

AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM
MEZŐGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR
VÁLLALATGAZDASÁGI TANSZÉK

OPERÁCIÓKUTATÁSI ISMERETEK ÉS MEZŐGAZDASÁGI
ALKALMAZÁSUK

DR. TÓTH JÓZSEF

DEBRECEN
1988

AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM
MEZŐGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR
VÁLLALATGAZDASÁGI TANSZÉK

OPERÁCIÓKUTATÁSI ISMERETEK ÉS MEZŐGAZDASÁGI
ALKALMAZÁSUK

DR. TÓTH JÓZSEF

DEBRECEN

1988

Lektorok:

Dr. Bartos Attila

tanszékvezető

a mezőgazdasági tudomány kandidátusa

Dr. Ertsey Imre

kandidátus

Készült:

AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM DEBRECEN

• Sokszorosító üzemében

363 oldal. 625 példány.

127/88.

Fk.: Dr.Szász Gábor

Fv.: Nagy Dezső

BEVEZETÉS

Hazánk agrárfelsőoktatási intézményei közül először a Debreceni Agrártudományi Egyetemen indult meg 1958-ban az operációkutatás mezőgazdasági alkalmazása lehetőségeinek és módszertani kérdéseinek tudományos kutatása. Számítógép igénybevételéről akkor még szó sem lehetett, ennek ellenére újabb és újabb területeken sikerült az alkalmazás módszertani kérdéseinek kidolgozása, kézi számításokkal tesztelve a gyakorlati alkalmazások lehetőségeit.

A tudományos kutatásban történt előrehaladás lehetővé tette, hogy az ország agrárfelsőoktatási intézményei közül szintén először Debrecenben induljon meg már 1961-ben fakultatív tárgyként az operációkutatás, valamint az operációkutatás mezőgazdasági alkalmazása módszertani kérdéseinek oktatása.

A tananyag betekintést engedett a halmazelméleti alapok, a mátrixalgebra, a lineáris tér, a lineáris programozás tárgyköreibe, valamint részletesebb ismertetést nyújtott a Debreceni Agrártudományi Egyetemen kidolgozott mezőgazdasági alkalmazásokkal kapcsolatos módszertani kérdésekről, s némi ismeretet adott a nemlineáris programozásról és más operációkutatási módszerekről.

A fejlődés-a feltételek hiánya és számos objektív és szubjektív akadályozó tényező ellenére is-történelmi volt mind a tudományos kutatásban, mind az oktatásban, s ma már senki nem kérdőjelezi meg az operációkutatás mezőgazdasági alkalmazása tudományos kutatásának létjogosultságát és szükségességét, sem pedig az oktatás szükségességét. Sőt! Verseny kezd kialakulni e területen, ami természetesen együtt jár vadhajtasokkal is, de elvitathatatlan, hogy ez jobb helyzetet teremt, mint az amikor a legnagyobb problémát a szubjektív ellenállás okozta, másrészt mint mindig, úgy most is igaz, hogy egy új tudományág győzelemre jutása sokak szemléletének gyökeres megváltozását kívánja és eredményezi.

Bizonyos, hogy az operációkutatás elismerésében és térhódításában nagy szerepet játszott, hogy születése pillanatától kezdve nagyfokú törekvés mutatkozott a gyakorlati alkalmazásokra.

Kezdetben ez a törekvés nagy ellenállást váltott ki, de helyenként ennek ellenére sikerült egy-egy eredményes kísérleti alkalmazás és már 1968-ban átadásra került egy lineáris programozással megalapozott komplex vállalatfejlesztési terv termelőszövetkezet számára. Ettől kezdve - hullámvölgyekkel tarkítva ugyan - mind nagyobb számban készültek komplex vállalati fejlesztési és éves tervek, miközben állandóan fejlődött az alkalmazás módszere, ami végül is elvezetett egy automatizált tervezési rendszer kidolgozásához.

A mezőgazdasági vállalatoknál is mindinkább megteremtődtek a számítástechnika gépi feltételei biztosításának lehetőségei, s kezdetben szerényebb, majd fejlettebb technikai eszközök kezdtek elterjedni a mezőgazdaságban. E változások különböző feladatok megoldására alkalmas számítógépes rendszerek kidolgozásához vezettek. Különösen előtérbe került a számviteli és nyilvántartási rendszerek kidolgozása és elterjedése. Ennek nem csak az a magyarázata, hogy a számviteli és nyilvántartási rendszerek kidolgozása egyszerűbb lehet, mivel ezek nem igényelnek semmiféle bonyolultabb matematikai apparátust, hanem az is, hogy a műltra vonatkozó tények rögzítése egyszerűbb, kézenfekvőbb, másrészt, hogy a könyvelés és a nyilvántartás kötelező a mezőgazdasági vállalatok számára, meghatározott keretekben, amíg a tervezés és döntésmegalapozás meghatározott keretei és ennek betartása eseténként formális, gyakran nem segíti, sőt gátolja a tervezés optimalizálással történő megalapozását. Bizonyosan szerepet játszik itt az is, hogy az agrármérnökök még ma is jobban szeretik a kényelmesebb "tapasztalatokra, logikai megfontolásokra" alapozott vezetést, mint a sokkal nagyobb elmélyültséget, szabotosságot és matematikai/operációkutatási ismereteket igénylőt. Ez utóbbi hatékonyabb, de nehezebb, nagyobb felkészültséget kíván, s megfelelő ösztönzés hiányában aligha várható elterjedése.

Az operációkutatás mezőgazdasági alkalmazása gyakran igen hatékonyan bizonyult, s ma már olyan számítógépes eljárásokat is rendelkezésre állnak, amelyek a felhasználóktól nem igényelnek feltétlenül magasabb matematikai ismereteket, hiszen az adott probléma megoldásához szükséges matematikai modelt is a számítógép állítja elő. A felhasználó munkája ez esetben csak az alapadatok helyes megadására és az eredmények szakmai elbírálására, tehát kizárólag az érdemi, szakmai munkára irányul.

Ma már aligha vitatható, hogy a jövő a számítástechnika alkalmazásáé. Ezt az utat a mezőgazdasági vállalatok sem kerülhetik meg, és az agrármérnökökkel szemben mindinkább követelmény, hogy olyan operációkutatási és számítástechnikai alkalmazási ismeretekkel rendelkezzenek, amelyek a számítástechnika hatékony alkalmazását lehetővé teszi. Más kérdés, hogy még ma a gyors fejlődés időszakában és találgunk agrárszakembereket, akik csak a 10-20 évvel ezelőtti helyzetet ismerik, s ezen a szinten is gondolkodnak.

A számítástechnika hatékony alkalmazása elképzelhetetlen anélkül, hogy a döntésmegalapozásban, tervezésben, szervezésben, az operatív irányításban és gazdasági elemzésben, azaz a vállalati vezetés minden területén alkalmazzuk a számítástechnikát. E területeken pedig a fő szerep az operációkutatásé.

Célunk a Debreceni Agrártudományi Egyetem hallgatóinak a kezébe adni egy olyan tananyagot, amely felöleli a legfontosabb operációkutatási ismereteket, elősegíti azok elsajátítását és megteremtí az alapot mezőgazdasági alkalmazásokhoz, melyet a későbbi tananyagokban ismernek meg. Másrészt törekedtünk arra, hogy munkánk egyidejűleg kézikönyv jellegű is legyen, s támpontot nyújtson a végzett hallgatóknak, valamint a gyakorlatban dolgozó és az operációkutatás iránt érdeklődő szakembereknek az operációkutatási ismeretek elsajátítására, illetve felelevenítésére.

Bár a mezőgazdasági alkalmazások módszertani kérdéseivel részletesen más tananyagokban foglalkozunk és ehelyütt alapvető célunk az operációkutatási módszerek megismerése, ahol lehet a problémát mezőgazdasági alkalmazási szemlélettel tárgyaljuk, azon cél által vezérelve, hogy az elméleti és a módszertani ismereteket az agrárszakemberek gondolatvilágában szakmai érdeklődési terébe helyezve megkönnyítsük azok elsajátítását. Ezt szolgálják a jegyzetben található mezőgazdasági alkalmazási ismeretek és példák is.

Reméljük, hogy törekvéseink sikerrel járnak és elősegítik azt, hogy a jövőben az operációkutatás alkalmazása szerves része legyen a mezőgazdasági vállalati vezetésnek.

1. FEJEZET Az operációkutatásról

1.1. Az operációkutatás fogalma

Operáció műveletet, tevékenységet jelent /pl. hadművelet, sebészeti művelet, pénzügyi művelet stb/.

Operációkutatás a fentiek szó szerinti értelmezésében műveletkutatást, tevékenységkutatást jelent.

Az operációkutatás ilyen egyszerű megfogalmazása igazságtartalma mellett nem elegendi ki általában az operációkutatással foglalkozókat, sem pedig az operációkutatás tartalmi tudományos igényeit. Nem csoda tehát, ha a különböző szerzők különbözőképpen határozzák meg az operációkutatás fogalmát. A többféle megfogalmazásból kiszűrhetők azok az általános jegyek, amelyek az operációkutatás tartalmához hozzátartoznak. Ezek lényegében a következőkben foglaltak össze:

- Az operációkutatás operáció alatt általában célirányos operációt /tevékenységet, műveletet/ értelmmez.
- Az operációkutatás olyan tudományos - gyakorlati tevékenységnek tekinthető, amelynek célja a döntések előkészítése, megalapozása.
- Az operációkutatás vizsgálatait tudományos szemlélettel és tudományos módszerekkel végzi. Nagy szerephez jutnak vizsgálataiban a modellezési és a matematikai eljárások, optimaumszámítási módszerek.

Az Angol Operációkutatási Társaság az operációkutatás fogalmának meghatározására az alábbi definíciót fogadta el: "Az operációkutatás a tudomány módszereinek alkalmazása a nagy emberi, gépi, anyagi és pénzügyi módszerek irányításának, vezetésének komplex problémáira az iparban, a kereskedelemben, a közigazgatásban és a honvédelemben. Jellemzőes közelítési módja a rendszer tudományos modelljének megalkotása olyan tényezők mérése útján, mint a véletlen és a kockázat, amelyekkel az alternatív döntések, stratégiák és irányítások eredményei előre számvehetőek és összehasonlíthatók. Célja, hogy segítsen a vezetésnek politikáját és cselekvéseit tudományosan megalapozni!"

Mint minden definíció, úgy ez is vitatható. Egyrészt az operációkutatás területét nem lehet - és egyre kevésbé lehet - az ipar, kereskedelem, a közigazgatás és honvédelem területére szűkíteni.

Éppúgy alkalmazható a mezőgazdaság, a közlekedés és hírközlés, a politológia, a szociológia, pszichológia, biológia stb. területén, illetve az élet minden területén. Az sem biztos, hogy a véletlen tényezőket és a kockázatot ki kell emelni a többi tényezők közül. Az viszont alighanem kiemelendő, hogy az operációkutatás egzakt vizsgálatokat, matematikai módszerek alkalmazását, de mindenképpen egzakt gondolkodásmódot jelent. Legtöbbször bonyolult rendszerekkel foglalkozik, amelyek matematikai vizsgálata számítástechnikai eszközök alkalmazását teszi szükségessé.

Amennyiben az operációkutatás célja, hogy segítsen a vezetésnek politikáját és cselekvéseit tudományosan megalapozni, akkor az operációkutatást a döntésmegalapozás tudományának tekinthetjük, amely az optimális döntéseket előkészítést szolgálja, s ennek során tudományos, matematikai módszereket használ fel. Az operációkutatás tehát nem egyenlő a döntéssel, vagy a vezetéssel, csupán a helyes döntés, a célszerű vezetés megalapozásának eszköze. A döntés megalapozása a döntéselőkészítést, a tervezést /állalatgazdasági, termelési, technológiai, termelésszervezési, operatív irányítási tervek elkészítését/, a döntési alternatívák kidolgozását mindenképpen magába foglalja.

1.2. Az operációkutatás kialakulása, történeti áttekintés

Az operációkutatás kialakulását a II. világháborútól számítják, amikor is stratégiai, hadműveleti tevékenységek megtervezésében alkalmazták állítólag eredményesen. Felmerültek például olyan feladatok, hogy milyen nagyságú hajókonvojokat célszerű összeállítani és azoknak melyik lehetséges tengeri útvonalon célszerű katonákat, vagy hadianyagokat a tengeren átszállítani. Számítani kell arra, hogy az ellenség meg akarja akadályozni a szállítmány célbaérkezését, felderítést, majd támadásokat végez a szállítmányok ellen. A döntésnél figyelemmel kellett lenni arra, hogy a nagyobb hajókonvoj nagyobb véderőt képvisel az ellenséges támadásokkal szemben, de lassabban halad, így az ellenségnek több idő áll rendelkezésre a felderítésre és a támadásokhoz. A kisebb hajókonvoj gyorsabban mozog, rövidebb idő alatt teszi meg a tengeri útvonalat, de kisebb véderejénél fogva sebezhetőbb. Másrészt hasonló probléma vetődik fel az útvonal megválasztása tekintetében, mivel a rövidebb útvonal megtételéhez kevesebb időre van ugyan szükség, de az ellenség által jobban ellenőrzött és fennáll a veszélye, hogy a hajókonvojokat hamarabb felderítik, hosszabb úton viszont megnehezül a felderítés és a támadás, de erre az ellenségnek több idő áll rendelkezésre.

A háború befejezése után a haditevékenység céljára kifejlesztett eljárásokat a gazdaság helyreállítására, különösen a közgazdasági tevékenység megalapozottabb tételére kezdtek egyre inkább alkalmazni, vagyis az operációkutatás

- más területek mellett - közgazdasági alkalmazások terü-
letére terjedt át. Természetesen, mint általában minden-
nek, így a matematikai eljárások közgazdasági alkalmazá-
sának is messze a múltba nyúló gyökerei találhatók.

A matematikának a közgazdasági tevékenységben való al-
kalmazása iránti igény lényegében a XVIII. században je-
lentkezik. Már Francois Quesnay közgazdasági táblázatai-
ban megtaláljuk a lineáris programozás modelljének legeggy-
szerűbb példáit. Quesnay közgazdasági táblázatait Marx is
zseniális ötletként értékelte.

A XIX. század közgazdászai közül kiemelkedik N.G.
Cserniszovszkij, kinek közgazdasági tanulmányait Marx és
Lenin is nagyra értékelték. "Már sok példából láthattuk,
milyen módszereket alkalmaz a politikai gazdaságtan a ma-
ga feladatainak megoldására. Ezek a módszerek matematikai-
ak. S ez nem is lehet másként, hiszen ennek a tudománynak
a tárgyai mennyiségek, amelyek megszámlálhatók és mérhetők,
s csupán számolás és mérés útján foghatók fel."
N.G. Cserniszovszkij: Izbrannye ekonomiceszkije proizve-
gyenija. III. 51. old. Gaszpolizdat 1948./

Ismereteseek Marx újratermelési sémái és "Matematikai
füzetei", amelyek arról tanúskodnak, hogy Marx is igen
nagy figyelmet szentelt a közgazdasági jelenségek matema-
tikai elemzésének. Lenin továbbfejlesztette Marx újratér-
melési sémáit, és igen nagy jelentőséget tulajdonított a
jelenségek matematikai leírásának és elemzésének.

Z. Walras 1874-ben már egy bonyolult matematikai modellt
dolgozott ki. J.B.J. Fourier nagy matematikus 1823-ban
először vizsgálta meg a lineáris egyenletek rendszerében a
legkisebb maximális eltérés meghatározásának problémáit.
A feladatot a sokrétű halmaz legalsó pontjának megállapítá-
sára vezette vissza. Módszere az egyik csúcsponttól a másik-
ra való sorozatos eltolásból állt, vagyis tulajdonképpen
a jelenleg széles körben alkalmazott szimplex módszer alap-
ján állt. Az 6 példája tekinthető a legrégebb lineáris
programozási példának.

A valószínűségszámítás és sok más területen kifejtett
munkássága mellett jelentős mértékben járult hozzá a lineá-
ris egyenletek és egyenlőtlenségek mélyebb megismeréséhez
is K.F. Gauss /1826/. Algoritmust dolgozott ki normál
egyenletek gyakorlati megoldására. Cramer svájci matemati-
kus 1150-ben a lineáris egyenletrendszerek megoldására be-
vezette a determinánsokat. P. Gordan 1873-ban tételt dolgo-
zott ki, mely szerint a nem negatív homogén egyenletrend-
szernek van megoldása, amelyben legalább egy változó pozí-
tív, ha a másodlagos rendszerben az éles egyenlőtlenségek-
kel nincs megoldás. H. Minkowski transzpozícióval alkotott
tétele, J. Farkas 1902-ben publikált tétele alapvető jelen-
tőségű a matematikai programozási feladatoknál. P. Stimke
1915-ben kiegészítette Gordan tételét.

A magyar származású Neumann János 1928-ban megjelent "Minimax" tételében továbbfejlesztette Emil Borel munkáját, s ezzel lerakta a lineáris egyenlőtlenségek elméletének matematikai alapját. Elméletének jelentősége akkor bontakozott ki igazán, amikor Morgensternnel együtt 1944-ben kiadta alapvető művét. /Neumann J. - Morgenstern O.: Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton, 1944./ 1932-ben jelent meg. "Az általános gazdasági egyensúly modellje" c. munkája, melyben a lineáris programozás dinamikus modelljét fogalmazta meg. A továbbiakban is vezető szerepet játszott a tudomány sok területén. Különösen nagy volt a hatása az atomenergia és az elektronikus számítástechnika fejlődésére. Az USA-ban 1945-ben kezdtek el az első elektronikus számítógépek sorozatgyártását, melyet Busch készített Neumann János részvételével.

A XX. században a közgazdaságtan fejlődése, és a rendelkezésre álló információk mennyiségi növekedése és minőségének javulása mindinkább lehetővé teszi, hogy a közgazdasági kutatásokban az elméleti modellekről az empirikus modellekre térjenek át. Ezt nagyban elősegítette az is, hogy a reprezentatív statisztikai megfigyelés és becslés módszerének kidolgozása lehetővé tette mind több közgazdasági jelenség megfigyelését, illetve becslését. Kezdték alkalmazni a jelenségek vizsgálatában a regresszió analízist, amely a jelenségek közötti kapcsolatok mélyebb feltárását teszi lehetővé, a trend analízist, intrapolációt és extrapolációt, a jelenségek időbeli változásának vizsgálatára.

Jelentős lépés és ösztönző volt a tudományok fejlődésében, hogy a Szovjetunióban már a szocializmus építésének első éveiben különböző mérlegszámítási módszereket dolgoztak ki, majd pedig az 1923/1924. évre megszerkesztették a Szovjetunió népgazdasági mérlegét.

W. Leontieff, ismerve a Szovjetunióban végzett mérlegkészítéssel kapcsolatos munkákat 1936-ban megalkotta az amerikai gazdaságra vonatkozó mérleget, a ráfordítás és terméki kibocsátás amerikai mérlegét. Leontieff érdeme, hogy ő kombinálta először a termelési mérlegnek és a társadalmi termék, illetve a nemzeti jövedelem elosztásának táblázatait és a mérlegnek matematikai értelmezést adott.

L.V. Kantorovics szovjet matematikus hosszú évek során foglalkozott a matematika tervezési feladatokban való felhasználásával. 1939-ben megjelentette részletes monográfiáját, amelyben először tárta fel, hogy a legfontosabb termelési feladatok nagyrésze tisztán matematikai alakban kifejezhető. /L.V. Kantorovics: Matematikesszakiye metodü organizacii i planirovanija proizvodstva. Izd. LGU. Moszkva, 1939/.

Véleménye szerint ez lehetőséget ad arra, hogy a feladatokat mennyiségi oldalról közelítsük meg és számoló eljárásokkal oldhassuk meg. Számos olyan, a termelés szervezése és tervezése körébe tartozó kérdést tett vizsgálat tárgyává, melyeknek különböző megoldásai lehetnek, s ezek közül kell az optimálisat kiválasztani. A probléma megoldása olyan matematikai szélsőérték feladatokhoz vezet, melyekben a változók lineáris függvényeknek és korlátoknak vannak alávetve. A feladatok megoldására Kantorovics a megoldó szorzók módszerét dolgozta ki. Munkássága sok tekintetben megszabta a lineáris programozási módszer tartalmát és további fejlődését. Későbbi munkássága során is igen jelentős mértékben járult hozzá a matematikai programozás fejlődéséhez. Mint Dantzig írja "Ha Kantorovics első munkáit megjelenésük idején megfelelő módon értékelték volna, úgy lehetséges, hogy napjainkban a lineáris programozás már lényegesen messzebb tartana, mint jelenleg." /G.B. Dantzig: Linear Programing and Extensions, Princeton University Press, Princeton. New-Jersey, 1963./

A második világháború, majd azt követően a gazdaság helyreállításának feladatai nagy lökést adtak a tervezési módszerek fejlesztése irányában. Az USA-ban különösen az 1947-49-es években indult meg a lineáris programozási módszerek kidolgozása. 1947-ben G.B. Dantzig kidolgozta, majd 1951-ben publikálja a szimplex módszert, mely rohamosan terjedt el az egész világon és nagymértékben felfedezte a matematikai programozás elméleti kidolgozását és gyakorlati felhasználását. Az operációkutatás fejlődését 1947 után nehéz lenne nyomonkövetni /ma már bibliográfiája is több kötetet tesz ki/, ezért csupán a fejlődés néhány fontosabb vonatkozásainak felvázolására szorítkozunk, a teljesség igénye nélkül.

L.V. Kantorovics további munkássága, valamint M.K. Gavurin, V.A. Zaigaller, G.S. Rubinszejn, Sz.N. Csernyikov és mások munkássága a Szovjetunióban a matematika terén, valamint a konkrét alkalmazásokra vonatkozó példákkal nagymértékben hozzájárultak a matematikai programozási módszerek kifejlesztéséhez és gyakorlati alkalmazásának előbbreteléhez. A matematikai programozás elméleti továbbfejlesztésével egyidőben foglalkoztak a számítási eljárások kidolgozásával is. Így például a terv fokozatos javításának módszere és a szorzók első és felső értékhatárának módszere /L.V. Kantorovics - V.K. Zaigaller: Raszcsot nacionalnovo rászkrája promüslennü materialov, Lenizdat, 1951./, a szorzók javításának módszere /L.V. Kantorovics: Matematicheszkaja metodü organizacii i planirovanija proizvodstva. izd. LGU. 1939/, a potenciál módszer számítási feladatok megoldására, /L.V. Kantorovics - M.K. Gavurin: Primenyenije matematicheskikh metodov v voproszah analiza gruzapotokov, Izd. AN. SzSzsZR. 1949./ jelentős munkák.

A.J. Goldmann és A.W. Tucher, valamint D. Gale - H.W. Kuhn - A.W. Tucker a duális feladatokkal foglalkoztak. G.B. Dantzig, D. Gale - H.W. Kuhn - A.W. Tucker és a magyar származású Vajda Sándor kimutatták a lineáris programozás és a mátrix-játékelmélet ekvivalenciáját. Sok kutató foglalkozott a szimplex módszer továbbfejlesztésével, így H.M. Wagner, S. Vajda, G.B. Dantzig, A. Orden, Ph. Wolfe, Markovitz stb. A degeneráció problémáival foglalkoztak többek között A. Charnes, W.W. Cooper, A. Henderson, E.U.L. Beale.

C.E. Lemke dolgozta ki a duális szimplex módszert. Ehhez hasonló Beale vezető változók módszere, T.S. Motzkin relaxációs módszere, A. Ordens - L. Goldstein, C.B. Tompkins projekciós módszere, valamint T.S. Motzkin - H. Raiffa - G.L. Thomson - R.M. Thrall kétféle meghatározós módszere.

G.B. Dantzig - L.R. Ford - D.R. Fulkerson 1956-ban egy olyan módszert dolgoznak ki, mely a lineáris programozás primális és duális feladatát egyidejűleg oldja meg. Módszerük lényegében azonos Kantorovics együttthatók javításának módszerével.

S.I. Gass, T.L. Saaty, J.L. Kolley és mások a parametrikus programozással foglalkoztak. Hamarosan megindult a fejlődés a nemlináris programozással kapcsolatban is. A. Charnes - C.E. Lemke és E.U. Beale konvex célfüggvény alkalmazását vizsgálták. Dantzig, M. Frank - P. Wolfe és B.W. Barankin, R. Dorfman, H. Markovitz, A.W. Tucker és H.W. Kuhn a nemlineáris /főként a kvadrátikus/ programozással foglalkoztak.

A hiperbolikus programozással először Martos Béla foglalkozott, akitől az elnevezés is származik.

A bizonytalan körülmények közötti, vagy sztochasztikus programozással foglalkoztak J.M. Danskin, G.B. Dantzig és R. Rader. A sztochasztikus programozásnak különösen nagy jelentősége lehet a mezőgazdasági alkalmazásokban.

Az egészértékű programozás módszerével foglalkozott R.E. Gomory, S. Beer, G.B. Dantzig. A dinamikus programozás R. Bellmann nevéhez fűződik. Sok tekintetben új megvilágításba helyezi a dinamikus modellek kérdésését később L.S. Pentiagin.

Bár az operációkutatás területein mind a tudományos kutatásban, mind a gyakorlati alkalmazásban a leglátványosabb a matematikai programozás területein volt a fejlődés, az itt elért sikerek, valamint újabb és újabb tudományterületek kialakulása és gyors fejlődése /rendszerelmélet, kibernetika, információelmélet, elektronikus számítógépek, számítógépek programozására kifejlesztett

különböző programnyelvek stb./ más operációkutatási eljárások létrejöttét és fejlődését eredményezte.

Ma már azt sem lehet pontosan körvonalazni, hogy hol a határ az operációkutatás, ökonometria, statisztika tudományágak között.

A szállítási feladatok optimalizálása lineáris programozással is megoldható, de igen jelentős méretű modelleket eredményez. A feladat megoldására kifejlődtek más módszerek is, amelyek közül leginkább a disztribúciós módszer, a Karda-Vogel féle módszer ismert.

Bizonyos területeken - összefüggésvizsgálatok, prognosztizálás stb. - előtérbe kerültek a termelési függvények és a faktoranalízis.

Különösen a tevékenység szervezés területén a gráfelméletre alapozott hálótervezési módszerek /CPM, PERT/ bizonyultak hasznosnak. Más esetekben a sorbanállási problémák módszertani megoldásai kecsegtetnek tudományos és gyakorlati eredményekkel. Különösen olyan esetekben, amikor a megoldandó probléma nem fogalmazható meg egyértelműen analitikus modellekkel, valamint amikor a bizonytalansági tényezők nagy szerepet játszanak, illetve amikor nem az optimum meghatározása a cél, hanem egyáltalán valamely rendszer viselkedésének vizsgálata stb. nagy szerepük van a szimulációs módszereknek. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy a szimulációs módszerek alkalmazásával elvetjük az optimalizálásra vonatkozó igényeinket. Sőt mint Csébfalvi Károly írja "a digitális szimuláció nem a szóba jöhető optimalizálási eljárások egyike, hanem bármilyen ismert egzakt, véges, iteratív, Monte Carlo bázisú vagy heurisztikus optimalizálási eljárásnak mintegy "fékpadul" szolgál. Egyszerű példával élve: ha egy szállítási problémát a lineáris programozás módszerével kívánunk megoldani, érdemes az egész szállítási rendszert egy olyan egységgel együtt szimulálni, amelyben a szóbanforgó szállítási probléma az említett lineáris programozási módszerrel esetről esetre megoldódik. Ilyen értelemben ágyazza be a szimulációs modell az egzakt programozási módszert, úgy, mint ahogy a motorok próbajáratásához a valóságos későbbi környezetet utánozza egy fékpad. Általában az operációkutatás számos más módszerének biztosíthatunk a szimulációs modellekkel reális környezetet, így nem túl szerencsés, ha a szimulációt csupán egyéb módszerek alkalmazási lehetőségének híján használható módszernek tekintjük."

/Robert C. Meier - William T. Nevell - Harold L. Pazer: Szimuláció a vállalati gazdálkodásban és a közgazdaságtanban, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1973. könyvhöz írt "Bevezető a magyar kiadáshoz" tanulmánya /14.old./

Valójában az operációkutatási eljárások nem egymást kizárva, egymás ellenében, hanem egymást kiegészítve, illetve a vizsgált probléma lényegének mindig a legjobban megfelelő módszert vagy módszereket alkalmazva nyújthatnak hatékony segítséget.

Hazánkban jelentős munkát végeztek az operációkutatási módszerek fejlesztése és alkalmazása terén Aczél István, Arató Mátvás, Bacskay Zoltán, Bod Péter, Csath Magdolna, Csáki Csaba, Csepinszky Andor, Egervári János, Jándy Géza, Kádár István, Kondor György, Kornai János, Krekó Béla, Lipták Tamás, Martos Béla, Mészáros Sándor, Módos Gyula, Pillis Pál, Prékopa András, Sebestyén József, Simon György, Szep Jenő, Theiss Ede, Tóth József, Vámos Tibor és mások.

A mezőgazdaságban az operációkutatás alkalmazásának előfutáraként talán a G.J. Stigler-féle díttával kapcsolatos feladat megoldása tekinthető, amelyet New-York-ban a "Matematikai táblázatok" csoportjának munkatársa, Ladermann 1947 végén oldott meg a nem sokkal ezelőtt kidolgozott szimplex-módszer ellenőrzése alkalmazásával. Mezőgazdasági térhódítása valójában az 1950-es években indult meg.

A mezőgazdasági alkalmazásokban jelentős szerepet játszott E.O. Healey az IOWA-i Állami Egyetem professzora, a Magyar Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagja, a Debreceni Agrártudományi Egyetem honoris causa doktora. A Szovjetunióban a szakma jeles képviselője volt a kezdeti időszakban R.G. Kravcsenko. A KGST országok már 1964-ben Prágában megtartották a matematikai módszerek mezőgazdasági alkalmazása témakörben az I. Nemzetközi Tudományos Szimpóziumot, ami tulajdonképpen az operációkutatás mezőgazdasági alkalmazásával foglalkozott.

Magyarországon az 1950-es évek második felében indult meg a mezőgazdasági alkalmazásokkal kapcsolatos tudományos kutatás. Az úttörő Sebestyén József az Agrárgazdasági Kutatóintézet munkatársa volt. Első ismert munkája "A termelési érték és a főbb termelési tényezők kapcsolata a termelőszövetkezetekben". /Cséte L. szerk. A termelőszövetkezetek üzemgazdasági kérdései/ Akadémia Kiadó, Budapest, 1959. Később foglalkozott a termelési szerkezet optimalizálásával a termelés területi elhelyezésének optimalizálásával, majd népgazdasági szintű vizsgálatokkal.

Az első kísérletekhez gyorsan zárkózott fel a Debreceni Agrártudományi Egyetem, ahol Tóth József 1958-ban kezdett el foglalkozni az operációkutatás mezőgazdasági alkalmazásával. A tudományos kutatás itt kezdettől fogva ötvöződött a gyakorlati alkalmazásokkal, amelynek

eredménye több alkalmazás módszertani megoldás kimunkálása és elméleti vizsgálatok elvégzése. Viszonylag hamar 1961-ben az agrárfelsőoktatási intézmények között elsőnek a Debreceni Agrártudományi Egyetemen indult meg az operációkutatás oktatása "gazdasági matematika" tantárgyként. Az első jelentősebb publikáció a témakörben 1961-ben jelent meg /Tóth J.: A takarmánynövények vetésterülete optimális arányának meghatározása. Statisztikai Szemle, Budapest, 1961. 12. sz. valamint Tóth J.: Az üzemi takarmánytermelés optimális szerkezetének meghatározása lineáris programozással. Doktori értekezés 1961./ 1964-ben Sebestyén Józseffel együtt képviselték Magyarországot a prágai I. Nemzetközi Szimpóziumon 2-2 előadással.

1963-ban Pilliss Pál publikálja földhasznosítási optimumok c. a lineáris programozást felhasználó munkáját. /Kertészeti és Szőlészeti Főiskola Kiadványa, Budapest, 1963./

1967-ben jelent meg Mészáros Sándor: Műtrágyák hatékonyságának vizsgálata és elosztása matematikai módszerekkel. /Gazdálkodás, 1967. 1. sz. Budapest./ Munkája új lendületet adott a matematikai eljárások mezőgazdasági alkalmazása terén a figyelem felkeltésének.

1969-ben Csáki Csaba publikálja az Orosházi Állami Gazdaság számára lineáris programozás alkalmazásával készített fejlesztési tervet /Gazdálkodás 1969. 11. sz. valamint Akadémiai Kiadó, Budapest 1969./

A továbbiakban egyre bővült a köre azoknak, akik az operációkutatás mezőgazdasági alkalmazásával kezdtek foglalkozni, bővült a gyakorlati alkalmazás köre is. Ez utóbbit tekintve jelentős szerepet játszottak a technikai feltételek megteremtése, az alkalmazás módszertani problémák egyre célszerűbb megoldása és hatékony szoftverek kifejlesztése.

1.3. Az operációkutatás helye, kapcsolata más tudományokkal

A tudományok fejlődése mind nagyobb differenciálódáshoz, mind több tudományág kialakulásához vezetett. A bonyolult világ megismerését a tudományok differenciálódása részben elősegítette, részben gátolta, hiszen az egymással szoros kapcsolatban lévő, sokoldalú jelenségeket egymástól elszigetelten csupán az egyes tudományok szemszögéből és eszközkészereit alkalmazva aligha lehet valóságúnen vizsgálni és megismerni. Szükség volt tehát arra, hogy egy állandó integrálódási folyamat is végbemenjen a tudományok körében és kialakuljanak olyan határtudományok,

amelyek több tudományt összekapcsolva vizsgálják bonyolult világunkat. Ilyen esetekben viszont mindig felvethető a kérdés, hogy vajon az adott, más tudományok határterületén lévő tudományok önálló tudmánynak tekinthetők-e? Az is tagadhatatlan, hogy az operációkutatás elválasztódási folyamata az egyes tudományoktól még jelenleg is folyamatosan van, másrészt, hogy az operációkutatás különféle tudományok /matematika, közgazdasági tudományok, hadi tudományok, szociológia, stb./ módszereit és eszközeit alkalmazza és célja valamely rendszer /napjainkban leginkább valamilyen gazdasági rendszer/ működése, irányítása, szervezési, tervezési, döntésmegalapozási problémáinak célszerű megoldása. Ennek megfelelően az operációkutatás szoros kapcsolatban van a matematikával, hiszen eszköztára nagyrészt matematikai. Szoros a kapcsolata a rendszerelmélettel, hiszen vizsgálatai általában valamely rendszer működésére irányulnak. Igen szoros a kapcsolata a kibernetikával, hiszen vizsgálatának fő célja a rendszer irányítása. Ilyen szempontból is elvitathatatlan kapcsolata a vezetés és szervezés tudományokkal és /minthogy az irányítás szervezés része és nélkülözhetetlen eszköze a megfelelő informáltság/ az információelmélettel.

De az operációkutatás nem veszi át a vezetés szerepét, csupán a vezetői döntések megalapozását segíti, viszont mint ilyen szoros kapcsolatban van a döntésselmelettel.

Esetenként szinte el sem lehet határolni az operációkutatást a statisztika és az ökonometria egyes területétől, ugyanazon módszerek az egyiknél is a másiknál is felhasználásra kerülnek.

Az operációkutatás vizsgálódási tárgyát különböző rendszerek képezik. E rendszerek valóságú, tudományos megítélése lehetetlen az adott rendszer törvényszerűségeit feltáró más szaktudományok ismeretétől és eredményeik felhasználásától.

A gazdasági rendszerek vizsgálata elképzelhetetlen a közgazdasági tudományok, valamint az adott területtel kapcsolatos szaktudományok /mezőgazdaságban pl. a növénytermesztési, állattenyésztési, kertészeti, gépesítési, technológiai, talajtani stb., sőt ezek tudományos alapjait képező kémiai, fizikai, biológiai stb. tudományok/ nélkül. Ebből is adódik, hogy az operációkutatást team-ek /munkacsoportok/ művelhetik hatékonyan, vagy az operációkutatónak el kell sajátítania mindazon tudományos ismereteket, amelyek az általa vizsgált rendszerek működését befolyásolják. A második világháborúban, már az operációkutatás kialakulásának kezdetén a hadászati problémák megoldása során olyan csoportokat szerveztek, amelyek tagjai katonai szakemberek, matematikusok, statisztikusok, közgazdászok, biológusok, pszichológusok és más tudományágak képviselőiből álltak össze.

Az operációkutatás a jelenségeket lehetőleg matematikai eszközökkel vizsgálja és nagyobb részt bonyolult rendszerekkel foglalkozik, amikor is a rendszer vizsgálata jelentős adatfeldolgozást és bonyolult matematikai számítás igényel, amelyek elvégzése számítástechnikai eszközök nélkül legtöbbször elképzelhetetlen. Ilyen szempontból szoros kapcsolatban van a számítástechnikával. A számítástechnikát eszközként használja fel feladatainak ellátása során.

1.4. Az operációkutatási munka folyamata

Az operációkutatási tevékenység - mint arról már szó volt - mindig valamilyen rendszer működésének vizsgálatára irányul, célja a rendszer működésére vonatkozó irányítási /vezetési/ döntések megalapozása, s eszközeül matematikai módszerek szolgálnak. A munka fázisait a szakirodalom sokféle módon írja le, a munkafázisok több vagy kevesebb szakaszra történő bontásával, esetleg sorrendiség felcserélésével. Mervev elhatárolást tenni általában nem célszerű és nem is szükséges, hiszen a munkák folyamata, szakaszokra bontása is függ az operációkutatás személyi és tárgyi feltételeitől, de az egyes szakaszok ismétlődhetnek, egymást átfedhetnek stb. Célszerű azonban valamilyen általános rendező elvet kialakítani, amelyet aztán konkrét feltételek alapján alkalmazhatunk.

Az alábbiakban a szakirodalom figyelembevételével és gyakorlati tapasztalataink felhasználásával megkíséreljük az operációkutatási tevékenység rövid leírását munkafázisokra bontva.

A rendszer elemzése

Az operációkutatási tevékenység mindig a vizsgálandó rendszer megismerésével, elemzésével kell, hogy kezdődjön. Ennek során szakmailag, térben és időben körülhatároljuk az adott rendszert, amelyre vizsgálatainkat irányítjuk. Meghatározzuk a rendszer elemeit és egymás közötti kapcsolatait, a kapcsolatok lényegét és mibenlétét, a rendszernek és elemeinek kapcsolatait más rendszerekkel /külső, rendszeren kívüli kapcsolatok/, a rendszer viselkedését, a rendszer viselkedésére ható tényezőket és korlátokat és a rendszer viselkedésében megmutatókozó törvényszerűségeket stb., s természetesen meghatározzuk a rendszer célját stb.

A rendszer elemzése során arra törekszünk, hogy feltárjuk a rendszer jelenlegi állapotát, helyzetét, múltbeli viselkedését és következtessünk a rendszer változtatásának, illetve a működésében elérhető változtatásoknak a lehetőségeiről is. Ennek során általában eljutunk egy olyan koncepció kialakításához, amelyben meghatározzuk a rendszer változtatásának lehetőségeit és korlátait, nem döntve természetesen a konkrét változtatások tekintetében csupán lehetőségeit körvonalazzuk.

A rendszer modellezése

A rendszer megismerését, elemzését követheti a rendszer modellezése. Ennek során mindenekelőtt meghatározzuk, hogy milyen matematikai modelleket alkalmazunk, majd biztosítjuk a modellhez szükséges paramétereket /a modell adatbázisát/, a modellt létrehozzuk, megoldjuk, variánsszámításokat végzünk és azok eredményeit elemezzük.

A modellezés segítségével általában eljutunk valamilyen elméleti, vagy gyakorlati következtetéshez, illetve döntéshez, hiszen a vizsgálatainkat /a variánsszámításokat/ mindaddig folytatjuk, amíg megfelelő eredményhez el nem jutunk.

Az eredmények gyakorlati bevezetése

Amennyiben a modellezés során megfelelő következtetéshez, vagy döntéshez jutottunk, akkor következik ennek a gyakorlatban történő hasznosítása. Ennek során elméleti, illetve gyakorlati következtetéseinket felhasználjuk a döntések, a stratégiai és taktikai kialakításához, illetve amennyiben döntést hoztunk azt a gyakorlatban végrehajtjuk.

1.5. Modellek

Az operációkutatás fogalmának meghatározásakor szó volt arról, hogy "jellegzetes közelítés módja a rendszer tudományos modelljének megalkotása", s az előbbieken láttuk, hogy az operációkutatási tevékenység lényeges munkafázisa a modellezés.

Nyilván felmerül a kérdés, hogy mi a modell?

A modell az objektív valóság többé-kevésbé hű képe. Nem maga az objektív valóság, nem is annak pontos mása, csak többé-kevésbé hű tükré, az ember által a valóságról alkotott leegyszerűsített kép. Az egyszerűsítés gyakran kényszerűségekből /a valóság ismeretének hiányából, a valóság általunk nem követhető bonyolultságából stb/, máskor célszerűségekből /a lényegre való koncentráció érdekében a zavaró, mellékes tényezők kizárása/ adódik.

A modelleket három fő típusba szokás sorolni, úgy mint:

a., Képszerű modellek

A képszerű modellek a valóságot képszerűen jelenítik meg, jellemzőjük, hogy statikusak és csak akkor változtathatók meg értelemszerűen, ha az eredeti rendszer is megváltozik. Ilyen képszerű modell a fénykép, a makett, a menutrend, stb.

b., Analóg modellek

Az analóg modelleket az jellemzi, hogy a megfigyelt valóság és a modell jellemzői között szoros kapcsolat van. Az analóg modellek viszonylag könnyen változtathatók és alkalmaznak dinamikus összefüggések vizsgálatára is. Analóg modellek pl. a térképek, a grafikonok, a folyamat-ábrák, a kísérleti állatok és a növények, stb.

c., Szimbólikus modellek

Szimbólikus modellek esetén a vizsgált folyamat egyes tényezőit és a köztük lévő kapcsolatokat matematikai szimbólumokkal fejezzük ki. Ilyen modellek alkalmazása során nem jelent problémát a változások hatásának elemzése.

Arra is lehetőségünk van, hogy kombinált modelleket alkalmazzunk. Így pl. a szimulációs modellek /amelyekkel később részletesen megismerkedünk/ részben analóg, részben szimbólikus modellek.

A gazdaságmatematikai módszerek alkalmazása során különösen fontos szerepet játszanak az optimalizálási modellek. E modellek több szempontból osztályozhatók:

Az elemi tevékenységek természete szerint megkülönböztetünk:

a., Folytonos modelleket, amikor a modellben szereplő elemi tevékenységek mind folytonosak, tehát tört értéket is felvehetnek. Pl. a termelt tejmenyiség lehet 1500 liter, 1501 liter, 1501,5 liter, vagy 1501,75 liter, stb. Hasonlóképpen a búza átlagtermése hektáronként lehet 2 t, 2,5 t, vagy 2,54 t stb.

b., Diszkrét modelleket, amikor a modellben szereplő elemi tevékenységek kizárólag diszkrét tevékenységek lehetnek, tehát csak egész értéket vehetnek fel. Így pl. a munkaerő lehet 500 fő, 501 fő, stb., de nem lehet 501,5 fő vagy 501,22 fő. Hasonlóképpen nem tudunk vásárolni fél vagy negyed traktort, stb.

c., Vegyes modelleket, amikor a modellben mind folytonos, mind pedig diszkrét tevékenységek szerepelnek. Pl. ha egy vállalatfejlesztési tervet készítünk, a termelt tej-, vagy termékmennyiségek törtértéket is felvehetnek, tehát folytonos tevékenységek lehetnek, de a beszerzendő gépek csak egész értékek lehetnek.

Általában a gyakorlatban a folytonos modellek vannak jobban elterjedve, mivel azok kezelése matematikai és számítástechnikai szempontból sokkal egyszerűbb. Ha azonban a folytonos modell nem alkalmas a valóság ábrázolására, hanem annak lényeges leegyszerűsítését igényli, - ezért esetleg gyakorlatilag használhatatlan vagy félrevezető eredményhez vezet -, kénytelenek vagyunk diszkrét vagy vegyes modellt alkalmazni.

A modellek aszerint is osztályozhatók, hogy paramétereik pontosan meghatározható konstansok, vagy olyan véletlentől függő mennyiségek, amelyek értékét csak bizonyos /egynél kisebb/ valószínűséggel tudjuk meghatározni. Ilyen szempontból megkülönböztetünk:

a., Determinisztikus modelleket, amikor a modell paraméterei egyértelműen meghatározhatók.

b., Sztochasztikus modelleket, amikor a modell paraméterei véletlentől függő mennyiségek.

Akkor is sztochasztikus modellről beszélünk, ha valamely modell paramétereinek csak egy része véletlentől függő mennyiség.

A gazdasági problémák természete általában sztochasztikus jellegű, tehát a gazdasági vizsgálatok során a sztochasztikus modelleknek van prioritásuk. Pl. a mezőgazdaságban nem tudjuk pontosan megadni a várható termésátlagot, a várható teljesítményadatokat és költségadatokat, hanem azok alakulása számos tényezőtől függő valószínűségi változóként tekinthető. A sztochasztikus modellek problémái azonban még távolról sincsenek olyan szinten felderítve, mint a determinisztikus modellek problémái - bár az utóbbi időben a kutatás e téren is nagy lépésekkel halad előre-, ezért a gyakorlatban jelenleg általában a determinisztikus modelleket alkalmazzuk.

Az optimális programok meghatározásánál alkalmazott módszer szerint megkülönböztetünk:

a., Statikus.

b., Dinamikus modelleket.

E megkülönböztetés kizárólag a módszer matematikai struktúrájára vonatkozik és nem a modell közgazdasági tartalmára. Közgazdasági szempontból dinamikus probléma ugyanis vizsgálható statikus módszerrel is, viszont közgazdaságilag statikus probléma vizsgálatánál alkalmazunk dinamikus módszert is.

1.6. Gazdasági feladatok modellezése

A gazdasági feladatok modellezését az operációkutatási módszerek közül a jelenlegi gyakorlatban leginkább alkalmazott matematikai programozás leegyszerűsített módon történő bemutatásával érzékeltetjük. Ezzel analóg módon fogható fel általában az operációkutatási módszerek alkalmazása, természetesen a gazdasági probléma és az alkalmazott matematikai módszer sajátosságainak figyelembevételével.

Tegyük fel, hogy valamely mezőgazdasági vállalat n -féle tevékenységet folytathat. Egyelőre nem vizsgáljuk e tevékenységek konkrét tartalmát, csak megjegyezzük, hogy e tevékenységek jelenthetik valamely termék termelését, valamilyen szolgáltatás ellátását, beruházási tevékenységet, stb. valamilyen módon folytatva.

A tevékenységek - egyelőre ismeretlen - szintjét jelöljük $x_1, x_2, \dots, x_n$ -el. Ezek alkotják a matematikai modell változóit. E szerint x_j jelenti a j -edik tevékenység $j=1, 2, \dots, n$ szintjét. A vállalat a tevékenységeket bizonyos céllal végzi. A cél különböző lehet, pl. minél magasabb jövedelem elérése, az export fokozása, vagy az import csökkentése, stb. Tegyük fel, hogy példánkban a tevékenységek célja minél nagyobb jövedelem elérése. Nyilvánvaló, hogy a megtermelhető vagy realizálható jövedelem függ attól, hogy a vállalat a különböző tevékenységeket milyen szinten és milyen arányban folytatja, azaz ha a megtermelhető vagy realizálható jövedelmet z -vel jelöljük, annak nagysága az x_j változók függvénye vagyis

/1.1./

$$z = f/x_1, x_2, \dots, x_n/.$$

Az így megfogalmazott függvényt célfüggvénynek vagy hatékonysági függvénynek nevezzük. Természetesen a vállalat a cél minél jobb megvalósítására törekszik, pl. minél több jövedelem elérésére, vagy minél több export termék előállítására, vagy minél kevesebb import anyag felhasználására, stb. Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók értékeit tehát úgy kell meghatározunk, hogy a célfüggvény azok mellett a legnagyobb, vagy a legkisebb értéket vegye fel, vagyis keressük a célfüggvény maximumát vagy minimumát, azaz szélső /extrem/ értéket, azaz

/1.2./

$$z = f/x_1, x_2, \dots, x_n/ = \text{extrem.}$$

A különböző tevékenységek földterületet, munkaerőt, eszközöket és anyagokat igényelnek. A rendelkezésre álló földterületet, munkaerőt, eszközöket és anyagokat általában termelési erőforrásoknak, vagy egyszerűen erőforrásoknak fogjuk nevezni.

/Egyelőre ezek részletesebb vizsgálatától eltekintünk./ Az erőforrások egy része korlátozott mennyiségben áll rendelkezésre, vagyis azok felhasználható mennyisége adott. Jelöljük az r -edik erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget b_r -rel.

Az erőforrások felhasználására mérlegeket írunk elő. A mérleg egyik oldalán jelöljük az adott erőforrásból a szükségletet, a másik oldalán pedig az abból rendelkezésre álló mennyiséget. Mivel a különböző erőforrásokból felmerülő szükséglet szintén az x_j értékek függvénye, az x_j értékeket úgy kell megválasztani, hogy a mérlegek két oldala között megfelelő, általunk előírt reláció legyen. Előírhatjuk, hogy a mérleg két oldalán levő mennyiségek pontosan megegyezzenek, vagy, hogy az egyik oldalon levő mennyiség nem lehet több, mint a másik oldalon.

E szerint tehát keressük az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változóknak azokat az értékeit, amelyek mellett a célfüggvény extrém értéket /maximumot vagy minimumot/ vesz fel, azonban az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változóknak ki kell elégíteniük még bizonyos mellékfeltételeket, amelyeket mérlegegyenletek

$$/1.3./ \quad \phi_1/x_1, x_2, \dots, x_n/ = b_r,$$

vagy mérlegegyenlőtlenségek

$$/1.4./ \quad \phi_1/x_1, x_2, \dots, x_n/ \leq b_r,$$

illetve

$$/1.5./ \quad \phi_1/x_1, x_2, \dots, x_n/ \geq b_r,$$

alakjában fogalmazhatunk meg.

Az így megfogalmazott mérlegegyenleteket, illetve mérlegegyenlőtlenségeket mérlegfeltételeknek, vagy korlátozó feltételeknek szoktuk nevezni.

Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változóknak ki kell még elégíteniük az un. határfeltételeket, /Oskar Lange: Optimális döntések. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1966. 51. o./ vagy nemnegativitási feltételeket, azaz

$$/1.6./ \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

A /1.1./ formulában kizárólag azt fogalmaztuk meg, hogy a célfüggvény értéke /pl. a jövedelem tömege/ a különböző tevékenységek méretétől függ /a különböző termékekből termelt mennyiségektől, a szolgáltatások kiterjedésétől, stb./ s a /1.2./ formula szerint azok szintjét úgy kell megválasztani, hogy a célfüggvény extrém értéket vegyen fel /pl. a lehető legnagyobb jövedelmet érjük el/. E formulában egyelőre még azt sem konkretizáljuk, hogy a célfüggvény értéke /z/ hogyan, milyen formában függ az x_j változóktól.

Kizárólag e célfüggvény alapján esetleg az mutatkozna célszerűnek, hogy a vállalat csak egyféle tevékenységet folytasson, esetleg minden határon túl növekvő mértékben. Azonban mint arról már szó volt, a különböző tevékenységek erőforrásokat igényelnek, amelyekből korlátozott mennyiségek állnak a vállalat rendelkezésére, behatárolva a különböző tevékenységek lehetséges méreteit. Pl. ha a vállalatnak adott földterület áll rendelkezésére, s azt maradék nélkül fel kell használnia a termelés céljára, ez a területmérleg egyensúlyának biztosítását kívánja meg. A területszükséglet szintén az x_j változóktól függ, /valamilyen formában/, s ez képezi a mérleg egyik oldalát ($\phi_1/x_1, x_2, \dots, x_n$), s meghatározott mennyiségű terület áll rendelkezésre / b_r /, ami a mérleg másik oldalát adja. A mérleg két oldala között meghatározott egyensúlyt kell biztosítani, azaz ha a terület pontos felhasználását kívánjuk, a mérleget mérlegegyenlet alakjában kell megfogalmazni /1.3./.

A munkaerő- és eszközfelhasználásra vonatkozó mérlegeket viszont általában egyenlőtlenség formájában fogalmazzuk meg, vagyis nem írjuk elő, hogy pl. minden hónapban pontosan és maradék nélkül fel kell használnunk a rendelkezésre álló munkaerőt, hanem csak azt kötjük ki, hogy nem használhatunk fel több munkaerőt, mint amennyi rendelkezésre áll, azaz a munkaerő felhasználására egy felső határt, felső korlátot írunk elő, de lehetővé tesszük, hogy azt ne használjuk fel teljes mértékben. /Mezőgazdasági vállalatoknál általában lehetetlen olyan tervet összeállítani, amely minden hónapban a munkaerő teljes és maradéktalan felhasználását biztosítja. E követelmény modellbe építése megoldhatatlan problémához vezetne./

Más esetben - mint később látni fogjuk - előírhatunk alsó korlátot is /1.5./, pl. megkívánhatjuk, hogy bizonyos termékekből, vagy termékcsoportokból legalább egy meghatározott mennyiséget termelni kell.

A /1.6./ formulában előírtuk, hogy az x_i értékek nem lehetnek negatív mennyiségek. A vállalatvezető természetesen tartja, hogy nem termelhet pl.-100 hektáron búzát vagy kukoricát, vagy nem adhat az állatok elé -10 kg-ot valamely takarmányfélésegből. A matematikában azonban valamely egyenlet-rendszer vagy egyenlőtlenségrendszer megoldása negatív értéket is eredményezhet, illetve, ha ez nem kívánatos, vagy nem engedhető meg, azt külön feltételként kell előírni.

A mérlegfeltétel-rendszer /mérlegegyenletek és egyenlőtlenségek/, vagy másként a korlátozó feltételek rendszere (/1.3./ - /1.5./) és a határfeltételek /1.6./ általában az x_j változóktöbbféle variációját megengedik, azaz többféle megoldás is lehetséges. Ezek azonban nem feltétlenül egyenértékűek, s célszerű kiválasztani közülük azt, amely bizonyos cél, vagy célok szempontjából leginkább megfelel a gyakorlati megvalósításra. A kiválasztás kritériumát a célfüggvényben fogalmazhatjuk meg.

A gyakorlati alkalmazás során - mint látni fogjuk - nem egyszerű probléma a célfüggvény közgazdasági tartalmának meghatározása.

A matematikai programozás, s ezen belül a célfüggvény általános problémáját igen világosan fejti ki Oskar Lange. A matematikai programozás elméletét a racionális cselekvésről szóló általános tudomány részének tekinti, azaz a praxeológiához sorolja. /Oskar Lange idézett könyve 11-15. o./

A gazdasági programozás szempontjából legfontosabb praxeológiai eljárási elvnek a racionális gazdálkodás vagy a gazdaságosság elvét tekinti, amelynek két változatát különbözteti meg:

a. A legnagyobb eredmény elve: ha adott eszközráfordítás mellett a kitűzött cél maximális fokát érjük el.

b. A legkisebb eszközráfordítás, vagy az eszközökkel való takarékoság elve: ha az adott célt /vagyis a cél előre meghatározott fokát/ a legkisebb eszközráfordítással érjük el.

A gazdaságosság elvének két változatát Oskar Lange egyenértékűnek tekinti. "Ki lehet mutatni, hogy a racionális gazdálkodás elvének mindkét változata egyenértékű. Lényegében a racionális gazdálkodás elvének második változatát alkalmazva - adott eszközkészlet mellett - végeredményben a cél megvalósításának maximális fokát érjük el. Ha ugyanis kevesebb eszközt használunk a cél megvalósítása meghatározott fokának elérésére, vagyis bizonyos mennyiségű eszközt megtakarítunk, akkor azzal a cél megvalósítási fokát megfelelően növelni lehet és ezen az úton elérhetjük annak maximumát." /Oskar Lange idézett könyve 13. o./

Helyteleníti a gazdaságosság elvének olyan megfogalmazását, amely a cél legnagyobb megvalósítási fokát kívánja elérni a legkisebb eszközráfordítás mellett. Valóban, az utóbbi megfogalmazás ellentmondásos és Oskar Lange elmélete a gazdaságosság elvéről és a két változat egyenértékűségéről előrelépést jelent.

A matematikai programozási modell általános megfogalmazása során nem adtuk meg konkrétan, hogy a célfüggvény vagy a mérlegfeltételek milyen függvénytípust képviselnek, csupán azt tüntettük fel, hogy itt valamilyen függvénykapcsolat van.

Mind a célfüggvényben, mind a mérlegfeltételekben sokféle függvénytípus szóba jöhet, azonban egy bonyolult függvényrendszert tartalmazó modell gyakorlati tervezésben való alkalmazásának - legalábbis jelenleg - nincsenek meg a feltételei. Egyszerűségénél, könnyebb kezelhetőségénél és megoldhatóságánál fogva, ma a lineáris programozási modell az, amely a gyakorlatban szélesebb körben alkalmazható és elterjeszthető, másrészt nagyon sok nemlineáris feladat is visszavezethető lineáris programozási feladatra, illetve megoldható valamilyen módon lineáris programozással.

Ha mind a célfüggvény, mind a mérlegfeltételek lineárisak, azaz a

$$/1.7./ \quad z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \text{extrém},$$

és

$$/1.8./ \quad a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n = b_r,$$

illetve

$$/1.9./ \quad a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n \leq b_r,$$

vagy

$$/1.10./ \quad a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n \geq b_r$$

formában adóttak, vagyis a /1.7./ - /1.10./ a változókat első fokon tartalmazzák, akkor lineáris programozási modell-ről beszélünk. Ellenkező esetben nemlineáris programozási modell állunk szemben.

A lineáris programozás mindenek előtt azt a feltételezést tartalmazza, hogy a p_j és a_{rj} együtthatók konstans értékek és nem függenek az x_j értékek változásától. A vállalati tervezés szempontjából nézve ez azt a feltételezést jelenti, hogy adott termékből bármilyen mennyiséget is termelünk, egységnyi termék pl. mindig ugyanannyi jövedelem

realizálását teszi lehetővé, a különböző eszközökből és anyagokból egységnyi termék előállításához mindig ugyanannyit használunk fel, illetve egységnyi termék előállítása mindig ugyanannyi munkaerőt, gépi munkát igényel, stb. Indokolt az a nézet, hogy a valóságban a problémák nem ilyen egyszerűek, általában nemlineáris formában jelentkeznek. Ha a gyakorlatban mégis a lineáris programozást alkalmazzuk, akkor tudatában kell lennünk annak, hogy számításaink csak annyiban tükrözik a valóságot, amennyiben a linearitás - jobb híján - mégis elfogadható. Ha ez nem áll fenn, kénytelenek vagyunk nemlineáris programozási modellt alkalmazni.

Tekintsük az előbbieken megfogalmazott lineáris programozási modellt. Tegyük fel, hogy $p_1, p_2, \dots, p_n$ az első, a második és így tovább, az n -edik termék egységnyi termelése /1 t, 1 ha, stb./ során nyerhető jövedelmet jelenti, míg mint ismeretes, az $x_1, x_2, \dots, x_n$ a különböző termékekből termelendő mennyiségeket szimbolizálják.

Ha az első termék egységnyi mennyisége /1 t, 1 ha termelése/ p_1 mennyiségű jövedelem megtermelését, illetve realizálását teszi lehetővé, s ha az első termékből x_1 mennyiséget állítunk elő, akkor természetesen az első termék termelése során $p_1 x_1$ nagyságú jövedelemre számíthatunk. Ha a szorzatokat valamennyi termékre vonatkozóan képezzük, megkapjuk, hogy a különböző termékek termelése során - adott mennyiségeket termelve - mennyi jövedelem érhető el.

A termékenként nyerhető jövedelmek összege az adott vállalat által elérhető jövedelem tömegét adja, azaz a vállalati összes jövedelem tömege z , a /1.1./ szerint

$$\text{/1.1./} \quad z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n,$$

vagy rövidebben felírva

$$\text{/1.12./} \quad z = \sum_{j=1}^n p_j x_j.$$

Ha pl. a_{r1} az első termék egységnyi megtermeléséhez szükséges munkanapok számát jelenti az r -edik hónapban és az első termékből x_1 mennyiséget állítunk elő, akkor ehhez nyilvánvalóan az r -edik hónapban $a_{r1}x_1$ munkanapra lesz szükség. Ha e szorzatot minden termékre vonatkozóan elvégezzük, megkapjuk, hogy a különböző termékek tervezett mennyiségének megtermeléséhez a r -edik hónapban hány munkanapra van szükség. Ezek összegezése az adott hónapban a termeléshez szükséges munkanapok összes mennyiségét adja, azaz az /1.9./ formulát felhasználva.

$$/1.13./ \quad a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n,$$

vagy rövidebben

$$/1.14./ \quad \sum_{j=1}^n a_{rj}x_j.$$

A munkaszükséglet nem lehet több a rendelkezésre álló, illetve teljesíthető munkanapok számánál, vagyis b_r -nél, azaz

$$/1.15./ \quad \sum_{j=1}^n a_{rj}x_j \leq b_r.$$

Hasonló módon fogalmazhatjuk meg a gépmunka-mérlegeket, anyagnérlegeket, stb., amelyek részletesebb tárgyalásától e helyütt eltekintünk.

1.7. Egyszerű példa a lineáris programozás szemléltetésére

A továbbiak során egy nagyon leegyszerűsített feladat alapján vizsgáljuk meg a lineáris programozás alkalmazási lehetőségét, megvilágítva az alkalmazás gazdasági hátterét.

Tételezzük fel, hogy valamely mezőgazdasági vállalat 1 000 ha területtel rendelkezik. A rendelkezésre álló területen négyféle árunövény termelésére van lehetőség, amelyeket jelöljünk az abc kezdő nagybetűivel, tehát A, B, C, D-vel. Rendelkezésre áll a négyféle árunövény termelésének kidolgozott technológiája, amely tartalmazza azok termelésének jövedelemszámításait is.

A problémát leegyszerűsítjük és feltételezzük, hogy a termeléshez csak munkaerőt használunk fel. /A többi tényező vagy korlátlan mennyiségben áll rendelkezésre vagy egyszerűen e helyütt vizsgálatunktól eltekintünk./ A munkaerő-felhasználás idényszerűsége azonban szükségessé teszi annak vizsgálatát, hogy az év különböző időszakában hogyan alakul a munkaerő-szükséglet. E tekintetben legalább havi részletezésre van szükség. Az egyszerűség kedvéért példánkban csak két munkacsúcs-időszak vizsgálatát végezzük el, azaz csak az I., illetve a II. időszakot különböztetjük meg.

A technológiákból megállapítható, hogy az A termék 1 hektáron való termelése az I. csúcsidőszakban 1, a II. csúcsidőszakban 4 munkanapot igényel és 1 hektáron 2 700 Ft jövedelem érhető el. Ugyanezen adatok a B termék termelésére vonatkozóan 4, 2 és 2 700, a C termék termelésére vonatkozóan 4, 6 és 2 900, illetve a D termék termelésére 2, 10 és 3 300. Foglaltjuk ezeket az adatokat áttekinthető formában az 1. táblázatba.

Termékek technológiai és jövedelemadatai 1 ha-ra

1. sz. táblázat

Megnevezés	A	B	C	D
Területszükséglet, ha	1	1	1	1
Munkanapszükséglet az I. csúcsidőszakban	1	4	4	2
Munkanapszükséglet a II. csúcsidőszakban	4	2	6	10
Jövedelem, Ft	2 700	2 700	2 900	3 300

Most az a feladat, hogy készítsük el az adott mezőgazdasági vállalat termelési tervét.

Először oldjuk meg a feladatot pusztán logikai kalkuláció alapján, ahogyan azt a jelenlegi gyakorlatban is csinálják. Ennek keretében mindenekelőtt el kell döntenünk, hogy melyik terméket hány hektár területen kívánjuk termelni, azaz az 1 000 ha területet elosztjuk a négyféle árnövény termelésére. Az elosztást azonban - mivel a jövedelem nagysága nem közömbös a vállalat szempontjából - úgy igyekezünk megoldani, hogy az 1 000 ha területen minél nagyobb jövedelem elérése váljon lehetővé. Ezért természetesen az egységnyi területen nagyobb jövedelmet adó termék termelését előnyben részesítjük a kevesebb jövedelmet biztosító termékkel szemben.

A táblázatból kitűnik, hogy 1 ha-on legnagyobb jövedelmet a D termék termelése biztosít. Igyekezünk tehát a D terméket minél nagyobb területen, mondjuk 400 ha-on termelni. Az 1 ha-on termelhető jövedelemtömeg szempontjából a második legjobb termék a C termék, termeljük ezt, mondjuk 300 ha-on. Az A és B termék 1 ha-on termelve, azonos tömegű jövedelem elérését teszi lehetővé, azonban az A termék termelése előnyösebbnek látszik, mert kevesebb munkaerő-ráfordítást igényel, ezért mondjuk az A terméket 200, a B terméket pedig 100 ha-on termeljük. Ezzel az 1 000 ha területet a négy növény termelésére elosztottuk a következőképpen.:

A termék	200 ha	20 %
B termék	100 ha	10 %
C termék	300 ha	30 %
D termék	400 ha	40 %
Összesen	1 000 ha	100 %

Előre nem tudjuk, hogy az így meghatározott termelési szerkezet az adott vállalatnál megvalósítható-e vagy sem. Erről csak azután tudunk meggyőződni, ha elkészítjük a különböző mérlegeket, és az adott termelési szerkezet alapján várható jövedelemtervet és megvizsgáljuk, hogy a tervezett termelési szerkezet megvalósításához rendelkezünk-e elegendő munkaerővel /szp- és eszközkapacitással, valamint a szükséges anyagokkal/ és az elérhető jövedelmet elfogadhatónak tartjuk-e. E vizsgálathoz tehát el kell készítenünk a különböző mérlegeket és meg kell határoznunk az elérhető vállalati jövedelmet. A mérlegek és jövedelemszámítás elkészítése viszonylag egyszerű, mindössze a technológiai adatokat kell megszorozni a termelési szerkezet adataival és az

így kapott szorzatokat kell összegezni. A fentiekben meghatározott termelési szerkezet, valamint az I. sz. táblázatban rögzített technológiai és jövedelmi adatok alapján tehát a következő számításokat kell elvégeznünk:

Területmérleg

$$1 \cdot 200 + 1 \cdot 100 + 1 \cdot 300 + 1 \cdot 400 = 1\,000 \text{ ha,}$$

Munkanap-szükséglet az I. csúcsidőszakban

$$1 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 4 \cdot 300 + 2 \cdot 400 = 2\,600 \text{ munkanap.}$$

/1.16./

Munkanap-szükséglet a II. csúcsidőszakban

$$4 \cdot 200 + 2 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 10 \cdot 400 = 6\,800 \text{ munkanap.}$$

Elérhető jövedelem

$$2\,700 \cdot 200 + 2\,700 \cdot 100 + 2\,900 \cdot 300 + 3\,300 \cdot 400 = 3\,000\,000 \text{ Ft}$$

Számításaink alapján kitűnik, hogy az adott technológiai adatok alapján a tervezett termelési szerkezet megvalósításához 1000 ha terület, az I. csúcsidőszakban 2 600 munkanap, a II. csúcsidőszakban 6 800 munkanap szükséges és az elérhető jövedelem 3 000 000 Ft. Most azt kell megvizsgálnunk, hogy a 2 600, illetve 6 800 munkanap biztosítható-e az adott vállalatnál és megvagyunk-e elégedve az elérhető jövedelemmel. Amennyiben a szükséges munkanap nem áll rendelkezésre, hanem az adott vállalat ennél kevesebb munkaerővel rendelkezik, vagy a jövedelmet kevésnek tartjuk, akkor vagy a technológiát kell megváltoztatni, vagy a termelési szerkezetet, vagy mindkettőt. Ebben az esetben viszont ismét el kell végeznünk a mérlegszámításokat és újra megvizsgálni, hogy az így előállított tervváltozat kapacitásigényét tudja-e a vállalat biztosítani, illetve az elérhető jövedelem elfogadható-e a vállalat számára. A termelési szerkezet és a technológia változtatását mindaddig kell végeznünk, amíg egy olyan termelési tervhez jutunk, amelyben valamennyi mérlegünk elfogadható a vállalat számára.

Egyszerűsített példánkban viszonylag könnyű feladat volna több tervváltozat előállítására és vizsgálata de képzeljük el egy vállalat komplex tervét, amikor nemcsak négy árunövényt kell figyelembe venni, hanem az

összes, az adott vállalat körülményei között termelhető árunövényt, a zöldség-, a szőlő-, és a gyümölcs termelést, a rét- és a legelőgazdálkodást, az állattenyésztést, a takarmánytermelést és -vásárlást, stb. Sőt egy-egy termék termelése többféle technológiai változat szerint is lehetséges. De a munkaerőt sem két időszakban, hanem legalább 12 időszakban /havonként/ vesszük figyelembe. Vizsgálunk kell a gyakorlati tervezés során a traktormérlegeket legalább típusonként szintén 12-12 időszakot véve alapul. Ha-sonlóképpen tekintetbe kell venni más gépimunka-mérlegeket is /pl. kombajn, öntözőgép, munkagép, stb./, anyagmérlegeket is, takarmánymérlegeket is stb.

Ha összeállítottuk ezeket a mérlegeket, kiderül, hogy egyik-másik mérlegben a szükséglet és a kapacitás nincs összhangban. Most változtatjuk a termelési szerkezetet vagy a technológiát, vagy mindkettőt, összeállítjuk a mérlegeket, s újra nincs minden mérlegben összhang, sőt lehetőséges, hogy azáltal, hogy megteremtettük valamely mérleg összhangját, egy másik mérlegben azt felborítottuk. Nagyon sokszor kellene a tervet átdolgozni, hogy valamennyi mérlegben összhangot teremtsünk. /1. ábra, 37. old./ Erre a mezőgazdasági vállalatok vezetőinek aligha van lehetőségük, ezért sok esetben némi javítgatással csak a mérlegek látszólagos összhangját teremtik meg. Mint látni fogjuk, a matematikai programozás egyik fontos előnye éppen az, hogy a modellben figyelembe vett összes mérlegek összhangját biztosítja.

Térjünk most vissza egyszerű példánkhoz. Adjuk meg a logikai kalkulációnak azt az előnyt - bár gyakorlatilag ez így soha nem sikerül -, hogy feltételezzük, olyan tervet sikerült az első lépésben készítenünk, ahol a mérlegek összhangban vannak, mondjuk az I. csúcsideszakban pontosan 2 600 munkanap, a II. csúcsideszakban pedig pontosan 6 800 munkanap és 1 000 ha termőterület áll a vállalat rendelkezésére. A logikai úton összeállított tervet tehát mindenképpen jónak, illetve elfogadhatónak tarthatjuk, hiszen valamennyi mérlegünk összhangját biztosítottuk és a tervezés során nagymértékben érvényesíteni tudtuk azt az elvet is, hogy minél jövedelmezőbb termelési szerkezetet tervezzünk meg.

Tegyük fel azonban, hogy a vállalat ennek ellenére szeretne meggyőződni arról, hogy van-e lehetőség az előbbi tervnél jobb, jövedelmezőbb terv összeállítására. A leckét úgy adja fel az operációkutatónak, hogy az adott termelési technológiákat véve figyelembe, készítsen egy olyan termelési tervet, amely pontosan 1 000 ha terület hasznosítását teszi lehetővé, s az I. csúcsideszak pontosan 2 600 munkanap, a II. csúcsideszakban pontosan 6 800 munkanap felhasználásával jár, de a lehető legnagyobb jövedelmezőség elérését biztosítja.

Az operációkutató az így megfogalmazott feladatból indul ki. Adottnak tekinti tehát a termeléstehnológiai adatokat, valamint a termelési forrásokra megadott adatokat és keresi azt a termelési szerkezetet, amely 1 000 ha terület, 2 600, illetve 6 800 munkanap felhasználásával a legnagyobb jövedelmet biztosítja. Ennek alapján az /1.16./ formulát úgy alakítja át, hogy az egyes termékek termelésére felhasznált területet ismeretlenként kezeli, vagyis az A termék termelésére fordított területet

x_1 -gyel, a B termék termelésére fordított x_2 -vel, és így tovább, x_3 -mal, illetve x_4 -gyel jelöli. Ennek megfelelően a /1.16./ formulát a következőképpen alakítjuk át: /Azokat a konstansokat, amelyeknek értéke 1, természetesen elhagyhatjuk, most a könnyebb követhetőség érdekében tüntettük fel./

Területmérleg

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 1000 \text{ ha}$$

Munkanap-szükségleti mérleg az I. csúcsidőszakban

$$1x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2600 \text{ munkanap}$$

/1.17./

Munkanap-szükségleti mérleg a II. csúcsidőszakban

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 6800 \text{ munkanap}$$

Elérhető jövedelem

$$2700x_1 + 2700x_2 + 2900x_3 + 3300x_4 = \text{maximum}$$

Az /1.17./ formula megfelel az /1.16./ formulának, csak most a termelési szerkezetet egyelőre ismeretlenként kezeljük.

A feladat megoldásához tehát rendelkezünk egy négyismeretlenes 3 egyenletből álló rendszerrel /később látni fogjuk, hogy hasonló egyenlettel, hanem leginkább egyenlőtlenséggel dolgozunk/, amelyet úgy kell megoldanunk, hogy közben egy függvény /a célfüggvény/ maximumát keressük.

