $p_{ik}$ -val, a  $h$ -adik erőgép alkalmazásával felmerülő fajlagos munkaerőigényt  $p_{ih}$ -val, és az  $r$ -edik munkagép alkalmazása során felmerülő munkaerőigényt  $p_{ir}$ -rel jelöljük,  $s_{ji}$  a  $j$ -edik munkaerőcsoportba tartozó dolgozók /pl. szakmunkás, segédmunkás, s ezen belül állandó dolgozó, 8, 6 vagy 3 hónapra szerződött dolgozó/ fajlagos teljesítményét /pl. egy dolgozó által az  $i$ -edik időszakban ledolgozható munkanapok számát/ jelöli az  $i$ -edik időszakban, illetve  $y_j$  jelenti a  $j$ -edik munkaerőcsoportban szükséges létszámot, akkor munkaerőmérlegünk:

$$/17.85./ \quad \sum_j P_{ij}x_j + \sum_k P_{ik}v_k + \sum_h P_{ih}g_h + \sum_r P_{ir}z_r \leq \sum_j s_{ji}y_j$$

illetve  $y_j$ -t változóként tekintve és az optimális munkaerőlétszám meghatározását is feladatul tűzve ki, a formulát átrendezzük, azaz

/17.86./

$$\sum_j P_{ij}x_j + \sum_k P_{ik}v_k + \sum_h P_{ih}g_h + \sum_r P_{ir}z_r - \sum_j s_{ji}y_j \leq 0$$

Természetesen  $y_j$  szintén korlátozható, pl.

/17.87./

$$y_{j0} \leq y_j \leq y_j^0$$

ahol, mint tudjuk  $0$ -val az alsó, illetve felső korlátott jelöljük, attól függően, hogy a szimbólum jobb alsó vagy felső sarkához irtuk.

### 17.3.3. A célfüggvény

Végül meg kell fogalmazni a célfüggvényt. Ezt a következőképpen írhatjuk fel:

/17.88./

$$\sum_j T_j - c_j/x_j - \sum_k c_k v_k - \sum_h c_h g_h - \sum_r c_r z_r \longrightarrow \max.$$

ahol:

- $T_j$  - a j-edik termelési, szolgáltatási, piaci vagy egyéb tevékenységnél a fajlagos termelési érték /szolgáltatási vagy piaci árbevétel/
- $c_j$  - a j-edik termelési, szolgáltatási, piaci vagy egyéb tevékenységekre közvetlenül terhelhető költségek
- $c_k, c_h, c_r$  - a k-adik munkaműveletre, h-adik erőgépre és r-edik munkagépre terhelhető költségek.

A  $c_j$  és  $c_k$  általában proporcionális, a  $c_h, c_r$  pedig fix költségek. Ha a munkaerő alkalmazásával kapcsolatban is merül fel fix költség, pl. 1 dolgozó évi költségigénye a napi költségigénytől függetlenül, akkor a képletben azt is kifejezésre kell juttatni.

Ne tévesszük ezt össze a létszámtól független költségekkel, amelyeket általános költségként célszerű kezelni, s egy összegben elszámolni.

Ha a /17.88./ formulában a munkabér is szerepel, nettó jövedelem típusu, ha a munkabér nem szerepel, bruttó jövedelem típusu célfüggvényt nyerünk. Értelemszerűen dolgozhatunk más célfüggvénnyel is.

A termelési és szolgáltatási változóknál költségként számoljuk el a saját vállalaton belüli felhasználás értékét is, így például a vetőmag és takarmány értékét, hogy a halmozódást kiküszöböljük.

Természetesen a modellben a gépváltozókat, esetleg épületváltozókat egészértékű változóként célszerű kezelni, azaz a feladat vegyes egészértékű problémához vezet.

