

MC
112.935/2

Baranyi Károly

A FIZIKAI GONDOLKODÁS ISKOLÁJA

Termodinamika
Elektrodinamika és optika
Atomfizika

2

Országos Széchényi Könyvtár

Akadémiai Kiadó • Budapest

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

1872. évi évkönyv

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

Baranyi Károly

A fizikai gondolkodás iskolája

2. kötet

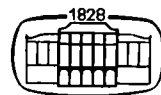
Termodinamika

Elektrodinamika és optika

Atomfizika

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár



Akadémiai Kiadó · Budapest 1992

Lektorálta:

**Halmi György
Matolcsi Tamás**

Az ábrákat rajzolta:

**Kovácsné Varga Lilla
Olgyay Gézáne**

OSZK
MC 112.935/2
16.817
Országos Széchényi 1992 tár

**ISBN 963 05 5918 8 II. kötet
ISBN 963 05 5840 8 (összkiadás)**

**Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest
Első kiadás: 1992**

© Baranyi Károly, 1992

**Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás,
a nyilvános előadás, a rádió- és televízióadás,
valamint a fordítás jogát, az egyes fejezeteket illetően is.**

Printed in Hungary

Tartalom

II. rész

Termodinamika

1. A termodinamika alaptörvényei	11
1.1. A termodinamika problémája	11
1.1.1. A hő Caratheodory-féle értelmezése	11
1.1.2. A termodinamika modellje	11
1.1.3. A termodinamika nulladik főtétele	14
1.1.4. A termodinamika első főtétele	17
1.1.5. A termodinamika második főtétele	19
1.1.6. A hőmérséklet mérése	20
1.2. Hőtágulás	23
1.2.1. Szilárd testek és folyadékok hőtágulása	23
1.2.2. Gay-Lussac törvényei	27
XIII. Feladatcsoport: hőtágulás	29
2. Az ideális gázok termodinamikája	30
2.1. Állapotegyenletek, mérlegegyenletek	30
2.1.1. Az ideális gázok állapotegyenletei	30
2.1.2. Az első főtétel logikája, speciális folyamatok	40
2.1.3. Fajhők	51
2.1.4. Az entrópia fenomenologikus értelmezése	53
2.1.5. A folyamatok lokális és globális jellemzése	60
2.1.6. Termodinamikai potenciálok	68
XIV. Feladatcsoport: az ideális gázok hőtana	69
3. Reális gázok, folyadékok, szilárd testek hőtana	77
3.1. Reális gázok	77
3.1.1. Van der Waals-állapotegyenlet	77
3.1.2. Telített és telítetlen gőzök	78
3.2. Fázisátalakulások	82
3.2.1. Párolgás, forrás, lecsapódás	82
3.2.2. Olvadás, fagyás	85
3.2.3. A fázisátalakulások energetikai leírása	86
XV. Feladatcsoport: reális gázok, halmazállapot-változások	89
4. A termodinamika statisztikus szemléltetése	92
4.1. A kinetikus gázmodell	92
4.1.1. A gázok sűrűségeloszlása	92
4.1.2. Az entrópia statisztikus értelmezése	98
4.1.3. Energiaeloszlás	99
XVI. Feladatcsoport: statisztikus mechanika	105

III. rész

Elektrodinamika és optika

1. Elektromosságтан	109
1.1. Az elektromos tér	109
1.1.1. A Coulomb-törvény	109
1.1.2. Az elektromos térerősség, Gauss-tétel elektromos térre	114
1.1.3. Az elektromos potenciál és tulajdonságai	122
1.1.4. Az elektromos tér anyagi természetű	131
1.1.5. Az elektromos töltés és az elektromos tér kölcsönhatása	137
1.1.6. A kapacitás	142
1.1.7. Az elektromos tér és a kémiai anyag kölcsönhatása	149
XVII. Feladatcsoport: elektrosztatika	153
1.2. Az elektromos áram	161
1.2.1. Ohm törvénye	161
1.2.2. Joule törvénye	165
1.2.3. Áramforrások	167
1.2.4. Kirchhoff törvényei	173
1.2.5. Az ellenállások kapcsolása	179
1.2.6. Az áramerősség és a feszültség mérése	182
XVIII. Feladatcsoport: egyenáram	184
2. Mágnességtan	196
2.1. A mágneses tér	196
2.1.1. A mágneses térerősség	196
2.1.2. A mágneses pólus és az elektromos töltés kölcsönhatása	201
2.1.3. Biot—Savart-törvény, Ampère-féle gerjesztési törvény	203
2.1.4. Gauss-tétel mágneses térre	213
XIX. Feladatcsoport: mágneses tér	217
2.2. Az elektromágneses indukció	220
2.2.1. A Lorentz-erő	220
2.2.2. A vezetőre ható erő és forgatónyomaték	224
2.2.3. A mozgási indukció	227
2.2.4. A nyugalmi indukció	234

XX. Feladatcsoport: elektromágneses indukció	243
--	-----

2.3. Váltakozó áram	249
2.3.1. A váltakozó áram előállítás	249
2.3.2. Impedancia	251
2.3.3. A váltakozó áram teljesítménye	258
2.3.4. Transzformátor, energiaátvitel	261
2.3.5. Feszültségrezonancia és áramrezonancia	265
XXI. Feladatcsoport: váltakozó áramú körök	268
2.4. Elektromágneses tér	269
2.4.1. Eltolási áram	269
2.4.2. Maxwell törvényei	272
2.4.3. Elektromágneses hullámok	275
2.4.4. Az elektromágneses sugárzás dinamikája	279
XXII. Feladatcsoport: az elektromágneses tér	284
3. Optika	286
3.1. Hullámoptikai jelenségek	286
3.1.1. Az elektromágneses spektrum	286
3.1.2. A fény interferenciája	288
3.1.3. A fény diffrakciója	290
3.1.4. A fény polarizációja	291
3.2. Geometriai optika	293
3.2.1. A Fermat-elv	293
3.2.2. Optikai leképezés törőközeggel	295
3.2.3. Lencsék, tükrök	299
XXIII. Feladatcsoport: optika	312
4. Relativitáselmélet	318
4.1. A Lorentz-transzformáció	318
4.1.1. A fény sebessége	318
4.1.2. Időmérés, távolságmérés	321
4.1.3. Kinematikai mennyiségek transzformációja	333
4.1.4. A Minkowski-féle téridő	338
4.2. Relativisztikus dinamika	345
4.2.1. Tömeg és impulzus	345
4.2.2. Energia	351
XXIV. Feladatcsoport: relativitáselmélet	358

IV. rész

Atomfizika

1. Az anyag atomos szerkezete	367
1.1. Elemi atomelmélet	367
1.1.1. Avogadro törvénye	367
1.1.2. Az elektromosság atomos szerkezete	370
1.1.3. A katódsugárzás	372
1.2. A fény részecsketermészete.	377
1.2.1. Hőmérsékleti sugárzás, a folytonos színekép	377
1.2.2. Fényelektromos hatás.	381
1.2.3. A vonalas színekép	383
2. Kvantummechanika	384
2.1. A kvantummechanika alapelvei	384
2.1.1. Az alapkísérletek és értelmezésük	384
2.1.2. Mikrofizikai folyamatok	389
2.1.3. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció	393
2.2. Kvantummechanikai rendszerek	394
2.2.1. A dobozprobléma	394
2.2.2. A hidrogénatom	395
XXV. Feladatcsoport: mikrofizika	397

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

II. rész

Termodinamika

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

1. A termodinamika alaptörvényei

1.1. A termodinamika problémája

1.1.1. A hő Caratheodory-féle értelmezése

A Mechanika című rész végén igen érdekes eredményhez jutottunk. Azt kaptuk, hogy mechanikai körülmények között az egyik mechanikai törvény nem érvényes. A gázok olyan állapotváltozásait vizsgáltuk, amelyeket a Boyle—Mariotte-törvény ír le; a törvény teljesülését előírtuk. Ezt a törvényt „tisztá mechanikai törvénynek” tekintjük. A megfogalmazásban ugyanis csak mechanikai állapotjelzők szerepelnek.

Nos, a Boyle—Mariotte-törvény teljesülése esetén egy másik — alapvetőbb — mechanikai törvény nem teljesül: a munkatétel nem igaz. A gázon összenyomáskor végzett munka nem egyenlő a gáz belső energiájának a megváltozásával.

A mechanikai törvények ilyen konfliktusa mögött természetesen az áll, hogy a valóság bonyolultabb, mint a mechanika. A mechanikai törvények által jól leírt jelenségek is túlmutatnak a mechanika körén.

Rá kellett jönnünk: a jelenségek tágabb körének a modellezéséhez a munkatétel szokásos és közismert

$$\Delta E = W$$

formáját általánosítanunk kell. Felismerjük: van olyan energiaközlési folyamat,

amely különbözik a munkavégzéstől, ez a hőhatás. A hőhatással közölt energia a hő. A munkatételt úgy kell általánosítanunk, hogy a munka mellett a gázzal közölt hő is figyelembe kell vennünk, tehát:

$$\Delta E = W + Q. \quad (1)$$

Végül is arról van szó, hogy — a gázokkal kapcsolatos folyamatokra korlátozódva — a gázok energiája korrektül értelmezhető mennyiség, könnyen számolhatjuk az energiaváltozást is. Ugyanígy: a munkavégzés kis térfogatváltozásnál:

$$W = -p\Delta V,$$

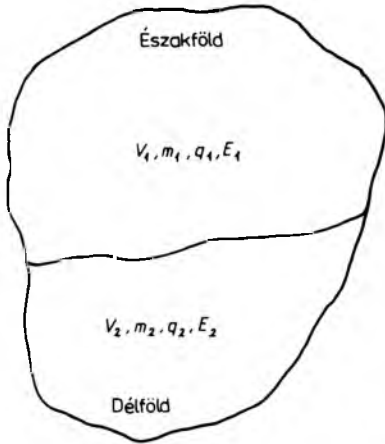
illetve a p — V diagram alatti terület. A hő Caratheodory-féle értelmezése szerint e kettő különbsége:

$$Q := \Delta E - W. \quad (2)$$

(Ezt az értelmezést most csak érintettük, jelentőségére és igazi szerepére még visszatérünk.)

1.1.2. A termodinamika modellje

A termodinamika gondolatvilágát a következő modellel szemléltethetjük (1.1. ábra).



1.1.
ábra

Képzeliük el, hogy egy óceániai szigeten két ország van, két nép él. Az északi országot Északföldnek, a délit Délföldnek nevezzük. Az északi ország V_1 területű, a déli területe V_2 , Északföldnek m_1 , Délföldnek m_2 lakosa van. A két országban legjellemzőbb állat a tehén, ebből Északföldön q_1 számú van, Délföldön q_2 . Végül: a két országot a vagyona is jellemzi. Az északföldi emberek összvagyon a E_1 , a délföldieké E_2 .

A terület, a népesség, az állatok száma, valamint a vagyon extenzív mennyiségek. Feltesszük, hogy a két ország közötti folyamatok leírhatók ezekkel a mennyiségekkel: kapcsolatuk minden lényeges vonása jellemezhető ezekkel a mennyiségeknek az áramlásával. (Nem vizsgáljuk tehát a divatok, eszmék és ideológiák áramlását.)

Így elgondolható, hogy az egyik ország a másik ország kárára terjeszkedik, a másik ország területéből elvesz. Az emberiség történetében sok példát látunk ilyen barátságtalan lépésre.

Nem nehéz elgondolni, hogy az országok határán emberek (vagy az állatok) átmennek. Ugyanígy elképzelhető, hogy vagyon áramlik át egyik országból a másik országba, például pénz formájában.

Mindenesetre feltesszük, hogy a két ország közötti kapcsolatok megakadályozhatók. Bármelyik mennyiség áramlása valahogyan meggátolható, egymástól függetlenül is. Így például a terület elvételét erős katonasággal kivédhetjük. A tehének áramlását meggátolhatjuk egyszerűen villanypáztorral. Az emberek átszivárgásával már több gond van. Erős határórség szükséges ahhoz, hogy megakadályozzuk az emberek átjárását az országhatárokon. A vagyon áramlása is kiküszöbölhető a gazdasági kapcsolatok teljes megszakításával. Egyszóval: a modellben szereplő extenzív mennyiségek áramlása, egymástól függetlenül, szigetelőkkel megakadályozható.

Képzeliük el most, hogy a két ország között egyetlen mennyiség áramolhat. A többi áramlását szigetelések megakadályozzák. Legyen ez a mennyiség mondjuk a tehének száma. Például arról van szó, hogy a két ország minden kapcsolatot megszakított egymással, de a tehéneket szent állatoknak tekintik. Ekkor ezek kényükre-kedvükre szabadon sétálhatnak.

Mire gondolunk akkor, ha azt halljuk, hogy az északföldi tehének nagy számban Délföldre vándorolnak? Furcsálljuk a dolgot, mert eddig csak vándormadarakról tudtunk, most lám vándortehének is feltűnnek.

Mindenesetre úgy véljük, ennek csak az lehet az oka, hogy Délföldön jobb a legelő minősége.

Más példa: az egyik országból a másik országba emberek áramolhatnak, de úgy, hogy sem vagyonukat, sem tehéneiket, sem a földjüket nem vihetik, szóval egy szál ruhában. A többi mennyiség áramlását most is megakadályozzák „szigetelőkkel”. Ha tudomásunkra jut ezután, hogy az egyik országból a másikba az emberek nagy számban átszivárognak, akkor vilá-

gos okát látjuk ennek a jelenségnek: az élet minősége jobb ott, ahová az emberek átvándorolnak.

Általában is igaz: ha a két ország határán csak egyetlen mennyiség áramolhat, mert a többi áramlását megakadályozzuk, akkor az áramlásnak jól körülírható oka van. A tehének áramlásának a legelő minősége, az emberek áramlásának az élet minősége, a terület átadásának-átvételének katonai erőkülönbség, a vagyon áramlásának pedig — ami ugye a gazdasági kizsákmányolás — a gazdasági potenciálkülönbség az oka.

Ha egyszerre két — vagy több — mennyiség áramolhat, akkor a helyzet bonyolultabb. Gondoljuk meg: ha egyik országból a másikba emberek is, tehének is áramolhatnak, akkor lehetséges, hogy a tehének a rosszabb legelőjű hely felé vándorolnak, mert az emberek arra hajtják, viszik őket. Az embereket az élet minősége vonzza, a tehének pedig az emberekkel mennek. Ha több mennyiség áramolhat át egy ország határán, akkor az áramlást létrehozó okok összekeverednek.

Világos másrészt, hogy az áramlásnak van egy természetes következménye: ahová az emberek áramolnak, ott az élet minősége romlani fog. Ha sok tehén áramlik egy vidékre, akkor ezen a tájon a rétek, legelők minősége fog romlani. Az áramlási tendencia mindig olyan irányú, hogy az áramlást létrehozó okokat igyekszik megszüntetni.

Tegyük fel most, hogy a két ország között minden mennyiség áramlása megvalósulhat. Képzeljük magunkat az északföldi pénzügyminiszter helyébe. Az év vége közeledtével zárszámadást kell készítenie, számba kell vennie, hogy mennyivel gazdagodott vagy szegényedett az országa.

Világos dolog, hogy számításba kell vennie a területekkel átadott, az emberekkel átment, és a tehének átadásával járó vagyont. Valóban, a terület, az ország területének elvesztése az ország vagyonának csökkenésével jár. A munkaerőt képviselő lakosság eláramlása is szegényíti az országot, a beáramlása pedig gazdagítja. Az meg teljesen világos, hogy a tehének kiáramlása csökkenti, beáramlása pedig növeli az ország vagyonát.

Lehetséges persze, hogy bizonyos mennyiségű területért az északföldi gazdasági emberek sok jófajta tehenet adnak. Ezt a gazdasági eljárást cserkereskedelemnek nevezik, és a pénz megjelenése előtt a kereskedelem alapvető formája volt. (A modern kereskedelemben kezd újra tért hódítani.)

Mindenesetre a vagyon területhez, emberekhez, állatokhoz kötődő transzportja mellett lehetséges egy további vagyonszállítási mód. Két ország gazdasági emberei az országok határán cserélnek, példának okáért: pénzt tehenre. A vagyon átmehet egyik országból a másikba anélkül, hogy a vagyont olyan mennyiségek szállítanák mint a terület, a lakosság, az állatok.

Az északföldi pénzügyminiszternek tehát számításba kell vennie a területvesztéssel vagy területnyeréssel, a munkaerő ki- és beáramlásával, a tehének adásával, vételével átáramló vagyon mellett az ezektől függetlenül — a pénz-, váltóforgalomban stb. — átment vagyon mennyiségét is. A vagyon áramolhat különféle extenzív mennyiségekhez kötve, és áramolhat ezektől függetlenül is.

Áttekintettük azt a szemléletes modellt, amely a termodinamika elveinek, fő tételének a megfogalmazásában segítségünkre lesz, mintegy mankóként szerepel.

1.1.3. A termodinamika nulladik főtétele

Fordítsuk le az előző pont gondolatait és következtetéseit a fizika nyelvére. Alapvető felismerésünk, hogy a mechanikai kölcsönhatások mellett más kölcsönhatások is szerepet játszanak a fizikában. A mechanikában alapvető mennyiség az impulzus és az impulzusnyomaték. Az energia kissé elüt ezektől a mennyiségektől, az energia nem kötődik annyira a mechanikához, mint a mozgás és a forgás mennyisége. Az energia sokkal inkább átfogja az egész fizikát. (*)

Az egyes fizikai fejezeteket néhány alapvető jelentőségű extenzív mennyiség jellemzi. Ezek az extenzív mennyiségek legtöbbször a fizika nem definiált alapfogalmai (mint a tömeg, az energia és az impulzus). Ezek általában megmaradó mennyiségek is.

A mechanika legalapvetőbb kölcsönhatása az impulzusközlés. (Ehhez járul a pontrendszereknél jelentős impulzusmomentum-csere.) A mechanika központi kérdései a különböző erőhatások (: impulzusközlési lehetőségek) leírása. Az impulzusközléssel azonban a legtöbbször energiaközlés is együttjár. Az impulzussal együtt közölt energiát munkának nevezük, és azt a folyamatot munkavégzésnek hívjuk.






Az extenzív mennyiségek áramlásához általában energiaátadás is társul. Az impulzuscseréhez kapcsolódó energiaközlés a munkavégzés. Forgatónyomatékkal is közzölhetünk energiát. Az elektromosságtan-

(*) Pontosabban arról van szó, hogy az impulzusnak és az impulzusmomentumnak is fontos szerepe van a mágnességban, az atomfizikában, de az energia szembetűnőbb módon független a mechanikai problémáktól.

ban látni fogjuk, hogy az elektromos töltés áramlása energiaáramlást is jelent. (A napi életünknek szinte alapvető feltétele, hogy az elektromos áram, az árammal szállított energia rendelkezésünkre álljon.) Igen gyakran a kémiai reakciók is energiafelszabadulással járnak. Az egyik kémiai komponens molekuláinak száma csökken, a másik kémiai komponens molekuláinak száma növekszik. (Ezzel a néhány gondolatlan nem intéztük el sem az elektromosságtant, sem a kémiai reakciókat. Sőt, igazából nem is érintettük. Csak olyan mindennapi példaként hoztuk fel, mint az előző pontban a tehenek áramlását.) Az 1.2. ábrán összefoglaljuk a legfontosabb kölcsönhatásokat.

Első helyen a *mechanikai kölcsönhatás* szerepel. Egy gáztartályt két részre oszt egy könnyen mozgó dugattyú. A dugattyú elmozdulása a két gáz közötti mechanikai kölcsönhatást jelenti. A kölcsönhatás mértéke a térfogatcsere: az egyik gáz tágul, a másik összenyomódik. A mechanikai kölcsönhatás extenzív mennyiségének gázoknál a térfogat tekinthető. (Tömegpontoknál, merev testeknél az impulzus a kölcsönhatást jellemző extenzív mennyiség.)

A dugattyú mindaddig nyugalomban van, amíg a két oldalán azonos a gáz nyomása. Ha a dugattyú elmozdul, akkor ezt azzal magyarázzuk, hogy a két oldalon különböző a nyomás: a dugattyú a na-

		extenzív	intenzív	energia
mechanikai		V	$-p$	$f-p\Delta V$
elektromos		q	U	$U\Delta q$
kémiai		m	μ	$\mu\Delta m$
termikus			ν	Q

1.2.
ábra

gyobb nyomású hely felől az alacsonyabb nyomású rész felé mozdul el, és megáll akkor, ha a nyomás kiegyenlítődik. A gázok közötti mechanikai kölcsönhatás oka a nyomáskülönbség. A kölcsönhatást tehát az extenzív mennyiség mellett egy intenzív mennyiség jellemzi, a nyomás.

A folyamatot szigeteltnek tekintjük: a két gáz között csak mechanikai kölcsönhatás jöhet létre, sem elektromos, sem kémiai kölcsönhatás nem jöhet szóba, de a hőátadását is kizárjuk. Ennek ellenére a folyamat energiát közvetít a két gáz között: a mechanikai kölcsönhatásban a munkavégzéssel az egyik gáz energiát nyer, a másik energiát veszít. Kis térfogatváltozásnál a munkavégzés $\sigma \Delta V = -p \Delta V$: a kölcsönhatást jellemző intenzív mennyiség és az extenzív mennyiség megváltozásának a szorzata.

Tekintsük most az *elektromos kölcsönhatást*. Két test között úgy valósul meg az elektromos kölcsönhatás, hogy az egyik testről a másikra elektromos töltés (q) áramlik. Az áramlásnak világos oka van: az elektromos töltés a magasabb elektromos potenciálú helyről áramlik az alacsonyabb potenciálú helyre. A kölcsönhatás extenzív mennyisége tehát az elektromos töltés. Az elektromos töltés áramlása azonos az elektromos kölcsönhatással. A folyamatot jellemző intenzív mennyiség az elektromos potenciál.

Az elektromos munkát a mechanikai munkához hasonlóan számoljuk: $U \Delta q$, az intenzív mennyiség és az extenzív mennyiség megváltozásának a szorzata. Δq töltés átáramlása $U \Delta q$ mennyiségű energia szállítását is jelenti.

A *kémiai kölcsönhatás* extenzív mennyisége a tömeg, vagy helyesebben: a molekulaszám, jele N . A kölcsönhatás úgy valósul meg, hogy az egyik komponens molekulá-

kat ad a másik komponensnek. A kölcsönhatás, a reakció meghatározott szituációban mindig egy irányba megy végbe, a kölcsönhatás irányát a kémiai potenciál szintkülönbsége határozza meg. Ha a két komponens kémiai potenciálja azonos, a reakció leáll. A kémiai potenciál a kölcsönhatás intenzív mennyisége, a jele μ . (Igen keveset tudunk a kémiai potenciál minőségéről, alig többet, mint a legelő minőségéről. Annyit tudunk csak, hogy egy ilyen intenzív mennyiség szükségképpen létezik.)

A kémiai reakciókban $\mu \Delta N$ energia adódik át. Az anyagtranszporttal ekkora energiatranszport társul. Ez a kémiai munkavégzés.

Utoljára hagytuk a *termikus kölcsönhatást*. (Persze igen sok kölcsönhatást szóba sem hoztunk. A kémiai és az elektromos kölcsönhatást is csak a példa kedvéért, igazán csak a mechanikai és a termikus kölcsönhatással lesz tervünk.)

Termikus kölcsönhatásban két test között csak az energia átadása megengedett. A többi kölcsönhatás felléptét kizárjuk. Ha például egymás mellé helyezünk két zárt gáztartályt, akkor közöttük térfogatcsere, elektromos vagy kémiai kölcsönhatás valóban nem jön létre. A hő értelmezésekor azonban rámutattunk, hogy energia átmehet az egyik rendszerből a másikba. Mint mondtuk, ez a folyamat a hőhatás, és az így közölt energia mennyisége a hő.

A termikus kölcsönhatás intenzív mennyiségét nevezzük termikus potenciálnak, és jelöljük ϑ -val. Ez a mennyiség meglehetősen elvont. Nehéz elhelyezni szemléletes fogalmaink között. Első lépésként csak azt tudjuk róla, hogy ilyen mennyiségnek lennie kell.

Világítsuk meg a termikus potenciál jelentését.

Tegyük fel, hogy a két gáztartály termikus potenciálja azonos. Ekkor a két rendszer között nem jöhet létre energiaátadás, nem valósul meg hőáramlás. Ha a két gáz termikus potenciálja különböző, akkor közöttük hőátadás jön létre.

Feltéve tehát, mint már kezdetben mondtuk, hogy a két rendszer között *csak* termikus kontaktus van, $\vartheta_1 = \vartheta_2$ pontosan akkor teljesül, ha $Q = 0$. Tömören:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 \Leftrightarrow Q = 0. \quad (1)$$

Ez az állítás a termikus potenciál legfontosabb jellemzője. Az már megállapodás kérdése, hogy annak a testnek a termikus potenciálját tekintjük nagyobbnak, amelyik hőt ad a másik testnek.

Kiemeljük, hogy az (1) állítás feltétele lényeges. Ha több kölcsönhatás megvalósulhat, akkor lehetséges, hogy $\vartheta_1 = \vartheta_2$, de az egyik rendszerből a másikba hő áramlik.

Figyeljünk fel arra is, hogy a kölcsönhatást jellemző extenzív mennyiségek oszlopában az 1.2. ábrán a termikus kölcsönhatást jellemző extenzív mennyiség hiányzik. Fontoljuk meg: a térfogat szerepe az, hogy mechanikai kölcsönhatásnál az energiát „szállítja”, az elektromos kölcsönhatásnál az elektromos töltés áramlása közvetíti az energiát. Kémiai kölcsönhatásban az energia transzportja a molekulatranszporthoz kötődik. A hőhatást pontosan az jellemzi, hogy az energiaáramlásnak az a formája, amely más extenzív mennyiség transzportja nélkül jön létre. Itt az energia „egyedül megy” egyik rendszerből a másikba.

A kölcsönhatásokat jellemző intenzív mennyiségek oszlopa azonban sehol sem üres. Lényegében ezt mondja ki a termodinamika nulladik főtétele. (A nulladik főtételt az első, második és a harmadik főtétel után ismerték fel. Nyilvánvaló volt azon-

ban a logikailag elsődleges szerepe. Ezért helyezték az első főtétel elé.) Fogalmazzuk meg tehát az alapvető állításunkat!

A termodinamika nulladik főtétele: *Mindegyik kölcsönhatáshoz — azaz bármely extenzív mennyiség áramlásához — van olyan intenzív mennyiség, amelynek a homogén eloszlása^(*) az egyensúly szükséges és elégséges feltétele.*

A termodinamika nulladik főtétele homogén testek között megvalósuló kölcsönhatásokra vonatkozik, olyan esetre tehát, amikor a kölcsönható testek mindegyike homogén, egymástól azonban különbözhetnek az intenzív mennyiségek értékében.

Lehetséges, hogy egy test nem homogén, az intenzív mennyiségek különböző pontokban mások és mások, áramlás azonban mégsem jön létre. Képzeld el ugyanis, hogy egy gömb alakú tartályba zárunk egy olyan gázt, amelynek a részecskéi — azonos — elektromos töltéssel rendelkeznek. Ekkor — ha a gáz egyensúlyban van — a nyomás és a sűrűség sugárirányban nő, és az elektromos potenciál is függ a helytől. Az intenzív mennyiségek eloszlása tehát nem homogén.

Fontos ezért, hogy megkülönböztessük az egy testen belüli inhomogenitást a homogén testek között az intenzív mennyiségek értékében tapasztalható különbözőségtől. A termodinamika nulladik főtétele a homogén testek közötti kölcsönhatások-

^(*) Egy intenzív mennyiség eloszlása egyenletes valamely testben, ha minden pontban azonos az értéke. Ilyenkor azt is szoktuk mondani, hogy *a mennyiség eloszlása homogén*. Ha egy testre jellemző összes intenzív mennyiség homogén eloszlású, akkor azt mondjuk, hogy *a test homogén*.

ra vonatkozik. Ekkor az egyensúly szükséges és elégséges feltétele az összes intenzív mennyiség azonos értéke. (Hangsúlyozzuk még egyszer: a továbbiakban homogén testek között létrejövő folyamatokkal foglalkozunk.)

Azt is ki kell emelni, hogy ha több kölcsönhatás is létrejöhet egyidejűleg, akkor az intenzitásparaméterek „kereszteznek” egymást. Elképzelhető például, hogy kémiai potenciálkülönbség miatt létrejövő anyagáramlás elektromos töltések áramlását indítja meg a kezdetben elektromosan semleges, azonos potenciálú pontok között is, sőt a kémiai potenciál kiegyenlítődése elektromos potenciálkülönbséget hoz létre. Ha tehát több kölcsönhatás is létrejöhet, akkor mindegyik extenzív mennyiség transzportjába belejátszik a többihez tartozó intenzív mennyiségek eloszlása.

1.1.4. A termodinamika első főtétele

Ebben a pontban a vizsgált rendszer energiamérlegét írjuk fel. Az energia az anyag *belső* vagy szerkezeti *energiáját* jelenti. Gázoknál ez igen egyszerűen kifejezhető a részecskék mozgási és forgási energiájának az összegével. Más anyagoknál a belső energia korrekt értelmezésére még visszatérünk.

A hőtan első főtétele a belső energiára vonatkozó energiamérleg. Fogalmazzuk meg tehát ezt az alapvető jelentőségű állítást!

A termodinamika első főtétele: *Ha egy rendszer és a környezete között egyidejűleg többféle kölcsönhatás is megvalósulhat, akkor a rendszer belső (szerkezeti) energiájának a megváltozása az egyes kölcsönhatásokhoz tartozó energiacserekek összegével*

egyenlő:

$$\Delta E = Q + W + W_e + W_k. \quad (1)$$

Itt ΔE a belső energia megváltozása, Q a hőhatás közben közölt energia, vagyis a hő, a W a mechanikai munka, vagyis a térfogatváltozáshoz kapcsolódó energiaközlés mértéke, W_e az elektromos kölcsönhatást kísérő energiaközlés, vagyis az elektromos munka mértéke, míg W_k a kémiai munka, azaz kémiai kölcsönhatásoknál a kémiai reakciókhoz társuló energiagtag.

Néhány megjegyzést fűzünk az első főtételhez:

1. Az (1) bal oldalán egy állapotjelző megváltozása, a jobb oldalon csupa folyamatokra jellemző mennyiség áll. Ezért a hő nem az energiával, hanem a munkával rokon mennyiség. Ugyanúgy, mint a munka, a hő is folyamatjelző mennyiség. Éppen emiatt helytelen a hőenergia elnevezés. A hő nem a termodinamikai rendszerek jellemzője, hanem azoknak a folyamatoknak a tulajdonsága, amelyben a test részt vesz. A belső energiára is helytelen a hőenergia elnevezés használata, mert félreértésekre vezet. A belső energia ugyanis nem csak a hőhatás következtében változhat meg.
2. Ezzel függ össze, hogy helytelen a következő szóhasználat: „az energia hővé alakul”, vagy ez: „a munka hővé alakul”, és a „hő munkává alakul”. Az állapotjelzők és a folyamatjelzők nem alakíthatók egymásba. Ugyanilyen helytelen kijelentések ezek, mint például: „a pénzünk rezsivé alakul”, vagy: „a fizetésünk rezsivé alakul”. Helyesen így fogalmazhatunk: „a fizetésünk növeli a pénzünket, a rezszi

csökkenti a pénzünket”. A munkára, hőre és az energiára vonatkoztatva: „a hő vagy a munka növeli (vagy csökkenti) a belső energiát”.

3. Az (1) jobb oldalán csupa kölcsönhatásra utaló tag szerepel, forrás nincs. Ezért az *első főtétel* lényegében az *energiamegmaradás törvénye*. Ha egy rendszer mechanikailag, kémiaiilag, elektromosan és termikusan is zárt, akkor a rendszer belső energiája állandó. Felvetődik a kérdés: nem mindig az ellenkezőjét tanultuk eddig? Megmarad az energia vagy nem? Az energia valóban megmaradó mennyiség, azonban az energia megmaradásának a törvényét mechanikai fogalomkörben megfogalmazni nem lehet. Pontosan ez a „hiány” vezetett el a hőhatás felismeréséhez és a hő fogalmának kialakításához. Az energia megmaradása nem azon múlik, hogy elég sokféle energiát fedezzünk föl, hanem hogy felismerjük: a mechanikai kölcsönhatások mellett más kölcsönhatásokat, többek között a termikus kölcsönhatást is figyelembe kell vennünk. Miért kerültük a mechanikai problémáknál a hővel kapcsolatos kifejezéseket? Mert a hőtani fogalmak kellő megalapozás nélkül szerepeltek volna a mechanikai fejezetekben. Még most is igen keveset tudunk a hőről, a pontmechanikai problémák közepén hogyan merészkedhettünk volna a hővel kapcsolatos bármiféle fizikai kijelentést tenni?! Innen nézve — most, hogy felismertük a hőhatást mint energia-közlési folyamatot — több korábbi probléma új megvilágításba kerül. Emlékezzünk például arra a feladatra, amelyben egy ember kísétál a korong közepéről a szélére. Eközben

megváltozik a korong forgási energiája és az ember mozgási energiája is. De nem egyenlő mértékben. Az összes mechanikai energia ebben a folyamatban nem volt állandó. Ha most figyelembe vesszük, hogy az ember rendelkezik kémiai energiával, akkor az energiamérlegbe ezt is bele kell venni. Fontosabb azonban annak a felismerése, hogy az ember és a korong között (állandó hőmérsékleten) hőcsere megy végbe, az egyik a másiknak hőt ad át, a másik hőt vesz fel. Az energiamérlegek:

$$\Delta E_{\text{mech}}^{\text{ember}} + \Delta E_{\text{kémiai}}^{\text{ember}} = Q_{\text{korong} \rightarrow \text{ember}} + W_{\text{korong} \rightarrow \text{ember}}$$

$$\Delta E_{\text{forg}}^{\text{korong}} = Q_{\text{ember} \rightarrow \text{korong}} + W_{\text{ember} \rightarrow \text{korong}}$$

(Az energiaátalakulások és az energia-közlési folyamatok azonban most meglehetősen bonyolultak, ezért ezzel a problémával részletesen nem foglalkozunk, csak rá szerettünk volna mutatni, hogy a hőtán szemszögéből nézve a mechanikai folyamatok milyen tulajdonságokkal bírnak.)

4. A hőtán első főtételének többféle, az előzővel egyenértékű megfogalmazása lehetséges. Ilyen például a következő: „Elsőfajú örökmozgó — perpetuum mobile — nem létezik.” Az első fajú örökmozgó olyan gép, amely energia befektetése nélkül munkát végez, miközben az energiája sem változik. Ez az állítás valóban egyenértékű az általunk adott megfogalmazással. Világos azonban, hogy ebben a formájában nem sokra megyünk az első főtettel. Az ugyanis, hogy elsőfajú örökmozgó nincs, tulajdonképpen

csak a Találmányi Hivatal portását érdekli: ha valaki azzal kopogtat, hogy felfedezte az örökmozgót — az állandóan munkát végző gépet —, akkor el kell a feltalálót küldeni más hivatalokhoz. Így tanították a portásnak. Szóval: negatív megfogalmazású állítás lehet igaz, de általában nem használható fel igazán eredményesen. A geometriában sem megyünk sokra olyan állítással, hogy „nincs olyan háromszög, amely belső szögeinek összege 179° ”.

1.1.5. A termodinamika második főtétele

Láttuk, hogy valamely kölcsönhatást jellemző extenzív mennyiség egyensúlya, illetve a változása attól függ, hogy a kölcsönhatáshoz tartozó intenzív mennyiség eloszlása egyenletes-e vagy sem. Ha az extenzív mennyiségek áramlását szigetelők nem akadályozzák, akkor kiegyenlítődésre törekszenek. A kiegyenlítődésre való törekvést úgy fejezzük ki, hogy a termodinamikai folyamatok irreverzibilisek. Fogalmazzuk meg a hőtán következő alappillért!

A termodinamika második főtétele: *A termodinamikai folyamatok kiegyenlítődési folyamatok, az extenzív mennyiségek áramlása olyan irányú, hogy az intenzív mennyiségek áramlást létrehozó szintkülönbségeit kiegyenlíteni törekszik. Így minden folyamat megfordíthatatlan, irreverzibilis.*

A második főtételhez is fűzünk néhány kissé pontatlan, de szemléletes megjegyzést.

1. A fizikai folyamatok valóban mindig megfordíthatatlanok. A reverzibilis

folyamat mechanikai modellekben előfordulhat. Egy inga mozgása, ha tisztán csak mechanikai törvények érvényesülnek, megfordítható. Ha filmre vesszük a mozgását, és a filmet visszafelé játszunk le, akkor semmiféle módon nem tudjuk eldönteni, hogy a folyamatot vagy időbeli tükörképét látjuk-e. Hasonló a helyzet egy golyó talajjal történő tökéletesen rugalmas ütközésekor. Ha a golyót valamilyen magasságból elengedjük, akkor ugyanolyan magasra pattan fel. Filmfelvételt készítve itt sem lehetne eldönteni, hogy a lejtés fordítva történt-e. Két golyó rugalmas ütközésekor is ez a helyzet. Ha a két golyó nem tökéletesen rugalmas, akkor a folyamat már nem fordítható meg: két golyó ütközésekor csökken a mozgási energia. A filmfelvételt megtekintve rögvést gyanakodnánk, ha azt látnánk, hogy a két ütköző golyó energiája növekszik. A valóságban a folyamatokban mindig van olyan elem, amely túlmutat a jelenséget leíró mechanikai modellen. Ezért a természetben lezajló folyamatok mindig megfordíthatatlanok. Különösen megfordíthatatlanok a kémiai és a biológiai folyamatok.

2. A kémiai folyamatokról gyakran mondjuk, hogy mindkét irányba végbemennek, vagyis reverzibilisek. Ez azonban csak a folyamat kémiai oldalára vonatkozik. A kémiai folyamatokhoz kapcsolódó fizikai, hőtani folyamatok annál inkább megfordíthatatlanok. A nem teljesen rugalmas labda is felpattan ugyanolyan magasra, mint ahonnan esett, ha a labdát kézzel pattogatjuk. A mechanikai mozgás időben megfordítható, de a beavatkozó emberi mozgás nem.

3. Néha a hőtani folyamatokat reverzibilisnek tekintik. Ilyenkor úgy gondolják, hogy a folyamat csupa egyensúlyi állapotban, az egyensúlyi állapotok során keresztül valósul meg. (Ilyenkor azt is szokás mondani, hogy a folyamat kvázistatikus.) Világos azonban, hogy a kvázistatikus, reverzibilis folyamat nagyon erőltetett, a valóság elemeit nélkülöző absztrakció. Absztrakció a tömegpont fogalma is. Egy igen hasznos, a valóság leírására jól alkalmazható absztrakció. Szerencsétlen elvonatkoztatás azonban például egy test végtelen kis sebességű mozgásáról beszélni. Vagy még inkább: az egyenletes mozgást szerencsétlen dolog úgy felfogni, mint csupa egyensúlyi állapotban keresztül megvalósuló nulla gyorsulású mozgást. Termodinamikailag egy rendszer vagy egyensúlyban van — ekkor az intenzív mennyiségek eloszlása egyenletes —, vagy nincs egyensúlyban, ekkor pedig határozott sebességgel halad az egyensúlyi állapot felé. A termodinamikai rendszer egyensúlyát és az állapotváltozásait ugyanazokkal az állapotjelzőkkel jellemezzük. Így a termosztatikai és a termodinamikai problémák egységesen tárgyalhatók. Emlékezzünk vissza: a pontrendszerek statikája és dinamikája is egységes nyelvezettel tárgyalható.

4. A hőtan második főtételét is megfogalmazhatjuk különböző egyenértékű formában. Ismert például a következő állítás: „másodfajú perpetuum mobile nem létezik”. Másodfajú örökmozgó az olyan gép, amely száz százalékos hatásfokkal működik. Ilyen valóban nincs, de ez az igen egyszerű állítás valóságos problémák

megoldásakor nem sok hasznot hoz. Negatív állítás — lehet igaz — valójában haszontalan dolog. A második főtételt később analitikus formában is megfogalmazzuk.

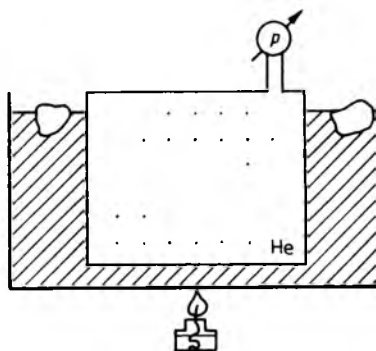
1.1.6. A hőmérséklet mérése

Adósok vagyunk a termikus potenciál mérésével, skálájának meghatározásával. A termikus potenciál méréséhez olyan rendszerre van szükségünk, amely

1. környezetével csak termikus kontaktusban van (tehát csak hőhatás jöhet létre a rendszer és a környezete között), és
2. belső energiája már mérhető mechanikai állapotjelzők ismert függvénye.

Ilyen rendszert könnyen készíthetünk: merev, de vékony falú fémtartályba töltünk héliumgázt. A gáz környezetével valóban csak termikus kapcsolatban van, hiszen a fal merev, másrészt a belső energia a gáz nyomásából és térfogatából könnyen kiszámítható.

Tegyük fel, hogy a tartály térfogata 2 dm^3 , és szereljük a tartályra egy érzékeny nyomásmérő műszert (1.3. ábra). Helyezzük a gáztartályt vízbe és állítsuk be úgy a nyomást, hogy a gáz nyomása



1.3.
ábra

1 atm = 10^5 Pa legyen, ha a tartályt körülvevő vízben nagy jégdarabok úszkálnak. Ekkor tehát a nyomásmérő 10^5 Pa nyomást mutat, és a gáz energiája

$$E_1 = \frac{3}{2} pV = 300 \text{ J.}$$

Gyűjtsünk ezután egy kis gázlángot a vízzel megtöltött edény alatt. A következőket tapasztaljuk.

1. A gáz nyomása mindaddig 10^5 Pa marad, amíg a jég el nem olvad a vízben. Eközben tehát a gáz energiája állandóan 300 J.

2. Amikor a jég elolvadt, a nyomás elkezd emelkedni, lassan nő, és amikor a víz forrni kezd, a nyomás $4/3$ atm $\approx 133\,000$ Pa lesz. Ekkor a gáz energiája eléri az

$$E_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 400 \text{ J}$$

értéket.

3. A gáz nyomása és energiája ezután már, miközben a víz forr, nem változik.

Fontoljuk meg, hogy milyen következtetéseket vonhatunk le a tapasztalatokból.

Ha a gáz nyomása állandó, akkor az energiája is állandó (hiszen a térfogat állandó). Az energia állandósága azt jelenti, hogy a gáz és környezete között hőátadás nincs; a munka ugyanis nulla (mert a térfogat állandó). Ismét arra hivatkozva, hogy csak termikus kölcsönhatás megengedett, ezért a hőátadásnak a termikus potenciál inhomogenitásában kell tükröződnie — most a hő nulla, ez csak úgy lehet, hogy a gáz és a környezete azonos termikus potenciállal rendelkezik. Foglaljuk össze tömören:

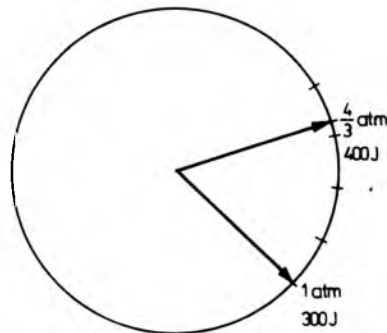
$$p = \text{áll.} \Leftrightarrow E = \text{áll.} \Leftrightarrow Q = 0 \Leftrightarrow \vartheta_{\text{gáz}} = \vartheta_{\text{körny.}} \quad (1)$$

Fordítva: ha a gáz nyomása nő, akkor nő az energia is, hiszen $E = \frac{3}{2} pV$. Az energia csak úgy nőhet, ha a rendszer környezetéből hőt vesz fel — hiszen a mechanikai szigetelés miatt $W = 0$. Ha pedig a gázba hő áramlik a környezete felől, akkor ez azt jelenti, hogy a környezete termikus potenciálja magasabb, mint a gáz termikus potenciálja: Röviden:

$$p \text{ nő} \Leftrightarrow E \text{ nő} \Leftrightarrow Q > 0 \Leftrightarrow \vartheta_{\text{gáz}} < \vartheta_{\text{körny.}} \quad (2)$$

Az (1) és a (2) állítások kiegészítik egymást.

A gáz és a környezete két esetben van azonos termikus potenciálon: az olvadó jég és a víz keverékében, valamint a forrásban lévő vízben. Ekkor a nyomásmérő 1 atm = 10^5 Pa, illetve $4/3$ atm $\approx 133\,000$ Pa nyomást mutat. A nyomásértékek mellé írhatnánk a megfelelő energiaértékeket is: 300 J, 400 J (1.4. ábra). Ezt a két fix pontot kellene felhasználnunk a termikus potenciál skálájának a meghatározásához. A termikus potenciál nulla szintjét megválasztjuk a gáz 1 atm nyomású (300 J energiájú) állapotában. Abban már korábban megállapodtunk, hogy a hő a magasabb termikus potenciálú hely felől áramlik az alacsonyabb termikus potenciálú hely felé.



1.4.
ábra

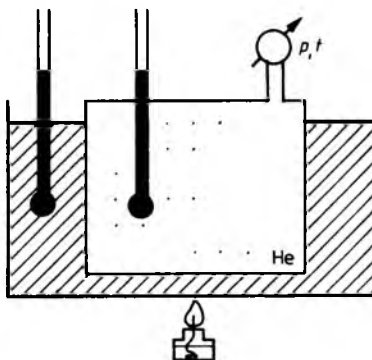
Végül a termikus potenciál kiegyenlítődik, így a $4/3$ atm nyomású, 400 J energiájú állapothoz magasabb termikus potenciál értéket kell rendelnünk. Lehetne mondjuk ebben az állapotban a termikus potenciál értéke egységnyi. A két érték közötti skálaszakaszt bármilyen monoton növekvő skálátörvénnyel elláthatnánk. Nem ezt az utat követjük.

A termikus potenciál 100 egységnyi szintjét a $4/3$ atm nyomású, 400 J energiájú állapotban rögzítjük. A két érték közötti skálaszakaszt egyenletesen osztjuk be száz részre a közöttük meglévő 100 J energia-különbségnek megfelelően. Ezt a skálátörvényt alkalmazzuk a 300 J-nál kisebb és a 400 J-nál nagyobb energiájú állapotokra is.

A termikus potenciál így definiált skáláját Celsius-fokban mért hőmérsékletnek nevezzük. Így például 32°C annak a rendszernek a hőmérséklete, amely a kísérletünkben szereplő gázzal termikus egyensúlyban van, ha a tartályra szerepelt nyomásmérő $1 + 32/100$ atm nyomást mutat, vagyis a nyomásmérőről 332 J energiaszint olvasható le. (Az, hogy a termikus egyensúly megvalósul, könnyen ellenőrizhető. Ha a nyomásmérő áll, akkor a gáz és a környezete között termikus egyensúly van.)

A nyomásmérő skáláját elláthatjuk a termikus potenciál (: a hőmérséklet) skálájával. A továbbiakban a termikus potenciál jele helyett a hőmérsékletet t -vel jelöljük.

Világos tehát: a jég 0°C -on olvad, és a víz 100°C -on forr. És a fürdővíz 24°C -os, ha a vízbe helyezve a gáztartályunkat, a nyomásmérő $1,08$ atm nyomást mutat.



1.5.
ábra

Ezt a készüléket azonban a gyakorlatban mégsem használhatjuk hőmérőként. Ismételjük meg ezután a következőképpen: a tartályba is, a vizes edénybe is helyezünk egy-egy higannyal félig feltöltött vékony üvegcsövet (1.5. ábra).

Azt tapasztaljuk, hogy a két csőben egyformán tágul a higanyoszlop, és — a higanyszintek változásával — a higanyoszlop hosszának a növekedése arányos a hőmérséklet-változással:

$$\Delta l \sim \Delta t. \quad (3)$$

Valóban fontos tapasztalati tényről van szó. Mielőtt ezt az arányosságot a kísérletekre támaszkodva megállapítottuk volna, a (3) arányosság mindkét oldalán szereplő mennyiségeket mérni tudtuk. A hossz mérés és a hőmérsékletmérés is tisztázott probléma. Ilyen értelemben valóban van értelme annak, hogy a tapasztalat szerint a higany hosszának a növekedése arányos a hőmérséklet növekedésével.

A (3) arányosság alapján készítik el a higanyos hőmérőket.

1.2. Hőtágulás

1.2.1. Szilárd testek és folyadékok hőtágulása

Az előző pontban a hőmérséklet mérését írtuk le. A mérés azon alapult, hogy a hőmérséklet mint fizikai mennyiség a termikus kölcsönhatás intenzív mennyisége. Ez — ismételjük meg — a következőt jelenti.

Tegyük fel, hogy egy rendszer és a környezete között csak termikus kölcsönhatás valósulhat meg, térfogat, töltés, tömeg nem áramolhat a rendszer és a környezete között. Csak az energia áramlását engedi meg a rendszer és a környezete közötti szigetelő. Ilyen feltételek mellett a rendszer és a környezete között energiaegyensúly pontosan akkor áll fenn, ha a rendszer és környezete azonos hőmérsékletű (: termikus potenciáljuk azonos).

A hőmérséklet mérését sikerült tehát tisztáznunk. Erre alapozva megállapíthatjuk, hogy a higany térfogatának — vagy vékony csőben a hosszának — a növekedése arányos a hőmérséklet növekedésével. Nagy sorozatban is gyárthatunk így hőmérőket: a higanyal félig telt üvegcső falát megkarcoljuk és ráírjuk a megfelelő hőmérsékletértéket.

Felvetődik most a kérdés: használhatnánk-e a higany helyett más anyagot. Világos, hogy a kísérletnek nem lényeges eleme az, hogy folyadék térfogatváltozását vizsgáltuk. Ugyanígy tanulmányozhattuk volna egy vékony acélrúd hosszának a növekedését.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a vékony fémrudak hossza a hőmérséklet növelésével arányosan nő: rögzítsünk valahogyan egy Celsius-fokban mért hőmérsékle-

ti pontot, jelöljük ezt t_0 -lal. Legyen a kísérletben szereplő fémrúd hossza ezen a hőmérsékleten l_0 . Növeljük meg a rúd hőmérsékletét, az új hőmérsékletet jelöljük t -vel, a rúd megnövekedett hosszát l -lel (1.6. ábra). Legyen továbbá $\Delta l := l - l_0$ és $\Delta t := t - t_0$. Ekkor a tapasztalat szerint Δl arányos Δt -vel és arányos a rúd t_0 hőmérsékletéhez tartozó l_0 hosszával. Jelöljük az arányossági tényezőt α -val. Tehát

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta t,$$

vagyis

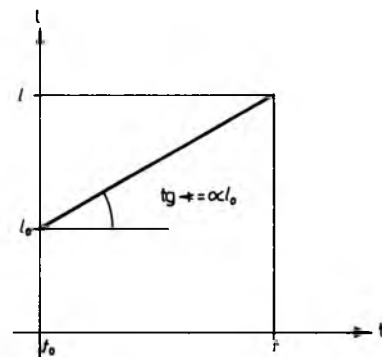
$$l - l_0 = \alpha l_0 (t - t_0),$$

és innen

$$l = l_0 [1 + \alpha (t - t_0)]. \quad (1)$$

Az (1) összefüggést a *lineáris hőtágulás törvényének* nevezzük. Az együttható neve: *lineáris hőtágulási együttható*. Mértékegysége nyilvánvalóan $1/^\circ\text{C}$.

Ejtsünk most néhány szót az (1) hőtágulási törvény alkalmazásáról, majd vizsgáljuk meg mélyebben és írjuk le az érvényességi körét.



1.6. ábra

Emeljük ki először azt, hogy a hőtágulási együttható függ a t_0 alaphőmérséklet megválasztásától. Világítsuk meg ezt egy példával. Tegyük fel, hogy adott $t_0 = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten egy $l_0 = 1$ m hosszú acélrúd. A középiskolában használatos függvénytábla erre a hőmérsékletre adja meg a hőtágulási együttható értékét: $\alpha = 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$. Ekkor, ha a rúd hőmérséklete 48°C -ra nő, a hossza

$$l = l_0(1 + 1,17 \cdot 10^{-5} \cdot 28) = 1,00033 \text{ m}$$

lesz, vagyis 0,33 mm-rel nő.]

Égy másik példa: tegyük fel, hogy az acélrúd hossza 32°C -on 1,2 m. Határozzuk meg hosszát 59°C -on! Jelöljük a kezdeti hosszúságot l_{32} -vel, a keresett hosszúságot l_{59} -cel. Ekkor ha az

$$l_{59} = l_{32}[1 + \alpha(59 - 32)]$$

összefüggést alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy a hőtágulási együttható értéke a táblázatban $1,17 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$, a következőt kapjuk:

$$l_{59} = 1,2[1 + 1,17 \cdot 10^{-5}(59 - 32)] = 1,2003791 \text{ m}.$$

Ez azonban elvben helytelen megoldás, hiszen a hőtágulási együttható a 20°C -hoz tartozik.

A helyes megoldás a következő: írjuk fel a 32°C -hoz és a 59°C -hoz tartozó hosszúságokat így:

$$l_{32} = l_{20}[1 + \alpha(32 - 20)],$$

$$l_{59} = l_{20}[1 + \alpha(59 - 20)].$$

E két egyenlőségéből l_{20} -at kiküszöbölve:

$$l_{59} = l_{32} \frac{1 + \alpha(59 - 20)}{1 + \alpha(32 - 20)} = 1,2003790 \text{ m}.$$

Látható tehát: az első — elvileg kifogásolható módszer — lényegében ugyanazt

az eredményt szolgáltatja, mint a pontos módszer. Ez azt jelenti, hogy ha a hőmérséklet-növekedés nem túl nagy, akkor nem kell azzal törődnünk, hogy a hőtágulási együttható milyen hőmérsékleti ponthoz van adva.

(Még egy megjegyzés a feladattal kapcsolatban: a közelítés a következő matematikai közelítő formulán alapszik. Kis ε pozitív szám esetén

$$\frac{1 + \varepsilon x}{1 + \varepsilon y} \approx 1 + \varepsilon(x - y).$$

Így például

$$\frac{1,007}{1,003} = 1,0039 \approx 1,004.]$$

A lineáris hőtágulással kapcsolatos feladatokban gyakran kap szerepet egy inga lengésideje, illetve ennek megváltozása a hőtágulás miatt. Tegyük fel, hogy egy ingaóra 20°C -on pontosan jár. Az inga periódusideje:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

ahol l_0 az inga rúdjának a hossza 20°C -on. Ha a hőmérséklet Δt -vel nő, akkor a lengésideő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0(1 + \alpha \Delta t)}{g}}.$$

A két egyenlőség négyzetét osszuk el egymással:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = 1 + \alpha \Delta t,$$

így

$$T^2 = T_0^2 (1 + \alpha \Delta t).$$

A konkrét számolás kedvéért tegyük fel, hogy $T_0 = 1$ s, vagyis az ingaóra másodpercenként egyet leng, és egy-egy lengésével

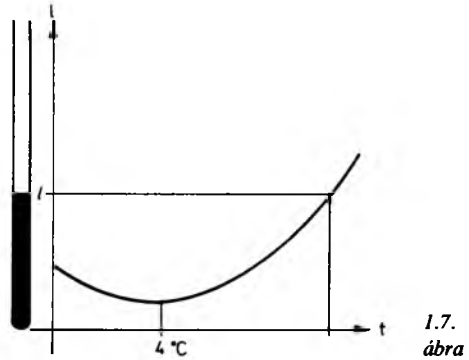
egy másodpercnyit továbbítja a másodperc mutatót. Ha az inga rúdja rézből van, vagyis $\alpha = 1,62 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, és $\Delta t = 20^\circ\text{C}$, akkor $T^2 = 1 + 1,62 \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 1,000\,324 \text{ s}^2$,

$$T = 1,000\,162 \text{ s.}$$

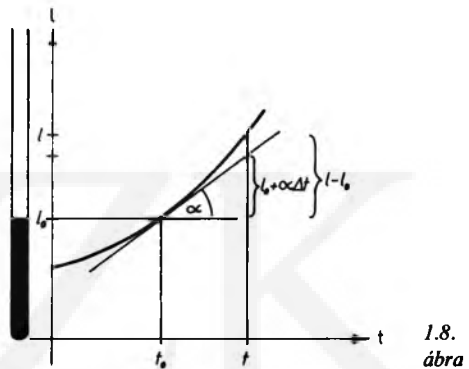
A $24 \cdot 3600 = 86\,400 \text{ s}$ időtartamú nap alatt az inga $86\,400 : 1,000\,162 = 86\,386$ lengést végez, 14 lengéssel kevesebbet, mint a 20°C -on jól járó ingaóra. Más szóval ez azt jelenti, hogy az óra szerkezetét egy nap alatt 14-gyel kevesebb lökés éri, mint 20°C -on: a 40°C -os, melegnek kitett óra naponta 14 másodpercet késik.

A lineáris hőtágulási törvény több szempontból nem egzakt természeti törvény. Úgy találtuk, hogy fémek esetén az (1) lineáris törvény érvényben van, legalábbis a vizsgált hőmérséklet-tartományban. Kérdés azonban, hogy nagyobb hőmérséklet-változások esetén igaznak tekinthető-e, és az is kérdéses, hogy vajon az összes anyagra teljesül-e? Erre az utóbbi kérdésre tagadó választ adhatunk. Ha vékony gumiszálat melegítünk, akkor az összehúzódik, a hossza csökken. Látványosabb eredményt kapunk, ha „vízhőmérőt” készítünk. A vékony üvegcsőbe öntött víz természetesen csak 0°C felett használható folyadék hőmérőként, de itt is „baj” van: a hőmérséklet növelésével a vízoszlop hossza csökken egészen 4°C -ig, ezután kezd emelkedni. A víz térfogata 4°C -on a legkisebb.

Ábrázoljuk a vízoszlop hosszát a hőmérséklet függvényében. Nyilvánvaló, hogy a függvény nem lineáris (1.7. ábra). Hasonló azonban a helyzet más anyagoknál is, csak annyival kedvezőbb, hogy a görbe a tapasztalat szerint monoton növekvő. Ha nagyobb hőmérséklet-tartományokat nézünk, akkor a rudak hosszának a megváltozása már nem tekinthető lineárisnak.



1.7. ábra



1.8. ábra

Azt azonban mindenképpen feltehetjük a tapasztalati alapokon felvázolt függvényről, hogy differenciálható: a hosszúság—hőmérséklet függvény grafikonjához minden pontban húzhatunk érintőt, nem törik sarkosan (1.8. ábra). Legyen tehát t_0 tetszőleges hőmérsékleti pont. Ezen a hőmérsékleten legyen a vizsgált rúd hossza $l(t_0)$. A grafikonhoz húzott érintő meredekségét — a $t \mapsto l(t)$ függvény t_0 -beli deriváltját — jelöljük $l'(t_0)$ -al. Az ábrán látt háromszög függőleges oldala egyrészt $l'(t_0)(t - t_0)$, hiszen az ívvel jelölt szög tangense $l'(t_0)$, másrészt a t_0 hőmérséklethez elég közeli t hőmérséklet esetén közelítőleg $l(t) - l(t_0)$, így

$$l(t) - l(t_0) = l'(t_0)(t - t_0). \quad (2)$$

Vezessük be most a következő jelölést:

$$\alpha(t_0) := \frac{l'(t_0)}{l(t_0)}. \quad (3)$$

Innen $l'(t_0)$ -at (2)-be helyettesítve az (1) hőtágulási törvényt kapjuk:

$$l(t) - l(t_0) = l(t_0) \alpha(t_0) (t - t_0).$$

Az (1) hőtágulási törvényben tehát a következő az, ami a természetre tartozik: a vékony fémtárgyak, folyadékoszlopok hőmérséklettől függő hossza — mint a hőmérséklet függvénye — differenciálható, sőt, a derivált lassan változik, ezért az $\alpha(t_0)$ arány — bár minden hőmérsékleten más és más — a valóságban nem nagyon változik, a leggyakrabban megkívánt számolási pontosság eléréséhez állandó értéket használhatunk.

Térjünk most rá arra, hogy egy vékony fémlap területe hogyan változik a hőmérséklettel (1.9. ábra). Vizsgáljunk egy l_0 oldalú négyzetet. A hőtágulási együtthatót jelöljük α -val. Ekkor a négyzet területe a t_0 hőmérsékleten

$$A_0 = l_0^2,$$

és a t hőmérsékleten

$$A = l^2 = l_0^2(1 + \alpha \Delta t)^2,$$

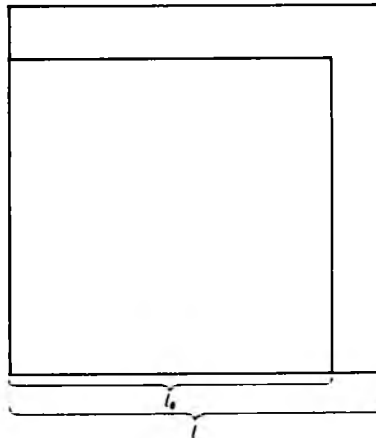
ahol $\Delta t := t - t_0$. Végezzük el most a négyzetre emelést:

$$A = l_0^2(1 + 2\alpha \Delta t + \alpha^2 \Delta t^2).$$

Tekintve azonban, hogy α^2 nagyságrendje 10^{-10} — az (1) egyenlőség különben is közelítő érvényű —, a harmadik tagot elhagyhatjuk, így

$$A = A_0(1 + 2\alpha \Delta t). \quad (4)$$

Homogén fémlap területe lineárisan nő, sőt a hőtágulás hasonlósági transzformációval írható le. Ha például egy körlapba egy



1.9. ábra

kisebb kör alakú lyukat fúrunk, pontosan olyant, amelyen egy golyó éppen átesik, akkor a lapot felmelegítve, a golyó lötyögni fog a lyukban. A körlap sugara is, a lyuk sugara is növekszik.

Tekintsünk most egy t_0 hőmérsékleten l_0 élű kockát, a hőtágulási együtthatója legyen α . Ekkor $V_0 = l_0^3$. Melegítsük fel a kockát t hőmérsékletre. Legyen akkor a kocka éle l , így a felmelegített kocka térfogata: $V = l^3$, tehát

$$V = l_0^3(1 + \alpha \Delta t)^3,$$

ahol $\Delta t := t - t_0$. A köbre emelést elvégezve:

$$V = V_0(1 + 3\alpha \Delta t + 3\alpha^2 \Delta t^2 + \alpha^3 \Delta t^3).$$

A zárójelben a harmadik tag 10^{-10} , a negyedik tag 10^{-15} nagyságrendű, tehát jogosan elhanyagoljuk. Ekkor a *térfogati hőtágulás törvényét* kapjuk:

$$V = V_0(1 + 3\alpha \Delta t). \quad (5)$$

Figyeljünk fel arra, hogy az (1), (4), (5) egyenlőségekben a hőtágulási együttható, a kétszerese, illetve a háromszorosa szerepel.

A fémek mellett igen sok anyag esetén alkalmasak a hőtágulási törvény közelíté-

sére az (1), (4), (5) állítások. A vizet leszámítva lényegében az összes folyadék alkalmazható folyadék hőmérőnek, tehát — legalábbis bizonyos hőmérséklet-tartományban — a térfogatváltozásuk arányos a hőmérséklet-változással:

$$V = V_0[1 + \beta(t - t_0)]. \quad (6)$$

Az arányossági tényező a folyadékok térfogati hőtágulási együtthatója. Mértékegysége természetesen $1/^\circ\text{C}$. A β együttható — elvben — ugyanúgy függ a t_0 alaphőmérséklet megválasztásától, mint az α együttható. (Táblázatokban az együtthatót a 18°C -hoz adják meg.) Nyilvánvaló, hogy a β térfogati hőtágulási együttható a lineáris hőtágulási együttható háromszorosának felel meg: $\beta = 3\alpha$.

Az (5) és (6) hőtágulási törvénynek megfelelő törvények a sűrűségekre is teljesülnek. Ha a t_0 hőmérséklethez tartozó térfogatot V_0 -al, a sűrűséget ρ_0 -al jelöljük, a t hőmérséklet esetén a térfogat legyen V , a sűrűség pedig ρ , ekkor

$$V_0\rho_0 = V\rho,$$

hiszen a tömeg a hőtágulás közben nem változik. Felhasználva például a (6) egyenlőséget a

$$V_0\rho_0 = V_0(1 + \beta\Delta t)\rho$$

állítást kapjuk, innen

$$\rho = \frac{1}{1 + \beta\Delta t} \rho_0. \quad (7)$$

Hasonló eredményt kapunk, ha a (6) egyenlőség helyett az (5) egyenlőséget vesszük figyelembe.

Égyszerű példaként vizsgáljuk meg a következő problémát. Tegyük fel, hogy egy vaskorong alapterülete $t_0 = 20^\circ\text{C}$ -on A_0 , a magassága h_0 és ugyancsak 20°C hőmérsékletű higanyban úgy úszik, hogy a

folyadék felszíne alá x_0 magas része merül. Ekkor

$$Ah_0\rho g = Ax_0\rho_{\text{Hg}}g,$$

ahol ρ a vas, ρ_{Hg} a higany sűrűsége 20°C -on. Tegyük fel, hogy a higany és a felszínén úszó vaskorong Δt Celsius-fokkal felmelegszik. Megnö ennek következtében a keresztmetszet, a vaskorong magassága és a folyadékba merülő részének a mérete is:

$$A'h_0(1 + \alpha\Delta t)g \frac{\rho}{1 + 3\alpha\Delta t} = A'xg \frac{\rho_{\text{Hg}}}{1 + \beta\Delta t},$$

itt x a felmelegedett vaskorong higanyba merülő részének a magasságát jelöli, α a vas lineáris hőtágulási együtthatója, β pedig a higany térfogati hőtágulási együtthatója. A két egyenlőség hányadosa:

$$\frac{1 + \alpha\Delta t}{1 + 3\alpha\Delta t} = \frac{x}{x_0} \frac{1}{1 + \beta\Delta t}.$$

Innen — alkalmas adatok esetén — x könnyen meghatározható.]

1.2.2. Gay-Lussac törvényei

A legtöbb szilárd test és folyadék hőtágulását igen jól leírja az elvileg csak közelítő érvényű lineáris hőtágulási törvény. Most a gázok hőtágulását vizsgáljuk meg.

Egy A keresztmetszetű hengerbe helyezünk egy jól záródó könnyű dugattyút. Töltsünk a tartályba valamilyen ideális gázt. A nyomását tetszőleges állandó értéken tarthatjuk, ha a függőlegesen elmozduló dugattyúra ismert súlyokat helyezünk. A nyomás is, a hőmérséklet is könnyen mérhető. A dugattyú emelkedéséből a térfogatváltozás könnyen nyomon kísérhető.

Melegítsük a gázt. A következőt tapasztaljuk. A gáz térfogatának a megváltozása

arányos a kezdeti térfogattal és a hőmérséklet-változással. Ha a gáz térfogata a t_0 hőmérsékleten V_0 , a t hőmérsékleten V , akkor

$$V - V_0 = V_0 \beta (t - t_0),$$

vagy másképpen:

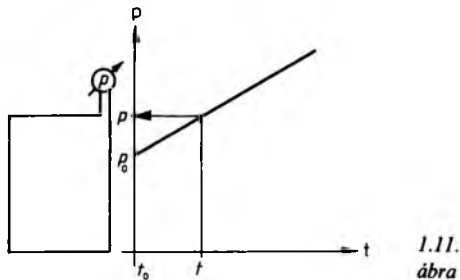
$$V = V_0 [1 + \beta (t - t_0)]. \quad (1)$$

Az arányossági tényezőt most is β -val jelöljük, és hőtágulási együtthatónak nevezük. Igen fontos körülmény, hogy a hőtágulási együttható nem függ attól, hogy mekkora súllyal terheltük a dugattyút, vagyis hogy mekkora a gáz nyomása.

Ez *Gay-Lussac első törvénye*: állandó nyomáson az ideális gáz térfogata — az (1) összefüggésnek megfelelően — a hőmérséklet-változással arányosan változik (1.10. ábra).

Fontos megszorítás: a gáz nyomása — vagyis a dugattyút terhelő súly — a melegítés közben állandó. Ha közben a nyomás is változik, akkor a térfogatváltozás bonyolultabb függvénnyel írható le, hamarosan sort kerítünk azonban az ilyen problémák megvilágítására is.

Most azt tegyük fel, hogy a gáz nyomása változhat, a térfogata nem; a gázt rögzített térfogatú tartályba, gázpalackba zártuk. Ekkor a következőt figyelhetjük meg (1.11. ábra): a gáz nyomásának a megváltozása



arányos a kezdeti nyomással, a t_0 hőmérsékleten mért p_0 nyomással és arányos a $t - t_0$ hőmérséklet-különbséggel. A t hőmérséklethez tartozó nyomást jelöljük p -vel, ekkor

$$p - p_0 = p_0 \beta (t - t_0),$$

vagy másképpen írva:

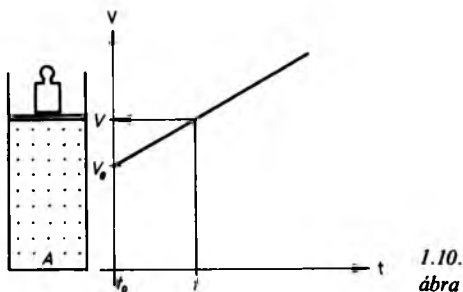
$$p = p_0 [1 + \beta (t - t_0)]. \quad (2)$$

Ez *Gay-Lussac második törvénye*: az ideális gázok nyomása rögzített térfogat esetén a hőmérséklet-változással arányosan változik. Ki kell emelni most is, hogy a hőtágulási együttható nem függ a gáz különben állandó térfogatától.

Ezen túlmenően további érdekes és igen hasznos dolgok derülnek ki az (1) és a (2) törvényben szereplő hőtágulási együtthatóról. Először is, igen fontos: a két törvényben szereplő együttható azonos, ezért nem tettünk a jelölésben különbséget közöttük.

Másodszor: ez a hőtágulási együttható nem függ a gáz minőségétől, ugyanaz az értéke levegőre, szén-dioxidra, héliumra és minden ideális gázra. Ezért nem találunk olyan táblázatot a középiskolai táblázatgyűjteményben, amelyben a gázok hőtágulási együtthatóját sorolnák fel.

Harmadszor: ennek az univerzális hőtágulási együtthatónak értéke — mérések szerint — $0,003\,663\,0\,1/^\circ\text{C} = 3,663 \cdot 10^{-3}\,1/^\circ\text{C}$.



¶ Egy egyszerű példával világítsuk meg a két Gay-Lussac-törvény alkalmazását. Tegyük fel, hogy adott 3 dm^3 térfogatú, $1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nyomású, és 0°C hőmérsékletű hélium. Melegítsük fel a gázt állandó nyomáson 50°C -ra. Ekkor Gay-Lussac első törvénye szerint

$$V = 3(1 + 0,003\,663 \cdot 50) = 3,55 \text{ dm}^3$$

térfogatú lesz a gáz a melegítés befejezésekor.

Tegyük fel, hogy a gázt ismét 50°C -ra melegítjük, de most a térfogata állandó marad, a nyomása megváltozik. Jelöljük ezt az új nyomást p -vel. Ekkor Gay-Lussac második törvénye szerint:

$$p = 1,2 \cdot 10^5 (1 + 0,003\,663 \cdot 50) = 1,42 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

XIII. Feladatcsoport: hőtágulás

XIII/1. Egy anyag sűrűsége 18°C -on $7,16 \text{ kg/dm}^3$. A hőtágulási együttható $2,94 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Mekkora az anyag sűrűsége, ha forrásban lévő vízbe mártjuk?

XIII/2. Vékony üvegcsőbe (kapillárisba) higanyt töltünk. A cső falán megjelöljük a higany szintjét, amikor a cső olvadó jégbe merül, és akkor is, amikor forró vízbe helyeztük. A két jel távolsága 12 cm . Mekkora a hőmérséklet, ha a higany az alsó jel felett van $4,8 \text{ cm}$ -rel?

XIII/3. Az alumínium lineáris hőtágulási együtthatója $2,4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Egy 30 cm hosszú alumíniumrúd hőmérséklete 15°C -kal nő. Mennyivel nő meg a hossza? Mekkora a rúd hosszának relatív növekedése?

XIII/4. Az üveg lineáris hőtágulási együtthatója $9 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Mekkora az üvegedény térfogata 90°C -on, ha 10°C -on 120 cm^3 ?

XIII/5. Egy test térfogata melegítés következtében $1,8\%$ -kal nő. Hány %-kal nő a felszíne?

XIII/6. 0°C -on a higany felszínén úszó vaskorong magasságának az 57% -a merül a higanyba. Hány % lesz a higanyba merülő rész, ha a hőmérséklet 100°C ? (A vas lineáris hőtágulási együtthatója: $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, a higany hőtágulási együtthatója: $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.)

XIII/7. Egy 2 méter hosszú, 2 mm vastagságú acélszalag ($\alpha_a = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $E_a = 1,2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$) mindkét felületére $1\text{—}1 \text{ milliméter}$ vastag rézlemez ($\alpha_r = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $E_r = 10^7 \text{ N/cm}^2$) szegecselünk. A három egymáshoz erősített szalagot 0°C -ról 50°C -ra melegítjük. Mennyivel változik meg a hossza?

XIII/8. Egy 100 cm^3 belső térfogatú üveghengerbe ($\alpha_a = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$) egy 27 cm^3 térfogatú vaskockát teszünk ($\alpha_v = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$). A hengert ezután teleöltjük $\beta = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ hőtágulási együtthatójú folyadékkal. Ekkor a hőmérséklet 0°C . Mennyi folyadék folyik ki az edényből, ha a hőmérséklet 80°C -ra emelkedik?

XIII/9. Egy vaskanna térfogata 0°C -on 10 dm^3 ($\alpha_v = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$). Mennyi petróleumot önthetünk a kannába, ha azt szeretnénk, hogy 40°C -on se ömöljön ki a petróleum? (A petróleum térfogati hőtágulási együtthatója: $\beta = 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.)

XIII/10. A réz lineáris hőtágulási együtthatója $1,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, az alumíniumé $2,4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Egy rézrúd hossza 0°C -on x , egy alumíniumrúd hossza y , ugyanezen a hőmérsékleten. A rézrúd hossza 3 dm -rel hosszabb az alumíniumrúdnál minden 0°C -nál nagyobb hőmérsékleten. Határozzuk meg a rudak kezdeti — 0°C -hoz tartozó — hosszát!

2. Az ideális gázok termodinamikája

2.1. Állapotegyenletek, mérlegegyenletek

2.1.1. Az ideális gázok állapotegyenletei

Tekintsük át a gázok állapotjelzői között fennálló empirikus háttérű kapcsolatokat.

1. A Boyle—Mariotte-törvény értelmében a gázok nyomásának és térfogatának a szorzata állandó hőmérsékleten állandó. Ha például egy adott kezdeti állapotban, valamely gáz nyomása p_0 , térfogata V_0 , akkor azonos hőmérsékletű későbbi állapotban mérhető p nyomásának és V térfogatának szorzata megegyezik a kezdeti értékek szorzatával:

$$pV = p_0V_0.$$

(Ezt a törvényt empirikus — tehát tapasztalati — törvénynek tekintettük, amikor először szóba került. Azt találtuk ugyanis, hogy a legtöbb gáz az akkor általunk vizsgált feltételek mellett teljesíti az ideális gázokra kikötött feltételt, hogy a nyomás és a sűrűség állandó. Emlékezzünk arra, hogy vizsgált kísérleteinkben vékonyfalú üvegcsővek és fémből készült tartályok szerepeltek. Körülírtuk a kísérletek feltételeit, és kikötöttük, hogy a hőmérséklet állandó legyen.

Gondolatmenetünkben csak később jutottunk el a hőmérséklet egzakt fogalmához. Ezért nem láttuk helyesnek ennek a fogalomnak a használatát a mechanikai fejezetekben. Egy törvény lényeges része érvényességi körének a meghatározása. Az e hatókörre vonatkozó ismereteink azonban sok esetben megváltoznak.)

2. Gay-Lussac első törvénye azt mondja ki, hogy az ideális gázok térfogata a hőmérséklettel arányosan változik, ha a nyomás állandó:

$$V = V_0[1 + \beta(t - t_0)].$$

A törvényt a tapasztalat a mindennapi hőmérséklettartományban alátámasztja.

3. Gay-Lussac második törvénye szerint állandó térfogaton a gázok nyomása a hőmérséklettel arányosan változik:

$$p = p_0[1 + \beta(t - t_0)].$$

A megfigyelések, mérések alátámasztják ezt az állítást a mindennapi, könnyen megvalósítható hőmérséklettartományban.

Felvetődik most a következő kérdés: Ez a három állítás független-e egymástól? Elég lenne-e három közül kettőt ismerni?

Vagy van az 1., 2., 3. törvénynek közös általánosítása? A továbblépéshez ez lenne a legjobb.

Induljunk ki a következő feltételből. Tegyük fel, hogy egy könnyű dugattyúval zárt gáztartályba $p_0 := 1,013 \cdot 10^5$ Pa nyomású, $t_0 := 0^\circ\text{C}$ hőmérsékletű ideális gázt zártunk (2.1. ábra).

A gáznak ezt az állapotát normálállapotnak nevezzük. Normálállapotban a gáz $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5$ Pa nyomású és 0°C hőmérsékletű. A kémiából ismert tény, hogy 1 mol normálállapotú gáz térfogata ezen a hőmérsékleten $22,41 \text{ dm}^3$. Az is ismert a kémiából, hogy 1 molnyi gáz $6 \cdot 10^{23}$ számú molekulát tartalmaz.

Jelöljük a leírt gáz térfogatát a kezdeti normálállapotban V_0 -al és a tömegét m -mel. Ekkor a gáz m/M molnyi, ahol M a gáz molekulatömege vagy pontosabb kifejezéssel: *molekulatömege*.

Tegyük fel ezután, hogy a gáz térfogatát megnöveljük V' -re úgy, hogy a hőmérséklete állandó marad. A V' térfogathoz tar-

tozó nyomást jelöljük p_1 -gyel. Ekkor a Boyle—Mariotte-törvény alapján

$$p_0 V_0 = p_1 V' \quad (1)$$

Ebből az állapotból kiindulva állandó nyomáson növeljük meg a gáz hőmérsékletét t_1 -re. A gáz térfogatát ebben az állapotban jelöljük V_1 -gyel. Így Gay-Lussac első törvénye szerint

$$V_1 = V' (1 + \beta t_1), \quad (2)$$

hiszen $t_0 = 0$, vagyis $t_1 - t_0 = t_1$.

Fejezzük most ki (1)-ből V' -t, és helyettesítsük (2)-be:

$$V_1 = \frac{p_0 V_0}{p_1} (1 + 3,663 \cdot 10^{-3} t_1).$$

A hőtágulási együtthatónak — mint láttuk — minden gázra ugyanaz az értéke, könnyen látható, hogy

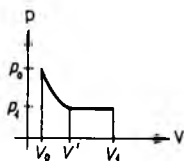
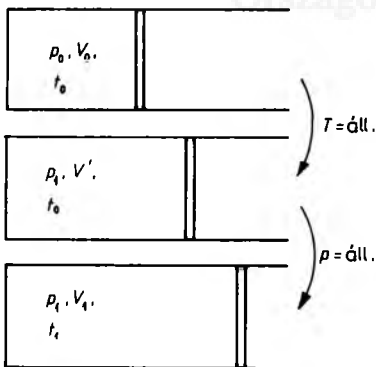
$$\frac{3,663}{1000} = \frac{1}{273} \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

Így

$$p_1 V_1 = p_0 V_0 \left(1 + \frac{1}{273} t_1 \right). \quad (3)$$

Ez az összefüggés a Boyle—Mariotte-törvény általánosításának tekinthető — ha $t_1 = t_0$, akkor $p_1 V_1 = p_0 V_0$. Ugyanígy Gay-Lussac mindkét törvényét visszakapjuk a (3) egyenlőségéből. Ha ugyanis $p_1 = p_0$, akkor egyszerűsítés után az első törvényt, ha $V_1 = V_0$, akkor V_0 -al való osztás után a második törvényt kapjuk.

Ki kell emelnünk a következőt: az 1., 2., 3. törvények megfogalmazásában a nyomás, a térfogat vagy a hőmérséklet közül egy mennyiséget állandónak tekintettünk, a másik két mennyiség változása között állapítottunk meg kapcsolatot. A (3) törvény általánosabban is igaz. Ha ugyanis a gáz kezdeti állapotjelzői p_0, V_0, t_0 — úgy



2.1. ábra

ahogyan a gondolatmenetünk elején kikötöttünk —, és valamely végállapot állapotjelzői p , V , t , akkor a (3) egyenlőség alapján p , V , t közül kettő meghatározza a harmadikat is. Magyarán, egy egyszerű példát említve: a $p_0V_0 = pV$ egyenlőség nemcsak akkor áll fenn, ha közben a hőmérséklet állandó, hanem elég az, hogy a folyamat kezdeti és végső hőmérséklete azonos legyen.

A (3) egyenlőség a gáz nyomása, térfogata, hőmérséklete közötti kapcsolatot írja le. Valójában egy elég nehézkesen kezelhető összefüggés, nem a bonyolult matematikai műveletek miatt, hanem mert a gáz kezdeti állapota a normálállapot, két tetszőleges állapot jellemzői kényelmetlen módon hozhatók kapcsolatba. Átalakítjuk a (3) jobb oldalát:

$$p_1V_1 = p_0V_0 \frac{273 + t_1}{273}. \quad (4)$$

Vezessük most be a hőmérséklet új skálátörvényét! Jelöljük T -vel, és nevezzük *abszolút hőmérsékletnek* a Celsius-féle hőmérsékleti skála 273-mal való eltolóját, tehát:

$$T := t + 273. \quad (5)$$

Az abszolút hőmérséklet *mértékegysége* a *kelvin*, jele K . A jég olvadáspontja így 273 K , a víz forráspontja 373 K . Igen fontos kiemelni azt a különben magától értetődő tényt, hogy valamely hőmérsékleti tartomány hossza Celsius-féle skálán és Kelvin-féle abszolút hőmérsékleti skálán szám szerint megegyezik. A 273 K hőmérsékletű víz hőmérsékletét 100 K -nel kell emelni, hogy a forráspontot elérjük.

Visszatérve gondolatmenetünkhöz, vezessük be a következő jelöléseket: $T_0 := 273$ K , $T_1 := 273 + t_1$. Ekkor (4)

alapján

$$p_1V_1 = p_0V_0 \frac{T_1}{T_0},$$

és innen

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_0V_0}{T_0}. \quad (6)$$

A (6) egyenlőséget *egyesített gáztörvénynek* nevezik. Az elnevezés arra utal, hogy egyesíti a Boyle—Mariotte-törvényt és a két Gay-Lussac-törvényt. Ezt a három törvényt úgy tekintjük, mint a (6) egyesített gáztörvény empirikus alapját, kísérleti hátterét.

Az egyesített gáztörvény szimmetrikus, a jobb és a bal oldala azonos formájú. Számolásnál ez azért előnyös, mert tetszőleges nyomás- és térfogat-mértékegységet használhatunk, csak arra kell ügyelni, hogy a két oldalon azonos dimenziójú mennyiségek szerepeljenek. A hőmérsékletet természetesen kötelező K -ben behelyettesíteni.

A (6) jobb oldalán a kiindulási feltétel miatt a normálállapot nyomása, hőmérséklete és az ezeknek megfelelő térfogat szerepel. Ez azonban nem lényeges: bármely két állapot összehasonlítására alkalmas a (6) egyenlőség. Ha ugyanis valamilyen további állapotban az állapotjelzők értéke p_2 , V_2 , T_2 , akkor

$$\frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_0V_0}{T_0},$$

és a p_1 , V_1 , T_1 értékekre is

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_0V_0}{T_0}.$$

Az egyenlőség formális tulajdonságai alapján:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}. \quad (7)$$

Nem szükséges tehát, hogy az egyesített gáztörvény egyik oldalán a normálállapot adatai szerepeljenek.

¶Tegyük fel, hogy egy 30 méter mély tó alján a víz hőmérséklete 4°C , a tó felszínén 16°C . A tó aljáról felszáll egy buborék, amelynek a térfogata a mélyben 1 cm^3 volt (2.2. ábra).

A tó alján a nyomás 4 atm , hiszen a vízben függőlegesen lefelé haladva 10 méterenként 1 atm -val nő a nyomás. Az egyesített gáztörvény:

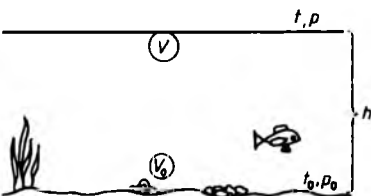
$$\frac{4\text{ atm} \cdot 1\text{ cm}^3}{(273+4)\text{ K}} = \frac{1\text{ atm} \cdot V}{(273+16)\text{ K}},$$

ahol V a buborék térfogata a tó felszínén, innen

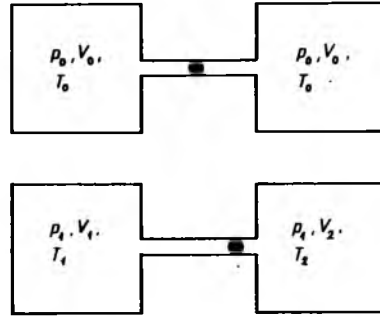
$$\frac{289 \cdot 4}{277} = V = 4,17\text{ cm}^3.$$

Az 1 cm^3 térfogatú buborék térfogata $4,17\text{ cm}^3$ -re nő. Ez az egyszerű példa azt mutatja, hogy könnyedén bánhatunk a mértékegységekkel.

¶Tekintsünk most egy bonyolultabb feladatot (2.3. ábra). Tegyük fel, hogy két, egyenként 2 dm^3 térfogatú lombikot egy hosszú, de vékony üvegcső köt össze. A két lombikban a gáz nyomása egyaránt 10^5 Pa , a hőmérséklet pedig 300 K . Ezután az egyik gáz hőmérsékletét 3 K -nel növeljük, a másikat 2 K -nel csökkentjük. Úgy fogjuk fel, hogy a kezdeti térfogathoz hozzátartozik a vízszintes összekötő cső fele térfogata is. Jelöljük a melegítés, illetve a hűtés után



2.2. ábra



2.3. ábra

kialakuló közös nyomást p_1 -gyel, a melegező gáz térfogatának a növekedését V -vel. Ekkor az egyesített gáztörvény a melegező gázra:

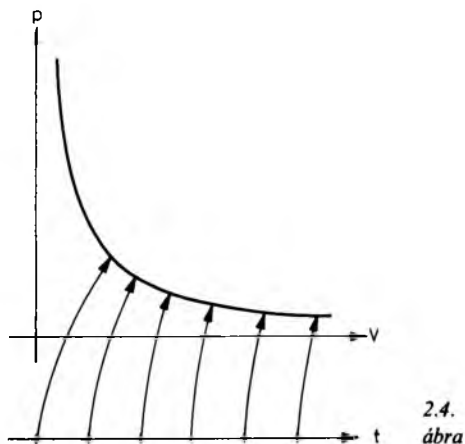
$$\frac{2\text{ dm}^3 \cdot 10^5\text{ Pa}}{300\text{ K}} = \frac{(2+V)\text{ dm}^3 \cdot p}{303\text{ K}}.$$

A másik gáz térfogata V -vel csökken, a nyomása ugyancsak p_1 lesz, hiszen a vízszintes higanycsepp két oldalánál azonosnak kell lennie a nyomásnak, ha a csepp egyensúlyban van. Erre a gázra tehát a

$$\frac{2\text{ dm}^3 \cdot 10^5\text{ Pa}}{300\text{ K}} = \frac{(2-V)\text{ dm}^3 \cdot p}{298\text{ K}}$$

formában érvényes az egyesített gáztörvény. E két egyenlettől a kialakuló közös nyomás és a térfogatváltozás meghatározható, $p_1 = 1,0016 \cdot 10^5\text{ Pa}$, $V = 16,6\text{ cm}^3$, mint ez könnyen ellenőrizhető.

Az ideális gázok állapotváltozását igen gyakran olyan koordináta-rendszerben szoktuk szemléltetni, amelynek vízszintes tengelyén a térfogatot, függőleges tengelyén a nyomást ábrázoljuk. Ekkor az állandó hőmérsékleten végbemenő (ún. *izotermikus*) folyamatok hiperbolákkal szemléltethetők. Egy adott hőmérséklethez egy izoterma tartozik. Ezen a hőmérsékleten összenyomva a gázt, a térfogat úgy változik, hogy az összetartozó p és V értékek a hiperbola pontjainak a koordinátái.



Felfogható a folyamat úgy is, mint egy V -től függő nyomásfüggvény, amelynek a grafikonja a hiperboladarab. Gyakrabban azonban az idő függvényének tekintjük a p -t is és a V -t is. Így a grafikon helyett pályaként fogjuk fel a hiperbolaívet (2.4. ábra).

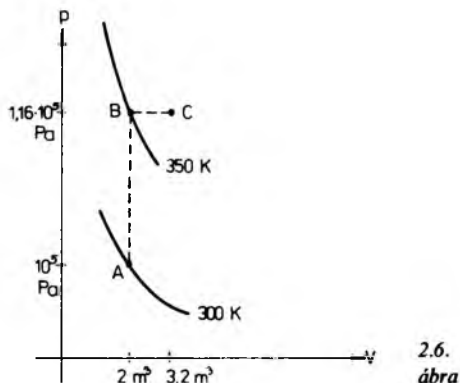
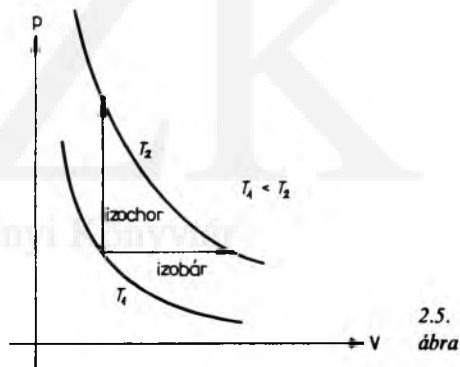
Állandó nyomáson végbemenő folyamatok pályája a p — V síkon vízszintes szakasz. Ha a gáz állapotjelzőit az idő függvényének tekintjük, akkor a folyamatok pályája irányítható. Állandó nyomáson végbemenő folyamatoknál a táguló gázok állapotváltozását jellemző szakaszt kifelé, az összenyomódó gáz állapotváltozását szemléltető szakaszt befelé irányítjuk.

Állandó térfogaton melegítve a gázt a nyomása nő. A folyamat úgy megy végbe, hogy az összetartozó nyomás-térfogat párok egy függőleges szakasz pontjai. Melegedő gáznál ezt a szakaszt fölfelé irányítjuk, csökkenő hőmérsékletnél lefelé mutat a szakasz irányítása. Világos, hogy az állandó térfogaton végbemenő folyamatot nem foghatjuk fel úgy, mint a nyomás-térfogatfüggvényét, hiszen a rögzített térfogathoz több (végtelen sok) nyomás tartozik (2.5. ábra).

Ha állandó nyomáson a térfogat nő, vagy állandó térfogaton a nyomás nő, akkor a hőmérséklet is növekszik. Így az egymás felett haladó hiperbolaágak növekvő hőmérsékletnek felelnek meg.

□ A p — V koordináta-rendszerben (2.6. ábra) megadunk három pontot. Az A ponthoz tartozó nyomás 10^5 Pa, a térfogat 2 m^3 . A pont a 300 K hőmérsékletű hiperbolán (izotermán) van. A B ponthoz tartozó térfogat megegyezik az A-hoz tartozó térfogattal, a hőmérséklet pedig 350 K . A C pont nyomása megegyezik a B pont nyomásával. A C ponthoz tartozó térfogat $3,2\text{ m}^3$.

Ezeket az összetartozó adatokat úgy fogjuk fel, hogy ezek egy gáz állapotjelzői különböző állapotokban. Könnyen meg-



határozhatjuk a B ponthoz tartozó ismeretlen nyomást; az egyesített gáztörvényből ugyanis

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B}, \quad (8)$$

hiszen $V_A = V_B$, ezzel tehát egyszerűsíthetünk. A (8) állítást Gay-Lussac második törvénye új kifejezésének tekintjük.

Vessük össze a B és a C ponttal jellemzett állapotokat:

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C}. \quad (9)$$

Itt az azonos nyomással egyszerűsítettünk. Ez a (9) egyenlőség Gay-Lussac első törvényének új, könnyebben kezelhető formája. A (8)-ból $p_B = p_C = 1,16 \cdot 10^5$ Pa. A (9) egyenletből $T_C = 560$ K.]

A (6) egyesített gáztörvény szimmetrikus, ezért könnyen meghatározhatjuk segítségével az ismeretleneket, a mértékegységekkel is meglehetősen szabadon bánhatunk. Hátrányos azonban, hogy egyetlen állapotról ebben a formájában semmit nem mond, mindig csak egy másik állapottal való összehasonlítás eredményeként kapunk információt valamely állapotról. Emellett a gáztörvény ebben a formájában csak állandó tömegű gáz állapotaira érvényes.

A (6) egyenlőséget átalakítjuk, a gáztörvény új formáját keressük.

Emlékeztetünk arra, hogy a (6) egyesített gáztörvény egyik oldalán a normálállapot jellemzői szerepeltek:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}.$$

(A bal oldalon elhagytuk az 1 indexet.) A normálállapotban a nyomás $1,013 \cdot 10^5$ Pa, a hőmérséklet 273 K. A V_0 térfogatról a

következőt tudjuk: annyiszor $22,41 \text{ dm}^3$, ahányszor több a gáz tömege a molekulatömegnél, tehát a normálállapotú gáz térfogata a molszám és $22,41 \text{ dm}^3$ szorzata:

$$V_0 = \frac{m}{M} 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3,$$

itt m a gáz tömege grammban mérve, M a gáz molekulatömege — ismét grammban kifejezve. A m/M arány azt fejezi ki, hogy a gáz hány molnyi mennyiségű. (Így például: 40 g hélium 10 molnyi mennyiségű, mert a molekulatömege 4 g, 87 g tömegű levegő 3 molnyi, mert a levegő átlagos molekulatömege 29 g.)

Így tehát az egyesített gáztörvény alapján:

$$\begin{aligned} \frac{pV}{T} &= \frac{p_0V_0}{T_0} = \\ &= \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{273 \text{ K}} \frac{m}{M}. \end{aligned}$$

A jobb oldali számolást elvégezve:

$$\frac{pV}{T} = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K}} \frac{m}{M}.$$

Az utóbbi egyenlőségben szereplő konstans *általános gázállandónak* nevezzük, és R -rel jelöljük:

$$R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Jelentése világos: egy molnyi mennyiségű, normálállapotú gáz esetén a „ pV/T ” értéke.

A következőt kaptuk:

$$\boxed{pV = \frac{m}{M} \cdot RT.} \quad (10)$$

Ezt a nagy jelentőségű állítást *általános gáztörvénynek* nevezzük. Nyilvánvaló,

hogy ez a (6) egyesített gáztörvény általánosításának tekinthető, ellentétben azonban a (6)-tal, ez valóban állapotegyenlet, mivel az állapotjelzők (p , V , T , m , M) egyidejű értéke között állapít meg kapcsolatot.

Az általános gáztörvénybe a nyomást pascalban, a térfogatot m^3 -ben, a hőmérsékletet kelvinben helyettesítjük be, a tömeget és a molekulatömeget egyaránt grammal mérjük.

Az m/M arányt *molszámmal* nevezik, jele n , és a mol mértékegységgel szokás ellátni. Ebben az esetben az általános gázállandó mértékegysége: J/(mol K). Amikor az R értékét kiszámoltuk, a nyomást pascalban, a térfogatot m^3 -ben helyettesítettük be. Ezért adódott az R mértékegységében joule a számlálóban. Ha valamely más nyomás, illetve térfogategységet használunk, akkor R értéke és mértékegysége más lesz. Például: a nyomást atm-ban, a térfogatot literben mérve

$$R = 0,082 \frac{\text{liter atm}}{\text{K}}.$$

„Az általános gáztörvény alkalmazását világítja meg a következő egyszerű probléma. Tegyük fel, hogy egy 10 dm^3 térfogatú gáztartályban $150 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nyomású, 300 K hőmérsékletű oxigéngáz van.

A gáz tömegét könnyűszerrel meghatározhatjuk, csak a (10) gáztörvénybe kell behelyettesítenünk (az O_2 molekulatömege 32 g):

$$150 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = \frac{m}{32} 8,31 \cdot 300,$$

innen $m = 1925,4 \text{ g} = 1,9254 \text{ kg}$.

Vizsgáljuk most meg, hogy a gáz hány százalékát kell kiengedni a tartályból, hogy a nyomása 350 K hőmérsékleten $136 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ legyen. Most is a tömeg az

ismeretlen:

$$136 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = \frac{m'}{32} 8,31 \cdot 350,$$

innen $m' = 1496,5 \text{ g}$, így tehát $m'/m = 0,77$. A tartályban marad a gáz 77%-a, kiengedjük tehát 23%-át, $429,1 \text{ g}$ oxigéngázt.]

A (6) általános gáztörvény átalakítható úgy, hogy csak intenzív állapotjelzők szerepelnek a törvényt kifejező egyenlőségben.

Osszuk el ugyanis a (10) egyenlőség mindkét oldalát V -vel, a gáz térfogatával. Ekkor

$$p = \frac{m}{M} RT.$$

Nyilvánvaló, hogy az emeletes tört számlálója a sűrűség, így az általános gáztörvény a következő alakban is felírható:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}. \quad (11)$$

„Illusztrációképpen határozzuk meg a normálállapotú levegő sűrűségét! A (11) egyenlőségbe helyettesítve:

$$10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{8,31 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 273 \text{ K}}{29 \text{ g}}$$

ρ -t kifejezzük: 1278 g/m^3 . [A (11) egyenlőséget használva a sűrűség g/m^3 mértékegységben adódik.]

Szorozzuk meg a (11) egyenlőség mindkét oldalát ρ -val:

$$p = \frac{RT}{M} \rho. \quad (12)$$

Azt kapjuk, hogy az ideális gáz nyomása és sűrűsége arányos, ha a hőmérséklet állandó. Ezzel az utóbbi feltétellel egészítjük ki

a gázok dinamikájáról szóló fejezet elején megismert feltevést. E kikötés helyett — amely akkor még nem ismert fogalomra vonatkozott — akkor körülírtuk a feltétel teljesülésének a körülményeit.

Fontos ponthoz érkeztünk gondolatmenetünkben. Itt az ideje, hogy rendszerezük a gázok állapotjelzőire vonatkozó relációkat.

Két alapvetően különböző eredetű állapotegyenletet tanultunk.

1. Az ideális gázok belső energiája a nyomás és a térfogat szorzatával arányos:

$$E = \frac{f}{2} pV. \quad (13)$$

Ezt a törvényt — emlékeztetünk rá — elemi statisztikus fizikai megfontolásból nyertük.

2. A gázok nyomása, térfogata, hőmérséklete között az általános gáztörvény teremt kapcsolatot:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Ennek az állításnak a háttere a két Gay-Lussac-törvény és a Boyle—Mariotte-törvény.

E két alapvető jelentőségű állapotegyenletből más állapotjelzőkre vonatkozó összefüggéseket kaphatunk: visszakaphatjuk a (6) egyesített gáztörvényt vagy a (8) és (9) Gay-Lussac-törvényeket, valamint a Boyle—Mariotte-törvényt. Más oldalról (10)-ből kaptuk a (11) intenzív mennyiségekre vonatkozó általános gáztörvényt is.

A (10) és (13) állapotegyenletek összekapcsolásából új összefüggést kapunk:

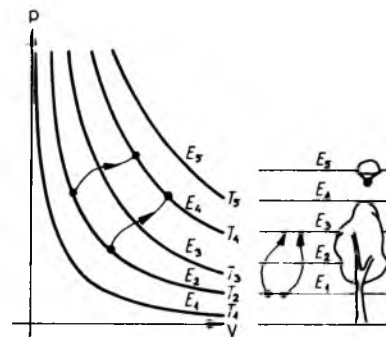
$$E = \frac{f}{2} \frac{m}{M} RT. \quad (14)$$

Központi jelentőségű állapotegyenlethez jutottunk. Kiolvasható a (14) egyenlőségből a hőmérséklet új fizikai jelentése. Az abszolút hőmérséklet a gáz energiataralmát méri. Ha kétszer nagyobb a gáz hőmérséklete, akkor kétszer nagyobb a belső energiája is.

Rögzítsünk egy hőmérsékletet, jelöljük T -vel. Ekkor a T hőmérsékletnek — a (10) alapján — megfelelő nyomás- és térfogatértékek egy hiperbola pontjaival ábrázolhatók, ha a tömeg nem változik. Egy ilyen hiperbola mentén tehát a hőmérséklet állandó. Ezért neveztük az ilyen görbéket izotermáknak. Ha a hőmérséklet megnövekszik, akkor az új hőmérsékletnek magasabban haladó izoterma felel meg.

Az izotermák mentén azonban nemcsak a hőmérséklet, hanem az energia is állandó! Az izotermákat energiaszinteknek is tekinthetjük, pontosan úgy, ahogyan a talajjal párhuzamos síkokat helyzetenergia-szinteknek, ekvipotenciális felületeknek fogjuk fel (2.7. ábra).

Növekvő hőmérsékletnek magasabban felvő izoterma, a magasabb energiaszint felel meg. Tekintsünk két izotermát — két energiaszintet. Ekkor a két izotermát összekötő tetszőleges pályán azonos a gáz belső energiájának változása. Mint aho-



2.7.
ábra

gyan a helyzeti energia megváltozása sem függ attól, hogy egy — mondjuk — m tömegű testet a tér melyik részén emelünk fel a talajtól h magasságra.

Térjünk vissza a (14) egyenlőséghez. Osszuk el mindkét oldalt a molszámmal:

$$\frac{E}{\frac{m}{M}} = \frac{f}{2} RT. \quad E = \frac{f}{2} \frac{m}{M} RT$$

Itt a bal oldalon az 1 mol-ra jutó belső energia áll. Mint ismeretes (Avogadro törvénye), 1 mol mennyiségű gázban $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ számú molekula van. Ezt a számot Avogadro-számnak — vagy Loschmidt-számnak — nevezik. Ha N_A -val osztjuk a fenti egyenlőség két oldalát, akkor az 1 molekulára jutó teljes belső energiát kapjuk:

$$\frac{E}{N_A \frac{m}{M}} = \frac{f}{2} \frac{R}{N_A} T.$$

Jelöljük ezt az energiát ε -nal:

$$\varepsilon = \frac{E}{N_A \frac{m}{M}}.$$

Az R/N_A hányadost pedig *Boltzmann-állandónak* nevezzük, és k -val jelöljük:

$$k := \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Így

$$\varepsilon = \frac{f}{2} kT, \quad (15)$$

amit persze úgy is lehet olvasni, hogy egyetlen molekula egyetlen szabadsági fokára

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} kT,$$

energia jut. Ez a hőmérséklet statisztikus mikrofizikai értelmezésének alapja.

Az állítás magában foglalja azt a feltevést, hogy a molekulák minden egyes szabadsági fokára azonos energia jut, vagyis az energia átlagosan, egyenletesen oszlik el annyi részre, amennyi szabadsági foka van a gáznak. Ez az *ekvipartíció tétele*.

Anélkül, hogy a részletekbe mélyednénk — erre az eszközeink sincsenek meg —, megállapíthatjuk, hogy a (15) összefüggés negatív abszolút hőmérsékletre nem állhat fenn, az ideális gáz belső energiája negatív nem lehet. A belső energia nulla értékét is kizártnak tarthatjuk. Kérdés persze, hogy más anyagoknál, például kristályos szilárd testeknél beszélhetünk-e a belső energia szélesebb értékészletéről.

Mindenesetre fizikailag igazolható a következő állítás.

A termodinamika harmadik főtétele: *Az abszolút hőmérsékleti skála nulla pontja fizikailag nem értelmezhető.*

A harmadik főtételben nem arról van szó, hogy a Kelvin-féle hőmérsékleti skála abszolút nulla pontja valamilyen ideális határeset, amelyet az emberi tudás és technika szükségszerű hiányosságai miatt nem érhetünk fel. Sokkal inkább arról van szó, hogy ez a pont nem is értelmezhető: elgondolható fizikai állapot nem felel meg a $T=0$ K állapotnak. Ilyen állapot még ideális határesetként sem létezik, még a feltételezése is ellentmondáshoz vezet!

A Boltzmann-állandó az általános gáz-állandóval egyenértékű konstans. (Érdekes, mnemotechnikai szempontból fontos tény, hogy a két konstans egymásból lényegében visszafelé olvasva megkapjuk!)

Helyettesítsünk most a (10) általános

gáztörvénybe az R helyére kN_A -t. Ekkor

$$pV = \frac{m}{M} N_A kT,$$

és mivel $m/M \cdot N_A$ a gázban található molekulák száma, jelöljük mondjuk N -nel, ekkor az általános gáztörvény:

$$\boxed{pV = NkT}, \quad pV = \frac{m}{M} kT \quad (16)$$

és (14) alapján a gáz belső energiája:

$$\boxed{E = \frac{f}{2} NkT}. \quad E = \frac{f}{2} \cdot \frac{m}{M} kT \quad (17)$$

Áttekintettük az ideális gázok állapotegyenleteit. Még egyszer kiemeljük a következőket:

1. Gondolatmenetünk két állapotegyenletre támaszkodik: a (10) általános gáztörvényre és a (13) energiakifejezésre.
2. A (14) energiakifejezés (13)-mal, a (16) állapotegyenlet (10)-zel ekvivalens, a (17) állapotegyenlet pedig (14)-gyel.

┌Az általános gáztörvényre már láttunk példát. Most megmutatjuk, hogyan alkalmazzuk a (13) vagy a (14), vagy a (17) állapotegyenletet. Már találkoztunk a 30 méter mély tó aljáról a felszínre emelkedő levegőbuborék esetével. A kis buborék kezdetben 1 cm^3 térfogatú, $4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nyomású és 277 K hőmérsékletű volt. A felszínre érve a térfogata $4,17 \text{ cm}^3$, a nyomása 10^5 Pa -ra csökkent, a hőmérséklete pedig 289 K -re nőtt. Azonnal látszik, hogy a buborékba zárt levegő belső energiája nőtt, hiszen a végállapot hőmérséklete nagyobb, mint a kezdeti állapoté. Az energia megváltozását legegyszerűbben a (13) állapotegyenlet segítségével határozhatjuk

meg:

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= \frac{f}{2} p_2 V_2 - \frac{f}{2} p_1 V_1 = \\ &= 2,5(10^5 \cdot 4,17 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6}) = \\ &= 0,0425 \text{ J}. \end{aligned}$$

A kezdeti állapot és a végállapot minden állapotjelzője ismert, mindkét állapot meghatározott. A kezdeti és a végállapotot egy-egy ponttal ábrázolhatjuk a p — V síkon. Megrajzoltuk a két állapotnak megfelelő izotermákat, azaz energiaszinteket. Érdekes kérdés: a két állapot közötti átmenetben milyen állapotokat érint a folyamat. Mekkora például akkor a buborékba zárt levegő térfogata, amikor a nyomása $3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$? Erre a kérdésre csak akkor tudnánk válaszolni, ha ismert lenne az, hogy hogyan változik a mélységgel a hőmérséklet. Ezt azonban csak részletes mérés után lehetne megállapítani. Egy vékony fonállal lassan húznánk fölfelé egy higanys hőmérőt, és k különböző magasságokban leolvassnánk a hőmérő állását. Ez természetesen megvalósítható, azonban nem kapnánk általánosan érvényes hőmérséklet-eloszlást. Hiszen a hőmérséklet mélységtől függését biztosan befolyásolják a tó geológiai tulajdonságai, a meteorológiai viszonyok és sok más körülmény. Elméletileg nem lehet meghatározni a kezdő és a végső állapotot összekötő folyamatpályát.

Vizsgáljuk most meg, hogy hány molekula van a buborékban. A (16) egyenlőségbe helyettesítsük például a kezdeti állapot adatait:

$$4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6} = N \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 277.$$

Innen

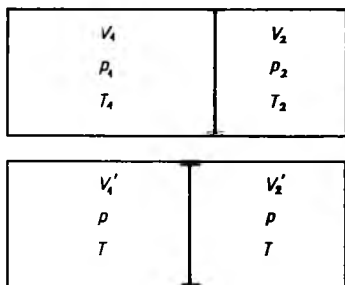
$$N = 10^{20},$$

ennyi molekula van a buborékban. ┘

¶ Egy másik fontos példán az energia megmaradásának egy szép alkalmazását mutatjuk be. Tegyük fel, hogy egy 4 dm^3 térfogatú, hőszigetelt falú tartályt egy könnyen mozgó, vékony fémből készült dugattyú két részre oszt. Az egyik rész térfogata $2,5 \text{ dm}^3$, a nyomása 4 atm , hőmérséklete 300 K . A másik, $1,5 \text{ dm}^3$ térfogatú rész nyomása 6 atm , a hőmérséklete pedig 320 K (2.8. ábra). Mindkét oldalon nitrogéngáz van. A dugattyút ezután felszabadítjuk, és hosszú idő után megvizsgáljuk az állapotjelzőket. A nyomás és a hőmérséklet intenzív mennyiségek, a feladat megfogalmazásából kitűnik, hogy mindkettő kiegyenlítődhét. A kiegyenlítődhés után a két gáz nyomása és hőmérséklete is megegyezik. A térfogat, a tömeg és a belső energia extenzív mennyiség. Irányítjuk a figyelmünket a belső energiára. A henger fala hőszigetelő és merev is, ezért a rendszer energetikailag zárt. Az első főtétel alapján a belső energia állandó:

$$\frac{f}{2} p_1 V_1 + \frac{f}{2} p_2 V_2 = \frac{f}{2} p (V'_1 + V'_2). \quad (18)$$

Itt az 1 index az első gáz kezdeti állapotára vonatkozik, a 2 index pedig a második gáz kezdeti állapotának állapotjelzője. A kiegyenlítődhési folyamat végén kialakuló nyomást p -vel jelöltük. Innen $p = 4,75 \text{ atm}$. A végállapot hőmérsékletét csak akkor ha-



2.8. ábra

tározhatjuk meg, ha előbb kiszámoltuk a két gáz tömegét (vagy molban kifejezett anyagmennyiségét). Az általános gáztörvény alapján: $m_1 = 11,23 \text{ g}$, $m_2 = 9,47 \text{ g}$, és az összes tömeg $= 20,7 \text{ g}$.

Alkalmazzuk az általános gáztörvényt a különben már homogén, 4 dm^3 térfogatú, $4,75 \text{ atm}$ nyomású, $20,7 \text{ g}$ tömegű nitrogéngázra ($M = 28 \text{ g}$):

$$4 \cdot 10^{-3} \cdot 4,75 \cdot 10^5 = \frac{20,7}{28} 8,31 T,$$

és így

$$T = 309,1 \text{ K}.$$

Könnyen belátható, hogy a két gáz új térfogata $V'_1 = 2,16 \text{ dm}^3$ és $V'_2 = 1,83 \text{ dm}^3$.

2.1.2. Az első főtétel logikája, speciális folyamatok

Az előző pontban az ideális gázokra vonatkozó két állapotegyenlettel, a

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (1)$$

$$E = \frac{f}{2} pV \quad (2)$$

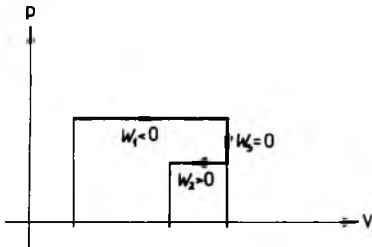
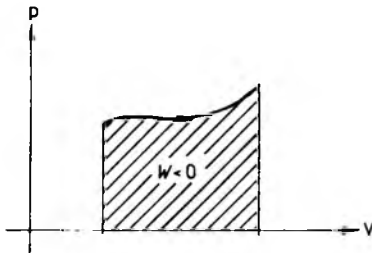
egyenlőségekkel, valamint az ezekből kapott alapvető jelentőségű

$$E = \frac{f}{2} \frac{m}{M} RT \quad (3)$$

relációval foglalkoztunk. Megismertünk átfogalmazásaikkal, következményeikkel és egyszerű alkalmazásaikkal.

A termodinamikában egy mérlegegyenletnek van alapvető, kiemelt jelentősége, az első főtételnek:

$$\Delta E = Q + W. \quad (4)$$



2.9. ábra

Ideális gázoknál joggal kizárhatjuk a kémiai és az elektromos kölcsönhatások feláértét.

A (4) mérlegegyenletben a bal oldali energiaváltozást a legkönnyebb meghatározni, az energia megváltozása a (2), illetve a (3) állapotegyenletek segítségével kifejezhető.

A munka kiszámítása már nehezebb feladat. A folyamat pályáját ábrázoljuk a p—V síkon. (2.9. ábra) Tegyük fel először, hogy a nyomás megadható, mint a térfogat függvénye, vagyis a folyamat pályáját függőleges egyenesek csak egy pontban metszik. Ekkor a gázon végzett munka a görbe alatti területtel egyenlő. Ha a gáz tágul, akkor ez a munka negatív, ha a gáz összenyomódik, akkor a munka pozitív.

Ha a folyamat nem ilyen egyszerű, mert például pályájának vannak egymás alattfőlt pontjai, akkor tegyük fel, hogy a teljes folyamat felbontható olyan részfolyamatokra, amelyekre az előző bekezdés elvei érvényben vannak. A munkát ilyen

egyszerű szakaszokon kiszámoljuk, majd összeadjuk. Természetesen figyelembe kell venni, hogy függőleges szakaszokhoz állandó térfogat tartozik, így a munka nulla ilyen részfolyamatban.

A hő kiszámítása maradt hátra. A hő kiszámításának alapvetően egyetlen lehetősége van: a belső energia megváltozásának és a gázon végzett munkának a különbségét kell venni:

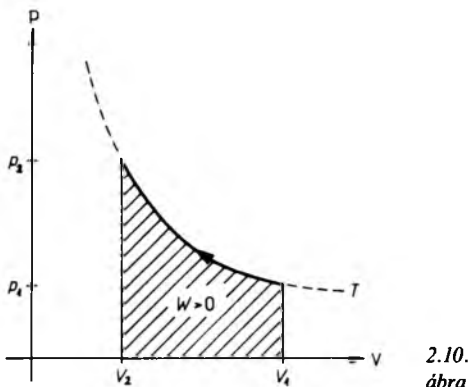
$$Q = \Delta E - W.$$

Foglaljuk össze az első főtétel alkalmazásának a logikáját. Az első főtétel nem arra való, hogy segítségével a munkából és a hőből kiszámítsuk a belső energia megváltozását, hanem arra, hogy a hőt meghatározzuk a másik két mennyiségből.

Az első lépés tehát az, hogy a (2) vagy a (3) állapotegyenlet alapján az energia megváltozását kiszámítjuk, a második lépés a munka meghatározása a p—V síkon a folyamat pályája alatti területből, és végül a harmadik lépés a hő kiszámítása az első főtétel segítségével. Kiemeljük tehát, hogy az első főtétel sem ΔE , sem a W meghatározásához nem kell, csak a hőt szolgáltató egyenlőség felírásához. Még akkor is így van ez, ha sok speciális folyamatban ezt a feladatot általában egyszer s mindenkorra megoldjuk, és a végeredményt megjegyezzük.

Elvben mindent tudunk a gázok hőtanával kapcsolatban. Térjünk rá a speciális folyamatok vizsgálatára. Ezekben a gondolatmenetekben az első főtétel fent vázolt logikáját alkalmazzuk.

I. Vizsgáljuk először az izotermikus folyamatokat. Tegyük fel tehát, hogy adott egy m tömegű (f szabadsági fokú, M molekulatömegű) ideális gáz, amelynek a kezdeti nyomása p_1 , a térfogata V_1 , a hőmérséklete állandó, jelöljük ezt az állandó érté-



ket T -vel. A gáz későbbi térfogatát V_2 -vel, a nyomását p_2 -vel jelöljük.

A folyamat pályája — mint már többször láttuk — egy hiperbola része (2.10. ábra). Az energia állandó [(3) alapján], vagyis $\Delta E = 0$. A munka a hiperbolaág alatti terület. Nem nehéz kiszámítani, ha az integrálszámítás elemeinek a birtokában vagyunk, hogy

$$W = -\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5)$$

(Ha az integrálszámítás módszereiben nem vagyunk jártasak, fogadjuk el ezt az eredményt.)

A hő — harmadik lépésként — könnyen meghatározható: $Q = \Delta E - W$,

$$Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (6)$$

Jól látható (5)-ből, hogy ha $V_2 > V_1$, vagyis a gáz tágul, akkor $W < 0$, az ellenkező esetben $W > 0$.

¶ Tegyük fel, hogy 40 cm^3 térfogatú héliumgáz kezdeti nyomása 10^5 Pa , hőmérséklete 300 K . Nyomjuk össze a gázt állandó hőmérsékleten $5,41 \text{ cm}^3$ térfogatra. (A végállapot nyomása $7,39 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, mint ez a Boyle—Mariotte-törvényből egyszerűen

adódik.) A gázon összenyomás közben végzett munka:

$$W = -\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

felhasználva azonban, hogy

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT,$$

azt kapjuk, hogy

$$W = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Behelyettesítünk:

$$W = -10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-6} \ln \frac{5,41}{40} = 8 \text{ J},$$

mivel $\ln \frac{5,41}{40} = -2$. Összenyomás közben a gáz 8 J hőt ad le.]

II. Az *izochor folyamatokat* vizsgáljuk meg másodsorra. A gáz kezdeti állapotjelzői legyenek p_1, V, T_1 . A gáz tömegét m -mel, a molekulatömegét M -mel, a szabadsági fokot f -fel jelöljük. Tegyük fel, hogy a gáz állandó térfogaton T_2 hőmérsékletre melegszik. Ekkor a gáz energiája

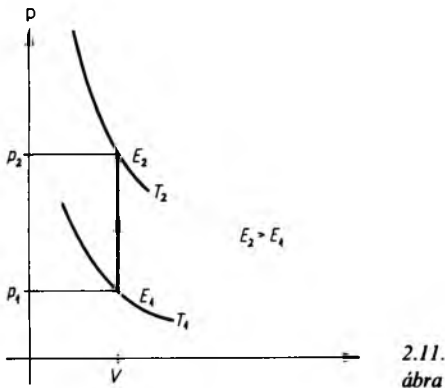
$$\Delta E = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) \quad (7)$$

-gyel változik meg.

A folyamat pályája függőleges szakasz (2.11. ábra), hiszen csak a nyomás változik, a térfogat állandó marad. Ezért a munkavégzés nulla. Az első főtétel szerint a gázzal közölt hő megegyezik az energia-változással:

$$Q_V = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (8)$$

(A hő jele melletti V index arra utal, hogy a hőt állandó térfogat mellett számoljuk.)



⌈Zárt tartályban 40 g héliumot 300 K-ről 350 K-re melegítünk. Ekkor a belső energia változása és a gázzal közölt hő megvizsgáljuk,

$$\Delta E = Q = \frac{3}{2} \frac{40}{4} \cdot 8,31 \cdot 50 = 6232,5 \text{ J.}$$

⌈Sokszor igen egyszerűen jutunk eredményre. Állandó térfogatú tartályban 30 liter nitrogént melegítünk. Kezdeti nyomása 10^5 Pa , ez a melegítés végén $1,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ -ra emelkedik.

A gáz kezdeti energiája $f/2 p_1 V$, a későbbi állapotban: $f/2 p_2 V$. Az energiaváltozás (és a hő):

$$\begin{aligned} \Delta E = Q &= \frac{f}{2} (p_2 - p_1) V = \\ &= \frac{5}{2} \cdot 0,7 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 5250 \text{ J.} \end{aligned}$$

III. Vizsgáljuk meg harmadikként az *izobár folyamatokat*. Az ilyen folyamatokat az jellemzi, hogy a gáz állapotváltozása állandó nyomáson megy végbe: az m tömegű, M molekulatömegű, f szabadsági fokú gáz térfogata V_1 -ről V_2 -re változik, miközben a p nyomás állandó marad. A folyamat pályája egy vízszintes szakasz a p - V síkon (2.12. ábra).

Az energia megváltozása a (3) állapot-egyenlet alapján most is

$$\Delta E = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1), \quad (7)$$

ahol T_1 és T_2 a gáz kezdeti és végső hőmérséklete. A gázon végzett munka a p magas, $V_2 - V_1$ oldalú téglalap területe:

$$W = -p(V_2 - V_1). \quad (9)$$

Alakítsuk át ezt az egyenlőséget. Írjuk fel ezért az általános gáztörvényt a kezdeti és a végső állapotra:

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1,$$

$$pV_2 = \frac{m}{M} RT_2.$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

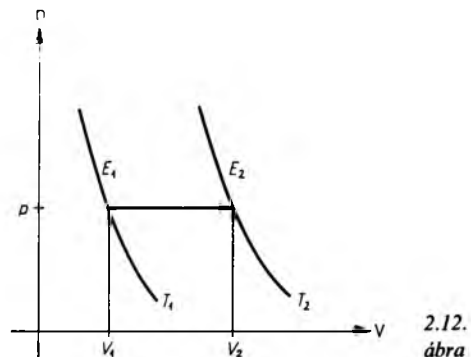
$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (10)$$

A kapott eredményt figyelembe véve a (9) egyenlőség

$$W = -\frac{m}{M} R(T_2 - T_1) \quad (11)$$

alakban írható le.

Határozzuk most meg a gázzal közölt hőt!



Az első főtétel, továbbá a (7) és a (11) összefüggés szerint

$$Q = \Delta E - W = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) - \left(- \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) \right) = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

közös nevezőre hozva a zárójelben, a gázzal közölt hő:

$$Q_p = \frac{f+2}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (12)$$

Állandó nyomáson végbemenő folyamatoknál a (12) egyenlőség határozza meg a gázzal közölt hőt. (A Q indexében szereplő p azt jelzi, hogy a folyamat közben a nyomás állandó.)

Kezdetben normálállapotú, 300 g tömegű hidrogéngáz állandó nyomáson 320 K hőmérsékletűre melegszik.

Ekkor a gáz belső energiájának megváltozása (7) alapján:

$$\Delta E = \frac{5}{2} \frac{300}{2} 8,31(320 - 273) = 146\,464 \text{ J},$$

és a (11) összefüggés alapján a gázon végzett munka:

$$W = - \frac{300}{2} 8,31(320 - 273) = - 58\,585 \text{ J},$$

a gázzal közölt hő pedig (12) alapján:

$$Q = \frac{5+2}{2} \frac{300}{2} 8,31(320 - 273) = 205\,049 \text{ J.}$$

Állandó, $p = 1,2$ atm nyomáson táguló levegő térfogata 2,6 literről 3,8 literre növekszik. Ekkor a gáz energiaváltozása (7)

és (10) alapján:

$$E = \frac{f}{2} p(V_2 - V_1) = \frac{5}{2} 1,2(3,8 - 2,6) = 3,6 \text{ liter} \cdot \text{atm} = 360 \text{ J}.$$

A gázon végzett munka negatív — hiszen a gáz tágul —, (11) alapján:

$$W = - p(V_2 - V_1) = - 144 \text{ J},$$

és végül a gázzal közölt hő (12) és (10) alapján:

$$Q = \frac{f+2}{2} p(V_2 - V_1) = 504 \text{ J.}$$

Állandó nyomáson végbemenő folyamatot vizsgálunk most is. Tegyük fel, hogy 1 m³ ammóniagáz (NH₃) kezdeti hőmérséklete 300 K, a nyomása 10⁵ Pa. A gázt felmelegítjük 345 K hőmérsékletre úgy, hogy a nyomás állandó marad. A kezdeti állapotra írjuk fel az általános gáztörvényt:

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1. \quad (13)$$

Ekkor az energiaváltozás:

$$\Delta E = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

felhasználva a (13) egyenlőséget:

$$\Delta E = \frac{f}{2} \frac{pV_1}{T_1} (T_2 - T_1).$$

A gázon végzett munka:

$$W = - \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

a (13) egyenlőséget felhasználva:

$$W = - \frac{pV_1}{T_1} (T_2 - T_1),$$

és végül ugyanígy a gázzal közölt hő:

$$Q = \frac{f+2}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{f+2}{2} \frac{pV_1}{T_1} (T_2 - T_1).$$

Az adatokat behelyettesítve: $E = 45\,000$ J, $W = -15\,000$ J, $Q = 60\,000$ J.]

↑ A következő feladat első látásra igazán meghökkenítő. Tegyük fel, hogy bizonyos mennyiségű oxigéngázzal 3500 J hőt közlünk állandó nyomáson. Határozzuk meg a gázon végzett munkát, és a gáz belső energiájának a megváltozását! A feladatban — első látásra úgy tűnik — kevés adat van ahhoz, hogy a kérésre számszerű választ adjunk!

Irányítsuk a figyelmünket az állandó nyomáson végbemenő folyamatokra vonatkozó (7), (11), (12) egyenletekre. Osszuk el páronként ezeket az egyenlőségeket egymással:

$$\frac{W}{\Delta E} = -\frac{2}{f}, \quad (14)$$

$$\frac{W}{Q} = -\frac{2}{f+2}, \quad (15)$$

$$\frac{Q}{\Delta E} = \frac{f+2}{f}. \quad (16)$$

A (15) és a (16) egyenlőségekből $W = -1000$ J, $\Delta E = 2500$ J.

A feladat azért tanulságos, mert kitűnik, hogy izobár folyamatok esetén ΔE , W és Q közül az egyiket elég ismerni, a másik két mennyiséget a (14), (15), (16) egyenlőségek meghatározzák — feltéve, hogy ismert a gáz szabadságfoka.]

IV. Negyedikként az *adiabatikus folyamatok* kerülnek sorra. Az ilyen állapotváltozásokat az jellemzi, hogy a gáz a folyamat során nem vesz fel és nem ad le hőt. Az

első főtétel megegyezik a munkatétellel:

$$\Delta E = W,$$

mert $Q = 0$.

Az energia megváltozása most is

$$\Delta E = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

és a munka is

$$W_a = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (17)$$

(A munka jele mellett az a index az adiabatikus jelzőre utal.)

Adiabatikus folyamat valósul meg, ha valamely gázt egy tartályban gyors mozgólattal tágítunk, vagy hirtelen összenyomunk. Ekkor ugyanis „nincs idő” arra, hogy a tartály falán keresztül hő távozzék.

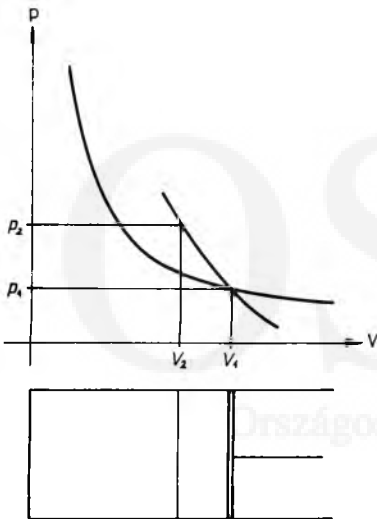
Lassú folyamatok is lehetnek adiabatikusak: vannak olyan anyagok, amelyek nem teszik lehetővé a hő átáramlását, ezek az úgynevezett hőszigetelő anyagok. Ilyen az azbeszt, a ruhaszövet stb.

Gondoljuk el, hogy valamilyen gázt egy meghatározott (p_1, V_1, T_1) kezdeti állapotról V_2 térfogatra nyomunk össze úgy, hogy közben a tartály fala átvezeti a hőt, a gáz hőmérséklete állandó marad. Ekkor a gázzal munka formájában közölt energia hő formájában távozik is a rendszerből. Eközben a csökkenő térfogathoz fordított arányban növekvő nyomás tartozik. A folyamat pályája hiperbola.

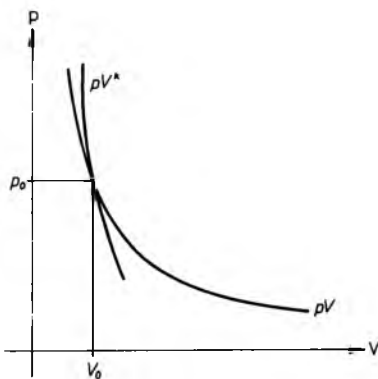
Ismételjük meg a kísérletet úgy, hogy a tartályt beburkoljuk hőszigetelő anyaggal. Ekkor az összenyomódó gáz állapotváltozása adiabatikus. Az összenyomás közben a gázon végzett munka növeli a belső energiát, a hő most nem viszi el az így közölt energiát. Az energia növekedésével együtt jár a hőmérséklet növekedése. Könnyen elgondolhatjuk, hogy az így összenyomott

gáz nyomása nagyobb mértékben nő, mintha a gáz leadná a munkával közölt energiát. Jobban kell, hogy nőjön a nyomás, hiszen magasabb energiaszintet ér el a gáz, nagyobb hőmérsékletű izotermára került a gáz állapotát jelző pont. Az adiabatikus folyamat pályája az izoterma felett halad (2.13. ábra).

Természetesen ugyanezt elmondhatjuk a táguló gázzal is, ilyenkor azonban az adiabatikus folyamat pályája az izoterma alá kerül.



2.13. ábra



2.14. ábra

Felvetődik a kérdés: milyen összefüggés érvényes az adiabatikus folyamatot ábrázoló görbe — az ún. adiabata — pontjainak p és V koordinátája között (2.14. ábra). A matematikai analízis középiskolai tananyagánál alig magasabb szintű ismeretében könnyen belátnánk, hogy az adiabata bármely pontjának p és V koordinátája kielégíti az ún. *Poisson-egyenletet*:

$$p \cdot V^\kappa = \text{állandó}, \quad (18)$$

ahol

$$\kappa = \frac{f+2}{f}. \quad (19)$$

A (18) Poisson-egyenlet jobb oldalán szereplő állandó attól függ, hogy melyik állapotból indítjuk a folyamatot. Ha a kezdeti állapotban az állapotjelzők p_1 , V_1 és T_1 , akkor a (V_1, p_1) ponton átmenő adiabatán bárhogyan választva egy pontot — ennek a koordinátáit V_2 -vel, p_2 -vel jelölve —

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa. \quad (20)$$

Ez a Poisson-egyenlet számolásra alkalmas szimmetrikus formája.

┌ Mutassunk egy példát a Poisson-egyenlet alkalmazására. Tegyük fel, hogy $V_1 = 10 \text{ dm}^3$ térfogatú, 1 atm nyomású, 300 K hőmérsékletű levegőt adiabatikusan $V_2 = 2 \text{ dm}^3$ térfogatra nyomunk össze. A levegő kétatomos gáz, ezért

$$\kappa = \frac{f+2}{2} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

A Poisson-egyenlet:

$$1 \cdot 10^{1,4} = p_2 \cdot 2^{1,4},$$

és érvényben van természetesen az általános gáztörvény is:

$$\frac{1 \cdot 10}{300} = \frac{p_2 \cdot 2}{T_2}.$$

A Poisson-egyenletből:

$$p_2 = \left(\frac{10}{2}\right)^{1,4} = 5^{1,4} = 9,5 \text{ atm}.$$

(A számolást számológéppel vagy függvénytáblázat segítségével, a logaritmus szabályaira támaszkodva kézzel elvégezhettjük.)

Az általános gáztörvényből $T_2 = 571 \text{ K}$. Könnyen kiszámíthatjuk a gáz energiájának megváltozását vagy — ami most ugyanaz — a gázon összenyomás közben végzett munkát:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) = \\ &= \frac{f}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{f}{2} p_2 V_2 - \frac{f}{2} p_1 V_1. \end{aligned}$$

Használjuk talán az egyenlőséglánc utolsó tagját:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{5}{2} 9,5 \cdot 2 - \frac{5}{2} 1 \cdot 10 = 22,5 \text{ dm}^3 \text{ atm} \approx \\ &\approx 2250 \text{ J.} \end{aligned}$$

Egy elvi jelentőségű megjegyzést fűzünk az adiabatikus folyamatokhoz. Ennek a gondolatnak nem elsősorban a most tárgyalt ideális gázok szempontjából van súlya, sokkal inkább fontos más anyagok, kristályos szilárd testek, folyadékok hőtan szempontjából.

Arról van szó, hogy az ideális gázok belső energiáját még a termodinamikai gondolatok előtt ismertük. (Igaz, kis megalkuvás árán, el kellett térnünk a fenomenologikus gondolatmenettől.) A gázon végzett munkát is ki tudtuk számolni már a hőtani problémafelvetés előtt. E két mennyiség különbségéből értelmeztük — Caratheodory nyomán — a hőt.

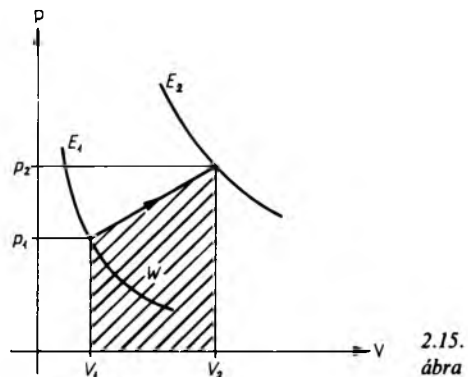
A helyzet sokkal bonyolultabb, ha nem az ideális gázokat vizsgáljuk. Ekkor ugyanis nem áll készen a belső energia kifejezése. A nehézség feloldása az, hogy Caratheodory bebizonyította: az adiabatikus munka — bármilyen anyagon végezzük is — kifejezhető valamilyen állapotjelző megváltozásával. Ezt az állapotjelzőt nevezzük belső energiának. A belső energia megváltozásának a mértéke így az adiabatikus munka. Az adiabatikus folyamat körülményeit — mint mondtuk — nem nehéz biztosítani.

Tegyük hozzá: mindezek természetesen nincsenek ellentmondásban az ideális gázok hőtanával.

V. Ötödikként vizsgáljuk meg azokat a folyamatokat, amelyekben a nyomás a térfogattal arányosan változik (2.15. ábra). Tegyük fel, hogy egy gáz kezdeti állapotjelzői: p_1, V_1, T_1 adottak. Ebből az állapotból a gáz úgy „megy át” valamely p_2, V_2, T_2 állapotba, hogy a p — V síkon a kezdő és a végpontot összekötő szakasz egyenes. (Ilyen folyamat az izochor és az izobár folyamat is. Ezekről most tekintsünk el.)

A gáz energiájának a megváltozását most így célszerű írni:

$$\Delta E = \frac{f}{2} p_2 V_2 - \frac{f}{2} p_1 V_1, \quad (21)$$



a gázon végzett munka az ábrán látható trapéz területe:

$$W = -\frac{p_2 + p_1}{2} (V_2 - V_1), \quad (22)$$

a hő pedig

$$Q = \Delta E - W.$$

Mutassunk néhány példát ezeknek a — különben igen egyszerű — gondolatoknak az alkalmazására.

↑ Vízszintesen fekvő $A = 2 \text{ dm}^2$ keresztmetszetű hengerben $V_1 = 8 \text{ dm}^3$ térfogatú, normálállapotú levegő van. A dugattyúhoz egy hosszú, $D = 80 \text{ N/cm}$ erősségű rugót támasztunk, ez kezdetben erőmentes állapotban van. A másik vége egy falhoz támaszkodik (2.16. ábra).

Felmelegítjük a gázt úgy, hogy a növekvő rugóerőt is legyőzve kitéjük. A térfogata 4 dm^3 -rel nő. Vizsgáljuk meg, hogy mennyivel változott a gáz belső energiája, mennyi munkát végzett a környezet a gázon, és mekkora a gázzal közölt hő mennyisége?

A gáz térfogata a végállapotban $V_2 = 12 \text{ dm}^3$. A nyomását is könnyen kiszámíthat-

juk, ha meggondoljuk, hogy végállapotban a dugattyúra ható erők eredője nulla, a belső gáz által kifejtett $p_2 A$ erővel egyensúlyt tart a külső levegő által kifejtett $p_0 A$ erő és a $D \Delta l$ rugóerő:

$$p_2 A = p_0 A + D \Delta l, \quad (23)$$

figyelembe véve azonban, hogy

$$\Delta l = \frac{V_2 - V_1}{A} = 2 \text{ dm},$$

így

$$p_2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} + 80 \cdot 0,2,$$

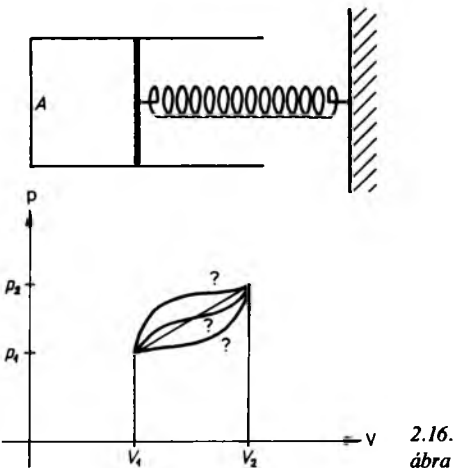
és innen $p_2 = 1,008 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

A végállapot hőmérséklete az általános gáztörvényből egyszerűen kiszámolható: $T_2 = 737 \text{ K}$. Ábrázoljuk a kezdeti és a végző állapotnak megfelelő pontokat a p — V síkon. A két pont koordinátái ismertek, ezért a belső energia megváltozása minden további megfontolás előtt meghatározható; (21)-be behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{f}{2} p_2 V_2 - \frac{f}{2} p_1 V_1 = \\ &= 2,5(1,8 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-3} - 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 3400 \text{ J}. \end{aligned}$$

A gázon végzett munka meghatározása csak akkor lehetséges, ha sikerül megfejtünk azt a kérdést, hogy milyen görbe köti össze a két pontot. Egyszerűen belátjuk, hogy ez egyenes szakasz. A (23) alapján ugyanis látszik, hogy a nyomás növekedése arányos a rugó hosszának a csökkenésével, ezzel azonban arányos a térfogat megváltozása is, hiszen $\Delta V = A \Delta l$. Ezért a két mennyiség is arányos egymással. A munka így kiszámítható a (22) egyenlőség segítségével:

$$W = -\frac{1,8 \cdot 10^5 + 10^5}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} = -560 \text{ J},$$



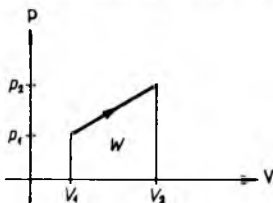
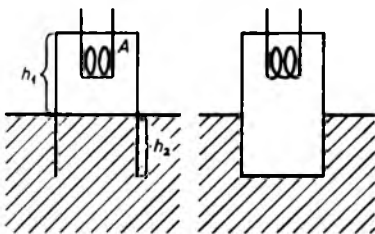
a hő pedig

$$Q = \Delta E - W = 3960 \text{ J}.$$

Figyeljünk fel arra, hogy milyen tisztán érvényesül a probléma megoldásához vezető gondolatmenetben az első főtétel logikája.]

Tegyük fel most, hogy egy egyik végén zárt üvegcső nyitott végével higanyba merül. A keresztmetszete $A = 2 \text{ cm}^2$, a higany feletti csőhossz 80 cm , a higanyba merülő rész hossza 60 cm . A higany szintje a csővön kívül és belül megegyezik. A gáz hőmérséklete 300 K . Tegyük fel, hogy a cső fala hőszigetelő, a bezárt levegőt a higanytól egy igen vékony, súlytalan, hőszigetelő lapocskva választja el. A gázzal kapcsolatos folyamat mégsem adiabatikus, mert a 2.17. ábrán látható módon egy fűtőszál nyúlik a csőbe. A fűtőszál hőt ad le a gáznak. A melegítés megindulása után 52 másodperccel a csőből kiszorul az összes higany.

A feladatunk az, hogy meghatározzuk, mekkora a fűtőszál teljesítménye. A gáz kezdeti térfogata $V_1 = 160 \text{ cm}^3 = 160 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, a végállapotban a gáz térfogata $V_2 = 280 \text{ cm}^3 = 280 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. A kezdeti



2.17. ábra

nyomás $p_1 = p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. A melegítés végén a nyomást folyadéksztatikai megfontolásból határozzuk meg. Ha a csőben a higany szintje h -val mozdul el ($h = 0,6 \text{ m}$), akkor a cső legalsó pontján a nyomás egyrészt p_2 , másrészt $p_0 + h\rho g$, ez a két nyomás egyenlő:

$$p_2 = p_0 + h\rho g. \quad (24)$$

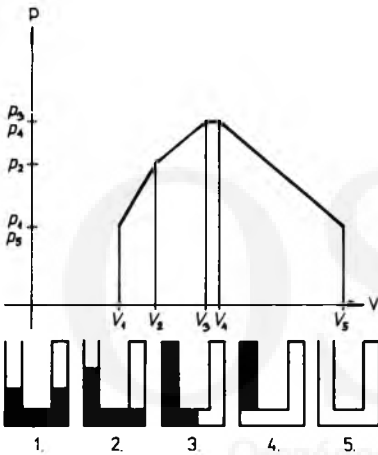
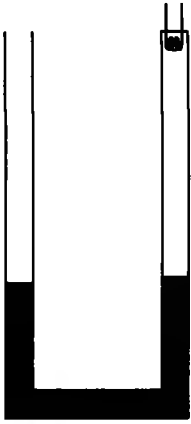
Innen $p_2 = 10^5 + 0,6 \cdot 136\,000 = 181\,600 \text{ Pa}$.

A kezdeti és a végső állapot ábrázolható a p — V síkon. A kezdő és a végállapot koordinátái ismertek, így a gáz energiájának a megváltozása (21) alapján már meghatározható: $\Delta E = 87,1 \text{ J}$. Az is könnyen látható, hogy a kezdő és a végpontot egyenes szakasz köti össze: a higany szintjének elmozdulásával arányosan nő a nyomás is [lásd (24)], a térfogat is. A munka kiszámítható a (22) egyenlőségéből: $W = -16,9 \text{ J}$, így a hő $Q = 104 \text{ J}$. A melegítő másodpercenként 2 J hőt közöl a bezárt gázzal, vagyis a teljesítménye 2 W .]

Tegyük fel most, hogy egy U alakú cső vízszintes szára 50 cm hosszú, a függőleges szárak egyaránt 100 cm hosszúak. A cső egyik vége zárt, a másik nyitott, belső keresztmetszete 1 cm^2 . Mindkét szárban egyenlő magasan higany van a csőben, a bezárt levegőoszlop hossza 70 cm , nyomása 10^5 Pa , a hőmérséklete 300 K . A gázt a higanytól könnyű hőszigetelő dugattyú választja el. Az elzárt levegő beépített melegítővel fűthető, a cső faláról tegyük fel, hogy nem engedi át a hőt.

Vizsgáljuk meg, hogy mennyi hőt kell közölni az elzárt gázzal, hogy az utolsó csepp higany is elhagyja a csövet a nyitott szár felső végén keresztül (2.18. ábra).

A gáz kezdeti állapotjelzői: $V_1 = 70 \text{ cm}^3$, a nyomása $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$. A melegítés megindítása után a két szárban elmozdul a higany szint, a zárt szárban süllyed, a nyitott



2.18. ábra

szárban emelkedik. A térfogatváltozással arányosan nő a nyomás is — a korábbi megfontolások alapján ez nyilvánvaló. A gáz és a higany sorsában a következő állomás az, amikor a higany szintje a zárt szárban a könyökhöz süllyed le. Ekkor a gáz térfogata $V_2 = 100 \text{ cm}^3$, a nyomása megegyezik a külső levegő $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ nyomásának és a 60 cm magas higanyoszlop nyomásának az összegével. Ha ugyanis a zárt szárban 30 cm-t süllyed a higany, akkor a nyitott szárban 30 cm-t emelkedik, így a szintkülönbség 60 cm. Tehát $p_2 = p_0 + h\rho g = 10^5 + 0,6 \cdot 136\,000 = 181\,600 \text{ Pa}$. A melegítést folytatjuk. A

higany eleje a nyitott szárban 40 cm-t emelkedhet, ekkor eléri a cső nyitott végét. Ekkor a higanyoszlop vége a második könyök előtt van 10 cm-rel. A bezárt levegő térfogata most $V_3 = 140 \text{ cm}^3$, a nyomása $p_3 = 10^5 + 1 \cdot 136\,000 = 236\,000 \text{ Pa}$. További 10 cm elmozdulás után a higany eléri a második könyököt, de közben a nyitott végnél kifolyik 10 cm^3 térfogatú higany. Ekkor a bezárt levegő nyomása $p_4 = p_3$, hiszen a levegőoszlop magassága ebben a fázisban állandó. A gáz térfogata $V_4 = 150 \text{ cm}^3$. A folyamat utolsó szakaszában a higany csak a nyitott csőben emelkedik, a cső szájánál kifolyik. Eközben a gáz térfogata $V_5 = 250 \text{ cm}^3$ -re tágul, a nyomása pedig egyenletesen lecsökken a külső levegő nyomására, hiszen a zárt levegő felett a higany magassága egyre kisebb. Tehát $p_5 = p_1 = p_0$. A folyamat grafikonja egy törött vonal. A törött vonal csúcspontjait és végpontjait ismerjük.

Az energiaváltozást a kezdő és a végállapot adataiból határozzuk meg:

$$\Delta E = \frac{f}{2} p_5 V_5 - \frac{f}{2} p_1 V_1 =$$

$$= 2,5 \cdot 10^5 \cdot 180 \cdot 10^{-6} = 45 \text{ J}.$$

A munka kiszámítása több lépésben történik. Szám szerint megegyezik az ábrán látható 3 trapéz és egy téglalap területének az összegével:

$$\begin{aligned} W = & - \left(\frac{10^5 + 1,816 \cdot 10^5}{2} \cdot 30 \cdot 10^{-6} + \right. \\ & + \frac{1,816 \cdot 10^5 + 2,36 \cdot 10^5}{2} \cdot 40 \cdot 10^{-6} + \\ & + 2,36 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-6} + \\ & \left. + \frac{2,36 \cdot 10^5 + 10^5}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \right) = \\ & = -31,736 \text{ J}. \end{aligned}$$

A hőt ezután könnyen kapjuk:

$$Q = 76,736 \text{ J.}$$

2.1.3. Fajhők

Az ideális gáz belső energiájának megváltozása arányos a hőmérsékletváltozással. A gázzal közölt hőről ezt nem mondhatjuk el. Gondoljunk az izotermikus folyamatokra: állandó hőmérsékleten végbe menő folyamatokban

$$Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

mennyiségű hőt közlünk a gázzal, ha a térfogat V_1 -ről V_2 -re változik.

A gázzal közölt hő pontosan akkor arányos a hőmérséklet-változással, ha a munka is arányos. Ez igen ritka esetet jelent. Sokkal több az olyan folyamat, amelyben a munka és a hőmérséklet között nincs arányosság, mint az olyan folyamat, amelyben van. Gondoljunk el ugyanis, hogy valamely folyamatban $W \sim \Delta T$, akkor a folyamatot valamely belső szakaszán kissé megváltoztatva, a kezdeti arányosság elromolhat. A munka folyamatjelző mennyiség, ezért nemcsak a kezdeti és a végső állapottól függ, hanem a közbülső állapo-

toktól is, a közbülső állapotok hőmérsékletétől is (2.19. ábra).

Három olyan folyamatot ismertünk meg, amelyben a gázon végzett munka arányos a hőmérséklet-változással, ilyen a gázzal közölt hő is. Ezek:

— az adiabatikus folyamat, ahol

$$W_a = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R \Delta T,$$

$$Q_a = 0 \Delta T = 0,$$

— az izochor folyamat, ahol

$$W_v = 0 \Delta T,$$

$$Q_v = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R \Delta T,$$

— és az izobár folyamat, itt

$$W_p = - \frac{m}{M} R \Delta T,$$

$$Q_p = \frac{f+2}{2} \frac{m}{M} R \Delta T.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$c_v := \frac{f}{2} \frac{R}{M}, \quad (1)$$

$$c_p := \frac{f+2}{2} \frac{R}{M}. \quad (2)$$

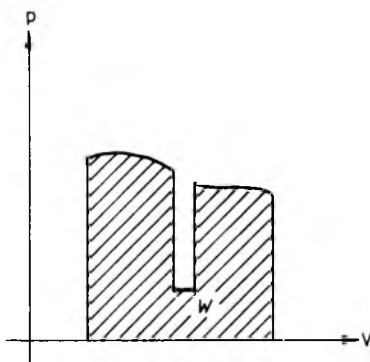
A c_v , c_p állandó mennyiségeket az f szabadságfokú, M molkulatömegű ideális gáz állandó térfogathoz, illetve állandó nyomáshoz tartozó fajhőjének nevezzük. Az (1) és (2) definíciók alapján

$$Q_v = c_v m \Delta T, \quad (3)$$

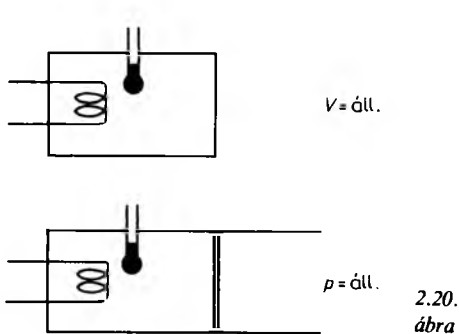
$$Q_p = c_p m \Delta T. \quad (4)$$

A fajhők mértékegysége $\text{J}/(\text{kg K})$, igen gyakran számolunk azonban $\text{J}/(\text{g K})$ -ben is.

A fajhők az (1) és (2) alapján adottak, ugyanakkor azonban könnyen mérhetőek



2.19. ábra



2.20. ábra

is. Állandó térfogaton vagy állandó nyomáson beépített ismert teljesítményű melegítővel melegítsük a gázt (2.20. ábra). Biztosítsuk, hogy a hő ne távozzon a tartály falán keresztül, vagyis készítsük az edényt hőszigetelő anyagból. Ekkor a gázzal közölt hő a melegítő teljesítménye alapján ismert, könnyen mérhető a hőmérséklet is, a tömeget pedig már előzőleg meghatároztuk. A (3) és (4) alapján könnyen meghatározhatjuk a fajhőket. Az a tapasztalatunk, hogy a legtöbb gáz esetén a (3) és a (4) alapján mért érték és az (1) és (2) alapján számított érték lényegében megegyezik. Alig néhány százalék az eltérés a számított és a mért érték között. (A megegyezés mértéke azt mutatja, hogy a vizsgált gáz mennyiben tekinthető ideális gáznak.)

Ha valamely ismeretlen összetételű, ideálisnak tekinthető gáz két fajhőjét mérjük, akkor (1) és (2) alapján definiálhatjuk a gáz átlagos szabadsági fokát és átlagos molekulatömegét. Természetesen ezek a mennyiségek a korábban értelmezett f és M általánosításának tekinthetők.

Különös jelentősége van az állandó térfogaton (1) és az állandó nyomáson (2) vett fajhőknek. Az adiabatikus folyamat fajhője láthatóan nulla. Azokat a folyamatokat, amelyekben a gázzal közölt hő arányos a hőmérséklet-változással, vagyis a

hő kiszámítható a $Q = cm \Delta T$ képlettel, *politropikus* folyamatoknak nevezzük.

Az állandó térfogathoz tartozó fajhő jelentősége az is, hogy segítségével a gázok belső energiája egyszerűen kifejezhető:

$$E = c_V m T, \quad (5)$$

ez nyilvánvalóan így van, elég (5)-be behelyettesíteni az (1) egyenlőséget, az ismert állapotegyenlethez jutottunk. Az (5) egyenlőség fontossága abban van, hogy ez a gázok belső energiáját tartalmazó egyszerű állapotegyenlet vagy másképp: a már ismert állapotegyenlet új, egyszerű formája:

— izochor folyamatokban

$$\Delta E = Q_V = c_V m \Delta T,$$

— izobár folyamatokban

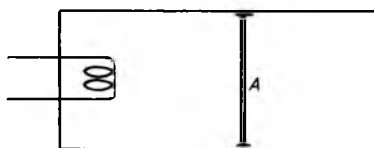
$$\Delta E = c_V m \Delta T, \quad Q_p = c_p m \Delta T,$$

így az izobár munkát a fajhőkkel így fejezhetjük ki:

$$W = (c_V - c_p) m \Delta T.$$

Nyilvánvalóan látszik most is, hogy izobár folyamat esetén a három mennyiség arányos egymással: c_V és c_p ismeretében ΔE , W és Q közül egyikből a másik kettő közvetlenül meghatározható.

Tegyük fel, hogy valamely gáz állandó térfogathoz tartozó fajhője $0,753 \text{ J/(g K)}$, állandó nyomáshoz tartozó fajhője $1,046 \text{ J/(g K)}$. A 2.21 ábrán látható, hő-



2.21. ábra

szigetelt falú edényben kezdetben 5 dm^3 térfogatú, normálállapotú gáz van. Az edényt lezáró, 3 dm^2 keresztmetszetű dugattyú 1 mm/s sebességgel mozog, mert a beépített fűtőszál melegíti a gázt.

A gáz térfogata 1 másodperc alatt $0,03 \text{ m}^2 \times 0,001 \text{ m} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ -rel nő. A hőmérséklet-növekedés arányos a térfogat megváltozásával, Gay-Lussac I. törvénye alapján

$$\Delta V = V_0 \frac{1}{T_0} \Delta T,$$

$$\Delta T = 1,64 \text{ K}.$$

A c_V és c_p ismert értéke alapján (1) és (2) segítségével f és M közelítő átlagos értéke meghatározható: $f = 5,14$ és $M = 28,33 \text{ g}$. Ez alapján a gáz tömege — az általános gáztörvényből — könnyen kiszámítható: $m = 6,25 \text{ g}$. A gázzal 1 másodperc alatt közölt hő:

$$Q_p = c_p m \Delta T = 1,046 \cdot 6,25 \cdot 1,64 = 10,7 \text{ J.} \quad \square$$

Láttuk, hogy az (1) és a (2) definíció segítségével a gáz korábban ismert jellemzői meghatározhatók. Osszuk el a két egyenlőséget egymással:

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f}. \quad (6)$$

(Világosan látszik innen, hogy $c_p > c_V$, ami természetes is, hiszen ugyanazon hőmérséklet-emelkedéshez állandó nyomáson több hő szükséges, mint állandó térfogaton, mert a gáz belső energiaváltozásán túl a negatív munkát is pótolni kell. Gondoljuk meg, hogyan is kaptuk az izobár folyamatra jellemző hőt az előző pontban. Az energia megváltozásából kivontuk a negatív munkát: ekkor jelent meg a képletünkben az „ $f+2$ ”. Ez az $f+2$ összeg az első főtételt „jelenti” nekünk.)

Vonjuk most ki a (2) egyenlőségből az (1) egyenlőséget:

$$c_p - c_V = \frac{R}{M}. \quad (7)$$

Ezt a fontos egyenlőséget Robert Mayer-egyenletnek nevezzük. A (6) és (7) egyenlőségek alkalmasak arra, hogy c_V és c_p (mondjuk mérések alapján ismert) értékéből f és M mennyiségeket meghatározzuk. A Robert Mayer-egyenletből is kiolvasható, hogy $c_p > c_V$.

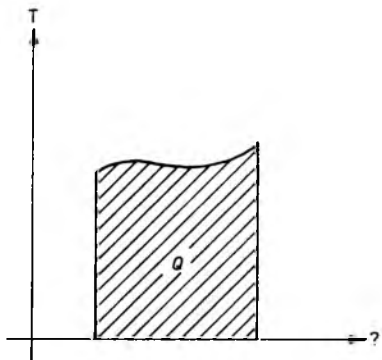
2.1.4. Az entrópia fenomenologikus értelmezése

Idézzük fel az első főtétel logikáját: az energiára vonatkozó mérlegegyenlet, az első főtétel sem az energia megváltozásának, sem a munkának a meghatározásához nem szükséges. Az első főtétel jelentősége abban van, hogy segítségével a hő kiszámítható. Előbb azonban el kell jutnunk a belső energia megváltozásához (erre az állapotegyenletekből következtetünk) és a gázon végzett munkához (ez pedig a p — V görbe alatti területből adódik).

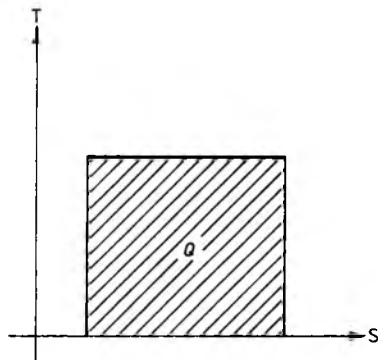
Felvetődik bennünk az a természetes kérdés, hogy lehetséges-e a hőt e kerülőút mellőzésével, egyenes úton meghatározni? Eljuthatunk-e a hőhöz anélkül, hogy ΔE -t és W -t kiszámítanánk? Úgy, mint a munkához: közvetlenül valamilyen görbe alatti terület segítségével?

(Nem a $Q = cm\Delta T$ képletre gondolunk. Ezekhez a képletekhez pontosan úgy jutotunk, hogy ΔE -ből levontuk a W -t!)

Ha munkával való párhuzamra építünk, akkor világos, hogy a nyomásnak megfeleltethető a hőmérséklet (2.22. ábra). De mi felel meg a térfogatnak, hogy a görbe alatti terület a hőt adja meg?



2.22.
ábra



2.23.
ábra

Ha a hőmérséklet állandó, akkor bármelyik másik változó függvényében is állandó: izotermikus folyamatot vizsgálva bármilyen ismert vagy még ismeretlen mennyiséget is mérünk fel a koordináta-rendszerünk vízszintes — független változónak megfelelő — tengelyre, a függőleges tengelyen ábrázolva a hőmérsékletet, a folyamat grafikonja vízszintes lesz.

Izotermikus folyamatban láttuk, hogy a gázzal közölt hő:

$$Q_T = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} \cdot T. \quad (1)$$

Figyeljünk fel arra, hogy az izotermikus hő két mennyiség szorzata: az egyik az állandó abszolút hőmérséklet, a másik a $m/M R \ln V_2/V_1$. Ha tehát a koordináta-rendszerünk vízszintes tengelyére a $m/M R \ln V_2/V_1$ mennyiséget fölmérjük, a függőleges tengelyre a T állandó hőmérsékletet, akkor a görbe alatti terület — egy téglalap területe (!) — pontosan a hőt szolgáltatja (2.23. ábra).

Izotermikus folyamat esetén tehát a hő közvetlenül, a belső energia és a munka kiszámítása nélkül is adódik, ha a vízszintes tengelyre az $m/M R \ln V$ mennyiség megváltozását mérjük. (Ez persze még nem új dolog, ezt már tudtuk a speciális folya-

matokat tárgyaló 2.1.2. pontban is.) Ezt a gondolatot kell megmentenünk.

(Különbözően ezzel a kifejezéssel formálisan is baj van: a logaritmus jele mögött nem állhat „dimenziós” mennyiség, csak olyan, amelynek a mértékegysége 1. Könnyen látható azonban, hogy ez a nehézség elkerülhető, ha a térfogatot viszonysszámmal fogjuk fel, és mondjuk 1 literhez, 1 m^3 -hez, vagy a normálállapot térfogatához viszonyítjuk. Tegyük fel tehát, hogy most a térfogatot ilyen értelemben használjuk.)

Nyilvánvaló, hogy olyan mennyiséget keresünk, amely a hőhatás extenzív mennyiségének felel meg. Ennek a mennyiségnek a helyét kihúztuk az 1.2. ábrán, amikor a nulladik főtételt tanultuk. Nem azért, mert ilyen mennyiség nem értelmezhető, hanem azért, mert alapjában véve másodlagos szerepe van a hőtani problémákban. Pontosabban: az értelmezése nem szükségszerű. Ezt a mennyiséget S -sel fogjuk jelölni, és *entrópiának* nevezzük. A mennyiség értelmezése még hátra van, bár a fogalomalkotáshoz vezető ötlet már megszületett. Mindenesetre elmondhatjuk, hogy ennek a mennyiségnek skaláris extenzív állapotjelzőnek kell lennie. Ezt követeli meg ugyanis a hő és munka, a hőmérséklet és a nyomás analógiája.

Az entrópia a hőhatás extenzív mennyisége (2.24. ábra). Hasonló a szerepe mint a pénznek: ahogyan a pénz a gazdasági folyamatokban az érték szállítója, a hőhatásnál a hőt az entrópia szállítja.

Keressünk most olyan folyamatot, amelyben az entrópia nem változik. Még nem ismerjük az entrópiára vonatkozó állapotegyenletet (még nem tudjuk, hogy miként függ az entrópia a gáz többi tulajdonságától), de a körülírt szerepe alapján nyilvánvaló, hogy az adiabatikus folyamat az, amiben az entrópia nem változik. Akkor ugyanis egyrészt $Q=0$, ezért $\Delta S=0$, másrészt az adiabatikus állapotváltozások folyamatpályáját a Poisson-egyenlet szolgáltatja:

$pV^\kappa = \text{állandó}$.

A pV^κ állapotjelző állandó értékével függ össze az entrópia állandósága.

A matematikai analízis egyszerű módszereivel bebizonyítható, hogy az entrópia — a most körülírt szerepe alapján — eleget tesz az

$$S = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R \ln(pV^\kappa) \quad (2)$$

egyenlőségnek. Ez az állapotegyenlet egyszerűen átalakítható. Mivel

$$(pV^{(f+2)/f})^{f/2} = p^{f/2} V^{(f+2)/2},$$

ezért az entrópia így is kifejezhető a többi állapotjelzővel:

$$S = \frac{m}{M} R \ln(p^{f/2} V^{(f+2)/2}).$$

Ezt az összefüggést a következő formában is felírhatjuk:

$$S = \frac{f}{2} \frac{m}{M} \ln(p^{cv} V^{cp}).$$

Csak az összefoglalás és áttekintés kedvé-

		extenzív	intenzív	energia
mecha- nikai		V	$-p$	$f-p/\Delta V$
elektro- mos		q	U	$U\Delta q$
kémiai		m	μ	$\mu\Delta m$
termikus		S	T	$T\Delta S$

2.24.
ábra

ért, az ideális gázok lényeges állapotegyenleteinek a száma háromra emelkedett:

$$E = \frac{f}{2} pV,$$

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

$$S = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R \ln(pV^\kappa).$$

A (2) állapotegyenletben a térfogat és a nyomás viszonzyszám: a p például azt jelenti, hogy a nyomás hányszor nagyobb, mint 1 Pa, vagy a térfogat hányszorosa 1 m³-nek. A konkrét problémákban ugyanis az entrópia megváltozásának van szerepe, tehát

$$\Delta S = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa \right]. \quad (3)$$

Ebből látszik, hogy a (3) használata esetén mindegy, hogy a nyomást és a térfogatot milyen mértékegységben helyettesítjük be.

Foglaljuk össze az entrópia jelentőségét és alkalmazását. Tegyük fel, hogy adott valamely folyamat, a p — V síkon ábrázoltuk a pályáját. A folyamat a p_1 és V_1 kezdeti értékekkel jellemzett állapotból indult és a p_2 és V_2 értékekkel megadott állapotban végződik. Ha a kezdeti hőmérséklet is adott (T_1), akkor az egyesített gáztörvény-

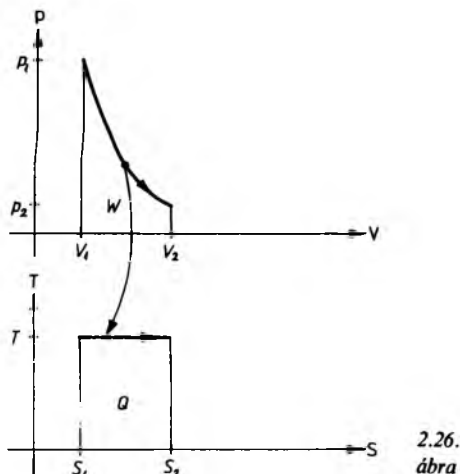
ből a végső állapot hőmérséklete T_2 is meghatározható, de ugyanígy bármely közbülső (V, p) párhoz tartozó T hőmérsékletet is könnyen kiszámíthatunk az egyesített gáztörvény segítségével.

Tegyük fel tehát, hogy a folyamatot végigkísérjük a pályája mentén és meghatározzuk a (V, p) pontokhoz tartozó T hőmérsékleteket, de (2)-ből megkapjuk a (V, p) párhoz tartozó S entrópiát is. (Itt kézenfekvő a térfogatot V_1 -hez, a nyomást p_1 -hez viszonyítani. Ekkor ugyanis az entrópia kezdeti értéke nulla.)

Az így kapott egymáshoz tartozó (S, T) párokat az entrópia—hőmérséklet koordináta-rendszerben ábrázolva a hő a grafikon alapján kiszámítható (2.25. ábra).

Az általános eljárást az izotermikus folyamatnál szemléltetjük. A 2.26. ábrán látható (V_1, p_1) pontokból induló T hőmérsékletű izotermának az entrópia—hőmérséklet síkon vízszintes szakasz felel meg. A téglalap területe az (1) izotermikus hő.

Vizsgáljuk most meg egy példán, hogy egymással érintkezésben lévő gázok inten-



2.26. ábra

zív állapotjelzőinek kiegyenlítődésekor hogyan változik az entrópia.

Tegyük fel tehát, hogy egy hőszigetelt tartályban egymástól dugattyúval elválasztva azonos anyagi minőségű — mondjuk kétatomos — gáz van. A dugattyú kezdetben rögzített, és az egyik gáz 4 dm^3 térfogatú, 3 atm nyomású, a másik 6 dm^3 térfogatú, 2 atm nyomású. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel azt is, hogy mindkét gáz hőmérséklete 300 K .