Az /1.17./ feladat adatait foglaljuk táblázatba, ahol a baloldali oszlopban feltüntetjük a sorok megnevezését, majd a további oszlopok az egyes termékek egységnyi

mennyiségre /1 ha-on történő termelésére/ vonatkozó értékeket /technológiai koefficienseket és fajlagos jövedelemmutatókat/, illetve az utolsó oszlop a vállalat /Az utolsó oszlopban most csak egyszerűen vállalat megnevezést alkalmazunk, mert az adatok az egész vállalatra vonatkoznak, itt még csak a rendelkezésre álló erőforrásokat, a későbbiekben adott termék vagy termékek termelésének területét, s a vállalat várható jövedelmét fogjuk itt megtalálni./ egészére vonatkozó kapacitáskorlátokat tartalmazza. Az x_1 , x_2 , x_3 , x_4 szimbólumokat - amelyek a különböző termékek termelési szintjét jelentik - a fejezetben emeltük ki. / 2. sz. táblázat/

A 2. sz. táblázat tulajdonképpen egy olyan kiinduló tervet reprezentál, amikor még semmit nem termelünk, minden vállalati erőforrást tartalékolunk és a vállalati jövedelem, mint azt az utolsó oszlop célfüggvényadata mutatja, jelenleg még 0. Ezt a táblázatot induló táblázatnak szoktuk nevezni.

Induló táblázat

2. sz. táblázat

Megnevezés	x_1 termék	x_2 termék	x_3 termék	x_4 termék	Vállalat
Terület, ha	1	1	1	1	1 000
Munkanap az I. csúcsidőszakban	1	4	4	2	2 600
Munkanap a II. csúcsidőszakban	4	2	6	10	6 800
Jövedelem, Ft	2 700	2 700	2 900	3 300	0

A továbbiakban lépésről lépésre újabb tervváltozatokat fogunk előállítani mindaddig, amíg az adott feltételek között legnagyobb jövedelmet biztosító tervhez nem jutunk.

A 2. sz. táblázatból kitűnik, hogy hektáronként a D termék ad legtöbb jövedelmet, tehát természetesen, hogy ennek minél nagyobb területen való termelésére törekszünk. Kérdés azonban, hogy a termeléshez szükséges erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiségek / terület, munkaerő/ a

a D termék termelését hány hektáron teszi lehetővé.
Ezt megkapjuk, ha a jobboldali oszlop adatait /a rendelkezésre álló kapacitásokat/ elosztjuk a D termék oszlopához tartozó adatokkal /a D termék fajlagos kapacitás-szükségletével/, azaz

$$1\ 000 : 1 = 1\ 000$$

$$2\ 600 : 2 = 1\ 300$$

$$6\ 800 : 10 = 680$$

Mivel egyik erőforrásból sem használhatunk fel többet, mint amennyi rendelkezésünkre áll, nyilvánvalóan a termelést a szűk keresztmetszethez kell igazítanunk, tehát a D terméket legfeljebb 680 ha területen termelhetjük.

A D termék adatait 680-nal szorozva megkapjuk a D termék 680 ha-on történő termeléséhez szükséges terület és munkanap-szükségletet. Ha az így kiszámított szükségleti adatokat levonjuk a rendelkezésre álló kapacitásokból, megkapjuk azt a területet, illetve munkanapmennyiségeket, amelyeket nem használunk fel a D termék 680 ha-on történő termelése során. E szerint az eddig fel nem használt kapacitás a következőképpen alakul:

$$1\ 000 - 1 \cdot 680 = 1\ 000 - 680 = 320\text{ ha}$$

$$2\ 600 - 2 \cdot 680 = 2\ 600 - 1\ 360 = 1\ 240\text{ munkanap}$$

az I. csúcsidőszakban

$$6\ 800 - 10 \cdot 680 = 6\ 800 - 6\ 800 = 0\text{ munkanap a}$$

II. csúcsidőszakban

és a megfelelő jövedelem, azaz a célfüggvény megfelelő értéke

$$0 - 3\ 300 \cdot 680 = - 2\ 244\ 000\text{ Ft}$$

A D terméket tehát 680 ha-on termelve, a II. csúcsidőszakban rendelkezésre álló munkanapot teljesen felhasználjuk, de a területet és az I. csúcsidőszakban rendelkezésre álló munkanapok mennyiségét nem használjuk ki teljesen. Az elérhető jövedelem 2 244 000 Ft /ez ugyan minusz előjellel szerepel, amely - mint később látni fogjuk - csupán számítástechnikai okokból adódik, s azt -1-gyel szorozva pozitív értéket kapunk, ez az oka annak is, hogy a továbbiakban a -z szimbólumot

használjuk és a jövedelem -1-szeresét találjuk.

Most az a kérdés, tudjuk-e hasznosítani a még fel nem használt 320 ha területet és az I. csúcsidőszakban még rendelkezésre álló 1 240 munkanapot. Kísérjük meg annak hasznosítását a C termékkel. A C termék azonban a II. csúcsidőszakban is igényel munkanapot, így termelése csak akkor válik lehetővé, ha egyidejűleg csökkentjük a D termék termelését, s ezáltal a II. csúcsidőszakban munkanapot szabadítunk fel.

A C termék egy ha-on történő termelése a II. csúcsidőszakban 6 munkanapot igényel, a D termék pedig 10 munkanapot. Ahhoz, hogy a C terméket 1 ha-on termelni tudjuk, a D termék területét tehát $6 : 10 = 0,6$ ha-ral csökkenteni kell. Miközben azonban a D termék termelését $0,6$ ha-ral csökkentjük, nemcsak a II. csúcsidőszakban szabadítunk fel a termelésből 6 munkanapot, hanem az I. csúcsidőszakban is $2 \cdot 0,6 = 1,2$ munkanapot, s egyidejűleg $1 \cdot 0,6 = 0,6$ ha területet is, s ezzel egyidőben elveszítünk $3 \cdot 300 \cdot 0,6 = 1\,980$ Ft jövedelmet.

Ha már most a C termék 1 ha-on való termelése igényel 1 ha területet, de ugyanakkor a D termék termelésének csökkentése révén $0,6$ ha-t a termelésből felszabadít, a valóságos területigény a kettő különbsége, azaz $1 - 0,6 = 0,4$ ha.

Hasonlóképpen a C termék az I. csúcsidőszakban négy munkanapot igényel, de a D termék termelésének csökkentése révén $2 \cdot 0,6 = 1,2$ munkanapot felszabadít, azaz a valóságban $4 - 1,2 = 2,8$ munkanap-igénnyel lép fel. A II. csúcsidőszakban a C termék igénye 6 munkanap, de egyúttal $0,6 \cdot 10 = 6$ munkanap felszabadítását is biztosítjuk, azaz a II. csúcsidőszakban a munkanap-igény $6 - 6 = 0$.

Végül a C termék 1 ha-on $3\,000$ Ft jövedelmet ad, de ugyanakkor $3 \cdot 300 \cdot 0,6 = 1\,980$ Ft jövedelem elvesztését idézi elő, azaz a valóságban $2\,900 - 1\,980 = 920$ Ft jövedelmet biztosít.

Természetesen a terv javítása nemcsak a C, hanem az A vagy a B termék termelésbe vonásával is elképzelhető, sőt lehet, hogy ez utóbbi még célszerűbb, ezért a C termékhez hasonlóan átalakítjuk az A és B termékhez tartozó adatokat is. Az így előállított adatokat a 3. sz. táblázatba foglaljuk.

Első tervváriáns

3. sz. táblázat

Megnevezés	x_1 termék	x_2 termék	x_3 termék	Vállalat
Terület, ha	0.6	0.8	0.4	320
Munkanap az I. csúcsidőszakban	0.2	3.6	2.8	1 240
x_4/D termék termelése ha/	0.4	0.2	0.6	680
Jövedelem, Ft/-z/	1 380	2 040	920	-2 244 000

A 3. sz. táblázat szintén egy tervváltozatot mutat. A megnevezés oszlopban a II. csúcsidőszak már nem található, mivel a II. csúcsidőszakban a rendelkezésre álló munkanapot felhasználtuk. Helyette beírtuk a D termék termelését x_4 -et/, amelynek termelésbe vonása tette szükségessé, illetve lehetővé a II. csúcsidőszakban rendelkezésre álló munkanapok felhasználását. A 3. sz. táblázatba foglalt tervváltozat azt mutatja, hogy amennyiben a D terméket 680 ha-on termeljük, a II. csúcsidőszakban rendelkezésre álló munkanapot teljes mértékben felhasználjuk a termelésre, de 320 ha terület és az I. csúcsidőszakban 1 240 munkanap még kihasználatlanul marad. Ez a termelési terv 2 244 000 Ft jövedelem elérését teszi lehetővé. Az x_1 , x_2 és x_3 oszlopokhoz tartozó adatok az mutatják, hogy az A termék 1 ha-on való termelése 0.4, a B terméké 0.2, a C terméké 0.6 ha-val teszi szükségessé a D termék termelésének csökkentését, így a valóságban az A termék csak 0.6, a B termék 0.8, a C termék pedig 0.4 ha területet igényel a 320 ha-ból ahhoz, hogy 1 ha-on termelhessük. Hasonlóképpen a D termék termelésének csökkentéséből adódóan módosul az I. csúcsidőszakban a munkaigény, valamint az elérhető jövedelem is.

A 3. sz. táblázat utolsó sorából kitűnik, hogy az új helyzetben a B termék ad egységnyi területen legnagyobb jövedelmet.

Újra megkeressük a szűk keresztmetszetet, s az egész táblázatot az előbbi módon átszámítva új táblázathoz jutunk. /A számítások további bemutatásától eltekintünk, hiszen ezt a későbbiekben részletesebben fogjuk tanulni./

A számítások során kapott adatokat a 4. sz. táblázatban foglaljuk össze. E szerint a D termék termelése 611.11 ha, a B terméké pedig 344.44 ha volt. Ez a termelési szerkezet lehetővé teszi 2 945 551 Ft jövedelem elérését, s a munkaerőnek mindkét csúcsidőszakban történő teljes felhasználását, azonban nem használja fel teljesen a területet, hanem 44.45 ha kihasználatlanul marad.

Második tervvariáns

4. sz. táblázat

Megnevezés	x_1 termék	x_3 termék	Vállalat
Terület, ha	0.55	-0.22	44.45
x_2 /B termék termelése, ha/	0.06	0.78	344.44
x_4 /D termék termelése, ha/	0.39	0.44	611.11
Jövedelem, Ft/-z/	1 257.6	-671.2	-2 945 551

A táblázatból az is kitűnik, hogy az A termék termelése jövedelmező volna, hiszen az új helyzetben ha-onként 1 257.6 Ft jövedelemmel kecsegtet. A C termék termelése az új helyzetben veszteséges lenne, amit a célfüggvény koefficiensének negatív előjele mutat.

Megkeressük most az A termékre a szűk keresztmetszetet /ez pontosan a terület lesz/ és az előbbi számításokat megismételve, újabb tervváltozathoz jutunk /5. sz. táblázat/.

Harmadik tervvariáns

5. sz. táblázat

Megnevezés	x_3 termék	Vállalat
x_1 /A termék termelése, ha/	-0.4	80.82
x_2 /B termék termelése, ha/	0.8	339.59
x_4 /D termék termelése, ha/	0.6	579.59
Jövedelem, Ft	-68.26	-3 047 654

Az 5. sz. táblázat olyan termelési szerkezetet mutat, amelyben az A terméket 80.82 ha-on, a B terméket 339.59 ha-on, a D terméket 579.59 ha-on /Gyakorlatilag a tizedes számokat egész számra kerekítjük, itt azonban célszerű volt két tizedes pontosságot feltüntetni az ellenőrizhetőség érdekében/. termeljük és az egész elérhető jövedelem 3 047 654 Ft. Ezzel optimális megoldáshoz jutottunk, hiszen - mint a táblázatból kitűnik - a C termék termelése nem lenne jövedelmező /negatív előjel/. Könnyen ellenőrizhető a mérlegek elkészítésével, hogy ez a termelési szerkezet is pontosan 2 600, illetve 6 800 munkanapot igényel és 1 000 ha területet használ fel.

Figyelemre méltó, hogy bár a feladat igen egyszerű és a logikai kalkulációval összeállított vetésszerkezet tervezése során is nagy súlyt helyeztünk a minél magasabb jövedelem elérésére, a logikai kalkulációval előállított tervben elért 3 000 000 Ft jövedelemmel szemben a lineáris programozással összeállított termelési szerkezet 3 047 654 Ft jövedelem, azaz 47 654 Ft jövedelemtöbblet elérését teszi lehetővé. A gyakorlati tervezés során többmillió Ft jövedelemtöbbletet tudunk elérni.

Érdekes megfigyelni, hogy a C termék - bár önmagában vizsgálva a második legjövedelmezőbb termék -, nem szerepel a programozással készített termelési tervben. A gyakorlatban is az a helyzet, hogy gyakran egy termék, amely önmagában /ágazati szinten/ vizsgálva jövedelmezőbbnek mutatkozik, egyáltalán nem biztos, hogy az egész vállalati komplexumban is jövedelmező, sőt esetleg veszteséges is lehet. /A C termék termelése ugyanis ha-onként 68.26 Ft-tal csökkentené az elérhető jövedelmet, mint ez az 5. sz. táblázatból kitűnik./

A matematikai programozás alkalmazásának nagy előnye, hogy az egyes ágazatokat nemcsak önmagukban, a vállalat komplexumából kiragadva tudjuk vizsgálni, hanem a vállalatot teljes komplexumban át tudjuk tekinteni. Mint az eddigiekből is kitűnik, az optimális tervváltozatot most is több lépésben állítottuk elő, de minden lépésben a modellben levő összes adatot átszámítottuk, egymással kapcsolatba, összefüggésbe hoztuk, s a vállalatot teljes komplexumban vizsgáltuk.

Egyszerű példánkban könnyen megtaláltuk annak az okát is, hogy a C termék, amely önmagában vizsgálva, a második az 1 ha-on elérhető jövedelem nagyságát illetően, miért veszteséges az egész vállalati komplexumot tekintve, illetve a B termék, amely önmagában vizsgálva, 1 ha-on a legkevesebb jövedelmet adja, miért foglalja el a második helyet a vállalat teljes komplexumában. Tekintsük

meg még egyszer az 1. sz. táblázatot. A legjövődélmezőbb a D termék. Munkacsúsa a II. csúcsideőszakban van. Ugyancsak itt találjuk a munkacsúcsot a C termék esetében is. A II. csúcsideőszakban rendelkezésre álló munkanapokért folyó versenyből természetesen a D termék kerül ki győztesen, mert magasabb jövődélmét biztosít. A C termék termelése csak a D termék termelésének nagyarányú csökkentése útján lenne lehetséges. Ugyanakkor a B termék munkacsúsa éppen az I. csúcsideőszakban van, azaz a D termékkel jól kiegészítik egymást. Ugyancsak a II. csúcsideőszakban találjuk az A termék munkacsúcsát is.

Az ilyen egyszerű feladatoknál könnyű áttekinteni az adatok kapcsolatát, rámutatva arra, hogy az egyes termékek között hol van összhang, vagy ellentmondás. Egy mezőgazdasági vállalat gyakorlati tervezése során viszont többszáz sorból és oszlopból álló modellhez is eljuthatunk. Márpedig több ezer adattömeg kapcsolatát és összefüggését aligha vagyunk képesek pusztán logikai úton áttekinteni.

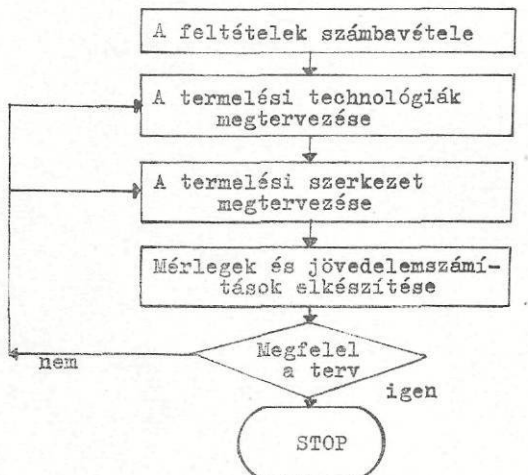
A mérlegösszefüggések problémáját más oldalról közelítjük meg, ha a tervet csupán logikai úton állítjuk össze és más oldalról, ha a matematikai tervezés módszerét alkalmazzuk. Ha csupán logikai úton tervezünk, akkor - mint láttuk -, először megtervezük a termelési szerkezetet és a termelési technológiákat, majd kiszámítjuk a mérlegek szükségleti oldalát, végül ezt egybevetjük a rendelkezésre álló kapacitással, azaz forrásoldallal. A valóságban azonban általában a mérlegek forrásoldala a "meghatározott", s olyan termelési szerkezetet kell kialakítani, valamint olyan technológiai eljárásokat célszerű alkalmazni, amelyekben a szükségleti oldal a rendelkezésre álló kapacitásnak megfelel és emellett a legnagyobb vállalati jövődélmét biztosítja. A matematikai tervezés alkalmas a probléma ilyen megoldására. /Később látni fogjuk, hogy valójában a termelési erőforrások mennyisége sem meghatározott. A matematikai programozás ekkor is hatékonyan alkalmazható az erőforrás szükségletnek a termelési szerkezettel összehangolt meghatározására./

1.8. A döntési folyamat összehasonlítása

Az előbbiek során egyszerű feladatot oldottunk meg, egyrészt a jelenleg széles körben alkalmazott tervezési módszerrel, majd pedig a lineáris programozással. Ennek alapján alkalmunk van arra, hogy a kétféle módszerrel végigvezetett döntési folyamatot ábrázoljuk és összehasonlítsuk.

Induljunk ki először a jelenleg általánosan használtos módszerrel végzett tervezésből. Láttuk, hogy ekkor először számbavesszük a feltételeket, ezután megtervezük

a termelési technológiákat, majd pedig a termelési szerkezetet. /Természetesen a sorrend meg is fordítható úgy, hogy először a termelési szerkezetet, majd a technológiákat tervezzük meg. /A következő lépésben a mérleg- és jövedelemvizsgálatokat végezzük el, amikor is felvetődik a kérdés, hogy a tervezett termelési szerkezet és termelési technológiák megvalósításához rendelkezünk-e a szükséges kapacitásokkal, vagyis a területmérleg a munkaerómérlegek, a gép- és az anyagmérlegek, stb. alapján a terv megvalósítható-e és a terv szerint elérhető jövedelem nagysága megfelelő-e számunkra. Ha igen, a termelési folyamat befejeződött /STOP/, tehát döntünk a terv elfogadásáról és megvalósításáról. Ha mérlegek és a jövedelem nem megfelelőek, akkor módosítjuk a termelési szerkezetet, vagy a termelési technológiákat, vagy mindkettőt és ismét elvégezzük a mérleg- és a jövedelemvizsgálatot. A termelési szerkezet, valamint a termelési technológiák változtatását, a mérleg- és a jövedelemvizsgálatokat mindaddig végezzük, vagyis az egész döntési folyamatot mindaddig ismételjük, amíg olyan tervhez nem jutunk, amely mind a mérlegfeltételeket, mind a jövedelem szempontjából számunkra elfogadható. Az ilyen módon végzett döntési folyamatot az 1. ábra szemlélteti.



A döntési folyamat vázlata
1. ábra

Egy komplex vállalati tervezés esetén, amikor sokféle termelési tevékenységgel és termelési technológiával, valamint sokféle mérleggel kell dolgoznunk, a mérlegszámítások és a jövedelemvizsgálat igen munkaigényes és a

folyamat többszöri megismétlésére a mezőgazdasági vállalatok szakembereinek aligha van ideje.

Mint láttuk, másként történik a tervezés, ha azt matematikai programozással végezzük. Az első feladat most is a feltételek számbavétele, majd ezt követi a termelési technológiák megtervezése. Ezután összeállítjuk és megoldjuk a matematikai modellt, amelynek eredményeként olyan termelési szerkezetet kapunk, amely biztosan minden mérlegfeltétel tekintetében kielégíti előírásainkat, s e feltételek mellett a legnagyobb jövedelmet biztosítja. Természetesen ha egyáltalán lehetséges a feladat megoldása, illetve ha a célfüggvényben a legnagyobb jövedelem biztosítását írtuk elő.

Most tehát lényegében nincs szükség mérlegvizsgálatokra, hiszen a mérlegekre előírt feltételek teljesülnek, - ha van a feladatnak megoldása - és nincs szükség jövedelemszámításra sem, hiszen a számítógéptől nyert megoldás az elérhető jövedelmet is tartalmazza, sőt biztos, hogy ez a jövedelem az adott feltételek között /már mint a modellbe beépített feltételek között/ maximális. A matematikai programozással megvalósuló tervezés folyamatát a 2. ábra szemlélteti.



A döntési folyamat vázlata

2. ábra

Az eddigiekkel kapcsolatban néhány megjegyzést tehetünk: Mindkét tervezési módszer vizsgálatánál feltételeztük, hogy csak egy tervváltozatot készítünk. Valójában azonban - mint azt majd a gyakorlati alkalmazás során látni fogjuk -, célszerű többféle tervváltozatot is

elkészíteni, s azokat összehasonlítva, a gyakorlati megvalósításra leginkább megfelelő változatot kiválasztani és elfogadni. Ez azzal jár, hogy megvizsgáljuk, van-e lehetőség a feltételek megváltoztatására, vagy számolhatunk-e azok megváltoztatásával és ha igen, számbavesszük, milyen változtatások, illetve változások lehetségesek. Ezután megnézzük, hogy a feltételek különböző változása esetén milyen tervet lenne célszerű megvalósítani. Az így elkészített tervek összehasonlítása során támpontot kapunk arra vonatkozólag is, hogy a változtatások milyen eredménnyel járhatnak, célszerű-e a változtatásokat végrehajtani, vagy nem, illetve, ha a változások elkerülhetetlenek mit kell tennünk, hogy alkalmazkodjunk azokhoz.

Mindkét tervezési módszer alkalmas arra, hogy több tervváltozatot állítsunk elő. A matematikai tervezés azonban itt még inkább előnyökkel rendelkezik, hiszen elegendő a modell néhány adatának kicserélése az új feltételeknek megfelelően, s a modellt újra megoldva, új tervváltozatot kapunk. Másrészt mint látni fogjuk, a matematikai modell egy-egy megoldása során is több tervváltozatot nyerhetünk.

Eddig a matematikai programozással végzendő tervezés legegyszerűbb esetét, a lineáris programozást tekintettük példaként, s csak az volt a feladat, hogy adott termelési technológiák és adott termelési kapacitások mellett optimalizáljuk a termelési szerkezetet. Később találkozni fogunk olyan problémákkal, amikor a lineáris programozással a termelési szerkezet és a termelési források összefüggő optimumát kell egyidejűleg meghatározni, illetve olyan problémákkal is, amikor a termeléstehnológiai terveket szintén optimalizáljuk és számítógéppel tervezzük meg egyidejűleg és összefüggésben a termelési szerkezet és a termelési források optimumával. Végül foglalkozni fogunk nemlineáris modellekkel is. Ilyen komplex és bonyolult tervezési feladat megoldása a jelenleg általánosan használt tervezési módszerekkel még nehezebb feladat elé állítana bennünket. A matematikai programozással történő tervezésnek igen nagy előnye az is, hogy mind a tervezés adatbázisának megteremtése, mind a modell összeállítás, megoldása és a variánsszámítások, valamint a döntés után a terv részletes kimunkálása, illetve a modellmegoldás részletes feldolgozása is nagymértékben automatizálható.

2. FEJEZET

LINEÁRIS ALGEBRA

Lineáris algebrának nevezzük a matematikának azt az ágát, amely a lineáris terek vizsgálatával foglalkozik. A lineáris teret egy speciális halmaznak tekinthetjük. Elképzelni csak az egy dimenziós, két dimenziós és három dimenziós lineáris teret tudjuk, de a lineáris tér vizsgálatát az n-dimenziós lineáris térre terjesztjük ki, amikor is a tér elnevezést csak képletes értelemben használjuk.

A lineáris tér fogalmával - illetve azzal, hogy milyen feltételeket kell adott halmaznak kielégítenie ahhoz, hogy lineáris térről beszéljünk - a következő fejezetben ismerkedünk meg. Előtte meg kell ismerkedni a mátrixokkal és a mátrixokkal végezhető műveletekkel, azaz a mátrixaritmetikával, a lineáris algebrával.

2.1. Mátrixok

2.1.1. Mátrix fogalma

Foglaltjuk táblázatba néhány takarmány fajlagos táplálónyag tartalmát.

1 kg takarmányban lévő táplálónyag mennyiségek

6.sz. táblázat

Megnevezés		Kukorica-dara	Búza-dara	Extrahált n.forgó dara
Szárazanyag	g/kg	912,000	909,000	908,000
NE _m	MJ/kg	8,327	8,236	6,465
NE ₁	MJ/kg	7,798	7,508	6,256
NE _g	MJ/kg	6,680	6,340	2,992
Nyers fehérje	g/kg	91,200	136,350	364,108
Calcium /CaO/	g/kg	0,300	0,800	3,500
Foszfor /P ₂ O ₅ /	g/kg	2,800	3,200	10,100

/NE_m, NE₁, NE_g a takarmányozástanból ismert, életfenntartási, tejtermelési, illetve testtömeggyarapodási energia megajoulban megadva./

A konkrét adatok vizsgálata nélkül a táblázatról a következőket tudjuk mondani:

a./ A számtáblázatnak hét sora és három oszlopa van, tehát egy hétszer hármass táblázattal állunk szembe.

b./ A táblázat sorokra bontható, s a sorok mutatják, hogy egy-egy táplálóanyagból mennyit tartalmaz a különböző takarmányok egy kg-ja.

c./ A táblázat oszlopokra bontható, s egy-egy oszlopa fejezi ki, hogy valamely adott takarmány egy kg-jában a különböző anyagokból milyen mennyiségeket találunk a hozzá tartozó /a sorokban megadott/ mértékegységben kifejezve.

d./ A táblázatban az adatok, sorok, illetve oszlopok szerint rendezettek.

A matematikában az ilyen táblázatot mátrixnak nevezzük. /A statisztikában a statisztikai táblázat elnevezést használjuk./

A mátrix természetesen bármennyi sorból és bármennyi oszlopból állhat, általánosan azt mondjuk, hogy egy adott mátrix m sorból és n oszlopból áll, ahol az m és n bármely természetes egész szám lehet.

A fentiek alapján az m sorból és az n oszlopból álló számtáblázatot mátrixnak nevezzük.

2.1.2. A mátrix jelölése

Egy konkrét számból álló mátrixot jelölhetünk úgy, hogy az adott konkrét számokat szögletes zárójelben felírjuk:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Azokat az adatokat, amelyekből a mátrix felépül, a mátrix elemeinek, vagy komponenseinek nevezzük.

Jelölhetjük a mátrixot általánosan, szimbólumokkal, latin kisbetűkkel is, a konkrét számok felírása nélkül, a konkrét számok helyett használt betűszimbólumokat szögletes zárójelbe foglalva. Ilyenkor mindig jelezzük, hogy az adott szimbólum, azaz a mátrix adott komponense hányadik sorhoz és hányadik oszlophoz tartozik.

A komponensekhez irt első index mindig a sor, a második az oszlop sorszáma utal. Az adott mátrix tehát m sorból és n oszlopból áll.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ha meg akarjuk takarítani az összes komponens felírásával járó fáradtságot és helyigényt, akkor a mátrixot félkövéren szedett latin nagybetűvel /vagy kézírásban aláhúzott latin nagybetűvel/ szokták jelölni, azaz:

A

vagy amennyiben jelölni kívánjuk a mátrix típusát /hány sorból és hány oszlopból áll/, akkor azt a mátrix alatt zárójelben megjegyezzük:

$$\frac{\underline{A}}{m \cdot n} \quad \text{vagy} \quad \frac{\underline{A}}{5 \cdot 3/}$$

Jelölhetjük a mátrixot általános elemével is szögletes zárójelbe téve, azaz:

$$[a_{ij}], \quad \text{vagy} \quad /i = 1, 2 \dots m/$$

$$\underline{A} = [a_{ij}] \quad /j = 1, 2 \dots n/$$

2.1.3. A mátrix transzponáltja

A 6.sz. táblázatban megadott példában önkényesen választottuk, hogy a sorokban a táplálóanyagokat, az oszlopokban a takarmányokat adtuk meg. Elkészíthető a táblázat a sorok és oszlopok felcserélésével is, amikor a sorokban a takarmányokat, oszloponként pedig a táplálóanyagokat adnánk meg.

Ha egy mátrix sorait és oszlopait felcseréljük, akkor azt mondjuk, hogy az adott mátrixot transzponáltuk, s eredményül az eredeti mátrix transzponáltját kaptuk. A mátrix transzponáltját a mátrixhoz a jobb felső sarokhoz írt csillaggal, vagy T betűvel jelöljük, azaz:

$$\underline{A}^*, \underline{A}^T, [a_{ij}]^*, [a_{ij}]^T$$

Egy $m \cdot n$ típusú mátrix transzponáltja $n \cdot m$ típusú mátrix.

Természetesen az $\underline{A}$ mátrix transzponáltjának transzponáltja maga az $\underline{A}$ mátrix, vagyis

$$\left[\underline{A}^T \right]^T = \underline{A}$$

2.1.4. Speciális mátrixok

a./ Zérusmátrix /nullmátrix/

Olyan mátrix, amelynek minden eleme zérus.
Jele: $\underline{O}$. Pl.:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b./ Négyzetes /kvadratikus/ mátrix

Olyan mátrix, amelyben a sorok és oszlopok száma megegyezik, azaz $m = n$. Szoktuk nevezni $n \cdot n$ típusú, vagy n -ed rendű mátrixnak is. Pl.:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 8 \\ 9 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

A négyzetes mátrix a_{ii} alakú elemeit /bal felső sarokból a jobb alsó sarokba húzott átló - un. főátló - mentén elhelyezkedő elemeit/ diagonális elemeknek nevezzük. Az előbbi mátrix diagonális elemei tehát 5, -6, -7.

c./ Diagonális mátrix

Diagonális mátrixról beszélünk, amikor a mátrix diagonálistól különböző elemei zérusok. Pl.:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrixokat a

$$\langle a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \rangle$$

formában is szokás jelölni, amikor csupánadiagonális elemeket írjuk fel.

d./ Egység mátrix

Olyan diagonális mátrix, amelyben minden diagonális elem: 1. Jele: $\underline{E}$. Pl.:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e./ Permutáló mátrix

Olyan mátrix, amelynek sorait, vagy oszlopait megfelelően átrendezve egység mátrixot kapunk. Pl.:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f./ Háromszögmátrix /trianguláris mátrix/

Olyan kvadratikus mátrix, amelynek vagy a főátló feletti, vagy a főátló alatti elemei mind zérusok. Az első esetben alsó háromszögmátrixról, a második esetben felső háromszögmátrixról beszélünk, s szoktuk alkalmazni a $\triangleleft$ és a $\triangleright$ szimbólumokat is jelölésükre. Pl.:

Alsó háromszögmátrix:

$$\triangleleft = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Felső háromszögmátrix:

$$\triangleright = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Természetesen az alsó háromszögmátrix transzponálásával a

$$\triangle^T = \triangle$$

mátrixot, felső háromszögmátrix transzponálásával a

$$\triangle^T = \triangle$$

mátrixot nyertük.

Legyen:

$$\underline{H}_1 = \triangle$$

$$\underline{H}_2 = \triangle$$

$$\underline{H}_3 = \triangle$$

$$\underline{H}_4 = \triangle$$

Ez esetben fennállnak a következő összefüggések:

$$\underline{H}_1 = \underline{H}_2^T$$

$$\underline{H}_2 = \underline{H}_1^T$$

$$\underline{H}_3 = \underline{H}_4^T$$

$$\underline{H}_4 = \underline{H}_3^T$$

másrészt az adott háromszögmátrixok egymásból tükrözéssel is képezhetők, hiszen $\underline{H}_1$ a $\underline{H}_4$ felső vízszintes tengelyre való tükröződése, ill. $\underline{H}_1$ a $\underline{H}_4$ -nek az alsó vízszintes tengelyre való tükröződése, $\underline{H}_4$ a $\underline{H}_1$ -nek a függőleges tengelyre való tükröződése, illetve $\underline{H}_2$ a $\underline{H}_3$ -nek a függőleges tengelyre való tükröződése, s ugyanilyen a $\underline{H}_2$ függőleges tengelyre vonatkoztatott tükröződést találunk $\underline{H}_1$ és $\underline{H}_3$ között. Végül a $\underline{H}_2$ és $\underline{H}_3$ között is a vízszintes tengelyre való tükröződés lehetősége áll fenn.

g./ Szimmetrikus mátrix

Olyan kvadratikus mátrix, amelynek elemei a fődiagonálisra szimmetrikusak. Ilyen például az:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ha $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix, akkor: $\underline{A}^T = \underline{A}$

Szimmetrikus mátrixokat csak kvadratikus mátrixok között találunk.

h./ Ferdén szimmetrikus mátrix, vagy antiszimmetrikus mátrix, ha érvényes a

$$A = -A^T$$

reláció, azaz ha az A mátrix transzponálásával olyan mátrixhoz jutunk, amelynek elemei az A mátrix azonos helyen lévő elemeitől csupán előjelüket tekintve különböznek.

i./ Szalagmátrix

A szalagmátrixok olyan mátrixok, amelyekben a diagonális elemek, valamint a diagonális elemekkel szomszédos első, második esetleg harmadik, negyedik, stb. elemek különböznek zérustól, de a főátlótól bizonyos távolságra lévő elemek mindegyike zérus.

Ismeretes, hogy amennyiben a diagonális elemeken kívüli elemek mind zérusok, diagonális mátrixról beszélünk, s ennek speciális esete az egységmátrix, amikor a diagonális elemek egységek. Amennyiben a fődiagonális és az ezzel szomszédos elemek különböznek zérustól, de a mátrix többi eleme mind zérus, akkor kontinuás /tridiagonális/ mátrixról vagy Jacobi-féle mátrixról beszélünk. Pl.:



Amennyiben további szomszédos elemek is különböznek zérustól, akkor azt szoktuk megjelölni, hogy hány "ferde" sorban található zérustól különböző elemek. Például egy öt soros szalagmátrix vázlatosan jelölve a következő:



Egy adott s szalagmátrix transzponáltja maga is szalagmátrix, amely ugyanannyi "ferde" sorból áll, mint az eredeti mátrix. Amennyiben a mátrix nemzérus elemei az s mátrixban azonosak az $S^T = S$, azaz a transzponált mátrix az eredeti mátrix-szal megegyezik. Ugyancsak egyezőség áll fenn, amennyiben

a fődiagonálistól azonos távolságra lévő elemek mindkét irányban azonosak.

A szalagmátrix nemzérus elemei lehetnek azonosak, egy-egy ferde sorban azonosak, stb. Ha egy mátrixban - függetlenül attól, hogy szalagmátrix-e vagy sem - minden "ferde" sor csupa megegyező elemből áll, vagyis a mátrix elemei csupán oszlop és sorindexük különbségétől függenek, akkor az adott mátrixot Toeplitz típusú mátrixnak nevezzük. Ez esetben:

$$a_{ij} = a_{j-i}, \text{ azaz}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Ha egy Toeplitz mátrix szimmetrikus is, elemeire érvényes az

$$a_{ij} = a_{|j-i|}$$

összefüggés.

Természetesen a szalagmátrix nemzérus "ferde" sorai nem csak a bal felső sarokból a jobb alsó sarok felé tarthatnak, hanem a bal alsó saroktól a jobb felső sarokba tartó átló szerint is. A bal felső saroktól a jobb alsó sarok felé tartó nemzérus "ferde" sorokból álló szalagmátrix és a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba tartó nemzérus "ferde" sarokból álló szalagmátrixok egymás tükröződései, amelynek tengelye mind vízszintes, mind függőleges irányú lehet.

A későbbiek során megismerkedünk még a szalagmátrixok, valamint általában a Toeplitz típusú mátrixok több érdekes tulajdonságával.

j./ Minormátrix

Egy mátrix tetszős szerinti sorának és oszlopának elhagyásával nyert mátrixot minormátrixnak nevezzük. Ha például az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & -7 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 2 & 9 & 4 \\ 6 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix első és negyedik sorát, valamint második és ötödik oszlopát elhagyjuk, a maradék minor a következő:

$$\begin{matrix} A_{2,3,5} \\ 1,3,4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

A felső indexek azt mutatják, hogy hányadik sorokat, az alsó indexek pedig, hogy hányadik oszlopokat tartottuk meg.

k./ Hipermátrix

Olyan mátrix, amelynek elemei maguk is mátrixok. Nagyméretű mátrixokat, vagy ha gazdasági megfontolások vagy más okok miatt valamely mátrixot vagy mátrixrészt célszerű külön mátrixokra, mátrixblokkokra bontani vízszintes és függőleges egyenesekkel, a kapott blokkok az eredeti mátrix elemeit képezhetik. Pl.:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Az egyes blokkokat minormátrixoknak, a blokkokra bontást particionálásnak nevezzük.

Ha egy hipermátrixot úgy particionáltunk, hogy a diagonális blokkoktól különböző blokkok zérusmátrixok, kvázidiagonális mátrixról beszélünk. Pl.:

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A}_{11} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{A}_{22} \end{array} \right] = \langle \underline{A}_{11}, \underline{A}_{22} \rangle$$

1./ Vektor

Már szó volt arról, hogy a mátrixok sorokra, vagy oszlopokra bonthatók, s így számsorokat vagy számoszlopokat kapunk. A matematikában egy számsort, vagy egy számoszlopot vektornak nevezünk. /A statisztikában a statisztikai sor elnevezést használják./

Az olyan mátrixot tehát, amely egy sorból, vagy egy oszlopból áll, vektornak nevezzük.

Az oszlopvektor $m \cdot 1$ típusú, a sorvektor pedig $1 \cdot n$ típusú mátrix. Eszerint a mátrix sorvektorok, vagy oszlopvektorok rendszereként is felfogható.

A vektorokat félkövéren szedett /vagy kéziratban aláhúzással jelölt/ latin kisbetűvel jelöljük. A sorvektoroknál a transzponálást is feltüntetjük, hiszen a sorvektor felfogható az oszlopvektor transzponáltjaként. Eszerint tehát:

Oszlopvektor: $\underline{a}$,

Sorvektor: $\underline{a}^T$, illetve $\underline{a}^*$,

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \underline{a}^T = \underline{a}^* = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Jelölhetjük a vektorokat általános elemük felírásával is szögletes zárójelbe téve, pl.:

$$[a_j], [a_j]^T, [a_i]^*$$

vagy helytakarékoság céljából a:

$$\underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]^*$$

jelölést is alkalmazhatjuk, amikor is az oszlopvektort sorvektor formájában írjuk fel, de a transzponálással jelöljük, hogy az oszlopvektor.

A továbbiakban ismerkedjünk meg néhány speciális vektorral:

Zérusvektor

Olyan vektor, amelynek minden eleme nulla. Jelölése: $\underline{0}$ vagy $\underline{0}^T$, illetve $\underline{0}^K$, például:

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{vagy} \quad \underline{0}^T = \underline{0}^K = [0, 0, \dots, 0]$$

A zérusmátrix tehát zérusvektorok rendszereként is felfogható.

Egységvektor

Olyan vektor, amelynek i -edik eleme 1, a többi 0. Jelölése $\underline{e}_i$, vagy $\underline{e}_i^T$, illetve $\underline{e}_i^K$, például:

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_3^T = \underline{e}_3^K = [0, 0, 1, 0]$$

Összegző vektor

Olyan vektor, amelynek minden eleme 1. Jelölése: $\underline{1}$, illetve $\underline{1}^T$, vagy $\underline{1}^K$, például:

$$\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{1}^T = \underline{1}^K = [1, 1, 1, 1]$$

A vektorfogalom ismerete alapján könnyű belátni, hogy a mátrix oszlopvektorok, vagy sorvektorok rendszereként is fel-

fogható. Az $\underline{A}$ mátrix tehát felírható oszlopvektorok rendszereként:

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n], \quad \text{például:}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right]$$

vagy sorvektorok rendszereként:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^T \\ \underline{a}_2^T \\ \vdots \\ \underline{a}_m^T \end{bmatrix}, \quad \text{például:}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 4, & 6, & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2, & 1, & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7, & 5, & 4 \end{bmatrix} \right]$$

Természetes, hogy az egységmátrix egységvektorok rendszereként fogható fel, például:

$$\underline{E} = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n] = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^T \\ \underline{e}_2^T \\ \vdots \\ \underline{e}_m^T \end{bmatrix}$$

m./ Skalár

Olyan mátrix, amely egy sorból és egy oszlopból áll, tehát $1 \cdot 1$ típusú mátrix /vagy egy elemű vektor/. Ilyenkor nem is használjuk a mátrix vagy vektor írásmódot.

2.1.5. Nagyságrendi relációk

Egy $m \cdot n$ típusú A mátrix akkor egyenlő egy $m \cdot n$ típusú B mátrix-szal, ha megfelelő helyen lévő elemeik azonosak. Például: ha:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

akkor $\underline{A} = \underline{B}$, mert

$$a_{11}=b_{11}, a_{12}=b_{12}, a_{21}=b_{21}, a_{22}=b_{22}$$

vagyis

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Ugyanigy értelmezzük a vektorok közötti relációkat is, azaz ha

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \underline{a} = \underline{b}$$

Az azonos helyen lévő elemek összehasonlítása alapján értelmezzük az alábbi relációkat is:

$\underline{A} > \underline{B}$	$\underline{a} > \underline{b}$	nagyobb
$\underline{A} \geq \underline{B}$	$\underline{a} \geq \underline{b}$	nem kisebb
$\underline{A} < \underline{B}$	$\underline{a} < \underline{b}$	kisebb
$\underline{A} \leq \underline{B}$	$\underline{a} \leq \underline{b}$	nem nagyobb
$\underline{A} \geq \underline{0}$	$\underline{a} \geq \underline{0}$	nem negatív

A nagyságrendi relációk természetesen csak azonos típusú /ugyanannyi sort és ugyanannyi oszlopot tartalmazó/ mátrixok, illetve azonos elemszámú vektorok között értelmezhetők.

2.2. Műveletek mátrixokkal

2.2.1. Összeadás

Az összeadás művelete csak azonos típusú /azonos sorból és azonos oszlopból álló/ mátrixok esetén értelmezhető. Az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \text{ és } \underline{B} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$$

$m \cdot n$ típusú mátrixok összege ugyancsak $m \cdot n$ típusú mátrix

$$C = [c_{ij}]$$

A műveletet úgy végezzük el, hogy az azonos helyen lévő elemeket összeadjuk, azaz:

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C} \quad \text{másként} \quad [a_{ij}] + [b_{ij}] = c_{ij}, \text{ illetve:}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}] = \underline{C}$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -6 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 3 & 11 & 7 \\ 9 & 10 & 3 \\ 12 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

A gyakorlatban dolgozó agrárszakember gyakran találkozik ezzel, hogy két vagy több mátrixot kell összeadnia, jóllehet nem mindig gondol arra, hogy mátrixokkal dolgozik. Vegyük csak azt az egyszerű esetet, amikor egy mezőgazdasági vállalat három növénytermesztéssel /vagy növénytermesztéssel is/ foglalkozó egységgel rendelkezik. Mindhárom egység kimutatást ad a vállalat központja részére mondjuk a növényenkénti műtrágyafelhasználásról az alábbiak szerint:

	Ő.	Kuko-	N.		Ő.	Kuko-	N.		
	búza	rica	forgó		búza	rica	forgó		
$\underline{A} =$	N	800	1000	500	$\underline{B} =$	N	1000	1300	0
P	700	800	400	$\underline{B} =$	P	800	1000	0	
K	500	600	200	K	600	800	0		

	Ő.	Kuko-	N.	
	búza	rica	forgó	
N	700	800	1000	
$\underline{C} =$	P	500	600	800
K	300	400	600	

A három kimutatás összesítése a vállalat összes műtrágyafelhasználását adja, azaz:

vagyis az összeg transzponáltja egyenlő a tagok transzponáltjának összegével.

Egyszerűen ellenőrizhetjük, hogy bármely vektorhoz az $\underline{e}_i$ egységvektort adva eredményül olyan vektort kapunk, amely az eredeti vektortól csak annyiban tér el, hogy i -edik eleme 1-el növekszik. Ha viszont valamely vektorhoz összegzővektort adunk, akkor az eredeti vektor minden elemét 1-el növeljük meg. Ha egy adott mátrixhoz egységmátrixot adunk, akkor a diagonális elemeket növeljük 1-el, viszont ha valamely $\underline{A}$ mátrixhoz olyan mátrixot adunk, amelynek minden vektora összegzővektor, akkor eredményül olyan mátrixot kapunk, melynek elemei 1-el növekednek $\underline{A}$ elemeihez képest.

Érdekes eredményhez jutunk, amennyiben rendelkezünk $m \cdot n$ típusú $\underline{E}$ egységmátrix-szal, egy $m \cdot 1$ típusú $\underline{a}$ zérusvektorral, $1 \cdot n-1$ típusú $\underline{b}^T$ zérus sorvektorral és egy $m-1 \cdot n-1$ típusú $-\underline{E}$ negatív előjelű egységmátrix-szal, azaz:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b}^T = [0, 0, 0],$$

$$-\underline{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Adjuk most az $\underline{E}$ egységmátrixhoz az $\underline{a}$, $\underline{b}^T$, $-\underline{E}$ -ből megfelelő módon képzett mátrixot a következők szerint:

$$T = \underline{E} + \begin{bmatrix} \underline{a} & -\underline{E} \\ & \underline{b}^T \end{bmatrix}, \quad \text{azaz:}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [-1 & 0 & 0] \\ [0] & [0 & -1 & 0] \\ [0] & [0 & 0 & -1] \\ [0] & [0 & 0 & 0] \end{bmatrix}, \quad \text{vagyis:}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egy speciális szalagmátrixot kaptunk tehát, amelynek a fődiagonálison elhelyezkedő elemei egységek és ezek jobboldali szomszédos elemei rendre -1, a többi elemei zérusok. E speciális mátrix-szal még gyakran fogunk találkozni. Most csupán annyit jegyezzünk meg, hogy a T mátrixhoz hasonlóan képezhetünk speciális mátrixokat úgy, hogy a nem zérus elemek nem egységek, de azonos értékűek, másrészt, hogy a szalagmátrixnak a diagonális elemektől jobbra két vagy több elemeire is fennáll, hogy azok nem zérus elemek, hanem egységek, előjelük lehet pozitív vagy negatív, vagy változó, lehet hogy a diagonális elemektől jobbra zérus elemeket találunk és azoktól balra vannak a nem zérus szalagok, stb., vagy mind balra, mind jobbra vannak nem zérus elemű ferde sorok /szalagok/ esetleg ezek zérus szalagokkal váltakoznak. Igen sok és érdekes szalagmátrix állítható így elő, s az ezekkel végzett műveletek speciális sajátosságokkal rendelkeznek.

Egyenlőre megkísérelhetjük, hogy összeadunk különböző szalagmátrixokat. Csupán példaként mutatunk be néhányat:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Számos más változatot is képezhetünk.

2.2.2. Kivonás

Hasonlóan az összeadáshoz a művelet csak azonos típusú mátrixok esetén értelmezhető. Az A mátrixból B mátrixot úgy vonjuk ki, hogy az A mátrix eleméből a B mátrix azonos helyen lévő elemeit kivonjuk, azaz:

$$\underline{A} - \underline{B} = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]. \text{ Például, ha:}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor:}$$

$$\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -15 \\ 4 & 1 & 10 \end{bmatrix}. \quad \text{Természetesen:}$$

$$\underline{A} - \underline{0} = \underline{A} \quad \text{és} \quad \underline{0} - \underline{A} = -\underline{A}$$

A fenti szabályok természetesen érvényesek a vektorokra, mint egy sorból, vagy egy oszlopból álló - tehát $1 \cdot n$ és $m \cdot 1$ típusú - mátrixokra is, azaz:

$$\underline{a} - \underline{b} = [a_i] - [b_i] = [a_i - b_i],$$

$$\underline{a}^T - \underline{b}^T = [a_j] - [b_j] = [a_j - b_j].$$

Például:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{esetén} \quad \underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve:}$$

$$\underline{a}^T = [5, 4, 3], \quad \underline{b}^T = [2, -1, 5] \quad \text{esetén} \quad \underline{a}^T - \underline{b}^T = [3, 5, -2]$$

Az összeadáshoz hasonlóan végezhetünk műveleteket speciális mátrixokkal /pl. egységmátrix, szalagmátrix/ is.

Természetesen a kivonás művelete nem kommutatív:

$$\underline{A} - \underline{B} \neq \underline{B} - \underline{A} \quad \text{és} \quad \underline{a} - \underline{b} \neq \underline{b} - \underline{a}$$

és nem asszociatív:

$$(\underline{A} - \underline{B}) - \underline{C} \neq \underline{A} - (\underline{B} - \underline{C}) \quad \text{és} \quad (\underline{a} - \underline{b}) - \underline{c} \neq \underline{a} - (\underline{b} - \underline{c})$$

Hogy a mátrixok kivonása a mezőgazdasági gyakorlatban is előfordul, azt az összeadásban bemutatott példa ismeretében aligha kell bizonyítani.

2.2.3. Mátrix szorzása skalárral

Mátrixot /és természetesen vektort/ úgy szorzunk skalárral, hogy a mátrix /vektor/ minden elemét megszorozzuk az adott skalárral:

$$\gamma \underline{A} = \gamma \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma a_{ij} \end{bmatrix}, \quad \text{vagy:}$$

$$\gamma \underline{a} = \gamma \begin{bmatrix} a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma a_i \end{bmatrix}, \quad \text{illetve:}$$

$$\gamma \underline{a}^T = \gamma \begin{bmatrix} a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma a_j \end{bmatrix}. \quad \text{Például:}$$

$$3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}, \quad \text{vagy} \quad 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A mátrixok skalárral való szorzására is érvényes a kommutativitás:

$$\gamma \underline{A} = \underline{A} \gamma$$

$$\text{asszociativitás:} \quad (\gamma_1 \gamma_2) \underline{A} = \gamma_1 (\gamma_2 \underline{A})$$

disztributivitás:

$$\gamma_1 + \gamma_2 / \underline{A} = \gamma_1 \underline{A} + \gamma_2 \underline{A} \quad \text{és} \quad \gamma / \underline{A+B} = \gamma \underline{A} + \gamma \underline{B}$$

Ugyanezek természetesen érvényesek vektorok esetén is.

Mátrixok skalárral való szorzása is gyakran előfordul a mezőgazdasági gyakorlatban pl.: ha egy táblázat fajlagos adatait /műtrágyafelhasználás, munkanap- és gépi műszakfelhasználás/ kell átszámítani mondjuk a régebben használatos katasztrális hold /kh/-ról ha-ra, vagy átváltás esetén különböző árakat egy szorzószám alapján számolunk át az új áraknak megfelelően, stb. Természetes, hogy:

$$0\underline{A} = \underline{A}0 = \underline{0}$$

$$1\underline{A} = \underline{A}1 = \underline{A}$$

$$-1\underline{A} = \underline{A} / -1 = -\underline{A}, \text{ s ez utóbbi értelmében:}$$

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + /-1\underline{B} = \underline{A} + /-\underline{B}/$$

azaz az $\underline{A} - \underline{B}$ úgy is értelmezhető, hogy az $\underline{A}$ mátrixhoz hozzáadjuk a $\underline{B}$ mátrix minusz egyszerűsét.

Az eddig megismert műveletek az alábbi blokkdiagrammokkal szemléltethetők. /3. ábra/

A kivonás blokkdiagrammja ugyanez, csupán $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ formulát kell alkalmaznunk.

Értelemszerűen alkalmazhatók a fentiek a mátrixnak skalárral való szorzására is, azonban természetesen itt a $c_{ij} = \gamma a_{ij}$ műveletet kell használni, ahol γ egy skalár, amellyel a mátrix minden elemét megszorozzuk.

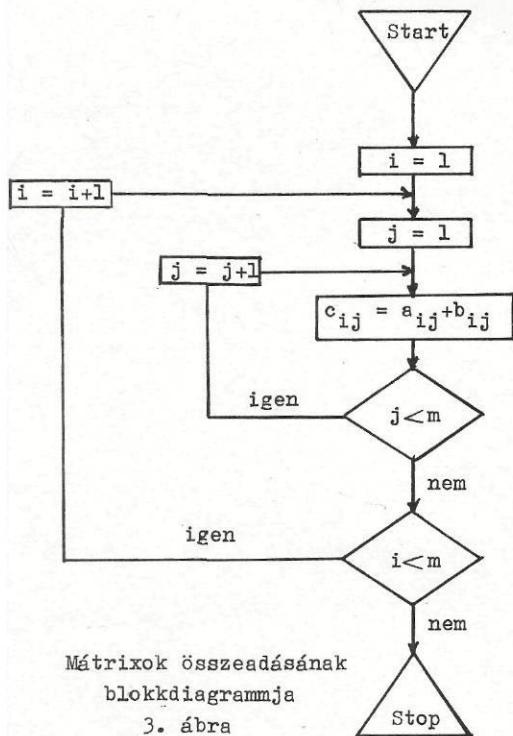
2.2.4. Vektor szorzása vektorral

A művelet csak akkor értelmezhető, ha a szóbanforgó vektorok elemszáma azonos.

Ha vektort szorzunk vektorral, akkor az egyik vektor mindig sor-, a másik vektor oszlopvektorként irandó fel. Attól függően, hogy a baloldali, vagy a jobboldali tényezőt írjuk fel sorvektorként, beszélünk skaláris szorzásról és diadikus szorzásról.

a./ Skaláris szorzás

Skaláris szorzásról beszélünk akkor, ha sorvektort szorzunk



jobbról oszlopvektorral. Eredményül skalárt kapunk. A műveletet a következőképpen végezzük el:

$$\underline{a}^T \underline{b} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n] =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i b_i = d$$

vagyis az azonos sorszámú /azonos helyen lévő/ elemeket összeszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk. Pl.:

$$\begin{bmatrix} 4, -2, 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 - 4 + 21 \end{bmatrix} = 37$$

A számítás menetét az alábbi blokkdiagrammal szemléltetjük: /lásd következő oldálon 4. ábrán/.

Vektorok skaláris szorzatával a mezőgazdasági gyakorlatban is sokszor találkozunk. Ha például az A, B, C termékekből 500, 800 és 1500 tonnát értékesítünk és ezek tonnánkénti egységára 3000, 4000, 5000 Ft, akkor az árbevételt a következőképpen kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 500, 800, 1500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500000 + 3200000 + 7500000 \end{bmatrix} =$$

$$= 12200000 \text{ Ft}$$

A skaláris szorzás során a két vektor felcserélhető, ha azokat transzponáljuk, vagyis a skaláris szorzás kommutatív jellegű kifejezés, azaz:

$$\underline{a}^T \underline{b} = \underline{b}^T \underline{a}$$

Érvényes a disztributivitás is, vagyis:

$$\underline{a}^T / \underline{b} + \underline{c} / = \underline{a}^T \underline{b} + \underline{a}^T \underline{c} \quad \text{és} \quad / \underline{a}^T + \underline{b}^T / \underline{c} = \underline{a}^T \underline{c} + \underline{b}^T \underline{c}$$

Természetes, hogy:

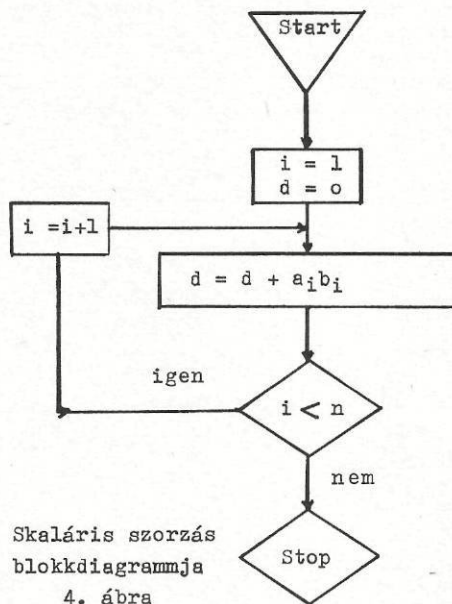
$$\underline{a}^T \underline{0} = \underline{0}^T \underline{a} = 0$$

$$\underline{a}^T \underline{e}_i = \underline{e}_i^T \underline{a} = a_i$$

$$\underline{a}^T \underline{1} = \underline{1}^T \underline{a} = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$/ \gamma \underline{a}^T / \underline{b} = \underline{a}^T / \gamma \underline{b} / = \gamma / \underline{a}^T \underline{b} /$$

$$\underline{1}^T \underline{1} = n \quad /n\text{-elemű vektorok esetén}/.$$



b./ Vektorok diadikus szorzata

Vektorok diadikus szorzatáról beszélünk akkor, ha oszlopvektort szorzunk jobbról sorvektorral. Eredményül mátrixot kapunk, amelynek annyi sora van, mint ahány eleme van az oszlopvektornak, és annyi oszlopa van, mint ahány eleme van a sorvektornak.

A művelet elvégzése a következőképpen történik: /5. ábra/

$$\underline{a} \underline{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} b_1, \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} b_2, \dots, \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} [4, 7, 6] = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} 4, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} 7, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} 6 \right] = \begin{bmatrix} 12 & 21 & 18 \\ 8 & 14 & 12 \\ 20 & 35 & 30 \end{bmatrix}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy:

$$\underline{a} \underline{b}^T \neq \underline{b} \underline{a}^T, \text{ viszont igaz, hogy:}$$

$$\underline{a} \underline{b}^T / \underline{b}^T = \underline{b} \underline{a}^T, \text{ és:}$$

$$\underline{a} \underline{0}^T = \underline{0} \underline{a}^T = 0$$

$$\underline{a} \underline{e}_j^T = \underline{a}_j$$

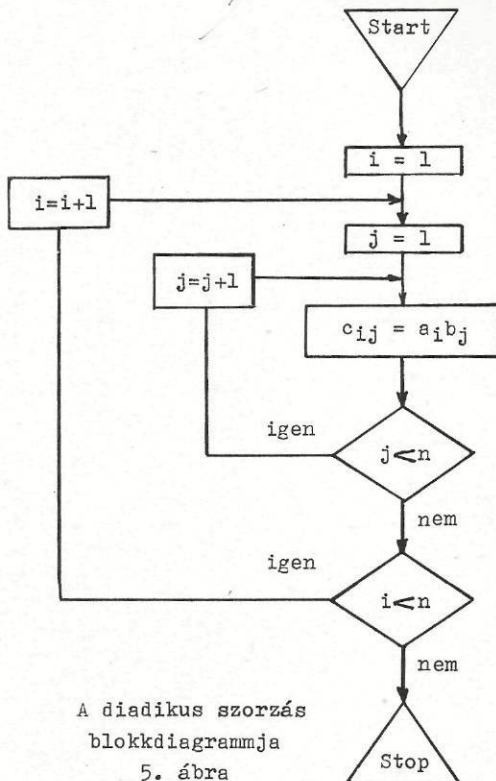
$$\underline{e}_i \underline{a}^T = \underline{a}_i$$

$$\underline{a} \underline{1}^T = [\underline{a}_1, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_1]$$

$$\underline{1} \underline{a}^T = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^T \\ \underline{a}_1^T \\ \underline{a}_1^T \\ \vdots \\ \underline{a}_1^T \end{bmatrix}$$

A vektorok diadikus szorzata is előfordul a mezőgazdaságban. Ha pl. valamely növény műtrágyaszükséglete ha-onként N, P és K műtrágyákból 300, 200, 80 kg, s az adott növényt 100, 80 és 70 ha-os táblákon termeljük, akkor táblánként a különféle műtrágyákból felhasználandó mennyiségek:

Tábla	I	II	III		I	II	III	
N	[300]			=	N	[30 000	24 000	21 000]
P	[200]				P	[20 000	16 000	14 000]
K	[80]				K	[8 000	6 400	5 600]



2.2.5. Mátrix szorzása vektorral

Mátrixot jobbról oszlopvektorral, balról sorvektorral szorozhatunk.

a./ Mátrix szorzása jobbról oszlopvektorral

A művelet csak akkor értelmezhető, ha a mátrix oszlopvektorainak száma és a vektor komponenseinek száma megegyezik.

A műveletet úgy végezzük, hogy a mátrix első oszlopvektorát a vektor első elemével, a második oszlopvektorát az oszlopvektor második elemével, stb. megszorozzuk és az így kapott szorzatokat összeadjuk. Eredményül oszlopvektort kapunk, amelynek annyi eleme van, ahány sora volt a mátrixnak. Tehát:

$$\underline{A} \underline{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \sum_{j=1}^n a_j x_j = \underline{b}, \text{ például:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} 4 + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} 5 + \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix} 7 =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -49 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Mátrixnak vektorral való szorzata a mezőgazdaságban gyakran fordul elő. Például táblázatba foglalhatjuk valamely takarmányadagban szereplő takarmányok fajlagos beltartalmi adatait. Az így kapott mátrixot megszorozva a takarmányadagban szereplő takarmányok mennyiségét kifejező vektorral megkapjuk, hogy a különböző táplálóanyagokból az adag mennyit tartalmaz. Hasonlóképpen a termelési tevékenységek fajlagos munkanapszükségleteit, vagy valamely géptípusból adódó fajlagos műszakszükségletét időszakonként mátrixba foglalva és megszorozva a tevékenységek terjedelmét /volumenét/ kifejező vektorral megkapjuk egy adott vállalati terv megvalósításának munkaerő, illetve gépimunka szükségletét időszakonként /pl. havonként, dekádonként/.

b./ Mátrix szorzása balról sorvektorral

A művelet csak akkor értelmezhető, ha a mátrix sorainak száma és a vektor komponenseinek száma megegyezik. Eredményül sorvektort kapunk. A műveletet úgy végezzük, hogy a mátrix első sorát a sorvektor első elemével, második sorát a második elemével megszorozzuk, s az így nyert sorvektorokat összeadjuk, vagyis:

$$\begin{aligned}\underline{x}^T \underline{A} &= [4, 5, 7] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = 4 [2, 3] + 5 [4, 5] + 7 [-7, 1] = \\ &= [8, 12] + [20, 25] + [-49, 7] = [-21, 44]\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy most is az előbbi egyszerű példával dolgoztunk, és eredményül az előbbi vektor transzponáltját kaptuk. A művelet természetesen csak akkor volt értelmezhető, ha a szorzótényezőket is transzponáltuk. Könnyű - a fentiek és egyszerű példák, vagy általános formulák útján is - belátni, hogy:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad \text{és} \quad \underline{x}^T \underline{A}^T = \underline{b}^T, \quad \text{vagyis:}$$

$$/\underline{A} \underline{x}/^T = \underline{x}^T \underline{A}^T$$

Egyszerűen meggyőződhetünk arról is, hogy:

$$\underline{A} \underline{e}_i = \underline{a}_j \quad i = j$$

$$\underline{e}_j^T = \underline{a}_i \quad j = i$$

$$\underline{A} \underline{1} = \sum_{j=1}^n \underline{a}_j$$

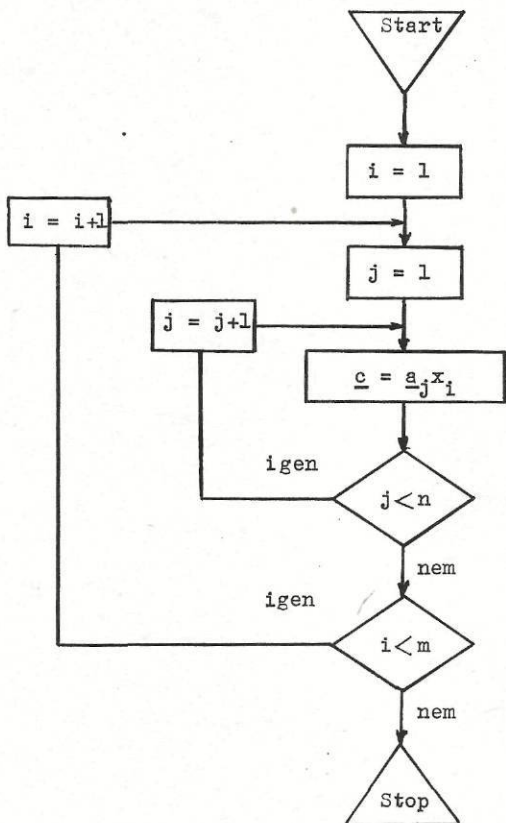
$$\underline{1}^T \underline{A} = \sum_{i=1}^m \underline{a}_i^T$$

A művelet elvégzésének blokkdiagrammja a következő:
/lásd következő oldalon 6. ábrát/.

Természetesen ha mátrixot balról sorvektorral szorozzuk, akkor $\underline{c} = \underline{a}_j x_i$ helyett értelemszerűen $\underline{c}^T = x_j \underline{a}_i$ adódik.

2.2.6. Mátrix szorzása mátrix-szal

A művelet csak akkor értelmezhető, ha az első tényező oszlopainak száma és a második tényező sorainak száma megegyezik. Eredményül olyan mátrixot kapunk, amelyben a sorok száma megegyezik az első tényező sorainak számával, az oszlopok száma pedig a második tényező oszlopainak számával.



Mátrix szorzása vektorral

6. ábra

A művelet háromféle módon végezhető el:

a./ A műveletet úgy végezzük, hogy azt felbontjuk mátrixnak jobbról oszlopvektorral való szorzatára:

$$\underline{A} \underline{B} = [\underline{A} \underline{b}_1, \underline{A} \underline{b}_2, \dots, \underline{A} \underline{b}_n] = \underline{C}, \text{ például:}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 22 \\ 32 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 46 \\ 61 \\ 37 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 44 \\ 51 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 46 & 44 \\ 32 & 61 & 51 \\ 14 & 37 & 45 \end{bmatrix}$$

b./ A műveletet felbontjuk mátrixnak balról sorvektorral történő szorzatára:

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^T \underline{B} \\ \underline{a}_2^T \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{a}_n^T \underline{B} \end{bmatrix} = \underline{C}, \text{ például:} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [3, 4] \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}, [2, 7] \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}, [5, 1] \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [3 [2, 6, 8] + 4 [4, 7, 5]], [2 [2, 6, 8] + 7 [4, 7, 5]], [5 [2, 6, 8] + 1 [4, 7, 5]] \end{bmatrix} =$$

$$= [6, 18, 24] + [16, 28, 20], [4, 12, 16] + [28, 49, 35], [10, 30, 40] + [4, 7, 5] =$$

$$= [22, 46, 44], [32, 61, 51], [14, 37, 45] = \begin{bmatrix} 22 & 46 & 44 \\ 32 & 61 & 51 \\ 14 & 37 & 45 \end{bmatrix}$$

c./ A műveletet felbontjuk vektorok skaláris szorzatára:

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11}^T b_1, & a_{12}^T b_2, & \dots, & a_{1n}^T b_n \\ a_{21}^T b_1, & a_{22}^T b_2, & \dots, & a_{2n}^T b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^T b_1, & a_{m2}^T b_2, & \dots, & a_{mn}^T b_n \end{bmatrix}, \text{ például: } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [3, 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, & [3, 4] \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, & [3, 4] \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \\ [2, 7] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, & [2, 7] \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, & [2, 7] \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \\ [5, 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, & [5, 1] \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, & [5, 1] \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6+16 & 18+28 & 24+20 \\ 4+28 & 12+49 & 16+35 \\ 10+4 & 30+7 & 40+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 46 & 44 \\ 32 & 61 & 51 \\ 14 & 37 & 45 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{A} \underline{B}$ szorzat általában nem kommutatív, azaz általában:

$$\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}$$

Az is lehetséges, hogy az $\underline{A} \underline{B}$ mátrix szorzat értelmezhető, de a $\underline{B} \underline{A}$ szorzat nem is értelmezhető. Pl:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad \underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

értelmezhető, mivel $\underline{A}$ oszlopainak száma és $\underline{B}$ sorainak száma megegyezik.

Ugyanekkor a:

$$\underline{B} \underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{nem értelmezhető, mert a fenti}$$

egyezőség nem áll fenn.

Vegyünk most két kvadratikus mátrixot:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Most mind az $\underline{A} \underline{B}$, mind a $\underline{B} \underline{A}$ szorzat értelmezhető /és ez négyzetes mátrixok esetén mindig fenn áll/. Végezzük el a műveleteket:

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 8 \\ 50 & 20 \end{bmatrix} \quad \underline{B} \underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 28 \\ 14 & 24 \end{bmatrix}$$

Az eredmény tehát eltérő, azaz: $\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}$

Vannak speciális esetek, amikor a tényezők felcserélése után is ugyanazt az eredményt kapjuk, például:

$$\underline{A} \underline{E} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{E} \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Egyszerűen belátható az is, hogy $\underline{A} \underline{0} = \underline{0} \underline{A} = \underline{0}$

Ha az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ diagonális mátrixok, akkor szorzatuk a következő:

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} b_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} b_{mn} \end{bmatrix}$$

másként:

$$\langle a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \rangle \langle b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn} \rangle = \\ = \langle a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \dots, a_{nn}b_{nn} \rangle$$

A fentiekből következik, hogy két, vagy több diagonális mátrix szorzata olyan diagonális mátrix, amelynek diagonális elemei a tényező mátrixok megegyező helyen lévő diagonális elemeinek szorzata. Ilyenkor a tényezőmátrixok felcserélése nem változtatja meg az eredményt.

A diagonális mátrixok szorzatából következik, hogy egy diagonális mátrix k -adik hatványa / k nemnegatív egész szám/ olyan diagonális mátrix, amelynek diagonális elemei az eredeti mátrix elemeinek k -adik hatványai. Ezek szerint ha:

$$\underline{A} = \langle a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \rangle$$

$$\underline{A}^k = \langle a_{11}^k, a_{22}^k, \dots, a_{nn}^k \rangle$$

$$\underline{A} = \langle 3, 4, 2 \rangle \text{ és } \underline{A}^3 = \langle 27, 64, 8 \rangle$$

Érdekes megvizsgálni speciális mátrixok szorzatát. Ha például egy mátrixot jobbról szorzunk diagonális mátrix-szal, akkor elég a szorzandó mátrix oszlopait a megfelelő diagonális elemekkel megszorozni. Balról való szorzásnál értelemszerűen a mátrix sorait szorozzuk a megfelelő diagonális elemekkel.

Egy mátrixot jobbról, illetve balról szorozva permutáló mátrix-szal, csak a mátrix sorainak, illetve oszlopainak sorrendje változik.

Ha alsó, vagy felső háromszögmátrixokat szorzunk össze, eredményül azonos típusú /alsó, vagy felső/ háromszögmátrixot kapunk.

Érdekes eredményt kapunk, ha egy $\underline{A}$ mátrixot olyan háromszögmátrix-szal szorzunk meg, amelynek nemzérus elemei egységek. Jelöljük ezeket a mátrixokat a következőképpen:

$$\underline{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline \end{bmatrix}, \quad \underline{H}_2 = \begin{bmatrix} \hline 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{H}_3 = \begin{bmatrix} \hline 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline \end{bmatrix}.$$

Az A mátrixot ezekkel szorozva a következő eredményeket kapjuk:

$$A \underline{H}_1 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots, a_n \end{bmatrix}$$

$$A \underline{H}_2 = \begin{bmatrix} a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{bmatrix}$$

$$A \underline{H}_3 = \begin{bmatrix} a_n, a_{n-1} + a_n, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{bmatrix}$$

$$A \underline{H}_4 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + \dots + a_n, a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}, \dots, a_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}_1 A = \begin{bmatrix} a_1^T, a_1^T + a_2^T, \dots, a_1^T + a_2^T + \dots + a_n^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}_2 A = \begin{bmatrix} a_1^T + a_2^T + \dots + a_m^T, a_2^T + a_3^T + \dots + a_m^T, \dots, a_m^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}_3 A = \begin{bmatrix} a_m^T, a_{m-1}^T + a_m^T, \dots, a_1^T + a_2^T + \dots + a_m^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}_4 A = \begin{bmatrix} a_1^T + a_2^T + \dots + a_m^T, a_1^T + a_2^T + \dots + a_{n-1}^T, \dots, a_1^T \end{bmatrix}$$

Nem kevésbé érdekes eredményeket állíthatunk elő, ha valamely mátrixot szalagmátrixszal szorzunk. Vegyük ebből a szempontból azokat a szalagmátrixokat, amelyek diagonális elemei egységek és valamelyik szomszédos ferde sor elemei -1 , a többi elemei 0 -ból állnak. Valójában négyféle ilyen szalagmátrix különböztethető meg a következők szerint:

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Először is könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti mátrixok között fennállnak a következő összefüggések:

$$\underline{T}_1 = \underline{T}_2^T, \quad \underline{T}_2 = \underline{T}_1^T, \quad \text{azaz } \underline{T}_1 \text{ és } \underline{T}_2 \text{ egymás transzponált-}$$

jai. Ugyanakkor $\underline{T}_3$ a $\underline{T}_1$ -nek a függőleges $\underline{T}_4$ pedig $\underline{T}_2$ -nek a vízszintes tengelyre való tükröződése.

Ha egy $\underline{A}$ mátrixot a fenti $\underline{T}$ mátrixokkal szorzunk a következő eredményeket kapjuk:

$$\underline{A} \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \dots & a_n - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} a_n - a_{n-1} & a_{n-2} - a_{n-1} & \dots & a_2 - a_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \underline{T}_4 = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} - a_n & \dots & a_1 - a_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_1 \underline{A} = \begin{bmatrix} a_1^T - a_2^T & a_2^T - a_3^T & \dots & a_{n-1}^T - a_n^T & a_n^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_2 \underline{A} = \begin{bmatrix} a_1^T & a_2^T - a_1^T & a_3^T - a_2^T & \dots & a_{n-1}^T - a_n^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_3 \underline{A} = \begin{bmatrix} a_n^T - a_{n-1}^T & a_{n-2}^T - a_{n-1}^T & \dots & a_2^T - a_1^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_4 \underline{A} = \begin{bmatrix} a_m^T & a_{m-1}^T - a_m^T & \dots & a_1^T - a_2^T \end{bmatrix}$$

Végezzünk műveleteket más szalagmátrixokkal is. A mezőgazdasági alkalmazások során /még a további matematikai ismeretek során is/ látni fogjuk, hogy a $\underline{H}$ és $\underline{T}$ mátrixok ismerete megkönnyíti bizonyos speciális matematikai modellek kezelését.