A /17.2./ és /17.3./ alatt megismert modellek alkalmazsak arra is, hogy a termelés szintjét optimalizáljuk. Ekkor a változókat területi és termelési változókra bontjuk fel, s ezek arányát az elérhető maximális termelési szintnél felső korlátként a modell feltételrendszerében előírjuk. A modell ilyen felépítése lehetővé teszi az átlaghozamok optimalizálását is, egyidejűleg a termelési szerkezet, a termelési erőforrások és a termelési technológiák optimalizálásával. Ilyen modellben viszonylag egyszerűbben megoldható a nemlineáris programozás problémája, és számos más, gyakorlatilag felmerülő probléma is.

I R O D A L O M

- 1./ Acsay F. - Csáki Cs. - Varga Gy.: A vállalati géppark és géphasználat matematikai tervezése. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1973.
- 2./ Acsay F. - Balla S. - Tóth J.: A termelési szerkezet, a termelési tényezők és a termelési források egyidejű, összefüggő optimalizálása. Vezetés a mezőgazdaságban, az élelmiszeriparban, az erdőszet-faiparban. Budapest, 1973.2.sz.
- 3./ Bacskay Z.: A gazdasági programozás matematikai alapjai. Egyetemi jegyzet. I. rész. Gödöllő, 1970.
- 4./ Bacskay Z.: A gazdasági programozás matematikai alapjai. Egyetemi jegyzet. II.rész. Gödöllő, 1971.
- 5./ Bacskay Z. - Krekó B.: Bevezetés a lineáris programozásba. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1957.
- 6./ Operációkutatás /Szerk.: Csath Magdolna/ Számítástechnikai Oktató Központ. Budapest, 1972.
- 7./ Baumol, W.: Közgazdaságtan és operációanalízis. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- 8./ Bod P.: Lineáris programozás több egyidejűleg adott célfüggvény szerint. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei. Budapest, VIII.évf. B/sorozat 4.sz. 1963.
- 9./ Csáki Cs.: Mezőgazdasági vállalati tervezés matematikai programozással. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969.
- 10./ Csáki Cs. - Varga Gy.: Foglalkoztatás és optimális struktúra egy termelőszövetkezet példáján. Tudomány és Mezőgazdaság. Budapest, 1971. 6.sz.
- 11./ Farkas V.: A lineáris programozás matematikai alapjai. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1968.
- 12./ Felleg L. - Ligeti Cs.: Gazdaságmatematikai módszerek. Egyetemi jegyzet. Gödöllő, 1971.
- 13./ Hosszu M.: Matematikai programozás. Tankönyvkiadó, Bp. 1969.

- 14./ Kaufmann, A.: Az optimális programozás. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.
- 15./ Krajcsovits M. - Lampe T. - Stahl I.: Operációkutatás. Felsőfoku Technikumi jegyzet. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1965.
- 16./ Krekó B.: Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1964.
- 17./ Krekó B.: Matrixszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1964.
- 18./ Krekó B.: Optimumszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- 19./ Lange, O.: Optimális döntések. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1966.
- 20./ Tóth J.: A lineáris programozás alkalmazása különböző talajféleségekkel rendelkező üzemben, a takarmánynövények optimális vetésszerkezetének meghatározására. Debreceni Mezőgazdasági Akadémia évkönyve. Debrecen, 1962.
- 21./ Tóth J.: A takarmánygazdálkodás matematikai tervezése Akadémiai Kiadó. Budapest, 1969.
- 22./ Tóth J.: A termelési tényezők felhasználásának optimalizálása a mezőgazdaságban. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1973.
- 23./ Tóth J. - Varga K.: Az egészértékű programozás egy alkalmazási lehetősége a mezőgazdasági vállalatok tervezésében. SZIGMA. Budapest, 1974. 1-2. sz.
- 24./ Varga J.: Gyakorlati programozás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1969.

TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
Előszó.....	3
Bevezetés.....	5
①. <u>Fejezet:</u> A gazdasági döntések és modellek. A gazdaságmatematikai módszerek és számítástechnika szerepe a döntések megalapozásában.....	8
1.1. A gazdasági döntések folyamata.....	8
1.2. A modellek.....	10
1.3. A gazdaságmatematikai módszerek és a számítástechnika szerepe a gazdasági döntések megalapozásában.....	12
②. <u>Fejezet:</u> A matematikai programozási modell általános megfogalmazása.....	14
2.1. Az általános matematikai programozási modell.....	14
2.2. A lineáris programozási modell általános megfogalmazása.....	18
2.3. Egyszerű példa a lineáris programozás szemléltetésére.....	20
2.4. A döntési folyamat összehasonlítása.....	31
3. <u>Fejezet:</u> Kétváltozós lineáris programozási modellek. Grafikus lineáris programozás.....	35
4. <u>Fejezet:</u> A grafikus lineáris programozás gyakorlati alkalmazása.....	53
⑤. <u>Fejezet:</u> A halmazelmélet alapjai.....	64
5.1. A halmaz fogalma.....	64
5.2. Műveletek halmazokkal.....	68
5.2.1. A halmazok egyesítése /uniója/.....	68
5.2.2. A halmazok közös része /metszete/.....	70
5.2.3. A halmazok különbsége.....	73
5.3. Alaphalmaz - Részhalmaz.....	74
⑥. <u>Fejezet:</u> Lineáris algebra.....	76
6.1. Matrixok.....	76
6.1.1. A matrix fogalma.....	76
6.1.2. Speciálmatrixok.....	78
6.2. Nagyságrendi relációk.....	84
6.3. Műveletek matrixokkal.....	85
6.3.1. Összeadás.....	85
6.3.2. Kivonás.....	87
6.3.3. Matrix szorzása skalárral.....	88
6.3.4. Vektor szorzása vektorral.....	89
6.3.5. Matrix szorzása vektorral.....	94

6.3.6.	Matrix szorzása matrixszal.....	97
6.3.7.	Matrixok hatványozása.....	104
6.3.8.	Műveletek blokkokra bontott matrixokkal....	104
6.3.9.	Vektorok és matrixok lineáris kombináció- ja.....	107
6.4.	További speciális matrixok.....	109
6.5.	Geometriai értelmezés és ábrázolhatóság.....	113
7.	<u>Fejezet: A lineáris tér</u> .....	119
7.1.	Az $n$ elemű vektorok tere.....	119
7.2.	Az altér fogalma.....	121
7.3.	Vektorok lineáris függetlensége, függősége.....	122
7.4.	A vektorrendszer rangja.....	127
7.5.	Dimenzió és bázis.....	128
7.6.	A matrix rangja.....	131
7.7.	A matrixok faktorizációja.....	132
7.8.	Az elemi bázistranszformáció.....	133
7.9.	A matrix rangjának meghatározása.....	141
7.10.	Bázisfaktorizáció.....	143
7.11.	Kompatibilitás.....	148
8.	<u>Fejezet: Lineáris egyenletrendszerek megoldása és matrixok inverziója</u> .....	150
8.1.	Lineáris egyenletrendszerek.....	150
8.2.	A lineáris egyenletrendszer megoldása.....	151
8.3.	A matrixok inverziója.....	153
8.4.	Lineáris inhomogén reguláris egyenletrendszer meg- oldása.....	162
8.5.	Lineáris inhomogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása.....	166
8.6.	Lineáris homogén reguláris egyenletrendszerek megoldása.....	172
8.7.	Lineáris homogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása.....	174
9.	<u>Fejezet: Lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása.</u>	177
10.	<u>Fejezet: Lineáris programozás</u> .....	187
10.1.	A normálfeladat és megoldása degeneráció nélkül..	187
10.2.	Degeneráció.....	203
10.3.	A programvektor és a kapacitások egyidejű opti- malizálása.....	204
10.4.	Programozás több célfüggvénnyel.....	207
10.5.	Alternatív optimumok.....	212
10.6.	Módosított normálfeladat.....	214
10.7.	A maximálás általános esete.....	221
10.8.	Mínimumfeladatok.....	225
10.9.	Dualitás.....	229
10.10.	Duál szimplex módszer.....	236
10.11.	Módosított szimplex módszer.....	240
10.12.	Speciális problémák.....	250