Ekkor az első gáz entrópiája:

$$S_1 = \frac{5}{2} \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^5}{300} \ln(3 \cdot 4^{1.4}) = 30,4 \text{ J/K},$$

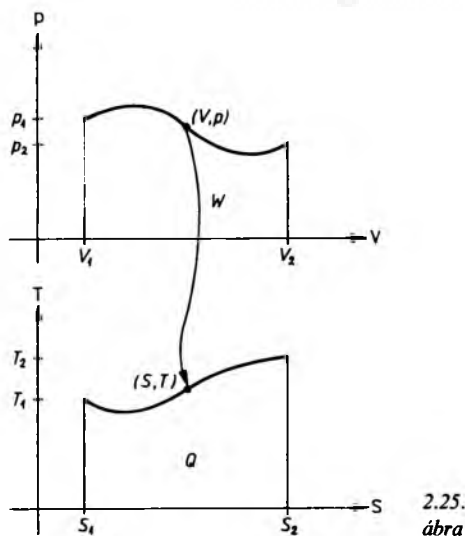
a másik gáz entrópiája:

$$S_2 = \frac{5}{2} \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{300} \ln(2 \cdot 6^{1.4}) = 32,0 \text{ J/K}.$$

A rendszer összes entrópiája:

$$S_1 + S_2 = 62,4 \text{ J/K}.$$

Oldjuk most fel a dugattyú rögzítését! Ekkor az a magasabb nyomású hely felől az



2.25. ábra

alacsonyabb nyomású felé mozdul el mindaddig, amíg a két gáz nyomása azonos nem lesz. A kialakuló közös nyomás az energiamérlegből határozható meg:

$$\frac{f}{2} p_1 V_1 + \frac{f}{2} p_2 V_2 = \frac{f}{2} p (V_1 + V_2).$$

Innen $p = 2,4$ atm, és látható, hogy mindkét gáz térfogata 5 dm^3 . Kiegyenlítődés után mindkét gáz entrópiája ugyanakkora:

$$\begin{aligned} S'_1 &= S'_2 = \\ &= \frac{5}{2} \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,4 \cdot 10^5}{300} \ln(2,4 \cdot 5^{1,4}) = \\ &= 31,3 \text{ J/K}. \end{aligned}$$

Az összes entrópia most

$$S'_1 + S'_2 = 62,6 \text{ J/K},$$

nagyobb, mint a kiegyenlítődés előtt. A nyomás kiegyenlítődése, amely természetesen a két gáz között hőcserélődéssel járt, azt is eredményezte, hogy az entrópia $62,4 \text{ J/K}$ -ről $62,6 \text{ J/K}$ -re nőtt.

Vizsgáljuk tovább a rendszer entrópianövekedését. Az első gáz entrópiája $\Delta S_1 = Q_1/T$ -vel, a másodiké $\Delta S_2 = Q_2/T$ -vel változik, ahol Q_1 az első gáz által felvett hő, és Q_2 az a hőmennyiség, amennyit a második gáz kap az első gáztól. A rendszer entrópiaváltozása:

$$\Delta(S_1 + S_2) = \frac{Q_1}{T} + \frac{Q_2}{T} \geq 0. \quad]$$

Általában is így van: bármilyen kiegyenlítődési folyamat megy végbe egy minden mennyiségre zárt rendszerben, az egyensúlyi állapotban az egyesített rendszer entrópiája nem lehet kisebb, mint a részrendszerek entrópiájának az összege a kiegyenlítődési folyamat előtt.

Zárt rendszer entrópiája tehát nem csökkenhet. Ez az *entrópianövekedés tétel*

le. A kiegyenlítődési folyamatok irányát meghatározó második főtétellel párhuzamos tétel, sőt annak ekvivalens átalakítása, azonos értékű átfogalmazása.

┌Vizsgáljuk meg most a következő elgondolkodtató problémát. Mekkora lenne az előző példában szereplő gázok entrópiája, ha a dugattyút — rögzítésének a feloldása helyett — eltávolítanánk, vagyis a két gáz összekeveredne. Az energiamérleg természetesen ugyanúgy érvényes, mint az előbbi esetben, a keveredés után most is 10 dm^3 térfogatú, $2,4$ atm nyomású, 300 K hőmérsékletű gázt kapunk. Ennek az entrópiája:

$$\begin{aligned} S_* &= \frac{5}{2} \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 2,4 \cdot 10^5}{300} \ln(2,4 \cdot 10^{1,4}) = \\ &= 81,9 \text{ J/K}! \end{aligned}$$

A dugattyú eltávolítása után a gáz entrópiája sokkal nagyobb mértékben nő, mint a dugattyú elmozdulásával járó kiegyenlítődési folyamatban!

Az előző két példában az a különbség, hogy kétféle végállapot alakul ki: az egyik az, amikor a dugattyú elválasztja a két gázt, a másik az, amikor a dugattyút eltávolítottuk. Ezekben tökéletesen megegyezik a gáz összes eddig ismert állapotjelzője: nyomása, hőmérséklete, térfogata. Az újonnan értelmezett fizikai mennyiség, az entrópia azonban drámaian különbözik a két végállapotban. Közvetlenül mérhető mennyiségekkel a két állapot nem különböztethető meg. A termodinamikai fejezetet lezáró rövid mikrofizikai fejezetben megpróbáljuk a problémáról fellebbenteni egy pillanatra a fátylat.

Igen érdekes tény, hogy az entrópia — mint extenzív állapotjelző — nem megmaradó mennyiség, forrása van. Az entrópiára vonatkozó mérlegegyenlet általános

alakja ezért szükségszerűen ilyen:

$$\Delta S = \Delta S^{\text{kap}} + \Delta S^{\text{forrás}}. \quad (4)$$

A mérlegegyenlet jobb oldalán szereplő $\Delta S^{\text{forrás}}$ a keveredésnél, az egyensúly kialakulásánál fellépő spontán entrópiánövekedés mértéke. Igen gyakran σ -val jelölik. Az elmondottakból világos, hogy $\sigma \geq 0$.

Másrészt a ΔS^{kap} tag az entrópiánövekedés olyan része, amely a kölcsönhatáshoz kapcsolódik. Az entrópia értelmezése alapján világos, hogy ha egy rendszer hőt kap a környezetétől, akkor ebben a folyamatban entrópia is áramlik a rendszerbe. Tekintsük valamely folyamat olyan kis szakaszát, amelyben a hőmérséklet állandónak tekinthető. Ha ebben a részfolyamatban a rendszer ΔS entrópiát kap, akkor $Q = T\Delta S$ mennyiségű hőt is kap a rendszer. Így $\Delta S^{\text{kap}} = Q/T$. Az entrópia (4) mérlegegyenlete így alakul:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} + \sigma, \quad (5)$$

ahol — még egyszer mondva —

$$\sigma \geq 0. \quad (6)$$

Rendszerezzük a hőtannal kapcsolatos tudásunkat néhány mondatban! A gázok extenzív állapotjelzői (m, V, E, S) és intenzív állapotjelzői (p, T) kapcsolatát három állapotegyenlet fejezi ki. Az 55. oldalon felsoroltuk (és bekereteztük) ezt a három összefüggést. (Természetes, hogy ezek átalakításával sok más állapotjelző között fennálló relációhoz jutunk. Ez a három azért fontos különösen, mert az eredetük más.)

Az extenzív mennyiségek közül az energiának van kiemelt szerepe. Az energia megmaradó mennyiség, ezért a megváltozása csak a rendszerben végzett munka és a rendszerrel közölt hő összege:

$$\Delta E = Q + W.$$

A belső energiának nincs forrása. Ezzel szemben az entrópia mérlegegyenlete tartalmaz ilyen tagot:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} + \sigma.$$

Az entrópia a hőhatás extenzív mennyisége. Az értelmezésének az igénye úgy vetődött fel, hogy a hőt — a munkához hasonlóan — közvetlenül, a hőhatáshoz tartozó extenzív és intenzív mennyiségből szeretnénk volna kiszámítani.

Az entrópiamérlegben szereplő entrópiaprodukciónak nem lehet negatív. Ez a második főtétellel ekvivalens állítás. Az első főtétel tehát az energiamérleg megfogalmazása, a második főtételt úgy tekinthetjük, mint az entrópiamérleg kifejezését. Az első főtétel az energiamérleghez, a második főtétel az entrópiamérleghez kapcsolható.

Az energiamérleget így is megfogalmazhatjuk:

$$\Delta E = T\Delta S + (-p)\Delta V. \quad (7)$$

Ebből jól látszik az extenzív mennyiségek (S, V) és az intenzív mennyiségek ($T, -p$) kapcsolata, illetve párhuzamba állítható szerepe.

Tegyük fel most, hogy egy rendszer állapotjelzőit rögzítjük és csak a belső energia és az entrópia megváltozását engedjük meg. A (7) mérlegegyenlet ekkor

$$\Delta E = T\Delta S,$$

és innen

$$\frac{\Delta S}{\Delta E} = \frac{1}{T}. \quad (8)$$

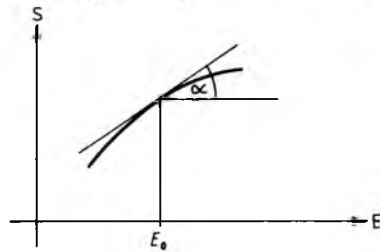
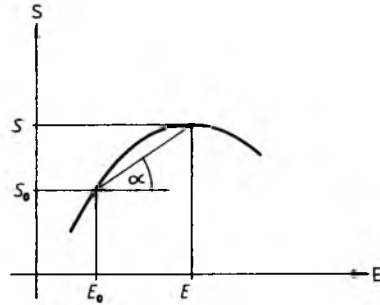
A két különbség hányadosát a következőképpen jellemezhetjük. A rendszer entrópiája (az egyik állapotjelző) a belső energia (a másik állapotjelző) függvényének te-

kinthető, ha — mint azt gondolatmenetünk elején kikötöttük — a többi állapotjelző változását kizárjuk. Ekkor az entrópia ábrázolható, mint a belső energia függvénye (2.27. ábra). Jelöljük a rendszer egyik állapotát a 0 indexszel. Ebben az állapotban az egymáshoz tartozó belső energia és entrópia E_0, S_0 . Valamely másik állapotban az egymáshoz tartozó értékek E, S . A két pontot összekötő szakasz meredeksége

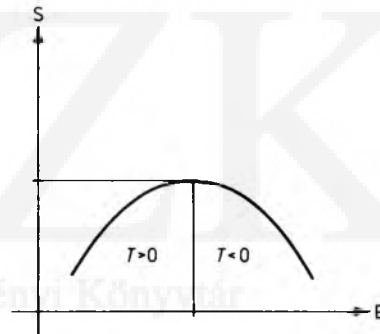
$$\frac{S - S_0}{E - E_0},$$

amelynek természetesen nincs értelme az $E := E_0$ pontban. Ez a hányados azonban kiterjeszhető folytonosan az E_0 pontban is. Ennek a kiterjesztésnek az E_0 -beli helyettesítési értéke az entrópia energia szerinti deriváltja az E_0 energiához tartozó állapotban.

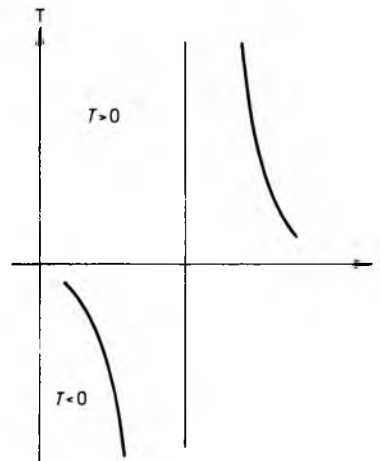
A (8) bal oldalát most így értjük: az entrópia belső energia szerinti deriváltja. Ez a mennyiség az abszolút hőmérséklet reciprokával egyenlő. Az abszolút hőmérséklet értelmezését ezzel azonban teljesebbé tehetjük. A 2.28. ábráról látható, hogy az entrópia—energia függvénynek maximuma van. Itt a deriváltja ($1/T$) nulla, ekkor azonban T -nek nincs értelme. Ettől a ponttól balra $T < 0$, jobbra $T > 0$. A $T > 0$ tartományban növekvő energiához növekvő entrópia tartozik. Ez a mindennapi tapasztalataink tartománya. A $T < 0$ tartományt az jellemzi, hogy a növekvő belső energiához csökkenő entrópia tartozik. A két tartomány közötti határpontban T nem értelmezhető, ez az abszolút hőmérsékleti skála nulla pontja. Ez a pont fizikailag sem gondolható el. (A termodinamika harmadik főtétele.) Kérdés persze, hogy a negatív abszolút hőmérsékletű állapotoknak megfeleltethető-e a valóságban fizikai



2.27. ábra



2.28. ábra

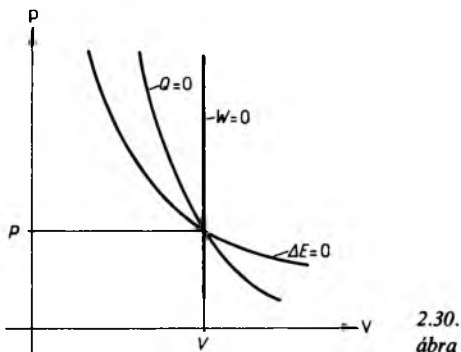


2.29. ábra

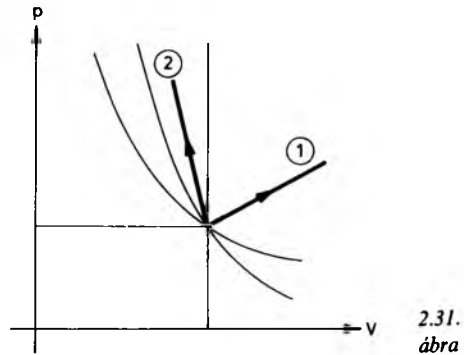
állapot. Hagyjuk nyitva ezt a kérdést! Mindenesetre figyelemre méltó, hogy míg a $T=0$ K fizikailag értelmetlen, a $T<0$ K hőmérsékletű állapot nem az. Elméletileg bizonyítható, hogy ha vannak ilyen állapotok, akkor ezeket labilis egyensúly jellemzi. Az egyensúlyukat megzavarva a hőmérsékletük igen gyorsan $-\infty$ -hez tart, majd $+\infty$ felől csökken (2.29. ábra).

2.1.5. A folyamatok lokális és globális jellemzése

Nevezetes folyamatokról tanultunk. A most következő megfontolásainkban alapvető jelentősége lesz az izoterm, az adiabatikus és az izochor folyamatoknak. Ezeket a folyamatokat az jellemzi, hogy az ideális gázok állapotváltozásaiban szerepet játszó folyamatjelző mennyiségek valamelyike nulla. Az izoterm folyamatban $\Delta E=0$, adiabatikus folyamatban $Q=0$, és izochor folyamat esetén $W=0$. Jelöljünk ki egy pontot a p — V síkon. Ennek a pontnak a koordinátái legyenek V és p , a ponthoz tartozó hőmérséklet pedig T . Ebből a pontból egy izotermán elindulva az energiaváltozás nulla, adiabatán haladva hőközlés nincs, míg függőleges izochor egyenes



2.30. ábra



2.31. ábra

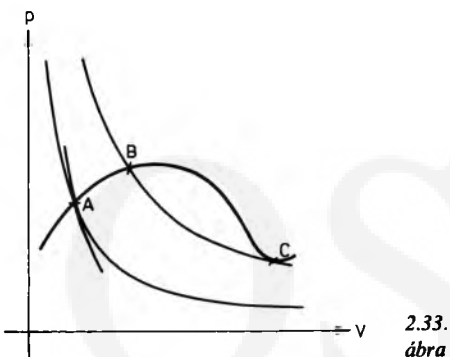
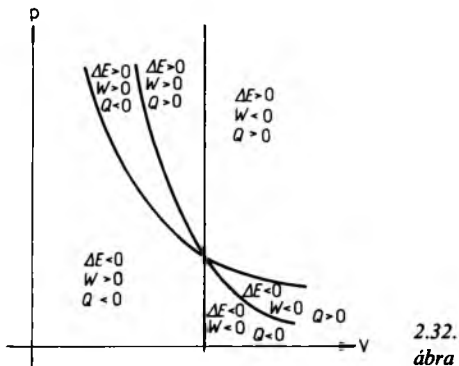
mentén változtatva a gáz állapotát a gázon végzett munka nulla (2.30. ábra). Ezekkel a görbékkel a p — V síkot hat részre osztottuk fel.

Tekintsük a 2.31. ábrán látható 1. folyamatot. Ez az izotermán halad, tehát a belső energia nő ebben a folyamatban. Ugyanígy az adiabata fölé megy, ilyenkor $Q>0$, vagyis a rendszer környezetétől hő vesz fel. A függőleges egyenestől viszont jobbra irányul ez a görbe, más szavakkal a gáz tágul, tehát a munka negatív.

Ugyanígy jellemezhetjük a p — V sík többi irányát is. A 2.31. ábrán megadott 2. folyamatban $\Delta E>0$, $Q>0$, $W>0$, mindhárom állapotjelző pozitív ebben az irányban haladva, hiszen a folyamat az adiabata és az izotermán fölött halad, ugyanakkor a függőleges egyenestől, ahol a munka nulla, balra mozog, tehát a gáz összenyomódik.

A 2.32. ábrán bejelöltük az egyes tartományokban a három folyamatjelző előjelét, ha valamely folyamat az (V_1, p_1) pontból ebbe a tartományba indul, akkor a folyamat kezdetén az előjelek leolvashatók az ábráról.

Elemezzük a 2.33. ábrán látható folyamatot, vizsgáljuk meg néhány pontját. Az A pontban a folyamat belső energiája nő, hiszen a folyamat iránya itt az A ponton



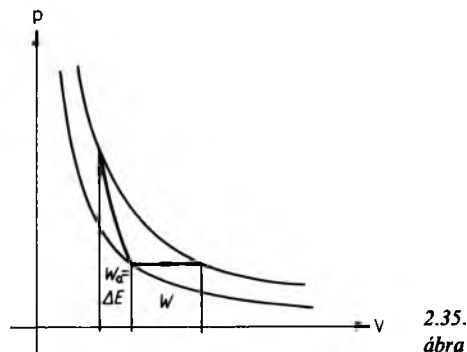
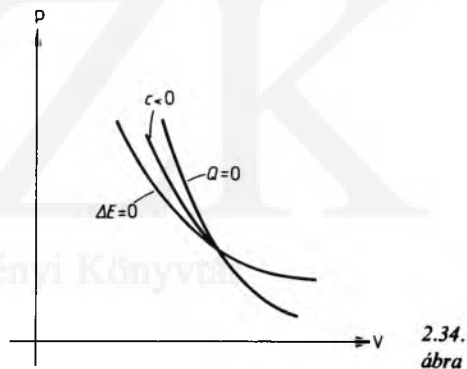
átmenő izoterma fölé irányul. A hő pozitív, mert az A ponton áthaladó adiabata fölött van a folyamat grafikonja. A munka nyilvánvalóan negatív, hiszen a gáz most tágul. Ugyanígy a B pontban $\Delta E > 0$, $Q > 0$ és $W < 0$. A C pontban $\Delta E = 0$, mert a folyamat grafikonja és a hiperbola érintik egymást, $Q > 0$ és $W < 0$.

A folyamatok helyileg így szemléltethetők és így jellemezhetők a folyamatjelzők előjelével.

Igen érdekes, hogy az olyan politropikus folyamatban, amelynek a grafikonja az izoterma és az adiabata között halad, a fajhő negatív. Ha a gáz hőmérséklete nő, akkor hőt ad le (2.34. ábra).

A folyamatok globális jellemzésére egy példát mutatunk.

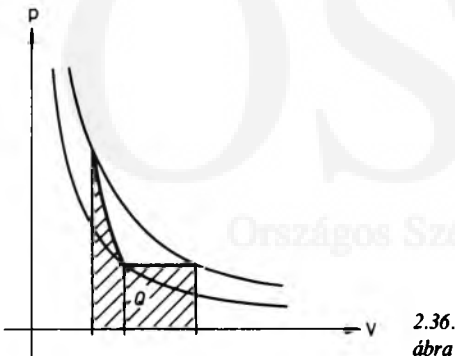
Tegyük fel, hogy ismert kezdeti állapotú ideális gáz állandó nyomáson tágul. Ekkor a görbe alatti terület — a téglalap területe — a gázon végzett munka (-1) -szerese. Ebben a folyamatban az energia megváltozása azonos bármelyik folyamat energiaváltozásával, amely összeköti a kezdeti és a végső izotermákat. A szóban lévő izobár folyamatban az energiaváltozás pontosan azonos az ugyanezen energiaszinteket összekötő adiabatikus folyamathoz tartozó energiaváltozással (2.35. ábra). Az adiabatikus folyamatra jellemző energiaváltozás azonban megegyezik az adiabatikus



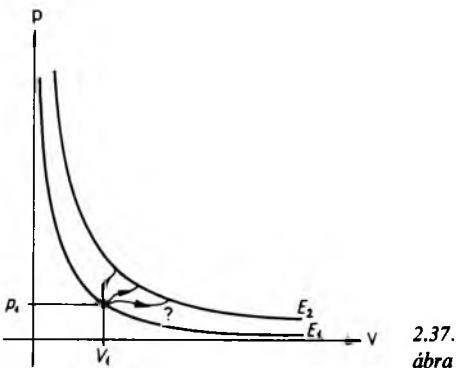
munkával, vagyis az adiabata alatti területtel. Tehát az izobár folyamatra jellemző energiaváltozás mértéke ugyanezen izotermákat összekötő adiabata alatti terület.

Gondoljuk meg továbbá, hogy ebben az izobár folyamatban $\Delta E + |W| = Q$. Ez azt jelenti, hogy a folyamatban közölt hő is könnyen szemléltethető grafikusán: ábrázolható ugyanis ΔE is, W is. Az adiabata alatti terület és a vízszintes szakasz alatti terület összege a gázzal közölt hő. Hasonló problémák esetén ugyanígy kigondolható az ábrázolás módja (2.36. ábra).

Vessük most fel a következő problémát: tegyük fel, hogy — mondjuk a konkrét példa kedvéért — 15 liter normál állapotú héliummal 400 J hőt közlünk és a gázon 200 J munkát végzünk (2.37. ábra).



2.36. ábra



2.37. ábra

Milyen folyamatról lehet szó?

Az nyilvánvaló, hogy a gáz energiája 600 J-lal növekszik. A kezdeti energia

$$E_1 = \frac{3}{2} 15 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 2250 \text{ J},$$

a végállapot energiája így

$$E_2 = 2250 + 600 \text{ J} = 2850 \text{ J}.$$

Ebből a végállapot hőmérséklete meghatározható:

$$E_2 = 2850 = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT_2 = \\ = \frac{3}{2} \frac{15 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{273} T_2,$$

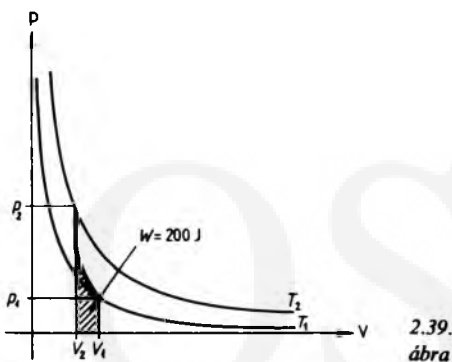
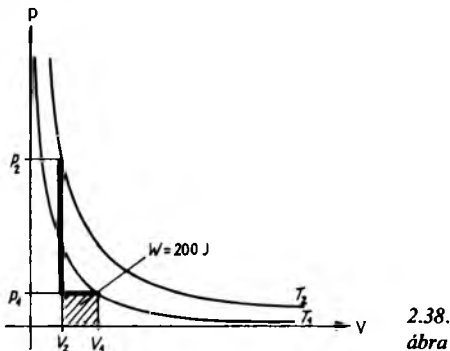
innen

$$T_2 = 345,8 \text{ K},$$

így a hőmérséklet-változás:

$$\Delta T = 72,8 \text{ K}.$$

Annnyit tudunk tehát, hogy a kezdeti jól meghatározott állapotból a gáz a folyamat végén a $T_2 = 345,8 \text{ K}$ hőmérsékletű izotermára kerül. A folyamatunk végállapota ezen az energiaszinten végződik. Még mindig nem tudjuk azonban, hogy melyik folyamatról van szó. Az a helyzet, hogy nem is adhatunk egyértelmű választ. Végtelen sok folyamat eleget tesz ennek a feltételnek. Gondoljuk el ugyanis, hogy az adott kezdeti állapotból izobár módon összenyomjuk a gázt úgy, hogy a gázon végzett munka pontosan 200 J legyen (2.38. ábra). Ebben az állapotban a gáz térfogata 13 liter lesz, hiszen $W = -p(V_2 - V_1)$. Ekkor a gáz hőmérséklete 236,6 K. Ebből az állapotból állandó térfogaton melegítsük fel a gázt 345,8 K-re. A két részfolyamatban a gázzal közölt energia összesen 600 J. Ez tehát egy olyan folyamat, amelyben a gá-



zon végzett munka 200 J, a gázzal közölt hő 400 J.

Igen könnyen készíthetünk azonban ebből a folyamatból más folyamatokat, amelyek eleget tesznek az előírt feltételnek: elég azt tenni, hogy a folyamat izobár szakaszán hirtelen lecsökkentjük a nyomást, majd ugyanilyen hosszú úton pontosan az előző csökkenéssel megegyező mértékben megemeljük az 1 atm fölé.

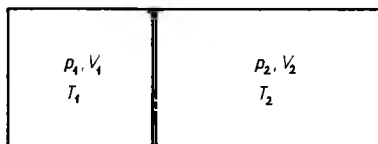
Kiindulhatunk más folyamatokból is: először adiabatikusan összenyomjuk a gázt olyan mértékben, hogy a gázon végzett munka 200 J legyen, majd izochor folyamatban elérjük a végállapot energiaszintjét (2.39. ábra). Ugyanezt lehet for-

dítva is: előbb az izochor, aztán az adiabatikus folyamatot hajtjuk végre. Sok más megoldás van ezeken kívül.]

A tanulság az, hogy a hő és a munka csak az energiaváltozásnak a mértékét határozza meg, de azt a folyamatot nem, amelyben ezt a munkát és ezt a hőt közöljük a gázzal. A hő ezért (is) nem állapotjelző. Mint ahogyan a munka sem az. Különböző folyamatokhoz hozzárendelhetjük ugyanazt a mennyiséget munkaként, és különböző folyamatokhoz hozzárendelhetjük ugyanazt a hőt, a munkából és a hőből senki sem képes következtetni arra, hogy melyik folyamatról is volt szó. (Mint amikor azt halljuk valakitől, hogy — mondjuk a Nyugati pályaudvaron — taxiba szállt, és amikor kiszállt a kocsiból, 218 Ft-ot mutatott az óra. Ebből legfeljebb arra következtetünk, hogy Szegedig biztosan nem jutott el. De azt, hogy merre járt és hová érkezett, a viteldíjból nem állapíthatjuk meg.)

A munka és a hő nem állapotjelzők. Azokat a folyamatokat jellemzik, amelyekben a gáz részt vesz. Érdekes azonban, hogy nem is szimmetrikusan jellemzi a rendszert és a környezetét.

Tegyük fel, hogy egy hőszigetelő burkolattal ellátott tartályt egy könnyen mozgó hővezető dugattyú két részre oszt (2.40. ábra). Az egyik gáz állapotjelzői (p_1, V_1, T_1), a másik gázé (p_2, V_2, T_2). Tegyük fel, hogy $p_2 > p_1$. A dugattyút felengedve, a kiegyenlítődési folyamatot megfigyeljük. Az állapotváltozást a tömeg, energia, tér-



2.40. ábra

fogat és entrópia extenzív mennyiségek jellemzik. Az intenzív mennyiségek: a nyomás és a hőmérséklet. Ez utóbbiak kiegyenlítődnek. Az extenzívek közül az első három értéke összeadódik, és az összeg nem változik. (Az entrópia — mint láttuk — növekedni fog.) Innen következik, hogy

$$\Delta V_1 = -\Delta V_2, \quad (1)$$

és

$$\Delta E_1 = -\Delta E_2. \quad (2)$$

Vegyük figyelembe az első főtételt:

$$\Delta E_1 = Q_{2 \rightarrow 1} + W_{2 \rightarrow 1},$$

ezt úgy értjük, hogy az 1-es gáz energiájának megváltozása egyenlő a 2-es gáz által az 1-es gázzal közölt hő, valamint a 2-es gáz által az 1-es gázon végzett munka összegével. Ugyanilyen értelemben

$$\Delta E_2 = Q_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 2}.$$

Ez a (2) egyenlőségbe helyettesítve:

$$Q_{2 \rightarrow 1} + W_{2 \rightarrow 1} = -Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}.$$

Innen

$$Q_{2 \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{2 \rightarrow 1} - W_{1 \rightarrow 2}.$$

Tegyük fel most, hogy a térfogatváltozás mértéke kicsiny, így

$$W_{2 \rightarrow 1} = -p_1 \Delta V_1$$

és

$$W_{1 \rightarrow 2} = -p_2 \Delta V_2.$$

Tehát

$$Q_{2 \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2} = p_1 \Delta V_1 + p_2 \Delta V_2,$$

de az (1) alapján

$$Q_{2 \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2} = (p_1 - p_2) \Delta V_1. \quad (3)$$

Itt a jobb oldal általában nem nulla. A (3) egyenlőség jobb oldala két esetben nulla:

egyrészt akkor, ha a térfogatváltozás nulla ($\Delta V_1 = 0$), másrészt akkor, ha a két gáz nyomása állandóan azonos. Így a $Q_{2 \rightarrow 1} = -Q_{1 \rightarrow 2}$ csak ezekben az esetekben teljesül. Az egyik gáz által leadott és a másik által felvett hő nem egyenlő. *A munkához hasonlóan a hőre sem teljesül a hatás-ellenhatás törvénye.* Ez a kompenzálás csak az energiára érvényes: (2) alapján az egymással közölt energiák abszolút értéke azonos, a kompenzálás nem érvényes a munkára és a hőre külön, csak a kettő összegére.

Gondoljuk meg: a szóban forgó két gáz térfogatváltozása azonos. A kiegyenlítődési folyamat közben azonban az egyik gáz nyomása felülről csökken a közös végső értékre, a másik gáz nyomása alulról nő ugyanerre a nyomásra. Így a „ $-p \Delta V$ ” szorzatok nem egyenlők! Nem egyenlők ezért az egymással közölt hők sem!

Ezért van az, hogy mindig hangsúlyozzuk, ha az első főtétel szóba kerül, hogy „a gázon végzett munka”, „a gázzal közölt munka”. A gáz által végzett munka ugyanis általában nem azonos nagyságú a gázon végzett munkával.

Igen helytelen szóhasználat: „ha a gáz összenyomódik, akkor mi végzünk munkát, ez a munka pozitív, ha a gáz tágul, akkor a gáz végez munkát, ez a tágulási munka, és ez negatív”. Világos: akár tágul a gáz, akár összenyomódik, a gáz is és a környezet is végez munkát. Ezek a munkák ellentétes előjelűek, azonban általában nem azonos nagyságúak. Az első főtételben mindig azon a gázon végzett munka szerepel, amelyik gáznak az energiaváltozása szerepel a jobb oldalon. A gáz által végzett munka a gáz környezetére vonatkozó mérlegegyenletben kap helyet. Már a mechanikában hangsúlyoztuk: egy rendszer energiájának a megváltozása nem azal a munkával függ össze, amelyet a rend-

szer végez, hanem amelyet a környezet végez a rendszeren. És ez a kettő nem feltétlenül egyenlő nagyságú.

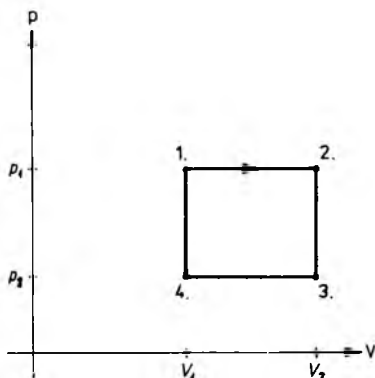
Az igazsághoz tartozik azonban az, hogy a gáz és a környezete sok konkrét feladatban azonos nyomású. (Nem mindegyikben.) Ezért szerencsére általában nem származik baj a helytelen szóhasználatból, hogy például: „a gázzal 400 J hőt közlünk és 200 J munkát végez, így az energiájának a megváltozása 200 J”. Helyesen ekkor is így kellene fogalmazni: „a gázzal 400 J hőt közlünk és -200 J munkát végzünk . . .”.

A (3) bal oldalát nem kompenzált hőnek nevezzük.

Gyakran előfordul különböző feladatokban valamely ideális gázzal végzett *kör-folyamat*. A körfolyamatban a gáz kezdeti és végső állapotában az állapotjelzők megegyeznek. A folyamat kezdő és végpontja megegyezik, így a belső energiájának a megváltozása nulla. Az első főtétel egy körfolyamatra így érvényes:

$$0 = Q + W. \quad (4)$$

┌ A 2.41. ábrán látható körfolyamat az 1 pontból indul, a 2, a 3, a 4 érintésével visszaér az 1 pontba. A folyamat váltakozó izobár és izochor szakaszokból áll. Az



2.41. ábra

első szakaszban a gáz állandó, $p_1 = 2,4$ atm nyomáson $V_1 = 3$ dm³-ről $V_2 = 5,5$ dm³-re tágul. Ezután a nyomása állandó térfogaton lecsökken $p_2 = 1$ atm-ra. A következő szakaszon állandó, 1 atm nyomáson összenyomjuk ismét 3 dm³-re, majd befejezés-ként felmelegítjük, hogy a nyomása ismét 2,4 atm legyen.

A folyamat kezdeti szakaszán a gázon végzett munka:

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= -p_1(V_2 - V_1) = \\ &= -2,4 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = \\ &= -600 \text{ J.} \end{aligned}$$

A második szakaszban a munka nulla. A harmadik szakaszban

$$\begin{aligned} W_{3 \rightarrow 4} &= -p_3(V_4 - V_3) = \\ &= -10^5(-2,5 \cdot 10^{-3}) = 250 \text{ J.} \end{aligned}$$

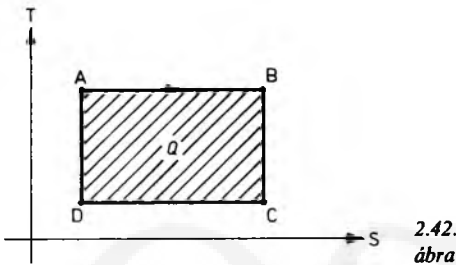
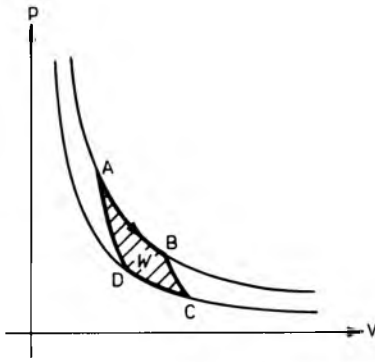
A negyedik szakaszban ismét nem történik munkavégzés. Az egész körfolyamatban végzett munka így $W = -350$ J.

A gázzal közölt hő (4) alapján $Q = 350$ J.

A gázon végzett munka — jól látszik — a vízszintes szakaszok alatti terület összege. Ezt a területet negatív előjellel vesszük, ha a gáz tágul, pozitívvá az ellenkező esetben. A két terület összegét megfelelő előjellel kell képezni. Mindenesetre ez a munka a görbe által körbejárt terület:

$$W = -(p_1 - p_2)(V_2 - V_1).$$

A körfolyamatban a gázzal végzett összes munka a körfolyamat pályája által körbejárt terület, negatív előjellel ellátva, ha a folyamat iránya az óramutató járásának megfelelő irányú, és pozitív a munka előjele, ha a körfolyamat iránya az óramutató járásával ellentétes irányú. A hő nagyságra megegyezik a munkával, csak ellentétes előjelű.]



2.42. ábra

A másik fontos körfolyamatot Carnot-ról nevezték el. Ez két izotermából és két adiabatából áll, ahogy a 2.42. ábrán látható. A Carnot-körfolyamatot a T—S síkon is ábrázolhatjuk. Ekkor a folyamat pályája egy téglalap.

Az első — A és B közötti szakaszban — a gáz izotermikusan kiterjed, a térfogata V_A -ról V_B -re nő, a nyomása p_A -ról p_B -re csökken. A gázon végzett munka:

$$W_1 = - \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}, \quad (5)$$

és a gázzal közölt hő:

$$Q_1 = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}. \quad (6)$$

A második — B és C közötti szakaszon — a gázon végzett munka ismét negatív,

$$W_2 = - \frac{f}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1), \quad (7)$$

hiszen ebben a folyamatban a gáz hőmérséklete adiabatikusan T_1 -ről T_2 -re csökken. Itt $Q_3 = 0$, ezért a belső energia megváltozása a BC úton egyenlő a (7) munkával.

A harmadik szakaszban a T_2 hőmérsékletű gázt izotermikus folyamatban összenyomjuk a V_D térfogatra. Ezt a térfogatot úgy választjuk meg, hogy a D ponton átmenő adiabatán az A pont is rajta legyen. Ekkor a gázon végzett munka:

$$W_3 = - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}, \quad (8)$$

és a gázzal közölt hő:

$$Q_3 = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}. \quad (9)$$

És végül a D és az A pontok közötti szakaszon az adiabatikus munka (és a gáz belső energiájának a megváltozása):

$$W_4 = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R (T_1 - T_2). \quad (10)$$

A gázon végzett összes munka az (5), (7), (8), (10) munkák összege. A (7) és (10) tagok összege nulla. Az (5) és (8) tagok összege:

$$W = - \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}. \quad (11)$$

Tegyük most egy kitérőt: a

$$pV^\kappa = p_0V_0^\kappa$$

Poisson-egyenletet osszuk el a

$$\frac{pV}{T} = \frac{P_0V_0}{T_0}$$

egyesített gáztörvénnyel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$V^{\kappa-1}T = V_0^{\kappa-1}T_0.$$

Ezt az egyenlőséget is Poisson-egyenletnek nevezzük.

Ebből a

$$T_1 V_A^{\kappa-1} = T_2 V_D^{\kappa-1} \text{ és } T_1 V_B^{\kappa-1} = T_2 V_C^{\kappa-1}$$

egyenlőséget kapjuk a két adiabatikus szakasz végpontjaira.

Osszuk el a két egyenlőséget egymással:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D},$$

és (11) alapján

$$W = -\frac{m}{M} R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_A}. \quad (12)$$

Ennyi tehát a környezet gázon végzett munkája.

A Carnot-körfolyamatot a következőképpen értékelhetjük. A gáz az első fázisban a T_1 hőmérsékleten felvesz

$$Q_1 = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (13)$$

hőt. A harmadik fázisban a T_2 hőmérsékleten felvesz

$$Q_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_D}{V_C} \quad (14)$$

negatív hőt. Közben összesen — a feltevés szerint —

$$W = -\frac{m}{M} R (T_2 - T_1) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

munkát végez a környezet a gázon.

Most egy olyan feltevéssel éltünk, amelynek a fennállása egyáltalán nem magától értetődik. Sőt, a gyakorlatban egyáltalán nem várhatjuk a teljesülését. Tegyük fel tehát, hogy a Carnot-körfolyamat részeiben nem kompenzált hő nem lép fel. Más szóval tegyük fel, hogy a gázon végzett munka ellentétes előjellel megegyezik

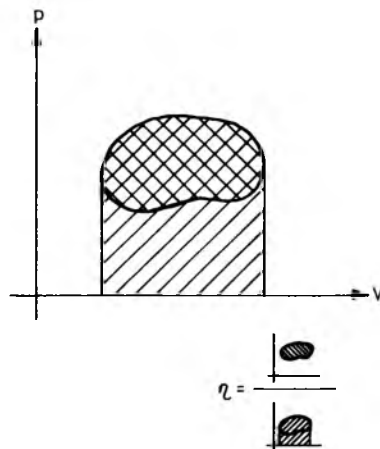
a gáz által végzett munkával, a gázzal közölt hő ellentétes előjellel megegyezik a környezet által felvett hővel.

Ezt a feltételt elfogadva, a Carnot-körfolyammal kapcsolatban a következőképpen fogalmazhatunk. A gáz T_1 hőmérsékleten felvesz Q_1 hőt és a T_2 hőmérsékleten a környezetének lead Q_2 hőt. A teljes körfolyamatban W_1 munkát végez a környezeten. A környezettől felvett Q_1 hőért a gáz W munkát végez és Q_2 hőt ad a környezetnek. A körfolyamat termikus hatásfoka:

$$\eta := \frac{W_1}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (15)$$

Általában tetszőleges körfolyamatnál hasonlóan értelmezzük a termikus hatásfokot. A gázon végzett munka (ez a körfolyamat által körbejárt terület) és a grafikon felső burkolója alatti terület aránya (2.43. ábra). Ez általában kisebb (15)-nél.

Ki kell emelni a következőt. A termikus hatásfok ilyen értelmezése sok problémát rejt magában. Olyan erős feltételek mellett mond csak valamit, hogy ezek a feltételek szinte sohasem teljesülnek.



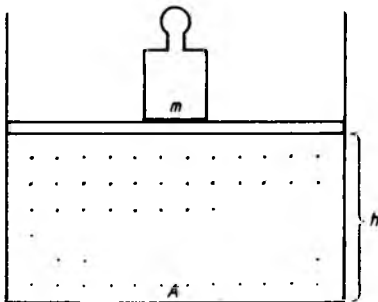
2.43. ábra

A hasznos munkát különben is nem a felvett hőhöz kellene viszonyítani. Előnyösebb lenne a rendszer által felvett energiával osztani a rendszerből nyerhető teljes hasznos energia mennyiségét. A (15) összefüggés a Carnot-körfolyamat bizonyos jellemzését adja, de úgy fogjuk fel, mint a termodinamika történeti fejlődésének néha zavaró maradványát.

2.1.6. Termodinamikai potenciálok

Állapotjelzőkből kiindulva egyszerű műveletekkel újabb állapotjelzőkhöz jutunk. Így láttuk ezt a mechanikában is, de a termodinamika is mutatott példát. Az entrópiát a gáz már ismert állapotjelzőire vezettük vissza. Ebben a pontban új termodinamikai állapotjelzőket értelmezünk és rámutatunk az új fogalom bevezetésének a hátterére, és arra, hogy mi a jelentősége ezeknek az állapotjelzőknek a fizikai jelenségek leírásánál.

Induljunk ki először a következő egyszerű esetből. Tegyük fel, hogy f szabadságfokú, M molekulatömegű gázt töltöttünk egy A keresztmetszetű tartályba (2.44. ábra). A tartályt mozgatható, de hőszigetelő dugattyú zárja le felülről. A dugattyú súlyától eltekintünk, de a dugattyúra m tömegű testet helyezünk. Ekkor a test miatt



2.44. ábra

a gáz nyomása $p = mg/A$ -val növekszik meg. Tekintsünk el a külső levegő nyomásától is, vagyis ennek a nyomóerejét értsük bele a test mg súlyába. Ekkor a gáz nyomása éppen p .

Tegyük fel, hogy a tartályban h magasságban van a dugattyú. Ekkor a testnek az edény aljához képest $E_p = mgh$ helyzeti energiája van. Azonban $mg = pA$, így $E_p = pAh = pV$. A tartályba zárt ideális gáz és a vele kapcsolatban lévő m tömegű test együttes energiája:

$$E + pV = \frac{f}{2} pV + pV = \frac{f+2}{2} pV.$$

Az együttes energiát *entalpiának* nevezzük és H -val jelöljük:

$$H := \frac{f+2}{2} pV.$$

A nyomás fellépésének az oka nem lényeges, ez bármilyen rendszertől származhat. Ha tehát az ideális gáz a p nyomású környezetével mechanikai kontaktusban áll, ekkor emiatt a kapcsolat miatt a gáz pV „helyzeti” energiára tesz szert, az összes energia így a belső energia és a „helyzeti” energia összege, az entalpia.

Hasonló a helyzet a mechanikában, amikor egy test energiájához $1/2 Dx^2$ tagot hozzáveszünk csak azért, mert egy rugalmas testtel kontaktusban van. A rugalmas energia értelmezése nem volt szükségszerű: a rugóerő munkáját kifejező állapotjelző-különbséget azért vittük át az energia oldalára, mert így a munkatétel egyszerűbben kezelhetővé vált: a jobb oldalon kevesebb munkát kellett figyelembe venni.

Az entalpia jelentősége is hasonló. Világos, hogy a p nyomású környezettel mechanikai kontaktusban levő gáz entalpiá-

jának

$$\Delta H = \frac{f+2}{2} p \Delta V = \frac{f+2}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$$

megváltozása éppen a gázzal közölt hővel egyenlő. Környezetével mechanikai kapcsolatban lévő rendszer ideális gáz esetén a hő közvetlenül kifejezhető az entalpia megváltozásával.

Az Olvasónak az lehet a véleménye, hogy ez nyilvánvaló dolog, csak rá kell nézni a képletekre, ezért igazán nem kell felfedezni az entalpiát. Valóban nem kell felfedezni, mint ahogyan a helyzeti és a rugalmas energiát sem kell. A mechanikában is csak élünk a lehetőségekkel, hogy az energia mérlegegyenlete (a munkatétel) egyszerűbb legyen. Gondoljuk meg, hogy a helyzeti energia értelmezése a mechanikában nem csökkentette igazából a tennivalóink számát! Másrészt: az entalpia jelentősége nem elsősorban az ideális gázoknál mutatkozik meg. Sokkal fontosabb olyan valóságos termodinamikai rendszereknél, ahol figyelembe kell venni a kémiai és esetleg az elektromos folyamatok fellépését is. Az entalpiát ekkor is a

$$H = E + pV$$

egyenlőséggel értelmezzük, azonban lehetséges, hogy sokkal bonyolultabb a belső energiára vonatkozó állapotegyenlet, mint az ideális gázokra jellemző egyszerű összefüggés.

Az entalpia mérlegegyenlete:

$$\Delta H = T \Delta S + \mu \Delta N.$$

Ebből látszik, hogy a hő és a kémiai munka összege az entalpia megváltozásával mérhető. Az entalpiának akkor van igazán jelentősége, ha kémiai reakciókat kísérő energiaváltozások, reakcióhők számítása a feladatunk. Az ilyen számításokat végző

vegység megfelelkezhet a belső energiáról, csak az entalpiával dolgozik, megfelelkezhet azonban a rendszeren végzett munkáról is. Feltéve persze, hogy a mechanikai kontaktus valóban fennáll a rendszer és a környezete között.

Ha a rendszer az állandó hőmérsékletű környezetével termikus kontaktusban áll, akkor az

$$F = E - TS$$

szabadenergia előnyös tulajdonságú állapotjelző. Ideális gázok esetén a szabadenergia megváltozása az izotermikus munka mértéke:

$$\Delta F = - \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Az entalpiához és a szabadenergiához hasonlóan más állapotjelzőket is értelmezhetünk. A fogalomalkotás módja minden esetben hasonló a két esethez.

XIV. Feladatcsoport: az ideális gázok hótana

XIV/1. Egy gáztartályban 27°C -os, 10^5 Pa nyomású ideális gáz van. Ha a gáz negyed-részt kiengedjük, a hőmérséklet 10°C -kal csökken. Mennyi lesz a palackban a nyomás ezután?

XIV/2. Mennyi a sűrűsége 20°C -on és $1,5 \cdot 10^5$ Pa nyomáson annak a gáznak, amelynek a sűrűsége normálállapotban 716 g/m^3 ?

XIV/3. Mekkora hőmérsékleten lesz az $1,6 \cdot 10^5$ Pa nyomású oxigén sűrűsége ugyanakkora, mint a 10°C hőmérsékletű, $6 \cdot 10^5$ Pa nyomású hidrogén sűrűsége?

XIV/4. Mekkora a sűrűsége a 30°C hőmérsékletű, 1 atm nyomású levegőnek?

XIV/5. Egy gáztartályban 10 liter 58°C -os, $150 \cdot 10^5$ Pa nyomású oxigén van. A

tartályból kiengedjük a gáz egy részét, így a nyomás $50 \cdot 10^5$ Pa, a hőmérséklet 18°C lesz. Mennyi gáz volt a tartályban és mennyit engedünk ki?

XIV/6. Gázpalackban 1000 g tömegű, 10^5 Pa nyomású, 300 K hőmérsékletű gáz van. Mennyi gázt engedünk ki a tartályból, hogy a nyomása 350 K hőmérsékleten se legyen nagyobb, mint $1,1 \cdot 10^5$ Pa?

XIV/7. Egy jó hőszigetelő edényben vékony fallal elválasztva ugyanaz az anyagi minőségű gáz van. Az egyik oldalon a gáz $1,5 \text{ dm}^3$ térfogatú, 3 atm nyomású és 310 K hőmérsékletű, a másik oldalon 3 dm^3 térfogatú 2 atm nyomású és 300 K hőmérsékletű. Határozzuk meg az állapotjelzők értékét, ha a falat eltávolítottuk!

XIV/8. Hőszigetelő falú tartályban 3 liter, illetve 4 liter normálállapotú levegő van bezárva (2.45. ábra). A válaszfal is hőszigetelő és súrlódásmentesen mozog. A 3 literes rész hőmérsékletét a beépített melegítővel 30°C -kal felmelegítjük. A jobb oldali gázt pedig addig melegítjük, amíg a hőmérséklete 20°C nem lesz. Határozzuk meg az állapotjelzők értékét a két oldali gáz melegítése után!

XIV/9. A 2.46. ábrán látható gáztartályban 3 liter, illetve 2 liter levegő van. Az edény fala és a dugattyú hővezető. A két gáz nyomása kezdetben 2,2 atm. A bal

oldali tartályból kiengedjük a gáz felét. Hol lesz a dugattyú új helyzete?

XIV/10. Súrlódás nélkül mozgó, elhanyagolható tömegű dugattyú $0,6 \text{ m}^3$ térfogatú, 320 K hőmérsékletű levegőt zár el. Mennyi lesz a gáz térfogata, ha a hőmérséklet 270 K-re csökken és a gáz tömegének $1/3$ -részét kiengedjük?

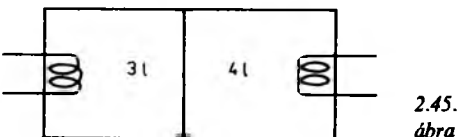
XIV/11. Egy gázpalackban 300 K hőmérsékleten $6 \cdot 10^6$ Pa nyomású nitrogén van. Mennyi lesz a palackban a gáz nyomása, ha a gáz 20%-át kiengedjük, de a hőmérsékletet 10 K-nel növeljük?

XIV/12. Egy 200 liter térfogatú tartályban oxigén és nitrogén keveréke van. Az oxigén tömege 160 g, a nitrogéné 84 g. A keverékgáz hőmérséklete 320 K. Mekkora a gáz nyomása?

XIV/13. A 10^{-11} Pa nyomású vákuum elérhető 270 K hőmérsékleten. Hány molekula van az ilyen ritka gáz 1 cm^3 -nyi térfogatában?

XIV/14. Az 1 m hosszú, 1 cm^2 keresztmetszetű, egyik végén zárt cső nyitott vége higany felszínéhez illeszkedik. A felemelkedő higanyoszlop hossza 63 cm. A külső levegő $1,013 \cdot 10^5$ Pa nyomású, hőmérséklete 300 K. Mekkora a higany feletti térrészbe került levegő tömege? Mekkora lenne ennek a levegőnek a térfogata normálállapotban?

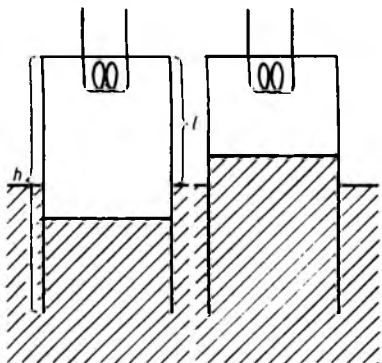
XIV/15. Vékony falú, hőálló üveghenger keresztmetszete 1 dm^2 , hossza 4 dm. A hengerben kezdetben a külső levegővel azonos állapotú, 10^5 Pa nyomású és 300 K hőmérsékletű levegő van. A hengert nyitott végével függőleges helyzetben higanyba eresztjük (2.47. ábra). Ekkor a henger zárt fedőlapja a külső higanyfelszín felett van 20 cm-rel. A levegőt felmelegítjük úgy, hogy kitágulva egy része távozik az edény nyitott végén. Ezután a fűtést kikapcsoljuk. A levegő a kezdeti hőmérsékletre hűl.



2.45. ábra



2.46. ábra



2.47. ábra

Ekkor az edény belsejében a higany 2 cm-rel van a külső higany szint felett. Mekkora volt a levegő hőmérséklete a fűtés befejezésekor? Mennyi gáz távozott melegítéskor?

XIV/16. Gáztartályban 10 liter, 40 atm nyomású, 300 K hőmérsékletű ammóniagáz van. Hány molekula van a tartályban? Mennyi a gáz tömege? Határozzuk meg a gáz belső energiáját! Mennyi energia jut a gáz egyetlen molekulájára? Mekkora egyetlen molekula átlagos sebessége? Mennyivel nő meg egy molekula energiája, ha a hőmérséklet 12 K-nel nő?

XIV/17. Egy 16 literes gáztartályban $4 \cdot 10^{23}$ héliumatom van. A gáz összes belső energiája 2400 J. Mekkora a gáz hőmérséklete? Mennyi energia jut egy atomra? Hány gramm gáz van a tartályban? Határozzuk meg a gáznyomást!

XIV/18. Egy 10 literes gáztartályban 10^6 Pa nyomású neongáz van. A gáz hőmérséklete 300 K. Hány mol gáz van a tartályban? Hány molekulát tartalmaz a gáz? Mennyi a részecskék összes mozgási energiája?

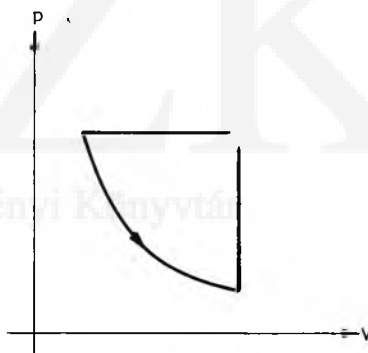
XIV/19. Állandó térfogaton 300 K-ről 340 K-re melegítünk 1 mol hidrogént. A kezdeti nyomás 10^5 Pa. Ábrázoljuk a folyamatot p – V , T – V , p – T és E – T koordináta-rendszerben!

XIV/20. Állandó nyomáson 300 K-ről 340 K-ra melegítünk 1 mol oxigént. A kezdeti térfogat 25 dm^3 . Ábrázoljuk a folyamatot p – V , T – V , p – T és E – T koordináta-rendszerben!

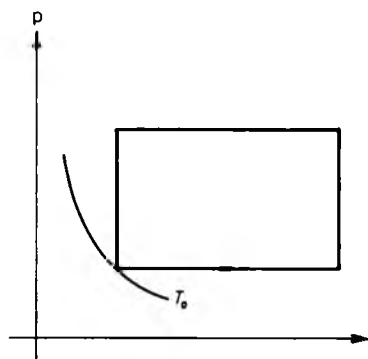
XIV/21. Állandó hőmérsékleten 10 liter-ről 4 literre nyomunk össze 1 molnyi levegőt. A gáz kezdeti nyomása $2,5 \cdot 10^5$ Pa. Ábrázoljuk a folyamatot p – V , T – V , p – T és E – T koordináta-rendszerekben!

XIV/22. A 2.48. ábrán egy nitrogénnel végzett körfolyamatot szemléltetünk. Ábrázoljuk a folyamatot T – V , p – T és E – T koordináta-rendszerben!

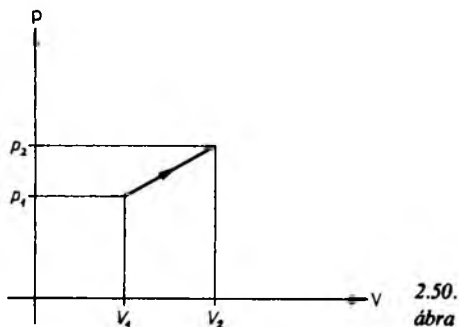
XIV/23. A 2.49. ábrán egy metángázzal végzett körfolyamat pályáját látjuk. A kezdeti hőmérséklet 300 K. Ábrázoljuk a folyamatot T – V , p – T és E – T koordináta-rendszerben!



2.48. ábra



2.49. ábra



2.50. ábra

XIV/24. A 2.50. ábrán egy hidrogénnel végzett folyamatot ábrázoltunk. Az 1 molnyi mennyiségű gáz kezdetben normálállapotú. A végállapot nyomása: $1,5 \cdot 10^5$ Pa, térfogata 38,1 liter. Ábrázoljuk a folyamatot T – V , p – T és E – T koordináta-rendszerben!

XIV/25. Hidrogéngáz nyomása 10^5 Pa, térfogata 1 dm^3 . Állandó hőmérsékleten $2,7 \text{ dm}^3$ -re tágul. Mennyi hőt vett fel a gáz ebben a folyamatban?

XIV/26. Állandó, 300 K hőmérsékleten 1 atm nyomásról 7,4 atm nyomásra nyomunk össze 23,3 g tömegű levegőt. Mekkora munkát végeztünk a gázon?

XIV/27. Zárt gáztartályban 30 liter 2 atm nyomású hidrogén van. A gázt felmelegítve nyomása 3,3 atm-ra nő. Mennyivel változott a gáz belső energiája? Mennyi hőt vett fel a gáz?

XIV/28. Egy tartályban 30 liter 2 atm nyomású, 300 K hőmérsékletű oxigén van. A gáz térfogata állandó, hőmérséklete 340 K-re nő. Mennyi hőt vett fel a gáz?

XIV/29. Állandó térfogaton 300 K-ről 340 K-re melegítünk 40 g héliumgázt. Mennyivel nőtt a belső energia, és mennyi hőt vett fel a gáz?

XIV/30. Állandó térfogaton 1 mol mennyiségű levegő felvesz 2500 J hőt. Mennyivel nőtt a hőmérséklete?

XIV/31. Egy 10 liter térfogatú tartályban 30 g szén-dioxid van. A nyomása $1,7 \cdot 10^5$ Pa. A tartályba szerelt 10 W teljesítményű melegítőt 5 percig működtetjük. Mennyivel nőtt a gáz belső energiája? Mekkora a kezdeti és a végső állapot hőmérséklete?

XIV/32. Hány joule hővel tudnánk 10 liter térfogatú, normálállapotú levegő nyomását állandó térfogatra melegítve megháromszorozni?

XIV/33. Állandó 1 atm nyomáson melegítünk 30 liter levegőt, amíg a térfogata 34 literre nő. Mennyivel változott a gáz belső energiája? Mennyi munkát végeztünk a gázon? Mennyi hőt vett fel a gáz?

XIV/34. Vízszintesen fekvő hengert könnyen mozgó dugattyú zár le. A hengerben kezdetben 30 liter 1 atm nyomású, 300 K hőmérsékletű ammóniagáz volt. A gáz hőmérséklete állandó nyomáson 340 K-re nőtt. Mennyivel változott a gáz belső energiája? Mennyi munkát végeztünk a gázon a környezete? Mennyi hőt vett fel a gáz?

XIV/35. Állandó nyomáson melegítünk 85 g ammóniagázt: a hőmérséklete 300 K-ről 360 K-re nő. Mennyivel változott a gáz belső energiája? Mennyi munkát végeztünk a gázon a környezete? Mennyi hőt vett fel a gáz?

XIV/36. Vízszintesen fekvő, 1 cm^2 keresztmetszetű üvegcsőben 300 K hőmérsékletű levegőt egy kis higanycsepp zár el. Az elzárt levegő kezdetben 40 cm^3 térfogatú. Mennyi hőt kell elvonni a gáztól állandó nyomáson, hogy térfogata 12 cm^3 -rel csökkenjen? Mennyi munkát végeztünk a gázon a környezete? Mennyivel változott a gáz belső energiája?

XIV/37. Állandó nyomáson oxigéngázt nyomunk össze. Eközben 400 J munkát végeztünk a gázon. Mennyivel változott

meg a belső energiája? Mennyi hőt ad le a gáz?

XIV/38. Egy tartály függőlegesen mozgó, 2 dm^2 keresztmetszetű könnyű dugattyújára 40 kg tömegű testet helyezünk. A dugattyú 4 dm -re van a tartály aljától. A bezárt levegő 280 K hőmérsékletű. A levegőt beépített 10 W -os melegítővel 2 percig melegítjük. Mennyivel változott a gáz belső energiája? Mennyi munkát végzett a gázon a környezete? Határozzuk meg a végállapot állapotjelzőit!

XIV/39. Sűrűlódás nélkül mozgó dugattyúval lezárt hengerben 30 liter 15 atm nyomású, 273 K hőmérsékletű nitrogén van. Állandó nyomáson 1500 J munkát végeztünk a gázon. Mekkora lesz a hőmérséklete ezután és mennyi hőt ad le miközben összenyomjuk? Mennyivel változott a belső energiája?

XIV/40. Egy gáztartályban 10 liter 280 K hőmérsékletű, 1 atm nyomású nitrogén van. Állandó nyomáson melegítve mennyi hőt kell ahhoz közölni, hogy a térfogata 12 liter legyen? Mennyivel nőtt a belső energiája, és mekkora a gázon végzett munka? Határozzuk meg a végállapot hőmérsékletét!

XIV/41. Hőszigetelt falú dugattyúval elzárt tartályban 4 liter 2 atm nyomású levegő van. A dugattyú rögzítését feloldjuk, a gáz kitágul a külső levegővel egyenlő 1 atm nyomásra. Mennyi munkát végzett a gázon a környezete? Mennyivel változott a gáz belső energiája?

XIV/42. Hőszigetelt falú tartályt könnyen mozgó dugattyú zár el. A tartályban 200 g tömegű, 280 K hőmérsékletű hélium van. A gáz hőmérséklete 340 K -re nő, mert a dugattyút befelé toljuk a hengerbe. Mennyi munkát végeztünk eközben? Mennyivel változott a gáz belső energiája?

XIV/43. Hőszigetelt falú tartályban 40

liter 1 atm nyomású és 300 K hőmérsékletű egyatomos ideális gáz van. A dugattyút hirtelen kirántjuk. Ekkor a gáz hőmérséklete 260 K -re csökken. Mennyi munkát végeztünk a gázon?

XIV/44. Adiabatikus folyamatokban félére csökkentjük egy kezdetben 30 liter térfogatú, 1 atm nyomású és 270 K hőmérsékletű héliumgáz térfogatát. Mennyi lesz a végállapot nyomása és hőmérséklete? Mennyi munkát végeztünk eközben a gázon? Mennyivel változott a gáz belső energiája?

XIV/45. Kezdetben normálállapotú, 5 liter térfogatú héliumot hirtelen mozdulatlan összenyomjuk és eközben 274 J munkát végzünk a gázon. Határozzuk meg a végállapot állapotjelzőit!

XIV/46. Kezdetben normálállapotú, 5 liter térfogatú levegő kitágul úgy, hogy közben a nyomás a térfogattal arányosan nő. A végső állapotban a nyomás 2 atm , a térfogat 8 liter. Mekkora a végállapot hőmérséklete? Mennyi munkát végeztünk a gázon? Mennyivel változott a gáz belső energiája? Mennyi hőt kellett a gázzal közölni?

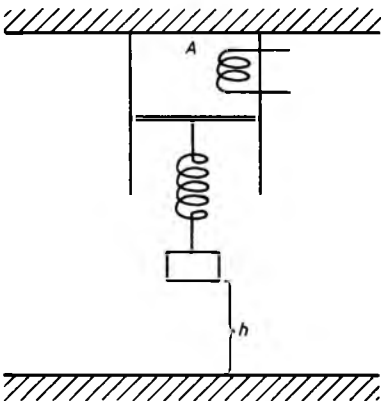
XIV/47. Egy fekvő üvegcső hossza 1 méter, keresztmetszete 1 cm^2 . A csőben 50 cm hosszú levegőoszlopot 20 cm hosszú higanycsepp zár el. A csövet függőleges helyzetbe állítjuk úgy, hogy a nyitott vége felül legyen. A levegő összenyomódik. Ezt a folyamatot állandó hőmérsékletűnek tekintjük. A külső és belső hőmérséklete most 300 K , a külső levegő nyomása 10^5 Pa . Ezután a cső zárt végét addig melegítjük, amíg a higany teljesen kifolyik a cső felső végén. Mekkora a végső hőmérséklet? Mekkora a hőmérséklet, amikor a higany eléri a cső felső végét? Mennyivel változott a gáz belső energiája? Mekkora a gázzal melegítés közben közölt hő? Ábrá-

zoljuk a folyamat pályáját p – V koordináta-rendszerben!

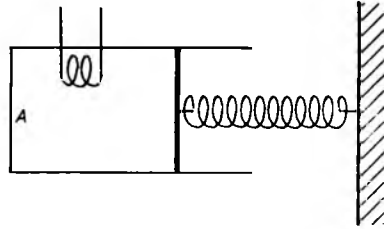
XIV/48. Egy fekvő üvegcső hossza 1 méter, keresztmetszete 1 cm^2 . A csőben 50 cm hosszú levegőoszlopot 20 cm hosszú higanycsepp zár el. A csövet függőleges helyzetbe állítjuk úgy, hogy a nyitott vége alul legyen, ekkor a levegő izotermikusan kitágul. A külső és a belső hőmérséklet 300 K, a külső nyomás 10^5 Pa . Ezután a cső zárt végét melegítjük, amíg a cső alsó végén az összes higany elfolyik. Mennyi hőt kellett közölni a gázzal? Mekkora a végső hőmérséklet? Ábrázoljuk a folyamat pályáját!

XIV/49. Mennyezethez rögzített 1 dm^2 keresztmetszetű hengerben levegő van. A levegő kezdetben 3 liter térfogatú és 300 K hőmérsékletű. A gázt elzáró dugattyú súlytalan, de 100 N/cm rugóállandójú rugót erősítünk hozzá. A rugóról 40 kg tömegű test függ, a talaj felett 10 cm magasan. A levegőt lassan melegítjük, amíg a térfogata 4,4 liter lesz (2.51 ábra). Mennyi hőt kellett a gázzal közölni? Mekkora a végállapot hőmérséklete?

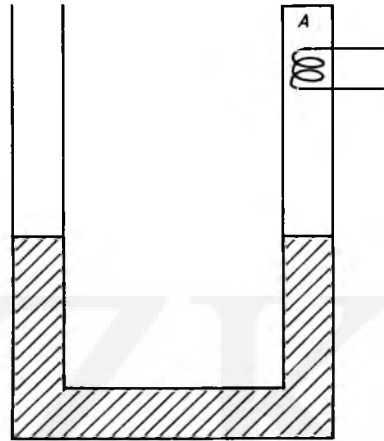
XIV/50. Egy 10 dm^2 keresztmetszetű dugattyúhoz 10^4 N/m erősségű, kezdetben nyugalmi hosszúságú rugó csatlakozik és a



2.51. ábra



2.52. ábra



2.53. ábra

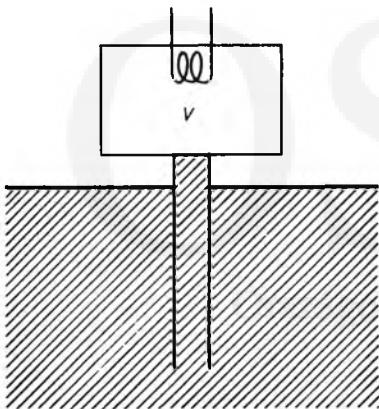
hengerben elzár 100 liter normálállapotú levegőt. A gázt beépített izzószállal 100°C -kal felmelegítjük (2.52. ábra). Határozzuk meg a végállapot állapotjelzőit! Mennyi hőt kellett közölni a gázzal?

XIV/51. Egy U alakú cső egyik vége zárt, a másik vége nyitott. A függőleges száruk 100 cm hosszúak, a vízszintes szár 40 cm hosszú. A cső mindvégig 1 cm^2 keresztmetszetű. Kezdetben 40 cm magasan van a függőleges szárukban a higany (2.53. ábra). Mennyi hőt kell közölni az elzárt gázzal, hogy a higany teljesen elhagyja az U alakú csövet?

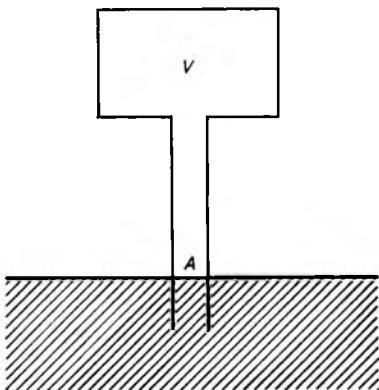
XIV/52. Egy 2,2 liter térfogatú tartályhoz 1 cm^2 keresztmetszetű, 40 cm hosszú cső csatlakozik. A cső a higanyba merül, és teljesen kitölti a folyadék. A tartályban és

kívül kezdetben normálállapotú a levegő. A beépített melegítővel addig melegítjük a gázt, amíg a higany kiszorul a csőből (2.54. ábra). Határozzuk meg a végállapot jellemzőit! Mekkora hőt kellett közölni a gázzal?

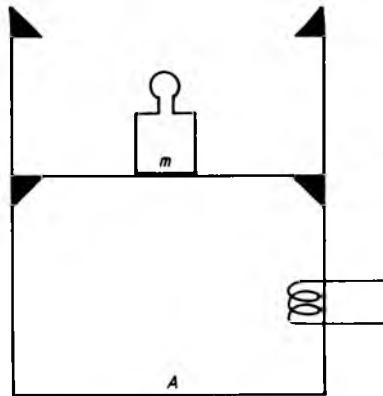
XIV/53. Egy 2,2 liter térfogatú tartályhoz 1 cm^2 keresztmetszetű, 40 cm hosszú üvegcső csatlakozik, amely 10 cm mélyen higanyba merül. A csőben és a csövön kívül a higanyfelszín azonos magasságú. A tartályban és kívül kezdetben normálállapotú a levegő. A környezet 10°C -kal hűl (2.55. ábra). Mennyivel kerül feljebb a csőben a higany? Mennyi hőt ad le a tartályba zárt levegő?



2.54. ábra



2.55. ábra

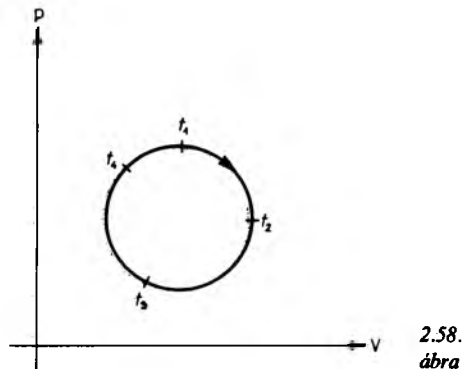
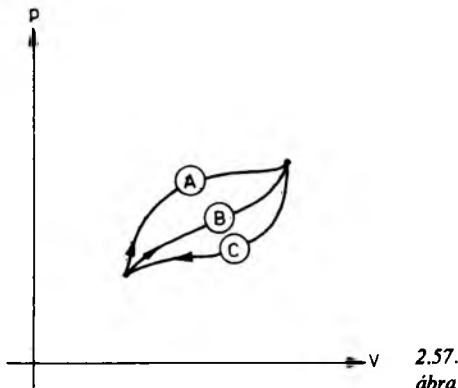


2.56. ábra

XIV/54. Egy 2 dm^2 keresztmetszetű hengerben, függőleges irányban egy könnyű dugattyú súrlódás nélkül mozoghat a falhoz belülről rögzített két gyűrű között. Az első gyűrű 3 dm , a második 5 dm magasan van a henger alaplapja felett. A hengerben oxigén van, kezdetben a térfogata 6 liter , a hőmérséklete 300 K , a nyomása 10^5 Pa , megegyezik a külső levegő nyomásával. Ekkor a dugattyúra helyezünk egy 50 kg tömegű testet. Ezután a gázt a beépített 10 W -os melegítővel 250 másodpercig melegítjük (2.56. ábra). Ábrázoljuk a folyamat pályáját a p — V síkon és az E — V síkon. Határozzuk meg a folyamat kitüntetett pontjaiban az állapotjelzők értékét! Mekkora munkát végez a környezet a gázon?

XIV/55. A 2.57. ábrán látható A folyamatban a gázon végzett munka -200 J , a gázzal közölt hő 800 J . A B folyamatban a gázon végzett munka -150 J . A C folyamatban a gáz lead -700 J hőt. Mekkora a felvett hő a B folyamatban? Mekkora a gázon végzett munka a C folyamatban?

XIV/56. Valamely gáz állandó térfogaton mért fajhője: $c_V = 1,466 \text{ J}/(\text{g K})$, állandó nyomáson pedig $c_p = 1,955 \text{ J}/(\text{g K})$. Határozzuk meg a gáz szabadsági fokát és a molekulatömegét!



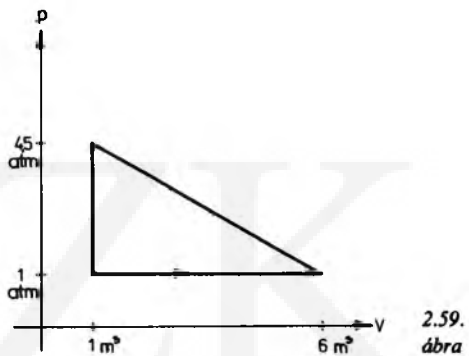
XIV/57. Egy kétatomos gáz állandó térfogaton vett fajhője: $c_V = 0,716 \text{ J/(g K)}$. Mekkora az állandó nyomáson vett fajhője? Határozzuk meg a gáz molekulatömeget!

XIV/58. Tegyük fel, hogy 1 m^3 térfogatú, 10^5 Pa nyomású oxigén entrópiája 0. Mennyi az entrópiája 5 m^3 térfogatú, $2,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nyomású, 300 K hőmérsékletű oxigénnek?

XIV/59. Állandó hőmérsékleten 2 literről 5 literre tágul 28 g levegő. Mennyivel változott az entrópiája?

XIV/60. Egy 12 literes gázpalackban 300 K hőmérsékletű, 12 atm nyomású oxigéngáz van. Mennyivel változik az entrópiája, ha az állandó térfogaton 350 K -re melegszik?

XIV/61. Egy hőszigetelt falú tartályt egy eltávolítható fal két részre oszt; az egyik rész 3 atm nyomású és 2 m^3 térfogatú, a másik 4 atm nyomású és 1 m^3 térfogatú. Mindkét részben 300 K hőmérsékletű hélium van. A falat eltávolítjuk. Mennyivel változik a rendszer összes entrópiája keveredés következtében?



XIV/62. A 2.58. ábrán egy ideális gázzal végzett folyamat pályáját látjuk. A t_1, t_2, t_3, t_4 időpontokban milyen előjelű a felvett hő és a munka? Ezekben az időpontokban éppen nő a belső energia vagy csökken?

XIV/63. A 2.59. ábrán látható körfolyamatot 1 mol héliummal végezzük. A nyomás- és térfogatértékek leolvashatók az ábráról. Határozzuk meg a körfolyamat termikus hatásfokát!

XIV/64. Mennyi az entalpiája 50 g normálállapotú héliumgáznak? Mennyivel változik az entalpia, ha a rendszer állandó nyomáson felvesz 7000 J hőt?

3. Reális gázok, folyadékok, szilárd testek hőtana

3.1. Reális gázok

3.1.1. Van der Waals-állapotegyenlet

Ezekben a pontokban a reális gázok, a folyadékok és a szilárd testek termodinamikáját tekintjük át.

Jól kell látnunk, hogy a valóságos anyagokra vonatkozó energia- és entrópiamérleg már ismert:

$$\Delta E = Q + W + W_e + W_k, \quad (1)$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} + \sigma. \quad (2)$$

Most a reális gázokra érvényes állapotegyenletek felírása a feladat.

Az ideális gázok egyik állapotegyenlete az általános gáztörvény. A valóságos gázok megfelelő egyenletét olyan formában szeretnénk megfogalmazni, amely az általános gáztörvényhez jól hasonlít, és rámutathatunk a különbség hátterére.

Van der Waals az ideális gázok állapotegyenletét úgy alakította át, hogy figyelembe vette a gáz molekuláinak az összes térfogatát, amely a rendelkezésre álló mozgásteret csökkenti. Másrészt azt is figyelembe vette, hogy a gáZRészecskék egymással és az edény falával történő ütközése *nem* teljesen rugalmas (az ε ütközési együttható kisebb 1-nél), ezért a gáZRé-

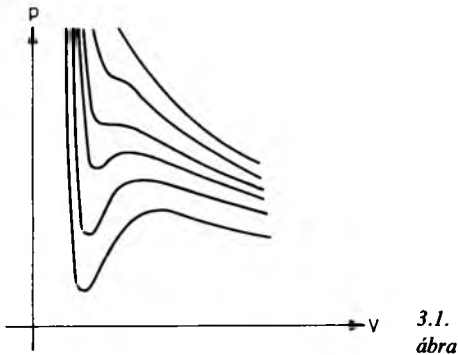
szecskék által az edény falának ütközésekor átadott impulzus (erőlökés) kisebb, mint az ideális gáz esetén. Emiatt a nyomás és a gáZRészecskék átlagos mozgási energiája (és így a hőmérséklet) közötti kapcsolat is módosul az ideális gáznál megismerthez képest.

A *van der Waals-állapotegyenlet*:

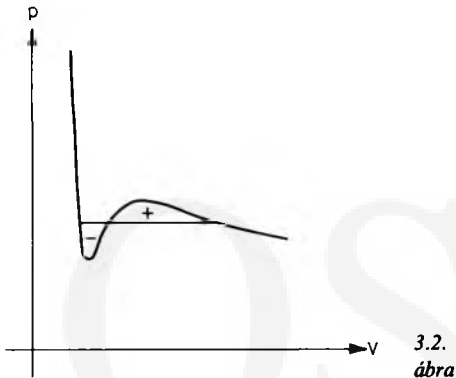
$$\left(p + a \frac{m^2}{V^2} \right) (V - mb) = \frac{m}{M} RT, \quad (3)$$

ahol a és b a gáz anyagi minőségére jellemző állandók. A (3) állapotegyenlet formáját részletesen nem indokoljuk.

A van der Waals-féle állapotegyenlet jól leírja a valóságos gázok viselkedését. Rögzítsünk egy hőmérsékletet tetszőlegesen, legyen ez T . Ekkor minden V térfogathoz egyértelműen megadható az a p nyomás, amely a V -vel együtt kielégíti a (3) állapotegyenletet. A nyomás megadható a térfogat függvényeként. A nyomás-térfogat függvény grafikonja különböző hőmérsékletek esetén a 3.1. ábrán látható. Ezek az állandó hőmérsékletre tartozó görbék, az izotermák. Jól látható, hogy a magasabb hőmérsékletű izotermák lefutása hasonló az ideális gázok izotermájához. Egy bizonyos izoterma alatt azonban a görbéken



3.1.
ábra



3.2.
ábra

egy völgy és egy hegy figyelhető meg. Az izotermák két csoportra oszthatók. Bizonyos izotermák esetén egy tetszőlegesen választott p nyomáshoz egyetlen V térfogat tartozik. A másik csoportba tartozó izotermáknál bizonyos nyomástartományban a nyomásértékekhez három térfogatérték tartozik. Ezt a két izoterma típust elválasztó — az első osztályba tartozó — izotermát *kritikus izotermának* nevezzük, és a hozzátartozó hőmérsékletet *kritikus hőmérsékletnek* hívjuk.

Míg a kritikus izoterma felett a kísérleti görbék igen jó egyezést mutatnak a (3) alapján elméletileg számolt görbékkel, addig a kritikus izoterma alatt a valóságos — kísérletileg megfigyelt — görbéken a hurok helyett egy vízszintes szakasz van. A

vízszintes szakasz úgy metszi át az izotermát, hogy a 3.2. ábrán a + és - jelű terület megegyezik. Az így módosított izoterma ebben a tartományban kielégítő pontossággal használható.

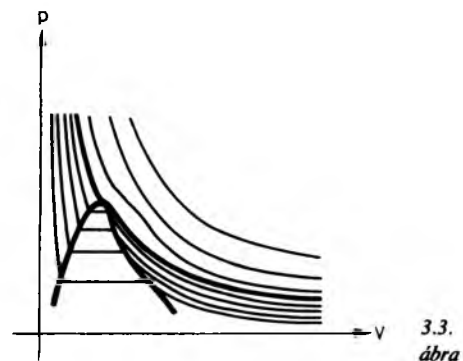
A van der Waals-féle izotermák és a kísérletileg felvett görbék a kritikus hőmérséklet felett közelítőleg megegyeznek; a kritikus hőmérséklet alatt annyiban különböznek, hogy a van der Waals-féle izoterma hegye-völgye a kísérletileg megfigyelt izotermán el van simítva.

3.1.2. Telített és telítetlen gőzök

A kritikus izoterma alatti izotermáknak van egy vízszintes szakasza. A gáz állapotváltozása ezen a szakaszon izobár és izoterm egyidejűleg.

Nyilvánvaló, hogy ezeken a szakaszokon a gáz belső energiája nem a hőmérséklettel arányosan változik. A belső energia a hőmérsékletnek nem olyan egyszerű függvénye, mint az ideális gázok energiája.

Kössük most össze a kísérletileg felvázolt izotermák töréspontjait. Ekkor egy süveg kontúrjához hasonló görbét kapunk. Ez a kritikus izotermával egyesítve a p - V síkot négy tartományra osztja (3.3 ábra). A kritikus izoterma fölött haladó



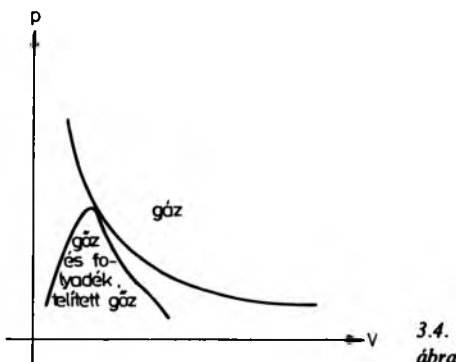
3.3.
ábra

izotermákban nincs olyan hurok, mint a kritikus izoterma alatti van der Waals-görbékben. Sőt, minél magasabbra megyünk a kritikus hőmérséklet fölé, az izotermák egyre inkább hasonlítanak a hiperbolákhoz. Ez azt jelenti, hogy ebben a tartományban állandó hőmérsékleten a p és V fordítottan arányos egymással: az általános gáztörvény érvényben van. A kritikus hőmérséklet fölött a gáz ideális gázként viselkedik.

A kritikus izoterma alatt a süvegformájú tartományban összenyomva a gázt, az állapotváltozás állandó nyomáson és állandó hőmérsékleten megy végbe. Az anyagnak a halmazállapota változik meg: a gáz halmazállapotú anyag folyékony halmazállapotba megy át.

Ebben a tartományban a gáz halmazállapotú anyagot *telített gőznek* nevezzük. A telített jelző arra utal, hogy a térfogat csökkentésével a nyomás nem nő, állandó hőmérsékleten állandó marad, és a gáz egy része lecsapódik (3.4. ábra).

A telített gőzt összenyomjuk, akkor egy része folyadékká alakul. A gázon végzett munka növeli a belső energiát, a rendszer azonban több hőt ad le az edény falán keresztül. Végeredményben a belső energia csökken.



3.4. ábra

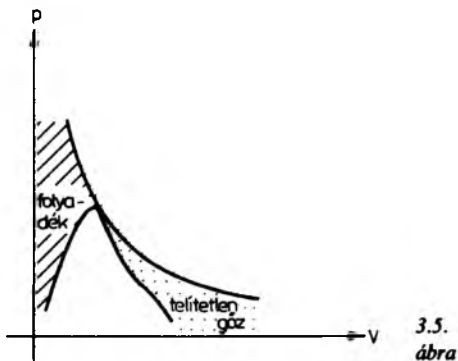
Fordítva: ha a telített gőzt tartalmazó tartály dugattyúját kihúzzuk, akkor állandó hőmérsékleten a nyomás mindaddig állandó marad, amíg a gőz érintkezik a folyadékkal: amíg a folyadékból kellő mennyiségű alakulhat gőzzé. Ez az átalakulás a folyadék *forrása*, a lecsapódással ellentétes folyamat.

A folyadék forrása energiát igényel. Ezt a rendszerbe áramló hő szolgáltatja, pótolja a táguláskor a gáz energiájának negatív munka formájában történő csökkenését is.

A telített gőzök nyomása és sűrűsége a hőmérséklettől függ. Az összetartozó hőmérséklet—nyomás—sűrűség értékeket az alábbi táblázatban tüntettük fel. Látható, hogy a hőmérséklet növelésével a nyomás erősen növekszik.

Hőmérséklet, °C	Nyomás, Pa	Sűrűség, kg/m ³
0	608	0,0048
10	1 226	0,0094
20	2 334	0,0173
30	4 236	0,0303
40	7 374	0,0511
50	12 337	0,0829
60	19 917	0,1302
70	31 156	0,1981
80	47 356	0,2933
90	70 107	0,4235
100	101 325	0,5977
125	232 122	1,2990
200	1 554 349	7,8570

A táblázatból kiolvasható, hogy a víz 100 °C-on 101 325 Pa = 1 atm nyomáson forr, és a folyadékkal érintkező gőz sűrűsége 0,5977 g/cm³. Hasonlóan: 50 °C-on a



3.5.
ábra

telített gőz nyomása nagyjából 0,12 atm és a sűrűsége $0,08 \text{ g/cm}^3$.

Ha egy tartályban 0,12 atm nyomást állítunk elő, akkor a tartályba töltött víz már 50°C -on forr. Ha a függőleges tartály dugattyúját úgy terheljük, hogy a tartályban a nyomás 2,32 atm legyen, akkor a tartályba töltött víz csak 125°C -on kezd forrni. A kuktának nevezett főzőfazekak működésének ez az értelme. Bizonyos fehérjék 100°C -on főzve megtartják szerkezetüket. Ahhoz, hogy megpuhuljon a hús vagy a bab, magasabb hőmérséklet szükséges. Sütésnél ez könnyen megvalósítható, de főzéssel csak úgy lehet elérni, hogy a víz forráspontját megemeljük. Ez — mint látjuk — úgy történhet, hogy a tartályban (főzőedényben) megnöveljük a nyomást.

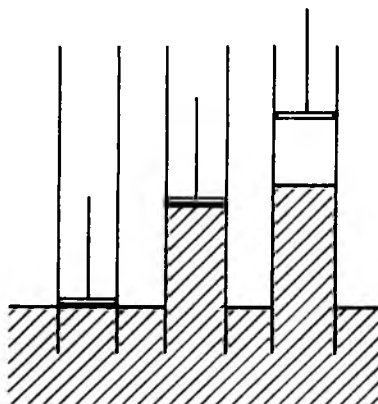
A p — V síknak két tartománya van, amelynek a jelentését még nem beszéltük meg. A telített gőz tartománytól balra folyadékállapotban van az anyag, a telített gőz tartománytól jobbra a gáz halmazállapotú anyagot *telítetlen gőz*nek nevezik. Erre a tartományra érvényes a van der Waals-egyenlet (3.5. ábra).

Összefoglalva tehát: a kritikus izoterma felett az általános gáztörvény érvényes, itt az anyagot az ideális gázmodell jól jellemzi. A kritikus izoterma alatt a folyadéktar-

tomány mellett a telített gőz tartománya található, ebben az állapotban az állapotjelzők kapcsolatát leíró állapotegyenlet helyett a nyomás—sűrűség—hőmérséklet táblázatot használjuk. (Ez a táblázat tehát azt a szerepet tölti be, mint a p -re, ρ -ra és T -re vonatkozó állapotegyenlet.) A negyedik tartomány a telítetlen gőz állapotait tartalmazza. Ezekre a van der Waals-állapotegyenlet jellemző.

┌ Vizsgáljuk meg a következő feladatot. Tegyük fel, hogy egy 20 méter hosszú, 1 dm^2 keresztmetszetű, függőleges csőben könnyű dugattyú mozoghat súrlódás nélkül. A cső alsó vége 60°C hőmérsékletű vízbe merül. A cső és a környező levegő hőmérséklete is 60°C . A levegő nyomása 10^5 Pa .

Gondoljuk el, hogy a dugattyút a víz felszínéről lassan húzzuk fölfelé. A dugattyú és a víz érintkezik a csőben. Ha a dugattyú emelkedik, a vízoszlop vele együtt egyre magasabbra kerül. Egy bizonyos magasságban azonban a csőben fölfelé kúszó víz felszíne és a dugattyú elválik egymástól. Ebben a résben megjelenik a telített gőz. Ha a dugattyút tovább húzzuk, a víz már nem emelkedik utána. A közöttük lévő térrészt telített vízgőz tölti ki (3.6. ábra). Ezen a hőmérsékleten a telített



3.6.
ábra

gőz nyomása megközelítően $0,2 \cdot 10^5$ Pa. Jelöljük a vízoszlop tovább nem növekvő hosszát h -val. Ekkor a víz felszíne fölötti telített gőz nyomása és a vízoszlop hidrosztatikai nyomása egyensúlyt tart a külső levegő nyomásával:

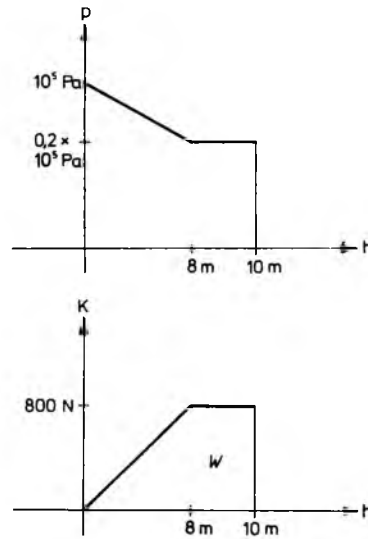
$$p + h\rho g = p_0,$$

innen $h = 8$ m. A dugattyúval legfeljebb 8 méter magasra húzhatjuk fel a vizet. Ha a dugattyút magasabbra emeljük, akkor a víz felszíne tovább nem emelkedik, a gőztérben a nyomás változatlanul $0,2$ atm lesz, és a folyadékból folyamatosan gőz áramlik a térrészbe. Ha a dugattyút lefelé mozdítanánk, akkor a víz felszíne 8 méter magasan maradna, a gőz folyamatosan lecsapódna.

Ha a dugattyút a külső vízfelszín fölé emeljük 10 méterrel, akkor a térrészben $V = 2 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m}^2 = 0,02 \text{ m}^3$ térfogatú vízgőz van. Ennek a telített gőznek a tömege $m = 0,02 \text{ m}^3 \cdot 0,1302 \text{ kg/m}^3 = 2,6 \text{ g}$.

A dugattyú alján kezdetben a nyomás megegyezik a külső levegő 10^5 Pa nyomásával. Ezután a dugattyút fölfelé emelve a nyomás a magassággal egyenletesen csökken $0,2 \cdot 10^5$ Pa nyomásig. Ezután a nyomás már változatlan (3.7. ábra).

A nyomás—magasság függvényéből meghatározhatjuk a dugattyú emeléséhez szükséges erőt. Kezdetben, amikor a dugattyú még a külső víz felszínén van, a dugattyúra ható kényszererő nulla, erről az értékről egyenletesen növekszik. Ha a dugattyú 8 méter magasban van, akkor a ráható kényszererő mellett a külső levegő 10^5 Pa nyomásából számított $10^5 \cdot 0,01 = 10^3$ N erő hat lefelé. Fölfelé a belső telített vízgőz $0,2 \cdot 10^5 \cdot 0,01 = 0,2 \cdot 10^3$ N erőt fejt ki. A K kényszererő így $K = 0,8 \cdot 10^3 = 800$ N. A dugattyút tovább emelve a K erő nem változik. A dugattyú felemeléséhez szükséges munka így az áb-



3.7. ábra

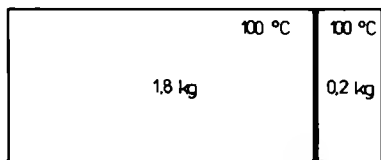
rán látható trapéz területe:

$$W = \frac{10 + 2}{2} \cdot 800 = 4800 \text{ J.}$$

A következő feladatban egy 2 m^3 térfogatú hőszigetelt falú tartály szerepel. A tartályt egy dugattyú két, 1 m^3 -es részre osztja szét. Mindkét rész légüres, és mindkettő fala állandóan 100°C hőmérsékletű. A dugattyú kezdetben rögzített.

Ezen a hőmérsékleten a telített vízgőz sűrűsége közelítőleg $0,6 \text{ kg/m}^3$. Ha $0,6 \text{ kg}$ -nál kevesebb 100°C -os vizet töltünk az egyik térrészbe, akkor nem alakul ki a telített gőz állapot, ha a térrészbe vitt víz mennyisége $0,6 \text{ kg}$ -nál több, akkor $0,6 \text{ kg}$ telített vízgőz lesz a térrészben, a többi pedig kondenzálódva, lecsapódva a tartály alján helyezkedik el.

Tegyük fel tehát, hogy az egyik térrészbe $1,8 \text{ kg}$, a másik térrészbe $0,2 \text{ kg}$ tömegű 100°C -os vizet viszünk (3.8. ábra). Ekkor az egyik oldalon $1,01 \cdot 10^5$ Pa nyomás alakul ki, hiszen a 100°C -os telített vízgőz nyomása megegyezik a légköri nyomással.



3.8.
ábra

(1 atm légköri nyomáson 100 °C-on forr a víz. Így választottuk meg a skála 100-as beosztását.) Ebben a térrészben a telített vízgőz $1,01 \cdot 10^5$ erőft fejt ki a falra. A másik oldalon kialakult állapot messze van a telítettségi állapottól. Feltesszük, hogy a kritikus izoterma feletti állapotról van szó, vagyis érvényes az egyesített gáztörvény. (Különbösen a van der Waals-féle állapotegyenletet kellene használni.) Az általános gáztörvényből meghatározzuk a vízgőz nyomását:

$$p \cdot 1 = \frac{200}{18} 8,31 \cdot 373,$$

innen $p = 34\,440$ Pa. Erről az oldalról tehát $34\,440$ N erőft fejt ki a gáz a dugattyúra. A falra ható erő hozzávetőlegesen $66\,000$ N.

Tegyük fel most, hogy a dugattyú rögzítését feloldjuk. Ekkor a nagyobb nyomású, a telített gőzt tartalmazó térrész addig terjeszkedik, amíg a két oldalon azonos nem lesz a nyomás. Az $1,8$ kg tömegű víz 100 °C-on 3 m³-es teret telítene vízgőzzel, így a nyomás úgy fog kiegyenlítődni, hogy a kezdetben ideális gáz összenyomódik mindaddig, amíg nyomása 1 atm lesz, vagyis a telítettségi határt eléri. A $0,2$ kg tömegű víz $1/3$ m³ térfogatot tölt ki telített vízgőzzel 100 °C-on, a dugattyú addig mozog tehát, amíg a kevesebb vizet tartalmazó rész $1/3$ m³ térfogatú lesz. Ekkor a másik rész térfogata $5/3$ m³ lesz. A táguló gáz nyomása közben 1 atm. A másik gáz nyomása $0,344$ atm-ról növekszik 1 atm-ra.

Lám egy újabb példa arra, hogy a két gőztér — mint egymás környezete — nem azonos nyomású: az egyik nagyobb nyomáson tágul, mint amilyen a másik összenyomódik, az egymáson végzett munkák nemcsak előjelben különböznek.]

Országos Széchényi Könyvtár

3.2. Fázisátalakulások

3.2.1. Párolgás, forrás, lecsapódás

Alapvető tapasztalat, hogy nyitott pohárban hosszabb időre magára hagyunk valamilyen folyadékot, mondjuk vizet, akkor a folyadék mennyisége csökken, sőt elpárolog, teljesen elfogy. A párolgás közben a folyadék felülete közelében gőz keletkezik.

A párolgás minden hőmérsékleten végbemegy, csak a párolgás sebessége nagyon függ a hőmérséklettől. A párolgás gyorsabb, ha a folyadék hőmérséklete magasabb, ha a folyadék szabad felszíne nagyobb, és ha a folyadékkal érintkező térrész nem telítődik a folyadék gőzével.

Párolgás közben az anyag lehűl, ezt is naponta tapasztalhatjuk. A párolgás tehát energiát igényel. A párolgó anyag ezt a környezetétől vonja el, és persze a nem párolgó része is hidegebb lesz. Azonos hőmérsékleten ugyanaz az anyagmennyiség gőzállapotban nagyobb energiájú, mint folyadékállapotban.

Alkalmazzuk az első főtételt:

$$\Delta E = Q - p\Delta V + \mu\Delta N,$$

ahol N a részecskeszámot, ΔN a fázisátalakulásban részt vevő molekulák számát jelöli. A tapasztalat szerint azonban állandó hőmérsékleten és nyomáson való párolgás (vagy forrás) esetén $\Delta V \sim \Delta N$, valamint $Q \sim \Delta N$, ezért $\Delta E \sim \Delta N$, vagy másként fogalmazva ugyanezt: $\Delta E \sim \Delta m$. Igen fontos azonban, hogy ez állandó nyomáson és hőmérsékleten igaz, de jó közelítés lassú nyomás- és hőmérséklet-változás esetén is.

Adott körülmények között tehát az m tömegű anyag elpárolgotatásához

$$\Delta E = Lm \quad (1)$$

mennyiségű energiát kell közölni az anyaggal. Más szóval: m tömegű anyag elpárolgotatásához szükséges energia mennyisége arányos a tömeggel. Az L arányossági tényezőt *párolgáshőnek* nevezzük, *mértékegysége* J/kg.

Kiemeljük még egyszer, hogy a párolgáshő az anyagi minőségen kívül elsősorban a hőmérséklettől függ. A párolgáshő elnevezés arra utal, hogy a párolgáshoz szükséges energiát legtöbbször hőhatással veszi fel a folyadék. Természetesen lehetséges, hogy hőhatás helyett például munkavégzéssel *biztosítjuk a párolgáshoz szükséges energiát*. Gondoljunk arra, hogy a folyadék keverésével a párolgáshoz szükséges energia biztosítható.

A párolgással ellentétes folyamat a lecsapódás. Lecsapódás közben az anyag belső energiája csökken. A környezet negatív munkát végez és a rendszer hőt ad le.

Forrásnál a folyadék belsejében gőzbuborékok keletkeznek és felszállnak a folyadék felszínére. A gőzbuborék általában úgy keletkezik, hogy a folyadékban elnyelt, esetleg az edény falához tapadó igen

kis méretű levegőbuborékok térfogata a folyadék párolgása miatt megnő. Ez a térfogatnövekedés azonban csak azon a hőmérsékleten lehetséges, amelyen a buborékban a telített gőz nyomása eléri a külső nyomást, a folyadék feletti gáz nyomásának és a ρgh hidrosztatikai nyomásnak az összegét, különben a külső nyomás összenyomná a buborékot, és a gáz lecsapódna. (A ρgh általában elhanyagolható a külső nyomás mellett.)

A forrás hőmérsékletét *forráspontnak* nevezzük. A forráspont tehát függ a külső nyomástól. A folyadék azon a hőmérsékleten forr, amelyen a telített gőzének a nyomása megegyezik a külső nyomással. A víz forráspontja 1 atm nyomásnál 100 °C.

A forrásban levő folyadék hőmérséklete állandó melegítés ellenére sem változik. Forrás közben a folyadék hőmérséklete állandóan a forrásponttal egyenlő. Közben a folyadék energiát vesz fel, mert a gőzzé alakuló anyag belső energiája nagyobb a folyadék halmazállapotú anyag belső (szerkezeti) energiájánál. A forraláshoz szükséges energia mennyisége arányos az elforralt folyadék tömegével. Ez a következőképpen támasztható alá. Az első főtételben a hő és a munka mellett figyelembe vesszük a fázisátalakulással járó munkavégzést is:

$$\Delta E = Q - p\Delta V + \mu\Delta N,$$

Mivel azonban állandó hőmérsékleten és nyomáson $\Delta V \sim \Delta N$ és $Q \sim \Delta N$, ezért $\Delta E \sim \Delta N$, vagy a tömeggel fogalmazva: $\Delta E \sim \Delta m$, tehát az m tömegű folyadék elforralásához szükséges energia:

$$\Delta E = L_f m, \quad (2)$$

ahol L_f a folyadék *forráshője*. A forráshő *mértékegysége* J/kg. Az elnevezés onnan származik, hogy a forralás legtöbbször hő-

közléssel történik. Forralás közben változik az anyag belső energiája, de változik (csökken) térfogata is. Az energiamérlegben ezért figyelembe kell venni a környezet által végzett munkát is. Az első főtétel tehát:

$$\Delta E = Q + W + W_{\text{fázis}} \quad (3)$$

A forrás és a párolgás között az az alapvető különbség, hogy a forrásnál a külső nyomás által meghatározott hőmérsékleten a folyadék saját belsejébe párolog, párolgás csak a folyadék szabad felszínét érinti, és bármely hőmérsékleten végbemegy. A különbség még az is, hogy a forrás sokkal intenzívebb a párolgásnál.

Ennek az az oka, hogy a forráspont előtti a folyadékkal közölt energia legnagyobb része a folyadék hőmérséklettel arányos belső energia növelésére fordítódik. Csak elhanyagolható része biztosítja a párolgáshoz szükséges hőt és a környezet által végzett munkát. Forráskor a belső energia a szerkezet állandó hőmérsékleten végbemenő átalakítására fordítódik.

Forráskor (illetve a forrásponton történő lecsapódáskor), ha a nyomás állandó, a belső energia a tömeggel arányosan változik, (2) szerint. A folyékony halmazállapotban az energiaváltozás hasonló a gázok belső energiájának változásához:

$$\Delta E = cm\Delta T, \quad (4)$$

persze a hőmérséklet-különbséget Celsius-fokban is mérhetjük:

$$\Delta E = cm\Delta t. \quad (5)$$

A c arányossági tényezőt *fajhő*nek nevezük. A szerepe pontosan megegyezik az ideális gázok állandó térfogathoz tartozó fajhőjével. *Mértékegysége* $\text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ vagy $\text{J}/(\text{kg K})$.

Vessünk egy pillantást a konkrét fajhők-

re és forráshőkre. A víz esetében például $c = 4187 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ és $L_f = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J}/\text{kg}$. A mindennapos szóhasználatunkban igen gyakran szerepel az energia kcal, vagy cal szimbólumokkal jelölt mértékegysége, a kilokalória vagy kalória. A víz fajhője $1 \text{ kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C}) = 1 \text{ cal}/(\text{g}^\circ\text{C})$, vagyis 1 kcal energia közlése a víz hőmérsékletét 1°C -kal megnöveli. Ez a kcal definíciója. Így tehát

$$\begin{aligned} 1 \text{ kcal} &= 4187 \text{ J}, \\ 1 \text{ J} &= 0,24 \text{ cal}. \end{aligned}$$

A J mellett a cal és a kcal az energia mértékegysége. Kissé ugyan régies, de nincs semmi okunk arra, hogy használatától eltekintsünk, ha a használat előnyös. (Különbözőben is: a fizikai mértékegységek megválasztásának csak egyik szempontja a szabványosítás.)

A J és a kcal átváltásának a fenti szabályához zavaros kommentárokat szoktak fűzni, ezeket a „hő és a munka egyenértékűsége” címmel látják el. Ezeknek a gondolatfutamoknak a lényege az lenne, hogy a hőt kcal-ban mérnénk, a munkát mindig J-ban, és a hő átváltható lenne munkára és fordítva. Világos dolog, hogy a hő és a munka rokon fogalmak, mindkettő energia jellegű mennyiség, de nem állapotjelzők — és mindkettő mérhető akár kcal-ban, akár J-ban. A kettő egyenértékűségén nem tudjuk, hogy mit értsünk.

Térjünk vissza a víz fajhőjére és forráshőjére. Láttuk, hogy a víz fajhője sokkal kisebb, mint a forráshője a következő értelemben: 1 kg tömegű víznek 1°C -kal való felmelegítéséhez $4187 \text{ J} = 1 \text{ kcal}$ energiára van szükség. Ahhoz, hogy a 0°C -os vizet a forráspontra melegítsük, $4187 \cdot 100 \text{ J}$ energia kell. Ugyanakkor ennyi víznek az elforrálásához $2\,260\,000 \text{ J}$ energiát kell közölni az 1 kg tömegű vízzel. Vagyis mintegy 5,4-

szeresét. Ha például egy melegítő 10 perc alatt melegíti fel a vizet 0 °C-ról 100 °C-ra, akkor 54 perc alatt forralja el.

A melegítéssel járó térfogatváltozás, de az elforraláskor fellépő térfogatcsökkenés is a fenti energiákhoz viszonyítva elhanyagolható munkavégzést jelent. A gyakorlatban előforduló esetek legnagyobb részében $|W| \ll |\Delta E|$, ezért (3) alapján

$$\Delta E \approx Q.$$

(4), illetve (5) felhasználásával

$$Q \approx L_f m,$$

és

$$Q \approx cm \Delta T$$

nagyságú hőt fesz fel a folyadék forralásakor, illetve melegítéskor. Ugyanennyit ad le (forrásponton történő) lecsapódáskor és hűtéskor.

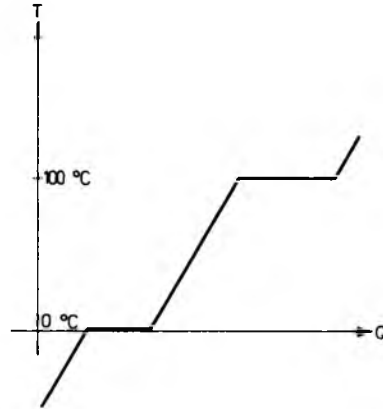
3.2.2. Olvadás, fagyás

Kristályos tiszta anyagok és néhány más szilárd anyag energiaközlés (melegítés vagy munkavégzés) hatására felmelegszik. A közölt energia arányos^(*) a test hőmérséklet-változásával:

$$\Delta E = cm \Delta T, \quad (1)$$

ahol a c a gázok állandó térfogathoz tartozó fajhőjével azonos szereppel bíró mennyiség, a neve *fajhő*. *Mértékegysége* J/(kg K). A jég fajhője 2093,5 J/(kg K), vagy kcal-ban: 0,5 kcal/(kg K).

^(*) Itt is arról van szó, hogy állandó nyomáson a térfogatváltozás arányos a hőmérséklet-változással, ezért az első főtételek szerint a belső energia változása arányos ΔT -vel.



3.9. ábra

Melegítés közben egy bizonyos hőmérsékletet elérve a test olvadni kezd, és a hőmérséklet tovább nem emelkedik. Az energiaközlés ellenére a hőmérséklet mindaddig állandó marad, amíg az anyag teljes egészében meg nem olvad. A hőmérséklet ezután emelkedik ismét. A közölt energia függvényében ábrázoltuk az anyag hőmérsékletét (3.9. ábra).

Az olvadás hőmérsékleti pontja az *olvadáspont*. Ez a nyomás függvénye, és természetesen függ az anyag minőségétől. Víznél ez 1 atm nyomásnál 0 °C, vagyis a jég 1 atm nyomáson 0 °C-on olvad. Ez a Celsius-féle hőmérsékleti skála nulla pontja.

Az olvadással ellentétes irányú folyamat a fagyás. A fagyás ugyanazon a hőmérsékleten megy végbe, mint az olvadás.

Emeljük ki: a fentiek csak bizonyos — elsősorban tiszta kristályos testekre — fémekre igazak. Fémötvözetek például igen gyakran egy bizonyos hőmérsékleten olvadni kezdenek, és a hőmérséklet tovább növekszik olvadás közben — az anyag valamilyen kásás állapotban keresztül éri el a folyadékállapotot.

Visszatérve a rögzített olvadásponttal rendelkező anyagokra, például a jégre, mint láttuk, a megolvadáshoz energiaköz-

lés szükséges. Fagyáskor az anyag ennek megfelelően energiát ad le.

Az olvadáshoz szükséges energia arányos a megolvadt anyag mennyiségével: (*)

$$\Delta E = L_o m . \quad (2)$$

Az L_o arányossági tényező neve: *olvadáshő, mértékegysége: J/kg*. A jég olvadáshője $334\,960 \text{ J/kg} = 80 \text{ kcal/kg}$. Így 1 kg jég megolvasztásához annyi energia szükséges, mint amennyi 1 kg 0°C -os víz 80°C -ra melegítéséhez.

Az olvadáshoz, illetve melegedéshez szükséges energiát hőhatás formájában és munkavégzéssel is közölhetjük. Az energiamérleg:

$$\Delta E = Q + W + W_{\text{fázis}} . \quad (3)$$

¶ Vizsgáljuk meg a következő problémát. Tegyük fel, hogy adott 100 cm^3 térfogatú, -10°C hőmérsékletű jég. Melegítsük ezt lassan addig, míg 4°C hőmérsékletű víz keletkezik. A jég sűrűsége $0,9 \text{ g/cm}^3$, így a tömege 90 g. A belső energia megváltozása három fázisban megy végbe: a jég felmelegedése $c_j m \cdot 10$ energiát igényel, a jég megolvadása $L_o m$ mennyiségű energiát, míg a víz felmelegedése $c_v m \cdot 4$ energiát igényel. A belső energia növekedése össze-

$$\Delta E = 2093,5 \cdot 0,09 \cdot 10 + 0,09 \cdot 334\,960 + 4187 \cdot 0,09 \cdot 4 = 3,35 \cdot 10^4 \text{ J} .$$

A jég térfogata 100 cm^3 , a 4°C -os víz térfogata 90 cm^3 , a térfogatváltozás: $\Delta V = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. A rendszeren végzett mun-

(*) Állandó nyomáson és hőmérsékleten a térfogatváltozás és a közölt hő is arányos a folyékony fázist növelő részecskék számával. Ezért $\Delta E \sim \Delta N$, illetve $\Delta E \sim \Delta m$.

ka negatív:

$$W = -10 \cdot 10^{-6} \cdot 10^5 = -1 \text{ J} .$$

Figyelembe véve a (3) energiamérleget, nyilvánvalóan látszik, hogy

$$\Delta E \approx Q . \quad (4)$$

Ezért laboratóriumi körülmények között az anyaggal közölt energiát a hőhatás eredményének fogjuk tekinteni és a mechanikai munkát elhanyagoljuk.]

Jegyezzük még meg, hogy a (4) közelítő egyenlőségre való hivatkozással írhatjuk, hogy

$$Q = c_j m \Delta T_j + L_o m + c_v m \Delta T_v ,$$

ennek az egyenlőségnek a jobb oldala eredetileg a belső energia megváltozása, és ez most csak azért igaz, mert a munka elhanyagolható.

3.2.3. A fázisátalakulások energetikai leírása

Ebben a pontban arról lesz szó, hogy hogyan lehet meghatározni különböző anyagok keveredésekor kialakuló állapotot, illetve erre az állapotra jellemző hőmérsékletet. A módszer felvázolásához legjobban, ha egyelőre a vízre, a víz különböző halmazállapotjának a keveredésére korlátozódunk.

Foglaljuk össze röviden a fázisátalakulásainak a mérlegét.

A jég belső energiájának megváltozása arányos a hőmérséklet-változással:

$$\Delta E = c_j m \Delta T ,$$

ahol

$$c_j = 2093,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 0,5 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

a jég fajhője. A jég olvadásakor felvett energia a tömeggel arányos:

$$\Delta E = L_o m,$$

ahol

$$L_o = 334\,960 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$$

a jég olvadáshője.

A víz belső energiájának megváltozása arányos a hőmérséklet-változással:

$$\Delta E = c_v m \Delta T,$$

itt

$$c_v = 4187 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

a víz fajhője.

A víz elforrálásakor a belső energia növekedése állandó hőmérsékleten történik:

$$\Delta E = L_f m.$$

Az L_f a víz forráshője,

$$L_f = 2\,256\,374 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 540 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}.$$

A gőz állandó térfogathoz tartozó fajhője:

$$c_g = 1386 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 0,33 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}.$$

A fázisátalakulásokkal, halmazállapot-változásokkal kapcsolatos problémáknál igen előnyös megállapodás az, hogy *a belső energia nulla szintjének a nulla fokos jég energiaszintjét választjuk*. Más szóval ez azt jelenti, hogy a 0°C hőmérsékletű jég energiája 0.

Így például 5 kg 0°C hőmérsékletű jég energiája 0. És 6 kg tömegű 0°C -os jég energiája is 0.

A folyékony víznek az energiája nagyobb, mint a jégé: 1 kg tömegű 0°C -os víz energiája $334\,960 \text{ J} = 80 \text{ kcal}$. Ugyanígy

5 kg tömegű 0°C hőmérsékletű víz energiája $5 \cdot 334\,960 \text{ J} = 1\,674\,800 \text{ J} = 400 \text{ kcal}$.

Ha a víz hőmérséklete nagyobb, mint 0, akkor a víz energiája magasabb, mint a 0°C hőmérsékletű víz energiája. Így például 1 kg tömegű, 12°C hőmérsékletű víz energiája:

$$\begin{aligned} E &= L_o m + c_v m \Delta t = 334\,960 + 4187 \cdot 12 = \\ &= 334\,960 + 50\,244 = 385\,204 \text{ J}; \end{aligned}$$

1 kg tömegű, 12°C hőmérsékletű víz energiája ugyanis $50\,244 \text{ J}$ -al nagyobb, mint ugyanilyen tömegű, 0°C hőmérsékletű víz energiája. A 0°C hőmérsékletű, 1 kg tömegű víz energiája viszont $334\,960 \text{ J}$ -al nagyobb, mint a 0°C hőmérsékletű jégé. Kilokalóriában számolva:

$$E = 1 \cdot 80 + 1 \cdot 1 \cdot 12 = 92 \text{ kcal}.$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel: 6 kg 100°C hőmérsékletű víz energiája:

$$\begin{aligned} E &= L_o m + c_v m \cdot 100 = 6 \cdot 334\,960 + \\ &+ 6 \cdot 4187 \cdot 100 = 2\,009\,760 + \\ &+ 2\,512\,200 = 4\,521\,960 \text{ J}. \end{aligned}$$

Kilokalóriában számolva:

$$E = 6 \cdot 80 + 6 \cdot 1 \cdot 100 = 1080 \text{ kcal}.$$

A gőz energiája nagyobb, mint az azonos tömegű, 100°C hőmérsékletű vízé. Kilogrammonként $2\,256\,374 \text{ J}$ szükséges ahhoz, hogy 100°C -os víz 100°C -os gőzzé váljon (1 atm nyomáson). Így 1 kg tömegű, 100°C -os gőz belső energiája:

$$\begin{aligned} E &= 334\,960 + 418\,700 + 2\,256\,374 = \\ &= 3\,010\,034 \text{ J}, \end{aligned}$$

hiszen 1 kg 0°C -os víz energiája $234\,960 \text{ J}$ -al nagyobb, mint 1 kg 0°C -os jégé, az

1 kg 100 °C-os víz energiája $4187 \cdot 100$ J-lal nagyobb, mint a 0 °C-os vízé, és a gőz energiája pedig — mint $2\,256\,374$ J-lal nagyobb a 100 °C-os víz energiájánál 1 kg-ra számítva. Kilokalóriában számolva:

$$E = 80 + 100 + 540 = 720 \text{ kcal.}$$

A 0 °C-nál hidegebb jég energiája negatív: például 3 kg -23 °C-os jég energiája:

$$E = 3 \cdot 2093,5 \cdot (-23) = -144\,451,5 \text{ J.}$$

A régies mértékegységet használva:

$$E = -34,5 \text{ kcal.}$$

↑ Felvethető a következő kérdés: mennyi az energiája 1 kg 0 °C-os jég és 1 kg 0 °C-os víz keverékének. A belső energia additivitása miatt $E = 0 + 334\,960$ J. Itt az első tag a jég energiája, a második tag a vízé.

Keverjünk most össze ötféle állapotú (kémiai értelemben vett) vizet. Tegyük egy nagy termosztba 1 kg 0 °C-os jeget, 2 kg 0 °C-os vizet, 3 kg 90 °C-os vizet, 0,5 kg 100 °C-os gőzt és 12,5 kg -20 °C hőmérsékletű jeget. Ekkor az összes energia:

$$\begin{aligned} E &= [0] + [2 \cdot 334\,960] + \\ &+ [3 \cdot 334\,960 + 4187 \cdot 3 \cdot 90] + \\ &+ [0,5 \cdot 334\,960 + 0,5 \cdot 4187 \cdot 100 + \\ &+ 0,5 \cdot 22\,563 \cdot 74] + \\ &+ [12,5 \cdot 2093,5 \cdot (-20)] = \\ &= 0 + 669\,920 + 2\,135\,370 + 1\,221\,661 + \\ &+ (-523\,375) = 3\,493\,576 \text{ J.} \end{aligned}$$

A szögletes zárójelek az egyes összetevők energiáját tartalmazzák. A rendszer összes tömege 19 kg. Eszerint 1 kg anyag összes energiája $3\,493\,576 : 19 = 183\,872,4$ J. Ez 1 kg-ra számolva kevesebb, mint 1 kg 0 °C

hőmérsékletű víz energiája. A rendszer tehát 0 °C-os víz és 0 °C hőmérsékletű jég keveréke. Tegyük fel, hogy a 19 kg tömegű anyagból m mennyiségű a víz, $19 - m$ mennyiségű a jég. Ekkor a $183\,872,4$ J energia megfelel az $m < 19$ tömegű, 0 °C hőmérsékletű víz energiájának, a jég energiája ugyanis nulla: $3\,493\,576 = m \cdot 334\,960$, innen $m = 10,4$ kg, a 19 kg víz—jég keverékből 10,4 kg a víz, 8,6 kg a jég tömege a közös egyensúlyi állapotban.]

↑ Világítsuk meg a módszert egy másik példával is. Tegyük fel, hogy egy termosztban 3 kg 0 °C hőmérsékletű víz és 1 kg 0 °C hőmérsékletű jég van. Mennyi 100 °C hőmérsékletű gőzt kell az edénybe vezetni, hogy az egyensúly beállta után 22 °C hőmérsékletű víz keletkezzék? Az energiámérleg:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 344\,960 + 0 + m \cdot 3\,010\,034 &= \\ = (m + 4) (344\,960 + 22 \cdot 4187), \end{aligned}$$

itt figyelembe vettük, hogy 1 kg tömegű gőz teljes belső energiája $3\,010\,034$ J. A gőz tömegét m -mel jelöltük. Az energiámérlegből az m meghatározható: $m = 0,271$ kg, tehát mintegy 270 g 100 °C-os gőz kell ahhoz, hogy a víz—jég keverék hőmérsékletét 22 °C-ra emelje. Ezen az áron a gőz lecsapódik és a hőmérséklete 78 °C-kal csökken.]

Nem változtat lényegesen a dolgon az sem, ha a víz mellett valamilyen más anyag, mondjuk réz vesz részt a keveredésben. [A réz fajhője $385,2$ J/(kg °C)]. A réz energiája a hőmérséklet-változással arányosan változik:

$$\Delta E = c_{\text{réz}} m \Delta T,$$

mindaddig, amíg a réz olvadni nem kezd. A tiszta (nem ötvözött) fémeknél hasonló jelenségek játszódnak le, mint a jégnél.

Meghatározott olvadásponton olvadnak, és mindaddig nem nő a hőmérsékletük, amíg az egész folyékonyá nem válik. Eközben állandó hőmérsékleten a tömeggel arányos energiát vesznek fel. Az olvadt fém melegítéséhez a hőmérséklet-változással arányos energia szükséges. Forráskor is hasonló a helyzet. A folyékony halmazállapotú fém elforralása állandó hőmérsékleten, a forrásponton megy végbe és a tömeggel arányos energiát igényel.

Tegyük fel tehát, hogy egy 1 kg tömegű rézedényben 30°C hőmérsékletű víz van. Ebbe a vízbe beledobunk $0,1\text{ kg } 0^\circ\text{C}$ hőmérsékletű jeget. A kialakuló hőmérséklet 24°C lesz. A víz tömegének a meghatározását tűzzük ki célul. A keverés előtti energia összesen:

$$E_1 = 1 \cdot 385,2 \cdot 30 + m \cdot 334\,960 + m \cdot 4187 \cdot 30 + 0.$$

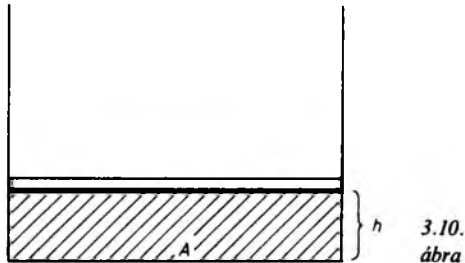
Itt az első tag a rézedény energiája, a második két tag az ismeretlen m tömegű víz energiája, és a jég energiája a negyedik tag, ez nulla. Az új egyensúly kialakulása után az energia:

$$E_2 = 1 \cdot 385,2 \cdot 24 + (m + 0,1) \cdot 334\,960 + (m + 0,1) \cdot 4187 \cdot 24.$$

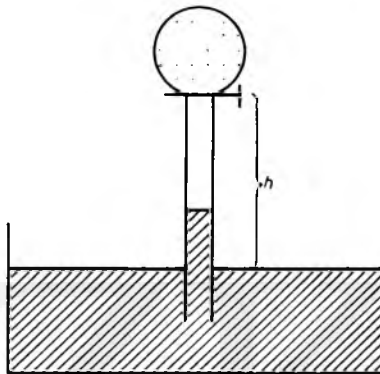
Az $E_1 = E_2$ egyenlőségből az m meghatározható, a számolások elvégzése után $m = 1,64\text{ kg}$ adódik.]

XV. Feladatcsoport: reális gázok, halmazállapot-változások

XV/1. Egy edényben, amely 2 dm^2 keresztmetszetű, 10 cm magasan 100°C hőmérsékletű víz van. A víz felszínével érintkező dugattyú súlytalan és könnyen elmozdulhat (3.10. ábra). A vizet forralni kezd-



3.10. ábra



3.11. ábra

jük. Mennyi víz forrott el, ha a dugattyú 30 cm -t emelkedett? Mennyi hőt vett fel a rendszer?

XV/2. Az etiléter $0,58 \cdot 10^5\text{ Pa}$ nyomáson 20°C -on forr. A 3.11. ábrán látható vékony 1 méter hosszú csőben a higany felett vákuum van. A levegő nyomása $1,033 \cdot 10^5\text{ Pa}$, a hőmérséklet 20°C . A csapot kissé megnyitjuk. A cső felső részén látható gömbből cseppenként etiléter csöpög a higany feletti térrészbe. Az etiléter telített gőzének a nyomása 20°C -on $57\,894\text{ Pa}$. Milyen hosszú a higanyoszlop végül? Mi történik, ha ezután a csövet 20 cm -rel mélyebbre toljuk a higanyba?

XV/3. Egy tartály 18 dm^3 térfogatú, benne 15 kg összes tömegű, 20°C hőmérsékletű víz és telített gőz van. A víz sűrűsége ezen a hőmérsékleten $998,2\text{ kg/m}^3$ a telített gőz sűrűsége pedig $0,0173\text{ kg/m}^3$.

Mennyi a gőz tömege? Hány molekula van a gőztérben, és hány molekulát tartalmaz a víz?

XV/4. Egy dugattyúval ellátott hengerben $370\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű, 20 liter térfogatú vízgőz és víz van. A víz sűrűsége $448,4\text{ kg/m}^3$, a gőzé 200 kg/m^3 . A víz és a telített gőz együttes tömege 5 kg. Ezután a dugattyút beljebb toljuk, és a térfogatot 12,5 literre csökkentjük. Mennyi a gőz térfogata és tömege kezdetben és az összenyomás után?

XV/5. A jég fajhője, illetve az olvadáshője:

$$c_j = 2093,5\text{ J/(kg }^\circ\text{C)} = 0,5\text{ kcal/(kg }^\circ\text{C)},$$

$$L_o = 333\,704\text{ J/kg} = 80\text{ kcal/kg},$$

a víz fajhője, illetve forráshője:

$$c_v = 4197\text{ J/(kg }^\circ\text{C)} = 1\text{ kcal/kg }^\circ\text{C)},$$

$$L_f = 2\,256\,374\text{ J/kg} = 540\text{ kcal/kg},$$

a gőz állandó térfogaton, illetve állandó nyomáson vett fajhője:

$$c_{gV} = 1386\text{ J/(kg }^\circ\text{C)} = 0,33\text{ kcal/(kg }^\circ\text{C)},$$

$$c_{gP} = 1846\text{ J/(kg }^\circ\text{C)} = 0,44\text{ kcal/(kg }^\circ\text{C)}.$$

Legyen a belső energia nulla szintje a $0\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű jég energiája. Mennyi a belső energiája

- 2 kg $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os jégnek?
- 3 kg $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os víznek?
- 2 kg $10\text{ }^\circ\text{C}$ -os víznek?
- 7 kg $90\text{ }^\circ\text{C}$ -os víznek?
- 10 kg $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os víznek?
- 4 kg $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os gőznek?
- 1 kg $120\text{ }^\circ\text{C}$ -os gőznek?
- 5 kg $-20\text{ }^\circ\text{C}$ -os jégnek?

XV/6. Egy tartályban 4,1 kg tömegű, kémiai értelemben vett víz van. Az összes belső energiája $1\,574\,127\text{ J} = 376\text{ kcal}$. Milyen állapotban van az anyag? (Milyen fá-

zis szerepel — víz, jég, gőz — és mekkora a hőmérséklete?)

XV/7. Szilárd, folyékony vagy pedig légnemű a fázisállapota annak a 3,5 kg tömegű víznek, amelynek az összes energiája $879\,270\text{ J} = 210\text{ kcal}$? Mekkora a hőmérséklete?

XV/8. Egy edényben 4,1 kg tömegű (kémiai értelemben vett) víz van. Az összes energiája $4\,017\,008\text{ J} = 959,4\text{ kcal}$. Mekkora a hőmérséklet? Milyen fázis van jelen a rendszerben?

XV/9. Egy termosztokban 2 kg (kémiai értelemben vett) víz van. Az összes energiája $-83\,740\text{ J} = -20\text{ kcal}$. Milyen állapotban van az anyag?

XV/10. Egy termosztokban 1 liter $10\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű víz van. Ebbe beledobunk 300 g tömegű, $-10\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű jeget. Az egyensúly beállta után mennyi a kialakuló hőmérséklet?

XV/11. Egy termosztokban 200 g tömegű, $-20\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű jég van. Betöltünk a termosztokba 300 g $0\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű vizet, majd ráöntünk 100 g tömegű, $100\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű vizet. Mennyi lesz a kialakuló végső hőmérséklet? Milyen fázis jellemzi a rendszert?

XV/12. Egy termosztokba 40 g $-20\text{ }^\circ\text{C}$ -os jeget, 10 g $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os jeget, 20 g $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet, 30 g $50\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet, 40 g $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet, 10 g $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os gőzt töltünk. Az egyensúly beállta után mekkora lesz a hőmérséklet?

XV/13. 40 g $0\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű jeget 10 g $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os gőzt tartalmazó tartályba dobunk. Mekkora lesz a kialakuló hőmérséklet?

XV/14. Mekkora hőmérséklet alakul ki, ha 100 g $-30\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű jeget tartalmazó termosztokba 50 g $120\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű gőzt vezetünk?

XV/15. Egy edény hőkapacitása $167\text{ J/}^\circ\text{C}$, vagyis $1\text{ }^\circ\text{C}$ -kal felmelegítve az edény

anyagának belső energiája 167 J-lal nő. Az edényben 0,5 liter 0 °C hőmérsékletű víz és ugyanennyi 0 °C-os jég van. Mennyi 100 °C-os gőzt kell az edénybe vezetni, hogy a kialakuló hőmérséklet 40 °C legyen?

XV/16. A réz fajhője: $c_r = 377 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}) = 0,09 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$. Egy 200 g tömegű rézedényben 500 g 25 °C hőmérsékletű víz van. Mekkora lesz a végső hőmérséklet, ha 100 g 0 °C-os jeget dobunk az edénybe?

XV/17. Egy kaloriméterbe (pl. üvegpalackba) 200 g vizet töltünk. A közös hőmérséklet 20 °C. Ha ezután 150 g 30 °C-os vizet öntünk az edénybe, a kialakuló hő-

mérséklet 22 °C lesz. Mekkora az edény hőkapacitása?

XV/18. Egy 5 kg tömegű, 300 °C hőmérsékletű réztömböt 30 °C-ra 20 °C-os vízzel hűtünk. Hány kg hűtővíz szükséges a hűtéshez?

XV/19. Egy kaloriméter hőkapacitása 400 J/°C. vagyis 1 °C-kal történő felmelegítése 400 J energiát igényel. A kaloriméterben 0,5 kg tömegű 0 °C-os víz és bizonyos mennyiségű 0 °C-os jég keveréke van. A keverékbe vezetünk 100 g tömegű, 100 °C hőmérsékletű vízgőzt. A kialakuló hőmérséklet 75 °C lesz. Mennyi jég volt kezdetben az edényben?

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

4. A termodinamika statisztikus szemléltetése

4.1. A kinetikus gázmodell

4.1.1. A gázok sűrűségeloszlása

A most következő fejezetben a termodinamika eredményeihez semmit sem tesszünk hozzá. Egyszerűen arról van szó, hogy nem rendelkezünk azzal a matematikai apparátussal, amellyel a mikroszkopikus fizika területén eredményeket elérhetnénk. Azok az elemi matematikai módszerek, amelyekkel élni fogunk, mindössze arra jók, hogy a hőtan már megismert törvényeit, fogalmait újfajta módszerrel szemléltessük. Egy elmélet eredményeit papírra vetett vázlatos vonalakkal szemléltethetjük. Fogjuk fel ezt a fejezetet is így: a termodinamika eredményeinek pontatlan, de sokszor valóban szinte képszerű ábrázolását.

Ezért most nem törekszünk sem matematikai pontosságra, sem fizikai szigorúságra. Azt azonban említsük meg, hogy a statisztikus mechanika szokásos felfogása helytelen. Úgy fogják fel ugyanis, hogy a részecskék a fizika törvényeinek engedelmeskedve mozognak. A mozgásukat a mechanika, az elektrodinamika törvényei meghatározzák, ezért az elemi folyamatok mindenképpen meghatározottak, determináltak. De ezeknek az elemi folyamatoknak az összességét nem lehet leírni, a nagy-

számú részecske miatt. Így „véletlenítik” a modellt, egy valószínűségi modellel dolgoznak. A helyes felfogás ezzel szemben az, hogy a részecskék mozgása alapjában véve, a lényegét tekintve véletlenszerű, és csak valószínűségi modellel írható le a jelenség.

Az ideális gázok egyik állapotegyenletéhez úgy jutottunk, hogy a fenomenologikus tárgyalásmódot átmenetileg megszakítva, rövid ismertető utat tettünk a statisztikus leírásmód területén. Egy meglehetősen vázlatos gondolatmenettel érkezünk el a gázok nyomásának az értelmezéséhez, és a belső energia makroszkopikus állapotjelzőkkel való kapcsolatát kifejező $E = f/2 pV$ állapotegyenlethez.

Az okoskodásunk azon az alapgondolaton nyugodott, hogy a gáz véges sok részecskéből áll, és ezek egymástól tökéletesen függetlenek. Egy részecske helyét és sebességét nem befolyásolja, hogy van-e a rendelkezésre álló gáztérben rajta kívül részecske.

Gondoljuk el, hogy egy 1 m^3 térfogatú térrészbe egyetlen héliumatomot zárunk. Ez teljesen szabadon mozog a rendelkezésre álló térben. Másként mozogna-e, ha engednénk mellé más atomokat? Például, ha beterelnék a térrészbe még 12 héliu-

mot? Vagy megtöltenénk a tartályt 12 atm nyomású héliumgázzal?

A statisztikus fizika ideális gázokra vonatkozó alaphipotézise az, hogy az elsőként bekerült részecske mozgását nem befolyásolják a többiek. Ugyanúgy továbbra is vakon bolyong, mintha a többiek nem léteznének. Az atomok, a molekulák egyáltalán nem befolyásolják egymást. Egymásra semmiféle hatással nincsenek. (Hogy ez a hipotézis mennyire felel meg a valóságnak? Nyilván nagyon erős feltevés, azonban a ráépülő elmélet és a tapasztalat összhangja bizonyítja, hogy a valósághoz közelálló hipotézisről van szó.)

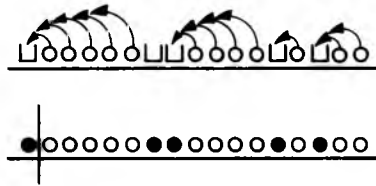
A statisztikus fizika a matematika egyik ágának, a kombinatorikának a módszereivel dolgozik, felhasználja a valószínűség elméletének az alapjait is. Mint ismeretes, a kombinatorikai problémáknál véges számú tárgy, objektum sorrendbe rakásáról, elhelyezéséről, kiválasztásáról van szó. Az objektumok, tárgyak között lehet, hogy különbséget tudunk tenni, lehet, hogy nem. A sokféle kombinatorikai feladat közül említsünk kettőt.

1. Tegyük fel, hogy n számú különböző golyónk és két különböző kalapunk van. Hányféleképpen helyezhetjük el a golyók egyik részét az egyik kalapban, a másik részét a másik kalapban? Hányféleképpen kerülhet az egyik kalapba k ($\leq n$) golyó? Ismeretes, hogy az egyik kalapba annyiféleképpen kerülhet k golyó, ahány k elemű részhalmaza van az n elemű halmaznak:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

és az összes lehetséges elosztások száma pedig 2^n .

2. Helyezzük el m darab teljesen azonos, meg nem különböztethető golyót n számú megkülönböztethető kalapba. Hányféle-



4.1.
ábra

képpen lehet ezt megvalósítani? Könnyű belátni, hogy $\binom{n+m-1}{m}$ -féleképpen.

Rajzoljuk le az első kalapot és rajzoljuk mellé azokat a golyókat, amelyeket majd bele fogunk tenni. Ezután rajzoljuk le a másik kalapot és utána azokat a golyókat, amik majd bele fognak kerülni. És így tovább (4.1. ábra). Így egy olyan sorozatunk van, amelyben golyók és kalapok váltogatják egymást. Minden kalap után azok a golyók következnek, amelyeket belehelyezünk a kalapba. Minden sorozat egy kalappal kezdődik. Az ilyen sorozatok hossza $n+m$. Rajzoljunk tehát le $n+m$ kört. Feketítsük be azokat a köröket, amelyek kalapok helyén állnak. Az elsőt mindenképpen feketére festjük. A többi $n+m-1$ kör közül ki kell választanunk $n-1$ -et, hogy befeketítsük, ezek lesznek a további kalapok, vagy m számot, hogy fehéren hagyjuk, ezek lesznek a golyók. Ez a választás

$$\binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1}$$

-féleképpen történhet.

Térjünk vissza a statisztikus fizika alap-gondolatainak a felvázolásához.

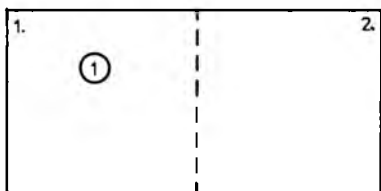
A kombinatorika alkalmazásának egyik fontos feltétele, hogy véges sok részecske szerepeljen a modellben. Ez a valóságban így is van. A gáz atomjainak a helyzete és a sebessége azonban végtelen sok értéket vehet fel. Hogy a kombinatorikus módszereket alkalmazni tudjuk, feltesszük, hogy a

gáz részecskéi véges sok különböző állapotban létezhetnek. (Ez a feltevés a gondolatmenetünk legkritikusabb pontja.)

A részecskék helyét most nem folytonosan változó koordinátákkal jellemezzük. Durvább helymegjelölést alkalmazunk. A gáz rendelkezésére álló teret két egyenlő részre osztjuk. A részecskék állapotát tehát ezután így jellemezzük: a részecske a bal oldali (első), vagy a jobb oldali (második) rekeszben van. Az atom vagy a molekula állapotának az ilyen durva jellemzésénél, ráadásul még eltekintünk a részecske sebességétől is.

Ilyen helymegjelöléssel találkozunk a következő analóg példában: A külföldről hazatérő utas arról nyilatkozik a határon, hogy melyik országban járt, volt-e Németországban vagy Spanyolországban. Senki sem tart igényt arra, hogy beszámoljon arról, hogy melyik autóúton mikor tartózkodott, melyik kereszteződésen mikor haladt át. A vámtisztviselőket nem érdekli, hogy voltunk-e Párizsban. Az érdekli, hogy voltunk-e Franciaországban.

Ha egyetlen részecskét helyezünk a tartályba, akkor az ugyanolyan eséllyel található meg a tartály egyik részében, mint a másikban. Egyaránt 0,5 a valószínűsége annak, hogy a tartály bal oldali részében van, mint a jobb oldali részében (4.2. ábra). Tegyük fel, hogy a tartályba helyezett részecske mellé egy másik részecskét helyezünk. A részecskék — a kiindulási hipotézisük szerint — tökéletesen érzéketlenek egymás viselkedésére.



4.2.
ábra

Most már alkalmazhatók a kombinatorika módszerei: el kell helyezni n számú részecskét megkülönböztethető m számú — most kettő — dobozba. A feltevésünk szerint minden elhelyezés egyenlő valószínűségű.

Ha a gáz részecskéit megkülönböztethetőnek tekintjük és megadjuk a részecskék állapotát — azt, hogy a bal, vagy a jobb oldali rekeszben van-e —, akkor gáz molekuláinak egy *mikroállapotot* adtunk meg. Ha a részecskéket nem különböztetjük meg egymástól, akkor *makroállapotról* beszélünk.

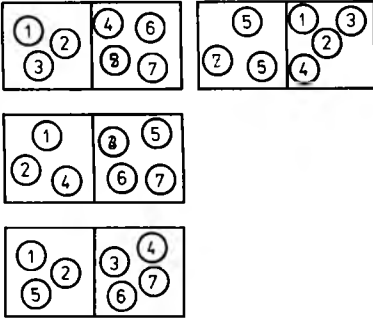
Az ideális gázok fenomenologikus állapotai a makroállapotoknak feleltethetők meg. Az ideális gázok részecskéit ugyanis nem tudjuk megkülönböztetni. Az egyik olyan, mint a másik. A makroállapotok azonban csak a mikroállapotokon keresztül vizsgálhatók. A mikroállapotok egyenlő valószínűségűek, mert a gáz részecskéi teljesen függetlenek egymástól. A mikroállapotok áttekintése egyszerűbb mint a makroállapotoké, a makroállapotok vizsgálatának az alapját a mikroállapotok tanulmányozása képezi.

Gondoljuk el, hogy a gáz rendelkezésére álló teret gondolatban két egyenlő részre osztjuk. Helyezzünk el a gáztérben n darab megkülönböztethető gázrészecskét.

Tegyük fel, hogy az első rekeszben (a bal oldali részben) k részecske van. Világos, hogy ez annyiféleképpen lehetséges, ahányféleképpen n részecske közül kiválaszthatunk k számú részecskét, hogy ezeket a tartály bal oldali részébe tegyük. Ezeknek az eseteknek a száma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ha például 7 részecske van a tartályban, akkor a bal oldali rekeszben 3 részecske



4.3.
ábra

$\binom{7}{3} = 35$ -féleképpen helyezhető el. Nyilvánvalóan annyiféleképpen, ahány 3 elemű részhalmaza van egy 7 elemű halmaznak. Ne feledjük: a részecskék — ebben a modellben — megkülönböztethetők egymástól (4.3. ábra).

Tekintsük a következő, ún. Pascal-féle háromszöget. Ebben a háromszögben feltüntettük az $\binom{n}{k}$ értékeit különböző k és n esetén. A háromszög sorait nullától számozzuk, és egy-egy sorban a tagokat is nullától számoljuk. Így a hetedik sor harmadik tagja 35. A táblázat n -edik sorának k -adik tagja $\binom{n}{k}$:

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1		

A táblázat folytatható. Mindegyik sor nuladik tagja 1, az utolsó tag is 1. Minden

közbülső tag a felette lévő két tag összege. Vegyük észre, hogy a táblázat szimmetrikus is.

A táblázat n -edik sorában a tagok összege 2^n . Példaként ismét a hetedik sort említve: ha hét részecskét helyezünk el a tartályban, akkor $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 2^7 = 128$ különböző mikroállapot valósulhat meg. És ezek egyenlő valószínűsűgűek. A 128 különböző mikroállapot azonos $1/128$ valószínűséggel következhet be. Gondoljunk két mikroállapotra: az egyik legyen az, amelynél a bal oldali rekeszben nincs egyáltalán részecske, vagyis az összes jobb oldali tartályrészben van. A másik mikroállapot legyen az, amelynél a hét számított részecske közül az első három a bal oldali, a következő négy a jobb oldali rekeszben van. Ez a két mikroállapot egyenlő valószínűsűgű! Ha 128 000 pillanatfelvételt készítünk a gázzal, akkor azt fogjuk tapasztalni, hogy a pillanatfelvételek közül 1000 felvételen az első mikroállapot fényképét, egy másik kb. ezer felvételen a másik mikroállapot képét látjuk.

A két mikroállapot mégis különbözik egymástól! Az elsőnek nincs „rokona” abban az értelemben, hogy csak egyféleképpen lehetséges, hogy a bal oldali rekesz üres legyen, és 35 olyan különböző mikroeloszlás van, amelyeknek az a közös jellemzőjük, hogy a bal oldali rekeszben 3 részecske van. Szemléletesen szólva: bár a fenti két mikroállapot egyenlő valószínűséggel következik be, és teljesen egyenértékűek, de a másodikhoz 34 hasonlót találhatunk.

Ha a részecskéket azonosítjuk, vagyis a megkülönböztető jelet letöröljük róluk, akkor a makroállapotokat kapjuk. Ha a tartályba n részecskét helyeztünk, akkor $n+1$ makroállapot valósulhat meg. Ha példaként ismét a hét részecskét tartalma-

zó gázteret említjük, akkor a makroállapotok száma nyolc, ezek:

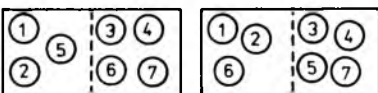
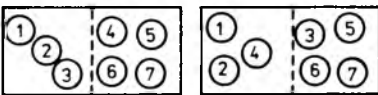
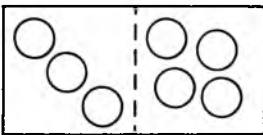
1. a bal oldali részben egyetlen molekula sincs,
2. a bal oldali részben egyetlen molekula van,
3. a bal oldali részben két molekula van,
4. a bal oldali részben három molekula van,
- ...

Nem folytatjuk. Látható, a makroállapotok száma sokkal kisebb, mint a mikroállapotok száma.

Tegyük fel, hogy a tartályban n részecske van. Ekkor a mikroállapotok száma 2^n . Minden egyes mikroállapotnak megfelelő egy makroállapot. Például: ha 7 részecske van a tartályban, akkor 35 olyan mikroállapot van, amelyekre az jellemző, hogy a bal oldali tartályrészben 3 részecske van. Ez a 35 mikroállapot egyetlen makroállapotnak felel meg (4.4. ábra).

A makroállapotok nem egyenlő valószínűséggel következnek be. Ha egy tartályban n részecske van, akkor annak a makroállapotnak a valószínűsége, hogy a bal oldali rekeszben k részecske van:

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$



4.4. ábra

Vessünk egy pillantást ismét a Pascal-féle háromszögre: ha a tartályban 6 részecske van, akkor a legvalószínűbb makroállapot az, hogy az egyik rekeszben 3, a másik rekeszben is 3 részecske van. A legvalószínűbb eloszlás a legegyszerűsebb. Ebben az esetben a legvalószínűbb makroállapot valószínűsége $20/64 = 0,3125$. Több, mint 31%. Persze komoly esély van arra, hogy olyan eloszlás valósuljon meg, amikor az egyik rekeszben 2 részecske van, a másikban 4. Ez ráadásul kétféleképpen történhet: vagy a bal oldali vagy a jobb rekeszben van két részecske. Ezek együttes száma 30. A legegyszerűsebb és a két majdnem egyenletes eloszlás együttes valószínűsége

$$\frac{15 + 20 + 15}{64} = 0,78125.$$

Ha a tartályban bolyongó 6 részecskéről 100 pillanatfelvételt készítünk, akkor azt tapasztaljuk, hogy nagyjából 80 felvételen az egyenletes, vagy a majdnem egyenletes eloszlás képét látjuk. És az esetek mintegy egyötödében látszik olyan felvétel, amikor a részecskék az egyik rekeszben tömörülnek: valamelyik rekeszben egyetlen részecske van, vagy egyetlen egy sincs.

És mindez azért, mert a mikroállapotok egyenlő valószínűségűek. A részecskék egyenletes vagy az egyenleteshez közeli eloszlása mögött a *részecskék függetlenségének a hipotézise* áll.

Tegyük fel most, hogy a tartályt két egyenlő térfogatú részre osztjuk egy merev fallal. A falat olyanak képzeljük, hogy gyorsan és a részecskék viselkedését nem zavarva eltávolíthatjuk.

Helyezzünk a bal oldali részbe mondjuk 7 részecskét. Ezután távolítsuk el a falat. Tegyük fel, hogy a részecskék szabadon mozoghatnak. Azt tapasztaljuk, hogy a

kezdeti állapotba viszonylag ritkán tér vissza a rendszer: ha sok pillanatfelvételt készítünk, akkor nagyjából csak minden 128-dik esetben fordul elő, hogy a jobb oldali tartály kiürül. Az is ritka eset, hogy az egyik vagy a másik tartályrészben nulla vagy egy részecske található. Ennek a valószínűsége

$$\frac{1+7+7+1}{128} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ha a kezdetben a gáz nem egyenletes sűrűségű állapotban van, akkor az egyenletes sűrűségű állapotra törekszik, és csak kis valószínűséggel fordulhat elő, hogy visszatér a kezdeti állapotba. Ez annál inkább így van, minél inkább több részecskét tartalmaz a gáz. Ha például 18 részecske van a tartályban (mi ez egy molnyi mennyiséghez képest!), akkor a mikroeloszlások száma $2^{18} = 262\,144$. Vizsgáljuk azt az állapotot, hogy a tartály valamelyik részében nulla, vagy egy részecske van. Ezek száma a Pascal-féle háromszög alapján $1+18+18+1=38$. A szóban lévő makroállapot valószínűsége

$$\frac{38}{262\,144} = 1,45 \cdot 10^{-4},$$

nagyjából 7000 állapotot kell megfigyelnünk, hogy az egyik rekeszben nulla, vagy egy részecske legyen.

A nem egyenletes eloszlás kevésbé valószínű, mint az egyenletes eloszlás. Az egyenletes eloszlások gyakrabban következnek be, mint az egyenletestől távoleső eloszlások.

Jelöljük a mikroállapotok számát Y -nal.

A mikroállapotok Y száma nem értelmezhető a fenomenologikus módszerrel leírt ideális gázra. A mikroállapotok száma a kombinatorikus modellünk tulajdonsága. Fontoljuk meg: az Y nem csak attól

függ, hogy hány részecske van a tartályban, hanem attól is, hogy tartályt gondolatban hány egybevágó rekeszre osztottuk.

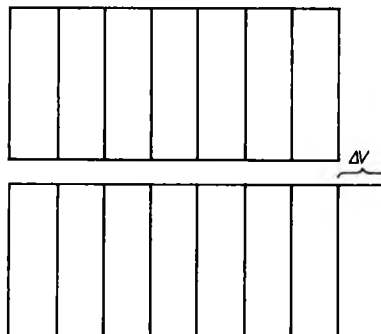
Tegyük fel, hogy az n részecskét egy olyan gáztartályba helyeztük, amelyet k számú egybevágó rekeszre osztottunk. Vessük fel a következő kérdést. Az n részecskét hányféleképpen lehet elhelyezni k rekeszben úgy, hogy az első rekeszben $n_1 \geq 0$, a másodikban $n_2 \geq 0$, a harmadikban $n_3 \geq 0$, ... és a k -adikba $n_k \geq 0$ ($n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$) részecske kerüljön. Ezzel ugyanis egy makroállapotot adtunk meg. Ennek a makroállapotnak

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

számú mikroállapot felel meg. Az n számú megjelölt — megszámozott — molekulát ennyiféleképpen lehet elhelyezni úgy, hogy az első rekeszbe n_1 számú, a másodikba n_2 számú stb. részecske kerüljön.

Vizsgáljunk meg most egy érdekes problémát.

Tegyük fel, hogy két gáztartályunk van. Az egyik V térfogatú, a másik $V + \Delta V$ térfogatú, és tegyük fel, hogy a V térfogatú tartály m számú ΔV nagyságú részre osztható fel (4.5. ábra). Ekkor a nagyobbik tartályban $m + 1$ számú ΔV térfogatú rekesz jelölhető ki gondolatban. Helyezzünk el n szá-



4.5. ábra

mű részecskét az egyik és a másik tartályba is. Az n számú részecskét m számú rekeszbe m^n -féleképpen lehet elhelyezni, míg az $m+1$ rekeszben $(m+1)^n$ -féleképpen.

Így az első esethez tartozó mikroállapotok száma:

$$Y_1 = m^n = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^n,$$

a második esethez tartozó mikroállapotok száma:

$$Y_2 = (m+1)^n = \left(\frac{V+\Delta V}{V}\right)^n.$$

A kettő aránya:

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{(m+1)^n}{m^n} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n.$$

Ezt így olvashatjuk: ha n számú részecske térfogata V -ről $V/m = \Delta V$ -vel tágul, akkor a mikroállapotok száma $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$ -szeresére nő. Másképpen, ha n számú részecske V térfogatú térrészben van, és ez ΔV -vel tágul, akkor a mikroállapotok száma nő:

$$\frac{Y_{\text{később}}}{Y_{\text{korábban}}} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^n.$$

4.1.2. Az entrópia statisztikus értelmezése

Vizsgáljuk most meg, hogy két gáz egyesítésével nyert rendszer mikroállapotait hogyan lehet összeszámolni. Tegyük fel, hogy az A rendszernek Y_A lehetséges mikroállapota van, a B rendszer Y_B mikroállapottal rendelkezhet. Ekkor az A rendszer minden egyes mikroállapotának megfelel a B rendszer minden egyes mikroállapota. Ha például az A gáznak 3 molekulája van, és a tartály két rekeszből áll, akkor az A gázt 8 mikroállapot jellemzi. Ha a B gáz

szintén két részre osztott tartályban van és 2 atomot tartalmaz, akkor ezt 4 mikroállapot jellemzi. Az egyesített rendszernek $8 \cdot 4 = 32$ mikroállapota van. Általában:

$$Y_{A+B} = Y_A Y_B. \quad (1)$$

A mikroállapotok száma a két test egyesítésekor összeszorozódik. Az A rendszer mikroállapotainak a számát a B rendszer mikroállapotainak a számával szorozva az egyesített A+B rendszer lehetséges mikroállapotainak a számát kapjuk. A mikroállapotok száma — ellentétben a részecske számmal — nem extenzív mennyiség. Az extenzív mennyiségek ugyanis összeadódnak és nem összeszorozódnak.

A rendszert jellemző mikroállapotok számát könnyen extenzív mennyiséggé transzformálhatjuk. Gondoljunk ugyanis arra, hogy két szám szorzatának a logaritmusa a logaritmusaik összegével egyenlő. Így ha a mikroállapotok számának a logaritmusát vesszük, akkor extenzív mennyiségeket értelmeztünk; jelöljük ezt s -sel:

$$s := \ln Y. \quad (2)$$

Ekkor (1) alapján

$$s_{A+B} = s_A + s_B, \quad (3)$$

vagyis az újonnan értelmezett mennyiség valóban extenzív tulajdonságú. Most egy felületes okoskodással belátjuk, hogy a mikroállapotok számának a logaritmusa lényegében azonos a fenomenologikus termodinamikából ismert entrópiával.

Gondoljuk el ugyanis, hogy valamely gáz állandó hőmérsékleten tágul, a térfogata V -ről ΔV -vel nő. Ekkor — az előző pontban láttuk — mikroállapotok száma megváltozik:

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^n.$$

Képezzük a két oldal logaritmusát:

$$\ln Y_2 - \ln Y_1 = \ln \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right),$$

mivel azonban $\ln(1+x) \approx x$ közelítő egyenlőség (kis x esetén) teljesül,

$$\ln Y_2 - \ln Y_1 = s_2 - s_1 = n \frac{\Delta V}{V},$$

vagyis

$$V\Delta s = n\Delta V.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt p -vel:

$$pV\Delta s = n p\Delta V. \quad (4)$$

Kis térfogatváltozásról van szó, és az állapotváltozás izotermikus; ezért $p\Delta V = Q$ (hiszen $W = -p\Delta V$ és $Q + W = 0$).

Vegyük most figyelembe az általános gáztörvényt a

$$pV = nkT$$

formában. Ekkor

$$nkT\Delta s = nQ. \quad (5)$$

Innen nyilvánvalóan látszik, hogy a $k \cdot s = = k \ln Y$ extenzív mennyiség valóban azonos az entrópiával, az

$$S := k \ln Y \quad (6)$$

egyenlőséget az entrópia statisztikus fizikai definíciójának tekintjük.

Fontoljuk meg: ha valamely gáz egyensúlyban van, akkor valahogyan egyenlő részecskékre bontva gondolatban a gáztartályt, az a makroállapot valósul meg, amelyet a legtöbb mikroállapot valósít meg. Pontosabban: a bekövetkező makroállapotokat az jellemzi, hogy a hozzájuk tartozó mikroállapotok az összes mikroállapotok túlnyomó többségét képezik. És ha egy rendszer nincs egyensúlyi állapotban (mert például a gáz összes részecskéje a tartály

egyik részében van, és csak most engedjük szabadon a molekulákat), akkor ezt az állapotot jellemző makroállapot kicsi valószínűségű, kevés mikroállapot valósítja meg. A rendszer tehát a „valószínűbb állapotok felé törekszik”, ezeket éppen az jellemzi, hogy az állapotot leíró makroállapotok a maximális számú mikroállapotot írja le. Más szóval ez azt jelenti, hogy a rendszer entrópiája az egyensúlyi állapotban maximális.

Nagyon fontos! Az entrópia (6) alatti statisztikus értelmezése függ attól a modelltől, amellyel a gázt leírtuk. Annak a kombinatorikus „játéknak” a tulajdonsága, amellyel ezt a problémát megközelítetük.

4.1.3. Energiaeloszlás

Az előző pontban a statisztikus fizikai gázmodellben a véges számú részecske egyetlen állapotjelzőjét vizsgáltuk. Ez a részecske helyzete volt a térben. Azért, hogy a kombinatorika és a valószínűségszámítás módszerei könnyen alkalmazhatók legyenek, a részecskék rendelkezésére álló teret egyenlő térfogatú részecskékre osztjuk, és az atom vagy a molekula helyét azzal jellemezzük, hogy melyik részében van a gáz által elfoglalt térrésznek.

Természetesen más mennyiség eloszlását is vizsgálhatjuk hasonlóképpen. Tanulmányozzuk most az energia eloszlását. Ehhez a feladathoz sokféleképpen nyúlhatunk.

Tekintsünk most el a részecskék helyváltoztatásától. Ugyanúgy, mint az előző pontban, csak egy mennyiség eloszlását vizsgáljuk, úgy teszünk, mintha a részecskék helye teljesen érdektelen lenne. A rendszert azonban most is gáznak nevezzük. A rendelkezésre álló energiát, úgy mint az

előző fejezetekben a teret, bontsuk egyenlő részekre és nevezzünk egy ilyen részt energiaadagnak. Jelöljük egy ilyen energiaadag nagyságát e -vel, és az energiaadagok számát r -rel.^(*)

A hipotézisünk a következőképpen fogalmazható meg. Ha egy gázzal egyetlen energiaadagot közlünk, akkor ez az adag egyenlő eséllyel kerül bármelyik atomra, függetlenül attól, hogy melyik atom mennyi energiaadaggal rendelkezett előbb. Az újonnan érkező energiaadag „vak”, nem látja, hogy melyik atom energiakupacára esik.

Induljunk ki tehát abból, hogy van egy n atomból álló ideális gázunk és r energiaadagunk. Az energiaadagokat nem különböztetjük meg egymástól, de az atomokat igen. Vessük fel azt a kérdést, hogy az r energiaadagokat hányféleképpen lehet elosztani n számú atom között.

Az előző pont elején láttuk, hogy ez

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

-féleképpen történhet.

Ha például egyetlen energiaadaggal rendelkezünk, és azt négy atom között osztjuk szét, akkor ez négyféleképpen történhet:

$$\binom{4+1-1}{1} = 4,$$

hiszen a négy különböző atom közül egy megkapja az energiaadagot, a másik három pedig energia nélkül marad.

Ha a négy atomnak két adag energiát adunk, akkor a lehetséges szétosztások

száma:

$$\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$

Az energia eloszlását a következő táblázatban tekinthetjük át. A táblázat 0. oszlopában a négy atom sorszáma található, a következő oszlopok mindegyike megfelel a két adag energia eloszlásának.

1.	1	1	1	0	0	0	2	0	0	0
2.	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0
3.	0	1	0	1	0	1	0	0	2	0
4.	0	0	1	0	1	1	0	0	0	2

A nulladik oszlopot leszámítva 10 oszlopa van a táblázatnak. Az első oszlop egy olyan energiaeloszlást ábrázol, amely az első két atomhoz egy-egy energiaadagot rendel, a második kettőhöz nulla adagot. Az utolsó oszlop azt az energiaeloszlást ábrázolja, amikor a negyedik atom rendelkezik mind a két energiaadaggal. Fontos: a 10 energiaeloszlás *egyenlő valószínűségű*. Bármelyik ugyanazzal az eséllyel bekövetkezik. Figyeljünk fel arra is, hogy 6 olyan energiaeloszlás van, amikor az atomok közül kettőnek van energiája, és négy olyan energiaeloszlás van, ami egyenetlennek mondható: egy atom rendelkezik az összes energiával. Itt is valószínűbbek az egyenetlen eloszlást megvalósító mikroállapotcsoportok.

A mikroállapotok számát jelöljük most is Y -nal:

$$Y = \binom{n+r-1}{r}. \quad (1)$$

Az energiaeloszláshoz tartozó makroállapotokat úgy értelmezzük, hogy a kombinatorikus modellben az atomok megkü-

^(*) Ezt a gondolatmenetet az ún. Einstein-kristály energia-eloszlásának meghatározására szokás alkalmazni. A modellben szereplő feltevésekkel az ideális gázzal kapcsolatban is használható.

lönbözthetetlenek, közöttük nem teszünk különbséget.

A fenti példában a négy atomos, két energiaadagos gáznak két makroállapota van:

1. két atomnak egy-egy adag energiája van,
2. egy atomnak két adag energiája van.

Az első makroállapotnak 6, a másodiknak 4 mikroállapot felel meg. Az első makroállapot tehát valószínűbb. Ha sokkal több atomja lenne a gáznak, akkor azok a makroállapotok, amelyekhez a mikroállapotok zöme tartozik — amelyek az energia egyenletes eloszlását adják — sokkal valószínűbbek, annyira, hogy gyakorlatilag csak ezt észleljük.

Értelmezzük most is az entrópiát úgy, mint a mikroállapotok számának a logaritmusát, pontosabban:

$$S = k \ln Y. \quad (2)$$

Az entrópiával egy-egy makroállapotot vagy makroállapotok egyesítését jellemezzük. Ha egy makroállapot 100 mikroállapotot valósít meg, akkor a makroállapot entrópiája $S = k \ln 100$. Visszatérve a szemléltetés kedvéért a 4 atomos, két 2 energiaadagos rendszerre, az egyenletesebb, rendezetlenebb makroállapothoz 6, a kevésbé egyenletes, rendezettebb makroállapothoz 4 mikroállapot tartozik. Az egyik entrópiája $S_1 = k \ln 6$, a másiké $S_2 = k \ln 4$. A rendezetlenebb állapotok másfélszer gyakrabban következnek be, az entrópia gyakrabban veszi fel a nagyobb értéket, mint a kisebbet.

Két makroállapot egyesítését is makroállapotnak nevezzük. Ebben a példában csak két makroállapot van. Az egyesítésük 10 mikroállapotnak felel meg. Ennek az entrópiája $k \ln 10$.

A rendezetlenségre törekvés — a való-

színűbb állapotra törekvés — itt is egyenértékű az entrópia növekedésének a tendenciájával.

Helyezzünk most egymás mellé két rendszert. Nevezzük ezeket A-nak és B-nek. Ha az A-nak összesen Y_A mikroállapota lehetséges, a B-nek pedig Y_B , akkor a két test egyesítésének — mint már láttuk —

$$Y_{A+B} = Y_A Y_B \quad (3)$$

mikroállapota van.

Az egyesített rendszer entrópiája így

$$S_{A+B} = S_A + S_B. \quad (4)$$

Példaként tekintsük a fenti példában már szereplő 4 atomos, 2 energiaadagos rendszert. A két makroállapotot egyetlen makroállapottá egyesítjük, ekkor az entrópiája $S_A = k \ln 10$.

Tekintsünk most egy másik rendszert, ennek legyen 3 atomja és 4 energiaadagja. Tegyük fel, hogy a két rendszer atomjai és energiaadagjai egyformák. Ennek az utóbbi — B-vel jelölt — rendszernek összesen 15 különböző mikroállapota van. A makroállapotainak a száma 4. A B test mikroállapotait is táblázatba rendeztük:

1.	1	1	2	2	0	2	4	0	0	3	1	3	1	0	0
2.	1	2	1	0	2	2	0	4	0	1	3	0	0	3	1
3.	2	1	1	2	2	0	0	4	0	0	1	3	1	3	

A B rendszer négy makroállapota:

1. két atomnak 1—1, egy atomnak 2 energiaadagja van,
2. két atomnak 2—2, egy atomnak 0 energiaadagja van,
3. egy atomnak 4 energiaadagja van, kettőnek nincs energiája,
4. egy atomnak 1, egy másiknak 3, a harmadiknak 0 energiaadagja van.

Az első három makroállapot egyenlő valószínűségű, mert mindegyikhez 3 mikroállapot tartozik, a negyedik valószínűsége kétszerese például az elsőnek. Ehhez 6 mikroállapot tartozik.

Ha a két testet egymás mellé helyezzük, akkor 150 mikroállapot írja le a viselkedésüket, hiszen az A testnek egy mikroállapotához párba állíthatjuk a B test minden egyes mikroállapotát.

Vessük most fel a következő kérdést. Hány mikroállapota lehet a két rendszer egyesítésének, ha a két test között az energiaáramlást megengedjük, vagyis kölcsönhatásba léphetnek egymással?

Ekkor 7 atomos és 6 energiaadagos rendszerrel kell számolnunk. Ennek a rendszernek

$$\binom{7+6-1}{6} = 924$$

mikroállapota lehetséges. Ha az energia kicserélődhet a két rendszer között, akkor a rendszer lehetséges állapotait sokkal több mikroállapot írja le. Az egyesített rendszer maximális entrópiája tehát $k \ln 924$.

Tegyük fel most, hogy a két testet éppen most tettük egymás mellé és gondoljuk el, hogy az energiaadagok átadását-átvételét nyomon tudjuk követni. Vizsgáljuk meg, hogy milyen következményekkel jár az, hogy 1 energiaadag átmegy a B testből az A testbe. (Egy atomra számolva a B rendszerben több energiaadag van, mint az A-ban.)

Ekkor az A rendszer 4 atomjára 3 energiaadag jut, míg a B rendszer 3 atomjának 3 energiaadagja marad. Az A rendszer energia-mikroállapotainak a száma ezután

$$Y_A = \binom{4+3-1}{3} = 20$$

-ra nő, a B rendszer energia-mikroállapo-

tainak a száma

$$Y_B = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

lesz, hiszen a 3 atomra most 3 energiaadag jut. A rendszer mikroállapotok száma ezután $20 \cdot 10 = 200$, amely nagyobb, mint a kezdeti 150.

Gondoljuk el, hogy milyen következményekkel jár, ha még egy energiaadag átmegy a B testből az A testbe! Ekkor az A test 4 atomja 4 adag energián osztozik, de a B test 3 atomjának már csak két energiaadag jut. Ekkor

$$Y_A = \binom{4+4-1}{4} = 35$$

és

$$Y_B = \binom{3+2-1}{2} = 3.$$

A mikroállapotok összes száma ebben az esetben $35 \cdot 3 = 105$. Most csökken a kezdeti 150-hez képest.

Összefoglalva: ha a B rendszer átad egyetlen energiaadagot az A rendszernek, akkor e mikroállapotok száma 150-ről 200-ra nő, tehát a rendszer összes entrópiája $k \ln 150 = 6,91 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ -ről $7,31 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ -re nő. Olyan állapot következik ezzel be, amely valószínűbb, amelyet gyakrabban megfigyelhetünk. Ha még egy energiaadag átmegy a B rendszerből az A rendszerbe, akkor az entrópia $6,4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ -re csökken. Ez az utóbbi energiaátadás — bár nem lehetetlen — de olyan makroállapotot valósít meg, amely ritkán figyelhető meg.

Vizsgáljuk meg most, hogy egy n atomos, r energiaadaggal rendelkező rendszer mikroállapotainak a száma hányszorosára változik meg, ha egyetlen energiaadagot közlünk a rendszerrel!

Ha a rendszernek r energiaadagja van,

akkor a mikroállapotainak száma:

$$Y(r) = \binom{n+r-1}{r}, \quad (5)$$

ha pedig egy energiaadagot felvett, akkor

$$Y(r+1) = \binom{n+r}{r+1}. \quad (6)$$

Osszuk el a két egyenlőséget egymással:

$$\begin{aligned} \frac{Y(r+1)}{Y(r)} &= \frac{(n+r)!}{(r+1)!(n-1)!} \cdot \frac{r!(n-1)!}{(n+r-1)!} = \\ &= \frac{(n+r)! n!}{(r+1)!(n+r-1)!}, \end{aligned}$$

tehát

$$\frac{Y(r+1)}{Y(r)} = \frac{n+r}{r+1}. \quad (7)$$

Tegyük fel, hogy r sokkal nagyobb, mint 1, vagyis a rendszernek kezdetben egynél sokkal több energiaadagja van. Ekkor

$$\frac{Y(r+1)}{Y(r)} \approx \left(1 + \frac{n}{r}\right). \quad (8)$$

Ebben az esetben egyetlen energiaadag felvétele $1 + n/r$ -szeresére növeli az energia-mikroállapotok számát. Két adag felvétele $\left(1 + \frac{n}{r}\right)^2$ -szeresére, x energiaadag felvétele pedig $\left(1 + \frac{n}{r}\right)^x$ -szeresére növeli a mikroállapotainak a számát:

$$\frac{Y(r+x)}{Y(r)} = \left(1 + \frac{n}{r}\right)^x. \quad (9)$$

Ugyanígy:

$$\frac{Y(r-1)}{Y(r)} = \left(1 + \frac{n}{r}\right)^{-1},$$

ha x adagot veszünk el, akkor

$$\frac{Y(r-x)}{Y(r)} = \left(1 + \frac{n}{r}\right)^{-x}. \quad (10)$$

Íranyítsuk most a figyelmünket egy n_A atomos, r_A energiaadaggal rendelkező A testnek és egy n_B atomos, r_B energiaadaggal rendelkező B testnek a kölcsönhatására.