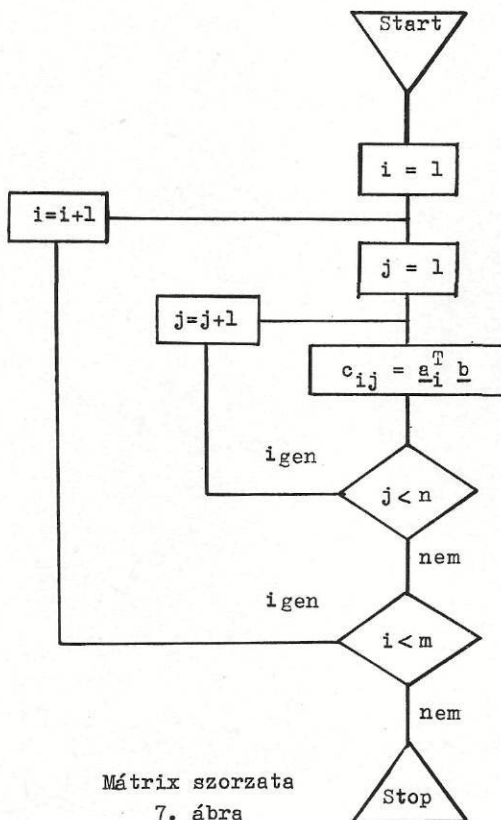
A mátrixok szorzásánál is érvényes az asszociativitás:

$$(\underline{A} \underline{B}) \underline{C} = \underline{A} (\underline{B} \underline{C}),$$

valamint a disztributivitás:

$$\underline{A} / \underline{B} + \underline{C} / = \underline{A} \underline{B} + \underline{A} \underline{C} \quad \text{és} \quad / \underline{A} + \underline{B} / \underline{C} = \underline{A} \underline{C} + \underline{B} \underline{C}$$

Két mátrix szorzatát a következő blokkdiagrammal szemléltetjük: 7. ábra.



2.2.7. A mátrixszorzat transzponáltja

Egy szorzat transzponáltját megkapjuk, ha a tényezőket felcseréljük és mindkét tényezőt transzponáljuk. Általában érvényes, hogy:

$$/ \underline{A} \underline{B} /^{\mathbb{K}} = \underline{B}^{\mathbb{K}} \underline{A}^{\mathbb{K}}$$

vagyis a szorzat transzponáltja egyenlő a felcserélt tényezők transzponáltjának szorzatával. Hasonlóképpen:

$$/ \underline{A} \underline{B} \underline{C} /^{\mathbb{K}} = \underline{C}^{\mathbb{K}} \underline{B}^{\mathbb{K}} \underline{A}^{\mathbb{K}}, \quad \text{például:}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} [2, 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [2, 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [6, 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [6, 5] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 21 & 10 \end{bmatrix}$$

Természetesen:

$$/ \underline{A} \underline{B} /^{\mathbb{K}} = \begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{\mathbb{K}} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}^{\mathbb{K}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^{\mathbb{K}} \underline{A}^{\mathbb{K}} = \begin{bmatrix} [2, 6] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [2, 6] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [4, 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [4, 5] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Tehát valóban:

$$/ \underline{A} \underline{B} /^{\mathbb{K}} = \underline{B}^{\mathbb{K}} \underline{A}^{\mathbb{K}}$$

2.2.8. Mátrixok hatványozása

Hatványozni csak négyzetes mátrixokat lehet a következők szerint:

$$\underline{A}^0 = \underline{E}$$

$$\underline{A}^1 = \underline{A}$$

$$\underline{A}^2 = \underline{A} \underline{A}$$

$$\underline{A}^3 = \underline{A}^2 \underline{A} = \underline{A} \underline{A} \underline{A}$$

$$\underline{A}^4 = \underline{A}^3 \underline{A} = \underline{A} \underline{A} \underline{A} \underline{A}, \text{ természetesen:}$$

$$\underline{A}^p \underline{A}^q = \underline{A}^q \underline{A}^p$$

2.2.9. Műveletek blokkokra bontott mátrixokkal

A mátrix műveletekkel kapcsolatban megismert szabályok érvényesek akkor is, ha a műveleteket blokkokra bontott mátrixokkal végezzük. Ha tehát a hipermátrixokat alkalmas módon particionálással blokkokra bontjuk, úgy hogy a blokkok között a műveletek elvégezhetők legyenek, akkor:

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} + \underline{B}_{11} & \underline{A}_{12} + \underline{B}_{12} \\ \underline{A}_{21} + \underline{B}_{21} & \underline{A}_{22} + \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} \underline{B}_{11} + \underline{A}_{12} \underline{B}_{21} & \underline{A}_{11} \underline{B}_{12} + \underline{A}_{12} \underline{B}_{22} \\ \underline{A}_{21} \underline{B}_{11} + \underline{A}_{22} \underline{B}_{21} & \underline{A}_{21} \underline{B}_{12} + \underline{A}_{22} \underline{B}_{22} \end{bmatrix}. \text{ Ha pl.:}$$

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

$$\underline{B} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

$$\text{akkor: } \underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

vagy a műveleteket blokkokra elvégezve:

$$\underline{A}_{11} + \underline{B}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{12} + \underline{B}_{12} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{21} + \underline{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{22} + \underline{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \text{ és:}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} + \underline{B}_{11} & \underline{A}_{12} + \underline{B}_{12} \\ \underline{A}_{21} + \underline{B}_{21} & \underline{A}_{22} + \underline{B}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & 6 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -3 & 3 & 9 \end{array} \right]$$

Szorozzuk össze a két mátrixot:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 6 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 16 & 6 & -2 & -4 \\ 14 & 9 & 3 & 0 & 1 \\ 14 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & 12 \\ 16 & -9 & -5 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Végezzük el a szorzást blokkokra bontott mátrixszal:

$$\underline{A}_{11} \underline{B}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 10 \\ 5 & 12 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{12} \underline{B}_{21} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 9 & -3 & -1 \\ 12 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{11} \underline{B}_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{12} \underline{B}_{22} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{21} \underline{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -2 & -3 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{22} \underline{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 18 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{21} \underline{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{22} \underline{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

Végezzük el az összeadásokat és állítsuk össze az eredmény-matrixot, vagyis:

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} \underline{B}_{11} + \underline{A}_{12} \underline{B}_{21} & \underline{A}_{11} \underline{B}_{12} + \underline{A}_{12} \underline{B}_{22} \\ \underline{A}_{21} \underline{B}_{11} + \underline{A}_{22} \underline{B}_{21} & \underline{A}_{21} \underline{B}_{12} + \underline{A}_{22} \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Példánkban tehát:

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 18 & 10 \\ 5 & 12 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 9 & -3 & -1 \\ 12 & -4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -2 & -3 & -13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 18 & -6 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 16 & 6 & -2 & -4 \\ 14 & 9 & 3 & 0 & 1 \\ 14 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & 12 \\ 16 & -9 & -5 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Természetesen a blokkok közötti műveletek csak kompatibilis blokkokkal végezhetők.

2.2.10. Vektorok és mátrixok lineáris kombinációja

A $k_1, k_2, \dots, k_p$ skalárokról és az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ "n" komponensű vektorokból alkotott $k_1 \underline{a}_1 + k_2 \underline{a}_2 + \dots + k_p \underline{a}_p$ kifejezést a vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

Kikötésünk csupán annyi, hogy "p" természetes szám legyen. E szerint a $\underline{ka}$ is lineáris kombináció. Ez a legegyszerűbb lineáris kombináció, amikor egy vektort szorzunk meg skalárral.

Ilyen formán viszont egy vektor is felfogható lineáris kombinációként, hiszen ha $k = 1$, akkor:

$$1 \underline{a} = \underline{a}$$

A skalárszorzők előjele szerint beszélünk pozitív, negatív, nempozitív és nemnegatív lineáris kombinációkról. Azokat a nemnegatív lineáris kombinációkat, amelyekben a skalárszorzők összege 1, azaz:

$$\sum_{i=1}^p k_i = 1, \quad \text{konvex lineáris kombinációnak nevezzük, pl:}$$

$$k_1 = 0,3 \quad k_2 = 0,4 \quad k_3 = 0,3 \quad \text{és}$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0,3 + 0,4 + 0,3 = 1.$$

Lineáris kombinációval találkozunk akkor is, amikor mátrixot vektorral szorzunk.

Az $\underline{A} \underline{x}$ vagy $\underline{y}^T \underline{A}$ szorzat ugyanis nem más, mint a mátrix vektorainak és a vektor komponenseinek lineáris kombinációja, hiszen mint ismeretes:

$$\underline{A} \underline{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad \text{illetve:}$$

$$\underline{y}^T \underline{A} = y_1 a_1^T + y_2 a_2^T + \dots + y_m a_m^T$$

Ilyen jellegű feladatok megoldására gyakran kerül sor a mezőgazdaságban. Például amikor takarmányadagot állítunk össze, a beltartalmi táblázatot /mátrixot/ szorozzuk a takarmányadaggal /vektorral/ és megkapjuk az adag beltartalmi értékeit. Hasonlóképpen, amikor munkaerő mérlegeket, vagy gépi munkamérlegeket készítünk, a különböző termékek fajlagos munkaerő, vagy gépi munkaigényét tartalmazó táblázatot /mátrixot/ szorozzuk a termelési szerkezet vektorával, s megkapjuk, hogy az adott termelési szerkezet megvalósítása hány munkanap, illetve gépi műszakszükséglettel jár.

A vektorok lineáris kombinációjához hasonlóan értelmezzük a mátrixok lineáris kombinációját.

Ha az $m \cdot n$ típusú	$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_p$	mátrixok és
a	$k_1, k_2, \dots, k_p$	skalárokból
alkotott	$k_1 \underline{A}_1 + k_2 \underline{A}_2 + \dots + k_p \underline{A}_p$	

kifejezést tekintjük, mátrixok lineáris kombinációját állítottuk elő. Ha $\underline{A}$ kvadratikus mátrix, akkor az

$$f(\underline{A}) = k_0 \underline{A}^0 + k_1 \underline{A}^1 + k_2 \underline{A}^2 + \dots + k_m \underline{A}^m$$

lineáris kombinációt az $\underline{A}$ mátrix m -ed fokú polinomjának nevezzük, ahol $k_0, k_1, k_2, \dots, k_m$ skalárok és

$$k_m \neq 0$$

$$\text{Például: } f(\underline{A}) = 8 \underline{A}^0 - 6 \underline{A} + \underline{A}^2$$

az $\underline{A}$ mátrix másodfokú polinomja.

A lineáris kombinációt természetesen csak azonos elemszámú vektorok, illetve azonos típusú mátrixokkal alkothatunk.

Tekintve, hogy skalárok bármely valós értéket felvehetnek, az összes lineáris kombinációk halmaza végtelen halmaz.

2.2.11. További speciális mátrixok

Nilpotens mátrix

Ha van olyan $m > 0$ egész számú kitevő, hogy: $\underline{A}^m = 0$, az adott mátrixot nilpotens mátrixnak nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hányadik hatvány ad zérusmátrixot, ha:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^2 = \underline{A} \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 38 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = A^2 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 38 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát az adott példában: $A^4 = 0$

Aszimptotikusan nilpotens mátrix

Ha valamely $A \geq 0$ mátrixra fennáll az $1^{\infty} A < 1^{\infty}$

reláció, vagyis ha a mátrix elemeinek összege minden oszlopban 1-nél kisebb, az adott mátrixot aszimptotikusan nilpotens mátrixnak nevezzük.

Ez azt is jelenti, hogy pozitív egész számú m kitevű növelésével az A^m hatvány a zérusmátrixhoz közeledik.

Legyen adva az:

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$$

mátrix. Képezzük az $1^{\infty} A$ szorzatot, azaz

$$1^{\infty} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,7 & 0,8 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Tehát fennáll, hogy:

$$\underline{1}^M \underline{A} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}$$

Most képezzük az $\underline{A}$ mátrix hatványait:

$$\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,29 & 0,30 \\ 0,11 & 0,16 & 0,11 \\ 0,14 & 0,16 & 0,16 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,29 & 0,30 \\ 0,11 & 0,16 & 0,11 \\ 0,14 & 0,16 & 0,16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,197 & 0,228 & 0,226 \\ 0,082 & 0,103 & 0,098 \\ 0,104 & 0,122 & 0,120 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy $\underline{A} > \underline{A}^2 > \underline{A}^3 \dots$. Ellenőrizhetjük, hogy a hatványkitevő további növelése esetén mátrixunk a zérusmátrixhoz közeledik.

Minkowski - Leontief-féle mátrix

Ha $\underline{A}$ aszimptotikusan nilpotens mátrix, akkor az $\underline{E} - \underline{A}$ mátrix Minkowski - Leontief-féle mátrix. Az ilyen mátrix diagonális elemei pozitívek, a többi elem pedig nem pozitív. Pl.:

$$\underline{E} - \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,3 \\ -0,2 & -0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Sztochasztikus mátrix

Ha $\underline{A}$ nemnegatív, tehát:

$$\underline{A} \geq \underline{0}, \text{ és elegendő teszt az:}$$

$$\underline{A} \underline{1} = \underline{1}$$

követelménynek, akkor azt sztochasztikus mátrixnak nevezzük.

Például:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

sztochasztikus mátrix, hiszen

$$\underline{A} \underline{1} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóképpen:

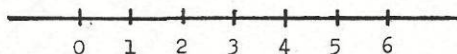
$$\underline{A} \underline{1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2.12. Geometria i értelmezés és ábrázolhatóság

Az 1 elemű vektorok, vagyis a skalárok számegyenesen ábrázolhatók. Vegyünk fel a számegyenesen egy tetszőleges 0 kezdőpontot. Válasszunk egy egységnyi szakaszt a 0 ponttól kiindulva jobbra /ez megállapodás/ mérjük fel a számegyenesre. A szakasz végpontjához egy egyelemű egységvektort rendelünk, vagyis 1-et, tehát:

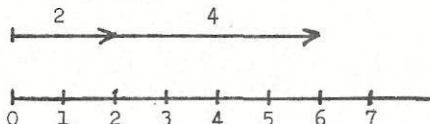
$$\underline{e}_0 = [1] = 1$$

Ezt a szakaszt ismételten felmérve a számegyenesen, a kapott végpontokhoz írjuk a természetes számokat /skalárokat, egyelemű vektorokat/.



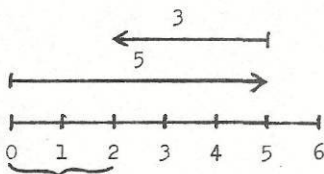
A természetes számokat így kétféle módon szemléltethetjük. Egyrészt a számegyenes meghatározott pontjaival, másrészt azokkal az egyenes szakaszokkal, amelyek kezdőpontja 0, végpontja pedig az a pont, amelyhez a megfelelő szám van írva.

A számegyenesen szemléltethetjük a természetes számokkal végzett műveleteket is. Például $2 + 4$ -et a számegyenesen úgy szemléltetjük, hogy a 0 pontból kiindulva felmérjük a 2-nek megfelelő szakaszt, majd ennek végpontjából a 4-et reprezentáló szakaszt.



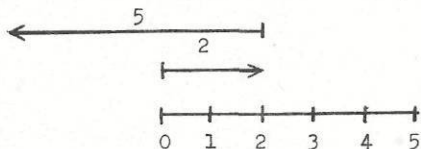
A második szakasz végpontja adja az eredményt.

Könnyű belátni, hogy az összeadással ellentétes műveletet a kivonást úgy végezzük, hogy a kisebbítendőt a 0 kezdőponttól kiindulva felmérjük a számegyenesre, s ennek végpontjából kiindulva, ellenkező irányban felmérjük a számegyenesre a kivonandót reprezentáló szakaszt, melynek végpontjában kapjuk az eredményt. Például $5 - 3$ a következő:

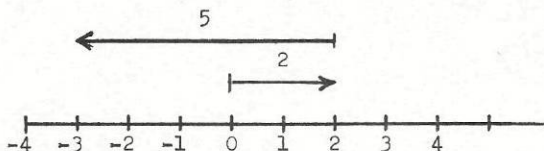


$$5 - 3$$

Ha a kivonandó nagyobb a kisebbítendőnél, az eredmény a 0 ponttól balra esik. Pl.: $2 - 5$:



Az eredményt csak akkor tudjuk leolvasni, ha a száme-
gyenest a 0 ponttól balra meghosszabbítjuk, s erre az ol-
dalra is ismételtelen felmérjük az egységni szakaszt. Az
így kapott pontokhoz a -1, -2, -3 ... számokat rendel-
jük. Most már ábrázolni tudjuk a $2 - 5$ műveletet:



Az így elkészített száme-
gyenesen az összes természetes
számok ábrázolhatók és a száme-
gyenes pontjai és a természe-
tes számok között kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés lé-
tesíthető, vagyis minden természetes számnak megfelel a szám-
egyenes egy és csakis egy pontja, illetve a száme-
gyenes minden pontjának megfelel egy és csakis egy természetes szám.

Azt sem nehéz megérteni, hogy ha $\underline{e}_0$ egyelemű egységvek-
tor, azaz:

$$\underline{e}_0 = [1]$$

ennek nyújtásával, zsugorításával bejárhatjuk az egész száme-
gyenest. Ha ugyanis $\underline{e}_0 = [1]$ és ezt k szorzásra nyújtjuk,
akkor a k megfelelő megválasztásával a száme-
gyenes bármely pontját megkaphatjuk /bármely természetes számot/.

Ha például $k = 3$, akkor $k\underline{e}_0 = 3 \cdot 1 = 3$.

Ha $k = -0,75$, akkor $k\underline{e}_0 = -0,75 \cdot 1 = -0,75$

és így tovább.

Felvehetünk a száme-
gyenesen bármely más egyelemű vektort is
és ezzel is bejárhatjuk a száme-
gyenest.

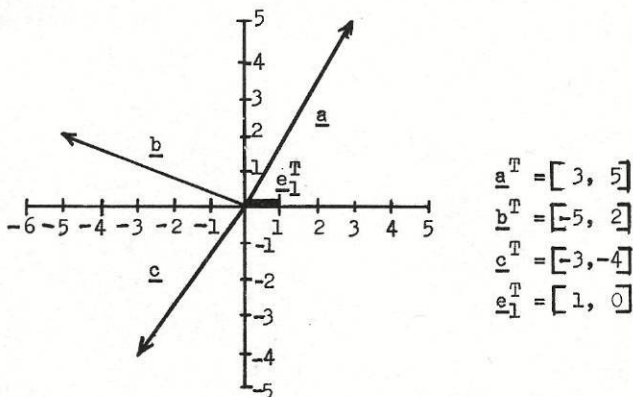
Ha például $\underline{a} = [5]$ és $k = 2$, akkor $k\underline{a} = 2 \cdot 5 = 10$.

Ha $k = -0,5$, akkor $k\underline{a} = -0,5 \cdot 5 = -2,5$, stb.

Ha $\underline{b} = -3$ és $k = 2$, akkor $k\underline{b} = 2 \cdot -3 = -6$,

vagy $k = -3$ esetén $k\underline{b} = -3 \cdot -3 = 9$, stb.

Hasonlóképpen egyértelmű és kölcsönös megfeleltetés létesíthető a kételemű vektorok és a sík pontjai között. Ezt derékszögű /vagy ferdeszögű/ koordináta-rendszerben tudjuk ábrázolni. Ábrázoljunk néhány kételemű vektort:



Kételemű vektorok ábrázolása

8. ábra

Nem nehéz belátni, hogy az $\underline{e}_1^T = 1, 0$ és $\underline{e}_2^T = 0, 1$ kételemű egységvektorok nyújtásával, zsugorításával és összeadásukkal, bejárhatjuk a koordináta síkot. De bejárhatnánk a síkot bármely más nem egy egyenesbe eső kételemű vektorral is, ha azokat k_1 -, illetve k_2 -szeresükre nyújtjuk, illetve zsugorítjuk, összeadjuk, vagy kivonjuk. Ha például $k_1 = 2$ és $k_2 = 3$, akkor:

$$k_1 \underline{e}_1^T + k_2 \underline{e}_2^T = 2 [1, 0] + 3 [0, 1] = [2, 3], \text{ vagy ha}$$

$$\underline{a}_1^T = [2, 3] \text{ és } \underline{a}_2^T = [4, 2], \text{ akkor}$$

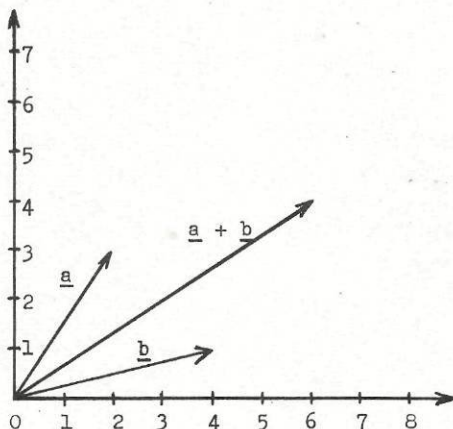
$$2\underline{a}_1^T + 3\underline{a}_2^T = 2 [2, 3] + 3 [4, 2] = [16, 12].$$

A háromelemű vektorokat három tengelyű térbeli koordináta-rendszerben tudjuk ábrázolni, s kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létezik a tér pontjai és a háromelemű vektorok között. A háromelemű egységvektorok, vagy bármely nem-egysíkba eső háromelemű vektorok nyújtásával, illetve zsugorításával és összeadásával bejárhatjuk a háromdimenziós teret.

A négy és ennél több komponensű vektorokat nem tudjuk ábrázolni. A geometriai ábrázolhatóság azonban nem feltétele a vektorok létezésének és annak, hogy azokkal műveleteket tudjunk végezni. Az n komponensű vektorokat úgy foghatjuk fel - az előbbi egyszerű és ábrázolható esetekből általánosítva - mint n dimenziós térben ábrázolható vektorokat.

Háromnál nem több komponensű vektorokkal végzett műveletek is szemléltethetők. Az egyszerűség kedvéért válasszuk a kételemű vektorokat.

Ábrázoljuk az $\underline{a} + \underline{b}$ műveletet, ha $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2, 3 \end{bmatrix}^T$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} 4, 1 \end{bmatrix}$, akkor $\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} 6, 4 \end{bmatrix}$ / 9. ábra/.

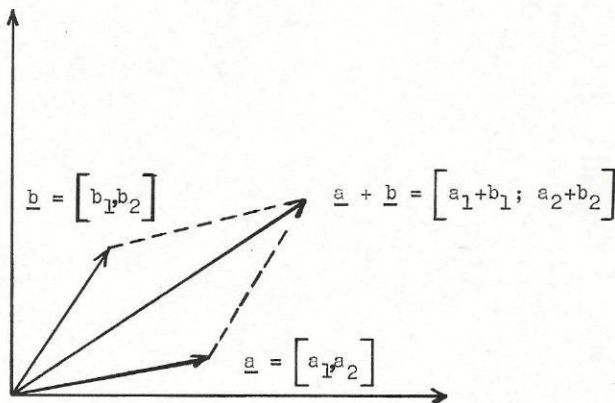
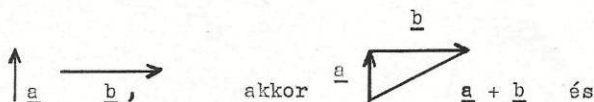
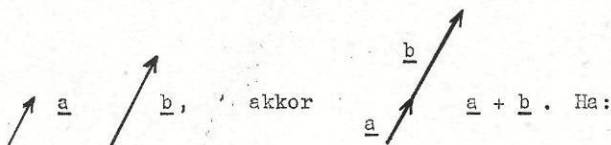


Vektorok összeadása
9. ábra

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor összegét a következő módon definiáljuk: Vegyük fel a $\underline{b}$ -t úgy, hogy kezdőpontja az $\underline{a}$ végpontjával azonos legyen. Az $\underline{a}$ kezdőpontjából a $\underline{b}$ végpontjába vezető vektort az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok összegének mondjuk és $\underline{a} + \underline{b}$ -vel jelöljük.

Az összeget eredőnek, az összeg tagjait összetevőnek és a vektorok definíció szerinti elhelyezését a vektorok egymáshoz fűzésének mondjuk.

A vektorokat hosszuk és irányuk szabja meg, s párhuzamosan eltolhatók. A vektorok szabad eltolhatóságából következik, hogy az összegre adott definíciónk a két vektor összegét egyértelműen határozza meg /10. ábra/. Ha tehát:



10. ábra: Vektorok összeadása

Az ábrából az is látható /és a vektorok szabad eltolhatóságából következik/, hogy az összeadandó vektorokkal, mint oldalakkal /esetleg elfajuló/ paralellogrammát szerkeszthetünk. Ebből az is kitűnik, hogy az összegvektor nem függ az összeadandók sorrendjének megválasztásától, tehát:

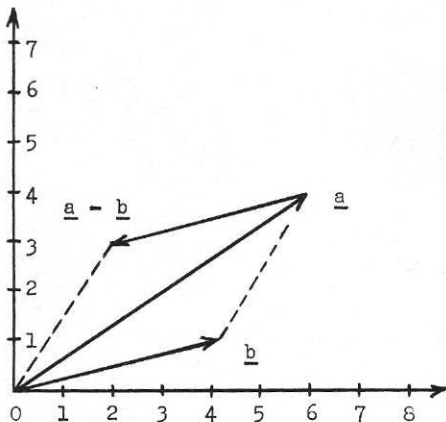
$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

vagyis mindegy, hogy a $\underline{b}$ -t illesztjük az $\underline{a}$ végpontjához, vagy az $\underline{a}$ -t a $\underline{b}$ végpontjához, ugyanazt az eredményt kapjuk.

Az összeadás alapján nem nehéz ábrázolni a vektorok különbségét sem. Legyen:

$$\underline{a} = [6, 4]^T \text{ és } \underline{b} = [4, 1]^T.$$

Ábrázoljuk az adott vektorokat és az $\underline{a} - \underline{b}$ különbséget /11. ábra/.



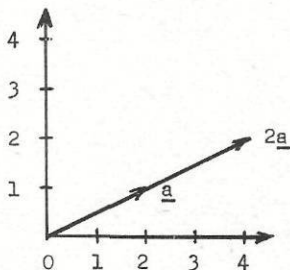
Vektorok különbsége
11. ábra

A kivonást most úgy végeztük, hogy az $\underline{a}$ végpontjához illesztettük a $\underline{b}$ vektort ellenkező irányban.

Végül ábrázoljuk a vektorok skalárral való szorzását. Legyen:

$$\underline{a} = [2, 1] ; k = 2$$

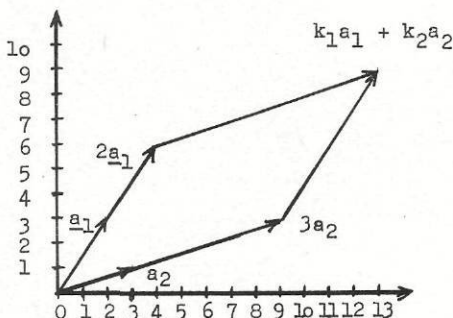
és ábrázoljuk a $k \underline{a}$ szorzatot /12. ábra/.



12. ábra: Vektor szorzása skalárral

Ábrázoljuk még az $\underline{a}_1 = [2, 3]$, $\underline{a}_2 = [3, 1]$ vektorok, valamint a $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ skalárok $k_1 \underline{a}_1 + k_2 \underline{a}_2$ lineáris kombinációját /13. ábra/:

13. ábra: Lineáris kombináció



3. FEJEZET

LINEÁRIS TÉR

3.1. Az n-elemű vektorok lineáris tere

Mivel egy vektor komponensei végtelen sok valós számértéket felvehetnek, végtelen sok n-komponensű vektor van. Eszerint tehát az n-komponensű vektorok összessége végtelen halmaz.

Az előbbiekből láttuk azt is, hogy a számegeenest az egy elemű vektorok terének nevezhetjük. Magát a tér kifejezést képletes értelemben használjuk, hiszen az egy komponensű vektorok tere valójában egy egyenes /egydimenziós tér/, mi azonban mindig a tér kifejezést fogjuk használni, amikor azonos elemszámú vektorok összességéről van szó. Ennek megfelelően a két elemű vektorok tere a sík, a három elemű vektorok tere a háromdimenziós tér, a négy elemű vektorok tere a négydimenziós tér és így tovább, az n-elemű vektorok tere az n-dimenziós tér. Az n természetesen bármely természetes egész szám lehet. Ha $n = 1$, akkor éppen az 1 elemű vektorok terét, azaz a számegeenest kapjuk a térfogalom általánosításaként.

Az összes n-elemű vektorok egy végtelen halmazt alkotnak. Jelöljük ezt a halmazt L_n -el, illetve ha azt is fel kívánjuk tüntetni, hogy a halmaz az n-komponensű vektorok halmaza, akkor az L_n -jelölést használjuk.

Mi a továbbiakban egy speciális halmazzal a lineáris térrel fogunk foglalkozni. Magát a lineáris teret nehéz elképzelni, hiszen magát a tér fogalmát is legfeljebb csak három dimenzióig tudjuk elképzelni és geometriailag ábrázolni, a háromnál több dimenziós teret nem tudjuk szemléltetni. A lineáris tér kifejezést tehát képletes értelemben használjuk és a következők szerint definiáljuk:

Az L_n halmazt lineáris térnek nevezzük, ha elemei a következő feltételeket teljesítik:

a./ Az L_n elemei között értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás művelete.

Ha tehát a_1 és a_2 vektorok n-komponensű vektorok, akkor azok elemei az L_n halmaznak, azaz:

$$a \in L_n \quad \text{és} \quad b \in L_n$$

s ekkor e vektorok összege és bármely n-komponensű vektorok összege, illetve adott n-komponensű vektor bármely skalárral való szorzata szintén n-komponensű vektort eredményez, azaz

olyan vektort, amely szintén eleme az L_n -nek, vagyis ha

$$\underline{a} \in L_n \text{ és } \underline{b} \in L_n, \text{ akkor:}$$

$$\underline{a} + \underline{b} \in L_n, \text{ és ha:}$$

$$\underline{a} \in L_n \text{ és } x \text{ skalár, akkor } \underline{ax} = \underline{xa} \in L_n, \text{ vagy másként}$$

jelölve:

$$\underline{a}, \underline{b} \in L_n \Rightarrow \underline{a} + \underline{b} \in L_n$$

$$\underline{a} \in L_n \Rightarrow \underline{xa} \in L_n.$$

A fentiekből az is következik, hogy az L_n elemeinek bármely lineáris kombinációja szintén eleme az L_n halmaznak, azaz:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in L_n \Rightarrow x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n \in L_n$$

Mindezeket az előző fejezetben is megismertük.

b./ Az előbbi két műveletre érvényes a kommutativitás, az asszociativitás és a disztributivitás törvénye.

Eszerint ha tetszőlegesen kiválasztott vektorok n -komponensűek, tehát L_n -ek, azaz:

$$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in L_n$$

akkor azokra vonatkozóan érvényesek az alábbi törvényszerűségek:

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{b} &= \underline{b} + \underline{a} \\ \underline{xa} &= \underline{ax} \end{aligned} \quad \text{kommutativitás}$$

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} &= \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \\ \underline{xy} / \underline{a} &= \underline{x} / \underline{ya} \end{aligned} \quad \text{asszociativitás}$$

$$\begin{aligned} \underline{x} + \underline{y} / \underline{a} &= \underline{xa} + \underline{ya} \\ \underline{x} / \underline{a} + \underline{b} &= \underline{xa} + \underline{xb} \end{aligned} \quad \text{disztributivitás}$$

c./ Az L_n halmaznak van nulla eleme, az n -komponenstű zérusvektor, amelyre igaz, hogy azt az L_n halmaz bármely eleméhez adjuk, azt változatlanul hagyja, azaz ha:

$$\underline{a} \in L_n \quad \text{akkor} \quad \underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$$

d./ Ha az $\underline{a} \in L_n$ halmaznak, akkor igaz, hogy

$$1 \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot 1 = \underline{a}$$

$$-1 \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot /-1/ = -\underline{a} \quad \text{és}$$

$$1\underline{a} + /-1/\underline{a} = \underline{0}$$

A fentiekben megfogalmazott négy feltétel teljesülése esetén tehát a halmazt lineáris térnek nevezzük. E négy feltételt természetesen nem csak vektorok, de mátrixok is teljesíthetik, így nem csak a vektorokkal, de a mátrixokkal kapcsolatban is beszélünk lineáris térről.

3.2. Az altér fogalma

Az L_n lineáris téren belül mindig létezik egy részhalmaz, amely L_n a lineáris térre vonatkozó négy feltételt teljesíti. Ez a részhalmaz az L_n altere. Ha az L_n térből kiválasztjuk az:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$$

vektorokat, akkor e vektorok összes lehetséges:

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \dots + x_k\underline{a}_k$$

lineáris kombinációi /ahol $x_1, x_2, \dots, x_k$ valós számok/ az n -elemű vektorok végtelen halmazát jelentik. Ezt a halmazt L'_n -el jelöljük és az L_n alterének nevezzük. Az L'_n tartalmazza a zérusvektort is, hiszen ha $x_1=x_2=\dots=x_k=0$, akkor:

$$\underline{a}_1 0 + \underline{a}_2 0 + \dots + \underline{a}_k 0 = \underline{0}$$

Ez /amikor minden skalárszorító zérus/, a zérusvektor triviális előállításának módja.

Természetesen az L'_n altér részhalmaza az L_n lineáris térnek, azaz:

$L'_n \in L_n$. Ha:

$L'_n \in L_n$, de $L'_n \neq L_n$ és $L'_n \neq 0$

/ahol 0 az egyetlen nullvektorból álló zérusaltér/, akkor az L'_n -t az L_n valódi alterének nevezzük. A zérusaltér és maga az L_n lineáris tér nem valódi altér. Az L'_n altér önmaga is lineáris tér.

Egy $p \cdot q$ típusú A mátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációi az L_p lineáris tér alterét állítják elő, míg sorvektorainak összes lineáris kombinációi az L_q lineáris alterét. Beszélünk tehát az oszlopvektorok, illetve a sorvektorok által generált altéréről. Az előbbit az A mátrix oszlopvektorterének, az utóbbit pedig az A mátrix sorvektorterének nevezzük. Ha például:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & -2 \\ 6 & 5 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{akkor az:}$$

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok oszlopvektorteret, az :

$$\underline{a}_1^T = [5, 3, 0, -2]$$

$$\underline{a}_2^T = [6, 5, 4, 8]$$

$$\underline{a}_3^T = [3, 2, 5, 1]$$

vektorok pedig sorvektorteret alkotnak.

3.3. Vektorok lineáris függetlensége, függősége

Már ismerjük, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ n -komponensű vektorokból és az $x_1, x_2, \dots, x_k$ skalárokból /tetszőlegesen megválasztott valós számokból/ képzett:

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k$$

kifejezés által meghatározott vektort az adott vektorok lineáris kombinációjának nevezzük. Mivel:

$$0a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_k = 0$$

így az összes lehetséges lineáris kombinációk között a zérusvektor mindig szerepel. Ez egyben azt is jelenti, hogy az:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ka_k = 0$$

vektoregyenletnek mindig van megoldása. Az:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$$

megoldást /amikor a skalárszorozók mindegyike zérus/ triviális megoldásnak nevezzük. Ha az:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ka_k = 0$$

egyenletnek csakis triviális megoldása létezik, akkor az:

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

vektorokat lineárisan független vektoroknak nevezzük. Ellenkező esetben lineárisan függő vektorokról beszélünk. Szóval azt mondani, hogy az adott vektorok lineárisan független, vagy lineárisan függő rendszert alkotnak. Legyenek:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lineárisan függetlenek-e az adott vektorok? Képezzük az:

$$x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c} = 0$$

vektoregyenletet, vagy részletesen felírva:

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formát, ami egyértelmű a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 3x + 4y + 2z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

s ha ezt megoldjuk, kapjuk hogy

$$x = 0, y = 0, z = 0,$$

tehát az adott vektorok lineárisan függetlenek.

Lineárisan független vektorok mindig az egységvektorok, mert a $\underline{0}$ vektort csak triviális módon képesek előállítani, vagyis:

$$0\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2 + 0\underline{e}_3 = \underline{0}. \text{ Az:}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

vektorok viszont nem lineárisan független vektorok, hiszen ezek:

$$2\underline{a} - 3\underline{b} - 4\underline{c} + \underline{d}$$

lineáris kombinációja zérusvektort eredményez, azaz:

$$\begin{aligned} 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vagyis az adott vektorokkal a zérusvektor nem csak triviális módon állítható elő, sőt az adott esetben nincs is zérus skalárszorozónk. Az adott vektorok tehát lineárisan függő rendszert alkotnak.

Néhány tétel a lineárisan független, illetve függő vektorokkal kapcsolatban:

- a./ Lineárisan független vektorok között a zérusvektor nem szerepelhet, hiszen ennek nem nulla skalárral való szorzata is zérusvektort eredményez, s lehetővé teszi, hogy a zérusvektort akkor is előállítsuk, ha nem minden skalárszorító nulla.
- b./ A lineárisan független vektorok bármilyen nem üres részhalmaza ugyancsak lineárisan független rendszert alkot.

Ha n lineárisan független vektorok közül elveszünk k vektort, ahol $k > n$, akkor mind a kiválasztott k vektor, mind a viszsamaradó $n-k$ vektor lineárisan független rendszert alkot.

Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ lineárisan független vektorok. Hagyjuk el $\underline{a}_1$ vektort. A maradék $\underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n$ vektorok is lineárisan függetlenek kell hogy legyenek, mert ellenkező esetben csak az $\underline{a}_1$ vektor hozzáírásával tudnánk lineáris kombinációjuk segítségével a zérusvektort előállítani, mégpedig úgy, ha $\underline{a}_1$ vektor együtthatója $x_1 \neq 0$ volna. Mivel azonban az adott vektorok $\underline{a}_1$ -től $\underline{a}_n$ -ig lineárisan független rendszert alkotnak, így $x_1 = 0$, vagyis:

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = 0$$

Ez viszont ellentmondáshoz vezetne, ha a maradék nem lenne lineárisan független. Például:

$$0 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lineárisan független vektorok közül bármely vektort /vektorokat/ elhagyjuk, a maradék vektorok szintén lineárisan független vektorok, például a:

$$0 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektorok csak zérus skalárszorítókkal vezetnek zérusvektorhoz.

c./ Lineárisan függő vektorok közül legalább az egyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

Vegyük az $a_1, a_2, \dots, a_k$ lineárisan függő vektorokat. Ez azt jelenti, hogy általuk a zérusvektor nem csak triviális módon állítható elő, vagyis az:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = 0$$

kifejezésben nullától eltérő együttható /skalárszorzó/ is található. Tegyük fel, hogy:

$$x_1 \neq 0. \text{ Ekkor azonban:}$$

$$a_1 = -\frac{x_2}{x_1} a_2 - \frac{x_3}{x_1} a_3 - \dots - \frac{x_k}{x_1} a_k.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$y_2 = -\frac{x_2}{x_1}, y_3 = -\frac{x_3}{x_1}, \dots, y_k = -\frac{x_k}{x_1} \text{ és akkor:}$$

$$a_1 = y_2 a_2 + y_3 a_3 + \dots + y_k a_k$$

vagyis az a_1 vektort kifejeztük a többi vektor lineáris kombinációjaként. Legyenek adva az:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

vektorok. Mivel:

$$2\underline{a} - 3\underline{b} - 4\underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$$

az adott vektorok lineárisan függő rendszert alkotnak, s közülük legalább egy vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

Válasszuk a többi vektor lineáris kombinációjaként kifejezendő vektornak a $\underline{b}$ vektort, tehát:

$$-3\underline{b} = -2\underline{a} + 4\underline{c} - \underline{d} \quad \text{és}$$

$$\underline{b} = \frac{2}{3}\underline{a} - \frac{4}{3}\underline{c} + \frac{1}{3}\underline{d} \quad \text{vagyis}$$

$$\underline{b} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{6}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{12}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{9}{3} \\ \frac{6}{3} \\ -\frac{6}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

tehát eredményül a $\underline{b}$ vektort kaptuk.

d./ Ha az adott n elemű vektorok közül az egyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, akkor az adott vektorok lineárisan függő vektorok.

Legyen adva, hogy:

$$\underline{a}_1 = x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3 + \dots + x_k \underline{a}_k \quad \text{és innen:}$$

$$1 \underline{a}_1 - x_2 \underline{a}_2 - x_3 \underline{a}_3 - \dots - x_k \underline{a}_k = \underline{0}$$

A baloldal olyan lineáris kombináció, ahol nem minden skálárszorító nulla, ugyanis $x_1 = 1$, tehát az adott vektorok lineárisan függő rendszert alkotnak.

3.4. A vektorrendszer rangja

A vektorok halmazt alkotnak. Az azonos számú elemet /koordinátát/ tartalmazó vektorok véges halmaza vektorrendszeret alkot. Ezzel kapcsolatban fontos szerepe van a rang definíciójának.

Az $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektorrendszer rangja r , ha kiválasztható belőle egy r lineárisan független vektort tartalmazó részhalmaz, de bármely r -nel több vektorból álló részhalmaza már lineárisan függő rendszert alkot. A vektorrendszer rangján tehát a vektorrendszerben felfelvehető lineárisan független vektorok maximális számát értjük. Ha tehát egy vektorrendszer rangja pl. 6, az azt jelenti, hogy az adott vektorrendszerben 6 lineárisan független vektor vehető fel, s ehhez a vektorrendszer bármely vektorát hozzávéve, már 6+1 vektor lineárisan függő lesz. A rangot r -rel jelöljük, miszerint r vektor lineárisan független, $r+1$ vektor már lineárisan függő.

A vektorrendszer rangjával kapcsolatban bizonyítás nélkül néhány tétel:

a./ Ha a vektorrendszer rangja r , akkor a vektorrendszer bármely vektora egyértelműen előállítható a rendszerből tetszőlegesen kiválasztott r darab lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként. /Az egyértelműség azt jelenti, hogy a kiválasztott lineárisan független vektoroknak csak egyetlen olyan lineáris kombinációjuk van, amely a kérdéses vektort előállítja./

b./ Ha egy vektorrendszerből olyan vektort veszünk el, amely kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja változatlan marad.

c./ Ha egy vektorrendszerhez olyan vektort csatolunk, amely kifejezhető az eredeti vektorok lineáris kombinációjaként, a vektorrendszer rangja ugyancsak változatlan marad.

d./ Ha az $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektorrendszer vektorai mind előállíthatók $b_1, b_2, \dots, b_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor az $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektorrendszer rangja legfeljebb p .

3.5. Dimenzió és bázis

A lineáris teret nem a ranggal, hanem a dimenzióval jellemezzük. A dimenziót hasonlóképpen definiáljuk, mint a vektorrendszer rangját.

Az L lineáris teret n dimenziósnak mondjuk, ha az L -ben található n lineárisan független vektor, de bármilyen is választunk ki az L -ből $n+1$ vektort, azok mindig lineárisan függő rendszert alkotnak.

Az n elemű vektorok tere n dimenziós, ami szerint n elemű vektorok között n lineárisan független vektort vehetünk fel.

Ilyenek például az n elemű egységvektorok:

$$\underline{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$$

$$\underline{e}_2 = [0, 1, \dots, 0]^T$$

$$\vdots$$

$$\underline{e}_n = [0, 0, \dots, 1]^T$$

n -nél több lineárisan független vektort viszont az n elemű vektorok között nem lehet felvenni.

Az n dimenziós lineáris teret L_n -nel jelöljük. Bárhogyan is veszünk fel az L_n -ben n lineárisan független vektort, azok bázisát alkotják az L_n -nek. A bázis alapvető tulajdonsága, hogy a tér bármely vektora kifejezhető a bázis vektorainak /az úgynevezett bázisvektoroknak/ lineáris kombinációjaként, mégpedig egyértelműen.

Ha tehát a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$

vektorok az L_n egyik bázisát alkotják és a $\underline{c}$ vektor is eleme az L_n -nek, akkor találhatók olyan

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

skalárok, amelyekre nézve teljesül a

$$\underline{c} = c_1 \underline{b}_1 + c_2 \underline{b}_2 + \dots + c_n \underline{b}_n$$

egyenlőség, s ezek a skalárok egyértelműen meghatározottak.

A $c_1, c_2, \dots, c_n$ skalárokat a $\underline{c}$ vektor koordinátáinak, mégpedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Bázist alkotnak az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ egységvektorok is, amit triviális bázisnak nevezünk, mivel a koordináták ebben a bázisban minden külön számítás nélkül rendelkezésünkre ál-

lanak. Ezek a koordináták ugyanis nem mások, mint a kérdéses vektor komponensei. Az:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \end{bmatrix}^T \quad \text{vektornak az:}$$

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ bázisra vonatkozó koordinátái tehát az:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

skalárok. E megállapítás egyértelmű és könnyen ellenőrizhető az:

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n = \underline{E} \underline{a} \quad \text{összefüggéssel.}$$

Az L_n lineáris térnek mindig van olyan részhalmaza, amely önmagában véve is lineáris térnek tekinthető. Az ilyen részhalmazt, mint tudjuk, az L_n alterének nevezzük. Az L_n adott:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$$

vektorainak összes lehetséges lineáris kombinációi, azaz az:

$$\underline{s} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k$$

alakban felírható vektorok például mindig alteret alkotnak $x_1, x_2, \dots, x_k$ tetszőleges valós számok/.

Bebizonyítható, hogy a definiált vektorok halmaza eleget tesz a lineáris térrel szemben támasztott követelményeknek. Ha bevezetjük az:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \end{bmatrix}^T \quad \text{jelöléseket, az előbbi } \underline{s} \text{ vektor}$$

$$\underline{s} = \underline{A} \underline{x}$$

alakban is felírható, ahol $\underline{A}$ egy $n \cdot k$ típusu mátrix, $\underline{x}$ pedig

egy tetszés szerinti k elemű vektor. Az összes lehetséges s vektorok által meghatározott alteret az A oszlopvektorai által generált altérnek nevezzük. Jelöljük ezt az alteret L' -lél. Azt pedig, hogy ez az L' az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítható s vektorok halmaza, a következőképpen szimbolizáljuk:

$$L' = \{s \mid s = A \cdot x\}$$

Az L' feltétlenül részhalmaza L_n -nek, azaz:

$$L' \subseteq L_n$$

Az L' dimenziója megegyezik az A oszlopvektoraiból alkotott /tehát a generáló vektorokból alkotott/ vektorrendszer rangjával, ami természetesen nem lehet nagyobb n -nél. Ha az L' dimenziója történetesen valamely n -nél kisebb természetes szám, akkor az L' halmazt az L_n valódi alterének nevezzük. Ha az L' dimenziója n , akkor:

$$L' = L_n$$

vagyis az L' nem valódi alteret alkot. Mint már ismerjük, altérrel beszélünk akkor is, ha:

$$A = 0$$

vagyis amikor L' egyetlen elemből áll, a zérusvektorból. Ez esetben:

$$L' = \{0\}$$

szimbólummal jelölünk. Ez a zérusaltér, amely ugyancsak nem valódi altér.

3.6. A mátrix rangja

Minden mátrixszal kapcsolatban beszélhetünk két speciális altérrel, mégpedig az oszlopvektortérrel és a sorvektortérrel. A sorvektortér és az oszlopvektortér dimenziója,

vagy ami ugyanaz, a sorvektortér és az oszlopvektortér rangja bármely mátrixra nézve megegyezik. Ezt a közös számot nevezzük a mátrix rangjának és jelöljük r/A -val.

Eszerint valamely A mátrix rangján az oszlopvektoraiból, illetve sorvektoraiból alkotott vektorrendszer rangját értjük.

A mátrix rangjának meghatározására a későbbiekben egy jól kezelhető számítási eljárást mutatunk be, az ún. elemi bázistranszformációt. Előbb azonban még megismerkedünk néhány kérdéssel a mátrixok rangjával kapcsolatban.

A rang ismeretében a kvadratikusan mátrixokat két csoportba sorolhatjuk, mégpedig a szinguláris és a nem-szinguláris mátrixok csoportjába. Ha egy kvadratikusan mátrix rangja kisebb, mint rendje /oszlopainak, illetve sorainak száma/, akkor a mátrixot szingulárisnak, ellenkező esetben nem-szingulárisnak nevezzük. A nem-szinguláris mátrixnak tehát mind az oszlopvektora, mind a sorvektora lineárisan független rendszert alkotnak. A szinguláris mátrixoknál ezzel szemben mind az oszlopvektorok, mind a sorvektorok rendszere lineárisan függő.

A mátrixok rangjával kapcsolatban gyakran támaszkodhatunk az alábbi megállapításokra:

a./ Egy mátrix rangja nem lehet nagyobb sem oszlopainak, sem pedig sorainak számánál. Egy 5×3 típusú mátrix rangja legfeljebb 3.

b./ A diagonális mátrixok rangja megegyezik a zérustól különböző diagonális elemek számával. Az:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{mátrix rangja 3.}$$

Egy diagonális mátrix tehát csak akkor nem-szinguláris, ha a diagonális elemek között nem szerepel nulla.

c./ A kvázidiagonális mátrixok rangja egyenlő a diagonális blokkok rangjának összegével.

d./ Egy trianguláris mátrix akkor és csak akkor szinguláris, ha diagonális elemei között 0 is található.

e./ Az összeg rangja nem lehet nagyobb a tagok rangjának összegénél, azaz:

$$r/A_1 + A_2 + \dots + A_k \leq r/A_1 + r/A_2 + \dots + r/A_k$$

f./ A szorzat rangja nem lehet nagyobb egyik tényező rangjánál sem, azaz:

$$r / \underline{A}_1 \underline{A}_2 \dots \underline{A}_k / \leq \min. \left[r / \underline{A}_k / \right]$$

g./ Ha a p · r típusú A mátrix rangja r és az r · q típusú B mátrix rangja ugyancsak r, akkor az A B szorzat rangja is r, vagyis ha:

$$r / \underline{A} / = r / \underline{B} / = r$$

$$/p \cdot r / \quad /r \cdot q / \quad \text{akkor:}$$

$$r / \underline{A} \underline{B} / = r.$$

3.7. A mátrixok faktorizációja

Ha valamely adott mátrixot fel tudunk írni az

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2$$

összefüggésnek megfelelően két mátrix szorzataként, akkor az A mátrix egy faktorizációja áll előttünk. /Természetesen a faktorizációnál több tényező is számbajöhet, mi azonban csak a két tényezőre való felbontásra fordítjuk a figyelmünket./

Bárhogy is történjen egy mátrix faktorizálása, a tényezők rangja nem lehet kisebb, mint az adott mátrix rangja. Ebből az következik, hogy az ilyen felbontásban az első tényező oszlopvektorainak száma, ill. a második tényező sorvektorainak száma legalább annyi, mint az adott mátrix rangja. Ha az első tényező oszlopvektorainak száma és ugyanakkor a második tényező sorvektorainak száma is megegyezik az eredeti mátrix rangjával, akkor minimális felbontásról beszélünk.

Az A minimális felbontása az:

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2$$

$$pq \quad pr \quad rq$$

egyenlőséggel szimbolizálható, ahol $r = r / \underline{A} /$

A minimális felbontásnak a következő tulajdonságai vannak:

a./ $r / \underline{A}_1 / = r / \underline{A}_2 / = r / \underline{A} /$, tehát mind az $\underline{A}_1$ oszlopvektorai, mind az $\underline{A}_2$ sorvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

b./ Az $\underline{A}_1$ oszlopvektorai bázisát alkotják az $\underline{A}$ oszlopvektorterének, az $\underline{A}_2$ sorvektorai pedig bázisát alkotják az $\underline{A}$ sorvektorterének.

c./ Az $\underline{A}_2$ oszlopvektorainak komponensei az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorainak az $\underline{A}_1$ által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátái, az $\underline{A}_1$ sorvektorainak komponensei pedig az $\underline{A}$ sorvektorainak az $\underline{A}_2$ által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátái.

A minimális felbontást bázisfaktorizációnak is szoktuk nevezni. A bázisfaktorizáció igen jól használható a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál.

3.8. Az elemi bázistranszformáció

Amikor az L_n egy adott bázisából egy másik bázisba térünk át, bázistranszformációról beszélünk. A bázistranszformáció legegyszerűbb esete az, amikor az adott bázisnak csak az egyik vektorát cseréljük ki. Ez az elemi bázistranszformáció, vagy röviden elemi transzformáció.

Legyenek az L_3 lineáris tér bázisvektorai a következők:

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Mivel az $\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \underline{a}_3 x_3 = \underline{0}$ csak akkor áll fenn, ha:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$, az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok lineárisan független vektorok, tehát az L_3 lineáris térnek bázisát alkotják.

Válasszunk egy tetszőleges $\underline{c} \in L_3$ vektort, ahol $\underline{c} \neq \underline{0}$ és cseréljük ki ezzel az előbbi vektorok valamelyikét /pl. $\underline{a}_1$ -et/ úgy, hogy a $\underline{c}, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok is bázist alkossanak.

Mivel az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok lineárisan független vektorok, tehát L_3 bázisát alkotják, a $\underline{c}$ vektor / $\underline{c} \in L_3$ / kifejezhető az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz:

$$\underline{c} = c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3$$

Mivel $\underline{c} \neq \underline{0}$, a $\underline{c}$ vektornak legalább egy nullától különböző komponense van. Tegyük fel, hogy $c_1 \neq 0$. Ekkor viszont $\underline{a}_1$ kifejezhető a $\underline{c}, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz:

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{c_1} \underline{c} - \frac{c_2}{c_1} \underline{a}_2 - \frac{c_3}{c_1} \underline{a}_3$$

Tegyük fel, hogy $\underline{x}$ az L_3 lineáris tér egy tetszőleges vektora, amely kifejezhető az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként, vagyis:

$$\underline{x} = \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \underline{a}_3 x_3$$

Írjuk most $\underline{a}_1$ helyébe az előbbi kifejezést, tehát:

$$\underline{x} = \left(\frac{1}{c_1} \underline{c} - \frac{c_2}{c_1} \underline{a}_2 - \frac{c_3}{c_1} \underline{a}_3 \right) x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \underline{a}_3 x_3 \quad \text{és innen:}$$

$$\underline{x} = \frac{x_1}{c_1} \underline{c} + \left(x_2 - \frac{x_1}{c_1} c_2 \right) \underline{a}_2 + \left(x_3 - \frac{x_1}{c_1} c_3 \right) \underline{a}_3$$

Most tehát megkaptuk a tetszőleges $\underline{x}$ vektor koordinátáit a $\underline{c}, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ bázisvektorokra. Természetesen az $\underline{a}_2$ vagy $\underline{a}_3$ vektorokat ugyanígy kicserélhettük volna a $\underline{c}$ vektorral. Másrészt a bázistranszformációt nemcsak $c_1 \neq 0$, de $c_2 \neq 0$, vagy $c_3 \neq 0$ esetén is végrehajthattuk volna, vagyis annyi különböző módon, ahány 0-tól különböző koordinátája van a $\underline{c}$ vektornak az adott bázisra vonatkozóan.

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet az elemi bázistranszformációt elvégezni. Az n dimenziós $\underline{c}$ vektor felírható a:

$$\underline{c} = c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 + \dots + c_n \underline{e}_n$$

formában, ahol a c_i -k az egységvektorok által meghatározott bázisra vonatkozó koordináták. Ha $\underline{c} \neq \underline{0}$, akkor a c_i skalárok között van nullától különböző is. Tegyük fel, hogy $c_1 \neq 0$. Ekkor viszont $\underline{e}_1$ kifejezhető az előbbi egyenletből, azaz:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{c_1} \underline{c} - \frac{c_2}{c_1} \underline{e}_2 - \dots - \frac{c_n}{c_1} \underline{e}_n$$

A $\underline{c}$, $\underline{e}_2$, ..., $\underline{e}_n$ vektorrendszer lineárisan független rendszert alkot. Ugyanis, ha az:

$$x_1 \underline{c} + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n = \underline{0}$$

egyenletnek lenne a triviálisától különböző megoldása is, akkor a $\underline{c}$ vektort az $\underline{e}_2$, ..., $\underline{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként is elő lehetne állítani, ami viszont ellentétben áll a $c_1 \neq 0$ feltétellel.

Az előbbiekből következik, hogy ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ egy tetszőleges bázis, akkor annak feltétele, hogy az $\underline{a}_1$ bázisvektort kicserélhessük n dimenziós tér tetszőleges $\underline{c}$ vektorával, az, hogy a $\underline{c}$ vektor i -edik komponense nullától különböző legyen.

Hogyan alakulnak a vektorok koordinátái, ha egyik bázisból a másikba térünk át? Legyenek $\underline{x}$ vektor $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ bázisra vonatkozó koordinátái $x_1, x_2, \dots, x_n$. Eszerint tehát:

$$\underline{x} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n$$

Tegyük fel, hogy $\underline{c}$ vektor ennek a lineáris térnek egy tetszőleges nullától különböző vektora, azaz $\underline{c} \neq \underline{0}$. A $\underline{c}$ vektor felírható a bázisvektorok segítségével, azaz:

$$\underline{c} = c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \dots + c_k \underline{a}_k + \dots + c_n \underline{a}_n$$

ahol c_i a $\underline{c}$ vektornak a bázisra vonatkozó koordinátái. Mivel $\underline{c} \neq \underline{0}$, így a c_i között van legalább egy, amely nem nulla. Legyen ez a c_k . Ebben az esetben a bázisvektorok közül az $\underline{a}_k$ vektor kicserélhető a $\underline{c}$ vektorral, vagyis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{c}, \dots, \underline{a}_n$ vektorok szintén bázist alkotják a lineáris térnek, ugyanis ezek lineárisan független vektorok. A vektorcsere feltétele, hogy a $\underline{c}$ vektornak az $\underline{a}_k$ -ra vonatkozó koordinátája $c_k \neq 0$ legyen. Mivel $c_k \neq 0$, a $\underline{c}$ vektorra felírt lineáris kombinációból $\underline{a}_k$ vektort kifejezhetjük, azaz:

$$\underline{a}_k = -\frac{1}{c_k} c_1 \underline{a}_1 - \frac{1}{c_k} c_2 \underline{a}_2 - \dots + \frac{1}{c_k} \underline{c} - \dots - \frac{1}{c_k} c_n \underline{a}_n$$

Most az $\underline{a}_k$ értékét az $\underline{x}$ vektorra felírt egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + \\ &+ x_k \left[-\frac{1}{c_k} c_1 \underline{a}_1 - \frac{1}{c_k} c_2 \underline{a}_2 - \dots + \frac{1}{c_k} \underline{c} - \dots - \frac{1}{c_k} c_n \underline{a}_n \right] + \dots + x_n \underline{a}_n \end{aligned}$$

és szorzás, összevonás után:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \left[x_1 - \frac{x_k}{c_k} c_1 \right] \underline{a}_1 + \left[x_2 - \frac{x_k}{c_k} c_2 \right] \underline{a}_2 + \dots + \\ &+ \frac{x_k}{c_k} \underline{c} + \dots + \left[x_n - \frac{x_k}{c_k} c_n \right] \underline{a}_n \end{aligned}$$

vagyis az egyenlet jobb oldalán zárójelben lévő együtthatók /skalárok/ adják az $\underline{x}$ vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit.

Ha bevezetjük az:

$$\frac{x_k}{c_k} = \delta \quad \text{jelölést, az előbbieket egyszerűbben felírhatók a:}$$

$$\underline{x} = /x_1 - \delta c_1 / \underline{a}_1 + /x_2 - \delta c_2 / \underline{a}_2 + \dots + \delta \underline{c} + \dots + /x_n - \delta c_n / \underline{a}_n$$

formában. Az elmondottakat a következő táblázatos formában tudjuk szemléltetni:

I.

Régi bázis	$\underline{c}$	Tetszőleges rég. koord. $\underline{x}$
$\underline{a}_1$	c_1	x_1
$\underline{a}_2$	c_2	x_2
$\vdots$		
$\leftarrow \underline{a}_k$	$\boxed{c_k} \neq 0$	x_k
$\vdots$		
$\underline{a}_n$	c_n	x_n

II.

Új bázis	$\underline{e}$	Tetszőleges új koord. $\underline{x}$
$\underline{a}_1$	0	$x_1 - \delta c_1$
$\underline{a}_2$	0	$x_2 - \delta c_2$
$\vdots$		
$\rightarrow \underline{c}$	1	$x_k - \delta c_k$
$\vdots$		
$\underline{a}_n$	0	$x_n - \delta c_n$

Látjuk, hogy mivel $\underline{c}$ vektort bevontuk a bázisba az $\underline{a}_k$ vektor helyett, megváltoztak a $\underline{c}$ vektor koordinátái, vagyis a régi koordináták helyére az $\underline{e}_k$ egységvektor koordinátái léptek. Ugyanis a $\underline{c}$ vektort az új bázis vektoraiból a:

$$\underline{c} = 0\underline{a}_1 + 0\underline{a}_2 + \dots + 0\underline{a}_{k-1} + 1\underline{c} + 0\underline{a}_{k+1} + 0\underline{a}_n$$

formában tudjuk előállítani. Az I. táblázat tehát a $\underline{c}$, $\underline{x}$ vektoroknak a régi bázisra vonatkozó koordinátáit, a II. táblázat pedig az új bázisra vonatkozó koordinátáit tünteti fel.

A c_k koordinátát, amely jelzi, hogy a $\underline{c}$ vektort melyik bázisvektor helyére vonták be, generáló elemnek nevezzük. Ez csak nullától különböző koordináta lehet. A generáló elemet /kitüntetett szerepét hangsúlyozva/ a táblázatban beke-reteztük.

Az elemi bázistranszformáció során az $\underline{x}$ vektor új koordinátáit két lépésben számítjuk ki.

Az első lépésben a generáló elemmel elosztjuk az $\underline{x}$ vektor megfelelő koordinátáját. Az így nyert hányadost δ -vel je-löltük.

A következő lépésben meghatározzuk az $\underline{x}$ vektor többi koordinátáit, úgy, hogy a régi koordinátákból rendre levon-juk az új bázisvektor régi koordinátáinak δ -szorosát. /Természetesen, ha $\delta = 0$, vagy ha az új bázisnak a megfelelő régi koordinátája 0, az $\underline{x}$ koordinátái nem változnak meg./

A gyakorlatban mindig az egységvektorok által meghatáro-zott bázisból, az úgynevezett triviális bázisból indulunk ki, s ennek vektorait lépésről lépésre cseréljük ki alkalmasan megválasztott új vektorokkal. Legyenek adva az:

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \\ 19 \end{bmatrix}$$

vektorok és legyen:

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3$$

Cseréljük ki az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisvektorok valamelyikét és számítsuk ki az $\underline{a}_i$ vektorok új koordinátáit. Vonjuk be a bázisba mondjuk az $\underline{a}_1$ vektort és legyen a generáló elem az $\underline{a}_1$ vektor második koordinátája /a táblázatban bekereteztük/.

Az $\underline{a}_2$ vektor új koordinátái $x_k - \delta c_k$ alapján a következők:

$$\left(\delta = \frac{1}{2} = 0,5 \right)$$

$$2 - 0,5 \cdot 3 = 0,5,$$

$$2 - 0,5 \cdot 4 = 0.$$

ugyanígy az $\underline{a}_3$ koordinátái:

$$\left(\delta = \frac{4}{2} = 2 \right)$$

$$1 - 2 \cdot 3 = -5,$$

$$3 - 2 \cdot 4 = -5$$

és a $\underline{b}$ vektornál:

$$\left(\delta = \frac{17}{2} = 8,5 \right)$$

$$11 - 8,5 \cdot 3 = -14,5$$

$$19 - 8,5 \cdot 4 = -15,0$$

Foglaljuk az adatokat táblázatba /nyíllal jelöljük a báziscserét/:

I.

Régi bázis	a_1	a_2	a_3	b
e_1	3	2	1	11
$\leftarrow e_2$	2	1	4	17
e_3	4	2	3	19

II.

Új bázis	e_2	a_2	a_3	b
e_1	0	0,5	-5	-14,5
$\rightarrow a_1$	1	0,5	2	8,5
e_3	0	0	-5	-15,0

Bevonhatunk a bázisba egy másik vektort is. Mindegy, hogy melyiket, de célszerű lehet úgy választani, hogy kedvező legyen a generáló elem, hogy egyszerűbben tudjunk számolni. Vonzuk be a bázisba a_3 -at és válasszuk generáló elemnek annak harmadik koordinátáját.

II.

Régi bázis	e_2	a_2	a_3	b
e_1	0	0,5	-5	-14,5
a_1	1	0,5	2	8,5
$\leftarrow e_3$	0	0	-5	-15,0

III.

Új bázis	e_2	a_2	e_3	b
e_1	0	0,5	0	0,5
a_1	1	0,5	0	2,5
$\rightarrow a_3$	0	0	1	3

Megfigyelhetjük, hogy mivel a_2 -nél $\delta = \frac{0}{-5} = 0$, az a_2 koordinátái nem változtak.

Bevonhatjuk a bázisba a_2 -t is. Válasszuk generáló elemül ennek első koordinátáját. Ekkor a következőt kapjuk:

III.

Régi bázis	e_2	a_2	e_3	b
$\leftarrow e_1$	0	0,5	0	0,5
a_1	1	0,5	0	2,5
a_3	0	0	1	3

IV.

Új bázis	e_2	e_1	e_3	b
$\Rightarrow a_2$	0	1	0	1
a_1	1	0	0	2
a_3	0	0	1	3

A b oszlopában találjuk a b vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit, amikor is mindhárom egységvektort ki-

cseréltük az $\underline{a}_1$ vektorokkal. A kapott koordináták a:

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3$$

lineáris kombináció x_1, x_2, x_3 skalárjai és mint a táblázatból látjuk, $x_1=2$, $x_2=1$ és $x_3=3$. /Vigyázni kell a skalárok sorrendjére./ Az $\underline{a}_1$ -nek megfelelő sorban lévő koordináta az x_1 skalár, az $\underline{a}_2$ sorban található az x_2 skalár és $\underline{a}_3$ sorában az x_3 skalár. Eszerint:

$$\underline{b} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \\ 19 \end{bmatrix}$$

A triviális bázis szerint:

$$\underline{b} = 11 \underline{e}_1 + 17 \underline{e}_2 + 19 \underline{e}_3, \text{ vagyis:}$$

$$\begin{aligned} \underline{b} &= 11 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 17 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 19 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \\ 19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Könnyen észrevehetjük, hogy a táblázat belsejében permutáló mátrixot kaptunk, melyet átrendezve, egységmátrixhoz jutunk.

Az egységvektoroknak pillanatnyilag semmi szerepük nincs, ezért azokat elhagyhatjuk. Ennek alapján a számításokat egyszerűsíthetjük. Ilyenkor a táblázatokat nem ismételjük, hanem egymás mellé írjuk és kevesebb munkával ugyanazon eredményhez jutottunk.

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_2$	$\underline{b}$	$\underline{b}$
$\Rightarrow \underline{a}_2$	3	2	1	11	0,5	-5	-14,5	0,5	0,5	1
$\Rightarrow \underline{a}_1$	2	1	4	17	0,5	2	8,5	0,5	2,5	2
$\Rightarrow \underline{a}_3$	4	2	3	19	0	-5	-15,0	0	3	3

Megjegyezzük még a következőket:

A vektorok bevonásának sorrendje közömbös.

Egy $m \cdot n$ típusu mátrix esetén /mint tudjuk, m a sorok száma, n pedig az oszlopok száma/:

ha $m < n$, nem tudunk minden oszlopot a bázisba bevonni, csak legfeljebb m oszlopot,

ha $m = n$, akkor annyi /de legfeljebb m számú/ oszlop vonható a bázisba, ahányszor sikerül a szabad sorokban zérustól különböző generáló elemet választani,

ha $m > n$, akkor nem tudunk minden sorba új vektort bevonni, mert nincs elegendő oszlopvektorunk.

3.9. A mátrix rangjának meghatározása

A bázistranszformáció megismerése után egyszerűen jutunk el a mátrix rangjának meghatározásához.

Egy mátrix rangját úgy határozzuk meg, hogy a triviális bázis bázisvektormi helyére az adott mátrixnak annyi oszlopvektorát vonjuk be, amennyit csak lehet.

Vegyük például az:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3]$$

mátrixot és határozzuk meg rangját:

Kiindulunk a:

Bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$
$\underline{e}_1$	2	4	1
$\underline{e}_2$	2	1	4
$\underline{e}_3$	4	2	3

tablázatból, majd először az $\underline{a}_1$, majd az $\underline{a}_2$, stb. vektorokat vonjuk be a bázisba mindaddig, amig újabb vektor bevonására lehetőségünk van. Ahány vektort tudunk a bázisba bevonni a triviális bázisvektorok helyére, annyi az adott

mátrix rangja. Végezzük el a báziscseréket az előző pontban az elemi bázistranszformációval kapcsolatban megismert számítási eljárás szerint.

	Bázis	a_1	a_2	a_3
I.	e_1	2	4	1
	e_2	2	1	4
	e_3	4	2	3

	Bázis	e_1	a_2	a_3
	a_1	1	2	0,5
	e_2	0	-3	3
	e_3	0	-6	1

	Bázis	e_1	e_2	a_3
	a_1	1	0	2,5
	a_2	0	1	-1
	e_3	0	0	-5

	Bázis	e_1	e_2	e_3
	a_1	1	0	0
	a_2	0	1	0
	a_3	0	0	1

Mindhárom oszlopvektort be tudtuk vonni a bázisba, tehát az adott mátrix rangja:

$$r / A / = 3$$

A számításokat most is célszerű az egységvektorok elhagyásával, leegyszerűsített módon elvégezni, azaz:

		$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_3$
$\underline{a}_1$	$\underline{e}_1$	2	4	1	2	0,5	2,5
$\underline{a}_2$	$\underline{e}_2$	2	1	4	-3	3	-1
$\underline{a}_3$	$\underline{e}_3$	4	2	3	-6	1	-5

Határozzuk meg az:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{mátrix rangját.}$$

		$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_3$
$\underline{a}_1$	$\underline{e}_1$	1	3	1	3	1	-2
$\underline{a}_2$	$\underline{e}_2$	4	6	-2	-6	-6	1
	$\underline{e}_3$	0	1	1	1	1	0
	$\underline{e}_4$	2	2	-2	-4	-4	0

Az $\underline{a}_3$ vektort már nem tudjuk a bázisba bevonni, mert az $\underline{e}_3$ és az $\underline{e}_4$ -re vonatkozó koordinátája nulla, márpedig mint tudjuk 0-át nem választhatunk generáló elemnek, tehát $r(\underline{A}) = 2$.

Határozzuk meg még az:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_2	a_3	a_4	a_5	a_3	a_4	a_5	a_4	a_5
a_1	1	2	1	-1	2	2	1	-1	2	-1	-1	0	$-\frac{7}{4}$	1
a_2	2	3	1	-2	3	-1	1	0	-1	1	0	1	$\frac{3}{4}$	0
a_3	1	1	-4	2	-3	-1	-5	3	-5	-4	3	-4	$-\frac{3}{4}$	1
	1	2	5	-4	6	0	4	-3	4	4	-3	4	0	0

Az a_4 és a_5 vektorokat nem tudjuk a bázisba bevonni az a_1 , a_2 , a_3 vektorok mellé, tehát a mátrix rangja:

$$r / A / = 3$$

3.10. Bázisfaktorizáció

A 3.7. pontból ismerjük, hogy a mátrixokat tényezőkre, mátrixok szorzatára tudjuk bontani. Mondottuk, hogy a minimális felbontást bázisfaktorizációnak nevezzük. Az előbbi pontban megismert számítások alapján könnyen elvégezhetjük a bázisfaktorizációt is.

Vegyük az előbb már megismert:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Végezzük el a mátrix rangjának meghatározását egyszerűsítés nélkül.

Bázis	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e_1	1	2	1	-1	2
e_2	2	3	1	-2	3
e_3	1	1	-4	2	-3
e_4	1	2	5	-4	6

Bázis	$\underline{e}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{e}_1$	1	2	1	-1	2
$\underline{e}_2$	0	-1	-1	0	-1
$\underline{e}_3$	0	-1	-5	3	-5
$\underline{e}_4$	0	0	4	-3	4

Bázis	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{a}_1$	1	0	-1	-1	0
$\underline{a}_2$	0	1	1	0	1
$\underline{e}_3$	0	0	-4	3	-4
$\underline{e}_4$	0	0	4	-3	4

Bázis	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{a}_1$	1	0	0	$-\frac{7}{4}$	1
$\underline{a}_2$	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	0
$\underline{a}_3$	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	1
$\underline{e}_4$	0	0	0	0	0

Írjuk fel a bázisba bevont vektorokból az $\underline{A}_1$ mátrixot:

$$\underline{A}_1 = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Az utolsó táblázat alapján felírhatjuk az:

$$\underline{E}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

r oszlopvektorból álló egységmátrixot, valamint a be nem vont vektoroknak a lekötött sorokra vonatkozó új koordinátái alapján a:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 1 \\ -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} = [\underline{d}_1, \underline{d}_2] \text{ mátrixot.}$$

Tudjuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ lineárisan független vektorok bázisát alkotják az oszlopvektorok által generált altérnek. Az $\underline{A}$ mátrix minden oszlopa felírható tehát az $\underline{A}_1$ vektorainak $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ lineáris kombinációjaként, azaz:

$$\underline{a}_1 = \underline{A}_1 \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_2 = \underline{A}_1 \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_3 = \underline{A}_1 \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_4 = \underline{A}_1 \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_5 = \underline{A}_1 \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

vagyis ennek alapján az $\underline{A}$ mátrix a következők szerint írható fel:

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5] \quad \text{azaz:}$$

$$\underline{A} = [\underline{A}_1 \underline{e}_1, \underline{A}_1 \underline{e}_2, \underline{A}_1 \underline{e}_3, \underline{A}_1 \underline{d}_1, \underline{A}_1 \underline{d}_2] \quad \text{és } \underline{A}_1 \text{-et kiemelve:}$$

$$\underline{A} = \underline{A}_1 [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{d}_1, \underline{d}_2] \quad \text{vagy másként:}$$

$$\underline{A} = \underline{A}_1 [\underline{E}_3, \underline{D}] \quad \text{vagyis:}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Készítsük el még egyszer az előbbi mátrix bázisfaktorizációját, de úgy, hogy a vektorokat ne sorba vonjuk be. Alkalmazhatjuk az egyszerűsített eljárást is, de tudjuk, hogy a bázisba bevont vektor helyén egységvektorok szerepelnek, amelyeket az adott a_i vektorral kicseréltünk.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_2	a_3	a_4	a_5	a_2	a_4	a_5
a_1	1	2	1	-1	2	2	-1	-1	2	1	-1	1
a_3	2	3	1	-2	3	-1	-1	0	-1	1	0	1
	1	1	-4	2	-3	-1	-5	3	-5	4	3	0
	1	2	5	4	6	0	4	3	4	-4	3	0

	a_4	a_5
a_1	$-\frac{7}{4}$	1
a_3	$-\frac{3}{4}$	1
a_2	$\frac{3}{4}$	0
	0	0

Most tehát:

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_2] \quad [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{d}_4, \underline{d}_5] \quad \text{vagyis:}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Vigyázni kell természetesen a vektorok sorrendjére. Az oszlopvektorok eredeti sorrendjét megkapjuk, ha a második és a harmadik oszlopot felcseréljük.