	Oldal
10.12.1. Tervmódosítás a kapacitásvektor $/b/$ változása miatt.....	252
10.12.2. Tervmódosítás a célfüggvény változása miatt.....	259
10.12.3. Tervmódosítás új termék /vagy technológia/ beiktatása miatt.....	262
10.12.4. Tervmódosítás új feltételek csatolásával.....	264
<b>11. Fejezet:</b> Szimplex módszerrel megoldható, paraméteres, egészértékű és nemlineáris modellek.....	270
11.1. Paraméteres lineáris programozási modellek....	271
11.2. Egészértékű /integer/ programozás.....	276
11.3. Nemlineáris programozás.....	284
11.3.1. Konvex és konkáv programozás.....	287
11.3.2. Konvex és konkáv programozási feladatok megoldása szakaszonként lineárizált modellel.....	294
11.3.3. Hiperbolikus programozás.....	298
11.3.4. A Langrange-féle multiplikátor-módszer	304
<b>12. Fejezet:</b> A matematikai programozás alkalmazásának lehetőségei és területei a mezőgazdaságban.....	309
<b>13. Fejezet:</b> A takarmánygazdálkodás matematikai tervezése.....	313
13.1. Takarmányadagok tervezése.....	314
13.2. Komplex takarmányfelhasználási terv készítése..	324
13.3. A takarmánytermelés matematikai tervezése "globális módszerrel".....	328
13.4. Az alaptakarmány és pótabrak optimális arányának meghatározása.....	330
13.5. A takarmánytermelés szakosításának tervezése..	335
<b>14. Fejezet:</b> Az árunövénytermelés matematikai programozása.....	341
14.1. Az árunövénytermelés szerkezetének optimalizálása.....	341
14.2. A szántóföldi növények területi elhelyezésének programozása.....	342
14.3. Gyümölcs- és szőlőtermelés szerkezetének optimalizálása.....	343
<b>15. Fejezet:</b> A matematikai programozás alkalmazása az állattenyésztésben.....	345
15.1. Az állattenyésztés szerkezetének optimalizálása.....	345
15.2. Az állattenyésztés és a takarmánytermelés szerkezetének egyidejű optimalizálása.....	346

15.3. A tejhozam és a tartási technológia kapcsolatainak vizsgálata.....	348
16. <u>Fejezet:</u> Egyéb részleges feladatok programozása...	349
16.1. A munkaszervezési feladatok programozással...	349
16.2. A géppark optimalizálása.....	349
17. <u>Fejezet:</u> Komplex vállalati tervezés.....	351
17.1. A termelési szerkezet optimalizálása.....	351
17.1.1. A modell változói.....	351
17.1.2. A modell mérlegfeltételei.....	359
17.1.3. A célfüggvény.....	371
17.2. A termelési szerkezet és a termelési források egyidejű optimalizálása.....	371
17.2.1. A modellszerkesztés módszere.....	371
17.2.2. Egy egyszerű példa összehasonlító vizsgálata.....	384
17.3. A termelési szerkezet, a termelési technológiák és a termelési erőforrások egyidejű optimalizálása.....	387
17.3.1. A matematikai modell változói.....	387
17.3.2. A matematikai modell feltételrendszere.....	390
17.3.3. A célfüggvény.....	396
Irodalom.....	398

Készült az Agrártudományi Egyetem Sokszorosító Üzemében

F.szerk: dr.Tóth József  
Műszaki vezető: Bucherna Nándor

Megrend.sz: DM-646/74      Péld.sz: 610      Soksz.t.sz:RF-358/  
75