Tegyük fel — bár egyáltalán nem kellene —, hogy a két rendszer energiaadagjai egyenlő nagyok.

Induljunk ki a következő feltételből: a B rendszerből x számú energiaadag megy át az A rendszerbe és eközben az egyesített rendszer energia-mikroállapotainak a száma nő. Ekkor

$$Y_{A+B}(\text{később}) \geq Y_{A+B}(\text{előbb}), \quad (11)$$

vagyis az egyesített rendszer mikroállapotainak a száma nő. Ezt a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} Y_A(\text{később}) Y_B(\text{később}) &\geq \\ &\geq Y_A(\text{előbb}) Y_B(\text{előbb}), \end{aligned} \quad (12)$$

vagyis

$$Y_A(r_A + x) Y_B(r_B - x) \geq Y_A(r_A) Y_B(r_B).$$

Felhasználva a (9) és a (10) egyenlőségeket,

$$\begin{aligned} Y_A(r_A) \left(1 + \frac{n_A}{r_A}\right)^x Y_B(r_B) \left(1 + \frac{n_B}{r_B}\right)^{-x} &\geq \\ &\geq Y_A(r_A) Y_B(r_B), \end{aligned}$$

és innen

$$\left(1 + \frac{n_A}{r_A}\right)^x \geq \left(1 + \frac{n_B}{r_B}\right)^x,$$

és végül

$$\frac{n_A}{r_A} \geq \frac{n_B}{r_B}. \quad (13)$$

Ez annak a feltétele, hogy egyszerű modelünkben az energia úgy menjen a B rendszerből az A rendszerbe, hogy közben a mikroállapotok összes száma növekedjék. Ha a (11) feltétel fennáll, akkor a B rendszerből az A rendszer felé történő energiaáramlás a valószínűbb állapotok bekövetkezését jelenti, vagyis a rendszer a valószínűbb, a rendezetlenebb állapot felé törekszik.

Térjünk vissza (9)-hez. Vegyük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln Y(r+x) - \ln Y(r) = x \ln \left(1 + \frac{n}{r} \right).$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt az energiaadag nagyságával és a Boltzmann-állandóval:

$$\begin{aligned} ek[\ln Y(r+x) - \ln Y(r)] &= \\ &= kex \ln \left(1 + \frac{n}{r} \right). \end{aligned}$$

A bal oldal az entrópia értelmezése alapján $e \Delta S$, a jobb oldal pedig $kQ \ln \left(1 + \frac{n}{r} \right)$, hiszen $Q = xe$, mert a két rendszer között az energia átadása csak hőhatással történik. Így

$$\Delta S = \frac{1}{e} k Q \ln \left(1 + \frac{n}{r} \right). \quad (14)$$

Ha tehát hő úgy megy át a B rendszerből az A rendszerbe, hogy közben az összes entrópia növekszik, vagyis

$$\Delta S_A + \Delta S_B \geq 0,$$

akkor az

$$\frac{1}{e} \left(1 + \frac{n}{r} \right)$$

mennyiség a B testre vonatkozóan kisebb, mint az A testre jellemző értéke. A (14)

összefüggésből látható, hogy ez a mennyiség a hőmérséklet reciprokának feleltethető meg. Valóban, legyen

$$T = \frac{e}{k \ln \left(1 + \frac{n}{r} \right)}. \quad (15)$$

Ekkor a (14) így írható:

$$T \Delta S = Q,$$

összhangban a fenomenologikus termodinamikával. Annak a testnek nagyobb a hőmérséklete, amelynél az n/r arány kisebb, vagy fordítva: amelynél az r/n arány nagyobb, vagyis amelyben nagyobb a részecskékre jutó energiaadagok száma. Más képpen: a hőmérséklet növekedése azt jelenti, hogy a részecskékre átlagosan több energia jut.

Az illusztráció kedvéért térjünk vissza a már többször említett két rendszerhez. Ilyenkor (8)-ban $1 + n/r$ helyett a (7)-et kell használnunk. A két test hőmérsékletének aránya:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{e}{k \ln \frac{n_A + r_A}{r_A + 1}}}{\frac{e}{k \ln \frac{n_B + r_B}{r_B + 1}}} = \frac{\ln \frac{n_B + r_B}{r_B + 1}}{\ln \frac{n_A + r_A}{r_A + 1}}.$$

Ez a hányados kezdetben:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\ln \frac{7}{5}}{\ln \frac{6}{3}} = 0,48,$$

vagyis ebben a szélsőségesen egyszerű modellben a B test hőmérséklete kezdetben kétszerese az A test hőmérsékletének. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik a hőmérsékletarány, ha 1 energiaadag átme

a B rendszerből az A rendszerbe. Ekkor

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\ln \frac{6}{4}}{\ln \frac{7}{4}} = 0,72,$$

a B test hőmérséklete még mindig nagyobb. Képzeld el, hogy az A rendszer még egy adag energiát átvesz a B gáztól. Ekkor

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\ln \frac{5}{3}}{\ln \frac{8}{5}} = 1,08.$$

Az A test hőmérséklete már nagyobb, mint a B testé. A folyamat nem folytatódik, mert az entrópia ettől kezdve csökkenne, ami azt jelenti — másképpen fogalmazva —, hogy valószínűtlenebb állapotok következnenek be. Ez persze nincs kizárva, de sok részecske esetén lényegében csak a nagyobb valószínűségű állapotokat tapasztaljuk.

Egy test entrópiája kétféle folyamat közben változhat meg. Ha rendszer a környezetével termikus kontaktusba kerül, akkor a hő leadásával vagy felvételével összefüggésben megváltozik az entrópiája: ΔS entrópiaváltozáshoz — T hőmérsékleten — $T\Delta S$ hőközlés társul.

Másrészt egy test entrópiája megváltozhat akkor is, ha a testet elszigeteljük a környezetétől. Lehetséges ugyanis, hogy a környezetétől elkülönített rendszer nincs egyensúlyi állapotban: vagy nem egyenletes a sűrűsége, azaz a részecskéi a rendelkezésre álló teret nem egyenletesen töltik ki, vagy az összes energiája nem egyenletesen oszlik el az atomokon, molekulákon. Elképzélhető, hogy valamilyen más mennyiség eloszlása nem egyenletes. Mindenesetre

az egyenletes eloszlás a legvalószínűbb. A valószínűbb, a több mikroállapottal megvalósítható makroállapotok rendezetlenebb állapotot jelentenek, ezek entrópiája nagyobb. Ha a rendszer kezdetben nincs egyensúlyi állapotban, akkor az egyensúlyi állapot felé haladva az entrópiája nő. Az egyensúlyi állapotban maximális az entrópia. Ez a folyamat általában nem fordítható meg. Kis rendszernél, néhány atomot tartalmazó rendszernél is kicsi a valószínűsége, hogy a rendszer az egyensúlyi állapotból egy rendezettebb állapotba jusson. Nagyszámú atomot tartalmazó rendszernél az egyensúly körüli ingadozás mértéke is kicsi.

A magára hagyott rendszer entrópiája tehát vagy állandó, vagy az egyensúlyi helyzet felé haladva növekszik. Az elszigetelt rendszer entrópiája nem csökkenhet: $\Delta S = \sigma \geq 0$.

A két szempontot figyelembe véve:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} + \sigma. \quad (16)$$

Ez is összhangban van a klasszikus fenomenológikus termodinamikával. A (16) mérlegegyenlet jobb oldalán az első tag a környezettel való kölcsönhatás eredményeként fellépő entrópiánövekedés mértéke, a kívülről kapott entrópia. A második tag a spontán entrópiánövekedés mértéke. Az a körülmény, hogy $\sigma \geq 0$, a termodinamika második főtételével egyenértékű állítás.

XVI. Feladatcsoport: statisztikus mechanika

XVI/1. Egy gáztartályban 6 független részecske van. A tartályt gondolatban két egyenlő részre osztjuk. A részecske állapo-

tát azzal jellemezzük, hogy melyik tartályrészben van. Tekintsük azt a makroeloszlást, hogy a bal oldali tartályban 2, 3 vagy 4 részecske van. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez a makroállapot bekövetkezik? Mekkora ennek az állapotnak az entrópiája?

XVI/2. Egy gondolatban kettéosztott tartályban 100 részecske van. Mi a valószínűsége annak, hogy az egyik vagy a másik tartályban 0 vagy 1 részecske van?

XVI/3. Egy V térfogatú tartályban 100 részecske van. A tartály térfogata $0,1 V$ -vel nő. Hányszorosára nő a mikroállapotok száma? Mennyivel nő az entrópia?

XVI/4. Egy 3 atomból álló rendszernek 3 energiaadagja van. Hány egyenlő valószínűségű mikroállapot lehetséges? Hány makroeloszlás valósulhat meg? Mennyi az egyes makroállapotok valószínűsége? Tegyük fel, hogy a kezdeti mikroállapotban a három energiaadag egyenletesen oszlik el a három atomon. Később azt tapasztaljuk, hogy a három atom egyikének nincs energiája, egy atomnak pedig két adag energiája van. Mennyivel nőtt az entrópia az átmenet során?

XVI/5. Egy 8 független atomból álló ideális gáz gondolatban kettéválasztott tartályban van. Kezdetben az egyik rekeszben 4, a másikban is 4 atom van. Kis idő múlva azt tapasztaljuk, hogy az egyik rekeszből a másikba átment egy részecske.

Mennyivel változott az entrópia ebben az átmenetben?

XVI/6. Egy 8 független atomból álló ideális gáz gondolatban kettéválasztott tartályban van. Kezdetben mindegyik atom a bal oldali rekeszben van. Kis idő múlva azt tapasztaljuk, hogy az egyik rekeszben is, a másikban is 4 atom van. Mennyivel nőtt az entrópia ebben a „ki-egyenlítődési” folyamatban?

XVI/7. Az A rendszernek 3 atoma és 3 energiaadagja van. A B rendszernek is 3 atoma van, de 5 energiaadagja. A két rendszer energiaadajai — tegyük fel — egyenlők. Melyik testnek nagyobb a „hőmérséklete”? A B test egyetlen energiaadagot átad az A testnek. Mennyivel változott meg a két rendszer egyesítésének az entrópiája?

XVI/8. Egy rendszernek 10 atoma és 20 energiaadagja van. Ez a rendszer 10^{-6} J hőt vesz fel 10^{-10} J nagyságú energiaadagokban. Mennyivel változik a rendszer entrópiája?

XVI/9. Egy rendszernek 10 atoma és 20 energiaadagja van. Az energiaadagok nagysága $1,53 \cdot 10^{-21}$ J. Mekkora ennek a rendszernek a „hőmérséklete”?

XVI/10. Egy rendszer 300 K hőmérsékleten 1 J energiát vesz fel hőhatás formájában, és 2,5 J munkát végez rajta a környezete. Mennyivel változik a rendszer entrópiája?

III. rész

**Elektrodinamika
és optika**

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

1. Elektromosság

1.1. Az elektromos tér

1.1.1. A Coulomb-törvény

A mechanikai jelenségkör legjellegzetesebb kölcsönhatása a gravitációs erőhatás. Lényegében az összes problémában megjelenik, az összes jelenségnél szerepet játszik. A gravitációs erő távolható erő, egymástól távollevő testek között lép fel, és a hatás „végtelen sebességgel” terjed.

Hasonló erőhatást észleltünk elektromos állapotú testek esetén. Ősrégi tapasztalat, hogy bizonyos anyagok dörzsöléssel olyan állapotba hozhatók, amelyben egymásra erőt fejtenek ki. A testeknek ezt az állapotát *elektromos állapot*nak nevezzük. Bizonyos testek tehát, mint például üvegrúd, műanyagrúd, szövet, dörzsöléssel elektromos állapotúvá tehetők. Az elektromos állapotban legtöbbször a test más tulajdonságai nem változnak meg, az elektromos állapotba került üvegrúd nem görbül el, nem nyúlik meg, színe sem változik és a tömege sem.

Az elektromos állapotú — vagy röviden elektromos — testekkel kapcsolatban a következőket figyelhetjük meg.

1. Ha két, ugyanolyan anyagú testet ugyanazzal a módszerrel teszünk elektromossá, akkor ezek mindig taszítják egymást.

2. Általában azonban az elektromos állapotú testek között fellépő erőhatás lehet vonzó is, taszító is.

3. Ha két testet összedörzsölve az egyik elektromos állapotú lesz, akkor a másik is, és ez a két test mindig vonzza egymást.

4. Az egymást vonzó testeket összeérintve, majd ismét eltávolítva az erőhatás lecsökken, esetleg megszűnik, vagyis a testek elektromosan semleges állapotba kerülnek.

5. Két ugyanolyan, azonos módon elektromos állapotúvá tett test együttesen kétszer akkora erőhatást fejt ki, mint külön-külön.

Ezen elemi tapasztalati tények alapján kézenfekvő, hogy a testek elektromos állapotát egy extenzív mennyiséggel jellemezzük. Ezt az extenzív mennyiséget *elektromos töltés*nek nevezzük.

Az elektromos állapot kétféle. A vonzó és a taszítóerőt csak így lehet értelmezni. A *kétféle elektromos állapot*nak megfelelően kétféle elektromos töltés van. Az egyik töltést *pozitív*nak, a másikat *negatív*nak nevezzük. Az elnevezést szabadon választottuk, ugyanígy szabadon döntünk afelől, hogy melyik töltést nevezzük pozitívnak. Abban állapodunk meg, hogy a bórrel

megdörzsölt üvegrúd elektromos töltését nevezzük pozitívnak.

Pozitív töltésű testek taszítják egymást, ugyanígy a negatív töltésűek között is taszítóerő hat. Pozitív, illetve negatív töltéssel rendelkező testek között vonzóerő lép fel. Az egynemű, azonos előjelű töltések között taszítóerő hat, az ellentétes előjelű — különmemű — töltések vonzzák egymást.

A semleges — tehát nem *elektromos állapotú* — test töltése nulla. Így ugyanannyi pozitív és negatív töltés egyesítése után a test semlegessé válik.

Az elektromos töltést olyan skaláris értékű extenzív mennyiségnek tekintjük, amelynek a számértéke tetszőleges valós szám lehet, pozitív, negatív és nulla. Nulla töltésű test és bármely más test között nem lép fel (elektromos állapotból származó) erő. Az elektromos töltés egyik testből a másikba „áramolhat”, az egyik test a másiknak átadhat elektromos töltést.

Az elektromos töltés — ugyanúgy, mint a fizika központi jelentőségű extenzív mennyiségei — fogalmilag más mennyiségekre nem vezethető vissza. Az elektromos töltés tehát alapfogalom.

Említettük, hogy bizonyos megközelítésben az egyes fizikai fejezeteket egy-egy extenzív mennyiség karakterisztikus viselkedése jellemzi. Így az impulzus a mechanikát, az energia a termodinamikát. Az elektrodinamikában az elektromos töltésnek van kiemelt szerepe.

Az elektromos töltést legtöbbször Q -val jelöljük.

Az elektromos töltéssel kapcsolatban egy fontos alapvetet fogalmazzunk meg. Axiómaként kezeljük, hiszen most fizikai eszközökkel alátámasztani nem lehet. Az alapelvre alapozott elmélet azonban a tapasztalattal összhangban van.

Axióma: *Az elektromos töltés megmaradó mennyiség. Más szóval: elektromosan zárt rendszerben az elektromos töltés összes mennyisége állandó.*

Vizsgáljuk meg most az elektromos töltés szerepét az elektromos erőhatásban, és egyúttal állapotunk meg az elektromos töltés mértékegységében.

Egyelőre az elektromosan töltött, pontszerű, nyugvó testek között fellépő erőhatással foglalkozunk. Feltesszük, hogy ezek a pontszerű testek vákuumban vannak. Ekkor érvényben van a

Coulomb-törvény: *A pontszerű, elektromosan töltött testek között fellépő vonzó- vagy taszítóerő a két pont közötti távolság négyzetével fordítottan, a töltések szorzatával egyenesen arányos. Ha az egyik test töltését Q_1 -gyel, a másikat Q_2 -vel jelöljük, akkor*

$$F \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

A tört számlálójában nem állhat más kifejezés, mint a töltések szorzata: csak a töltések szorzata esetén teljesülhet az erőhatások függetlenségének az elve és a hatásellenhatás elve. (Ezt a gondolatot alaposan kifejtettük a gravitáció tárgyalásakor.)

A fenti arányosságban az arányossági tényezőt és a töltés mértékegységét kell megválasztanunk. Lényegében két út lehetséges.

Az egyik lehetőség: Válasszuk meg az arányossági tényezőt 1-nek. Ekkor

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1)$$

és ha a távolság mértékegysége cm, az erő pedig dyn, akkor a töltés mértékegysége

$\sqrt{\text{dyn}} \cdot \text{cm}$, amit röviden franklinnak nevezünk és Fr-rel jelölünk. Így $1 \text{ Fr} = 1 \sqrt{\text{dyn}} \cdot \text{cm}$ az a töltés, amely ugyanilyen nagy töltést 1 cm távolságból $1 \text{ dyn} = 1 \text{ g cm/s}^2$ erővel taszít. Itt tehát először megválasztottuk az arányossági tényezőt, majd ebből következtettünk a töltés egységére. A mértékegységét visszavezettük a mechanikai mértékegységekre.

A másik lehetőség: Először megválasztjuk a *töltés mértékegységét*. Nevezzük ezt *coulomb-nak*, és jelöljük C-vel. A töltés egységét a következőképpen választjuk meg: legyen 1 C az a töltés, amely ugyanekkora töltést 1 m távolságból $9 \cdot 10^9 \text{ N}$ erővel taszít. Ekkor az arányossági tényező mértékegysége szükségszerűen $\text{N m}^2/\text{C}^2$. Legyen

$$k := 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2},$$

ekkor

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (2)$$

A (2) szerint 1 coulomb nagyságú töltés 1 coulomb nagyságú töltést 1 méter távolságból $9 \cdot 10^9 \text{ N}$ erővel taszít.

A gravitációs töltéssel kapcsolatban felvetettük azt a kérdést, hogy függ-e a test egyéb állapotjelzőitől, és ha igen, akkor milyen természetű ez a függés. Láttuk, hogy csak a tömegtől függ, ez a függés azonban igen egyszerű: egyenes arányosság.

Ugyanez a kérdés az elektromos töltéssel kapcsolatban is felvethető. A választ természetesen ugyanúgy, mint a gravitációs töltés esetén, a tapasztalat adhatja meg. A tapasztalat szerint az elektromos töltés független a test többi állapotjelzőjétől.

Láttuk: az elektromos töltés mérőszáma

tetszőleges pozitív szám, negatív szám vagy nulla lehet. Ez azt is jelenti, hogy az elektromos töltés tetszőlegesen osztható. (Ez nem nyilvánvaló, de nincs még olyan tapasztalatunk, amely ennek a hipotézisnek ellentmondana.)

¶Vessük fel most a következő kérdést: hány C az a töltés, amely ugyanilyen nagy töltést 1 cm távolságból $10^{-5} \text{ N} = 1 \text{ dyn}$ erővel taszít. A (2) alapján

$$10^{-5} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q^2}{10^{-4}},$$

innen

$$Q = \frac{10}{3} \cdot 10^{-10} \text{ C}.$$

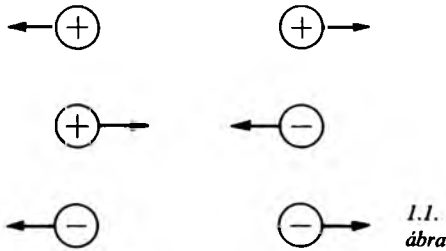
Ebből látszik, hogy $3,33 \cdot 10^{-10} \text{ C} = 1 \text{ Fr}$, vagyis $3 \cdot 10^9 \text{ Fr} = 1 \text{ C}$.]

Az (1) és a (2) egyenlőségek a Coulomb-törvényt fejezik ki. A legtöbb esetben a Coulomb-törvény (2) formáját használjuk.

Egy szóhasználatlaltal kapcsolatos megjegyzés: amikor azt mondjuk, hogy a tér valamely pontjába helyeztünk egy Q töltést, akkor ezen azt értjük, hogy a térnek ebbe a pontjába helyeztünk egy Q töltésű testet. Ugyanilyen értelemben gyakran szerepel a következő kifejezés: „A Q_1 töltés F erőt fejt ki a Q_2 töltésre.” Ez a rövid mondat pontosan a következőt jelenti: „A Q_1 töltéssel rendelkező test F erőt fejt ki a Q_2 töltéssel rendelkező testre.”

A helyes kifejezőmód tehát: egy testet Q elektromos töltéssel láttunk el (töltöttünk fel), ezt a testet a tér egy bizonyos pontjába helyeztük, és rá egy másik elektromos állapotú test erőt fejt ki.

A pontos kifejezések helyett azonban a rövidebb és egyszerűbb megfelelőiket használjuk. Tudnunk kell azonban, hogy a töltés csak anyaggal együtt helyezhető el



valahol, és erőhatás az elektromos állapotú testek között hat, nem a töltések között.

A (2) Coulomb-törvény alkalmazásával kapcsolatban jegyezzük meg, hogy ez nem fejezi ki az erő irányát. Ha az összefüggés jobb oldalába behelyettesítjük a Q_1 és Q_2 töltéseket, akkor egy pozitív vagy negatív számot kapunk. Ha $F > 0$, akkor ez azt jelenti, hogy a két töltés között F nagyságú, a két töltést összekötő egyenes mentén ható taszítóerő hat. Ha $F < 0$, akkor a két töltött test között ható erő nagysága (F) és a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a pontszerű testek között vonzóerő hat a két pontot összekötő egyenes mentén (1.1. ábra).

A (2) „skaláris” Coulomb-törvényt felhasználva a pontszerű testre ható elektromos erő vektori kifejezését a következőképpen kapjuk. Helyezzünk az origóba Q_0 töltésű pontszerű testet. Legyen a Q töltés az $\mathbf{r} = (x, y, z)$ pontban. Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

A \mathbf{R} jelentése: az \mathbf{r} vektorral egyirányú, egységnyi hosszúságú vektor. Ekkor a Q_0 töltésre kifejtett erő:

$$\mathbf{F} = -k \frac{Q_0 Q}{r^2} \mathbf{R}. \quad (3)$$

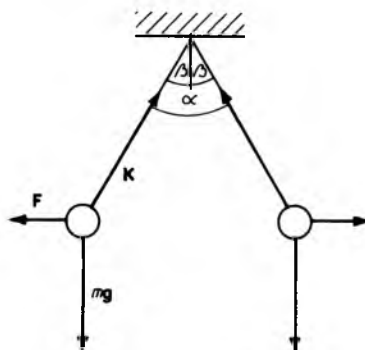
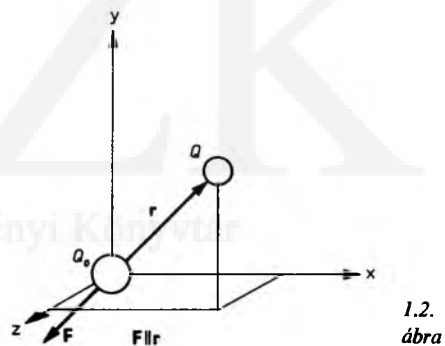
Valóban: ha a két töltés azonos előjelű, akkor az erő taszítóerő, vagyis \mathbf{r} -rel (tehát

\mathbf{R} -rel) ellentétes irányú, a Q_0 töltésre ható erő ellentétes irányba mutat, mint a Q töltésű test felé mutató helyvektor. Fordítva: ha a két töltés ellentétes előjelű, akkor az \mathbf{F} erő egyirányú \mathbf{R} -rel, hiszen ilyenkor $Q_0 Q$ negatív, így az \mathbf{R} együtthatója pozitív (1.2. ábra).

A (3) összefüggés a Coulomb-törvény egyik lehetséges vektori kifejezése.

A feladatok megoldása szempontjából az elektromos erő fellépte nem okoz különösebb gondot. A dinamika elveit kell alkalmazni, és figyelembe kell venni, hogy a Coulomb-féle erőtvény által meghatározott elektromos erő szabaderő.

□ Tegyük fel, hogy két — egyenként L hosszúságú — fonál egy közös pontban van a mennyezetre felfüggesztve. A fonálon azonos m tömegű testek függenek (1.3.



ábra). Az egyik test töltése Q_1 , a másiké Q_2 . A két töltés azonos előjelű, így taszítják egymást. Jelöljük a fonalak által bezárt szöveget α -val. Ekkor egyensúlyban a két test egyenlő magasságban van, a két fonál a függőlegessel egyaránt $\alpha/2 = \beta$ szöveget zár be. Mindkét testre három erő hat. Az mg nehézségi erő, az F elektromos erő és a K kötélerő. Tekintsük például a bal oldali testet. A rá ható erők eredőjének vízszintes vetülete nulla:

$$K \sin \beta - F = 0. \quad (4)$$

A függőleges komponensek összege is nulla:

$$K \cos \beta - mg = 0. \quad (5)$$

A másik testre is ugyanilyen erők hatnak, a Newton-törvények szóról szóra ugyanígy fogalmazhatók meg.

Az erőtörvény szerint

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (6)$$

ahol

$$r = 2L \sin \beta. \quad (7)$$

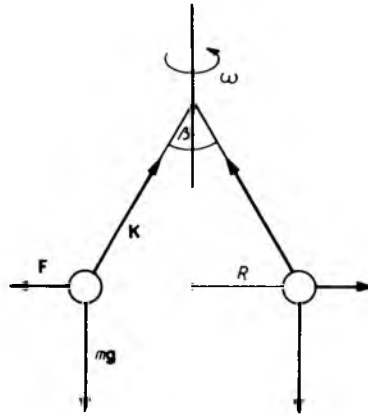
A (4), (5), (6), (7) egyenletekből alkalmas adatok alapján az ismeretlenek meghatározhatók. Ha például a testek tömege egyaránt $m = 10$ g, a fonál hossza $L = 90$ cm, és $r = 30$ cm, és a két töltés azonos nagyságú: $Q_1 = Q_2 =: Q$, akkor (7) alapján $\beta = 9,6^\circ$, és $\alpha = 19,2^\circ$. A (4) és (5) alapján:

$$\frac{F}{mg} = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 9,6^\circ = 0,169.$$

Ebből az $F = 0,0169$ N. Így

$$0,0169 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q^2}{0,3^2}.$$

Innen $Q = 4,1 \cdot 10^{-7}$ C = 0,41 μ C.]



1.4. ábra

„Gondoljuk most el, hogy az előző feladatban látott, két, egyenként L hosszúságú fonálon egy-egy m tömegű test függ, és mindkét test töltése Q . Tegyük fel, hogy a két fonál a függőleges tengely körül kúpingaként körbemozog (1.4. ábra). A testek sebessége legyen v , a pályasugár R . Ekkor a (4) egyenlet így módosul:

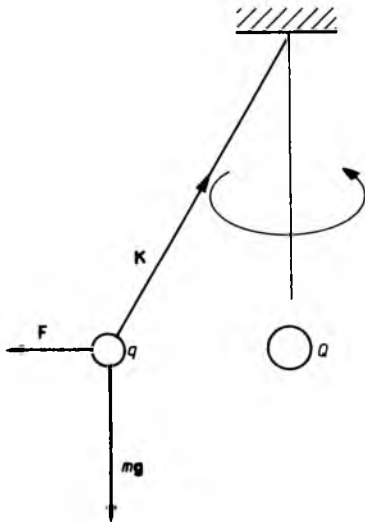
$$K \sin \beta - F = m \frac{v^2}{R}. \quad (8)$$

Az (5), a (6) és a (7) egyenlőségek változatlanul érvényesek. Vigyázzunk arra, hogy az $R = L \sin \beta$ pályasugarat különböztessük meg az $r = 2R = 2L \sin \beta$ -tól, ez ugyanis a két test távolsága.]

„Tegyük fel egy új probléma kedvéért, hogy L hosszúságú fonálon egy m tömegű, q töltésű test függ. A fonál és a test kúpingaként körbemozog. Ekkor a körpálya sugara r , és a test sebességét jelöljük v -vel. A körpálya középpontjában rögzített, Q töltésű test van (1.5. ábra).

Newton II. törvénye az erők vízszintes irányú eredőjére:

$$K \sin \alpha - F = m r \omega^2 = m \frac{v^2}{r}, \quad (9)$$



1.5. ábra

és a függőleges komponensekre:

$$K \cos \alpha - mg = 0. \quad (10)$$

A geometriai viszonyokat kifejező

$$r = L \sin \alpha \quad (11)$$

egyenlőség mellett érvényben van a Coulomb-féle erőtvény is:

$$F = k \frac{Qq}{r^2}. \quad (12)$$

Itt elképzelhető, hogy a két töltött részecske között vonzóerő lép fel, ellentétben az előző két példával, amelyekben csak taszítóerő léphetett fel. A (9) és a (8) egyenlőségekbe is behelyettesíthető (12)-ből származó negatív F erő. A bal oldalon akkor két pozitív szám összege áll.]

1.1.2. Az elektromos térerősség, Gauss-tétel elektromos térre

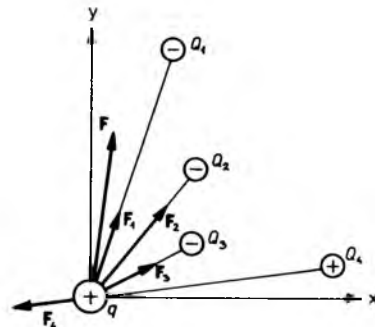
A Coulomb-féle erőtvény a pontszerű testek között vákuumban fellépő elektromos erőt írja le. Ebben a pontban ennek az

egyszerű erőtvénynek az általánosítását tűzzük ki célul. Gondolatmenetünk egyik legfontosabb pontja az, hogy az elektromos erő szabaderő.

A Coulomb-törvény általánosításának az első lépése az az eset, amikor egy elektromosan töltött pontszerű testre, az úgynevezett próbatestre néhány más, elektromos töltéssel rendelkező pontszerű test hat. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a próbatest a koordináta-rendszer origójában van, és a töltését jelöljük q -val. Gondoljuk el, hogy a koordináta-rendszer $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$ pontjaiba $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ töltéseket helyeztünk. Ekkor a q töltésű próbatestre ható elektromos erő az egyes töltött testek által kifejtett elektromos erők összege: mint mondtunk, az elektromos erő szabaderő, zavartalanul összegződik (1.6. ábra).

Azért, hogy ezt az állítást matematikailag formában is megfogalmazzuk, vezessük be az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$ helyvektorokkal egyirányú, egységnyi hosszú $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \dots, \mathbf{R}_n$ vektorokat. Ekkor a q töltésre ható erő:

$$\mathbf{F} = - \left(k \frac{Q_1}{r_1^2} \mathbf{R}_1 + k \frac{Q_2}{r_2^2} \mathbf{R}_2 + k \frac{Q_3}{r_3^2} \mathbf{R}_3 + \dots + k \frac{Q_n}{r_n^2} \mathbf{R}_n \right) q. \quad (1)$$



1.6. ábra

Az egyes erők kifejezésében a q egy szorzat egyik tényezője, ezért kiemelhető az összegből. Így próbatestre ható erő két tényező szorzatára bontható. Az egyik tényező a $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ pontszerű töltésekre és ezek térbeli elhelyezkedésére jellemző, a másik tényező a próbatest töltése.

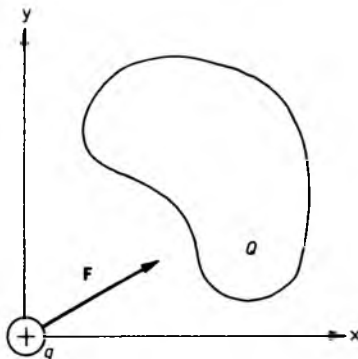
Általában is így van. Tegyük fel, hogy egy elektromos állapotú test erőt fejt ki egy pontszerű próbatestre. Ekkor a pontszerű testre ható elektromos erő két tényező szorzatára bontható: az egyik tényező csak a próbatestre jellemző, ez ugyanis a próbatest töltése, a másik tényező pedig nem függ a próbatesttől, csak az elektromos erőt kifejtő töltéseloszlás függvénye. Így a q töltésű próbatestre ható elektromos erő:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot q, \quad (2)$$

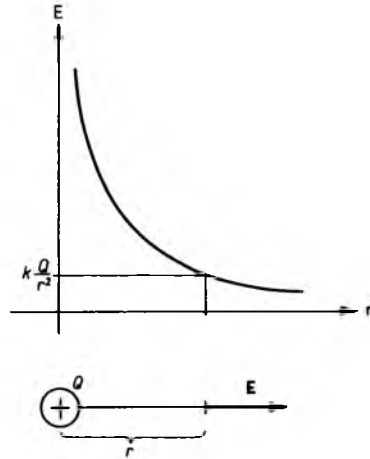
ahol az \mathbf{E} vektormennyiséget *elektromos térerősségnek* nevezzük (1.7. ábra).

Az elektromos térerősség az egységnyi pozitív töltéssel rendelkező próbatestre ható elektromos erő. *Mértékegysége* a newton/coulomb (N/C).

A (2) definiáló egyenlőség az (1) egyenlőségnek, és így természetesen a Coulomb-törvénynek is általánosítása. Tegyük fel



1.7. ábra



1.8. ábra

ugyanis, hogy Q töltésű test elektromos erőt fejt ki a q töltésű próbatestre. Ha a köztük lévő távolság r , akkor a fellépő erő nagysága:

$$F = k \frac{Q}{r^2} q, \quad (3)$$

a Coulomb-törvény szerint. A próbatestre ható erő a két töltést összekötő egyenes mentén hat. A (3) egyenlőség jobb oldala a kQ/r^2 mennyiségnek és a próbatest töltésének szorzata. Pontszerű Q töltésről r távolságra tehát

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad (4)$$

a térerősség nagysága. Ebben az esetben a térerősségvektor a Q töltést és a próbatöltést összekötő egyenessel párhuzamos, és a Q töltésű pontszerű test felé mutat, ha $Q < 0$, és az ellentétes irányba, ha $Q > 0$ (1.8. ábra).

Figyeljünk fel arra, hogy a távolság növekedésével a térerősség rohamosan csökken. Ha egy r sugarú gömböt képzelünk el, amelynek a középpontjában van a tér for-

rása, akkor a gömb felületén mindenütt azonos nagyságú a térerősség, és a gömb felületére merőlegesen vagy befelé, vagy kifelé mutat. Ha gondolatban a gömböt „felfújjuk” úgy, hogy a forrástöltés továbbra is a középpontban marad, akkor a nagyobb sugarú gömbfelületeken kisebb a térerősség nagysága. Minél nagyobb a gömb felülete, annál kisebb a térerősség. A térerősség és a felület fordítottan arányos egymással, hiszen a térerősség r^2 -tel fordítva arányos, a gömb felülete pedig r^2 -tel egyenes arányban változik:

$$A = 4r^2\pi. \quad (5)$$

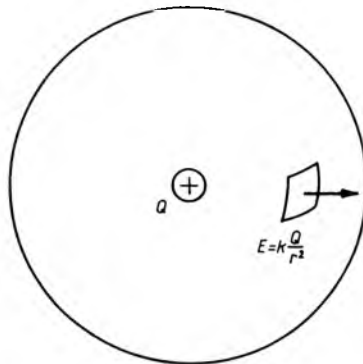
Szorozzuk most össze a (4) és az (5) egyenlőséget,

$$EA = 4\pi kQ, \quad (6)$$

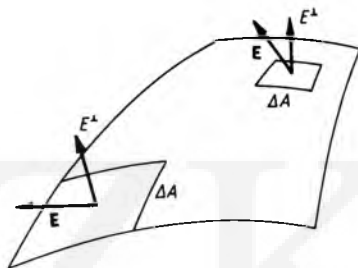
vagyis az E és A valóban fordítottan arányosak (1.9. ábra). A gömb felületének és a térerősségnek a szorzata állandó.

A (6) bal oldalán álló mennyiséget általánosítjuk. Tegyük fel, hogy adott egy A nagyságú felület. Osszuk fel ezt a felületet ΔA nagyságú részekre (1.10. ábra). Szorozzuk meg minden egyes ilyen felület-elemet az elektromos térerősség felületre merőleges összetevőjével^(*) és összegezzük

(*) Néha a felületet irányítani is lehet. Az egyik oldalát pozitívnak, a másikat negatívnak nevezzük. Egyszerű zárt felületnél ez általában úgy történik, hogy a térrész belseje felé mutató oldalt negatívnak, a kifelé mutatót pozitívnak tekintjük. Egy önmagát nem metsző zárt görbére illeszkedő felületnél sem okoz ez gondot. Az irányíthatóság azonban általában komolyabb probléma. Mindenesetre tegyük fel, hogy a szóban levő felület irányítható, ekkor az $E^\perp \Delta A$ szorzatot pozitívnak tekintjük, ha az elektromos térerősség a felület pozitív oldalára mutat, és negatívnak, ha a felület negatív oldala felé irányul a térerősségvektor.



1.9.
ábra



1.10.
ábra

az így kapott szorzatokat. Ezt az összeget *elektromos fluxus*-nak nevezzük és Ψ -vel jelöljük:

$$\Psi = \sum E^\perp \Delta A. \quad (7)$$

Mértékegysége N/C m^2 .

Milyen szemléletes jelentést tulajdonítunk az elektromos fluxusnak? Hogyan szemléltessük az elektromos teret? Sokféle szemléltetés képzelhető el, de mi azt a lehetőséget választjuk, amivel a gravitációs tér szemléltetésénél éltünk.

Az elektromos erőteret *erővonalakkal* szemléltetjük.

Az elektromos erővonal olyan — képzeletbeli — irányított térgörbe, amelynek érintője bármely pontban az elektromos térerősség. Az erővonalak irányát az erő-

vonalat érintő térerősségvektor határozza meg (1.11. ábra).

Az elektromos erővonalak nem ágazhatnak el, nem metszhetik egymást. Ez magától értődik, hiszen a metszéspontban, az elágazási pontban nem lehetne a térerősséget egyértelműen definiálni.

Statikus elektromos térben az elektromos erővonalak pozitív töltésből indulnak, és negatív töltésen végződnek. Előfordul, hogy az egyik töltést végtelen távolinak gondoljuk. Ha például a pozitív töltést a végtelen távoli pontokba gondoljuk, akkor azt mondjuk, hogy az erővonalak a végtelenből közelednek a negatív töltéshez. Ha a negatív töltés van a végtelenben, akkor úgy fogalmazzuk, hogy az erővonalak a végtelenbe távolodnak.

Statikus elektromos térben az erővonalak nem alkotnak zárt görbéket. Éppen azért, mert töltésből indulnak és töltésen végződnek.

Milyen sűrűnek képzeljük az erővonalakat? Mivel szemléltetésről van szó, meglehetősen önkényesen járunk el. Állapodjunk meg abban, hogy az erővonalakra merőleges egységnyi felületen át annyi erővonalat rajzolunk, amennyi a felület középpontjában a térerősség számértéke.

Például ha egységnyi — mondjuk 1 m^2 -es — felület közepén a térerősség számértéke

$3,2 \text{ N/C}$, akkor képzeletünkben 10 m^2 -es felületen 32 erővonal halad át.

Innen következik az elektromos fluxus szemléltetésének a lehetősége is: ha 1 m^2 felületen E számú erővonal halad át, akkor az A felületen EA . Az A felületen áthaladó erővonalak száma szemléletesen az elektromos fluxust jelenti.

Térjünk most vissza a korábban említett egyszerű esethez, ahhoz, amikor egy pontszerű — mondjuk pozitív — Q forrástöltés egy gömb közepén helyezkedett el. Ennek a gömbnek a felületén az elektromos fluxus: $\Psi = 4\pi kQ$. Ennyi erővonal indul ki a Q töltésből, és az erővonalak a gömb felületére merőlegesen a végtelen felé haladnak. Ha a gömböt nagyobbak képzeljük, akkor azt is ugyanannyi erővonal dőfi. De nem változik a felületet dőfő erővonalak száma akkor sem, ha a forrástöltés nem a gömb közepén van, akkor sem, ha a gömböt kockává lapítottuk.

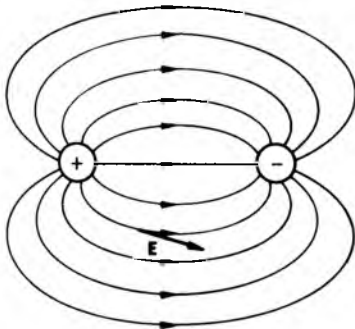
Mi történik, ha a térrészbe egy másik töltést is elhelyezünk? Az elektromos erő szabaderő, zavartalanul összegződik. Zavartalanul adódnak össze az elektromos térerősségek is a felület bármely pontján. Ez azonban világos módon azt jelenti, hogy az egyik és a másik töltéstől származó fluxusuk összege megegyezik a két töltés összegétől származó fluxussal.

Fogalmazzuk meg most az elektrosztatikában alapvető jelentőségű állítást:

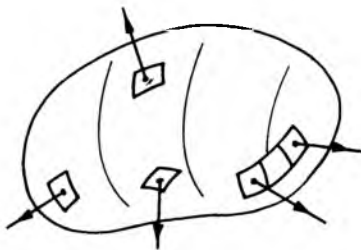
Az elektrosztatika első alaptörvénye (Gauss-tétel elektromos térre): Zárt felületen az elektromos tér fluxusa egyenlő a felületen belül elhelyezkedő töltés $4\pi k$ -szorosával:

$$\Psi = \sum E^{\perp} \Delta A = 4\pi kQ. \quad (8)$$

Szemléletesen így is fogalmazhatunk: ha zárt felületen belül Q töltés van — bármi-



1.11.
ábra



1.12.
ábra

lyen is a töltéeloszlás —, akkor a felületet $4\pi k Q$ erővonal dőfi.^(*) Ha Q pozitív, akkor az erővonalak elhagyják a felületet, ha Q negatív, akkor az erővonalak befelé dőfik a felületet. Még egyszerűbben fogalmazva: Q pozitív töltésből $4\pi k Q$ erővonal indul ki, és Q negatív töltésen $4\pi k Q$ erővonal végződik (1.12. ábra).

¶ Tegyük fel, hogy adott két pontszerű töltéssel rendelkező test. Az egyik töltése legyen $Q_1 = -10 \mu\text{C}$, a másiké $Q_2 = 14 \mu\text{C}$. Ekkor a Q_2 töltéssel rendelkező testből $4\pi k Q_2 = 1,58 \cdot 10^6$ erővonal indul ki. A Q_1 negatív töltésen 1,13 millió erővonal végződik, hiszen a Q_1 körüli zárt felületen $4\pi k Q_1$ a negatív fluxus. Az 1,58 millió erővonalból 1,13 millió végződik a negatív töltésen, a kettő különbsége, 0,45 millió erővonal a végtelenbe távozik. Ez abból is látszik, hogy ha a két töltést egyetlen felülettel vesszük körül, akkor az ezen a

felületen átmenő és a végtelenbe távozó erővonalak száma: $\Psi = 4\pi k(Q_1 + Q_2) = 4\pi k \cdot 4 \mu\text{C} = 4,5 \cdot 10^5$.

Mi történik akkor, ha a két töltés közelébe viszünk egy harmadik — mondjuk pozitív — Q töltést? Legyen például $Q = 1 \mu\text{C}$. Ekkor a három töltés rendszerét $\Psi = 4\pi k(Q_1 + Q_2 + Q) = 0,565 \cdot 10^6$ erővonal hagyja el végleg. A Q_2 töltésen végződő erővonalak egy része a Q_1 töltésből, a másik része a Q töltésből indult ki.]

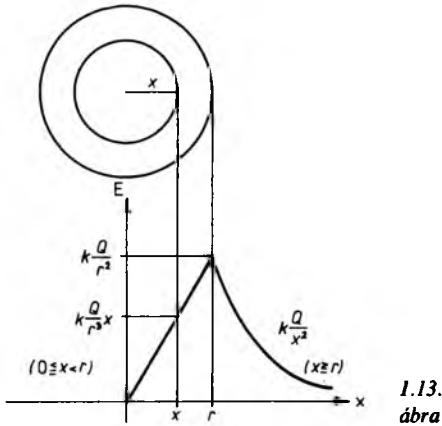
¶ Képzeljük el, hogy egy r sugarú gömb Q töltéssel rendelkezik, és ez a töltés a gömb térfogatában egyenletesen van elosztva. Határozzuk meg most, hogy mekkora az elektromos térerősség a gömb középpontjától x távolságra! Tegyük fel először, hogy $x \geq r$. Ekkor az x sugarú gömb felületét $\Psi = 4\pi k Q$ erővonal dőfi. A fluxus ugyanis a felületen belül elhelyezkedő töltés $4\pi k$ -szorososa, függetlenül attól, hogyan van szétkenve vagy hogyan koncentráliódik a töltés. A felületen áthaladó fluxust a felületen belül elhelyezkedő töltés határozza meg, a felületen kívüliek egyáltalán nem befolyásolják. Így a gömb felületének egységnyi részén

$$E = \frac{4\pi k Q}{4\pi x^2} = k \frac{Q}{x^2}$$

erővonal halad át. Ez azt jelenti, hogy a térerősség a gömbön kívül ugyanannyi, mint egy pontszerű töltéstől x távolságban. A gömbön kívül lévő próbatöltés pontszerűnek „látja” a forrástöltést!

Legyen most $x < r$. Ekkor gondolatban jelöljük ki az r sugarú gömbbel koncentrikus x sugarú gömböt. Ennek a gömbnek a felülete $4x^2\pi$. A belsejében található töltés Q_x mennyisége úgy aránylik a teljes töltésmennyiséghez, mint az x sugarú gömb tér-

^(*) Tegyük fel, hogy a zárt felületről egyértelműen eldönthető, hogy melyik a felület belső oldala, és melyik a külső. A (8) egyenlőségben az $E^\perp \Delta A$ -t pozitívnak tekintjük, ha a térerősség a felület külső oldala felé mutat, és negatívnak az ellenkező esetben. Ha $E^\perp \Delta A$ pozitív, akkor azt is mondjuk, hogy a megfelelő erővonalak kifelé haladnak, és ha negatív, akkor befelé irányulnak.



1.13. ábra

fogata az r sugarú gömb térfogatához (1.13. ábra):

$$\frac{4\pi x^3}{3} = \frac{Q_x}{Q} \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

Innen $Q_x = (x^3/r^3)Q$. Az x sugarú gömb felületén az elektromos fluxus:

$$\Psi_x = 4\pi k Q_x = 4\pi k \frac{x^3}{r^3} Q$$

A felületegységen átmenő erővonalak száma:

$$E = \frac{\Psi_x}{A} = \frac{4\pi k \frac{x^3}{r^3} Q}{4\pi x^2} = k \frac{Q}{r^3} x,$$

vagyis az r sugarú gömb belsejében a térerősség a sugárral arányos.

Tegyük fel most, hogy adott egy vékony, egyenletes töltéseloszlású műanyag szál. A hosszegységre jutó töltése legyen σ , tehát L hosszú részén $Q = L\sigma$ töltés van. A száltól r távolságra elhelyezünk egy m tö-

megű, q töltésű pontszerű testet (1.14. ábra). Feltéve, hogy a testre csak az elektromos erő hat, még a nehézségi erő hatásától is eltekintünk, akkor a test gyorsulása az

$$F = ma \tag{10}$$

Newton-törvényből határozható meg — ha ismert az erő. Az elektromos erő az elektromos térerősség és a töltés szorzatával egyenlő:

$$F = Eq, \tag{11}$$

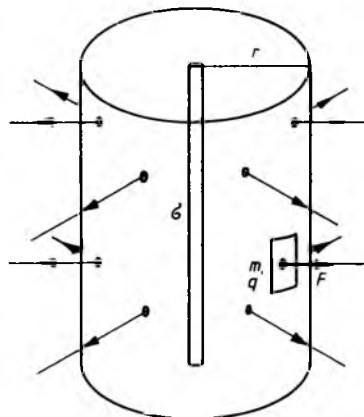
az elektromos térerősség pedig az erővonalakra merőleges, egységnyi felületen átmenő erővonalak számával egyezik meg:

$$E = \frac{\Psi}{A} \tag{12}$$

Itt a fluxust a Gauss-törvényből ismerjük:

$$\Psi = 4\pi k L \sigma, \tag{13}$$

ahol L a fonál hossza. Gondolatban rajzoljunk egységnyi felületet úgy, hogy merőleges legyen az erővonalakra, és a középpontjában legyen az m tömegű, q töltésű próbatest. Ez a felület egy hengerpalást része. A hengerpalást szimmetriatengelye az elektromos töltéssel rendelkező szál,



1.14. ábra

alapkörének sugara r , magassága L . Az erővonalak az elektromosan töltött szálat a szátra merőlegesen hagyják el, és a hengerpalást felületén merőlegesen hatolnak át. Ennek a palástnak a felülete:

$$A = 2r\pi L. \quad (14)$$

A (12), (13), (14) egyenlőségekből

$$E = 2k\sigma \frac{1}{r},$$

és így az elektromos erő

$$F = 2k\sigma \frac{1}{r} q,$$

a gyorsulás pedig

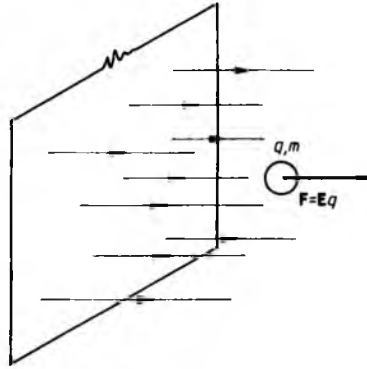
$$a = \frac{2k\sigma q}{rm}$$

nagyágú, és az elektromosan töltött szátra merőleges. Ha két töltés azonos előjelű, akkor taszítóerő, ha ellentétes előjelű, akkor vonzóerő lép fel.]

[Hasonló feladat a következő. Egy A felületű, nagy síklemezen a töltéeloszlás egyenletes. A felületegységre jutó töltés adott: $\sigma = Q/A$. Képzeld el, hogy a lemeztől r távolságra egy q töltésű, m tömegű testet helyeztünk el. Tegyük fel, hogy a testre csak elektromos erő hat. A lemezből mindkét irányba $2\pi kQ = 2\pi kA\sigma$ erővonal indul ki, hiszen a lemezt körülölelő tetszőleges felületen az elektromos tér fluxusa $4\pi kQ$, ennyi erővonal hagyja el a lemezt. Az erővonalak merőlegesek a lemez felületére, és egymással párhuzamosak, egyenletes sűrűséggel haladnak mindkét oldalon (1.15. ábra). Az erővonalakra merőleges egységnyi felületen

$$E = \frac{2\pi kA\sigma}{A} = 2\pi k\sigma \quad (15)$$

számú erővonal halad keresztül, vagyis a q



1.15.
ábra

töltésű próbatestre

$$F = Eq = 2\pi k\sigma q$$

elektromos erő hat. Ha Q és q azonos előjelű, akkor taszítóerő lép fel, az ellenkező esetben vonzóerő. A test gyorsulása Newton II. törvénye segítségével:

$$a = \frac{2\pi k\sigma q}{m}$$

[Tegyük fel most, hogy adott két párhuzamos síklemez, mindkettő A felületű, és a lemezek távolsága legyen d . A két lemezen egyenletes a töltéeloszlás, az egyik lemez negatív, a másik pozitív töltésű, a töltések abszolút értéke azonban egyenlő. Tegyük fel tehát, hogy a pozitív lemezen $Q > 0$ töltés van, a negatív lemez töltése $(-1)Q = -Q$. A rendszer összes töltése így nulla. Ez azt jelenti, hogy a lemezek rendszeréből nem távozik erővonal a végtelenbe. Az egyik lemezből kiinduló erővonalak mind a másik lemezen végződnek. Ezért az erővonalak csak a két lemez közötti térben találhatóak (1.16. ábra). (Feltéve, hogy a lemezek lineáris méreteihez képest a lemezek távolsága kicsi. Különben a lemezek szélénél az erővonalak szóródásával kellene számolnunk.)

A pozitív lemezből kiinduló erővonalak száma

$$\Psi = 4\pi kQ, \quad (16)$$

és ez megegyezik a lemezek közötti térrész fluxusával. A lemezek közötti tér erőssége ezért

$$E = \frac{4\pi kQ}{A}. \quad (17)$$

Ha például két lemez között egy q töltésű részecske van, akkor erre a részecskére

$$F = Eq = \frac{4\pi kQ}{A} q$$

erő hat.]

Az előző feladatban szereplő párhuzamos lemezpárt *síkkondenzátornak* nevezük.

A (17) egyenlőség szerint a síkkondenzátor lemezei között az elektromos térerősség nem függ a lemezektől mért távolságtól. A két lemez között bármelyik két pontban azonos az elektromos térerősség. A lemezeken kívüli tér pontjaiban elektromos térerősség nem észlelhető.

Említettük: a kondenzátor lemezeinek az összes töltése nulla. Amikor azonban azt mondjuk, hogy a kondenzátort feltöltöttük Q töltéssel, vagy azt, hogy a kondenzátor töltése Q , akkor ezen azt értjük,

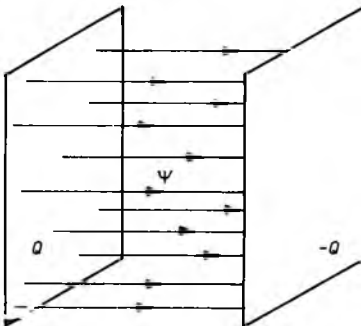
hogy a pozitív lemez töltése Q , és a negatívénak (-1) -szerese.

┌Térjünk most vissza a síkkondenzátorhoz. Helyezzünk a lemezek közötti térrészbe egy vékony, l hosszúságú rúddal összekötött két golyócskát. Az egyik kis golyónak pozitív, a másiknak ugyanakkora negatív töltést adunk. Ezt a töltéselosztást *elektromos dipólusnak* nevezzük. Felteszünk, hogy a pozitív és a negatív töltés nem tud elmozdulni, nem egyenlítődik ki. Jelöljük most a dipólus pozitív végének a töltését q -val, a negatív végén ekkor $(-1)q = -q$ töltés van. (Itt is élünk ugyanazzal a szóhasználattal, amit a kondenzátorral kapcsolatban említettünk. A dipólus összes töltése nulla, de amikor azt mondjuk, hogy a dipólust q töltéssel láttuk el, akkor ezen azt értjük, hogy a pozitív végére q , a negatív végére $-q$ töltést vittünk.)

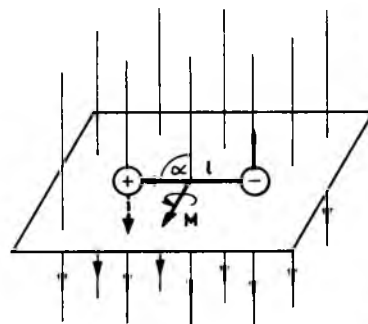
A kondenzátor lemezei közötti térrészben a dipólusra ható eredő erő nulla, tehát a dipólus nem gyorsul, azonban elfordulhat. Az elektromos erőtér a dipólusra forgatónyomatékokat fejt ki. Ennek a forgatónyomatéknak a nagysága

$$M = Eq l \sin \alpha, \quad (18)$$

ahol α az erővonalak és a dipólus két töltését összekötő szakasz szöge. Az 1.17. ábráról látható az elfordulás iránya is. A forga-



1.16. ábra



1.17. ábra

tónyomatékot vektori írásmóddal is felírhatjuk:

$$\mathbf{M} = q\mathbf{l} \times \mathbf{E}, \quad (19)$$

itt \mathbf{l} a negatív töltéstől a pozitív töltéséhez mutató l hosszúságú vektor.]

Ebben a pontban a Coulomb-törvény általánosításával foglalkoztunk. Azt vizsgáltuk, hogy a térben adott töltéseloszlás mekkora elektromos erőt fejt ki a tér pontjaiba helyezett pontszerű próbatöltésekre. Ilyen töltéseloszlásra példaként szerepeltettük a véges sok, pontszerű töltés összegét, az elektromosan töltött műanyag szálát, a nagy felületű, egyenletesen töltött síklemezeket vagy a síkkondenzátor esetét.

Az ilyen elektromos töltéseloszlás a tér különböző pontjaiba helyezett testekre elektromos erőt fejt ki. Az egységnyi pozitív töltésre ható erőt elektromos térerősségnek neveztük. A tér különböző pontjaihoz hozzárendeltük az elektromos térerősség vektorát. (Kivéve persze bizonyos pontokat, ahol a térerősségnek nincs értelme. Ha az origóba helyeztünk egy pontszerű forrástöltést, akkor az origóban nincs értelmezve a térerősség.)

Idézzük fel magunkban a végtelen síklemez és a tőle r távolságban elhelyezett pontszerű, q töltésű test esetét. A próbatestre a végtelen síklemez $F = 2\pi k\sigma q$ erőt fejt ki. Ennek az erőnek az ellenereje a síklemezre hat. Az elektromos erő elektromos állapotú testek között lép fel — erről tanultunk eddig —, mégis élünk a következő szóhasználattal: az elektromos állapotú, q töltésű testre a *síklemez erőtere* E_q erőt fejt ki. (A szóhasználatot az is indokolja, hogy gyakran nem ismerjük az elektromos hatást létrehozó töltéseloszlást részletesen, csak az elektromos tér tulajdonságait ismerjük a próbatöltés közelében. Szemléletesen: sok esetben ismert az elektromos

erővonalak seregének egy része, és noha tudjuk, hogy az erővonalak töltésből indulnak és valamely töltésen végződnek, a töltéseket hordozó testeket nem is tüntetjük fel.)

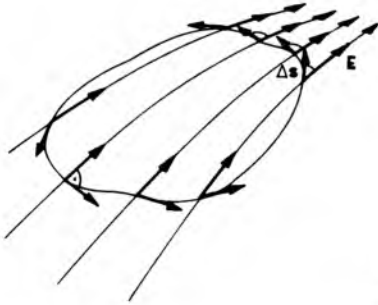
Ugyanilyen értelemben beszélünk arról, hogy az elektromos tér munkát végez a testen. Ha például az elektromosan töltött, végtelen síklemez erőterében a lemezre merőleges úton elmozdul egy q töltésű test, akkor rajta a lemez által kifejtett erő $W = Eqs = 2\pi k\sigma qs$ munkát végez. Gyakran azonban így fogalmazunk: az elektromos tér $W = Eqs$ munkát végez.

1.1.3. Az elektromos potenciál és tulajdonságai

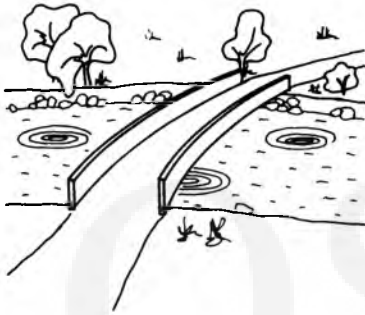
Az elektromos állapotú testek összessége statikus elektromos teret hoz létre. Ennek az elektromos térnek alapvető tulajdonsága az, hogy az erővonalai nem záródnak önmagukba, hiszen pozitív töltésről indulnak és negatív töltésen végződnek.

Ezért statikus elektromos térben, zárt görbén körbemozgó töltésen az elektromos tér nulla munkát végez. Ha ugyanis a görbe egyik részén az elmozdulás és az elektromos erő közötti szög hegyesszög, akkor a görbe másik részén tompaszög: ha a zárt görbe egyik részén a munka pozitív, akkor a másik részén negatív úgy, hogy a pozitív munkákat éppen kompenzálja a görbe másik részén a negatív munka (1.18. ábra).

Hasonló a helyzet ahhoz, amikor széles folyón csónakkal egy kört teszünk. A folyó sodrásával együtt haladva a folyó pozitív munkát végez, a folyó sodrásával szembe haladva a folyó munkája negatív. Nem így van ez, ha a folyó örvénylik. A nagy

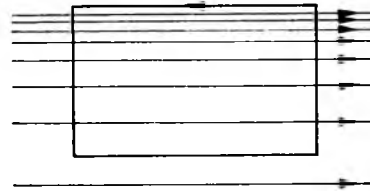
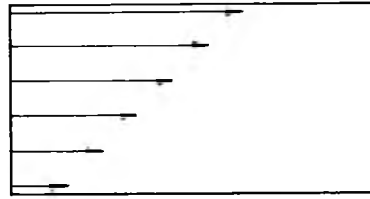


1.18.
ábra



1.19.
ábra

örvény a csónakot elragadja, körbe-körbe mozgatja, és állandóan pozitív munkát végez rajta. A nagy folyam örvénymentesen áramlik, áramvonalai nem csavarodnak fel, az örvénylő folyam áramvonalai azonban zárt görbéket alkotnak (1.19. ábra). (Érdekes jelenség ebből a szempontból a folyóvíz sebességének a mélységtől való függése. Igen gyakran azt tapasztaljuk, hogy az áramlási sebesség a mélységgel arányosan csökken. Minél mélyebben megyünk a víz felszíné alá, annál kisebb az áramlási sebesség. Ha most egy kis vízalatti járművel leereszkedünk a víz felszíné alá, és a meder közelében a sodrással szemben hajózunk egy bizonyos távolságot, majd felemelkedve egy irányba megyünk a sodrással, akkor ezen a zárt görbén a folyó kis



1.20.
ábra

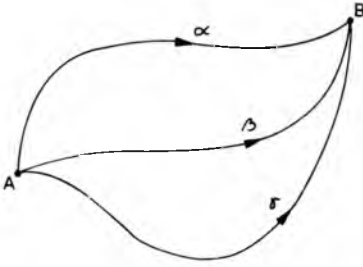
járművünkön pozitív munkát végez. Hasonló a helyzet az 1.20. ábrán látható erőter esetében. Zárt görbén körbehaladva a tér által végzett munka nem nulla, az egyik szakaszon ugyanis nagyobb az elektromos erő, mint a másik szakaszon. Az ilyen tér — ha van ilyen — nem származhat elektromos állapotú testektől.)

Az elektromos testek által létrehozott elektromos tér — az *elektrosztatikus tér* — *örvénymentes*. Ez az elektrosztatikus tér igen lényeges tulajdonsága. Ezzel függ össze az alábbi törvény.

Az elektrosztatika második alaptörvénye:
Az elektrosztatikus térben zárt görbén mozgó q töltésű testen az elektromos tér nulla munkát végez. ()*

$$\sum_C E^{\parallel} q \Delta s = 0. \quad (1)$$

(*) Az E^{\parallel} -sal az elektromos térerősség elmozdulással párhuzamos komponensét jelöljük.

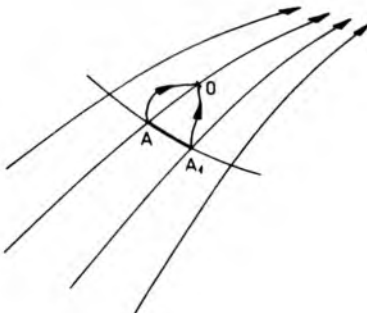


1.21.
ábra

Ez a tény az elektrosztatikus tér és a gravitációs tér újabb rokon tulajdonságára mutat rá, úgy is kifejezhető, hogy az elektrosztatikus tér *konzervatív*.

A konzervatív terek közös jellemzője, hogy két pont között mozgó testen végzett munkájuk nem függ a két pontot összekötő mozgástól, a pályától, csak a kezdő és a végső ponttól függ. Az 1.21. ábrán látható görbék mindegyikén azonos a tér munkája. Ha ugyanis például az α görbén nagyobb lenne a munka, mint a β görbén, akkor az A pontból a B pontba az α görbén haladva, majd a β görbén vissza, zárt görbén a munka $W_\alpha + (-W_\beta) > 0$ lenne, ellentétben a feltevésünkkel.

Jelöljük ki most az elektrosztatikus térben egy O pontot, és tegyük fel, hogy a térerősségnek ebben a pontban értelme van. Válasszunk ezután egy másik pontot, jelöljük ezt A-val. Tegyük fel, hogy úgy helyezkedik el, mint az 1.22. ábrán látható.



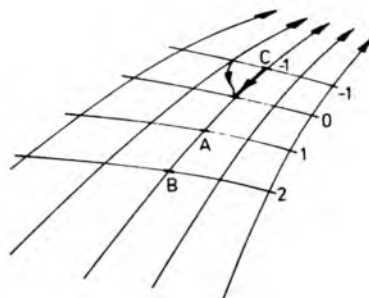
1.22.
ábra

Vessük fel a következő kérdést: mekkora munkát végez az elektrosztatikus tér a $q = 1$ C elektromos töltéssel rendelkező testen, ha ez a test az A pontból az O pontba mozog. Nyilvánvaló, hogy ez a munka az A pont ábrán látható megválasztása esetén pozitív.

Tegyük fel, hogy az elektromos tér 1 J munkát végez, ha az 1 C töltésű test az A pontból az O pontba mozdul el. Válasszuk meg most az A_1 pontot úgy, ahogyan az ábrán látjuk. Vizsgáljuk meg, hogy mennyi a tér munkája, ha a test az A_1 pontból az O pontba mozog! Az A_1 pontból az O pontba haladhatunk úgy is, hogy először az erővonalakra merőlegesen az A pontig mozgunk, majd az erővonal mentén az O pontba. Ebből látszik, hogy az A_1 pontból az O pontba haladva szintén 1 J a tér által végzett munka, az erővonalakra merőlegesen haladva ugyanis nulla a munkavégzés. Ugyanennyi a munka azonban bármely útvonalon, amely összeköti az A_1 és az O pontot.

Az A pontra illeszkedő, az erővonalakra merőleges felület bármely pontjából az O pontba mozgó 1 C töltésen a tér 1 J munkát végez.

Válasszuk meg most a B pontot az 1.23. ábrán látható módon. Ha a B pontból mozog az egységnyi töltés az O pontba, akkor a tér munkája nagyobb, mintha az A-ból



1.23.
ábra

indult volna. Pontosan az A és B közötti szakaszon végzett munkával több! Feltehető, hogy ez a munka 2 J. Ekkor azonban a tér által végzett munka akkor is 2 J, ha az 1 C töltésű test a B pontra illeszkedő, az erővonalakra merőleges felület akármelyik pontjából mozgott az O pontba.

Ha most a C pontot az O pont másik oldalán választjuk meg, akkor innen az O pontba mozgó töltésen a tér negatív munkát végez. Az 1 C töltésű testen végzett munka legyen mondjuk -1 J.

Ekkor azonban a C pontra illeszkedő, az erővonalakra merőleges felület akármelyik pontjából mozog az egységnyi töltésű test az O pontba, a tér minden esetben -1 J munkát végez, akármelyik útvonalon halad a test.

Ugyanígy; az O ponton átmenő, az erővonalakra merőleges felület akármelyik pontjából az O pontba haladva a tér munkája nulla. Így van ez természetesen akkor is, ha az útvonalat nem a felületen választjuk meg, hanem letérünk erről akár az erővonalakkal egy irányban, akár ellentétes irányban.

Magától értődő dolog, hogy az O pontra illeszkedő felület akármelyik pontja betöltheti az O pont szerepét. Legyen, mondjuk, az O_1 ennek a felületnek a pontja. Ekkor a tér munkája egységnyi, ha egységnyi pozitív töltés az A pontból — vagy

az A ponton átmenő, az erővonalakra merőleges felület bármelyik másik pontjából — az O_1 pontba mozog (1.24. ábra).

Világos tehát, hogy ha a térben kijelölünk egy olyan O pontot, ahol a térerősségnek értelme van, akkor minden A ponthoz hozzárendelhetjük azt a munkát, amelyet az elektrosztatikus tér akkor végez, ha egységnyi pozitív töltés az A pontból az O pontba mozog.

Ha az A pontból az O pontba mozog egy q töltésű test, akkor a tér rajta

$$W_{A \rightarrow O} = \sum_{A \rightarrow O} qE^{\parallel} \Delta s \quad (2)$$

munkát végez. Ezt az egyenlőséget q -val osztva a potenciál definícióját kapjuk. Az A pont O-ra vonatkozó potenciálja tehát

$$U_A := \sum_{A \rightarrow O} E^{\parallel} \Delta s. \quad (3)$$

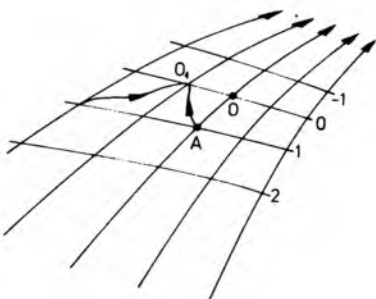
Mértékegysége a joule/coulomb (J/C), ezt voltoknak nevezzük, és V-vel jelöljük. Tehát $1 \text{ V} = 1 \text{ volt} = 1 \text{ J/C}$. (CGS mértékrendszerben a potenciál mértékegysége:

$$[U] = [E] [s] = \frac{\sqrt{\text{dyn}}}{\text{cm}} \text{ cm} = \sqrt{\text{dyn}}.)$$

Tekintsük át a potenciál lényeges tulajdonságait!

Mindenekelőtt azt emeljük ki, hogy a potenciál helytől függő fizikai mennyiség. A tér különböző pontjaihoz hozzárendeljük a potenciál értékét, azt az egységnyi töltésen végzett munkát, amelyet a tér akkor végez, ha a test a szóban lévő pontból a nulla szintre mozog.

A potenciál értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy az azonos potenciálú pontok az erővonalakra merőleges, úgynevezett *ekvipotenciális felületeken* helyezkednek el. Ha az erővonalak irányában haladunk, akkor a potenciál csökken.



1.24. ábra

A potenciált a térerősség segítségével értelmeztük. Ha ismerjük a tér pontjaihoz tartozó térerősségvektorokat, akkor a tér bármely pontjának meghatározhatjuk — (3) alapján — a potenciálját.

Fordítva is felvethető a kérdés. Ha ismert a potenciál, akkor ebből a térerősség kiszámítható-e? Tekintsük ezért az elektrosztatikus tér kicsiben homogén részét. Válasszuk meg az O pontot úgy, ahogyan az 1.25 ábrán látható, ezzel megadtuk a potenciál nulla szintjét is. Jelöljük ki ezután az ábra szerint tetszőlegesen egy A és egy B pontot. Az A és a B pontok távolságát jelöljük Δs -sel. Ekkor, ha q töltéssel rendelkező test az A pontból az O pontba mozog, a munka út szerinti additivitása miatt

$$W_{A \rightarrow O} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow O},$$

és ezért

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow O} - W_{B \rightarrow O}. \quad (4)$$

A (2) egyenlőség alapján ez így írható:

$$W_{A \rightarrow B} = qU_A - qU_B = -q\Delta U, \quad (5)$$

hiszen

$$W_{A \rightarrow O} = qU_A \text{ és } W_{B \rightarrow O} = qU_B.$$

Másrészt a tér által végzett munka az A és B pontok között:

$$W_{A \rightarrow B} = Eq\Delta s,$$

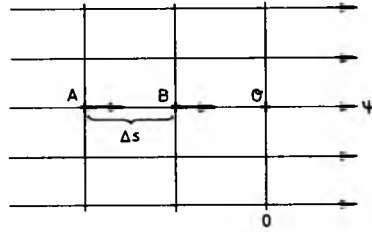
ezért

$$Eq\Delta s = -q\Delta U,$$

vagyis

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta s}. \quad (6)$$

Például ha az erővonalak irányában haladva a potenciál méterenként 200 V-tal csökken, akkor a térerősség 200 N/C, vagyis az



1.25.
ábra

idehelyezett — mondjuk — $q = 10^{-6}$ C töltésű testre $200 \cdot 10^{-6}$ N erő hat.

A (6) egyenlőséget általánosíthatjuk. Ha az elmozdulás nem párhuzamos az erővonalakkal, akkor jelöljük az elmozdulás komponenseit Δx -szel, Δy -nal és Δz -vel, a potenciál változását az x , az y és az z tengely irányában $\Delta_x U$ -val, $\Delta_y U$ -val és $\Delta_z U$ -val. Ekkor a térerősség x , y és z irányú összetevője:

$$E_x = \frac{-\Delta_x U}{\Delta x}, \quad E_y = \frac{-\Delta_y U}{\Delta y}, \quad E_z = \frac{-\Delta_z U}{\Delta z},$$

illetve a térerősségvektor:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\Delta_x U}{\Delta x}, \frac{\Delta_y U}{\Delta y}, \frac{\Delta_z U}{\Delta z}\right) = -\text{grad } U. \quad (7)$$

Térjünk vissza az elektromos tér munkájához. Jelöljük most a potenciál értékét az A pontban U_1 -gyel, a B-beli értéket pedig U_2 -vel. Ekkor az elektromos tér által végzett munka az A pontból a B pontba mozgó q töltésű testen $W = qU_1 - qU_2$.

Vegyük figyelembe ezt a munkatételben!

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = qU_1 - qU_2 + W_{\text{íbbi}}. \quad (8)$$

Rendezzük ezt az egyenlőséget, a qU állapotjelző megváltozását vigyük át a bal oldalra:

$$\left(\frac{1}{2}mv_2^2 + qU_2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + qU_1\right) = W_{\text{íbbi}}. \quad (9)$$

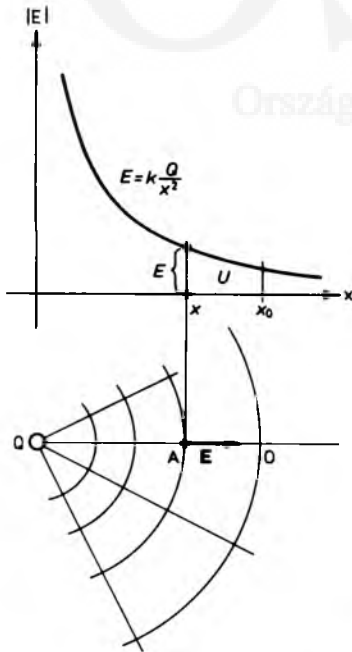
A qU mennyiséget *elektromos helyzeti energiának* vagy *elektromos potenciális energiának* nevezzük.

Jelöljük az energiát most \mathcal{E} -vel, hogy az elektromos térerősséggel össze ne tévesz-
szük, és a félreértéseket elkerüljük.

Vizsgáljuk meg most, hogy mekkora a potenciál a Q töltésű, pontszerű forrástöltéstől r távolságra! Helyezzük ezért a forrástöltést a koordináta-rendszer origójába. Vizsgáljuk először a potenciált az x tengely mentén (1.26. ábra)! Ha Q pozitív, akkor a térerősség pozitív x esetén pozitív, tehát jobbra mutat, míg negatív x esetén negatív, balra mutat. Ezért

$$E = k \frac{Q}{x^2}. \quad (10)$$

Az erővonalak a Q töltésű testből indulnak ki, és a végtelenbe távoznak. Az erővonal-szerkezet gömbszimmetrikus és sugaras



1.26.
ábra

képet mutat. Ebből látszik, hogy az ekvipotenciális felületek az erővonalakra merőleges gömbfelületek. Világos az is, hogy az erővonalak mentén a Q forrástöltéstől távolodva a végtelen felé a potenciál csökken.

Válasszuk meg a potenciál nulla szintjét! Jelöljünk ki ezért egy O pontot az x tengely mentén. Legyen ennek a pontnak a koordinátája x_0 . Legyen most az A pont az x tengely egy tetszőleges pontja, ennek a koordinátája pedig legyen x . (Például az ábrán $x < x_0$.) Ekkor az x tengely mentén az A pontból az O pontba mozgó egységnyi töltésű próbatesten a tér

$$W_{A \rightarrow O} = k \frac{Q}{x} - k \frac{Q}{x_0} \quad (11)$$

munkát végez, ennyi ugyanis a térerősség-hely függvény grafikonja alatti terület, az x és az x_0 koordináták között. (Ez az állítás az integrálszámítás elemeinek ismeretében könnyen ellenőrizhető, ha pedig az Olvasó nem jártas az integrálszámítás módszereiben, akkor kérjük, fogadja el ezt az állítást.)

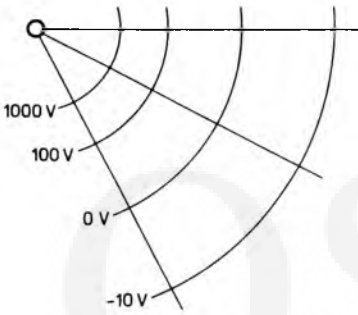
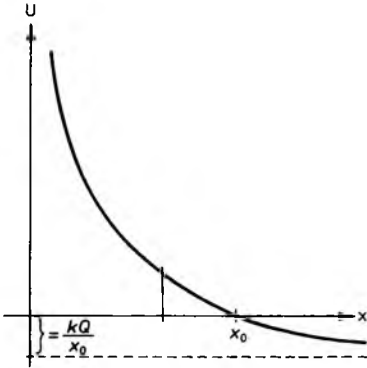
Az x koordinátájú pont potenciálja tehát:

$$U(x) = kQ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right). \quad (12)$$

Nyilvánvaló innen, hogy $U(x_0) = 0$, és ha $x < x_0$, akkor (pozitív forrástöltés esetén) $U(x) > 0$, míg ha $x > x_0$, akkor $U(x) < 0$, mint ez várható is (1.27. ábra).

Kérdés most az, hogy hol válasszuk meg az O pontot, hogy a (12) potenciálfüggvény a legegyszerűbb legyen? A (12) potenciál akkor a legegyszerűbb, ha a zárójelben szereplő második tag nulla.

Válasszuk meg tehát a potenciál nulla szintjét a „végtelenben” — abban az értelemben, ahogyan azt az 1. kötetben a gra-



1.27. ábra

vitációs potenciálnál láttuk —, ekkor

$$U(x) = kQ \frac{1}{x}, \quad (13)$$

vagyis az x tengely pozitív felén az origótól x távolságra $U(x)$ a potenciál értéke, és $U(x) > 0$, mindenütt a tengely mentén, de $U(\infty) = 0$.

Az x tengelyt a térben bármerre irányíthatnánk, a potenciál minden irányban a (13)-nak megfelelően változik: pontszerű Q forrástöltéstől r távolságra $k \frac{Q}{r}$ a potenciál értéke^(*) (1.28. ábra).

(*) Pontszerű töltés potenciálját — ha az ellenkezőjét külön nem hangsúlyozzuk — a végtelenhez viszonyítjuk.

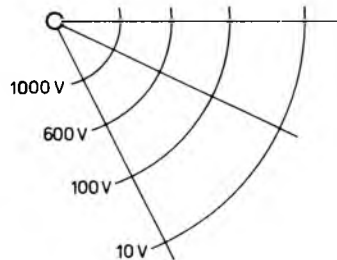
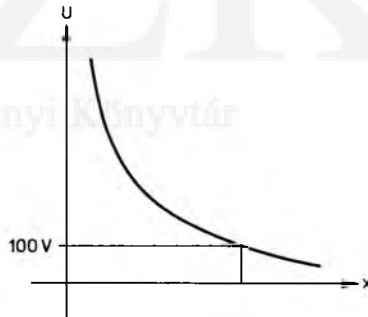
Tegyük fel most: adott két pontszerű test, az egyik töltése Q_1 , a másiké Q_2 . Legyen a potenciál most is a végtelenben nulla. Tegyük fel továbbá, hogy adott egy A pont, a Q_1 töltéstől r_1 , a Q_2 töltéstől r_2 távolságra. Mennyi munkát végez az elektromos tér, ha az A pontból a végtelenbe mozog egy kisméretű, q töltésű test? A munka erőnkénti additivitásából következik, hogy

$$W = k \frac{Q_1 q}{r_1} + k \frac{Q_2 q}{r_2},$$

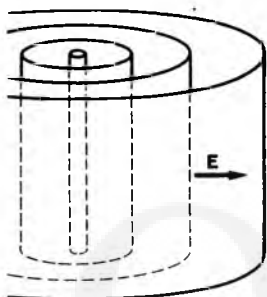
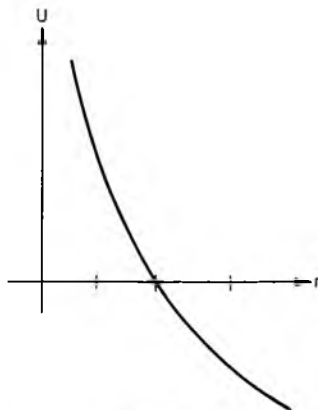
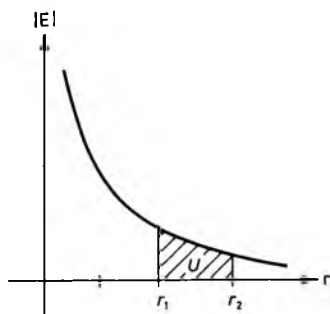
innen az A pont potenciálja:

$$U_A = k \frac{Q_1}{r_1} + k \frac{Q_2}{r_2}. \quad (14)$$

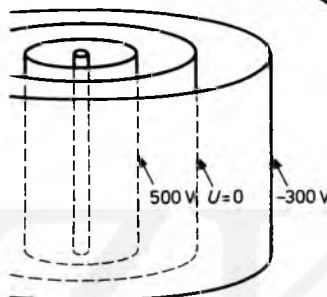
A potenciál additív a következő értelemben: ha az elektromos hatások kialakulásáért felelős töltéseloszlás két részre bont-



1.28. ábra



1.29.
ábra



1.30.
ábra

ható, akkor a tér tetszőleges pontjában a potenciál megegyezik a két rész-töltéseloszlás potenciáljának az összegével.

¶ Vizsgáljuk most meg egy végtelen hosszú, egyenletes töltéseloszlású műanyag szál potenciálját. Láttuk, hogy σ töltéssűrűségű száltól r távolságra a térerősség nagysága $2k\sigma/r$. Tegyük fel, hogy $\sigma > 0$. A távolság függvényében ábrázoltuk a térerősséget. Az erővonalak a műanyag szálat hengersizmetrikusan hagyják el, ezért az ekvipotenciális felületek koncentrikus hengerfelületek (1.29. ábra). Válasszuk meg valahogyan a potenciál nulla szintjét. Legyen ez a felület r_0 távolságra a szigetelőszáltól. Ha $r < r_0$, akkor a tér pozitív munkát végez az egységnyi pozitív töltésen, miközben az az r sugarú hengerpalástról az r_0 sugarúra mozog. A tér által végzett

munka^(*), illetve a forrástöltést hordozó száltól r távolságra a potenciál:

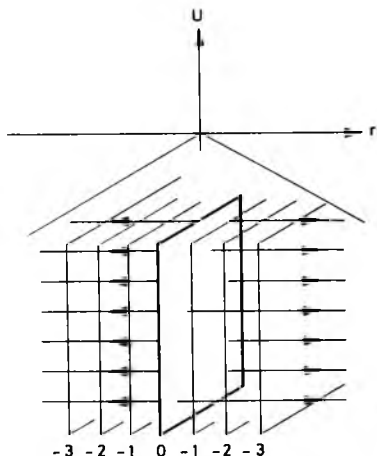
$$W = 2k\sigma q \ln \frac{r}{r_0},$$

$$U = 2k\sigma \ln \frac{r}{r_0}.$$

Ebben az esetben nem választhatjuk meg a potenciál nulla szintjét a végtelenben, bármelyik hengerpalást lehet nulla potenciálú az 1.30. ábrán. Célszerű az egységnyi sugarú hengerpaláston megválasztani a potenciál nulla szintjét, ekkor

$$U = 2k\sigma \ln r.]$$

^(*) Ezt a most következő két állítást — matematikai eszközök híján — nem bizonyítjuk be.



1.31.
ábra

¶ Vizsgáljuk most meg egy igen nagy kiterjedésű, egyenletes töltéssűrűségű lemez környezetében a potenciált.

Legyen a lemez töltése mondjuk pozitív, tehát a töltéssűrűséget σ -val jelölve: $\sigma > 0$. Ekkor a lemez mindkét oldalán, a lemeztől mért távolságtól függetlenül a térerősség $E = 2\pi k\sigma$, és az erővonalak egyenletes sűrűséggel távolodnak a lemez felületétől mindkét irányba (1.31. ábra).

A térerősség állandó, az ekvipotenciális felületek egyenlő távon követik egymást, azaz az 1 volt potenciálkülönbségű felületek távolsága állandó. Célszerű a potenciál nulla szintjét a lemezen nullának választani. Ekkor a -1 volt potenciálú felületek a forrástöltést hordozó felület két oldalán, a lemeztől egyenlő távol helyezkednek el. A lemeztől kétszer ilyen távol vannak mindkét oldalon a -2 volt potenciálú felületek. Így folytathatjuk tetszőleges távolságra. A σ töltéssűrűségű lemeztől r távolságra a potenciál így $U = -2\pi k\sigma r$.

¶ Egyszerű példaként vizsgáljuk meg a következő problémát. Tegyük fel, hogy egy nagy kiterjedésű síklemez felületi töl-

téssűrűsége $\sigma = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2$. A lemez merőlegesen a föld felszínére, és a lemeztől 1 méter távolságra, a talaj felett 10 méter magasságban van egy $q = 10^{-8} \text{ C}$ töltésű, $m = 0,01 \text{ kg}$ tömegű test (1.32. ábra). A kezdősebessége nulla. Ekkor a test egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végez. A függőleges gyorsulása: $g = 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$. A vízszintes gyorsulása pedig

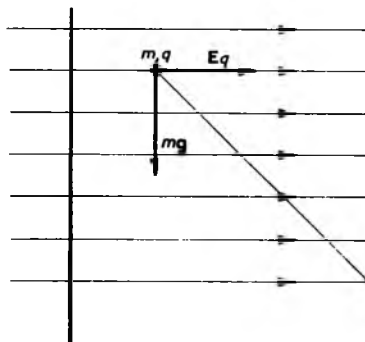
$$a_x = \frac{2\pi k\sigma q}{m} = 9,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A test a forrástöltést hordozó lemeztől 11 méter távolságra ér földet. Amikor magára hagytuk, akkor a helyzeti energiája mgh , az elektromos helyzeti energiája Uq . Földet érve a test már mozgási energiával rendelkezik, a helyzeti energiája nulla, az elektromos helyzeti energiája is csökken, hiszen a test az erővonalak irányában mozdult el. Az energiamérleg a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} mgh + (-2\pi k\sigma) dq &= \\ = 0 + [-2\pi k\sigma(d+h)q] + \frac{1}{2}mv^2, \end{aligned}$$

innen

$$v = 20 \text{ m/s. } \square$$



1.32.
ábra

A síkkondenzátor töltéeloszlása által létrehozott elektromos teret és a tér potenciálját kell még meghatároznunk. Ennek a problémának a tárgyalása azonban a következő pont témája lesz, mert a feladat vizsgálata egy sor elméletileg is, gyakorlatilag is fontos, érdekes kérdést vet fel.

1.1.4. Az elektromos tér anyagi természete

Tegyük fel, hogy adott egy síkkondenzátor, a lemezei A felületűek, a távolságuk legyen d , és tegyük fel, hogy az egyik lemezen $Q > 0$, a másikon $-Q < 0$ töltés van. Láttuk, hogy a kondenzátor lemezei között az elektrosztatikus tér fluxusa:

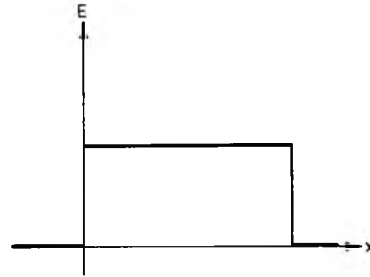
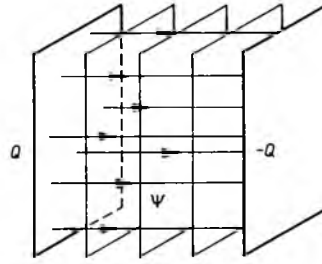
$$\Psi = 4\pi kQ, \quad (1)$$

hiszen a pozitív töltésű lemezből $4\pi kQ$ számú erővonal indul ki. Az egységnyi felületen átmenő erővonalak száma a térerősség:

$$E = \frac{4\pi kQ}{A}, \quad (2)$$

ez nem függ a lemezek közötti pont megválasztásától. A lemezeken kívül az elektromos tér erőssége nulla, mert a pozitív lemezből kiinduló erővonalakat teljes egészében leköti a negatív töltésű lemez. A pozitív töltéstől mért (előjeles) távolság függvényében ábrázoltuk a térerősséget. Az erővonalak a pozitív lemezből a negatív felé mutatnak, a térerősség tehát a lemezek között állandó és pozitív, a lemezeken kívül nulla. Határozzuk meg a potenciált valamely x koordinátájú pontban!

Válasszuk meg először is a potenciál nulla szintjét. Legyen, mondjuk, a negatív lemez potenciálja nulla. Ezután három esetet vizsgálunk meg. Három pontot jelölünk ki, egyet a kondenzátor lemezei között, egyet a kondenzátoron kívül, a pozí-



1.33. ábra

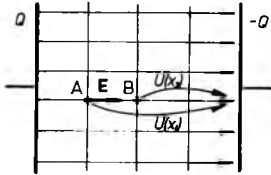
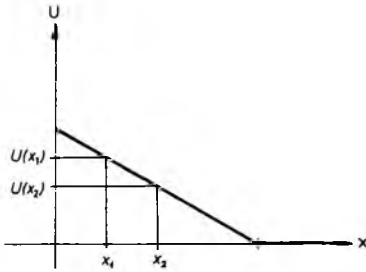
tív lemez oldalán, egyet pedig szintén a kondenzátoron kívül, a negatív lemez oldalán. E három — különben tetszőlegesen választott — pontban határozzuk meg a potenciált (1.33. ábra).

Legyen tehát az A pont a kondenzátor lemezei között, koordinátája legyen x , $0 \leq x \leq d$. Az A pont így $d-x$ távolságra van a negatív lemeztől, tehát a potenciál nulla szintjétől. Ha az A pontból q töltésű test mozog a negatív lemezre, akkor a tér $W = qE(d-x)$ munkát végez. Ezt q -val osztva és a térerősség (2) kifejezését figyelembe véve az A pont potenciálja, vagyis az x koordinátájú pont potenciálja:

$$\begin{aligned} U_A &:= U(x) = \frac{4\pi kQ}{A} (d-x) = \\ &= \frac{4\pi kQ}{A} d - \frac{4\pi kQ}{A} x. \end{aligned} \quad (3)$$

Nyilvánvaló, hogy

$$U(0) = \frac{4\pi kQ}{A} d,$$



1.34. ábra

ez a pozitív lemez potenciálja a negatívhoz képest. Másrészt természetesen $U(d)=0$, hiszen a negatív lemez potenciálja valóban nulla.

Figyeljünk fel arra, hogy a potenciál az erővonalak irányában haladva csökken, és a csökkenés egyenletes. Legyen ugyanis A és B két tetszőlegesen választott pont a kondenzátor lemezei között (1.34. ábra), a koordinátákat jelöljük x_1 -gyel és x_2 -vel, $x_1 \neq x_2$. Ekkor (3) alapján

$$\Delta U := U(x_2) - U(x_1) = \frac{4\pi kQ}{A}(x_1 - x_2),$$

és így $\Delta x = x_2 - x_1$ -gyel osztva:

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{4\pi kQ}{A} = -E.$$

Válasszuk meg az A pontot a kondenzátor terén kívül, a negatív lemez külső oldalán. Az A pont koordinátáját jelöljük x -szel, $x > d$. Képzeljük el, hogy az A pontból egy q töltésű kis test mozog a negatív lemezre. A lemezeken kívül a térerősség nul-

la, ezért ezen a szakaszon a tér munkavégzése nulla. Ha tehát $x > d$, akkor $U(x)=0$.

Legyen most az A pont koordinátája negatív, $x < 0$, vagyis az A pont a kondenzátor terén kívül, a pozitív lemez oldalán van. Határozzuk meg, hogy mennyi munkát végez a tér, ha egy pontszerű, q töltésű test az A pontból — a pozitív lemezen keresztül — a negatív lemezre mozog! A mozgás pályáját osszuk két részre: az egyik szakasza az A ponttól a pozitív lemezig tart, a másik szakasza a pozitív lemeztől a negatívig (1.35. ábra). A mozgás első szakaszán a tér munkavégzése: $W_1 = 0$, hiszen itt $E=0$. A második szakaszon a tér

$$W_2 = \frac{4\pi kQ}{A} dq$$

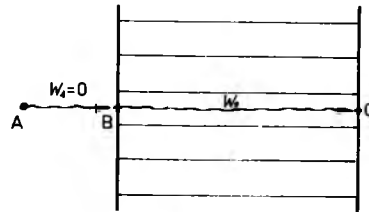
munkát végez, mint ezt a gondolatmenetünk elején láttuk. Így a tér munkája az A pont és a negatív lemez — a potenciál nulla szintje — között:

$$W_{A \rightarrow 0} = W_1 + W_2 = \frac{4\pi kQ}{A} dq.$$

A szóban lévő pont potenciálja így

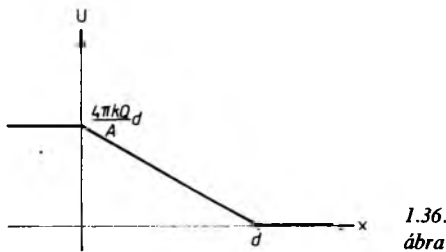
$$U(x) = \frac{4\pi kQ}{A} d,$$

vagyis megegyezik a pozitív lemez potenciáljával.



$$W_1 + W_2 = W_2 \Rightarrow U_A = U_B$$

1.35. ábra



Összefoglalva, a potenciálfüggvény a következő (1.36. ábra):

$$U(x) = \begin{cases} \frac{4\pi kQ}{A} d, & \text{ha } x < 0; \\ \frac{4\pi kQ}{A} d - \frac{4\pi kQ}{A} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq d; \\ 0, & \text{ha } x \geq d. \end{cases} \quad (4)$$

A kondenzátor lemezei között a potenciál a negatív lemez felé haladva csökken. És ha — mint most — a negatív lemez potenciálját tekintjük nullának, akkor a lemezek terén kívül a negatív lemez oldalán nulla a potenciál, a pozitív lemez oldalán pedig megegyezik a pozitív lemez potenciáljával. Azt mondhatjuk tehát, hogy a kondenzátor terén kívül a potenciál állandó, nem függ a lemezeiktől mért távolságtól, és megegyezik az azonos oldali — a közelebb lévő — lemez potenciáljával.

A kondenzátor lemezein kívül a térerősség nulla, a potenciál az egyik oldalon nulla, a másikon pedig egy nullától különböző állandó érték.

Az Olvasóban felvetődik a kérdés, hogy mit kell ezen érteni: mi van ott valójában, ahol a térerősség nulla, és a potenciál nem? Vagy mi van ott valójában, ahol a térerősség nem nulla?

Feltételes mondatokkal fogalmazhatunk helyesen: a kondenzátor belsejében — mondjuk — a két lemez között félúton

egy pontban a térerősség

$$\frac{4\pi kQ}{A},$$

a potenciál

$$\frac{4\pi kQ}{A} \frac{d}{2}.$$

Ez a következőt jelenti: ha ebbe a pontba helyeznénk egy q töltésű testet, akkor erre a testre a pozitív lemezen felhalmozott Q pozitív töltés és a negatív lemezre felvitt $-Q$ negatív töltés együtt

$$\frac{4\pi kQ}{A} q$$

elektromos erőt fejtene ki, és ha ez az elektromos állapotú részecske a negatív lemezre mozogna, akkor a két lemez által kifejtett elektromos erő

$$\frac{4\pi kQ}{A} \frac{d}{2} q$$

munkát végezne.

Hasonlóan: ha a kondenzátor lemezein kívül — például a negatív lemez oldalán — elhelyezünk egy q töltésű testet, akkor a testre elektromos erő nem hat, és ha ezt a kis testet a negatív lemezhez visszük, akkor az elektromos erő nem végez munkát. Ha ezt a pontot a pozitív lemez oldalán választjuk meg a lemezeken kívül, akkor ott szintén nem hat elektromos erő, a pozitív lemez taszító hatását kompenzálja a negatív lemez vonzó hatása (vagy fordítva). Ha ebből a pontból a negatív lemezre mozog a töltés, akkor a tér által végzett munka nem nulla, hiszen keresztül kell menni a lemezek közötti téren is, ahol az egyik lemez már taszítja, a másik vonzza, de e két erő egyirányú.

Ez így érthető, de van-e valami a kon-

denzátor lemezei között, ha nincs ott a q töltésű test? Világos dolog, hogy ez igen nehéz kérdés, és már igen régen felvetették. Nem válaszoltunk azonban rá! Amikor a nehézségi erő (a könyv 1. kötetében) szóba került, bevallottuk, hogy nem értjük a távolhatás mechanizmusát. A szabadon eső test gyorsulásának az értelmezésekor — vonakodva bár, de — elfogadtuk azt a hipotézist, hogy a Föld vonzza a környezetében lévő testeket. Nem értettük azonban, hogy miképpen lehetséges a távolhatás, hogyan terjed a téren keresztül az impulzus. (Ehhez a gravitációt tárgyaló alfejezetben sem tettünk semmit hozzá, elmélyedtünk a gravitáció vizsgálatában, de végig elfogadtuk a távolható erő hipotézisét. Az aggodalommal együtt: miképpen hat távolról két égitest egymásra?) Gondolja meg az Olvasó! A mi kérdésünk is ez most: miképpen hat erő a kondenzátor két lemeze közöttük elhelyezett elektromos állapotú testre. Tudjuk, hogy mekkora erővel hat — Eq -val —, de hogyan?

A nehézségi gyorsulás értelmezése óta kérdés: miképpen terjedhet az impulzus távollévő testek között?! Hiszen az impulzus nem önálló létező, amely az üres téren át úgy terjedne, hogy semmi sem szállítja! Az impulzus a test mozgásállapotát kifejező fogalom, a terjedése nem valósulhat meg anyag nélkül.

Hagyjuk ezt a kérdést még egy egészen rövid ideig nyitva!

Vizsgáljuk meg most, hogy egy síkkondenzátor lemezei mekkora erővel vonzzák egymást! Eddig ugyanis azzal az esettel foglalkoztunk, amikor a lemezek közötti térrészbe egy q töltésű részecskét helyeztünk, és a ráható erőt számoltuk. Most tehát az egyik lemezre ható erőt vizsgáljuk a másik lemez erőterében. A pozitív lemez környezetében a pozitív lemeznek tulajdo-

nított térerősség:

$$E_1 = \frac{2\pi kQ}{A}.$$

Ennek a síklemeznek a terében a másik lemez Q nagyságú töltésére

$$E_1Q = \frac{2\pi kQ^2}{A}$$

erő hat.

Tegyük fel most, hogy a két lemez távolsága d_1 . Távolítsuk el a két lemezt egymástól Δd távolsággal egyenletesen, és legyen $d_2 = d_1 + \Delta d$. Ekkor a lemezek eltávolítása közben végzett munka:

$$W = \frac{2\pi kQ^2}{A} (d_2 - d_1). \quad (5)$$

Küszöböljük ki (5)-ből a Q^2 -et úgy, hogy a két lemez közötti térerősség négyzetéből, az

$$E^2 = \left(\frac{4\pi kQ}{A} \right)^2 = \frac{16\pi^2 k^2 Q^2}{A^2}$$

egyenlőségéből, kifejezzük Q^2 -et, és behelyettesítjük az (5)-be. Azt kapjuk, hogy a kondenzátor lemezeinek eltávolításakor végzett munka:

$$W = \frac{E^2}{8\pi k} A \Delta d. \quad (6)$$

A lemezekon végzett munka kifejezhető az

$$\frac{E^2}{8\pi k} Ad$$

mennyiség megváltozásával. Ez a mennyiség a rendszerre, a lemezek töltéseloszlására jellemző állapotjelző. A mértékegysége a joule. Célszerű ezt a kondenzátor elektromos energiájának tekinteni, tehát az

$$\mathcal{E} = \frac{E^2}{8\pi k} Ad \quad (8)$$

állapotjelzőt a kondenzátor energiájának nevezzük.

Figyeljünk fel az egyenlőségben az Ad szorzatra. Ez nyilvánvalóan a kondenzátorlemezek közötti térrész térfogata. Osszuk el az egyenlőség mindkét oldalát a térfogattal. Ekkor a térfogategységre jutó elektromos energiát, vagyis az *elektromos energia sűrűségét* kapjuk:

$$Q_{el} = \frac{E^2}{8\pi k}. \quad (8)$$

Ezt az egyenlőséget olvashatjuk így is: a kondenzátor lemezei közötti térrészben az elektromos energia térfogategységre jutó része, vagyis az elektromos energia sűrűsége arányos a térerősség négyzetével.^(*) Ha például a lemezek közötti térrészben a térerősség 1000 N/C, akkor az elektromos energia sűrűsége $4,42 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}^3$, így például 1 cm^3 térfogatú részben $4,42 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ energia van.

Hol? A lemezek közötti térrészben nincs anyag! A lemezek közötti térrészben légtelen tér, vákuum van. (Az elektrosztatika minden gondolata eddig az elektromos töltéssel rendelkező testek között vákuumban fellépő erőhatásra vonatkozott. Ebből a szempontból elhanyagolható a légköri levegő jelenléte.)

Hol van tehát az az elektromos energia, amelynek a térfogategységre jutó része a (8) egyenlőségből számolható?

^(*) A kondenzátorlemezek közötti tér energiasűrűségéhez kissé önkényes gondolatmenettel jutottunk. Nem is igaz általában, hogy az energiasűrűség arányos a térerősség négyzetével. Így például pontszerű töltés terében az energiasűrűség a térerősségnek más függvénye. Homogén tér esetén azonban ez a formula használható.

Azt gondolhatnánk, hogy ezzel az energiával a lemezek rendelkeznek egymás erőterében, és az, hogy a térfogattal elosztva a két lemez együttes elektromos helyzeti energiáját a (8) energiasűrűséget kapjuk, merő véletlen, csak formális okoskodás, az elektromos energia nem rendelhető hozzá a tér részeihez.

Ez a gondolat felel meg a távolható erő hipotézisének.

Úgy gondoljuk azonban, hogy megérett a helyzet arra, hogy szakítsunk a távolható erő feltételezésével. Valóban nem lehet energia a kondenzátor lemezei közötti vákuumban. Ha ott energia van, akkor szükséges, hogy anyag is legyen, amely ezt az energiát hordozza.

Fizikatanulmányaink egyik legfontosabb pontjához érkeztünk. Fel kell ismerünk, hogy az elektromos tér anyagi természetű.

Úgy gondoljuk, hogy a kondenzátor lemezei között a vákuumban anyag van. A (8) egyenletet ugyanis energiasűrűségre vonatkozó állapotegyenletnek tekintjük, ezért a tér elemeihez, a térfogatrészekhez energiát rendelünk. Ennek az energiának azonban anyagi hordozója van.

Az elektromos tér az anyagnak a köznapi szemlélettől teljesen elütő megjelenési formája. Köznapi szemléletünk számára az anyag legfontosabb tulajdonsága az áthatolhatatlanság. Ha ugyanis itt egy tárgy, akkor ugyanabban a pillanatban ugyanazon a helyen nem lehet egy másik tárgy is. Egy farönkön úgy hatolhat át a puskagolyó, hogy lyukat fúr magának benne. Az úszó félretolja maga előtt a vizet, a madár a levegőt. Nem ülhetek a moziban a 6. sor 2. székébe, ha már ott ül valaki.

Az elektromos tér anyagi természettel rendelkezik. A tér anyagi természetének az áthatolhatatlanság nem velejárója. Az

elektromos tér zavartalanul ott is létezhet, ahol más — hasonlóan anyagi tulajdonságú — terek kimutathatók, sőt az elektromos tér a köznapi tárgyak belsejében is megjelenik. Elektromos térbe — például a kondenzátor lemezei közötti térbe — helyezzünk egy üvegdarabot. Ennek a belsejébe is behatol az elektromos tér.

Az elektromos tér anyagi természete tehát nem abban nyilvánul meg, hogy áthatolhatatlan. Az elektromos tér azért anyagi természetű, mert az energia hordozója, hiszen a (8) fejezi ki az energiasűrűséget. Az energia mellett azonban az elektromos tér — várhatóan — olyan tulajdonságokkal is rendelkezik, mint a tömeg, impulzus, impulzuszórási momentum, tehát mindazokkal az állapotjelzőkkel, amelyek az anyag fogalmához társulnak.

A kondenzátor lemezei közötti elektromos tér áthatolható és a kondenzátorlemezek közötti térfogatot egyenletesen, teljesen kitölti. Folytonos szerkezetű, ezen azt értjük, hogy a két lemez között minden pontban értelmezve van az energia sűrűsége, és minden pontban azonos. Ebben az anyagban nincsenek „hézagok”, folytonossága nem szakad meg, nincsenek benne azonban „sűrűsödések” sem, nincsenek benne „csomósodások”.

Az elektromos teret szembeállítjuk a „részecske” természetű anyaggal, a kémiai anyaggal.

Az elektromos tér anyagi természete azonban mégiscsak hipotézis. Most — az eddigiek alapján — csak az támasztja alá, hogy a (8) egyenlőség ezzel a hipotézissel értelmezhető a legkézenfekvőbben.

Elfogadjuk az elektromos tér anyagi természetének a feltételezését. Helyességét végül is az támasztja alá, hogy miképpen lehet a segítségével a jelenségeket értelmezni.

Közbevetőleg jegyezzük meg, hogy ugyanilyen alapon a gravitációs teret is anyagi természetűnek tekintjük. A talaj közelében a gravitációs tér energiasűrűsége $g^2/(8\pi f)$. Az energiasűrűség e kifejezésénél azonban sokkal fontosabb számunkra az, hogy *most már tudjuk, miképpen hat a távolható erő*. A gravitációs tér anyagi természetű, és ez a folytonos szerkezetű anyag közetíti a testek közötti gravitációs vonzóerőt. *A Föld környezetében kialakuló gravitációs tér közelható erőt fejt ki a benne elhelyezkedő, a beleágyazódó testre. Ennek az erőnek az ellenereje a gravitációs térre hat, amely közvetíti ezt a Földnek.*

A távolható erő feltételezése valóban távol áll a szemlélettől. Ha elfogadjuk, hogy a fizikai terek — az elektromos és a gravitációs tér — fizikai realitással, fizikai objektivitással rendelkeznek, akkor a távolható erő fogalma kiküszöbölhető: a távolható erőket a fizikai terek közvetítik.

Két hipotézist fogalmaztunk meg, két, egymást kizáró feltételezést: a távolható erő létezésére vonatkozik az egyik, az erőterek objektivitására, anyagi természetére a másik. Ha magunkévá tesszük azt, hogy az anyag megjelenhet az új formában is, akkor elbúcsúzzhatunk a távolható erő hipotézisétől. (Természetesen ezután is használjuk az ilyen kifejezéseket, hogy „a Föld erőt fejt ki az elhajtott testre, a keringő madárra stb.”).

Felvetődik a kérdés, hogy ezzel a termékeny feltételezéssel miért vártunk eddig? Miért nem tisztáztuk a tér anyagi természetét már a dinamikai problémák felvetésekor? Miért nem beszélünk már a nehézségi gyorsulás értelmezésekor a gravitációs térről? Azért nem, mert most is nehezen tesszük. A fizikusok Newton után sokat berzenkedtek a távolhatóság ellen, de csak későn, a XIX. és a XX. század fordulóján

fogalmazódott meg a fizikai tér objektívitasának a gondolata. Valamivel alá kellett támasztani a tér anyagi természetét. A (8) összefüggés értelmezése vezetett el minket ide. És még egyszer hangsúlyozzuk, nem spekulációk, hanem az teszi jogossá és utólag az igazolja a feltevésünket, hogy mennyire illik a kulcs a zárba, mennyiben van a segítségünkre további felfedezéseink értelmezésében.

Térjünk vissza egy rövid gondolatmenet erejéig arra a kérdésre, hogy mi van a kondenzátor lemezei között, mi van ott, amikor nincs ott az a test, amelyre az erő hat. E pont elején beszéltünk erről. Felvetettük a kérdést: mi van ott, ahol a térerősség nulla, de a potenciál nem? Vagy mi van ott, ahol a térerősség nem nulla? Eddig feltételes mondatokkal fogalmaztunk: ha egy pontban a térerősség 3 N/C , akkor ez azt jelenti, hogy *ha* ebbe a pontba helyezünk egy 2 C töltésű testet, *akkor* erre 6 N erő hat. (Ugyanígy: a talaj felett 1 méter magasságban a nehézségi gyorsulás értéke $9,81 \text{ m/s}^2$, ez azt jelenti, hogy ebbe a pontba helyezve egy 2 kg tömegű testet, az az alátámasztási pontra $19,62 \text{ N}$ erőt fejt ki.)

Most már teljesebb a kép: az elektrosztatikus tér erő kifejtő hatása azért nyilvánulhat meg, mert ott van a fizikai objektivitással rendelkező tér, akár odahelyeztük a próbatestet, akár nem.

Minden hasonlat sántít egy kicsit. Ez is: gondoljuk el, hogy az elektromos tér olyan, mint egy láthatatlan folyadék, amely bármikor készen áll arra, hogy a beléhelyezett testre felhajtóerőt fejtsen ki.

Nyilvánvaló, hogy az elektromos teret az energiasűrűség mellett más tulajdonságok is jellemzik. Az energiasűrűség ugyanis skaláris mennyiség, ez nem fejezi ki a tér irányítottágát. A tér energiája, energiasűrűsége azonban az, amiről legtöbbet tu-

dunk, a tömegsűrűségről, az impulzusról és a többi fontos állapotjelzőről később tanulunk.

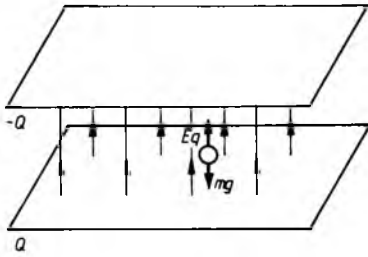
Igen fontos, hogy figyelmünket mostantól kezdve irányítsuk az olyan kérdésekre, hogy mi módon kerül a fizikai tér kapcsolata a kémiai természetű anyaggal. Milyen mechanizmussal valósul meg a fizikai tér és a kémiai anyag között tömeg-, impulzusátadás? Hogyan ad át a fizikai tér a kémiai anyagnak energiát? Lehetséges, hogy folytonosan? Vagy az elektromos tér és a köznapis anyag között az energiakicserélődés valamiféle adagokban történik? És ha a kölcsönhatás „cseppenként” történik, akkor ez a folyamat teljesen determinisztikus, vagy valamilyen véletlenszerű folyamatot kell feltételeznünk? Milyen megoldást ad a természet?

Ezek a kérdések most természetes módon felvethetők. Mindegyiken elgondolkodhatunk, egyetlen kérdésre sincs kész válasz.

1.1.5. Az elektromos töltés és az elektromos tér kölcsönhatása

Ebben a pontban sokkal konkrétabb problémákról lesz szó, mint az előzőekben. Úgy is felfoghatjuk, hogy a fáradozás gyümölcse beérik, az eddig tanult alkalmazásai kerülnek szóba. Az elektromos állapotú részecske és az elektromos tér kölcsönhatására már láttunk példákat. Most néhány hasonló, esetleg bonyolultabb kérdést beszélünk meg.

¶ Tegyük fel először, hogy egy síkkondenzátor lemezei A felületűek, a lemezek távolsága pedig d . A lemezek vízszintes helyzetűek, közöttük egy m tömegű, q töltésű részecske van. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan mozog a részecske, ha a kondenzá-



1.37.
ábra

tor egyik lemezének $Q > 0$, a másik lemezének $-Q < 0$ töltést adunk (1.37. ábra).

A két lemez között az elektromos tér erőssége

$$E = \frac{4\pi kQ}{A},$$

a részecskére ható eredő erő — eltekintve a levegő által kifejtett erőtől —

$$mg + Eq = ma, \quad (1)$$

ha az elektromos tér és a gravitációs tér egyirányú, ha pedig az elektromos tér erőssége fölfelé mutat, akkor

$$mg - Eq = ma. \quad (2)$$

Ha a részecske nyugalomban van, akkor

$$mg = Eq.$$

Ezt az egyenlőséget d -vel megszorozva, figyelembe véve, hogy a két lemez között a potenciál különbsége $U := Ed$, azt kapjuk, hogy

$$mgd = Uq, \quad (3)$$

és ebből például alkalmas adatok esetén a q meghatározható. (Nem változtatna e gondolatmeneten lényegesen az a körülmény sem, ha a nehézségi erő mellett valamely más, állandó nagyságú, függőleges irányba ható erőt vennénk figyelembe.)

Térjünk vissza az (1) egyenlőséghez. Ha kondenzátor felső lemeze pozitív, akkor az

elektromos térerősség egy irányú a nehézségi erővel, és ha $q > 0$, akkor a részecske lefelé gyorsul (1.38. ábra). Ha a felső lemeztől y_0 távolságra indul, és a kezdősebessége v_0 — mondjuk lefelé mutat —, akkor a felső lemeztől mért y távolság:

$$y = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + y_0,$$

és a sebesség:

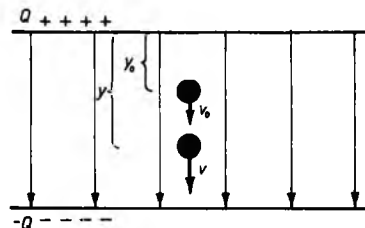
$$v = at + v_0.$$

Alkalmazható természetesen a munkatétel is: válasszuk meg az elektromos és a gravitációs potenciál nulla szintjének a negatív töltésű lemezt. Ha a q töltésű, m tömegű részecske a negatív lemez felett y_0 magasról indult, itt v_0 volt a kezdősebessége, és ha a lemez felett y magasan v a sebesség, akkor

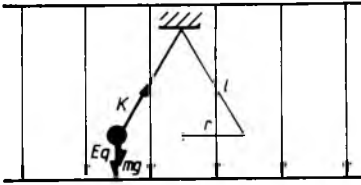
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv^2 + mgy + Eqy &= \\ &= \frac{1}{2} mv_0^2 + mgy_0 + Eqy_0, \end{aligned} \quad (3)$$

hiszen a testre a nehézségi és az elektromos erőn kívül más erő nem hat. [Ha a kondenzátor felső lemeze a negatív, akkor az elektromos potenciál nulla szintjének jelöljük ki a pozitív lemezt — megtehetjük —, a (3) egyenlőségben azonban az E negatív lesz:

$$E = - \frac{4\pi kQ}{A} \cdot \underline{\downarrow}$$



1.38.
ábra



1.39.
ábra

Tegyük fel most, mint az előző feladatban, hogy az A felületű síkkondenzátor lemezei vízszintesek, a távolságuk d . Tegyük fel, hogy a felső lemez töltése $Q > 0$, az alsó lemezre ugyanennyi (negatív) töltést vittünk. A két lemez között L hosszúságú fonálra m tömegű és $q > 0$ töltésű részecskét függesztünk. A fonál és a kis test függőleges tengely körül kúpingaként kering: ekkor a testre három erő hat, a nehézségi és az elektromos erő mellett a kötél által kifejtett kényszererő (1.39. ábra). A kényszererő vízszintes összetevője a centripetális erőt szolgáltatja:

$$K \sin \alpha = m r \omega^2 = m \frac{v^2}{r}, \quad (4)$$

a függőleges komponense pedig a nehézségi és az elektromos erőt kompenzálja:

$$K \cos \alpha - mg - Eq = 0, \quad (5)$$

hiszen a függőleges gyorsulás-összetevő nulla. A kör sugara és a fonál hossza között az

$$r = L \sin \alpha \quad (6)$$

összefüggés teremt kapcsolatot.]

Tegyük fel most, hogy az előző problémánál látott test az L hosszúságú fonálon inga módjára leng. Tegyük fel, hogy a fonál az 1.40. ábra szerint jobbra van kitérítve α szöggel. Ekkor a felfüggesztési pontra vonatkozó forgatónyomaték negatív — hiszen balra forog —, és

$$M = -(mg + Eq) L \sin \alpha.$$

Ha α kicsi, akkor a $\sin \alpha \approx \alpha$ közelítést alkalmazzuk, tehát

$$-(mg + Eq) L \alpha = \Theta \beta, \quad (7)$$

ahol β a szöggyorsulás. A tehetetlenségi nyomaték mL^2 , így

$$-\frac{mg + Eq}{mL} \alpha = \beta,$$

vagyis harmonikus rezgőmozgás jön létre, mint az várható is volt: a kitérés és a szöggyorsulás ugyanis arányos egymással, az arányossági tényező pedig negatív, tehát

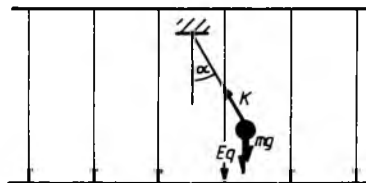
$$\sqrt{\frac{mg + Eq}{mL}} = \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (8)$$

így

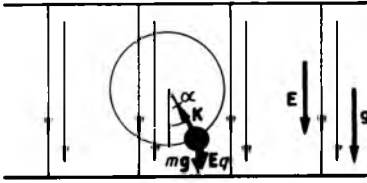
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{mg + Eq}}$$

A vízszintes lemezpár távolsága legyen d , a lemezek A felületűek. A felső lemezre Q pozitív töltést viszünk, az alsóra ugyanannyi negatív töltést. A két lemez között, a lemezekről egyenlő távol egy pontban felfüggesztünk egy L hosszúságú fonalat. Tegyük fel, hogy $L < d/2$. A fonálra egy m tömegű, q pozitív töltésű részecskét erősítünk. Térítsük ki ezután a fonalat a vízszintes helyzetig, és adjunk a testnek lefelé mutató v_0 kezdősebességet (1.41. ábra).

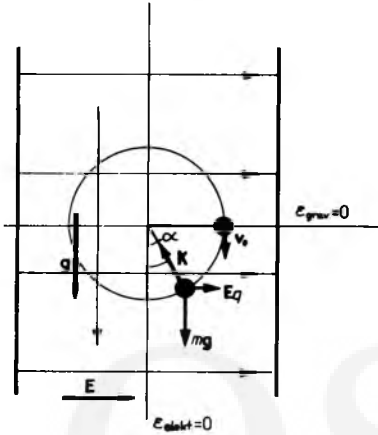
Ha a fonál $\alpha < 90^\circ$ szöget zár be a függőlegessel — a felfüggesztési pont alatt —,



1.40.
ábra



1.41. ábra



1.42. ábra

akkor kisebb az elektrosztatikus és a gravitációs helyzeti energiája is, hiszen az elektromos és a gravitációs erővonalak is lefelé mutatnak. Legyen a gravitációs potenciál és az elektromos potenciál nulla szintje a fonál felfüggesztési pontja. Ekkor az energiamérleg az

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - mgL \cos \alpha - EqL \cos \alpha &= \\ = \frac{1}{2}mv_0^2 & \quad (9) \end{aligned}$$

formában fejezhető ki. Ha ebben a helyzetben K erő feszíti a kötelet, akkor

$$K - mg \cos \alpha - Eq \cos \alpha = m \frac{v^2}{L} \quad (10)$$

¶Tegyük fel most, hogy az A felületű kondenzátorlemez-pár lemezei d távolságra vannak egymástól, és a lemezek függőleges helyzetűek. Az 1.42. ábra szerint a bal

oldali lemezt Q pozitív töltésre, a jobb oldalit $-Q$ töltésre töltjük fel. A két lemez között, a két lemeztől egyenlő távolságra egy L hosszúságú fonál egyik végét egy fix ponthoz rögzítjük, a másik végére pedig egy m tömegű, $q > 0$ töltésű részecskét erősítünk. Tegyük fel azt is, hogy $L < d/2$.

Térítsük ki a fonalat a vízszintes helyzetig, és adjunk a testnek lefelé mutató v_0 kezdősebességet. Legyen az elektromos és a gravitációs potenciál nulla szintje a fonál felfüggesztési pontja.

Figyeljünk fel arra, hogy most a kétféle tér ekvipotenciális felületei merőlegesek egymásra. Ha a fonál a vízszintes helyzetből lefelé indul, akkor a gravitációs helyzeti energiája csökken, az elektrosztatikus nő. Az energiamérleg most az

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - mgL \cos \alpha - EqL \sin \alpha &= \\ = \frac{1}{2}mv_0^2 - EqL & \quad (11) \end{aligned}$$

egyenlőség fejezi ki. Ebben a helyzetben a testre ható erők eredőjének sugárirányú összetevője a centripetális gyorsulást biztosítja:

$$K - mg \cos \alpha - Eq \sin \alpha = m \frac{v^2}{L} \quad (12)$$

¶Gondoljunk most el, hogy az 1.43. ábrán K -val jelölt fémből egy m tömegű, q töltésű részecske lép ki, elhanyagolható kezdősebességgel. Tegyük fel, hogy vízszintes irányban kezd mozogni, és belép a függőleges lemezekkel rendelkező kondenzátor terébe. A lemezekon ugyanis egymással szemben két kis lyuk van. Ezek olyan kis-méretűek, hogy az elektromos tér homogenitását nem befolyásolják. A részecske tehát belép az egyik kis lyukon, és felgyorsul, majd kilép a másik lyukon. Ha a két lemez

között a potenciál különbsége U_0 , akkor a munkatétel szerint

$$U_0 q = m \frac{v_x^2}{2}. \quad (13)$$

A részecske az itt megszerzett vízszintes sebességgel mozog tovább. A függőleges sebességkomponens azonban változik, mert bejut egy másik kondenzátor terébe: ennek a kondenzátornak a lemezei vízszintesek. A lemezek távolságát jelöljük d -vel, és tegyük fel, hogy a két lemez potenciáljának a különbsége most U .

A lemezek között a térerősség $E = U/d$ nagyságú és függőleges irányú. Mondjuk, lefelé mutat. Ekkor — mivel a részecskére ható gravitációs erőtlől most eltekintünk — a kis testet az elektromos erő gyorsítja függőlegesen lefelé:

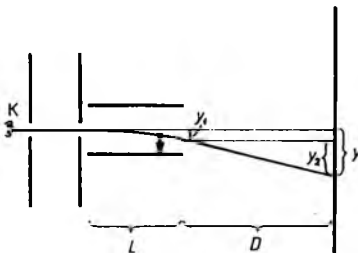
$$Eq = \frac{U}{d} q = ma. \quad (14)$$

Ha az elektromos állapotú, pontszerű test vízszintesen L utat tesz meg a lemezek közötti térben, pontosabban a lemezek közötti elmozdulásának a vízszintes összetevője L , akkor

$$L = v_x t, \quad (15)$$

ahol t -vel azt az időt jelöltük, amíg a részecske a lemezek közötti térben van. Eszerint azonban a kis test

$$v_y = at \quad (16)$$



1.43. ábra

függőleges sebességkomponensre teszert, és elmozdul lefelé; az elmozdulás:

$$y_1 = \frac{a}{2} t^2. \quad (17)$$

Fontos, hogy felismerjük: a tömegpont a vízszintes hajításnak megfelelően mozog a második kondenzátor terében.

Amikor kilép a lemezek közötti térből, sebességének a vízszintes összetevője továbbra is v_x , ezért ha t_1 idő szükséges ahhoz, hogy elérje a D távolságra elhelyezett függőleges ernyőt, akkor

$$D = v_x t_1, \quad (18)$$

és eközben a test függőleges elmozdulása:

$$y_2 = v_y t_1. \quad (19)$$

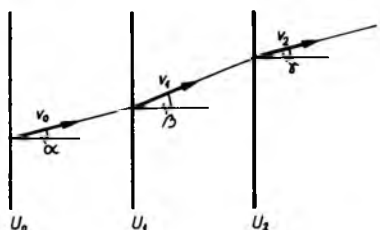
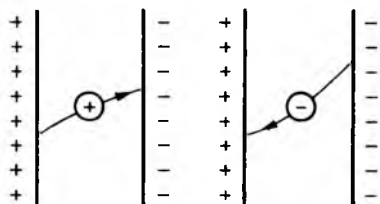
A részecske függőlegesen mérve összesen $y = y_1 + y_2$ -vel mozdul el.]

┌A most következő problémában is tekintünk el a nehézségi erő hatásától. Tegyük fel, hogy a kondenzátor két lemeze között a potenciálkülönbség U (vagyis ha a negatív lemez nulla potenciálú, akkor a pozitív lemez potenciálja U).

Gondoljuk el, hogy az egyik lemez — például a negatív lemez — egyik pontjából úgy indul egy m tömegű, q töltésű részecske, hogy a lemezre merőleges egyenessel α szöveget zár be.

A részecskére vízszintes erő hat, a nagysága qU/d , ahol d a lemezek távolsága. Ez az erő vagy a negatív lemez felé, vagy a pozitív lemez irányába hat, attól függően, hogy q negatív-e vagy pozitív (1.44. ábra). A mozgás pályája mindenképpen paraboláiv. Sokszor ez a parabolaiv egyenes szakasznak tekinthető.

Ezzel kapcsolatban fogalmazzunk meg egy problémát. Tegyük fel, hogy adott három egymással párhuzamos síklemez, a rostához hasonlóan elég lyukacsosak ahhoz, hogy egy részecske átjusson rajtuk.



1.44. ábra

Tegyük fel, hogy az első lemez potenciálja U_0 , a másodiké U_1 , a harmadiké U_2 . Az m tömegű, q töltésű részecske úgy indul el az első lemezről, hogy a lemez normálisával α szöget zár be, és a sebessége v_0 . Jelöljük a második lemezen áthaladó részecske sebességét v_1 -gyel, a harmadik lemezen áthaladó részecske sebességét v_2 -vel. Jelöljük β -val és γ -val azt a szöget, amelyet a sebességvektor a második és harmadik lemez normálisával bezár (1.44. ábra alsó fele). Ekkor a munkatételt kétszer alkalmazva az

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qU_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qU_0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + qU_2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qU_0 \quad (21)$$

egyenlőségekhez jutunk. Vegyük figyelembe azonban azt is, hogy az elektrosztatikus térben mozgó részecske csak a lemezekre merőlegesen gyorsul, a lemezekkel párhuzamos sebességkomponens állandó:

$$v_0 \sin \alpha = v_1 \sin \beta, \quad (22)$$

$$v_0 \sin \alpha = v_2 \sin \gamma. \quad (23)$$

E négy egyenlőségből alkalmas adatok esetén a négy ismeretlen meghatározható.]

1.1.6. A kapacitás

Idézzük fel a síkkondenzátorral kapcsolatos legfontosabb gondolatmenetet! A párhuzamos lemezek egyenként legyenek A felületűek, és távolságuk pedig legyen d . Az egyik lemezt $Q > 0$ töltéssel, a másikat $-Q < 0$ töltéssel látjuk el.

A pozitív töltésű lemezből kiinduló fluxus (1.45. ábra):

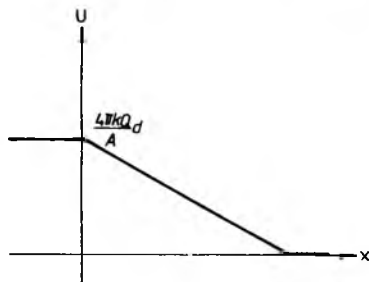
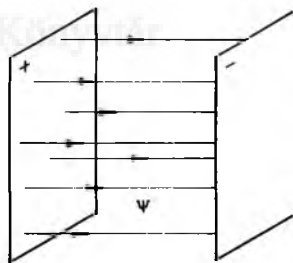
$$\Psi = 4\pi kQ. \quad (1)$$

Az egységnyi felületen áthaladó erővonalak száma — az erővonal-sűrűség — a térerősséggel egyenlő:

$$E = \frac{\Psi}{A} = \frac{4\pi kQ}{A}. \quad (2)$$

Ha a negatív lemez potenciálját tekintjük nullának, akkor a pozitív lemez potenciálja:

$$U = Ed = \frac{4\pi kQ}{A}d. \quad (3)$$



1.45. ábra

[A két lemez közötti potenciál különbsége akkor is

$$\frac{4\pi k Q}{A} d,$$

ha nem a negatív lemezen választjuk meg a potenciál nulla szintjét. A (3) alapján egyszerűen azt mondjuk, hogy a kondenzátor feszültsége U .]

Nyilvánvaló, hogy a kondenzátor lemezeire felvitt Q töltéssel arányos feszültség alakul ki a lemezek között, hiszen a töltéssel arányos a fluxus, a térerősség, és ezért a potenciálkülönbség is.

Fejezzük ki (3)-ból Q -t:

$$Q = \frac{1}{4\pi k} \frac{A}{d} U. \quad (4)$$

Ez (3) mellett természetesen semmi újat nem mond. Az U mellett szereplő arányossági tényezőt itt a *síkkondenzátor kapacitásának* nevezzük, és C -vel jelöljük. Tehát

$$Q = C U, \quad (5)$$

ahol

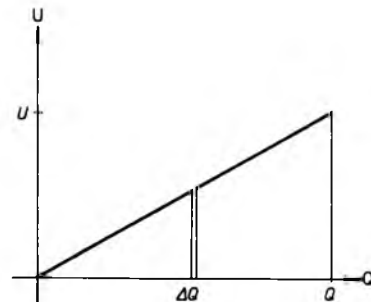
$$C = \frac{1}{4\pi k} \frac{A}{d}. \quad (6)$$

Látható, hogy a síkkondenzátor kapacitása a lemezek felületével egyenesen arányos, fordítva arányos viszont a lemezek távolságával. A kapacitás szemléletes jelentése ($C = Q/U$ alapján): ha a kondenzátor lemezei között 1 voltal nő a feszültség, akkor a kapacitás számértékének megfelelően nőtt a lemezek töltése. [Jegyezzük itt meg: amikor azt mondjuk, hogy a kondenzátor töltése Q , akkor ezen legtöbbször azt értjük, hogy a pozitív lemez töltése Q , a negatív lemez töltése pedig ugyanennyi abszolút értékben. Az (1) fluxusban, a (2) térerősségben, a (3) feszültségben és végül (5)-ben a pozitív lemez töltése szerepel.]

A *kapacitás mértékegysége* az (5) összefüggésből következően a coulomb/volt (C/V), ezt *faradnak* nevezzük, jele F. Legtöbbször a farad törtrészeit használjuk. Például $10^{-6} \text{ F} = 1 \mu\text{F}$; $1 \mu\text{F}$ annak a kondenzátornak a kapacitása, amelyet 10^{-6} C töltéssel feltöltve a lemezek között 1 volt feszültséget mérhetünk. (A kapacitás mértékegysége CGS mértékrendszerben:

$$[C] = \frac{\sqrt{\text{dyn cm}}}{\sqrt{\text{dyn}}} = \text{cm}.)$$

Fontoljuk most meg, hogy mennyi munkát kell végeznünk a kondenzátor feltöltéséhez! Képzeljük el, hogy a kezdetben semleges lemezek egyikéről ΔQ nagyságú pozitív töltést leválasztunk, és a másik lemezre visszük. Ez kezdetben még nem igényel munkavégzést. A töltésszétválasztással azonban már kialakul egy „gyenge” elektromos tér, és létrejön a két lemez között



1.46. ábra

$U = \Delta Q / C$ potenciálkülönbség. Ha ΔQ nagyságú adagokban töltést választunk le a negatív lemezről, és ezzel feltöltjük a pozitív lemezt, akkor közben a két lemez közötti feszültség az átvitt töltés függvényében nő. Mivel egyetlen ΔQ adag átvitele $U \Delta Q$ munkavégzést igényel, a kondenzátor feltöltéséhez szükséges munka az 1.46. ábrán látható háromszög területével egyezik meg:

$$W = \frac{QU}{2},$$

ha végülis összesen Q töltést vittünk át, és a kondenzátor végső feszültsége U .

Ez az összefüggés átalakítható, ha megfontoljuk, hogy a kapacitás értelmezése alapján $Q = CU$, így

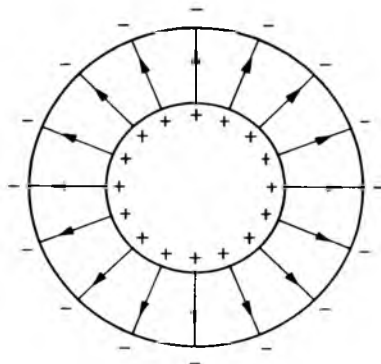
$$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (7)$$

Ezt az eredményt már ismerjük: ha a kapacitás (6) alatti értelmezését és az $U = Ed$ egyenlőséget felhasználjuk, akkor azt kapjuk, hogy

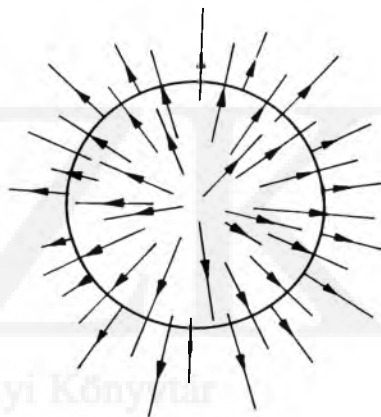
$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{4\pi k} \frac{A}{d} \frac{E^2 d^2}{2} = \frac{E^2}{8\pi k} Ad,$$

vagyis a kondenzátor feltöltésekor végzett munka egyenlő a lemezek közötti tér energiájával.

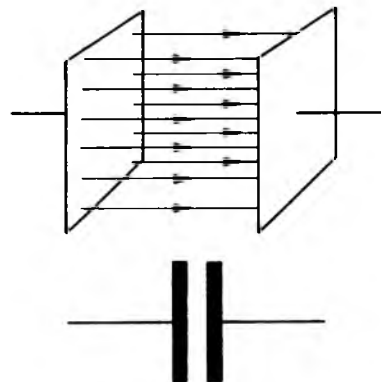
□ A kapacitás nemcsak a síkkondenzátor esetén értelmezhető. Képzeljünk el például két koncentrikus gömböt, a belső sugara legyen r , a külső sugara R . Tegyük fel, hogy a belső gömb Q pozitív töltéssel rendelkezik, a külsőn ugyanennyi abszolút értékű negatív töltés van. Ekkor a belső gömbről kiinduló erővonalakat a külső gömb leköti, a rendszer kifelé semleges, de a belső gömb belsejében is nulla a télerősség (1.47. ábra). A két gömbfelület poten-



1.47. ábra



1.48. ábra



1.49. ábra

ciálkülönbsége:

$$U = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{R}.$$

Innen

$$\frac{U}{Q} = k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Nevezzük a Q/U arányt most is kapacitásnak, és jelöljük C -vel; ekkor az ún. *gömbkondenzátor kapacitása*:

$$C = \frac{1}{k} \frac{Rr}{R-r}. \quad (8)$$

Egyetlen gömb esetén is értelmezhető a kapacitás (1.48. ábra). Az egyenletesen feltöltött, r sugarú gömb felületén

$$U = k \frac{Q}{r}$$

a potenciál, ezért a gömb kapacitása:

$$C = \frac{r}{k}. \quad (9)$$

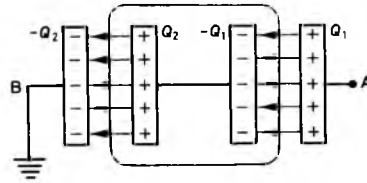
Így például egy 9 cm sugarú gömb kapacitása:

$$C = \frac{9 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9} = 10^{-11} \text{ F}.$$

Ha ezt a gömböt 1000 V potenciálra töltjük fel a végtelenhez képest, akkor 10^{-8} C töltés halmozódik fel rajta.]

A kondenzátoroknak az elektronikában, az elektrotechnikában van alapvető gyakorlati szerepük. A kondenzátorok a legfontosabb áramköri elemek között szerepelnek. Áramköröket ábrázoló rajzokon a síkkondenzátorra emlékeztető párhuzamos vonalakkal ábrázoljuk (1.49. ábra).

Tegyük fel most, hogy adott két kondenzátor, az egyik kapacitása legyen C_1 , a másiké C_2 . Kössük össze a kondenzátoro-



1.50. ábra

kat az 1.50. ábrán látható módon. Vigyünk az A pontra Q_1 pozitív töltést. A négy kondenzátorlemezen felhalmozódó töltést is bejelöltük. A B pontot a földdel hoztuk kapcsolatba, vagy valamilyen más nagy kapacitású tárggyal. Ekkor a B pontnál az egyensúly biztosításához szükséges mennyiségű töltés áramlik a rendszerre, a kondenzátorokból álló rendszer kifelé semleges lesz. Így elég nekünk azzal törődnünk, hogy az A pontot ellássuk töltéssel. Jelöljük ezt Q_1 -gyel.

A B és az A pont között a potenciálkülönbség:

$$U := U_2 + U_1 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_1}. \quad (10)$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy az 1.50. ábrán vázlatosan feltüntetett felület által határolt térrészbe nem kerülhetett töltés, így belül az összes töltés nulla:

$$Q_2 + (-Q_1) = 0, \quad (11)$$

ezért $Q_1 = Q_2$, vagyis a két kondenzátoron azonos nagyságú töltés halmozódik fel. Az A pontra felvisszük ezt a töltést, a B pontnál a földből $-Q$ negatív töltés áramlik a C_2 kapacitású kondenzátor bal oldali lemezére. A belső lemezeken csak azért lehet töltés, mert a kezdetben semleges belső felületeken töltésszétválás valósul meg, a C_1 kapacitású kondenzátor pozitív lemeze annyi negatív töltést vonz a kondenzátor belső lemezére, hogy kifelé semleges legyen. Ez azon az áron történik, hogy a C_2

kapacitású kondenzátor belső lemezén Q töltés „marad”. Ez a pozitív lemez a földből $-Q$ negatív töltést vonz magához. Ezzel ez a kondenzátor is semleges lesz.

Még egyszer: *sorba kapcsolt kondenzátorokon a töltés azonos*, jelöljük ezt Q -val: $Q_1 = Q_2 =: Q$. Ekkor az A és B pontok között

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (12)$$

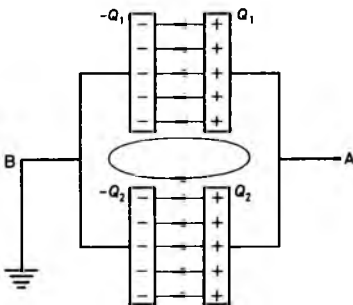
feszültség mérhető, innen

$$\frac{U}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (13)$$

Ennek az egyenlőségnek a bal oldalán nyilvánvalóan a két síkkondenzátor sorbakapcsolásával kapott kondenzátor kapacitásának a reciproka szerepel, vagyis *sorbakapcsolt kondenzátorok eredő kapacitásának reciproka a kondenzátorkapacitások reciprokainak összege*:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (14)$$

Kondenzátorok párhuzamos kapcsolásánál hasonlóan okozhatunk. Tegyük fel, hogy a C_1 és a C_2 kapacitású kondenzátorokat úgy helyezük el, ahogyan az 1.51. ábrán látható. Az A pontnál Q töltést viszünk a rendszerre, a B pontnál földelt



1.51. ábra

rendszer pedig a földből a szükséges mennyiségű töltést felszívja.

A jobb oldali lemezek töltése Q_1 és Q_2 , akkor világos, hogy

$$Q_1 + Q_2 = Q, \quad (15)$$

a töltés megmaradása miatt. Nyilvánvaló az is, hogy a bal oldali lemezek töltése $-Q_1$ és $-Q_2$ lesz. Induljunk most el a B ponttól, és vigyünk körbe a két kondenzátor terén egy q töltésű kis testet gondolatban. A C_1 kapacitású lemez terén áthaladva a tér munkája negatív, hiszen az erővonalakkal szembe mozog a részecske, pontosan

$$W_1 = -q \frac{Q_1}{C_1}.$$

A felső kondenzátor terén áthaladva visszakanyarodunk, és az alsó kondenzátor terén visszük végig a töltött testet. Itt a munka pozitív, mert az erővonalak irányában haladtunk, tehát

$$W_2 = +q \frac{Q_2}{C_2}.$$

Az elektrosztatika második alaptétele szerint zárt görbén a tér munkája nulla, tehát

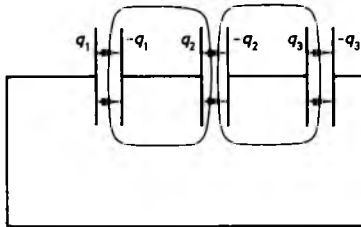
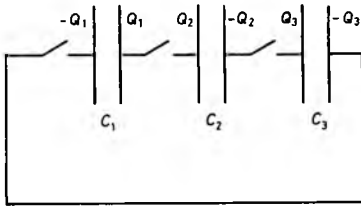
$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= 0, \\ -\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

ezért

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}, \quad (17)$$

vagyis a két, *párhuzamosan kapcsolt kondenzátoron azonos nagyságú feszültség mérhető*. Jelöljük ezt a közös feszültséget U -val.

Osszuk el ezután a (15) egyenlőséget U -



1.52.
ábra

val, ekkor azt kapjuk, hogy

$$C := C_1 + C_2, \quad (18)$$

vagyis az eredő kapacitás a párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok kapacitásának az összegével egyenlő.

┌ A most látott módszert még két problémával kapcsolatban mutatjuk be. Elsőként nézzük az 1.52. ábrán látható három kondenzátort. A C_1 , C_2 , C_3 kapacitású kondenzátorokat az ábra szerint Q_1 , Q_2 , Q_3 töltéssel töltjük fel. Tegyük fel, hogy a C_1 kapacitású kondenzátor jobb oldali lemeze pozitív, a második, C_2 kapacitású kondenzátor bal oldali lemeze pozitív, és végül a C_3 kapacitású kondenzátornak is a bal oldali lemeze pozitív töltésű. Mint az ábrán látható, a három kondenzátor nincs összekötve.

Kössük most össze a kondenzátorokat, vagyis az ábrán látható kapcsolókkal kapcsoljuk egymáshoz a lemezeket. Ekkor természetesen az egyes lemezekeken megváltozhat a töltés. Jelöljük a három kondenzátoron föllelhető ismeretlen töltést q_1 -, q_2 -, q_3 -mal.

A probléma megoldásához két elvet használunk. Az első a töltés megmaradásának a tétele. Az 1.52. ábrán vázlatosan feltüntetett felületeken belül a töltés a kapcsolók bekapcsolásától nem változik meg. Bekapcsolás előtt ugyanannyi a töltés, mint bekapcsolás után:

$$-q_1 + q_2 = Q_1 + Q_2, \quad (19)$$

és

$$-q_2 + q_3 = -Q_2 + Q_3. \quad (20)$$

(Ebből persze az is adódik, hogy

$$q_1 - q_3 = -Q_1 - Q_3,$$

ezért ez nem jelent új egyenletet.)

A második elv az elektrosztatika második alaptételének az alkalmazását jelenti: zárt görbén az elektrosztatikus tér munkája nulla. Ha részben az összekötő huzal mentén, részben a kondenzátorok terében gondolatban körbeviszük egy q töltésű testet, akkor az elektromos tér

$$W_1 + W_2 + W_3 = 0$$

munkát végez. Másképpen

$$\frac{q_1}{C_1} q + \frac{q_2}{C_2} q + \frac{q_3}{C_3} q = 0,$$

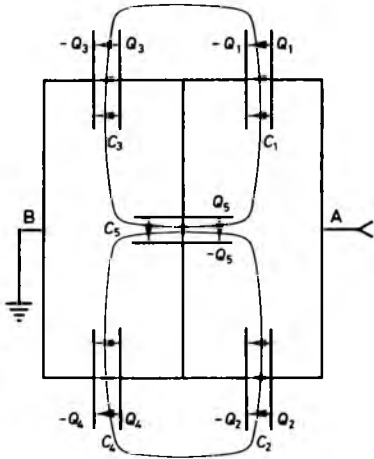
és ezért

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = 0. \quad (21)$$

A probléma megoldását tehát a (19), (20), (21) egyenletrendszer szolgáltatja.]

┌ Tekintsük most az 1.53. ábrán látható öt kondenzátorból álló rendszert. A kondenzátorok kapacitása ismert: C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 — az ábrának megfelelően. Az A pontban Q töltést közlünk a rendszerrel, a B pontot pedig összekötjük a földdel.

Az A pontban felvitt Q töltés az első és a második kondenzátor jobb oldali leme-



1.53.
ábra

zein oszlik el:

$$Q_1 + Q_2 = Q. \quad (22)$$

Jelöljük be ezután a többi lemezen felhalmozódó töltést. A harmadik és a negyedik kondenzátor esetén ezek természetesen adódnak. Az ötödik kondenzátornál válasszuk meg a felső lemezt pozitív töltésűnek. Ha Q_5 -re negatív eredmény adódik, akkor ez azt jelenti, hogy a kondenzátor felső lemeze negatív töltésű.

Az ábrán vázlatosan feltüntetett két felületen belül az összes töltés nulla:

$$-Q_1 + Q_3 + Q_5 = 0, \quad (23)$$

és

$$-Q_2 + Q_4 - Q_5 = 0. \quad (24)$$

A (22), (23), (24) egyenlőségek a töltés megmaradásának az elvét fejezik ki. Az elektrosztatika második alaptörvényét két zárt görbére alkalmazzuk (1.54. ábra), az egységnyi töltésen végzett munka — a potenciál csökkenése — mindkét görbén nulla:

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_5}{C_5} - \frac{Q_2}{C_2} = 0, \quad (25)$$

és

$$\frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_4}{C_4} - \frac{Q_5}{C_5} = 0. \quad (26)$$

A (22), ..., (26) egyenletrendszerből az öt ismeretlen töltés meghatározható.

Világos, hogy az A és a B pont közötti feszültség:

$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3},$$

vagy másként:

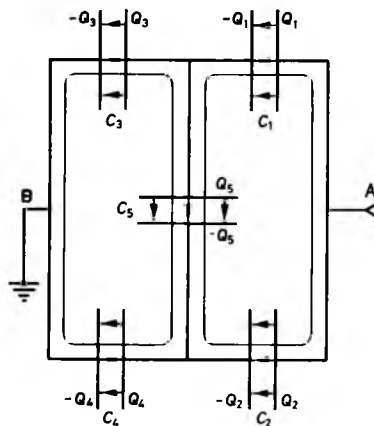
$$U = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_4}{C_4},$$

és így is számolható:

$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_5}{C_5} + \frac{Q_4}{C_4}.$$

Ha az A és a B pontok közötti potenciálkülönbséggel osztjuk a rendszerre felvitt töltést, akkor az öt kondenzátorból álló rendszer eredő kapacitásának számszerű értékét kapjuk:

$$C = \frac{Q}{\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3}}.$$



1.54.
ábra

Fontos: az öt kondenzátor e rendszere sem soros, sem párhuzamos elemeket nem tartalmaz. Az első és a harmadik kondenzátor például nem sorosan kapcsolódik egymáshoz, mert $Q_1 \neq Q_3$. Ugyanígy: az első és a második kondenzátor nem párhuzamosan kapcsolódik, mert

$$\frac{Q_1}{C_1} \neq \frac{Q_2}{C_2}.$$

1.1.7. Az elektromos tér és a kémiai anyag kölcsönhatása

Már az előző pontban láttuk, hogy a kezdetben semleges kondenzátorlemezek elektromos állapotúvá válnak anélkül, hogy kívülről elektromos töltést juttatnánk a lemezre. Ha két kondenzátort sorba kapcsolunk, és a külső lemezeket elektromos töltéssel látjuk el, akkor a kondenzátorok belső lemezei is elektromos állapotúvá válnak. A kezdetben nulla töltéssel rendelkező belső lemezek összes töltése továbbra is nulla marad, a két belső lemez egyike pontosan annyi pozitív töltéssel rendelkezik, mint amennyi negatívval a másik. A semleges állapotú testben a töltés ilyen szétválását — amely általában külső elektromos erőter hatására történik — *elektromos megosztásnak* nevezzük.

Az elektromos megosztás persze csak akkor valósulhat meg, ha az elektromos töltés „könnyen elmozdulhat” a testben: az anyag „vezeti” az elektromos töltést. Az ilyen anyagok a fémek. Azokat az anyagokat, amelyek a töltés áramlásával szemben akadályt jelentenek, amelyek a töltés áramlását megakadályozzák, szigetelőknek nevezzük. Az elektromos szigetelők legfontosabb példái: üveg, porcelán, műanyag, gumi.

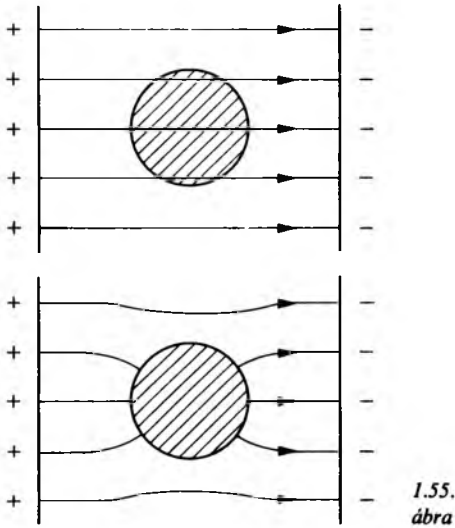
Leegyszerűsítve a valóságot, a kémiai anyagokat két csoportba sorolhatjuk, aszerint, hogy vezetik-e az elektromos töltést vagy sem. Az előzőeket *elektromos vezető*eknek nevezzük, az utóbbiakat *elektromos szigetelő*eknek. A két tulajdonság között sokféle átmenet van. Igen erős elektromos térben például a gumi is vezeti az elektromos töltést. Ugyanakkor a legjobb vezetők is tanúsítanak némi ellenállást az elektromos töltés áramlásával szemben. A gyakorlatban azonban a legtöbb anyag besorolható az elektromosan vezető vagy az elektromosan szigetelő kategóriájába.

Ebben a pontban a kétféle kémiai anyag viselkedését vizsgáljuk elektromos térben, és azt is, hogy miképpen módosítja az elektromos állapotúvá vált vezető vagy szigetelő az elektromos erőteret vagy annak az elsődleges forrását, a kezdeti töltéseloszlást. Most tehát a gondolatmenetünk középpontjába a kémiai anyag és az elektromos tér — a másik anyagfajta — kölcsönhatásának tanulmányozását helyezzük.

Vizsgáljuk meg először a vezetők elektromos viselkedését!

Ha a vezető kerül az elektromos térbe, akkor ez a tér „behatol” a fémbe. A kezdetben semleges tárgyban elektromos megosztás jön létre, az elektromos töltés szétválása következik be (1.55. ábra). A töltés áramlása a fémen belül mindaddig tart, amíg a térerősség a fémen belül meg nem szűnik. (Amíg ugyanis a térerősség nem nulla, addig a töltés szétválása folytatódik.) A fém felületén tehát elektromos töltés jelenik meg.

A megosztás következtében kialakul a fém felületén egy töltésmegosztás, melynek elektromos tere és a külső töltések tere összegződik. A fémen belül ez az összegződés azt jelenti, hogy a külső elektromos



1.55. ábra

erőtér és a megosztás következtében a fém felületén kialakult töltésfelhalmozódás tere „megsemmisíti” egymást. A fémen belül az elektromos térerősség nulla. A fémen kívül is összegződik a fém felületén megjelenő töltések tere és a külső töltések tere.

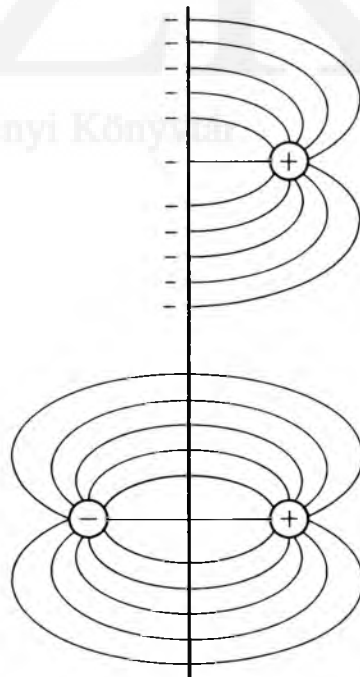
Fontos azonban, hogy a külső töltések eloszlása általában megváltozik azután, hogy az elektromos térbe helyezük a fémtestet. A külső töltések elektromos tere megosztás miatt töltést „indukál” az elektromos térbe helyezett vezető felületére, ez a töltés azonban visszahat az eredeti töltéseloszlásra. Igen gyakran módosítja azt. A módosított elsődleges töltések tere és a fém felületén kialakult töltések tere összegződik. Ez a két tér egymásra „szuperponálódva”, egymásra épülve adja az eredő — és megfigyelhető — elektromos teret.

Említettük: az eredő elektromos tér a fém belsejében nulla, az erővonalak a fém felületén merőlegesen végződnek, vagy a fém felületéről merőlegesen indulnak.

┌ Gondoljuk el, hogy adott egy nagy kiterjedésű, semleges fémlemez. Helyezzünk

el a fémlemezről r távolságra egy Q pozitív töltésű testet. A kis test elektromos tere kezdetben gömbszimmetrikus, és az erővonalak sugár irányban indulnak ki a testből. A fémlemez jelenléte jelentősen módosítja az erővonalaképet. A lemezen az elektromos megosztás következtében töltéseloszlás alakul ki, úgy rendeződik a lemez töltése, hogy a Q töltésű, pontszerű testből kiinduló erővonalak a fémlemezre merőlegesen végződjenek (1.56. ábra).

Az elektromos tér most pontosan olyan, mint egy $(+Q, -Q)$ töltéspárból álló rendszer (dipólus) elektromos tere a töltések közötti távolságot felező, merőleges sík egyik oldalán. A Q töltés környezetében így alakul az elektromos erőter. Mintha a Q töltésből kiinduló erővonalak $2r$ távolságra egy $-Q$ töltésű testen végződnenek. A síklemezen kialakuló töltéseloszlás tehát olyan erőt fejt ki a Q töltéssel rendelkező



1.56. ábra

testre, mint a Q töltés (ellentétes előjelű) tükörképe a sík túoldalán:

$$F = k \frac{Q^2}{(2r)^2} \cdot \perp$$

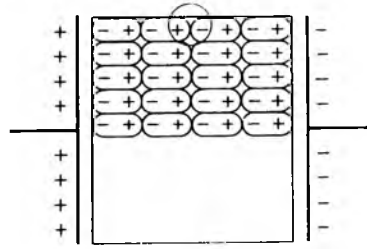
Tekintsünk most egy, az elektromos térben elektromosan egyensúlyba került fémtárgyat, vagyis egy olyat, amelyen már kialakult a nyugalmi töltéeloszlás. Jelöljünk ki a belsejében vagy a felületén két pontot. Mozgassunk egy pontszerű, q töltéssel rendelkező testet gondolatban az egyik pontból a másikba. Ha a fém belsejében haladunk, akkor a tér erőssége nulla, ezért az elektromos munkavégzés is nulla. Nincs elektromos munkavégzés az olyan pályaszakaszon sem, amely a fém felületén halad. Itt ugyanis nem nulla a térerősség, de az elmozdulás merőleges az erővonalakra.

Az elektrosztatikus térben elektromosan egyensúlyi állapotba került fémtárgy bármely két pontja azonos potenciálú. A vezető ekvipotenciális „felület”, a felülete és a belseje azonos elektromos potenciálon van. (Ezen az sem változtat, ha a fém belsejében üreg van.)

Vizsgáljuk meg most az elektromos szigetelők és az elektromos tér kölcsönhatását!

Képzeld el, hogy a kondenzátor lemezei közötti elektromos térbe helyezünk egy szigetelőtömböt, például egy üveglemezt. Az elektromos térbe helyezett szigetelőben elektromos megosztás nem jön létre, mert az elektromos töltés nem áramolhat a test egyik pontjáról a másikra. A szigetelőanyag azonban bizonyos értelemben mégis elektromos állapotúvá válik. Ezt úgy magyarázzuk, hogy a szigetelőben — más szóval a dielektrikumban — igen kis méretű dipólusok jönnek létre (1.57. ábra).

Az anyag szerkezetére vázlatosan utalva ezt a jelenséget kétféleképpen is magyaráz-



1.57.
ábra

hatjuk. Lehetséges, hogy a dielektrikum molekulái dipólusok. Külső elektromos erőter hatására a rendezetlenség megszűnik, és a dipólusok egy irányba állnak be. Az is lehetséges, hogy a szigetelőanyag molekulái eredetileg nem dipólusok, ám külső elektromos térben az atomokon, molekulákon belül az elektromos töltés „súlypontjának” a szétválása miatt dipólusokká válnak.

A dielektrikumokban fellépő ilyen változásokat *elektromos polarizációnak* nevezzük.

A szigetelőben kialakuló dipólusláncok belül semlegesítik egymást. A polarizált dielektrikumban bármely kis térfogatrészben, amelyben még egész számú atom vagy molekula van, az elektromos töltés összes mennyisége nulla. A szigetelőanyag kifele mégis elektromos tulajdonságot mutat: a dipólusok egyetlen eredő dipólussal helyettesíthetők. Ezt úgy is elgondolhatjuk, hogy a dielektrikum két felületét pozitív és negatív festékekkel bekenjük. A kondenzátor negatív lemezével szomszédos felületre pozitív, a pozitív lemez közelében található határfelületre negatív festéket viszünk fel. Ez a töltés azonban nem vezethető el a dielektrikum felületéről, ezért ezt *nem valódi töltésnek* nevezzük, hogy megkülönböztessük a tér elsődleges forrását jelentő valódi — elvezethető — töltéstől.

A kondenzátor lemezeit elektromossá

tevő töltés a lemezek között elektromos erőteret alakít ki. Ez az elektromos erőter a lemezek közé csúsztatott dielektrikumot polarizálja. A dielektrikum egyetlen nagy dipólussal helyettesíthető. A dielektrikum elektromossá válik, a pozitív felületéről a negatív felületére mutató elektromos teret jelöljük E_p -vel. A p indexszel a polarizációra utalunk. Az elektromos állapotúvá vált dielektrikum azonban visszahat az eredeti töltéseloszlásra. Módosíthatja a töltéseloszlást, ezen keresztül a valódi töltések elektromos terét is. (Ez például akkor valósul meg, ha a kondenzátor lemezei közötti teret kétféle dielektrikummal töltjük ki úgy, hogy a szigetelők határfelülete meőrleges a síkkondenzátor lemezeire.)

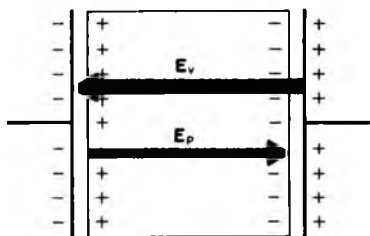
A valódi töltések elektromos terét jelöljük E_v -vel. Ekkor a valódi és a polarizációs töltések tere egymásra épül, az E_v és E_p térerősségek eredője az egységnyi pozitív töltésű testre ható elektromos erő, a mérhető elektromos térerősség:

$$E = E_v + E_p. \quad (1)$$

Az 1.58. ábrán látható koordináta-rendszerben az (1) egyenlőségben szereplő vektorok x tengely irányúak, nagyságukra az

$$E = E_v - E_p \quad (2)$$

összefüggés érvényes: ez azt jelenti, hogy a polarizáció mindig csökkenti a valódi töltések hatását.



1.58.
ábra

Másrészt a *tapasztalat szerint* a legtöbb esetben a polarizációs térerősség arányos az eredő térerősséggel: a polarizációt végül is a töltésre ható elektromos erő hozza létre:

$$E_p = -\chi E. \quad (3)$$

(A mínuszjel azt fejezi ki, hogy a polarizációs térerősség ellentétes irányú az eredő térerősséggel. A χ arányossági tényezőt *elektromos szuszceptibilitásnak* nevezzük.)

Így $E = E_v - \chi E$, illetve

$$E = \frac{1}{\chi + 1} E_v. \quad (4)$$

A dielektrikum belsejében az elektromos tér megváltozik, a valódi töltések és a polarizációs töltések terének összege a (4) egyenlőség szerint arányos a valódi töltések E_v térerősségével.

Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy az E_v tér nem feltétlenül az eredeti töltéseloszlás tere. Mint már mondtuk, a dielektrikum módosítja az eredeti töltéseloszlást. A szigetelő elektromos terének hatására megváltozhat a valódi töltések eredeti eloszlása. Képzeljük el, hogy ezt a töltéseloszlást rögzíteni tudnánk, és a szigetelőt eltávolíthatnánk úgy, hogy a valódi töltések eloszlása nem állna helyre. Nos, ennek a gondolatban rögzített töltéseloszlásnak a tere E_v . (Természetesen a vákuumban feltöltött kondenzátor lemezei között kialakult elektromos tér megegyezik a valódi töltések elektromos terével, hiszen ilyenkor a (3)-ban szereplő χ nulla: $E = E_v$.)

Osszuk el a valódi töltések E_v térerősségét $4\pi k$ -val (k a Coulomb-törvényben szereplő állandó), és jelöljük ezt a vektort D -vel:

$$D := \frac{1}{4\pi k} E_v. \quad (5)$$

A D vektort a *dielektromos eltolás vektorának* nevezik. Ha bevezetjük az

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{4\pi k} \quad (6)$$

jelölést, akkor (5) így is írható:

$$D = \varepsilon_0 E_v \quad (7)$$

A dielektromos eltolás vektora bevezetésének elvi oka nincs. Arányos a valódi töltések által létrehozott térerősséggel, ezért a fizikai jelentése is szorosan ehhez kapcsolódik.

Térjünk most vissza a (4) egyenlőséghez. A $\chi + 1$ arányossági tényezőt jelöljük ε_r -rel. Ekkor

$$E_v = \varepsilon_r E, \quad (8)$$

és így a (7) és a (8) alapján

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E. \quad (9)$$

Az $\varepsilon := \varepsilon_0 \varepsilon_r$ mennyiséget *dielektromos állandónak* nevezzük. A szorzat első tényezője állandó, mértékegysége $C^2/(N m^2)$, és világos, hogy $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} C^2/(N m^2)$. Az ε_0 konstans *vákuum permittivitásnak* vagy a *vákuum dielektromos állandójának* nevezik. A szorzat második tényezője az anyag dielektromos tulajdonságát kifejező állandó, mértékegysége: $[\varepsilon_r] = 1$, hiszen $\varepsilon_r := \chi + 1$. Az ε_r elnevezése: *relatív permittivitás* vagy *relatív dielektromos állandó*.

Ezekkel a jelölésekkel a síkkondenzátor kapacitását így fejezhetjük ki:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d},$$

ha a kondenzátor lemezei közé ε_r relatív dielektromos állandójú anyagot csúsztatunk, akkor a kapacitás módosul:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

XVII. Feladatcsoport: elektrosztatika

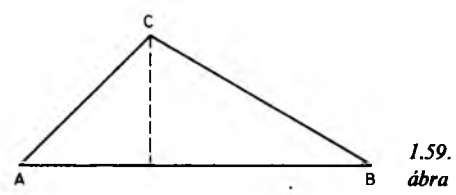
XVII/1. Mekkora erővel hat egymásra 20 méter távolságból egy $10^{-2} C$ és egy $2 \cdot 10^{-2} C$ töltésű test? Legyen a két test tömege 1,5 kg. Mekkora a két test gyorsulása, amikor egymástól 20 méterre a rögzítésüket feloldjuk?

XVII/2. Szabályos háromszög oldalai 10 méter hosszúak. A csúcsait jelöljük A-val, B-vel és C-vel. Az A pontba $10^{-6} C$ töltésű, a B pontba $-2 \cdot 10^{-6} C$ töltésű testet helyeztünk. A harmadik csúcspontba is helyeztünk egy töltést. Mekkora ez a töltés, ha a háromszög közepébe helyezett $10^{-7} C$ töltésű testre az AB oldallal párhuzamos erő hat?

XVII/3. Egy háromszög AB oldala 8 méter, az AB oldalhoz tartozó, a C pontból induló magasság hossza 3 méter, az A pontnál 45° -os szög van (1.59. ábra). A háromszög A csúcsában $5 \cdot 10^{-6} C$, a B csúcsában $-3 \cdot 10^{-6} C$ töltésű testet helyeztünk. A C pontban $4 \cdot 10^{-6} C$ töltés van. Határozzuk meg, hogy mekkora elektromos erő hat a C csúcsba helyezett töltésre!

XVII/4. Egy négyzet oldalai 1 méter hosszúak. A négyzet csúcsaiban sorban $1 \mu C$, $2 \mu C$, $3 \mu C$, $4 \mu C$ töltésű, pontszerű testet helyezünk el. Mekkora — és milyen irányú — erő hat a négyzet középpontjába helyezett, $5 \mu C$ töltésű kis testre?

XVII/5. Erős műanyag szálát a mennyezethez erősítünk, és rajta két azonos töltésű, pontszerű test van rögzítve egymástól



1,3 méter távolságban. A felső test 30 g, az alsó 60 g tömegű. A két test között egy 10 g tömegű és $10 \mu\text{C}$ töltésű kis gyűrű csúszhat súrlódás nélkül. Ez a gyűrű az alsó test felett 10 cm magasan nyugalomban van. Határozzuk meg a két rögzített test (azonos) töltését! Mekkora erő feszíti a kötélfelső és alsó szakaszát?

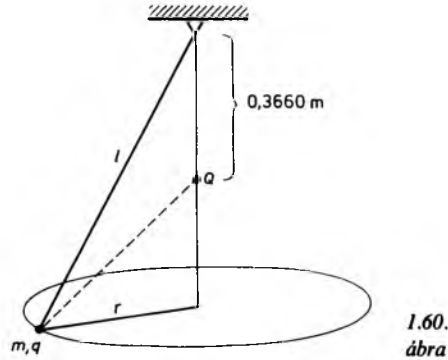
XVII/6. Egy vékony műanyag szálból kört készítünk. A kör valamely átmérőjének egyik végpontjában egy $5,77 \mu\text{C}$, a másik végpontjában egy $1,92 \mu\text{C}$ töltésű pontszerű test van. A körön szabadon csúszhat egy $1 \mu\text{C}$ töltésű gyűrű. Hol lesz a gyűrű egyensúlyban?