3.11. Kompatibilitás

Ha az L_n lineáris tér egy tetszőleges $\underline{b}$ vektora előállítható az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, azt mondjuk, hogy a $\underline{b}$ vektor kompatibilis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok által generált altérre nézve, vagy másként a $\underline{b}$ vektor benne fekszik az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok által generált altérben. /A kompatibilitás latin szó, összeférhetőséget jelent./

Ha viszont a $\underline{b}$ vektor nem fejezhető ki az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, azt mondjuk, hogy a $\underline{b}$ vektor inkompatibilis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok által generált altérre nézve.

A bázistranszformáció ismeretében a kompatibilitás problémája egyszerűen eldönthető. Kiindulunk a triviális bázisból és az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorokból annyit veszünk be ebbe a bázisba, amennyit csak lehetséges. A bevont vektorok a kérdéses lineáris térnek bázisát alkotják, s a számításokból leolvasható, hogy a $\underline{b}$ vektor kifejezhető-e az adott bázis segítségével vagy nem.

Legyen adva az:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix és vizsgáljuk meg, hogy a: $\underline{b} = \begin{bmatrix} 11, 19, 12 \end{bmatrix}^T$ vektor kompatibilis-e az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorterében.

A bázistranszformáció során megismerteket alkalmazva, az $\underline{a}_1$ vektorokat rendre bevonjuk a bázisba, azaz:

Bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$ $\underline{e}_1$	2	<u>1</u>	4	11	2	4	11	-2	1	3
$\underline{a}_1$ $\underline{e}_2$	3	4	1	19	<u>-5</u>	-15	-25	3	5	2
$\underline{a}_3$ $\underline{e}_3$	1	2	4	12	-3	-4	-10	<u>5</u>	5	1

Mivel a számítások szerint:

$$\underline{b} = 2 \underline{a}_1 + 3 \underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

vagyis a $\underline{b}$ vektor kifejezhető az adott bázisvektorok lineáris kombinációjaként, a $\underline{b}$ vektor kompatibilis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok által generált altérre nézve. Ez azt is jelenti, hogy az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek és hogy $r/\underline{A} = 3$.

Csökkentsük most a $\underline{b}$ vektor harmadik elemét 5-tel, vagyis vizsgáljuk meg, hogy $\underline{a}$:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 11, 19, 7 \end{bmatrix}^T$$

vektor kompatibilis-e az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorterében.

Bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{b}$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$ $\underline{a}_1$	2	1	4	11	2	4	11	- 2	1
$\underline{a}_1$ $\underline{a}_2$	3	4	1	19	-5	-15	-25	3	5
$\underline{e}_3$	1	2	4	7	-3	-4	-15	5	0

A $\underline{b}$ vektor most is kompatibilis az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorterére nézve. Most azonban a $\underline{b}$ vektor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ vektorral is kifejezhető:

$$\underline{b} = 5 \underline{a}_1 + \underline{a}_2$$

4. FEJEZET

Lineáris egyenletrendszerek megoldása és mátrixok inverziója

4.1. Lineáris egyenletrendszerek

Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretleneket tartalmazó

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

egyenletek halmazát elsőfokú vagy lineáris egyenletrendszerek nevezük. E halmaz m számú egyenletet tartalmaz n számú ismeretlennel, ahol az a_{ij} együtthatók /az első index a sor, a második az oszlopindex/ valós számok.

Az a_{ij} együtthatók az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix, az x_j / $j = 1, 2, \dots, n$ / ismeretlenek az

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$$

és a b_i / $i = 1, 2, \dots, m$ / együtthatók a

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}^T$$

vektor formában is felírhatók, azaz egyenletrendszerünk röviden az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

formával is jelölhető, hiszen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Felírható még egyenletrendszerünk az

$$\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \dots + \underline{a}_nx_n = \underline{b}$$

vektoregyenletként is.

Abban az esetben, ha $n = m$, vagyis ha az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, azaz ha az A mátrix /úgynevezett együtthatómátrix/ kvadrátikus, akkor az egyenletrendszer reguláris, ellenkező esetben irreguláris.

Ha a $b_1, b_2, \dots, b_m$ mindegyike nulla, vagyis $\underline{b} = \underline{0}$, akkor az egyenletrendszert homogénnek, ha pedig a b_i / $i = 1, 2, \dots, m$ / közül legalább egy nem nulla, vagyis $\underline{b} \neq \underline{0}$, az egyenletrendszert inhomogénnek nevezzük.

4.2. A lineáris egyenletrendszer megoldása

Vizsgáljuk meg először a lineáris egyenletrendszer megoldását általánosan. Egy lineáris egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni mindazokat az $\underline{x}$ vektorokat, amelyek kielégítik az $A \underline{x} = \underline{b}$ összefüggést. A megoldás szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\underline{b}$ vektor benne fekszen az A mátrix oszlopvektorterében, vagyis a $\underline{b}$ vektor kompatibilis legyen az A mátrix oszlopvektorterére nézve.

A mátrix faktorizációjánál láttuk, hogy az $\underline{A}$ mátrix felbontható az $\underline{A}_1$ mátrix, valamint az $\begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix}$ mátrix szorzatára, azaz

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix}$$

és tudjuk, hogy az $\underline{A}_1$ a bázisba bevont vektorokból alkotott mátrix, az $\underline{E}_r$ az r számú kicserélt vektor helyébe kerülő egységvektorokból alkotott egységmátrix, $\underline{D}$ pedig a báziscserébe be nem vont vektorok új koordinátáiból alkotott mátrix, amely vektoroknál csak a felhasznált sorok koordinátáit vesszük figyelembe.

Tegyük fel, hogy az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszernek a $\underline{b}$ vektor kompatibilis az $\underline{A}$ oszlopvektortérre nézve, azaz az egyenletrendszer megoldható. Legyen az $\underline{A}$ mátrix rangja r , azaz $r/\underline{A} = r$. Ekkor viszont az $\underline{A}$ mátrix faktorizálható az

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix}$$

összefüggés alapján, amiből viszont az következik, hogy

$$\underline{b} = \underline{A}_1 \underline{d}$$

ahol a $\underline{d}$ komponensei a $\underline{b}$ vektornak az $\underline{A}_1$ mátrix által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazzák.

Ha ugyanis $\underline{b}$ kompatibilis, akkor felírható r számú lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként, vagyis felírható az $\underline{A}_1$ mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, hiszen mint tudjuk, az $\underline{A}_1$ éppen r lineárisan független oszlopvektorból áll.

A fentiek alapján az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

összefüggés kifejezhető az

$$\underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{b}$$

és az

$$\underline{A}_1 \underline{d} = \underline{b}$$

formulával, vagyis

$$\underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{A}_1 \underline{d} = \underline{b}$$

Ez csak akkor teljesül, ha

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{d}$$

Képezzük most az $\underline{x}$ vektornak az $\underline{A}$ mátrix lineáris független oszlopvektoraira vonatkozó koordinátáiból $\underline{r}$ vagyis az első r komponenséből - az $\underline{x}_r = \begin{bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_r \end{bmatrix}^T$ vektort, azaz az ugynevezett kötött ismeretlenek vektorát, a többi $n - r = s$ komponensből pedig az $\underline{x}_s = \begin{bmatrix} x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \end{bmatrix}^T$ vektort, azaz a szabad ismeretlenek vektorát.

E szerint az $\underline{x}$ vektort a következőképpen particionáljuk:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_s \end{bmatrix}$$

Ekkor viszont az

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{d}$$

felírható az

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_s \end{bmatrix} = \underline{E}_r \underline{x}_r + \underline{D} \underline{x}_s = \underline{x}_r + \underline{D} \underline{x}_s = \underline{d}$$

formában, ami szerint viszont

$$\underline{x}_r = \underline{d} - \underline{D} \underline{x}_s$$

s ezt a formát az egyenletrendszer általános megoldásának szokás nevezni. Ebben az $\underline{x}_r$ komponensei a kötött ismeretlenek, az $\underline{x}_s$ komponensei a szabad ismeretlenek. A kötött ismeretlenek száma megegyezik a mátrix rangjával, a szabad ismeretlenek száma pedig az egyenletrendszer szabadságfokát adja és ez az ismeretlenek számának és a rangnak a különbségével egyenlő:

$$s = n - r$$

A szabad ismeretlenek - azaz az $\underline{x}_s$ vektor - tetszőlegesen választhatók a kötött ismeretlenek $\underline{x}_r$ vektor - viszont függ attól, hogy a szabad ismeretlenek értékét hogyan választjuk meg.

Az egyenletrendszer megoldása tehát numerikus szempontból csupán a $\underline{D}$ és a $\underline{d}$ konkrét meghatározását jelenti, ami a 3.10. pont alapján könnyen elvégezhető.

4.3. A mátrixok inverziója

Ismeretes előttünk, hogy az

$$y = a x$$

egyenletből az x kifejezhető az

$$x = \frac{y}{a}$$

formában. Ez viszont egyenértékű az

$$x = y \cdot \frac{1}{a}$$

kifejezéssel, vagyis mindegy, ha " a "-val osztunk, vagy annak reciprokával szorzunk.

Ismeretes az is, hogy ha valamely számot reciprokával megszorozunk, eredményül 1-et kapunk, azaz

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Az $\frac{1}{a}$ számot az " a " inverzének is nevezik és jelölésére használjuk az a^{-1} szimbólumot is.

Kvadratikus mátrixok esetén is beszélhetünk inverzről, és azt /ha létezik/ az

$$\underline{A}^{-1}$$

szimbólummal jelöljük. Ha az $\underline{A}$ mátrixot inverzével szorozzuk, egységmátrixot kapunk eredményül, azaz

$$\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{E}$$

vagyis négyzetes $\underline{A}$ mátrix inverzén egy olyan n -edrendű mátrixot értünk, amelynek az $\underline{A}$ -val alkotott szorzata az n -ed rendű egységmátrixot adja.

Ha az $\underline{A}$ kvadratikus mátrix és van inverze, akkor az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenlet az inverzmátrix ismeretében az

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

formában is felírható. Az inverz mátrix tehát felhasználható lineáris egyenletrendszerek megoldására, ezért mielőtt az egyenletrendszerek megoldását számszerű példák segítségével is bemutatjuk, célszerű megismerkedni a mátrixok inverzálásával.

Tekintsük az

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{E}$$

Speciális mátrixegyenletet, amit részletesebben felírva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \underline{x}_1 & \underline{A} \underline{x}_2 & \dots & \underline{A} \underline{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \dots & \underline{e}_n \end{bmatrix}$$

A két mátrix akkor egyenlő, ha elemei rendre megegyeznek, vagyis: a következő egyenletrendszert kapjuk

$$\underline{A} \underline{x}_1 = \underline{e}_1$$

$$\underline{A} \underline{x}_2 = \underline{e}_2$$

$$\vdots$$

$$\underline{A} \underline{x}_n = \underline{e}_n$$

Az egyenletrendszer mindegyik egyenlete n ismeretlent tartalmaz, az együtthatómátrix viszont minden egyenletben ugyanaz. Az egyenletrendszer csak akkor oldható meg, ha az egységvektorok mindegyike benne van az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorterében, azaz, ha az egységvektorok kompatibilisak az $\underline{A}$ oszlopvektorterére nézve. Ez viszont csak akkor teljesül, ha az $\underline{A}$ mátrix rangja megegyezik rendjével, $r(\underline{A}) = r$, azaz ha a mátrix nem-szinguláris. Egy kvadratikusan invertálható, ha nem-szinguláris. Singuláris mátrixnak nincs inverze.

Az inverz mátrix numerikus meghatározása az

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{E} \quad \text{vagy} \quad \underline{Y} \underline{A} = \underline{E}$$

mátrixegyenlet megoldását jelenti. Az első esetben a mátrix jobboldali, a második esetben a mátrix baloldali inverzéről beszélünk.

Szorozzuk meg azonban az

$$\underline{Y} \underline{A} = \underline{E}$$

mátrixegyenletet az $\underline{X}$ mátrixszal jobbról, azaz

$$\underline{Y} \underline{A} \underline{X} = \underline{E} \underline{X}$$

Azonban

$$\underline{E} \underline{X} = \underline{X}$$

és

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{E}$$

amiből következik, hogy

$$\underline{Y} \underline{E} = \underline{X},$$

azonban mivel

$$\underline{Y} \underline{E} = \underline{Y},$$

ezért

$$\underline{X} = \underline{Y},$$

azaz a mátrix inverzének meghatározása egyértelmű, vagyis akár a jobboldali, akár a baloldali inverzét számítjuk ki a mátrixnak, ugyanazon inverzmátrixot kapjuk.

A bázistranszformáció ismeretében az inverz numerikus meghatározás már igen egyszerű. Induljunk ki az

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{E}$$

mátrixegyenletből, amelyből kaptuk az

$$\underline{A} \underline{x}_1 = \underline{e}_1$$

$$\underline{A} \underline{x}_2 = \underline{e}_2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\underline{A} \underline{x}_n = \underline{e}_n$$

egyenletrendszer, amelyet meg kell oldanunk, és a megoldásul szolgáló $\underline{X}$ mátrixot az $\underline{A}$ jobboldali inverzének nevezzük. Meg kell tehát keresni az $\underline{E}$ egységmátrix oszlopvektorainak az $\underline{A}$ mátrix által meghatározott, bázisra vonatkozó koordinátáit. Mivel az $\underline{A}$ mátrix közös és csak a jobboldali egységvektorok különbözőek, az egyenletrendszert egy táblázatba foglalva egyszerre oldjuk meg. Nem kell ugyanis mást tennünk, mint bázistranszformációval felcserélni az $\underline{A}$ és $\underline{E}$ mátrixok szerepét. Technikailag ezt úgy végezzük, hogy egy táblázatba az $\underline{A}$ mátrix mellé felírjuk az $\underline{e}_1$ egységvektorokat, azaz az $\underline{E}$ egységmátrixot, és az $\underline{A}$ oszlopvektorait elemi bázistranszformációval rendre bevonjuk a bázisba, s minden transzformációnál kiszámítjuk az $\underline{E}$ oszlopvektorainak koordinátáit a megváltozott bázisra vonatkozóan.

Határozzuk meg tehát az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét.

Foglaljuk táblázatba az A mátrixot és írjuk mellé az E egység mátrixot. /Az $\mathbb{Z}_7$ értékeket kiemeltük a fejezékbe./

x_1	x_2	x_3			
1	2	1	1	0	0
2	5	3	0	1	0
1	3	3	0	0	1

Venjük be rendre a bázisba az A mátrix oszlopvektorait

x_1	x_2	x_3		x_2	x_3		x_3											
x_1	1	2	1	0	0	2	1	1	0	0	-1	5	-2	0	6	-3	1	
x_2	2	5	3	0	1	0	1	1	-2	1	0	1	-2	1	0	-3	2	-1
x_3	1	3	3	0	0	1	1	2	-1	0	1	1	1	-1	1	1	-1	1

Tehát

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A számítások helyességét ellenőrizzük az

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{E}$$

alapján.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A számításokat egyszerre végezhetjük el, ha a következőképpen járunk el. Felírjuk a következő táblázatot:

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	2	1
u_2	2	5	3
u_3	1	3	3

Ebben a táblázatban az x_1, x_2, x_3 szimbólumok az un. primál változókat, az u_1, u_2, u_3 szimbólumok pedig az un. duális változókat jelentik. A primálváltozókhöz az A mátrix oszlopvektorait, a duális változókhöz pedig az E egységmátrix oszlopvektorait rendeltük. Az A mátrix invertálása felfogható úgy, hogy megkeressük az E egységmátrix oszlopvektorainak az A oszlopvektorai által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátáit. Ez azt jelenti, hogy fel kell cserélni primál változók és a duális változók szerepét.

A számításokat a következőképpen végezzük:

- Generáló elemet választunk a_{ij} /A generáló elem választásánál a sorrend, - hogy melyik oszlopból és sorból választjuk - lényegtelen, a számítások végrehajtása után azonban vissza kell térni a helyes sorrendhez. Tudjuk azt is, hogy a generáló elem nem lehet nulla. /Új táblázatot szerkesztünk, amelynek adatait a következőképpen határozzuk meg:
- A generáló elem helyébe beírjuk annak reciprokát.
Vagyis $\frac{1}{a_{ij}} = \gamma$
- A generáló elemnek megfelelő oszlop többi adatát megkapjuk, ha az előző táblázat megfelelő adatait szorozzuk a generáló elem reciprokának "-1"-szereisével / $-\gamma$ -val/
- A többi adatot az elemi bázistranszformációval kapcsolatban tanultak szerint számítjuk ki.

Az előbbi példánk tehát a következő számításokhoz vezet:

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	2	1
u_2	2	5	3
u_3	1	3	3

	u_1	x_2	x_3
x_1	1	2	1
u_2	-2	1	1
u_3	-1	1	2

	u_1	u_2	x_3
x_1	5	-2	-1
x_2	-2	1	1
u_3	1	-1	1

	u_1	u_2	u_3
x_1	6	-3	1
x_2	-3	2	-1
x_3	1	-1	1

Tehát

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vegyük az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszert és legyen $\underline{A}$ az előbbi háromszor hármas mátrix, $\underline{b}$ pedig a következő:

$$\underline{b} = [13, 32, 23]^T$$

Keressük azt az $\underline{x}$ vektort, amely kielégíti az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszert, vagyis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

és mivel ismerjük, hogy

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{b} = [13, 32, 23]^T$$

az $\underline{x}$ vektort a következőképpen kapjuk meg:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} 13 + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} 32 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} 23 =$$

$$= \begin{bmatrix} 78 \\ -39 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -96 \\ 64 \\ -32 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 23 \\ -23 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzük, hogy $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

tehát az egyenletrendszert valóban megoldottuk.

Végül invertáljuk az előbbi mátrixot úgy, hogy a generáló elemet más sorrendben választjuk meg, majd az eredményt rendezzük előbb a sorok, majd az oszlopok szerint.

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	2	1
u_2	2	5	3
u_3	1	3	3

	u_1	x_2	x_3
x_1	1	2	1
u_2	-2	1	1
u_3	-1	1	2

	u_1	x_2	u_2
x_1	3	1	-1
x_3	-2	1	1
u_3	3	-1	-2

	u_1	u_3	u_2
x_1	6	1	-3
x_3	1	1	1
x_2	-3	-1	2

Rendezzük a sorokat x_2 és x_3 felcserélésével:

	u_1	u_3	u_2
x_1	6	1	-3
x_2	-3	-1	2
x_3	1	1	1

Most rendezzük az oszlopokat az u_2 és u_3 felcserélésével:

	u_1	u_2	u_3
x_1	6	-3	1
x_2	-3	2	-1
x_3	1	1	1

Mint látjuk, eredményül az inverz mátrixot kaptuk ugyanúgy, mint előbb.

A továbbiakban tekintsük meg numerikus példák alapján a lineáris egyenletrendszerek megoldását.

4.4. Lineáris inhomogén reguláris egyenletrendszer megoldása

Ha az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

Lineáris egyenletrendszerben az $\underline{A}$ mátrix kvadratikus és nemszinguláris, akkor az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni azt az $\underline{x}$ vektort, amely az adott egyenletrendszert kielégíti. Mint tudjuk, a megoldás szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\underline{b}$ vektor benne fektüdjék az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorterében, azaz hogy a $\underline{b}$ vektor kifejezhető legyen az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, vagyis

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$$

A $\underline{b}$ vektornak az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátái éppen a keresett ismeretleneket adják.

Legyen feladatunk az

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 28$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 17$$

egyenletrendszer megoldása.

Azt, hogy a $\underline{b}$ vektor benne fekszik-e az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorterében, a bázistranszformáció során megismert eljárással állapítjuk meg, azaz

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{b}$
$x_1 \underline{e}_1$	1	1	1	11	1	1	11	3	17	5
$x_2 \underline{e}_2$	2	1	4	28	-1	2	6	-2	-6	2
$x_3 \underline{e}_3$	1	3	1	15	2	0	4	4	16	4

Tehát a $\underline{b}$ vektor benne fekszik az $\underline{A}$ oszlopvektorterében és

$$\underline{b} = 5\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + 4\underline{a}_3$$

azaz

$$5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix}$$

vagyis az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4$$

A mátrixok faktorizációja alapján - mint tudjuk - az $\underline{A}$ mátrixot az

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix}$$

formában is felírhatjuk. Most azonban $\underline{D} = \underline{0}$, vagyis

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{A}_1 \underline{d} = \underline{b}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Mivel nincs olyan vektorunk, amelyet ne vontunk volna be a bázisba, a faktorizációnak az adott esetben nincs jelentősége.

Számítsuk most ki az A mátrix inverzét:

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	1	1
u_2	2	1	4
u_3	1	3	1

	u_1	x_2	x_3
x_1	1	1	1
u_2	-2	-1	2
u_3	-1	2	0

	u_1	u_2	u_3
x_1	-1	1	3
x_2	2	-1	-2
x_3	-5	2	4

	u_1	u_2	u_3
x_1	2,75	-0,5	-0,75
x_2	-0,50	0	0,50
x_3	-1,25	0,5	0,25

Most az A inverzének ismeretében az egyenletrendszer az

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

alapján is megoldható, azaz

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 2,75 & -0,5 & -0,75 \\ -0,50 & 0 & 0,50 \\ -1,25 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2,75 \\ -0,50 \\ -1,25 \end{bmatrix} 11 + \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} 28 + \begin{bmatrix} -0,75 \\ 0,50 \\ 0,25 \end{bmatrix} 15 =$$

$$\begin{bmatrix} 30,25 \\ -5,50 \\ -13,75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11,25 \\ 7,50 \\ 3,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a megoldás tehát most is.

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4$$

Oldjuk meg most a következő egyenletrendszert, ahol
- mint látni fogjuk - az A kvadratikuss mátrix szinguláris.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 18 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Végezzük el a számításokat:

<u>a</u> ₁	<u>a</u> ₂	<u>a</u> ₃	<u>b</u>	<u>a</u> ₂	<u>a</u> ₃	<u>b</u>	<u>a</u> ₃	<u>b</u>
<u>1</u>	2	1	11	2	1	11	3	3
2	3	3	18	<u>-1</u>	1	-4	-1	4
2	1	5	10	-3	3	-12	0	0

Az a₃ most nem vonható be a bázisba és

$$\underline{b} = 3\underline{a}_1 + 4\underline{a}_2$$

vagyis az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorterében az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ oszlopvektorok bázist alkotnak, viszont az $\underline{a}_3$ vektorral már lineárisan függő rendszert kapunk. Valóban az $\underline{a}_3$ vektor lineárisan függ az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ vektoroktól, kifejezhető azok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\underline{a}_3 = 3\underline{a}_1 - \underline{a}_2$$

tehát

$$\underline{a}_3 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Az adott egyenletrendszerben csak két független egyenletünk van - amint majd erre még visszatérünk - három ismeretlennel, tehát az egyenletek és az ismeretlenek száma nem egyezik meg. Ez viszont azt is jelenti, hogy $r/\underline{A}/ = 2$, vagyis a mátrix rangja és rendje nem egyezik meg, tehát az $\underline{A}$ mátrix szinguláris. Tudjuk viszont, hogy a szinguláris mátrixoknak nincs inverzük, tehát most az inverz nem használható az egyenletrendszer megoldására.

A faktorizáció alapján viszont most a következőket írhatjuk fel:

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{b} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{A}_1 \underline{d}$$

vagyis

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix}$$

4.5. Lineáris inhomogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása

Tekintsük az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 17$$

Lineáris egyenletrendszert és oldjuk meg.

$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
1	1	1	1	5	1	1	1	5	-1	-2	3
2	3	4	5	12	1	2	3	2	2	3	2
3	4	5	6	17	1	2	3	2	0	0	0

A $\underline{b}$ vektor tehát kompatibilis az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ oszlopvektorok által generált altérre nézve. Ugyanakkor az $\underline{a}_3$ és $\underline{a}_4$ vektorok az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ vektoroktól függenek, ugyanis

$$\underline{a}_3 = (-1)\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{a}_4 = (-2)\underline{a}_1 + 3\underline{a}_2 = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ez azt is jelenti, hogy csak két független egyenletünk van, a harmadik a két első egyenlet következménye.

Határozzuk meg az $\underline{A}$ transzponáltjának rangját, mert így mint látni fogjuk, az is kiderül, hogy a két egyenlet milyen lineáris kombinációjával lehet a harmadikat előállítani.

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

határozzuk meg ennek rangját

$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$	$\underline{b}_3$	$\underline{b}_2$	$\underline{b}_3$	$\underline{b}_3$
1	2	3	2	3	1
1	3	4	1	1	1
1	4	5	2	2	0
1	5	6	3	3	0

tehát $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 = \underline{b}_3$ azaz

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

vagyis a harmadik egyenlet az első két egyenlet összege.

Mivel az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorai közül csak két lineárisan független vektor választható, $r/\underline{A}/ = 2$

Faktorizáljuk az együttható mátrixot, azaz

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ismerjük, hogy az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

összefüggés felírható az

$$\underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_r, D \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{A}_1 \underline{d} = \underline{b}$$

formában, ami csak akkor áll fenn, ha

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r, D \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{d}$$

és ahol a $\underline{d}$ vektor a $\underline{b}$ vektornak az $\underline{A}_1$ mátrix által meghatározott koordinátáit tartalmazza, példánkban

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bontsuk az $\underline{x}$ vektort két komponensre, az $\underline{x}_r$ kötött ismeretlenek vektorára és az $\underline{x}_s$ szabad ismeretlenek vektorára, vagyis

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_r, \underline{x}_s \end{bmatrix}^T$$

és akkor

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_r, D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_s \end{bmatrix} = \underline{d}$$

vagyis

$$\underline{x}_r + D \underline{x}_s = \underline{d}$$

amiből

$$\underline{x}_r = \underline{d} - D \underline{x}_s,$$

ezzel megkaptuk az egyenletrendszer általános megoldását.

Tudjuk, hogy

$$s = n - r$$

az egyenletrendszer szabadságfoka.

Az $\underline{x}_s$ vektor komponenseit tetszés szerint megválasztva, partikuláris megoldásokhoz jutunk.

Példánkban

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

tehát

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

Legyen az $\underline{x}_s$ vektorunk egy zérusvektor, tehát

$$\begin{array}{l} \underline{x}_s = \begin{bmatrix} 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \text{amikor is} \\ \underline{x}_r = \begin{bmatrix} 3, & 2 \end{bmatrix}^T \end{array}$$

és

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3, & 2, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Ha viszont

$$\underline{x}_s = \begin{bmatrix} 1, & 1 \end{bmatrix}^T$$

akkor

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

vagyis

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 6, & -3, & 1, & 1 \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzük, hogy az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

most is teljesül, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Alakítsuk át az előbbi egyenletrendszerünket úgy, hogy a harmadik egyenlet jobb oldalára 17 helyett írjunk 15-öt, és próbáljuk megoldani.

a_1	a_2	a_3	a_4	b	a_2	a_3	a_4	b	a_3	a_4	b
<u>1</u>	1	1	1	5	1	1	1	5	-1	-2	1
2	3	4	5	12	<u>1</u>	2	3	2	2	3	2
3	4	5	6	15	1	2	3	0	0	0	-2

A feladatot nem tudjuk megoldani, a b vektor nincs benne az A mátrix oszlopvektorterében, hiszen

$$\underline{b} = \underline{a}_1 + 2 \underline{a}_2 - 2 \underline{a}_3$$

Mivel két lineárisan független oszlopvektort tudunk kiválasztani, tehát $r/A/ = 2$, arra gondolunk, hogy valamelyik egyenlet a másik kettő következménye. Az A mátrix transzponáltjának rangját már az előbb meghatároztuk, s ebből kiderült, hogy a harmadik egyenlet az első két egyenlet összege. Ellenőrizhetjük, hogy ez az egyenletrendszer bal oldalára vonatkozóan igaz, azonban a jobb oldalra nem áll fenn, hiszen $5 + 12 = 17$, de egyenletrendszerünkben itt csak 15 található. Most tehát a harmadik egyenlet nem következménye az első kettőnek, illetve csak a bal oldal következmény, a jobb oldal viszont nem, tehát az egyenletrendszer ellentmondásos és nincs megoldása. Nem biztos tehát, hogy egy egyenletrendszernek van megoldása, ha az ismeretlenek száma nagyobb, mint az egyenletek száma. A megoldhatóság feltétele, hogy az A mátrix rangja megegyezzen az A b rangjával, vagyis

$$r / A/ = r / A, b/$$

Legyen adva egy olyan lineáris egyenletrendszer, amelyben az egyenletek száma több, mint az ismeretlenek száma

/m>n/. Vegyük például az

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 7 \\2x_1 + 3x_2 &= 12 \\3x_1 + 5x_2 &= 19 \\4x_1 + 7x_2 &= 26\end{aligned}$$

egyenletrendszert és vizsgáljuk meg, megoldható-e?

$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{b}$	$\underline{a}_2$	$\underline{b}$	$\underline{b}$
1	2	7	2	7	3
2	3	12	-1	-2	2
3	5	19	-1	-2	0
4	7	26	-1	-2	0

A megoldás $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, vagyis

$$\underline{b} = 3 \underline{a}_1 + 2 \underline{a}_2$$

tehát a $\underline{b}$ vektor kompatibilis az $\underline{A}$ oszlopvektorterére nézve, és

$$r \ / \underline{A} / = 2$$

A harmadik és a negyedik egyenlet tehát az első két egyenlet következménye, s kifejezhető azok lineáris kombinációjaként.

Állapítsuk meg az $\underline{A}$ transzponáltjának rangját

$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$	$\underline{b}_3$	$\underline{b}_4$	$\underline{b}_2$	$\underline{b}_3$	$\underline{b}_4$	$\underline{b}_3$	$\underline{b}_4$
1	2	3	4	2	3	4	1	2
2	3	5	7	-1	-1	-1	1	1

azaz

$$\underline{b}_3 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$$

$$\underline{b}_4 = 2\underline{b}_1 + \underline{b}_2$$

vagyis a harmadik egyenletet megkapjuk, ha az első és második egyenletet összeadjuk, a negyedik egyenletet pedig akkor kapjuk meg, ha a második egyenlethez hozzáadjuk az első egyenlet kétszeresét.

Legyen most adva a következő egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 17x_3 &= 14 \\ 4x_1 + 6x_2 + 24x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Vizsgáljuk a $\underline{b}$ vektor kompatibilitását.

$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$
<u>1</u>	2	7	6	2	7	6	3	2
2	2	10	8	<u>-2</u>	-4	-4	2	2
3	4	17	14	-2	-4	-4	0	0
4	6	24	20	-2	-4	-4	0	0

Az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0$$

Az eddig tanultak alapján könnyen rájövünk, hogy az $\underline{a}_3$ vektor lineárisan függ az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ vektoroktól a

$$3 \underline{a}_1 + 2 \underline{a}_2$$

formában. Láttuk azt is, hogy a harmadik és negyedik egyenlet következménye az első és a második egyenletnek.

Az egyenletrendszer többi megoldását az

$$\underline{x}_r = \underline{d} - \underline{D} \underline{x}_s$$

alapján állíthatjuk elő.

4.6. Lineáris homogén reguláris egyenletrendszerek megoldása

Az előbbieken inhomogén egyenletrendszerekkel foglalkoztunk. A továbbiakban vizsgáljuk a homogén egyenletrendszereket, amikor is mint tudjuk $\underline{b} = \underline{0}$, vagyis

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$$

A homogén egyenletrendszernek mindig van megoldása, mivel $\underline{b} = \underline{0}$ és a zérusvektor minden altérnek eleme, tehát a $\underline{0}$ vektor kompatibilis az $\underline{A}$ oszlopvektortérrel nézve. Az $\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszert az $\underline{x} = \underline{0}$ vektor feltétlen kielégíti, hiszen $\underline{A} \underline{0} = \underline{0}$. Az $\underline{x} = \underline{0}$ megoldást triviális megoldásnak nevezzük.

Ha $\underline{A}$ kvadratikusan szinguláris és nem-szinguláris /tehát rendje és rangja megegyezik/, akkor az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$$

megoldásaként kapjuk, hogy

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{0} = \underline{0}$$

vagyis triviális megoldáshoz jutunk. Ilyen esetben nincs is más megoldás.

Oldjuk meg az

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

egyenletrendszert.

A tanultak alapján ellenőrizhetjük, hogy a $r(\underline{A}) = 3$ vagyis az $\underline{A}$ mátrix nem-szinguláris, rangja és rendje megegyezik.

Határozzuk meg az $\underline{A}$ inverzét. Kapjuk, hogy

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4,6 & 1,4 & 0,8 \\ 0,6 & -0,4 & 0,2 \\ 0,8 & -0,2 & -0,4 \end{bmatrix}$$

A megoldás tehát

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{0} = \begin{bmatrix} 4,6 & 1,4 & 0,8 \\ 0,6 & -0,4 & 0,2 \\ 0,8 & -0,2 & -0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vagyis a megoldás csakis

$$\underline{x} = \underline{0}$$

lehet.

Legyen most egy olyan példánk, amikor az A mátrix szinguláris, azaz rangja kisebb, mint rendje. /Mint tudjuk, az ilyen mátrixnak nincs inverze./

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + 8x_3 = 0$$

A triviális megoldás természetesen most is létezik, de mint látni fogjuk, létezik más megoldás is.

Határozzuk meg most a mátrix rangját.

a_1	a_2	a_3	a_2	a_3	a_3
<u>2</u>	2	4	1	2	3
2	5	1	<u>3</u>	-3	-1
3	1	8	-2	2	0

Tehát

$$r/\underline{A}/ = 2$$

vagyis a mátrix szinguláris és

$$\underline{a}_3 = 3 \underline{a}_1 - \underline{a}_2$$

Az egyenletrendszer általános megoldása mint tudjuk

$$\underline{x}_r = \underline{d} - \underline{D} \underline{x}_s$$

ahol a $\underline{d}$ a $\underline{b}$ vektornak az $\underline{A}_1$ mátrix által meghatározott koordinátáit tartalmazza. Mivel azonban $\underline{b} = \underline{0}$, így $\underline{d} = \underline{0}$, elegendő tehát a $\underline{D}$ -t megállapítani.

Példánkban

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tehát

$$\underline{x}_r = -\underline{D} \underline{x}_s = -\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

azaz példánkban

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

Most ha $\underline{x}_3 = 1$, akkor

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagyis az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

valóban

$$-3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha $x_3 = 2$,

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vagyis $x_1 = -6, x_2 = 2, x_3 = 2$

azaz

$$/-6/ \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az x_3 értékét tehát tetszés szerint felvehetjük, s ettől függően az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

4.7. Lineáris homogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása

Ha az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszer homogén $\underline{b} = 0$ és irreguláris, vagyis az egyenletek száma m és az ismeretlenek száma n nem egyezik meg, tehát $m < n$ vagy $m > n$, az egyenletrendszernek mindig van a triviális megoldáson kívül más megoldása is.

Tudjuk, hogy homogén egyenletrendszerben

$$\underline{d} = 0$$

így

$$\underline{x}_r = - \underline{D} \underline{x}_s$$

Legyen feladatunk az

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2,5x_4 = 0$$

egyenletrendszer megoldása, ahol $m < n$.

Határozzuk meg $\underline{D}$ -t

$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_4$
<u>1</u>	2	1	3	2	1	3	2	-2	2
2	2	3	1	<u>-2</u>	1	-5	-0,5	2,5	1,5
1	3	2	2,5	1	1	-0,5	<u>1,5</u>	-3,0	-2

A megoldás tehát

$$\underline{x}_r = - \underline{D} \underline{x}_s = - \begin{bmatrix} 2 \\ 1,5 \\ -2 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

Ha például $x_4 = 3$

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 3 = \begin{bmatrix} -6 \\ -4,5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

vagyis

$$x_1 = -6, \quad x_2 = -4,5, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 3$$

ellenőrizzük

$$-6/ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} -4,5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Legyen most feladatunk az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása, ahol $m > n$.

Határozzuk meg a $\underline{D}$ -t.

a_1	a_2	a_3	a_2	a_3	a_3
<u>1</u>	2	1	2	1	5/3
2	1	3	<u>-3</u>	1	-1/3
5	4	7	-6	2	0
4	5	5	-3	1	0

és

$$\underline{x}_r = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \underline{x}_s$$

és ha $x_3 = 2$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{bmatrix} \frac{-10}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

vagyis $x_1 = -\frac{10}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 2$

Ellenőrizzük:

$$-\frac{10}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{3} \\ \frac{-20}{3} \\ \frac{-50}{3} \\ \frac{-40}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{3} \\ \frac{18}{3} \\ \frac{42}{3} \\ \frac{30}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. FEJEZET

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása

A gazdasági számítások során, mint látni fogjuk, igen nagy szerepük van az egyenlőtlenségrendszereknek. A lineáris egyenlőtlenségrendszerek általános alakja

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & \leq & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \dots & + & a_{2n} x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \dots & + & a_{mn} x_n & \leq & b_m \end{array}$$

amit összevontan az

$$A x \leq b$$

formában írunk fel.

Gyakran vizsgáljuk valamely kiválasztott egyenlőtlenséget. Vegyük például a rendszer i -edik egyenlőtlenségét, azaz

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

amit összevontan

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

formában is jelölhetünk.

Előfordul, hogy a rendszerben nem csak $\leq$ irányú, hanem $\geq$ irányú relációk is találhatók. Tegyük fel, hogy az i -edik egyenlőtlenség $\geq$ irányú, vagyis

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$$

Ez viszont könnyen $\leq$ alakra hozható, csupán - 1-gyel kell beszoroznunk, vagyis a

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sum_j -a_{ij} x_j \leq -b_i$$

egyenlőtlenséggel.

Lehetséges az is, hogy a rendszerben egyenlet is szerepel. Tegyük fel, hogy

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$$

Minden egyenlet helyettesíthető azonban vele egyenértékű két egyenlőtlenséggel, vagyis

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} x_j &\leq b_i \\ \sum_j a_{ij} x_j &\geq b_i \end{aligned}$$

esetén

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$$

Az elmondottakból belátható, hogy mind az egyenletek, mind az $\geq$ irányú egyenlőtlenségek a

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

normál alakra hozhatók.

A gazdasági számítások során csak a nemnegatív megoldásokat keressük, azaz amikor $x \geq 0$ és általában a feladatokban $b \geq 0$, ezért mi az un. normál egyenlőtlenség-rendszerekkel, vagy röviden normálrendszerekkel fogunk foglalkozni, azaz

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0, \quad \underline{b} \geq 0$$

$A \geq$ relációjú egyenlőtlenségek esetén általában nem l-gyel való szorzást, hanem más eljárást fogunk követni.

Nemcsak egyenlet alakítható át egyenlőtlenséggé /amikor az egyenletet két azonos értékű, ellentétes irányú egyenlőtlenséggel helyettesítjük,/ hanem az egyenlőtlenségek is átalakíthatók egyenletekké.

Az
$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű a

$$\sum_j a_{ij} x_j + u_i = b_i$$

egyenlet, ahol u_i -t hiányváltozónak nevezzük és azt mutatja, hogy a bal oldal mennyivel kevesebb, mint a jobb oldal. /Mennyi hiányzik a bal oldalról, hogy az egyenlő legyen a jobb oldallal./ Ennek alapján az

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$$

helyett az

$$\underline{A} \underline{x} + \underline{u} = \underline{b} \quad \underline{u} \geq \underline{0}$$

feladatot oldhatjuk meg, ahol $\underline{u}$ vektor a $\underline{b} - \underline{A} \underline{x}$ különbséget jelenti.

Hasonlóképpen a

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű a

$$\sum_j a_{ij} x_j - v_i = b_i$$

egyenlet, ahol v_i -t többletváltozónak nevezzük és mutatja, hogy a bal oldal mennyivel nagyobb, mint a jobb oldal /mennyi a többletünk/. Ennek alapján az

$$\underline{A} \underline{x} \geq \underline{b}$$

helyett az

$$\underline{A} \underline{x} - \underline{v} = \underline{b} \quad \underline{v} \geq \underline{0}$$

feladatot oldhatjuk meg.

Annak jelölésére, hogy a feladatban mind a $\leq$, mind a $\geq$ irányú egyenlőtlenség, sőt az egyenlet $=$ is előfordul, alkalmazzuk az

$$\underline{A} \underline{x} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \underline{b}$$

formát, amely egyenértékű az

$$\underline{A} \underline{x} + \underline{u} - \underline{v} = \underline{b}$$

feladattal, ahol az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok az $\underline{A} \underline{x} - \underline{b}$ különbségét jelentik.

Az egyenlőtlenségrendszer kielégítő $\underline{x}$ vektorok halmazát a lehetséges megoldások halmazának nevezzük és L -el jelöljük. Ha az L halmaz nem üres, akkor az egyenlőtlenségrendszer konzisztensnek, ellenkező esetben inkonzisztensnek nevezzük.

Legyen adva az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 17 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 30 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszer, s feladat ennek megoldása.

A hiányváltozók bevezetésével a feladat felírható az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + u_1 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + u_2 &= 17 \\ 4x_1 + 3x_2 + u_3 &= 30 \end{aligned}$$

formában.

Ha a lehetséges megoldások halmazából az $x = [0, 0]^T$ vektort vesszük, akkor $u_1 = 10$, $u_2 = 17$, $u_3 = 30$.
Ha az $x = [1, 1]^T$ vektort választjuk, akkor $u_1 = 7$,
 $u_2 = 12$, $u_3 = 23$, az $x = [2, 1]^T$ esetében $u_1 = 6$,
 $u_2 = 10$, $u_3 = 19$, stb.

Az x vektort a megoldás primál részének, vagy primális megoldásnak, az u vektort a megoldás duális részének, vagy duális megoldásnak nevezzük.

Foglaljuk a feladatot táblázatba, kiemelve a változókat a fejrovatba.

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	b
1	2	1	0	0	10
2	3	0	1	0	17
4	3	0	0	1	30

Látjuk, hogy az x vektorhoz az A együtthatómátrix, az u vektorhoz pedig az E egységmátrix tartozik. A feladat megoldását az ismert módszerekkel kapjuk.

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	b
<u>1</u>	2	1	0	0	10
2	3	0	1	0	17
4	3	0	0	1	30

	x_2	u_1	u_2	u_3	b
x_1	2	1	0	0	10
	<u>-1</u>	-2	1	0	-3
	-5	-4	0	1	-10

	u_1	u_2	u_3	b
x_1	3	-2	0	4
x_2	-2	1	0	3
	-14	5	<u>1</u>	5

	u_1	u_2	b
x_1	3	-2	4
x_2	-2	1	3
u_3	-14	5	5

Tehát

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 5.$$

A számítás mint tudjuk, az E elhagyásával egyszerűsítve is elvégezhető, azaz

	x_1	x_2	b	x_2	b	b
$x_1 u_1$	<u>1</u>	2	10	2	10	4
$x_2 u_2$	2	3	17	<u>-1</u>	-3	3
u_3	4	3	30	-5	-10	5

A megoldás most is

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 5.$$

Az első/indulási/

	x_1	x_2	b
u_1	1	2	10
u_2	2	3	17
u_3	4	3	30

táblázat is egyféle megoldást mutat, mégpedig az $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 10$, $u_2 = 17$, $u_3 = 30$ megoldást. Ez a triviális bázismegoldás. Az u komponenseit bázisváltozóknak is szoktuk nevezni, míg az x komponensei a szabad változók.

Az

$$\underline{A} \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$$

triviális megoldása

$$\underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{u} = \underline{b}$$

Mint mondtuk, a gazdasági számítások során követelményünk az is, hogy az egyenletrendszer nemnegatív megoldásait állítsuk elő. Ezt a követelményt teljesítjük, ha az utolsó táblázatban a b vektor koordinátái nemnegatívak. Célszerű arra törekedni, hogy a számítások során a b vektor koordinátái között egyik táblázatban se szerepeljen negatív érték. Ezt elérhetjük akkor, ha a generáló elemet úgy választjuk meg minden lépésben, hogy a

$$\frac{b_1}{a_{1j}} \quad \frac{b_2}{a_{2j}}, \quad \text{stb.}$$

hányadosok közül a legkisebbnél választunk generáló elemet.

Vegyük az alábbi feladatot

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 25 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 12 \end{aligned}$$

Oldjuk meg az egyenlőtlenségrendszert.

	x_1	x_2	x_3	b	
u_1	1	2	4	13	$18 : 1 = 18$
u_2	2	3	5	25	$25 : 2 = 12,5$
u_3	1	1	3	12	$12 : 1 = 12$

Ha tehát az első oszlopból választunk generáló elemet, célszerű annak harmadik elemét választani, mert ekkor kaptuk a legkisebb hányadost. Elvégezve ennek alapján a transzformációt, a következő táblázatot kapjuk:

	u_3	x_2	x_3	b
u_1	-1	1	1	1
u_2	-2	1	-1	1
x_1	1	1	3	12

Válasszuk most a második oszlopból generáló elemet. A következő táblázatunk

	u_3	u_2	x_3	b
u_1	-3	-1	0	0
x_2	-2	1	-1	1
x_1	3	-1	4	11

A megoldás $x_1 = 11$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $u_1 = 0$,
 $u_2 = 0$, $u_3 = 0$

A

	x_1	x_2	...	x_n	
u_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
u_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

táblázatot vagy mátrix alakban felírva az

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$

táblázatot szimplex táblázatnak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy ha $\underline{A}$ kvadratikus és nonszinguláris, akkor az $\underline{x}$ vektor az ismert bázistranszformáció által kicserélhető az $\underline{u}$ bázisvektorral. Ha $\underline{A}$ nem kvadratikus és rangja r , akkor átrendezéssel elérhető, hogy $\underline{A}_r$ az első r sorban és r oszlopban helyezkedjen el, s ezzel az $\underline{x}_r$ kicserélhető az $\underline{u}_r$ változókkal.

A lineáris programozási feladatok megoldása során mi a szimplex módszert fogjuk alkalmazni. Kiindulunk a

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$

szimplex táblázatból és vigyázva, hogy a $\underline{b}$ vektornak csak nemnegatív koordinátái legyenek, bázistranszformációkat hajtunk végre. Az eljárást grafikusan is szemléltethetjük kétváltozós feladatok esetén.

Oldjuk meg az

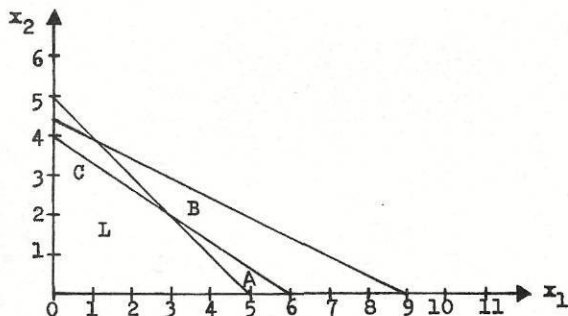
$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 \leq 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 \leq 12 \\ x_1 & + & 2x_2 \leq 9 \end{array}$$

egyenlőtlenségrendszert.

	x_1	x_2	$\underline{b}$
u_1	1	1	5
u_2	2	3	12
u_3	1	2	9

	u_1	x_2	
x_1	1	1	5
u_2	-2	1	2
u_3	-1	1	4

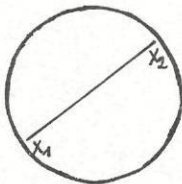
	u_1	u_2	
x_1	3	-1	3
x_2	-2	1	2
u_3	1	-1	2



14. ábra

A megoldások L halmaza

A megoldások L halmazát az OABC pontokat összekötő vonalak által határolt négyszög pontjai alkotják. A OABC négyszög egy konvex poliéder. Az L halmazt konvex halmaznak nevezzük, ha e halmaz bármely két pontjával együtt az azokat a pontokat összekötő szakaszt is tartalmazza /14-15. ábra/.



15. ábra

Konvex halmaz

A poliéder sokszögű testet jelent. Konvex poliéder a négyszög, a kocka, a háromszög, de egy szakasz is. A konvex poliéderek zárt és konvex halmazok. A korlátos konvex poliédereket konvex politópoknak nevezzük. Így a konvex politóp az előbbi ábránban az OABC négyszög is.

A lehetséges megoldások L halmazát azok az x vektorok adják, amelyek az adott egyenlőtlenségrendszert kielégítik, azaz $x \in L$. Az L extremális pontjának nevezzük azt az $x \in L$ vektort, amely nem belső pontja egyetlen olyan szakasznak sem, amely benne van az L halmazban. A OABC négyszög O, A, B, C pontjai tehát extremális pontok /csúspontok/. Olvassuk le ábránkon az extremális pontokhoz tartozó koordinátákat.

A O ponthoz a triviális megoldás tartozik, vagyis

$$x = 0 \text{ és ekkor } u = b$$

Az A ponthoz tartozó koordináták

$$x = [5, 0]^T, \text{ ekkor } u = [0, 2, 4]^T$$

A B ponthoz tartozó koordináták

$$x = [3, 2]^T, \text{ ekkor } u = [0, 0, 2]^T$$

A C ponthoz tartozó koordináták

$$x = [0, 4]^T, \text{ ekkor } u = [1, 0, 1]^T$$

Az olyan konvex politópot, amelynek eggyel több csúcsa /extremális pontja/ van, mint amennyi dimenziója, szimplexnek nevezzük. A konvex poliéderek között a legegyszerűbb alakzat a szimplex. E szerint tehát az n dimenziós szimplex olyan konvex poliéder, amelynek $n + 1$ extremális pontja van.

Nulldimenziós szimplex a pont.

Egydimenziós szimplex a szakasz.

Kétdimenziós szimplexek a háromszögek.

Háromdimenziós szimplex a tetraéder.

A háromnál több dimenziós szimplexeknek nincs már külön nevük.

6. FEJEZET

Lineáris programozás

A lineáris algebra, a lineáris tér, valamint a lineáris egyenletrendszerek és egyenlőtlenségrendszerek megoldásának ismerete után rendelkezünk azokkal a matematikai alapokkal, amelyek lehetővé teszik a lineáris programozás elsajátítását. Mint látni fogjuk, ennek során lineáris egyenletekből és egyenlőtlenségekből álló feladatokat kell megoldanunk. A megoldást szimplex módszerrel fogjuk elvégezni, amit lényegében az előző fejezetből már ismerünk, sőt azt már kétváltozós feladatokra geometriailag is értelmeztük. Egyszerű megállapítani azt is, hogy a tananyag elején tárgyalt grafikus lineáris programozás is a szimplex módszer felhasználásával történt, amikor is kétváltozós feladat grafikus ábrája alapján a sokszög azon extrémális pontját /csúcspontját/ kerestük, amelyhez egy függvény /a célfüggvény/ extrém értéke /maximuma vagy minimuma/ tartozik.

Ebben a fejezetben már olyan feladatok megoldásával is megismerkedünk, amikor az ismeretlenek és az egyenletek és egyenlőtlenségek száma elvileg korlátlan lehet, gyakorlatilag pedig csak a rendelkezésre álló számítókapacitástól függ.

A lineáris programozás - mint látni fogjuk - jól alkalmazható gazdasági feladatok megoldására. Ez is indokolja, hogy már most a lineáris programozás általános tárgyalását gyakorlati, gazdasági példákkal illusztráljuk, még ha egyelőre kénytelenek vagyunk is azokat lényegesen leegyszerűsíteni. A gazdasági, gyakorlati feladatok ugyanis legtöbbször igen nagyméretű modellhez vezetnek. Jelenleg célunk a lineáris programozás általános módszertani megismerése és megértése, amely kisebb modellek alapján könnyebben megvalósítható. Később a gyakorlati alkalmazás módszerének tárgyalása során viszont lehetőségekünk lesz arra, hogy a gyakorlati gazdasági feladatokat teljes bonyolultságukban megismerjük.

6.1. A normálfeladat és megoldása degeneráció nélkül

Tegyük fel, hogy egy vállalat árúnövénytermelési tervét kell elkészíteni.

Vegyük az egyszerűség kedvéért a 2. fejezet 2.3. pontjából már ismert példát, mert így nem szükséges a feladatot újra részletezni. Csupán emlékeztetőül megjegyezzük, hogy a vállalat számára rendelkezésre áll 1000 ha termőterület, 2600 munkanap az első csúcsideszakban, 6800 munkanap a második csúcsideszakban, a technológiai és a jövedelemadatok pedig a következők:

Technológiai és jövedelemadatok

Megnevezés	A	B	C	D
	Technológiai és jövedelemadatok I ha-ra			
Területszükséglet, ha	1	1	1	1
Munkanapszükséglet az I. csúcsidőszakban	1	4	4	2
Munkanapszükséglet a II. csúcsidőszakban	4	2	6	10
Jövedelem Ft	900	900	1000	1100

/A, B, C, D - mint tudjuk - a termelhető növények felsorolása/

A termelési tervet /programot/ úgy kell összeállítani, hogy a terület és a munkaerőszükséglet nem haladhatja meg a rendelkezésre álló kapacitást és az elérhető jövedelem a lehető legnagyobb, maximális legyen. /A kapacitás teljes kihasználásához a vállalat nem ragaszkodik, ha az nem lenne jövedelmező./ Természetesen negatív termelés nem folytatható.

A feladat a következő lineáris programozási modellhez vezet:

$$\begin{aligned}
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \quad \geq \quad 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1000 \\
 & x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 2600 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10x_4 \leq 6800
 \end{aligned}$$

$$z = 900x_1 + 900x_2 + 1000x_3 + 1100x_4 = \max ,$$

Foglaljuk a feladatot táblázatba, kiemelve az ismeretleneket a táblázat fejrovatába.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	1	1	1000
1	4	4	2	2600
4	2	6	10	6800
900	900	1000	1100	0

A táblázatban szereplő technológiai adatok /fajlagos kapacitásigények/ mátrixa a technológiai mátrix /A/. A jobb oldali oszlopban a kapacitásadatokat találjuk, ez tehát a kapacitás vektor, amit jelöljünk $\underline{b}$ vektorral. Az alsó sorban a jövedelemadatokat találjuk, amelyek azt mutatják, hogy a különböző termékek milyen hatékonyan járulnak hozzá a vállalati jövedelemhez. Nevezzük ezt hatékonysági vektornak és jelöljük $\underline{p}$ -vel. Végül az x_1, x_2, x_3, x_4 a termelési programot /termelési tervet/ fogja adni, így az ezekből képezett $\underline{x}$ vektort programvektornak fogjuk nevezni.

Ennek alapján a feladatot a következőképpen is felírhatjuk:

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \quad \underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{b} \geq \underline{0},$$

6.1.2.

$$\underline{p}^T \underline{x} = \max.$$

E szerint keressük azt a nemnegatív $\underline{x}$ vektort, amelyhez a $\underline{p}^T \underline{x}$ célfüggvény maximuma tartozik és amely kielégíti az $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$ feltételeket.

Az $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$ feltételeket kielégítő vektorok az L értelmezési tartományát határozzák meg. Az L elemeit lehetséges megoldásoknak, vagy lehetséges programoknak nevezzük. Az olyan

$$\underline{x}_0 \in L$$

lehetséges programot, amelyhez a $\underline{p}^T \underline{x}$ célfüggvény maximuma tartozik, optimális megoldásnak vagy optimális programnak nevezzük. Ugyanezt jelenti az irodalomban gyakran található

$$6.1.3. \quad \max. \{ \underline{p}^T \underline{x} \mid \underline{x} \geq \underline{0}, \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \underline{b} \geq \underline{0} \}$$

felírasmód is.

Másrészt a mátrix, illetve vektorok általános elemeit kiragadva, a feladat az

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \quad x_j \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

$$6.1.4. \quad \sum_j p_j x_j = \max. \quad / j = 1, 2, \dots, n /$$

$$/ i = 1, 2, \dots, m /$$

formában is felírható.

Végül írjuk fel szimbólikusan az előbb megszerkesztett táblázatot

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
	$\underline{p}^T$	

Ez a szimplex módszer alkalmazása során megszerkesztett első, ugynevezett induló táblázat, ahol $\underline{u}$ -val azt is jelöltük, hogy a triviális bázisból indulunk $\underline{k}_i$ a megoldás során.

Mielőtt a számszerű példafeladatot megoldanánk, foglaljuk össze a normálfeladat jellemzőit.

A lineáris programozási feladatot normálfeladatnak nevezzük akkor, ha a

- a/ célfüggvény maximumát keressük /maximumfeladat/
- b/ feltételek között kizárólag kisebb egyenlő /≤/ relációk találhatók.

A megoldáshoz szükséges számítások az előző fejezetekből lényegében már ismertek, ezért azt csak röviden, lépésenként összefoglaljuk, majd a példafeladat megoldását táblázatosan közöljük.

A megoldás lépései:

1. lépés: Induló táblázatot szerkesztünk. /Tudjuk, hogy a triviális bázisból indulunk $\underline{k}_i$, majd ezt rendre kicseréljük /ameddig lehetséges/ az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektoraival./
2. lépés: Meghatározzuk, hogy melyik oszlopból választunk generáló elemet. Mivel a célfüggvény maximumát keressük, célszerű abból az oszlopból választani generáló elemet, amelyhez a legnagyobb célfüggvényérték tartozik, mert így azt reméljük, hogy kevesebb számítással jutunk el a feladat megoldásához. /Meggjegyezzük, hogy ez általában igaz is, de nem mindig./
3. lépés: Generáló elemet választunk. Mint tudjuk, generáló elem csak 0-tól különböző szám lehet. Mivel a feladatnak csak nemnegatív megoldását keressük /negatív termelést nem folytatunk/, fontos, hogy a $\underline{b}$ vektor koordinátái /legalábbis a megoldást adó utolsó táblázatban/ nemnegatívak legyenek. Célszerű ezért generáló elemnek azt a pozitív elemet választani, amelynél a

b vektor elemeivel alkotott hányados a legkisebb. A generáló elemet tehát úgy választjuk ki, hogy a b vektorhoz tartozó adatokat osztjuk a generáló oszlop adataival és azt az osztót választjuk generáló elemnek, amelyhez a legkisebb hányados tartozik. Ezt bekeretezzük.

4. lépés: Új táblázatot szerkesztünk, amelyben a generáló elemhez tartozó sor- és oszlopszimbólumokat felcseréljük.
5. lépés: Az új táblázatba a generáló elem helyére beírjuk annak reciprokát, $1/r$
6. lépés: Az új táblázatba a generáló elem oszlopának adatait megkapjuk, ha az előző táblázat megfelelő adatait szorozzuk a generáló elem reciprokának -1 -szeresével.
7. lépés: Az új táblázatban a generáló elem sorának adatait $/u_i/$ megkapjuk, ha az előző táblázat megfelelő adatait szorozzuk a generáló elem reciprokával /vagy osztjuk a generáló elemmel/.
8. lépés: Az új táblázat többi adatait megkapjuk, ha a régi táblázat megfelelő adataiból levonjuk a régi táblázat generáló elem oszlopában a megfelelő sorban lévő adat, valamint az új táblázatban az adatnak megfelelő oszlopban található u_j szorzatát.

A számításokat táblázatról - táblázatra haladva mindaddig folytatjuk, amíg a célfüggvény sorában /utolsó sor/ pozitív elemet találunk. Ha ilyen nincs, optimális megoldáshoz jutottunk, tehát az utolsó táblázat a feladat megoldását adja. A számításokat szimbólikusan az alábbi táblázatokban mutatjuk be:

	x_1	...	x_j	...	x_n	
u_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
u_2	a_{21}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
	p_1	...	p_j	...	p_n	z

$$p_j > p_1, p_2, \dots, p_n$$

$$\frac{b_i}{a_{ij}} < \frac{b_1}{a_{1j}}, \frac{b_2}{a_{2j}}, \dots, \frac{b_m}{a_{mj}}$$

$$\gamma = \frac{1}{a_{ij}}$$

$$\delta_1 = \frac{a_{11}}{a_{ij}}, \quad \delta_2 = \frac{a_{12}}{a_{ij}}, \quad \dots, \quad \delta_o = \frac{b_i}{a_{ij}}$$

/Az induló táblázatban természetesen $z = 0$ /

	x_1	$\dots u_1 \dots$	x_n	
u_1	$a_{11} - \delta_1 a_{1j}$	$-\gamma a_{1j}$	$a_{1n} - \delta_n a_{1j}$	$b_1 - \delta_o a_{1j}$
u_2	$a_{21} - \delta_1 a_{2j}$	$-\gamma a_{2j}$	$a_{2n} - \delta_n a_{2j}$	$b_2 - \delta_o a_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_j	δ_1	$\dots \gamma \dots$	δ_n	δ_o
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_m	$a_{m1} - \delta_1 a_{mj}$	$-\gamma a_{mj}$	$a_{mn} - \delta_n a_{mj}$	$b_m - \delta_o a_{mj}$
	$p_1 - \delta_1 p_j$	$-\gamma p_j$	$p_n - \delta_n p_j$	$z - \delta_o p_j$

Lássuk most példafeladatunk megoldását és a megoldás során kapott táblázatokat.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1	4	4	2	2600
u_3	4	2	6	<u>10</u>	6800
$-z$	900	900	1000	1100	0

	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	0,6	0,8	0,4	-0,1	320
u_2	0,2	3,6	2,8	-0,2	1240
x_4	0,4	0,2	0,6	0,1	680
-z	460	680	340	-110	-748000

	x_1	u_2	x_3	u_3	
u_1	0,55	-0,22	-0,22	-0,05	44,45
x_2	0,06	0,28	0,78	-0,06	344,44
x_4	0,39	-0,06	0,44	0,11	611,11
-z	422,2	-188,9	-190,4	-69,2	-982219,2

	u_1	u_2	x_3	u_3	
x_1	1,82	-0,4	-0,4	-0,09	80,82
x_2	-0,11	0,3	0,8	-0,05	339,59
x_4	-0,71	0,1	0,6	0,15	579,59
-z	-767,6	-20,0	-21,52	-32,1	-1016340

A kapott optimális megoldás tehát a következő:

$$x_1 = 80,82, \quad x_2 = 339,59, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 579,59$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad z = 1\,016\,340$$

vagy másképpen felírva

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 80,82 \\ 339,59 \\ 0 \\ 579,59 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \underline{0}, \quad z = 1\,016\,340$$

Megjegyezzük, hogy a táblázatban a z negatív előjellel szerepel. Ez kizárólag számítástechnikai okokból van így, hogy a célfüggvényérték kiszámítására ne legyen szükség külön eljárásra. Valójában ezt -1-gyel beszorozva, pozitívnak vesszük.

Az utolsó táblázatból leolvasható, milyen termelési program adja a legnagyobb jövedelmet. Az 1.7. pontban vizsgáltuk a megoldást és az eredményt gazdasági szempontból is. Tudjuk, hogy a harmadik termék, bár önmagában szemlélve jól jövedelmező, az utolsó táblázat mutatja, hogy a harmadik termék 1 ha-on való termelése 21,52 Ft jövedelemcsökkenést okozna. Mindhárom termelési erőforrást teljes mértékben felhasználtuk. Az utolsó táblázat utolsó sorából az is megállapítható, hogy amennyiben valamelyik erőforrásból kevesebb állna rendelkezésre egy egységgel, akkor az első erőforrást tekintve, 767,6 Ft-tal a második erőforrásnál 20 Ft-tal, a harmadik erőforrásnál 32,1 Ft-tal csökkenne a jövedelem. Az erőforrások egy egységgel való növelése viszont ugyanannyi jövedelememelkedéshez vezetne. Ennek alapján a vállalatvezetés dönthet arról is, hogy melyik erőforrásból volna célszerű a kapacitást növelni, vagy csökkenteni. Ha ugyanis valamely erőforrás olcsóbban szerezhető be, mint az egységnyi erőforrás által elérhető jövedelemtöbblet, akkor érdemes ebből a kapacitást növelni. Ellenkező esetben a kapacitás csökkentése célszerű.

Vegyük például az első erőforrást. Ebből célszerű bővíteni a kapacitást, ha beszerzése kevesebbe kerül /egységenként/ 767,6 Ft-nál. Ha például a piacon az első erőforrást egységenként 600 Ft-ért lehet beszerezni, célszerű ezt megtenni, mert a 767,6 Ft jövedelem nemcsak fedezi a költséget, de még 167,6 Ft jövedelmet is eredményez. A vállalatnak tehát az adott esetben az első erőforrás egy egysége 767,6 Ft-ot ér /hiszen ennyivel emeli a jövedelmet/, bárhogyan is alakul az adott erőforrás piaci ára. A modellben tehát az erőforrások mintegy felértékelődnek, s ez mutatja, hogy az adott körülmények között - függetlenül a beszerzési ártól, illetve költségektől - mennyit érnek a vállalat számára. A duális változókhoz tartozó célfüggvényértéket /a duális megoldást/ árnyékárnak nevezzük. Az árnyékárrakkal a későbbiek során még gyakran találkozunk.

Végül ellenőrizzük a megoldást azzal, hogy a kapott eredményt behelyettesítjük a 10.1.1. vagy a 10.1.2.-be, azaz:

$$\begin{aligned} 80,82 + 339,59 + 0 + 579,59 &= 1000 \\ 80,82 + 4 \cdot 339,59 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 579,59 &= 259,36 = 2600 \\ 4 \cdot 80,82 + 2 \cdot 339,59 + 6 \cdot 0 + 10 \cdot 579,59 &= 6798,36 = 6800 \end{aligned}$$

$$900 \cdot 80,82 + 900 \cdot 339,59 + 1000 \cdot 0 + 1100 \cdot 579,59 = 1\ 015\ 918 \approx 1\ 016\ 340$$

vagy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80,82 \\ 339,59 \\ 0 \\ 579,59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2600 \\ 6800 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 900, & 900, & 1000, & 1100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80,82 \\ 339,59 \\ 0 \\ 579,59 \end{bmatrix} = 1015\ 918 \approx 1\ 016\ 340$$

A lényegtelen eltérés kerekítésekből adódik. Az adott példa alkalmas volna arra, hogy segítségével különböző problémákat bemutassunk és összefüggésbe hozzuk a gazdasági háttérrel is. A kerekítésekből adódó hibák azonban mindvégig zavarnának bennünket. E hibák azonban csökkenthetők, ha a számadatokat némileg átalakítjuk. Mindössze négy adatot kell megváltoztatnunk és máris nagyobb pontossággal tudunk számolni. Álakítsuk tehát át a feladatot úgy, hogy induló táblázatunk a következő legyen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
-z	900	900	950	1100	0

Ha most az

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$$

logikai uton előállított termelési programot valósítjuk meg, akkor a kapacitásszükséglet

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2600 \\ 6500 \end{bmatrix}$$

és a célfüggvény értéke /a vállalati jövedelem/

$$z = 995\ 000 \text{ Ft}$$

Tegyük fel azonban, hogy a második csúcsidőszakban most is 6800 munkanap áll rendelkezésre, amit a logikai uton készített termelési program nem használ ki.

Oldjuk meg a feladatot

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
$-z$	900	900	950	1100	0

	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
u_2	1	4	3	-0,2	1240
x_4	0,4	0,2	0,5	0,1	680
$-z$	460	680	400	-110	-748000

	x_1	u_2	x_3	u_4	
u_1	0,4	-0,2	-0,10	-0,06	72
x_2	0,25	0,25	0,75	-0,05	310
x_4	0,35	-0,05	0,35	0,11	618
$-z$	290	-170	-110	-76	-958 800

	u_1	u_2	x_3	u_3	
x_1	2,5	-0,5	-0,25	-0,15	180
x_2	-0,625	0,375	0,81	-0,01	265
x_4	-0,875	0,125	0,44	0,16	555
$-z$	-725	-25	-37,5	-32,5	-1 011000

Az optimális megoldás tehát

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 180 \\ 265 \\ 0 \\ 555 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{0}$$

$$z = 1\,011\,000$$

Ez a termelési program /behelyettesítéssel ellenőrizzük/ mindhárom erőforráskapacitást teljesen kihasználja és a jövedelemtöbblet 16 000 Ft.

Az árnyékarak azt mutatják, hogy a földterület növelése hektáronként 725 Ft-tal, az I. csúcsidőszak munkaerőkapacitása munkanaponként 25 Ft-tal, a II. csúcsidőszak pedig 32,5 Ft-tal emelné a jövedelmet, viszont a harmadik termék termelése hektáronként 37,5 Ft-tal csökkentené az elérhető vállalati jövedelmet.

Tegyük fel, hogy ha a vállalat a földterületet nem is képes bővíteni, a nem árunövénytermelő ágazatokban jobb munkaszervezéssel el tudja érni, hogy az I. csúcsidőszakban 360 munkanap-kapacitást felszabadít és átirányít az árunövénytermelés területére. Ennek alapján a kapacitás a következőképpen alakul:

$$b = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2960 \\ 6800 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg most a feladatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2960
u_3	4	2	5	10	6800
-z	900	900	950	1100	0

	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
u_2	1	4	3	-0,2	1600
x_4	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	400	-110	-748000

	x_1	u_2	x_3	u_3	
u_1	0,40	-0,2	-0,10	-0,06	0
x_2	0,25	0,25	0,75	-0,05	400
x_4	0,35	-0,05	0,35	0,11	600
-z	290	-170	-110	-76	-1020000

	u_1	u_2	x_3	u_3	
x_1	2,5	0,5	-0,25	-0,15	0
x_2	-0,625	0,375	0,81	-0,01	400
x_4	-0,875	0,125	0,44	0,16	600
-z	-725	-25	-37,5	-32,5	-1020000

A megoldás tehát:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0} \quad z = 1\,020\,000$$

Most tehát csak két terméket /az elsőt és a másodikat/ célszerű termelni, az erőforrásokat most is teljesen felhasználjuk és a jövedelem az előző megoldáshoz képest $1\,020\,000 - 1\,011\,000 = 9000$ Ft-tal emelkedett. Figyeljük meg, hogy az előbbi megoldásban a második erőforráshoz 25 Ft árnyékár tartozott. Az erőforrást 360 egységgel bővítettük, s így $360 \cdot 25 = 9000$ Ft-tal emelkedett a jövedelem.

Bővítsük még a második erőforrást 40 egységgel, hogy az 3000 munkanap legyen és oldjuk meg a modellt.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	3000
u_3	4	2	5	10	6800
-z	900	900	950	1100	0

	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
u_2	1	4	3	-0,2	1640
x_4	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	400	-110	-748000

	x_1	u_1	x_3	u_3	
x_2	0,75	1,25	0,625	-0,125	400
u_2	-2	-5	0,5	0,30	40
x_4	0,25	-0,25	-0,375	0,125	600
-z	-50	-850	-25	-25	-1020000

A megoldás most tehát a következő:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = 1\,020\,000$$

A második erőforrás további 40 egységgel való bővítésének tehát nincs jelentősége, azt az adott terület és a II. csúcsidőszakban rendelkezésre álló munkaerőkapacitás mellett nem tudjuk felhasználni. Ebből tehát most felesleges kapacitásunk van. A második erőforrásra most nem is kaptunk árnyékárát, viszont jelentősen emelkedett a területnek, mint viszonylag leginkább szűk kapacitásnak az árnyékára.

Tegyük fel, hogy a harmadik termék termelésére nincs is lehetőségünk, vagyis most csak három változó szerepel a feladatban / x_4 -et most x_3 -nak vegyük/. A feladat megoldása a következő:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	2	2600
u_3	4	2	<u>10</u>	6800
-z	900	900	1100	0

	x_1	x_2	u_3	
u_1	0,6	0,8	-0,1	320
u_2	1	<u>4</u>	-0,2	1240
x_3	0,4	0,2	0,1	680
-z	460	660	-110	-748000

	x_1	u_2	u_3	
u_1	0,4	-0,2	-0,06	72
x_2	0,25	-0,25	-0,05	310
x_3	0,35	-0,05	0,11	618
-z	290	-170	-76	-958800

	u_1	u_2	u_3	
x_1	2,5	-0,5	-0,15	180
x_2	-0,625	0,375	-0,01	265
x_3	-0,875	0,125	0,16	555
-z	-725	-25	-32,5	-1011000

A megoldás tehát

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 180 \\ 265 \\ 555 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0} \quad z = 1\,011\,000$$

A táblázat belsejében az $\underline{A}$ mátrix helyén most annak inverzét találjuk, azaz $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}$, azaz

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,5 & -0,5 & -0,15 \\ -0,625 & 0,375 & -0,01 \\ -0,875 & 0,125 & 0,16 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{A} \underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1,8 & 4,4 & 2 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,5 & -0,5 & -0,15 \\ -0,625 & 0,375 & -0,01 \\ -0,875 & 0,125 & 0,16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

/A kerekítésből adódhat kisebb eltérés/

Végül tegyük fel, hogy árváltozás következtében a harmadik termék fajlagos jövedelme 950 Ft-ról 1000 Ft-ra emelkedik. Oldjuk meg most a feladatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
-z	900	900	1000	1100	0

	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
u_2	1	4	3	-0,2	1240
x_4	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	450	-110	-748000

	x_1	u_2	x_3	u_3	
u_1	0,4	-0,2	-0,10	-0,06	72
x_2	0,25	0,25	0,75	-0,05	310
x_4	0,35	-0,05	0,35	0,11	618
-z	290	-170	-60	-76	-958800

	u_1	u_2	x_3	u_3	
x_1	2,5	-0,5	-0,25	-0,15	180
x_2	-0,625	0,375	0,81	-0,01	265
x_4	-0,875	0,125	0,44	0,16	555
-z	-725	-25	12,50	-32,50	-1011900

	u_1	u_2	x_2	u_3	
x_1	2,30	-0,38	0,31	-0,153	261,79
x_3	-0,77	0,46	1,24	-0,012	327,16
x_4	-0,54	-0,08	-0,54	-0,165	411,05
-z	-715,4	-30,8	-15,43	-32,3	-1015089,5

A megoldás

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 261,79 \\ 0 \\ 327,16 \\ 411,05 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0} \quad z = 1\,015\,089,5$$

Most az x_2 -t ki kellett cserélni az x_3 -mal. Az x_2 és x_3 változók cseréjét megtakaríthattuk volna, ha figyelembe vesszük a változók legnagyobb összes hozamát.

Figyeljük meg az induló táblázatot és számítsuk ki a különböző termékekhez tartozó lehetséges legnagyobb hozamot, úgy, hogy a kapacitásvektor adatait osztjuk a fajlagos szükségleti adatokkal és kiszámítjuk a legkisebb hányadoshoz tartozó célfüggvényértéket. A következőket kapjuk:

Az első termékre:

$$\begin{array}{lll} 1000 : 1 & = & 1000 \\ 2600 : 1,8 & = & 1444 \\ 6800 : 4 & = & 1700 \end{array} \quad \text{és } 1000 \cdot 900 = 900\,000$$

A második termékre:

$$\begin{array}{lll} 1000 : 1 & = & 1000 \\ 2600 : 4,4 & = & 591 \\ 6800 : 2 & = & 3400 \end{array} \quad \text{és } 591 \cdot 900 = 531\,900$$

A harmadik termékre:

$$\begin{array}{lll} 1000 : 1 & = & 1000 \\ 2600 : 4 & = & 650 \\ 6800 : 5 & = & 1360 \end{array} \quad \text{és } 650 \cdot 1000 = 650\,000$$

A negyedik termékre:

$$\begin{array}{lll} 1000 : 1 & = & 1000 \\ 2600 : 2 & = & 1300 \\ 6800 : 10 & = & 680 \end{array} \quad \text{és } 680 \cdot 1100 = 748\,000$$

A második erőforráskapacitás a második és a harmadik termékre vonatkozóan mutatkozott szűknek. /Az első termék-nél az első, a negyediknél a harmadik erőforrás volt a szűk kapacitás./ Amikor tehát a második erőforrásnál vé-gezzük a báziscserét, célszerű a második és harmadik ter-mék közül azt választani, amelyhez nagyobb lehetséges jöve-delem tartozik. Ez pedig a harmadik termék, amelynél a lehet-séges összjövedelem 650 000 Ft, míg a másodiknál csak 531 900 Ft-ot kaptunk. A második lépésben tehát x_2 helyett x_3 -at lenne célszerű a bázisba bevonní. Gyakorlásképpen oldjuk meg így is a feladatot.

6.2. Degeneráció

A degeneráció problémájával már az előbbiekből találkoz-tunk, csak akkor még azt elhallgattuk. Vegyük az előbbiek-ből már ismert feladatot, amikor induló táblánk a követke-ző volt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2960
u_3	4	2	5	10	6800
-z	900	900	950	1100	0

A második tábla ekkor így alakult:

	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
u_2	1	4	3	-0,2	1600
x_4	0,4	0,2	0,5	0,1	680
-z	460	680	400	-110	-748000

Egyértelmű, hogy a következő lépésben a második termé-ket kell a programba bevonní, tehát a második oszlopban választunk generáló elemet, hiszen egyértelműen ehhez az oszlophoz tartozik a legnagyobb célfüggvény koefficiens. De a második oszlop hányadik eleme legyen a generáló elem? Tudjuk, hogy a generáló elemet úgy választjuk, hogy az utolsó oszlop elemeit osztjuk a generáló oszlop elemei-vel és azt választjuk generáló elemnek, ahol a legkisebb hányadost kapjuk.
Végezzük el az osztásokat:

$$\begin{aligned} 320 &: 0,8 = 400 \\ 1600 &: 4 = 400 \\ 680 &: 0,2 = 3400 \end{aligned}$$

Az első és a második elemmel osztva, azonos /mindkettő-nél legkisebb/ hányadost kapunk. Nem tudunk tehát egyértelműen generáló elemet választani, mert mind az első, mind a második elem egyformán lehet generáló elem. Ilyen esetben tehát, amikor nem tudunk egyértelműen generáló elemet választani, degenerációval állunk szemben. Hogyan járunk el ilyenkor, amikor két /vagy több/ generáló elem-jelöltünk van?

A legegyszerűbb eljárás, ha a generáló elem-jelöltek közül találomra választunk ki egyet generáló elemnek. Ilyenkor viszont előfordulhat, hogy egy táblázat később megismétlődik, sőt ha esetleg ismételtlen ugyanugy választjuk a generáló elemet, "körben forgunk" és nem jutunk a feladat végére. Célszerűbb úgy eljárni, hogy a generáló elem jelöltekkel balról jobbra haladva, elosztjuk az adott sorban lévő többi technológiai együtthatót. Amely sorban előbb találjuk a legkisebb hányadost, abban választunk generáló elemet. Példánkban tehát az első sort 0,8-dal, a második sort 4-gyel végigosztjuk, azaz

Első sor

$$\frac{0,6}{0,8} = 0,75 \quad \frac{0,5}{0,8} = 0,625 \quad \frac{-0,1}{0,8} = -0,125$$

Második sor

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{3}{4} = 0,75 \quad \frac{-0,2}{4} = -0,05$$

Az első hányados az első sorban 0,75, a második sorban 0,25 és mivel $0,25 < 0,75$, azért a második sorban választunk generáló elemet. A 10.1. pontban tehát jól választottunk generáló elemet. /A megoldást már ismerjük./

A degeneráció előfordulhat már az induló táblázatban is, vagy bármely más táblázatban. Akkor is degenerációval állunk szemben, ha az induló, vagy bármely más táblázatban a b vektor elemei között két vagy több nullát találunk. Ilyenkor a szűk keresztmetszetet jelentő hányadosok nullák.

6.3. A programvektor és a kapacitások egyidejű optimalizálása

Az eddigiekben a feladatot úgy fogalmaztuk meg, hogy rendelkezésre áll meghatározott erőforráskapacitás, és ehhez kell optimalizálni a termelési szerkezetet. A gyakorlatban azonban általában nem ez a helyzet. Egyes kapacitások ténylegesen meghatározott mennyiségben állnak

rendelkezésre, mások viszont változtathatók, ha e változtatás célszerű. Például lehet, hogy a rendelkezésre álló földterület adott, de gépeket és anyagokat - elvileg - tetszés szerinti mennyiségben beszerezhetünk, vagy szűkíthetjük, illetve bővíthetjük a munkaerőlétszámot, stb.

Vegyük az előbbiekből már ismert feladatot és tételezzük fel, hogy az 1000 ha földterület adva van, azon nem változtathatunk, a munkaerő viszont tetszés szerint változtatható. Tegyük fel, hogy a 2600, illetve 6800 munkanap kapacitás ugy adódott, hogy 100 fő munkaerő állt a vállalat rendelkezésére és az első csúcsideőszak kb. egy hónapot ölel fel, amely egy hónap alatt egy-egy dolgozó 26 napot dolgozik, míg a második csúcsideőszak egy háromhónapos periódus, s ez alatt egy dolgozó 68 munkanapot dolgozhat.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Az} & & \\
 x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \\
 x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & \leq & 1000 \\
 1,8x_1 + & 4,4x_2 + & 4x_3 + & 2x_4 & \leq & 2600 \\
 4x_1 + & 2x_2 + & 5x_3 + & 10x_4 & \leq & 6800 \\
 \hline
 900x_1 + & 900x_2 + & 950x_3 + & 1100x_4 & = & \text{max.}
 \end{array}$$

feladat most tehát a következő:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \\
 x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & \leq & 1000 \\
 1,8x_1 + & 4,4x_2 + & 4x_3 + & 2x_4 & \leq & 26 \quad . \quad 100 \\
 4x_1 + & 2x_2 + & 5x_3 + & 10x_4 & \leq & 68 \quad . \quad 100 \\
 \hline
 900x_1 & 900x_2 + & 950x_3 + & 1100x_4 & = & \text{max.}
 \end{array}$$

Azt mondtuk azonban, hogy most nem 100 fő áll rendelkezésünkre, hanem annyi, amennyi szükséges, illetve amennyi célszerű. Ezt az egyelőre ismeretlen munkaerőszükségletet y-nal jelölve, a feladat a következő:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \\
 x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & \leq & 1000 \\
 1,8x_1 + & 4,4x_2 + & 4x_3 + & 2x_4 & \leq & 26 \quad y \\
 4x_1 + & 2x_2 + & 5x_3 + & 10x_4 & \leq & 68 \quad y \\
 \hline
 900x_1 + & 900x_2 + & 950x_3 + & 1100x_4 & = & \text{max.}
 \end{array}$$

Az y most ugyanúgy ismeretlenként kezelhető, mint az x_j -k. Hozzuk át tehát azokat együtthatóikkal együtt az egyenlőtlenségek bal oldalára, azaz

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y & \geq & 0 \\
 x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & & \leq & 1000 \\
 1,8 x_1 + 4,4 x_2 + & 4 x_3 + & 2 x_4 - & 26 y & & \leq & 0 \\
 4 x_1 + & 2 x_2 + & 5 x_3 + & 10 x_4 - & 68 y & \leq & 0 \\
 \hline
 900 x_1 + 900 x_2 + 950 x_3 + 1100 x_4 & & & & & = & \max.
 \end{array}$$

Most még eltekintünk attól, hogy a munkaerőváltozóhoz külön célfüggvényértéket rendeljünk, hiszen a különböző termékek jövedelmét úgy számítottuk ki, hogy a munkabérek is figyelembe vettük. Valójában a munkaerő rendelkezésre állásának is van költsége, de ezzel majd a gyakorlati alkalmazás tárgyalása során foglalkozunk. Oldjuk meg tehát az előbbi feladatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
u_1	1	1	1	1	0	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	-26	0
u_3	4	2	5	<u>10</u>	-68	0
-z	900	900	950	1100	0	0

Látjuk, hogy degenerált modellel állunk szemben.

	x_1	x_2	x_3	u_3	y	
u_1	0,6	0,8	0,5	-0,1	<u>6,8</u>	1000
u_2	1	4	3	-0,2	-12,4	0
x_4	0,4	0,2	0,5	0,1	-6,8	0
-z	460	680	400	-110	7480	0

	x_1	x_2	x_3	u_3	u_1	
y	0,09	0,12	0,07	-0,02	0,15	147,059
u_2	2,09	5,46	3,91	-0,02	1,82	1823,53
x_4	1	1	1	0	1	1000,00

A megoldás tehát:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & x_2 &= 0, & x_3 &= 0, & x_4 &= 1000 \\y &= 147,06 \approx 147, & u_1 &= 0, & u_2 &= 1823,53 \\u_3 &= 0, & z &= 1\,100\,000\end{aligned}$$

Most tehát mind az 1000 ha-t a negyedik termék termelésére célszerű felhasználni és 147 dolgozóra van szükség. A jövedelem 1 100 000 Ft. A munkaerőt csak a II. csúcsidőszakban használjuk ki, az I. időszakban 1823,53 munkanap kihasználatlanul marad. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy az adott termelési program az I. időszakban 2000, a II. időszakban 10000 munkanapot igényel, s az I. időszakban 3823,3 munkanap áll rendelkezésre /tehát 1823,3 munkanap felesleges/, a II. időszakban pedig 10000 munkanap. Természetesen nem mindig csak egy termék termelése célszerű. Emeljük csak meg a második termékhez tartozó jövedelmet mondjuk 300 Ft-tal. Máris a következő megoldást kapjuk:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & x_2 &= 333,98, & x_3 &= 0, & x_4 &= 666,02 \\y &= 106,98, & u &= 0, & z &= 1\,133\,398\end{aligned}$$

6.4. Több célfüggvény vizsgálata

Gazdasági feladatok megoldása során általában nem csak egy hatékonysági mutató alapján döntünk. Nem biztos, hogy azt tekintjük a legjobb termelési programnak, amelyhez a legnagyobb jövedelem tartozik. Lehetséges ugyanis, hogy ennek megvalósítása igen nagy beruházást igényel, vagy igen sok importanyag felhasználását teszi szükségessé, stb. De termelőszövetkezetben a jövedelemnek is két formáját vesszük számba, a bruttó jövedelmet /amikor a tagok munkabérét, illetve részesedését nem számoltuk fel költségként/ és a nettó jövedelmet /amikor a munkaerő költségét is felszámoltuk/.

Hogy a termelési programról dönteni tudjunk, célszerű tehát a modellt több célfüggvénnyel is megoldani. Nyilván a beruházás és az importanyag szempontjából az a termelési program a jó, amelyhez a legkisebb beruházás, illetve importanyagfelhasználás tartozik. Mi azonban a minimum feladatok megoldását még nem ismerjük, egyelőre a maximum-feladatoknál maradunk.

Tegyük fel, hogy az eddigi példafeladatokat használva két célfüggvényt maximalizálunk.

Legyenek ezek az alábbiak:

$$P_1^T = [900, 900, 950, 1100]$$

$$P_2^T = [1500, 1200, 1800, 1600]$$

Most tehát két célfüggvényt vizsgálhatunk, például a nettó jövedelmet $/z_1/$ és a bruttó jövedelmet $/z_2/$, s így feladatunk a következő:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
$-z_1$	900	900	950	1100	0
$-z_2$	1500	1200	1800	1600	0

A tanultak alapján nincs akadálya annak, hogy a feladatot előbb az egyik, aztán a másik célfüggvénnyel megoldjuk és a kapott eredményeket összehasonlítsuk. Ha így járunk el, akkor ugyanazt a modellt kétszer kell megoldani, bár a számítások egy része /amíg a két célfüggvény szerint számolva a generáló elem azonos/, esetleg csak másolást jelent, mert a két feladatban azonos.

Célszerűbb úgy eljárni, hogy - bár a számításokat az egyik célfüggvény szerint végezzük - mindkét célfüggvényt lépésről-lépésre kiszámítjuk, majd amikor az egyik célfüggvény szerint a feladatot megoldottuk, akkor folytatjuk a számításokat a másik célfüggvény szerint. Ennek az az előnye is megvan, hogy mindkét megoldáshoz mindkét célfüggvényértéket megkapjuk anélkül, hogy a behelyettesítést elvégeznénk.

Tehát

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
$-z_1$	900	900	950	1100	0
$-z_2$	1500	1200	1800	1600	0

	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	0,6	0,8	0,5	-0,1	320
u_2	1	4	3	-0,2	1240
x_4	0,4	0,2	0,5	0,1	680
$-z_1$	460	680	400	-110	-748000
$-z_2$	860	880	1000	-160	-1088000

	x_1	u_2	x_3	u_3	
u_1	0,4	-0,2	-0,10	-0,06	72
x_2	0,25	0,25	0,75	-0,05	310
x_4	-0,35	-0,05	0,35	0,11	618
$-z_1$	290	-170	-110	-76	-958800
$-z_2$	640	-220	340	-116	-1360800

	u_1	u_2	x_3	u_3	
x_1	2,5	-0,5	-0,25	-0,15	180
x_2	-0,625	0,375	0,81	-0,01	265
x_4	-0,875	0,125	0,44	0,16	555
$-z_1$	-725	-25	-37,5	-32,5	-1011000
$-z_2$	-1600	120	500	-20	-1476000

Az első célfüggvénnyel megoldottuk a feladatot. Folytassuk a megoldást a második célfüggvény szerint, x_3 oszlopában választva generáló elemet.

	u_1	u_2	x_2	u_3	
x_1					261,79
x_3	-0,77	0,46	1,24	-0,012	327,16
x_4					411,05
$-z_1$	-753,9	-7,64	46,3	-33,0	-998731,5
$-z_2$	-1214,2	-111,48	-617,3	-13,8	-1639580,2

A feladatot megoldottuk a második célfüggvény szerint is. /Nincs szükség a táblázat többi adatára, mivel a számítást befejeztük, ezért azokat nem is számoltuk ki./

A megoldás tehát a következő:

	Nettó jövedelem szerint	Bruttó jövedelem szerint
x_1	180	261,79
x_2	265	0
x_3	0	327,16
x_4	555	411,05
u_1	0	0
u_2	0	0
u_3	0	0
z_1	1 011 000	998731,5
z_2	1 476 000	1639580,2

Mint látjuk, más az optimum a nettó és más a bruttó jövedelem maximalizálása esetén. A vállalatvezető feladata, hogy döntson, melyik termelési program megvalósítása célszerű. Ha a nettó jövedelem optimumát választjuk 12 268,5 Ft nettó jövedelmet nyerünk, de a bruttó jövedelem 163 580,2 Ft-tal kevesebb lesz. Ellenkező esetben 163 580,2 Ft bruttó jövedelemtöbbletért elveszítünk 12.268,5 Ft nettó jövedelmet. Hogy melyik mellett döntünk, az számos tényezőtől függ.

Az sem feltétlenül biztos, hogy az egyik vagy a másik megoldást fogadjuk el. A feltételrendszert ugyanis mindkét megoldás kielégíti, tehát az erőforráskapacitást tekintve, mindkét termelési program megvalósítható. De ha mindkét termelési program felét vesszük és összeadjuk, az így kapott

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 220,9 \\ 132,5 \\ 163,6 \\ 483,0 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \underline{0}$$

$$z_1 = 1\,004\,865,7$$

$$z_2 = 1\,557\,790,1$$

program is megvalósítható az adott erőforrás kapacitással.

A két programot tehát k_1 , k_2 szorzóval keverhetjük, azaz

$$k_1 \text{ opt}_1 + k_2 \text{ opt}_{11}$$

és $k_1 + k_2 = 1$

és az így kapott termelési programok is megvalósíthatók. Az opt_1 és opt_{11} programot most tehát alternatív programoknak fogjuk fel és megosztási viszonyyszámok segítségével azokkal újabb termelési programokat nyerhetünk. Ezek egymástól különbözhetnek az erőforrás felhasználásban is /ha azt nem egyformán használják ki/ és a célfüggvény értékét tekintve is, de megvalósítható programok.

Ha a feladatot számítógéppel oldjuk meg, akkor is a megoldást előbb az első célfüggvénnyel nyerjük. Ezután a gépbe tápláljuk a második célfüggvényt és folytatjuk a számítást /mint előbb is/ e szerint a célfüggvény szerint. A számítógép azonban esetleg - ha csak külön programot nem csinálunk ilyen céllal - csak azt a célfüggvény-értéket írja ki, amellyel az optimalizálást végeztük. A programok összehasonlítását azonban megkönnyíti, ha minden megoldás során minden célfüggvény értékét ismerjük. Ezt egyszerűen elérhetjük, ha célfüggvény változókat alkalmazunk. Ilyenkor az előbbi célfüggvényeket feltételként építjük a modellbe és a célfüggvény most tehát a következő lesz:

	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
u_1	1	1	1	1	0	0	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	0	0	2600
u_3	4	2	5	10	0	0	6300
u_4	900	900	950	1100	-1	0	0
u_5	1500	1200	1800	1600	0	-1	0
$-z_1$	0	0	0	0	1	0	0
$-z_2$	0	0	0	0	0	1	0

Ez a következőknek felel meg:

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2 \geq 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1000 \\
 & 1,8x_1 + 4,4x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 2600 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 6800 \\
 & 900x_1 + 900x_2 + 950x_3 + 1100x_4 - z_1 \leq 0 \\
 & 1500x_1 + 1200x_2 + 1800x_3 + 1600x_4 - z_2 \leq 0
 \end{aligned}$$

$$z_1 = \max.$$

$$z_2 = \max.$$

A megoldást most módosítjuk annyiban, hogy az induló táblázatban generáló elemet az első célfüggvényváltó oszlopában választunk és most nem vagyunk tekintettel az előjelre, azaz az -1-et választjuk. Mivel a hányados 0 lesz, nem áll fenn a veszélye annak, hogy a b vektor koordinátái között negatív lesz. /A célfüggvény feltételeket besorozhatnánk -1-gyel, akkor máris pozitív lenne a generáló elemünk. Ekkor viszont a $\leq$ reláció $\geq$ -re változna, amivel egyelőre még nem foglalkoztunk. / Az első célfüggvény szint számolva tehát a második és harmadik táblázat a következőképpen alakul:

	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	
u_1	1	1	1	1	0	0	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	0	0	2600
u_3	4	2	5	10	0	0	6800
z_1	-900	-900	-950	-1100	-1	0	0
u_5	1500	1200	1800	1600	0	-1	0
$-z_1$	900	900	950	1100	1	0	0
$-z_2$	0	0	0	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	u_3	z_1	z_2	
u_1	0,6	0,8	0,5	-0,1	0	0	320
u_2	1	4	3	-0,2	0	0	1240
x_4	0,4	0,2	0,5	0,1	0	0	680
z_1	-460	-680	-400	110	-1	0	-748000
u_5	860	880	1000	-160	0	-1	-1088000
$-z_1$	460	680	400	-110	1	0	-748000
$-z_2$	0	0	0	0	0	1	0

Nem folytatjuk a számításokat, hiszen könnyű belátni, hogy azok az előbbivel megegyeznek. Ha a feladatot az első célfüggvénnyel megoldottuk, a második célfüggvényhez tartozó -1 -et választjuk generáló elemnek és folytatjuk a számítást a második célfüggvény szerint. Mint már erről szó volt, ennek az eljárásnak számítógépes megoldásnál lehet jelentősége, ha a megoldásprogram egyidejűleg csak egy célfüggvényt kezel. A problémát igen sokféleképpen lehet még kezelni, így a számítógépre a megoldóprogramot többféleképpen is elkészíthetjük.

6.5. Alternatív optimumok

Tegyük fel, hogy az x_2 -hoz tartozó célfüggvénykoefficiens 950-ről 987,5-re emelkedik, azaz induló táblázatunk a következő:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	4	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
$-z$	900	900	987,5	1100	0

Ekkor az optimális táblázat:

	u_1	u_2	x_3	u_3	
x_1	2,5	-0,5	-0,25	-0,15	180
x_2	-0,625	0,375	0,81	-0,01	265
x_4	-0,875	0,125	0,44	0,16	555
$-z$	-725	-25	0	-32,5	-1011000

Optimális megoldáshoz jutottunk tehát. Most azonban a harmadik termék is bevonható a programba, s az így kapott megoldáshoz ugyancsak 1 011 000 Ft célfüggvényérték tartozik,

vagyis

	u_1	u_2	x_2	u_3	
x_1	2,30	-0,38	0,31	-0,153	261,79
x_3	-0,77	0,46	1,24	-0,012	327,16
x_4	-0,54	0,08	-0,54	0,165	411,05
-z	-725	-25	0	-32,5	-1011000

Két egyenértékű /optimális/ megoldásunk van tehát, amelyek mindegyike eleget tesz a feltételrendszernek és mindkét termelési programhoz ugyanaz a jövedelemtömeg tartozik,

azaz

$$\underline{x} = \begin{matrix} \text{opt}_1 \\ \begin{bmatrix} 180,00 \\ 265,00 \\ 0 \\ 555,00 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \underline{x} = \begin{matrix} \text{opt}_{11} \\ \begin{bmatrix} 261,79 \\ 0 \\ 327,16 \\ 411,05 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\underline{u} = \underline{0} \quad z = 1011000 \text{ Ft} \quad \underline{u} = \underline{0}$$

A két programot, mint alternatív optimumot, most is keverhetjük a k_1 , k_2 / $k_1 + k_2 = 1$ / megoszlási viszony-számok alapján, s könnyen belátható, hogy az így előállított termelési programok egyenértékűek, hozzájuk ugyanazon célfüggvényérték tartozik, tehát azok is optimálisak. Ha tehát egy feladatnak két /vagy több/ optimális megoldása létezik, akkor végtelen sok optimális megoldása lehetséges.

Hasonló volt az előző pontban tárgyalt probléma is. Ott azonban a kétféle megoldás nem volt egyenértékű, és nem voltak egyenértékűek a keverésükkel előállított termelési programok sem. Az előző pontban kapott megoldások tehát alternatív programok voltak ugyan és eleget tettek a feltételrendszernek de nem voltak alternatív optimumok, hanem egyik megoldás az egyik célfüggvény szerint, a másik pedig a másik célfüggvény szerint volt optimális és a keverésükkel kapott programok egyik célfüggvény szerint sem voltak optimálisak, hanem a két célfüggvényt figyelembe véve, kompromisszumos megoldást eredményeztek.

6.6. Módosított normálfeladat

Az eddigiek során a feladatot mindig úgy fogalmaztuk meg, hogy a feltételrendszerek között csak $\leq$ irányú egyenlőtlenségek, azaz kisebb egyenlő, illetve nem nagyobb egyenlőtlenségek voltak. Előfordul azonban olyan feladat is, amelyben a feltételek között egyenletek is vannak.

Maradjunk továbbra is az előbbieken vizsgált gyakorlati feladatnál, azonban tegyük fel, hogy a termelő vállalat már leszerződött a felvásárló vállalattal, hogy az első terméket pontosan 100 ha-on, a harmadik terméket pedig pontosan 50 ha-on termeli és ezekből csak annyit tudunk értékesíteni, vagy esetleg az első és a harmadik termékek takarmányok és azokból annyit kell pontosan termelni, hogy az állatállomány igényét kielégítsék e takarmányokból és nincs értékesítési lehetőségünk.

Most a feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{rcccccl}
 x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \\
 x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & \leq & 1000 \\
 1,8x_1 + & 4,4x_2 + & 4x_3 + & 2x_4 & \leq & 2600 \\
 4x_1 + & 2x_2 + & 5x_3 + & 10x_4 & \leq & 6800 \\
 x_1 & & & & = & 100 \\
 & & x_3 & & = & 50 \\
 \hline
 900x_1 + & 900x_2 + & 950x_3 + & 1100x_4 & = & \max.
 \end{array}$$

Most olyan négyismeretlenes feladattal állunk szemben, amelyben három $\leq$ irányú egyenlőtlenség mellett két egyenletünk is van és a célfüggvény maximumát keressük. A feladatot mátrix alakban felírva, a következőket kapjuk:

$$\begin{array}{l}
 x \geq 0 \qquad b_1 \geq 0 \qquad b_2 \geq 0 \\
 A_1 x \leq b_1 \\
 A_2 x = b_2 \\
 z = x^T c = \max.
 \end{array}$$

Az olyan lineáris programozási maximum feladatot, amelyben $\leq$ irányú egyenlőtlenségek mellett egyenletek is vannak, módosított normálfeladatnak nevezzük.

Mielőtt a feladatot megoldanánk, nézzük a következő egyszerű, kétismeretlenes egyenletrendszert:

$$2x_1 + 3x_2 = 19$$

$$x_1 + 2x_2 = 11$$

Az egyenlet megoldását az

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3$$

adja, hiszen

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19$$

$$5 + 2 \cdot 3 = 11$$

Adjuk össze a két egyenletet

$$3x_1 + 5x_2 = 30$$

Az $x_1 = 5$ és $x_2 = 3$ megoldás a két egyenlet összeadása útján nyert egyenletet is kielégíti, azaz

$$3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 30$$

De könnyen ellenőrizhetjük, hogy e megoldás kielégíti az előbbi két egyenlet különbségét, szorzatát, stb. is, ami természetes, hiszen az $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ behelyettesítéssel egyenlőségről van szó. Az egyenleteknek ebből a tulajdonságából következik, hogy a lineáris programozási feladatban előforduló egyenletek összegét képezhetjük, s ezáltal egy olyan feltételt kapunk, amelynek teljesülése esetén teljesülnek azok a feltételek is, amelyekből ezt képeztük. A megoldás során tehát arra kell törekedni, hogy az egyenletek összeadásával nyert feltétel teljesüljön először.

Foglaljuk táblázatba tehát az előbbi feladatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
$\frac{1}{2}u_4$	1	0	0	0	100
$\frac{1}{2}u_5$	0	0	1	0	50
$\frac{1}{2}Z$	900	900	950	1100	0
$\frac{1}{2}Z$	1	0	1	0	150

Az így elkészített táblázatban az egyenleteket tartalmazó sorokat π -gal megjelöltük. A πu_4 , πu_5 szimbólumok tehát arra utalnak, hogy e sorok egyenletek, s elsősorban ezek teljesítésére törekszünk. A táblázat utolsó sorában az egyenleteket tartalmazó sorok /egyenletek/ összegét találjuk és e sort πz -vel /csillagos z/ jelöltük. E sor maga is lineáris függvény és másodlagos célfüggvénynek nevezzük.

A feladat megoldása során először a másodlagos célfüggvényt kell megoldanunk. Eppen ezért mindaddig, amíg a másodlagos célfüggvényt meg nem oldottuk, a generáló elemet a másodlagos célfüggvény szerint választjuk meg, vagyis abban az oszlopban, amelyben a másodlagos célfüggvény sorában a legnagyobb koefficiens található.

A számításokat táblázatról-táblázatra haladva, ugyanugy végezzük, mint a normál feladatnál tanultuk, mindössze annyi módosítással, hogy ameddig a másodlagos célfüggvény szerint számolunk, a generáló elem oszlopát az új táblázatban üresen hagyjuk, s ezáltal elkerüljük, hogy újra abban az oszlopban válasszunk generáló elemet.

A másodlagos célfüggvényt akkor oldottuk meg, amikor ennek sorában végig 0-t kapunk. Ezután a számításokat az elsődleges célfüggvény szerint folytatjuk, a normál feladatnál tanultak szerint.

Oldjuk meg tehát feladatunkat:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
πu_4	1	0	0	0	100
πu_5	0	0	1	0	50
$-z$	900	900	950	1100	0
πz	1	0	1	0	150

	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	900
u_2	4,4	4	2	2420
u_3	2	5	10	6400
x_1	0	0	0	100
x_5	0	1	0	50
$-z$	900	950	1100	-90000
x_z	0	1	0	50

	x_2	x_4	
u_1	1	1	850
u_2	4,4	2	2220
u_3	2	10	6150
x_1	0	0	100
x_3	0	0	50
$-z$	900	1100	-137500
x_z	0	0	0

A másodlagos célfüggvényt megoldottuk, tehát az elsődleges célfüggvény szerint számolunk tovább, elhagyva a másodlagos célfüggvény sorát.

	x_2	u_3	
u_1	0,8	-0,1	235
u_2	4,0	-0,2	990
x_4	0,2	0,1	615
x_1	0	0	100
x_3	0	0	50
$-z$	680	-110	-814000

	u_2	u_3	
u_1	-0,20	-0,06	37,0
x_2	0,25	-0,05	247,5
x_4	-0,05	0,11	565,5
x_1	0	0	100
x_3	0	0	50
-z	-170	-76	-982300

A feladatot tehát megoldottuk. A megoldás:

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 247,5, \quad x_3 = 50, \quad x_4 = 565,5$$

$$u_1 = 37, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 0,$$

$$u_5 = 0, \quad z = 982\,300$$

Az x_1 , x_3 -ra előírt egyenleteket teljesítettük. Az erőforrások egyikét, a területet most nem használtuk fel teljesen. Az elérhető jövedelem 982 300 Ft. Azáltal tehát, hogy a vállalat előzőleg - mielőtt annak célszerűségéről számítások útján meggyőződött volna - leszerződött az első és a harmadik termék 100 ill. 50 ha-on való termelésére, elvesztett 28 700 Ft jövedelmet. /Láttuk, hogy előzőleg a feladat 1 011 000 Ft jövedelemhez vezetett./ Sőt az adott feltételek között a terület egy részét /37 ha-t/ nem is tudja kihasználni. Irjuk csak elő gyakorlásként, hogy a területet teljesen fel kell használni, vagyis az első sort is egyenletként kell venni. A feladatot nem fogjuk tudni megoldani! Az adott körülmények között - erről is könnyen meggyőződhetünk - a terület csak akkor használható ki, ha a második erőforrást 185 egységgel bővítjük.

Az előbb tárgyalt eljárásnak, amikor másodlagos célfüggvény szerint haladva az új táblázatban a generáló elem oszlopát üresen hagyjuk, megvan az a hátránya, hogy az eddig kicserélt duális változókra nem kapunk árnyékárát. Ezt elkerülhetjük, ha megállapodunk abban, hogy a már kicserélt csillagos duális változókat még egyszer nem visszük vissza a bázisba, vagyis csillagos változókhoz tartozó oszlopokban nem választunk generáló elemet. Ebben az esetben tehát nem szükséges ezen oszlopok üresen hagyása. Az előbbi feladat számításai tehát most a következőket adják:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	1	1	1	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	2600
u_3	4	2	5	10	6800
$\bar{x}_4$	1	0	0	0	100
$\bar{x}_5$	0	0	1	0	50
$-z$	900	900	950	1100	0
$\bar{z}$	1	0	1	0	150

	$\bar{x}_4$	x_2	x_3	x_4	
u_1	-1	1	1	1	900
u_2	-1,8	4,4	4	2	2420
u_3	-4	2	5	10	6400
x_1	1	0	0	0	100
$\bar{x}_5$	0	0	1	0	50
$-z$	-900	900	950	1100	-90000
$\bar{z}$	-1	0	1	0	50

	$\bar{x}_4$	x_2	$\bar{x}_5$	x_4	
u_1	-1	1	-1	1	850
u_2	-1,8	4,4	-4	2	2220
u_3	-4	2	-5	10	6150
x_1	1	0	0	0	100
x_3	0	0	1	0	50
$-z$	-900	900	-950	1100	-137500
$\bar{z}$	-1	0	-1	0	0

Most a másodlagos célfüggvény megoldását az mutatja, hogy az utolsó sorban nincs pozitív elem, minden csillagos változót kicseréltünk a bázisból és a b vektorhoz a másodlagos célfüggvény sorában 0 tartozik. A másodlagos célfüggvény sorát most elhagyjuk, s folytatjuk a számolást az elsődleges célfüggvény szerint:

	u_4	x_2	u_5	u_3	
u_1	-0,6	0,8	-0,5	-0,1	235
u_2	-1,0	4,0	-3,0	-0,2	990
x_4	-0,4	0,2	-0,5	0,1	615
x_1	1	0	0	0	100
x_3	0	0	1	0	50
-z	-460	680	-400	-120	-814000

	u_4	u_2	u_5	u_3	
u_1	-0,4	-0,20	0,10	-0,06	37,0
x_2	-0,25	0,25	-0,75	-0,05	247,5
x_4	-0,35	-0,05	-0,35	0,11	565,5
x_1	1	0	0	0	100,0
x_3	0	0	1	0	50,0
-z	-290	-170	110	-76	-982300

Most a feladat megoldása az árnyékárakat is mutatja. Hogyan értékelhetjük ezeket.

Az első feltételhez nem tartozik árnyékár, hiszen u_1 -et ki sem cseréltük a bázisból. A meglévő kapacitást sem tudtuk tehát kihasználni, így bővítésének számunkra - az adott feladat, illetve adott körülmények között - nincs jelentősége, vagyis a kapacitásbővítésnek számunkra nincs "értéke".

A második erőforrást kihasználtuk. Ha egy egységet megtakarítanánk, ezáltal 170 Ft-ot veszítenénk, illetve a kapacitás egységnyi bővítése 170 Ft jövedelem-emelkedést eredményezne. Hasonló a helyzet a harmadik erőforrásnál 76 Ft erejéig.

Az u_4 -hez - 290 árnyékár tartozik. Ha tehát a szerződést nem 100 ha-ra kötötték volna, hanem kevesebbre, akkor annyi-szor 290 Ft-tal csökkenne a jövedelmünk, ahány ha-val kevesebbre szólna a szerződésünk, illetve, ha a szerződött terület bővíthető, e bővítés ha-onként 290 Ft-tal emelhetné a vállalati jövedelmet.

Az u_5 -höz viszont pozitív árnyékár tartozik. Most tehát az előbbivel ellenkező hatást tapasztalunk, vagyis a szerződött terület csökkentése által növekedne, - s kiterjesztése által csökkenne a jövedelem ha-onként 110 Ft-tal.

A 6.3. - 6.5. pontban tárgyaltak tehát a degeneráció, a programvektor és a kapacitások egyidejű optimalizálása, a több célfüggvénnyel való számolás és az alternatív optimumok problémája - természetesen a módosított normál feladatra, sőt a következőkben tárgyalandó általános esetre és minimum feladatokra is érvényesek. A tanultak alapján könnyen belátható az is, hogy a módosított normál feladat és az általános eset is visszavezethető normál feladatra.

6.7. A maximálás általános esete

Az előbbi megoldást értékelve, tegyük fel, hogy a következőképpen okoskodunk: A két termék területére már leszerződünk. A harmadik növényre megkötött szerződés változtatására nincs lehetőségünk, mert a partner ragaszkodik a megkötött szerződéshez és felbontásához, vagy a terület csökkentéséhez nem járul hozzá, de a terület növelését sem akarja, bár ezt mi sem erőltetjük, hiszen a számítások szerint ez nem volna célszerű. Az a partner viszont, amellyel az első termékre szerződöttünk, szívesen kötne szerződést további területre is. /Vagy ha két takarmánynövényről van szó és feltesszük, hogy az elsőt eladásra is termelhetjük, tehát annak területét növelhetjük, hasonló helyzetben vagyunk./

Ennek az okoskodásnak az a következménye, hogy megkíséröljük a modellt úgy megoldani, hogy az első termékre nem egyenletet, hanem alsó korlátot / $\geq$ relációt/ adunk meg. Mivel ugyanis az előbbi megoldásnál az u_4 -hez tartozó árnyékár azt mutatta, hogy célszerű volna a korlát tágítása /vagyis nagyobb területen való termelés/, azt reméljük, hogy ezáltal erőforrásbővítés nélkül nagyobb jövedelmet érünk el. Sőt ragaszkodunk ahhoz is, hogy a területet teljes mértékben kihasználjuk, s az első termék területének kiterjesztésével reményünk van erre is.

Ennek alapján feladatunk a következő:

$$\begin{array}{rcll}
 x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \\
 x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & = & 1000 \\
 1,8x_1 + 4,4x_2 + & 4x_3 + & 2x_4 & & \leq & 2600 \\
 4x_1 + & 2x_2 + & 5x_3 + & 10x_4 & \leq & 6800 \\
 x_1 & & & & \geq & 100 \\
 & & x_3 & & = & 50 \\
 \hline
 900x_1 + 900x_2 + 950x_3 + 1100x_4 & = & \text{max.}
 \end{array}$$

Olyan maximumfeladattal állunk tehát szemben, amelyben a feltételek között mind $\leq$, mind $\geq$ relációjú egyenlőtlenségek, mind pedig egyenlet $=$ is található. Ez a maximálás általános esete. Mátrix alakban az általános eset tehát

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0}, & \underline{b}_1 &\geq \underline{0}, & \underline{b}_2 &\geq \underline{0}, & \underline{b}_3 &\geq \underline{0} \\ & & \underline{A}_1 \underline{x} &\leq & \underline{b}_1 \\ & & \underline{A}_2 \underline{x} &= & \underline{b}_2 \\ & & \underline{A}_3 \underline{x} &\geq & \underline{b}_3 \\ & & \underline{P}^T \underline{x} &= & \max. \end{aligned}$$

Az $\geq$ irányú egyenlőtlenséget többletváltozó bevezetésével egyenletté alakíthatjuk, s ezáltal módosított normálfeladatot kapunk, azaz feladatunk:

$$\begin{aligned} x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad v_1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1000 \\ 1,8x_1 + 4,4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 2600 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 &\leq 6800 \\ x_1 &- v_1 = 100 \\ x_3 &= 50 \end{aligned}$$

$$900x_1 + 900x_2 + 950x_3 + 1100x_4 = \max.$$

Most tehát a feladatot, mint módosított normál feladatot oldjuk meg, amit már ismerünk. Oldjuk meg tehát a feladatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	
u_1	1	1	1	1	0	1000
u_2	1,8	4,4	4	2	0	2600
u_3	4	2	5	10	0	6800
u_4	1	0	0	0	-1	100
u_5	0	0	1	0	0	50
$-z$	900	900	950	1100	0	0
z	2	1	2	1	-1	1150

	$\bar{x}u_4$	x_2	x_3	x_4	v_1	
u_1	-1	1	1	1	1	900
u_2	-1,8	4,4	4	2	1,8	2420
u_3	-4	2	5	10	4	6400
x_1	1	0	0	0	-1	100
$\bar{x}u_5$	0	0	1	0	0	50
$\bar{x}Z$	-900	900	950	1100	900	-90000
$\bar{x}Z$	-1	0	1	0	1	1050

	$\bar{x}u_4$	x_2	$\bar{x}u_5$	x_4	v_1	
$\bar{x}u_1$	-1	1	-1	1	1	850
u_2	-1,8	4,4	-4	2	1,8	2220
u_3	-4	2	-5	10	4	6150
x_1	1	0	0	0	-1	100
x_3	0	0	1	0	0	50
$\bar{x}Z$	-900	900	-950	1100	900	-137500
$\bar{x}Z$	-1	0	-1	0	1	850

	$\bar{x}u_4$	x_2	$\bar{x}u_5$	x_4	u_1	
v_1	-1	1	-1	1	1	850
u_2	0	2,6	-2,2	0,2	-1,8	690
u_3	0	-2	-1	6	-4	2750
x_1	0	1	1	1	1	950
x_3	0	0	1	0	0	50
$\bar{x}Z$	0	0	-50	200	-900	-902500
$\bar{x}Z$	0	-1	0	-1	-1	0

A másodlagos célfüggvényt elhagyjuk és folytatjuk a számítást az elsődleges célfüggvény szerint.

	x_4	x_2	x_5	x_3	x_1	
v_1	-1	1,33	-0,83	-0,17	1,67	391,67
u_2	0	<u>2,66</u>	-1,87	-0,34	-1,67	598,33
x_4	0	-0,33	-0,17	0,17	-0,67	458,33
x_1	0	1,33	1,17	-0,17	1,67	491,67
x_3	0	0	1	0	0	50
-z	0	66,67	-16,67	-33,33	-766,67	-994166,67

	x_4	x_2	x_5	x_3	x_1	
v_1	-1	-0,50	0,10	0	2,50	92,50
x_2	0	0,38	-0,70	-0,13	-0,63	224,94
x_4	0	0,12	0,40	0,13	-0,87	532,56
x_1	0	-0,50	2,10	0	2,50	192,50
x_3	0	0	1	0	0	50,00
-z	0	-25,06	30,20	-24,81	-724,8	-1009163,1

A megoldás tehát:

$$x_1 = 192,50$$

$$x_2 = 224,94$$

$$x_3 = 50,00$$

$$x_4 = 532,56$$

$$v_1 = 92,50$$

$$u = 0$$

$$z = 1\ 009\ 163,1$$

Most tehát minden erőforrást kihasználunk. /A területet is! / Az első termék termelését 92,5 ha-ral kell bővíteni, azaz az előbbi 100 ha helyett 192,5 ha-on kell termelni. /A v_1 a többletet mutatja. / Természetesen, ennek megfelelően a többi termék termelésének terjedelme is változik. A jövedelem 1009 163 Ft, vagyis az előbbihez képest 26 863 Ft-tal emelkedett. /Ez kerekítési hibáktól eltekintve, $290 \cdot 92,50 = 26\ 825$ -nek felel meg./

6.8. Minimumfeladatok

Az eddigiek során kizárólag olyan matematikai programozási feladatok megoldásával foglalkoztunk, amikor a cél-függvény maximumát kerestük. Már említettük azonban, hogy a gazdasági feladatok optimalizálásánál különböző hatékonysági mutatókat vizsgálhatunk, különböző cél-függvényekkel dolgozhatunk. Gyakran olyan feladatokat kell megoldanunk, amikor a cél-függvénynek nem a maximumát, hanem éppen hogy a minimumát keressük és azt a programot tekintjük optimálisnak, amelynél a cél-függvény minimumát kapjuk. Például célunk lehet olyan termelési program kidolgozása, amely minimális beruházást igényel, vagy amely minimális termelési költséget, vagy minimális importanyag felhasználást, stb. kíván. Később foglalkozni fogunk a takarmányadagok összeállításával. Ekkor az lesz a feladatunk, hogy minimális költségű takarmányadagot tervezzünk, vagy olyan takarmánytermelési szerkezetet tervezzünk meg, amely az adott állatállomány eltartását minimális területen, vagy minimális termelési költséggel teszi lehetővé.

A továbbiakban tehát minimumfeladatokkal fogunk foglalkozni. A minimumfeladatok megoldása - mint látni fogjuk - egyáltalán nem fog nehézséget jelenteni számunkra. A maximumfeladatok megoldására már megismert módszer ugyanis alkalmas minimumfeladat megoldására is, mivel minden minimumfeladat visszavezethető maximumfeladatra.

A középiskolai tanulmányokból is ismeretes, hogy egy függvény minimumhelye azonos ellentétjének maximumhelyével. Ábrázoljuk csak az

$$Y_1 = 5 + 3x + 0,5 x^2$$

másodfoku, majd az

$$Y_2 = -5 - 3x - 0,5 x^2$$

másodfoku függvényt.

Az Y_1 minimumhelye ($x_0 = -3$) és az Y_2 maximumhelye ($x_0 = -3$) egybeesik.

Az Y_1 függvény minimuma egybeesik az $Y_2 = -Y_1$ függvény maximumával, azaz

$$Y_{1\min} = 3\frac{1}{2}, \quad Y_{2\max} = -3\frac{1}{2},$$

azaz mivel

$$Y_2 = -Y_1, \text{ azért } -Y_{1\max} = 3\frac{1}{2}.$$

Hasonlóképpen a

$$z_1 = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

függvény minimuma ott van, ahol a

$$z_2 = -5x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

függvény maximuma található, azaz

$$\min f /x/$$

ott van, ahol

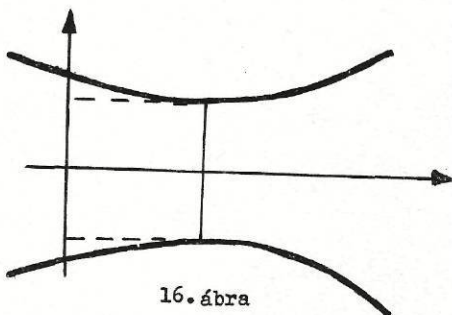
$$\max \left[-f /x/ \right]$$

található, továbbá

$$\min. f /x/ = \max \left[-f /x/ \right]$$

az alábbi ábra szerint:

$$\min f/x/ = f /x_0/$$



$$\max(-f/x/) = f /x_0/$$

16. ábra

Függvény minimuma és-l-szeresének maximuma

Az elmondottak alapján tehát az

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{b} \geq \underline{0}$$

$$\underline{A}_1 \underline{x} \leq \underline{b}_1$$

$$\underline{A}_2 \underline{x} = \underline{b}_2$$

$$\underline{A}_3 \underline{x} \geq \underline{b}_3$$

$$\underline{c}^T \underline{x} = \min.$$

feladat az

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} & \underline{b} &\geq \underline{0} \\ A_1 \underline{x} &\leq b_1 \\ A_2 \underline{x} &= b_2 \\ A_3 \underline{x} &\geq b_3 \\ -c^T \underline{x} &= \max. \end{aligned}$$

feladatra vezethető vissza. A minimum feladatot tehát a célfüggvény -1 -gyel történő beszorzásával maximumfeladattá alakítjuk át és éppen úgy végezzük a számításokat, mintha maximumfeladattal állnánk szembe.

Vegyük a következő feladatot:

$$\begin{array}{rcll} x_1, & x_2, & x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & & \geq 10 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 & & & \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 & & & \leq 7 \\ x_1 + & & x_3 & \leq 8 \\ \hline 10x_1 + 20x_2 + 16x_3 & & & = \text{minimum} \end{array}$$

Az első két feltételt v_1 és v_2 többletváltozók bevezetésével egyenletté alakítjuk, s ekkor a feladat:

$$\begin{array}{rcll} x_1, & x_2, & x_3, & v_1, & v_2 & \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - v_1 & & & = & 10 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - v_2 & & & = & 12 \\ x_1 + 2x_2 & & & \leq & 7 \\ x_1 + & & x_3 & \leq & 8 \\ \hline 10x_1 + 20x_2 + 16x_3 & & & = & \text{minimum}. \end{array}$$

Alakítsuk át a feladatot maximum feladattá úgy, hogy a célfüggvény mínusz egyszeresének maximumát keressük. /Tudjuk, hogy ez az eredeti célfüggvény minimalizálását jelenti/.

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, x_2, x_3, v_1, v_2 & \geq & 0 \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 - v_1 & = & 10 \\
 x_1 + 4x_2 + 2x_3 - v_2 & = & 12 \\
 x_1 + 2x_2 & \leq & 7 \\
 x_1 + x_3 & \leq & 8
 \end{array}$$

$$-10x_1 - 20x_2 - 16x_3 = \text{maximum!}$$

Oldjuk meg a feladatot és foglaljuk a szokásos táblázatba az eredményt.

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	b
x_{u1}	1	2	3	-1	0	10
x_{u2}	1	4	2	0	-1	12
u_3	1	2	0	0	0	7
u_4	1	0	1	0	0	8
$-z$	-10	-20	-16	0	0	0
x_z	2	6	5	-1	-1	22

	x_1	x_{u2}	x_3	v_1	v_2	b
x_{u1}	0,50		2	-1	0,50	4
x_2	0,25		0,5	0	-0,25	3
u_3	0,50		-1	0	0,50	1
u_4	1		1	0	0	8
$-z$	-5		-6	0	-5	60
x_z	0,5		2	-1	0,5	4

	x_1	x_{u2}	x_{u1}	v_1	v_2	b
x_3	0,250			-0,50	0,250	2
x_2	0,125			0,25	-0,375	2
u_3	0,750			-0,50	0,750	3
u_4	0,750			0,50	-0,250	6
$-z$	3,5			-3	-3,5	72
x_z	0			0	0	0

	x_1	$\bar{x}u_2$	$\bar{x}u_1$	v_1	v_2	
x_3	-0,33			0,4	0	1
x_2	-0,17			0,3	-0,5	1,5
x_1	1,33			-0,38	1	4
u_4	1			0,6	-1	3
-z	-4,66			-1,7	0	86

Vegyük észre a következőket.

- A számítások során a $-z$ értéke végig pozitív, szemben a maximum feladatnál tapasztalt negatív előjellel. Természetesen ennek megfelelően z értéke negatív. E szerint tehát az optimális megoldásban $z = -86$, azaz 86 egységnyi veszteségünk keletkezett, s ez egyben az elérhető legkisebb veszteség is.
- A harmadik táblázatban $\bar{x}z$ értéke nullára redukálódott. Innen kezdve a másodlagos célfüggvényt elhagytuk, s a számításokat az elsődleges célfüggvény szerint folytattuk.
- A legkevésbé veszteséges terméket 4 egységben termeljük $/x_1 = 4/$, ugyanakkor a második termékből /a legnagyobb veszteséget adóból/ többet termelünk $/x_2 = 1,5/$, mint a kevésbé veszteséges harmadik termékből $/x_3 = 1/$. Ennek oka, hogy a második termék nagyobb mértékben járul hozzá ahhoz, hogy a második feltételünket /legalább 12 egység teljesítése/ megvalósítsuk, mégpedig ennek végrehajtása okoz nagyobb nehézséget.

Lássunk most egy gyakorlati példát. Tegyük fel, hogy abrakkeveréket kívánunk optimalizálni tejtermeléshez. Három takarmány áll rendelkezésünkre amelyek beltartalmi értékei és árai a következők:

		Kukorica dara	Extr.napra. forgó	Buza dara
szárazanyag	g /kg	912	908	909
nettó energia				
laktációra	MJ/kg	7,84	6,27	7,55
nyers fehérje	g /kg	91,20	364,11	136,35
ár	Ft/kg	3,96	7,4	3,71

Egy kilogramm tej előállításához szükség van 3,1 Mega-joule /MJ/ nettó energiára és 87 g fehérjére.

Legyen még követelményünk, hogy az 1 kg tej termeléséhez adandó abrakban legalább 0,15 kg kukoricadara legyen és az extrahált napraforgódara és a buza dara mennyisége nem lehet több 0,15 kg-nál.

E szerint modellünk:

$$\begin{array}{rcll}
 x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & \\
 7,84 x_1 + 6,27 x_2 + 7,55 x_3 & \geq & 3,1 & \\
 91,20 x_1 + 364,11 x_2 + 136,35 x_3 & \geq & 87,0 & \\
 x_1 & \leq & 0,15 & \\
 & x_2 & \leq & 0,15 \\
 & & x_3 & \leq 0,15 \\
 \hline
 3,96 x_1 + 7,4 x_2 + 3,71 x_3 & = & \min! &
 \end{array}$$

ahol

x_1 a kukoricadara
 x_2 az extrahált napraforgó
 x_3 a buza dara adagba keverendő, -egyenlőre ismeretlen-mennyiségei.

A modell megoldása a következő takarmánykeverékhez vezet:

kukoricadara 0,15 kg
 extr. napraforgó 0,15 kg
 buzadara 0,14 kg

A keverék ára 2,21 Ft

Ez az adag 400 g szárazanyagot, 3,15 MJ nettó energiát és 87 g nyers fehérjét tartalmaz.

6.9. Néhány megjegyzés a lineáris programozás alapeseteihez

A továbbiakban röviden foglaljuk össze a lineáris programozási feladatok alapeseteit és a feladatok megoldásával kapcsolatos néhány tudnivaló.

Láttuk, hogy az

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0}, & \underline{b} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{P}^T \underline{x} &= \max. \end{aligned}$$

feladatot, tehát amikor a feltételi egyenletek mindegyike kisebb egyenlő alakban van megfogalmazva és a célfüggvény maximumát keressük normál feladatnak nevezzük.

Amennyiben egy maximum feladatban a feltételeket nagyobb egyenlő formában íránk elő, a feladatot nem tudnánk megoldani. Ilyen esetben ugyanis azt íránk elő, hogy legalább b mennyiségű erőforrást fel kell használni, de bármennyit felhasználhatunk és keressük a célfüggvény /mondjuk a vállalati jövedelem/ maximumát. Nyilvánvaló, hogy jövedelmező termelési tevékenységek esetén akkor kapjuk a legnagyobb jövedelmet, ha a termelést a végtelenbe kiterjesztjük. Ekkor a jövedelmünk is végtelen nagy lesz. A feladatnak tehát nincs felső korlátja /nem korlátozott feladat/ így nincs is megoldása.

Az

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0}, & \underline{b} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\geq \underline{b} \\ \underline{P}^T \underline{x} &= \max. \end{aligned}$$

feladat tehát nemkorlátos.

Amennyiben azonban a célfüggvény-koefficiensek mind negatív előjelűek, a feladat olyan, mintha minimum feladat volna, azaz ha $c_j = -p_j$ minden esetben fennáll, akkor az

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\geq \underline{b} \\ (-\underline{P}^T) \underline{x} &= \max. \end{aligned}$$

feladat egyenlo az

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\geq \underline{b} \\ \underline{c}^T \underline{x} &= \min. \end{aligned}$$

feladattal, s az ilyen feladatnak van /ha van/ optimális megoldása.

Forditsuk meg csak a relációkat és legyen feladatunk az

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{c}^T \underline{x} &= \min. \end{aligned}$$

feladat. Optimális megoldásként a zérusvektort kapjuk. Természetes ugyanis, hogy a célfüggvény akkor lesz minimális /0/ ha nem csinálunk semmit, vagyis ha $\underline{x} = \underline{0}$.

Amennyiben a feltételek között mindhárom relációt megtaláljuk akkor mind a maximum, mind a minimum feladatnak lehetséges optimális megoldása.

6.10. Dualitás

Az eddigiekben láttuk, hogy a lineáris programozási feladatok megoldása során az árnyékárak a termelési erőforrások bizonyos gazdasági felértékelését teszik lehetővé. Láttuk azt is, hogy az árnyékáraknak milyen nagy jelentőségük van a gazdasági értékelés során, segítségükkel az erőforrásokat - az adott feltételek között - felértékelhetjük, s dönthetünk arról, melyik erőforráskapacitás bővítése a hatékonyabb.

Láttuk, hogy az

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} & \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{p}^T \underline{x} &= \max. \end{aligned}$$

normál feladat az ugynevezett hiányváltozók /segédváltozók/ bevezetésével az

$$\begin{aligned} \underline{u} + \underline{A} \underline{x} &= \underline{b} & \underline{x} &\geq \underline{0} & \underline{u} &\geq \underline{0} \\ \underline{p}^T \underline{x} &= \max. \end{aligned}$$

formában is felírható, ahol az $\underline{u}$ vektor komponensei a duális változók, míg az $\underline{x}$ vektor komponensei a primál változók.

Minden lineáris programozási feladathoz megadható egy vele szoros kapcsolatban lévő másik lineáris programozási feladat is, amelyet az eredeti /ugynevezett primál/ feladat duáljának /duális feladatnak/ nevezzük. A duál feladat változói éppen az $\underline{u}$ vektor komponensei, azaz a duális változók.

Az

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b} \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{p}^T \underline{x} = \max.$$

primális feladathoz tehát az

$$\underline{A}^T \underline{u} \geq \underline{p}$$

$$\underline{b}^T \underline{u} = \min.$$

duális feladat tartozik.

A dualitás könnyebb megértése céljából induljunk ki egy leegyszerűsített gyakorlati feladatból. Tegyük fel, hogy egy vállalat háromféle anyag felhasználásával háromféle terméket állít elő. Az első anyagból 70, a másodikból 55, a harmadikból 60 egység áll rendelkezésre. A fajlagos anyagszükséglet és a fajlagos jövedelem ismeretében felírhatunk egy lineáris programozási modellt, feladatul tűzve ki olyan termelési szerkezet meghatározását, amely a legnagyobb jövedelmet biztosítja és egyik anyagból sem igényel többet, mint a rendelkezésre álló kapacitás. Legyen modellünk a következő:

$$\begin{array}{rcll} x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 70 & \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 55 & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 60 & \\ \hline 70x_1 + 80x_2 + 50x_3 & = & \max! & \end{array}$$

Mint látjuk, a feladat induló táblája szimbólikusan a

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
	$\underline{p}^T$	

formában is felírható. Oldjuk meg a feladatot.

	x_1	x_2	x_3	
u_1	1	2	2	70
u_2	3	1	1	55
u_3	1	2	1	60
-z	70	<u>80</u>	50	0

	x_1	u_3	x_3	
u_1	0	-1	1	10
u_2	2,5	-0,5	0,5	25
x_2	0,5	0,5	0,5	30
-z	<u>30</u>	-40	10	-2400

	u_2	u_3	x_3	
u_1	0	-1	1	10
x_1	0,4	-0,2	0,2	10
x_2	-0,2	0,6	0,4	25
-z	-12	-36	4	-2700

	u_2	u_3	u_1	
x_3	0	-1	1	10
x_1	0,4	0	-0,2	8
x_2	-0,2	1	-0,4	21
-z	-12	-32	-4	-2740

A megoldás tehát:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \underline{0}, \quad z = 2 \ 740$$

Az előbb megoldott feladatot primál feladatnak nevezzük. Ezután azonban fogalmazzuk meg a feladat duálját, azaz a duál feladatot. Ez a következő:

$$\begin{array}{rclcl} u_1, & u_2, & u_3 & \geq & 0 \\ u_1 & + & 3u_2 & + & u_3 & \geq & 70 \\ 2u_1 & + & u_2 & + & 2u_3 & \geq & 80 \\ 2u_1 & + & u_2 & + & u_3 & \geq & 50 \end{array}$$

$$70u_1 + 55u_2 + 60u_3 = \min!$$

amelyhez szimbolikusan felírva a

	$\underline{u}^T$	
$\underline{x}$	$\underline{A}^T$	$\underline{p}$
	$\underline{b}^T$	0

induló tábla tartozik. Mint látjuk, a feladatban az oszlopok és a sorok szerepét felcseréltük, a $<$ relációk helyett $\geq$ relációkat írtunk és a célfüggvényt maximálás helyett minimáljuk.

Oldjuk meg a feladatot

	u_1	u_2	u_3	
x_1	1	3	1	70
x_2	2	1	2	80
x_3	2	1	1	50
$-z$	-70	-55	-60	0

	u_1	u_2	x_2	
x_1	0	2,5	-0,5	30
u_3	1	0,5	0,5	40
x_3	1	0,5	-0,5	10
-z	-10	-25	30	2400

	u_1	x_1	x_2	
u_2	0	0,4	-0,2	12
u_3	1	-0,2	0,6	36
x_3	1	-0,2	-0,4	4
-z	-10	10	25	2700

	x_3	x_1	x_2	
u_2	0	0,4	-0,2	12
u_3	-1	0	1,0	32
u_1	1	-0,2	-0,4	4
-z	10	8	21	2740

A megoldás tehát

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 32 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \underline{0}, \quad z = 2\,740$$

Hasonlítsuk össze a két feladatot és azok megoldását:

Primál feladat

$$\begin{aligned}
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
 x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 70 \\
 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 55 \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 60 \\
 70x_1 + 80x_2 + 50x_3 &= \max!
 \end{aligned}$$

Duális feladat

$$\begin{aligned}
 u_1, u_2, u_3 &\geq 0 \\
 u_1 + 3u_2 + u_3 &\geq 70 \\
 2u_1 + u_2 + 2u_3 &\geq 80 \\
 2u_1 + u_2 + u_3 &\geq 50 \\
 70u_1 + 55u_2 + 60u_3 &= \min!
 \end{aligned}$$

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
	$\underline{p}^T$	0

	$\underline{u}^T$	
$\underline{x}$	$\underline{A}^T$	$\underline{p}$
	$\underline{b}^T$	0

	x_1	x_2	x_3	
u_1	1	2	2	70
u_2	3	1	1	55
u_3	1	2	1	60
$-z$	70	80	50	0

	u_1	u_2	u_3	
x_1	1	3	1	70
x_2	2	1	2	80
x_3	2	1	1	50
$-z$	-70	-55	-60	0

	x_1	u_3	x_3	
u_1	0	-1	1	10
u_2	2,5	-0,5	0,5	25
x_2	0,5	0,5	0,5	30
$-z$	30	-40	10	-2400

	u_1	u_2	x_2	
x_1	0	2,5	-0,5	30
u_3	1	0,5	0,5	40
x_3	1	0,5	-0,5	10
$-z$	-10	-25	30	2400

	u_2	u_3	x_3	
u_1	0	-1	1	10
x_1	0,4	-0,2	0,2	10
x_2	-0,2	0,6	0,4	25
$-z$	-12	-36	4	-2700

	u_1	x_1	x_2	
u_2	0	0,4	-0,2	12
u_3	1	-0,2	0,6	36
x_3	1	-0,2	-0,4	4
$-z$	-10	10	25	2700

	u_2	u_3	u_1	
x_3	0	-1	1	10
x_1	0,4	0	-0,2	8
x_2	-0,2	1	-0,4	21
-z	-12	-32	-4	-2740

	x_3	x_1	x_2	
u_2	0	0,4	-0,2	12
u_3	-1	0	1	32
u_1	1	-0,2	-0,4	4
-z	10	8	21	2740

A két optimális tábla összehasonlításából könnyen észrevehetjük, hogy ha a primál feladatot megoldottuk, ennek optimális táblázatából a duális megoldás, illetve a duális feladat optimális táblázatából a primál feladat megoldása leolvasható. Mindössze a sorok és oszlopok szerepét kell felcserélni és közben a primál feladat optimális táblázatának utolsó sorát, illetve a duális feladat optimális táblázatának utolsó oszlopát -1-gyel beszorozni. Az optimális megoldás tehát:

a primál feladatnál

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$z = 2740$$

a duál feladatnál

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$z = -2740$$

A célfüggvény értéke tehát a két feladatban azonos, /előjele különböző/ azaz

$$\underline{p}^T \underline{x} \text{ opt.} = \underline{b}^T \underline{u} \text{ opt.} = 2 \quad 740$$

A primál feladatban a célfüggvény maximumát kerestük, míg a duál feladatban minimumát. Ez általában is igaz, azaz ha a primál feladat maximumfeladat, akkor a duál feladat minimumfeladat, és fordítva, ha a primál feladat minimumfeladat, akkor a hozzá tartozó duál feladat maximumfeladat. A dualitás tehát szimmetrikus fogalom.

E szerint tehát a maximumfeladat duálja minimumfeladat és fordítva:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Primál feladat} \\ \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{p}^T \underline{x} = \max. \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Duál feladat} \\ \underline{A}^T \underline{u} \geq \underline{p} \\ \underline{b}^T \underline{u} = \min. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A} \underline{x} \geq \underline{b} \\ \underline{p}^T \underline{x} = \min. \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \underline{A}^T \underline{v} \leq \underline{p} \\ \underline{b}^T \underline{v} = \max. \end{array}$$

Ebből könnyen észrevehetjük, hogy előbbi esetben a hiányváltozók u , utóbbi esetben a többletváltozók v a duális változók. Ha a feladatban egyenletek is szerepelnek, akkor vagy két egyenlőtlenséggel felírva a feltételt, nyerjük a megfelelő duális változókat, vagy pedig megtartjuk az egyenletet, de a hozzá tartozó duálváltozót csillaggal jelöljük /mesterséges hiányváltozó/, amelyet a duális feladatban kötelező a bázisba bevonni. Az ilyen csillagos /mesterséges hiányváltozó/ hiányváltozókra nem kötjük ki a nemnegativitást.

A duális feladat duálja maga a primál feladat. E szerint minden feladat duáljának duálja.

A lineáris programozási feladatok duális /kettős/ természete, mint láttuk, jól hasznosítható a gyakorlatban. Ezt mondja ki a dualitás tétel: Ha a primál és duál feladatok közül valamelyiknek van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor a másiknak is van megengedett megoldása és véges optimuma, és a két feladat optimális célfüggvényértéke egyenlő. A tétel bizonyításától eltekintünk.

A duális megoldást, mint ismeretes, árnyékárnak is nevezzük, mert mintegy felértékeljük az erőforrásokat. Ugy is értelmezhetjük a duális feladatot, hogy minden termelési folyamat a termelés duális oldalaként egy értékelési folyamatot hoz létre, mintegy felértékelődnek a termelési források. Feltehetjük a kérdést, hogy az előbbi vállalat számára mennyit érnek a különböző anyagok. Nyilván annyit, amennyivel segítségével képesek vagyunk emelni a vállalati jövedelmet. Legfeljebb ennyit hajlandó a vállalat fizetni ezen anyagokért, hiszen ha azok ennél többbe kerülnének, már veszteséges volna felhasználásuk.

6.11. Duál szimplex módszer

Induljunk ki az

$$\begin{array}{rcl} x_1, & x_2 & \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 & \leq & 16 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & \leq & 6 \\ & x_2 & \leq 4 \\ \hline 8x_1 + 4x_2 & = & \min. \end{array}$$

minimumfeladatból.

Ennek megoldása /a tanultak alapján könnyen ellenőrizhetjük/

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$z = 40$$

A feladat duálja

$$\begin{array}{rcll} v_1, & v_2, & v_3, & v_4 & \geq 0 \\ 4v_1 + 2v_2 + 2v_3 & & & & \leq 8 \\ v_1 + v_2 + v_4 & & & & \leq 4 \\ \hline 16v_1 + 10v_2 + 6v_3 + 4v_4 & = & \max. & & \end{array}$$

Oldjuk meg a duális feladatot:

	v_1	v_2	v_3	v_4	
x_1	4	2	2	0	8
x_2	1	1	0	1	4
$-z$	16	10	6	4	0
	x_1	v_2	v_3	v_4	
v_1	0,25	0,5	0,5	0	2
v_2	-0,25	0,5	-0,5	1	2
$-z$	-4	2	-2	4	-32
	x_1	x_2	v_3	v_4	
v_1	0,5	-1	1	-1	0
v_2	-0,5	2	-1	2	4
$-z$	-3	-4	0	0	-40

A megoldás tehát

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z = 40$$

Most azonban a v_3 és v_4 oszlopokban az utolsó sorban 0 van, tehát a számítást folytathatjuk azok bevonásával. Ha a v_3 -at vonjuk be a bázisba, generáló elemként az első elemet választhatjuk, a hányados így 0, vagyis a megoldás nem változik. Eltérő megoldáshoz jutunk azonban, ha v_4 -et vonjuk be a bázisba, amikor is a következő táblázathoz jutunk:

	x_1	x_2	v_3	v_4	
v_1	0,25	0	0,5	0,5	2
v_4	-0,25	1	-0,5	0,5	2
π_z	-3	-4	0	0	-40

Most tehát a megoldás

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = 40$$

A duál feladatnak tehát két optimális megoldása van. A primál feladatnak csak egyféle megoldása van. Ez abból is kitűnik, hogy a duál feladat két optimális táblázatában a primálváltozókhoz ugyanakkora értékek tartoznak.

A feladatot tehát megoldhatjuk primál feladatként és megoldhatjuk duálpárjának megoldásával. A továbbiakban egy újabb lehetőséggel, a duál szimplex módszerrel ismerkedünk meg.

Az

$$\begin{array}{rcll}
 x_1, & x_2 & \geq & 0 \\
 4x_1 + & x_2 & \geq & 16 \\
 2x_1 + & x_2 & \geq & 10 \\
 2x_1 & & \geq & 6 \\
 & x_2 & \geq & 4 \\
 \hline
 8x_1 + & 4x_2 & = & \text{min.}
 \end{array}$$

feladatot normál feladattá alakíthatjuk. Ekkor a következőket nyerjük:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, & x_2 & \geq 0 \\
 -4x_1 - & x_2 & \leq -16 \\
 -2x_1 - & x_2 & \leq -10 \\
 -2x_1 & & \leq -6 \\
 & -x_2 & \leq -4 \\
 \hline
 -8x_1 - & 4x_2 & = \max.
 \end{array}$$

Most tehát normál feladattal állunk szemben. Ezt a feladatot most úgy oldjuk meg, hogy a generáló elemet nem egy oszlopvektorban keressük a

$$\min \left(\frac{b_j}{a_{ij}} \right), \quad a_{ij} \geq 0$$

hanem egy sorvektorban a

$$\min \left(\frac{-c_j}{a_{ij}} \right), \quad a_{ij} < 0$$

alapján. Generáló elem tehát most csak negatív elem lehet. A számítások egyébként megegyeznek az eddig tanultakkal. Oldjuk meg tehát a feladatot:

	x_1	x_2	
v_1	-4	-1	-16
v_2	-2	-1	-10
v_3	-2	0	-6
v_4	0	-1	-4
-z	-8	-4	0

A -b oszlopban most kikeressük a legkisebb elemet. Ez történetesen a -16. Most ebben a sorban lévő elemekkel /-4, -1/ képezzük a -c_j elemeivel a következő hányadosokat:

$$\frac{-8}{-4} = 2, \quad \frac{-4}{-1} = 4$$

Azt az osztót választjuk generáló elemnek, amelynél a legkisebb hányadost kaptuk /-4-et/. Elvégezzük a báziscserét a primál szimplex módszernél tanultak alapján és a következő táblázatot kapjuk:

	v_1	x_2	
x_1	-0,25	0,25	4
v_2	-0,5	-0,5	-2
v_3	-0,5	0,5	2
v_4	0	-1	-4
-z	-2	-2	32

Folytatjuk a számítást az előbbiek szerint és a következő táblázathoz jutunk:

	v_1	v_4	
x_1	-0,25	0,25	3
v_2	-0,5	-0,5	0
v_3	-0,5	0,5	0
x_2	0	-1	4
-z	-2	-2	40

Megoldottuk tehát a feladatot.

A primál feladat megoldása:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad z = 40$$

A duál feladat egyik optimális megoldása

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = 40$$

Mivel a $\underline{b}$ vektorban a v_2 és v_3 -hoz nulla tartozik, a számítás folytatható és megkapjuk a duális feladat másik optimális megoldását, mint azt már láttuk.

Természetesen, ha a duál feladatnak több alternatív megoldása van, akkor ezek konvex lineáris kombinációi adják az összes megoldást, azaz

$$k_1 \underline{u} \text{ opt}_1 + k_2 \underline{u} \text{ opt}_2 + \dots + k_n \underline{u} \text{ opt}_n$$

ahol

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1 \text{ és } k_i \geq 0 \quad /i = 1, 2, \dots, n/$$

Megjegyezzük, hogy a duál szimplex módszernél is találkozhatunk degenerációval, vagy lehetséges, hogy a feladat nem oldható meg, azaz ugyanazon problémákkal találkozhatunk, mint a primál szimplex módszerrel kapcsolatban tanultuk.

6.12. Módosított szimplex módszer

Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\begin{array}{rcll} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & & & & & \leq & 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + & & & & 2x_5 + x_6 & & \leq & 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + & & & x_4 & & & \leq & 16 \\ \hline 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 & & & & & & = & \max. \end{array}$$

Oldjuk meg primál szimplex módszerrel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
u_1	1	1	1	1	1	1	9
u_2	2	4	2	0	2	1	18
u_3	4	2	0	1	0	0	16
$-z$	10	12	5	5	6	2	0

	x_1	u_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
u_1	0,5	-0,25	0,5	1	0,5	0,75	4,5
x_2	0,5	0,25	0,5	0	0,5	0,25	4,5
u_3	3	-0,5	-1	1	-1	-0,5	7
-z	4	-3	-1	5	0	-1	-54

	x_1	u_2	x_3	u_1	x_5	x_6	
x_4	0,5	-0,25	0,5	1	0,5	0,75	4,5
x_2	0,5	0,25	0,5	0	0,5	0,25	4,5
u_3	2,5	-0,25	-1,5	-1	-1,5	-1,25	2,5
-z	1,5	-1,75	-3,5	-5	-2,5	-4,75	-76,5

	u_3	u_2	x_3	u_1	x_5	x_6	
x_4	-0,2	-0,2	0,8	1,2	0,8	1	4
x_2	-0,2	0,3	0,8	0,2	0,8	0,5	4
x_1	0,4	-0,1	-0,6	-0,4	-0,6	-0,5	1
-z	-0,6	-1,6	-2,6	-4,4	-1,6	-4,0	-78

Bár viszonylag nagyon egyszerű feladatot oldottunk meg, mégis elég sokat kellett számolnunk. Könnyen észrevesszük azt is, hogy sok fölösleges számolást végeztünk, hiszen a bázisba csak a változók felét vonhattuk be. Ha előre tudtuk volna, hogy az x_3 , x_5 és x_6 változók nem vonhatók be a bázisba, azok oszlopaiban nem végeztük volna el a számításokat, hiszen e számításokra nincs szükségünk. Csakhogy ez - különösen nagyobb, bonyolultabb feladatoknál - nem látható előre.