XVII/7. Két azonos — 2 g — tömegű, kisméretű testet két, egyenként 0,5 méter hosszú fonállal a mennyezet egy pontjában felfüggesztünk. Az egyik testnek $Q_1 = 0,8 \mu\text{C}$ töltést adunk, és a másikat is ellátjuk pozitív Q_2 töltéssel. A két test szétaszítja egymást, a távolságuk egyensúlyi helyzetben 0,2 méter. Határozzuk meg a második test ismeretlen töltését!

XVII/8. Két $l = 0,5$ m hosszú fonalat közös pontban felfüggesztünk. Az egyik fonál alsó végén egy $m_1 = 2$ g, a másik fonál alsó végén egy $m_2 = 4$ g tömegű, kisméretű test van. A két testet azonos nagyságú töltéssel látjuk el. Ekkor az elektromos kölcsönhatás miatt szétaszítják egymást. A távolságuk $r = 30$ cm lesz. Határozzuk meg a golyócskák (azonos) töltését!

XVII/9. Két pontszerű testet egymástól 20 cm távolságban helyezünk el. Ekkor 1,8 N vonzóerőt fejtenek ki egymásra. Ha a két kis testet összeérintjük, majd most 10 cm-re eltávolítjuk egymástól, akkor a két test között 0,9 N taszítóerőt mérhetünk. Határozzuk meg a két test (kezdeti) töltését!

XVII/10. Egy kúpínga fonálhossza $l = 1$ m. A fonálra erősített $m = 10$ g tömegű,



$q = 1,7 \cdot 10^{-7}$ C töltésű kis golyó vízszintes síkban körmozgást végez, sugara 0,5 méter. A felfüggesztési pont alatt 36,60 cm-rel egy $Q = -4,08 \cdot 10^{-5}$ C töltéssel rendelkező, rögzített részecske van (1.60. ábra). Határozzuk meg a körmozgás periódusidejét!

XVII/11. Egy 2 méter hosszú, függőleges üvegrúdnak $Q = 2 \mu\text{C}$ töltést adunk. Ez a töltés egyenletesen oszlik el a rúd mentén. A rúd közepétől 3 cm távolságra, a rúdra merőleges irányban egy $m = 10$ g tömegű, $q = 0,1 \mu\text{C}$ töltésű részecskét helyeztünk el. Mekkora kényszererővel lehet a tömegpont egyensúlyát biztosítani? Mekkora a pont gyorsulása, ha magára hagyjuk?

XVII/12. Egy függőleges üvegfalon a töltéseloszlás egyenletes, $\sigma = 10^{-6} \text{ C/m}^2$. A faltól $d = 0,2$ m távolságra felfüggesztünk egy $l = 1$ m hosszú, vékony fonalat. A fonál alsó végén egy $m = 10$ g tömegű pontszerű test van. A testnek elektromos töltést adunk. A fal ezért eltaszítja a pontszerű testet. Egyensúlyban a test 0,7 méterre van az üvegfaltól. Határozzuk meg a pontszerű test töltését! Számítsuk ki a kötél erő nagyságát! Tegyük fel, hogy a fonál elszakad. Milyen messze van a fonál felfüggesztési pontjaitól a test ezután 1 másodperc múlva, és mekkora a sebessége?

XVII/13. Egy vízszintes síklemez töltéssűrűsége $\sigma = 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$. A lemez felett 1,2 méter magasan egy ponthoz $l = 1 \text{ m}$ hosszú fonalat erősítünk, a fonál végén $m = 10 \text{ g}$ tömegű test függ. A testnek $q = 2 \mu\text{C}$ pozitív töltést adunk. A testet körpályára kényszerítjük, a körpálya síkja vízszintes. A keringési idő: $T = 1,24 \text{ s}$. Milyen magasan van a körpálya síkja a lemez felett?

XVII/14. Adott egy rögzített, pontszerű forrástöltés: $Q = 10^{-5} \text{ C}$. Határozzuk meg a potenciált a forrástöltéstől 1,2 méter, 6 méter, 100 méter távolságban, ha a potenciál a forrástöltéstől 3 méter távolságra nulla! Határozzuk meg a potenciált, ha a nulla szintje a végtelenben van!

XVII/15. Mekkora a potenciál egy $Q = -10^{-5} \text{ C}$ pontszerű forrástöltéstől 10 méter távolságra? Mekkora itt egy $q_1 = -10^{-6} \text{ C}$ töltésű és egy $q_2 = 10^{-6} \text{ C}$ töltésű test elektromos helyzeti energiája?

XVII/16. Két pontszerű, elektromos állapotú test távolsága 4 méter, töltésük: $Q_1 = 10^{-5} \text{ C}$ és $Q_2 = -1,2 \cdot 10^{-5} \text{ C}$. Mekkora az elektromos potenciál a két töltést összekötő szakasz felezőpontjában? Mekkora a potenciál egy olyan pontban, amely az első testtől 4 méter, a másodiktól 5 méter távolságra van?

XVII/17. Az 5 méter oldalú négyzet A, B, C, D csúcaiban rendre $Q_A = 10^{-5} \text{ C}$, $Q_B = -10^{-6} \text{ C}$, $Q_C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $Q_D = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ töltésű, pontszerű, rögzített test van. Mekkora a potenciál a négyzet középpontjában? Mekkora a potenciál az AB oldal felezőpontjában?

XVII/18. Szabályos háromszög oldalai 2 méter hosszúak. A háromszög két csúcsában $2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, illetve $5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ töltésű, pontszerű test van. Mekkora a harmadik csúcsba helyezett töltés, ha a háromszög középpontjában az elektromos potenciál nulla?

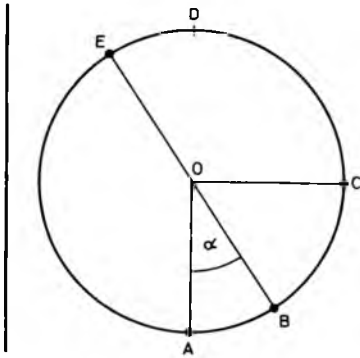
XVII/19. Rögzítünk egy pontszerű forrástöltést, $Q = 10^{-4} \text{ C}$. Az A pont $r_1 = 10 \text{ m}$, a B pont $r_2 = 16 \text{ m}$ távolságra van a forrástöltést hordozó testtől. Egy testet átviszünk az A pontból a B pontba. A test tömege $m = 10 \text{ g}$, a töltése $q = 10^{-6} \text{ C}$. A kezdősebesség nulla, és a B pontba 1 m/s sebességgel érkezik meg a test. Mekkora munkát végzett az elektromos tér? Mekkora munkát végeztünk a test mozgatása közben?

XVII/20. Egy $Q = 10^{-5} \text{ C}$ töltésű, pontszerű, rögzített forrástesttől 30 cm-re van egy $q = -10^{-6} \text{ C}$ töltésű, kisméretű test. A két töltés vonzóerőt fejt ki egymásra. Mekkora munkát kell végeznünk, hogy a q töltésű kis testet 55 cm-re távolítsuk?

XVII/21. Egy $Q = 10^{-5} \text{ C}$ töltésű, pontszerű, rögzített forrástesttől 40 cm távolságra van egy $q = -10^{-6} \text{ C}$ töltésű, $m = 10 \text{ g}$ tömegű kis próbatest. Mekkora itt a próbatest elektromos energiája? Ha a próbatestet elengedjük, akkor a Q töltésű forrástest vonzó hatására elindul. Mekkora sebességre gyorsul fel, ha a forrástöltést 15 cm-re megközelítette?

XVII/22. Egy $Q = -10^{-5} \text{ C}$ töltésű, pontszerű, rögzített test elektromos erőterében a töltéstől 20 cm távolságra van egy kis test, pozitív töltéssel ellátva. A test tömege 10 g. A két test között elektromos taszítóerő lép fel. A kis test nyugalomból indulva 1,2 méter úton 15 m/s sebességre gyorsul fel. Mekkora a részecske töltése?

XVII/23. Egy végtelen síklemez töltéssűrűsége: $\sigma = 10^{-5} \text{ C}/\text{m}^2$. A lemeztől 4 cm távolságra egy $q = 10^{-6} \text{ C}$ töltésű, $m = 50 \text{ g}$ tömegű testnek $v_1 = 1,6 \text{ m/s}$ nagyságú, a lemezre merőleges kezdősebességet adunk. A test kezdetben távolodik a lemeztől. Mekkora a sebessége a lemeztől 80 cm távolságra? Mennyi idő alatt tette meg a test ezt az utat?



1.61. ábra

XVII/24. Egy végtelen, függőleges síklemez töltéssűrűsége egyenletes, $\sigma = 10^{-5} \text{ C/m}^2$. A lemeztől $d = 1,2 \text{ m}$ távolságban az O ponthoz rögzítjük egy $l = 1 \text{ m}$ hosszú fonál egyik végét, a másik végéhez egy $m = 50 \text{ g}$ tömegű, $q = 10^{-6} \text{ C}$ töltésű részecskét erősítünk. Milyen szöget zár be a fonál a függőlegessel az egyensúlyi helyzetben? Az egyensúlyi helyzetet az 1.61. ábrán B-vel jelöltük. Tegyük fel, hogy a test körbemozog a körpályán, és az E pontban a kitérő $0,1 \text{ N!}$ Mekkora a test sebessége az A, B, C, D, E pontokban?

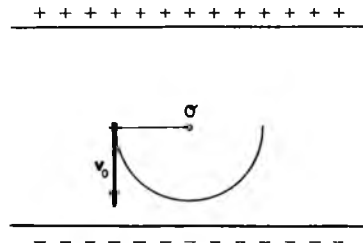
XVII/25. Egy végtelen, függőleges síklemez töltéssűrűsége állandó, $\sigma = 10^{-5} \text{ C/m}^2$. A lemeztől $d = 1,2 \text{ m}$ távolságban lévő O ponthoz rögzítjük egy $l = 1 \text{ m}$ hosszú fonál egyik végét. A fonál másik végéhez egy $q = 10^{-6} \text{ C}$ töltésű, $m = 50 \text{ g}$ tömegű részecskét erősítünk. A fonalat vízszintes helyzetbe hozzuk, ekkor a test a lemeztől $0,2 \text{ méter}$ távolságra van. A testnek lefelé mutató, $v_1 = 1,8 \text{ m/s}$ kezdősebességet adunk. Milyen sebességgel halad át a test a legmélyebb helyzetben? Mekkora a sebessége, amikor elérte az indulás magasságát? Mekkora a sebessége $s = 1,31 \text{ m}$ út megtétele után?

XVII/26. Két párhuzamos síklemez mindegyike 1 dm^2 felületű, a lemezek tá-

volsága 1 cm . A vízszintes helyzetű lemezek közötti vákuumban egy 10^{-4} mm sugarú, gömb alakú olajcsepp lebeg ($\rho_0 = 900 \text{ kg/m}^3$), töltése $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Mekkora feszültségre töltöttük fel a kondenzátort? Mennyi töltés van a kondenzátor lemezein?

XVII/27. Egy síkkondenzátor lemezei 1 m^2 felületűek, a lemezek távolsága 20 cm . A két lemez vízszintes helyzetű (1.62. ábrán). Közöttük, mindkettőtől 10 cm távolságra felfüggesztünk egy igen vékony, $l = 8 \text{ cm}$ hosszú fonálra egy $0,5 \text{ g}$ tömegű golyót. A golyónak 10^{-6} C töltést adunk. A kondenzátor lemezeire töltést viszünk. A felső lemez pozitív, az alsó negatív, a két lemez közötti potenciálkülönbség 1000 V . A kis ingát vízszintesig kitérítjük, és lefelé irányuló, $v_0 = 20 \text{ m/s}$ nagyságú sebességet adunk a kis testnek. Mekkora a test sebessége a legalsó helyzetben? Mekkora a sebesség, ha a felfüggesztési pont alatt van a test, és a fonál 30° -os szöget zár be a függőlegessel?

XVII/28. Egy síkkondenzátor lemezei 1 m^2 nagyságúak, a távolságuk 20 cm . A lemezek vízszintes helyzetűek. Közöttük, mindkettőtől 10 cm távolságra felfüggesztünk egy $l = 8 \text{ cm}$ hosszú, vékony fonalat, erre egy $0,5 \text{ g}$ tömegű, 10^{-6} C töltésű kis golyót erősítünk. A kondenzátorlemezre 1000 V feszültséget kapcsolunk, a felső lemeznek pozitív, az alsónak negatív töltést adunk. A fonál a kis golyóval kúpinga



1.62. ábra

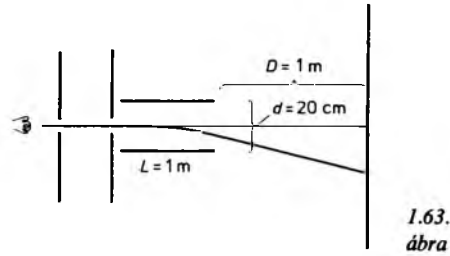
módjára kering. Mekkora a keringési sebesség, ha a fonál 30° -os szöget zár be a függőlegessel?

XVII/29. Vízszintes helyzetű kondenzátor lemezei 1 m^2 nagyságúak, a távolságuk 20 cm . A lemezek között felfüggesztünk egy 8 cm hosszú fonálingát. A felfüggesztési pont mindkét lemeztől 10 cm -re van. Az inga gömbje $0,5 \text{ g}$ tömegű és 10^{-6} C töltésű. A lemezekre 1000 V feszültséget kapcsolunk. Az alsó lemez pozitív, a felső negatív. A kis gömb vízszintes síkú körpályán kering 1 m/s sebességgel. Mekkora erő feszíti a fonalat? Mekkora a pálya sugara?

XVII/30. Vízszintes helyzetű síkkondenzátor lemezei 1 m^2 nagyságúak, a távolságuk 20 cm . A lemezek között felfüggesztünk egy 8 cm hosszú fonálingát. A felfüggesztési pont mindkét lemeztől 10 cm -re van. Az inga $0,5 \text{ g}$ tömegű és 10^{-6} C töltésű. A felső lemezre $-8,84 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, az alsó lemezre $8,84 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ töltést viszünk. Az inga vízszintes síkban 1 m/s sebességgel körbemozog. Milyen messze van a kör síkja a felső lemeztől? Mekkora a feszültség a két lemez között?

XVII/31. Vízszintes helyzetű síkkondenzátor lemezei 1 m^2 nagyságúak, négyzet alakúak. A lemezek távolsága 20 cm . A lemezekre 1000 V feszültséget kapcsolunk, a felső lemeznek pozitív töltést adunk. A lemezek közötti felezősíkban, a lemezek élével párhuzamosan egy $0,5 \text{ g}$ tömegű, 10^{-6} C töltésű részecske érkezik. Mekkora a részecske vízszintes sebessége, ha a lemezek közötti térrészen áthaladva az alsó lemez felé 8 cm -t mozdul el?

XVII/32. Vízszintes helyzetű síkkondenzátor négyzet alakú lemezei 1 m^2 nagyságúak. A lemezek távolsága 20 cm . A lemezek közötti felezősíkban egy $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ tömegű, $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ töltésű részecske



(elektron) mozog. A részecske a függőleges helyzetű lemezek terében, az erővonalakkal párhuzamosan, 1000 V feszültségen áthaladva felgyorsul. A vízszintes lemezpárt 80 V feszültségre töltjük fel, az alsó lemez pozitív töltésű (1.63. ábra). Mekkora szöggel téríti el az elektront a második kondenzátor tere? Hol csapódik be az 1 méter távolságban elhelyezett ernyőn?

XVII/33. Vízszintes helyzetű síkkondenzátor négyzet alakú lemezei 1 m^2 nagyságúak. A lemezek távolsága 20 cm . A kondenzátor terébe a lemez élével párhuzamosan, a lemezek közötti felezősíkban, $v = 1,8 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ kezdősebességgel egy $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ töltésű és $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ tömegű részecske érkezik. Mekkora a lemezek feszültsége és töltése, ha az alsó kondenzátorlemezbe vízszintesen mérve 80 cm út megtétele után csapódik be?

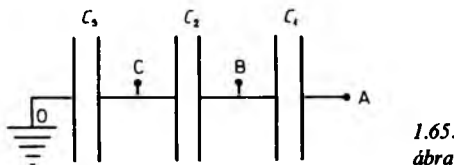
XVII/34. Mekkora feszültséget kell egy $3 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ kapacitású kondenzátorra kapcsolni, hogy 1 J energiát tartalmazzon?

XVII/35. Egy síkkondenzátor lemezei 1 dm^2 felületűek, a lemezek távolsága $0,1 \text{ cm}$. Az egyik lemezre 10^{-6} C , a másikra -10^{-6} C töltést viszünk. Mekkora a kondenzátor feszültsége? Mennyi energia halmozódott fel a lemezek közötti térben? Mennyi munkát kell végeznünk, hogy a lemezeket $0,6 \text{ cm}$ -re eltávolítsuk? Mekkora erő hat a lemezek között?

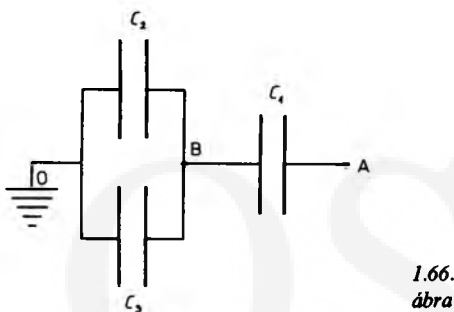
XVII/36. Két koncentrikus gömb sugara $0,1$ méter és $0,13$ méter. Határozzuk



1.64. ábra



1.65. ábra



1.66. ábra

meg a gömbkondenzátor kapacitását! Mekkora a feszültség a két gömb között, ha a belsejére 10^{-6} C, a külsejére -10^{-6} C töltést viszünk?

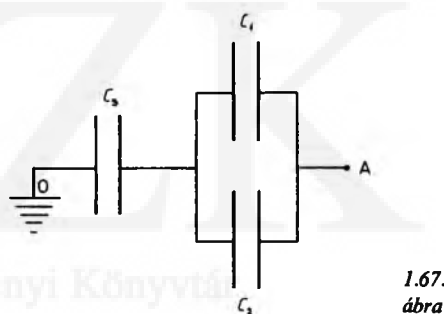
XVII/37. Két kondenzátort az 1.64. ábra szerint összekapcsolunk. A két kondenzátor kapacitása: $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$. Az A pontnál $Q = 10^{-7}$ C töltést viszünk a rendszerbe. Mekkora az egyes kondenzátorok töltése? Mekkora a feszültség az A pont és az O pont között? Mekkora a két kondenzátor energiája?

XVII/38. Három kondenzátort helyezünk el az 1.65. ábra szerint. A kapacitások: $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$. Az A pontnál $3 \mu\text{C}$, a B pontnál $2 \mu\text{C}$, a C pontnál $-1 \mu\text{C}$ töltést viszünk a rendszerbe. Mekkora lesz az egyes lemezek a

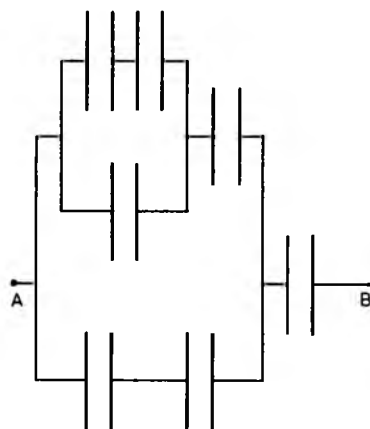
töltés? Mekkora lesz az A, B és C pontok feszültsége az O ponthoz képest?

XVII/39. Három kondenzátort kapcsolunk össze egy rendszerre az 1.66. ábra szerint. A kapacitások: $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$. Az A pontnál $4 \mu\text{C}$, a B pontnál $5 \mu\text{C}$ töltést viszünk a rendszerbe. Mekkora az egyes kondenzátorok töltése? Mennyi energia halmozódik fel a rendszerben? Határozzuk meg az O és az A pontok közötti feszültséget!

XVII/40. Három kondenzátort kapcsolunk össze egy rendszerre az 1.67. ábra szerint. A kapacitások: $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$. Az A pontnál $6 \mu\text{C}$ töltést viszünk a rendszerbe. Mekkora az



1.67. ábra



1.68. ábra

A és O pontok közötti feszültség? Mennyi töltés jelenik meg az egyes lemezeken? Mekkora kapacitású kondenzátorral helyettesíthető a három kondenzátorból álló rendszer?

XVII/41. Határozzuk meg az 1.68. ábrán látható rendszer eredő kapacitását! Mindegyik kondenzátor $1 \mu\text{F}$ kapacitású.

XVII/42. Az 1.69. ábrán látható rendszerben $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátorokból építjük fel. Határozzuk meg a rendszer eredő kapacitását az A és B pontok között!

XVII/43. Az 1.70. ábrán látható rendszerben mindegyik kondenzátor $1 \mu\text{F}$ kapacitású. Határozzuk meg a rendszer eredő kapacitását az A és B pontok között, valamint a C és D pontok között!

XVII/44. Az 1.71. ábrán látható négy kondenzátor egyaránt $1 \mu\text{F}$ kapacitású. Mekkora az eredő kapacitás az A és O, illetve a B és O pontok között?

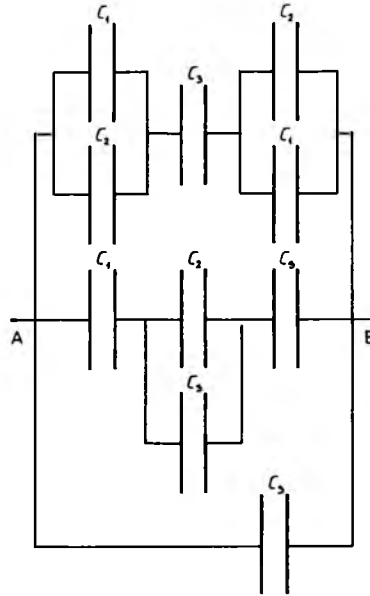
XVII/45. Két kondenzátor kapacitása: $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$. Az első kondenzátort 200 V feszültségre, a másodikat 100 V feszültségre töltjük fel. Ezután összekapcsoljuk a két kondenzátort úgy, hogy

- a pozitív lemezeket egymáshoz kötjük, és a negatívokat is egymáshoz kötjük;
- az ellentétes polaritású lemezeket kapcsoljuk össze.

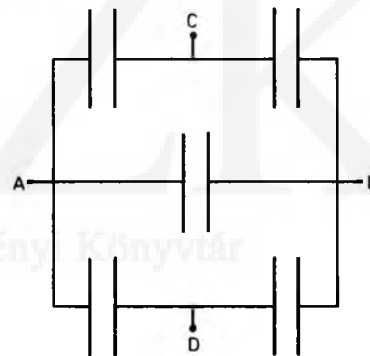
Határozzuk meg, hogy mekkora feszültség mérhető a kondenzátorokon ezután!

XVII/46. Egy $2 \mu\text{F}$ -os kondenzátort 200 V voltra töltünk fel, majd párhuzamosan kapcsoljuk egy töltetlen kondenzátorral. Ekkor a feszültség 50 V voltra csökken. Mekkora az eredetileg töltetlen kondenzátor kapacitása? Határozzuk meg a rendszer energiáját az összekapcsolás előtt és után!

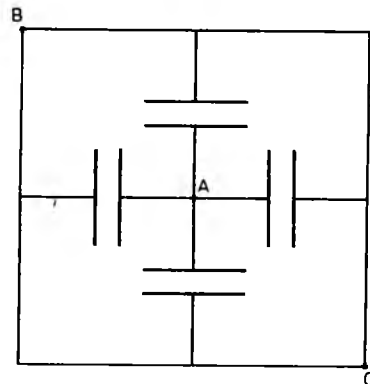
XVII/47. Egy $C_1 = 10 \mu\text{F}$ kapacitású



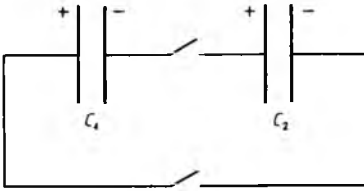
1.69. ábra



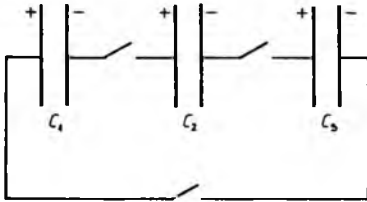
1.70. ábra



1.71. ábra



1.72.
ábra



1.73.
ábra

kondenzátort és egy $C_2 = 8 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátort 100 V , illetve 150 V feszültségre töltünk fel (1.72. ábra). A két kondenzátort összekapcsoljuk, úgy, hogy az ellentétes polaritású lemezeket egymáshoz kötjük. Mekkora a lemezek töltése összekapcsolás előtt és összekapcsolás után?

XVII/48. Az 1.73. ábrán látható három kondenzátor kapacitása: $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$, $C_3 = 5 \mu\text{F}$. Az első kondenzátort 150 V , a másodikat 100 V , a harmadikat 50 V feszültségre töltjük fel. A lemezeket egymáshoz kapcsoljuk, az ábrán látható kapcsolókkal. Az ellentétes polaritású lemezeket kötjük össze. Határozzuk meg a lemezek töltését összekapcsolás előtt és összekapcsolás után!

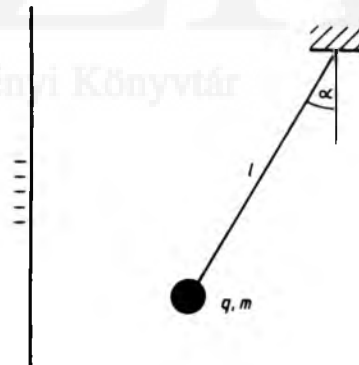
XVII/49. Egy igen nagy (végtelen) kiterjedésű, függőleges helyzetű, kezdetben semleges sík fémlemez egyik oldalán, a lemeztől 20 cm távolságra felfüggesztünk egy 20 cm hosszú fonalat. A fonalon 5 g tömegű, pozitív töltésű kis golyó függ (1.74. ábra). A fonál a lemez felé kitér, egyensúlyi helyzetben 30° -os szöget zár be

a függőlegessel. Határozzuk meg a kis golyó töltését!

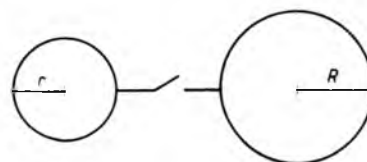
XVII/50. Két gömb sugara $r = 8 \text{ cm}$, $R = 10 \text{ cm}$. A kisebb gömböt 100 V feszültségre, a nagyobbat 120 V feszültségre töltjük fel. Mindkét töltés pozitív töltéssel rendelkezik. Mekkora lesz a gömbök feszültsége, ha összekapcsoljuk az 1.75. ábrán látható kapcsolóval? Mekkora a gömbök töltése összekapcsolás előtt és után?

XVII/51. Egy $r = 2 \text{ cm}$ sugarú és egy $R = 12 \text{ cm}$ sugarú gömböt vékony fémrudakkal összekötünk. A rendszerre $10 \mu\text{C}$ töltést viszünk. Mekkora a télerősség a két gömb felületén?

XVII/52. Két higanycsepp egyaránt $r = 1 \text{ mm}$ sugarú. Mindkettő 10 V potenciálú (a végtelenhez viszonyítva). Mekkora lesz a feszültség annak a higanycseppnek a felszínén, amit a két kis csepp egyesítésével kapunk?



1.74.
ábra



1.75.
ábra

1.2. Az elektromos áram

1.2.1. Ohm törvénye

Ebben a pontban először az elektromos töltés áramlását jellemző alapvető fizikai mennyiségeket értelmezzük, ezután az elektromos áram és a már ismert térerősség kapcsolatát vizsgáljuk meg.

Induljunk ki abból, hogy adott egy felület. Tegyük fel, hogy a felület irányítása nem okoz problémát, egyértelműen eldönthető, hogy a felületnek melyik a pozitív és melyik a negatív oldala.

Gondoljuk el, hogy elektromos töltés áramlik a felület egyik oldaláról a másik oldalára (1.76. ábra). Jelöljük $Q(t)$ -vel a t időpontig átáramlott töltés mennyiségét. Az időegység alatt a felületen átáramlott (pozitív) töltést *áramerősségnek* nevezzük, és I -vel jelöljük:

$$I := \dot{Q}. \quad (1)$$

Az áramerősség jelentése: a $Q(t)$ függvény grafikonjához a t_0 időpontban húzott érintő meredeksége az áramerősség értéke a t_0 időpontban (1.77. ábra).

Másrészt tegyük fel, hogy ismert az áramerősség-idő függvény. Ekkor a t_1 és t_2 időpontok között átáramlott töltés az 1.77. ábrán látható görbe alatti területtel egyenlő.

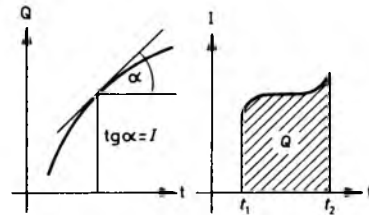
Ha $I =$ állandó, akkor *egyenáramról* beszélünk. Egyenáram esetén: ha a t időtartam alatt átáramlott töltés mennyisége Q , akkor az (1) alapján az áramerősség:

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (2)$$

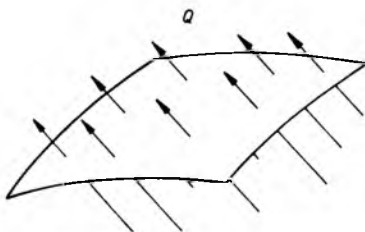
Mértékegysége (SI mértékrendszerben) a coulomb/szekundum (C/s), amelyet *ampernek* nevezünk, és A-val jelölünk.

Az áramerősség mellett másik — alapvető szerepet játszó — mennyiség az *áramsűrűség*: nagysága a felületegységen időegység alatt átfolyt töltés mennyiségét jelenti, iránya megegyezik a töltés áramlásának az irányával. Az áramsűrűség tehát vektormennyiség: jele \mathbf{j} , *mértékegysége* A/m². Az áramsűrűség pontról pontra jellemzi a vezetőben folyó áramot.

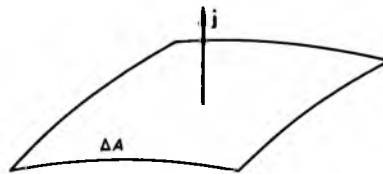
Ha a vezető egy pontjában az áramsűrűség \mathbf{j} , akkor a \mathbf{j} -re merőleges, ΔA nagyságú felületen $\mathbf{j}\Delta A$ erősségű áram folyik át (1.78. ábra).



1.77. ábra



1.76. ábra



1.78. ábra

Tekintsünk most is egy A felületet, és osszuk fel ezt ΔA nagyságú felületelemekre (1.79. ábra). Szorozzuk meg minden egyes ΔA felületelemet az áramsűrűség-vektor felületre merőleges összetevőjével:

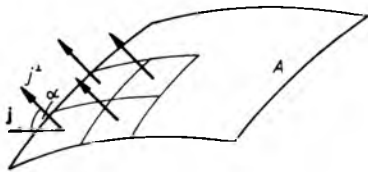
$$j^{\perp} \Delta A = j \Delta A \cos \alpha,$$

ahol α a felületre merőleges vektor és az áramsűrűség-vektor szöge. Összegezzük most ezeket a szorzatokat. Nyilvánvaló, hogy ez az összeg a felületen időegység alatt átáramló töltés mennyiségét jelenti, tehát az A felületen átfolyó áram erőssége:

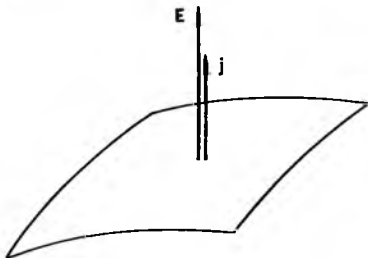
$$I = \sum j^{\perp} \Delta A. \quad (3)$$

A (3) összefüggésből látható, hogy — formálisan — az áramerősség és az áramsűrűség olyan kapcsolatban van egymással, mint az elektromos fluxus és az elektromos térerősség. A párhuzam megvonása azért is helyénvaló, mert a fluxus és az áramerősség egyaránt skalár, a térerősség és az áramsűrűség pedig vektor.

A (3) egyenlőségre támaszkodva azt is mondhatjuk, hogy az áramsűrűség fluxusa az áramerősség. (Gondoljunk vissza a fo-



1.79.
ábra



1.80.
ábra

lyadékok áramlására: ott is ilyen kapcsolat volt az áramlást jellemző mennyiségek között.)

Elektromos vezetőkben igen egyszerű összefüggés van az áramsűrűség vektora és a térerősség között (1.80. ábra). A vezetők minden pontjában arányos egymással az az elektromos térerősség és az áramsűrűség:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (4)$$

A töltés mozgásáért az elektromos térerősség a felelős. (Zárjuk ki most a keresztrefektusok lehetőségét.) A (4) egyenlőség fizikai jelentése: *a vezető pontjaiban az elektromos tér töltésmozgást indukál, a létrejött áramsűrűség arányos a mozgást létrehozó elektromos térerősséggel. Ezt az állítást Ohm törvényének nevezzük.*^(*)

Az Ohm-törvényben szereplő σ arányosági tényezőt (fajlagos) *vezetőképességnek*, a reciprokát *fajlagos ellenállásnak* nevezzük:

$$\rho := \frac{1}{\sigma}.$$

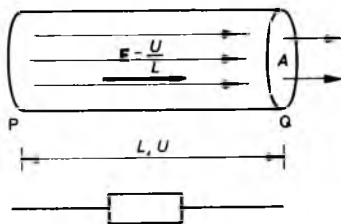
(A σ és a ρ általában helytől függő mennyiség.) Az Ohm-törvényt kifejező egyenlőség mindkét oldalát szorozzuk meg ΔA -val, a \mathbf{j} -re (és \mathbf{E} -re) merőleges felületelemmel:

$$\mathbf{j} \Delta A = \sigma \mathbf{E} \Delta A.$$

A bal oldali szorzatok összege a felületen átfolyó áram erőssége, a jobb oldali szorzatok összege pedig — ha a vezetőképesség kiemelhető — az elektromos fluxus:

$$I = \sigma \Psi. \quad (5)$$

^(*) Ez nem természeti törvény, csak jó közelítéssel érvényes szabály. Nem érvényes például gyorsan változó elektromos erőtér esetén.



1.81. ábra

Az (5) egyenlőséget az Ohm-féle törvény második megfogalmazásának tekintjük. Kevésbé általános, mint a (4) szerinti megfogalmazás, a $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ összefüggés akkor is érvényben van, ha a vezetőképesség függ a helytől.

Tekintsünk most egy L hosszúságú, A keresztmetszetű, σ vezetőképességű fémhengert, amelynek két végpontja között elektromos potenciálkülönbség mérhető (1.81. ábra). Tegyük fel, hogy a huzal P vége U -val magasabb potenciálon van, mint a Q vége. Ekkor a vezetőkben $E = U/L$ az elektromos térerősség nagysága, feltéve, hogy a vezetőkben a térerősség homogén. Az elektromos térerősség hatására j áramsűrűség indul meg a P pontból a Q pontba:

$$j = \sigma \frac{U}{L}. \quad (6)$$

A (3) összefüggést felhasználva az áramerősség vezetőkben:

$$I = jA. \quad (7)$$

A (6) és (7) alapján

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{U}{L},$$

vagyis σ -ról a ρ fajlagos ellenállásra áttérve:

$$U = \rho \frac{L}{A} I.$$

Itt az áramerősség előtt álló arányossági tényezőt *ellenállásnak* nevezzük, és R -rel

jelöljük:

$$R := \rho \frac{L}{A}. \quad (8)$$

Az ellenállás bevezetésével az *Ohm-törvény* az elektromosság elméletének gyakorlati alkalmazásaiban fontos szerepet játszó *vezetők*re az

$$U = RI \quad (9)$$

formát ölti.

Ennek alapján az *ellenállás mértékegysége* a volt/amper (V/A), amit *ohm*nak nevezünk, és Ω -val vagy ohm-mal jelölünk. Áramkörü vázlatokon az ellenállást legtöbbször egy kis téglalappal ábrázoljuk. A (8) alapján nyilvánvaló, hogy a vezetőhuzalok ellenállása az anyagi minőségre jellemző arányossági tényezőkön kívül a vezető hosszától és keresztmetszetétől függ. Az ugyanolyan anyagból készült, azonos keresztmetszetű vezetők közül a hosszabbak ellenállása nagyobb, ugyanakkor az azonos hosszúságú vezetők közül a vékonyabbak jelentenek a töltés áramlásával szemben nagyobb ellenállást.

Egy vezető ellenállása arányos a vezető hosszával, és fordítva arányos a vezető keresztmetszetével. Ezért ha egymáshoz kapcsolunk két azonos anyagi minőségű, azonos keresztmetszetű vezetőt, akkor az így kapott, sorbakapcsolt rendszer ellenállása a részek ellenállásának az összege, az ellenállás a hosszal együtt összeadódik:

$$\rho \frac{L_1 + L_2}{A} = \rho \frac{L_1}{A} + \rho \frac{L_2}{A},$$

vagyis

$$R = R_1 + R_2. \quad (10)$$

Helyezzünk most egymás mellé két azonos anyagú, azonos hosszúságú vezeték szakaszt. Az egyik keresztmetszete legyen

A_1 , a másiké A_2 . Az összes keresztmetszet: $A = A_1 + A_2$. Osszuk most ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát ϱ -val és L -lel:

$$\frac{A}{\varrho L} = \frac{A_1}{\varrho L} + \frac{A_2}{\varrho L}.$$

Itt a bal oldalon az eredő ellenállás reciprokája, a jobb oldalon az részellenállások reciprokának az összege áll:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (11)$$

A sorbakapcsolt ellenállások összeadódanak, a párhuzamosan kapcsolt ellenállások reciprokainak az összege az eredő reciprokával egyenlő. Ez a szabály általánosan is igaz, akkor is, ha a vezetődarabok különböző anyagból készültek, vagy különböző hosszúak.

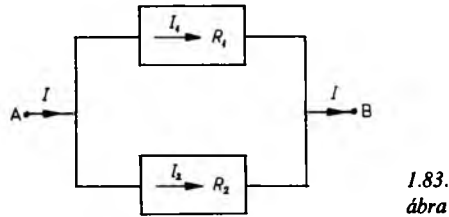
Kapcsoljunk össze az 1.82. ábrán látható módon két ellenállást, az egyik R_1 , a másik R_2 . Ha az A és a B pontok közé U feszültséget kapcsolunk, akkor a rendszeren I áram folyik át. Fontos, hogy az az áram, amely az R_1 ellenálláson átfolyik, az átfolyik az R_2 ellenálláson is. Így — a feszültség út szerinti additivitása miatt —

$$U = IR_1 + IR_2.$$

Az áramerősség azonos, kiemelhető. Osszuk el mindkét oldalt I -vel, ekkor

$$\frac{U}{I} = R_1 + R_2.$$

Az U/I arányt a két ellenállásból álló rendszer eredő ellenállásának nevezzük. Így a (10) általánosítását kapjuk.



Kapcsoljunk most párhuzamosan két ellenállást (1.83. ábra): R_1 -et és R_2 -t. Tegyük fel, hogy az egyikén I_1 , a másikon I_2 áram folyik át. A csomópont előtt és után az áram erőssége I , ez megegyezik az I_1 és I_2 összegével, a töltésmegmaradás miatt. Tehát

$$I = I_1 + I_2.$$

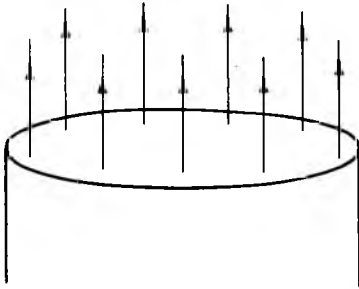
Másrészt a két ellenálláson azonos a feszültségesés, hiszen az független az úttól. Ha elosztjuk most az utóbbi egyenletet a közös feszültséggel, akkor a (11) általánosítását kapjuk.

[Megjegyezzük, hogy a vezeték ellenállása több tényezőtől is függhet. A legjelentősebb a hőmérséklettől való függés. A vezetők ellenállása a hőmérséklet növekedésével nő; a fajlagos ellenállás a

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha \Delta t)$$

összefüggés szerint függ a hőmérséklettől. (Ez nem természettörvény, csak jó közelítés!). Az együttható a táblázatokból kikereshető, természetesen nem tévesztendő össze a hőtágulási együtthatóval. Ezt az együtthatót legtöbbször 20°C -hoz adjuk meg, ekkor ϱ_0 a 20°C -hoz tartozó fajlagos ellenállás, és $\Delta t = t - 20^\circ\text{C}$.]

Ohm törvényének különböző megfogalmazásait tanultuk ebben a pontban. A (4) és (5) egyenlőségek inkább elméleti jelentőségűek, a (9) egyenlőség az Ohm-törvény leggyakrabban használt formája. Az első



1.84.
ábra

két összefüggésnek is nagy szerepe van az olyan problémák tárgyalásában, mint például biológiai membránon átáramló áram leírása.

Az elektrosztatikáról szóló pontokban láttuk, hogy elektrosztatikus térben a vezető belsejében nulla a térerősség, és a vezető teljes egészében ekvipotenciális felület. Ez természetesen elektromosan egyensúlyba került vezetőre áll. Ha a vezetőben áram folyik, akkor a vezető keresztmetszetében az erővonal-sűrűség egyenletesnek tekinthető (1.84. ábra); a (6) egyenlőség azt jelenti, hogy az áramsűrűség is egyenletes a vezető keresztmetszetében, így a vezetőben az elektromos térerősség is állandó (homogén az elektromos tér).

1.2.2. Joule törvénye

Tegyük fel, hogy egy L hosszúságú, A keresztmetszetű, ρ fajlagos ellenállású vezetőhuzalban az elektromos térerősség állandó, egyirányú a vezető tengelyével (1.85. ábra). Ha q pozitív töltést az erővonalakkal egyirányban végigmozgatunk a vezetőben, akkor az elektromos tér EqL munkát végez. Jelöljük a vezetőben kialakult áram erősségét I -vel, ekkor t idő alatt $Q = It$ mennyiségű töltés áramlik át a vezető bármely, az erővonalakra merőleges ke-

resztmetszetén. Ezen a Q mennyiségű töltésen az elektromos tér

$$W = EqL = EItL \quad (1)$$

munkát végez. Időegység alatt az elektromos tér

$$P = ELI = UI \quad (2)$$

munkát végez az áramló töltésen. Ez az elektromos tér teljesítménye. (Itt felhasználtuk azt a nyilvánvaló állítást, hogy $U = EL$.)

Vegyük figyelembe azonban, hogy Ohm törvénye alapján $U = IR$, ezért

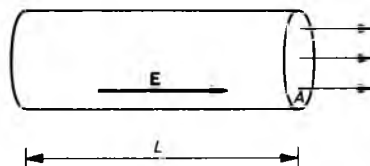
$$P = UI = I^2 R. \quad (3)$$

Az R ellenállású vezetőkön időegység alatt leadott energia arányos az áramerősség négyzetével és a vezeték ellenállásával. Ez *Joule törvénye*.

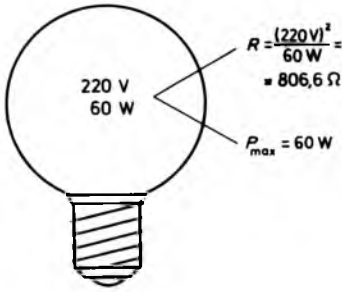
Joule törvényét más formában is kifejezhetjük. A (2) összefüggésben most az I helyére helyettesítsük — Ohm törvénye alapján —, hogy $I = U/R$. Ekkor

$$P = \frac{U^2}{R}. \quad (4)$$

A vezetőknek átadott elektromos energia a vezető belső energiáját növeli, a hőmérséklete nő, természetesen nem korlátlanul, hiszen a környezetével termikus kontaktusban lévő vezető hőhatás formájában leadja azt az energiát, amelyet az elektromos tértől átvett. A vezető és környezete között egyensúly alakul ki: az elektromos tértől felvett energiát átadja a környezetének.



1.85.
ábra



1.86.
ábra

Nem kapcsolhatunk azonban akármi-lyen nagy feszültséget a vezetőre. A vezető-
től függően túlságosan nagy elektromos
teljesítmény esetén a vezető károsodik, az
izzólámpa kiég, a melegítő kiolvad. Ponton-
osan azért, mert nem alakul ki egyensúly.
Nem tudja elég gyorsan elvezetni a belső
energiát a vezető környezete, így a hőmér-
séklet túlságosan megnő. Az elektromos
energiát felvevő berendezésekre, eszközök-
re (más néven fogyasztókra) ráírják, hogy
mekkora elektromos teljesítményt közöl-
hetünk velük, anélkül, hogy károsodná-
nak. Például egy izzólámpán — 1.86. ábra
— ezt olvassuk: 220 V, 60 W. Ez két dolgot
jelent. Egyrészt azt jelenti, hogy az ellenál-
lása — a (4) alapján —

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{60} = 806,6 \, \Omega,$$

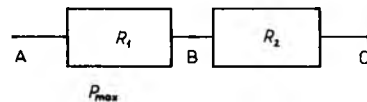
vagyis a két adat mögé elbújtatták a fo-
gyasztóra igazán jellemző adatot, az ellen-
állást; másrészt ez az adatszár azt is jelzi,
hogy a fogyasztó maximálisan 60 W elekt-
romos teljesítményt vehet fel, és ez akkor
következik be, ha a fogyasztó két vége
között 220 V az elektromos feszültség.
(A gyakorlatban azonban nem ilyen éles
a helyzet: a fogyasztók néhány tíz száza-
lékkal nagyobb teljesítménytől sem men-
nek tönkre, mint a névleges teljesítmény.)

Te gyük fel, hogy adott két ellenállás.
Az egyik $R_1 = 10\,000 \, \Omega$ ellenállású, a névle-
ges teljesítménye $P_{1\max} = 4 \, \text{W}$, a másik
 $R_2 = 40\,000 \, \Omega$ ellenállású, a névleges tel-
jesítmény ezen az ellenálláson is $P_{2\max} = 4 \, \text{W}$.
Az első ellenállásra $U_1 = \sqrt{P_1 R_1} = 200 \, \text{V}$
feszültség kapcsolható, a másodikra $U_2 =$
 $= \sqrt{P_2 R_2} = 400 \, \text{V}$.

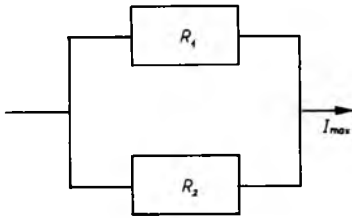
Kapcsoljuk most sorba a két ellenállást
(1.87. ábra). Az ábrán látható A és C
pontok közé azonban nem kapcsolható
 $U_1 + U_2 = 600 \, \text{V}$, mert az A és B pontok
között nem 400 V feszültség jelenik meg.
(Kicsit hasonló a helyzet: egy ember 100 kg
terhet képes felemelni, a másik csak 40
kg-ot, ketten azonban nem tudnak fel-
emelni 140 kg-ot, ha egy rúd két végén
emelik, és a teher a rúd közepén függ, mert
az egyikre is és a másikra is 70 kg jut.)
Valóban, ha 600 V feszültséget kapcsol-
nánk a sorba kötött ellenállásra, akkor a
két ellenálláson átfolyó áram

$$\frac{600 \, \text{V}}{50\,000 \, \Omega} = 0,012 \, \text{A}$$

lenne. Ekkor az A és a B pontok között
 $U_{AB} = 0,012 \cdot 10\,000 = 120 \, \text{V}$ feszültséget
mérnénk. Ugyanakkor a B és C pontok
között $U_{BC} = 480 \, \text{V}$ feszültség jelenne meg.
Az első ellenálláson 1,44 W, a másodikon
5,76 W teljesítményt adna le az elektromos
tér. A második ellenállás tehát valószínű-
leg hamarosan tönkremenne. A sorba kap-
csolt ellenállásokra kapcsolható legna-
gyobb feszültséget úgy határozzuk meg,



1.87.
ábra



1.88. ábra

hogy kiszámítjuk — (3) alapján — az egyes ellenállásokon átfolyó maximális áramot: azt az áramerősséget, amelyhez a névleges (maximálisan megengedettnek tekintett) teljesítmény tartozik. Az első ellenálláson 0,02 A, a másodikon 0,01 A folyhat. A sorba kötött két ellenálláson így a kisebbik áramerősségnek megfelelő töltés áramolhat át időegység alatt. Ekkor az első ellenálláson 1 W, a másodikon 4 W teljesítményt ad le az elektromos erőter. A két ellenállásra — az A és a C pontok közé — 0,01 (40 000 + 10 000) = 500 V feszültség kapcsolható. Általában tehát két, sorba kötött ellenállásra kapcsolható maximális feszültség a minimális áram és a két ellenállás összegének a szorzata:

$$U_{\max} = \min \{I_1, I_2\} \cdot (R_1 + R_2).$$

Hasonló feladat a következő. Adott két ellenállás, amelyeknek ismerjük a maximális (névleges) teljesítményét is. Ha azt keressük, hogy a két ellenállás párhuzamos kapcsolásával keletkező rendszeren mekkora áram folyhat át, akkor a következőképpen jutunk megoldáshoz (1.88 ábra). Kiszámítjuk az egyes ellenállásokra kapcsolható feszültséget a (4) alapján, majd e két feszültség közül a kisebbet elosztjuk a két ellenállást helyettesítő eredő ellenállással:

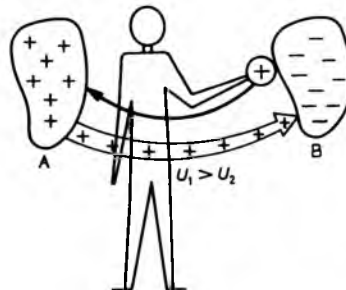
$$I_{\max} = \frac{\min \{U_1, U_2\}}{R_{\text{eredő}}}$$

1.2.3. Áramforrások

Az általánosan érvényes kiegyenlítődési tendencia az elektromos jelenségekre alkalmazva azt jelenti, hogy az elektromos töltés a magasabb potenciálú hely felől az alacsonyabb potenciálú hely felé áramlik. Az áramlás iránya olyan, hogy a feszültséget kiegyenlíteni törekszik, az áramlást létrehozó feszültség csökken, és végül — rövid idő alatt — nullára csökken.

Az elektromos áramot csak valamilyen külső hatással — kémiai, termodinamikai vagy mechanikai folyamatokkal — lehet fenntartani. Az 1.89. ábrán látható A test potenciálja magasabb, mint a B testé, ezért ha fémvezetékkel összekötjük a két testet, elektromos töltés áramlik az A testből a B testbe. Egészen addig, amíg a két test az összekötő fémhuzallal együtt azonos potenciálú lesz. Az áramlást — játékos ötlettel — úgy lehetne fenntartani, hogy valakit odaállítunk a két test mellé, aki a megérkező töltést átemeli a B testről az A testre. Nyilván munkát kell végeznie a töltésen, hiszen a pozitív töltést az alacsonyabb potenciálú testről a magasabb potenciálú testre — az erővonalakkal ellentétes irányban mozgatva — kell átvinni.

A mindennapi gyakorlatban legtöbbször kémiai folyamatokat használunk fel arra, hogy a B testről az elektromos töltést



1.89. ábra

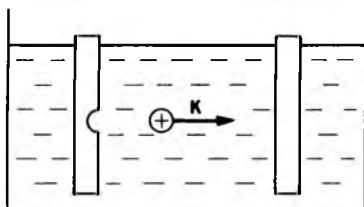
— az elektromos erőter irányával ellentétesen — az A testre átvigye. Ilyen módon az elektromos áram mindaddig folyik, amíg a kémiai folyamat fenntartható.

Tekintsük át a folyamatot vázlatosan. A problémát igen-igen leegyszerűsítve fogjuk megvizsgálni, csak azt az oldalát domborítjuk ki az áramtermelő folyamatnak, amely az elektromos áramforrások — elektromos szempontú — áttekintéséhez szükségesek. Kémiai állításaink kiegészítésre és pontosításra szorulnának, azonban ragaszkodni szeretnénk gondolatmenetünk fő vonalához; itt nem alkalmas a hely arra, hogy fizikai-kémiai elveket tisztázzunk és értelmezzünk.

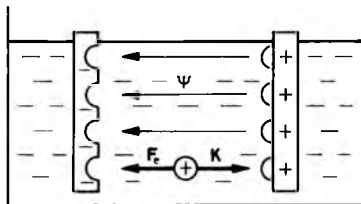
Gondoljuk el tehát, hogy kénsav vizes oldatába réz- és cinklemez merül. A két lemez úgy helyezkedik el egymás mellett, egymással párhuzamosan, mint egy kondenzátor két lemeze. Ezért a két lemez között kialakuló potenciálkülönbség a lemezek felhalmozódó töltéssel arányos: $Q = CU$.

A két lemez kezdetben semleges, közöttük csak a kémiai erő működik: anyagáramlás indul meg az egyik lemez felől a másik lemez felé. A részecskék mozgását a folyadékban működő K kémiai erő okozza (1.90. ábra).

Fontos körülmény, hogy az áramló anyag részecskéi nem semlegesek. Elektromos töltéssel rendelkeznek. A kémiai eredetű erő, miközben az anyagot átszállítja az egyik lemeztől a másik lemezre, eköz-



1.90.
ábra



1.91.
ábra

ben elektromos töltést is szállít. A termodinamikában tanult keresztteffektus egy különösen fontos és érdekes esetéről van szó: a töltés áramlásának az oka a kémiai erőben, a kémiai potenciál kiegyenlítődési tendenciájában keresendő. A termodinamikai fejezetben láttuk, hogy — az ottani példára hivatkozva — ha két ország között tehenek és emberek is áramolhatnak, akkor a tehenek áramlásának az oka nem feltétlen a jobb legelő iránti vonzalmuk. Lehet, hogy a tehenek azért áramolnak egyik helyről a másikra, mert az embereket a jobb életszínvonal, az élet jobb minősége vonzza, az emberek pedig elhajtják a teheneket is. Esetleg a rosszabb legelőjű helyre.

Az elektromos töltés áramlásának oka a K kémiai erő. Kezdetben semleges lemezek között töltésáramlás indul meg, majd úgy folytatódik, hogy a lemezek felhalmozódik a töltés. A felhalmozódó töltés a két lemez között a kémiai erővel ellentétes irányú elektromos erőteret hoz létre. Előbb utóbb bekövetkezik az, hogy a két lemez között a folyadékban az elektromos állapotú részecske (ion) nyugalomban lesz: az egyik lemez felé a kémiai erő húzza, a másik lemez felé az elektromos erő (1.91. ábra). A töltött részecske nyugalomban van. Ez egy „tétova töltés”, se jobbra, se balra nem mozog.

A folyamatot úgy lehet fenntartani, hogy a jobb oldali lemezre megérkező töltést „visszalopjuk” a bal oldali lemezre. Persze a folyadékon kívül, mert a folya-

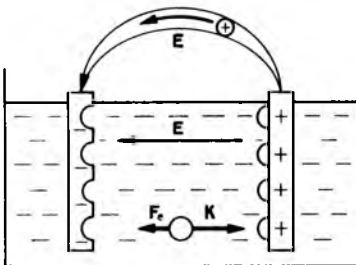
dékban meg kellene küzdeni a kémiai erővel is. A lemezeken kívül az elektromos erő segít is visszavinni a töltést.

Célszerű a két lemezt a folyadék felett elektromos vezetővel összekötni. Ebben a vezetőben kialakul a pozitív lemez felől a negatív lemez felé mutató elektromos tér. A pozitív lemezen felhalmozódó elektromos töltés taszító, valamint a negatív lemez vonzó hatása eredményeként a töltés visszaáramolhat a negatív lemezre: a vezetőben áram folyik (1.92. ábra).

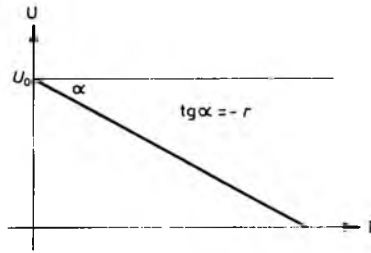
Könnyen látható, hogy minél több töltés visszafolyik, annál kevesebb marad, így a két lemez között kialakuló elektromos tér erőssége is kisebb lesz. Kisebbsz lesz a két lemez között kialakuló feszültség is. Hogy hogyan függ a visszafolyó töltés mennyiségétől a két lemez közötti feszültség? Az a tapasztalatunk, hogy a két lemez — a két elektróda — között kialakuló feszültség az áramerősségtől úgy függ, hogy a függvénykapcsolatot egyenesen ábrázolhatjuk. Az 1.93. ábrán látható egyenes meredeksége negatív, a tengelymetszete pozitív. Jelöljük a meredekséget $-r$ -rel (így tehát $r > 0$) és a tengelymetszetet U_0 -al. Az egymáshoz tartozó I és U párok kapcsolatát tehát az

$$U = -rI + U_0 \quad (1)$$

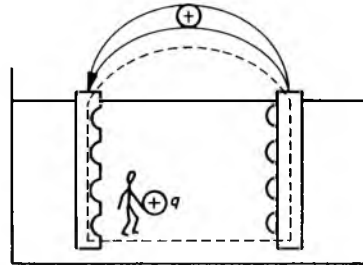
összefüggés fejezi ki. Ezt a kapcsolatot a kémiai áramforrások (a telepek) törvényének fogjuk nevezni.



1.92. ábra



1.93. ábra



1.94. ábra

Gondoljuk meg most, hogy mitől függ a két lemezt összekötő huzalban folyó áram erőssége. Nyilvánvaló, hogy a vezeték ellenállásától. A vezeték két vége között

$$U_R = IR \quad (2)$$

feszültség mérhető Ohm törvénye alapján.

Még egy észrevételünk van a jelenségkörrel kapcsolatban. Érvényben van^(*) az elektrosztatika második alaptörvénye: zárt görbén az elektromos tér (!) által egy q töltésen végzett munka nulla. Gondoljuk el tehát, hogy a bal oldali lemeztől a jobb oldali lemezhez átviszünk egy q — mondjuk pozitív — töltésű részecskét (1.94. ábra). Az elektromos tér munkája ezen a szakaszon negatív, hiszen az elektromos tér erővonalai a folyadékon belül jobbról

(*) Az elektrosztatika második alaptétele azért érvényes nem sztatikus esetre, mert az elektromos tér erőssége időben állandó.

balra mutatnak. Itt tehát a tér $-Uq$ munkát végez, ahol U az (1)-beli feszültség a két lemez között. A jobb oldali lemezre megérkezve most a vezetéken mozgatjuk a töltést a negatív lemezhez. Itt a tér által végzett munka pozitív: $U_R q$. Zárt görbén az összes munka nulla:

$$-Uq + U_R q = 0,$$

és innen

$$-U + U_R = 0. \quad (3)$$

A kémiai elemek megértéséhez három — az (1), (2), (3)-ban megfogalmazott — egymástól független alapelv szükséges: a kémiai áramforrások törvénye, az Ohm-törvény és az elektrosztatika második alaptörvénye. Helyettesítsük be (3)-ba (1)-ből és (2)-ből U -t és U_R -t:

$$rI - U_0 + IR = 0.$$

Rendezve ezt az egyenlőséget, az

$$U_0 = I(r + R) \quad (4)$$

állításához jutunk, amelyet „teljes áramkörre” vonatkozó *Ohm-törvénynek* nevezünk. Az elnevezést az indokolja, hogy a (4) egyenlőség és a (2) állítás formailag hasonló.

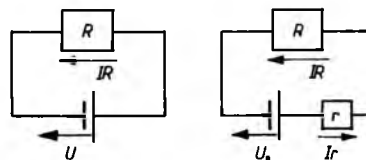
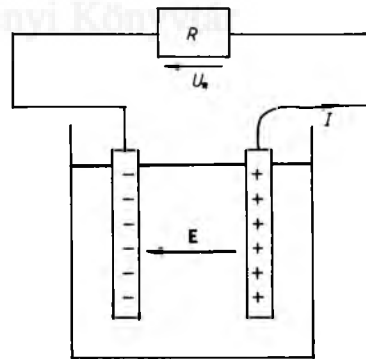
Néhány szót szóljunk az elnevezésekről. A két lemez között kialakuló [(1)-beli] U feszültséget *kapocsfeszültségnek* nevezük. A kapocsfeszültség elsősorban a kémiai áramforráson átfolyó áramtól függ. Az (1) függvény grafikonjának a tengelymetszetét — U_0 -t — *belső feszültségnek* nevezük. Néha az *elektromos erő* vagy az *üresjárási feszültség* elnevezés is használatos. Az első tulajdonképpen nem helyes, az elektromotoros erő ugyanis a kémiai erőt méri: azt a kémiai potenciálkülönbséget, amely kompenzálja az egyensúlyban lévő telepen ható elektromos potenciálkülönbséget. A

második elnevezés azt fejezi ki, hogy a kémiai áramforrás sarkai között valóban U_0 a kapocsfeszültség, ha a telepen nem folyik áram: az $I=0$ helyettesítés az (1) összefüggésben az $U=U_0$ egyenlőséghez vezet.

A (4)-ben a két lemezt összekötő huzal ellenállásának és az (1)-beli függvény meredeksége (-1) -szeresének az összege szerepel. Ez indokolja, hogy az r pozitív mennyiséget *belső ellenállásnak* nevezük. A mértékegysége természetesen ennek is volt/amper = ohm.

Az Ir feszültségjellegű mennyiséget gyakran *belső feszültségesésnek* nevezik.

A kémiai áramforrást egyszerűen egy rövid és egy hosszú párhuzamos vonallal ábrázoljuk. A telepre általában rárajzoljuk a kapocsfeszültséget ábrázoló nyílat. Iránya az elektromos térerősséggel egyirányú. A nyíl tehát a feszültségsökkenés irányát jelzi. A telepen kívül is a pozitív lemezről mutat az elektromos térerősség a negatív lemezre, most azonban a vezetékben. Az



1.95. ábra

áramkörök legegyszerűbb modelljében két feszültség szerepel: az (1)-beli U és a (2)-beli U_R . A (3) szerint most az a kettő egyenlő (1.95. ábra).

Igen gyakran az ábrázolást úgy oldjuk meg, hogy a telepet jelölő két vonalat és a lemezek közötti feszültséget ábrázoló nyilacsokát kiegészítjük. A belső ellenállást a telep mellé rajzoljuk, és a kapocsfeszültség helyett az egymással ellentétes irányú U_0 belső feszültséget és a belső ellenálláson eső Ir feszültségesezt tüntetjük fel. Ennek az ábrázolásnak az az előnye, hogy az áramköri elem szimbóluma mellett feltüntetjük az áramforrásra jellemző — a működéstől független — U_0 mennyiséget.

Fontos, hogy még egyszer átgondoljuk: a kémiai áramforrás belsejében a negatív lemez felől a pozitív lemez felé mutató kémiai erő hat. Ennek a nagyságát nem nagyon befolyásolják a körülmények — ha a hőmérséklet állandó, akkor viszonylag hosszú ideig állandónak tekinthető. A kémiai erő töltésszétválasztást eredményez. Az egyik elektróda pozitív, a másik negatív töltésű lesz. Az elektromos töltéssel rendelkező elektródák között elektromos térerősség alakul ki, amely egyaránt hat a telep belsejében is, és a telepen kívül is. A telepen belül két ellentétes irányú erő hat, a kémiai erő és az elektromos erő. A telepen kívül azonban csak az elektromos erő működik. Ezért van az, hogy az elektromos áram a telepen belül a negatív elektródáról folyik a pozitív elektróda felé, kívül pedig a pozitív elektróda felől a negatív irányába. Az elektromos töltés áramlását a telepen belül a kémiai erő okozza, és az elektromos erő ellenére is áttemeli a negatív lemezről a pozitívra. Kívül ezután az áram az Ohm-törvénynek megfelelően a pozitív elektródáról a negatív elektróda felé folyik.

Világítsuk meg ezeket az eredményeket néhány egyszerű konkrét probléma megoldásával.

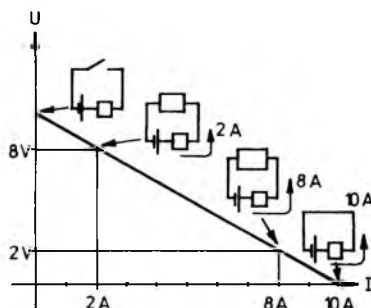
¶ Tegyük fel először, hogy egy telepen 2 A erősségű áram esetén a kapocsfeszültség 8 V, míg 8 A erősségű áram esetén a telep sarkai között 2 V feszültség alakul ki. Ezek az adatok alkalmasak arra, hogy az ismeretlen belső feszültséget és a belső ellenállást meghatározzuk a segítségükkel. Ábrázoljuk a (2 A, 8 V) és a (8 A, 2 V) pontpárt egy feszültség—áramerősség koordináta-rendszerben: a két ponton átmenő egyenes egyenlete az (1) alatti összefüggés (1.96. ábra). Behelyettesítjük a pontpár koordinátáit:

$$8 = U_0 - 2r,$$

$$2 = U_0 - 8r.$$

A két egyenlet alapján $U_0 = 10$ V, $r = 1$ Ω . Ezután tetszőleges áramerősséghez meghatározhatjuk a megfelelő kapocsfeszültséget. Ha például $I = 5$ A erősségű áram folyik át a telepen, akkor a telep sarkai között $U = 10 - 5 \cdot 1 = 5$ V kapocsfeszültség mérhető.

Világos dolog, hogy ha $I = 0$ A, vagyis a telepen nem folyik áram, akkor $U = 10$ V, míg ha $U = 0$ V, vagyis a kapocsfeszültség nulla, akkor $I = 10$ A. Ez azt jelenti, hogy ha a telep sarkait nulla ellenállású veze-



1.96. ábra

téssel kötjük össze — más szóval *rövidre zárjuk* —, akkor a telepen 10 A erősségű áram folyik át. Ilyenkor a kémiai erő által áttermelt összes töltés azonnal visszafolyik — másodpercenként 10 C —, így nem alakulhat ki feszültség a lemezek zött. Ebben az esetben az áramforrás felmelegszik^(*), és igen hamar kimerül, a kémiai erő megszűnik.]

Ejtsünk még néhány szót a telepek teljesítményéről. A telep által végzett kémiai munka az áramkörben végighaladó q töltésen U_0q , hiszen az U_0 belső feszültség a kémiai munka mértéke is. Az időegység alatt végzett kémiai munka így

$$P = U_0 I. \quad (5)$$

Vegyük figyelembe a (4) egyenlőséget. Ekkor

$$P = I^2 (R + r). \quad (6)$$

A vezetéken leadott teljesítmény természetesen már az előző pontból ismert: $I^2 R$. A két teljesítmény hányadosát a *telep hatásfokának* nevezzük:

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r}. \quad (7)$$

Érdekes probléma vetődik fel ezzel kapcsolatban. Tegyük fel, hogy adott egy U_0 belső feszültségű, r belső ellenállású kémiai áramforrás. A telep sarkaira R_1 külső ellenállást kapcsolunk. Ekkor a telep teljesítménye ezen az R_1 nagyságú ellenálláson $R_1 I_1^2 = P_1$. Itt (4) alapján

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + r},$$

^(*) A telep által leadott kémiai teljesítmény a telep belső energiáját növeli, a külső ellenállásra nem jut teljesítmény.

tehát

$$P_1 = R_1 \left(\frac{U_0}{R_1 + r} \right)^2.$$

Vessük fel a következő kérdést: elképzelhető-e, hogy az R_1 ellenállást kicserélhetjük egy másik R_2 ellenállásra úgy, hogy ezen az ellenálláson ugyanakkora lesz a teljesítmény, mint az R_1 ellenálláson?

Másképpen: van-e megoldása az

$$R_1 \left(\frac{U_0}{R_1 + r} \right)^2 = R_2 \left(\frac{U_0}{R_2 + r} \right)^2 \quad (8)$$

egyenletnek? Végezzük el a négyzetreemelését, és egyszerűsítsük az egyenletet U_0^2 -tel:

$$\frac{R_1}{R_1^2 + 2R_1 r + r^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + 2R_2 r + r^2}.$$

Innen egyszerű számolás után az adódik, hogy

$$R_1 R_2 = r^2. \quad (9)$$

Adott telep esetén tehát két olyan külső ellenálláson azonos a teljesítmény, amelyeknek a mértani közepe a belső ellenállás.

¶ Tekintsük például az $U_0 = 12$ V belső feszültségű, $r = 4 \Omega$ belső ellenállású telepet. Az $R_1 = 2 \Omega$ és az $R_2 = 8 \Omega$ ellenálláson azonos a telep teljesítménye, hiszen $2 \cdot 8 = 4^2$. Mindkét ellenálláson 8 W a teljesítmény, hiszen az $R_1 = 2 \Omega$ ellenállás alkalmazása esetén $I_1 = 2$ A erősségű áram folyik, így $P_1 = 2^2 \cdot 2$ W. Ugyanakkor az R_2 ellenálláson átfolyó áram 1 A, tehát $P_2 = 1^2 \cdot 8$ W.

Mindegy tehát, hogy melyik ellenállást alkalmazzuk? Nem egészen. A két esetben ugyanis különböző a hatásfok: az első esetben $\eta_1 = 2/6 = 0,33$, a másodikban $\eta_2 = 8/12 = 0,66$. A nagyobb ellenállás használata esetén a hatásfok nagyobb.]

1.2.4. Kirchhoff törvényei

Az áramkörök alaptörvényei már ismeretek. Kirchhoff első törvénye lényegében a töltés megmaradásának a törvényét fejezi ki, azt, hogy a vezetékben nem tűnik el a töltés, és nem keletkezik. Kirchhoff második törvénye az elektrosztatika második alaptörvényének az alkalmazását jelenti az áramkörök esetére. Fogalmazzuk meg tehát ezeket a törvényeket.

Kirchhoff I. törvénye: *Bármely elágazási pontba befolyó áramok összege egyenlő a kifolyó áramok összegével. Ha a csomópontba befolyó áramot pozitív, a kifolyó áramot negatív mennyiségnek tekintjük, akkor így is fogalmazhatunk: a csomópontba befolyó és az onnan kifolyó áramok összege nulla.*

Kirchhoff II. törvénye. *Egy áramkörben áramköri elemekből álló zárt görbén az elektromos tér munkája nulla, vagyis a zárt görbén az összes feszültségés nulla.*

A Kirchhoff-törvények alkalmazását néhány példán mutatjuk be.

↑ Tekintsünk először egy egyetlen hurkot tartalmazó egyszerű áramkört (1.97. ábra). Az egyszerűség kedvéért a négy telep belső ellenállása legyen egyaránt $r = 1 \Omega$. Az első telep belső feszültsége $U_1 = 8 \text{ V}$, a második telepé $U_2 = 10 \text{ V}$, a harmadik te-

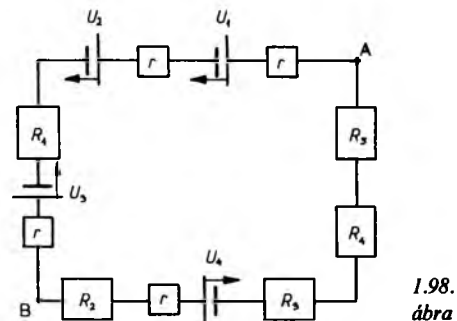
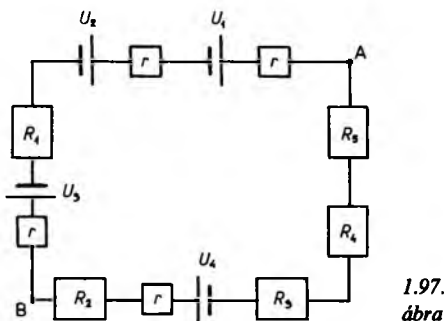
lep 5 V elektromotoros erejű, $U_3 = 5 \text{ V}$. Látható, hogy ez a telep szembe van kapcsolva az előző kettővel. A negatív sarka a 9Ω -os ellenálláson keresztül a második telep negatív sarkához van kötve. A negyedik telep 12 V elektromotoros erejű, vagyis $U_4 = 12 \text{ V}$. Az áramkörben a négy belső ellenállás mellett öt ellenállás található: $R_1 = 9 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = R_5 = 3 \Omega$.

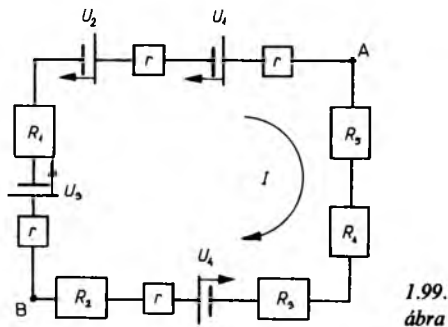
A feladat: határozzuk meg az áramerősséget, és a négy telep kapocsfeszültségét! Számítsuk ki az ábrán látható A és B pontok közötti feszültségesést!

A feladat megoldása a következő lépésekben történik.

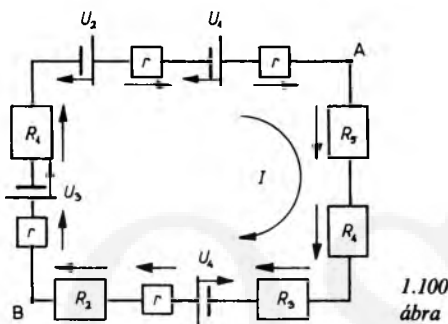
1. Jelöljük be a telepek belső feszültségeit (elektromotoros erőket)! Ez a feladat nem igényel különösebb gondolkodást, mindössze némi „szemmértéket”, a telepet jelölő két vonalka közül a hosszabb a pozitív, erről mutat az elektromos tér erőssége a negatív lemeznek megfelelő rövidebb felé (1.98. ábra).

2. Jelöljük be az áramirányt! Ilyen egyszerű feladtnál az áram vagy az óra mutatójának megfelelő irányba, vagy az ezzel ellentétes irányba folyik. Legtöbbször könnyen eldönthető, hogy melyik eset valósul meg. Arra kell gondolnunk, hogy a telepek az áramot a pozitív sarkukról „tolják le”. A mi feladatunkban az első, a





1.99. ábra



1.100. ábra

második és a negyedik telep az óra mutatójának járásával egyirányú áramot indít, a harmadik telep velük szembe működik. Nyilván a három telep „győz” (1.99. ábra). Ha az áramirányt nem találnánk el, akkor sincs semmi baj, mert ha végül $I < 0$ adódik, az azt jelenti, hogy az áramkörben I abszolút értéke folyik, méghozzá a kezdetben feltételezett áramiránnyal szemben.

3. Az áramiránynak megfelelően jelöljük be az ellenállásokon eső feszültségeket! Például az R_4 ellenálláson IR_4 a feszültségcsökkenés, és az 1.100. ábrán lefelé mutat.

4. Írjuk fel Kirchhoff II. törvényét! Induljunk el például az A pontból, és számoljuk össze az összes nyilat:

$$-Ir + U_1 - Ir + U_2 - IR_1 - U_3 - Ir - IR_2 - Ir + U_4 + IR_3 - IR_4 - IR_5 = 0.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$-I + 8 - I + 10 - 9I + 5 - I - 2I - I + 12 - 4I - 3I - 3I = 0.$$

Innen $I = 1$ A.

A négy telep kapocsfeszültsége:

$$U_{k1} = U_1 - Ir = 8 - 1 \cdot 1 = 7 \text{ V},$$

$$U_{k2} = U_2 - Ir = 10 - 1 \cdot 1 = 9 \text{ V},$$

$$U_{k3} = U_3 + Ir = 5 + 1 \cdot 1 = 6 \text{ V},$$

$$U_{k4} = U_4 - Ir = 12 - 1 \cdot 1 = 11 \text{ V}.$$

Az 1.100. ábrán látható, hogy a harmadik telep belső ellenállásán a belső feszültségcsökkenés az elektromotoros erővel megegyező irányú. Ha a telepen a „természetes áramiránnyal” szembe folyik az áram, akkor a kapocsfeszültség nagyobb, mint a belső feszültség. (Egy 4,5 voltos zseblámpatelep sarkai között is mérhető közel 220 volt, ha a két pólusát bedugjuk a konnektorba.)

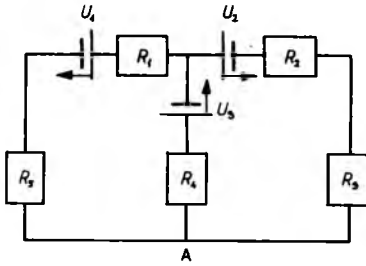
Az A és a B pontok közötti feszültségcsökkenést két úton is meghatározhatjuk. Felül haladva:

$$U_{AB} = -1 \cdot 1 + 8 - 1 \cdot 1 + 10 - 9 \cdot 1 - 5 - 1 \cdot 1 = 1 \text{ V},$$

alul haladva:

$$U_{AB} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 12 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \text{ V.}$$

¶ Tekintsük át most a következő — már valamivel bonyolultabb — kérdést. Az 1.101. ábrán látható áramkörben két hurok van. A három áramforrás feszültségét U_1 -gyel, U_2 -vel, U_3 -mal jelöltük. A két hurokban összesen öt ellenállást helyeztünk el, ezeket R_1 -gyel, R_2 -vel, ..., R_5 -tel jelöltük. Az áramforrások elhelyezkedése és polaritása, valamint az ellenállások



1.101. ábra

helyzete az ábráról leolvasható. A következő célt tűzzük ki: határozzuk meg az egyes ágakban folyó áramok nagyságát. (Már az előző feladatnál láttuk, hogy a Kirchhoff-törvényekben a külső és a belső ellenállások szerepe teljesen azonos. Ezért a most vizsgált kérdésnél nem teszünk különbséget a külső és a belső ellenállások között.)

A feladat megoldásának az első lépése most is az, hogy a három telepen bejelöljük a belső feszültség irányát, a telep pozitív sarka felől a negatív sarka felé kis nyilat irányítunk.

A második lépés az, hogy megállapítjuk az áramirányt. Vagy ha ez nem lehetséges, akkor megállapodunk az áramirányban. Jelöljük ki például az A ponttal megjelölt csomópontot. Ebből a csomópontból három vezeték indul ki. Bármelyik vezetéken két irányú lehet az áram: vagy kifelé folyik a csomópontból, vagy befelé. Természetesen az nem lehetséges, hogy mindhárom ágon kifelé folyjék az áram, és az sem, hogy mindhárom áram iránya befelé mutasson. Formailag azonban ez a lehetőség is megengedett: nem származik abból sem ellentmondás, ha mindhárom áramot kifelé irányítjuk. A számolás eredményeként valamelyik áram majd negatív lesz, erről tudjuk, hogy ennek az áramnak az iránya a föltételezéssel ellentétes irányú.

Ezt a két esetet is figyelembe véve a

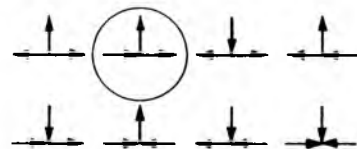
csomópontnál nyolc eset lehetséges. Az elképzelhető variációkat az 1.102. ábrán feltüntettük. Válasszuk ki a nyolc közül valamelyiket. Legyen ez, mondjuk, a második. A bal oldali ágon befolyik az áram, a függőleges ágon és a jobb oldali ágon pedig kifolyik. Az első áram nagyságát jelöljük I -vel, a másik kettőt (úgy, ahogyan az 1.103. ábrán látható) I_1 -gyel és I_2 -vel. Ezzel kijelöltük az egyes ágakban folyó áram irányát.

A harmadik lépésre térünk most át. Az egyes ellenállásokon bejelöljük a feszültségeséseket (1.103. ábra). Az ellenállások mellé kis nyilakat rajzolunk, és ráírjuk a feszültségesés nagyságát. Például az R_1 nagyságú ellenálláson IR_1 , az R_3 nagyságú ellenálláson $I_1 R_3$ nagyságú feszültség esik.

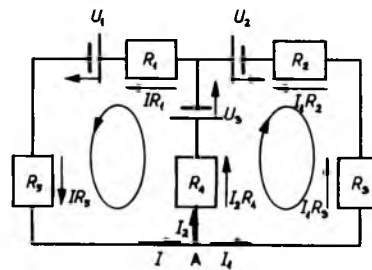
Negyedik lépésként írjuk fel a csomóponti törvényt és a két hurokra vonatkozó huroktörvényt. A csomóponti törvény:

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

A bal oldali hurokban számoljuk össze a feszültségeséseket. Induljunk el az A pont-



1.102. ábra



1.103. ábra

ból „fölfelé”:

$$I_2 R_4 + U_3 + IR_1 + U_1 + IR_5 = 0. \quad (2)$$

A jobb oldali hurokra alkalmazva ezt az elvet, induljunk el most is az A pontból az R_4 ellenállás felé:

$$I_2 R_4 + U_3 + U_2 - I_1 R_2 - I_1 R_3 = 0. \quad (3)$$

A feszültségesést pozitívnak számoltuk, ha a nyílal egy irányban haladtunk, és negatívnak, ha a nyílal szembe megyünk a választott úton.

A konkrét példa kedvéért legyen $U_1 = 7 \text{ V}$, $U_2 = 8 \text{ V}$, $U_3 = 10 \text{ V}$. Legyen továbbá $R_1 = R_2 = R_4 = 1 \ \Omega$, $R_3 = 3 \ \Omega$, $R_5 = 2 \ \Omega$. Helyettesítsük be az adatokat:

$$I = I_1 + I_2, \quad (1')$$

$$1I_2 + 10 + I + 7 + 2I = 0, \quad (2')$$

$$1I_2 + 10 + 8 - I_1 - 3I_1 = 0. \quad (3')$$

A (2') egyenlet egyszerűbb formában:

$$3I_1 + 4I_2 = -17. \quad (4)$$

A (3') egyenletbe helyettesítsük be az (1') egyenlőségéből I -t, és vonjuk össze a tagokat:

$$4I_1 - I_2 = 18. \quad (5)$$

Az (5) egyenletet szorozzuk meg 4-gyel, és adjuk hozzá a (4) egyenlethez:

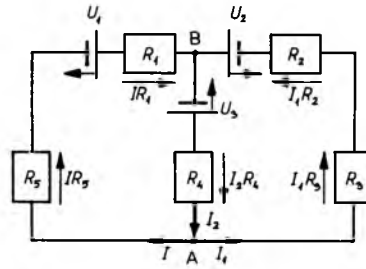
$$19I_1 = 55.$$

Innen

$$I_1 = \frac{55}{19} \text{ A}.$$

Szorozzuk most meg a (4) egyenletet 4-gyel, az (5) egyenletet 3-mal, majd vonjuk ki a két egyenletet egymásból. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$I_2 = -\frac{122}{19} \text{ A}.$$



1.104. ábra

Végül (1) alapján

$$I = -\frac{67}{19} \text{ A}.$$

Mivel I_2 és I negatív, e két áram irányát nem a valóságnak megfelelően választottuk meg. Az eredmény azonban értékes: a függőleges ágba lefelé folyik az áram, nagysága $122/19 \text{ A}$, a csomópontból mindkét vízszintes szárban kifelé folyik az áram (1.104. ábra).

Ezután könnyen meghatározhatjuk az áramkör két pontja között megjelenő feszültséget. Például

$$U_{AB} = I_2 R_4 + U_3 = \left(-\frac{122}{19}\right) \cdot 1 + 10 = 3,57 \text{ V},$$

ha a függőleges ágon haladunk fölfelé. Ugyanezt kapjuk, ha balra indulunk:

$$U_{AB} = I_1 R_3 + I_1 R_1 - U_2 = \frac{55}{19} \cdot 4 - 8 = 3,57 \text{ V}.$$

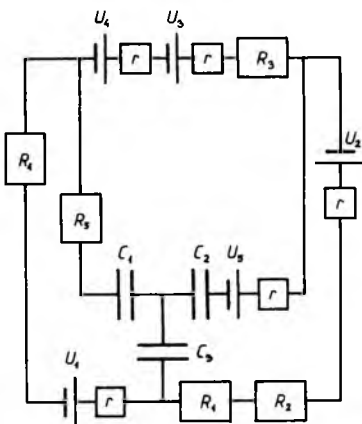
┌A most sorra kerülő problémában az áramkörök kondenzátorokat is tartalmaznak. Tekintsünk az 1.105. ábrán látható kapcsolási rajzra. Az áramkörök rendszerében öt áramforrás szerepel. Az egyszerűség kedvéért mindegyik belső ellenállása 1 ohm , és mindegyiket az r szimbólummal jelöljük. A belső ellenállások mellett öt külső ellenállást és három kondenzátort

iktattunk a hálózatba. Legyen tehát $U_1 = 8 \text{ V}$, $U_2 = 6 \text{ V}$, $U_3 = 7 \text{ V}$, $U_4 = 10 \text{ V}$, $U_5 = 20 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $R_5 = 7 \Omega$, $C_1 = 8 \mu\text{F}$, $C_2 = 9 \mu\text{F}$, $C_3 = 12 \mu\text{F}$.

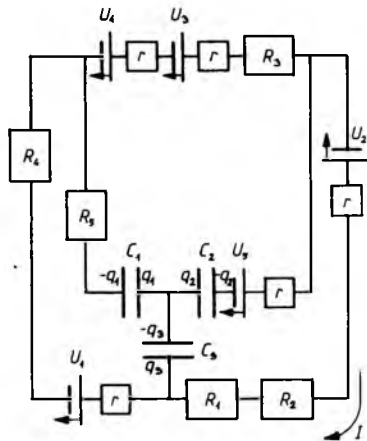
Tűzzük ki a következő célt: határozzuk meg az egyes ágakban folyó áramokat és a kondenzátorok töltését!

Első lépésként jelöljük be a telepek belső feszültségeit.

A második lépés: megállapítjuk az áramirányt. Látható, hogy elektromos áram csak a külső hurokban folyik. Mindegyik belső ágban szerepel egy kondenzátor, ezeken nem folyhat át egyenáram. Csak annyi töltés áramlik a kondenzátorok felé, amennyi feltölti a lemezeket. Az áram az óra mutatójának járásával egy irányba folyik; a második, a harmadik és a negyedik telep ebbe az irányba „pumpálja” a töltést, együttesen „legyőzik” a velük szemben működő első áramforrást. Jelöljük most be a kondenzátorokon felhalmozódó töltéseket a polaritással együtt. A C_1 kapacitású kondenzátor bal oldali lemeze negatív, hiszen a 8 voltos és a 10 voltos telep negatív sarka közelében van. A C_2 kapacitású kondenzátorról is föltehetjük,



1.105. ábra



1.106. ábra

hogy a jobb oldali lemeze negatív, hiszen a 20 voltos telep negatív sarkával érintkezik. Végül a C_3 kapacitású kondenzátornak az alsó lemeze pozitív, a 8 voltos és a 6 voltos áramforrás pozitív töltésű lemezének a környezetében van. A kondenzátorok töltését (a pozitív lemezek töltését) jelöljük q_1 , q_2 , q_3 -mal (1.106. ábra).

A harmadik lépés abban áll, hogy az ellenállásokon és a kondenzátorokon bejelöljük a feszültségeséseket. Az ellenállásokon eső feszültségek nagysága: az áramerősség és az ellenállás szorzata, iránya pedig az áram irányával egyezik meg. Egyetlen figyelemre méltó dolog, hogy az R_5 ellenálláson nem folyik áram, ezért ezen nem esik feszültség. Az R_5 ellenállás két vége között nulla a feszültség. Ugyanígy: az U_5 belső feszültségű telep — bár a kapcsolófeszültsége jelen van a rendszerben — nem ad áramot, ezért belső ellenállásán nem esik feszültség (1.107. ábra).

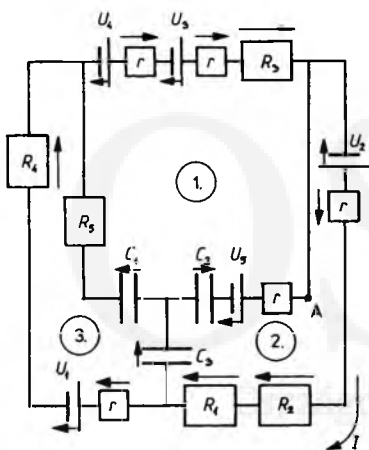
A feladat megoldásának a negyedik lépése: írjuk fel a töltés megmaradását és az elektromos tér örvénymentességét kifejező egyenleteket. Az áram — mint láttuk — nem ágazik el, ezért a csomóponti törvény alkalmazására nincs szükség. A csomó-

ponti törvénnyel teljesen az azonos jelentésű töltésmegmaradás elvét azonban figyelembe kell venni. Az 1.108. ábrán vázlatosan jelölt felületen belül az összes töltés nulla:

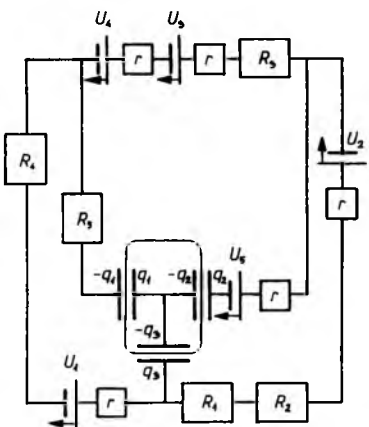
$$q_1 + q_2 - q_3 = 0. \quad (6)$$

Induljunk el az R_1 ellenállástól, és írjuk most fel a huroktörvényt a külső keretre:

$$IR_1 + Ir + U_1 + IR_4 - U_4 + Ir - U_3 + Ir + IR_3 - U_2 + Ir + IR_2 = 0. \quad (7)$$



1.107. ábra



1.108. ábra

Alkalmazzuk most a huroktörvényt az ① és ② szimbólumokkal jelölt hurkokra! Induljunk el az A pontból az óra mutatójának megfelelő irányban az első huroknál és ellentétes irányban a második huroknál:

$$U_5 - \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_1}{C_1} - U_4 + Ir - U_3 + Ir + IR_3 = 0, \quad (8)$$

$$U_5 - \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_3} - IR_1 - IR_2 - Ir + U_2 = 0. \quad (9)$$

A (7), (8), (9) huroktörvényt kifejező egyenlőségek helyett más állításokat is felírhattunk volna. Például úgy, hogy valamelyik egyenletet a ③ hurokra felírt egyenlőséggel cseréljük fel. Alkalmazhatunk volna Kirchhoff II. törvényét az ① és a ③ vagy a ② és a ③ hurkok egyesítésére.

Helyettesítsük be az adatokat. A (7) alapján: $I = 1$ A. A (6), (8), (9) egyenletek a

$$q_1 + q_2 - q_3 = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{q_2}{9} + \frac{q_1}{8} = -7, \quad (11)$$

$$\frac{q_2}{9} + \frac{q_3}{12} = 17 \quad (12)$$

formát öltik. (A kapacitást minden esetben μF -ban helyettesítettük be, ezért a töltést μC -ban kapjuk.) Szorozzuk meg a (11) egyenletet 72-vel, a (12) egyenletet 36-tal. Ekkor a (10), (11), (12) egyenletrendszer a következőképpen írható:

$$q_1 + q_2 - q_3 = 0, \quad (13)$$

$$9q_1 - 8q_2 = -504. \quad (14)$$

$$4q_2 + 3q_3 = 612. \quad (15)$$

Ezután a (13) egyenlet (-9) -szereséhez adjuk hozzá a (14) egyenletet:

$$-17q_2 + 9q_3 = -504,$$

és ehhez adjuk hozzá a (15) egyenlet (-3) -szorosát:

$$-29q_2 = -2340,$$

Innen $q_2 = 80,689 \mu\text{C}$. Visszahelyettesítve:
 $q_3 = 96,413 \mu\text{C}$ és $q_1 = 15,724 \mu\text{C}$.]

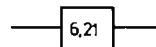
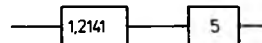
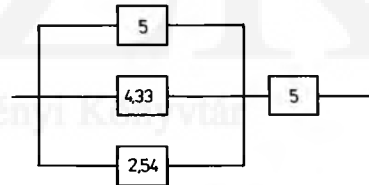
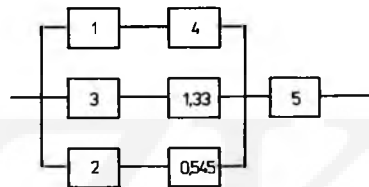
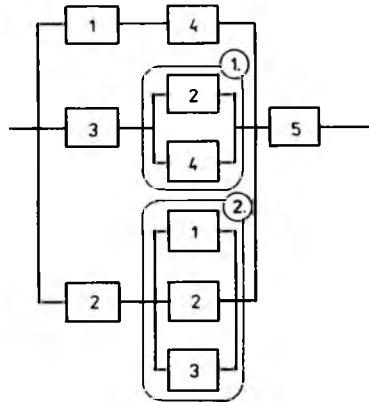
1.2.5. Az ellenállások kapcsolása

Az előző pontban az elektromos hálózatok alaptörvényeivel és azok alkalmazásával ismerkedtünk meg. A Kirchhoff-törvények segítséget nyújtanak ahhoz, hogy bármilyen bonyolult hálózatot részletesen megismerjünk, minden egyes ágban meghatározzuk az áramerősséget, és bármely két pont között kiszámíthatassuk a feszültségesést.

A számolások gyakran hosszadalmasak, bonyolultak. Sokszor leegyszerűsíthetők azonban, ha kihasználjuk a feladatban rejlő esetleges szimmetriák adta lehetőségeket, és élünk a soros és a párhuzamos kapcsolás egyszerű szabályával.

↑ Tekintsünk először egy egyszerű esetet. Az 1.109. ábrán látható rendszer egyetlen ellenállással helyettesíthető. Az eredő ellenállást a soros és a párhuzamos ellenállások eredőjének számítására vonatkozó szabállyal meghatározhatjuk. Az egyes ellenállások nagyságát (ohmban mérve) feltüntettük az ábrán. Először vonjuk össze az ① és a ② körön belüli ellenállásokat. Ezeket párhuzamosan kötöttük, ezért az eredő $1,33 \Omega$, illetve $0,545 \Omega$. (Figyeljünk fel arra, hogy a párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője az ellenállások közül a legkisebbnél nem lehet nagyobb.)

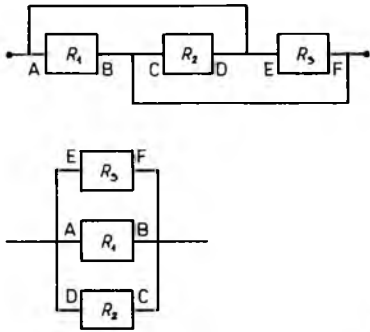
Vonjuk ezután össze a három párhuzamos ágban szereplő ellenállásokat. A sorba kapcsolt ellenállások eredője 5Ω , $4,33 \Omega$, illetve $2,54 \Omega$. E három párhuzamosan kap-



1.109. ábra

csolt ellenállás eredője $1,214 \Omega$. Végül az egész rendszer ellenállása $6,21 \Omega$.]

↑ Sok esetben előfordul, hogy a feladat megoldható egyszerűen a soros vagy a párhuzamos kapcsolás szabályainak alkalmazásával. Előbb azonban ajánlatos átalakítani a kapcsolási rajzot. Ez az átalakítás gyakran egy jó ötletet igényel. Képzeljük el



1.110. ábra

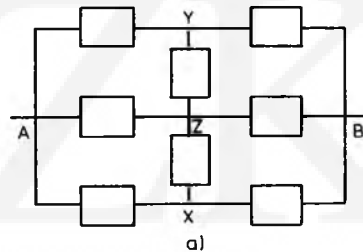
az 1.110. ábrán látható kapcsolási rajzot. A feladatunk az, hogy a három ellenállás ($R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 7 \Omega$, $R_3 = 9 \Omega$) rendszerét egyetlen eredő ellenállással helyettesítsük. Így ránézésre elég nehéz megállapítani azt, hogy soros vagy párhuzamos kapcsolásnak tekinthető-e ez a rendszer. Az alábbi utat járhatjuk. Sok hasonló feladatnál célravezető technikáról van szó. Jelöljük az ellenállások végeit az A, B, C, D, E, F szimbólumokkal. Készítsünk új ábrát, kezdjük azzal, hogy az A és B közötti 8 ohmos ellenállást lerajzoljuk. Vizsgáljuk meg, hogy az A pont melyik ponttal érintkezik „fémesen”, ellenállások nélkül. Nyilvánvaló, hogy az A pontból vezeték megy a D és az E pontokhoz. Kössük össze tehát az A pontot a D és E pontokkal, majd rajzoljuk meg a C és D, valamint az E és F pontok közötti ellenállást. Természetesen semmi sem szól az ellen, hogy ezen az új ábrán a C pont jobbra kerüljön a D-hez képest. A B pont a C és az F pontokkal azonos potenciálon van, ezért az új ábrán is összekötjük ezeket a pontokat. Világos: a három ellenállás párhuzamosan van egymáshoz kapcsolva, az eredőjük reciproka:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{191}{504},$$

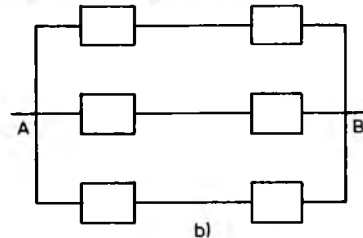
tehát $R = 2,64 \Omega$.

Az 1.111. ábrán látható kapcsolási rajzon mindegyik ellenállás $R = 1 \Omega$ nagyságú. Az A és a B pontok között mérhető ellenállást kívánjuk meghatározni.

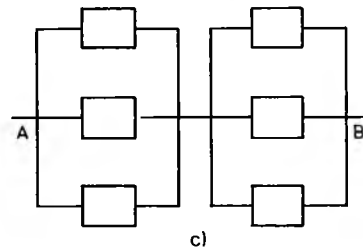
Könnyen belátható, hogy a Z pontból az X, illetve az Y pont összekötő ellenálláson nem folyik áram. Ha ugyanis Z felől X felé I nagyságú áram folyna, akkor ugyanennyi folyna az Y felé is. A kapcsolási vázlat ugyanis tengelyesen szimmetrikus az A-B tengelyre. Ez azonban azt jelenti, hogy az Y pontba az A pont felől is, és a Z pont felől is folyik áram. Az Y pontból a B felé folyó áram így nagyobb, mint az A-ból Y-ba folyó áram. Ez ellentmond az Y-Z-X tengelyre vonatkozó szimmetriának.



a)



b)



c)

1.111. ábra

Az Y és Z között, továbbá az X és Z között folyó áram nulla. Az Y, Z, X pontok azonos potenciálúak. Ha a két függőleges helyzetű ellenálláson nem folyik áram, akkor ez a két ellenállás el is távolítható. Így három párhuzamos ágat kapunk, mind-egyikben két ellenállás van sorba kapcsolva (az 1.111. ábrán a b jelű rajz). Az eredő: $R_e = 0,66 \Omega$.

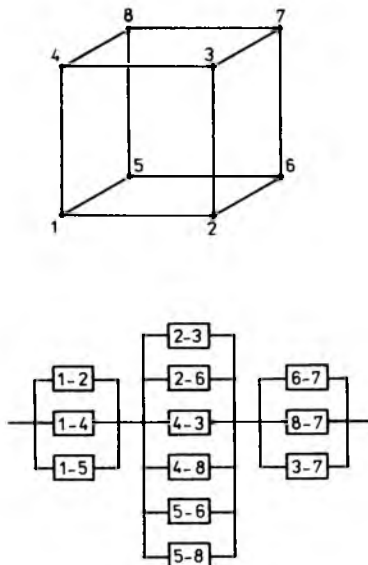
Jegyezzük meg: ha egy ellenállás két vége azonos potenciálon van, akkor ezt az ellenállást kiiktathatjuk. Ekkor az eredő változatlan marad. Érdekes azonban, hogy nemcsak kiiktathatjuk ezt az ellenállást, hanem rövide is zárhatjuk az ellenállás két végét.

A mi példánknál maradva: ha eltávolítjuk az X és Z, valamint az Y és Z pontok közötti ellenállást, de helyettük egy-egy nulla ellenállású vezetékbe iktatunk be, ekkor a hálózat eredő ellenállása szintén változatlan marad. Most két elem sorba kapcsolásáról van szó, amelyek mindegyike három, egyenként R ellenállás párhuzamos kapcsolásából áll elő (az 1.111. ábrán a c jelű rajz). Így az eredő most is $R_e = 0,66 \Omega$.

Megjegyezzük, hogy az Y és X pontok közül nemcsak eltávolíthatjuk az R ellenállást, nemcsak rövide is zárhatjuk ezeket a pontokat, hanem tetszőleges ellenállásokat is beiktathatunk. Az eredő ellenállás nem változik, ha X és Z közé 100 ohmos, Y és X közé 1000 ohmos ellenállást kapcsolunk.]

[Most induljunk ki abból, hogy adott egy huzalokból felépített kocka. A kocka minden egyes éle legyen R ellenállású. Tűzzük ki a következő feladatot: határozzuk meg a kocka eredő ellenállást egy testátló két vége között!

Számoljuk meg a kocka csúcsait úgy, ahogyan az 1.112. ábrán látható. Képzeljük el, hogy az 1 pontnál I áram folyik a rendszerbe. A rendszer forgásszimmetriája miatt ez az áram három egyenlő részre oszlik. Az 1 pontból a 2, 4 és 5 pont felé egyaránt $I/3$ áram folyik. A hálózat valóban szimmetrikus a következő értelemben: a rendszer a térben elforgatható az 1-7 csúcspontokat összekötő testátló — mint forgástengely — körül 120° -kal vagy 240° -kal, a rendszer ettől a forgástól a kezdeti állapotával ekvivalens állapotba kerül.



1.112. ábra

Hasonlóan: a 7 pontból nézve azonos a 7-6, 7-8, 7-3 ágak szerepe. Mindegyikben $I/3$ áram folyik. Így azonban 1-ből indulva a 2, a 4, az 5 pontokig azonos feszültség esik: az 1 ponthoz képest mindegyik $IR/3$ potenciálon van. Ugyanígy: a 3, a 6 és a 8 pontok is azonos potenciálon vannak.

Az ekvipotenciális pontokat összeköthetjük tetszőleges ellenállásokkal, de összeköthetjük ellenállás nélküli huzalokkal is. Képzeljük el, hogy a 2, 4, 5 pon-

tokat és a 3, 6, 8 pontokat rövidre zárjuk egy-egy nulla ellenállású vezetékkel. Az 1.112. ábrán látható, hogy ezt a két pont-hármaszt egy-egy ponttal helyettesítjük. E két csomópont között hat ellenállás van egymással párhuzamosan: a 2-3, 2-6, 4-3, 4-8, 5-6, 5-8. A kocka eredő ellenállása tehát három, soros elem eredője. Az első és a harmadik elem három, a középső elem hat, egyenként R nagyságú ellenállás párhuzamos eredője. Így

$$R_e = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6} R \quad]$$

1.2.6. Az áramerősség és a feszültség mérése

A vezető egy keresztmetszetén időegység alatt átáramló töltés mennyisége az áramerősség. Legtöbbször a vezető keresztmetszetének a területe nem játszik közvetlen szerepet, csak az ellenállás kiszámítására szolgáló $R = \rho L/A$ képletben van jelentősége. Igen gyakran ezért a vezető vastagságától eltekintünk. Ekkor az áramerősség a vezető egy pontján időegység alatt áthaladó töltés mennyiségét jelenti.

Ebből az következik, hogy az *áramerősség-mérő műszert* vagy egyszerűbb elnevezéssel *ampermérőt*, a vezetőszakasz egy pontjában kell elhelyezni. Ez úgy történik, hogy *a vezetőt megszakítjuk, és a műszer két kivezetését a két huzalvéghez kötjük*. Az áramerősség-mérő műszert ábrázoló szimbólum az 1.113. ábrán látható: egy kis kör

nyíllal, és a körbe írt A betűvel, amely az amperre utal.

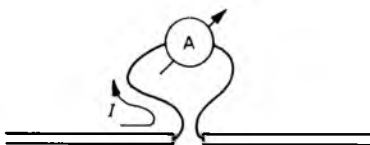
Az áramerősség mérésével kapcsolatos természetes következmény, hogy az áram a műszer beiktatásától ne változzon meg. Ez azt jelenti, hogy a műszer ellenállásának elhanyagolhatóan kicsinek kell lennie a többi áramköri elem ellenállásához viszonyítva.

Az ideális áramerősség-mérő műszer ellenállása nulla. Olyan, mintha nem is lenne ott a vezeték egy pontjában, a vezetékbe iktatva. Rajzon az ilyen ideális műszert akár el is hagyhatjuk, nincs jelentősége annak, hogy szerepel-e az áramkörben vagy nem.

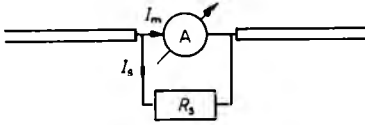
Az áramerősség mérésére szolgáló műszert az ellenállásával jellemezzük. A műszert az ellenállás mellett egy másik adat is jellemzi: a műszeren átfolyó áram maximális értéke. Ennek a maximális áramnak azért van jelentősége, mert egyrészt a műszer végkitérésben ezt az áramot méri, másrészt a végkitérésnek megfelelő áramnál nagyobb áram károsítja a műszert.

Az árammérő műszerek legnagyobb része izzószálas műszer. Az ellenálláson leadott teljesítmény $P = I^2 R$. Az ampermérő szerkezetét úgy készítik el, hogy a mutató kitérése a teljesítmény négyzetgyökével arányos legyen: $I = \sqrt{P} / \sqrt{R}$. Az elektromos áram erősségét mérő izzószálas műszerek valójában teljesítményt mérnek. A maximális áramerősség és a belső ellenállásra jutó megengedhető legnagyobb teljesítmény megfelel egymásnak.

Felvetődik a kérdés: ha rendelkezésünkre áll egy R_m belső ellenállású árammérő műszer, amelynek a méréshatára I_m , akkor hogyan oldható meg ugyanezzel a műszerrel egy I_m -nél nagyobb I áram mérése?



1.113.
ábra



1.114.
ábra

A megoldás abban áll, hogy az I áramot az 1.114. ábrán látható csomópontnál két-vétválasztjuk. Az I áram egyik része a műszeren át folyik, a másik része a műszer R_m ellenállásával párhuzamosan kapcsolt, úgynevezett *söntellenálláson* áramlik át. Jelöljük ennek a védőellenállásnak a nagyságát R_s -sel. Tegyük fel, hogy az ampermérőn most pontosan I_m áram folyik. Ekkor Kirchhoff I. törvénye alapján:

$$I = I_m + I_s,$$

ahol I_s a söntön átfolyó áram erőssége. Világos, hogy a főágban I -nél nagyobb áram nem áramolhat, mert akkor a műszerre is nagyobb áram jutna I_m -nél.

Kirchhoff II. törvénye alapján:

$$I_m R_m = I_s R_s.$$

E két összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$I = I_m \left(1 + \frac{R_m}{R_s} \right).$$

Ha például a mérés határt 10-szeresre kívánjuk kiterjeszteni, akkor $1 + R_m/R_s = 10$, innen $R_s = R_m/9$. A védő- (sönt-) ellenállás kisebb, mint a műszer ellenállása.

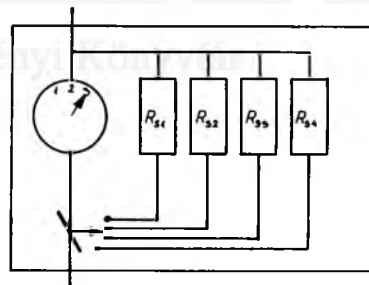
A kereskedelemben kapható berendezésekbe a műszer belső ellenállása mellé a mérőeszközt magában foglaló dobozba beépítenek különböző söntellenállásokat. Kapcsoló alkalmazásával választhatunk közöttük (1.115. ábra).

A másik fontos elektromos eszköz a *feszültségmérő műszer*, melyet röviden *voltmérőnek* is nevezünk.

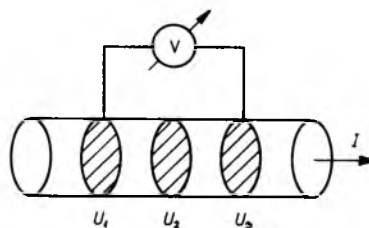
Az elektromos hálózat két pontja közötti elektromos potenciálkülönbség azzal a munkával egyenlő, amelyet az elektromos tér akkor végez egységnyi pozitív töltésen, ha az az egyik pontból a másik pontba mozog.

Ebből következik, hogy a feszültség mérésére alkalmas műszert a *vezetőszakasz két pontjához kell illeszteni*. A vezetőt nem szakítjuk meg, hanem a műszer két kivezetését az áramkörti szakasz két pontjához erősítjük. A feszültség mérésére alkalmas eszközt jelölő áramkörti szimbólumot az 1.116. ábrán láthatjuk: kis kör nyíllal, a kör belsejébe gyakran egy V betűt írunk, arra utalva, hogy feszültségmérőről van szó, és a leolvasott eredmény voltban vagy a volt kisebb, illetve nagyobb egységeiben mérjük.

A feszültség mérésével kapcsolatos igény az, hogy a két pont között a feszültség a műszer beiktatása következtében ne változzon. A műszer ellenállása a többi



1.115.
ábra



1.116.
ábra

áramköri elem ellenállásának sokszorosa kell, hogy legyen.

Az ideális feszültségmérő műszer ellenállása végtelen nagy. Ezért az ilyen műszert akár be se rajzoljuk a kapcsolási rajzra. Az ideális feszültségmérőn nem folyik áram.

A feszültségmérő műszert az ellenállásával jellemezzük, az ellenállás mellett azonban meg kell adni a műszerre kapcsolható feszültség maximális értékét: a műszer mérésátlárát. A berendezés skálája a végkitérésnél a mérésátlárnak megfelelő feszültséget jelzi. A mérésátlár maximális feszültséget is jelent. Ennél a feszültségnél nagyobb alkalmazása esetén a műszer károsodhat.

A feszültségmérő műszerek is igen gyakran izzószálas műszerek. A műszer két pontja közötti feszültség elektromos teljesítmény leadásával jár. Az ellenálláson leadott teljesítmény: $P = U^2/R$. A voltmérő szerkezetét úgy alakították ki, hogy a mutató kitérése a teljesítmény négyzetgyökével arányos legyen: $U = \sqrt{P} \sqrt{R}$.

A feszültséget mérő izzószálas műszerek is teljesítményt mérnek: a maximális feszültség — a mérésátlár — megfelel a mérőeszköz ellenállásán megjelölt maximális teljesítménynek.

Vizsgáljuk meg most a következő kérdést. Tegyük fel, hogy van egy R_m ellenállású és U_m mérésátlarú voltmérőnk. Hogyan oldható meg, hogy ezzel a műszerrel U_m -nél nagyobb feszültséget mérjünk?

A megoldás hasonló ahhoz, amit az áramerősséget mérő műszerek mérésátlarának a kiterjesztésével kapcsolatban az előbb láttunk (1.117. ábra). Tegyük fel, hogy két pont között U feszültséget akarunk mérni, és ez nagyobb, mint U_m . Válasszuk szét az U feszültséget két részre: egyik része a műszer R_m ellenállására esik, másik része a műszer ellenállásával sorba



1.117. ábra

kötött ellenállásra. Ezt *előtét-ellenállás*nak nevezzük, és R_e -vel jelöljük.

A feszültség út menti additivitása miatt (másképpen Kirchoff második törvénye alapján):

$$U = U_m + U_e,$$

ahol U_e az előtét-ellenállásra jutó feszültség. Magától értetődik az is, hogy a két ellenálláson átfolyó áram megegyezik: a töltésmegmaradást fejezi ki az

$$\frac{U_m}{R_m} = \frac{U_s}{R_e}$$

egyenlőség.

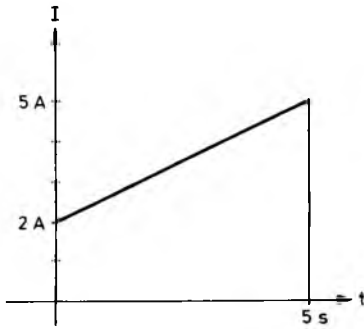
E két összefüggés alapján

$$U = U_m \left(1 + \frac{R_e}{R_m} \right).$$

Ha például a mérésátlárt 10-szeresére kívánjuk kiterjeszteni, akkor $R_e = 9 R_m$, vagyis a műszer ellenállásánál 9-szer nagyobb előtét-ellenállást kell alkalmaznunk védőellenállásként. Az előtét-ellenállás nagyobb, mint a műszer ellenállása.

XVIII. Feladatcsoport: egyenáram

XVIII/1. Egy vezető keresztmetszetén a 0 és t időpont között összesen $Q(t) = t^2 + t$ coulomb töltés haladt át. Mekkora az áramerősség a $t_0 = 1,2$ s időpontban?



1.118. ábra

XVIII/2. Az 1.118. ábrán egy hengeres vezetében folyó áram erősségét ábrázoltuk az idő függvényében. Az áramerősség 5 másodperc alatt 2 A-ról 5 A-re nő egyenletesen. Mennyi töltés áramlott át a vezető keresztmetszetén 5 másodperc alatt?

XVIII/3. Egy 5 mm^2 keresztmetszetű acéldrótban 40 A erősségű áram folyik. Mekkora az elektromos térerősség a vezeték belsejében? (Az acél fajlagos ellenállása $10^{-6} \Omega \text{ m}$.)

XVIII/4. Egy vas- és egy rézvezetékot sorba kapcsolunk. (A vas fajlagos ellenállása $10^{-6} \Omega \text{ m}$, a réz $1,78 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$.) A két vezeték egyaránt $1,2 \text{ cm}^2$ keresztmetszetű. Áramforrásra kapcsoljuk, 20 A erősségű áram folyik a két vezetékben. Határozzuk meg a vezetékben az elektromos fluxust és a térerősséget!

XVIII/5. Egy $l = 1 \text{ m}$ hosszú, $A = 2 \text{ mm}^2$ keresztmetszetű rézvezetékben 1 A erősségű áram folyik. Mekkora az elektromos térerősség a vezeték belsejében? Hány erővonal halad a vezetékben? Mekkora a vezeték két vége között a potenciálkülönbség?

XVIII/6. Egy 4 m hosszú, 1 mm^2 keresztmetszetű acélhuzalban áram folyik a D pont felől az O pont felé (1.119. ábra). Az áramerősség 1,2 A. Mekkora az A, B,

C, D pontok potenciálja, ha az O pont potenciálja nulla?

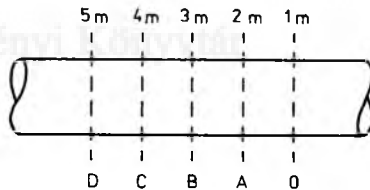
XVIII/7. Egy 1 dm^2 felületű síklemezpár közé 0,1 mm vastag papírlapot helyezünk. A papír fajlagos ellenállása $10^5 \Omega \text{ m}$. A lemezekre 1000 V feszültséget kapcsolunk. Mekkora áram szivárog át a papírlapon? Mekkora az áramsűrűség?

XVIII/8. a) Hányszorosára nő egy 2 mm^2 keresztmetszetű huzal ellenállása, ha 1 mm^2 keresztmetszetre nyújtjuk?

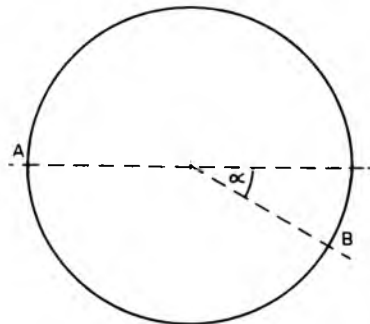
b) Hányszorosára nő egy 2 mm átmérőjű vezeték ellenállása, ha 1 mm vastagságúra nyújtjuk?

XVIII/9. Egy 80Ω ellenállású vezetőt 4 egyenlő részre vágunk, majd ezeket párhuzamosan kapcsoljuk. Mekkora az eredő ellenállás?

XVIII/10. Egy kör ellenállása 36Ω . (1.120. ábra). A kerületi A pont rögzített, a B pont csúsztható a kör kerületén. Mekkora az eredő ellenállás, ha $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$?



1.119. ábra



1.120. ábra

XVIII/11. Egy ellenállás két vége között 2 V a feszültség. Az ellenálláson 1,5 A folyik 10 percen keresztül. Mekkora az elektromos munka ez idő alatt?

XVIII/12. Egy háztartásban tíz 100 W-os, négy 60 W-os, két 25 W-os fogyasztó működhet egyszerre. A hálózati feszültség 220 V. Mekkora biztosítékot kell alkalmazni a hálózat védelmére?

XVIII/13. Párhuzamosan kapcsolunk egy 2700 Ω -os, 3 W és egy 5000 Ω -os, 2 W névleges teljesítményű ellenállást. Mekkora áram folyhat át a rendszeren?

XVIII/14. Két 10 W teherbírású ellenállást sorba kötünk. Az egyik 100 Ω , a másik 200 Ω ellenállású. Mekkora maximális feszültség kapcsolható a rendszerre? A maximális feszültség alkalmazása esetén mekkora a leadott teljesítmény?

XVIII/15. Egy 100 W-os (220 V-ra tervezett) izzólámpát 110 V-ra kapcsolunk. Mekkora teljesítményt ad le az elektromos tér az izzón?

XVIII/16. Egy 220 V-ra készült, 200 W teljesítményű fogyasztón a feszültség 5 százalékkal ingadozik. Hány százalékkal ingadozik a teljesítmény?

XVIII/17. Egy kémiai áramforrás elektrodái között 12 V feszültség alakul ki, ha a telep sarkait nem kötjük össze. Ha a telep sarkait elhanyagolható ellenállású vezetékkel kapcsoljuk egymáshoz, akkor 16 A áram folyik ezen a vezetéken. Mekkora áram folyik a telepen, ha a sarkokat 10 Ω ellenállású vezetékkel kötjük össze? Mekkora ebben az esetben a kapocsfeszültség?

XVIII/18. Határozzuk meg az áramforrás elektromotoros erejét, ha 50 Ω ellenálláson 18 V feszültség jelenik meg, és a belső ellenállása 1 Ω !

XVIII/19. Egy 3 V elektromotoros erejű telepre 1,8 Ω ellenállású fogyasztón 1,25 A erősségű áram folyik. Mekkora a telep bel-

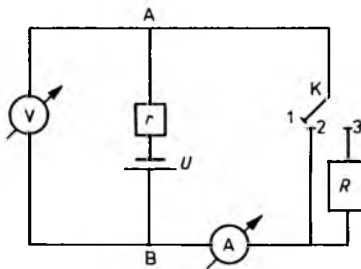
ső ellenállása? Mekkora a telep teljesítménye? Mekkora a teljesítmény a külső ellenálláson? Határozzuk meg a telep hatásfokát!

XVIII/20. Egy áramforrás 5 ohmos külső ellenálláson 1 A, a 7 ohmos fogyasztón 0,8 A erősségű áramot hajt át. Mekkora a telep elektromotoros ereje és belső ellenállása?

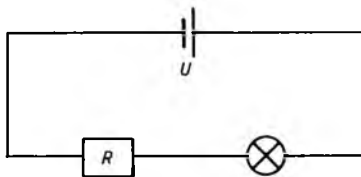
XVIII/21. Egy telep kapocsfeszültsége 90 V, ha 1 A erősségű áram folyik rajta, 2 A erősségű áram esetén a kapocsfeszültség 60 V. Mekkora az elektromotoros erő és a belső ellenállás? Mekkora a kapocsfeszültség, ha 10 Ω ellenállást kapcsolunk az áramforrásra?

XVIII/22. Az 1.121. ábrán látható műszerek ideálisak. A „voltmérő” az A és a B pontok közötti feszültséget méri, az $U=9$ V elektromos erejű, $r=0,5$ Ω belső ellenállású telep működését azonban nem befolyásolja. Az áramerősség-mérő is csak az áramerősség megjelenítésére szolgál, ellenállása nincs. Mit mutatnak ezek a műszerek a kapcsoló 1., 2. és 3. állásában?

XVIII/23. Az 1.122. ábrán szokásos mó-



1.121. ábra



1.122. ábra

don átlósan áthúzott körrel jelöltünk egy izzólámpát. A foglatán ez olvasható: 50 W, 12 V. Az izzóval sorba kapcsolunk egy ismeretlen R ellenállást. A telep kapocsfeszültsége 20 V. (Belső ellenállása elhanyagolható.) Határozzuk meg R -et, ha az izzóra éppen a névleges feszültség jut!

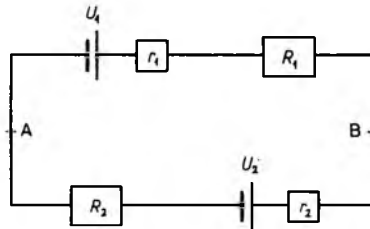
XVIII/24. Egy 12 volt elektromotoros erejű és 3Ω belső ellenállású telepre $2,5 \Omega$ ellenállású fogyasztót kapcsolunk. Ugyanezt a teljesítményt szeretnénk elérni takarékosabban. Lehetséges ez? Mekkora a teljesítmény és a teljesítményvesztés?

XVIII/25. Az $R_1 = 2 \Omega$ és az $R_2 = 8 \Omega$ ellenállásokat akár sorosan kötve, akár párhuzamosan kapcsolva az eredő ellenállásokon a telep teljesítménye ugyanaz. Mekkora a belső ellenállás? Mekkora a hatásfok az egyik és a másik esetben?

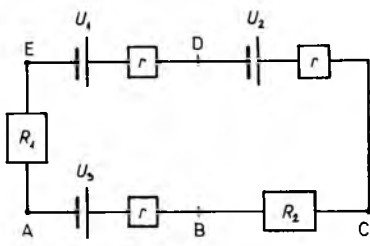
XVIII/26. Az 1.123. ábrán látható áramkörben két telep és két ellenállás található. Az egyik telep $U_1 = 12 \text{ V}$ elektromotoros erejű, $r_1 = 2 \Omega$ belső ellenállású, a második telep elektromotoros ereje $U_2 = 4 \text{ V}$, a belső ellenállása $r_2 = 1 \Omega$, A két külső ellenállás: $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 7 \Omega$. Határozzuk meg az áramkörben az áram nagyságát és irányát! Mekkora a feszültség az ábrán látható A és B pontok között? Határozzuk meg a két telep kapocsfeszültségét!

XVIII/27. Az 1.124. ábrán látható áramkörben három telep van: $U_1 = 10 \text{ V}$, $U_2 = 8 \text{ V}$, $U_3 = 6 \text{ V}$. Mindhárom telep belső ellenállása $r = 1 \Omega$. Az áramkörben található ellenállások: $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$. Határozzuk meg az áramkörben folyó áram nagyságát és irányát! Mekkora a feszültség az ábrán látható A pont és a B, C, D, E pontok között?

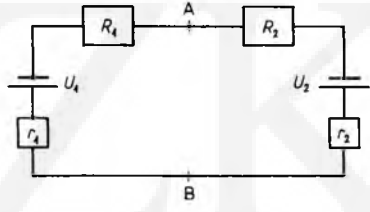
XVIII/28. Az 1.125. ábrán látható áramkörben két telep van. Az egyik $U_1 = 5 \text{ V}$ elektromotoros erejű, $r_1 = 1 \Omega$ belső ellenállású, a másik $U_2 = 10 \text{ V}$



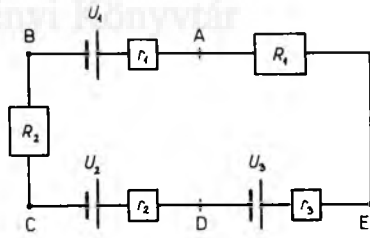
1.123. ábra



1.124. ábra



1.125. ábra

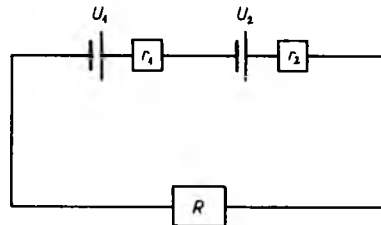


1.126. ábra

elektromotoros erejű, ennek $r_2 = 2 \Omega$ a belső ellenállása. A két ellenállás: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$. Kijelöltük az áramkör két pontját, jelöljük ezeket A-val és B-vel. Mekkora a feszültség az A és a B pontok között?

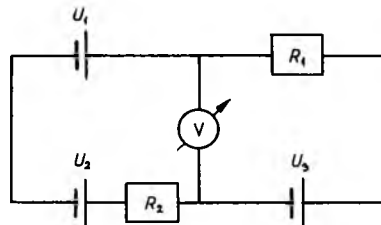
XVIII/29. Az 1.126. ábrán látható áramkörben három telep van. Az első telep

belső feszültsége: $U_1 = 6 \text{ V}$, belső ellenállása: $r_1 = 2 \Omega$, a második telep belső feszültsége és belső ellenállása: $U_2 = 2 \text{ V}$, $r_2 = 1 \Omega$. A harmadik telep belső feszültsége és polaritása ismeretlen, belső ellenállása: $r_3 = 2 \Omega$. Az áramkörben még két ellenállás van: $R_1 = 7 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$. Az első telep kapcsolófeszültsége (az U_{AB} feszültségesés) 5 V . Határozzuk meg a harmadik telep belső feszültségét és polaritását! Mekkora a feszültség a C és D, valamint a D és E pontok között!



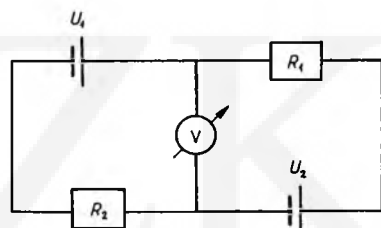
1.127. ábra

XVIII/30. Az 1.127. ábrán látható áramkörben a két telep paraméterei: $U_1 = 2 \text{ V}$, $r_1 = 1 \Omega$, $U_2 = 1 \text{ V}$, $r_2 = 2 \Omega$. Az áramkörben a két telep mellett egy $R = 3 \Omega$ -os ellenállású fogyasztó van. Határozzuk meg a két telep kapcsolófeszültségét! Mekkora a két telep teljesítménye? Mekkora az R ellenállásra jutó teljesítmény? Mekkora a két telepből álló rendszer hatásfoka? Hogyan változik a rendszer hatásfoka, ha a második telepet eltávolítjuk?



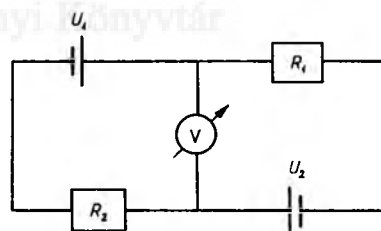
1.128. ábra

XVIII/31. Az 1.128. ábrán látható áramkörben $U_1 = 10 \text{ V}$, $U_2 = 30 \text{ V}$, $U_3 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$. A telepek belső ellenállása elhanyagolható. A feszültségmérő ellenállása olyan nagy, hogy a műszeren átfolyó áram elhanyagolható. Mekkora feszültséget mutat a műszer?



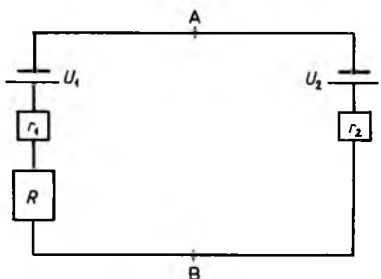
1.129. ábra

XVIII/32. Az 1.129. ábrán látható két telep belső feszültsége: $U_1 = 10 \text{ V}$, illetve $U_2 = 40 \text{ V}$. A belső ellenállásuk nulla. $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$. A feszültségmérő műszer ellenállása végtelen nagyra tekinthető. Mekkora feszültséget mutat a voltmérő?



1.130. ábra

XVIII/33. Az 1.130. ábrán látható áramkörben az elhanyagolható belső ellenállású telepek belső feszültsége: $U_1 = 2 \text{ V}$, $U_2 = 5 \text{ V}$. Az áramkörben látható két ellenállás: $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 8 \Omega$. A feszültségmérő



1.131. ábra

ellenállása igen nagy. Mekkora feszültséget mutat ez a voltmérő?

XVIII/34. Az 1.131. ábrán látható áramkörben két szembe kapcsolt telep szerepel. Az első $U_1 = 18 \text{ V}$ elektromotoros erejű, $r_1 = 1 \text{ } \Omega$ belső ellenállású, a második $U_2 = 30 \text{ V}$ elektromotoros erejű és $r_2 = 2 \text{ } \Omega$ belső ellenállású. Az áramkörben látható ellenállás $R = 3 \text{ } \Omega$ -os. Mekkora feszültség mérhető ezen az ellenálláson? Mennyi töltés halmozódna fel egy $10 \text{ } \mu\text{F}$ -os kondenzátoron, ha ezt az ábrán bejelölt A és B pontok közé kapcsolnánk?

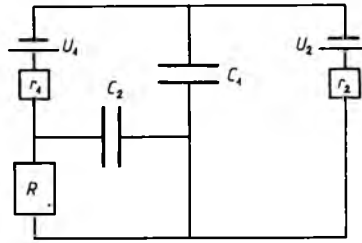
XVIII/35. Az 1.132. ábrán látható áramkörben a két telep paraméterei: $U_1 = 18 \text{ V}$, $r_1 = 1 \text{ } \Omega$, $U_2 = 30 \text{ V}$, $r_2 = 2 \text{ } \Omega$. Az áramkörbe iktatott ellenállás $R = 3 \text{ } \Omega$ nagyságú. Az ábrán látható módon két kondenzátort is bekötünk a körbe, a kapacitások: $C_1 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \text{ } \mu\text{F}$. Mennyi töltés halmozódik fel a kondenzátorok lemezein? Mekkora feszültség mérhető a $3 \text{ } \Omega$ -os ellenálláson?

XVIII/36. Az 1.133. ábrán látható hálózatban $U_1 = 18 \text{ V}$, $r_1 = 1 \text{ } \Omega$, $U_2 = 30 \text{ V}$, $r_2 = 2 \text{ } \Omega$, $R = 3 \text{ } \Omega$ és a három kondenzátor kapacitása: $C_1 = 1 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 5 \text{ } \mu\text{F}$. Mekkora töltéssel rendelkeznek a kondenzátorok?

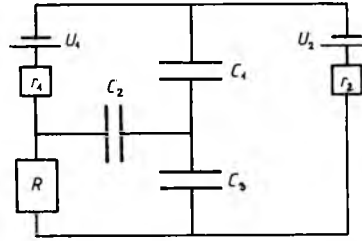
XVIII/37. Az 1.134. ábrán látható hálózatban $U_1 = 18 \text{ V}$, $r_1 = 1 \text{ } \Omega$, $U_2 = 30 \text{ V}$, $r_2 = 2 \text{ } \Omega$, $U_3 = 10 \text{ V}$, $r_3 = 1 \text{ } \Omega$, $R = 3 \text{ } \Omega$, $C_1 = 1 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \text{ } \mu\text{F}$. Mennyi töltés halmozódik fel a kondenzátorokon? Határozzuk meg a három telep kapocsfeszültségét!

XVIII/38. Az 1.135. ábrán látható hálózatban $U = 7 \text{ V}$, $r = 5 \text{ } \Omega$, $R_1 = 15 \text{ } \Omega$, $R_2 = 20 \text{ } \Omega$, $R_3 = 30 \text{ } \Omega$, $C_1 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 5 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 1 \text{ } \mu\text{F}$. Mennyi töltés halmozódik fel az egyes kondenzátorokban?

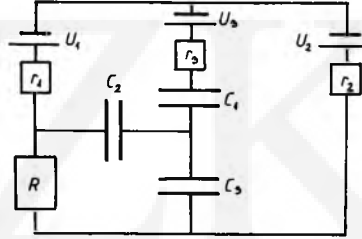
XVIII/39. Az 1.136. ábrán látható hálózatban $U = 24 \text{ V}$, $r = 5 \text{ } \Omega$, $R_1 = 5 \text{ } \Omega$,



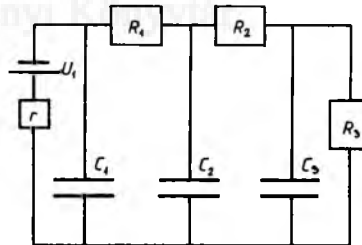
1.132. ábra



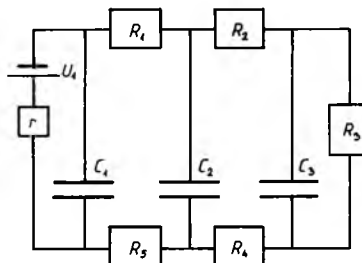
1.133. ábra



1.134. ábra



1.135. ábra



1.136. ábra

$R_2 = 15 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$,
 $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$. Mekkora
 töltéssel töltődnek fel a kondenzátorok?

XVIII/40. Az 1.137. ábrán látható telep
 10 V-os, a kondenzátorok kapacitása:
 $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$, $C_3 = 4 \mu\text{F}$. Határozzuk
 meg a kondenzátorlemezeken felhal-
 mozódó töltéseket!

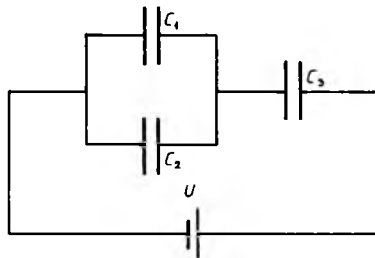
XVIII/41. Az 1.138. ábrán látható két
 telep kapocsfeszültsége: $U_1 = 10 \text{ V}$, illetve
 $U_2 = 12 \text{ V}$. A három kondenzátor kapaci-
 tása: $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$.
 Mennyi töltés halmozódik fel az egyes le-
 mezeken? Határozzuk meg a kondenzá-
 torok lemezei között kialakult feszültsé-
 get!

XVIII/42. Az 1.139. ábrán látható telep
 elektromotoros ereje: $U = 100 \text{ V}$, első
 ellenállása: $r = 100 \Omega$, a két ellenállás:
 $R_1 = 700 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$, a két kondenzátor
 kapacitása: $C_1 = 6 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$. Számít-
 suk ki a kondenzátorok lemezeinek tölté-
 sét!

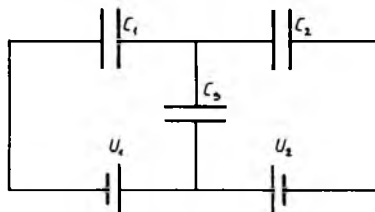
XVIII/43. Az 1.140. ábrán látható két
 kondenzátor kapacitása: $C_1 = 6 \mu\text{F}$, illetve
 $C_2 = 2 \mu\text{F}$. Az ellenállások: $R_1 = 100 \Omega$,
 $R_2 = 100 \Omega$, $R = 100 \Omega$. A telep elektromo-
 toros ereje 100 volt, belső ellenállása nulla.
 Számítsuk ki a kondenzátorlemezek tölté-
 sét!

XVIII/44. Az 1.141. ábrán látható telep
 belső feszültsége: $U = 100 \text{ V}$, belső ellenál-
 lása nulla. A két ellenállás: $R_1 = 800 \Omega$ és
 $R_2 = 200 \Omega$. A kondenzátorok kapacitása:
 $C_1 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = 5 \mu\text{F}$. Határozzuk meg,
 hogy mennyi töltés áramlik át a kapcsolón,
 ha zárásával összekötjük az A és a B pon-
 tot!

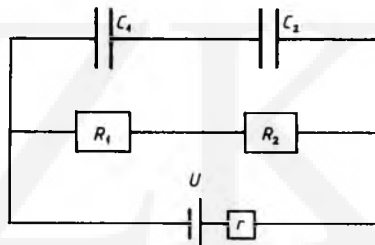
XVIII/45. Az 1.142. ábrán látható
 áramkörben $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$,
 a telep üresjárási feszültsége: $U = 42 \text{ V}$, bel-
 ső ellenállása: $r = 1 \Omega$. Határozzuk meg az
 egyes ágakban folyó áramot! Mekkora a



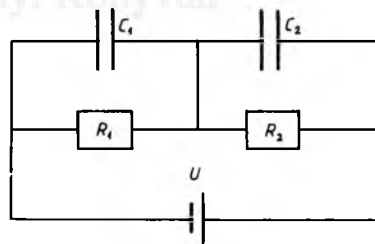
1.137.
 ábra



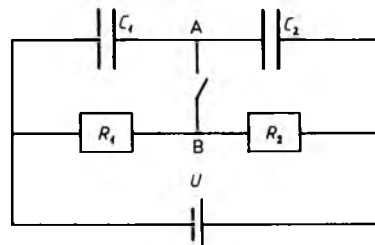
1.138.
 ábra



1.139.
 ábra



1.140.
 ábra



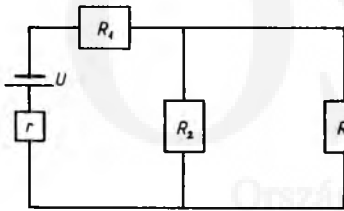
1.141.
 ábra

teljesítmény az egyes ellenállásokon? Mekkora az összes külső teljesítmény?

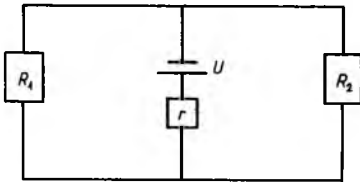
XVIII/46. Az 1.143. ábrán egy $U=10\text{ V}$ üresjárású feszültségű, $r=1\ \Omega$ belső ellenállású telep van a középső ágban. A két ellenállás $R_1=6\ \Omega$, $R_2=6\ \Omega$. Mekkora áram folyik az egyes ágakban?

XVIII/47. Az 1.144. ábrán látható hálózatban a két telep paraméterei: $U_1=6\text{ V}$, $r_1=2\ \Omega$, $U_2=8\text{ V}$, $r_2=2\ \Omega$, a középső ágban látható ellenállás $R=10\ \Omega$. Határozzuk meg az egyes ágakban folyó áram nagyságát!

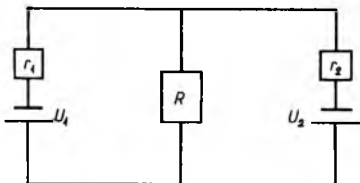
XVIII/48. Az 1.145. ábrán látható áramkörben egy ismeretlen üresjárású feszültségű, $r=1\ \Omega$ belső ellenállású telep mellett négy ellenállás látható: $R_1=1\ \Omega$, $R_2=4\ \Omega$, $R_3=8\ \Omega$, $R_4=2\ \Omega$. Ismert, hogy az R_3



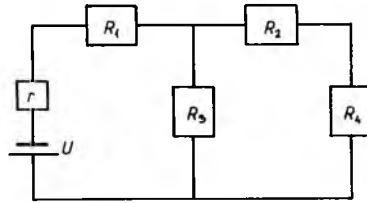
1.142. ábra



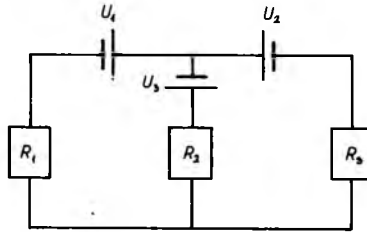
1.143. ábra



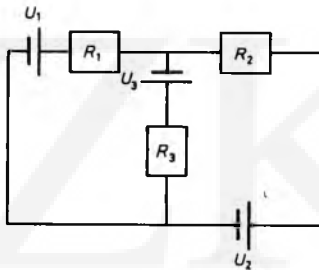
1.144. ábra



1.145. ábra



1.146. ábra



1.147. ábra

ellenállás által felvett teljesítmény 32 W . Határozzuk meg a telep ismeretlen üresjárású feszültségét!

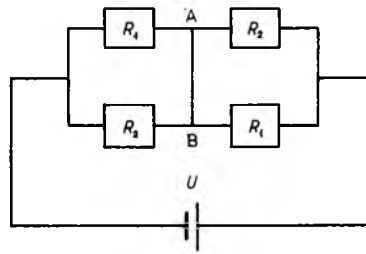
XVIII/49. Az 1.146. ábrán látható, két hurkot tartalmazó áramkörben három (elhanyagolható belső ellenállású) telep van: $U_1=2\text{ V}$, $U_2=5\text{ V}$, $U_3=4\text{ V}$. A három ágban egy-egy ellenállás van: $R_1=4\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=7\ \Omega$. Mekkora (és milyen irányú) áram folyik az egyes ágakban?

XVIII/50. Az 1.147. ábrán látható áramkörben $U_1=4\text{ V}$, $U_2=5\text{ V}$, $U_3=2\text{ V}$, $R_1=6\ \Omega$, $R_2=8\ \Omega$, $R_3=2\ \Omega$. Mekkora és milyen irányú áram folyik az egyes ágakban? Mekkora a három ellenállásra jutó teljesítmény?

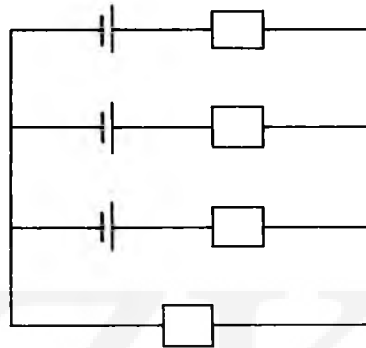
XVIII/51. Az 1.148. ábrán látható áramkörben $U_1 = 8 \text{ V}$, $U_2 = 9 \text{ V}$, $U_3 = 5 \text{ V}$, $R_1 = 4 \ \Omega$, $R_2 = 5 \ \Omega$, $R_3 = 6 \ \Omega$. Határozzuk meg az egyes ágakban folyó áramokat!

XVIII/52. Az 1.149. ábrán látható pozitív sarkakkal egymás felé fordított három telep belső ellenállása elhanyagolható, $U_1 = 6 \text{ V}$, $U_2 = 8 \text{ V}$, $U_3 = 5 \text{ V}$. A három ellenállás: $R_1 = 8 \ \Omega$, $R_2 = 10 \ \Omega$, $R_3 = 9 \ \Omega$. Határozzuk meg az ellenállásokra jutó feszültségeket!

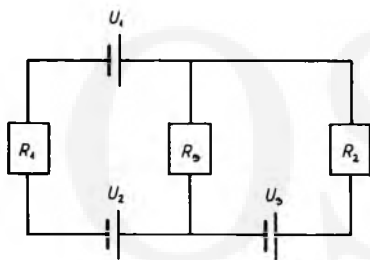
XVIII/53. Az 1.150. ábrán látható hálózatban egyetlen (100 voltos belső feszültségű, $r = 4 \ \Omega$ belső ellenállású) telep van. Az öt ellenállás nagysága: $R_1 = 1 \ \Omega$, $R_2 = 2 \ \Omega$,



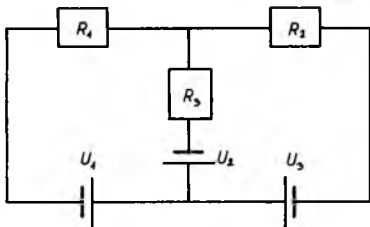
1.151. ábra



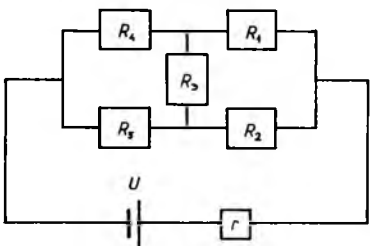
1.152. ábra



1.148. ábra



1.149. ábra



1.150. ábra

$R_3 = 5 \ \Omega$, $R_4 = 3 \ \Omega$, $R_5 = 4 \ \Omega$. Határozzuk meg az egyes ellenállásra jutó feszültséget!

XVIII/54. Egy áramkörben $U = 100 \text{ V}$ elektromotoros erejű, elhanyagolható belső ellenállású telep van. A telep mellett négy ellenállást látunk az 1.151. ábrán. Ezek közül kettő-kettő megegyezik, a nagyságuk: $R_1 = 20 \ \Omega$, $R_2 = 5 \ \Omega$. Mekkora áram folyik az A és B pontok között?

XVIII/55. Az 1.152. ábrán látható áramkörben mindegyik áramforrás 1,5 volt elektromotoros erejű, és a belső ellenállásuk $2 \ \Omega$. A külső ellenállás $6 \ \Omega$. Határozzuk meg a külső ellenálláson folyó áramot! Mekkora a telepek teljesítménye és a külső ellenállásra jutó teljesítmény? Határozzuk meg a három telepből álló rendszer hatásfokát!

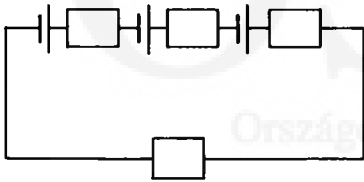
XVIII/56. Az 1.153. ábrán látható áramkörben az áramforrások elektromotoros ereje $1,5 \text{ V}$, belső ellenállásuk $2 \ \Omega$. A

külső ellenállás 6Ω . Határozzuk meg a 6Ω -os ellenálláson átfolyó áramot! Mekkora a telepek teljesítménye, és mekkora a külső ellenállásra jutó teljesítmény? Számítsuk ki a rendszer hatásfokát!

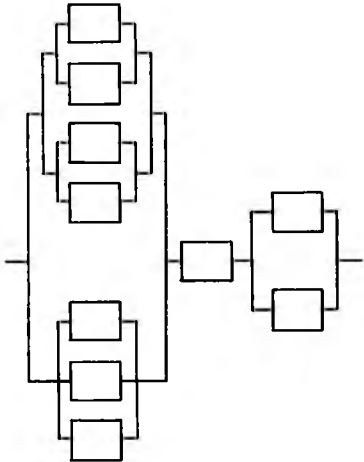
XVIII/57. Határozzuk meg az 1.154. ábrán látható rendszer eredő ellenállását! Tegyük fel, hogy mindegyik ellenállás 1Ω -os.

XVIII/58. Az 1.155. ábrán látható R ellenállás 8Ω nagyságú, a mellette helyet foglaló változtatható ellenállás a csúszka segítségével 2Ω és 10Ω közötti értéket vehet fel. Határozzuk meg az A és B közötti maximális és minimális ellenállást!

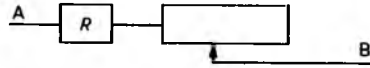
XVIII/59. Az 1.156. ábrán látható két, változtatható ellenállást egymáshoz sorosan kötöttük. A két ellenállás 1 és 10 ohm közötti értéket vehet fel, az egymástól függetlenül mozgatható csúszkákkal. Mekkora az eredő ellenállás az A és a B pontok között?



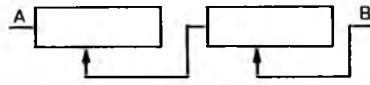
1.153. ábra



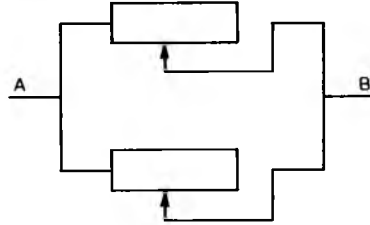
1.154. ábra



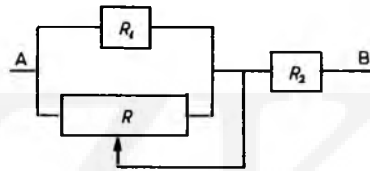
1.155. ábra



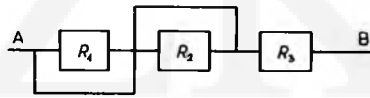
1.156. ábra



1.157. ábra



1.158. ábra



1.159. ábra

XVIII/60. Az 1.157. ábrán látható módon két, egyenként 1Ω és 10Ω között változtatható ellenállást párhuzamosan kapcsolunk. Határozzuk meg az A és B pontok közé eső eredő ellenállást!

XVIII/61. Határozzuk meg az 1.158. ábrán látható rendszerben az eredő ellenállást az A és B pontok között. Az R ellenállás 10Ω nagyságú, ezt a csúszka két részre osztja, 0Ω és 10Ω között minden érték beállítható! A két másik ellenállás: $R_1 = 10$, és $R_2 = 12$.

XVIII/62. Határozzuk meg az eredő ellenállást az 1.159. ábrán látható A és B pontok között! A három ellenállás: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$.

XVIII/63. Mekkora az eredő ellenállás egy huzalból készült kocka két szomszédos csúcsa között? Tegyük fel, hogy a kocka minden éle $1\ \Omega$ nagyságú!

XVIII/64. Egy huzalból készült kocka minden éle $1\ \Omega$ ellenállású. Számítsuk ki, hogy mekkora az eredő ellenállás egy lap-átló két végpontja között!

XVIII/65. Egy $5\ \text{V}$ méréshatárú, $1000\ \Omega$ ellenállású feszültségmérővel sorba kapcsolunk egy $9000\ \Omega$ -os előtét-ellenállást. Mekkora feszültséget mérhetünk a műszerrel?

XVIII/66. Egy $0,1\ \Omega$ ellenállású, $5\ \text{A}$ végkiterésű (méréshatárú) áramerősségmérő műszerrel párhuzamosan kötünk egy $0,02\ \Omega$ ellenállású söntésellenállást. Mekkora áramot mérhetünk most a műszerrel?

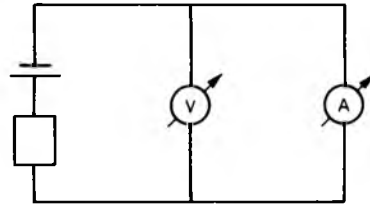
XVIII/67. Egy feszültségmérő méréshatára $5\ \text{V}$, ellenállása $1000\ \Omega$. Mekkora előtét-ellenállást kell sorbakapcsolnunk, hogy a méréshatárt $400\ \text{V}$ -ra kiterjesszük?

XVIII/68. Egy $0,1\ \Omega$ ellenállású áramerősségmérő méréshatára $2\ \text{A}$. Mekkora söntöt kell alkalmaznunk, hogy a méréshatárt kiterjesszük $10\ \text{A}$ -ra?

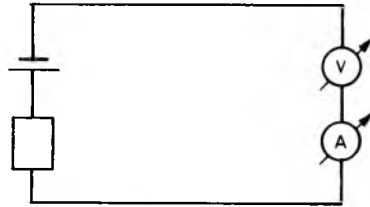
XVIII/69. Egy feszültségmérő $50\ \text{mV}$ végkiterésű, az ellenállása $20\ \text{k}\Omega$. Ezzel a műszerrel $60\ \text{V}$ -ot szeretnénk mérni. Mekkora védőellenállást kell alkalmaznunk? Mekkora feszültséget mérünk, ha a mutató $15\ \text{mV}$ -nak megfelelő beosztásnál állapodik meg?

XVIII/70. Egy áramerősségmérő végkiterése $10\ \text{mA}$, az ellenállása $0,01\ \Omega$. Mekkora védőellenállást kell alkalmaznunk, hogy a műszerrel $10\ \text{A}$ áramot mérhesünk? Mekkora áramot mérünk, ha a műszer mutatója a $4\ \text{mA}$ -es beosztáson áll meg?

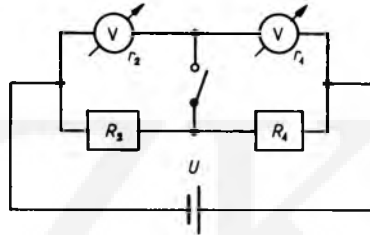
XVIII/71. Egy műszer ellenállása $1\ \Omega$. Ez az izzószálas műszer biztonságosan működik, ha az ellenállásra jutó elektro-



1.160. ábra



1.161. ábra



1.162. ábra

mos teljesítmény legfeljebb $10^{-4}\ \text{W}$. Mekkora feszültséget mérhetünk ezzel a műszerrel, ha voltmérőként használjuk? Hogyan módosul a méréshatár, ha $45\ \Omega$ -os előtét-ellenállást kötünk sorba a műszerrel?

XVIII/72. Egy műszer ellenállása $1\ \Omega$. Megbízhatóan működik, ha az ellenállásra jutó teljesítmény nem nagyobb, mint $10^{-4}\ \text{W}$. Mekkora áramerősséget mérhetünk ezzel a műszerrel, ha ampermérőként használjuk? Hogyan módosul a méréshatára, ha $0,1\ \Omega$ ellenállású söntöt alkalmazunk?

XVIII/73. Az 1.160. ábrán látható áramkörben a voltmérő $U = 1,2\ \text{V}$ feszültséget, az ampermérő $I = 0,012\ \text{A}$ erősségű áramot mér. Milyen értelmet tulajdoníthatunk az U/I aránynak?

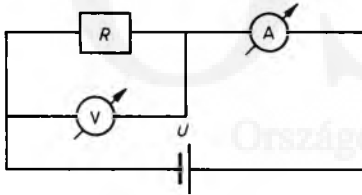
XVIII/74. Az 1.161. ábrán látható kap-

csolásban a voltmérő $U = 50 \text{ V}$ feszültséget, az ampermérő $I = 10^{-4} \text{ A}$ áramot mutat. Milyen jelentést tulajdoníthatunk az U/I aránynak?

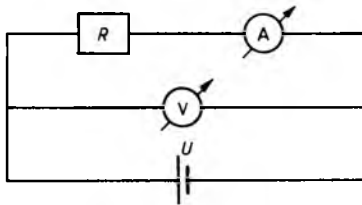
XVIII/75. Az 1.162. ábrán látható két feszültségmérő ellenállása: $r_1 = 4000 \Omega$ és $r_2 = 6000 \Omega$. A két ellenállás: $R_1 = 300 \Omega$, $R_2 = 700 \Omega$. A telep belső ellenállása elhanyagolható, a feszültsége 100 V . Mit mutat a két műszer a kapcsoló nyitott és zárt állásában?

XVIII/76. Egy 10Ω nagyságú ellenállást 5 V feszültségű, elhanyagolható belső ellenállású áramforrásra kapcsolunk. Mit olvashatunk le az 1.163. ábrán látható, 2Ω ellenállású árammérőről és a 100Ω ellenállású feszültségmérőről?

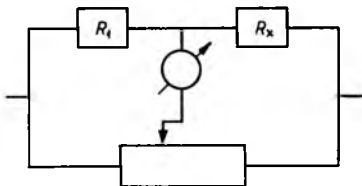
XVIII/77. Egy 10Ω nagyságú ellenállást 5 V feszültségű, elhanyagolható belső ellenállású áramforrásra kapcsolunk. Mit mutat az 1.164. ábrán látható, 100Ω ellen-



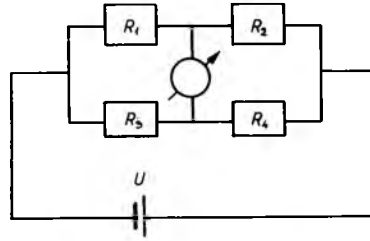
1.163. ábra



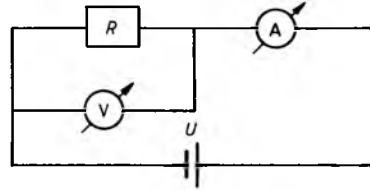
1.164. ábra



1.165. ábra



1.166. ábra



1.167. ábra

állású feszültségmérő és a 2Ω ellenállású árammérő?

XVIII/78. Az 1.165. ábrán látható egyik ellenállás ismeretlen nagyságú, a másik 10Ω nagyságú. A tolóellenállás egy 20 cm hosszú rúd. Ha a csúszka a bal oldali végétől 7 cm -re van, akkor a műszer mutatója a nulla beosztáson van. Határozzuk meg az ismeretlen ellenállás nagyságát!

XVIII/79. Az 1.166. ábrán látható, elhanyagolható belső ellenállású telep 120 V feszültségű. Az ellenállások: $R_1 = R_4 = 100 \Omega$, $R_2 = R_3 = 500 \Omega$. Mit mutat a műszer,

- ha feszültségmérő, végtelen nagy belső ellenállással?
- ha árammérő, elhanyagolható belső ellenállással?

XVIII/80. Az 1.167. ábrán látható árammérő belső ellenállása $1,8 \Omega$, a feszültségmérő ellenállása 100Ω . A telep belső ellenállása nulla, elektromos ereje ismeretlen. Az árammérő $0,25 \text{ A}$ -t, a feszültségmérő $2,5 \text{ V}$ feszültséget mutat. Mennyi volna az áramerősség, ha az R ellenállást műszerek nélkül kapcsolnánk az áramforrásra?

2. Mágnességtan

2.1. A mágneses tér

2.1.1. A mágneses térerősség

A gravitációs erő és az elektromos töltések között fellépő erő mellett fellépő harmadik „távolható erő” a mágneses erő. A mágneses alapjelenségek ősidők óta ismertek. Régi tapasztalat, hogy bizonyos fémtestek vagy vasércék néhány fémtestre vonzó vagy taszító erőhatást fejtenek ki. Azt is régen megfigyelték, hogy kis fémrudacsok — ha szabadon elfordulhatnak —, akkor északi—déli irányba állnak be.

Ezt az erőt nem lehet az elektromos töltés felhalmozódásával megmagyarázni. A mágneses erőhatás kifejtésére alkalmas testek fémes anyagúak, legtöbbször nagy vastartalmúak. Fémek felületén felhalmozódó töltéssel ez a jelenség nem értelmezhető.

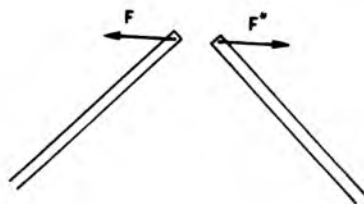
Azt mondjuk, hogy egy tárgy mágneses állapotban van, ha mágneses erő kifejtésre képes. Az úgynevezett állandó mágnesek mágneses állapota hosszú időn keresztül fennáll, csak olyan erőszakos hatásra veszítik el, mint például a magas hőmérsékletre izzítás.

Állandó mágnesek mellett a nem mágneses vastárgyak időlegesen mágnesesződnek, mágneses állapotba kerülnek mindaddig, amíg az állandó mágnes közelében

vannak. Előfordul azonban, hogy ez az időleges mágneses állapot állandósul. Ha a két testet egymástól eltávolítjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy a korábban nem mágneses test már mágneses tulajdonságot mutat, bár a megmaradt állandó mágneses állapot „gyengébb”, mint ugyanennek a testnek az időleges mágneses állapota.

A mágneses erőhatás kétféle: a mágneses állapotú testek között vonzó és taszító erő is felléphet. Azt tapasztaljuk, hogy ugyanolyan módon mágneses állapotúvá tett testek között taszító erő lép fel. Kétféle mágneses állapot van tehát, az azonos mágneses állapotú testek taszítják egymást, a különböző mágneses állapotú testek vonzzák egymást (2.1. ábra).

Kézenfekvő, hogy a mágneses állapotot is egy extenzív mennyiséggel jellemezzük, a mágneses töltéssel vagy más néven *mágneses póluserősséggel*. Jelöljük ezt a mennyi-



2.1.
ábra

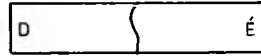
seget p -vel. A póluserősség skaláris mennyiség, de kétféle értéke lehet, annak megfelelően, hogy a mágneses állapot is kétféle. A *pozitív pólust* gyakran *északi pólusnak*, a *negatív póluserősségű pólust déli pólusnak* nevezzük. Az északi pólus vonzza a déli pólust, taszítja az északi pólust, a déli pólusok között is taszító erő lép fel. Az iránytűk északi pólusa a Föld északi pólusa felé mutat, ebből nyilvánvaló, hogy a Föld mágneses déli pólusa az Északi-sark közelében van (2.2. ábra).

Szembetűnő a párhuzam az elektromos alapjelenségek és a mágneses testek között fellépő jelenségek között.

Alapvető különbség van azonban a két rokon jelenségkör között.

Az elektromos töltések oszthatók és elválaszthatók egymástól. Ha megosztás miatt egy két részből álló fémtárgy egyik vége pozitív, a másik vége negatív töltésű lesz, akkor ezt a két részt szétválasztva a pozitív töltésű test eltávolítható a negatív töltésű testtől, a két töltés izolálható. Az elektromos dipólus „szétválasztható” monopólusokká.

Nem így van a mágneses pólusokkal. Ha egy mágneses rudat kettévágunk, akkor



2.3. ábra

nem egy kis északi és egy kis déli pólust kapunk külön-külön, hanem két új kis iránytűt, amelynek déli és északi pólusa is van. Hasonlóan: két egyforma állandó mágneses állapotú acélrúd közül az egyik északi pólusát a másik déli pólusa közelébe helyezük. Ezek vonzzák egymást. Ha a két részt összeillesztjük, akkor az így kapott hosszú mágneses rúd közepe már nem mágneses, és az egész úgy viselkedik, mint egy megkétszerezett hosszúságú mágnesrúd (2.3. ábra).

Mágneses pólusok tehát nem izolálhatók, önállóan nem léteznek. Mágneses monopólusok mindig csak dipólusok részeként foghatók fel.

Ezért, ha egy test mágneses déli pólusa és egy másik test mágneses északi pólusa közötti erőhatást vizsgáljuk, akkor ezek az erők nem mérhetők jól. A két test másik két pólusának a hatását ugyanis nem tudjuk teljesen kiküszöbölni. A mágneses hatások érzékelésére ezért két út jöhet szóba.

Az egyik az, hogy a mágneses pólusok között ható erőket olyan mágneses rudak segítségével tanulmányozzuk, amelyek olyan hosszúak, hogy a távoli pólusok között fellépő erő elhanyagolható legyen. Ez a felfogás vezet el az úgynevezett mágneses Coulomb-törvényhez.

A másik felfogás az, hogy igen rövid mágneses rudacskákra ható forgatónyomatékokat mérjük, és ezzel jellemezzük a tér különböző pontjaiban a mágneses hatást.

A két módszert egymással kiegészítve használjuk. Kiemeljük még egyszer, hogy



2.2. ábra

mágneses monopólus a valóságban *nincs*. Csak a mágneses dipólus egyik fele, amelyet elvileg sem választhatunk ketté. A mágneses pólus fogalmához az elemi tapasztalatokon keresztül jutunk, mint fenomenológiai fogalmat vezetjük be és csak addig használjuk, amíg a használata a fogalomalkotás munkájában segítségünkre lesz.

A *mágneses Coulomb-törvény*: Igen hosszú vékony mágneses rudak két egymáshoz közeli vége között a póluserősségek szorzatával arányos, a pólusok közötti távolság négyzetével fordítottan arányos erőt mérhetünk (2.4. ábra):

$$F \sim \frac{p_1 p_2}{r^2}.$$

Az arányossági tényezőt jelöljük átmenetileg k' -vel, értéke legyen $10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$. Így tehát a mágneses Coulomb-törvény:

$$F = k' \frac{p_1 p_2}{r^2}.$$

Az elektromos Coulomb-törvényben és a mágneses párjában szereplő arányossági tényezők aránya:

$$\frac{k}{k'} = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2}{10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2} = 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

A két együttható hányadosa tehát egy sebességnégyzet dimenziójú mennyiség. A $\sqrt{k/k'}$ mennyiséget jelöljük c -vel. A c se-

bességdimenziójú mennyiség értéke

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1)$$

A mágneses Coulomb-törvényt ezután az

$$F = \frac{k}{c^2} \frac{p_1 p_2}{r^2} \quad (2)$$

formában használjuk.

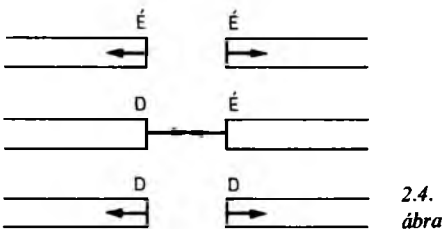
Térjünk most rá a *póluserősség mértékegységének* a meghatározására. A (2) egyenlőségből egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$[p] = C \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A póluserősség mértékegysége tehát az elektromos töltés mértékegységének és a sebesség mértékegységének a szorzata.

Felvetődhet az Olvasóban a kérdés, hogy miképpen került most a gondolatmenetünkbe a sebesség. Idegennek tűnik itt, nem látjuk a szerepét. Egyelőre nem is látszik. Most még csak arról van szó, hogy a mágneses Coulomb-törvényben szereplő arányossági tényezőt önkényesen $10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$ -nek választottuk. Ebből az önkényes választásból adódik k és k' fenti aránya és a póluserősség mértékegysége is. (Ha a k' mértékegysége nem $\text{N s}^2/\text{C}^2$ lenne, hanem úgy döntenénk, hogy legyen N/C^2 , akkor a póluserősség mértékegységeként a $C \text{ m-t}$ használnánk.)

A mágneses testek csak ritkán hasonlítanak egy hosszú kötötűhöz. Szabálytalan alakú vastárgyakat is lehet mágnesezni. Előfordul olyan eset is — például az Ural hegységben —, hogy egy hegy hatalmas mágnesként viselkedik a nagy mágneses vastartalma miatt. A Föld is egy óriási mágnes; mint már említettük, a pozitív — északi — pólusa a földrajzi déli sark közelében, a déli pólus az Északi-sark kö-



zelében található. Ezért mutat az iránytű északi pólusa észak felé.

Az ilyen kiterjedt testek esetén a mágneses Coulomb-törvény (2) alatti formája nem alkalmas arra, hogy a kifejtett mágneses erők nagyságát és irányát meghatározzuk. A mágneses Coulomb-törvény általánosítását tűzzük ki célul.

A mágneses testek környezetében a tér pontjait a következőképpen jellemezzük. Egy igen hosszú, vékony mágneses rúd északi pólusát a tér egy pontjába helyezzük, és megmérjük az északi pólusra ható erőt. Ez az erő arányos a rúd északi pólusának a póluserősségével. Az arányossági tényezőt B -vel jelöljük, és *mágneses térerősségnek*^(*) (vagy *mágneses indukciónak*) nevezzük. Tehát

$$\boxed{F = Bp} \quad (3)$$

A mágneses térerősség mértékegysége:

$$[B] = \frac{[F]}{[p]} = \frac{N}{C \text{ m/s}} = \frac{N \text{ m s}}{C \text{ m}^2} = \frac{V \text{ s}}{\text{m}^2},$$

ezt *teslának* nevezik és T-vel jelölik: $1 \text{ T} = 1 \text{ V s/m}^2$.

Figyeljünk fel arra, hogy a (3) egyenlőség valóban a mágneses Coulomb-törvény általánosítása: egy P erősségű pólustól r távolságra a mágneses tér erőssége:

$$B = \frac{k}{c^2} \frac{P}{r^2} \quad (4)$$

^(*) A mágnesség elméletének több mint száz éves tévedése folytán valami mást neveztek mágneses térerősségnek, nem ezt a mennyiséget, amelynek a „hivatalos” neve: mágneses indukció. Itt B -t következetesen térerősségnek nevezzük. Helyenként, zárójelbe téve az indukció szót is kiírjuk, hogy az Olvasó más könyvekkel való kapcsolatát megkönnyítsük.