Azt tudjuk, hogy a bázisba legfeljebb annyi változó vonható be, ahány sor van a feladatban és a többi változóhoz tartozó oszlopban felesleges számításokat végeztünk minden lépésben. Felmerül a kérdés, hogyan lehetne a felesleges számításokat elkerülni? Erre a módosított szimplex módszer alkalmazása nyújt lehetőséget.

Az előbbi feladat a hiányváltozók bevezetésével a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u_1, u_2, u_3 & \geq & 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + u_1 & = & 9 \\
 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 + x_6 + u_2 & = & 18 \\
 4x_1 + 2x_2 + x_4 + u_3 & = & 16 \\
 \hline
 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 0u_1 + 0u_3 & = & \max.
 \end{array}$$

Írjuk fel ennek alapján az induló szimplex táblázatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
u_1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	9
u_2	2	4	2	0	2	1	0	1	0	18
u_3	4	2	0	1	0	0	0	0	1	16
-z	10	12	5	5	6	2	0	0	0	0

Az induló tábla szimbólikusan felírható a következők szerint:

	$\underline{x}^T$	$\underline{u}^T$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{E}$	$\underline{b}$
	$\underline{p}^T$	$\underline{0}^T$	

Hajtsuk most végre az adott példa feladaton az első báziscserét, azaz végezzük el az x_2 és az u_2 cseréjét, de úgy, hogy csak az $\underline{E}$ -nek az új bázisra vonatkozó koordinátáit számítsuk ki.

Közben az oszlopszimbólumokat meghagyhatjuk, csak a sorok szimbólumait alakítjuk úgy át, hogy jelöljük az x_2 -nek a bázisba történt bevonását. A következő táblázatot kapjuk:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3
u_1							1	-0,25	0
x_2							0	0,25	0
u_3							0	-0,5	1
$-z$									

Az E -nek az új bázisra vonatkozó koordinátáit igen egyszerű volt kiszámítani, hiszen mindössze egy oszlopot kellett változtatnunk.

Jelöljük most a kapott mátrixot

$$\underline{D}_1^{-1} \quad \text{szimbólummal.}$$

Az előbb általánosan felírt

$$\underline{L}_0 = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{E} & \underline{b} \\ \underline{p}^T & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix vektorrendszerének bázisa

$$\underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ha az első bázistranszformáció esetén a

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} \underline{D}_1 & \underline{0} \\ \underline{d}_1^T & 1 \end{bmatrix}$$

bázishoz jutunk /ahol $\underline{d}_1^T$ -t úgy kapjuk, hogy az $\underline{u}^T$ transzformált oszlopában a $\underline{p}^T$ -beli elemet beiktatjuk, vagyis a példafeladatban x_2 és az u_2 cseréje esetén az u_2 -höz tartozó célfüggvény koefficiens 12 lesz, vagyis a $\underline{D}_1$ -hez $\underline{0}^T = [0, 0, 0]$ helyett a $\underline{d}_1^T = [0, 12, 0]$ célfüggvényt tartozik/, akkor az $\underline{L}_0$ oszlopvektorainak az új bázisra vonatkozó koordinátáit az

$$L_1 = B_1^{-1} L_0$$

adja. A B_1^{-1} -et a B_1 invertálásával nyerjük:

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D}_1^{-1} & \underline{0} \\ -\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

tehát:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \underline{D}_1^{-1} & \underline{0} \\ -\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{E} & \underline{b} \\ \underline{p}^T & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{D}_1^{-1} \underline{A} & \underline{D}_1^{-1} \underline{D} & \underline{D}_1^{-1} \underline{b} \\ \underline{p}^T - (\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1}) \underline{A} & -(\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1}) \underline{D} & -(\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} \underline{b}) \end{bmatrix}$$

Ha tehát a $\underline{D}_1^{-1}$ -et és a $\underline{d}_1^T$ -et meghatározzuk, megkapjuk a második szimplex tábla valamennyi vektorának koordinátáit az új bázisra vonatkozólag.

Példafeladatunkban

$$\underline{D}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\underline{d}_1^T = [0, \quad 12, \quad 0]$$

Végezzük el az L_1 -hez szükséges számításokat:

$$\begin{aligned} \underline{D}_1^{-1} \underline{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,75 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ellenőrizhetjük az előbbi számítás második táblája alapján, hogy ugyanazon eredményhez jutottunk. /Ha a feladatot $\underline{E}$ mátrixszal bővítettük volna, az x_2 oszlopában, mint tudjuk $[0, 1, 0]^T$ -t kapunk, az u_2 oszlop pedig az $\underline{E}$ második oszlopába kerül./

A $\underline{D}_1^{-1}$ ismert.

$$\underline{D}_1^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}^T - (\underline{a}_1^T \underline{D}_1^{-1}) \underline{A} = [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [0, 12, 0] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [0, 3, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [6, 12, 6, 0, 6, 3] =$$

$$= [4, 0, -1, 5, 0, -1]$$

$\underline{a}_1^T \underline{D}_1^{-1}$ értékét az előbb már ki kellett számolnunk, azaz

$$\underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0, & 12, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 3, & 0 \end{bmatrix}$$

s végül

$$\begin{aligned} - \underline{d}_1^T \underline{D}_1^{-1} \underline{b} &= \begin{bmatrix} 0, & -12, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0, & -3, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = -54 \end{aligned}$$

Az adatokat táblázatba foglalva tehát a következőkben kapjuk az új táblázatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
u_1	0,5	0	0,5	1	0,5	0,75	1	-0,25	0	4,5
u_2	0,5	1	0,5	0	0,5	0,25	0	0,25	0	4,5
x_2	3	0	-1	1	-1	-0,5	0	0,5	1	7
-z	4	0	-1	5	0	-1	0	-3	0	-54

Most az x_4 oszlopából választunk generáló elemet, a szokásos módon.

Ha így folytatnánk, nem nyernénk semmit, hiszen most is minden oszlop adatait kiszámoltuk. Ezt elkerülvén, a következőképpen járunk el:

Az előbbi számításokból nem végezzük el a $\underline{D}_1^{-1} \underline{A}$ kiszámítását. Ekkor a következő táblázathoz jutunk:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
u_1							1	-0,25	0	4,5
u_2							0	0,25	0	4,5
x_2							0	0,5	1	7
-z	4	0	-1	5	0	-1	0	-3	0	-54

A táblázatból eldönthető, hogy most az x_4 oszlopában kell generáló elemet választani. Elegendő tehát csak az x_4 oszlopát kiszámítani ahhoz, hogy generáló elemet választhassunk. Az x_4 oszlopához tartozó elemeket a

$$\underline{D}_1^{-1} \underline{a}_4$$

formula alapján kapjuk meg, azaz

$$\underline{D}_1^{-1} \underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Most tehát ezt az oszlopot a táblázatba beírva, a következőket kapjuk:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
u_1				1			1	-0,25	0	4,5
u_2				0			0	0,25	0	4,5
x_2				1			0	0,5	1	7
-z	4	0	-1	5	0	-1	0	-3	0	-54

Most a szokásos módon kiválasztjuk a generáló elemet. Ennek segítségével újra elvégezzük a transzformációt és kapjuk, hogy

$$\underline{L}_2 = \begin{bmatrix} \underline{D}_2^{-1} \underline{A} & \underline{D}_2^{-1} & \underline{D}_2^{-1} \underline{b} \\ \underline{p}^T - \left(\underline{a}_2^T \underline{D}_2^{-1} \right) \underline{A} & - \left(\underline{a}_2^T \underline{D}_2^{-1} \right) & - \left(\underline{a}_2^T \underline{D}_2^{-1} \underline{b} \right) \end{bmatrix}$$

tehát kiszámítjuk $\underline{D}_2^{-1}$ -et

	x_3	u_1	u_2	u_3
	1	1	-0,25	0
	0	0	0,25	0
	1	0	-0,5	1
	x_3	u_1	u_2	u_3
		1	-0,25	0
		0	0,25	0
		-1	-0,25	1

azaz

$$\underline{D}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

Most aztán

$$\underline{D}_2^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

Mivel

$$\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} = [5, 12, 0] \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} = [5, 1,75, 0]$$

így

$$-\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} = [-5, -1,75, 0]$$

és

$$\begin{aligned} -(\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1} \underline{b}) &= -\left([5, 12, 0] \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix}\right) = \\ &= -[5, 1,75, 0] \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = -76,5 \end{aligned}$$

s végül:

$$\underline{p}^T - (\underline{d}_2^T \underline{D}_2^{-1}) \underline{A} = [10, 12, 5, 5, 6, 2] -$$

$$\begin{aligned} &- [5, 1,75, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [8,5, 12, 8,5, 5, 8,5, 6,75] = \\ &= [1,5, 0, -3,5, 0, -2,5, -4,75] \end{aligned}$$

Ebből máris eldönthetjük, hogy a következő lépéshez az első oszlopban kell generáló elemet választani, hiszen itt találjuk a célfüggvény sorában a legnagyobb pozitív számot /itt más pozitív célfüggvénykoefficiens már nincs is/.

Ki kell tehát számítanunk az első oszlophoz tartozó adatokat, azaz

$$\underline{D}_2^{-1} \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -1 & -0,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

Most már megszerkeszthetjük az előbb kiszámított adatokból az új táblázatot, azaz

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4	0,5						1	-0,25	0	4,5
x_2	0,5						0	0,25	0	4,5
u_3	2,5						-1	-0,25	1	2,5
-z	1,5	0	-3,5	0	-2,5	-4,75	-5	-1,75	0	-76,5

Az x_1 oszlopában generáló elemet választunk, 2,5-et és folytatjuk a számításokat.

Számítsuk ki tehát először $\underline{D}_3^{-1}$ -et

u_1	u_2	u_3
1,2	-0,2	-0,2
0,2	0,3	-0,2
-0,4	-0,1	0,4

A $\underline{d}_3^T = [5, 12, 10]$

és mint az előzőekből következtethető

$$\underline{L}_3 = \begin{bmatrix} \underline{D}_3^{-1} \underline{A} & \underline{D}_3^{-1} & \underline{D}_3^{-1} \underline{b} \\ \underline{p}^T - \left(\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{A} & - \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} & - \left(\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \underline{b} \right) \end{bmatrix}$$

A

$$\begin{aligned} \underline{p}^T - \left(\underline{a}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{A} &= \begin{bmatrix} 10, & 12, & 5, & 5, & 6, & 2 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5, & 12, & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ 0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10, & 12, & 5, & 5, & 6, & 2 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} 4,4, & 1,6, & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} 10, & 12, & 5, & 5, & 6, & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10, & 12, & 7,6, & 5, & 7,6, & 6 \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -2,6, & 0, & -1,6, & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

már mutatja, hogy a következő táblázatot célfüggvény sorában már nem találunk pozitív elemet, tehát optimális táblázathoz jutottunk.

Az optimális táblázathoz tartozó koordináták most

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a célfüggvényérték

$$-\left(\underline{a}_3^T \underline{D}_3^{-1} \underline{b} \right) = \begin{bmatrix} 4,4, & 1,6, & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = -78$$

Mivel optimális táblázathoz jutottunk, a táblázat további részének kiszámítása szükségtelen, bár célszerű az árnyékarak meghatározása is, azaz

$$-\underline{a}_3^T \underline{D}_3^{-1}$$

amit azonban már ismerünk az előbbiből, mindössze előjelet kell változtatni, azaz

$$- \underline{a}_3^T \underline{D}_3^{-1} = \begin{bmatrix} -4,4, & -1,6, & 0,6 \end{bmatrix}$$

A feladatot tehát megoldottuk, az optimális tábla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4										4
x_2										4
x_1										1
-z	0	0	-2,6	0	1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-78

vagyis az optimális megoldás

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1, & 4, & 0, & 4, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = 78$$

A módosított szimplex módszer alkalmazásának akkor van nagyobb jelentősége, ha az oszlopok száma több, mint a sorok száma. Ilyenkor lényegesen kevesebb számolás szükséges a feladat megoldásához.

6.13. Speciális problémák

A módosított szimplex módszer alkalmazása során a $\underline{D}_1^{-1}$, $\underline{D}_2^{-1}$, ..., $\underline{D}_s^{-1}$ mátrixokat határoztuk meg és segítségükkel a

$$\underline{D}_1^{-1} \underline{b}, \underline{D}_2^{-1} \underline{b}, \dots, \underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

alapján előállítottuk a megengedett megoldásokat, valamint a

$$- \left(\underline{a}_1^T \underline{D}_1^{-1} \right) \underline{b}, \quad - \left(\underline{a}_2^T \underline{D}_2^{-1} \right) \underline{b}, \dots, - \left(\underline{a}_s^T \underline{D}_s^{-1} \right) \underline{b}$$

alapján a célfüggvény sorát.

Ha az $s+1$ -edik táblázatban az optimális megoldást kapjuk, akkor a

$$\underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

szorzat a primál feladat megoldását adja és a célfüggvény maximuma

$$- \left(\underline{a}_s^T \underline{D}_s^{-1} \right) \underline{b}$$

Tegyük fel, hogy a lineáris programozás alkalmazásával gyakorlatban készítettünk vállalati tervet. Egyrészt a tervezés folyamata is időt vesz igénybe és lehetséges, hogy mire a terv elkészül, megváltoznak a feltételek. Másrészt, ha fejlesztési tervet készítünk, annak megvalósítása éveket vesz igénybe. Ilyenkor különösen nagy a valószínűsége annak, hogy változnak a feltételek. A feltételek változása egyben kétséges teszi, hogy a lineáris programozással előállított terv továbbra is optimális-e, célszerű-e annak megvalósítása, vagy pedig a tervet át kell dolgozni. Legtöbbször az utóbbi áll fenn. Át kell dolgozni a tervet.

A terv átdolgozása, mint látni fogjuk, ha lineáris programozással terveztük, viszonylag egyszerű. Módosítjuk a modell megfelelő adatait és a feladatot újra megoldjuk. Felmerül azonban a kérdés, hogy szükség van-e arra, hogy a számításokat előlről kezdve végig megismétezzük. Látni fogjuk, hogy a módosított szimplex módszer alkalmazásával ez elkerülhető.

Mielőtt az ezzel kapcsolatos számítástechnikai eljárásokat megismernénk, vizsgáljuk meg, hogyan jelentkezhet a modellben a feltételek megváltozása.

Mindenekelőtt megváltozhatnak az erőforráskapacitások. Különösen a fejlesztési tervek megvalósítása során az előirányoztnál nagyobb beruházási lehetőségek adódhatnak, korszerűbb, nagyobb teljesítményű gépeket szerezhethetünk be, változhat a munkaerőkapacitás, stb.

Lehetséges az is, hogy felmerül egy új termék termelésének lehetősége, és el kell dönteni, célszerű-e annak termelése és ha igen, akkor milyen mennyiségben és hogyan kell ennek érdekében a termelés szerkezetét megváltoztatni. Ilyenkor a modellbe új változót kell beépíteni. Ehhez hasonló probléma, ha valamely termék termelésére új termeléstehnológiát dolgoznak ki és el kell dönteni, hogy a régi vagy az új technológiát célszerű alkalmazni és ha az új technológiát alkalmazzuk, hogyan kell a termelés szerkezetét megváltoztatni.

Végül lehetséges, hogy a modellbe új feltételeket kell beépíteni. Például a megváltozott piaci /értékesítési vagy beszerzési/ feltételeknek megfelelően korlátozni kell néhány termék termelését, anyagfelhasználását, stb.

E változások jelentkezhetnek külön-külön és egyidejűleg és a már elkészített terv jelentős megváltoztatását tehetik szükségessé. Ugyanezen problémák merülnek fel tervvariánsok kiszámításakor is.

A vállalatvezetők sokszor panaszkodnak, hogy hiába terveznek, a tervet nem lehet megvalósítani, mert a gazdasági feltételek igen gyakran változnak. Ez valóban igaz, különösen a mezőgazdaságban. Oktalanság volna azonban olyan

igénnyel fellépni, hogy a gazdasági feltételek hosszú időn keresztül ne változzanak meg. Ez a gazdasági élet megmerevítését, a gazdasági fejlődés megállítását jelentené, ami - csak ezért, hogy az egyszer elkészített tervet /minden számadatát illetően/ teljesíteni tudjuk - aligha volna kívánatos.

A gazdasági élet szerencsére állandóan változik, fejlődik, sőt mondhatjuk, gyorsuló ütemben fejlődik, és a vállalatvezetés feladata, hogy az állandóan változó feltételeknek megfelelően jól működjön a vállalat. Ez pedig azzal a követelménnyel jár együtt, hogy alkalmazkodni kell a változó feltételekhez, s a tervet szükség szerint kell módosítani, átdolgozni. Ebből következik, hogy a tervezést nem szabad egyszeri aktusként felfogni, hanem az egy permanens folyamat, tehát a tervet állandóan a változó gazdasági feltételekhez igazodva karban kell tartani.

A következőkben megismerkedünk azokkal az eljárásokkal, amelyek segítségével a számítások teljes megismétlése nélkül lehet a tervet átdolgozni, optimalizálni.

6.13.1. Tervmódosítás a kapacitásvektor /b/ változása miatt

Induljunk ki a 6.12.-ben megismert példából, azaz az

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \leq & 9 \\
 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & & & + 2x_5 + x_6 & \leq & 18 \\
 4x_1 + 2x_2 & & & + x_4 & \leq & 16 \\
 \hline
 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 & = & \max.
 \end{array}$$

Ismerjük, hogy ennek megoldása

$$x_{\text{opt}} = [1, 4, 0, 4, 0, 0]$$

Tegyük fel azonban, hogy időközben módosult a termelőkapacitás, azaz a b vektor. Mondjuk, hogy a b vektor minden eleme 50 %-kal bővült, tehát az új b vektor, azaz b' a következő:

$$b' = 1,5 b = 1,5 \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,5 \\ 27,0 \\ 24,0 \end{bmatrix}$$

Kérdés, hogy most mi volna a feladat optimális megoldása.

A 6.12.-ből már ismerjük a D_3^{-1} -et, amikor az utolsó /optimális/ táblázathoz jutottunk.

$$D_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Azt is tudjuk, hogy

$$d_3^T = \begin{bmatrix} 5, & 12, & 10 \end{bmatrix}$$

Az új b vektor ismeretében most az új optimális megoldást egyszerűen ki tudjuk számítani, azaz

$$x'_{opt} = D_3^{-1} b' = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,5 \\ 27,0 \\ 24,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

Könnyű észrevenni, hogy mivel a kapacitásvektor minden eleme 1,5-szörösére változott, az új megoldás is az előbbinek 1,5-szöröse, azaz

$$x'_{opt} = 1,5 x_{opt} = 1,5 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

Ha tehát a b vektor komponenseit k -szorosára változtatjuk, akkor - amennyiben b -vel volt optimális megoldás - a $k b$ -hez tartozó optimális megoldás $k x_{opt}$.

Az új optimumhoz tartozó célfüggvényérték

$$-(d_3^T D_3^{-1}) b = - \begin{bmatrix} 5, & 12, & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,5 \\ 27,0 \\ 24,0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4,4 & 1,6 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,5 \\ 27,0 \\ 24,0 \end{bmatrix} = -117$$

ami az előbbinek szintén 1,5-szöröse, azaz $1,5 \cdot (-78) = -117$.

Ha tehát a $\underline{b}$ vektor minden eleme egyforma arányban, k -szorosára változik, az új optimumot megkapjuk, ha az előbbit k -val szorozzuk.

Más a helyzet, ha a $\underline{b}$ vektor elemei különböző arányban változnak. /A gyakorlatban általában ez a helyzet./

Tegyük fel, hogy most a feladatban a $\underline{b}$ vektor a következőképpen módosul:

$$\underline{b}' = \begin{bmatrix} 9 & 22 & 18 \end{bmatrix}^T$$

Kiindulunk az ismert

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3
x_4							1,2	-0,2	-0,2
x_2							0,2	0,3	-0,2
x_1							-0,4	-0,1	0,4

táblázatból és folytatjuk a számítást:

$$\underline{x}'_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 4,8 \\ 1,4 \end{bmatrix}$$

és a célfüggvény értéke

$$- \left(\underline{a}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{b} = - \begin{bmatrix} 4,4 & 1,6 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 18 \end{bmatrix} = -85,6$$

A táblázat többi értéke nem függ a $\underline{b}'$ értéktől, tehát a $\underline{b}'$ vektorhoz tartozó új táblázatunk a következő lesz:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4							1,2	-0,2	-0,2	2,8
x_2							0,2	0,3	-0,2	4,8
x_1							-0,4	-0,1	0,4	1,4
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-85,6

A megoldás strukturája nem változott, azaz a $\underline{b}'$ -hez tartozó megoldásban ugyanazon x_j értékek fordulnak elő, mint a $\underline{b}$ -hez tartozó megoldásban, csupán az x_j értékek nagysága változott meg.

Ha ugyanis

$$\underline{D}_s^{-1} \underline{b}' \geq \underline{0}$$

akkor a megoldás strukturája nem változik. Ha azonban

$$\underline{D}_s^{-1} \underline{b}' \not\geq \underline{0}$$

a megoldás strukturája is változik.

Tegyük fel most, hogy a módosult $\underline{b}$ vektor a következő:

$$\underline{b}' = [9, 22, 14]^T$$

Ekkor

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{b}' = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,6 \\ 5,6 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

Most tehát

$$\underline{D}_s^{-1} \underline{b}' \not\geq \underline{0}$$

vagyis az $\underline{x}$ vektor komponensei között negatív is van, tehát a számítást folytatni kell, mégpedig a módosított duál szimplex módszerrel.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4							1,2	-0,2	-0,2	3,6
x_2							0,2	0,3	-0,2	5,6
x_1							-0,4	-0,1	0,4	-0,2
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-83,2

$$-\left(\begin{matrix} \underline{a}_3^T & \underline{D}_3^{-1} & \underline{b} \end{matrix}\right) = -\begin{bmatrix} 4,4 & 1,6 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} = -83,2$$

A $\underline{b}$ vektor legkisebb komponense a -0,2 az x_1 sorában van, tehát ebben a sorban keresünk generáló elemet. A sor elemeit megkapjuk; ha az $\underline{A}$ mátrix új elemeit meghatározzuk, azaz

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{A} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,8 & 1 & 0,8 & 1 \\ 0 & 1 & 0,8 & 0 & 0,8 & 0,5 \\ 1 & 0 & -0,6 & 0 & -0,6 & -0,5 \end{bmatrix}$$

Most tehát táblázatunk a következőképpen alakul:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4	0	0	0,8	1	0,8	1	1,2	-0,2	-0,2	3,6
x_2	0	1	0,8	0	0,8	0,5	0,2	0,3	-0,2	5,6
x_1	1	0	-0,6	0	-0,6	-0,5	-0,4	-0,1	0,4	-0,2
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-83,2

Generáló elemet választunk:

$$\frac{-2,6}{-0,6} = 4,33, \quad \frac{-1,6}{-0,6} = 2,67, \quad \frac{-4}{-0,5} = 8$$

generáló elemünk tehát a $-0,6$ lesz, az x_5 -höz tartozó oszlopban. /Megjegyezzük, hogy elegendő lett volna az $\underline{A}$ mátrix új elemeit csak az x_1 -hez tartozó sor és x_5 -höz tartozó oszlopban meghatározni./

Folytatjuk tehát a számítást és meghatározzuk $\underline{D}_4^{-1}$ mátrixot.

	u_1	u_2	u_3
x_4	0,67	0,33	0,33
x_2	-0,33	0,17	0,33
x_5	0,67	0,17	-0,67

tehát

$$\underline{D}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,67 & 0,17 & -0,67 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{d}_4^T = [5, 12, 6]^T$$

Innen:

$$\underline{L}_4 = \begin{bmatrix} \underline{D}_4^{-1} \underline{A} & \underline{D}_4^{-1} & \underline{D}_4^{-1} \underline{b} \\ \underline{p}^T - \left(\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} \right) \underline{A} & - \underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} & - \left(\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} \right) \underline{b} \end{bmatrix}$$

alapján kiszámítjuk az új megoldást, az ahhoz tartozó célfüggvényértéket és az új táblázat célfüggvény sorát, azaz

$$\underline{D}_4^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 0,66 & -0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,66 & 0,17 & -0,66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,33 \\ 5,33 \\ 0,33 \end{bmatrix}$$

/Megjegyezzük, hogy $\underline{D}_4^{-1}$ kerekített adatokat tartalmaz, ezt a számítások során igyekeztünk kiszűrni./

A célfüggvényérték számítása:

$$\underline{c}^T - \underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} \underline{A} = [10, 12, 5, 5, 6, 2] - [5, 12, 6] \cdot \begin{bmatrix} 0,66 & -0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,66 & 0,17 & -0,66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-2,67, 0, -1, 0,0, -2,67]$$

Ebből látható, hogy a számítást befejeztük, mert a célfüggvény sorában nincs pozitív elem.

A célfüggvény értéke

$$- \left(\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} \underline{b} \right) = - [5, 12, 6] \begin{bmatrix} 0,66 & -0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,66 & 0,16 & -0,66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} = -82,67$$

Az utolsó szimplex táblázatunk tehát

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4							0,66	-0,33	0,33	3,33
x_2							-0,33	0,17	0,33	5,33
x_5							0,66	0,17	-0,66	0,33
-z	-2,67	0	-1	0	0	-2,67	-3,33	-1,33	-1,66	-82,67

mivel

$$\underline{d}_4^T \underline{D}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 5, & 12, & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,66 & -0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,17 & 0,33 \\ 0,66 & 0,17 & -0,66 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3,33, & -1,33, & -1,66 \end{bmatrix}$$

A feladatot tehát megoldottuk. A megoldás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0, & 5,33, & 0, & 3,33, & 0,33, & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$z = 82,67$$

Ellenőrizzük:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5,33 \\ 0 \\ 3,33 \\ 0,33 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,99 \\ 21,98 \\ 13,99 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 10, & 12, & 5, & 5, & 6, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5,33 \\ 0 \\ 3,33 \\ 0,33 \\ 0 \end{bmatrix} = 82,59 \approx 82,67$$

Az elmondottakat felhasználhatjuk természetesen akkor is, ha egy adott feladatot több b vektorral kell megoldani.

6.13.2. Tervmódosítás a célfüggvény változása miatt:

Az előbbiek ismeretében már nem nehéz megoldani a feladatot, ha megváltozik a célfüggvény, vagy ha több célfüggvénnyel kell a feladatot vizsgálni.

Ha $\underline{p}^T$ vektor $\underline{p}'^T$ -re változik, akkor változik a $\underline{d}_s^T$ is, és ennek következtében mindazon vektorokat át kell számolni, amelyek alakításában a $\underline{d}_s^T$ szerepet játszik. Ezek a következők:

$$\begin{aligned} & - \left(\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} \right) \\ & - \left(\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} \right) \underline{b} \end{aligned}$$

és

$$\underline{p}^T - \left(\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} \right) \underline{A}$$

Nem változik a

$$\underline{D}_s^{-1} \underline{A}$$

$$\underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

és az előző számításokból ismert a

$$\underline{D}_s^{-1}$$

Ha a célfüggvény minden adata arányosan, mondjuk k -szorosára változik, akkor az $\underline{x}_{opt}$ nem változik meg, csak a hozzá tartozó célfüggvényérték, tehát elegendő, ha azt k -szorosára változtatjuk. Ha tehát

$$\underline{p}'^T = k \underline{p}^T$$

akkor

$$\underline{x}'_{opt.} = \underline{x}_{opt.},$$

vagyis az optimális megoldás nem változik és

$$\underline{z}' = k \underline{z}.$$

Ha azonban a célfüggvény komponensei különböző arányban változnak meg, akkor a $\underline{d}_3^T$ által érintett vektorokat az új célfüggvénynek megfelelően átszámítjuk. Ha az így nyert táblázathoz tartozó célfüggvényt sorban nincs pozitív elem, máris optimális táblázathoz jutottunk. Ha viszont a célfüggvény sorában pozitív elemet találunk, folytatni kell a számításokat a primál szimplex módszerrel mindaddig, amíg optimális táblázathoz jutunk.

Tegyük fel, hogy a 6.12.-ben megoldott feladat célfüggvénye megváltozik, mivel az ötödik termék ára emelkedett és így a jövedelem 6 egységről 8 egységre emelkedett. Most tehát a

$$\underline{p}^T = [10, 12, 5, 5, 6, 2]$$

helyett a

$$\underline{p}^T = [10, 12, 5, 5, 8, 2]$$

célfüggvénnyel kell dolgoznunk.

Ismeretes, hogy

$$\underline{D}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_3^T = [5, 12, 10]$$

Ennek alapján

$$-\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} = -[5, 12, 10] \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} =$$

$$-[4,4, 1,6, 0,6]$$

$$-\left(\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1}\right) \underline{b} = [4,4, 1,6, 0,6] \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix} = -78$$

vagyis mivel a változás olyan terméknél következett be, amely még nem szerepel a bázisban, ezek az eredmények az előző táblázathoz képest nem változtak. Ha természetesen olyan változóhoz tartozó célfüggvényérték változik meg, amely a bázisban van, akkor a

$$\underline{d}_3^T$$

változása miatt a

$$- \underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1}$$

és a

$$- \left(\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{b}$$

is megváltozik.

Természetesen a

$$\underline{p}^T - \left(\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{A}$$

megváltozik akkor is, ha a célfüggvénykoefficiens változása olyan terméknél következik be, amely nem került be a bázisba, hiszen a $\underline{p}^T$ változik, vagyis:

$$\underline{p}^T - \left(\underline{d}_3^T \underline{D}_3^{-1} \right) \underline{A} = [10, 12, 5, 5, 8, 2] - [4, 4, 1, 6, 0, 6].$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0, 0, -2, 6, 0, 0, 4, -4]$$

A szimplex tábla tehát a következő:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4							1,2	-0,2	-0,2	4
x_2							0,2	0,3	-0,2	4
x_1							-0,4	-0,1	0,4	1
-z	0	0	-2,6	0	0,4	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-78

A táblázathból kitűnik, hogy az x_5 -höz pozitív célfüggvényérték tartozik, tehát folytatni kell a számítást a primál szimplex módszerrel. Ehhez előbb az x_5 -höz tartozó oszlop adatait kell meghatározni, azaz

$$D_3^{-1} a_5 = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,8 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

Vagyis kapjuk a következő táblázatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4				0,8			1,2	-0,2	-0,2	4
x_2				0,8			0,2	0,3	-0,2	4
x_1				-0,6			-0,4	-0,1	0,4	1
-z	0	0	-2,6	0	0,4	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-78

Meghatározzuk a generáló elemet:

$$\frac{4}{0,8} = 5 \quad \frac{4}{0,8} = 5$$

Mivel a hányadosok azonosak degenerációval állunk szemben. A számításokat a primál szimplex módszerrel folytatva, az alábbi megoldáshoz jutunk.

$$\underline{x} = [4, 0, 0, 0, 5, 0]^T$$

$$z = 80$$

6.13.3. Tervmódosítás új termék /vagy technológia/ beiktatása miatt

Vegyük ismét a 6.12.-ben megismert feladatot, azaz

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \leq & 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 + x_6 & \leq & 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 & \leq & 16 \\ \hline 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 & = & \max. \end{array}$$

Mint tudjuk, ennek megoldása

$$\underline{x} = [1, 4, 0, 4, 0, 0]$$

és

$$z = 78$$

az optimális megoldást szolgáltató szimplex tábla pedig, mint ismeretes, a következő volt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_4							1,2	-0,2	-0,2	4
x_2							0,2	0,3	-0,2	4
x_1							-0,4	-0,1	0,4	1
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-4,4	-1,6	-0,6	-78

Tegyük fel, hogy időközben felmerült két új termék termelésének lehetősége, ezért a feladatot újabb két változóval kell kibővíteni: y_1 és y_2 -vel és így a feladatot az alábbira módosul:

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2 \geq 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + y_1 + y_2 \leq 9 \\
 & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 + x_6 + 4y_1 + y_2 \leq 18 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_4 + 2y_1 + 2y_2 \leq 16 \\
 & 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 7y_1 + 8y_2 = \max.
 \end{aligned}$$

Ez a feladat mátrix alakban a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}
 & \underline{x} \geq \underline{0} \quad \underline{y} \geq \underline{0} \\
 & \underline{A}_1 \underline{x} + \underline{A}_2 \underline{y} \leq \underline{b} \\
 & \underline{D}_1^T \underline{x} + \underline{D}_2^T \underline{y} = \max.
 \end{aligned}$$

Az eredeti feladat optimális táblázatát ismerjük. Ezt most ki kell bővíteni a két új változóval, és első lépésben azt kell megvizsgálni, hogy a p_2 elemei között az optimális táblázatban található-e pozitív koefficiens, vagyis

$$p_2 = (\underline{d}_S^T \underline{D}_S^{-1}) \underline{A}_2 = [7, 8] - \begin{bmatrix} 5, 12, 10 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7, & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,4, & 1,6, & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7, & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12, & 7,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5, & 0,8 \end{bmatrix}$$

Az y_2 -höz tartozó célfüggvénykoefficiens tehát pozitív, ezért a számítást folytatni kell. Meg kell tehát határozni az y_2 -höz tartozó oszlop elemeit, azaz

$$\underline{D}_3^{-1} \underline{a}_8 = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & -0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,1 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

Ennek alapján a következő szimplex táblázat állítható össze:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	u_1	u_2	u_3	
x_4								0,6	1,2	-0,2	-0,2	4
x_2								0,1	0,2	0,3	-0,2	4
x_1								0,3	-0,4	-0,1	0,4	1
-z	0	0	-2,6	0	-1,6	-4	-5	0,8	-4,4	-1,6	-0,6	-78

Az y_2 oszlopában generáló elemet választunk:

$$\frac{4}{0,6} = 6,67, \quad \frac{4}{0,1} = 40, \quad \frac{1}{0,3} = 3,33$$

Tehát a 0,3 lesz a generáló elem. Most meghatározzuk $\underline{D}_4^{-1}$ -et, majd az újabb táblázathoz tartozó célfüggvényértékeket, megoldásvektort, stb. és a számításokat a már ismert módon mindaddig folytatjuk, amíg optimális megoldáshoz nem jutunk.

6.13.4. Tervmódosítás új feltételek csatolásával

Új feltételek csatolása azt jelenti, hogy az eredeti

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A}_1 \underline{x} &\leq \underline{b}_1 \\ \underline{c}^T \underline{x} &= \max. \end{aligned}$$

feladatot bővítjük újabb

$$\begin{aligned} \underline{A}_2 \underline{x} &= \underline{b}_2 \\ (\leq, \geq) \end{aligned}$$

feltételekkel.

Eddigi ismereteink alapján nem lesz nehéz megérteni, hogy az eredeti feladat optimális megoldására nyert optimális táblázat most is felhasználható a bővített feladat megoldásához.

Most azonban a feltételek számának növekedése megnöveli a bázis méretét és az eddigi

$$\underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

bázis helyett az új bázis

$$\underline{B}'_0 = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{E}_2 & \underline{0} \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ha az s-edik lépésben kaptuk az eredeti feladat optimális megoldását, akkor az új feladat szerinti bázis a következő:

$$\underline{B}'_s = \begin{bmatrix} \underline{D}_s & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{D}'_s & \underline{E}_2 & \underline{0} \\ \underline{d}_s & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek inverze:

$$\underline{B}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D}_s^{-1} & 0 & 0 \\ -\underline{D}_s' \underline{D}_s^{-1} & \underline{E}_2 & 0 \\ -\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} & 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Az eredeti feladat optimális táblájából tehát $\underline{D}_s^{-1}$ felhasználható és előállítható a bővített feladat s -edik bázisának inverze.

A bővített tábla felírása után el tudjuk dönteni, hogy az eredeti megoldás optimális-e, vagy folytatni kell a számításokat. Ha a bővített táblában a $\underline{b}_2$ vektor koordinátái mind pozitívak, akkor a bővített feladat optimális megoldása megegyezik az eredeti feladat optimális megoldásával, tehát a számítást nem kell folytatni. Ha a $\underline{b}_2$ vektor koordinátái között negatív is található, folytatni kell a számítást a duál szimplex módszerrel. Ugyancsak folytatni kell a számítást, ha a csatolt feltételek között egyenlet is van, mivel ennek teljesülni kell.

Legyen feladatunk a következő:

$$\begin{array}{rcll} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \\ x_1 & - x_5 & \leq & 20 \\ x_1 & + x_3 & \leq & 30 \\ x_1 + x_2 & & + x_4 & \leq & 10 \\ x_2 - x_3 & - x_4 + x_5 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = \text{max.}$$

A feladat megoldását az alábbi optimális táblázat szolgáltatja:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	
u_1						1	1	1	1	60
x_3						0	1	0	0	30
x_4						0	0	1	0	10
x_5						0	1	1	1	40
$-z$	-16	-12	0	0	0	0	-8	-9	-5	330

Bővítsük a feladatot az

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & & + x_3 & & - x_5 & = & 6 \\ x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & \geq & 40 \end{array}$$

feltételek csatolásával.

A feltételek számának növekedésével természetesen a bázis méretei megnövekednek, vagyis az induló táblához tartozó bázis

$$\underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{E}_2 & \underline{0} \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Az s -edik lépéshez /amely az eredeti feladat megoldását szolgálja/ tartozó bázis

$$\underline{B}_s = \begin{bmatrix} \underline{D}_s & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{D}_s' \underline{D} & \underline{E}_2 & \underline{0} \\ \underline{d}_s^T & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek inverze

$$\underline{B}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D}_s^{-1} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{D}_s' \underline{D}_s^{-1} & \underline{E}_2 & \underline{0} \\ -\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

A $\underline{D}_s^{-1}$ az alapeladat optimális táblájából ismert, a $-\underline{D}_s' \underline{D}_s^{-1}$ szorzat előállítható, így a bővített feladat s -edik bázisának inverze már adott. A bővített feladatot felírva megvizsgálhatjuk az optimalitás feltételeit.

Mivel az alapeladat optimális táblájában a

$$\underline{p}^T + \left(-\underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1}, \underline{0}^T \right) \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix} = \underline{p}^T - \underline{d}_s^T \underline{D}_s^{-1} \underline{A}$$

és a

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_s^{-1} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

szerepelnek, csupán a

$$\begin{bmatrix} -\underline{D}_s' \underline{D}_s^{-1} & \underline{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \underline{b}_2 - \underline{D}_s' \underline{D}_s^{-1} \underline{b}$$

vektort kell megvizsgálni. Ha e vektornak minden eleme pozitív, akkor a bővített feladat optimuma megegyezik az alapfeladat optimumával. Ellenkező esetben folytatni kell a számítást a duál szimplex módszerrel. Ugyancsak folytatni kell a számítást, ha a bővítésként csatolt feltételek között egyenlet is szerepel.

Vizsgáljuk meg tehát az előbb megadott bővített feladat megoldását:

$$-\underline{D}_s' \underline{D}_s^{-1} = \begin{bmatrix} u_1 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 - \underline{D}_s' \underline{D}_s^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 40 \end{bmatrix}$$

A bővített feladathoz tartozó táblázat tehát az s-edik lépésben a következő:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
u_1						1	1	1	1	0	0	60
x_3						0	1	0	0	0	0	30
x_4						0	0	1	0	0	0	10
x_5						0	1	1	1	0	0	40
u_5	2	2	0	0	0	0	0	1	1	1	0	16
u_6						0	2	2	1	0	1	40
$-z$	-16	-12	0	0	0	0	-8	-9	-5	0	0	330

Mivel a bővítményben egyenlet van, a számítást folytatni kell, s az u_5 sorból választunk generáló elemet, amelynek elemeit a táblázatba beirtuk. Ezt a

$$\underline{t}_j^T \quad \underline{A}$$

formulával oldottuk meg, ahol $\underline{t}_j^T$ a $\underline{D}_s^{-1}$ mátrixnak az a sorát jelöli, amelyből a generáló elemet választjuk /most az u_5 sorban/, vagyis generáló elemet választunk és folytatjuk a számítást, s a következő lépésben optimális megoldáshoz jutunk, amelyhez a következő táblázat tartozik:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
u_1						1	1	0	0	-1	0	44
x_3						0	1	0	0	0	0	30
x_4						0	0	1	0	0	0	10
x_5						0	1	0	0	-1	0	24
u_4						0	0	1	1	1	0	16
u_6						0	2	1	0	-1	1	24
$-z$	-6	-2	0	0	0	0	-8	-4	0	5	0	250

7. FEJEZET

SZIMPLEX MÓDSZERREL MEGOLDHATÓ, PARAMÉTERES, EGÉSZÉRTÉKŰ ES NEMLINEÁRIS MODELLEK

A matematikai programozási modellt általános formában a következő összevont formában fogalmazhatjuk meg:

$$z = f(\underline{x}) = \text{extrém}$$

$$\phi_i(\underline{x}) \leq b_i \quad / =, \geq /$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Tudjuk, hogy ha az $f(\underline{x})$ és $\phi_i(\underline{x})$ lineáris formák, akkor lineáris programozással állunk szemben. A 6. fejezetben láttuk, hogy a lineáris programozási feladat a szimplex módszerek valamelyikével megoldható, ha van a feladatnak megoldása.

A gazdasági gyakorlatban elsősorban a lineáris programozási modellek kerülnek alkalmazásra, mivel viszonylag egyszerűek, könnyen kezelhetők. A linearitás feltételezése viszont a valóság lényeges egyszerűsítéséhez vezethet, hiszen a gazdasági problémák legtöbbször nem lineárisak. Valójában a gazdasági jelenségek ha nem is lineárisak, lineáris modellekkel is jól vizsgálhatók, jól közelíthetők és a lineáris modellek nem okoznak jelentősebb problémákat. Sok esetben viszont a lineáris modellek a valóság lényeges egyszerűsítését kívánnák meg, ezért kénytelenek vagyunk más megoldásokhoz folyamodni.

Ebben a fejezetben a paraméteres programozással, az egészértékű programozással és a nemlineáris programozás néhány esetével fogunk foglalkozni. Az ismertetésre kerülő modellek, mint látni fogjuk, szintén megoldhatók szimplex módszerrel.

A mezőgazdasági mérnököknek nem lehet feladata, hogy matematikai programozási modelleket kézi számítással oldjon meg. Különösen nem kerül sor arra, hogy bonyolultabb, egészértékű, vagy nemlineáris modelleket oldjon meg egyszerűbb eszközökkel. Ma már elérhetők számára a nagyteljesítményű számítógépek is, amelyekkel olcsóbban és rövidebb idő alatt tud még egyszerűbb feladatokat is megoldani, illetve bonyolultabb, nagyobb feladatok megoldása ezek nélkül elképzelhetetlen.

A számítógépek programozása sem az agrármérnök feladata. Az agrármérnökök által összeállított modellek megoldására kész programok vannak, vagy ha ilyen kész program nincs, akkor is célszerűbb azt kellő gyakorlattal rendelkező programozóval elkészíttetni, hiszen a programtól nagymértékben függ a feladat megoldásához szükséges gépidő, ami meghatározza a gépköltséget.

A modellek megválasztása, a gazdasági modell megszerkesztése, a feladat megfogalmazása viszont mindenképpen az agrármérnök feladata kell hogy legyen. Ennélfogva a figyelmet e kérdésekre kívánjuk irányítani, amihez viszont az eddig tanultak jó alapot nyújtanak. A számítástechnikai kérdéseket tehát a továbbiakban legfeljebb csak igen röviden tárgyaljuk. Részletesebb tárgyalásukra a rendelkezésre álló oktatási keretek sem adnak alkalmat. A számítástechnikai kérdések iránt érdeklődők számára az eddigi ismeretek alapot adnak arra, hogy azt szakkönyvekből elsajátítsák.

7.1. Paraméteres lineáris programozási modellek

Paraméteresnek nevezzük azokat a lineáris modelleket, amelyekben az $\underline{A}$, $\underline{b}$ vagy $\underline{c}^T$ elemei között függvények is szerepelnek. Ha ezek a függvények egyváltozósak és e változók első fokúak, a modellt egyparaméteres lineáris modellnek nevezzük. Hasonló értelemben beszélhetünk többparaméteres és nemlineáris modellekről.

Attól függően, hogy a modellben az $\underline{A}$, $\underline{b}$ vagy $\underline{c}^T$ elemei között szerepelnek függvények, a paraméteres modellek három esetét különböztetjük meg:

1. Paraméteres primál célfüggvény esete

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\underline{A} \underline{x} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \underline{b}$$

$$(\underline{p}^T + \underline{p}'^T t) \underline{x} = \text{extrém}$$

$$\alpha \leq t \leq \beta$$

Látjuk tehát, hogy a primál célfüggvény elemei függvényekként vannak megadva. Mint ismeretes, a primális célfüggvény különböző közgazdasági tartalommal bírhat. Lehet célunk a jövedelem maximalizálása, a gépfelhasználásnak, a földterület felhasználásának /pl. takarmánytermelés programozásánál/ minimalizálása, stb. Azonban a fajlagos jövedelem változhat az árak változásának, a termelés méretének, vagy a költség-tényezőknek, stb. a függvényében. Hasonlóképpen a termelési költség és a beruházások, gép- és a földterület felhasználása is függ más tényezőktől, mely függvényeket megadva, paraméteres feladathoz jutunk.

Másrészt, ha egy feladatot adott célfüggvény mellett megoldunk, felmerül a kérdés, hogy mi történik, ha a fajlagos hatékonyságok /célfüggvény koefficiensei/ megváltoznak. Milyen változás mellett nem változik az optimális megoldás, illetve a célfüggvény koefficiensek milyen változása esetén kell a megoldást /tervet, illetve programot/ módosítani, új optimumot keresni. Hasonló kérdéstről van szó, amikor a maximális jövedelemre törekszünk, de tekintetbe vesszük a bizonytalan-sági tényezőt.

Ilyen és hasonló problémák megoldására alkalmas a modell paraméteres primál célfüggvény alkalmazása esetén.

2. Paraméteres technológiai mátrix esete

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\left(\underline{A} + \underline{A}'t \right) \underline{x} \leq \underline{b}$$

$$\underline{p}^T \underline{x} = \text{extrém}$$

$$\alpha \leq t \leq \beta$$

Most tehát az $\underline{A}$ technológiai mátrix parametrikus. Valójában a fajlagos munkaerőszükséglet, a fajlagos gép- és anyagszükséglet, stb. is változhat, illetve függvényként adható meg. Milyen hatása van e változásoknak, meddig /milyen változások mellett/ marad egy optimális megoldás továbbra is optimális? A modell ilyen problémák vizsgálatához nyújt segítséget.

3. Parametrikus duál célfüggvény esete

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b} + \underline{b}'t$$

$$\underline{p}^T \underline{x} = \text{extrém}$$

Most a $\underline{b}$ vektor paraméteres /a feladat duáljában, mint tudjuk, ez lesz a célfüggvény/. A mezőgazdasági gyakorlatban is például valamely tehén napi táplálékanyagszükséglete függ

a tejhozamtól. Változik a munkaerőkapacitás, az öntözhető terület, a piacon értékesíthető termékmennyiség, stb. Milyen hatása van e változásoknak? Az ilyen jellegű problémák a duál célfüggvény parametrizálásával vizsgálhatók.

Mi azzal az esettel, amikor az A technológiai mátrix parametrikus, nem foglalkozunk. Ugyancsak nem foglalkozunk a nemlineáris paraméteres modellekkel és a többparaméteres modellekkel.

A paraméteres modelleket jellemzi, hogy általában egynél több optimális megoldásuk van a paraméter értelmezési tartománya felett. Az optimális megoldások a paraméter függvényei.

A paraméteres modellek megoldását - ha a primál célfüggvény paraméteres - az alábbi lépésekben végezzük:

1. Előállítjuk a primálfeladat egy lehetséges bázismegoldását /primál vagy duál szimplex módszerrel/.

2. Tudjuk, hogy optimális megoldáshoz akkor jutottunk, ha a primál célfüggvény elemei nempozitívek /kivételt képeznek az u elemei/. Ez csak akkor teljesül - mivel a primál célsor elemei lineáris függvények - ha van olyan $[t_0, t_1]$ intervallum, amely felett az összes függvények nempozitívek. Ekkor leolvasható a modell optimális megoldása:

$$\underline{x}_0^1 / t /; \underline{u}_0^{1T} / t /; \underline{z}_0^1 / t /; t_0 \leq t \leq t_1$$

ha a $[t_0, t_1]$ intervallum része az $[\alpha, \beta]$ intervallumnak.

3. Ha az optimalitás kritériumai nem teljesülnek, akkor újabb transzformációt, vagy transzformációkat végzünk, természetesen a b vektorra a szűk keresztmetszetet véve figyelembe.

4. Ha egy $[t_0, t_1]$ karakterisztikus intervallumot meghatároztunk, már egyszerű feladat a továbbiak meghatározása. Azt vizsgáljuk, hogy a $t > t_1$ vagy $t < t_0$ paraméterértékek mellett a célsor aktuális elemei közül melyik válik pozitívvá a t legkisebb megváltoztatására $[\min. (t - t_1)]$.

Ennek a célelemnek oszlopvektorát transzformálva, az 1. fenntartása mellett vagy teljesedik 2. és akkor újabb optimális megoldást nyerünk:

$$\bar{x}_0^2 / t; \quad u_0^{2T} / t; \quad z_0^2 / t; \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

vagy a 3. szerint eljárva jutunk el az optimumhoz, feltevé, hogy a $[t_1, t_2]$ intervallum része az $[\alpha, \beta]$ intervallumnak és a $[t_1, t_2]$ célfüggvény korlátos.

Az eljárást a 4. szerint ismételve folytatjuk, amíg az $[\alpha, \beta]$ intervallum minden pontját be nem soroltuk valamely karakterisztikus intervallumba, vagy meg nem állapítottuk, hogy a feladatnak nincs optimális megoldása.

Legyen feladatunk az:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$(4+t) + (2+3t) = \max.$$

$$-3 < t < 5$$

Elkészítjük az induló táblát:

	x_1	x_2	
u_1	1	1	8
u_2	1	2	13
$-z$	$4+t$	$2+3t$	0

Az induló táblázatból a számítás csak akkor indítható, ha a célfüggvény együtthatói között pozitív is van, tehát:

$$\text{vagy } 4 + t \geq 0, \text{ azaz } t \geq -4,$$

$$\text{vagy } 2 + 3t \geq 0, \text{ azaz } t \geq -\frac{2}{3}.$$

Válasszunk generáló elemet az x_1 -hez tartozó oszlopban és végezzük el a transzformálást.

	u_1	u_2	
x_1	1	1	8
u_2	-1	1	5
$-z$	$-4-t$	$-2+2t$	$-32-8t$

$$t \geq -4; \quad t \leq 1$$

vagyis az adott megoldás optimális, ha $-4 \leq t \leq 1$

	u_1	u_2	
x_1	2	-1	3
x_2	-1	1	5
$-z$	$-6+t$	$2-2t$	$-22-18t$

$$t \leq 6; \quad t \geq 1$$

vagyis az adott megoldás optimális, ha $1 \leq t \leq 6$

A feladat megoldásai tehát a következők:

$$x_{\text{opt.}}^1 = [8, 0]; \quad z = (-32 - 8t)$$

$$-4 \leq t \leq 1$$

$$x_{\text{opt.}}^2 = [3, 5]; \quad z = (-22 - 18t)$$

$$1 \leq t \leq 6$$

Ezzel a két karakterisztikus intervallummal a $[-3, 5]$ intervallumot teljesen lefedtük.

A megoldások tehát nem változnak a karakterisztikus intervallumon belül. A célérték viszont egy intervallumon belül lineáris függvénye t -nek. Ugyancsak egy intervallumon belül is lineáris függvénye t -nek a duálpár optimális megoldása. Példánkban:

$$\underline{u}^{(1)} = [4 + t, 0]$$

$$\underline{u}^{(2)} = [6 - t, -2 + 2t]$$

Eddigi ismereteink alapján egyszerűen belátjuk azt is, hogy az:

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b} + \underline{b}^* t$$

$$\underline{p}^T \underline{x} = \text{extrém}$$

feladat megoldását, /amikor a duál célfüggvény parametrikus/, duálpárjának megoldásával nyerjük, azaz:

$$\underline{u} \geq 0$$

$$\underline{A}^T \underline{u} \leq \underline{p}$$

$$(\underline{b} + \underline{b}^* t) \underline{u} = \min.$$

ami viszont maximum feladatként írható fel, azaz:

$$\underline{u} \geq 0$$

$$-\underline{A}^T \underline{u} \leq -\underline{p}$$

$$(-\underline{b} - \underline{b}^* t) \underline{u} = \max.$$

amelyet az eddig tanultak felhasználásával már meg tudunk oldani.

7.2. Egészértékű /integer/ programozás

A gazdasági jelenségek lehetnek folytonos és diszkrét jellegűek. Az eddigiekben ismertetésre került programozási modellekben a változókra vonatkozólag kizárólag az volt a kikötésünk, hogy azok csak nemnegatív értéket vehetnek fel. Ennélfogva megengedtük, hogy a változók nemnegatív tört értékeket is felvegyenek, vagyis azokat folytonos változóknak tekintettük. A gazdasági programozás során azonban nem mindig engedhető meg a változók folytonos értéke, hanem gyakran az is kívánalomként merül fel, hogy a változók csak egész értéket vehetnek fel.

Gondoljunk csak arra, amikor a termelési szerkezetet és a termelési forrásokat egyidejűleg, egymással szoros kapcsolatban kívánjuk optimalizálni. Ilyenkor a gépszükségletet /gépparkot/ is optimalizáljuk. Nem javasolhatjuk azonban, hogy a vállalat valamely géptípusból például 22,35 db-ot szerezzen be, hanem vagy 22 vagy 23 db gép beszerzését javasolhatjuk. A megoldásként kapott eredmény utólagos fel- vagy lefelé történő kerekítése jelentősen ronthatja az eredményt. Megoldhatjuk azonban a feladatot, ha eleve előírjuk, hogy ezek a változók kizárólag egész értéket vehetnek fel. Ilyenkor az optimumot eleve úgy állítjuk elő, hogy ennek az előírásnak eleget teszünk.

Hasonlóképpen merülhet fel, hogy az állattenyésztési változókra előírjuk az egészértékűséget. A korszerű állattenyésztési telepek ugyanis meghatározott méretekre készülnek. Ha ezek között választhatunk, akkor előírjuk, hogy azok valamelyikét létesíthetjük, vagy nem létesíthetjük, de létesítésük esetén azokat az adott méret szerint kell megépíteni. Ilyenkor általában a változó értéke csak 0 vagy 1 lehet, azaz 0 - 1 értékű változóról van szó.

Ha a modellben szereplő valamennyi változóra előírjuk az egészértékűséget, akkor tiszta esetről, vagyis tiszta diszkrét feladatról beszélünk, ha viszont csak változók egy része egészértékű, akkor a feladatot vegyes feladatnak, vagy vegyes egészértékű feladatnak nevezzük.

A tiszta diszkrét feladatot:

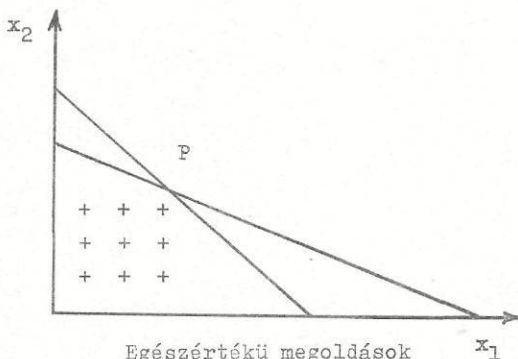
$$\max. \left\{ p^T x \mid x \in \mathbb{I}_n^+, A x \leq b \right\}$$

formában, a vegyes egészértékű feladatot pedig a:

$$\max. \left\{ p_1^T x + p_2^T y \mid x \in \mathbb{E}_{n_1}^+, y \in \mathbb{I}_{n_2}^+, A_1 x + A_2 y \leq b \right\}$$

általános formában írhatjuk le. /Természetesen max. helyett min. is szerepelhet, ha minimumfeladatról van szó, ill. mint tudjuk, a minimumfeladat átalakítható maximumfeladattá./

Az első esetben a lehetséges megoldások halmazát /I/ az n dimenziós euklidészi tér nem negatív rácspontjaiból konstruált y vektorok adják, azaz azok a pontok, amelyekhez a változók egész értékű koordinátái tartoznak és természetesen kielégítik az $Ax \leq b$ feltételeket és a célfüggvényre vonatkozó előírásunkat, az alábbi ábra szerint:



Egészértékű megoldások

/rácspontok/ 17. ábra

Az ábrán megfigyelhetjük, hogy P a folytonos modell optimális megoldása, nem optimális megoldása viszont az egészértékű modellnek, mert nem rácspont, azaz a P ponthoz a változók nem egészértékűek tartoznak. Olyan megoldást kell tehát keresnünk, amelyben a változók egészértékűsége teljesül, de természetesen a lehetséges legnagyobb /maximum/ célfüggvényérték mellett.

A második esetben vegyes egészértékű feladatról van szó. Most a lehetséges megoldások L halmazát az n_1 dimenziós euklidészi tér azon nem-negatív x vektoraiból, és az n_2 dimenziós euklidészi tér azon nem-negatív y rácspontjaiból konstruált $\{x, y\}$ vektorpárok alkotják, amelyek kielégítik az $Ax, y \leq b$ relációkat. Ezen az L halmazon keressük a maximumát az adott $f(x, y)$ célfüggvénynek, amelyről felteesszük, hogy korlátozott az L felett.

Az egészértékű feladatot megfogalmazhatjuk egyszerűen úgy is, hogy az:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{p}^T \underline{x} &= \max. \end{aligned}$$

feladatot adjuk meg, de előírjuk, hogy az $\underline{x}$ vektor egészértékű koordinátáira kell a feladatot megoldani. Az x_j változók egészértékűségét $[x_j]$ szimbólummal jelöljük. /Hasonló értelemben járunk el vegyes feladat esetén, amikor a változóknak egy részére írjuk elő az egészértékűséget. A továbbiakban általában csak a tiszta esettel foglalkozunk, hiszen ennek ismeretében a vegyes feladat is megoldható./

Hogyan oldjuk meg a feladatot? A megoldás többféle módszerrel is lehetséges. Arra nincs lehetőségünk, hogy valamennyi módszerrel részletesebben foglalkozzunk.

Ha az előbbi ábrát tekintjük, látjuk, hogy a folytonos megoldás optimuma /P/ nem rácspont. A halmazt szűkíteni kell. Ezt úgy végezzük, hogy alkalmas módon megválasztott új korlátozó feltételek bevezetésével az eredeti halmazból lemetszünk egy bizonyos részt. E metszéseket mindaddig folytatjuk, amíg egészértékű megoldáshoz nem jutunk. Ezt az eljárást metszési módszernek nevezik, amelyet Gomory dolgozott ki.

A feladatot gyakorlatilag úgy oldjuk meg, hogy az egészértékű megoldás érdekében a feladathoz egy segédfüggvényt csatolunk, azaz:

$$^{\circ}z = \sum (x_j - [x_j]) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

és az optimális megoldást az $[x_j]$ értékekre a:

$$^{\circ}z = \sum (x_j - [x_j]) = \min.$$

feltételes szélső értékkel keressük.

A feladat megoldását szimplex módszerrel a Gomory által kidolgozott eljárás szerint egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be.

Legyen feladatunk a következő: /1. következő oldalon/

Tudjuk, hogy $[x_j]$ az x_j változó egészértékét jelöli.

/A megoldásra a Gomory-féle eljárást fogjuk alkalmazni, előtte azonban néhány fogalmat kell megismernünk./

$$\underline{x} \geq 0 \quad \text{és} \quad [x_j]$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & + & 2x_4 & \leq 16 \\ & 2x_2 - x_3 & + & 3x_4 & \leq 20 \\ x_1 & & +4x_3 & + & x_4 \leq 8 \\ \hline 3x_1 + x_2 + x_3 & + & 5x_4 & = & \text{max.} \end{array}$$

Egészrész függvény /entier-függvény/ /ejtsd: antyie-függvény/. Valamely valós szám egész részén azt az $[a]$ szimbólummal jelölt /antye "a"/ maximális nagyságu számot értjük, amely eleget tesz az:

$$[a] \leq a \quad \text{kikötésnek is.}$$

Pl:

$$\begin{aligned} [5] &= 5 \\ [-4] &= -4 \\ [0,2] &= 0 \\ [-0,2] &= -1 \\ [4/3] &= 1 \\ [-4/3] &= -2 \end{aligned}$$

Az "a" valós szám tört részén az:

$$a - [a]$$

kifejezés által definiált számot értjük.

Ha az így nyert tört részt "t"-vel jelöljük, erre nézve az adott definíció alapján feltétlenül teljesül a:

$$0 \leq t < 1 \quad \text{reláció.}$$

Most bevezetjük a Gomory-féle metszet fogalmát. Az adott:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$$

egyenlőtlenséghez rendelt Gomory-féle metszeten a:

$$t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n \geq t$$

egyenlőtlenséget értjük, amelyekben a $t_1, t_2, \dots, t_n$ nem-negatív skalárok, az $a_1, a_2, \dots, a_n$ együtthatók tört részét $(a - [a])$ jelentik, a t pedig a b tört részét $(b - [b])$.

Oldjuk meg tehát az előbbi feladatot:

A feladatot első lépésben /szokás mondani I. interakciónak is/ megoldjuk folytonos modellként, a következők szerint:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	0	0	2	16
u_2	0	2	-1	3	20
u_3	1	0	4	1	8
-z	3	1	1	5	0

	x_1	x_2	x_3	u_2	
u_1	-1	-4/3	-2/3	-2/3	8/3
x_4	0	2/3	-1/3	1/3	20/3
u_3	1	-2/3	13/3	-1/3	4/3
-z	3	-7/3	8/3	-5/3	-100/3

	u_3	x_2	x_3	u_2	
u_1	-1	-2/3	-11/3	-1/3	4/3
x_4	0	2/3	-1/3	1/3	20/3
x_1	1	-2/3	13/3	-1/3	4/3
-z	-3	-1/3	-31/3	-2/3	-37 $\frac{1}{3}$

Amennyiben most x_1 -nek nem kellene egészértékűnek lenni, megkaptuk volna az optimális megoldást. Ugyancsak optimális lenne a megoldásunk, ha minden x_j érték egészértékű volna. Mivel azonban x_1 és x_4 nem egészértékű, folytatni kell a számolást.

Tekintsük először az x_1 változót.

Képezzük az x_1 -hez rendelt Gomory-féle feltételt az utolsó szimplex táblázat x_1 -hez tartozó sorából, azaz:

$$(1 - [1])u_3 + \left(-\frac{2}{3} - \left[-\frac{2}{3}\right]\right)x_2 + \left(\frac{13}{3} - \left[\frac{13}{3}\right]\right)x_3 + \left(-\frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{3}\right]\right)u_2 \geq \frac{4}{3} - \left[\frac{4}{3}\right]$$

azaz az x_1 sorban lévő együtthatók és egészértékeik közötti különbségnek a hozzájuk tartozó változókkal alkotott szorzatát képezzük, majd ezek összegét, és azt keressük, hogy e segédcélfüggvény értéke ne haladja meg az $x_i - [x_i]$ értékeket. /Vagyis tulajdonképpen a $z' = \sum (x_i - [x_i]) = \min.$ feltételes szélső értékkel keressük az optimális megoldást./

Igy tehát kapjuk, hogy:

$$(1 - 1)u_3 + \left(-\frac{2}{3} + 1\right)x_2 + \left(\frac{13}{3} - 4\right)x_3 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)u_2 \geq \left(\frac{4}{3} - 1\right), \quad \text{vagyis:}$$

$$0 \cdot u_3 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}u_2 \geq \frac{1}{3}$$

ezt -1-gyel beszorozva, a reláció iránya megváltoztatható, tehát:

$$0 \cdot u_3 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}u_2 \leq -\frac{1}{3}$$

Az utolsó szimplex táblázatban iktassunk be egy sort, - jelöljük ezt ξ_1 -gyel /kszi/. Tehát:

	u_3	x_2	x_3	u_2	b
u_1	-1	-2/3	-11/3	-1/3	4/3
x_4	0	2/3	-1/3	1/3	20/3
x_1	1	-2/3	13/3	-1/3	4/3
ξ_1	0	-1/3	-1/3	-2/3	-1/3
-z	-3	-1/3	-31/3	-2/3	-37 1/3

A duál szimplex módszerrel számolunk tovább. Következő táblázatunk:

	u_3	ξ_1	x_3	x_2	b
u_1	-1	-2	-3	1	2
x_4	0	2	-1	-1	6
x_1	1	-2	5	1	2
x_2	0	-3	1	2	1
-z	-3	-1	-10	0	-37

Tehát optimális táblázathoz jutottunk, a feladatot megoldottuk. A megoldás a táblázatból leolvasható. Látjuk, hogy a változókra egészértékű megoldást nyertünk.

Természetesen a Gomory-féle eljárást mindaddig folytatjuk, ameddig az egészértékűség feltétele nem teljesül /ha van egyáltalán megoldás/.

Megjegyzés

A probléma bonyolultabb vegyes feladat esetén.

Általában a duális szimplex módszert célszerű alkalmazni.

A Gomory-féle metszési módszer gyakorlati alkalmazásánál számítástechnikai nehézségek léphetnek fel, s nagyméretű feladatok megoldásánál kerekítési hibák miatt igen megbízhatatlan eredményre vezethet. Ezért az utóbbi időkben előtérbe kerültek a kombinatorikus módszerek. Ezeknél döntő szerepet játszanak bizonyos kombinatorikus megfontolások.

Néhány szót a kombinatorikus módszerekről

Előnyük

a./ Nemcsak lineáris típusú feladatok megoldására alkalmasak, hanem egyéb, nemfolytonos problémák megoldására is.

b./ Kerekítési hibákra nem reagálnak olyan érzékenyen, mint a metszési módszer.

c./ A kombinatorikus módszerek előnyei leginkább a 0 - 1 értékű változókkal való számolásnál domborodnak ki. Ez nem jelent lényeges megszorítást, hiszen bármely diszkrét változó vizsgálata visszavezethető 0 - 1 értékű változókra, pl. géptechnológia 1, 2, 3, 4, stb. változatban, illetve a változók száma csökkenthető, ha azt a bináris számrendszerben írjuk fel.

Legyen feladat a következő /hátizsák probléma/

Egy gyalogturázó n különböző tárgyból kívánja felszerelését kiválasztani, úgy, hogy a lehető legnagyobb értéket vihesse magával. Korlátozó feltétel csupán az összsúly / amit képes elvinni/.

A tárgyak nem darabolhatók.

Feladat:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad x_j = [x_j]$$

$$\text{Súly } 16x_1 + 15x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 5x_5 \leq 25 \text{ kg}$$

$$\text{Érték } 20x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 8x_5 \rightarrow \max.$$

A feladat értelmében /lexikografikus sorrendben felírva/ az alábbi lehetőségek adódnak /az ötféle változó közül melyik szerepel vagy nem szerepel a csomagban/:

[00000]	(0)	[10000]	(20)
[00001]	(8)	[10001]	(28)
[00010]	(10)	[10010]	(30)
[00011]	(18)	[10011]	
[00100]	(8)	[10100]	
[00101]	(16)	[10101]	

[00110]	(18)	[10110]
[00111]		[10111]
[01000]	(15)	[11000]
[01001]	(23)	[11001]
[01010]	(25)	[11010]
[01011]		[11011]
[01100]		[11100]
[01101]		[11101]
[01110]		[11110]
[01111]		[11111]

Az elfogadható megoldásokat /amelyek a súlykorlátnak eleget tesznek/ aláhúztuk, s kiszámítottuk és mellé írtuk a hozzá tartozó célfüggvény értékeket.

Tehát

Összesen 32 féle megoldás közül 13 féle megoldást találunk, amely a feltételeknek /súlykorlátnak/ eleget tesz.

A legnagyobb célfüggvény érték 30 az 1,0,0,1,0 vektornál található, tehát az első és negyedik tárgyat célszerű a hátizsákba pakolni, így a súly $16+9 = 25$ kg és az elszállítható érték $20+10 = 30$.

Ez az eljárás azonban a gyakorlatban nem alkalmazható. Ugyanis, ha a változók száma 50 /s ez 0 - 1 értékű feladatoknál nem is nagy feladat/, az összes lehetőségek száma 10^{15} ami már igen nagy szám. Ha egy nagyteljesítményű számolóberendezés másodpercenként 1000 megoldást tudna számbavenni, akkor is több, mint 25000 évig tartana a vizsgálat.

Ezért közvetett leszámítás szoktak alkalmazni. Itt a lexikografikus eljárás helyett egy irányított gráf, pontosabban egy irányított fa segítségével végezzük el a rendezést. Ez lehetővé tesz alkalmas kitérőket, leágaztatásokat.

A módszer továbbfejlesztéseként tekinthető a szétválasztás és korlátozás módszere. /Ezeket Krekó B. Optimumszámítás c. könyvében /Közg. és Jogi Könyvkiadó, 1972./ az érdeklődők megtalálják./

Vegyes feladatok megoldhatók particionálással is, amelyről a fenti könyvből szintén tájékozódhatunk.

Gyakorlati számítások során, ha vegyes feladattal állunk szemben, és az egészértékű változók száma nem nagy, vagy tiszta egészértékű feladatnál nem nagyszámú változó esetén alkalmazható a következő megoldás:

a./ Megoldjuk a feladatot folytonos problémaként.

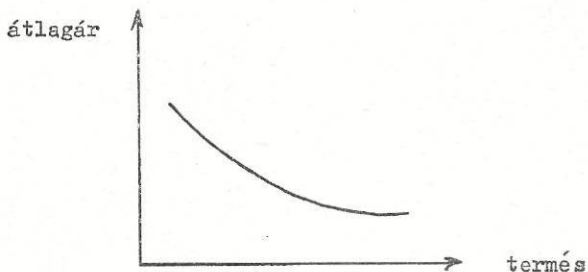
b./ A kapott eredmény környékén egészértékű megoldássorozatot számolunk. Illyenkor a változók egészértékűségét egyenletekkel írjuk elő a folytonos megoldás környékén. Ezt az eljárást általában akkor célszerű alkalmazni, ha az adott számítógéphez egészértékű megoldó programmal még nem rendelkezünk.

7.3. Nemlineáris programozás

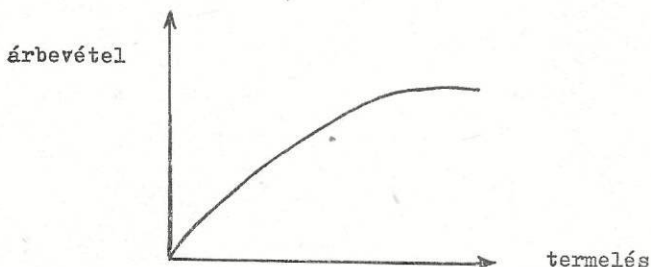
Eddigi vizsgálataink során mind a feltételeket, mind pedig a célfüggvényt lineáris formában adtuk meg, vagyis azzal a feltételezéssel éltünk, hogy mind a feltételek, mind a célfüggvény a változók lineáris függvénye. A lineáris kapcsolatok feltételezése viszont már önmagában is a valóságos gazdasági problémák leegyszerűsítését jelenti. A gazdasági problémák általában sokkal bonyolultabbak és gyakran nem tudjuk azokat lineáris modellel jellemezni.

Gondoljunk csak egyes termékek árának alakulására. A primőr zöldségfélék ára kezdetben, - amikor még azokból kevés található a piacon - igen magas, majd később - ahogyan a piaci kínálat növekszik - egyre csökken. A paradicsom ára kezdetben - amikor még csak üvegházi paradicsom található a piacon - 180-200 Ft is lehet kg-onként, majd az árak állandó csökkenése tapasztalható /esetenként lehetséges természetesen hullámlás is/, s végül 10-20 Ft-ra is lecsökken, függően a terméstől. Később - szezon végén - újabb emelkedés tapasztalható. Ha pl. a paradicsom - vagy hasonló termékek - évi áru-termelését és átlagárát összehasonlítanánk, azt tapasztalnánk, hogy az átlagár nagymértékben függ a termelt mennyiségtől; amikor kevesebb terem, akkor drágább, bővebb termés esetén olcsóbb. Az éveket a termésmennyiség szerint sorba rendezve, tendenciájában az alábbi összefüggést figyelhetnénk meg /18. ábra/. /Lásd következő oldalon./

Az egységár /vagy átlagár/ csökkenése következtében nyilvánvaló, hogy a paradicsomtermelésből eredő árbevétel sem arányos a termeléssel, vagyis a termésmennyiség és az árbevétel között nem lineáris a kapcsolat, hanem csökkenő, úgynevezett degresszív összefüggés a jellemző, amit a 19. ábra szemléltet.

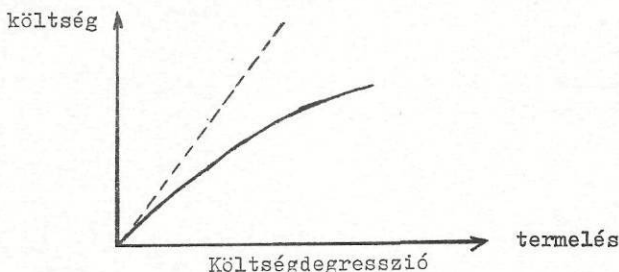


Az áralakulás lehetséges tendenciája
18. ábra



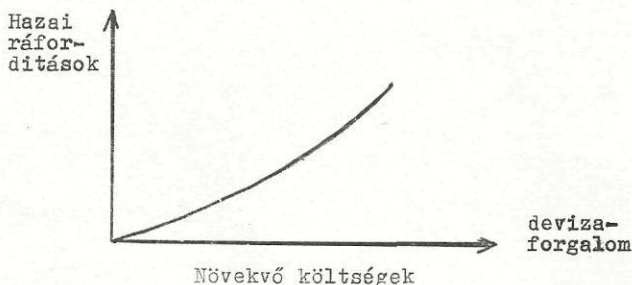
Az árbevétel lehetséges tendenciája
19. ábra

De a termelési költségek sem arányosan változnak a termelt termékmennyiséggel. Például amíg nem szükséges új beruházás, addig a termelés mennyiségének növekedésével a termésművelet költség csökkenő, ezért az összes költség növekedése lassabb ütemű a termelés növekedésénél, azaz ilyenkor költségdegresszióval találkozunk, a 20. ábra szerint. /Lásd következő oldalon./



20. ábra

Előfordulhat ennek az ellenkezője is. Ha például az export növelésére törekszünk - éppen a kínálat növekedésének hatásaként előálló árcsökkenés miatt - a devizaszerzés növekedése a hazai ráfordítás gyorsuló növekedését igényli a 21. ábra szerint:



21. ábra

Nem nehéz belátni, hogy az árbevétel és a költségfüggvény, valamint más tényezők hatásaként a termelés és a jövedelem között sem lineáris a kapcsolat. De a munkaerőfelhasználás, a gépfelhasználás és az anyagfelhasználás sem arányos a termelés volumenével.