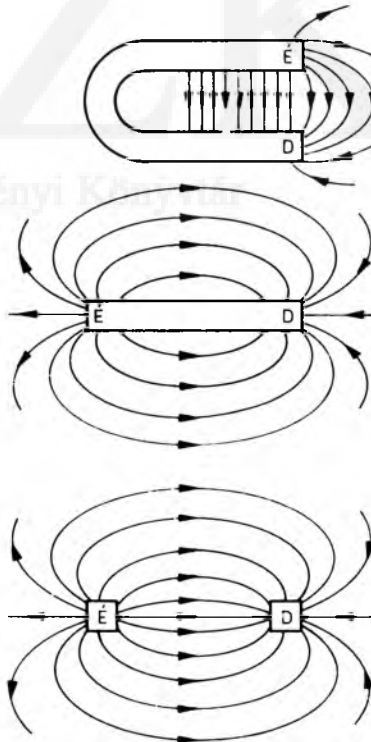
nagyságú. Ekkor a p erősségű mágneses pólusra

$$F = Bp = \frac{k}{c^2} \frac{Pp}{r^2}$$

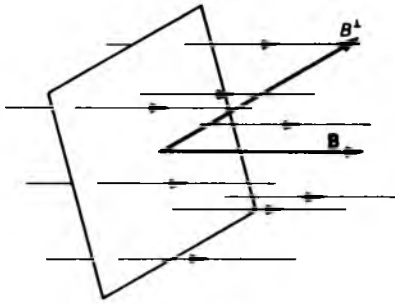
mágneses erő hat.

A mágneses térerősség (indukció) az elektromos térerősségnek megfelelő mennyiség; ugyanúgy, ahogy az elektromos térerősség az elektromos teret pontonként jellemzi: a tér különböző pontjaihoz hozzárendeljük az egységnyi erősségű északi pólusra ható mágneses erőt.

A mágneses teret is szemléltethetjük erővonalakkal. A *mágneses erővonalak* irányított térbeli görbék, amelyek érintői a mágneses térerősség-vektorok. A mágneses teret létrehozó északi pólusból indulnak ki, és a déli póluson végződnek. A 2.5. ábrán



2.5. ábra



2.6.
ábra

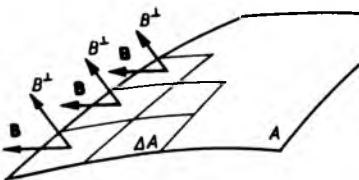
néhány mágneses test környezetében ábrázoltuk a mágneses erővonalakat. Ilyen képet akkor kapunk, ha a mágnes fölé helyezett üveglapra vasreszeléket szórunk. A parányi vasforgácsrészek az ábrán látható minta szerint helyezkednek el.

Úgy képzeljük, hogy egységnyi felületen annyi mágneses erővonal halad át, mint amekkora a felület középpontjában a B felületre merőleges összetevőjének a nagysága (2.6. ábra).

A *mágneses fluxust*, amit általában Φ -vel jelölünk, a következőképpen értelmezzük. Tegyük fel, hogy adott egy A felület. Osszuk fel ezt ΔA nagyságú felületelemekre. Minden egyes ilyen felületelem nagyságát szorozzuk meg a mágneses indukció felületre merőleges összetevőjével és összegezzük az így kapott szorzatokat:

$$\Phi = \sum B^{\perp} \Delta A. \quad (5)$$

Szemléletes jelentése: a felületet dőfő erővonalak száma (2.7. ábra).



2.7.
ábra

A mágneses fluxus *mértékegysége* a Vs , amit *wébernek* nevezünk és Wb -vel jelölünk: $1 Wb = 1 Vs$.

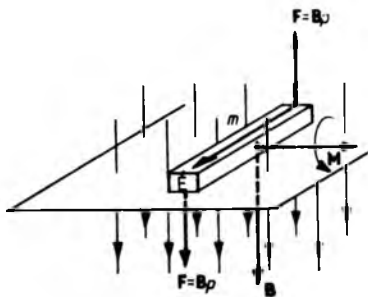
A mágneses tér legfontosabb mennyiségeit értelmeztük. Mi a mágneses pólus létezéséből indultunk ki, a pólus fogalma, úgy gondoljuk, hogy a mindennapi fogalmainkhoz, tapasztalatunkhoz közelebb, és az emberiség valóban igen régen ismeri. Tudjuk azonban, hogy a mágneses monopólus csak absztrakció, a pólusok mindig dipólusokban jelennek meg, és egymástól elválaszthatatlanok. Munkaeszköznek tekintjük, olyan mennyiségnek, amely szemléletesen adottnak tekinthető, és segítségével értelmezhető a mágnességtan igazán alapvető fogalmai. Alapvető jelentőséggel a mágneses térerősség (indukció) fogalma bír.

A mágneses tér erősségét úgy értelmeztük, mint az egységnyi erősségű pozitív — északi — pólusra ható mágneses erő. De éppen azért, mert csak dipólusok léteznek, közvetlenül a definícióra támaszkodva nehézkes a tér erősségének a meghatározása. A megoldás a következő: hosszú iránytűk végére ható erők mérése helyett térjünk át rövid iránytűkre ható forgatónyomatékok mérésére. Ha az iránytű kicsi — olyan kicsi, hogy környezetében a mágneses tér homogénnek tekinthető —, akkor az iránytűre ható forgatónyomatékból meghatározhatjuk a mágneses indukció értékét.

Tegyük fel tehát, hogy adott egy l hosszúságú kis mágneses tű, a pólusainak az erősségét jelöljük p -vel. Irányítsunk egy l hosszúságú vektort az iránytű déli pólusából az északi pólusába (2.8. ábra). Jelöljük ezt a vektort \mathbf{l} -lel. Ekkor az

$$\mathbf{m} = p\mathbf{l} \quad (6)$$

vektort *mágneses momentumnak* nevezzük.



2.8. ábra

A mágneses momentum az iránytű déli pólusa felől az északi pólus felé mutató vektor, nagysága arányos az iránytű hosszával és a pólusainak erősségével.

Helyezzünk egy $m = pl$ mágneses momentumú rudacskát B erősségű homogén mágneses térbe. Ekkor a 2.8. ábra szerint az iránytűre ható forgatónyomaték nagysága:

$$M = plB \sin \alpha, \quad (7)$$

ahol α az iránytű és a mágneses tér erővonalai által bezárt szög. Könnyen látható, hogy a forgatónyomaték vektori írásmóddal is felírható:

$$M = m \times B. \quad (8)$$

A (7) és (8) képletek jelentősége abban van, hogy a mágneses térerősség segítségével jól mérhető. Egyrészt az iránytűre ható maximális forgatónyomaték: $M_{\max} = plB$. Ebből az egyenlőségből a mágneses térerősség nagysága (B) kiszámítható. Másrészt a forgatónyomaték akkor maximális értékű, ha a mágneses rúd merőleges a tér erővonalaira, és nulla akkor, ha a rudacska párhuzamos a tér irányával. Ebből a mágneses térerősség iránya is meghatározható.

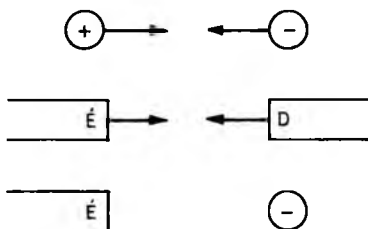
2.1.2. A mágneses pólus és az elektromos töltés kölcsönhatása

Az előző pontban a mágneses alapjelenségeket írtuk le, a mágnességtan vizsgálatához szükséges legalapvetőbb mennyiségeket értelmeztük.

Kiindulásunk alapja a mágneses Coulomb-törvény volt. Figyelemre méltó, hogy milyen szoros rokonság van a két jelenségkör törvényei között! Láttuk, hogyan hat egymásra két töltés, láttuk azt is, hogy milyen hatást fejt ki egymásra két pólus. A két jelenséget ugyanolyan erőttörvény írja le.

Természetes módon felvetődik a kérdés: hogyan hat egymásra egy mágneses pólus és egy elektromos töltés? A kérdés nem dönthető el elméleti alapon. Vizsgáljuk meg ezért a problémát közvetlenül: milyen választ ad a természet a kérdésre! Helyezzünk tehát egymás közelébe egy elektromos töltéssel rendelkező golyócskát és egy hosszú, mágnesezett kötőtű egyik végét. A köztük fellépő erőt könnyen megmérhetjük (2.9. ábra).

A közvetlen tapasztalat: semmiféle erő nem lép fel az egymás mellé helyezett mágneses pólus és elektromos töltés között. Meglepő jelenségre figyelünk fel azonban, ha a töltést elmozdítjuk a mágneses pólushoz képest: az iránytű most kilendül.



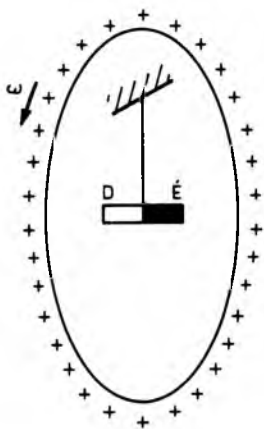
2.9. ábra

Egymáshoz képest mozgó elektromos töltéssel rendelkező test és mágnesezett fémtárgy között erőhatás lép fel.

Vizsgáljuk meg ennek az erőnek a természetét. A töltést állandó sebességgel kellene mozgatni az álló mágneses pólus mellett. Ez úgy oldható meg, hogy egy gumiból készült kerék kerületére elektromos töltést viszünk, egyenletes sűrűséggel. A kerék középebe egy kis iránytűt függesztünk fel. (Az iránytűre ható forgatónyomaték egyszerűbben mérhető mint a hosszú mágneses rúd végére ható erő.)

A kereket ω szögsebességgel forgatjuk. A peremére felhordott elektromos töltés állandó nagyságú sebességgel mozog az iránytű pólusaihoz képest. Valóban, azt tapasztaljuk, hogy a mágneses tű elfordul a függőleges szál körül. A rudacska merőlegesen helyezkedik el a kör síkjára (2.10. ábra).

Megfigyelhető, hogy ha jobb kezünk ujjai mutatnak a mozgó pozitív töltés irányába, tehát a forgás irányába, akkor a jobb kezünk hüvelykujja a stabilis helyzetbe került iránytű északi pólusának az irányával azonos. (Ez az elemi megfigyelés a



2.10. ábra

mágnességtanban előforduló különböző jobbkez-szabályok alapja.)

Azt is könnyen megállapíthatjuk, hogy az iránytűre ható forgatónyomaték maximuma arányos az iránytű m mágneses momentumával. Ha hosszabb iránytűt alkalmazunk vagy erősebbet, akkor a forgatónyomaték maximuma arányosan nagyobb. Másrészt a mágneses rudacsára ható forgatónyomaték arányos a kerék gumiból készült peremére felhalmozott töltés mennyiségével, és arányos a kerék szögsebességével. Fordítva arányos azonban a kör sugarával:

$$M \sim \frac{mQ\omega}{r}.$$

Az is a közvetlen tapasztalatból adódik, hogy az arányossági tényező megegyezik a mágneses Coulomb-törvényben szereplő k' -vel: $k' = k/c^2$. Azt kapjuk tehát, hogy

$$M = \frac{k}{c^2} \cdot \frac{mQ\omega}{r}. \quad (1)$$

Ezt az alapvető jelentőségű kísérletet Rowland-kísérletként ismerjük a mágnességtanban.

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen következtetések vonhatók le a Rowland-féle kísérlet eredményeként kapott összefüggésből.

Helyettesítsünk először is ω helyére v/r -et; ahol v a töltést hordozó kerületi pontok sebessége, tehát

$$M = \frac{k}{c^2} \frac{mQv}{r^2}.$$

Osszuk el most ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát m -mel, az iránytű mágneses momentumával. Ekkor a bal oldalon az iránytűre ható forgatónyomatékból az egységnyi pólusra ható erőt, a mágneses

térerősséget kapjuk:

$$B = \frac{k}{c^2} \frac{Qv}{r^2}. \quad (2)$$

A Rowland-féle kísérletben szereplő kerék gumi peremére felhalmozott töltés erőt fejt ki a mágneses pólusra. Ennek a fejezetnek az elején ismertük fel ezt a jelenséget, azonban most mennyiségi kapcsolatot is találtunk a pólusra ható erő, a töltés és a sebesség között.

Először szemléletesen, de pontatlanul, majd pontosabban is megfogalmazzuk állításunkat.

Vezessük be tehát a következő jelölést: $P := Qv$. Ekkor a (2) így írható:

$$B = \frac{k}{c^2} \frac{P}{r^2}.$$

Szembetűnő a hasonlóság az előző pont (4) képletével: a v sebességgel mozgó, Q töltéssel rendelkező részecske úgy viselkedik, mint egy $P := Qv$ erősségű mágneses pólus. *A mozgó töltés tehát környezetében mágneses teret hoz létre.*

Az okoskodás azonban így meglehetősen formális. A töltéssel ellátott forgó kerék mágneses hatása mágneses dipólusként vehető figyelembe. Később látni fogjuk, hogy a mozgó töltés adataival miként lehet a mágneses momentumot kifejezni.

Ki kell természetesen emelnünk, hogy ahogyan a mozgó elektromos töltés erőt fejt ki a mágneses pólusra, ugyanúgy a mágneses pólus is erőt fejt ki a mozgó elektromos töltésre. Newton III. törvénye értelmében ez a két erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú.

A hatás—ellenhatás elve gondolatmenetünk vezérfonala lesz. A mágnességtan legfontosabb eredményeihez eljutunk a következő, egymással összekapcsolt problémákból kiindulva:

— *Hogyan hat a mozgó töltés a mágneses pólusra — vagyis mozgó töltés milyen mágneses teret hoz létre?*

— *Miképpen hat a mágneses pólus a töltésre — vagyis a mágneses tér milyen erőt fejt ki a benne mozgó töltésre?*

2.1.3. Biot—Savart-törvény, Ampère-féle gerjesztési törvény

Ebben a pontban a mozgó töltés hatását vizsgáljuk mágneses pólusokra. Pontosabban azt a kérdést járjuk körbe, hogy a mozgó, elektromos töltéssel rendelkező testek milyen mágneses teret hoznak létre. A megoldás magva a Rowland-féle kísérlet eredménye: a forgó kerék gumiperemére egyenletesen felvitt, v sebességgel mozgó Q töltés mágneses dipólusként viselkedik. A kerék középpontjában a létrehozott mágneses térerősség

$$B = \frac{k}{c^2} \frac{Qv}{r^2} \quad (1)$$

nagyságú, iránya pedig merőleges a kör síkjára. Ha a kör síkjára merőlegesen nézünk és a forgás az óramutató járásával ellentétes irányú, akkor a kerék középpontjához tartozó \mathbf{B} vektor felénk mutat.

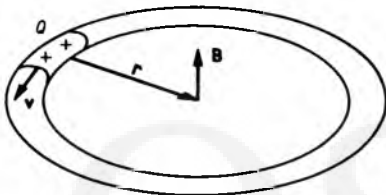
Ezt az eredményt szeretnénk általánosítani.

Gondoljuk meg először, hogy jogos feltenni: a mágneses erő szabaderő. Ez most azt jelenti, hogy a kerékre egyenletes sűrűséggel felvitt töltés minden kis része ugyanolyan módon járul hozzá a kör közepébe felfüggesztett mágneses rudacskára ható forgatónyomatékhoz. Ha a kört egyenletesen azonos nagyságú kis részekre osztjuk, akkor minden kis rész azonos súllyal vesz részt az eredő mágneses tér kialakításában: a v sebességgel mozgó elektromos

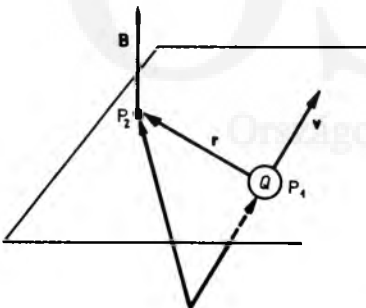
töltéssel mozgó pontok v -re, és a kör sugarára merőleges mágneses teret hoznak létre (2.11. ábra).

Tegyük fel most, hogy a P_1 pontban v sebességgel mozog egy Q pozitív töltésű pontszerű test. Adjunk meg egy másik pontot, jelöljük ezt P_2 -vel. A P_1 pontból a P_2 pontba mutató vektor legyen r (2.12. ábra).

A v sebességgel mozgó Q töltés a P_2 pontban mágneses teret hoz létre. Ennek a mágneses térnek az iránya merőleges a v és



2.11. ábra



2.12. ábra



2.13. ábra

az r vektorok síkjára. (Feltéve persze, hogy v és r nem párhuzamosak.) A töltés által keltett mágneses tér iránya — összhangban a Rowland-kísérlet eredményével — jobbkéz-szabállyal határozható meg. Ha jobb kezünk hüvelykujja mutatja a sebességvektor irányát, a mutatóujj az r vektor irányát, akkor a P_2 pontban a mágneses tér merőleges az előző két vektor síkjára és a jobb kezünk középső ujjja jelzi a B irányát (2.13. ábra).

A mozgó töltés által keltett mágneses tér erősségét kifejező összefüggés az (1) általánosítása:

$$B = \frac{k}{c^2} \frac{Qv}{r^2} \sin \alpha, \quad (2)$$

ahol α és v és az r vektor szöge.

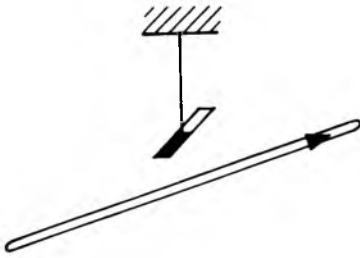
Összegezve: ha a P_1 pontban v sebességgel mozog egy pontszerű, Q töltésű test, akkor a P_2 pontban a mozgó töltés

$$\mathbf{B} = \frac{k}{c^2} \frac{Q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (3)$$

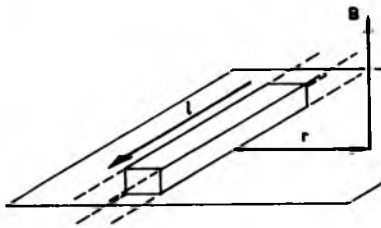
térerősségű mágneses teret hoz létre, ahol r a P_1 pontból a P_2 pontba mutató vektor. Ezt az állítást *Biot—Savart-törvénynek* nevezik.

A Biot—Savart-törvényben szereplő B vektor nagysága a (2) összefüggés jobb oldala. A (3) állításban azért szerepel a nevezőben az r vektor nagysága a harmadik hatványon, mert a vektoriális szorzat miatt a számlálóban is helyet kap r . Ha áttérünk a (3) abszolút értékére, akkor valóban (2)-t kapjuk.

A Biot—Savart-törvény arra a kérdésre ad választ, hogy a mozgó töltés a tér különböző pontjaiban milyen mágneses teret hoz létre. Ennek a törvénynek az intuitív alapját a Rowland-kísérlet eredménye adja. Végző soron — csak emlékeztetünk rá — onnan indultunk ki, hogy mozgó töltés



2.14.
ábra



2.15.
ábra

erőt fejt ki a mágneses pólusra, tehát mágneses teret hoz létre az iránytű pólusa közelében.

Természetes módon vetődik fel most az a kérdés, hogy miképpen alkalmazható ez a törvény vezetőben folyó áramra, az árammal szállított töltésre. Az elektromos áram töltésmozgást jelent, ezért várható, hogy az elektromos árammal átjárt vezető környezetében a mágneses iránytűkre forgatónyomaték hat. [Nevezetes kísérlet igazolta ezt: Oersted 1820-ban így ismerte fel az elektromosság és mágnesség kapcsolatát (2.14. ábra)].

Tekintsünk tehát egy I árammal átjárt vezetőt. Jelöljük ki a vezető egy Δl hosszúságú szakaszát. Ennek a szakasznak a kezdetétől — amerről az áram folyik — irányítsunk egy Δl vektort a vezetőszakasz vége felé. A Δl vektor iránya tehát megegyezik az áram irányával, hossza pedig Δl (2.15. ábra).

Ha ennek a vezetőknek a keresztmetszeten Q töltés áramlik át, és a Δl utat Δt idő alatt teszi meg, akkor egyrészt $I = Q/\Delta t$,

másrészt $v = \Delta l/\Delta t$. Ennek a felületes gondolatmenetnek az eredményeként azt kapjuk, hogy

$$Qv = I\Delta l. \quad (4)$$

A Biot—Savart-törvényben helyettesítsünk Qv helyére $I\Delta l$ -et:

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{k}{c^2} I \frac{\Delta l \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (5)$$

A Biot—Savart-törvény új formája ez: azt fejezik ki, hogy egy Δl hosszú, I árammal átjárt vezetődarab a tér egy másik helyén mekkora és milyen irányú mágneses teret hoz létre. Itt a Δl hosszúságú áramelem által létrehozott mágneses tér erősségét $\Delta \mathbf{B}$ -vel jelöltük, ezzel azt kívánjuk kifejezni, hogy a tér egy adott pontjában az eredő mágneses térerősség ezeknek a $\Delta \mathbf{B}$ vektoroknak az összege: $\sum \Delta \mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Mielőtt rátérnénk a Biot—Savart-törvény alkalmazásainak a megvitatására, egy megjegyzést kell tennünk. Az (5) alatti törvényben az arányossági tényezőt más formában szokás írni. Ez az új forma szinte kizárólagos, ha áram által keltett mágneses térről van szó. Vezessük be a következő jelölést:

$$\mu_0 := 4\pi \frac{k}{c^2}. \quad (6)$$

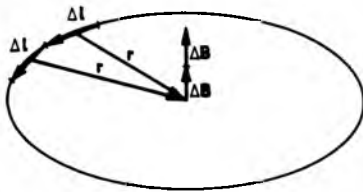
A μ_0 arányossági tényezőt *vákuumpermeabilitásnak* nevezik. Mértékegysége megegyezik k/c^2 mértékegységével: $\text{N s}^2/\text{C}^2$. Könnyen belátható, hogy $[\mu_0] = \text{Vs}/(\text{A m})$.

Így az alábbi — áramelemekre vonatkozó Biot—Savart-törvényt ezután a

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta l \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (7)$$

formában fogjuk használni.

┌ A Biot—Savart törvény alkalmazásá-



2.16.
ábra

val határozzuk meg egy r sugarú, síkbeli — kör alakú — vezetőkeret középpontjában a mágneses térerősség (indukció) értékét. Osszuk fel gondolatban a kör alakú vezető Δl hosszúságú részekre (2.16. ábra). Világos, hogy $\sum \Delta l = 2\pi r$. Fekessük hüvelykujjunkt az áram irányában a vezetőszakaszokra, a mutatóujjunkt pedig mutasson a kör közepe felé. Ekkor a középső ujjunkt a ΔB irányába mutat. Azonnal észrevesszük, hogy bármelyik áramelemre fektetjük a hüvelykujjunkt, a középső ujj helyzete változatlan. Így az áramelemek által létrehozott ΔB összetevők egyirányúak. Nagyságuk is azonos. Az is látszik, hogy Δl és r merőleges egymásra, ezért $\sin \alpha = 1$, így aztán (7) alapján

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{|\Delta l \times r|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta l}{r^2}. \quad (8)$$

Összegezzük a jobb és a bal oldalt. A Δl -ek összege $2\pi r$, ΔB vektorok összege az eredő térerősséget szolgáltatja, ennek nagysága:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi r}{r^2} = \mu_0 \frac{I}{2r}. \quad (9)$$

Tegyük fel, egy egyszerű példa kedvéért, hogy 10 cm sugarú körvezetőben 5 A erősségű áram folyik. Ekkor a körvezető középpontjában a mágneses tér erőssége:

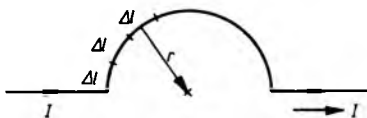
$$\begin{aligned} B &= 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{5 \text{ A}}{0,2 \text{ m}} = 25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \\ &= 25 \cdot 10^{-6} \text{ T.} \end{aligned}$$

¶ Vizsgáljuk most meg a következő problémát. A 2.17. ábra szerint az egyenes vezetőben $I = 10 \text{ A}$ áram folyik. A vezetőbe egy 3 cm sugarú félkör van beiktatva. Határozzuk meg a mágneses térerősséget (indukciót) a félkör közepén! Az egyenes szakaszokból származó térerősség a vezető félkör közepén nulla, hiszen a vezető egyenes szakaszaitól a félkör közepéhez mutató vektorok párhuzamosak a vezetővel, a Biot—Savart-törvényben a két vektor szögének szinusza nulla.

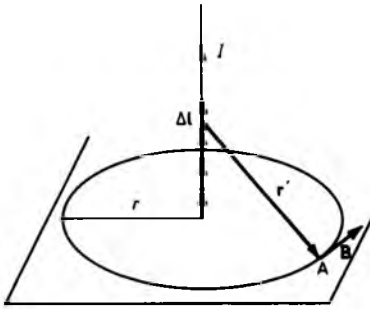
A félkör esetén járunk el ugyanúgy, mint a körvezetőnél. Osszuk fel Δl hosszúságú vezetőszakaszokra a félkört. Minden egyes ilyen elem azonos irányú ΔB térerősségelemet hoz létre, és minden ilyen elemi ΔB nagysága megegyezik (8)-cal. Összegezzük most is mindkét oldalt. Arra kell ügyelni, hogy Δl -ek összege csak egy félkör hossza, $r\pi$, ezért $B = \mu_0 I/4r$. Behelyettesítve: $B = 166,6 \cdot 10^{-7} \text{ T.}$

A körvezető mágneses terének az erősségét a Biot—Savart-törvénnyel határoztuk meg. Vessük fel most a következő — szintén érdekes — kérdést. Tegyük fel, hogy egy — végtelen hosszúnak tekintett — egyenes vezetőben I erősségű áram folyik. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora és milyen irányú a mágneses térerősség vektora az egyenes vezetőtől r távolságra.

Gondolatmenetünk első része a következőkben áll. Osszuk fel az egyenes vezetőt is Δl hosszúságú szakaszokra. Irányítsuk ezeket az áram irányának megfelelően. Minden egyes ilyen kis Δl vektor közepétől irányítsunk egy r' vektort ahhoz az A ponthoz, amelyben a B vektort szeretnénk



2.17.
ábra



2.18.
ábra

meghatározni (2.18. ábra). A Biot—Savart-törvény szerint minden egyes áramelem azonos irányú elemi térerősségvektort hoz létre az A pontban. Fektesük ugyanis jobb kezünk hüvelykujját az egyenes vezető Δl szakaszára, a mutatóujjunkat irányítsuk az A pont felé. Ekkor a jobb kezünk középső ujjja a **B** irányát mutatja. Toljuk el a hüvelykujjunkat a vezető mentén úgy, hogy a mutatóujjunk továbbra is az A pont felé mutasson. Nyilvánvaló, hogy **B** iránya nem változik. Az egyenes vezető által létrehozott mágneses térerősség vektora az A pontban a vezetőre merőleges síkban fekszik, merőleges a vezetőre. Az A pontban a mágneses térerősség vektora érinti a síkra rajzolt r sugarú kört, amelynek a középpontján a vezető átmegy. Ha a kör egy másik pontjában határozzánk meg **B** irányát, azt kapnánk, hogy ez a vektor is érinti a kört.

Az egyenes vezető körül létrejövő mágneses tér erővonalai koncentrikus körök! Ennek a ténynek messzemenő következményei lesznek.

Vázlatos gondolatmenetünk második részében érzékeltetni szeretnénk azt, hogy miként alkalmazható a Biot—Savart-törvény egyenes vezető körül kialakuló mágneses tér nagyságának kiszámítására.

Bontsuk fel a vezetőt most is Δl hosszúságú szakaszokra. A vezető környezetében egy A pontban a Δl hosszúságú szakaszoktól származó mágneses térerősségek párhuzamosak, ezért az eredő nagysága az összetevők nagyságának az összege:

$$B = \sum \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta l}{r'^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum \frac{\Delta l}{r'^2} \sin \alpha .$$

Az összegben végtelen sok tag szerepel, az összegzést a végtelen hosszú vezető mentén kell elvégezni. Vezessük be a 2.19. ábrán látható jelöléseket. Mivel a $\Delta \alpha$ szög kicsi, ezért

$$\sin(\alpha - \Delta \alpha) \approx \sin \alpha .$$

Ekkor

$$\Delta l \sin \alpha = x, \quad \alpha \in [0; \pi]$$

és

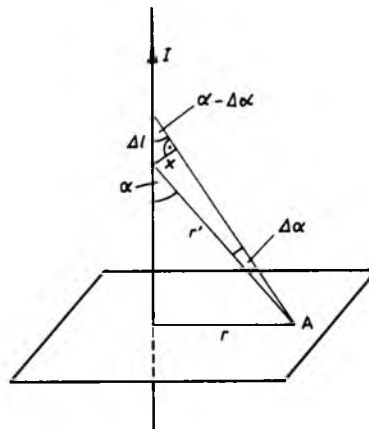
$$x = r' \Delta \alpha,$$

valamint

$$r' \sin \alpha = r,$$

így

$$\Delta l = \frac{r'^2 \Delta \alpha}{r} .$$



2.19.
ábra

A Biot—Savart-törvény a következő formát ölti:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sum \sin \alpha \Delta \alpha.$$

Az ebben szereplő

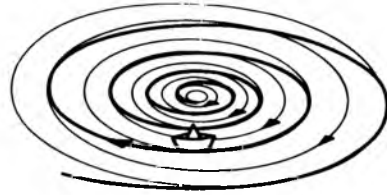
$$\sum \sin \alpha \Delta \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi]$$

összeg azonban — ez könnyen látható — a fél szinuszgörbe alatti terület. A matematikai analízis módszerével igen egyszerűen kiszámítható, hogy ez a terület 2-vel egyenlő. Így tehát

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi r}. \quad (10)$$

Térjünk most vissza a fenti — meglepő — eredményhez! A mágneses tér erővonalai az egyenes vezető körül koncentrikus köröket alkotnak. Irányukat a jobbkéz-szabály határozza meg. Helyezzük ismét jobb kezünk hüvelykujját a vezetőre, a mutatóujjunk mutasson az erővonal egy pontjához. Ekkor a középső ujjunk az erővonal irányát jelzi. Az erővonalak irányát úgy is megjegyezhetjük, hogy hüvelykujjunkt továbbra is a vezetőre fektetjük, a többi ujjunkat behajlítjuk. Ezek mutatják az erővonalak irányát. (Ebből látszik, hogy ez utóbbi „jobbkéz-szabály” a vektoriális szorzattal kapcsolatos jobbkéz-szabályból származik. Azt is mondhatnánk, hogy az utóbbi az elsőnek az egyszerűbb, „póriasabb” változata.)

A mágneses tér erővonalai tehát önmagukba záródnak^(*). Gondolatban vigyünk



2.20.
ábra

körül egy egységnyi erősségű mágneses északi pólust egy erővonal mentén. Ekkor a mágneses tér állandóan egy irányba hat a pólusra. Pozitív munkát végez a tér, ha egy irányba megyünk az erővonalakkal, és negatív munkát, ha ellentétes irányba.

Hasonló a helyzet ahhoz, mint amikor egy örvény elkap egy papírhajót a hid lábánál. Körbe-körbe kergeti. Ugyanezt teszi a forgósél a falevelekkel (2.20. ábra).

A mágneses tér tehát nem konzervatív. Az egységnyi északi póluson végzett

$$\sum_{\bigcirc} B^{\parallel} \Delta s = B \cdot 2r\pi$$

munkája zárt görbén körbehaladva nem nulla. Jó lenne tudni, hogy mekkora! Szerencsénk van. A válasz ugyanis készen van. Az imént ismerkedtünk meg az egyenes vezető körül kialakult mágneses tér erősségével. Szorozzuk meg ezért a (10) mindkét oldalát $2r\pi$ -vel. Azt kapjuk, hogy

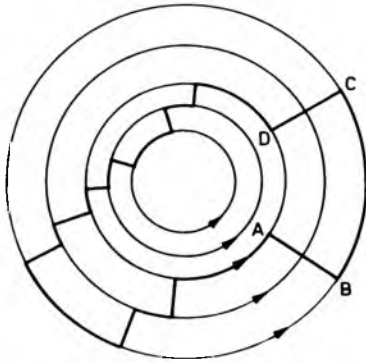
$$B \cdot 2r\pi = \mu_0 I. \quad (11)$$

Az erővonal mentén zárt görbén végzett munka így a körüljárt árammal arányos. Az arányossági tényező μ_0 .

A (11) egyenlőséggel kifejezett állítást szeretnénk általánosítani.

^(*) A szokásos megfogalmazás, hogy ti. a mágneses tér erővonalai zárt görbákat alkotnak, csak bizonyos kiegészítéssel igaz. Lehetséges ugyanis olyan eset, hogy a mágneses tér erővonalai a végtelenből indulnak és végtelenben végződnek. Még az is lehet-

séges, hogy — szemléletesen fogalmazva — a végtelen hosszú erővonalak egy úszóövhez hasonló tóruszra úgy csavarodnak fel, hogy sehol sem metszik egymást. Mindenképpen igaz, hogy a mágneses tér erővonalainak nincs forrásuk.



2.21.
ábra

Először azt látjuk be, hogy a mágneses tér munkája akkor is $\mu_0 I$, ha nem egy erővonal mentén — egy körön — haladunk körbe, hanem valamely más, például a 2.21. ábrán látható görbén járjuk körül az áramot. Elég arra gondolni, hogy egyetlen kis szakaszon megváltoztatjuk az útvonalat. A kört sugárirányban elhagyva nagyobb sugarú körre térünk rá. Haladjunk ezen az íven a BC körvonala mentén. Ez az út nagyobb, mint ugyanehhez a középponti szöghöz tartozó AD út az eredeti körvonalon. A mágneses térerősség azonban a belső íven a nagyobb, pontosan annyiszor, ahányszor a BC ívhossz nagyobb, mint az AD ív hossza. Ezért a mágneses térerősség és az út szorzata állandó. Az AB és a CD szakaszokon a mágneses tér merőleges az elmozdulásra, itt a munka nulla.

Intuitíve eléggé nyilvánvaló, hogy bármilyen — az árammal átjárt vezetőt körülölelő — görbe sugár irányú, és sugárra merőleges szakaszokkal jól közelíthető úgy, hogy az ezen számolt munka jó közelítő értéke a vezetőt körülölelő görbén végzett munkának.

Az sem változtat a dolog lényegén, ha az egyenes vezetőt körülölelő görbe nem az egyenesre merőleges síkban halad. Egyenes vezető körül bármilyen zárt görbén a

$\sum B^{\parallel} \Delta s$ mennyiség — amely szemléletesen fogalmazva a mágneses tér egységnyi mágneses póluson végzett munkáját jelenti — a körbejárt áram μ_0 -szorosával egyenlő.

Mi a helyzet akkor, ha több árammal átjárt vezetőt járunk körül?

Fontoljuk meg: a mágneses erő szabad-erő. Gondoljuk el ugyanis, hogy a tér egy P pontjába elhelyeztünk egy kis iránytűt. Erre az iránytűre erőt — illetve forgatónyomatéket — fejt ki a környezetében minden egyes áram mágneses tere. Ezek a hatások egymástól függetlenül érvényesülnek. Az eredő az egyes áramok hatásának a vektori összege (2.22. ábra). Ha ebből a P pontból kiindulva körbemegyünk egy görbén, amely — mondjuk — körülöleli az I_1 és az I_2 áramokat, akkor az I_1 áram által létrehozott B_1 munkája a zárt görbén

$$\sum B_1^{\parallel} \Delta s = \mu_0 I_1.$$

Ugyanígy az I_2 áram körül kialakult B_2 munkája

$$\sum B_2^{\parallel} \Delta s = \mu_0 I_2.$$

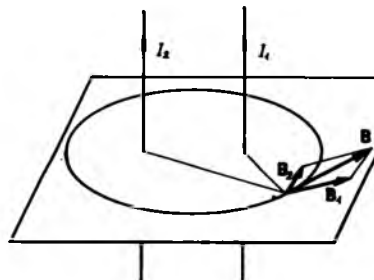
E két egyenlőség összege:

$$\sum_{\odot} (B_1^{\parallel} + B_2^{\parallel}) \Delta s = \mu_0 (I_1 + I_2).$$

A $B := B_1 + B_2$ jelölés bevezetésével:

$$\sum_{\odot} B^{\parallel} \Delta s = \mu_0 (I_1 + I_2). \quad (12)$$

A következő általános törvényhez jutotunk.



2.22.
ábra

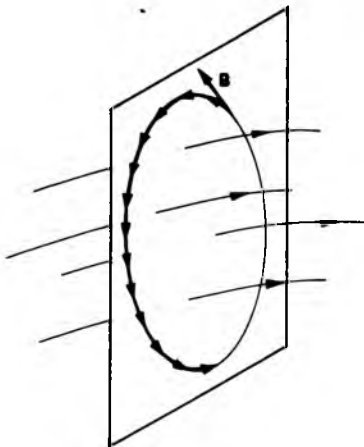
Ampère-féle gerjesztési törvény: Áramok által létrehozott mágneses térben bármely zárt görbe mentén körbevezetett egységnyi erősségű északi póluson a mágneses tér által végzett munka a körbejárt áramok algebrai összegének a μ_0 -szorosával egyenlő (2.23. ábra):

$$\oint B \parallel \Delta s = \mu_0 (\sum I). \quad (13)$$

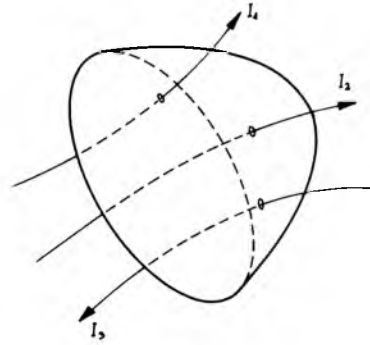
Gyakran használjuk a gerjesztési törvény következő megfogalmazását: *Bármely zárt görbe mentén a $B \parallel \Delta s$ szorzatok összege arányos a zárt görbére illeszkedő tetszőleges felületen áthaladó áramok összegével.*

Például a 2.24. ábrán látható a görbe az I_1 , I_2 és I_3 erősségű áramokat öleli körül. Az I_1 és I_2 egyirányban, I_3 ellentétes irányban folyik: az α görbére illeszkedő felületen I_1 és I_2 ugyanabban az irányban halad át, míg I_3 az előzőkkel ellentétes irányban. A felületet tehát $I_1 + I_2 - I_3$ áram dőfi. A felület peremén egyszer körbevitt egységnyi erősségű pozitív póluson az áramok által keltett mágneses tér $\mu_0(I_1 + I_2 - I_3)$ munkát végez.

Ki kell emelni a következőt. Ha az áramok terében olyan zárt görbén haladunk



2.23. ábra



2.24. ábra

körbe, amely nem ölel körül áramot, akkor a $B \parallel \Delta s$ szorzatok összege nulla.

Tekintsük most át néhány konkrét áramvezető esetén az Ampère-féle gerjesztési törvény alkalmazásának a lehetőségét.

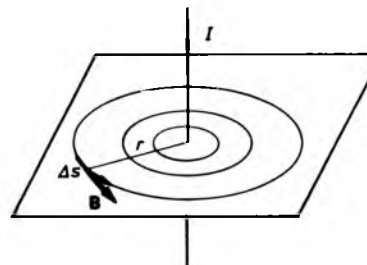
Émlékeztetőül idézzük fel még egyszer az egyenes vezető esetét. Tegyük fel, hogy az egyenes vezetőben I áram folyik. Ekkor a vezető körül a mágneses tér erővonalai a 2.25 ábrán látható jobbsodrású koncentrikus körök. Ha egy r sugarú körön egyszer körbehaladunk, akkor a $B \Delta s$ szorzatok összege az áram μ_0 -szorosa:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

innen

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Ha például egy egyenes vezetőben 10 amperes áram folyik, akkor a vezetőtől 2 cm



2.25. ábra

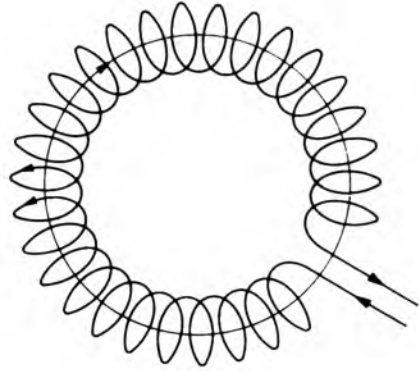
távolságra a mágneses indukció nagysága:

$$B = 10^{-7} \frac{10}{0,01} = 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 10^{-4} \text{ T.}]$$

┌ A mágnességtan gyakorlati alkalmazásaiban jelentős szerepe van a körtekercsnek, más néven a toroidnak. Ez egy körbehajlított tekercs. Úgy is elképzelhetjük, hogy egy mentőövre vezetőhuzalt tekercselünk, a 2.26. ábrán látható módon.

Tegyük fel, hogy adott egy körtekercs. Középkörének a sugarát jelöljük R -rel. Tegyük fel, hogy a tekercsnek N számú menete van, és a vezetékben I erősségű áram folyik. Ha a tekercs menetei sűrűn helyezkednek el egymás mellett, akkor a toroid belsejében az erővonalak a középkörrel párhuzamosan haladnak, és így a toroid belsejében önmagukba záródnak. A körtekercsen kívül a mágneses tér erőssége nulla. A toroid mágneses tere a tekercs belsejébe koncentrálódik. (Hasonló a helyzet ahhoz, ahogy ezt a kondenzátoroknál láttuk. Ideális kondenzátor elektromos tere a lemezek közötti térrészre koncentrálódik, kívül elektromos hatást lényegében nem lehet kimutatni. (**))

Határozzuk meg a mágneses tér erősségét a toroid középvonalán. A gerjesztési törvényt alkalmazzuk. A középkör mentén végighaladunk és összegezzük a $B\Delta s$ szorzatokat. Ez az összeg megegyezik a középkörre illeszkedő felületet dőfő áramok összegének μ_0 -szorosával. A középkörre illeszkedő felületet — mint a 2.27. ábrán látható — a tekercs N menete dőfi. A felületen áthaladó áram így IN , hiszen minden egyes menetben I áram folyik.



2.26. ábra

A gerjesztési törvény szerint

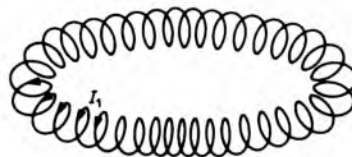
$$B \cdot 2R\pi = \mu_0 IN. \quad (14)$$

Innen

$$B = \mu_0 \frac{IN}{2R\pi}.]$$

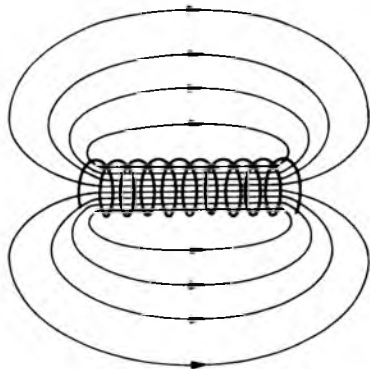
┌ Az egyenes tekercs, más néven szolenoid, mágneses terének a leírása egy sokkal bonyolultabb, mint a körtekercsé. Az egyenes tekercset mindenesetre úgy is felfoghatjuk, mint egy „felvágott” körtekercs, amelyet „kiegyenesítünk”. Ekkor a körtekercs középkörének a kerületéből a tekercs hossza lesz (2.28. ábra).

Tekintsünk tehát egy L hosszúságú tekercset, amelynek N számú menete van. Tegyük fel, hogy a tekercs az átmérőjéhez képest hosszú, és a menetei sűrűn helyezkednek el egymás mellett. Az erővonalak a



2.27. ábra

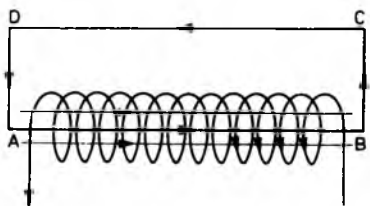
(**) Az egyenes tekercs (szolenoid) a síkkondenzátorral, a toroid a gömbkondenzátorral állítható párhuzamba.



2.28.
ábra

szimmetriatengellyel párhuzamosan haladnak, a tekercs végén kilépnek, kívül szóródnak, majd visszakanyarodnak a szolenoid másik végéhez. A tekercsen kívül a mágneses tér sokkal gyengébb, mint a belsejében. Minél hosszabb, és minél sűrűbben helyezkednek el a menetek, a belső tér annál inkább homogénnek tekinthető, és a külső tér annál inkább elhanyagolható a belső mellett.

Határozzuk meg a mágneses térerősség (indukció) nagyságát a tekercsen belül. Válasszuk meg a zárt görbét a 2.29. ábrán látható módon. Haladjunk először a szimmetriatengely mentén. Ezen a szakaszon a mágneses tér BL munkát végez egységnyi északi póluson. Ezután az erővonalakra merőlegesen mozogva kilépünk a tekercs belsejéből. A szimmetriatengellyel párhuzamosan a henger palástja mentén visszafelé haladunk, majd a palástra merőlegesen visszatérünk az elindulás helyére. A térerősség és az elmozdulás szorzata ezen a



2.29.
ábra

három szakaszon nulla. Az erővonalakra merőlegesen haladva a munka nulla, a henger palástja mentén visszafelé mozogva pedig a mágneses térerősség értéke elhanyagolható nagyságú. Így tehát

$$\sum_{ABCD} B \Delta s = BL + 0 + 0 + 0 = \mu_0 IN,$$

hiszen a téglalpra illeszkedő felületet a tekercs N menete dőfi fölfelé, amint az ábrán látható. Mindegyik menetben I áram folyik, a felületen tehát IN erősségű áram halad át. A gerjesztési törvény ezért a

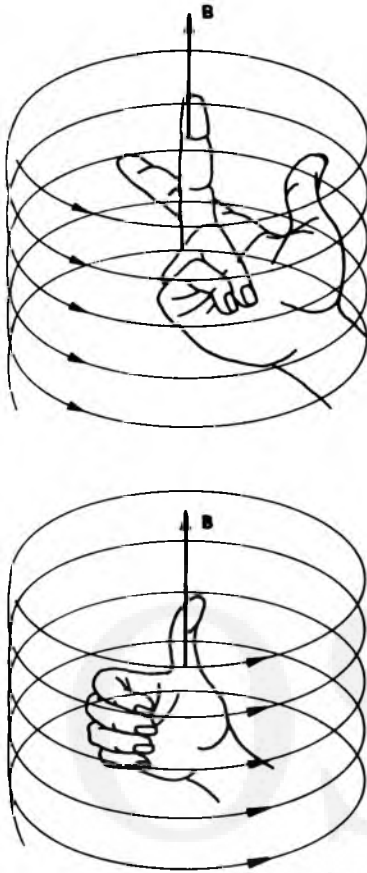
$$BL = \mu_0 IN \quad (15)$$

formát ölti, innen

$$B = \mu_0 \frac{IN}{L}.$$

A tekercs mágneses terének az irányát a következőképpen határozzuk meg. A Biot—Savart-törvénynek megfelelően fektessük jobb kezünk hüvelykujját a tekercs egy menetére úgy, hogy az áram irányába mutasson (2.30. ábra). A mutatóujjunkt irányítsuk a tekercs szimmetriatengelye felé. Ekkor a szimmetriatengely pontjaiban \mathbf{B} irányát a jobb kezünk középső ujjja mutatja. Ilyen irányúak a tekercs belsejében a térerősség vonalak.

Ezt a szabályt egyszerűbb formában is megjegyezhetjük. Világos, hogy ha a jobb kezünk behajlított ujjai mutatják az áram irányát, akkor a hüvelykujj a mágneses térerősség irányát jelzi. Az utóbbi jobbkéz-szabály természetesen az első egyszerűbb megfogalmazása. Az áram által létrehozott mágneses tér irányát végsősoron mindig a Biot—Savart-törvény határozza meg, a Biot—Savart-törvény vektoriális szorzat jellegéből következik minden olyan jobbkéz-szabály, amely az áramok és a mozgó töltések mágneses terének az irányát fejezi ki. |



2.30.
ábra

Két törvényt tanultunk ebben a pontban, Biot és Savart törvényét és Ampère gerjesztési törvényét. Mindkettő ugyanarra a kérdésre ad választ: arra való, hogy segítségükkel meghatározzuk a mozgó töltések és áramok környezetében kialakuló mágneses tér erősségét. A Biot—Savart-törvény egy speciális alakjából sejtettük meg a gerjesztési törvényt: a (10) egyenlőség Biot és Savart törvényét fejezi ki egyenes vezetőkben folyó áram esetén, $2r\pi$ -vel szorozva azonban a gerjesztési törvény egy speciális megfogalmazását kapjuk.

Fordítva: ha a gerjesztési törvényt ismernénk előbb, akkor belőle megsejthet-

nénk a Biot—Savart-törvényt. Részletebben ezt nem indokolhatjuk matematikai eszközeink hiányos volta miatt, de tudatosítani szeretnénk: a Biot—Savart-törvény és az Ampère-féle gerjesztési törvény egymásból levezethető, egymás átfogalmazásának tekinthető és — mint mondtuk — ugyanannak a problémának a megoldására szolgálnak.

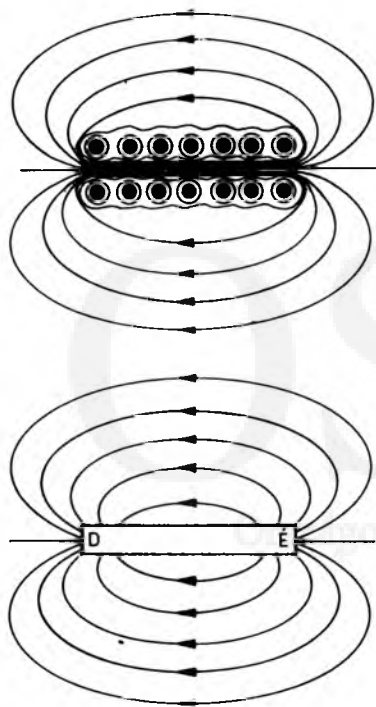
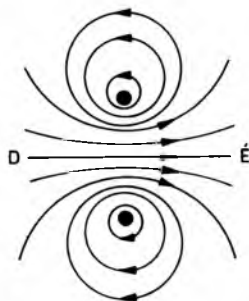
A használatukat illetően még egy megjegyzés. A Biot—Savart-törvényt úgy alkalmazzuk, hogy rögzítünk a térben egy pontot, ahol a \mathbf{B} vektort szeretnénk meghatározni. Ezután az áramvezető mentén végigmegegyünk és összegezzük a

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta s}{r^2} \sin \alpha$$

nagyságú vektorokat, figyelembe véve irányítottságukat is. Ezzel szemben a gerjesztési törvény alkalmazásánál nem az áramvezető mentén, hanem valamely zárt görbén megyünk körbe, legtöbbször egy erővonal mentén; \mathbf{B} -t nem egyetlen pontban határozzuk meg, hanem általában egy kör mentén, vagy más zárt görbe mentén, hiszen nem közvetlenül \mathbf{B} -t kapjuk, hanem a zárt görbére számított munkáját. A gerjesztési törvény alkalmazása általában egyszerűbb, ha találunk valamilyen szimmetriát, amely a számolást leegyszerűsíti.

2.1.4. Gauss-tétel mágneses térre

Egy gondolattal térjünk vissza a tekercs mágneses teréhez. Nyilvánvaló, hogy a tekercs felfogható úgy, mint több egymás mellé helyezett azonos méretű, azonos árammal átjárt körvezető. A tekercs mágneses tere a körvezetők mágneses terének az összege.



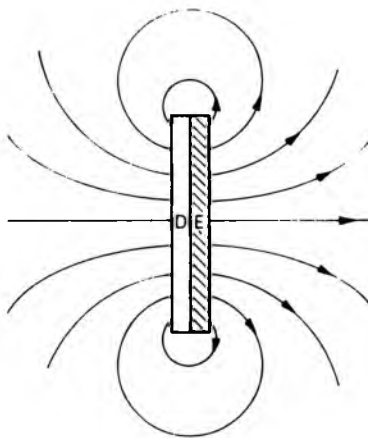
2.31.
ábra

Egy kör alakú vezetőhurok közepében meghatároztuk B irányát és nagyságát. A részletes erővonalképet a 2.31. ábrán láthatjuk. Ha ilyen körvezetőkötőből többet egymás mellé helyezünk, akkor a mágneses terük összeadódik, a tekercs belsejében nagyjából homogén lesz, a tekercsen kívül pedig az erővonalak a térben szóródva visszanyarodnak. Kísértetiesen hasonlít

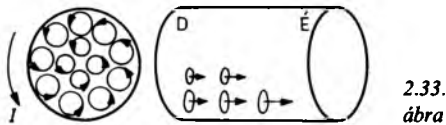
az erővonalkép egy mágnesrúd erőterének a „térképéhez”.

Láttuk azt is, hogy a mágnesrudat kettévágva újabb mágneseket kapunk. Ha egy tekercset a felére rövidítünk, akkor a mágneses tere úgy alakul, mint egy félbevágott mágnesrúdé. Sőt, ha egy lapocskát levágunk a mágnesrúdból, akkor ennek a kis lemeznek a mágneses tere pontosan olyan, mint egy körvezetőé (2.32. ábra).

Most talán megsejthető, hogy milyen kapcsolat van az áramok mágneses tere és a mágnesezett anyagok tere között. A mágneses anyagokban az elektromos polarizációhoz hasonló jelenség lép fel. Az elektromos polarizációnak az a lényege, hogy az anyagban elemi elektromos dipólusok jönnek létre, és ezek a külső térrel párhuzamosan rendeződnek. A mágneses anyagokban a mágneses polarizációt parányi köráramokkal vesszük figyelembe: minden elemi mágneses dipólust kis körárammal helyettesítünk. Az egyes kis köráramok hatása azonban csak az anyag felületén érvényesül. Az anyag belsejében a köráramok egymással „érintkeznek” és ellentétes irányban folynak, egymás hatását kioltják (2.33. ábra).



2.32.
ábra



2.33.
ábra

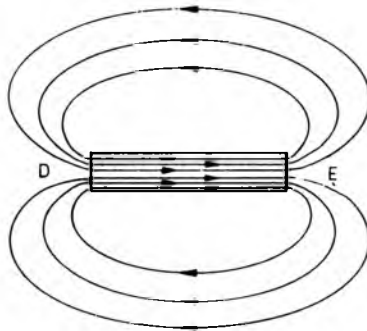
Valóban ezek a köráramok magyarázzák az anyag mágneses tulajdonságát? Ilyen egyszerű lenne az anyag mágneses természetének a megértése?

Az anyag mágneses tulajdonságainak az értelmezése túlmutat az elektrodinamika területén. Mikrofizikai, anyagszerkezeti kérdések részletekbe menő ismeretét feltételezi a kérdéskör tárgyalása.

Bár a valóság sokban különbözik a köráramok munkahipotézisétől — az alapgondolat azonban mégis megmenthető: bizonyos értelemben valóban kis köráramok magyarázzák az anyag mágneses tulajdonságait. Így az áramokkal, mozgó töltésekkel kapcsolatos mágneses jelenségek alapvetőbbek, mint a mágnesezett anyagok a pólusok környezetében tapasztalható mágneses tulajdonságok és jelenségek. A mágnesezett anyag tulajdonságait mikroköráramok mágneses jellemvonásaira vezetjük vissza. Ezért nyilvánvaló az is, hogy nemcsak nem izolálhatók a mágneses pólusok, de valójában nincsenek is ilyenek. *Az elemi mágnesek köráramok*^(*).

Ez azért fontos, mert a köráramok mágneses tere csupa önmagában záródó erővonnalal jellemezhető. A mágnesezett rudak erővonalai is magukba záródnak: a rúdon kívül az északi pólustól haladnak a déli pólus felé, a mágnesrúdon belül azonban a déli pólus irányából az északi irányába

^(*) Az anyag mágneses tulajdonságaiért elsősorban az anyag építőköveinek (pl. az elektronoknak) egy mikrofizikai állapotjelzője, a spin a felelős.



2.34.
ábra

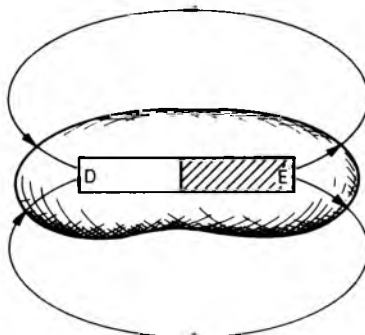
haladnak (2.34. ábra). Mint egy tekercs esetén. A mágneses tér erővonalai mindig önmagukba záródnak, akár mozgó töltés, akár a vezetőkben folyó áram, vagy a mágnesezett anyag teréről van szó.

Bármilyen zárt felületet gondolunk is el, mindazok a mágneses erővonalak, amelyek behatolnak a zárt felületen, el is hagyják ezt a felületet. Nincs a felületen belül mágneses pólus, amin az erővonal végződhetne, illetve amelyről indulhatna.

Az elektrosztatika első alaptörvényének a megfelelője a mágneses jelenségekre az alábbi formába önthető.

Gauss-tétel mágneses térre: *Zárt felületen a mágneses tér fluxusa nulla* (2.35. ábra):

$$\Phi = \sum B^\perp \Delta A = 0. \quad (16)$$



2.35.
ábra

Az anyag mágneses tulajdonságait értelmező felületes, ám nagy vonalakban mégis helytálló modell a következő problémát veti fel. Ha mágneses jelenségek elsődleges oka a mozgó töltés vagy az áram, akkor a mágneses anyagok milyen módon módosítják az áram által létrehozott teret?

Tegyük fel, hogy légüres térben a mozgó töltések és az áramok mágneses terének erőssége adott, jelöljük ezt \mathbf{B}_0 -al. Ha most ezt a teret valamilyen anyag tölti ki, akkor ebben az anyagban a *mágneses polarizáció* következtében *polarizációs tér* alakul ki. A polarizációs tér és a vákuumbeli elsődleges tér eredője igen sok esetben arányos a vákuumbeli térrel:

$$\mathbf{B} = \mu_r \mathbf{B}_0. \quad (17)$$

Az eredő mágneses tér magában foglalja a mozgó töltések és az áramok mágneses terének és a mágnesezett anyagoknak a hatását is.

Vezessük most be a következő fogalmat. A tér elsődleges forrásainak tulajdonított \mathbf{B}_0 mágneses térerősséget oszszuk el μ_0 -al. A

$$\mathbf{H} := \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$$

vektort *mágneses gerjesztettségnek* (*térintenzitásnak*) nevezzük. A *gerjesztettség mértékegysége* A/m. Jelentősége mindössze az, hogy csak az áramok hatását tartalmazza, ennek a kifejezésére szolgál, a környező anyag mágneses tulajdonságaitól független. A körvezető középpontjában:

$$H = \frac{I}{2r},$$

egyenes vezetőtől r távolságra:

$$H = \frac{I}{2r\pi},$$

a tekercs belsejében:

$$H = \frac{IN}{L}.$$

A mágneses tér gerjesztettségét igen sokszor (helytelenül) mágneses térerősségnek, a \mathbf{B} -t pedig mágneses indukciónak nevezzük. Kifejezőbbnek érezzük azonban a térerősség—gerjesztettség fogalompárt, ezért inkább ezt használjuk.

A $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$ definiáló egyenlőség és (17) alapján

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}. \quad (18)$$

A μ_r arányossági tényezőt *relatív permeabilitásnak*, a μ_0 konstanst pedig a *vákuum-permeabilitásnak* nevezzük. Ügyeljünk arra, hogy μ_r mértékegysége 1, míg a μ_0 konstansé V s/(A m).

A (18) egyenlőségnek megfelelő állítás az elektrosztatikában — mint láttuk —:

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (19)$$

Felfogásunkban \mathbf{E} -nek \mathbf{B} , \mathbf{D} -nek \mathbf{H} felel meg. Így $\epsilon := \epsilon_r \epsilon_0$ -nak $\mu := \mu_r \mu_0$ reciproka,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}$$

feleltethető meg. Mivel

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k},$$

$$\mu_0 = \frac{4\pi k}{c^2}$$

(a definíció szerint), ezért

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (20)$$

Vessünk még egy pillantást \mathbf{B} és \mathbf{H} , valamint \mathbf{E} és \mathbf{D} vákuumbeli kapcsolatára! A $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ és a $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ egyenlőségek alapján

egyrészt

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} 4\pi k \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{H}, \quad (21)$$

másrészt

$$\mathbf{E} = 4\pi k \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}. \quad (22)$$

A μ_r relatív permeabilitású anyag jelenlétében

$$\mathbf{B} = \mu_r \frac{1}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{H}, \quad (23)$$

és ϵ_r relatív dielektromos állandójú közegben

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_r} 4\pi k \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \mathbf{D}. \quad (24)$$

Térjünk vissza az anyagok mágneses tulajdonságára. A kémiai anyagok lényegében három csoportra oszthatók: a *diamágneses*, a *paramágneses* és a *ferromágneses anyagokra*. A diamágneses anyagokban — víz, üveg, réz — a külső térrel ellentétes irányú polarizációs tér jön létre. Ilyenkor $\mu_r < 1$. A paramágneses anyagokban a belső tér egyirányú a külső térrel, a polarizációs tér a külső tér hatását erősíti: $\mu_r > 1$. Ilyen anyagok például a szilícium, az alumínium.

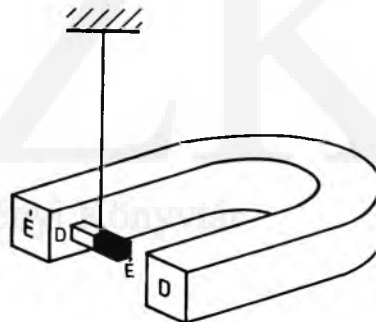
A ferromágneses anyagoknál \mathbf{B} és \mathbf{H} nem arányosak egymással, a kapcsolatuk általában bonyolultabb a (18) összefüggésnél. Ferromágneses anyagokban nemcsak az elemi mágnesek rendeződnek külső mágneses hatásra, hanem egyes kristályrészek mágneses állapota ugrásszerűen megváltozhat.

Bizonyos közelítéssel azért ezek az anyagok is jellemezhetők relatív permeabilitással, amely igen nagy a többi anyaghoz képest.

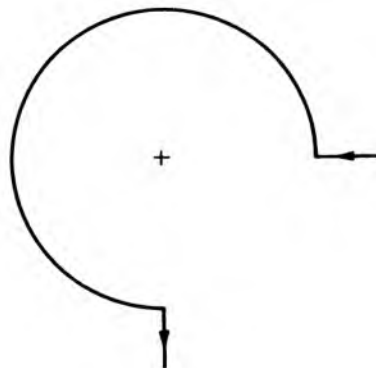
XIX. Feladatcsoport: mágneses tér

XIX/1. Egy mágnespatkó egymás felé forduló felületei 180 cm^2 nagyságúak (2.36. ábra). A felületekre merőleges, megközelítően homogén mágneses tér erőssége: $B = 0,1 \text{ V s/m}^2$. Mekkora a mágneses fluxus a felületek között? A mágnespatkó egymás felé forduló szárai közé függesztünk egy 10 g tömegű, 5 cm hosszú iránytűt. Az egyensúlyi helyzetétől kissé kitérítjük a mágneses tűt, majd azt tapasztaljuk, hogy 40 másodperc alatt 36 rezgést végez. Határozzuk meg a tű póluserősségét!

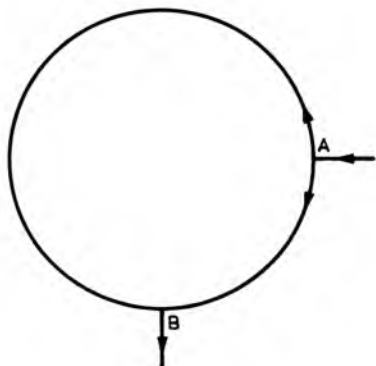
XIX/2. Egy 20 cm sugarú kerék gumiból készült peremére 10^{-4} C töltést viszünk. A kerék 500 1/s fordulatszámmal forog.



2.36. ábra



2.37. ábra



2.38.
ábra

Mekkora a mágneses térerősség a kerék közepén?

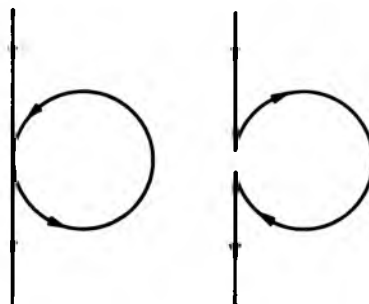
XIX/3. Egy 20 cm sugarú körvezetőben 2 A áram folyik. Határozzuk meg a mágneses térerősséget a körvezető középpontjában!

XIX/4. Egy vezető huzalból a 2.37. ábrán látható 5 cm sugarú háromnegyed kört hajlítunk. A körívhez vezető szakaszok merőlegesek egymásra és sugár irányúak. A vezetékben 2 A erősségű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses térerősséget a kör középpontjában!

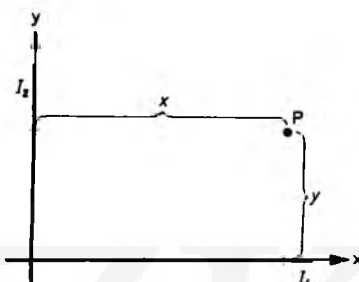
XIX/5. A 2.38. ábrán látható AB háromnegyed körív ellenállása $0,5\ \Omega$, az AB közötti egynegyed ív ellenállása $0,3\ \Omega$. A kör sugara 5 cm. Az áram erőssége elágazás előtt 2,4 A. Mekkora a mágneses térerősség a kör középpontjában?

XIX/6. Egy vezetékben először egy $R_1 = 10$ cm sugarú kört, másodszer pedig $R_2 = 5$ cm sugarú két menetű tekercset készítünk. A vezetékben mindkét esetben 2 A erősségű áram folyik. Mekkora a mágneses térerősség a kör középpontjában az egyik és a másik esetben?

XIX/7. Egy egyenes vezetőkben 2 A erősségű áram folyik. Mekkora a mágneses térerősség az egyenes vezetőtől 12 cm távolságra?



2.39.
ábra



2.40.
ábra

XIX/8. Egy hosszú egyenes vezetőkben 10 A erősségű áram folyik. A vezetőkől 10 cm sugarú, kör alakú hurkot hajlítunk. Határozzuk meg a mágneses térerősséget a kör középpontjában a 2.39. ábrán látható mindkét esetben!

XIX/9. Egy hosszú, egyenes vezetőkben 10 A erősségű áram folyik. A vezetőkől 10 cm sugarú, kör alakú hurkot hajlítunk. Határozzuk meg a mágneses térerősséget a kör középpontjában, ha a kör síkja merőleges az egyenes vezetőkre!

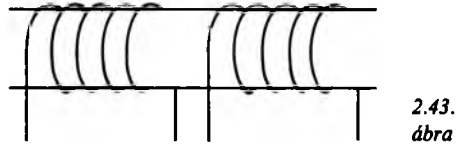
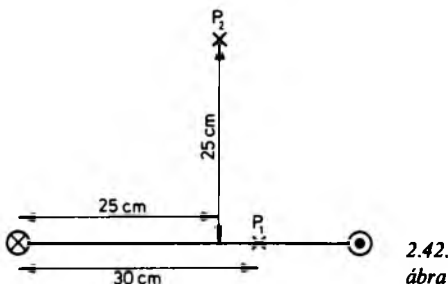
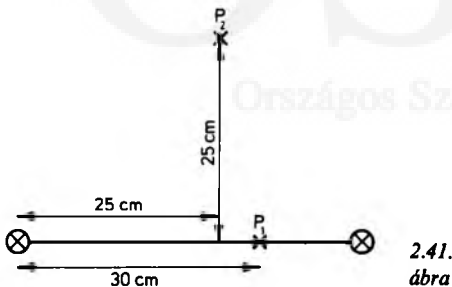
XIX/10. Két hosszú vezető egy síkban, egymásra merőlegesen helyezkedik el (2.40. ábra). Mindkettőben 1 A erősségű áram folyik. Mekkora a mágneses térerősség a két vezető síkjának abban a P pontjában, amely az egyik vezetőtől $x = 12$ cm-re, a másiktól $y = 8$ cm-re van?

XIX/11. Két végtelen hosszú, párhuzamos, egyenes vezető távolsága 50 cm. Az ábrán a papír síkjára merőlegesen halad a

két vezető. Mindkettőben a papír síkjába befelé folyik az áram. (Ezt azzal tüntetjük fel, hogy a vezetőket ábrázoló kis köröcskét áthúzzuk. Ha a köröcske középpontjában egy pont van, akkor az áram kifelé folyik.) Most a két vezetékben egyaránt 2 A erősségű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses térerősséget a 2.41. ábrán felüntetett pontokban!

XIX/12. Két, végtelen hosszú, párhuzamos, egyenes vezető távolsága 50 cm , mindkettő merőleges a papír síkjára. Az egyikben befelé folyik 2 A erősségű áram, a másikban ugyanennyi kifelé. Mekkora a mágneses térerősség a 2.42. ábrán megjelölt pontokban?

XIX/13. Egy mágneses tekercs menetszáma 400 , a hossza 20 cm , keresztmetszete $12,56\text{ cm}^2$. A tekercsben $1,2\text{ A}$ erősségű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses térerősséget és a mágneses tér fluxusát a tekercsben!



XIX/14. Egy 20 cm hosszú, lágyvasból készült henger átmérője 4 cm . A hengerre 25 méter hosszú, 1 mm átmérőjű szigetelt sárgaréz vezetőket tekercselünk. A réz fajlagos ellenállása: $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{ m}$. A vezetékre 540 V feszültséget kapcsolunk. Határozzuk meg a mágneses térerősséget (B -t), a gerjesztettséget (H -t) és a fluxust a tekercs belsejében! (A vas mágneses permeabilitása $\mu_r = 200$.)

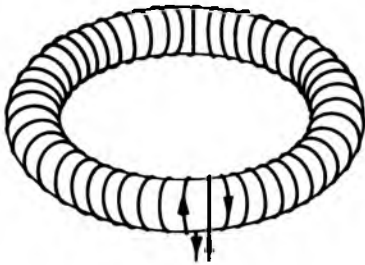
XIX/15. Egy 6 cm^2 keresztmetszetű, hengeres vasrúdon két tekercs van (2.43. ábra). Az egyik 12 cm hosszú, a menetszáma 600 . A másik tekercs 8 cm hosszú, a menetszáma 450 . Az első tekercsben 2 A , a másodikban $1,6\text{ A}$ erősségű áram folyik. Mekkora a mágneses térerősség és a fluxus a vasrúdban, ha

- a két tekercsben egyirányban folyik az áram?
- a két tekercsben ellentétes az áram iránya?

XIX/16. Egy körtekercs keresztmetszete $3,5\text{ cm}^2$, a közepes erővonal hossza 42 cm , a menetszáma 1000 . A körtekercs keresztmetszetén $108 \cdot 10^{-8}\text{ Vs}$ a mágneses fluxus. Mekkora az áram erőssége a vezetékben?

XIX/17. Egy 2 cm^2 keresztmetszetű, 30 cm átmérőjű körtekercs menetszáma 2000 . A szimmetriatengelyében egy egyenes vezető van, benne 300 A erősségű áram folyik. Mekkora áram folyik a toroidban, ha középköre mentén a mágneses gerjeszttség (térintenzitás) nulla?

XIX/18. Egy toroidtekercs keresztmetszete 3 cm^2 , középkörének sugara 20 cm ,



2.44.
ábra

menetszáma 1600, a belsejét 200 relatív permeabilitású anyag tölti ki. A tekercsben 10 A erősségű áram folyik. Mekkora a tekercs belsejében a mágneses tér gerjesztettsége, és mekkora a mágneses térerősség? Mekkora a mágneses fluxus?

XIX/19. Egy toroidtekercs keresztmetszete 3 cm^2 , középkörének a sugara 20 cm, a menetszáma 1600, a belsejét $\mu_r = 200$ re-

latív permeabilitású anyag tölti ki. A tekercsben 10 A erősségű áram folyik (2.44. ábra). A vasmagnak eltávolítjuk egy — 0,4 cm vastag —, az erővonalra merőleges határlapokkal rendelkező részét. Mekkora a tekercs belsejében a mágneses tér gerjesztettsége és a tér erőssége? Mekkora a tér fluxusa?

XIX/20. Egy fémötvözet relatív permeabilitása: $\mu_r = 1200$. Ebből a fémből 2 cm vastag hengeres vezetőket készítünk. Ebben az egyenes vezetőben 10 A erősségű áram folyik. Az áramsűrűség egyenletes a vezeték keresztmetszetén. Mekkora a mágneses gerjesztettség és a mágneses térerősség a vezeték tengelyétől x távolságban? Ábrázoljuk a két mennyiséget a vezeték tengelyétől mért x távolság függvényében!

2.2. Elektromágneses indukció

2.2.1. A Lorentz-erő

Az előző pontokban láttuk, hogy a mozgó töltés erőt fejt ki a mágneses pólusra. Ezt a tapasztalati tényt és a következményeit gondoltuk végig. Két, egymással egyenértékű állítás birtokába jutottunk, az Ampère-féle gerjesztési törvény és a Biot—Savart-törvény a mozgó töltések és áramok által keltett mágneses tér jellemzését adja.

A kiindulásul szolgáló jelenség másik oldala az, hogy — a hatás—ellenhatás törvényének megfelelően — a mágneses pólus is erőt fejt ki a hozzá képest mozgó elektromos állapotú részecskére. Másképpen fogalmazva ez azt jelenti, hogy a mágneses térben mozgó elektromos töltéssel rendel-

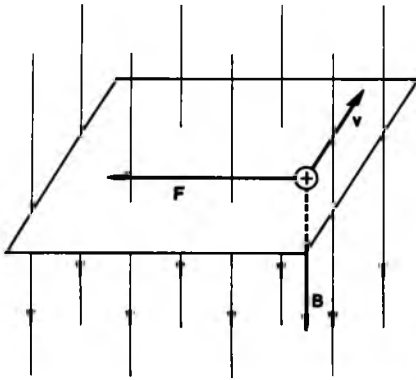
kező részecskére a mágneses tér erőt fejt ki. Ez a *Lorentz-erő*.

A részecskére ható erő arányos a töltéssel, a mágneses tér erősségével és a részecske sebességével. Ha a részecske sebessége α szöveget zár be a tér erővonalaiival, akkor az elektromos töltésre ható erő

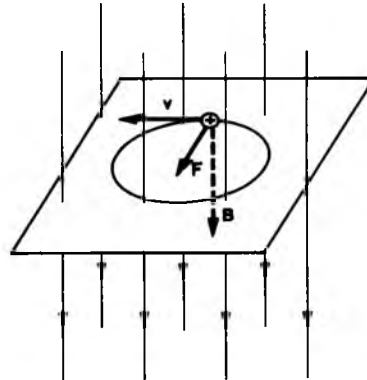
$$F = QvB \sin \alpha \quad (1)$$

nagyságú, iránya pedig merőleges a v és a B síkjára. Ha jobb kezünk hüvelykujja — a 2.45. ábrán látható módon — a sebességvektor irányába mutat, a mutatóujjunk a B mágneses térerősséggel egyirányú, akkor a középső ujjunk jelzi a Q pozitív töltésre ható erő irányát. Vektoriális szorzat írásmódját felhasználva a Lorentz-erőt az

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2)$$



2.45.
ábra



2.46.
ábra

erőtörvény szolgáltatja. (Ha $Q < 0$, akkor az erő iránya ellentétes a pozitív töltésre ható erő irányához képest.)

A Lorentz-erőt jobbkéz-szabállyal határozzuk meg. Ez azt jelenti, hogy a mágnesétanban alapjában véve két jobbkéz-szabály kap szerepet: az egyik a mozgó töltés által létrehozott mágneses tér leírását adja, ez önt formát a Biot—Savart-törvényben. A másik jobbkéz-szabály a mágneses térben mozgó töltésre ható Lorentz-féle erő törvényt fejezi ki. Látnunk kell, hogy ez a két törvény ugyanannak a jelenségnek a két oldalát fogalmazza meg. A két jobbkéz-szabály természetes módon kiegészíti egymást. Nem lehet csak egy jobbkéz-szabály, de nem lehet három sem.

¶ Vizsgáljuk meg a következő problémát. Tegyük fel, hogy homogén mágneses tér erővonalaira merőleges síkban egy q töltésű, m tömegű részecske v sebességgel mozog. A tér erősségét jelöljük \mathbf{B} -vel. Ekkor a részecskére $F = qvB$ nagyságú mágneses erő hat. Ez az erő merőleges az erővonalakra és merőleges a töltéssel rendelkező részecske sebességére (2.46. ábra).

A Lorentz-erő teljesítménye nulla,

$$P = qvBv \cos 90^\circ = 0.$$

A részecske mozgási energiája nem változik, állandó tehát a sebessége is. Állandó azonban az erő nagysága is. A sebességre merőleges erő centripetális erő. A Lorentz-féle erő törvénynek megfelelően mozgó részecskére alkalmazzuk Newton II. törvényét:

$$qvB = m r \omega^2. \quad (3)$$

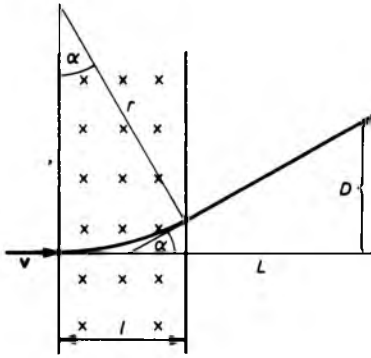
Vegyük figyelembe, hogy $v = r\omega$, ezért

$$qB = m\omega,$$

vagyis a keringő részecske szögsebessége — és így a periódusideje — nem függ a kezdeti feltételektől, nem függ a kezdeti sebességtől.]

¶ Mágneses tér ugyanúgy eltéríti a részecskét, mint az elektromos tér. Tegyük fel, hogy egy q töltésű, m tömegű és v sebességű részecske homogén mágneses térbe érkezik. Feltesszük, hogy a részecske sebessége merőleges az erővonalakra, és a \mathbf{B} erősségű mágneses tér egy l szélességű térrészbe van koncentrálna úgy, mintha a részecske útjába mágneses térből egy l vastagságú falat húztunk volna.

Vezessük be a 2.47. ábrán látható jelöléseket. A részecske a mágneses téren keresztülhaladva köríven mozog. Az ívhez tarto-



2.47. ábra

zó középponti szöget α -val jelöltük. Ha α kicsi, akkor jogos a $\tan \alpha = \alpha$ helyettesítés. Így

$$D = L \tan \alpha = L\alpha,$$

és

$$r\alpha = l,$$

tehát

$$D = \frac{Ll}{r} = LlB \frac{q}{mv}.$$

Ha például egy 10^{-6} C töltésű, 10^{-5} kg tömegű, 100 m/s sebességű részecske 10 cm vastagságú mágneses téren áthalad, és a tér indukciója 20 V s/m^2 , akkor az 1 méter távolságra elhelyezett ernyőbe úgy csapódik be, hogy 0,2 mm-rel távolabb érkezik attól a helytől, ahol a mágneses tér eltérítő hatása nélkül érte volna az ernyőt.]

¶Vessük most fel a következő érdekes kérdést. A mozgó töltés — láttuk korábban — mágneses teret hoz létre. Ugyanakkor a mágneses tér erőt fejt ki a mozgó töltésre. Vizsgáljuk meg tehát egy elektromos töltésre ható erőt valamely másik, mozgó töltés által keltett mágneses térben. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk két azonos tömegű és azonos q töltésű részecskét. Tegyük fel, hogy ezek egymással párhuzamosan, megegyező v sebességgel mo-

zognak, egyirányban. A távolságukat jelöljük r -rel. A két részecske azonos töltésű, ezért taszító jellegű,

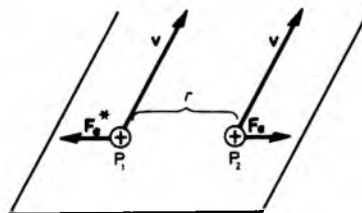
$$F_e = k \frac{q^2}{r^2} \quad (4)$$

nagyságú elektromos erő lép fel közöttük. Tekintsük most a 2.48. ábrán a bal oldali töltést. Ez a v sebességgel mozgó töltés, abban a pontban, ahol a másik mozog,

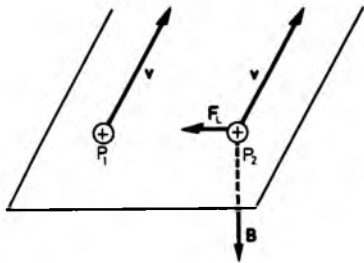
$$B = \frac{k}{c^2} \frac{qv}{r^2} \quad (5)$$

erősségű mágneses teret hoz létre, hiszen — mint mondtunk — a mozgó töltés qv nagyságú mágneses pólusként is viselkedik. Ennek a térnek az iránya az első jobbkéz-szabály szerint határozható meg. Jobb kezünk hüvelykujja a P_1 pontban mozgó töltés sebességének irányába mutat, a mutatóujjunk a P_1 pontból a P_2 pontban mozgó második töltött részecskéhez mutat. Ekkor a jobb kezünk középső ujja annak a mágneses térnek az irányát mutatja, amelyet a P_1 pontban mozgó töltés hoz létre a P_2 pontban.

Ennek a térnek az erősségét az (5) egyenlőség szolgáltatja. Alkalmazzuk most a második jobbkéz-szabályt, hogy meghatározzuk a P_2 pontban mozgó töltésre ható erő irányát. A jobb kezünk hüvelykujját fektessük most a P_2 pontban mozgó töltés sebességvektorára. A mutatóujjunkat irányítsuk a \mathbf{B} vektor irányába.



2.48. ábra



2.49. ábra

Ekkor a középső ujj mutatja a mozgó töltésre ható Lorentz-erő irányát. Látható, hogy ez az erő a P_1 pontban mozgó töltés felé mutat (2.49. ábra).

A P_2 pontban mozgó töltésre ható Lorentz-erő nagysága:

$$F_L = qvB = qv \frac{k}{c^2} \frac{qv}{r^2},$$

tehát

$$F_L = k \frac{q^2}{r^2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (6)$$

(A P_1 pontban mozgó töltésre ugyanilyen nagy, ellentétes irányú mágneses erő hat — Newton III. törvénye értelmében.)

Figyelemre méltó, hogy az F_L Lorentz-erő v^2/c^2 -szerese a töltések között fellépő Coulomb-féle elektrosztatikus erőnek. A mindennapi tapasztalataink területén a $c = 3 \cdot 10^8$ m/s-nál sokkal kisebb sebességekkel találkozunk. Az ún. első kozmikus sebesség is csak $8 \cdot 10^3$ m/s, öt nagyságrenddel kisebb c -nél. A v^2/c^2 arány ezért nullához közeli érték. A két töltött részecske között fellépő Lorentz-erő általában sokkal kisebb a Coulomb-erőnél.

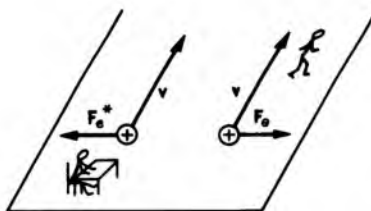
A két részecske között fellépő két erő ellentétes irányú. Az eredő $F = F_e - F_L$, tehát

$$F = k \frac{q^2}{r^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (7)$$

A probléma több szempontból is figyelemre méltó. Említsük először azt, hogy igen jól látható a mágnességtan két jobb-kéz-szabályának egymás mellett történő alkalmazása.

Sokkal érdekesebb azonban a következő kérdés. Gondoljuk el, hogy a 2.50. ábrán látható síkon együtt mozgunk a két töltött részecskével. Hozzánk képest mindkét részecske áll. Ekkor a közöttük fellépő erő csak elektrosztatikus erő. Mindkét töltés nyugalomban van (a megfigyelőhöz képest), ezért nem hoznak létre mágneses teret, de nem is hat egyikre sem a Lorentz-erő. Ezek szerint a két töltés között fellépő erő attól függ, hogy a megfigyelő milyen sebességgel mozog?! Az a megfigyelő, aki mozogni látja a két töltést, a (7) alatti erőt észleli, aki pedig együtt mozog a két töltéssel, az a hozzá képest nyugvó töltések között csak a (6) alatti erőt észleli. De hát azt tanultuk, hogy a testek között fellépő erő nem függ attól, hogy melyik vonatkoztatási rendszerből nézzük a jelenséget! Az erő-törvényben nem szerepelhet az inerciarendszerhez viszonyított sebesség. A Lorentz-erő (2) alatti kifejezése pedig tartalmazza a részecske inerciarendszerhez viszonyított sebességét!

Kétségtelenül az egyik legsúlyosabb kérdéshez érkeztünk. A probléma megoldásához át kell majd gondolnunk az eddig tanult fizikai elveinket, végig kell gondolnunk a már végigvitt gondolatmeneteket. Meg kell fontolnunk, hogy nem hagy-



2.50. ábra

tünk-e nyitva olyan kérdést, amelyre nem válaszoltunk, csak feltételeztük a választ. Úgy emlékeztünk, hogy már válaszoltunk...

Erre az egész fizikát alapjaiban érintő kérdésre még visszatérünk. Addig azonban érlelgessük magunkban a problémát, keressük gondolatban a választ. Közben azonban vonjuk le a következtetéseket az eddigi eredményeinkből, és vigyük végig a megkezdett gondolatmenetet. A felvetett kérdés meg fog várni és addig megéri, a 3.4. alfejezetben rátérünk a kérdéskör részletes vizsgálatára.

2.2.2. A vezetőre ható erő és forgatónyomaték

Tegyük fel, hogy egy l hosszúságú vezetődarab mágneses térben fekszik. A vezetőben I áram folyik, a térerősséget pedig jelöljük — szokás szerint — \mathbf{B} -vel (2.51. ábra). Ekkor a vezetőben mozgó töltésre $F = QvB \sin \alpha$ nagyságú mágneses erő hat, a Lorentz-erő. Itt α a töltés áramlási sebessége és az erővonalak által bezárt szög. Jelöljük t -vel azt az időt, amely alatt a töltés végigáramlik az l hosszúságú ve-

tőn. Ekkor $l = vt$. Szorozzuk meg ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát I -vel. Ekkor $Il = Itv$. Mivel azonban $It = Q$, a vezetőre ható erő nagysága:

$$F = BIl \sin \alpha. \quad (1)$$

Itt — még egyszer mondva — α a vezető és a térerősségvektor által bezárt szöget jelöli.

A vezetőre ható erő a Lorentz-féle erő-törvénnyel magyarázható. Innen származik az erő iránya is: ha a jobb kezünk hüvelykujját ráfektetjük az áramvezetőre, és a mutatóujjunk a \mathbf{B} irányába mutat, akkor a középső ujj jelzi a vezetőre ható erő irányát. Az áramvezetőre ható erő merőleges a vezető és a térerősségvektor által meghatározott síkra.

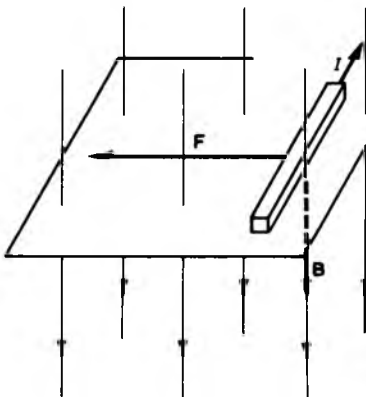
A vektoriális szorzat tömör kifejezés-módját használva az l hosszúságú vezetőre ható mágneses erő igen egyszerűen felírható. Vezessünk be azonban először egy vektort. Jelöljük ezt \mathbf{l} -l, iránya egyezzen meg az elektromos áram irányával, hossza pedig a vezetőszakasz hosszával. Ekkor a homogén, \mathbf{B} erősségű mágneses térben fekvő, I árammal átjárt vezetődarabra ható mágneses erő az

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

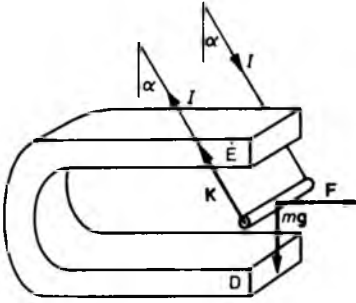
vektori formában is kifejezhető.

Ha a vezető inhomogén mágneses térben van, vagy az alakja nem egyenes, akkor általában úgy járunk el, hogy az árammal átjárt vezetékét kis, Δl hosszúságú szakaszokra osztjuk. Minden egyes ilyen kis szakaszon kiszámítjuk a mágneses erőt. Ezután ezeket az erőhatásokat — vektorialag — összegezzük.

¶ Vizsgáljuk meg most a következő problémát. Tegyük fel, hogy egy vékony rézrúd rézhuzalokkal van felfüggesztve egy patkómágnes sarkai közé. A rudacska párhuzamos a mágnes l hosszúságú élével. Ha a



2.51. ábra



2.52. ábra

rézrúdban I erősségű áram folyik, akkor az eredetileg függőleges felfüggesztő huzalok a függőlegeshez viszonyítva α szöggel kitérnek (2.52. ábra). A rézrúdra három erő hat, a nehézségi erő, a mágneses erő és a felfüggesztő huzalok által kifejtett kényszererő. A vízszintes erőkomponensek összege nulla, ezért

$$BIl = K \sin \alpha,$$

és a függőleges erőkomponensek is egyensúlyban vannak:

$$mg = K \cos \alpha.$$

E két egyenlőség alapján

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BIl}{mg}.$$

Érdekes lesz megvizsgálnunk, hogy mekkora erő hat egy vezető l hosszúságú szakaszára egy olyan mágneses térben, amelyet a vezetővel párhuzamos másik vezetőben folyó áram hoz létre. Másképpen: mekkora erő hat a párhuzamos, áramjárta vezetők között.

Jelöljük a két vezető távolságát d -vel. Ekkor az első vezetőben folyó I_1 erősségű áram a másik vezető pontjaiban a gerjesztési törvény szerint

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d}$$

erősségű mágneses teret hoz létre. A 2.53. ábra szerint ez lefelé mutat azon a helyen, ahol a másik vezető halad. Ha második vezetőben folyó I_2 áram iránya megegyezik az I_1 irányával, akkor erre a vezetőre

$$F = B_1 I_2 l$$

nagyságú erő hat, iránya pedig az első vezető felé mutat. Ha a két vezető árama ellentétes irányú, akkor a két vezető között taszítóerő lép fel. Helyettesítsük most az erőt szolgáltatató egyenlőségbe a B_1 -et:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d} l.$$

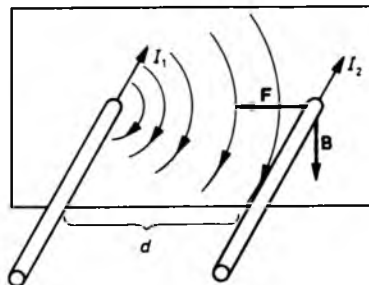
Világos az is, hogy ugyanekkora erő hat az első vezetékre is. Elég Newton III. törvényére hivatkozunk, de látszik ez a képlet szimmetriájából is. Az I_1 és I_2 áramok szerepe felcserélhető.]

Térjünk most rá annak a vizsgálatára, hogy mágneses tér milyen hatást fejt ki egy kisméretű, árammal átjárt vezetőkeretre.

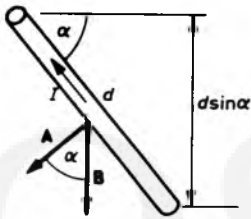
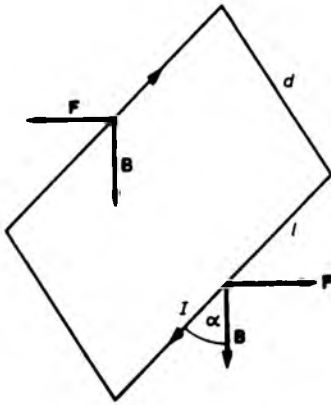
Képzeljünk el a 2.54. ábrán látható kis téglalap alakú keretet. A keret l hosszúságú oldalaira BIl nagyságú erőt fejt ki a mágneses tér. A két erő hatásvonalának a távolsága $d \sin \alpha$, ahol α az ábrán látható szög. A forgatónyomaték tehát

$$M = BIl d \sin \alpha$$

nagyságú. Vegyük észre, hogy ebben az egyenlőségben a jobb oldalon az ld szorzat



2.53. ábra



2.54.
ábra

a keret által körülölelt téglalap területe. Ezért a forgatónyomaték nagysága így is kifejezhető:

$$M = BIA \sin \alpha.$$

Ez az összefüggés általánosabban is igaz. Nem csak téglalap alakú vezetőkeretre, hanem akármilyen síkbeli zárt vezetékre is érvényes; a forgatónyomaték arányos a keret területével, a mágneses térerősséggel és a keretben folyó árammal. Az ábrából látható, hogy a szög megegyezik a keretre merőleges vektornak az erővonalakkal bezárt szögével.

Értelmezzünk egy új vektort, jelöljük \mathbf{A} -val. A nagysága legyen egyenlő a keret területével — a mértékegysége tehát m^2 —, és legyen merőleges a keret síkjára. Az iránya egyezzen meg a keret saját mágneses terének az irányával: ha a jobb kezünk

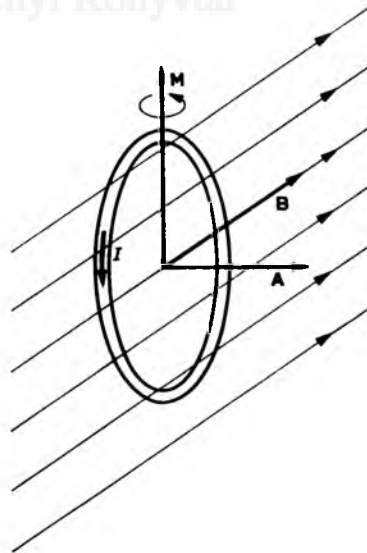
ujjai a keretben folyó áram irányába mutatnak, akkor a hüvelykujj mutatja a keret saját mágneses terének az irányát. Legyen ez az \mathbf{A} vektor iránya is (2.55. ábra). Ezután a vezetőkeretre ható forgatónyomaték általánosan a következő formában fejezhető ki:

$$\mathbf{M} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

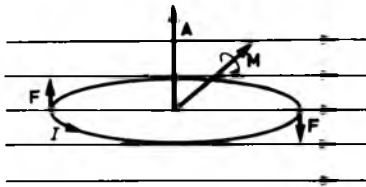
Emlékeztetünk a forgatónyomaték vektori jellegére. Ha a jobb kezünk hüvelykujja a forgatónyomaték-vektor irányába mutat, akkor a keret a jobb kezünk másik négy ujjának az irányában fordul el.

A keretre ható forgatónyomaték maximális értéke: $IAB = M_{\max}$. A maximális forgatónyomaték mérésével — a könnyen mérhető I és A ismeretében — a térerősség egyszerűen meghatározható.

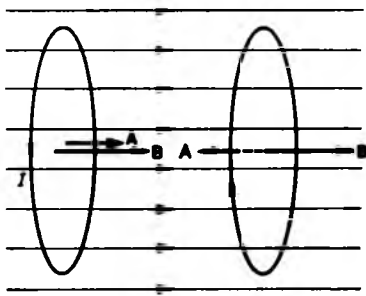
A keretre ható forgatónyomaték akkor maximális, ha a keretre merőleges \mathbf{A} vektor 90° -os szöget zár be a \mathbf{B} irányával. Más szóval: ha a keret síkja az erővonalak közé fekszik, a keret síkja párhuzamos az erővonalakkal (2.56. ábra).



2.55.
ábra



2.56.
ábra



2.57.
ábra

Az árammal átjárt vezetőkeret két helyzetben lehet egyensúlyban a mágneses térben: a forgatónyomaték nulla, ha a keretre merőleges vektor azonos irányú vagy ellentétes irányú a mágneses térrel. A keret stabilis egyensúlyban van, ha az A vektor — és így a keret saját mágneses tere — azonos irányú a külső térrel. Az egyensúly labilis, ha az A vektor — és így a keret saját mágneses tere — ellentétes irányú a külső térrel (2.57. ábra).

2.2.3. A mozgási indukció

Tegyük fel, hogy homogén mágneses térben l hosszúságú fémrúd mozog az erővonalakra merőleges állandó v sebességgel. A tér erősségét jelöljük — ahogyan szoktuk — B -vel. Ekkor az elektromos megosztáshoz hasonló jelenséggel találkozunk. Azt tapasztaljuk, hogy a fémrúd két végén elektromos töltés halmozódik fel. A rúd egyik vége pozitív, a másik negatív töltéssel fog feltöltődni (2.58. ábra).

Világos dolog: a fém belsejében a kezdetben semleges anyag töltését a Lorentz-erő szétválasztja. A pozitív töltést a vezető rudacska egyik végére, a negatív töltést a másik végére gyűjti.

A folyamat mindaddig tart, amíg a rúd két végén felhalmozódó töltések taszító és vonzó hatása a Lorentz-féle erőt nem kompenzálja. Ha a vezető rudacska két végén felhalmozódó töltés elektrosztatikus terét E -vel jelöljük, akkor egyensúlyban

$$EQ = QvB,$$

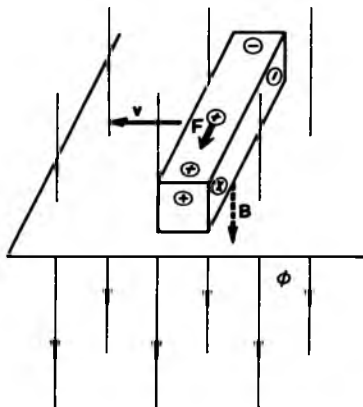
vagyis

$$E = vB. \quad (1)$$

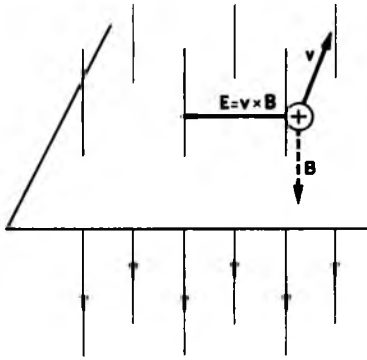
Általánosabban: ha a mozgó vezetődarabban kialakult az erőegyensúly, akkor az $F_L = Qv \times B$ Lorentz-erővel egyensúlyt tart a szétválasztott töltések elektromos tere által kifejtett EQ erő. Ez azt jelenti, hogy

$$E = v \times B. \quad (2)$$

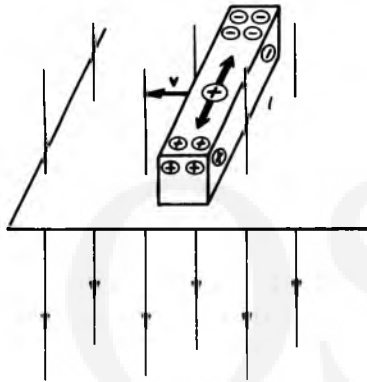
A rúd elemi töltéseire a mágneses tér mindig úgy hat, mint egy $E_L := v \times B$ erősségű elektromos tér. A mágneses térben v sebességgel mozgó Q töltésű test $v \times B$



2.58.
ábra



2.59.
ábra



2.60.
ábra

elektromos térként érzékeli a mágneses teret (2.59. ábra).

A B erősségű mágneses tér pontosan azt a hatást fejt ki a benne v sebességgel mozgó töltéssel rendelkező részecskére, mintha ugyanebben a pontban $v \times B$ elektromos tér hatna. Az elektromos test a sebességtől függő mértékben a B erősségű mágneses teret $v \times B$ erősségű elektromos térként fogja fel.

Térjünk vissza az (1) egyenlőséghez. Amíg a vezetőszakasz v sebességgel mozog, a Lorentz-erő folyamatosan hat a mozgó fém belsejében található elektromos részecskékre (2.60. ábra).

A töltés szétválasztásának a felhalmozódó töltés vet gátat. Ha azonban a rúd két

végét vezetékkel összekötjük, akkor a felhalmozódó töltést elvezetjük. A Lorentz-erő most már szabadabban működik. Az elektromos töltés a kialakult elektromos tér hatására az összekötő vezetéken visszafolyhat a rúd negatív végére. A Lorentz-erő hasonló szerepet tölt be itt, mint a kémiai erő a kémiai áramforrások esetén.

A Lorentz-erő azonos a vB erősségű indukált elektromos tér által kifejtett erővel. Szorozzuk meg most az (1) egyenlőség mindkét oldalát a vezető rúd l hosszával:

$$El = Blv. \quad (3)$$

A mágneses térben v sebességgel mozgó l hosszú rúd két vége között $U := Blv$ nagyságú feszültség indukálódik.

Emeljük ki tehát még egyszer: a v sebességgel mozgatott rúdban két hatás érvényesül. Az egyik a Lorentz-erő. Ez akkora, mintha $v \times B$ erősségű elektromos tér hatna a rúd elektromos töltésű részecskéire. Ez a hatás állandóan működik, mindaddig, amíg a rúd mozog, függetlenül attól, hogy beáll-e valamilyen töltésegyensúly, vagy a töltés visszaáramlik valamilyen „kerülőúton”, valamilyen vezetön. A Lorentz-erő, vagyis a mágneses hatás úgy is kifejezhető, hogy a vezető két vége között Blv feszültség alakul ki.

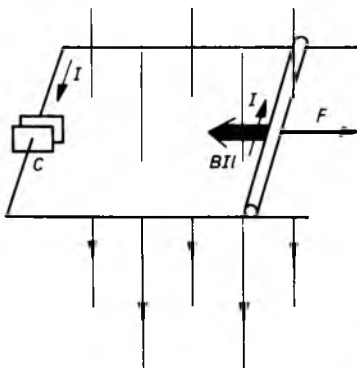
A rúdban érvényesülő másik hatás a rúd két végén felhalmozódó elektromos töltések elektromos terével magyarázható. Ez az elektromos tér általában kisebb a vB indukált térerősségnél. Egyensúly esetén — ha a töltés nem áramlik vissza — a vB nagyságű mágneses eredetű tér és az E nagyságű elektromos tér egyenlő. Persze, mindig ellentétes irányúak.

Az indukált elektromos tér állandó — v -től és B -től függő — elektromotoros erőként fogható fel.

A mágneses térben — az erővonalakra merőlegesen — v sebességgel mozgó l hosszúságú vezető rúd két vége között $U = Blv$ feszültség indukálódik. Ezt a jelenséget *mozgási indukciónak* nevezzük. A mozgási indukció magyarázata — mint láttuk — a Lorentz-erőben van.

┌Tegyük fel, hogy homogén mágneses tér függőlegesen lefelé mutat, erőssége B . A térben U alakú vezetópár van, a síkja vízszintes. A sín pár összekötő szakaszába egy C kapacitású kondenzátort iktatunk. Fektesünk a sín párra merőlegesen egy m tömegű rudat, és fejtünk ki rá vízszintes irányban F erőt. Tegyük fel, hogy a rúd kezdősebessége nulla, és a sín pár, az összekötő szakasz és a mozgó rúd ellenállása is elhanyagolható.

A rúd a 2.61. ábra szerint jobbra mozdul el. Ebben a pillanatban a rúdban megindul a töltésszétválás, a fellépő Lorentz-erő a pozitív töltést a felső végpont felé, a negatív töltést az alsó végpont felé mozdítja. A jobb kéz felé mozduló vezetőben fölfelé irányuló áram indul meg. A vezetőben folyó töltésre a függőleges mágneses tér BIl nagyságú erőt fejt ki. Ennek az erőnek az iránya ellentétes az F erő irányával. (Az elinduló áramra ható mágneses erő ellentétes irányú a rúdra ható, általunk kifejtett



2.61. ábra

erővel. Ez a jelenség a *Lenz-törvény* egyik megnyilvánulása. Ennek a nagy jelentőségű törvénynek a részletes vizsgálatára még visszatérünk.) Newton II. törvénye a rúd mozgására:

$$F - BIl = ma.$$

A rúd két vége között keletkező feszültség: $U = Blv$, ez megegyezik a vele párhuzamos kondenzátor Q/C feszültségével:

$$Blv = \frac{Q}{C}.$$

Mivel $\dot{Q} = I$ és $v = a$, ezért

$$Bla = \frac{1}{C} I,$$

innen

$$I = CBla.$$

Helyettesítsük ezt Newton II. törvényébe:

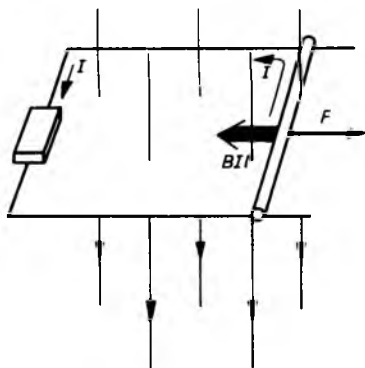
$$F - B^2 l^2 Ca = ma,$$

és ezért

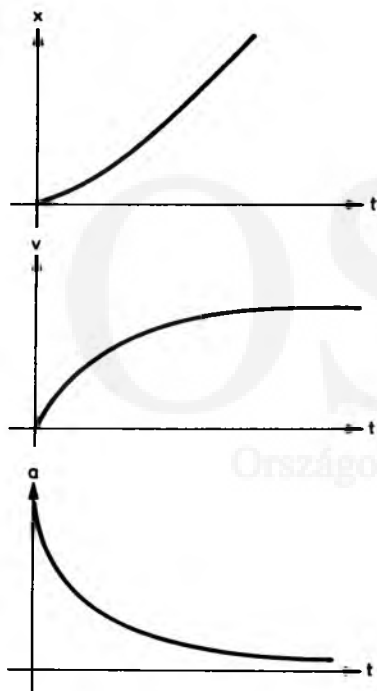
$$a = \frac{F}{m + B^2 l^2 C}.$$

A rúd tehát állandó gyorsulással mozog. Indulás után t idővel a rúd sebessége $v = at$, a kondenzátor töltése ekkor $Q = CBlat$, az idővel arányosan növekszik.]

┌Vizsgáljunk meg most egy rokon problémát! Tegyük fel most is, hogy a mágneses tér homogén, az erővonalai függőlegesen lefelé mutatnak, a térerősség nagysága legyen B . A vízszintes sín pár összekötő szakasza legyen R ellenállású. Az összekötő fémrúd tömegét jelöljük m -mel, a sín pár távolságát l -lel. Fejtünk ki a kezdetben nyugvó rúdra vízszintes irányú F erőt, a 2.62. ábra szerint jobb kéz felé mutató irányba. Lenz fent említett törvénye értelmében BIl nagyságú — az F -fel ellentétes



2.62.
ábra



2.63.
ábra

irányú — mágneses erő lép fel. Így Newton II. törvénye a mozgó rúdra:

$$F - BIl = ma.$$

Ha a kezdősebesség nulla, akkor a kezdeti gyorsulás \$F/m\$, hiszen ekkor még \$I=0\$. Ha a rúd sebessége már nem nulla, akkor a rúd két vége között \$Blv\$ feszültség indukálódik.

Ekkora azonban a feszültség a mozgó rúddal párhuzamos ellenállása két vége között is:

$$IR = Blv.$$

Innen

$$I = \frac{Blv}{R}.$$

Helyettesítsük ezt Newton II. törvényébe:

$$F - \frac{B^2 l^2 v}{R} = ma.$$

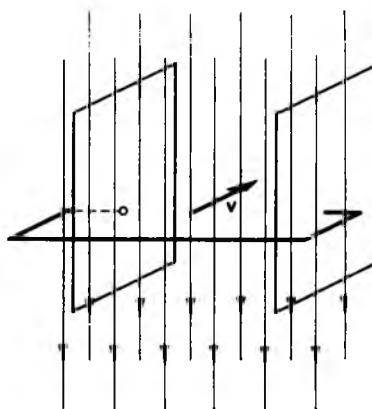
A növekvő sebesség azt eredményezi, hogy az eredő erő nagysága csökken. A gyorsulás egyre kisebb lesz. A sebesség és a gyorsulás időfüggésének a grafikonját vázoltuk a 2.63. ábrán. Ha — igen hosszú idő után — a gyorsulás nullának tekinthető, akkor

$$F = \frac{B^2 l^2 v}{R},$$

és ezért a rúd végsebessége:

$$v = \frac{FR}{B^2 l^2}.$$

Tegyük fel most, hogy egy síkkondenzátor lemezei \$A\$ felületűek, és a távolságuk \$d\$. Kössük össze a lemezeket a 2.64. ábrán



2.64.
ábra

látható módon. Mozgassuk ezt a rendszert B erősségű mágneses térben úgy, hogy a lemezek síkja párhuzamos legyen az erővonalakkal, a mozgás sebessége merőleges a térerősségre. A két lemezt összekötő vezetékben Bdv nagyságú feszültség indukálódik. A sebességgel párhuzamos szakaszokban nem jön létre indukált elektromos tér, a vezeték szemközti szakaszaiban keletkezett feszültségek összege pedig nulla. A kondenzátor feszültsége Q/C , ez megegyezik a vele párhuzamos vezetékben indukálódott feszültséggel:

$$Bdv = \frac{Q}{C}.$$

Innen azt kapjuk, hogy a kondenzátoron felhalmozódó töltés:

$$Q = CBdv.$$

És ha a kapacitást kifejezzük a kondenzátor geometriai adataival, akkor

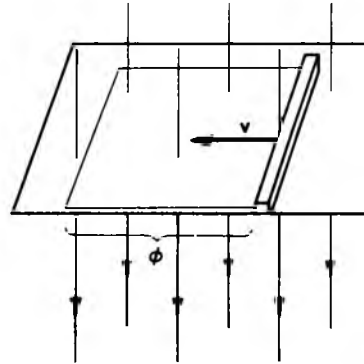
$$Q = \epsilon_0 ABv.$$

Figyelemre méltó, hogy a kondenzátor lemezein felhalmozódó töltés nem függ a lemezek távolságától. Világos dolog, hogy az összekötő huzal alakjának sincs szerepe. Ugyanezt az eredményt kapnánk, ha a két lemezt összekötő huzal a lemezek között haladna.]

A homogén mágneses térben mozgó vezeték két vége között kialakuló feszültség más formában is kifejezhető. Tegyük fel tehát most is, hogy l hosszúságú vezető mozog az erővonalakra merőleges v sebességgel. Ekkor a vezető két vége között

$$U = Blv$$

feszültség indukálódik. (Ha a vezető sebessége nem merőleges az erővonalakra, hanem — mondjuk — α szöget zár be az erővonalakkal, akkor $U = Blv \sin \alpha$, az in-



2.65. ábra

dukált feszültség kifejezésében egyszerűen l helyett $l \sin \alpha$ szerepel.)

Mivel azonban lv a vezető által időegység alatt sűrolt területet jelenti (2.65. ábra), $lv = \dot{A}$, ezért

$$U = B \dot{A}. \quad (4)$$

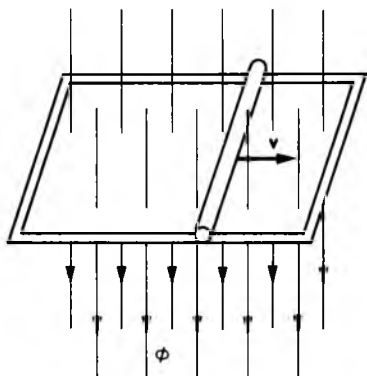
A felület és a térerősség szorzata a mágneses fluxus, tehát

$$U = \dot{\Phi}, \quad (5)$$

hiszen a B a feltevés szerint állandó. Szemléletesen szólva ez azt jelenti, hogy a mágneses térben mozgó vezetőben keletkezett feszültség az időegység alatt metszett erővonalak számával azonos.

A (3) és az (5) összefüggések az indukált feszültség meghatározására alkalmasak. Természetesen vagy az egyik, vagy a másik formát használjuk.

[Tegyük fel például, hogy egy hosszú, téglalap alakú vezetőkeret hosszabbik oldala L , a rövidebbik l . A keretet alkotó huzal keresztmetszete A_0 , fajlagos ellenállása ρ . A téglalap függőleges mágneses térben vízszintesen helyezkedik el. A hosszabb oldalakra merőlegesen egy l hosszúságú pálcát mozgatunk. A pálcát ugyanabból az anyagból készült, mint a téglalapot alkotó huzal. A keresztmetszete



2.66.
ábra

is A_0 . A pálcia kezdetben egyenlő távol van a két rövid oldaltól. A hosszabbik oldalpáron mint sínen állandó v sebességgel mozgatjuk a téglalap egyik rövid oldala felé (2.66. ábra).

A mozgó rúd két végén feszültség indukálódik. A téglalap két része úgy fogható fel, mint a mozgó oldallal párhuzamosan kapcsolt két ellenállás. A mozgás kezdete után t idővel az egyik rész ellenállása:

$$R_1 = \rho \frac{(L+l) - 2vt}{A_0},$$

a másik rész ellenállása pedig

$$R_2 = \rho \frac{(L+l) + 2vt}{A_0}.$$

A két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredője:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \rho \frac{(L+l)^2 - 4v^2 t^2}{2(L+l)A_0}.$$

Ehhez hozzáadjuk a mozgó szakasz $\rho l/A_0$ ellenállását (ez mintegy belső ellenállásként szerepel):

$$R = \rho \left(\frac{(L+l)^2 - 4v^2 t^2}{2A_0(L+l)} + \frac{l}{A_0} \right).$$

A rúd két vége között indukált feszültség

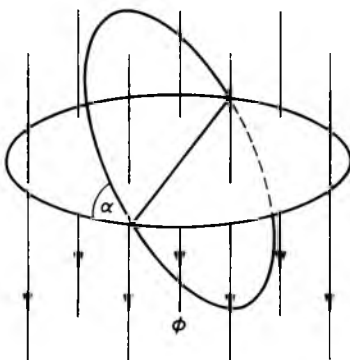
$U = Blv$, ezért a mozgó rúdon átfolyó áram:

$$I = \frac{Blv}{R}.$$

Fogalmazhatunk azonban így is: a mozgó rúd t idő alatt vt utat tesz meg, az általa sűrűlt terület tehát $A = vlt$, a metszett erővonalak száma: $BA = Bvlt$. Az időegység alatt sűrűlt mágneses fluxus a felület peremén indukált feszültséggel egyenlő:

$$U = B\dot{A} = \frac{Bvlt}{t} = Blv. \quad \square$$

¶ Tegyük fel, hogy egy kör alakú vezetőhurok $A = 0,5 \text{ m}^2$ felületű, ellenállása $R = 1 \Omega$. A keret $B = 2 \text{ V s/m}^2$ erősségű homogén mágneses térben fekszik, az erővonalakra merőleges helyzetben. Fordítsuk el most a keretet $\alpha = 30^\circ$ -kal a 2.67. ábrán látható tengely körül. A fluxus kezdeti értéke: $\Phi_1 = 1 \text{ V s}$. Az α szöggel elfordított helyzetben az erővonalak merőlegesen $A \cos \alpha$ felületet dőfnek, tehát a fluxus most $\Phi_2 = BA \cos \alpha$. (Felfoghatjuk úgy is, hogy a felületet a térerősség felületre merőleges összetevőjével szorozzuk: $\Phi_2 = B \cos \alpha \cdot A$.) A fluxus megváltozása tehát $\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -0,134 \text{ V s}$.



2.67.
ábra

Osszuk el ezt az elfordulás idejével, Δt -vel, ekkor az átlagos indukált feszültséget kapjuk. Ennek a körben indukált feszültségnek a hatására Δt ideig I átlagos erősségű áram folyik a vezetőhurokban. A hurokban indukálódott átlagos feszültség megegyezik a keret ellenállására jutó átlagos potenciálkülönbséggel:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = IR.$$

Mivel azonban $I\Delta t = Q$ — a vezető keresztmetszetén Δt idő alatt átfolyt töltés — azt kapjuk, hogy

$$\Delta\Phi = QR.$$

(A számszerű eredmény: a vezető keresztmetszetén $Q = 0,134$ C töltés áramlik át — akár gyorsan fordítjuk el a keretet, akár lassan.)

Égészítsük ki a gondolatmenetünket! Ha a keret normálisa — a keret síkjára merőleges egységnyi hosszú vektor — kezdetben, a t_0 időpontban α_0 szöget zár be az erővonalakkal, majd elfordítjuk úgy, hogy a t időpontban a normális α szöget zár be a tér irányával, akkor a fluxus megváltozása:

$$\Delta\Phi = BA \cos \alpha - BA \cos \alpha_0.$$

Az átlagos indukált feszültség:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BA \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{t - t_0}.$$

Gondoljuk el most, hogy a keret állandó szögsebességgel forog az erővonalakra merőleges tengely körül. Ekkor az átlagos feszültség

$$BA \frac{\cos \omega t - \cos \omega t_0}{t - t_0}.$$

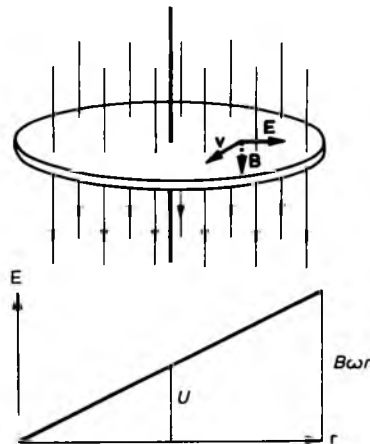
Ha a t_0 időpontot rögzítettük, akkor az átlagos feszültség az idő függvénye. Ez a

függvény nincs értelmezve a t_0 időpontban. Kiterjeszhető azonban ez a függvény folytonosan ezen a helyen. A folytonos kiterjesztés helyettesítési értéke a pillanatnyi indukált feszültség:

$$U(t_0) = -BA\omega \sin \omega t_0.$$

Az indukált feszültség szinuszfüggvénynek megfelelően változik.]

[Vizsgáljuk meg most a mozgási indukcióval kapcsolatos következő problémát. Tegyük fel, hogy a mágneses tér erővonalaira merőlegesen egy r sugarú alumíniumból készült körlemez van. A korong ω szögsebességgel egyenletesen forog a tengelye körül. A középponttól $x \in [0, r]$ távolságra a kerületi sebesség $v = x\omega$. Itt a lemez pontjai $v \times \mathbf{B}$ erősségű elektromos térként érzékelik a \mathbf{B} erősségű mágneses teret. A lemez középpontjától x távolságra a Q töltésre $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, kifelé — a korong pereme felé — mutató erő hat. Ennek az erőnek a nagysága $QvB = Qx\omega B$. A töltésre ható erő a középponttól mért távolsággal arányos. A 2.68. ábrán ennek az arányosságnak a grafikonját tüntettük fel: a vízszintes tengelyen a korong középpontjától mért x távolságot, a függőleges tengelyen az egy-



2.68. ábra

ségnyi töltésre ható elektromos erőt mér-
tük fel. A görbe alatti terület — a három-
szög területe — a korong középpontja és a
pereme között indukálódott feszültséggel
azonos:

$$U = \frac{B\omega r^2}{2}.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a kö-
vetkezőképpen okoskodunk. A korong
egy fordulata $T = 2\pi/\omega$ időt vesz igénybe.
Közben a korong bármely sugara egyszer
körbefordul, és $r^2\pi B$ számú mágneses erő-
vonalat metsz. Az időegység alatt metszett
erővonalszám:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{r^2\pi B}{T} = \frac{B\omega r^2}{2},$$

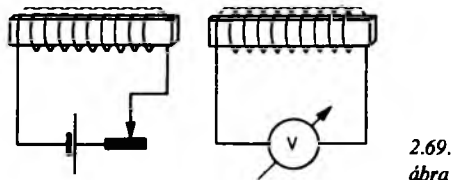
ugyanaz, mint az előző eredmény.]

2.2.4. A nyugalmi indukció

Az előző pontban a mozgási indukciót
tanulmányoztuk. A jelenséget a Lorentz-
féle erőtvénnyel értelmeztük. A B erőssé-
gű mágneses térben v sebességgel mozgó
vezetőben a mágneses tér szétválasztja a
töltést, a vezető egyik végére a pozitív töl-
tés gyűlik össze, a másik végén negatív
töltés halmozódik fel. Ha az erővonalakra
merőleges vezető hossza l , akkor a vezető
két vége között Blv nagyságú feszültség
keletkezik.

Ebben a pontban a *nyugalmi indukció*
jelenségét tanulmányozzuk. Látni fogjuk,
hogy a két jelenség nem különbözik igazán
egymástól, inkább arról van szó, hogy kü-
lönböző az a megközelítési mód, ahogyan
a mozgási és a nyugalmi indukciót tanul-
mányozzuk.

Helyezzünk el egymás mellé két teker-
cset a 2.69. ábrán látható módon. Az első



tekercs áramkörébe iktassunk egy áram-
forrást, egy kémiai elemet és egy olyan
szerkezetet, amellyel az áramot gyorsan
változtatni tudjuk. (Elhelyezhetünk az
áramkörbe egy reszelőt, a vezeték szabad
végét ezen a reszelőn ide-oda húzogatjuk,
akkor igen gyorsan változik a
vezetékben.) Ezt a tekercest nevezzük pri-
mer tekercsnek. A másik ún. szekunder
tekercs áramkörébe csak egy feszültségmér-
őt helyezünk el.

Ha a primer tekercsben folyó áramot
változtatjuk, akkor a tekercs mágneses te-
re is változik. Azt tapasztaljuk, hogy a
szekunder tekercs áramkörébe iktatott
voltmérő feszültséget jelez.

Hogyan értelmezhetjük ezt a jelenséget?

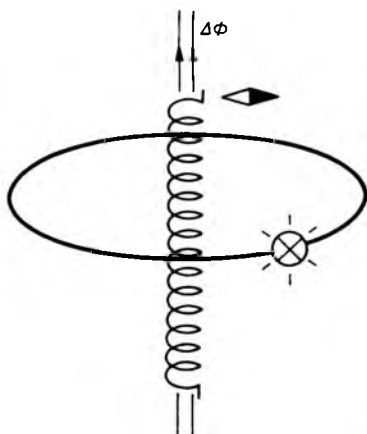
Most nem hivatkozhatunk arra, hogy a
mozgó vezetékben a töltést szétválasztja a
mágneses erő. A szekunder tekercsben az
elemi töltött részecskék nem érezhetik azt,
hogy mágneses térben mozognak. Azt
azonban érezhetik, hogy a környezetükben
változik a mágneses tér, az első tekercs
mágneses tere. Nem az a fontos, hogy az
elektromos töltés azt érezze, hogy mágne-
ses térben mozog, hanem az, hogy a kör-
nyezetében változzék a mágneses tér. Ezzel
párhuzamot vonhatnánk a mozgási induk-
ció és a nyugalmi indukció között. Ráadá-
sul a második tekercsben indukálódott fe-
szültség — a mérések szerint — arányos az
első tekercs fluxusának megváltozásával.

Ez az értelmezés rossz. Egyszerűen be-
láthatjuk, hogy nem állja meg a helyét.
Képzeljük el ugyanis, hogy a primer te-

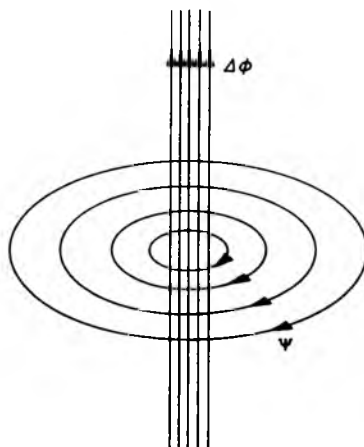
kercs egy igen hosszú, vékony szolenoid. A mágneses tér a tekercs belsejében homogénnek tekinthető, a tekercsen kívül pedig az erővonalak olyan mértékben szóródnak, hogy a környezetében még egy igen érzékeny iránytűvel sem tudunk mágneses térerősséget kimutatni (2.70. ábra).

Vegyük most körül a tekercset egyetlen vastag vezető hurokkal. Ezt tekintjük szekunder tekercsnek. Iktassunk a hurokba egy kis izzólámpát. Ha bekapcsoljuk a primer tekercshez kapcsolódó áramforrást, akkor a kis izzó felvillan. Kikapcsoláskor szintén. Ha állandó áram folyik a hosszú tekercsben, akkor a lámpa nem világít. A primer tekercs áramának a változásakor a tekercs fluxusa is változik. Ilyenkor a lámpa világít, ami azt jelenti, hogy áram folyik a vezető hurokban.

A jelenség elsődleges oka a mágneses fluxus változásában van. Láttuk azonban, hogy a hurok és az izzólámpa körül elhelyezett iránytű mágneses teret nem éreznek. Mit érez akkor a vezetőhurokban az elektromos töltés? Mi hajtja körbe az elektromos töltést a tekercset körülölelő vezetőken, és mi kényszeríti át az izzólámpán?



2.70.
ábra



2.71.
ábra

Emlékezzünk vissza mozgási indukciót magyarázó Lorentz-erőre. Azt láttuk, hogy a mozgó töltésre a mágneses térben $\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erő hat. Ezt a tényt kétféleképpen interpretálhatjuk:

- a mágneses tér $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erőt fejt ki a mozgó töltésre,
- a mágneses térben mozgó töltés a teret $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erősségű elektromos térként fogja fel.

Magyarázhatjuk a szolenoidot körülölelő hurokban folyó áramot azzal, hogy a belsejében elektromos erő hat? Faraday zseniális intuíciója ez: az elektromos tér feltételezése, annak a hipotézisnek a felállítása, hogy a változó mágneses tér erővonalai körül elektromos tér keletkezik (2.71. ábra).

A dolog azért meglepő, mert az elektromos térrel kapcsolatban az a kép rögzült bennünk, hogy az csak elektromos töltések körül alakul ki. Úgy kell ezt felfogni, mint a földrajzi felfedezések korában az őseinknek: bármennyire is megszokták a régi földrészeket, bele kellett nyugodniuk, hogy merőben új világot találtak.

Az indukált elektromos teret valóban kimutathatjuk. Az elektrosztatikus teret az

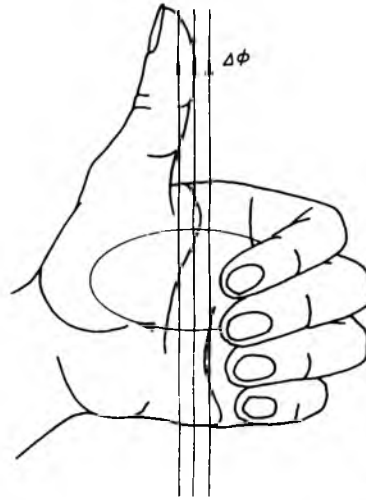
erővonalaival szemléltettük, és ezeket úgy tettük „láthatóvá”, hogy elektromosan töltött részecskéket lapos tálkában rögzítettük, a tálba olajat töltöttünk úgy 1 mm magasan, és az olajba például virágport szórtunk. A virápporzéscskék az erővonalak mentén helyezkednek el, mintegy kirajzolják az erővonalakat.

A demonstrációs kísérletet az indukált elektromos térrel kapcsolatban is el lehet végezni, csak kissé körülményesebb a végrehajtása. Mindenesetre a következőt tapasztaljuk: a változó mágneses tér körül az elektromos tér erővonalai koncentrikus köröket alkotnak.

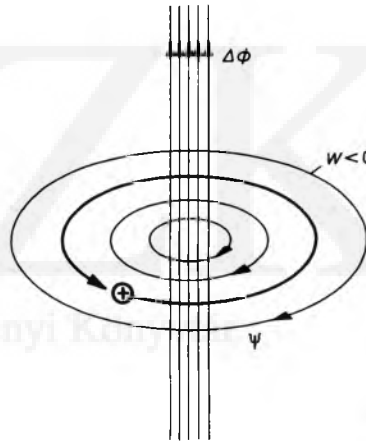
Valóban: a kísérletben szereplő szolenoid körül örvénylő elektromos tér indukálódik.

Ennek a jelenségnek a tanulmányozása két kérdést vet fel. Az egyik az, hogy milyen irányú ez a tér? Vagyis: merre mutatnak az örvénylő elektromos erővonalak? A másik kérdés azzal függ össze, hogy az indukált elektromos tér nem konzervatív, ez azt jelenti, hogy az erővonalak zárt köröket alkotnak. Ha a tér nem konzervatív, akkor mekkora a tér munkája egyetlen körön végighaladó $Q = 1 \text{ C}$ töltésen?

Könnyen ellenőrizhető kísérletileg — de alá is támasztjuk az eddigi eredményeinkre támaszkodva —, hogy a mágneses tér erővonalai körül kialakuló elektromos tér balsodrású, az elektromos erővonalak irányítását balkéz-szabállyal lehet megállapítani. Ez azt jelenti, hogy ha valamely felületen változik a mágneses fluxus, és ha a bal kezünk hüvelykujját a fluxus változásának irányába fektetjük, akkor a bal kezünk többi ujjá az indukált elektromos tér irányát mutatja (2.72. ábra). (Fontos: nem az számít, hogy milyen irányú a mágneses tér, hanem az, hogy milyen irányba változik. Ha például a szolenoidban a \mathbf{B} fölfelé



2.72. ábra



2.73. ábra

mutat, de csökken, akkor a fluxusváltozás lefelé irányul, és az elektromos erővonalak irányának a meghatározásához a bal kezünk hüvelykujját is lefelé kell irányítanunk.)

Ha egyetlen zárt erővonal mentén körbeviszünk egy egységnyi töltést — a 2.73. ábrán látható módon —, akkor az erővonalakkal ellentétes irányba haladunk. Az indukált elektromos tér munkája tehát negatív. Másrészt — ennek a gondolatnak is

láttuk már az előhírnökét — összefüggés van a fluxusváltozás és az indukált elektromos tér munkája között. Erre vonatkozik az elektromágneses indukció alaptörvénye:

Faraday indukációs törvénye: *Ha körbeviszünk egy egységnyi (pozitív) elektromos töltést, akkor az indukált elektromos tér munkája a körbejárt mágneses fluxus időegységre jutó megváltozásával egyenlő:*

$$\sum_{\mathcal{C}} E^{\parallel} \Delta s = - \dot{\Phi}. \quad (1)$$

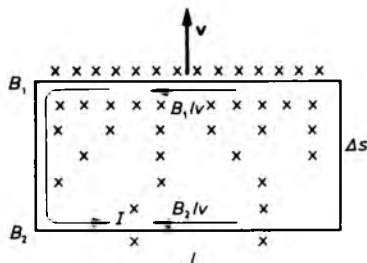
A negatív előjel a balkéz-szabályt fejezi ki. Ha a pozitív egységnyi töltést a jobbkéz-szabálynak megfelelő irányban viszsük körül a mágneses tér változó fluxusa körül, akkor az elektromos tér munkája negatív. A tér által végzett munka pedig a körbejárt fluxus időegységre eső megváltozásával egyenlő.

Megjegyezzük, hogy ha a fluxus Δt ideig egyenletesen változik, és a megváltozása $\Delta\Phi$, akkor az (1) egyenlőség így is írható:

$$\sum_{\mathcal{C}} E^{\parallel} \Delta s = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (2)$$

Az elektromágneses indukció alaptörvénye magában foglalja az ún. nyugalmi indukció magyarázatát és párhuzamba állítható a mozgási indukció törvényével is. Itt is arról van szó, hogy a mágneses tér miként hat az elektromos töltésre. Láttuk, úgy, hogy a mágneses tér a fluxusának megváltozására merőleges balsodrású elektromos teret hoz létre, indukál.

Korábban mondtuk: a mágnességtanban két jobbkéz-szabály van, és ez természetes is, a kezdeti problémafelvetés alapján. Hogyan illeszkedik ehhez a gondolat-hoz a most megismert balkéz-szabály? Rámutatunk, hogy az indukált elektromos tér



2.74. ábra

irányát kifejező szabály a mágnességtan „második jobbkéz-szabályának” általánosítása.

Tegyük fel, hogy egy téglalap — a 2.74. ábrán látható módon — a mágneses tér erővonalaira merőleges síkban mozog. Két oldala merőleges a sebességre, jelöljük ezeknek a hosszát l -lel. A másik két oldal hossza legyen Δs , ezek az oldalak egyirányúak a sebességgel. Képzeld el, hogy a mozgás irányába nő a mágneses tér erőssége, $B_1 > B_2$. Ekkor a téglalap sebességre merőleges oldalaiiban indukálódott feszültség B_1lv , B_2lv . A másik két oldalon nem keletkezik feszültség. A mágneses tér a papír síkjában befelé mutat (a mágneses erővonalakat kis keresztekkel jelöltük). Az elől mozgó vezetékben nagyobb feszültség indukálódik, mint a hátul mozgóban. Mindkét, l hosszúságú szakaszon balra mutat az elektromotoros erő. Ez azt jelenti, hogy a két elektromotoros erő eredője az óra járásával ellentétes irányban mozgatja az elektromos töltést. Másrészt: a téglalap alakú keretet az ábrán látható irányban mozgatva egyre nagyobb a lefelé mutató mágneses fluxus. Ha tehát a bal kezünk hüvelykujját a fluxus növekedésének az irányába állítjuk, akkor a kezünk többi ujjja jelzi a keretben folyó áram irányát. A mozgó keretben indukálódott eredő kőrfeszültség irányát a bal kezünk ujjai mutatják.

A téglalap alakú keretben indukálódott eredő feszültség:

$$U = B_1 lv - B_2 lv.$$

Ha a téglalap Δt idő alatt pontosan Δs hosszú úton mozdul el, akkor $\Delta s = v \Delta t$, tehát

$$U = \frac{(B_1 - B_2) l \Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta B A}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

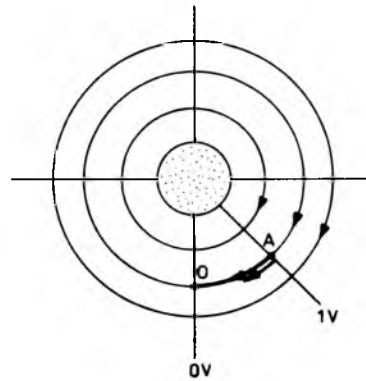
A keretben indukálódott elektromos tér egységnyi töltésen végzett munkája a téglalap oldalain összesen:

$$B_1 vl + 0 - B_2 vl + 0 = \dot{\Phi}.$$

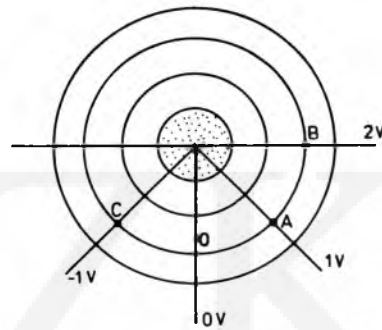
Ezzel arra szerettünk volna rámutatni, hogy a mozgási és a nyugalmi indukció gyökere közös, mindkét jelenség ugyanazzal a forgalomrendszerrel tárgyalható és ugyanazzal a matematikai eszközökkel kezelhető. Érzékeltettük azt is, hogy az indukált elektromos tér irányát meghatározó balkéz-szabály szoros összefüggésben van a mágnességtan „második” jobbkéz-szabályával. Az elektromágneses indukció problémaköre szervesen kapcsolódik ehhez az alapvető kérdéshez: „hogyan hat a mágneses tér a benne mozgó elektromos töltésre?”

Az indukált elektromos tér erővonalai önmagukba záródnak. Gondoljuk el, hogy a 2.75. ábrán látható kör egy vasmagos tekercs keresztmetszete. A tekercsben folyó áram most úgy változik, hogy a vasmagban egyenletesen nő a fluxus, a növekedés „iránya” kifelé mutat a papír síkjából. Ekkor az elektromos tér erővonalai az óramutató járásával egy irányban ölelik körül a mágneses tér fluxusát. Az elektromos tér a tekercsen kívül mindenütt értelmezve van.

Jelöljük ki most az elektromos térben



2.75. ábra



2.76. ábra

tetszőlegesen egy O pontot. Válasszuk meg ezután az A pontot a 2.76. ábrán látható módon. Gondolatban helyezünk az A pontba egy egységnyi pozitív töltéssel rendelkező testet, és vigyük ezt a testet az A pontból az O pontba. Haladjunk az erővonalak irányába. Ekkor a tér pozitív munkát végez a töltésen. Feltehetjük, hogy ez a munka egységnyi. Az A ponton áthaladó — az erővonalakra merőleges — felület akármelyik másik pontjából visszük a $q = 1 \text{ C}$ töltésű testet az O pontba, a tér szintén 1 J munkát végez rajta.

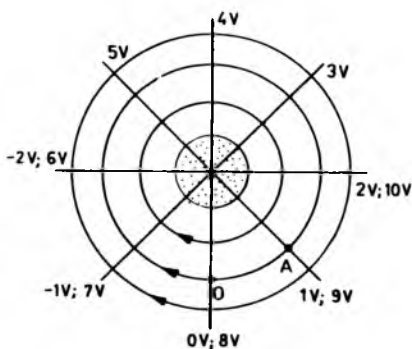
Válasszuk meg most a B pontot úgy, ahogy a 2.76. ábrán látható. Ebből a pontból az O pontba haladva — az erővonalak irányában — a tér nagyobb munkát végez, mint az A-ból indultunk volna a pozitív

egységnyi töltéssel. Tegyük fel, hogy ez a munka két egységnyi. Ugyanennyi azonban a B pontra illeszkedő, az erővonalakra merőleges felület bármely pontjából indulva is.

Ha a C pontot, az O pont „másik oldalán” választjuk meg — ahogyan a 2.76. ábrán látszik —, akkor ebből a pontból — és a rajta áthaladó erővonalakra merőleges felület minden pontjából — indulva a tér negatív munkát végez a pozitív egységnyi töltésen. Lehetséges, hogy ez a munka -1 J .

Olyan „ekvipotenciális felületeket” kapunk tehát, amelyeket az elektrosztatikus tér potenciáljának az értelmezésekor látunk.

Van azonban egy alapvető különbség az elektrosztatikus esettel szemben. Ott a tér bármely pontjához egyértelműen hozzá lehetett rendelni azt a munkát, amelyet a tér akkor végzett, ha az egységnyi töltés a kiválasztott nullaszintre mozgott. Most ez a hozzárendelés nem egyértelmű. Látható, hogy ha elindulunk az A pont felé, akkor az „ekvipotenciális felületek” így követik egymást: 1 J , 2 J , ... És visszaérkezve az O ponthoz — 8 J . A C ponthoz odaírtuk már korábban, hogy -1 J , most azonban az is szerepel mellette, hogy 7 J (2.77. ábra).



2.77. ábra

Ha a B pontba elhelyezünk egy egységnyi töltésű testet, és ezt az O pontba kívánjuk vinni, akkor a tér az útvonal megválasztásától függően különböző munkát végezhet a testen. A B pontból az O pontba mozgatott 1 C töltésű testen az indukált elektromos tér végezhet 2 J munkát, vagy -6 J munkát, ha az ellenkező irányba haladunk, de lehetséges, hogy ez a munka 10 J , ha az O ponton áthaladva az erővonalak irányában egyszer körbejárjuk a mágneses fluxust.

Mekkora munkát végez az elektromos tér, ha egységnyi pozitív töltés a B pontból az O pontba mozog? Végezhet a tér 2 J , 10 J , 18 J , 26 J , ... vagy -6 J , -14 J , -22 J , ... munkát attól függően, hogy hányszor járja körül a töltött részecske a mágneses fluxust. Az indukált elektromos tér — egységnyi töltésen végzett —

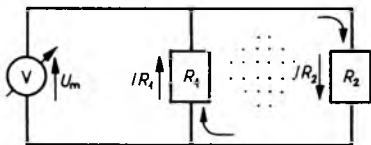
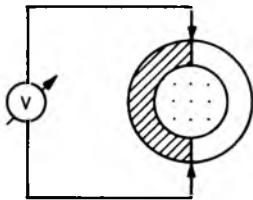
$$\sum_{A \rightarrow O} E \parallel \Delta s$$

munkája tehát nem egyértelmű. Nem is lehet ezért az A ponthoz egyértelműen hozzárendelni ezt a mennyiséget.

Nagyon fontos dologról van szó: *indukált elektromos térben elektromos potenciál nem értelmezhető!*

A változó mágneses tér elektromos teret indukál, ezt a teret pontról pontra az elektromos térerősségvektorral jellemezzük. Az elektromos tér pontjainak azonban most nincs potenciáljuk!

┌ Képzeld el, hogy a vasmagos, keskeny tekercsben a mágneses tér fluxusa másodpercenként 4 V -tal változik. A vasmagra egy gyűrűt húzunk. A gyűrű két félből áll, az egyik fele $1\ \Omega$ ellenállású, a másik ellenállása $3\ \Omega$. A két félgűrű érintkezési pontjaihoz egy igen nagy ellenállású feszültségmérőt illesztünk. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora feszültséget mutat a műszer!



2.78.
ábra

Alkalmazzuk az elektromos tér törvényeit a 2.78. ábrán látható két hurokra. A jobb oldali hurok két oldalán az $R_1 = 1 \Omega$ és az $R_2 = 3 \Omega$ nagyságú ellenállások a két félgűrű ellenállásának felelnek meg.

Elektromos áram csak a jobb oldali hurokban folyik, mert a műszer ellenállása végtelen nagyra tekinthető. Jelöljük be az ellenállásokon eső feszültségeket. A bal oldali hurokban a feszültségesések összege nulla:

$$U_m - IR_1 = 0, \quad (3)$$

a jobb oldaliban azonban nem! A zárt görbe ugyanis változó mágneses teret ölel körül, a zárt görbén a feszültségesések összege a körüljárt fluxus időegységre eső megváltozásával egyenlő:

$$IR_1 + IR_2 = 4. \quad (4)$$

Innen $I = 1 \text{ A}$ és $U_m = 1 \text{ V}$. [Ha a teljes „nagy” hurokra írjuk fel a huroktörvényt most tanult általánosítását, akkor

$$U_m + IR_2 = 4, \quad (5)$$

hiszen ez a hurok is körülöleli a mágneses tér erővonalait. A (5) egyenlet kicserélhető akár a (4)-gyel, akár a (3)-mal is.]

Tegyük fel most, hogy a feszültségmérőt átfordítjuk a vasmag másik oldalára. Írjuk

fel most is Kirchhoff II. törvényének általánosítását a 2.79. ábrán látható hurokokra:

$$IR_1 + IR_2 = 4, \quad (6)$$

$$-IR_2 + U_m = 0, \quad (7)$$

vagy a teljes hurokra:

$$IR_1 + U_m = 4. \quad (8)$$

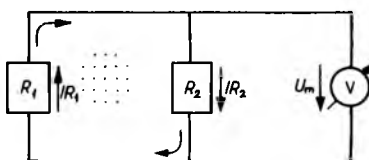
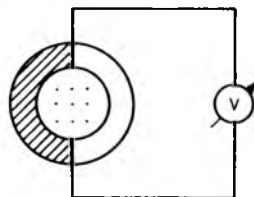
A (6), (7), (8) egyenletek közül bármelyik kettő alkalmas a probléma jellemzésére, az ismeretlenek kiszámítására. Látható, hogy $I = 1 \text{ A}$ — most is —, de $U_m = 3 \text{ V}$. A műszer által mutatott feszültség attól függ, hogy hogyan helyezkedik el a voltmérő!

Ha végiggondoljuk ennek a pontnak a gondolatmenetét, akkor ebben nem is találunk semmi furcsát. A konkrét probléma azonban kitűnően mutatja, hogy az indukált elektromos térben potenciálról nem beszélhetünk, két pont között a feszültség pedig nem adható meg egyértelműen.]

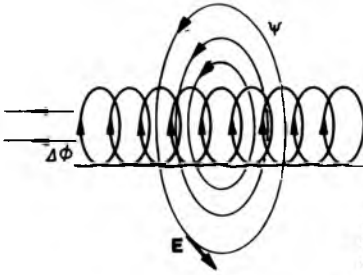
Indukált potenciálról tehát nem beszélhetünk. Indukált feszültségről azonban — bizonyos értelemben — igen. Egyetlen zárt görbén körbehaladva a

$$\sum_{\odot} E^{\parallel} \Delta s$$

mennyiség a körbejárt fluxus időegységre eső megváltozásával egyenlő. Ez a mennyi-



2.79.
ábra



2.80.
ábra

ség az elektrosztatikus terekben nulla. Most a tér jellemzésére használjuk, az indukált elektromos tér *örvényerősségének* nevezzük, vagy egyszerűen azt mondjuk, hogy indukált *körfeszültség*.

┌Tegyük fel most, hogy A keresztmetszetű, l hosszúságú, N menetszámú tekercs belsejét μ_r relatív permeabilitású anyag tölti ki. A tekercsben az áram t idő alatt I_1 -ről I_2 -re nő egyenletesen. Ekkor a tekercs körül elektromos tér keletkezik, amelynek az erővonalai balsodrású örvényeket alkotnak (2.80. ábra). A tekercs szimmetriatengelyétől r távolságra körbehaladva az elektromos körfeszültség a fluxus időegységekre eső megváltozásával egyenlő:

$$E \cdot 2r\pi = \mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad (9)$$

ahol $\Delta I = I_2 - I_1$. A tekercs szimmetriatengelyétől r távolságra az elektromos tér

$$E = \mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{2r\pi \Delta t}$$

erősségű. A térerősség merőleges a tekercs szimmetriatengelyére, az r sugarú kört érinti. Ha ide helyezünk egy m tömegű, q töltésű részecskét, akkor ennek a gyorsulása a Newton II. törvényét kifejező

$$\mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{2r\pi \Delta t} q = ma$$

egyenlőségéből határozható meg. ┘

┌Vizsgáljunk meg egy újabb problémát! Gondoljuk el, hogy egy A keresztmetszetű, l hosszú, N menetű tekercs belsejét μ_r relatív permeabilitású vasmag tölti ki, a tekercsben az áram erőssége Δt idő alatt, egyenletesen, I_1 -ről I_2 -re nő.

Vegyük körül a tekercset gondolatban egyetlen vezetővel. Jelöljük ennek az ellenállását R -rel. A vezetőhurokban — függetlenül attól, hogy milyen a hurok alakja —

$$\mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

körfeszültség indukálódik (2.81. ábra). Ez megegyezik a vezető ellenállásán eső ohmikus feszültséggel:

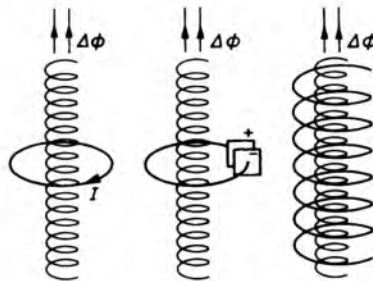
$$\mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t} = IR. \quad (10)$$

Ha az egyetlen menetű körvezetőt megszakítanánk, és egy C kapacitású kondenzátort iktatnánk a körbe, akkor a kondenzátoron felhalmozódó töltés a

$$\mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{Q}{C} \quad (11)$$

egyenlőségéből határozhatnánk meg. ┘

┌Helyezzük most el ezt a tekercset egy másik tekercs belsejében úgy, hogy a szimmetriatengelyük essék egybe. Jelöljük ennek a külső tekercsnek a menet-



2.81.
ábra

számát n -nel, és tegyük fel, hogy a két kivezetése össze van kötve egy igen nagy ellenállású voltmérővel.

A belső tekercs belsejében haladó minden mágneses erővonal a külső tekercsnek is a belsejében van. Ezért a belső és a külső tekercs mágneses fluxusa azonos. A fluxus időegységre eső megváltozása megegyezik a belső tekercset körülölelő egyetlen(!) zárt görbén indukálódott körfeszültséggel. Ha azonban körbehaladunk a külső tekercs összes mentén, akkor — a munka út szerinti additivitása miatt — a tekercsben a körfeszültség n -szerese indukálódik. A feszültségmérő tehát

$$U_m = \mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t} n = \mu_r \mu_0 \frac{nNA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

feszültséget mér.]

Maradjunk még mindig ennél a vasmagos tekercsnél! A mágneses fluxust körülölelő egyetlen hurokban

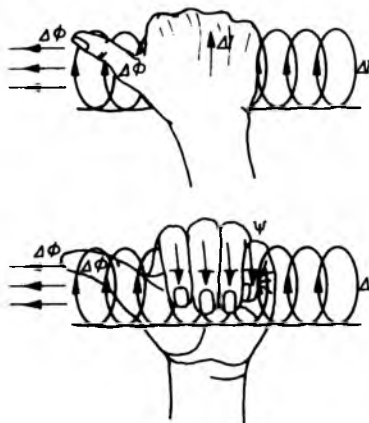
$$\mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

körfeszültség indukálódik. Még akkor is, ha ez a hurok a tekercs valamelyik saját menete. A tekercs mágneses terének a változása tehát a tekercs két kivezetése között

$$U_\delta := \mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (12)$$

feszültséget hoz létre. Ezt az indukált elektromotoros erőt *önindukciós feszültségnek*, a jelenséget pedig *önindukciónak* nevezzük.

Vizsgáljuk meg az önindukciós feszültség irányát! Tegyük fel, hogy a 2.82. ábrán látható tekercsben az áram a jobb kezünk ujjai irányában növekszik. Ekkor a jobb kéz hüvelykujja jelzi a mágneses fluxus növekedésének az irányát.



2.82.
ábra

Fektessük most a bal kezünk hüvelykujját a változó mágneses fluxus irányára. Ekkor a bal kéz többi ujjja jelzi az indukált elektromos tér irányát. Látható, hogy az önindukciós feszültség ellentétes irányú az áram változásának az irányával. Ez az egyszerű, de alapvető megállapítás a Lenz-törvény újabb speciális esetének tekinthető.

A (12) összefüggésben az

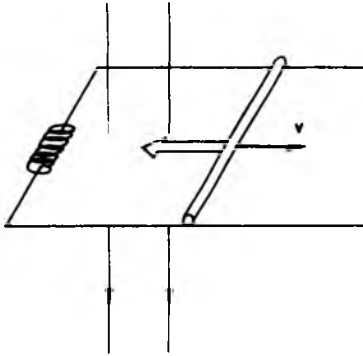
$$\mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$$

arányossági tényezőt *önindukciós együtthatónak* nevezzük és általában L -lel jelöljük. A *mértékegysége* $V s/A$, ezt röviden H -val jelöljük és *henry*-nek nevezzük. Ezzel a (12) összefüggés tömören így fogalmazható meg:

$$U_\delta = L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (13)$$

Ez az állítás azonban általánosabban is érvényes. Ha valamely tekercsben az áram változását a $t \rightarrow I(t)$ differenciálható függvény írja le, akkor a tekercs két kivezetése között

$$U_\delta(t) = L \dot{I}(t) \quad (14)$$



2.83.
ábra

önindukciós feszültség keletkezik. Ennek az iránya ellentétes az áram változását előidéző elektromos feszültséggel.]

┌Térjünk vissza most a korábban már többször vizsgált esethez, amikor függőleges, homogén mágneses térben két párhuzamos sínen egy fémrúd mozgott. Kössük most össze a két sínt egy L önindukciós együtthatójú tekercsel, és adjunk az m tömegű rúdnek v_0 kezdősebességet a 2.83. ábra szerint. Ekkor a rúdra visszafelét ható, Bil nagyságú erő lép fel. Newton II. törvénye szerint

$$-Bil = ma. \quad (15)$$

A rúd két vége között indukálódott Blv feszültség megegyezik a tekercsen indukálódott önindukciós feszültséggel:

$$Blv = L\dot{I}. \quad (16)$$

Mivel azonban a sebesség az elmozdulás deriváltja [és mivel $x(0) = 0$, $I(0) = 0$], a (16) egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$Blx = LI, \quad (17)$$

ahol x a rúd előjeles távolsága az elindulás helyétől mérve. A (15) és a (17) egyenlőség alapján

$$-\frac{B^2 l^2}{Lm} x = a,$$

ami azt jelenti, hogy a rúd harmonikus rezgőmozgást végez

$$\omega = \sqrt{\frac{B^2 l^2}{Lm}} = \frac{Bl}{\sqrt{Lm}}$$

körfrekvenciával. A rezgő rúd legnagyobb sebessége v_0 , ezt figyelembe véve az amplitúdó meghatározható.]

XX. Feladatcsoport: elektromágneses indukció

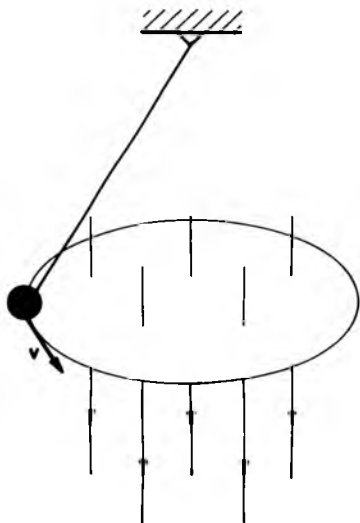
XX/1. Homogén mágneses tér erőssége: $B = 1 \text{ V s/m}^2$. Az erővonalakkal egyirányban egy 10^{-6} C töltésű, 10^{-4} g tömegű részecske mozog, sebessége 100 m/s . Mekkora mágneses erő hat a részecskére?

XX/2. Homogén mágneses tér erőssége: $B = 1 \text{ V s/m}^2$. Az erővonalakra merőlegesen egy 10^{-6} C töltésű, 10^{-4} g tömegű részecske mozog 100 m/s sebességgel. Mekkora erő hat a részecskére? Határozzuk meg a test pályájának a sugarát!

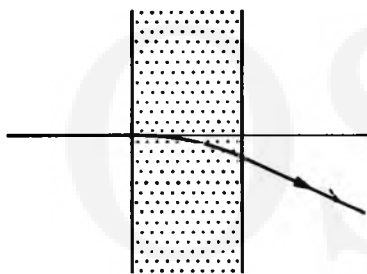
XX/3. Egy részecske (elektron) tömege $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, töltése $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. A részecske a $B = 2 \cdot 10^{-4} \text{ V s/m}^2$ erősségű mágneses térben az erővonalakra merőlegesen mozog, sebessége 600 km/s . Mekkora a keringési ideje?

XX/4. Homogén mágneses tér erőssége: $B = 10^{-5} \text{ V s/m}^2$. Mekkora a töltése annak a 10^{-13} kg tömegű részecskének, amely 1000 m/s sebességgel 1 méter sugarú körpályán kering a mágneses tér hatására?

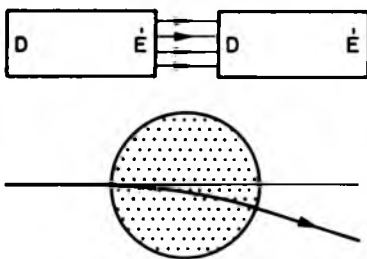
XX/5. Homogén, függőleges, lefelé irányuló mágneses térben a 2.84. ábrán látható módon egy kúpínga kering. A fonálon keringő test tömege 1 g , töltése 10^{-6} C . A fonál hossza 30 cm , és 30° -os szöget zár be a függőlegessel. Az inga keringési ideje $0,96 \text{ s}$. Mekkora a mágneses tér erőssége?



2.84.
ábra

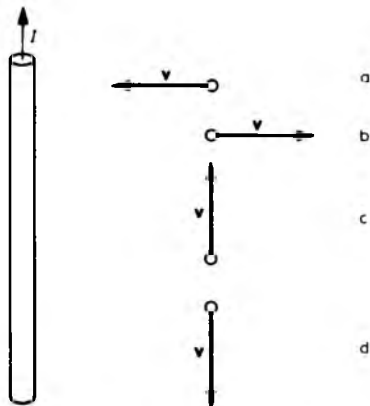


2.85.
ábra



2.86.
ábra

XX/6. Homogén mágneses tér erőssége: $B = 10 \text{ V s/m}^2$, az erővonalak függőlegesek, a talaj felé mutatnak. Az erővonalakra merőlegesen, nyugat—kelet irányban 100 m/s sebességgel mozog egy elektromos állapotú részecske. A kis testre ható erő nulla,



2.87.
ábra

mert a mágneses tér mellett homogén elektromos tér is hat a részecskére. Határozzuk meg az elektromos tér erősségét!

XX/7. Egy 10^{-6} C töltésű, 10^{-4} g tömegű részecske 10 m/s sebességgel egy 1 cm szélességű, $B = 1 \text{ V s/m}^2$ erősségű homogén mágneses téren hatol keresztül (2.85. ábra). Mekkora szöggel téríti el a mágneses tér eredeti irányától a kis testet?

XX/8. Két, 3 cm sugarú, hengeres mágnesrudat egymás közelébe helyezünk. Az egyik északi pólusa és a másik déli pólusa között 1 cm a távolság. A kör alakú légrés átmérője irányában a szimmetriatengelyre merőlegesen egy 10^{-3} C töltésű, 10^{-5} kg tömegű részecske érkezik 100 m/s sebességgel és az eredeti iránytól 30° -kal eltér, miközben a mágneses téren keresztülhalad (2.86. ábra). Mekkora a mágneses tér fluxusa a két rúd közötti légrésben?

XX/9. A 2.87. ábrán látható vezetékben felfelé folyik az áram, erőssége 2 A . A vezetéktől 10 cm -re egy 10^{-4} C töltésű részecske mozog, sebessége 100 m/s . Határozzuk meg a részecskére ható erőt (irányát és nagyságát), ha

- merőlegesen közeledik a vezetékhez!
- merőlegesen távolodik a vezetéktől!

- c) a vezetékkel párhuzamos, az árammal egyirányú!
 d) a vezetékkel párhuzamos és az árammal ellentétes irányú!

XX/10. Két azonos, 10^{-5} C töltésű részecske távolsága 1 m. Mekkora erő hat a két részecske között, ha az összekötő szakaszra merőleges irányban, 200 000 km/s sebességgel mozognak? Mekkora erőt észlel az a megfigyelő, aki együtt mozog a két részecskével?

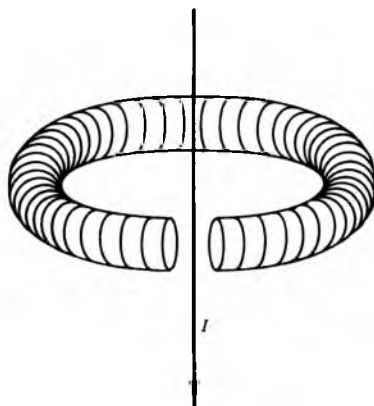
XX/11. Két azonos, 10^{-5} C töltésű részecske távolsága most 1 méter. Mekkora erő hat a két részecske között ebben a pillanatban, ha ellentétes irányban, egymással párhuzamosan mozognak és mindkettőnek 100 000 km/s a sebessége?

XX/12. Egy 20 cm sugarú vezeték merőleges a homogén mágneses tér erővonalaira, és benne 80 A erősségű áram folyik. A térerősség: $B = 15$ V s/m². Határozzuk meg a vezetőre ható erőt!

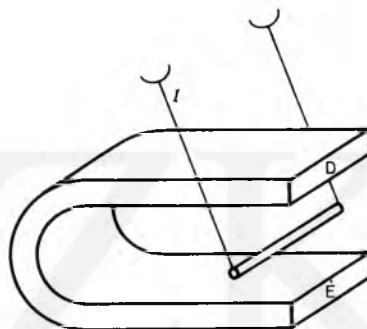
XX/13. Egy körtekercs menetszáma 2000, átmérője 4 cm, a középkörre 30 cm sugarú. A belsejét $\mu_r = 1000$ relatív permeabilitású vasmag tölti ki. A vasmagban 1 mm vastag, a középkörre merőleges síklapokkal határolt légrés van (2.88. ábra). A toroidban 10 A erősségű áram folyik. Mekkora erő hat a légrésen középen keresztülhaladó, 2 A erősségű áramot szállító vezetékre?

XX/14. Patkómágnes homogén mágneses térben a 2.89. ábrán látható módon 10 g tömegű rézrudat függesztünk. A felfüggesztő vezetékek 4 g tömegűek és 30 cm hosszúak. A rézrúd 8 cm hosszú része halad a mágneses térben. Ha a vezetékben 2 A erősségű áram folyik, akkor a hinta egyensúlyi helyzetben 15°-os szöget zár be a függőlegessel. Mekkora a mágneses tér erőssége?

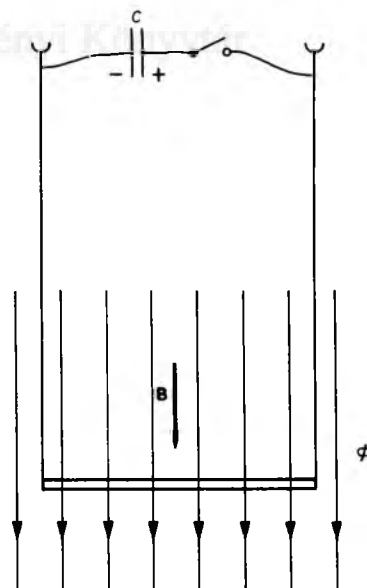
XX/15. Homogén mágneses tér erővo-



2.88. ábra

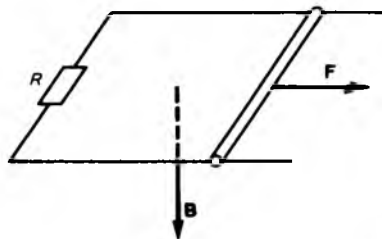


2.89. ábra



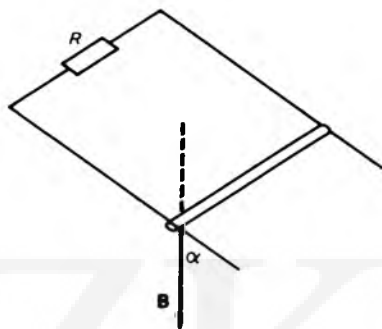
2.90. ábra

nalai függőlegesen lefelé irányulnak, a térerősség: $B = 3 \text{ V s/m}^2$. A mágneses térben súlytalan fémhuzalokkal felfüggesztünk egy vízszintes fémrudat. A rúd tömege $0,5 \text{ kg}$, hossza $0,25 \text{ m}$, a huzalok hossza $0,5 \text{ m}$. A rúdon keresztül kisütünk egy 6000 V -ra feltöltött, 10^{-4} F kapacitású kondenzátort (2.90. ábra). Mekkora sebességre tesz szert a rúd? Mekkora szöggel tér ki a hinta?



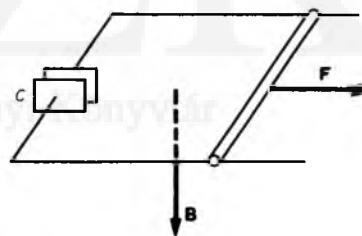
2.92. ábra

XX/16. Párhuzamos, egymástól $l = 20 \text{ cm}$ távolságra lévő sínpár homogén mágneses térben van, melynek térerőssége: $B = 10 \text{ V s/m}^2$. A sínszálak ellenállása elhanyagolható, az összekötő ág ellenállása $R = 10 \Omega$, és ebben az ágban $U_0 = 10 \text{ V}$ feszültségű telep van. A sínen egy $l = 20 \text{ cm}$ hosszú, $m = 80 \text{ g}$ tömegű, elhanyagolható ellenállású fémrúd fekszik. (2.91. ábra). A rudat kezdősebesség nélkül magára hagyjuk. Mekkora sebességre gyorsul fel a rúd? Mekkora gyorsulással indul a rúd? Mekkora a sebesség, amikor a gyorsulás a kezdeti értéke 20% -a?



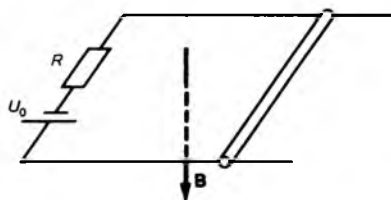
2.93. ábra

XX/17. Párhuzamos, egymástól $l = 20 \text{ cm}$ távolságra lévő sínpár homogén mágneses térben van, $B = 10 \text{ V s/m}^2$. A sínszálakat $R = 10 \Omega$ ellenállású vezeték köti össze. A sínen $m = 100 \text{ g}$ tömegű rúd fekszik. A rúd és a sínpár ellenállása elhanyagolható. A rúdra a 2.92. ábra szerint $F = 0,4 \text{ N}$ erőt fejtünk ki. Mekkora a rúd maximális mozgási energiája?

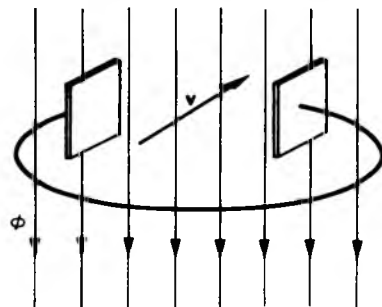


2.94. ábra

XX/18. Párhuzamos, egymástól $l = 20 \text{ cm}$ távolságra lévő sínpár függőleges irányú,



2.91. ábra



2.95. ábra

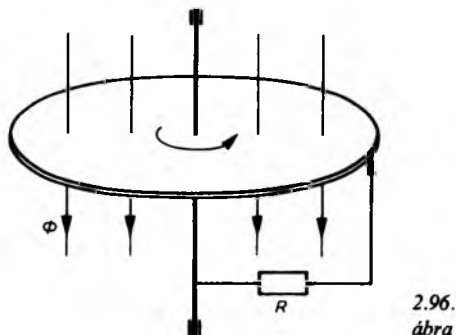
lefelé mutató homogén mágneses térben van. A térerősség $B = 10 \text{ V s/m}^2$. A sín pár $\alpha = 30^\circ$ -os szöget zár be a vízszintessel. A két sít összekötő vezető $R = 10 \Omega$ ellenállású. A sín páron egy $m = 0,1 \text{ kg}$ tömegű rúd fekszik (2.93. ábra). A rúd és a sín pár ellenállása elhanyagolható. A rudat kezdősebesség nélkül elengedjük. Mekkora sebességgel mozog a rúd?

XX/19. Párhuzamos, egymástól $l = 20 \text{ cm}$ távolságra lévő sín pár függőleges irányú homogén mágneses térben van. A térerősség $B = 50 \text{ V s/m}^2$. A sín párt egy kondenzátor közbeiktatásával összekötjük. A kapacitás $100 \mu\text{F}$. A sín páron egy $l = 20 \text{ cm}$ hosszúságú, 40 g tömegű vezető rúd fekszik, amelyet a rúdra merőlegesen állandó, $0,1 \text{ N}$ erővel húzunk (2.94. ábra). Mekkora munkát végzünk $1,2$ másodperc alatt a rúd mozgatasakor? Mennyi lesz ebben a pillanatban a kondenzátor energiája?