A gazdasági vizsgálatok során tehát általában nemlineáris összefüggésekkel állunk szemben.

Ha a matematikai programozást az:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1 / \underline{x} / \leq 0 \\ \phi_2 / \underline{x} / \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \phi_m / \underline{x} / \leq 0 \end{array} \right\} ; \quad f / \underline{x} / = \max.$$

általános formában fogalmazzuk meg, ez a felírasmód már nem jelent semmi megszorítást. Mivel nem adtuk meg a konkrét függvényt, csak a függvénykapcsolatot jeleztük, ez a modell éppugy jelenthet lineáris programozási modellt, mint valamilyen nemlineáris programozási modellt.

Mielőtt néhány nemlineáris programozási feladatot konkrétan megismerünk, az előbbiek ellenére is célszerű kiemelni a lineáris programozás jelentőségét a következők miatt:

a./ Elméletileg a lineáris programozás van leginkább kidolgozva.

b./ A különféle nemlineáris programozási feladatok megoldására kidolgozott módszerek legtöbbje valamilyen formában szintén a lineáris programozást használja.

c./ Elméleti kidolgozása és egyszerű kezelhetősége miatt a gyakorlatban leginkább a lineáris programozás kerül alkalmazásra.

7.3.1. Konvex és konkáv programozás

Emlékezzünk, hogy a 2.2.10 pontban a vektorok és mátrixok lineáris kombinációival kapcsolatban azt mondtuk, hogy ha a skalárszorozók összege egy, akkor konvex lineáris kombinációról beszélünk.

Az $\underline{x}_1 \in E_n$ és $\underline{x}_2 \in E_n$ pontok által meghatározott szakaszon tehát azt az $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ szimbólummal jelölt szakaszt értjük, amely tartalmazza az $\underline{x}_1$ és az $\underline{x}_2$ összes konvex lineáris kombinációt. Ezt szimbólikusan a következőképpen írhatjuk fel:

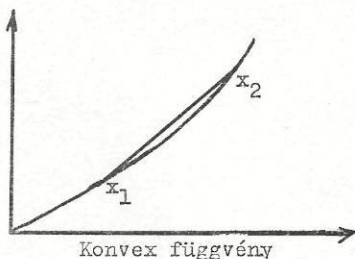
$$/\underline{x}_1, \underline{x}_2/ = \{ \underline{x} \mid \underline{x} = k_1 \underline{x}_1 + k_2 \underline{x}_2, k_1 \geq 0$$

$$k_2 \geq 0, k_1 + k_2 = 1 \} .$$

Egy f $/\underline{x}/$ függvényt konvexnek nevezünk, ha tetszőleges $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ esetén:

$$\frac{f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)}{2} \leq \frac{f(\underline{x}_1) + f(\underline{x}_2)}{2} \quad \text{teljesül.}$$

Ez egydimenziós függvény esetén azt jelenti, hogy a függvénynek megfelelő görbe két tetszőleges pontját összekötő egyenes szakasz minden felező pontja a görbe felett van, mint ezt a 22. ábra szemlélteti.



22. ábra

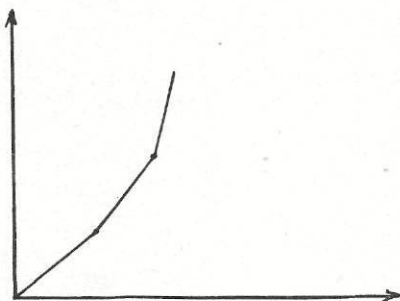
Természetesen ugyanez igaz a két tetszőleges pontot összekötő teljes szakaszra is (ami az ábrából is látható).

Ha a függvény bármely két pontját véve fel, mindig a:

$$\frac{f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)}{2} < \frac{f(\underline{x}_1) + f(\underline{x}_2)}{2}$$

szigorú egyenlőtlenség érvényesül, szigorúan konvex függvényről beszélünk. Ugyanakkor a 23. ábrán látható szakaszonként lineáris függvény konvex, de nem szigorúan konvex, hiszen a függvényen olyan pontok is felvehetők, ahol a:

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



Szakaszonként lineáris függvény

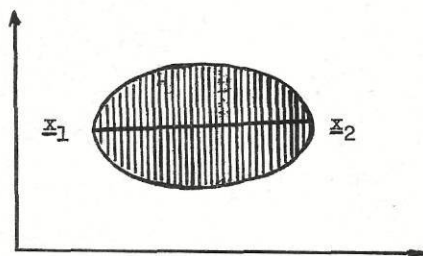
23. ábra

Egy függvény /szigorúan/ konkáv, ha negatívja /szigorúan/ konvex. A lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv.

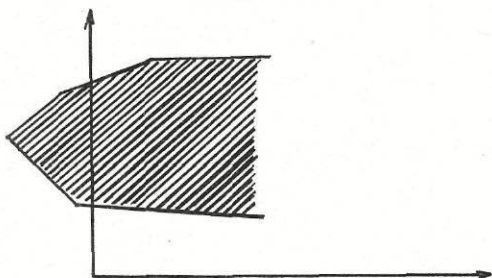
Az $\Phi(x) \leq 0$ feltételekben szereplő $\Phi(x)$ függvényekről konvex, vagy konkáv programozási feladat esetében feltételezzük, hogy konvex függvények. Ez a feltevés biztosítja, hogy a lehetséges programok K halmaza konvex halmaz. Ez elsősorban a matematikai kezelhetőség érdekében fontos, de gyakorlati szempontból nem jelent megkorlátozást. Ha az $\Phi(x)$ függvények lineárisak, abban az esetben a lehetséges programok halmaza konvex polihedrikus halmaz, ami kétváltozós esetben sokszöget jelent.

A 24-26. ábrák a korlátos, a nemkorlátos konvex, valamint a nemkonvex halmazokra mutatnak be példát. /Lásd következő oldalon./

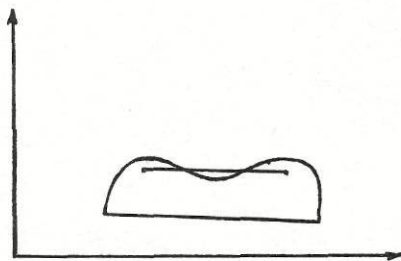
A lehetséges programok halmazának konvexitására vonatkozó állítás könnyen belátható. Ha ugyanis x_1 és x_2 -re:



Korlátos konvex halmaz
24. ábra



Nem korlátos konvex halmaz
25. ábra



Nemkonvex halmaz
26. ábra

$$\phi_1/x_1/ \leq 0, \quad \phi_2/x_1/ \leq 0, \dots, \quad \phi_m/x_1/ \leq 0, \text{ és a}$$

$$\phi_2/x_2/ \leq 0, \quad \phi_2/x_2/ \leq 0, \dots, \quad \phi_m/x_2/ \leq 0 \text{ teljesül, akkor:}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - \text{re az } \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$$

függvények konvexitása folytán:

$$\phi_1 \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \frac{\phi_1/x_1/ + \phi_1/x_2/}{2} \leq \frac{0 + 0}{2} = 0, \text{ vagyis az}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \text{ is lehetséges program.}$$

Konvex programozási feladatban az $f/x/$ célfüggvény konvex, vagyis feladat a konvex függvény maximalizálása, amivel viszont egyenértékű a konkáv függvény minimalizálása. Hasonlóképpen konkáv feladatban konkáv célfüggvényt maximalizálunk, vagy ezzel egyenértékű a konvex célfüggvény minimalizálása.

Amikor lineáris programozási feladatot szimplex módszerrel oldunk meg, úgy járunk el, hogy a feltételek által meghatározott konvex poliéder szomszédos csúcspontjain haladunk végig oly módon, hogy mindig a célfüggvény szempontjából jobb, szomszédos csúcst keressük. Ha ilyen már nem találunk, az adott csúcsponthoz tartozó program optimális program. /A lehetséges programok között nem találunk olyat, amely a kérdéses programnál jobb volna a célfüggvény szempontjából. /Az optimum tehát lineáris programozás esetén mindig csúcspontban van, mégpedig olyan csúcspontban, amelynél a szomszédos csúcspontok a célfüggvény szempontjából nem jobbak. Ebben az esetben tehát az a program, amely környezetéhez képest optimális /lokális optimum/, az összes lehetséges programok között is optimális /globális optimum/. Elegendő volt tehát az optimum keresése során a poliéder határán maradni.

Általános esetben konvex halmazoknál csúcspont helyett extremális pontokat vizsgálunk. A konvex halmaz extremális pontján értjük az olyan pontot, amely nem belső pontja egyetlen, a halmaz pontjaiból álló szakasznak sem. Ilyenek a konvex

sokszög csúcspontjai, a kör kerületi pontjai, stb.

Egy adott kovex halmaz tetszőleges pontja előállítható extrémális pontjainak konvex lineáris kombinációjaként. E szerint egy tetszőleges $\underline{x}$ ponthoz felvehetők olyan $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_p$ extrémális pontok és nemnegatív $k_1, k_2, \dots, k_p$ / $k_1 + k_2 + \dots + k_p = 1$ / skalárok, hogy:

$$\underline{x} = k_1 \underline{x}_1 + k_2 \underline{x}_2 + \dots + k_p \underline{x}_p$$

teljesüljön. Például a 24. ábrán.

$$\underline{x} = \frac{1}{2} \underline{x}_1 + \frac{1}{2} \underline{x}_2$$

Egyszerűen lehet bizonyítani azt is, hogy a konvex $f/\underline{x}/$ cél-függvény esetén az optimum extrémális pontban is elérhető. Ha ugyanis $\underline{x}$ optimális program, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_p$ a lehetséges programok konvex halmazának extrémális pontjai és $k_1, k_2, \dots, k_p$ nemnegatív skalárok, akkor:

$$\underline{x} = k_1 \underline{x}_1 + k_2 \underline{x}_2 + \dots + k_p \underline{x}_p \quad \text{és}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = 1$$

és a konvexitás definíciójából adódik, hogy:

$$f/\underline{x}/ = f/k_1 \underline{x}_1 + k_2 \underline{x}_2 + \dots + k_p \underline{x}_p/ \leq k_1 f/\underline{x}_1/ + k_2 f/\underline{x}_2/ + \dots + k_p f/\underline{x}_p/$$

azaz nemcsak a görbe két tetszőleges pontja által meghatározott szakasz, hanem a görbe tetszőleges pontjai által meghatározott sokszög is teljes egészében a görbe felett fekszik.

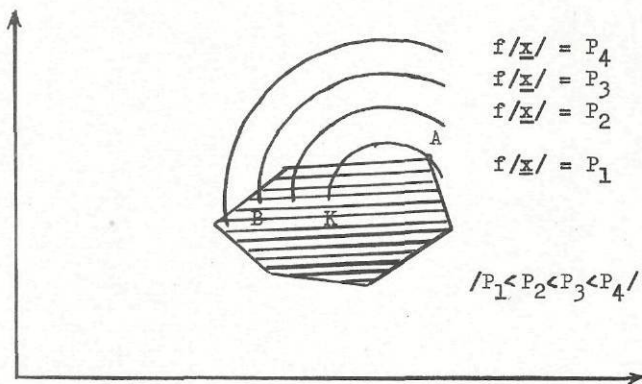
Ha viszont az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_p$ extrémális pontoknak megfelelő cél-függvényértékek kisebbek lennének, mint $f/\underline{x}/$, vagyis $f/\underline{x}_1/ < f/\underline{x}/$, $f/\underline{x}_2/ < f/\underline{x}/$, ..., $f/\underline{x}_p/ < f/\underline{x}/$, akkor az előbbi egyenlőtlenségből következne, hogy:

$$f/\underline{x}/ < k_1 f/\underline{x}_1/ + k_2 f/\underline{x}_2/ + \dots + k_p f/\underline{x}_p/ < k_1 f/\underline{x}/ + k_2 f/\underline{x}/ + \dots + k_p f/\underline{x}/ = f/\underline{x}/$$

ami ellentmondás.

Hasonló okoskodással lehet belátni, hogy konkáv célfüggvény esetén a lokális optimumot szolgáltató program egyszerűs mind globális optimum is /és szigorúan konkáv célfüggvény esetén csak egy optimális program létezik /.

A 27. ábrán K konvex sokszög adja a lehetséges programok halmazát, s keressük az $f/\underline{x}/$ konvex függvény maximumát adó programot. A célfüggvény nívóvonalait megrajzolva, látjuk, hogy az A pontban egy lokális optimummal rendelkezünk, /a lokális optimum nem feltétlenül jelent globális optimumot/, azonban a globális optimumot a B pontban találjuk /27. ábra/.

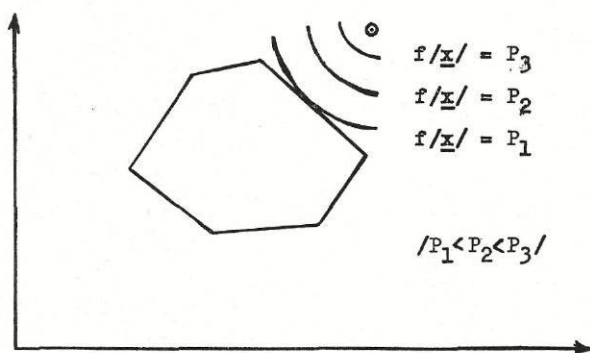


Konvex programozás

27. ábra

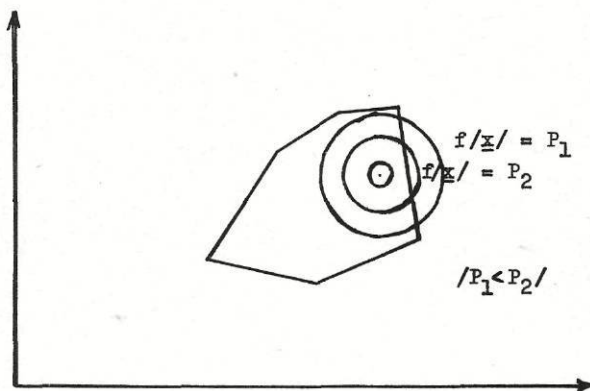
A 28. és 29. ábra a konkáv maximalizálás két esetét mutatja be. Egyik esetben a célfüggvény abszolút maximumát /ha semmilyen korlátozó feltétel nem volna/ a lehetséges programok halmazán kívül találjuk. Ekkor az optimum a lehetséges programokat tartalmazó konvex sokszög határán van, ha nem is feltétlenül csúcspontban. A másik esetben a célfüggvény abszolút maximumát belső pontban találjuk. Ilyenkor az optimum is belső pontban van.

A gyakorlatban általában lineáris feltételek mellett konvex célfüggvény maximalizálására, vagy konkáv célfüggvény minimalizálására kerül sor.



Konkáv programozás

28. ábra



Konkáv programozás

29. ábra

Ilyen feladatok megoldásának egzakt módszere, amikor meghatározzuk a lineáris feltételek által meghatározott konvex poliéder összes csúcspontjait, majd kiszámítva az ezekhez tartozó célfüggvényértékeket, kiválasztjuk azt a csúcspontot, amelyhez a legnagyobb célfüggvényérték tartozik. Ez lesz az optimális program. Mivel azonban viszonylag kevés feltétel mellett is nagyon sok a csúcspontok száma, ez az eljárás nehézkes.

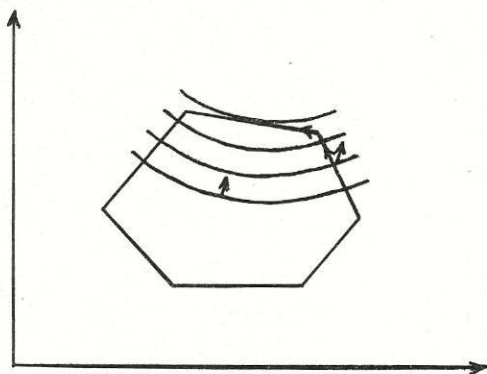
A gyakorlatban inkább azt az eljárást követik, hogy véletlenszerűen választanak egy csúcspontot. Az ehhez tartozó szimplex táblázat alapján transzformációkat végeznek /haszonlóan, mint a lineáris programozásnál, áttérés szomszédos csúcra/, mindaddig, amíg a célfüggvény értéke javítható. Így egy lokális optimumhoz jutunk. Ezt a folyamatot többször megismételve, a kapott lokális optimumok közül kiválasztjuk a legjobbat, s ezt a programot optimálisnak fogadjuk el. Hogy a folyamatot hányszor ismételjük meg, az függ a feltételek és a változók számától.

A konkáv maximalizálási feladatra kidolgozott általános módszerek általában közelítő módszerek. /Kivéve a kvadrátikus célfüggvény esetét, amelyre véges eljárások is vannak./ E módszerek egy részénél egy lehetséges programból indulunk ki, majd keresünk egy olyan irányt, amely mentén haladva a program javítható, azaz a célfüggvény értéke növelhető. Egy ilyen irány mentén addig a pontig megyünk, ameddig a célfüggvény értéke növekszik, vagy amelyen túl elhagynánk a lehetséges programok halmazát. Ebből a pontból ismét keresünk egy olyan irányt, amely irányban haladva a célfüggvény növelhető. Ezt addig folytatjuk, amíg találunk olyan irányt, amely mentén a célfüggvény értéke növelhető. Ha ilyen nincs, az adott pont optimális megoldás. A továbbhaladás irányának meghatározása vagy egy lineáris programozási feladat megoldását igényli, vagy alkalmas szimplex táblából olvasható le. A módszert a hatékony irányok módszerének nevezik. Szemléltetését a 30. ábrán mutatjuk be. /Lásd következő oldalon./

7.3.2. Konvex és konkáv programozási feladatok megoldása szakaszonként linearizált modellel

Olyan programozási feladatok esetén, amikor a feltételek lineárisak, de a célfüggvény konvex, vagy konkáv, egyszerűen tudunk közelítően kielégítő megoldást nyerni a következő eljárással:

Helyettesítsük az f_j/x_j konvex /vagy konkáv/ függvényt egy hur poligonjával. E poligon minden szakaszához bevezetünk



Hatékony irányok módszere

30. ábra

egy-egy új változót, amikor is az f_j függvény a következő formát nyeri:

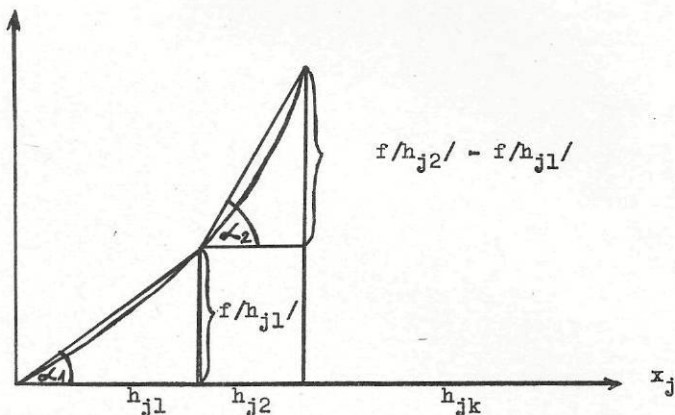
$$f_j \approx \begin{cases} m_{j1}x_{j1}, & \text{ha } 0 \leq x_j \leq h_{j1}, \text{ ahol } m_{j1} = \frac{f/h_{j1}}{h_{j1}} = \tan \alpha_1, \\ m_{j1}h_{j1} + m_{j2}x_{j2}, & \text{ha } h_{j1} \leq x_j \leq h_{j2}, \text{ ahol } m_{j2} = \frac{f/h_{j2} - f/h_{j1}}{h_{j2} - h_{j1}}, \\ \vdots \\ m_{j1}h_{j1} + m_{j2}h_{j2} + \dots + m_{jk}x_{jk}, & \text{ha } h_{jk-1} \leq x_j \leq h_{jk}, \end{cases}$$

Szemléletesen mutatja ezt a 31. ábra. /Lásd következő oldalon./

Természetesen:

$m_{j1} \leq m_{j2} \leq \dots \leq m_{jk}$, ha f_j/x_j konvex függvény /alulról konvex függvény/ és

$m_{j1} \geq m_{j2} \geq \dots \geq m_{jk}$, ha f_j/x_j konkáv függvény /felülről konvex/.



Szakaszonkénti linearizált konvex függvény

31. ábra

Az: $\underline{x} \geq \underline{0}$

$$\begin{aligned} & \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b} \\ & \sum_{j=1}^n f / x_j / = \text{extrém} \end{aligned}$$

feladatban most az x_j változó az $x_{j1} + x_{j2} + \dots + x_{jk}$ szakaszváltozók összegével helyettesíthető az $f_j / x_j /$ cél-függvény pedig az $m_{j1}x_{j1} + m_{j2}x_{j2} + \dots + m_{jk}x_{jk}$ összeggel, hiszen ha az x_j változó bekerül az optimális programba, akkor vagy $x_j \leq h_{j1}$, s akkor $x_j = x_{j1}$, vagy $h_{j1} \leq x_j \leq h_{j2}$, s akkor $x_j = h_{j1} + x_{j2}$, és így tovább, s ekkor a célfüggvény értéke $m_{j1}x_{j1}$ illetve $m_{j1}h_{j1} + m_{j2}x_{j2}$, stb.

A feladat így lineáris programozási feladattá alakul át, amelyet a szimplex módszer valamelyikével meg tudunk oldani, s ezáltal az eredeti feladat egy közelítő megoldását kapjuk.

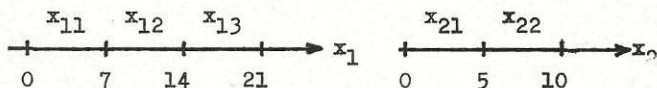
Példaként tekintsünk két egyszerű feladatot:

Legyen feladatunk az:

$$\begin{aligned}
 x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\
 x_1 + 3x_2 &\geq 21 \\
 2x_1 + 4x_2 &\geq 40 \\
 \hline
 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 &= \min.
 \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg először a feladat értelmezési tartományát. A $2x_1 + 4x_2 = 40$ feltételből következik, hogy ha $x_2 = 0$, akkor $x_1 \leq 20$ és ha $x_1 = 0$, akkor $x_2 \leq 10$ és az $x \geq 0$ miatt $0 \leq x_1 \leq 20$ és $0 \leq x_2 \leq 10$.

Az értelmezési tartományokat bontsuk fel 3, illetve 2 szakaszra a következők szerint:



A $3x_1^2$ és az $x_2^2 + 2x_2$ konvex függvények, amelyek meredeksége az x_1 és x_2 résztartományokban a következő:

x_1	0	7	14	21
f/x_1	0	147	588	1323
m	21	63	105	

x_2	0	5	10
f/x_2	0	35	120
m	6	17	

Most a feladat közelítő megoldásához a következő lineáris programozási feladatot adhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
 x_{11}, \quad x_{12}, \quad x_{13}, \quad x_{21}, \quad x_{22} &\geq 0 \\
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 3x_{22} &\geq 21 \\
 2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 4x_{22} &\geq 40 \\
 x_{1i} = 7 \quad i = 1, 2, 3; \quad x_{2i} \leq 5, \quad i = 1, 2 \\
 \hline
 21x_{11} + 63x_{12} + 205x_{13} + 6x_{21} + 17x_{22} &= \min.
 \end{aligned}$$

A feladatot szimplex módszerrel most már meg tudjuk oldani, hiszen lineáris programozási feladattal állunk szemben. Nyilvánvaló, hogy a megoldást:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} \quad \text{adja.}$$

Hasonlóképpen járunk el konkáv feladat megoldása során is. Természetesen a szakaszoknak nem kell feltétlenül azonosaknak lenniük.

Megjegyezzük, hogy mezőgazdasági feladatok során a változóknak szakaszváltozókra történő felbontását gyakran célszerű alkalmazni. Ilyenkor nem is mindig egy ismert nemlineáris célfüggvényből indulunk ki, hiszen azt sokszor nem is ismerjük. A felbontás lényege és eredménye azonban lényegében ugyanaz, mint amikor egy ismert nemlineáris célfüggvénnyel dolgozunk. Tegyük fel, hogy x_1 valamely növény, pl. búza termelését jelenti. Tételezzük fel, hogy a búza összes területére felső korlátot írunk elő, mondjuk 1200 ha-ban. Ha csak 800 ha búzát termelnénk, akkor azt a legjobb talajon termelhetnénk. Az ezen felüli termelést azonban kevésbé jó talajon tudjuk csak biztosítani. Már is két szakaszváltozóra kell bontanunk x_1 -et. De lehetséges, hogy 800 ha-on belül csak 600 ha területre elegendő vetőmaggal rendelkezünk a legjobban termő fajtaból. Ekkor már három szakaszváltozóra van szükségünk. További bontás válhat szükségessé a műtrágyaigény biztosítása, a gépesítés megoldása, öntözött vagy száraz termelés, stb. szempontjából. E megbontás szerint természetesen más lesz az egyes szakaszváltozókhoz tartozó célfüggvénykoefficiens is, azaz az adott növénynél nemlineáris célfüggvénnyel dolgozunk, de szakaszonként linearizált megközelítéssel oldjuk meg a feladatot.

Ilyen esetben természetesen eltérő lesz szakaszonként a munkaerőszükséglet, gépessükséglet, stb. is, azaz a feltételrendszer sem lineáris, de szakaszonként linearizált megközelítéssel oldjuk meg. Mint látjuk, a feladat ilyen megközelítése gyakorlatilag igen hasznos, és mivel számítástechnikailag nem jelent különösebb problémát, igen jól alkalmazható a mezőgazdaságban.

7.3.3. Hiperbolikus programozás

Hiperbolikus programozásról beszélünk akkor, ha lineáris feltételrendszer /egyenletek és egyenlőtlenségek/ nemnegatív megoldásait tartalmazó L halmaz felett olyan racionális

törtfüggvény maximumát keressük, amelyben mind a számláló, mind a nevező legfeljebb lineáris. A hiperbolikus programozás általánosan a következők szerint fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} \\ z &= \frac{f/\underline{x}/}{g/\underline{x}/} = \text{maximum} \end{aligned}$$

ahol az $f/\underline{x}/$ és $g/\underline{x}/$ legfeljebb első fokú polinomok, azaz legfeljebb lineáris függvények. Ha történetesen a $g/\underline{x}/$ nulladfokú, akkor lineáris feladatról van szó. Ha az $f/\underline{x}/$ nulladfokú, akkor az $\frac{1}{g/\underline{x}/}$ függvény adódik, viszont az $\frac{1}{g/\underline{x}/} =$ maximumot a $g/\underline{x}/ = \text{min.}$ kielégíti, tehát a probléma ilyenkor is visszavezethető közönséges lineáris programozásra.

Az $f/\underline{x}/$ és $g/\underline{x}/$ függvényeket részletesen felírva, a következő általános formát kapjuk:

$$z = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - p_0}{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n - c_0} = \frac{\underline{p}^T \underline{x} - p_0}{\underline{c}^T \underline{x} - c_0}$$

Tulajdonképpen a probléma több célfüggvény szerinti optimalizálást jelent, hiszen a feladatban két célfüggvényünk van /mégpedig két lineáris célfüggvény/, s azt kívánjuk biztosítani, hogy hánadosuk a lehető legnagyobb értéket /maximumot/ vegye fel.

A hiperbolikus elnevezést az indokolja, hogy az egyváltozós:

$$y = \frac{px - p_0}{cx - c_0}$$

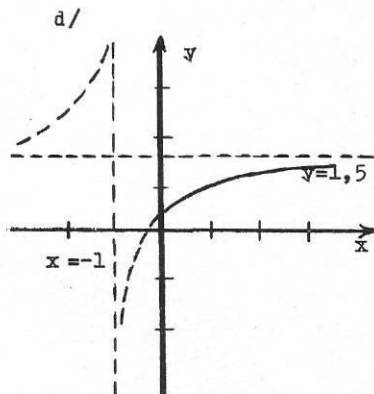
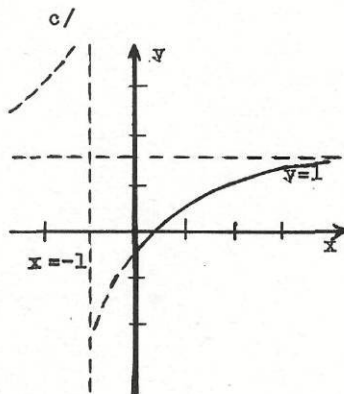
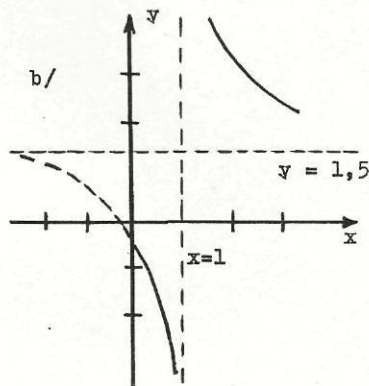
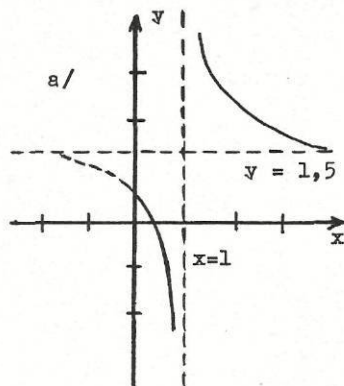
lineáris törtfüggvény képe az $/x, y/$ síkon hiperbola. Szemléltetésképpen néhány függvény grafikus ábráit mutatjuk be /32. ábra/.

a/ $y = \frac{3x-1}{2x-2}$; $x \neq 1$

b/ $y = \frac{3x+1}{2x-2}$; $x \neq 1$

c/ $y = \frac{3x-1}{2x+2}$; $x \neq -1$

d/ $y = \frac{3x+1}{2x+2}$; $x \neq -1$



Hiperbolikus függvények

32. ábra

A hiperbolikus programozás alkalmazására sokszor van szükség gyakorlati gazdasági számítások során. A mezőgazdasági vállalatok a lehető legnagyobb jövedelem elérésére törekednek, de nem mindegy az sem, hogy ehhez milyen áron jutnak. Lehet, hogy a maximális jövedelemtömeg elérése igen sok élömunka-ráfordítást vagy jelentős beruházást igényelne. Nemcsak a jövedelem tömege az irányadó, hanem azt is vizsgálni kell, hogy milyen a jövedelem és a költségráfordítás viszonya, azaz egy forint költségre mennyi jövedelem jut, illetve az előbbieket véve alapul, egy forint beruházással, egy forint munkaráfordítással, egy dolgozóval, stb. mennyi jövedelem érhető el, stb. Általában is a mezőgazdasági vállalatok /és más vállalatok/ tevékenysége nem ítéltető meg egyetlen gazdasági mutató alapján, illetve a vállalat nem egyetlen mutató alakulását veszi figyelembe, hanem több mutató egyidejű vizsgálatára van szükség. Ez egyben azt is jelenti, hogy a gyakorlati tervezés /döntésmegalapozás/ során általában több cél-függvénnyel kell dolgoznunk, és azok abszolút értéke mellett sok esetben arányukra /viszonyukra/ is tekintettel kell lenni.

A gyakorlatban előforduló hiperbolikus programozási feladatok /amikor is a lehetséges megoldások halmaza korlátos, tehát a halmaz konvex poliéder, és amelyeknél a tört nevezője a lehetséges megoldások tartományában nem zérus/, szimplics módszerrel megoldhatók. /A megoldás módszerét Martos Béla magyar matematikus dolgozta ki./ Az:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{0} \\ \underline{A} \underline{x} &\leq \underline{b} \\ z &= \frac{\underline{p} \underline{x} - p_0}{\underline{c} \underline{x} - c_0} = \text{maximum} \end{aligned}$$

hiperbolikus feladat induló tábláját ugyanugy szerkesztjük meg, mint lineáris programozási feladat esetén, csak most a táblázatban két célfüggvény sor szerepel, az első a célfüggvény számlálóját, a másik a nevezőjét tartalmazza. A p_0 , illetve c_0 értéket a számláló, illetve nevező sorába írjuk, az erőforráskapacitást tartalmazó oszlopba, azaz mint-ha ezek erőforrások lennének.

Természetesen, ha a feltételek között egyenletek /csillagos sorok/ vannak, most is képeznünk kell a másodlagos cél-függvényt, s először e szerint végezzük a számolást, s csak ennek megoldása után a hiperbolikus célfüggvény szerint.

Az induló táblázatba még egy sort kell beépíteni a következők szerint:

$$\underline{t}^T = p_0 \underline{c}^T - c_0 p^T$$

A $\underline{t}^T$ koordinátáit a formula alapján minden szimplex táblázatban ki kell számítani. A szimplex módszert alkalmazva, a számításokat mindaddig kell folytatni, amíg $t_j > 0$, azaz amíg a $\underline{t}^T$ vektorban pozitív elemet találunk. A generáló elem általában abban az oszlopban választjuk, amelyben a $\underline{t}^T$ koordinátája a legnagyobb.

Oldjuk meg az:

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 12 \\ x_1 & + x_3 & = 8 \\ x_2 + x_3 & = & 5 \\ \hline 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ \hline x_1 + 2x_2 + x_3 & + & 3 \end{array} = \text{maximum}$$

hiperbolikus programozási feladatot.

Induló táblázatunk a következő:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	1	1	1	12
$*u_2$	1	0	1	8
$*u_3$	0	1	1	5
p	2	4	3	2
c	1	2	1	-3
$*z$	1	1	2	13

A célfüggvény felfogható mondjuk úgy, hogy a számlálóban a termelési érték, a nevezőben a termelési költség található, tehát a feladat az 1 Ft termelési költséggel elérhető termelési érték maximalizálása. A célfüggvény számlálójában a konstans tag lehet például a gazdasági általános költség - ami adott és nem függ /legalábbis jelentősen/ a termelés szerkezetétől. A célfüggvény nevezőjében lévő konstans pedig felfogható szintén egy fix költségként, mondjuk, hogy a termékek értékesítéséből adódó költségként. /Megjegyezzük, hogy a p_i és c_i lehet nulla is egy feladatban. Ilyenkor ezek helyén az 0 induló táblában 0 szerepel, de a számítások során a 0 helyére valamilyen 0-tól különböző számot fogunk kapni./

Mivel módosított normál feladattal állunk szemben, másodlagos célfüggvényt képeztünk $*z$ -t, s először e szerint végezzük a számítást. Ilyenkor a t^T koordinátáinak kiszámítására nincs szükségünk, csak majd amikor már a másodlagos célfüggvényt megoldottuk és a számítást t szerint kell végeznünk.

Az előbbi induló táblázatból a harmadik sor harmadik oszlopában választva generáló elemet, a következő táblázathoz jutunk:

	x_1	x_2	$*u_3$	
u_1	1	0	-1	7
$*u_2$	1	-1	-1	3
x_3	0	1	1	5
p	2	1	-3	-13
c	1	1	-1	-8
$*z$	1	-1	-2	3

Mivel továbbra is a másodlagos célfüggvény szerint kell számolni, a t^T koordinátáit most sem szükséges meghatározni. A második sor második oszlopából választva generáló elemet, következő a táblázatunk:

	$*u_2$	x_2	$*u_3$	
u_1	-1	1	0	4
x_1	1	-1	-1	3
x_3	0	1	1	5
p	-2	3	-1	-19
c	-1	2	0	-11
$*z$	-1	0	-1	0

A másodlatos célfüggvényt megoldottuk, hiszen a másodlagos célfüggvény sorában a csillagos u_1 -khez tartozó oszlopokat kivéve minden oszlopban nullát találtunk. Meg kell tehát határozni a $\underline{t}^T$ koordinátáit:

$$\begin{aligned}\underline{t}^T &= p_0 \underline{c}^T - c_0 \underline{p}^T = -19 [-1, 2, 0] - (-11) [-2, 3, -1] = \\ &= [19, -38, 0] - [22, -33, 11] = [-3, -5, -11]\end{aligned}$$

Az előbbi táblázatban tehát a $\underline{t}^T$ koordinátáit beírva, a következőt kapjuk:

	$*u_2$	x_2	$*u_3$	
u_1	-1	1	0	4
x_1	1	-1	-1	3
x_3	0	1	1	5
p	-2	3	-1	-19
c	-1	2	0	-11
t	-3	-5	-11	$\frac{19}{11} = 1,78$

Mivel a $\underline{t}^T$ koordinátái között pozitív elem már nincs, máris optimális megoldáshoz jutottunk /ha volna pozitív koordinátánk, folytatnánk a számítást, eszerint választva generáló elemet/. Az optimális megoldás:

$$\underline{x} = [3, 0, 5]^T$$

$$\underline{u} = [4, 0, 0]^T$$

Leolvasható a táblázatból az is, hogy e termelési program megvalósítása esetén a termelési érték 19 egység, a termelési költség 11 egység és 1 forint termelési költséggel 1,78 forint termelési érték állítható elő. Leolvasható továbbá, hogy a második termék termelése esetén egy termékegység 3 Ft-tal emelné a termelési értéket, de egyidejűleg a termelési költség is emelkedne 2 Ft-tal. Mivel itt a termelési érték és a költség hányadosa $3/2 = 1,5$; ez rontaná az előbbi 1,78-as arányt, azaz a hiperbolikus célfüggvény értékét. Ugyancsak leolvashatjuk, hogy a második erőforrás egy egységének megtakarítása 2 Ft-tal csökkentené a termelési értéket és 1 Ft-tal a termelési költséget. Mivel itt az arány $2/1 = 2$, ez is rontana a célfüggvényen. Sőt a harmadik erőforrás megtakarítása a költség csökkentése nélkül csökkentené a termelési értéket, ami még kedvezőtlenebb.

A célfüggvény számlálóját és nevezőjét fel is cserélhetjük volna. Ekkor az egységnyi termelési érték előállításának költségét /költségsszintet/ kapjuk. Nyilván most nem a célfüggvény maximalizálása, hanem éppen minimalizálása lenne érdeke a vállalatnak. /Ugyanígy lehet célunk az egységnyi jövedelem előállítására felhasználandó termelési költség, vagy munkaerő, vagy munkabér, vagy beruházás, vagy import anyag, stb./

Eddigi ismereteink alapján azonban nem jelent problémát számunkra az ilyen feladat megoldása sem, hiszen a:

$$\frac{c^T \underline{x} - c_0}{p^T \underline{x} - p_0} = \min.$$

helyett a -1-gyel szorzott célfüggvény maximumát keressük, azaz:

$$\frac{c^T \underline{x} - c_0}{-p^T \underline{x} + p_0}$$

vagyis -1-gyel a nevezőt szorozzuk meg.

Természetesen hiperbolikus célfüggvény esetén is /de hasonlóképpen a konvex, vagy konkáv célfüggvény esetén is/ felmerül a termelési szerkezet és a termelési források egyidejű

optimalizálásának kérdése, illetve a programvektor és kapacitások optimalizálásának problémája. Ilyen esetben viszont ismét követelmény a gépek egészértékűsége, vagyis hiperbolikus vagy konvex, illetve konkáv vegyes egészértékű feladathoz jutunk. E problémák részletesebb kifejtése azonban meghaladja tananyagunk kereteit.

7.3.4. A Langrange-féle multiplikátor módszer

Tananyagunk nem teszi lehetővé, hogy a nemlineáris programozási feladatok valamennyi megoldási módszerével foglalkozzunk, de ha csak röviden érintőlegesen is, szükséges megemlékeznünk a Langrange-féle multiplikátor módszerrel.

Gyakran merülnek fel ugyanis a gyakorlati gazdasági feladatok között olyanok, amelyek megoldásánál ez a módszer hatékonyan alkalmazható.

A Langrange-módszer jól alkalmazható olyan feltételes szélsőérték-feladatok megoldására, amikor a feltételek egyenletekkel vannak megadva. Ez azt jelenti, hogy keressük az $f/\underline{x}/$ $\underline{x} \in E_n$ függvény szélső értékét /maximumát, vagy minimumát/, a $\phi_k/\underline{x}/ = 0$ $/k = 1, 2, \dots, m, m \leq n/$ feltételek mellett.

Már ismerjük, hogy a feltételi egyenlet jobb oldalán esetleg előforduló nemzérus értékek az $\phi_k/\underline{x}/$ függvényekbe beolvaszthatók. A feladatban azt is jelöltük, hogy a feltételek száma nem nagyobb, mint a változók száma $/m \leq n/$, mert egyébként nincs feltétlenül biztosítva az egyenletek megoldhatósága.

Ha a lehetséges megoldások:

$H = \{\underline{x} \mid \phi_k/\underline{x}/ = 0, k = 1, 2, \dots, m\}$ halmazát tekintjük, a feladat úgy is megfogalmazható, hogy keressük az $f/\underline{x}/$ függvény maximumát /vagy minimumát/ a H halmazon.

Feltesszük, hogy:

- az $f/\underline{x}/$ és $\phi_k/\underline{x}/$ $/k = 1, 2, \dots, m/$ függvényeknek léteznek parciális deriváltjai a H halmazon és hogy
- a $\phi_k/\underline{x}/ = 0$ $/k = 1, 2, \dots, m/$ egyenletekből $n-m$ számú változó egyenértelműen kifejezhető.

E feltételek mellett tekintsük az:

$$F/\underline{x}/ = f/\underline{x}/ + \sum_{k=1}^m \lambda_k \phi_k/\underline{x}/$$

függvényt, ahol $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ egyelőre ismeretlen konstans vektor.

Az $f/\underline{x}/$ függvény feltételes szélsőérték helyei ekkor kielégítik az:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad \phi_k/\underline{x}/ = 0 \quad /i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$n + m$ egyenletből álló egyenletrendszert.

A λ_k konstansokat Langrange multiplikátornak nevezzük. Az egyenletrendszer $\underline{x}$ -re és $\underline{\lambda}$ -ra történő megoldása szolgáltatja a keresett stacionárius helyeket /ahol a függvény deriváltja 0-val egyenlő/ és az ismeretlen $\underline{\lambda}$ vektort. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha az:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

-nak nincsen megoldása, akkor az $f/\underline{x}/$ -nek nincsen szélső értéke a $\phi_k/\underline{x}/ = 0$ feltételek mellett.

Tekintsünk példaként egy műtrágya-elosztási feladatot. /Lásd: Szép Jenő: Analízis. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1972./ Tegyük fel, hogy egy termelészövetkezet három tábláján /A, B, C/ a talajtól függően más-más keverék-műtrágyát használ. A termés hozam és a műtrágyafelhasználás között természetesen kapcsolat van /a termés hozam függ a műtrágyafelhasználástól éspedig nemlineáris formában/, s e függvénykapcsolatokat jelöljük rendre $f_1/x_1/$, $f_2/x_2/$, $f_3/x_3/$ függvényekkel. Tegyük fel, hogy az A, B, C táblák nagyságát rendre a, b, c-vel jelöljük.

A három tábla együttes hozamát ekkor a:

$$f/x_1, x_2, x_3/ = af_1/x_1/ + bf_2/x_2/ + cf_3/x_3/$$

függvény reprezentálja.

Az $f_1/x_1/$, $f_2/x_2/$, $f_3/x_3/$ függvények ismeretében az $f/x_1, x_2, x_3/$ függvény ³ maximuma kiszámítható. Ez feltétel nélküli maximum, hiszen egyelőre csak egy függvény szélső értékét kerestük, feltétel /feltételek/ nélkül.

Tegyük fel most, hogy a műtrágya beszerzésére korlátozott pénzüsszeggel rendelkezünk. Jelöljük ezt az összeget s -sel. Legyen t_1, t_2, t_3 rendre az A, B, C táblán használt keverékműtrágya egységára. Ennek alapján az:

$$a t_1 x_1 + b t_2 x_2 + c t_3 x_3 = s$$

feltétel adható meg.

Ha e feltételek mellett határozzuk meg az $f/x_1, x_2, x_3/$ függvény maximumát, már feltételes szélsőérték problémát oldunk meg. Legyen feladatunkban:

$$f_1/x_1/ = 4 + 3x_1 - 2x_1^2,$$

$$f_2/x_2/ = 4 + 5x_2 - x_2^2$$

$$f_3/x_3/ = 2 + 6x_3 - 3x_3^2$$

és legyenek a táblanagyságok a következők:

$$a = 500 \text{ ha}$$

$$b = 200 \text{ ha}$$

$$c = 100 \text{ ha}$$

Tegyük fel, hogy 20 000 Ft áll rendelkezésünkre műtrágya beszerzésére és az A táblán használandó keverék egységára 40, ugyanez a B táblát tekintve 30, a C tábla vonatkozásában pedig 20. Ennek alapján feltételi egyenletünk:

$$40 \cdot 500 x_1 + 30 \cdot 200 x_2 + 20 \cdot 100 x_3 = 20\,000,$$

ami egyszerűsítés után implicit alakban:

$$g/x_1, x_2, x_3/ = 10x_1 + 3x_2 + x_3 - 10 = 0$$

E feltétel melletti szélső érték kiszámítására a Langrange-féle multiplikátor módszert használva, képeznünk kell:

$$F/x_1, x_2, x_3/ = f/x_1, x_2, x_3/ + \lambda \phi/x_1, x_2, x_3/ =$$

$$= 500 (4 + 3x_1 - 2x_1^2) + 200 (4 + 5x_2 - x_2^2) +$$

$$+ 100 (2 + 6x_3 - 3x_3^2) + \lambda (10x_1 + 3x_2 + x_3 - 10)$$

függvényt. A megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 500 / 3 - 4x_1 / + 10\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 200 / 5 - 2x_2 / + 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 100 / 6 - 6x_3 / + \lambda = 0$$

$$10 x_1 + 3x_2 + x_3 - 10 = 0$$

E négy egyenlet megoldásából kapjuk, hogy:

$$x_1 = 0,345; \quad x_2 = 1,885; \quad x_3 = 0,865$$

a feladat optimális megoldása. Ha a feladatot feltétel nélkül oldottuk volna meg, az:

$$x_1 = 0,75; \quad x_2 = 2,5; \quad x_3 = 1$$

mütrágya normákat kaptuk volna. Ekkor viszont:

$$\begin{aligned} 40 \cdot 500 \cdot 0,75 + 30 \cdot 200 \cdot 2,5 + 20 \cdot 100 \cdot 1 = \\ = 15\,000 + 15\,000 + 2\,000 = 32\,000 \text{ Ft-ot} \end{aligned}$$

kellett volna felhasználni mütrágya beszerzésre. Mivel azonban 20 000 Ft állt rendelkezésünkre, az:

$$x_1 = 0,345; \quad x_2 = 1,885; \quad x_3 = 0,865 \text{ alapján:}$$

$$\begin{aligned} 40 \cdot 500 \cdot 0,345 + 30 \cdot 200 \cdot 1,885 + 20 \cdot 100 \cdot 0,865 = \\ = 6\,900 + 11\,310 + 1\,730 = 19\,940 \approx 20\,000 \text{ Ft-ra} \end{aligned}$$

volt szükség /az eltérés kerekítésekből adódik/. A megoldás szerint az A táblán $0,345 \cdot 500 = 162,5$ q, a B táblán $1,885 \cdot 200 = 377$ q és a C táblán $0,865 \cdot 100 = 86,5$ q mütrágya használandó fel.

Természetesen a példában keverékmütrágnyát tekintettünk. A probléma lényegén azonban az sem változtat, ha a N,P,K mütrágnyakat a vállalat keveri, vagy ha féleségenként szórja ki a

táblákra. E műtrágyák arányát /a talajnak megfelelően/ meghatározhatjuk.

Az $f_i/x_i/$ függvények alapján meghatározhatjuk a várható terméshozamot is táblánként és összesen. Ez példánkban a következő:

$$\begin{aligned} f_1/x_1/ &= 4 + 3x_1 - 2x_1^2 = 4 + 3 \cdot 0,345 - 2 \cdot 0,345^2 = \\ &= 4 + 1,035 - 0,238 = 4,797 \text{ q/ha, illetve} \end{aligned}$$

500 ha-on 2 398,5 q

$$\begin{aligned} f_2/x_2/ &= 4 + 5x_2 - x_2^2 = 4 + 5 \cdot 1,885 - 1,885^2 = \\ &= 4 + 9,425 - 3,553 = 9,872 \text{ q/ha, illetve} \end{aligned}$$

200 ha-on 1 974,4 q

$$\begin{aligned} f_3/x_3/ &= 2 + 6x_3 - 3x_3^2 = 2 + 6 \cdot 0,865 - 3 \cdot 0,865^2 = \\ &= 2 + 5,19 - 2,24 = 4,95 \text{ q/ha, illetve} \end{aligned}$$

100 ha-on 495 q, vagyis az összes termés:

$$2 \ 398,5 + 1 \ 974,4 + 495 = 4 \ 867,9 \text{ q.}$$

Természetesen ilyen jellegű problémák megoldásához ismer-
ni kell az $f_i/x_i/$ függvényeket. E tekintetben jól felhasz-
nálhatjuk a regressziós analízist, illetve a termelési függ-
vényeket.

7.4. Dinamikus programozás

A gazdasági feladatok megoldása általában a döntések sorozatát igényli. Ez a döntéssorozat egymáshoz kapcsolódó döntések rendszerét jelenti, amelyek időbelileg, vagy térbelileg, vagy időbelileg is és térbelileg is követik egymást aszerint, hogy a gazdasági folyamatok térbelileg és/vagy időbelileg zajlanak le.

Például a mezőgazdaságban, adott növény termelési folyamata időben zajlik le vetéstől a betakarításig, az évek egymásutánjai során valósul meg a vállalat gazdasági változása, időben zajlik le egy-egy beruházás megvalósítása. De térbelileg zajlik le például a növények táblán való elhelyezkedése, vagy térben és időben zajlik le a szántás és vetés munkafolyamata, ugyanakkor például az időben zajlik le a vetőmag csávázása, stb.

A dinamikus programozás az időbeni folyamatok vizsgálatára szolgáló eljárás. Tekintve azonban, hogy természetüknél fogva a térbeli folyamatok az időbeli folyamatokhoz hasonlóan vizsgálhatók módszertani szempontból a dinamikus programozás jól alkalmazható a térbeli vizsgálatok elvégzésére is, illetve minden olyan vizsgálat elvégzésére, amikor egymástól függő döntések megalapozásának szükségessége merül fel.

A fentiek alapján a dinamikus programozás fogalmát úgy határozhatjuk meg, hogy dinamikus programozásnak nevezzük a matematikai programozás módszerét, amely egymástól független döntések sorozatának optimalizálására alkalmas.

Az időbeli függőség és a dinamikus programozással megoldható feladatok nem egyértelműen fedik egymást. Ez nem csak abból adódik, hogy - mint már említettük - a dinamikus programozás nem csak az időbeli, de gyakran a térbeli folyamatok vizsgálatára is alkalmas, tehát a dinamikus programozás alkalmas statikus feladatok megoldására is, hanem abból is, hogy sok esetben vizsgálatainkban az időtől függő folyamatokat is vizsgálhatjuk statikusan, gyakran a könnyebb megoldhatóság érdekében. Ilyenkor legtöbbször az időbeli folyamatot lépésekre bontva statikusan vizsgáljuk.

Tegyük fel például, hogy egy mezőgazdasági vállalat tervét kívánjuk elkészíteni öt éves időszakra. A feladat megoldható dinamikus programozással, kiindulva egy kezdeti időpontban meglévő helyzetből, vizsgálva az öt év során az időben lezajló, egymásraépülő gazdasági folyamatokat és eljutva az öt éves időszak végső állapotáig. Ez igen bonyolult feladat volna. Ha meggondoljuk egy év dinamikus vizsgálatát is igen nagy feladatot jelent, de az évek is egymásra épülnek, egymástól függenek, mégpedig nem csak a folyamat egészét, de

általában részeit tekintve is.

Megoldható a feladat úgy, hogy az egyes éveket statikus problémaként kezeljük, s csupán az évek egymásraépülését, egymásutánját vizsgáljuk dinamikus programozással. Ilyenkor egy-egy év tervét statikus programozással készítjük, s e statikus terveket foglaljuk dinamikus modellbe.

Eljárhatunk úgy is, hogy az egyes évek terveinek elkészítésére alkalmazzuk a dinamikus programozást, s az évek egymásutánját statikus lépések sorozatával vizsgáljuk.

Végül eljárhatunk úgy is, hogy statikus vizsgálattal oldjuk meg az évek tervezését, de azokat egymás után, egymásra épülten, s így jutunk el az öt év terveinek elkészítéséhez. Ez esetben statikus módszerrel dinamikus problémát oldottunk meg.

Láttuk tehát, hogy dinamikus problémát vizsgálhatunk statikus módszerekkel, viszont statikus probléma vizsgálata során is alkalmazhatunk dinamikus módszereket.

Tananyagunk korlátozott keretei nem teszik lehetővé a dinamikus programozás részletesebb kifejtését, általában csupán a probléma érzékeltetésére, alapjainak feltárására szorítkozhatunk, inkább a gazdasági alkalmazást, dinamikus gazdasági problémák megoldásának elveit tartva szem előtt.

Lássuk egy egyszerűbb példa segítségével a dinamikus programozás lényegét.

Rendelkezzünk x mennyiségű pénzüsszeggel, melyet két üzemnél kívánunk beruházásra fordítani. Jelöljük ezeket A-val és B-vel. Fordítsunk A üzem beruházására y pénzüsszeget, így B számára marad $x-y$ összeg.

Legyen e beruházás politika hatására, az egy év alatt elérhető haszon:

$$g / y / \text{ és } h / x-y /$$

és legyen év végén az A illetve B üzem beruházott értéke:

$$a / y / \text{ és } b / x-y /$$

$$A \quad H / x, y / = g / y / + h / x-y /$$

a rendelkezésre álló x beruházási összegnek az y és $x-y$ felosztása esetén:

$$f_1 /x/ = \max. H /x, y/ \quad 0 \leq y \leq x$$

optimális értéket ad.

Jelöljük $y_0 /x/$ -el ezt az y elsőfokozatú döntést, amely döntés esetén ez az optimális haszon elérhető.

A második évben /feltéve, hogy/ az A és B üzembe be-
ruházott eszközök részben, vagy egészben eladhatók, azaz:

$$x_1 = a /y/ + b /x-y/$$

kezdeti érték felett rendelkezünk, s azt kell hasonló mó-
don szétosztani y_1 és $x_1 - y_1$ részre. Ennek alapján a
második év végén az $x_1 - y_1$ előző évvel együtt összesen:

$$f_2 /x/ = \max. \left[H /x, y/ + H /x_1, y_1/ \right] = \max. \left[H /x, y/ + \right. \\ 0 \leq y \leq x \quad 0 \leq y_1 \leq x_1 \\ \left. + \max. H /x_1, y_1/ \right] = \max. \left[H /x, y/ + f_1 /x_1/ \right] \\ 0 \leq y_1 \leq x_1 \quad 0 \leq y \leq x$$

optimális haszon érhető el. /A maradék x_1 tőkét akkor hasz-
náljuk fel ugyanis legelőszőrűbben, ha az egy év alatt elér-
hető $f_1 /x_1/$ maximális hasznot nyerjük./

Legyen:

$$x_2 = a /y_1/ + b /x_1 - y_1/.$$

Az n év alatt elérhető optimális haszon:

$$f_n /x/ = \max. \left\{ H /x, y/ + f_{n-1} \left[F /x, y/ \right] \right\} \\ 0 \leq y \leq x$$

ahol f_{n-1} jelöli az első év leforgása után még fennmaradó:

$$F /x, y/ = x_1 = a /y/ + b /x - y/$$

tőke optimális kihasználásából a hátralévő $n-1$ év alatt
optimálisan elérhető hasznot.

Mivel a k -edik év után fennmaradó tőke:

$$x_k = a /y_{k-1}/ + b /x_{k-1} - y_{k-1}/$$

ezért n fokozatu $\bar{y}_0 = \bar{y}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}$ döntéssorozat /politika/ választásával n év után az $x = x_0$ kezdeti tőkéből a:

$$K / \bar{y}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1} / = H / x, \bar{y} / + H / x_1, \bar{y}_1 / + \dots + H / x_{n-1}, \bar{y}_{n-1} /$$

függvény maximuma adja az optimális hasznet a:

$$0 \leq \bar{y}_k \leq x_k$$

$$x_{k+1} = a / \bar{y}_k / + b / x_k - \bar{y}_k / \quad / k = 0, 1, \dots, n-1 /$$

feltételek mellett.

A probléma tehát egy elég bonyolult feltételelesen szélsőérték-feladat, általában a K maximumát a fokozatos közelítés módszerével határozzuk meg.

Egyszerűbb és a mezőgazdasági vállalatok tervezése során inkább alkalmazható eljárás, amikor a dinamikus tervezési feladatot lineáris programozási modellekkel oldjuk meg.

Ha például egy ötéves időszakra kívánjuk egy mezőgazdasági vállalat tervét optimalizálni a lineáris programozás alkalmazásával, akkor a feladatot kétféle módon oldhatjuk meg, szimultán optimalizálással, vagy rekurzív optimalizálással.

Szimultán optimalizálás

Elkészítjük minden részidőszak/minden év/ lineáris programozási modelljét, természetesen figyelembevéve az időbeli változás során a fajlagos ráfordítási és hozam adatok, azaz a technológiai adatok megváltozását.

Az így elkészült rész időszakra vonatkozó /éves/ modelleket kvázidiagonális elrendezésben egy hipermodellbe építjük be.

Gondoskodnunk kell természetesen a modellblokkok /éves tervmodellek/ megfelelő kapcsolatának biztosításáról. Így például az előző években megtermelt jövedelem egy része a termelés bővítésére felhasználható, csak akkor épüljön fel egy istálló, ha azt a további években is jövedelmezően tudjuk hasznosítani, stb.

Az elmondottakat röviden matematikai formulával felírva a következőket kapjuk:

$$x_1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_i \underline{x}_i &\leq \underline{b}_i \\ \sum_{i=1}^n \underline{K}_i \underline{x}_i &\leq \underline{b}_0 \\ z = \sum_{i=1}^n \underline{c}_i^T \underline{x}_i &= \max. \end{aligned}$$

ahol:

$\underline{x}_i$ = az i-edik év programvektora

$\underline{A}_i$ = az i-edik év technológiai mátrixa

$\underline{b}_i$ = az i-edik év korlátvektora

$\underline{K}_i$ = a mátrixblokkok kapcsolatára vonatkozó együtthatóknak az i-edik évre vonatkozó mátrixa

$\underline{b}_0$ = a kapcsolati feltételek korlátvektora

$\underline{c}_i^T$ = a célfüggvénykoefficiensek i-edik évhez tartozó vektora.

A modellt vázlatosan a 33. ábrával szemléltetjük /l. következő oldalon./

Rekurzív optimalizálás

Rekurzív optimalizálás során az egyes részidőszakok modelljét önállóan, egyenként oldjuk meg úgy, hogy minden modell felépítésénél figyelembe vesszük az előző modell /modellek/ megoldásait is.

Kiindulhatunk a kezdő időszakból, /első évből/ és így haladhatunk az utolsó /befejező/ időszakig, de eljárhatunk úgy is, hogy az utolsó időszakból indulunk ki, tehát a végső cél /utolsó év/ optimumát határozzuk meg és visszafelé haladva kívánunk elérkezni a kiinduló év állapotához. Az utóbbi eljárás természetesen nehezebb, esetleg a közbeeső feladatok többszöri megoldását teszi lehetővé, a modellek módosításával, hogy valóban a kiinduló időszak állapotát érjük el.

A rekurzív programozás nem ad egzakt optimális megoldást, csak közelítő módszernek tekinthetjük. Előnye viszont, hogy lényegesen kisebb modelleket kell megoldani /igaz, hogy többször/, valamint hogy az éves tervek között nem csak lineáris kapcsolatok kezelhetők.

Változók Feltételek	Első év $\underline{x}_1$	Második év $\underline{x}_2$		n.-ik év $\underline{x}_n$	
1. év	$\underline{A}_1$				$\underline{b}_1$
2. év		$\underline{A}_2$			$\underline{b}_2$
$\vdots$					$\vdots$
n.-ik év				$\underline{A}_n$	$\underline{b}_n$
Kapcsolati feltételek	$\underline{K}_1$	$\underline{K}_2$		$\underline{K}_n$	$\underline{b}_0$
Célfüggvény	$\underline{c}_1^T$	$\underline{c}_2^T$		$\underline{c}_n^T$	max.

Szimultán modell vázlat

33. ábra

7.5. Sztochasztikus modellek

A sztochasztikus modellek részletesebb tárgyalása meghaladja tananyagunk kereteit, s csupán mibenlétének megismerése lehet a célunk.

Sztochasztikus modellekről beszélünk akkor, amikor a modell paraméterei, vagy paramétereinek egy része nem egyértelműen meghatározott, determinisztikus, hanem valószínűségi változó. Ilyenkor a paraméterek valószínűségi függvényeinek meghatározásához a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika nyújt segítséget, gyakran akkor is, amikor valószínűségi sem többszörös megfigyelésre, sem kísérletezésre nincs lehetőség, de amikor a vizsgált jelenségre, vagy hasonló jelenségre vonatkozólag előzőleg már történtek megfigyelések, kísérletek. Gyakran lehet bonyolult determinisztikus jelenségeket is sztochasztikus modellekkel vizsgálni, amikor a vizsgált jelenség valamilyen valószínűségi eloszlásfüggvénnyel jól leírható.

A sztochasztikus modellek felépítése általában ugyanazt a logikát követi, mint a determinisztikus modelleké. Itt is van kitűzött cél, vagy vannak kitűzött célok, megadhatók azok a feltételek, amelyek a cél elérését behatárolják. Most azonban valószínűségi változókkal kell dolgoznunk.

A sztochasztikus programozás döntési modelljeinek elmélete a matematikai statisztikai döntéelméleten és a matematikai programozás /főként a nem-lineáris/ elméletén alapszik. Két fontos irányzata alakult ki, az egyik a "valószínűséggel korlátozott programozás", a másik a "kétlépcsős sztochasztikus programozás".

Legyen programozási modellünk a következő:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &\leq b \\ \underline{Tx} &= \underline{\beta} \\ c^T x &= \min. \end{aligned}$$

Ha most β a véletlentől függ /tehát egy véletlen vektor/, valószínűségi törvényeit a valószínűségeloszlás írja le. Tételezzük fel, hogy a β vektor β_i komponenseinek valószínűségi eloszlásfüggvénye $F_i/z/$ a következő:

$$P\{\beta_i < z\} = F_i/z/ \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ahol m a $\underline{T}$ sorainak száma.

A/β véletlen vektor értéke, realizációja esetén minden i -re:

$$\text{vagy } T_i / \underline{x} / \geq \beta_i, \text{ vagy } T_i / \underline{x} / < \beta_i$$

ahol: $\underline{x}$ kielégíti az $A\underline{x} \leq \underline{b}$, $\underline{x} \geq 0$ feltételeket, T_i pedig a $\underline{T}$ mátrix i -edik sora.

Ha a:

$$T_i / \underline{x} / \geq \beta_i$$

áll be, akkor az ezzel kapcsolatos veszteség legyen u_i a különbség minden egységére, míg a másik esetben h_i . Az u_i , h_i konstansok, $i = 1, 2, \dots, m$. Az összköltség várható értéke $G / \underline{x} /$ a következő:

$$G / \underline{x} / = \sum_{i=1}^m u_i \int_{-\infty}^{T_i \underline{x}} / T_i \underline{x} - z / f_i / z / + \\ + \sum_{i=1}^m h_i \int_{T_i \underline{x}}^{\infty} / z - T_i \underline{x} / f_i / z /,$$

Eredeti feladatunkat most a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\underline{x} \geq 0 \\ A \underline{x} \leq \underline{b} \\ c^T \underline{x} + g / \underline{x} / = \min.$$

azaz minimalizáljuk az eredeti célfüggvényt, valamint a sztochasztikus paraméter véletlen jellegéből eredő veszteség várható értékének összegét.

Ha a $G / \underline{x} /$ függvény konvex, és a β_i valószínűségi változók $f_i / z /$ sűrűségfüggvényei folytonosak, akkor a feladat konvex programozási feladat.

8. FEJEZET

SZÁLLITÁSSZERVEZÉS PROGRAMOZÁSSAL

8.1. A szállítási feladatot megfogalmazása

Tegyük fel, hogy valamilyen anyag szállítását kell megszerveznünk. Induljunk ki abból az alapesetből, hogy az elszállítandó anyag három raktárban van elhelyezve és azt négy felhasználó helyre kell elszállítani. Rögtön felmerül a kérdés, hogy honnan, hova, mennyit, azaz a három tárolóhelyen lévő mennyiséget hogyan kell elosztani a négy felhasználóhely között.

Azokat a helyeket ahonnan szállítani kívánunk tárolóhelyeknek, vagy feladóhelyeknek, ahova szállítunk azokat felhasználó helyeknek, rendeltetési helyeknek, fogadóhelyeknek szokás nevezni.

Nyilvánvalóan a szállítások programozásának csak akkor van értelme és jelentősége, ha az egyes feladóhelyek és rendeltetési helyek közötti szállítás költsége eltérő. Ebben az esetben van jelentősége annak, hogy meghatározzuk melyik feladóhelyről, melyik rendeltetési helyre, mennyit célszerű szállítani, hogy a szállítási feladatot a legkisebb szállítási költséggel oldjuk meg. Amennyiben ugyanis a szállítási költségek minden feladó és rendeltetési hely viszonylatában azonosak lennének, akkor a szállítások bármilyen szervezése esetén azonosak lennének a szállítási költségek, vagyis a szállítási költség szempontjából a szállításszervezésnek nem volna jelentősége. Hasonlóképpen vethető fel a szállítási távolságok minimalizálása, vagy más cél, amelyet a szállításszervezésnél figyelembe kívánunk venni.

Induljunk ki tehát egy egyszerű esetből, amikor az A, B, C tárolóhelyekről az I, II, III, IV rendeltetési helyekre kell valamilyen anyagot elszállítani. Tegyük fel, hogy a feladóhelyeken tárolt összes anyagmennyiség megegyezik a rendeltetési helyek összes szükségletével, azaz összesen 30 egységnyi. /Egyszerű számokkal dolgozunk a 30 egység lehet tonna, teherautó rakomány, vagon, vagy más egységekben megadva/.

Legyen a feladóhelyeken tárolt mennyiség egységesen 10 egység, tehát minden tárolóhelyről 10 egységnyi anyag szállítható el. A rendeltetési helyek igénye legyen 2, 12, 4, 12 egység. Meg kell még határozni az egyes feladóhelyek és rendeltetési helyek közötti szállítások költségeit.

Az adatokat a következő táblázatba foglaltuk /lásd következő oldalon/.

A táblázat oldalrovataiba a tárolóhelyeket, fejrovataiba a rendeltetési helyeket írtuk be. Az utolsó oszlop az egyes

Tároló- helyek	Rendeltetési helyek				Készlet
	I	II	III	IV	
A	10	8	6	4	10
B	20	16	8	14	10
C	18	18	16	8	10
Igény	2	12	4	12	30

helyeken tárolt mennyiségeket, az utolsó sor a rendeltetési helyekre szállítandó mennyiségeket tartalmazza. Esetünkben a feladóhelyeken tárolt mennyiségek és az igények összege megegyezik /30 egység/. A táblázat belső részét költségmátrix-nak nevezzük. Tartalmazza azokat a költségeket, amelyek a különböző tároló és rendeltetési helyek között felmerülnek. A feltüntetett költségek is különböző egységben lehetnek megadva, pl. forintban, tízforintban, százforintban, dollárban, stb.

Jelöljük x_{ij} -vel azt az egyenlőre ismeretlen anyagmennyiséget, amelyet az i -edik tárolóhelyről a j -edik rendeltetési helyre szállítunk. Ezeket az értékeket természetesen úgy kívánjuk meghatározni, hogy az összes szállítási költség minimális legyen. Az elszállítandó mennyiségeket táblázatba foglalva a következőket kapjuk:

Tároló- helyek	Rendeltetési helyek				
	I	II	III	IV	
A	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	
B	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	
C	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	

Könnyű észrevenni, hogy az ismeretlenekhez írt indexek közül az első mindig a tárolóhelyre, a második a rendeltetési helyre utal, azaz ahogyan a mátrixok esetében megszoktuk az első a sorindex, második az oszlopindex.

Hasonlóképpen jelölhetjük például c_{ij} -vel az i -edik feladóhelyről a j -edik rendeltetési helyre történő szállítási költségeket is, vagy f_i -vel az i -edik feladóhelyen tárolt anyag mennyiségét és r_j -vel a j -edik rendeltetési helyen igényelt anyagmennyiséget. E szimbólumok felhasználásával

az előző táblázatot felírhatjuk a következőképpen:

Tároló- helyek	Rendeltetési helyek				Készlet
	I	II	III	IV	
A	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	f_1
B	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	f_2
C	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	f_3
Igény	r_1	r_2	r_3	r_4	

Feladatunk tehát annak meghatározása, hogy melyik feladóhelyről, melyik rendeltetési helyre, mennyit szállítsunk, hogy valamennyi feladóhelyről elszállítsuk a tárolt mennyiséget és kielégítsük valamennyi rendeltetési hely igényét, de az összes szállítási költség minimális legyen, E követelményeket a következő matematikai formulákkal írhatjuk elő:

$$z = 10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{13} + 4x_{14} + 20x_{21} + 16x_{22} + 8x_{23} + 14x_{24} + 18x_{31} + 18x_{32} + 16x_{33} + 8x_{34} = \text{minimum!}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 12$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 12$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

Az első formula a célfüggvény, amelyben az összes szállítási költség minimalizálását írtuk elő. A következő formulákban előírtuk, hogy minden tárolóhelyről el kell szállítani az ott tárolt mennyiséget és minden rendeltetési helyre oda kell szállítani az igényelt mennyiséget. Végül az

utolsó formula a nemnegativitás feltételét fogalmazza meg.

8.2. A feladat megoldása szimplex módszerrel

Vezessük be a következő jelzéseket:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{31}, \\ c_{32}, c_{33}, c_{34} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, \\ x_{32}, x_{33}, x_{34} \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} f_1, f_2, f_3, r_1, r_2, r_3, r_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{11} & x_{31} & x_{31} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & 0 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & 0 \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

Ennek alapján a lineáris programozási feladat a már ismert formulákkal írható fel, azaz:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{c}^T \underline{x} = \text{minimális}$$

Szerkesszük meg a már ismert konkrét feladat induló szimplex tábláját /lásd következő oldalon/.

A feladat tehát módosított lineáris programozási feladat, ahol a célfüggvény minimumát /vagy mínusz egyszeresének maximumát/ keressük.

A feladat optimális megoldása a következő:

$$x_{11} = 2, \quad x_{12} = 6, \quad x_{13} = 0, \quad x_{14} = 2,$$

$$x_{21} = 0, x_{22} = 6, x_{23} = 4, x_{24} = 0,$$

$$x_{31} = 0, x_{32} = 0, x_{33} = 0, x_{34} = 10.$$

$$z = 284$$

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
u_1^*	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10
u_2^*	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	10
u_3^*	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	10
u_4^*	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
u_5^*	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	12
u_6^*	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	4
u_7^*	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	12
z	-10	-8	-6	-4	-20	-16	-8	-14	-18	-18	-16	-8	0
x z	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	60

Viszonylag egyszerű feladatunk volt, három feladóhely négy rendeltetési hely és hét feltételből álló 12 ismeretlenes feladatot kellett megoldanunk. A szállítási feladat megoldása viszonylag nagyméretű lineáris programozási feladathoz vezet, aminek kezelése nehézkes lehet. Képzeljük csak el, ha meg akarunk szervezni, hogy a mezőgazdasági üzemek búza termését az állami tárolóhelyekre megfelelő szállításszervezéssel a legkevesebb szállítási költséggel oldjuk meg. Mondjuk az állam 1300 mezőgazdasági vállalatától vásárolna búzát, és azt például 100 állami tárolóhelyre kívánná beszállítani. A legegyszerűbb esetben is 1400 feltételből álló 130 000 ismeretlenes feladatot kellene megoldani. Szerencsére vannak más módszerek is a szállítási feladatok megoldására.

8.3. Disztribúciós módszer. Redukált költségmátrix.

A disztribúciós, vagy szétoztási módszernek az a lényege, hogy kiválasztjuk a költségmátrix legkisebb elemét, s erre a helyre /ahol a legkisebb a szállítási költség/ a maximális szállítandó mennyiséget programozzuk. Ezután erről a helyről kiindulva sor- vagy oszlopirányban haladva

/bátya mozgással/ folytatjuk a szállítások programozását /a szállítási feladat szétosztását. Eljutunk egy lehetséges programig, amely a feladat egy lehetséges, de nem biztos, hogy optimális megoldását adja. Megállapítjuk e lehetséges megoldáshoz tartozó célfüggvény értékét, majd az adott, lehetséges megoldást felülvizsgáljuk és javítjuk a programot mindaddig, amíg az lehetséges.