XX/20. Két párhuzamos, négyzet alakú fémlemez 1 m^2 felületű. A lemezek távolsága 10 cm . A két lemezt a 2.95. ábra szerint vezető huzallal összekötjük, és $B = 1 \text{ V s/m}^2$ erősségű, lefelé irányuló, homogén mágneses térben vízszintes irányban, 2 m/s sebességgel mozgatjuk. Mekkora töltés halmozódik fel a két lemezen? Mekkora a lemez közötti elektromos fluxus?

XX/21. Egy rézkorong sugara 10 cm . A korong függőleges tengelye körül 1000 l/s fordulatszámmal forog, $B = 1 \text{ V s/m}^2$ erősségű, homogén, függőlegesen lefelé irányuló térben (2.96. ábra). Mekkora feszültség indukálódik a korong pereme és a tengelye között? Mekkora áram folyik 10 ohmos ellenálláson?

XX/22. Mekkora feszültség indukálódik egy 1 m hosszú vezető rúd két végén, ha ez függőleges, 1 V s/m^2 erősségű (indukciójú) mágneses térben vízszintes irányban, a rúdra merőleges sebességgel mozog, és



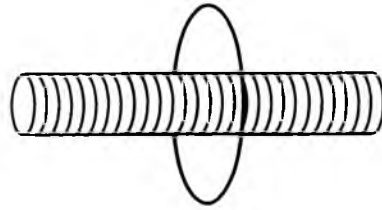
- a) a sebessége állandó marad, 10 m/s ?
- b) a kezdősebessége nulla, a gyorsulása 5 m/s^2 ?
- c) harmonikus rezgést végez 50 cm amplitúdóval és $0,1 \text{ s}$ periódus idővel?

XX/23. Homogén mágneses tér erőssége: $B = 10 \text{ V s/m}^2$. A mágneses térben az erővonalakra merőleges helyzetben egy 50 cm^2 keresztmetszetű, 10^{-2} ohm ellenállású körvezető van. Mennyi töltés áramlik át a vezető keresztmetszetén, ha síkját 90° -kal elfordítjuk?

XX/24. Homogén mágneses tér erőssége: $B = 10 \text{ V s/m}^2$. A mágneses térben az erővonalakkal párhuzamos helyzetben egy 50 cm^2 keresztmetszetű körvezető van. A körvezetőben 1 A erősségű áram folyik. Mekkora forgatónyomaték hat a körvezetőre? Mekkora lesz a forgatónyomaték, ha a kör síkját elfordítjuk 30° -kal?

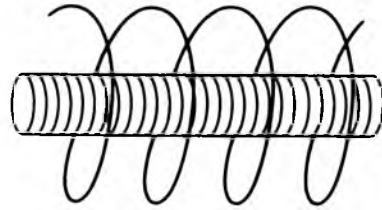
XX/25. Egy vékony tekercs keresztmetszete 10 cm^2 , hossza 1 méter , menetszáma $10\,000$. A tekercsben egyenletesen növekvő áram folyik, másodpercenként $0,1 \text{ A}$ -rel nő. A tekercs belsejét 800 relatív permeabilitású vasmag tölti ki. A tekercs szimmetriatengelyétől 10 cm távolságra egy rögzített, 1 g tömegű és 10^{-5} C töltésű részecske van. Határozzuk meg a gyorsulását abban a pillanatban, amikor elengedjük!

XX/26. Egy 10 cm^2 keresztmetszetű, 1 méter hosszú, 10 000 menetes tekercs vas-magja 800 relatív permeabilitású. A tekercsben egyenletesen — másodpercenként $0,1 \text{ A}$ -rel — nő az áram. A tekercs a szimmetriatengelyére merőleges síkú, 10 cm sugarú, 50 g tömegű, 10^{-6} C töltésű vékony szigetelőgyűrű veszi körül, amely kezdetben nyugalomban van. Mekkora a gyűrű szögsebessége az áram indulása után 10 másodperccel?



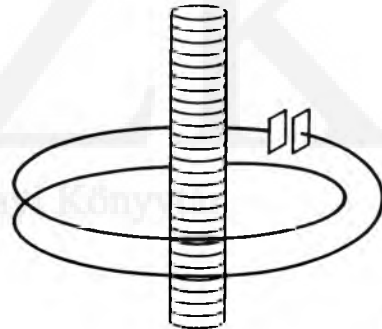
2.97. ábra

XX/27. Egy 1200 menetes, 10 cm^2 keresztmetszetű, 60 cm hosszú tekercsben az áram $1,2$ másodperc alatt 5 A -ról 17 A -re nő. Határozzuk meg a tekercs mágneses tere által indukált elektromos tér örvényerősségét egy olyan zárt görbén, amely körülöleli a tekercset (2.97. ábra). Mekkora a tér erőssége a tekercs középvonalától 10 cm -re?



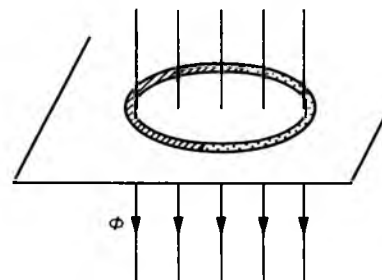
2.98. ábra

XX/28. Egy 60 cm hosszú, 10 cm^2 keresztmetszetű, 1200 menetes tekercsben az áram $1,5$ másodperc alatt 5 A -ról 25 A -re nő egyenletesen. Ez a tekercs egy 600 menetes, 20 cm^2 keresztmetszetű tekercs belsejében van (2.98. ábra). Mekkora feszültség indukálódik a külső tekercsben?



2.99. ábra

XX/29. Egy 800 menetes, 20 cm^2 keresztmetszetű, 60 cm hosszú tekercsben az áram $1,5$ másodperc alatt 5 A -ról 25 A -re nő egyenletesen. A tekercs belsejében egy 10 cm^2 keresztmetszetű, 1200 menetes tekercs van. Mekkora feszültség indukálódik a belső tekercsben? Mekkora áram folyik a belső tekercsben, ha az ellenállása 1Ω ?



2.100. ábra

XX/30. Egy 800 menetes, 20 cm^2 keresztmetszetű, 60 cm hosszú tekercs vas-magjának 200 a relatív permeabilitása. A tekercset egy kétmenetű hurok veszi körül, amelyben egy $100 \mu\text{F}$ -os kondenzátor van. A tekercsben $1,6$ másodperc alatt 2 A -ról $6,8 \text{ A}$ -re nő az áram (2.99. ábra). Határoz-

zuk meg, hogy mekkora töltéssel töltődik fel a kondenzátor!

XX/31. Egy 600 menetes tekercs 10 cm^2 keresztmetszetű, a hossza 60 cm. A tekercs belsejét 200 relatív permeabilitású vasmag tölti ki. A tekercsben 10 másodperc alatt 200 A-ról egyenletesen nullára csökken az áram. Mekkora feszültséget indukál a változó mágneses tér a tekercsben?

XX/32. A mágneses tér erővonalaira merőlegesen elhelyezünk egy 10 cm sugarú körvezetőt. A kör egyik fele 2Ω ellenállású, a másik fele 3Ω -os (2.100. ábra). A mágneses tér egyenletesen változik, a térerősség másodpercenként $0,6 \text{ V s/m}^2$ -tel nő. Mekkora áram folyik a körben? Mekkora az elektromos tér erőssége az egyik és a másik vezetékdarabban?

2.3. Váltakozó áram

2.3.1. A váltakozó áram előállítása

Homogén mágneses térben elhelyezünk egy A felületű sík vezetőkeretet. Tegyük fel, hogy a keret az erővonalakra merőleges tengely körül elfordulhat. Legyen most a keret síkjának és az erővonalaknak a szöge α . Ez azt jelenti, hogy a sík normálisa a mágneses térerősséggel $90^\circ - \alpha$ szöget zár be. A mágneses tér fluxusa ezen a felületen $BA \cos \alpha$ (2.101. ábra).

Gondoljuk el, hogy a keret egyenletesen forog a tengely körül. Ekkor $\alpha = \omega t$, ha a $t=0$ időpontban $\alpha=0$. A fluxus most az idő koszinuszával arányos:

$$\Phi(t) = AB \cos \omega t. \quad (1)$$

A vezetőkeretben indukálódott körfeszültség, figyelembe véve a balkéz-szabályt is:

$$\sum_{\odot} E^{\parallel} \Delta s = U = -\dot{\Phi}, \quad (2)$$

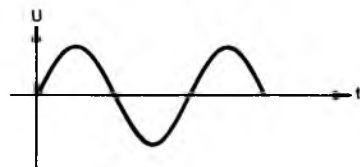
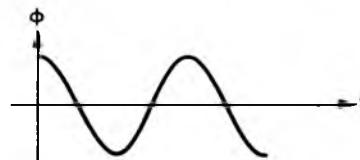
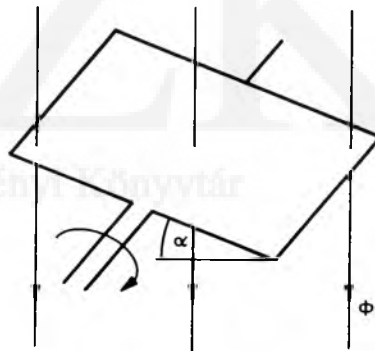
vagyis

$$U(t) = AB\omega \sin \omega t.$$

Időben változó feszültség indukálódik a forgó egyenletes tekercsben. Ha a te-

kercsnek n menete van, akkor az indukálódott feszültség:

$$U(t) = ABn\omega \sin \omega t, \quad (3)$$



2.101. ábra

maximális értéke arányos a forgó tekercs keresztmetszetével, menetszámával, a szögsebességgel és a tér erősségével:

$$U_0 := ABn\omega .$$

A háztartásban használt váltakozó feszültség is szinuszosan változik, a maximális értéke 311,1 V. Az erőmű forgórésze másodpercenként ötvenszer fordul körbe, a periódusidő: $T = 1/50 \text{ s} = 0,02 \text{ s}$, a frekvencia: $f = 50 \text{ 1/s}$ és a körfrekvencia: $\omega = 2\pi f = 314,15 \text{ 1/s}$. A frekvencia és a körfrekvencia mértékegységét az elektromos rezgésekkel foglalkozó fizikai fejezetekben és a gyakorlati alkalmazásokat leíró műszaki tudományokban *hertz*-nek nevezik és Hz-vel jelölik: $1 \text{ Hz} = 1 \text{ 1/s}$. (Természetesen nincs annak semmi akadálya, hogy például a mechanikai rezgések esetén is használjuk a Hz mértékegységet, sőt a sebesség mértékegységét is feltüntethetjük így: $1 \text{ m/s} = 1 \text{ Hzm}$. Nem helytelen a szimbólumok ilyen használata, de meglehetősen szokatlan.)

☐Egyszerű példaként tekintsük át a következőt. Tegyük fel, hogy $B = 10 \text{ V s/m}^2$ erősségű, homogén mágneses térben egy 100 menetes, 1 dm^2 keresztmetszetű tekercs forog, fordulatszáma 24 Hz. Ekkor a tekercsben indukálódott feszültség maximális értéke:

$$U_0 = 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 100 \cdot 2\pi \cdot 24 \approx 1500 \text{ V} .$$

A feszültségfüggvény:

$$U(t) = 1500 \sin 48\pi t .$$

Ha a mágneses térben forgó tekercs kivezetéseihez egy R ellenállású fogyasztót kötünk, akkor az áramerősség:

$$I(t) = \frac{U}{R} \sin \omega t ,$$

az áramerősség maximuma:

$$I_0 := \frac{ABn}{R} .$$

Az áramerősség és a feszültség periódusideje azonos, és azonos a kezdőfázisuk is (2.102. ábra).

Az R ellenállású fogyasztón az elektromos teljesítmény:

$$P(t) = U(t)I(t) = I^2(t)R = I_0^2 \sin^2 \omega t \cdot R .$$

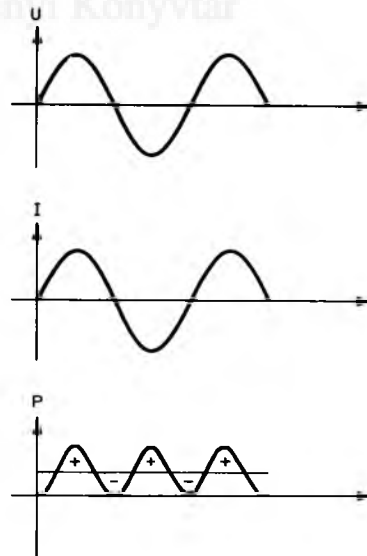
Használjuk fel az ismert

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

összefüggést. Ekkor

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{I_0^2 R}{2} (1 - \cos 2\omega t) = \\ &= \frac{I_0^2 R}{2} - \frac{I_0^2 R}{2} \cos 2\omega t . \end{aligned}$$

Az elektromos munka a $P(t)$ függvény grafikonja alatti terület. Számítsuk a munkát



2.102. ábra

egy teljes periódusra. Ekkor az elektromos munka:

$$W = \frac{I_0^2 R}{2} T,$$

hiszen a második taghoz tartozó munka — a 2.102. ábrán látható előjeles területek összege — nulla.

A periódusra számított átlagteljesítmény (effektív teljesítmény):

$$\begin{aligned} P_{\text{eff}} &= \frac{W}{T} = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0 R}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{I_0}{\sqrt{2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

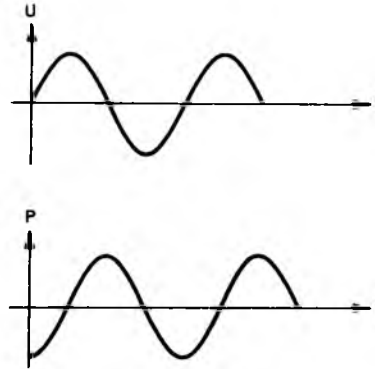
Vezessük be a következő jelöléseket:

$$I_{\text{eff}} := \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{eff}} := \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Az I_{eff} effektív áramerősség és az U_{eff} effektív feszültség jelentése a következő. Ha valamely fogyasztón U_{eff} nagyságú állandó feszültség hatására I_{eff} egyenáram folyik, akkor a fogyasztóra eső teljesítmény $I_{\text{eff}} U_{\text{eff}}$. Az effektív áramerősség tehát annak az egyenáramnak az erőssége, amelynek a teljesítménye megegyezik az ugyanarra az ellenállásra kapcsolt váltakozó áram teljesítményével. A váltakozó feszültség effektív értéke annak az állandó feszültségű áramforrásnak a feszültsége, amely ugyanazon ohmikus ellenálláson ugyanazt a teljesítményt szolgáltatja. (A 311,1 V csúcsfeszültségű hálózati váltakozó áram effektív feszültsége $311,1/\sqrt{2} = 220$ V.)

2.3.2. Impedancia

Az előző pontban láttuk, hogy váltakozó feszültségű áramforrásra kapcsolt ellenálláson az áramerősség ugyancsak szinuszo-



2.103. ábra

san változik, az áram és a feszültség azonos frekvenciájú és azonos fázisú.

Iktassunk most a váltakozó áramú áramkörbe egy C kapacitású kondenzátort (2.103. ábra). Ekkor Kirchhoff II. törvényének általánosítása szerint

$$\frac{Q}{C} = U_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

vagyis az áramkörben eső Q/C feszültség-esés megegyezik az áramkörre mint zárt görbére illeszkedő felületen a mágneses fluxus időegységre eső megváltozásával:

$$U_0 \sin \omega t = - \dot{\Phi}.$$

Az (1) egyenlőség alapján

$$Q(t) = C U_0 \sin \omega t,$$

innen az áramerősség:

$$I(t) = C U_0 \omega \cos \omega t = C U_0 \omega \sin(\omega t + \pi/2), \quad (2)$$

hiszen a kondenzátor töltésének időegységre eső megváltozása (\dot{Q}) a töltésmegmaradás elve alapján megegyezik a vezető keresztmetszetén időegység alatt átáramló töltés mennyiségével, I -vel. Figyelemre méltó: ha váltakozó áramú körben egy kondenzátor van, akkor — ellentétben az állandó feszültségű áramforrásokat tartalmazó áramkörökkel — az áramerősség

nem nulla, az idő szinuszos függvénye. Látható, hogy az áramerősség periódusideje megegyezik a feszültség periódusidejével, a maximális értéke:

$$I_0 = CU_0\omega. \quad (3)$$

Vegyük észre azt is, hogy ha a feszültség az idő szinusztól függ, akkor az áramerősség az idő koszinuszával fejezhető ki. Másképpen fogalmazva: *a kondenzátoron átmenő váltakozó áram megelőzi a feszültséget*; ha ugyanis a kezdetben töltetlen kondenzátorra rákapcsoljuk a feszültséget, az áram azonnal megindul, de a kondenzátor feszültsége csak a töltőáram nullára csökkenésekor éri el a maximumát.

A kondenzátort töltő áram maximuma és a feszültség maximuma között egyszerű összefüggés van: a generátor feszültségének maximális értéke és a töltőáram maximális értéke arányos egymással:

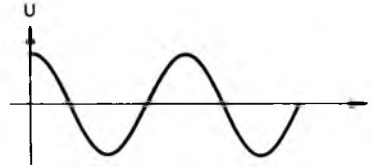
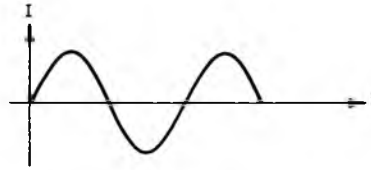
$$\frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{C\omega}.$$

A jobb oldali mennyiségnek hasonló a szerepe, mint az ellenállásnak. Nevezzük ezért ezt *kapacitív ellenállásnak* és jelöljük X_C -vel; tehát

$$X_C = \frac{1}{C\omega}. \quad (4)$$

A kapacitív ellenállás fordítva arányos az áram frekvenciájával. Minél szaporább a váltakozó feszültség rezgése, annál kisebb a kapacitív ellenállás, annál könnyebben átfolyik a kondenzátoron a váltakozó áram. Nagy frekvenciájú áramok szinte akadály nélkül folynak át a kondenzátoron, míg a lassan változó árammal szemben nagy ellenállást tanúsít a kondenzátor. Tudjuk: az egyenáramot pedig egyáltalán nem engedi át.

Iktassunk most be a kondenzátor helyé-



2.104. ábra

re egy L önindukciójú tekercset (2.104. ábra). Ekkor Kirchhoff II. törvényének általánosítása szerint

$$L\dot{I}(t) = U_0 \sin \omega t. \quad (5)$$

Tegyük fel,^(*) hogy a körben folyó áram frekvenciája most is azonos a feszültség frekvenciájával, vagyis

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (6)$$

Térjünk rá az áramerősség időegységre eső megváltozására, hogy behelyettesíthessünk az (5) egyenlőségbe:

$$\dot{I}(t) = I_0 \omega \cos(\omega t - \varphi),$$

^(*) Erre a gondolatmenetre valójában nincs szükség. Csak azért gondoltuk végig, hogy a rövidesen sorra kerülő általános esetet könnyebben áttekinthessük. Most így is okoskodhattunk volna:

Az (5) alapján nyilvánvaló, hogy

$$I(t) = -I_0 \cos \omega t = I_0 \sin(\omega t - \pi/2),$$

hiszen, mint tudjuk, a $-\cos \omega t$ függvény deriváltja az $\omega \sin \omega t$ függvény, egy additív konstanstól eltekintve. Ha kicsit utána gondolunk, akkor látszik, hogy ez a konstans nulla. Az nyilvánvaló, hogy a (6) teljesül.

vagyis

$$LI_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) = U_0 \sin \omega t.$$

Ennek az egyenlőségnek a két oldalán egy-egy trigonometrikus függvény áll. Az egyenlőség csak akkor állhat fenn minden időpontban, ha

$$\cos(\omega t - \varphi) = \sin \omega t, \quad (7)$$

és

$$LI_0 \omega = U_0. \quad (8)$$

A (7) alapján $\varphi = \pi/2$, vagyis az áramerősség — a (6) szerint —

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \pi/2) = -I_0 \cos \omega t. \quad (9)$$

A (8) alapján a maximális áramerősség:

$$I_0 = \frac{U_0}{L\omega}. \quad (10)$$

Tehát: ha tekercset iktatunk egy váltakozó áramú körbe, akkor az áramerősség ugyanazzal a frekvenciával változik, mint a feszültség, azonban a tekercsen átfolyó váltakozó áram $\pi/2$ fáziskülönbséggel elmarad a feszültséghez képest.

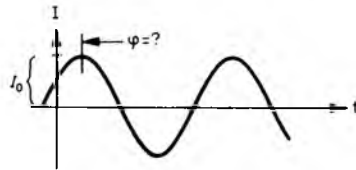
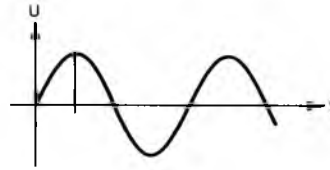
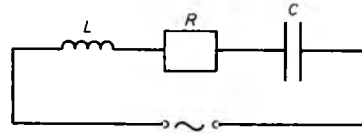
Az áramerősség maximális értéke és a feszültség maximális értéke arányosak egymással:

$$\frac{U_0}{I_0} = L\omega.$$

Az arányossági tényező $L\omega$. Ennek hasonló szerepe van, mint az ohmos ellenállásnak. Az analógia alapján *induktív ellenállás*nak nevezzük, és X_L -lel jelöljük:

$$X_L := L\omega. \quad (11)$$

Figyeljünk fel arra, hogy az induktív ellenállás a váltakozó feszültség frekvenciájával arányos — a körfrekvencia és az önindukciós együttható szorzata —, ezért a nagyobb frekvenciájú váltakozó áram-



2.105. ábra

mal szemben tanúsít nagyobb ellenállást. Az egyenáram akadálytalanul átfolyik a tekercsen — feltéve persze, hogy az ohmos ellenállása elhanyagolható. Pontosan fordított a helyzet, mint a kondenzátornál.

Az előkészítő gondolatmenet után térjünk rá az általános esetre: tegyük fel, hogy a váltakozó áramú generátor feszültsége az időnek

$$U(t) = U_0 \sin \omega t \quad (12)$$

függvénye. Iktassunk az áramkörbe egy L önindukciós együtthatójú tekercset, egy R nagyságú ohmos ellenállást és egy C kapacitású kondenzátort (2.105. ábra).

Határozzuk meg a körben folyó áramot. Tegyük fel mindenekelőtt, hogy az áramerősség-függvény frekvenciája azonos a feszültségfüggvényével és az áramerősség-függvény el van tolvá a feszültséghez képest:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (13)$$

A feladat „mindössze” ez: határozzuk meg az áramerősség-függvényben az I_0 és a φ

paramétereket. A célunk az, hogy felírjunk egy kétismeretlenes egyenletrendszer, amely az ismeretlen I_0 és φ kiszámítására alkalmas.

Az előbb láttuk, hogy ha az áramkörben egy kondenzátor vagy egy tekercs van, akkor az áram és a feszültség között $\pi/2$ fáziskülönbség van. Az áram és a feszültség közötti fázis különbsége tetszőleges $-\pi$ és π közötti szög lehet. Ezt a szöveget a *fáziskésés szögének* nevezzük. Analóg a mechanikából ismert kezdőfázis fogalmával. Ha φ pozitív, akkor az áram „késik”, ha pedig φ negatív, akkor az áram „siet” a feszültséghez képest. (*)

Írjuk fel Kirchhoff II. törvényének általánosítását az áramkörre:

$$L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U_0 \sin \omega t. \quad (14)$$

Figyeljünk fel arra, hogy ezen egyenlőség szerint a tekercsen, az ellenálláson és a kondenzátoron eső feszültségek összege bármelyik t időpontban megegyezik a generátor feszültségének a t időponthoz tartozó értékével.

Helyettesítsük be (14)-be a (13) függvényt. Ezt úgy tudjuk megoldani, ha először differenciáljuk a (14) egyenlőséget, majd a (13) függvénynek kiszámítjuk az első és a második deriváltját. Tehát

$$L\ddot{Y}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = U_0\omega \cos \omega t,$$

(*) Ha

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

alakban írjuk volna fel az áramerősség-függvényt, akkor φ előjele pont fordítva adná a késést, illetve a sietést.

és

$$\dot{I}(t) = I_0\omega \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\ddot{I}(t) = -I_0\omega^2 \sin(\omega t - \varphi).$$

Így

$$-LI_0\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + RI_0\omega \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{C}I_0 \sin(\omega t - \varphi) = U_0\omega \cos \omega t. \quad (15)$$

Vonjuk össze a bal oldali tagokat és közben osszuk el mindkét oldalt I_0 -lal és ω -val:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) \sin(\omega t - \varphi) + R \cos(\omega t - \varphi) = \\ & = \frac{U_0}{I_0} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Most a trigonometriából ismert addíciós tételeket alkalmazzuk: bármely α és β szögre

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Ezekkel

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) + \\ & + R (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi) = \\ & = \frac{U_0}{I_0} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (16)$$

Bevezetünk egy jelölést: legyen

$$Z := \frac{U_0}{I_0}.$$

A $\sin \omega t$ és $\cos \omega t$ együtthatói a jobb és a bal oldalon meg kell hogy egyezzenek. A $\sin \omega t$ együtthatói:

$$\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) \cos \varphi + R \sin \varphi = 0, \quad (17)$$

és a $\cos \omega t$ együtthatói:

$$\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \sin \varphi - R \cos \varphi = Z. \quad (18)$$

A (17) és (18) egyenletrendszerben sehol sem szerepel már az idő, a két egyenlet alkalmas a φ és az I_0 meghatározására. Oldjuk meg az egyenletrendszert! A (17) egyenletből

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}, \quad (19)$$

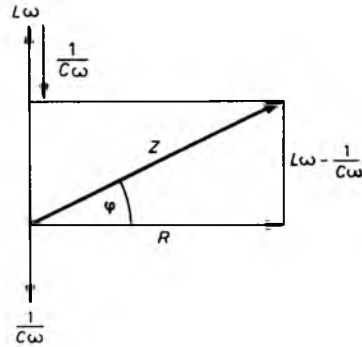
vagyis az egyik ismeretlent (a tangensét) már meg is kaptuk. Emeljük most négyzetre a (17) és a (18) egyenleteket, majd az így kapott két egyenlőséget adjuk össze. Vegyük figyelembe, hogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, valamint azt, hogy a négyzetre emelt egyenlőségben a kétszeres szorzat csak előjelben különbözik, azt kapjuk, hogy

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2 = Z^2 = \left(\frac{U_0}{I_0}\right)^2. \quad (20)$$

A probléma felvetésekor megfogalmaztuk: feladatunk a φ és az I_0 kiszámítása. A (19) és a (20) egyenlőségekből a két ismeretlen közvetlenül megkapható. Ezt a két egyenletet tehát „megoldóképletnek” is tekinthetjük.

Hogyan jegyezhetjük meg egyszerűen ezt a két képletet?

A (20) állítás formája a Pitagorasz-tételre emlékeztet. Rajzoljunk ezért egy vízszintes, R hosszúságú vektort, erre merőlegesen fölfelé egy $L\omega = X_L$ hosszú, lefelé pedig egy $1/(C\omega) = X_C$ hosszúságú vektort (2.106. ábra). A három vektor eredőjének a nagysága éppen Z . Az ábráról az is leolvasható, hogy a φ szögnek a Z -t reprezentáló vektor vízszintessel bezárt szöge felel meg.



2.106.
ábra

A $Z := U_0/I_0$ mennyiséget a hálózat *impedanciájának* nevezzük. Világos, hogy

$$U_0 = I_0 Z, \quad (21)$$

ez azt jelenti, hogy az impedancia bizonyos értelemben az ohmikus ellenállás általánosításának tekintjük. Másrészt, osszuk el ezt az egyenlőséget $\sqrt{2}$ -vel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$U_{\text{eff}} = I_{\text{eff}} Z. \quad (22)$$

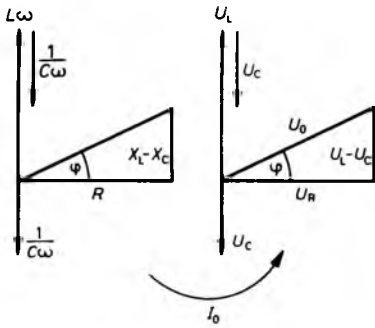
Szorozzuk meg a (20) egyenlőség mindkét oldalát I_0^2 -tel, ekkor

$$\left(I_0 L\omega - I_0 \frac{1}{C\omega}\right)^2 + (I_0 R)^2 = U_0^2,$$

és mivel $I_0 L\omega =: U_{L_{\max}}$ a tekercsen fellépő feszültség maximális értéke, $I_0/C\omega =: U_{C_{\max}}$ a kondenzátor feszültségének a legnagyobb értéke, és végül $I_0 R =: U_{R_{\max}}$ az ohmikus ellenálláson eső feszültség maximuma, azt kapjuk, hogy

$$(U_{L_{\max}} - U_{C_{\max}})^2 + U_{R_{\max}}^2 = U_0^2. \quad (23)$$

A (23) összefüggés is ábrázolható egy vektordiagrammal. A vízszintes oldalon az $U_{R_{\max}}$ szerepel, függőlegesen fölfelé felmérjük $U_{L_{\max}}$ -ot, lefelé $U_{C_{\max}}$ -ot. Ekkor a három vektor eredője megfelel U_0 -nak, a generátor maximális feszültségének (2.107. ábra). Két ábra van tehát, az egyik ellenál-



2.107.
ábra

lásábra, a másik a feszültségeket ábrázoló diagram. A kettő között I_0 teremt kapcsolatot. Az ellenállásábra vektorait I_0 -lal szorozva a feszültségábra megfelelő vektorait kapjuk.

Ha a (23) összefüggést $\sqrt{2}$ -vel osztjuk, akkor az effektív feszültségekre érvényes egyenlőséget kapjuk:

$$(U_{Leff} - U_{Ceff})^2 + U_{Reff}^2 = U_{eff}^2. \quad (24)$$

A hálózati feszültség effektív értéke 220 V, körfrekvenciája: $\omega = 314$ Hz. Egy $L = 0,16$ H önindukciós együtthatójú tekercset, egy $R = 100 \Omega$ nagyságú ellenállást és egy $C = 3,2 \cdot 10^{-4}$ F kapacitású kondenzátort sorba kötve a hálózatra kötjük. A kör impedanciája — (20) alapján —

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{100^2 + (50 - 10)^2} = 108 \Omega.$$

A körben folyó áram effektív értéke: $I_{eff} = U_{eff}/Z = 220/108 = 2,05$ A. Mivel $X_L = 50 \Omega$, $X_C = 10 \Omega$, az induktív ellenállásra $I_{eff}X_L = 102,5$ V, a kapacitív ellenállásra $I_{eff}X_C = 20,3$ V, míg az ohmikus ellenállásra $I_{eff}R = 204$ V effektív feszültség esik. A 2.108. ábrán jól látható, hogy miről van szó. Ha a tekercs két végéhez, a kondenzátor két lemezére és az ellenállásra egy-egy

voltmérőt kötünk, akkor a három áramköri elemen 102,5 V, 20,3 V és végül 204 V feszültséget mutatnak a műszerek. A generátorra kötött feszültségmérő pedig 220 voltot mutat.

A fáziskésés szögének tangense:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = 0,4,$$

tehát $\varphi = 0,38$ radiánban, ez fokban mérve: $21,8^\circ$.

Ha a generátor feszültségfüggvénye:

$$U(t) = 311,1 \sin 314t,$$

akkor az áramerősség-függvény:

$$I(t) = 2,88 \sin(314t - 0,38).$$

Az áram tehát 0,38 radiánnal késik a generátor feszültségéhez képest. Az ohmos ellenálláson

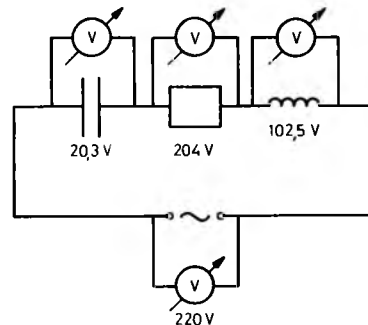
$$U_R(t) = 288,5 \sin(314t - 0,38)$$

feszültség jelenik meg. A generátor feszültsége és az ellenállásokra jutó feszültség között is 0,38 a fáziskésés.

Vizsgáljuk meg most a tekercsre jutó feszültség változását, ehhez az áramerősség-függvény deriváltjára van szükség:

$$\dot{I}(t) = 2,88 \cdot 314 \cos(314t - 0,38) =$$

$$= 904 \cos(314t - 0,38).$$



2.108.
ábra

A tekercsre jutó feszültség:

$$U_L(t) = L\dot{I}(t) = 144,7 \cos(314t - 0,38).$$

A kondenzátor feszültségének meghatározásához a töltés-idő függvény szükséges. A kondenzátor töltése:

$$Q(t) = -\frac{2,88}{314} \cos(314t - 0,38).$$

Ezt könnyen ellenőrizhetjük, ha differenciáljuk a $Q(t)$ függvényt. Az áramerősség-függvényt kapjuk: $\dot{Q}(t) = I(t)$. A kondenzátor feszültsége tehát

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} = \\ &= -\frac{2,88}{314 \cdot 3,2 \cdot 10^{-4}} \cos(314t - 0,38) = \\ &= -28,6 \cos(314t - 0,38). \end{aligned}$$

A három áramköri elemen megjelenő feszültség maximális értéke: $U_{L\max} = 144,7 \text{ V}$, $U_{R\max} = 288,5 \text{ V}$ és $U_{C\max} = 28,6 \text{ V}$. (A három műszer e három feszültség $\sqrt{2}$ -ed részét, az effektív értékeket méri.)

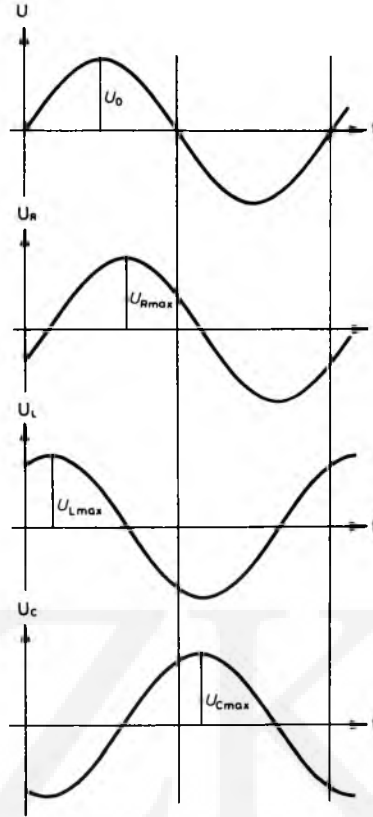
Ábrázoljuk az $U(t)$, $U_R(t)$, $U_L(t)$ és az $U_C(t)$ függvényeket! Világos, hogy bármely t pillanatban

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U(t),$$

de a különböző időpontokban felvett maximumok között nem lineáris a kapcsolat (2.109. ábra).

$$(U_{L\max} - U_{C\max})^2 + U_{R\max}^2 = U_0^2.$$

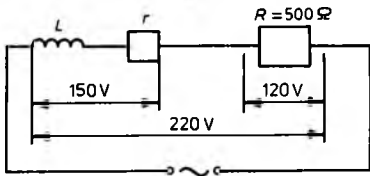
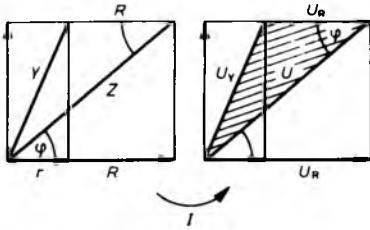
¶Tegyük fel, hogy egy 220 V effektív feszültségű, 314 Hz körfrekvenciájú hálózatra egy $R = 500 \Omega$ -os ellenállást és egy veszteséges tekercset kötünk sorba. Ez azt jelenti, hogy a tekercsnek az önindukciós együtthatóján kívül az ohmikus ellenállásával is számolni kell. Az R ellenálláson



2.109. ábra

120 V effektív feszültséget mérünk, a tekercs két vége között 150 V feszültséget mér a feszültségmérő műszer.

Rajzoljuk meg az ellenállásábrát és mellé a feszültségábrát (2.110. ábra). A kettő között az a kapcsolat, hogy az ellenállásábra oldalt I -vel szorozva a másik megfelelő oldalt kapjuk. Ha az effektív árammal szorzunk, akkor a feszültségábrán az effektív feszültségek szerepelnek. Ha az ellenállásábra oldalait a maximális árammal szorzunk, akkor a másik ábráról az egyes áramköri elemeken megjelenő maximális feszültségek olvashatók le. A mi esetünkben most az arányossági tényező az effek-



2.110. ábra

tív áramerősség:

$$I_{\text{eff}} = \frac{120}{500} = 0,24 \text{ A},$$

hiszen a két ábrán az ohmos ellenállásra jutó feszültség és az R ellenállás egymásnak megfelelő adat.

Az ábrán Y -nal jelöltük a tekercs impedanciáját. Ekkora lenne a körben az impedancia, ha nem szerepelne az R ellenállás. Az Y impedanciához tartozó feszültség a tekercsre jutó feszültség: 150 V.

Az áramerősség ismeretében a tekercs impedanciája és az eredő Z impedancia könnyen meghatározható: $Y = 150/0,24 = 625 \Omega$, $Z = 220/0,24 = 916,6 \Omega$. A feszültségdiagram alapján a fázisszög egyszerűen kiszámítható a koszinusztétel segítségével:

$$150^2 = 120^2 + 220^2 - 2 \cdot 120 \cdot 220 \cos \varphi.$$

Innen

$$\cos \varphi = 0,7632, \quad \varphi = 40,2^\circ.$$

Ezután a tekercs r ellenállása egyszerűen kiszámítható. Az ellenállás-diagram alapján:

$$\cos \varphi = \frac{R+r}{Z},$$

azaz

$$0,7632 = \frac{500+r}{916,6},$$

és így $r = 200 \Omega$. Az önindukciós együtthatót is könnyen kiszámíthatjuk:

$$\sin \varphi = \frac{L\omega}{Z},$$

$$0,6456 = \frac{L \cdot 314}{916,6},$$

ezért $L = 1,88 \text{ H}$.

2.3.3. A váltakozó áram teljesítménye

Egy Z impedanciájú áramkörre kapcsoljunk U_0 csúcsfeszültségű, ω körfrekvenciájú váltakozó feszültséget. A körben I_0 csúcsfeszültségű, ω körfrekvenciájú szinuszosan váltakozó áram folyik. Az áram φ szöggel siet (vagy késik) a feszültséghez képest. Az előző pontban arról tanultunk, hogy az áramkör és a tápfeszültség adataiból miként lehet meghatározni I_0 -t és φ -t.

Az elektromos teljesítmény:

$$P(t) = U(t) I(t) = U_0 \sin \omega t \cdot I_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (1)$$

Alakítsuk át az egyenlőség jobb oldalát (felhasználva a

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

azonosságot):

$$P(t) = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi - \frac{U_0 I_0}{2} \cos(2\omega t - \varphi). \quad (2)$$

A váltakozó áram teljesítménye egy perio-

dikusan változó tag és egy állandó összege (2.111. ábra). A periodikus tag kétszeres frekvenciával rendelkezik, mint a feszültség és az áram. A teljesítmény tehát 100 Hz-es, ha a feszültség 50 Hz rezgésszámú. A periodikus tag amplitúdója — maximális értéke — $U_0 I_0 / 2 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$, a konstans tag pedig $U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$.

A váltakozó rész munkája egy teljes periódusra számolva nulla, hiszen a negatív munka és a pozitív munka azonos nagyságú (2.112. ábra). Ezért hosszabb időre számolva az átlagos teljesítmény:

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi. \quad (3)$$

A $\cos \varphi$ számot *teljesítménytényezőnek* nevezük. A teljesítménytényező kifejezhető az áramkör adataival:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z},$$

ezért

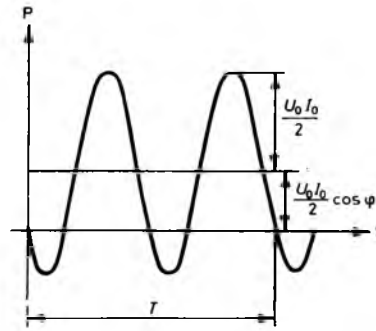
$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{R}{Z} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} I_{\text{eff}} R = I_{\text{eff}}^2 R. \quad (4)$$

Másként

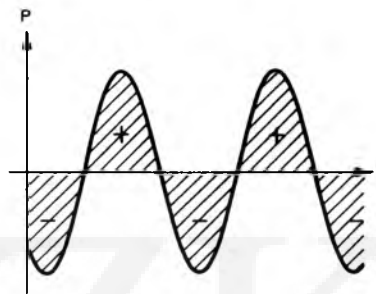
$$\begin{aligned} P &= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} I_{\text{eff}} Z \cos \varphi = \\ &= \frac{U_{\text{eff}}^2}{Z} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Az egyenáramokra érvényes $P = I^2 R$ képlet alkalmazható a váltakozó áramokra is, ahol I az effektív áramerősséget, P pedig az átlagos — hatásos — teljesítményt jelöli. Az állandó feszültségek esetén alkalmazott $P = U^2 / R$ képlet nem használható a váltakozó áramú hálózatoknál. Helyette az (5) összefüggést kell a feladatok megoldásánál igénybe venni.

A váltakozó áram teljesítménye az ohmikus ellenálláson jelenik meg, a (4) egyenlőség szerint $P = I_{\text{eff}}^2 R$. Az ohmikus



2.111. ábra



2.112. ábra

ellenálláson mérhető feszültség és az áram között ugyanis nulla a fáziskülönbség, az áram mindig az ohmon ellenállásra eső feszültséggel azonos fázisú. Az áramhoz képest az induktív ellenállásra eső feszültség 90° -kal siet, a kondenzátor feszültsége 90° -kal késik. Ezért az ideális tekercsen és az ideális kondenzátoron a hatásos teljesítmény nulla.

Számoljuk ki azonban most a tekercsre jutó pillanatnyi teljesítményt. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az áramkörben csak egy L önindukciójú tekercs van. Ekkor a generátor feszültsége megegyezik a tekercs feszültségével:

$$U(t) = U_0 \sin \omega t.$$

A fázisszög most 90° , és az áramerősség maximuma:

$$\frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{L\omega} = I_0.$$

Így az áramerősség:

$$I(t) = -\frac{U_0}{L\omega} \cos \omega t,$$

az áramerősség deriváltja:

$$\dot{I}(t) = -\frac{U_0}{L\omega} \omega (-\sin \omega t) = \frac{U_0}{L} \sin \omega t,$$

és ez valóban a feszültség L -ed része:

$$U = L\dot{I}.$$

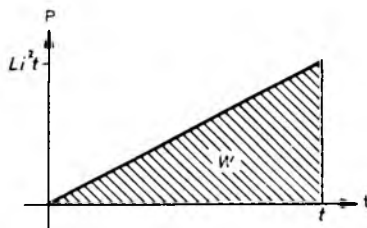
A teljesítmény tehát:

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t)I(t) = L\dot{I}(t)I(t) = \\ &= -L \frac{U_0}{L} \sin \omega t \cdot \frac{U_0}{L\omega} \cos \omega t = \\ &= -\frac{U_0^2}{L\omega} \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \\ &= -\frac{U_0^2}{2L\omega} \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

A váltakozó áramú körbe iktatott tekercsen a generátor munkát végez. Ennek a munkának hosszabb időre vonatkozó átlagos értéke nulla. A „pillanatnyi” munkavégzés a tekercs energiáját növeli vagy csökkenti.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a tekercsen át egyenletesen növekvő áram folyik. Legyen $I = it$, ekkor $\dot{I} = i$, és az elektromos áram teljesítménye

$$P = L\dot{I}I = Liit = Li^2 t.$$



2.113. ábra

Világos, hogy a teljesítmény az idővel arányosan nő. Tegyük fel, hogy az áram t ideig folyik. Ekkor az elektromos áram munkája a 2.113. ábrán a grafikon alatti terület:

$$W = \frac{Li^2 t}{2} = \frac{Li^2 t^2}{2}.$$

Legyen tehát $I = it$, ekkor a tekercsen végzett munka:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} LI^2, \quad (6)$$

ez a munka a tekercs energiáját növeli. A tekercs terének az energiáját ezért így értelmezzük:

$$\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} LI^2. \quad (7)$$

A (6) állítás érvényes akkor is, ha nem ilyen egyszerűen változó áram folyik a tekercsben.

A tekercs energiája a belsejében koncentrálódó mágneses tér energiája. Helyettesítsük be (7)-be az

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$$

önindukciós együtthatót:

$$\mathcal{E}_{\text{magn}} = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \frac{I^2}{2}.$$

Ezután vegyük figyelembe, hogy a gerjesztési törvény szerint $Bl = \mu_0 IN$, innen

$$I^2 = \frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2},$$

tehát

$$\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{B^2}{2\mu_0} Al,$$

és mert Al a tekercs térfogata,

$$\mathcal{E}_{\text{mágn}} = \frac{B^2}{2\mu_0} V. \quad (8)$$

A mágneses tér energiasűrűsége tehát

$$\rho_{\mathcal{E}_{\text{mágn}}} = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (9)$$

ez nyilvánvalóan megfelel az elektromos tér energiasűrűségére vonatkozó

$$\rho_{\mathcal{E}_{\text{el}}} = \frac{E^2}{2\varepsilon_0}$$

állításnak. (*)

Visszatérünk a tekercset, ellenállást és kondenzátort tartalmazó váltóáramú körre. Láttuk, hogy a generátor hatásos teljesítményt az ohmikus ellenálláson ad le, a tekercs mágneses terének felépítésére fordított energiát a következő fél periódusában vissza is kapja — a teljesítmény ekkor negatív. Hasonló a helyzet a kondenzátornál: a kondenzátorra folyó áram feltölti a lemezeket, ezzel felépíti a kondenzátor lemezei közötti elektromos tér energiáját. A kisüléskor — a következő félperiódusban — ezután ez az energia visszaáramlik a generátorhoz.

Az olyan áramkörben, amelynek az ohmikus ellenállása elhanyagolható, $\cos \varphi = 0$, az elektromos áram effektív munkája nulla: a kondenzátor, illetve a tekercs ugyan minden feszültségperiódusban kétszer energiát halmoz fel, ezt azonban visszaadja a generátornak. Az ilyen áramot — amely tehát a feszültséghez képest 90° -kal siet vagy késik — *watt nélküli áramnak* nevezzük.

(*) Ez az összefüggés ugyanúgy nem teljesen általános érvényű, mint az elektromos megfelelője.

2.3.4. Transzformátor, energiaátvitel

A váltakozó áramú generátorok csúcshőfeszültsége $U_0 = ABN\omega$, a forgó tekercs keresztmetszetének, menetszámának, a szögsebességének és a mágneses tér erősségének (indukciójának) a szorzata. Tegyük fel, hogy az áramfejlesztő P teljesítményt ad le, rajta I áram folyik: $P = UI$, a pillanatnyi feszültség és a pillanatnyi áramerősség szorzata. (*)

Tegyük fel, hogy az elektromos energiát a fogyasztóhoz R ellenállású távvezeték szállítja. A távvezetéken $I^2 R$ teljesítmény kárba vész. Az energiaszállítás hatásfoka tehát

$$\eta = 1 - \frac{I^2 R}{UI} = 1 - \frac{IR}{U}. \quad (1)$$

Nyilvánvaló cél az elektromos energiával való takarékoskodás: minél kevesebb legyen a vezetékre jutó veszteség. A feladat tehát az $(I^2 R)/(UI)$ csökkentése, miközben $P = UI$ állandó marad. Ez az R csökkentésével — a keresztmetszet növelésével — vagy I csökkentésével (U növelésével) valósítható meg.

Az ellenállás azonban nem csökkenthető hatékonyan: az alkalmazott vezeték keresztmetszete aránytalanul nagy lenne. A megoldást az jelenti, hogy az energiát nem a generátor által szolgáltatott $ABN\omega$ csúcshőfeszültség mellett továbbítjuk, hanem átalakítjuk magasabb feszültségé.

Hogyan tehető ez meg?

Közös vasmagra szereljük két tekercset. Az így kapott eszközt *transzformátor*nak nevezzük. Az elnevezés onnan ered,

(*) Hangsúlyozni kell, hogy itt U és I nem összetartozó értékek, I nem az U hatására folyó áram!

hogy ezzel az elektromos berendezéssel magas feszültségű váltakozó feszültséget alacsonyra, az alacsony feszültséget magas feszültségűvé alakíthatjuk.

Az első, a *primer tekercs* menetszámát jelöljük N_1 -gyel, a második, a *szekunder tekercs* menetszámát N_2 -vel.

Kapcsoljunk a primer tekercsre U_1 váltakozó feszültséget. Jelöljük a primer tekercsben folyó áramot I_1 -gyel, a szekunder tekercs végei között mérhető feszültséget U_2 -vel, a szekunder tekercsben folyó áramot I_2 -vel (2.114. ábra).

Tegyük fel először, hogy $I_2 = 0$, vagyis a szekunder tekercs végei között olyan nagy az ellenállás, hogy az áram itt nem folyik. Ez az ún. nyitott transzformátor esete. Ebben az esetben a primer tekercsre vonatkozó huroktörvény:

$$U_1 - L_1 \dot{I}_1 = I_1 R_1, \quad (2)$$

ahol

$$L_1 = \mu_r \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l}$$

az első tekercs önindukációs együtthatója, R_1 az első tekercs ellenállása. Az I_1 áram a primer tekercsben — és a vasmagban —

$$\Phi = \frac{L_1}{N_1} I_1$$

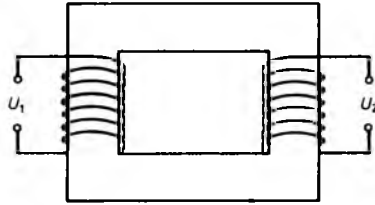
fluxust hoz létre. Ezért a szekunder tekercs két vége között

$$U_2 = -N_2 \dot{\Phi} = -\frac{N_2}{N_1} L_1 \dot{I}_1 \quad (3)$$

feszültség indukálódik.

Innen, ha $R_1 = 0$, akkor az adódik, hogy

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1, \quad (4)$$



2.114. ábra

vagyis a transzformátor tekercsein mérhető feszültségek egyenesen arányosak a menetszámmal. Nyitott transzformátor esetén a két feszültség fázisa ellentétes. Erre utal a negatív előjel.

Vizsgáljuk meg most a terhelt transzformátor esetét. Ekkor $I_2 \neq 0$, mert a két végét összekötjük egy R_2 ellenálláson keresztül. Most a helyzet bonyolultabb, mert a primer tekercsre az

$$U_1 - L_1 \dot{I}_1 - N_1 \frac{L_2}{N_2} \dot{I}_2 = I_1 R_1 \quad (5)$$

egyenlőség, a szekunder tekercsre pedig az

$$-\frac{N_2}{N_1} L_1 \dot{I}_1 - L_2 \dot{I}_2 = I_2 R_2 \quad (6)$$

egyenlőség lesz igaz.

Tegyük fel most, hogy $R_2 = 0$, vagyis a szekunder tekercset rövidre zártuk. Ebben az esetben a (6) egyenlőségből — figyelembe véve, hogy

$$L_1 = \mu_r \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l},$$

$$L_2 = \mu_r \mu_0 \frac{N_2^2 A}{l}$$

— azt kapjuk, hogy

$$-N_1 \dot{I}_1 - N_2 \dot{I}_2 = 0,$$

vagyis^(*)

$$\frac{I_1}{I_2} = - \frac{N_1}{N_2} \quad (7)$$

A (4) és a (7) összefüggésből

$$U_1 I_1 = U_2 I_2, \quad (8)$$

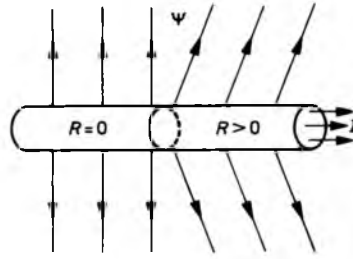
ami úgy olvasható, hogy — eltekintve a veszteségektől — a teljesítmény a primer és a szekunder oldalon megegyezik.

Vizsgáljuk most meg, hogy milyen mechanizmussal terjed az elektromos és mágneses energia az áramforrástól a fogyasztó felé.

Az egyszerűség kedvéért egyenáramú áramforrás esetéből induljunk ki. Az okoskodásunk váltakozó áramú áramforrásra értelemszerűen átvihető.

Tegyük fel tehát, hogy egy kémiai telepre fogyasztót kapcsolunk. A pozitív pólus felől megindul az áram. A fogyasztót az áramforrással összekötő vezeték felületén töltés halmozódik fel, a pozitív pólus felől a negatívhoz haladva csökkenő mértékben. (Ha a vezető egy szakasza nulla ellenállású, akkor ezen a szakaszon a vezető mentén egyenletes a töltéeloszlás, a potenciál állandó.)

A vezető körül elektromos és mágneses tér alakul ki. Az elektromos tér erővonalai a vezetőt megközelítően sugár irányban hagyják el. Kissé azonban előre dőlnek az áram irányába, hiszen ebben az irányban haladva csökken a potenciál. Az elektromos térerősségvektornak a vezetővel párhuzamos komponense biztosítja az elekt-

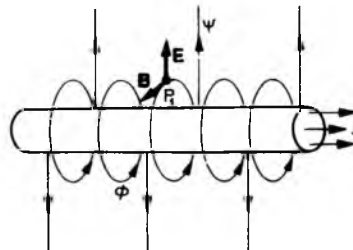


2.115. ábra

romos töltés mozgását. Azon a szakaszon, ahol a vezető ellenállása nulla, ott az elektromos tér erőssége merőleges a vezetőre (2.115. ábra).

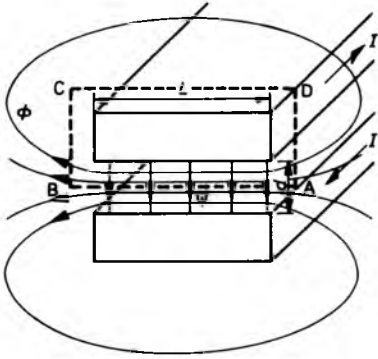
A mágneses tér erővonalai az árammal átjárt vezető körül jobbsodrású örvényeket alkotnak. Jelöljük ki egy P_1 pontot a vezető környezetében, a nulla ellenállású szakaszon (2.116. ábra). Azt látjuk, hogy ebben a pontban az elektromos térerősségvektor (\mathbf{E}) és a mágneses térerősségvektor (\mathbf{B}) egymásra merőleges és mindkettő merőleges az áramirányra. Az \mathbf{E} és a \mathbf{B} vektorok merőlegesek az energiaáramlás irányára.

Keressünk kapcsolatot a vezető körül kialakuló elektromos és mágneses tér tulajdonságai és a vezetők mentén terjedő elektromos teljesítmény között. Tegyük fel — mert a gondolatmenetünk így a leginkább áttekinthető —, hogy a vezető két párhuzamos fémszalag, amelyek ellenállá-



2.116. ábra

(*) Ez az állítás a következő egyszerű matematikai tényen alapul: ha két függvény deriváltja mindenütt megegyezik, és a két függvény valamely pontban (itt például a 0 s kezdeti időpontban) azonos értéket vesz fel, akkor ez a két függvény egyenlő.



2.117.
ábra

sa elhanyagolható (2.117. ábra). Az ilyen formájú vezeték azért előnyös, mert a két párhuzamos sík között az elektromos és a mágneses tér is igen egyszerű szerkezetű, mindkét tér homogén. A két sík közötti téren kívül mind az elektromos, mind a mágneses tér erőssége nullának tekinthető.

Gondoljuk el, hogy a vezeték szélessége L , a párhuzamos síkok távolsága d , és tegyük fel, hogy a vezető szalagban I erősségű áram folyik, az egyik vezetéken a fogyasztóhoz, a másikon vissza.

A gerjesztési törvény szerint

$$\sum_{ABCD} B\Delta s = BL + 0 + 0 + 0 = \mu_0 I,$$

és így

$$BL = \mu_0 I. \quad (9)$$

A vezetők mentén az ellenállás nulla, ezért a szemközti pontok között állandó a potenciálkülönbség. Az U feszültség és az E elektromos térerősség között egyszerű kapcsolat van:

$$Ed = U. \quad (10)$$

Számoljuk most ki az elektromos teljesítményt! Szorozzuk össze a (9) és a (10) egyenlőségeket:

$$EBLd = \mu_0 UI.$$

Itt $P = UI$, és $Ld = A$, a vezető síkokra merőleges felület, ezért

$$P = \frac{1}{\mu_0} EBA. \quad (11)$$

A felületegységen átáramló ún. teljesítménysűrűséget jelöljük S -sel, ekkor

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB. \quad (12)$$

Láttuk azonban azt is, hogy az energiaáramlás iránya az elektromos és a mágneses tér erősségére merőleges. Értelmezzünk ezért egy S vektort a következőképpen:

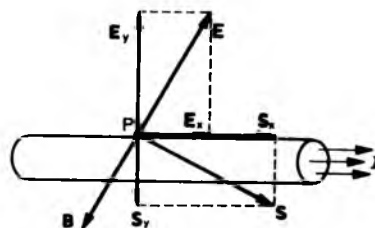
$$S := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (13)$$

Ennek a vektornak a nagysága a (12) teljesítménysűrűség, iránya az energia terjedésének iránya. Az S vektort *Poynting-vektornak* nevezzük. Mivel (vákuumban) $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, ezért a (13) definíció így is megfogalmazható:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (14)$$

Okoskodásunk eddig olyan párhuzamos vezető szalagra vonatkozott, amelynek az ellenállása elhanyagolható. Vizsgáljuk most meg, hogy mit mondhatunk akkor, ha a vezető ellenállással rendelkezik.

A vizsgálatainkat most a hengeres vezetőkre irányítjuk. Ha a vezető ellenállása egy l hosszúságú szakaszon R , és $R > 0$, akkor itt az elektromos térerősség nem



2.118.
ábra

merőleges a vezetőre, hanem előre dől az áram irányába (2.118. ábra). A vezető felületén a P pontban ható elektromos térerősségvektort bontsuk fel egy vezetővel párhuzamos \mathbf{E}_x és egy vezetőre merőleges \mathbf{E}_y vektorra: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$. Ekkor

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y) \times \mathbf{B} = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_x \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_y \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Jelöljük az első tagot S_y -nal, a másodikat S_x -szel. Az S_y vektor a vezető belseje felé mutat, az S_x a vezetőivel párhuzamos. S_y nagysága

$$S_y = \frac{1}{\mu_0} E_x B = \frac{1}{\mu_0} \frac{U}{l} B.$$

A gerjesztési törvény szerint az r sugarú hengeres vezető felületén a mágneses tér erőssége

$$B = \mu_0 \frac{I}{2 r \pi},$$

ezért

$$S_y = \frac{1}{\mu_0} \frac{U}{l} \mu_0 \frac{I}{2 r \pi} = \frac{RI^2}{l \cdot 2 r \pi}.$$

Itt a jobb oldalon a nevezőben a vezető palástjának a felülete szerepel, jelöljük ezt A -val. Ekkor

$$P = S_y A = I^2 R. \quad (15)$$

Azt kaptuk tehát, hogy az ohmikus ellenállással rendelkező vezető esetén az elektromos térerősség nem merőleges a vezetőre. Ezért a Poynting-vektor nem párhuzamos a vezetővel, hanem kissé befelé dől, a vezető belseje felé. A vezető mentén időegység alatt a vezetőbe áramló energia $I^2 R$. Ezzel a Joule-törvény mélyebb értelmét kaptuk.

Az energia tehát nem a vezetékben áramlik, hanem a vezeték mellett a vákuumban (vagy a szigetelőben). A vezető szerepe mindössze az, hogy a mágneses teret a fogyasztó felé terelje, irányítsa az energia-áramot.

Az elektromos és a mágneses tér anyagi természetű. Az energia sűrűségét mindkét tér esetén már megismertük:

$$q_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad q_{magn} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2. \quad (16)$$

Az $\epsilon_0 E = D$, és a $B = \mu_0 H$ összefüggések figyelembevételével

$$q_{el} = \frac{ED}{2}, \quad q_{magn} = \frac{BH}{2}, \quad (17)$$

illetve olyan pontban, ahol az elektromos és a mágneses tér is jelen van, a teljes elektromágneses energiasűrűség:

$$q_s = \frac{ED + BH}{2}. \quad (18)$$

Ez az összefüggés érvényes abban az esetben is, ha az elektromos és a mágneses tér kölcsönhatásba kerül az anyaggal: a dielektromos állandót és a relatív permeabilitást figyelembe kell venni.

A vezető környezetében az elektromágneses energia sűrűségét a (18) összefüggés, az energia terjedésének a vektorát a (14) egyenlőség szolgáltatja.

2.3.5. Feszültségrezonancia és áramrezonancia

Váltakozó feszültségre sorba kapcsolt induktív, ohmikus, kapacitív ellenállást *soros RLC körnek* nevezzük. (Ha valamelyik elem hiányzik, akkor az elnevezésből is elhagyjuk a szimbólumát; például RC kör-

ben ohmikus ellenállás és egy kondenzátor van.)

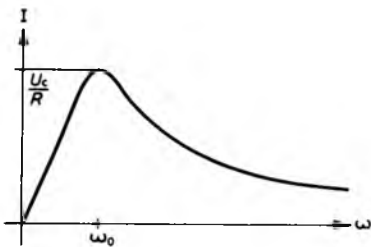
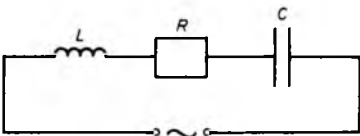
A soros RLC körben folyó áram effektív értéke:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \quad (1)$$

ahol U a generátor feszültségének az effektív értéke. Diskutáljuk ezt az állítást. Világos dolog, hogy az áram erőssége a körfrekvenciától függ. Ha $\omega = 0$, akkor a kondenzátoron nem folyik áram, tehát $I = 0$. Másrészt, ha ω igen nagy, akkor $L\omega$ lesz nagy, így az I közelítőleg nulla. Nagy frekvenciájú feszültség esetén az áram ismét kicsi lesz.

Ha az ω növekedésével az I változását elemezzük, akkor azt látjuk, hogy a függvény nulláról nő, valamely ω_0 körfrekvenciánál maximális értéket vesz fel, ezután ismét monoton csökken és nullához tart (2.119. ábra).

A maximum helyét könnyen megállapíthatjuk: az (1) függvénynek akkor van maximuma, ha a nevező a legkisebb, vagyis



2.119. ábra

ha

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0},$$

tehát a körfrekvencia:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad (2)$$

a frekvencia és a periódusidő:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{CL}. \quad (3)$$

A (2) és a (3) állításokban szereplő képletek mindegyikét *Thomson-formulának* nevezik.

Ha a hálózat körfrekvenciája ω_0 , akkor az áramerősség maximális:

$$I_{\max} := I(\omega_0) = \frac{U}{R}.$$

Az

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

esetet, tehát amikor az induktív és a kapacitív ellenállás megegyezik, rezonanciaesetnek nevezük. Rezonanciaesetben az áram azonos fázisban van a generátor feszültségével, a tekercs és a kondenzátor feszültségének az összege bármely pillanatban nulla, a generátor feszültsége azonos az ohmikus ellenállásra jutó feszültséggel. A három áramkört elem megjelenő feszültségek:

$$U_R(t) = U_0 \sin \omega t,$$

$$U_L(t) = \frac{L\omega U_0}{R} \cos \omega t,$$

$$U_C(t) = -\frac{L\omega U_0}{R} \cos \omega t.$$

Látható, hogy a tekercsen, illetve a kondenzátoron fellépő feszültségek sokkal nagyobbak lehetnek, mint a generátor feszültsége:

$$\frac{U_{L \max}}{U_0} = \frac{U_{C \max}}{U_0} = \frac{L\omega}{R},$$

minél nagyobb az $L\omega$ az R -hez képest, annál nagyobb a tekercsen fellépő feszültség a generátor feszültségéhez képest. Ezért a soros rezgőkörben fellépő rezonanciát *feszültségrezonanciának* nevezik.

Ha R nem szerepel az áramkörben, akkor az (1) alatti áramerősség—körfrekvencia függvény az ω_0 helyen nincs értelmezve. Ebben a pontban az áramerősségnek végtelen határértéke van. A generátor körfrekvenciájával ω_0 -hoz közeledve az áramerősség korlátlanul nő! A kör egyre nagyobb energiát von el a generátortól, és a folyamat a berendezés tönkremeneteléhez vezet. Ezt a jelenséget *rezonancia-katasztrófának* nevezzük.

†Tegyük fel, hogy 220 V effektív feszültségű, 50 Hz frekvenciájú hálózatra sorba kapcsolunk egy 1 ohmos ellenállást, egy 0,1 H önindukciójú tekercset és egy kondenzátort. Tűzzük ki feladatul a következőt: válasszuk meg úgy a kondenzátor kapacitását, hogy feszültségrezonancia lépjen fel a körben. Határozzuk meg az áramerősség maximális értékét, vagyis a rezonanciafrekvenciához tartozó értékét. A feszültségrezonancia esetében az induktív és a kapacitív ellenállás megegyezik, így

$$L\omega = \frac{1}{C\omega},$$

vagyis $C = 10^{-4} \text{ F} = 100 \mu\text{F}$. Ekkor az áramerősség effektív értéke 220 A (!), és mert $L\omega/R = 31,4$, a tekercsen és a kondenzátoron megjelenő feszültség effektív értéke $31,4 \cdot 220 = 6900 \text{ V}$. Az olyan berende-

zésekben, amelyekben a feszültségrezonancia miatt nagy feszültségek léphetnek fel, az áramköri elemek a tekercs és a kondenzátor szigetelésére, érintésvédelmére ügyelni kell.]

Vizsgáljuk meg most a *párhuzamos kapcsolású LC kör* és az áramrezonancia esetét. Induljunk ki abból, hogy az U_0 csúcshőfeszültségű, ω körfrekvenciájú hálózatra párhuzamosan egy tekercset és egy kondenzátort kötünk. Az egyszerűség kedvéért az ohmikus ellenállástól eltekintünk (2.120. ábra). A két hurkos hálózatot úgy foghatjuk fel, mint olyan áramköröket, amelyekben csak induktív, illetve kapacitív ellenállás van. Ekkor a tekercsen folyó áram:

$$I_L(t) = \frac{U_0}{L\omega} \sin(\omega t - \pi/2),$$

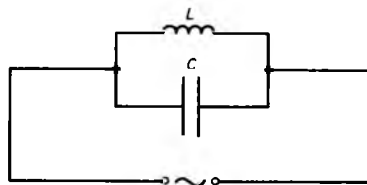
és a kondenzátoron folyó áram:

$$I_C(t) = U_0 C \omega \sin(t + \pi/2).$$

Így a főágban folyó áram:

$$I = U_0 \left| C\omega - \frac{1}{L\omega} \right| \sin(\omega t - \alpha), \quad (4)$$

hiszen a két ágban ellentétes irányú az áram, a fáziskülönbség $\pi/2$, vagy $-\pi/2$ attól függően, hogy az induktív vagy a kapacitív ellenállás a nagyobb. A fontos az, hogy az eredő áram (4) alatti kifejezése $I = I_0 \sin(\omega t - \alpha)$ alakban írható. Ezért párhuzamos LC kör esetében az áramkör



2.120. ábra

impedanciája:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{\left| C\omega - \frac{1}{L\omega} \right|} \quad (3)$$

Ha

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0},$$

vagysis a két párhuzamos ág impedanciája megegyezik, akkor rezonanciaeset valósul meg, ilyenkor *áramrezonanciáról* beszélünk. Ebben az esetben

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

tehát érvényben van a Thomson-formula. Az impedancia ilyenkor „végtelen nagy”, a főágban nem folyik áram. A gyakorlatban a tekercsnek és a kondenzátort tartalmazó ágnak is van egy kicsiny ohmikus ellenállása. Ez azt jelenti, hogy $L\omega \gg R$ feltétel esetén a főágban folyó áram sokkal kisebb, mint a mellékágban folyó áramok. Ez indokolja az áramrezonancia elnevezést.

XXI. Feladatcsoport: váltakozó áramú körök

XXI/1. Mennyi idő alatt éri el az 50 Hz-es váltakozó áram nulláról a maximális érték felét? Mennyi idő alatt éri el az effektív értéket?

XXI/2. Mekkora a kapacitív ellenállása egy $10 \mu\text{F}$ -os kondenzátornak az 50 Hz-es váltakozó feszültséggel szemben? Mekkora erősségű áram halad át ezen a kondenzátoron 220 V-os hálózati feszültség hatására?

XXI/3. Mekkora az induktív ellenállása egy 0,8 H önindukciójú tekercsnek 100 Hz-es váltakozó feszültséggel szemben?

XXI/4. Mekkora az ohmikus feszültségcsés abban a tekercsben, amelynek az induktivitására a 220 V-os hálózati feszültségből 200 V esik, és a tekercs ellenállása az egyenárammal szemben 2Ω ? Mekkora a tekercs önindukciós együtthatója?

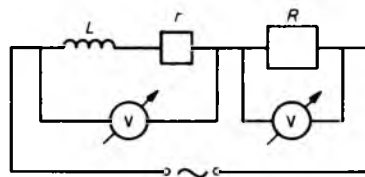
XXI/5. Egy tekercs önindukciós együtthatója 0,05 H. Ha 6 V-os egyenfeszültséget kapcsolunk rá, akkor az áramerősség 0,4 A. Mekkora a tekercs impedanciája a hálózati feszültséggel szemben?

XXI/6. Egy 800Ω -os izzót és egy $10 \mu\text{F}$ -os kondenzátort sorba kapcsolva a hálózati feszültségre kötjük ($f = 50 \text{ Hz}$, $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$). Mekkora fázisszöggel siet az áramerősség a feszültség előtt? Mekkora az áram erőssége? Határozzuk meg az izzóra jutó teljesítményt!

XXI/7. Hálózati feszültségre sorbakötünk egy 50Ω ellenállást és egy kondenzátort. Az áram és a feszültség közötti fázisszög -30° . Mekkora a kondenzátor kapacitása? Mekkora önindukciójú tekercset kössünk sorba a körbe, hogy megszüntesse a fáziseltolódást?

XXI/8. Sorba kapcsolunk egy $R = 40 \Omega$ -os ellenállást, egy $L = 0,4 \text{ H}$ önindukciójú tekercset és egy $10 \mu\text{F}$ -os kondenzátort. A generátor 50 Hz-es és 50 V effektív értékű feszültséget szolgáltat. Határozzuk meg az egyes elemeken mérhető feszültségeket!

XXI/9. Egy veszteséges tekercssel sorba kötünk egy 500Ω ellenállású fogyasztót. A hálózat 220 V effektív feszültségű, $\omega = 314 \text{ Hz}$. A tekercsen 180 V, a fogyasztón



2.121. ábra

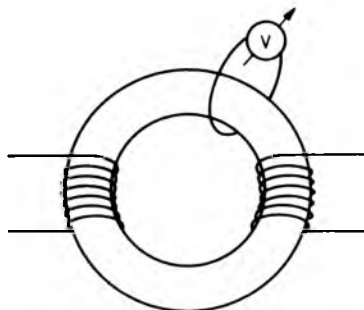
100 V feszültséget mérünk (2.121. ábra). Mekkora a tekercs önindukciós együtthatója és ohmikus ellenállása?

XXI/10. Váltakozó feszültségű körbe egy fogyasztót kapcsolunk. A hatásos teljesítmény 48 W. A fogyasztó sarkain 120 V feszültséget mérünk, az átfolyó áram 4 A. Mekkora a fáziseltolódás szöge a fogyasztóra kapcsolt váltakozó feszültség és az átfolyó áram között?

XXI/11. Két tekercset sorba kapcsolva 220 V-os, 50 Hz-es hálózatra kötünk. Mindkét tekercs ohmos ellenállását is figyelembe kell venni. Az egyik tekercs paramétere: $R_1 = 6 \Omega$, $L_1 = 0,05 \text{ H}$, a másiké $R_2 = 8 \Omega$, $L_2 = 0,01 \text{ H}$. Határozzuk meg az áram erősségét és a tekercseken mérhető feszültségeket!

XXI/12. Egy transzformátor 100 V-ot 5000 V-ra transzformál. A gyűrű alakú vasmagját egy hurokkal vesszük körül, amelynek a végeit egy feszültségmérőhöz kapcsoljuk. A műszer 0,5 V feszültséget mutat (2.122. ábra). Hány menete van a primer és a szekunder tekercsnek?

XXI/13. Egy transzformátor 200 menetes primer tekercsén az áramerősség 0,5 A. A tekercs kivezetésein 120 V feszültség



2.122. ábra

mérhető. A szekunder tekercsben az áramerősség 4,5 A, a feszültség 12 V. Határozzuk meg a szekunder tekercs menetszámát és a transzformátor hatásfokát!

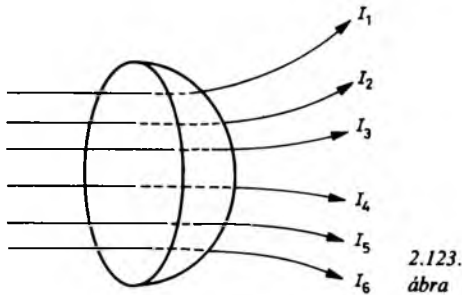
XXI/14. Egy erőmű maximálisan 10 MW teljesítményt ad le. Az elektromos energiát egy 20 mm^2 keresztmetszetű réz távvezetéken juttatják el a 10 km távolságra lévő fogyasztóhoz. Mekkora a veszteség, ha az energiaszállítás 100 000 V-os távvezetéken történik? Mekkora az áramerősség és az energiaszállítás hatásfoka? Ha a generátor kapcsain 220 V feszültség lenne (ha ezen a feszültségen szállítanák az energiát), akkor mennyi lenne a hatásfok? Mennyivel kellene a vezeték átmérőjét megnövelni, hogy veszteség az előbb kiszámított érték maradjon?

2.4. Elektromágneses tér

2.4.1. Eltolási áram

Az elektromágnesség elméletének eddig legjelentősebb eredménye az, hogy a változó mágneses tér elektromos teret indukál. Az időben változó mágneses fluxus erővonalaira merőlegesen balsodrású elektromos örvények jönnek létre.

Természetes módon vetődik fel a kérdés: kölcsönös-e ez a jelenség? Az elektromos tér indukál-e mágneses teret? Vegyük számba, hogy az eddigi ismereteink szerint milyen jelenségekre vezethető vissza a mágneses tér megjelenése! Láttuk: mágneses teret mozgó töltések (áramok) hoznak létre. A mágneses alapjelenségekkel ismer-



2.123.
ábra

kedve a mágneses tér forrásának tekintetük a mágneses pólust is, azonban úgy tűnik, hogy az anyagok mágneses viselkedése is visszavezethető az anyag elemi áramaira.

A mágneses tér megjelenésének az oka tehát a mozgó töltés vagy a vezetõben folyó áram. A gerjesztési törvény szerint, ha valamely zárt görbén körbeviszünk egy egységnyi erősségű északi (pozitív) mágneses pólust, akkor ezen a mágneses tér a körbejárt árammal arányos munkát végez:

$$\sum_{\odot} B^{\parallel} \Delta s = \mu_0 I. \quad (1)$$

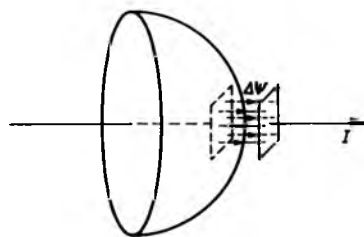
Másképpen is fogalmazhatunk: képzeljük el, hogy adott valamilyen — a 2.123. ábrán látott görbéhez hasonló — zárt görbe. Illesszünk gondolatban erre a görbére egy felületet. Tegyük fel, hogy ezt a felületet az ábrán látható módon I_1, I_2, I_3, \dots áramok döfik. Ezek az áramok mágneses teret hoznak létre. Az áramok által létrehozott mágneses tér olyan, hogy a felület peremét alkotó zárt görbén egyszer körbe haladva a $B^{\parallel} \Delta s$ szorzatok összege egyenlő az áramok összegének a μ_0 -szorosával.

Világos dolog, hogy ugyanarra a zárt görbére sok különböző felület illeszkedik. Az egyiket döfő áramok mind döfik a másikat is. Kivéve, ha az áram megszakad,

mert az áramot szállító vezetékét egy kondenzátorral megszakítjuk. Vegyük szemügyre a 2.124. ábrán látható két felületet (az egyik egy körlap, a másik egy félgömb)! Ezeket ugyanaz a zárt görbe (egy körvonal) határolja. Az egyiket a kondenzátorhoz vezető áram döfi, a másik felület a lemezek között halad, a kondenzátor két lemezét választja el egymástól. Ezen a felületen áram nem halad át, ezzel szemben a kondenzátor fegyverzei között koncentráló elektromos tér erővonalai döfik a felületet.

A lemezek közötti elektromos tér az áram folytatásának tekinthető. Nyilvánvaló, hogy a gerjesztési törvényt át kell fogalmaznunk: az eredeti formájában nem teljes. Az ábrán látható zárt görbe (kör) mentén a mágneses tér — egységnyi póluson végzett — munkája az első felületet döfő árammal arányos. A $B^{\parallel} \Delta s$ szorzatok összege azonos a második felület peremén is, mindkettő ugyanarra a görbére illeszkedik. Ezt a második felületet azonban elektromos áram helyett elektromos fluxus döfi.

A lemezek közötti elektromos fluxus és a vezetõben folyó áram között könnyen kapcsolatot találunk. Jegyezzük meg először azt a nyilvánvaló tény, hogy a lemezek felhalmozódó Q töltés időegységre eső megváltozása a töltés megmaradásának az elve alapján megegyezik a vezeték-



2.124.
ábra

ben folyó árammal:

$$\dot{Q} = I. \quad (2)$$

Másrészt a Gauss-tétel alapján

$$Q = \frac{1}{4\pi k} \Psi = \varepsilon_0 \Psi,$$

illetve az időegységre eső változásra áttérve:

$$\dot{Q} = \frac{1}{4\pi k} \dot{\Psi} = \varepsilon_0 \dot{\Psi}. \quad (3)$$

Az $\varepsilon_0 \dot{\Psi}$ mennyiséget *eltolási áramnak* nevezzük. Az eltolási áramot úgy fogjuk fel, mint a vezetékben folyó vezetési áram folytatását a lemezek között. Az eltolási áram Maxwellnek, a XIX. század egyik legnagyobb elméleti fizikusának zseniális felismerése. Faraday kísérleti munkássága nyomán mindazt tudták Maxwell korában, amit egyáltalán akkor tudni lehetett. Faraday eredményeit Maxwell öntötte egzaktt matematikai formába. Nem volt azonban elégedett a kapott eredményekkel: nem tartotta az elméletet elég szépnek. Meg volt ugyanis győződve arról, hogy a világot objektív törvények irányítják, magyarázzák, és ezek a törvények szépek. A szép és az igaz ugyanaz. Kiegészítette tehát elméletét az eltolási áramra vonatkozó teóriával: hogy az így kapott egyenletek ne sértsék az isteni szimmetriát. (Hipotézisét később igazolták Hertz kísérletei. A modern fizika XX. századi történetéből több, hasonló epizódot ismerünk.)

A (2) összefüggés alapján helyettesítsük az (1) gerjesztési törvénybe a (3) eltolási áramot:

$$\sum_{\ominus} B^{\parallel} \Delta s = \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\Psi}, \quad (4)$$

vagy — figyelembe véve a μ_0 és az ε_0 állan-

dók értelmezését —

$$\sum_{\ominus} B^{\parallel} \Delta s = \frac{1}{c^2} \dot{\Psi}. \quad (5)$$

A gerjesztési törvény — változó elektromos terekre vonatkozó — átfogalmazása analóg jelentésű a

$$\sum_{\ominus} E^{\parallel} \Delta s = -\dot{\Phi} \quad (6)$$

elektromos indukció törvényével. A változó elektromos tér mágneses teret hoz létre. Ez a mágneses tér olyan, hogy abban bárhogyan jelölünk ki egy zárt görbét, akkor ezen a görbén egyszer körülhaladva a $B^{\parallel} \Delta s$ szorzatok összege megegyezik a görbére illeszkedő felületet dőfő elektromos fluxus időegységre eső megváltozásával. Az arányossági tényező: $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$.

A váltakozó elektromos tér áramnak tekinthető. Az elektromos áram fogalmát így általánosítva több állítás egyszerűen megfogalmazható. Említsük először azt a lényeges elvet, hogy az elektromos áram mindig zárt. Ahol a vezetési áramok véget érnek, ott az eltolási áram folytatja az áram útját, zárva az áramkört.

Kirchhoff első törvénye is általánosabban érvényes: a kondenzátor lemezeire befolyó vezetési áram és az onnan kifolyó eltolási áram előjeles összege nulla.

Az elektromos áram — a vezetési és az eltolási áram — körül mágneses tér keletkezik. A mágneses tér olyan szerkezetű, hogy az (1) és a (4) gerjesztési törvények érvényben vannak. Az indukált mágneses tér jobsodrású, és az örvényerőssége a vezetési vagy az eltolási áram μ_0 -szorosásával egyenlő.

Az elektromos áram elsődleges fogalma: a töltésáramlás sebessége. Láttuk azonban, hogy a töltés mozgása az energia áramlása mellett másodlagos, az energia

nem a vezetőkben, hanem környezetében áramlik. Most az elektromos áram fogalmát tartalmilag tovább bővítettük.

Elképzeltető, hogy a mágneses tér kialakításában a vezetési áram és az eltolási áram együttesen szerepel. Ilyenkor mindkét áramfajta hatásával számolnunk kell. Az erőhatások függetlensége miatt a vezetési áram által keltett mágneses tér és az eltolási áram által indukált mágneses tér erőssége összeadódik:

$$\sum_{\odot} B^{\parallel} \Delta s = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \dot{\Psi}.$$

2.4.2. Maxwell törvényei

Az elektromosság-mágnesesség minden lényeges eredményével rendelkezünk. Olyan alapelvek birtokába jutottunk, amelyek az összes elektromos-mágneses természetű probléma megoldásának a magvát alkotják. Ezeket az alapvető törvényeket J. C. Maxwell rendezte és fejlesztette egységes elméletté.

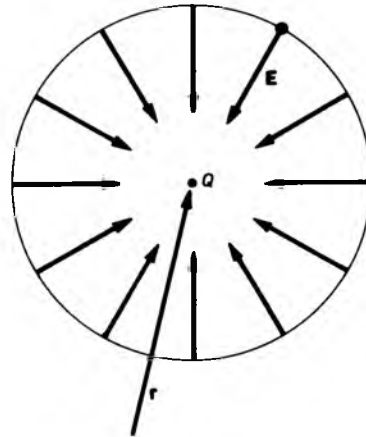
Fogalmazzuk meg most a Maxwell-féle törvények vákuumra érvényes formáját.

Az első törvény azonos az elektrosztatikából ismert Gauss-törvénnyel.

Maxwell I. törvénye: *Zárt felületen az elektromos tér fluxusa egyenlő a felületen belül elhelyezkedő töltés $1/\epsilon_0$ -szorosával:*

$$\sum E^{\perp} \Delta A = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad (1)$$

Ez a törvény azt fejezi ki, hogy az elektromos tér erővonalainak a forrása az elektromos töltés. Az első Maxwell-törvény a Coulomb-törvény általánosítása, ily módon a legismertebb, legkézenfekvőbb tapasztalatainkon nyugszik.



2.125. ábra

Maxwell I. törvényének alkalmazásaként vizsgáljuk meg, hogy milyen egyensúlyi helyzetet foglalhat el egy pontszerű töltéssel rendelkező részecske elektrosztatikus térben, tehát olyan elektromos térben, amelynek más töltések alkotják a forrását.

Tegyük fel azt is, hogy vákuumban helyezkednek el a testek, és az egyensúly szempontjából vizsgált testre csak elektromos erő hat. Ha valamely r helyvektorú pontban egy Q töltésű részecske egyensúlyban van, akkor ez azt is jelenti, hogy $E(r) = 0$, vagyis ebben a pontban az elektromos térerősség nulla. Stabilis egyensúlyban ez a pontszerű test akkor van, ha kimozdítva az r helyvektorú pontból, bármely irányban a részecskére visszahúzó erő hat. Vegyük körül gondolatban ezt a pontot egy gömbfelülettel. A gömbfelület minden pontjában befelé mutat az elektromos tér erőssége, mert — mint mondtuk — stabilis egyensúly csak így képzelhető el (2.125. ábra). Ez viszont azt jelenti, hogy a tér fluxusa a gömbfelületen nem nulla. Itt ellentmondáshoz jutottunk: a vizsgált gömbön belül csak a próbatest van, forrástöltés nincs.

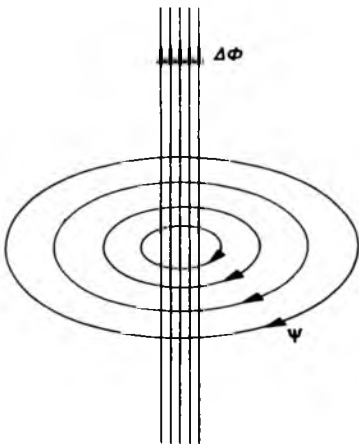
Elektrosztatikus térben egy pontszerű töltés más elektromos állapotú, a tér forrását jelentő testektől távol nem lehet stabilis egyensúlyi állapotban. Kivéve, ha az egyensúlyt más — nem elektromos eredetű — erők biztosítják.]

A második alaptörvény is az elektromos térre vonatkozik: az elektrosztatika második alaptörvényének az általánosítása.

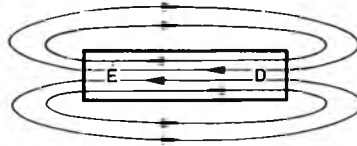
Maxwell II. törvénye: *Elektromos térben jelöljünk ki egy nyitott felületet. A felület peremét alkotó zárt görbén az óramutató járásával ellentétes irányban egyszer körbehaladva az $E^{\parallel} \Delta s$ szorzatok összege a mágneses tér felületre vonatkozó fluxusának időegységre eső megváltozásával egyenlő:*

$$\sum_{\partial} E^{\parallel} \Delta s = - \dot{\Phi}. \quad (2)$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy az indukált elektromos tér balsodrású örvényeket alkot a változó mágneses tér erővonalai körül (2.126. ábra). A második Maxwell-törvény fontos következményeként tartjuk számon a mozgási indukciót, a nyugalmi



2.126. ábra



2.127. ábra

indukciót, Maxwell második törvényéből speciális esetekben levezethető a töltésre ható erő Lorentz-féle törvénye. A törvényben szereplő balkéz-szabály a Lorentz-erő jobbkéz-szabályát is kifejezi.

A harmadik törvényt is ismerjük már: ez a mágneses térre vonatkozó Gauss-törvény.

Maxwell III. törvénye: *Zárt felületen a mágneses tér fluxusa nulla:*

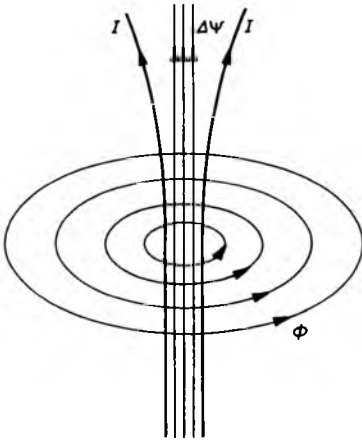
$$\sum B^{\perp} \Delta A = 0. \quad (3)$$

Ez az állítás azt fejezi ki, hogy a mágneses tér mindig forrásmentes, erővonalainak nincs forrása, önmagukba záródnak (2.127. ábra). Mágneses pólus tehát nincs.

A mágneses tér keletkezésének oka a mozgó töltés vagy az elektromos áram, vagy pedig a változó elektromos tér. Erről szól a negyedik törvény. Ezzel is megismerkedtünk már.

Maxwell IV. törvénye: *Mágneses teret áram (mozgó töltések) vagy változó elektromos tér hoz létre. Ha a mágneses térben kijelölünk egy — nyitott — felületet, akkor a felület peremét alkotó zárt görbén az óramutató járásával ellentétes irányban egyszer körbehaladva az $B^{\parallel} \Delta s$ szorzatok összege a felületen áthaladó vezetési és eltolási áram összegének μ_0 -szorosa:*

$$\sum_{\partial} B^{\parallel} \Delta s = \mu_0 (I + \epsilon_0 \dot{\Psi}). \quad (4)$$



2.128.
ábra

Az indukált mágneses tér örvényei jobbsodrásúak (2.128. ábra). A negyedik törvényből levezethető az Ampère-féle gerjesztési törvény, továbbá a Biot—Savart-törvény.

┌Mutassunk még egy példát arra, hogy az eltolási és a vezetési áram egyenértékű. Tegyük fel, hogy egy vezető gömb közepébe valamiképpen elektromos töltést juttatunk. Az elektromos töltés lassan kifelé áramlik, a felületet j áramsűrűség hagyja el. Feltehetjük azt is, hogy az áramsűrűség egyenletes: a felület minden pontján azonos az értéke. Képzeljük el most a gömb valamelyik egyenlítőjét, főkörét. Az egyenlítő mentén szeretnénk meghatározni a mágneses térerősség irányát és a nagyságát. Tekintsük tehát az egyenlítőre illeszkedő jobb oldali félgömböt. Ezt a felületet az áram jobb kéz felé hagyja el, így a gerjesztési törvény szerint az egyenlítő mentén az erővonal a 2.129. ábrán látható módon halad.

Világos azonban, hogy a főkörre illeszkedő felület a bal oldali félgömb is. Ezt balra mutató áram hagyja el. Ez az áram ellentétes irányú indukciót létesít.

Mekkora és milyen irányú tehát az in-

dukció a főkör mentén? A gerjesztési törvényben egy görbére illeszkedő egy felület szerepel, ezért a kérdésre úgy kell válaszolnunk, hogy csak az egyik félgömbön áthaladó áramot vesszük számításba. Hogyan lehet tehát megszüntetni a többértelműséget?

A megoldás abban van, hogy a gömb felületén kifelé folyó vezetési áram mellett figyelembe vesszük az eltolási áramot is. A gömb felületén az elektromos fluxus kifelé mutat:

$$\Psi = 4\pi kQ,$$

de a megváltozása a gömb belseje felé irányul, hiszen a fluxus nagysága csökken, a vezetési áram kifelé folyik, a töltés csökken. A fluxusváltozás sebessége:

$$\dot{\Psi} = 4\pi k\dot{Q}.$$

Másképp a gömb felületét időegység alatt elhagyó töltés a felület és az áramsűrűség szorzata:

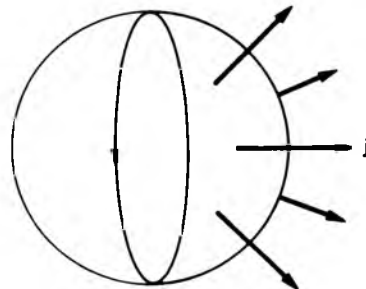
$$I = 4\pi r^2 j.$$

A töltésmegmaradás elve miatt pedig

$$\dot{Q} = -I,$$

hiszen a gömb töltése az elfolyó árammal csökken.

A vezetési és az eltolási áram összege



2.129.
ábra

nulla, ugyanis a térerősség a gömb felületén:

$$E = k \frac{Q}{r^2}.$$

A térerősség időegységre eső megváltozása:

$$\dot{E} = -k \frac{4\pi r^2 j}{r^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j.$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát a körüljárt felület nagyságával és ε_0 -al:

$$\varepsilon_0 \dot{E} A = -j A.$$

A felületen kiáramló vezetési áram — jA — és a befelé irányuló eltolási áram — $\varepsilon_0 \dot{E} A$ — összege nulla, a gömb felületén minden pontban nulla a mágneses tér erőssége is.]

A négy alapvető egyenlet anyag jelenlétében így módosul:

$$\sum D^\perp \Delta A = Q, \quad (5)$$

$$\sum_{\odot} E^\parallel \Delta s = -\dot{\Phi}, \quad (6)$$

$$\sum B^\perp \Delta A = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{\odot} H^\parallel \Delta s = I + \varepsilon \dot{\Phi}. \quad (8)$$

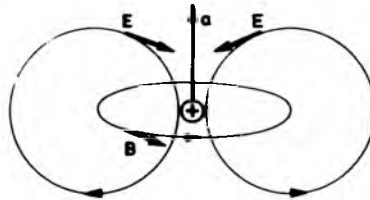
Ezekhez társulnak az anyagi egyenletek:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad (10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (11)$$

A Maxwell-törvények alkalmazásaként ismerkedjünk meg *Lenz törvényével*. Ennek a törvénynek néhány speciális formája már szóba került. Most egy eléggé általános — és a leginkább áttekinthető — megfogalmazást írjunk le.



2.130. ábra

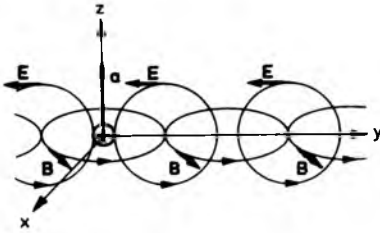
Tegyük fel, hogy a 2.130. ábrán látható módon egy elektromos töltéssel rendelkező részecske a gyorsulással mozog. A mozgó elektromos részecske mágneses teret hoz létre, a gyorsuló részecske változó mágneses teret indukál. A tér erőssége az ábrán látható irányban nő. Maxwell IV. törvénye meghatározza a tér fluxusváltozását.

A második Maxwell-törvény szerint azonban a változó mágneses tér elektromos teret hoz létre. Ennek az elektromos térnek az irányát balkéz-szabály alapján határozzuk meg. Az indukált elektromos tér abban a pontban is létrejön, ahol éppen a töltés gyorsul. Látható, hogy a térerősség iránya ellentétes itt a részecske gyorsulásával, tehát a részecskét gyorsító erővel ellentétes irányú. Ezt a tényt fogalmazza meg

Lenz törvénye: *A gyorsuló részecske változó mágneses teret hoz létre. Ez a változó mágneses tér önmagára merőleges elektromos teret indukál. Az elektromos tér a gyorsulással ellentétes irányú erőt fejt ki a részecskére.* (Röviden szólva: a jobb- és a balkéz-szabály együttes alkalmazása.)

2.4.3. Elektromágneses hullámok

A második Maxwell-törvény szerint a változó mágneses tér elektromos teret kelt, a negyedik törvény szerint a változó elektromos tér mágneses teret hoz létre. A két



2.131.
ábra

törvény a

$$\sum_{\odot} E^{\perp} \Delta s = -\dot{\Phi}, \quad (1)$$

$$\sum_{\odot} B^{\perp} \Delta s = \frac{1}{c^2} \dot{\Psi} \quad (2)$$

formában teremt kapcsolatot az indukált elektromos és mágneses tér erőssége között.

Vizsgáljuk meg ismét valamely gyorsuló töltés környezetében kialakuló elektromágneses teret.

Tegyük fel, hogy a 2.131. ábrán látható koordináta-rendszerben a z tengely mentén az origó körül harmonikus rezgést végez egy részecske. Tegyük fel most, hogy a részecske gyorsulása pozitív irányba mutat. Ekkor a részecske változó mágneses teret kelt: a tér fluxusa a jobbkéz-szabálynak megfelelő irányban változik.

A változó mágneses tér balsodrású elektromos teret kelt. Az elektromos tér iránya a mágneses fluxus változására merőleges, nagysága a mágneses fluxus változási sebességével arányos.

A változó elektromos tér azonban — ismét a negyedik Maxwell-törvényt alkalmazva — mágneses teret hoz létre. Ez a második generációs mágneses tér az elektromos tér változási sebességével arányos, irányát jobbkéz-szabállyal határozzuk meg.

A változó mágneses tér balsodrású

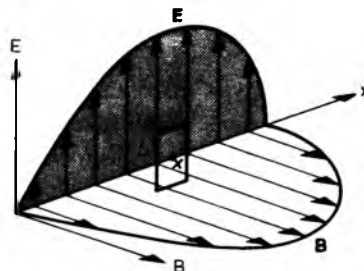
elektromos teret hoz létre. Az elektromos tér ismét mágneses teret hoz létre.

A gyorsuló töltés körül kialakuló elektromos és mágneses tér a töltésről leszakad, és egymásra merőlegesen, egymást gerjesztő örvényekként tovaterjed. Az elektromágneses térnek a gyorsuló elektromos testről leváló, és a testtől függetlenül a térben terjedő formáját *elektromágneses hullámnak* nevezzük.

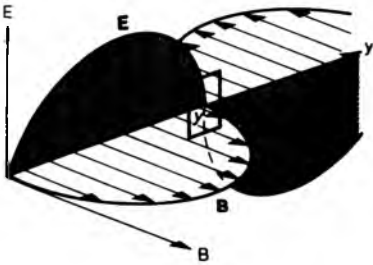
A Maxwell-törvényekből valóban igazolható, hogy az elektromos és a mágneses térerősség eleget tesz a hullámegyenletnek. Az (1) és a (2) egyenletekből levezethető az elektromos és a mágneses térerősségre vonatkozó hullámegyenlet: a helytől és időtől függő \mathbf{E} és \mathbf{B} komponensek hely szerinti második deriváltja arányos az idő szerinti második deriválttal.

A levezetés részleteibe a matematikai módszereink hiányos volta miatt természetesen nem mehetünk bele. Figyeljünk fel azonban arra, hogy az (1) és a (2) összefüggésekben az elektromos és a mágneses térerősség szimmetrikusan szerepel. A hullámegyenlethez vezető lépések lényeges eleme az, hogy a zárt görbén számolt munkát kapcsolatba hozzuk a helykoordináták szerinti második deriválttal.

Az elektromos és a mágneses örvények egymásra merőlegesek, ezért az *elektromágneses hullám transzverzális* tulajdonsá-



2.132.
ábra



2.133. ábra

gú. Az elektromos és a mágneses tér a hullám terjedési sebességre merőlegesen rezeg. Meglehetősen nyilvánvaló, hogy a két részrezgés frekvenciája azonos.

Most megvizsgáljuk a *fázisviszonyokat*. A 2.132. ábrán egy elektromágneses hullám elektromos részének a képét látjuk egy pillanatban. Tegyük fel, hogy az X pontban **E** maximális. Ekkor az ábrán látható kis téglalap mentén összeszámoljuk az $E^{\parallel} \Delta s$ szorzatokat. Világos, hogy

$$\sum_{\square} E^{\parallel} \Delta s = 0,$$

mert a téglalap két vízszintes oldala mentén nulla a munkavégzés, a két másik — a függőleges — oldalak mentén pedig azonos nagyságú, de előjelben különböző, hiszen az egyik oldalon **E** és Δs megegyező irányú, a másik függőleges oldalon ellentétes irányú. Ha

$$\sum_{\square} E^{\parallel} \Delta s$$

nulla, akkor ezen a felületen a

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \dot{\Phi}$$

is nulla. Ez csak úgy lehetséges, ha **B** értéke maximális.

Másrészt: vegyünk fel egy ugyanilyen kis keretet egy olyan Y pontban, ahol **E** nulla. Ekkor az $E^{\parallel} \Delta s$ szorzatok összege ezen a kis téglalapon maximális. A két

vízszintes oldalon haladva nulla most is a munkavégzés, de a két függőleges oldalon **E** és Δs azonos irányú (2.133. ábra). Itt tehát

$$\sum_{\square} E^{\parallel} \Delta s$$

maximális. Ez azonban azt jelenti, hogy Φ itt változik legnagyobb sebességgel, vagyis itt a **B** értéke nulla. Összefoglalva: az elektromos és mágneses terek egymásra merőlegesen rezegnek, azonos frekvenciával, hullámhosszal és azonos fázisban.

A hullám *terjedési sebessége* az (1) és a (2) Maxwell-törvényből is kiolvasható: az elektromágneses hullám a vákuumban

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (3)$$

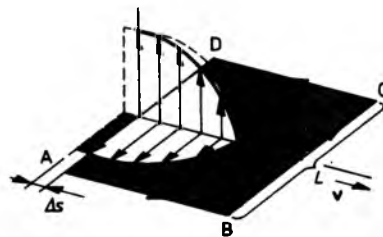
sebességgel terjed. Vázlatos gondolatmeggel ezt alá is támasztjuk.

Készítsünk a sugárzásról két síkmetszetet (2.134. ábra). A periódusidőhöz képest igen rövid Δt idő alatt a hullám eltolódik jobbra Δs -sel.

Számítsuk ki a mágneses tér „munkáját” az ABCDA zárt görbe mentén. A BC szakaszhoz még nem érkezett el a hullámfront, az AB és a CD szakaszon merőleges **B**-re, így

$$\sum_{\text{ABCD}} B^{\parallel} \Delta s = BL. \quad (4)$$

Az ABCDA téglalapot elektromos áram nem dőfi, ezért az elektromos örvényerős-



2.134. ábra

ség a felületet dőfő elektromos fluxus időegységre eső megváltozásával egyenlő. Az ABCDA téglalap felületén az elektromos fluxus megváltozása közelítőleg $EL\Delta s$; ha Δs és Δt olyan kicsi, hogy közben az E változása E -hez képest elhanyagolható. Tehát $\Delta\Psi = EL\Delta s$, az időegységre eső változásra rátérve

$$\dot{\Psi} = \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = ELv, \quad (5)$$

ahol v jelenti most átmenetileg a hullám terjedési sebességét. Helyettesítsük most be a (4) és (5) összefüggéseket a negyedik Maxwell-törvénybe:

$$BL = \mu_0\epsilon_0ELv,$$

innen

$$B = \mu_0\epsilon_0Ev. \quad (6)$$

Becsüljük most meg az elektromos örvényerősséget a PQRSP téglalapon (2.135. ábra). A téglalap három oldala mentén $E^{\parallel}\Delta s$ nulla, a negyedik oldalon EL' -vel egyenlő, így a balkéz-szabályt figyelembe véve:

$$\sum_{PQRSP} E^{\parallel}\Delta s = -EL', \quad (7)$$

másrészt a téglalapot dőfő mágneses fluxus megváltozása Δt idő alatt $\Delta\Phi = BL'\Delta s$, az időegységre eső megváltozás pedig

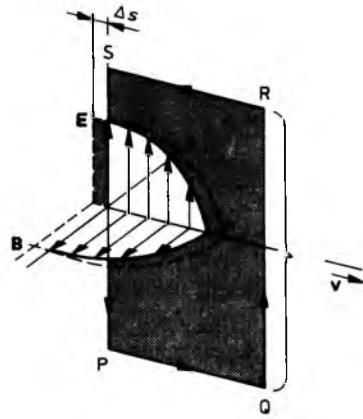
$$\dot{\Phi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BL'v. \quad (8)$$

A (7) és a (8) összefüggéseket Maxwell II. törvényébe helyettesítjük:

$$-EL' = -BL'v,$$

és ezért

$$E = Bv. \quad (9)$$



2.135. ábra

Az így kapott egyenlőséget vessük össze a (6) egyenlőséggel:

$$B = \mu_0\epsilon_0Bv^2.$$

Innen a hullám terjedési sebessége:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} =: c.$$

Tegyük fel most, hogy az elektromágneses hullám ϵ_r relatív dielektromos állandójú, μ_r relatív permeabilitású közegben halad. Ekkor a $\mu := \mu_r\mu_0$ és az $\epsilon := \epsilon_r\epsilon_0$ definíciók felhasználásával a hullám terjedési sebessége:

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}. \quad (10)$$

Ezt az összefüggést nem bizonyítjuk. Rámutatunk azonban arra, hogy az elektromágneses hullám terjedési sebessége a közeg elektromos és mágneses tulajdonságai-
val kapcsolatba hozható. Ugyanúgy, ahogyan a mechanikai hullámok esetén láttuk: ott a közeg sűrűsége, a rugalmassági modulus vagy a feszültség meghatározta a hullám terjedési sebességét.

2.4.4. Az elektromágneses sugárzás dinamikája

Az elektromágneses hullámok elmélete az elektrodinamika csúcса. A sugárzás elméletével válik teljessé az elektrodinamikával kapcsolatos tudásunk. A 2.136. ábrán láthatjuk, hogy hogyan kapcsolódnak egymáshoz az elektromosságban és a mágnességtan fogalmai és állításai. Figyeljünk fel arra, hogy gondolatmenetünk kiinduló pontja az elektromos töltés és a mágneses pólus közötti erőhatás felismerése volt. A közöttük fellépő erőhatás jobbkéz-szabállyal határozható meg: a töltésre ható erő is, a mágneses pólusra ható erő is. Ez természetes, hiszen egymásnak ellentétei.

A két jobbkéz-szabály azonban az elektromágnesség két alapvető törvényéhez vezetett el: a Biot—Savart-törvényen és az Ampère-féle gerjesztési törvényen keresztül Maxwell IV. törvényéhez az egyik, a Lorentz-erőn, a mozgási és a nyugalmi indukción keresztül Maxwell II. törvényéhez a másik. A két ág kapcsolata adja az elektromágneses hullámok elméletét, az optikát. Így válik érthetővé, hogy az optika az elektromágnességtan szerves része.

Ebben a pontban az elektromágneses hullámok dinamikai tulajdonságaival foglalkozunk, a sugárzási tér legfontosabb állapotjelzőivel. Az elektromos térrel való ismerkedésünk idején elfogadtuk azt a hipotézist, hogy az elektromos tér anyagi szerkezetű. Ekkor még a legegyszerűbb volt: a kondenzátorok közötti teret töltötte ki, homogén volt az eloszlása, egyenletes a sűrűsége. Az energiájáról azt tanultuk, hogy a sűrűsége:

$$q_{\text{e1}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

A mágneses térről hasonlót gondoltunk:

anyagi természetű, és az energiasűrűsége:

$$q_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2.$$

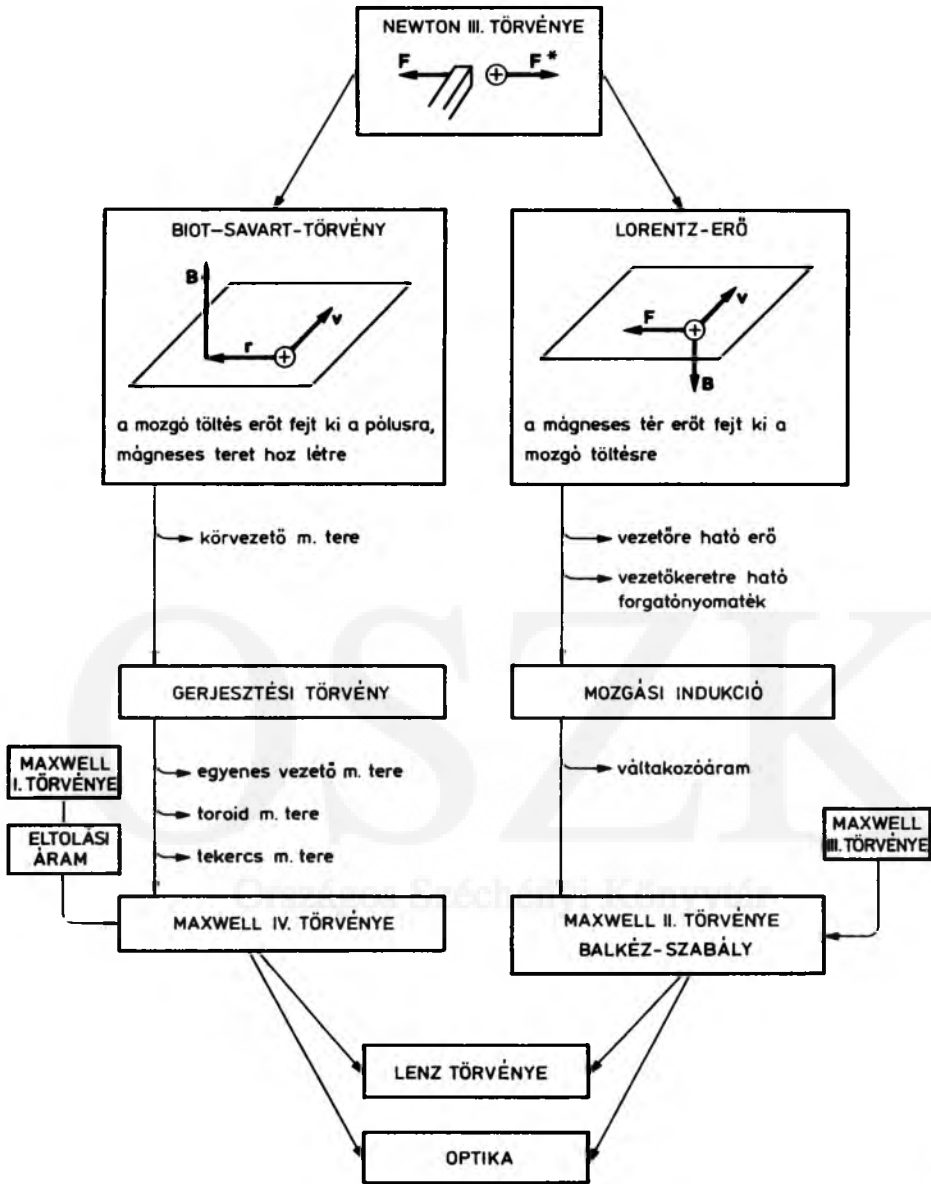
Ha annak idején a távolhatás gondolata mellett döntünk, akkor a rezgő hullámforrásról leszakadó, tovaterjedő elektromágneses hullám fogalma képtelenség lenne a számunkra. Az erőter anyagi természetének a legfontosabb bizonyítékai éppen az optikai jelenségek.

Az elektromágneses tér rendelkezik mindazokkal az állapotjelzőkkel, amelyeket az anyag fogalmához szoktunk kapcsolni: tömeggel, impulzussal és, mint láttuk, energiával.

Izgalmas kérdés természetesen az, hogy az elektromágneses tér állapotjelzői milyen kapcsolatban vannak egymással, más szóval: mely állapotegyenletek jellemzik az elektromágneses teret.

A másik fontos kérdés az, hogy a dinamikusan változó elektromágneses tér miként lép kapcsolatba a kémiai anyaggal? Hogyan módosul a sugárzási tér energiája, impulzusa és a többi állapotjelzője? Egyáltalán mi módon történik — például — az energiacsere a sugárzási tér és a részecske szerkezetű anyag között? Ezt a kérdést már feltettük, amikor felismertük az elektromos tér anyagi természetét. Akkor ezt a kérdést nyitva hagytuk.

Ez a kérdés most is nyitva van. Nem tudjuk, hogy a kölcsönhatás hogyan megy végbe. Lehetséges, hogy folyamatosan? Vagy a frekvenciától, esetleg a kémiai anyag tulajdonságaitól függően szaggatott módon, adagokban? Leírható-e egyáltalán a kölcsönhatás determinisztikusan? Meg lehet-e előre pontosan mondani, hogy miként és hol lép fel a kölcsönhatás az elektromágneses hullám és az útjába kerülő kémiai anyag között?

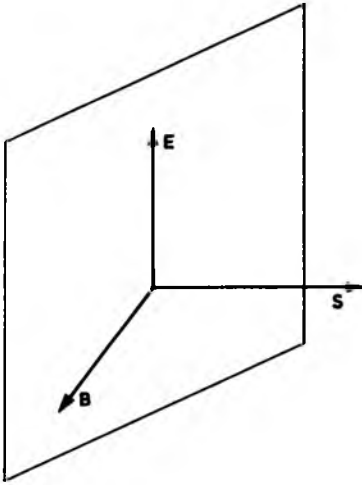


2.136. ábra

Azon múlik a dolog, hogy ezek a kölcsönhatások leírhatók-e az elektrodinamika módszereivel, vagy túlmutatnak azokon. Most mindenesetre tegyük fel, hogy az elektromágneses hullám és a kémiai anyag egymásra hatása az elektrodinami-

ka módszereivel jellemezhető. Az elméleti eredményeink és a tények — nagyrészt — összhangban vannak.

Tekintsük most át az elektromágneses hullám állapotjelzőit. Az elektromos és a mágneses tér tovaterjedve energiát szállít,



2.137.
ábra

a teljesítménysűrűség a Poynting-vektor (2.137. ábra):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Ha a tér egy pontjában az egymásra merőlegesen rezgő térerősségvektorok:

$$\mathbf{E} = E_0 \sin \omega t, \quad \mathbf{B} = B_0 \sin \omega t$$

— láttuk ugyanis, hogy a fázisuk azonos
—, akkor S abszolút értéke:

$$\begin{aligned} S &= \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin^2 \omega t = S_0 \sin^2 \omega t = \\ &= S_0 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}. \end{aligned}$$

Az energiaáram hosszú időre vonatkozó átlaga tehát $\bar{S} = 1/2 S_0$. Másrészt azt is láttuk, hogy az energiasűrűség

$$q_s = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2. \quad (2)$$

Ebben a kifejezésben a két tag egyenlő. Mivel $E = Bc$, mint ezt az előző pontban láttuk [2.4.3. pont (9) képlet], ezért E he-

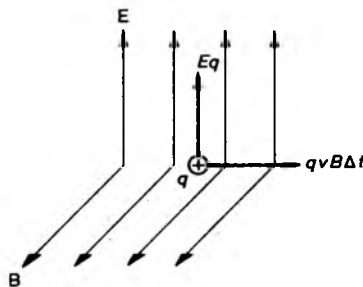
lyébe $B/(\mu_0 \epsilon_0)$ helyettesíthető, a (2)-ben szereplő első tag így:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{B^2}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2.$$

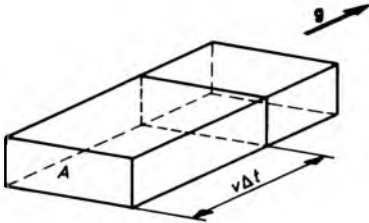
Az elektromágneses hullám impulzust is szállít. Számítsuk ki az *impulzussűrűséget*. A gondolatmenetünk lényege az, hogy belátjuk: az elektromágneses hullámmal kapcsolatba kerülő elektromos állapotú részecske energiát és impulzust nyer a hullámtól, és ezek egymással arányosak.

Tegyük fel tehát, hogy egy fémlapra — amelyben a töltés könnyen elmozdul — merőlegesen elektromágneses hullám esik. Gondoljuk el, hogy a lüktető elektromágneses tér kapcsolatba lép egy kezdetben nyugvó, pontszerű elektromos testtel (2.138. ábra). Jelöljük ennek a töltését q -val. Határozzuk meg, hogy az elektromos térerősség mekkora munkát végez a részecskén! Nyilvánvaló, hogy a részecskére Eq erő hat. Számítsuk a munkát igen rövid, Δt hosszúságú időtartamra. Jelöljük az átlagsebességet ezen a szakaszon v -vel. Ekkor a részecske elmozdulása $v\Delta t = \Delta s$. Így az elektromos tér $W = Eqv\Delta t$ munkát végez a részecskén.

Erre a részecskére a hullám mágneses térkomponense is erőt fejt ki: $F = qvB$. Δt idő alatt a részecske $F\Delta t = qvB\Delta t$ impulzust kapott az elektromágneses hullámtól:



2.138.
ábra



2.139.
ábra

a munka és az erőlkés aránya valóban állandó:

$$\frac{I}{W} = \frac{Bqv\Delta t}{Eqv\Delta t} = \frac{B}{E} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}.$$

Jelöljük most g -vel a térfogategységnyi elektromágneses anyag impulzusát, pontosabban az impulzussűrűséget. Ekkor — az előző összefüggés alapján —

$$g = \rho \sqrt{\epsilon_0\mu_0}. \quad (3)$$

Hozzuk most kapcsolatba az elektromágneses tér energiasűrűségét az energiaáram-sűrűséggel. Képzeljük el, hogy egy A nagyságú felületen keresztül Δt idő alatt v sebességgel ρ sűrűségű energia áramlik (2.139. ábra). Ekkor ez az energia $V = Av\Delta t$ térfogatú hasámban foglal helyet, nagysága így $\rho Av\Delta t$. Számítsuk ki ennek az energiának térfogat- és időegységre eső részét. Ez az *energiaáram sűrűsége*:

$$S = \rho \epsilon v.$$

Vegyük most figyelembe, hogy $v = c$, és

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB.$$

Ekkor

$$\rho \epsilon = \frac{1}{c} S = \frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} EB,$$

és mert $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$, ezért

$$g = \epsilon_0 EB. \quad (4)$$

Az impulzusáram iránya a teljesítménysűrűség-áram irányával párhuzamos, tehát a hullám terjedésével egyirányú. Ezért a (4) egyenlőség vektori alakban:

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

Másrészt — mint többször láttuk — $\mu_0 \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, ezért

$$\mathbf{g} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (6)$$

Az impulzussűrűség és az energiaáram sűrűsége (a Poynting-vektor) egymással arányos mennyiségek, mindkettő merőleges az elektromos és a mágneses térerősség irányára, és az elektromos hullám terjedési irányával párhuzamosak.

Értelmezzük most az elektromágneses hullám *tömegét*. Az elektromágneses tér tömegét úgy értelmezzük, hogy az $I = mv$ összefüggés érvényben legyen, tehát $\Delta v = Ac\Delta t$ térfogatú térrészben az impulzus nagysága $mc = Ac\Delta t g$. Vegyük most figyelembe a (6) összefüggést:

$$mc = \frac{1}{c} SA\Delta t.$$

Az $SA\Delta t$ az elektromágneses hullám által az A felületen át Δt idő alatt szállított energia. Ezért

$$mc^2 = \mathcal{E} \quad (7)$$

Az elektromágneses hullám tömege és energiája arányos egymással. Az arányossági tényező a terjedési sebesség négyzete.

Az elektromágneses hullám tehát tömeget, energiát és impulzust szállít.

Határozzuk meg most, hogy mekkora *nyomást* fejt ki az elektromágneses hullám a vele kapcsolatba kerülő anyagra. A hullám terjedési irányára merőleges A felületre ható erő és a felület hányadosát számoljuk. Ekkor (mivel $g\Delta V$ a Δt idő alatt át-

adott impulzus):

$$p = \frac{F}{A} = \frac{g\Delta V}{A\Delta t} = \frac{gAc\Delta t}{A\Delta t} = gc = \frac{1}{c} S.$$

Színuszos hullám esetén az átlagos nyomás $\bar{p} = p_0/2$, vagyis az elektromágneses hullám átlagos nyomása olyan felületen, amely elnyeli a hullámot:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \frac{1}{c} E_0 B_0.$$

Ha a hullám visszaverődik a felületről, akkor az átlagos nyomás ennek a kétszerese.

Áttekintettük az elektromos és a mágneses terek elméletét. A továbbiakban még két kérdéssel foglalkozunk az elektrodinamikán belül, az elektromágneses hullámok terjedésének a tulajdonságaival, az optikával, majd részben az optika által felvetett problémák megoldását célul kitűzve a speciális relativitás elméletének alapfogalmaival.

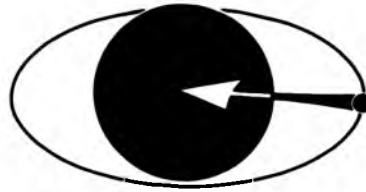
Az elektromágneses tér klasszikus elméletét teljessé tettük ebben a pontban. Zárjuk le ezért ezt azzal a gondolattal, amelyben összehasonlítjuk a tömegpontok és a pontrendszerek mechanikáját és az elektrodinamikát.

A két elmélet a valóság egy-egy oldalának a modellje. Hasonlatosak egymáshoz abban, hogy mindkettő kerek, matematikailag is formába önthető elmélettel leírja a valóságnak a vizsgált részét. Mindkét elmélet determinisztikus, a jelen ismeretünk és a törvények meghatározzák a jövőt is.

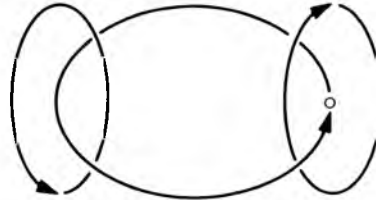
A két elmélet egy-egy mondatban röviden így jellemezhető:

A mechanika problémája az, hogy az anyagra ható erőter ismeretében meghatározza a test mozgását (2.140. ábra):

erőter → *mozgás*.



2.140. ábra



2.141. ábra

Ezzel szemben az elektrodinamika az elektromos állapotú testek körül kialakuló elektromágneses tér leírásával foglalkozik, vagyis a kapcsolat természete:

mozgás → *erőter*.

Itt tehát a probléma az, hogy a mozgás miként határozza meg az erőteret (2.141. ábra).

Érdekes kérdés az, hogy a két elmélet egyesíthető-e? Bizonyos egyszerű esetekben, egyszerű feladatok esetén igen. Erre sok példát láttunk, hiszen egymás mellett alkalmaztuk a Newton-törvényeket és az elektrodinamika törvényeit. Ezek az alkalmazások azonban bizonyos értelemben egymástól függetlenek voltak. Egyszer a mechanika elveit, másszor az elektrodinamika törvényeit alkalmaztuk.

A két elmélet egymáshoz „csatolása” nehezebb kérdés. És ha a két elmélet összekapcsolható, akkor vajon determinisztikus elméletet kapunk-e? Más szóval: ha egyesíthető lenne is a mechanika newtoni elmélete és az elektrodinamika maxwelli felépítése, ennek a „szuper” elméletnek a nézőpontjából a jelen meghatározná-e a jövőt?

XXII. Feladatcsoport: az elektromágneses tér

XXII/1. Egy kondenzátor lemezei között az elektromos fluxus $5 \mu\text{s}$ időtartam alatt $3 \cdot 10^7 \text{ N/C m}^2$ értékről $8 \cdot 10^7 \text{ N/C m}^2$ értékre nő egyenletesen. Mekkora az áram erőssége a lemezekhez töltést szállító vezetékben ez idő alatt?

XXII/2. Egy 10 cm sugarú, kör alakú, egymástól 2 mm-re lévő lemezekből álló kondenzátor egyik lemezére $30 \mu\text{C}$, a másikkra $-30 \mu\text{C}$ elektromos töltést viszünk. Mekkora a kondenzátor feszültsége? Mekkora a lemezek közötti térben tárolt energia mennyisége? Ha a kondenzátort $10 \mu\text{s}$ alatt kisütjük, és a kisülési áram egyenletes, akkor az elektromos tér mágneses teret kelt. Határozzuk meg a mágneses tér erősségét a lemezek között, a közös tengelyük-től 8 cm távolságban!

XXII/3. Egy 10 cm sugarú, egymástól 2 mm-re lévő lemezpárból álló kondenzátor lemezei között papírszigetelés van. A szigetelőanyag fajlagos ellenállása $3 \cdot 10^6 \Omega$, a relatív permeabilitása 2. A kondenzátort 1000 V feszültségre töltjük fel. Határozzuk meg a lemezek töltését! Mekkora a lemezek közötti részben az elektromos energia, ha az áram lassan átszivárog a szigetelőn? Határozzuk meg az indukált mágneses tér erősségét a lemezek között, a közös tengelytől 10 cm távolságban!

XXII/4. Egy kondenzátor lemezeinek nagysága 1000 cm^2 , a távolságuk 2 mm. A lemezek egy nagyfrekvenciás váltakozó áram körébe vannak iktatva. A vezetékben folyó áram frekvenciája $100 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, a lemezekben a töltés maximuma $2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Mekkora a vezetékben folyó áram erőssége? Mekkora a lemezek közötti eltolási áram maximális értéke?

XXII/5. Egy rezgőkör tekercsének az

önindukciós együtthatója 2 mH, a kondenzátor kapacitása 1 nF. Mekkora a kondenzátor lemezei közötti fluxus maximális értéke és az eltolási áram csúcserőssége, ha a lemezekben megjelenő legnagyobb feszültség 200 V?

XXII/6. Egy rezgőkörben a kondenzátor kapacitása 12,5 pF, a tekercs önindukciós együtthatója 5 mH. A rezgőkör elektromágneses hullámokat bocsát ki. Határozzuk meg az elektromágneses hullám hullámhosszát!

XXII/7. Egy kondenzátorból és egy 10 mH-s tekercsből egy elektromos rezgőkört készítünk. A kisugárzott hullám hullámhossza 600 m (a hosszuhullámok tartományába esik). Mekkora a kondenzátor kapacitása?

XXII/8. Elektromágneses síkhullám érkezik egy, a terjedés irányára merőleges felületre, amely azt teljesen elnyeli. Az elektromos térerősség nagyságának a maximális értéke: $5 \cdot 10^{-5} \text{ V/m}$. Mekkora a felületre ható nyomás?

XXII/9. Elektromágneses hullám esik egy, a terjedés irányára merőleges, 10 m^2 nagyságú felületre, amely a hullámot teljesen elnyeli. A felületre ható erő legnagyobb értéke $2 \cdot 10^{-18} \text{ N}$. Mekkora a hullámban az elektromos térerősség maximális értéke?

XXII/10. Egy elektromos rezgőkörben a tekercs önindukciós együtthatója 0,3 mH. A rezgőkör energiáját egy antenna sugározza ki. A terjedés irányára merőleges 10 m^2 felület a hullámot teljesen elnyeli. Ezért a felületre erő hat, és a hullám által kifejtett erő maximális értéke $2 \cdot 10^{-18} \text{ N}$. Mekkora a hullámban az elektromos térerősség legnagyobb értéke? Határozzuk meg a hullámot keltő rezgőkörben a kondenzátor kapacitását, ha az erő $1,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ periódusidővel változik!

XXII/11. Egy elektromágneses hullámban az elektromos térerősség legnagyobb értéke $5 \cdot 10^{-6}$ V/m. Mekkora az energia-sűrűség, az energiaáram-sűrűség és az impulzussűrűség?

XXII/12. Az elektromágneses gömbhullám energiaáram-sűrűsége az adótól 5 km-re 10^{-6} W/m². Mekkora az energiaáram-sűrűség az adótól 12 km-re?

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

3. Optika

3.1. Hullámoptikai jelenségek

3.1.1. Az elektromágneses spektrum

A Maxwell-féle elektrodinamika fizikátörténetileg is fontos állomás: az elektromágneses hullámok elméletének a megszületése után ismerték fel, hogy a fény is elektromágneses hullám. Ezzel az addig külön tudományként élő elektromosság és optika egységes elméletté forrt össze.

Az elektromágneses hullámok frekvenciájára nézve semmiféle korlátozás nincs. A rezgésszám elvben tetszőleges lehet. Az elektromágneses hullámok frekvencia szerinti osztályozását *elektromágneses spektrum*nak (színképnek) nevezzük. Az elektromágneses spektrumot tartományokra osztották, ezek itt-ott átfedik egymást.

A frekvenciát ebben a fejezetben ν -vel jelöljük. A frekvencia és a hullámhossz között egyszerű kapcsolat van:

$$c = \nu \lambda . \quad (1)$$

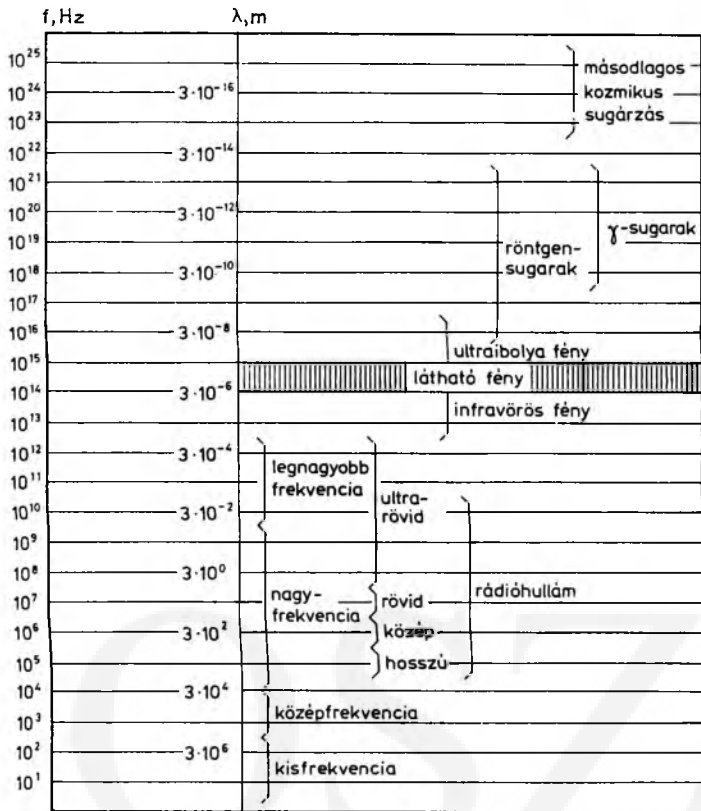
A 3.1. ábrán feltüntettük a spektrum legjelentősebb tartományait, a tartományok határát jelentő frekvenciákkal és hullámhosszokkal.

A néhány Hz frekvenciájú elektromágneses hullámoknak a gyakorlatban nincs jelentőségük, ezekkel nem foglalkozunk. A hálózati váltakozó áramról leváló elektro-

mágneses hullámok frekvenciája 50 Hz. Ezt a sugárzást a hálózat energiavesztéseként vesszük figyelembe, elenyésző ez az energiavesztés, de autórádióval észleljük a felléptét, ha nagy feszültségű távvezeték vagy villamos tápvonal közelében autózunk.

A rádióhullámokat elektromos rezgőkörrel keltik, és — mint az elnevezés is utal rá — a rádiózásban, illetve a hírközlésben kapnak szerepet. A természetes sugárforrások is bocsáthatnak ki rádióhullámokat. A világuorból — pl. a kvazárokból — érkeznek hozzánk ebbe a tartományba eső elektromágneses hullámok.

A rádióhullámokon belül megkülönböztethetünk néhány résztartományt. A *hosszúhullámok* a Föld felülete mentén elhajlanak, igen nagy távolságú rádiózást tesznek lehetővé. A hullámhosszuk 1—2 km. A *közép- és rövidhullámok*, de különösen az *ultrarövidhullámok* egyenes vonalban terjednek, az elhajlás kevésbé jelentős, ezért rövidebb távolságok esetén használatosak. Mikrohullámokat alkalmaznak a radarok működtetésére, tárgyak pontos helyének a meghatározására. A mikrohullámokat a szigetelők elnyelik, ezért használják a mikrohullámokat a modern konyhatechnikában (mikrohullámú sütők).



3.1.
ábra

A következő nagy hullámhossztartomány az *optikai hullámok* tartománya. A nagy frekvencia miatt előállításuk elektromos rezgőkörökkel nem lehetséges. Felmelegített, izzó testek bocsátanak ki optikai hullámokat. Három nagy résztartományt különböztetünk meg. Az *infravörös sugárzást* említjük először. Az infravörös sugárzást hőszugárzásnak is nevezik, mert ha a bőrünket éri, akkor úgy érzékeljük, mintha melegebb, esetleg forró testtel érintettük volna. Ilyen hullámokat bocsátanak ki a kályhák, fűtőtestek. Ha egy vaskályhát alaposan megtömünk jó minőségű szénnel, akkor „ontja a meleget”. Azt észleljük, hogy a kályha halvány vörös színű. Sötétben különösen szembetűnő jelenségről van

szó. Az infravörös elnevezés innen származik: a hőmérséklet növekedésével az infravörös tartományban meleget sugárzó kályha sugárzása a látható fény vörös színében látszik, a vörös színt fogja sugározni.

A *látható fény* a vörös színtől az ibolyáig terjed. Egy szűk hullámhossztartomány ez, keskeny sávja a teljes elektromágneses színeképnek. A jelentősége azonban igen nagy: a külvilágról érkező információk hordozója az ember számára.

Az *ultraibolya sugárzás* a szemmel már nem érzékelhető közvetlenül. A közönséges üveg elnyeli, a kvarcüveg átengedi. A napfény és a higanygőzlámpa által kibocsátott sugárzás jelentős része az ultraibolya tartományba esik. Az ultraibolya su-

gárzás hatására a bőr leburnul, a szervezetben a D-vitamin képződését elősegíti, ugyanakkor, mint ismeretes, rákos szövetszétburjánzást is elindíthat.

A röntgenkészülékkel keltett *röntgensugárzás*, az anyag legbelsejének átalakulása-kor létrejövő *gamma-sugárzás*, és a *kozmosz* térből érkező *sugárzás* az elektromágneses spektrum legnagyobb frekvenciájú tartományait alkotják.

Az elektromágneses hullámok egységes természetűek: a röntgensugárzás is ugyanúgy interferenciát mutat, mint a rádióhullámok vagy a látható fény. A különbség az, hogy az interferencia előállítása másként valósítható meg a röntgensugárzásnál, mint a rádióhullámok esetén.

Ez az egységes viselkedés teszi menthetővé azt az eljárást, hogy a továbbiakban az optikáról, az elektromágneses hullámok terjedéséről szóló fejezetben az elektromágneses hullám helyett a fényről beszélünk.

Az optikának két nagy fejezete van. A *fizikai optika* a fény hullámtermészetével foglalkozik, olyan problémakörrel, amelynek az értelmezése a fény hullámmivoltában található meg. Azokról a jelenségekről van szó, amikor a fény útjába kerülő akadályok méretei a hullámhosszal „összemérhetők”, nagyjából azonos nagyságrendűek.

Az optika másik fejezete a fény terjedését olyan körülmények között vizsgálja, amelyekben a fény terjedésének irányában a hullámhossznál lényegesen nagyobb méretű akadályok, rések vannak. Ebben az esetben a résen áthaladó fényhullámfront elhajlása nem számottevő, a keskeny hullámfront a fény sugar geometriai egyenes fizikai megfelelőjének tekinthető. A *geometriai optika* szemléletmódja szerint a fény sugarak a geometriai egyenesekkel azonosíthatóak.

A következő pontokban először a hullámoptikai jelenségekkel foglalkozunk, ezután térünk rá a geometriai optika tárgyalására.

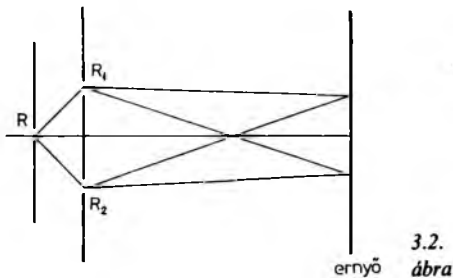
3.1.2. A fény interferenciája

Az interferenciajelenségek szolgáltatják az első bizonyítékot a fény hullámtermészetére. Az interferencia a hullámok egymásra hatásának a jelensége, bármely két hullám találkozásánál fellép. Az egymásra hatás eredményét azonban csak különleges esetekben figyelhetjük meg. Általános esetekben az interferencia csak gyors, áttekinthetetlen változásokat eredményez.

A fény interferenciája csak az ún. *koherens hullámok* esetén figyelhető meg. Egymással találkozó két hullámot koherensnek nevezünk, ha a fáziskülönbségük állandó. A fényhullámok interferenciája független attól, hogy azonos-e a hullámok frekvenciája, és hogy koherens-e, kimutatható, érzékelhető interferencia azonban csak azonos frekvenciájú és koherens hullámok esetén tapasztalható. Ebben az esetben két hullám maximális mértékben erősíti egymást azokon a helyeken, ahol a hullámok fáziskülönbsége π -nek páros számú többszöröse. Ha a fáziskülönbség π -nek páratlan számú többszöröse, akkor a gyengítés a legnagyobb mértékű.

Koherens hullámokat a legkönnyebben akkor valósíthatunk meg, ha egy fénykibocsátási aktusban keletkező hullámot két részre bontunk, majd újra egyesítjük ezeket a hullámvonulatokat.

A gyakorlatban sokféle módon elérhetjük, hogy az interferencia megfigyelhető legyen. Mi most mindössze két esettel foglalkozunk. Ezeket is jól bemutatható az interferencia lényege és feltételei.



Elsőként a *Young-féle interferenciakísérlet* elemezzük. A 3.2. ábrán látható a kísérleti elrendezés. Az R részt megvilágítjuk egyszínű — monokromatikus — fényvel. A fényhullámok — az R résen keresztülhaladva — a mintegy 1 méterre lévő, szimmetrikusan elhelyezkedő R_1 és R_2 réseket azonos fázisban érik el. Ezek a rések kb. 0,1 mm szélességűek, a távolságuk 1 m. A két rés szimmetrikusan helyezkedik el.

A két résből — a Huygens—Fresnel-elv szerint — egymással koherens fényhullámok indulnak ki, a találkozás eredményeként az úgy 5 méter távolságra lévő ernyőn sötét és világos csíkok figyelhetők meg.

Mint ezt már láttuk, a maximális erősítés feltétele az, hogy a találkozó hullámok útkülönbsége a félhullámhossz páros számú többszöröse legyen (3.3. ábra):

$$s_1 - s_2 = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

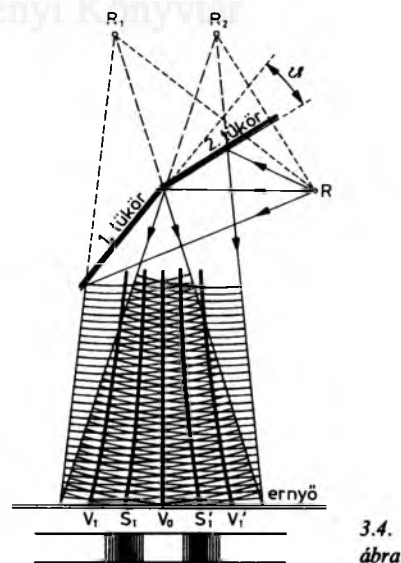
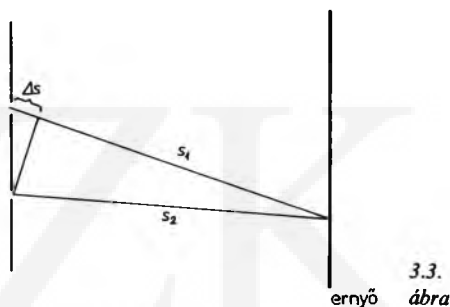
a maximális gyengítés feltétele pedig az, hogy

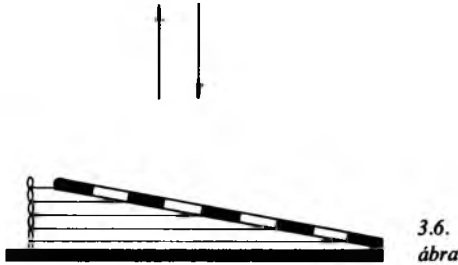
$$s_1 - s_2 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A *Fresnel-féle kettőtükör-kísérletben* két üveglap kap szerepet, ezeknek a hátsó felületét feketére festik, hogy a visszaverődést megakadályozzák. E két tükör igen

kis szögben hajlik egymáshoz. E közös éllel párhuzamos résen keresztül fényt bocsátunk a két tükörre. Ha a fény egyszínű, akkor a tükröktől néhány méterre elhelyezett ernyőn sötét és világos csíkok jelennek meg (3.4. ábra).

Az interferencia értelmezéséhez gondoljuk meg, hogy az R rés képe a tükrökben az R_1 és R_2 helyen jelenik meg. Az interferencia létrejöttét úgy foghatjuk fel, mintha az R_1 és R_2 fényforrásból (hullámforrásból) a rajz síkjában körökkel szemléltethető elemi hullámok indulnak ki. A két vo-





3.6. ábra

nalszerű fényforrás koherens fényének interferenciaképe jelenik meg az ernyőn.

A mechanikai hullámoknál láttuk, hogy az állóhullámok kialakulása is az interferenciával magyarázható: a haladó és a visszaverődő hullám önmagával interferál. Fényhullámok esetén is ki lehet mutatni állóhullámok keletkezését.

Ha fémtükrre merőlegesen fényhullám érkezik, és a tükrön visszaverődik, akkor a tükrő felé haladó és a visszaverődő hullámok eredményeként állóhullámok alakulnak ki. Hogyan lehet ezeket kísérletileg kimutatni? Helyezzünk el a 3.5. ábrán látható módon egy fényérzékeny lemezt (negatívfilmet). A film igen kis szögben hajlik a fémtükrhöz viszonyítva.

Előhívás után azt tapasztaljuk, hogy a filmen $\lambda/2 \sin \alpha$ távolságra sötétedések találhatók, amelyek megfelelnek a fényhullám duzzadóhelyeinek.

Az elektromágneses hullámban az egymásra merőleges **E** és **B** vektorok azonos fázisban rezegnek. A hullám terjedésével párhuzamos

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

vektor a fém felületén ellentétes irányúra változik. Ez úgy történik, hogy a fémtükrrel kölcsönhatásba kerülő hullámban az **E** vektor π fázisugrást szenved, a **B** vektor nem.

3.1.3. A fény diffrakciója

A fény egyenes vonalban terjed. Réseken áthaladva azonban eltérés jelentkezik az egyenes vonalú terjedéstől: a fény elhajlik. Mivel a fény hullámhossza igen kicsiny, az elhajlást csak keskeny rés alkalmazásával sikerül kimutatni.

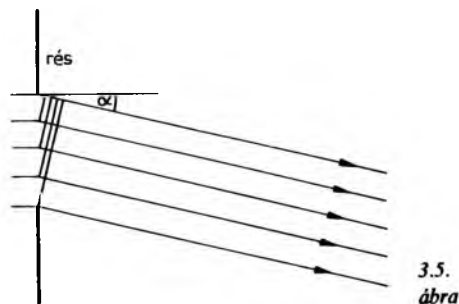
Ejtsünk merőlegesen síkhullámot a d szélességű résre. Vizsgáljuk meg, hogy a rés tengelyéhez viszonyítva α szögben hajló irányban a végtelen távolinak tekintett ernyőn milyen hatás jön létre, az interferencia milyen hatást eredményez?

A tapasztalattal megegyező eredményt ad a következő vázlatos gondolatmenet (3.6. ábra).

A két szélső sugár útkülönbsége $d \sin \alpha$. Osszuk fel a két szélső sugár távolságát $\lambda/2$ szélességű szakaszokra. A rést így „zónákra” bontottuk, a hullámfrontot párhuzamos sávokra. A szomszédos sávok hatása éppen lerontja egymást. Ha páros számú ilyen sáv van, akkor a kioltás teljes:

$$2k \frac{\lambda}{2} = d \sin \alpha \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots).$$

Az erősítés akkor teljes, ha a $d \sin \alpha$ útkülönbség $\lambda/2$ páratlan számú többszöröse, ebben az esetben ugyanis egyetlen sáv hatása marad meg, a többi (páros számú) kioltja egymást. A maximumok irányát



3.5. ábra

tehát a következő összefüggés adja meg:

$$(2k + 1) \frac{\lambda}{2} = d \sin \alpha \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Ezek a képletek azonban nem pontosak: nem veszik figyelembe az egyes sávokban haladó hullámok egymás közötti interferenciáját.

Vizsgáljuk meg most a *fény elhajlását rácson*. Az optikai rács több egymás mellé helyezett résből áll. Ez a legtöbbször olyan üveglemez, amelyen sűrűn párhuzamos karcolások helyezkednek el (3.7. ábra). A karcolás helyén a fény nem jut át, a nem karcolt helyeken akadálytalanul áthalad. Két rés egymástól mért távolsága a *rácsállandó*, jelöljük ezt d -vel. Ha az optikai rácson egyszínű fény halad át, akkor a résen való

elhajláshoz hasonló képet kapunk, most azonban a világos helyek sokkal keskenyebbek, mint a sötétek, éles vonalak emelkednek ki a sötét környezetből. Ezért a rács elhajlási képében az erősítési helyeket vizsgáljuk. Maximális erősítés olyan irányokban következik be, amelyekre teljesül, hogy

$$d \sin \alpha = k \lambda.$$

Tegyük fel, hogy az ernyő D távolságra van a rácstól, és az első szimmetrikusan elhelyezkedő erősítési helyek távolsága L . Ha az ernyő olyan távol van, hogy a

$$\sin \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha \cong \frac{dL}{2D}$$

közelítést jogosnak tekinthetjük, akkor világos, hogy

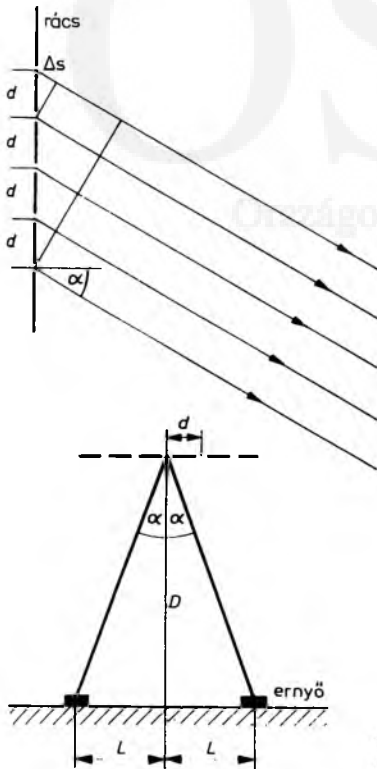
$$\lambda = \frac{dL}{2D}.$$

Ennek az összefüggésnek a jelentősége az, hogy könnyen mérhető adatokból a fény hullámhossza meghatározható.

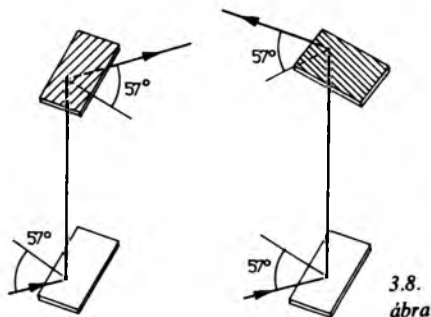
3.1.4. A fény polarizációja

A fény transzverzális hullám. A technikai eredetű rádióhullámokat dipólantennák sugározzák ki, ezért az ilyen hullámok rezgési síkja állandó. Más szavakkal azt mondjuk, hogy az ilyen elektromágneses hullám polarizált. A természetes hullámforrások, például a fényforrások által kibocsátott hullámban az elektromos és a mágneses tér vektorai minden irányban rendszertelenül rezegnek. Ha ezek közül a hullámok közül kiválasztunk egy adott síkban rezgő hullámot, akkor a fényt polarizáljuk.

A fény polarizációja a következő kísérlettel valósítható meg (3.8. ábra). Tegyük fel, hogy egy tükörrre ferdén fénysugarat ejtünk.



3.7. ábra



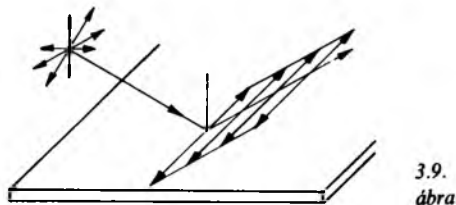
3.8. ábra

(Legjobb, ha a beeső sugár a tükör normálisával 57° -os szöget zár be.) Forgassuk el a tükört a beeső sugár — mint tengely — körül, ekkor azt tapasztaljuk, hogy a visszavert fénysugár erőssége nem változik.

Helyezzünk most a visszavert fénysugár útjába egy másik tükört. Állítsuk be ezt úgy, hogy szintén 57° -os szögben essen rá az első tükörről visszavert fénysugár.

Ha ezután a második tükört forgatjuk el az elsőről visszavert fénysugár körül, úgy, hogy a beesési szögek továbbra is 57° -osak legyenek, akkor azt tapasztaljuk, hogy az elforgatás szögétől függően a második tükörről visszavert sugár intenzitása változik: ha a két tükör síkja párhuzamos, akkor a másodszerre visszavert fény erőssége a legnagyobb. Ehhez képest 90° -os elforgatás után ez a másodszerre is visszavert fénysugár intenzitása teljesen megszűnik.

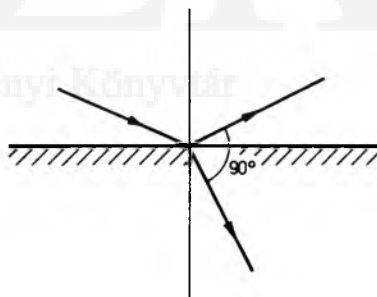
Ha tehát üveglapra kb. 57° -os szögben fénysugarat ejtünk, akkor a visszaverődő



3.9. ábra

fénysugár síkban polárossá válik. A visszavert hullám elektromos térerősségvektora az üveglemezzel párhuzamosan rezeg (3.9. ábra). Ezt a polarizált fényt aztán újabb üveglapra ejtjük, akkor erről a fénynek már csak egy része verődik vissza, lehetséges, hogy a polarizált fény teljesen elnyelődik.

A polarizáció mértéke attól függ, hogy a fénynyaláb milyen szögben éri az üveglemezt. A tapasztalat szerint akkor teljes a polarizáció, ha a visszavert polarizált fénysugár és az üveglemezbe behatoló fénysugár merőleges egymásra (3.10. ábra).



3.10. ábra

3.2. Geometriai optika

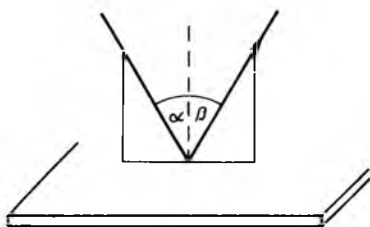
3.2.1. A Fermat-elv

A fényhullám a geometriai optika szempontjából párhuzamos fénysugarakból áll. A vákuumban haladó fénysugár a geometriai egyenes fizikai megfelelője. A fény azonban nem halad minden esetben egyenes mentén: a tükröző felületekről visszaverődik, vízbe, üvegbe hatolva megtörik. A visszaverődés és a fénytörés törvényei a hullámoptika elveiből következnek: lényegében a Huygens—Fresnel-elv alkalmazásai a fényre.

Az optikai törvények megfogalmazásakor szerepet játszik a *beesési merőleges* fogalma. Tegyük fel, hogy egy fénysugár valamely felületre érkezik. Állítsunk gondolatban a felületre egy merőleges egyenest abban a pontban, ahol a fénysugár a felületet éri. Ezt az egyenest nevezzük beesési merőlegesnek.

Tekintsük most át a fény visszaverődésének és törésének szabályát.

Tegyük fel, hogy a fény tükröző felülethez ér, és visszaverődik (3.11. ábra). A *beeső fénysugár* és a beesési merőleges szögét jelöljük α -val, a *visszavert fénysugár* és a beesési merőleges szögét β -val. Az α -t a *beesés szögének*, a β -t a *visszaverődés szögének* nevezzük. Tegyük fel, hogy $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.



3.11.
ábra

A *fényvisszaverődés szabálya*:

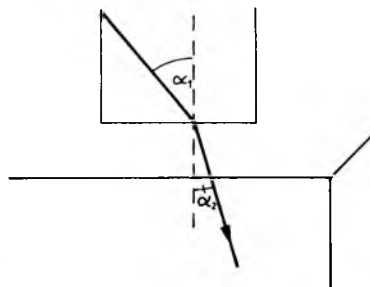
1. A beeső fénysugár, a beesési merőleges és a visszavert fénysugár egy síkban van.
2. A visszaverődés szöge egyenlő a beesés szögével.

Ha a fénysugár merőleges a tükröző felületre ($\alpha=0^\circ$), akkor visszaverődéskor a beeső fénysugár a beesési merőleges mentén verődik vissza. (Ha a fénysugár merőleges a beesési merőlegesre, tehát $\alpha=90^\circ$, akkor nem jön létre visszaverődés.)

Ha a fénysugár két közeg határához érkezik, és nem verődik vissza, illetve nem nyelődik el, akkor átlép a másik közegbe. A beeső fénysugár és a beesési merőleges szögét most is a *beesés szögének*, a másik közegbe hatoló fénysugarat *megtört fénysugárnak*, a megtört fénysugár és a beesési merőleges szögét *törési szögnek* nevezzük. A beesés szögét általában α_1 -gyel, a törési szöget α_2 -vel jelöljük (3.12. ábra).

A *fénytörés szabálya*:

1. A beeső fénysugár, a beesési merőleges, valamint a megtört fénysugár egy síkban van, és a két fénysugár a beesési merőleges különböző oldalain halad.
2. A beesési merőlegessel bezárt szögek (a beesés szöge és a törés szöge) szinuszait...



3.12.
ábra

szainak az aránya a fény terjedési sebességének arányával egyenlő:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} =: n_{21}. \quad (1)$$

Ezt az állítást *Snellius—Descartes-törvénynek* nevezzük.

Nilvánvaló tény, hogy a felületre merőlegesen érkező fénysugár irányváltoztatás nélkül halad tovább.

Az (1) egyenlőség jobb oldalán szereplő

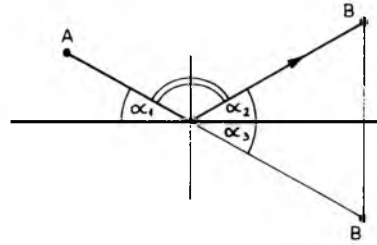
$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2}$$

arányt (*a második közeg elsőre vonatkozó törésmutatójának* nevezzük. A fénysugár útja megfordítható. Kivételes esetektől eltekintve, ha az A pontból a B pontba fénysugár érkezik, akkor ugyanezen az úton a B pontból is érkezhetsz fénysugár az A pontba. Ezért nyilvánvaló, hogy

$$n_{21} = \frac{1}{n_{12}}.$$

A *vákuumra vonatkozó* törésmutatót *abszolút törésmutató*nak nevezzük.

A fény a levegőben megközelítően ugyanolyan sebességgel terjed, mint a vákuumban, ezért a levegő abszolút törésmutatóját a legtöbb problémában 1-nek tekintjük. A helyzet azonban az, hogy a valóságban a levegő abszolút törésmutatója kissé függ a levegő (termodinamikai) álla-



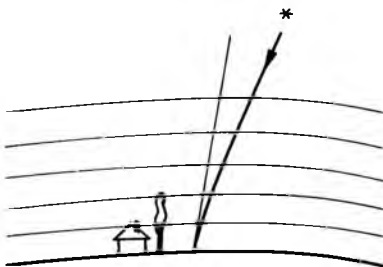
3.14. ábra

potjelzőitől, a hőmérséklettől, a nyomástól, a sűrűségtől, valamint a fény frekvenciájától. A 3.13. ábrán látható csillag valódi helye a látszólagos helytől különböző irányban van. Figyelemre méltó, hogy a fény nem egyenes vonalú pályán halad, annak megfelelően, hogy a törésmutató folyamatosan változik.

Milyen pályán halad ilyen esetben a fénysugár? Elvben a probléma megoldása visszavezethető a törési törvényre.

A fény pályáját általában a *Fermat-elv* segítségével határozzuk meg. Ezt az elvet a *geometriai optika alapelvének* tekintjük. Magában foglalja a fényvisszaverődés és a fénytörés törését is, de homogén közegben a fény egyenes vonalú terjedésének törvényét is. A fény homogén közegben úgy terjed, hogy két pont között a legrövidebb úton halad. Ha az A pontból a B pontba indul a fény, akkor úgy választja meg a pályáját, hogy a lehető legrövidebb idő alatt a B pontba jusson.

Hasonló a helyzet akkor is, amikor a fény egy tükörön visszaverődik. Ekkor az A pontból a B pontba úgy jut a fény a tükör érintésével, hogy célba veszi a B pont geometriai tükörképét, és felé indul. A tükörhöz érve aztán a B pont felé veszi útját. A 3.14. ábrán az α_1 és α_2 szögek egyenlők a B és B' pont tükrös helyzete miatt, az α_2 és α_3 szögek pedig azért azonos nagyságúak, mert csúcshölygek, így a két ívvel jelölt beesési és visszaverődési szög egyenlő. Az A

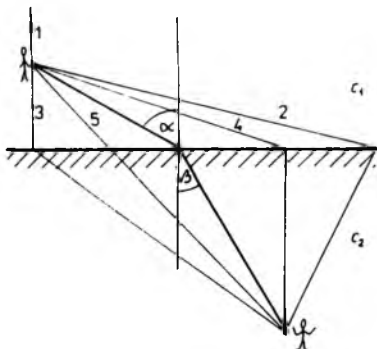


3.13. ábra

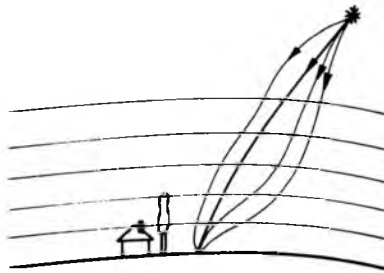
és B pontok között a fény a legrövidebb ideig mozog, ezért a beesés és a visszaverődés szöge azonos.

Mi a helyzet a fénytörésnél? Tegyük fel, hogy a tóban valaki fuldoklik. A parton meglátja ezt egy másik ember, aki c_2 sebességgel tud úszni, a parton c_1 sebességgel képes futni. Tegyük fel, hogy ki akarja menteni a fuldoklót. Milyen utat választ a mentőakcióhoz? Ha az ábrán 1-gyel jelölt irányba kezd futni, akkor alapos a kéte-lyünk a segítőkészségében. Ha a 2-vel jel-zett irányba indul, akkor nyilvánvalóan szintén nem jár el célszerűen. A 3-as és a 4-es irányok nem mondhatók kifejezetten előnyösnek. A 3-as irányba haladva keve-set kell futnia, de sokat kell úsznia. A 4-es irányt az jellemzi, hogy — bár igen keveset kell úszni, de a futáshoz szükséges idő sok. Az 5-ös útnál is tudunk jobbat. Viszonylag egyszerűen bebizonyítható, hogy az élet-mentő akkor ér a legrövidebb idő alatt a fuldoklóhoz, ha úgy halad, hogy a — 3.15. ábrán látható — szögek szinuszaik há-nyadosa megegyezik a két sebesség ará-nyával.

Az elmondottak lényege az, hogy a fény egyenes vonalú terjedésének az elvéből, a visszaverődés és a fénytörés törvényéből kiindulva, ezeket általánosítva egy olyan elvhez jutunk, amely a „legkalandosabb”



3.15. ábra



3.16. ábra

körülmények között haladó fénysugár pályáját is meghatározza. Ez a

Fermat-elv: *Ha az A pontból a B pontba fénysugár halad, akkor a fény pályája olyan, hogy a két pontot összekötő útvonalak közül ezen ér el a legrövidebb idő alatt a fény az A pontból a B pontba.*

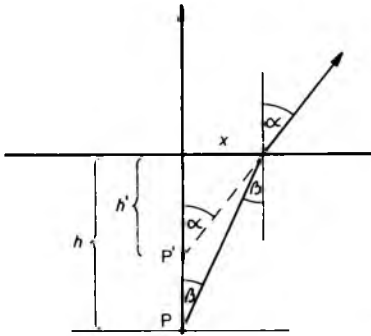
Ha a fény a 3.16. ábrán látható görbe vonal mentén érkezik a Földre, akkor ezen a görbe vonalon a fény mozgásának az ideje kisebb, mint az ugyanabból a pontból induló, a Földnek ugyanarra a pontjára érkező más görbél mentén.

3.2.2. Optikai leképezés törőközzeggel

Ebben a pontban a fénytörés törvényé-nek néhány alkalmazásával ismerkedünk meg.

Tegyük fel, hogy egy h mélységű medence fenekén egy pontszerű, fénylő test, mondjuk egy csillogó pénzdarab van. Felülről a vízre merőlegesen benézünk a medencébe. A fénylő pontot magasabban látjuk, mint valójában van.

A pénzdarabról a szemünkbe jut a füg-gőlegesen fölfelé haladó fénysugár. Sze-münkbe jut azonban egy ezzel kis szöget bezáró másik fénysugár is. Ez a másik (és persze az összes többi, vele együtt induló)



3.17. ábra

a víz felszínén megtörik. A vízből kifelé haladva, a ritkább közegbe lépve a törési szög nagyobb, mint a beesési szöge. A szemünkbe érkező fénysugarakat úgy észleljük, mintha a h' mélyen lévő P' pontból indultak volna. A 3.17. ábra alapján nyilvánvaló, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{h'}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{x}{h}.$$

A kis szögek szinusza és tangense közelítőleg egyenlő, ezért

$$\sin \alpha = \frac{x}{h'}, \quad \sin \beta = \frac{x}{h}.$$

Ha ezt a két egyenlőséget elosztjuk egymással, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = \frac{h}{h'}.$$

Mivel a víz abszolút törésmutatója $n=4/3$, ha 2 méter mély medence mélyén fekszik a pénzdarab, akkor $h' = h/n = 1,5$ m. Másként fogalmazva: 2 méter mély víz mindössze 1,5 méter mélynek látszik.]

[Tegyük fel most, hogy a víz felszíne alatt h mélységben egy pontszerű fényforrás fénysugarat bocsát ki a víz felszíne felé. Ha a fénysugár függőleges, akkor a víz felszínére merőlegesen érkezik, törés nélkül függőlegesen halad tovább. Képzeljük

el, hogy a fénysugarat elforgatjuk. A függőlegessel bezárt β szög megegyezik a beesési szögével. Ha a törési szögét α -val jelöljük, akkor

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

a növekvő β -hoz tehát növekvő α tartozik (3.18. ábra). Egy bizonyos szögnél a törési α szöge eléri a 90° -ot. Ezután már a törési szög nem növekszik, a törés jelensége megszűnik. A fény nem lép ki a vízből, hanem a víz felületét úgy „észleli”, mintha tükör lenne, és így visszaverődik.

A 90° törési szöghöz tartozó beesési szöget *határszög*nek nevezzük. Ha β_h -val jelöljük, akkor

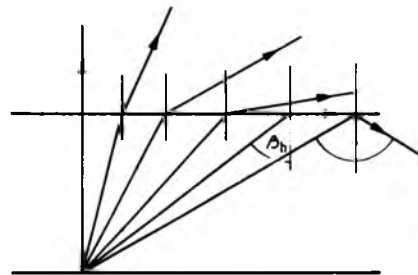
$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \beta_h} = n,$$

tehát

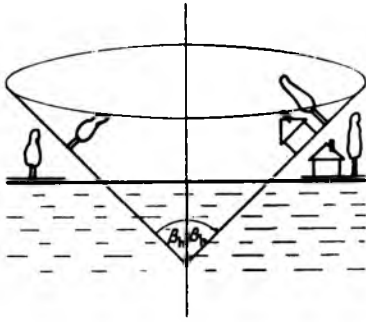
$$\sin \beta_h = \frac{1}{n}.$$

Víz esetén az abszolút törésmutató $4/3$, ezért a $\sin \beta_h = 0,75$, vagyis $\beta_h = 48,6^\circ$.

Nyilvánvaló, hogy a fénysugár a víz felületén egy körlapon belül léphet ki. Ha ennek a körlapnak a sugarát r -rel jelöljük, akkor $r/h = \operatorname{tg} \beta_h$, innen $r = h \operatorname{tg} \beta_h$. Így, ha a fényforrás 1,5 méter mélyen van, akkor a víz felszínére illesztett, kör alakú, $r =$



3.18. ábra



3.19.
ábra

$= 1,5 \operatorname{tg} 48,6^\circ = 1,7 \text{ m}$ sugarú átlátszatlan lemez megakadályozza, hogy a víz alól kijusson a fény.]

┌Képzeljük most el, hogy a víz felszíne alatt h mélységben egy búvár ül, mondjuk a tó közepén. A tó fölé boruló égbolt minden pontjáról, sőt a tópart víz felszíne fölé emelkedő pontjairól fény jut a búvár szemébe. Ezek a fénysugarak az előző problémánál látott kifelé haladó fénysugarak megfordításai. A búvár szemébe egy $2\beta_h$ nyílásszögű kúp belsejében haladó fénysugarak érkeznek. A külvilágot tehát ennek a kúpnak a belsejébe látja. Az égbolt a kúp belsejében szűkül, a horizont a kúp palástjának a belső oldalára kerül, itt látszik a tópart képe is (3.19. ábra). Ha egy vonat közelít a tópart felé, akkor a búvár úgy látja ezt, mintha a kúp palástján közeledne a part felé. A víz feletti összes tárgyat látja tehát, de mintha valamilyen furcsa optikával nézné a világot, mindent egy kúp belsejében lát. Mit lát a kúpon kívül? A víz alatti tárgyakat és azok tükörcskéit. Ha egy halacska a kúpon kívül úszik, akkor ezt — és esetleg a víz felszínére vonatkozó tükörcképét is — látja a búvár.]

┌Tegyük fel most, hogy párhuzamos felületekkel határolt (plánparalel) üveglemezre fénysugár érkezik. A beesési szöget

jelöljük α -val, a törés szögét β -val. Ekkor

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

és a 3.20. ábrán látható háromszögben

$$d = s \cos \beta,$$

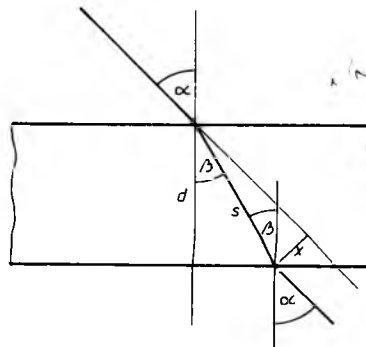
ahol d az üveglemez vastagságát, s a fény által az üvegben megtett utat jelenti. A másik háromszögben

$$x = s \sin (\alpha - \beta),$$

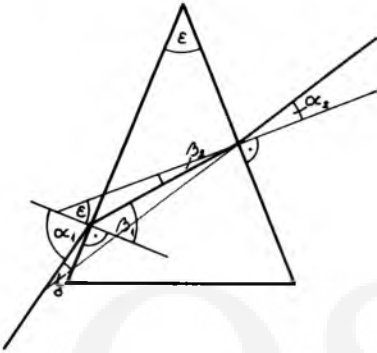
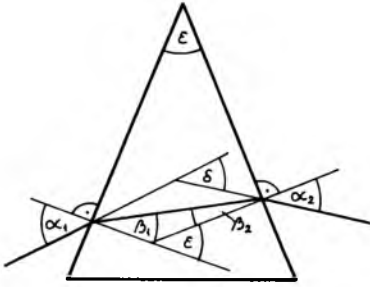
itt x az eltérés mértékét jelenti. A fénysugár a kezdeti irányával párhuzamosan halad a második határoló felületen átlépve, azonban a plánparalel lemez a fénysugarat önmagával párhuzamosan x -szel eltolja.]