Vegyük az előbbi számszerű feladatot. A költségmátrix legkisebb elemét az első sor, negyedik oszlopban találjuk /c₁₄/. Erre a helyre lo egységnyi anyag szállítását programozhatjuk, hiszen az A tárolóhelyen lo egységnyi anyagot tárolunk, a IV. rendeltetési hely igénye 12 egység. Ez azt is jelenti, hogy a IV. rendeltetési helyen még két egység igény kielégítetlen. Oszlopirányban haladva a legkisebb költséget a harmadik sorban találjuk, tehát a IV. rendeltetési hely fennmaradó 2 egységnyi igényét a C feladóhelyről célszerű kielégíteni. E helyre programozva 2 egységet a IV. rendeltetési hely igényét teljesen kielégítettük. A C tárolóhelyen azonban még 8 egység elszállításra vár. Most sor irányban haladunk, s a legkisebb szállítási költséget a III. oszlopban találjuk. E rendeltetési hely igénye csak 4 egység. A 4 egységet ide programozva a III. rendeltetési hely igényét teljesen kielégítjük, de a C tárolóhelyen még mindig rendelkezünk 4 egységgel, amit el kell szállítani. Tovább haladunk tehát sorirányba és a II. rendeltetési helyhez jutunk, amelynek igénye 12 egység. Ide programozzuk a C tárolóhelyen még meglévő 4 egységet, ami által a C tárolóhelyről minden mennyiséget elszállítottunk. A II. rendeltetési helyen még 8 egységnyi igény kielégítetlen. Most oszlopirányba haladunk és a B tárolóhelyhez jutunk. Mivel az itt tárolt mennyiség lo egység, ebből 8 egységet II. rendeltetési hely számára juttatva a II. rendeltetési hely igényét kielégítjük, viszont a B tárolóhelyen még két egységnyi mennyiség elszállításra vár. Most sorirányba haladva elérjük az I. rendeltetési helyet. Ennek igénye éppen 2 egység, s ennek kielégítésével egyidejűleg a B tárolóhelyről is minden mennyiséget elszállítunk.

Foglaljuk táblázatba a kiinduló feladatot, valamint az eddigi megoldást, nyíllal jelölve a haladási irányt és a szállítási költséghez, jobb felső sarkához odairva az adott helyre programozott szállítandó mennyiségeket. /Lásd következő oldalon./

A táblázatból könnyen kiolvashatjuk, hogy minden tárolóhelyről elszállítottuk a tárolt mennyiséget és kielégítettük minden rendeltetési hely igényét. Vitathatatlan tehát, hogy a kapott megoldás az adott szállítási feladat egy lehetséges megoldása, egy lehetséges szállítási program. Kérdés azonban, hogy ez a megoldás optimális-e, vagyis ehhez a szállítási programhoz tartozik-e a legkisebb szállítási költség, vagy ennél olcsóbb szállítási program is lehetséges.

	I	II	III	IV	
A	10	8	6	4	10
B	20	16	8	14	10
C	18	18	16	8	10
	2	12	16	12	

	I	II	III	IV	
A	10	8	6	4 ¹⁰	10
B	10 ² ←	16 ⁸ ↑	8	14 ↓	10
C	18	18 ⁴ ←	16 ⁴ ←	8 ² ←	10
	2	12	4	12	30

Határozzuk meg először az adott szállítási programhoz tartozó szállítási költséget, célfüggvényértéket. Ez a következő:

$$z = 4 \cdot 10 + 8 \cdot 2 + 16 \cdot 4 + 18 \cdot 4 + 16 \cdot 8 + 10 \cdot 2 = 40 + 16 + 64 + 72 + 128 + 20 = 340$$

Mi már ismerjük azt is, hogy a szimplex módszerrel meghatározott szállítási program kevesebb költséggel valósítható meg, ennél fogva ez a szállítási program nem lehet optimális. A programot tehát javítani lehet.

Induljunk ki ismét az eredeti feladatból, ismét kikeresve a legkisebb költséget, s erre programozva a lehetséges maximális szállítási feladatot. Ezután keressük ki a nagyságrendre következő legkisebb elemet és erre programozunk. Ez most az első sor harmadik oszlopában volna, de mivel az első sorban már nem programozhatunk /A tárolóhelyről már mindent elszállítottunk/ a második sor harmadik és a harmadik sor negyedik elemére programozhatunk /itt a szállítási költség 8 egység/. Ezután következik a második sor második eleme, majd a negyedik sor első és második eleme. Jelöljük az elvégzett feladatot táblázatban /lásd következő oldalon/.

	I	II	III	IV	
A	10	8	6	4 ¹⁰	10
B	20	16 ⁶	8 ⁴	14	10
C	18 ²	18 ⁶	16	8 ²	10
	2	12	11	12	30

A szállítási költség:

$$4 \cdot 10 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 18 \cdot 6 + 18 \cdot 2 = 40 + 16 + 32 + 96 + 108 + 36 = 328$$

A szállítási költség most az előbbi 340 helyett csak 328, tehát sikerült jobb programot előállítani.

Kiséréljünk meg ismét más megoldást. Induljunk ki az első sor második oszlop által meghatározott helyről és írjuk elő, hogy A tárolóhelyről II. rendeltetési helyre 10 egységet szállítunk. A II. rendeltetési hely fennmaradó 2 egységnyi igényét elégítsük ki B tárolóhelyről. A B tárolóhelyen fennmaradt mennyiségből programozzunk 4-4 egységet a III. és IV. rendeltetési helyre. Végül a C tárolóhelyen lévő 10 egységből 2 egységet az I. rendeltetési helyre, 8 egységet a IV. rendeltetési helyre programozzunk. Foglaljuk ezt a megoldást táblázatba:

	I	II	III	IV	
A	10	8 ¹⁰	6	4	10
B	20	16 ²	8 ⁴	14 ⁴	10
C	18 ²	18	16	8 ⁸	10
	2	12	4	12	30

Ujabb programot kaptunk. Az ehhez tartozó szállítási költség:

$$8 \cdot 10 + 16 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 14 \cdot 4 + 18 \cdot 2 + 8 \cdot 8 = 80 + 32 + 32 + 56 + 36 + 64 = 300$$

Ismét kevesebb a szállítási költség, de a szimplex módszerrel történt megoldásból tudjuk, hogy ennél is lehetséges jobb szállítási program. Kitűnt az is, hogy a feladatnak több lehetséges megoldása is van, ezekhez különböző célfüggvényértékek tartoznak, s célunk kiválasztani az optimális megoldást, azt, amelyhez a legkisebb célfüggvényérték tartozik. Felvetődik a kérdés, lehetséges-e az optimális megoldás megtalálására a szimplex módszer mellett valamilyen más eljárást alkalmazni, amely gyorsabban, kevesebb és egyszerűbb számítási munkával vezet el a szállítási feladat megoldásához.

A probléma megoldását segíti elő a költségmátrix redukálása. Ez a költségmátrix olyan átalakítását segíti elő, hogy a költségmátrixban olyan költségelemek legyenek, amelyek iránymutatóak a szállítások szétosztásában.

A költségmátrix redukálását végrehajthatjuk sorok, vagy oszlopok szerint. Ugy végezzük, hogy a költségelemből levonjuk a sorok, vagy oszlopok legkisebb elemeit.

Vegyük az eddigi számpéldánkat és redukáljuk a költségmátrixot előbb a sorok, majd az oszlopok szerint és foglaljuk az adatokat táblázatba:

Az eredeti költségmátrix:

	I	II	III	IV
A	10	8	6	4
B	20	16	8	14
C	18	18	16	8

A sorok szerint redukált költségmátrix:

	I	II	III	IV
A	6	4	2	0
B	12	8	0	6
C	10	10	8	0

Az első sorból 4-et, másodikból 8-at, harmadik sorból 8-at vontunk ki. Értelmszerű természetesen, hogy most ha egy lehetséges szállítási programot meghatároznánk a célfüggvény kiszámítása során a levont értékekkel is

számolni kell.

Redukáljuk most a kapott költségmátrixot oszlopok szerint is. A III. és IV. oszlopokban a legkisebb érték 0, tehát ezek az oszlopok változatlanok maradnak. Az első oszlop viszont 6-al, a második 4-el redukálható.

Az oszlopok szerint redukált költségmátrix:

	I	II	III	IV	
A	0	0	2	0	
B	6	4	0	6	
C	4	6	8	0	

Mostmár a redukált költségmátrix minden sorában és minden oszlopában van 0 költségelem. Most a redukált költségmátrix szerint végezzük a szállítások programozását úgy, hogy sorok szerint haladva először a legelső 0 elemre, majd a következő 0 elemre programozzuk a maximális szállítási feladatot. Ha a nulla elemekhez nem tudtuk a teljes mennyiséget programozni, akkor a következő legkisebb elemekre folytatjuk a programozást.

A feladat elvégzését táblázatba foglalva szemléltetjük a következők szerint, a redukált költségmátrixszal szemléltetve.

	I	II	III	IV	
A	0 ²	0 ⁸	2	0	10
B	6	4 ⁴	0 ⁴	6 ²	10
C	4	6	8	0 ¹⁰	10
	2	12	4	12	30

Megkaptunk ismét egy lehetséges szállítási programot. Szemléltessük ezt az eredeti költségmátrix felhasználásával /lásd következő oldalon/.

A programhoz tartozó szállítási költség:

$$10 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 16 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 10 = 20 + 64 + 64 + \\ + 32 + 28 + 80 = 288$$

	I	II	III	IV	
A	10^2	8^8	6	4	10
B	20	16^4	8^4	14^2	10
C	18	18	16	8^{10}	10
	2	12	4	12	30

Ez a program már közel jár az optimálishoz. Javítható azonban ez a program is. Nem programoztunk szállítást az első sor egyik nulla elemére. Ezt az elemet is figyelembevéve előállítható a következő megoldás:

	I	II	III	IV	
A	0^2	0^6	2	0^2	10
B	6	4^6	0^4	6	10
C	4	6	8	0^{10}	10
	2	12	4	12	30

Az eredeti költségmátrixszal szemlélítve:

	I	II	III	IV	
A	10^2	8^6	6	4^2	10
B	20	16^6	8^4	14	10
C	18	18	16	8^{10}	10
	2	12	4	12	30

$$z = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 16 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 10 = 20 + 48 + 8 + 96 + 32 + 80 = 284$$

Ismét javítottuk tehát a szállítási programot. Sőt most optimális programhoz is jutottunk, de ezt csak azért tudjuk, mert ismerjük a szimplex módszerrel történt megoldás eredményét. Sajnos egyébként nem tudnánk, hogy optimális programhoz jutottunk. Másrészt nagyobb méretű feladat esetén a

programok javítása már igen nagy figyelmet igényel. Mindkét probléma nehézségeket okozhat a gyakorlati szállítási feladatok megoldásában, ezért újabb módszerrel is megismerkedünk.

8.4. A Korda-Vogel módszer

A továbbiakban a Korda-Vogel-féle közelítő eljárással ismerkedünk meg. Most is a redukált költségmátrixból indulunk ki, majd képezzük a sorok és az oszlopok szerint a két minimális költségelem különbségeit. /Jelöljük ezeket Δ -vel./ Írjuk be ezeket egy új oszlopba, illetve sorba, hogy szem előtt legyenek. Foglaljuk az adatokat táblázatba:

	I	II	III	IV		Δ
A	0	0	2	0	10	2
B	6	4	0	6	10	4
C	4	6	8	0	10	4
	2	12	4	12	30	
Δ	4	4	2	6		

A legnagyobb különbséget a IV. oszlopban találjuk. Programozzunk ennek minimális elemeire maximális mennyiséget, azaz a C sor IV. oszlopba 10-et, az A sor IV. oszlopba 2-t. Ezáltal a C tárolóhelyről a teljes mennyiséget elszállítottuk és a IV. rendeltetési hely igényét kielégítettük, az A tárolóhely készlete 8 egység maradt.

Készítsünk új táblázatot, amelyben hagyjuk el a C sort és IV. oszlopot, s az A tárolóhely készletét 8 egységre módosítsuk.

	I	II	III	IV		Δ
A	0 ²	0	2	0	8	2
B	6	4	0	.	10	4
C	.	.	.	.	.	.
	2	12	4	.		
Δ	6	4	2	.		

Az új táblázatban újra képezzük a sorok és oszlopok szerinti különbségeket és megismételjük az előbbi eljárást. Ennek során kielégítjük az I. rendeltetési hely igényét és az A feladóhely készlete 6 egységre csökken, azaz:

	I	II	III	IV		Δ
A	.	0 ⁶	2	.	6	2
B	.	4	0 ⁴	.	10	4
C	.	.	.	.	.	.
	.	12	4	.	.	.
Δ	.	4	2	.		

A táblázatban a B sorhoz és II. oszlophoz tartozó differencia egyforma, egyaránt 4. Ilyenkor vagy tetszés szerint választunk sort, vagy oszlopot, vagy azt a sort, vagy oszlopot választjuk, ahol a költségelemek nagyobbak.

A táblázatokba foglalt részmegoldásokat foglaljuk egy táblázatba és már meg is kapjuk az előbbi optimális szállítási programot.

	0 ²	0 ⁶	2	0 ²	10
	6	4 ⁶	0 ⁴	6	10
	4	6	8	0 ¹⁰	10
	2	12	4	12	30

Megjegyezzük, hogy nem szükséges minden lépésben új táblázatot szerkeszteni, elegendő a kihagyandó sorokat áthuzni és az új differenciákat meghatározni. Példánk alapján: lásd következő oldalon.

8.5. Egyenlőtlenségek és korlátozások a szállítási feladatban

Eddig feltételeztük, hogy a tárolóhelyeken tárolt, elszállítandó mennyiség és a rendeltetési helyek igénye megegyezik. A gyakorlatban ez a feltételezés nem mindig teljesül, gyakran előfordul, hogy a rendelési helyek összes igénye nem éri el a tárolóhelyeken tárolt összes mennyiséget, vagy a rendelési helyek igénye meghaladja a tárolóhelyeken tárolt összes mennyiséget.

	I	II	III	IV		Δ_1	Δ_2	Δ_3	
A	0 ²	0 ⁶	2	0 ²	10	2	2	2	
B	6	4 ⁶	0 ⁴	6	10	4	4	4	
C	4	6	8	0 ¹⁰	10	4			
	2	12	4	12	30				
Δ_1	4	4	2	6					
Δ_2	6	4	2						
Δ_3		4	2						

Ha a feladatot lineáris programozási feladatként szimplex módszerrel oldjuk meg, akkor az azt eredményezi, hogy a feltételeket egyenlőtlenségekkel fogalmazzuk meg. Ismeretes, hogy ilyen esetben az egyenlőtlenség egyenletté alakítható át egységvektorok /ugynevezett hiányváltozók, vagy többletváltozók/ beiktatásával a szóbanforgó feltételekhez. A hiányváltozó itt azt mutatja, hogy a tárolt mennyiségből mennyire nincs megrendelés /rendelési hiány/ a többletváltozó pedig a többlet megrendelést mutatja /rendeléstöbblet/.

Tegyük fel például, hogy feladatunkban a IV. rendelési hely igénye 12 helyett 6 egység. A feladat lineáris programozási modellje most /a feltételeket egyenletekké alakítva/ a következő: lásd következő oldalon/.

Az u_1 , u_2 , u_3 tehát azt mutatja, hogy az A, B illetve C tárolóhelyen tárolt mennyiségből mennyit kell továbbra is tárolni. Természetesen az ezekhez tartozó szállítási költség /a célfüggvénykoefficiens/ nulla, hiszen itt nem történik szállítás.

A fenti logikát követjük akkor is, amikor a költségmátrixot úgy alakítjuk át, hogy névleges állomást iktatunk be, amelyhez természetesen 0 költségelem tartozik. Jelöljük a névleges állomást N-el, akkor a költségmátrix táblázatunk a következő:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	u_1	u_2	u_3	R
x_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	= 10
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	= 10
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	= 10
x_4	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	= 2
x_5	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	= 12
x_6	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	= 4
x_7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	= 3
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	= 3
z	-10	-8	-6	-4	-20	-16	-8	-14	-18	-18	-16	-8	0	0	0	0
x_z	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	54

	I	II	III	IV	N	
A	10	8	6	4	0	10
B	20	16	8	7	0	10
C	18	18	16	8	0	10
	2	12	4	6	6	30

Csupán megjegyezzük, hogy a lineáris programozási modellben a hiányváltozók jelölhetők x_{15} , x_{25} , x_{35} szimbólumokkal, vagy N_1 , N_2 , N_3 illetve N_{15} , N_{25} , N_{35} szimbólumokkal és ezek elhelyezhetők az:

x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{14} , x_{15} , x_{21} , x_{22} , x_{23} , x_{24} , x_{25}

stb. elrendezésben is tetszés szerint.

Vegyük most azt az esetet amikor a rendeltetési helyek igénye meghaladja a tárolóhelyek kapacitását, mondjuk az I. rendeltetési hely igénye most 2 helyett 6 egység. Most névleges tárolóhelyet építünk be a költségmátrixba, amelyhez 0 költségelemeket rendelünk, azaz:

	I	II	III	IV	
A	10	8	6	4	10
B	20	16	8	14	10
C	18	18	16	8	10
N	0	0	0	0	4
	6	12	4	12	34

Értelemszerűen írhatjuk fel most is a lineáris programozási modell induló szimplex tábláját.

Az eddigiekben azt feltételeztük, hogy a feladat megoldását nem korlátozzuk. A gyakorlatban viszont gyakran kell a feladatban korlátozásokat is megfogalmazni.

Igy például lehetséges, hogy a rendelés nem éri el a tárolt mennyiséget, tehát az anyag egy részét továbbra is tárolni kell, azonban el akarjuk érni, hogy az el nem

szállított anyagokat egyetlen tárolóhelyen tároljuk, hogy ne legyen szükség egyidejűleg több helyen is az anyag őrzésére, kezelésére, stb. Lehet követelményünk az is, hogy bizonyos tárolóhelyről bizonyos rendelési helyre nem szabad szállítani. Az ilyen korlátozásokat a szállítási feladatban könnyen tudjuk kezelni, egyszerűen magas szállítási költséget, úgynevezett tiltótarifát írunk elő azokra a helyekre ahova nem szabad szállítást programozni. Ezt a magas költséget M-el jelöljük.

Ha például a névleges állomások beiktatásával csak a C tárolóhelyen engedünk további tárolást, és ha nem engedjük meg, hogy A tárolóhelyről II. rendeltetési helyre szállítsunk, akkor költségmátrixunk a következő:

	I	II	III	IV	N	
A	10	M	6	4	M	10
B	20	16	8	14	M	10
C	18	18	16	8	0	10
	2	12	4	6	6	

A lineáris programozási modellben ugyancsak elérhetjük tiltótarifa alkalmazásával, vagyis nagyon magas költség előírásával a fenti követelményeket, de tudjuk azt is, hogy a lineáris programozás erre más lehetőségeket is kínál.

8.6. Potenciálok módszere

Az eddig tanult módszerek - a szimplex módszer kivételével - nem teszik lehetővé annak megnyugtató eldöntését, hogy az előállított megoldás az optimális szállítási programot adja-e, vagy csak az egyik lehetséges programot kaptuk meg. A továbbiakban megismerjük a potenciálok módszerét, amely lehetővé teszi egy induló lehetséges szállítási program fokozatos javítását, s az így előállított újabb és újabb megoldásokról azt is el tudjuk dönteni, hogy az optimális program-e?

Vegyük az előbbiekben már megismert redukált költségmátrixot és egy lehetséges megoldást: /lásd következő oldalon/.

A táblázatból látható, hogy egyes helyekre már szállításokat programoztunk /ezek a kötött helyek/, másokra nem programoztunk /ezek a szabad helyek/.

	I	II	III	IV	
A	0 ²	0 ⁸	2	0	10
B	6	4 ⁴	0 ⁴	6 ²	10
C	4	6	8	0 ¹⁰	10
	2	12	4	12	30

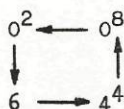
A tárolóhelyek száma 3, a rendeltetési helyek száma 4, összesen 7, a kötött helyek száma 6. /A kötött helyek száma mindig eggyel kevesebb, mint a tároló- és a rendeltetési helyek együttes száma. Ezt az értéket /kötött helyek számát/ kritikus számnak szokták nevezni.

Ha a fenti induló programban a kötött helyek mind nulla elemnél fordulnának elő a megoldás optimális programot jelentene. Ellenkező esetben a program javítható.

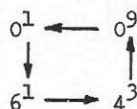
A program javítása a következők szerint történik:

Megvizsgáljuk mi történik, ha valamelyik szabad helyet bevonjuk a programba.

Vegyük a második sor első elemét, ami szabad helyet mutat. Ha ide 1 egységet programozunk, akkor a második sor második elemére programozott mennyiséget 1 egységgel csökkenteni kell, az első sor második eleméhez 1 egységgel többet, első eleméhez egy egységgel kevesebbet kell programozni. Tulajdonképpen bástyamozgással egy kört irtunk le. A



helyett, tehát a



megoldást kapjuk.

Nézzük meg a két "körhöz" /a két részprogramhoz/ tartozó szállítási költséget:

$$0 \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 0 = 16 \quad \text{és} \quad 0 \cdot 1 + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 18$$

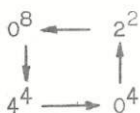
A szállítási költség tehát növekedett 2 egységgel. Ezt a

$$\Delta_{21} = 2$$

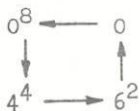
szimbólummal jelöljük, kifejezve, hogy amennyiben a második sor első helyére egy egységet programozva változtatjuk meg az előbbi lehetséges programot, akkor a szállítási költség 2 egységgel megnövekszik. Ezt a szabad helyet tehát nem célszerű bevonni a programba. A Δ_{21} értéke egyszerűen kiszámítható úgy, hogy a szabad helyről kiindulva a költségelemeket változó előjellel felírjuk és összevonjuk, azaz

$$\Delta_{21} = 3 - 2 + 0 - 0 = 1$$

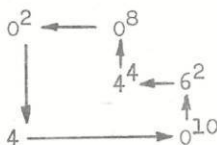
Végezzük el a körök alkotását bátyamozgással minden szabad hely figyelembevételével és határozzuk meg a Δ_{ij} értékeket:



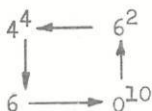
$$\Delta_{13} = 2 - 0 + 4 - 0 = 6,$$



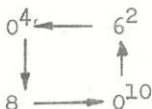
$$\Delta_{14} = 0 - 0 + 4 - 6 = -2,$$



$$\Delta_{31} = 4 - 0 + 6 - 4 + 0 - 0 = 6,$$



$$\Delta_{32} = -6 - 0 + 6 - 4 = 8,$$



$$\Delta_{33} = 8 - 0 + 6 - 0 = 14,$$

Az eredmény tehát:

$$\Delta_{13} = 6,$$

$$\Delta_{14} = -2,$$

$$\Delta_{21} = 2,$$

$$\Delta_{31} = 6,$$

$$\Delta_{32} = 8,$$

$$\Delta_{33} = 14.$$

A Δ_{ij} értékekből kitűnik, hogy a szállítási költség csak azáltal csökkenthető, ha az első sor 4.oszlopát vonjuk be a programba, mégpedig minden egység átprogramozása 2 egységgel csökkenti a szállítási költséget.

Kérdés azonban, hogy a szállítandó mennyiségből hány egység programozható át erre a helyre, Ezt mindig az adott kör legkisebb eleme határozza meg /hiszen egyik helyre sem programozhatunk negatív mennyiséget/. Ez esetünkben 2 egység lehet, mivel ezen a körön ez a legkisebb elem.

Az optimális program tehát:

$$\begin{bmatrix} 0^2 & 0^6 & 2 & 0^2 \\ 6 & 4^6 & 0^4 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 0^{10} \end{bmatrix}$$

Készítsük el ismét a táblázatot, ugy, hogy a kötött helyeket $\square$ jellel jelöljük, a szabad helyekre pedig írjuk be a megfelelő Δ_{ij} értékeket. Ekkor a költségváltozások mátrixát kapjuk, azaz:

		I	II	III	IV
	A	$\square$	$\square$	6	-2
	B	2	$\square$	$\square$	$\square$
	C	6	8	14	$\square$

Készítsünk a leírt módon köröket az optimálisnak tekintett megoldáshoz és határozzuk meg a költségváltozások mátrixát. Az adatokat a következő táblázatba foglaltuk:

		I	II	III	IV
	A	$\square$	$\square$	6	$\square$
	B	2	$\square$	$\square$	2
	C	4	6	12	$\square$

Mostmár nem találunk negatív elemet a költségváltozások mátrixában, tehát a program tovább nem javítható.

Magyobb terjedelmű feladatok megoldásához számítógépet veszünk igénybe.

8.7. Mezőgazdasági alkalmazások

A mezőgazdaságban nem jellemző a tipikus szállítási probléma, amikor több tárolóhely /feladóhely/ és több rendeltetési hely között kell a szállítási feladatot programozni. Annál inkább felmerül ez a feladat a mezőgazdasági termények és termékek kereskedelmi szférájában, valamint a mezőgazdaság anyagellátásában.

Nem mindegy például, hogy az állami, vagy kereskedelmi tárolóhelyekre a termények szállítását hogyan szervezzük, meg, melyik mezőgazdasági vállalat melyik tárolóhelyre szállít. Ugyancsak jelentős feladat lehet annak megszervezése, hogy a műtrágyákat, vegyszereket és egyéb anyagokat melyik vállalat melyik kereskedelmi tárolóhelyről kapja.

Jelentős feladat volna a mezőgazdasággal kapcsolatos vasúti szállítások programozása.

A feldolgozó ipari, élelmiszeripari üzemeknél is alkalmazható volna a szállítások programozása, pl. melyik vállalat melyik feldolgozó üzemhez szállítsa a gyümölcsöt, konzervipari termékeket, cukorrépát, stb. feldolgozás céljából.

Nem könnyű feladat ennek megoldása, annál inkább, mivel a feladat önálló kereskedelmi és iparvállalatokhoz kapcsolódik, ezek önállóan vásárolnak fel és önállóan értékesítenek. Ki lehetne dolgozni azonban ezek részére egy ajánlást, döntési változatokat a felvásárlás és értékesítés körzetesítésére, ami nem lenne kötelező, de ismernék a vállalatok, hogy az ettől való eltérés milyen áldozatokkal jár. Egy kötelező felvásárlási-értékesítési, szállítási terv, vagy kötelező körzetesítés nagyobb kárt okozna, mint amilyen haszonnal járna. Nyugati országokban azonban élelmiszeripari vállalatok és kereskedelmi cégek megbízásokat adnak kutatóknak a felvásárlások, illetve értékesítések körzetesítése számára, ajánlatok kidolgozására. Ezeket a körzetesítési ajánlatokat természetesen csak addig veszik figyelembe a vállalatok, ameddig az számukra előnyös.

A mezőgazdasági vállalatoknál különösen nem merül fel a szállítási feladat klasszikus esete, azaz hogy több tárolóhelyről kell egyidejűleg egynemű terméket elszállítani. De a szállításprogramozással azonos logikán alapszik az a feladat, hogy ha például különböző táblákon kell a búzát kombájn-

nal betakarítani és különböző típusu és teljesítményű kombájnnok állnak rendelkezésre, akkor melyik kombájnjból hány darabot küldjünk egyik, vagy másik táblára. Ez már egy elosztási feladat, amikor a különböző táblákon végzendő munkákat elosztjuk a kombájnnok között, vagy másként a kombájnokat elosztjuk a táblák között. Márpedig a mezőgazdasági munkaszervezésben igen sokféle ilyen elosztási feladat adódik.

Ugyanilyen elosztási feladat a műtrágyák elosztása táblák között. Ez esetben a műtrágyafelhasználás adott táblán többlethozamot és többletköltséget is jelent, azaz ezek különbségeiből adódóan többletjövedelmet. Most tehát célfüggvényünk nem a szállítási költség, hanem a többletjövedelem lehet, aminek természetesen a maximumát keressük.

Sorolhatnánk még a mezőgazdasági alkalmazás lehetőségeit, de ezzel később, más tárgy keretében foglalkozunk részletesebben. Ha azonban végiggondoljuk az előbbi rövid összefoglalás az alkalmazásokkal kapcsolatban, sikerül rájönni arra is, hogy a szállításprogramozás és a lineáris programozás között igen szoros kapcsolat van.

9. FEJEZET

Hálódigrammos eljárások

A hálódigrammos eljárás ötvözi a grafikus és numerikus módszereket. Jól alkalmazható tervezési, szervezési, irányítási, ellenőrzési feladatok megoldására. Egyszerű, a feladatot grafikusán ábrázolja, majd numerikus módszerekkel vizsgálja. A grafikus ábra gyakran egy kifeszített hálózhoz hasonlít, ezért is nevezik az ide tartozó módszereket hálódigrammos eljárásoknak, vagy hálótechnikai módszereknek, vagy egyszerűen hálótervezésnek.

A hálódigrammos módszereket olyan folyamatok vizsgálatára alkalmazzuk, amelyek önálló részfolyamatokra bonthatók és célunk e részfolyamatok között a logikai és időbeli kapcsolatok vizsgálata, a sorrendiség és ütemezés megtervezése. A részfolyamatok logikai, és sorrendi kapcsolódásait grafikusán ábrázoljuk, ami tulajdonképpen a folyamat logikai modelljét képezi.

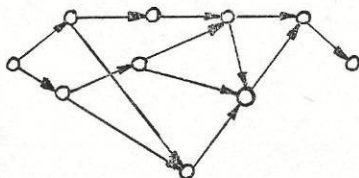
A hálótervezési módszerek nem optimumszámítási módszerek, nem teszik lehetővé annak megállapítását sem, hogy egy-egy megoldás optimális-e, vagy milyen mértékben tér el az optimálistól. Ennek ellenére a hálótechnika igen eredményesen alkalmazható gazdasági problémák vizsgálatára, gazdasági feladatok hatékonyabb megoldásának tervezésére.

Az első jelentősebb publikáció 1957-ben jelent meg az USA-ban. Köszölte a kritikus út módszerét /Critical Path Method, vagy rövidítve CPM/. Egy évvel később hozták nyilvánosságra a programellenőrző és kiértékelő technika módszerét /Program Evolution and Review Technique, vagy rövidítve PERT/ módszert, amelyet a Poláris rakéta-program megtervezéséhez alkalmaztak.

A későbbiekben főként a CPM és PERT módszer továbbfejlesztéseként újabb módszerek születtek, így az erőforrásallokációra a PAMPS módszer, a költségelemzésre a PERT/COST illetve a LESS programrendszerek, majd Franciaországban a 60-as években került kidolgozásra a potenciálok módszere néven ismert /Metra Potential Method, vagy rövidítve MPM/ módszer, amely a hálószerkesztés szemléletmódjában is eltér a CPM és a PERT módszerektől.

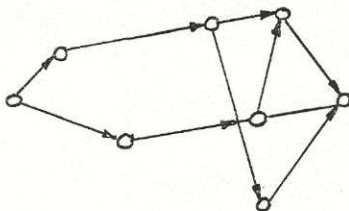
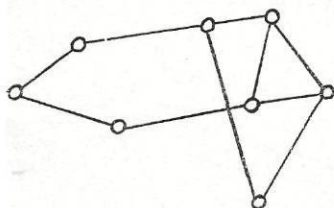
Magyarországon eddig a hálódigrammos eljárásokat kutatási, fejlesztési, tervezési, beruházás tervezési és szervezési feladatoknál alkalmazták nagyjából. Mezőgazdaságban inkább csak kísérleti, kutatási alkalmazásokat találunk, gyakorlati alkalmazása nem terjedt el. Valószínűleg ennek az is oka, hogy az alkalmazás módszertani kérdései nincsenek kellően kidolgozva.

Irányított gráfról beszélünk, ha lényeges az elempárok sorrendje is, azaz az összekötő élekkel kapcsolatban beszélhetünk kezdő és végpontokról. Ilyenkor az éleket nyilakkal jelöljük.



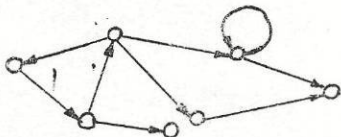
Irányított gráf.

Az élek egymáshoz csatlakozó sorozata az út, vagy pálya. Irányított gráfoknál útról akkor beszélhetünk ha az élek irányításuknak megfelelően csatlakoznak egymáshoz.



Ut az irányítatlan és az irányított gráfban

Körpálya és hurok az olyan út, /vagy pálya/ melynek kezdő és végpontja ugyanabban a csúcsponban van. Legegyszerűbb út a hurok, amely csak egyetlen élből áll.



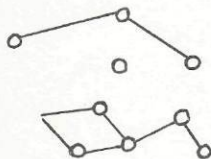
Körpálya és hurok az irányított gráfban.

9.1. Gráfelméleti hivatkozások

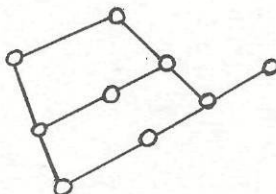
A hálódigrammos eljárások által alkalmazott hálók csúcsokból /csomópontokból/ és az ezeket összekötő nyilakból /élekből/ állnak. Az ilyen alakzatok matematikai vizsgálataival a gráf-elmélet foglalkozik.

Gráf alatt olyan halmazt értünk, amely egy alaphalmazból /pl. pontthalmazból/ és az alaphalmaz ellenpárjainak halmazából áll.

Egy gráfot összefüggő gráfnak nevezünk, ha annak bármely két pontja össze van kötve éllel, vagy élek szorzatával, azaz az élek sorozata bármely pontból bármely pontba elvezet. Nem összefüggő gráfról beszélünk, ha a fenti feltétel nem teljesül

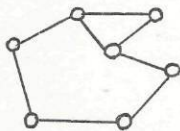


nem összefüggő
gráf

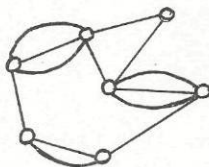


összefüggő
gráf.

Egy gráfot egyszerű gráfnak nevezünk, ha bármely két pontja között legfeljebb csak egy él lehetséges, ellenkező esetben, nem egyszerű gráfról beszélünk. A hálódigrammos eljárások egyszerű gráfokat alkalmaznak.

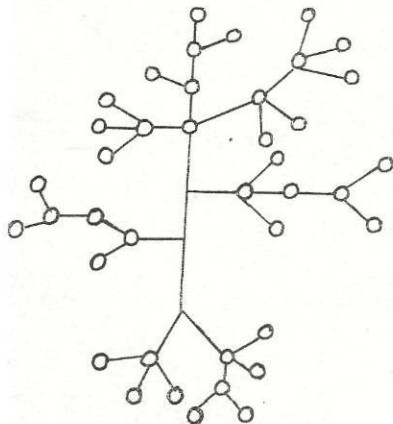


Egyszerű gráf

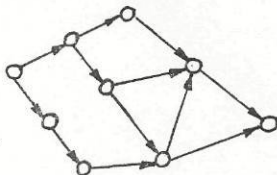


Nem egyszerű gráf

A körpálya mentes gráfokat fának is szokás nevezni. Az irányított fa /irányított körpálya mentes gráf/ tartalmazhat látszólagos körpályát, de az - az irányítást is figyelembe véve - nem lehet körüljárható. A gyakorlatban megvalósítható folyamat hálójá csakis irányított körpályamentes gráf lehet.



Irányított fa



Irányított fa, látszólagos körpályákkal.

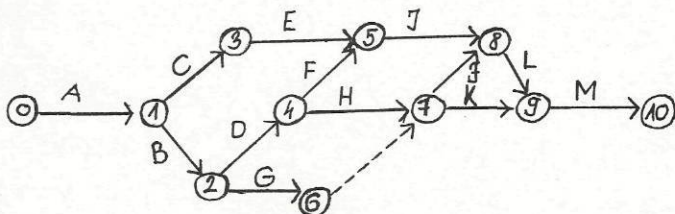
9.2. A kritikus út meghatározása

A kritikus út módszer /CPM/ a tevékenységek tervezésére határozott időtartamokat használ, szemben a PERT módszerrel, amely határozatlan, becsült időtartamokkal dolgozik és alkalmas sztochasztikus folyamatok vizsgálatára.

9.2.1. Logikai tervezés

A kritikus út módszerének alkalmazása során mindenekelőtt számba kell venni a résztvevő tevékenységeket /illetve a teljes folyamatot résztvevő tevékenységekre kell bontani/ s a résztvevő tevékenységek kapcsolatai alapján fel kell építeni a tevékenységek hálóját.

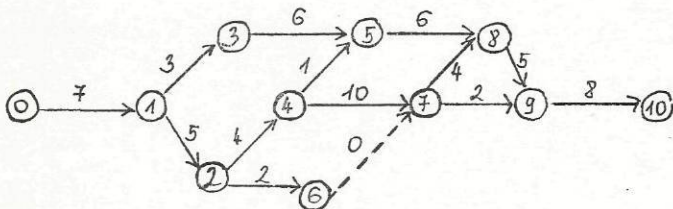
Mindenekelőtt egy listát készítünk a tevékenységekről és megállapítjuk a tevékenységek sorrendjét. A tevékenységek között lehetnek fixtív, vagy látszattevékenységek, más-ként üres tevékenységek is, amelyek nem jelentenek tevékenységet, csak azt jelölik, hogy pl. K, tevékenység csak G, tevékenység befejezése után kezdődhet el.



A tevékenységek /A, B, C, ..., M/ csúcspontokból indulnak és csúcspontokba vezetnek. Ezek a csúcspontok a tevékenységek kezdeteit ill. befejezéseit jelölik, s számokkal vannak ellátva, s ezeket eseményeknek nevezzük. A tevékenységek jelölhetők számpárokkal is, így az /i,j/ számpárral, ami azt jelenti, hogy az i-edik eseményből kiinduló és a j-edik eseményben végződő tevékenységről van szó, s természetesen $i < j$, vagyis az i esemény megelőzi a j eseményt. Ennek alapján a tevékenységek jelölését el is hagyhatjuk, hiszen mindegyik élről /tevékenységről/ tudjuk, hogy az az /i,j/ tevékenységet jelenti.

9.2.2. Időtervezés

A logikai tervezés után meghatározzuk a tevékenységek időszükségletét /hetekben, napokban, órákban tetszős szerint/. Természetesen a látszattevékenységek időigénye nulla. Írjuk be a hálóba a tevékenységek időigényét.



Az időtervezés során célunk a feladat elvégzésének idejét meghatározni. Ezt a feladat átfutási idejének, átfutási időnek nevezzük.

Az átfutási idő az a leghosszabb időtartamu út, amely alatt a feladat megoldható. Ezt az utat kritikus utnak nevezzük, mivel ezen az úton a résztevékenységek elvégzésében bekövetkező legkisebb késedelem is az egész feladat elvégzésének késleltetésével jár együtt.

9.2.3. A kritikus út meghatározása

Foglaljuk az előbbi háló tevékenységeinek időtartamát egy időtartam mátrixba, azaz írjuk be az i, j tevékenységek időtartamát az i -edik sor j -edik oszlopába.

1	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0			7									
1				5	3							
2						4		2				
3							6					
4							1		10			
5										6		
6									0			
7										4	2	
8											5	
9												8
10												

Vegyük észre, hogy amikor az i -edik eseményből több tevékenység is kiindul, akkor az i -edik sorban több oszlopban is találunk időtartam adatot, illetve ha a j eseményben több tevékenység is végződik, akkor a j oszlopban több sorban is találunk időtartam adatot. A látszatevékenységnél az időtartam nulla.

A feladat további elvégzésének könnyebb megértéséhez és a rövidebb tárgyalhatóság érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

- i = egy tetszőleges esemény sorszáma /általában egy tevékenység kiinduló /kezdő/ eseménye./
- j = egy tetszőleges esemény sorszáma /általában egy tevékenység befejező eseménye./
- /i,j/ = egy tetszőleges tevékenység kódja;
- y/i,j/ = az i-edik eseményből a j-edik eseményhez vezető tevékenység elvégzésének időtartama /időszükséglete, átfutási ideje/
- tf/i/ = az i-edik esemény legkorábbi bekövetkezési időpontja;
- ts/i/ = az i-edik esemény legkésőbbi bekövetkezési időpontja;
- tík/i,j/ = az /i,j/ tevékenység legkorábbi kezdete;
- tívé/i,j/ = az /i,j/ tevékenység legkorábbi befejezése;
- tsk/i,j/ = az /i,j/ tevékenység legkésőbbi kezdete;
- tsvé/i,j/ = az /i,j/ tevékenység legkésőbbi befejezése;
- T = a folyamat teljes átfutási ideje;
- P max/i,j/ = az /i,j/ tevékenység maximális tartalékidéje;
- Psz /i,j/ = az /i,j/ tevékenység szabad tartalékidéje;
- Pf /i,j/ = az /i,j/ tevékenység független tartalékidéje;
- P min/i,j/ = az /i,j/ tevékenység minimális tartalékidéje.

Az i-edik esemény legkorábbi bekövetkezésének időpontja

[tf/i/] az a leghosszabb időtartam, amely a kezdő időponttól az i-edik eseményig terjedő összes tevékenység végrehajtásához szükséges. Ebből következik, hogy amennyiben az i-edik esemény több úton is elérhető, mindig a hosszabb uttal számolunk.

Határozzuk meg a $tf/i/$ időtartamokat az előbbi háló alapján:

$i = 1$ eseményig egy út vezet $/0, 1/$ aminél a $j/0, 1/$ időtartamot találjuk, ami 7 egység. Tehát

$$tf/1/ = 7$$

$i = 2$ eseményig.

$$tf/2/ = tf/1/ + y/1, 2/ = 7 + 5 = 12$$

$$tf/2/ = 12$$

$i = 3$

$$tf/3/ = tf/1/ + y/1, 3/ = 7 + 3 = 10$$

$$tf/3/ = 10$$

$i = 4$

$$tf/4/ = tf/2/ + y/2, 4/ = 12 + 4 = 16$$

$$tf/4/ = 16$$

$i = 5$

$$tf/5/ = tf/4/ + y/4, 5/ = 16 + 1 = 17$$

$$tf/5/ = tf/3/ + y/3, 5/ = 10 + 6 = 16$$

$$tf/5/ = 17$$

Látjuk, hogy $i = 5$ eseményhez két út vezet $/i = 4$ és $i = 3$ -ból/ s a hosszabbi utat vettük számításba.

$i = 6$

$$tf/6/ = tf/2/ + y/2, 6/ = 12 + 2 = 14$$

$$tf/6/ = 14$$

$i = 7$

$$tf/7/ = tf/4/ + y/4, 7/ = 16 + 10 = 26$$

$$tf/7/ = tf/6/ + y/6, 7/ = 14 + 0 = 14$$

$$tf/7/ = 26$$

$$i = 8$$

$$tf/8/ = tf/5/ + y/5,8/ = 17 + 6 = 23$$

$$tf/8/ = tf/7/ + y/7,8/ = 26 + 4 = 30$$

$$tf/8/ = 30$$

$$i = 9$$

$$tf/9/ = tf/7/ + y/7,9/ = 26 + 2 = 28$$

$$tf/9/ = tf/8/ + y/8,9/ = 30 + 5 = 35$$

$$tf/9/ = 35$$

$$i=10$$

$$tf/10/ = tf/9/ + y/9,10/ = 35 + 8 = 43$$

$$tf/10/ = 43$$

A fentiek szerint tehát a folyamat legkorábbi befejezési időpontja a kezdéstől számítva /vagyis a folyamat teljes átfutási ideje/ $T = 46$

Ezt az időtartamot kritikus útnak nevezzük. Ez azt is jelenti, hogy az adott átfutási idő legalább 43 időegység. /Hasonlóképpen határoztuk meg az egyes események legkorábbi bekövetkezésének idejét./

A kritikus úton lévő tevékenységek időigényében bekövetkezett változások a teljes átfutási idő módosulásával járnak. Amennyiben a teljes átfutási idő változását el akarjuk kerülni fontos, hogy a kritikus úton lévő tevékenységek határidejét betartsuk.

Az i -edik esemény legkorábbi bekövetkezési időpontja egyben az /i,j/ tevékenység legkésőbbi befejezési időpontját is jelenti, hiszen az /i,j/ tevékenység csak az i -edik esemény bekövetkezése után kezdődhet.

Az i -esemény legkésőbbi bekövetkezési időpontja alatt azt értjük, hogy a háló kezdőpontjától számítva legkésőbb ekkor be kell következni az i -edik eseménynek. Ez az időpont egyben az /i,j/ tevékenység legkorábbi kezdési időpontja is. A legkésőbbi bekövetkezési időpontok /ts/l/ kiszámításait a hálón visszafelé haladva végezzük és ahol többféle út lehetséges a számítás eredményei közül a kisebb értéket vesszük.

Számítsuk ki a ts/l/ értékeket az előbbi háló alapján.

$$i = 10$$

$$ts/10/ = tf/10/ = 43$$

$$i = 9$$

$$ts/9/ = ts/10/ - y/9,10/ = 43-8 = 35$$

$$ts/9/ = 35$$

$$i = 8$$

$$ts/8/ = ts/9/ - y/8,9/ = 35 - 5 = 30$$

$$ts/8/ = 30$$

$$i = 7$$

$$ts/7/ = ts/8/ - y/7,8/ = 30 - 4 = 26$$

$$ts/7/ = ts/9/ - y/7,9/ = 35 - 2 = 33$$

$$ts/7/ = 26$$

$$i = 6$$

$$ts/6/ = ts/7/ - y/6,7/ = 26 - 0 = 26$$

$$ts/6/ = 26$$

$$i = 5$$

$$ts/5/ = ts/8/ - y/5,8/ = 30 - 6 = 24$$

$$ts/5/ = 24$$

$$i = 4$$

$$ts/4/ = ts/7/ - y/4,7/ = 26 - 10 = 16$$

$$ts/4/ = ts/5/ - y/4,5/ = 24 - 1 = 23$$

$$ts/4/ = 16$$

$$i = 3$$

$$ts/3/ = ts/5/ - y/3,5/ = 24 - 6 = 18$$

$$ts/3/ = 18$$

$$i = 2$$

$$ts/2/ = ts/6/ - y/2,6/ = 26 - 2 = 24$$

$$ts/2/ = ts/4/ - y/2,4/ = 16 - 4 = 12$$

$$ts/2/ = 12$$

$$i = 1$$

$$ts/l/ = ts/3/ - y/l,3/ = 18 - 3 = 15$$

$$ts/l/ = ts/2/ - y/l,2/ = 12 - 5 = 7$$

$$ts/l/ = 7$$

$$i = 0$$

$$ts/0/ = ts/l/ - y/0,1/ = 7 - 7 = 0$$

$$ts/0/ = 0$$

Foglaljuk most össze az előbbi számításokat és az azok alapján levonható következtetéseket:

A j-edik esemény legkorábbi bekövetkezési ideje

$$tf/j/ = \max [tf/i/ + y/i,j/]$$

Vagyis a legutolsó i-edik esemény legkorábbi befejezési idejéhez hozzáadjuk az y/i,j/ tevékenység leghosszabb idejét.

Amennyiben

$$tf/i/ = ts/i/$$

azaz az i-edik tevékenység legkésőbbi befejezési és legkésőbbi kezdési időpontja egybeesik az ezen eseményekhez tartozó út a kritikus út.

A tf/i/ és ts/i/ értékeket általában az időtartam mátrixhoz szokták írni, úgy hogy azt egy oszloppal kibővítik a tf/i/ és egy sorral kibővítik a ts/l/ értékek számára. Szokás a mátrixot még egy sorral bővíteni ahová a ts/i/ - tf/i/ értékeket írjuk be, azaz jelöljük. Ahol ennek értéke nulla, azok a tevékenységek a kritikus utat alkotják.

9.2.4. Időtartalékok

Az előbbieken meghatároztuk a kritikus utat, amely azt mutatja, hogy az adott feltételek mellett mi az az időtartam, amely a feladat teljes átfutási idejéhez feltétlenül szükséges.

Megvizsgálhatjuk azonban, hogy pl. a termelői kapacitások bővítésével nem lehet-e a kritikus utat rövidíteni. A termelői kapacitások bővítése most azt szolgálja, hogy a kritikus úton lévő tevékenységek elvégzéséhez szükséges időt rövidítsük. Lehetséges azonban, hogy a kritikus út mentén lévő tevékenységek időigényét oly mértékben sikerül csökkenteni, hogy megváltozik maga a kritikus út meghatározása.

Annak eldöntéséhez, hogy a kritikus út megváltozott-e segítségünkre van a nem kritikus tevékenységek időtartalmának meghatározása.

Figyeljük csak meg hálónkat. Ahhoz, hogy az egyes tevékenységből az ötös tevékenységhez jussunk el, kétféle lehetőségünk van. Az egyik amikor a hármas tevékenységen keresztül haladunk, a másik út pedig a kettes és négyes tevékenységen keresztül vezet. Előbbi esetben 9 időegység, utóbbiban 10 időegység szükséges az út megtételéhez. Előbbi út 1 időegység tartalékidővel rendelkezik, utóbbinál nincs időtartálékunk, mivel a kritikus úton haladunk. A tartalékidővel kapcsolatos számításokat a következők szerint végezhetjük el.

Maximális tartalékidő meghatározásánál feltételezzük, hogy a tevékenység a kezdő esemény legkorábbi bekövetkezési időpontjában elkezdhető és megengedhető, hogy a vég-esemény legkésőbbi időpontjában fejeződjön be, azaz az $/i,j/$ tevékenységhez rendelkezésre álló idő $ts/j/ - tf/i/$ maximális tartalékidő tehát:

$$P_{\max/i,j/} = ts/j/ - tf/i/ - y/i,j/$$

vagyis a rendelkezésre álló idő és a szükséges idő különbsége.

Általában ezt az időt nem szoktuk teljesen felhasználni.

Szabad tartalékidő az a tartalékidő, amelynek minden tevékenység esetén történő felhasználása sem jelent határidő csúszást. Kiszámítása:

$$PS_{/i,j/} = tf/j/ - tf/i/ - y/i,j/$$

Független tartalékidő meghatározásának célja a szabad tartalékidő céljával azonos, csak itt nem a legkorábbi, hanem a még megengedhető legkésőbbi időpontokat vesszük a számítás alapjául, azaz

$$Pf_{/i,j/} = ts/j/ - ts/i/ - y/i,j/$$

A szabad és a független tartalékidő felhasználása csak akkor nem okoz határidő csúszást, ha következetesek vagyunk és minden tevékenységnél egyaránt vagy a szabad, vagy a független tartalékidőt vesszük figyelembe.

10. FEJEZET

SZIMULÁCIÓS MÓDSZEREK

10.1. A szimuláció fogalma és alkalmazásának lehetőségei

Szimuláció színlelést jelent, vagyis olyan helyzetet teremteni, mintha a nem valóságos folyamatok valóságosak lennének. Azokra az emberekre, akik valamilyen betegséget színlelnék azt mondjuk, hogy csak szimulálnak. Valójában tehát nem betegek, csak úgy tesznek, mintha azok lennének, olyan helyzetet teremtenek, hogy úgy látszon, mintha valóban betegek volnának.

A gazdasági szimuláció azt jelenti, hogy a gazdaság területén olyan szituációkat hozunk létre, mintha azok valóságosak volnának. Általában a gazdasági szimuláció kiinduló alapját matematikai modellek képezik, tehát a szimulációt nem a valóságos folyamatokon, hanem e folyamatokat jól kifejező matematikai modelleken végezzük.

A szimulációs módszerek igen sokszínűek, nincsennek merev szabályokkal körülhatárolva, a legkülönbözőbb matematikai eljárásokat is igénybevehetik és az alkalmazandó eljárásokat mindig a vizsgált jelenség természete és a vizsgálat célja alapján kell megválasztani. Nem tűzik ki a szimulációs eljárások optimumok egzakt meghatározását sem, bár gyakran törekednek az optimum megközelítésére. Legtöbbször még azt sem tudjuk megmondani a szimulációs módszerek alkalmazása során, hogy mennyire közelítettük meg az optimumot. Gyakran nem is célunk az optimum keresése, csupán annak megállapítását kívánjuk elérni, hogy hogyan viselkedik a vizsgált jelenség, vagy folyamat különböző szituációkban, különböző hatásokra.

A szimuláció kötetlensége miatt nagy lehetőségekkel rendelkezik, akkor is, amikor az analitikus módszerek már nem, vagy igen korlátozottan alkalmazhatók. Ez is egyik oka annak, hogy a szimulációs módszerek gyorsan teret nyertek annak ellenére, hogy megjelenésükkor már számos analitikus módszer került alkalmazásra a gazdasági vizsgálatokban.

A vizsgált jelenség természetétől és a vizsgálat szemléletétől függően beszélünk statikus és dinamikus szimulációról, ezen belül szimultán és rekurzív szimulációról. Más szempontból megkülönböztetünk determinisztikus és sztochasztikus szimulációt. A szimuláció során a vizsgált jelenség változók lehetnek: folytonos és diszkrét változók. Speciális típusát képezik a szimulációnak a heurisztikus eljárások, amikor az emberi gondolkodás folyamatára építjük a szimulálást, az emberi problémamegoldó folyamatot játszuk le számítógépen.

A szimuláció gyakran egészen egyszerű megoldásokat alkalmaz,

amikor a vizsgálathoz számítógépre nincs szükség, máskor igen bonyolult logikai és matematikai feladatok megoldására van szükség, ami elképzelhetetlen számítógép nélkül.

10.2. A szimuláció folyamata

A szimuláció ugyan nem tartalmaz szigorú kööttségeket, de bizonyos általános elvek itt is vannak, amelyeket be kell tartani. A szimuláció folyamatainak rövid leírásában ezeket az elveket foglaljuk össze. Valójában ezeket az elveket más operációkutatási eljárások alkalmazása során is figyelembe kell venni.

Az első lépés a feladat megfogalmazása. Ennek során rögzítjük a vizsgálat célját, körülhatároljuk a vizsgálandó problémákat és területet. Célul tűzhetjük ki elméleti, tudományos vizsgálatok elvégzését, hipotézisek és feltételezések ellenőrzését, valamely jelenség alakulásának vizsgálatát különböző körülmények között, vagy gyakorlati döntések megalapozását.

A következő lépés a vizsgált terület tanulmányozása. Ennek során információkat gyűjtünk és elemezzük a vizsgálat területét. Az információk gyakran sok adat begyűjtését, az elemzés ezeknek az adatoknak a logikai és matematikai elemzését igényli. Fel kell tárni a vizsgált jelenség belső strukturáját és más jelenségekhez való kapcsolódásait, ezek természetét és mozgáslehetőségeit. A vizsgált jelenség vagy terület legtöbbször valamilyen rendszert jelent, amelynek belső kapcsolatait az alrendszerei és elemei közötti kapcsolatok, külső kapcsolatait más rendszerekkel és alrendszerekkel, illetve más rendszerek elemeivel való kapcsolatai jelentik. A rendszerek vizsgálata csakis rendszerszemlélettel lehet hatékony, amihez nagy segítséget nyújthatnak a rendszerelemzési módszerek.

A következő lépés a matematikai modell, vagy matematikai modellek összeállítása. Lehetséges ugyanis, hogy a szimuláció során több matematikai modellt, esetleg modellsorozatot alkalmazunk. A sorozathoz tartozó modellek egymás eredményeit is felhasználhatják és egymással horizontális, vagy vertikális kapcsolatban lehetnek.

A modell paramétereinek valósághű meghatározása általában igen lényeges. Esetenként azonban éppen a vizsgálat céljának teljesítése szükségessé teheti, hogy a valóságtól elvonatkoztassunk és irracionális szituációkat is megvizsgáljunk.

A modell paraméterei lehetnek tény adatok, normatív adatok, vagy becsült adatok. A becsült adatok származhatnak objektív becslési eljárásokból, vagy szubjektív, szakértői becslésekből.

A modell matematikai összefüggései is igen különbözők lehetnek és ennek során igen különböző matematikai eljárásokat alkalmazhatunk.

A matematikai modellek összeállítására és ellenőrzése után kerül sor a modellek megoldására, számítógépes feldolgozására. Ennek során alkalmazhatunk már megírt számítógépes programokat, vagy szükség lehet számítógépes programok megírására is. A szimulációs számítógépes programok írásának megkönnyítésére szimulációs programozási nyelveket fejlesztettek ki /DYNAMO, SIMULATE, FORDYN, SIMSCRIPT, SIMULA, stb./. Ezek általában nem általános célú, hanem feladat-orientált nyelvek.

Végül a matematikai számítások elvégzése után /vagy azzal egyidejűleg/ kerül sor az eredmények értékelésére, aminek során szakmailag értékeljük a megoldás eredményeit, vonunk le következtetéseket, vagy jutunk el döntési lehetőségek és javaslatok megfogalmazásához. Ennek során további matematikai vizsgálatokra is sor kerülhet.

A fenti általános elveken belül adódó sokrétűség is oka annak, hogy a szimulációval foglalkozó szakkönyvek nem általános elméleti és módszertani leírásokkal foglalkoznak, hanem konkrét példákat mutatnak be a szimuláció különböző alkalmazásaira. Ilyen példákkal majd a számítástechnika mezőgazdasági alkalmazása tananyagban fogunk találkozni. Bizonyos azonban, hogy a szimuláció még nem foglalta el a mezőgazdaságban sem megillető helyét, s valószínűleg ennek lényeges oka, hogy nincsenek még kellően kidolgozva a mezőgazdasági alkalmazások módszertani kérdései és nincsenek meg az alkalmazáshoz szükséges, könnyen üzemeltethető számítógépes rendszerek sem.

- 348 -

11. FEJEZETÁGAZATI KAPCSOLATOK ELEMZÉSEINPUT - OUTPUT ANALÍZIS

Az input - output analízis /vagy ráfordítások - kibocsátások elemzése/ módszert W. Leontief Szovjetunióból származott amerikai közgazdász kezdeményezte. Inkább népgazdasági szintű vizsgálatok során használják fel, a népgazdaság lineáris programozási modelljére támaszkodik és alapvetően a lineáris programozás módszerét alkalmazza.

Tételezzük fel, hogy a népgazdaságot n ágazatra osztjuk fel /különböző részletezés lehetséges/. Jelöljük az egyes ágazatok évi termelését

$$x_1, x_2, \dots, x_n\text{-el.}$$

Az egyes ágazatok termelésük egy részét önmaguk is felhasználhatják, más részét a többi ágazatnak adják át, végül egy részét fogyasztásra, kivitelre és készletek növelésére használják. Előbbieket jelöljük x_{ij} , utóbbit y_i -vel.

Az i -edik ágazat termelése tehát

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i$$

Az előbbieket alapján elkészíthetjük az ágazati kapcsolatok táblázatát.

Bruttó termelés x_0	Ágazat- áramlások közti				Nettó termelés y_0
	x_{01}	x_{02}	...	x_{0n}	
x_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1
x_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
x_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n
m	m_1	m_2	...	m_n	
x	x_1	x_2	...	x_n	

A táblázatban baloldalt a bruttó termelést tüntettük fel, jobboldalt a nettó kibocsátást, középen az ágazatközi input - output mátrixot találjuk. Kiegészítettük még a táblázatot a munkaerő sorával, amiből kiolvashatjuk, hogy az x_0 munkaerő két részre oszlik, és x_{0j} jelenti a j-edik ágazatban felhasznált munkaerőmennyiséget, y_0 pedig a nem termelő ágban felhasznált / illetve a termelő ágazatokban nem hasznosított / munkaerőt.

A táblázat adatai megoldhatók természetesen egységekben /ilyenkor a mátrixnak csak soraira értelmezzük az összeadást/, vagy pénzértékben /sorok és oszlopok összeadása is értelmezhető/, amikor is a táblázatban az m_i értékeket is beírhatjuk, mint az egyes ágazatok nyereségét.

Most a következő egyenleteket írhatjuk fel:

Termelési mérlegegyenletek:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad / i = 1, 2, \dots, n /$$

Munkaerő mérleg:

$$x_0 = \sum_{j=1}^n x_{0j} + y_0$$

Ha a mátrix elemeit pénzértékben adtuk meg, akkor a mátrix oszlopai összeadhatók, s a kapott eredmények mutatják az egyed-ágazatok termelése során felhasznált termelési eszközök költségét.

Pl. az első ágazatnál

$$\sum_{j=1}^n x_{j1} = x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1}$$

vagy az i-edik ágazatnál

$$\sum_{j=1}^n x_{ji}$$

A teljes termelés költsége

$$z_i = x_{0i} + \sum_{j=1}^n x_{ji} \quad / i = 1, 2, \dots, n /$$

mivel ez esetben x_{oi} az i -edik ágazatban foglalkoztatott munkaerő termelési költsége.

Mivel az i -edik ágazat nyeresége

$$m_i = x_i - z_i$$

ezért az

$$x_i = x_{oi} + \sum_{j=1}^n x_{ji} + m_i$$

összegek költségegyenletek, s következésképpen

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i = x_{oi} + \sum_{j=1}^n x_{ji} + m_i$$

és $x_{ij} \neq x_{ji}$

Ebből megkapjuk az ágazatközi áramlások egyensúlyának egyenleteit, ha az egyenlet mindkét oldalain elhagyjuk az x_{ii} tagokat

$$\sum_{j \neq i}^n x_{ij} + y_i = x_{oi} + \sum_{j \neq i}^n x_{ji} + m_i$$

A teljes társadalmi termék

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \left(x_{oi} + \sum_{j=1}^n x_{ji} + m_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ji} + \sum_{i=1}^n x_{oi} + \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned}$$

A fenti egyenletekből előállítható a

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_{oi} + \sum_{i=1}^n m_i$$

feltétel, azaz

a nettó társadalmi termék egyenlő a nemzeti jövedelemmel.

Az

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad \begin{array}{l} /i= 1,2, \dots, n/ \\ /j= 1,2, \dots, n/ \end{array}$$

megmutatja, hogy a j-edik ágazat egységnyi termelésének előállításához mennyit használ fel az i-edik ágazat termékeiből, azaz a fajlagos felhasználást, vagy technikai - technológiai együtthatót kaptuk meg.

A j-edik ágazat által felhasznált munkaerő mennyiség

$$a_{oj} = \frac{x_{oj}}{x_j}$$

Ennek alapján a termelés mérlegegyenletei az

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i$$

illetve

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i$$

Az utóbbi egyenletrendszer a következőképpen is felírható:

$$\begin{array}{l} /1 - a_{11}/x_1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_n = y_1 \\ - a_{21} x_1 + /1 - a_{22}/x_2 - \dots - a_{2n} x_n = y_2 \\ \vdots \\ - a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \dots + /1 - a_{nn}/x_n = y_n \end{array}$$

Ebből kiemelhetjük a technikai - technológiai mátrixot:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix}$$

ami felírható a következő formában is:

$$\underline{M} = \underline{E} - \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

/Vessük egybe a szallagmátrixoknál megismert $\underline{T}$ mátrixszal!/
 $\underline{M} = \underline{E} - \underline{A}$

Ennek alapján a termelési mérlegegyenlet a második formulát alkalmazva

$$(\underline{E} - \underline{A}) \underline{x} = \underline{y}$$

Ha viszont az $\underline{E} - \underline{A}$ mátrixnak van inverze, akkor

$$\underline{x} = (\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{y}$$

és az $\underline{M} = \underline{E} - \underline{A}$ mátrix

Minkowski - Leontief - íféle mátrix, amit a mátrixok típusainál megismerhetünk.

Ha természetes egységekkel és nem pénzürtékben kívánjuk elemezni az ágazati kapcsolatokat, akkor a következőket kapjuk:

Bruttó termelés	Ágazatközi áramlások				Nettó termelés
Q_0	q_{01}	q_{02}	$\dots$	q_{0n}	q_0
Q_1	q_{11}	q_{12}	$\dots$	q_{1n}	q_1
Q_2	q_{21}	q_{22}	$\dots$	q_{2n}	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Q_n	q_{n1}	q_{n2}	$\dots$	q_{nn}	q_n

ahol

Q_0, q_{0i}, q_0 munkaerő

Q_i, q_{ij}, q_i a bruttó termelés, ágazatközi termékmennyiségek és a nettó kibocsátás.

A természetes egységekben és a pénzértékben megadott táblázatok között kapcsolat teremthető a

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

termékek segítségével, azaz

$$x_i = Q_i P_i, \quad x_{ij} = q_{ij} P_i, \quad y_i = q_i P_i$$

A termelés technikai - technológiai együtthatói természetes egységben

$$b_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j} \quad / i = 1, 2, \dots, n /$$

$$/ j = 1, 2, \dots, n /$$

a munkaerőfelhasználás /nap, óra stb./

$$b_{0j} = \frac{q_{0j}}{Q_j}$$

A termelés mérlegegyenletei természetes egységben

$$Q_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Q_j + q_i$$

illetve

$$Q_i - \sum_{j=1}^n b_{ij} Q_j = q_i$$

A pénzértékben megadott kapcsolatokhoz hasonlóan juthatunk el az

$$/ 1 - b_{ii} / Q_i - \sum_{j=1}^n b_{ij} Q_{ij} = q_i$$

feltételhez, majd a technikai - technológiai mátrix kiemeléséhez és a

$$/ \underline{E} - \underline{B} / \underline{Q} = \underline{q}$$

s innen a

$$\underline{Q} = / \underline{E} - \underline{B} /^{-1} \underline{q}$$

feltételekhez, ahol $\underline{E} - \underline{B}$ Minkowski - Leontief féle mátrix.

További összefüggések az árak, bérek és nyereségek közötti kapcsolatok vizsgálatához.

Ismerjük illetve könnyen belátható, hogy

$$x_i = P_i Q_i$$

$$x_{oi} = P_o q_{oi} = P_o b_{oi} Q_i$$

$$x_{ji} = P_j q_{ji} = P_j b_{ji} Q_i$$

$$m_i = r_i Q_i$$

ahol

$$r_i = \frac{m_i}{Q_i}$$

nem más, mint az i-edik ágazatban a termékegységgel elérhető nyereség.

$$P_i Q_i = P_0 b_{0i} Q_i + \sum_{j=1}^n P_j b_{ji}$$

s az egyenlet mindkét oldalát Q_i -vel osztva kapjuk,

$$P_i = P_0 b_{0i} + \sum_{j=1}^n P_j b_{ji} + r_i$$

ami megmutatja azt az összefüggést, hogyan függ az i -edik ágazat egységsyi termékének ára a többi termék egységárától, a munkabértől, a nyereségtől és a technikai - technológiai együtthatóktól $/b_{ij}$ -ktől/.

Ha ezeket az egyenleteket részletesen felírjuk a többi tényezőt rögzítve az egyenletrendszer megoldásával meg tudjuk határozni a vizsgált tényezőt.

TARTALOMJEGYZÉKOLDALSZÁM

BEVEZETÉS	3
1. FEJEZET	
Az operációkutatásról	7
1.1. Az operációkutatás fogalma	7
1.2. Az operációkutatás kialakulása, történeti áttekintés	8
1.3. Az operációkutatás helye, kapcsolata más tudományokkal	15
1.4. Az operációkutatási munka folyamata	17
1.5. Modellek	18
1.6. Gazdasági feladatok modellezése	21
1.7. Egyszerű példa a lineáris programozás szemléltetésére	27
1.8. A döntési folyamat összehasonlítása	39
2. FEJEZET	43
Lineáris algebra	43
2.1. Mátrixok	43
2.1.1. Mátrix fogalma	43
2.1.2. A mátrix jelölése	44
2.1.3. A mátrix transzponáltja	45
2.1.4. Speciális mátrixok	46
2.1.5. Nagyságrendi relációk	55
2.2. Műveletek mátrixokkal	55
2.2.1. Összeadás	55
2.2.2. Kivonás	59
2.2.3. Mátrix szorzása skalárral	60
2.2.4. Vektor szorzása vektorral	61
2.2.5. Mátrix szorzása vektorral	66
2.2.6. Mátrix szorzása mátrix-szal	68
2.2.7. A mátrixszorzat transzponáltja	77

2.2.8.	Mátrixok hatványozása	78
2.2.9.	Műveletek blokkokra bontott mátrixokkal	78
2.2.10.	Vektorok és mátrixok lineáris kombinációja	81
2.2.11.	További speciális mátrixok	83
	Nilpotens mátrix	83
2.2.12.	Geometriai értelmezés és ábrázolhatóság	86
3. FEJEZET		
	Lineáris tér	95
3.1.	Az n -elemű vektorok lineáris tere	95
3.2.	Az altér fogalma	97
3.3.	Vektorok lineáris függetlensége, függősége	98
3.4.	A vektorrendszer rangja	103
3.5.	Dimenzió és bázis	104
3.6.	A mátrix rangja	107
3.7.	A mátrixok faktorizációja	109
3.8.	Az elemi bázistranszformáció	110
3.9.	A mátrix rangjának meghatározása	118
3.10.	Bázisfaktorizáció	121
3.11.	Kompatibilitás	126
4. FEJEZET		
	Lineáris egyenletrendszerek megoldása és mátrixok inverziója	129
4.1.	Lineáris egyenletrendszerek	129
4.2.	A lineáris egyenletrendszer megoldása	130
4.3.	A mátrixok inverziója	133
4.4.	Lineáris inhomogén reguláris egyenletrendszer megoldása	141
4.5.	Lineáris inhomogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása	146

4.6.	Lineáris homogén reguláris egyenletrendszerek megoldása	153
4.7.	Lineáris homogén irreguláris egyenletrendszerek megoldása	156
5.	FEJEZET	159
	Lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása	159
6.	FEJEZET	169
	Lineáris programozás	
6.1.	A normálfeladat és megoldása degeneráció nélkül	169
6.2.	Degeneráció	185
6.3.	A programvektor és a kapacitások egyidejű optimalizálása	186
6.4.	Több célfüggvény vizsgálata	189
6.5.	Alternatív optimumok	195
6.6.	Módosított normálfeladat	197
6.7.	A maximálás általános esete	204
6.8.	Minimumfeladatok	208
6.9.	A lineáris programozás alapeseteinek összefoglalása	214
6.10.	Dualitás	215
6.11.	Duál szimplex módszer	222
6.12.	Módosított szimplex módszer	227
6.13.	Speciális problémák	238
6.13.1.	Tervmódosítás a kapacitásvektor $/b/$ változása miatt	240
6.13.2.	Tervmódosítás a célfüggvény változása miatt	248
6.13.3.	Tervmódosítás új termék /vagy technológia/ beiktatása miatt	251
6.13.4.	Tervmódosítás új feltételek csatolásával	254

7. FEJEZET

Szimplex módszerrel megoldható, paraméteres, egészértékű és nemlineáris modellek	259
7.1. Paraméteres lineáris programozási modellek	260
7.2. Egészértékű /integer/ programozás	266
7.3. Nemlineáris programozás	275
7.3.1. Konvex és konkáv programozás	278
7.3.2. Konvex és konkáv programozási feladatok megoldása szakaszonként linearizált modellel	286
7.3.3. Hiperbolikus programozás	290
7.3.4. A Langrange-féle multiplikátor módszer	298
7.4. Dinamikus programozás	303
7.5. Sztochasztikus modellek	309

8. FEJEZET

Szállításszervezés programozással	311
8.1. A szállítási feladat megfogalmazása	311
8.2. A feladat megoldása szimplex módszerrel	314
8.3. Disztribúciós módszer	
Redukált költségmátrix	315
8.4. A Korda-Vogel módszer	322
8.5. Egyenlőtlenségek és korlátozások a szállítási feladatban	323
8.6. Potenciálok módszere	327
8.7. Mezőgazdasági alkalmazások	331

9. FEJEZET

Hálódigramos eljárások	333
9.1. Gráfelméleti hivatkozások	335
9.2. A kritikus ut meghatározása	336
9.2.1. Logikai tervezés	336
9.2.2. Időtervezés	337
9.2.3. A kritikus ut meghatározása	338

9.2.4.	Időtartalékok	343
10.	FEJEZET	
	Szimulációs módszerek	
10.1.	A szimuláció fogalma és alkalmazásá- nak lehetőségei	345
10.2.	A szimuláció folyamata	346
11.	FEJEZET	
	Ágazati kapcsolatok elemzése	
	Input - Output analízis	349

I R O D A L O M

1. Andrásfai B.: Gráfelmélet. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1983.
2. BacsKay Z.: A gazdasági programozás matematikai alapjai. Egyetemi jegyzet. I. rész. Gödöllő, 1970.
3. BacsKay Z.: A gazdasági programozás matematikai alapjai. Egyetemi jegyzet. II.rész. Gödöllő, 1971.
4. BacsKay Z.: Gazdasági matematika és számítástechnika vállalati alkalmazásai. Egyetemi jegyzet. III. rész. Gödöllő, 1971.
5. Bod P.: Lineáris programozás több egyidejűleg adott cél-függvény szerint. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei. Budapest, VIII.évf. B.sorozat.4. 1963.
6. Csath M. /szerk./: Operációkutatás. Számítástechnikai Oktató Központ. Budapest, 1972.
7. Csáki Cs. - Mészáros S. /szerk./: Operációkutatási módszerek alkalmazása a mezőgazdaságban. Mezőgazdasági Kiadó. Budapest, 1981.
8. Farkas V.: A lineáris programozás matematikai alapjai. Mezőgazdasági Kiadó. Budapest, 1968.
9. Felleg L. - Ligeti Cs.: Gazdaságmatematikai módszerek. Egyetemi jegyzet. Gödöllő, 1971.
10. Kósa A.: Optimumszámítási modellek. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1979.
11. Krekó B.: Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1964.
12. Krekó B.: Mátrixszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1964.
13. Krekó B.: Lineáris algebra. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1976.
14. Krekó B.: Optimumszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.
15. Ligeti Cs. /szerk./: Gazdasági matematika és számítástechnika II. rész. II. kötet. Egyetemi jegyzet. Gödöllő, 1977.

16. Lukács O. - Papp O. - Sólyom Cs. - Török J.: Bevezetés a hálótechnika számítógépes felhasználásába. KSH Nemzetközi Számítástechnikai Oktató és Tájékoztató Központ. Budapest, 1979.
17. Lukács O.: Operációkutatás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1982.
18. Rózsa P.: Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, 1976.
19. Szelényi L. - Kepenyes J.: Matematika és számítástechnika alapjai. Főiskolai jegyzet. Szarvas, 1982.
20. Szobol I. M.: A Monte-Carlo módszerek alapjai. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1981.
21. Tóth J.: Gazdasági matematika és számítástechnika I-II. Egyetemi jegyzet. Gödöllő, 1975.
22. Tóth J.: Egy speciális elrendeződésű modell költségmegtakarító megoldása. Statisztikai Szemle. 1978. 10.sz. Budapest, 1978.
23. Tóth J.: Egy speciális mátrix és néhány tulajdonsága. Statisztikai Szemle. 1987. 2-3.sz. Budapest, 1987.
24. Varga J.: Gyakorlati programozás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1972.

Önköltségi ár: 139.- Ft

Társintézményi ár: 78.- Ft

Fogyasztói ár: 25.50 Ft