┌A prizma igen gyakran szerepel a fénytani kísérletekben és a feladatokban is. A prizma két, egymással szöget bezáró síkfelület által határolt törőközeg. A két határoló sík szögét törőszögnek nevezzük, és ε -nal jelöljük.

A prizma egyik felületén fénysugár lép a prizmába. A beesési szöget jelöljük α_1 -gyel, a törési szöget β_1 -gyel. A fénysugár áthalad a prizmán, és a második lap-hoz ér. Ezen vagy visszaverődik, vagy áthaladva megtörik. Tegyük fel, hogy ez az utóbbi eset áll fenn, és jelöljük a beesési szögét most β_2 -vel, a törési szöget α_2 -vel



3.20.
ábra



3.21.
ábra

(3.21. ábra). Ekkor

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n,$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = n.$$

A két beesési merőleges szöge megegyezik a törőszöggel. Ez nyilvánvaló, a merőleges szárú szögek tétele szerint.

A beesési merőlegesek vagy a prizma belsejében (határán), vagy a prizmán kívül metszik egymást, attól függően, hogy a $\beta_1 \leq \varepsilon$ vagy a $\beta_1 > \varepsilon$ eset áll-e fenn. Az első esetben

$$\beta_1 + \beta_2 = \varepsilon,$$

a másodikban

$$\beta_1 - \beta_2 = \varepsilon,$$

a háromszög külső és belső szögeire vonatkozó tétel alapján. A leggyakoribb kérdés,

amely a prizmákkal kapcsolatban felvetődik az, hogy mekkora szöggel téríti el a prizma a fénysugarat az eredeti iránytól. Hosszabítsuk meg a fénysugarakat, a meghosszabbított egyenesek szögét jelöljük δ -val. Ekkor az első esetben — amikor a beesési merőlegesek a prizmán belül metszik egymást —

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2),$$

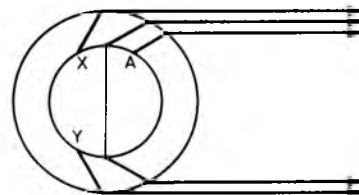
a másodikban pedig

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2).$$

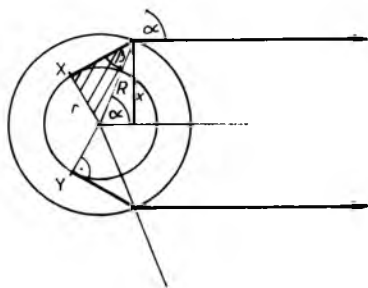
Tapasztalatból tudjuk, hogy lázmérőre ránézve a higanyszálat meglepően vastagnak látjuk, különösen ahhoz képest, hogy milyen vékony kis csatornát találunk az üvegben, ha a cső eltörik. Hasonló a helyzet akkor is, ha valamilyen sötét folyadékkal — mondjuk vörösborral — teli palackra nézünk. Szinte eltűnik a palack fala.

Vizsgáljuk meg tehát a vörösborral teli palack esetét. A palack külső sugarát jelöljük R -rel, a belső sugarát r -rel. A 3.22. ábrán a palack egy keresztmetszetét ábrázoljuk. Tegyük fel, hogy az üveg bortól jobbra helyezkedünk el, a szemünkbe jutó fénysugarak jobbra haladnak és párhuzamosak.

A kérdés most az, hogy a palack belső felületéről, vagyis a vörösbor felszínéről kiinduló fénysugarak közül melyek jutnak a szemünkbe. Pontosabban: a bor felületének mely pontjai azok, amelyekről kiinduló fénysugarak közül lesz olyan, amely víz-



3.22.
ábra



3.23.
ábra

szintes és jobbra halad. Az ábrán néhány ilyen pontot megjelöltünk. Az A pontból kiinduló fénysugarak közül például található olyan, amelyik az üveg külső felületén áthaladva vízszintes lesz.

Az üveg keresztmetszetét ábrázoló kör függőleges átmérőjének a két végpontja is ilyen, de nemcsak ezek, hanem van ilyen pont az átmérőtől balra is. Jelöljük ezeket X-szel és Y-nal. Az X és az Y természetesen szimmetrikusan helyezkedik el a körök középpontján átmenő vízszintes egyenesre. Vizsgáljuk az X pontot. Ebből a pontból minden irányban kiindulnak a fénysugarak. Közülük a legszélső a bor felületén a belső sugárra merőlegesen halad, és a külső felületen átlépve a szemünkbe jut.

Ekkor a 3.23. ábrán látható sávozott háromszögben

$$r = R \sin \beta .$$

Másrészt az X pontból induló és még a szemünkbe jutó fénysugárnak a körök középpontján átmenő vízszintes egyenestől — szimmetriatengelytől — mért távolságát jelöljük x -szel. Tegyük fel, hogy $x \leq R$. Ez az x a látszólagos belső sugár: a vörösbor által elfoglalt térrész x sugarú hengernek látszik kívülről. A látszólagos belső sugár kifejezhető a külső sugárral:

$$x = R \sin \alpha .$$

Osszuk el ezt az egyenlőséget a fentivel, és vegyük figyelembe a Snellius—Descartes-törvényt:

$$\frac{x}{r} = n .$$

Ha tehát egy 5 cm belső sugarú palack 1,5 abszolút törésmutatójú üvegből készült, akkor a belső sugara $x = 7,5$ cm-nek látszik. Így ha az üveg külső sugara 8 cm, akkor a látszólagos falvastagság 0,5 cm, a valóságos falvastagság pedig 3 cm.]

3.2.3. Lencsék, tükrök

Az optikai eszközök leggyakoribb tartozékai a vékony *lencsék* és a *gömb-* vagy *síktükrök*. Ezek olyan eszközök, amelyekkel „hű” leképezések valósíthatók meg, a tárgy képe hasonlít a tárgyhöz.

A lencsék és a tükrök leképezését leíró elmélet lényegében megegyezik. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy az optikai leképezés elméletének két megvalósítását a lencsék és a tükrök képalkotása adja.

Most a lencsékkel foglalkozunk. Ezeket általában üvegből vagy más átlátszó szilárd anyagból készítik, és legtöbbször gömbfelületek határolják őket. A lencsét határoló felületek közel vannak egymáshoz, ezért vékony lencséről beszélünk.

Minél vékonyabb a lencse, annál jobban megközelíti ez az eszköz az optikai lencsével szemben támasztott igényeket. A két gömb középpontját összekötő egyenes a leképezés tengelye. Ha sík határolja egyik oldalon a lencsét, akkor a gömb középpontján áthaladó, síkra merőleges egyenes tölti be ezt a szerepet. A két gömb (vagy egy gömb és a sík) metszészvonala kör. Ennek a körnek a síkját használjuk a szer-

kesztési munkában, a leképezés geometriai modellezésénél ezt a síkot azonosítjuk a lencsével.

Az olyan lencsét, amelynek a közepe vastagabb, mint a széle, *domború lencsének*, amelynek a széle vastagabb, mint a közepe, *homorú a lencsének* nevezzük.

Ha a Nap párhuzamos fénysugarai az üvegből készült domború lencsére a leképezés tengelyével párhuzamosan érkeznek, akkor (áthaladva a lencsén) a túloldalon egy pontba gyűlnek össze. Ez a pont a *fókuszpont*. Az összegyűjtött fénysugarakkal akár egy papírlapot is meggyújthatunk. Innen ered a fókuszpont elnevezés (focus = tűz, latinul). A homorú lencsének is van fókuszpontja. Ha üvegből készült homorú lencsére merőlegesen (az optikai tengellyel párhuzamosan) fénysugarak érkeznek, akkor ezek a lencsén áthaladva szétartókká válnak, mintha az előző oldali fókusból indultak volna.

A lencse tulajdonságai azonban megváltoznak, ha például vízbe merítve vizsgáljuk a rajta áthaladó fénysugarak viselkedését: a fókuszpont távolabb kerül a lencsétől. Ha a közeg optikai sűrűségét (abszolút törésmutatóját) gondolatban tovább növeljük, és az eléri a lencse törésmutatóját, akkor a fény úgy hatol át rajta, hogy észre sem veszi, szemléletesen szólva: a párhuzamos fénysugarakat végtelen távoli fókuszpontba gyűjti. Az is elképzelhető, hogy a lencse optikailag ritkább, mint a környezete. Ilyen esettel találkozunk akkor, amikor üveglemezbe zárodott lencse alakú levegőbuborékon keresztül nézünk át. A buborék szórja a fénysugarakat, úgy viselkedik, mint a levegőben a homorú lencse.

Az olyan lencsét, amelyek az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarakat egy pontba gyűjtik (a fókuszpontba), *gyűjtőlencsének* nevezzük. A domború üveglencse a

levegőben gyűjtőlencse. Azokat a lencsét, amelyek a rájuk érkező fénysugarakat szétartókká teszik, úgy, mintha ezek az előző oldali fókusból indultak volna, *szórólencsének* nevezzük. A fókuszpont és a lencse távolságát *fókusz-távolságnak* nevezzük és *f*-fel jelöljük. Gyűjtőlencse esetén *f*-et pozitív mennyiségnek, szórólencse esetén negatív mennyiségnek tekintjük. A lencsék fókusz-távolsága két dologtól függ tehát: a lencse formájától, hogy domború-e vagy homorú, és attól, hogy mekkora a törésmutatója a környezetéhez képest. A tapasztalat és a számítások is igazolják, hogy — akár szórólencséről, akár gyűjtőlencséről van szó — a fókusz-távolság az

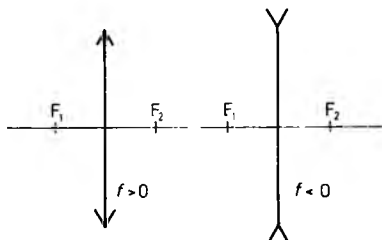
$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

összefüggésből határozható meg. Itt *n* a lencse anyagának a relatív törésmutatója^(*), *R*₁ és *R*₂ a lencsét határoló gömbfelületek sugara. A domború felületek sugara pozitív, a homorú felületek sugara negatív. Ha a lencsét az egyik oldalon síkfelület határolja, akkor ezt úgy vesszük figyelembe, hogy a megfelelő 1/*R* helyére nullát írunk:

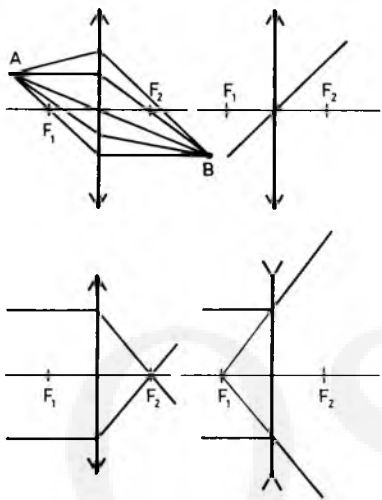
$$\frac{1}{f} = (n-1) \frac{1}{R_1}$$

A lencsék geometriai-matematikai modellje a következőképpen adható meg. Adottnak tekintünk egy síkot, amelyet azonosítunk a lencsével. (Az előbb láttuk, hogy ez pl. a lencsét alkotó két gömb metszetének a síkja.) A fókuszpontokat is adottnak tekintjük, az ezeket összekötő egye-

(*) Arra a közegre vonatkoztatott relatív törésmutató, amelyben a lencse van. Ha például a lencsét vízbe helyezzük, akkor a vízre vonatkoztatott relatív törésmutatóval kell számolnunk.



3.24.
ábra



3.25.
ábra

nes azonos a lencse tengelyével, a gömbfelületek középpontjának összekötő egyenessel. A lencse és (optikai) tengelyének a metszéspontja az *optikai középpont* vagy *centrum*. A lencse modelljének megfelelő egyenes két oldalán kijelöljük a fókuszpontokat. A fókuszpontok lencsétől mért távolsága a fókusz-távolság (3.24. ábra).

Gyűjtőlencse esetén a fókusz-távolság pozitív, szórólencse esetén negatív.

A lencsékkel kapcsolatban — a valóságos lencsék tulajdonságaira támaszkodva — a következő (a 3.25. ábrán szemléltetett) feltevésekkel élünk.

1. Az egy pontból induló fénysugarak a lencsén keresztülhaladva vagy nem metszik egymást, vagy egyetlen pontban találkoznak. Ha az A pontból induló fénysugarak a lencse másik ol-

dalán a B pontban egyesülnek, akkor azt mondjuk, hogy a B pont az A pont *valódi képe*. A fénysugár megfordíthatóságának az elvéből következik, hogy a B pont képe ekkor az A pont.

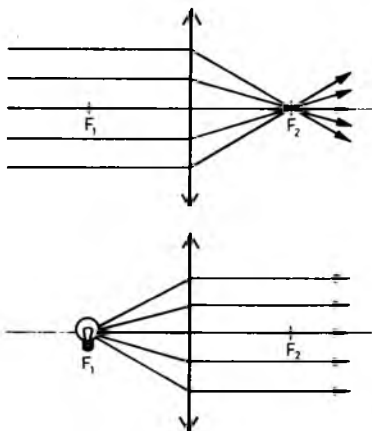
2. Az optikai centrumon áthaladó fénysugár irányváltoztatás nélkül halad tovább.
3. Az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarak a lencsén áthaladva pozitív fókusz-távolságú lencse esetén a fókuszpontban haladnak át, negatív fókusz-távolságú lencse esetében pedig széttartóak lesznek úgy, hogy a visszafelé való meghosszabbításuk a fókuszpontban metszi az optikai tengelyt.

Ez a három alapelv elég ahhoz, hogy a lencsék képképzésével kapcsolatban minden fontos tényt megfogalmazzunk. Foglalkozunk először a pozitív fókusz-távolságú lencsével.

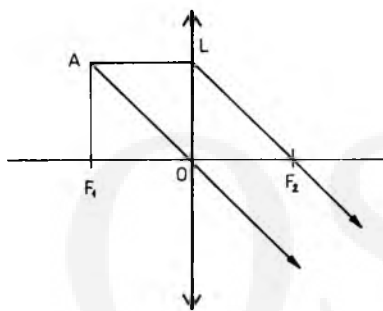
Először is állapítsuk meg, hogy a lencsére az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak a fókuszpontban gyűlnek össze. A lencse ide gyűjti — fókuszálja — a párhuzamos fénysugarakat.

A fénysugár megfordíthatóságának az elvéből következik, hogy a fenti megállapítás átfogalmazható így: a fókuszpontból induló fénysugarak a lencse túloldalán az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak (3.26. ábra).

Ez azonban nem csak a fókuszpontból induló fénysugarak esetén van így. A fókuszponton átmenő, a lencse síkjával párhuzamos síkokat nevezzük *fókusz-síkok*-nak. Jelöljük ki most egy tetszőleges pontot a bal oldali fókusz-síkban. Jelöljük ezt A-val. Induljon ki ebből a pontból két fénysugár. Az egyik áthalad az optikai centrumon — ezért irányváltoztatás nélkül



3.26. ábra



3.27. ábra

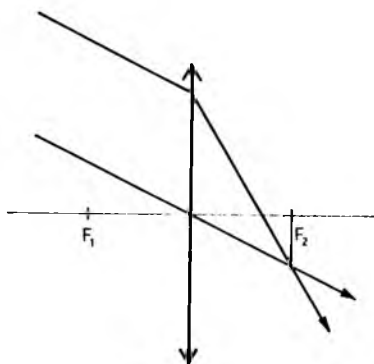
megy tovább. A másik a lencsére merőlegesen érkezik, tehát az optikai tengellyel párhuzamos, ezért a jobb oldali fókuszpontra halad keresztül (3.27. ábra). Az ALF_2O négyszög két vízszintes oldala egyenlő nagy és párhuzamos, ezért ez a négyszög paralelogramma. Párhuzamosak így az AO , LF_2 oldalak is. A lencsén áthaladó két fénysugár tehát párhuzamos. Velük párhuzamos azonban az A pontból induló, a lencsén áthaladó minden más fénysugár is, hiszen az 1. feltevés alapján, ha a két fénysugár metszené egymást egy pontban, akkor az összes ugyanabból a pontból induló sugár áthaladna ezen a ponton. Ez azonban nem lehetséges, mert már láttuk, hogy két fénysugár nem metszi egymást, párhuzamosak.

Fordítsuk meg most ezt az állítást is. Tegyük fel, hogy a lencsére párhuzamos fénysugarak érkezik, és ezek nem párhuzamosak az optikai tengellyel. Ekkor ezek a lencsén áthaladva a túldoldali fókuszpontra egy pontjában metszik egymást. Ezt a pontot kijelöli ez a fénysugár, amely áthalad az optikai középponton (3.28. ábra).

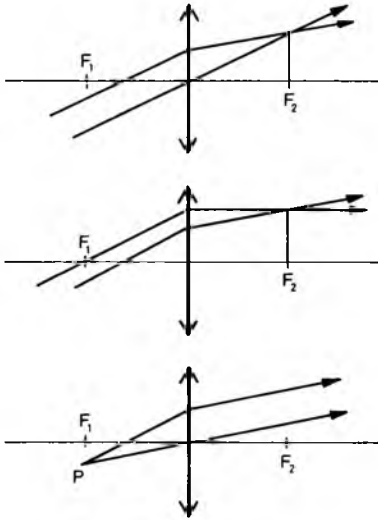
Vizsgáljuk meg most, hogy a lencsére érkező fénysugár pályája hogyan határozható meg. Három nevezetes fénysugár útját jól ismerjük: az optikai középponton áthaladó sugár nem változtatja meg az irányát, a fókuszpontra keresztülhaladó a túldoldalon a lencse tengelyével párhuzamos lesz és az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugár a másik oldalon átmegy a fókuszpontra.

Hogyan szerkesszük meg azonban egy tetszőleges fénysugár pályáját? Három lehetőségünk van (3.29. ábra).

1. Húzzunk a fénysugárral párhuzamos fénysugarat az optikai középponton keresztül. Ez irányváltoztatás nélkül halad tovább. Jelöljük meg azt a pontot, ahol ez a segédfénysugár metszi a túldoldali fókuszpontra. A kérdéses fénysugár is áthalad ezen a ponton, tehát könnyen megszerkeszthető.
2. Az adott fénysugárral húzzunk egy fénysugarat az első fókuszpontra keresztül.



3.28. ábra



3.29.
ábra

tül. Ez a segédfény sugar a lencse másik oldalán az optikai tengellyel párhuzamosan halad. Jelöljük ki azt a pontot, ahol a túldoldali fókusz síkot dőfi. A tanulmányozott fény sugar is áthalad ezen a ponton.

3. A vizsgált fény sugar az azonos oldali fókusz síkot valamely P pontban dőfi. Ebből a P pontból indítsunk egy fény sugarat az optikai centrumon keresztül. A vizsgálódásunkban szereplő fény sugar a lencse túldoldalán ezzel a fény sugarral párhuzamosan halad.

Adjunk meg most egy P pontot az optikai tengelyen. Tegyük fel, hogy ez a pont a fókuszponttól balra helyezkedik el, a 3.30. ábra szerint. Szerkesztjük meg ennek a pontnak a képét. Jelöljük majd ezt Q-val. A P pontból kiinduló összes fény sugar egyetlen pontban egyesül a lencsén áthaladva, a szerkesztéshez azonban elégséges két fény sugar használata. (Több fény sugarral ne is próbálkozzunk, mert a gyakorlati szerkesztési munkában — a szerkesztés pontatlansága miatt — szinte sosem halad át három olyan fény sugar egy ponton,

amelyeknek egy ponton kellene átmenniök.)

Legyen az egyik fény sugar az, amely az optikai tengelyen halad. Ez azt jelenti, hogy a keresett Q pont az optikai tengelyen lesz.

A másik fény sugarat válasszuk meg tetszőlegesen. Az imént ismerkedtünk meg azokkal a lehetőségekkel, amelyekkel ennek a fény sugarnak a folytatása megszerkeszthető. Segédvonalnak válasszuk meg a bal oldali fókuszon áthaladó, a tanulmányozott fény sugarral párhuzamos sugarat. Vezessük be az ábrán látható jelöléseket. A hasonló háromszögek alapján

$$\frac{f}{x} = \frac{a}{b} = \frac{y-f}{y}$$

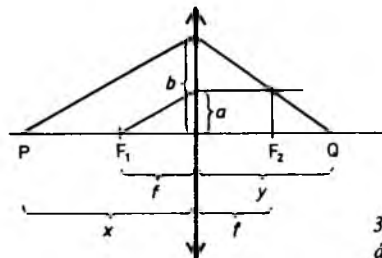
Innen egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

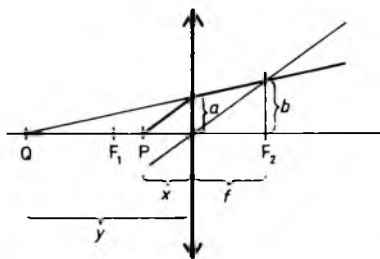
Legyen most $t := x$, $k := y$, vagyis a \overline{PO} távolságot jelöljük t -vel, és nevezzük *tárgytávolságnak*, az \overline{OQ} távolságot k -val jelöljük, és *képtávolságnak* nevezzük. Ekkor

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

A tárgy- és a képtávolság, valamint a fókusz távolság között az (1) egyenlőség teremt kapcsolatot.



3.30.
ábra



3.31.
ábra

Tegyük fel most, hogy adott egy P pont a bal oldali fókusz és a lencse között. Szerkesszük meg ennek a pontnak a képét (3.31. ábra). A P pontból kiinduló két fénysugár közül az egyik az optikai tengely mentén haladjon. Ez irányváltozás nélkül halad át a lencsén. Ebből arra következtünk, hogy a P pont képe az optikai tengelyen van. A másik fénysugár folytatását a már megismert módszerrel határozzuk meg: a P pontból induló fénysugárral húzzunk párhuzamos egyenest az optikai centrumon keresztül. Ez a segédvonal egy pontban dőli a jobb oldali fókuszszíkot. A tanulmányozott fénysugár is áthalad ezen a ponton.

A P pontból kiinduló két fénysugár a lencsén áthaladva széttartó lesz, a lencse jobb oldalán nem találkoznak. Ha viszont visszafelé meghosszabbítjuk a vizsgált fénysugarat, akkor ez az optikai tengelyt — a másik fénysugarat — a Q pontban metszi.

Legyen most is $\overline{OP} = x$, $\overline{OQ} = y$. Ekkor az ábrán látható jelölések felhasználásával

$$\frac{f}{x} = \frac{b}{a} = \frac{f+y}{y},$$

a hasonló háromszögek alapján. Innen azt kapjuk, hogy

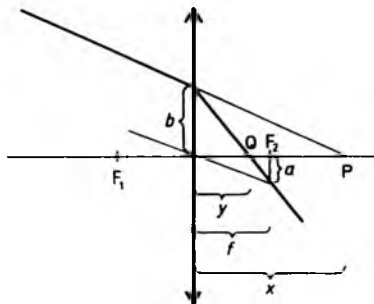
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{f}.$$

Vezessük most be a következő jelöléseket: az $\overline{OP} = x$ távolságot t -vel jelöljük, ez a P-vel jelölt tárgy pont lencsétől mért távolsága, a tárgytávolság. Az $\overline{OQ} = y$ pozitív távolság negatívját jelöljük most k -val. Először $k < 0$, de ez a választás azzal az előnnyel jár, hogy most is érvényben lesz az (1) összefüggés. Ha tehát a tárgy pont a fókuszponton belül van, vagyis $t < f$, akkor a képtávolság negatív lesz, és ebben az esetben valójában nem jön létre kép abban az értelemben, hogy a fénysugarak, amelyek egy pontból indultak, nem gyűlnek össze ismét egy pontba. A visszafelé való meghosszabbításuk azonban — a tárggyal megegyező oldalon — egy ponton megy keresztül. Ezt a pontot *virtuális képn*ek nevezzük. A *negatív képtávolság* azt jelenti, hogy virtuális kép keletkezik.

Még egy esetet vizsgáljunk meg. Tegyük fel, hogy egy lencsére összetartó fénysugarak érkezik, amelyek — a lencsén áthaladva — a lencsétől y távolságra, a Q pontban egyesülnek. Ha a lencsét elvonnánk a fénykúp elől, akkor a fénysugarak az előző optikai tengelyen a Q-tól jobbra a P pontban egyesülnének. A P pont lencse helyétől mért távolságát jelöljük x -szel.

Ekkor a 3.32. ábra alapján

$$\frac{f-y}{y} = \frac{a}{b} = \frac{y}{x}.$$



3.32.
ábra

Ebből egyszerű számolással azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}.$$

Ha most az \overline{OP} távolság negatívját t -vel jelöljük: $t = -x$, és a $k = y$ jelölést is bevezetjük, akkor ismét az (1) összefüggéshez jutunk. Ebben az esetben a *tárgytávolságot negatívnak* tekintjük. A P pontot *virtuális tárgynak* nevezzük. A virtuális tárgyról a Q pontban kép keletkezik. Itt a fénysugarak valóban metszik egymást, a képtávolság pozitív.

Az (1) összefüggés tehát általánosan érvényes, akár kívül helyezkedik el a tárgy a fókuszon, akár belül, de akkor is, ha a tárgytávolság negatív. Fogalmazzunk meg tehát az

optikai leképezés törvényét: Jelöljük f -fel valamely lencse fókusz-távolságát ($f \neq 0$), a pontszerű tárgy lencsétől mért előjeles távolságát t -vel ($t \neq 0$).

1. Ha $t \neq f$, a pontszerű tárgyról pontszerű kép keletkezik. A kép lencsétől mért előjeles távolságát jelöljük k -val. Ebben az esetben fennáll az

$$\boxed{\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}}. \quad (1)$$

összefüggés.

2. Ha $t = f$, akkor nem keletkezik a tárgyról kép. (Szokásos kifejezéssel élve: a kép a végtelenbe kerül.)

Alakítsuk át most az (1) állítást. Vezessük be a következő jelöléseket: $\tau = t - f$, $\kappa = k - f$. A τ és az κ mennyiségeket *redukált tárgytávolságnak* és *redukált képtávolságnak* nevezzük. Így tehát $t = \tau + f$, $k =$

$= \kappa + f$. A leképezési törvénybe helyettesítve:

$$\frac{1}{\tau + f} + \frac{1}{\kappa + f} = \frac{1}{f},$$

innen

$$\frac{\kappa + f + \tau + f}{\tau\kappa + \tau f + \kappa f + f^2} = \frac{1}{f},$$

ezért

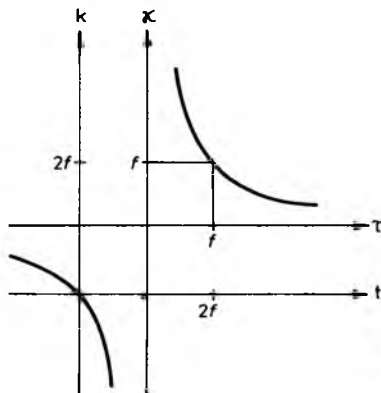
$$\kappa f + \tau f + 2f^2 = \tau\kappa + \tau f + \kappa f + f^2,$$

és végül

$$\tau\kappa = f^2. \quad (2)$$

Az (1) és a (2) egyenlőségek a *leképezési törvény* különböző formái. A τ és κ fordítottan arányosak egymással, a fordított arányosság grafikonja a 3.33. ábrán látható hiperbola. A két hiperbolaág átmegy az (f, f) , illetve a $(-f, -f)$ ponton.

Ha most τ -hoz és κ -hoz f -et hozzáadunk, akkor áttérünk a t és k mennyiségekre, a koordinátatengelyeket eltoljuk negatív irányba. Az új koordináta-rendszer tengelyein a tárgy- és képtávolságot (t -t és k -t) ábrázoljuk. Ebben az új koordináta-rendszerben a hiperbolaágak az origón, illetve a $(2f, 2f)$ ponton mennek át.



3.33. ábra

Jellemezzük most a t és a k közötti kapcsolatot a grafikon alapján. Szemléletesen és kissé pontatlanul szólva, ha a tárgy végtelen távol van, akkor róla párhuzamos fénysugarak érkeznek a lencsére. Ekkor a kép a tárggyal ellentétes oldali fókuszba kerül. Ezután gondoljuk el, hogy a tárgy közeledik a lencséhez. Látható, hogy a képtávolság nő, a kép távolodik. Ha a tárgy a kétszeres fókuszba kerül — más szóval $t = 2f$ —, akkor a kép is a kétszeres fókuszban van az ellenkező oldalon: $k = 2f$.

Ha a tárgy a kétszeres fókusz és az egyszeres fókusz között van, akkor a kép a kétszeres fókuszon kívülre kerül, majd távolodik a végtelenbe.

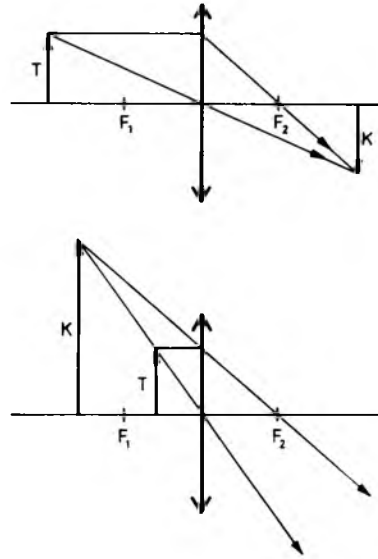
A fókuszba került tárgy képe a végtelenbe kerül, ezzel azt akarjuk kifejezni, hogy a fókuszpontba helyezett tárgyról nem keletkezik kép, a lencsét elhagyó fénysugarak párhuzamosak lesznek.

A fókuszon átlépünk a tárggyal, ekkor a kép virtuális lesz, a képtávolság ekkor negatív.

Az optikai centrum képe önmaga. Ha most a tárgytávolság negatívvá válik, akkor a képtávolság ismét pozitív lesz. A virtuális tárgy képe valódi kép lesz, a lencse és a fókuszpont közé esik.

Eddig csak olyan esetekkel foglalkozhatunk, amikor a tárgy és a képe az optikai tengelyen van. Tegyük fel most, hogy a tárgy az optikai tengely fölött T távolságra helyezkedik el. Hogy ezt a pontszerű tárgyat szem előtt ne tévesszük, egy nyilat helyezünk el az optikai tengelyre merőlegesen, a nyíl kezdőpontja a tengelyen van, a hegye pedig a tárgypontra. A nyíl hossza T , ezért általában T -t *tárgymagyságnak* nevezzük.

Szerkesszük meg a tárgy képét. A szerkesztéshez két fénysugarat használunk. Az



3.34. ábra

egyik megoldási lehetőséget a 3.34. ábrán látjuk. Ha a kép valódi, akkor a kép és a tárgy az optikai tengely ellentétes oldalán van, ha a kép virtuális, akkor a kép és a tárgy az optikai tengelynek ugyanazon az oldalán van. A valódi kép a lencse tárgyval ellentétes oldalán keletkezik, a virtuális kép az azonos oldalon. A képpont optikai tengelytől mért távolsága a *képmagyság*, általános K -val jelöljük, és a lencsével párhuzamos nyíllal ábrázoljuk.

Így tehát a fókusz pontjainak a kivételével minden pontnak egyértelmű képe van. Helyezzünk el két koordináta-rendszert a 3.35. ábrán látható módon. A bal oldali koordináta-rendszer vízszintes tengelye balra mutat, ez a „ t tengelye”, a jobb oldalié jobbra, ez a „ k tengelye”. A bal oldali koordináta-rendszer függőleges tengelye, a „ T tengely” fölfelé, a jobb oldali függőleges tengelye, a „ K tengely” lefelé mutat.

Adjunk meg most a bal oldali koordináta-rendszerben egy P pontot. A koordinátái legyenek t és T . A P pontot tehát a

(t, T) számpárral jellemezzük. Nyilvánvaló, hogy a T negatív is lehet, ha a P pont a tengely alatt van. A t is lehet negatív, ha a P pont a lencse jobb oldalán található, szóval, ha a P virtuális tárgy.

Tegyük fel azonban, hogy $t \neq f$. Akkor, mint láttuk, a P pontról kép keletkezik, jelöljük ezt Q -val, a koordinátáit pedig k -val és K -val. Ekkor a tárgy és a képpont koordinátái között a következő egyenlőségek teremtenek kapcsolatot:

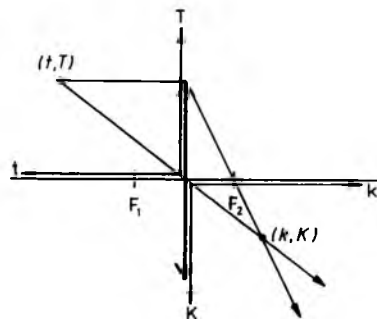
$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{K}{T} = \frac{k}{t},$$

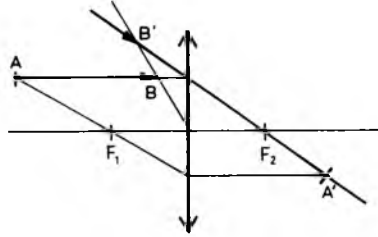
feltéve persze, hogy $t \neq 0$ és $T \neq 0$. (Ha $t = 0$, akkor $k = 0$, és ha $T = 0$, akkor $K = 0$.)

Itt a második egyenlőségben szereplő arányt *nagyításnak* nevezzük, és N -nel jelöljük. Ha $|N| > 1$, akkor valóban nagyításról van szó, a képnagyságot reprezentáló nyíl N -szer nagyobb, mint a tárgynagyságot szemléltető nyíl. Ha $|N| < 1$, akkor a képnagyság N -szer kisebb, mint a tárgy nagysága.

A nagyítás lehet negatív is: akkor, ha valódi tárgyról virtuális tárgy keletkezik, vagy ha virtuális tárgyról valódi kép jön létre.



3.35. ábra

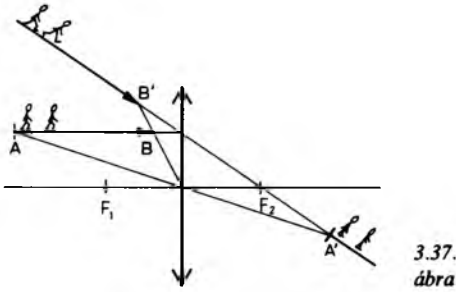


3.36. ábra

Megismerkedtünk a gyűjtőlencse képalakításával. Kivételes pontoktól eltekintve tetszőleges pont képét képesek vagyunk megszerkeszteni, a képpont koordinátáit meghatározni. Ez elég is ahhoz, hogy a pontnál bonyolultabb alakzatok képét is meghatározzuk.

Tegyük fel, hogy adott egy f fókusz távolságú gyűjtőlencse, és a 3.36. ábrán vastag vonallal szemléltetett tárgy, az optikai tengellyel párhuzamos fekvő nyíl. A kezdete a kétszeres fókuszponton kívül, a vége a fókuszon belül helyezkedik el. Szerkesztjük meg a nyíl képét. A nyíl minden pontjának a képe rajta van a nyílra az optikai tengellyel párhuzamosan induló, a túldoldali fókuszponton átmenő egyenesen (vagy a visszafelé való meghosszabbításában). A kezdő és a végpont képét egy-egy olyan sugárral szerkesztjük meg, amely átmegy az optikai centrumon. A nyíl kezdő és végpontjának a képe már ismert. Óvatlan mozdulattal össze is kötnénk ezeket a pontokat. A nyíl képe azonban nem a kezdő és végpontjának a képét összekötő szakasz, hanem két félegyenes.

Gondoljuk el ugyanis, hogy egy kis emberke elindul a tárgyként szereplő nyíl kezdőpontjától a végpontja felé (3.37. ábra). Ha egyenletesen mozog, akkor a képe egyre nagyobb léptekkel távolodik a CF_2 egyenesen. Amikor a kis manó a fókusz fölé ért, akkor a képe már eltűnt a „végtelenben”. A következő pillanatban már fel



3.37. ábra

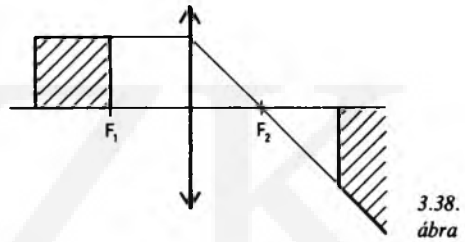
is tűnt a másik irányból, de most már virtuális a képe. Most lelassítva a lépteit megérkezik a nyíl hegyének a virtuális képéhez.

A feladat tanulságos: az optikai leképezés nem folytonos: ha a tárgy egyik része a fókuszon kívül van, a másik része pedig a fókuszon belül, akkor a kép kettészakad. Egyik része valódi lesz, a másik virtuális.

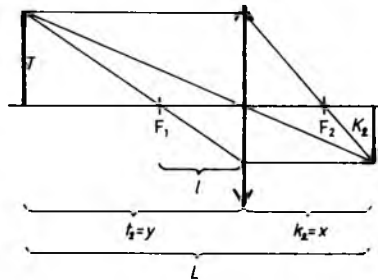
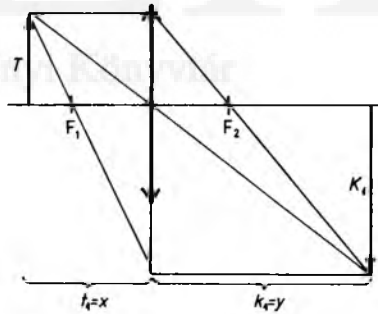
Most egy négyzet képét határozzuk meg. A négyzet csúcspontjai (a 3.35. ábrán megadott $T-t$ koordináta-rendszerben): $(2f, f)$; $(2f, 0)$; $(f, 0)$; (f, f) . A két utóbbi csúcspont képe a végtelenbe kerül, a másik két csúcspont képe (a 3.35. ábrán megadott $K-t$ koordináta-rendszerben): $(2f, 0)$; $(2f, f)$. A két vízszintes oldal képe egy-egy félegyenes lesz. A $(2f, 0)$ és az $(f, 0)$ pontok közötti szakasz képe a kétszeres fókuszról jobbra eső félegyenes. A $(2f, f)$ és az (f, f) pontok közötti szakasz képe a fókuszpontra átmenő — a 3.38. ábrán látható egyenes — $(2f, f)$ ponttól jobbra eső része. A négyzet képe tehát egy „végtelen trapéz”. Korlátos alakzatok képe nem feltétlenül korlátos. Azt is hangsúlyozni kell, bár az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy az optikai leképezés nem hasonlóság! A tárgy és a kép nem hasonló alakzatok.

A következő feladatban a központi gondolat az, hogy a (1) leképezési törvényben a t és a k , a tárgy-, illetve a képtávolság felcserélhető.

Képzeljünk el egy rögzített helyzetű tárgyat — mondjuk egy gyertyát — és egy szintén rögzített helyzetű ernyőt. A gyertya és az ernyő távolsága legyen L . Mozgassunk most a tárgy és az ernyő között egy f fókusz távolságú lencsét. Tegyük fel, hogy a gyújtólencse mozgatása közben egyszer csak éles kép jelenik meg az ernyőn. Mozgassuk tovább a lencsét. Egy bizonyos újabb helyzetben ismét éles képet kapunk. A két kép között az a különbség, hogy az egyik kisebb a gyertyánál, a másik nagyobb. A lencse e két helyzetének a távolságát jelöljük l -lel. Legyen az első tárgy-



3.38. ábra



3.39. ábra

távolság x , a képtávolság y , tehát $t_1 = x$, $k_1 = y$. A 3.39. ábra alapján is nyilvánvaló, hogy $t_2 = y$, $k_2 = x$, vagyis a tárgy- és a képtávolság felcserélhető. Így az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

egyenlőség mindkét esetre kifejezi a leképezési törvényt. Az is leolvasható az ábráról, hogy

$$y + x = L,$$

és

$$y - x = l.$$

E két egyenlőséget összeadva, illetve egymásból kivonva — majd 2-vel osztva — a következő egyenlőségekhez jutunk:

$$y = \frac{L + l}{2},$$

$$x = \frac{L - l}{2}.$$

Helyettesítsük ezeket a leképezési törvénybe. Egyszerű számolás után azt kapjuk, hogy

$$f = \frac{L^2 - l^2}{4L}.$$

Ismert L és l esetén ezzel a képlettel határozható meg a leképezést megvalósító lencse fókusz-távolsága. Ennek az egyenlőségnek a segítségével feltételt is kaphatunk a lencse fókusz-távolságára: mivel $l \geq 0$, ezért

$$f = \frac{L^2 - l^2}{4L} \leq \frac{L^2}{4L} = \frac{L}{4}.$$

Ha a lencse fókusz-távolsága nem nagyobb a tárgy és a rögzített ernyő távolságának a negyedénél, akkor a tárgyról éles kép hozható létre a lencse segítségével.

Ha $f = L/4$, akkor egyetlen ilyen lencse-

helyzet van, a tárgy és az ernyő között „félúton”, és ekkor a tárgytávolság és a képtávolság is kétszerese f -nek.

Ha $f < L/4$, akkor két helyzetben valósítható meg éles kép.

Határozzuk meg a nagyítást mindkét esetben:

$$N_1 = \frac{K_1}{T} = \frac{k_1}{t_1} = \frac{y}{x},$$

$$N_2 = \frac{K_2}{T} = \frac{k_2}{t_2} = \frac{x}{y}.$$

Ezt a két egyenlőséget összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$N_1 N_2 = 1,$$

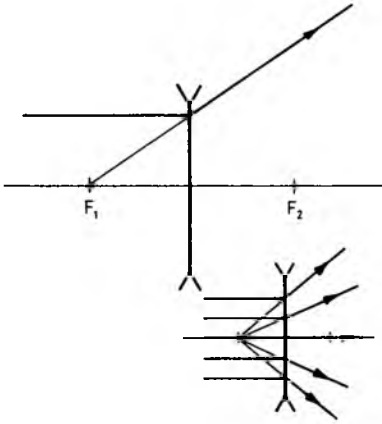
és

$$K_1 K_2 = T^2.$$

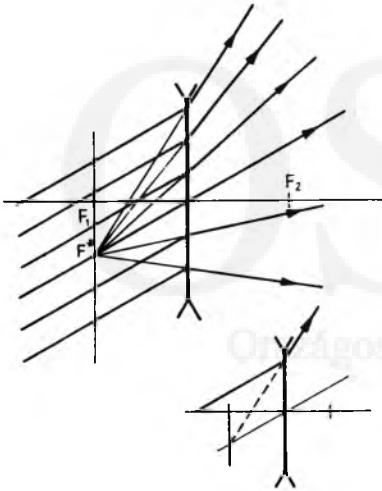
Más szóval: a két nagyítás egymás reciproka, a két képnagyság mértani közepe pedig egyenlő a tárgynagysággal.]

Áttekintettük a gyűjtőlencsére vonatkozó leképezési törvényt és a következményeit. Vizsgáljuk meg most a szórólencse esetét! A szórólencsére vonatkozó legfontosabb megállapításokkal megismerkedtünk, az 1., 2., 3. állítások tartalmazzák a szórólencsére vonatkozó feltevéseket is. Láttuk, hogy a szórólencsére merőlegesen érkező fénysugár visszafelé való meghosszabbítása áthalad az előző oldali fókuszszon. Az optikai tengellyel párhuzamosan a lencsére érkező fénysugarak széttartóak lesznek keresztülhaladva a lencsén. A visszafelé meghosszabbítások a bal oldali fókuszszon haladnak keresztül. A fénysugarak tehát úgy viselkednek, mintha az F_1 fókuszszoból indultak volna (3.40. ábra).

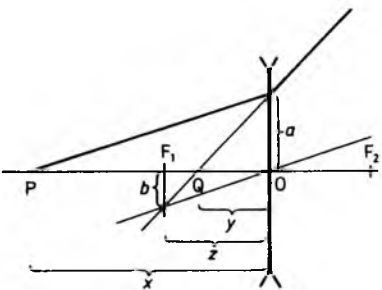
Hasonló a helyzet az olyan párhuzamos fénysugarakkal, amelyek nem párhuzamosak a lencse optikai tengelyével. Ezek is



3.40. ábra



3.41. ábra



3.42. ábra

széttartókká lesznek: úgy haladnak, mint ha a bal oldali fókuszisk F^* pontjából indultak volna. Az F^* pontot a lencse középpontjában áthaladó — irányváltoztatás nélkül haladó — fénysugárral jelöljük ki (3.41. ábra).

Ezután könnyűszerrel megszerkeszthetjük a szórólencsére tetszőleges irányból érkező fénysugár útját. Párhuzamos segéd-sugarat húzunk az optikai tengelyen keresztül. Ez az első oldali fókusz síkját az F^* pontban döfi. A vizsgált fénysugár úgy halad tovább, mintha ebből a pontból indult volna.

Tegyük fel most, hogy adott az optikai tengelyen egy tetszőleges P pont. Szerkesszük meg ennek a pontnak a képét! A pontról kiinduló egyik fénysugár haladjon az optikai tengely mentén. A másikat válasszuk meg tetszőlegesen. Szerkesszük meg ennek az útját az előbb látott módon (3.42. ábra). A lencsén áthaladó fénysugár visszafelé való meghosszabbítása a Q pontban metszi a másik fénysugarat, az optikai tengelyt. Legyen $\overline{OP} = :x$, $\overline{OQ} = :y$ és $\overline{OF_1} = :z$. Ekkor egyrészt

$$\frac{z}{y} = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1,$$

másrészt

$$\frac{z}{x} = \frac{a}{b}.$$

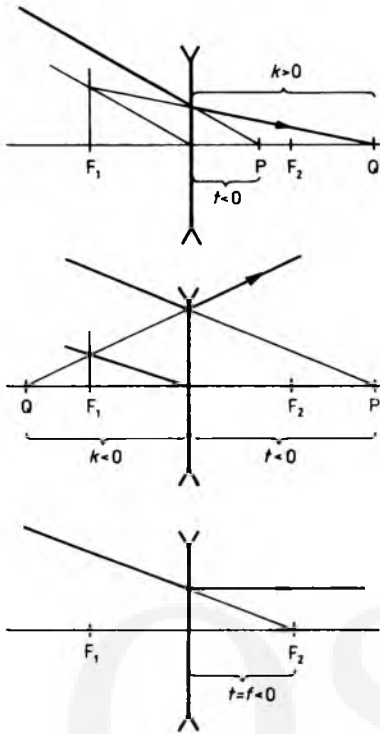
A két egyenlőség alapján

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{-z}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$t := x$, $k := -y$, $f := -z$, ekkor

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$



3.43.
ábra

A leképezési törvény most is érvényben van. A szórólencse fókusz távolsága — mint már említettük — *negatív*. A szórólencse bármely — valódi — tárgyról virtuális képet alkot.

Ha t negatív, vagyis a tárgy virtuális, akkor vagy valódi, vagy virtuális kép keletkezik, attól függően, hogy a virtuális tárgy a fókuszon belül vagy kívül van, a lehetséges eseteket vázoltuk a 3.43. ábrán. Ha $t = f$, akkor a lencsére érkező fénysugarak keresztülhaladva a lencsén az optikai tengellyel párhuzamosak lesznek.

Adjunk meg most a 3.44. ábrán látható módon a bal oldali koordináta-rendszerben egy pontot, a koordinátáit jelöljük t -vel és T -vel ($t \neq f$). A pont képe egyszerűen megszerkeszthető, és a kép koordinátái kiszámíthatók: jelöljük a képpont koordiná-

táit k -val és K -val. Ekkor

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{k}{K} = \frac{t}{T} = N.$$

Röviden néhány szót ejtünk a tükrökről is. Csak áttekintjük a tükrök képalkotásának a törvényszerűségeit, a részletes indoklás a lencsénél megismert gondolatmenet egyszerű átültetésével könnyen végigvihető.

A sík vagy gömbfelülettel határolt tükröző felület a lencsékhez hasonló módon alkot képet a tárgyról. *Tükrökre a leképezési törvény ugyanaz:*

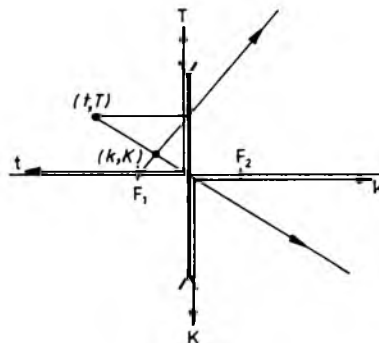
$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

a *tükrő fókusz távolsága* most a görbületi sugár fele:

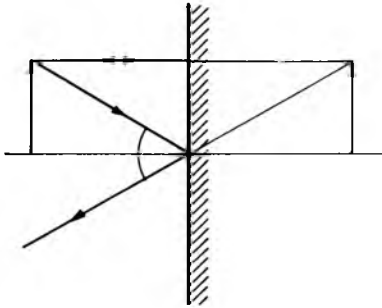
$$f = \frac{R}{2}, \quad (3)$$

ahol R és vele f pozitív, ha a gömbfelület homorú és negatív, ha a gömbfelület domború.

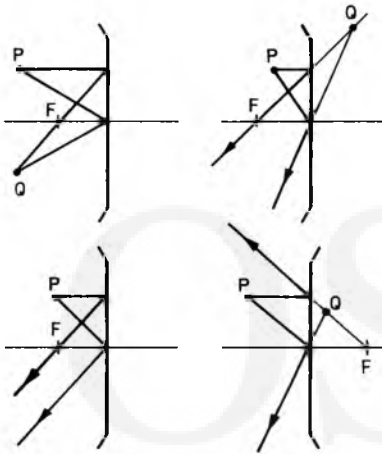
A tükröző síkfelület a síktükrő, a fókusz távolságot formálisan végtelen nagy-



3.44.
ábra



3.45.
ábra



3.46.
ábra

nek tekintjük. A síktükör képalkotását a 3.45. ábrán láthatjuk.

A gömbtükörök képalkotásának a leg-egyszerűbb tipikus eseteit a 3.46. ábrán foglaltuk össze.

XXIII. Feladatcsoport: optika

XXIII/1. Egy optikai rés szélessége $5 \cdot 10^{-5}$ m. Homogén fénnel világítjuk meg. Az elhajlási kép a réstől 2 méterre elhelyezett ernyőn jelenik meg. Mekkora a fény frekvenciája, ha a két első (szimmetrikusan elhelyezkedő) kioltási hely távolsága 6 cm?

XXIII/2. Egy rés szélessége $4 \cdot 10^{-5}$ méter. A rácsó homogén fény frekvenciája $4 \cdot 10^{14}$ Hz, az elhajlási képe a 2 méterre elhelyezett ernyőn jelenik meg. Hol helyezkednek el az ernyőn az erősítés helyei?

XXIII/3. Egy monokromatikus fénysugár $2 \cdot 10^{-5}$ m = 20 μ m rácsállandójú rácsra esik. Mekkora a fény frekvenciája, ha a rácsból 2 méter távolságra lévő ernyőn az első erősítés a középtől 3 cm-re van?

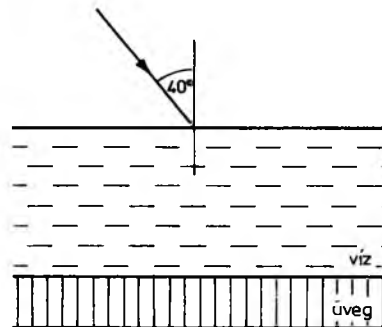
XXIII/4. Plánparalel üveglemezre 45° -os beesési szöggel esik a fény ($n=1,5$). Mekkora a fénysugár eltolódása, ha a lemez vastagsága 5 cm? Milyen távol vannak egymástól a beesési merőlegesek?

XXIII/5. Egy 5 cm vastag, vízszintes üveglemez felett 15 cm vastag vízréteg van (3.47. ábra). A vízre 40° -os beesési szöggel fénysugár esik. A víz törésmutatója $4/3$, az üvegé $3/2$. Mennyivel tolódik el a fénysugár az eredeti iránytól?

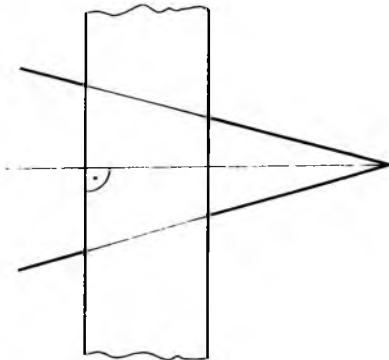
XXIII/6. Egy plánparalel üveglemez vastagsága 5 cm. A törésmutató 1,5. Mekkora beesési szög esetén lesz a beesési merőlegesek távolsága 1 cm? Mekkora a fénysugár eltolódása?

XXIII/7. Egy 45° törőszögű üvegprizmára 60° -os beesési szöggel esik egy fénysugár. Mekkora szöggel tér el az eredeti iránytól, amikor a másik lapon kilép?

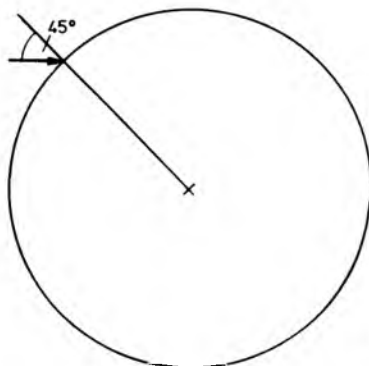
XXIII/8. Egy prizma törésmutatója kék



3.47.
ábra



3.48.
ábra



3.49.
ábra

fényre 1,63, a vörös fényre 1,60. Kék és vörös fény keveréke érkezik 45° -os beesési szöggel a 30° -os törőszögű prizma. Mekkora szöget zár be egymással a kék és a vörös fénysugár a prizma túloldali lapján kilépve?

XXIII/9. Üvegprizmára ($n=1,5$) 45° -os beesési szöggel érkezik fénysugár. A túloldalon a prizma felületére merőlegesen lép ki. Mekkora a prizma törőszöge?

XXIII/10. Egy 10 cm vastag plánpárhuzamos üveglemezre 30° nyílásszögű, összetartó sugárnyaláb esik. A fénykúp tengelye merőleges az üveg felületére (3.48. ábra). Mennyivel tolja el a fénykúp csúcsát az üveglemez?

XXIII/11. Egy 5 cm sugarú, 1,5 törésmutatójú üveggömbre egy vékony fénysugár esik. Az üveggömbben 8 cm utat tesz meg. Mekkora szöget zár be egymással a gömb felületére érkező és a gömböt elhagyó fénysugár iránya?

XXIII/12. Egy 5 cm sugarú, 1,5 törésmutatójú üvegből készült félgömb sík felületére merőlegesen fénysugarak érkeznek. Milyen messze haladnak a szimmetriatengelytől azok a fénysugarak, amelyek kilépnek a gömb felületén?

XXIII/13. Egy 5 cm sugarú üveggömböt ($n=1,5$) vékony fénysugárral világítunk

meg. A beesés szöge 45° (3.49. ábra). Mennyi utat tesz meg a fénysugár a gömbben? Mennyi idő telik el a belépés és a kilépés között?

XXIII/14. Egy vastag üveglemez két felülete nem teljesen párhuzamos. Mekkora szöget zár be egymással a két oldal, ha az egyik oldalra merőlegesen beeső fénysugár a másik lapon kilépve 1° -os szöget zár be az eredeti iránnyal?

XXIII/15. Üveglemez ($n=1,5$) felületére fénysugár esik. Az egyik része megtörik, a másik behatol az üvegbe. Mekkora a beesés szöge, ha a megtört és a visszavert fénysugár egymásra merőleges?

XXIII/16. Tisztavízű medencében 2 méter mélyen egy izzólámpa világít. A vízre ($n=1,33$) egy átlátszatlan korongot fektetünk. Mekkora ennek a körlapnak a sugara, ha a fény nem jut ki a vízből?

XXIII/17. A víz felszíne alatt 2 méter mélyen egy pénzdarab fekszik. A víz felszíne felett, 1 méter magasan beállítunk egy fényképezőgépet, hogy lefényképezzük a pénzérmét. Mekkora távolságra állítsuk be a fényképezőgépet?

XXIII/18. Egy 5 cm külső sugarú üvegpalack látszólagos falvastagsága 1 mm. Az üveg törésmutatója 1,5. Mekkora az üveg falvastagsága valójában?

XXIII/19. Adott egy gyűjtőlencse. Szerkesszük meg a 3.50. ábrán látható négy pont képét!

XXIII/20. Adott egy szórólencse. Szerkesszük meg a 3.51. ábrán látható pontok képét!

XXIII/21. Adott egy homorú gömbtü-
kör. Szerkesszük meg a 3.52. ábrán látható
négy pont képét!

XXIII/22. Adott egy domború gömbtü-
kör. Szerkesszük meg a 3.53. ábrán látható
négy pont/képét!

XXIII/23. Szerkesszük meg a 3.54. áb-
rán látható négy pont képét a síktükörre
vonatkozóan!

XXIII/24. Adott egy gyűjtőlencse. Szer-
kesszük meg a 3.55. ábrán látható nyíl
képét! Szerkesszük meg a nyíl képét akkor
is, ha a lencse szórólencse!

XXIII/25. Adott egy homorú tükör.
Szerkesszük meg a 3.56. ábrán látható nyíl
képét! Szerkesszük meg a képet akkor is,
ha a tükör domború!

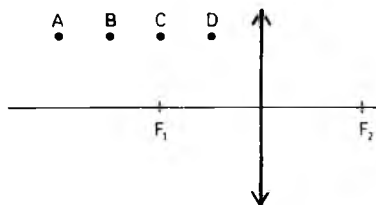
XXIII/26. Adott egy tárgy (T) és a való-
di képe (K). Szerkesszük meg a leképezést
létrehozó lencsét és a fókuszpontjait (3.57.
ábra)!

XXIII/27. Adott egy tárgy (T) és a virtu-
ális képe (K). Szerkesszük meg a leképe-
zést megvalósító (pozitív fókusz távolságú)
lencse helyzetét és fókuszpontjait (3.58.
ábra)!

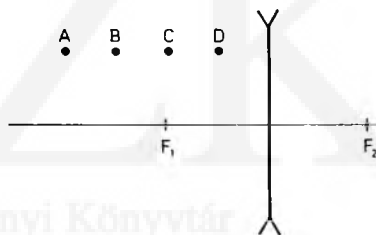
XXIII/28. Adott egy tárgy (T) és a virtu-
ális képe (K). Szerkesszük meg a leképe-
zést megvalósító (negatív fókusz távolságú)
lencse helyzetét és fókuszpontjait (3.59.
ábra)!

XXIII/29. Egy gyűjtőlencsén áthaladó
fény sugar menetét ábrázoltuk (3.60. áb-
ra). Szerkesszük meg a lencse fókuszpont-
jait! Legyen $\overline{PO} = 15$ cm, $\overline{OQ} = 25$ cm. Szá-
mítsuk ki a fókusz távolságot!

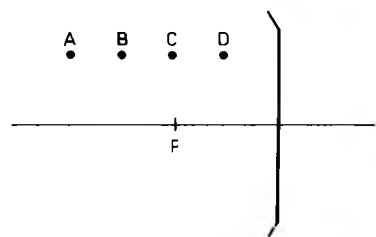
XXIII/30. Adott egy f fókusz távolságú
gyűjtőlencse. A 3.61. ábrán látható három-
szög csúcspontjainak koordinátái (a 3.35.
ábrán megadott T—t koordináta-rendszer-
ben): $(f, 0)$, $(2f, f)$, $(2f, f)$. Mi lesz a há-
romszög lemeze képe?



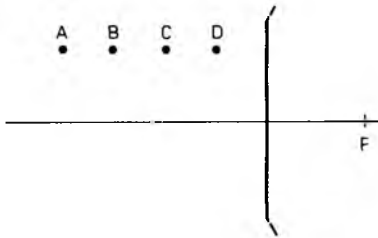
3.50.
ábra



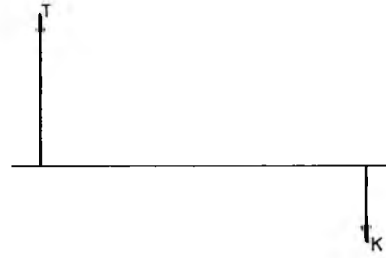
3.51.
ábra



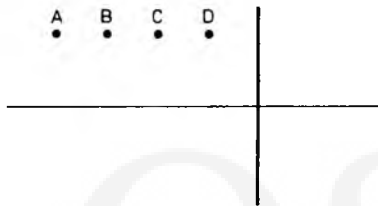
3.52.
ábra



3.53.
ábra



3.57.
ábra



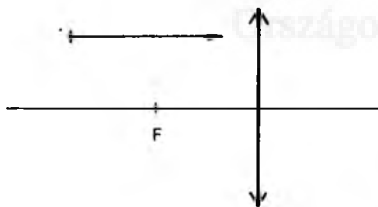
3.54.
ábra



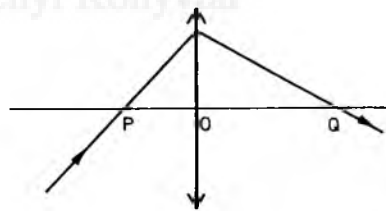
3.58.
ábra



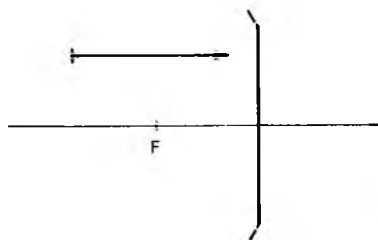
3.59.
ábra



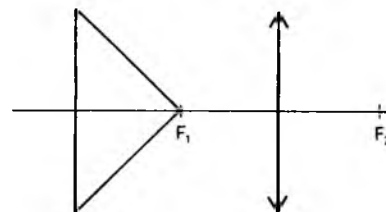
3.55.
ábra



3.60.
ábra



3.56.
ábra



3.61.
ábra

XXIII/31. A padló felett, 2 méter magasan egy izzólámpa függ (3.62. ábra). Mekkora lehet annak a (gyűjtő)lencsének a fókusz távolsága, amellyel az izzólámpáról a padlón valódi képet elő lehet állítani?

XXIII/32. Egy gyűjtőlencse valódi, háromszoros nagyítású képet ad, ha a tárgy és a kép egymástól mért távolsága 1 méter. Hányszoros a nagyítás, ha a tárgy és a kép egymástól mért távolsága 80 cm?

XXIII/33. Egy szórólencse fókusz távolsága – 12 cm. Hol és mekkora kép keletkezik, ha a tárgy nagysága 10 cm, a tárgytávolság pedig 18 cm?

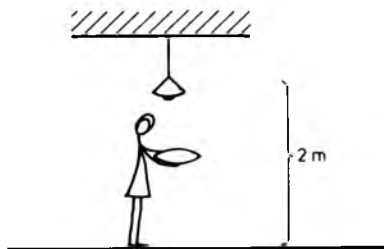
XXIII/34. Egy gyűjtőlencse a tőle 30 cm távolságra lévő tárgytól 60 cm-re éles képet ad. A tárgyat 8 cm-rel közelítjük a lencséhez. Merre mozdul el a kép? Merre mozdul el a kép, ha a tárgyat 8 cm-rel távolítjuk a lencsétől?

XXIII/35. Egy gyűjtőlencse az elé helyezett tárgyról 4-szeres nagyítású képet ad. Ha a lencsét 2 cm-rel eltávolítjuk, akkor a nagyítás 3-szoros. Mekkora a lencse fókusz távolsága?

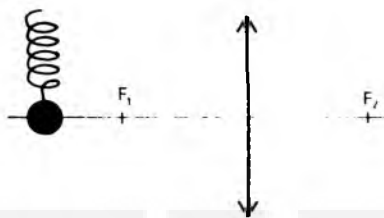
XXIII/36. Egy 20 cm fókusz távolságú lencsétől 30 cm-re egy pontszerű fényforrás van. A fényforrás és a lencse közé egy 24 cm vastag, 1,5 törésmutatójú üveglemezt helyezünk az optikai tengelyre merőlegesen. Merre tolódik el a fényforrás képe? Mennyivel mozdul el?

XXIII/37. Párhuzamos fénynyaláb merőlegesen esik egy ernyőre, amelyen 3 cm sugarú kör alakú foltot világít meg. A fény sugarak útjába az ernyőtől 20 cm távolságra egy szórólencsét állítunk. Ekkor a fényfolt sugara 5 cm-re nő. Mekkora a lencse fókusz távolsága?

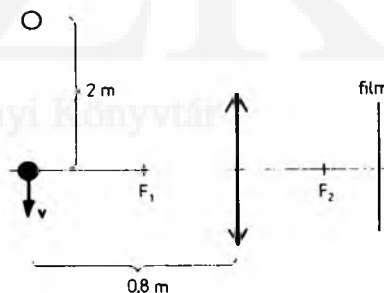
XXIII/38. Egy rugóra felfüggesztünk egy testet. Ez függőlegesen rezeg, $A = 10$ cm-es amplitúdóval, $T = 0,5$ s periódusidővel. A rezgő test képét 30 cm-re elhelyezett,



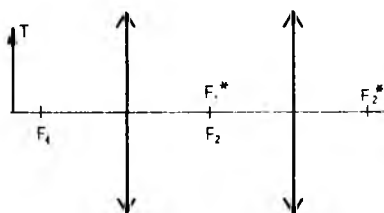
3.62. ábra



3.63. ábra



3.64. ábra



3.65. ábra

20 cm fókusztávolságú lencsével állítjuk elő (3.63. ábra). Hová kell helyezni az ernyőt? Mekkora a rezgő test képének maximális sebessége?

XXIII/39. Szabadon eső testet fényképezünk. A test 2 méter magasról esett, amikor a fényképezőgép lencséjének a magasságába kerül. Ekkor a test — vízszintesen mérve — 0,80 méterre van a lencsétől (3.64. ábra). A lencse fókusztávolsága 28 mm. Mekkora expozíciós időt válasszunk,

ha azt szeretnénk, hogy a filmen a golyó képének elmozdulása 0,1 mm-nél ne legyen nagyobb?

XXIII/40. Két lencse áll egymással párhuzamosan, közös optikai tengelyen. Az első lencse fókusztávolsága 8 cm, a másodiké 7 cm, a két lencse 15 cm-re van egymástól. Az első lencsétől 12 cm-re egy 2 cm magas tárgy van (3.65. ábra). Szerkesszük meg a tárgy képét, és határozzuk meg a kép helyét!

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

4. Relativitáselmélet

4.1. A Lorentz-transzformáció

4.1.1. A fény sebessége

A mozgás viszonylagos. Fizikai tanulmányainkat ennek az egyszerű ténynek a megállapításával kezdtük. A vonatkoztatási rendszerek közül azokat választottuk ki, amelyekben a mozgások leírása a legegyszerűbb: amelyekben a magára hagyott test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez vagy áll. Ezeket a vonatkoztatási rendszereket inerciarendszereknek neveztük.

Galilei relativitási elve az inerciarendszerek egyenértékűségét mondja ki: azt, hogy az inerciarendszerek a mozgás leírása szempontjából egyenértékűek. A mechanikai törvények az egymáshoz viszonyítva egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerekben azonos formájúak. Semmiféle mechanikai kísérlettel nem lehet közöttük elvi különbséget tenni, ezért nincs is értelme abszolút nyugvó vonatkoztatási rendszerről beszélni, és nincs értelme az abszolút sebességnek.

Az elektrodinamika törvényei azonban — úgy tűnik — megsértik a relativitás elvét. A Lorentz-erőt tárgyaló 2.2.1. pontban láttuk, hogy az egymással párhuzamosan mozgó töltések között

$$k \frac{Q^2}{r^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

nagyságú taszítóerő lép fel, míg a két testtel együttmozgó vonatkoztatási rendszerben a taszítóerő

$$k \frac{Q^2}{r^2}$$

nagyságú. Ezen az alapon különbséget lehet tenni a két inerciarendszer között?

Ebben a pontban szeretnénk a végére járni ennek a problémának. Logikailag három lehetséges magyarázat kerül szóba. Ezek közül fogjuk kiválasztani azt, amely a tapasztalati tényeknek is megfelel.

Először arra gondolunk, hogy a relativitás elve érvényes a mechanikai jelenségekre, de nem érvényes az elektrodinamika jelenségeire. Az elektrodinamika törvényei csak valamiféle kitüntetett vonatkoztatási rendszerben érvényesek. A fény sebessége ebben a vonatkoztatási rendszerben c , más inerciarendszerekben nem. Ezzel kitüntetnénk egy abszolút nyugvó vonatkoztatási rendszert. Lehetne az abszolút sebességről is beszélni. Ahhoz a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebességet értenénk abszolút sebességén, amelyben a fény terjedési sebessége c , amelyben a Maxwell-féle törvények érvényesek. Fizikatörténeti érdekesség; úgy gondolták, hogy ennek az abszolút nyugvó vonatkoztatási rendszernek realitást az ad, hogy a geometriai teret



4.1.
ábra

egy igen könnyű, áthatolható, de rugalmas anyag tölti ki. Ezt a rugalmas anyagot éternek nevezték el. A korabeli felfogás szerint az elektromágneses hullám ennek a — különben érzékelhetetlen — éternek a rezgése, vagyis úgy képzelték, hogy az éter hasonló szerepet tölt be az elektromágneses hullámok terjedésében, mint a levegő a hang terjedésében. A kitüntetett — abszolút nyugvó — vonatkoztatási rendszer az éter vonatkoztatási rendszere.

Az étert azonban még elektrodinamikai-optikai kísérletekkel sem sikerült tetten érni. Michelson és Morley igen sok fáradságot, időt és pénzt áldoztak arra, hogy kísérletileg is kimutassák az étert. Munkájuk nem járt eredménnyel, az étert nem sikerült kimutatniuk (és ezzel a relativitás elméletének az egyik alapvető kísérleti bizonyítékát szolgáltatták). Elgondolásuk alapja az volt, hogy a nyugvó éterben haladó és forgó Föld ellentétes oldalán érzékeltetnie kellene az „éterszelet”, a fény sebességének különbözőnek kellene lennie (4.1. ábra).

A probléma megoldását szolgáltató lehetséges második magyarázat abban áll, hogy a relativitás elve érvényes a mechanikára is, az elektrodinamikára is, az inerciarendszerek egyenértékűek. Sem mechanikai, sem elektromágneses — optikai — kísérlettel nem lehet különbséget tenni a „nyugvó” és a „mozgó” megfigyelők kö-

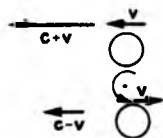
zött. Ebben az esetben azonban a Maxwell-törvényekben lehet a hiba.

Az elektrodinamika törvényeit úgy kell módosítani, hogy az egymással párhuzamosan mozgó töltések között is kQ^2/r^2 erő lépjen fel. Ez nyilván akkor teljesülhetne, ha c „végtelen nagy” lenne, hiszen ilyenkor

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1.$$

Ez azonban azt jelentené, hogy az elektromágneses hullám végtelen nagy sebességgel terjed. Az is megoldást jelentene, ha elfogadnánk, hogy a fény sebessége c , de csak a fényforráshoz viszonyítva, más inerciarendszerekhez képest nem. Ennél a megoldásnál a Maxwell-törvényeket alaposan módosítani kellene! E felfogás szerint a fény a cowboy pisztolygolyójához hasonlóan mozog: a lövedék sebessége megegyezik a pisztolyhoz viszonyított sebességnek és a cowboy lóva sebességének az összegével.

Ez a hipotézis sem fogadható el. Ha ugyanis a fény sebessége csak a hullámforráshoz viszonyítva c , akkor a kettős csillagról a Földre érkező fény sebessége különböző lenne: a távolodó csillagról c -nél kisebb, a közeledő csillagról c -nél nagyobb sebességgel érkezik ide a fény (4.2. ábra). Ez a kis sebességkülönbség a nagy távolság miatt esetleg igen nagy — lehetséges, hogy több százéves — időkülönbséget jelentene. A kettős csillagok mozgása az égbolton azonban pontosan olyan, mint amelyet a Kepler-törvények alapján elvárunk. Ez azt



4.2.
ábra

jelent, hogy a két csillagról egyszerre regisztrált fénysugarak együtt indultak.

A logikailag lehetséges harmadik magyarázat szerint a relativitás elve érvényes a mechanikai és az elektrodinamikai jelenségekre, de módosítani kell a mechanikai fogalmakat, és a dinamika törvényeit át kell fogalmaznunk.

Ebben az esetben végig kell gondolnunk ismét a távolság és az idő mérését. És van is itt mit végiggondolni! A fizikai tanulmányaink kezdetétől adósa vagyunk egy probléma megoldásával. Emlékezzünk vissza: a Kinematika című fejezetben (lásd a könyv első kötetében) felvetettük azt a — most is válaszra váró — kérdést, hogy hogyan kell megmérni mozgó szakasz hosszát álló mérőeszközzel. A kérdésfelvetés már akkor természetes volt, a válaszra és a megoldásra azonban csak most kerülhet sor.

A mechanika, az elektrodinamika törvényeinek és a relativitás elvének az ellentmondásának a feloldására három logikai lehetőség kínálkozott. Az első kettőt a tapasztalatok alapján el kell utasítanunk, ezért a harmadik lehetőség mellett döntünk. Elfogadjuk a relativitás elvét és a fénysebesség állandóságának a tényét.

Csalóka módon egyszerűnek tűnik az egész. Ha a három logikailag lehetséges magyarázat közül kettőt el kell vetnünk, akkor a harmadik lehet a helyes. Valójában az a megoldás, amelyre a természet szavazott, a legkevésbé egyszerű, a legkevésbé kézenfekvő lehetőség. A fizikusok vonakodva fogadták el, az átlagember ma is borzongva gondol erre a „józan észsel ellentétes” tényre, a fénysebesség állandóságára.

Einstein és Poincaré — 1905-ben, egymástól függetlenül és egyidőben — ismerték fel, hogy a természetmagyarázatnak a

leggyümölcsözőbb útja az lesz, amelyre a fénysebesség állandóságának a hipotézise mutat.

A kiindulásul szolgáló alapigazságokat két axiómában rögzítjük.

I. Axióma: *A fizika minden törvényének ugyanaz a formája minden inerciarendszerben.*

Ha tehát a fizika törvényeit megfogalmaztuk egy inerciarendszerben, akkor minden további nélkül érvényesek bármelyik másik inerciarendszerben. Azonos a törvények formája, a bennük szereplő fizikai állandók értéke is, mint például $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $f = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg². Más szóval ez azt jelenti, hogy a fizika törvényei nem teszik lehetővé, hogy az egyik inerciarendszert megkülönböztessük a másiktól.

II. Axióma: *A fény vákuumban, bármely inerciarendszerben, minden irányban $c = 3 \cdot 10^8$ m/s sebességgel terjed, függetlenül a fényforrás és a fényt észlelő sebességétől.*

Képzeld el, hogy a világűrben — távol a csillagoktól, a bolygóktól — lebeg egy űrhajó. Tegyük fel, hogy $2 \cdot 10^8$ m/s sebességgel elszáguld mellette egy másik űrhajó. Az elsőt nevezzük A-nak, a másodikat B-nek. Indítsanak a B űrhajóból egy fényjelet előre a mozgás irányába (4.3. ábra). Világos dolog, hogy a B űrhajó utasai azt tapasztalják, hogy a kibocsátott fényjel



4.3. ábra

300 000 km/s sebességgel halad (miközben az A űrhajó a fényjellel ellentétes irányban távolodik 200 000 km/s sebességgel).

Mekkora sebességgel halad a fény az A űrhajóból nézve? A második axióma szerint az A űrhajó utasai is azt tapasztalják, észlelik, hogy a B űrhajóból kibocsátott fénysugár 300 000 km/s sebességgel halad, és nem 500 000 km/s-mal, amint ezt a mechanika alapján elvárnánk.

Ez bizony meghökkentő tény. Az Olvasót nyugtalanítja a kérdés: de hát miért van ez így? Nos azért, mert ilyen a természet. Nem kérhetjük tőle számon, hogy miért ilyen. Nem vethetjük a szemére, hogy nem úgy viselkedik, ahogy felületes ismeretség alapján elvárnánk.

Ezen a tényen elálmélkodhatunk, csodálkozhatunk, de el kell fogadnunk, mert a természet valóban ilyen.

A relativitás elmélete az I. és a II. axiómákon nyugszik. Minden megállapítása az I. és a II. axióma következménye. A relativitás elméletével kapcsolatban sok hihetetlennek tűnő, rejtélyes és megfoghatatlan dologról hallottunk. Rejtelmes állítások hadával találkozunk a fantasztikus regényektől kezdve a fizikáról szóló könyvekben is.

Arra szeretnénk rávezetni az Olvasót, hogy a relativitás elméletével kapcsolatban egyetlen egy dolgot kell elfogadni, a — nyilvánvalónak látszó I. axióma mellett — a II. axiómát, a fénysebesség állandóságának az elvét. A II. axiómán annyit csodálkozhatunk, amennyit akarunk, de ha elfogadtuk, és végiggondoljuk a következményeit, akkor a relativitás elméletének a többi ténye már természetes következményeként adódik. A relativitás elméletének az összes furcsasága a II. axióma rejtélyes voltában gyökerezik.

4.1.2. Időmérés, távolságmérés

Most azt a célt tűzzük ki, hogy az előző pontban megfogalmazott I. és II. axiómára támaszkodva kidolgozzuk az időmérés és a távolságmérés módszerét.

A relativitáselméletben igen gyakran fényévben mérjük a távolságot: 1 fényév ($:= 1$ év) az a távolság, amelyet a fény 1 év alatt tesz meg. Ezért a fény sebessége 1 fényév/év = 1 év/év = 1.

Mérhetjük azonban az időt is hosszúságegységekben: 1 fényméter ($:= 1$ méter) az az időtartam, amely ahhoz szükséges, hogy a fény 1 méter utat tegyen.

A fény sebességét ilyen mértékegységválasztás mellett $\beta_{\text{fény}}$ -nyel jelöljük, tehát

$$\beta_{\text{fény}} = 1 \frac{\text{fényév}}{\text{év}} = 1 \frac{\text{méter}}{\text{fényméter}} = 1.$$

Ha az időt és a távolságot ugyanabban a mértékegységben mérjük, akkor a sebesség mértékegysége: $[\beta] = 1$. Számolásnál ez sokszor igen előnyös, de az elméleti jellegű eredmények is sokkal egyszerűbbek és áttekinthetőek. Nem ragaszkodunk azonban ehhez az új lehetőséghez, gyakran — különösen feladatokban — használjuk a szokásos mértékegységeket is, a métert, a másodpercet. Mindenesetre, ha egy test sebessége v , akkor $\beta = v/c$.

Tegyük fel például, hogy egy test $v = 210\,000$ km/s = $2,1 \cdot 10^8$ m/s sebességgel halad. Ekkor a test 1 év alatt 0,7 fényévnyi utat tesz meg, hiszen a sebessége 0,7-szerese a fény sebességének. Másképp fogalmazva: mialatt a fény 1 méter utat fut be, addig ez a test megtesz 0,7 méter utat. A test sebessége tehát:

$$\beta = 0,7 \frac{\text{fényév}}{\text{év}} = 0,7 \frac{\text{méter}}{\text{fényméter}} = 0,7.$$

Ha a sebesség méter/fényméterben 0,8, akkor ez azt jelenti, hogy a hagyományos mértékegységekben mérve a test $v = \beta c = 2,4 \cdot 10^8$ m/s sebességgel száguld. Használhatjuk a méter/fényméter = fényév/évben mért sebességet az impulzus, a mozgási energia kifejezésében is:

$$I = m\beta, \quad E = m \frac{\beta^2}{2}.$$

Ha például $m = 2$ kg és $\beta = 0,8$, akkor

$$I = 1,6 \text{ kg}, \quad E = \frac{0,8^2}{2} \text{ kg}.$$

Az impulzust és a mozgási energiát ebben az esetben egyaránt kg-ban kapjuk: a sebesség mértékegysége! Hogyan lehet átszámítani ezeket a mennyiségeket a hagyományos mértékegységekre? Könnyen:

$$\begin{aligned} I &= m\beta c = mv = 2 \cdot 10,8 \cdot 3 \cdot 10^8 = \\ &= 4,8 \cdot 10^8 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \beta^2 c^2 = \frac{1}{2} mv^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,8^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2 = 5,76 \cdot 10^{16} \text{ J}. \end{aligned}$$

Megismerkedtünk a sebesség új „skalájával”, az új mértékegységekkel. Tulajdonképpen nem történt itt bonyolultabb dolog, mint amikor áttértünk az egyik hőmérsékleti skáláról a másikra. Ahogyan a hőtanban az elméletileg jelentősebb Kelvin-féle skála mellett használjuk a Celsius-féle skálát is, most is élni fogunk a m/s-ban mért sebesség használatával, az egységnyi dimenziójú sebesség mellett.

A fizikai tanulmányaink elején, a kinematikában említettük, hogy a legtöbb konkrét kinematikai-dinamikai problémá-

nál adott egy vonatkoztatási rendszer, a távolság- és az időmérés korrekt leírásával. Egy adott vonatkoztatási rendszerben^(*) az 1 méteres rúd bárhol egy méter. Úgy gondoljuk ugyanis, hogy a vonatkoztatási rendszerben felépíthető egy méterrúdakból álló hálózat. Így aztán könnyen ellenőrizhető, hogy egy — mondjuk — az x tengelyen fekvő hosszú rúd végpontjainak a távolságát megmérve ugyanazt az eredményt kapjuk, mint amikor eltoljuk a rudat és közben még el is forgatjuk.

A vonatkoztatási rendszerben az órák együtt járnak: ha azonos elven működő órákat helyezünk el a vonatkoztatási rendszer különböző pontjaiba, és ezeket együtt indítjuk, akkor a rendszerben az összes óra ugyanazt az időt mutatja. Ha két cowboy egymásra lő az origó közelében, és a két lövés között 1 másodperc telik el az origóból nézve, akkor 1 másodpercrek méri ezt az időkülönbséget az összes megfigyelő, a rendszer bármely pontjába elhelyezett órán. Az azonos szerkezetű órák azonos ütemben járnak a vonatkoztatási rendszerben.

Kérdés csak az, hogy miként lehet megvalósítani a rendszer összes órájának az egyidejű indítását. Másképpen fogalmazva: könnyen végbevihető egy rendszeren belül az órák szinkronizálása?

A feladat elvben könnyen megoldható. Gondoljuk el, hogy a vonatkoztatási rend-

^(*) Itt és a továbbiakban mindenütt tartjuk magunkat ahhoz — Newton I. törvényében megfogalmazott — megállapodáshoz, hogy a fizika törvényeit inerciarendszerekben fogalmazzuk meg. A továbbiakban tehát tehetetlenségi rendszerek vizsgálatára szorítkozunk. A relativitáselméletnek az az ága, amely a tehetetlenségi rendszerekben írja le a jelenségeket, a *speciális relativitáselmélet*. A relativitáselmélet másik ága az *általános relativitáselmélet*, a relativitás elvét kiterjeszti nem inerciarendszerekre is.

szer különböző pontjaiba órákat helyeztünk. Ezek az órák egyazon elven működnek, az óra készítője kiválasztott egy mozgást, ezt egyenletesnek tekintette és erre a mozgásra alapozta az összes általa gyártott óra működési mechanizmusát.

Tegyük fel, hogy a rendszer óráit az origóban járó órához (az úgynevezett referenciaórához) akarjuk igazítani. Irányít-suk figyelmünket az $(5, 0, 0)$ pontba helyezett órára. Állítsuk be az órát az 5 fényméter időpontra. Amikor az origóba helyezett óra éppen a $t=0$ időpontot mutatja, akkor villantsunk fel egy vakut az origóban. Indítsuk el az $(5, 0, 0)$ pontba helyezett órát akkor, amikor a fényjel erre a helyre érkezik. Ebben a pillanatban mindkét óra mutatója az 5 fényméternek megfelelő jelzésre mutat. A két óra tehát együtt jár.

Ugyanez a fényjel ugyanekkor indítsa el a vonatkoztatási rendszerben az origótól 5 méterre elhelyezett valamennyi órát, amelyeket előzőleg az 5 fényméter időpontra állítottunk be.

A többi órával is így járunk el. Az órák szinkronizálása azzal kezdődik, hogy valamennyi órát beállítjuk arra az időpontra, amennyi idő ahhoz kell, hogy az origóból indított, c sebességű fényjel az órához érjen. Ezután egyetlen fényjellel a vonatkoztatási rendszer összes óráját egymáshoz igazítottuk.

Azután, hogy az órák szinkronizálását megoldottuk, nyilvánvaló, hogy mit értünk azon, hogy a tér különböző pontjában két esemény ugyanabban az időpontban megy végbe. Gondoljuk el, hogy az (x_1, y_1, z_1) és az (x_2, y_2, z_2) pontokban egy-egy pisztoly elsül. Amikor a két lövés elhangzik, feljegyezzük a két pisztoly közélébe helyezett két óra állását. Ha a két feljegyzés szerint az időpontok azonosak,

akkor a két eseményt ebben a vonatkoztatási rendszerben egyidejűnek tekintjük. Ha az (x_1, y_1, z_1) helyen álló megfigyelő a $t_1=4$ fényméter időt jegyzi fel, az (x_2, y_2, z_2) pontban tartózkodó megfigyelő pedig a $t_2=27$ fényméter időt regisztrálja, akkor a két lövés között 23 fényméter idő telt el.

Vessük fel most a következő szokatlan kérdést. Mennyi idő telik el a két lövés között egy olyan megfigyelő óráin mérve, akinek a vonatkoztatási rendszere az előző vonatkoztatási rendszerhez képest v sebességgel egyenletesen mozog?

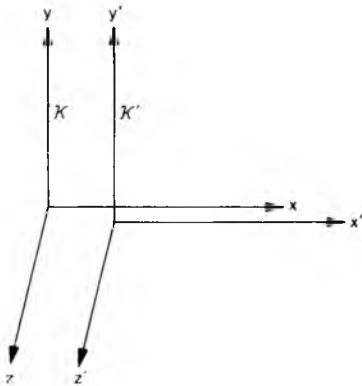
A kérdésfeltevés mindenesetre meglepő, nyilvánvalónak látszik a „józan ész” alapján, hogy ez a megfigyelő is 23 fényméternek méri a két lövés között eltelt időt.

Gondoljuk végig a problémát. Tegyük fel először is az egyszerűbb fogalmazás kedvéért, hogy adott két vonatkoztatási rendszer, az egyik a laboratóriumban dolgozó tudósok vonatkoztatási rendszere. Ezt állónak fogjuk nevezni, és \mathcal{K} -val jelöljük.^(*) A másik: a laboratórium mellett egyenletes mozgással elhaladó űrhajó vonatkoztatási rendszere. Ezt a rendszert \mathcal{K}' -vel jelöljük. (Természetesen mindegy, hogy melyiket nevezzük állónak, ha az egyiket állónak tekintjük, akkor a másik mozog.)

Feltesszük, hogy mindkét rendszer inerciarendszer.

Gondoljuk el, hogy mind a laboratórium, mind az űrhajó vonatkoztatási rendszerében fel van építve a méterrudakból

^(*) A vonatkoztatási rendszert most is írott nagy betűvel jelöljük, legtöbbször úgy, hogy megfeleltetjük egymásnak a vonatkoztatási rendszert „hordozó” test és az inerciarendszer jelét. Például: az A űrhajó vonatkoztatási rendszerét \mathcal{A} -val jelöljük.



4.4.
ábra

álló hálózat, és mindkét rendszerben azonos szerkezetű órák mérik az időt. A két rendszer első tengelyei — az x tengely és az x' tengely — egymáson mozognak, a második és harmadik tengelyek pedig egymással párhuzamosak (4.4. ábra).

Feltehetjük azt is, hogy a két rendszer óráit ugyanazzal a fényfelvillanással szinkronizáltuk. Amikor az űrhajó vonatkoztatási rendszerének az origója elhaladt a laboratóriumi rendszer origója mellett, akkor egyetlen fényjellel szinkronizáltuk a rendszerek óráit. Ezután a \mathcal{K} rendszerben együtt járnak az órák, és a \mathcal{K}' rendszer órái is mind ugyanazt az időt mutatják.

Az előbbi szokatlan kérdés most így fogalmazható meg: mit mutatnak a \mathcal{K} rendszer órái akkor, amikor a \mathcal{K}' rendszer órái 1 fénymétert mutatnak, vagy fordítva: mit mutatnak a \mathcal{K}' órái, amikor a \mathcal{K} -ban az órák mutatói az 1 fényméter jelzésen állnak.

A továbbiakban a laboratórium \mathcal{K} rendszerében a koordinátákat x -szel, y -nal, z -vel jelöljük, az űrhajó \mathcal{K}' rendszerében pedig x' -vel, y' -vel, z' -vel. Mint említettük, a két rendszer első tengelye egybeesik, egymáson mozog. A második és a harmadik tengelyek pedig párhuzamo-

sak. Ekkor

$$y = y',$$

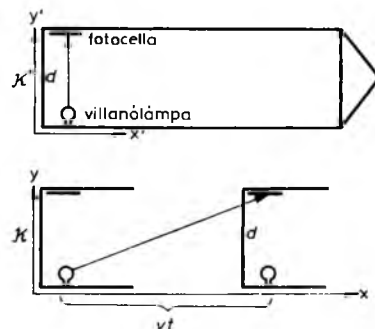
$$z = z',$$

vagyis a mozgás irányára merőleges koordináták azonosak.

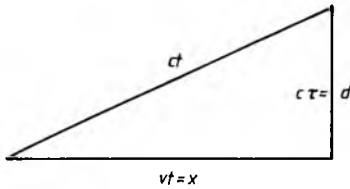
Ez valóban így van, hiszen gondoljuk el, hogy az űrhajó rendszerében a második tengelyen az $y' = 1$ pontban az órahálózat egyik órája festékes ecsettel van ellátva. Ez az óra — miközben elhalad a \mathcal{K} rendszer méterrúdhálózata mellett — festéknyomokat hagy rajta. Könnyen beláthatjuk, hogy a festéknyomok a laboratóriumi rendszer rúdhálózatát az $y = 1$ koordinátájú helyen jelöli meg. Ha ugyanis a festéknyom a laboratóriumi rendszerben az $y = 1$ hely alatt vagy felett jelenne meg, akkor kísérletileg meg lehetne különböztetni a két inerciarendszert egymástól. Az első axióma alapján azonban minden ilyen lehetőséget kizártunk.

Helyezzünk el most az űrhajó rendszerének az origójába egy villanólámpát. A vakutól $d = 1$ méter távolságra a $(0, 1, 0)$ pontba szereljük egy fotocellát, egy olyan eszközt, amely a fény megérkezését észleli és regisztrálja (4.5. ábra).

Az űrhajó utasai előtt nyilvánvaló, hogy a fényjel kibocsátása és a fotocellára megérkezése közben az űrhajó tengelyére



4.5.
ábra



4.6.
ábra

merőlegesen — a fény megtesz $d = 1$ méter utat, és ehhez

$$\tau = \frac{d}{c} = \frac{1}{3} \cdot 10^8 \text{ s}$$

időre van szükség. Világos dolog, hogy ha az időt fényméterben mérjük, akkor

$$\tau = \frac{d}{\beta_{\text{fény}}} = 1 \text{ fényméter.}$$

Vizsgáljuk meg a jelenséget a laboratóriumban tartózkodó megfigyelők szemzőgéből nézve. Jelöljük t -vel azt az időt, ami a fény kibocsátása és a fotocellához érkezése között eltelik. Ez az idő alatt az űrhajó vt -vel elmozdul. A fény a $t = 0$ időpontban az origóban villan fel, a fotocella azonban a \mathcal{K} rendszer origójától — az x tengely mentén mérve — vt távolságra regisztrálja a fény megérkezését. A fény tehát a kibocsátása és a megérkezése között

$$\sqrt{d^2 + (vt)^2}$$

utat tesz meg.

A fényfelvillanás sebessége azonban a laboratóriumból nézve is c . A fény ezért ezt az utat is c sebességgel teszi meg t idő alatt. Tehát

$$c^2 t^2 = d^2 + v^2 t^2,$$

ebből

$$(c^2 - v^2)t^2 = d^2,$$

de mert $d = c\tau$, ezért

$$(c^2 - v^2)t^2 = c^2 \tau^2.$$

Osszuk el mindkét oldalt c^2 -tel:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t^2 = \tau^2,$$

vagyis

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

Ha például $v = 10^8$ m/s, akkor

$$t = \frac{0,33 \cdot 10^8}{0,9428} = 0,35 \cdot 10^8 \text{ s.}$$

Ha az időt is és a távolságot is méterben mérjük, akkor az (1) összefüggés így írható le:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2)$$

vagyis $t = 1/0,9428 = 1,060$ (fény)méter.

A laboratórium dolgozója a fény felvillanása és a fotocellára becsapódása között 6%-kal hosszabb időt mérnek, mint a vakuval és a fotocellával együtt utazó megfigyelők az űrhajóban. A vakuhoz és a fotocellához viszonyítva mozgó laboratóriumi megfigyelők hosszabb időt mérnek a két esemény között, mint a vakuhoz és a fotocellához viszonyítva álló megfigyelők.

Mindez azért van így, mert a 4.6. ábrán látható háromszög átfogója hosszabb, mint a függőleges oldala, de mindkét szakaszt c sebességgel teszi meg a fény, a függőleges szakaszt az űrhajó \mathcal{K}' rendszerében mérve, az átfogót a laboratórium \mathcal{K} rendszeréből megfigyelve.

Az ábrán világosan látszik a mondanivalónk lényege. A háromszög átfogója ct , a vízszintes oldala $vt = x$, vagyis az űrhajó elmozdulása a laboratóriumból nézve, míg a függőleges oldala $d = ct$. A mozgás relati-

vitásának, az inerciarendszerek egyenértékűségének az elve (az első axióma) abban a tényben tükröződik, hogy a mozgás irányára merőleges koordináta a sebességtől független minden vonatkoztatási rendszerben! A második axiómát, a fénysebesség állandóságának az elvét akkor használjuk fel, amikor azt állítjuk, hogy a derékszögű háromszög átfogója ct , hiszen a fény sebessége a laboratóriumból nézve is c .

A két esemény, a fény kibocsátása és elnyelése között a térbeli távolság nem azonos a két vonatkoztatási rendszerben. Ez természetes, mindig is így gondoltuk. A meglepőbb az, hogy a két esemény között eltelt idő is függ attól, hogy melyik vonatkoztatási rendszerből nézzük a jelenséget.

Foglaljuk össze a villanólámpa felvillanásának és a fényjel regisztrálásának a koordinátáit a két rendszerben.

	Laboratóriumban	Űrhajóban
Felvillanás	$x_1 = 0$	$x'_1 = 0$
	$y_1 = 0$	$y'_1 = 0$
	$z_1 = 0$	$z'_1 = 0$
	$t_1 = 0$	$t'_1 = 0$
Észlelés	$x_2 = vt = :x$	$x'_2 = 0 (!)$
	$y_2 = d = 1$	$y'_2 = d = 1$
	$z_2 = 0$	$z'_2 = 0$
	$t_2 = \sqrt{d^2 + x^2} / c$	$t'_2 = d/c$

Ha a relatív mozgás irányának megfelelő koordinátát figyeljük csak, akkor azt látjuk, hogy a két esemény az űrhajóban különböző időpontokban, de ugyanazon a helyen történik. A laboratóriumi rendszerből nézve a két eseményt térben elválasztja egy távolság: a fény felvillanása és az észlelése különböző helyeken történik: $x'_1 = x'_2$, de $x_1 \neq x_2$.

A táblázatra pillantva a két axiómát most is felismerjük: az első axióma (a relativitás elve) abból látszik, hogy $y_2 = y'_2$, a második axiómát (a fénysebesség állandóságát) pedig az tükrözi, hogy az utolsó sorban mindkét tört nevezője c .

A becsapódás helye (x koordinátája) és a becsapódás ideje a két vonatkoztatási rendszerben különböző. Ezek tehát a vonatkoztatási rendszertől függő mennyiségek. Van azonban olyan mennyiség, amely azonos a két koordináta-rendszerben: ez a becsapódás helyének a mozgásra merőleges koordinátája, a 4.6. ábrán a derékszögű háromszög magassága, ennek a négyzete a Pithagorász-tétel alapján:

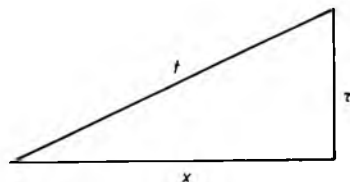
$$d^2 = (ct)^2 = (ct)^2 - x^2, \quad (3)$$

vagy ha az időt is és a távolságot is méterben mérjük, akkor

$$\tau^2 = t^2 - x^2. \quad (4)$$

Ez a mennyiség nem függ a vonatkoztatási rendszer megválasztásától. A jelentése — mint láttuk — a vonatkoztatási rendszerben álló óra által mért időt jelenti, ezért τ -t sajátidőnek is szokás nevezni (4.7. ábra). A sajátidő a megfigyelőhöz, az űrhajó utasaihoz képest nyugvó órán mért időt jelenti, annak az órának az állása ez, amely együtt utazik a megfigyelővel.

Két esemény között eltelt idő relatív: attól függ, hogy melyik vonatkoztatási rendszerből nézzük. Egy adott vonatkoztatási rendszerben „egységes” az idő: az órák szinkronizálását megoldottuk.



4.7. ábra

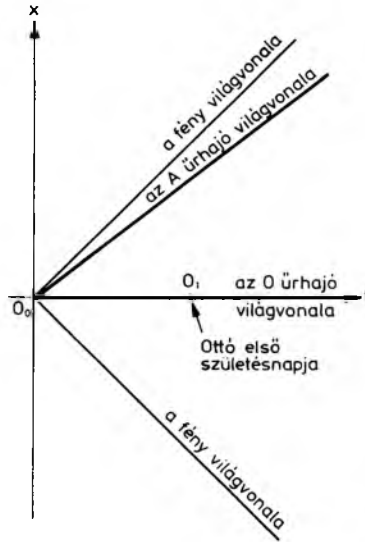
Ezért a *rendszeridő* elnevezést használjuk, hogy kiemeljük az időnek az újonnan felismert tulajdonságát, a relativitását. A rendszeridő különböző rendszerekben más és más. Két pisztolylövés között eltelt idő más és más az egymáshoz viszonyítva egyenletes mozgást végző különböző inerciarendszerekben. A fény kibocsátása és felfogása között eltelt időt is másnak méri a laboratóriumban tartózkodó megfigyelő, és másnak az űrhajóban utazó megfigyelő. Az űrhajó rendszerideje a sajátidő, mert az űrhajó viszi magával a villanólámpát és a fotocellát.^(*)

A továbbiakban a sajátidő tulajdonságaival foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy a világörben lebeg egy űrhajó, jelöljük ezt O -val. Vizsgáljuk a jelenségeket ehhez az űrhajóhoz viszonyított vonatkoztatási rendszerben (ezt \mathcal{O} -val jelöljük). Az egyszerűség kedvéért felteszünk, hogy minden mozgás egy egyenesen, az O űrhajó vonatkoztatási rendszerének az x tengelye mentén megy végbe. Ekkor ugyanis a térben-időben végbemenő mozgások az t — x koordináta-rendszerben ábrázolhatók.

A kinematikában megszokott módon ábrázoljuk a testek mozgását. A koordináta-rendszer vízszintes tengelyén ábrázoljuk a vonatkoztatási rendszer idejét, a függőleges tengelyen pedig a test helyét. Egy test mozgását ugyanaz a grafikon ábrázolja a klasszikus és a relativisztikus fizikában. A különbség mindössze annyi, hogy az érintő

^(*) A laboratóriumnak is van sajátideje. A sajátidő mindig valamilyen testé, tömegponté, így például a fotocelláé, az űrhajóé, a laboratóriumé. A vonatkoztatási rendszer ideje megegyezik a test sajátidejével, ha a test nyugszik a rendszerben.



4.8. ábra

meredeksége a relativisztikus esetben nem lehet nagyobb c -nél (4.8. ábra).

Képzeld el, hogy a $t=0$ időpontban az O rendszerének az origója mellett elszárgul egy űrhajó. Ezt A -val jelöljük. Ekkor A grafikonja egy olyan egyenes, amely átmegy a t — x koordináta-rendszer origóján (a t — x rendszer origóját O_0 -lal jelöljük, így különböztetjük meg az \mathcal{O} rendszer origójától, amelyet O -val jelölünk). Ha a távolságot és az időt egyaránt méterben vagy (fény)évben mérjük, akkor az egyenes t tengellyel bezárt szögének iránytangense az űrhajó sebessége.

Egy test mozgását az t — x koordináta-rendszerben ábrázoló grafikont a test *világvonalának* nevezzük. Az O űrhajó világvonala a koordináta-rendszer t tengelye. Tegyük fel, hogy a $t=0$ időpontban az A és az O űrhajókban egy-egy kisfiú látja meg a napvilágot, az O űrhajóban Ottó, az A űrhajóban András.

Jelöljük be az O űrhajó világvonalán Ottó első születésnapját. Nyilvánvaló, hogy ez a t tengely 1 évvel megjelölt pont-

ja. Könnyen feltűntethetjük Ottó második, harmadik stb. születésnapját jelölő pontokat is.

Vessük fel most a következő kérdést. Az A űrhajó világvonalán hol jelöljük ki András első születésnapját?

Klasszikus fizikából örökölt szemléletünknek az felelne meg, hogy Ottó első születésnapját jelentő pontot függőlegesen az A űrhajó világvonalára vetítjük. Az eddigiek alapján azonban ez helytelen. Az A űrhajóban 1 évnek mért időtartam nem egy év az O űrhajóban mérve. Esetleg arra gondolunk, hogy ahogyan Ottó születésnapja egységnyi távolságra van az $t-x$ koordináta-rendszer origójától, úgy András világvonalán is kijelölhetjük ezt a pontot: az O_0 középpontú, egység sugarú kör és az A világvonalának a metszéspontja ez (4.9. ábra). Vagyis András első születésnapját jelentő pont t és x koordinátája kielégíti a

$$\tau^2 = 1 = t^2 + x^2$$

(kör) egyenletét. Helytelen ez az elképzelés is, hiszen t és x között nem ez a kapcsolat, hanem

$$\tau^2 = 1 = t^2 - x^2, \quad (5)$$

ha $[t]$ =év, $[x]$ =(fény)év. Az (5) egy hiperbola egyenlete. A hiperbola aszimptotái a

$$t = x,$$

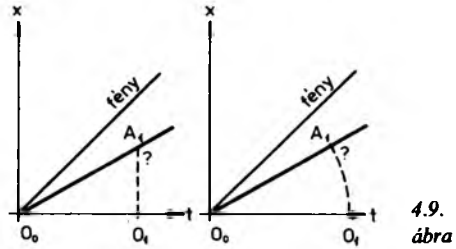
és a

$$t = -x$$

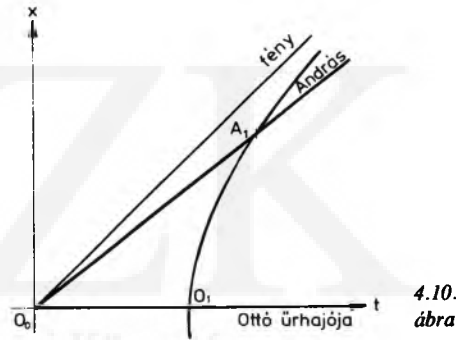
egyenletű egyenesek, ezek a $t=0$ időpontban az origóból az x tengely pozitív és negatív fele irányába kibocsátott fényjelek világvonalai.

András világvonalán úgy kapjuk az első születésnapot jelentő pontot, hogy kijelöl-

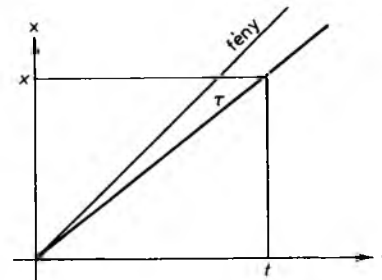
jük a világvonal és az $1 = t^2 - x^2$ egyenletű hiperbola metszéspontját. A 4.10 ábrán az O_0A_1 távolságnak az 1 éves sajátidő felel meg.



4.9. ábra



4.10. ábra



4.11. ábra

Ha például András űrhajója $0,75$ sebességgel halad el az O űrhajó mellett, vagyis $0,75$ fényév utat tesz meg 1 év alatt, akkor $1,512$ év múlva András $1,134$ fényévre van az O űrhajótól. Ekkor ez a kisfiú éppen

$$\tau = \sqrt{1,512^2 - 1,134^2} = 1$$

éves, vagyis az első születésnapját ünnepli. Ekkor Ottó már elmúlt másfél éves, András születésnapja az Ottó vonatkoztatási rendszerében a $t = 1,512$ évvel azután következik be, hogy meglátták a napvilágot.

A 4.11. ábrán látható háromszög vízszintes oldala $t = 1,512$ év, a függőleges oldala $x = 1,134$ (fény)év hosszú. A háromszög átfogójának a sajátidő felel meg, $\tau = 1$. A relativitáselmélettel ismerkedők ezt a gondolatot különösen szemléletellenesnek tartják, gyakran itt veszítik el a gondolat fonálát. Hogyan is lehet az, hogy a háromszög mindkét befogója 1 -nél nagyobb, az átfogó pedig 1 ? A Pithagorász-tétel szerint nem $1,89$ -nek ($1,89^2 = 1,512^2 + 1,134^2$) kellene lenni? De igen! A háromszög átfogója valóban $1,89$ év hosszú, de ennek nincs fizikai tartalma, csak a rajz tulajdonsága. A háromszög átfogójának *megfeleltetjük* az egységnyi sajátidőt. Egy *másik* derékszögű háromszög alapján, ennek a vízszintes oldala az űrhajó elmozdulása, függőleges oldala az űrhajóban elhelyezett villanólámpa és a fotocella távolsága, átfogója pedig a fény által megtett út a laboratórium vonatkoztatási rendszeréből nézve.

Az origóból az $(1,512; 1,134)$ ponthoz húzott szakasz hossza valóban $1,89$, de ez az űrhajóban eltelt egységnyi sajátidőt mérni. *A sajátidő egy szakasz hosszával ábrázolható, azonban a sajátidő nem tekinthető két pont távolságának.*

Egyszerű példán gondoljuk végig még

egyszer, amit tanultunk. Tegyük fel, hogy az álló űrhajó mellett elszáguld egy gyors űrhajó, amely 5 év alatt 4 fényév távolságot fut be. Eközben az űrhajóban utazó megfigyelők

$$\tau = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

évet öregedtek!

Tekintsük most az $x = 0$ helyről a $t = 0$ időpontban indított fénysugarakat. Láttuk, hogy ezek világvonalának az egyenlete $t - x = 0$ és $t + x = 0$. Mindkét fényjel világvonala 1 meredekségű, hiszen $\beta_{\text{fény}} = 1$. A fény 1 év alatt 1 fényév utat fut be. Értelmezzük a fény sajátidejét a (4) összefüggéssel. Határozzuk meg ezután a fénysugár sajátidejét:

$$\tau_{\text{fény}} = \sqrt{t^2 - x^2} = 0.$$

A fényfelvillanás sajátideje tehát nulla!

Gondoljuk el, hogy mit is jelent ez! A Napból egy fénysugár indul a Földre. Mint ismert, $8,3$ percre, mintegy $1,5 \cdot 10^{11}$ fényméter időre van szükség ahhoz, hogy a fény a Föld felszínére érjen. Ezek szerint a fénysugár $8,3$ percet él? Ahogy vesszük! A földi megfigyelő valóban azt tapasztalja, hogy a fény $8,3$ perc alatt ér a Napból a Földre. A fényvel együtt mozgó óra, azonban — ha van ilyen — nulla sajátidőt mér. A fény — a saját óráján mérve — igazán rövid életű.

Az a fénysugár, amely valamely távoli csillagrendszerrel több évszázada elindult a Földünk felé, nem „élvezheti” a hosszú utazás örömeit, mert számára — a saját óráján mérve — csak egy pillanat, és máris célba ért és elnyelődött. A fény valóban „tiszavirág életű”.

Ez azonban egy igen izgalmas kérdést vet fel: hogyan lehetséges, hogy a fény a saját koordináta-rendszerében nulla idő

alatt a Földre ér? Milyen gyorsan mozog felé a Föld? Ez a kérdés. *A távolság mérésének a mind ez ideig megoldatlan feladatához vezet.* A megoldásból látszik, hogy az idő és a távolság mérése egymással szorosan összefüggő kérdés.

Hogyan kell megmérni mozgó szakasz hosszát álló mérőeszközzel? Tűzzük ki célul ennek a problémának a megoldását. Tegyük fel, hogy egy A űrhajó $\beta < 1$ sebességgel elhalad az O űrhajó mellett. Az A űrhajón a hossz tengellyel párhuzamosan nyugszik egy rúd. Ennek a rúdnak a hosszát az űrhajó utasai L_0 -nak mérik. Ez a feladat semmi új ismeretlent nem igényel. Az I. rész 1.1.2. pontjában részletesen leírtuk a mérés módszerét. Jelöljük most L -lel a rúd ismeretlen hosszát az O űrhajó \mathcal{O} vonatkoztatási rendszeréből nézve.

A rúd O űrhajóban mért hosszának meghatározását *az időmérésre vezetjük vissza.* Gondoljuk meg, hogy már leírtuk azokat a módszereket, amellyel megadhatók két esemény között eltelt idő az \mathcal{O} és az \mathcal{A} vonatkoztatási rendszerből nézve. Legyen ez a két esemény a következő.

Az első esemény: az \mathcal{A} rendszerrel együtt mozgó rúd eleje elhalad az \mathcal{O} rendszer origójában tartózkodó megfigyelő mellett. A második esemény: a rúd vége elhalad az \mathcal{O} rendszer origója mellett. A két esemény az \mathcal{O} rendszerből nézve ugyanazon a helyen történik. Az \mathcal{O} rendszerben tartózkodó megfigyelő egyszerűen meghatározza a két eseményt elválasztó időtartamot. Elindítja a stopper óráját akkor, amikor a rúd eleje mellette halad el, és megállítja az órát, amikor a vége egybeesik az \mathcal{O} origójával. Jelöljük ezt az időtartamot τ -val: a laboratóriumi megfigyelők sajátidejében mért időtartam. Az A űrhajón utazó megfigyelők ezt az időtartamot t -nek mé-

rik. Láttuk, hogy

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Az \mathcal{O} rendszerben tartózkodók szerint az L hosszúságú rúd β sebességgel τ idő alatt halad el mellettük. Az \mathcal{A} rendszerből úgy látták, hogy az \mathcal{O} rendszer origója β sebességgel t ideig mozog L_0 hosszúságú úton. Így

$$\beta = \frac{L_0}{t} = \frac{L}{\tau},$$

és ezért

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

A rúd hosszának a mérőszáma a rúdhoz viszonyítva mozgó vonatkoztatási rendszerből mérve nagyobb, mint abból a vonatkoztatási rendszerből nézve, amelyben a rúd áll. Az utóbbit, a rúd álló vonatkoztatási rendszerben mért hosszát — *nyugalmi hossz*nak, vagy *saját hossz*nak nevezzük.

A hosszmérést visszavezettük az idő mérésére. Fontos szerepe van két eseménynek. Az egyik: a rúd eleje elhalad az \mathcal{O} origója mellett. A másik: a rúd vége éppen az \mathcal{O} rendszer origójával esik egybe. A két esemény közötti időtartamot az \mathcal{O} rendszerben sajátidőként mérjük, hiszen a két esemény \mathcal{O} -ból nézve ugyanott történik, az \mathcal{A} rendszer megfigyelői viszont a rúd hosszát mérik saját hosszuknak. Az \mathcal{O} rendszerben a rúd mozgási mérőszámát határozzák meg, az A rendszerben pedig a két esemény közötti mozgási időtartamot mérik. A mozgási és a saját időtartam közötti összefüggés így öröklődik a mozgási és a saját-hossz közötti kapcsolatra.

┌ Képzeld el, hogy egy törvívó 0,8 méter hosszú törrel vív csatát. Olyan gyors

mozdulattal szúr az ellenfél felé, hogy a tör sebessége a fénysebesség 99%-a. Ekkor az ellenfél

$$L = 0,8 \sqrt{1 - 0,99^2} = 0,11 \text{ m},$$

azaz 11 cm hosszúnak észleli a felé közeledő tört.

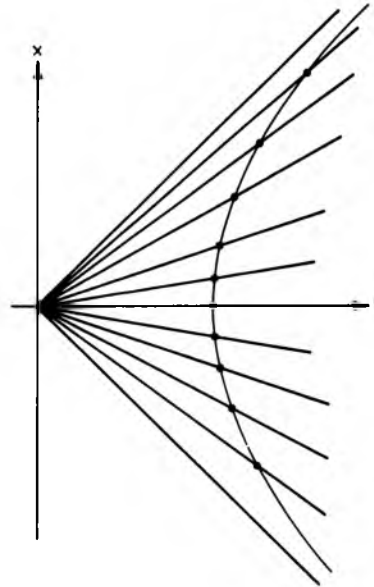
¶ Egy kerékpáros 270 000 km/s sebességgel kerékpározik. És így meg kell tennie 16,2 millió kilométert. Ezt persze az illuzzió kedvéért mondjuk, a valóságban ilyen hosszú kerékpárpálya nincsen, de nincs olyan kerékpáros sem, aki ilyen virtuóz módon biciklizne. A pálya szélén álló sportbíró szerint a kerékpáros ezt a távolságot 60 másodperc alatt teszi meg. A kerékpáros szerint a mozgás ideje

$$(60 \cdot 3 \cdot 10^8)^2 - (1,62 \cdot 10^{10})^2 = (3 \cdot 10^8 \tau)^2$$

alapján $\tau = 26,15 \text{ s}$. A kerékpáros a CÉL feliratot 270 000 km/s sebességgel látja közeledni. Világos, hogy ez úgy lehet, ha a CÉL felirat a szeme előtt $26,15 \cdot 2,7 \cdot 10^5 = 7,06 \cdot 10^6 \text{ km}$, azaz 7 millió km távolságban lebeg. (Az előbb említettük, hogy a fény sajátideje nulla. Ez azt jelenti, hogy valamely távoli égitestről a Föld felé irányuló fénysugár a Földet nulla távolságra észleli. Így teheti meg ezt az utat fénysebességgel nulla idő alatt.)

Térjünk vissza a sajátidő értelmezéséhez, és a tulajdonságaihoz.

Az O űrhajó vonatkoztatási rendszerének x és t tengelyét látjuk a 4.12. ábrán. Megrajzoltuk az origóból a $t=0$ időpontban az x tengely mindkét irányába induló fényfelvillanások világvonalát is. Az O űrhajó világvonala a koordináta-rendszer t tengelye. Az ábrán az egységnyi sajátidőnek megfelelő hiperbola is látható. Ha az origóból a $t=0$ időpontban különböző űrhajókat indítunk, akkor ezeknek a világvonala egy-egy pontban metszi a hiperbo-



4.12. ábra

lát. Ez a metszéspont úgy interpretálható, mint az űrhajósok óráján annak az egyéves évfordulója, hogy elhaladtak az O űrhajó mellett. Az űrhajók sebessége nem lehet akármilyen nagy. A világvonalaik az $x=t$ és az $x=-t$ egyenletű egyenesek között haladnak. Ez azt jelenti, hogy a rendszeridő-egységre jutó elmozdulás nem lehet nagyobb a fény által időegység alatt megtett útnál. A hiperbola és az origón átmenő világvonal metszéspontja azonban egyre távolabb kerül a hiperbolán, egyre nagyobb (természetesen a fénysebességnél kisebb) sebességű űrhajókat indítva. A metszéspont koordinátái egyre nagyobbak.

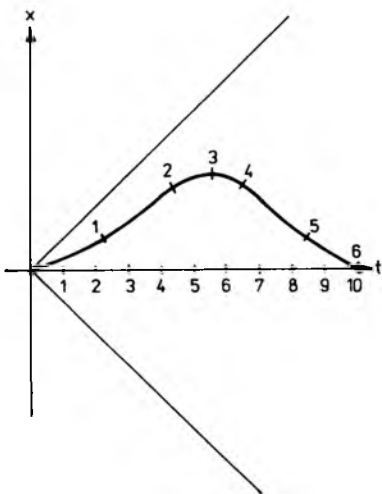
A sajátidő-egységre eső elmozdulás tehát akármilyen nagy lehet. Ennek a ténynek a továbbiakban a dinamikai okoskodásokban nagy jelentősége lesz.

Ha egy részecske áll a vonatkoztatási rendszerben, akkor a világvonala vízszintes szakasz. Ebben az esetben $\Delta\tau = \Delta t$, vagyis a sajátidő megegyezik a rendszer óráin mért idővel.

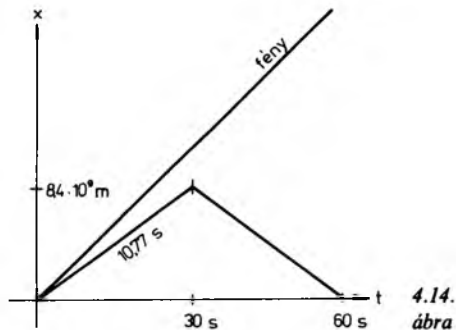
Rajzoljuk most meg egy origóból induló, felgyorsuló, majd lelassuló, azután az origóba visszatérő részecske pályáját, más szóval a világvonalat. Osszuk fel a görbe vonalat olyan részekre, amelyek jól közelíthetők a 4.13. ábrán látható szelőkkel. Ekkor a mozgás minden kis szakaszán kiszámíthatjuk a mozgáshoz szükséges sajátidőt. Írjuk rá a sajátidőtartamot a világvonalnak a szakaszaira. Látható, hogy minél inkább párhuzamosabb a világvonal a fény világvonalával, annál kisebb a megfelelő szakaszhoz tartozó sajátidő. Ha világvonal vízszintes, tehát a t tengellyel párhuzamos, akkor a sajátidő megegyezik a rendszeridővel.

Számoljuk össze, hogy mennyi ideig tartott a mozgás sajátidőben és rendszeridőben mérve. Az időtengelyről lemérhető, hogy a mozgás ideje 10 fényméter. Sajátidőben mérve azonban csak 6 fényméter.

Hírhedt paradoxon megoldásának a nyomára bukkantunk! A híres ikerparadoxon szerint két ikertestvér közül az egyik — mondjuk János — 20 éves korában űrhajóba ül, és körutazást tesz a világűrben. Ikertestvére, István, eközben a Földön



4.13. ábra



4.14. ábra

várja. Már jócskán eljárt felette az idő, az unokáik is felnőttek, amikor megérkezik az űrhajó. Kiszállt belőle János, jó erőben, 30 évesen.

Hihetetlen történet! Az is különös, hogy — a relativitás elve szerint (ahogy mondanunk szokás) — János pontosan annyit öregszik István szemszögéből nézve, mint István János nézőpontjából. Mégsem egyenértékűek a vonatkoztatási rendszerek?! Sohasem mondtuk, hogy egyenértékűek. Csak az inerciarendszerek egyenértékűek. A mi példánkban azonban csak az István nevű testvér vonatkoztatási rendszere inercia-rendszer, Jánosé nem. János az utazás közben felgyorsult, lelassult, megfordult, visszatért a Földre. Az ilyen folyamatok azt eredményezik, hogy a sajátidő lassabban telik, mint a rendszeridő.

┌ Tanulmányozzuk át a következő egyszerű problémát! Tegyük fel, hogy az O űrhajó vonatkoztatási rendszerében a $t=0$ időpontban az origón keresztül elhalad egy A űrhajó. A sebessége $280\,000$ km/s. Az A űrhajó 30 másodpercig mozog, ez fényméterben mérve $9 \cdot 10^9$ méter. Az A űrhajó $x = 8,4 \cdot 10^9$ méter távolságra jutott ez idő alatt. Itt megfordult gyorsan és visszatért az O űrhajóhoz, ugyanazzal a sebességgel, mint amivel eltávolodott (4.14. ábra).

Az A űrhajó utasainak az óráján a távoldás ideje

$$\sqrt{(9 \cdot 10^9)^2 - (8,4 \cdot 10^9)^2} = 3,23 \cdot 10^9 \text{ fényméter.}$$

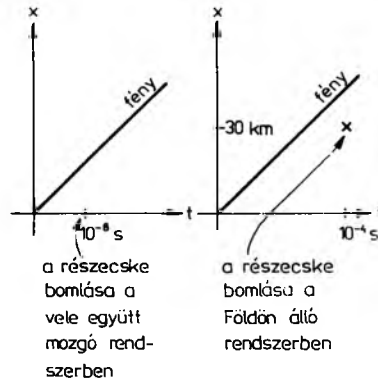
Másodpercre átszámítva ez 10,77 s. A visszaforduló űrhajó 30 másodperc alatt ér vissza az O űrhajóhoz, ez sajátidőben számítva 10,77 másodperc. Az A űrhajó utasai tehát 21,54 másodpercet öregszenek, miközben az O űrhajón lévők 60 másodperccel lettek öregebbek.]

4.1.3. Kinematikai mennyiségek transzformációja

A Föld légkörének a legfelső részében — 20—30 km magasságban — a világűr-ből érkező kozmikus sugárzás hatására olyan elemi részecskék, pionok, müonok keletkeznek, amelyek igen rövid élettartamúak. Laboratóriumban keletkezett ilyen részecskék átlagos élettartama 10^{-8} másodperc nagyságrendű. Ennyi idő alatt a Föld felszíne felé megközelítően fénysebességgel közeledő pionok néhány méteren belül elbomlanak, mintegy 30 méter utat tesznek meg.

A tapasztalat szerint azonban ezek a részecskék a légkör alsó részeiben is megfigyelhetők. Ez a tény a relativitás elméletének az egyik legfontosabb bizonyítéka. Az előző egyszerű számításban azonban hiba van: a részecskék a saját órájukon mérve élnek átlagosan 10^{-8} másodpercig. A talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a részecskék élettartamát sokkal hosszabb idejűnek mérik az órák.

A 4.15. ábráról látszik, hogy a részecskéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben az élettartam sajátideje megegyezik a rend-



4.15. ábra

szeridővel, a földön elhelyezkedő megfigyelő szempontjából is 10^{-8} s a sajátidő, a pion bomlásának a helyét és idejét ábrázoló pont a 10^{-8} s sajátidőhöz tartozó hiperbolán van, a fény világvonalához igen közel. Ezért a rendszeridő sokkal nagyobb, 10^{-4} s, a bomlás helykoordinátája pedig mintegy 30 km. (A részecske saját idejében mérve 10^{-8} másodpercig él.) A Földet majdnem fénysebességgel közeledni látja, azonban a talajt néhány méter távolságra észleli a keletkezése pillanatában. A pion szempontjából nézve ez a magyarázata annak, hogy mégis eljut a légkör legalsó rétegeibe is. Idézzük fel azt a már említett tényt, hogy az időtartamok meghosszabbodása a mozgó koordináta-rendszerekben és a távolságok mozgási mérőszámának a rövidülése összetartozó állítások: egymást kiegészítik, egymást kölcsönösen feltételezik.

Szeretnénk pontosan meghatározni a pion bomlásának a koordinátáit a laboratórium vonatkoztatási rendszerében. Figyeljünk fel arra, hogy ez új probléma. Eddig ugyanis azt vizsgáltuk, hogy hogyan lehet meghatározni két esemény távolság- és időkoordinátáinak a különbségét, és miként lehet ezekből a vonatkoztatási rend-

szer megválasztásától független állandót számolni. Ez a sajátidő, két esemény „távolságának” a mérőszáma.

Most tehát új típusú kérdés vetődik fel. Adottak egy esemény koordinátái egy vonatkoztatási rendszerben, és célul tűztük ki, hogy ugyanennek az eseménynek a koordinátáit meghatározzuk egy másik, az előzőhöz viszonyítva egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszerben.

Tegyük fel tehát, hogy adott két inercia-rendszer, jelöljük ezeket \mathcal{K} -val és \mathcal{K}' -vel. Az egyszerűség kedvéért úgy gondoljuk, hogy a két rendszer origója a kezdeti időpontban megegyezik, a \mathcal{K}' rendszer origója a \mathcal{K} rendszer x tengelye mentén mozog, \mathcal{K} -hoz viszonyítva v sebességgel. A két rendszer első tengelye egyirányú, a második és harmadik tengelyek párhuzamosak. Ekkor, mint láttuk, $y = y'$ és $z = z'$. Tegyük fel, hogy a \mathcal{K} rendszer x tengelyén adott egy esemény. A koordinátája a \mathcal{K} rendszer megfigyelői által mérve x , az ideje pedig a rendszer óráin mérve t (4.16. ábra).

A két rendszer egymáshoz viszonyított mozgására támaszkodva határozzuk meg ugyanennek az eseménynek a koordinátáit a \mathcal{K}' vonatkoztatási rendszerben nézve, azaz határozzuk meg az x' és t' koordinátákat.

Mielőtt a feladat megoldására rátérnénk, közbevetőleg egy gondolatnyi kitérőt teszünk. A klasszikus mechanikai foga-

lom- és problémakörében is felvethető ez a kérdés. A \mathcal{K}' rendszerben mért x' koordináta és t' idő így fejezhető ki a \mathcal{K} rendszerben mért x és t koordinátákkal:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (1)$$

Az x és a t koordináták x' és t' koordinátákká alakítását *Galilei-transzformációnak* nevezzük. A helyességének a belátása nem okozhat nagyobb nehézséget, mint egy egyszerű kinematikai feladatkörből származó feladat megoldása.^(*) Most térjünk vissza a felvetett kérdéshez.

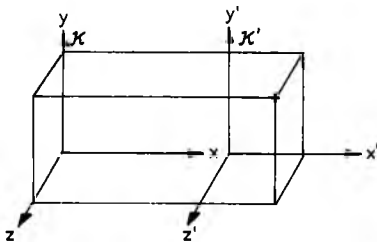
Feltehetjük, hogy x' és t' az x -től és t -től lineárisan függ, a következőképpen:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt, \\ t' &= Cx + Dt, \end{aligned} \quad (2)$$

ahol A , B , C , D ismeretlen paraméterek, a feladat éppen ezeknek a meghatározásából áll. Természetesen ezek a mennyiségek a két rendszer egymáshoz viszonyított sebességétől függenek.

Az x' , t' és az x , t koordináták között a lineáris kapcsolat feltételezése indokolt. Nem lehetséges ugyanis, hogy például (2)-ben t helyett t^2 szerepeljen, ekkor ugyanis az egyik rendszerben egyenletesen mozgó pontszerű test a másikban gyorsulna, ez pedig ellene mond a relativitás elvének és az inerciarendszerek egyenértékűségének.

Most a (2)-ben szereplő négy paraméter meghatározására térünk rá. A gondolatmenetünk fő elemeit előre összefoglaljuk.



4.16. ábra

^(*) A Galilei-transzformáció „helyessége” a $t' = t$ feltevésen, az abszolút idő hipotézisének alapszik.

1. A \mathcal{K}' -ben nyugvó pont esetén

$$v' := \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = 0.$$

2. Ugyanezen pont sebessége a \mathcal{K} rendszerben

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

3. A transzformáció paramétereinek a \mathcal{K} és \mathcal{K}' vonatkoztatási rendszer felcserélése esetén is érvényesnek kell lenni, csak azt kell figyelembe venni, hogy a \mathcal{K} a \mathcal{K}' -höz viszonyítva $-v$ sebességgel mozog.

4. A fény sebessége mindkét vonatkoztatási rendszerben c .

(Ha ezen négy feltevés közül az utolsó helyett azzal a hipotézissel élünk, hogy a fény sebessége végtelen nagy, akkor a Galilei-transzformációhoz jutunk.)

A (2) alapján

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{A\Delta x + B\Delta t}{C\Delta x + D\Delta t} = \frac{A \frac{\Delta x}{\Delta t} + B}{C \frac{\Delta x}{\Delta t} + D},$$

vagyis

$$0 = \frac{Av + B}{Cv + D},$$

és innen

$$B = -Av \quad (3)$$

(nyilvánvaló, hogy $Cv + D > 0$).

Válasszunk most olyan pontot, amely a \mathcal{K} rendszerben nyugszik. Ekkor

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0,$$

és ez a pont \mathcal{K}' -hez viszonyítva $-v$ sebes-

séggel mozog:

$$-v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{A \frac{\Delta x}{\Delta t} + B}{C \frac{\Delta x}{\Delta t} + D},$$

tehát

$$B = -Dv. \quad (4)$$

A (3) és (4) egyenlőségéből azt kapjuk, hogy $A = D$,

és ugyancsak (3) és (4) alapján a (2)-ből

$$x' = A(x - vt), \quad (6)$$

$$t' = A\left(\frac{C}{A}x + t\right).$$

Világos dolog, hogy ennek a transzformációnak érvényesnek kell lenni \mathcal{K} és \mathcal{K}' szerepcseréje esetén is. A különbség mindössze annyi, hogy a \mathcal{K} és \mathcal{K}' -höz viszonyítva $-v$ sebességgel mozog, a (6) tehát

$$x = ?(x' + vt'),$$

$$t = ?(x' + t')$$

alakú. Az A és a C/A paraméterek helyére azért írtunk kérdőjelet, mert még meg kell fontolnunk, hogy a sebesség előjelváltása miként befolyásolja az A és C mennyiségeket.

Először is nyilvánvaló, hogy ha a két rendszer első tengelye egyirányú és pozitív x -hez pozitív x' tartozik, akkor az A paraméter nem érzékeny a sebesség előjelére. Másrészt $Cv + D = Cv + A > 0$, így $Cv/A + 1 > 0$, ha tehát v -ről $-v$ -re térünk át, akkor a C paraméter -1 -szeresével kell számolnunk. Így

$$x = A(x' + vt'), \quad (7)$$

$$t = A\left(-\frac{C}{A}x' + t'\right).$$

Így erre az eredményre kell jutnunk akkor is, ha (6)-ból egyszerűen kifejezzük x -et és c -t. Helyettesítsük a (7) első egyenlőségébe a (6) egyenlőspárt:

$$\begin{aligned} x &= A(x' + vt') = \\ &= A^2 \left[(x - vt) + \left(\frac{Cv}{A} x + vt \right) \right], \\ x &= A^2 \left(1 + \frac{Cv}{A} \right) x, \end{aligned}$$

tehát

$$A^2 \left(1 + \frac{Cv}{A} \right) = 1,$$

és innen

$$\frac{C}{A} = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right).$$

Egyetlen paraméterrel dolgozunk tovább, az

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt), \\ t' &= A \left[\frac{1}{v} \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) \right] x + t \end{aligned} \quad (8)$$

transzformációs képletek csak az A paramétert tartalmazzák. Használjuk ki most a fénysebesség állandóságának az elvét.

Bocsássunk most ki egy fénysugarat a $t = t' = 0$ időpontban, amikor a két rendszer origója éppen egybeesik. Egy fotocella felfogja a fénysugarat, és felrobbant egy kis bombát. Jelöljük ennek az eseménynek a koordinátáit \mathcal{K} -ban x -szel és t -vel, \mathcal{K}' -ben x' -vel és t' -vel. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= c \\ \frac{x'}{t'} &= c. \end{aligned} \quad (9)$$

A (8) egyenlőségek alapján:

$$\frac{x'}{t'} = \frac{A(x - vt)}{A \left[\frac{1}{v} \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) \right] x + t}.$$

A jobb oldalon osszuk el a számlálót és a nevezőt is t -vel és vegyük figyelembe (9)-et:

$$c = \frac{c - v}{\frac{1}{v} \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) c + 1}.$$

Fejezzük ki ebből az egyenlőségből A -t. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

és ezért

$$\frac{C}{A} = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) = -\frac{v}{c^2}.$$

A keresett transzformációs képletek:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{-\frac{v}{c^2} x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (10)$$

és az inverz transzformáció képletei:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ t &= \frac{\frac{v}{c^2} x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (11)$$

A (10) és (11) transzformációt *Lorentz-transzformációnak* nevezzük. Mivel

$$1 - \frac{v^2}{c^2} > 0,$$

a fénysebesség a relativitás elmélete szerint maximális sebesség. Inerciarendszerben semmilyen anyagi tárgy a vákuumbeli fénysebességnél nagyobb sebességgel nem mozoghat.

Igen sokszor kényelmes a sebesség helyett a $\beta = v/c$ sebességarány használata. A Lorentz-transzformációt leíró képleteket írjuk át, helyettesítsünk v helyére mindeütt βc -t:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} t, \\ t' &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t. \end{aligned} \quad (12)$$

Az inverz transzformáció:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x' + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} t', \\ t &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x' + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t'. \end{aligned} \quad (13)$$

A Lorentz-transzformáció fontos következményével ismerkedünk most meg. Tegyük fel, hogy egy test a \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerben a t időpontban az x helyen $u = (\Delta x)/(\Delta t)$ sebességgel mozog. Ugyanez a test a \mathcal{K}' rendszerben a t' időpontban, az x' helyen $u' = (\Delta x')/(\Delta t')$ sebességgel rendelkezik. A Δx , Δt és $\Delta x'$, $\Delta t'$ megváltozások között a (10) transzformációs képletek teremtenek kapcsolatot, ahol a \mathcal{K}' vonatkoztatási rendszer v sebességgel mozog a \mathcal{K} -hoz viszonyítva.

A (10) egyenlőségek alapján

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Osszuk el a két egyenlőséget egymással:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\Delta t' - \frac{v \Delta x'}{c^2}}.$$

Ezután az így kapott tört számlálóját és nevezőjét is osszuk el Δt -vel:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \frac{v}{c^2}}.$$

Innen

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \quad (14)$$

Ez a sebességösszeadás szabálya a relativitás elmélete szerint.

¶ Világítsuk meg a (14) alkalmazását egy egyszerű példával. Tegyük fel, hogy három űrhajó mozog egy egyenes mentén. Az elsőben András, a másodikban Béla, a harmadikban Cecília ül. András vonatkoztatási rendszeréből mérve Béla 200 000 km/s sebességgel távolodik, Béla pedig azt észleli, hogy Cecília 150 000 km/s sebességgel mozog — Bélához képest ellentétes irányba, mint András.

Ekkor Cecília sebessége Andráséhoz képest:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + \frac{v_{AB}v_{BC}}{c^2}} = \frac{200\,000 + 150\,000}{1 + \frac{3 \cdot 10^{10}}{(3 \cdot 10^5)^2}} = 262\,500 \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

jóval kisebb, mint azt a klasszikus fizika alapján várnánk: Az I. rész 1.1.4. pontjában rávilágítottunk arra, hogy a sebességösszeadás mechanikában érvényes $v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$ szabálya azon múlik, hogy minden megfigyelő ugyanazzal az órával mér, hogy a térben az egymáshoz képest mozgó megfigyelők számára az idő mértéke megegyezik. A relativitás elmélete szerint azonban András és Béla vonatkoztatási rendszerében mások a rendszeridők.]

Az időtartamok és a hosszúságok mozgási és nyugalmi mérőszámai akkor nem különböznek lényegesen egymástól, ha a sebességek a fény sebességénél sokkal kisebbek. Ugyanígy: a sebesség összeadásának a (14) szabálya lényegében ugyanazt az eredményt adja, mint a „lineáris” összeadási szabály, ha az u , v sebességek a fény sebességénél sokkal kisebbek. Kis sebességeknél a Lorentz-transzformáció összefüggései is a Galilei-transzformációt szolgáltatják.

Szokásos kifejezéssel élve: a relativitáselmélet a $c \rightarrow \infty$ határesetben átmegy a nem relativisztikus fizikába; a relativitáselmélet határesetete a nem relativisztikus fizika. Ennek azonban biztosan nincs értelme. Nincs értelmezve, nem is lehet általában értelmezni, hogy mit jelent az, hogy egy elmélet átmegy a másikba.

Más kérdés, hogy a Lorentz-transzformációt leíró összefüggésekben az állandó és univerzális fénysebesség helyére egy vál-

tozót helyettesítünk, és ezzel a végtelenben vett határértéket vizsgáljuk. A Lorentz-transzformációt leíró összefüggés így átmegy a Galilei-féle transzformációba.

4.1.4. A Minkowski-féle téridő

Ebben a pontban a relativitáselmélet kinematikai jellegű állításait, a térrel és az idővel kapcsolatos megállapításait szemléltetjük néhány példával.

Hasznos lesz áttekinteni a felhasznált fogalmakat. Ha adott egy anyagi test, mondjuk egy O űrhajó, akkor ehhez az űrhajóhoz egy vonatkoztatási rendszer tartozik, egy térbeli x — y — z derékszögű koordináta-rendszer, amelyet \mathcal{O} -val jelölünk. Az \mathcal{O} origójában nyugszik az O űrhajó, hiszen egyetlen test sem mozog saját magához képest. Ezért gyakran azonosítjuk az \mathcal{O} rendszer origóját az űrhajóval és O -val jelöljük ezt is. Ebben a pontban mindvégig feltesszük, hogy az összes test az \mathcal{O} rendszer x tengelye mentén mozog, illetve csak ilyen mozgások tanulmányozására vállalkozunk. Az egyenes vonalú mozgások grafikonját a t — x koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Ebben a koordináta-rendszerben egy pont egy pillanatszerű, pontszerű eseményt ábrázol, mint amilyen egy villámcsapás vagy egy pisztolylövés. Az x tengely mentén mozgó testek grafikonja (amit a relativitáselméletben világvonalnak nevezünk) egy egyenes. Az origóban nyugvó O űrhajó világvonala a t tengely. A t — x koordináta-rendszer origóját általában O_0 -lal jelöljük. Az O_0 pont egy rendezett pár: első komponense a $t=0$ időpont (ekkor indították az órákat az O űrhajóban, és az \mathcal{O} rendszer minden más pontjában), második komponense az $x=0$

hely (az űrhajó ebben a pontban nyugszik).

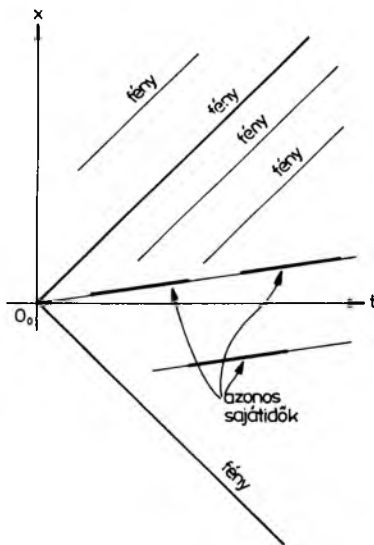
A t és az x tengely által meghatározott síkot Minkowski-síknak vagy téridősíknak nevezzük. [Ha a mozgás nem egydimenziós, akkor mozgás ábrázolására a (t, x, y, z) számnégyesek összességét használjuk, amelyet Minkowski-térnek vagy téridőnek nevezünk.]

Egy szóhasználatot kapcsolatos megjegyzés: Adott az \mathcal{O} vonatkoztatási rendszer x tengelyén az x pont, és adott az \mathcal{O} óráin mérve egy t időpont. Az \mathcal{O} -nak megfelelő Minkowski-síkon a (t, x) párt egy P ponttal ábrázoljuk. Ha az \mathcal{O} rendszer $(x, 0, 0)$ pontján, az \mathcal{O} rendszeridejében mérve a t időpontban áthalad egy űrhajó, akkor ennek világvonalára illeszkedik a P pontra. Ezt néha a következő szemléletes, de pontatlan formában fogalmazzuk meg: „A téridő síkon adott a P pont. Ezen a ponton a t időpontban áthalad egy űrhajó.”

A téridő geometriájának az alapelveit már ismerjük, most azonban — némileg más szempontból — áttekintjük ezeket. Először is rögzítsük azokat a gondolatokat, amelyeket az ábrázoláshoz, a rajzoláshoz felhasználunk (4.17. ábra).

1. A téridő síkon a fény mozgását ábrázoló világvonal egyenes.
2. Két, egyirányban haladó fényjel világvonalára párhuzamos; a fényjelek nem érik utol egymást, egymáshoz képest nem távolodnak el.
3. Inerciarendszerben szabadon mozgó tömegpont világvonalára egyenes.
4. Egy tömegpont világvonalán — és vele párhuzamosan minden világvonalon — az azonos hosszúságú szakaszok azonos sajátidőtartamokat jelentenek.

Először példaként tekintsük át a következő egyszerű problémát. Tegyük fel, hogy

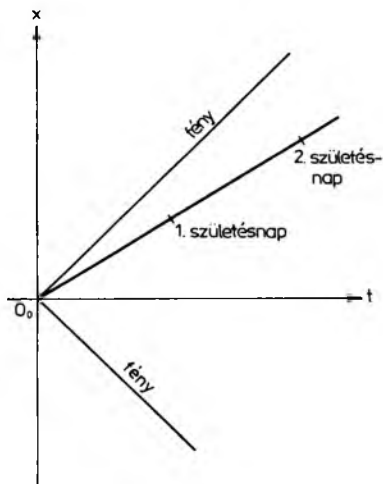


4.17.
ábra

egy űrhajó a $t=0$ időpontban áthalad a vonatkoztatási rendszer origóján. Ebben a pillanatban a kapitány feleségének gyermeke született. A kapitány örömeiben egy fényjelet bocsát ki minden irányban. A téridő síkon ábrázoltuk az űrhajó és a két fényjel (előre és hátra haladó) világvonalát (4.18. ábra). Az űrhajó világvonalán bejelöltük a gyermek első születésnapját. Ezután könnyűszerrel feltüntethetjük a másodikat, a harmadikat stb. születésnapokat ábrázoló eseményeket is.]

„Az előző példában szereplő űrhajót nevezzük A -nak és a $t=0$ időpontban született gyermeket Andrásnak. Az A űrhajó világvonalán most az A_1 pont jelöli az első születésnapot. Tegyük fel azonban, hogy Andrással egyidőben — amikor az A űrhajó elhalad az O pont mellett — a vonatkoztatási rendszer origójában nyugvó űrhajóban is születik egy kisfiú, Ottó. Tűzzük ki célul Ottó egyéves születésnapjának a megszerkesztését.

Láttuk, hogy a $t-x$ koordináta-rendszer origójától (O_0 -tól) egy évnnyi sajátidőre



4.18. ábra

levő pontok a téridő síkon egy hiperbolán helyezkednek el. A feladat tehát annak a pontnak a meghatározása a t tengelyen, amely rajta van az egységnyi sajátidőnek megfelelő hiperbolán is. Az A_1 pont koordinátáit jelöljük t -vel és x -szel: András az O űrhajótól x távolságra van, amikor az első éves születésnapjára sor kerül az űrhajójában, és közben az origóban nyugvó űrhajó óráján t idő telt el. Tanultuk, hogy $\tau^2 = t^2 - x^2$.

Ez lehetőséget ad megszerkesztésére: rajzoljunk egy t átmérőjű kört (4.19. ábra). Az átmérő egyik végpontjából messzük el a körívet x sugarú körívvel. A két körív metszéspontjának és az átmérő másik végpontjának a távolsága — Pitagorasz tétele szerint éppen — τ -val egyenlő. Ezt a szakaszt kell tehát felmérnünk az origóból a t tengelyre, akkor Ottó első születésnapját ábrázoló pontot kapjuk.

Ezután vázlatosan megrajzolhatjuk az egyéves sajátidőnek megfelelő hiperbolát.

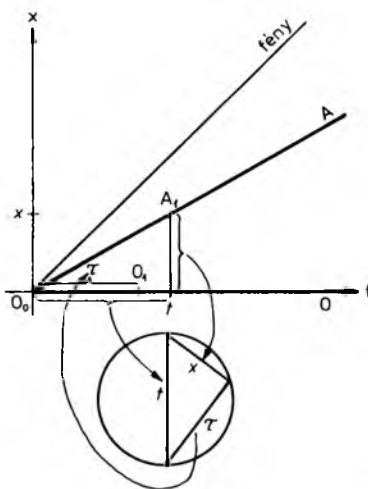
┌ Gondoljuk el most, hogy Ottó és András születésével egy időben ugyanabban a pontban tartózkodott a B űrhajó is, és a B

űrhajón a $t=0$ időpontban egy harmadik kisgyermek, egy kislány születik, Barbara. Az egységshiperbola segítségével könnyen megjelölhetjük a B világvonalán Barbara első születésnapját (4.20. ábra).

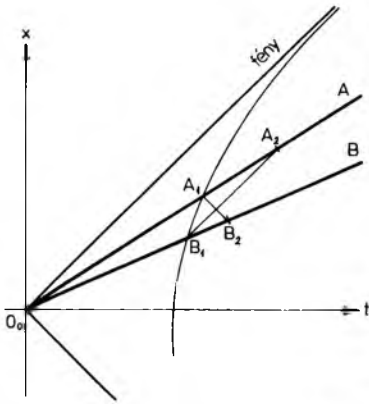
Képzelnék most el, hogy András első születésnapján az A űrhajó kapitánya egy fényjelet bocsát ki a B űrhajó felé, az a B űrhajóhoz érkezik. Ezt az eseményt jelöljük B_2 -vel. Barbara születésnapján a B űrhajó kapitánya egy másik fényjelet bocsát ki A felé. Ez az A űrhajóra érkezik. Ennek az eseménynek megfelelő pont az A_2 . Az A és B űrhajók szerepe teljesen szimmetrikus, ezért

$$\frac{\overline{O_0 A_2}}{\overline{O_0 A_1}} = \frac{\overline{O_0 B_2}}{\overline{O_0 B_1}} \quad \perp$$

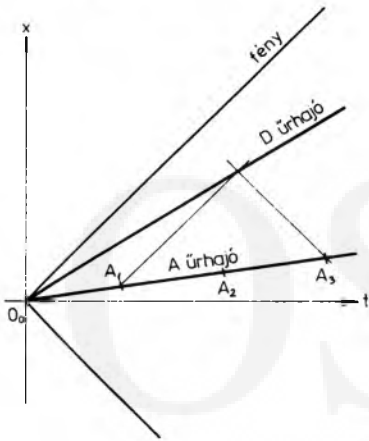
┌ Foglalkozzunk ismét az A űrhajón született Andrással. Amikor az O_0 ponton A áthaladt, ugyanakkor elhaladt ott a D űrhajó is. Az A űrhajó világvonala ismert, és ismert András első születésnapját ábrázoló A_1 pont is. Nem ismerjük azonban D világvonalát, azt azonban tudjuk, hogy András édesapja, az A űrhajó kapitánya,



4.19. ábra



4.20.
ábra



4.21.
ábra

András első születésnapján egy fényjelet bocsátott ki D felé, amely azon visszaverődve az A űrhajóhoz a harmadik születésnapon érkezik vissza.

A D űrhajó világvonala már megszerkeszthető: az A_1 ponton áthaladó — jobbra haladó fényjel —, amely párhuzamos a $t=0$ időpontban kibocsátott jobbra haladó fényjellel. Az A_3 pontba megérkező fényjel párhuzamos a $t=0$ időpontban kibocsátott — balra haladó fényjellel. E két fény sugar világvonalaára fektetett egyenesek metszéspontja a D űrhajó világvonalaán van. A metszéspontot az O_0 ponttal összekötve a D világvonalaát kapjuk (4.21. ábra).]

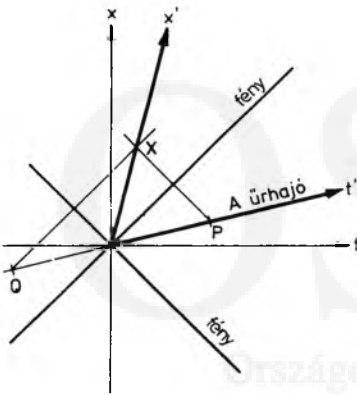
Induljunk ki abból a következő példánál, hogy adott az O nyugvó űrhajó Minkowski-rendszerében egy A űrhajó világvonala. Szerkesszük meg az A űrhajó koordináta-rendszerét, vagyis szerkesszük meg az A űrhajó Minkowski-rendszerének a t' és x' tengelyét. Az A űrhajó vonatkoztatási rendszerében az A űrhajó minden pillanatban az origóban van. Ezért ennek az űrhajónak a Minkowski-rendszerében a t' tengely megegyezik az A világvonalával.

Az x' tengely pontjaihoz a következőképpen jutunk. Az A űrhajó világvonalán mérjük fel a $t-x$ rendszer origója előtt és után egy tetszőleges, de egyenlő időtartamot. Az így kapott pontokat jelöljük P-vel és Q-val. A P ponton át húzzunk párhuzamos az origón átmenő, balról jobbra haladó fény sugarral. A Q ponton át pedig az O_0 ponton áthaladó másik fény sugarral. Ekkor a két egyenes az X pontban metszi egymást. Az X ponthoz jogosan írhatjuk, hogy $t'=0$, ha ugyanis ide egy tükröt szereltünk volna, akkor a P pontból induló fény sugar az X pontig pontosan annyi ideig mozog, mint a tükrön visszaverődve a X-től a Q pontig. Ezzel az eljárással több pontot megszerkeszthetünk. Ezek a pontok alkotják az A űrhajó Minkowski-rendszerének az x' tengelyét (4.22. ábra).

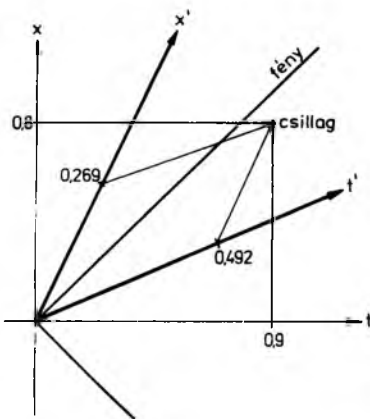
Meg kell jegyeznünk, hogy az ábrát nézve úgy tűnhet, mintha az x tengelyt egyszerűbben is kitűzhetnénk, nevezetesen úgy, hogy a t tengelyt tükröznénk a fény világvonalára. Ez valóban így van akkor, ha az időt és a távolságot ugyanabban a mértékegységben (fényméterben és méterben, illetve évben és fényévben) mérjük, mert ekkor a fény világvonala felezi a t és az x tengely által bezárt szöget. (Ekkor az előre és hátra menő fényjel világvonalai merőlegesek egymásra.) Ha azonban például az

időt másodpercben, a távolságot pedig méterben mérnénk, akkor már a fényvilágvonal nem felezné a tengelyek által bezárt szöget (a fénykúp nyílásszöge sem lenne derékszög), így a tükrözés nem vezetne helyes megoldáshoz.]

[Tegyük fel, hogy az előző példában szereplő űrhajó sebessége $v=200\,000$ km/s az álló O űrhajóhoz képest. Az O űrhajó rendszerében az időmérés kezdete után $t=0,9$ év múlva az O űrhajótól 0,8 fényév távolságra felrobban egy kis csillag (4.23. ábra).



4.22. ábra



4.23. ábra

Mennyi idő telik el a két űrhajó találkozásá és a robbanás között az A űrhajó rendszerében nézve? Milyen messze van a robbanás az A űrhajóból mérve?

Az űrhajó sebessége fényév/évben mérve:

$$\beta = 0,666, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1,342.$$

Alkalmazzuk a Lorentz-transzformációt:

$$x' = 1,342 x - 1,342 \cdot 0,666 t,$$

$$t' = -1,342 \cdot 0,666 x + 1,342 t,$$

vagyis

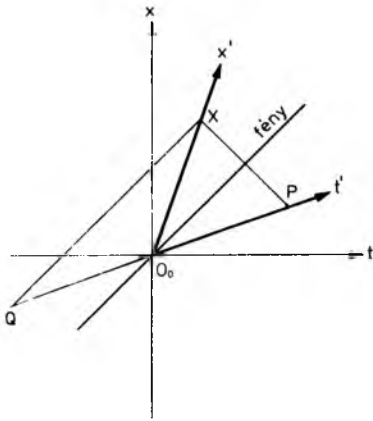
$$x' = 0,342 \cdot 0,8 - 0,894 \cdot 0,9 = 0,269 \text{ fényév,}$$

$$t' = -0,894 \cdot 0,8 + 1,342 \cdot 0,9 = 0,492 \text{ év.}$$

[Térjünk vissza a $t' - x'$ koordináta-rendszer megszerkesztésére. Tegyük fel, hogy adott az O inerciarendszer origójában álló O űrhajó, Minkowski-rendszerének tengelyei t és x . Megrajzoltuk a Minkowski-rendszer origójából a $t=0$ időpontban kibocsátott fénysugarak világvonalát. Jelöljük ki tetszőlegesen egy P pontot a fénykúp belsejében.

Adjunk meg egy $t' - x'$ koordináta-rendszert, amelynek az origója megegyezik az O_0 -al, és az időtengelye átmegy a P ponton. A feladatot már megoldottuk, most csak újra végig gondoljuk. Tegyük fel, hogy egy A űrhajó az O álló űrhajóval találkozik a $t=0$ időpontban, és a világvonala átmegy a P ponton. Legyen ez a keresett koordináta-rendszer t' tengelye. Ezután a P pontot mérjük fel a t' egyenesre az O_0 pont másik oldalára, jelöljük az így kapott pontot Q-val.

Húzzunk egy-egy egyenest a fényjelek világvonalával párhuzamosan a P és a Q ponton át. Ezek az egyenesek az X pontban metszik egymást. A QXP törött vo-



4.24.
ábra

nalat felfoghatjuk úgy is, mint az origóból az időmérés kezdete előtt indított fényjel visszaverődését az X helyre helyezett tükrön, és megérkezését az origóba. A fényjel indulása (Q esemény) és a megérkezése (P esemény) között helyezkedik el a visszaverődés, időben ugyanolyan távolságra mindkét eseménytől. Ezért a visszaverődés időpontja az A űrhajó rendszeréből nézve $t' = 0$. Az O_0X egyenes tehát a t' tengelynek megfelelő x' tengely (4.24. ábra).

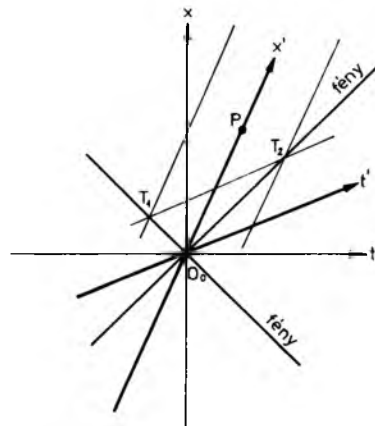
Az eljárásból következik egy megállapítás. Tegyük fel, hogy adott egy inerciarendszernek megfelelő $t-x$ koordináta-rendszer, az origóból induló fényjel-világvonallakkal. Ekkor akárhogyan választunk egy pontot a fénykúpon belül, ez a pont kijelölheti egy másik inerciarendszernek megfelelő t' tengelyt, ha ez az inerciarendszer az előzővel a közös 0 időpontban az origóban találkozott. Más szóval bármely P pont történhet ugyanott, mint az O_0 , de ez a pont nem lehet rajta egyetlen x tengelyen sem, vagyis az O_0 és a P pont „abszolút máskor” következik be.]

[Az előzővel rokon feladatról fogunk most beszélni. Tegyük fel, hogy adott az \mathcal{O} inerciarendszer origójában álló O űrhajó,

Minkowski-rendszerének tengelyei x és t . Megrajzoltuk az $x=0$ helyről induló, a $t=0$ időpontban kibocsátott fénysugarak világvonalát is. Adjunk meg most egy P pontot tetszőlegesen a fénykúpon kívül. Szerkesszük most meg egy új inerciarendszer Minkowski-rendszerét, amelynek az x' tengelye átmegy a P ponton.

Az inerciarendszer x' tengelye tehát az O_0P egyenes. Ennek a pontjai azok, amelyek az új \mathcal{K}' inerciarendszerben a $t'=0$ időpontban történnek. A kérdés most az, hogy hogyan szerkesszük meg a \mathcal{K}' rendszerhez tartozó t' tengelyt. A megoldást a következőkben vázoljuk. Az x' tengellyel párhuzamosan rajzoljunk egyeneseket egyenlő távolságra. Ezek tetszőleges távolságra haladhatnak az x' mellett. Jelöljük — a 4.25. ábra szerint — e két párhuzamosnak a fény-világvonallakkal való metszéspontját T_1 -gyel és T_2 -vel. A T_1T_2 egyenessel párhuzamosot húzunk az origón keresztül, akkor a \mathcal{K}' koordináta-rendszerének a t' tengelyét kaptuk.

A szerkesztés helyessége az előző feladattal összehasonlítva nyilvánvaló. A feladat megoldásából látszik, hogy ha tetszőlegesen megadunk egy pontot a fénykú-



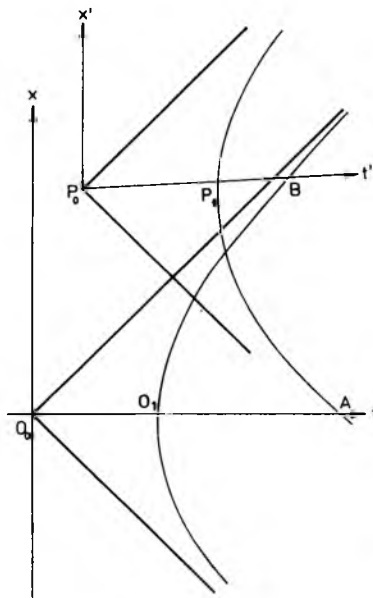
4.25.
ábra

pon kívül, akkor ez a pont kitűzheti egy inerciarendszernek megfelelő Minkowski-sík x tengelyét, vagyis ennek az egyenesnek minden pontja történhet ugyanakkor, mint az óra indítása az origóban. Ezek a pontok azonban mind *abszolút máshol* vannak a térben, mint O , mert nem tekinthetjük ugyanott bekövetkező eseménynek. A fénykúpon kívüli pontok nem lehetnek rajta egyetlen időtengelyen sem!

Ízgalmas problémára térünk most rá. Az előbb a fénykúpon kívül választottunk egy P pontot, hogy ezzel egy inerciarendszer x tengelyét kitűzzük. Vizsgáljuk meg most egy ilyen P pont további tulajdonságát.

Tegyük fel, hogy adott egy O űrhajó, amely lebeg a világűrben az \mathcal{O} vonatkoztatási rendszer origójában. Világvonala az \mathcal{O} rendszernek megfelelő Minkowski-sík t tengelye. Az óra indítása (O_0 pont a Minkowski-síkon) után 1 évvel gyertyát gyűjtanak az űrhajóban (ezt az eseményt szemlélteti az O_1 pont). Az O_1 ponton áthaladó hiperbola pontjai a $t=0$ időpontban az \mathcal{O} rendszer origóján áthaladó űrhajók világvonalán az egységnyi sajátidő elteltét jelölik.

Adjunk meg most egy tetszőleges P_0 pontot a fénykúpon kívül. Tegyük fel, hogy ezen a ponton át egy P űrhajó világvonala halad. Az űrhajó utasai elindítják az órájukat. Ezt a — pillanatszerű — eseményt ábrázolja a P_0 pont. Ugyanebben az időpontban az űrjármű utasai ekkor egyegy fényjelet bocsájtanak ki minden irányban. A P_0 ponton áthaladó fény-világvonalak párhuzamosak az O_0 ponton áthaladó fény-világvonalakkal. Megrajzoltuk azoknak az eseményeknek az összességét is, amelyek a P_0 ponthoz képest egységnyi sajátidőre vannak. Másképpen fogalmaz-



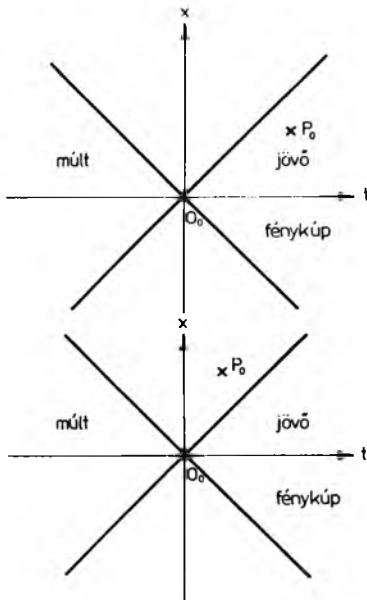
4.26.
ábra

va: azokon az űrhajókon, amelyeknek a grafikonja a P_0 ponton áthalad, az egységnyi sajátidőt a világvonaluknak a hiperbolával való metszéspontja adja (4.26. ábra).

Vessük fel a következő kérdést: az O_0 és a P_0 események közül melyik következik be korábban?

A válasz meglehetősen meglehetősen: a kérdésnek nincs értelme. Jelöljük a 4.26. ábra szerint az O_1 ponton áthaladó hiperbolának a P űrhajó világvonalával való metszéspontját B -vel. Ugyanígy, a P_1 ponton átmenő hiperbolának a P űrhajó világvonalával való metszéspontját A -val. Ekkor az O_0 pont egy évvel megelőzi a B pontot, mert a B pont rajta van az O_0 -hoz tartozó egységhiperbolán. A P_0 pont viszont több mint egy évvel előzi meg a B eseményt, hiszen $P_0B > P_0P_1$. Így tehát azt mondhatjuk, hogy P_0 korábban van, mint O_0 .

Fordítva: az A egy évvel a P_0 esemény után következik be, hiszen a P_0 ponthoz tartozó egységhiperbolán helyezkedik el.



4.27. ábra

Az O_0 esemény azonban több mint egy évvel korábban következik be, mint A , mert $\overline{O_0O_1} < \overline{O_0A}$. Így tehát az O_0 ese-

mény korábban következik be, mint P_0 . Ez nyilvánvalóan ellentmondásban van az előző bekezdéssel.

Hangsúlyozni kell: az egyik vonatkoztatási rendszerben igaz az egyik (O_0 korábbi mint P_0), a másik vonatkoztatási rendszerben igaz a másik kijelentés (P_0 korábbi, mint O_0).

Időszzerűen különálló az O_0 és P_0 pont, ha P_0 benne van az O_0 -ból induló fénykúp belsejében, vagy P_0 az O_0 -ból indulóban. Az első esetben P_0 későbbi, mint O_0 , azaz minden inerciarendszerben P_0 későbbi O_0 -nál. Az függ a vonatkoztatási rendszertől, hogy mennyivel későbbi!

Az O_0 és P_0 pont *térszerűen különálló*, ha egymás fénykúpján kívül helyezkednek el. Ekkor van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben O_0 korábbi P_0 -nál, és van olyan, amelyben P_0 korábbi O_0 -nál. Van olyan inerciarendszer is, amelyben a P_0 és O_0 egyidejűek (4.27. ábra)!]

4.2. Relativisztikus dinamika

4.2.1. Tömeg és impulzus

A tömeg és az impulzus a mechanika — sőt az egész fizika — legalapvetőbb fogalmai közé tartoznak. Szinte az egész mechanikát az I. rész 2.1.1. pontjában megfogalmazott I. és II. axiómára építettük. Ez a két axióma a tömeg és az impulzus megmaradását mondta ki, azt, hogy egymással kölcsönhatásba lépő testek összes tömegét és összes impulzusát a kölcsönhatás nem változtatja meg. A két axiómában szereplő mennyiségek, az anyag mennyisége és a mozgás mennyisége alap-

fogalmak voltak. A két mennyiség kapcsolatát a szemlélet alapján az

$$I = mv$$

állapotegyenlettel fejeztük ki. Erre az összefüggésre és a két axiómára támaszkodva ezután tisztáztuk a tömeg (és az impulzus) mérését is.

Ebben a pontban lényegében ugyanezt a gondolatmenetet járjuk végig.

Mindenekelőtt ismét ki kell mondanunk azt a megállapításunkat, hogy az anyag és a mozgás mennyiségét most is alapfogalomként kezeljük. A két alapvető fogalom-

mal kapcsolatban megköveteljük az I. rész 2.1.1. pontjában megfogalmazott I. és II. axióma teljesülését. A relativisztikus dinamikát is erre a két pillérre építjük. Először is feladatul tűzzük ki a tömegpontok tömegét és impulzusát összekapcsoló — az $I = mv$ egyenlőségnek megfelelő — állapotegyenlet felállítását. Azután, hogy ezt a feladatot megoldottuk, rátérünk a tömeg és az impulzus mérésének a leírására.

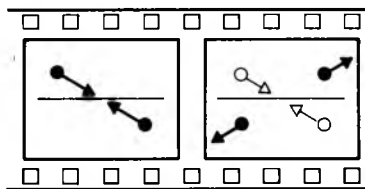
A gondolatmenet legizgalmasabb pontja az állapotegyenlet felállítására. A klasszikus fizikában érvényes $I = mv$ összefüggésben a v helyére — durván szólva — az időegység alatt megtett utat kellene írunk. Itt azonban az a probléma, hogy melyik koordináta-rendszerben mérjük az „egységnyi időt”?

A probléma megoldásának egyik kiinduló pontja az a természetes követelmény, hogy a tömegpontok impulzusának a relativisztikus állapotegyenletét úgy kell felállítani, hogy „kis sebességeknél visszakapjuk a klasszikus fizikában érvényes $I = mv$ összefüggést”. Másrészt azt is megköveteljük, hogy ha egy nagy sebességű részecske egy kis sebességű részecskével ütközik, akkor a nagy sebességű részecske impulzusának a megváltozása egyenlő legyen — de ellentétes irányú — a kis sebességű részecske $I = mv$ összefüggésből számolt impulzusának megváltozásával.

Mielőtt azonban hozzálátnánk a tömegpontok relativisztikus impulzusának a felírásához, jegyezzük meg azt, hogy az időt ebben a pontban gyakran méterben (fényméterben) mérjük, ezért a *klasszikus impulzus* állapotegyenletét az

$$I = m\beta \quad (1)$$

formában használjuk. Ki kell emelni, hogy ez az impulzus kiszámítására a klasszikus fizikában használt képlet, semmi újat nem



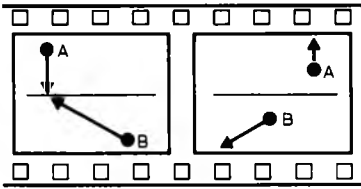
4.28.
ábra

mond az impulzusról, csak annyit fejez ki, hogy az időt méterben mérjük. Ebben az esetben azonban az impulzus mértékegysége megegyezik a tömeg mértékegységeivel.

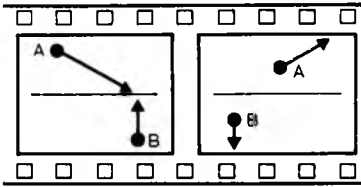
Tekintsünk most két azonos tömegű tökéletesen rugalmas golyót. Az azonos tömegűket jelöljük m -mel. Tegyük fel, hogy a két rugalmas test a 4.28. ábrán látható módon ütközik. Olyan vonatkoztatási rendszert választottunk, amelyben a két tömegpont sebessége az ütközés előtt egyenlő nagy, de ellentétes irányú. Ekkor az ütközés utáni sebességek is egyenlő nagyok lesznek és ellentétes irányúak.

Válasszuk meg a vonatkoztatási rendszert úgy, hogy az egyes részecskék x tengely irányába eső sebességkomponense ne változzék meg az ütközés során, a részecske sebességének az y tengely irányába mutató összetevője pedig irányt váltson. A célunk ugyanis az, hogy a részecskék impulzusának az y irányú megváltozását tanulmányozzuk.

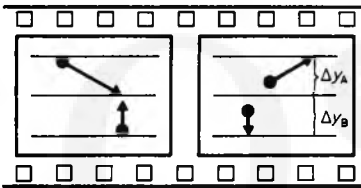
Képzeld el, hogy egy űrhajóban végzik a kísérleteket, egy olyan űrhajóban, amelynek a sebessége megegyezik az A test sebességének x irányú összetevőjével. Az ütközés lefolyását ábrázoltuk ebben a vonatkoztatási rendszerben nézve. Ebben a koordináta-rendszerben az A test sebességének az x irányú összetevője nulla, a B test jobbról balra mozog és le pattan az A testről. Ettől a sebességének az x irányú összetevője nem változik meg, de mind az A, mind a B sebességének az y irányú összetevője ellentétesre fordul (4.29. ábra).



4.29.
ábra



4.30.
ábra



4.31.
ábra

Egy másik vonatkoztatási rendszerben (egy laboratóriumban) a B test x irányú sebessége nulla. Ebben a koordináta-rendszerben az A test balról jobbra mozog és a mozgása irányt változtat az y irányba mozgó B golyón (4.30. ábra).

Tekintsünk át most néhány alapvető feltelet.

Először feltehetjük, hogy a két golyó elmozdulása az ütközéstől a falba ütközésig megegyezik:

$$\Delta y_A = \Delta y_B =: \Delta y, \quad (2)$$

hiszen megengedhető, hogy az ütközés helye az űrhajó közepén legyen (4.31. ábra).

Másodszor lássuk be, hogy az A és B golyók ütközéstől a falba ütközésig számí-

tott sajátidője a laboratórium rendszerében megegyeznek. Az A golyó mozgása ugyanis ugyanolyan az űrhajó rendszeréből nézve, mint a B golyóé a laboratórium rendszeréből szemlélve:

$$(\tau_A)_{\text{űrhajó}} = (\tau_B)_{\text{laboratórium}}.$$

Ugyanakkor a sajátidő az ütközés és a falba való ütközés között mindkét rendszerben (a sajátidő értelmezése szerint):

$$(\tau_A)_{\text{laboratórium}} = (\tau_A)_{\text{űrhajó}},$$

ezért

$$(\tau_A)_{\text{laboratórium}} = (\tau_B)_{\text{laboratórium}}. \quad (3)$$

Harmadszor: a B test impulzusának a megváltozása a klasszikus fizika szabályai alapján könnyen felírható. Feltettük ugyanis, hogy a B test kis sebességgel mozog. Tehát

$$I_B = m \frac{\Delta y_B}{\Delta t_B}, \quad (4)$$

ahol Δt_B az űrhajó rendszeréből nézve azt az időt méri, amennyi ahhoz kell, hogy a B test az A testtel ütközéstől a falig eljusson.

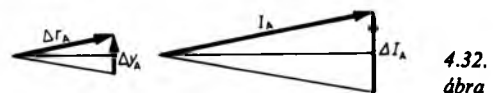
Negyedszer: jegyezzük meg, hogy kis sebességek esetén a B test mozgásának a sajátideje és a rendszerideje gyakorlatilag megegyezik,

$$t_B = (\tau_B)_{\text{laboratórium}}. \quad (5)$$

Ötödször: az impulzus megmaradásának a követelménye az, hogy

$$\Delta I_A = \Delta I_B. \quad (6)$$

Végül hatodszor: a 4.32. ábrán látható



hasonló háromszögek alapján azt írhatjuk, hogy

$$\frac{I_A}{\Delta I_A} = \frac{\Delta r_A}{\Delta y_A} \quad (7)$$

Vonjuk le most a következtetést ebből a hat feltételből. A (7) összefüggés alapján az következik, hogy

$$I_A = \Delta I_A \frac{\Delta r_A}{\Delta y_A},$$

vegyük figyelembe a (6), majd a (4) összefüggést:

$$I_A = \Delta I_B \frac{\Delta r_A}{\Delta y_A} = m \frac{\Delta y_B}{\Delta t_B} \frac{\Delta r_A}{\Delta y_A},$$

innen azonban (2) alapján

$$I_A = m \frac{\Delta r_A}{\Delta t_B}.$$

Vegyük most figyelembe az (5), majd a (3) állítást:

$$I_A = m \frac{\Delta r_A}{\Delta \tau_B} = m \frac{\Delta r_A}{\Delta \tau_A},$$

azaz

$$I = m \frac{\Delta r}{\Delta \tau}, \quad (8)$$

tehát

*relativisztikus impulzus = tömeg × egy-
ségnyi sajátidőre jutó elmozdulás.*

Alkalmas a pillanat arra, hogy a tömeg mérésének a leírására rátérjünk.

Tegyük fel, hogy egy m_0 tömegű és egy m tömegű rugalmas test egymással szemben halad. Olyan inerciarendszert választottunk, amelyben az ütközés előtti összes impulzus nulla. A tömegpontok rugalmas ütközése után ugyancsak nulla a rendszer

összes impulzusa, tehát

$$m_0 \frac{\Delta x_0}{\Delta \tau_0} + m \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = 0,$$

innen

$$\begin{aligned} \frac{m}{m_0} &= \frac{-\frac{\Delta x_0}{\Delta \tau_0}}{\frac{\Delta x}{\Delta \tau}} = \\ &= \frac{-\Delta x_0}{\sqrt{(\Delta t_0)^2 - (\Delta x_0)^2}} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}}{\Delta x}, \end{aligned}$$

ha az időt fényméterben mérjük. (Ha az időt másodpercben mérnénk, akkor t helyére ct -t, t_0 helyére ct_0 -t helyettesítenénk.)

Figyeljünk fel arra, hogy a most vázolt eljárás lényegében azonos a tömeg mérését az I. rész 2.1.1. pontjában leíró módszerrel. Ha alkalmas módon megválasztjuk a tömeg egységét, $m_0 = 1$, akkor a tömeg mérését visszavezettük távolságok és idők mérésére^(*)! A tömeg mérésével az impulzus mérése is megoldódott: az

$$I = m \frac{\Delta r}{\Delta \tau}$$

összefüggésben a tömeget és az egységnyi sajátidőre vonatkozó elmozdulást kell mérnünk.

Fejezzük most ki a tömegpont impulzusát β -val. Tegyük fel, hogy $\Delta \tau$ sajátidő alatt a tömegpont Δr -rel mozdult el a vo-

^(*) Most természetes módon felvethetnénk azt a kérdést, hogy ugyanezt a hányadost kapnánk-e, ha valamely más inerciarendszerben mérnénk a tömeget. Hamarosan ez a kérdés kerül a vizsgálódásunk középpontjába.

natkozatási rendszerben. Ekkor

$$I = m \frac{\Delta r}{\Delta \tau} = m \frac{\Delta r}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2}} =$$

$$= m \frac{\frac{\Delta r}{\Delta t}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2}} = m \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

így az impulzus relativisztikus képlete:

$$I = m \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta, \quad (9)$$

vagy ha az időt másodpercben mérjük:

$$I = m \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v. \quad (10)$$

Az impulzus relativisztikus kifejezése tehát háromtényezős szorzat. Vegyük észre, hogy a relativisztikus impulzus csak az $1/(\sqrt{1 - \beta^2})$ tényezőben különbözik a klasszikus fizikai impulzustól.

A (9), illetve (10) egyenlőséget kétféleképpen szokás olvasni.

1. Az impulzus relativitáselméletben érvényes értelmezése alapján

impulzus = tömeg × egységnyi saját-időre eső elmozdulás,

ahol a tömeg vonatkoztatási rendszertől független mennyiség, az anyag mennyiségének a mértéke. Az elmozdulás és a sajátidő hányadosa:

$$\frac{\Delta r}{\Delta \tau} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \beta \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =$$

$$= v \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

2. A klasszikus fizikában használatos

impulzus = tömeg × sebesség

állapotegyenletet úgy „mentik meg”, hogy a tömeget „módosítják”, a (9) vagy (10) háromtényezős szorzatban a második tényezőt a tömeggel olvasásuk egybe:

$$m_* := \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ebben az esetben valóban

$$I = m_* v.$$

Az m tömeg és az m_* módosítása között alapvető különbség, hogy az első nem függ a sebességtől, a második igen. Ha a test áll a vonatkoztatási rendszerben, akkor $m = m_*$. Az anyag mennyiségét kifejező m -et *nyugalmi* tömegnek is nevezik, míg a módosított tömeget *mozgási* tömegnek, vagy a *tömeg mozgási mérőszámának* hívják.

A második interpretáció mellett azt szokás érvként felhozni, hogy egy testet állandó erővel gyorsítunk, akkor nagy sebességeknél nem gyorsul a megszokott „ütemben”, mert a tehetetlensége, a tömege nő. A fénysebességhez közeli sebességgel mozgó test már alig gyorsul, hiába hatunk rá erővel.

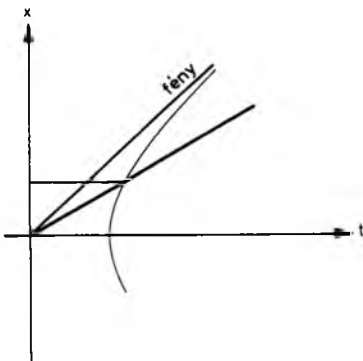
Természetesen ez az érv nem kényszerít bennünket arra, hogy a módosított tömeg fogalmát bevezessük, és ezzel számoljunk. Maradhatunk az anyag mennyiségét kifejező (nyugalmi) tömegnél, amely — mint mondtuk — minden inerciarendszerben ugyanaz. Nem okoz gondot az a tény, hogy a testre ható erő nem gyorsítja eléggé hatékonyan a testet. A test sebessége ugyanis valóban nem nő a fény sebessége

főlé, azt még csak el sem éri, de az impulzus nem a sebességgel, hanem az ezzel párhuzamba állítható, de tetszőleges nagy értéket felvevő egységnyi sajátidőre jutó elmozdulással arányos.

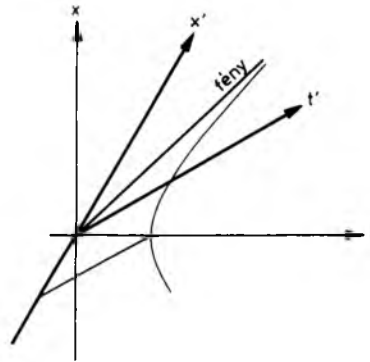
A mozgási tömeg fogalmát nem a „tehetetlenség növekedése” miatt vezetjük be, sokkal mélyebb oka van ennek. Látni fogjuk, hogy a kétféle tömeg együtt fejezi ki azt, amit az ember a tömegtől elvár: a megmaradást és a vonatkoztatási rendszertől való függetlenséget.

Az értelmezésből és a (8), (9), (10) egyenletekből is látszik, hogy az impulzus relatív: különböző inerciarendszerekben más és más az impulzus. A tömeg és a sajátidő invariáns, azonban az elmozdulás függ attól, hogy melyik vonatkoztatási rendszerben írjuk le a jelenséget. A testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben természetesen nulla az impulzus; ha a test valamely vonatkoztatási rendszerben nagy sebességgel mozog, akkor az impulzusa — az egységnyi sajátidőre jutó elmozdulása nagy. Az impulzus tehát vonatkoztatási rendszertől függő mennyiség, azonban minden vonatkoztatási rendszerben megmarad az egymásra ható testek összes impulzusa.

Tekintsük a 4.33. ábrán látható (egy inerciarendszernek megfelelő) t — x koordi-



4.33.
ábra



4.34.
ábra

náta-rendszert. A $t=0$ időpontban elhalad az origó mellett egy egységnyi tömegű lövedék. A lövedék világvonalának az egységhiperbolával való metszéspontját megjelöltük. Ennek a pontnak a függőleges tengelyre eső vetülete adja a lövedék egységnyi sajátidőre eső elmozdulását. Mivel a példában $m=1$ kg, a vetület a test impulzusát is szemlélteti.

Gondolatban forgassuk a test világvonalát a fény világvonala felé, vagyis növeljük a test sebességét. Ekkor a hiperbolával való metszéspont egyre távolabb kerül, a metszéspont vetülete is egyre távolabb lesz az x tengelyen. Ezért az impulzus „minden határon túl nő”, annak ellenére, hogy az ellenére, hogy a sebesség nem lehet nagyobb a fénysebességnél. Ez természetes: a tömeget nem a sebességgel, hanem az egységnyi sajátidőre eső elmozdulással kell szoroznunk.

□ A 4.34. ábrán látható t — x koordináta-rendszer tengelye egyben egy m tömegű test világvonala is. Feltüntettük egy — az előzőhöz viszonyítva $v=200\,000$ m/s sebességgel ($\beta=2/3$) mozgó űrhajó t' — x' koordináta-rendszerét. Mekkora az m tömegű test impulzusa az űrhajó vonatkoztatási rendszeréből nézve? A test világvonala az t — x koordináta-rendszerben a t tengellyel egybeesik. Vetítsük a t tengely és az egy-

séghiperbola metszéspontját az x' tengelyre. Ennek a vetületnek az m -szerese egyenlő a test impulzusával: a Lorentz-transzformációt alkalmazva:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} t =$$

$$= - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot 1 = -0,89 \text{ m.}$$

Ez az egységnyi sajátidőre eső elmozdulás az $t'-x'$ rendszerben. A test impulzusa 0,89 kg nagyságú, és az x' tengely negatív irányába mutat. Ha az időt másodpercben mérjük, akkor

$$x' = - \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} 1 = -268\,328\,150 \text{ m,}$$

a test impulzusa tehát

$$I = -268\,328\,150 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = -2,683 \cdot 10^8 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

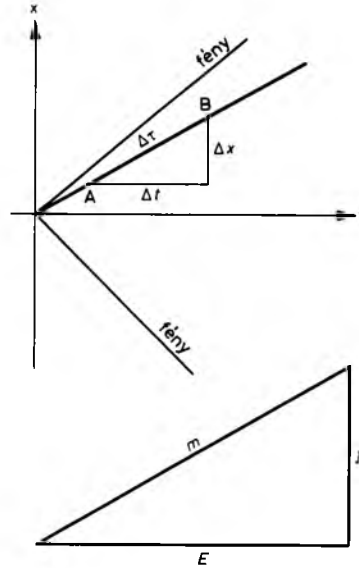
az $t'-x'$ koordináta-rendszerben. Ugyanakkor természetesen nulla az impulzus az „álló” $t-x$ rendszerben.]

4.2.2. Energia

Ebben a pontban az energia relativisztikus értelmezésével foglalkozunk, az energiát és az impulzust egységben fogjuk látni úgy, mint az időt és a teret.

Tegyük fel, hogy egy inerciarendszerben az események a koordináta-rendszer x tengelye mentén történnek. Így a tömegpontok világvonala a $t-x$ síkon ábrázolható.

Gondoljuk el, hogy egy test világvonalának egy része, az A és a B pontok között, egyenes szakasszal helyettesíthető. Tekint-



4.35. ábra

sük a 4.35. ábrán látható háromszöget. Ennek a háromszögnek a függőleges oldala a test elmozdulása a vonatkoztatási rendszerben, a vízszintes oldala a két pont közötti mozgáshoz szükséges idő a rendszer óráin mérve. A harmadik oldal — az átfogó — a mozgás közben eltelt sajátidő, a mozgó test óráján mért idő.

Tegyük fel, hogy $\Delta\tau > 0$, vagyis egy „közönséges” testről van szó, amelynek a sebessége kisebb a fény sebességénél.

A három mennyiség között már többször szóba hozott kapcsolat a következő:

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2, \quad (1)$$

feltéve, hogy az időt most is méterben mérjük, ha az idő mérésére a szokásos másodpercet használjuk, akkor (1) ilyen formában írható:

$$(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2. \quad (2)$$

Az előző pontban láttuk, hogy ennek a háromszögnek a függőleges oldala alkalmas az impulzus szemléltetésére: az egy-

ségnyi sajátidőre eső elmozdulás és a tömeg szorzata az impulzus. Osszuk el ezért a háromszög minden oldalának a mérőszámát az eltelt sajátidővel (mondtuk, hogy $\Delta\tau > 0$), és szorozzuk meg a test tömegével. Ekkor a függőleges oldal a test impulzusát ábrázolja.

Mit jelent most a háromszög másik két oldala?

Világos, hogy az átfogó a tömegnek felel meg. A vízszintes oldal a tömeg és az egysegnyi sajátidő alatt eltelt rendszeridő szorzatát méri. Jelöljük ezt a mennyiséget E -vel és nevezzük (a relativisztikus) energiának:

$$E = m \frac{\Delta t}{\Delta\tau} \quad (3)$$

Meg fogjuk vizsgálni, hogy ez a mennyiség miként hozható kapcsolatba a klasszikus fizikából ismert mozgási energiával, és mi az alapja annak, hogy ez a mennyiség a relativisztikus energiának tekinthető.

Egyszerű gondolatról van szó: mivel

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4)$$

ezért

$$E = m \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5)$$

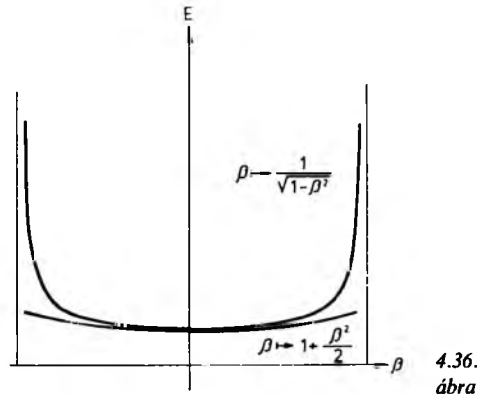
Mint ismert a matematikából, a

$$\beta \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

függvény a

$$\beta \mapsto 1 + \frac{\beta^2}{2}$$

másodfokú függvénnyel közelíthető. A két függvény közötti eltérés annál kisebb, mi-



nél közelebb van a β a 0-hoz (4.36. ábra). Ezért az (5) közelítőleg így írható:

$$E \approx m \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) = m + \frac{m\beta^2}{2}. \quad (6)$$

Óriási! Nagy jelentőségű eredményhez jutottunk: a második tag ugyanis a klasszikus fizikából is ismert mozgási energia, ha az energiát tömegegységben (az időt méterben) mérjük. Ilyen módon a (3) kifejezést valóban nevezhetjük az energia relativisztikus kifejezésének.

A mozgó test relativisztikus energiája kapcsolatban van a részecske mozgási energiájával, de nem egyenlő vele. Az m tag akkor is szerepel, ha a test áll, amikor a mozgási energiája nulla. Az m tagot *nyugalmi energiának* nevezzük. A nyugalmi energia számértéke megegyezik a tömeg mérőszámával, ha az időt méterben mérjük.

Az energiát és a nyugalmi energiát felírhatjuk a szokásos mértékegységekben. Ha az időt másodpercben mérjük, akkor $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, és (5) alapján:

$$E = m \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7)$$

és a (6)-nak megfelelő közelítő képlet:

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (8)$$

Az első tag a részecske *nyugalmi energiája*:

$$E_0 := mc^2, \quad (9)$$

a vonatkoztatási rendszertől független, a test anyagmennyiségét mérő állandó tömeg, és az univerzális fénysebesség négyzetének a szorzata. A nyugalmi energia tehát állandó, mindaddig nem változik, amíg a test a tömegéből nem veszít vagy a tömege nem nő. Ez az energia csak a tömeggel együtt változik.

Gyakran használt téves szóhasználat: az energia és a tömeg egyenértékű, ezért a tömeg energiává, az energia tömeggé alakulhat. Gyakran halljuk ezt az atommag folyamataival kapcsolatban: a reakcióban Δm tömeghiány lép fel, ez Δmc^2 nagyságú energiává alakult. Helytelen szemlélet! A tömeg energiává nem alakulhat, az energia sem tömeggé. Más fogalmak ezek, az anyag más tulajdonságát fejezik ki, ezért ilyen viszonyba nem is állíthatók egymással. Azt viszont megállapítottuk, hogy a nyugalmi energia és a tömeg mérőszáma arányos, tehát, ha változik a test tömege, akkor változik a nyugalmi energiája is.

Emlékezzünk arra, az előző pontban említettük, hogy a tömeg helyett gyakran használatos fogalom a *tömeg mozgási mérőszáma*:

$$m_* := \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

A mozgási tömeg fogalmát felhasználva (7) átfogalmazható a következőképpen:

$$E = m_*c^2. \quad (10)$$

Ez az összefüggés formailag a (9)-vel állítható kapcsolatba, azonban egészen mást jelent! A (9) egyenlőségben a jobb és a bal oldalon egyaránt olyan mennyiségek szerepelnek, amelyek az inerciarendszer megválasztásától nem függenek. Sem a test tömege, sem a nyugalmi energia nem függ attól, hogy melyik vonatkoztatási rendszerből mérjük. Ezzel szemben a (10) összefüggésben az m_* „mozgási tömeg”, és az E energia is függ a vonatkoztatási rendszer megválasztásától, az energia is és a mozgási tömeg is relatív, ahogyan relatív a sebesség is!

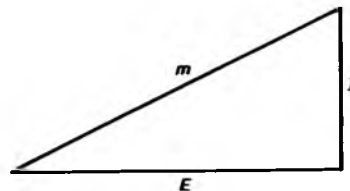
Térjünk vissza az elmozdulás—rendszeridő—sajátidő háromszöghöz. A háromszög oldalait $m/(\Delta\tau)$ -val szorozzuk. Ekkor a háromszög vízszintes oldalán az impulzust (I), a függőleges oldalán az energiát (E) és a harmadik oldalán a tömeget (a nyugalmi energiát) (m) ábrázoljuk (1) alapján (4.37. ábra):

$$m^2 = E^2 - I^2. \quad (11)$$

Említsük meg, hogy hagyományos mértékegységek használata esetén a (11) összefüggés az

$$(mc^2)^2 = E^2 - (cI)^2 \quad (12)$$

formát ölti. Így olvad egységbe a fizika három központi mennyisége! A tér és az idő tulajdonságai öröklődnek az impulzus és az energia tulajdonságaira.



4.37.
ábra

Figyeljük meg a következő megfeleltetést!

sajátidő \longrightarrow tömeg,
rendszeridő \longrightarrow energia,
helykoordináta \longrightarrow impulzus.

A hely és az idő a vonatkoztatási rendszertől függő mennyiségek, a sajátidő nem, a sajátidő minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz. Hasonlóan: az impulzus és az energia vonatkoztatási rendszertől függő mennyiségek, relatív mennyiségek (ahogyan a sebesség is), a (nyugalmi) tömeg azonban invariáns, minden inercia-rendszerben ugyanaz az értéke. Tegyük fel, hogy adott egy \mathcal{K} és egy \mathcal{K}' inerciarendszer. Ha egyik vonatkoztatási rendszerben ismerjük az impulzus és az energia értékét, akkor a másikban mérhető impulzus és energia Lorentz-transzformációval számolható. Írjuk fel ugyanis a hely és az idő transzformációját leíró képleteket:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} t$$

$$t' = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t.$$

Innen

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta t,$$

$$\Delta t' = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta x + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta t.$$

Szorozzuk meg most mindkét egyenlőség jobb és bal oldalát m -mel és osszuk el $\Delta\tau$ -val. Ekkor figyelembe véve, hogy

$$I = m \frac{\Delta x}{\Delta\tau}, \quad E = m \frac{\Delta t}{\Delta\tau},$$

az impulzus és az energia értéke \mathcal{K} vonat-

koztatási rendszerben és

$$I' = m \frac{\Delta x'}{\Delta\tau}, \quad E' = m \frac{\Delta t'}{\Delta\tau},$$

az impulzus és az energia a \mathcal{K}' rendszerben. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$I' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} I - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} E, \quad (13)$$

$$E' = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} I + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E.$$

Nem hoztuk még szóba a relativisztikus energia megmaradását. Tegyük fel, hogy adott két test. Az O űrhajó rendszerében vizsgáljuk először a testeket. A két test impulzusát jelöljük I_1 -gyel és I_2 -vel, az energiát E_1 -gyel és E_2 -vel. Az O űrhajóhoz viszonyítva egyenletesen, β sebességgel mozgó A űrhajóban legyen két test impulzusa I'_1, I'_2 .

Írjuk fel a két test impulzusára a (13) Lorentz-transzformáció első egyenlőségét:

$$I'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} I_1 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} E_1,$$

$$I'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} I_2 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} E_2.$$

Adjuk össze a két egyenlőséget!

$$(I'_1 + I'_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (I_1 + I_2) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_1 + E_2).$$

(14)

Az impulzus megmaradó mennyiség. Úgy értelmeztük, hogy az legyen. Ez azt jelenti, hogy az ütközés előtti impulzusok összege megegyezik az ütközés utáni impulzusok összegével, mindkét rendszerben. A (14)

egyenlőségben az

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

és a

$$-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

együtthatók az \mathcal{A} és \mathcal{O} rendszerek egymáshoz viszonyított sebességétől függenek, a testek mozgásától nem. Az egyenlőség bal oldalán szereplő összimpulzus megmarad az \mathcal{A} vonatkoztatási rendszerben. Hasonlóképpen a jobb oldal első tagja is ugyanaz az ütközés előtt és után. Ezért a második tagban az $E_1 + E_2$ összes energia azonos az ütközés előtt és az ütközés után. *Az energia megmaradása és az impulzus megmaradása nem választható el egymástól.*

Nemrelativisztikus esetben az ütközésekben a mechanikai energia nem marad meg, a belső energiával együtt viszont megmaradó mennyiség. Relativisztikus esetben a mechanikai energia megmarad, viszont a (nyugalmi) *tömeg nem!* Itt a (nyugalmi) tömeg meg nem maradása (növekedése) fejezi ki a belső energia növekedését.

A relativisztikus tömeg nemcsak az anyag mennyiségének, hanem bizonyos minőségének is a kifejezője. Ugyanaz a test hidegen kisebb tömegű, mint melegen.

Tegyük fel, hogy két test rugalmatlanul ütközik, ütközés után együtt haladnak tovább. Ekkor az impulzus és a mozgási energia megmaradásának a törvénye:

$$\frac{m_1\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Négyzetre emeljük a két egyenlőséget, majd kivonjuk a felsőt az alsóból, azt kapjuk, hogy

$$m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2(1-\beta_1\beta_2) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} = m^2,$$

de

$$1 - \beta_1\beta_2 > \sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2},$$

hiszen

$$1 + \beta_1^2\beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 > 1 + \beta_1^2\beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 > 0,$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$(\beta_1 - \beta_2)^2 > 0,$$

ez pedig mindig teljesül, kivéve azt az esetet, amikor $\beta_1 = \beta_2$, vagyis amikor a tömegpontok együtt mozognak, nincs ütközés. Rugalmatlan ütközés esetén tehát $m_1 + m_2 < m$.

A (nyugalmi) tömeg valóban nem marad meg, rugalmatlan ütközéskor nő. Ha egy test belső energiáját növeljük, akkor ez úgy tükröződhet a test $E = m(\Delta t)/(\Delta \tau)$ energiájának a növekedésében, ha m nő.^(*) A mozgási tömeg azonban megmaradó mennyiség, mivel az összes energiával arányos: $E = m_*c^2$, így az összes energiával együtt megmarad.

A tömeg intuitív fogalmának egyik fő vonását a nyugalmi tömeg fejezi ki: inerciarendszertől független invariáns skalár.

(*) A belső energia a vonatkoztatási rendszertől független (nyugalmi) tömeggel nő. Ezért a belső energia az inerciarendszer megválasztásától független skalaris mennyiség. Ezzel függ össze az a tény, hogy a hőtannak nincs relativisztikus módosítása.

A másik oldalt inkább a mozgási tömeg tárja elénk: a megmaradó tulajdonságot.

Írjuk most fel egy adott vonatkoztatási rendszerben az energia és az impulzus kapcsolatát kifejező egyenlőséget! Mivel

$$I = m \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E = m \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

ezért

$$I = \beta E. \quad (15)$$

Írjuk fel ezt az összefüggést a hagyományos mértékegységek használata esetén:

$$I = \frac{v}{c} E. \quad (16)$$

Ebből következik, hogy ha a sebesség megközelíti a fénysebességet, akkor az impulzus és az energia — tömegegységben mérve — egyre inkább megközelíti egymást.

Ennek a pontnak a gondolatmenete nem vonatkozik a fényre. Feltettük ugyanis, hogy a mozgás közben az eltelt sajátidő nem nulla. Így jutottunk el a $\tau^2 = t^2 - x^2$ összefüggésből az $m^2 = E^2 - I^2$ állításhoz.

Hogyan illeszkedik a fizikai képbe a fény? Milyen összefüggések érvényesek a fény tömege, energiája és impulzusa között? A fény különleges és kitüntetett szerepet játszik a relativitáselméletben. A fény sajátideje minden mozgásnál nulla, ezért a fény tömege nem hozható kapcsolatba a sajátidővel.

A 2.4.4. pontban, amikor az elektromágneses sugárzás dinamikáját tanulmányoztuk, megállapítottuk, hogy az elektromágneses hullám tömege és energiája arányos egymással:

$$E = mc^2, \quad (17)$$

és ha az időt ugyanúgy méterben mérjük, mint a távolságot, akkor

$$E = m. \quad (18)$$

Ez az összefüggés párhuzamba állítható a (9) és (10) állításokkal.

Tekintsük át még egyszer röviden az energiával kapcsolatos okoskodásunk eredményét.

Egy közönséges test energiáját a relativitáselméletben a (11) egyenlőséggel értelmezzük. Azonnal látható, hogy az energia és az impulzus is relatív mennyiségek, a vonatkoztatási rendszertől függenek. Különböző vonatkoztatási rendszerekben más és más az energia és az impulzus számértéke (amelyeket most a tömeghez hasonlóan kg-ban mérünk). Nem függ azonban a vonatkoztatási rendszer megválasztásától a két mennyiség négyzetének a különbsége, a tömeg négyzete.

Ha valamely vonatkoztatási rendszerben $I = 0$, vagyis a test áll, akkor $m^2 = E^2$. A nyugalmi energia arányos a tömeggel:

$$E = m. \quad (19)$$

Ez az állítás formailag azonos a (18)-cal.

Az $m^2 = E^2 - I^2$ törvény felismerésekor azt is láttuk, hogy

$$E = m \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = m \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ha az

$$m_* = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

sebességtől függő — mozgási tömeget is bevezetjük, akkor nyilvánvaló, hogy

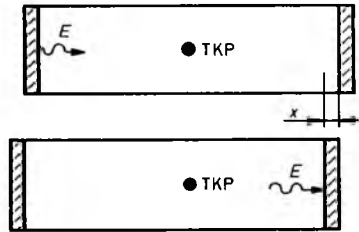
$$E = m \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = m_*, \quad (20)$$

amely szintén azonos formájú állítás

(18)-cal. Látnunk kell, hogy három különböző fizikai tartalmú, de ugyanazzal a matematikai összefüggéssel leírható állítással találkoztunk. A (19) és a (20) közönséges testekre vonatkozik, (19)-ben a vonatkoztatási rendszertől független tömeg és nyugalmi energia ekvivalenciáját mondjuk ki, a (20)-ban a sebességtől függő — módosított — tömeg és a vonatkoztatási rendszertől függő, relatív összenergia szerepel. A (18) állítás a nulla sajátidővel mozgó fényre vonatkozik, és már a relativitás elméletének az átgondolása előtt megismerkedtünk vele. Mesterkélttség nélkül a (18)-ban szereplő tömeget sem a nyugalmi tömeggel, sem a mozgási tömeggel nem lehet azonosítani. Közélebb áll azonban a mozgási tömeghez, hiszen a különböző vonatkoztatási rendszerekben más és más a számértéke. Az elektromágneses hullám tömege ugyanis — mint látni fogjuk — függ a frekvenciától, így a hullámhossztól. Ez pedig különböző inerciarendszerekben más és más. Nem teljesen azonosítható azonban a mozgási tömeggel. Ugyanúgy különbözik a közönséges testek mozgási tömegétől, mint ahogyan a fény sajátideje is különbözik a közönséges testek sajátidejétől. A nyugalmi tömeggel azonban semmiképpen nem hozható kapcsolatba az elektromágneses hullám tömege. Szokásos kifejezéssel élve: a fény nyugalmi tömege nulla.

A kérdés most az, hogy a közönséges testek és az elektromágneses terek kölcsönhatásakor hogyan cserélődik ki közöttük a tömeg. Másképpen: az elektromágneses hullám kibocsátásakor mennyivel csökken a kibocsátó test tömege, és megfordítva: mennyivel nő egy test tömege, ha elektromágneses hullámot nyel el.

Gondoljuk el a következő egyszerű kísérleti eszközt. Tegyük fel, hogy adva van



4.38. ábra

egy elhanyagolható tömegű, L hosszú henger, amelynek az alap és a fedőlapját egy-egy M tömegű, teljesen azonos tulajdonságú fémlap zár el. Ezek a lapok elektromágneses hullámot képesek kibocsátani és elnyelni is (4.38. ábra).

Tegyük fel, hogy a bal oldali fémlap egy elektromágneses síkhullámot bocsát ki a jobb oldali lap felé, amely E nagyságú energiát szállít. A jobb oldali lap elnyeli ezt az energiát. A síkhullám azonban az E energiával együtt E/c nagyságú impulzust is szállít. A hullám kibocsátásakor a henger v sebességre tesz szert, az impulzus megmaradása szerint

$$2Mv = \frac{E}{c},$$

tehát

$$v = \frac{E}{2Mc}.$$

A henger

$$t = \frac{L}{c}$$

ideig mozog egyenletes v sebességgel. A síkhullám elnyelődésekor ugyanis az ellentétes irányú erőlkedés miatt a henger megáll. Közben az eltolódása

$$x = vt = \frac{EL}{2Mc^2}.$$

A hengerre azonban csak belső erők hatottak, ezért a tömegközéppontja helyben maradt. Ez azonban csak úgy lehetséges, hogy a bal oldali lapról tömeg áramlott át a jobb oldalra. Tegyük fel tehát, hogy most a bal oldali fémlap tömege $M - m$, a jobb oldali pedig $M + m$. Ekkor a tömegközéppont megmaradásának a tétele szerint

$$(M - m) \left(\frac{L}{2} + x \right) = (M + m) \left(\frac{L}{2} - x \right).$$

Innen

$$m = \frac{2Mx}{L},$$

és végül az

$$x = \frac{EL}{2Mc^2}$$

egyenlőséget figyelembe véve

$$m = \frac{E}{c^2}.$$

Az elektromágneses hullám fénysebességgel haladó tömege és a közönséges testek tömege egymásba alakul, a tömegmegmaradás törvényének alkalmazásánál a tömeg mindkét megjelenési formáját figyelembe kell venni.

A relativisztikus dinamika legfontosabb gondolataival ismerkedtünk meg. Azokat a problémákat érintettük, amelyek a legtöbb gondot okoznak ezzel a tudományággal ismerkedő Olvasónak.

Befejezőként visszatérünk a kiindulásul szolgáló problémára: Két azonos nagyságú elektromos töltés között az elektromos erőt észleli az a megfigyelő, aki nyugalomban van a két töltéshez viszonyítva, de az a megfigyelő, aki a két töltéshez viszonyítva mozog, a Lorentz-erőt is észleli, mágneses hatást is tapasztal.

A jelenség magyarázatának a részleteibe nem mehetünk bele, csak vázlatosan áttekintjük a megoldás legfontosabb pontjait.

Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a relativitáselmélet fényében az elektrodinamikát nem kell úgy módosítani, mint a dinamikát (gondoljunk az impulzus és az energia újraértelmezésére!). Az elektrodinamika eleve relativisztikus.

A másik figyelemre méltó gondolat pedig az, hogy nincs külön elektromos és külön mágneses tér. Egységes elektromágneses tér van. Ennek a térnek a tulajdonságai ugyanúgy nem függenek a vonatkoztatási rendszertől, mint ahogyan a sajátidő és a tömeg sem relatív mennyiségek. A különböző koordináta-rendszerekben azonban más és más az elektromos térerősség és a mágneses térerősség. Mint ahogyan az energia és az impulzus is relatív. A két töltéshez viszonyítva nyugvó vonatkoztatási rendszerben csak elektromos teret észlelünk. Ha a két töltéshez viszonyítva mozog a megfigyelő, akkor az elektromágneses tér az elektromos vonásai mellett a mágneses arculatát is mutatja.

A probléma megoldásához kapcsolódó harmadik gondolat: a relativitás elméletében Newton II. törvényének a klasszikus formája ($F = ma$) nem érvényes, ezért az erő ebben az elméletben nem független a vonatkoztatási rendszertől. Newton II. törvényének az $F = \Delta I / \Delta t$ alakja azonban érvényben van.

XXIV. Feladatcsoport: relativitáselmélet

XXIV/1. Laboratóriumunk mellett 200 000 km/s sebességgel elszáguld egy űrhajó. Amikor éppen mellettünk halad, az űrhajó utasai az űrhajó tengelyére merőlegesen az egyik faltól a másikig elindítanak

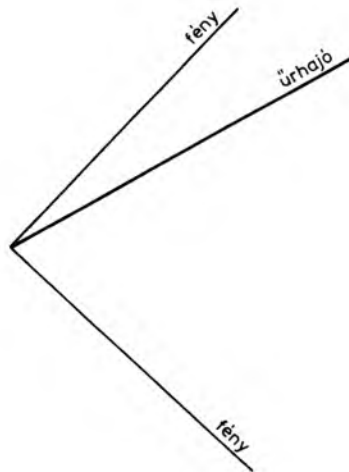
egy fényjelet, amely a 4 méterre lévő szemközti falon visszaverődik és visszaérkezve elnyelődik. Mennyi idő telik el a fény kibocsátása és elnyelődése között az űrhajó utasai szerint, és mennyi a laboratóriumi óránk szerint?

XXIV/2. Laboratóriumunk mellett 200 000 km/s sebességgel elszáguld egy űrhajó. Amikor éppen mellettünk halad, az űrhajó utasai az űrhajó egyik 4 méter hosszú szobájában a mozgás irányában az egyik faltól az űrhajó orra felé elindítanak egy fényjelet, amely a szemközti falon visszaverődik és visszaérkezve elnyelődik. Mennyi idő telik el a fény kibocsátása és elnyelődése között az űrhajó utasai szerint, és mennyi a laboratóriumi óránk szerint?

XXIV/3. Részecskegyorsítóban felgyorsított elektronsugár végighalad egy 2000 méter hosszú csövön. Milyen sebességgel halad a részecske, ha a hozzá rögzített vonatkoztatási rendszerben a cső hossza 20 cm-nek látszik? Mennyi ideig tartózkodik az elektron a csőben?

XXIV/4. Egy űrhajó 250 000 km/s sebességgel elhalad a laboratórium mellett. A laboratóriumi megfigyelők szerint az űrhajó 16 méter hosszú. Amikor elhalad a laboratórium mellett, a pilóta egyidejűleg felvillant két — egymástól 5 méterre felszerelt — lámpát az űrhajó hossz tengelye mentén. Milyen hosszú az űrhajó az utasai szerint? Mekkora időkülönbséget észlelnek a laboratóriumban a két felvillanás között?

XXIV/5. Az atmoszféra legfelső rétegeiben 60 km magasan egy elemi részecske (műon) keletkezik, amely $0,9999 c$ sebességgel repül. A Föld felszínén elbomlik. Mennyi ideig „él” a műon a földi vonatkoztatási rendszerben, és mennyi az élettartama a „sajátóráján”? Milyen vastagnak észleli a műon a légkört?



4.39. ábra

XXIV/6. Egy űrhajó $v = 0,9999 c$ sebességgel halad a 4 fényév távolságra lévő Proxima Centuari csillagrendszer felé, majd visszafordul, és ugyancsak v sebességgel visszatér a Földre. Mennyi ideig tart a mozgás a Földről nézve, és mennyi ideig tart az utazás az űrhajóban mérve?

XXIV/7. Egy A űrhajó 100 000 km/s sebességgel elhalad a Föld mellett. Ezt üldözőbe veszi egy B űrhajó, a sebessége 200 000 km/s. Mekkora sebességgel közeledik a B űrhajó az A űrhajóhoz?

XXIV/8. Az A űrhajó 250 000 km/s sebességgel elhalad egy — állónak tekintett — O űrhajó mellett. Ekkor mindkét rendszerben 0-t mutatnak az órák. Az O óráin mérve $t = 4$ s múlva az $x = 2 \cdot 10^6$ m koordinátájú helyen felrobban egy kis csillag. Hol és mikor történik a robbanás az A űrhajó rendszeréből nézve?

XXIV/9. A 4.39. ábrán egy űrhajó világvonalát látjuk. A $t = 0$ időpontban mindkét irányban kibocsátanak egy fényjelet. Szerkesszük meg ahhoz az inerciarendszerhez tartozó Minkowski-sík t és x tengelyét, amelyben az űrhajó áll!

XXIV/10. A világűrben felrobban egy kis csillag. Ezt az eseményt ábrázolja az O pont. A robbanást kísérő felvillanást is ábrázoltuk. Jelöljük ki egy P pontot a fénykúpon belül. Ez egy másik robbanást ábrázol (4.40. ábra). Adjuk meg ahhoz az inerciarendszerhez tartozó Minkowski-sík t és x tengelyét, amelyben a két robbanás ugyanott történik!

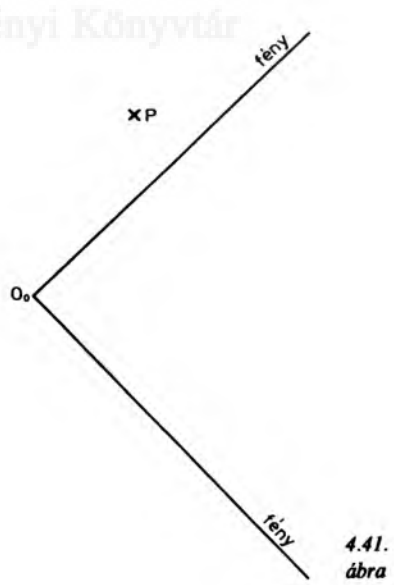
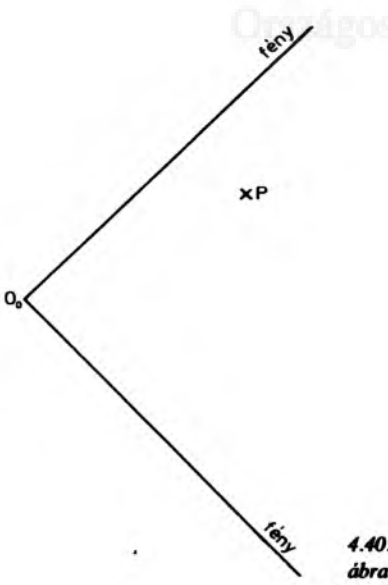
XXIV/11. A világűrben felrobban egy kis csillag. Ezt az eseményt ábrázolja az O pont. A robbanást kísérő fényfelvillanás világvonalát is feltüntettük. Jelöljük ki egy P pontot a fénykúpon kívül. Ez egy másik robbanást ábrázol (4.41. ábra). Adjuk meg ahhoz az inerciarendszerhez tartozó Minkowski-sík t és x tengelyét, amelyben a két robbanás ugyanakkor történik!

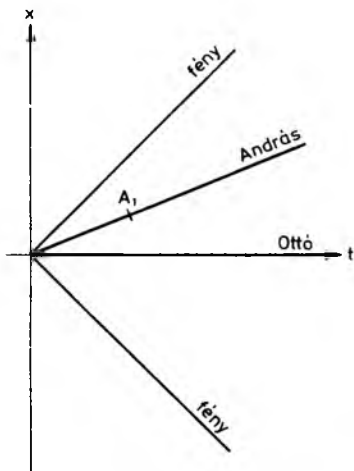
XXIV/12. A 4.42. ábrán látható az O űrhajó inerciarendszerének megfelelő $t-x$ koordináta-rendszer. A $t=0$ időpontban az O mellett elhalad az A űrhajó. Ekkor az A órái $t'=0$ időt mutatnak. A találkozás pillanatában mindkét űrhajóban egy-egy

kisfiú születik: O-ban Ottó, A-ban András. Az A űrhajó világvonalán bejelöltük András első születésnapját. Tüntessük fel a második és a harmadik születésnapot is! Szerkesszük meg Ottó egyéves születésnapját ábrázoló eseményt, és ezután jelöljük be O világvonalán Ottó második és harmadik születésnapját!

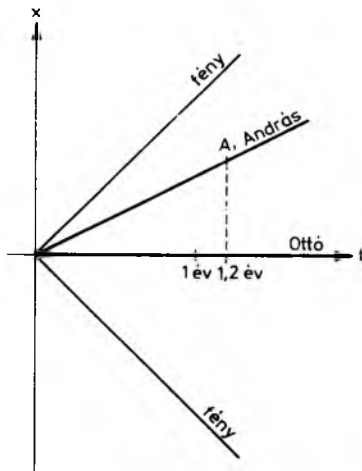
XXIV/13. A 4.43. ábrán látható az O űrhajó inerciarendszerének megfelelő $t-x$ koordináta-rendszer. A $t=0$ időpontban O mellett elhalad az A űrhajó, ekkor az A órái $t'=0$ időt mutatnak. A találkozás pillanatában mindkét űrhajóban születik egy kisfiú, Ottó és András. Ottó első születésnapját bejelöltük O világvonalán. Hozzávetőlegesen tüntessük fel András első születésnapját jelentő eseményt!

XXIV/14. A 4.44. ábrán látható az O űrhajó inerciarendszerének megfelelő $t-x$ koordináta-rendszer. Az O űrhajó mellett a $t=t'=0$ időpontban elhalad az A űrhajó. A két űrhajó találkozásakor az O-ban Ottó, A-ban András látja meg a napvilágot.

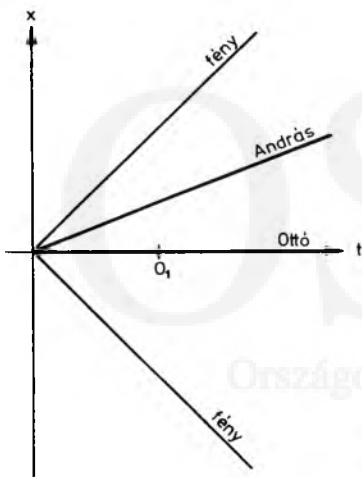




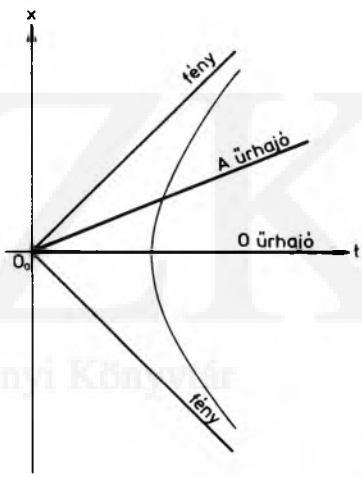
4.42. ábra



4.44. ábra



4.43. ábra



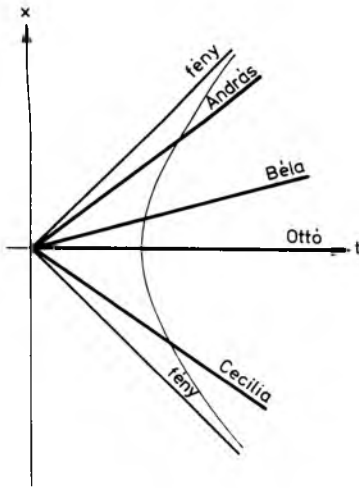
4.45. ábra

Milyen sebességgel mozog az A űrhajó, ha András első születésnapja az O óráin 0,2 évvel Ottó első születésnapja után következik be? Hány éves András (az A óráin nézve), amikor O-ban Ottó egy éves?

XXIV/15. A 4.45. ábrán látható O űrhajó inerciarendszerének megfelelő t – x koordináta-rendszert látjuk. A $t=0$ időpontban O mellett elhalad az A űrhajó. Megrajzoltuk az origótól egységnyi sajátidőre bekövetkező eseményeket is, az $x=t$ és

$x=-t$ aszimptotájú egységshiperbolát. Rajzoljuk meg egy olyan B űrhajó világvonalát, amely egy fényév távolságra A-hoz viszonyítva nyugalomban lebeg!

XXIV/16. Egy álló űrhajó mellett $v=240\,000$ km/s sebességgel elszáguld egy másik űrhajó. Amikor találkoztak, mindkét űrhajóban született egy-egy kisgyermek, az állóban András, a mozgóban Béla. Amikor a két kisfiú egyéves születésnapját ünnepli, a két űrhajóról egy-egy fényjelet



4.46.
ábra

küldenek a másik űrhajóra. Ábrázoljuk a két űrhajó és a két fényjel grafikonját egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek a függőleges tengelyén a távolságot fényévben mérjük, a vízszintes tengelyén az időt évben!

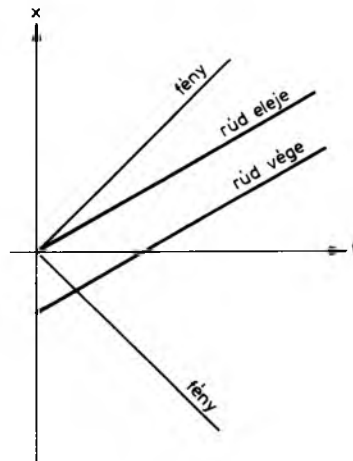
XXIV/17. Egy álló űrhajó mellett $v = 240\,000$ km/s sebességgel elszáguld egy másik űrhajó. Jelöljük az elsőt O-val, a másodikat A-val. Az A űrhajótól 3 fényév távolságra — A-hoz képest nyugalomban — lebeg egy harmadik űrhajó, ezt C-vel jelöljük. Ábrázoljuk a három űrhajó grafikonját olyan koordináta-rendszerben, amelynek a függőleges tengelyére a távolságot fényévben, a vízszintes tengelyére az időt évben mérjük!

XXIV/18. A 4.46. ábrán az O űrhajó inerciarendszerének megfelelő t — x koordináta-rendszert látjuk. A $t=0$ időpontban O mellett elhalad az A, B, C űrhajó. A négy űrhajón egy-egy gyermek, Ottó, András, Béla és Cecília látja meg a napvilágot, amikor éppen egymás mellett vannak. Ennek öröme egy fényjelet bocsátanak ki az űrhajók. A négy gyermek első születésnapját az egy évnyi sajátidőhöz tartozó hiper-

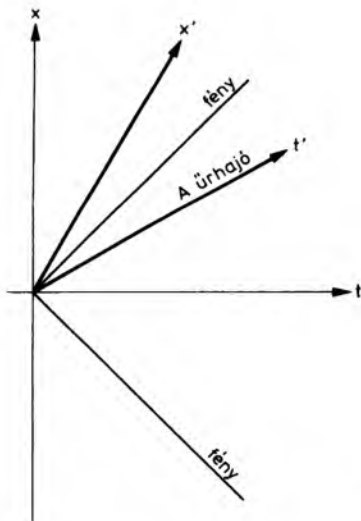
bola jelöli. Tegyük fel, hogy C-vel egy irányba haladó, hozzá képest nyugvó D űrhajó az A űrhajóval éppen akkor találkozik, amikor András első születésnapját ünnepli. Ekkor András átszáll a D űrhajóba. Tüntessük fel ezután Ottó, András, Béla és Cecília második, harmadik születésnapját!

XXIV/19. A 4.47. ábrán az O űrhajó inerciarendszerének megfelelő t és x tengelyeket látjuk. A $t=0$ időpontban elhalad O mellett az A űrhajó, sebessége $200\,000$ km/s O-hoz viszonyítva. A-ban a menetiránnyal párhuzamosan egy $L_0=4$ m hosszú rúd fekszik. Mekkora a rúd hossza O-ban mérve? Szemléltessük a rúd hosszcsökkenését!

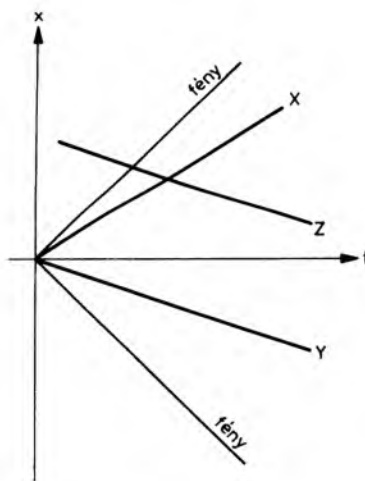
XXIV/20. A 4.48. ábrán az O űrhajó inerciarendszerének megfelelő t és x tengelyeket, valamint O-val az $x=0$ helyen, a $t=0$ pillanatban találkozó, O-hoz képest $0,8c$ sebességű A űrhajó világvonalát látjuk. Feltüntetjük az A-hoz tartozó Minkowski-sík t' és x' tengelyeit is. Az A űrhajóban az x' tengelyen az $x'_1=1$ fényév és $x'_2=2$ fényév pontokban egy időben a $t'=1$ év időpontban felrobban egy-egy bomba. Ábrázoljuk a két eseményt. Szemléltessük a két esemény koordinátáit O-ból



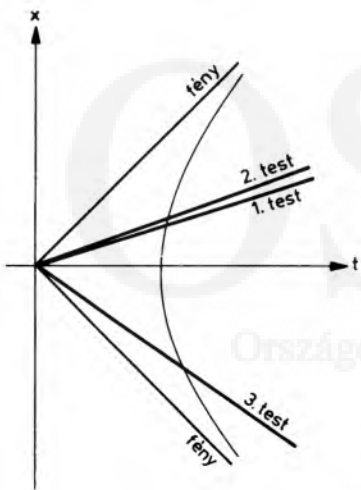
4.47.
ábra



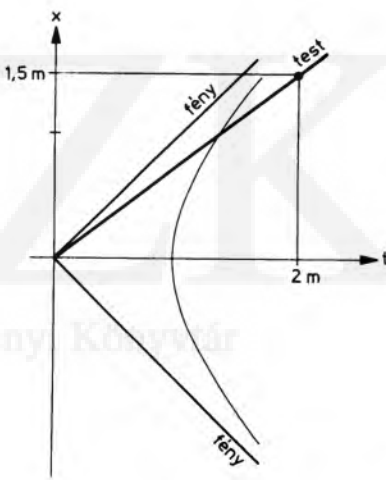
4.48. ábra



4.50. ábra



4.49. ábra



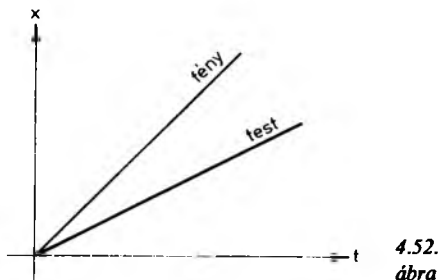
4.51. ábra

nézve! Mekkora a két esemény közötti időbeli és térbeli távolság az O-beli rendszerben?

XXIV/21. A 4.49. ábrán egy O űrhajó inerciarendszerének megfelelő $t-x$ koordináta-rendszert látjuk. A $t=0$ időpontban az x tengely mentén három testet lő ki az űrhajó. Mindhárom test egyenletesen mozog, az első test tömege $m_1 = 1$ kg, a sebessége $v_1 = 100\,000$ km/s, a második test tömege $m_2 = 2$ kg, a sebessége $v_2 = 120\,000$ km/s, és

végül a harmadik test esetén a tömeg $m_3 = 0,5$ kg, és $v_3 = -200\,000$ km/s. Határozzuk meg a három test impulzusát és szemléltessük az impulzusokat!

XXIV/22. Egy űrhajó inerciarendszerének megfelelő Minkowski-rendszer t és x tengelyét látjuk a 4.50. ábrán. Az origóból a $t=0$ időpontban két űrhajó indul, X, ennek a sebessége $200\,000$ km/s, és az Y, ennek a sebessége $-100\,000$ km/s. Az X űrhajó 100 kg tömegű utasa egyszer átszál



az Y-nal egyirányban mozgó Z űrhajóba. Mennyivel változott meg az utas impulzusa?

XXIV/23. Egy 2 kg tömegű test világvonala látható a 4.51. ábrán. A $t = 2$ fényméter időpontban ez a test az $x = 1,5$ méter koordinátájú helyen van. Határozzuk meg a test energiáját és impulzusát!

XXIV/24. Egy test világvonala a 4.52. ábrán látható. A tömege 2 kg, a sebessége 150 000 km/s. Mekkora a test impulzusa,

energiája és mozgási energiája? Szemléltessük az impulzust és az energiát!

XXIV/25. Egy 1 kg tömegű test impulzusa valamely vonatkoztatási rendszerben (tömegegységben mérve) 0,64 kg. Mekkora az energiája? Mekkora a mozgási energiája és a nyugalmi energiája? Határozzuk meg a test sebességét!

XXIV/26. Egy test impulzusa valamely vonatkoztatási rendszerben (tömegegységben mérve) 0,8 kg, az energiája 1 kg. Mekkora a test tömege? Mekkora a mozgási energiája és a sebessége? Határozzuk meg ezeket a mennyiségeket konvencionális mértékegységekben!

XXIV/27. Egy test impulzusa a \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerben 0,8 kg (tömegegységben mérve), az energiája pedig 1 kg. Határozzuk meg az impulzust és az energiát egy \mathcal{K}' -hoz viszonyítva 0,4 c sebességgel mozgó \mathcal{K}' rendszerben!

IV. rész

Atomfizika

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

1. Az anyag atomos szerkezete

1.1. Elemi atomelmélet

1.1.1. Avogadro törvénye

Az emberi kultúra ókori bölcsőjétől kezdve izgatta a kutató embert, hogy az anyag folytonos-e, vagy valamiféle legkisebb építőkövekből épül fel. Demokritosz az elemi atomelmélet első megfogalmazói közé tartozik, spekulatív úton az anyag atomos szerkezetének a hipotéziséhez jutott. Az atom az anyagot felépítő legkisebb építőkö, alkotórész, amely oszthatatlan. Folytonosnak csak azért látjuk, mert olyan kicsik ezek az elemi téglácskák, hogy nem érzékeli a szemünk az egyediségüket, különállásukat.

Az atomelmélet első megalapozásához a tapasztalati anyagot a kémia szolgáltatta. Lavoisier a XVIII. század végén bevezette az *elem* fogalmát, megállapította az elemek határozott súlyarányát néhány *vegyület*-ben.

Proust általánosan megfogalmazta az *állandó súlyviszonyok törvényét* (1801): *a kémiai reakciókban részt vevő anyagok csak meghatározott tömegarányban reagálnak maradéktalanul egymással.* Néhány évvel később (1803–1808) Dalton megállapította a *többszörös súlyviszonyok törvényét*: *ha két elem — mondjuk A és B — többféleképpen is vegyülhet egymással, ak-*

kor az A elem azon mennyiségei, amelyek a B elem valamilyen adott mennyiségével maradéktalanul reagálni képesek, úgy aránylanak egymáshoz, mint a kis egész számok.

Mindkét tapasztalati törvény értelmezhető oly módon, hogy feltesszük, az elemek atomokból állnak. Az elemek atomjai a kémiai reakciókban nem változnak, csak meghatározott módon kapcsolódhatnak egymáshoz, molekulákat alkotnak. Például: egy oxigénatom két hidrogénatommal, egy szénatom két oxigénatommal képes egy molekulát alkotni.

A vegyületet alkotó atomok viszonylagos tömegére is következtethetünk ezáltal. Ha a legkisebbnek adódó hidrogénatom tömegét tekintjük egységnyinek, akkor például a szénatom relatív tömege 12, más szóval: a szén relatív atomtömege vagy atomsúlya 12.

Dalton atomelméletébe jól illeszkedett az 1812-ben megfogalmazott, Gay-Lussactól származó felismerés: *kémiaailag egyesülő gázok térfogatai állandó hőmérsékleten és nyomáson úgy aránylanak egymáshoz, mint a kis egész számok.* Például: három térfogatrész hidrogén maradéktalanul egyesül ugyanolyan hőmérsékletű és nyomású egy térfogatrész nitrogénnel, a keletkezett gáz a kellemetlen szagú ammónia.

Gay-Lussac megfigyelését Avogadro a következő hipotézissel magyarázta: *egyenlő térfogatú, nyomású és hőmérsékletű gázban anyagi minőségtől függetlenül azonos számú molekula van.* Így — példaként említve — 10 liter 1 atmoszféra nyomású, 300 K hőmérsékletű oxigéngáz pontosan annyi molekulát tartalmaz, mint 10 liter 1 atmoszféra nyomású, 300 K hőmérsékletű metángáz vagy hélium. Persze, ezeknek a gázmennyiségeknek a tömege különböző.

Felismerték azt is, hogy ha különböző gázokból éppen annyi grammot veszünk, amennyi a gáz atomtömege vagy molekulatömege, akkor azonos hőmérsékleten és nyomáson a gázok térfogata azonos. Ezt a mennyiséget *molnyi mennyiségnek* vagy *1 molnak* nevezzük. Avogadro törvénye értelmében 1 mol mennyiségű gázok azonos számú molekulát tartalmaznak. Egyszerű példa: 1 atmoszféra nyomáson és 300 K hőmérsékleten 2 g hidrogén, 4 g hélium, 32 g oxigén, 44 g szén-dioxid ugyanannyi molekulát tartalmaz. Ez az úgynevezett *Avogadro-szám*, általában N_A -val jelöljük. *Loschmidt-féle számnak* is nevezik, mert Loschmidt határozta meg először az értékét 1865-ben; azt találta, hogy 1 mol mennyiségű gázban $6 \cdot 10^{23}$ számú molekula van. Ezt a számot — Loschmidt nevére utalva — *L* betűvel is jelölik. (A következő 60—70 évben mintegy tíz különböző szellemes módszert dolgoztak ki az Avogadro-szám meghatározására. Természetesen mindegyik módszer ugyanarra az eredményre vezetett.)

Közben az atomok létezésének más bizonyítékai is felszínre kerültek. Már 1826-ban Brown angol biológus mikroszkóp alatt megfigyelte, hogy a folyadékban keveredett (szuszpendált) kis részecskék állandó, szabálytalan mozgást végeznek. Ezt a jelenséget azóta is

Brown-mozgásnak hívják. A kis részecskék — az eredeti kísérletben virágpór részecskék — rendezetlen mozgása a folyadék molekuláinak a mozgásából származik. Brown úgy vélte, hogy a folyadék molekulák „termikus mozgását” átadják a folyadékban lebegő nagyobb részecskének, amelyek a mikroszkóp alatt jól megfigyelhetők, miközben a molekulák láthatatlanok maradnak. A Brown-mozgás azonban csak akkor vált az atomhipotézis igazi bizonyítékává, amikor Einstein matematikailag is leírta a folyadékban bolyongó részecskék mozgását.

Az atomhipotézis mellett szóló óriási jelentőségű eredmény a Mengyelejev-féle periódusos rendszer: az elemek atomtömeg szerint növekvő sorozatában a kémiai tulajdonságok periódikusan ismétlődnek. Kezdetben ez a sorozat meglehetősen hézagoss volt, később egyre több és több elemet fedeztek fel, amelyek a hézagokat betöltötték. Az volt a meglepő a vegyészek számára, hogy a periódusos rendszer alapján előre lehetett következtetni a még fel nem fedezett elemek kémiai tulajdonságaira.

Az atomok létezésére utaló bizonyítékok közül még egyet említünk, egy mindennapi tapasztalatunkat: az ég kék színét és a lemenő Nap vörös színét. Sok fizikus és sok költői lelkű ember elméjét izgatta ez a mindennapi tény, magyarázatot azonban csak 1900-ban Lord Rayleigh adott a jelenségre.

Az elgondolásának az alapja az, hogy a levegő részecskéi, molekulái szórják a fényt. Amikor az ég kék színét csodáljuk, vagy a lemenő Nap vörös színében gyönyörködünk, akkor az anyag atomos, diszkrét szerkezetének közvetlen következményeivel találkozunk. Ha a levegő folytonos pontrendszer lenne — mint ami-

lyennek a gyermek látja a tejet —, nos ebben az esetben a levegő nem szórná a rajta áthaladó napsugarakat, az ég fekete lenne, a Nap mellett a csillagokat is lát-nánk, mint az űrhajók utasai.

A levegő azonban nitrogén- és oxigén-molekulákból áll. Amikor a Nap sugarai ezeket a molekulákat megvilágítják, mind parányi fényforrássá válik. A Naptól ka-pott fényt minden irányban szétszórják. Rayleigh bebizonyította, hogy a fény hul-lámhosszánál kisebb méretű testeken szórt sugárzás intenzitása fordítottan arányos a sugárzás hullámhosszának a negyedik hat-ványával. A vörös fény $0,7\mu\text{m}$, a kék $0,4\mu\text{m}$. A két sugárzás szóródásának az aránya $(7/4)^4 \approx 10$. A nap sugárzásában lévő kék és ibolya sugarak mintegy tízszer annyira szóródnak a levegő részecskéin, mint a vörösek. Ezért látjuk kék színűnek az eget.

Másrészt a szóródás következtében a Nap sugarai veszítenek az energiájukból. Az áthatolt réteg vastagságával gyengül-nek. A gyengülés a kék sugaraknál foko-zottabb, mint a vörös sugaraknál. A le-nyugvó Nap fénye — amelynek a sugarai vastag levegő rétegen hatolnak át — vörös színűnek látszik.

Összefoglaltuk azokat a kísérleti ténye-ket, elsősorban kémiai jellegű okoskodá-sokat, amelyek alátámasztják az atomok létezésének a hipotézisét.

Figyelemre méltó azonban az a — tuda-mánytörténeti szempontból is érdekes — tény, hogy a fizikusokat a XIX. század végéig nem nagyon érdekelték az anyag diszkrét szerkezetére utaló kérdések.

Érthető is ez: a klasszikus fizikában nincs különösebb helye az atomoknak és a molekuláknak. Sőt, ha a mechanikában vagy az elektrodinamikában komolyan építenek az anyag építőköveinek a tulaj-

donságaira, akkor ebből csak galiba szár-mazna. A klasszikus fizika nem tud mit kezdeni az atomokkal és a molekulákkal. Még a hőtanban is csak érintőlegesen ka-pott szerepet az anyag szerkezetére való utalás. Az anyag atomos szerkezetének a tényét ebben a fejezetben sem aknáztuk ki.

Abban az időben — a XIX. század má-sodik felében —, amikor a mechanika, az elektrodinamika és a hőtan a fejlődésének a csúcsa felé közeledett, az atomok létezé-sének kérdését sok nagy nevű fizikus nem látta indokoltnak. Még Max Planck is, akinek a nevéhez a modern kvantumelmé-let megszületése fűződik, eleinte maga sem hitt az atomok létezésében. Olyan nagy fizikusok is, mint Mach és Ostwald még a XX. század fordulóján is kíméletlen szelle-mi hadjáratot folytattak az atomelmélet hívei ellen.

Az atomok és a molekulák létezése a klasszikus kémia fontos alapfeltevése. A klasszikus fizikában azonban nincs helye az atomoknak. A fizikusok akkor kezdték az atomokat komolyan venni, amikor az atom szerkezetét kezdték vizsgálni: a fizika számára az atom mindaddig nem volt ér-dekes, amíg oszthatatlan volt. Az atom „belsejét” vizsgáló kísérletek azonban új tudomány, a modern *mikrofizika* megszü-letéséhez vezettek.

A következő pontokban összefoglaljuk és áttekintjük azokat a kísérleti tényeket, legfontosabbnak látszó megfigyeléseket, amelyek a mikrofizika tapasztalati alapjai-nak tekinthetők. Úgy próbáljuk megvilá-gítani ezeket a felfedezéseket, megszerezni, hogy elkerüljük azokat a buktatókat, ame-lyeken a XX. századi fizika a fejlődése so-rán keresztülbukdácsolt.

Nem feltétlenül a történeti utat követ-jük. Elkerüljük a kultúrtörténeti érdekes-ségek taglalását, mint például az érdekes,

azonban a fizika szempontjából már érdektelen kezdeti atommodellek ismertetését. Óhatatlan, hogy olyan fogalmakat alkítanánk ki, amelyek a következő gondolatainkat már gátolnák.

Ezekre a tapasztalati tényekre támaszkodva megkíséreljük felvázolni a mikrofizika legegyszerűbb fejezetének, a kvantummechanikának a gondolatvilágát, és végső célként szeretnénk megmutatni, hogy mi az, amiben a klasszikus fizika különbözik a modern fizikától.

1.1.2. Az elektromosság atomos szerkezete

Az elektrodinamika maxwelli elméletéből éppoly távoleső gondolat az atomos töltés adagolt volta, mint a mechanikától az anyag diszkrét szerkezete. Az elektrosztatikában megfogalmaztuk: az atomos töltés tetszőlegesen osztható, a mérőszám tetszőleges valós szám lehet. A Maxwell-féle elektrodinamika fontos axiómája a töltés oszthatósága. Hamarosan új jelenségekkel ismerkedünk meg: látni fogjuk, hogy az atomos töltésnek van valamilyen természetes egysége, amelynél kisebb adagban az atomos töltés nem fordul elő. Azt is látni fogjuk, hogy a folytonos mennyiségek hipotézisére alapozott elektrodinamika törvényei ugyanúgy nem mindenhatóak, mint a mechanikai törvények sem. A jelenségeknek csak egy meghatározott szűk körében érvényesek.

Az elektromosság atomos szerkezetére utaló eredmények Faraday nevéhez fűződnek. Érdekes, hogy Faraday kísérleti munkássága néhány évtizeddel megelőzte az elektrodinamikai elmélet teljes kialakulását. Maxwell tudhatott az elektromosság atomos szerkezetéről, mégsem építette be az elméletébe.

Mint ismeretes, a kémiailag tiszta folyadékok általában rossz vezetők. Különösen rossz vezető a desztillált víz. Ha a tiszta vízbe két fémlemezt merítünk, és erre feszültséget kapcsolunk, akkor a két lemez között áram alig mutatható ki. Ha azonban egy csipetnyi konyhasót teszünk a vízbe, akkor az áram azonnal megindul, a fém felületén pedig kémiai változások figyelhetők meg.

Azokat a vezetőket, amelyekben az áram kémiai változásokkal van kapcsolatban, elektroliteknek nevezzük. Elektrolitek például a sók, savak, bázisok vizes oldatai. A negatív lemezt katódnak, a pozitívot anódnak nevezzük.

Az elektrolízissel kapcsolatos legfontosabb, legszembetűnőbb jelenség az anyag kiválása. Ha például sósav vizes oldatán keresztül áramot vezetünk, akkor a katódon hidrogéngáz, az anódon klórgáz válik ki. Másik példa: a réz-klorid oldatán keresztülvezetett áram hatására a katód rézzel vonódik be, az anódon pedig most is klórgáz szabadul fel.

Faraday sokféle elektrolittal végezte el a hasonló kísérleteit. Megállapította, hogy az elektródokon kiváló anyag m tömege arányos az áthaladó stacionárius áram I erősségével és az eltelt t idővel (*Faraday első törvénye*):

$$m = kIt. \quad (1)$$

A k arányossági tényezőt az anyag elektrokémiai egyenértékének nevezzük, a mértékegysége g/C . Az elektrokémiai egyenérték természetesen az anyagtól függő tényező.

Faraday második törvénye szerint az elektrokémiai egyenérték arányos az anyag atomsúlyával, fordítottan arányos a vegyértékkel:

$$k \sim \frac{A}{Z},$$

a mérések szerint

$$96\,500\,k = \frac{A}{Z}. \quad (2)$$

Faraday két törvénye így foglalható össze:

$$m = \frac{A}{Z} \frac{1}{96\,500} Q, \quad (3)$$

ahol $Q = It$ az átáramlott töltés mennyisége.

Miként értelmezhető ez az eredmény? Foglalkozunk egyelőre egyvegyértékű ionokkal. Az m/A tört azt fejezi ki, hogy hány molnyi mennyiségű ion válik ki az elektródán. Az elektródán kivált anyag mennyisége molban:

$$\frac{m}{A} = \frac{1}{96\,500} Q.$$

Figyelembe véve, hogy egy molnyi anyagban $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ számú atom van, $N_A m/A$ az elektródára megérkező atomok számát jelenti. $N_A m/A$ számú atom összesen Q töltést szállít az elektródára. Egyetlen atomra tehát

$$\frac{Q}{N_A \frac{m}{A}} = \frac{96\,500}{6 \cdot 10^{23}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

töltés jut.

Ha egyvegyértékű atomok szállítják az elektrolitban az elektromos töltést, akkor egyenként $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ töltést adnak le azon az elektródán, amelyiken kiválnak. Jelöljük ezt a töltésmennyiséget e -vel:

$$e := 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Gondoljuk át még egyszer az elmondottakat „visszafelé”!

Ha egyetlen egyvegyértékű ion válik ki az elektródán, akkor

$$Q = e$$

mennyiségű töltést ad le. Amennyiben az ion nem egy vegyértékű, akkor Z -vel jelölve a vegyértéket, a leadott töltés:

$$Q = Ze.$$

Egy molnyi anyagban $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ számú atom (ion) van, ezért, ha egy molnyi Z -vegyértékű ion válik ki, akkor az elektródára

$$Q = ZeN_A$$

töltés jut. Gondoljuk most el, hogy m/A molnyi mennyiségű ion érkezik meg, akkor ebben az esetben az elektródára

$$Q = \frac{m}{A} ZeN_A \quad (4)$$

mennyiségű töltést ad le a kiváló anyag.

Nilvánvaló, hogy a (3) és a (4) egyenértékű állítások.

Gondoljuk meg: a Faraday-törvények legkézenfekvőbb értelmezése az, hogy minden egyes ion az $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ töltésnek egész számú többszörösét hordozza. Ha a töltés tetszőlegesen kicsiny lenne, tetszőlegesen kicsiny adagokban válhatna ki az elektródákon, akkor az (1) és a (2) törvények nem lehetnének érvényesek.

A Faraday-törvények értelmezése vetette fel tehát először azt a gondolatot, hogy az elektromosság is atomos szerkezetű. A gondolat fő szószólói Helmholtz és Stoney voltak (1881).

Az elemi töltés létezése mellett egy direkt bizonyítékot szolgáltatott a Millikan által végrehajtott kísérlet (1910). A kísérlet alap gondolatával már az elektrosztatikában megismerkedtünk (III. rész 1.1.5. pont). A vízszintes kondenzátor lemezei közé mintegy 10^{-5} cm sugarú olajcseppeket juttatunk. A cseppecskére elektromos töltést juttatunk. Az elektromos és a nehézségi erő mellett a lemezek között moz-

gó olajgömböcskékre a felhajtóerő és a közegellenállási erő hat. Az erőegyensúlyt felírva látható, hogy egyetlen ismeretlent tartalmaz: a részecske töltését. A többi mennyiség több-kevesebb fáradsággal meghatározható.

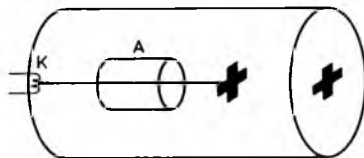
Millikan úgy találta, hogy a cseppek töltései mindig egy meghatározott legkisebb töltésnek az egész számú többszöröse. Igen pontos mérések szerint az elemi töltés: $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

A fentiekből úgy tűnik, hogy egy test elektromos töltése az elemi töltés egész számú többszöröse lehet. A testek közötti töltéscserénél is ez a legkisebb adag. És valóban: egyetlen kísérleti bizonyíték sincs ennek a feltevésnek az ellenkezőjére. Célszerűnek látszik tehát a továbbiakban *alapelveként* kezelni az elektromos töltés „atomos” szerkezetének a hipotézisét.

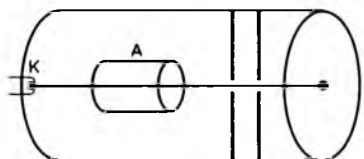
Ezzel kapcsolatban azonban gondolnunk kell arra, hogy a Maxwell-féle elektrodinamika az elektromos töltést folytonosan változó mennyiségnek tekintette. Várhatóan most — a mikrofizika világában — az elektrodinamika törvényei is módosulnak. Számítanunk kell arra, hogy a Maxwell-féle törvények minden további nélkül nem lesznek igazak, a valóságot csak más — még fel nem fedezett — törvényekkel együtt írják le helyesen.

1.1.3. A katódsugárzás

A XIX. században, a klasszikus fizika nagy századában a fizikusok sokat foglalkoztak a gázkisüléssel. Légmentesen zárt üvegburába két elektródot helyeztek. Az elektródákra nagy feszültséget kapcsoltak. A negatív elektródákat most is katódnak, a másikat anódnak nevezték. Azt tapasztalták, hogy a gázban érdekes fényjelensé-



1.1. ábra



1.2. ábra

gek lépnek fel. Ha a gáz nyomását fokozatosan csökkentették, akkor a fényjelenségek megszűntek. Nagyon kis nyomás — 10^{-7} Torr (kb. 10^{-5} Pa) — esetén arra figyeltek fel, hogy a katóddal szemközti üvegfal zöldes fényben világít, fluoreszkál. A katódból tehát egy láthatatlan sugárzás indul ki, amelyre csak az üvegfalon tapasztalható fényjelenségekből következtetünk. Ezt a sugárzást *katódsugárzás*-nak nevezték.

Tekintsük most át ennek a sugárzásnak a természetét.

Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy sok vonatkozásban hasonló az elektromágneses sugárzáshoz, például a fényhez. Ha a katódsugár elé egy fémlapot helyezünk, akkor az árnyéka a katóddal szemközti üvegfalon megjelenik (1.1. ábra).

Ha a katódsugárzás útjába keskeny nyílást helyezünk, akkor a résen áthaladó katódsugárzás keskeny hasáb formájában halad tovább. Két párhuzamos lyukas fémlapra helyezünk el a sugárzás irányára merőlegesen. A két lyukon áthaladó sugárzás túszerűnek tekinthető (1.2. ábra).

A katódsugárzással kapcsolatban elhajtási jelenségek is észlelhetők. Először Davis-

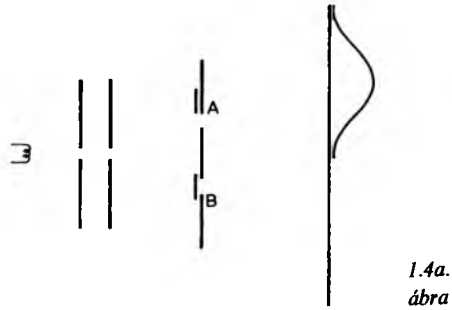
son és Germer valósították meg (1927). A katódsugarakat egy nikkeltárályra irányították, és a kristályról visszaverődő sugárzás erősségének irányától való függését mérték kísérletekben. Azt tapasztalták, hogy a kristályról csak meghatározott irányokban verődik vissza a katódsugárzás.

A klasszikus kétnyílásos Young-féle interferenciajelenség is megfigyelhető, bár a kísérletet csak meglehetősen későn sikerült valóban megvalósítani, mert a katódsugárzás hullámhossza sokkal kisebb, mint a fényé.

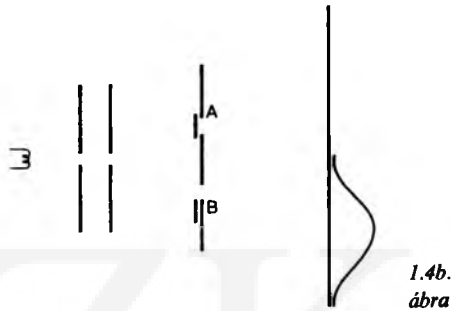
A kétnyílásos interferenciakísérlet elvi vázlatát a következő: a katódsugárcsőből induló sugárzást szűkítő nyílásokkal tűszerű sugárzássá keskenyítjük. Ezután a sugárzás útjába egy fémlemez helyezünk, amelyen két nyílás van: A és B (1.3. ábra). Ezek a nyílások egymástól függetlenül nyithatók és zárhatóak. A fémlemmel szemben egy felfogóernyő van, amelynek a fluoreszkáló festéke jelzi a katódsugár hatását az ernyőn. Ha az üveglap helyére egy fényképezőlemez helyezünk, akkor a lemezen a katódsugárzás feketedést okoz azon a helyen, ahol kapcsolatba kerül a lemez ezüstszemcséivel. Másként is lehet a katódsugárzást érzékelni. A sugárzás útjába sugárzást érzékelő számláló berendezéseket építhetünk, ilyen például a Geiger—Müller-számláló.



1.3. ábra



1.4a. ábra



1.4b. ábra

Képzeljünk el most, hogy a katódsugárzás útjába helyezett nyílások közül az A nyitva van, a B zárva. Ekkor a katódsugárzás hatása a fluoreszkáló ernyőn mindennél észlelhető, azonban a nyílással szemben legnagyobb a sugárzás intenzitása, a sugárzás erőssége a középvonaltól távolodva erősen csökken. Hasonló a helyzet akkor is, ha csak a B nyílás van nyitva. A két intenzitásgörbe csak annyival különbözik egymástól, hogy a maximumok helye a két rés helyzetének megfelelően egymástól különbözik (1.4. ábra).

Mi történik akkor, ha mindkét nyílást szabadon hagyjuk? Most is hasonló képet kapunk, mint amit a fényhullámok esetén láttunk a III. rész 3.1.2. pontjában. A fényhullámok interferenciája sajátos interferenciaképet hozott létre a fényforrással és a két réssel szemközti ernyőn: sötét és világos csíkok sorozatát.

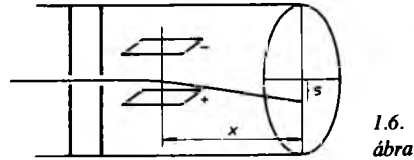
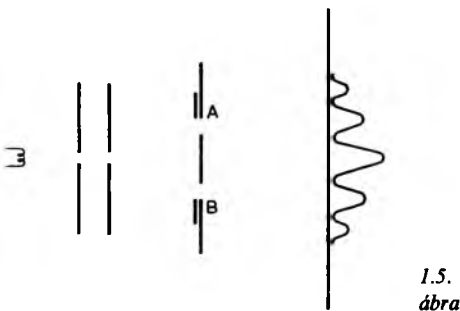
A katódsugárzásnál is ezt tapasztaljuk. Ha mindkét rés nyitva van, akkor az 1.5. ábrán látható intenzitáseloszlás alakul ki. Ki kell emelni, ez a kép nem függ attól, hogy mekkora a sugárzás intenzitása. Ha a katódsugárzás erőssége csökken, akkor az interferenciakép intenzitása is csökken, halványabb, de a sötét foltok és a világos vonalak helye nem változik.

Érdekes viszont, hogy megváltozik a maximumok és minimumok helye, ha a katód és az anód közötti feszültséget változtatjuk. Ennek a jelenségnek az értelmezésére hamarosan visszatérünk.

Felvetődik a kérdés: mennyiben más a katódsugárzás, mint az elektromágneses sugárzás. Lehetséges volna, hogy a katódsugárzás valami igen kemény elektromágneses sugárzás? Az elektromágneses sugárzás és a katódsugárzás két dologban alapvetően különbözik egymástól. Az egyik az, hogy a katódsugárzás ellentétben a fénnel — elektromos töltést is szállít. A másik pedig az, hogy a katódsugárzás sebessége általában kisebb a fénysebességnél.

Elemizzük részletesen ezeket az állításokat.

Vizsgáljunk egy lyukon keresztülhaladó igen keskeny katódsugárnyalábot, amelynek a keresztmetszete elhanyagolható. Ha az átfúrt anód és az ernyő között egy kondenzátor lemezei között elektromos erőte-



ret hozunk létre, akkor a fluoreszkáló ernyőn a folt elmozdul (1.6. ábra). Egyszerű mérésekből megállapítható, hogy a fluoreszkáló folt s elmozdulása egyszerűen kifejezhető az eltérítő E elektromos térerősséggel, a lemezek l hosszával, a lemezek középpontjának az ernyőtől mért x távolságával, fordítva arányos a katód és az anód között mérhető U feszültséggel:

$$s = \frac{Elx}{2U} \quad (1)$$

Ez az eredmény emlékeztet egy korábbi feladatra a III. rész 1.1.5. pontjából, ahol arról volt szó, hogy egy m tömegű, q töltésű részecskét felgyorsítottunk U feszültségen. Ekkor a kezdősebesség nélkül induló részecske mozgási energiája az elektromos tér munkájával egyenlő:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU \quad (2)$$

A v sebességre felgyorsult részecske ezután a vízszintes kondenzátor lemezei között parabolapályán mozog, Eq erő hat rá, így a lemezekre merőleges gyorsulásra vonatkozó Newton II. törvénye:

$$Eq = ma \quad (3)$$

A lemezek x hosszúságú éle mentén v sebességgel egyenletesen mozog,

$$x = vt \quad (4)$$

Eközben szert tesz

$$v_y = at \quad (5)$$

sebességre, és elmozdul

$$y = \frac{a}{2} t^2 \quad (6)$$

távolsággal a lemezekre merőleges irányban. Innen a parabola egyenlete:

$$y = \frac{1}{2} \frac{Eq}{2mv^2} x^2. \quad (7)$$

A részecske a parabola P pontbeli érintője mentén jut az ernyő T pontjába. Az érintő — az elemi geometriából ismert — az x tengelyt az $x/2$ pontban metszi. A hasonló háromszögek alapján ezért

$$y = \frac{sx}{2l}. \quad (8)$$

E két utóbbi összefüggésből

$$\frac{q}{m} \frac{1}{v^2} = \frac{s}{Exl}. \quad (9)$$

Vegyük most figyelembe, hogy a munkatétel alapján

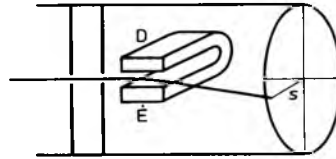
$$\frac{q}{m} \frac{1}{v^2} = \frac{1}{2U}. \quad (10)$$

Vessük most össze a (9) és a (10) összefüggéseket! Ekkor

$$s = \frac{Elx}{2U}. \quad (11)$$

A vékony sugárrá koncentrált — szűkített-katódsugár úgy mozog, mint egy pontszerű részecske.

Ha a katódsugárzás elektromos töltést is szállít, akkor mágneses tér is eltéríti. A III. rész 2.2.1. pontjában találkoztunk egy olyan feladattal, amelyben azt a célt tűztük ki célul, hogy meghatározzuk egy mozgó részecske eltérülését mágneses térben. Idézzük fel ez a feladatot is. Tegyük fel tehát, hogy m tömegű, q töltésű, v sebessé-



1.7. ábra

gű részecske B erősségű homogén mágneses térbe hatol (1.7. ábra). A részecskére qvB nagyságú mágneses erő hat, amely a centripetális erő szerepét tölti be:

$$qvB = m \frac{v^2}{r}. \quad (12)$$

Innen

$$\frac{q}{m} \frac{1}{v} = \frac{1}{Br}. \quad (13)$$

Itt a jobb oldalon minden mennyiség könnyen meghatározható, illetve mérhető. A (9) és a (13) egyenlőségből

$$v = \frac{Exl}{Brs}, \quad (14)$$

ami általában számottevően kisebb, mint a fény sebessége vákuumban. Másrészt, ugyancsak a (9) és (13) egyenlőségekből

$$\frac{q}{m} = \frac{Exl}{B^2 r^2 s}. \quad (15)$$

Ha az elektromos és a mágneses tér eltéríti az m tömegű, q töltésű, v sebességű részecskék homogén áradatát, akkor az eltérülés mértékéből (s , r), egyszerű geometriai adatokból (x , l) és az elektromos, valamint a mágneses tér erősségének az értékéből (E , B) meghatározható a részecskék sebessége, valamint töltésüknek és tömegüknek az aránya.

Igen érdekes dolog, hogy a vékony sugárrá koncentrált katódsugárzás úgy viselkedik, mint elektromos töltéssel rendelkező kicsiny testek áradata.

Természetesnek tűnik ezután a gondolat, hogy a katódsugárzás tömeget és elektromos töltést is szállít. A katódsugárzás sebessége és a töltés/tömeg arány a fenti gondolatmenetekre támaszkodva könnyen meghatározható. Elég a (14) és a (15) összefüggésekre hivatkozni.

Más kérdés, hogy miként értelmezzük ezeket a képleteket a katódból kiinduló sugárzás esetében.

Mindenekelőtt idézzük fel azt az — előző pontban rögzített — feltevésünket, hogy az elektromos töltés minden esetben az $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C töltés egész számú többszöröse. Ha a katódsugárzás is adagokban szállítja a töltést, *akkor a tömeg is adagokban áramlik!* Tegyük fel, hogy a katódsugárzás esetén $q = e$, akkor a (15) egyenlőségéből az m meghatározható:

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

A katódsugárzásban tehát a tömeg $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg nagyságú adagokban terjed, magával szállítva az elemi töltést, minden egyes tömegadaghoz

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

nagyságú, negatív töltés társul.

A katódsugárzásban szállított m_e tömegű, e nagyságú negatív töltésű adagokat *elektronoknak* nevezzük. *Az elektronok a katódsugárzás egységei.* Ha a katódsugárzás kapcsolatba kerül a fluoreszkáló ernyővel vagy a fényképezőlemezrel, akkor a kölcsönhatás során a tömeg és a töltés is ezekben az adagokban nyelődik el az ernyőn. A kapcsolat mindig az ernyő vagy a fényképezőlemez egy pontján megy végbe, ez a pont azonban többé-kevésbé véletlenszerűen alakul ki. Így van ez akkor is, ha a katódsugárzást keskeny nyalábbá szűkítettük, de akkor is, ha az egész katódsugárcsövet kitölti.

Említettük, hogy a keskeny sugárra szűkített katódsugár úgy viselkedik, mint negatív töltéssel rendelkező azonos tömegű részecskék áradata. Bizonyos értelemben valóban így van, de az elektronok mégsem kis részecskék. Az elektronok — megismételjük — a katódból kiinduló sugárzás egységei.

Érdekes probléma maradt hátra. Értelmezni fogjuk az elektron impulzusát, mozgási energiáját, és ezeket a mennyiségeket kapcsolatba kell hoznunk a mérhető mennyiségekkel, például az elhajlásból számított hullámhosszal.

A katódsugárzásban haladó elektronok sebessége a hullámfront terjedési sebessége. Ha a sebesség nem túl nagy — sokkal kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség —, akkor a (2) munkatételből meghatározható, különben a munkatétel relativisztikus változatát kell alkalmaznunk.

Az elektron impulzusát értelmezzük a klasszikus módon:

$$I = mv. \quad (16)$$

Az értelmezés a mechanika fogalmaihoz illeszkedik, sejtethető ezért, hogy amikor a mikrofizika fogalomrendszerének a diszkussziójára rátérünk, akkor ezt az értelmezést ki kell egészíteni és módosítani is kell némiképp. A katódsugárzásban haladó elektron esetére azonban a (16) összefüggésben szereplő impulzus megfelelő állapotjelző.

Ha növeljük a katód és az anód közötti feszültséget, akkor az elektronsugár sebessége nő, és nő ezzel az impulzusa is. Kérdés, hogy milyen következménye van ennek a kialakuló interferenciáképre? Hogyan befolyásolja a sebesség az elektronsugár hullámok interferenciáját?

Valóban, ha az elektronsugár sebessége növekszik, akkor a Young-féle kétnyílásos interferenciakísérletben, de a Davisson—

Germer-féle elektronelhajlás esetén is, a sötét és a világos helyek szorosabban követik egymást.

Az interferenciaképből a szokásos módon (III. rész 3.1.2. pont) meghatározhatjuk a hullámhosszot. A tapasztalat szerint az elektronhullám hullámhossza és az elektronok impulzusa között fordított arányosság áll fenn. Ha növekszik az elektronok impulzusa, akkor csökken a katód sugárzás hullámhossza, nő a frekvenciája. Keményebb lesz a sugárzás, az interferenciaképből szorosabban követik egymást a sötét és a világos helyek. A

$\lambda I = \text{állandó}$

összefüggést olyan *alapvető tapasztalati ténynek* tekintjük, amelyet nem kívánunk visszavezetni semmiféle más tényre. A további okoskodásunk egyik empirikus hátterét jelenti. A hullámhossz és az impulzus szorzata nevezetes állandó. *Planck-állandónak* nevezzük, és h -val jelöljük. A h *mértékegysége* J s, mint ez könnyen ellenőriz-

hető; a pontos értéke:

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s.}$$

Így tehát

$$\boxed{\lambda I = h} \quad (17)$$

„Vizsgáljuk meg a következő egyszerű példát! Egy elektronsugár 100 volt potenciálkülönbségen át gyorsul. Ekkor egy elektron mozgási energiája:

$$E = \frac{I^2}{2m} = eU = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100 = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ J.}$$

Az impulzusa:

$$I = 2meU = 5,4 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az elektronhullám *hullámhossza*:

$$\lambda = \frac{h}{I} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1,23 \text{ \AA} = 0,123 \text{ nm.}$$

1.2. A fény részecsketermészete

1.2.1. Hőmérsékleti sugárzás, a folytonos színkép

Az elektromágneses hullámok keletkezésének sokféle oka lehet. Legismertebb mindennapi jelenség: a felmelegített testek „meleget sugároznak”. Ha elektromos árammal melegítünk egy vasdrótot, növekvő feszültséggel, akkor elcinte azt tapasztaljuk, hogy a vas kissé melegebb, a hőmérséklet emelkedését például a kezünkkel észleljük. Növelve a feszültséget, a

vas először halvány, majd intenzívebb vörös sugárzást bocsát ki, közben pedig egyre jobban felmelegszik. Ezután az elektromágneses spektrum más tartományai is feltűnnek a sugárzásban.

A kémiai anyag és az elektromágneses sugárzási tér sajátos kölcsönhatásáról van itt szó. A vasdrót környezetével kölcsönhatásba kerülve az elektromágneses hullámokat részben elnyeli, másrészt a fém elektromos töltése elektromágneses sugárzást ki is bocsát.

Ha a test hőmérséklete kisebb, mint a környezet hőmérséklete, akkor több elektromágneses energiát nyel el, mint amennyit kibocsát.

Ha viszont a test hőmérséklete nagyobb, mint a környezetének a hőmérséklete, akkor a test ad le több energiát a környezetének, többet, mint amennyit elnyel. A meleg vaskályha több energiát ad le, mint amennyit elnyel.

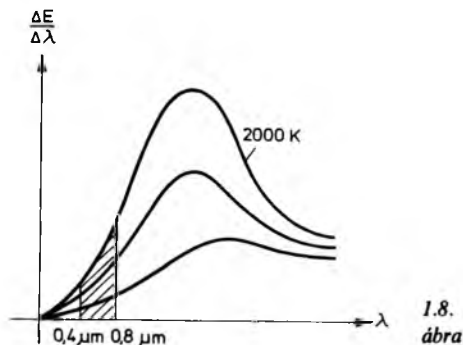
Ha a test azonos hőmérsékletű környezetével, akkor sugárzási egyensúly alakul ki a test és a környező tárgyak között: ugyanannyi energiát vesz fel, mint amennyit lead.

A kémiai anyag és az elektromágneses sugárzási tér kölcsönhatását az ún. *fekete test sugárzásával* szokták vizsgálni. A fekete test a ráső bármely hullámhosszú elektromágneses sugárzást elnyeli. Persze a valóságban abszolút fekete test nincs, de a modellt jól megközelíti a következő testtel.

Gondoljuk el, hogy egy fémtárgy belsejében egy üreg van, amelynek a falán kis lyukat fúrunk. A fal nem engedi át a fényt, a belső oldalát pedig bekormozzuk. A lyukon az üregbe érkező fény — esetleg többször visszaverődve — teljesen elnyelődik. Gyakorlatilag biztosak lehetünk abban, hogy a lyukon át bejutott elektromágneses hullám nem jön ki ismét. Gondoljuk meg: ha a fal egy visszaverődéskor a sugárzás energiájának 95 százalékát elnyeli, akkor a nyolcadik ütközés után már csak $0,05^8 = 4 \cdot 10^{-11}$ -szerese marad a kezdeti energiának. Ezért van az, hogy az ilyen lyukat sokkal feketébbnek látjuk, mint az üreg falát látnánk.

Fordítva is: ha a vasból készült üreget izzítjuk, akkor a lyuk a környező izzó vasnál sokkal erősebben világít.

A fekete test sugárzásával kapcsolatos kérdések a XIX. század második felében a



legnagyobb fizikusokat is izgatták. Stefan és Boltzmann jutottak az első alapvető eredményhez.

Kísérleti megfigyelésekre támaszkodva megállapították, hogyan függ a fekete test sugárzása a hőmérséklettől, a hullámhossztól. Az 1.8. ábrán látható görbét kapták. A koordináta-rendszer vízszintes tengelyére a hullámhosszt, a függőleges tengelyére a hullámhosszegységre jutó kisugárzott energiát mérték fel. Ez azt jelenti, hogy például 2000 K hőmérsékleten izzó fekete test 0,4 μm és 0,8 μm között az ábrán vonalkázással szemléltetett energiámmennyiséget sugároz ki.

Látható, hogy nagyobb hőmérséklethez tartozó görbék magasabban vannak, vagyis a hőmérséklet növekedésével a kisugárzott energia rohamosan nő.

Stefan és Boltzmann megállapították, hogy a teljes görbe alatti területnek megfelelő — a fekete test által másodpercenként kisugárzott — P összes energia az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P = \sigma T^4. \quad (1)$$

Az itt szereplő σ arányossági tényező mérésekből meghatározható.

Illusztráljuk a Stefan—Boltzmann-törvényt egy egyszerű példával. Gondoljuk el, hogy egy — fekete testnek tekinthető — volfrámszál 1800 K hőmérsékleten 200 W teljesítményt sugároz ki. Ekkor vizsgáljuk meg, hogy mennyi energiát sugározna ki másodpercenként 900 K hőmérsékleten. Egyszerű feladatról van szó: a fenti egyenlőség alapján

$$200 = \sigma \cdot 1800^4,$$

és

$$P = \sigma \cdot 900^4.$$

Innen

$$P = 200 \cdot 0,5^4 = 12,5 \text{ W.}]$$

Szembetűnő még a grafikonnal kapcsolatban, hogy minél magasabb az izzó fekete test hőmérséklete, annál inkább balra esik a görbe csúcsa. Ez a tény azt az ismert megfigyelést fejezi ki, hogy minél melegebb egy test, annál inkább magasabb frekvenciájú, tehát kisebb hullámhosszúságú elektromágneses hullámokat bocsát ki.

A Wien-féle eltolódási törvény szerint egyszerű összefüggés van a fekete test maximális sugárzóképeségéhez tartozó hullámhossz és az abszolút hőmérséklet között:

$$\lambda_{\max} T = \text{állandó}.$$

Másképpen fogalmazva: a legjellemzőbb frekvencia és az abszolút hőmérséklet egyenesen arányos egymással.

Az izzó fekete test által kisugárzott energia hullámhossz szerinti eloszlását az ábrán láthattuk. Ezeket a görbéket mérések alapján állapították meg. Részben mérésekből, részben elméleti megfontolásokból jutottak el ezeknek a görbéknek a két legfontosabb tulajdonságához:

1. A Stefan—Boltzmann-törvény a gör-

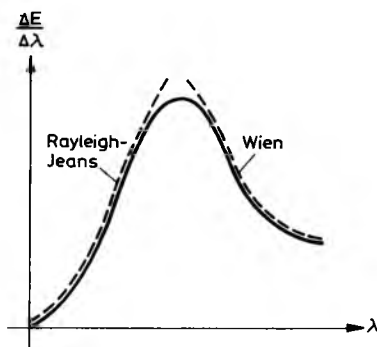
be alatti terület mértékét szolgáltatató teljes kisugárzott energia és a hőmérséklet kapcsolatát adja meg.

2. A Wien-féle eltolódási törvény pedig a görbék csúcsát, a legjellemzőbb hullámhosszot hozza kapcsolatba az abszolút hőmérséklettel.

A kísérleti alapon megismert görbék matematikai jellemzése azonban még hátra van. Nem ismerjük azokat a függvényeket megadó matematikai formulákat, amelyeknek az 1.8. ábrán láthatóak a grafikonjai.

Ez a kérdés igen sokáig izgatta a fizikusokat. Wien félig elméleti, félig kísérleti alapon olyan függvényhez jutott, amely a kísérleti eredményekhez jól illeszkedett a nagyobb hullámhosszúságú, kisebb frekvenciájú tartományban, inkább a görbék leszálló ágán. A görbék kezdetén az illeszkedés rossz volt. (1.9. ábra)

Sir James Jeans és Lord Rayleigh is foglalkozott a problémával. Gondolattmentük lényege vázlatosan az volt, hogy megvizsgálták, hogyan oszlik meg az energia a fal és a sugárzási tér között. Az üreget kitöltő elektromágneses tér pillanatról pillanatra változik, azonban az elektromágneses hullámok viselkedése mégsem annyira rendszertelen, kiszámíthatatlan. Az



1.9. ábra

elektromágneses hullámok ugyanis adott hullámhosszúságú állóhullámok. Mintha megannyi húr lenne az üregben kifeszítve. Egy-egy húron nyilván sokféle állóhullám képzelhető el. Az elektromágneses sugárzási tér és a fal kölcsönhatása a termodinamika eszközeivel írható el. Durván arról van szó, hogy az üreg energiája egyenletesen oszlik el az atomok és az elektromágneses állóhullámok között. Ezt az eloszlást az ekvipartíció tétele szabályozza: minden egyes szabadsági fokra $1/2 kT$ energia jut. A problémát az okozza, hogy az üregben kialakuló állóhullámok hullámhossza tetszőlegesen kicsi, a frekvenciája tetszőlegesen nagy lehet, ezért — szemléletesen szólva — végtelen sok szabadságfokkal kell számolnunk. A nagy frekvenciájú állóhullámok mintegy elszívják az üreg energiáját, kihűlne. Ezt nevezzük *ultraibolyakatasztrófának*. A tapasztalat azonban elmentmond ennek. A *Rayleigh-Jeans féle közelítés* nem jó az elektromágneses sugárzás ultraibolya-tartományában.

A gondolatmenettel valami baj van. A problémát Max Planck oldotta meg. A sugárzási törvénynél a Jeans-féle modelltől indult ki, azonban a levezetés közben arra a felismerésre jutott, hogy a valósággal megegyező eredményt kap, ha felteszi, hogy egy ν frekvenciájú állóhullám energiája csak $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu$ stb. lehet, ahol $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J s a Planckról elnevezett állandó. Ebből viszont az következik, hogy az energia eloszlása a különböző szabadsági fokok között nem egyenletes, a nagy frekvenciára, kis hullámhosszra jutó energia kisebb.

Világítsuk meg ezt egy egyszerű, szemléletes példával. Képzeliük el, hogy 15 Ft-ot három személy között szeretnénk szétosztani. Ha mindhárom ember egyaránt bár-

mely egész számú forintot kaphat, akkor az egy személyre jutó átlagos pénzeszeg 5 Ft. Tegyük fel, hogy az első személy csak 5 Ft-ot, vagy annak egész számú többszörösét hajlandó elfogadni. Ekkor ő 0, 5, 10, 15 Ft-ot kaphat. A lehetséges eloszlások:

I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.
0	15	0	5	10	0	10	5	0	15	0	0
0	14	1	5	9	1	10	4	1			
			.			.					
			.			.					
			.			.					
16 eset			11 eset			6 eset			1 eset		

Most az első személyre átlagosan

$$\frac{0 \cdot 16 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 10 + 15 \cdot 1}{16 + 11 + 6 + 1} = 3,83 \text{ Ft}$$

jut. A lényeg az, hogy ha az első személyre átlagosan kevesebb pénz jut, mert a többiekénél nagyobb adagokban vesz fel pénzt.

Hasonló a helyzet az elektromágneses állóhullámok energiájánál. A nagyobb frekvenciájú hullámok energiája nagyobb adagokban változhat, ezért összességükben ezekre a hullámokra kevesebb energia jut.

Ezzel az igen pongyola és vázlatos gondolatmenettel azt szerettük volna megmutatni, hogy miként sikerült Plancknak az elméletéből kiküszöbölni az ultraibolyakatasztrófa gondolatát.

Az elektromágneses tér és az izzó üregfal között az energiacsere meghatározott — frekvenciával arányos — adagokban történik. Ha valamely hullám energiája $nh\nu$ -ről $(n+1)h\nu$ -re változik, akkor azt mondjuk, hogy elnyelődött vagy keletkezett egy *fénykvantum*.

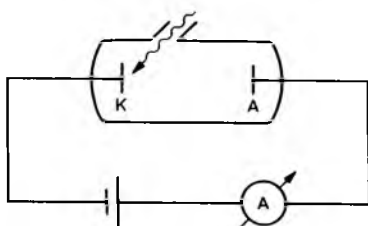
1.2.2. Fényelektromos hatás

Az előző pontokban azt láttuk, hogy a kémiai anyag és az elektromágneses tér állóhullámai között az energiacsere nem folytonosan megy végbe, hanem a frekvenciával arányos adagokban. Az elektromágneses tér és az elektron között is hasonlóan megy végbe az energiacsere. Ha negatív töltésű fémlamezt fényvel megvilágítunk, akkor az lassan elveszíti a töltését. Ha a lemez töltése pozitív, akkor a megvilágítás hatására nem változik a töltés. A negatív töltésű lemezről elektronok válnak le, hasonlóan ahhoz, amikor a katódsugárzásban a katódról elindul a katódsugárzás. A negatív töltésű lemezzel szemben egy anódot helyezünk el, akkor azt tapasztaljuk, hogy az *1.10. ábrán* látható árammérő áramot jelez. Könnyen megállapíthatjuk a negatív lemezből kilépő elektronok mozgási energiáját. A katód és az anód közötti U feszültséget úgy változtatjuk, hogy az áram nulla legyen. Ekkor a kilépő elektronok mozgási energiáját az elektromos tér munkavégzése következtében elveszíti, a munkatétel szerint

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU,$$

ahol e az elektron töltése, m a tömege, v pedig a kilépő leggyorsabb elektronok sebessége.

Az elektromágneses hullámok klasszikus Maxwell-féle elmélete szerint a fény az



1.10. ábra

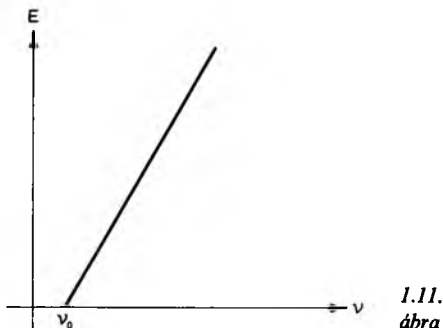
elektromágneses tér rezgése. Világos tehát, hogy a rezgő tér a fém elektronjait is rezgésbe hozza. Mivel azonban a tér erőssége a fényerősséggel együtt nő, azt várnánk, hogy a kilépő elektronok energiája a fény intenzitásával, a megvilágítás erősségével arányos. Hasonlóan ahhoz, amint a viharban háborgó tenger hullámai mossák a partot, a nagy amplitúdójú hullámok nagyobb energiával szakítják el a partról a köveket. Ugyanakkor — ismét a klasszikus fizikai párhuzamok alapján — azt várnánk, hogy a megvilágító fény frekvenciájának a növelése a kilépő elektronok energiáját csökkenti, hiszen a tömeggel rendelkező elektronok a nagy frekvenciájú rezgésekre lomhán reagálnak.

A tapasztalat azonban azt mutatta, hogy

1. a kilépő elektronok energiája nem függ a fényerősségtől, és arányos a fény frekvenciájával;
2. a kilépő elektronok száma nem függ a fény frekvenciájától, és arányos a fény erősségével.

Ezt az ún. *fényelektromos hatást* 1905-ben Einstein értelmezte. Az elvárásainkkal ellentétes jelenségek értelmezése könnyen megoldódik, ha feltesszük, hogy a fény és az elektronok között az energiacsere ugyanúgy kvantumokban történik, mint az izzó fekete test és az elektromos állóhullámok között. Az előbb említettük, hogy a kilépő elektronok maximális mozgási energiája könnyen meghatározható: a munkatétel alapján $1/2 mv^2 = eU$, ahol U az a feszültség, amely megakadályozza a katódból induló elektronáram megérkezését az anódra.

A kilépő elektronok mozgási energiája egyszerűen ábrázolható a megvilágító fény frekvenciájának a függvényében (*1.11. ábra*). Szembetűnő, hogy a kapcsolat egy



egyenessel szemléltethető. A kilépő elektronok energiája egy bizonyos frekvenciahatárig nulla, ezután pedig a frekvencia növelésével egyenletesen nő. Írjuk fel az egyenes egyenletét! Jelöljük ν_0 -al azt a frekvenciát, ahol az egyenes a vízszintes tengelyt metszi. Az egyenes meredeksége pontosan a Planck-állandó: $h = 6,67 \cdot 10^{-43} \text{ J s!}$

Az egyenes egyenlete

$$E = h(\nu - \nu_0)$$

vagy

$$\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - h\nu_0.$$

Jelöljük a $h\nu_0$ mennyiséget A -val! Ekkor

$$\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - A. \quad (1)$$

Figyelembe véve a munkatétel korábban szerepelt esetét:

$$eU = h\nu - A. \quad (2)$$

Ezt az összefüggést nevezik az *Einstein-féle fényelektromos egyenletnek*.

A fényelektromos hatást a következőképpen értelmezzük: az elektromágneses tér a katód elektronjaival csak olyan energetikai kölcsönhatásba kerülhet, amelyben az energiacsere a frekvenciával arányosan

adagokban történik, az energiacsere mértéke $h\nu$. Az elektromágneses hullámokkal kapcsolatba kerülő elektron vagy nem lép kapcsolatba a térrel, vagy igen, ekkor a megvilágító fény frekvenciájával arányos energiát vesz fel, egyetlen aktusban. Ennél az adagnál kevesebb pozitív energiát nem vehet fel az elektromágneses hullámtól. Tegyük fel tehát, hogy egy elektron $h\nu$ mennyiségű energiára tesz szert a fényvel való kölcsönhatás során. Ekkor — ha ez az energia elég nagy ahhoz, hogy kilépjen a fémből — elhagyja a fémeket. A fémből való kiszabadulására energiát kell fordítania. Az elektronnal közölt $h\nu$ energia tehát egyrészt a fényből való kilépésre fordítódik, a maradék pedig a mozgási energiát szolgáltatja:

$$h\nu = \frac{1}{2} m v^2 + A.$$

Az A jelentése tehát világos, az az energiameennyiség, amelyet az elektron a fémből kilépve elveszít. Az A -t *kilépési munkának* nevezzük: a fémre jellemző állandó.

┌ Egy egyszerű példával is megvilágítjuk a megismert elméletet. Tegyük fel, hogy egy fotokatód kilépési munkája $A = 3,08 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. (Az energiát a mikrofizikában igen gyakran elektronvolt egységekben mérik. 1 elektronvolt = 1 eV energiára tesz szert egy kezdősebesség nélkül induló, $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ töltésű anyagi test, ha 1 volt feszültségen keresztül gyorsul. 1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.) A fotokatódra jellemző kilépési munka így is írható: $A = 1,93 \text{ eV}$. Ebből a fémből

$$\nu_0 = \frac{A}{h} = \frac{3,08 \cdot 10^{-19}}{6,67 \cdot 10^{-34}} = 4,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

frekvenciájú fény válthat ki elektront.

Ha a fotokatódot $6,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ frekvenciájú fényvel világítjuk meg, akkor a fém

felületét elhagyó elektronok mozgási energiája:

$$E = 6,67 \cdot 10^{-34} \cdot 2,2 \cdot 10^{14} = \\ = 1,46 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,91 \text{ eV},$$

ez tehát azt is jelenti, hogy a fotokatódból kilépő elektronok nem juthatnak a 0,91 voltal alacsonyabb potenciálú helyre.]

1.2.3. A vonalas színekép

Az izzó fekete test által kibocsátott elektromágneses sugárzásban mindenféle frekvencia megtalálható, a frekvenciák folyamatosan mennek át egymásba. Ha az ilyen fényt prizmával felbontjuk, akkor szivárványszerű színeképet kapunk, a színek a vöröstől a kékig egymásba olvadnak. Az ilyen színeképet ezért *folytonos színeképnek* nevezzük.

Ha lánggal vagy elektromos kisüléssel gerjesztett gázok fényét prizmával összetevőire bontjuk, akkor a felbontott elektromágneses sugárzásban csak meghatározott frekvenciák jelennek meg. A felbontott fényt egy ernyőre vetítjük. Azt tapasztaljuk, hogy a színek egymástól távoleső vonalakként áll. Az izzó gázok sugárzásáról ezért azt mondjuk, hogy *vonalas színeképpel* rendelkezik.

A klasszikus fizika utolsó évtizedeiben a vonalas színekép tanulmányozására nagy gondot fordítottak, sok tapasztalat gyűlt össze. Ennek azért van jelentősége, mert az atom összetettségét, legszembetűnőbb módon ezek a színeképelemzési kísérletek bizonyítják. Az izzó gázok színeképe a viz-



gálata kényszerítette a fizikusokat arra, hogy az atomszerkezettel, az atommodellekkel foglalkozzanak.

Az 1.12. ábrán az atomos hidrogén látható fényének a színeképvonalait látjuk. Szembetűnő, hogy a színeképvonalak egy bizonyos határnál sűrűsödnek. A színeképvonalaknak ezt a sorozatát *Balmer-sorozatnak* nevezzük. Balmernek 1885-ben sikerült egy empirikus formulát felállítani, amelyből a hullámhossz kiszámítható:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

ahol R az ún. *Rydberg-állandó*, a hidrogén esetén $R = 109\,677,6 \text{ 1/cm}$.

A hidrogén színeképe a Balmer-sorozata a látható fény tartományába esik. Később felfedeztek más sorozatokat is, így az ultraibolya-tartományba eső *Lyman-sorozatot*. Erre a sorozatra jellemző hullámhosszok az

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

képletből számíthatók.

Ebben a fejezetben csak röviden érintettük azokat a kísérleti tényeket, amelyek a kvantummechanikai atommodell egyik tapasztalati alapját képezik. A tények értelmezését a későbbiekre hagyjuk.

2. Kvantummechanika

2.1. A kvantummechanika alapelvei

2.1.1. Az alapkísérletek és értelmezésük

A katódsugárzás egységei, kvantumai az elektronok. Ha a katódból kiinduló, tömeget és negatív töltést szállító sugárzás az anyaggal kapcsolatba kerül, akkor *a kölcsönhatás során ilyen meghatározott adagokban nyelődik el a töltés és a tömeg.*

Hasonló a helyzet az elektromágneses sugárzásnál. A hullámforrásból — a Maxwell-törvények által meghatározott módon — kibocsátott hullámok az anyag más megjelenési formáival kölcsönhatásban adagokban adják le tömegüket, energiájukat. Az energia és a tömeg az elektromágneses hullám frekvenciájával arányos.

Az elektromágneses hullámban szállított impulzust, energiát és tömeget az elektrodinamikáról szóló fejezetben már megismertük. Ehhez a fekete test sugárzásával kapcsolatban azt a további megállapítást fűztük, hogy az energiaátadás mértéke $h\nu$.

A katódsugárzást jellemző mennyiségek értelmezéséről azonban szólni kell. Először is nyilvánvaló, hogy az elektronnak — és a még nem említett hasonló „részecskéknek” lehetnek olyan tulajdonságai, jellemzői, amelyeknek nincs megfelelőjük a klasszikus mechanikában, elektrodinami-

kában. Természetes azonban, hogy keressük az ilyen mikrofizikai objektumok olyan tulajdonságait, amelyek *azonosíthatók* a mechanika vagy az elektrodinamika mennyiségeivel. Ilyen mindenekelőtt a tömeg és a töltés. Az összes elektron tömege és töltése azonos: ezek a mennyiségek — néhány más nem klasszikus mennyiséggel — arra valók, hogy *a részecskéket azonosítsuk.*

Más a helyzet az elektron helyzetével és a sebességével vagy inkább impulzusával. Ezek a mennyiségek egyetlen elektron élete során is megváltozhatnak. Az ilyen természetű állapotjelzők tanulmányozását tűzzük ki célul. Valójában egyetlen feladatunk van: annak megmutatása, *hogy mennyiben más a klasszikus fizikai állapotjelző és a kvantumfizikai megfelelője.* Nem akarunk tehát a mikrofizika tényeivel részletesen foglalkozni, a kvantumelmélet hatalmas méretű könyvet feltételezne. Mi most csak abban szeretnénk segítséget nyújtani az Olvasónak, hogy leküzdje azokat a nehézségeket, amelyekkel akkor találkozhat az ember, ha a klasszikus fizikával megismerkedve a mikrofizika tanulmányozására szánja magát.

Nem foglalkozunk most a kvantumfizikában használatos nem klasszikus fizikai

mennyiségekkel, mint például a spinnel. A klasszikus és a modern mikrofizika különbségének meg kell ugyanis mutatkoznia a „klasszikus” fizikában is használatos fizikai mennyiség kétféle kezelésében. A newtoni—maxwelli fizika és a mikrofizika alapelveinek az összehasonlításakor a klasszikus fizikai mennyiségeket azonosítjuk tehát a kvantumelmélet megfigyelhető mennyiségeivel.

Ez az azonosítás azt jelenti, hogy a két fizikai elmélet által leírt mérés az egymásnak megfeleltetett mennyiségek azonos értékét szolgáltatassa. Így például, az elektron becsapódásának a helyzetét a klasszikus és a kvantumfizika is ugyanannak adja.

Térjünk rá tehát arra a nyilvánvaló kérdésre, hogy miként lehet egy elektron helyét meghatározni. A katódsugárcsőből kiinduló elektronhullámban az elektron nem azonosítható, egyedileg nem nyomonkövethető, még elvben sem. Két elektron nem különböztethető meg biztosan, mint golyózáporban két lövedék. Ahhoz, hogy az elektronok helyzetéről valamit mondjunk, az elektronhullámnak ezt a kvantumát be kell szűkíteni, vékony sugárrá koncentrálni, hogy a fotolemezzel kapcsolatba lépve ott megfeketítsen egy ezüstszemcsét, így maga után nyomot hagyjon.

Az elektron impulzusát az interferenciakép alapján határozzuk meg: mivel — mint láttuk — $I = h/\lambda$, az impulzus meghatározásához egy interferenciaberendezés szükséges. A képernyőről lemérhető az interferenciacsíkok távolsága. A berendezés geometriai adatainak ismeretében a hullámhossz meghatározható.

Hogyan lehet megmérni az elektron helyzetét és impulzusát egyidejűleg?

Nos, ez az egész kvantumfizikában a legfontosabb pont, az egyetlen olyan dolog, amit meg kell értenünk. Az elektron

helyét és impulzusát egyidejűleg nem lehet megmérni, mert az a mérőberendezés, amellyel az elektron helyét meghatározzuk, lehetetlenné teszi egy olyan berendezés alkalmazását, amely az impulzusának a meghatározására alkalmas. És fordítva is, impulzus mérése közben az elektron helyét nem lehet meghatározni.

Még mielőtt az Olvasó nagyon megrémülne ettől a gondolattól, világítsuk meg ezt az együtt-mérhetetlenséget egy hasonlaltal. Tegyük fel, hogy hallgatóknak fizikából és biológiából kell vizsgát tenni. Hétfőn fizikából, kedden biológiából írnak dolgozatot. Az egyik jelölt most éppen fizikadolgozatot ír. A dolgozat megfelelő ütemben készül, a felügyelő tanár véleménye szerint a dolgozat jeles lesz. Hogyan minősíthetné ez a tanár a jelölt biológia tudását? A fiatalember nyilvánvalóan tud valamit biológiából is, hiszen készült a holnapi, a keddi vizsgára. A fizikadolgozat megírására fordított erőfeszítése azonban kizárja azt, hogy megállapíthassuk a biológiatudását! Nemcsak azért, mert két dolgozatot nem írhat egyidejűleg, nincs két jobb keze, hanem azért is, mert az agya csak az egyikre tud koncentrálni. Valóban: a fizikadolgozat eredménye hatással van a másnapi biológiából nyújtott teljesítményére. A jól sikerült fizika azt eredményezi, hogy a biológia dolgozat is jó lesz. Ha a fizika rosszul sikerült volna, akkor a biológia tudás is gátlás alá kerülhet. A tudás különböző összetevői között bonyolult kapcsolatok vannak, mindenesetre amikor a hallgató a fizika tudásáról ad számot, a biológiatudása nem osztályozható. Látható a tudásbeli állapot komplexitása és a tudás különböző elemeinek az egyidejű mérhetetlensége.

A kvantumelmélet nem engedi meg olyan állapotok leírását, amelyben mind a

helyzet, mind az impulzus egyidejűleg meghatározott. Ennek az elméletnek a keretében az ilyen állapotok nem figyelhetők meg. Ami nincs, az nem is figyelhető meg.

Miről van tehát szó? Tekintsük a következő két állítást:

A: „... ennek az elektronnak a helye x ...”,

B: „... ennek az elektronnak az impulzusa I ...”.

Ez a két állítás egyidejűleg nem lehet igaz. Ha az A állítás igaz, akkor a B állítás nem az. Azonban azt sem mondhatjuk, hogy „... ennek az elektronnak az impulzusa nem I ...”, hiszen ez az állítás is egy pontos mérést feltételezne. Ha az A állítás igaz, akkor a B állítás sem nem igaz, sem nem hamis, a kettő között van az igazságértéke, vagyis *eldöntetlen*. (Eldöntetlen annak a fiatalembernek a biológiatudása is, aki éppen most vizgázik fizikából. Hiszen azt sem mondhatjuk, hogy jó biológiából, azt sem, hogy rossz.)

Nem helyes azonban azt mondani, hogy ha az elektronnak pontos helye van, akkor nincs impulzusa. Az elektronnak minden állapota — kevés kivételtől eltekintve — úgynevezett keverék állapot. Minden egyes állapota tartalmaz impulzusszerűséget is, helyszerűséget is. Ugyanúgy, mint a már említett hasonlatnál: a jelöltnek vannak biológiai ismeretei a fizika vizsga közben is, azonban *eldönthetetlen*, hogy számszerűen mennyi ez a tudás.

Világítsuk meg ezt a problémát egy — az előzővel rokon — példával. Gondoljunk egy angol nyelvet tanuló diákra. Az angol nyelv-tudása bizonyos értelemben az állapotának valamilyen kifejezője. Döbbenjünk rá azonban, hogy ez a nyelvtudás számszerűen nem fejezhető ki egyértelműen. Egy napon a hallgató írhat egy kitűnő tesztvizsgát, egy másik nap hasonló

tesztvizsgán megbukhat. Még bonyolultabbnak tűnik a helyzet, ha meggondoljuk, hogy a tesztvizsga eredménye csak részben tükrözi a hallgató angoltudását, a hallgató *tudásbeli* állapotát. Semmit sem mond tudniillik a beszédkészségéről, a beszédértésről stb. És fordítva is így tapasztaljuk: az a diák, aki jól beszél egy nyelvet, az egyáltalán nem biztos, hogy helyesen meg tud írni egy vizsgadolgozatot. Az angoltudás általában egy *keverékállapot*: tartalmaz valamilyen — többé-kevésbé biztos írásbeli tudást — kissé bizonytalanul meghatározható beszédkészséget stb. Sokkal bonyolultabb dolog azonban ez a nyelvismeret annál, hogy néhány számmal kifejezhető legyen, néhány vizsgatípussal felmérhető legyen. Ráadásul *egyidejűleg* nem is mérhető a tesztmegoldás aktuális készsége és a beszédkészség.

Ugyanez a helyzet az elektronnal. Az *elektron* — és minden mikroobjektum — állapota jól meghatározott dolog. Ez az állapot tartalmaz általában valami impulzusszerűséget és helyszerűséget is, mindkettőt kissé bizonytalanul. Számszerűen pontosan kifejezhető impulzusa vagy helye csak kivételes állapotokban van. Ha az egyik számszerűen meghatározható, akkor a másik teljesen bizonytalan értékű.

Az elektron helyének és impulzusának az együttmérhetetlensége azt a tényt tükrözi, hogy az elektron állapota olyan, hogy ezek a jellemzők valamiféle bizonytalansággal találhatók meg benne. Az állapot sokkal több információt hordoz az impulzusszerűsége és a helyszerűsége kívül.

Az elektron — és más mikroobjektumok — állapota éppen ezért nem fejezhető ki néhány számmal, a hely és az impulzus számszerű értékével. Az elektron állapotának a matematikai kifejezésére más matematikai „objektumok” használatosak.

Schrödinger egy részecske állapotának a jellemzésére függvényeket használt. A függvények közötti matematikai kapcsolat ugyanis tükrözi az állapotok egymásba alakulásának a kapcsolatát.

Nem szükségszerű az állapotot függvényekkel jellemezni. Sok más jellemzés lehetséges. Heisenberg például végtelen sorozatokkal adta meg a mikrorészecskék állapotát. Mindenesetre a leggyakrabban ma is a függvényekkel való jellemzést használják a fizikusok. Az elektron állapotát kifejező függvényt általában ψ -vel jelölik és *hullámfüggvénynek* nevezik. Ez a függvény a tér pontjaiban van értelmezve és az időnek is függvénye:

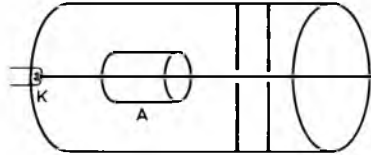
$$\psi: (\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}, t).$$

Egy-egy pillanatban a részecske állapotát jellemző függvény esetleg térbeli periodicitást mutat, máskor meg egy helyre koncentrálódik: egy kis tartományon kívül mindenütt nulla. Az első esetben az állapot impulzusarculatot mutat, a második esetben inkább helyszerűt.

Vizsgáljunk meg egy másik mikrofizikai kérdést. Történetileg nem az első tény, de kétségekívül az egyik legmeggrázóbb volt a klasszikus fizikán nevelkedett kutató elméje számára az elektronsugár interferenciája. Gondoljunk tehát végig ismét ezt a jelenséget.

A kísérletünkben egy katódsugárcső szerepel, amelyből kivezetjük az elektronhullámot (2.1. ábra). Ez úgy történik, hogy az anódként egy fémgűrűt használunk. Ezt a katódsugárcsővet néha elektronágyúnak is nevezzük.

Az elektronágyúból elektronok jutnak az E ernyőre, amelyen két rés van, R_1 és R_2 (2.2. ábra). A két nyílás egymástól függetlenül zárható és nyitható. Az elektronforrásból az ernyőre jutó elektronok



2.1.
ábra

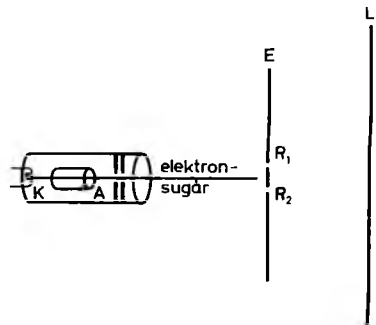
legnagyobb része elnyelődik az ernyőn. Azok az elektronok azonban, amelyek át lépnek valamelyik résen, az L fényérzékeny lemezen feketedést okoznak.

Azokban lecsökkenthető úgy az elektronágyúból induló sugárzás intenzitása, hogy a katódsugárcső és a fényérzékeny lemez között mindenkor legfeljebb egyetlen elektron van, egynél több soha nem található ebben a térrészben.

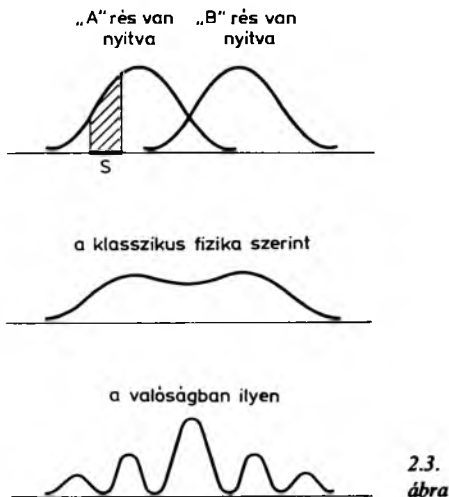
Ha a kísérleti időtartam elég hosszú, kis intenzitás és persze megfelelően nagy energiájú elektronok esetén az L ernyőn minden egyes megfeketedésnek éppen egy elektron felel meg.

A kérdés most az, hogy az egyik ilyen megfeketedett ezüstszemcsének megfelelő elektron az R_1 vagy az R_2 résen keresztül jutott az ernyőre?

Tegyük fel, hogy csak az R_1 rés van nyitva. A résen áthaladó elektron becsapódásának az x helyét nem lehet előre meghatározni. Megadható viszont egy valószínűségeloszlás. A $p(x)$ függvény jelentése az



2.2.
ábra



ábráról leolvasható. Annak a valószínűsége, hogy az elektron a 2.3. ábrán S ívvel jelölt területen csapódik be, a sávozott területtel egyenlő.

Ha két nyílás van az ernyőn, akkor két eloszlással kell számolni. A $p_1(x)$ akkor érvényes, ha az R_1 rész nyitva van, a $p_2(x)$ akkor, ha az R_2 rész van nyitva. Milyen lesz a valószínűségeloszlás, ha mindkét rész nyitva van? Ha a klasszikus fizika gondolatvilágának megfelelően kis golyócskák-nak képzelnénk az elektronokat, akkor a két nyitott réshez tartozó valószínűségeloszlás

$$p(x) = \frac{p_1(x) + p_2(x)}{2}$$

lenne, ez határozná meg a becsapódási valószínűséget.

A valóságban azonban az elektron elnyelődésének az eloszlását a katódsugárzás hullámtulajdonságai határozzák meg. Azokon a helyeken, ahol az elektronsugarak erősítik egymást az ernyőn, pontosan ezeken a helyeken feketedik meg a fényképezőlemez. Azokon a helyeken pedig, ahol az

elektronsugarak kioltják egymást, oda nem csapódott be az elektron.

Hogyan értelmezzük ezt a tényt?

Az első gondolatunk az, hogy az elektron „részecskeképe” helytelen, a katódsugárzás pontosan ugyanolyan hullámmozgás, mint például a vízhullámok, a katódsugárzásban terjedő tömeg és töltés nem adagolt. Tiszta hullámjelenségről van szó, tiszta interferenciáról.

Lehetséges azután az is — másodszorra erre gondolunk —, hogy a valószínűségek összeadásának a szabálya a mikrofizikában más, mint a klasszikus fizikában és a mindennapi életünk területén.

A harmadik lehetőség a logika módosítása. A klasszikus fizika és a hétköznapi élet logikája szerint az

A: „... az elektron az R_1 részen haladt át...”,

B: „... az elektron az R_2 részen haladt át...”

állítások közül, ha az egyik igaz, akkor a másik hamis.

A klasszikus fizika gondolkodásmódjának a harmadik kizárásának az elve felel meg. Ha az A állítás igaz, akkor a B nem igaz.

A kvantummechanika logikája szerint, ha az A állítás igaz, akkor a B állításról azt sem mondhatjuk, hogy igaz, de azt sem, hogy hamis. Másképpen: ha az egyik állítás igaz, igazságértéke 1, akkor a másik eldöntetlen, az igazságértéke 0 és 1 közé esik.

Amikor tehát meg akarjuk érteni, hogy miképpen jöhet létre az elektronsugár-interferencia, akkor nem kell lemondanunk az elektron hipotéziséről, a részecskeképről, nem is kell a valószínűségszámítás szabályaival törődnünk. A logikát kell módosítani, hogy a modern fizikai jelenségeket rendszerbe foglaljuk. A logika mó-

dosítása azután maga után vonja a valószínűségszámítás elveinek a módosítását, és végső soron a fizikai kép alapos átalakítását is.

Ezzel sikerül rámutatnunk arra a különbségre, amely a klasszikus fizika és a kvantumfizika között fennáll. A klasszikus fizika és a kvantumelmélet egyik különbözősége a méréseredmények előrejelzésében mutatkozik meg. Egyrészt arról van szó, hogy bizonyos klasszikus értékek a kvantumelmélet szerint nem léteznek. A fizikai mennyiségek diszkrét értékeivel találkozunk. Nincs például $h\nu$ -nél kisebb energiájú energiakvantum a ν frekvenciájú elektromágneses hullámban. Másrészt a kvantumelméletben nincs olyan állapot, amelyből az összes mérési eredmény biztosan előrejelezhető lenne. A klasszikus és a kvantumelméleti valószínűségek különböznek egymástól, a két elmélet valószínűségi előrejelzései különbözők. Ez a különbözőség alapvető jelentőségű, a fogalmak és a fizikai állítások logikáját érinti.

A logika megváltoztatása az egyetlen alapvető és független változtatás, amikor a klasszikus fizikát felváltjuk a kvantumfizikával. Minden más változás ennek a következménye.

Nem kell azonban aggódnunk. A gondolkodás szabályai megmaradnak. Az ember a klasszikus logika szabályai szerint okoskodik, akár a klasszikus mechanikáról, akár a kvantummechanikáról, akár a napi élet dolgairól elmélkedik. Arról van szó, hogy az agyunknak ez a mindenkor szabályosan működő megismerőképessége a két elmélet, a klasszikus és kvantumfizika egymástól különböző logikai struktúráját fogja fel. Meg kell különböztetnünk a dolgok logikáját, a tartalmi logikát, a gondolkodás szabályaitól, a metalogikától. Hasonló a helyzet ahhoz, amikor egy kö-

zépiskolai osztályban a tanulók anyanyelvén beszélnek a latin nyelv szabályairól.

Az a nyelv, tehát, amellyel a kísérleteink eredményét írjuk le, a természetes nyelvünk. Ez a nyelv szolgáltatja a szókincset, amelynek a segítségével értelmezzük a kvantummechanika fogalomrendszerét. A mindennapi nyelvünk a közönségek arisztotelészi logika szabályait tükrözi, ugyanakkor az ettől eltérő logikájú tényeket kell vele megfogalmazni.

2.1.2. Mikrofizikai folyamatok

A klasszikus fizika és a kvantumelmélet között az egyetlen lényegbevágó különbség, hogy az egyes tudományágak tartalmi logikája különbözik. Ez a fizikára és a jelenségek előrejelzésére is meghatározó hatással van. A logika különbözősége a fizikai mennyiségek nyelvén a következőt jelenti.

A klasszikus fizikában minden fizikai mennyiség egyidejűleg mérhető volt. Ez az együttmérhetőség azt jelenti, hogy az összes klasszikus fizikai mennyiség egyetlen állapotjelző függvényének tekinthető. A tömegpontok mechanikája esetén ez azt jelenti, hogy a tömegpont összes állapotjelzője kiszámítható a (helyvektor, impulzusvektor) párból, ezt a párt tekinthetjük egyetlen „egyesített” állapotjelzőnek. Ha egy tömegpont helyét és impulzusát ismerjük, akkor mindent tudunk róla.

A kvantummechanikában más a helyzet. Ha valamely mérőeszkővel meg tudjuk határozni egy elektron helyét, akkor ez eleve kizárja egy másik mérőberendezés egyidejű alkalmazását, amellyel meghatározhatjuk az elektron impulzusát. A két mennyiség tehát együtt nem mérhető, egyidejűleg nem határozható meg.

Az ilyen mennyiségeket *inkompatibilis* mennyiségeknek nevezzük. Bohr nyomán néha azt is mondjuk, hogy ezek a mennyiségek, illetve fogalmak *komplementerek*. A komplementaritás azonban általánosabban használt fogalom. Az inkompatibilitás egyszerűen azt jelenti, hogy a két mennyiség egyidejűleg nem mérhető. Ezek összeférhetetlen mennyiségek. A komplementer jelző kiegészítőt jelent, egyidejű, de ellentétes képet. Komplementer mennyiségek azok az inkompatibilis mennyiségek, amelyek egymást kiegészítő szempontból jellemzik a fizikai rendszert.

A hely és az impulzus komplementer leírási módok a mikrofizikában, mert azok a kísérletek, amelyekkel kimutathatók, kölcsönösen kizárják egymást: a kvantumelmélet szerint olyan mérőberendezés, amely az elektron helyét és az impulzusát is méri, nem létezik.

A kvantumelméletben egy jelenségkör teljes leírásához két komplementer fogalomrendszer szükséges, mert az impulzus és a hely különböző leírási módokhoz, különböző nyelvezetekhez tartoznak. Hasonló a helyzet ahhoz, amikor egy társadalom arculatát akarjuk leírni. Komplementer leírási módokat alkalmazunk, a komplementer fogalomkészlet a közgazdaságtan és a szociológia fogalomrendszere. A közgazdaságtan fogalmai komplementerek a szociológia fogalmaival. Az egyik tudomány fogalmainak nincsen helye a másik tudományban, még akkor sem, ha vannak párhuzamba állítható fogalmaik, amelyeket ugyanazzal az anyanyelvi szóval jelölnek.

A kvantumelméletet az különbözteti meg alapvetően a klasszikus fizikai elmélettől, hogy az előző leírásához inkompatibilis fizikai mennyiségek szükségesek, az utóbbiban pedig az összes fizikai mennyi-

ség kompatibilis. A kvantumelmélet elnevezés és a modern mikrofizika kezdeti eredményei világossá teszik azt a közfelfogásban uralkodó jelenséget, hogy a kvantumelmélet lényege a fizikai mennyiségek adagolt kvantumos volta. A látszat ellenére a fizikai mennyiségek kvantumos jellege nem olyan elv, amellyel a modern fizikai tények rendezőelvének tekinthetünk. A kvantumszerűséget ma is sokszor a mikrofizika legalapvetőbb tényének tekintik, valójában azonban nem is általános következmény.

A kvantummechanika legfontosabb inkompatibilis mennyiségpárja a hely és az impulzus. Ezzel a két mennyiséggel minden más mennyiség kifejezhető, ezért ennek a két mennyiségnek az együtt-mérhetetlensége, inkompatibilitása az egész kvantummechanika alaptörvénye. Ha ennek az inkompatibilitásnak a következményeit és konkrétabb megfogalmazási módjait megadjuk, akkor a kvantumelmélet egy-egy jellegzetes vonását írjuk le. A hely és az impulzus komplementaritásából a kvantumszerűséget, a hullámrészecske kettségséget, a határozatlansági relációt, és az elmélet valószínűségi jellegét egyaránt megkapjuk.

Az egyidejűleg nem mérhető mennyiségek létezése a mérendő tárgy és a mérőeszköz erőteljes kölcsönhatásából következik.

Világítsuk meg a kvantummechanika gondolatvilágát részletesen egy analóg példával. Képzeld el, hogy olyan kártyáink vannak, amelyeknek kétféle tulajdonsága lehet: a kártya színe és a kártyára írt számjegy. A szín is kétféle lehet, a szám is: piros (p) és zöld (z), illetve egyes (1) és kettes (2).

Ha a klasszikus fizika szemléletmódját akarjuk utánozni, akkor azt mondjuk, hogy a kártyák színe és a számozottsága egymástól független, vagyis a kártyalap-

nak négyféle állapota lehetséges:

(piros, egyes) = (p, 1),

(piros, kettes) = (p, 2),

(zöld, egyes) = (z, 1),

(zöld, kettes) = (z, 2).

A színállapotot és a számállapotot, amelyek tehát egymástól függetlenül fennállnak, egy-egy mérőeszköz méri. Az egyik leolvassa a kártya színét, a másik a kártyára írt számot. Ezek a mérőeszközök össze is építhetők, mert a mérések nem zavarják egymást. A kártyára festett szín és a kártyára írt szám egyszerre megállapítható. Hasonlóan ahhoz, ahogy egy diák súlya és magassága megállapítható egyetlen méréssel, egyidejűleg.

A kvantummechanika szemléletmódjának az felel meg, hogy a kártyák állapota a színezettség és a számozottság keveréke. Mérőműszerrel mérve most is két szín állapítható meg, és két szín olvasható le róluk. Négyféle *tiszta állapot* lehetséges most is:

piros = p,

zöld = z,

egyes = 1,

kettes = 2.

Ezek azonban kivételesen ritka állapotok, az állapotok legnagyobb részében sem szín, sem szám nem ismerhető fel tisztán. Ezek a *keverékállapotok*. Mindenesetre tiszta színállapotban a kártyán nincs szám, tiszta számállapotban semmiféle szín nem ismerhető fel rajta.

A kvantummechanika szemléletmódja szerint fel kell tennünk, hogy a mérőeszköz nemcsak megállapítja a kártya színét vagy a kártyára írt számjegyet, hanem a kártyával kölcsönhatásba kerülve általában módosítja is a kártya állapotát.

Ha a színmérő berendezéssel mondjuk piros színű tiszta állapotú kártyát mérünk,

akkor a mérőeszköz jelzi, hogy „a kártya piros színű”. Ugyanígy, ha zöld színű kártyát helyezünk a berendezésbe, akkor azt jelzi, hogy „a kártya zöld színű”. Mi történik akkor, ha a kártya nem színezett, tehát nem piros, nem zöld, hanem számállapotban vagy keverék-állapotban van? Ekkor a színmérő berendezés átalakítja az állapotot, és *véletlenszerűen* vagy piros vagy zöld szín olvasható le a kijelzőjén. Az új állapot azonban nem szükségszerűen színállapot. (A kvantummechanikában van egy közkeletű tévedés: a fizikai mennyiség mérésekor a mérőberendezéssel való kapcsolat során az objektum a fizikai mennyiség ún. saját-állapotába kerül.)

Hasonló a helyzet akkor, ha számmérő műszerrel mérünk. Ha a kártya számállapotú, akkor ezt a számjegyet regisztrálja a műszer, azonban az állapot változatlan marad. Ha viszont a műszer tiszta színállapotban vagy keverékállapotban van, akkor a számmérő berendezésnek a kártyával való intenzív kölcsönhatás során a kártya állapota átalakul. Közben — véletlenszerűen — a mérőeszköz kijelzőjén vagy 1 vagy 2 jelenik meg, ezt olvashatjuk le a műszerről.

A mérés alapvető fogalom a kvantummechanikában. Korrekt leírása nem is lehetséges a kvantummechanikán belül. (A fizika e fejezetében a mérési folyamat részletes leírása nem oldható meg.)

A mérés természetesen minden esetben kölcsönhatás, hiszen a műszer csak így szerkezhet tudomást a mikrofizikai objektum állapotáról. A klasszikus fizikában is így van ez, azonban a mérőeszköz és a mérésnek alávetett tárgy kölcsönhatása során mindig lehet tudni, hogy meddig tart a tárgy és hol kezdődik a műszer. A tárgy és a műszer megőrzi az individualitását. Lehetséges, hogy a műszer megváltoztatja az

objektum állapotát, de a változás mindig nyomon követhető.

A kvantummechanikában más a helyzet. A kölcsönható objektumok elveszítik egyediségüket. A mérőeszköz és a mikroobjektum összeolvad egy új objektummá, ezután ismét szétválík mérőműszerré és egy mikrorészecskévé. A mérési folyamat végén keletkezett részecske azonban sem állapotában, sem egyediségében nem azonosítható a mérés előttivel. Nincs annak semmi értelme, hogy a mérés előtti elektron ugyanaz, mint a mérés utáni!!! A mikrofizikának ez a klasszikus fizikával szembeni új vonása — ismét hangsúlyozzuk — az egymásra ható objektumok intenzív egymásra hatásának, egymásba olvadásának a következménye. Így van ez akkor is, ha nem egy makroszkopikus mérőeszköz olvad össze egy elektronnal, hanem például ha két elektron ütközik. Ütközés előtti elektronokat egyenként nem azonosíthatjuk az ütközés utániakkal: az ütközés folyamatában ugyanis egygyé olvadnak, egyetlen objektummá, amely ezután ismét két elektronná válik szét.

Tekintsük át az előző gondolatmenetet, most általánosítva. Tegyük fel, hogy A és B inkompatibilis mennyiségek, lehetséges értékeik (az ún. *sajátértékek*):

$$A: \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\},$$

$$B: \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots\}.$$

A fizikai rendszernek azok a lehetséges állapotai (az ún. *sajátállapotok*), amelyekben ezek a mennyiségek pontosan mérhetők:

$$A: \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots\},$$

$$B: \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n, \dots\}.$$

(A jelölés félrevezető. Egyrészt úgy tűnhet, hogy a két mennyiség lehetséges értékei

egy sorozatba rendezhetők, csak diszkrét értékeket vehetnek fel ezek a mennyiségek. Valójában az a helyzet, hogy a fizikai mennyiségek értékei általában folytonosan is változhatnak, nemcsak ugrásszerűen, kvantumosan. Másrészt a jelölés alapján arra gondolhatnánk, hogy egy sajátértékhez egyetlen sajátállapot tartozik. Előfordulhat azonban, hogy különböző sajátállapotokban mérve a fizikai mennyiséget, ugyanazt a sajátértéket olvashatjuk le a műszerről.)

A mikroobjektum állapotai vagy a fenti tiszta állapotok, vagy ezeknek az állapotoknak a keverékei.

Ha az A tulajdonságot kívánjuk mérni, és a mérést megelőzően az objektum az A -ra jellemző tiszta állapotok valamelyikében van, más szóval A -sajátállapotban van, akkor a mérés eredményeként a műszerről ez az állapot olvasható le. A mérés eredményeként $\varphi_i \rightarrow \varphi_j$ ($i \neq j$) átmenet nem lehetséges. Ha az A mennyiség mérését megelőzően az objektum vagy B -sajátállapotban van, vagy valamely ψ keverékállapotban, akkor a mérés folyamatában ez az állapot átalakul egy másik állapottá (esetleg A -sajátállapottá):

$$\psi \rightarrow \psi^*,$$

és a műszerről leolvasható a fizikai mennyiségek számértéke.

A kvantumelmélet szerint a mérési folyamatok mellett végbemehetnek *spontán folyamatok* is. Az ilyen folyamatok során a kezdeti állapot meghatározza végállapotot, a részecske individualitása nem szűnik meg. Tisztán kvantummechanikai spontán folyamat azonban ritka, hiszen a spontán folyamatokat legtöbbször a kvantummechanikai folyamatok mellett kvantumelektrodinamikai folyamatok — fénykvantum kisugárzása — kísérik.

2.1.3. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció

A kvantummechanikai állapotok kevés kivételtől eltekintve nem tiszta állapotok, mindegyik tartalmaz valamilyen impulzusszerűséget is, és helyszerűséget is. Egy mikroobjektum impulzusa és helye nem egyértelmű: hasonlóan ahhoz, amit az angoltudásról mondtunk, a nyelvtudás egyik eleme az írásbeliség, a másik a szóbeliség. Mindkettőt lehet mérni, mindkét mérték mérése egyetlen számérték, ez az osztályzat. Az osztályzat azonban nem fejezi ki a tudásnak egyik elemét sem pontosan. A tudás bonyolult természetéből következik, hogy az osztályzat nem pontos: magában a tudásban van bizonytalanság. Hasonló a helyzet a mikrofizikai objektumok helyének és impulzusának a mérésénél. A hely és az impulzus is tartalmaz egy bizonytalanságot, rendelkezik egy bizonyos mértékű szórással. Jelöljük ezeket $D(x)$ -szel és $D(I)$ -vel. Ekkor a *Heisenberg-féle bizonytalansági reláció* Schrödinger-féle megfogalmazása:

$$D(x) \cdot D(I) \geq \frac{h}{2\pi}.$$

Ki kell azonban emelni, hogy itt $D(x)$ és $D(I)$ nem mérési hibák, amelyek türelemmel, fáradsággal csökkenthetők, kiküszöbölhetők.

A Heisenberg-féle határozatlansági relációt igen gyakran úgy fogalmazzák meg, hogy „a hely és az impulzus nem adhatók meg egyidőben tetszőleges pontossággal”, vagy „az impulzus és a hely egyidejűleg nem mérhető meg pontosan, ha az egyik mérési hibáját csökkentjük, akkor a másiké szükségszerűen növekszik”. Tudjuk azonban, hogy ez teljesen helytelen megfogalmazás. Az impulzus és a hely egy-

idejűleg semmiféle pontossággal nem mérhető!

A Heisenberg-féle bizonytalansági reláció egy másik lehetséges — Heisenbergtől származó — megfogalmazása a következő. Tegyük fel, hogy egy elektron helyét kívánjuk mérni. Az elektron helye folytonosan változhat, ezért pontos mérése nem lehetséges, de tetszőleges pontossággal meghatározható. Ugyanúgy, mint egy rúd hosszánál. Ezt sem lehet abszolút pontosan megmérni, de a mérőeszköz tulajdonságaitól és a türelmünktől függően a mérési hiba tetszőlegesen kicsi lehet: gondoljunk arra, hogy az elektront Δx hosszúságú dobozba szorítottuk. (*) Ekkor az elektron helyét Δx pontossággal ismerjük. A mérés végrehajtása után azonban az impulzusnak már csak diszkrét értékei fordulhatnak elő, attól függően, hogy milyen elektron-állóhullámok alakulhatnak ki a Δx hosszúságú szakaszon. A lehetséges impulzusértékek:

$$I_1 = \frac{h}{\Delta x}, I_2 = 2 \frac{h}{\Delta x}, \dots, I_n = n \frac{h}{\Delta x}, \dots$$

A helymérés végrehajtása után az impulzus meghatározható. A fenti értékek közül az elektron az egyik impulzusállapotba kerül, véletlenül valamelyikbe. Azt, hogy melyik következik be, előre sem láthatjuk. Mindenesetre bármelyik állapotba is kerül az elektron az impulzusa abszolút *pontosan* meghatározható, hiszen a fenti értékek pontosan megkülönböztethetők egymástól. Az egymás után végrehajtott mérések során a rendszer, vagyis az elektron, olyan állapotba kerül, amelyben az inkompatibilis mennyiségek egyike előírt, a másik ab-

(*) A dobozproblémát a következő pontban részletesen megbeszéljük.

szólót pontossággal meghatározható, az utóbbi azonban véletlenszerűen alakul ki.

Két lehetséges szomszédos impulzusérték különbségét jelöljük δI -vel:

$$\delta I = I_2 - I_1 = I_3 - I_2 = \dots = \frac{h}{\Delta x}.$$

Ekkor

$$\Delta x \cdot \delta I = h.$$

Hasonlóképpen, ha először az elektron impulzusát mérjük, akkor ezt abszolút pontosan nem tehetjük meg, mert az elektron impulzusa folytonosan változó mennyiség, a mérési pontosság azonban előírható, jelöljük ezt ΔI -vel. Az impulzusmérés végrehajtása után a helykoordináta már csak diszkrét értékeket vehet fel:

$$x_1 = \frac{h}{\Delta I}, x_2 = 2 \frac{h}{\Delta I}, \dots, x_n = n \frac{h}{\Delta I}, \dots$$

Az impulzus mérése után a hely abszolút pontosan meghatározható, a fenti lehetséges értékek közül egy véletlenszerűen bekövetkezik, ezt leolvashatjuk. Két szomszédos lehetséges helykoordináta különbségét jelöljük δx -szel. Ekkor

$$\delta x \cdot \Delta I = h.$$

Ez a két formula az, amelyet Heisenberg bizonyos gondolatmenetekre támaszkodva levezetett. A szokásos magyarázat azonban most sem helyes: δI , illetve δx nem mérési pontosság, mint Δx és ΔI , hanem két lehetséges pontos érték különbsége.

2.2. Kvantummechanikai rendszerek

2.2.1. A dobozprobléma

Képzeljünk el egy l élű kockát, amelybe egy elektron van bezárva. Az elektron ebben a dobozban úgy viselkedik, mint a hanghullám, amely ide-oda verődik a merev falak között, állóhullámok alakulnak ki. Ezeknek az állóhullámoknak a merev falaknál csomópontjuk van. A hullám amplitúdója a falak mentén nulla, ez azt jelenti, hogy az elektron a fal közvetlen közelében, a fal mellett nulla valószínűséggel található meg (2.4. ábra).

Jelöljük az elektronhullám hullámhosszát λ -val, és korlátozódjunk a hullám egydimenziós vizsgálatára, mintha az elektronhullám egy kötél mentén alakulna ki. A hullámhossz felének egész számú

többszöröse egyenlő a doboz hosszával:

$$n \frac{\lambda}{2} = l \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

vagy

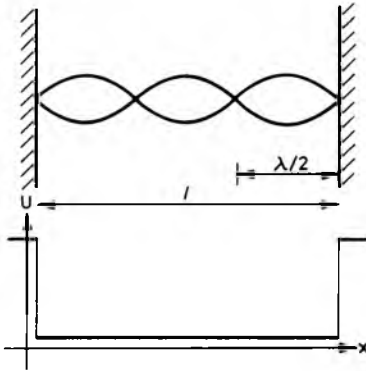
$$\lambda = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ebből látható, hogy csak bizonyos elektronhullámok alakulhatnak ki. Az elektron impulzusa így

$$I_n = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2l}.$$

A mozgási energiát az

$$E = \frac{I^2}{2m}$$



2.4. ábra

egyenlőségből kapjuk, a lehetséges energiaértékek:

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Az elektron legkisebb energiája

$$\frac{h^2}{8ml^2},$$

ennél kevesebb energiája egyszerűen nem lehet.

Egy ilyen elektronhullám energiát csak $h\nu$ nagyságú adagokban tud kisugározni. Az energiakülönbség:

$$h\nu = \frac{h^2}{8ml^2} (n_1^2 - n_2^2).$$

Tegyük fel, hogy egy elektron 10^{-10} méter hosszúságú dobozba van bezárva. Ekkor legalacsonyabb energiaszintje:

$$E = \frac{h^2}{8ml^2} = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (10^{-10})^2} = 6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

A második energiaszinten

$$E_2 = E_1 \cdot 2^2 = 24 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

a harmadikon

$$E_3 = 6 \cdot 10^{-19} \cdot 3^2 = 54 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

a negyedikén

$$E_4 = 96 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

stb. energiával rendelkeznek. Ha valamilyen módon az elektron a negyedik energiaszinten létezik, és innen visszatér a legalacsonyabb energiájú állapotba, akkor kisugároz egy

$$h\nu = (96 - 6)10^{-19} = 90 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

energiájú fotont, amely

$$\nu = 1,35 \cdot 10^{16} \text{ Hz},$$

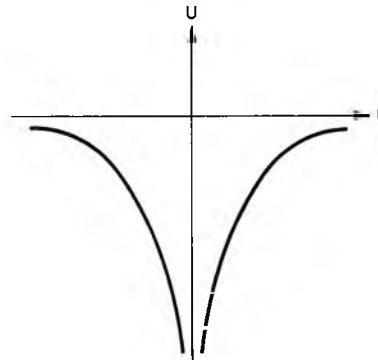
frekvenciájú, vagyis

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

hullámhosszú elektromágneses sugárzás egy adagjának felel meg.]

2.2.2. A hidrogénatom

Az elektronhullám egy dobozban úgy képzelhető el, mint valamely elektromos erőtér falai között, mintegy potenciálkútban. Ha az elektron egy, a 2.5. ábrán látható potenciálvölgyben van, akkor valóban az l távolságra lévő falak között elektron-állóhullámok alakulnak ki.



2.5. ábra

Képzeljük most el, hogy az elektronnál sokkal nagyobb tömegű, pozitív töltésű test erőterében van egy elektron. Tegyük fel, hogy ennek a testnek — amelyet nevezünk most protonnak — a töltése megegyezik az elektron töltésével, csak éppen pozitív. A protontól r távolságra az elektromos potenciál:

$$U = -k \frac{e^2}{r}.$$

A potenciál gömbszimmetrikus, ellentétben az előbb említett doboz potenciálvölgyével. Emellett hasonlóság is van: a potenciálgödör most nem olyan szögletes, mint a dobozproblémánál, de alkalmas arra, hogy fogságban tartsa az elektront.

A potenciálkútban elektron-állóhullámok alakulnak ki. A gömbszimmetrikus jelleg miatt azonban az állóhullámok körülolelik a protont. Tegyük fel, hogy egy elektron-állóhullám egy r sugarú körre csavarodik fel (2.6. ábra). Ekkor a hullámhossz egész számú többszöröse a kerülettel egyezik meg. Jelöljük ezt a számot n -nel. Tehát

$$n\lambda = 2r\pi,$$

de

$$\lambda = \frac{h}{I},$$

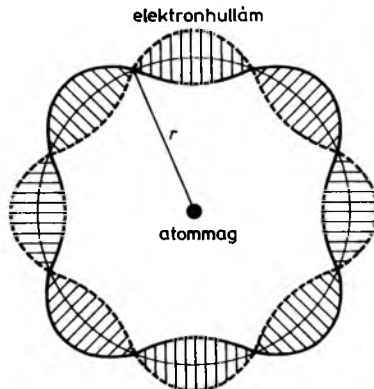
vagyis

$$2r\pi = n \frac{h}{I},$$

és így

$$rI = n \frac{h}{2\pi}.$$

Nyilvánvaló, hogy rI az elektron pályamenti impulzusmomentumának tekinthető. Az elektron pályamenti impulzusmo-



2.6.
ábra

mentuma a $h/2\pi$ egész számú többszöröse. Ezt a hányadost \hbar -sal jelöljük és h -vonásnak olvassuk. Tehát

$$rI = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots). \quad (1)$$

Ezt a feltételt *Bohr-féle kvantumfeltételnek* nevezzük, az n számot pedig (*fő*)kvantumszámnak hívjuk.

Tegyük fel, most, hogy az elektron mechanikai stabilitását a klasszikus elektrodinamikából ismert

$$k \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

feltétel biztosítja.

Az elektron helyzeti energiája a proton erőterében

$$E_{\text{pot}} = -k \frac{e^2}{r}. \quad (3)$$

A (2) és (3) egyenlőségekből

$$mv^2 = -E_{\text{pot}} = k \frac{e^2}{r}$$

vagyis

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr},$$

fejazzuk most ki (1)-ből r -et, és helyettesít-

sük az utóbbi egyenlőségbe:

$$v^2 = \frac{ke^2}{m \left(\frac{nh}{2\pi mv} \right)},$$

innen

$$v = \frac{2\pi ke^2}{nh}.$$

Az elektron összes energiája, a helyzet és a mozgási energia összege:

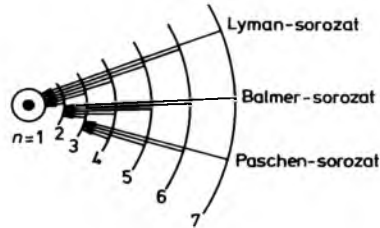
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2,$$

így

$$E = \frac{-2\pi k^2 me^4}{h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (4)$$

Az elektron energiája a proton erőterében negatív, ez nyilvánvaló is, ha meggondoljuk, hogy pozitív munkát kell ahhoz végeznünk, hogy leszakítsuk a protonról, „eltávolítsuk a végtelenbe”. Figyeljünk fel arra, hogy az elektron energiaszintjei a kvantumszám négyzetének a reciprokaival arányosak. A proton erőterében az elektron energiája csak a (4) alatti értékeket veheti fel. Az impulzusmomentumnak is, az energiának is stabilis állapota alakul ki a proton erőterében, a proton által meghatározott potenciálvölgyben. Ezeknek a mennyiségeknek a lehetséges stabilis állapotairól van itt szó. Ha energiamérő berendezést elgondolhatnánk, akkor ezzel a proton erőterében található elektronnak az energiáját megmérhetnénk. Nem mérhetjük meg azonban az energiával inkompatibilis mennyiséget, az időtartamot (élettartamot). Határozatlan az, hogy az elektron mennyi ideig tartózkodik egy energiaszinten.

Érdekes, hogy az energiaszintek között



2.7.
ábra

átmenet lehetséges, az elektron véletlenszerűen a magasabb energiaszintről az alacsonyabb energiaszintre ugrik. Az energiaváltozás:

$$-\frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (n_2 > n_1). \quad (5)$$

A hidrogénatomról van szó. A kvantumelmélet figyelembevételével kapott vázlatos gondolatmenetünk a (4) energia-képlethez vezetett. Ennek az állításnak a használatával értelmezni tudjuk a vonalas színképet (2.7. ábra). A hidrogénatom energiaváltozásakor $h\nu$ nagyságú energia-kvantumot sugároz ki, tehát

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \frac{2\pi^2 k^2 me^4}{h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (6)$$

szolgáltatja a hidrogénatom vonalas színképének a *Balmer-sorozatát*.

XXV. Feladatcsoport: mikrofizika

XXV/1. A réz sűrűsége 8960 kg/m^3 , atomsúlya 63,5. Hány rézatom van 1 kg tömegű réztömbben? Mekkora térfogat jut egyetlen atomra?

XXV/2. Tegyük fel, hogy a rézben minden egyes atomra jut egy olyan szabad elektron, amely az elektromos vezetésben részt vesz. Egy rézvezeték keresztmetszete 3 mm^2 , relatív atomtömege 63,5, a sűrűsége 8960 kg/m^3 . A vezetékben 4 A erősségű

áram folyik. Határozzuk meg a rézhuzalban az elektronok átlagos sebességét!

XXV/3. Hány hidrogénmolekula keletkezett a víz elektrolízissel történő bontásakor, ha az elektroliten 1,5 órán keresztül 4,5 A erősségű áram folyt. A keletkezett hidrogéngázt egy 2 dm³ térfogatú edényben gyűjtjük össze. Mekkora lesz a térrészben a nyomás, ha a hőmérséklet 300 K?

XXV/4. Sorbakapcsolt elektrolizáló cellák egyikében 10 g réz válik ki. A másik cellában — amelyben vizet bontunk — 1 atm nyomású, 300 K hőmérsékletű durranógáz keletkezik. Mekkora a gáz térfogata?

XXV/5. Elektronsugár 100 V potenciálkülönbségen keresztül gyorsul. Mekkora a hullámhossza?

XXV/6. Céziumkatódos fotocella anódjának a feszültsége 50 V. A katódra jellemző kilépési munka 1,87 eV. A fotokatódot $7,6 \cdot 10^{14}$ Hz frekvenciájú fényvel világítjuk meg. Mekkora a katódból kilépő elektronok sebessége az anódra becsapódáskor?

XXV/7. A fotocella katódjából kilépő

elektronok sebessége $3 \cdot 10^5$ m/s. A megvilágító fény frekvenciája $6,1 \cdot 10^{14}$ Hz. Mekkora a fémre jellemző kilépési munka?

XXV/8. Egy elektron leválasztásához szükséges energia valamely fémnél $3,3 \cdot 10^{-19}$ J. Egy foton elektront üt ki ebből a fémből. A kilépő elektron energiája $3,5 \cdot 10^{-20}$ J. Mennyi a foton energiája?

XXV/9. Egy izzó fekete test 900 K hőmérsékleten 500 W teljesítményt sugároz ki. Mekkora lesz a kisugárzott teljesítmény, ha a test hőmérséklete 10 K-nel nő?

XXV/10. Egy elektron 10^{-8} cm hosszúságú dobozba van zárva. Mekkora a legkisebb lehetséges (ún. nullponti) energiája? Milyen hullámhosszúságú fényt bocsát ki, ha az $n_1 = 4$ kvantumszámnak megfelelő állapotból az $n_2 = 1$ kvantumszámú állapotba ugrik?

XXV/11. A hidrogénatom elektronja az $n = 2$ állapotból az $n' = 1$ állapotba ugrik át. Ekkor 10,2 eV energiájú fotont bocsát ki. Mekkora lesz a kisugárzott fény frekvenciája, ha az elektron az $n_1 = 4$ kvantumszámmal jellemzett állapotból az $n_2 = 2$ „héjra” ugrik át?

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat igazgatója
A nyomdai munkálatokat az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat végezte
Felelős vezető: Zöld Ferenc
Budapest, 1992
Nyomdai táskaszám: 91.19643
Felelős szerkesztő: Sente László
Műszaki szerkesztő: Szakács Sándorné
A fedéltervet készítette: Kiss Mihály
Kiadványszám: 2803
Megjelent: 35,75 (A/5) ív terjedelemben

Felvételi vizsgára készülő diákoknak, középiskolásoknak, tanároknak, tanárjelölteknek és a gyermekeik tanulmányait értő figyelemmel kísérő szülők számára készült ez a nagyszabású, háromkötetes mű. Nem íróasztal mellett született, majd két évtizedes oktatómunka írásos eredménye, mely a diákokkal való együttgondolkodás során csiszolódott ki. A szerző az élő előadások nyomán bevonja a hallgatót-olvasót a fizikai gondolatmenetekbe, a fogalmak megalkotásába, saját tudásuk felnövekedésének szellemi folyamatába. Emellett utat mutat a tanultak alkalmazására: a fizika elméletét 300 részletesen tárgyalt problémán keresztül mutatja be, a kérdéskörökhöz 800 feladat is tartozik, a feladatok részletes megoldásával együtt. Mint középiskolai segédkönyv kiválóan alkalmas arra, hogy egyetemi felvételire készülőket vezérfonala legyen, és hasznos a tanároknak is: újfajta szemlélettel, hatásos, a gyakorlatban bevált módszerekkel ismerkedhetnek meg.

A 2. kötet első részében kapott helyet a termodinamika, egyszerű, elegáns, mégis a hőtan legfontosabb tényeit érintő tárgyalásmódban. A szerző különös gondot fordít a fogalomalkotás tisztaságára, a törvények feltételeinek megvilágítására, az alkalmazás lehetőségeire. Nagy értéke ennek a résznek, hogy a hőtannal kapcsolatos tévedéseket tudatosan kikerüli.

A következő rész az elektrodinamikát és az optikát tartalmazza, amely szerves része az elektrodinamikának. A nyelvhasználatban a szerző bátran szakít a rossz hagyományokkal. Egyszerű gondolatmenettel jut el az elektrodinamika törvényeihez (a Maxwell-törvényekhez). Megvilágítja a mágnesség tan szabályainak hátterét és kapcsolatát. Ehhez a részhez kapcsolódik a relativitáselméletről szóló fejezet. Ebben érik be a fáradozás gyümölcse, sok olyan problémára fény derül, amellyel már az 1. kötetben is találkoztunk.

E kötetben egy rövid részt kapott a mikrofizika. Célja, hogy ismertesse azokat a meghökkentő, de egyszerű kísérleteket, amelyek az emberi gondolkodást a kvantummechanika felé terelték, rámutasson e tények azon vonásaira, amelyek a klasszikus fizikával nem magyarázhatók meg.

